



**HAL**  
open science

# Élasticité, Morphologie et Drainage Magnétique dans les Mousses liquide

Eric Janiaud

► **To cite this version:**

Eric Janiaud. Élasticité, Morphologie et Drainage Magnétique dans les Mousses liquide. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT: . tel-00007740

**HAL Id: tel-00007740**

**<https://theses.hal.science/tel-00007740>**

Submitted on 13 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 7 - Denis Diderot  
UFR de Physique



THÈSE

Présentée par

**Eric Janiaud**

pour obtenir le titre de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7  
Spécialité : dynamique des fluides et des transferts

---

# Élasticité, Morphologie et Drainage Magnétique dans les Mousses Liquides

---

Soutenue le 8 octobre 2004 devant le jury composé de :

<b>Jean-Claude Bacri</b>	Directeur de thèse
<b>Sylvie Cohen-Addad</b>	Rapporteur
<b>Annie Colin</b>	Examineur
<b>Yves Couder</b>	Examineur
<b>Dominique Langevin</b>	Président
<b>Pierre Molho</b>	Rapporteur



# Merci !

Tout ceci n'aurait pas été possible sans l'aide et la collaboration de nombreuses personnes. Je tiens ici à les en remercier.

Tout d'abord grand merci à Jean-Claude. Ta géniale intuition physique, ta curiosité, tes astuces expérimentales m'ont montré la direction. Ton ouverture d'esprit et ta confiance ont permis le reste. Merci à Florence Elias qui m'a toujours poussé vers plus de cohérence.

Merci à Sylvie Cohen-Addad et Pierre Molho d'avoir endossé le rôle de rapporteurs. Merci à Dominique, Annie et Yves d'avoir accepté de faire partie du jury.

Le chapitre 2 n'aurait pu voir le jour sans les idées, aussi développées ailleurs, de François Graner, ni les expériences de Georges Debrégeas qui n'a pas hésité à nous prêter ses images. Merci à Olivier Cardoso pour son aide à la programmation du module d'analyse des mousses.

Le chapitre 3 est en partie dû à Florence Elias qui a mis en œuvre tout son savoir faire et son efficacité. Je remercie également les stagiaires qui ont contribué à ces travaux : Hossam, Sherif, Ralf et Marx. Merci aussi à Andrej Cebers qui a adapté le modèle d'élasticité de la ligne triple au cas particulier du bord de Plateau.

Pour la seconde partie, je me dois de remercier les chimistes du LI2C, dont les travaux sur les ferrofluides ont permis l'existence même des mousses magnétiques : merci à Delphine Talbot qui a synthétisé notre ferrofluide et à Emmanuelle Dubois qui a assuré la *hot line* et a su réparer nos catastrophes d'apprenti-chimistes.

Merci à Andrej Cebers qui est le principal auteur de tous les modèles développés dans cette partie.

Merci à Steffen Bohn pour son très performant programme d'analyse d'images pour toute la partie sur les lois de Plateau dans les mousses magnétiques.

Merci à Stephan Hutzler et à Wiebke Drenckhan pour les expériences qu'ils sont venus faire à Paris et à Denis Weaire qui est à l'origine de l'utilisation des ferrofluides dans les tiges de bulles. Merci à Martial Balland et Elsa Planterose pour le débbugage sous labview.

Merci à Patrick et Maurice pour l'usinage de tous les montages expérimentaux et à Jacques pour la partie électronique. Leurs compétences n'ont d'égal que leur bonne humeur quasi-permanente.

Merci aussi à tous ceux qui ont apporté leur contribution sous la forme de discussions, notamment Adrian Daerr, Arnaud Saint-Jalmes, Benjamin Dollet, Gregory Pacitto, Simon Cox, Norbert Kern et beaucoup d'autres encore.

Merci aussi à tous les membres de l'équipe granulaire du LMDH (Eric, Philippe,

Evelyne, Anke, Guillaume, Guillaume, Gabriel et Florent). Merci beaucoup à Claudine qui m'a souvent aidé pour affronter les gouffres de l'administratif.

Merci bien sûr à l'équipe ferrofluide. Merci à Martin, l'homme qui manie aussi bien les hamiltoniens que les haltères. Merci à Thierry H. et Thierry D. pour leur aide informatique. Merci à Florence G., Charlotte, Jean-Paul et Pierre pour leur bonne humeur apaisante. Merci à Julien, Gregory et Claire, qui m'ont montré le chemin. Merci à Valentin pour l'amical face à face quotidien et ses patientes réponses à mes incessantes questions en tout genre. Merci aussi à Régine pour son accueil et pour nos travaux sur les ferrofluides diphasiques, qui malheureusement n'ont pas trouvé de place dans ce manuscrit.

Merci beaucoup à Yves Couder et à Cyrille Flament, qui ont guidé mes tous premiers pas en laboratoire.

Merci à tous les correcteurs, qui, par leur expertise en orthographe, m'ont permis d'éviter le pire. Je ne les nommerai pas de peur qu'ils ne se sentent trop responsables de celles qu'ils n'ont pas débusquées.

Et pour finir (*last but not least*), merci à tous ceux qui m'ont soutenu au quotidien : Paul, Marie-Noëlle, Olivier pour nos études comparatives sur la condition du doctorant et bien sûr merci à ma douce Élodie, à qui je dédie ce manuscrit.

à *Élodie*

## Introduction

Au cours de leur vie éphémère mais bien remplie, les mousses liquides offrent aux physiciens qui les étudient de multiples occasions de s'émerveiller. Leur beauté ne leur est cependant pas réservée puisqu'elles donnent quotidiennement, au yeux de tous, le spectacle de leur structure qui sait allier ordre, par un strict agencement des films de savon, et désordre à plus grande échelle. Leur caractère liquide s'exprime de façon ambivalente : le liquide qui les constitue s'écoule à travers leur squelette sous l'effet de la gravité (drainage) et les bulles peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres. Ce second point s'accompagne d'une réponse élastique qui donne aux mousses un comportement *complexe* lorsqu'elles sont déformées puisqu'elles sont élastiques aux petites déformations, plastiques aux grandes et visqueuses aux grands taux de déformation.

Nous nous sommes penchés sur le *rôle de la structure* dans la réponse élastique d'une mousse (partie 1) et sur son rôle dans le drainage d'une mousse (partie 2). Nous avons pour cela utilisé un nouveau système, une *mousse magnétique*. Il s'agit d'une mousse de savon dont la phase liquide est remplacée par un ferrofluide, une solution colloïdale de nano-particules magnétiques dispersées dans un solvant. La mousse répond alors à un champ magnétique extérieur, que l'on peut faire varier à souhait. Ce paramètre de contrôle supplémentaire permet de manipuler la mousse de l'extérieur afin d'en étudier les propriétés physiques.

Nous donnons ci-dessous un rapide résumé de nos travaux en guise de guide de lecture pour la suite de ce mémoire.

Le chapitre 1 est une rapide introduction à la physique des mousses et présente les résultats dont nous nous servons dans la suite.

Le chapitre 2 étudie la déformation du réseau formé par une mousse 2D constituée d'une monocouche de bulles lors d'un cisaillement quasi statique. Nous *ré-analysons* pour cela des expériences faites par Georges Debrégeas [33].

Dans le chapitre 3, nous étudions un bord de Plateau unique, formé par la jonction de 3 films tendus sur un cadre rigide. Nous verrons successivement le type d'écoulement qui se produit à l'intérieur, la réponse élastique à une déformation du bord de Plateau et, enfin, nous calculerons la vitesse de propagation du mode symétrique de Taylors dans un bord de Plateau.

La seconde partie traite exclusivement de systèmes de mousses magnétiques.

Le chapitre 4 présente les ferrofluides ainsi que leurs propriétés physique.

Le chapitre 5 étudie les modifications induites par le champ magnétique sur la structure de la mousse. Nous utiliserons pour cela une mousse magnétique 2D dans une cellule de Hele-Shaw, et nous développerons un modèle basé sur les gradients de champs magnétiques entre bords de Plateau. Nous montrerons que les lois de Plateau dans les mousses peuvent être très différentes dans les mousses magnétiques, conduisant, dans le cas de mousse très humide, à des angles entre bords de Plateau variant entre 90 et 180°, au lieu des 120° habituels.

Le chapitre 6 étudie le drainage dans les mousses magnétiques dans un champ homogène perpendiculaire ou parallèle à la gravité. Nous montrerons que les propriétés de

drainage des mousses magnétiques, décrites par la perméabilité hydrodynamique, sont dues à l'anisotropie de la section des canaux formés par les bords de Plateau.

Enfin, le chapitre 7 présente deux applications possibles des mousses de ferrofluides : le transport sélectif dans la microfluidique et le contrôle précis de la taille des bulles. Nous utilisons pour cela des mousses confinées dans un cylindre dont le diamètre est comparable au diamètre des bulles.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 La Mousse</b>	<b>11</b>
1.1 de l'Étude des Mousses . . . . .	11
1.2 Interfaces . . . . .	12
1.3 Structure interne . . . . .	16
1.4 Vieillessement de la mousse . . . . .	23
1.5 Rhéologie d'une mousse . . . . .	25
1.6 Drainage . . . . .	28
<b>I Élasticité de mousses de savon</b>	<b>43</b>
<b>2 Déformation et élasticité 2D</b>	<b>45</b>
2.1 La Déformation Statistique Stockée . . . . .	45
2.2 Cisaillement de Couette 2D . . . . .	51
2.3 Régime Transitoire . . . . .	55
2.4 Régime Permanent : valeurs moyennes . . . . .	59
2.5 Régime Permanent : fluctuations temporelles . . . . .	63
2.6 Conclusion . . . . .	67
<b>3 Bord de Plateau unique</b>	<b>69</b>
3.1 Présentation . . . . .	69
3.2 Écoulement dans le bord de Plateau . . . . .	77
3.3 Élasticité d'un bord de Plateau . . . . .	84
3.4 Modes symétrique d'un bord de Plateau . . . . .	93
3.5 Conclusion . . . . .	96
<b>II Morphologie et Drainage de mousses de Ferrofluide</b>	<b>97</b>
<b>Introduction</b>	<b>98</b>
<b>4 Les Ferrofluides</b>	<b>99</b>
4.1 Généralités . . . . .	99
4.2 Point de vue microscopique . . . . .	100
4.3 Point de vue macroscopique : magnétostatique . . . . .	103

4.4	Instabilité dans les ferrofluides . . . . .	108
4.5	Notre ferrofluide . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Mousse 2D de Ferrofluide</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Structure d'une mousse de savon 2D . . . . .	113
5.3	Protocole expérimental . . . . .	116
5.4	Le rayon de courbure . . . . .	120
5.5	Modèle de l'anisotropie . . . . .	124
5.6	Loi de Plateau Magnétique . . . . .	133
5.7	Conclusion . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Drainage de Mousses Magnétiques</b>	<b>143</b>
6.1	Montage expérimental . . . . .	143
6.2	Premiers résultats . . . . .	155
6.3	Modèle de champ moyen . . . . .	167
6.4	Modèle microscopique du Drainage Magnétique . . . . .	169
6.5	Confrontation à la réalité . . . . .	176
6.6	Conclusion . . . . .	179
<b>7</b>	<b>Tige de bulles</b>	<b>181</b>
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>193</b>
<b>A</b>	<b>Patron d'une cellule de Kelvin</b>	<b>195</b>
<b>B</b>	<b>Cisaillement de Couette en Élasticité Classique</b>	<b>197</b>
B.1	Quelques formules utiles . . . . .	197
B.2	Champ de déformation . . . . .	198
<b>C</b>	<b>Unités Magnétiques : conversion cgs-mks</b>	<b>201</b>

# Chapitre 1

## La Mousse

### 1.1 de l'Étude des Mousses

#### 1.1.1 la Découverte

Tout commence par une bulle de savon. Qui n'y a jamais joué? Le physicien belge Joseph Antoine Ferdinand Plateau aura cependant tôt fait d'astreindre notre film de savon à des cadres polyédriques rigides lui permettant d'ouvrir le domaine des mathématiques des formes de surface minimale en définissant les règles élémentaires de l'assemblage des bulles. Cet intérêt pour les films de savon se poursuit avec la question de l'écoulement du liquide dans un film de savon soumis à la gravité. Puis, vient la bière, qui nous offre nos premières expérimentations sur les mousses, sous l'angle "comment remplir le plus possible mon verre de liquide?", ce qui traduit assez bien la relation complexe d'attraction et de répulsion qu'entretiennent les ingénieurs avec la mousse. En effet, tantôt il faut que ça mousse (cuisine, extincteurs, extraction minière...) tantôt il faut s'en débarrasser (machine à laver, dépôt de film liquide...). Cette attitude a guidé l'approche des premiers travaux sur les mousses. Enfin vient le temps de l'observation de la mousse en elle-même et des mécanismes qui dictent son évolution, avec le but avoué de trouver les règles communes à toutes les mousses.

#### 1.1.2 Problématiques

##### Échelles

Ce qu'on voit d'une mousse dépend de l'échelle spatiale à laquelle on regarde :

- **Nanoscopique.** C'est la taille d'une molécule de tensioactif. La mousse n'est à cette échelle qu'une interface entre une phase liquide et une phase gazeuse, avec une espèce chimique (nos tensioactifs) ayant une affinité pour les deux phases. C'est à cette échelle que sont déterminées la stabilité des mousses, l'élasticité des films, et la viscosité des interfaces.
- **Mésoscopique.** : C'est la taille d'une bulle. A cette échelle, la mousse est un assemblage de bulles discernables les unes des autres. On peut ainsi définir sa topologie, c'est à dire identifier les cellules voisines, leur nombre de faces, de sommets.

- **Macroscopique.** A cette échelle, on ne voit plus les bulles. La mousse est alors un solide viscoélastique dont la fraction volumique d'eau varie.

## Dynamique

On peut schématiquement dénombrer quatre branches principales dans l'étude de la physique des mousses, chacune pouvant être associée à une échelle de temps spécifique :

- **L'étude de la structure.** C'est l'étude des surfaces minimales appliquée aux mousses : quelle est la structure périodique permettant un pavage de l'espace avec le minimum de surface. Dans ce cas, il n'y a aucune échelle de temps impliquée, le problème étant purement géométrique. Si l'on considère que les règles de Plateau s'y rattachent, c'est le domaine le plus anciennement étudié.
- **La rhéologie** s'intéresse aux propriétés élastiques et plastiques des mousses. Cette plasticité est due à des réarrangements dans l'agencement des bulles. Ces événements ont lieu en quelques milli-secondes.
- **Le drainage** est l'écoulement de liquide qui se produit à l'intérieur de la phase connectée. Il se produit sans que les bulles ne se déplacent les unes par rapport aux autres. Les temps caractéristiques à l'œuvre vont de la seconde à la dizaine de minutes.
- **Le grossissement**<sup>1</sup> est la variation de la taille des bulles de la mousse avec le temps. Ce vieillissement constitue le mécanisme du retour à l'état d'équilibre thermodynamique de la mousse qui est obtenue lorsque gaz et liquide sont totalement séparés, offrant ainsi une surface de contact minimale. Ce mécanisme est le plus lent et implique des temps supérieurs à la dizaine de minutes.

Ces thématiques se retrouvent telles quelles dans l'étude des émulsions, à la différence que le drainage est appelé crémage et le vieillissement mûrissement d'Oswald. Evidemment, elles ne sont pas exhaustives et certains phénomènes ne trouvent leur place dans aucune des catégories ci-dessus. Enfin, précisons que ce découpage correspond aussi à la façon dont les physiciens ont étudié les mousses. S'il trouve une justification dans les temps d'évolution, ce découpage est bien sûr arbitraire et de nombreux phénomènes (si non tous) regroupent plusieurs échelles de temps. Par exemple, le drainage de la mousse accélère le vieillissement qui accélère à son tour le drainage [98], [103], [54], ou encore le vieillissement qui modifie les propriétés rhéologiques de la mousse [22].

## 1.2 Interfaces

L'objet est de décrire les propriétés des interfaces d'une solution de surfactant.

### 1.2.1 Tension de Surface

---

<sup>1</sup> *coarsening* en anglais

### Origine physique

La tension de surface trouve son origine dans les attractions de van der Waals qui assurent la cohésion de la matière dans un état dense<sup>2</sup>. On peut dire que les molécules d'une espèce chimique préfèrent être entourées de molécules de la même espèce. Près d'une interface entre deux phases (par exemple air-liquide), cet effet se manifeste par l'existence d'une énergie de surface. Ainsi, la différentielle de l'énergie libre d'un système de deux phases en équilibre, séparées par une interface plane s'écrit :

$$dF = -SdT - PdV + \sum_i \mu_i dN_i + \gamma dA \quad , \quad (1.1)$$

où  $T$ ,  $P$  sont la température et la pression du système;  $\mu_i$  le potentiel chimique du composant  $i$ . Les variables conjuguées  $S$ ,  $V$  et  $N_i$  sont respectivement l'entropie, le volume et le nombre de molécules de l'espèce  $i$ . Le terme  $\gamma dA$  est l'énergie qu'il faut apporter au système pour augmenter de  $dA$  la surface de l'interface entre les deux phases. Ainsi, la tension de surface est définie par

$$\gamma = \left( \frac{\partial F}{\partial A} \right)_{T, V, N_i} \quad . \quad (1.2)$$

A  $T$ ,  $V$ ,  $N_i$  fixés, l'énergie libre du système est minimale lorsque la surface est minimale. En l'absence de gravité, une goutte de liquide prendra une forme sphérique lorsqu'elle est en suspension dans sa vapeur. Cette tension de surface vaut  $72.8 \text{ mN/m}$  à  $20^\circ \text{ C}$  pour l'eau pure et sa vapeur.

### Pression de Laplace

La tension de surface génère un terme de pression appelé pression de Laplace. Puisque la pression est une énergie par unité de volume, on peut voir ce terme de Laplace comme le coût de la création de l'interface rapporté au volume de la phase liquide : La pression à l'intérieur d'un volume possédant une surface courbe s'écrit :

$$P = P_{ext} + \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad , \quad (1.3)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  désignent les rayons de courbures principaux de la surface. Ainsi, la pression est plus grande à l'intérieur d'une goutte qu'à l'extérieur. Deux bulles n'ayant pas le même rayon de courbure ne seront pas à la même pression et si l'on connectait deux bulles par un capillaire, la plus petite se viderait dans la plus grande (cf. figure 1.1). Cette différence de pression est à l'origine du grossissement de la mousse, c'est à dire l'augmentation de la taille moyenne des bulles avec le temps.

Afin de comparer les effets capillaires et les effets gravitationnels, on introduit la longueur capillaire. Lorsqu'une goutte a une taille importante, la pression hydrostatique la fait s'écraser sur elle-même et elle prend la forme d'une ellipsoïde oblate. En divisant la surpression capillaire ( $\Delta P_{cap} = \frac{\gamma}{R}$ ) par la surpression hydrostatique ( $\Delta P_{hydro} = \rho g R$ ), on obtient une longueur au-dessous de laquelle les effets capillaires seront dominants :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad . \quad (1.4)$$

---

<sup>2</sup>On ne parle de tension de surface que pour des états denses de la matière. Les interactions entre molécules d'un gaz sont très faibles

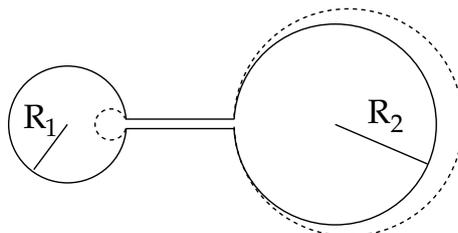


FIG. 1.1 – Deux bulles de rayons différents ( $R_1 < R_2$ ) sont reliés par un capillaire : la plus petite, en surpression, se vide dans la plus grande.

Les gouttes de liquide resteront sphériques tant que leur taille reste inférieure à  $l_c$ . Dans le cas de l'eau pure,  $l_c = 2.6 \text{ mm}$ , pour de l'eau savonneuse ( $\gamma \approx 30 \text{ mN}$ ),  $l_c = 1.7 \text{ mm}$ .

### 1.2.2 Solution de Tensioactif

Il existe toute une famille de molécules possédant une affinité à la fois pour des solvants polaires (par exemple l'eau), grâce à une "tête" chargée, et une affinité pour les solvants non polaires, du fait d'une "queue" constituée d'une chaîne carbonée. Ces molécules sont appelés agents tensioactifs (plus simplement tensioactifs) ou surfactants.

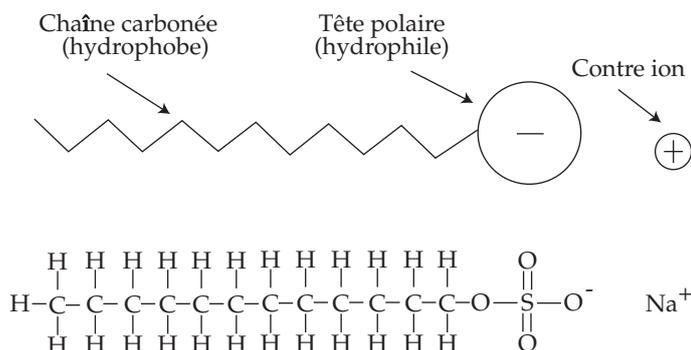


FIG. 1.2 – Formule chimique de la molécule de sodium dodécyle sulfate ( $C_{12}H_{25}SO_4Na$ ).

### Adsorption

Lorsqu'elles sont en solution aqueuse, ces molécules s'assemblent de manière à protéger leur queue hydrophobe du solvant. A faible concentration, elles s'accumulent d'abord à l'interface de sorte que les têtes hydrophiles soient dans l'eau<sup>3</sup> et leur queue orientée vers l'air. Cette affinité des molécules de savon pour l'interface en réduit le coût énergétique. Ainsi, la tension de surface diminue avec la concentration jusqu'à l'apparition d'une troisième phase à la concentration micellaire critique (CMC) (cf. figure 1.3). Il se forme alors en solution des agglomérats de forme sphérique appelés *micelles* qui permettent de "cacher" les queues hydrophobes et de ne présenter que la tête polaire au solvant (cf. figure 1.3). Au delà de la CMC, la tension de surface ne dépend plus de

<sup>3</sup>Il s'agit ici d'une représentation idéalisée car l'interface n'est pas aussi bien définie au niveau microscopique qu'au niveau macroscopique, la densité variant continûment.

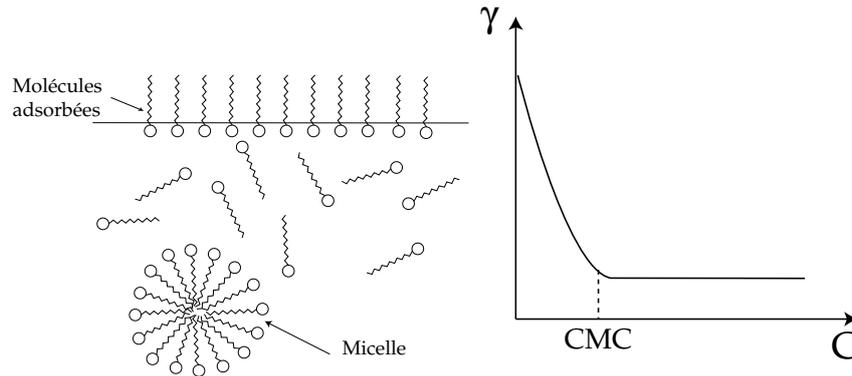


FIG. 1.3 – **À gauche**, molécules de tensioactif adsorbées à l'interface eau-air. Lorsque la concentration dépasse la CMC, les molécules forment des structures tridimensionnelles appelées micelles. **À droite**, l'allure de la tension de surface  $\gamma$  en fonction de la concentration :  $\gamma$  diminue jusqu'à la CMC.

la concentration de surfactant : les tensioactifs ajoutés ne s'adsorbent plus à la surface mais forment les micelles. La CMC du SDS est de  $8\text{ mM}$  dans l'eau pure (soit  $2.3\text{ g/l}$ ). Elle dépend de la concentration des ions dans la solution. Dans une solution de  $100\text{ mM}$  de NaCl, elle vaut  $1.4\text{ mM}$ .

### 1.2.3 Stabilité des Films de Savon

Outre l'abaissement de la tension superficielle, les tensioactifs rendent possible l'existence d'un film noir de Newton et confèrent aux films une élasticité. Ce sont ces deux dernières propriétés qui sont à l'origine de la stabilité (relative) des films de savon et des mousses [25].

#### Épaisseur d'un film

Sur la surface d'une bulle de savon éclairée en lumière blanche, on peut observer des franges multicolores d'interférences lumineuses. Ces films ont une épaisseur variant entre  $0.1$  et  $10\ \mu\text{m}$ . Ils sont constitués de deux couches de surfactant séparées par un liquide interstitiel. Comme il n'y a pas d'interaction entre ces deux interfaces, les films peuvent avoir n'importe quelle épaisseur. Lorsque le liquide interstitiel est soumis à la gravité, il s'écoule vers le bas, faisant ainsi diminuer l'épaisseur jusqu'à atteindre une dizaine de  $\text{nm}$ . Les films ne contiennent alors quasiment plus de liquide interstitiel et ne réfléchissent plus la lumière. Ils sont appelés films noirs <sup>4</sup>. Ces films sont dans un état métastable et ne peuvent ni drainer ni redevenir épais. Malgré l'apparente simplicité du problème, le drainage des films n'est toujours pas complètement élucidé [3].

#### Élasticité

L'autre mécanisme évoqué précédemment stabilise le film vis à vis des fluctuations d'épaisseurs. Lorsqu'une partie d'un film est étirée, la concentration de surface locale

<sup>4</sup>Il y en fait deux types : les films noirs communs et ceux dis de Newton. Leur formation est expliquée par la théorie DLVO qui prend en compte les interactions entre les deux interfaces [83].

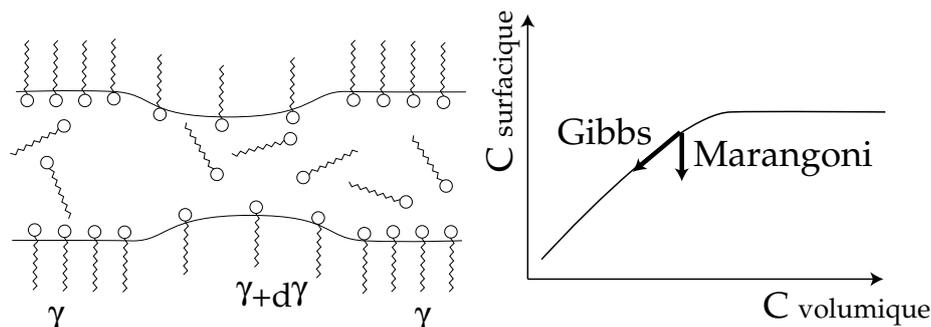


FIG. 1.4 – **A gauche**, la surface d'un film est étirée. **A droite**, allure de la concentration de surface en fonction de la concentration de volume. L'élasticité de Gibbs correspond à une déformation aux temps longs (équilibre entre la concentration volumique et la concentration surfacique), alors que l'élasticité de Marangoni se fait aux temps courts (le nombre de molécules adsorbées en surface reste constant).

diminue ce qui provoque une augmentation de la tension de surface dans la zone étirée (cf. figure 1.4) : le film résiste à la déformation. Deux cas sont à distinguer, selon le temps caractéristique auquel se fait la déformation [25] :

- Aux temps courts, les molécules de savon n'ont pas le temps de repeupler la surface et la concentration de surface diminue à nombre constant de molécules adsorbées. On parle alors d'élasticité de Marangoni.
- Aux temps longs, les molécules de savon du volumes peuvent repeupler la surface. Il en résulte une diminution de la concentration en volume <sup>5</sup>, et une modification de l'équilibre entre molécules adsorbées en surface. On parle alors d'élasticité de Gibbs.

La limite entre l'élasticité de Gibbs et celle de Marangoni est donnée par  $\tau_D = \frac{e^2}{D}$ , où  $e$  est l'épaisseur du film et  $D$  le coefficient de diffusion des molécules de surfactant. En prenant une valeur caractéristique pour le coefficient de diffusion de  $D = 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$  et  $e = 1 \mu\text{m}$ , on obtient  $\tau_D \approx 0.1 \text{ s}$ .

### 1.3 Structure interne

Une mousse est un amas de bulles de savons. Lorsque la quantité d'eau est faible, on parlera alors de mousses sèches, les bulles se façonnent en polyèdres avec des arrêtes saillantes et des faces constituées par des films de savon faiblement courbées. Nous appellerons *topologie* d'une mousse les relations de voisinage des bulles, c'est à dire quelles sont les bulles qui sont en contact et combien ont-elles de faces.

<sup>5</sup>Le cas des films est particulier car du fait de leur importante surface, la plus grande partie des molécules est adsorbée en surface et non en solution dans le volume. Le volume ne constitue plus un réservoir de tensioactif à une concentration fixe. La concentration superficielle et la concentration volumique d'un film en surfactant dépendent de la vitesse de sa formation.

### 1.3.1 Règles de Plateau

C'est Joseph Plateau, physicien belge et aveugle, qui vu le premier le parti que l'on pouvait tirer des films de savon comme réalisation *physique* des objets mathématiques appelés "surfaces minimales". L'aire d'une surface minimale est la plus petite de toutes les surfaces possibles s'appuyant sur le même contour. Après de nombreuses expériences sur les films de savon, il s'aperçut qu'un contour fermé de forme géométrique quelconque pouvait servir de support à au moins une surface minimale. La démonstration de ce problème mathématique, connu sous le nom de *problème de Plateau*, occupa les mathématiciens tout au long du *XIX<sup>e</sup>* et du *XX<sup>e</sup>* et continue d'occuper les physiciens [14]. Depuis lors, il n'est pas rare de voir des mathématiciens jouer avec des films de savon et des cadres en fil de fer. Cette analogie entre films de savon et surfaces minimales provient du fait que l'énergie d'un film est une énergie de surface. L'équilibre mécanique étant atteint lorsque l'énergie potentielle est minimale, les films de savon stables sont une surface minimale au sens mathématique. De cette propriété découlent trois règles, connues sous le noms de règles de Plateau qui s'appliquent à des mousses relativement sèches [53] :

1. Les films de savon se raccordent à une surface solide avec un angle droit.
2. Les films de savon se joignent par trois en formant une ligne régulière appelée bord de Plateau. Ils font entre eux un angle de  $120^\circ$ .
3. Les bords de Plateau se rejoignent par quatre en un point appelé vertex et font un angle de  $109^\circ 28' 16''$ .

Ces règles de Plateau déterminent la structure locale de la mousse. Celle-ci est constituée de trois principaux "objets" qui construisent une arborescence : la jonction de trois surfaces (films) donne des lignes (bord de Plateau) qui se joignent par quatre en un point (vertex). Cette description d'objet sans volume n'est valable que pour une mousse "idéale" qui aurait une fraction volumique nulle.

### 1.3.2 Mousse 3D

#### Cellule

FIG. 1.5 – Schéma de la cellule de Kelvin.



Dans une mousse 3D, strictement monodisperse, le pavage optimal de l'espace est donné par la cellule de Kelvin (cf. figure 1.3.2) lorsqu'il n'y a qu'une seule forme de cellule possible. Elle est constituée de 8 faces hexagonales et 4 faces carrées (cf. annexe A). En

1993, D. Weaire et R. Phelan ont découvert qu'il existait une solution permettant un gain de 0.3% de surface faisant intervenir deux formes de cellules différentes.

Ces pavages sont cependant rarement observés, du fait du désordre qui règne dans les mousses. En effet, les mousses sont des systèmes métastables. Leur énergie de surface étant bien supérieure à l'énergie thermique, elles ne peuvent explorer leur paysage énergétique et trouver la configuration qui minimise leur énergie, de sorte que les structures d'énergies minimales ne sont observées que lorsque la mousse est confinée, comme c'est le cas près d'une paroi. On peut alors observer assez facilement des demi-cellules de Kelvin. On voit alors un motif hexagonal (cf. figure 1.6).

Dans le cas d'une mousse confinée dans un cylindre dont le diamètre est du même ordre de grandeur que celui des bulles, la structure de la mousse adopte alors des configurations très ordonnées décrites par la phyllotaxie. Elles dépendent du degré de confinement, c'est à dire du rapport entre le diamètre des bulles et celui du cylindre ([111], [90], [12]). Ces mousses sont appelées *mousses cylindriques* ou encore *tige de bulles*. Le chapitre 7 leur est consacré.

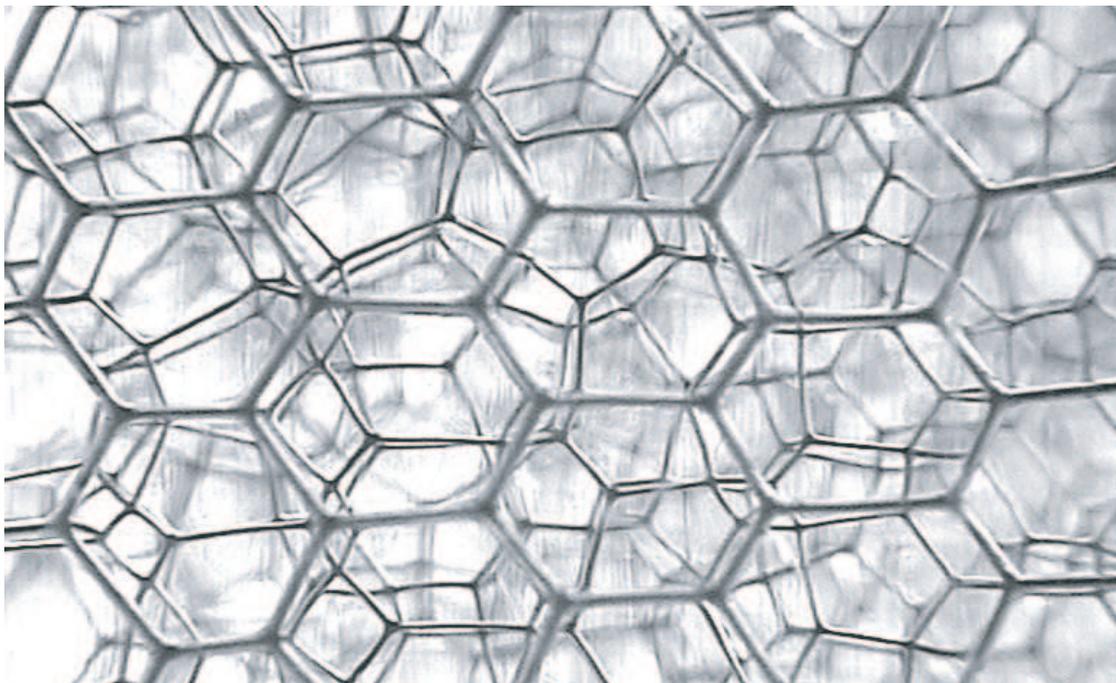


FIG. 1.6 – Mousse de ferrofluide près de la paroi. La longueur d'un bord de Plateau est d'environ 2 mm.

Une autre source du désordre réside dans la polydispersité en taille des bulles. En effet, que ce soit en secouant, en *bullant*, ou en dégazant, il est difficile d'obtenir une mousse rigoureusement monodisperse. Cette polydispersité initiale est amplifiée par le vieillissement de la mousse qui tend à diminuer le volume des petites bulles et à augmenter celui des grosses. Ainsi, malgré un ordre local *parfait* du fait des règles de Plateau, la structure globale de la mousse est désordonnée. Cela est dû à l'absence d'interaction à longue portée.

### Bords de Plateau

Aux règles de Plateau, s'ajoutent celles de la capillarité. Un bord de Plateau n'est pas une simple ligne car sa section a une surface non nulle. A l'équilibre, la pression doit être constante en tous points de la section d'un bord de Plateau <sup>6</sup>. Cela implique que le rayon de courbure d'un bord de Plateau soit constant. La section du bord de Plateau a une surface  $A = C_{bP}R^2$ , avec  $C_{bP} = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ . La pression  $P$  à l'intérieur d'un bord de

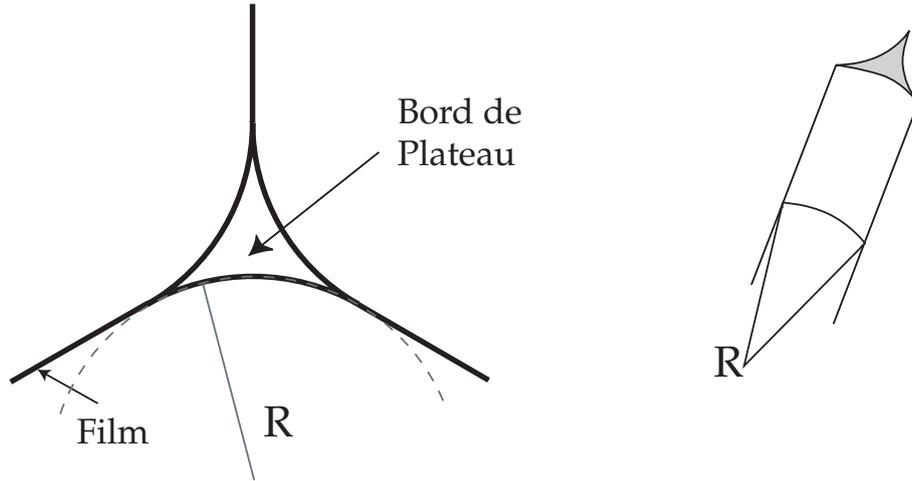


FIG. 1.7 – **A gauche**, la section d'un bord de Plateau. **A droite**, un bord de Plateau vu de profil.

Plateau de rayon de courbure  $R$  est <sup>7</sup> :

$$P = P_{gaz} - \frac{\gamma}{R} \quad , \quad (1.5)$$

où  $\gamma$  est la tension de surface et  $P_{gaz}$  la pression du gaz dans la cellule.

### Vertex

Les jonctions des bords de Plateau forment une structure tétraédrique. Le volume d'un vertex est donné par :

$$\mathcal{V}_v = C_v R^3 \quad (1.6)$$

avec  $C_v \approx 0.31$  [71].

### Films

Les films de savon constituent les faces des polyèdres. La pression qui règne à l'intérieur est très proche de celle régnant dans les bulles car leur courbure est faible devant celle des bords de Plateau. Il existe donc une différence de pression entre les films de savon et les bords de Plateau, ce qui entraîne une succion du liquide des films vers les bords de Plateau. Ainsi, ils drainent jusqu'à ce que ce qu'ils deviennent des *films noirs*.

<sup>6</sup>Même lorsqu'il y a un écoulement, nous considérerons que les gradients de pression dans la direction orthogonale au bord de Plateau sont négligeables comparés à ceux dans la direction parallèle à l'écoulement (approximation de lubrification).

<sup>7</sup>Il existe un autre rayon de courbure, mais celui-ci est beaucoup plus grand que  $R$  puisqu'il est supérieur à la longueur d'un bord de Plateau  $L$ .



FIG. 1.8 – Un vertex est constitué par la jonction de 4 bords de Plateau.

L'épaisseur caractéristique des films de savon dans une mousse est inférieure à  $100 \text{ nm}$  [108].

### Fraction volumique de liquide

Pour calculer la fraction volumique de liquide dans la mousse, nous reprenons l'approximation "mousse sèche" couramment utilisée dans la littérature [71]. La justification de cette hypothèse réside dans la très faible épaisseur des films dans les mousses (moins de  $100 \text{ nm}$ ). Tant que les bords de Plateau sont assez grands, cette hypothèse s'avère être raisonnable [17]. Le volume des bords de Plateau varie comme  $\mathcal{V}_{bP} \sim R^2 L$  et le volume des vertex  $\mathcal{V}_v \sim R^3$ . La fraction volumique s'obtient en divisant ces volumes par celui de la cellule  $\mathcal{V}_c \sim L^3$ . Pour déterminer les coefficients dans le cas d'une cellule de Kelvin, Stone *et al* ont utilisé le logiciel Surface Evolver<sup>8</sup> :

$$\phi = 0.17 \left(\frac{R}{L}\right)^2 + 0.20 \left(\frac{R}{L}\right)^3 . \quad (1.7)$$

Le premier terme correspond au volume des bords de Plateau et le second à celui des vertex. Puisque le rapport du rayon de courbure  $R$  et de la longueur d'un bord de Plateau est au maximum d'environ 0.1, nous pourrions négliger le volume des vertex dans la fraction volumique. Nous obtenons ainsi la relation entre rayon de courbure et fraction volumique :

$$\phi = \mathcal{C}_\phi \left(\frac{R}{L}\right)^2 , \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{C}_\phi = 0.171$  dans le cas d'un empilement de cellules de Kelvin. Cette relation est importante puisqu'elle nous permet de relier le mésoscopique ( $R$ ) au macroscopique ( $\phi$ ). Cette relation n'est cependant valide que pour les faibles fractions volumiques et nous la nommerons pour cette raison "approximation de mousse sèche".

### 1.3.3 Mousse Bidimensionnelle

#### Définition mathématique

Les mousses bidimensionnelles liquides ont souvent été utilisées par les physiciens pour contourner le problème de l'imagerie des mousses tridimensionnelles et simplifier

<sup>8</sup>de Brakke, K., disponible gratuitement sur <http://www.geom.umn.edu>

$\mathcal{C}_\phi$	$\mathcal{C}_{bP}$	$\mathcal{C}_v$
0.171	$\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} = 0.16$	0.31

TAB. 1.1 – Tableau récapitulatif des différentes constantes géométriques.

la description de la structure ; l'avantage principal étant de pouvoir observer directement le mouvement des cellules lors d'un cisaillement ou la variation de la taille des cellules pendant le vieillissement. La réduction à 2D se fait ainsi :

- Le volume d'une bulle *polyédrique* se réduit à la surfaces d'une bulle *polygonale*.
- Les surfaces de séparation (films) entre bulles se réduisent à des lignes (murs).
- La jonctions de trois films (bord de Plateau) se réduit à un point (vertex 2D).

Leur énergie est simple puisqu'elle est constituée par la *longueur* de l'interface entre gaz et liquide, c'est à dire :

$$E = \lambda \sum l_{ij} \quad , \quad (1.9)$$

où l'on a introduit  $\lambda$ , la tension de ligne <sup>9</sup>, et  $l_{ij}$ , la longueur du mur entre la cellule  $i$  et la cellule  $j$ . Notons enfin que la dimension de la contrainte à 3d est une énergie par unité de volume (pression), alors qu'à 2d c'est une énergie par unité de surface (tension de surface).

### Mousses de savons 2D

Les mousses de Langmuir [26, 34] constituent un très bon système bidimensionnel. Cependant, les contraintes expérimentales pour obtenir un tel système sont lourdes et on lui préfère souvent des mousse de savon bidimensionnelles. Il s'agit d'un couche unique de bulles formant un pavage du plan, obtenue soit par un confinement dans une cuve de Hele-Shaw <sup>10</sup>, soit par un radeau de bulles à la surface d'un liquide. Vu du dessus, il s'agit bien d'un réseau de polygones (cf. figure 1.9). Les bulles sont toujours séparées par un film de savon dont le *seul* rayon de courbure est le même que celui du mur. Cox *et al* ont défini un critère de bidimensionnalité en considérant un amas de 7 bulles de même volume écrasées entre deux plaques [28]. La mousse reste bidimensionnelle si la distance  $d$  entre les plaques est plus petite que  $\sqrt[3]{V\pi}$ , où  $V$  est le volume d'une bulle. On peut extrapoler ce critère à une mousse formant un réseau hexagonal et contenant un nombre infini de bulles. Le volume d'une bulle est alors donné par  $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}dL^2$  où  $L$  est la longueur d'un côté et  $d$  la distance entre les deux plaques : la mousse reste bidimensionnelle tant que :

$$d < 1.6L \quad . \quad (1.10)$$

Pour toutes les mousses 2D étudiées ici, ce critère est satisfait.

Nous reviendrons dans le chapitre 5 sur la structure détaillée d'une mousse bidimensionnelle de savon.

<sup>9</sup>La tension de ligne a la dimension d'une force.

<sup>10</sup>Une cuve de Hele-Shaw est constituée de deux plaques parallèles espacées de quelques millimètres.

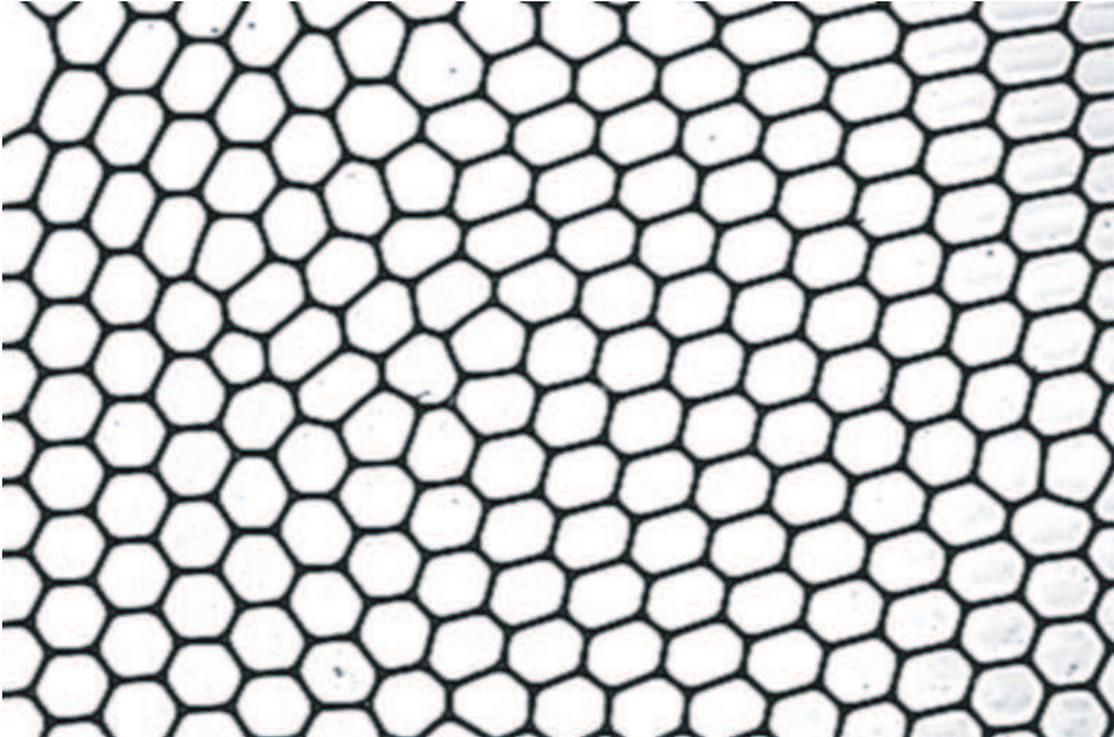


FIG. 1.9 – Mousse 2D de ferrofluide (sans champs magnétique) dans une cuve de Hele-Shaw (la distance entre les plaques est  $1\text{ mm}$ ). La photo est prise à la verticale. La fraction volumique de ferrofluide est de  $5\%$  et la longueur des cotés est de  $2.3\text{ mm}$ .

### Propriétés statiques

A deux dimensions, et pour des mousses suffisamment sèches, les règles de Plateau se reformulent ainsi :

- Les murs de savon se raccordent à une ligne de support en faisant un angle de  $90^\circ$ .
- Les murs se joignent par 3 aux vertex en faisant des angles de  $120^\circ$

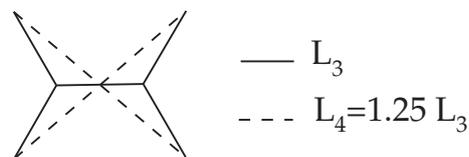


FIG. 1.10 – Instabilité d'un vertex à quatre branches : pour relier 4 points, la ligne la plus courte fait toujours intervenir 2 vertex à 3 branches.

Cette dernière contrainte donne un motif cellulaire dans le plan euclidien avec un nombre de côté moyen égal à  $6$ <sup>11</sup>. La structure minimisant l'énergie d'un réseau cellulaire monodisperse plan est donnée par le réseau hexagonal. Cette question, posée il y a 2000 ans, n'a été démontrée que récemment par Hales dans [51]. Contrairement aux mousses tridimensionnelles, cette structure est assez facilement atteinte si la polydispersité est

<sup>11</sup>Le ballon de football est un exemple de motif cellulaire non plan. Il est constitué de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers.

faible.

Pour boucler une cellule n'ayant pas 6 côtés tout en respectant les règles de Plateau, les murs doivent se courber. Cela introduit une différence de pression de Laplace entre les cellules <sup>12</sup> :

$$P_{int} = P_{ext} - \frac{2\gamma}{r_{ij}} \quad (1.11)$$

où  $r_{ij}$  est le rayon de courbure entre la cellule  $i$  et la cellule  $j$ .

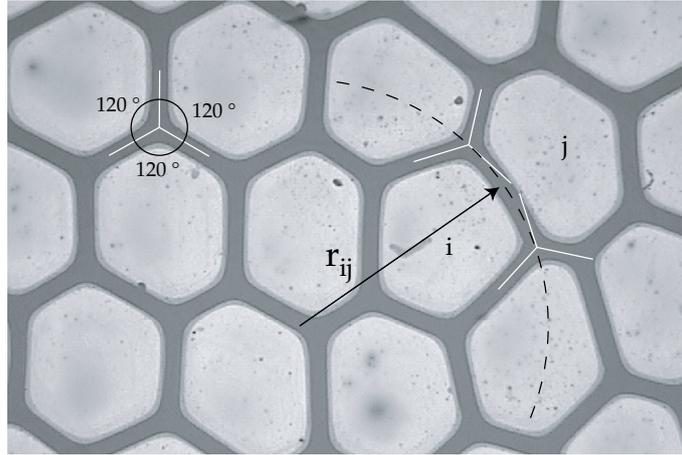


FIG. 1.11 – Equilibre mécanique dans une mousse 2d de ferrofluide (sans champ magnétique) confinée dans une cuve de Hele-Shaw. L'angle entre les murs mesure  $120^\circ$ .

## 1.4 Vieillissement de la mousse

La mousse étant un système hors équilibre, elle vieillit. Cela se traduit par l'augmentation de la taille moyenne des cellules qui la constituent.

### 1.4.1 Mousses 2D

A deux dimensions, les cellules ayant *moins* de 6 côtés sont en surpression, alors que les cellules ayant *plus* de 6 côtés sont en dépression. Si les parois sont perméables au gaz, cette différence de pression crée un flux de gaz des cellules ayant moins de 6 côtés vers les cellules ayant plus de 6 côtés : les cellules les plus petites se vident dans les plus grandes. C'est la loi de von Neumann [107] :

$$\frac{dA_n}{dt} = \kappa(n - 6) \quad , \quad (1.12)$$

où  $A_n$  est la surface d'une cellule à  $n$  côtés et  $\kappa$  une constante qui dépend du système expérimental. Cette loi de vieillissement de la mousse est l'équivalent du mûrissement d'Ostwald des émulsions. Elle n'est cependant valable qu'à deux dimensions. D'autres

<sup>12</sup>A deux dimensions, rigoureusement, on ne doit pas parler de pression, mais de tension de surface. Il faudrait donc remplacer la pression à l'intérieur  $P_{int}$  (à l'extérieur  $P_{ext}$ ) par une tension de surface  $\gamma_{int}$  (à l'extérieur  $\gamma_{ext}$ ) :  $\gamma_{int} = \gamma_{ext} - \frac{2\lambda}{R}$ , où  $\lambda$  est la tension de ligne. Cependant, les mousses de savon n'étant qu'un modèle tridimensionnel de mousse 2d, il est d'usage de continuer de parler de pression et de tension de surface.

systèmes cellulaires 2D analogue aux mousses, comme les émulsion 2D de ferrofluide [43], les films de grenat magnétique [109] suivent des lois du même type que celle de von Neumann.

### 1.4.2 Mousses 3D

Pour les mousses tridimensionnelles, la mesure expérimentale du volume des cellules est plus compliquée [45], [82], [103] et une partie des résultats a été obtenue grâce à Surface Evolver [81] [111]. Ce n'est que récemment qu'un modèle semble s'être imposé [55]. Il permet de relier la variation du volume au nombre de faces d'une cellule :

$$V_f^{1/3} \frac{dV_f}{dt} = \kappa (af^{1/2} - b) \quad , \quad (1.13)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes déterminées numériquement. Dans le cas bidimensionnel comme dans le cas tridimensionnel, la variation de la longueur des côtés suit une loi du type  $\langle L \rangle \sim t^{1/2}$ .

### 1.4.3 Changements de topologie : les processus élémentaires

La variation de la taille des cellules induite par le grossissement provoque des changements topologiques. Nous pouvons identifier trois processus élémentaires, le T1, le T2 et la coalescence, que nous allons illustrer en considérant le cas bidimensionnel.

#### Échange de côté : T1

Lorsque la longueur d'un mur diminue jusqu'à atteindre une longueur comparable à son épaisseur, les deux vertex qu'il relie fusionnent et forment un vertex à quatre branches. Ce dernier étant instable, il se déstabilise aussitôt pour former un nouveau mur perpendiculaire à l'orientation initiale (cf. figure 1.12). Au cours de ce processus appelé T1, deux cellules perdent un côté tandis que deux autres en gagnent un. Pour

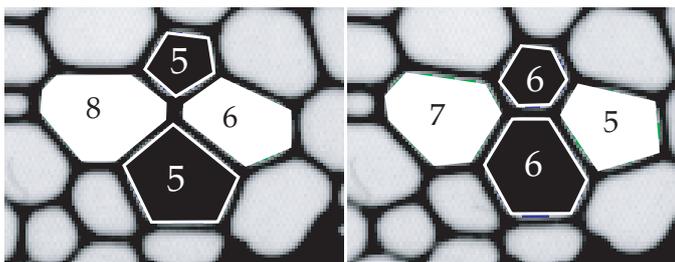


FIG. 1.12 – T1 dans une mousse de savon. Le chiffre au centre des cellules indique le nombre de côtés de la cellule.

détecter les T1 dans les mousses tridimensionnelles, on peut utiliser la diffusion multiple de la lumière (DWS) [60].

#### Disparition d'une bulle : T2

Les T2 sont provoqués par le grossissement de la mousse qui entraîne la disparition des cellules ayant trois côtés (cf. figure 1.13).

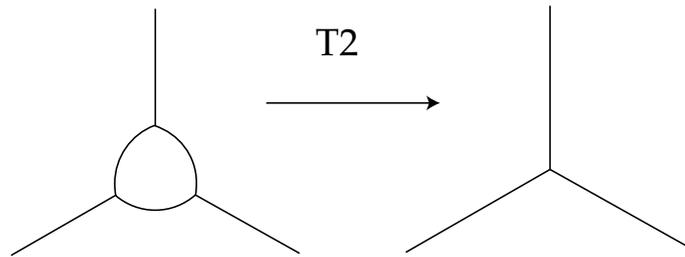


FIG. 1.13 – T2 : disparition d'une bulle à trois côtés sous l'effet du grossissement de la mousse.

### Coalescence

Le dernier événement topologique est la coalescence de deux cellules du fait de la disparition d'un mur (cf. figure 1.14). Les murs doivent alors changer leur courbure pour permettre d'obtenir des angles de  $120^\circ$  aux vertex. Ce phénomène, comme le T1, peut se produire sous forme d'avalanche dans une mousse [84].

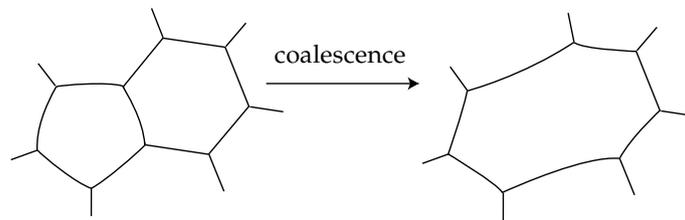


FIG. 1.14 – Coalescence de deux bulles.

## 1.5 Rhéologie d'une mousse

On dit d'un matériau qu'il est élastique si après avoir été soumis à une contrainte ayant entraîné une déformation de l'objet, il retrouve sa forme initiale. L'origine de cette force élastique réside dans la structure du matériau. On peut opposer à l'élasticité des solides la capacité de couler des liquides. En effet, dès qu'ils sont soumis à une contrainte, ils se déforment (coulent) et ne retrouvent jamais leurs formes initiales.

Les mousses combinent des propriétés de viscoélasticité à celle d'un liquide à seuil ce qui les classent parmi les fluides complexes. Pour s'en convaincre, on peut énumérer leurs principales caractéristiques. Elles sont élastiques aux faibles déformations, plastiques aux grandes déformations et visqueuses aux grands taux de déformation. De plus, leur structure évolue spontanément du fait du vieillissement.

Deux approches sont possibles pour étudier la rhéologie de ces systèmes complexes.

- La première consiste à faire des mesures rhéologiques macroscopiques sur des mousses 3D à l'aide d'un rhéomètre. Cependant, il est difficile de relier ces résultats à la structure de la mousse. Il faut pour cela coupler les mesures rhéologiques à une observation *locale* de la mousse, soit par une observation optique directe lorsque la mousse est sèche [96], soit en utilisant la diffusion multiple de la lumière dans les mousses [41], [23].
- La seconde approche consiste à visualiser directement la structure d'une mousse 2D pendant un écoulement afin de relier la réponse de la mousse à une sollicitation

extérieure à sa structure interne.

### 1.5.1 Rhéologie macroscopique

#### Déformation oscillante

Il s'agit d'appliquer une déformation  $\Gamma$  (ou une contrainte) de la forme  $\Gamma = \Gamma_0 \exp i\omega t$ . On mesure alors la contrainte (la déformation)  $\sigma(t)$ . En introduisant le module de cisaillement complexe  $\bar{G}(\omega)$ , on peut alors relier la contrainte à la déformation [50] :

$$\sigma(t) = \bar{G}(\omega)\Gamma = G'(\omega)\Gamma(t) + iG''(\omega)\Gamma(t) \quad , \quad (1.14)$$

où nous avons introduit le module de *stockage*  $G'$  qui traduit l'élasticité et le module de *perte*  $G''$  qui traduit la dissipation visqueuse.

Une autre méthode consiste à appliquer une déformation de faible amplitude en forme de marche et de mesurer la contrainte. Dans ce cas, contrainte et déformation sont reliées par :

$$\sigma(t) = G(t)\Gamma(t) \quad . \quad (1.15)$$

$G(t)$  et  $\bar{G}(\omega)$  sont reliés par [19] :

$$\bar{G}(\omega) = i\omega \int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t} dt \quad . \quad (1.16)$$

La figure 1.15 reproduit une courbe extraite d'un article écrit par Gopal et Durian [46]. Le comportement global de  $\bar{G}$  est toujours dominé par le module de stockage, ce qui fait que les mousses ont un comportement essentiellement élastique. On peut dégager trois régimes.

- Pour les faibles fréquences (figure 1.15 a) le module de stockage est très faible. Le même comportement est observé sur la courbe  $G(t)$  aux grands temps. Cet effet est dû au vieillissement de la mousse : le grossissement relaxe localement les contraintes [22], et la mousse perd la mémoire de son état non déformé. La limite pour ce régime est donnée par le temps moyen entre réarrangements T1 [24].
- Sur le plateau ( $0.01 < \omega < 10 \text{rads}^{-1}$ ), le module de stockage et le module de pertes sont quasiment constants.
- Enfin, lorsque la pulsation est supérieure à  $10 \text{rads}^{-1}$ , les modules de cisaillement suivent une loi de puissance en  $\omega^{1/2}$ . Ce comportement est attribué à la présence de zones *faibles*, orientées aléatoirement, dans lesquelles les T1 se produisent préférentiellement [79]. La déformation des bulles n'est alors plus affine.

#### Taux de déformation constant

Lorsque la mousse est cisailée de façon permanente ( $\Gamma$  augmente linéairement avec le temps), on sonde le caractère visqueux de la mousse. On peut ainsi mesurer la viscosité de la mousse. Celle-ci diminue en  $1/\dot{\Gamma}$ , ce qui correspond à un liquide de Bingham [67],[47]. Dans un liquide possédant une contrainte seuil  $\sigma_s$ , la contrainte s'écrit :

$$\sigma = \sigma_s + \eta\dot{\Gamma} = \eta_{ef}(\dot{\Gamma})\dot{\Gamma} \quad . \quad (1.17)$$

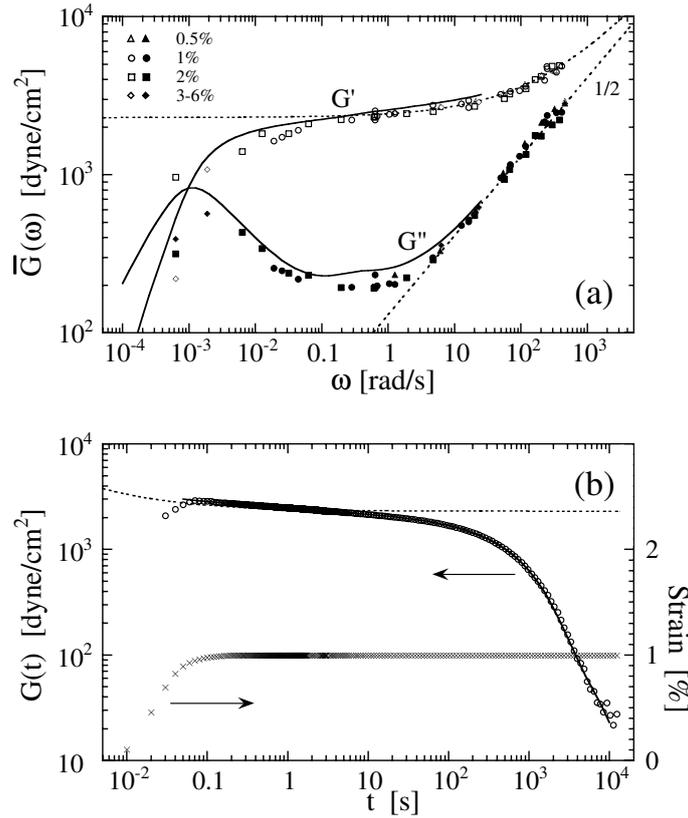


FIG. 1.15 – **a)** Module de stockage et de perte dans une mousse dont la taille moyenne des bulles de  $60 \mu m$ . Les différents symboles indiquent l'amplitude de la déformation imposée  $\Gamma_0$ . **b)** Ordonnée gauche (cercles) : module de relaxation de la contrainte  $G(t)$  en fonction du temps. L'axe de droite (croix) donne la déformation en fonction du temps. Extrait de [46].

où l'on a introduit la viscosité effective, correspondant au rapport entre la contrainte mesurée et la déformation :  $\eta_{ef} = \eta + \sigma_s / \dot{\Gamma}$ . Cette viscosité effective est une fonction décroissante du taux de cisaillement. Ainsi les mousses se comportent comme des liquides rhéofluidifiants.

### 1.5.2 Visualisation de la structure

Pour étudier le comportement de la structure des mousses sous cisaillement, c'est tout naturellement vers les mousses 2D que se sont tournés les physiciens. En effet, toutes les informations permettant de décrire la structure de la mousse sont accessibles sur une image.

Récemment, Debrégeas *et al* [33] ont démontré que lorsqu'une mousse 2D est cisailée quasi-statiquement, son champ de vitesse est localisé dans une bande de cisaillement. Pour ce faire, ils ont utilisé une cellule de Couette 2D, constituée de deux plaques de verre faiblement espacées et de deux roues dentées. L'intérieur de la cellule est remplie avec une mousse 2D de savon. La roue intérieure est mise en mouvement grâce à un moteur pas à pas, alors que la roue extérieure est maintenue fixe. L'analyse du champ de vitesse montre que la composante orthoradiale du champ de vitesse moyennée dans le temps,  $\langle v_\theta \rangle$ , est localisée dans une bande de cisaillement située près de la paroi

en mouvement. Cette décroissance est décrite par une loi de décroissance exponentielle (cf. figure 1.16) :  $v \sim \exp(-d/\Lambda)$ , où  $d$  est la distance à la roue interne et  $\Lambda$  est une longueur caractéristique comparable au diamètre d'une bulle.

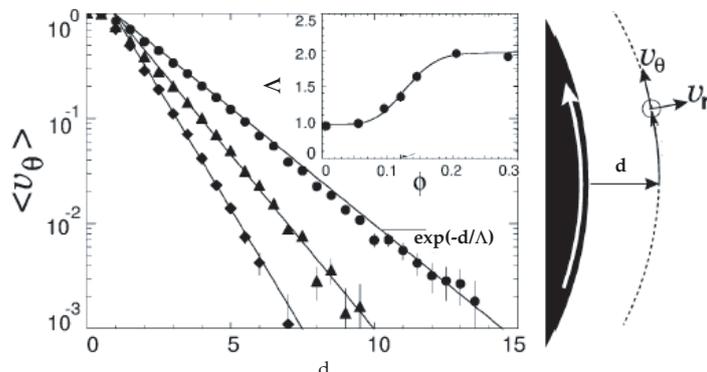


FIG. 1.16 – Profils moyens de la vitesse tangentielle adimensionnée par la vitesse de la roue dentée intérieure en fonction de la distance à la roue intérieure adimensionnée par la taille moyenne d'une bulle. Plusieurs fractions volumiques sont représentées :  $\blacklozenge$  :  $\phi = 0.05$ ;  $\blacktriangle$  :  $\phi = 0.12$ ;  $\bullet$  :  $\phi = 0.20$ . On voit une décroissance exponentielle de la forme  $\langle v_\theta \rangle \propto \exp(-d/\Lambda)$ . En insert, la dépendance de  $\Lambda$  en fonction de la fraction volumique. Résultats expérimentaux obtenus par Georges Debrégeas *et al*, extrait de [33].

Kabla *et al* ont retrouvé ces résultats grâce à une simulation numérique dans une géométrie plane périodique [66], [65]. Signalons, à notre connaissance, qu'aucune bande de cisaillement n'a encore été mise en évidence dans une mousse à trois dimensions.

## 1.6 Drainage

Sous l'effet de la gravité, le liquide contenu à l'intérieur d'une mousse tend à s'écouler vers le bas. Ce phénomène, appelé drainage, se produit inévitablement dans toutes les mousses ainsi que dans toutes les émulsions sur terre. De nombreux problèmes industriels dépendent de sa maîtrise, et donc de sa compréhension. Depuis l'extraction minière jusqu'à la purification de protéines biologiques en passant par l'agroalimentaire et les extincteurs, tous ces secteurs industriels sont concernés par ce problème.

### 1.6.1 Écoulements diphasiques

#### Analogies

Le drainage des mousses liquides présente des analogies avec deux autres systèmes : les poreux et la sédimentation de particules. Les poreux, de par leur structure constituée de canaux, rappellent les mousses. La vitesse moyenne à l'intérieur des poreux suit la loi de Darcy. Elle s'apparente à une loi de transport du même type que celle de Fick et relie linéairement la vitesse moyenne  $u$  au gradient de pression et le cas échéant aux forces volumiques  $\vec{f}$ . En introduisant  $\vec{G} = -\vec{\nabla}P + \vec{f}$  la force volumique motrice de l'écoulement, on obtient la forme vectorielle de la loi de Darcy :

$$\vec{u} = \Sigma \vec{G} \quad (1.18)$$

Cette relation traduit, dans le régime stationnaire, l'égalité entre la force motrice de l'écoulement  $\vec{G}$  et la force de dissipation visqueuse. Dimensionnellement, la perméabilité varie comme  $\Sigma \sim \frac{d^2}{\eta}$ , où  $\eta$  la viscosité du liquide et  $d$  est le diamètre des pores.

La différence entre un poreux et une mousse vient de la déformation possible des pores de la mousse (bords de Plateau). Cela se traduit par une perméabilité qui dépend de la fraction volumique de liquide dans les mousses, alors qu'elle est constante dans les poreux. Lorsque le poreux contient deux liquides non miscibles, la situation est plus proche d'une mousse car la fraction volumique d'eau peut varier à l'intérieur du poreux<sup>13</sup>. L'écoulement des liquides dans ces poreux diphasiques est décrit par une équation de convection-diffusion [30]. Un autre système possédant un fort degré d'analogie avec le drainage des mousses est la sédimentation de particules en suspension dans un liquide. Sous l'effet de la gravité, un front de sédimentation va se propager dans une suspension initialement homogène, l'état final étant l'accumulation de toutes les particules au bas du récipient. Là aussi, il existe une relation entre la vitesse moyenne du liquide et la fraction volumique introduite par Kynch dans [74]<sup>14</sup> et revue par Tiller [102].

### Conservation du Débit

La conservation du volume de liquide s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\phi \vec{u}(\phi)] = 0 \quad , \quad (1.19)$$

où  $\phi$  la fraction volumique de liquide,  $u(\phi)$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la mousse. La loi de Darcy nous permet de relier cette vitesse à la force motrice de l'écoulement  $G$ . Lorsque le système est soumis à la gravité, la force volumique est  $\rho \vec{g}$ . Celle-ci est composée de deux termes : la force volumique due à la gravité (que l'on peut également présenter sous la forme d'un gradient de pression hydrostatique) et le gradient de pression  $\vec{\nabla} P$ . L'origine de ce dernier dépend évidemment du système et, dans les mousses, il s'agit d'une pression capillaire liée à la forme de la section des bords de Plateau. Dans tous les cas, cette pression dépend uniquement de la fraction volumique. Ainsi, on a  $\vec{\nabla} P = \frac{dP}{d\phi} \vec{\nabla} \phi$ . Pour une plus grande clarté, nous nous limiterons au cas unidimensionnel en considérant que les variations de la fraction volumique, de la pression et de la vitesse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement principal sont négligeables devant celles dans la direction de l'écoulement. Expérimentalement, cette condition est réalisée grâce à l'utilisation de colonnes verticales de section constante<sup>15</sup>.

En choisissant un axe  $Oz$  dirigé vers le haut, la conservation du volume s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \Sigma \frac{dP}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\phi \Sigma \rho g) = 0. \quad (1.20)$$

On reconnaît là une équation de convection-diffusion non linéaire que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (U \phi) = 0 \quad . \quad (1.21)$$

<sup>13</sup>La présence de deux liquides implique la définition de deux perméabilités hydrodynamiques

<sup>14</sup>L'hypothèse de Kynch permet d'écrire directement la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction de la fraction volumique, sans faire apparaître de gradient de pression.

<sup>15</sup>Saint-Jalmes *et al* ont étudié le cas où la section de la colonne n'est pas constante [97]

$D(\phi) = \phi \Sigma \frac{dP}{d\phi}$  est un coefficient de diffusion qui dépend a priori de la fraction volumique et  $U(\phi) = \Sigma(\phi)\rho g$  est la vitesse de dérive qui dépend, elle aussi, de la fraction volumique.

### Cas d'un coefficient de diffusion en loi de puissance

Si nous négligeons la vitesse de dérive dans l'équation 1.21, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( D_0 \phi^m \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.22)$$

où l'on a utilisé  $D = D_0(\phi_0 - \phi)^m$ ,  $D_0$  étant indépendant de  $\phi$ . C'est une équation de diffusion anormale. Nous pouvons définir trois cas selon la valeur de l'exposant  $m$ .

$m = 0$  : c'est une diffusion gaussienne classique.

$m > 0$  : c'est de l'hypodiffusion,  $D$  tend vers 0 lorsque  $\phi$  tend vers  $\phi_0$ . La diffusion diminue très fortement près de  $\phi_0$ .

$m < 0$  : c'est de l'hyperdiffusion,  $D$  diverge près de  $\phi_0$ . Dans ce cas, la diffusion est beaucoup plus rapide que la diffusion gaussienne [6].

### Convection

La dépendance de la perméabilité en fonction de la fraction volumique peut conduire au raidissement ou à l'étalement d'une variation de la fraction volumique (cf. figure 1.17). Ce mécanisme d'auto-raidissement est limité par la diffusion qui intervient lorsque

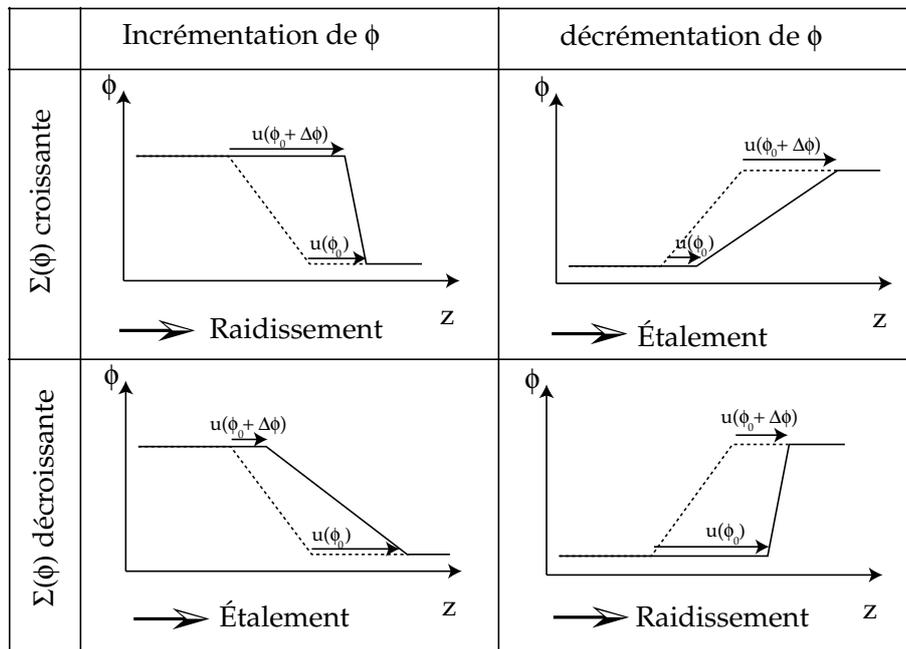


FIG. 1.17 – Étalement ou raidissement d'une perturbation de la fraction volumique dans le cas où la perméabilité est une fonction croissante (en haut) ou une fonction décroissante (en bas) de la fraction volumique.

le gradient de  $\phi$  est important. Lorsque la perturbation de la fraction volumique est

provoquée par un apport permanent de liquide, un front de fraction volumique stable peut se propager à la vitesse  $v_f$ . En se plaçant dans le référentiel du front, grâce au changement de variable  $s = z - v_f t$ , on peut réduire l'équation de diffusion convection à une équation différentielle du premier ordre. Après une intégration et en considérant que la fraction volumique est nulle devant le front :

$$v_f \phi + U(\phi)\phi + D \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0. \quad (1.23)$$

Lorsque l'on est loin derrière le front, les gradients de fraction volumique sont très faibles et la fraction volumique vaut  $\phi = \phi_m$ . On obtient :

$$v_f = -U(\phi_m) = -\Sigma(\phi_m)\rho g. \quad (1.24)$$

La vitesse de dérive correspond donc à la vitesse de déplacement du front. Si on remplace ce résultat dans l'équation 1.23, on obtient :

$$\phi[U(\phi) - U(\phi_m)] + D \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0. \quad (1.25)$$

Cette équation donne la forme du front. Elle est complétée par les conditions aux limites. Loin devant le front, la fraction volumique est nulle :  $\phi(-\infty) = 0$ . Derrière le front, le débit dans la mousse est égale au débit de liquide injecté au sommet de la mousse  $Q$  :

$$Q = \text{constante} = v_f \phi_m S, \quad (1.26)$$

où  $S$  est la section de la colonne et  $\phi_m$ , la fraction volumique derrière le front. Pour la résoudre, il faut bien entendu connaître l'expression de la pression et la perméabilité en fonction de la fraction volumique. Du fait de la géométrie bien définie des bords de Plateau, il est possible d'obtenir une expression analytique de la pression et de la perméabilité hydrodynamique dans une mousse.

### 1.6.2 Quatre expériences de Drainage

Changer les conditions initiales et les conditions aux limites des grandeurs permettant de décrire l'écoulement dans la mousse, c'est à dire  $\phi$ ,  $Q$  et  $P$ , conduit à différentes expériences de drainage. Généralement on joue sur le débit car c'est la façon la plus simple d'induire des écoulements dans une mousse.

#### Drainage forcé

Lorsque l'on augmente le débit de liquide injecté au sommet de la mousse, on observe alors un front se déplaçant vers le bas. Après quelques instants, sa forme et sa vitesse sont constantes, de même que la fraction volumique derrière ce front (cf. 1.18 a)). Cette expérience a été réalisée en 1993 par D. Weaire *et al* qui ont montré que la vitesse du front variait comme la racine carrée du débit [113] et a été modélisée dans [106]. Ce modèle suppose que la mousse se comporte comme un ensemble de tuyaux multiconnectés à l'intérieur desquels se produit un écoulement du même type que celui de Poiseuille (régime *channel dominated*).

En 1999 [70], le groupe de Howard Stone, à Boston, découvre un autre régime du drainage forcé dans lequel la vitesse du front varie comme la racine cubique du débit

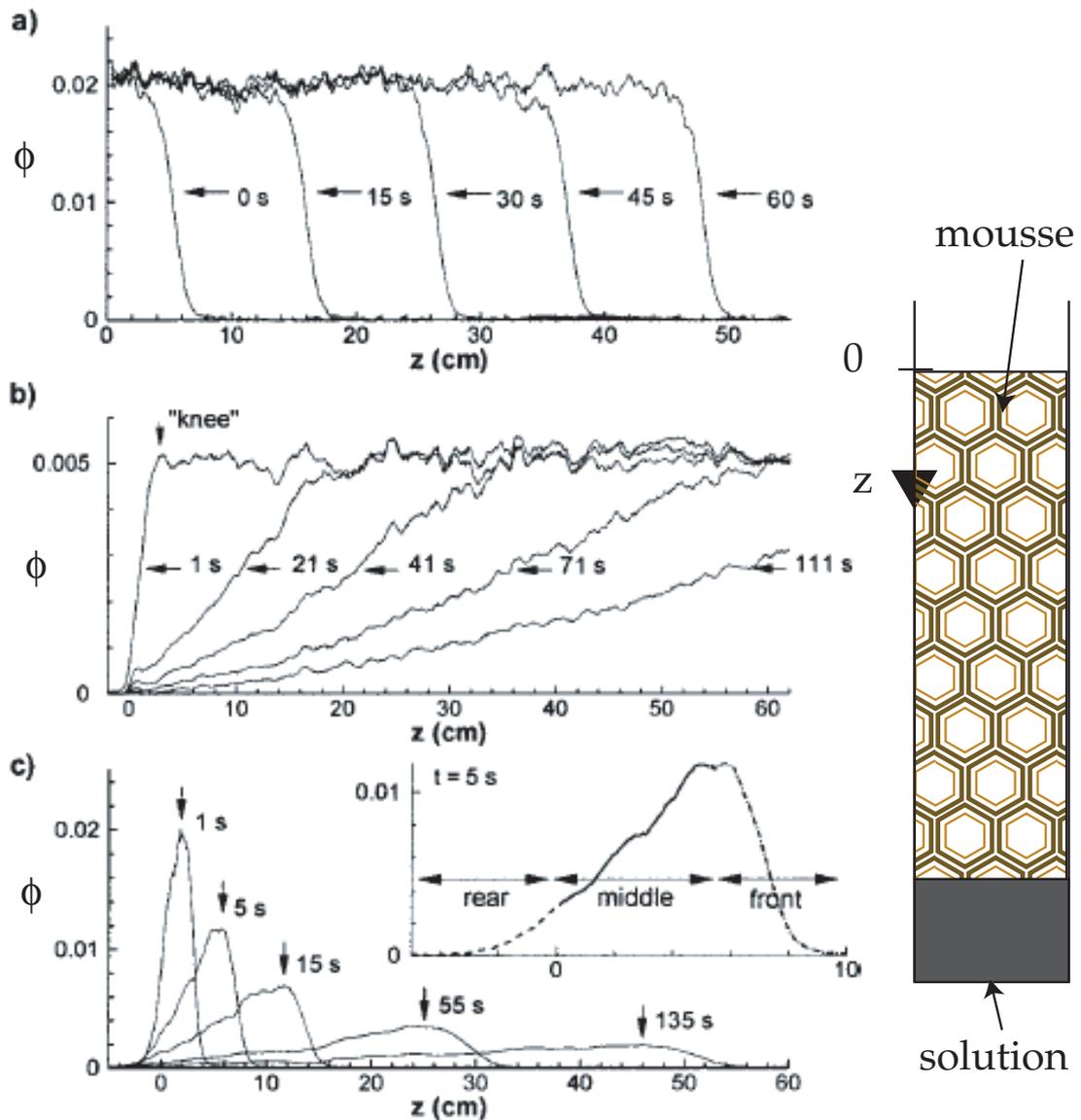


FIG. 1.18 – Trois expériences de drainage, d'après [71]. **a)** Drainage forcé. Du liquide est ajouté au sommet de la mousse à un débit constant. Le front se déplace à vitesse et forme constantes. **b)** Drainage libre. À  $t = 0$ , le profil est homogène et on laisse évoluer la mousse. Pendant les premiers instants, on peut observer un épaulement (*knee* en anglais) qui se déplace vers le bas de la mousse. **c)** Drainage pulsé. Une faible quantité de liquide est injectée pendant un temps court au sommet de la mousse. Ce pic s'étale et se déplace vers le bas.

(régime *node dominated*) correspondant à une dissipation visqueuse ayant lieu principalement dans les vertex et non dans les bords de Plateau.

La même année, Durand *et al* dans [38], montrent que les régimes *channel dominated* et *node dominated* constituent deux cas limites du drainage des mousses et qu'il est possible de passer de l'un à l'autre en faisant varier la viscosité de surface ( $\eta_s$ ). Les deux contributions seront incluses dans l'équation du drainage par le groupe de Stone [71].

### Drainage Libre

Le drainage libre consiste à laisser *librement* évoluer une mousse ayant une fraction volumique  $\phi_0$  initialement homogène (cf. 1.18 b)). Généralement, cette condition initiale est obtenue en injectant un débit constant au sommet de la mousse et en stoppant l'injection au début de l'expérience. Pendant les premiers instants, on peut observer un épaulement dans le profil de  $\phi$  qui se déplace vers le bas de la mousse.

En dessous de cet épaulement, la fraction volumique est constante et égale à la fraction volumique initiale  $\phi_0$ . Au-dessus, le front s'étale alors que l'épaulement avance. Ce régime initial, dominé par la convection, a été identifié par Kraynick dans [73]. L'évolution ultérieure de la fraction volumique est plus compliquée, les gradients de pression capillaire jouant alors un rôle important. A la fin du drainage libre, le profil d'équilibre de la fraction volumique atteint un état stationnaire, où le gradient de pression capillaire compense le gradient de pression hydrostatique.

### Drainage Pulsé

Il s'agit d'ajouter une faible quantité de liquide et d'observer son évolution (cf. 1.18 c)). A deux dimensions, il est alors possible d'observer de la diffusion seule, en observant l'étalement du pic initial dans la direction perpendiculaire à la gravité [68].

### Imbibition

Cette expérience n'a, à notre connaissance, jamais été réalisée autrement que dans des simulations numériques [69]. Elle consiste à mettre en contact une mousse sèche avec un réservoir de liquide à  $t = 0$  et à observer l'évolution ultérieure. Le liquide est alors aspiré dans la mousse du fait de la capillarité. Cette condition aux limites fixe la fraction volumique mais laisse le débit de liquide libre.

## 1.6.3 Pression

### Définition

Grâce à l'approximation de mousse sèche (cf. équation 1.8), nous allons pouvoir relier la pression dans la mousse et la fraction volumique <sup>16</sup>. Nous devons faire l'hypothèse

<sup>16</sup>Notons qu'il existe d'autres façons de définir la pression dans une mousse. Celle que nous venons d'utiliser est la pression à l'intérieur des bords de Plateau. Princen, dans [93] et [94], définit une pression osmotique dans les mousses et les émulsions grâce à une paroi perméable à l'eau mais imperméable aux bulles. Cette pression a depuis été étudiée numériquement à deux dimensions par Hutzler *et al* dans [58].

que localement, tous les bords de Plateau ont un rayon de courbure constant, et cela sur un volume assez grand pour pouvoir définir une fraction volumique. En utilisant les relations 1.8 et 1.5, on obtient <sup>17</sup> :

$$P = P_{gaz} - \frac{\sqrt{C_\phi} \gamma}{L} \phi^{-1/2} \quad . \quad (1.27)$$

### Équilibre sous gravité

La mousse étant soumise à la gravité, elle va évoluer jusqu'à atteindre une fraction volumique d'équilibre. Une variation de fraction volumique induit une variation de

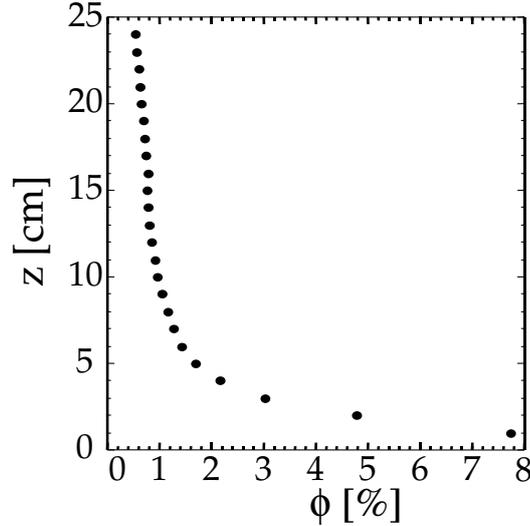


FIG. 1.19 – Fraction volumique d'équilibre en fonction de la hauteur (les axes sont inversés) pour une mousse de solution de SDS et une taille de bulle d' environ 1 mm.

pression d'origine capillaire dans les bords de Plateau :

$$\vec{\nabla} P = \frac{\sqrt{C_\phi} \gamma}{2L} \phi^{-3/2} \vec{\nabla} \phi \quad . \quad (1.28)$$

A l'équilibre, la vitesse moyenne est nulle et la loi de Darcy nous donne :

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g} \quad . \quad (1.29)$$

En se plaçant dans une géométrie unidimensionnelle, c'est à dire en utilisant une colonne dont les dimensions de la section sont beaucoup plus faibles que la hauteur, on obtient l'équation :

$$-\frac{1}{2} \phi^{-3/2} d\phi = \frac{\rho g L}{\sqrt{C_\phi} \gamma} dz \quad , \quad (1.30)$$

où  $\rho$  est la densité du liquide,  $L$  la longueur d'un bord de Plateau et  $\gamma$  la tension superficielle. En introduisant la longueur capillaire  $l_c^2 = \frac{\gamma}{\rho g}$  et, en intégrant, on obtient la fraction volumique d'équilibre :

$$\phi_{eq}(z) = \frac{1}{\left( \phi_0^{-1/2} + \frac{L}{\sqrt{C_\phi} l_c^2} z \right)^2} \quad , \quad (1.31)$$

<sup>17</sup>Cette relation permet de passer d'une grandeur mésoscopique à une grandeur macroscopique.

où  $\phi_0$  est la fraction volumique en  $z = 0$  et correspond aux conditions aux limites. Ce dernier point est un peu délicat lorsque le bas de la colonne est constitué du liquide de la solution : la fraction volumique à l'interface mousse liquide est alors difficile à déterminer. Il est d'usage de prendre  $\phi_0 = 0.36$  [111]. On peut toute-fois contourner cette difficulté en imposant une pression<sup>18</sup> au bas de la colonne par le biais d'une pastille de verre frité dont le diamètre des pores est plus petit que  $L$ .

#### 1.6.4 Loi d'échelle pour la perméabilité

##### Bilan de la Puissance

Revenons au niveau mésoscopique et considérons le champ de vitesse  $\vec{v}$  à l'intérieur d'un bord de Plateau et d'un vertex. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad , \quad (1.32)$$

où  $\Delta$  est le laplacien,  $\vec{\nabla}$  l'opérateur gradient et  $\vec{v}$  est le champ de vitesse locale. Le diamètre caractéristique d'un bord de Plateau est de  $R \approx 100 \mu m$  et la vitesse de l'écoulement dans les bords de Plateau  $u \approx 1 cm/s$ . En prenant la viscosité cinématique de l'eau  $\frac{\eta}{\rho} = 10^{-6} m^2/s$ , on obtient un nombre de Reynolds  $Re = \frac{vL\rho}{\eta}$  de l'ordre de l'unité, de sorte que l'on peut négliger les termes inertiels en se plaçant dans le régime stationnaire. On a donc

$$-\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} = -\eta \Delta \vec{v} \quad . \quad (1.33)$$

C'est l'équation de Stokes. En la multipliant par la vitesse  $\vec{v}$ , on obtient une égalité entre la puissance dissipée et la puissance fournie :

$$-\vec{v} \cdot \vec{\nabla}P + \vec{v} \cdot \rho \vec{g} = -\vec{v} \cdot \eta \Delta \vec{v} \quad . \quad (1.34)$$

Cette équation est valable en tout point de la mousse, pourvu que l'on soit à l'équilibre mécanique. Pour revenir au niveau macroscopique, on va l'intégrer sur un grand nombre de cellules. Ce volume, qui contient  $n$  vertex et  $2n$  bords de Plateau, correspond à un volume de liquide  $\mathcal{V}_{tot}$ . Ce liquide est réparti entre les vertex ( $\mathcal{V}_v = n\mathcal{C}_v R^3$ ) et les bords de Plateau ( $\mathcal{V}_{bP} = 2n\mathcal{C}_{bP}LR^2$ ).

$$\int_{\mathcal{V}_{tot}} \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}P - \rho \vec{g}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_{bP}} \vec{v} \cdot \eta \Delta \vec{v} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_v} \vec{v} \cdot \eta \Delta \vec{v} d\mathcal{V} \quad (1.35)$$

Le membre de gauche représente la puissance fournie par la force motrice macroscopique  $\vec{G}$ . Le premier terme du membre de droite est la puissance dissipée dans les bords de Plateau et le second celle dans les vertex. Ainsi, deux régimes limites sont possibles, selon que la dissipation est maximale dans les bords de Plateau (régime *channel dominated*) ou dans les vertex (*node dominated*).

<sup>18</sup>Puisque la pression est une fonction de la fraction volumique, imposer une pression est équivalent à imposer une fraction volumique.

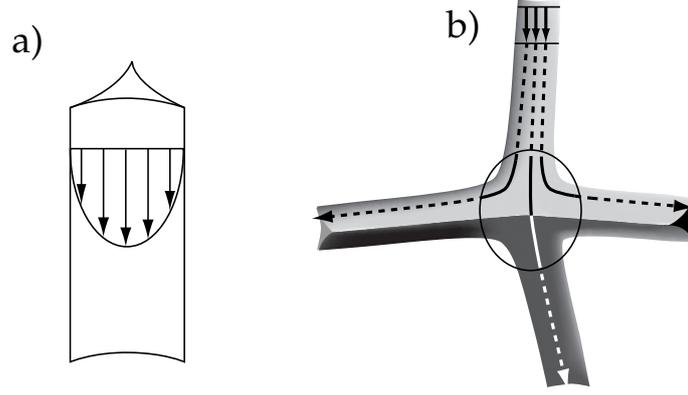


FIG. 1.20 – **a)** La dissipation dans le régime *channel dominated* provient du gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. **b)** Dans le régime *node dominated*, la dissipation provient de la torsion et du mélange des lignes de courant dans les vertex.

### Force Motrice

Pour moyennner le terme moteur sur tout le volume  $\mathcal{V}_{tot}$ , considérons un bord de Plateau faisant un angle  $\theta$  avec  $\vec{G}$ . On a alors  $\vec{v} \cdot \vec{G} = vG \cos \theta$ . Cependant ce bord de Plateau, étant orienté dans une direction différente de  $\vec{G}$ , ne contribue que pour  $\vec{v} \cdot \vec{G} \cos \theta$  à l'écoulement dans la direction de  $\vec{G}$ . Nous devons donc moyennner  $\cos^2 \theta$  sur tous les bords de Plateau du volume. Si celui-ci est assez grand, nous pouvons considérer qu'ils sont orientés aléatoirement<sup>19</sup> :  $\langle \cos^2 \theta \rangle_{\mathcal{V}_{tot}} = 1/3$ . Le membre de gauche de l'équation de 1.35 devient donc :

$$\int_{\mathcal{V}_{tot}} \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} P - \rho \vec{g}) d\mathcal{V} = \frac{2}{3} n C_{bP} L R^2 u \cdot G \quad , \quad (1.36)$$

Où l'on a introduit  $\vec{u}$ , la vitesse moyenne de l'écoulement dans la direction de la gravité.

### Dissipation dans les bords de Plateau

Pour estimer la puissance dissipée dans les bords de Plateau, on la sépare en une contribution transverse, indicée  $\perp$ , et une contribution longitudinale, indicée  $\parallel$ . La contribution transverse provient du gradient de vitesse dans le plan perpendiculaire à l'écoulement de sorte que  $\Delta_{\perp} \sim 1/R^2$ . La contribution longitudinale provient des gradients de vitesse parallèles à l'écoulement et on a :  $\Delta_{\parallel} \sim 1/L^2$ . En adimensionnant toutes les grandeurs<sup>20</sup>, on obtient :

$$\int_{\mathcal{V}_{bP}} \eta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} d\mathcal{V} = 2n C_{bP} \left( I_c^{\parallel} \frac{R^2}{L} + I_c^{\perp} L \right) \eta u^2 \quad , \quad (1.37)$$

<sup>19</sup>Cette hypothèse est tout à fait raisonnable car les mousses tridimensionnelles sont toujours désordonnées.

<sup>20</sup>En utilisant  $\tilde{x}$  pour repérer la grandeur adimensionnée associée à  $x$  :  $\vec{v} \cdot \Delta_{\perp} \vec{v} = \frac{u^2}{R^2} \vec{v} \cdot \tilde{\Delta}_{\perp} \vec{v}$ ,  $\vec{v} \cdot \Delta_{\parallel} \vec{v} = \frac{u^2}{L^2} \vec{v} \cdot \tilde{\Delta}_{\parallel} \vec{v}$  et  $d\mathcal{V} = C_{bP} R^2 L d\tilde{\mathcal{V}}$ . Il faut alors remplacer le volume d'intégration  $\mathcal{V}_{bP}$  par  $2n$ .

où l'on a introduit  $u$ , la vitesse moyenne de l'écoulement et les constantes sans dimensions <sup>21</sup> :

$$I_c^\perp = \left( \int_1 \vec{v} \cdot \tilde{\Delta}_\perp \vec{v} d\tilde{\mathcal{V}} \right)_{bP} \quad (1.38)$$

$$I_c^\parallel = \left( \int_1 \vec{v} \cdot \tilde{\Delta}_\parallel \vec{v} d\tilde{\mathcal{V}} \right)_{bP} . \quad (1.39)$$

### Dissipation dans les Vertex

Un raisonnement identique <sup>22</sup> conduit à :

$$\int_{\mathcal{V}_v} \eta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} d\mathcal{V} = n C_v I_n R \eta u^2 , \quad (1.40)$$

où l'on a introduit la constante sans dimensions :

$$I_n = \left( \int_1 \vec{v} \cdot \tilde{\Delta} \vec{v} d\tilde{\mathcal{V}} \right)_v . \quad (1.41)$$

### Deux Régimes

En rassemblant tous les termes de l'équation 1.35, on obtient la loi de Darcy :

$$u = \frac{1}{3\eta} \left( \frac{I_c^\parallel}{L^2} + \frac{I_c^\perp}{R^2} + \frac{C_v}{2C_{bP}} \frac{I_n}{RL} \right)^{-1} G . \quad (1.42)$$

Remarquons que le premier des trois termes est indépendant du rayon de courbure  $R$  et donc de la fraction volumique. Jusqu'à présent, aucune étude, numérique ou expérimentale, ne s'est intéressée à lui et nous le négligerons par la suite. L'approximation de mousse sèche nous donne une relation entre le rayon de courbure des bords de Plateau et la fraction volumique, ce qui nous permet de mettre la perméabilité de la mousse sous la forme

$$\Sigma = \left( \frac{1}{\Sigma_n} + \frac{1}{\Sigma_c} \right)^{-1} \quad (1.43)$$

avec les perméabilités du régime *node dominated*  $\Sigma_n$  et *channel dominated*  $\Sigma_c$  :

$$\Sigma_n = \frac{L^2}{3\eta} \frac{2C_{bP}}{C_v \sqrt{C_\phi} I_n} \sqrt{\phi} = \frac{K_n L^2}{\eta} \sqrt{\phi} \quad (1.44)$$

$$\Sigma_c = \frac{L^2}{3\eta} \frac{1}{C_\phi I_c^\perp} \phi = \frac{K_c L^2}{\eta} \phi , \quad (1.45)$$

où l'on a introduit les coefficients  $K_n = \frac{2C_{bP}}{3C_v \sqrt{C_\phi} I_n}$  et  $K_c = \frac{1}{3C_\phi I_c^\perp}$ . Ces deux perméabilités sont à l'origine des deux régimes de drainage observé expérimentalement. En considérant

<sup>21</sup>Comme les bords de Plateau ne se différencient que par leur orientation, on a :  $\left( \int_{2n} \vec{v} \cdot \tilde{\Delta} \vec{v} d\tilde{\mathcal{V}} \right)_{bP} = 2n \left( \int_1 \vec{v} \cdot \tilde{\Delta} \vec{v} d\tilde{\mathcal{V}} \right)_{bP}$ . Ainsi,  $I_c^\perp$  et  $I_c^\parallel$  ne dépendent que d'un seul bord de Plateau.

<sup>22</sup>Les grandeurs adimensionnées sont cette fois :  $\vec{v} \cdot \Delta \vec{v} = \frac{u^2}{R^2} \vec{v} \cdot \tilde{\Delta}_\perp \vec{v}$  et  $\tilde{\mathcal{V}} = \frac{\mathcal{V}}{C_v R^3}$ . Le volume d'intégration est  $n$ .

que la vitesse suit une loi de puissance du type  $u \sim \phi^i$ , on peut déduire que  $Q \sim u^{\frac{i+1}{i}}$ . Dans le cas *channel dominated*, la vitesse du front est donnée par :

$$u_c \propto Q^{1/2} \quad , \quad (1.46)$$

alors que dans le cas *node dominated*

$$u_n \propto Q^{1/3} \quad . \quad (1.47)$$

### Les Intégrales $I_c$ et $I_n$

Considérons l'écoulement à l'intérieur d'un unique bord de Plateau. Dans le régime *channel dominated*, l'équation 1.42 se met sous la forme <sup>23</sup> :

$$U_1 = \frac{1}{I_c} \frac{R^4}{\eta} G \quad (1.48)$$

Le débit s'obtient simplement en multipliant par la surface :

$$Q_1 = \frac{C_{bP}}{I_c} \frac{R^4}{\eta} G \quad (1.49)$$

Voyons tout d'abord le cas très simple d'un bord de Plateau dont la section serait circulaire. Dans ce cas, la loi de Poiseuille [50] nous permet de relier la vitesse moyenne à la force motrice  $G$  :

$$U_1^{cyl} = \frac{R^2}{8\eta} G \quad . \quad (1.50)$$

Ainsi, on a  $I_c = 8$  pour une section circulaire. Cela nous donne une borne inférieure pour  $I_c$ , puisque le cercle est la forme qui minimise le périmètre et donc la contrainte visqueuse, pour une surface donnée. Dans le cas d'un bord de Plateau aux parois rigides, Lemlich, dans [78] a montré par calcul numérique que  $I_c = 304$ .

L'évaluation de l'intégrale  $I_n$ , correspondant à la dissipation dans les vertex, a été faite dans le cas d'interfaces libres et de surfaces rigides par Simon Cox *et al* [27]. Expérimentalement, Khœler *et al* ont trouvé des valeurs de l'ordre de 400 [71].

### Glissements aux parois

Entre les deux cas limites *channel dominated* aux parois immobiles et le cas *node dominated* aux parois libres, il existe un régime intermédiaire où le profil des vitesses dans un bord de Plateau est donné par une superposition d'un écoulement bouchon et d'un écoulement de type parabolique. Pour rendre compte de ce glissement *partiel*, il faut considérer la contrainte visqueuse à la paroi. Celle-ci provient de la viscosité de surface  $\eta_s$  <sup>24</sup> et dépend du type de surfactants utilisé mais sont difficilement mesurables [100]. Certaines molécules, comme le docécanol, peuvent l'augmenter.

<sup>23</sup>Le facteur  $\frac{1}{3}$  de l'équation 1.42 provient de l'orientation aléatoire des bords de Plateau et doit disparaître lorsque l'on considère un bord de Plateau unique.

<sup>24</sup>A 2 dimensions, la dissipation d'une surface isotrope dépend de trois coefficients (viscosité de cisaillement, viscosité transverse, viscosité de dilatation) [39]. Cependant, l'existence d'un contre-écoulement dans la zone du film situé à proximité du bord de Plateau [78] montre que la vitesse doit s'annuler à la jonction entre films et bord de Plateau. Ceci provoque un fort gradient de vitesse à la surface du bord de Plateau et génère une contrainte visqueuse de cisaillement.

Lemlich a étendu son calcul aux cas présentant un glissement aux parois et a simulé numériquement l'écoulement dans un bord de Plateau en fonction du paramètre  $M = \frac{\eta R}{\eta_s}$  (cf. figure 1.21) qui traduit le glissement aux parois. Lorsque  $M$  est nul, la paroi est

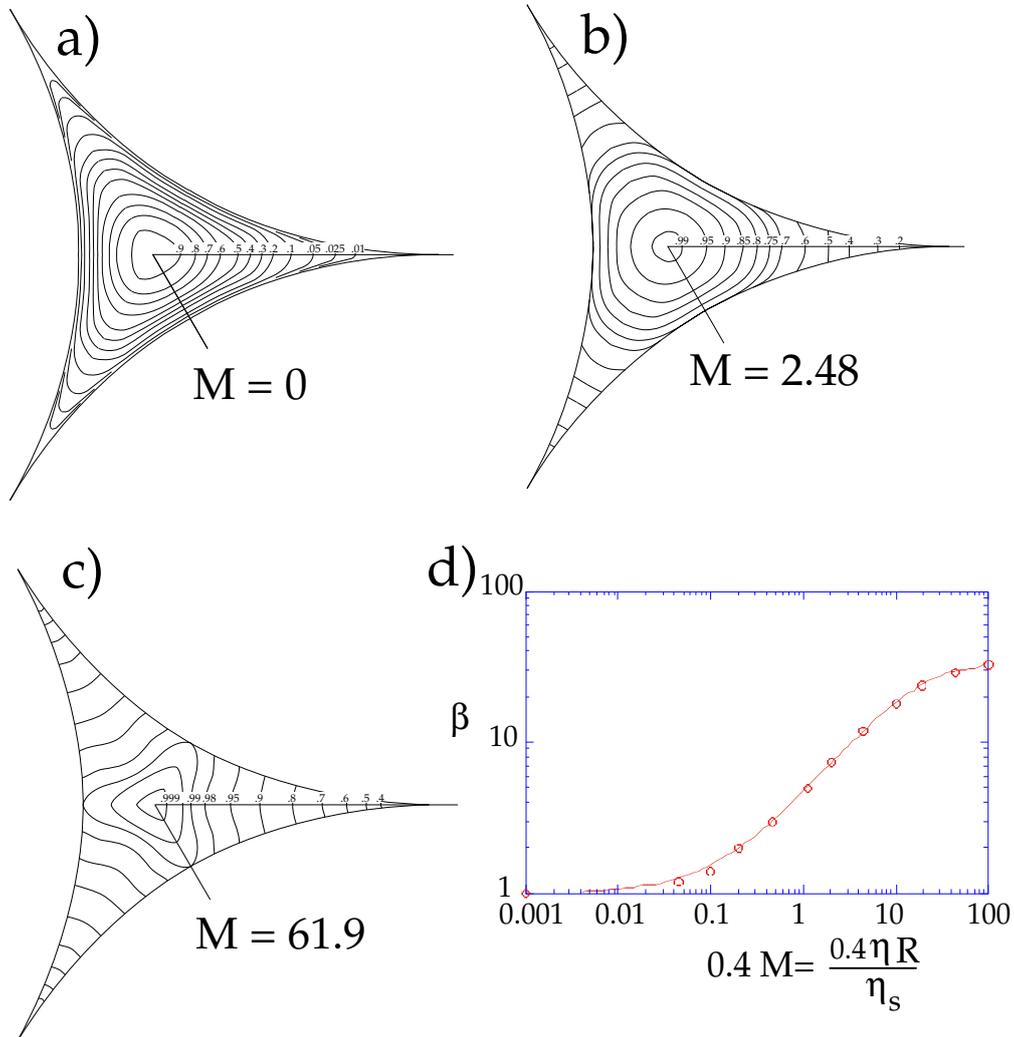


FIG. 1.21 – **a),b),c)** : Écoulement dans un bord de Plateau d'après les calculs numériques de Lemlich [78] pour  $M$  valant respectivement 0, 2.48, 61.9. Les lignes représentent les iso-vitesse et le nombre indiqué est le rapport de la vitesse local par la vitesse maxi. La condition aux limites impose une vitesse du fluide nulle dans les films. **d)** Variation de  $\beta$  en fonction de  $0.4M$ , issue de [18] et d'après [78] et [35].

rigide et il n'y a pas de glissements. Lorsque  $M$  est infini, la paroi est fluide et la vitesse est quasiment constante dans toute la section du bord de Plateau. On parlera alors d'écoulement bouchon.

Pour rendre compte de la mobilité des parois dans la vitesse moyenne, on introduit le coefficient  $\beta(M)$  dans la loi de Darcy (cf. figure 1.21 d) :

$$\Sigma = \beta(M) \frac{L^2 K_c}{\eta} \phi \quad . \quad (1.51)$$

D'autres études plus récentes sont parvenues aux mêmes résultats [35],[86], mettant en avant l'importance de la viscosité de surface. Nguyen a donné une équation

phénoménologique permettant de décrire ses résultats numériques du débit dans un bord de Plateau unique [86] :

$$Q(M) = \frac{C_{bP}}{\eta} \left( \frac{0.0655\sqrt{M}}{0.209 + M^{-0.628}} + \frac{1}{49} \right) G \quad . \quad (1.52)$$

### 1.6.5 L'Équation du drainage

Maintenant que nous avons les expressions de la pression et de la perméabilité hydrodynamique, nous allons établir l'équation du drainage dans les mousses.

#### Régime *Node dominated*

Dans ce régime, on suppose que la dissipation n'intervient que dans les vertex, ce qui nous donne  $\Sigma = \frac{K_n L^2}{\eta} \sqrt{\phi}$ . Le coefficient de diffusion capillaire, qui est défini par :  $D(\phi) = \phi \Sigma \frac{dP}{d\phi}$ , devient, en utilisant l'équation 1.28 :

$$D_n = \frac{\gamma L K_n \sqrt{C_\phi}}{2\eta}. \quad (1.53)$$

Le coefficient de diffusion capillaire ne dépend pas de la fraction volumique : il s'agit donc d'une diffusion gaussienne classique. La vitesse de dérive, qui est aussi l'opposée de la vitesse du front ( cf. equation 1.24) définie par 1.21, vaut :

$$U(\phi) = \frac{\rho g K_n L^2}{\eta} \sqrt{\phi} = V_n \sqrt{\phi}. \quad (1.54)$$

En utilisant les résultats des équations 1.53 et 1.54, on peut réécrire l'équation de la conservation du volume 1.21 sous la forme :

$$2\eta \frac{\partial \phi}{\partial t} - \gamma L K_n \sqrt{C_\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2\rho g K_n L^2 \frac{\partial \phi^{3/2}}{\partial z} = 0 \quad (1.55)$$

C'est l'équation de drainage dans le régime *node dominated*.

#### Régime *Channel dominated*

Dans ce régime, nous considérerons que la dissipation n'a lieu que dans les bords de Plateau. Ainsi, la perméabilité devient  $\Sigma = \frac{K_c L^2}{\eta} \phi$ . La vitesse de dérive, qui est égale à l'opposé de la vitesse du front de drainage forcé, s'écrit :

$$U(\phi) = \frac{\rho g K_c L^2}{\eta} \phi = V_c \phi. \quad (1.56)$$

Le coefficient de diffusion vaut lui :

$$D(\phi) = \frac{\gamma L K_c \sqrt{C_\phi}}{2\eta} \sqrt{\phi} = D_c \sqrt{\phi}. \quad (1.57)$$

C'est une diffusion anormale, de type hypo-diffusif. Lorsque la fraction volumique tend vers zéro, ce coefficient de diffusion s'annule. Finalement nous obtenons l'équation du drainage dans le régime *channel dominated* :

$$3\eta \frac{\partial \phi}{\partial t} - \gamma L K_c \sqrt{C_\phi} \frac{\partial^2 \phi^{3/2}}{\partial z^2} - 3\rho g K_c L^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial z} = 0. \quad (1.58)$$

### 1.6.6 Solution pour le Drainage Forcé

Nous avons vu que lorsque du liquide est ajouté au sommet de la mousse, il se produit un front qui se déplace à la vitesse  $v_f$ . Nous avons établi l'équation 1.25 en utilisant le changement de variable suivant  $Z_f = z - v_f t$  et en considérant que la fraction de liquide est nulle lorsque  $z \rightarrow -\infty$ .

#### Node dominated

En tenant compte des expressions de la vitesse de dérive et du coefficient de diffusion (équation 1.53 et 1.54), l'équation 1.25, qui donne la forme du front devient :

$$V_n(\sqrt{\phi} - \sqrt{\phi_m})\phi + D_n \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (1.59)$$

Cette équation s'intègre simplement<sup>25</sup> en séparant les variables. On obtient finalement la forme du front :

$$\phi = \frac{\phi_m}{\left(1 + \exp\left(\frac{s}{w_f}\right)\right)^2} \quad (1.60)$$

ou l'on a introduit  $w_f = \frac{1}{\phi_m} \frac{\gamma\sqrt{C_\phi}}{2L\rho g}$ , la largeur du front. Elle varie comme  $\frac{1}{\sqrt{\phi_m}}$  ce qui se traduit par un front plus raide au grands débits qu'aux petits débits.

#### Channel dominated

En suivant le même raisonnement que précédemment, l'équation donnant la forme du front s'écrit :

$$V_n(\phi - \phi_m)\phi + D_c\phi^{-1/2} \frac{d\phi}{ds} = 0. \quad (1.61)$$

Elle a pour solution :

$$\phi(s) = \phi_m \tanh^2\left(\frac{s}{w_f}\right) \quad s < O, \quad (1.62)$$

$$\phi(s) = 0 \quad s > O. \quad (1.63)$$

La figure 1.22 compare les fronts dans les deux régimes. Le front de drainage est moins large dans les régimes *channel dominated* que dans le régime *node dominated*. La forme du front de drainage dans le régime *channel dominated* est très asymétrique lorsque que l'on compare  $\phi \sim 0$  et  $\phi \sim \phi_m$  : c'est la signature de l'hypodiffusion.

### 1.6.7 Conclusion

L'existence d'un glissement aux parois permet d'expliquer la transition du régime *channel dominated* à un régime *node dominated* lorsque la viscosité de surface diminue. Le paramètre  $M = \eta R/\eta_s$  doit jouer un rôle dans cette transition. Cela suggère qu'il pourrait exister des transitions entre ces deux régimes pour un même couple  $\eta$  et  $\eta_s$  induites par la variation du rayon de courbure, c'est à dire la fraction volumique. Mais d'autres effets de surfaces pourraient avoir des conséquences importantes sur le drainage

<sup>25</sup>Il faut utiliser le changement de variable  $y = \sqrt{x}$ , puis décomposer en éléments simples, et enfin inverser la fonction  $z(\phi)$ .

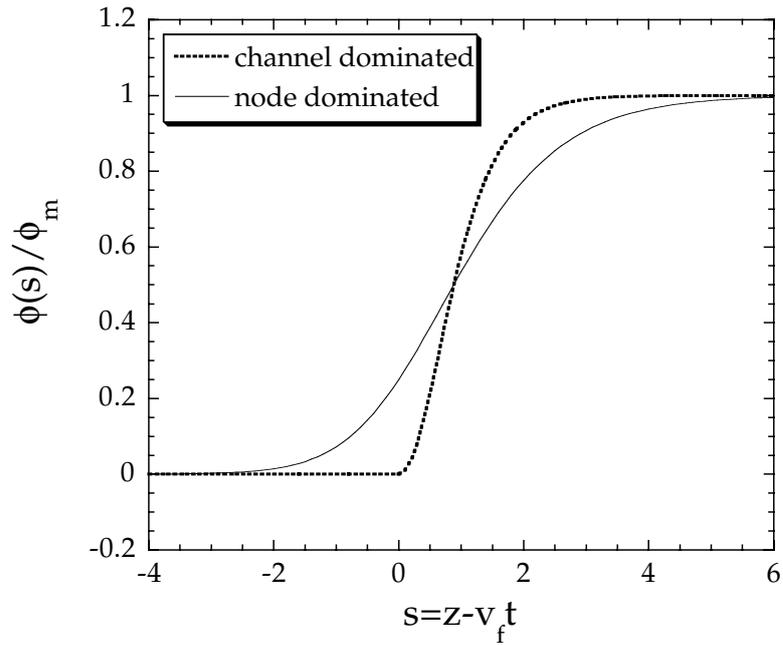
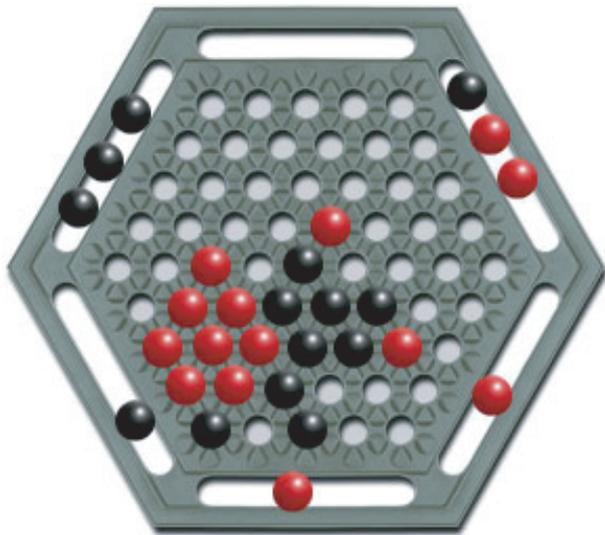


FIG. 1.22 – Forme des fronts pour  $w_f = 1$  dans le régime *node dominated* et *channel dominated*.

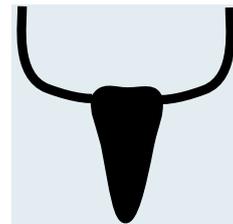
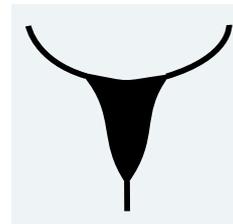
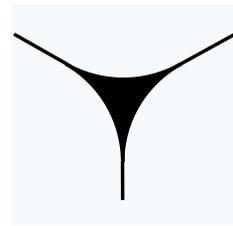
comme l'élasticité de Marangoni [72]. A notre connaissance, la seule observation directe de profils de vitesse expérimentaux dans un bord de Plateau a été faite à Boston dans le groupe de H. Stone, à l'aide d'un microscope confocal [100], mais les résultats ne sont pas suffisamment clairs pour trancher la question de manière définitive.

## Première partie

# Élasticité de mousses de savon



Fin d'une partie d'abalone.



D'après Joseph Plateau et Pablo Picasso.



## Chapitre 2

# Déformation et élasticité 2D

S'il est facile de prendre en photo la structure d'une mousse 2D, il est beaucoup plus difficile de la caractériser. En effet, du grand nombre d'informations nécessaires pour décrire complètement le réseau (longueurs des côtés, nombre de voisins *etc*), nous aimerions ne garder que quelques grandeurs permettant de caractériser l'état de la mousse. Pour cela, nous allons utiliser deux nouveaux outils introduit par Aubouy, Jiang, Glazier et Graner dans [5] : le tenseur de texture et le tenseur de déformation statistique. Puis nous utiliserons ces deux outils pour *ré-analyser* les images d'un cisaillement en géométrie de Couette d'une mousse bidimensionnelle, obtenues par Georges Debrégeas et publiées dans [33]. Ce travail, bien que non publié [63], est historiquement la première utilisation de la déformation statistique. D'autres études ont depuis confirmées la pertinence de ce type d'approche [4], [26], [37]. Nous montrerons que la déformation des bulles n'est pas localisées près de la roue de cisaillement et que la mousse se comporte, en moyenne, comme un milieu élastique. Enfin nous montrerons que les fluctuations temporelles du tenseur de texture sont localisée dans la zone de cisaillement.

### 2.1 La Déformation Statistique Stockée

La définition du tenseur de déformation élastique est très contraignante et devient inutilisable dès lors qu'il se produit des événements plastiques. Nous allons lui substituer le tenseur de déformation statistique stockée  $\bar{\bar{U}}$ .

#### 2.1.1 Position du problème

##### Discontinuité du tenseur de déformation

En élasticité classique, on définit un vecteur déplacement  $\vec{u}$  en tous points de la mousse. Pour ce faire, on considère le déplacement de chaque élément de volume par rapport à un état de référence. En dérivant spatialement ce vecteur, on obtient le tenseur de déformation (*strain tensor*)  $u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . C'est avec le tenseur des contraintes, l'objet central de l'élasticité. Malheureusement la définition de ce tenseur pose problème dès que des événements plastiques se produisent, puisque l'état de référence du système change et entraîne une discontinuité de  $u_{ij}$ . Prenons l'exemple d'un réseau hexagonal parfait que l'on étire dans une direction (figure 2.1 a).

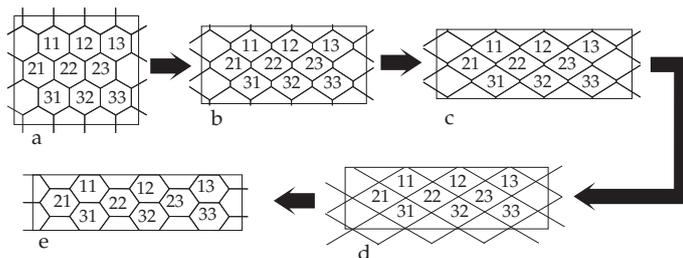


FIG. 2.1 – Déformation d'un réseau hexagonal parfait, selon Princen. De **(a)** à **(c)** : l'orientation des murs se modifie. La situation **(d)** est instable car elle conduit à des vertex à 4 branches. En **(e)**, une avalanche de T1 se produit et la mousse relaxe contrainte et déformation des bulles. La déformation appliquée, elle, n'a pas relaxée car les cellules ont bel et bien changées de voisines.

Le vecteur  $\vec{u}$  repère le déplacement des centres de gravité des cellules. Le réseau se déforme de façon affine, avec un  $u_{ij}$  constant dans toute la mousse (figure 2.1b et c), et cela jusqu'à ce que les vertex aient 4 branches (figure 2.1d). Il se produit alors une série de T1 qui va relaxer la contrainte et la déformation dans la mousse (figure 2.1e). Les bulles n'ont plus les même voisines, mais l'état de la mousse est strictement identique à l'état initial. Pourtant, le tenseur  $u_{ij}$  n'est toujours pas nul, puisque les cellules se sont déplacées par rapport à l'état initial. Pour retrouver un tenseur de déformation nul, il nous faut changer d'état de référence et calculer la déformation par rapport à la position des cellules dans l'état final, ce qui induit une discontinuité de  $u_{ij}$ . Évidemment, le fait d'avoir choisit une mousse parfaitement ordonnée, pour des raisons *pédagogiques*<sup>1</sup>, ne doit pas occulter l'importance du désordre dans le comportement mécanique d'une mousse.

### Point de vue énergétique

Une autre façon d'appréhender le problème consiste à regarder l'énergie liée à la déformation. Rappelons que l'approche de l'élasticité classique se base sur la thermodynamique de la déformation [75]. Celle-ci postule que la l'énergie libre d'un matériau déformé s'écrit :

$$F = F_0 + \frac{1}{2}\Lambda u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2 \quad , \quad (2.1)$$

où  $\Lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Il est évident que les situations a et e sur la figure 2.1 sont équivalentes et correspondent à deux états dégénérés de même énergie. Pourtant l'expression 2.1 conduit à des valeurs différentes de l'énergie car  $u_{ij}$  est différent dans les états initiaux et finaux.

Dans le régime plastique, la mousse continue pourtant à avoir un comportement élastique à l'échelle macroscopique, comme l'indiquent les mesures rhéologiques de la partie réelle  $G'$  du module de cisaillement complexe. Le but de notre démarche est de définir une déformation statistique pour les réseaux viscoélastiques, c'est à dire de trouver l'équivalent *mésoscopique* de  $G'$ . La solution à ce problème est apporté par l'approche statistique, développée par M. Aubouy, Y. Jiang, J. Glazier et F. Graner dans

<sup>1</sup>Si de telles mousses existent bien, leurs comportements sous cisaillement est très différent des mousses désordonnées.

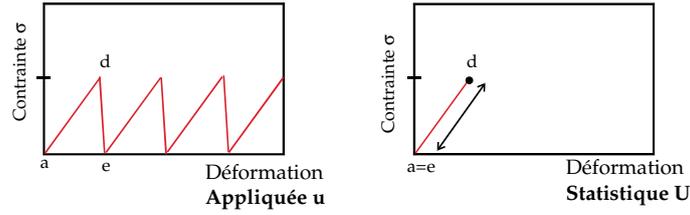


FIG. 2.2 – Relation contrainte-déformation pour une mousse hexagonale déformée selon la figure 2.1. **A gauche** diagramme contrainte-déformation appliquée. **A droite** diagramme contrainte déformation stockée.

[5]. Elle consiste à substituer la *déformation statistique* qui est stockée dans la mousse à la déformation appliquée comme variable conjuguée du tenseur des contraintes<sup>2</sup>. Cela revient à considérer l'orientation des murs plutôt que le déplacement des centres des cellules. Ainsi, les situations a) et e) sur la figure 2.1 redeviennent strictement équivalentes (cf. figure 2.2).

### Réseau interconnecté

La théorie de la déformation stockée s'applique aux réseaux interconnectés, c'est à dire à des matériaux présentant des sites ponctuels  $\{s\}$ , repérés par les rayons vecteurs  $\{\vec{r}_s\}$ .

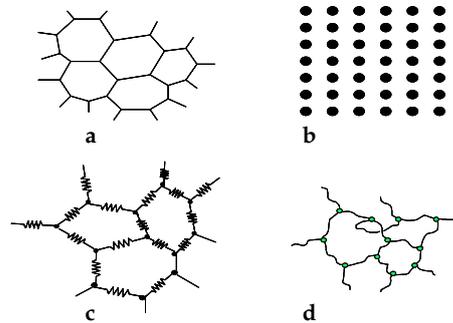


FIG. 2.3 – Quelques exemples de réseau interconnectés. (a)-Mousses 2D. (b)-Cristal. (c)-Réseau de ressorts. (d)-Gel de polymère.

La liste des paires  $\{s, s'\}$  connectées par les liens  $\vec{l}_{ss'} = \vec{r}_{s'} - \vec{r}_s$ , constitue la topologie du réseau. Sur la figure 2.3 sont présentés quelques exemples de réseaux de points, connectés soit :

- par des *liens physiques*, comme par exemple, dans un gel de polymère où les points sont les lieux d'enchevêtrement ; dans une mousse ; ou simplement dans un réseau de ressorts,
- ou par des *interactions*, comme dans un cristal ou un amorphe, où les sites correspondent à la position des atomes.

Une mousse, comme on le verra dans la section suivante, est un exemple de réseau interconnecté, dont la loi d'interaction est simple, car la force considérée est indépendante de  $l_{ss'}$  : la tension de ligne notée  $\Lambda$ . Il faut cependant ajouter le champ de pression qui dépend de la courbure des murs (loi de Laplace).

<sup>2</sup>La différentielle de l'énergie libre s'écrit  $dF = -SdT + \sigma_{ij}du_{ij}$ .

### 2.1.2 le Tenseur de Texture

Il y a eu diverses suggestions pour quantifier statistiquement l'anisotropie et la déformation de la structure interne d'une mousse, c'est à dire le réseau formé par les murs des bulles. La plupart d'entre elles étaient basées sur une grandeur scalaire, comme par exemple l'élongation [42]. Mais comme l'anisotropie recouvre à la fois des informations sur l'orientation et sur la longueur, elle doit être décrite par une grandeur tensorielle [2].

Nous utiliserons ici le tenseur de texture (équation 2.2) qui combine les avantages suivants [5] :

- il est purement géométrique, indépendant de la contrainte et des forces ;
- il s'applique à n'importe quel nombre de bulles ;
- il est local temporellement et spatialement, et donc permet de caractériser une sous-région de la mousse.

Pour quantifier l'anisotropie de chaque région de la mousse, nous avons procédé de la manière suivante. Nous voulons caractériser statistiquement le motif formé par les murs des cellules  $\vec{\ell}$ . Plus précisément, nous voulons prendre en compte la direction et la longueur  $\ell$  des murs. Comme la symétrie  $\vec{\ell} \rightarrow -\vec{\ell}$  ne change pas le motif, l'orientation du vecteur  $\vec{\ell}$  ne doit jouer aucun rôle par la suite. Nous construisons pour chaque mur, le tenseur  $\vec{\ell} \otimes \vec{\ell}$ , dont les coordonnées sont  $(\ell_i \ell_j)$ , où  $i, j$  représentent  $x$  et  $y$ . Dans chaque boîte, nous mesurons le tenseur local de texture  $\overline{\overline{M}}$ , défini dans [5] :

$$\overline{\overline{M}} = \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \ell_x^2 & \ell_y \ell_x \\ \ell_x \ell_y & \ell_y^2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.2)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est la moyenne sur les murs. Les composantes de la diagonale  $M_{xx}$  et  $M_{yy}$  de ce tenseur sont de l'ordre de  $\langle \ell^2 \rangle$  :  $\text{tr}(\overline{\overline{M}}) = M_{xx} + M_{yy} = \langle \ell^2 \rangle$ . Elles représentent l'anisotropie de longueur des liens dans les directions  $\vec{U}_x$  et  $\vec{U}_y$ .

La composante croisée  $M_{xy} = M_{yx}$  (le tenseur est symétrique par construction) est beaucoup plus faible et représente l'anisotropie dans l'orientation des liens.

Le tenseur  $\overline{\overline{M}}$  a deux valeurs propres positives, elles aussi de l'ordre de  $\langle \ell^2 \rangle$ , la plus grande correspondant à la direction dans laquelle la bulle s'allonge. Ce tenseur permet de quantifier l'anisotropie et la dilatation du réseau de vertex. Ce tenseur physique reflète aux grandes échelles tous les traits importants de la microstructure du matériau considéré. Il s'agit d'une méthode générale qui s'applique à tout type de matériau possédant un réseau intérieur (matériaux granulaire, joint de grains, polymère).

### 2.1.3 La Déformation Statistique $\overline{\overline{U}}$

#### Conditions à remplir

L'hypothèse de départ est que le système peut être décrit par une déformation moyenne, appelée déformation stockée, définie par un tenseur. C'est une grandeur locale, qui peut être définie et calculée en chaque point de la mousse. La définition opérationnelle du tenseur de déformation stockée  $\overline{\overline{U}}$  est basée sur les exigences suivantes :

- La déformation stockée est décrite par un tenseur avec les propriétés d'invariance de rotation, de translation et de permutation d'indices.

- Ce tenseur doit être une fonction thermodynamique du matériau, donc une moyenne statistique.
- Ce tenseur doit être une fonction d'état du matériau (mesurable sur une image).
- Enfin, il doit être égal au tenseur des déformations élastiques pour les petites déformations :  $\overline{\overline{u}} = \overline{\overline{U}}$ .

### Construction

Le tenseur  $\overline{\overline{U}}$  se construit à partir du tenseur de texture  $\overline{\overline{M}} = \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle$ , précédemment introduit. Nous avons déjà vu qu'il permettait de décrire la déformation locale des bulles ainsi que l'anisotropie d'un réseau de bulles.

Dans un état de référence non déformé, le milieu est isotrope, donc les deux valeurs propres de  $\overline{\overline{M}}$  sont égales, et le tenseur  $\overline{\overline{M}}$  est égal à  $M_0 \overline{\overline{I}}$ , où  $M_0 = \langle l_0^2 \rangle / d$  avec  $d$  la dimension de l'espace (dans notre cas  $d = 2$ ). L'état de référence isotrope de la mousse se réduit donc à la longueur moyenne des murs de la mousse. Cela provient du fait qu'il est impossible de savoir, à partir d'une image quelconque de mousse, si l'échantillon a été dilaté ou comprimé par rapport à son état de référence.

Le tenseur de déformation statistique est défini<sup>3</sup> par la relation :

$$\overline{\overline{U}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{\overline{M}}}{M_0} - \overline{\overline{I}} \right) . \quad (2.3)$$

### Vérification des conditions

Étant construit à partir de  $\overline{\overline{M}}$ ,  $\overline{\overline{U}}$  respecte les 2 premières conditions requises. C'est aussi une fonction d'état car il ne dépend que de la mousse à l'instant considéré et de l'état initial, caractérisé par le scalaire  $M_0$ . Il nous reste à vérifier la quatrième condition.

Supposons que les liens se transforment d'une manière affine<sup>4</sup>. En introduisant le tenseur gradient de déplacement  $\overline{\overline{w}} = [\vec{\nabla} \otimes \vec{u}]^t$ , un lien  $\vec{\ell}_0$  se transforme en  $\vec{\ell}$  selon :

$$\vec{\ell} = \left( \overline{\overline{I}} + {}^t \overline{\overline{w}} \right) \vec{\ell}_0 . \quad (2.4)$$

En introduisant  $\overline{\overline{M}}_0 = M_0 \overline{\overline{I}}$ , le tenseur de texture s'écrit alors :

$$\overline{\overline{M}} = \langle \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle = \overline{\overline{M}}_0 + \overline{\overline{M}}_0 \cdot \overline{\overline{w}} + {}^t \overline{\overline{w}} \cdot \overline{\overline{M}}_0 , \quad (2.5)$$

et donc au premier ordre :

$$\overline{\overline{U}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{w}} + {}^t \overline{\overline{w}}) = \overline{\overline{u}} . \quad (2.6)$$

Le tenseur de déformation stockée apparaît être une généralisation du tenseur de déformation classique, puisque lorsque ce dernier existe, les deux sont égaux.

<sup>3</sup>La définition générale donnée par Aubouy *et al* dans [5] est :  $\overline{\overline{U}}(\vec{r}) = \frac{\log \overline{\overline{M}} - \log M_0 \overline{\overline{I}}}{2}$ , où  $\log \overline{\overline{M}}$  est un tenseur ayant les mêmes axes que  $\overline{\overline{M}}$  mais dont les valeurs propres sont données par le logarithme des valeurs propres de  $\overline{\overline{M}}$ . Dans notre cas, la déformation des bulles est faible du fait du cisaillement quasi-statique et les composantes de  $\overline{\overline{M}}$  sont petites. On peut donc faire un développement limité près de 1, ce qui donne la définition donnée par l'équation 2.3.

<sup>4</sup>Il s'agit là d'une démonstration d'un cas particulier. Pour la démonstration dans le cas général, voir [5].

### 2.1.4 Le Tenseur des Contraintes

Le tenseur des contraintes<sup>5</sup>  $\bar{\sigma}$  décrit les forces internes exercées par une partie du matériau sur une autre partie. Dans le cas particulier des mousses fluides bidimensionnelles, il existe deux types d'interactions entre cellules voisines : les forces capillaires véhiculées par la tension de ligne des liens et le champ de pression dans la mousse. Dans le cas général, il convient de prendre en compte la contrainte visqueuse liée à un cisaillement de la mousse. La dissipation a encore été peu étudiée dans les mousses bidimensionnelles [16] Elle dépend du taux de cisaillement et dans le cas d'un liquide Newtonien est simplement proportionnelle au taux de cisaillement. Cependant, lorsque la mousse est quasi-statiquement<sup>6</sup> cisailée, la contrainte visqueuse est négligeable car le taux de cisaillement est nul<sup>7</sup>. Le tenseur des contraintes quasi-statique s'écrit donc :

$$\bar{\sigma}_{qs} = \bar{\sigma}_{cap} + \bar{\sigma}_p \quad . \quad (2.7)$$

Le tenseur des contraintes de pression doit être de la forme  $\bar{\sigma}_p = p\bar{I}$ , avec  $p$ , la pression moyenne. Ce terme a pour origine la courbure des murs entre cellules qui crée une surpression de Laplace. Dans une mousse 2D *quasi-statique*, le Laplacien de la pression est nul [48], ce qui induit une faible correction par rapport au terme capillaire.

La forme générale du tenseur des contraintes capillaires dans un volume  $\mathcal{V}$  contenant  $N$  bulles bien distincte les unes des autres (mousse sèche) est [10] :

$$\sigma_{ij}^{cap} = \Gamma \frac{N}{\mathcal{V}} \left\langle \oint_S (\delta_{ij} - n_i n_j) ds \right\rangle_{\mathcal{V}}, \quad (2.8)$$

où les  $n_i$  sont les vecteurs unitaire normal à l'élément de surface  $ds$ .

Dans le cas d'une mousse bidimensionnelle et dans le cas quasi-statique, cette formule se simplifie considérablement, et on trouve l'expression [63] :

$$\bar{\sigma}^{cap} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\vec{\ell}} \Lambda f \hat{e} \otimes \vec{\ell} \quad , \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{V}$  est une surface,  $\vec{\ell}$  est le vecteur coté (corde) reliant deux vertex,  $f$  est la fraction du coté compris dans  $\mathcal{V}$ ,  $\hat{e} = \vec{\ell}/\ell$  est le vecteur unitaire porté par le coté,  $\Lambda$  est la tension de ligne<sup>8</sup>, supposée constante dans toute la mousse :  $\vec{F}(\vec{\ell}) = 2\Lambda\vec{\ell}$ . Cette formule constitue

<sup>5</sup>A *trois dimensions*, une contrainte à la dimension d'une énergie divisée par un volume, c'est à dire une force par unité de surface. A *deux dimensions*, la contrainte à la dimension d'une énergie divisée par un volume, soit une force par unité de longueur.

<sup>6</sup>On entend par *transformation quasi-statique* une évolution d'un état initial à un état final permettant au système d'être à l'équilibre à chaque instant.

<sup>7</sup>Cela ne veut cependant pas dire qu'il n'y a pas de dissipation dans la mousse. En effet, les T1 relaxent l'énergie fournie par l'opérateur extérieur sous la forme d'un écoulement de liquide dans la structure de la mousse.

<sup>8</sup>La tension de ligne dépend de la fraction volumique de liquide dans la mousse. En particulier, on peut définir deux limites simples. Lorsque la fraction volumique est très faible, alors  $\Lambda = 2\gamma h$ , où  $h$  est la distance entre les plaques de la cuve de Hele-Shaw. Lorsque la fraction est très importante, alors :  $\Lambda = \pi\gamma h$ . Cela ne joue aucun rôle ici puisque les contraintes seront toujours exprimées dans une forme adimensionnée, c'est à dire en unité de  $\frac{\Lambda}{\ell}$ . Nous reviendrons sur la tension de ligne dans une mousse 2D dans la sous-section 5.6.3.

la forme usuelle <sup>9</sup> pour calculer la contrainte dans les mousses [111], [66].

Finalement, les composantes du tenseur des contraintes capillaires sont données par :

$$(\sigma_{cap})_{ij} = 2\rho\Lambda\left\langle\frac{\ell_i\ell_j}{\ell}\right\rangle, \quad (2.11)$$

où  $\rho$  est la densité de liens.  $\bar{\bar{\sigma}}_p$  et  $\bar{\bar{\sigma}}_{cap}$  sont directement mesurables sur les images. La mesure de la pression est cependant délicate car elle nécessite une mesure précise du rayon de courbure des côtés de la mousse.

## 2.2 Cisaillement de Couette 2D

Les mousses liquides constituent un système modèle pour l'étude des fluides complexes : les échelles de longueur en jeu permettent une observation directe, surtout lorsqu'elles sont bidimensionnelles. Une analyse d'images permet alors d'extraire toute l'information sur les propriétés géométriques de la mousse. Récemment, Debrégeas *et al.* ont quasi-statiquement cisailé une mousse de savon bidimensionnelle (2D) sèche dans une géométrie de Couette (Fig. 2.4, en bas à gauche) [33].

Nous avons choisi d'appliquer les concepts de déformation statistique sur cette expérience pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle utilise une mousse bidimensionnelle ce qui permet une analyse simple du réseau formé par les murs des cellule. Ensuite, la géométrie de Couette correspond à un cisaillement pur, sans compression. La cisaillement étant quasi-statique, la contribution visqueuse dans la contrainte est très faible et pourra être négligée. Le corollaire est que déformation des bulles de la mousse est faible et difficile à détecter à l'œil. Cette géométrie permet, grâce à une invariance par rotation de moyenner sur des boîtes de grandes tailles, afin d'améliorer la statistique. Enfin, le régime stationnaire permet de moyenner temporellement toutes les images.

### 2.2.1 Montage

*Les données expérimentales ont été généreusement fournies par Georges Debrégeas.* Elle proviennent de deux différentes expérience. Le montage expérimental à longuement été décrit dans [33]. Brièvement, il est constitué d'une roue intérieure, de rayon  $R_0 = 71$  mm, se déplaçant et d'une roue extérieure immobile de rayon  $R_1$ , différent pour chaque expérience. L'ensemble est confiné entre deux plaques de verre espacées de 2 mm. Cette épaisseur est suffisamment faible pour qu'il n'y ait qu'une unique couche de bulle [28]. La fraction volumique massique introduite dans la cellule de Couette vaut  $\phi = 5.2\%$ . Le grossissement est négligeable pendant l'expérience.

Pour réduire l'effet de la friction visqueuse entre les bulles et les plaques de confinement, la roue intérieure se déplace à la vitesse  $V_{roue} = 0.25$  mm.s<sup>-1</sup>, assurant un cisaillement quasi-statique. Plutôt que d'utiliser le temps, nous exprimerons les résultats en fonction de la déformation appliquée à la mousse :  $\Gamma = V_{roue} t / (R_1 - R_0)$ . La position et la forme des bulles ont été enregistrées par une caméra CCD digitale.

<sup>9</sup>En faisant intervenir la force capillaire  $\vec{F}$  qui s'exerce entre deux liens, on peut mettre cette dernière expression sous la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{cap} = \rho\langle\vec{F} \otimes \vec{\ell}\rangle, \quad (2.10)$$

où  $\rho$  est la densité de liens.

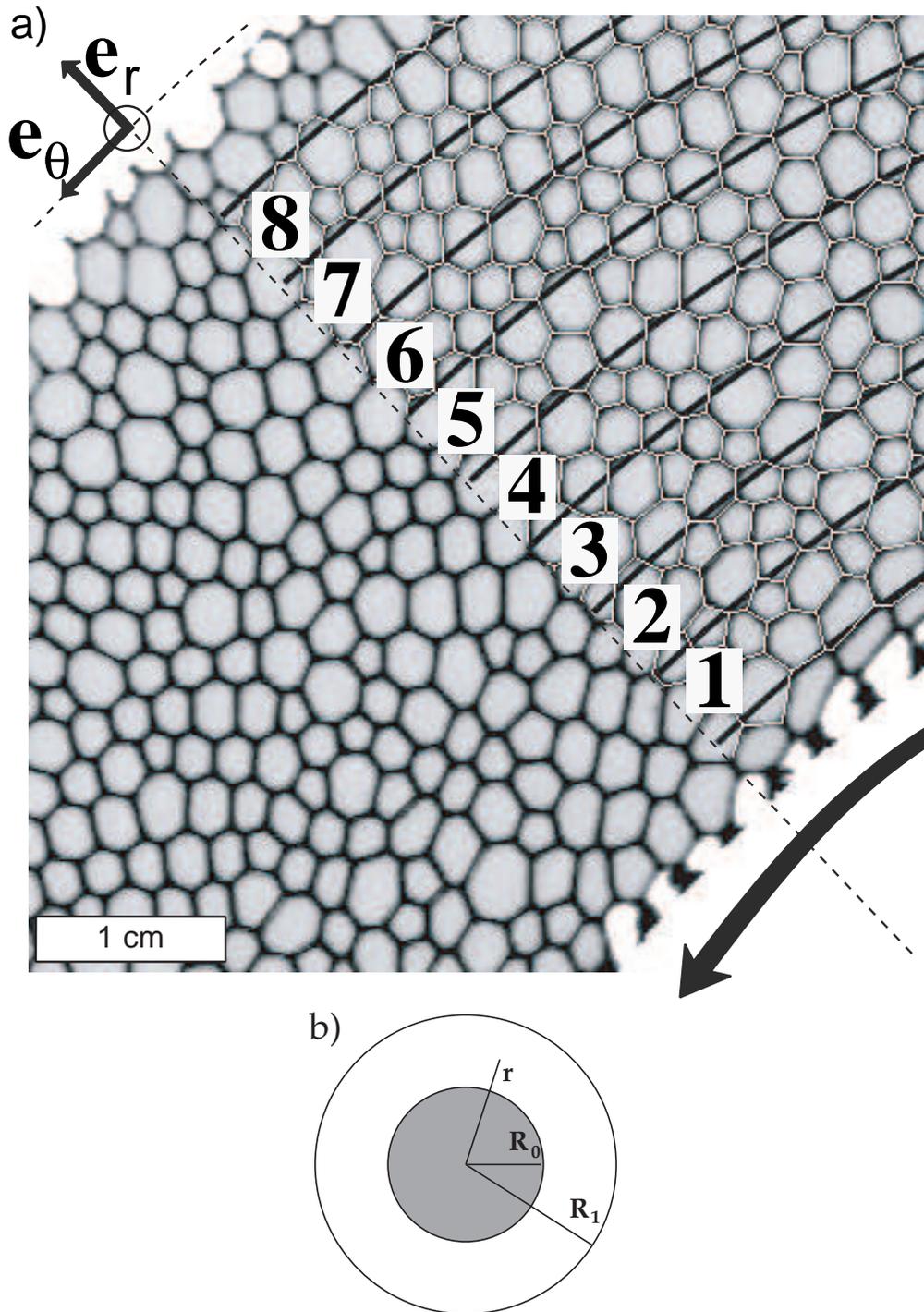
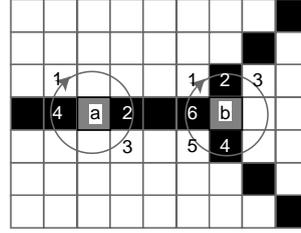


FIG. 2.4 – **a)** Mousse sous cisaillement permanent et quasi-statique dans une géométrie de Couette bidimensionnelle. *en bas à gauche* : vu de dessus des images originales par Debrégeas *et al.* [33]. La roue dentée intérieure tourne dans le sens trigonométrique en entraînant avec elle le premier rang de bulle. La roue extérieure, elle aussi dentée, reste immobile. *en haut à droite* : image analysée. Le réseau de vertex et de murs reconstruit apparaît en blanc. Les bordures équidistantes des 8 boîtes concentriques utilisées pour moyenner spatialement sont superposées en noir à l'image de départ. Nous avons exclu les bulles situées près des deux disques. **b)** Schéma de la cellule de Couette utilisée.

FIG. 2.5 – Critère de détermination d'un vertex. En **a)**, la couleur ne change que 4 fois autour d'un pixel appartenant à un mur. En **b)**, la couleur change 6 fois autour du pixel *vertex*.



### 2.2.2 Analyse des Données

#### Reconnaissance du Réseau de liens.

Nous avons analysé les images grâce à un module d'extension du logiciel public NIH-Image<sup>10</sup> que nous avons programmé. Pour reconnaître la structure de la mousse, les murs des bulles sont isolés du centre des cellules par *seuillage* puis réduit à un squelette de 1 pixel de large. L'algorithme de reconnaissance des vertex procède ainsi. Il part du centre de la cellule et se déplace horizontalement vers la gauche jusqu'à rencontrer un pixel noir, correspondant au squelette des murs. Il suit ce squelette en cherchant les pixels noirs voisins tel un train sur des rails. Les vertex correspondent à des points particuliers (cf figure 2.5) et sont identifiés en comptant le nombre de changements couleurs lorsque l'on se déplace autour de lui (carré constitué de 3X3 pixels). A chacun de ces *aiguillages*, l'algorithme tourne à droite de manière à rester toujours dans la même cellule. Lorsqu'il a fait un tour complet, il change de cellule. Le squelette est reconstitué ensuite en reliant les vertex par des lignes droites (lignes blanches sur la figure 2.4 en haut à droite). Nous avons ainsi accès à la liste des liens ainsi qu'à la topologie de la mousse.

#### Forme des boîtes

Nous avons choisi des boîtes orthoradiales équidistantes (figure 2.4, en haut à droite) pour respecter la géométrie de la cellule de Couette pour moyenner spatialement sur la plus grande surface possible. Pour la même raison, les vecteurs murs  $\vec{\ell}$  (figure 2.6) sont exprimés dans la base locale (figure 2.4) :

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_r \\ \ell_\theta \end{pmatrix} . \quad (2.12)$$

Pour répartir les côtés dans les boîtes, nous avons utilisé deux procédures différentes : soit en considérant la position des vertex, soit en considérant le centre de gravité de la cellule. Dans le premier cas, il est possible que deux vertex reliés appartiennent à deux boîtes différentes et qu'un côté coupe la boîte. Il nous faut alors introduire la fraction  $f$  du mur compris dans une boîte pour pondérer sa contribution au tenseur de structure. Le tenseur local de texture s'écrit alors :

$$\overline{\overline{M}} = \langle f \vec{\ell} \otimes \vec{\ell} \rangle = \left\langle f \begin{pmatrix} \ell_r^2 & \ell_\theta \ell_r \\ \ell_r \ell_\theta & \ell_\theta^2 \end{pmatrix} \right\rangle . \quad (2.13)$$

<sup>10</sup>Ce logiciel est développé par le National Health Institute. Pour plus d'informations, voir <http://rsb.info.nih.gov/nih-image/>

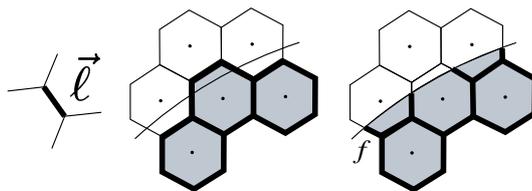


FIG. 2.6 – **A gauche** : On note par  $\vec{\ell}$  le vecteur reliant deux vertex d'un côté. Si un de ces vertex est à l'extérieur de la boîte, il existe deux façons de prendre en compte la contribution du côté. **Au centre**, On compte tous les côtés d'une cellule dans la boîte dans laquelle se trouve le centre. **A droite**, on introduit  $f$  la fraction du mur à l'intérieur de la boîte et on calcul la contribution de  $f\vec{\ell}$ . Les deux techniques ont données des résultats tout à fait similaires.

Dans le second cas, tous les côtés d'une même bulle appartiennent à la même boîte. Le contour de la boîte suit les côtés et il n'y a plus de côtés coupant les bords de la boîte. La forme apparaît statistiquement en moyennant les contributions de toute les images. Cette procédure a l'avantage d'éviter l'introduction de la fraction  $f$ , mais n'est utilisable que si l'on moyenne les images temporellement. Elle ne permet donc pas l'étude des fluctuations. Le choix de la procédure n'est cependant pas crucial car les résultats pondérés et non pondérés sont similaires.

### 2.2.3 Protocole Expérimental

Nous présenterons deux séries d'expériences. La première (*série 1*), résolue en temps et en espace, étudie le régime transitoire avant qu'un écoulement stationnaire ne soit établi (cf section 2.3). La seconde (*série 2*), résolue spatialement et moyennée dans le temps, se focalise sur le régime permanent, dans un premier temps sur les valeurs moyennes des tenseurs  $\overline{\overline{M}}$ ,  $\overline{\overline{U}}$  et  $\overline{\overline{\sigma}}$  (cf section 2.4), puis sur les fluctuations temporelles de  $\overline{\overline{M}}$  (cf section 2.5).

Pour préparer la mousse, le disque intérieur tourne jusqu'à ce qu'un régime permanent soit atteint. Puis, à  $t = \Gamma = 0$ , le sens de rotation est inversé et l'expérience commence.

#### Série 1

La série 1 (non publiée) commence à  $t = \Gamma = 0$  et contient un régime transitoire. La rotation se fait dans le sens horaire. La distance moyenne entre cellules voisines, prise entre les centres de masse, est  $d_{ppv} = 3.0$  mm, avec une déviation standard de 0.5 mm. Cela correspond à une longueur moyenne des murs de  $\langle \ell \rangle = 1.7$  mm. Le rayon de la roue extérieure est  $R_1 = 112$  mm. Ainsi,  $\Gamma = 1$  correspond à un déplacement de la roue interne  $V_{roue} t = R_1 - R_0 = 41$  mm : *i.e.* 15-20 diamètres de bulles. 500 images ont été enregistrées, chacune montrant 200 bulles.

#### Série 2

La série 2 (publié dans [33]) se focalise sur le régime permanent. La rotation du disque interne se fait dans le sens trigonométrique. La distance moyenne entre bulles est  $d_{ppv} = 2.4$  mm, avec une déviation de 0.4 mm, correspondant à une longueur moyenne

des côtés de  $\langle \ell \rangle = 1.4$  mm. Le rayon de la roue extérieur est  $R_1 = 122$  mm.  $\Gamma = 1$  correspond à un déplacement de la roue de 51 mm, c'est à dire 20-25 diamètre de bulles. Avant d'enregistrer les données, un tour complet de la roue à été fait ( $\Gamma = 8$ ). Un quart de la cellule de Couette est filmé (soit environ 700 bulles) pendant 500 images avant que la caméra ne soit déplacée. 2000 images on été ainsi obtenues, sous la forme de 4 films de 500 images.

#### 2.2.4 État de référence $M_0$

Pour mesurer la déformation statistique, il nous faut établir la valeur de  $M_0$  qui caractérise l'état de référence de la mousse non contrainte. Dans le montage expérimental, il est difficile de laisser la roue interne librement tourner à l'envers, de sorte qu'il ne nous est pas possible de mesurer l'état de référence  $M_0$  sur la mousse non contrainte. En supposant que le volume de la mousse est conservé pendant la déformation, ce qui est vraisemblable pour un écoulement en cellule de Couette, on peut avoir accès à  $M_0$  en mesurant la longueur moyenne des murs des bulles dans toute la mousse. Pour cela, nous avons moyenné  $\ell$  et  $\ell^2$  dans toutes les boîtes et nous avons pris  $M_0 = \frac{\langle \ell \rangle^2 + \langle \ell^2 \rangle}{4}$ .

### 2.3 Régime Transitoire

Ce paragraphe se focalise sur les résultats obtenus grâce à la **série 1**. Pour analyser les images de cette série, nous avons utilisé le tri par vertex et introduit la fraction  $f$ . Chaque boîte a une largeur de  $2.7\langle \ell \rangle$  et la boîte numéro  $i$  est distante de  $R_1^i = [0.4 + 2.7(i - 0.5)]\langle \ell \rangle$  de la roue intérieure. La Série 1 met en évidence deux régimes distincts : un régime transitoire et un régime stationnaire (cf figure 2.7).

#### 2.3.1 Régime purement élastique

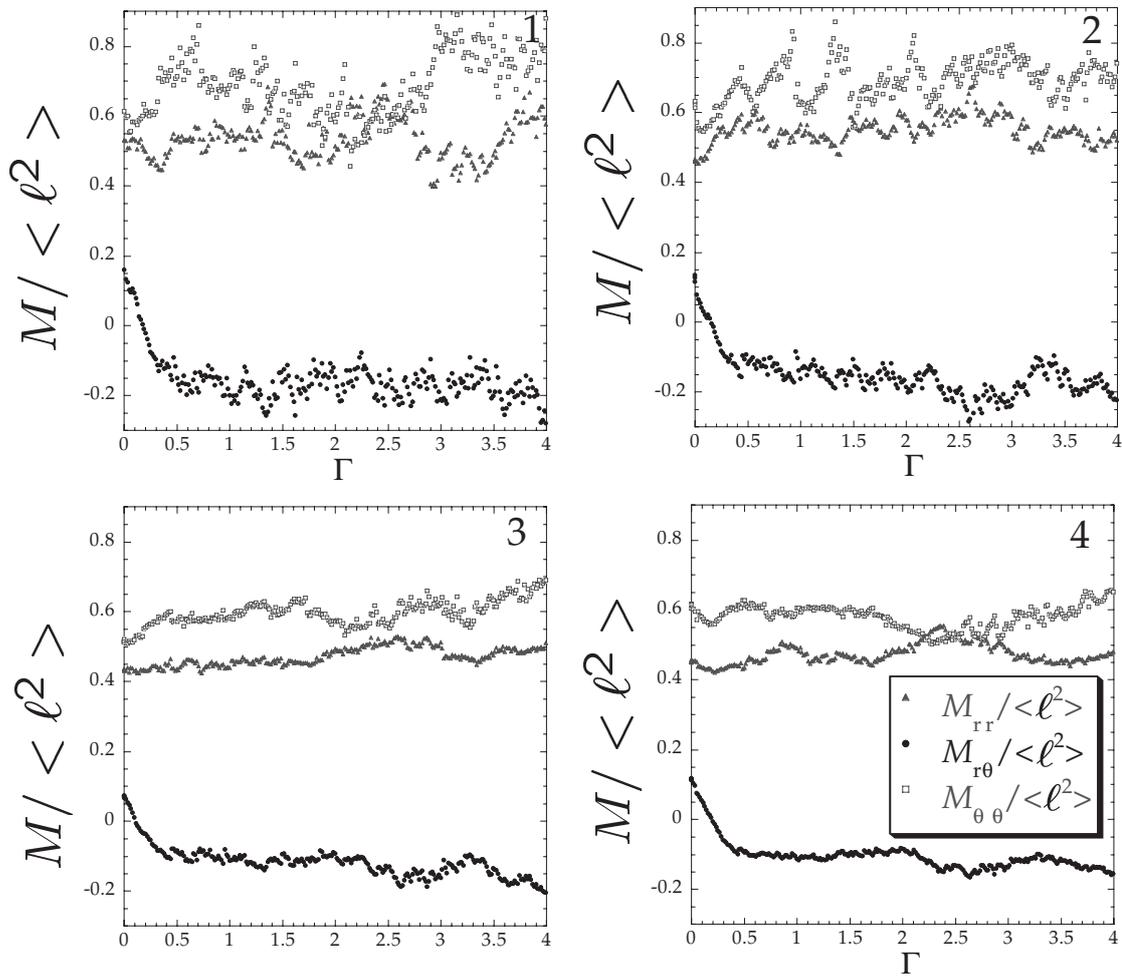
Dans le régime transitoire, la longueur des murs, donnée par  $\text{tr}(\overline{M})$  ne change quasiment pas. Par contre l'orientation des liens change beaucoup comme le montre la très forte variation de  $M_{r\theta}$ . Dans ce régime,  $M_{r\theta}$  varie linéairement avec la déformation. Seule celle-ci est corrélée au cisaillement. Comme à  $\Gamma = 0$ , le sens de cisaillement passe du sens trigonométrique au sens horaire,  $M_{r\theta}$  décroît linéairement et change de signe.

Aucun T1 n'est visible sur les images pour  $\Gamma < 0.3$  : le régime transitoire est donc un régime purement élastique. Ceci nous donne l'occasion de vérifier expérimentalement que le tenseur de déformation statistique donne des résultats identiques au tenseur de déformation classique défini par l'équation 2.3. Pour un milieu élastique dans une cellule de Couette, un cisaillement pur<sup>11</sup> donne un tenseur de déformation  $\overline{u_C}$  dont seule la composante croisée  $u_{r\theta}$  est non nulle (cf. annexe B) :

$$u_{r\theta} = \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} \quad . \quad (2.14)$$

La figure 2.8 montre que la composante croisée  $U_{r\theta}$  de la déformation statistique varie linéairement avec le cisaillement. Pour mesurer sa dérivée par rapport au cisaillement

<sup>11</sup>sans contraintes normale aux parois.



Boîtes de 1 à 4

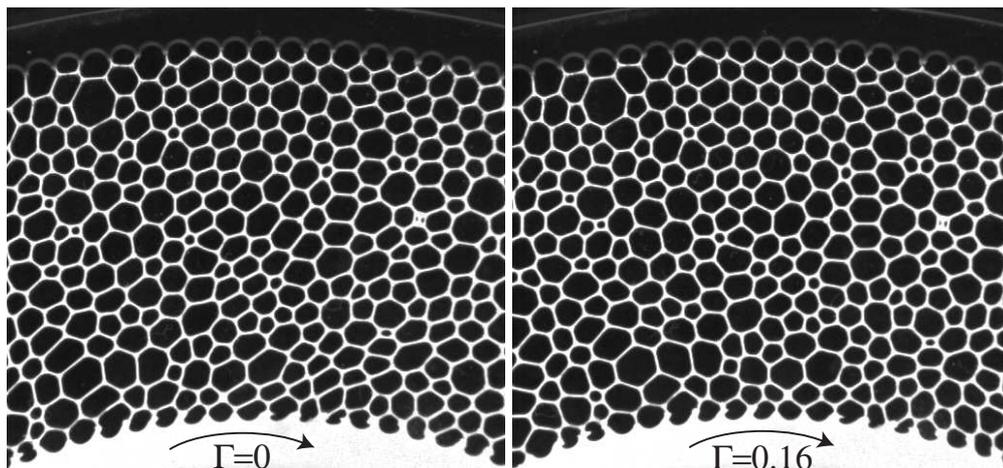
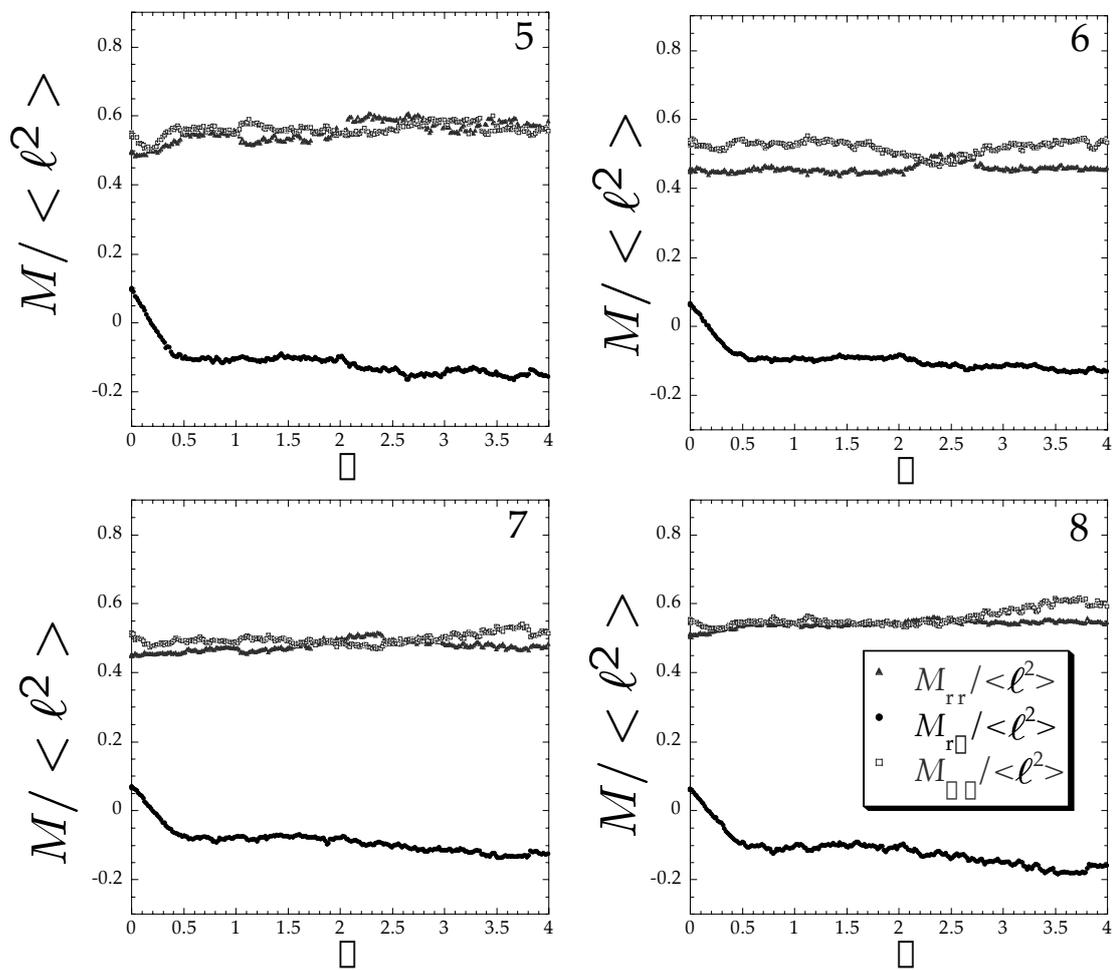


FIG. 2.7 – *Première Partie* Régime transitoire (série 1). **En haut** : composantes du tenseur de texture  $\overline{\overline{M}}$  renormées par  $\langle \ell^2 \rangle$  en fonction de la déformation appliquée  $\Gamma$  **En bas**, images de la mousse pour différentes valeurs de  $\Gamma$



Boîtes de 5 à 8

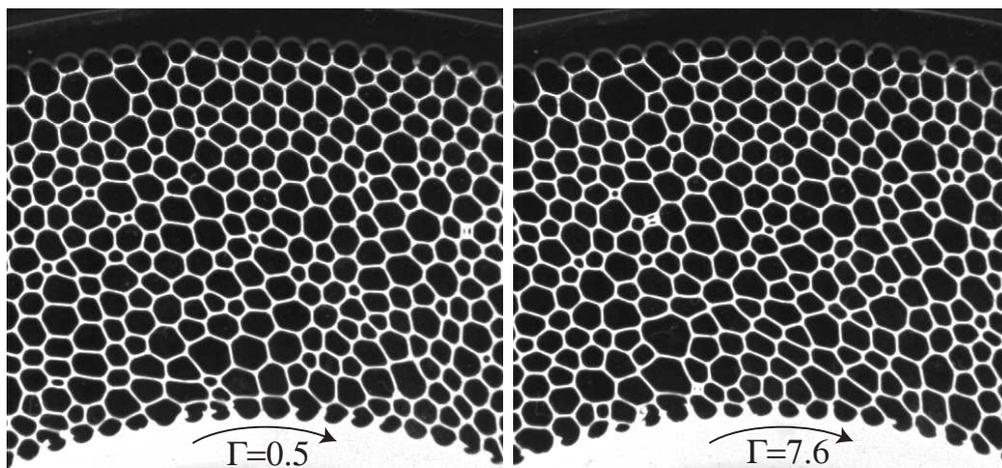


FIG. 2.7 – *Seconde Partie* Régime permanent de la série 1 (grands  $\Gamma$ ). La rotation de la roue interne se fait dans le sens horaire.

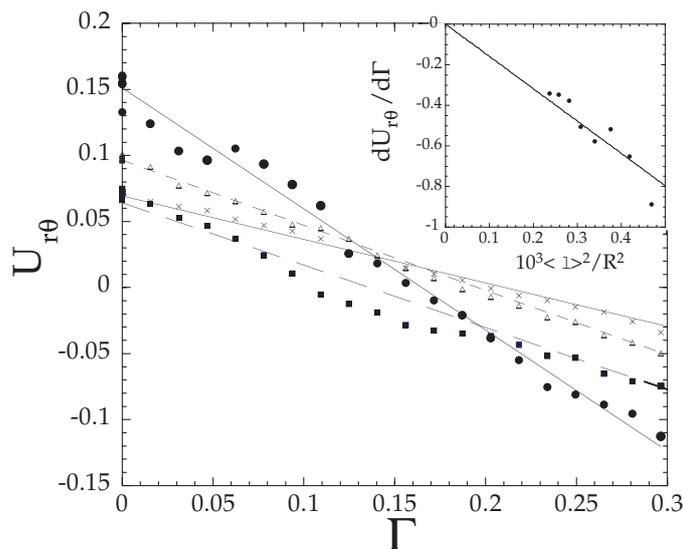


FIG. 2.8 – Série 1 : Régime transitoire. Composante croisée du tenseur de déformation  $U_{r\theta}$  en fonction du cisaillement dans le régime transitoire ( $\Gamma < \Gamma_s$ ) pour les boîtes 1 : ●, boîtes 3 : ■, boîtes 5 : △, et boîtes 7 : ×. La dérivée de  $U_{r\theta}$  est obtenue par une régression linéaire. **En insert**, la variation de la dérivée  $\frac{dU_{r\theta}}{d\Gamma}$  en fonction de  $10^3 <\ell>^2 / R^2$ , où  $R$  est la distance de la boîte au centre de la cellule de Couette. La droite est une régression linéaire passant par l'origine.

$\frac{dU_{r\theta}}{d\Gamma}$ , nous avons ajusté  $U_{r\theta}(\Gamma)$  par une droite. Les coefficients directeurs de cette droite de chacune des boîtes sont représentés dans l'insert de la figure 2.8. Cette dérivée suit une loi du type  $\frac{dU_{r\theta}}{d\Gamma} = \frac{C_c}{r^2}$ , avec

$$C_c = (-1600 \pm 90) <\ell>^2 \quad (2.15)$$

En tenant compte de l'incertitude introduite par la denture des roues, l'élasticité classiques donne :

$$C_c = \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} = (-1680 \pm 80) <\ell>^2 \quad (2.16)$$

Les deux valeurs sont donc tout à fait compatibles. Lorsqu'il n'y a pas d'événement plastique, le tenseur de déformation statistique permet donc de retrouver les résultats classique de l'élasticité.

### 2.3.2 Transition entre régime élastique et plastique

Lorsque la déformation appliquée atteint la valeur seuil  $\Gamma_s$ , la composante  $M_{r\theta}$  sature et se met à fluctuer autour d'une valeur d'équilibre : on passe alors dans le *régime permanent*. Pour déterminer la transition entre les deux régimes, nous avons ajusté la décroissance initiale de  $M_{r\theta}$  par une droite et nous avons cherché l'intersection de cette droite avec la valeur à l'équilibre de  $M_{r\theta}$ . Cette valeur de  $\Gamma_s$  dépend de la position dans la mousse : elle augmente graduellement (cf figure 2.9) de 0.35 près de la roue intérieure à 0.55 pour la boîte la plus proche de la roue extérieure.

Pour déterminer l'origine physique de la variation spatiale de  $\Gamma_s$ , il convient de remarquer que les premiers T1 apparaissent ( $\Gamma \sim 0.3$ ) en même temps que la saturation de

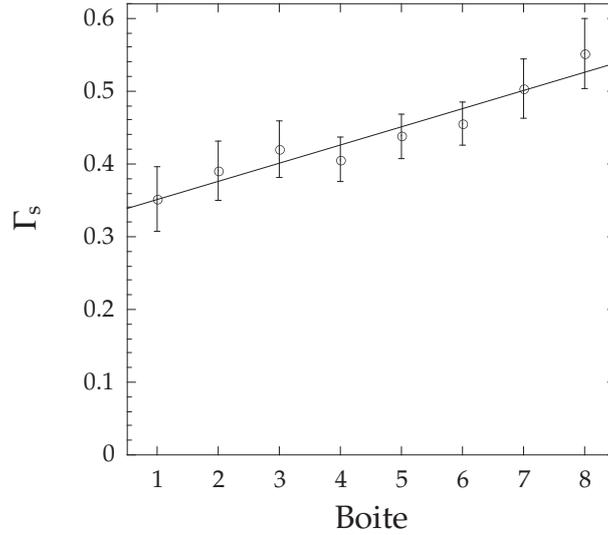


FIG. 2.9 – Série 1 : Régime transitoire. Variation du seuil de déformation appliquée  $\Gamma_s$  en fonction de la boîte. La droite est une régression linéaire.

$M_{r\theta}$  dans la boîte 1 ( $\Gamma_s(1) = 0.35$ ). Pour les boîtes plus éloignées,  $M_{r\theta}$  continue d'évoluer alors que les premiers T1 ont déjà lieu dans la mousse. Il est alors clair que le champ de vitesse est différent de celui d'un milieu élastique cisailé. Ainsi la variation spatiale de  $\Gamma_s$  dépend aussi de la localisation des T1 dans la mousse. Cette question a été beaucoup étudié par Debrégeas *et al* dans [33] dans les images du régime permanent (série 1) et par Kabla *et al* dans [66] et [65] dans une simulation numérique de mousse. Sur les images du régime transitoire, il semble que les T1 aient dès le début lieu à proximité de la roue interne, mais nous n'avons pas étudié quantitativement leur localisation.

On peut donc penser que pour la boîte 1, la déformation appliquée est identique à la déformation locale :  $\Gamma_s(1)$  doit-être identique au cisaillement seuil de la mousse. Pour les boîtes plus lointaines, la déformation locale est plus faible que celle appliqué par la roue interne car une partie de la déformation à été relaxée dans la boîte 1 grâce à des T1. Nous pensons que la variations spatiale de  $\Gamma_s$  est liée à la superposition d'un champ de vitesse élastique et d'un champ de vitesse plastique lié à la présence de T1. Pour élucidé cette question, il conviendrait de mener une étude sur le champ de vitesse dans la mousse pendant la transition entre régime élastique et régime plastique.

## 2.4 Régime Permanent : valeurs moyennes

Dans ce régime, la plasticité de l'écoulement nous empêche de définir un tenseur de déformation au sens classique du terme. Nous allons donc étudier ce régime en utilisant le *tenseur de texture*  $\overline{\overline{M}}$  et le *tenseur de déformation statistique*  $\overline{\overline{U}}$ . Nous avons utilisé dans cette série le tri des côtés par le centre de gravité des bulles.

### 2.4.1 M dans le régime permanent

La série 2 nous permet d'améliorer les statistiques en utilisant une moyenne temporelle sur l'écoulement permanent. Nous pouvons ainsi détecter une anisotropie difficile-

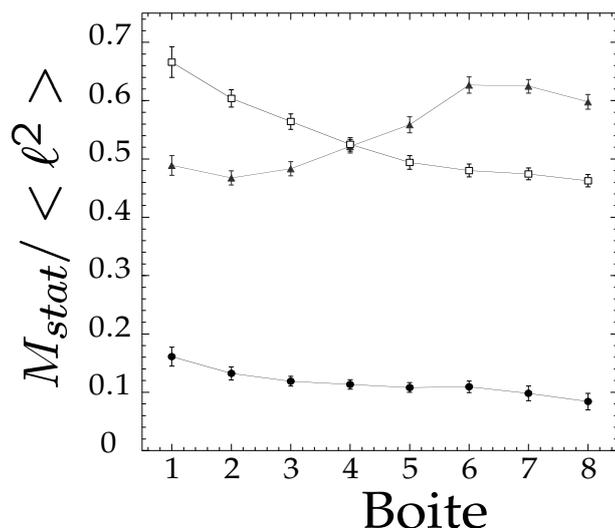


FIG. 2.10 – Série 2 : Régime permanent. Les composantes du tenseur de texture  $\overline{\overline{M}}$  (▲ :  $M_{rr}$  ; □ :  $M_{\theta\theta}$  ; ● :  $M_{r\theta}$ ) normalisées par  $\langle \ell^2 \rangle$ , sont moyennées sur les quatre quadrants de la cellule de Couette et sur le temps (2000 images).

ment visible à l'œil nu (figure 2.4 et figure 2.10), mais en plus nous pouvons mesurer de petites variations spatiales. L'anisotropie, correspondant à une différence entre  $M_{rr}$  et  $M_{\theta\theta}$ , n'est pas nulle dans la boîte extérieure.

$M_{r\theta}$  est plus grand dans la boîte intérieure que dans les boîtes extérieures, reflétant l'orientation préférentielle induite par le cisaillement. Il est intéressant de noter que  $M_{r\theta}$  n'est pas localisé près de la roue intérieure, mais décroît lentement avec la distance à la roue intérieure.

## 2.4.2 La déformation Statistique

### Déformation d'un milieu élastique classique

Lorsqu'un milieu élastique est déformé dans une géométrie de Couette, le tenseur de déformation peut se décomposer en 2 parties (cf annexe B) :

$$\overline{\overline{u}} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} \\ \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - \frac{b}{r^2} & 0 \\ 0 & a + \frac{b}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Le premier terme de droite est non diagonal et correspond à un cisaillement pur. Le second terme du membre de droite est diagonal et correspond à une compression. Les constantes  $a$  et  $b$  dépendant des conditions aux limites.

### Composante non diagonale

Nous avons vu que dans le régime stationnaire, la composante non diagonale  $U_{r\theta}$  du tenseur de déformation statistique sature (cf. figure 2.7). Le profil d'équilibre résulte d'un équilibre entre la *charge* de déformation imposée par le cisaillement et la *décharge* que provoque les mouvements plastiques. La variation de  $U_{r\theta}$  en fonction de la distance

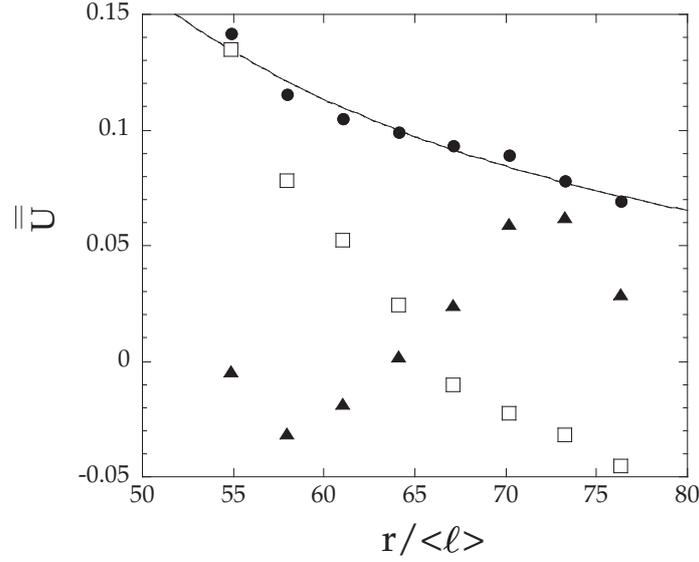


FIG. 2.11 – Série 2 : Régime permanent. Composante du tenseur déformation stockée  $\overline{U}$  ( $\blacktriangle$  :  $U_{rr}$  ;  $\square$  :  $U_{\theta\theta}$  ;  $\bullet$  :  $U_{r\theta}$ ) en fonction de la distance au centre de la cellule de Couette. La ligne représente le meilleur ajustement pour  $U_{r\theta}$  avec une fonction de la forme  $\frac{d}{r^2}$ , avec  $d = (410 \pm 7)\langle \ell \rangle^2$ .

suit une loi en  $1/r^2$  (cf figure 2.11) comme dans une déformation élastique (cf B) :

$$\langle U_{r\theta} \rangle = \Gamma_m \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} \quad (2.18)$$

On peut ainsi déterminer un cisaillement  $\Gamma_m$  correspondant à la déformation qu'il faudrait imposer à un milieu élastique pour obtenir la même déformation :  $\Gamma_m = 0.171 \pm 0.003$ .

Cette valeur est à comparer aux valeurs de  $\Gamma_s$  données par la figure 2.9. Soulignons que  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_m$  ne sont pas mesurée de la même façon, puisque  $\Gamma_s$  se réfère à la déformation appliqué par la roue interne dans le régime transitoire, alors que  $\Gamma_m$  provient du profil de la déformation statistique. Dans la série 1, on passe d'une déformation correspondant au sens de rotation trigonométrique à une déformation dans le sens horaire pour un cisaillement de  $\Gamma_s$ . On s'attend donc  $\Gamma_s \sim 2\Gamma_m$ . Pour les boîtes proches, c'est bien vérifié pour la boîte 1, puisque  $\Gamma_s(\text{boite1}) = 0.35$ .

### Composantes diagonales

Sur la figure 2.11, on peut constater que les composantes  $U_{rr}$  et  $U_{\theta\theta}$  ne sont pas nulles : la déformation dans l'état stationnaire n'est donc pas un cisaillement pur, ce qui est étonnant. La partie diagonale de la déformation ne ressemble cependant pas non plus à une simple compression car les composantes diagonales se croisent entre la boîte 4 et la boîte 5 ( $r/\ell \sim 64$ ). En effet, dans une compression, les composantes diagonales sont égales lorsque le rayon est grand ( $\frac{a}{r^2} \sim 0$ ) : les composantes diagonales devraient être égales dans la boîte la plus éloignée, c'est à dire la 8.

Nous voyons deux explications possibles à ce phénomène. Cette compression provient des contraintes générées au moment de la formation de la mousse et du remplissage de

la cellules de Couette. Celles-ci n'aurait pu relaxer complètement malgré la préparation initiale [32]. Une autre explication peut provenir de la rupture de la symétrie par rotation du fait d'un écoulement secondaire dans la cellule de Couette. En effet, Debrégeas *et al* on montré qu'il y avait une vitesse non nulle dans la direction radiale, résultant de la rotation solide d'amas de bulles. Ces *rouleaux* correspondent à des mouvement réversibles et sont éphémères : ils ne durent que pendant des cisaillements du même ordre que le temps nécessaire à la roue interne pour se déplacer d'un diamètre de bulle.

### 2.4.3 Relation Contrainte Déformation

Pour mesurer la contrainte capillaire dans la mousse, nous avons utilisé les hypothèse introduites dans la section 2.1.4. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = 0 \quad , \quad (2.19)$$

car il n'y a pas de force de volume. Nous allons vérifier que le champ de contrainte capillaire que nous avons mesuré satisfait bien cette relation. En supposant que la contrainte ne dépend pas de l'angle  $\theta$ , on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \end{pmatrix} \cdot \quad (2.20)$$

Le cisaillement étant quasi-statique, la contrainte visqueuse est nulle. Il nous reste donc  $\bar{\bar{\sigma}}_{cap}$  et le terme de pression  $p\bar{\bar{I}}$ . Comme nous ne connaissons pas la pression, nous n'avons pu mesurer les composantes diagonales du tenseur  $\sigma_{ii} = (\sigma_{cap})_{ii} + p$ . et nous ne pouvons vérifier qu'une des deux équations du système d'équations 2.19. La composante non diagonale s'écrit  $\sigma_{r\theta} = (\sigma_{cap})_{r\theta}$ . On obtient ainsi l'équation différentielle que doit satisfaire  $\sigma_{r\theta}$  :

$$\frac{d\sigma_{r\theta}}{dr} - \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad , \quad (2.21)$$

dont la solution est :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{c}{r^2} \quad . \quad (2.22)$$

La figure 2.12 montre que la composante croisée du tenseur de contrainte capillaire mesurée sur les images est bien une fonction du type  $(\sigma_{cap})_{r\theta} \propto r^2$ .

### 2.4.4 Relation de Hooke

La *relation de Hooke* est la relation *fondamentale* de l'élasticité linéaire. Elle stipule que, au premier ordre, la contrainte est proportionnelle à la déformation [75]. En introduisant le module de cisaillement  $\mu$  et le module de compression  $K$ , elle s'écrit [75] :

$$\sigma_{ik} = KU_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(U_{ik} - \frac{1}{3}U_{ll}\delta_{ik}) \quad (2.23)$$

Cette relation est valable dans tous les systèmes de coordonnées, car elle est dérivée en écrivant directement l'énergie de déformation en fonction des composantes du tenseur de déformation. Ce dernier dépend par contre du système de coordonnées. En coordonnées polaires, la relation de Hooke se met sous la forme suivante :

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu U_{r\theta} \quad (2.24)$$

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 2\mu(U_{rr} - U_{\theta\theta}) \quad . \quad (2.25)$$

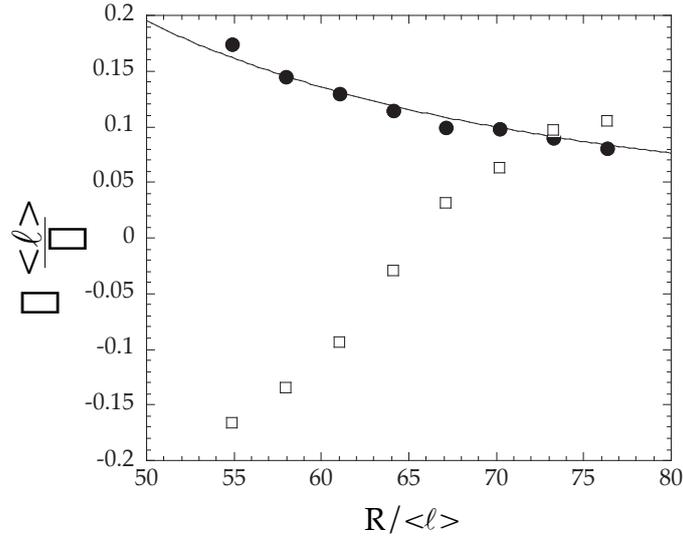


FIG. 2.12 – Série 2 : Régime permanent. Composantes du tenseur de stress élastique ( $\bullet$  : shear stress  $\sigma_{r\theta}$ ;  $\square$  : normal stress difference  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ ), exprimé en unité de  $\Gamma/\langle \ell \rangle$  en fonction de la distance au centre de la cellule de Couette. La ligne est le meilleur ajustement de  $\sigma_{r\theta}$  avec une fonction de la forme :  $cst/r^2$ .

La figure 2.13 donne la représentation graphique de ces deux équations et montre que la mousse se comporte en moyenne comme un milieu élastique si l'on utilise la déformation statistique. La pente sur la figure représente deux fois le module élastique de cisaillement, ce qui nous donne :  $\mu = (0.59 \pm 0.02) \frac{\Lambda}{\langle \ell \rangle}$ , pour un désordre dans la longueur des liens de  $\frac{\langle \ell^2 \rangle}{\langle \ell \rangle^2} = 1.08$ , et une polydispersité en surface des bulles de l'ordre de 30%. Le module élastique d'un réseau hexagonal de bulles monodisperses est donné par  $\mu_{hexa} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}\langle \ell \rangle} = 0.577 \frac{\Lambda}{\langle \ell \rangle}$ , ce qui est très proche de notre mesure [92]. D'autres mesures du module de cisaillement par la même technique (déformation statistique) ont été réalisées dans des mousses de savon et dans des mousses de Langmuir. Asipauskas, Aubouy, Glazier, Graner et Yi ont mesuré le module de cisaillement d'une mousse sèche ( $\phi < 5\%$ ) s'écoulant à travers une constriction et ont donné des résultats supérieurs de 20% à  $\mu_{hexa}$  [4]. Les auteurs ont interprété cet écart par l'effet d'un désordre important dans la taille des côtés :  $\frac{\langle \ell^2 \rangle}{\langle \ell \rangle^2} = 1.22$ . Ce désordre, qui est dû au taux important de déformation imposé par l'écoulement (la polydispersité en taille de bulle est relativement faible puisqu'inférieure à 5%) suggère que le module élastique varie selon le taux de déformation, par l'intermédiaire de  $\frac{\langle \ell^2 \rangle}{\langle \ell \rangle^2}$ . Les mesures du module de cisaillement réalisées dans les mousses de Langmuir par Courty, Dollet, Elias, Heinig et Graner [26] ont donné des résultats très proches de la valeur théorique d'un réseau hexagonal.

## 2.5 Régime Permanent : fluctuations temporelles

Le tenseur de texture nous fournit un bon outil pour étudier les fluctuations temporelles dans le régime stationnaire. Nous nous sommes intéressés aux incréments des composantes de  $\overline{\overline{M}}$  ainsi qu'à leurs auto-corrélations. La répartition de  $M$  s'est faite par la position des vertex (cf équation 2.13). Le rayon du centre de la boîte est donné par :

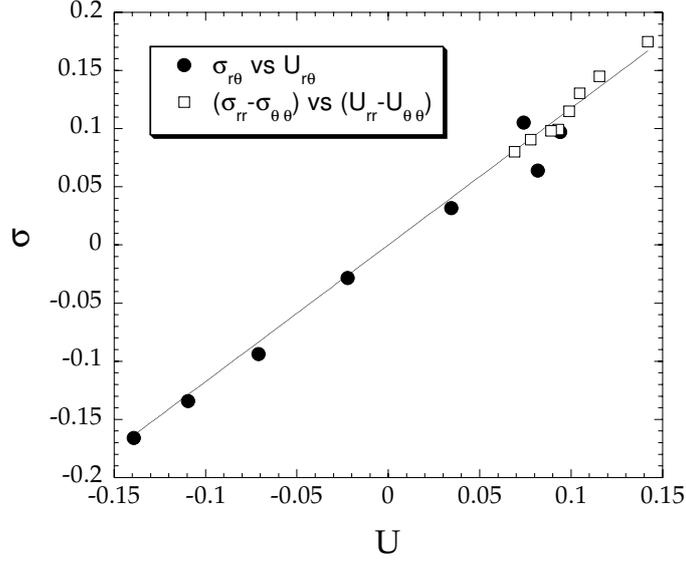


FIG. 2.13 – Série 2 : Régime permanent. Relation de Hooke (équation 2.25) dans les mousses. On a représenté, en unités de  $\Lambda/\ell$ , la contrainte  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$  en fonction de  $(U_{rr} - U_{\theta\theta})$  et  $\sigma_{r\theta}$  en fonction de  $U_{r\theta}$ . La droite est une régression linéaire et donne  $2\mu = 1.17 \pm 0.04$ .

$R_2^i = [2.8 + 3.1(i - 0.5)]\langle\ell\rangle$ , ce qui correspond à une largeur de boîte de  $3.1\langle\ell\rangle$ .

### 2.5.1 Histogramme des Incrémentes

Pour étudier l'amplitude des fluctuations, nous avons calculé les incréments du tenseur de texture définis par  $M_{ij}(\Gamma + d\Gamma) - M_{ij}(\Gamma)$ . Les histogrammes ( cf figure 2.14 a, b, c) des incréments de  $\overline{M}$  ne montrent qu'une faible dissymétrie entre les incréments positifs, correspondant à l'augmentation de l'anisotropie et des incréments négatifs liés à une baisse de l'anisotropie provoquée par des T1. Cette dissymétrie est plus importante sur la composante croisée, qui est celle sollicitée par le cisaillement de Couette. Il n'y a pas d'événement dramatique de type avalanche ([64]). Ceci est d'ailleurs aisément vérifiable sur les images : les T1 se produisent généralement isolément dans la mousse.

La largeur de ces histogrammes diminue en s'éloignant de la roue interne (cf 2.14 d), l'écart type diminuant d'un facteur 10. Cela traduit une diminution de l'amplitude des fluctuations des composantes du tenseur de structure : les fluctuations ont bien lieu dans la zone la plus proche de la roue interne.

### 2.5.2 Autocorrélations

Nous avons calculé les auto-corrélations  $C_{M_{r\theta}M_{r\theta}}$  des fluctuations pour un incrément  $\delta\Gamma$  de cisaillement, en utilisant la définition :

$$C_{MM}(\delta\Gamma) = \frac{\langle(M(\Gamma) - M_{\text{stat}})(M(\Gamma + \delta\Gamma) - M_{\text{stat}})\rangle}{\langle(M(\Gamma) - M_{\text{stat}})^2\rangle}, \quad (2.26)$$

où,  $M(\Gamma)$  et  $M_{\text{stat}} = \langle M \rangle$  sont respectivement les valeurs instantanées des composantes de  $\overline{M}$ , et sa moyenne sur le régime stationnaire. La figure 2.15 montre les auto-corrélogrammes pour toutes les boîtes. On peut constater une forte décorrélation initiale

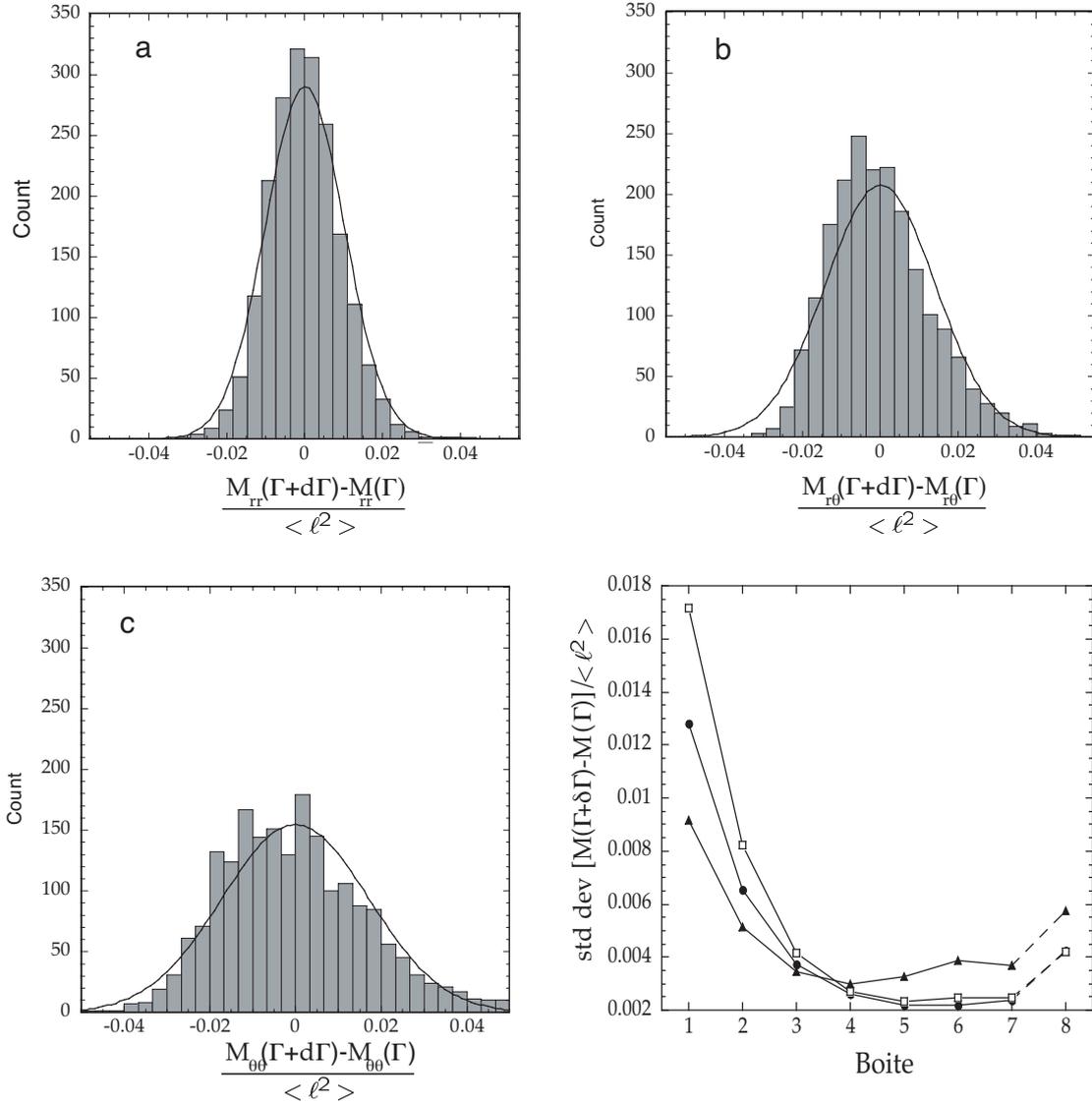


FIG. 2.14 – Statistique sur les incréments des composantes du tenseur de texture dans le régime permanent (Série 2). **a**), **b**), **c**) histogrammes des incréments de  $M$  dans la boîte N°1 (respectivement pour les composantes  $\blacktriangle$  :  $M_{rr}$ ;  $\bullet$  :  $M_{r\theta}$ ;  $\square$  :  $M_{\theta\theta}$ .) La courbe est la gaussienne ayant une largeur égale à l'écart type. **d**) : variation de l'écart type des histogrammes des incréments de  $\overline{M}$  en fonction de la boîte.

suivie d'une décorrélation plus lente. La décorrélation initiale est plus marquée pour la composante croisée  $M_{r\theta}$  et dépend beaucoup de la position dans la mousse. La figure 2.16 rassemble les autocorrélations de toutes les boîtes, calculées pour  $M_{r\theta}$  dans le régime stationnaire. Pour estimer le taux de décroissance initiale  $\Gamma_{\text{decorr}}^{-1}$ , nous avons ajusté les courbes par une fonction de la forme  $M_{r\theta} = \exp(\Gamma \Gamma_{\text{decorr}}^{-1})$  pour chacune des boîtes. Le résultat est présenté dans l'insert de la figure 2.16. On y voit une très forte décroissance initiale près de la roue intérieure, avec un cisaillement de décorrélation d'environ  $\Gamma_{\text{decorr}} \approx 1/30$ . Près de la roue extérieure, le signal reste beaucoup plus longtemps corrélé avec  $\Gamma_{\text{decorr}} \approx 1$ .

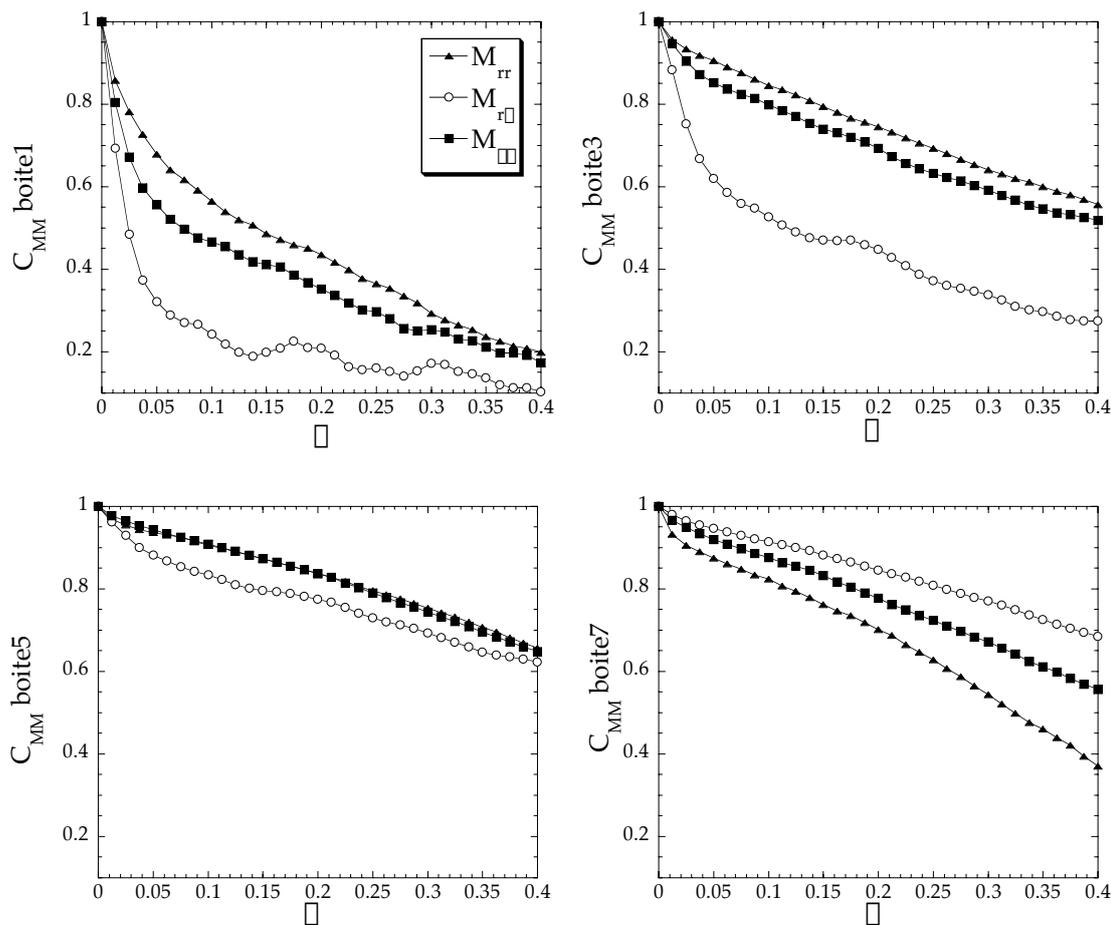


FIG. 2.15 – Autocorrélation  $C_{MM}(\delta\Gamma)$  dans le régime permanent (série 2) des composantes du tenseur de texture  $\overline{\overline{M}}$  pour les boîtes impaires (1, 3, 5 et 7).

Ces taux de décorrélation sont à relier du champ de vitesse à l'intérieur de la mousse. Celui-ci se compose de deux contributions : élastique et plastique. La première est constituée par des mouvements de faible amplitude mais se faisant sur une grande échelle. Elle ne génère qu'une faible décorrélation. La seconde s'articule autour des T1<sup>12</sup>, qui génèrent un champ de vitesse de forte amplitude mais sur une petite distance. Il en résulte une forte décorrélation dans les composantes de  $\overline{\overline{M}}$  : la mousse perd alors la mémoire des conditions initiales [40, 76, 115, 91]. Ainsi, on peut attribuer la décroissance de la fonction d'autocorrélation à la présence de T1. Si on regarde la variation spatiale du taux de décorrélation initial  $\Gamma_{\text{decorr}}^{-1}$ , on retrouve un profil du même type que celui de la vitesse, c'est à dire une exponentielle décroissante de la forme  $\Gamma_{\text{decorr}}^{-1} \sim \exp(r/\lambda_\Gamma)$ , avec  $\lambda_\Gamma \sim 4d_{ppv}$ , où  $d_{ppv}$  est la distance entre plus proche voisins. Le boîte 8 a été exclue de cet ajustement, une partie des fluctuations dans cette boîte provenant d'artefacts liés au contraste variable des images. Ainsi, les fluctuations de la déformation restent localisées près de la roue intérieure, comme la vitesse [33]. Il convient de noter que la décroissance spatiale du taux de décorrélation  $\Gamma_{\text{decorr}}^{-1}$  se fait sur une distance plus grande

<sup>12</sup>Ces événements plastiques sont toutefois aussi accompagnés d'une déformation élastique de type quadripolaire [66].

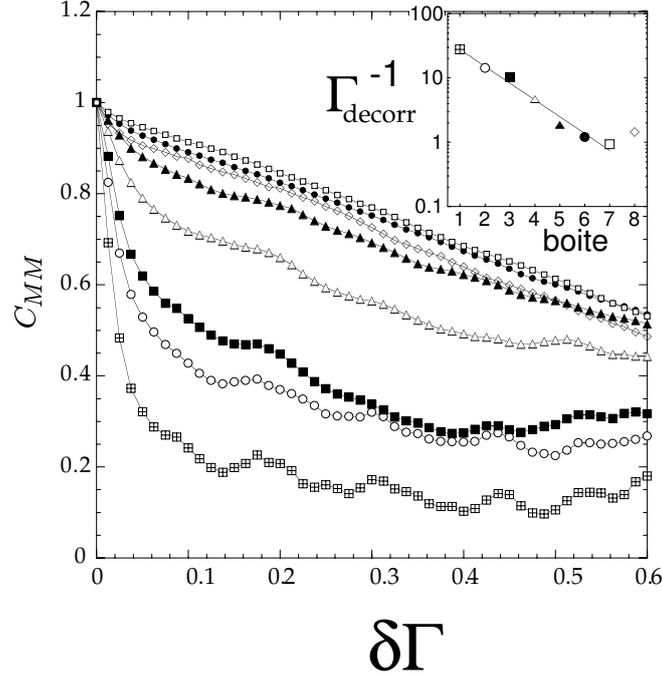


FIG. 2.16 – Série 2 : autocorrélation de la composante croisée  $M_{r\theta}$  du tenseur de texture défini par l'équation 2.26. Les données, mesurées dans le régime permanent, pour  $\Gamma > 8$  sont moyennées sur les quatre quadrants de la mousse. Boîte 1 :  $\boxplus$ , boîte 2 :  $\circ$ , boîte 3 :  $\blacksquare$ , boîte 4 :  $\triangle$ , boîte 5 :  $\blacktriangle$ , boîte 6 :  $\bullet$ , boîte 7 :  $\square$ , boîte 8 :  $\diamond$ . **Insert** : Taux de décorrélation initial  $\Gamma_{\text{decorr}}^{-1}$  dans chaque boîte. Il a été obtenu grâce à un ajustement par une fonction exponentielle décroissante pour les petites valeurs de  $\delta\Gamma$ . La droite est une régression linéaire.

que les profils de vitesse, puisque pour une mousse de fraction volumique de  $\phi = 5.2\%$ , la décroissance de la vitesse se fait sur une distance caractéristique de  $\Lambda = 1d_{ppv}$  [33].

## 2.6 Conclusion

Nous avons utilisé deux nouveaux outils, le tenseur de texture et le tenseur de déformation statistique pour étudier les propriétés élastiques d'une mousse sous cisaillement permanent et quasi-statique.

Le régime transitoire (série 1) est un régime purement élastique, sans T1, avec une composante croisée du tenseur de déformation statistique suivant les prédictions de l'élasticité classique. Lorsque la déformation appliquée dépasse un seuil  $\Gamma_s$ , la déformation statistique sature et la mousse passe dans un régime plastique. Cette transition ne se fait pas au même moment pour toute la mousse, la déformation saturant d'abord près de la roue intérieure.

Lorsque la déformation est beaucoup plus grande que  $\Gamma_s$  (série 2), il existe un régime stationnaire dans lequel la déformation de la mousse résulte d'un équilibre entre l'augmentation de la déformation du fait du cisaillement et la relaxation de la déformation produit par les T1. Dans ce régime, la variation spatiale de la moyenne de la composante croisée du tenseur de déformation élastique  $\langle U_{r\theta}(r) \rangle$  correspond à la déformation que su-

birait un matériaux purement élastique soumis à un cisaillement  $\Gamma_m$ . Cela nous permet de définir un cisaillement seuil (*yield shear*)  $\Gamma_m = 0.17$  qui correspond au cisaillement maximal que peut accepter une mousse dans un régime quasi-statique. La déformation statistique nous a permis de mettre en évidence une déformation liée à une compression de la mousse. Cette déformation pourrait provenir de la formation de la mousse.

Nous avons aussi montré que la contrainte moyenne et la déformation statistique sont toujours linéaires et la relation de Hooke est toujours valable : La mousse se comporte en moyenne comme un matériau parfaitement élastique, malgré les événements plastiques ayant lieu dans la zone de cisaillement.

Le caractère plastique du régime permanent se retrouve dans les fluctuations du tenseur de déformation et du tenseur de contrainte. Ces fluctuations suivent une variation spatiale du même type que le champ de vitesse et sont localisées près de la roue interne.

En décomposant les comportements élastiques et les comportements plastiques, la déformation statistique permet de se faire une image simple de ce qui se passe dans une mousse sous cisaillement. La nouveauté de ces outils réside dans l'approche statistique qui permet de caractériser, à l'échelle *mésoscopique*, l'état élastique d'une mousse même dans un régime plastique. De plus, ses fluctuations s'avèrent être intimement liées au champ de vitesse des bulles. Il se révèle donc être un outil précieux pour l'étude de la géométrie et la dynamique de réseau variés, comme les mousses, mais aussi les granulaires, les agrégats de cellules biologiques, les joints de grains dans les cristaux [37]. . .

## Chapitre 3

# Bord de Plateau unique

### 3.1 Présentation

#### Motivations

Le bord de Plateau est au cœur de la mousse : quasiment toute l'eau y est concentrée. De plus, il joue un rôle tout à fait primordial dans le drainage et la conductivité de la mousse. Nous proposons ici une étude *in vitro* des propriétés d'un bord de Plateau. Pour ce faire, nous avons utilisé un cadre rigide parallélépipédique sur lequel nous avons tendu des films d'une solution de savon pour obtenir un long bord de Plateau unique. Dans ce chapitre, nous tacherons de répondre aux questions suivantes :

- Quel est le type d'écoulement à l'intérieur d'un bord de Plateau unique ?
- Quelle est la réponse élastique d'un bord de Plateau à une déformation ?
- Quelle est la vitesse de propagation d'une variation du rayon de courbure dans un bord de Plateau ?

L'injection de liquide directement dans un bord de Plateau, nous permet d'atteindre des débits bien supérieurs à ceux accessibles dans les mousses, si bien que la vitesse moyenne de l'écoulement peut y atteindre  $300 \text{ cm/s}$ , alors que les vitesses maximales des fronts de drainage dans les mousses ne sont que de l'ordre de  $1 \text{ cm/s}$ . En effet, dans les mousses, lorsque le débit est trop important, le front de drainage forcé est instable et conduit à la formation de rouleaux de convections de bulles à l'intérieur de la mousse [59, 104, 114].

Lorsque le débit de liquide injecté dans le bord de Plateau est important, nous allons voir qu'un déplacement par rapport à la position d'équilibre du bord de Plateau provoque une ondulation du bord de Plateau et une déformation des films de savon. Cette ondulation va nous permettre de sonder la réponse élastique d'un bord de Plateau.

Enfin, nous terminerons ce chapitre par l'étude théorique de la propagation d'une variation du rayon de courbure du bord de Plateau. Il s'agit en fait du mode Taylor symétrique qui, contrairement à un jet de liquide, est stable dans un bord de Plateau.

#### Bref historique

Jusqu'à présent, la plupart des expériences ont cherché à déterminer son rôle dans le drainage de façon indirecte, en attribuant les propriétés de drainage macroscopique des

FIG. 3.1 – Schéma du cadre utilisé pour obtenir un bord de Plateau de  $8.9\text{cm}$ . Un capillaire en verre de diamètre variable est plongé directement dans le bord de Plateau pour injecter une solution à un débit  $Q$ .



mousses à l'écoulement se produisant à l'intérieur du bord de Plateau. S'il est courant de calculer numériquement les profils de vitesses des écoulements qui ont lieu à l'intérieur d'un bord de Plateau unique [78, 27, 86], peu d'expériences se sont penchées sur cette question. Son observation directe dans une mousse nécessite une lourde instrumentation [100] et il est beaucoup plus simple de l'étudier à *l'extérieur* d'une mousse. M. in het Panhuis *et al* sont les premiers à avoir exploré cette *variation de l'expérience de Plateau* [61, 112]. Ils ont montré qu'un débit important déformait la géométrie d'un vertex en le déplaçant vers le bas et que la variation du diamètre ne suivait pas la loi de Poiseuille [87]. D'autres expériences de drainage sur un bord de Plateau unique sont menées par Olivier Pitois, dans le groupe de Michèle Adler [89] à Marne la Vallée.

### 3.1.1 Montage

#### Cadre

Pour obtenir notre bord de Plateau, nous avons utilisé un cadre en forme de prisme droit triangulaire en tige filetée de  $3\text{ mm}$  de diamètre. La base et le sommet du cadre sont des triangles équilatéraux de  $51\text{ mm}$  reliés par des tiges de  $110\text{ mm}$ . Lorsque l'on plonge le cadre dans une solution de surfactants, on obtient trois films jointifs à  $120$  degrés formant un bord de Plateau de  $8.9\text{ cm}$  de long. Trois autres films au sommet et à la base du cadre complètent la structure (cf. figure 3.1).

#### Injection

Pour injecter le liquide et forcer l'écoulement dans le bord de Plateau, nous avons utilisé un pousse-seringue<sup>1</sup> permettant de délivrer des débits de  $0.1$  à  $99.9\text{ ml/min}$ . Un capillaire en verre directement plongé dans le bord de Plateau nous assure que la totalité du liquide délivré par la pompe transite bien par celui-ci et non par les films [61]. Nous verrons par la suite que le diamètre intérieur de ces capillaires, que l'on a fait varier entre  $1.6$  et  $0.23\text{ mm}$ , a une grande influence sur l'écoulement du liquide.

### 3.1.2 Solutions de savon

#### Stabilité des films

La taille importante de nos films de savon pose la question de leur stabilité. En effet, étant soumis à la gravité, l'épaisseur du film se stratifie avec un profil de type exponentiel

<sup>1</sup>p-6000 Pharmacia Biotech

[25] pendant que le liquide contenu dans les films s'écoule vers le bas. L'épaisseur diminue donc jusqu'à atteindre celle du film noir de Newton. Celui-ci apparaît au sommet et progresse vers le bas. Bien que thermodynamiquement stable, ce film est particulièrement fragile. Pour augmenter le temps de vie des films, on a donc tout intérêt à en empêcher la formation. Pour cela, on peut jouer sur la composition de la solution, en augmentant la viscosité de volume de la solution (ajout de Glycérol) ou en choisissant un surfactant à forte viscosité de surface. La vitesse dans les films suit alors un profil de Poiseuille, ce qui ralentit fortement le drainage des films et retarde la formation du film noir. L'ajout de glycérol permet aussi de limiter les pertes d'eau par évaporation. Il faut bien sûr protéger le montage des courants d'air et essayer de garder une forte humidité. L'utilisation d'une tige filetée à la place d'une tige lisse permet de constituer une réserve d'eau qui pourra réalimenter le film. L'injection en continu de liquide dans notre bord de Plateau contribue aussi à la stabilité des films. En maintenant le rayon de courbure du bord de Plateau à une valeur importante, on le maintient aussi en faible dépression par rapport au film, ce qui limite l'aspiration du liquide depuis le film vers le bord de Plateau. Ainsi la durée de vie moyenne d'un film dépasse 10 mn.

### Solutions utilisées

La solution de savon est composée de 1% de *FAIRY liquids*, un liquide vaisselle commercialisé au Bénélux et en Irlande et de 7 % de glycérol. Ce surfactant donne des écoulements de type *channel dominated* dans les mousses [106] et permet de faire des films très stables en ralentissant le drainage. Nous avons aussi utilisé des solutions de SDS dont la viscosité de surface est faible et des solutions de SDS et de dodécanol pour augmenter la viscosité de surface [38].

### 3.1.3 Mesure du diamètre du bord de Plateau

Un bord de Plateau constitue 3 dioptries sphériques divergents et est assimilable à un diffuseur de lumière. En l'éclairant avec un faisceau de lumière parallèle, on obtient une ombre portée correspondant aux rayons lumineux l'ayant traversé. Si le faisceau est perpendiculaire à un des films, l'extension horizontale de cette ombre correspond à la hauteur du triangle équilatéral (cf. figure 3.2) dans lequel est inscrit le bord de Plateau. Elle vaut  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ .

On utilise un faisceau faiblement divergent ( $13^\circ$ ) de laser Hélium-néon placé à 20cm devant le bord de Plateau. L'écran est placé à 60cm derrière le bord de Plateau. L'ombre du bord de Plateau est imagé par une caméra CCD équipée d'un zoom. On obtient ainsi une résolution de  $7\mu\text{m}/\text{pixel}$ . La calibration des images se fait en éclairant le capillaire dont le diamètre extérieur est connu et en mesurant la taille de son ombre.

La principale difficulté réside dans l'interprétation de l'image obtenue. Elle est le résultat d'effets d'optique géométrique dus à la courbure du bord de Plateau et d'interférences dans les films et dans le bord de plateau (cf. figure 3.3). On mesure la taille de l'ombre centrale en la comparant aux niveaux de gris moyen de part et d'autre de cette zone.

Grâce à la mesure du rayon de courbure du bord de Plateau, nous pourrions

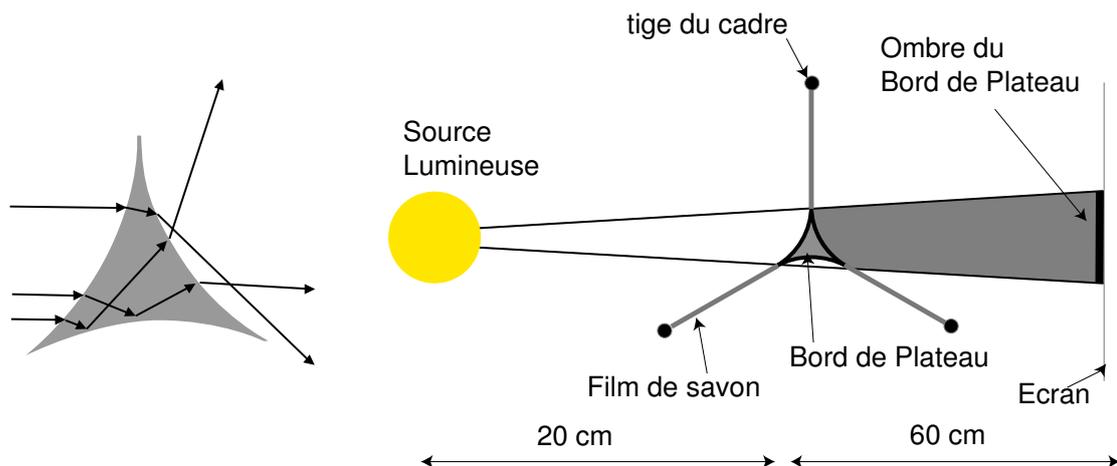


FIG. 3.2 – **A gauche** : Chemins optiques des rayons lumineux issus d'un faisceau de lumière parallèle. Après avoir traversé le bord de Plateau, les rayons ne sont plus parallèles entre eux : le bord de Plateau se comporte comme un diffuseur de lumière. **A Droite** : Principe de la mesure du rayon de courbure (vu du dessus). Le bord de Plateau projette une ombre sur le fond uniforme des rayons non déviés issus des films. L'ombre projetée est proportionnelle à  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ .

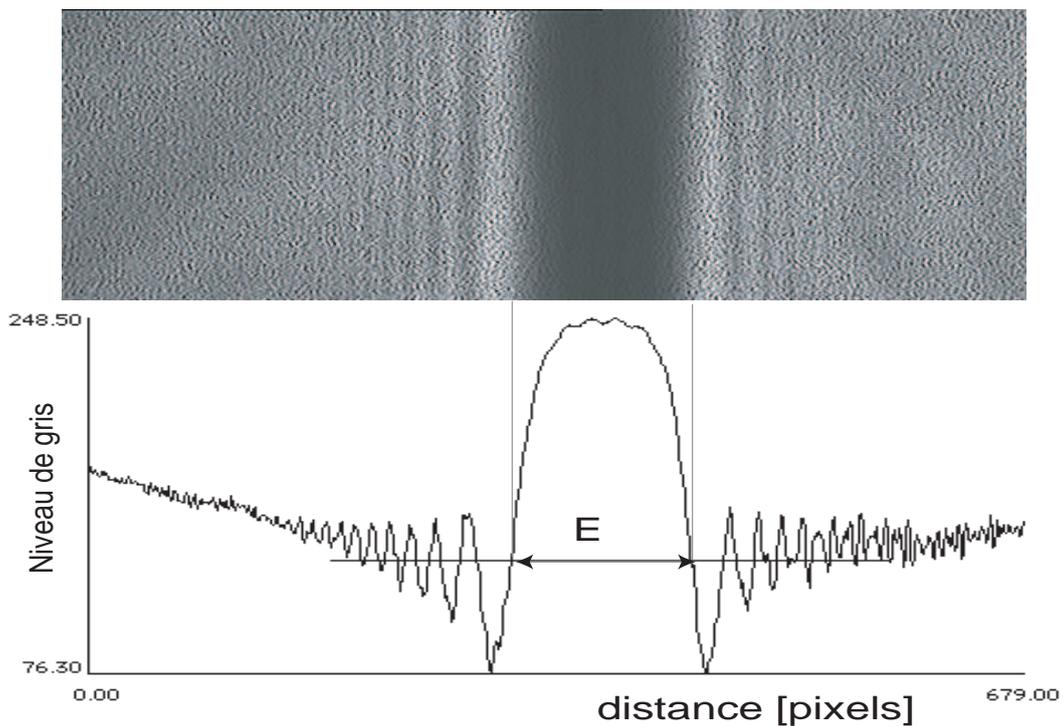


FIG. 3.3 – **En haut** : Ombre portée du bord de Plateau obtenue en éclairant celui-ci avec un faisceau laser. **En bas** : Profil moyen des niveaux de gris de l'image. Les barres horizontales correspondent au niveau moyen de gris de part et d'autre de la zone centrale. E est une fonction affine du rayon de courbure du bord de Plateau.

déterminer la section du bord de Plateau :

$$S = C_{bP} R^2 \quad , \quad (3.1)$$

où  $C_{bP} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \text{tab}$  const, ainsi que la vitesse moyenne dans le bord de Plateau :

$$V = \frac{Q}{S} \quad . \quad (3.2)$$

### 3.1.4 Mesure de la longueur d'onde

L'amplitude de l'ondulation du bord de Plateau étant relativement faible, nous avons utilisé la réflexion d'une nappe laser sur la surface des films afin de détecter les variations de courbure du film. Elle est obtenue en éclairant le film avec une incidence d'environ 30 degrés et en regardant l'image après réflexion sur un écran. La courbure des films provoque une déviation des rayons lumineux car l'angle de réflexion dépend de l'orientation de la normale à la surface des films.

La figure de réflexion forme une *caustique* (cf. figure 3.5). On peut observer le même phénomène dans le fond d'une tasse (cf. figure 3.4). Lorsque la surface réfléchissante est concave, la figure de réflexion est une courbe possédant un point de rebroussement. Il correspond au point où la surface de réflexion est perpendiculaire au faisceau incident<sup>2</sup>. Lorsque la surface est convexe, il n'y a pas de point de rebroussement. En mesurant la distance entre ces points de rebroussement, on a accès à la distance entre les minima d'amplitude et par conséquent à la longueur d'onde de l'ondulation (cf. 3.5). Les images sont calibrées en utilisant la réflexion sur un miroir gradué. La déformation des films est maximale près du Bp et relaxe en s'approchant du cadre.

### 3.1.5 Premières observations

#### Rayon de courbure

On commence par le tirage d'un film sur le cadre en tige métallique qu'on laisse s'équilibrer pendant environ une minute. On injecte le liquide dans le bord de Plateau, en augmentant progressivement le débit. La même expérience renouvelée en commençant avec des valeurs élevées et en diminuant le débit donne des résultats identiques. Le rayon de courbure augmente avec le débit jusqu'à une valeur de saturation  $R_{sat}$  (cf. figure 3.6) qui varie avec le capillaire utilisé. M. in het Panhuis *et al* ont aussi observé cette saturation et l'ont attribué au transport de liquide par les films [61]. Cette hypothèse ne peut expliquer nos résultats car l'utilisation d'un capillaire nous assure que la totalité du liquide est bien injectée dans le bord de Plateau. De plus, lorsque le capillaire est plongé dans un film, on peut observer que le jet issu du capillaire se courbe et revient dans le bord de Plateau. Cela est dû au fait que la pression est moins élevée dans le bord de Plateau que dans les films.

---

<sup>2</sup>Dans le cas d'une surface parabolique, cette courbe se réduit à un unique point : tous les rayons lumineux issus d'un faisceau parallèle convergent vers le foyer de la parabole.

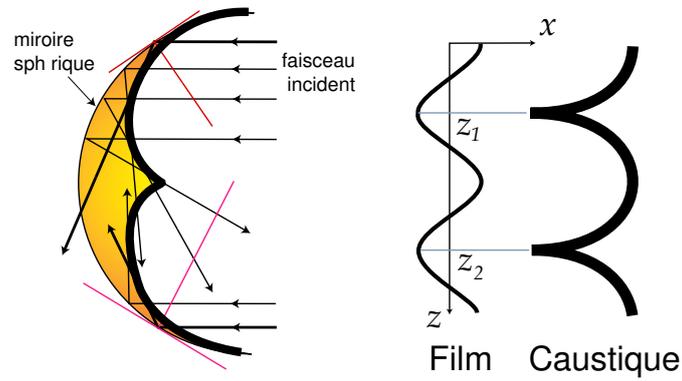


FIG. 3.4 – **A gauche** : La caustique par réflexion d'un faisceau de rayons parallèles sur une surface sphérique produit une cardioïde. Le point de rebroussement correspond à la zone où la surface est parallèle au faisceau incident. **A droite** : Correspondance entre la forme du film et la position des points de rebroussement de la caustique par réflexion.

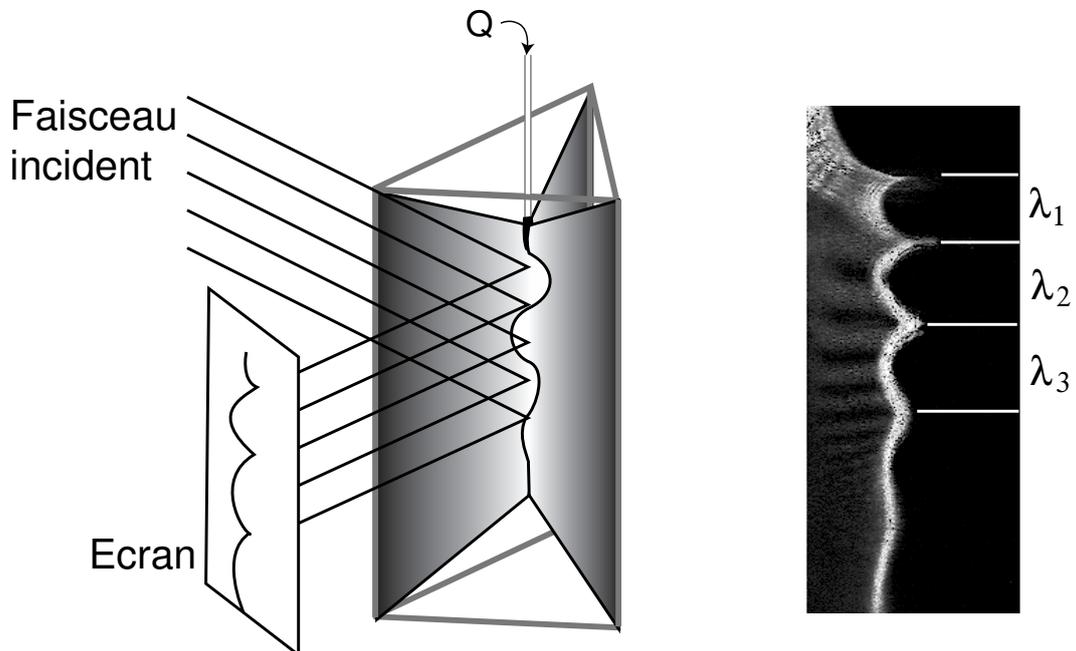


FIG. 3.5 – **A gauche** : Un des films déformé est éclairé par un faisceau laser. Après une réflexion, il se forme sur un écran une caustique. **A droite** : la longueur d'onde de l'ondulation est donnée par la distance entre les points de rebroussement.

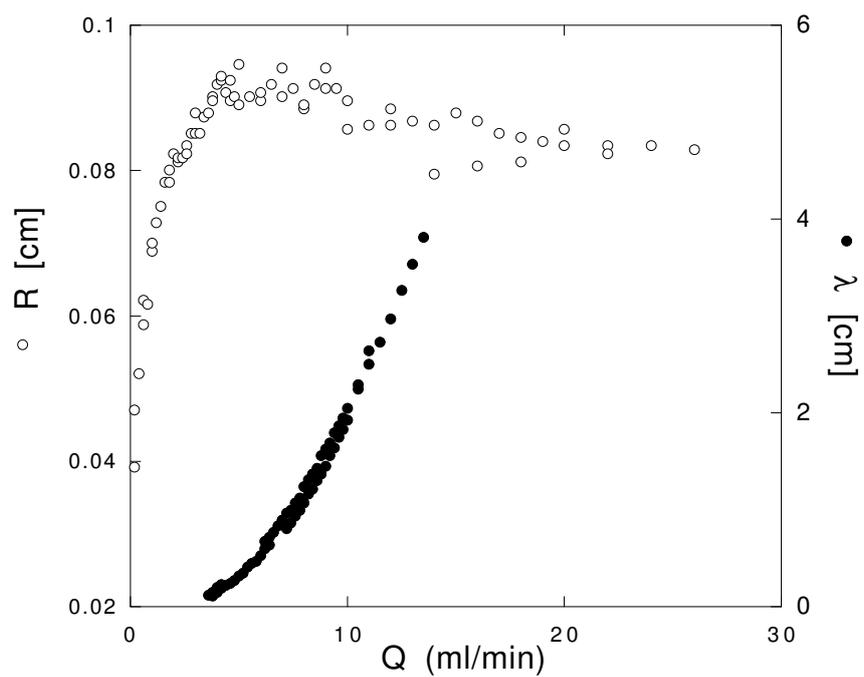


FIG. 3.6 – Variation du rayon de courbure et de la longueur de l'ondulation en fonction du débit. Le diamètre du capillaire vaut  $0.46\text{mm}$ .

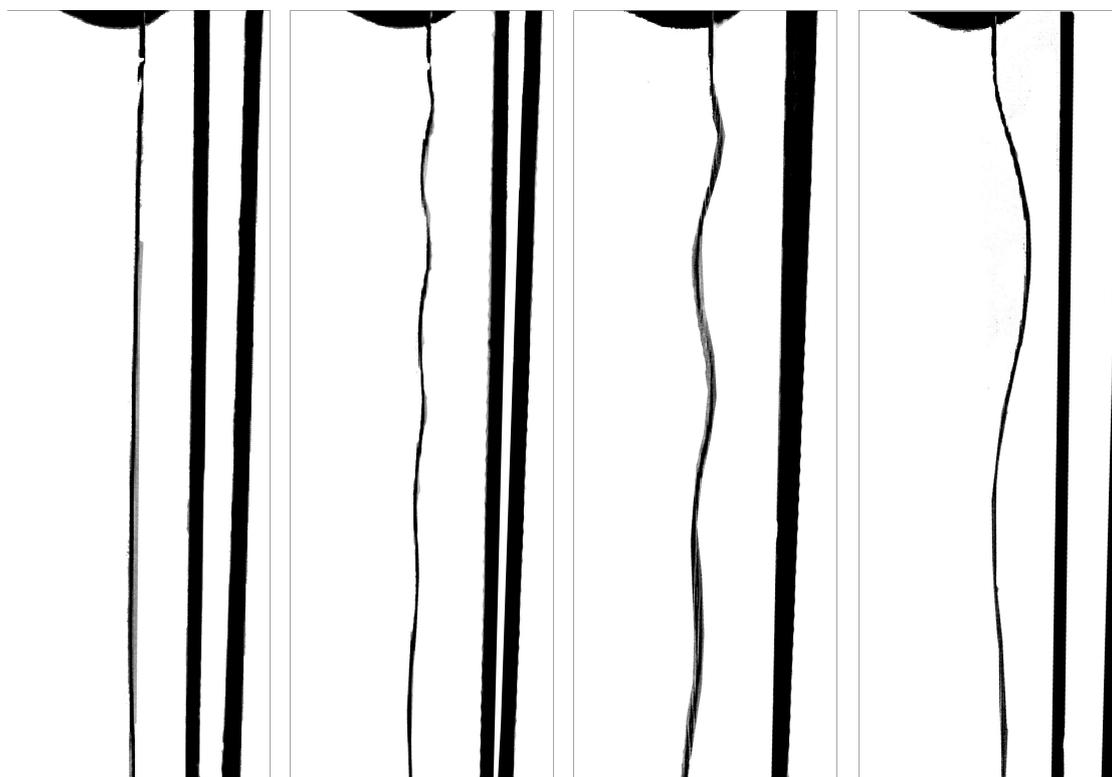


FIG. 3.7 – Ondulation du bord de Plateau. Le débit vaut de gauche à droite  $Q = 7$ ;  $Q = 11$ ;  $Q = 15$ ;  $Q = 18$  ml/min.

**Ondulation du bord de Plateau**

Lorsque le rayon est proche de sa valeur de saturation  $R_{sat}$ , il se produit une ondulation du bord de Plateau (cf. figure 3.6). Cette ondulation est *statique* dans le temps et faiblement amortie dans l'espace. La longueur d'onde augmente avec le débit de liquide injecté et dépend du diamètre du capillaire. Elle se produit toujours dans le plan de l'un des trois films et l'amplitude de la déformation dépend aussi de la position initiale du capillaire.

## 3.2 Écoulement dans le bord de Plateau

Le drainage dans les mousses a mis en évidence l'importance du type de profil de vitesse dans les bords de Plateau. En effet, le régime *channel dominated* est associé à un écoulement de Poiseuille dans les bords de Plateau, alors que le régime *node dominated* est associé à un profil de type bouchon (cf. figure 3.8). L'obtention de l'un ou l'autre des profil est déterminé, en partie, par la viscosité de surface du surfactant utilisé. Ainsi, on s'attend à retrouver un écoulement de Poiseuille car le surfactant utilisé (*Fairy liquids*) possède une grande viscosité de surface et génère dans les mousses un régime *channel dominated* [57].

Par contre, la saturation du rayon de courbure observée aux grands débits de liquide n'est pas compatible avec un écoulement de Poiseuille, mais fait plutôt penser à un écoulement de Bernoulli (cf. figure 3.8).

Nous allons donc étudier dans un premier temps, les faibles débits en les comparant à un écoulement de Poiseuille et dans un second temps, les forts débits en les comparant à un écoulement de Bernoulli.

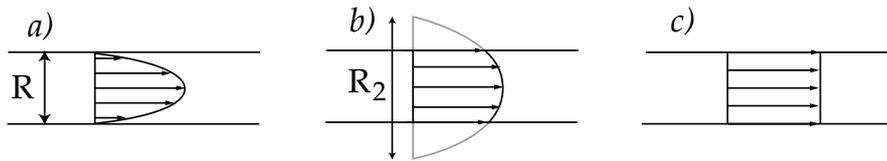


FIG. 3.8 – **a)** Profil de type parabolique, sans glissement aux parois (écoulement de Poiseuille). **b)** Profil parabolique avec glissement. **c)** : écoulement bouchon.

### 3.2.1 Faibles débits

#### Écoulement de Poiseuille dans un bord de Plateau

Reprenons l'expression du débit à travers un bord de Plateau unique donné par l'équation 1.49 :

$$Q_1 = \frac{\beta(M)C_{bP} R^4}{I_c \eta} G \quad (3.3)$$

où  $\beta$  est introduit pour tenir compte du glissement qui se produit aux parois lorsque la viscosité est faible (cf. sous-section 1.6.4). Les variations du rayon de courbure de notre bord de Plateau étant très faibles (moins de 1 mm sur 10 cm), le gradient de pression capillaire est négligeable devant le gradient de pression hydrostatique et la force motrice se réduit à  $G = \rho g$ . Nous utiliserons cette équation sous la forme plus simple :

$$Q = KR^4 \frac{\rho g}{\eta} \quad , \quad (3.4)$$

avec  $K = \frac{\beta(M)C_{bP}}{I_c} = 0.02\beta(M)$  (cf. sous-section 1.6.4).

#### Résultats

Lorsque l'on se limite aux points expérimentaux obtenus avant la saturation du rayon de courbure, on constate que le débit est une fonction du rayon à la puissance

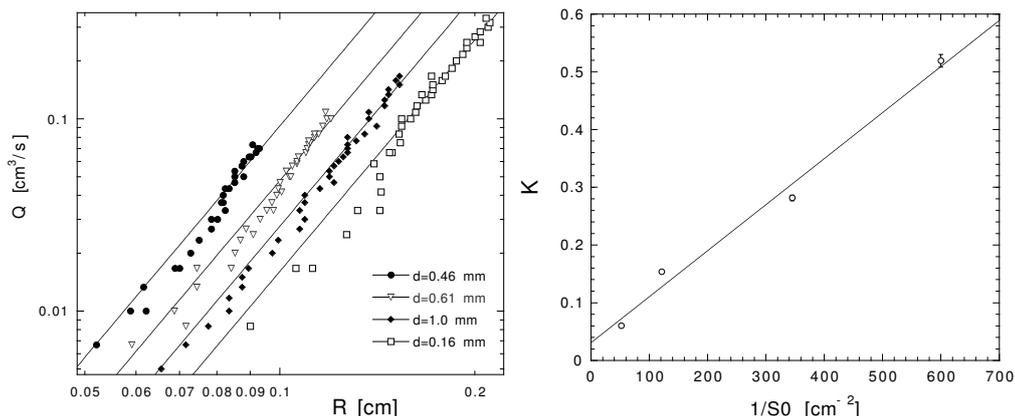


FIG. 3.9 – **A gauche** : Débit  $Q$  en fonction de  $R$ , en échelle logarithmique, pour différents diamètres de capillaire. Seules les mesures correspondant à des faibles débits ont été conservées. Les droites représentent un ajustement du type :  $Q = KR^4$ . **A droite** : Les différentes valeurs de  $K$ , obtenue par l'ajustement des données expérimentales en fonction de l'inverse de la section initiale du capillaire. Une régression linéaire de la forme  $K = \frac{a}{S_0} + K_\infty$ , donne :  $a = 8.0 \cdot 10^{-4} \pm 0.6 \cdot 10^{-4} \text{cm}^2$  et  $K_\infty = 0.03 \pm 0.02$ .

quatrième (cf. figure 3.9). Cependant, la valeur de  $K$  obtenue par l'ajustement des points expérimentaux, dépend de la section initiale du capillaire  $S_0$  (cf. figure 3.9). En représentant les valeurs de  $K$  en fonction de  $1/S_0$ , on obtient une droite de pente  $s$  et d'ordonnée à l'origine  $K_\infty$  :

$$K = \frac{s}{S_0} + K_\infty \quad , \quad (3.5)$$

Cette variation de  $K$  avec la section du capillaire montre que l'écoulement n'est pas stationnaire : pour un même débit, la vitesse moyenne dans le bord de Plateau dépend de la vitesse initiale  $V_0 = \frac{Q}{S_0}$ . L'équilibre entre la dissipation visqueuse et la force motrice (la gravité) n'est pas réalisé à l'endroit où est effectuée la mesure du rayon de courbure. On pourra trouver un exemple d'écoulement de Poiseuille non stationnaire dans [9]. Ce type d'écoulement est décrit par une équation de diffusion de la vitesse. La vitesse initiale à la sortie du capillaire,  $V_0 = Q/S_0$ , est supérieure à celle correspondant à l'équilibre entre dissipation et gravité, ce qui se traduit par un débit supérieur à celui prévu par un écoulement de Poiseuille stationnaire (cf. figure 3.10). Une importante contrainte visqueuse est générée sur les parois du bord de Plateau et les parois se mettent en mouvement. L'écoulement est alors une superposition d'un profil de Poiseuille et d'un écoulement bouchon.

Lorsque la vitesse initiale est nulle, c'est à dire lorsque la section  $S_0$  est très grande, cet effet doit disparaître. Si l'on extrapole la droite  $K(\frac{1}{S_0})$  obtenue par régression linéaire sur la figure 3.9, on trouve pour une surface infinie,  $K_\infty = 0.03 \pm 0.02$ . Cette valeur est compatible avec un écoulement à parois rigides dans un bord de Plateau, pour lequel on trouve  $K = 0.02$ .

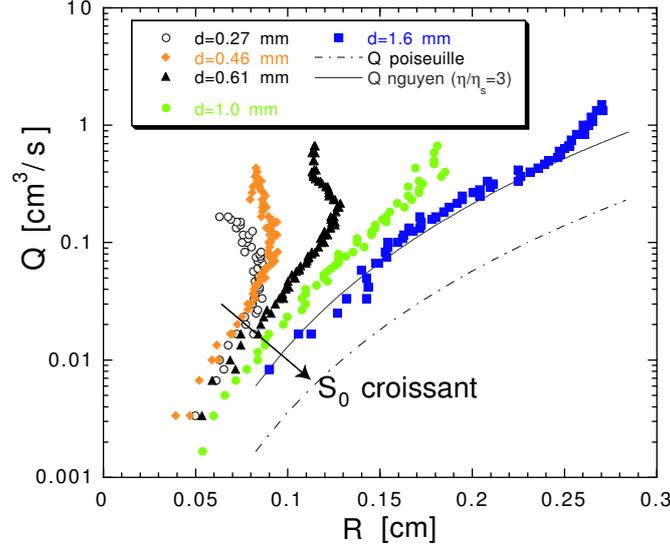


FIG. 3.10 – Représentation semi-logarithmique du débit en fonction du rayon de bord de Plateau. Le trait en pointillé correspond à un écoulement de Poiseuille stationnaire avec surface rigide. Le trait plein est une solution numérique obtenue par Nguyen [86] qui tient compte d'un mouvement aux parois (cf. équation 1.52), avec comme paramètre libre le rapport des viscosités  $\eta/\eta_s = 3$ .

### 3.2.2 Forts débits

La saturation du rayon de courbure lorsque l'on augmente le débit de liquide injecté fait irrémédiablement penser à un écoulement de Bernoulli, dans lequel la dissipation est négligeable. Nous allons établir les propriétés d'un tel écoulement et nous le comparerons aux résultats obtenus pour les débits importants.

#### Équation de Bernoulli

L'écoulement que nous considérons est composé de trois zones (cf. figure 3.11) :

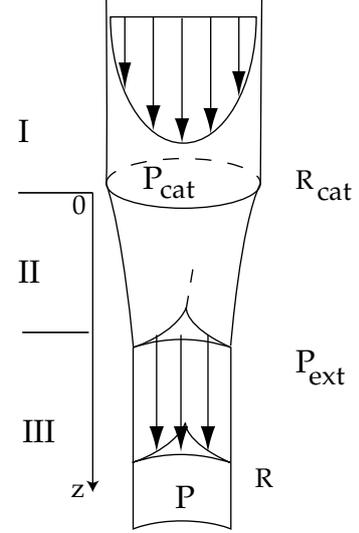
- I. À l'intérieur du capillaire, de section cylindrique de rayon  $R_{cap}$ .
- II. la *zone de raccord* entre le capillaire et le bord de Plateau. La forme est indéterminée car le rayon de courbure doit changer de signe.
- III. Dans le bord de Plateau, dont la section possède un rayon de courbure  $R$ .

La présence de parois en verre dans le capillaire génère une forte dissipation qui se manifeste par une perte de charge importante. Le profil de vitesse à l'intérieur du capillaire est du type de Poiseuille. À la sortie immédiate de ce capillaire, la dissipation devient négligeable du fait de la faible viscosité de surface des interfaces liquide-air. On peut écrire la conservation de l'énergie des particules fluide entre la sortie immédiate du capillaire et dans le bord de Plateau. Cette conservation est traduite par l'équation de Bernoulli. Si l'écoulement est stationnaire, on peut alors démontrer [50] que le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho\varphi = Cte \quad (3.6)$$

Avec  $\rho$ , la densité,  $v$  la vitesse du fluide,  $P$  la pression et  $\varphi$  le potentiel d'une force.

FIG. 3.11 – Schéma du capillaire plongé dans le bord de Plateau. I : le capillaire ; II la zone de raccord ; III : le bord de Plateau.



Comme nous n'avons accès qu'à la vitesse moyenne de l'écoulement, il faut moyenner l'équation de Bernoulli sur toutes les lignes de courant :

$$\frac{\rho \langle v^2 \rangle}{2} + \langle P \rangle + \langle \rho \varphi \rangle = Cte \quad (3.7)$$

Dans le bord de Plateau nous considérerons que l'écoulement a un profil de type bouchon. La vitesse moyenne est alors égale à la vitesse en tout point du tube de liquide et on peut substituer la vitesse moyenne à la vitesse le long d'une ligne de courant dans l'équation 3.7. La vitesse moyenne vaut  $V_{bP} = \langle V \rangle = \frac{Q}{C_{bP} R^2}$ , avec  $C_{bP} = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ . À la sortie immédiate du capillaire, il faut considérer un profil de Poiseuille. Pour un écoulement parabolique dans une section  $S_0$  :

$$V_0^2 = \langle V^2 \rangle = \frac{7}{3} \langle V \rangle^2 = \frac{7 Q^2}{3 S_0^2} \quad (3.8)$$

La pression hydrostatique et la pression capillaire étant constantes dans la section, nous pouvons écrire à la sortie immédiate du capillaire :  $P_{cap} = P_{ext} + \frac{\gamma}{R_{cap}}$ , avec  $R_{cap}$  le rayon du capillaire. La pression dans le bord de Plateau (au delà de la zone de raccord) s'écrit :  $\langle P(z) \rangle = P_{ext} - \frac{\gamma}{R(z)}$ , avec  $R(z)$ , rayon de courbure du bord de Plateau qui est une fonction de l'altitude. En prenant comme origine des axes la sortie du capillaire et en égalisant l'équation 3.7 à la sortie du capillaire et dans le bord de Plateau, on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{C_{bP}^2 R^4} - \rho g z - \frac{\gamma}{R} = \frac{1}{2} \rho \frac{7 Q^2}{3 S_0^2} + \frac{\gamma}{R_{cap}} \quad (3.9)$$

Ce qui conduit à :

$$Q = \sqrt{\frac{2 C_{bP}^2 g R^4 (z + l_c^2 (\frac{1}{R_{cap}} + \frac{1}{R}))}{1 - (\frac{R}{R_{max}})^4}} \quad (3.10)$$

où l'on a introduit deux longueurs caractéristiques : la longueur capillaire  $l_c^2 = \frac{\gamma}{\rho g}$  et  $R_{max}^2 = \sqrt{\frac{3}{7}} \frac{S_0}{C_{bP}}$ , la valeur maximale que peut prendre le rayon de courbure du bord de

Plateau. En effet, l'équation 3.10 diverge pour  $R = R_{max}$  : la section du bord de Plateau ne peut pas être supérieure à la section initiale du capillaire. Cela provient directement de la conservation de l'énergie et de la conservation du débit : si  $R > R_{max}$ , alors la vitesse doit diminuer par rapport à la vitesse d'injection, provoquant une diminution de l'énergie cinétique. Ce modèle est celui d'un jet d'eau (non turbulent) issu d'un tuyau. Dans notre cas, la forme imposée par le bord de Plateau provoque une accélération initiale de la vitesse dans le jet liée à la dépression capillaire qui règne dans le bord de Plateau.

## Résultats

Nous allons ajuster nos résultats expérimentaux par l'équation 3.10, avec deux paramètres libres :  $z' = z + \frac{lc^2}{R_{cap}}$  et  $R_{sat}$ .

$$Q = \sqrt{\frac{2C_{bP}^2 g R^4 (z' + \frac{l_c^2}{R})}{1 - (\frac{R}{R_{sat}})^4}} \quad (3.11)$$

Nous avons pris pour la tension de surface la valeur approximative de  $\gamma = 30mN/m$ .<sup>3</sup> La figure 3.12, qui représente la relation débit-rayon de courbure pour un capillaire de diamètre  $d = 1.6mm$ , montre une transition dans le type d'écoulement. A faible débit, il se produit un écoulement de type Poiseuille alors qu'à fort débit, il s'agit d'un écoulement de Bernoulli.

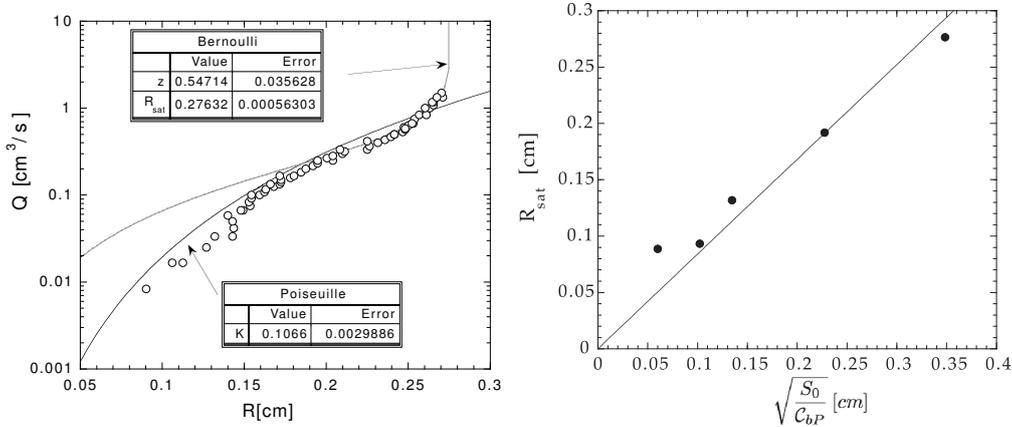


FIG. 3.12 – **À gauche**, variation du débit en fonction du rayon du bord de Plateau pour un rayon du capillaire  $R_{int} = 0.78mm$ . Les courbes représentent le meilleur ajustement des points expérimentaux (cercles) des modèles de Poiseuille et de Bernoulli. **À droite**, représentation du rayon de courbure du bord de Plateau à la saturation obtenue par l'ajustement des points expérimentaux, en fonction de  $\sqrt{\frac{S_0}{C_{bP}}}$ . La droite est le meilleur ajustement pour une relation de proportionnalité :  $R_{sat} = 0.84\sqrt{\frac{S_0}{C_{bP}}}$ , avec une incertitude sur la pente de 0.05.

En utilisant le modèle de Bernoulli, on peut mesurer la valeur du rayon du bord de Plateau à la saturation pour les différents capillaires. Ces valeurs sont représentées sur

<sup>3</sup>Cette valeur est un ordre de grandeur. Cela a peu d'importance car nous nous intéressons à la variation du rayon de courbure en fonction du débit à une altitude fixe

la figure 3.12 en fonction de  $\sqrt{\frac{S_0}{C_{bP}}}$ . On peut y voir que l'accord est assez bon, puisque  $R_{sat} = 0.84\sqrt{\frac{S_0}{C_{bP}}}$ , alors que le modèle de Bernoulli prédit  $R_{max} = 0.81\sqrt{\frac{S_0}{C_{bP}}}$ .

### 3.2.3 Courbe maîtresse

En représentant la vitesse moyenne dans le bord de Plateau en fonction de la vitesse initiale on constate que toutes les courbes expérimentales obtenues pour les différents capillaires suivent un même comportement (cf. figure 3.13 gauche), à un préfacteur numérique près.

La calibration de nos mesures du rayon de courbure est délicate du fait de la difficulté de l'interprétation de l'ombre portée du bord de Plateau (cf. figure 3.3). Elle peut entraîner des erreurs systématiques dans l'estimation du rayon de courbure visible lors de la comparaison des résultats des expériences. Pour contourner cette source d'erreur, nous avons *étalonné* les mesures du rayon de courbure grâce à la valeur théorique  $R_{max} = \left(\frac{3S_0^2}{7C_{bP}}\right)^{1/4}$  et cela pour chaque capillaire (cf. figure 3.13 droite). On obtient alors une courbe maîtresse qui met en évidence deux régimes. À faible débit, la vitesse moyenne dans le bord de Plateau varie comme la racine carrée de la vitesse initiale, alors qu'aux forts débits elle est linéaire.

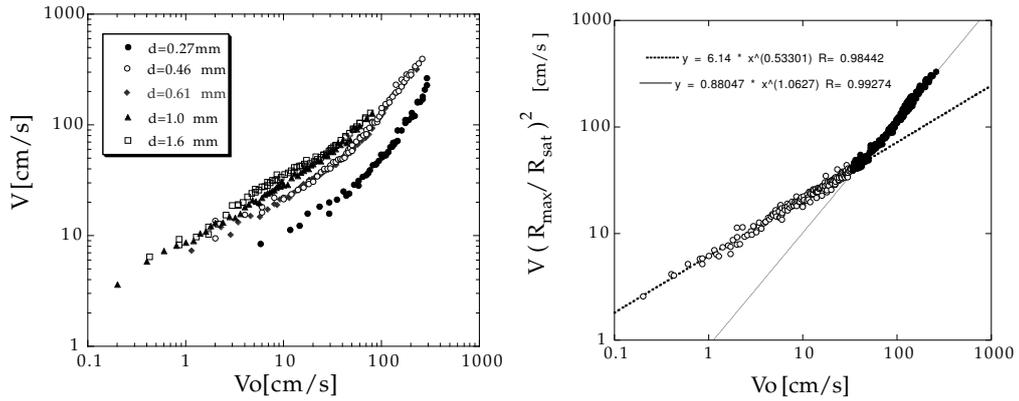


FIG. 3.13 – **A gauche** : Vitesse  $V$  dans le bord de Plateau en fonction de la vitesse à la sortie du capillaire  $V_O$  pour tous les capillaires. **A droite** : Même résultats mais renormalisés par  $\frac{R_{max}^2}{R_{sat}^2}$ .

La justification de ces deux régimes réside bien sur dans le type de l'écoulement qui se produit dans le bord de Plateau. En combinant la conservation du débit et la loi de Poiseuille, on peut montrer que la vitesse dans le bord de Plateau s'écrit :

$$V_{Poiseuille} = \sqrt{\frac{K S_0 \rho g}{\eta}} V_O^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

Dans le régime de Bernoulli, lorsque le rayon sature, on a :

$$V_{Bernoulli} = \frac{S_0}{\sqrt{\frac{S_0}{C_{bP}} R_{sat}^2}} V_O = \frac{R_{max}^2}{R_{sat}^2} V_O \quad (3.13)$$

On retrouve bien 2 comportements pour la vitesse moyenne, correspondant aux régimes de Poiseuille (exposant  $\frac{1}{2}$ ) et Bernoulli (exposant 1). La transition entre les deux régimes

se fait pour  $V_0 \sim 40 \text{ cm}^{-1}$  et correspond à un nombre de Reynolds  $Re = \frac{RV}{\mu}$  compris entre 300 et 1000, selon le capillaire utilisé.

### 3.2.4 Conclusion

On peut dresser le scénario suivant. Lorsque la vitesse d'injection est très faible, on obtient un écoulement de Poiseuille à murs rigides. C'est ce que l'on observe dans les mousses utilisant des surfactants à forte viscosité de surface comme le *fairy liquid*. En augmentant le débit, la vitesse initiale devient supérieure à la vitesse correspondant à l'équilibre entre force motrice (gravité) et dissipation. L'écoulement est alors non stationnaire et correspond à une superposition d'un écoulement bouchon et un écoulement de Poiseuille. Si la vitesse initiale dépasse  $40 \text{ cms}^{-1}$ , on entre alors dans un régime de Bernoulli. La dissipation est alors négligeable devant l'énergie cinétique des particules fluides.

### 3.3 Élasticité d'un bord de Plateau

L'ondulation qui se produit lorsque le débit est suffisamment important va nous permettre d'étudier la réponse d'un bord de Plateau à une déformation statique. Le cas d'un bord Plateau est très différent de celui d'un jet, car lorsque le bord de Plateau ondule, les films se déforment aussi. L'énergie élastique de l'ensemble constitué par le bord de Plateau et les trois films qui se rejoignent est dominée, aux grandes longueurs d'onde, par la contribution des films. Après avoir calculé la constante de rappel élastique du bord de Plateau (cf sous-section 3.3.1), nous construirons un modèle permettant d'expliquer la variation de la longueur d'onde de l'ondulation avec le débit de liquide injecté.

#### 3.3.1 Élasticité d'une ligne triple

Nous allons calculer l'énergie associée à la déformation des films de savon lors d'une déformation sinusoïdale de longueur d'onde  $q$  du bord de Plateau. Il s'agit d'un calcul tout à fait analogue à *l'élasticité de Frange* proposée par de Gennes [31].

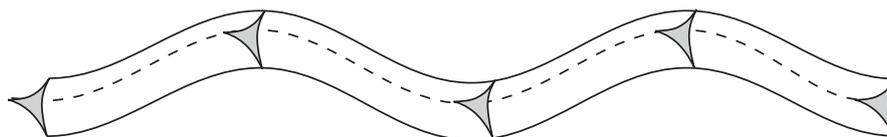


FIG. 3.14 – Mode de déformation asymétrique : le bord de Plateau ondule.

#### Notations

A l'équilibre, le film  $m$  est dans le plan formé par les axes  $x_m$  et  $z$ . On complète grâce à l'axe  $y_m$  perpendiculaire au plan du film  $m$  de sorte que chaque film ait son propre repère. La déformation du film  $U_m$  au point  $(x_m, z)$  est donnée par ( cf. figure 3.15) :

$$\vec{U}_m(x_m, z) = \begin{pmatrix} \xi_m(x_m, z) \\ \iota_m(x_m, z) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$\xi_m(x_m, z)$  donne la déformation parallèlement à l'axe des  $x$ , tandis que  $\iota_m(x_m, z)$  donne la déformation dans la direction perpendiculaire au film, c'est à dire dans la direction des  $y$ .

Choisissons une déformation du bord de Plateau de type sinusoïdale plane <sup>4</sup>. Elle est décrite par un vecteur d'onde  $q$ , une amplitude  $U_q \sin qz$  et un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x_1$ . Elle s'écrit dans le repère du film 1 :

$$\left( \vec{U}_{bP}(z) \right)_1 = \begin{pmatrix} U_q \cos \alpha \sin qz \\ U_q \sin \alpha \sin qz \end{pmatrix} . \quad (3.15)$$

<sup>4</sup>Rappelons que l'on peut décomposer une déformation quelconque sous la forme d'une série de Fourier qui a la forme :  $\sum_i A_i \sin q_i z$ .

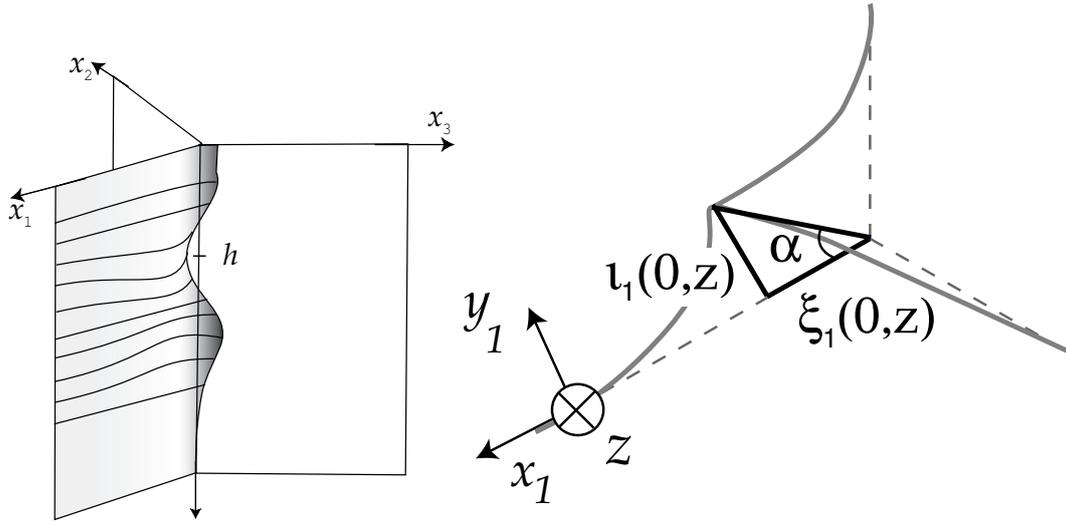


FIG. 3.15 – **A gauche** : Vue de coté des trois films. Chacun d'eux est repéré par un indice. L'ondulation du bord de Plateau provoque la déformation des films. **A droite** : Vue du dessus à l'altitude  $h$  du bord de Plateau déformé. Dans le repère du film  $m$ , le déplacement dans le plan du film (axe  $x_m$ ) est noté  $\xi_m$  et le déplacement perpendiculaire (axe  $y_m$ ) est noté  $\iota_m$ .

En  $x_m = 0$ , la déformation des films  $\vec{U}_m$  doit être égale à la déformation du bord de Plateau  $\vec{U}_{bP}$  :

$$\vec{U}_m(x_m = 0, z) = \vec{U}_{bP}(z) \quad . \quad (3.16)$$

C'est la conditions aux limites pour le champ de déformation du bord de Plateau.

### Équilibre des pressions

Le bord de Plateau étant à l'air libre, la pression de part et d'autre d'un film est constante et vaut  $P_{ext}$ . D'après la loi de Laplace, le film doit avoir une courbure totale nulle, ce qui donne la condition suivante pour le déplacement local normal au film  $\iota_m(x_m, z)$  :

$$\frac{\partial^2 \iota_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \iota_m}{\partial z_m^2} = 0 \quad (3.17)$$

La solution convenable a la forme :

$$\iota_m(x, z) = (A_q)_m \sin(qz) \exp(-qx) \quad (3.18)$$

où  $(A_q)_m$  est l'amplitude dans le film  $m$  associée au mode  $q$ . Elle est déterminée par les conditions aux limites 3.16 :

$$(A_q)_1 = U_q \sin \alpha \quad (3.19)$$

$$(A_q)_2 = U_q \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.20)$$

$$(A_q)_3 = U_q \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.21)$$

L'exponentielle donne une forte atténuation de la déformation dans le film : celle-ci n'est perceptible que sur une distance caractéristique de  $1/q$ ; au-delà, le film retrouve sa forme plane. Signalons que lorsque le bord de Plateau est déformé, l'angle de contact

entre les films n'est plus de  $120^\circ$  : l'équilibre de Young n'est plus respecté et la déviation est de l'ordre de  $qu_q$  [31].

### Énergie de déformation d'un film

Nous allons tout d'abord calculer l'accroissement d'énergie pour un film dans son repère  $(x_m, y_m)$  puis faire la somme des contributions de chacun des 3 films. L'accroissement d'énergie par unité de longueur (selon l'axe  $z$ )  $\delta E$  du film est proportionnel à l'accroissement de la surface du film  $\delta A$  :

$$\delta E = 2\gamma\delta A \quad (3.22)$$

Le facteur 2 provient de la présence de 2 interfaces pour un film de savon. On peut décomposer  $\delta E$  en deux contributions : l'extension plane ( $\delta E^{\parallel}$ ) qui est liée à  $\xi$  et l'extension par déformation non plane ( $\delta E^{\perp}$ ) qui est liée à  $\iota$ . Cette dernière s'écrit, dans la limite des faibles déformations :

$$\delta E_m^{\perp} = \gamma \int \left[ \left( \frac{\partial \iota_m}{\partial x_m} \right)^2 + \left( \frac{\partial \iota_m}{\partial z_m} \right)^2 \right] dx = \frac{\gamma q (A_q)_m^2}{2} \quad (3.23)$$

Il est tout à fait remarquable que l'énergie élastique soit proportionnelle à  $q$  et non  $q^2$ . Les énergies de distorsion ( $\approx (\nabla \iota)^2$ ) sont certes en  $q^2$ , mais étant intégrées sur une largeur de film, d'ordre  $q^{-1}$ , correspondant aux points où  $xi \neq 0$ , l'énergie totale est linéaire en  $q$ . L'autre contribution à l'énergie d'un film s'écrit simplement <sup>5</sup> :

$$\delta E_m^{\parallel} = \int \xi_m(x=0, z) dz \quad (3.24)$$

### Contribution des trois films

L'énergie totale  $\delta E$  s'obtient en faisant la somme des énergie de déformations des trois films :

$$\delta E = \sum_m \frac{\gamma q (A_q)_m^2}{2} + \int \sum_m \xi_m(0, z) dz \quad (3.25)$$

Les conditions aux limites données par 3.21 nous permettent d'écrire, après un calcul trigonométrique <sup>6</sup>, les relations suivantes :

$$\sum_m \xi_m(x=0, z) = 0 \quad (3.26)$$

$$\sum_m \iota_m^2(x=0, z) = \frac{3}{2} U_q^2 \quad (3.27)$$

L'équation 3.26 montre que la contribution  $\delta E^{\parallel}$  est nulle. L'équation 3.27 nous permet d'écrire l'énergie totale de déformation :

$$\delta E = \frac{3}{4} \gamma q U_q^2 \quad (3.28)$$

<sup>5</sup>Dans le cas d'une déformation sinusoidale, cette contribution est nulle car  $\int_0^{2\pi/q} \sin qz = 0$  : la surface créée dans le plan du film est égale à la surface disparue.

<sup>6</sup>Pour  $\sum_m E_m^{\perp}$ , nous utilisons :  $\sin^2(x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3} - x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3} + x) = \frac{3}{2}$ . Pour  $\sum_m E_m^{\parallel}$ , nous utilisons :  $\cos(x) + \cos(\frac{2\pi}{3} - x) + \cos(\frac{2\pi}{3} + x) = 0$

Le fait crucial est que cette énergie soit proportionnelle en  $q$  et non en  $q^2$ , comme l'énergie de distorsion associée à une tension de ligne. L'énergie totale liée à l'ondulation d'un bord de Plateau regroupe donc un terme en  $q$ , que nous venons de calculer et un terme en  $q^2$ . Nous négligerons ce dernier en ne considérant que le cas de déformations correspondant à un vecteur d'onde  $q$  relativement petit, de sorte que :  $q^2 \approx 0$ . Cela correspond aux situations où la longueur d'onde de l'ondulation est grande devant le rayon de courbure du bord de Plateau.

### Force de rappel élastique

On peut donc maintenant déterminer la force de rappel élastique par unité de longueur en dérivant l'énergie de déformation par rapport à  $U_q$  :

$$F_z(q) = -\frac{d}{dU_q} \left( \frac{3}{4} \gamma q U_q^2 \right) = -\frac{3}{2} \gamma q U_q \quad (3.29)$$

Cette force de rappel élastique est *indépendante de la direction* dans laquelle est déformé le bord de Plateau. Elle correspond à un ressort dont la raideur par unité de longueur  $\kappa = \frac{3}{2} \gamma q$  varie linéairement avec le vecteur d'onde  $q$  de la déformation. Si cette déformation est proche d'une déformation sinusoïdale, c'est-à-dire que la longueur d'onde varie peu, on pourra alors considérer que la force élastique *locale* ne dépend que de la déformation *locale*.

### 3.3.2 Modèle de l'ondulation

#### Principe

Pour mettre en évidence le rôle de l'élasticité de frange dans la déformation d'un bord de Plateau, nous allons utiliser un modèle très simple assimilant une section d'un bord de Plateau à une petite masse soumise à une force de rappel élastique de raideur  $\kappa = \frac{3}{2} \gamma q$  (cf. équation 3.29) et à la gravité. Sous ces hypothèses, l'ondulation se réduit à une chute libre verticalement, et une oscillation harmonique horizontalement.

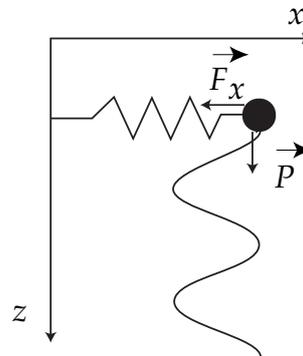


FIG. 3.16 – Schéma du modèle de l'ondulation. Les particules fluides sont en chute libre et les films exercent une force de rappel élastique  $F_z(q) = -\frac{3}{2} \gamma q U_q$ .

#### Longueur d'onde

Pour mener à bien ce calcul, nous considérerons que la section du bord de Plateau est constante, ce qui donne une masse linéique  $\mu$  constante. La force de rappel horizontale sur

un élément de volume s'écrit :  $F_x = -\frac{3\gamma\pi}{\lambda}x$ . En notant la masse linéique  $\mu = \rho(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})R^2$ , les équations du mouvement s'écrivent :

$$\ddot{x} = -\frac{3\gamma\pi}{\lambda\mu}x \quad (3.30)$$

$$\ddot{z} = g \quad (3.31)$$

Horizontalement, la masselotte se comporte comme un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{3\gamma\pi}{\mu\lambda}}$ , alors que verticalement il s'agit d'une chute libre. Les conditions initiales sont fixées par la position et l'angle  $\alpha$  du capillaire. Dans le cas d'un capillaire parallèle à la verticale, la déformation en  $z = 0$  vaut  $x_0$  et la vitesse initiale verticale est  $V_0 = Q/S_0$ . Les équations du mouvement s'écrivent :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (3.32)$$

$$z(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0 t \quad (3.33)$$

Les minima d'amplitude sont donnés lorsque  $\cos \omega t = -1$ , c'est à dire pour les temps  $T_n = (2n+1)\frac{\pi}{\omega}$ . La *nième* longueur d'onde est donnée par la distance entre deux minima successifs :  $\lambda_n = z(T_{n+1}) - z(T_n)$ . En introduisant l'accélération  $a = \frac{3\gamma}{4\pi\mu}$ , on a :

$$\lambda_n = \frac{aV_0^2}{(a - g(n+1))^2} \quad (3.34)$$

L'élasticité de frange des films prévoit une longueur d'onde de l'ondulation variant comme la vitesse initiale au carré. Lorsque la gravité est négligeable, la longueur d'onde s'obtient grâce à  $\lambda = 2\pi V_0 \frac{\mu}{\kappa}$ , où  $\kappa$  est la raideur. Dans le cas général où cette constante de raideur est une fonction de  $\lambda^\alpha$ , on obtient la relation suivante

$$\lambda \sim V_0^{\frac{1}{1+\alpha/2}} \quad (3.35)$$

Le cas d'un ressort *classique* ( $\alpha = -1$ ) donne une relation linéaire entre longueur d'onde et vitesse. Pour  $\alpha = -2$ , c'est à dire pour une force élastique de rappel associé à une tension de ligne, ce modèle prévoit une longueur d'onde indépendante de la vitesse.

### 3.3.3 Variation de $\lambda$ avec le débit

La figure 3.17 montre que la longueur d'onde varie comme :  $\lambda = \frac{V_0^2}{a'}$  pour tous les capillaires. Cela montre bien que l'ondulation du bord de Plateau est dominée par l'énergie de déformation associée à la distorsion des films.

La figure 3.18 donne les résultats des ajustements de la longueur d'onde selon une loi du type  $\lambda = \frac{V_0^2}{a'}$  sous la forme de  $\sqrt{a'}$  en fonction de l'indice de  $\lambda_n$ . On voit que  $\sqrt{a'}$  diminue linéairement avec l'indice de la longueur d'onde, comme prévu par notre modèle ( $\sqrt{a'} = \frac{a-g(n+1)}{\sqrt{a}}$ ). L'accord est plutôt bon, bien que nous n'ayons pas pris en compte la variation de la section du bord de Plateau. Celle-ci est provoquée par l'accélération de gravité. Les estimations de la tension de surface obtenues grâce aux ajustements de  $\lambda(V_0^2)$  sont *raisonnables*.

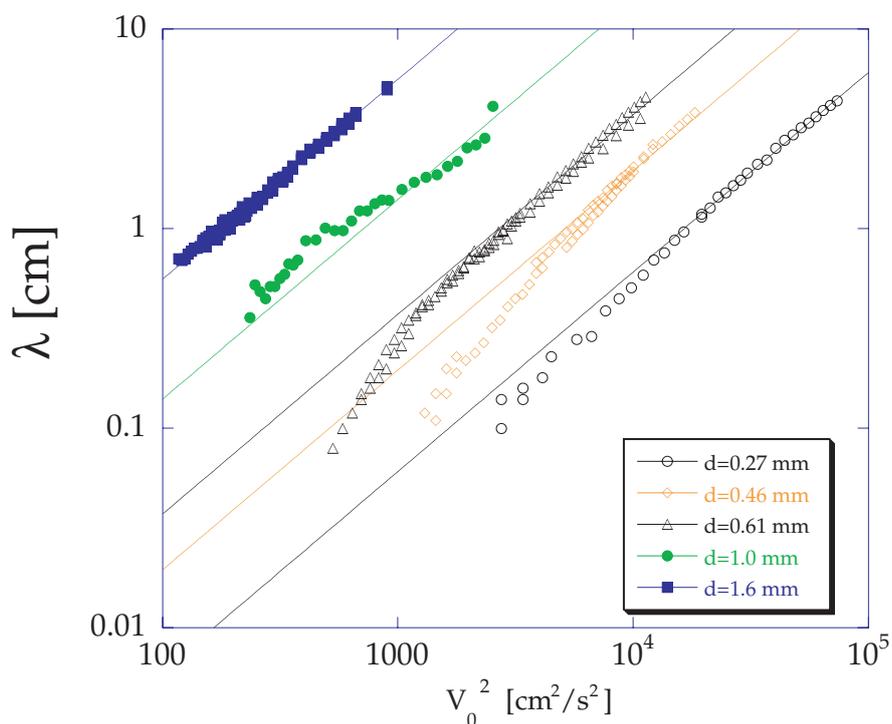


FIG. 3.17 – Première longueur d'onde de l'ondulation en fonction de la vitesse initiale au carré pour différents diamètres de capillaire (échelle logarithmique). Les droites représentent les meilleurs ajustements avec une fonction du type :  $\lambda = \frac{V_0^2}{a'}$ .

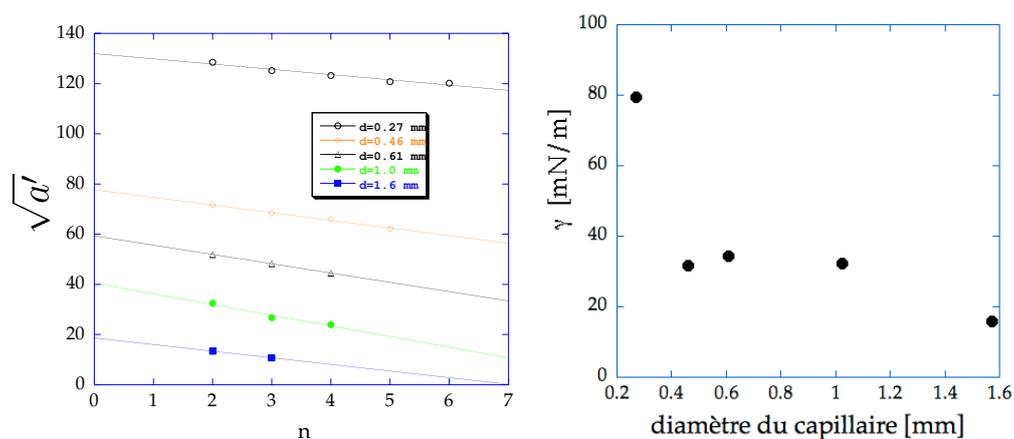


FIG. 3.18 – Résultats des ajustements de la figure 3.17 ( $\lambda = \frac{V_0^2}{a'}$ ). **À gauche** :  $\sqrt{a'}$  en fonction de l'indice de la longueur d'onde  $\lambda_n$ . Notre modèle prévoit  $\sqrt{a'} = \frac{a-g(n+1)}{\sqrt{a}}$ . Les droites sont des régressions linéaires. **À droite** : valeur de la tension de surface déduite de la figure de gauche.

### Relaxation dans les films

Selon l'équation 3.18, la déformation dans les films doit relaxer avec le même vecteur d'onde que l'oscillation du bord Plateau. En observant et en éclairant en incidence normale un des trois films verticaux, nous avons pu estimer la longueur sur laquelle est déformé le film (cf. figure 3.20).

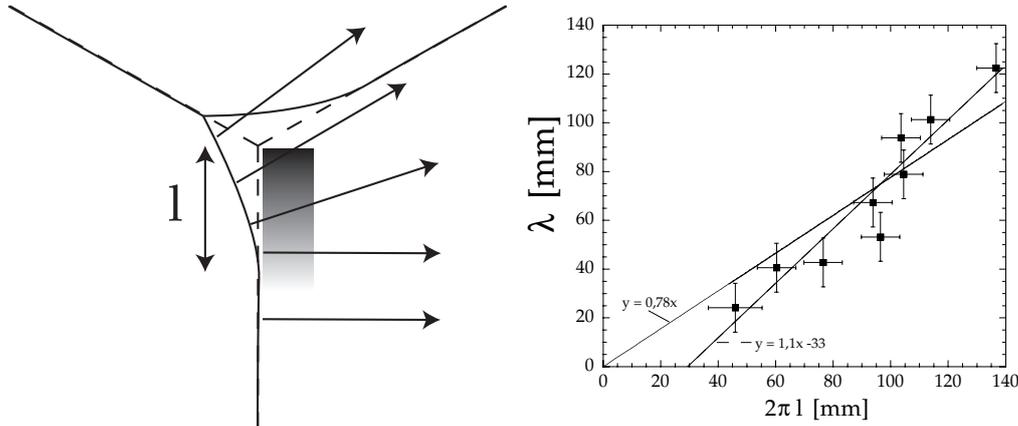


FIG. 3.19 – **À gauche**, schéma de la réflexion des rayons sur la surface d'un des films lorsqu'il est éclairé en incidence normale. La partie déformée du film, de largeur  $l$ , dévie les rayons lumineux et apparaît sombre sur les images. **À droite**, longueur d'onde de l'ondulation ( $\lambda$ ) du bord de Plateau en fonction de la longueur d'onde de déformation dans les films ( $2\pi l$ ) mesurée au maximum de déformation.

Lorsque le film n'est pas déformé, les rayons lumineux se réfléchissent sur la surface du film sans être déviés : la surface apparaît alors lumineuse. Lorsque le film est déformé, les rayons sont déviés et la surface apparaît sombre (cf. figure 3.19). Lorsque le film est presque revenu à sa position d'équilibre ( $\iota = \epsilon \sim 0$ ), on a alors :  $\lambda = \frac{-2\pi l}{\ln \epsilon}$ , où  $l$  la distance sur laquelle est déformé le film. L'élasticité de frange donne donc une déformation dans les films  $l$  qui suit la relation :  $\lambda \sim 2\pi l$ . La figure 3.20 montre que cette relation est bien vérifiée dans notre bord de Plateau.

### 3.3.4 conclusion

Grâce à la déformation du bord de Plateau provoquée par l'injection de liquide dans le bord de Plateau, nous avons pu étudier la réponse élastique d'un unique bord de Plateau. Nous avons montré que la constante de rappel élastique par unité de longueur est  $\kappa = \frac{3}{2}\gamma q$ .

Deux points restent en suspens. Tout d'abord, l'existence d'un seuil pour l'observation de l'ondulation. Il dépend probablement de l'énergie de déformation du bord de Plateau en lui-même. Nous l'avons négligé en considérant des déformations de faibles vecteurs d'onde  $q$  mais, au seuil de l'ondulation, la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que le rayon de courbure du bord de Plateau (cf. figure 3.17 et figure 3.6).

Le second point concerne le plan de l'ondulation du bord de Plateau. Celle-ci s'est toujours faite dans le plan de l'un des films. Nous avons pourtant montré que l'énergie élastique de déformation des films ne dépend que de l'amplitude et de la longueur d'onde

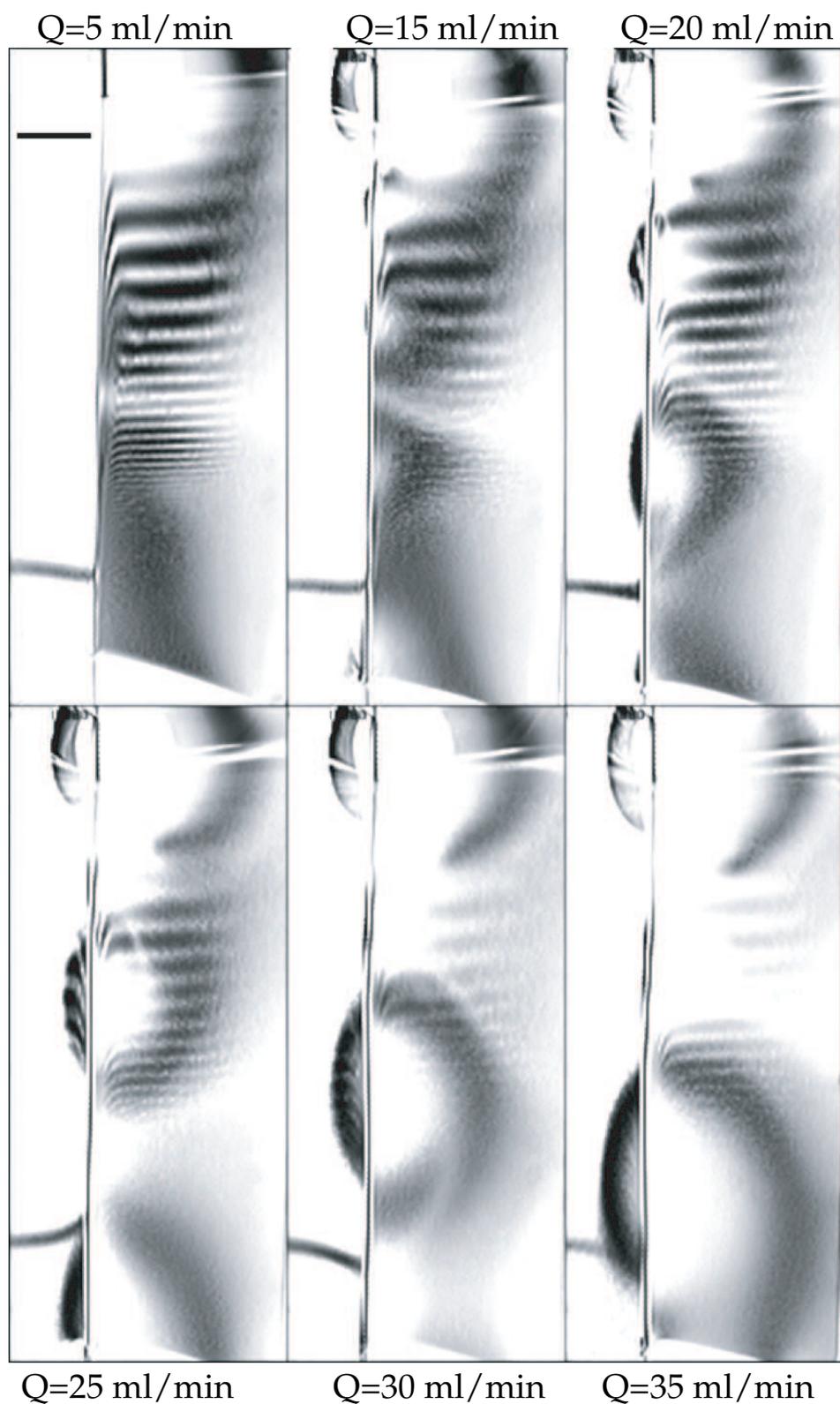


FIG. 3.20 – **Négatif** de l'image des films en incidence normale et en lumière monochromatique. Les zones lumineuses correspondent aux parties du film qui sont déformées. Remarquez la déformation initiale des films sur la première image. Les bandes horizontales sont les interférences provoquées par la variation d'épaisseur du film.

de l'ondulation du bord de Plateau.

### 3.4 Modes symétrique d'un bord de Plateau

Nous proposons dans cette partie un modèle prédisant la propagation d'un mode de déformation symétrique d'une variation du rayon de courbure d'un bord de Plateau.

#### Mode d'un film

Rappelons le cas des films de liquide plan librement suspendus. Du fait de leur nature liquide, l'épaisseur de ces films peut varier, ce qui leur confère des propriétés d'auto-adaptations vibratoires tout à fait étonnante [13]. Taylor a montré [101] qu'un film de liquide peut se déformer selon deux modes : un mode asymétrique (cf. figure 3.21 a) et un mode symétrique (cf. figure 3.21 b). Ces déformations correspondent à des ondes mécaniques qui se propagent à des vitesses différentes. Dans les deux cas, c'est la tension de surface qui exerce une force de rappel. Le mode symétrique est une ondulation du film où les deux surfaces du film vibrent en phase. Le mode asymétrique est un mode péristaltique où les deux surfaces se déplacent en opposition de phase, provoquant des variations d'épaisseur. Il est plus difficile à observer car il génère une forte dissipation visqueuse. A ces deux modes, vient s'ajouter un mode élastique lorsqu'il y a des agents tensioactifs dans la solution [80] (cf. figure 3.21 c). La force de rappel est alors due aux gradients de tension de surface. Ces deux modes de déformation se

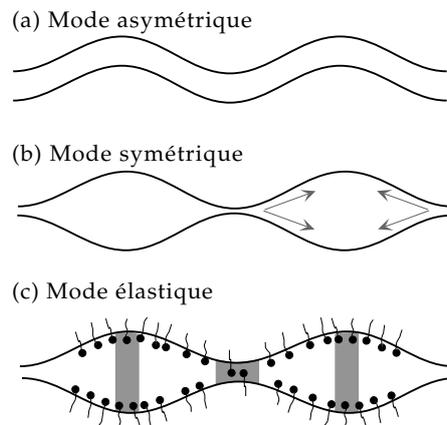


FIG. 3.21 – Onde dans un film liquide. a) mode asymétrique, b) mode symétrique, c) mode élastique. Les parties grisées représentent les zones où la concentration de surface en surfactants varie.

retrouvent dans les bords de Plateau. Nous étudierons d'abord d'un point de vue théorique la vitesse de propagation d'ondes mécaniques correspondant au mode symétrique. Puis nous étudierons le mode asymétrique d'un point de vue *statique*, en calculant la force de rappel élastique qui s'exerce sur le bord de Plateau lorsqu'il ondule.

#### 3.4.1 Mode symétrique

Nous allons calculer la vitesse de propagation du mode symétrique dans un bord de Plateau. Ce calcul s'inspire d'un problème sur la vitesse de propagation du pouls sanguin [49]. On considère pour cela que le bord de Plateau se dilate simplement en augmentant son rayon de courbure (cf. figure 3.22). Nous nous limiterons au cas de

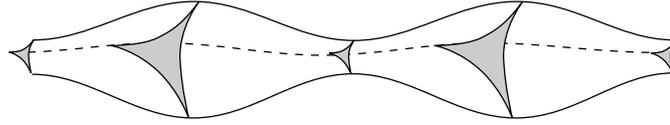


FIG. 3.22 – Déformation de la section d'un bord de Plateau dans le mode symétrique.

Taylor, en négligeant l'élasticité de la surface du bord de Plateau. Cela suppose que le nombre de molécules tensioactives en volume soit très important et que la diffusion soit assez rapide pour repeupler la surface du film lorsqu'il est étiré. Dans le cas d'un bord de Plateau, la première hypothèse est raisonnable car le diamètre est de l'ordre du mm, ce qui assure une réserve importante de molécules tensioactives. La seconde hypothèse nous limite à des fréquences inférieures à celle donnée par la diffusion des molécules :  $1/\tau_D = D/R_0^2$ . En prenant  $R_0 = 10^{-1} \text{ cm}$  et un coefficient de diffusion de l'ordre de  $D \sim 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ , on trouve que la fréquence doit être inférieure à  $1/\tau_D = 1000 \text{ Hz}$ . Le centre de courbure de la surface du bord de Plateau est à l'extérieur de celui-ci. En choisissant  $R_0 > 0$ , le rayon de courbure d'un bord de Plateau est  $-R_0$ .

### Pression de Laplace

Une variation de son rayon  $R = R_0 + \delta R$  produit une variation de pression  $P = P_0 + \delta P$ . Ces deux grandeurs sont reliées par la loi de Laplace :

$$P - P_0 = -\frac{\gamma}{R} \quad . \quad (3.36)$$

En dérivant cette relation par rapport au rayon, et en linéarisant, on obtient une relation entre la variation de la pression et la variation de la section :

$$\delta P = \frac{\gamma}{R_0^2} \delta R \quad . \quad (3.37)$$

### Dynamique

La variation de pression provoque un écoulement dans le bord de Plateau. Cet écoulement se fait à la vitesse  $\delta v$ . Si on néglige la viscosité du liquide et que l'on se place dans le cadre de l'approximation de lubrification, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad . \quad (3.38)$$

En prenant une vitesse initiale nulle, on obtient :

$$\rho \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{\partial \delta P}{\partial x} \quad . \quad (3.39)$$

### Conservation du volume

La conservation du volume de liquide à l'intérieur du bord de Plateau nous permet de boucler le système d'équation formé par  $\delta R$ ,  $\delta P$  et  $\delta v$ . Nous considérons que le liquide est incompressible :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S v}{\partial x} = 0 \quad . \quad (3.40)$$

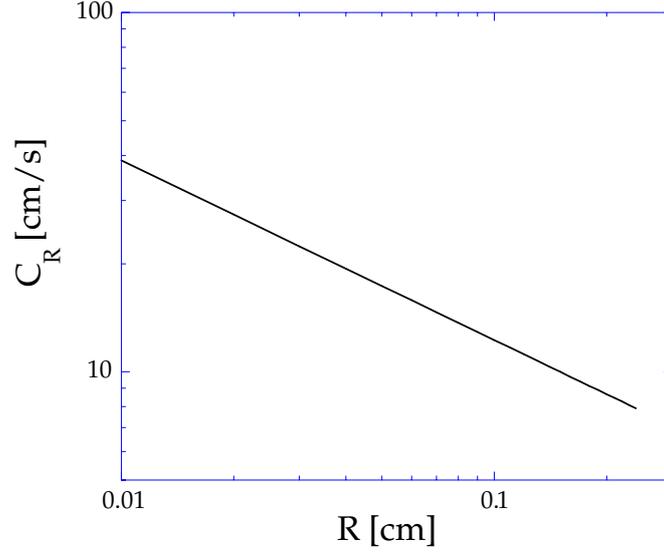


FIG. 3.23 – Vitesse de propagation du mode symétrique en fonction du rayon de courbure du bord de Plateau.

La section d'un bord de Plateau étant donnée par  $S = C_{bP}R^2$ , nous allons linéariser au premier ordre l'équation 3.40 :

$$2\frac{\partial\delta R}{\partial t} + R_0\frac{\partial\delta v}{\delta x} = 0 \quad . \quad (3.41)$$

Les équations 3.37, 3.39 et 3.41 forment un système linéaire qui va nous permettre de déterminer une équation de propagation pour la déformation :

$$\frac{\partial^2\delta R}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{2R\rho}\frac{\partial^2\delta R}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad (3.42)$$

La vitesse de propagation vaut donc :

$$C_R = \sqrt{\frac{\gamma}{2R_0\rho}} \quad . \quad (3.43)$$

Contrairement aux films de savon, ce mode est non dispersif dans les bords de Plateau et se propage à la même vitesse quelle que soit la longueur d'onde. Par contre, sa vitesse dépend du rayon de courbure du bord de Plateau. En prenant  $\gamma = 30mN/m$ ,  $R \sim 0.1cm$ , on trouve  $C_R = 10cm/s$  (cf. figure 3.23). Dans les mousses, cela se traduit par une dépendance de la fraction volumique. La vitesse de propagation doit alors être plus faible car le chemin total parcouru est plus long du fait des changements d'orientation des bords de Plateau à chaque vertex.

### Discussions

Dans le cas d'une section circulaire de rayon  $R$ , la courbure n'est plus dans le même sens, ce qui génère une situation complètement différente. L'équation 3.42 se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2\delta R}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{2R\rho}\frac{\partial^2\delta R}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (3.44)$$

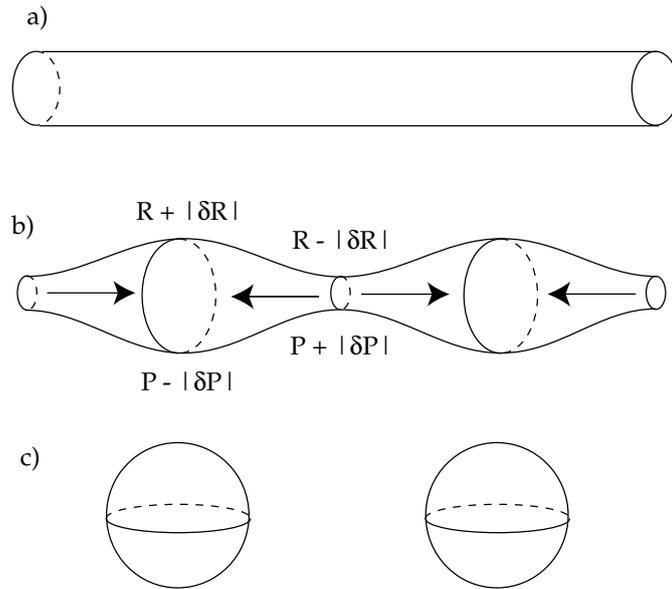


FIG. 3.24 – Instabilité de Rayleigh. Un cylindre de liquide (a) est instable vis à vis d’une perturbation de son diamètre (b) : le liquide est aspiré des zones de faibles épaisseurs vers les zones de fortes épaisseur. Le cylindre se déstabilise finalement pour former des gouttes sphériques (c).

ce qui *n’est pas* une équation de propagation. L’explication provient du fait qu’un cylindre de liquide se déstabilise *spontanément* pour former des gouttes : c’est l’instabilité de Rayleigh. Une diminution de la section provoque, en augmentant la courbure, une surpression, alors une augmentation d’épaisseur provoque une dépression. Le liquide est donc aspiré vers les zones les plus épaisses du bord de Plateau (cf. figure 3.24).

### 3.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié l’hydrodynamique et l’élasticité d’un bord unique de Plateau. Nous avons montré que l’écoulement à l’intérieur de ce bord de Plateau transitait d’un écoulement de type Poiseuille avec glissements aux parois vers un écoulement de Bernoulli. Nous avons montré ensuite que la déformation d’un bord de Plateau provoquait l’apparition d’une force de rappel élastique ayant une constante de raideur par unité de longueur  $\kappa = \frac{3}{2}\gamma q$ . Finalement nous avons prédit l’existence d’un mode symétrique de Taylor dans les bords de Plateau. La question qui se pose maintenant est de savoir comment appliquer ces résultats aux mousses 3D.

## Deuxième partie

# Morphologie et Drainage de mousses de Ferrofluide



Tintin au pays de l'or noir [52].

## Introduction

Nous avons vu dans le premier chapitre que, dans une mousse donnée, la vitesse d'un écoulement de liquide à l'intérieur de la structure ne dépend que du débit de liquide injecté au sommet de la mousse. Autrement dit, le seul paramètre expérimental est le débit. Dans le cas des mousses magnétiques, nous disposons naturellement d'un second paramètre : le champ magnétique appliqué. Nous pouvons ainsi introduire de nouvelles forces magnétiques à l'intérieur de la mousse qui sont contrôlables par l'intensité et l'orientation du champ magnétique. Elles vont s'ajouter à la force de surface capillaire et à la pesanteur.

Cependant, avant de pouvoir utiliser ces forces magnétiques comme des forces volumiques contrôlables jouant le même rôle que la gravité et faire des mousses magnétiques des modèles pour l'étude des mousses, il faut d'abord passer par une caractérisation des propriétés des mousses magnétiques sous l'effet d'un champ. Nous nous sommes donc intéressé principalement à l'effet d'un champ magnétique constant sur la structure et sur le drainage de ces mousses de ferrofluide.

Le plan proposé ici ne respecte pas la chronologie de notre réflexion : nous lui avons préféré un plan plus simple. En effet, nous nous sommes dès le début posé la question du drainage des mousses magnétiques. Ayant constaté qu'un champ magnétique agit sur le drainage via une modification de la structure de la mousse, nous sommes revenu à une géométrie 2D beaucoup plus simple pour mener une étude systématique sur la structure. Cette étape essentielle nous a permis de formuler un modèle permettant d'expliquer le drainage magnétique à 3D.

Le chapitre 4 introduit les ferrofluides et leurs propriétés magnétiques. Dans les chapitres 5 et 6, nous allons chercher à comprendre l'effet d'un champ magnétique homogène et constant sur des mousses magnétiques. Le chapitre 5 s'intéresse plus particulièrement à la modification de la structure de la mousse, alors que le chapitre 6 est consacré au drainage des mousses magnétiques. Nous montrerons alors que le drainage des mousses magnétiques est modifié par l'anisotropie induite par le champ magnétique de la section des bords de Plateau. Enfin nous terminerons par une applications des mousses de ferrofluides dans le chapitre 7 : les tiges de bulles magnétiques. Ce dernier chapitre a été réalisé en collaboration avec Wiebke Drenckhan, Stefan Hutzler et Denis Weaire du Trinity college à Dublin. Nous remercions tout particulièrement Delphine Talbot et Emanuelle Dubois du LI2C qui ont synthétisé les ferrofluides que nous avons utilisés et sans qui rien n'aurait été possible.

# Chapitre 4

## Les Ferrofluides

### 4.1 Généralités

#### 4.1.1 Qu'est-ce qu'un Ferrofluide ?

Un ferrofluide est une suspension colloïdale de particules magnétiques possédant un moment dipolaire permanent. La réponse d'un ferrofluide à un champ magnétique est due à l'interaction des particules et du solvant qui les entourent. Si ces interactions sont suffisamment fortes pour empêcher la séparation des particules et du liquide, le comportement magnétique peut se transmettre à l'ensemble du liquide. Celui-ci acquiert donc ainsi un comportement magnétique global et se déforme sous l'action d'un champ magnétique tout en restant monophasique. Les ferrofluides sont des matériaux relativement récents qui ont fait leur apparition dans les années 60.

#### 4.1.2 Stabilité

Pour présenter des propriétés magnétiques reproductibles, un ferrofluide doit être stable sur le plan colloïdal, même soumis à un champ magnétique. En premier lieu, il faut que le diamètre des particules soit assez faible pour que les mouvements Browniens puissent empêcher la sédimentation *naturelle* des particules sous l'effet de la gravité. Mais cela n'est pas suffisant car il existe des interactions entre les particules qui peuvent conduire à l'agglomération des particules entre elles et à la formation d'agrégats susceptibles de sédimenter à leur tour. Dans les ferrofluides, il existe deux types d'interactions attractives entre les grains :

- les forces de **van der Waals**, attractives à courte portée, et d'autant plus grandes que les particules sont grosses
- les interactions **magnétiques** dipôle-dipôle entre les particules, attractives si les moments magnétiques sont colinéaires, ce qui est le cas lorsqu'un champ magnétique est appliqué.

On le voit, un colloïde, (et un ferrofluide *a fortiori* !) n'est stable que si l'on introduit une répulsion entre les particules. La nature des répulsions que l'on peut introduire dépend du solvant que l'on utilise .

- Lorsque le solvant est non polaire (hydrocarbures, huile silicone ...), l'interface est constituée d'une couche d'agents tensioactifs adsorbés à la surface des grains : on

parle alors de *ferrofluide surfacté*. La répulsion introduite est d'origine stérique.

- Pour les solvants polaires comme l'eau, on charge électrostatiquement les particules magnétiques grâce à l'adsorption d'ions à la surface. Le contrôle de cette répulsion se fait grâce à la concentration en ions de la solution et à la longueur d'écrantage électrostatique (longueur de Debye).

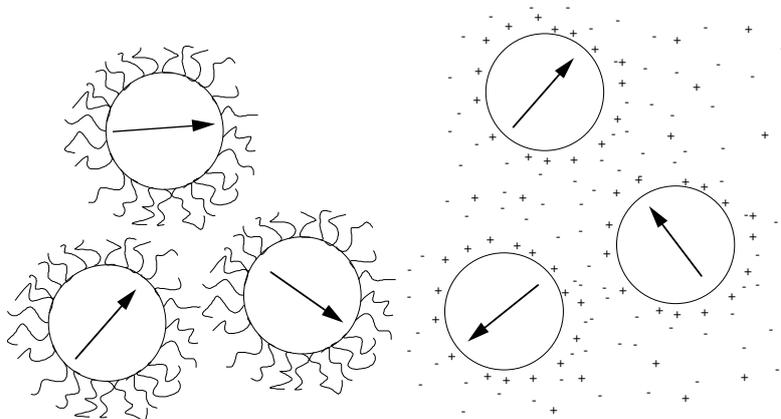


FIG. 4.1 – **À gauche**, schématisation d'un ferrofluide *surfacté*. **À droite**, schématisation d'un ferrofluide *ionique*. Le signe de la charge est arbitraire.

La stabilité d'un liquide magnétique est donc régie par l'équilibre entre les différentes énergies et l'entropie. La modification de l'un de ces termes, du fait d'une variation de la température, de la force ionique *etc.*, peut entraîner la déstabilisation du ferrofluide. Celui-ci, initialement monophasique, peut se séparer en deux phases liquides (démixtion) [7], [62], ou en une phase liquide et une phase solide (floculation, précipitation). L'ensemble de ces conditions conduit à une taille de grain maximale de l'ordre de 15 *nm*.

## 4.2 Point de vue microscopique

### 4.2.1 Nature dipolaire de la matière magnétique

Le comportement magnétique d'un ferrofluide est décrit par la *ferrohydrodynamique* [95] : c'est à dire la magnétostatique appliquée à des liquides magnétiques. Il convient de la distinguer de la magnétohydrodynamique (MHD) qui prend en compte l'existence de courant électrique au sein du liquide. Nous utiliserons le système SI pour exprimer le champ magnétique et l'aimantation (cf. annexe C). La magnétostatique peut s'introduire de deux façons différentes. Ces deux approches sont équivalentes et permettent toutes deux de rendre compte de tous les aspects de la magnétostatique.

- La première approche considère la force d'interaction entre deux boucles de courant (loi d'Ampère) et introduit le vecteur  $\vec{B}$  d'induction magnétique défini par la loi de Biot et Savart. La force, s'exerçant sur une particule de charge électrique  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$ , est donnée par la loi de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.1)$$

Cette approche montre bien que les forces magnétiques sont provoquées par le mouvement de charges *électriques*.

- La seconde approche postule l’existence d’une force de Coulomb *magnétique* entre deux charges monopolaires magnétiques,  $q_1^*$  et  $q_2^*$  [95] :

$$\vec{F}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_1^* q_2^*}{r^3} \vec{r} \quad (4.2)$$

Evidemment, les charges magnétiques monopolaires isolées n’existent pas dans la nature : elles ne sont qu’un artifice mathématique pratique. Cette approche met ainsi en évidence le caractère dipolaire de la matière magnétique. Le champ magnétique  $\vec{H}$  s’introduit d’une manière tout à fait similaire au champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\vec{H}_1 = \frac{F_{Coulomb}}{q_2^*} \quad (4.3)$$

Le passage d’une description à l’autre peut se faire en considérant des sources ponctuelles : la boucle de courant devenant un *tourbillon élémentaire* [36]. En effet, considérons le champ magnétique créé par une boucle de courant (cf. figure 4.2). Pour des distances plus grandes que le diamètre de la boucle de courant, les lignes de champ sont identiques à celles créées par un dipôle constitué par une charge positive (source) et une charge négative (puits).

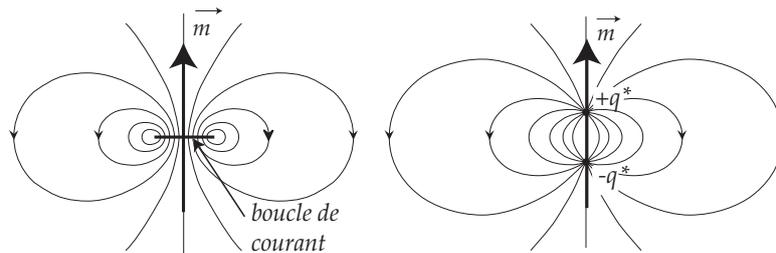


FIG. 4.2 – Lignes de champ créées par un dipôle. **A gauche** : dipôle Ampérien de moment magnétique  $\vec{m}$ . Les lignes du champ magnétique  $\vec{H}$  sont créées par une boucle de courant horizontale. **A droite** : dipôle Coulombien de moment magnétique  $\vec{m}$ . Les lignes du champ magnétique  $\vec{H}$  produites par une charge monopolaire magnétique  $+q^*$  et une charge  $-q^*$ .

#### 4.2.2 Les ferrofluides : une solution de *macrospins*

Le diamètre des particules magnétiques dans les ferrofluides, de l’ordre de  $10\text{ nm}$ , étant inférieur à l’épaisseur nécessaire à la formation d’une paroi de Bloch, les grains sont monodomaines et portent chacun un moment magnétique  $m = M_m V$  de l’ordre de  $10^4$  magnétons de Bohr. En l’absence de champ magnétique extérieur, les particules d’un ferrofluide, chacune portant un moment magnétique  $\vec{m}$ , sont orientées aléatoirement et l’aimantation totale du fluide est nulle. En présence d’un champ magnétique extérieur de faible amplitude, on distingue alors deux types de grains :

- les grains *ferrimagnétiques*, pour lesquels l’énergie d’anisotropie  $KV$  (avec  $K$  la constante d’anisotropie dépendant du matériau magnétique et de la forme du grain) est grande devant l’énergie d’agitation thermique  $kT$ . Le moment magnétique est alors bloqué dans une direction de la matrice du grain, et une

rotation du moment magnétique entraîne, en solution, une rotation solide de l'ensemble de la particule.

- les grains superparamagnétiques ( $KV \ll kT$ ), pour lesquels l'agitation thermique l'emporte. Le moment magnétique est alors libre de tourner par rapport à sa matrice.

Pour une énergie d'anisotropie  $KV$  donnée, la *température de Néel* est définie comme la limite entre ces deux comportements. La nature superparamagnétique ou ferromagnétique des grains n'a d'influence que sur les propriétés dynamiques <sup>1</sup>. Ainsi, un ferrofluide se comporte comme une solution de *macrospin* libre de s'orienter : on parle alors de paramagnétisme géant. Chacun de ces dipôles crée un champ magnétique dipolaire au point  $\vec{r}$  de la forme :

$$\vec{H}_m = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{\vec{m}}{r^3} + 3\frac{(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right) . \quad (4.4)$$

Puisque l'origine de l'aimantation d'un ferrofluide provient de l'existence de dipôles magnétiques en volume et non de courants électriques, le point de vue le plus naturel pour les ferrofluides est d'utiliser le champ magnétique  $\vec{H}$  et non l'induction magnétique  $\vec{B}$ .

### 4.2.3 Interactions dipolaires

L'énergie d'un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{m}$  soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{H}_0$  est :

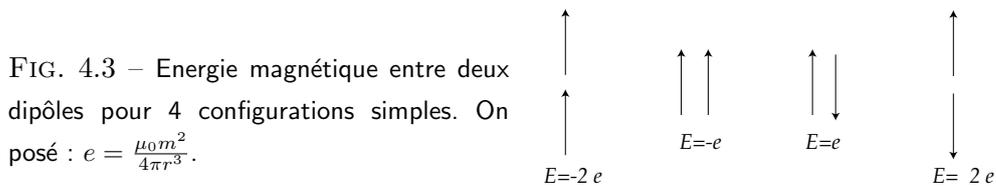
$$E_m = -\mu_0 \int_0^{H_0} \vec{m} \cdot d\vec{H} = -\mu_0 \vec{m} \cdot \vec{H}_0 . \quad (4.5)$$

Elle est minimum lorsque  $\vec{m}$  est dans la même direction que  $\vec{H}_0$ . Sous l'effet d'un champ magnétique, les particules d'un ferrofluide s'orientent dans la direction du champ magnétique.

Pour étudier les interactions entre particules magnétiques, nous nous placerons dans le cadre de l'approximation dipolaire. Si l'on considère maintenant deux dipôles séparés d'une distance  $\vec{r}$ , nous pouvons écrire leur énergie d'interaction à l'aide des équations 4.5 et 4.4 :

$$E_{m,m} = -\mu_0 \vec{m} \cdot \vec{H}_m(\vec{r}) . \quad (4.6)$$

Cette énergie d'interaction est anisotrope puisqu'elle dépend de l'orientation relative des dipôles (cf. figure 4.3). Elle varie en  $r^{-3}$  et engendre donc des forces en  $r^{-4}$ .



<sup>1</sup>C'est à dire lorsque le champ magnétique varie rapidement dans le temps.

## 4.3 Point de vue macroscopique : magnétostatique

### 4.3.1 Aimantation

#### Loi de Langevin

Lorsque l'on applique un champ magnétique  $\vec{H}_0$ , la tendance des moments dipolaires à s'aligner avec le champ magnétique est en partie compensée par l'agitation thermique. Le ferrofluide acquiert une aimantation  $\vec{M}$  qui résulte de la compétition entre énergie magnétique  $-\mu_0\vec{m}\vec{H}_0$ , qui tend à aligner les moments magnétiques  $\vec{m}$  dans la direction et le sens de  $\vec{H}_0$ , et l'énergie d'agitation thermique  $kT$ , qui tend à rétablir le désordre. Lorsque le champ magnétique augmente, l'équilibre est modifié et l'aimantation croît. Finalement, l'aimantation sature lorsque tous les moments dipolaires sont orientés dans la direction du champ. Dans la mesure où les interactions magnétiques entre les particules sont négligées, la théorie de Langevin décrit l'aimantation  $M$  du fluide en fonction du champ  $H_0$  :

$$\begin{aligned} M &= M_s (\coth(\psi) - 1/\psi), \quad \text{avec} \\ \psi &= \frac{\mu_0 m H_0}{kT}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

où  $M_s$  est l'aimantation à saturation des particules :  $M_s = nm$ , où  $n$  est le nombre de grains magnétiques par unité de volume. La courbe d'aimantation de Langevin est parcourue de manière réversible, sans hystérésis (cf. fig. 4.4). Lorsque la solution de fer-

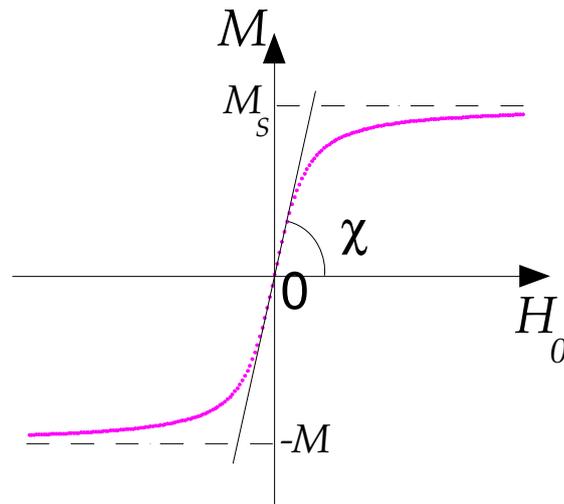


FIG. 4.4 – Courbe d'aimantation d'un liquide magnétique.

rofluide est très concentrée en particules magnétiques, le comportement de l'aimantation s'écarte de la loi de Langevin, du fait des interactions entre les particules magnétiques et de la polydispersité de la distribution en taille des particules.

### Susceptibilité

On définit la susceptibilité magnétique initiale par :

$$\chi = \left( \frac{\partial M}{\partial H_0} \right)_{H_0=0} . \quad (4.8)$$

La loi de Langevin donne une susceptibilité initiale :  $\chi = \frac{\mu_0 n m^2}{3kT}$ . Lorsque la valeur du champ magnétique extérieur est faible, le ferrofluide se comporte comme un milieu linéaire et acquiert une aimantation :

$$M = \chi H \quad . \quad (4.9)$$

#### 4.3.2 Relation entre M, H et B

La magnétostatique nous permet de relier l'aimantation, le champ magnétique et l'induction magnétique par l'équation :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad . \quad (4.10)$$

Nous venons de voir que comme pour les matériaux paramagnétiques ordinaires, l'aimantation d'un ferrofluide dépend du champ magnétique. A l'aide de l'équation 4.9, on peut reformuler l'équation 4.10 :

$$\vec{B} = (\mu_0 + \chi) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad , \quad (4.11)$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique absolue du ferrofluide.

#### 4.3.3 Conditions de passage à l'interface

En l'absence de courant ou de charges libres, et dans un régime permanent, les équations de Maxwell pour l'induction et le champ magnétique s'écrivent :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4.12)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{0} \quad (4.13)$$

Ces équations permettent d'établir les conditions que doivent respecter  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  à l'interface de deux milieux (indiqué 1 et 2) possédant des propriétés magnétiques différentes :

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (4.14)$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{0} \quad , \quad (4.15)$$

A l'interface entre deux milieux, sont conservés (cf. figure 4.5) :

- la composante normale de l'induction magnétique  $B_n$
- la composante tangentielle du champ magnétique  $H_t$

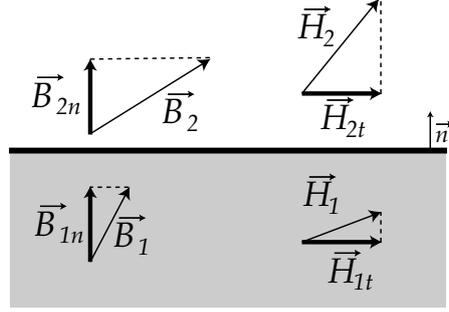


FIG. 4.5 – Conditions de passage à l'interface de deux milieux : Les composantes normales de l'induction magnétique ( $\vec{B}_n$ ) et tangentielle du champ magnétique  $\vec{H}_t$  sont constantes.

#### 4.3.4 Dans un ellipsoïde

L'aimantation d'un volume de ferrofluide dépend de sa forme. Nous nous limiterons au cas d'un ellipsoïde de révolution.

##### Facteur démagnétisant

Lorsqu'un volume de ferrofluide est soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{H}_0$ , les dipôles s'orientent en moyenne dans la direction de  $\vec{H}_0$ . Ceux-ci vont à leur tour engendrer un champ magnétique *démagnétisant* s'opposant au champ  $\vec{H}_0$  qui lui a donné naissance <sup>2</sup>. Il se calcule en faisant la somme sur tout le volume de ferrofluide, de concentration en particules  $n$ , des contributions de chacun des dipôles magnétiques de moment  $\vec{m}$  :

$$\vec{H}_d = n \int_V \vec{H}_m(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \quad . \quad (4.16)$$

Le calcul du champ démagnétisant est un problème difficile car il dépend a priori de  $\vec{r}$  et de l'orientation du champ extérieur. Dans le cas où le volume est un ellipsoïde, il s'avère cependant que le champ démagnétisant est constant. On fait alors intervenir [56] le tenseur diagonale  $\overline{\overline{D}}$  :

$$\vec{H}_d = -\overline{\overline{D}}\vec{M} \quad . \quad (4.17)$$

Les composantes de ce tenseur sont appelées facteurs démagnétisants. Nous les noterons  $D_n$ . Ils correspondent simplement aux trois axes  $a, b, c$  de l'ellipsoïde. Puisque le champ démagnétisant ne peut être supérieur à l'aimantation qui lui a donné naissance, on a :  $D_a + D_b + D_c = 1$ . Pour un ellipsoïde de révolution allongée ( $a > b, b = c$ ) dont l'excentricité vaut  $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ , on a [56] :

$$D_a = \frac{1 - e^2}{e^2} \left( \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right) \quad (4.18)$$

$$D_b = D_c = \frac{1}{2}(1 - D_a) \quad (4.19)$$

<sup>2</sup>Cet effet se retrouve tel quel lorsque l'on cherche le champ dépolarisant d'un diélectrique soumis à un champ électrostatique.

En faisant tendre le demi-axe  $a$  vers l'infini, on obtient un cylindre :

$$D_a = D_{\parallel} = 0 \quad (4.20)$$

$$D_b = D_c = D_{\perp} = \frac{1}{2} \quad (4.21)$$

Pour un ellipsoïde aplatie ( $a < b, b = c$ ), on a alors [56] :

$$D_a = \frac{1}{e^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e \right) \quad (4.22)$$

$$D_b = D_c = \frac{1}{2}(1 - D_a) \quad (4.23)$$

Un plan infini correspond au cas où  $a = 0$ . On alors pour un plan :

$$D_a = D_{\perp} = 1 \quad (4.24)$$

$$D_b = D_c = D_{\parallel} = 0 \quad (4.25)$$

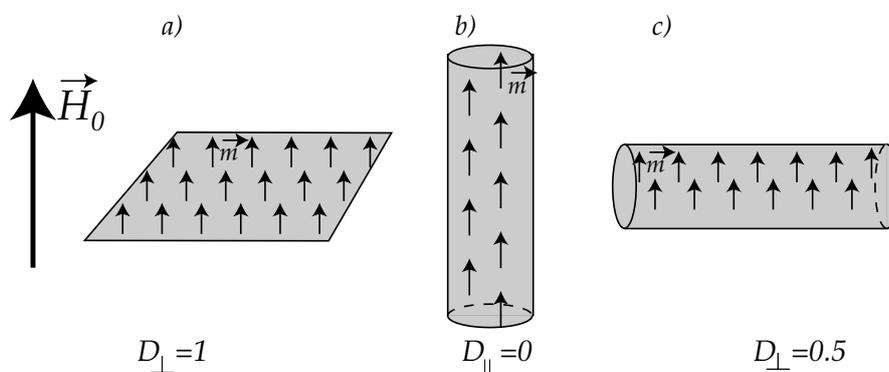


FIG. 4.6 – Facteur démagnétisant pour quelques cas simples. a) : plan infini, b) : cylindre infini parallèle au champ magnétique, c) cylindre infini perpendiculaire au champ magnétique.

### Champ magnétique

Le champ magnétique à l'intérieur d'un volume de ferrofluide est la somme du champ magnétique extérieur et du champ démagnétisant. Il dépend donc de la forme du volume de ferrofluide considéré. Puisque le facteur démagnétisant est constant dans un ellipsoïde, le champ magnétique dans un ellipsoïde est lui aussi constant. En utilisant les équations 4.9 et 4.17 on obtient :

$$(H_{int})_n = (H_0)_n + (H_d)_n = \frac{1}{1 + \chi D_n} (H_0)_n \quad (4.26)$$

### Aimantation

De la même manière, on obtient l'aimantation dans l'ellipsoïde :

$$(M)_n = \frac{\chi}{1 + \chi D_n} (H_0)_n \quad (4.27)$$

### 4.3.5 Forces dans un ferrofluide

#### Force de Kelvin : force volumique

La densité de force qui s'exerce sur un élément de volume est donnée par :

$$\vec{f}_m = \mu_0(\vec{M} \cdot \nabla)\vec{H} \quad , \quad (4.28)$$

où  $\vec{H}$  est le champ magnétique local. C'est la force de Kelvin [95]. Un champ constant n'exerce aucune force de volume : ce sont les gradients de champ magnétique qui sont à l'origine des forces volumiques magnétiques.

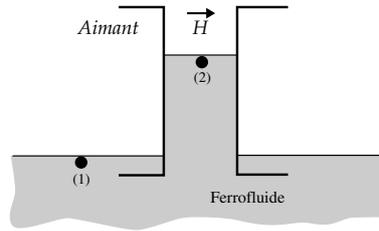


FIG. 4.7 – L'expérience classique de Quincke, montrant l'élévation du ferrofluide entre les deux pôles d'un aimant.

L'expérience de Quincke illustre parfaitement la force de Kelvin. Elle consiste à faire affleurer un aimant à la surface d'un ferrofluide, de façon à obtenir un champ magnétique constant entre les deux pôles de l'aimant (zone 2 sur la figure 4.7). Ailleurs le champ est beaucoup plus faible de sorte qu'il existe un gradient de champ magnétique entre la zone 1 et la zone 2. La force de Kelvin *aspire* le ferrofluide dans l'entrefer de l'aimant.

#### Pression Magnétique : force surfacique

Considérons l'interface d'un ferrofluide avec un autre fluide non magnétique. Pour plus de simplicité, nous nous placerons dans un cas unidimensionnel, l'axe  $z$  étant pris parallèle au vecteur normal de la surface  $\vec{n}$ . Nous considérerons le ferrofluide comme un liquide incompressible dont la concentration en particules magnétiques est constante<sup>3</sup>. L'équilibre des forces donne :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \mu_0 M_n \frac{\partial H_n}{\partial z} = 0 \quad . \quad (4.29)$$

Si nous intégrons l'équation 4.29, nous obtenons :

$$-(P_{int} - P_{ext}) + \mu_0 \int_{x_i}^{x_e} M_n \frac{\partial H_n}{\partial z} dz = 0 \quad . \quad (4.30)$$

La composante normale de l'induction magnétique étant conservée à la traversée de l'interface (cf. équation 4.14), nous obtenons en dérivant 4.10 :

$$\frac{\partial H_n}{\partial z} = -\frac{\partial M_n}{\partial z} \quad (4.31)$$

<sup>3</sup>Cette dernière hypothèse découle directement de la stabilité des ferrofluides en présence d'un champ magnétique

Finalement, nous obtenons :

$$P_i = P_e - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \quad . \quad (4.32)$$

Le terme  $P_m = -\frac{\mu_0}{2} M_n^2$  est appelé pression magnétique. Il s'agit d'une force de surface générée par la discontinuité de l'aimantation près de la surface. La pression à l'intérieur d'un ferrofluide présentant une aimantation normale est donc plus faible que la pression extérieure.

### 4.3.6 Déformation d'une goutte

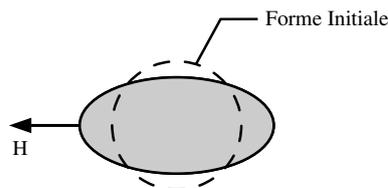


FIG. 4.8 – Une goutte de ferrofluide sphérique (vue en coupe) se déforme pour devenir ellipsoïdale lorsqu'un champ magnétique est appliqué.

Pour illustrer ce terme de pression magnétique, prenons une goutte de ferrofluide de forme ellipsoïdale à l'intérieur de laquelle nous avons vu que l'aimantation est constante (cf. sous section 4.3.4). L'aimantation normale ne dépend alors que de l'angle que fait la normale avec le champ magnétique et de l'excentricité. La pression dans la goutte est la résultante de la pression magnétique et de la pression capillaire :

$$P_i = P_e + \frac{\gamma}{R} - \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \quad (4.33)$$

À l'équilibre, la pression à l'intérieur de la goutte doit être constante de sorte que le rayon de courbure  $R$  diminue lorsque la surface est perpendiculaire au champ appliqué. Cette déformation donne lieu à une transition du premier ordre entre une forme de goutte peu allongée à une goutte beaucoup plus allongée [8].

## 4.4 Instabilité dans les ferrofluides

### 4.4.1 l'instabilité de Pics

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué perpendiculairement à l'interface entre un liquide magnétique et un autre fluide, au-delà d'un champ critique l'interface se couvre de pics régulièrement espacés (cf. fig. 4.9).

Cette instabilité peut être comprise comme étant la résultante d'un compromis entre les forces stabilisatrices de gravité et de tension superficielle d'une part, et les forces magnétiques. Celles-ci sont déstabilisantes lorsque le champ magnétique extérieur est perpendiculaire à l'interface du fait de la pression magnétique.

### 4.4.2 l'instabilité du labyrinthe

Considérons maintenant un ferrofluide confiné avec un autre fluide non miscible dans une cellule d'épaisseur  $h$  petite devant ses autres dimensions. Une telle cellule est ap-

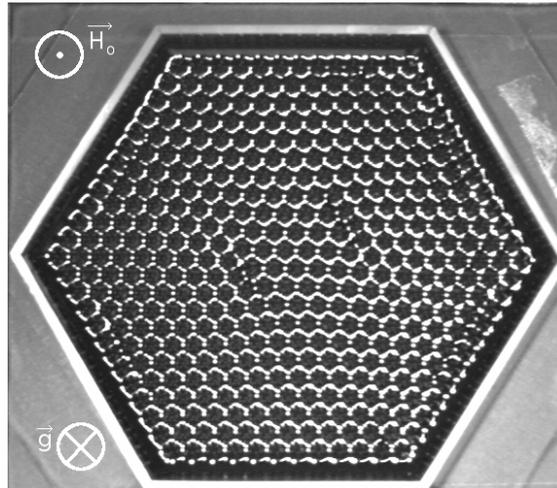


FIG. 4.9 – Image d'un réseau hexagonal de pics à l'interface d'un ferrofluide. D'après B. Abou [1]



FIG. 4.10 – Instabilité de pic à la surface du ferrofluide dans une cuve de Hele-Shaw constituée de deux plaques distante de 1 mm. **En haut**, le champ est nul. **En bas**, le champ est perpendiculaire à l'interface ferrofluide gaz et vaut  $H = 17 \text{ kA/m}$ .

pelée *cellule de Hele-Shaw*. Appliquons un champ magnétique perpendiculairement au plan de la cellule. Au-delà d'une aimantation critique, l'interface, entre les deux fluides se déstabilise et se couvre de doigts. Le ferrofluide envahit la phase non magnétique en formant un labyrinthe (la phase de ferrofluide reste connectée) (cf. fig. 4.11). La morphologie finale adoptée par le système est un labyrinthe de bandes de ferrofluide. Ce phénomène résulte d'un équilibre entre les facteurs stabilisants (tension interfaciale) et la contribution magnétique déstabilisante qui découle des répulsions dipolaires magnétiques. Les dipôles, orientés parallèlement entre eux et perpendiculairement au plan de la cellule, se repoussent, et tendent à augmenter la longueur de l'interface. Les effets magnétiques déstabilisants sont ici des effets de champ démagnétisant. Ce sont les interactions entre dipôles magnétiques, et leur dissymétrie au voisinage de l'interface qui sont à l'origine de l'instabilité.

## 4.5 Notre ferrofluide

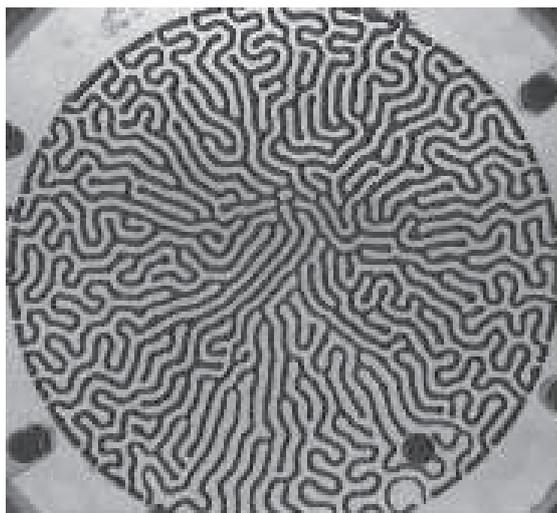


FIG. 4.11 – Image d'un labyrinthe obtenu en appliquant un champ magnétique de  $20kA/m$  perpendiculairement à une cellule d'épaisseur  $h = 1mm$  et de diamètre  $12cm$  initialement remplie d'une goutte de ferrofluide aqueux concentré et d'une huile mouillante.

#### 4.5.1 aimantation

Le ferrofluide que nous avons utilisé nous a été aimablement donné par le laboratoire LI2C, de l'université de Paris 6. Il a été synthétisé par Delphine Talbot <sup>4</sup>. Il s'agit d'un ferrofluide ionique (solvant aqueux) citraté avec des particules magnétiques de maghémite. La fraction volumique en particules est 12.6% et sa densité est de  $1.42 g/mm^3$ . Son aimantation à saturation est  $28 kA/m$ . La courbe d'aimantation est donnée par la figure 4.12. La réponse du ferrofluide est linéaire si le champ magnétique est inférieur à  $10kA/m$ , et sa susceptibilité est  $\chi = 1.1$ . Si le champ magnétique est plus élevé, la réponse n'est plus linéaire. Lorsque le ferrofluide est faiblement concentré et constitué de particules de même moment magnétique, nous avons vu que sa réponse est donnée par l'équation 4.7. Cependant, la distribution des particules magnétiques d'un ferrofluide est toujours polydisperse en taille de grain et en moment magnétique, ce qui donne une réponse différente de celle prévue par le modèle de Langevin. Pour décrire l'aimantation de notre ferrofluide, nous avons utilisé une fonction *phénoménologique* de la forme :

$$M_{eff} = \frac{M_s \chi_{phe}}{M_s + \chi_{phe} H_0} H_0 \quad , \quad (4.34)$$

où  $H_0$  est le champ magnétique appliqué à l'échantillon,  $\chi_{phe}$  et  $M_s$  décrivent respectivement la susceptibilité et l'aimantation à saturation du ferrofluide. Elles sont déterminées par le meilleur ajustement de la courbe d'aimantation (cf. figure 4.12). On peut remarquer sur la courbe d'aimantation une faible hystérésis due aux interactions entre particules.

---

<sup>4</sup>Sa référence est D43.

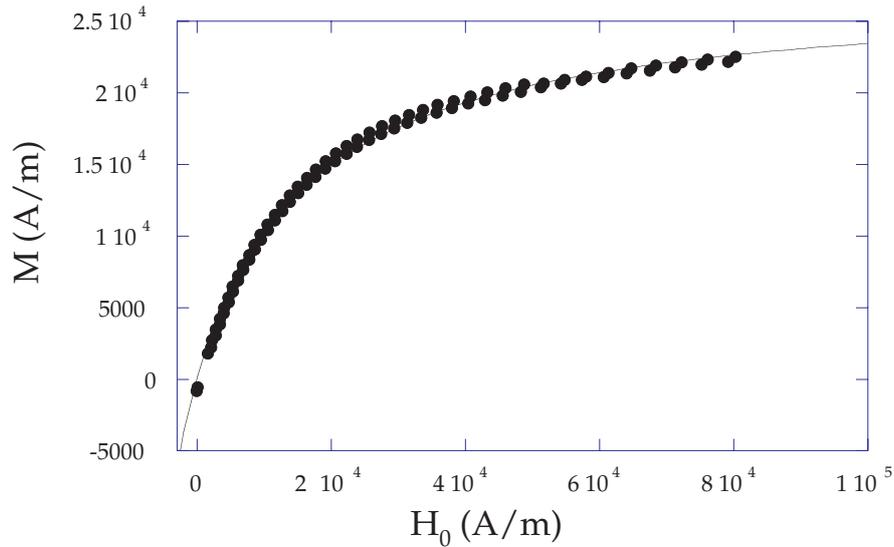


FIG. 4.12 – Courbe d’aimantation du ferrofluide utilisé dans les chapitre 5 et 6. La courbe en trait plein représente le meilleur ajustement par la fonction phénoménologique  $M = \frac{ab}{a+bH_0}H_0$ , avec les valeurs  $a = 27.3 \pm 0.2 \text{ kA/m}$  et  $b = 1.64 \pm 0.02$ .

### 4.5.2 Tension superficielle

Afin d’obtenir des mousses stables, nous avons ajouté du SDS au ferrofluide à une concentration de 2.1% en masse. Nous avons vérifié que le ferrofluide restait stable en l’observant sous microscope dans des cuves de  $10 \mu\text{m}$  en présence d’un fort gradient de champ magnétique obtenu grâce à un aimant. Pour estimer la tension de surface, nous avons utilisé la distance entre pics au seuil de l’instabilité dans une géométrie 2D. De la distance entre deux pics, nous pouvons, en utilisant les résultats numériques obtenus par Flament *et al* [44] remonter à la tension de surface. Il s’agit là d’une estimation plus que d’une mesure. Nous obtenons :  $\gamma \sim 20 \text{ mN/m}$ .

### 4.5.3 Viscosité

La viscosité a été mesurée au LBHP, avec l’aide d’Alain Ponton dans un rhéomètre de type cône-plan. L’application d’un champ magnétique de  $16 \text{ kA/m}$  n’a pas mis en évidence d’effet magnéto-rhéologique. La viscosité vaut  $\eta = 3.84 \pm 0.05 \text{ mPa.s}$ , soit environ 4 fois celle de l’eau.



## Chapitre 5

# Mousse 2D de Ferrofluide

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet d'un champ magnétique homogène et constant sur la structure d'une mousse de ferrofluide. Pour mettre en évidence ces changements structurels, nous avons choisi des mousses *quasi-bidimensionnelle*. Elles présentent des avantages tant d'ordre conceptuel que d'ordre pratique. Tout d'abord, une mousse confinée dans une cuve de Hele-Shaw orientée dans un plan horizontal permet de s'affranchir du drainage, aucun flux dans la direction de la gravité n'étant possible du fait des conditions aux limites. Ceci va nous permettre d'étudier les modifications de la structure induite par le champ indépendamment de celle induite par le drainage. De plus il est aisé d'en obtenir des images : une simple caméra ccd suffit là où un complexe système de tomographie est nécessaire dans les mousses tridimensionnelles. Et, enfin, elles sont particulièrement stables et ne nécessitent qu'une faible quantité de ferrofluide.

Nous allons d'abord revenir sur la structure des mousses *quasi 2D* de savon réalisées dans une cuve de Hele-Shaw. Celles-ci ne sont pas strictement bidimensionnelles et possèdent une structure interne qui n'est pas réductible à une simple projection dans la direction perpendiculaire au plan de la cuve de Hele-Shaw.

Nous verrons ensuite qu'un champ magnétique induit une anisotropie dans la distribution des rayons de courbures de la mousse. Nous présenterons un modèle basé sur les effets de champ démagnétisant permettant de rendre compte de cette anisotropie.

Enfin nous verrons que dans certains cas, les lois de Plateau ne sont plus respectées et qu'il est possible d'obtenir des angles entre les murs des cellules de  $180^\circ$ .

### 5.2 Structure d'une mousse de savon 2D

La structure détaillée d'une mousse 2D de savon est en fait un peu plus compliquée que le réseau de polygones auquel nous l'avons assimilé au chapitre 2. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer une mousse dans une cuve de Hele-Shaw avec une faible incidence par rapport à l'horizontale (cf. figure 5.1). Nous cherchons à définir la fraction *volumique* de liquide d'une mousse 2D dans une cuve de Hele-Shaw et à la relier à la fraction surfacique mesurée sur les images.

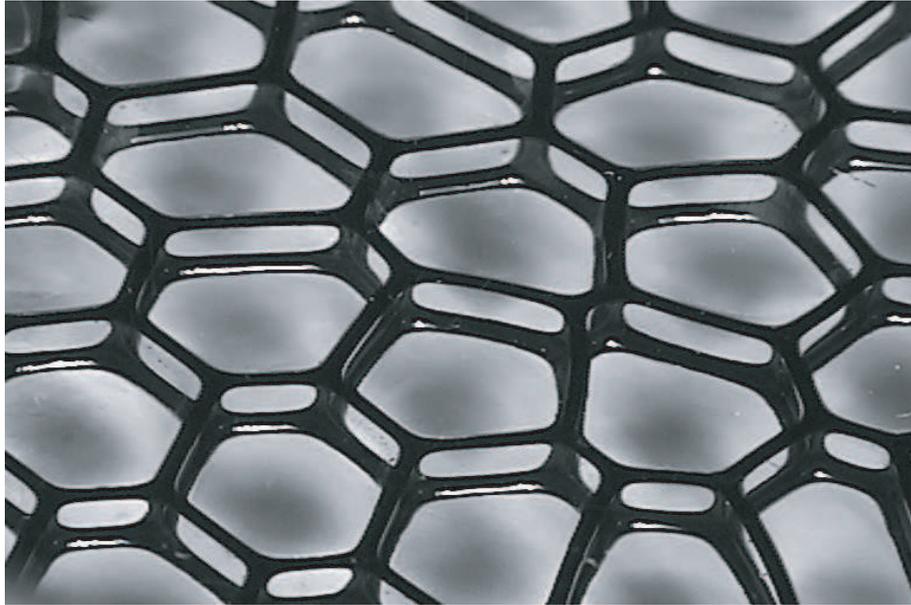


FIG. 5.1 – Mousse bidimensionnelle de ferrofluide (sans champ magnétique) dans une cuve de Hele-Shaw. La photo est prise avec un angle d'une vingtaine de degrés avec l'horizontale. La distance entre les plaques est de 2 mm et la longueur moyenne des côtés est de  $4.2\text{ mm}$ . Les bords de Plateau apparaissent noirs car ils contiennent du ferrofluide.

### 5.2.1 Les *pseudo* bords de Plateau

La forme des bords de Plateau mouillant les plaques est différente de ceux du volume (cf. figure 1.7). Pour cette raison, nous les appellerons *pseudo* bords de Plateau (pbP).

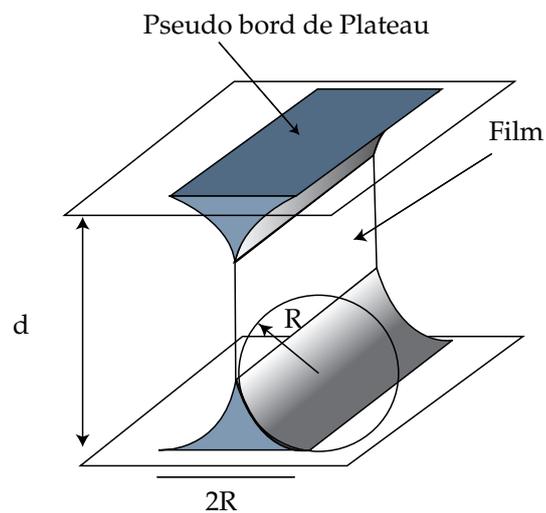


FIG. 5.2 – Schéma de la structure d'une mousse de ferrofluide.

Les bords de Plateau qui sont perpendiculaires aux plaques de la cuve de Hele-Shaw seront eux appelés *bords de Plateau 3d* (bP3d). Un vertex est constitué de trois pbP et d'un bP3d. Ils n'ont plus la même géométrie, puisque les pseudo bords de plateau (pbP) forment un angle de  $120^\circ$  entre eux et un angle de  $90^\circ$  avec les bP3d.

### 5.2.2 Deux réseaux

Les pbP mouillant la plaque supérieure et les pbP mouillant la plaque inférieure constituent deux réseaux qui sont reliés par des films et des bP3d. Lorsque l'on observe une mousse 2D, du dessus ou du dessous, les deux réseaux se superposent car les films de savon sont toujours perpendiculaires aux parois de la cuve de Hele-Shaw : un seul réseau est alors visible. Lorsque la distance entre les plaques de la cellule de Hele-Shaw est du même ordre de grandeur que la longueur capillaire, il est possible que les pbP supérieurs et inférieurs aient des rayons de courbure différents du fait de la pression hydrostatique : les deux réseaux ne sont alors plus tout à fait superposables. On estime de façon simple cette dissymétrie en écrivant l'égalité des pressions entre le réseau supérieur (membre de gauche) et le réseau inférieur (membre de droite) :

$$P_g - \frac{\gamma}{R_s} = P_g - \frac{\gamma}{R_i} + \rho g d \quad , \quad (5.1)$$

où  $P_g$  est la pression du gaz,  $R_s$  et  $R_i$  les rayons supérieur et inférieur et  $d$  la distance entre les plaques. Finalement :

$$R_i = \left( \frac{1}{R_s} - \frac{d}{l_c^2} \right)^{-1} \quad , \quad (5.2)$$

où  $l_c$  est la longueur capillaire (cf. équation 1.4).

### 5.2.3 Fraction Volumique

En négligeant le volume des vertex, on peut obtenir une expression simple de la fraction volumique d'une mousse de savon quasi 2D hexagonale de côté  $L$ . La section d'un bP3d est  $A_{bP3d} = R^2 (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$  et celle d'un pbP est  $A_{pbP} = R^2 (2 - \frac{\pi}{2})$ . Dans un réseau hexagonal, il y a 12 pbP dans une cellule, chacun appartenant à 2 cellules, et 6 bP3d, chacun appartenant à 3 cellules. Il y a aussi 6 films de savon d'épaisseur  $e$ , chacun appartenant à 2 cellules. Le volume de liquide par cellule est donc :

$$V_{liquide} = 6A_{pbP}L + 2A_{bP3d}d + 3deL \quad , \quad (5.3)$$

où  $d$  représente la distance entre les plaques inférieure et supérieure. Le dernier terme représente la contribution des films de savon. L'épaisseur de ces derniers doit rester faible car du fait de la courbure, les bord de Plateau sont en dépression par rapport aux films : le liquide contenu à l'intérieur des films est aspiré dans les bords de Plateau. En divisant par le volume d'une cellule hexagonale  $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2d$ , on obtient :

$$\phi = \frac{8 - 2\pi}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{dL} + \frac{4\sqrt{3} - 2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{R^2}{L^2} \quad , \quad (5.4)$$

ou plus simplement :

$$\phi \sim \frac{R^2}{dL} + 0.12 \frac{R^2}{L^2} \quad . \quad (5.5)$$

L'équation 5.5 montre que le premier terme correspondant au pbP est toujours dominant pour les mousses quasi-bidimensionnelle dans une cuve de Hele-Shaw : quasiment toute l'eau de la mousse est concentrée dans ces pseudo-bords de Plateau <sup>1</sup>. En se plaçant

<sup>1</sup>Rappelons que nous n'avons pas pris en compte le volume des vertex.

dans le cas limite du critère de bidimensionnalité (cf. équation 1.10) défini par Cox *et al* ([28]), c'est à dire  $d = 1.6L$ , il y a 5.2 fois plus de liquide dans les pbP que dans les bP3d.

### 5.2.4 Fraction surfacique

La vision naïve (mais fort utile) des mousses de savon dans une cellule de Hele-Shaw a été exposée dans le premier chapitre. Elle consiste à réduire la mousse à un réseau cellulaire séparé par des murs de liquide. Dans ce cas, on doit utiliser la fraction surfacique pour décrire la quantité de liquide présente dans la mousse, c'est à dire le rapport de la surface des murs divisée par la surface totale de la mousse. Dans le cas d'un réseau hexagonal de côté  $L$ , elle peut se calculer simplement. La surface d'un mur vaut  $2RL$ . Chacun de ces murs appartient à 2 cellules, de sorte qu'il y a trois murs par cellule. La surface d'une cellule hexagonale valant  $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$ , on obtient la fraction surfacique :

$$f = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{R}{L} . \quad (5.6)$$

## 5.3 Protocole expérimental

### 5.3.1 Montage

Pour ces expériences, nous avons utilisé des cuves de Hele-Shaw, constituées de deux plaques d'altuglass espacées par une entretoise en caoutchouc. La distance entre les deux plaques est fixée en intercalant des cales d'épaisseurs variables. La distance entre les plaques a varié entre  $1\text{ mm}$  et  $2\text{ mm}$ , selon les expériences. Le choix du verre synthétique s'est imposé à nous pour des raisons de simplicité d'usinage. Si le mouillage du verre synthétique par l'eau est partiel, l'ajout de surfactants dans le ferrofluide nous permet d'obtenir un mouillage total de sorte qu'aucun front de démouillage n'a jamais été observé.

La formation de la mousse s'est fait simplement en introduisant une aiguille dans la cellule et en injectant du gaz à travers celle-ci à l'aide d'un pousse seringue. Les bulles ainsi obtenues sont relativement monodisperses et il s'avère difficile de faire varier le volume de ces bulles.

La mesure de la quantité de ferrofluide présent dans la cellule s'effectue en pesant la cellule de Hele-Shaw. Connaissant la densité du ferrofluide, on déduit le volume de ferrofluide présent dans la cellule.

Pour appliquer le champ magnétique, nous avons utilisé 2 bobines de  $40\text{ cm}$  de diamètre montées en position de Helmholtz. Le champ magnétique ainsi créé est homogène sur la taille de la cuve de Hele-Shaw. Les bobines ont une inductance de  $91\ 10^{-3}\text{ mH}$  et une résistance de  $8.2\ \Omega$ . Les deux bobines sont montées sur un bâti qui permet de choisir l'orientation du champ (perpendiculaire ou parallèle au plan de la cuve de Hele-Shaw).

### 5.3.2 Éclairage

L'observation de la mousse se fait par le biais d'une caméra placée à la verticale de la cellule de Hele-Shaw. Pour mesurer les rayons de courbure supérieur et inférieur, nous

avons utilisé deux éclairages différents (cf. figure 5.3 ).

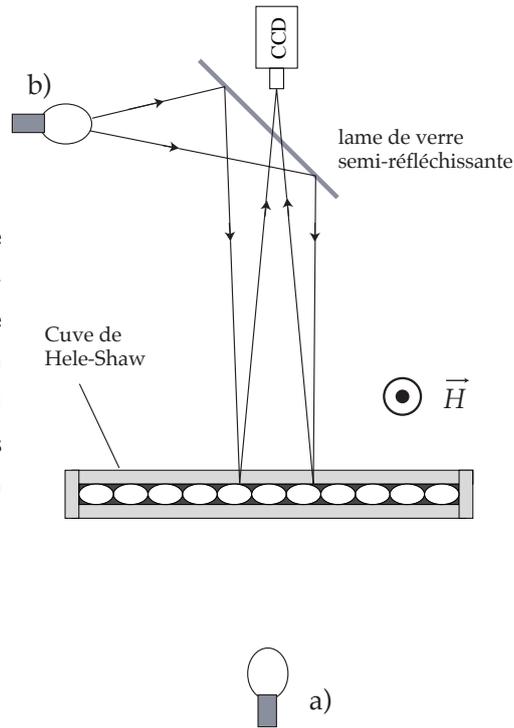
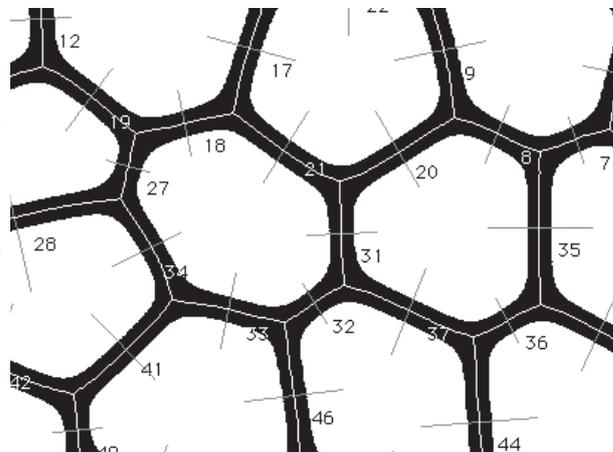


FIG. 5.3 – Schéma du montage expérimental. Une mousse bidimensionnelle est comprise entre deux plaques de verre synthétique (Cellule de Hele-shaw). La mousse est éclairée soit en transmission (a) soit en réflexion (b). Les images sont prises par une caméra placée à la verticale de la cellule.

En éclairant et en observant par dessus, nous avons une image de la réflexion de la lumière sur la plaque supérieure. Sur cette image, les zones mouillées par le liquide apparaissent sombres alors que les zones non mouillées apparaissent en clair : on obtient donc une image du réseau de pbP supérieur. Pour obtenir un contraste satisfaisant, il faut se placer en incidence normale. Pour cela, nous avons utilisé une plaque de verre semi-réfléchissante. Insistons sur le fait que cette technique marche aussi bien pour les mousses à base de solution savonneuse que pour les mousses à base de ferrofluide.

En observant la lumière transmise, nous avons accès à l'image du réseau inférieur de pbP. En effet, la lumière est absorbée par le ferrofluide contenu dans les pbP. On voit alors la section la plus large des pbP, c'est à dire celle qui est immédiatement en contact avec la plaque de verre synthétique du bas.

FIG. 5.4 – Mesure du rayon de courbure du réseau de pbP. Les pbP sont d'abord réduits à un pixel de large (en blanc) afin de repérer les vertex du réseau. On mesure ensuite la largeur du pbP grâce à la médiatrice.



Grâce à ces deux éclairages distincts, on peut soit obtenir l'image du réseau de pbP qui mouillent les plaques inférieures, soit celle du réseau qui mouille les plaques

supérieures de la cuve de Hele-Shaw. La largeur des pbP sur ces images correspond à  $2R$ ,  $R$  étant le rayon de courbure du pbP.

### 5.3.3 Statistique et traitement des images

Par traitement d'image (même procédure qu'à la sous-section 2.2.2), nous sommes capables de repérer les vertex ainsi que les pbP. Pour mesurer le rayon de courbure d'un pbP, on mesure la largeur des pbP grâce à leur médiatrice. Pour obtenir une mesure suffisamment précise du rayon de courbure, nous sommes obligé de faire des images de la mousse ne contenant qu'un petit nombre de cellules. Pour obtenir une bonne statistique sur toutes les orientations, nous avons donc pris une vingtaine d'images pour chaque valeur du champ magnétique, en changeant l'orientation du champ par rapport au réseau de pbP.

### 5.3.4 Mesure du rayon de courbure

Pour vérifier que notre mesure de la largeur des pbP correspond bien à deux fois le rayon de courbure, nous avons mesuré directement le rayon de courbure dans une mousse de savon 2D ( $\phi_{mousse} = 0.04$  et distance entre les plaques  $d = 2 \text{ mm}$ ) à l'aide d'un microscope de trois façons différentes.

- a). La première mesure du rayon de courbure (cf. 5.5 a) est donnée par l'épaisseur d'un pbP. Elle donne :

$$R_a = 0.383 \pm 0.006 \text{ mm} \quad . \quad (5.7)$$

- b). La seconde (cf. 5.5 b) mesure la courbure du pbP à sa jonction avec le film de mouillage. On utilise pour cela un éclairage en lumière monochromatique (lampe à sodium) qui produit des interférences du type lame à face parallèle entre la plaque d'altuglas et l'interface liquide-air du pbP. La distance entre deux franges lumineuses correspond à une variation d'épaisseur du pbP de  $\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$ . On obtient ainsi la forme du pbP dont on peut tirer le rayon de courbure. Cette technique nous permet de mesurer le rayon de courbure du pbP lorsque l'épaisseur varie faiblement, c'est à dire à la jonction du pbP et du film de mouillage des plaques. En effet, si l'épaisseur varie trop vite, les franges sont trop rapprochées pour pouvoir les résoudre. De ce fait les mesures sont assez imprécises :

$$R_b = 0.43 \pm 0.05 \text{ mm} \quad , \quad (5.8)$$

C'est à dire une variation de +8% par rapport à  $R_a$ .

- c). La troisième mesure (cf. 5.5 c) est obtenue grâce à l'image de la section des bP3d. Lorsqu'on éclaire en transmission et en lumière *blanche*, on voit apparaître dans un plan situé entre la plaque inférieure et la plaque supérieure, la forme de la section d'un bord de Plateau. Après en avoir extrait le contour par traitement d'image, on l'ajuste par un arc de cercle. Ces mesures donnent :

$$R_c = 0.49 \pm 0.03 \text{ mm} \quad . \quad (5.9)$$

Ainsi, les trois mesures donnent des résultats cohérents et nous retiendrons de cette étude que la mesure du rayon de courbure grâce à la largeur d'un pbP est juste.

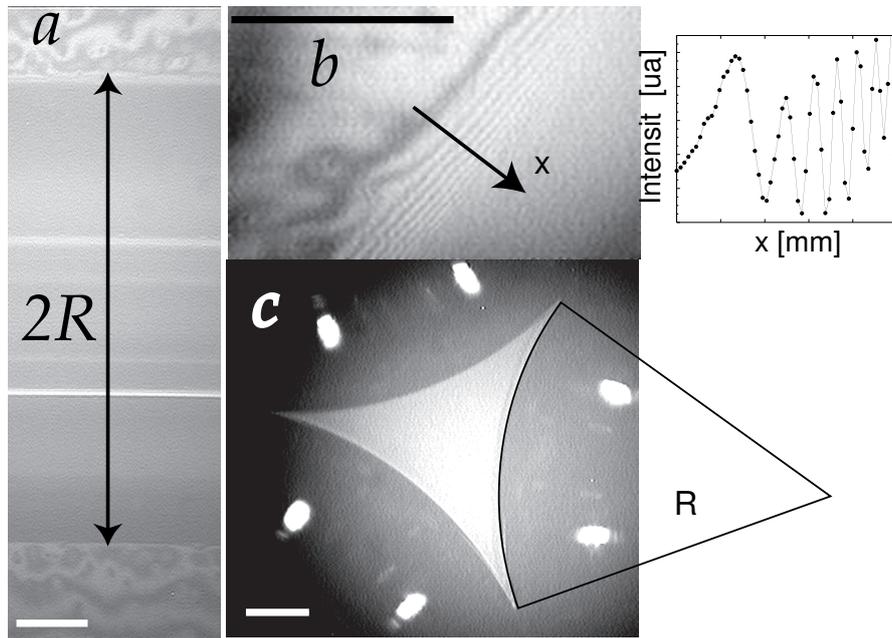


FIG. 5.5 – Trois mesures du rayon de courbure dans une mousse de savon 2D ( $\phi = 4\%$ , distance entre les plaques  $d = 2 \text{ mm}$ ). **a** Observation au microscope en lumière monochromatique et en réflexion d'un pseudo-bord de Plateau (pbP). **b** Interférences à la jonction entre le film de mouillage et le pseudo-bord de Plateau (pbP), obtenue en réflexion et lumière monochromatique. L'interfrange représente une variation de  $589 \text{ nm}$  de l'épaisseur du pbP. **c** Image de la section d'un bord de Plateau (bp3d) en transmission et lumière blanche. La barre sur chacune des images mesure  $0.1 \text{ mm}$ .

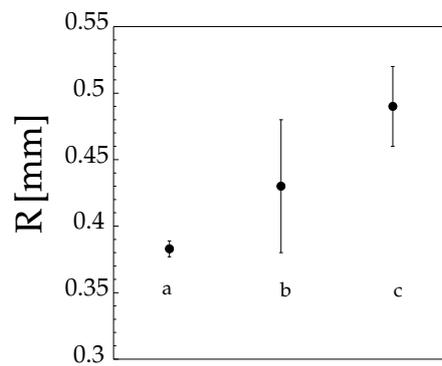


FIG. 5.6 – Mesures du rayon de courbure (cf. figure 5.5) dans une mousse 2D  $\phi = 4\%$  de solution savonneuse dans une cuve de Hele-Shaw  $d = 2 \text{ mm}$ . **a** : largeur du pbP. **b** : rayon de courbure déduit de la variation de l'épaisseur du pbP près du film de mouillage. **c** : courbure des bords de Plateau 3d qui relie les deux réseaux de pseudo bord de Plateau.

### 5.3.5 Fraction Volumique sans champ

Du rayon de courbure des bords de Plateau et de leur longueur, on peut, grâce à l'équation 5.5, déduire la fraction volumique de liquide de la mousse. La figure 5.7 compare la fraction volumique déduite de la mesure du rayon de courbure et de la longueur des pbP ( $\phi_{optique}$ ) à la mesure de la fraction volumique par pesée  $\phi_{masse}$ .

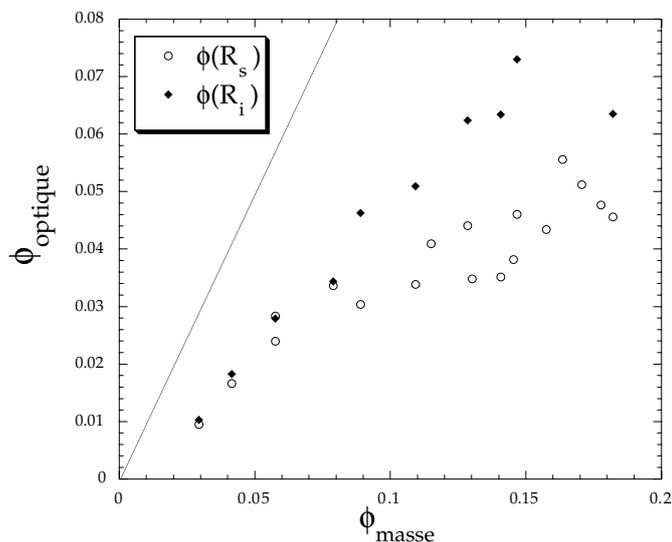


FIG. 5.7 – Fraction volumique calculée à partir de la formule 5.5 ( $\phi_{optique}$ ) en fonction de la fraction volumique obtenue grâce à la masse du ferrofluide présente dans la cellule de Hele-Shaw ( $\phi_{masse}$ ).  $R_s$  est le rayon de courbure du réseau de pbP supérieur (mesuré en réflexion), alors que  $R_i$  est le rayon de courbure du réseau inférieur de pbP (mesuré par transmission). La droite a une pente de 1. La distance entre les plaques vaut 1.4 mm.

Nous obtenons bien une relation linéaire entre  $\phi_{masse}$  et  $\phi_{optique}$ . Par contre, le coefficient de proportionnalité n'est pas 1, mais 0.44 lorsque l'on utilise le rayon de courbure inférieur et 0.30 pour le rayon de courbure supérieur. Notre expression de la fraction volumique 5.5 sous-estime la quantité réelle de liquide dans notre mousse. Cette étude simple suggère qu'une grande partie du liquide contenu dans les mousses quasi-bidimensionnelle est stockée dans les vertex, les films qui séparent les bulles et les films qui mouillent les plaques de la cuve de Hele-Shaw. Dans la suite, lorsque nous parlerons de la fraction volumique  $\phi$ , nous ferons référence à la mesure obtenue par pesée.

Nous n'avons pas connaissance dans la littérature de modèle décrivant adéquatement la structure d'une mousse bidimensionnelle dans une cuve Hele-Shaw. Plus généralement la possibilité de mesurer la fraction volumique sur des images de mousse 2D reste problématique. La structure des mousses *quasi*-bidimensionnelles a été très peu étudiée. Ce problème est d'autant plus important qu'une grande partie des propriétés dynamiques de la mousse dépendent de sa fraction volumique.

## 5.4 Le rayon de courbure

### 5.4.1 Premières observations

### Anisotropie du rayon de courbure

Un champ magnétique appliqué dans le plan de la cuve de Hele-Shaw provoque une anisotropie du rayon de courbure : les pbP alignés avec le champ s'épaississent (cf. figure 5.8). Une étude systématique du rayon de courbure en fonction de l'angle  $\theta$  entre le pbP et le champ magnétique confirme cette anisotropie et montre qu'elle s'accompagne d'une augmentation du rayon de courbure moyen du réseau de pbP. Pour obtenir une bonne résolution dans la mesure des rayons de courbure, il a fallu faire des photos de mousses ne contenant que quelques cellules. Pour obtenir une statistique sur les angles, nous avons pris une série d'images en réflexion (réseau de pbP supérieur) en tournant la cuve de Hele-Shaw (et donc la mousse) de quelques degrés par rapport au champ magnétique entre chaque photo. De cette manière nous avons obtenu une vingtaine de mesures de rayon de courbure par tranche de  $5^\circ$ .

### Effet du champ sur le rayon de courbure moyen

La façon la plus simple pour mesurer le rayon de courbure moyen consiste à utiliser la fraction surfacique  $f(H)$ . En supposant que la fraction surfacique garde une forme similaire à celle dérivée pour un réseau hexagonal (cf. équation 5.6) la variation relative de la fraction surfacique s'écrit :

$$S_r = \frac{f(H)}{f(0)} = \frac{\langle R(H) \rangle}{R(0)} \quad (5.10)$$

Ainsi, la fraction surfacique est directement reliée à la valeur moyenne du rayon de courbure.

Lorsque l'on applique un champ magnétique extérieur dans le plan de la cellule,  $S_r$  est une fonction croissante du champ magnétique pour les faibles valeurs du champ, puis sature (cf. figure 5.10 a). La courbe  $S_r(H)$  dépend des caractéristiques de la mousse, comme sa fraction volumique ou la longueur des côtés. Nous n'avons pu mettre en évidence de relation simple entre les différents paramètres de la mousse et la courbe  $S_r(H)$ .

Une observation visuelle directe de la cellule montre que le rayon de courbure des bP3d diminue. Ainsi, le liquide qu'ils contiennent se retrouve dans le réseau de pbP, provoquant l'augmentation du rayon de courbure. Plus encore que les bP3d, se sont probablement les vertex, qui voient leur volume diminuer par la même occasion, qui fournissent l'essentiel du volume du ferrofluide.

Les résultats obtenus avec un champ magnétique perpendiculaire au plan de la cuve confirment cette interprétation. Dans ce cas, l'effet est inverse : la fraction surfacique diminue fortement (cf. figure 5.10b) tandis que l'on voit nettement que l'épaisseur des films séparant les bulles de gaz augmente (cf. figure 5.11), jusqu'à ce qu'ils deviennent opaques. Le ferrofluide est alors stocké principalement dans les films de savon parallèles au champ magnétique.

### Conclusion

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, le rayon de courbure moyen du réseau de pbP ainsi que le rayon de courbure des bP3d et l'épaisseur des films varient. La

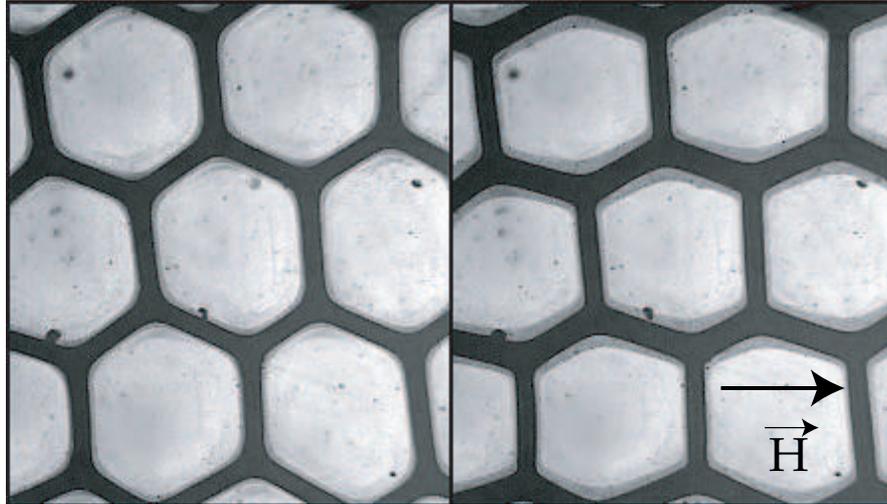


FIG. 5.8 – Image du réseau de pbP supérieur dans une mousse de ferrofluide.  $\phi_{masse} = 0.05$  et  $L = 3.6\text{ mm}$ . La distance entre les deux plaques est de  $1.8\text{ mm}$ . **A gauche** :  $H = 0\text{ kA/m}$ , **A droite** :  $H = 32\text{ kA/m}$  (champ magnétique horizontal).

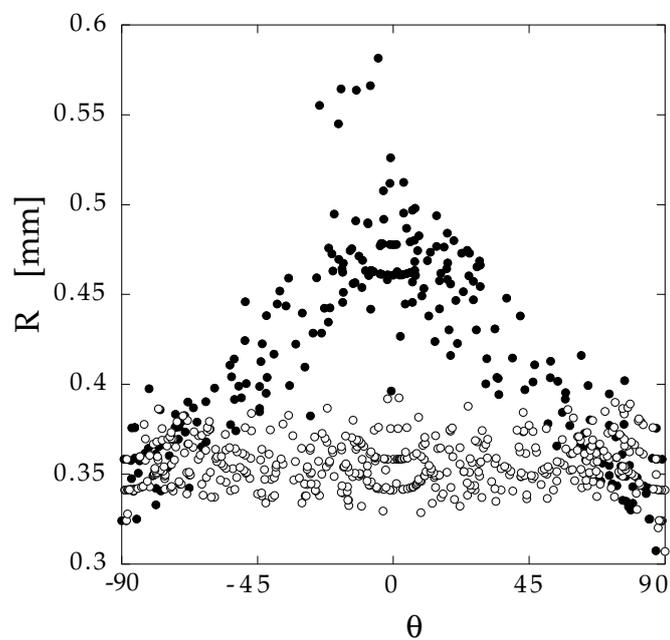


FIG. 5.9 – Rayon de courbure en fonction de l'angle entre les pbP et le champ magnétique  $\theta$  dans une mousse de ferrofluide de fraction volumique  $\phi_{masse} = 0.05$  et  $L = 3.6\text{ mm}$ . La distance entre les deux plaques est  $d = 1.8\text{ mm}$ . Les cercles ouverts :  $H = 0\text{ kA/m}$  et disques pleins :  $H = 32\text{ kA/m}$ .

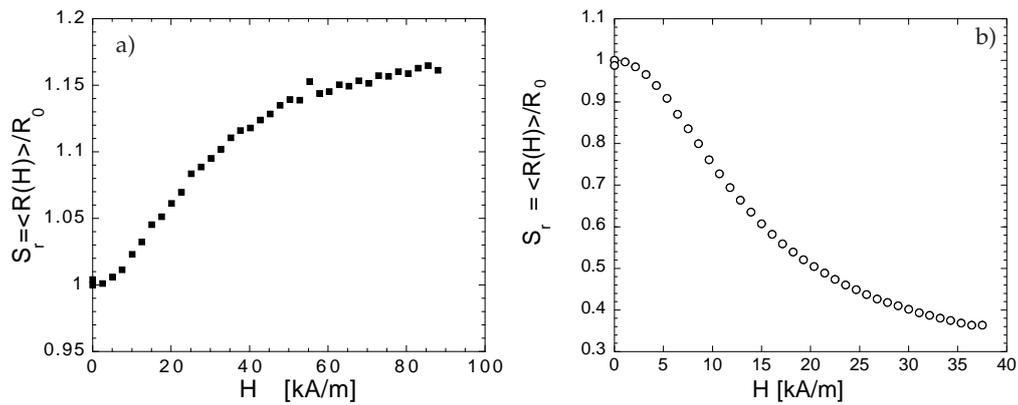


FIG. 5.10 – Variation relative de la valeur moyenne du rayon de courbure des pbP, en fonction du champ magnétique. La distance entre les 2 plaques est  $1.8 \text{ mm}$ ,  $\phi = 0.055$ . **a** : Champ magnétique dans le plan du réseau de pbP **b** : Champ magnétique perpendiculaire au plan du réseau de pbP.

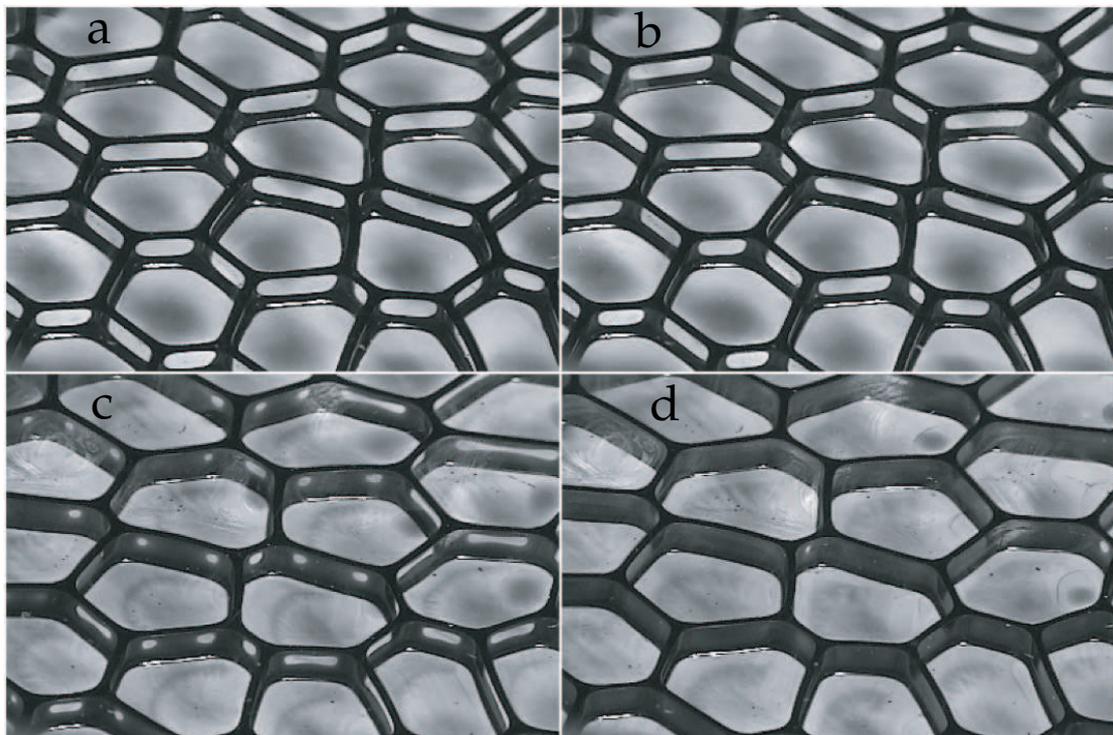


FIG. 5.11 – Mousse bidimensionnelle sous champ magnétique *perpendiculaire* au plan de la cuve de Hele-Shaw. **a** :  $H = 0 \text{ kA/m}$ ; **b** :  $H = 7.5 \text{ kA/m}$ ; **c** :  $H = 12.8 \text{ kA/m}$ ; **d** :  $H = 16 \text{ kA/m}$ . La distance entre les deux plaques de la cuve de Hele-Shaw est  $2 \text{ mm}$  et la longueur est moyenne de pbP est  $\langle L \rangle = 4.2 \text{ mm}$ .

répartition de liquide entre les deux réseaux de pbP d'un côté et film, bp3d et vertex de l'autre côté, dépend donc de  $\vec{H}$ .

Comme il est difficile de prendre en compte la structure exacte d'une mousse 2D dans une cuve de Hele-Shaw, nous la réduisons au système suivant :

- un réseau de pbP interconnecté purement bidimensionnel.
- un *réservoir* de ferrofluide constitué par les films, les bp3d et les vertex.

Selon l'orientation et la norme du champ magnétique extérieur, ce *réservoir* se vide ou se remplit. On peut interpréter cet effet comme un couplage entre la quantité de ferrofluide présente dans le réseau de pbP et  $\vec{H}$ . Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'au réseau 2D de pbP, et nous chercherons à comprendre les variations du rayon de courbure d'un pbP en fonction de l'angle  $\theta$  qu'il fait avec le champ magnétique extérieur  $\vec{H}$ . Pour comparer les mesures faites à différentes valeurs du champ magnétique, nous devons tenir compte du fait que la quantité de ferrofluide présente dans le réseau de pbP dépend du champ. Ainsi, nous normaliserons les valeurs des rayons de courbure en divisant par la valeur moyenne RMS :

$$r(\theta, H) = \frac{R(\theta, H)}{\sqrt{\langle R^2(H) \rangle}}, \quad (5.11)$$

de sorte que  $\int r^2(\theta, H) d\theta = 1$  pour toutes les valeurs du champ magnétique. Cette normalisation est le *prix* à payer pour pouvoir comparer notre mousse dans une cuve de Hele-Shaw à un modèle bidimensionnel.

## 5.5 Modèle de l'anisotropie

Nous avons vu dans la section 4.3.5 qu'il existait deux types de forces dans un ferrofluide soumis à un champ magnétique extérieur : des forces volumiques dites de Kelvin et des forces surfaciques traduites par une pression magnétique dans le ferrofluide. Pour modéliser l'anisotropie des rayons de courbure dans la mousse (cf. figure 5.9), nous devons prendre ces deux effets en compte. Pour cela nous allons d'abord établir l'expression de la pression et du champ magnétique dans un bord de Plateau isolé. Puis nous considérerons un réseau de bord de Plateau connecté non soumis à la gravité. À l'équilibre, la pression dans le réseau doit être constante. La pression capillaire compense les effets magnétiques de sorte que le rayon de courbure des bords de Plateau doit varier selon l'orientation et la valeur du champ magnétique.

### 5.5.1 Pressions dans un bord de Plateau

Considérons d'abord un bord de Plateau isolé du reste de la mousse. Il fait un angle  $\theta$  avec le champ magnétique. Soit  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs tangent et normal du bord de Plateau. La figure 5.12 résume les notations utilisées. En prenant en compte la pression de Laplace liée à la courbure et le terme de pression magnétique, on peut écrire la pression dans un bord de Plateau :

$$P = P_0 - \frac{\gamma}{R(\theta, H_0)} - \frac{\mu_0}{2} \langle (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 \rangle \quad (5.12)$$

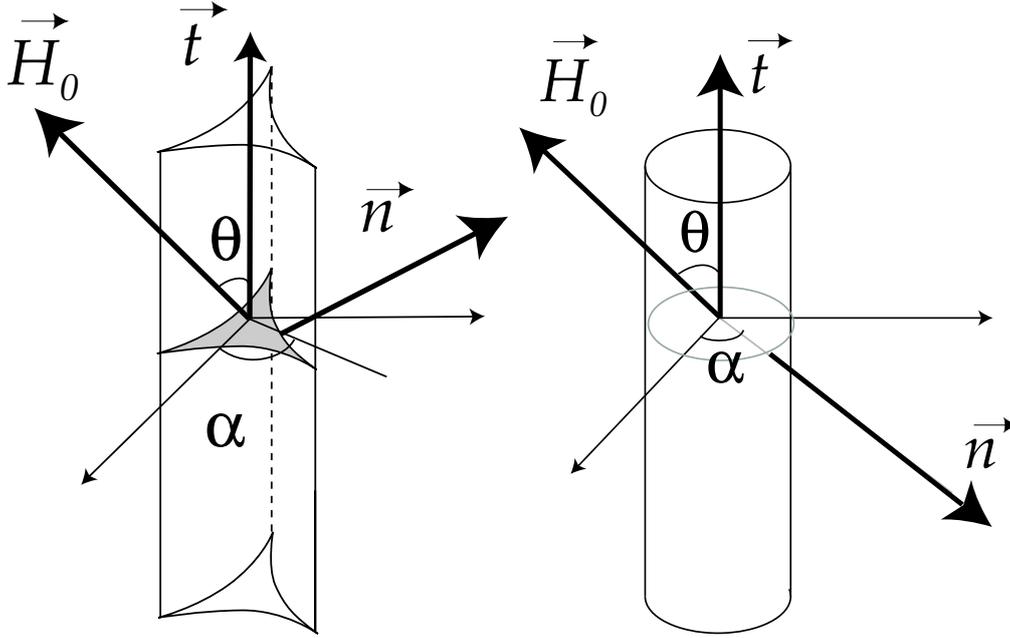


FIG. 5.12 – **A gauche** : un bord de Plateau. **A droite** : cylindre infini utilisé pour calculer les effets magnétiques.

où  $\vec{M}$  est l'aimantation,  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface et  $\langle \rangle$  désigne la valeur moyenne sur toute la surface du bord de Plateau. La pression dans un bord de Plateau dépend donc de l'intensité du champ magnétique et de son orientation avec le champ magnétique.

### 5.5.2 Équilibre des Pressions dans un réseau

Considérons maintenant un réseau de bord de Plateau connectés non soumis à la gravité. A l'équilibre mécanique, forces de volumes (force de Kelvin) et forces de surfaces (pressions dans le bord de Plateau) s'équilibrent :

$$-\vec{\nabla}P + \mu_0(\vec{M}\vec{\nabla})\vec{H}_{int} = 0 \quad (5.13)$$

Le champ magnétique  $\vec{H}_{int}$  est le champ régnant à l'intérieur des bords de Plateau, qui est la somme du champ magnétique appliqué  $\vec{H}_0$  et du champ démagnétisant  $\vec{H}_d$  produit par l'orientation des dipôles magnétiques (cf. sous-section 4.3.4) :  $\vec{H}_{int} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d$ . Contrairement au champ appliqué, le champ démagnétisant n'est pas constant dans la mousse car il dépend de l'orientation des bords de Plateau. Il existe donc des gradients de champ *locaux* à l'intérieur de la mousse, même lorsque le champ appliqué est constant. En se limitant au cas où l'aimantation est linéaire avec le champ magnétique ( $\vec{M} = \chi\vec{H}_{int}$ ), l'équation 5.13 peut alors s'intégrer et l'on obtient :

$$-P + \frac{\mu_0\chi H_{int}^2}{2} = C(H_0) \quad (5.14)$$

$C(H_0)$  est une constante d'intégration qui est fixée par la conservation du volume du ferrofluide. Elle est identique en tout point de la mousse mais varie avec le champ

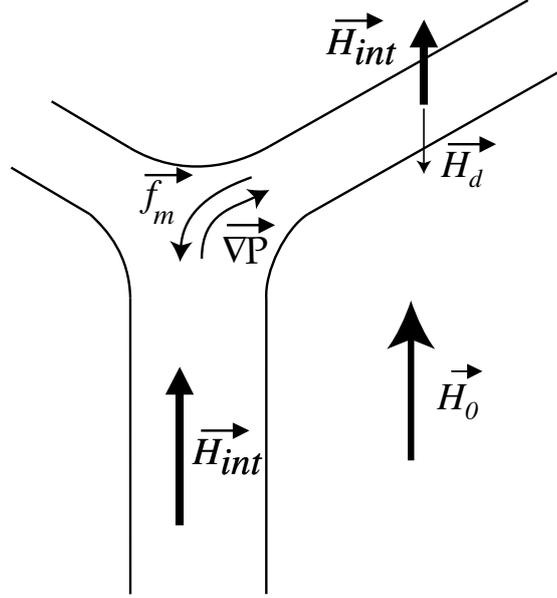


FIG. 5.13 – Equilibre entre la force magnétique de Kelvin  $\vec{F}_m$  et du gradient de pression  $\vec{\nabla}P$ .

appliqué. En combinant les équations 5.12 et 5.14, on obtient une équation pour le rayon de courbure du bord de Plateau :

$$\frac{\gamma}{R(\theta, H_0)} = P_0 + C(H_0) - \frac{\mu_0}{2} \langle (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 \rangle - \frac{\mu_0 \chi H_{int}^2}{2} \quad (5.15)$$

$R(\theta, H_0)$ , le rayon de courbure d'un bord de Plateau dépend de son orientation et de la valeur du champ magnétique.

### 5.5.3 Champ magnétique intérieur

Pour calculer le champ magnétique intérieur d'un bord de Plateau, il nous faut connaître le facteur démagnétisant. Celui-ci n'est calculable analytiquement que dans le cas d'ellipsoïde. Aussi, nous approximerons le facteur démagnétisant d'un bord de Plateau par celui d'un cylindre infini. Cette approximation donne un champ magnétique constant dans un bord de Plateau.

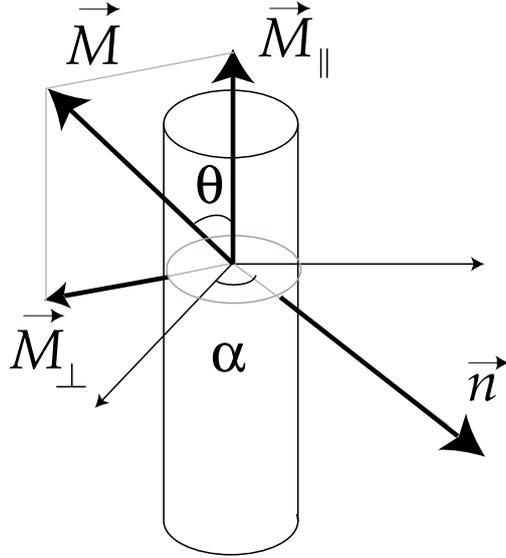
Le champ extérieur  $\vec{H}_0$  est la somme d'une composante tangentielle au bord de Plateau ( $\vec{H}_0 \cdot \vec{t}$ ) =  $\cos \theta H_0$  et d'une composante orthogonale : ( $\vec{H}_0 \cdot \vec{n}$ ) =  $\sin \theta H_0$ , avec les notations de la figure 5.12. En utilisant la formule 6.22 et la valeur du facteur démagnétisant pour un cylindre infini ( $D = 0$  dans sa direction principale, et  $D = \frac{1}{2}$  dans les deux directions normales), on peut calculer la valeur du champ magnétique à l'intérieur d'un bord de Plateau, en fonction de l'angle  $\theta$  qu'il fait avec le champ magnétique  $\vec{H}_0$  :

$$\vec{H}_{int} = \frac{\sin \theta H_0}{1 + \frac{\chi}{2}} \vec{n} + \cos \theta H_0 \vec{t} \quad (5.16)$$

En décomposant l'aimantation  $\vec{M} = \vec{M}_\perp + \vec{M}_\parallel$  (cf. figure 5.14), on peut calculer l'aimantation normale moyenne sur toute la surface :

$$\langle (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 \rangle = \langle \cos^2 \alpha M_\perp^2 \rangle_\alpha \quad . \quad (5.17)$$

FIG. 5.14 – Décomposition de l'aimantation  $\vec{M}$  en deux composantes, une parallèle au bord de Plateau ( $M_{\parallel}$ ) et l'autre perpendiculaire  $M_{\perp}$ .



qu'il faut moyenner sur toutes les orientations du vecteur normal, c'est à dire tous les  $\alpha$ . Avec la formule 4.27 :

$$\langle (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 \rangle = \frac{\chi^2 H_0^2 \sin^2 \theta}{2(1 + \frac{\chi}{2})^2} \quad (5.18)$$

L'équation 5.15 s'écrit maintenant :

$$\frac{\gamma}{R(\theta, H_0)} = P_0 + C(H_0) - \frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2}{4(1 + \frac{\chi}{2})} \left( \frac{2 + \chi}{\chi} - \sin^2 \theta \right) \quad (5.19)$$

Pour faire intervenir le Rayon de courbure sans champ  $R_0$  à la place de la pression  $P_0$ , on écrit l'équation 5.19 pour un champ nul :

$$P_0 = \frac{\gamma}{R_0} - C(0) \quad (5.20)$$

Finalement, l'équation 5.15 se met sous une forme simple :

$$R(\theta, B_m, R_0) = \frac{R_0}{1 - B_m (c(B_m) - \sin^2 \theta)} \quad (5.21)$$

On a introduit le nombre de Bond magnétique  $B_m$  et la fonction  $c(H_0)$  qui valent respectivement :

$$B_m = \frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 R_0}{2\gamma(2 + \chi)} \quad (5.22)$$

$$c(H_0) = \frac{2 + \chi}{4\chi} \left( 1 + 8 \frac{C(H_0) - C(0)}{\mu_0 H_0^2 \chi} \right) \quad (5.23)$$

La fonction  $c(H_0)$  est sans dimension et reflète les variations de pressions dans la mousse qui sont liées au champ. Elle ne dépend pas de l'espace. Le nombre de Bond magnétique  $B_m$  compare les effets magnétiques et les effets capillaires. La fonction  $c(H_0)$  peut aussi s'exprimer en fonction du nombre de Bond :  $c(B_m)$ .

Grâce à l'équation 5.21, nous avons déterminé la valeur du rayon de courbure des pbP en fonction de l'angle et de la valeur du champ à une constante d'intégration près,  $c(B_m)$ .

### 5.5.4 Conservation du volume dans une mousse 2D

La constante  $c(B_m)$  est déterminée par la conservation du liquide. Il nous faut prendre en compte la géométrie de la mousse. Le cas bidimensionnel est le plus simple, car la fraction de liquide contenue dans la mousse ne peut changer (pas de flux induit par la gravité). Nous verrons au chapitre 6 le cas tridimensionnel. Le volume moyen  $\langle v \rangle$  d'un pbP est lui aussi conservé et s'écrit :

$$\langle v \rangle = \int R^2 \langle L \rangle \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) d\Pi = R_0^2 \langle L \rangle \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.24)$$

où  $\langle L \rangle$  est la longueur moyenne d'un côté d'un pbP et  $d\Pi$  est la probabilité d'avoir un pbP dont l'orientation est comprise entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Le membre de droite à été obtenu en considérant le cas où le champ extérieur est nul. En supposant une équiprobabilité dans l'orientation des pbP, la probabilité s'écrit :  $d\Pi = \frac{d\theta}{\pi}$ . Cette relation n'est valable qu'à deux dimensions. Nous reviendrons plus tard sur le cas tridimensionnel. Pour les calculs, nous allons utiliser une forme plus compacte de l'équation 5.21 :

$$R(\theta, B_m) = \frac{R_0}{B_m (a + \sin^2 \theta)} \quad (5.25)$$

où l'on a introduit une nouvelle fonction :

$$a = \frac{1}{B_m} - c \quad (5.26)$$

Il convient de remarquer que lorsque  $B_m$  tend vers 0, alors  $a$  tend vers l'infini. En remplaçant par la valeur du rayon de courbure déduite de l'équation 5.21, on obtient l'équation suivante :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \pi B_m^2 \quad (5.27)$$

Cette équation constitue la condition aux limites que doit satisfaire la constante d'intégration. L'intégration donne une équation implicite pour la fonction  $c(B_m)$  :

$$\frac{2(B_m c - 1) - B_m}{(B_m c - 1 - B_m)^{\frac{3}{2}} (B_m c - 1)^{\frac{3}{2}}} = 2 \quad (5.28)$$

Il s'agit d'un polynôme du sixième degré dont les racines sont déterminées numériquement. On ne retient que l'unique solution réelle et positive. Les valeurs de  $c(B_m)$  sont de l'ordre de 0.5 et tendent vers 0 quand  $B_m$  augmente (cf. 5.15).

### 5.5.5 Conclusion

Il faut avant tout retenir de ce modèle qu'il tient compte des effets locaux de champ démagnétisant. En appliquant un champ magnétique extérieur homogène à une mousse de ferrofluide, des gradients de champ locaux apparaissent entre les bords de Plateau. Contrairement à un gradient de champ magnétique extérieur, ces forces magnétiques sont *locales* et ne génèrent pas de flux de ferrofluide sur des distances supérieures à la longueur d'un bord de Plateau. Ces forces locales sont compensées par la pression capillaire, ce qui entraîne une dépendance du rayon de courbure des bords de Plateau en fonction de l'orientation. Cette anisotropie est décrite par la relation 5.25, qui donne

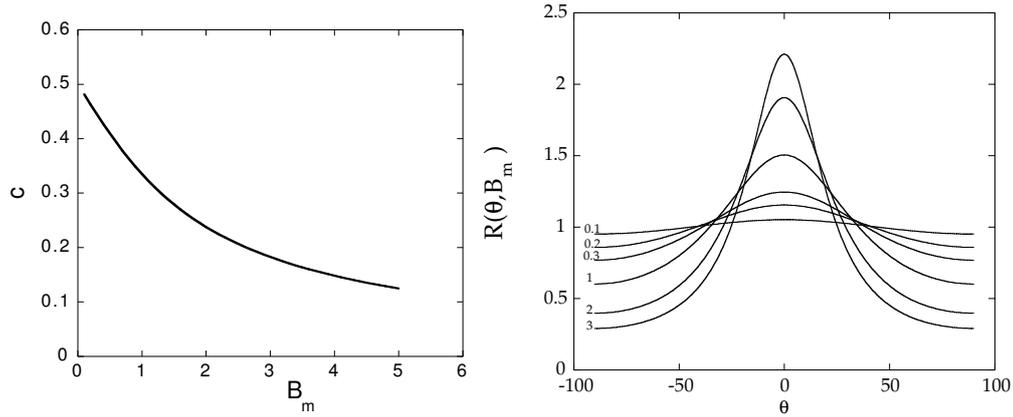


FIG. 5.15 – **A gauche** : valeurs de  $c(B_m)$  définies en 5.23 obtenues numériquement grâce à l'équation 5.28. **A droite** : Rayon de courbure du bord de Plateau en fonction de l'angle entre le champ et le bord de Plateau pour différents  $B_m$ , déduits de l'équation 5.21.

le rayon de courbure en fonction de  $B_m$  et de l'orientation du bord de Plateau, ainsi que la conservation du liquide dans la mousse (cf. équation 5.28). Cette dernière relation est spécifique à la géométrie de la mousse et à ces conditions aux limites, et donc au cas bidimensionnel.

Rappelons les hypothèses que nous avons dû faire pour arriver à ce résultat.

- Le champ magnétique à l'intérieur d'un bord de Plateau est identique à celui dans un cylindre de même rayon de courbure.
- La section des bords de Plateau varie par homothétie : seul leur rayon de courbure varie.
- La quantité de liquide dans la mousse 2D est constante.
- Les bords de Plateau sont orientés aléatoirement dans la mousse.

### 5.5.6 Comparaison

Conformément à la définition 5.11, nous avons renormé les rayons de courbure par leur valeur moyenne RMS qui dépend de la valeur du champ. La figure 5.16 représente les mesures du rayon de courbure renormé  $r$  après moyennage ainsi que les meilleurs ajustements avec l'expression théorique 5.21, dans le cas d'une mousse de fraction volumique 5.3% et de côté  $L = 3.5 \text{ mm}$ . De cet ajustement, on tire les valeurs de  $c$  et  $B_m$ . La même procédure est répétée avec 5 autres mousses, de fraction volumique  $\phi = 6.8$ ; 5.5; 2.9 et 2.4 % correspondant respectivement à des longueurs de côté de  $L = 4.1$ ; 4.6; 4.9 et 4.7 mm. L'ensemble des résultats est porté dans les figures 5.17 et 5.18.

La figure 5.17 montre que notre renormalisation du rayon de courbure par sa valeur moyenne RMS est efficace :  $c$  et  $B_m$  sont toujours compatibles.

Afin de comparer les résultats expérimentaux et les prédictions du modèle d'anisotropie, nous avons représenté  $\gamma B_m^{def} = \frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 R_0}{2(2+\chi(H))}$  en fonction des *mesures expérimentales* du nombre de Bond magnétique déduites des ajustements des courbes expérimentales d'anisotropie (cf. figure 5.16). Ainsi la pente sur la figure 5.18 représente la tension de surface du ferrofluide. A faible champ magnétique, l'aimantation est linéaire avec le champ (jusqu'à 10 kA/m) et on retrouve bien une relation linéaire entre les deux valeurs

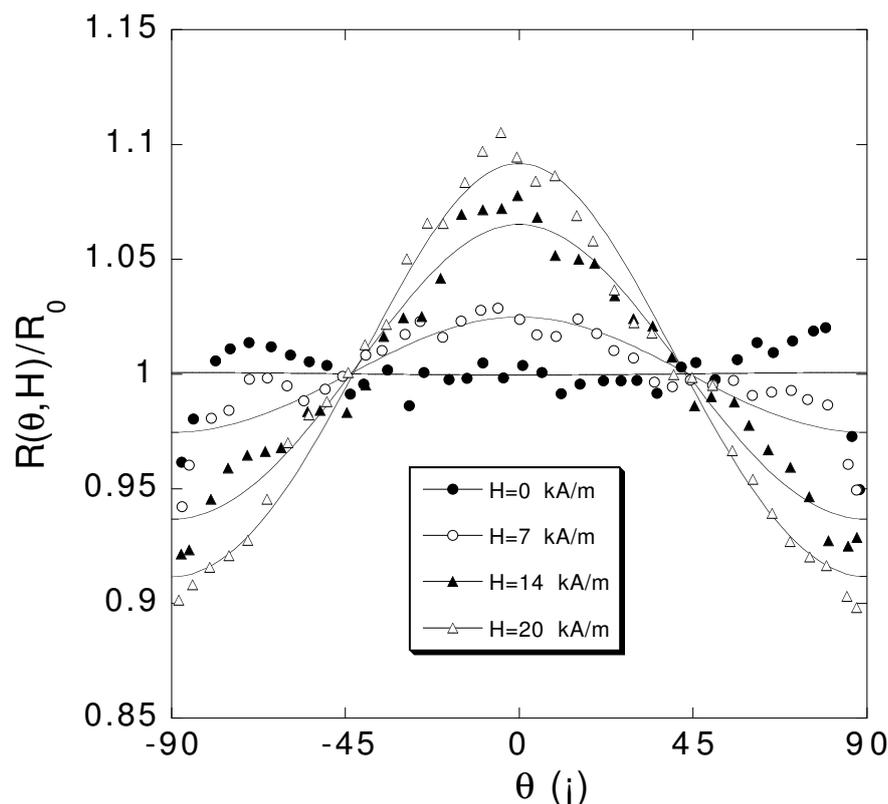


FIG. 5.16 – Anisotropie relative des pbP dans une mousse de ferrofluide ( $\phi = 0.05$ ). Les points expérimentaux ont été moyennés sur les pbP ayant la même orientation, par tranche de  $5^\circ$ . La courbe en trait plein est le meilleur ajustement de l'expression  $r(\theta, B_m) = \frac{1}{1 - B_m(c - \sin^2 \theta)}$ , avec pour paramètres libres  $B_m$  et  $c$ . La distance entre les deux plaques est de  $1.8 \text{ mm}$ .

de  $B_m$ . A fort champ, on observe une saturation de l'anisotropie. En effet, bien que  $\gamma B_m^{def}$  augmente avec le champ magnétique, l'anisotropie mesurée expérimentalement ( $B_m^{fit}$ ) n'augmente presque plus. Cela est dû à la saturation de l'aimantation de notre ferrofluide (cf. 4.12) : pour des valeurs supérieures à  $H = 10 \text{ kA/m}$  (cf. figure 4.12), l'aimantation du ferrofluide n'est plus linéaire avec le champ magnétique extérieur.

### 5.5.7 Saturation de l'aimantation

A fort champ, l'aimantation sature et la susceptibilité chute. Le nombre de Bond magnétique effectif est alors beaucoup plus faible que celui donné par  $B_m^{def}$ . Il est très difficile de tenir compte de cet effet dans le modèle d'anisotropie que nous avons utilisé. En effet, la linéarité de l'aimantation du ferrofluide avec le champ magnétique est essentielle pour pouvoir intégrer l'équation 5.13 qui traduit l'équilibre des forces.

A défaut d'un modèle rigoureux, nous substituerons  $\chi^2 H^2$  par la fonction phénoménologique introduite par l'équation 4.34  $M_e f f^2(H_0)$ . Le nombre de Bond s'écrit alors  $B_m = \frac{\mu_0 M_e f f^2(H_0) R_0}{2\gamma(2+\chi)}$ . Les points ainsi obtenus sont représentés avec des diamants sur la figure 5.18. La définition de  $B_m^{def}$  reste alors proportionnelle au nombre de Bond déduit des mesures.

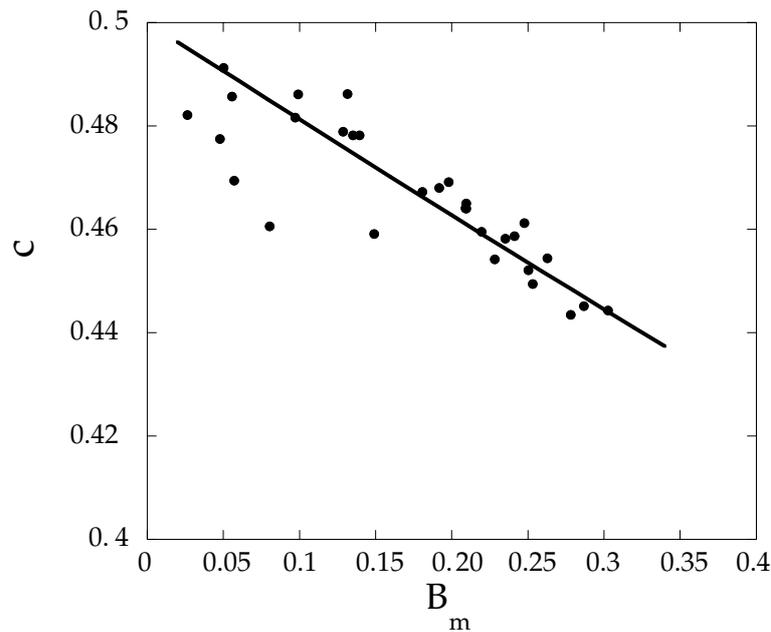


FIG. 5.17 – Représentation de  $c$  (cf. 5.23) en fonction de  $B_m$ , tous deux mesurée grâce aux ajustements de la variation de  $r(\theta, H)$ , pour différentes mousses de fractions volumiques 6.8; 5.3; 5.5; 2.9 et 2.4%. La courbe en trait plein est donnée par les solutions de l'équation 5.28.

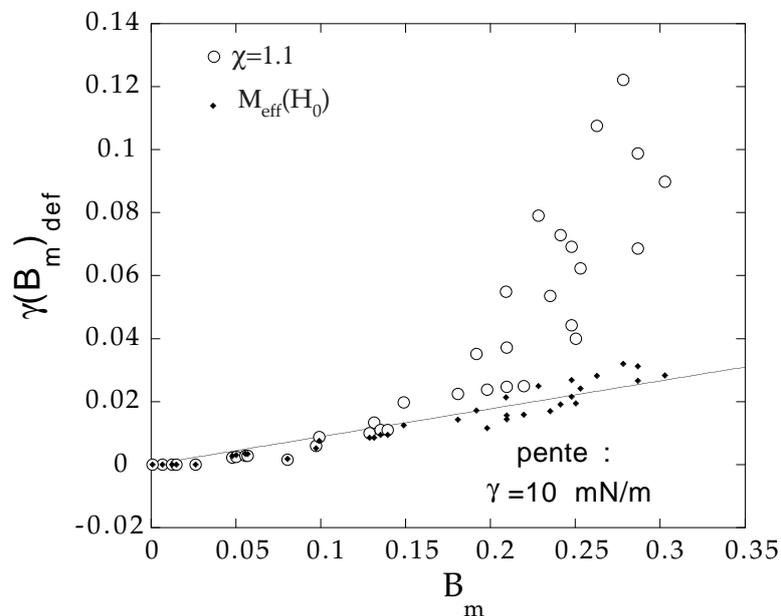


FIG. 5.18 – Cercles vides : Représentation de  $\frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 R_0}{2(2+\chi)}$ , c'est à dire  $\gamma B_m$  obtenue par la définition 5.22 en fonction de la valeur mesurée grâce aux ajustements de  $r(\theta, H)$  pour différentes mousses ( $\phi = 6.8; 5.3; 5.5; 2.9$  et  $2.4\%$ ). Les diamants pleins représentent :  $\frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 R_0}{2(2+\chi(H))}$  où  $\chi(H)$ , la susceptibilité est une fonction du champ magnétique extérieur et traduit la saturation de l'aimantation à fort champ.

### 5.5.8 Conclusion

La pente sur la figure 5.18 donne une tension de surface  $\gamma = 10 \text{ mN/m}$ , alors que nous attendions une tension de surface de l'ordre de  $\gamma = 20 \text{ mN/m}$  (cf. 4.5.2). Cela traduit des effets magnétiques plus importants que ceux prédits par notre modèle.

L'explication réside probablement dans la structure réelle tridimensionnelle de notre mousse *quasi* bidimensionnelle. En effet, lorsque le champ magnétique est dans le plan de la cuve de Hele-Shaw les films séparant les bulles de gaz et les bP3d sont toujours perpendiculaire au champ magnétique. Lorsque le champ magnétique augmente, ils se vident donc dans le réseau de pbP, provoquant une augmentation de la fraction surfacique (cf. 5.10). Les conditions aux limites que nous avons utilisées dans notre modèle supposent une mousse idéalement bidimensionnelle et ne permettent pas de rendre compte de cet effet.

## 5.6 Loi de Plateau Magnétique

Lorsque les fractions volumiques sont très élevées et que la distance entre les plaques faible, l'angle entre les pbP en présence d'un champ magnétique dans le plan de la cellule de Hele-Shaw peut varier très fortement par rapport aux  $120^\circ$  donnés par les règles de Plateau (cf. 1.3.1). Cet effet dépend de l'orientation du réseau de la mousse (cf. figure 5.19). L'angle entre les deux plus gros pbP est toujours le plus grand.

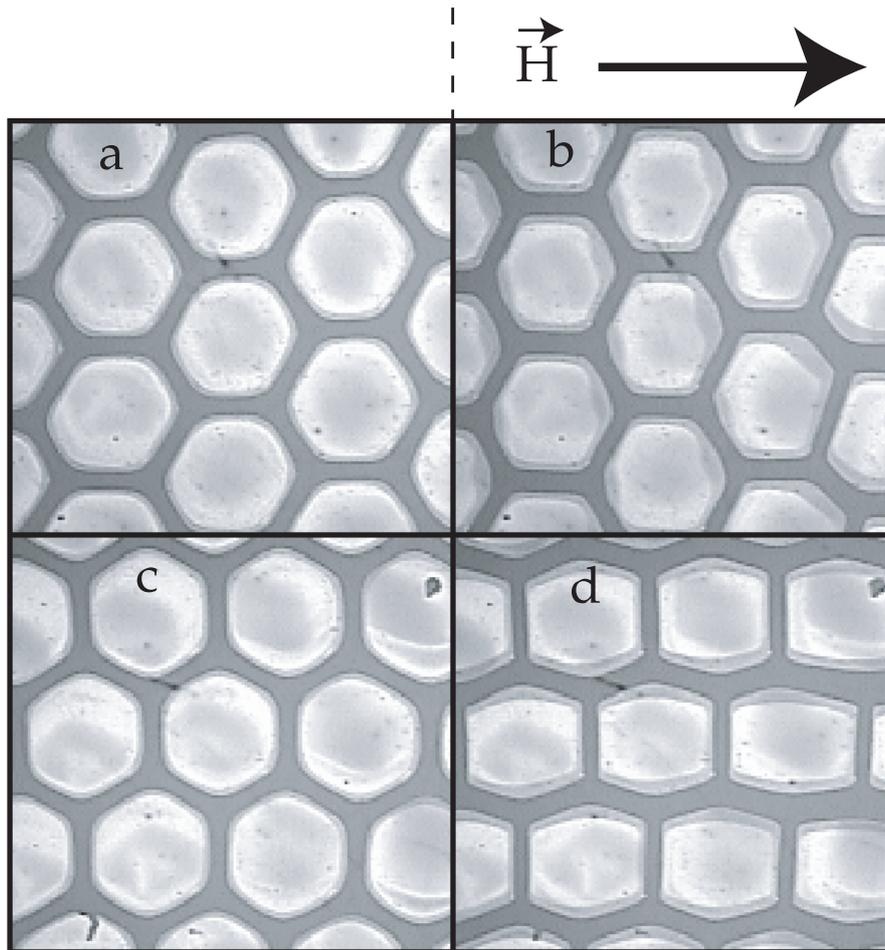


FIG. 5.19 – Modification des lois de Plateau dans une mousse 2D hexagonale de Ferrofluide. Les réseaux **a** et **c** se déforment et donnent respectivement **b** et **d**, lorsqu'un champ magnétique  $H = 37.5 \text{ kA/m}$  horizontal, dans le plan de la cuve de Hele-Shaw, est appliqué. ( $d = 1.4 \text{ mm}$ ,  $L = 3.7 \text{ mm}$ ,  $\phi = 15\%$ ,  $R_0 = 0.44 \text{ mm}$ ).

Des déviations aux lois de Plateau pour des mousses de savon 2D polydisperses ont déjà été observées par Stavans et Glazier, dans [99]. Neimark et Vignes-Adler ont montré, que des variations dans l'épaisseur des films séparant les bulles de gaz pouvaient entraîner des variations d'angles de l'ordre de 3 degrés [85]. Dans notre cas, les variations entre les bords de Plateau sont beaucoup plus importantes et ne sauraient être reliées aux mêmes mécanismes.

Lorsque la mousse est très humide, ou que la distance entre les plaques de la cuve de Hele-Shaw est faible, il est possible d'observer une transition du réseau de bulles

*hexagonal* classique vers un réseau de bulles *carrées*, ce qui implique la disparition d'un côté et la formation de vertex à 4 pbP. Cette transition s'accompagne de la formation de pbP ayant une *épaisseur* supérieure à la distance entre les deux plaques de la cuve de Hele-Shaw dans la direction du champ magnétique. Cette transition se fait de manière continue grâce à une augmentation progressive de l'angle entre les pbP les plus épais qui s'orientent dans la direction du champ. Dans un premier temps, la position du centre de masse des cellules ne varie pas (cf. figure 5.19) : le réseau ressemble alors à une structure hexagonal *aplatie*. Si la fraction volumique est assez importante et la distance entre les plaques très faible, le réseau devient carré, avec un déplacement du centre de masse des cellules. Ces déplacements sont, dans l'ensemble, réversibles. En diminuant le champ magnétique, la mousse revient à son état initial <sup>2</sup>.

Une des caractéristiques de cette transition structurale de *nid d'abeille* à *mur de brique* est que la fraction volumique ne reste pas homogène. En effet, les pbP peuvent former des *bandes* de ferrofluides parallèles au champ dans lesquelles réside beaucoup de ferrofluide. En coupant brusquement le champ magnétique, on observe que les zones où se sont formées ces bandes sont plus humides que le reste de la mousse (cf. figure 5.21). On obtient ainsi une coexistence de zones parfaitement hexagonales *sèches* avec des zones à structure carrée *humides*. Ces dernières apparaissent en premier près de défauts topologiques <sup>3</sup>, comme par exemple aux bords de la cuve de Hele-Shaw. Elles s'étendent lorsque le champ augmente et *aspirent* le ferrofluide du reste de la mousse.

### 5.6.1 Analyse des images

Nous allons nous intéresser aux relations entre les rayons de courbures et l'angle entre les pbP, dans le même esprit que S. Bohn *et al* dans [11]. Nous tenons à remercier ici Stephen Bohn pour son aide ainsi que pour son logiciel de traitement d'images. L'expérience se déroule de la même manière que précédemment. Le champ est dans le plan de la cellule. On s'intéresse maintenant à la variation de l'angle en fonction des rayons des pbP. L'analyse des images a été faite grâce au traitement d'images développé par S. Bohn *et al*, dont on trouvera une description complète dans [11]. Les notations utilisées pour repérer les pbP formant un vertex sont résumées sur la figure 5.22. Chacun des pbP est repéré par un indice, attribué en fonction du rayon de courbure, l'indice 3 repérant le pbP ayant le plus grand rayon de courbure. L'angle d'un pbP par rapport au champ magnétique est noté  $A_i$ , son rayon de courbure  $R_i$ . L'angle entre les bords de Plateau est noté  $a_{ij}$ .

### 5.6.2 Résultats

#### Orientation du réseau

La déformation du réseau de pbP induite par le champ magnétique dépend de l'orientation des pbP par rapport au champ magnétique, comme le montre la figure 5.19. Pour

<sup>2</sup>Les mousses étant des systèmes métastables, elles sont piégées dans des configurations qui ne minimisent pas leur énergie. En les perturbant, il est possible de les faire transiter dans une configuration de plus faible énergie [48]. Le champ magnétique joue ici le rôle de la perturbation et permet à la mousse d'atteindre une configuration de plus faible énergie en provoquant quelques T1.

<sup>3</sup>Les défauts topologiques du réseau sont provoqués par les cellules n'ayant pas 6 côtés.

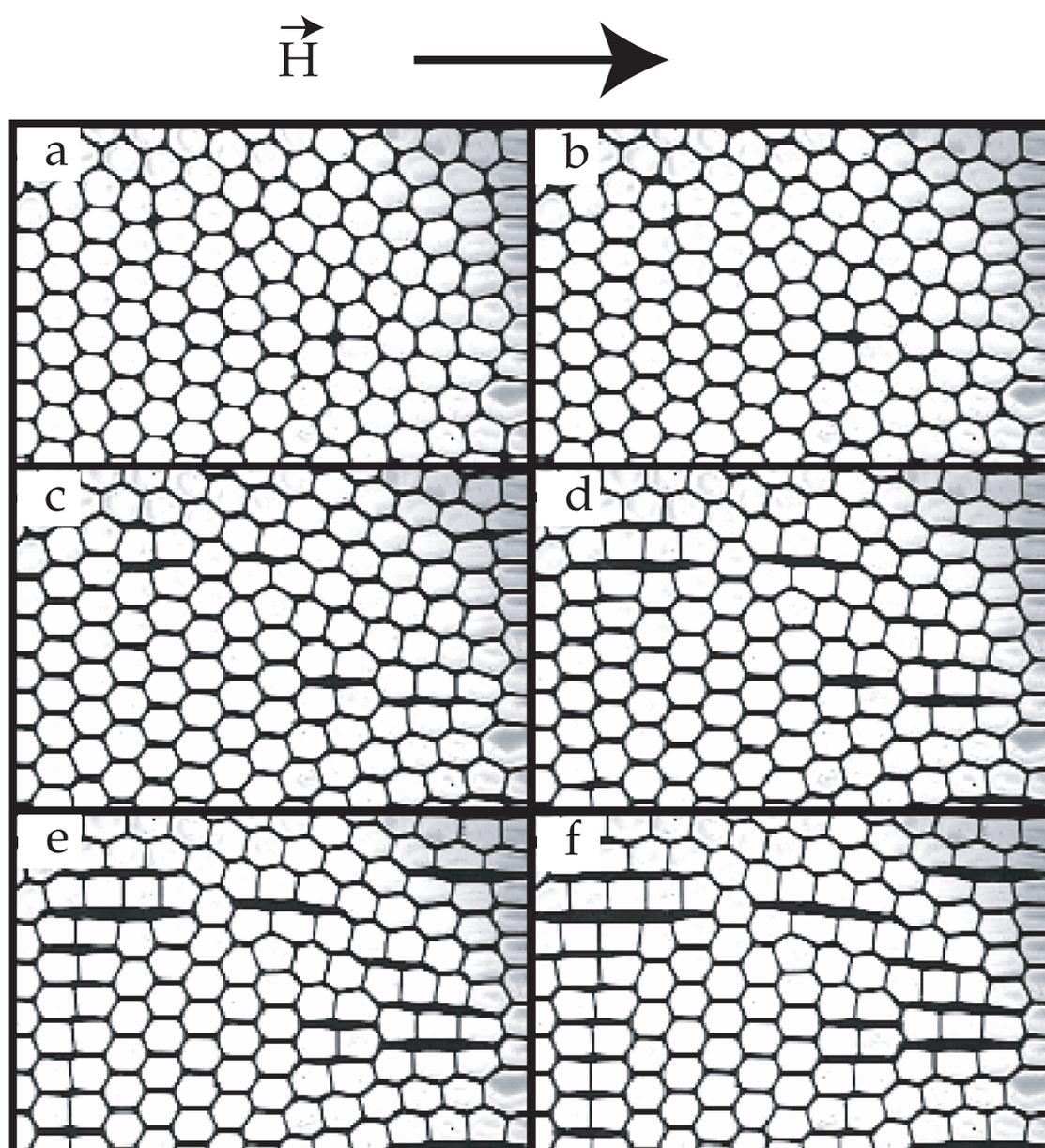


FIG. 5.20 – Formation d'une structure carrée sous champ. a :  $H = 0 \text{ kA/m}$ , b :  $H = 4.3 \text{ kA/m}$ , c :  $H = 10.7 \text{ kA/m}$ , d :  $H = 17.2 \text{ kA/m}$ , e :  $H = 23.6 \text{ kA/m}$ , f :  $H = 30 \text{ kA/m}$ . ( $d = 1 \text{ mm}$ ,  $\phi = 8\%$ ,  $\langle L \rangle = 2.8 \text{ mm}$ ).

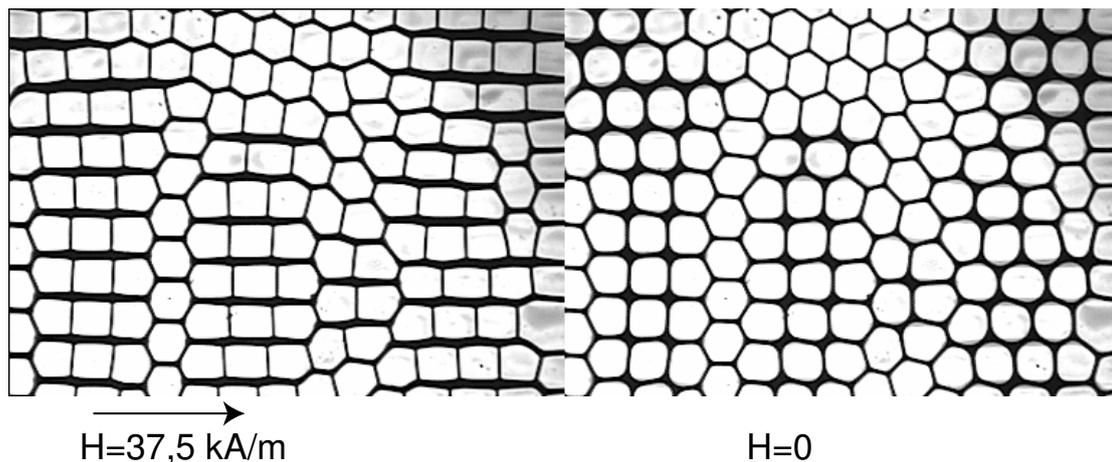


FIG. 5.21 – **A gauche**, mousse de fraction volumique 8% et longueur de côtés  $\langle L \rangle = 2.5 \text{ mm}$  dans un champ magnétique dans le plan de la cellule. La distance entre les 2 plaques de la cellule de Hele-Shaw est de  $1 \text{ mm}$ . Il y a coexistence de zones dans lesquelles la mousse adopte une structure de réseau quasi-carré et des zones où la structure est restée hexagonale. **A droite**, la même mousse, immédiatement après avoir coupé le champ. La fraction de liquide n'est pas homogène : on note la présence de zones très humides en lieu et place des zones à structures carrée, alors que les zones les plus sèches correspondent à la structure restée hexagonale en présence du champ. Après plusieurs secondes, la fraction de liquide s'homogénéise du fait des forces capillaires.

quantifier cet effet, nous avons mesuré l'angle  $a_{23}$  entre les deux plus importants pbP ( $R_2$  et  $R_3$ ), en fonction de l'orientation du plus fin des pbP par rapport au champ magnétique  $A_1$  (cf. figure 5.23). Le bord de Plateau le plus fin fait toujours un angle compris entre  $60^\circ$  et  $120^\circ$  avec le champ magnétique. L'angle le plus important est obtenu lorsque celui-ci est perpendiculaire avec le champ magnétique (cf. figure 5.24 c et d).

### Angle et Rayon de courbure

En traçant les angles  $a_{ij}$  entre les pbP en fonction du rapport des rayons de courbure  $R_2/R_1$ , pour une série d'images prises à des valeurs du champ variant entre 0 et  $37.5 \text{ k/Am}$ ,

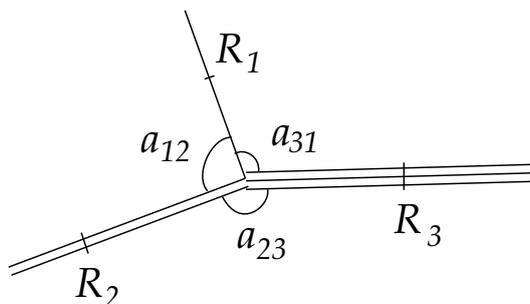


FIG. 5.22 – Vue du dessus d'un vertex bidimensionnel, constitué de 3 pbP. Les pbP sont notés, du plus fin au plus épais,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , tandis que les angles sont notés  $a_{ij}$ .

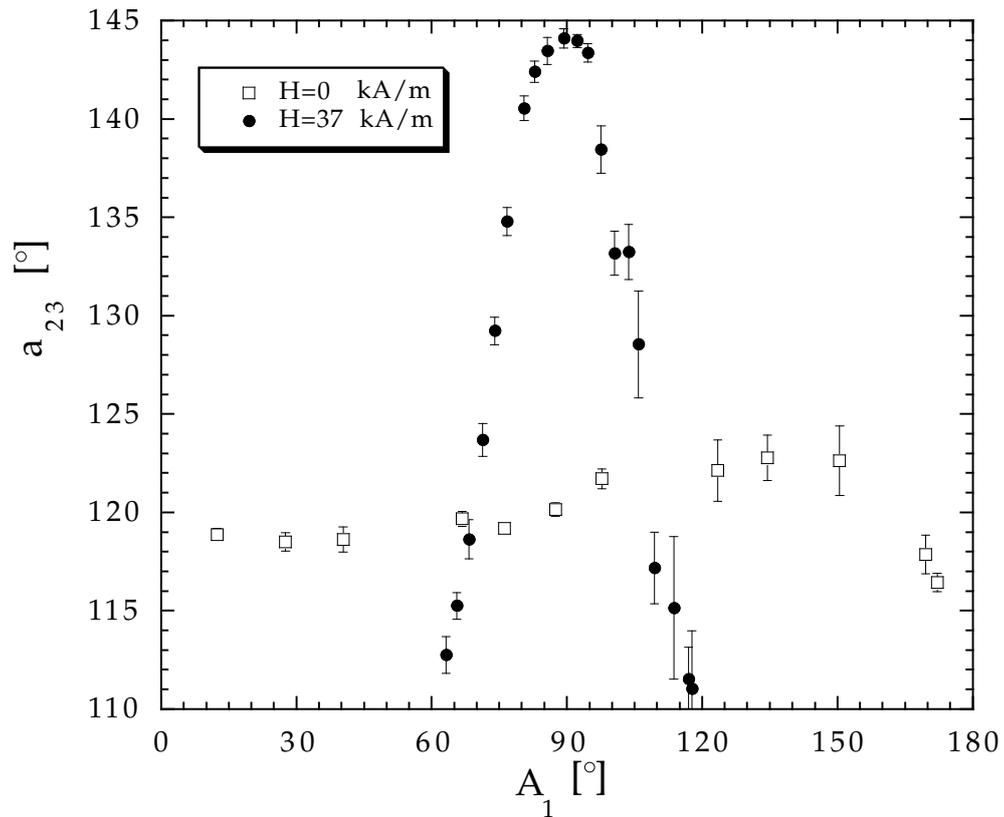


FIG. 5.23 – Variation de l'angle  $a_{23}$ , entre les deux plus gros pbP, en fonction de l'orientation du plus fin des pbP. Chaque point représente une moyenne sur environ 20 mesures. Les barres d'erreur correspondent à l'erreur standard.

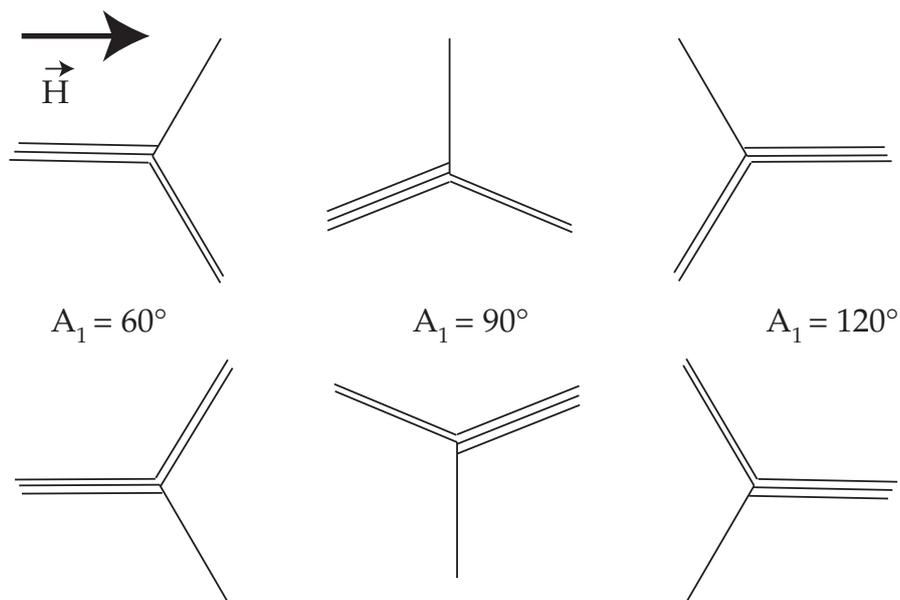


FIG. 5.24 – Orientation des pbP d'un vertex par rapport au champ magnétique.

on obtient la courbe de la figure 5.25. Cela montre que les angles entre les pbP sont reliés à leurs rayons de courbures, et cela indépendamment de leur orientation ou de la valeur du champ magnétique.

Lorsque le champ est nul, les pbP sont isotropes. Le rapport de leur rayon de courbure vaut 1 et les angles entre les pbP valent  $120^\circ$ . Lorsque le champ magnétique n'est plus nul, l'angle entre les deux plus importants pbP augmente linéairement avec le rapport  $R_2/R_1$ . Il se produit un changement de pente lorsque le rapport entre le rayon de courbure vaut environ 2.5. L'angle entre les pbP vaut alors  $160^\circ$ . Pour les rapports supérieurs à 2.5, la pente est moins importante. La présence de «bandes» de ferrofluide dans la mousse donne alors des rapports entre les rayons de courbures pouvant être importants :  $a_{23}$  augmente jusqu'à une valeur de  $170^\circ$  alors  $a_{31}$  (et  $a_{12}$  qui n'est pas représenté mais suit exactement le même comportement) diminue jusqu'à  $95^\circ$ . Le réseau de bulles adopte alors une structure carrée et les pbP sont soit parallèles, soit perpendiculaires au champ magnétique.

Nous avons choisi le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  comme variable, mais nous aurions pu aussi utiliser  $\frac{R_3}{R_1}$ . Le rapport  $\frac{R_3}{R_2}$  étant lui toujours très proche de l'unité ne permet pas une bonne description. Cette figure rassemble donc des mesures obtenues pour des valeurs de champ variants de 0 à  $37.5 \text{ kA/m}$  et une orientation fixe de la cellule de Hele-Shaw. Le grand nombre de cellules (100) combiné au désordre permet d'obtenir toutes les orientations des pbP, mais dans des probabilités inégales.

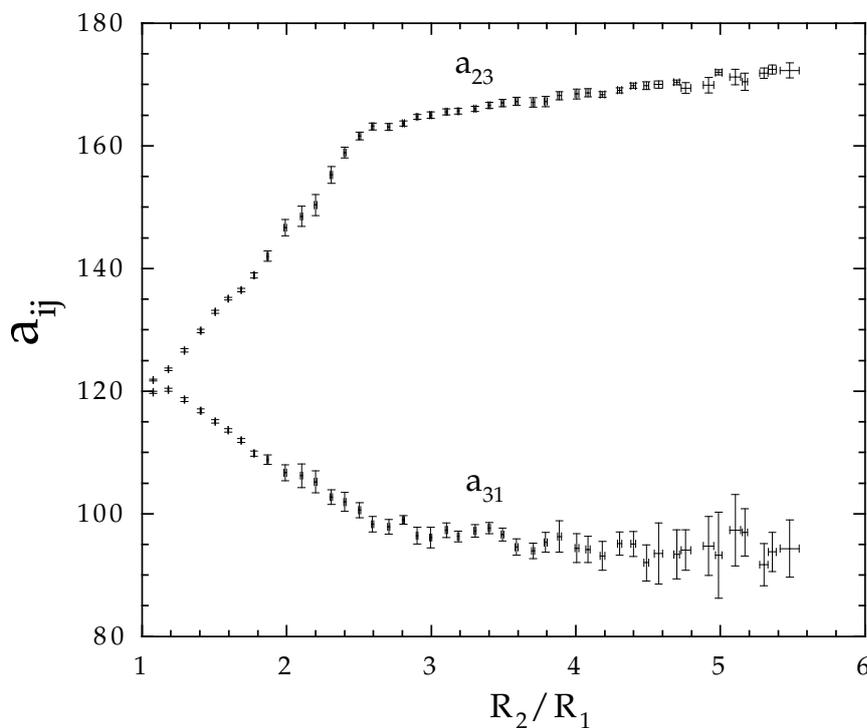


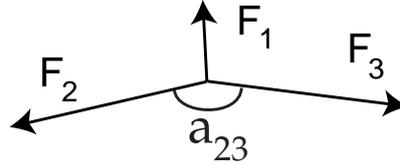
FIG. 5.25 – Relation entre les angles  $a_{23}$  et  $a_{31}$  et le rapport des rayons de courbure  $\frac{R_2}{R_1}$ . Chaque point est une moyenne de plusieurs mesures. Les barres d'erreur sont données par l'erreur standard ( $\sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{n}}$ ). La distance  $d$  entre les plaques est de  $1 \text{ mm}$ , la fraction volumique vaut  $8\%$  et la longueur moyenne des côtés vaut  $\langle L \rangle = 2,5 \text{ mm}$ . La valeur du champ varie entre 0 à  $37,5 \text{ kA/m}$ .

### 5.6.3 Un modèle purement capillaire

#### Équilibre des forces sur un vertex

La figure 5.25 suggère que les forces qui s'exercent sur un vertex dépendent du diamètre du rayon de courbure du bord de Plateau. En effet, l'angle entre les pbP résulte de l'équilibre mécanique.

FIG. 5.26 – Schéma des forces s'exerçant sur un vertex



En appelant  $F_i$  la force exercée par le pbP  $i$  de rayon  $R_i$  sur le vertex, on obtient, en projetant orthogonalement sur l'axe  $j$  une série d'équations du type :

$$F_j + F_i \cos a_{ij} + F_k \cos a_{kj} = 0 \quad (5.29)$$

où,  $i, j, k$  se rapportent aux différents pbP. Cette projection n'est valable que si les forces exercées sur le vertex sont colinéaires au pbP. Dans le cas isotrope (sans champ), les forces exercées par chacun des pbP sont identiques en normes pour tous les pbP, ce qui permet de démontrer plus simplement que les angles font  $120^\circ$ . En résolvant ce système, on obtient une relation entre les angles et les forces :

$$\cos a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{F_k^2 - F_j^2 - F_i^2}{F_i F_j} \quad (5.30)$$

Il n'est pas possible d'inverser analytiquement la relation 5.30 afin d'obtenir la relation analytique permettant de déterminer les force  $F_i$  à partir des angles [11]<sup>4</sup>.

#### Tension de ligne

Il nous faut donc introduire une loi de force pour  $F(R)$ . La plus simple consiste à considérer uniquement les termes capillaires. La tension de ligne exercée par un pbP sur le vertex est simplement égale à la tension de surface multipliée par le périmètre de la section de l'ensemble film et pbP (cf. figure 5.27).

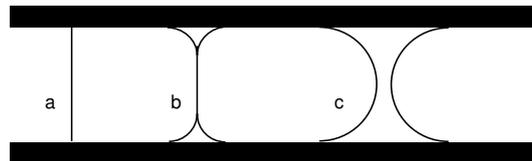


FIG. 5.27 – Schéma des films de mouillage et des pbP entre les deux plans de la cuve de Hele-Shaw vue en coupe. **a** : les pbP ont un rayon nul (!). **b** : cas général, avec des pbP reliés par un film. **c** : "films épais" : les pbP occupent tout l'espace entre les plaques.

<sup>4</sup>Bohn *et al* ont utilisé le calcul numérique pour déterminer la relation  $F_i = F(R_i)$  qui correspondait aux résultats expérimentaux.

On obtient ainsi l'expression des forces capillaires :

$$F_{cap} = 2\gamma(d + R(\pi - 2)) \quad , \quad (5.31)$$

où  $d$  est la distance entre les plaques de la cuve de Hele-Shaw, et  $R$  le rayon de courbure du pbP. Dans ce modèle très simple, ce sont les forces capillaires qui fixent les angles entre les pbP : l'effet du champ magnétique est limité à la variation du rayon de courbure des pbP. Pour avoir une idée de l'angle maximal que permettent les forces capillaires, on peut considérer un cas symétrique (cf. figure 5.26) où les deux plus gros pbP ont le même rayon de courbure et correspondent à des *films épais* (cas **c** de la figure 5.27). Chacun des pbP exerce une force  $F_{cap}^{max} = \gamma\pi d$ . Le troisième pbP correspond au cas où le rayon des pbP est nul (cas **a** de la figure 5.27) et donne une force  $F_{cap}^{min} = 2\gamma d$ . Après projection, on trouve  $\cos \theta = \frac{1}{\pi}$ , ce qui donne un angle maximal entre les deux pbP de  $140^\circ$ . Cette valeur est bien plus faible que les valeurs observées expérimentalement.

Pour aller plus loin avec ce modèle, il faut injecter la force capillaire (équation 5.31) dans l'équation résultant de l'équilibre mécanique (5.30). La figure 5.28 montre que

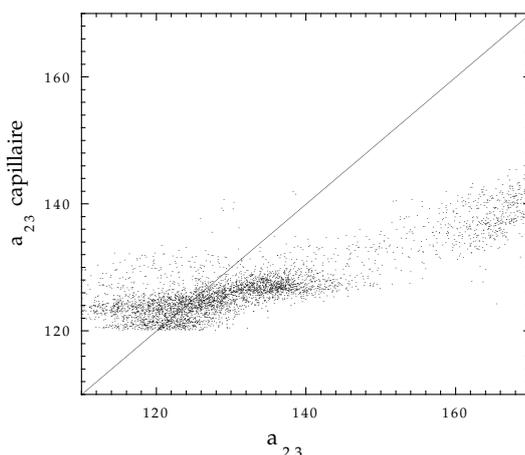


FIG. 5.28 – Comparaison entre les angles  $a_{23}$  mesurés et la valeur prédite par un modèle de force capillaire entre pbP ( $a_{23}$  capillaire). Il y a désaccord entre les données expérimentales et le modèle capillaire.

notre modèle strictement capillaire n'explique pas les déviations observées aux lois de Plateau : il faut donc prendre en compte les effets magnétiques.

Lorsqu'un volume allongé, comme par exemple un cylindre, fait un angle avec un champ magnétique extérieur  $H_0$ , il se produit un couple magnétique de rappel qui tend à aligner le volume avec le champ magnétique [20]. Dans nos mousses magnétiques, c'est ce couple qui permet d'atteindre des angles aussi importants entre les pbP (cf. figure 5.29). Un modèle de cet effet est en cours de développement.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet d'un champ magnétique statique et homogène sur une mousse *quasi* bidimensionnelle dans une cellule de Hele-Shaw.

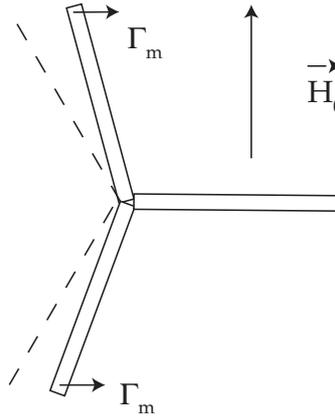


FIG. 5.29 – Couple magnétique  $\Gamma_m$  agissant sur un pbP.

Nous avons montré, dans un premier temps, que le rayon de courbure dépend de l'orientation du champ magnétique. Nous avons ainsi pu élaborer un modèle permettant de rendre compte de cette anisotropie. Celui-ci est basé sur les gradients de champ locaux créés par le champ démagnétisant. Bien que démontré dans le cadre de mousses bidimensionnelles, ce modèle peut s'adapter dans les mousses tridimensionnelles. Ils nous permettra d'expliquer les particularité du drainage des mousses magnétiques.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressé aux lois de Plateau dans les mousses magnétiques. L'angle entre les bords de Plateau peut varier énormément par rapport aux habituels  $120^\circ$  et conduire à des réseaux de bulles de type carré. L'importance de cet effet n'est explicable que par l'existence d'un couple magnétique qui agit sur les pbP et tend à les aligner avec le champ magnétique. Cet effet est propre aux mousse bidimensionnelle et n'a pas été observé dans de telles proportions dans les mousse de ferrofluide tridimensionnelles.



## Chapitre 6

# Drainage de Mousses Magnétiques

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les mousses drainent sous l'effet de leur propre poids. La vitesse du drainage dépend de la dissipation à l'intérieur du réseau de bord de Plateau, et aussi de la structure de ce réseau. Dans les mousses composées d'une solution de savon, ce réseau est isotrope. Le chapitre 5 nous a montré qu'il se produisait une anisotropie du rayon de courbure dans les mousses de ferrofluide sous champ. Mais quelle est l'influence de cette anisotropie sur le drainage ?

Dans un premier temps, nous déterminerons les caractéristiques de ce drainage *sous influence* magnétique pour ensuite construire un modèle qui se basera sur les résultats du chapitre 5. Enfin nous confronterons notre modèle aux résultats des expériences de drainage magnétique.

### 6.1 Montage expérimental

#### 6.1.1 Introduction

La façon la plus simple d'étudier le drainage des mousses consiste à ajouter du liquide au sommet d'une longue colonne<sup>1</sup> de mousse sèche. Il se forme alors une zone humide délimitée du reste de la mousse par un front. La forme et la vitesse  $v_f$  de ce front demeurent constantes. De cette vitesse facilement mesurable, on peut déduire la perméabilité hydrodynamique de la mousse (cf. section 1.6). Cette perméabilité, dont la dimension est donnée par  $\Sigma \approx \frac{d^2}{\eta}$ , où  $d$  est le diamètre des pores formés par les bords de Plateau et  $\eta$  la viscosité, décrit la dissipation qui a lieu dans les bords de Plateau et les vertex ainsi que la géométrie du réseau. Elle contient toutes les informations nécessaires à la modélisation du drainage. La sous-section 1.6.6 donne la solution détaillée du drainage forcé.

Pour déterminer les propriétés du drainage magnétique, nous ferons donc des expériences de drainage forcé en appliquant un champ magnétique parallèlement ou perpendiculairement à la gravité.

---

<sup>1</sup>L'utilisation d'une colonne dont la hauteur est beaucoup plus grande que son diamètre permet de réduire le problème à une dimension.

### 6.1.2 Faire des Bulles

Pour réduire le vieillissement de la mousse par grossissement, il convient d'utiliser un gaz peu soluble dans l'eau comme le  $N_2$ . L'ajout de  $C_6F_{14}$  permet de ralentir considérablement la diffusion du gaz par les parois liquides qui séparent les bulles (cf. figure 6.1) et ralentit suffisamment le vieillissement de la mousse par mûrissement pour pouvoir considérer que la taille des bulles reste constante pendant une expérience de drainage. La mousse est formée en injectant le gaz à travers une pastille de verre fritté située au bas de la colonne.

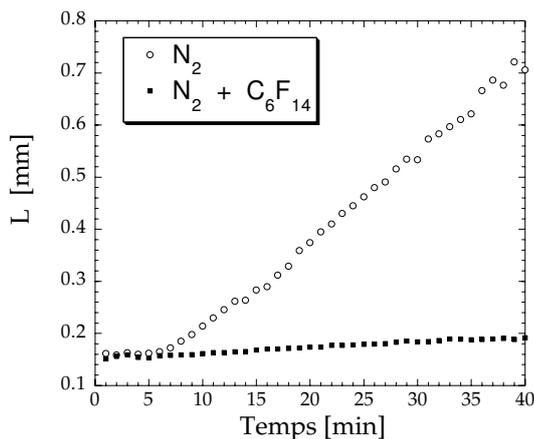


FIG. 6.1 – Longueur moyenne des bords de Plateau pariétaux ( $L$ ) en fonction du temps pour une mousse de savon (eau+SDS) constituée de diazote pur ou de diazote saturé en  $C_6F_{14}$ .

La taille des bords de Plateau joue un rôle important dans le drainage, puisque la fraction volumique et la perméabilité en dépendent. Pour l'estimer, nous devons nous contenter des bords de Plateau au contact avec la paroi (bords de Plateau pariétaux). En observant la mousse en réflexion (cf. sous-section 5.3.2), on parvient à détacher l'image des bords de Plateau mouillant la surface de ceux situés au second plan. Le motif ainsi obtenu est proche d'un réseau hexagonal (cf. figure 6.2). La mesure directe par traitement d'images de la longueur d'un bord de Plateau  $L$  que nous avons utilisé dans les chapitres précédents (cf. sous-section 2.2.2) n'est pas utilisable ici car les images sont trop bruitées. Nous avons utilisé, à la place, la distance entre plus proches voisins  $d_{ppv}$ . Elle est calculée en mesurant la distance entre les centres de gravité des cellules du motif visible sur la paroi de la colonne. La figure 6.3 montre la répartition de la distance entre les cellules les plus proches ( $d_{ppv}$ ). Sa valeur moyenne vaut  $d_{ppv} = 1.83 \text{ mm}$  et la déviation standard de  $d_{ppv}$  pour toutes les mousses est 0.32, soit 17% de la valeur moyenne. La dispersion obtenue lors de la réalisation de mousses à partir d'une solution de SDS avec le même montage est un peu plus faible avec une déviation standard de 13%. Pour déduire la longueur des bords de Plateau, nous supposons que le réseau des bords de Plateau mouillant la paroi forme un réseau hexagonal. Ainsi  $L$  et  $d_{ppv}$  sont reliés par <sup>2</sup> :

$$L = \frac{P}{6} = \frac{d_{ppv}}{\sqrt{3}} \quad (6.1)$$

<sup>2</sup>Il s'agit là en fait d'une minoration de la longueur des bords de Plateau.

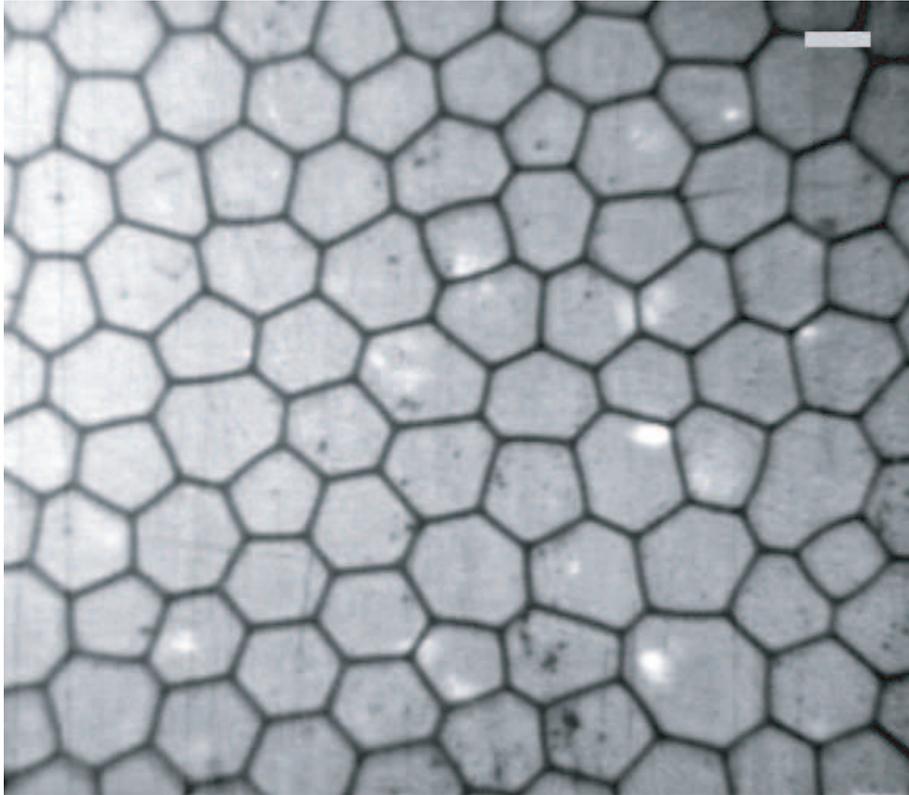


FIG. 6.2 – Image des bords de Plateau mouillant la paroi d’une mousse 3d de ferrofluide éclairée en incidence normale. La barre en haut à droite représente 1 *mm*.

Ce qui nous donne la valeur moyenne de la longueur des bords de Plateau est  $L = 1.06 \text{ mm}$  avec une déviation standard de  $0.18 \text{ mm}$ .

### 6.1.3 Mouiller et Remouiller

Pour mener une expérience de drainage forcé, nous avons utilisé une pompe Biopharmacia P600 permettant de délivrer entre  $0.1$  et  $99.9 \text{ ml/min}$ . Il s’agit d’un pousse seringue constitué de deux cylindres et de deux pistons, un cylindre se vidant pendant que l’autre se remplit. Cette pompe permet de délivrer un volume de  $25 \text{ ml}$  correspondant au volume d’un piston : à l’alternance des pistons, le débit diminue momentanément.

### 6.1.4 La Conductivité

#### Mesurer la Fraction Volumique

Il existe plusieurs techniques pour mesurer la fraction volumique de liquide dans une mousse. La seule méthode directe (la pesée de la mousse) ne donne qu’une fraction volumique moyenne sur toute la mousse. Les autres techniques utilisent diverses propriétés des mousses (électrique, optique ou acoustique) qu’il faut relier à un modèle physique et calibrer. Les techniques se basant sur l’optique<sup>3</sup> ne sont pas applicables aux mousses de

<sup>3</sup>On peut utiliser un colorant, comme la *fluorescence* : l’intensité lumineuse obtenue est proportionnelle à la quantité de colorant présent à une certaine hauteur, c’est à dire la fraction volumique de liquide [71]. On peut aussi utiliser les propriétés optiques des bords de Plateau qui diffusent la lumière

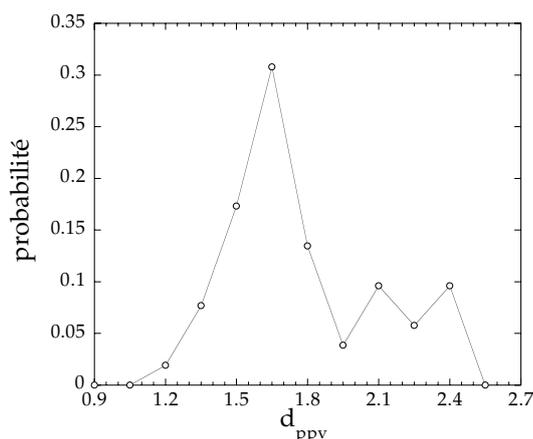


FIG. 6.3 – Répartition des distances entre plus proches voisins ( $d_{ppv}$ ) en  $mm$ . La moyenne est  $d_{ppv} = 1.84 mm$  et la déviation standard est  $d_{ppv} = 0.32 mm$ . La statistique rassemble 52 mousses.

ferrofluide car le ferrofluide est extrêmement absorbant. Un film de ferrofluide devient opaque si son épaisseur est supérieure à une centaine de  $\mu m$  : les bords de Plateau sont toujours absorbants. Nous nous sommes donc tourné vers la mesure de la conductivité. Ces limitations sont dues à la médiocre résolution spatiale et temporelle.

La fraction volumique derrière le front ( $\phi_m$ ) se déduit de la vitesse du front de drainage forcé  $V_f$ . En appliquant la conservation du débit ( $Q$ ) :

$$\phi_m = \frac{Q}{SV_f} \quad , \quad (6.2)$$

où  $S$  est la surface de la section de la colonne de drainage. Cette méthode n'est valable que lorsque la vitesse du front est constante.

## Histoire

La conductivité électrique <sup>4</sup> est une des premières propriétés des mousses auxquelles se sont intéressés les physiciens. En effet, dès 1946 Clark [21] montra que la conductivité relative  $\sigma$ , c'est à dire la conductivité de la mousse  $\sigma_m$  divisée par la conductivité de la solution en volume  $\sigma_{volume}$  était indépendante de la taille des bulles et du type de solution. Ce type de relation existe aussi pour les solutions de sphères non conductrices. Il existe de nombreux modèles reliant conductivité et fraction volumique dans les suspensions et dans les mousses [29]. L'un des plus célèbres est celui de Robert Lemlich qui a démontré en 1977 [77], [111], que dans la limite où la fraction volumique est très faible, la conductivité relative était proportionnelle à la fraction volumique :

$$\sigma = \frac{1}{3}\phi \quad (6.3)$$

Ce modèle décrit une mousse constituée de bords de Plateau droits de section uniforme, d'orientation isotrope (distribué uniformément en orientation) et dont le volume des vertex est nul. En 1995, Phelan *et al* [88], [110] ont repris ce modèle en y incluant

dans toutes les directions : plus la mousse est humide plus elle apparaît blanche [105].

<sup>4</sup>La conductivité est l'inverse de la résistance électrique :  $\sigma = \frac{1}{R}$ .

numériquement les contributions des vertex et sont parvenus à un modèle non linéaire donnant un bon accord expérimental jusqu'à des fractions volumiques de l'ordre de 8 % (cf. figure 6.4).

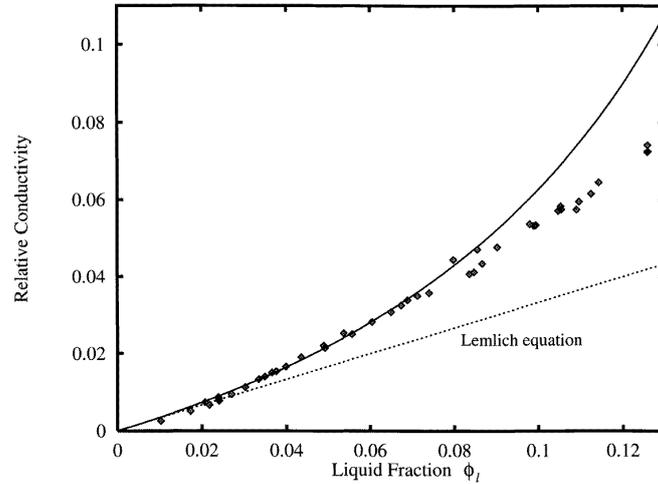


FIG. 6.4 – Conductivité relative  $\sigma$  en fonction de la fraction volumique  $\phi$ , extrait de [88]. La ligne continue est donnée par les résultats numériques d'un modèle non linéaire tenant compte de la taille de vertex. Les points sont les données expérimentales de Phelan *et al*, tandis que la ligne en pointillé représente la loi de Lemlich (cf. équation 6.3).

### Principe de la mesure

Dans une solution aqueuse, le transport des charges électriques est assuré par les ions. Par conséquent, la conductivité d'une eau pure est très faible, et est d'ailleurs utilisée pour caractériser la qualité d'une eau distillée. L'ajout d'un surfactant ionique comme le SDS suffit cependant à assurer une bonne conductivité. On peut ainsi assimiler la mousse et la solution qui la constitue à des conducteurs<sup>5</sup> de conductivité  $\sigma_{mousse}$  et  $\sigma_{solution}$ . Pour faire de ces conducteurs des dipôles passifs électroniques, il faut les connecter à un circuit électrique par le biais d'électrodes (cf. figure 6.1.4). La résistance

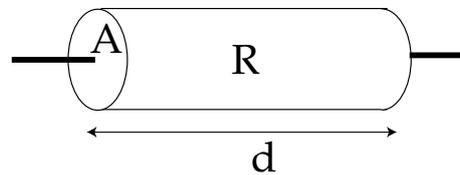


FIG. 6.5 – La mousse et la solution qui la constitue sont assimilées à des conducteurs électriques de résistances  $R_c$ , de longueur  $d$  et de section  $A$ .

$R_c$  et la conductivité  $\sigma_c$  d'un conducteur de longueur  $d$  et de section  $A$  sont reliées par la relation :

$$\sigma_c = \frac{d}{A R_c} \quad (6.4)$$

<sup>5</sup>La mousse ne se comporte pas uniquement comme une résistance mais aussi comme un condensateur. Hutzler *et al* ont montré que la capacité était elle aussi reliée à la fraction volumique [111]

La conductivité relative de la mousse,  $\sigma = \frac{\sigma_{mousse}}{\sigma_{solution}}$  vaut simplement <sup>6</sup> :

$$\sigma = \frac{R_{solution}}{R_{mousse}} \quad (6.5)$$

La conductivité relative de la mousse est donc simplement le rapport de la résistance de la solution et de la résistance de la mousse. Pour les mesurer, on applique une différence de potentiel grâce à des électrodes réparties de part et d'autre d'une colonne remplie de la solution  $c$  dont on veut mesurer la conductivité. Une résistance  $R_e$ , montée en série avec les deux électrodes, permet de mesurer le courant passant dans le circuit. On déduit ainsi la résistance  $R_c$  provenant du passage du courant dans la solution lorsqu'une tension  $U_g$  est appliquée au circuit (cf. figure 6.6) :

$$R_c = R_e \left( \frac{U_g}{U_e^c} - 1 \right) \quad (6.6)$$

où  $U_e^c$  est la tension aux bornes de la résistance  $R_e$ . Avec l'équation 6.6, on obtient la relation :

$$\sigma = \frac{\frac{U_g}{U_e^s} - 1}{\frac{U_g}{U_e^m} - 1} \quad (6.7)$$

Où  $U_e^s$  et  $U_e^m$  sont respectivement la tension aux bornes de la résistance  $R_e$  lorsque la colonne est remplie de la solution ou de la mousse. Pour éviter une électrolyse de la

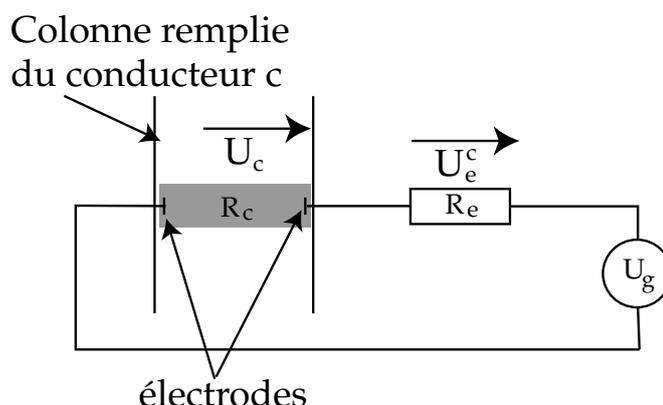


FIG. 6.6 – Montage électrique utilisé pour la mesure de la conductivité. Une colonne munie d'électrodes est remplie par un liquide conducteur (mousse ou solution qui la constitue). En appliquant une différence de potentiel aux bornes des électrodes, on peut mesurer la résistance  $R_c$ .

solution, il faut travailler avec une tension alternative, ce qui nous permet d'utiliser une détection synchrone, qui fournit des mesures de tension extrêmement précises <sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Cela suppose que les dimensions qui constituent nos dipôles passifs résistifs soient identiques.

<sup>7</sup>L'excitation se fait à la fréquence  $\omega_0$  ( $V_e = V \sin \omega_0 t$ ) et la réponse (linéaire) du système à cette excitation est de la forme :  $V_0 \sin(\omega_0 t + \Phi)$ . La réponse mesurée n'est cependant pas un signal monochromatique car s'ajoute au signal qui nous intéresse des perturbations (bruit thermique, rayonnement électromagnétique extérieur *etc* ...) dont la fréquence n'est pas la même que celle de l'excitation :  $V_m = V_0 \sin(\omega_0 t + \Phi) + \sum_i V_i \sin \omega_i t$ . Pour obtenir la réponse à notre excitation, la détection synchrone effectue le produit  $V_e V_m = \sum_i V_i V \sin \omega_i t \sin \omega_0 t + V V_0 \sin \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \Phi)$ . Après moyenne, on obtient finalement  $\frac{2 \langle V_e V_m \rangle}{V} = V_0 \cos \Phi$ . Pour séparer la magnitude ( $V_0$ ) et la phase ( $\Phi$ ), la même opération est effectuée en déphasant le signal excitatoire de  $\frac{\pi}{2}$  :  $\frac{2 \langle V_m V_e \frac{\pi}{2} \rangle}{V} = V_0 \cos \phi$ .

Nous décomposerons la tension mesurée en deux parties <sup>8</sup> : une en phase, représentant la résistance et une autre en opposition de phase représentant la capacité. Nous avons choisi une fréquence de  $10\text{kHz}$ , car elle permet de réaliser une moyenne sur 100 périodes dans un temps relativement court  $10\text{ms}$ . Au delà de cette fréquence, les effets capacitifs parasites induisent un décalage de la phase <sup>9</sup>.

## Colonne

Notre colonne de conductivité a une section carrée de  $3\text{cm} \times 3\text{cm} \times 50\text{cm}$  et est constituée de deux circuits imprimés contenant les électrodes ( $0.2 \times 3\text{cm}$  espacées de  $1\text{cm}$ ) et de deux plaques d'altuglas. La section doit être relativement importante pour éviter que l'hydrodynamique ne soit dominée par les parois [15]. L'ensemble est fixé grâce à de la colle époxy. Les mesures de la conductivité du ferrofluide, répétées avant chaque expérience, n'ont pas montré d'évolutions significatives, ce qui montre que l'oxydation des électrodes est négligeable.

La commutation des électrodes est assurée grâce à un multiplexeur Keithley, constitué de 24 doubles relais commandés par une carte numérique. Les 24 paires d'électrode sont ainsi branchées les unes après les autres, permettant ainsi une mesure locale de conductivité. L'acquisition des résultats de la détection synchrone se fait via le port RS232 et le tout étant commandé par un programme écrit avec le logiciel Labview. Il faut  $1.2\text{s}$  pour scanner les 24 paires d'électrodes, ce qui nous donne une vitesse de *scan* de  $20\text{cm/s}$ , soit plus de 200 fois plus rapide que la vitesse maximale du front. On obtient ainsi les profils instantanés de la conductivité de la mousse en fonction du temps ce qui nous permet de suivre le déplacement du front de drainage.

La résolution spatiale des électrodes a été testée en enregistrant le passage d'un front provoqué par la vidange de la colonne préalablement remplie avec une solution de SDS. La position du front est mesurée à l'aide d'une caméra CCD. On peut ainsi obtenir la réponse d'une électrode au passage d'une *fonction de Heaviside* (cf. figure 6.8). La résolution spatiale est d'environ  $1.5\text{cm}$  correspondant à la variation de 95% du signal. On le voit, la résolution est sans rapport avec la taille de notre électrode dont la hauteur est de  $0.2\text{cm}$  : ce qui détermine la résolution spatiale de notre colonne, c'est la distance entre les électrodes. L'explication réside probablement dans la forme des lignes de champ créées par deux électrodes ponctuelles (cf. figure 6.8). Celles-ci n'étant pas homogènes, les courants électriques sondent une hauteur de l'ordre de la distance entre les deux parois<sup>10</sup>.

<sup>8</sup>Un signal de la forme  $A\sin(\omega t + \Phi)$  peut aussi s'écrire sous la forme d'un terme en phase avec l'excitation ( $\sin \omega t$ ) et d'un terme en opposition de phase ( $\cos \omega t$ ).

<sup>9</sup>La conductivité de la solution est elle aussi une fonction de la fréquence.

<sup>10</sup>Le modèle le plus simple pour modéliser la conduction des solutions consiste à appliquer le principe fondamental de la dynamique sur les porteurs de charges électrique  $q$  (ions en solution). Deux forces s'appliquent sur eux : la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$  et la force de visqueuse de Stokes  $\vec{F} = 6\pi R\eta\vec{v}$ , où  $R$  est le rayon hydrodynamique,  $\eta$  la viscosité de la solution et  $\vec{v}$ , la vitesse des ions. Le vecteur densité de courant suit les lignes de champ. Le courant total passant dans le dipôle passif de notre circuit dépend donc des caractéristiques électriques (par exemple, la concentration en ions) de la zone traversée par les lignes de champ.

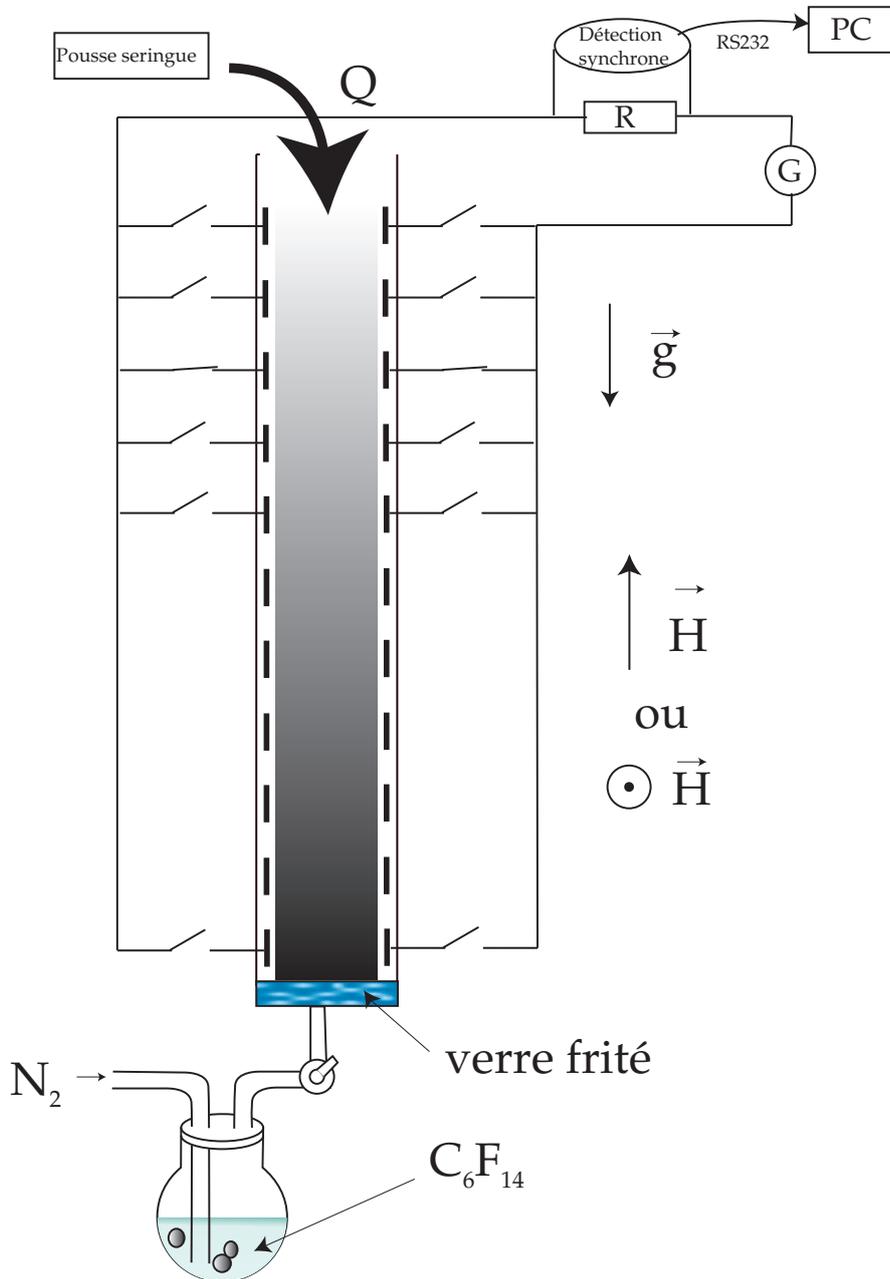


FIG. 6.7 – Schéma du montage utilisé pour les expériences de drainage forcé.

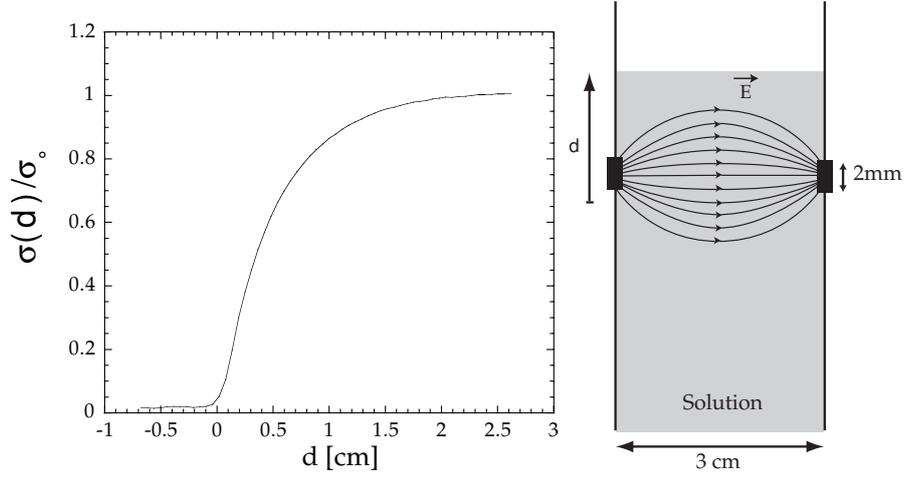


FIG. 6.8 – **A gauche**, réponse d'une paire d'électrodes au passage d'un front de liquide. On a représenté la conductivité en fonction de la distance ( $\sigma(d)$ ) divisée par la valeur de la conductivité lorsque le front est à l'infini ( $\sigma_0$ ). L'origine a été fixée de manière arbitraire. **A droite**, allures des lignes de champ créées par les deux électrodes *ponctuelles* auxquelles on applique une différence de potentiel.

### 6.1.5 Mesure de la vitesse du front de drainage

La mesure de la conductivité de la mousse en fonction de la hauteur permet de suivre le déplacement d'un front de mouillage dans une expérience de drainage forcé et d'en mesurer directement la vitesse. Lorsque le drainage a lieu dans une mousse possédant des interfaces mobiles, comme c'est le cas avec une solution de SDS, la forme du front de drainage forcé est donnée par la fonction :

$$\phi = \frac{\phi_m}{\left(1 + \exp\left(\frac{Z_f - z}{w_f}\right)\right)^2} \quad , \quad (6.8)$$

où  $w_f = \frac{l_c^2}{L} \sqrt{\frac{C_\phi}{\phi_{max}}}$  est la largeur du front (cf. sous-section 1.6.6) et  $Z_f$  est la position du front. Le front se déplaçant à vitesse constante, du haut de la mousse vers le bas, il existe une relation très simple entre la position  $Z_f$  du front et le temps  $t$  :

$$Z_f = z_0 - V_f t \quad (6.9)$$

où  $z_0$  est la position initiale du front et  $V_f$  la vitesse du front. Comme la relation entre fraction volumique et conductivité est linéaire, la forme du front reste la même et ce raisonnement s'étend à la conductivité, de sorte que l'on peut mesurer la vitesse en utilisant directement les profils de conductivité divisés par la conductivité derrière le front  $\sigma_{max}$  :

$$\frac{\sigma(z, t)}{\sigma_{max}} = \frac{\phi(z, t)}{\phi_{max}} \quad (6.10)$$

Nous avons déterminé la position du front  $Z_f$  pour chaque profil de conductivité en ajustant les profils expérimentaux avec la forme théorique donnée par l'équation 6.8. En représentant la position du front  $Z_f(t)$  en fonction du temps, on obtient une droite dont la pente nous donne la vitesse du front  $V_f$ .

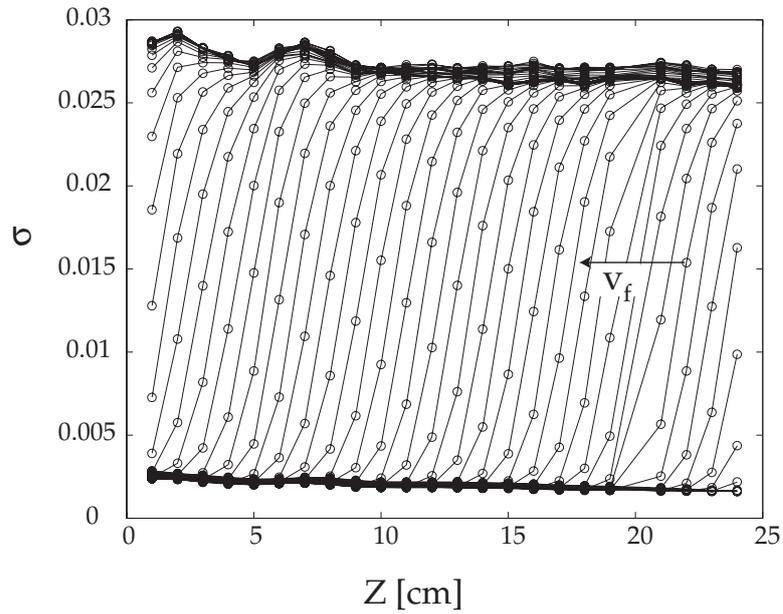


FIG. 6.9 – Profils expérimentaux de la conductivité d'une mousse de ferrofluide pendant une expérience de drainage forcé ( $Q = 3 \text{ ml/min}$ ). La flèche indique le sens de progression du front.

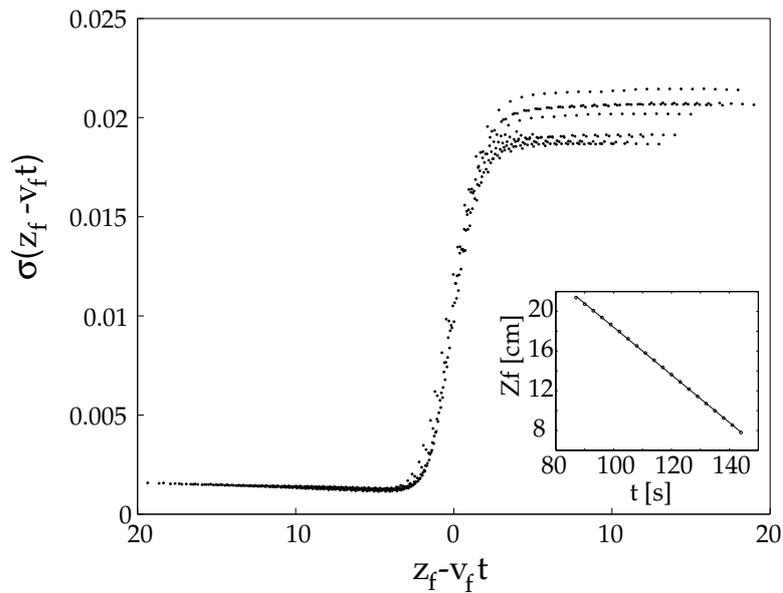


FIG. 6.10 – Forme du front obtenue en se plaçant dans le repère du front ( $Q = 2.5 \text{ ml/min}$ ). En encart : Position du front en fonction du temps.

En se plaçant dans un repère lié au front, c'est à dire en utilisant  $z - vt$ , tous les profils expérimentaux se superposent sur une courbe maîtresse (cf. figure 6.10). Insistons encore une fois sur le fait que la vitesse du front est égale à la vitesse du liquide dans la partie humide de la mousse.

### 6.1.6 Champs magnétiques

Pour créer un champ magnétique homogène et parallèle à la gravité, nous avons utilisé 3 bobines montées en série et alimentées par un générateur  $60 V 10 A$ . Chacune des bobines mesure  $18.5 cm$  de diamètre intérieur et  $41 cm$  de diamètre extérieur. Elle ont une résistance de  $8.2 Ohms$  et une inductance de  $91 10^{-3} H$ . Elles sont espacées les unes des autres de  $10 cm$ . Le champ ainsi créé dans l'axe est homogène à 10% sur  $25 cm$  (cf. figure 6.11). Pour obtenir un champ magnétique perpendiculaire à la gravité, nous avons dû placer la colonne dans le plan médian de 2 bobines montées en position de Helmholtz. La zone où le champ est homogène à 10% est alors réduite à  $17 cm$  (cf. figure 6.12).

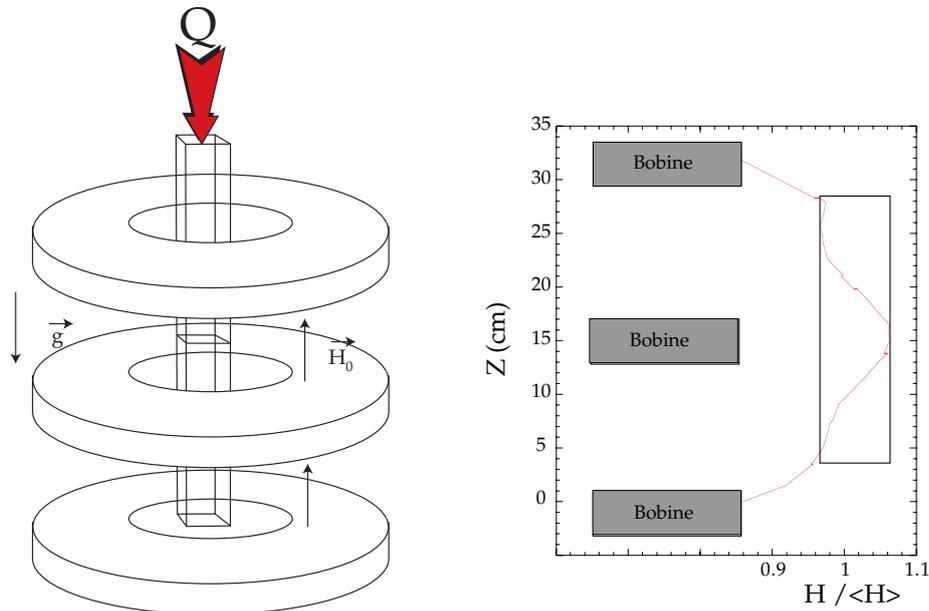


FIG. 6.11 – **A gauche** Configuration utilisée pour obtenir un champ magnétique parallèle à la gravité. **A droite** Variation du champ magnétique selon l'altitude dans le cas où le champ est parallèle à la gravité ( $H_{\parallel}$ ). Le rectangle indique la zone où les mesures de la vitesse ont été effectuées (champ constant à 10% près).

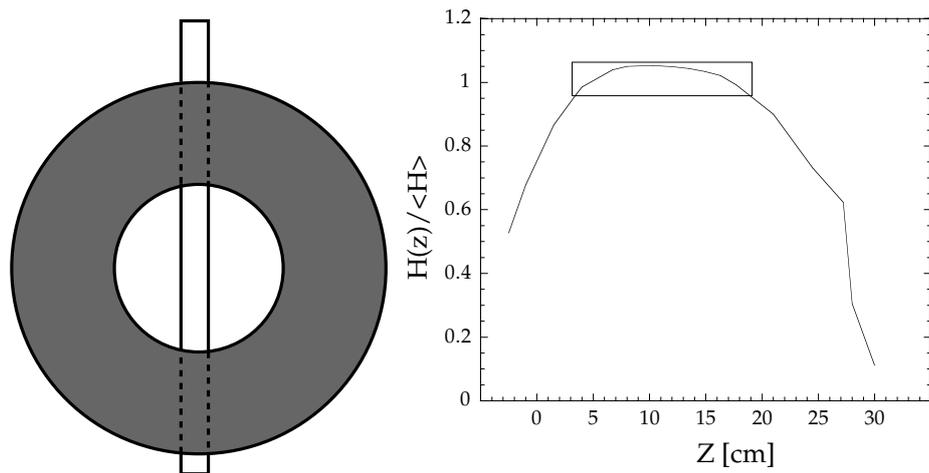


FIG. 6.12 – **A gauche** Configuration utilisée pour obtenir un champ magnétique perpendiculaire à la gravité ( $H_{\perp}$ ). **A droite** Variation du champ magnétique selon l'altitude dans le cas où le champ est perpendiculaire à la gravité. Le rectangle représente la zone où les mesures ont été faites.

## 6.2 Premiers résultats

### 6.2.1 Vitesse du front sans champ

La loi de puissance obtenue sur la figure 6.13 traduit le type d'écoulement qui a lieu dans les bords de Plateau : pour un écoulement de Poiseuille,  $v_f \approx Q^{\frac{1}{2}}$  et pour un écoulement bouchon,  $v_f \approx Q^{\frac{1}{3}}$ . Le sodium dodécyle sulfate (SDS) a une faible viscosité de surface, ce qui produit un écoulement de type bouchon.

Les mesures de vitesse du front donnent dans une mousse composée de ferrofluide et de SDS un exposant de 0.4 (cf. figure 6.13). Cette valeur a été retrouvée en effectuant les mêmes mesures avec cette fois une solution d'eau distillée et de SDS ( $C_{SDS} = 12 \text{ mM}$ ), et cela pour deux tailles de bulles ( $L \approx 1 \text{ mm}$  et  $L \approx 0.1 \text{ mm}$ ) (cf. figure 6.13). L'exposant  $\frac{1}{3}$  a toujours été difficile à obtenir, Kœhler *et al* dans [70] n'ont pu atteindre que 0.36 alors que Durand *et al* dans [38] ont obtenu un exposant 0.39.

En introduisant la perméabilité hydrodynamique de la mousse  $\Sigma(\phi)$ , et en l'exprimant en fonction de la fraction volumique, on aboutit, dans le cas d'un écoulement bouchon à (cf. sous-section 1.6.6) :

$$v_f = V_F \phi^{\frac{1}{2}} \quad (6.11)$$

avec  $V_F = \frac{K_n \rho g L^2}{\eta}$ .  $K_n$  est un nombre provenant de la dissipation dans les vertex. Il est indépendant de  $L$  et de  $\phi$ .

La figure 6.14 montre là aussi que l'exposant est légèrement supérieur à la valeur théorique correspondant au cas d'interfaces libres. Cela provient probablement du fait que l'écoulement à l'intérieur d'un bord de Plateau n'est pas tout à fait du type bouchon et qu'une partie de la dissipation se produit dans les bords de Plateau et non dans les vertex. Dès lors, la mesure du préfacteur dans la loi de puissance,  $V_f$ , sur notre courbe expérimentale sans champ est délicate du fait du couplage qui existe entre le préfacteur et l'exposant lors d'un ajustement par une loi de puissance. En laissant l'exposant libre, on trouve  $V_f = 2.1 \phi^{0.62}$ . La meilleure estimation du préfacteur correspondant à un écoulement de type bouchon, s'obtient en imposant l'exposant 0.5 pour ajuster les résultats expérimentaux :

$$V_f = 1.4 \text{ cm s}^{-1} \quad . \quad (6.12)$$

Ce qui nous permet d'estimer  $K_n \approx 2.9 \cdot 10^{-3}$ . Cette valeur est proche de celle obtenue expérimentalement par Kœhler *et al* dans le cas d'une mousse aqueuse de SDS ( $C = 17 \text{ mM}$ , et  $L = 0.15 \text{ cm}$ ) :  $K_n \approx 2.3 \cdot 10^{-3}$  [71].

L'ajout de particules magnétiques ayant une taille de l'ordre du nanomètre ne modifie le drainage que par l'augmentation de la viscosité et de la densité du liquide. Les mesures de la vitesse du front effectuées en champ nul nous serviront de référence pour l'étude en champ magnétique constant.

### 6.2.2 Imbibition Magnétique

Lorsque l'on applique un champ magnétique à une mousse en équilibre sous gravité (cf. sous-section 1.6.3), le profil de la fraction volumique est modifié, le ferrofluide étant

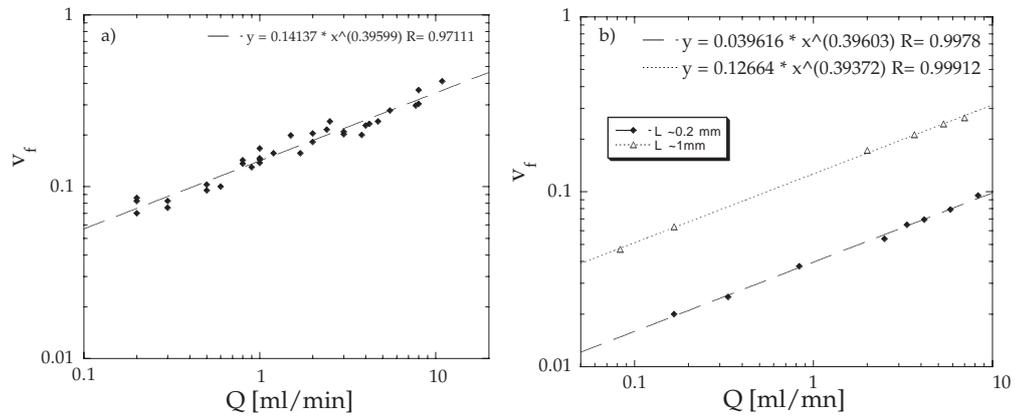


FIG. 6.13 – **a)** Vitesse du front humide en fonction du débit de liquide, pour une mousse de Ferrofluide. Le Champ magnétique est nul. **b)** Vitesse du front de drainage en fonction du débit dans une mousse de SDS et d'eau.

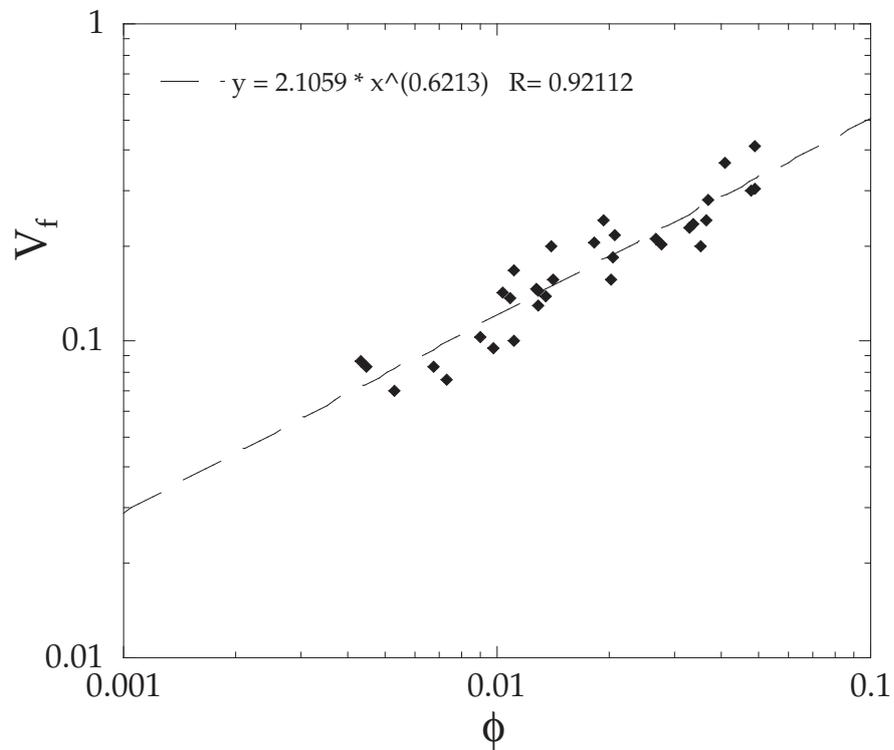


FIG. 6.14 – Vitesse en fonction de la fraction volumique (derrière le front) dans une mousse de ferrofluide.

*aspiré* dans la mousse. On parlera d'imbibition sous champ, en référence à l'imbibition capillaire des mousses de savon (cf. sous-section 1.6.2).

Les images de la paroi extérieure de la colonne montrent que l'interface entre le ferrofluide et la mousse se déplace de  $8.5\text{ mm}$  vers le haut (cf. figure 6.15). Le volume total de gaz étant conservé, il doit rester des bulles sous l'interface visible sur la paroi entre la mousse et le ferrofluide. Ceci est confirmé par l'absence de déplacement collectif des bulles sur la paroi. Sous l'effet du champ magnétique, le ménisque entre la paroi et le ferrofluide présent sous la mousse se déforment et provoquent l'apparition d'un film épais contre la paroi. Celui-ci étant complètement opaque, il est impossible de distinguer la position réelle du bas de la mousse au centre de la colonne.

L'autre outil dont nous disposons, la conductivité, nous permet de sonder l'intérieur de la mousse. Sur la figure 6.15, on a représenté la variation de la conductivité par rapport à l'état initial sans champ :

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma_H(t) - \sigma_0}{\sigma_0} , \quad (6.13)$$

où  $\sigma_H(t)$  est la conductivité lorsque le champ magnétique est  $H = 18\text{ kA/m}$ , et  $\sigma_0$  est la conductivité à l'équilibre lorsque le champ est nul. La conductivité près de l'interface entre le ferrofluide et la mousse (électrode 3) augmente très rapidement, (en moins de  $2\text{ s}$ ), alors que  $1\text{ cm}$  plus haut (électrode 4), l'augmentation se fait en plus de  $40\text{ s}$ . L'effet de l'imbibition sous champ est assez limité dans l'espace : L'accroissement relatif passe de plus de  $300\%$  à  $15\%$  en  $1\text{ cm}$  (entre les électrodes 3 et 4) et tombe à  $2\%$  en  $2\text{ cm}$  (entre les électrodes 3 et 5).

Contrairement au drainage forcé, c'est la diffusion qui joue le rôle moteur dans l'imbibition, alors que la gravité s'oppose au flux de liquide. A partir de la figure 6.15 on peut estimer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion de l'imbibition magnétique. L'analyse dimensionnelle nous donne :

$$D_{ff} \approx \frac{l^2}{\tau} , \quad (6.14)$$

où  $\tau$  le temps nécessaire pour étaler le front sur une longueur  $l$ . La variation de la conductivité de l'électrode 3 de la figure 6.15 nous permet d'estimer  $\tau \approx 40\text{ s}$  et  $l \approx 1\text{ cm}$ , ce qui nous donne :

$$D_{ff} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} . \quad (6.15)$$

Cette valeur est proche du coefficient de diffusion capillaire  $D_n$  dans le cas *node dominated* (cf. équation 1.53) :

$$D_n = \frac{\gamma L K_n \sqrt{C_\phi}}{2\eta} = 2.1 \cdot 10 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (6.16)$$

où l'on a pris  $L \approx 1\text{ mm}$  et  $\eta = 3.84\text{ mPa/s}$ .

Le même phénomène est à l'œuvre, lorsqu'une cellule de Hele-shaw est inclinée par rapport à l'horizontale. Sous l'effet de la gravité, la fraction volumique n'est plus homogène. Un champ extérieur constant, perpendiculaire à la cuve, homogénéise la fraction volumique (cf. figure 6.16). Une autre façon de se représenter le phénomène dans le cas 2D est de considérer les bulles comme des trous magnétiques [95] dans un milieu magnétique. Lorsque la mousse est plongée dans un champ magnétique homogène, il

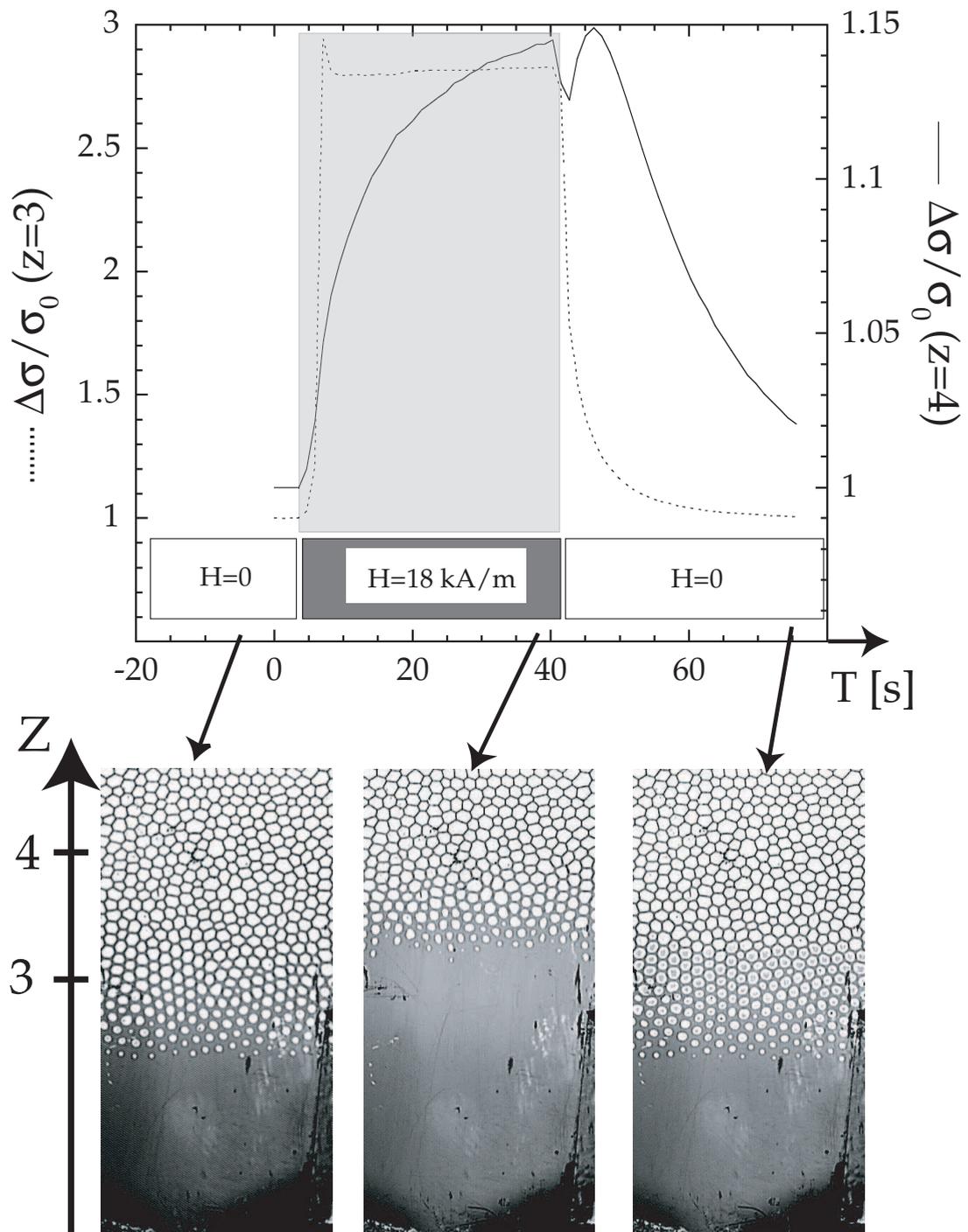


FIG. 6.15 – **En haut** Accroissement relatif de la conductivité, pour deux paires d'électrodes distantes d'une hauteur de 1 cm l'une de l'autres. **En bas** Image de la mousse sur la paroi (images prises en réflexion).

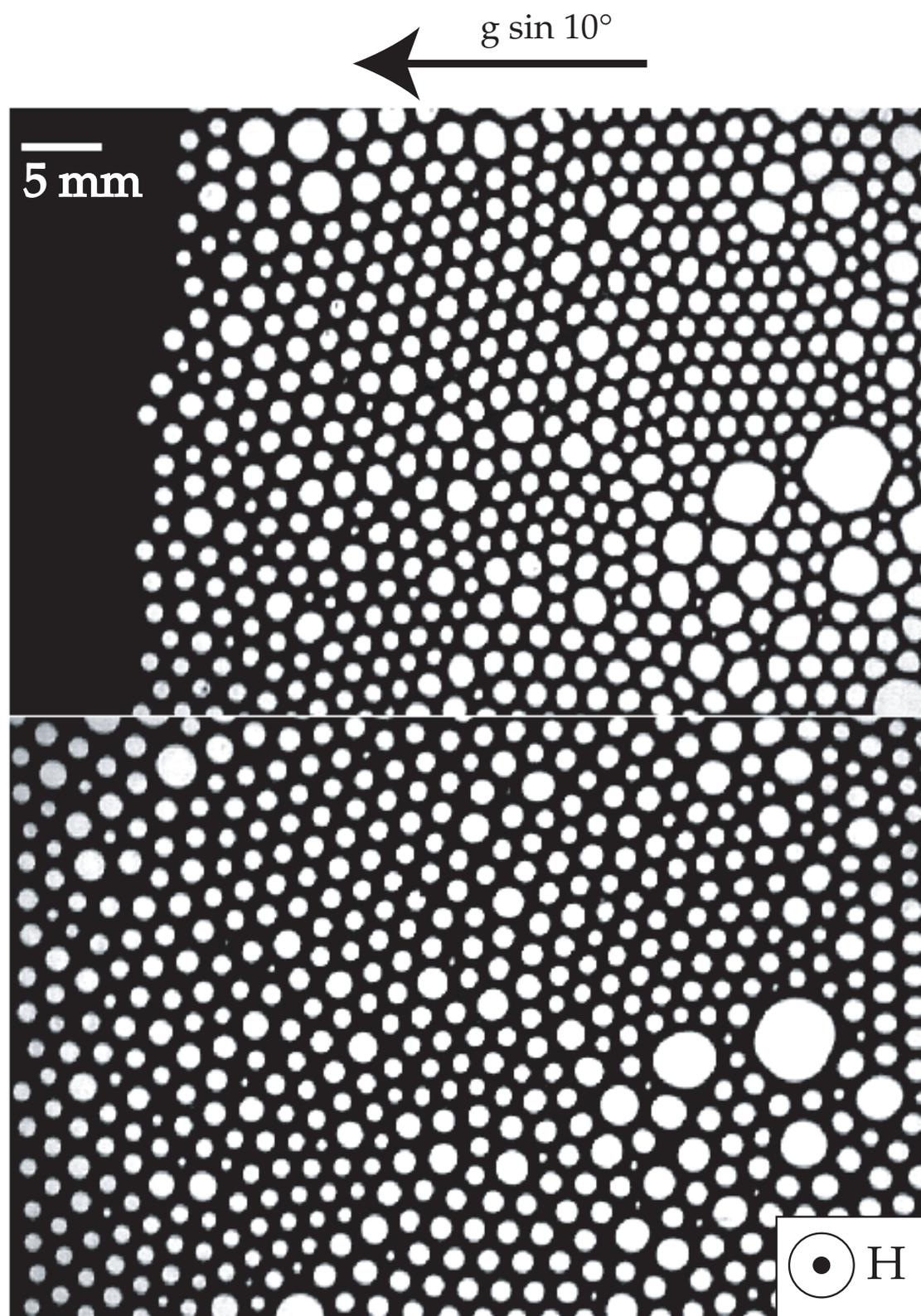


FIG. 6.16 – **En haut** : Cuve de Hele-Shaw remplie d'une monocouche de bulles (mousse 2D très humide) inclinée de 10 degrés par rapport à l'horizontale : la gravité apparente suffit à générer un gradient de fraction volumique. La barre représente 5 mm. **En bas** : La même mousse en présence d'un champ magnétique perpendiculaire à la cellule, la fraction volumique est alors homogène.

s'exerce des forces répulsives entre ces dipôles magnétiques qui tendent à les ordonner dans un réseau hexagonal homogène.

### 6.2.3 Temps d'établissement de l'Anisotropie à 3D

Grâce à notre étude sur les mousses bidimensionnelles, nous avons pu montrer qu'il se produisait une anisotropie des rayons de courbure des bords de Plateau. Nous avons observé ce phénomène à 3D (cf. figure 6.17 et 6.18). Cette variation des rayons de

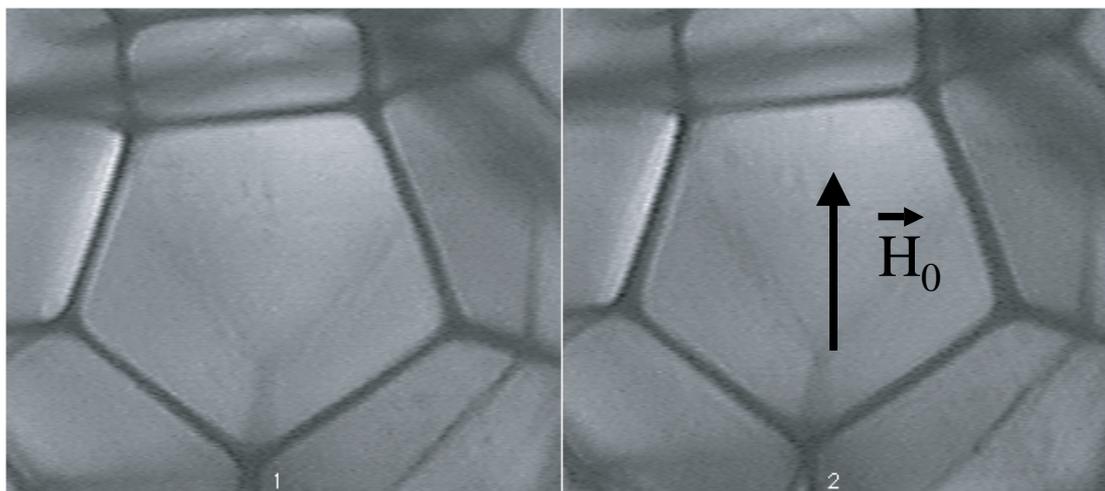


FIG. 6.17 – Bords de Plateau dans une mousse de ferrofluide, sans champ (à gauche) et sous un champ  $H = 19 \text{ kA/m}$  (à droite) : sur l'image de droite, les bords de plateau verticaux (parallèles au champ) sont plus épais que ceux perpendiculaires. La mousse est constamment réhydratée par un débit constant de  $30 \text{ ml/h}$ .

courbure implique un écoulement transitoire pour redistribuer le ferrofluide entre bords de Plateau épais et fins. La durée  $\tau$  de cet écoulement est faible car les échanges se font sur une distance de l'ordre de la longueur  $L$  d'un bord de Plateau. Pour estimer ce temps, nous allons supposer que le flux de l'écoulement est donné par :

$$q = vS \approx \Sigma \nabla P S \quad , \quad (6.17)$$

où  $S$  est la section du bord de Plateau. La différence de pression initiale (qui est d'origine magnétique) est égale à la différence de pression capillaire finale et vaut  $dP \approx \gamma \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+\delta R} \right)$ , où  $\delta R$  est la différence de rayon entre 2 bords de Plateau. Le gradient de pression vaut :  $\nabla P \approx \frac{dP}{L}$ . Pour obtenir la durée de l'écoulement, il suffit de diviser le volume qui doit être échangé ( $Vol = \delta S L$ ) par le débit,  $\delta S$  représentant la variation de la section d'un bord de Plateau. En remarquant que  $\frac{\delta S}{S} = 2 \frac{\delta R}{R}$ , on obtient :

$$\tau \approx \frac{2L^2 R}{\Sigma \gamma} \quad (6.18)$$

Ce temps caractéristique est indépendant de l'amplitude de variation  $\delta R$ . En prenant pour valeur numériques  $L = 0.1 \text{ cm}$ ,  $R = 0.03 \text{ cm}$  (correspondant à un fraction volumique de 1.5 %),  $\Sigma = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ sg}^{-1}$  et  $\gamma = 30 \text{ mN}$ , on obtient :  $\tau \approx 13 \text{ ms}$ . C'est beaucoup

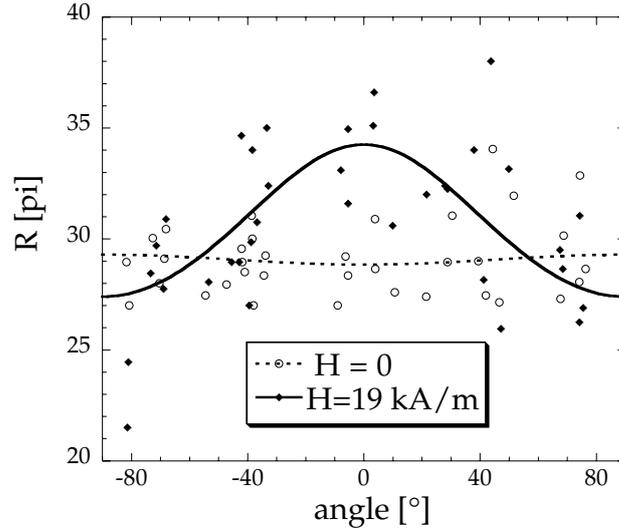


FIG. 6.18 – Mesure de l'épaisseur des rayons de courbure dans une mousse de ferrofluide en fonction de l'orientation du bord de Plateau avec le champ. Les lignes sont les ajustements par la fonction  $R = \frac{L}{b_m(a + \sin^2 \theta)}$  (cf. section 6.4)

moins que notre résolution temporelle et du même ordre de grandeur que le temps pour établir le champ magnétique dans nos bobines ( $\tau = \frac{\text{inductance}}{\text{Resistance}} = 11 \text{ ms}$ ).

On pourra retenir de ce paragraphe que la redistribution du liquide est quasi instantanée à l'échelle des écoulements de liquide dans une mousse, et l'on peut considérer que l'anisotropie des rayons de courbure est présente dès que le champ magnétique est présent.

#### 6.2.4 Drainage forcé sous champ magnétique

##### Fraction volumique

Après le passage d'un front de drainage forcé sous l'effet de la gravité, si le débit est maintenu constant, la fraction volumique est homogène dans l'espace. Cependant, les profils de la fraction volumique ne sont pas aussi plats qu'en l'absence de champ. Cela est dû à l'effet des gradients de champ qui exercent localement des forces volumiques permettant l'accumulation ou la déplétion de ferrofluide.

##### Vitesse du front

Pour réaliser les expériences de drainage sous champ, nous avons d'abord fabriqué une mousse en l'absence de champ, puis nous l'avons asséchée grâce au passage d'un aimant sur les parois extérieures de la colonne. Il est ainsi possible d'obtenir une mousse très sèche, sans qu'elle n'ait eu le temps de vieillir.

Le champ est ensuite branché et la pompe mise en route. Le front de drainage traverse d'abord la partie supérieure de la mousse dans laquelle le champ magnétique est quasiment nul. La partie dans laquelle est enregistrée la conductivité correspond à la zone où  $H$  est constant à 10 % près. Pour obtenir l'effet le plus important, nous nous sommes limité à une valeur du champ magnétique ( $27 \text{ kA/m}$ ).

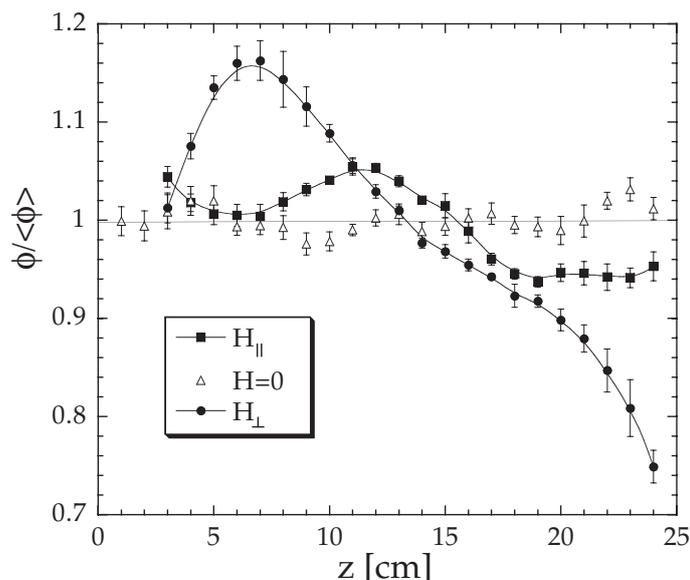


FIG. 6.19 – Profils moyens pour les différentes orientations du champ magnétique : parallèle à la gravité ( $H_{\parallel}$ ) ou perpendiculaire ( $H_{\perp}$ ).

La variation spatiale de la fraction volumique derrière le front (cf. figure 6.19) nous contraint à renormer les profils pour pouvoir mesurer la vitesse de déplacement du front. Cette renormalisation se fait en divisant la conductivité  $\sigma(z, t)$  à l'altitude  $z$  au temps  $t$ , par le profil d'équilibre obtenu après le passage du front ( $\sigma(z, t = \infty)$ ).

$$\sigma_r = \frac{\sigma(z, t)}{\sigma(z, t = \infty)} \quad (6.19)$$

La figure 6.20 montre qu'en présence d'un champ magnétique parallèle à la gravité, noté  $H_{\parallel}$ , la vitesse du front est plus importante tandis que lorsque le champ est perpendiculaire, ( $H_{\perp}$ ), la vitesse du front est plus faible. La dispersion des points expérimentaux est imputable aux fluctuations de la taille des bulles à l'intérieur de la mousse et d'une mousse à l'autre et non à une erreur sur la mesure de la vitesse du front.

### Second front de drainage en champ parallèle

Une fois le front de drainage passé, que se passe-t-il si l'on modifie la valeur du champ magnétique? Le cas le plus simple consiste à couper le champ après le passage du front sous champ parallèle (cf. figure 6.21) où à appliquer un champ magnétique parallèle à la gravité après le passage d'un front sans champ (cf. figure 6.22). La réaction immédiate est relativement complexe, et avec une augmentation brutale de la conductivité qui pourrait être due à l'anisotropie des bords de Plateau (cf. figure 6.2.3). Après un temps de latence, il se produit un nouveau front de drainage, permettant à la mousse de retrouver sa fraction volumique d'équilibre. Ainsi, après un drainage forcé magnétique, couper le champ provoque l'apparition de front similaire au front de drainage forcé classique (cf. figure 6.21). Lorsque l'on applique un champ magnétique parallèle après une expérience de drainage forcé classique, un second front de drainage de forme différente se propage dans la mousse (cf. figure 6.22). Dans ce cas, la pente du front est de signe opposé aux

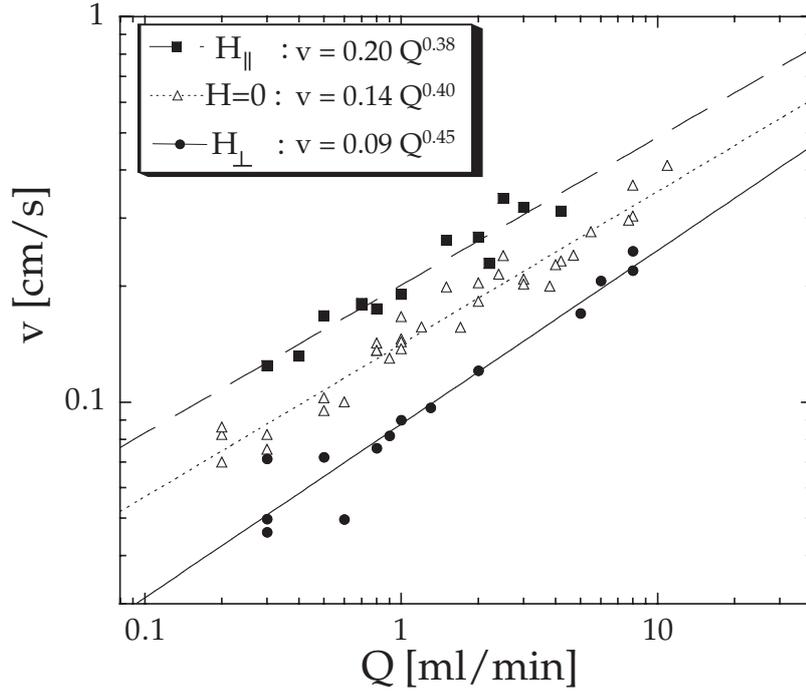


FIG. 6.20 – Vitesse  $v$  du front en fonction du débit  $Q$ , pour un champ de  $27 \text{ kA m}^{-1}$  parallèle à la gravité ( $H_{\parallel}$ ), en champ nul ( $H = 0$ ) et en champ perpendiculaire à la gravité ( $H_{\perp}$ ).

cas précédents.

### Loi de Lemlich sous champ

La conservation du débit nous permet de déduire une relation de calibration pour la fraction volumique, le débit étant imposé et la mesure de la vitesse du front indépendante de toute calibration :

$$\phi_{max} = \frac{Q}{Sv_f} \quad (6.20)$$

où  $S$  est la surface de la colonne. En représentant la conductivité relative de la mousse en fonction de la fraction volumique de la mousse, on obtient une relation proportionnelle. Le coefficient est de l'ordre de l'unité (cf. figure 6.23) et dépend légèrement de l'orientation et de l'amplitude du champ. Cette valeur est surprenante car lors des expériences de drainage forcé réalisées avec une solution de SDS et d'eau, le coefficient était compris entre  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$  selon la taille des bulles (cf. figure 6.24). La loi linéaire de Lemlich prévoit un coefficient de  $\frac{1}{3}$  ([77]), alors que dans sa version non linéaire, on peut trouver des coefficients de  $\frac{1}{2}$  ([110]).

### 6.2.5 Conclusion

Nous avons donc mis en évidence trois types d'effets d'un champ magnétique constant sur une mousse de ferrofluide :

- Près de l'interface liquide mousse, le raccordement de la mousse au liquide est modifié sur plusieurs  $cm$ , le ferrofluide étant aspiré dans la mousse. Les courbes de

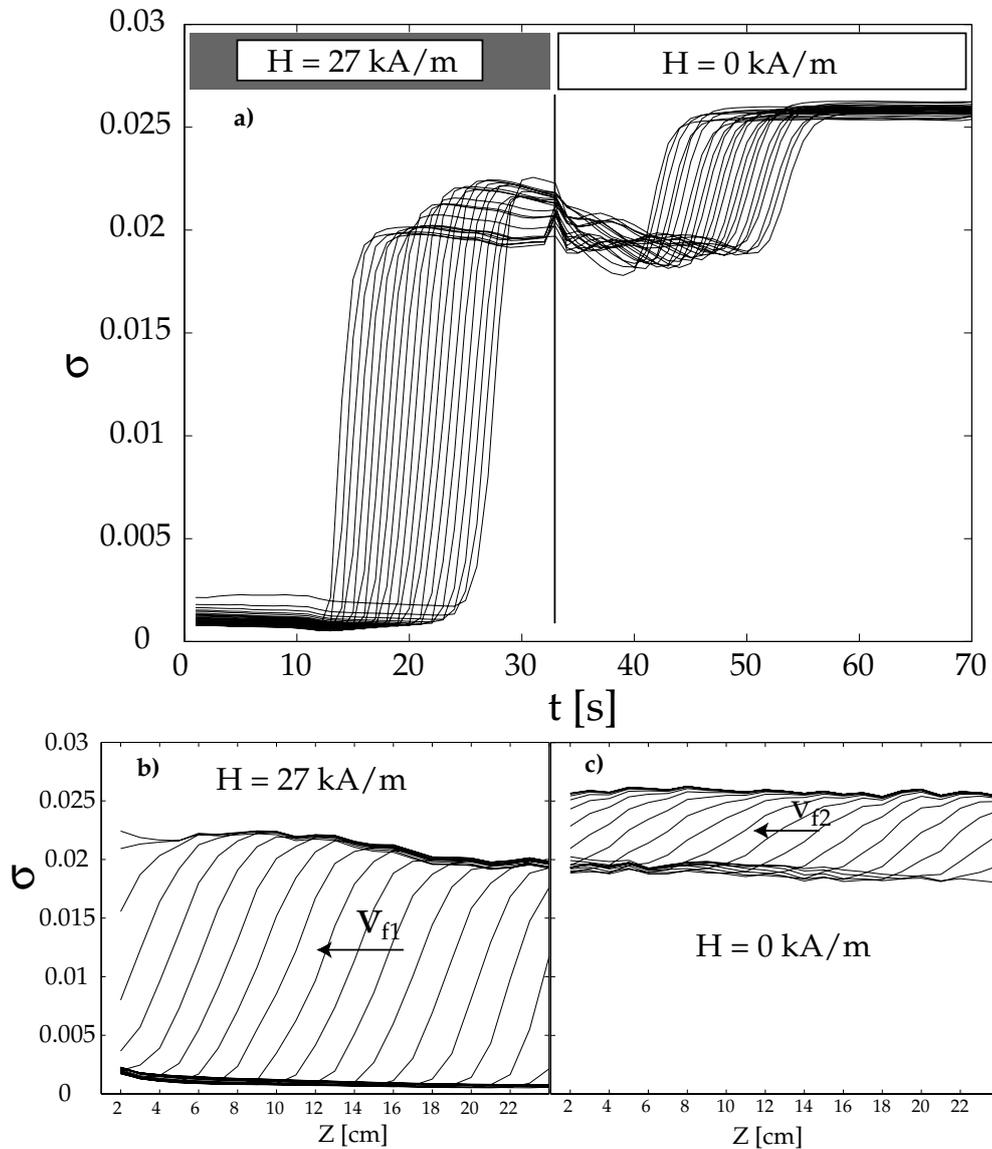


FIG. 6.21 – Coupure du champ après une expérience de drainage forcé magnétique ( $Q = 3.0 \text{ ml/h}$ ). **a** : Conductivité en fonction du temps pour toutes les électrodes  $\sigma t$ . Chacune des lignes représente une paire d'électrode. On voit distinctement que le premier front de drainage est suivi par un second lorsque le champ est coupé (à partir de  $t=33\text{s}$ ). **b** : Représentation de  $\sigma z$  pour  $t \in [13; 28]$ . Le premier front de drainage sous champ se propage à la vitesse  $V_{f1}$ , alors que le second, qui se produit lorsque le champ est coupé alors que le débit est maintenu constant, se déplace à la vitesse  $V_{f2}$ .

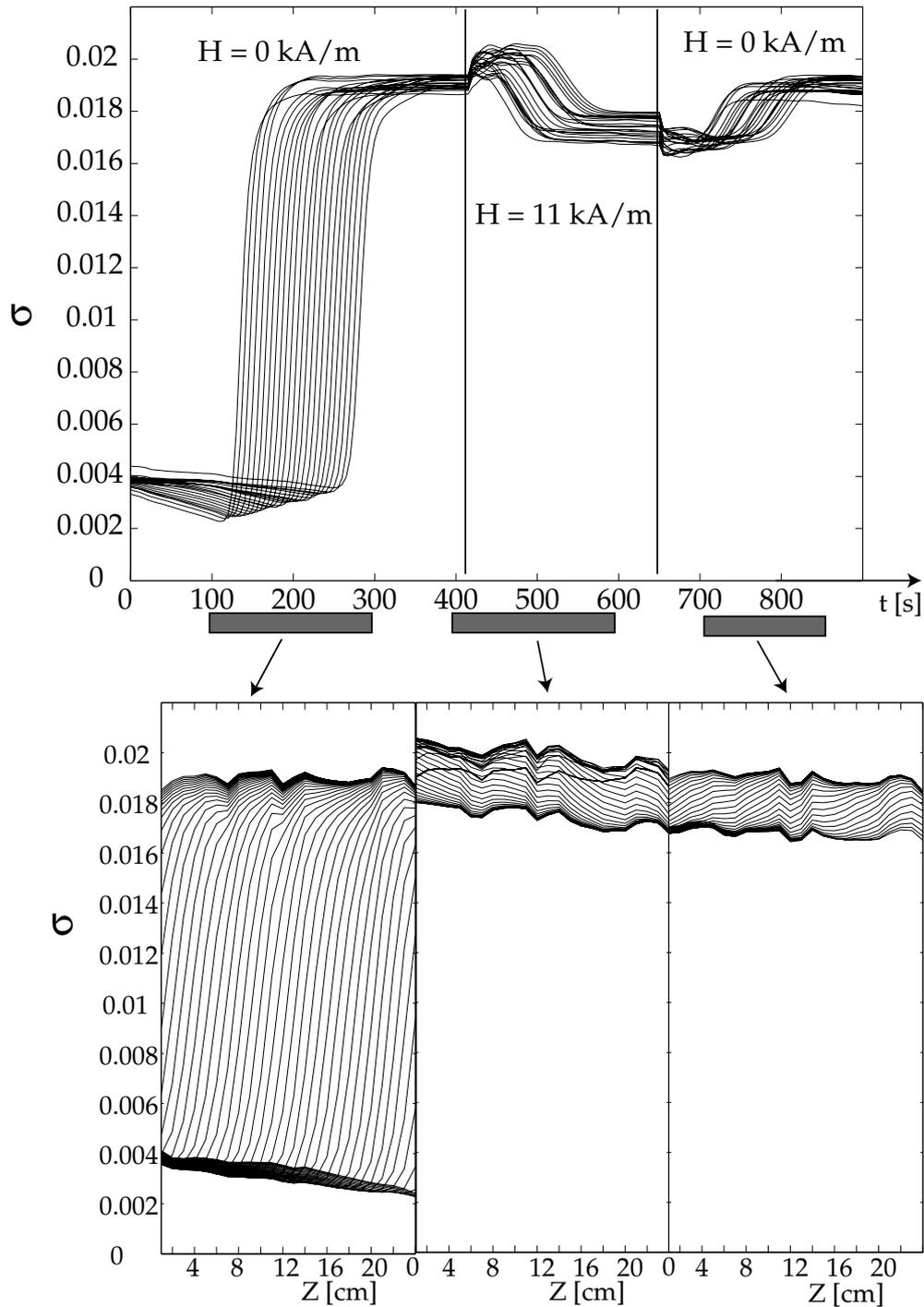


FIG. 6.22 – Drainage en champ magnétique parallèle. **En haut** : Conductivité en fonction du temps pour toutes les électrodes ( $\sigma(t)$ ). **En bas** : Profils spaciaux de la conductivité. Le premier front de drainage se produit alors que le champ magnétique est nul. A  $t = 410$ , le champ magnétique est mis en marche. Il se produit alors un front de drainage dont la pente est négative, correspondant à une diminution de la fraction volumique. A  $t = 650$  s, le champ magnétique est coupé et un nouveau front de drainage se propage.

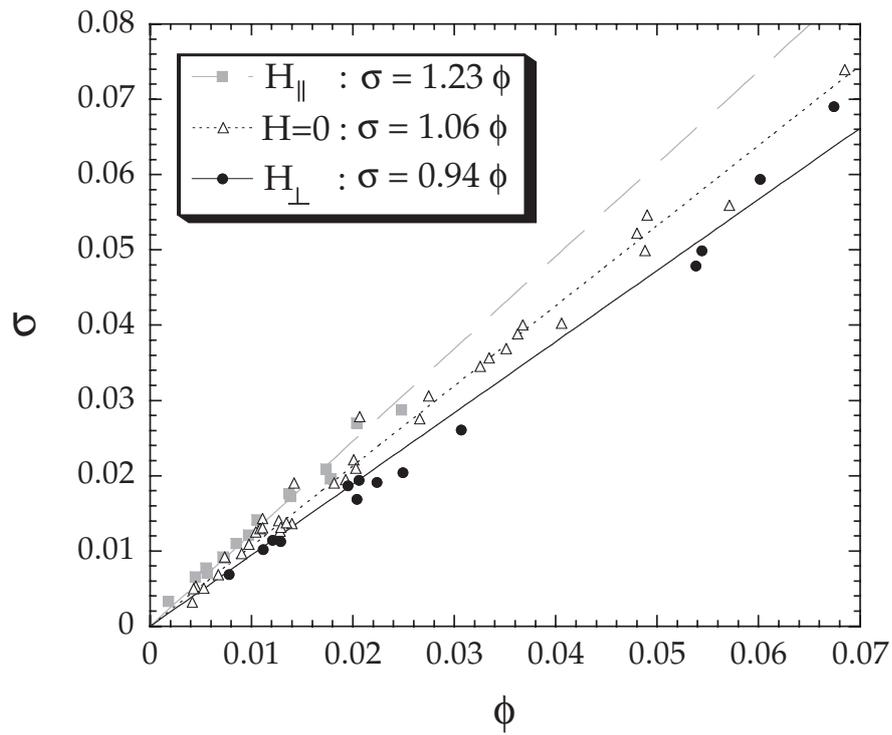


FIG. 6.23 – Conductivité  $\sigma$  mesurée derrière le front de drainage en fonction de la fraction volumique déduite par  $\phi = \frac{Q}{Sv_f}$

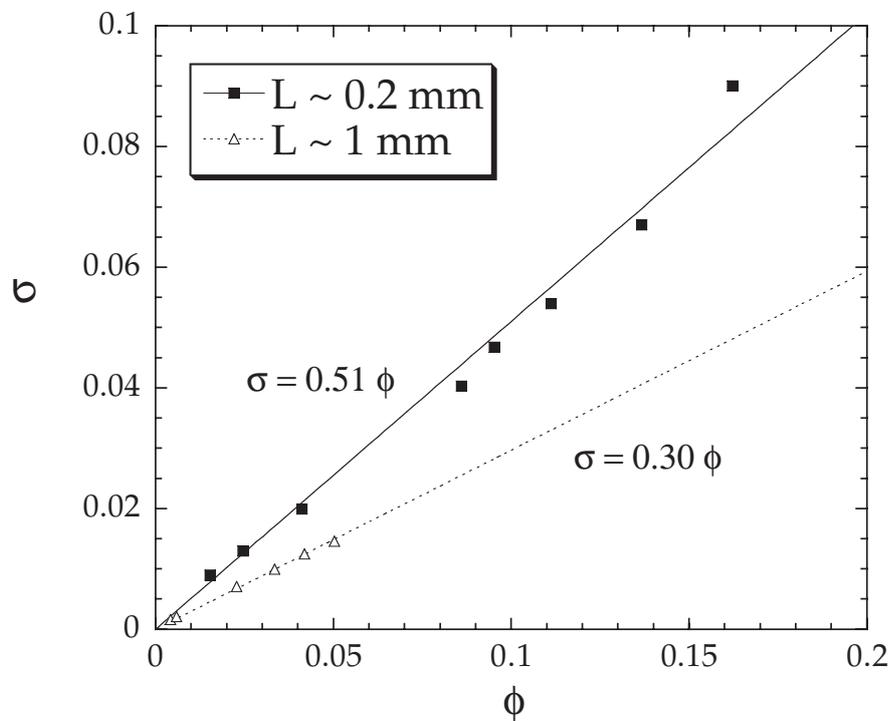
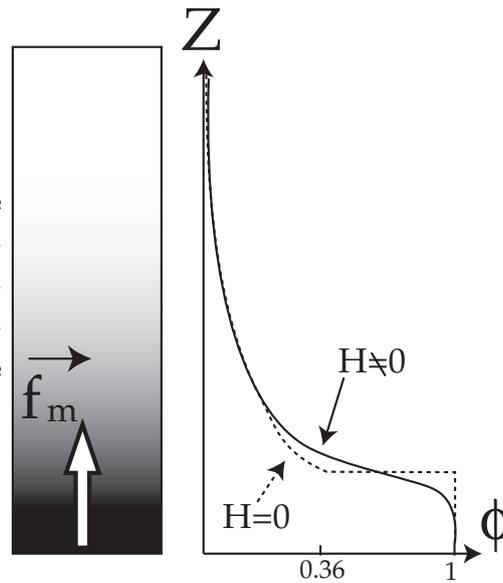


FIG. 6.24 – Relation entre la conductivité et la fraction volumique dans une mousse constituée d'une solution de SDS, pour deux tailles différentes de bulles.

FIG. 6.25 – Schéma de la force magnétique  $f_m$  produit par un champ magnétique homogène à l'intérieur d'une mousse de ferrofluide. La fraction volumique  $\phi_{eq}(z)$  est modifiée près de l'interface entre la mousse et le ferrofluide.



- conductivité montrent l'existence d'un flux de liquide dans la mousse sur plusieurs *cm*. La diffusion capillaire tend à étaler ce front initialement raide.
- Loin de cette interface, le champ magnétique induit une anisotropie des rayons de courbures des bords de Plateau. Ce phénomène a déjà été étudié dans le chapitre précédent, dans des mousses bidimensionnelles. Cette modification est très rapide car le liquide s'échange entre bords de Plateau voisin sur une distance de l'ordre de  $L$ . Ainsi, tous les points de la mousse réagissent au même instant.
  - Enfin, la vitesse du front de drainage forcé est modifiée par la présence du champ magnétique, celui-ci étant accéléré lorsque le champ est parallèle à la gravité et ralenti lorsqu'il est perpendiculaire.

### 6.3 Modèle de champ moyen

Nous avons vu dans la sous-section 4.3.5, que pour qu'il existe une force magnétique de volume, il fallait un gradient de champ magnétique. En effet, la force magnétique par unité de volume s'écrit :

$$f_m = \mu_0 M \frac{\partial H_{int}}{\partial z} \quad (6.21)$$

Or, dans toutes nos expériences, le champ magnétique appliqué est homogène dans l'espace. La présence de gradients de champ est en fait due à l'aimantation que peut acquérir le ferrofluide. Le champ magnétique total à l'intérieur de la mousse n'est pas égal au champ extérieur mais à la somme du champ extérieur et de l'aimantation du ferrofluide :

$$H_{int} = H_{ext} - DM \quad , \quad (6.22)$$

où  $D$  est le facteur démagnétisant. L'aimantation  $M$  n'est pas homogène dans toute la mousse. Ainsi, en reportant 6.22 dans 6.21 on obtient :  $f_m = -\mu_0 M \frac{\partial DM}{\partial z}$ .

Nous allons nous attacher ici à montrer que la variation de fraction volumique de ferrofluide crée une force magnétique tendant à homogénéiser la quantité de ferrofluide

présente dans la mousse (cf. figure 6.25). Nous allons pour cela utiliser un modèle de champ moyen. Pour cela, introduisons l'aimantation moyenne de la mousse considérée comme un milieu magnétique *homogène* :  $\langle M(z) \rangle$ . Ce milieu magnétique est caractérisé par la susceptibilité moyenne  $\langle \chi \rangle$ . On a donc la relation

$$\langle M \rangle = \langle \chi \rangle H_{ext} \quad , \quad (6.23)$$

où  $H_{ext}$  est le champ extérieur. La force magnétique  $f_m$  s'écrit alors :

$$f_m = -\frac{\mu_0 D H_{ext}^2}{2} \frac{\partial \langle \chi \rangle^2}{\partial z} \quad (6.24)$$

La susceptibilité du milieu effectif doit être proportionnelle à la fraction volumique. En toute rigueur, l'aimantation doit dépendre aussi du facteur démagnétisant moyen  $\langle D \rangle$  à l'intérieur de la mousse, mais nous ne prendrons pas en compte cet effet ici car nous cherchons un ordre de grandeur de  $f_m$ . De sorte que la susceptibilité moyenne vaut :

$$\langle \chi \rangle \approx \chi \phi \quad , \quad (6.25)$$

où  $\chi$  est la susceptibilité du ferrofluide. La force magnétique moyenne s'écrit :

$$f_m = -\frac{\mu_0}{2} H_{ext}^2 \chi^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \quad (6.26)$$

Ainsi, lorsqu'une mousse est plongée dans un champ magnétique homogène, il existe une force s'opposant à la variation de la fraction volumique. Celle-ci varie comme le gradient de la fraction volumique élevée au carré. Il s'agit maintenant de comparer ce terme aux forces gravitationnelles. La valeur absolue du rapport des deux s'écrit :

$$\frac{f_m}{f_g} = \frac{\mu_0 H_{ext}^2 \chi^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial z}}{\rho g} \quad . \quad (6.27)$$

En prenant pour la valeur du champ  $H = 20 \text{ kA/m}$ ,  $\chi \approx 1$ ,  $\rho = 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}$ , le rapport vaut 1, c'est à dire que force magnétique et force gravitationnelle sont du même ordre de grandeur, si  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \approx 30$ . Cela correspond à une variation de la fraction volumique de 0 à 10 % sur 3 mm. Une telle variation ne se rencontre que près de l'interface liquide mousse. Ce terme magnétique y est d'autant plus important que la pression capillaire est très faible à cet endroit du fait de l'humidité très importante (rappelons que la pression capillaire varie comme  $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$ ).

Comme les forces de capillarité, la force magnétique  $f_m$  s'oppose aux gradients de fraction volumique. Elle permet d'expliquer qualitativement l'imbibition magnétique sous champ. Elle peut aussi provoquer un étalement du front de drainage. La fraction volumique devant le front est très faible alors que derrière le front elle vaut  $\phi_m$ , soit quelques pourcents : il existe un gradient important de fraction volumique. La force magnétique tend à étaler le front.

Elle ne peut cependant expliquer l'augmentation de la vitesse du front dans le drainage forcé. Lorsque le régime stationnaire est atteint, la vitesse du front et la vitesse moyenne du liquide dans les bords de Plateau derrière le front sont identiques. Dans cette dernière partie, il y a pas de gradient de fraction volumique : la force  $f_m$  y est nulle. Elle ne peut donc modifier la vitesse du liquide dans la mousse ou celle du front.

## 6.4 Modèle microscopique du Drainage Magnétique

Nous allons maintenant chercher à expliquer la modification de la vitesse du drainage par un champ magnétique homogène. Pour cela, nous nous tournerons vers l'anisotropie du réseau de bord de Plateau induite par le champ magnétique. Elle a été observée à 2 comme à 3 dimensions. Il s'agit de répondre à la question :

«Comment la modification de la structure de la mousse influe-t-elle sur le drainage d'une mousse tridimensionnelle? ».

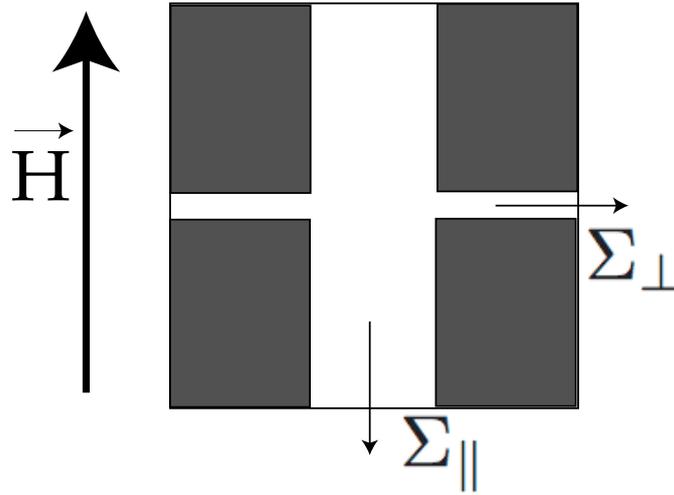


FIG. 6.26 – La perméabilité hydrodynamique sous champ de la mousse dépend de la direction de l'écoulement par rapport au champ magnétique.

Ainsi, nous élargirons au cas d'une mousse tridimensionnelle la relation déjà vue au chapitre 5 entre le nombre de Bond magnétique, qui compare les effets capillaires et magnétiques, et le rayon de courbure du bord de Plateau. Puis nous calculerons la perméabilité dans les directions perpendiculaire et parallèle au champ magnétique (cf. figure 6.26).

### 6.4.1 Nouvelle définition du nombre de Bond magnétique

Nous avons montré dans le chapitre précédent, que le rayon variait avec son orientation par rapport au champ selon une loi du type (cf. équation 5.25) :

$$R(B_m, \theta) = \frac{R_0}{B_m(a + \sin^2 \theta)} \quad , \quad (6.28)$$

Où  $B_m$  est le nombre de Bond magnétique :

$$B_m = \frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 R_0}{2\gamma(2 + \chi)} \quad , \quad (6.29)$$

et  $a$ , sans dimension, une fonction du nombre de Bond qu'il nous faut déterminer grâce aux conditions aux limites, c'est à dire la fraction de liquide présent dans la mousse.

La définition du nombre de Bond magnétique que nous avons utilisé n'est pas adaptée au drainage, car elle couple fraction volumique et nombre de Bond, par l'intermédiaire de  $R_0$ . En effet, pendant une expérience de drainage, le nombre de Bond n'est pas

constant car le rayon de courbure des bords de Plateau varie. Il est souhaitable d'utiliser deux grandeurs complètement indépendantes pour établir l'expression de la perméabilité. Pour cela, on peut utiliser la longueur des bords de Plateau  $L$  qui est fixée au moment de la formation de la mousse et ne varie plus après. En écrivant explicitement la valeur du nombre de Bond magnétique dans  $R(B_m, a)$ ,  $R_0$  se simplifie au numérateur et au dénominateur :

$$R(H, a) = \frac{1}{\frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2}{2\gamma(2+\chi)} (a + \sin^2 \theta)} . \quad (6.30)$$

Que l'on peut reformuler sous la forme :

$$R(H, a) = \frac{L}{b_m (a + \sin^2 \theta)} \quad (6.31)$$

où l'on a utilisé une nouvelle définition du nombre de Bond magnétique qui dépend de la longueur des bords de Plateau  $L$  :

$$b_m = \frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 L}{2\gamma(2 + \chi)} \quad (6.32)$$

Cette nouvelle définition,<sup>11</sup> qui utilise la longueur des bords de Plateau à la place du rayon de courbure, nous permet d'obtenir les deux grandeurs indépendantes qui caractérisent la perméabilité sous champ de la mousse magnétique :  $\Sigma(\phi, b_m)$ . La fonction  $a$  est à déterminer par les conditions aux limites. A 2D celles-ci étaient définies par la conservation du volume de ferrofluide dans la mousse. A 3D, la mousse draine et le volume n'est plus conservé. Nous allons donc relier  $a$ ,  $\phi$  et  $b_m$  en reformulant la définition de la fraction volumique pour le cas anisotrope. Cette relation, *purement géométrique*, nous permettra d'obtenir un système de deux équations (fraction volumique et perméabilité) à deux inconnues ( $\phi$  et  $a$ ) avec un paramètre extérieur ( $b_m$ ).

## 6.4.2 Fraction Volumique

La première chose à faire est de (re)définir la fraction volumique de liquide de la mousse en présence d'un champ magnétique. La difficulté provient de la dépendance du rayon de courbure des bords de Plateau par rapport à leurs orientations. Cette dépendance ne doit par contre pas se retrouver dans la fraction volumique car c'est intrinsèquement une grandeur scalaire. Nous devons donc moyenniser le rayon de courbure sur toutes les orientations pour faire disparaître cette dépendance.<sup>12</sup> Pour cela, nous allons généraliser la définition donnée dans le premier chapitre s'appliquant au cas isotrope (cf. équation 1.8),  $\phi_i = \mathcal{C}_\phi \frac{R_i^2}{L^2}$ , en y substituant la valeur moyenne du rayon de courbure  $\langle R(\theta, b_m) \rangle$  à  $R_i$ <sup>13</sup> :

$$\phi = \mathcal{C}_\phi \frac{\langle R(b_m, \theta) \rangle_{\theta, \alpha}^2}{L^2} \quad (6.33)$$

<sup>11</sup>Les deux définitions sont reliées par :  $b_m = B_m \sqrt{\frac{\mathcal{C}_\phi}{\phi}}$ .

<sup>12</sup>Le rayon de courbure de bord de Plateau n'est pas une grandeur scalaire car on peut le représenter sous la forme d'un champ vectoriel : l'orientation étant donnée par le bord de Plateau, et la norme, le rayon de courbure

<sup>13</sup>On aurait pu aussi définir  $\phi$  en utilisant  $\langle R^2 \rangle$  et non  $\langle R \rangle^2$ . Le choix ici est dicté par la forme de la perméabilité pour un liquide à faible viscosité de surface ( $\Sigma \approx R$ ) ce qui nous permettra certaines simplifications ultérieures.

où,  $L$  est la longueur d'un bord de Plateau et  $\langle x \rangle_{\theta, \alpha}$  représente la valeur moyenne de la grandeur  $x$  sur toutes les orientations (cf. figure 6.27). Pour comparer les perméabilités hydrodynamiques sans champ et avec champ, il faut bien sûr que les fractions volumiques soient égales et donc que :

$$R_i = \langle R(b_m, \theta) \rangle \quad . \quad (6.34)$$

Il convient de remarquer que  $R_i$  est le rayon de courbure moyen et non le rayon de courbure sans champ. A 3 dimensions, l'orientation d'un bord de plateau est repéré par deux angles, que nous noterons  $\theta$  et  $\alpha$  (cf. figure 6.27). Nous orienterons toujours notre repère de manière à avoir le champ magnétique dans la direction  $Oz$ . Deux orientations de la gravité sont donc à distinguer : parallèle au champ magnétique  $\vec{H}$  ou perpendiculaire. Nous considérons que toutes les orientations des bords de Plateau sont équiprobables,

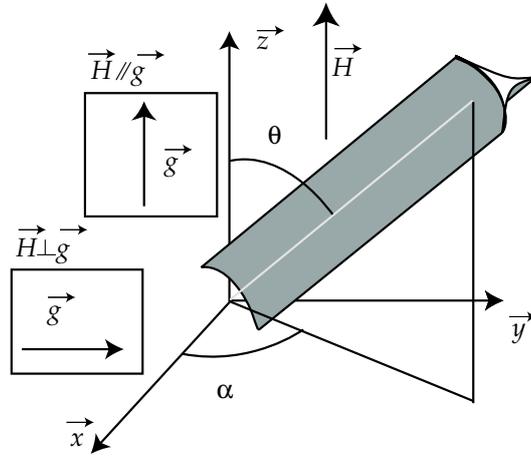


FIG. 6.27 – Angles utilisés pour repérer l'orientation d'un bord de Plateau.  $Oz$  est dans la direction du champ magnétique  $\vec{H}$ , tandis que la gravité  $\vec{g}$  est soit dans la direction  $Oz$  (cas  $\parallel$ ) soit dans la direction  $Oy$  (cas  $\perp$ )

ce qui résulte de la structure désordonnée de la mousse. Pour calculer la valeur moyenne d'une fonction  $f(\theta, \alpha)$ , il faut sommer chacune de ses contributions sur l'angle solide  $\sin \theta d\theta d\alpha$  et diviser par l'angle solide total  $4\pi$ <sup>14</sup>. La valeur d'une fonction  $f(\theta, \alpha)$  s'écrit alors :

$$\langle f(\theta, \alpha) \rangle_{\theta, \alpha} = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \alpha) \sin \theta d\alpha d\theta}{4\pi} \quad (6.35)$$

et dans le cas où la fonction ne dépend que de l'angle  $\theta$ , alors on a :

$$\langle f(\theta) \rangle_{\theta, \alpha} = \int_0^\pi f(\theta) \frac{\sin \theta}{2} d\theta \quad (6.36)$$

La moyenne du rayon de courbure vaut donc :

$$\langle R \rangle_{\theta, \alpha} = \frac{L}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{a + \sin^2 \theta} d\theta \quad (6.37)$$

En posant le changement de variable, on obtient l'intégrale :

$$\langle R \rangle_{\theta, \alpha} = \frac{R_0}{2b_m} \int_{-1}^1 \frac{dx}{a + 1 - x^2} \quad (6.38)$$

<sup>14</sup>rappels sur un angle solide

Celle-ci s'intègre après décomposition en éléments simples :

$$\langle R \rangle_{\theta, \alpha} = \frac{L}{2b_m \sqrt{a+1}} \ln \frac{\sqrt{a+1} + 1}{\sqrt{a+1} - 1} \quad (6.39)$$

Ce qui nous permet finalement d'obtenir la fraction volumique en fonction de  $b_m$  et de  $a$  :

$$\phi(b_m, a) = \frac{C_\phi}{4b_m^2(a+1)} \left( \ln \frac{\sqrt{a+1} + 1}{\sqrt{a+1} - 1} \right)^2 \quad (6.40)$$

Il s'agit d'une relation purement géométrique pour des bords de Plateau dont les rayons de courbure suivent la loi donnée par l'équation 6.28. C'est une extension de la définition classique de la fraction volumique de liquide.

### 6.4.3 Perméabilité hydrodynamique sous champ Magnétique

Il nous faut maintenant calculer la perméabilité hydrodynamique d'une mousse de ferrofluide dans un champ magnétique homogène. Nous avons déjà montré, en étudiant la vitesse du front de drainage, qu'une mousse composée d'une solution de ferrofluide et SDS sans champ magnétique présentait toutes les caractéristiques d'un écoulement de type *node dominated*. Dans ce cas, la perméabilité a la forme suivante :

$$\Sigma_n = \frac{k_n}{3\eta} RL \quad , \quad (6.41)$$

où,  $R$  est le rayon de courbure,  $L$  la longueur des bords de Plateau et  $k_n$  une constante numérique<sup>15</sup>. Dans notre cas, il s'agit de prendre en compte la variation du diamètre du bord de Plateau due à la présence du champ magnétique. Le bord de Plateau est repéré par les angles  $\theta$  et  $\alpha$  qu'il fait avec le champ. Lorsque la gravité est parallèle au champ, la projection de la gravité sur la direction du bord de Plateau est  $g \cos \theta$  (cf. figure 6.27). La vitesse dans le bord de Plateau est

$$v_{\parallel} = \frac{k_n}{\eta} RL \rho g \cos \theta \quad (6.42)$$

La vitesse verticale est obtenue en projetant à nouveau dans la direction de la gravité :

$$(v_{\parallel})_g = \frac{k_n}{\eta} RL \rho g \cos^2 \theta \quad (6.43)$$

La perméabilité sous champ parallèle  $\Sigma_{n\parallel}$  est obtenue en moyennant la vitesse  $(v_{\parallel})_g$  sur toutes les valeurs de  $\theta$  et en divisant par le gradient de pression verticale  $\rho g$ . On obtient ainsi :

$$\Sigma_{n\parallel} = \frac{k_n L}{\eta} \langle R \cos^2 \theta \rangle_{\theta, \alpha} \quad (6.44)$$

Dans le cas perpendiculaire, la projection de la gravité sur la direction parallèle au bord de Plateau est  $g \sin \theta \sin \alpha$ . La vitesse dans la direction de la gravité est :

$$(v_{\perp})_g = \frac{k_n}{\eta} RL \rho g \sin^2 \theta \sin^2 \alpha \quad (6.45)$$

<sup>15</sup>Nous avons jusqu'à présent utilisé une forme un peu différente pour la perméabilité, à savoir,  $\Sigma_n = \frac{K_n L^2}{\eta} \sqrt{\phi}$ . Les constantes  $K_n$  et  $k_n$  sont reliées par la relation suivante :  $K_n = \frac{k_n}{3\sqrt{c_\phi}}$

Ce qui nous permet de définir la perméabilité perpendiculaire :

$$\Sigma_{n\perp} = \frac{k_n L}{\eta} \langle R \sin^2 \theta \sin^2 \alpha \rangle_{\theta, \alpha} \quad (6.46)$$

En reprenant l'équation 6.44, la perméabilité s'écrit :

$$\Sigma_{n\parallel} = \frac{k_n L R_0}{\eta b_m} \langle \frac{\cos^2 \theta}{a + \sin^2 \theta} \rangle_{\theta, \alpha} \quad (6.47)$$

Toujours en utilisant le changement de variable  $x = \cos^2 \theta$  et en décomposant en éléments simples, on obtient :

$$\Sigma_{n\parallel} = \frac{k_n L R_0}{\eta b_m} \left( \frac{\sqrt{a+1}}{2} \ln \frac{\sqrt{a+1} + 1}{\sqrt{a+1} - 1} - 1 \right) \quad (6.48)$$

### Relation entre Perméabilités

Avant d'aller plus loin dans le calcul, on peut remarquer qu'il existe une relation simple entre la perméabilité parallèle  $\Sigma_{n\parallel}$ , la perméabilité perpendiculaire  $\Sigma_{n\perp}$  et la perméabilité sans champ (cas isotrope)  $\Sigma_n$ <sup>16</sup> qui nous permettra de déduire sans calcul  $\Sigma_{n\perp}$ . La perméabilité perpendiculaire fait intervenir les deux sinus des deux angles. On peut cependant décomposer la moyenne du produit en produit des deux moyennes :

$$\Sigma_{n\perp} = \frac{k_n L}{\eta} \langle R \sin^2 \theta \rangle_{\theta, \alpha} \langle \sin^2 \alpha \rangle_{\theta, \alpha} \quad (6.49)$$

En substituant  $\sin^2 \alpha$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$  et en remarquant que  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ , on peut réécrire la perméabilité perpendiculaire sous la forme suivante :

$$\Sigma_{n\perp} = \frac{k_n L}{2\eta} \langle R \rangle_{\theta, \alpha} - \frac{k_n L}{2\eta} \langle R \cos^2 \theta \rangle_{\theta} \quad (6.50)$$

En utilisant l'équation 6.34, on peut remplacer le premier terme du membre de droite par  $\frac{3}{2}\Sigma_n$ . Le second terme du membre de droite est lui égal à  $\frac{1}{2}\Sigma_{n\parallel}$ . Il existe donc la relation suivante entre les différentes perméabilités de la mousse :

$$2\Sigma_{n\perp} + \Sigma_{n\parallel} = 3\Sigma_n \quad (6.51)$$

Cette relation est tout à fait fondamentale pour le drainage magnétique.

### Étude Numérique

Si la formule 6.51 nous permettra de confronter les résultats expérimentaux à notre modèle, elle ne nous apprend cependant rien sur le comportement individuel des perméabilités sous champ. Pour obtenir un système d'équation adimensionnée, il faut diviser les perméabilités par :

$$\Sigma_n^0 = \frac{k_n L^2}{3\sqrt{C_\phi} \eta} \quad , \quad (6.52)$$

<sup>16</sup>Cette dernière est obtenue en considérant que le rayon de courbure est constant et vaut  $R_i$  (cf. figure 6.33). La moyenne sur tous les angles donne  $\langle \cos^2 \theta \rangle_{\theta, \alpha} = \frac{1}{3}$

On obtient ainsi le système :

$$\phi(b_m, a) = \frac{1}{4b_m^2(a+1)} \left( \ln \frac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1} \right)^2 \quad (6.53)$$

$$\tilde{\Sigma}_{n\parallel} = \frac{\Sigma_{n\parallel}}{\Sigma_n^0} = \frac{3\sqrt{\mathcal{C}_\phi}}{b_m} \left( \frac{\sqrt{a+1}}{2} \ln \frac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1} - 1 \right) \quad , \quad (6.54)$$

Il est complété par les deux autres relations :

$$\tilde{\Sigma}_n = \sqrt{\phi} \quad (6.55)$$

$$\tilde{\Sigma}_{n\perp} = \frac{1}{2} \left( 3\tilde{\Sigma}_n - \tilde{\Sigma}_{n\parallel} \right) \quad (6.56)$$

La relation entre  $a$  et  $\phi$  (équation 6.53) est implicite et il n'est pas possible d'exprimer la fonction  $a(\phi)$  analytiquement. Nous avons procédé ainsi.

- Nous avons d'abord calculé les valeurs de la fonction  $a(\phi_0, b_m)$  en résolvant numériquement l'équation 6.53  $\phi(a, b_m) = \phi_0$  pour  $\phi_0 \in [0.01; 0.1]$  et  $b_m \in [0.1; 9]$ .
- Puis nous avons remplacé les valeurs de  $a$  ainsi obtenues dans les équations du rayon de courbure et de la perméabilité en champ magnétique parallèle.
- La perméabilité en champ perpendiculaire est calculée grâce à la relation entre les perméabilités sans champ  $\tilde{\Sigma}_n$  et la perméabilité en champ parallèle.

La figure 6.28 nous donne l'équivalent numérique de la figure 6.18 et représente le diamètre des bords de Plateau en fonction de leur orientation par rapport au champ magnétique. L'anisotropie est très importante car les bords de Plateau peuvent avoir un diamètre deux fois plus important lorsqu'ils sont parallèles au champ ( $b_m = 4$ ). Les

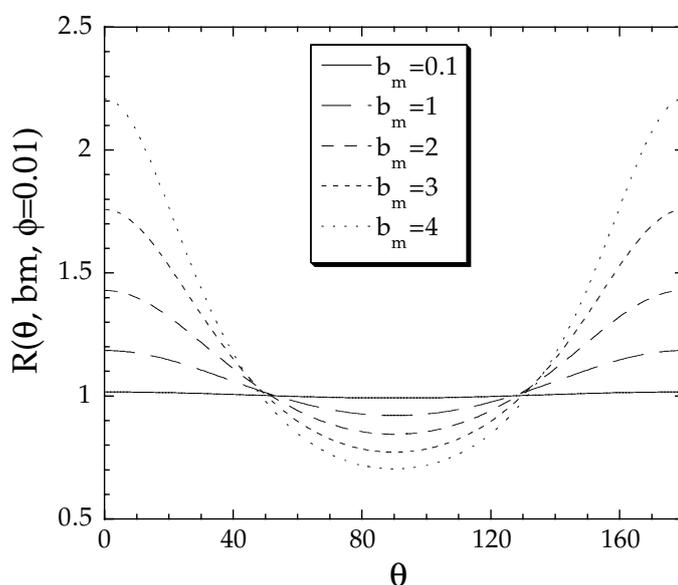


FIG. 6.28 – Rayon de courbure, renormé par sa valeur en champ nul, en fonction de l'angle avec le champ magnétique ( $R(H, a) = \frac{L}{b_m(a+\sin^2 \theta)}$ ). Les valeurs de  $a(b_m)$  ont été obtenues pour  $\phi = 0.01$ .

perméabilités sous champ sont reportées sur la figure 6.29. Celle-ci montre une augmentation de la perméabilité lorsque le champ est parallèle à la direction de l'écoulement (donné par l'orientation de la gravité) et une diminution de la perméabilité lorsque

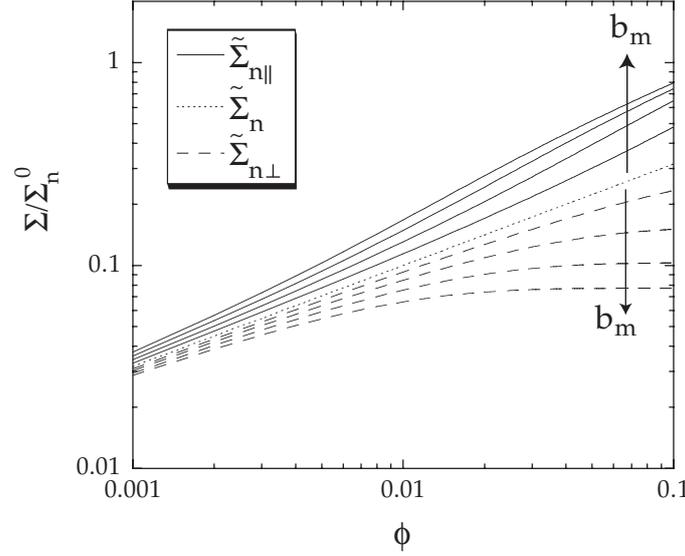


FIG. 6.29 – Perméabilité magnétique pour un champ parallèle (trait continu) et pour un champ perpendiculaire à la gravité (trait en pointillé). Des valeurs croissantes du nombre de Bond ( $bm = 0$ ,  $bm = 2$ ,  $bm = 4$ ,  $bm = 6$  et  $bm = 8$ ) ont permis d’obtenir un faisceau de courbes.

que le champ est perpendiculaire. La représentation en coordonnées logarithmiques des perméabilités  $\tilde{\Sigma}$  en fonction de la fraction volumique montre qu’elles ne suivent plus des lois de puissance, comme lorsque le champ est nul. Ceci est particulièrement sensible dans le cas où le champ est perpendiculaire à la gravité. Dans ce cas, lorsque  $b_m > 6$ , la perméabilité  $\tilde{\Sigma}_\perp$  ne dépend presque plus de la fraction volumique.

#### 6.4.4 Le cas *Channel dominated*

Le modèle *channel dominated* correspond au cas où l’écoulement à l’intérieur des bords de Plateau est de type parabolique. La perméabilité est alors proportionnelle à la fraction volumique :

$$\Sigma_c = \Sigma_c^0 \phi \quad . \quad (6.57)$$

Il est alors avantageux de changer la définition de la fraction volumique, et d’utiliser  $\langle R^2 \rangle$  à la place de  $\langle R \rangle^2$  pour généraliser la définition de la fraction volumique au cas anisotrope (équation 6.33). L’avantage que procure cette nouvelle définition de la fraction volumique provient du fait que la fraction volumique est alors de la même forme que la perméabilité, c’est à dire  $\propto \langle R^2 \rangle$ . Ainsi, la définition de la fraction volumique 6.33 devient :

$$\phi = C_\phi \frac{\langle R^2(b_m, \theta) \rangle_{\theta, \alpha}}{L^2} \quad (6.58)$$

La perméabilité sans champ a la forme suivante :

$$\Sigma_c = \frac{k_c}{3\eta} R^2 \quad (6.59)$$

En introduisant la constante  $\Sigma_c^0 = \frac{k_c L^2}{3 C_\phi \eta}$ , on adimensionne la perméabilité pour obtenir :

$$\tilde{\Sigma}_c = \frac{\Sigma_c}{\Sigma_c^0} = \phi \quad (6.60)$$

Un raisonnement tout à fait identique à celui exposé dans la partie précédente, nous permet d'obtenir le système d'équations :

$$\phi(b_m, a) = \frac{1}{2b_m^2(a+1)} \left( \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \ln \frac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1} + \frac{1}{a} \right) \quad (6.61)$$

$$\tilde{\Sigma}_{c\parallel} = \frac{3}{2b_m^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \ln \frac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1} \right) \quad (6.62)$$

$$\tilde{\Sigma}_{c\perp} = \frac{1}{2}(3\tilde{\Sigma}_c - \tilde{\Sigma}_{c\parallel}) \quad (6.63)$$

La solution du système est reportée dans la figure 6.30. Les effets sont du même type

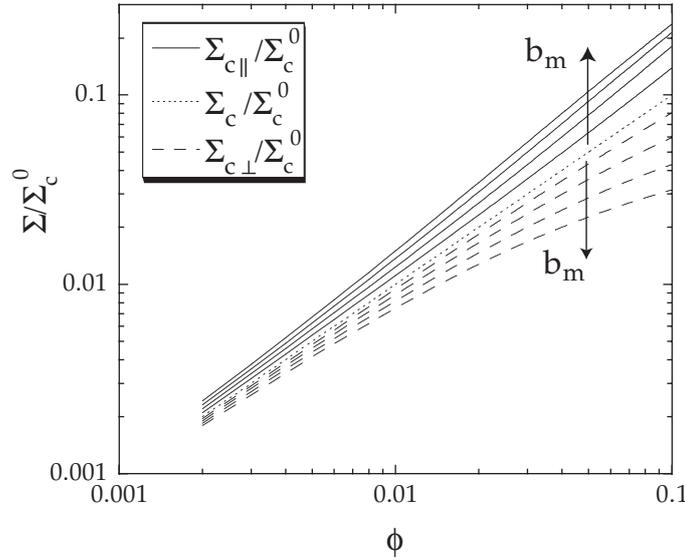


FIG. 6.30 – Perméabilité hydrodynamique dans le cas *channel dominated* en fonction de la fraction volumique pour différents nombre de Bond magnétique  $b_m$  (0, 1, 2, 3, 4) pour un parallèle à la gravité (augmentation de la perméabilité) et pour un champ perpendiculaire (diminution).

que ceux observés dans le cas *node dominated*, avec une augmentation de la perméabilité lorsque le champ est parallèle à la direction de l'écoulement et une diminution lorsque le champ est perpendiculaire. L'effet est toutefois moins important, en particulier sur  $\tilde{\Sigma}_{c\perp}$ , où la saturation de la perméabilité se produit pour des nombres de Bond magnétique et des fractions volumiques plus importants.

## 6.5 Confrontation à la réalité

### 6.5.1 Ordre de grandeur de l'anisotropie

Puisque tout notre modèle est basé sur l'anisotropie des bords de Plateau, nous allons d'abord vérifier que l'anisotropie observée expérimentalement est bien de l'ordre de grandeur attendue. En ajustant les résultats de la figure 6.18 par l'expression du rayon de courbure déduite en 6.4.1 :

$$R(H, a) = \frac{L}{b_m(a + \sin^2 \theta)} \quad , \quad (6.64)$$

on obtient comme résultat  $ab_m = 8.49$  et  $b_m = 1.8 \pm 0.4$  pour un champ de  $19 \text{ kA/m}$ , alors que lorsque le champ est nul,  $b_m = -0.1 \pm 0.2$ . Pour estimer la valeur du nombre de Bond magnétique, nous allons utiliser la description de la susceptibilité définie en 4.12 qui donne une susceptibilité effective  $\chi_{eff} = 0.8$  pour un champ magnétique  $H = 19 \text{ kA/m}$ . On obtient ainsi un nombre de Bond magnétique de  $b_m = 1.7$ , ce qui est tout à fait compatible avec la valeur qui nous est fournie par l'ajustement des points expérimentaux.

### 6.5.2 Perméabilité hydrodynamique

La perméabilité hydrodynamique relie la vitesse moyenne du liquide dans la mousse au gradient de pression. Dans le cas du drainage forcé, celui-ci se réduit au gradient de pression hydrostatique. La perméabilité vaut alors :

$$\Sigma = \frac{V_f}{\rho g} \quad (6.65)$$

où  $V_f$  est la vitesse du front. Cette relation nous permet de mesurer la perméabilité hydrodynamique lors d'une expérience de drainage forcé. La figure 6.31 montre bien une

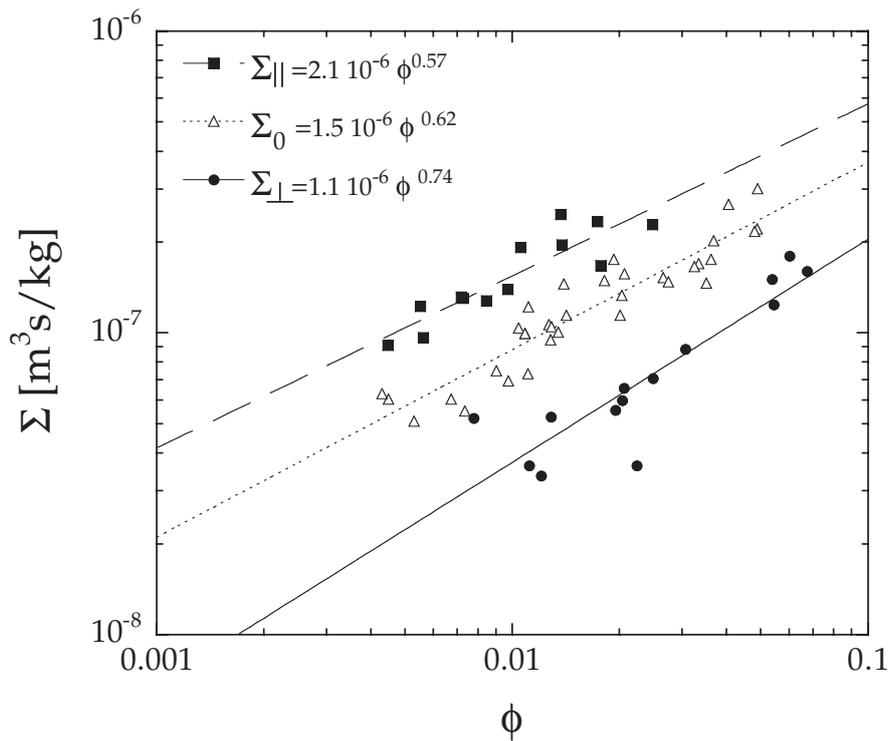


FIG. 6.31 – Représentation en coordonnées logarithmiques de la perméabilité en fonction de la fraction volumique (résultats expérimentaux), obtenue pour un champ magnétique de  $27 \text{ kA/m}$ . Les droites représentent les meilleurs ajustements par des lois de puissance de la perméabilité sans champ.

augmentation de la perméabilité pour un champ magnétique parallèle et une diminution pour un champ perpendiculaire. La représentation  $\Sigma(\phi)$  accentue la dispersion des points car la principale source d'erreur provient de la mesure de la vitesse du front et non du débit. En utilisant la fraction volumique de liquide comme variable, on introduit aussi cette erreur en abscisse puisque la fraction volumique est calculée à partir

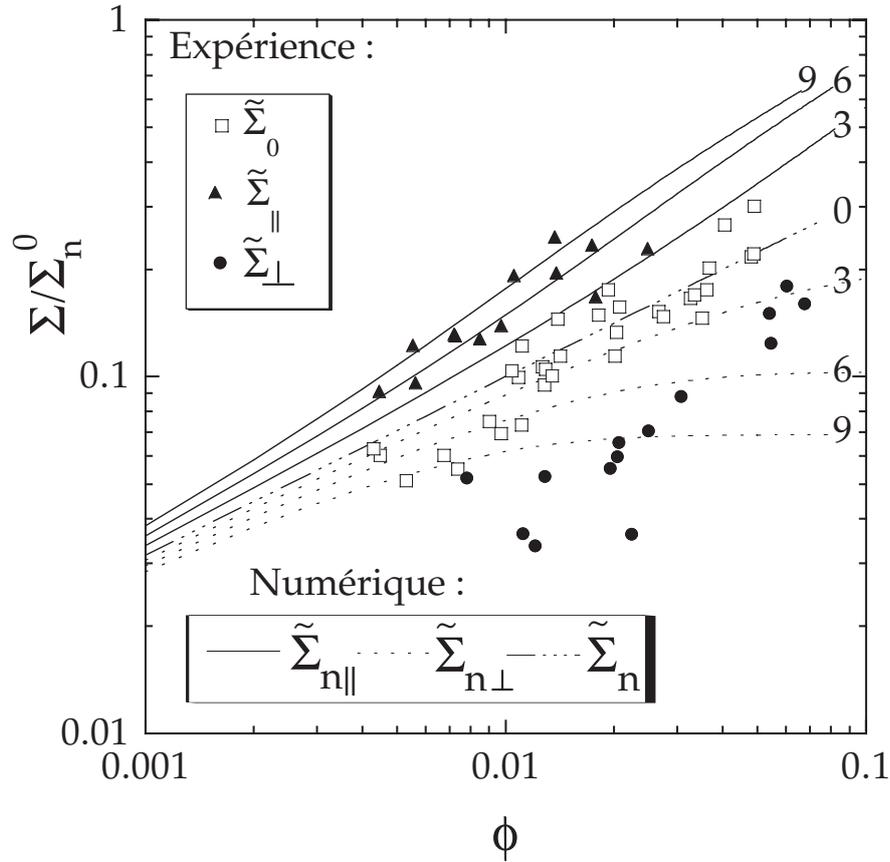


FIG. 6.32 – Comparaison des résultats numériques (lignes) et expérimentaux (points). Celles-ci ont été adimensionnées par  $\Sigma_0^0$  qui a été déduite des expériences de drainage forcé réalisées en champ nul (cf. équation 6.66). Les valeurs du nombre de Bond ont été reportés sur chacune des lignes représentant les résultats numériques.

de la vitesse du front. La représentation logarithmique montre que les perméabilités mesurées expérimentalement ont un comportement qui reste proche de la loi de puissance correspondant à un drainage classique. Pour représenter sur le même graphe les résultats numériques et expérimentaux, il nous faut diviser les perméabilités mesurées par  $\Sigma_n^0 = \frac{k_n L^2}{3\sqrt{C_\phi \eta}}$ . La valeur du coefficient  $k_n$  étant inconnue, nous allons utiliser les résultats sans champ pour estimer  $\Sigma_n^0$ . Nous avons déjà remarqué que la loi de dissipation *node dominated*, qui constitue un cas limite simple, n'est pas tout à fait vérifiée dans notre expérience. Cela se traduit par un exposant plus élevé que 0.5 (ici 0.62) dans la perméabilité. Pour obtenir la valeur expérimentale de  $\Sigma_n^0$  que nous noterons  $\Sigma_0^0$ , il nous faut *forcer* l'exposant à sa valeur théorique de 0.5. On obtient ainsi :

$$\Sigma_0^0 = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s} / \text{kg} \quad (6.66)$$

Nous noterons  $\tilde{\Sigma}_\perp$ ,  $\tilde{\Sigma}_\parallel$ ,  $\tilde{\Sigma}_0$ , les perméabilités expérimentales  $\Sigma_\perp$ ,  $\Sigma_\parallel$  et  $\Sigma_0$  divisées par  $\Sigma_0^0$ . La figure 6.32 montre que les effets observés expérimentalement correspondent aux résultats numériques pour des nombres de Bond magnétique de l'ordre 6. Nous pouvons aussi estimer le nombre de Bond magnétique en utilisant :  $b_m = \frac{\mu_0 \chi^2 H_0^2 L}{2\gamma(2+\chi)}$ . En prenant une susceptibilité magnétique donnée par une fonction phénoménologique :  $\chi(H) = \frac{M_s \chi}{M_s + \chi H}$

TAB. 6.1 – Préfacteurs  $\Sigma_i^0$ , en  $m^3s/kg$  de la perméabilité, obtenue par ajustement des points expérimentaux du type  $\Sigma = \Sigma_i^0 \phi^{0.62}$ .

$\Sigma_0^0$	$\Sigma_{\parallel}^0$	$\Sigma_{\perp}^0$
$1.55 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$0.81 \cdot 10^{-6}$

(cf. figure 4.12),  $\gamma = 30 \cdot 10^{-3} N/m$ ,  $L = 1.06 \cdot 10^{-3} m$  et  $H = 27 \cdot 10^3 A/m$ , on obtient un nombre de Bond  $b_m = 3.0$ . Lorsque le champ magnétique est parallèle à la gravité, les résultats expérimentaux donnent un comportement proche des résultats numériques. En revanche, dans le cas perpendiculaire, les résultats numériques et expérimentaux donnent des comportements différents. La saturation de la perméabilité mise en évidence par les résultats numériques n'est pas présente sur les courbes expérimentales. Pour les faibles fractions volumiques, la perméabilité mesurée est par contre nettement inférieure aux prédictions numériques.

### 6.5.3 Somme des perméabilités

Nous avons vu qu'il existait une relation entre les perméabilités sous champ et en champ nul (cf. figure 6.4.3) :

$$3\Sigma_n = 2\Sigma_{n\perp} + \Sigma_{n\parallel} \quad (6.67)$$

Pour vérifier cette relation fondamentale de notre modèle, nous allons décrire nos courbes expérimentales par une loi de puissance. Nous avons vu que pour le domaine de fraction volumique exploré, le comportement des perméabilités restait proche d'une loi de puissance. Nous allons donc ajuster les courbes expérimentales par une loi de puissance dont l'exposant est donné par la perméabilité sans champ (cf. figure 6.33) :

$$\Sigma = \Sigma_i^0 \phi^{0.62} \quad , \quad (6.68)$$

où l'indice  $i$  repère l'orientation du champ magnétique ( $i = \perp$  pour un champ perpendiculaire,  $i = \parallel$  lorsqu'il est parallèle et  $i = 0$  lorsqu'il est nul.) Pour vérifier cette loi, nous allons représenter sur le même graphique les valeurs expérimentales de  $3\Sigma_0$  ainsi que  $2\Sigma_{\perp} + \Sigma_{\parallel}$  issus des ajustements par une loi de puissance. En plus nous représenterons les valeurs expérimentales de  $3\Sigma_{\perp}$  et  $3\Sigma_{\parallel}$  ainsi que l'ajustement en loi de puissance pour souligner l'amplitude des variations de la perméabilité hydrodynamique selon l'orientation du champ. Selon la figure 6.33, il existe un bon accord entre les points expérimentaux et la théorie.

## 6.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes efforcés d'expliquer la modification du drainage forcé par le champ magnétique par l'existence d'une anisotropie induite par le champ magnétique rapporté au chapitre 5. Nous avons, pour cela, développé un modèle de drainage magnétique se basant sur l'anisotropie de la section des bords de Plateau. Ainsi, nous avons pu établir l'expression de la perméabilité d'une mousse magnétique

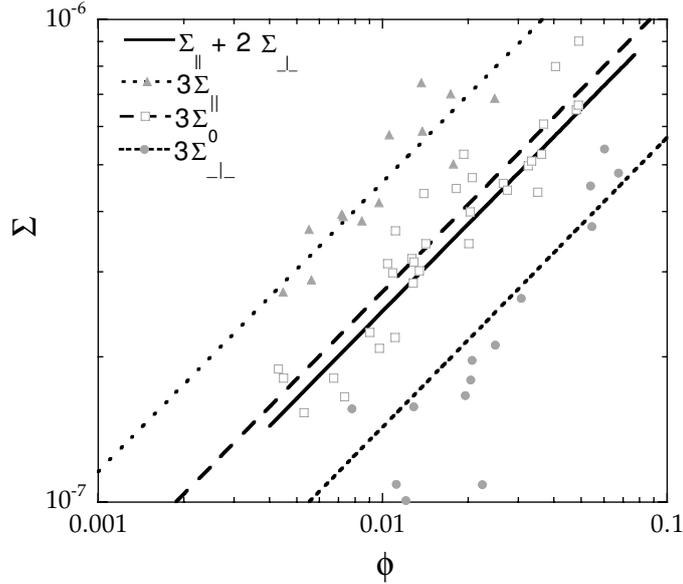


FIG. 6.33 – Vérification expérimentale de l'égalité  $3\Sigma_0 = 2\Sigma_{\perp} + \Sigma_{\parallel}$ . Les courbes représentées sont issues des ajustements par la loi de puissance obtenue dans la figure 6.31. Nous avons aussi représenté  $3\Sigma_{\parallel}$  et  $3\Sigma_{\perp}$  pour comparaison.

dans ces deux directions principales (à savoir parallèlement et perpendiculairement à la gravité), ainsi que l'existence de relation entre les perméabilités hydrodynamiques sous champ et sans champ (cas isotrope).

La relation entre les perméabilités hydrodynamiques  $2\Sigma_{n\perp} + \Sigma_{n\parallel} = 3\Sigma_n$  est bien vérifiée expérimentalement, et montre que l'anisotropie du rayon de courbure des bords de Plateau est à l'origine de l'accélération du drainage de mousses magnétiques dans un champ magnétique homogène parallèle à la gravité et du ralentissement lorsque le champ est perpendiculaire à la gravité.

Si la perméabilité  $\Sigma_{\parallel}$  se comporte comme notre modèle le prédit, la perméabilité en champ perpendiculaire semble différer quelque peu de notre modèle. En effet, la saturation de la perméabilité prédite par le modèle n'a pu être mise en évidence expérimentalement. Cette saturation est attendue pour des nombres de Bond  $b_m \approx 6$  et des fractions volumiques de l'ordre de 5%. La perméabilité en champ nul a montré que nous étions dans un cas intermédiaire entre un écoulement bouchon et un écoulement de Poiseuille. Cet effet pourrait expliquer l'absence de saturation de la perméabilité car dans le régime *channel dominated*, cette saturation est beaucoup moins marquée que dans le cas *node dominated* et se produit pour des fractions volumiques plus élevées.

L'accord entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux de la perméabilité est donc plus d'ordre qualitatif que quantitatif. Nous y voyons principalement deux raisons : La première provient du fait que même sans champ magnétique, la perméabilité n'a pas la forme idéale attendue, à savoir  $\Sigma \propto \phi^{0.5}$  mais plutôt  $\Sigma \propto \phi^{0.6}$ . La seconde provient de la dispersion des résultats expérimentaux, qu'il nous a pas été possible de réduire. Celle-ci provient pour partie de la non stricte monodispersité de la taille des bulles et de la non homogénéité dans l'espace du champ magnétique et entraîne de fortes variations de la fraction volumique derrière le front.

## Chapitre 7

# Tige de bulles

En injectant des bulles de tailles identiques dans un tube cylindrique dont le diamètre est comparable à celui des bulles, on obtient des structures très ordonnées, *quasi-cristallines*. L'organisation de la structure de ces mousses, ou plutôt de ces *tiges de bulles*, est fixée par le rapport du diamètre des bulles et du cylindre. Pour toutes les structures, excepté la plus simple appelée *bambou*, le motif visible sur la surface est composé d'hexagones organisés en spirale. Ces motifs sont classifiés grâce à la phyllotaxie, initialement utilisée pour décrire les motifs formés par les branches et les graines dans les végétaux (par exemple les fleurs de tournesol ou les pommes de pin).

En utilisant une solution de ferrofluide et de SDS, nous avons fait des *tiges de bulles* magnétiques. En appliquant cette fois des *gradients* de champs magnétiques, nous avons pu manipuler et déformer ces structures (cf. article *Juggling with bubbles in cylindrical ferrofluid foams*). L'utilisation d'un ferrofluide nous a aussi permis de contrôler précisément la taille des bulles et donc la structure obtenue (cf. article *Bubble size control and measurement in the generation of ferrofluid foams*).

Le contrôle des structures obtenues ainsi que leur déformation nous permet d'envisager l'application de ces tiges de bulles magnétiques au transport d'échantillons à l'intérieur d'un réseau de cylindre. De telles propriétés constituent un avantage certain pour la *microfluidique*.

PHILOSOPHICAL MAGAZINE LETTERS, 2002  
VOL. 82, No. 5, 297–301



## Juggling with bubbles in cylindrical ferrofluid foams

STEFAN HUTZLER<sup>†</sup>, DENIS WEAIRE

Physics Department, Trinity College Dublin, Ireland

FLORENCE ELIAS

Laboratoire des Milieux Désordonnés et Hétérogènes, Université Paris 6, case 78,  
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

and ERIC JANIAUD

Université de Paris VII, UFR de Physique, case 70.08, 2 place Jussieu,  
75 251 Paris Cedex 05, France

[Received in final form 24 January 2002 and accepted 25 January 2002]

### ABSTRACT

Monodisperse foams in long cylinders exhibit ordered spiral structures. We have made ferrofluid foams of this kind and find that they can be manipulated in a variety of ways by an external magnetic field. Effects include morphological changes, twisting of structures and size control in the bubble formation process. This offers a promising technique for the efficient transport, switching and combining of samples in fluidic networks, possibly on the microfluidic scale.

Introducing soap bubbles of equal size into a cylindrical tube results in ordered spiral arrangements of the bubbles (Mann and Stephens 1933, Weaire *et al.* 1992, Pittet *et al.* 1995, Hutzler *et al.* 1997, Weaire and Hutzler 1999). The structure depends on the ratio of the tube diameter to bubble diameter and becomes disordered if this ratio is very large. We have generated such ordered structures using a ferrofluidic solution with a surfactant and found a number of striking effects when local magnetic fields are imposed.

While ferrofluid foams have been investigated in two dimensions (Elias *et al.* 1997), little seems to have been done in the three-dimensional case. In the present experiment, ferrofluid foams were created in Plexiglas tubes, to see how they would respond to applied magnetic fields. The ferrofluid used was a dispersion of maghemite ( $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ) colloidal particles in water (Bacri *et al.* 1989) at a volume fraction of approximately 10%, with 2 wt% of sodium dodecyl sulphate added as surfactant. Air bubbles of equal volume were generated continuously by ejection from a nozzle in a bath of this solution and passed up a vertical tube. So far, this procedure follows exactly that by which monodisperse foams were formed in previous experiments with ordinary detergent solutions (Weaire *et al.* 1992, Pittet *et al.* 1995, Hutzler *et al.* 1997). Indeed similar structures are observed. These are in most cases well ordered, so that a steady stream of identical configurations is produced. They are 'dry foams', with a very low liquid fraction (Weaire and Hutzler 1999).

---

<sup>†</sup> Author for correspondence and requests for materials. Email: stefan.hutzler@tcd.ie

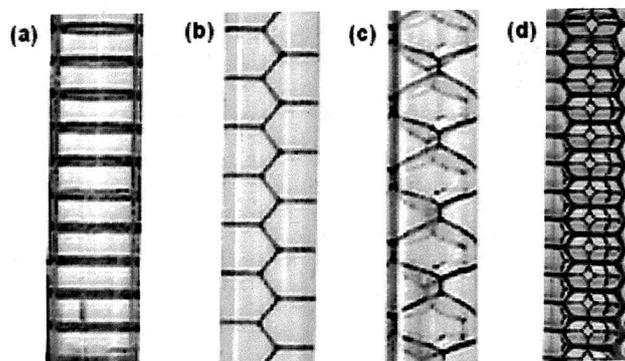


Figure 1. Bubbles of equal size form ordered structures in a cylindrical tube. The type of structure depends on the tube width but more than one structure may be stable for a given width. Shown here are (a) bamboo 1–0–0, (b) 2–1–1, (c) 2–2–0 and (d) 4–2–2. The diameters of the undeformed bubbles are 6.2, 6.2, 5 and 3.6 mm respectively; the tube diameter is 7.5 mm.

The most primitive structure is a regular train of flat films: this is the bamboo or 1–1–0 structure (figure 1). Apart from this case the structures belong to a sequence of spiral arrangements with only hexagonal cells at the surface. They are indexed with the standard notation of phyllotaxis (Jean 1994), as in the nomenclature of carbon nanotubes. Examples are the structures 2–1–1, 2–2–0 and 4–2–2, as shown in figure 1.

The imposition of a local magnetic field by means of a small permanent magnet dramatically affects these moving structures. The field can, for example, induce transitions from one structure to another or twist them through 90 or 180°. Some of these effects are shown in figures 2 and 3 (and in digital video clips of cylindrical ferrofluid foams, available at the present authors' website†). The bubbles are very robust; we do not observe rupture of the films that separate them, even during rapid changes of the kind shown here.

This use of a magnetic field provides precise local control over structural changes which have in the past been promoted by forced drainage (Hutzler *et al.* 1997, Boltenhagen and Pittet 1998) or mechanical compression–dilation (Boltenhagen *et al.* 1998), applied to the whole system. Moreover we have observed that the size of generated bubbles, of crucial importance in determining the cylindrical structure, may also be adjusted by a magnetic field.

The action of the magnetic field appears to be based on two effects, both arising from the attraction of ferrofluid to the region of maximum field. Firstly, the foam develops a higher liquid fraction, which is enough in itself to provoke a morphological change (Hutzler *et al.* 1997, Boltenhagen and Pittet 1998). Secondly, since most fluid resides in the Plateau borders (the channels which are formed between bubbles in a foam of low liquid fraction), the borders are pulled towards the region of high field, resulting in a net torque. Together these two mechanisms offer many possibilities for propulsion and control of the bubble stream.

The present configuration is vertical, but it should be possible to generate and propagate structures horizontally, again using magnetic fields to control the liquid

† <http://www.tcd.ie/Physics/Foams/ferro.html>

## Juggling with bubbles in cylindrical ferrofluid foams

299

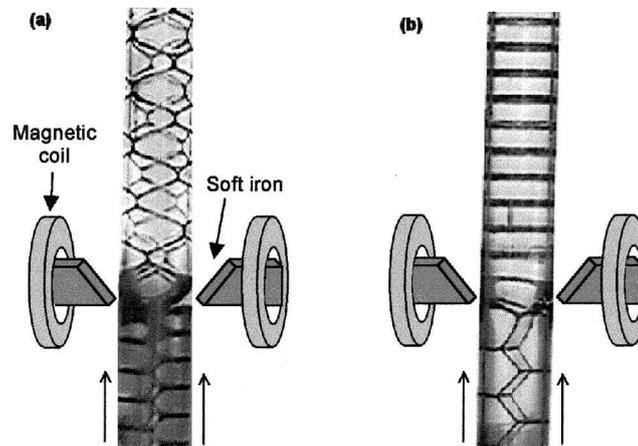


Figure 2. Applying a magnetic field to an ordered ferrofluid foam can result in a change in the structure. (a) The transition from 2-1-1 to 2-2-0 was induced by a local oscillating magnetic field gradient (frequency, 2 Hz; strength,  $450 \text{ G mm}^{-1}$ ). The bubbles (diameter, 6.2 mm) move upwards in the tube at a rate of 30 bubbles per minute. (b) The same oscillating field gradient resulted in a transition from 2-1-1 to bamboo. Here the bubbles (diameter, 6.2 mm) move upwards at a rate of 20 bubbles per minute. Such structural transitions can also be induced using a static permanent magnet.

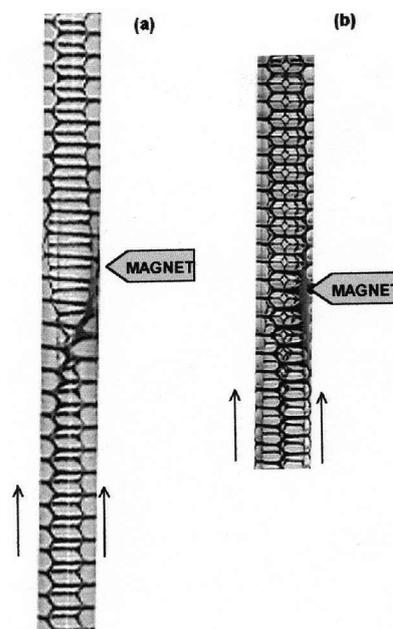


Figure 3. Magnetic fields may also be used to create localized twists or *dispirations* (Harris 1970) in a foam structure. The angle of twist appears to be (a)  $180^\circ$  for the 2-1-1 structure with two bubbles per unit cell and (b)  $90^\circ$  for the 4-2-2 structure with four bubbles in the unit cell. The tip shown is a permanent magnet of strength  $450 \text{ G mm}^{-1}$  close to the edge. Once created, the twists do not unwind themselves even when the magnet is removed. The stability of these twists is yet to be understood.

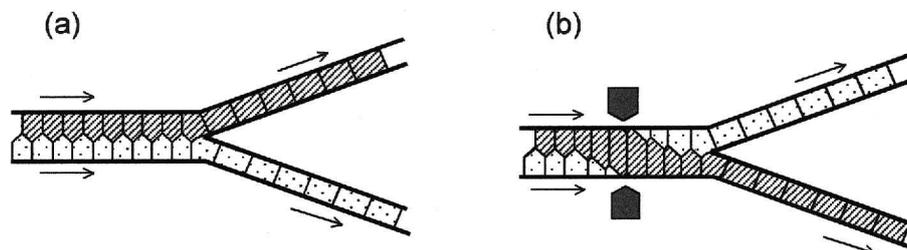


Figure 4. A possible application is sketched. (a) A bifurcation in the tube where a 2–1–1 structure is propagated (from left to right) leads to two channels of bamboo structure, the bubbles close to the top of the tube going in the upper channel. (b) If a magnet (shown in black) generates a 180° twist of the 2–1–1 before the bifurcation, the bubbles will go in the opposite channel compared with (a).

fraction. One may envisage networks of channels through which bubbles travel in bamboo and 2–1–1 structures, separating, coming together or being selectively switched at junctions by application of local magnetic fields. Such a scenario may have implications for microfluidics, a technology of great current interest. The present technique would have considerable advantages in its ability to maintain and process localized samples by simple variations of magnetic fields. Moreover, identical properties should be available with emulsion systems, that is a liquid–liquid foam. In either case a small sample injected into a channel as one of the bubbles will not be smeared out by Poiseuille flow, which is otherwise a serious problem in microfluidics (Whitesides and Stroock 2001).

As an example of the kind of operation that is clearly possible at this stage see figure 4. For suitable dimensions a 2–1–1 stream of bubbles splits into two bamboo sequences at a bifurcation. The introduction of a twist induced by a magnetic field interchanges the two streams, as indicated.

Fluidic networks based on the above techniques could find applications in the area of biotechnology, where one could fill individual gas bubbles (or droplets in a ferrofluidic emulsion) with different samples or compositions. The bubbles could then be transported to their destination as part of a moving cylindrical foam structure, to be monitored by spectroscopic methods or combined with reagents by the rupturing of the thin films that separate bubbles. The possibilities of elaboration of this methodology seem rich indeed.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

Thanks are due to Jean-Claude Bacri and to Nicolas Rivier for stimulating discussions and Valerie Cabuil for providing the ferrofluid.

#### REFERENCES

- BACRI, J.-C., PERZYNSKI, R., SALIN, D., CABUIL V., and MASSART, R., 1989, *J. Colloid Interface Sci.*, **132**, 43.  
 BOLTENHAGEN, P., and PITTET, N., 1998, *Europhys. Lett.*, **41**, 571.  
 BOLTENHAGEN, P., PITTET, N., and RIVIER, N., 1998, *Europhys. Lett.*, **43**, 690.  
 ELIAS, F., FLAMENT, C., BACRI, J.-C., CARDIOSO, O., and GRANER, F., 1997, *Phys. Rev. E*, **56**, 3310.  
 HARRIS, W. F., 1970, *Phil. Mag.*, **22**, 949.

*Juggling with bubbles in cylindrical ferrofluid foams* 301

- HUTZLER, S., WEAIRE D., and CRAWFORD, R., 1997, *Phil. Mag. B*, **75**, 845.  
JEAN, R. V., 1994, *Phyllotaxis, A Systematic Study in Plant Morphogenesis* (Cambridge University Press).  
MANN, W. B., and STEPHENS, R. W. B., 1933, *Phil. Mag.*, **15**, 143.  
PITTET, N., RIVIER, N., and WEAIRE, D., 1995, *Forma*, **10**, 65.  
WEAIRE, D., and HUTZLER, S., 1999, *The Physics of Foams* (Oxford University Press).  
WEAIRE, D., HUTZLER, S., and PITTET, N., 1992, *Forma*, **7**, 259.  
WHITESIDES, G. M., and STROOCK, A. D., 2001, *Phys. Today*, June, 42.

## Bubble size control and measurement in the generation of ferrofluid foams

W. Drenckhan<sup>a)</sup>

*Physics Department, Trinity College Dublin, Dublin 2, Ireland*

F. Elias<sup>b)</sup>

*Laboratoire des Milieux Désordonnés et Hétérogènes, Université Paris 6, case 78, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

S. Hutzler and D. Weaire

*Physics Department, Trinity College Dublin, Dublin 2, Ireland*

E. Janiaud<sup>b)</sup> and J.-C. Bacri<sup>b)</sup>

*Laboratoire des Milieux Désordonnés et Hétérogènes, Université Paris 6, case 78, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

(Received 5 November 2002; accepted 25 March 2003)

Ordered ferrofluid foams in tubes or channels offer promising possibilities for transporting and processing small gas (or liquid) samples. For this purpose, monodisperse bubbles can be produced, with fine control of their volume over at least three orders of magnitude, by the application of a variable magnetic field gradient during bubble generation. Electrical resistance measurements can be used to count bubbles, determine their volume, and identify the foam structure they form in the tube or channel. © 2003 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.1579891]

### I. INTRODUCTION

Monodisperse foams confined in cylindrical tubes exhibit ordered structures, which depend on the ratio between bubble size and tube diameter.<sup>1–5</sup> We have suggested<sup>6</sup> that the simpler structures, particularly the 2-1-1 or “staircase” structure with two bubbles per unit cell [see Fig. 1(d)], offer exciting possibilities for the controlled transport of bubbles in a network of channels. If a ferrofluid is used for the continuous phase of the foam, magnetic fields can influence the bubble production and their transport in several ways. In particular, it will be possible to control the bubble size, and switch particular bubbles into specified pathways within the network. This concept should be easily transferable to liquid–liquid foams, i.e., emulsions. All of these aspects offer an extra dimension to current ideas on microfluidics and “lab-on-a-chip” technologies.<sup>7,8</sup>

At the outset, it is desirable to develop reliable methods for the generation of bubbles of uniform and well-controlled size over a wide range, as this has always posed a problem in foam experiments and applications. Furthermore, a method is needed to count bubbles and to determine their volume. All of these requirements are met by the experiments described in this article. Bubble size is found to be controllable over a wide range whenever a magnetic field gradient is applied during bubble generation (Sec. II), and the bubbles may be monitored with a simple resistance probe (Sec. III). With feedback, the combination of devices for bubble generation and detection could establish a definite “clock time” for the network to which they are attached and ensure that bubbles of appropriate size are provided.

### II. BUBBLE GENERATION

In this section, we present experiments and a theoretical model, which describe how magnetic fields can be used to very accurately control the volume of bubbles produced in a ferrofluid-surfactant solution over a range of up to three orders of magnitude.

#### A. Experimental setup

For the continuous phase of the foam, an ionic water-based ferrofluid is used. In our case, it is a dispersion of maghemite ( $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ) colloidal particles in water at a volume fraction of 1.92%, stabilized by the presence of a negative electrostatic charge at the surface of each particle.<sup>9</sup> In order to achieve foamability, 2% (by weight) of sodium dodecyl sulfate (SDS) are added as a surfactant. Figure 2 shows the experimental setup. The ferrofluid is injected into a vertical cylindrical Plexiglas tube with an inner diameter of 7 mm. A monodisperse foam is produced by blowing air through a nozzle into the ferrofluid at a constant air flux of 10 ml/min using a micropump. The foam is observed by video imaging. Figure 1 shows different foam structures obtained for different bubble volumes in the same tube. Since each of the periodic structures corresponds to a particular number of bubbles per unit cell, the bubble volume can be derived from the number of unit cells filling a chosen section of the tube.

A magnetic field gradient is generated in the region of bubble production by placing the nozzle along the vertical line through the center of a two-coil system (Figs. 2 and 3), supplied with a direct current  $I$ . The coils are fitted with soft iron cores of height  $2 = 30$  mm, which form a gap of 12 mm. An air ventilation system prevents the ferrofluid solution from heating appreciably.

Figure 3 shows the variation of the experimentally determined magnitude of the horizontal magnetic field  $H(z)$

<sup>a)</sup>Electronic mail: wiebke@phy.tcd.ie

<sup>b)</sup>Also with Fédération de Recherche FR 2438 Matière et Systèmes Complexes.

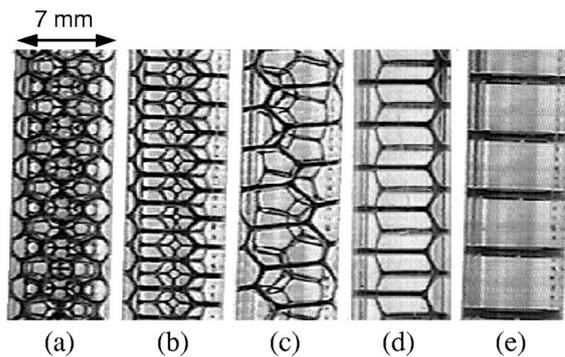


FIG. 1. Ordered structures of monodisperse ferrofluid foam in the tube for different bubble volumes obtained by varying the current  $I$  through the coils. Air flux  $Q$  and position of the nozzle  $z_0$  are kept fixed ( $Q=10$  ml/min,  $z_0 = -19$  mm). (a)  $I=0$  A; (b)  $I=1.3$  A, “4-2-2” structure; (c)  $I=1.5$  A, “3-2-1” structure; (d)  $I=1.6$  A, “2-1-1” or staircase structure; and (e)  $I=1.73$  A, “1-0-0” or bamboo structure.

and its gradient  $\partial H(z)/\partial z$  between the two coils along the  $z$  axis for  $I=2$  A. For  $|z| < 2$ ,  $H(z)$  is roughly constant, whereas it decreases almost linearly with  $|z|$  for  $|z| \approx 2$ .

## B. Experimental procedure

The nozzle is placed at different vertical positions  $z_0$  in the magnetic field, and the variation of bubble volume with magnetic field strength is observed as the current through the

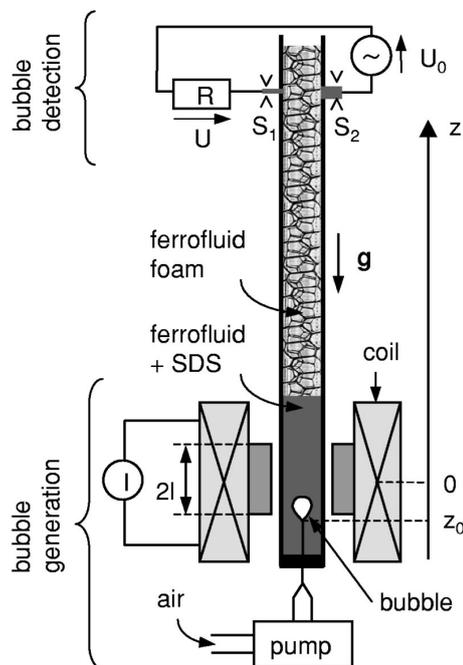


FIG. 2. Bubbles are generated by blowing air at a constant flow rate through a nozzle into a ferrofluid pool at the bottom of a vertical Plexiglas tube. The nozzle is placed into a horizontal magnetic field created by two coils fitted with soft iron cores. At the top of the tube, the local resistance of the generated foam structure is measured between two electrodes of different cross section in contact with the foam.

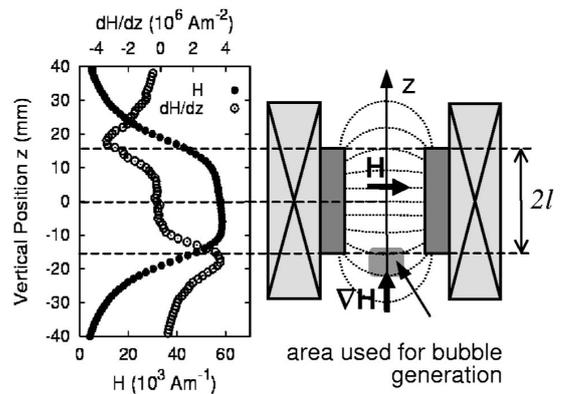


FIG. 3. Magnetic field created by the pair of coils fitted with soft iron cores of height  $2l$ . On the right-hand side, the shape of the field lines is sketched. The graph on the left-hand side shows the measured values of the amplitude of the horizontal magnetic field (full circles) and of the vertical magnetic field gradient (empty circles) along the  $z$  axis for  $I=2$  A. The amplitude of the magnetic field and the amplitude of the magnetic field gradient are proportional to  $I$ . By placing the tip of the nozzle at the appropriate position a positive, negative, or zero magnetic field gradient can be applied during bubble formation.

coils is varied. The effect of the strength of the current  $I$  on the bubble volume  $V$  is found to strongly depend on the location of bubble production. For  $z_0 < -2$ , the bubble volume increases with  $I$ , for  $z_0 > +2$ , it decreases with  $I$ , whereas it remains constant for  $-2 < z_0 < +2$ . This indicates the important role of the field gradient in bubble size control. Above a critical current, bubbles can even be observed to move downward in the ferrofluid.

Figures 4 and 5 present data taken for different nozzle diameters  $d$  and different positions  $z_0$  of bubble production within the region of positive field gradient ( $z_0 < -2$ ). For the purpose of fitting and plotting the data, the bubble diameter  $D = (6/\pi V)^{1/3}$  is used to represent bubble size. As the current is varied between 0 and 1.8 A, the bubble diameter is very reproducibly increased by a factor of up to 3. Hysteresis is not observed. The range of accessible bubble volumes could, in theory, be much larger since the bubble diameter diverges as the current approaches a value of about 1.8 A. However, the monodispersity of the foam decreases noticeably when the bubble diameter exceeds the tube diameter and, also, when the bubble extends over a region of significant variation in field gradient.

We did not quantitatively investigate the decrease of bubble volume with increasing current in the region of positive field gradient, as the bubble diameter decreases very quickly to a value smaller than the internal nozzle diameter. This leads to very irregular bubble volumes, probably due to the wetting of the internal nozzle boundary by the ferrofluid.

In order to investigate whether the demagnetizing field of the ferrofluid (due to the magnetic dipolar interaction)<sup>11</sup> leads to a deformation of the bubble during formation, accompanying experiments of the same type were conducted using a Hele–Shaw cell instead of the Plexiglas tube. In such a cell, the ferrofluid is contained between two glass plates separated by a gap of 1 mm, thus forming a quasi-two-dimensional system, which allows the easy observation of

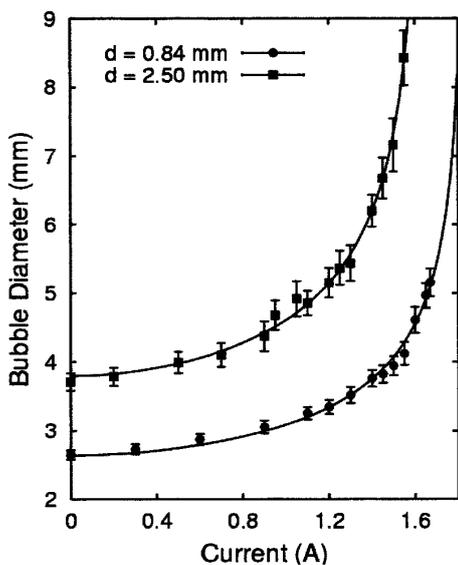


FIG. 4. Bubble diameter  $D$  as a function of current through the coils at constant air flux. The two sets of data correspond to measurements with different nozzle diameters  $d$  at the same position  $Z_0 = -21$  mm in the region of positive magnetic field gradient. Every data point is an average of four measurements. The lines represent the best fits of the data using Eq. (1). Circles:  $d = 0.84$  mm,  $\gamma f = 39.1 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , and  $\partial_z \beta(z)|_{z_0} = 1.91 \times 10^6 \text{ A m}^{-1}$ ; and squares:  $d = 2.5$  mm,  $\gamma f = 38.4 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , and  $\partial_z \beta(z)|_{z_0} = 2.26 \times 10^6 \text{ A m}^{-1}$ .

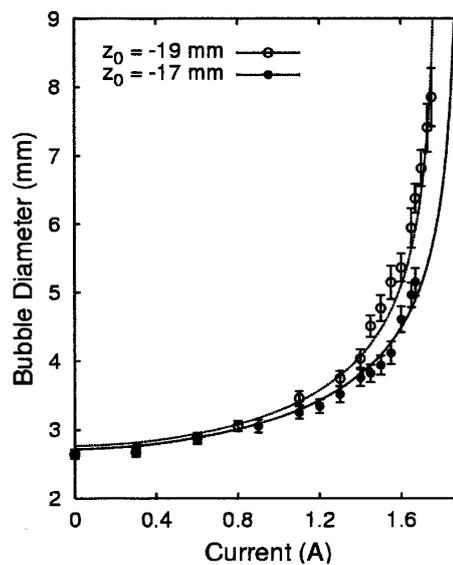


FIG. 5. Bubble diameter  $D$  as a function of current through the coils at constant air flux. The two sets of data correspond to measurements with the same nozzle ( $d = 0.84$  mm) at different positions in the region of positive magnetic field gradient. Every data point is an average of four measurements. The lines represent the best fits of the data using Eq. (1). Empty circles:  $z_0 = -19$  mm,  $f \gamma = 42.8 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , and  $\partial_z \beta(z)|_{z_0} = 1.53 \times 10^6 \text{ A m}^{-1}$ ; and full circles:  $z_0 = -17$  mm,  $\gamma f = 45.0 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , and  $\partial_z \beta(z)|_{z_0} = 1.78 \times 10^6 \text{ A m}^{-1}$ .

bubble shapes. Figure 6 shows an example. Apart from the hydrodynamic deformation due to the rising of the bubble in the ferrofluid, no additional deformation can be observed, indicative of the negligible demagnetizing effect of the ferrofluid.

### C. Modeling

The effect of increasing bubble volume with magnetic field strength has already been observed in a quasi-two-dimensional cell containing ferrofluid submitted to a constant perpendicular magnetic field by Maiorov.<sup>10</sup> This was interpreted as an effect of magnetic dipole interaction between the magnetic particles. In the present case, however, a ferrofluid is used with a concentration of magnetic particles small enough for the demagnetizing energy to be negligible with respect to interfacial energy, as shown in our experiments in the Hele–Shaw cell. The influence of the magnetic field on the variation of bubble size then only depends on the existence of a magnetic force generated by a magnetic field gradient. We developed a simple model of force balance, which very accurately reproduced the experimental data. The underlying idea is as follows. A magnetic field gradient generates a magnetic volume force on a bubble in a magnetic fluid.<sup>11</sup> Depending on the direction of the field gradient, the magnetic force results in the reduction or magnification of the effective buoyancy of the bubble, which changes the critical bubble volume necessary for the detachment of the bubble from the nozzle. Neglecting demagnetizing effects of the ferrofluid and equating the forces acting on the bubble (interfacial force between nozzle and bubble, buoyancy

force, and magnetic force), leads to an equation, which relates the bubble diameter  $D$  to the position  $z_0$  of the nozzle and the current  $I$  through the coils (see the Appendix for definition of the variables and details of the derivation):

$$D(z_0, I) = \left( \frac{6}{\pi} V \right)^{1/3} = \left( \frac{6d\gamma f}{\Delta\rho g - \mu_0 M(z_0, I) \frac{\partial\beta(z)}{\partial z}|_{z_0} I} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

This formula is in accord with our experimental observations: The bubble diameter  $D$  increases with  $I$  when the gradient  $\partial_z \beta(z)|_{z_0} > 0$  for  $z_0 < -$ , it decreases with  $I$  when  $\partial_z \beta(z)|_{z_0} < 0$  for  $z_0 > -$ , whereas it remains constant when

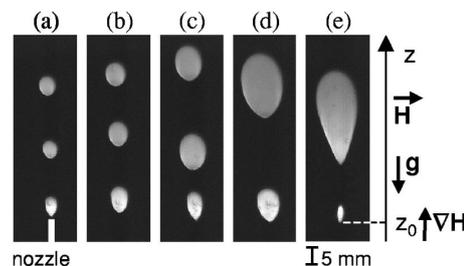


FIG. 6. Variation of bubbles size and initial shape with current  $I$  through the coils in a Hele–Shaw cell (quasi-two dimensional), which was placed between the coils: (a)  $I = 0$ , (b)  $I = 1$  A, (c)  $I = 2$  A, (d)  $I = 3$  A, and (e)  $I = 4$  A.

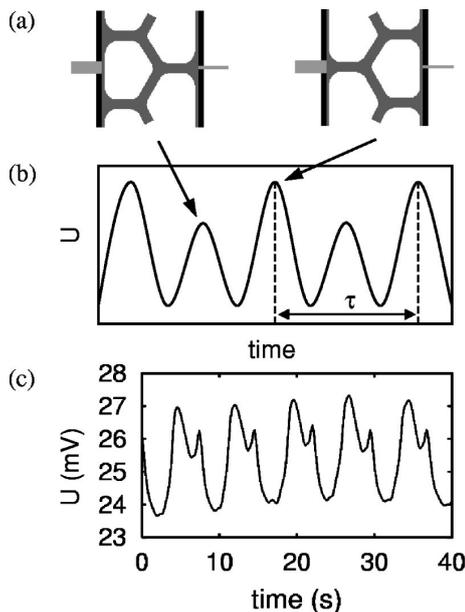


FIG. 8. Signal  $U$  as a function of time obtained for the staircase structure: (a) The two possible configurations in the tube when the signal is at maximum—corresponding to two different peak heights, (b) theoretically expected signal profile, and (c) experimentally detected signal. The deviation from the expected signal is due to the fact that the electrodes were not placed at exactly the same height in the tube.

of versus time. However, when using this method, the liquid fraction of the structure has to be taken into account.

#### IV. CONCLUSIONS AND OUTLOOK

The methods described in this article provide the basis for practical devices to control and monitor bubble size in ferrofluid foams. This will be of immediate use in ongoing experiments on bubble transport and switching. They should also be immediately adaptable to emulsion systems.

The present experiments involve bubbles and tubes whose diameters are of the order of millimeters. It remains to be seen how easily the length scale can be reduced to that

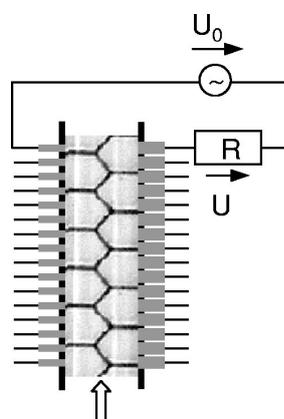


FIG. 9. Possible setup for detection of the foam structure as a function of position in the channel by use of multiple electrodes.

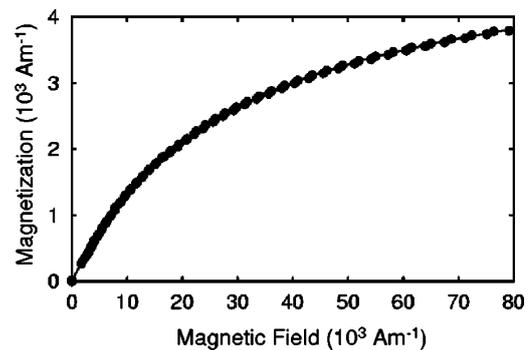


FIG. 10. Magnetization of the ferrofluid-surfactant solution as a function of the applied external magnetic field, performed using a Foner device. Solid line: Best fit of data using Eq. (1).

generally indicated for microfluidics and lab-on-a-chip technologies. In addition, the use of time-varying magnetic fields would enable us to make ordered sequences of differently sized bubbles, something which is difficult to achieve by any other technique.

A related application is the use of an appropriate magnetic field gradient to precisely balance gravity, so that bubbles can be made free floating in a ferrofluid. If this can be achieved with sufficient uniformity over large volumes, it will offer a convenient alternative to microgravity experiments in space or on parabolic flights.<sup>14,15</sup>

#### ACKNOWLEDGMENTS

This research was financed through CNRS (Contract ATIP No. 0693), a Banc Research Award SC/02/11, and the German National Merit Foundation. The authors would like to thank V. Cabuil for providing the ferrofluid.

#### APPENDIX: DERIVATION OF EQ. (1)

Since our experiments in the Hele-Shaw cell show that no noticeable deformation of the bubbles takes place in the magnetic field, dipolar interactions within the ferrofluid are neglected in the derivation of the bubble volume as a function of the system parameters. Furthermore, all derivations are considered in the quasi-static limit, which is provided experimentally by choosing a very low air flux ( $Q = 10$  ml/min) for bubble production.

A bubble detaches from the nozzle when the interfacial force between nozzle and bubble, the buoyancy force, and the magnetic force on the bubble equalize. The interfacial force can be described by

$$\mathbf{F}_S = -\pi \gamma d f \mathbf{e}_z, \quad (\text{A1})$$

where  $d$  is the diameter of the nozzle,  $\gamma$  is the surface tension of the air-ferrofluid interface,  $\mathbf{e}_z$  is a unit vector pointing upward, and  $f$  is a correction factor close to unity.<sup>13</sup> This is a rather crude model, but seems sufficient for a very accurate description of the experiments conducted here. The buoyancy force is given by

$$\mathbf{F}_G = \Delta \rho g V \mathbf{e}_z, \quad (\text{A2})$$

where  $\Delta\rho$  is the density difference between the continuous (ferrofluid) and dispersed (air) phase,  $g$  is the gravitational acceleration and  $V$  is the volume of the bubble.

The derivation of the magnetic force on the bubble requires a closer look at the physical properties of the ferrofluid–bubble system. The maghemite particles in the ferrofluid carry a permanent magnetic moment. In response to an applied magnetic field, thermal agitation competes with the magnetic energy, which tends to align the particles in the same direction as the external field. The resulting macroscopic magnetic behavior of the solution is of paramagnetic type, the magnetization  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  of the ferrofluid having the same direction as the applied field  $\mathbf{H}$ .  $M(H)$  was experimentally determined using a Foner device (Fig. 10).<sup>16</sup> The obtained data can, in principle, be described by a Langevin model, taking into account the polydispersity of the particles.<sup>17</sup> However, such a model does not give an analytical expression for the magnetization, making further derivations difficult. Alternatively, the experimental data can be fitted very accurately using the empirical expression:

$$M(H) = \frac{\chi M_S H}{M_S + \chi H}, \quad (\text{A3})$$

where  $\chi$  and  $M_S$  are the magnetic susceptibility and the saturation magnetization of the solution, respectively. In our case:  $\chi = 0.176$  and  $M_S = 5230 \text{ A m}^{-1}$ .

The magnetic force on the bubble can be found by noting that a nonmagnetic bubble inside a magnetic fluid of magnetization  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  is physically equivalent to a magnetic bubble of magnetization  $-\mathbf{M}(\mathbf{H})$  inside a nonmagnetic fluid.<sup>18,19</sup> Therefore, the magnetic force acting on the bubble is given by<sup>10</sup>  $\mathbf{F}_M = -\mu_0 V (\mathbf{M}(\mathbf{H}) \cdot \nabla) \mathbf{H}$ .

In the region of bubble generation, the vertical components of the magnetic field and of the ferrofluid magnetization are negligible in comparison to the horizontal components. Furthermore, using the Maxwell equations  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  and  $\nabla \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{H}) = 0$ , the vertical magnetic force on the bubble can be written as:

$$\mathbf{F}_M = -\mu_0 V M(H) \frac{\partial H(z, I)}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (\text{A4})$$

where  $H(z, I)$  is the magnetic field strength as a function of position  $z$  and current  $I$  through the coils. Although local horizontal forces occur in the system, they can be neglected: Due to symmetry, they would only slightly deform the bubble but not result in a net force.

Since  $H(z, I)$  is proportional to  $I$ , it can be written as

$$H(z, I) = \beta(z) I \quad (\text{A5})$$

and

$$\frac{\partial H(z, I)}{\partial z} = \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} I, \quad (\text{A6})$$

where  $\beta(z)$  depends on the position only and can be determined for the particular experimental setup using a Hall probe (see Fig. 3).

Equating  $\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_M = 0$  [Eqs. (A1), (A2), and (A4)] and using Eqs. (A5) and (A6), allows the determination of the bubble diameter  $D(z_0, I)$  as a function of nozzle position  $z_0$  and the current  $I$  through the coils:

$$D(z_0, I) = \left( \frac{6}{\pi} V \right)^{1/3} = \left( \frac{6d\gamma f}{\Delta\rho g - \mu_0 M(z_0, I) \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} \Big|_{z_0} I} \right)^{1/3}, \quad (\text{A7})$$

where  $M(z_0, I)$  is given by Eqs. (A3) and (A5):

$$M(z_0, I) = \frac{\chi M_S \beta(z_0) I}{M_S + \chi \beta(z_0) I}. \quad (\text{A8})$$

The variables are:

- $z$  = vertical position;
- $z_0$  = position of the nozzle;
- $I$  = current through the coils;
- $\gamma$  = surface tension of the ferrofluid – SDS solution;
- $d$  = internal nozzle diameter;
- $\Delta\rho$  = density difference between air and ferrofluid;
- $g$  = gravitational acceleration;
- $f$  = correction factor (close to unity);
- $\mu_0$  = constant of magnetic permeability;
- $\chi$  = magnetic susceptibility of the ferrofluid (in low fields);
- $M_S$  = saturation magnetization of the ferrofluid; and
- $\beta(z)$  = position dependent coefficient which relates the coil current to the local magnetic field strength.

<sup>1</sup>W. B. Mann and R. W. B. Stephens, *Philos. Mag.* **15**, 143 (1933).

<sup>2</sup>D. Weaire, S. Hutzler, and N. Pittet, *Forma* **7**, 259 (1992).

<sup>3</sup>N. Pittet, N. Rivier, and D. Weaire, *Forma* **10**, 65 (1995).

<sup>4</sup>D. Weaire and S. Hutzler, *The Physics of Foams* (Oxford University Press, Oxford, 1999).

<sup>5</sup>Visit our webpage at: <http://www.tcd.ie/physics/foams/>

<sup>6</sup>S. Hutzler, D. Weaire, F. Elias, and E. Janiaud, *Philos. Mag. Lett.* **82**, 297 (2002).

<sup>7</sup>M. Koch, A. Evan, and A. Brunnschweiler, *Microfluidic Technology and Applications*, Microtechnology and Microsystems Series (Research Studies Press, Baldock, 2000).

<sup>8</sup>*Lab-on-a-Chip: The Revolution in Portable Instrumentation*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1997).

<sup>9</sup>J.-C. Bacri, R. Perzynski, D. Salin, V. Cabuil, and R. Massart, *J. Colloid Interface Sci.* **132**, 43 (1989).

<sup>10</sup>E. Blums, A. Cebers, and M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (Walter de Gruyter, Berlin, 1997).

<sup>11</sup>R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Dover, New York, 1999).

<sup>12</sup>A. Patist, V. Chhabra, R. Pagidipati, R. Shah, and D. O. Shah, *Langmuir* **13**, 432 (1997).

<sup>13</sup>A. W. Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces*, 4th ed. (Wiley, New York, 1982).

<sup>14</sup>D. Weaire, S. J. Cox, S. Hutzler, and G. Bradley, *J. Phys. IV* **11**, Pr6-213 (2001).

<sup>15</sup>C. Monnerieu, M. Vignes-Adler, and B. Kronberg, *J. Chem. Phys.* **96**, 958 (1999).

<sup>16</sup>J.-C. Bacri, D. Salin, R. Perzynski, V. Cabuil, and R. Massart, *J. Magn. Magn. Mater.* **62**, 36 (1986).

<sup>17</sup>*Magnetic Fluids and Applications Handbook*, edited by B. Berkovski (Bergell House, New York, 1996).

<sup>18</sup>A. T. Skjeltorp, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2306 (1983).

<sup>19</sup>A. T. Skjeltorp, *J. Magn. Magn. Mater.* **65**, 195 (1987).



# Conclusions et Perspectives

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons abordé des questions relatives à l'élasticité des mousses. Nous avons utilisé un nouvel outil, la déformation statistique stockée, pour quantifier l'état de déformation de la mousse. Cette outil constitue une généralisation du tenseur de déformation au cas des déformations plastiques. En outre, nous avons mené une étude expérimentale de l'élasticité du pilier de la mousse : le bord de Plateau. Un modèle simple a permis d'obtenir la constante élastique en fonction des paramètres physiques des mousses. Cette approche permet de tenir compte d'un écoulement de liquide dans le bord de Plateau.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'un nouveau système : les mousses magnétiques. Les mousses de savon, dont les propriétés sont gouvernées par la gravité et la capillarité, possèdent peu de paramètres de contrôle aisément variables sur terre. En incorporant des particules magnétiques colloïdales à une mousse de savon, elle acquiert des propriétés magnétiques. Ces propriétés structurales et hydrodynamiques dépendent alors d'un paramètre expérimental supplémentaire : le champ magnétique. Nous avons dans cette thèse caractérisé les propriétés de ces mousses en fonction du champ magnétique. Nous avons tout d'abord montré que l'effet d'un champ magnétique homogène est de rendre anisotrope la structure interne de la mousse : le rayon de courbure d'un bord de Plateau dépend de son orientation par rapport au champ. Dans le cas d'une mousse 2D humide, nous avons montré que l'angle entre les bords de Plateau s'écarte fortement des  $120^\circ$  imposés des lois de Plateau, allant jusqu'à permettre l'existence de mousse 2D à structure carrée. Dans le cas d'une mousse 3D, nous avons montré que cette anisotropie de la structure provoque l'anisotropie de la perméabilité hydrodynamique de la mousse : le drainage dépend de la direction de la gravité par rapport au champ.

Par ailleurs, en appliquant des gradients de champ magnétique, nous avons montré que l'on peut contrôler la taille des bulles. Dans le cas d'une tige de bulle on peut ainsi manipuler la structure et envisager une application dans le domaine de la microfluidique.

Les propriétés physiques des mousses magnétiques étant maintenant établies, on peut envisager de les utiliser comme systèmes expérimentaux modèles des mousses de savon, pour résoudre des problèmes encore ouverts dans la physique des mousses.

Dans le domaine de la mécanique, elles peuvent fournir un outil intéressant pour répondre à la question de la localisation du cisaillement. En effet, on pourrait utiliser le champ magnétique pour induire des directions de cisaillement favorables ou défavorables, via l'anisotropie de la structure.

En outre, la possibilité de manipuler la structure interne de la mousse autorise l'étude

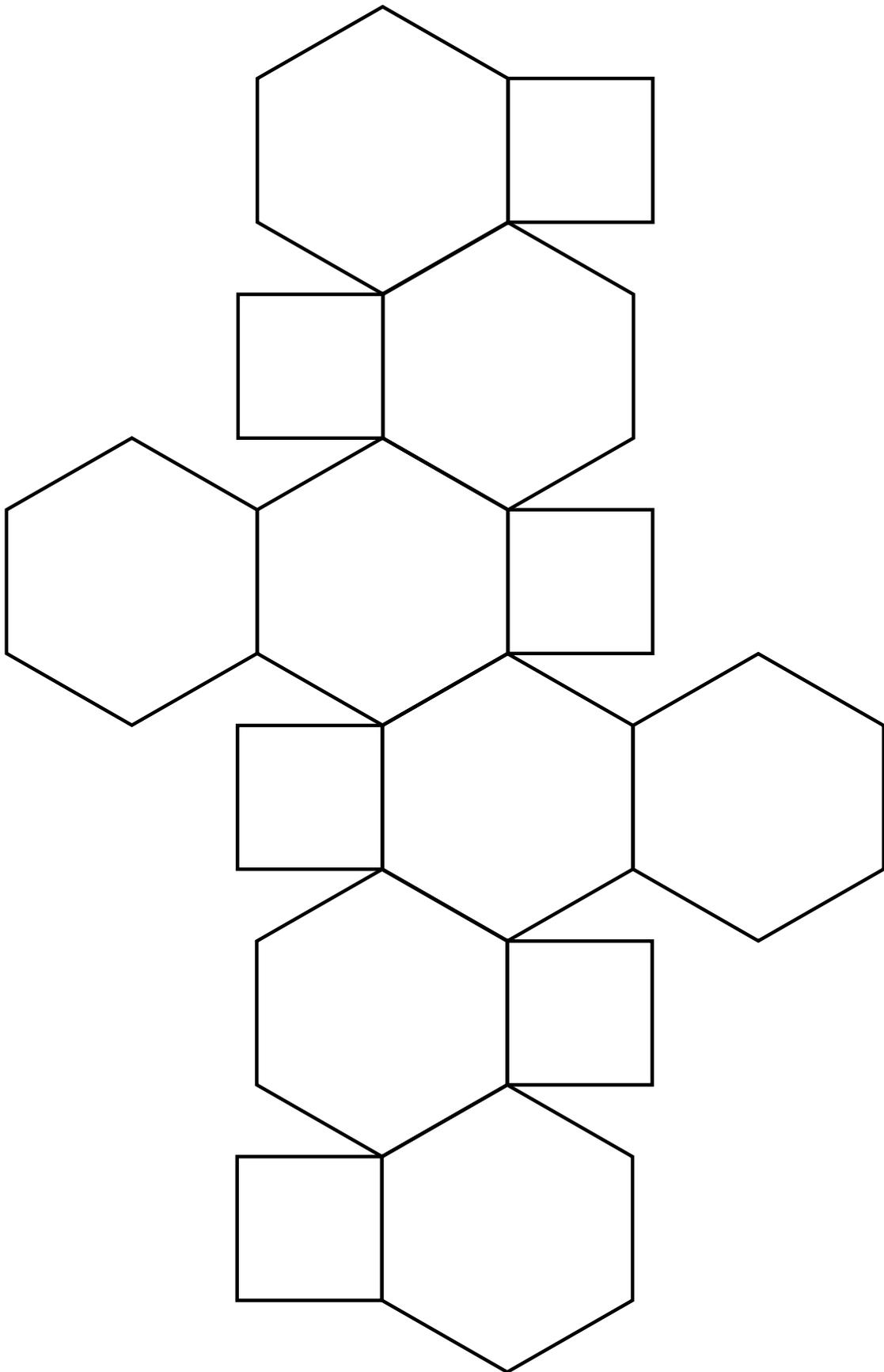
de systèmes analogues, comme par exemple les motifs formés par les nervures des feuilles.

Lors de l'application d'un gradient de pression, il faut un certain temps pour que le champ de vitesse atteigne son profil d'équilibre. Or la théorie du drainage des mousses ne s'applique que dans le cas où il y a équilibre entre la force motrice et la dissipation. Ces écoulements transitoires sont pourtant importants pour comprendre la dissipation de l'énergie dans les mousses. En effet, un T1 dure une dizaine de ms et dissipe l'énergie élastique sous la forme d'un écoulement hydrodynamique. Cette dissipation n'a été pour l'instant que très peu étudiée. Les mousses magnétiques pourraient se révéler être un très bon système modèle pour comprendre la dissipation hydrodynamique à haute fréquence. En effet l'utilisation de gradients de champ magnétique permet de générer des forces volumiques contrôlables dans le temps et dans l'espace. Il est donc possible d'induire des écoulements locaux et d'observer la réponse de la mousse en fonction de la fréquence de l'excitation.

## Annexe A

# Patron d'une cellule de Kelvin

Pour alléger la lecture de ce mémoire, nous avons pensé qu'un peu d'exercice manuel serait le bienvenu. Au dos, vous trouverez le patron d'une cellule de Kelvin que vous pourrez assembler à l'aide de ruban adhésif (non fourni).



## Annexe B

# Cisaillement de Couette en Élasticité Classique

Nous allons présenter ici quelques résultats d'élasticité classique. Imaginons une cellule de Couette remplie avec un matériau élastique. Le disque intérieur est mobile et son rayon est  $R_0$  tandis que le disque extérieur de rayon  $R_1$  est fixe. On l'aura compris, il s'agit d'obtenir les champs de déformation et le tenseur de déformation élastique grâce à l'élasticité classique.

### B.1 Quelques formules utiles

... en coordonnées polaires.

#### B.1.1 le Gradient

$$\vec{\text{grad}}(s) = \vec{\nabla}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.1})$$

#### B.1.2 la Divergence d'un Vecteur

$$\text{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial r f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} . \quad (\text{B.2})$$

#### B.1.3 la Divergence d'un Tenseur $\overline{\overline{T}}$

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.3})$$

### B.1.4 le Rotationnel

$$\vec{\text{rot}}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r f_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.4})$$

### B.1.5 Le tenseur de déformation (2D)

$$\bar{\bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r \right) \end{pmatrix} . \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Champ de déformation

### Équation vectorielle pour $\vec{u}$

Considérons un élément de volume avec un rayon vecteur  $\vec{r}$  au repos. Lorsque le matériau est déformé, son rayon vecteur est  $\vec{r}'$ . Le vecteur déplacement est défini par  $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$ . Les équations que doivent satisfaire les composantes de  $\vec{u}$  sont données par (cf [75] équation 7.5) :

$$2(1 - \sigma_p) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (1 - 2\sigma_p) \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = 0 , \quad (\text{B.6})$$

où  $\sigma_p$  est le module de Poisson. Du fait de l'invariance par rotation,  $\vec{u}$  ne dépend pas de l'angle  $\theta$ , et les deux composantes en coordonnées polaires ne dépendent que du rayon  $r$ . On obtient deux équations pour les deux composantes de  $\vec{u}$  :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Ces équations ont pour solution :

$$u_r = ar + \frac{b}{r} \quad (\text{B.9})$$

$$u_\theta = cr + \frac{d}{r} . \quad (\text{B.10})$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales.

### Décomposition Cisaillement – Compression

Pour un cisaillement pur, la composante  $u_r$  est nulle en tout point, ce qui implique  $a = b = 0$ . Lorsque l'on a une compression pure, alors  $u_\theta = 0$  et  $c = d = 0$ . Pour obtenir le tenseur de déformation, on utilise la formule B.5, ce qui donne :

$$\bar{\bar{u}} = \begin{pmatrix} a - \frac{d}{r^2} & -\frac{d}{r^2} \\ -\frac{d}{r^2} & a + \frac{d}{r^2} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.11})$$

On peut décomposer ce tenseur en deux parties :

$$\bar{\bar{u}} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} \\ \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - \frac{b}{r^2} & 0 \\ 0 & a + \frac{b}{r^2} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.12})$$

Le premier terme de droite est non diagonal et correspondant à un cisaillement pur, tandis que le second terme du membre de droite est diagonal correspondant à une compression.

Dans le cas d'un cisaillement dans une cellule de Couette, le déplacement  $u_\theta$  est imposé par le mouvement du disque interne. En introduisant le cisaillement  $\gamma = \frac{u_\theta(r=R_0)}{R_1 - R_0}$ , on obtient pour la composante croisée du tenseur de déformation :

$$u_{r\theta} = -\Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} . \quad (\text{B.13})$$

Pour les autres composantes, on dira qu'elles sont nulles dans le cas d'un cisaillement de Couette. Finalement, le tenseur de déformation dans un cisaillement de Couette, s'écrit :

$$\bar{\bar{u}}_C = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} \\ \Gamma \frac{R_1^2 R_0}{R_1 + R_0} \frac{1}{r^2} & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.14})$$



## Annexe C

# Unités Magnétiques : conversion cgs-mks

A toutes fins utiles, nous donnons ici les unités utilisées en magnétisme, ainsi que les facteurs de conversions entre le système international **mksA** (mètre , kilogramme, seconde, Ampère) et le système **cgsA** (centimètre, gramme, seconde, Ampère). Cette table a été réalisée par R. B. Goldfarb et F. R. Fickett.

## UNITS FOR MAGNETIC PROPERTIES

Quantity	Symbol	Gaussian & cgs emu <sup>a</sup>	Conversion factor, C <sup>b</sup>	SI & rationalized mks <sup>c</sup>
Magnetic flux density, magnetic induction	$B$	gauss (G) <sup>d</sup>	$10^4$	tesla (T), Wb/m <sup>2</sup>
Magnetic flux	$\phi$	maxwell (Mx), G·cm <sup>2</sup>	$10^8$	weber (Wb), volt second (V·s)
Magnetic potential difference, magnetomotive force	$U, F$	gilbert (Gb)	$10/4\pi$	ampere (A)
Magnetic field strength, magnetizing force	$H$	oersted (Oe), <sup>e</sup> Gb/cm	$10^3/4\pi$	A/m <sup>f</sup>
(Volume) magnetization <sup>g</sup>	$M$	emu/cm <sup>3h</sup>	$10^3$	A/m
(Volume) magnetization	$4\pi M$	G	$10^3/4\pi$	A/m
Magnetic polarization intensity of magnetization	$J, I$	emu/cm <sup>3</sup>	$4\pi \times 10^{-4}$	T, Wb/m <sup>2i</sup>
(Mass) magnetization	$\sigma, M$	emu/g	$10^{-7}$	A·m <sup>2</sup> /kg Wb·m/kg
Magnetic moment	$m$	emu, erg/G	$10^{-3}$	A·m <sup>2</sup> , joule per tesla (J/T)
Magnetic dipole moment	$j$	emu, erg/G	$4\pi \times 10^{-10}$	Wb·m <sup>i</sup>
(Volume) susceptibility	$\chi, \kappa$	dimensionless, emu/cm <sup>3</sup>	$4\pi$ $(4\pi)^2 \times 10^{-7}$	dimensionless henry per meter (H/m), Wb/(A·m)
(Mass) susceptibility	$\chi_p, \kappa_p$	cm <sup>3</sup> /g, emu/g	$4\pi \times 10^{-3}$ $(4\pi)^2 \times 10^{-10}$	m <sup>3</sup> /kg H·m <sup>2</sup> /kg
(Molar) susceptibility	$\chi_{mol}, \kappa_{mol}$	cm <sup>3</sup> /mol, emu/mol	$4\pi \times 10^{-6}$ $(4\pi)^2 \times 10^{-13}$	m <sup>3</sup> /mol H·m <sup>2</sup> /mol
Permeability	$\mu$	dimensionless	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m, Wb/(A·m)
Relative permeability <sup>j</sup>	$\mu_r$	not defined		dimensionless
(Volume) energy density, energy product <sup>k</sup>	$W$	erg/cm <sup>3</sup>	$10^{-1}$	J/m <sup>3</sup>
Demagnetization factor	$D, N$	dimensionless	$1/4\pi$	dimensionless

a. Gaussian units and cgs emu are the same for magnetic properties. The defining relation is  $B = H + 4\pi M$ .

b. Multiply a number in Gaussian units by C to convert it to SI (e.g.,  $1 \text{ G} \times 10^4 \text{ T/G} = 10^4 \text{ T}$ ).

c. SI (*Système International d'Unités*) has been adopted by the National Bureau of Standards. Where two conversion factors are given, the upper one is recognized under, or consistent with, SI and is based on the definition  $B = \mu_0(H + M)$ , where  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ . The lower one is not recognized under SI and is based on the definition  $B = \mu_0 H + J$ , where the symbol  $I$  is often used in place of  $J$ .

d.  $1 \text{ gauss} = 10^5 \text{ gamma } (\gamma)$ .

e. Both oersted and gauss are expressed as  $\text{cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{-1/2} \cdot \text{s}^{-1}$  in terms of base units.

f. A/m was often expressed as "ampere-turn per meter" when used for magnetic field strength.

g. Magnetic moment per unit volume.

h. The designation "emu" is not a unit.

i. Recognized under SI, even though based on the definition  $B = \mu_0 H + J$ . See footnote c.

j.  $\mu_r = \mu / \mu_0 = 1 + \chi$ , all in SI.  $\mu_r$  is equal to Gaussian  $\mu$ .

k.  $B \cdot H$  and  $\mu_0 M \cdot H$  have SI units  $\text{J/m}^3$ ;  $M \cdot H$  and  $B \cdot H / 4\pi$  have Gaussian units  $\text{erg/cm}^3$ .

# Bibliographie

- [1] B. Abou. *Instabilité interfaciale d'une couche de ferrofluide sous champ magnétique normal; étude de la transition hexagones - carrés*. PhD thesis, Université Paris 6, 1998.
- [2] S. Alexander. Amorphous solids : their structure, lattice dynamics and elasticity. *Phys. Reports*, 296 :65, 1998.
- [3] Achod André Aradian. *Quelques problèmes de dynamique d'interfaces molles*. PhD thesis, Paris 6, 2001.
- [4] M. Asipauskas, M. Aubouy, Y. Jiang, F. Graner, and J.A. Glazier. A texture tensor to quantify deformations : the example of two-dimensional flowing foams. *Granular Matter*, 5 :71, 2003.
- [5] M. Aubouy, Y. Jiang, J. A. Glazier, and F. Graner. a texture tensor to quantify deformations. *Granular Matt.*, 5 :67, 2003.
- [6] J. C. Bacri, C. Leygnac, and D. Salin. Evidence of capillary hyperdiffusion in two-phase flows. *J. Physique Lett.*, 46 :467, 1985.
- [7] J. C. Bacri, R. Perzynski, D. Salin, V. Cabuil, and R. Massart. Phase diagram of an ionic magnetic colloid : experimental study of the effect of ionic strength. *J. of Colloid and interface Science*, 43 :132, 1989.
- [8] J. C. Bacri and D. Salin. Dynamics of the shape transition of a magnetic ferrofluid drop. *J. Physique Lett*, 44 :L-415, 1983.
- [9] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge Univ Press, 1967. § 4.3 p 186.
- [10] G. K. Batchelor. The stress system in a suspension of force free particles. *J. Fluid Mech.*, 41 :545, 1970.
- [11] S. Bohn, B. Andreotti, S. Douady, J. Munzinger, , and Y. Couder. Constitutive property of the local organization of leaf venation networks. *Phys. Rev. E*, 65 :061914-1, 2002.
- [12] P. Boltenhagen and N. Pittet. Structural transitions in crystalline foams. *Europhys. Lett.*, 41 :571, 1998.
- [13] Arezki Boudaoud, Yves Couder, and Martine Ben Amar. Self-adaptation in vibrating soap films. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :3847, 1999.
- [14] Arezki Boudaoud, Pedro Patricio, and Martine Ben Amar. The helicoid versus the catenoid : geometrically induced bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :3836, 1999.

- [15] G. Brannigany and O. F. de Alcantara Bonfim. Boundary effects on forced drainage through aqueous foam. *Philosophical magazine letters*, 81 :197, 2001.
- [16] I. Cantat and R. Delannay. Dynamical transition induced by large bubbles in two-dimensional foam flows. *Phys. Rev. E*, 67 :031501, 2003.
- [17] V. Carrier, S. Destouesse, , and A. Colin. Foam drainage : A film contribution ? *Phys. Rev. E*, 65 :061404, 2002.
- [18] Vincent Carrier. *Stabilité comparée des mousses et des émulsions aqueuses*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2001.
- [19] M E Cates and P Sollich. Rheology and glassy dynamics of foams. In *Foams and Emulsion*. J. F. Sadoc and N. Rivier, 1999.
- [20] Andrejs Cebers. Dynamics of a chain of magnetic particles connected with elastic linkers. *J. Phys. : Condens. Matter*, 15 :S1335, 2003.
- [21] N. O. Clark. The electrical conductivity of foam. *Transactions of the Faraday Society*, 44 :13–15, 1946.
- [22] Sylvie Cohen-Addad, Hussein Hoballah, and Reinhard Höhler. Viscoelastic response of a coarsening foam. *Phys. Rev. E*, 57 :6897, 1998.
- [23] Sylvie Cohen-Addad, Reinhard Höhler, and Yacine Khidas. Bubble dynamics relaxation in aqueous foam probed by multispeckle diffusing-wave spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :4700, 2001.
- [24] Sylvie Cohen-Addad, Reinhard Höhler, and Yacine Khidas. Origin of the slow linear viscoelastic response of aqueous foams. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :028302, 2004.
- [25] Y Couder, J.M. Chomaz, and M. Rabaud. On the hydrodynamics of soap films. *Physica D*, 37 :384, 1989.
- [26] S. Courty, B. Dollet, F. Elias, P. Heinig, and F. Graner. Two-dimensional shear modulus of a langmuir foam. *Europhys. Lett*, 64 :709, 2003.
- [27] S J Cox, G Bradley, S Hutzler, and D Weaire. Vertex corrections in the theory of foam drainage. *J. Phys. : Condens. Matter*, 13 :4863, 2001.
- [28] S.J. Cox, D. Weaire, and M.F. Vaz. The transition from two-dimensional to three-dimensional foam structures. *Eur. Phys. J. E*, 7 :311, 2002.
- [29] Paul Curtayne. Electrical conduction in aqueous foams. Master's thesis, Trinity College, University of Dublin, 1998.
- [30] P. G. de Gennes. Theory of slow biphasic flows in porous media. *PhysicoChemical Hydrodynamics*, 4 :175, 1983.
- [31] P. G. de Gennes, Françoise Brochard-Wyart, and David Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Échelles. Belin, 2002.
- [32] G. Debrégeas. Communication personnelle.
- [33] G. Debrégeas, H. Tabuteau, and J.-M. di Meglio. Deformation and flow of a two-dimensional foam under continuous shear. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :17–8305, 2001.
- [34] Michael Dennin and Charles M. Knobler. Experimental studies of bubble dynamics in a slowly driven monolayer foam. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :2485, 1997.

- [35] D. Dessai and R. Kumar. Flow through a plateau border of cellular foam. *Chem. Eng. Sci.*, 37 :1361, 1982.
- [36] E. Durand. *Électrostatique et Magnéto-statique*. Masson, 1953.
- [37] G. Durand, J. Weiss, and F. Graner. Deformation of grain boundaries in polarice. *Europhys . Lett*, 2004. soumis.
- [38] M. Durand, G. Martinoty, , and D. Langevin. Liquid flow through aqueous foams : From the plateau border dominated regime to the node dominated regime. *Phys. Rev. E*, 60 :6307, 1999.
- [39] Marc Durand. *Contributions théorique et expérimentale à l'étude du drainage d'une mousse aqueuse*. PhD thesis, Université Paris 11 Orsay, 2002.
- [40] D. J. Durian. Bubble-scale model of foam mechanics : Melting, nonlinear behavior, and avalanches. *Phys. Rev. E*, 55 :1739, 1997.
- [41] D.J. Durian, D.A. Weitz, and D.J. Pine. Multiple light-scattering probes of foam structure and dynamics. *Science*, 252 :686, 1991.
- [42] F. Elias, C. Flament, J. A. Glazier, F. Graner, and Y. Jiang. Foams out of stable equilibrium : cell elongation and side swapping. *Philos. Mag. B*, 79 :729, 1999.
- [43] Florence Elias. *Organisation de motifs bidimensionnels de ferrofluide : le cas de la structure cellulaire*. PhD thesis, Université Paris 7, 1998.
- [44] C. Flament, S. Lacis, J.-C. Bacri, A. Cebers, S. Neveu, , and R. Perzynski. Measurements of ferrofluid surface tension in confined geometry. *Phys. Rev. E*, 53 :4801, 1996.
- [45] C P Gonatas, J S Leigh, A G Yodh, James .A Glazier, and B Prause. Magnetic resonance images of coarsening inside a foam. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :573, 1995.
- [46] A. D. Gopal and D. J. Durian. Relaxing in foam. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :188303–1, 2003.
- [47] A. D. Gopal and D.J. Durian. Shear induced melting of an aqueous foam. *J. Coll. I. Sci*, 213 :169, 1999.
- [48] F. Graner, Y. Jiang, Janiaud, and C. Flament. Equilibrium states and ground state of two-dimensional fluid foams. *Phys. Rev. E*, 37 :011402, 2000.
- [49] François Graner. *Petits problèmes de physique. première partie : mathématiques spéciales MP, PC, PSI et 1er cycle universitaire*. Scopos. Berlin : Springer, 1998. problème 8.
- [50] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. InterEditions et CNRS Editions, second edition, 2001.
- [51] Thomas C. Hales. A computer verification of the kepler conjecture. *Discret Comput. Geo.*, 25 :1, 2001.
- [52] Hergé. *Tintin au pays de l'or noir*. Castermam, 1986.
- [53] Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba. *Mathématique et formes Optimales*. Pour la science diffusion Belin, 1986.

- [54] Sascha Hilgenfeldt, Stephan A. Koehler, and Howard A. Stone. Dynamics of coarsening foams : Accelerated and self-limiting drainage. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :4704, 2001.
- [55] Sascha Hilgenfeldt, Andrew M. Kraynik, Stephan A. Koehler, , and Howard A. Stone. An accurate von neumann's law for three-dimensional foams. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :2645, 2000.
- [56] Thierry Hocquet. Facteurs de dépolariation ou de désaimantation. non publié.
- [57] S. Hutzler. Communication personnelle.
- [58] S Hutzler and D Weaire. The osmotic pressure of a two-dimensional disordered foam. *J. Phys. : Condens. Matter*, 7 :L657, 1995.
- [59] S. Hutzler, D. Weaire, and R. Crawford. Convective instability in foam drainage. *Europhys. Lett*, 41 :461, 1998.
- [60] Reinhard Höhler, Sylvie Cohen-Addad, and Hussein Hoballah. Periodic nonlinear bubble motion in aqueous foam under oscillating shear strain. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :1154, 1997.
- [61] M. in het Panhuis, S. Hutzler, D. Weaire, and R. Phelan. New variations on the soap film experiments of plateau i. experiments under forced drainage. *Philosophical Magazine B*, 78 :1, 1998.
- [62] E. Janiaud, F. Elias, J. C. Bacri, V. Cabuil, and R. Perzynski. Spinning ferrofluid microscopic droplets. *Magnetohydrodynamics*, 36 :365, 2000.
- [63] E. Janiaud and F. Graner. Foam in a two-dimensional couette shear : a local measurement of bubble deformation. submitted to J. Fluid Mech.
- [64] Y. Jiang, P.J. Swart, A. Saxena, M. Asipauskas, and J.A. Glazier. Hysteresis and avalanches in two-dimensional foam rheology simulations. *Phys. Rev. E*, 59 :5819, 1999.
- [65] Alexandre Kabla. *Désordre et plasticité dans les milieux divisés : Mousses et matériaux granulaires*. PhD thesis, Université Paris7, 2003.
- [66] Alexandre Kabla and Georges Debrégeas. Local stress relaxation and shear banding in a dry foam under shear. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :258303–1, 2003.
- [67] Saad A. Khan, Carol A. Schnepper, and Robert C. Armstrong. Foam rheology : Iii. measurement of shear flow properties. *Journal of Rheology*, 32 :69, 1988.
- [68] S. A. Koehler, S. Hilgenfeldt, and H. A. Stone. Flow along two dimensions of liquid pulses in foams : Experiment and theory. *Europhys. Lett*, 54 :335, 2001.
- [69] S. A. Koehler, H. A. Stone, M. P. Brenner, and J. Eggers. Dynamics of foam drainage. *Phys. Rev. E*, 58 :2097, 1998.
- [70] Stephan A. Koehler, Sascha Hilgenfeldt, , and Howard A. Stone. Liquid flow through aqueous foams : The node-dominated foam drainage equation. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :4232, 1999.
- [71] Stephan A. Koehler, Sascha Hilgenfeldt, , and Howard A. Stone. A generalized view of foam drainage : Experiment and theory. *Langmuir*, 16 :6327, 2000.

- [72] Stephan A. Koehler, Sascha Hilgenfeldt, Eric R. Weeks, , and Howard A. Stone<sup>1</sup>. Perspectives on foam drainage and the influence of interfacial rheology. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 15 :s283, 2003.
- [73] A. M. Kraynick. Foam drainage. *Sandia Report SAND*, 83 :0844, 1983.
- [74] G. J. Kynch. a theory of sedimentation. *Transaction of the Faraday Society*, 48 :166, 1952.
- [75] L. Landau and E. Lifschitz. *Theory of Elasticity*, volume 7 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, third edition, 1989.
- [76] J. Lauridsen, M. Twardos, and M. Dennin. Shear-induced stress relaxation in a two-dimensional wet foam. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :098303, 1997.
- [77] Robert Lemlich. A theory for the limiting conductivity of polyhedral foam at low density. *Journal of colloid and Interface Science*, 64 :107, 1977.
- [78] Ralph A. Leonard and R. Lemlich. A study of interstitial liquid flow in a foam. *A.I.Ch.E. journal*, 11 :18, 1965.
- [79] Andrea J. Liu, Sriram Ramaswamy, T. G. Mason, Hu Gang, and D. A. Weitz. Anomalous viscous loss in emulsions. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :3017, 1996.
- [80] J. Lucassen, M. Van den Tempel, A. Vrij, and F. Heselink. Waves in thin liquid film. *Proc. K. Ned. Akad. Wetensch. B*, 73 :109, 1973.
- [81] C. Monnereau, N. Pittet, and D. Weaire. An analysis of surface curvature and growth laws for foam cells using the surface evolver. *Europhys. Lett.*, 52 :391, 2000.
- [82] C. Monnereau and M. Vignes-Adler. Dynamics of 3d real foam coarsening. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :5228, 1998.
- [83] Karol J Mysels. *Soap films : studies of their thinning, and a bibliography*. Pergamon Press, 1959.
- [84] W Müller and J-M di Meglio. Avalanche in draining foams. *J. Phys. Conds. Matter*, 11 :L209, 1999.
- [85] Alexander V. Neimark and Michèle Vignes-Adler. Variations from the plateau law in foams. *Phys. Rev. E*, 51 :788, 1995.
- [86] Anh V. Nguyen. Liquide drainage in single plateau borders of foam. *Journal of Colloid end interface Science*, 249 :194, 2002.
- [87] R. Phelan, D. Weaire, S. McMurry, and S.J. Cox. The deformation of soap film junctions by applied forces. *Philosophical Magazine Letters*, 79 :887, 1999.
- [88] R Phelan, D Weaire, E A J F Peters, and G Verbist. The conductivity of a foam. *J. Phys. : Condens. Matter*, 8 :L475, 1996.
- [89] Olivier Pitois and Xavier Chateau. Behaviour of hydrophobic and hydrophilic particles in a foam : a bubble scale point of view. Eurofoam Conference, Manchester UK, 2002.
- [90] N. Pittet, P. Boltenhagen, N. Rivier, and D. Weaire. Structural transitions in ordered, cylindrical foams. *Europhys. Lett.*, 35 :547, 1996.
- [91] E. Pratt and M. Dennin. Nonlinear stress and fluctuation dynamics of sheared disordered wet foam. *Phys. Rev. E*, 67 :051402, 2003.

- [92] H. M. Princen. *J. Colloid Interface Sci.*, 91 :160, 1983.
- [93] H. M. Princen. Osmotic pressure of foams and highly concentrated emulsion. 1. theoretical consideration. *Langmuir*, 2 :519, 1986.
- [94] H. M. Princen and A. D. Kiss. Osmotic pressure of foams and highly concentrated emulsion. 2. determination from the variation in volume fraction with height in an equilibrated column. *Langmuir*, 3 :36, 1986.
- [95] R. E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press, 1985.
- [96] Florence Rouyer, Sylvie Cohen-Addad, Michèle Vignes-Adler, and Reinhard Höhler. Dynamics of yielding observed in a three-dimensional aqueous dry foam. *Phys. Rev. E*, 67 :021405, 2003.
- [97] A. Saint-Jalmes, M. U. Vera, and D. J. Durian. Free drainage of aqueous foams : Container shape effects on capillarity and vertical gradients. *Europhys. Lett*, 50 :695, 2000.
- [98] Arnaud Saint-Jalmes and Dominique Langevin. Time evolution of aqueous foams : drainage and coarsening. *J. Phys. : Condens. Matter*, 14 :9397, 2002.
- [99] J. Stavans and J.A. Glazier. Soap froth revisited : Dynamic scaling in the two-dimension froth. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :1318, 1989.
- [100] H. A. Stone, S. A. Koehler, S. Hilgenfeldt, and M Durand. Drainage of single plateau borders : Direct observation of rigid and mobile interfaces. *Phys. Rev. E*, 66 :040601, 2002.
- [101] G. Taylor. The dynamics of thin sheet of fluid ii. waves on fluid sheets. *Proceedings of the royal society A*, 253 :296, 1959.
- [102] Franck M. Tiller. Revision of kynch sedimentation theory. *AIChE*, 27 :823, 1981.
- [103] M. U. Vera and D. J. Durian. Enhanced drainage and coarsening in aqueous foams. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :088304, 2002.
- [104] M. U. Vera, A. Saint-Jalmes, and D. J. Durian. Instabilities in a liquid-fluidized bed of gas bubbles. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :3001, 2000.
- [105] M. U. Vera, A. Saint-Jalmes, and D. J. Durian. Scattering optics of foam. *Applied Optics*, 40 :4210, 2001.
- [106] G Verbist, D Weaire, and A M Kraynik. The foam drainage equation. *J. Phys. : Condens. Matter*, 8 :3715, 1996.
- [107] J. von Neumann. *Metal Interfaces*. American Society for Metals, Cleveland, OH, 1952.
- [108] D T Wasan, A D Nikolov, L A Lobo, K Kozco, and D A Edwards. Foams, thin films and surface rheological properties. *Prog. Surf. Sci.*, 39 :119, 1992.
- [109] D Weaire, F Bolton, P Molho, and J A Glazier. Investigation of an elementary model for magnetic froth. *J. Phys. Condens. Matter*, 3 :2101, 1991.
- [110] D Weaire, S Findlay, and G Verbist. Measurement of foam drainage using ac conductivity. *J. Phys. : Condens. Matter*, 7 :L217, 1995.
- [111] D. Weaire and S. Hutzler. *Physics of Foams*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.

- [112] D Weaire and R Phelan. Vertex instabilities in foams and emulsions. *J. Phys. : Condens. Matter*, 8 :L37–43, 1996.
- [113] D Weaire, N Pittet, and S Hutzler. Steady-state drainage of an aqueous foam. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :2670, 1993.
- [114] Denis Weaire, Stefan Hutzler, Simon Cox, Norbert Kern, Maria D Alonso, and Wiebke Drenckhan. The fluid dynamics of foams. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 15 :65, 2003.
- [115] C. Ybert and J.-M. di Meglio. Stresses in compressed bubble rafts. *C.R. Physique*, 3 :555, 2002.

**Résumé**

Une mousse liquide est constituée de bulles de gaz piégées dans une matrice liquide. Cette structure confère aux mousses des propriétés hydrodynamiques complexes qui se manifestent d'une part par un couplage entre élasticité et plasticité et d'autre part par un écoulement de liquide à l'intérieur même de leur structure (drainage).

La première partie de ce manuscrit porte sur le comportement élastique des mousses. Grâce à l'utilisation d'une nouvelle définition statistique du tenseur de déformation, nous avons pu ré-analyser une expérience de cisaillement d'une mousse de savon quasi bidimensionnelle dans une cellule de Couette par G. Debrégeas. Nous avons montré qu'il était possible de caractériser l'état de déformation élastique d'une mousse même dans le régime plastique. Nous avons également étudié la réponse élastique d'un bord de Plateau unique issue de la jonction de trois films de savon s'appuyant sur un cadre rigide.

Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés au drainage d'une mousse de ferrofluide. En dopant la phase liquide de la mousse en nanoparticules magnétiques, il est possible d'ajouter aux forces capillaires et gravitationnelles des forces magnétiques contrôlables depuis l'extérieur, via le champ magnétique. Nous avons pu montrer qu'un champ magnétique homogène modifiait la structure de la mousse en introduisant une anisotropie dans la section des bords de Plateau. Cet effet permet d'expliquer le ralentissement ou l'accélération du drainage magnétique sous l'effet d'un champ magnétique constant. Lorsqu'une mousse de ferrofluide est confinée, il est possible de manipuler sa structure grâce à l'utilisation de gradients de champ magnétique.

---

**Abstract**

A liquid foam is made of bubbles trapped in a liquid matrix. This structure gives to foams a complex hydrodynamic behaviour, which involves elasticity, plasticity and drainage through the skeleton of the foam.

The first part of the manuscript deals with the elasticity of foams. By using a new statistical definition of the strain tensor, we have shown that it is possible to describe the elastic state of foams, even in a plastic regime. We also have studied the elastic response of a single Plateau border made by the junction of three films leaning on a rigid wire.

By bubbling air in ferrofluid (a colloidal suspension of magnetic particles) and soap solution, we have been able to make stable ferrofluid foams. In these foams, it is possible to add a magnetic force to the classical capillary and gravitational forces. We have shown, using quasi two-dimensional foams that the section of the Plateau border depends on the orientation of the magnetic field. In three-dimensional foams it is possible to slow down or to enhance drainage. When confined in cylindrical tube, it is possible to manipulate the structure of the foam by using a local gradient fields. This might have a great utility in microfluidics.