



**HAL**  
open science

# Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent: Influence de la Rotation

Louis Marié

► **To cite this version:**

Louis Marié. Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent: Influence de la Rotation. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. Français. NNT : . tel-00007755

**HAL Id: tel-00007755**

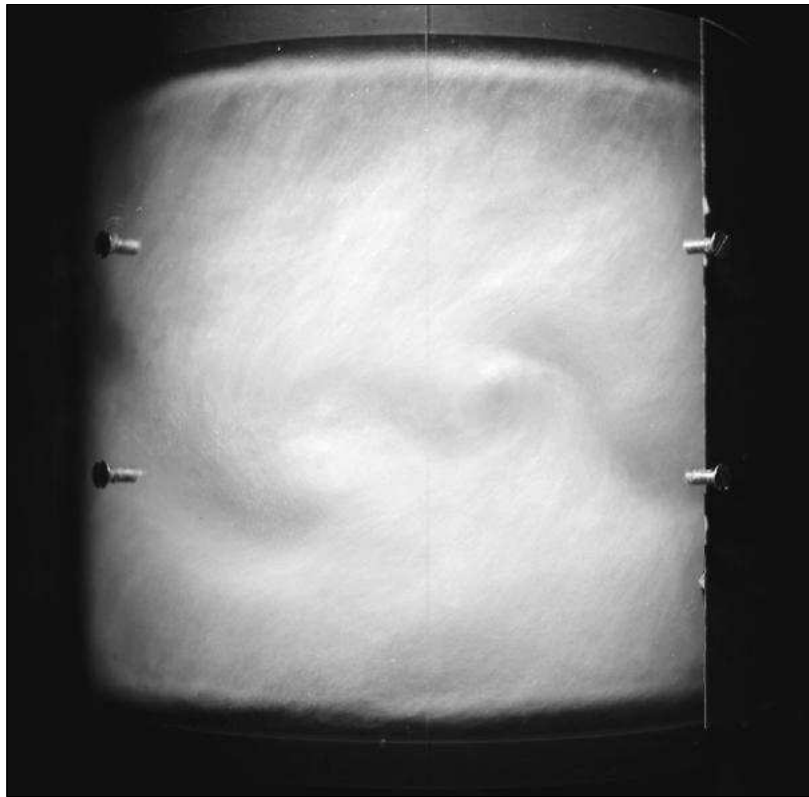
**<https://theses.hal.science/tel-00007755>**

Submitted on 14 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : influence de la rotation.



Louis Marié



# THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

**Docteur de l'université Paris 7 – Denis Diderot**

**Spécialité : Dynamique des Fluides et des Transferts**

par

Louis Marié

présentée et soutenue publiquement le 30 septembre 2003

**Transport de moment cinétique et de champ  
magnétique par un écoulement tourbillonnaire  
turbulent : influence de la rotation.**

## Composition du jury

*Directeur :* S. Fauve

*Responsable CEA :* F. Daviaud

*Rapporteurs :* H.-C. Nataf  
C. Normand

*Examineurs :* Y. Couder  
J. Léorat  
L. Tuckerman



## Remerciements

Au cours de mes trois années de thèse, j'ai eu l'occasion de bénéficier du soutien d'une foule de personnes. Toutes m'ont aidé par leur gentillesse, leur savoir ou leur savoir-faire, et toutes ont mérité ma reconnaissance. En m'excusant par avance auprès de ceux que j'aurais pu oublier, je tiens à remercier ici :

François Daviaud, mon "patron" de thèse, qui m'a non seulement guidé sur le plan scientifique, mais a su jour après jour me pousser, me tirer, me donner du mou, me tenir la bride courte, me donner des carottes, du bâton, m'encourager, me calmer, relire mes lettres d'excuses, me faire lire des articles, m'en faire écrire, m'envoyer en salle de manip ou m'en sortir (pas trop souvent). Il faudrait probablement rajouter une partie à ce manuscrit pour raconter ce qu'il lui a fallu de patience et de ténacité pour me le faire écrire. J'espère qu'il se remettra vite de l'état d'épuisement dans lequel la préparation de ma soutenance l'a plongé, et je le remercie une fois de plus.

Stephan Fauve, mon directeur de thèse, qui a bien souvent joué le rôle d'arbitre lorsqu'un désaccord existait entre François et moi sur les suites à donner à l'une de mes idées saugrenues. Avec la sûreté de jugement et la capacité de persuasion qui sont les siennes, il m'a permis d'abandonner à temps bien des fausses pistes, et je ne me souviens pas d'avoir progressé dans une direction dans laquelle il ne m'avait pas encouragé à aller.

Christiane Normand, qui m'a appris ce que je sais des méthodes analytiques ou semi-analytiques d'étude des problèmes de stabilité linéaire. Au cours d'innombrables après-midi, Christiane a elle aussi enduré avec patience un flot constant d'idées absurdes, tout en avançant sereinement, et avec quelle élégance, vers la solution de notre problème commun.

Les membres permanents du Groupe Instabilités et Turbulence, Arnaud Chiffaudel, Olivier Dauchot et Bérengère Dubrulle, ainsi que leurs thésards successifs Nicolas Garnier, Daniel Bonamy, Arnaud Prigent, Denis Richard, Franck Hersant, Nicolas Leprovost, Stephanie Debœuf, Florent Ravelet et Guillaume Marty. Certains m'ont accueilli et encouragé à mon arrivée, les autres ont supporté mon accueil et mes encouragements lors de la leur. Merci à tous pour leur patience, leur gentillesse et les discussions toniques et stimulantes que nous avons pu avoir. Marco Bonetti, qui vient de les rejoindre, a été un irremplaçable compagnon lors de la rédaction de ce mémoire.

Les membres de l'équipe VKS que je n'ai pas encore cités, Rémi Attard, Mickaël Bourgoïn, Javier Burguete, Jean-Baptiste Luciani, François Pétrélis, Jean-François Pinton, Philippe Odier et Romain Volk. J'ai énormément appris à leur contact au cours des semaines de manip à Cadarache. La physique est un sport qu'il est décidément plus agréable de pratiquer en équipe !

Un certain nombre de physiciens et physiciennes des communautés de l'hydrodynamique physique et/ou de la physique non-linéaire, avec qui j'ai pu avoir des contacts réguliers, tels que Jacques Léorat, Paul Manneville, Caroline Nore et Laurette Tuckerman, ou plus occasionnels, comme Alain Arnéodo, Olivier Cadot, Bernard Castaing et Jocelyne Lega. Eux aussi m'ont aidé dans mon travail, par leurs conseils et par leur exemple, et les conversations que j'ai eues avec eux m'ont beaucoup enrichi.

Yves Couder, qui a accepté de présider mon jury de thèse. J'espère ne pas lui avoir donné l'impression d'avoir massacré pour rien un écoulement à l'étude duquel il a beaucoup contri bué.

Henri-Claude Nataf et une nouvelle fois Christiane Normand, qui ont accepté de rap-

porter sur mon mémoire. Je les remercie pour leur courage, et pour la pertinence de leurs remarques. La perspective d'écrire pour des lecteurs d'une telle vivacité d'esprit a beaucoup contribué à rendre la rédaction de cette thèse supportable.

Jacques Hammann, le directeur du Service de Physique de l'Etat Condensé, qui a bien voulu m'y accueillir, ainsi que les chercheurs des salles voisines de la mienne, D. Estève, J.-F. Jacquinet, P. Roche et F. Williams pour ne citer qu'eux, qui ont (parfois) accepté que je travaille alors que le bruit émis par mes moteurs les gênait.

Raymonde Marciano et Sandrine Thunin, les secrétaires du service, qui ont accepté de me ré-expliquer la façon de remplir un ordre de mission à chaque fois qu'il m'a fallu le faire. Je n'ai pas été un client facile, elles ne semblent pourtant pas m'en avoir voulu.

Les techniciens qui m'ont aidé dans mon travail, ceux du Groupe Instabilités et Turbulence, Cécile Gasquet, Patrick Meininger et Vincent Padilla, mais aussi Gérard Francinet, Michel Juignet, Gérald Le Goff, Pascal Sénat et Jean-Claude Tack. Sans l'aide et la sympathie des premiers, je n'aurais tout simplement rien pu faire. L'assistance toujours dévouée des autres m'a permis d'aller plus vite et plus loin.

Alice Fondin et Jérôme Roy, dont j'ai pu encadrer le travail lors des stages qu'ils ont effectués au sein du groupe. Alice a réalisé avec minutie le dur travail de test et de mise au point du code "Galerkin", et je dois au sérieux de Jérôme beaucoup des points de mesure de couples et de pression de ce mémoire. Je souhaite à Jérôme de trouver pour l'aider dans sa thèse d'aussi bons stagiaires que celui qu'il a été.

Dans un autre registre, je voudrais maintenant remercier :

Les rameurs du CN Versailles, qui ont bien voulu m'accepter comme un des leurs. Je dois probablement aux entraînements presque réguliers en leur compagnie de ne pas être devenu tout à fait fou au cours de ces trois ans.

Mon papa, ma maman, mes soeurs Gaëlle et Florence ainsi que mon petit frère Etienne. La façon dont j'occupais mes semaines leur a souvent semblé bien étrange, mais le soutien et l'affection qu'ils m'ont donnés n'ont jamais faibli.

Anne, qui a bien voulu supporter avec le sourire trois années de samedis sabotés, de dimanches studieux et de soirées passées en compagnie d'un Louis distrait, grognon, surexcité, déprimé, énervé, épuisé ou tout simplement pas là. J'espère arriver avec le temps à mériter tout ce qu'elle m'a donné.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Etude hydrodynamique de l'écoulement de von Kármán.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction de la partie hydrodynamique.</b>	<b>5</b>
2.1	Les équations de l'hydrodynamique. Les difficultés posées par la turbulence. .	5
2.1.1	Les équations de Navier-Stokes. . . . .	5
2.1.2	Le nombre de Reynolds. . . . .	6
2.1.3	L'approche statistique de la turbulence. . . . .	7
2.1.4	Quelques propriétés statistiques des petites échelles des écoulements turbulents. . . . .	7
2.1.5	Conclusion . . . . .	9
2.2	L'écoulement de von Kármán. . . . .	10
2.2.1	Les travaux analytiques. . . . .	10
2.2.2	Les travaux expérimentaux. . . . .	11
2.2.3	Conclusion de l'étude bibliographique de l'écoulement de von Kármán	12
2.3	Plan de la première partie. . . . .	13
<b>3</b>	<b>Montage expérimental. Moyens et méthodologie des mesures.</b>	<b>15</b>
3.1	Le montage VKE. . . . .	15
3.1.1	Description générale. . . . .	15
3.1.2	Caractéristiques détaillées. . . . .	16
3.2	Les Moyens de Mesures . . . . .	22
3.2.1	Les visualisations. . . . .	22
3.2.2	La Vélocimétrie Laser Doppler. . . . .	23
3.2.3	Les mesures de fluctuations de pression. . . . .	25
3.2.4	Les mesures des couples des moteurs. . . . .	28
3.3	Arguments de symétries divers. . . . .	30
3.3.1	L'analyse dimensionnelle . . . . .	31



3.3.2	L'invariance par rotation autour de l'axe . . . . .	38
3.3.3	L'invariance par retournement . . . . .	40
3.4	Conclusion . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Caractérisation des grandes échelles de l'écoulement.</b>	<b>43</b>
4.1	Mesures de l'écoulement moyen . . . . .	43
4.1.1	Description de la grille. . . . .	43
4.1.2	Reconstruction de $v_r$ . Problème des pales . . . . .	45
4.1.3	Résultats des mesures de l'écoulement moyen et des fluctuations. . . . .	47
4.1.4	Conclusion des mesures de Vélocimétrie . . . . .	54
4.2	Mesures des couples . . . . .	57
4.2.1	Vérification des arguments dimensionnels, vérification des arguments de symétrie. . . . .	57
4.2.2	Courbes de couples adimensionnels en fonction de $\Theta$ dans les différentes configurations, pour une cuve cylindrique lisse. . . . .	62
4.2.3	Conclusion des mesures de couples . . . . .	64
4.3	Mesures de pressions . . . . .	65
4.3.1	Problème des bulles. . . . .	65
4.3.2	Vérification des arguments dimensionnels. . . . .	66
4.3.3	Fluctuations de pression en différents points de l'écoulement de contre-rotation. . . . .	69
4.3.4	Allure des fluctuations de pression en fonction de $\Theta$ , turbines "TM60", cuve lisse. . . . .	73
4.3.5	Conclusion des mesures de fluctuations de pression. . . . .	78
4.4	Mesures des fluctuations turbulentes de vitesse . . . . .	78
4.4.1	Densités de probabilité des différentes composantes de la vitesse en fonction de $z'$ , en $r' = 0.9$ . . . . .	79
4.4.2	Méthodes expérimentales particulières utilisées pour les mesures précises. . . . .	81
4.4.3	Séries temporelles des différentes composantes de la vitesse dans le plan équatorial . . . . .	84
4.4.4	Densités de probabilité des composantes de la vitesse dans le plan équatorial. . . . .	87
4.4.5	Densités spectrales de puissance des composantes de la vitesse dans le plan équatorial. . . . .	87
4.4.6	Conclusion des mesures de fluctuations de vitesses. . . . .	88
4.5	Conclusion des mesures effectuées dans le montage VKE . . . . .	89

<b>5</b>	<b>La “bifurcation globale” et les “états intermittents”.</b>	<b>91</b>
5.1	La “bifurcation globale” . . . . .	91
5.1.1	Une symétrie se brise. . . . .	91
5.1.2	Mesures de l’écoulement moyen. . . . .	96
5.1.3	Mesures de couple. . . . .	98
5.1.4	Mesures de fluctuations de pression. . . . .	99
5.1.5	Conclusion de l’étude de la “bifurcation globale” . . . . .	105
5.2	Les états intermittents . . . . .	106
5.2.1	Le contexte . . . . .	106
5.2.2	Présentation des états intermittents. . . . .	108
5.2.3	Début de caractérisation des états intermittents. . . . .	110
5.2.4	Conclusion de l’étude des états intermittents. . . . .	119
5.3	Conclusion de l’étude de la bifurcation globale. . . . .	119
<b>6</b>	<b>Conservation du moment cinétique</b>	<b>123</b>
6.1	Etablissement de la relation de bilan. . . . .	123
6.2	Vérification expérimentale de la relation de bilan . . . . .	127
6.3	Etude du produit $v'_\theta v'_z$ . . . . .	130
6.3.1	Distribution spatiale de $v'_\theta v'_z$ . . . . .	130
6.3.2	Visualisations de l’écoulement. . . . .	131
6.3.3	Distribution spectrale de $v'_\theta v'_z$ . . . . .	132
6.4	Conclusion . . . . .	135
<b>7</b>	<b>L’influence de la force de Coriolis.</b>	<b>139</b>
7.1	La force de Coriolis . . . . .	139
7.1.1	Présentation générale. . . . .	139
7.1.2	Force de Coriolis et hydrodynamique. . . . .	140
7.1.3	Etude bibliographique. . . . .	143
7.2	Le deuxième montage expérimental . . . . .	144
7.2.1	Le montage. . . . .	144
7.2.2	Les moteurs. . . . .	146
7.2.3	Les paramètres de contrôle. . . . .	147
7.3	Mesures de vélocimétrie. . . . .	147
7.3.1	Adaptation des arguments dimensionnels. . . . .	147
7.3.2	Protocole de mesure. . . . .	148
7.3.3	Mesures de l’écoulement moyen en fonction du nombre de Rossby. . . . .	149
7.3.4	Etude du cœur de l’écoulement moyen à petit nombre de Rossby. . . . .	153

7.3.5	Grandeurs statistiques de l'écoulement en fonction du nombre de Rossby. . . . .	155
7.3.6	Conclusion des mesures de vélocimétrie. . . . .	158
7.4	Mesures des couples, bilan de moment cinétique . . . . .	159
7.4.1	Adaptation des arguments dimensionnels. . . . .	159
7.4.2	Dépendance des valeurs moyennes des couples des moteurs en fonction du nombre de Rossby. . . . .	159
7.4.3	Mécanisme de transport de moment cinétique en référentiel tournant. . . . .	162
7.4.4	Conclusion des mesures de couples. . . . .	167
7.5	Conclusion de l'étude de l'écoulement de von Kármán en rotation d'ensemble. . . . .	167
<b>8</b>	<b>Conclusion de la partie hydrodynamique.</b>	<b>169</b>
<b>II</b>	<b>Etude magnéto-hydrodynamique de l'écoulement de von Kármán.</b>	<b>171</b>
<b>9</b>	<b>Introduction de la partie Magnéto-Hydrodynamique</b>	<b>173</b>
9.1	Le contexte général . . . . .	173
9.1.1	Le champ magnétique terrestre . . . . .	173
9.1.2	La géodynamo . . . . .	173
9.2	La magnéto-hydrodynamique . . . . .	174
9.2.1	Les équations de la Magnéto-Hydrodynamique . . . . .	174
9.2.2	Le problème de la dynamo cinématique . . . . .	177
9.2.3	Quelques résultats sur l'effet dynamo . . . . .	177
9.3	Les projets de dynamos expérimentales . . . . .	183
9.3.1	Les dynamos "contraintes" . . . . .	183
9.3.2	Les dynamos homogènes . . . . .	184
9.4	L'expérience Von Kármán Sodium . . . . .	186
9.4.1	Le plan de notre étude . . . . .	188
<b>10</b>	<b>Etude numérique des propriétés magnéto-hydrodynamiques de l'écoulement de von Kármán</b>	<b>189</b>
10.1	Introduction . . . . .	190
10.2	Water model experiment . . . . .	192
10.2.1	Experimental setup . . . . .	192
10.2.2	Velocity fields . . . . .	193
10.3	Numerical resolution of the induction equation . . . . .	195
10.3.1	Scope of the numerical approach . . . . .	195

10.3.2	The kinematic dynamo code . . . . .	196
10.4	Results . . . . .	197
10.4.1	Threshold determination . . . . .	197
10.4.2	Description of the self-excited magnetic field . . . . .	201
10.4.3	Magnetic induction by an external field . . . . .	203
10.5	Discussion . . . . .	208
10.5.1	Status of the von Kármán flow with respect to other dynamo flows . . . . .	208
10.5.2	Threshold : comparison with VKS experiment . . . . .	208
10.5.3	Sensitivity to configuration parameters . . . . .	209
10.5.4	Induction effects : comparison with the VKS experiment . . . . .	211
10.6	Conclusion . . . . .	213
10.7	List of References . . . . .	214
10.8	Influence de la force de Coriolis sur les propriétés magnéto-hydrodynamiques de l'écoulement de von Kármán. . . . .	216
10.8.1	Traitement des champs de vitesse. . . . .	216
10.8.2	Absence de "force de Coriolis magnétique". . . . .	216
10.8.3	Résultats des simulations pour les différentes valeurs du nombre de Rossby. . . . .	217
10.9	Conclusion . . . . .	220
<b>11</b>	<b>Réflexions théoriques sur le problème de la dynamo cinématique</b>	<b>223</b>
11.1	Introduction . . . . .	223
11.2	Considérations de symétries . . . . .	224
11.2.1	La démarche générale. . . . .	224
11.2.2	Le groupe de symétrie du montage "VKE" . . . . .	227
11.2.3	"Démonstration" de l' $O(2)$ -équivariance de l'opérateur d'induction. . . . .	228
11.2.4	Propriétés de symétrie des modes associés à des valeurs propres réelles. . . . .	229
11.2.5	Propriétés de symétrie des modes propres associés à des paires de va- leurs propres complexes conjuguées. . . . .	230
11.2.6	Prise en compte des symétries supplémentaires imposées par le code numérique. . . . .	233
11.2.7	Conclusion des arguments de théorie des groupes. . . . .	236
11.3	L'analyse de stabilité linéaire par la méthode de Galerkin . . . . .	237
11.3.1	Le principe de la méthode . . . . .	237
11.3.2	Mise en œuvre pratique . . . . .	238
11.3.3	Quelques résultats obtenus par la méthode de Galerkin. . . . .	244

11.3.4	Méthode approchée de recherche de la valeur propre de plus petit module d'une matrice. . . . .	250
11.3.5	Conclusion de l'étude par la méthode de Galerkin . . . . .	259
11.4	Conclusion . . . . .	259
<b>12</b>	<b>Etude expérimentale sur le montage "VKS"</b>	<b>261</b>
12.1	Description de l'expérience "VKS" . . . . .	261
12.1.1	Le sodium . . . . .	261
12.1.2	La "boucle" sodium . . . . .	262
12.1.3	La cuve d'essai. . . . .	263
12.1.4	Les moteurs. . . . .	263
12.1.5	L'unité de purification. . . . .	264
12.1.6	Les bobines d'excitation. . . . .	264
12.1.7	L'instrumentation. . . . .	264
12.2	Résultats de mesures hydrodynamiques. . . . .	266
12.2.1	Avertissement. . . . .	266
12.2.2	Valeurs moyennes des couples . . . . .	266
12.2.3	Fluctuations de pression. . . . .	269
12.3	Les résultats des mesures d'induction . . . . .	270
12.3.1	Introduction . . . . .	270
12.3.2	Principe des mesures. . . . .	271
12.3.3	Résultats des mesures effectuées sur l'écoulement à une turbine. . . . .	276
12.3.4	Résultats des mesures effectuées sur l'écoulement de contra-rotation. . . . .	280
12.4	Conclusion . . . . .	288
<b>13</b>	<b>Conclusion de la partie Magnéto-Hydrodynamique</b>	<b>291</b>
<b>14</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>293</b>
<b>A</b>	<b>Annexes de la partie I</b>	<b>295</b>
A.1	Quelques rappels d'électrotechnique . . . . .	295
A.2	Résultats des mesures de couples pour une cuve cylindrique munie de quatre ailettes. . . . .	298
A.3	Variations en $\Theta$ de l'amplitude <i>rms</i> des fluctuations de pression en paroi. . . . .	300
A.3.1	Turbines "TM60", pales hautes de $0.2R_c$ , cuve lisse, différents points de mesure. . . . .	300
A.3.2	Différents jeux de turbines, cuve lisse. Mesures en paroi dans le plan équatorial. . . . .	301

A.3.3	Différents jeux de turbines, cuve munie d'ailettes. . . . .	302
A.4	Compléments de caractérisation des états intermittents. . . . .	303
A.5	“Catalogue” de bilans de quantités conservées. . . . .	307
A.5.1	La quantité de mouvement dans l'écoulement de von Kármán . . . . .	307
A.5.2	Le moment cinétique dans l'écoulement de Taylor-Couette . . . . .	308
A.5.3	La chaleur en convection de Rayleigh-Bénard . . . . .	310
A.6	Champs de vitesse moyens de l'écoulement de contra-rotation pour différentes valeurs du nombre de Rossby. . . . .	311
<b>B</b>	<b>Annexes de la partie II</b>	<b>321</b>
B.1	Quelques rappels de théorie des groupes . . . . .	321
B.1.1	Avertissement . . . . .	321
B.1.2	Définition d'un groupe. Groupes isomorphes. . . . .	321
B.1.3	Les représentations d'un groupe. . . . .	323
B.1.4	Définition d'un opérateur équivariant. . . . .	326
B.1.5	La première propriété sympathique. . . . .	326
B.1.6	Cas des paires de valeurs propres complexes conjuguées. . . . .	327
B.2	Détails techniques de l'analyse de stabilité linéaire. . . . .	328
B.2.1	Application des arguments de théorie des groupes au choix des fonctions d'essai. . . . .	328
B.2.2	Détermination pratique des fonctions d'essai. . . . .	330
B.2.3	Choix des fonctions de pondération. . . . .	332
	<b>Bibliographie</b>	<b>335</b>



# Chapitre 1

## Introduction Générale

La Terre, comme de nombreux objets astrophysiques, possède un champ magnétique propre. Ce champ magnétique a une dynamique complexe, qui fait intervenir des échelles de temps très courtes à l'échelle géophysique. Il y a donc lieu de penser qu'il est entretenu par un mécanisme dynamique. A l'heure actuelle, il est considéré comme très plausible que ce mécanisme fasse intervenir un "effet dynamo" dans la masse de fer liquide en mouvement qui constitue la couche externe du noyau terrestre. Le terme d'"effet dynamo" désigne un phénomène par lequel un écoulement de liquide conducteur d'électricité parvient à amplifier, puis à entretenir un champ magnétique, en l'absence de toute excitation extérieure. Le champ magnétique ainsi créé peut alors, par l'intermédiaire des forces de Laplace, perturber l'écoulement qui lui donne naissance. C'est cet équilibre entre l'écoulement et le champ magnétique qui serait à l'origine de la dépendance temporelle complexe de celui-ci. Ce mécanisme a été proposé comme mode de production du champ magnétique solaire par J. Larmor en 1919 [77], avant d'être transposé dans le domaine géophysique.

Cette image a reçu en 1995 une confirmation éclatante lorsque G.A. Glatzmaier et P.H. Roberts ont observé une inversion du champ magnétique produit par leur modèle numérique du noyau terrestre [59]. Les équations qui décrivent les processus mis en jeu sont cependant trop complexes pour qu'il soit possible de les résoudre à l'échelle de la Terre sans introduire des approximations supplémentaires, dont il est difficile de contrôler l'incidence sur les résultats. Il est donc important de réaliser en laboratoire des expériences de références, conjointement aux simulations numériques.

La grande taille et les grandes vitesses qu'il est nécessaire de mettre en œuvre, ainsi que la très haute conductivité électrique que doit posséder le fluide employé, font que l'effet dynamo n'a pu être observé qu'en 2001, dans les deux expériences de Karlsruhe [135] et Riga [52]. Dans ces deux expériences, le fluide utilisé est le sodium liquide, et les structures de l'écoulement qui produisent le champ magnétique sont tenues fixes par des parois internes, ce qui a probablement une incidence sur le mécanisme de saturation.

D'autres expériences ont été construites, ou sont en cours de construction, pour observer l'effet dynamo dans des écoulements "libres", dans lesquels le champ magnétique pourrait avoir des comportements plus riches. Parmi ces expériences, nous citerons celles de D. Lathrop [106], C. Forest [48], et S. Colgate [36], aux Etats-Unis, celle de P. Frick [49] en Russie, et enfin les expériences "DTS" "Derviche Tourneur Sodium" [30] et "VKS" "von Kármán Sodium" [15] en France. Les deux premières et la dernière de ces expériences mettent en jeu des écoulements dits "de von Kármán", dans lesquels deux turbines coaxiales tournent en contra-rotation aux deux extrémités d'un récipient. Un effet très net de l'écoulement sur un champ magnétique appliqué



a pu être mis en évidence dans la première et la dernière de ces expériences, mais l'effet dynamo n'a pas pu être observé. Les autres n'ont pas fonctionné à ce jour.

Ce mémoire de thèse présente un travail qui s'inscrit dans le cadre plus général de l'effort fourni par les centres de Saclay et de Cadarache du Commissariat à l'Energie Atomique et les Ecoles Normales Supérieures de Paris et de Lyon pour observer l'effet dynamo dans l'expérience "VKS".

Nous y présentons dans un premier temps les résultats de mesures de caractérisation hydrodynamique de l'écoulement mis en œuvre, réalisées dans une réplique à échelle 1 :2 de l'expérience "VKS" utilisant de l'eau. Ces mesures portent sur la forme de l'écoulement moyen et sur les couples fournis par les moteurs qui l'entretiennent, ainsi que sur les caractéristiques de ses fluctuations à grande échelle. Elles nous ont permis de mettre en lumière et de quantifier des comportements extrêmement variés, parmi lesquels une "bifurcation globale" de la structure de l'écoulement, ainsi qu'un comportement "intermittent" à échelle de temps longue, alors même que les fluctuations turbulentes y sont intenses et pleinement développées. Nous avons constaté que la forme de l'écoulement varie de manière non-triviale et souvent contre-intuitive en fonction de la forme géométrique du montage, mais que les arguments dimensionnels et de symétrie qu'il est possible de bâtir sur les différentes grandeurs que nous avons mesurées sont vérifiés à un bon degré d'approximation. De même, nous avons pu établir et vérifier une équation de bilan qui lie certaines caractéristiques des fluctuations turbulentes aux couples fournis par les moteurs. Enfin, nous avons étudié l'effet d'une rotation d'ensemble imposée au montage. Nous avons constaté que la force de Coriolis affecte très fortement la forme de l'écoulement, ainsi que les couples qui lui sont fournis.

Dans une deuxième partie, nous présentons les aspects magnéto-hydrodynamiques de notre travail. Nous rapportons des résultats obtenus par résolution numérique de l'équation d'induction, à partir de champs de vitesses mesurés dans l'expérience utilisant de l'eau, qui montrent la possibilité d'un effet dynamo dans les écoulements de von Kármán, pour des valeurs du seuil toutefois élevées. Les résultats de simulations réalisées en présence d'un champ extérieur sont comparés avec ceux obtenus expérimentalement dans l'expérience "VKS". Nous présentons ensuite quelques réflexions de nature plus théoriques, portant d'une part sur les propriétés de symétrie des différents modes propres observés dans les résultats des simulations, et d'autre part sur une amorce d'étude des mécanismes d'induction pouvant intervenir dans les dynamos "von Kármán", sur la base d'une analyse de stabilité linéaire par la méthode de Galerkin. En fin de ce mémoire, nous présentons et discutons certains résultats expérimentaux obtenus dans l'expérience "VKS".

Première partie

Etude hydrodynamique de l'écoulement  
de von Kármán.



## Chapitre 2

# Introduction de la partie hydrodynamique.

Dans cette introduction, nous présentons le cadre général de notre étude, qui est celui de l'étude hydrodynamique des structures à grande échelle d'un écoulement turbulent. Nous commençons par rappeler brièvement les équations qui décrivent le mouvement des fluides, ainsi que les difficultés que pose leur résolution. Nous dressons ensuite un bilan des travaux antérieurs se rapportant aux écoulements de von Kármán qui nous intéressent plus particulièrement. Nous présentons pour finir le plan de notre étude.

### 2.1 Les équations de l'hydrodynamique. Les difficultés posées par la turbulence.

Au cours de cette section, nous rappelons brièvement les équations de Navier-Stokes, qui décrivent l'évolution de l'écoulement de sodium de l'expérience "VKS". Nous rappelons ensuite les difficultés pratiques que pose leur résolution dans le cas des écoulements turbulents.

#### 2.1.1 Les équations de Navier-Stokes.

L'écoulement de l'air derrière une voiture et celui de l'eau d'un fleuve derrière les piles d'un pont sont deux exemples courants d'écoulements. Même s'ils sont bien sûr très différents, ces écoulements donnent tous deux une impression caractéristique d'extrême désordre, et d'enchevêtrement de structures tourbillonnaires de tailles très différentes : ils sont tous deux turbulents.

Un autre point commun qu'ont ces écoulements est qu'ils sont tous deux décrits par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f} \\ \text{div}(\vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\vec{v}$  est le champ de vitesse du fluide,  $\rho$  et  $\nu$  sont respectivement sa masse volumique et sa viscosité cinématique, considérées uniformes dans l'écoulement, et  $p$  est le champ de pression. Le terme  $\vec{f}$  représente la résultante des forces qui s'exercent à distance sur le fluide par unité de masse (accélération de la gravité, forces de référentiel, etc.). Ces équations ont un statut ambigu : leur énoncé tient en deux lignes, leur domaine de validité couvre l'immense majorité des écoulements de fluides usuels et ses bornes sont connues. Leur résolution dans le

cas des écoulements laminaires ne pose que quelques difficultés. Dans le cas des écoulements turbulents, cependant, leurs solutions sont introuvables par les moyens actuels, et il est de plus probable qu'elles ne seraient d'aucune utilité pratique !

### 2.1.2 Le nombre de Reynolds.

Pour illustrer les difficultés considérables que soulève la résolution de ces équations, intéressons-nous plus particulièrement à l'un des écoulements que nous avons cités, l'écoulement de l'air autour d'une voiture, et considérons le mouvement d'une particule d'air. L'équation qui régit l'évolution de la vitesse de la particule s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\text{grad}}p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}$$

Le champ de vitesse autour d'elle doit toujours vérifier la compression d'incompressibilité :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

L'échelle des longueurs de l'écoulement est de l'ordre de la longueur de la voiture,  $\mathcal{L}$ , et les vitesses qu'il met en jeu sont de l'ordre de sa vitesse,  $\mathcal{V}$ . Nous voyons que les accélérations subies par la particules sont d'ordre  $\mathcal{V}^2/\mathcal{L}$  environ. Dans le même temps, nous voyons que l'ordre de grandeur des efforts visqueux que la particule subit est donné par  $\nu\mathcal{V}/\mathcal{L}^2$ . Il n'est pas possible de connaître *a priori* l'ordre de grandeur des forces de pression : en effet, ces forces ne sont pas imposées par un phénomène particulier, mais plutôt par le fait que l'écoulement doive rester incompressible. Par conséquent, si une distribution de forces particulièrement intense tend à faire converger le fluide en un point, une distribution de pression d'intensité adaptée va se développer pour la contre-balancer, et pour forcer la divergence de l'écoulement à rester nulle. Les forces de pression sont donc systématiquement du même ordre de grandeur que les forces les plus intenses qui s'exercent sur le fluide. Nous voyons alors que le rapport de l'intensité des accélérations subies par la particule sur celle des efforts visqueux qui s'exercent sur elle est donné par :

$$\text{Re} = \frac{\mathcal{V}\mathcal{L}}{\nu}$$

Ce rapport est appelé nombre de Reynolds. Dans le cas de notre écoulement d'air, de viscosité environ  $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , qui se développe sur une longueur d'environ 5 m, et dans lequel les vitesses sont de l'ordre de  $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , nous voyons que sa valeur est extrêmement élevée, de l'ordre de  $10^7$ . Par conséquent, les particules d'air situées au voisinage de la voiture subissent des accélérations *dix million* de fois plus importantes que les efforts qu'elles s'exercent les unes sur les autres par le biais de la viscosité. Nous comprenons maintenant l'aspect désordonné de l'écoulement que nous avons évoqué au début de ce paragraphe : en avançant, la voiture pousse devant elle les particules d'air, qui se déplacent, et en bousculent d'autres par le biais des forces de pression. Le processus se répétant, la voiture provoque dans l'air qui l'entoure un immense désordre, que les forces de viscosité mettent très longtemps à calmer.

Intéressons-nous maintenant à la deuxième caractéristique des écoulements turbulents que nous avons relevée, qui était la grande disparité de taille des structures qui s'y développent. Appelons  $\delta$  l'échelle de longueur sur laquelle la viscosité parvient à homogénéiser les vitesses du fluide. Nous voyons alors que  $\delta$  est la distance à laquelle les forces de viscosité exercées par une particule de fluide bougeant à la vitesse  $\mathcal{V}$  sont de l'ordre de grandeur d'une accélération mesurable, donc d'ordre  $\mathcal{V}^2/\mathcal{L}$ . Nous avons donc :

$$\mathcal{V}^2/\mathcal{L} \sim \frac{\mathcal{V}}{\delta^2}$$

Qui se ramène à  $\delta \sim \mathcal{L}/\sqrt{\text{Re}}$ . Nous voyons donc que, dans notre écoulement dont le nombre de Reynolds vaut  $10^7$ , il est possible de voir se développer des structures environ 3000 fois plus petites que la voiture, donc de taille millimétrique.

La méthode actuellement la plus utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes est la simulation numérique, qui calcule l'évolution de la vitesse en chaque point d'un maillage qui couvre l'écoulement. Pour que ces méthodes donnent de bons résultats, il est en pratique nécessaire que chaque structure de l'écoulement s'étende sur plusieurs mailles. Nous voyons alors que pour calculer l'évolution de notre écoulement dont le nombre de Reynolds vaut  $10^7$ , il est nécessaire d'entourer la voiture de mailles dont la taille est de l'ordre du millimètre, et ce sur un volume qui s'étend sur quelques mètres dans chaque direction. Pour connaître l'évolution de notre écoulement, nous devons donc effectuer des calculs compliqués portant sur *plusieurs dizaines de milliards* de points de grille ! Nous voyons bien que la résolution par le calcul direct des équations de Navier-Stokes n'est pas praticable. De plus, nous voyons que le résultat du calcul, si nous parvenions à l'obtenir, nous renseignerait avec précision sur le mouvement de chacune des petites structures de l'écoulement, là où une information moins diluée nous suffirait probablement (par exemple, coefficient de traînée de la voiture, forme approximative des structures tourbillonnaires les plus importantes). Nous nous trouvons donc dans la situation peu enviable où nous savons que, pour obtenir les quelques chiffres qui nous intéressent, nous devons en déterminer un nombre immense, et ce par une méthode compliquée.

### 2.1.3 L'approche statistique de la turbulence.

Cette situation évoque irrésistiblement celle qui est rencontrée en physique statistique. Dans cette discipline aussi, les particules qui composent le système étudié sont en tellement grand nombre qu'il est impossible de résoudre exactement les équations qui décrivent leur mouvement. D'un autre côté, c'est précisément ce fait qui permet d'établir par des arguments probabilistes un lien entre les quelques caractéristiques réellement pertinentes du système (pression, température, masse volumique, aimantation) et les propriétés des éléments microscopiques qui le composent. Cette analogie a inspiré deux démarches complémentaires :

- D'une part, les "thermodynamiciens de la turbulence" ont choisi de postuler l'existence d'une "fonction d'état du fluide turbulent", permettant de déterminer l'influence sur les structures macroscopiques de l'écoulement des petites échelles qu'elles engendrent. De cette façon, il est possible de ne résoudre les équations de Navier-Stokes que sur une grille assez lâche, en leur adjoignant des termes supplémentaires représentant l'effet des structures plus petites, non résolues. Il est assez difficile de dégager une image claire des processus physiques associés aux différents termes de l'infinie variété de modèles "RANS", "URANS", "LES" ou "QDNS" existants, mais ils permettent de construire des avions qui volent. Nous renvoyons le lecteur à [81, 124] pour un panorama de ces méthodes.
- De leur côté, les "physiciens statisticiens de la turbulence" ont choisi de s'intéresser à l'étude des "atomes" de la turbulence hydrodynamique que sont les structures à moyenne et petite échelle des écoulements, et de tenter d'obtenir une compréhension des propriétés des écoulements turbulents comparable à celle que la physique statistique donne de la matière au repos.

### 2.1.4 Quelques propriétés statistiques des petites échelles des écoulements turbulents.

La physique statistique des écoulements turbulents est une discipline difficile. Nous n'en rappellons ici que quelques points marquants, et encourageons le lecteur à se plonger dans la

lecture de [64, 93, 50].

### La cascade de Richardson.

L'image physique qui sert actuellement de fil d'Ariane aux réflexions sur la turbulence hydrodynamique est celle de la "cascade de Richardson" [118] : l'énergie cinétique est donnée par le système de forçage aux structures tourbillonnaires de grande taille. Celles-ci ont une dynamique essentiellement non-visqueuse, et ne peuvent donc pas la dissiper. Par contre, elles peuvent en se déstabilisant créer des structures "filles" plus petites, à qui elles transmettent leur énergie cinétique. Ces structures filles peuvent à leur tour se fragmenter, et transmettre ainsi l'énergie à des structures d'échelle toujours plus petites. Au dernier stade de la cascade, l'énergie est transmise à des échelles si petites qu'elle peut être dissipée directement par les effets visqueux.

### Le régime inertiel. Le spectre de puissance de Kolmogorov.

Un point empiriquement bien établi est que l'énergie dissipée par unité de masse d'un écoulement turbulent tend vers une limite finie quand son nombre de Reynolds tend vers l'infini. (voir Sreenivasan [133] pour une compilation de données expérimentales). Ceci implique que la façon dont les grandes échelles de l'écoulement se fragmentent et transmettent l'énergie aux structures plus petite ne dépend pas des détails du comportement de celles-ci. Aux très grandes échelles de l'écoulement, les structures sont forcément influencées par la forme du montage. Pour des échelles plus petites, il est possible que les effets de cette anisotropie s'effacent progressivement. Il est donc possible qu'il y ait, à très grand nombre de Reynolds, une gamme d'échelles suffisamment petites pour que le comportement des structures ne dépende pas de la forme du montage, mais suffisamment grandes pour qu'il ne dépende pas non plus de la viscosité. Dans cette gamme d'échelles, appelée "gamme inertielle", les seules variables qui conditionnent les propriétés statistiques de l'écoulement sont d'une part l'échelle, et d'autre part la quantité d'énergie qu'il doit dissiper par unité de temps et de masse, notée  $\epsilon$ . Ce raisonnement est exposé dans un article de A. N. Kolmogorov de 1941 [71], depuis resté immensément célèbre. Dans cette article, A. N. Kolmogorov montre que la seule forme possible de la fonction de structure d'ordre 2 de l'écoulement qui soit compatible avec les hypothèses d'homogénéité, d'isotropie, et d'auto-similarité est :

$$\langle |v_{\parallel}(l) - v_{\parallel}(0)|^2 \rangle = C_2 \epsilon^{2/3} l^{2/3}$$

Le terme  $\langle |v_{\parallel}(l) - v_{\parallel}(0)|^2 \rangle$  est appelé fonction de structure longitudinale d'ordre 2. Il est par définition égal à l'espérance mathématique du carré de la variation de vitesse longitudinale entre deux points quelconques distants de  $l$  dans l'écoulement. (La composante longitudinale est la composante de la vitesse qui est parallèle au segment qui sépare les points). Cette expression n'est bien sûr qu'une forme asymptotique, qui n'est valide que dans la gamme inertielle, et uniquement pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds. Il est possible de transposer cette expression dans l'espace de Fourier, et d'en tirer l'expression bien connue du spectre de puissance des fluctuations de vitesse dans le régime inertiel :

$$E(k) = C_{Kol} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

La constante  $C_{Kol}$  qui intervient dans cette expression est appelée "constante de Kolmogorov". Ce spectre a été observé dans de très nombreuses expériences [50]. A défaut d'être le résultat *exact* de la physique statistique de la turbulence, (qui est d'ailleurs lui aussi dû à A. N. Kolmogorov), il peut être considéré comme son résultat robuste.

**L'intermittence.**

Il est possible d'obtenir le résultat d'A.N. Kolmogorov par des arguments d'analyse dimensionnelle simples. Les hypothèses de ces arguments sont identiques aux siennes : il faut que les propriétés statistiques des fluctuations de vitesse à l'échelle  $l$  ne dépendent ni du point considéré, ni de la direction considérée, mais uniquement de  $l$  et de  $\epsilon$ . Si ces hypothèses étaient vérifiées strictement, il serait possible d'utiliser les mêmes arguments dimensionnels pour obtenir les expressions des fonctions de structure aux différents ordres comme :

$$\langle |v_{\parallel}(l) - v_{\parallel}(0)|^p \rangle = C_p \epsilon^{p/3} l^{\zeta_p}$$

Les  $\zeta_p$  valant  $p/3$  à tous les ordres. Malheureusement, de nombreuses expériences ont permis de mettre en évidence des déviations à ce comportement. Les  $\zeta_p$ , ne sont linéaires en  $p$  que pour les petites valeurs, et deviennent significativement inférieurs à  $p/3$  dès que  $p$  est supérieur à 5 environ. La signification concrète de tout ceci devient apparente si nous remarquons que les valeurs des fonctions de structure pour une séparation  $l$  donnée sont égales aux moments de la distribution des écarts de vitesse longitudinales mesurés pour des points séparés de  $l$  dans l'écoulement. Ainsi, si les  $\zeta_p$  sont linéaires en  $p$ , il est possible de montrer que le fait de varier la séparation  $l$  ne change pas la forme fonctionnelle de cette distribution, mais se traduit par un simple changement d'échelle sur les axes du graphe. Le fait que les  $\zeta_p$  d'ordre élevé soient inférieurs à  $p/3$  implique que les moments d'ordre élevé de la distribution des incréments de vitesse diminuent plus lentement que prévu lorsque  $l$  décroît. Les distributions d'incrémentes à petite échelle prennent une allure caractéristique (voir [146] pour un exemple), très piquée en 0 (les vitesses en deux points séparés de  $l$  petit sont souvent très semblables), mais munie d'ailes très larges (il est par contre possible que les vitesses soient extrêmement différentes en deux points séparés de  $l$  petit). Nous voyons donc qu'aux petites échelles de la gamme inertielle, l'écoulement est la plupart du temps très lentement variable, mais peut par contre être localement extrêmement accidenté. On dit qu'il est intermittent. Comme ce phénomène n'est visible qu'à des échelles assez petites, il reste possible qu'il soit dû à une influence naissante de la dissipation visqueuse, et non à un comportement inertiel qui mettrait plusieurs décades en échelles à se développer. Il existe donc une "course à la gamme inertielle", dont l'enjeu est de construire un montage possédant une gamme inertielle suffisamment étendue pour qu'il soit possible de discriminer entre ces deux explications. Il semble cependant qu'un consensus se dégage pour considérer l'intermittence comme un phénomène inertiel, donc réellement associé à une insuffisance de la théorie de Kolmogorov. De nombreux modèles ont été développés pour rendre compte de l'intermittence, qui sont présentés dans l'ouvrage de U. Frisch [50].

**2.1.5 Conclusion**

De ce très rapide tour d'horizon, nous pouvons retenir que la turbulence hydrodynamique est un problème "coriace", qui possède de très nombreuses facettes, et qui est loin d'être résolu. Une question intéressante en elle-même est d'ailleurs d'imaginer la forme que pourrait avoir la théorie qui apporterait la réponse à autant de questions... En tout état de cause, il n'est pas possible de connaître avec une bonne précision la forme des grandes structures de l'écoulement de l'expérience "VKS" par des calculs ou des arguments théoriques, et il est donc indispensable d'avoir recours à l'expérimentation.



## 2.2 L'écoulement de von Kármán.

L'écoulement de sodium liquide mis en œuvre dans l'expérience "VKS" appartient à la classe des écoulements "de von Kármán". Ces écoulements ont donné lieu à un grand nombre de travaux analytiques, numériques et expérimentaux, dont nous rappelons les grandes lignes dans cette section.

### 2.2.1 Les travaux analytiques.

Le problème de l'écoulement engendré par la rotation d'un disque de rayon infini dans un domaine infini de fluide au repos a été soulevé pour la première fois par T. von Kármán en 1921 [70]. Dans son article, cet auteur pose le problème, et montre comment il est possible de le résoudre en ramenant par une transformation de similitude le jeu complet des équations de Navier-Stokes à un système de deux équations différentielles ordinaires non-linéaires et couplées. Il n'est pas facile de déterminer d'après la littérature plus récente si la solution des équations est ou non présentée dans l'article original.

En 1934, W. G. Cochran [35] fournit la solution numérique du problème. Les courbes, qui sont reprises dans [60], montrent que le disque agit comme une pompe centrifuge, aspirant le fluide à grande distance, et l'éjectant radialement dans une couche limite située à son voisinage.

Attirés par la possibilité d'obtenir ainsi à relativement bon compte des solutions exactes des équations de Navier-Stokes, de nombreux auteurs commencent à étudier des généralisations du problème. Dès 1940, U. T. Bödewadt présente sa solution du problème de l'écoulement engendré par le contact d'un fluide tournant sur un disque immobile. G. K. Batchelor [8] présente en 1951 son analyse du cas général dans lequel le disque et le fluide possèdent tous deux une vitesse de rotation, ainsi que celle du cas de deux disques infinis se faisant face, et pouvant tourner à des vitesses quelconques. Dans le deuxième cas, il introduit, en plus du paramètre  $s$  représentant le rapport des vitesses de rotation des disques, un nombre de Reynolds défini sur l'entrefer du système. Il ne résout pas les équations obtenues, mais dresse sur la base d'arguments qualitatifs le portrait des solutions qu'il attend. Dans le cas de la co-rotation de deux disques, il prédit que le fluide tourne à une vitesse angulaire constante sur la plus grande partie de l'entrefer, et que deux couches limites assurent le raccord au niveau des disques. Dans la couche limite située sur le disque dont la rotation est la plus rapide, la vitesse radiale est sortante, et elle est rentrante au voisinage de l'autre disque. Dans le cas de la contra-rotation exacte ( $s = -1$ ), il prédit que l'entrefer se sépare en deux parties d'importances égales, séparées par une zone de transition, et dans chacune desquelles le fluide possède une vitesse angulaire proche de celle du disque voisin. Une couche limite existe au voisinage de chaque disque.

En 1953, K. Stewartson fait une entrée fracassante dans le débat. Se fondant sur un développement de l'écoulement en puissances du nombre de Reynolds (et quelques observations expérimentales...), il déclare que, dans les deux cas mentionnés plus haut, le fluide n'a pas de vitesse angulaire dans l'entrefer, mais que sa vitesse  $y$  est purement méridienne. La vitesse angulaire n'est d'après lui importante que dans des couches limites situées au voisinage des disques.

Plus récemment, la résolution numérique du système d'équations différentielles ordinaires a été étudiée par un très grand nombre d'auteurs. La conclusion de cette étude, s'il en est une, est que ce système possède, suivant la valeur du rapport  $s$ , une fantastique variété de solutions, parmi lesquelles peuvent être trouvées aussi bien celles prédites par G. K. Batchelor que celles prédites par K. Stewartson. Brady et Durlofsky [19] ainsi que Zandbergen et Dijkstra [145] citent le travail de thèse de Szeto [138] comme présentant les résultats les plus exhaustifs. D'après cet auteur, la solution est unique pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à 55 quelle que

soit la valeur de  $s$ . Pour des valeurs plus grandes, la solution n'est jamais unique, quelle que soit la valeur de  $s$ . Pour chaque valeur de  $s$ , il existe une branche continue de solutions menant de  $\text{Re} = 0$  à  $\text{Re} = \infty$ . Par contre, il n'existe pas de branche continue de solution s'étendant de  $s = 1$  (co-rotation parfaite) à  $s = -1$  (contra-rotation parfaite). Il semble exister une zone de l'espace des paramètres dans laquelle 19 solutions différentes peuvent être obtenues ! Cet auteur rapporte l'existence d'une seule bifurcation super-critique, pour  $s = -1$ ,  $\text{Re} = 119.8$ , valeur à laquelle l'écoulement peut passer d'une structure possédant deux cellules symétriques à une structure possédant deux cellules de tailles différentes.

Pearson [104] semble avoir le premier étudié numériquement le problème de disques de rayon fini. Pour des disques enfermés dans une enceinte imperméable, il obtient des solutions assez similaires à celles de Batchelor. Dans le cas de conditions "libres" sur les bords, les solutions obtenues sont plutôt du type de celles de Stewartson. Il rapporte lui aussi la possibilité d'un état de l'écoulement possédant deux cellules de tailles différentes pour  $s = -1$ . Parmi les travaux plus récents, nous citerons ceux de Dijkstra et van Heijst [42] et ceux de Brady et Durlofsky [19]. Tous ces auteurs s'accordent sur la grande influence des conditions aux limites imposées sur le pourtour des disques. Le consensus semble être que les solutions obtenues en géométrie "fermée" sont proches des solutions auto-similaires de type "Batchelor", tandis que celles obtenues en géométrie "ouverte" sont proches des solutions de type "Stewartson".

### 2.2.2 Les travaux expérimentaux.

Durant une assez longue période, tout ce travail analytique ne semble avoir trouvé qu'un faible écho expérimental. Il est fait référence aux travaux de F. Schultz-Grunow et de T. Okaya et M. Hasegawa, qui auraient étudié de manière indépendante le cas d'un disque unique tournant dans une enceinte cylindrique [128, 102]. Dans son article de 1953, K. Stewartson s'inspire de visualisations qualitatives d'un montage expérimental fruste, dont les résultats ne sont pas rapportés en détail. Deux disques de carton de 6 pouces de diamètres sont montés sur un tour d'atelier, et la mesure est effectuée en déplaçant un brin de laine dans l'entrefer... En 1958, Picha et Eckert ainsi que Welsh et Hartnett [111, 144] présentent deux études plus précises de l'écoulement de co-rotation, dans lequel les deux disques tournent dans la même direction, mais avec des vitesses variables. Ces deux études, assez complètes, mettent en évidence la présence d'un cœur en rotation solide situé près de l'axe des disques, dans le cas où ils tournent avec des vitesses identiques, dans la même direction, dans un espace libre. Ce point semble relativement contradictoire avec l'existence d'une solution auto-similaire. Pour l'ensemble des mesures, toutefois, l'écart qui sépare les disques représente une fraction supérieure au neuvième de leur rayon, et il est possible que l'influence de la zone périphérique s'étende trop loin vers l'intérieur pour que les solutions auto-similaires puissent être observées. En tout état de cause, les auteurs ne s'aventurent pas dans la controverse Batchelor-Stewartson. Plus récemment, Dijkstra et van Heijst [42], puis Szeri *et al.* [139] se sont repenchés expérimentalement sur le problème, dans des situations beaucoup plus aplaties (le rapport rayon/entrefer va jusqu'à 80 chez Szeri *et al.*). Dijkstra et van Heijst observent, dans un montage "enclos", que l'écoulement peut dans le cas de la contra-rotation ( $s < 0$ ) posséder deux cellules de recirculation méridienne, dont l'importance varie selon la valeur de  $s$ . Szeri *et al.* arrivent aux mêmes conclusions, mais ils accordent beaucoup plus d'importance au cas de la co-rotation. Enfin, les travaux récents de Schouveiler *et al.* [127] et de Gauthier *et al.* [55], ont été consacrés aux modes d'instabilité de l'écoulement, dans le cas où l'un des disques est au repos (Schouveiler *et al.*), ou dans le cas où les deux sont mobiles (Gauthier *et al.*).

Ces deux derniers articles mis à part, l'ensemble des travaux que nous avons évoqués avaient

pour but avoué d'étudier les solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes et le lien qu'elles entretenaient avec la réalité. Ils ont donc été systématiquement menés dans des configurations très aplaties, dans lesquels la hauteur de l'entrefer n'atteignait jamais plus du quart du rayon des disques.

Il existe une autre branche de la littérature, qui est presque complètement disjointe, et qui étudie cette classe d'écoulements dans le cas de disques finis, séparés d'une distance qui est du même ordre de grandeur que leur rayon. L'intérêt de cet arrangement est que l'écoulement de contra-rotation permet de produire une turbulence bien développée dans un montage compact. Dans cet esprit, les disques sont fréquemment munis de pales ou de jupes. L'écoulement de von Kármán "nouvelle manière" fait son apparition simultanément dans l'équipe d'Y. Couder, à l'E.N.S. de Paris, et dans celle de S. Fauve, à l'E.N.S. de Lyon. Il permet la mise en évidence et l'étude de filaments de vorticités intenses [43, 27, 28], ainsi que l'étude de la distribution des fluctuations de pression [45]. Parallèlement, il est mis en œuvre dans l'hélium liquide, dans l'équipe de P. Tabeling, toujours à l'École Normale de Paris [146, 9, 91, 3]. Le montage en hélium permet l'étude de l'intermittence du champ de vitesse (mise en évidence des "worms") et d'un champ scalaire passif (en l'occurrence la température), à très haut nombre de Reynolds. Il permet aussi l'étude du transfert de l'énergie cinétique au travers des échelles. Pendant ce temps, l'équipe de l'E.N.S. de Lyon commence par étudier les corrections à apporter à l'hypothèse de la "turbulence gelée" de Taylor pour déduire avec précision les propriétés spatiales de la turbulence à partir de mesures réalisées dans le domaine temporel [112]. Rapidement, le domaine d'intérêt de cette équipe se déplace vers l'étude des grandes échelles de l'écoulement et de leur influence sur les propriétés des structures turbulentes à petite échelle [74, 130], puis sur l'étude des propriétés statistiques de l'injection d'énergie mécanique [73, 94, 21, 5]. Ce domaine a par ailleurs été étudié par O. Cadot [29] et C. Tison [142], de l'université du Havre. L'écoulement de von Kármán de contra-rotation a également servi de "base" aux études consacrées à la turbulence lagrangienne par N. Mordant [95] (de l'E.N.S. de Lyon) et par l'équipe d'E. Bodenschatz [76, 75] (de l'université de Cornell, aux Etats-Unis). Enfin, il a été et est toujours employé dans des expériences "dynamo", utilisant du gallium [100] ou du sodium [15, 106, 48].

Les premiers stades de la transition vers la turbulence dans l'écoulement de von Kármán "non-aplati" ont enfin récemment fait l'objet d'une étude numérique poussée de C. Nore *et al.* [98]. La configuration assez voisine de l'écoulement de Taylor-Green avait dès les années 80 été étudiée par M.-E. Brachet [18].

### 2.2.3 Conclusion de l'étude bibliographique de l'écoulement de von Kármán

De cette étude bibliographique, il ressort que les travaux portant sur l'écoulement de von Kármán peuvent être séparés en deux catégories distinctes, entre lesquelles peu de liens existent. D'une part, une première branche regroupe les travaux inspirés directement par le travail original de von Kármán, et qui étudient des écoulements très aplatés. Ces écoulements ont été étudiés analytiquement, puis numériquement et expérimentalement. Les résultats obtenus ne sont pas *a priori* directement pertinents pour notre étude. L'autre catégorie de travaux, auxquels les nôtres s'apparentent, regroupe des études de manière générale plus récentes, menées dans des montages d'allongement sensiblement unitaire. Mises bout-à-bout, ces études donnent un panorama assez complet du comportement des structures à petite échelle de l'écoulement, ainsi que des fluctuations du couple opposé à la rotation des disques par le fluide. La caractérisation des structures à grande échelle de l'écoulement, elle, n'est par contre pas suffisante pour les besoins de conception de l'expérience "VKS". En particulier, aucune mesure du champ de vitesse moyen de l'écoulement n'avait à notre connaissance été effectuée.

## 2.3 Plan de la première partie.

Ayant ainsi mis en évidence les raisons qui ont motivé notre étude de caractérisation hydrodynamique des grandes échelles de l'écoulement de l'expérience "VKS", nous pouvons maintenant en donner les grandes lignes, et clore l'introduction de cette première partie. Nous commençons par décrire au chapitre 3 le montage expérimental "VKE", sur lequel cette étude a été effectuée. Ce montage est un prototype à échelle 1 :2 de l'expérience "VKS", il utilise de l'eau. Nous présentons dans la deuxième partie de ce chapitre les arguments de symétrie et d'analyse dimensionnelle qui permettent d'extrapoler les résultats obtenus en eau au montage "VKS". Au chapitre 4, nous rapportons les résultats des mesures de l'écoulement moyen, les valeurs moyennes des couples fournis au fluide par les moteurs, ainsi que quelques résultats portant sur les fluctuations de pression et de vitesse. Certains comportements spécialement non-triviaux des grandes échelles de l'écoulement sont présentés et caractérisés au chapitre 5. Nous y mettons notamment en évidence une "bifurcation globale" qui affecte l'écoulement moyen, ainsi qu'une dépendance temporelle "intermittente" de sa structure. Dans le chapitre 6, nous présentons et discutons une relation de bilan intégral de moment cinétique, qui établit un lien quantitatif entre le couple fourni par les moteurs et les propriétés statistiques des fluctuations de vitesse. Cette relation nous permet de démontrer que les fluctuations à grande échelle de temps jouent un rôle dominant dans le transport de moment cinétique. Le chapitre 7 rapporte enfin les résultats obtenus sur un autre montage, le montage "VKR", qui nous a permis d'étudier l'influence de la force de Coriolis sur l'écoulement de von Kármán. Cette influence est très forte, et se traduit par un changement complet dans la physionomie de l'écoulement moyen, ainsi que par une très forte augmentation des couples fournis au fluide.



## Chapitre 3

# Montage expérimental. Moyens et méthodologie des mesures.

La première section de ce chapitre est consacrée à la description du montage expérimental VKE (“von Kármán Eau”), sur lequel nous avons obtenu la majeure partie des résultats d’hydrodynamique présentés dans ce mémoire de thèse. Nous décrivons dans un deuxième temps les moyens de mesures que nous avons mis en œuvre. La troisième section rassemble enfin les divers arguments de symétrie que nous avons utilisés pour rationaliser notre étude.

### 3.1 Le montage VKE.

#### 3.1.1 Description générale.

La figure 3.1 représente le montage VKE, ainsi que l’appareillage de vélocimétrie laser doppler. Sur la moitié gauche de l’image, nous pouvons distinguer les turbines, la cuve cylindrique et le châssis qui maintient l’ensemble. Le châssis est réalisé en tubes carrés soudés. Il sert de support aux moteurs (peu visibles sur la photographie, car situés à l’arrière-plan), ainsi qu’à deux platines qui assurent le maintien des cuves par le haut et le bas. Lors des mesures de couples et de fluctuations de pression, l’eau n’est contenue que par la cuve cylindrique, qui est en plexiglas. Pendant les mesures de vélocimétrie, il est possible de monter autour de celle-ci une cuve de forme parallélépipédique, afin de minimiser les effets de réfraction au passage des interfaces air/plexiglas et plexiglas/eau. Cette cuve est visible sur la photographie 3.1. Les platines sont réalisées en duralumin. Celle du bas sert de support au palier assurant le guidage en rotation de la turbine. Celle du haut est percée au diamètre intérieur de la cuve cylindrique, afin qu’il soit possible d’accéder à l’intérieur du montage sans tout démonter. La cuve est fermée par un couvercle amovible sur lequel est monté le palier de guidage de la turbine du haut. Les moteurs sont des moteurs brush-less d’une puissance unitaire de 1.8 kW, capables de fournir sans démultiplication un couple de 11.5 N.m. Ils entraînent les turbines par un système de courroies et de poulies. Un système de tuyauteries, de seaux et de serpillières permet de remplir et vidanger séparément la cuve cylindrique et la contre-cuve. Enfin, un tuyau raccordé au réseau d’air comprimé du bâtiment permet de mettre la cuve cylindrique en surpression afin de limiter le phénomène de cavitation.



FIG. 3.1 – Photographie du montage expérimental VKE.

### 3.1.2 Caractéristiques détaillées.

#### Le fluide de travail

Le fluide de travail utilisé est l'eau. Les deux grandeurs caractéristiques qui ont une influence sur son comportement hydrodynamique sont sa masse volumique, exprimée en  $kg.m^{-3}$ , et sa viscosité cinématique, exprimée en  $m^2.s^{-1}$ . La masse volumique de l'eau ne varie que faiblement en fonction de la température et de la pression dans la gamme où nous avons travaillé ( $20^{\circ}C < T < 40^{\circ}C$ ,  $10^5 Pa < P < 2.10^5 Pa$ ), et vaut  $999.941 kg.m^{-3}$  à  $20^{\circ}C$  et à pression normale. Nous avons donc considéré lors de la rédaction de ce mémoire que toutes nos mesures avaient été réalisées avec un fluide de masse volumique  $\rho = 1000 kg.m^{-3}$ . La viscosité cinématique de l'eau change elle de manière assez marquée en fonction de la température. Les valeurs qu'elle prend dans notre gamme de travail sont rapportées en table 3.1. Nous verrons au chapitre 4 que nous n'avons étudié notre écoulement que dans une gamme de nombre de Reynolds dans laquelle les effets visqueux sont très faibles, et n'ont qu'une faible influence sur les grandeurs que nous avons mesurées. Dans ce contexte, la connaissance précise de la valeur de la viscosité n'est pas une nécessité vitale, et nous avons décidé de considérer en première approximation que cette valeur est identique pour toutes nos mesures, et vaut  $1.10^{-6} m^2.s^{-1}$ .

T (°C)	$\nu$ ( $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
0	1.79
10	1.31
20	1.00
30	0.80
40	0.66
50	0.56
60	0.48

TAB. 3.1 – Viscosité cinématique de l'eau en fonction de la température sur la gamme  $0^\circ\text{C} < T < 60^\circ\text{C}$ .

### La cuve cylindrique. Les ailettes. Les fonds.

Nous avons utilisé deux cuves cylindriques différentes, toutes deux réalisées en plexiglas. La première avait un rayon intérieur de  $100 \pm 0.5$  mm, et un rayon extérieur de  $110 \pm 0.5$  mm. Son usure progressive a fait qu'il a fallu la remplacer par une autre, dont le rayon intérieur était de  $99 \pm 0.5$  mm, pour un rayon extérieur toujours égal à  $110 \pm 0.5$  mm. Cette différence de rayon intérieur nous a posé un problème lors de la mise sous forme adimensionnelle des résultats de mesure (voir troisième section de ce chapitre), ainsi que lors de la mise sous forme adimensionnelle des dimensions du montage. En effet, lorsque les turbines sont séparées de 178 mm dans une cuve de rayon  $R_c = 100$  mm, elles sont séparées de  $1.78R_c$ . Lorsque elles sont séparées de la même distance dans une cuve de rayon  $R_c = 99$  mm, elles sont séparées de  $1.7980R_c$ ... La mention systématique de rapports adimensionnels à quatre chiffres dans les légendes des figures n'ajoutait rien à la clarté du texte. Nous avons donc décidé d'adimensionner les résultats des mesures en utilisant le rayon de la cuve avec laquelle elles avaient été effectuées, tout en adimensionnant les cotes du montage par le rayon "nominal" de la cuve, 100 mm. Cet arrondi introduit certes une marge d'erreur de 1% sur les dimensions du montage, mais il réduit d'au moins autant le désarroi du lecteur.

Lors de certaines mesures, nous avons fixé quatre ailettes sur le pourtour de la cuve, de la façon représentée en figure 3.2. Ces ailettes sont longues de 125 mm, et leur section est un carré de côté 10 mm. Leur hauteur est donc suivant le rayon de la cuve utilisée de  $0.099$  ou  $0.1R_c$ , mais elle sera notée  $0.1R_c$  en accord avec la convention présentée dans le paragraphe précédent. Elles sont montées à mi-chemin entre les deux turbines, de manière à ne pas briser la symétrie du montage par retournement.

La cuve cylindrique présente une dernière particularité : le montage a été conçu de telle sorte qu'il est possible de changer la distance qui sépare les turbines. Comme nous avons effectué nos mesures avec des turbines séparées de  $1.78R_c$ , l'écoulement n'occupe pas la totalité de la longueur du cylindre. Afin d'empêcher que les mouvements du fluide situé derrière les turbines ne perturbent trop l'écoulement "utile", nous avons isolé celui-ci au moyen de deux disques de plexiglas de rayon 95 mm et d'épaisseur 10 mm, placés 50 mm derrière chaque turbine. Ces disques sont visibles sur la photographie 3.1.

### La contre-cuve.

Lors des mesures de vélocimétrie, nous avons placé la cuve cylindrique contenant l'écoulement dans une autre cuve, parallélépipédique, qui était elle aussi remplie d'eau. Cette contre-cuve



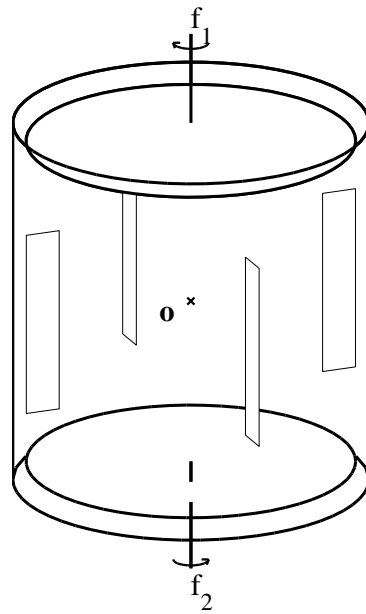


FIG. 3.2 – Schéma du montage muni d'ailettes.

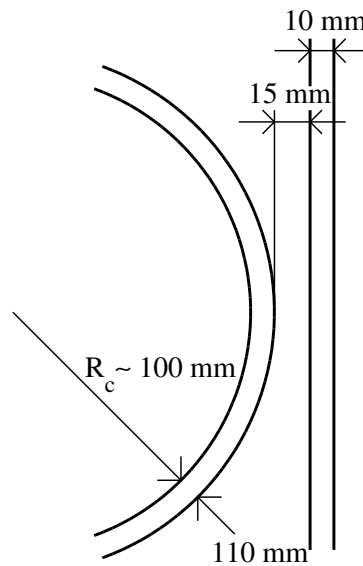


FIG. 3.3 – Schéma de la contre-cuve utilisée pendant les mesures de vélocimétrie.

permet de placer deux milieux d'indices de réfraction identiques de part et d'autre de la lentille constituée par la cuve cylindrique, et donc de minimiser la distortion des faisceaux du vélocimètre. Le passage de l'air à l'eau est reporté à la face d'entrée de la contre-cuve, qui est plane, et crée moins de déformations. La cuve est réalisée en plexiglas d'épaisseur 10 mm, et la distance qui sépare la face d'entrée de la cuve cylindrique est de 15 mm. Ces cotes sont rappelées sur la figure 3.3.

### La pression.

Les fluctuations de vitesse dans l'écoulement induisent des fluctuations de pression. S'il s'agit d'un écoulement de liquide assez vigoureux, il peut arriver qu'au sein d'une fluctuation particulièrement violente la pression baisse suffisamment pour que les gaz dissouts dans le liquide parviennent à créer une bulle. Ce phénomène s'apparente à celui de la cavitation. Si la bulle rencontre ensuite une zone de haute pression, elle implode et disparaît. Ce phénomène est rencontré dans de nombreuses situations industrielles, où il est gênant parce que l'implosion des bulles entraîne une usure prématurée des pièces au voisinage desquelles elle se produit. Dans le cas que nous avons le plus étudié, qui est celui de turbines de type "TM60" (voir plus loin) tournant en contra-rotation exacte en présentant au fluide la face convexe de leur pales, la "cavitation" apparaît lorsque la fréquence de rotation est de l'ordre de 15 Hz, à température ambiante. Au delà de cette fréquence, les bulles s'accumulent dans l'écoulement, et perturbent les mesures (voir chapitre 4). La fréquence de rotation à laquelle apparaît la cavitation dépend du type des turbines utilisées ainsi que de leur sens de rotation. Dans une configuration donnée, elle est de l'ordre de 0.75 fois la fréquence de rotation maximale que le couple fourni par les moteurs permet d'atteindre.

Nous avons donc doté notre montage d'un dispositif de mise en pression, qui retarde l'apparition de la cavitation de la manière suivante : la pression en chaque point de l'écoulement est égale à la pression qui règne à la surface du fluide, augmentée d'une correction (dans notre cas négligeable) due au poids du liquide situé au-dessus du point considéré, et des fluctuations dues au mouvement du fluide. La contribution due au mouvement du fluide est appelée *pression dynamique*, et la somme des deux autres est appelée *pression hydrostatique*. Nous voyons qu'une solution simple pour empêcher les fluctuations de pression dynamique de faire descendre la pression "totale" sous la pression seuil est de relever la pression qui règne à la surface. Pour quantifier tout cela, nous pouvons tenir le raisonnement suivant : nous savons par l'analyse dimensionnelle (voir troisième section de chapitre) que l'ordre de grandeur des fluctuations de pression dynamique est donné par  $C\rho(2\pi R_c)^2 f^2$ , où  $C$  est un coefficient sans dimensions, qui dépend de la forme détaillée du montage et un peu du nombre de Reynolds de l'écoulement,  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $R_c$  est le rayon de la cuve, choisi comme échelle de taille, et  $f$  est l'échelle des fréquences de rotation des turbines. Si la cavitation se produit à la fréquence  $f_{cav}$ , c'est que :

$$C\rho(2\pi R_c)^2 f_{cav}^2 = P_{surf} - P_{sat}.$$

Cette relation peut s'inverser et se mettre sous la forme :

$$f_{cav} = \frac{1}{2\pi R_c} \sqrt{\frac{P_{surf} - P_{sat}}{C\rho}}.$$

Dans le cas de l'eau pure à température ambiante, la pression de vapeur saturante est très faible devant la pression atmosphérique. L'air qui est dissout dans l'eau la remonte assez nettement, mais dans un calcul d'ordres de grandeur nous pouvons la supposer approximativement nulle. L'utilisation directe du réseau d'air comprimé du bâtiment nous permet de faire passer facilement  $P_{surf}$  de 1 à 2.5 bar. D'après la formule ci-dessus, cette opération permet d'augmenter la fréquence  $f_c$  d'apparition de la cavitation d'un facteur  $\sqrt{2.5} \simeq 1.5$ , qui nous permet de travailler à la fréquence maximale permise par les moteurs.

### La température.

La température de l'eau ne joue sur les caractéristiques de l'écoulement qu'au travers de la viscosité cinématique ou de la pression de vapeur saturante. Nous avons expliqué plus haut

que nous n'avions pas besoin de connaître très précisément la viscosité cinématique, et que nous appliquions de toute façon à la surface du fluide la pression nécessaire pour empêcher l'apparition de la cavitation. Nous avons donc décidé de ne pas contrôler de manière active la température dans l'écoulement, mais de la mesurer régulièrement et de changer l'eau lorsqu'elle devenait trop chaude (aux environs de  $60^{\circ}\text{C}$ ).

### Les turbines.

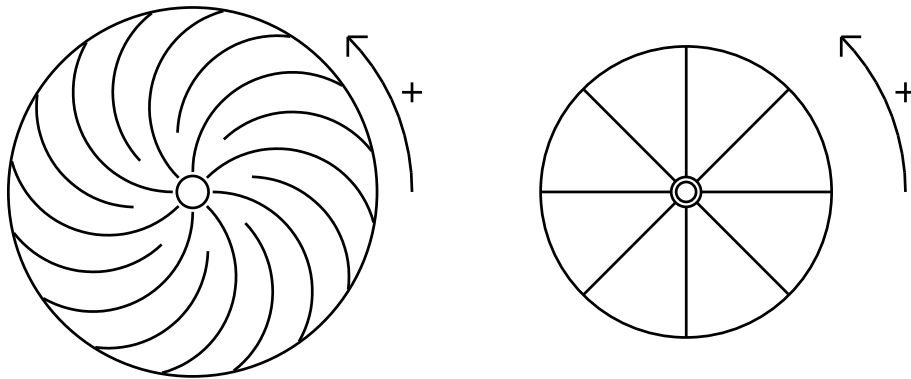


FIG. 3.4 – Schéma des turbines vues de face, à la même échelle. La flèche indique le sens de rotation “positif”. a) Turbines “TM60” b) Turbines “TM70”.

Les résultats présentés dans ce mémoire ont été obtenus avec des turbines de deux types. Les premières, que nous désignerons par habitude sous le nom de “TM60” (abréviation consacrée par l’usage des 0<sup>mes</sup> Turbines Métalliques du 6<sup>me</sup> type), sont représentées en figure 3.4a. Elles sont constituées d’un disque d’acier inoxydable, de rayon 92.5 mm et d’épaisseur 12 mm, sur lequel sont soudées 16 pales d’acier inoxydable d’épaisseur 3 mm, dont le rayon de courbure vaut environ 49 mm. La moitié des pales s’arrête à 30 mm du centre du disque, tandis que l’autre moitié se poursuit jusqu’à 10 mm du centre. Nous avons réalisé des mesures avec des pales hautes de 10 et 20 mm. Enfin, un trou central permet de serrer chaque turbine sur l’arbre qui la guide au moyen d’une vis. Les turbines sont peintes en noir pour ne pas réfléchir les faisceaux du vélocimètre. Les turbines du deuxième type, connues sous le sobriquet de “TM70”, sont représentées en figure 3.4b. Ces turbines sont constituées d’un disque en duralumin d’épaisseur 12 mm et de rayon 73 mm, sur lequel sont vissées huit pales, elles aussi en duralumin, d’épaisseur 3 mm. Nous avons réalisé des mesures avec des pales hautes de 10 et 20 mm. Le système de fixation des turbines “TM70” est identique à celui des turbines “TM60”, et elles sont aussi peintes en noir. Par convention, nous avons décidé d’appeler turbine numéro **1** la turbine qui est située dans le **haut** de l’écoulement, et turbine numéro **2** celle qui est située dans le **bas** de l’écoulement. Ces deux turbines tournent dans le sens **positif** lorsque vues de face elles tournent dans le sens **trigonométrique**. Le couple fourni par chaque moteur est **positif** s’il tend à faire tourner la turbine dans le sens **positif**, et négatif dans le cas contraire. Le moteur du bas transmet donc au fluide une quantité positive de moment cinétique lorsqu’il fournit un couple positif. Comme les deux turbines se font face, il faut malheureusement faire attention lors de l’écriture des bilans de moment cinétique au fait qu’un couple positif fourni par le moteur du haut signifie par contre qu’il **soustrait** du moment

cinétique au fluide.

### Les moteurs.

Les principes de fonctionnement des différents types de moteurs et des variateurs sont rappelés en annexe A.1. Les moteurs que nous avons utilisés sont des moteurs “brush-less” produits par la société Yaskawa, qui peuvent fournir une puissance unitaire de 1.8 kW, et un couple de 11.5 N.m. Leur alimentation électrique et leur contrôle est assuré par des variateurs qui sont eux aussi de marque Yaskawa. Les moteurs de ce type se distinguent par une grande robustesse et une grande précision. Leurs variateurs ont été développés pour être intégrés dans des systèmes automatisés complexes, et peuvent donc être commandés de manière assez souple par le biais d’une liaison série classique avec un ordinateur. Toutes ces qualités font qu’ils semblent bien adaptés à une utilisation dans le cadre d’un travail de recherche. L’expression de leur vocation industrielle pose par contre un problème de poids : l’électronique de puissance qui produit la tension sinusoïdale engendre un bruit électromagnétique assez intense. Comme ces perturbations ne représentent pas un inconvénient grave dans un contexte industriel, les concepteurs de variateurs n’ont pas fait d’efforts particuliers pour les limiter, et les vendeurs de variateurs ne sont visiblement pas au fait des différents traitements palliatifs... Il résulte de tout cela que les moteurs jouent leur rôle de moteur d’une manière irréprochable, mais qu’il est difficile en l’état de faire des mesures “propres” dans le montage. Sur le conseil du fournisseur, nous avons rajouté des ferrites sur l’ensemble des câbles reliant les moteurs aux variateurs, ainsi que des filtres en amont, qui limitent l’importance des perturbations réinjectées sur le réseau d’alimentation. Il est assez difficile de savoir si le rôle des ferrites se distingue de celui d’amulettes, mais les filtres ont permis de réduire assez notablement le bruit de mesure (voir paragraphe sur les mesures de pression), et ont amélioré sensiblement nos relations avec les occupants des pièces voisines.

### Le petit montage laminaire.

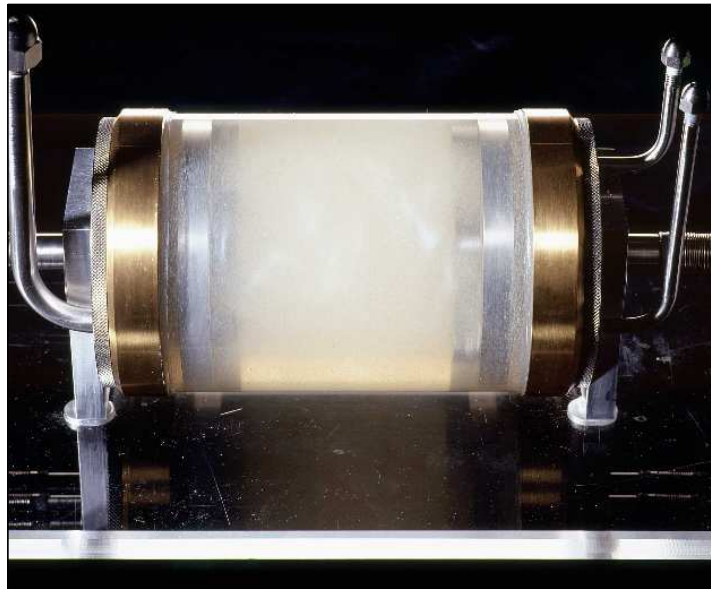


FIG. 3.5 – Photographie du montage à échelle 1 : 2.

La photographie 3.5 montre enfin un petit montage que nous avons utilisé ponctuellement pour observer l'écoulement de von Kármán à petit nombre de Reynolds. Le rayon intérieur du cylindre de ce montage est d'environ 50 mm. Les turbines sont d'assez fidèles réductions à l'échelle 1 : 2 des turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ . Elles ne sont toutefois munies que de 8 pales, qui sont soudées sur des disques d'acier inoxydable. Les moteurs qui les entraînent sont deux petits moteurs asynchrones (voir annexe A.1), dont la puissance unitaire est de 200 W. Ces moteurs sont commandés en boucle ouverte, c'est-à-dire que les variateurs qui les alimentent se contentent de leur fournir une tension sinusoïdale à une fréquence fixée, sans se soucier de la fréquence de rotation effective des turbines. Pour obtenir une fréquence de rotation donnée, il est nécessaire à l'opérateur de procéder par tâtonnements. Ce montage est donc probablement insuffisant en l'état pour servir de base à une étude quantitative, mais il nous a permis de visualiser qualitativement les structures de l'écoulement aux petits et moyens nombres de Reynolds. Les fluides que nous avons utilisé dans ce montage sont l'huile silicone de viscosité 200 cSk et l'eau, marquées d'Iridin. La photographie a été prise avec de l'huile silicone.

## 3.2 Les Moyens de Mesures

### 3.2.1 Les visualisations.

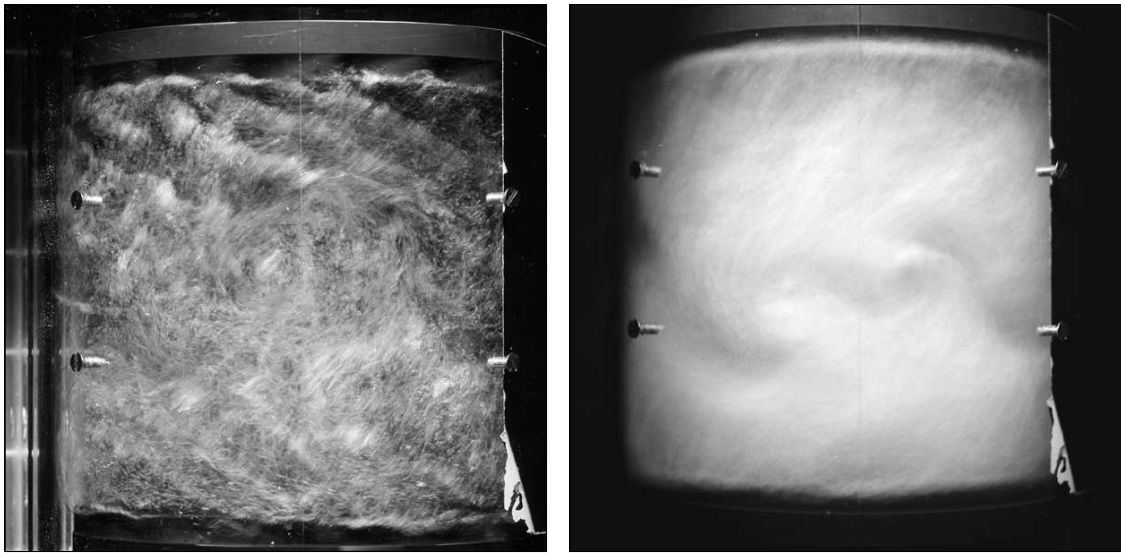


FIG. 3.6 – Photographies de l'écoulement. Les turbines sont du type "TM60", et sont munies de pales de  $0.10R_c$  de haut. Elles tournent en contra-rotation à 15 Hz. La turbine du haut (resp. du bas) va vers la gauche (resp. droite) de la figure. Le champ de l'image correspond à une hauteur de 180 mm environ. (a) Photographie de l'écoulement prise avec un flash. Le temps de pause est de  $\frac{1}{500}$  s. (b) Photographie de l'écoulement prise avec un temps de pause de  $\frac{1}{20}$  s.

La figure 3.6 présente deux photographies de l'écoulement, réalisées en ensemençant celui-ci de bulles d'air. La photographie de gauche a été prise avec une pause courte, tandis que celle de droite a été prise avec une pause longue. Nous voyons clairement que l'instantané fixe beaucoup de structures à petite échelle, tandis que l'image prise en pause permet de distinguer les grosses structures de l'écoulement. Nous n'avons pas utilisé les visualisations comme instruments de

mesures quantitatives, mais elles ont représenté pour nous une source d'information qualitative inestimable.

### 3.2.2 La Vélocimétrie Laser Doppler.

**Principe de fonctionnement.**

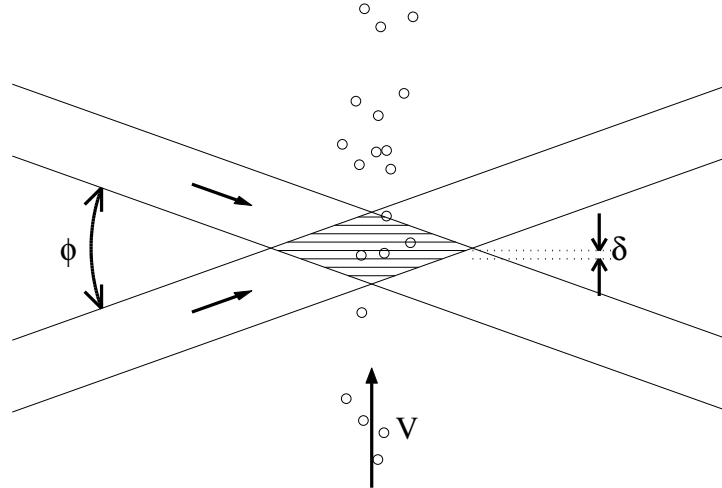


FIG. 3.7 – Schéma de principe de la vélocimétrie Laser Doppler.

Le principe de la vélocimétrie Laser Doppler est rappelé en figure 3.7. Le faisceau de sortie d'un laser Hélium-Néon de longueur d'onde  $\lambda_0 = 632.8$  nm est divisé en deux faisceaux cohérents, dont l'un est dirigé à travers d'une cellule de Bragg où il est décalé en fréquence de  $f_0$ . Un montage optique fait converger ces faisceaux au point où l'on souhaite effectuer les mesures. Des franges d'interférences se forment au point d'intersection, dans un volume dont la forme dépend du diamètre des faisceaux et de l'angle de pincement. L'interfrange  $\delta$  est liée à la longueur d'onde du laser dans le fluide,  $\lambda$ , et à l'angle de pincement  $\phi$  par la relation

$$\delta = \frac{\lambda}{2 \sin(\phi/2)}.$$

Quand une des particules brillantes présentes dans l'écoulement pénètre dans le volume de mesure, elle est successivement visible dans les franges claires et invisible dans les franges sombres. Un photomultiplicateur récupère la lumière qu'elle réémet en scintillant. La fréquence des scintillations renseigne alors sur la vitesse à laquelle elle a traversé les franges. Une fréquence basse indique que la vitesse de la particule était proche de la vitesse de défilement des franges, alors qu'une fréquence élevée indique que la particule allait dans la direction inverse de celle des franges. La fréquence  $f_s$  des scintillations est liée à l'amplitude  $V$  de la composante de la vitesse des particules qui est perpendiculaire aux franges par la relation

$$f_s = f_0 + V/\delta.$$

**Mise en pratique.**

L'ensemble du matériel de vélocimétrie que nous avons utilisé a été fourni par la société DANTEC. La source laser est un laser Hélium-Néon de type "Flowlite". L'ensemble du système

optique (source laser, cellule de Bragg, photomultiplicateur) est contenu dans un boîtier unique. Les faisceaux sont acheminés par une fibre optique jusqu'à une tête déportée. Cette tête contient la lentille qui les fait converger au point de mesure, et qui recueille la lumière réémise par les particules réfléchissantes. Grâce à ce système, les problèmes d'alignement des faisceaux sont réduits au minimum. A la sortie du boîtier "Flowlite", le signal du photomultiplicateur est acheminé vers un "Burst Spectrum Analyser 57N20 Enhanced", qui est toujours de marque DANTEC. Cet appareil est piloté *via* une liaison IEEE 488 par un ordinateur. Les particules réfléchissantes que nous avons utilisées sont des microsphères de verre creuses, dont le diamètre est compris entre 10 et  $30\mu m$ . Un système de traverse motorisé, fabriqué par la société Charlyrobot, permet de déplacer la tête du laser. L'ordinateur qui commande le vélocimètre pilote cette traverse par une liaison série classique. Tous ces appareils peuvent être commandés de façon centralisée à partir d'un unique logiciel fonctionnant sous Windows. Ce logiciel gère le déplacement du point de mesure sur une grille dans l'écoulement, et enregistre dans des fichiers ASCII la date d'arrivée et la vitesse de chaque particule qui traverse le volume de mesure. Ces données peuvent ensuite être re-traitées à volonté (*ad nauseam* ?) sous MATLAB.

### Problèmes d'optique.

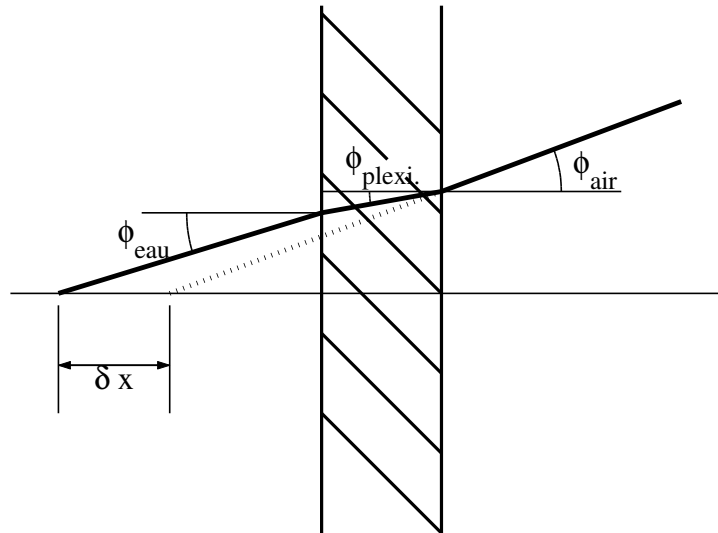


FIG. 3.8 – Schéma du trajet d'un faisceau au franchissement d'une cuve de plexiglas plane. Le demi-espace de gauche est rempli d'eau, celui de droite est rempli d'air. Les différences d'indices de réfraction ont été exagérées. Le trait pointillé marque le trajet du faisceau en l'absence de dioptres.

La figure 3.8 représente le trajet d'un des faisceaux du vélocimètre lorsqu'il pénètre dans une cuve de plexiglas pleine d'eau (nous avons choisi une cuve à face plane par souci de simplicité). Lorsque la face de la cuve est plane, nous voyons qu'elle a deux effets sur la propagation du faisceaux : le passage de l'air à l'eau s'accompagne d'un changement de l'angle de pincement, et la traversée de la lame à faces parallèles s'accompagne d'un décalage du faisceau vers le haut. Ces deux effets combinés induisent un déplacement du point de mesure dans l'écoulement, et le changement de l'angle de pincement modifie l'interfrange dans le ballon de mesure, ce qui introduit un coefficient de calibration supplémentaire dans le calcul de la vitesse à partir de la fréquence de scintillation des bursts. Il est inutile de préciser que lorsque la cuve est cylindrique,

Matériau	indice de réfraction
air	$\simeq 1$
eau	1.331
plexiglas	1.493

TAB. 3.2 – Indices optiques des différents matériaux traversés par les faisceaux du vélocimètre.

ces phénomènes sont rendus encore plus marqués par la courbure des différents dioptrés. Pour pallier ces différents problèmes, nous avons adopté deux démarches complémentaires :

– Pour minimiser les effets des différents dioptrés, nous avons installé autour de la cuve cylindrique la contre-cuve parallélépipédique décrite plus haut. Grâce à cette contre-cuve, le passage de l’air à l’eau se fait au travers d’une face plane, et les problèmes dus à la traversée de la cuve cylindrique ne s’aggravent pas de variations d’indice fortes.

– Nous avons ensuite développé un programme de tracé de rayons spécifique, qui permet de prendre en compte de manière exacte les franchissements des différents dioptrés. A partir de la grille de points de mesures désirée, ce programme calcule les positions correspondantes de la tête du vélocimètre ainsi que les valeurs du coefficient de calibration qui permet de prendre en compte la variation de l’angle de pincement. La table 3.2 rassemble les indices de réfraction des différents matériaux que nous avons utilisés.

### 3.2.3 Les mesures de fluctuations de pression.

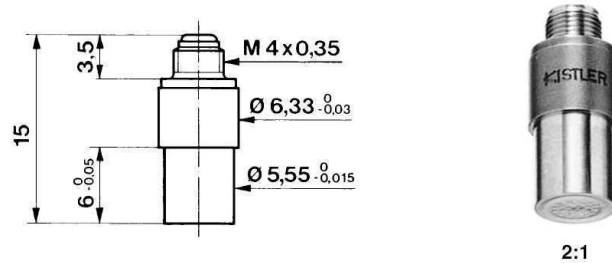


FIG. 3.9 – Cotes et photographie du capteur de pression Kistler 6031 que nous avons utilisé.

Afin de caractériser les aspects instationnaires de l’écoulement, nous avons effectué des mesures de fluctuations de pression, au moyen d’un capteur piézoélectrique monté en paroi. Ces capteurs fonctionnent de la manière suivante : la pression dans l’écoulement exerce au travers de la face avant du capteur une contrainte normale sur la pastille de quartz qui constitue l’élément sensible. Une densité de charges proportionnelle à la contrainte apparaît alors sur les faces de celle-ci, par le phénomène de piézoélectricité. Ces charges sont recueillies par des électrodes et acheminées jusqu’à un amplificateur à très haute impédance d’entrée, qui fournit en sortie un signal de tension. Celui-ci peut alors être traité de façon classique.

Le capteur que nous avons utilisé est un capteur de pression Kistler 6031. Ce capteur est compensé en accélération, c’est-à-dire qu’une partie de sa pastille sensible est utilisée pour mesurer les accélérations qu’il ressent, et permet de corriger le signal mesuré de l’effet des vibrations mécaniques du support. Sa sensibilité est de  $-16.4 \text{ pC/bar}$ , et sa déviation à la linéarité est inférieure à 0.1% de la gamme de mesure, pour des pressions comprises entre 0 et 2.5 bar. La dérive en température de sa sensibilité est inférieure à  $0.02\%/^{\circ}\text{C}$ . La fréquence de résonances



mécanique de l'élément sensible est supérieure à 160 kHz. Enfin, il ne nous a pas été possible d'obtenir de manière précise le diamètre de sa face active, mais nous le supposons de l'ordre de  $d = 5$  mm. Cette caractéristique est importante, car c'est elle qui fixe l'extension minimale des fluctuations de pression que le capteur sera capable de voir. Si la vitesse du fluide devant le capteur est notée  $V$ , nous voyons que la taille du capteur introduit un filtrage passe-bas à une fréquence de coupure qui est de l'ordre de  $V/d$ . Nous verrons dans la troisième section de ce chapitre qu'il est commode de représenter les vitesses dans l'écoulement par leur rapport à une vitesse construite sur les dimensions de la cuve et la fréquence de rotation des turbines  $f$ . En notant  $v'$  la valeur de  $V/(2\pi f R_c)$ , nous voyons que l'ordre de grandeur de la fréquence de coupure est

$$f_c = v' \frac{R_c}{d} 2\pi f.$$

L'ordre de grandeur des vitesses  $v'$  que nous avons mesurées étant environ  $v' \simeq 1$ , nous voyons que la fréquence de coupure due à la taille du capteur est de l'ordre d'une centaine de  $f$ .

Le signal qui sort du capteur est envoyé par un câble coaxial à très forte résistance de fuite jusqu'à un amplificateur de charge Kistler 5011B10. Dans la gamme où nous l'avons utilisé, l'erreur de mesure de cet amplificateur est de l'ordre de 0.2 mbar, mais son erreur de linéarité est elle de 5 mbar. Ces valeurs sont petites devant les valeurs des fluctuations de pression que nous avons observées dans la plupart des mesures. Nous avons rejeté les mesures dans lesquelles les fluctuations de pression se trouvaient trop proches de cette gamme. L'amplificateur contient un filtre passe-bas intégré, que nous avons utilisé pour filtrer le signal avant acquisition à une fréquence de coupure de 1 kHz.

Les capteurs piézoélectriques sont bien connus pour ne donner accès qu'à la partie "dynamique" de la pression, et pour filtrer les variations lentes du signal. Si par exemple notre capteur est soumis à un échelon brusque de pression, il va retranscrire fidèlement cet échelon, et produire des charges sur les faces de la pastille sensible. Ces charges vont par contre progressivement fuir par les conductances parasites du fil et de l'étage d'entrée de l'amplificateur. Le signal de sortie de l'amplificateur va alors progressivement baisser, alors que la pression réelle qui règne dans l'enceinte ne change pas. Pour cette raison, le signal qui sort de l'amplificateur de charge est traditionnellement filtré, afin que l'acquisition ne garde pas trace de composantes à basses fréquences peu fiables. Notre amplificateur de charge permet de réaliser ce filtrage passe-haut, mais ne dispose que de fréquences de coupure supérieures à 1 Hz. Nous avons procédé à l'essai décrit ci-dessus, en mettant brutalement la cuve cylindrique du montage sous pression, et en attendant environ 20 s avant de la ramener à la pression atmosphérique. La dérive observée en 20 s est en pratique inobservable. Nous avons alors filtré le signal passe-haut numériquement, et nous avons vu une dérive nette dès que la fréquence de coupure du filtre était supérieure à 1 mHz. Nous en avons déduit que notre système ne coupait pas de manière significative le signal de pression au-dessus de cette fréquence. Il nous a alors paru dommage de supprimer cette partie du signal, et nous avons choisi de ne pas le filtrer passe-haut avant acquisition. En revanche, nous avons pris soin de limiter la dérive en remettant l'amplificateur à 0 avant chaque mesure. La tendance linéaire qui demeure est enlevée numériquement lors du post-traitement des données.

En sortie de l'amplificateur, le signal est acheminé par câble coaxial jusqu'au bornier de la carte qui réalise l'acquisition proprement dite. Cette carte est une carte d'acquisition Data Translation DT 3001. Sa résolution est de 12 *bits*, soit 4096 points répartis sur la gamme  $-10/+10$  V. La différence minimale entre deux échantillons est donc de 4.9 mV, qui correspondent à 0.5 mbar, le gain de l'amplificateur étant de 0.1bar/V. Cette valeur est nettement inférieure aux chiffres d'erreur de l'amplificateur de charge. Pour l'ensemble de nos mesures, la fréquence d'échantillonnage de la carte était fixée à 3 kHz. Cette fréquence satisfait normalement le critère

de Nyquist, puisque le signal de pression est préalablement filtré passe-bas à 1 kHz. Le signal ainsi mesuré est alors stocké sur un ordinateur, avant d'être traité.

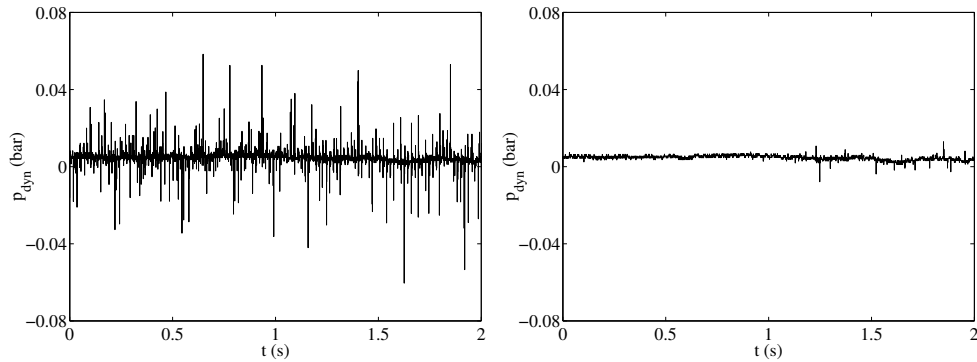


FIG. 3.10 – *Fragment de signal de pression mesuré lorsque les variateurs sont alimentés, et les turbines arrêtées. Les variateurs ne sont pas munis de filtres. a) Signal brut. b) Signal après passage par un filtre “médiane” sur trois points.*

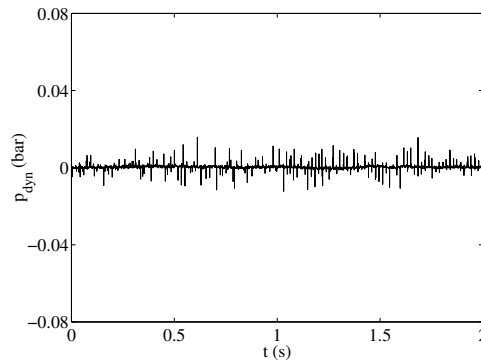


FIG. 3.11 – *Fragment de signal de pression mesuré lorsque les variateurs sont alimentés, et les turbines arrêtées. Les variateurs sont munis de filtres.*

La figure 3.10a représente toutefois un fragment de signal de pression obtenu lorsque les variateurs des moteurs étaient alimentés, mais que ceux-ci ne tournaient pas. Dans ces circonstances, la pression est constante dans l'écoulement, et les fluctuations que nous observons ne peuvent provenir que du bruit de mesure. Nous voyons que les variateurs émettent des impulsions très brèves, à une fréquence relativement régulière. Ces fluctuations sont extrêmement intenses, puisqu'elles peuvent correspondre à environ un dixième de bar, dans un sens ou dans l'autre. Dans un premier temps, nous avons décidé de tirer avantage de la grande brièveté des impulsions en passant le signal par un filtre médiane, qui permet d'enlever du signal les événements isolés, sans affecter de manière marquée les points adjacents. Le résultat de cette opération est représenté en figure 3.10b. Un autre fragment de signal, obtenu lui lorsque les filtres d'anti-parasitage étaient montés en amont des variateurs, est représenté en figure 3.11. Nous pouvons voir sur ce fragment de signal est moins perturbé, et que les impulsions dues aux variateurs sont notablement moins présentes, en fréquence comme en intensité. Nous avons alors préféré nous dispenser du filtre médiane, car son influence sur les propriétés spectrales du signal n'est pas bien connue.

Pour résumer cette section, nous rappellerons que nous avons effectué nos mesures de pression à l'aide d'un capteur piézoélectrique compensé en accélération. Le diamètre de la face active de ce

capteur est de l'ordre de 5 mm, ce qui fixe aux environs de la centaine de fréquences de rotation des turbines la fréquence de coupure liée à sa taille. Ce capteur est connecté à un amplificateur de charge qui sort un signal de tension sur la gamme  $-10/+10$  V, avec un gain de 0.1 bar/V. Cet amplificateur filtre le signal de sortie passe-bas à la fréquence de coupure de 1 kHz. Aucun filtrage passe-haut n'est effectué, mais l'amplificateur est remis à 0 au début de chaque mesure, et la tendance linéaire est retirée lors du post-traitement. L'acquisition est alors réalisée à l'aide d'une carte d'acquisition à 12 *bits*, et les données sont conservées sur ordinateur pour un traitement ultérieur. La première phase de ce traitement est la soustraction de la tendance linéaire du signal. Dans le cas des mesures réalisées lorsque les variateurs n'étaient pas équipés de filtres, le signal passe ensuite par un filtre médiane sur 3 points.

### 3.2.4 Les mesures des couples des moteurs.

Nous avons enfin mesuré les couples fournis au fluide par les moteurs. Nous avons effectué ces mesures de deux manières différentes.

#### Les mesures directes sur les variateurs.

Les variateurs que nous avons utilisés disposent d'un mode d'utilisation dans lequel ils enregistrent d'eux-même le couple fourni par les moteurs ainsi que leur vitesse de rotation. Ces informations sont stockées dans une mémoire tampon qui peut contenir jusqu'à 1000 échantillons de couple et autant d'échantillons de vitesse, avant d'être téléchargées par le lien série sur l'ordinateur de contrôle. Il est possible de paramétrer le temps de mesure total sur lequel les 1000 mesures doivent être réparties. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet des mesures faciles, et ne demande pas d'appareil supplémentaire. Son inconvénient réside dans le fait que les mesures effectuées de cette façon ne peuvent fournir que 1000 échantillons. Comme le temps de téléchargement est de l'ordre de 15 secondes pour chaque variateur, il n'est pas possible de réaliser des mesures répétitives pour pallier ce problème. Notre objectif n'étant pas une étude précise des fluctuations du couple fourni à l'écoulement, nous avons décidé de nous contenter de ces mesures, et de réaliser nos mesures systématiques en répartissant les 1000 points sur un intervalle d'une minute par mesure. Nous avons contrôlé l'étalonnage de cette mesure de couple par les mesures calorimétriques suivantes :

- Nous avons placé dans la cuve une résistance plongeante de puissance connue, et nous avons mesuré l'évolution de la température de l'eau en fonction du temps. La turbine du bas tournait à la fréquence de 1 Hz afin que l'élévation de température soit homogène. La puissance mécanique ainsi fournie au fluide est extrêmement faible. Cette mesure nous a permis d'obtenir la capacité calorifique du montage.
- Nous avons ensuite réalisé des mesures à différentes fréquences de rotation des turbines, en mesurant à chaque fois l'élévation de température en fonction du temps, ainsi que les couples fournis par les moteurs. Nous avons alors constaté que les deux estimations de la puissance dissipée dans l'écoulement concordaient dans chaque cas à mieux que 5 %, les résultats obtenus par calorimétrie étant marqués par une dispersion nettement plus élevée.

Nous avons alors conclu que la valeur moyenne du couple des moteurs, mesurée par lecture directe sur le variateur, était au moins aussi précise que celle qui pouvait être obtenue par des mesures calorimétriques. La grande majorité des mesures de couples présentées dans ce mémoire ont été obtenues par cette méthode.

### Les mesures sur la sortie analogique des variateurs.

En plus de la mesure de couple et de vitesse automatisée, les variateurs fournissent sur deux sorties analogiques des tensions proportionnelles à leur fréquence de rotation ainsi qu'au couple qu'ils délivrent. Ces sorties sont assez bruitées, et ne donnent de toute façon pas des valeurs très précises, de l'aveu même du fabricant. Nous ne les avons donc pas utilisées dans le cadre des mesures systématiques de couples. Elles se sont par contre assez bien prêtées à l'étude des "états intermittents" présentés à la fin du chapitre 5, où elle nous ont permis de réaliser des mesures assez longues, à une fréquence d'échantillonnage suffisante. Nous avons bien sûr vérifié que les valeurs qu'elles fournissaient étaient en accord raisonnable avec les valeurs obtenues par l'autre méthode.

### Corrections des couples parasites.

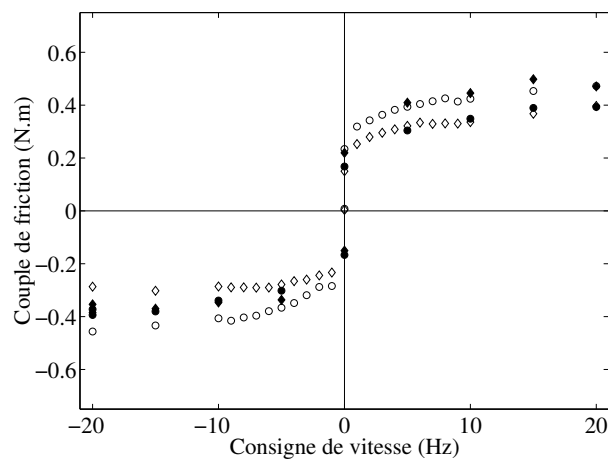


FIG. 3.12 – Valeurs des couples de friction des moteurs en fonction de la fréquence de rotation de consigne. Les  $\circ$  (resp.  $\diamond$ ) marquent les points associés au moteur 1 (resp. 2). Les symboles pleins correspondent aux mesures aux cours desquelles la cuve cylindrique est sous pression.

Les rotors des moteurs ainsi que les arbres des turbines sont guidés en rotation par des paliers à roulements. Ces roulements introduisent des couples de frottement parasites, qu'il nous a été nécessaire de prendre en compte, tout spécialement lors des mesures réalisées aux petites fréquences de rotation. Nous avons donc réalisé de nombreuses séries de mesures afin de déterminer les corrections à apporter. La figure 3.12 représente ainsi les résultats d'une série de mesures réalisées sans turbines, les arbres tournant seuls dans la cuve cylindrique pleine d'eau. Nous voyons tout de suite que les couples de frottement correspondent à des valeurs assez élevées, puisque les valeurs maximales obtenues sont de l'ordre de 0.5 N.m. Nous rappelons que le couple maximal fourni par les moteurs est de 11.5 N.m. Ensuite, nous pouvons constater que toutes les courbes sont relativement semblables, mais qu'un grand nombre de différences subsistent. Tout d'abord, lorsque la cuve est à pression atmosphérique, nous voyons que les couples de friction sur l'arbre de la turbine 1 sont systématiquement plus élevés de près de 0.1 N.m que ceux qui s'exercent sur l'arbre de la turbine 2. Ils ne sont d'ailleurs ni l'un ni l'autre extrêmement symétriques vis-à-vis du sens de rotation des turbines. Enfin, nous voyons que la mise sous pression de la cuve échange approximativement les valeurs des couples de friction aux fréquences de rotation positives, mais qu'elle se contente de les rendre identiques aux fréquences de rotation négatives. Le fait que l'effet

soit différent sur les deux moteurs s'explique probablement par le fait que le joint "spi" qui assure l'étanchéité de la boîte à roulements de la turbine 1 est ce jour-là monté à l'envers, mais que dire de la dissymétrie en fonction de la direction de rotation... Nous précisons immédiatement qu'il n'a jamais été possible d'obtenir de mesures reproductibles des valeurs des couples de friction. De tout cela, il ressort que la détermination des couples de friction qui s'exercent sur les arbres des moteurs est un problème hautement non-trivial, qui mériterait certainement une étude plus approfondie.

En attendant, nous avons pris le parti de réaliser des mesures systématiques des couples de friction en fonction de la fréquence à chaque changement de roulements ou de joints, et de soustraire les valeurs obtenues aux résultats de mesures de couple. De cette façon, nous estimons avoir réduit le biais de mesure à une barre d'erreur d'environ 0.15 N.m.

### 3.3 Arguments de symétries divers.

Malgré son aspect anodin, notre montage expérimental a un très grand nombre de paramètres de contrôle, et il est possible d'y mesurer un autre très grand nombre de grandeurs physiques intéressantes. Déjà dans l'image dénudée qu'en avait von Kármán, (deux disques infinis se faisant face, tournant autour du même axe), il a donné bien du fil à retordre à Batchelor et Stewardson, parce qu'il pouvait se trouver dans des états très différents en fonction du rapport des vitesses de rotation des disques. Si maintenant nous l'enfermons dans un cylindre, nous nous trouvons obligés de choisir la taille du système, ainsi que l'allongement du cylindre, c'est-à-dire le rapport de la distance qui sépare les disques et du diamètre du cylindre. Si nous décidons de fixer des pales sur les disques, nous devons choisir leur forme géométrique (hauteur, courbure, etc.). Nous pouvons alors décider de n'étudier que le cas où les deux disques tournent en sens opposés à fréquence identique, mais comme nous avons choisi des pales courbes, nous rencontrons un nouveau problème : il n'est plus équivalent de faire tourner les disques dans un sens ou dans l'autre, puisque les pales vont pousser le fluide dans un cas avec leur face convexe, et dans l'autre cas avec leur face concave. Lors du choix des grandeurs que nous voudrions mesurer, il se posera le même type de problèmes. Voulons-nous faire des mesures de couples à fréquence de rotation des disques imposée, ou des mesures de fréquences de rotation à couple de forçage imposé ? Et en quel point voulons-nous mesurer les fluctuations de pression ? Nous voyons que, même si nous ne voulons pas tout savoir sur tout, étudier l'influence de quelques-uns des paramètres sur quelques grandeurs mesurables risque de demander beaucoup de travail, et qui plus est de fournir une masse d'informations peu aisée à assimiler. Nous avons donc cherché au cours de cette thèse à exploiter au mieux les différentes symétries de notre montage expérimental, de manière à réaliser les mesures les moins redondantes possibles, et à pouvoir ainsi étudier une plus grande variété de phénomènes. Nous avons exploité des symétries de deux ordres :

- D'une part, nous avons fait un usage massif de l'analyse dimensionnelle, qui permet d'exploiter les symétries que doivent posséder des résultats de mesures obtenus sur un montage expérimental dont on connaît les paramètres pour réduire le nombre d'expériences à effectuer.
- D'autre part, nous avons exploité des propriétés de symétrie "réelles" de notre montage afin de "deviner" le résultat de certaines mesures sans les effectuer.

### 3.3.1 L'analyse dimensionnelle

#### Pourquoi l'analyse dimensionnelle ?

Considérons le montage expérimental VKE, que nous avons décrit au chapitre 3, et remplissons-le d'un fluide quelconque. Si nous n'appliquons ni champ magnétique, ni gradient de température, et si le fluide est newtonien, nous savons que les mouvements qui vont se produire lorsque nous mettrons les moteurs en route ne dépendent que de deux caractéristiques du fluide : sa masse volumique  $\rho$  et sa viscosité dynamique  $\mu$ . Nous avons donc besoin de deux paramètres pour caractériser l'expérience que nous menons, en plus du plan du montage et des fréquences de rotation des turbines. Cependant, nous savons que le champ de vitesses de l'écoulement est une solution des équations de Navier-Stokes, qui ne font intervenir  $\rho$  et  $\mu$  que par leur quotient, la viscosité cinématique. L'écoulement ne dépend donc ni de  $\mu$ , ni de  $\rho$ , mais de  $\nu = \mu/\rho$ . Nous voyons donc que, si nous voulons étudier comment l'écoulement varie en fonction du fluide que nous utilisons, nous n'avons pas besoin de faire varier séparément  $\rho$  et  $\mu$ , mais nous pouvons nous contenter de faire varier leur quotient  $\nu$ . Ce qui expérimentalement parlant fait un monde de différence...

L'analyse dimensionnelle est un outil qui permet de déceler systématiquement et *a priori* ce type de "cadeaux" de la physique, et de déterminer le jeu de paramètres minimal qu'il est nécessaire de faire varier lors de l'étude d'un système physique. Il semble qu'Euler, Fourier, Rayleigh et Vaschy aient déjà utilisé des arguments dimensionnels dans leurs travaux, mais le théorème qui a fait accéder l'analyse dimensionnelle à la maturité est dû à Buckingham [24].

#### L'analyse dimensionnelle par l'exemple

La présentation classique de l'analyse dimensionnelle est calquée sur la démonstration de Buckingham, et est d'un abord assez ésotérique. Nous commencerons donc par considérer un exemple, avant de rappeler l'énoncé formel du théorème. Considérons comme système physique une roue de vélo de rayon  $\mathcal{R}$ , en rotation à la fréquence  $f$  autour de son axe. Considérons maintenant comme grandeur à mesurer la vitesse linéaire  $v$  d'un point situé sur la périphérie de la roue. Nous nous trouvons face à un système qui a deux paramètres libres,  $\mathcal{R}$  et  $f$ , et une grandeur intéressante,  $v$ . Nous supposons que ce modèle est suffisant pour décrire les aspects de la réalité qui nous intéressent, et donc qu'aucun autre paramètre (célérité de la lumière dans le vide, constantes de Planck et Hubble, etc...) ne peut influencer sur  $v$ . En l'absence de toute théorie, nous aurions besoin, pour pouvoir prédire la vitesse linéaire d'un point situé sur le périmètre d'une roue de vélo quelconque tournant à une fréquence quelconque, de tabuler les résultats d'expériences faites avec des roues de vélo de toutes les tailles possibles, tournant à toutes les fréquences possibles. Perspective peu réjouissante.

Supposons maintenant qu'une théorie existe qui nous permette de relier  $\mathcal{R}$ ,  $f$  et  $v$ , où  $\mathcal{R}$  est donné en mètres,  $f$  est donné en Hertz, et  $v$  est donné en mètres par seconde. En toute généralité, cette théorie peut s'exprimer sous la forme :  $\mathcal{F}(v, \mathcal{R}, f) = 0$ . Si nous décidons maintenant que l'unité de longueur est le décimètre, et non plus le mètre, nous voyons que la valeur numérique de  $\mathcal{R}$  sera multipliée par 10, de même que la valeur numérique de  $v$ . Pour que la fonction  $\mathcal{F}$  soit affectée par le changement d'unité, il faudrait par contre que son expression fasse intervenir une longueur, une surface ou quoi que ce soit dont l'unité contient le mètre. Un tel quoi que ce soit serait de fait un autre paramètre de la théorie, ce qui est exclu par hypothèse. La fonction  $\mathcal{F}$  reste donc inchangée. Par conséquent, la théorie qui s'écrit :  $\mathcal{F}(10v, 10\mathcal{R}, f) = 0$  doit conduire aux mêmes résultats, puisque le système physique, lui, ignore le système d'unités dans lequel il est étudié. Et donc, quitte à choisir le coefficient numérique qui nous arrange le plus, nous

pouvons aussi écrire :  $\mathcal{F}(\frac{v}{R}, 1, f) = 0$ . En répétant le même raisonnement pour la seule unité indépendante encore à notre disposition, la seconde, nous voyons qu'il est encore possible d'écrire la théorie sous la forme :  $\mathcal{F}(\frac{v}{Rf}, 1, 1) = 0$ . En généralisant ce raisonnement, nous voyons que toute théorie exprimant un lien entre des grandeurs physiques peut s'exprimer sous la forme d'une fonction ne dépendant *que* des combinaisons sans dimensions qu'il est possible de construire avec ces grandeurs. En revenant à notre exemple, nous voyons qu'il est possible d'exprimer le premier argument de  $\mathcal{F}$  en fonction des deux suivants, et donc d'obtenir :  $\frac{v}{Rf} = \mathcal{G}(1, 1)$ . Il suffit alors d'une seule mesure pour déterminer la valeur de  $\mathcal{G}(1, 1)$ , qui se trouve dans notre exemple valoir  $2\pi$ . L'utilisation d'un argument dimensionnel simple nous a donc permis de passer d'une situation dans laquelle la seule possibilité de connaissance du système résidait dans l'exploration systématique de deux paramètres pouvant *a priori* varier continûment sur une très large gamme à une situation dans laquelle la détermination d'une seule constante permet la connaissance complète du comportement du système. De plus, nous voyons que toute l'information contenue dans la masse énorme de données obtenue par la série de mesures systématiques aurait pu se résumer à une seule valeur numérique, celle de  $\mathcal{G}(1, 1)$ .

Cependant, nous voyons qu'il est un certain nombre de points sur lesquels nous devons être attentifs dans l'utilisation de l'analyse dimensionnelle :

- Nous devons *impérativement* connaître *tous* les paramètres susceptibles d'avoir une influence sur la grandeur physique que nous voulons mesurer. Si nous en oublions, nous risquons, dans le meilleur des cas, d'être confrontés à des grandeurs qu'il n'est pas possible de faire entrer dans des combinaisons sans dimensions, et, dans le pire des cas, d'oublier des combinaisons sans dimensions qui ont une influence sur le système, et donc de n'obtenir qu'une connaissance incomplète, voire inexploitable.

- Il est indispensable de ne "rater" aucun lien entre les unités dans lesquelles s'expriment les différentes grandeurs. Si nous ne changeons pas, par exemple, la valeur numérique de la vitesse lorsque nous changeons l'unité des longueurs, nous passerions complètement à côté de notre résultat. En pratique, il suffit pour cela que nous nous limitions à un jeu d'unités fondamentales en fonction desquelles nous exprimons toutes les grandeurs que nous rencontrons. Si le jeu d'unités est bien choisi, nous n'avons plus à nous soucier de rien. Dans le système S.I., nous pouvons par exemple décider de nous limiter aux mètres, aux kilogrammes, aux secondes, aux ampères et aux degrés Kelvin. Ce jeu d'unités permet en effet d'exprimer toutes les grandeurs courantes de la physique, et n'est pas redondant. (Il peut être nécessaire dans certains cas de rajouter à ces unités la mole et le candela, mais nous-mêmes n'en aurons pas besoin.)

### Le théorème de Vaschy-Buckingham

Supposons que, dans un montage expérimental, nous ayons à relier entre elles  $n$  grandeurs physiques, les  $G_{1, \dots, n}$ . Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que ces grandeurs s'expriment toutes dans des unités différentes. Dans le cas contraire où  $G_1$  et  $G_2$  s'expriment toutes deux en mètres, par exemple, nous pouvons en effet considérer  $G_1$ , qui s'exprime en mètres, et  $G_2/G_1$ , qui est sans dimension. Il nous reste donc un jeu de  $n$  grandeurs qui s'expriment dans  $n$  unités différentes, auxquelles s'ajoutent un nombre arbitraire de quotients sans dimension, les  $q, q', \dots$ . Supposons maintenant que nos  $n$  unités puissent toutes s'exprimer en fonction de seulement  $k$  unités différentes choisies parmi l'ensemble (m, kg, s, A, K, mol, cd). Alors le théorème de Vaschy-Buckingham nous apprend que le lien, s'il existe, peut obligatoirement s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{F}(\pi_1, \dots, \pi_r, q, q', \dots) = 0$$

où les  $\pi_{1\dots r}$  sont  $n - k$  combinaisons sans dimensions des grandeurs de départ. Partant de la connaissance des paramètres susceptibles d'avoir une influence sur notre système, nous pouvons donc, grâce au théorème de Vaschy-Buckingham, connaître le nombre de paramètres qu'il est réellement nécessaire de faire varier pendant l'étude expérimentale, et connaître la forme des données expérimentales qui permet d'"absorber" le plus possible d'effets d'échelle triviaux.

### Les grandeurs adimensionnelles qui décrivent notre montage expérimental

Au cours de la partie hydrodynamique de ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à différents aspects de l'écoulement d'un fluide, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ , mis en mouvement par deux turbines, séparées d'une distance  $\mathcal{D}$  fixée, dans une cuve dont le rayon intérieur était  $R_c$ . Nous avons souhaité étudier l'influence sur l'écoulement d'un certain nombre d'autres paramètres, dont certains étaient variables continûment (les fréquences de rotation des turbines  $f_1$  et  $f_2$ ), tandis que d'autres n'ont varié que par sauts (le rayon des turbines  $R_t$ , la hauteur des pales des turbines,  $h$ , leur rayon de courbure  $c$ , le nombre d'ailettes présentes sur la paroi du cylindre  $n_a$  ainsi que leur hauteur  $h_a$ ). Lors des mesures de vélocimétrie, nous avons fait varier les coordonnées  $r$  et  $z$  du point de mesure, et obtenu un signal fonction du temps  $t$ . Enfin, lorsque nous avons mesuré des spectres de grandeurs physiques, nous avons eu à définir la fréquence d'analyse  $f_a$ . Nous pouvons donc expliciter le jeu des paramètres qui définissent une mesure donnée, et rappeler leurs unités :

grandeur	unité
$\rho$	$kg.m^{-3}$
$\nu$	$m^2.s^{-1}$
$f_1, f_2$	$s^{-1}$
$\mathcal{D}, R_c, R_t, h, c, h_a$	$m$
$r, z$	$m$
$f_a$	$s^{-1}$
$t$	$s$
$n_a$	—

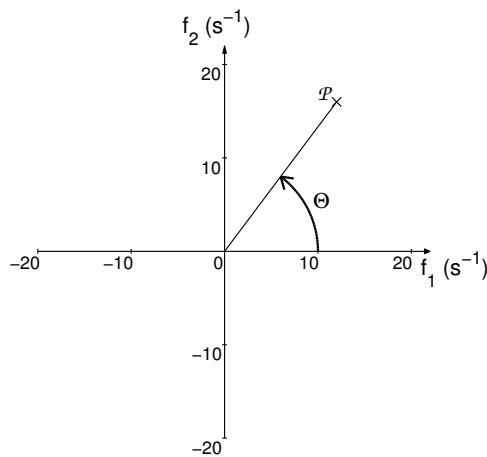
A ce point, nous remarquons que nous pouvons d'ores et déjà construire un certain nombre de combinaisons sans dimensions, puisque par exemple toutes les tailles définissant une mesure sont exprimées en mètres. Nous déciderons donc de ne conserver qu'une seule quantité exprimée en mètres, le rayon de la cuve  $R_c$ , et de définir les autres longueurs de l'expérience par leur rapport à  $R_c$ . Nous introduisons alors les combinaisons sans dimensions suivantes :

$$n_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}/R_c, \quad n_{R_t} = R_t/R_c, \quad n_h = h/R_c, \quad n_c = c/R_c, \quad n_{h_a} = h_a/R_c, \\ r' = r/R_c, \quad z' = z/R_c$$

Nous noterons désormais  $\{n\}$  l'ensemble des paramètres  $(n_{\mathcal{D}}, n_{R_t}, n_h, n_c, n_{h_a})$ , dont la fonction est de décrire la forme géométrique du montage expérimental.

Nous voyons ensuite que les deux fréquences de rotation  $f_1$  et  $f_2$  s'expriment en  $s^{-1}$ . Nous pourrions décider par exemple de ne retenir que  $f_1$ , et d'introduire le rapport  $f_2/f_1$ , qui est sans dimensions. C'est d'ailleurs la convention qui est utilisée dans de nombreux travaux portant sur l'écoulement de von Kármán. Cependant, cette convention pose quelques difficultés : en effet, en regardant la figure 3.13, qui représente la position des mesures possibles dans le plan  $(f_1, f_2)$ , nous voyons que les points qui sont situés sur l'axe  $f_1 = 0$ , qui sont des points de mesure parfaitement légitimes, sont associés à des valeurs de  $f_2/f_1$  qui tendent vers l'infini. Ce fait risque de rendre



FIG. 3.13 – Schéma du plan  $(f_1, f_2)$  et de l'angle  $\Theta$ .

peu lisibles les représentations graphiques des résultats de mesures. Pour pallier ce problème, nous avons décidé de suivre [74], et de passer en coordonnées polaires dans le plan  $(f_1, f_2)$ . Nous ne repérerons donc plus la position d'un point de mesure par les valeurs de  $f_1$  et  $f_2$ , mais par le couple

$$f = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2}}, \quad \Theta$$

où  $\Theta$  est l'angle polaire dans le plan  $(f_1, f_2)$ . Le choix que nous avons fait de diviser la coordonnée radiale dans le plan par  $\sqrt{2}$  permet à  $f$  ainsi définie de coïncider avec les valeurs de  $f_1$  et  $f_2$  dans les cas où celles-ci sont égales en valeur absolue (par exemple si les deux turbines tournent à 10 Hz, il est agréable d'avoir  $f = 10$  Hz et non pas  $f = 10\sqrt{2}$  Hz). En tout état de cause,  $f$  ainsi définie s'exprime en  $s^{-1}$ . Les dates des échantillons des signaux ainsi que les fréquences d'analyse des mesures de densités spectrales peuvent alors être adimensionnées par :

$$t' = ft, \quad f'_a = \frac{f_a}{f}$$

Lorsque  $f_1$  et  $f_2$  sont égales en valeur absolue, nous voyons que  $t'$  coïncide avec le nombre de tours que les turbines ont effectués depuis le début de l'expérience.

A ce point, nous pouvons remarquer que  $f$ ,  $R_c$  et  $\nu$  sont trois grandeurs qui ne s'expriment qu'en fonction de deux unités, les mètres et les  $s^{-1}$ . Elles peuvent donc servir de base à la construction d'une nouvelle combinaison sans dimension. Nous pouvons alors définir le nombre de Reynolds de l'écoulement par :

$$R_e = \frac{2\pi f R_c^2}{\nu}$$

Le facteur  $2\pi$  a été rajouté arbitrairement pour faire coïncider cette définition avec la définition intuitive faisant intervenir l'échelle de vitesse  $2\pi f R_c$ .

En résumé, le jeu de paramètres qui est nécessaire et suffisant pour repérer chacune des mesures que nous avons effectuées est :

grandeur	unité
$\rho$	$kg.m^{-3}$
$R_c$	$m$
$f$	$s^{-1}$
$\Theta$	—
$R_e$	—
$r', z', t', f'_a, \{n\}$	—

### Les grandeurs adimensionnelles que nous avons mesurées

Nous avons mesuré trois sortes de grandeurs : les couples des moteurs,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , les vitesses  $v_r$ ,  $v_\theta$  et  $v_z$ , et les fluctuations de la pression  $p$ . Nous pouvons rappeler les dimensions de ces grandeurs :

grandeur	unité
$\gamma_1, \gamma_2$	$kg.m^2.s^{-2}$
$v_r, v_\theta, v_z$	$m.s^{-1}$
$p$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$

– *Mesures de couples.*

Dans le cas des mesures de couples, les expériences établissent un lien entre les grandeurs suivantes :

grandeur	unité
$\gamma_1, \gamma_2$	$kg.m^2.s^{-2}$
$\rho$	$kg.m^{-3}$
$R_c$	$m$
$f$	$s^{-1}$
$\Theta$	—
$R_e$	—
$t', \{n\}$	—

Comme les couples sont deux résultats distincts d'une même mesure, et non des grandeurs que nous sommes libres de faire varier, nous savons que nous n'avons pas besoin de connaître la valeur de  $\gamma_1$  pour connaître celle de  $\gamma_2$ . Il est donc possible de trouver pour chacun des couples une expression en fonction des paramètres de l'expérience, qui ne fait pas intervenir l'autre. Nous voyons donc que nous n'avons plus dans chaque cas que quatre quantités dimensionnées, le couple mesuré  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $R_c$  et  $f$ , qui s'expriment en fonction de seulement trois unités. Le théorème de Buckingham nous dit alors que les résultats d'expériences prendront la forme d'un lien entre deux nombres sans dimensions qui nous restent à construire à partir de  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $R_c$  et  $f$ , et les quantités sans dimensions qui décrivent l'expérience, que nous avons déjà définies. Nous voyons alors qu'une solution possible est :

$$\frac{\gamma_1(t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = C_1(t', \Theta, R_e, \{n\})$$

$$\frac{\gamma_2(t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = C_2(t', \Theta, R_e, \{n\})$$

Nous avons pris la liberté d'introduire arbitrairement des facteurs  $2\pi$  dans le membre de gauche de cette expression, afin de faire apparaître l'échelle des vitesses dans l'écoulement,  $2\pi f R_c$ .

Dans notre montage, les phénomènes qui mettent le fluide en mouvement ont une échelle caractéristique bien définie : c'est la hauteur des pales des turbines. Dans ces circonstances, on constate empiriquement que les grandeurs adimensionnelles qui caractérisent les grandes échelles de l'écoulement deviennent indépendantes du nombre de Reynolds, lorsque celui-ci est grand. Cet effet a par exemple été mis en évidence dans l'écoulement de von Kármán sur les couples fournis par les moteurs et sur l'amplitude *rms* des fluctuations de pression par Mordant *et al.* [94], ainsi que par Cadot *et al.* Dans ces articles, d'autres séries de mesures montrent que les grandeurs caractéristiques des grandes échelles de l'écoulement ne sont pas indépendantes du nombre de Reynolds si l'échelle d'injection est laissée libre, ce qui est le cas par exemple lorsque les disques d'entraînement sont lisses.

Dans notre cas, nous pouvons donc nous attendre à ce que les deux fonctions  $C_1$  et  $C_2$  tendent vers une limite finie lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement devient infini, tous les autres paramètres étant tenus fixés. Comme la viscosité des fluides que nous avons utilisés était très faible (pour l'eau,  $\nu \simeq 10^{-6}$ ), nous nous sommes en pratique toujours trouvés dans des circonstances où le nombre de Reynolds était largement supérieur à  $10^4$ . Normalement, (mais il nous incombera de le vérifier), les expressions ci-dessus devraient donc pouvoir se simplifier en :

$$\frac{\gamma_1(t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = C_1(t', \Theta, \{n\})$$

$$\frac{\gamma_2(t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = C_2(t', \Theta, \{n\})$$

au moins pour des valeurs de  $f$  assez élevées.

Nous voyons donc que, pour chaque configuration du montage expérimental, l'étude des couples fournis par les moteurs en fonction de  $\rho$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $R_c$  peut lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé se réduire à celle des fonctions  $C_1$  et  $C_2$  sur un cercle du plan  $(f_1, f_2)$ .

– *Mesures de vitesses.*

Dans le cas des mesures de vitesses, les expériences établissent un lien entre les grandeurs suivantes :

grandeur	unité
$v_r, v_\theta, v_z$	$m.s^{-1}$
$\rho$	$kg.m^{-3}$
$R_c$	$m$
$f$	$s^{-1}$
$\Theta$	—
$R_e$	—
$r', z', t', \{n\}$	—

Nous voyons alors que la masse volumique  $\rho$  est seule à s'exprimer dans une unité qui fait intervenir le kilogramme. Il est donc impossible de se servir d'elle pour construire une combinaison sans dimension, et il n'est donc pas possible qu'elle ait une influence sur le résultat d'une mesure *de vitesse*. Ceci étant dit, nous obtenons par le théorème de Vaschy-Buckingham les expressions suivantes :

$$\frac{v_r(r', z', t')}{2\pi f R_c} = v'_r(r', z', t', \Theta, R_e, \{n\})$$

$$\frac{v_\theta(r', z', t')}{2\pi f R_c} = v'_\theta(r', z', t', \Theta, R_e, \{n\})$$

$$\frac{v_z(r', z', t')}{2\pi f R_c} = v'_z(r', z', t', \Theta, R_e, \{n\})$$

Le fait empirique que la viscosité n'a plus d'influence sur les grandes échelles de l'écoulement à grand nombre de Reynolds se traduit alors par :

$$\begin{aligned}\frac{v_r(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_r(r', z', t', \Theta, \{n\}) \\ \frac{v_\theta(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_\theta(r', z', t', \Theta, \{n\}) \\ \frac{v_z(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_z(r', z', t', \Theta, \{n\})\end{aligned}$$

Nous insistons une fois de plus sur le fait que nous n'attendons ce comportement *que* pour les vitesses caractéristiques des grandes échelles de l'écoulement, la structure des fluctuations à très petite échelle restant toujours dépendante du nombre de Reynolds. Avec cette restriction, ces expressions signifient que les vitesses adimensionnelles  $v'_r$ ,  $v'_\theta$  et  $v'_z$  ne peuvent dépendre à haut nombre de Reynolds que du temps, de la position du point de mesure dans l'écoulement, du rapport des fréquences de rotation des turbines, et de la forme du montage expérimental. Toute autre variation, en fonction de la fréquence de rotation ou de la taille du montage, par exemple, est *exclue*. A charge une fois de plus pour nous de le vérifier.

– *Mesures de fluctuations de pression.*

Dans le cas des mesures de fluctuations de pression, les expériences établissent un lien entre les grandeurs suivantes ( $r'$  et  $z'$  représentent la position du capteur dans l'écoulement) :

grandeur	unité
$p$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$\rho$	$kg.m^{-3}$
$R_c$	$m$
$f$	$s^{-1}$
$\Theta$	—
$R_e$	—
$r', z', t', \{n\}$	—

Nous avons alors :

$$\frac{p(r', z', t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^2} = \Pi(r', z', \Theta, R_e, \{n\})$$

Qui se simplifie à haut nombre de Reynolds en :

$$\frac{p(r', z', t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^2} = \Pi(r', z', \Theta, \{n\})$$

### L'analyse dimensionnelle. Conclusion.

Nous avons vu au cours de ces quelques pages que l'usage de l'analyse dimensionnelle permet de clarifier notablement le nombre et le rôle des paramètres qui interviennent dans la mesure d'une grandeur physique donnée. Il serait bien évidemment dommage de faire maintenant machine arrière, et de recommencer à exprimer les valeurs des paramètres de contrôle et des résultats de mesures sous forme dimensionnée. Par conséquent, nous avons fait le choix de ne plus donner de valeurs dimensionnées que très épisodiquement, et ce uniquement "pour fixer les idées". TOUS les résultats de mesures présentés dans la suite de la partie hydrodynamique de ce mémoire devront donc être implicitement compris comme étant sous forme adimensionnelle, sauf mention explicite

du contraire (ou oubli...). Par conséquent, toute distance devra être comprise comme rapportée au rayon du cylindre,  $R_c$ , toute fréquence devra être comprise comme rapportée à la fréquence  $f$  définie précédemment, de même que toute durée devra être comprise comme rapportée à la période  $1/f$ . L'unité des vitesses sera alors  $2\pi f R_c$ , celle des couples sera  $\rho(2\pi f)^2 R_c^5$ , et celle des pressions sera  $\rho(2\pi f)^2 R_c^2$ . Les ordres de grandeurs correspondants pour  $f_1 = f_2 = 5$  Hz, dans la cuve de rayon  $R_c = 0.099$  m remplie d'eau, ainsi que les valeurs qui leur correspondent dans le montage "VKS", sont regroupés ci-dessous en table 3.3.

Unité de	Valeur pour $f_1 = f_2 = 5$ Hz	<i>idem</i> pour "VKS"
Longueur	0.099 m	0.200 m
Fréquence	5 Hz	5 Hz
Temps	0.2 s	0.2 Hz
Vitesse	3.11 m.s <sup>-1</sup>	6.28 m.s <sup>-1</sup>
Couple	9.38 N.m	290 N.m
Pression	9.67 kPa	36.3 kPa

TAB. 3.3 – Ordre de grandeurs des différentes unités adimensionnelles, exprimés en unités courantes pour  $f_1 = f_2 = 5$  Hz.

### 3.3.2 L'invariance par rotation autour de l'axe

Dans ce paragraphe, nous détaillons la manière dont nous avons exploité l'invariance du montage expérimental par rotation autour de son axe pour diminuer le nombre de mesures que nous avons réalisées.

#### Cas d'un montage "lisse"

Considérons pour commencer la figure 3.14, qui représente le montage VKE muni d'une cuve cylindrique lisse (sans ailettes) et de disques d'entraînement du fluide lisses (sans pales).

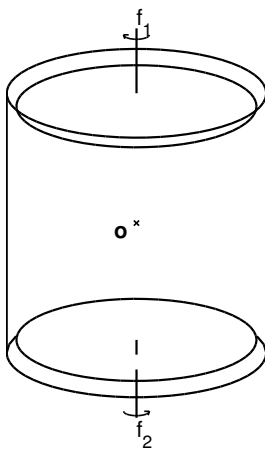


FIG. 3.14 – Schéma du montage expérimental "lisse".

Imaginons maintenant que nous faisons tourner le montage d'un angle  $\alpha$  quelconque autour de son axe. Rien ne nous permet de distinguer le montage ainsi tourné du montage original. Habituellement, en hydrodynamique, ceci implique qu'à très haut nombre de Reynolds l'écoulement

lui-même possédera, *au sens statistique*, cette symétrie (voir le chapitre 5 pour une explication et un contre-exemple). Par conséquent, si nous nous limitons à l'étude de grandeurs *statistiques*, nous voyons qu'il est indifférent d'étudier l'écoulement, ou l'écoulement tourné de  $\alpha$ . Les grandeurs statistiques attachées à l'écoulement ne peuvent donc pas dépendre de la coordonnée azimutale, et il n'est pas nécessaire, lors d'une étude expérimentale de l'écoulement, de faire des mesures dans tous les plans méridiens du montage.

### Cas de disques munis de pales

Considérons maintenant des disques munis de pales montées dans une cuve lisse. Dans la plupart des cas, il est possible de trouver un angle  $\alpha$  plus petit que  $2\pi$  tel que chaque disque est invariant par la rotation d'angle  $\alpha$  autour de son axe. (Ce ne serait pas possible par exemple si les nombres des pales portées par les disques étaient premiers entre eux, ou si l'un des disques ne portait que des pales différentes, cas que nous avons préféré éviter...) Dans ce cas, le montage expérimental est une fois de plus invariant par rotation d'angle  $\alpha$ , et nous pouvons penser que cette invariance se transposera statistiquement à l'écoulement, à haut nombre de Reynolds. Par conséquent, seule la portion de l'écoulement qui est comprise entre les deux plans méridiens  $\theta = 0$  et  $\theta = \alpha$  mérite d'être étudiée, puisque par exemple la portion comprise entre  $\theta = \alpha$  et  $\theta = 2\alpha$  ne fait que la répéter. Avec les turbines que nous avons étudiées,  $\alpha = \pi/4$  radians ("TM28" et "TM70" ont huit pales semblables, et les seize pales de "TM60" sont alternativement de deux longueurs différentes). Lors de l'étude expérimentale de l'écoulement, nous aurions donc dû en bonne logique étudier un secteur représentant un huitième de l'écoulement. En pratique, il est difficile d'imaginer que les variations des grandeurs statistiques attachées à l'écoulement puissent être très fortes dans la direction azimutale. Lors des mesures de vitesse et de pression, nous avons donc considéré que l'écoulement était pratiquement axisymétrique, et nous n'avons fait de mesures que dans un seul plan méridien.

### Cas d'un cylindre muni d'ailettes

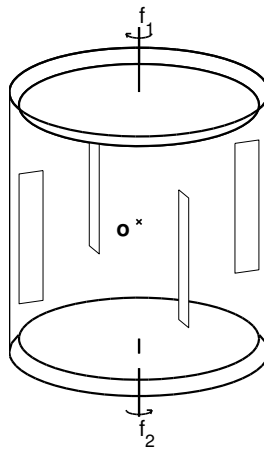


FIG. 3.15 – Schéma du montage expérimental muni d'ailettes.

La figure 3.15 représente notre montage expérimental, lorsque la paroi cylindrique est munie de quatre ailettes. Comme nous avons décidé de faire abstraction de la non-axisymétrie des turbines, nous avons représenté celles-ci par des disques lisses. Nous voyons que, si nous ne

choisissons pas l'angle  $\alpha$  soigneusement, les ailettes du montage tourné de  $\alpha$  autour de son axe ne sont pas situées au même endroit que celles du montage original. Le montage n'est donc plus invariant par rotation d'angle quelconque autour de son axe, mais n'est plus invariant que par les rotations d'angle multiple de  $\pi/2$ . Par conséquent, la partie de l'écoulement qu'il convient expérimentalement d'étudier s'étend sur un secteur angulaire d'angle  $\pi/2$ , d'une ailette à l'autre par exemple. Comme de plus nous pouvons nous attendre à ce que l'écoulement soit très perturbé au voisinage des ailettes, nous voyons qu'il n'est cette fois pas raisonnable de nous limiter à des mesures dans un seul plan méridien, si nous souhaitons avoir une bonne connaissance de l'écoulement. Au cours de ce travail de thèse, nous n'avons pas mis d'accent particulier sur l'influence des ailettes sur l'écoulement. Nous nous sommes donc contentés de mesurer les fluctuations de pressions en un point, situé à mi-chemin entre deux ailettes dans le plan équatorial du montage, et nous avons préféré ne pas faire de mesures de vélocimétrie.

### 3.3.3 L'invariance par retournement

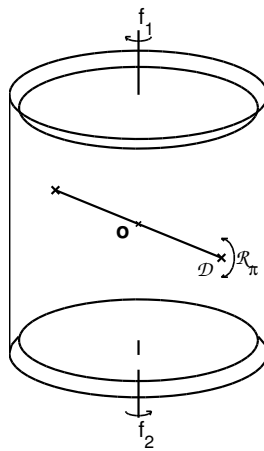


FIG. 3.16 – Schéma du montage expérimental “lisse” et de son axe de retournement.

Prenons le montage expérimental “lisse”, et tournons-le de  $\pi$  autour de l'axe noté  $\mathcal{D}$  sur la figure 3.16. Nous voyons aisément que le résultat de cette opération est un montage en tout point similaire au montage original, si ce n'est que la turbine du haut tourne maintenant à la fréquence  $f_2$ , et que la turbine du bas tourne maintenant à la fréquence  $f_1$ . Nous voyons par conséquent que pour connaître le résultat d'une mesure dans laquelle la turbine du haut tourne à  $f_2$  et la turbine du bas à  $f_1$ , il nous suffit de “retourner” le résultat de la mesure effectuée lorsque la turbine du haut tourne à  $f_1$  et celle du bas à  $f_2$ . Cette propriété peut être utilisée de deux manières :

- S'il est possible de construire le résultat “retourné” à partir du résultat initial, nous n'avons pas besoin de parcourir tout le plan  $(f_1, f_2)$  lors de mesures systématiques. Il nous suffit par exemple de parcourir la zone  $f_2 > f_1$  ( $\Theta$  compris entre  $45^\circ$  et  $225^\circ$  avec nos notations adimensionnelles, cf. figure 3.13), puis de retourner le résultat des mesures pour connaître aussi la zone  $f_2 < f_1$  ( $\Theta$  compris entre  $225^\circ$  et  $405^\circ$ ). Pour les mesures de couples, l'opération de retournement correspond par exemple à l'échange des couples des deux moteurs. Si le capteur de pression est situé sur l'axe  $\mathcal{D}$ , l'opération de retournement laisse la pression invariante. Il est parfois possible d'avoir des (mauvaises) surprises en utilisant cette méthode sans discernement. Des phénomènes surprenants de *brisure de symétrie* peuvent en effet se produire. Un exemple original de brisure de symétrie de l'écoulement fait l'objet du chapitre 5 de ce mémoire.

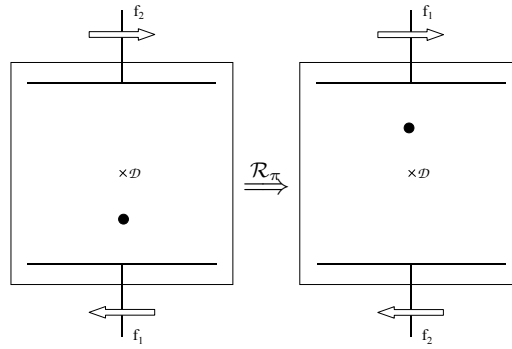


FIG. 3.17 – Schéma de l’effet de l’opération de retournement sur la position du capteur de pression (repéré par le point noir).

– S’il n’est pas possible de construire le résultat “retourné” à partir du résultat initial, c’est qu’il peut être intéressant de compléter une mesure à  $(f_1, f_2)$  par une mesure à  $(f_2, f_1)$ . La figure 3.17 montre ainsi comment une mesure de fluctuations de pressions faite à  $(f_2, f_1)$ , le capteur de pression étant monté dans le *bas* du cylindre, nous renseigne sur les fluctuations de pressions dans le *haut* du cylindre à  $(f_1, f_2)$ .

Au cours de ce travail de thèse, nous avons beaucoup exploité la symétrie par retournement du montage expérimental, en ne réalisant par exemple de mesures de couples que très exceptionnellement hors de la zone  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ , ou en déduisant les propriétés des fluctuations de pression dans le haut de l’écoulement pour  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$  de mesures réalisées avec le capteur placé en bas sur  $-135^\circ < \Theta < 45^\circ$ .

Dans le cas où nous rajoutons des ailettes, nous voyons qu’il existe toujours des axes de retournement possibles du montage expérimental, mais que nous ne pouvons plus choisir l’axe  $\mathcal{D}$  complètement au hasard. Il faut que l’opération de retournement amène chacune des ailettes sur une autre. Nous avons tenu compte de ce fait au cours du travail expérimental.

### 3.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté le montage expérimental “VKE”, les divers appareils de mesures que nous avons utilisés, ainsi que les différents arguments de symétrie que nous avons employés pour simplifier notre étude. Nous rappellerons rapidement les points suivants :

- La cuve cylindrique du montage VKE a un diamètre intérieur d’environ 100 mm.
- Les moteurs qui entraînent les turbines sont des moteurs brush-less d’une puissance unitaire de 1.8 kW. Les variateurs qui alimentent ces moteurs émettent un bruit électromagnétique important.
- La distance qui sépare les faces intérieures des disques des turbines est égale à 1.78 fois le rayon intérieur de la cuve cylindrique.
- Les turbines que nous avons principalement employées sont de deux types : d’une part, les turbines “TM60” ont un rayon de 92.5 mm, et sont munies de 16 pales fortement courbées, de hauteur 10 ou 20 mm. Lorsqu’elles tournent dans le sens de rotation positif, elles présentent la face convexe de leurs pales au fluide. Les turbines “TM70”, d’autre part, ont un rayon de 73 mm. Elles sont munies de 8 pales droites de hauteur 10 ou 20 mm.
- Le montage VKE est doté d’un système de mise en pression, qui permet de réaliser des mesures sans qu’elles soient perturbées par le phénomène de cavitation.



- Lors des mesures de vélocimétrie, une contre-cuve parallélépipédique peut être montée autour de la cuve cylindrique, afin de diminuer les effets de réfraction. Les effets restants sont pris en compte à l'aide d'un programme de tracé de rayons spécifique.
- Le capteur de pression que nous utilisons pour nos mesures est un capteur piézoélectrique compensé en accélération. Ce capteur est raccordé à un amplificateur de charge, puis à une carte d'acquisition. Le signal de pression est filtré passe-bas à 1 kHz, mais n'est pas filtré passe-haut. La fréquence d'acquisition est de 3 kHz pour l'ensemble des mesures. Lorsque les mesures ont été effectuées sans que les variateurs soient dotés de filtres d'anti-parasitage, il est nécessaire de faire passer le signal par un filtre médiane avant traitement.
- Les mesures de couples sont principalement effectuées par les variateurs eux-même. Ces mesures ne peuvent pas être réalisées avec le taux d'échantillonnage nécessaire à une étude approfondie des fluctuations de couple, mais des mesures d'étalonnage par calorimétrie ont montré qu'elles donnaient une bonne estimation des couples moyens.
- Nous avons précisé les corrections appliquées aux résultats de mesures pour compenser l'effet des couples de friction qui s'exercent sur les arbres tournants.
- Des arguments dimensionnels permettent de déterminer le nombre minimal de mesures indépendantes à effectuer dans l'étude des différents phénomènes qui nous intéressent.
- Nous ferons désormais systématiquement appel à ces arguments, et nous ne présenterons de résultats de mesure sous forme dimensionnelle que très exceptionnellement.
- Enfin, un certain nombre d'arguments de symétrie permettent de réduire encore le nombre de mesures à effectuer, ou de compléter des jeux de données existant pour les rendre plus lisibles. Nous ferons de même appel fréquemment à ces arguments, notamment dans le cas des mesures de couples et de fluctuations de pression.

# Chapitre 4

## Caractérisation des grandes échelles de l'écoulement.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus lors de campagnes de mesures systématiques effectuées dans le montage "VKE". Les résultats se rapportant aux valeurs moyennes temporelles du champ de vitesse et des couples fournis par les moteurs sont rassemblés dans les deux premières sections. Les deux sections suivantes présentent une caractérisation des fluctuations à grande échelle de l'écoulement, par le biais de mesures de pression et de fluctuations de vitesse.

### 4.1 Mesures de l'écoulement moyen

Une grande part du travail expérimental que nous avons réalisé dans notre montage a concerné la mesure par Vélocimétrie Laser Doppler du champ de vitesse de l'écoulement. Ces mesures ont été effectuées dans le cas où le cylindre extérieur était "lisse", c'est-à-dire dépourvu d'ailettes, pour un certain nombre de jeux de turbines différents. Nous rapportons dans cette section la méthode que nous avons utilisée pour ces mesures, ainsi que les résultats que nous avons obtenus.

#### 4.1.1 Description de la grille.

Lors des mesures de vélocimétrie que nous avons effectuées, la cuve cylindrique du montage était dépourvue d'ailettes. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, ceci nous autorise à supposer que l'écoulement est en moyenne axisymétrique. Nous nous sommes donc limités à ne le mesurer que dans un (demi) plan méridien, que nous prendrons comme origine de la coordonnée azimutale  $\theta$ . Dans ce plan, nous avons mesuré la vitesse sur une grille de points, représentée en figure 4.1. La maille de la grille est de un centimètre dans les directions radiale et axiale, et correspond à une maille adimensionnelle de 0.099 ou 0.100, selon le rayon de la cuve utilisée. Si dans la masse du fluide la mesure ne pose pas de problèmes particuliers, il en va autrement près des bords. Dans la zone qui est balayée par les pales des turbines, par exemple, il peut arriver (cas des turbines à pales très courbées) que les faisceaux du vélocimètre ne parviennent pas à se propager jusqu'au point de mesure désiré. La mesure des composantes de la vitesse entre les pales de certaines turbines est donc impossible. Par ailleurs, il existe deux zones, représentées en gris foncé sur la figure 4.1, où les pales d'une turbine arrêtent l'un des faisceaux lors de la mesure de  $v_z$ . Nous n'avons donc pu y mesurer que  $v_\theta$ . Au voisinage de la paroi cylindrique, enfin, nous trouvons dans la situation représentée sur la figure 4.2 : l'épaisseur adimensionnelle de la

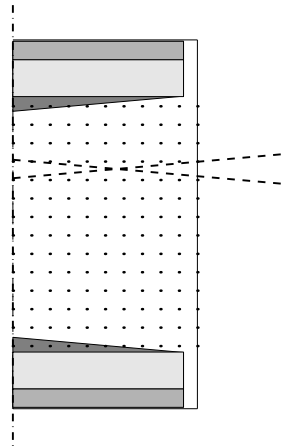


FIG. 4.1 – Schéma de la grille des points de mesure de Vélocimétrie Laser Doppler. L'axe du cylindre est situé à gauche de la figure, la paroi de la cuve cylindrique est à droite. Les points noirs sont les points de mesure. Les traits pointillés représentent les faisceaux du vélocimètre, lors de la mesure de  $v_z$ . Le volume de fluide balayé par les pales est représenté en gris clair, et les disques des turbines en gris plus foncé. Les zones où la mesure de  $v_z$  est impossible parce que les pales d'une des turbines coupent un faisceau sont représentées dans la teinte la plus sombre.

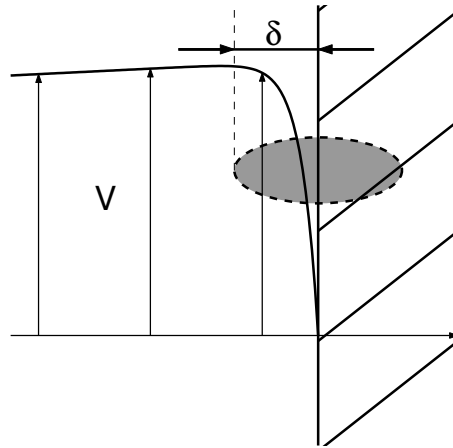


FIG. 4.2 – Schéma de la couche limite au voisinage de la paroi cylindrique. L'épaisseur de la couche limite est notée  $\delta$ . La zone hachurée représente la paroi du cylindre, et la zone grisée représente le "ballon" de mesure du vélocimètre.

couche limite est censée dépendre du nombre de Reynolds de l'écoulement comme  $\delta \sim R_e^{-1/2}$ . A la valeur de  $R_e$  pour laquelle nous avons effectuées nos mesures,  $1.2 \cdot 10^5$ , nous voyons que  $\delta$  est de l'ordre de  $0.003 R_c$ , soit environ 0.3 mm. L'épaisseur de la couche limite est donc faible devant la taille du "ballon" de mesure du vélocimètre (environ 0.6 mm). Par conséquent, si nous décidons de placer le dernier point de mesure de la grille en  $R_c$  exactement, nous ne pouvons pas savoir si la vitesse que nous mesurons est celle du fluide du cœur de l'écoulement, celle du fluide qui est dans la couche limite, ou bien celle de la paroi elle-même. Comme nous n'avons pas besoin de mesurer la vitesse en  $R_c$ , puisque nous savons qu'elle doit s'annuler à cause de la condition de non-glissement, nous avons préféré mettre le dernier point de mesure à 1 mm de la paroi, dans

le cœur de l'écoulement. La vitesse en ce dernier point ne dépend plus du nombre de Reynolds dès qu'il est assez grand pour que la couche limite reste confinée près de la paroi. La grille de

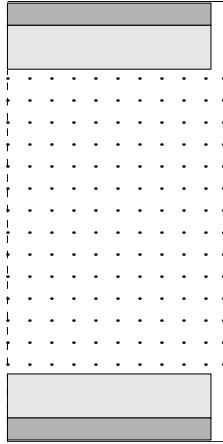


FIG. 4.3 – Schéma de la grille de mesure “idéale” pendant les mesures de Vélocimétrie Laser Doppler. L’axe du cylindre est situé à gauche de la figure, la paroi de la cuve cylindrique est à droite. Les points noirs sont les points de mesure. Le volume de fluide balayé par les pales est représenté en gris clair, et les disques des turbines en gris plus foncé.

vélocimétrie “idéale” tenant compte de toutes ces observations est représentée en figure 4.3. Les lignes de mesures sont espacées de 10 mm dans la direction axiale, et sont centrées par rapport aux turbines. Lors de mesures avec des pales moins hautes, il est possible de rajouter des lignes horizontales. Les colonnes de points sont espacées de 10 mm dans la direction radiale, en partant de l’axe du cylindre. La dernière colonne de points est située 1 mm avant la paroi du cylindre, en  $r = 98$  mm ou en  $r = 99$  mm suivant le rayon de la cuve utilisée. La vitesse azimutale est mesurée en chaque point, la vitesse axiale est mesurée en tous les point où cela est possible. Les point de mesure inaccessibles sont ensuite “inventés” comme expliqué au paragraphe suivant.

#### 4.1.2 Reconstruction de $v_r$ . Problème des pales

##### Reconstruction de $v_r$

Nous avons dit au chapitre 3 que seule la mesure de  $v_\theta$  et  $v_z$  était possible facilement. Pour pouvoir mesurer  $v_r$  par vélocimétrie laser doppler, nous devrions en effet déplacer le système de positionnement du laser. Cette modification lourde du montage expérimental, qui s’accompagne d’un réglage minutieux des appareils, ne peut être effectuée trop souvent, et en tout cas pas dans le contexte de mesures de routine. Cependant, nous savons que, dans notre montage expérimental, la moyenne temporelle de l’écoulement est à la fois axisymétrique et de divergence nulle. Par conséquent, il existe une fonction de courant  $\psi(r, z)$  définie sur le demi-plan de mesure telle que :

$$\begin{aligned} v_r &= -\partial_z \psi \\ v_z &= \frac{1}{r} \partial_r (r\psi) \end{aligned}$$

Partant de la mesure de la valeur moyenne temporelle de  $v_z$  dans le demi-plan, nous pouvons reconstruire numériquement  $\psi$ , et nous en servir ensuite pour obtenir la valeur moyenne temporelle de  $v_r$  en chaque point, selon :

$$\begin{aligned}\psi(r, z) &= \frac{1}{r} \int_0^r u.v_z(u, z)du \\ v_r(r, z) &= -\partial_z\psi(r, z)\end{aligned}$$

Lors de l'implémentation pratique de ces relations, nous avons dû appliquer un traitement un peu particulier au premier point de chaque ligne horizontale, qui est situé sur l'axe du cylindre :  $r$  valant 0 en ce point, il n'est en effet pas possible de définir  $\psi(0, z)$  par la première des équations ci-dessus. Comme nous savons par ailleurs que  $v_r$  doit s'annuler sur l'axe pour que la condition de divergence nulle soit remplie, nous avons en fait  $\psi(0, z) = 0$ .

### Définition de $v_z$ et $v_\theta$ dans le volume balayé par les pales.

Dans la portion de l'écoulement qui est balayée par les pales des turbines, nous ne pouvons pas mesurer la vitesse du fluide. Pour beaucoup de mesures, il est possible de se dispenser de la connaissance de cette partie de l'écoulement, mais il est parfois nécessaire (pour le code de simulation de dynamo cinématique présenté en partie II notamment) de compléter les mesures pour avoir un écoulement défini sur tout le demi-plan  $\theta = 0$ . Nous avons donc pris les *conventions* suivantes :

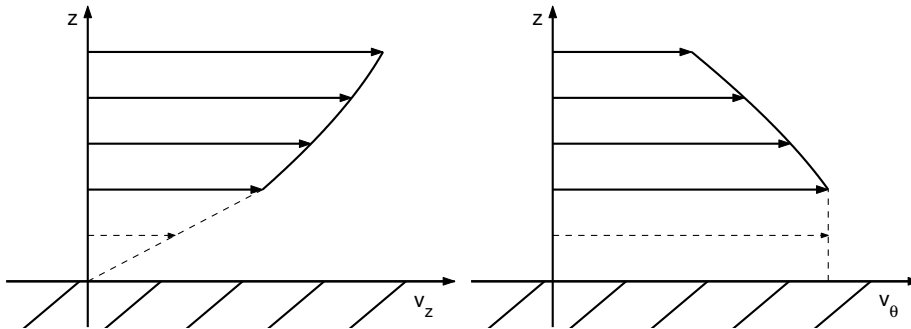


FIG. 4.4 – Schéma de la convention prise pour la définition du profil de vitesse dans le volume balayé par les pales. La zone hachurée représente le disque de la turbine. Le trait fort représente le profil dans la partie où il peut être mesuré. Le trait tireté montre le profil “complété” dans la zone balayée par les pales. Les flèches horizontales représentent la vitesse aux points de mesure. a) Composante  $v_z$  : le profil de vitesse s’annule linéairement à partir du dernier point mesuré. b) Composante  $v_\theta$  : le profil de vitesse est plat à partir du dernier point mesuré.

– Nous savons que la vitesse axiale  $v_z$  doit s’annuler aux niveaux des faces des disques des deux turbines, car ils sont imperméables. Nous avons donc décidé de compléter le profil comme indiqué sur la figure 4.4a, en faisant s’annuler  $v_z$  linéairement en  $z$  à partir de la dernière ligne de points de mesure.

– En ce qui concerne  $v_\theta$ , nous n’avons pas d’argument pour adopter une forme de profil plutôt qu’une autre. Nous avons donc choisi de “remplir” la zone balayée par les pales par les valeurs de  $v_\theta$  mesurées sur la dernière ligne. Le schéma correspondant se trouve en figure 4.4b.

Au cours de son stage de DEA, F. Ravelet a pu effectuer des mesures dans la région balayée par les pales, en utilisant d’autres turbines. Ses résultats semblent montrer que la façon dont nous complétons le profil de  $v_z$  est assez proche de la réalité, mais que le profil de  $v_\theta$  au voisinage

du disque ne se prête pas à une description simple. Nous avons donc décidé de continuer à utiliser notre convention telle quelle, faute de mieux.

### 4.1.3 Résultats des mesures de l'écoulement moyen et des fluctuations.

#### Vérification des arguments dimensionnels

L'un de nos objectifs est d'étudier l'influence de la géométrie du montage expérimental sur la moyenne temporelle de l'écoulement moyen. Si nous ne faisons pas appel aux arguments dimensionnels présentés plus haut, il nous faudrait étudier cette influence pour chaque vitesse de rotation possible des turbines, c'est-à-dire mesurer, pour chaque géométrie du montage, la composante moyenne de l'écoulement lorsque les turbines tournent à 1, 2, 3,  $\dots$  Hz. Nous savons heureusement que, lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand, les vitesses que nous mesurons en chaque point de l'écoulement doivent être en fait proportionnelles à la fréquence de rotation des turbines. Si cela est vrai, l'étude de l'influence de la géométrie du montage peut alors se limiter à la mesure, dans chaque configuration, et pour chaque valeur de l'angle  $\Theta$ , de la valeur moyenne temporelle des vitesses adimensionnelles  $v'_r$ ,  $v'_\theta$  et  $v'_z$ , pour *une seule* fréquence de rotation des turbines. Un test expérimental simple de la validité de ces arguments est donc de mesurer la moyenne temporelle du champ de vitesse adimensionnel pour plusieurs fréquences de rotation des turbines, et de vérifier que les champs de vitesses adimensionnels obtenus sont identiques.

L'une des premières tâches que nous avons effectuée au cours de ce travail de thèse a donc été de mesurer les champs de vitesses moyennes de l'écoulement, dans une configuration donnée ( $R_c = 100$  mm, turbines "TM51" en contra-rotation, espacées de  $1.91R_c$ ), pour trois fréquences de rotation différentes,  $f = 2.47$ ,  $4.53$  et  $6.79$  Hz, qui correspondent à des nombres de Reynolds valant respectivement  $1.55 \cdot 10^5$ ,  $2.84 \cdot 10^5$  et  $4.27 \cdot 10^5$ . La grille de mesure était légèrement différente de la grille "idéale" évoquée plus haut, la dernière colonne de point se trouvant notamment placée très près de la paroi. La figure 4.5 représente les champs des vitesses adimensionnelles que nous avons mesurés aux différentes fréquences de rotation.

–La première rangée représente les champs de vitesse adimensionnelle azimutale. Nous pouvons voir que les champs mesurés aux différentes vitesses sont assez semblables. Les vitesses mesurées varient sensiblement dans la même gamme, et les structures de l'écoulement ne se déplacent pas de manière marquée. La ligne qui sépare la région des vitesses azimutales négatives de celle des vitesses azimutales positives, si elle est loin d'être une droite horizontale située en  $z' = 0$ , ne semble pas bouger de manière significative d'une mesure à l'autre.

–La deuxième rangée représente les champs de vitesse adimensionnelle axiale. Là encore, la gamme de vitesses adimensionnelles ne varie pas de manière marquée. La ligne de vitesse nulle qui est sensiblement horizontale marque la séparation entre les deux cellules de recirculation poloidales. Nous pouvons voir que cette ligne ne se déplace pas, ce qui veut dire que, si les deux cellules ne sont pas de tailles égales, leur importance relative ne varie pas. De même, la ligne de vitesse nulle qui est verticale indique la position du cœur des cellules de recirculation. Nous pouvons voir qu'elle ne se déplace pas non plus de manière significative.

Dans l'ensemble, la forme des grandes structures de l'écoulement semble donc peu dépendante du nombre de Reynolds dans la gamme allant de  $1.55 \cdot 10^5$  à  $4.27 \cdot 10^5$  que nous avons étudiée.

La figure 4.6 rassemble ensuite les valeurs *rms* adimensionnelles des composantes de la vitesse, mesurées dans les mêmes conditions. Là encore, nous pouvons constater que l'intensité des fluctuations de l'écoulement en chaque point est raisonnablement indépendante du nombre de Reynolds sur la gamme que nous avons étudiée.

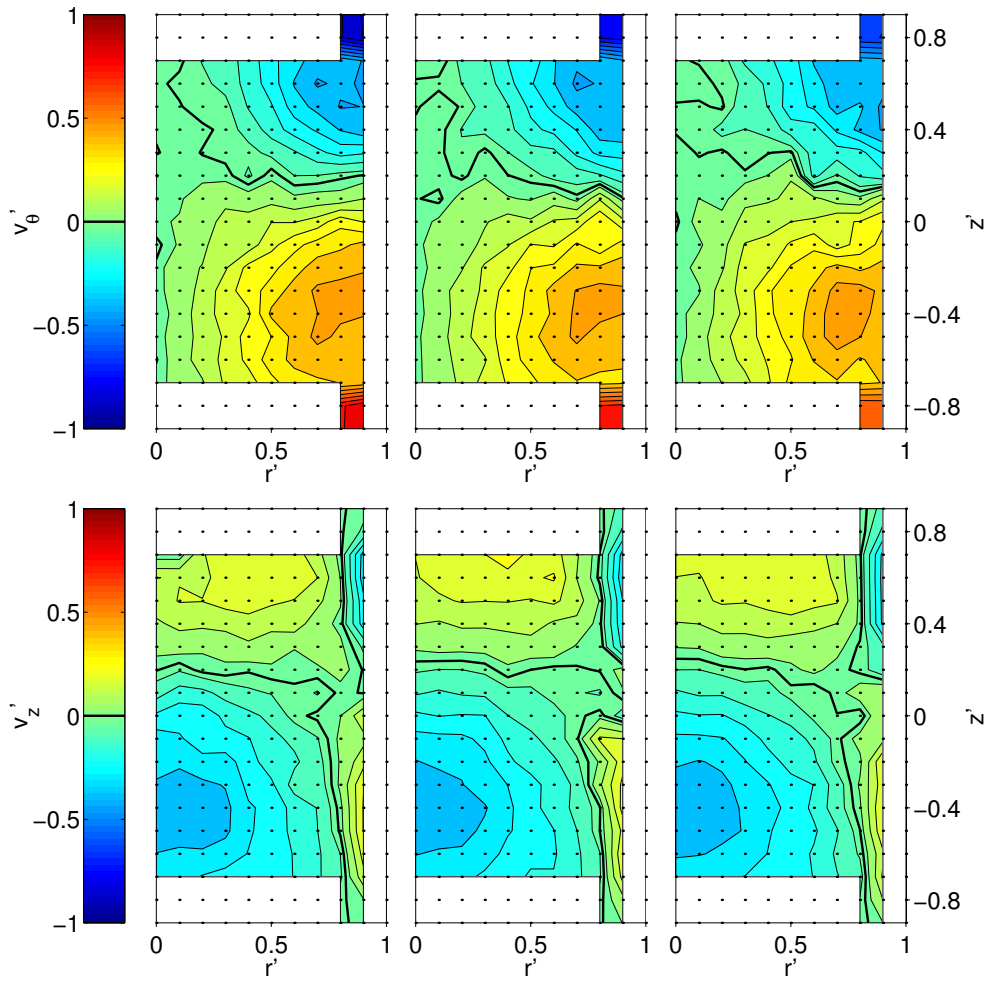


FIG. 4.5 – Champs de vitesses adimensionnelles, mesurés pour différentes fréquences de rotation des turbines. Turbines “TM51” en contra-rotation ( $\Theta = 45^\circ$ ), espacées de  $1.91R_c$ .  $R_c = 100$  mm. Sur chaque figure, l’axe du montage est à gauche et la paroi du cylindre à droite. Les rectangles blancs masquent les zones où la mesure de vitesse n’est pas possible. La rangée du haut représente les vitesses adimensionnelles azimutales, et la rangée du bas les vitesses axiales. Les codes de couleurs sont identiques pour toutes les figures, les lignes en trait fort noir marquent la valeur 0. La colonne de gauche regroupe les mesures faites à  $f = 2.47$  Hz,  $Re = 1.55 \cdot 10^5$ , celle du milieu les mesures faites à  $f = 4.53$  Hz,  $Re = 2.84 \cdot 10^5$ , et celle de droite les mesures faites à  $f = 6.79$  Hz,  $Re = 4.27 \cdot 10^5$ .

Enfin, nous avons étudié l’évolution en fonction de la fréquence de rotation des disques de certaines grandeurs associées à l’écoulement. La figure 4.7 représente ainsi l’évolution des valeurs minimale, moyenne et maximale des vitesses azimutale et axiale en fonction de la fréquence de rotation des turbines. La colonne de gauche de la figure représente l’évolution de valeurs dimensionnelles de ces grandeurs, en fonction de la fréquence de rotation. Nous pouvons voir que l’évolution de toutes ces grandeurs en fonction de la fréquence est presque linéaire. Les valeurs adimensionnelles correspondantes sont représentées en fonction du nombre de Reynolds dans les figures de la colonne de droite. Ces valeurs ne sont pas tout à fait constantes : les valeurs extrémales de  $v'_\theta$  dérivent en effet légèrement, la valeur moyenne de  $|v'_\theta|$  et les valeurs associées

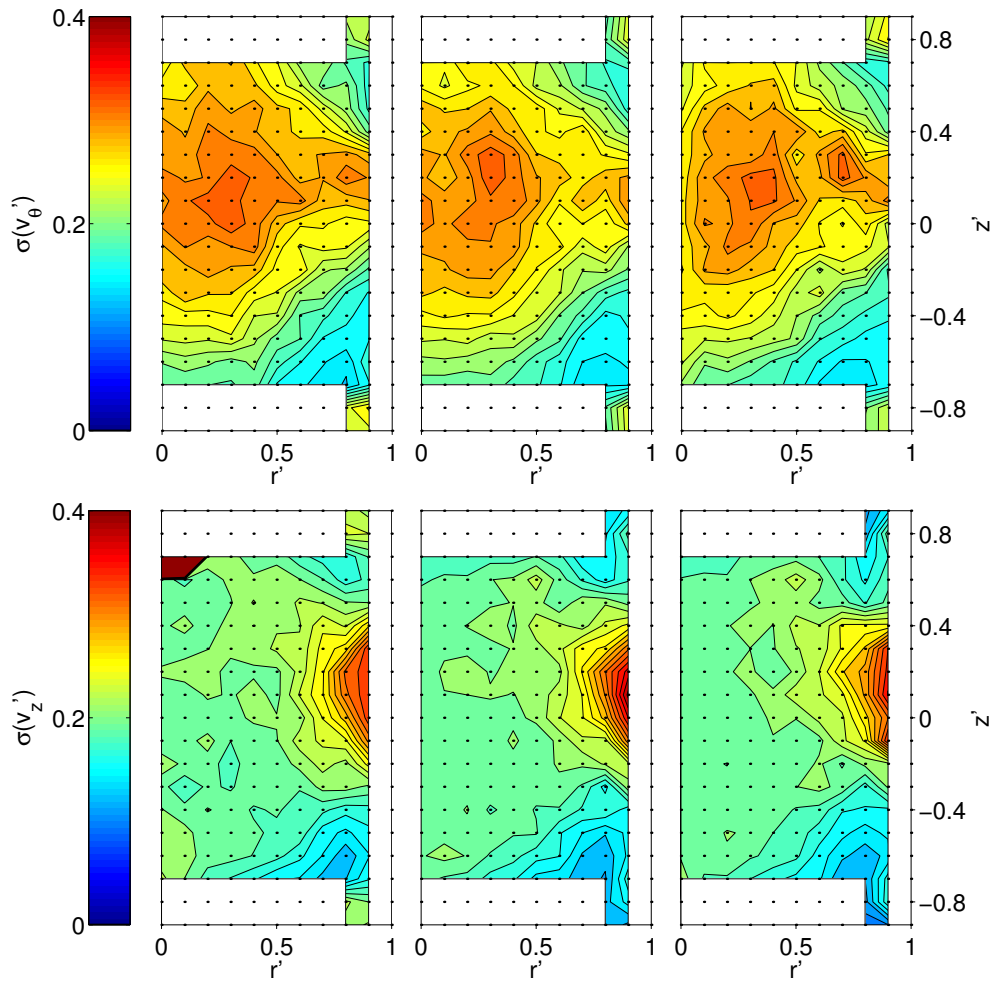


FIG. 4.6 – Champs des valeurs rms adimensionnelles des composantes de la vitesse, mesurés pour différentes fréquences de rotation des turbines. Sur chaque figure, l'axe du montage est à gauche et la paroi du cylindre à droite. Les rectangles blancs masquent les zones où la mesure de vitesse n'est pas possible. La rangée du haut représente les vitesses azimutales, et la rangée du bas les vitesses axiales. Les codes de couleurs sont identiques pour toutes les figures. La colonne de gauche regroupe les mesures faites à  $f = 2.47$  Hz,  $Re = 1.55 \cdot 10^5$ , celle du milieu les mesures faites à  $f = 4.53$  Hz,  $Re = 2.84 \cdot 10^5$ , et celle de droite les mesures faites à  $f = 6.79$  Hz,  $Re = 4.27 \cdot 10^5$ .

à  $v_z'$  ne présentant en revanche pas de variation significative. Il semble cependant raisonnable de considérer que ces grandeurs ne dépendent que faiblement du nombre de Reynolds.

La conclusion de cette étude est que, s'il n'est pas possible d'exclure une légère dépendance des vitesses adimensionnelles en fonction du nombre de Reynolds, il est établi que cette dépendance est faible. Cela est vrai pour la forme globale de l'écoulement, et à un niveau raisonnable d'approximation pour la valeur moyenne temporelle et l'écart-type des fluctuations de l'écoulement en chaque point (dans le cœur de l'écoulement, *i.e.* hors du voisinage immédiat des parois). Nous avons vérifié quantitativement sur quelques grandeurs caractéristiques de l'écoulement que les grandeurs adimensionnelles liées à la vitesse restaient sensiblement constante sur la plage de nombre de Reynolds que nous avons explorée. Nous avons donc pris le parti dans la suite de ce travail de thèse de ne faire pour chaque configuration que des mesures de vélocimétrie à une



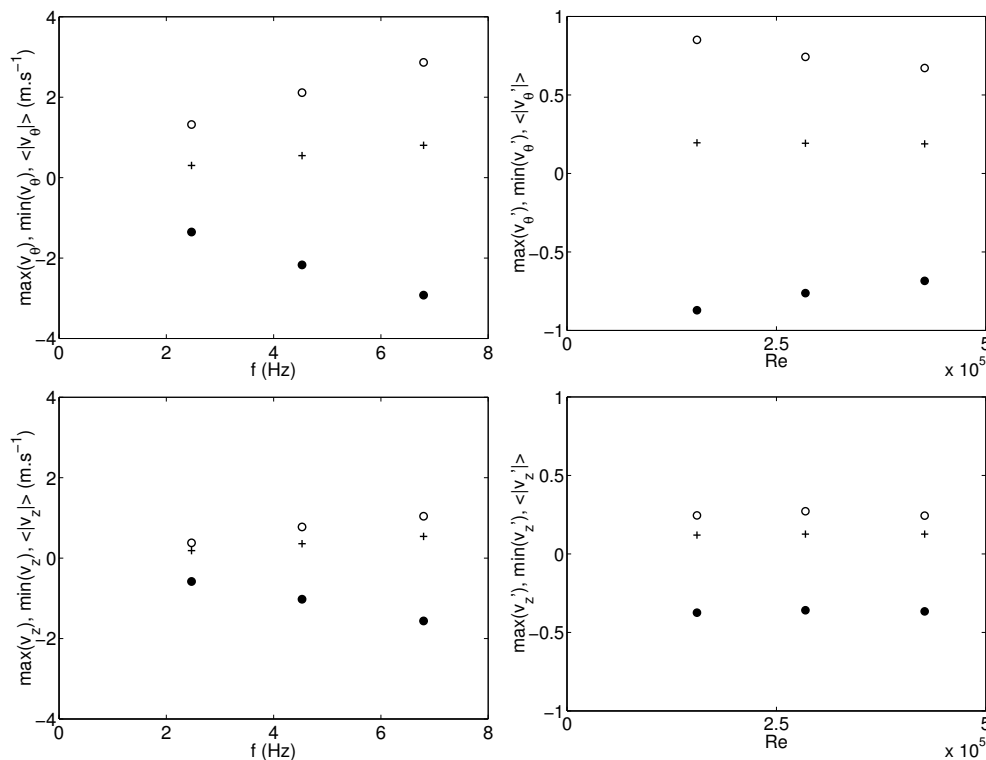


FIG. 4.7 – Valeurs maximales, minimales et moyennes des vitesses mesurées.  $\circ$  : valeurs maximales,  $\bullet$  : valeurs minimales,  $+$  : valeurs moyennes sur le demi-plan de mesure. La colonne de gauche regroupe les valeurs dimensionnelles, représentées en  $m.s^{-1}$  en fonction de la fréquence de rotation des turbines. La colonne de droite regroupe les valeurs adimensionnelles, représentées en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement.

seule valeur de  $f$ , et de ne plus étudier la dépendance de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds.

### Résultats des mesures de vélocimétrie

Nous avons effectué des mesures de vélocimétrie sur un certain nombre de jeux de turbines, et dans un certain nombre de configurations. Nous ne présenterons ici que les résultats de quelques-unes de ces mesures, en essayant de mettre en évidence l'effet de certains points particuliers du montage. Ces mesures forment un tout cohérent, dans ce sens qu'elles ont été réalisées "à la chaîne". Au cours des deux semaines qu'a duré cette campagne de mesures, le montage expérimental n'a subi aucune modification, mis à part bien sûr les changements de turbines successifs. La grille de points de mesure est consistante d'une configuration à l'autre, de même que les divers programmes de retraitement. Nous pouvons donc considérer que ces mesures ont été réalisées dans des conditions aussi identiques que possible, et que les différences qui apparaissent entre les résultats sont réellement d'origine hydrodynamique.

La figure 4.8 représente l'écoulement produit par les turbines "TM60", qui sont en quelque sorte nos turbines "de référence". Comme nous l'avons dit au chapitre 3, ce sont des turbines de ce type qui ont été utilisées lors des premières campagnes de mesures sur l'expérience "VKS". Ce sont donc les turbines que nous avons le plus étudiées, et celles avec lesquelles nous avons obtenu la plupart des résultats présentés dans la partie hydrodynamique de ce mémoire.

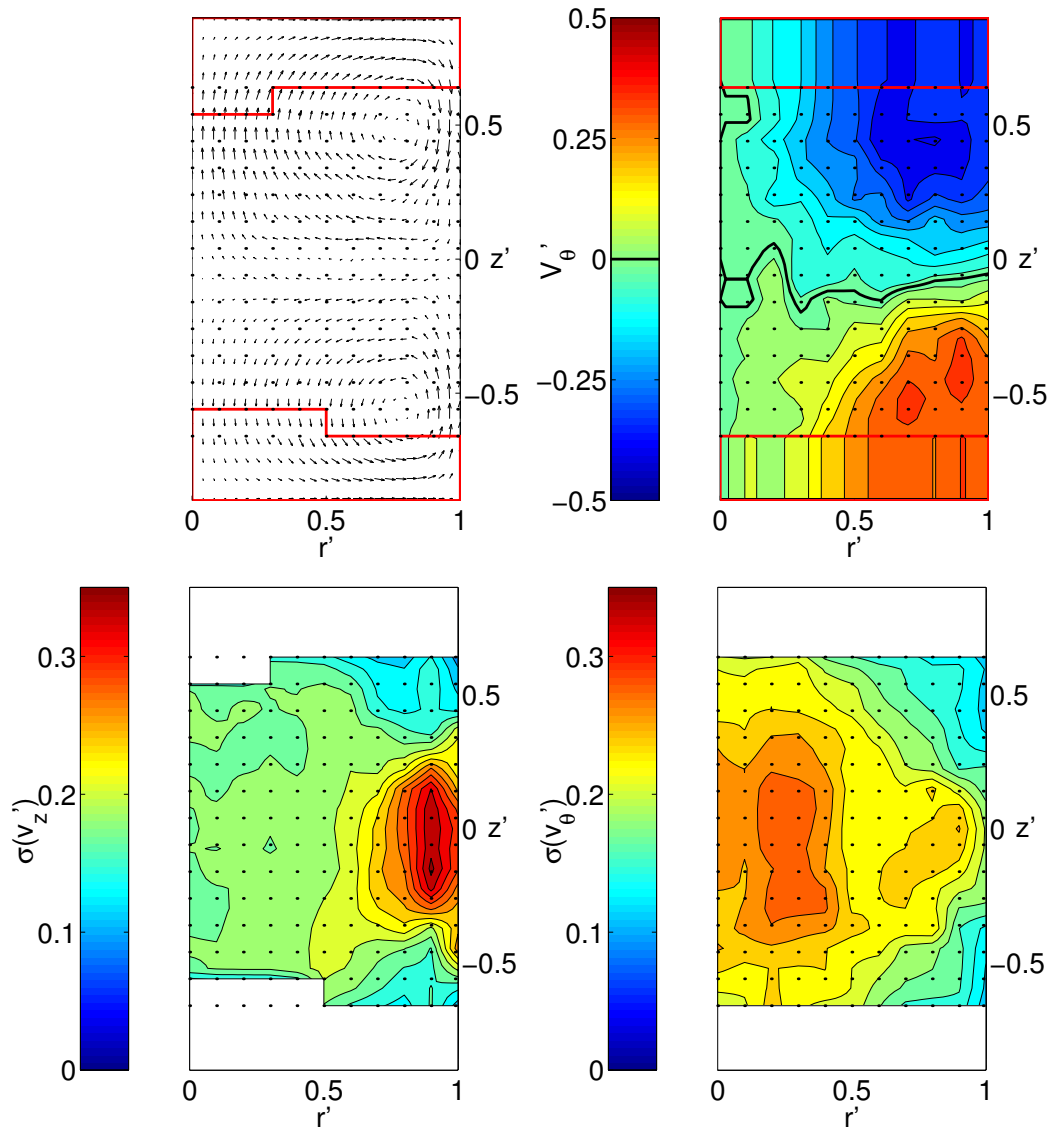


FIG. 4.8 – Résultats des mesures de vélocimétrie pour le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.78 R_c$  l’une de l’autre. Les mesures ont été effectuées pour  $R_c = 100$  mm,  $f = 2$  Hz, soit  $R_e = 1.25 \cdot 10^5$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions. Les lignes rouges délimitent les zones où l’écoulement n’a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale adimensionnelle. La flèche la plus longue correspond à une vitesse poloïdale adimensionnelle  $\max(v'_{pol}) = 0.52$ . En haut à droite : vitesse azimuthale adimensionnelle. En bas à gauche : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse azimuthale.

Nous pouvons voir sur la figure 4.8 un certain nombre de caractéristiques marquantes, qui se retrouvent dans l’ensemble des écoulements que nous avons mesurés lorsque les turbines étaient en contra-rotation (sauf dans certains cas qui font l’objet du chapitre 5) :

- Tout d’abord, nous voyons sur l’ensemble des graphes que l’écoulement respecte approximativement l’invariance par retournement dont nous avons parlé au début de ce chapitre. Dans

l'ensemble, les statistiques des composantes de la vitesse en chaque point du haut du demi-plan peuvent se déduire de leurs valeurs au point homologue situé dans le bas du demi-plan. Cette propriété est assez sensible à la qualité de la réalisation des turbines. Les résultats présentés sur les figures 4.5 et 4.6 de la section précédente, qui ont été obtenus avec des turbines moins "propres", sont par exemple visiblement moins symétriques.

– Il apparaît ensuite sur le graphe situé en haut à droite de la figure que chaque turbine entraîne dans sa rotation le fluide situé dans sa moitié du volume de l'écoulement. Les vitesses azimutales sont ainsi négatives dans la demi-boîte du haut, et positives dans celle du bas, suivant en cela les vitesses de rotation des turbines. Les vitesses azimutales ainsi atteintes sont proches de  $\pm 1/2$ . Cette valeur est assez élevée. En comparaison, Cadot *et al.* [29] citent des valeurs de l'ordre de 0.1 dans un montage similaire utilisant des disques lisses.

– Ensuite, le graphe situé en haut à gauche de la figure montre qu'au niveau de chaque disque une forme de "pompage centrifuge" aspire le fluide près de l'axe et l'expulse près de la paroi du cylindre. Le fluide longe ensuite la paroi du cylindre jusqu'au plan équatorial de l'écoulement, où il acquiert un mouvement radial rentrant qui le ramène sur l'axe du cylindre. Il se forme donc dans chaque moitié de l'écoulement une cellule de recirculation méridienne. Les vitesses méridiennes obtenues par ce mécanisme sont du même ordre de grandeur que les vitesses azimutales (ici, la valeur maximale de  $\sqrt{v_r'^2 + v_z'^2}$  vaut 0.52). Les cellules de recirculation mettent en jeu tout le volume de l'écoulement, il n'existe pas de zone "morte".

– En ce qui concerne les fluctuations turbulentes dans les directions azimutale et axiale, nous voyons sur les deux graphes du bas de la figure qu'elles sont fortes principalement dans le plan équatorial de la figure, à la séparation entre les deux cellules de recirculation. La valeur de  $\sigma(v_\theta)'$  est maximale aux alentours de  $r' = 0.25$ , et celle de  $\sigma(v_z)'$  est maximale plus près de la paroi, environ en  $r' = 0.9$ . Des visualisations de l'écoulement nous ont permis de voir que les forts gradients de vitesse azimutale entretiennent dans cette région une couche de cisaillement axisymétrique, qui est étirée par la composante radiale rentrante de l'écoulement. Cette couche de cisaillement est par exemple visible sur la figure 4.9, qui est une photographie de l'écoulement induit par des turbines "TM60" munies de pales de 10 mm, tournant en contra-rotation à  $f = 15$  Hz.

La figure 4.10 représente ensuite l'écoulement produit par les mêmes turbines ("TM60",  $h/R_c = 0.2$ ), lorsqu'elles tournent dans le sens "négatif". Les pales reçoivent dans ce cas le fluide sur leur face concave. Cette mesure nous renseigne sur l'effet de la courbure des pales sur l'écoulement. Intuitivement, nous nous attendons en effet à ce que l'écoulement produit par des pales qui "mordent" dans le fluide soit plus vigoureux que celui produit par des pales qui "font le dos rond".

Nous pouvons voir que cette intuition est vérifiée sur un certain nombre de points (l'échelle de couleur des graphes n'est pas la même que sur la figure précédente), mais pas sur tous :

– Nous observons certes tout d'abord que les valeurs de la vitesse azimutale couvrent une gamme deux fois plus large que dans le cas du sens de rotation positif. La vitesse azimutale dans le sens positif était ainsi comprise entre  $-0.40$  et  $0.37$ , elle balaie désormais une gamme qui va de  $-0.94$  à  $0.95$ . (Ces valeurs sont rassemblées dans le tableau 4.1). Par ailleurs, la dépendance radiale de  $v'_\theta$  change fortement. Les fortes valeurs de la vitesse azimutale sont maintenant concentrées au proche voisinage de la paroi du cylindre, pour  $r' > 0.8$ .

– Nous constatons que les fluctuations de l'écoulement semblent se ramasser dans la même couronne  $r' > 0.8$ . Une zone de fortes valeurs de  $\sigma(v'_\theta)$  semble être apparue dans cette région. Par ailleurs, la valeur *rms* des fluctuations de  $v'_\theta$  et  $v'_z$  a notablement augmenté, passant de  $0.30$  à  $0.52$  pour  $\sigma(v'_\theta)$ , et de  $0.35$  à  $0.44$  pour  $\sigma(v'_z)$ . Nous voyons que l'augmentation est plus faible dans le cas des fluctuations, pour lesquelles le facteur est d'ordre 1.5 environ, que dans le cas de

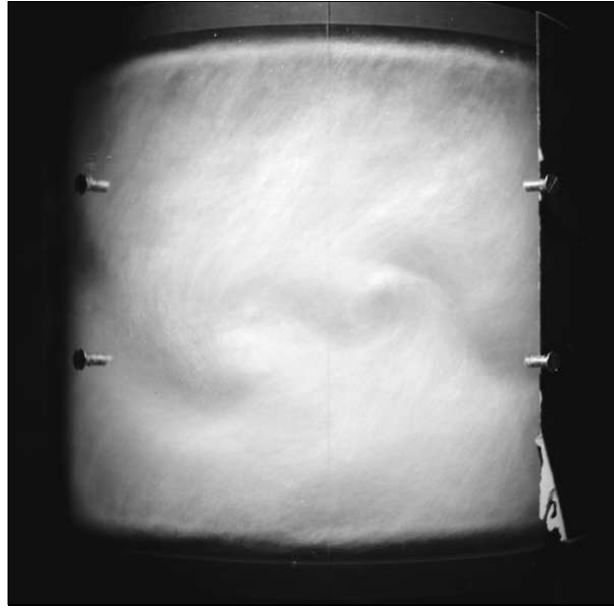


FIG. 4.9 – Photographie de l'écoulement ensemencé de bulles d'air. Les turbines sont du type “TM60”, et sont munies de pales hautes de  $0.1R_c$ . Elles tournent en contra-rotation à 15 Hz ( $Re = 9.2 \cdot 10^5$ ). La turbine du haut (resp. du bas) va vers la gauche (resp. droite) de la figure. La vraie hauteur est de 180 mm environ. Le temps de pause est de  $\frac{1}{20}$  s.

$v'_\theta$ , pour laquelle le facteur est nettement supérieur à 2.

– Par contre, nous voyons que les vitesses méridiennes observées dans les cellules de recirculation sont *plus faibles* lors de la mesure à fréquence négative que lors de la mesure à fréquence positive, 0.37 contre 0.52 auparavant.

La figure 4.11, quant à elle, représente l'écoulement produit par des turbines munies de pales de même courbure, mais de hauteur  $h/R_c = 0.1$ , tournant dans le sens positif. Les échelles de couleur sont identiques à celles de la figure 4.8.

Nous pouvons voir sur cette figure que l'usage de pales de hauteur moitié s'accompagne d'une diminution notable de l'intensité des fluctuations turbulentes, ainsi que des vitesses azimutales. Les vitesses azimutales sont moins concentrées près des parois, et elles semblent distribuées de la même manière que dans le cas des pales de 20 mm. La composante poloidale de l'écoulement ne diminue que faiblement, sa valeur maximale passant de 0.52 pour  $h/R_c = 0.2$  à 0.37 pour  $h/R_c = 0.1$ .

Enfin, la figure 4.12 représente l'écoulement produit par des turbines de type “TM70” (pales droites, diamètre 146 mm) munies de pales hautes de  $0.2R_c$ . Il nous a semblé intéressant de montrer ces résultats obtenus avec des turbines munies de pales droites, même si le diamètre de ces turbines n'est pas identique à celui des turbines “TM60”. Nous pouvons voir sur cette figure que la répartition des fluctuations turbulentes dans l'écoulement est très similaire à celle obtenue pour nos turbines “de référence”. La gamme d'intensités balayée est la même, et la répartition spatiale est très semblable. La distribution des vitesses azimutales est elle aussi assez semblable, les vitesses semblant toutefois moins concentrées dans la périphérie de l'écoulement pour les turbines “TM70”. L'écoulement poloidal est par contre nettement moins intense (0.30 au lieu de 0.52), et il semble que  $v'_z$  et  $v'_r$  aient des variations moins “plates” en  $r'$  près de l'axe du cylindre.

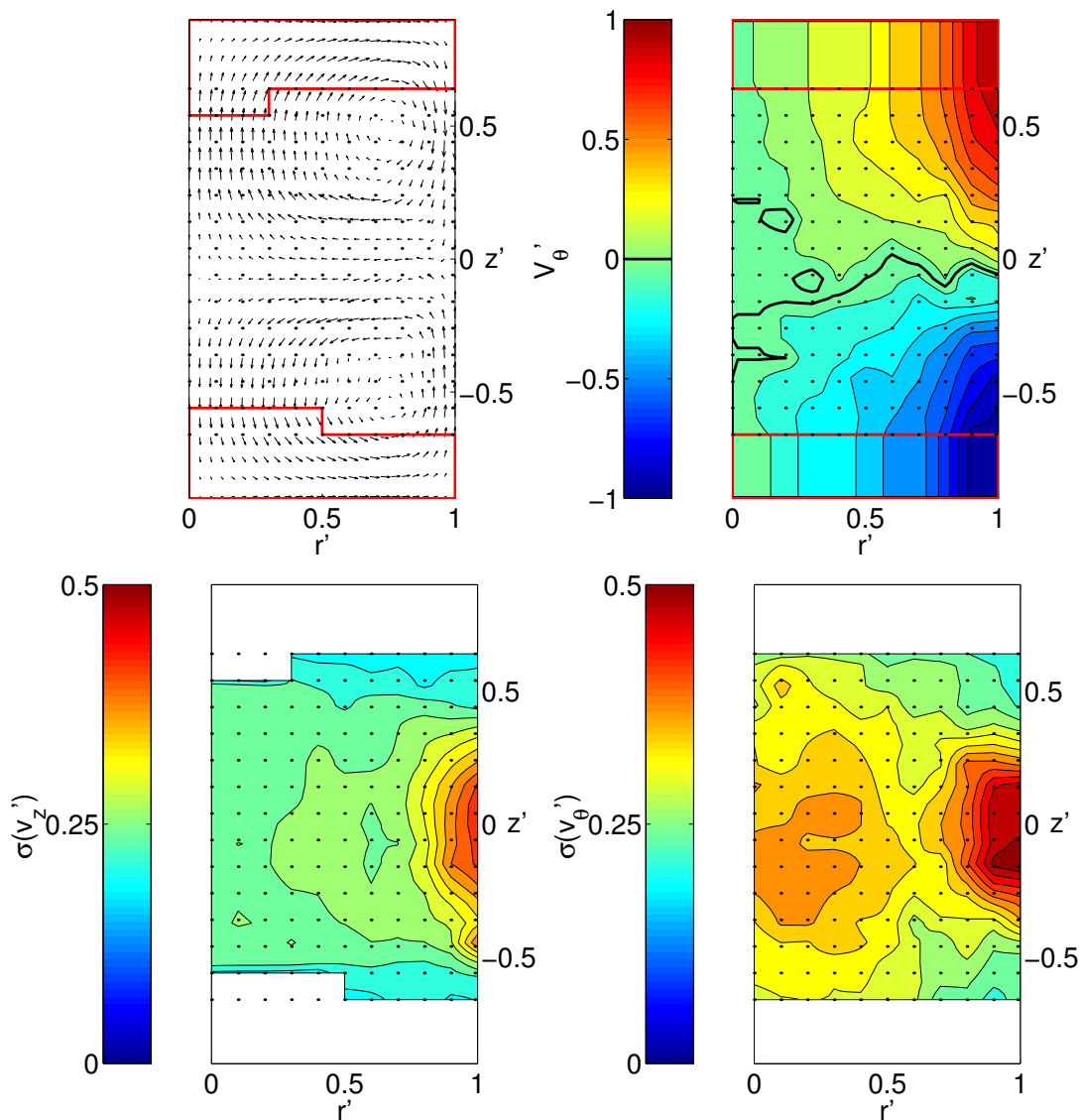


FIG. 4.10 – Résultats des mesures de vélocimétrie pour le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à fréquence négative, à  $1.78 R_c$  l’une de l’autre. Les mesures ont été effectuées pour  $R_c = 100$  mm,  $f = 2$  Hz,  $\Theta = 225^\circ$ , soit  $Re = 1.25 \cdot 10^5$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions. Les lignes rouges délimitent les zones où l’écoulement n’a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale adimensionnelle. La flèche la plus longue correspond à une vitesse poloidale adimensionnelle  $\max(v'_{pol}) = 0.37$ . En haut à droite : vitesse azimutale adimensionnelle. En bas à gauche : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse azimutale.

#### 4.1.4 Conclusion des mesures de Vélocimétrie

En conclusion de cette étude, nous rappellerons donc qu’un certain nombre de points sont communs à tous les écoulements que nous avons présentés ici :

- Leurs caractéristiques statistiques sont approximativement invariantes par retournement.

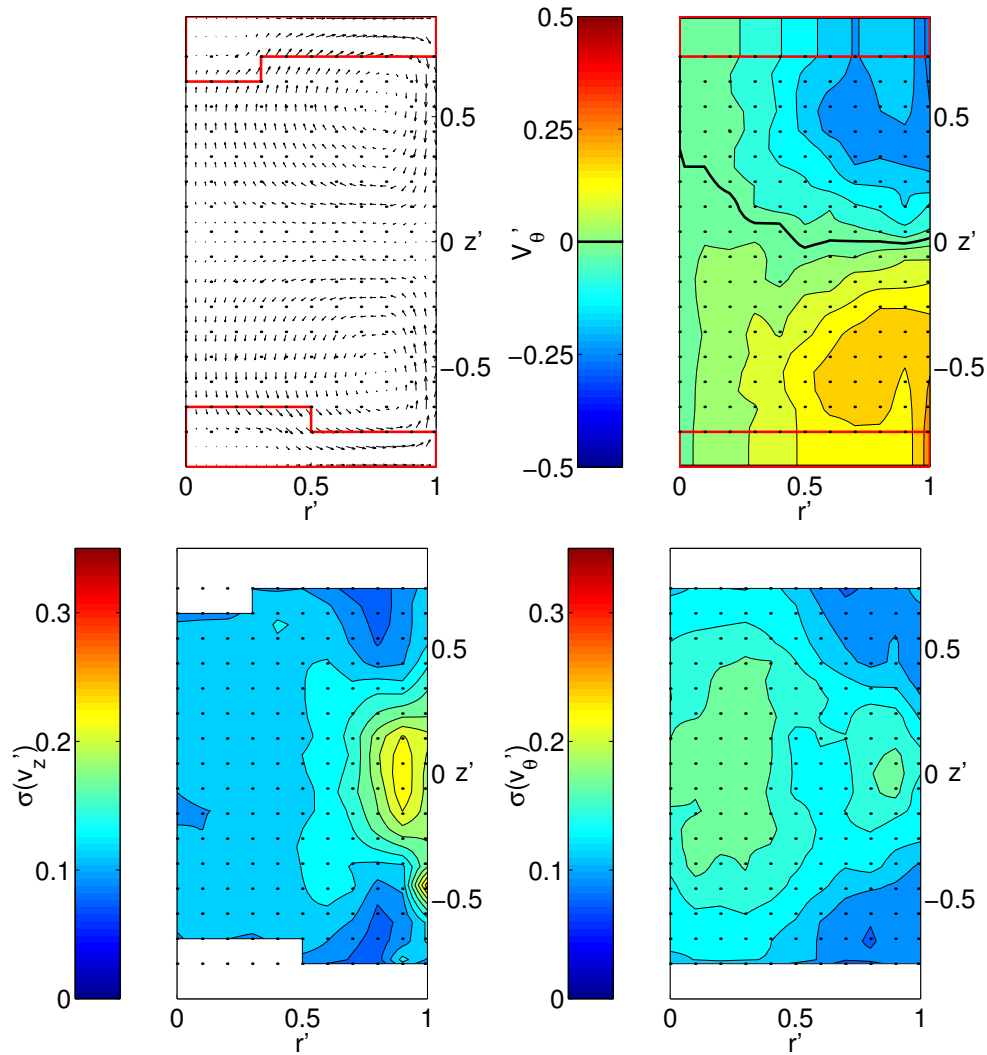


FIG. 4.11 – Résultats des mesures de vélocimétrie pour le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.1 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.78 R_c$  l’une de l’autre. Les mesures ont été effectuées pour  $R_c = 100$  mm,  $f = 2$  Hz, soit  $Re = 1.25 \cdot 10^5$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions. Les lignes rouges délimitent les zones où l’écoulement n’a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale adimensionnelle. La flèche la plus longue correspond à une vitesse poloidale adimensionnelle  $\max(v'_{pol}) = 0.40$ . En haut à droite : vitesse azimutale adimensionnelle. En bas à gauche : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse azimutale.

- Chaque turbine entraîne dans la direction azimutale le fluide qui est situé près d’elle.
- De plus, chaque turbine crée une cellule de recirculation méridienne dans son voisinage.
- Les valeurs adimensionnelles des composantes azimutales et poloidales de la vitesse sont d’ordre 1.
- Les fluctuations de  $v'_\theta$  et  $v'_z$  sont fortes principalement au voisinage du plan équatorial. Les fluctuations de  $v'_\theta$  sont principalement fortes près de l’axe du cylindre, mais peuvent dans certains cas être fortes près de la paroi de la cuve. Les fluctuations de  $v'_z$  ne peuvent être fortes que près

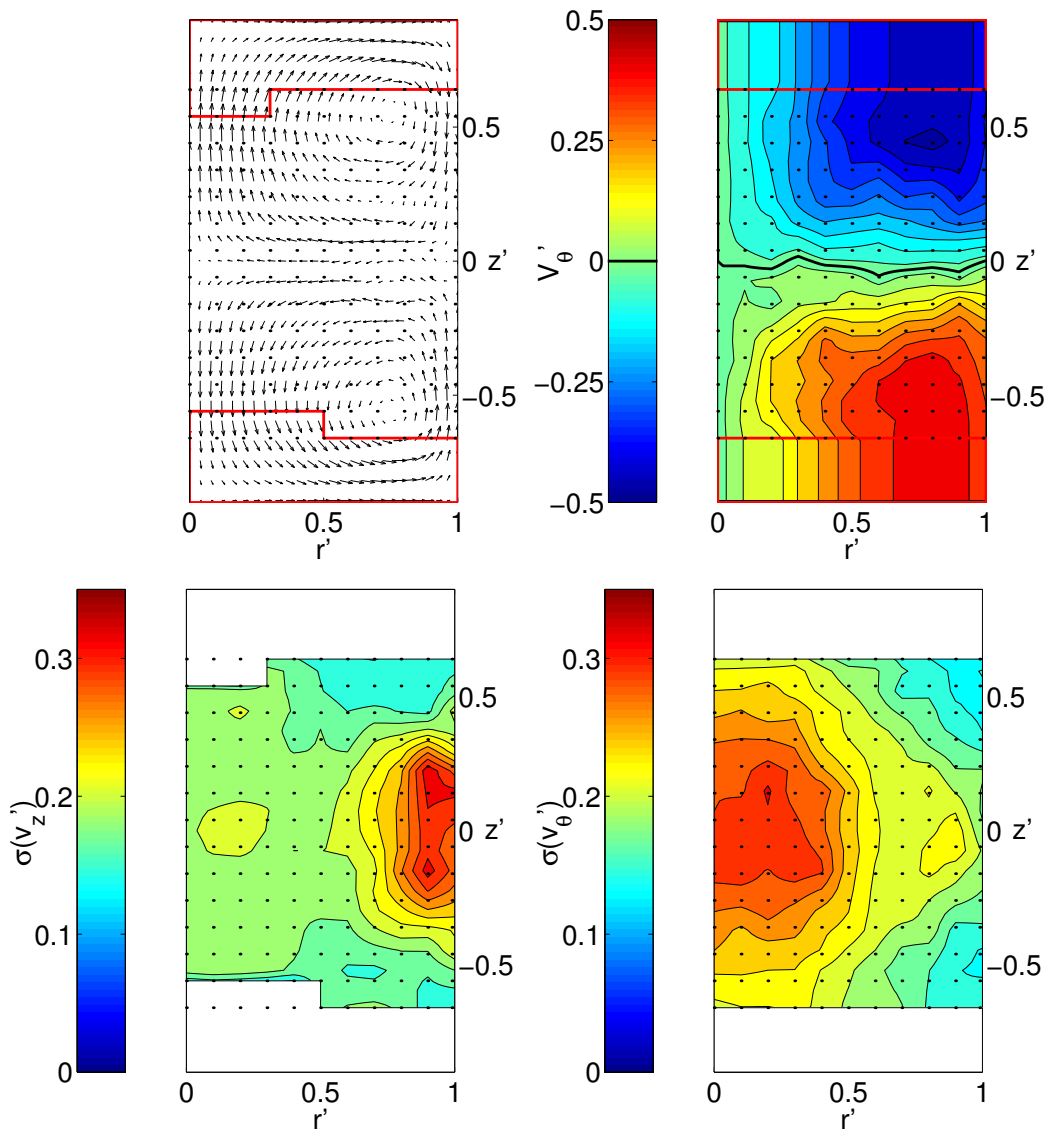


FIG. 4.12 – Résultats des mesures de vélocimétrie pour le jeu de turbines “TM70” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.78 R_c$  l’une de l’autre. Les mesures ont été effectuées pour  $R_c = 100$  mm,  $f = 2$  Hz, soit  $Re = 1.25 \cdot 10^5$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions. Les lignes rouges délimitent les zones où l’écoulement n’a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale adimensionnelle. La flèche la plus longue correspond à une vitesse poloïdale adimensionnelle  $\max(v'_{pol}) = 0.37$ . En haut à droite : vitesse azimuthale adimensionnelle. En bas à gauche : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de vitesse azimuthale.

de la paroi de la cuve.

– Les valeurs rms adimensionnelles des fluctuations sont d’ordre 1.

Par ailleurs, nous récapitulons dans les tableaux 4.1 et 4.2 les valeurs adimensionnelles extrêmes des différentes composantes de la vitesse dans les écoulements que nous avons présentés, ainsi que les valeurs moyennées sur le volume de l’écoulement de ces grandeurs.

Turbines	$h/R_c$	$f$	$max(v'_{pol})$	$min/max(v'_\theta)$	$max(\sigma(v'_\theta))$	$max(\sigma(v'_z))$
TM60	0.2	+	0.52	-0.40 / 0.37	0.30	0.35
TM60	0.2	-	0.37	-0.94 / 0.95	0.52	0.44
TM60	0.1	+	0.40	-0.26 / 0.26	0.18	0.25
TM60	0.1	-	0.30	-0.85 / 0.85	0.40	0.33
TM70	0.2	+	0.37	-0.47 / 0.43	0.31	0.32

TAB. 4.1 – Récapitulatif des valeurs extrémales rencontrées pour les différentes quantités adimensionnelles dans les écoulements présentés. Nous avons ajouté aux écoulements déjà vus la contra-rotation à fréquence négative des turbines “TM60” munies de pales de 10 mm.

Turbines	$h/R_c$	$f$	$\langle v'_{pol} \rangle$	$\langle  v'_\theta  \rangle$	$\langle \sigma(v'_\theta) \rangle$	$\langle \sigma(v'_z) \rangle$
TM60	0.2	+	0.19	0.23	0.18	0.17
TM60	0.2	-	0.15	0.38	0.28	0.22
TM60	0.1	+	0.13	0.13	0.12	0.12
TM60	0.1	-	0.10	0.23	0.21	0.17
TM70	0.2	+	0.18	0.29	0.18	0.17

TAB. 4.2 – Récapitulatif des valeurs moyennes volumiques des différentes quantités adimensionnelles dans les écoulements présentés.

## 4.2 Mesures des couples

Un autre aspect de la caractérisation des écoulements induits par nos différents jeux de turbines a été la mesure systématique des couples fournis par les moteurs en fonction des différents paramètres du montage. La méthode de mesure des couples que nous avons adoptée ne nous permettant pas d’avoir accès de façon précise à leurs fluctuations, nous nous sommes limités à l’étude de leurs valeurs moyennes temporelles. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les propriétés statistiques des fluctuations de couples dans l’écoulement de von Kármán aux travaux de R. Labbé *et al.* [73] et de C. Titon et O. Cadot [142] sur le sujet. Notre étude nous a tout d’abord permis de vérifier les arguments dimensionnels portant sur les couples des moteurs, puis a servi de point de départ pour les résultats qui seront présentés au chapitre 6. Elle nous a par ailleurs permis d’apporter des éléments quantitatifs à l’étude de la “bifurcation globale” que nous présenterons au chapitre 5. Enfin, elle a rempli sa fonction première, qui était l’estimation prévisionnelle des couples fournis par les moteurs lors des différentes campagnes de mesure sur l’expérience “VKS”.

### 4.2.1 Vérification des arguments dimensionnels, vérification des arguments de symétrie.

Suivant une démarche désormais établie, nous avons commencé l’étude systématique des couples fournis par les moteurs par la vérification des arguments dimensionnels et des arguments de symétrie présentés au début de ce chapitre. Nous n’avons ensuite réalisé que le nombre minimal de mesures qui était nécessaire (et parfois même un peu moins, malheureusement).

#### Les arguments dimensionnels

Les arguments présentés au chapitre 3 montrent que, lorsque le nombre de Reynolds de l’écoulement est grand devant un, la dépendance des couples des moteurs en fonction des différents



paramètres de l'écoulement peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\gamma_1(t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = C_1(t', \Theta, \{n\})$$

$$\frac{\gamma_2(t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = C_2(t', \Theta, \{n\})$$

Nous rappelons que dans cette expression  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les couples des moteurs, exprimés en N.m,  $\rho$  et  $R_c$  sont respectivement la masse volumique du fluide utilisé, exprimée en  $\text{kg.m}^{-3}$ , et le rayon de la cuve cylindrique, exprimé en m,  $\{n\}$  représente l'ensemble de nombres sans dimensions qui décrit la forme géométrique du montage expérimental, et  $f$  et  $\Theta$  sont tels que le couple des fréquences de rotation des turbines ( $f_1, f_2$ ) vaut  $(\sqrt{2}f \cos(\Theta), \sqrt{2}f \sin(\Theta))$ .  $t'$  est la date adimensionnelle de la mesure, égale à  $ft$ . Enfin,  $C_1$  et  $C_2$  sont les deux fonctions sans dimensions ne dépendant que de nombres sans dimensions qu'il nous revient de déterminer. Nous voyons alors qu'une façon simple de tester ces résultats est de mesurer systématiquement les valeurs moyennes temporelles des couples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans le plan  $(f_1, f_2)$ , dans une configuration. Si les arguments dimensionnels sont exacts, les couples doivent dépendre quadratiquement de la distance à l'origine  $(0, 0)$  le long de chaque rayon  $\Theta = C^{te}$ .

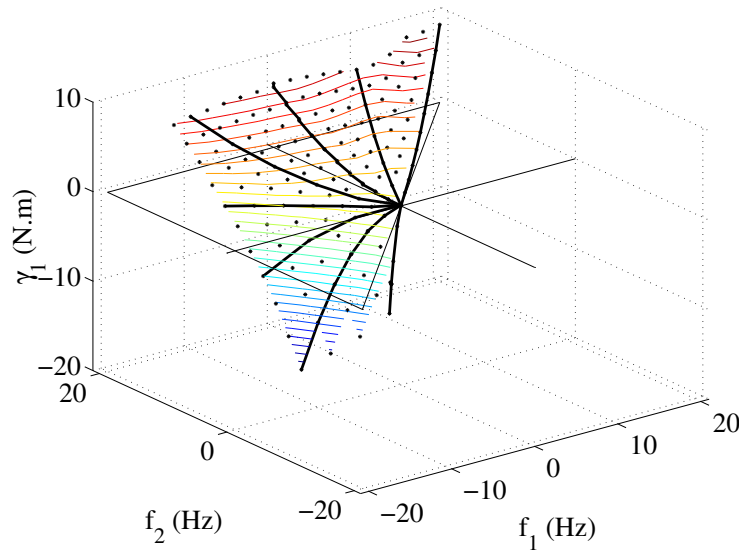


FIG. 4.13 – Résultats des mesures de couples pour le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.78R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $R_c = 100$  mm. Nous avons fait varier  $f_1$  et  $f_2$  indépendamment dans le domaine  $f_2 > f_1$  ( $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ ). Nous avons effectué des mesures jusqu'à  $\max(|f_1|, |f_2|) = 20$  Hz lorsque cela était possible, et jusqu'à la valeur de  $f$  correspondant au couple maximal admissible par les moteurs dans le cas contraire. Les points noirs représentent la valeur moyenne du couple du moteur 1 en fonction de  $f_1$  et  $f_2$ . Les valeurs de  $\gamma_1$  le long d'un certain nombre de rayons  $\Theta = C^{te}$  ont été représentées en trait fort noir.

La figure 4.13 représente la valeur moyenne temporelle du couple du moteur 1,  $\gamma_1$ , en fonction des deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , dans le cas de mesures faites avec des turbines “TM60”, munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , séparées de  $1.78R_c$  dans une cuve de rayon  $R_c = 100$  mm, non munie

d'ailettes. Nous avons représenté en trait fort sur cette figure les valeurs de  $C_1$  le long de certains rayons  $\Theta = C^{te}$ . Nous pouvons voir sur cette figure que sur chacun de ces rayons le couple a une évolution assez simple (monotone, sinon à proprement parler quadratique) en fonction de la distance à l'origine, mais que le facteur qui multiplie cette évolution varie lui de façon non-triviale en fonction de l'angle  $\Theta$ .

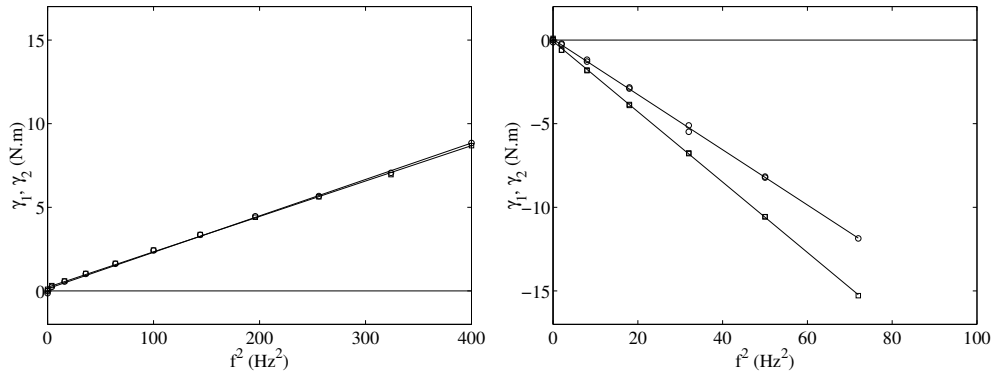


FIG. 4.14 – Valeurs moyennes des couples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en fonction du carré de la fréquence  $f$ . Les carrés  $\square$  (resp. cercles  $\circ$ ) représentent les valeurs de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ). a)  $f_1 = f_2 = f$ ,  $\Theta = 45^\circ$ . b)  $f_1 = -f\sqrt{2}$ ,  $f_2 = 0$ ,  $\Theta = 180^\circ$ . Les lignes représentent les ajustements linéaires des points  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Les coefficients de corrélation sont toujours supérieurs à 0.999.

La figure 4.14 représente le couple des deux moteurs en fonction du carré de la fréquence  $f$  le long de deux des rayons de la figure 4.13, le rayon  $\Theta = 45^\circ$  ( $f_1 = f_2 = f$ ), et le rayon  $\Theta = 180^\circ$  ( $f_1 = -f\sqrt{2}$ ,  $f_2 = 0$ ). Sur chacune des figures, nous avons tracé les ajustements de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  par la forme  $af^2 + b$ . Nous pouvons voir que dans les deux cas la dépendance des couples en fonction de  $f$  est très bien décrite par la forme fonctionnelle  $af^2 + b$ . La dépendance quadratique est celle qui est attendue dimensionnellement, tandis que le décalage  $b$  a été introduit pour tenir compte des couples parasites provenant de la friction dans les roulements qui tiennent l'arbre de la turbine et celui du moteur, ainsi que dans les joints qui assurent l'étanchéité du montage.

Lorsque les deux turbines tournent en co-rotation exacte (rayons  $\Theta = 135^\circ$  et  $\Theta = 315^\circ$ ), l'ajustement par une forme quadratique est cependant moins satisfaisant. La dépendance des couples en fonction de  $f^2$  le long du rayon  $\Theta = 135^\circ$  est représentée en figure 4.15. Nous pouvons voir sur cette figure que les couples mesurés dans les situations de co-rotation sont très faibles (environ trois fois plus faibles par exemple qu'en contra-rotation). De plus, leur dépendance en fonction de  $f$  est (un peu) moins bien ajustée par la forme fonctionnelle  $af^2 + b$ . Cette dépendance “exotique” peut s'expliquer de la manière suivante, qui s'inspire d'arguments que nous développerons au chapitre 6 : lorsque les deux turbines tournent en co-rotation, il est possible de voir par des arguments de symétrie que les deux turbines injectent dans l'écoulement du moment cinétique, qui ne peut ressortir de l'écoulement que par la paroi cylindrique. Si le cylindre n'est pas muni d'ailettes, ce moment cinétique doit donc traverser une couche limite, dont la structure est susceptible d'évoluer en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement. La dépendance en fonction du nombre de Reynolds des couples adimensionnels fournis par les moteurs n'a donc aucune raison d'être faible, et peut donc être à l'origine du comportement que nous observons. Heureusement, ce comportement reste une exception. Nous avons vérifié que le comportement quadratique se rétablit rapidement sur les rayons voisins du régime de co-rotation.

Pour résumer cette section, nous dirons que le comportement des couples des moteurs en fonction de la fréquence  $f$  le long de chaque rayon  $\Theta = C^{te}$  est assez bien décrit par la forme

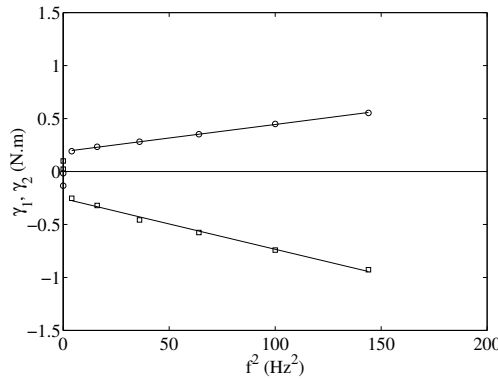


FIG. 4.15 – Mesures des valeurs moyennes des couples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en fonction du carré de  $f$ , dans le cas de la co-rotation ( $f_1 = -f$ ,  $f_2 = f$ ,  $\Theta = 135^\circ$ ). Les carrés  $\square$  (resp. cercles  $\circ$ ) représentent les valeurs de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ). Les coefficients de corrélation valent 0.997 et 0.999.

fonctionnelle  $af^2 + b$ , sauf dans la situation exceptionnelle où les disques sont en co-rotation exacte. Le premier paramètre ajustable de la forme fonctionnelle,  $a$ , est relié au couple adimensionnel que nous souhaitons mesurer, alors que le deuxième,  $b$ , est relié aux couples de friction du montage expérimental. La valeur de  $b$  obtenue lors des ajustements est de l'ordre des valeurs mesurées lors des mesures d'étalonnage, soit quelques dixièmes de N.m (voir chapitre 3). Nous n'avons pas pu effectuer de mesures pour des valeurs différentes de  $R_c$  afin de vérifier l'exposant 5 du rayon de la cuve dans l'expression des couples adimensionnels, mais les puissances moteurs estimées par la mesure de la dérive en température dans l'expérience "VKS" semblent en assez bon accord avec l'extrapolation à taille double de nos données (voir chapitre 12). Même si nous ne pouvons pas exclure sur la base de nos données expérimentales qu'une déviation existe par rapport au comportement prédit par analyse dimensionnelle (exposant légèrement différent de 2, composante linéaire, etc.), nous pouvons affirmer que cette déviation, si elle est présente, est faible, et que la forme obtenue par analyse dimensionnelle représente une bonne approximation de travail des comportements que nous avons observés. Nous avons donc pris le parti de ne pas mettre d'accent particulier sur la mesure de la dépendance en  $f$  des couples dans les différentes configurations que nous avons étudiées, et de ne présenter nos résultats que sous la forme de courbes représentant la dépendance des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$ . Nous rappelons ci-dessous les définitions de  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_1(t', \Theta, \{n\}) = \frac{\gamma_1(t', \Theta, \{n\})}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5}$$

$$C_2(t', \Theta, \{n\}) = \frac{\gamma_2(t', \Theta, \{n\})}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5}$$

### Les arguments de symétrie.

La figure 4.16 représente l'effet du retournement  $\mathcal{R}_\pi$  sur notre montage expérimental, lorsque la turbine du haut tourne à la fréquence  $f_1$  et celle du bas tourne à la fréquence  $f_2$ . Nous voyons que l'expérience image de la première par  $\mathcal{R}_\pi$  est l'expérience dans laquelle les fréquences de rotation sont échangées, de même que les couples fournis par les deux moteurs. Nous sommes donc dans un cas où il nous est possible de "deviner" le résultat de la mesure à  $(f_2, f_1)$  à partir du résultat de la mesure à  $(f_1, f_2)$ . L'une de ces deux mesures est donc *a priori* redondante. Ne

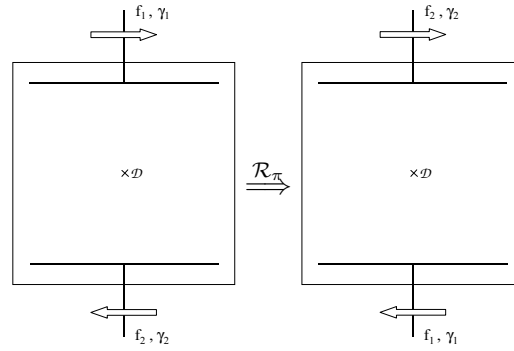


FIG. 4.16 – Schéma de l'effet de l'opération de retournement sur la mesure de couple. a) La turbine du haut tourne à  $f_1$ , elle fournit au fluide un couple  $\gamma_1$ , la turbine du bas tourne à  $f_2$ , elle fournit au fluide un couple  $\gamma_2$ . b) Image de l'expérience précédente par  $\mathcal{R}_\pi$  : la turbine du haut tourne à  $f_2$ , la turbine du bas tourne à  $f_1$ . La turbine du haut fournit donc à l'écoulement un couple  $\gamma_2$ , et celle du bas fournit donc un couple  $\gamma_1$ .

réaliser de mesures que dans le demi-plan  $f_2 \leq f_1$  permet alors de diviser le nombre d'expériences à réaliser par deux, en apportant la même quantité d'information. Un test expérimental facile de ce raisonnement est d'effectuer dans une configuration des mesures de couple dans toute la gamme  $-135^\circ < \Theta < 225^\circ$ , et de vérifier que le couple adimensionnel fourni par le moteur 1 (resp. 2) en  $\Theta = 45^\circ + \alpha$  est identique à celui fourni par le moteur 2 (resp. 1) en  $\Theta = 45^\circ - \alpha$ .

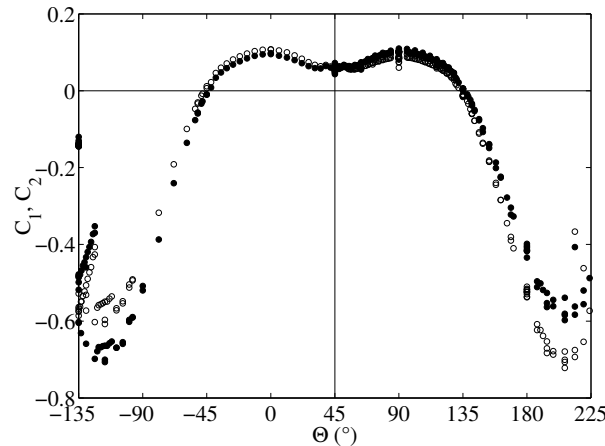


FIG. 4.17 – Mesures des valeurs moyennes des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$ , sur l'ensemble de la plage  $-135^\circ < \Theta < 225^\circ$ . Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de  $0.2R_c$  de haut, séparées de  $1.78R_c$ . Certaines mesures ont été effectuées dans la cuve  $R_c = 100$  mm, d'autres dans la cuve  $R_c = 99$  mm. Les symboles ouverts (resp. pleins) représentent les valeurs de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ).

La figure 4.17 représente les couples adimensionnels fournis par les turbines “TM60” munies de pales de  $0.2R_c$ , en fonction de l'angle  $\Theta$ , sur l'ensemble de la plage  $-135^\circ < \Theta < 225^\circ$ . Il est aisé de voir que la courbe qui représente le couple  $C_1$  est à une très bonne approximation l'image de la courbe qui représente  $C_2$  par la réflexion plane dont l'axe est la droite  $\Theta = 45^\circ$ . Nous voyons donc qu'il est possible de prédire avec une très bonne précision le résultat d'une mesure faite en  $\Theta = 45^\circ + \alpha$  à partir de celui d'une mesure faite en  $\Theta = 45^\circ - \alpha$ , et que l'une de

ces deux mesures est effectivement redondante. Nous avons à ce point pris le parti de n'étudier les couples fournis par les moteurs que dans la plage  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ , divisant ainsi par 2 le nombre de mesures nécessaires.

#### 4.2.2 Courbes de couples adimensionnels en fonction de $\Theta$ dans les différentes configurations, pour une cuve cylindrique lisse.

Cette section rassemble les résultats des mesures systématique des couples fournis par les moteurs pour les différents jeux de turbines, lorsque la cuve cylindrique est lisse. Les mesures correspondantes dans le cas où la cuve est munie de quatre ailettes longitudinales sont présentées en annexe A.

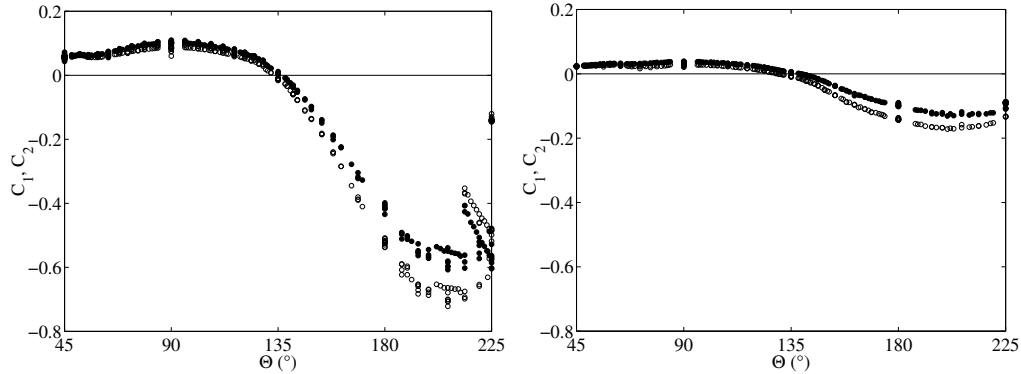


FIG. 4.18 – Mesures des valeurs moyennes des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$ , sur la plage  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ , pour des turbines de type “TM60” séparées de  $1.78R_c$ , tournant dans une cuve “lisse”. Certaines mesures ont été faites à  $R_c = 100$  mm, d'autres à  $R_c = 99$  mm. Les symboles ouverts (resp. pleins) représentent les valeurs de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ). a) pales hautes de  $0.2R_c$ . b) pales hautes de  $0.1R_c$ .

La figure 4.18 présente les couples adimensionnels en fonction de l'angle  $\Theta$  pour les jeux de turbines “TM60”, dans une cuve “lisse”. Le graphe de gauche représente les données obtenues pour  $h = 0.2R_c$ , le graphe de droite présente les données obtenues pour  $h = 0.1R_c$ . Un certain nombre de points sont apparents sur ces courbes :

- Tout d'abord, nous pouvons voir que, pour les deux hauteurs de pales, les couples mesurés sont positifs sur la plage  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$  et négatifs sur la plage  $135^\circ < \Theta < 225^\circ$ . Leurs valeurs sont de plus en plus grandes en valeur absolue sur la plage  $135^\circ < \Theta < 225^\circ$  que sur la plage  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$ . Sur la première de ces plages, nous voyons que si nous nous plaçons dans le référentiel dans lequel les turbines tournent en contra-rotation exacte, elles présentent toutes deux la face convexe de leurs pales au fluide lors de leur rotation. Sur la deuxième plage, par contre, elles présentent la face concave de leurs pales au fluide si nous les regardons dans le référentiel tournant.

- Dans tous les cas (sens de rotation, hauteur des pales), le couple le plus important est fourni au fluide par la turbine qui tourne le plus vite en valeur absolue (turbine 2 pour  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$ , turbine 1 pour  $135^\circ < \Theta < 225^\circ$ ). Nous pouvons cependant remarquer que les couples fournis par les deux moteurs sont toujours très semblables. Les différences les plus grandes en valeur absolue sont constatées dans le régime de contra-rotation à fréquence négative ( $135^\circ < \Theta < 225^\circ$ ), elles représentent environ 25% des couples.

- Ensuite, nous pouvons observer dans les deux cas des comportements “curieux” aux alentours

de  $\Theta = 225^\circ$ . Sur la figure qui correspond aux pales hautes de  $0.1R_c$ , nous voyons en effet que les couples fournis par les deux moteurs sont différents en  $\Theta = 225^\circ$ , alors qu'il devraient être identiques par symétrie (les deux turbines tournant à la même vitesse, le montage est invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ . Les deux couples devraient donc être identiques). Sur la figure qui correspond aux pales hautes de  $0.2R_c$ , nous voyons même qu'il existe une plage aux alentours de  $\Theta = 225^\circ$  où plusieurs valeurs des couples sont possibles pour une même valeur de  $\Theta$ . Pour les pales de  $0.2R_c$ , pour  $\Theta = 225^\circ$  exactement, il semble y avoir trois valeurs possibles pour le couple de chaque moteur. Ces comportements sont la trace de la "bifurcation globale" qui fait l'objet du chapitre 5.

– Si nous nous intéressons maintenant aux valeurs des couples, nous pouvons constater que pour les deux hauteurs de pales les valeurs de couples les plus élevées sont rencontrées aux alentours de  $\Theta = 90^\circ$  pour les vitesses positives, et  $\Theta = 200^\circ$  pour les vitesses négatives.

– Un dernier aspect de ces courbes est que les couples mesurés pour les pales de hauteur  $0.2R_c$  sont notablement plus élevés que ceux mesurés pour les pales de hauteur moitié. Ce comportement était bien sûr qualitativement attendu, mais nous soulignons que les différences qui existent entre les deux courbes ne se limitent pas à un simple rapport 2.

Nous avons rassemblé ci-dessous en table 4.3 les valeurs des couples adimensionnels obtenues pour un certain nombre de valeurs de  $\Theta$  "remarquables".

$\Theta$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$
$45^\circ$	5.6	5.7	2.4	2.4
$90^\circ$	8.9	10.3	2.8	3.8
$135^\circ$	-1.1	0.6	-0.8	0.5
$180^\circ$	-52.9	-41.7	-14.2	-10.0
$225^\circ$	—	—	—	—

TAB. 4.3 – Récapitulatif des valeurs des couples adimensionnels obtenus pour certaines valeurs de  $\Theta$ , pour des turbines de type "TM60", dans une cuve "lisse". Partie gauche du tableau :  $h = 0.2R_c$ . Partie droite du tableau :  $h = 0.1R_c$ . La dernière ligne a été laissée libre, car les couples en  $\Theta = 225^\circ$  méritent une étude plus approfondie (voir chapitre 5).

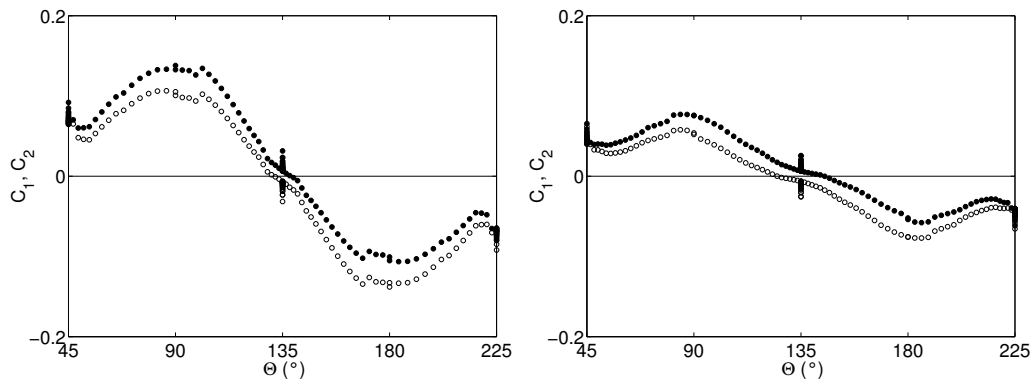


FIG. 4.19 – Mesures des valeurs moyennes des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$ , sur la plage  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ , pour des turbines de type "TM70" (pales droites), séparées de  $1.78R_c$ , tournant dans une cuve "lisse" de rayon  $R_c = 100$  mm. Les symboles ouverts (resp. pleins) représentent les valeurs de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ). a) pales hautes de  $0.2R_c$ . b) pales hautes de  $0.1R_c$ .

La figure 4.19 présente maintenant les couples adimensionnels en fonction de l'angle  $\Theta$  pour

les jeux de turbines "TM70", dans une cuve "lisse". Le graphe de gauche représente les données obtenues pour  $h = 0.2R_c$ , le graphe de droite présente les données obtenues pour  $h = 0.1R_c$ . Comme les pales montées sur les turbines sont droites, chaque turbine est sa propre image par réflexion par tout plan méridien du montage. Nous avons exploité cette nouvelle propriété de symétrie pour obtenir les courbes présentées ci-dessus en fonction de mesures faites dans le seul domaine  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$ . Nous pouvons faire sur ces courbes quelques commentaires :

- Tout d'abord, en comparant ces graphes à ceux de la figure 4.18, nous pouvons constater qu'à hauteur de pale constante les couples obtenus avec des pales droites sont au moins du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec des pales courbes rencontrant le fluide avec leur partie convexe, mais qu'ils sont bien plus faibles que ceux obtenus avec des pales courbes rencontrant le fluide avec leur partie concave. Nous rappelons que les turbines "TM70" ont un rayon inférieur à celui des turbines "TM60".
- Comparant maintenant ces graphes entre eux, nous voyons maintenant que les couples obtenus pour  $h = 0.2R_c$  sont plus forts que ceux obtenus pour  $h = 0.1R_c$ , mais que cette différence ne se réduit pas à un simple rapport 2. Les courbes obtenues pour  $h = 0.1R_c$  semblent par exemple plus "pointues" en  $\Theta = 90^\circ$ .
- Enfin, nous pouvons remarquer que dans les deux cas les courbes semblent présenter une rupture de pente aux alentours de  $130^\circ$ . La courbe obtenue pour  $h = 0.2R_c$  présente de plus un décrochement aux alentours de  $90^\circ$ . Il est possible que la rupture de pente marque la limite du régime de co-rotation, mais nous n'avons pas d'explication pour le décrochement.

La table 4.4 rassemble les valeurs des couples adimensionnels obtenues pour un certain nombre de valeurs de  $\Theta$ .

$\Theta$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$
$45^\circ$	6.6	7.0	4.2	4.3
$90^\circ$	10.5	13.8	5.3	7.6
$135^\circ$	-0.8	0.8	-0.8	0.8

TAB. 4.4 – Récapitulatif des valeurs des couples adimensionnels obtenus pour certaines valeurs de  $\Theta$ , pour des turbines de type "TM70", dans une cuve "lisse". Partie gauche du tableau :  $h = 0.2R_c$ . Partie droite du tableau :  $h = 0.1R_c$ .

### 4.2.3 Conclusion des mesures de couples

En conclusion de cette section, nous rappellerons les points suivants :

- En première approximation, la dépendance des couples fournis par les moteurs en fonction de la fréquence  $f$  est quadratique. Ceci nous permet de limiter leur étude à la mesure des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$  dans les différentes configurations.
- Certains arguments de symétries permettent ensuite de limiter la plage de  $\Theta$  à étudier à des sous-intervalles de la gamme  $0^\circ < \Theta < 360^\circ$ ,  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$  lorsque les pales sont courbées,  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$  lorsqu'elles sont droites.
- Lorsque la cuve cylindrique est lisse, les couples fournis par les deux moteurs sont toujours semblables, leurs valeurs différant au plus de 20 % dans l'ensemble des cas que nous avons étudié.
- Lorsque les pales sont courbées, les valeurs des couples les plus élevées sont rencontrées lorsque les pales rencontrent le fluide avec leur face concave.
- Aux alentours de la configuration où les turbines tournent en contra-rotation exacte, face concave vers l'avant, l'écoulement semble avoir un comportement particulier, dont l'étude fait l'objet du chapitre 5. Ce comportement semble se produire avec et sans ailettes, et ce quelle que

soit la hauteur des pales. Il n'a pas été observé avec des pales droites.

- Les couples mesurés avec les pales de hauteur  $0.1R_c$  sont toujours plus faibles que ceux mesurés avec les pales de hauteur  $0.2R_c$ . Cette différence ne semble pas se limiter à un simple facteur 2.
- Lorsque nous rajoutons des ailettes sur la cuve cylindrique, nous observons que les valeurs des couples mesurés changent de façon notable. Le couple fourni par la turbine qui tourne le plus rapidement peut augmenter, mais dans une faible proportion, alors que le couple fourni par l'autre turbine peut diminuer fortement. La différence des deux couples peut atteindre les mêmes ordres de grandeur que les couples eux-mêmes, alors qu'elle est systématiquement faible dans le cas des mesures réalisées dans une cuve lisse.

## 4.3 Mesures de pressions

Pour tenter de caractériser les fluctuations turbulentes de l'écoulement, nous avons mené des campagnes de mesures systématiques des fluctuations de pression dans l'ensemble des configurations déjà évoquées. Après avoir vérifié les arguments dimensionnels portant sur la pression, nous avons pu mesurer l'intensité des fluctuations de pressions dans le plan équatorial de l'écoulement, dans l'ensemble des configurations déjà évoquées. Nous nous sommes ensuite intéressés, dans une configuration particulière, à la répartition spatiale de ces fluctuations, et avons fait des mesures hors du plan équatorial. Enfin, nous nous sommes intéressés brièvement au contenu spectral du signal de pression.

### 4.3.1 Problème des bulles.

Lorsque les turbines tournent à haute fréquence, les fluctuations de pression dans l'écoulement peuvent atteindre des valeurs élevées, proches de celle de la pression atmosphérique. Si nous ne relevons pas artificiellement la pression qui règne à la surface du fluide, il peut arriver que la pression devienne par endroit "négative" dans l'écoulement.

Des bulles apparaissent alors progressivement dans l'écoulement, par le phénomène de cavitation. Si la pression appliquée à la surface du fluide est malgré tout suffisante, ces bulles disparaissent dès qu'elles rencontrent une région de hautes pressions. Dans le cas contraire, elle s'accumulent dans l'écoulement. Nous avons pu voir au cours de la rédaction de ce mémoire de thèse un certain nombre de mesures pour lesquelles le système de pressurisation de la cuve que nous avons décrit au chapitre 3 n'avait visiblement pas été employé comme il aurait dû l'être... Les mesures correspondantes ont été écartées des différents graphes, qui ne représentent que des données "propres".

Les figures 4.20, 4.21 et 4.22 montrent l'effet sur les fluctuations de pression mesurées dans le plan équatorial de la cellule de l'accumulation des bulles dans l'écoulement. Nous constatons immédiatement que le signal est extrêmement affecté :

- Tout d'abord, nous voyons en figure 4.20 que l'aspect visuel du signal change énormément : le signal "propre" présente par exemple de très nombreuses excursions vers les faibles pressions, qui disparaissent presque totalement lorsque les bulles sont présentes dans l'écoulement.
- Cette disparition des excursions vers les faibles pressions apparaît tout particulièrement sur les histogrammes de la figure 4.21. La partie à haute pression de l'histogramme semble elle peu affectée. La conséquence de ces deux points est que la largeur de l'histogramme diminue fortement lorsque les bulles sont présentes. Nous pouvons donc nous attendre à ce que les mesures de l'amplitude *rms* des fluctuations de pression soient tout particulièrement affectées par la présence des bulles.
- Enfin, la diminution globale d'intensité des fluctuations de pression se ressent sur les spectres



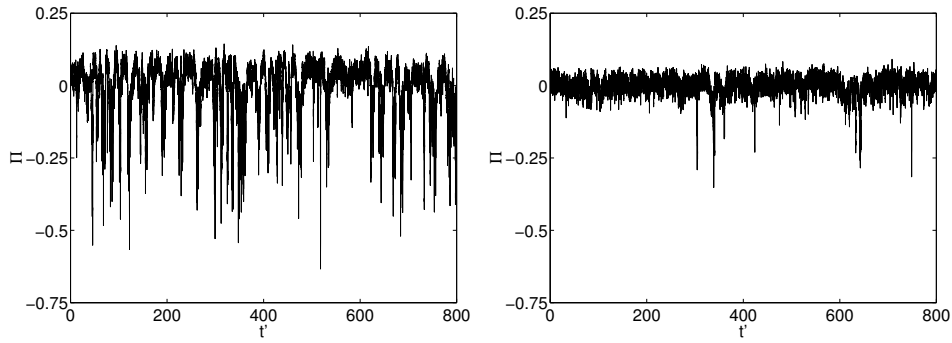


FIG. 4.20 – Séries temporelles de la pression adimensionnelle, sans bulles (gauche), et avec bulles (droite). Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte ( $\Theta = 45^\circ$ ) dans une cuve de rayon  $R_c = 100$  mm. Pour ces mesures, le capteur de pression était situé dans le plan équatorial du montage.

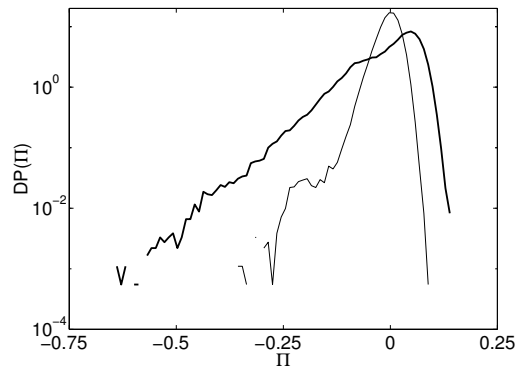


FIG. 4.21 – Densité de probabilité de la pression adimensionnelle, sans bulles (trait fort), et avec bulles (trait fin). Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte ( $\Theta = 45^\circ$ ) dans une cuve de rayon  $R_c = 100$  mm. Pour ces mesures, le capteur de pression était situé dans le plan équatorial du montage.

de la figure 4.22. Nous insistons sur le fait que nous n'avons pas décalé les spectres l'un par rapport à l'autre pour rendre l'image visible, et que l'écart important qui existe entre les deux spectres est d'origine physique. Nous voyons sur ce graphe que les fluctuations à basse fréquence de la pression semblent particulièrement affectées par l'arrivée des bulles.

Nous terminerons tout de même cette section sur une note optimiste, en remarquant que les couples adimensionnels semblent eux relativement peu sensibles à la présence de bulles. En effet, les valeurs mesurées lors des deux expériences que nous venons de présenter sont presque identiques, les moteur 1 et 2 fournissant des couples adimensionnels moyens de respectivement  $5.34 \cdot 10^{-2}$  et  $5.38 \cdot 10^{-2}$  sans bulles, et  $5.35 \cdot 10^{-2}$  et  $5.45 \cdot 10^{-2}$  avec bulles.

### 4.3.2 Vérification des arguments dimensionnels.

#### Arguments portant sur l'intensité des fluctuations.

Les arguments présentés au chapitre 3 nous disent que, lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand, la dépendance de la pression dynamique en fonction des différents para-

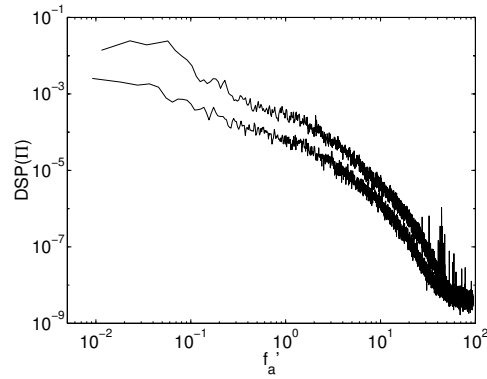


FIG. 4.22 – *Densité spectrale de puissance de la pression adimensionnelle, sans bulles (spectre du haut), et avec bulles (spectre du bas). La différence de hauteur entre les spectres est naturelle, et ne résulte d’aucune modification de notre part. Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte ( $\Theta = 45^\circ$ ) dans une cuve de rayon  $R_c = 100$  mm. Pour ces mesures, le capteur de pression était situé dans le plan équatorial du montage.*

mètres de l’écoulement peut s’exprimer sous la forme simplifiée :

$$\frac{p(r', z', t')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^2} = \Pi(r', z', t', \Theta, \{n\})$$

Dans cette expression,  $p$  est la pression dynamique exprimée en  $Pa$ ,  $\rho$  et  $R_c$  sont respectivement la masse volumique du fluide en  $kg.m^{-3}$  et le rayon de la cuve cylindrique en  $m$ .  $\Theta$  et  $f$  sont les paramètres définissant les fréquences de rotation des deux turbines,  $r'$  et  $z'$  sont les coordonnées adimensionnelles qui définissent la position de la sonde de pression dans la cuve, et  $t'$  est l’instant de mesure. Le premier test simple de cette relation est de vérifier que les pressions dépendent bien quadratiquement de la fréquence  $f$ , à  $\Theta$  fixé.

La figure 4.23 représente la valeur  $rms$  des fluctuations de pression dynamique en fonction des fréquences de rotation des turbines,  $f_1$  et  $f_2$ . Un certain nombre de points sont apparents sur cette figure :

- Comme dans le cas du couple, la dépendance de  $p_{rms}$  en fonction de la fréquence  $f$  est assez simple le long de la plupart des rayons, et rien ne permet à première vue de la distinguer d’une dépendance quadratique.
- Au bout du rayon  $\Theta = 45^\circ$ , par contre, nous pouvons reconnaître la mesure présentée dans la section précédente comme étant effectuée dans un écoulement chargé en bulles. Nous constaterons sur la plupart des graphes représentant des pressions adimensionnelles que les rayons sur lesquels les fluctuations de  $\Pi$  sont les plus importantes sont aussi ceux sur lesquels la dispersion statistique des mesures est la plus grande.

La figure 4.24 représente les valeurs  $rms$  de la pression en fonction du carré de la fréquence  $f$ , le long des deux rayons “sans histoires”  $\Theta = 90^\circ$  et  $\Theta = 180^\circ$ . Les turbines utilisées pour ces mesures étaient du type “TM60”, elles étaient munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ . Nous pouvons voir sur ces graphes que l’amplitude  $rms$  des fluctuations de pression dépend en bonne approximation quadratiquement de la fréquence  $f$ .

Nous pouvons aller plus loin, en vérifiant que l’histogramme des fluctuations de pression adimensionnelle ne varie pas en fonction de la fréquence  $f$  à laquelle la mesure a été faite.

La figure 4.25 représente la densité de probabilité de la pression adimensionnelle, mesurée

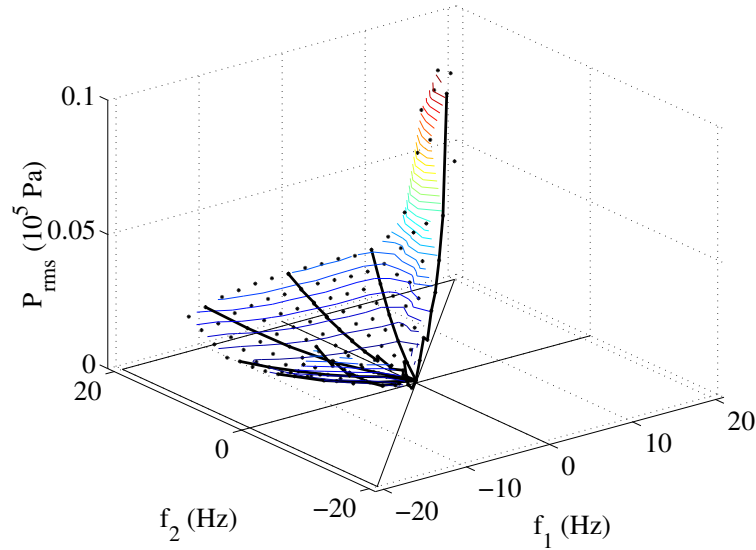


FIG. 4.23 – Amplitude *rms* des fluctuations de pression pour le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.78R_c$  l’une de l’autre. Les mesures ont été effectuées pour  $R_c = 100$  mm, la sonde de pression étant montée dans le plan équatorial. Les valeurs de  $p_{rms}$  le long d’un certain nombre de rayons  $\Theta = C^{te}$  ont été représentées en trait fort noir.

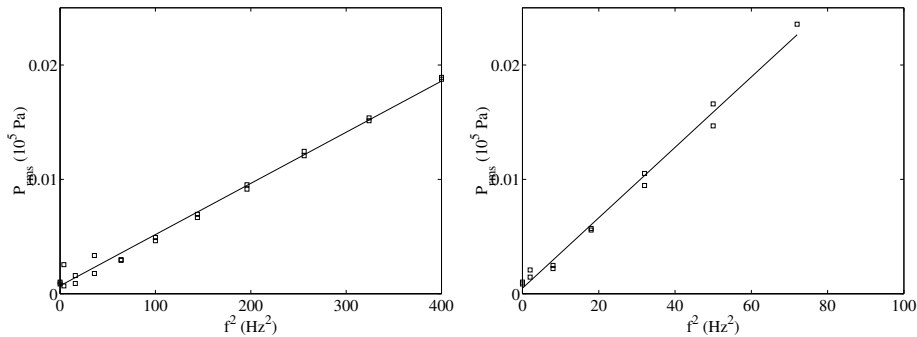


FIG. 4.24 – Valeurs *rms* des fluctuations de pression dynamique pour le jeu de turbines “TM60” muni de pales de  $0.2R_c$ , représentées en fonction du carré de la fréquence  $f$  le long des rayons  $\Theta = 90^\circ$  (à gauche) et  $\Theta = 180^\circ$  (à droite). Les droites représentent les ajustements linéaires des points. Les coefficients de régression valent respectivement 0.996 et 0.995. Pour ces mesures, le capteur de pression était situé dans le plan équatorial du montage.

pour différentes valeurs de la fréquence  $f$  le long du rayon  $\Theta = 180^\circ$ , avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ . Nous voyons aisément que les différentes mesures donnent des résultats très semblables. Les différences qui subsistent sont principalement concentrées dans les ailes, et correspondent donc aux événements rares. Comme toutes les expériences ont duré le même temps “dimensionnel”, elles correspondent en fait à des temps de mesures adimensionnels plus longs pour les hautes valeurs de  $f$  que pour les petites valeurs de  $f$ . Les probabilités des événements rares sont donc mieux estimées sur les mesures réalisés à haute fréquence  $f$  que sur les autres. Il n’est donc pas inquiétant que de petites différences subsistent dans les ailes. Nous

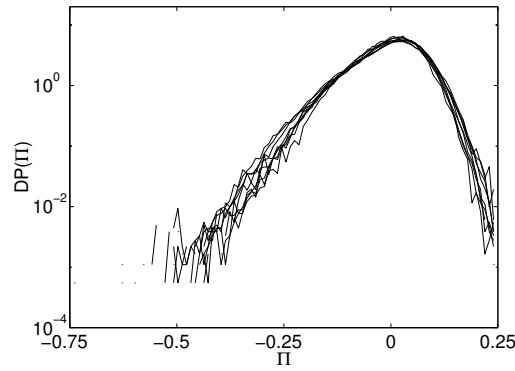


FIG. 4.25 – Densités de probabilité de la pression adimensionnelle, mesurées pour des valeurs de la fréquence  $f$  allant de  $f = 4/\sqrt{2}$  Hz à  $f = 12/\sqrt{2}$  Hz le long du rayon  $\Theta = 180^\circ$ . Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ . Pour ces mesures, le capteur de pression était situé dans le plan équatorial du montage.

pouvons donc considérer en première approximation que la densité de probabilité de la pression adimensionnelle ne varie pas en fonction de la fréquence  $f$ .

Nous avons donc décidé de considérer comme satisfaisants les arguments dimensionnels développés au début de ce chapitre, et de ne plus travailler qu’avec les pressions adimensionnelles.

#### Arguments portant sur les fréquences.

La mesure des fluctuations de pression nous permet par ailleurs de vérifier les arguments dimensionnels portant sur les temps. En effet, nous sommes arrivés en début de ce chapitre à la conclusion que l’échelle de temps naturelle dans notre écoulement était l’inverse de la fréquence  $f$ . Si cela est exact, les caractéristiques temporelles adimensionnelles du signal de pression ne devraient pas varier en fonction de  $f$  le long d’un rayon  $\Theta = C^{te}$ . La figure 4.26 représente la densité spectrale de puissance adimensionnelle du signal de pression mesurée pour différentes valeurs de  $f$  le long du rayon  $\Theta = 180^\circ$ . Ce rayon a été choisi parce que le signal de pression présente une composante périodique assez marquée, dont la fréquence est différente de la fréquence de rotation de la turbine. Les graphes représentant les résultats des différentes mesures ont été artificiellement décalés dans la direction verticale, afin d’améliorer la lisibilité de la figure, les graphes originaux se superposant avec une très bonne précision. Nous pouvons voir sur cette figure que l’abscisse du pic correspondant à la composante périodique du signal ne change pas d’une mesure à l’autre. De même, nous voyons que les estimations de la densité spectrale de puissance ne varient que peu d’une courbe à l’autre, une part des différences pouvant comme dans la section précédente être attribuée aux variations de la durée adimensionnelle des expériences.

Là encore, nous avons estimé qu’il était pertinent d’utiliser les unités adimensionnelles de temps lors de nos mesures, et nous n’avons plus attaché d’importance particulière à la dépendance en  $f$  de nos résultats de mesures.

#### 4.3.3 Fluctuations de pression en différents points de l’écoulement de contre-rotation.

Nous allons maintenant présenter un certain nombre d’aspects caractéristiques des fluctuations de pression dynamique dans l’écoulement, dans différentes configurations. Tous les résultats

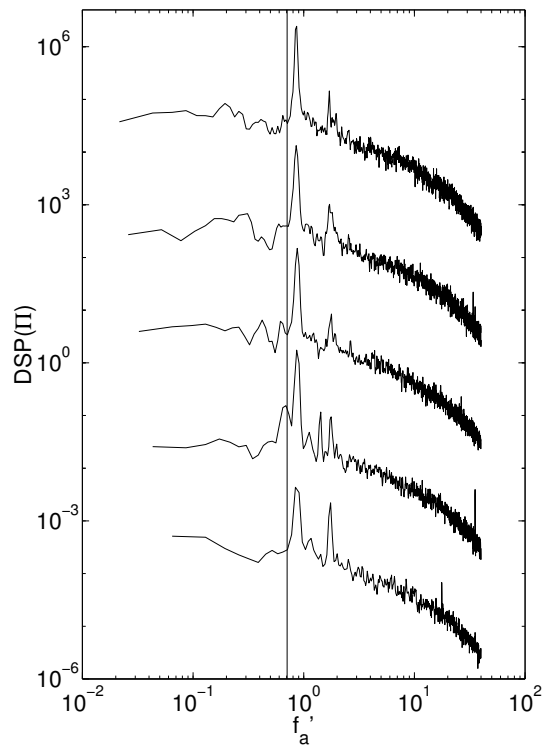


FIG. 4.26 – Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression, mesurées pour des valeurs de la fréquence  $f$  allant de  $f = 4\sqrt{2}$  Hz à  $f = 12\sqrt{2}$  Hz le long du rayon  $\Theta = 180^\circ$ . Toutes les grandeurs qui interviennent sont adimensionnelles. Les graphes ont été décalés artificiellement pour améliorer la lisibilité. Les mesures réalisées pour les valeurs de  $f$  les plus élevées sont représentées en haut de la figure. Le trait noir fin marque la fréquence de rotation de la turbine. Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ . Pour ces mesures, le capteur de pression était situé dans le plan équatorial du montage.

seront présentés sous forme adimensionnelle, sauf mention explicite du contraire.

### Cas “standard” : Turbines “TM60” en contra-rotation, cuve lisse, capteur en paroi dans le plan équatorial.

La figure 4.27a présente une portion de signal de pression dynamique mesurée dans le plan équatorial de l'écoulement. Il est apparent sur cette courbe que les fluctuations sont très intenses, et nous pouvons remarquer des événements à plusieurs échelles de temps.

- Nous voyons tout d'abord que le haut de la courbe a une allure “en créneaux”, et passe avec un rythme assez lent (la durée des créneaux est de l'ordre de quelques dizaines de tours de turbines) d'un état “haut” à un état “bas”.
- Nous voyons que les passages dans l'état “haut” sont marqués par un calme relatif. Les fluctuations de pression semblent y être relativement moins intenses, et peuvent être dirigées indifféremment vers les hautes ou les basses pressions. La durée des passages à l'état haut semble variable, et peut être assez longue.
- Lors des passages dans l'état “bas”, par contre, le signal de pression présente des “trous” très violents et assez courts. La durée de chaque événement est de l'ordre d'un dixième de tour de turbine. Un segment de signal dans lequel l'écoulement est dans l'état bas est présenté en fi-

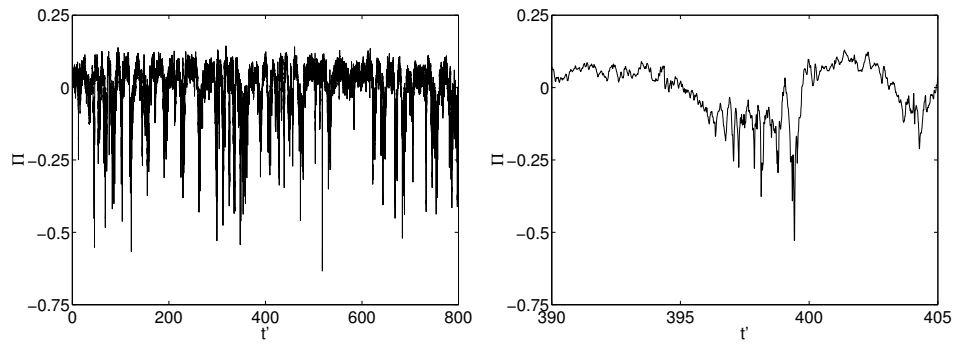


FIG. 4.27 – *Séries temporelles de la pression adimensionnelle dans le plan équatorial de l'écoulement. Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm. Dans cette configuration, l'unité de temps coïncide avec la période de rotation des turbines. Le graphe de droite représente un agrandissement du signal, sur une fenêtre durant 15 tours de turbines.*

gure 4.27b. Les passages dans l'état bas semblent être généralement plus brefs que les passages dans l'état haut. Les événements de basses pressions ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales au cours des dernières années [45, 43, 27, 142]. Ils marquent le passage devant la sonde de pression de filaments de vorticité très intenses, dont le diamètre est de l'ordre du pour-cent du rayon de l'écoulement, et dont la longueur est de l'ordre du rayon de l'écoulement. Ces filaments apparaissent régulièrement par des instabilités de la couche de cisaillement, et ont un temps de vie caractéristique qui est de l'ordre de quelques temps de rotation des disques.

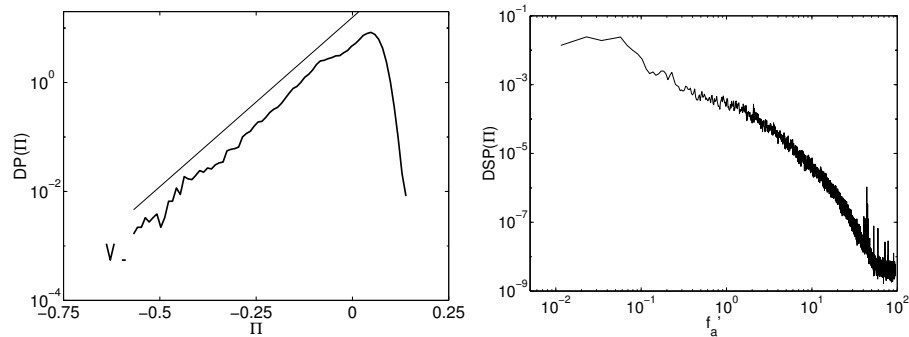


FIG. 4.28 – *Caractéristiques statistiques des fluctuations de pression dynamique dans le plan équatorial de l'écoulement. A gauche : Densité de probabilité. Le trait fin représente un ajustement par  $\exp(-|\Pi|/0.07)$ . A droite : Densité spectrale de puissance. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm.*

Nous avons ensuite repr esent e en figures 4.28 la densité de probabilité ainsi que la densité spectrale de puissance du segment de signal de pression. Nous pouvons voir que la densité de probabilité a une aile exponentielle très marquée du côté des faibles pressions. L'échelle de fluctuation de pression qui est associée à cette décroissance est ici égale à 0.07. La probabilité des événements intenses de haute pression décroît très rapidement. Nous pouvons par ailleurs remarquer en  $\Pi \simeq -0.1$  une légère bosse, qui marque l'accumulation des échantillons au voisinage de l'état "bas".

En regardant maintenant le spectre du signal, nous voyons que l'essentiel de l'énergie qu'il contient est concentrée aux basses fréquences. Aux très basses fréquences ( $f' < 0.5$  environ), la densité spectrale n'a pas de comportement bien défini. Nous voyons là la trace de l'alternance d'états hauts et bas. La forme du spectre dans cette région dépend du jeu de turbines utilisé. Au-delà de la fréquence de rotation des turbines, le spectre "fait le dos rond", avant de plonger dans le bruit de mesure. Un examen attentif de nos signaux nous a montré que "quelque chose" dans la chaîne d'acquisition filtrait nos données passe-bas, avec une fréquence de coupure d'environ 80 Hz. Les données présentées en figure 4.28 ayant été acquises pour  $f = 20$  Hz, nous voyons que le spectre n'est en fait plus fiable à partir de  $f'_a \simeq 5$ . Nous ne pouvons donc pas le commenter davantage.

#### Fluctuations de pression à la paroi en $z' = -0.4R_c$ , Turbines "TM60" en contra-rotation, cuve lisse.

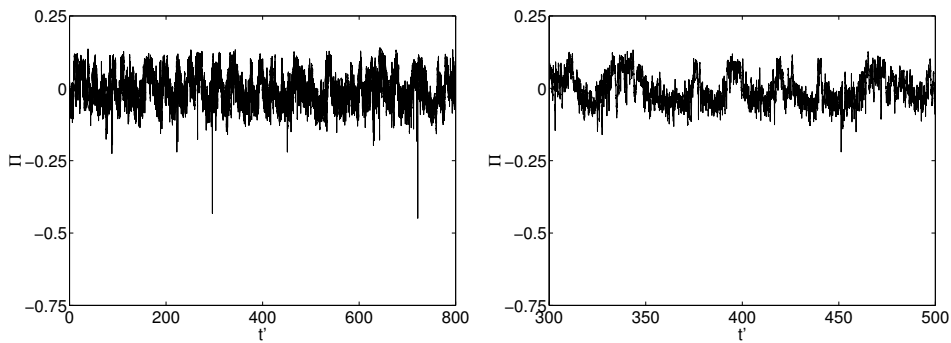


FIG. 4.29 – Séries temporelles de la pression adimensionnelle sous le plan équatorial de l'écoulement, en  $z' = -0.4R_c$  environ. Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm. Dans cette configuration, l'unité de temps coïncide avec la période de rotation des turbines.

La figure 4.29a présente une portion de signal de pression dynamique mesurée à mi-chemin entre le plan équatorial de l'écoulement et la turbine du bas, en  $z = -0.4R_c$  environ, avec des turbines du type "TM60" tournant en contra-rotation exacte. Comme le signal a été acquis dans les mêmes circonstances que celui de la section précédente, nous pouvons considérer qu'il représente les fluctuations de pression en un autre endroit du même écoulement.

Nous constatons immédiatement que le signal n'a pas le même aspect visuel que celui mesuré dans le plan équatorial. En effet, si l'alternance d'états hauts et d'états bas subsiste, nous assistons à une disparition presque complète des événements de basse pression. Nous ne voyons en effet que deux grands événements sur les 800 tours de turbine qu'a duré l'acquisition, là où il aurait été bien difficile de les dénombrer lors des mesures dans le plan équatorial. Par ailleurs, il semble apparent sur la figure 4.29b que l'écoulement passe beaucoup plus de temps dans l'état "bas" que dans l'état "haut".

Ces changements sont nettement apparents sur la densité de probabilité du signal, qui est représentée en figure 4.30a. La densité de probabilité de la pression est beaucoup moins large que dans le plan équatorial, et l'aile exponentielle qui est toujours présente, quoique beaucoup moins étendue, est caractérisée par une échelle de fluctuations bien plus faible, proche de 0.02. Le spectre de puissance, lui, varie comparativement assez peu. Son contenu à basse fréquence est

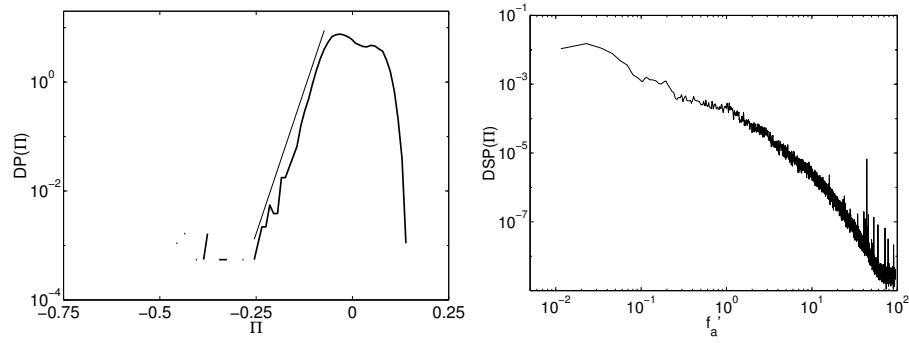


FIG. 4.30 – *Caractéristiques statistiques des fluctuations de pression dynamique sous le plan équatorial de l'écoulement. A gauche : Densité de probabilité. Le trait fin représente un ajustement par  $\exp(-|\Pi|/0.02)$  A droite : Densité spectrale de puissance. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm.*

certes plus faible, mais sa forme générale ne semble pas subir de changement majeur.

Nous pouvons donc conclure des données présentées dans ce paragraphe que les caractéristiques des fluctuations de pression ne sont pas uniformes dans l'écoulement. Dans le plan équatorial, nous avons observé une grande abondance de structures localisées de basse pression, mais nous ne les avons pas retrouvés lorsque nous avons placé le capteur en un autre endroit. Cette disparition est très visible sur le signal de pression lui-même, ainsi que sur sa densité de probabilité, mais la densité spectrale de puissance semble comparativement peu affectée.

#### 4.3.4 Allure des fluctuations de pression en fonction de $\Theta$ , turbines "TM60", cuve lisse.

Nous avons effectué des mesures systématiques des fluctuations de pression en faisant varier l'angle  $\Theta$ , pour les deux positions du capteur, dans le plan équatorial et dans le bas de la cellule. Lors des mesures de fluctuations en bas de la cellule, nous avons exploré l'intégralité de la gamme  $45^\circ < \Theta < 405^\circ$ . Nous avons vu au chapitre 3 que la symétrie du montage par retournement nous permet alors de compléter nos données, et de connaître pour chaque valeur de l'angle  $\Theta$  les caractéristiques des fluctuations de pression en haut de l'écoulement. Nous avons pu observer une assez grande variété de comportements suivant la valeur de l'angle  $\Theta$ , dont nous ne présenterons ici que quelques exemples typiques. Les courbes représentant les valeurs de l'amplitude *rms* des fluctuations de pression en fonction de  $\Theta$  dans l'ensemble des configurations que nous avons étudiées ont été déplacées en annexe A pour ne pas surcharger le texte.

##### Contra-rotation, $\Theta = 45^\circ$

Ce cas ayant déjà été longuement évoqué, nous n'y reviendrons pas en détail. La figure 4.31 rassemble les résultats des mesures faites en  $\Theta = 45^\circ$ . Seules les fluctuations de pression au milieu et en bas de l'écoulement ont été représentées. Les fluctuations de pression ont par symétrie les mêmes caractéristiques statistiques en haut et en bas de l'écoulement.



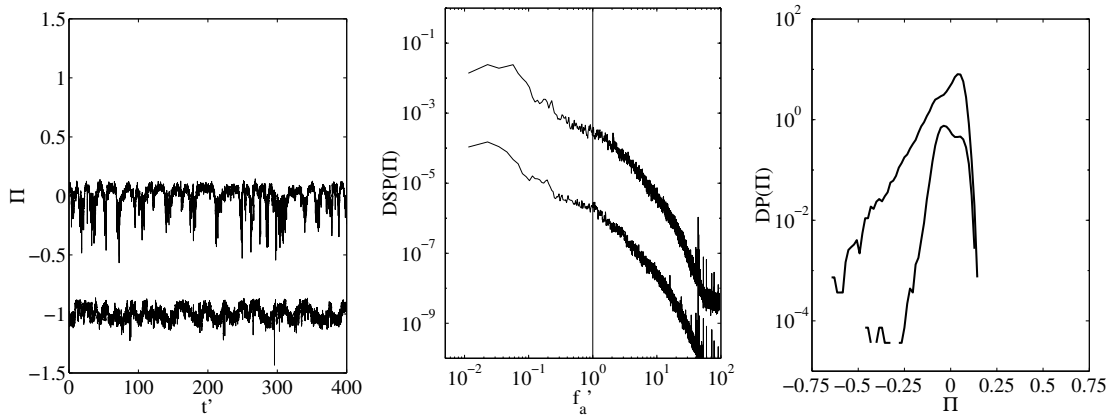


FIG. 4.31 – *Séries temporelles, densité spectrale et densité de probabilité de la pression adimensionnelle en paroi, dans et sous le plan équatorial de l'écoulement. Les graphes ont été artificiellement décalés de un pour les séries temporelles, et d'une décade dans les cas de la densité spectrale et de la densité de probabilité. Le trait fin sur le spectre représente la fréquence de rotation des turbines. Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation exacte dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm. ( $\Theta = 45^\circ$ ). Dans cette configuration, l'unité de temps coïncide avec la période de rotation des turbines.*

#### Co-rotation exacte, $\Theta = 135^\circ$

Dans cet autre cas particulier de l'écoulement, les fluctuations de pression sont beaucoup moins intenses, mais présentent une composante périodique très marquée.

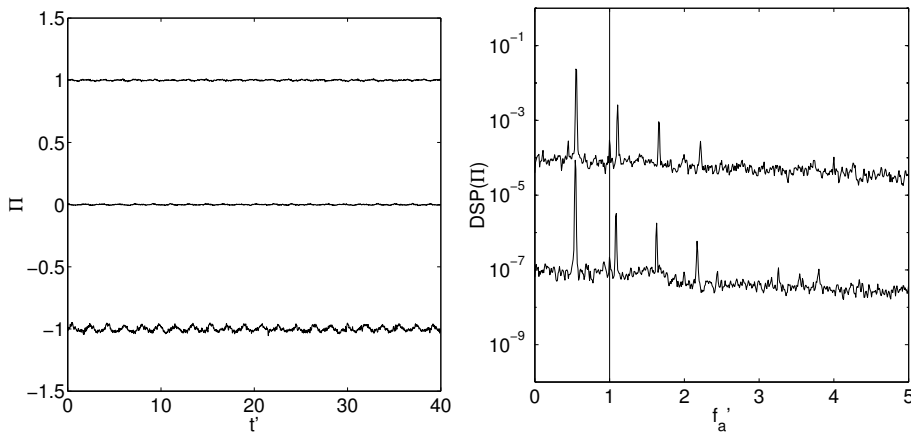


FIG. 4.32 – *Graphe de gauche : Séries temporelles de la pression adimensionnelle aux différents points de l'écoulement. La courbe du bas (resp. milieu, haut) représente la pression en bas (resp. au milieu, en haut) de l'écoulement. Graphe de droite : Densité spectrale de puissance de la pression adimensionnelle en bas et en haut de l'écoulement. Les courbes ont été artificiellement décalées de 2 décades vers le haut et vers le bas. Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant en co-rotation exacte dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm. ( $\Theta = 135^\circ$ ). Dans cette configuration, l'unité de temps coïncide avec la période de rotation des turbines.*

La figure 4.32 rassemble les résultats des mesures faites en  $\Theta = 135^\circ$ . Les échelles sont différentes de celles de la figure 4.31. Nous voyons sur le graphe de gauche (séries temporelles) que les fluctuations de pression sont beaucoup moins intenses que dans le cas de la contra-rotation. Les densités de probabilité sont très resserrées, et ne présentent pas de particularités notables. Nous ne les avons par conséquent pas représentées. Nous pouvons voir cependant que les fluctuations sont plus intenses près du disque du bas, qui est celui qui présente la face concave de ses pales au fluide lors de son mouvement. Les fluctuations près du plan équatorial sont très faibles, et nous n'avons pas représenté leur densité spectrale sur le graphe de droite. Nous pouvons constater sur les courbes qui ont échappé à cette sélection rigoureuse que l'écoulement présente une composante périodique très marquée, à une fréquence qui est proche (mais différente) de la moitié de celle de la rotation des disques (trait noir vertical sur le graphe de droite). Les trois premiers harmoniques de cette fréquence sont très visibles sur les spectres du graphe de droite. Un autre point remarquable du signal est l'existence d'un bruit turbulent bien développé, superposé aux oscillations, qui se traduit sur les spectres par un fond continu. Des composantes périodiques de l'écoulement de corotation ont été rapportées dans les articles de Labbé *et al.* [74] et Pinton *et al.* [113]. La première de ces études porte sur une composante à très basse fréquence de l'écoulement ( $f'_a = 0.1$  sur nos graphes), observée dans une géométrie ouverte (sans cuve cylindrique). Les turbines utilisées étaient munies de pales droites, et tournaient avec un déséquilibre de fréquences correspondant dans nos notations à  $\Theta \simeq 110^\circ$ . Dans le deuxième article, des comportements périodiques sont mis en évidence sur la gamme d'angles  $\Theta$  qui va de  $90^\circ$  à  $160^\circ$ , à des fréquences adimensionnelles d'ordre 1.

### **Turbine 2 arrêtée, $\Theta = 180^\circ$**

Dans ce cas, la turbine du bas est arrêtée, et la turbine du haut tourne en présentant la face concave de ses pales au fluide. L'écoulement présente dans ce cas des fluctuations de pression très intenses dans tout son volume, ainsi qu'une composante périodique très marquée. Nous pouvons voir immédiatement sur les séries temporelles que les fluctuations de pression sont très intenses dans cette configuration, et que leur forme dépend de la position du point de mesure dans l'écoulement. Près du disque du haut, qui est celui qui expulse le fluide, les fluctuations sont très intenses, et la composante périodique est légèrement moins visible dans le signal. Les fluctuations semblent pouvoir être presque indifféremment positives ou négatives. Ce fait apparaît sur leur densité de probabilité. Celle-ci reste déséquilibrée, les fluctuations négatives restant plus probables que les fluctuations positives, mais ses deux ailes sont maintenant exponentielles, l'aile de gauche étant caractérisée par une échelle de fluctuation de 0.060, l'échelle caractérisant l'aile de droite valant 0.069. Lorsque le point de mesure s'éloigne du disque du haut, les fluctuations deviennent progressivement moins intenses, et leurs densités de probabilité se rétrécissent. Le pic associé à la composante périodique sur les spectres devient de plus en plus élevé par rapport au fond continu.

### **Evolution des fréquences des composantes périodiques, $135^\circ < \Theta < 230^\circ$**

L'un des derniers points que nous avons étudié dans la configuration "standard" (turbines "TM60", pales de hauteur  $0.2R_c$ , cuve dépourvue d'ailettes) est l'évolution en fonction de l'angle  $\Theta$  des différents pics présents dans les spectres de fluctuations de pression. Nous nous sommes particulièrement concentrés sur la gamme  $135^\circ < \Theta < 225^\circ$ , car c'est dans cette gamme que les composantes périodiques de l'écoulement sont le plus nettement visibles. La gamme  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$  est comparativement moins riche en comportements périodiques. Une bosse est assez visible

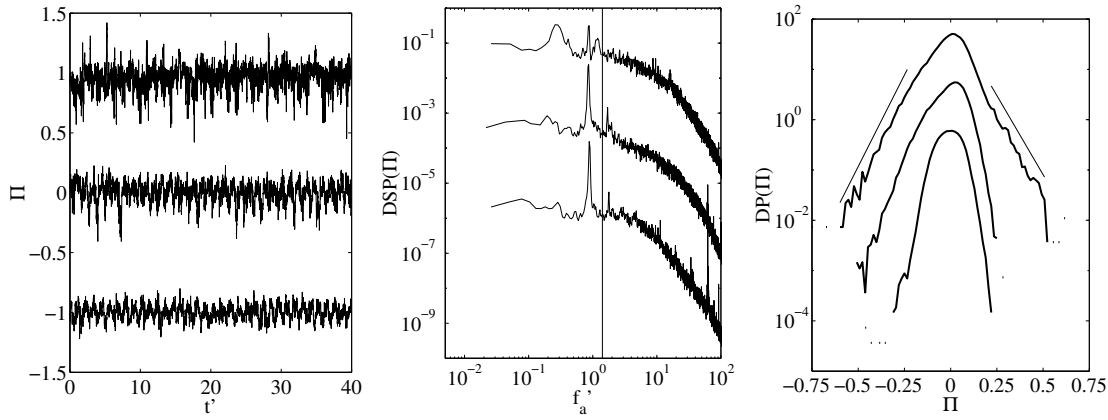


FIG. 4.33 – Graphe de gauche : Séries temporelles de la pression adimensionnelle aux différents points de l'écoulement. La courbe du bas (resp. milieu, haut) représente la pression en bas (resp. au milieu, en haut) de l'écoulement. Graphe de droite : Densité spectrale de puissance de la pression adimensionnelle en bas, au milieu et en haut de l'écoulement. La courbe du bas (resp. haut) a été artificiellement décalée de 2 décades vers le bas (resp. le haut). Graphe du bas : Densité de probabilité du signal de pression en bas, au milieu et en haut de l'écoulement. Les traits fins représentent les ajustement des ailes de la densité de probabilité en haut par  $\exp(-|\Pi|/0.06)$  (aile de gauche) et  $\exp(-|\Pi|/0.069)$  (aile de droite). Les mesures ont été réalisées avec des turbines "TM60" munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm, pour  $\Theta = 180^\circ$ .

dans le spectre aux alentours de  $f'_a = 10$ , et il est possible de voir apparaître entre  $\Theta = 120^\circ$  et  $\Theta = 135^\circ$  les pics qui sont présents ensuite, mais il semble que l'apparition de fréquences bien déterminées ait surtout lieu lorsque la turbine qui tourne à la fréquence la plus élevée présente au fluide la face concave de ses pales.

La figure 4.34 rassemble les fréquences des différents pics que nous avons pu observer dans le spectre du signal de pression sur cette plage.

– Aux alentours de  $\Theta = 135^\circ$ , nous observons trois familles de pics. L'une est la famille des harmoniques d'un pic fondamental dont la fréquence est de  $f'_a \simeq 0.55$  en  $\Theta = 135^\circ$ . Les pics correspondant sont alors situés en  $f'_a \simeq 0.55, 1.10, 1.65$  et  $2.2$ . Deux autres familles de pics suivent les fréquences de rotation des turbines. Le pic qui suit la turbine 2 semble disparaître rapidement, mais celui qui suit la turbine 1 existe jusqu'en  $\Theta \simeq 170^\circ$ . Cette fréquence semble n'être visible que dans le plan équatorial de l'écoulement.

– Aux environs de  $\Theta \simeq 170^\circ$ , les pics dont nous venons de suivre l'évolution depuis  $\Theta = 135^\circ$  laissent la place à un autre ensemble, qui subsiste lui jusqu'en  $\Theta = 225^\circ$ . Ces pics semblent cette fois être les harmoniques d'un pic fondamental dont la fréquence est de l'ordre du tiers de la fréquence de rotation de la turbine 1. Ils ont en fonction de  $\Theta$  une évolution caractéristique : ils apparaissent aux environs de  $\Theta = 180^\circ$  à une fréquence un peu plus faible que le multiple de  $f_1/3$  auquel ils se rapportent. Leur fréquence augmente alors, passe par un maximum aux environs de  $\Theta = 195^\circ$ , puis rejoint le multiple de  $f_1/3$ , qu'elle suit jusqu'en  $\Theta = 225^\circ$ . L'invariance par retournement du montage devrait ensuite imposer à ces courbes d'être paires en  $\Theta = 225^\circ$ , ce qui n'est pas le cas. Cela est encore la marque de la bifurcation globale de l'écoulement qui fait l'objet du chapitre 5.

En résumé de cette section, nous rappellerons que les fluctuations de pression dans notre

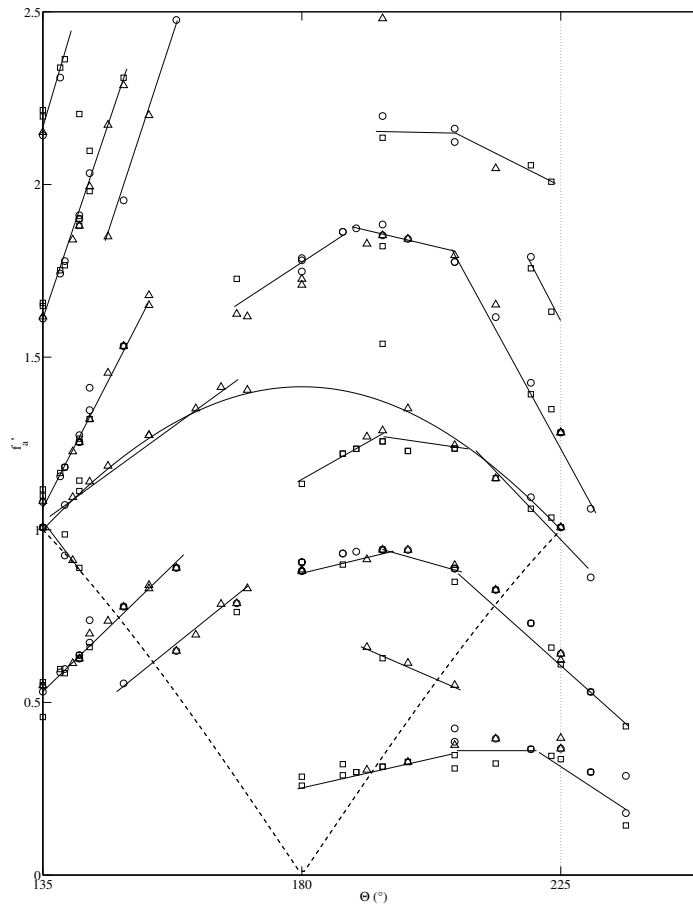


FIG. 4.34 – Graphe rassemblant les fréquences adimensionnelles des différents pics visibles dans le spectre de puissance de la pression, en fonction de l’angle  $\Theta$ , sur la plage  $135^\circ < \Theta < 225^\circ$ . Sur toute cette plage, c’est la turbine 1, située en haut de l’écoulement, qui tourne à la plus grande fréquence. La fréquence de rotation de la turbine 1 (resp. 2) est représentée en trait fort plein (resp. tireté). La ligne pointillée verticale marque le régime de contra-rotation exacte à fréquence négative. Sur ce graphe, les cercles ouverts ( $\circ$ ) représentent les fréquences qui sont vues par un capteur situé près de la turbine 2, les carrés ( $\square$ ) les fréquences vues près de la turbine 1, et les triangles ( $\triangle$ ) les fréquences vues dans le plan équatorial. Il arrive que des pics soient visibles au-delà de  $f'_a = 2.5$ . Nous ne les avons pas représentés. Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm, pour  $\Theta = 180^\circ$ .

écoulement peuvent présenter en fonction de l’angle  $\Theta$  et de la position du point de mesure une grande variété de comportements :

- Aux alentours de la contra-rotation aux fréquences positives, le signal de pression présente des composantes à plusieurs échelles de temps. Suivant la position du point de mesure, il peut ou non montrer des événements de basse pression très marqués. La densité de probabilité des fluctuations de pression présente des ailes exponentielles de largeur variable du côté des basses pressions, mais décroît rapidement du côté des hautes pressions. Ce comportement correspond aux observations de [45, 27].
- Lorsque l’angle  $\Theta$  augmente, le signal de pression a une densité spectrale relativement “blanche”

à basse fréquence, et décroît rapidement au-delà de environ  $f'_a = 10$ . Ce comportement est observé aux trois points de mesure possible dans la cuve.

– A partir de  $\Theta > 120^\circ$  environ, un certain nombre de composantes périodiques se manifestent dans l'écoulement, à des fréquences comprises entre  $f'_a = 0.5$  et  $f'_a = 4$  environ. Ces fréquences évoluent de manière complexe en fonction de  $\Theta$ . Les densités de probabilité des fluctuations de pression aux différents points de mesure varient elles aussi en fonction de  $\Theta$ . Il est possible d'observer des formes assez variées, parmi lesquelles une forme qui possède des ailes exponentielles pour les fluctuations positives comme pour les fluctuations négatives.

#### 4.3.5 Conclusion des mesures de fluctuations de pression.

En conclusion de cette section, nous rappellerons les points suivants :

- Nous avons malheureusement eu l'occasion de montrer que la présence de bulles dans l'écoulement pouvait avoir une forte incidence sur les résultats de mesures de fluctuations de pression.
- En première approximation, l'amplitude des fluctuations de pression dans l'écoulement dépend quadratiquement de la fréquence  $f$  [94]. De même, l'échelle de fréquence des fluctuations dépend linéairement de  $f$ . Ceci nous permet de limiter l'étude des fluctuations de pression dans les différentes configurations à l'étude des fluctuations de pression adimensionnelle, dépendantes du temps adimensionnel, en fonction de l'angle  $\Theta$ . Il ne nous est pas nécessaire d'étudier en plus la dépendance de nos résultats en fonction de la fréquence  $f$  elle-même.
- L'usage d'arguments de symétrie nous a permis une fois de plus de diminuer le nombre de mesures que nous avons dû faire, et nous a permis de compléter certains jeux de mesures sans modifier notre montage expérimental.
- Les fluctuations de pression dans l'écoulement peuvent varier fortement, à jeu de turbines fixé, en fonction de l'angle  $\Theta$ .
- Nous avons pu observer des structures localisées de basse pression semblables à celles étudiées par [45, 43, 27, 142]. Ces structures semblent n'être présentes que dans une zone localisée de l'écoulement, et ce seulement dans les cas de contra-rotation presque exacte.
- Nous avons par ailleurs pu observer une large variété de comportements périodiques, associés à des fréquences de l'ordre des fréquences de rotation des disques. Les composantes périodiques du signal de pression semblent particulièrement fortes lorsque les turbines présentent la face concave de leurs pales au fluide dans leur rotation. Nous n'avons pas observé de comportements périodiques à des fréquences aussi basses que celles rapportées par Pinton *et al.* [74].
- Nous avons constaté que la dépendance de l'amplitude *rms* des fluctuations de pression en fonction de l'angle  $\Theta$  était non-triviale, et dépendait de façon assez sensible des différents paramètres du montage (voir les courbes en annexe A).

## 4.4 Mesures des fluctuations turbulentes de vitesse

Pour terminer cette présentation des résultats du travail expérimental que nous avons mené sur le montage en eau "VKE", nous allons maintenant présenter quelques résultats de mesures de fluctuations de vitesse obtenus par Vélocimétrie Laser Doppler. Ces résultats ont été obtenus à partir de données expérimentales de deux origines différentes. Dans un premier temps, nous ne nous sommes intéressés qu'aux densités de probabilité des fluctuations des différentes composantes de la vitesse. Pour cette étude, les données obtenues au cours des mesures que nous avons déjà présentées sont d'une qualité (presque) suffisante. Ces résultats sont présentés dans un premier paragraphe. Lorsqu'ensuite nous avons été amenés à étudier les propriétés spectrales

des fluctuations (cf. chapitre 6), nous nous sommes heurtés au problème bien connu de l'échantillonnage aléatoire du signal de vitesse inhérent aux mesures par vélocimétrie laser doppler. Pour résoudre ce problème, nous avons alors réalisé une série de mesures plus précises, en un point du plan équatorial de l'écoulement. La description des dispositions particulières que nous avons prises ainsi que l'étude du signal de meilleure qualité ainsi obtenu font l'objet des paragraphes suivants.

#### 4.4.1 Densités de probabilité des différentes composantes de la vitesse en fonction de $z'$ , en $r' = 0.9$ .

Nous avons présenté en début de ce chapitre les résultats de mesure de la moyenne temporelle des composantes de la vitesse dans l'écoulement. Lors de ces mesures, nous avons enregistré en chaque point de la grille environ 200000 échantillons de vitesses, répartis sur environ 2 minutes. Ces mesures ne se prêtent pas à l'estimation de la densité spectrale de puissance du signal de vitesse, qui nécessite des précautions supplémentaires que nous détaillerons en section 4.4.2. Elles peuvent néanmoins nous permettre d'estimer les densités de probabilité des différentes composantes de la vitesse dans l'écoulement. Ces mesures sont complémentaires de mesures effectuées à l'aide d'un anémomètre à film chaud par O. Cadot durant sa thèse [27]. Les mesures d'anémométrie par film chaud présentent l'avantage d'être résolues en temps, mais ne donnent accès qu'au module de la vitesse dans le plan perpendiculaire au film. La vélocimétrie laser doppler, elle, échantillonne aléatoirement le signal, mais elle est bien directive et donne accès à la valeur signée de la composante de vitesse mesurée.

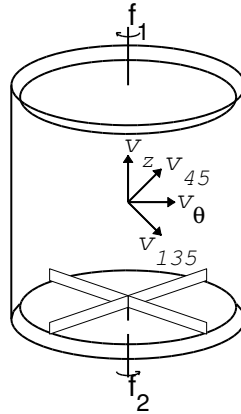


FIG. 4.35 – Directions de mesure des fluctuations de la vitesse dans l'écoulement.

En plus des mesures des composantes azimutales et axiales de la vitesse, nous avons mesuré les fluctuations selon les deux bissectrices représentées sur la figure 4.35. Nous verrons au chapitre 6 que ces mesures nous renseignent sur les corrélations statistiques qui existent entre les fluctuations turbulentes de  $v'_\theta$  et  $v'_z$ .

Les densités de probabilité des fluctuations de vitesse en différents points d'une droite verticale située en  $r' = 0.9$  sont représentées en figure 4.36, pour les différentes directions de mesure. – Nous voyons immédiatement sur ces graphes que les fluctuations de la vitesse dépendent fortement de la direction de mesure. Il est donc une fois de plus évident que l'écoulement de contra-rotation est fortement anisotrope.

– Laisant pour le moment de côté le cas particulier des fluctuations de  $v'_{135}$ , nous voyons que les densités de probabilité de  $v'_\theta$ ,  $v'_z$  et  $v'_{45}$  évoluent de plus fortement en fonction de la position

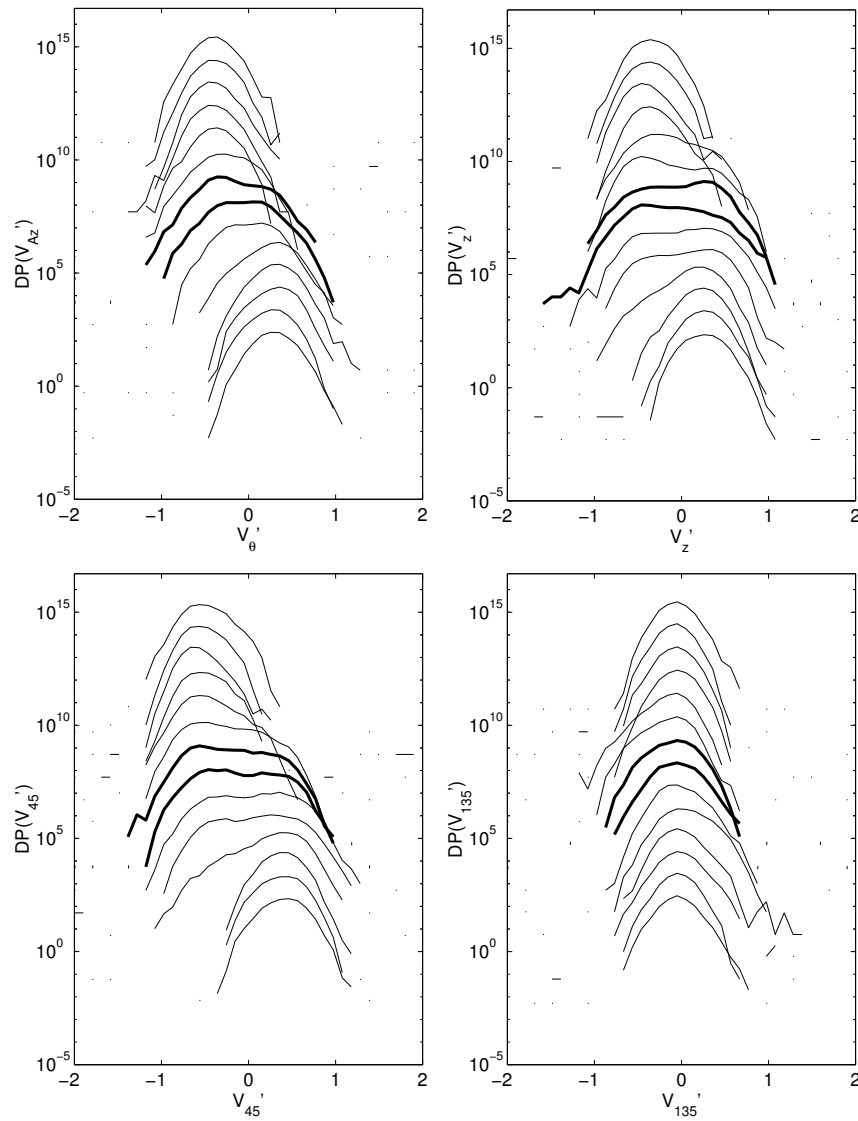


FIG. 4.36 – Distributions des fluctuations de vitesse adimensionnelle pour les différentes directions de mesure représentées en figure 4.35, pour différentes altitudes dans l'écoulement. Les mesures ont été réalisées avec des turbines de type “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$  séparées de  $1.78R_c$ , tournant en contra-rotation exacte ( $\Theta = 45^\circ$ ) dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 99$  mm. Les points de mesures étaient situés en  $r' = 0.9$ , et étaient espacés de 0.1 dans la direction axiale. Les courbes tracées en trait noir fort encadrent le plan équatorial  $z' = 0$ . a) Distributions de  $v'_\theta$ . b) Distributions de  $v'_z$ . c) Distributions de  $v'_{45}$ . d) Distributions de  $v'_{135}$ .

du point de mesure dans l'écoulement.

– Au voisinage des turbines, nous voyons que les densités de probabilité de  $v'_\theta$ ,  $v'_z$  et  $v'_{45}$  sont approximativement gaussiennes, et qu'elles sont centrées sur les valeurs moyennes dont nous avons déjà parlé. Les densités de probabilité en bas de l'écoulement sont sensiblement symétriques de celles obtenues en haut de l'écoulement. Ceci était attendu comme conséquence de l'invariance par retournement de l'écoulement, dans cette configuration.

– Par symétrie, les densités de probabilité doivent devenir paires près du plan méridien de l'écoulement. Nous voyons que cette évolution se fait plus par un élargissement des densités de probabilité que par un décalage progressif de la valeur moyenne. Dans le bas de l'écoulement, où les vitesses sont principalement positives, nous voyons ainsi que la partie de droite des densités de probabilité ne change que faiblement, tandis que les valeurs négatives de la vitesse deviennent de plus en plus probables. Les densités de probabilité obtenues au plus près du plan équatorial sont très larges, et peuvent être bimodales (cas de  $v'_z$  et  $v'_{45}$  notamment). La très grande amplitude des fluctuations de vitesse est probablement due à la présence de la couche de cisaillement dans cette région de l'écoulement.

– En ce qui concerne la densité de probabilité de  $v'_{135}$ , nous pouvons voir qu'elle n'évolue que très faiblement en fonction de l'altitude. Sur toute la hauteur de l'écoulement, elle reste sensiblement centrée autour de 0. Partant de la turbine du bas, nous voyons que sa forme est tout d'abord presque gaussienne. En arrivant près du plan équatorial, nous voyons que son aile droite se développe brièvement. Dans le plan équatorial, elle est de nouveau presque gaussienne. Elle suit alors l'évolution symétrique jusqu'en haut de l'écoulement.

En conclusion de ce paragraphe, nous rappellerons que nos mesures de vélocimétrie montrent que les fluctuations turbulentes de l'écoulement contra-rotation sont fortement anisotropes, et que leurs caractéristiques dépendent de plus du point de mesure. Dans le plan équatorial, elles ont des propriétés de symétrie particulières qui pourraient être exploitées dans le traitement des données obtenues par anémométrie au fil chaud.

#### 4.4.2 Méthodes expérimentales particulières utilisées pour les mesures précises.

La mesure de vitesse par vélocimétrie laser doppler ne permettant de connaître la vitesse du fluide au point de mesure qu'à des instants séparés d'intervalles aléatoires, l'estimation de la densité spectrale de puissance ne peut pas se faire au moyen de la méthode "habituelle", qui est la méthode du périodogramme de Welch [143]. Les algorithmes utilisant cette méthode fonctionnent en effet de la manière suivante :

– Le signal est tout d'abord découpé en tronçons dont la longueur est égale à l'inverse de la résolution désirée dans l'espace des fréquences. Il peut être intéressant de laisser les tronçons se recouvrir, de façon à en obtenir un plus grand nombre à partir d'un signal de longueur totale fixée.

– Chacun est multiplié par une fonction de "fenêtre" de manière à minimiser la distortion du spectre due à sa longueur finie.

– La transformée de Fourier discrète de chaque tronçon est alors calculée.

– Le résultat final est alors la moyenne des carrés des modules des transformées de Fourier individuelles.

Il est démontré que le spectre de puissance calculé de cette manière est un bon estimateur du spectre de puissance du signal de départ. Dans notre cas, cette méthode n'est pas applicable pour deux raisons :

– Tout d'abord, il n'existe pas d'algorithme efficace pour calculer la transformée de Fourier dis-



crête des tronçons de signal, qui ne sont pas échantillonnés régulièrement.

– Ensuite, il est bien connu que la transformée de Fourier d'un signal échantillonné est égale au produit de convolution de la transformée de Fourier du signal lui-même, qui est la composante physiquement intéressante, par la transformée de Fourier de la distribution des points d'échantillonnage. C'est cet effet qu'il est possible de minimiser dans le cas de l'échantillonnage régulier en multipliant au préalable le signal par une fonction de fenêtre. La technologie des fonctions de fenêtre adaptées à l'échantillonnage aléatoire est encore à ses balbutiements.

Deux méthodes peuvent alors être employées pour obtenir quand même la densité spectrale de puissance des fluctuations de vitesse qui nous intéressent :

– Historiquement, la première méthode qui semble avoir été employée est due à Blackman et Tukey [12]. Les paires d'échantillons qu'il est possible de constituer à partir du signal mesuré sont utilisées pour reconstruire la fonction d'autocorrélation des fluctuations turbulentes pour des valeurs du décalage régulièrement espacées. La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, qui peut être maintenant calculée par des méthodes classiques, est d'après le théorème de Wiener-Kintchine égale au spectre de puissance que nous cherchons. Les tenants de cette méthode affirment que l'échantillonnage aléatoire du signal fait que le spectre de puissance obtenu ainsi ne souffre pas du phénomène de repliement.

– Une deuxième méthode, plus fruste, consiste en un rééchantillonnage du signal à des pas de temps réguliers, suivie d'un calcul du spectre de puissance par la méthode du périodogramme de Welch.

Ces deux méthodes ont donné lieu à un nombre infini de variations, chacune permettant d'après ses géniteurs de corriger les biais affectant toutes les autres. Le consensus qui se dégage semble être que les descendantes de la première méthode correspondent à un traitement long, et que le rééchantillonnage du signal qui est nécessaire aux descendantes de la deuxième filtre en fait les hautes fréquences du signal. Le spectre de puissance obtenu n'est alors valable que jusqu'à une fréquence de coupure  $f_c = \dot{n}/2\pi$ , où  $\dot{n}$  est la fréquence d'échantillonnage moyenne du signal [1]. Quelques essais nous ont en fait montré qu'il était illusoire d'essayer d'obtenir des estimations de la densité spectrale de puissance des fluctuations par ces méthodes, si le signal n'était pas acquis avec des précautions particulières. Les données que nous avons présentées ci-dessus en figure 4.36, par exemple, si elles sont d'une qualité suffisante pour permettre une première estimation de la densité de probabilité, ont des intervalles entre échantillons de longueurs tellement variables que la méthode de Blackman et Tukey fournit en pratique un spectre blanc, alors que la méthode de rééchantillonnage fournit un spectre qui est coupé dès la première décade.

Plutôt que de persister dans cette voie, et d'essayer de trouver une méthode permettant d'obtenir des spectres de puissance à partir de nos données "standard", nous avons choisi de réaliser une série d'acquisitions de "haute qualité" en un point, en optimisant les réglages du vélocimètre ainsi que la quantité de particules réfléchissantes de manière à obtenir le taux d'échantillonnage à la fois le plus élevé et le plus régulier possible.

En observant les temps d'arrivée des échantillons de notre signal, nous avons constaté que les échantillons arrivaient souvent par paquets, mais que les paquets pouvaient eux être très espacés. Ainsi, il n'est pas rare d'observer une vingtaine d'échantillons en moins d'un dixième de milliseconde, avant de rencontrer un "blanc" de plus de 200 ms. Une solution pourrait alors être d'augmenter fortement la densité de particules réfléchissantes dans l'écoulement, afin de rendre de tels "blancs" impossibles. Malheureusement, la quantité d'échantillons présents dans les paquets augmente alors au point que le vélocimètre ne parvient plus à fonctionner que par saccades, absorbant un grand nombre d'échantillons en quelques millisecondes, puis rejetant toute nouvelle mesure pendant les 200 ms nécessaires pour les traiter... Heureusement, il est possible d'agir sur ce point, en demandant au vélocimètre de n'accepter qu'un échantillon par tranche

d'une milliseconde. L'inconvénient est alors que, comme le vélocimètre n'accepte plus qu'une mesure par paquet, les paquets étant rares, les mesures sont rares aussi. Lorsque le vélocimètre passe dans ce mode de fonctionnement, la fréquence d'acquisition baisse en pratique d'un facteur 20. Il est possible de résoudre ce dernier problème en augmentant la fréquence de rotation des turbines.

Nous avons donc réalisé une série de mesures dans les conditions suivantes :

- Le vélocimètre était réglé de manière à n'accepter qu'un échantillon par tranche d'une milliseconde, afin de minimiser l'effet de "paquets".
- L'écoulement était très fortementensemencé de particules.
- Le point de mesure du vélocimètre était situé dans le plan équatorial de l'écoulement, à 10 mm de la paroi cylindrique ( $r' = 0.9R_c$ ), afin de minimiser l'effet de l'absorption des lasers par les particules.
- Les turbines étaient du type "TM60", et étaient munies de pales hautes de  $0.1R_c$ . Elles tournaient en contra-rotation exacte à la fréquence de 15 Hz, qui est la fréquence maximale qu'il est possible d'atteindre avec ces turbines sans risque de cavitation.
- Pour limiter l'échauffement de l'eau, celle-ci était changée à la fin de chaque série de 10 mesures.

Nous avons effectué 10 mesures de deux minutes dans chacune des quatre directions. Le taux d'acquisition moyen obtenu de cette manière était supérieur à 0.9 kHz dans toutes les mesures, l'intervalle séparant deux échantillons successif étant toujours inférieur à 10 millisecondes. Comme les échantillons étaient désormais presque régulièrement espacés en temps, nous avons alors choisi d'utiliser la méthode de mesure des spectres de puissance par rééchantillonnage des données, pour sa rapidité. Le rééchantillonnage est effectué par un algorithme de "sample-and-hold", choisi pour sa simplicité.

Pour voir si le signal de vitesse était suffisamment bien échantillonné pour que la mesure de son spectre de puissance soit possible, nous avons procédé au test suivant : nous avons utilisé les dates des échantillons de vitesses obtenus lors des mesures des fluctuations de  $v'_\theta$  pour rééchantillonner un signal synthétique composé d'une somme de sinusoides. Nous avons alors calculé le spectre de puissance de ce "signal de vitesse", et nous l'avons comparé à celui de la somme de sinusoides, estimé de la manière classique.

Le résultat de ce test est présenté en figure 4.37. Les fréquences des différentes composantes sinusoidales du signal synthétique avaient été choisies égales à  $1/16f$ ,  $1/4f$ ,  $f$ ,  $4f$  et  $16f$ . Leurs amplitudes avaient été prises égales, et choisies de telle sorte que les différents pics arrivent sensiblement à la même hauteur que le pic contenu dans le spectre du signal de vitesse. Nous voyons tout d'abord que la position des pics ne change pas, et que leurs hauteurs sont peu affectées. Les pics correspondants aux trois premières composantes du signal synthétique sont atténués de moins d'un centième de décibel, les deux autres sont eux atténués de  $-0.11$  et  $-1.6$  dB respectivement. Nous constatons par contre que le rééchantillonnage introduit une composante de bruit blanc, qui se marque sur les spectres par un "plancher" situé environ 40 dB sous le sommet des pics. Comme nous avons choisi l'amplitude des sinusoides pour que les pics arrivent sensiblement au même niveau que la partie à basse fréquence du spectre de puissance du signal de vitesse, nous pouvons nous attendre à ce que le rééchantillonnage du signal de vitesse crée un bruit blanc d'amplitude sensiblement identique. Nous voyons alors que la partie à haute fréquence du spectre du signal de vitesse risque d'atteindre la valeur plancher imposée par ce bruit. Comme cette partie du spectre risque de plus d'être polluée par le phénomène de repliement, nous ne considérerons comme digne de confiance que la partie du spectre qui correspond aux fréquences inférieures à  $8f$ .

Il semble donc que l'échantillonnage du signal de vitesse que nous avons obtenu permette d'obtenir des spectres de puissance convenables sur une gamme de fréquences qui va jusqu'aux

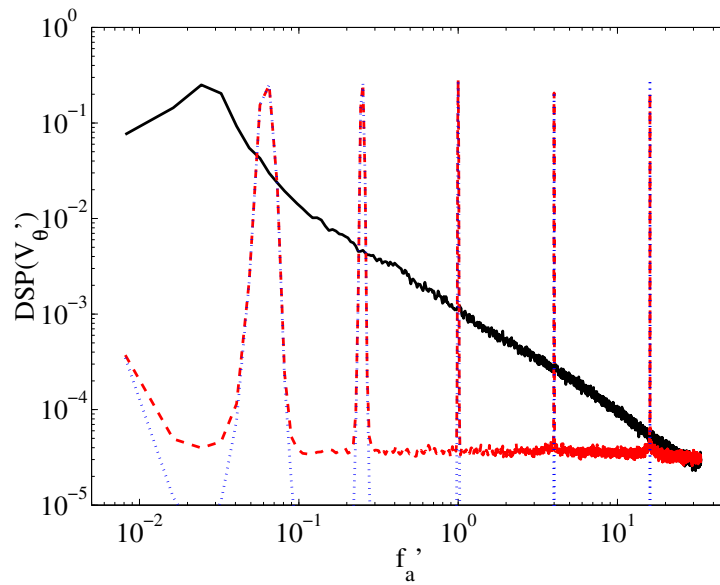


FIG. 4.37 – Résultat du test de la méthode d'estimation des densités spectrales de puissance. Le spectre de référence du signal synthétique est représenté en trait pointillé bleu, le spectre obtenu par rééchantillonnage est représenté en trait tireté rouge. Le spectre de puissance du signal de vitesse est représenté en trait plein. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles.

environs de  $8f$  (dans notre cas environ 120 Hz), et sur une gamme de puissances qui s'étend sur environ 30 dB. Les tests conduits à partir des dates d'échantillons provenant des mesures dans les autres directions donnent des résultats très similaires.

#### 4.4.3 Séries temporelles des différentes composantes de la vitesse dans le plan équatorial

Si l'objectif initial des mesures particulières dont il a été question au cours de la section précédente était l'étude des caractéristiques spectrales des fluctuations turbulentes dans le plan équatorial de l'écoulement, rien ne nous interdit malgré tout d'y jeter par curiosité un œil dans l'espace physique... Des séries temporelles typiques des fluctuations de vitesses dans les différentes directions de mesure sont représentées en figure 4.38. Nous comprenons sans peine en regardant ces figures pourquoi les densités de probabilité de  $v'_z$ ,  $v'_{45}$  et dans une (légèrement) moindre mesure  $v'_\theta$  sont bimodales dans le plan équatorial. Dans ces trois directions, en effet, le signal présente un aspect en “créneaux” très prononcé. Chaque composante de la vitesse, dont la valeur moyenne est presque nulle, passe ainsi alternativement d'un état positif à un état négatif. La durée des plateaux successifs est très variable, mais généralement assez longue. L'échelle de temps associée semble être de l'ordre de quelques dizaines de tours de turbines. Les fluctuations mesurées selon  $v'_{135}$ , elles, ne présentent que très peu cet aspect en créneaux.  $v'_{135}$  varie d'ailleurs sur une gamme un peu moins large.

Ces différences de comportement se comprennent assez bien si nous nous rappelons maintenant que ces mesures ont été effectuées en plein cœur de la zone dans laquelle évolue la couche de cisaillement qui sépare les cellules de recirculation poloidales associées aux turbines. La photographie 4.39 montre l'écoulement au voisinage du point de mesure. Nous voyons aisément qu'à l'instant où la photographie a été prise, le point de mesure du vélocimètre, qui est situé à l'origine

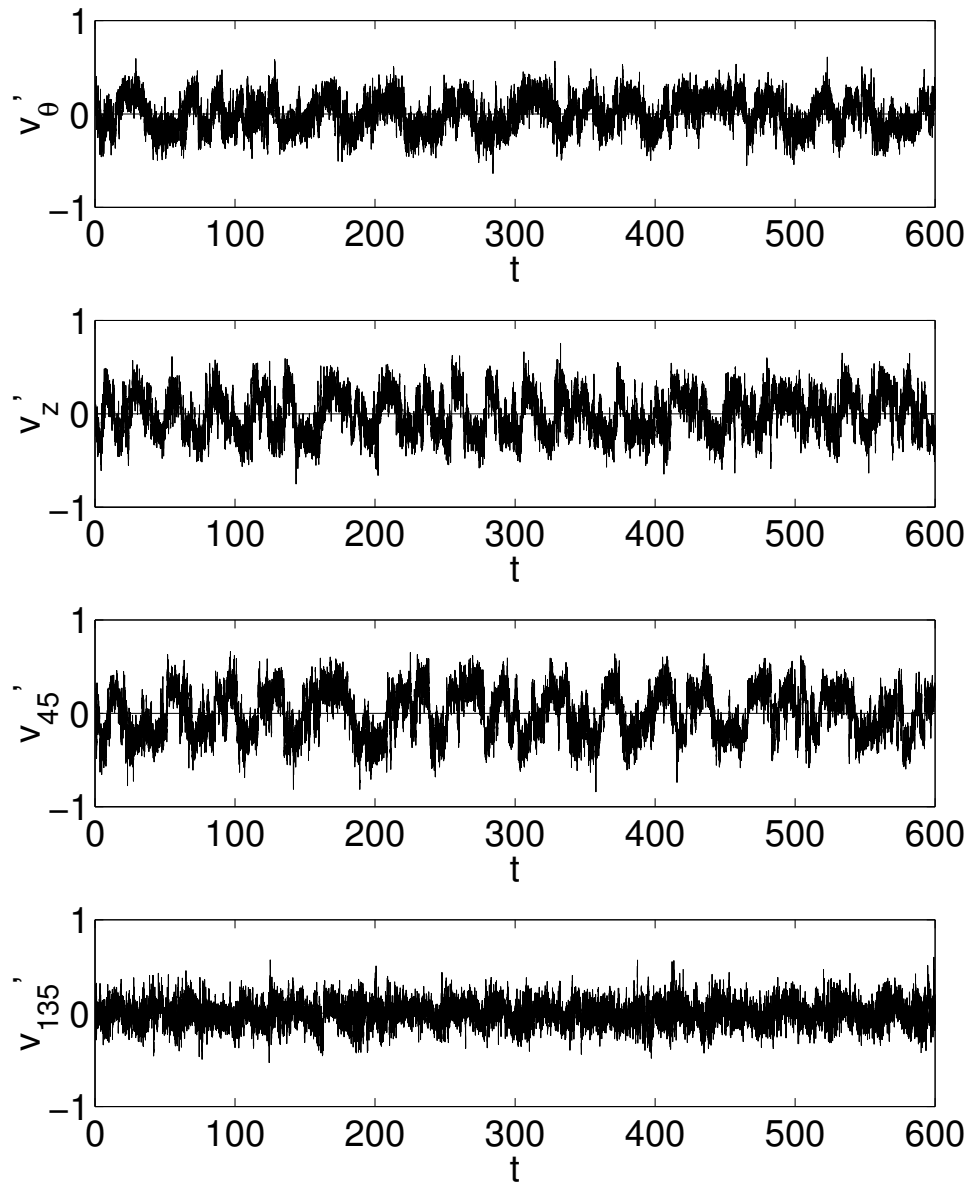


FIG. 4.38 – *Séries temporelles des fluctuations de vitesse pour les différentes directions de mesures représentées en figure 4.35. Les mesures ont été réalisées dans les circonstances décrites en détail en section 4.4.2. Nous rappelons qu'elles n'ont pas été faites simultanément. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. L'échelle de temps  $1/f$  dans ces circonstances correspond à une période de rotation des turbines. a) fluctuations de  $v'_\theta$ . b) fluctuations de  $v'_z$ . c) fluctuations de  $v'_{45}$ . d) fluctuations de  $v'_{135}$ .*

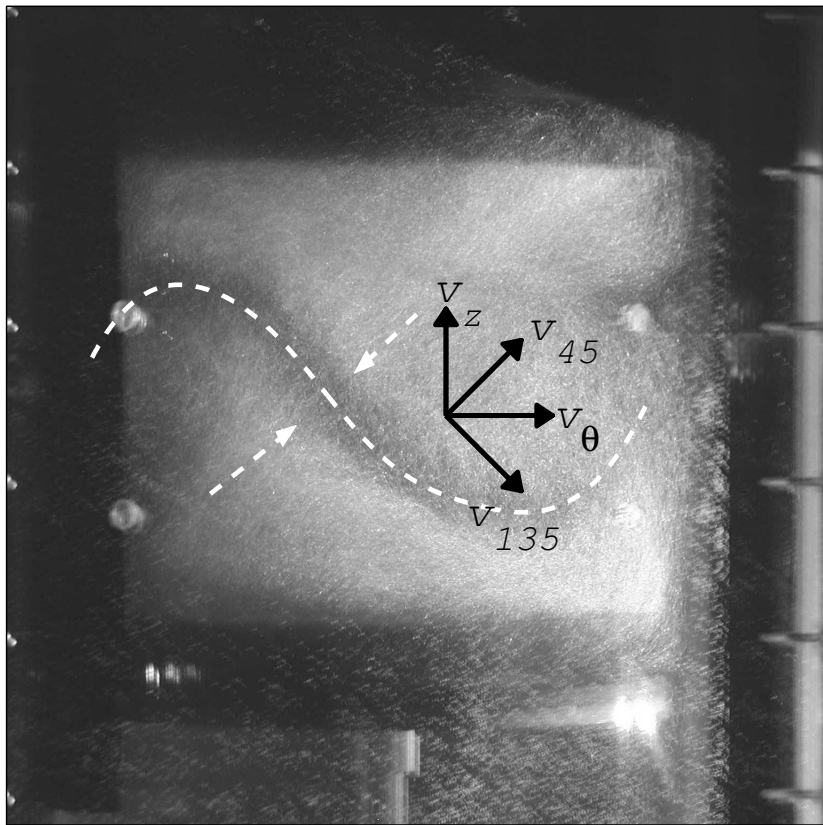


FIG. 4.39 – Photographie de l'écoulement au point de mesure. Le trait tireté blanc représente la séparatrice du point de stagnation situé sur le côté gauche de la figure. Les flèches tiretées blanches représentent la vitesse au voisinage de ce point. Enfin, les flèches noires représentent les différentes directions de mesure. Le point de mesure du vélocimètre est situé à l'origine du repère.

du repère, est au-dessus de la surface qui sépare les deux cellules de recirculation. La vitesse du fluide  $y$  est donc dirigée le long de  $v'_{45}$ , dans le sens négatif. Nous voyons donc que les valeurs mesurées de  $v'_{45}$ ,  $v'_\theta$  et  $v'_z$  sont toutes assez fortement négatives. Par contre, comme la vitesse est presque perpendiculaire à la direction de  $v'_{135}$ , la valeur mesurée selon cette direction sera presque nulle. Lorsque le point de mesure du vélocimètre est situé au-dessous de la séparatrice, nous voyons que les valeurs de  $v'_{45}$ ,  $v'_\theta$  et  $v'_z$  deviennent assez fortement positives, tandis que celle de  $v'_{135}$ , elle, reste faible. Nous comprenons donc que le défilement des points de stagnation de la couche de cisaillement devant le point de mesure du vélocimètre explique en grande partie l'alternance d'états hauts et bas dans les séries temporelles du signal de vitesse que nous avons présentées. Le forçage par les turbines étant invariant par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ , la couche de cisaillement n'a pas de raison de se déplacer plus particulièrement dans un sens que dans l'autre. Nous pouvons donc nous attendre à ce que ses déplacements soient assez lents et irréguliers, ce qui explique la grande durée et la grande variabilité des stations du signal de vitesse dans les différents états.

#### 4.4.4 Densités de probabilité des composantes de la vitesse dans le plan équatorial.

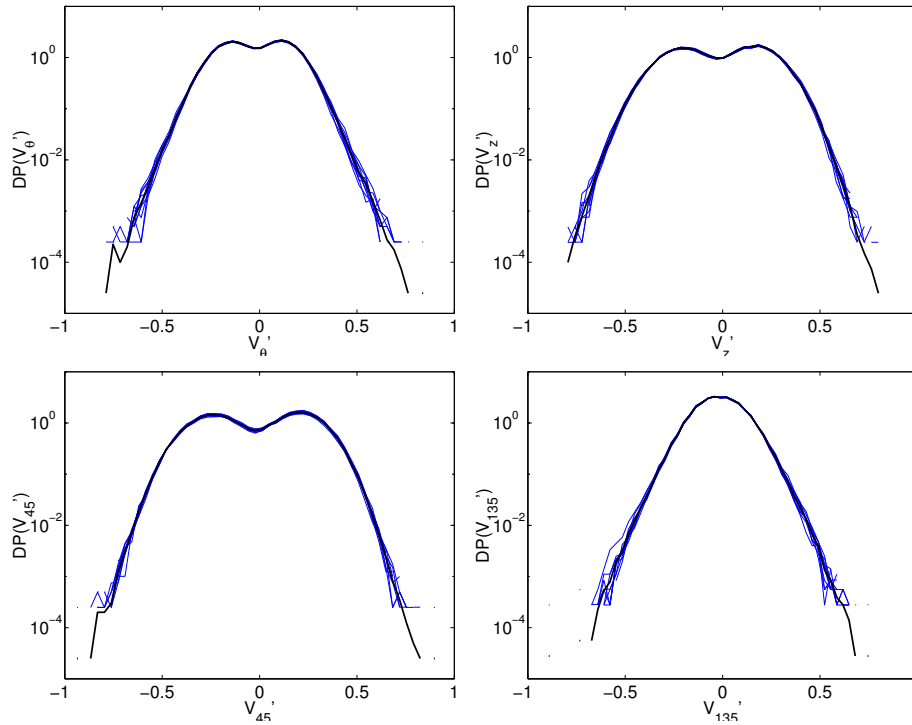


FIG. 4.40 – Densités de probabilité des fluctuations de vitesse pour les différentes directions de mesures représentées en figure 4.35. Les mesures ont été réalisées dans les circonstances décrites en détail en section 4.4.2. Sur chaque graphe, les traits fins représentent les densités de probabilité obtenues au cours de chacune des 10 mesures, le trait fort représente la densité de probabilité estimée à partir de l'ensemble des données. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. a) fluctuations de  $v'_\theta$ . b) fluctuations de  $v'_z$ . c) fluctuations de  $v'_{45}$ . d) fluctuations de  $v'_{135}$ .

La figure 4.40 représente les densités de probabilité des fluctuations des différentes composantes de la vitesse. Nous pouvons voir que ces fluctuations sont presque de moyenne nulle, et que leurs densités de probabilité sont presque paires. Ceci correspond aux résultats attendus par symétrie. Nous pouvons voir, comme cela était prévisible au vu des séries temporelles de fluctuations, que les densités de probabilité de  $v'_\theta$ ,  $v'_z$  et  $v'_{45}$  sont nettement bimodales, alors que celle de  $v'_{135}$  n'a qu'un maximum. Les ailes des distributions de  $v'_z$  et  $v'_{45}$  semblent relativement gaussiennes, là où celles des distributions de  $v'_\theta$  et  $v'_{135}$  semblent plus proches d'exponentielles.

#### 4.4.5 Densités spectrales de puissance des composantes de la vitesse dans le plan équatorial.

La figure 4.41 présente (enfin) les densités spectrales de puissance des fluctuations de vitesse pour les différentes directions de mesure. Nous voyons une fois de plus que les spectres de puissance de  $v'_\theta$ ,  $v'_z$  et  $v'_{45}$  sont assez semblables, mais que celui de  $v'_{135}$  est nettement différent. Sur tous les spectres, il est possible de voir un pic assez large aux basses fréquences, aux alentours de  $f'_a = 0.02$ . Sur le spectre de  $v'_{135}$ , ce pic est bien sûr bien plus faible que sur ceux des autres composantes. Jusqu'aux environs de  $f'_a = 1$ , qui est nous le rappelons la fréquence de rotation des

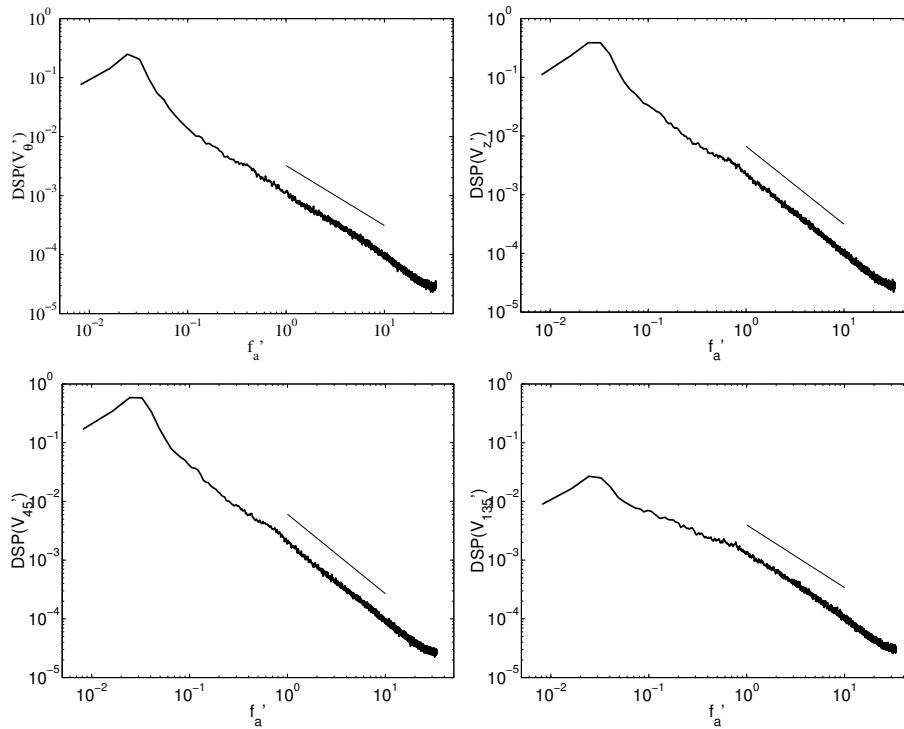


FIG. 4.41 – Densités spectrales de puissance des fluctuations de vitesse pour les différentes direction de mesures représentées en figure 4.35. Les mesures ont été réalisées dans les circonstances décrites en détail en section 4.4.2. Les spectres présentés ici ont été obtenus en cumulant l'ensemble des données mesurées dans chaque direction. Les lignes en trait fin représentent les ajustements par des décroissances algébriques. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. a) fluctuations de  $v'_\theta$ . b) fluctuations de  $v'_z$ . c) fluctuations de  $v'_{45}$ . d) fluctuations de  $v'_{135}$ .

turbines dans cette configuration, nous avons une première décroissance, qui ne semble pas avoir de forme particulière. Au-delà de  $f'_a = 1$ , la décroissance devient assez nettement algébrique sur les spectres de  $v'_z$  et  $v'_{45}$ , et moins nettement sur ceux de  $v'_\theta$  et  $v'_{135}$ . Les exposants déterminés par ajustement valent  $-1.3$  pour  $v'_z$  et  $v'_{45}$ , et  $-1$  pour  $v'_\theta$  et  $v'_{135}$ . Aux alentours de  $f'_a = 10$ , l'effet du repliement devient visible sur l'ensemble des spectres. Il n'est nulle part possible de voir une gamme de décroissance algébrique d'exposant  $-5/3$ , qui correspondrait au régime de turbulence inertielle. D'après O. Cadot [27], cette gamme commence au-delà de la fréquence de passage des pales des turbines, qui est chez nous égale à 16. Il n'est donc pas étonnant que nous ne puissions la voir.

#### 4.4.6 Conclusion des mesures de fluctuations de vitesses.

Pour conclure cette section, nous rappellerons les points suivants :

- Les fluctuations de vitesse mesurées dans l'écoulement de contra-rotation dépendent fortement, non seulement de la position du point de mesure, mais aussi de la direction dans laquelle la vitesse est mesurée. Nous vérifions donc une fois de plus que les grandes échelles de notre écoulement sont à la fois très inhomogènes et très anisotropes.
- Les densités de probabilité des fluctuations de vitesse peuvent présenter selon la position et la direction de la mesure des formes variées allant de la gaussienne simple à la “double gaussienne”. Il

semble aussi possible d’observer des comportements exponentiels dans les ailes des distributions de probabilité.

- Dans le plan équatorial de l’écoulement, les fluctuations de l’écoulement sont très fortement affectées par la présence de la couche de cisaillement qui sépare les cellules de recirculation associées aux deux turbines. Ce fait est apparent sur les séries temporelles des fluctuations, sur leurs densités de probabilité, ainsi que sur la partie à basse fréquence de leur spectre de puissance.
- En adoptant des dispositions particulières, il est possible d’étudier les caractéristiques spectrales de la dynamique des structures à grande échelle présentes dans la couche de cisaillement. Aux très basses fréquences ( $f'_a \simeq 0.02$ ), les spectres de puissance présentent un pic assez diffus, qui est probablement associé au mouvement d’ensemble de cette couche de cisaillement. Passée une plage de décroissance dont les caractéristiques détaillées dépendent de la direction de mesure, ils adoptent aux alentours de la fréquence de rotation des turbines un comportement proche de la décroissance algébrique. Les exposants associés dépendent eux aussi de la direction de mesure. Il semblent valoir  $-1.3 \pm 0.1$  dans les directions  $v'_z$  et  $v'_{45}$ , et  $-1 \pm 0.1$  dans les directions  $v'_\theta$  et  $v'_{135}$ , qui sont comparativement moins sensibles à la dynamique à grande échelle.
- Enfin, nous devons convenir que malgré tous nos efforts nous ne sommes pas parvenus à obtenir un signal suffisamment résolu en temps pour pouvoir étudier les fluctuations turbulentes dans leur régime inertiel. Augmenter la fréquence de rotation des turbines permet certes d’améliorer les caractéristiques de l’échantillonnage du signal de vitesse, mais repousse le début de ce régime d’autant...

## 4.5 Conclusion des mesures effectuées dans le montage VKE

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les résultats de mesures systématiques d’un certain nombre de grandeurs hydrodynamiques, menées dans le montage “VKE”. Une première conclusion d’ordre général qu’il est possible de tirer de ces résultats est que les grandeurs que nous avons mesurées semblent vérifier assez bien les arguments dimensionnels et de symétrie que nous avons développés en début de chapitre. De manière générale, il semble que la dépendance des résultats en fonction de la fréquence  $f$  de rotation des disques puisse être obtenue par analyse dimensionnelle avec une bonne précision. Nous n’avons malheureusement pas pu tester de la même manière ni la dépendance des résultats en fonction de la taille du montage, ni leur dépendance en fonction de la masse volumique du fluide utilisé. De manière toute aussi générale, il semble par contre que la dépendance des différents préfacteurs sans dimension en fonction de leurs paramètres ne soit **jamais** triviale, et que l’intuition se révèle dans bien des cas mauvaise conseillère (influence sur les couples de la hauteur des pales ou de la présence des ailettes, par exemple). Il semble que dans la caractérisation des écoulements de von Kármán les *seules* simplifications qu’il soit raisonnable d’espérer proviennent de considérations dimensionnelles ou de symétrie. Nous verrons par ailleurs au chapitre 5 un exemple de cas où les raisonnements de symétrie eux-mêmes doivent être utilisés avec prudence. Cette mise en garde étant faite, nous pouvons rappeler un certain nombre de points :

- Les mesures de vélocimétrie faites dans le régime de contra-rotation exacte montrent que la partie moyenne temporelle de l’écoulement se présente dans ce cas sous la forme de deux cellules de recirculation méridienne. Chacune de ces cellules est entraînée dans la direction azimutale par la turbine dont elle est proche. Dans l’ensemble de l’écoulement, les valeurs adimensionnelles des composantes méridienne et azimutale de la vitesse sont d’ordre 1. Les amplitudes *rms* adimensionnelles des fluctuations des composantes de la vitesse que nous avons pu mesurer sont elles aussi d’ordre 1. La forme exacte de l’écoulement dépend des turbines employées, ainsi que de



leur sens de rotation lorsqu'elles sont munies de pales courbes.

– Dans le régime de contra-rotation exacte, une couche de cisaillement extrêmement vigoureuse évolue dans le plan équatorial de l'écoulement. Les mesures de la moyenne temporelle de l'écoulement et de l'amplitude des fluctuations de vitesse montrent que ses caractéristiques détaillées dépendent fortement des paramètres décrivant le montage. Ce fait explique probablement pour une part la grande variété des comportements qu'il nous a été donné d'observer lors des mesures de fluctuations de pression et de vitesse dans ce cas.

– Les valeurs moyennes temporelles des couples fournis par les moteurs varient de manière complexe en fonction des différents paramètres, qu'il s'agisse de l'angle  $\Theta$  qui fixe les fréquences de rotation des turbines, ou des paramètres décrivant la forme du montage tels que le rayon de courbure des pales des turbines ou leur hauteur.

– L'amplitude *rms* ainsi que les diverses caractéristiques statistiques des fluctuations de pression dépendent elles aussi de l'ensemble de ces grandeurs, ainsi bien sûr que de la position du point de mesure dans l'écoulement.

– Dans le cas de la contra-rotation exacte, nous avons pu observer dans le plan équatorial de l'écoulement les excursions à basse pression décrites par [45, 43, 27, 142]. Dans ce cas, l'aile à basse pression de la distribution de probabilité avait bien le comportement exponentiel rapporté par ces auteurs.

– Pour d'autres valeurs de l'angle  $\Theta$ , les filaments de vorticité responsables de ces événements semblent beaucoup plus rares, et il nous est occasionnellement arrivé d'observer des distributions de probabilité munies de deux ailes exponentielles.

– L'étude des fluctuations de pression nous a enfin permis de découvrir une grande variété de comportements périodiques à des fréquences du même ordre de grandeur que les fréquences de rotation des turbines. Nous n'avons pas pu observer de composantes périodiques à des fréquences aussi basses que celles rapport  es par [74], dans un montage "ouvert" (c'est-à dire dépourvu de cuve cylindrique).

– Une brève étude des fluctuations de vitesse dans l'écoulement de contra-rotation exacte nous a montré que leurs distributions de probabilité pouvaient elles aussi varier fortement en fonction de la position ou de la direction de la mesure. La couche de cisaillement près du plan équatorial de l'écoulement dans ce cas semble avoir une influence profonde sur les propriétés des fluctuations de vitesse, et affecter notamment leurs caractéristiques spectrales et statistiques.

Pour clore ce chapitre, nous présenterons enfin un certain nombre d'aspects selon nous dignes d'intérêt, et que nous n'avons pas eu le temps d'aborder, faute de temps ou du matériel nécessaire.

– La dépendance des caractéristiques de l'écoulement en fonction de la distance qui sépare les disques des turbines n'a pas été abord  e. D'après certains auteurs [28], ce paramètre semble avoir une forte influence sur l'écoulement. (Comme les autres, serions-nous tentés de dire).

– Lorsque le cylindre extérieur est muni d'ailettes, l'écoulement n'est plus axisymétrique. Cette dépendance en fonction de la coordonnée azimutale  $\theta$  n'a pas jusqu'ici été   tudi  e par vélocimétrie.

– Nous n'avons pas pu étudier l'influence des différents paramètres du montage sur les fluctuations turbulentes dans le régime inertiel de celles-ci. Ni nos mesures de vélocimétrie laser doppler ni nos mesures de fluctuations de pression ne nous ont en effet permis d'avoir accès à ce régime avec précision.

## Chapitre 5

# La “bifurcation globale” et les “états intermittents”.

Au cours du chapitre 4, nous avons fréquemment observé des comportements “étranges” dans le cas où des turbines munies de pales courbées tournaient en contra-rotation exacte en présentant la face concave de leurs pales au fluide. En approfondissant notre étude dans cette région de l’espace des paramètres, nous avons pu observer une “bifurcation globale” ainsi qu’une dynamique “intermittente” de l’écoulement, alors que celui-ci était complètement turbulent.

### 5.1 La “bifurcation globale”

#### 5.1.1 Une symétrie se brise.

##### Les symétries du montage expérimental.

Considérons une fois de plus le retournement  $\mathcal{R}_\pi$  autour de la droite  $\mathcal{D}$  représentée en figure 5.1. Si les disques sont lisses, et s’ils tournent tous les deux à la même vitesse en contra-rotation, nous avons vu que le fait d’appliquer  $\mathcal{R}_\pi$  au montage expérimental le laisse inchangé. De plus, comme le montage est invariant par rotation d’angle quelconque autour de l’axe du cylindre, nous voyons que cette propriété est vraie de toutes les droites qui, comme  $\mathcal{D}$ , sont contenues dans le plan équatorial du montage et coupent l’axe du cylindre.

Si maintenant les disques sont munis de pales, nous voyons que nous ne pouvons plus prendre n’importe quelle droite, mais qu’à chaque instant il est possible de choisir  $\mathcal{D}$  de telle manière que  $\mathcal{R}_\pi$  amène chaque pale du disque du haut sur une pale du disque du bas. De plus, si les deux disques tournent toujours exactement à la même vitesse, nous voyons que, si nous choisissons bien  $\mathcal{D}$  au début de l’expérience, le montage restera invariant par  $\mathcal{R}_\pi$  indéfiniment. Quand nous parlerons désormais d’un axe possible pour  $\mathcal{R}_\pi$ , nous supposerons implicitement qu’il s’agit d’un tel axe “bien choisi”. Si les turbines ont  $n$  pales, il est possible de montrer qu’il existe  $n$  tels axes, et qu’ils sont images l’un de l’autre par la rotation d’angle  $2\pi/n$  autour de l’axe du cylindre.

Choisissons maintenant un axe  $\mathcal{D}$ , et intéressons nous à l’effet de la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ . Le fait que les conditions aux limites de l’écoulement soient invariantes par  $\mathcal{R}_\pi$  impose sur lui des contraintes : en effet, si nous observons une évolution de l’écoulement donnée, il est normal de penser que dans une expérience tournée de  $180^\circ$  autour de  $\mathcal{D}$  nous aurions pu observer la même évolution de l’écoulement, *tournée de  $180^\circ$  autour de  $\mathcal{D}$* . Comme dans notre cas le montage original et le montage tourné de  $180^\circ$  sont identiques, nous devons en conclure qu’il n’y a pas de raison d’observer une évolution donnée de l’écoulement plutôt que son image par  $\mathcal{R}_\pi$ .

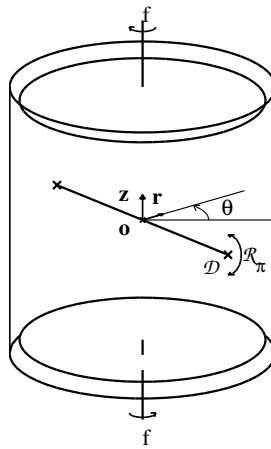


FIG. 5.1 – Schéma du montage expérimental et de l'axe de symétrie.

Pour de petites valeurs du nombre de Reynolds de l'écoulement, tout ceci se simplifie : il n'existe qu'une seule évolution possible de l'écoulement, et elle est invariante par  $\mathcal{R}_\pi$ . Nous observons donc à chaque instant l'écoulement et son image par  $\mathcal{R}_\pi$ .

La figure 5.2 montre une photographie de l'écoulement à un nombre de Reynolds de 150, dans le montage à l'échelle 1 : 2 utilisant de l'huile silicone de viscosité 200 cSk. La ligne sombre qui

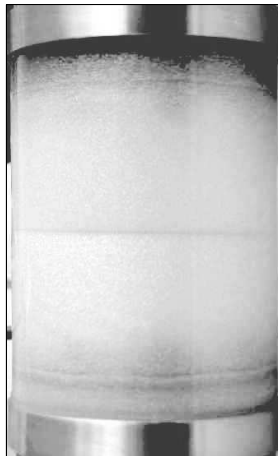


FIG. 5.2 – Photographie de l'écoulement de contra-rotation à petit nombre de Reynolds. Le rayon intérieur du cylindre est de 50 mm. Les disques sont séparés de  $0.93R_c$ . Ils sont munis de pales courbées, de hauteur  $0.1R_c$ . Le fluide est de l'huile silicone 200 cSk, marquée avec de l'Iridin. La fréquence de rotation des disques est proche de 2 Hz, le nombre de Reynolds vaut environ 150.

est visible au milieu de l'écoulement marque la séparation entre les deux cellules de recirculation poloidales. Nous pouvons voir sur cette photographie que l'écoulement est image de lui-même par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ .

Lorsque le nombre de Reynolds augmente et que l'écoulement devient turbulent, cette symétrie se brise, au cours d'une succession de *bifurcations*. Progressivement, l'écoulement cesse d'être invariant par les rotations d'angle  $\pi$  autour de tous les axes de symétrie possibles. L'autre symétrie de l'écoulement, sa périodicité temporelle liée à la rotation des turbines, se brise elle aussi. Pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds, chaque répétition de l'expérience donne

lieu à une réalisation différente de l’écoulement, qui n’est plus l’image d’elle-même par aucun des retournements  $\mathcal{R}_\pi$  possibles, qui n’est plus image d’elle-même par rotation d’angle  $2\pi/n$  autour de l’axe du cylindre, et qui n’est plus périodique.

Ce qui reste vérifié, par contre, c’est que l’image de l’écoulement observé par chacune de ces opérations de symétrie (translation dans le temps d’un  $n$ -ième de période de rotation des disques, rotation de  $2\pi/n$  autour de l’axe du cylindre, rotation  $\mathcal{R}_\pi$  autour d’un des axes possibles) est un écoulement qui est solution des équations du mouvement, et que nous devrions *a priori* finir par l’observer, si nous répétions l’expérience dans les mêmes conditions un assez grand nombre de fois. La succession des bifurcations subies par l’écoulement de von Kármán lorsque son nombre de Reynolds augmente de 0 à quelques centaines a été étudiée numériquement par C. Nore et L. Tuckerman [98].

A ce stade, nous voyons que l’étude d’une réalisation particulière de l’écoulement, au cours d’une expérience donnée, n’a plus grand sens, car les résultats obtenus seront liés à la réalisation de l’écoulement, et n’auront donc qu’une chance infime de se reproduire à l’identique au cours d’une autre réalisation. Il devient finalement plus intéressant d’étudier *statistiquement* de nombreuses réalisations de l’écoulement. Cette information ne nous permettra pas de prédire les caractéristiques précises de l’écoulement avant de mettre l’expérience en marche, mais elle nous apprendra au moins ce à quoi nous pouvons nous attendre.

Empiriquement, la pertinence de cette approche est renforcée par le fait que les écoulements turbulents tendent spontanément à perdre rapidement la mémoire de leur évolution. Les conditions initiales et la manière dont l’expérience a été démarrée n’ont en fait d’influence qu’au début d’une réalisation de l’écoulement, et sont “oubliées” rapidement. Les informations statistiques obtenues en une expérience d’une heure sont donc très sensiblement équivalentes à celles qui pourraient être obtenues en 60 tronçons disjoints durant chacun une minute. Les écoulements turbulents sont habituellement considérés comme empiriquement *ergodiques*.

Dans ce cas, nous voyons que les symétries qui avaient été brisées lors de l’apparition de la turbulence sont d’une certaine manière restaurées : si l’écoulement passe autant de temps dans une configuration que dans son image par  $\mathcal{R}_\pi$ , on peut dire qu’il est de nouveau invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ , mais au sens statistique cette fois.

Il est donc communément admis que les écoulements turbulents possèdent *au sens statistique* les mêmes symétries que le montage dans lequel ils évoluent. Toutes les expériences que nous allons maintenant relater ont été faites dans de telles circonstances, le nombre de Reynolds de l’écoulement n’étant jamais inférieur à environ 10000. Les turbines employées étaient du type “TM60”, et elles étaient munies de pales de 20 mm de haut. Nous avons observé des comportements très similaires avec des pales de 10 mm de haut. Des comportements assez différents ont pu être observés par F. Ravelet, mais avec d’autres turbines munies de pales beaucoup moins courbées, ou lorsque la paroi du cylindre est munie d’ailettes.

### Les symétries de l’écoulement de base.

Nous avons pu voir au chapitre 4 que les arguments développés au paragraphe précédent sont vérifiés lorsque les turbines “TM60” tournent dans le sens positif représenté sur la figure 5.3. Les mesures de vélocimétrie nous ont montré que l’écoulement est invariant *au sens statistique* par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ , et les mesures de couple nous ont montré que les couples fournis par les deux moteurs sont identiques en valeur moyenne. Nous voyons bien sur la figure 5.4, qui représente un instantané de l’écoulement (pris avec des pales de hauteur  $0.1R_c$ ) et son image par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$  qu’il n’y a pas de raison que l’une de ces configurations se reproduise plus souvent que l’autre, quelque particulier qu’ait été l’état de l’écoulement au début de l’expérience. Dans

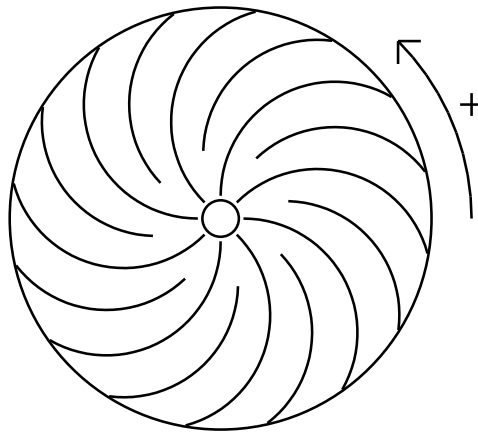


FIG. 5.3 – Schéma des turbines “TM60” vues de dessus. La flèche indique le sens positif de rotation.

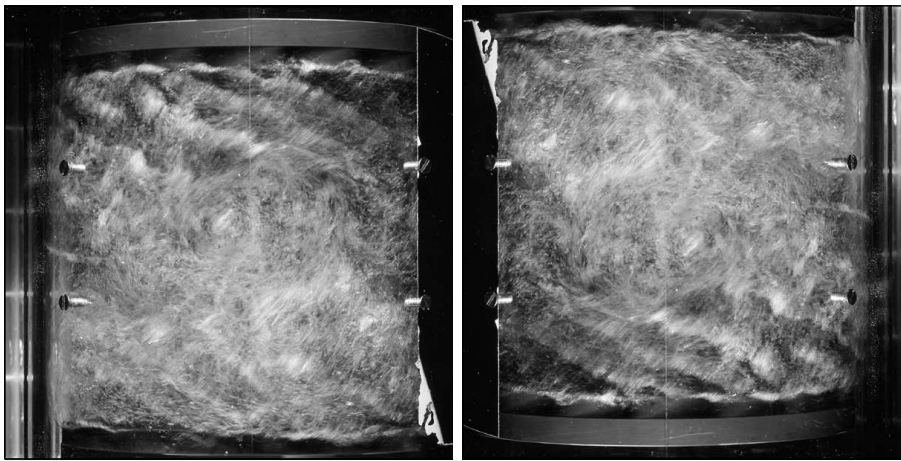


FIG. 5.4 – Instantané de l’écoulement pris avec un temps de pause de  $\frac{1}{500}$  s. a) Image originale. b) Image tournée de  $\pi$  autour d’un axe perpendiculaire au plan de la figure.

le cas où les deux turbines tournent en contra-rotation dans le sens positif, nous pouvons donc dire que l’invariance par  $\mathcal{R}_\pi$ , si elle est brisée à chaque instant par l’écoulement, est restaurée statistiquement, *au sens des moyennes temporelles*.

### La brisure “statistique” de la symétrie.

En faisant tourner les turbines en contra-rotation *dans le sens négatif*, nous avons pu par contre observer les faits suivants :

– Si nous partons d’un montage expérimental arrêté, dans lequel le fluide est sensiblement au repos, nous pouvons choisir un axe  $\mathcal{D}$ . Si maintenant nous augmentons simultanément les vitesses de rotation des deux moteurs, de manière à préserver l’invariance des conditions aux limites par  $\mathcal{R}_\pi$ , nous obtenons un écoulement statistiquement invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ , qualitativement semblable à celui que nous avons présenté au paragraphe précédent. Cet écoulement, qui est représenté sur le schéma 5.5, possède deux cellules de recirculation d’importances égales, séparées par la couche de cisaillement précédemment décrite. Les couples fournis par les deux moteurs sont en moyenne

égaux. Cet écoulement peut rester stable pendant un temps long.

– Si à un moment un événement vient briser l’invariance des conditions aux limites par  $\mathcal{R}_\pi$ , (intervention de l’expérimentateur, imprécision de la régulation des vitesses de rotation des moteurs, etc.), l’écoulement passe *très brutalement* (le temps de transition est compris entre 5 et 10 tours de turbines) dans l’un ou l’autre de deux états dont les moyennes temporelles sont schématisées en figure 5.5b et c. Dans chacun de ces états, l’écoulement n’a plus qu’une cellule

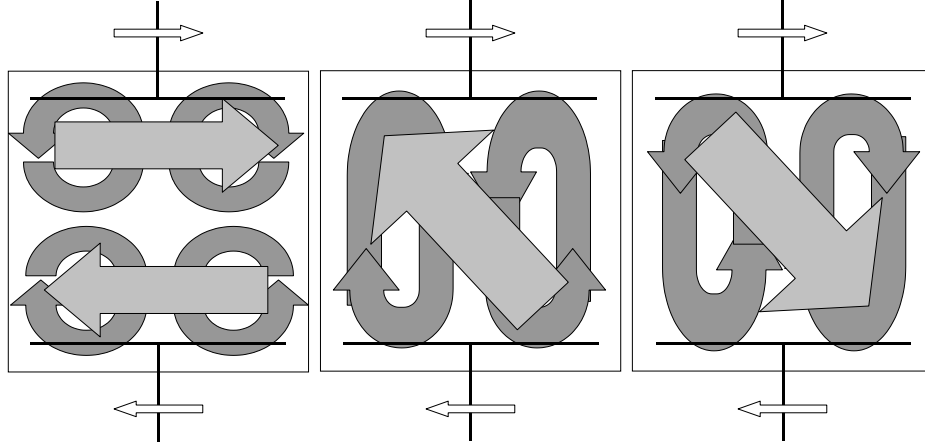


FIG. 5.5 – Schéma des moyennes temporelles de l’écoulement a) dans l’état à 2 cellules b) dans un état à 1 cellule c) dans l’autre état à 1 cellule. Les cellules de recirculation poloidales sont indiquées en gris foncé, et la direction de la vitesse toroidale près de la paroi de la cuve est indiquée en gris clair. Les consignes de vitesses des moteurs sont identiques dans les trois cas.

de recirculation poloidale, et la couche de cisaillement a disparu du plan équatorial. La vitesse azimuthale garde un signe sensiblement constant dans tout l’écoulement. Le sens de rotation du fluide est identique à celui du disque qui expulse le fluide vers les parois. Les couples des moteurs sont environ trois fois plus grand que dans la situation à deux cellules de recirculation, et ils sont assez différents. Le moteur qui expulse le fluide fournit le couple le plus élevé. La différence entre les couples est due au frottement visqueux du fluide sur la paroi du cylindre, qui est plus élevé dans cette situation que dans celle à deux cellules de recirculation. Elle peut valoir jusqu’à 20% du couple le plus élevé. Les deux configurations sont statistiquement images l’une de l’autre par  $\mathcal{R}_\pi$ . Ni l’une ni l’autre n’est par contre invariante par  $\mathcal{R}_\pi$ , même au sens statistique. Une fois l’écoulement dans l’une de ces situations, il peut y rester indéfiniment. Il n’est pas possible, même en attendant très longtemps, de voir l’écoulement retourner à son état de départ, et il n’est pas non plus possible de voir l’écoulement passer spontanément d’un état à une cellule à l’autre. Pour faire repasser l’écoulement dans son état de départ, il faut arrêter l’expérience, puis la redémarrer de façon symétrique.

– Il est possible de provoquer la transition de l’état à deux cellules vers les états à une cellule, en jouant sur les fréquences de rotation des turbines. Si l’écoulement est dans l’état à deux cellules, il est possible, en augmentant la fréquence de rotation d’une des turbines, de l’inciter à passer dans l’état où ce disque expulse le fluide. Plus le déséquilibre des fréquences de rotation est élevé, plus la transition se produit alors tôt.

– Partant maintenant d’un état à une cellule, il est possible de faire transiter l’écoulement vers l’autre état à une cellule. Pour cela, il est nécessaire de modifier les fréquences de rotation des turbines de telle sorte que le disque qui expulse le fluide tourne assez nettement moins vite que l’autre. Pour un déséquilibre suffisant, l’écoulement finit alors par se “renverser”.

De tout cela, nous pouvons conclure que lorsque les deux turbines sont en contra-rotation à des fréquences de rotation identiques et négatives, l'écoulement qui est, nous le rappelons, pleinement turbulent, peut se trouver dans trois états différents. Les moyennes temporelles de l'écoulement dans ces différents états sont bien distinctes. Le passage de l'état à deux cellules vers les états à une cellule est irréversible, et la transition d'un état à une cellule vers l'autre est fortement hystérétique. Nous voyons alors que, dans cette région des fréquences de rotation négatives, l'écoulement, bien que très turbulent, garde infiniment longtemps la mémoire de la dernière transition qu'il a effectué. Une expérience d'une heure donnera pendant une heure un résultat constant, alors que 60 tronçons durant chacun une minute donneront des résultats indépendants, qui pourront certes se classer dans trois catégories bien définies, mais qui feront état d'une répartition entre ces différentes catégories. Notre écoulement n'est pas ergodique et l'invariance par  $\mathcal{R}_\pi$  de sa moyenne temporelle ne se restaure pas statistiquement, même à très haut nombre de Reynolds.

### 5.1.2 Mesures de l'écoulement moyen.

Nous avons tout d'abord mesuré par LDV la moyenne temporelle de l'écoulement dans l'état à deux cellules, puis dans un état à une cellule, afin de quantifier l'écart entre les deux situations. Les mesures ont été effectuées comme indiqué au chapitre 4, pour des fréquences de rotation des disques identiques et égales à  $-2$  Hz. Les turbines utilisées étaient du type “TM60”, et étaient munies de pales de 20 mm de haut.

#### L'écoulement à deux cellules.

La figure 5.6 ci-dessous représente la moyenne temporelle de l'écoulement, dans la situation à deux cellules.

Nous pouvons voir tout d'abord que l'écoulement qui est représenté sur les figures est sensiblement invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ , si l'axe est choisi dans le plan de la figure, à la cote  $z = 0$ . En effet, chacune des cellules de recirculation est sensiblement transformée en l'autre, que ce soit sur la partie poloidale ou sur la partie toroidale. Les deux valeurs extrémales de la vitesse azimutale sont très comparables, et sont atteintes en deux points sensiblement homologues l'un de l'autre par  $\mathcal{R}_\pi$ . Enfin, nous voyons que les vitesses azimutales mesurées sont d'ordre 1 quand elles sont exprimées sous forme adimensionnelle, et que la norme adimensionnelle de la vitesse poloidale maximale est environ 0.4.

#### L'écoulement à une cellule.

La figure 5.7 ci-dessous représente maintenant la moyenne temporelle de l'écoulement dans l'une des deux situations à une cellule, celle dans laquelle le moteur du bas expulse le fluide près de la paroi cylindrique, et fournit donc le plus fort couple.

Cette fois, nous voyons que l'invariance par  $\mathcal{R}_\pi$  est nettement brisée : il n'y a plus qu'une seule cellule de recirculation, qui occupe tout l'écoulement. La vitesse poloidale maximale obtenue, 1.72, est plus de quatre fois supérieure à celle que nous avons pu observer en figure 5.6. La distribution des vitesses azimutales est elle aussi complètement bouleversée : la vitesse est positive dans tout le volume mesuré dès que  $r > 0.5$  environ, et négative dans le cœur de l'écoulement, pour  $r < 0.5$ . Elle ne varie que très faiblement entre la turbine du haut et celle du bas, qui tournent pourtant en sens opposés à  $\pm 0.95$  ! Ses valeurs extrémales,  $-1.38$  et  $0.15$ , n'ont rien de comparable et elles sont obtenues en des points qu'il serait bien difficile de relier par une quelconque opération de symétrie.

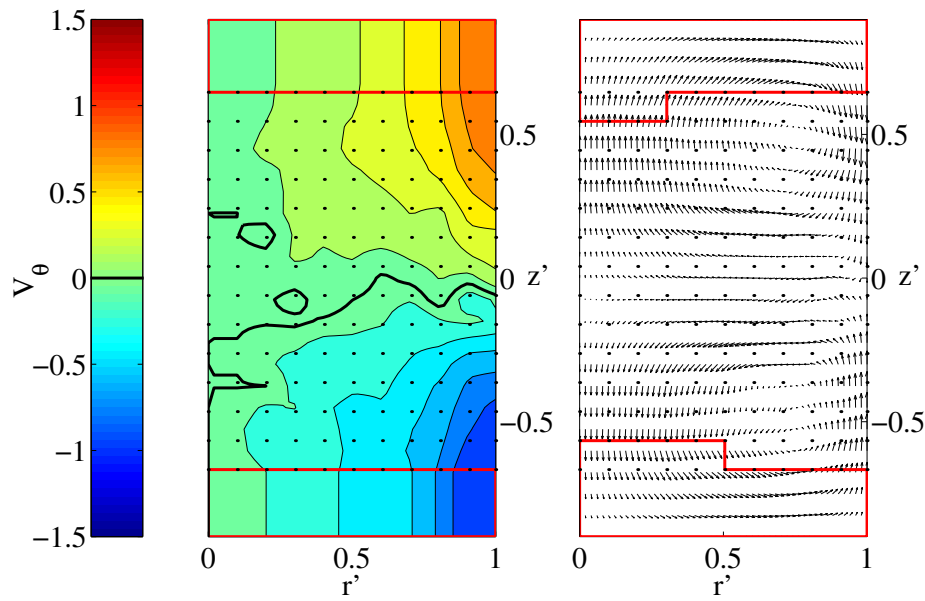


FIG. 5.6 – Moyennes temporelles des vitesses adimensionnelles dans l’état de l’écoulement à deux cellules de recirculation. Le trait fort noir indique la valeur 0, les points noirs marquent les points de mesure de la grille. Les lignes rouges délimitent les zones de l’écoulement où la vitesse n’a pu être mesurée. a) Partie azimuthale de l’écoulement. Les vitesses sont comprises entre  $-0.93$  et  $0.95$ . b) Partie poloidale de l’écoulement. La plus grande vitesse est de  $0.38$ .

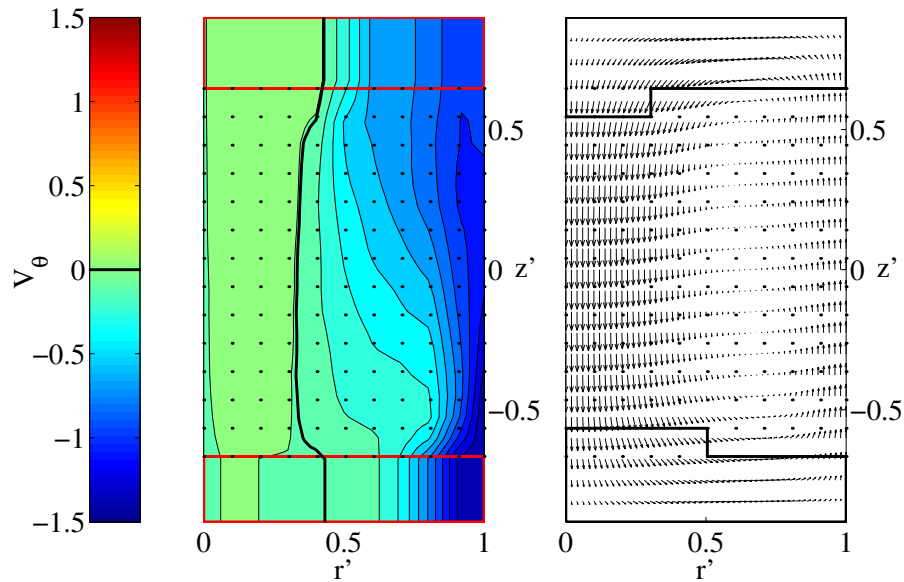


FIG. 5.7 – Moyennes temporelles des vitesses adimensionnelles dans l’état de l’écoulement à une cellule de recirculation. Le trait fort noir indique la valeur 0, les points noirs marquent les points de mesure de la grille. Les lignes rouges délimitent les zones de l’écoulement où la vitesse n’a pu être mesurée. a) Partie azimuthale de l’écoulement. Les vitesses sont comprises entre  $-1.38$  et  $0.15$ . b) Partie poloidale de l’écoulement. La plus grande vitesse est de  $1.72$ .



### 5.1.3 Mesures de couple.

Nous avons évoqué au cours du paragraphe 5.1.1 le fait que les couples des moteurs augmentent environ d’un facteur 3 et deviennent fortement dissymétriques lorsque l’écoulement passe de l’état à deux cellules à l’un des états à une cellule. Mesurer les couples des moteurs est donc une assez bonne manière de déterminer les domaines d’existence des différents états dans l’espace des paramètres. La figure 5.8 ci-dessous présente les couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l’angle  $\Theta$  défini au chapitre 3, au voisinage de la contra-rotation équilibrée aux fréquences négatives.

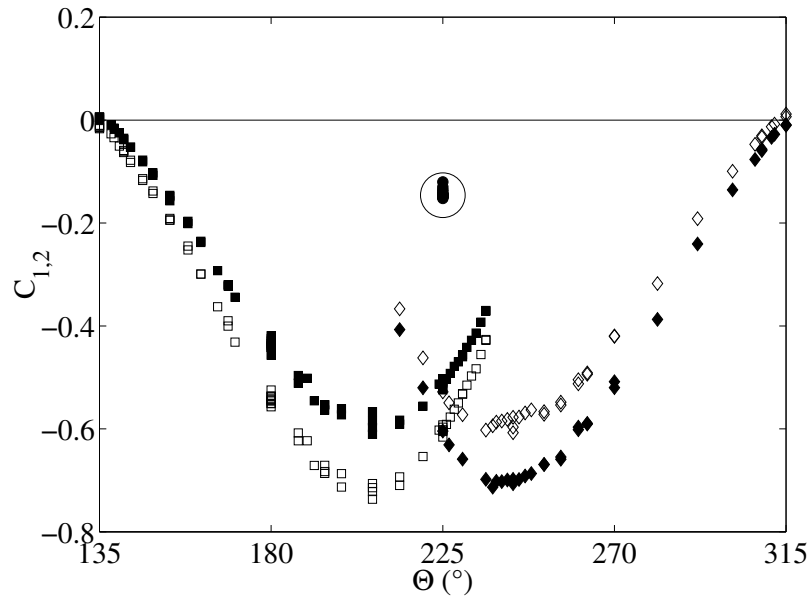


FIG. 5.8 – Couples adimensionnels mesurés pour les turbines “TM60” munies de pales de 20 mm, au voisinage de la bifurcation globale. L’adimensionnalisation des couples et l’angle  $\Theta$  ont été définis au chapitre 3. Les symboles ouverts (resp. fermés) correspondent au couple du moteur 1, qui est situé en haut du montage (resp. 2, en bas). Les cercles correspondent à l’état de l’écoulement qui a deux cellules. Les carrés (resp. losanges) correspondent à l’état à une cellule où le disque du haut (resp. du bas) expulse le fluide. Le cercle noir entoure les points qui correspondent à l’état à deux cellules de recirculation.

Sur ce graphe, un certain nombre de points sont apparents :

- Tout d’abord, nous constatons que les couples des deux moteurs sont toujours assez nettement différents, dès que l’écoulement n’est pas dans l’état à deux cellules. De plus, nous vérifions que les couples des moteurs dans l’état à deux cellules sont plus faibles d’un facteur 3 environ que dans les états à une cellule.
- Ensuite, nous pouvons voir que l’état à deux cellule est isolé des autres courbes, et qu’il n’existe que dans une plage d’angles  $\Theta$  très petite. En effet, aucune des mesures prises pour  $\Theta \neq 225^\circ$  n’est dans cet état.
- Nous remarquons incidemment qu’il n’y a pas d’autre état possible que les trois états déjà décrits, et que les deux états à une cellule se raccordent en fait continûment aux états obtenus pour  $\Theta \neq 225^\circ$ .
- Enfin, nous pouvons suivre les couples le long du cycle d’hystérésis que nous avons déjà décrit. Si nous commençons l’expérience en co-rotation pour  $\Theta = 135^\circ$ , et si nous augmentons  $\Theta$ , les

couples des moteurs vont suivre les courbes de gauche de la figure. Ils vont être tous les deux négatifs, le couple du moteur 1 restant plus grand en valeur absolue que celui du moteur 2. Ils auront tous deux leur valeur la plus négative aux environs de  $\Theta = 200^\circ$ , puis diminueront en valeur absolue. En  $\Theta = 225^\circ$ , les moteurs seront en contra-rotation exacte. L'écoulement sera alors dans l'état à une cellule où le disque 1 (celui du haut) expulse le fluide. Si nous continuons à augmenter  $\Theta$ , il viendra un moment, vers  $\Theta = 236^\circ$ , où cet état ne sera plus accessible à l'écoulement. Celui-ci se “renversera” alors pour passer dans l'autre état à une cellule, celui dans lequel le disque 2, situé en bas du montage, expulse le fluide. En continuant à augmenter  $\Theta$ , nous pouvons amener l'écoulement dans cet état jusqu'en  $\Theta = 315^\circ$ , qui est l'autre situation de co-rotation, en suivant les courbes de droite de la figure. En diminuant  $\Theta$  à partir de là, nous suivrons le chemin symétrique de celui de l'aller, en restant dans l'état où le disque 2 expulse le fluide jusqu'en  $\Theta = 214^\circ$ , où l'écoulement changera à nouveau de configuration. A aucun moment nous ne passerons par l'état où l'écoulement a 2 cellules.

La figure 5.9 ci-dessous représente la différence des couples adimensionnels des moteurs en fonction de l'angle  $\Theta$ . Cette représentation fait ressortir plus clairement le trajet de l'écoulement le long de la boucle d'hystérésis. Nous avons schématisé sur cette figure les évolutions qui sont

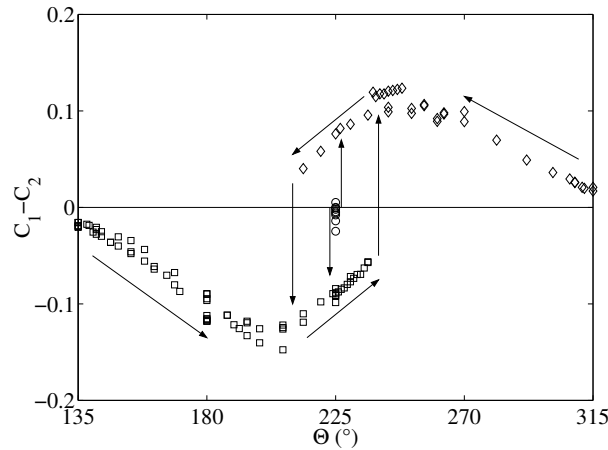


FIG. 5.9 – Différence des couples adimensionnels mesurée pour les turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , au voisinage de la bifurcation globale. Les cercles correspondent à l'état de l'écoulement qui a deux cellules. Les carrés (resp. losanges) correspondent à l'état à une cellule où le disque du haut (resp. du bas) expulse le fluide. Les flèches représentent les trajets possibles le long du cycle d'hystérésis.

possibles, la sortie irréversible de l'état à deux cellules, et le parcours de la boucle d'hystérésis.

#### 5.1.4 Mesures de fluctuations de pression.

Pour tenter de caractériser l'influence de la bifurcation globale de l'écoulement sur les fluctuations turbulentes, nous avons procédé à des mesures des fluctuations de pression dans l'écoulement. Les mesures ont été effectuées comme indiqué au chapitre 4. Les séries de mesures les plus complètes ont été effectuées avec les turbines “TM60” munies de pales de 20 mm de haut. Nous avons étudié les fluctuations de pression aux deux mêmes points qu'au chapitre 4, en  $z' = 0$  et en  $z' = -0.4$ .

### Séries temporelles des fluctuations de pression

Nous avons réalisé les mesures de fluctuations de pression de la manière présentée au chapitre 4. Nous avons complété nos mesures par les arguments de symétrie présentés au chapitre 3, pour connaître les caractéristiques des fluctuations de pression dans le bas et le haut de l'écoulement. Lorsque cette opération était effectuée à l'aide de données obtenues dans l'un des états à une seule cellule, nous avons bien sûr tenu compte du sens dans lequel l'écoulement avait choisi de briser la symétrie par retournement.

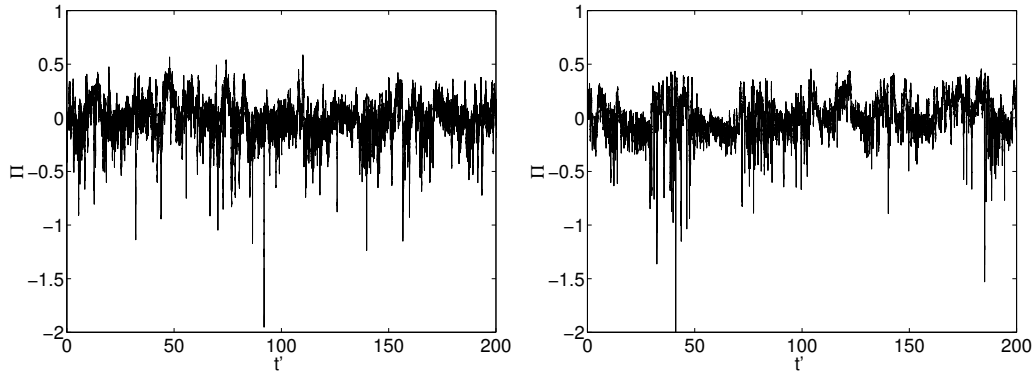


FIG. 5.10 – *Séries temporelles des fluctuations de pression pour l'écoulement à deux cellules ( $\Theta = 225^\circ$ ). Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. a) Sonde au milieu ( $z' = 0$ ). b) Sonde en bas ( $z' = -0.4$ ).*

La figure 5.10 représente des séries temporelles typiques de fluctuations de pression adimensionnelle, pour les deux positions du capteur, dans le cas où l'écoulement a deux cellules. Sur cette figure, nous pouvons voir que dans l'état à deux cellules, les fluctuations de pression sont très intenses, et ce aux deux points où nous les avons mesurées. Comme dans le cas de la contra-rotation à fréquence positive (cf. chapitre 4), nous pouvons voir sur le signal de nombreuses excursions vers les basses pressions. Nous pouvons cependant constater que, là où les filaments de vorticité qui sont à l'origine de ces excursions semblaient dans le cas de la contra-rotation à fréquence positive confinés dans le plan équatorial de l'écoulement, ils sont présents jusqu'à en  $z' = -0.4$  lorsque  $\Theta = 225^\circ$ . Ce fait montre une fois de plus la grande sensibilité de la structure de la couche de cisaillement à la forme du montage expérimental. Il n'est visiblement pas équivalent pour cette couche de cisaillement que les pales des turbines présentent au fluide leur face concave ou leur face convexe lors de leur avanc e.

La figure 5.11 présente des séries temporelles typiques de fluctuations de pression en fonction du temps dans le cas à l'écoulement n'a plus qu'une cellule de recirculation méridienne, dans la configuration à c'est la turbine situ e en haut du montage qui expulse le fluide. Nous pouvons voir que les fluctuations de pression semblent partout moins intenses que dans le cas de l'écoulement de contra-rotation à deux cellules, et qu'elles ont un aspect visuel nettement diff rent, selon qu'elles sont mesur es en haut ou en bas de l'écoulement. Dans le bas de l'écoulement, c'est-à-dire près de la turbine qui reçoit le fluide, elles sont comparativement peu intenses. Leur intensité augmente légèrement lorsque le point de mesure est situé dans le plan équatorial de l'écoulement. Enfin, elles atteignent leur intensité maximale au voisinage de la turbine du haut, qui est la turbine qui expulse le fluide. En ces trois points, il est possible de distinguer une composante périodique dans le signal de pression, à laquelle se superposent des fluctuations turbulentes sans structure particulière. Quelques événements de basse pression sont visibles au

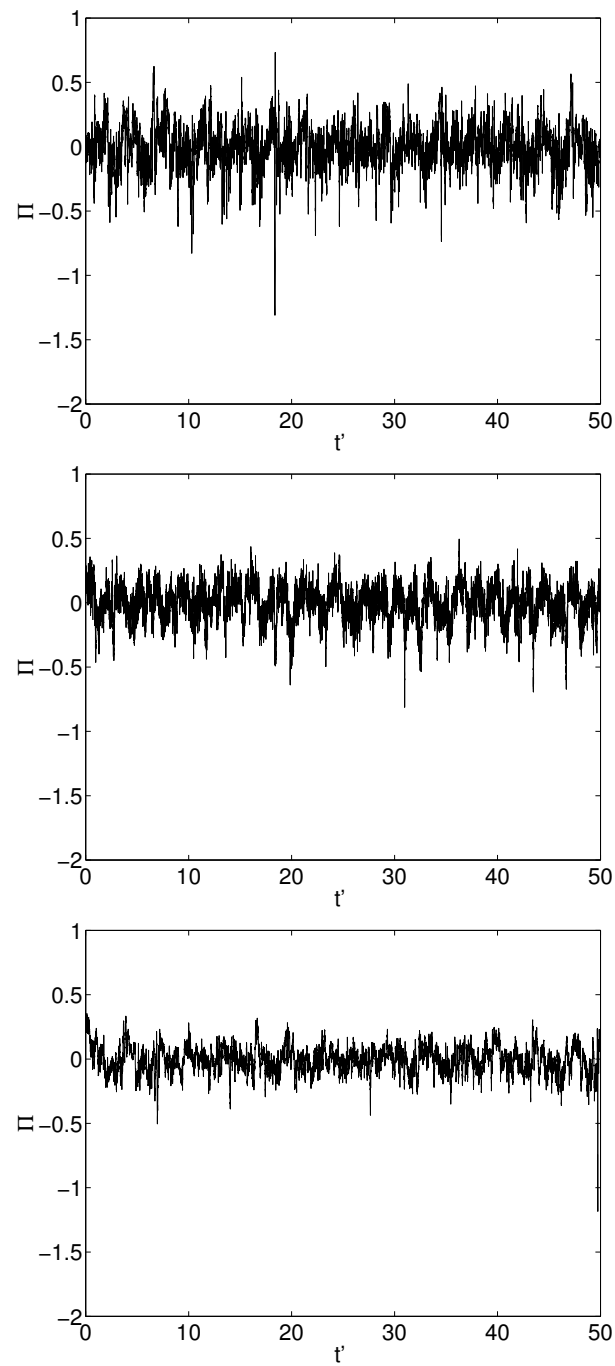


FIG. 5.11 – Séries temporelles des fluctuations de pression pour l’écoulement à une cellule dans lequel le disque du haut expulse le fluide ( $\Theta = 225^\circ$ ). Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. a) Sonde en “haut” de l’écoulement, obtenue par symétrie (cf. chapitre 3). b) Sonde au milieu de l’écoulement. c) Sonde en bas de l’écoulement.

voisinage du disque qui expulse le fluide.

### Distributions de probabilité des fluctuations de pression

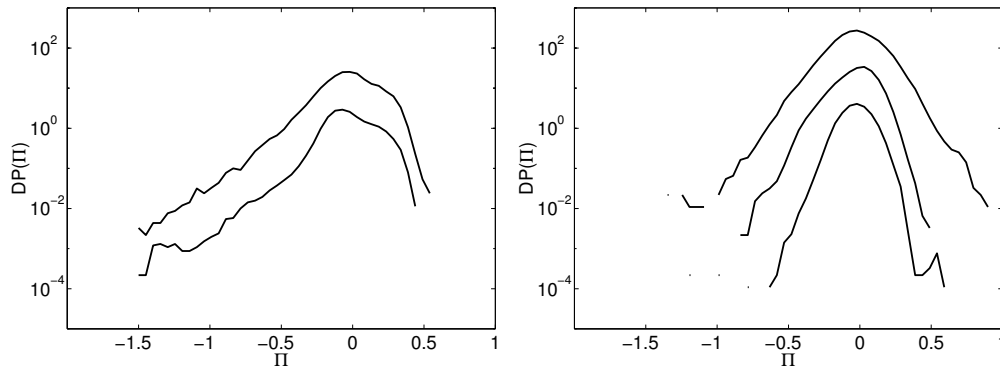


FIG. 5.12 – Distributions de probabilité des fluctuations de pression pour les deux types d’écoulement possibles en  $\Theta = 225^\circ$ . Sur les graphes, les courbes ont été décalées artificiellement de plus ou moins une décade en fonction de la position du point de mesure. Les courbes du haut (resp. milieu, bas) correspondent aux mesures faites en haut (milieu, bas) de l’écoulement. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. a) Écoulement à deux cellules de recirculation, distributions des fluctuations de pression dans le plan équatorial et en bas de l’écoulement. b) Écoulement à une cellule de recirculation, dans le cas où la turbine du haut expulse le fluide. Distributions des fluctuations de pression en haut, dans le plan équatorial et en bas de l’écoulement.

Tous ces points sont clairement visibles sur la figure 5.12, qui représente les densités de probabilité de la pression dans les différentes situations. Les distributions de la pression adimensionnelle  $\pi$  dans le plan équatorial et en bas de l’écoulement à deux cellules, qui sont représentées en figure 5.12a présentent toutes deux des ailes exponentielles marquées dans la direction des basses pressions. Les échelles de fluctuations de pression aux deux emplacements semblent très proches, mais la proportion des échantillons qui est rassemblée dans l’aile exponentielle semble plus faible dans le cas des mesures faites dans le bas de l’écoulement. La figure 5.12b regroupe, elle, les densités de probabilité mesurées lorsque l’écoulement est dans la configuration à une seule cellule où la turbine du haut expulse le fluide. Dans ce cas, nous voyons que les densités de probabilités aux trois points de mesure ont des ailes exponentielles à basse pression. Comme nous l’avons dit, c’est la distribution de probabilité en haut de l’écoulement qui est la plus large, suivie des distributions au milieu et en bas. La densité de probabilité en haut de l’écoulement, c’est-à-dire au voisinage de la turbine qui expulse le fluide, possède de plus une aile exponentielle vers les hautes pressions qui est presque aussi développée que l’aile à basse pression.

### Densités spectrales de puissance des fluctuations de pression.

La figure 5.13 rassemble les densités spectrales de puissance des fluctuations de pression dans les différentes situations. Les formes des spectres obtenus dans les configurations à deux et une cellule sont visiblement très différentes. Sur la figure 5.13a, nous voyons que les spectres obtenus dans l’écoulement à deux cellules sont des spectres continus. Lorsque nous allons vers les basses fréquences, leurs densités spectrales de puissance croissent de façon monotone sur toute la gamme que nous avons étudiée. Les spectres obtenus dans l’écoulement à une cellule, qui sont représentés

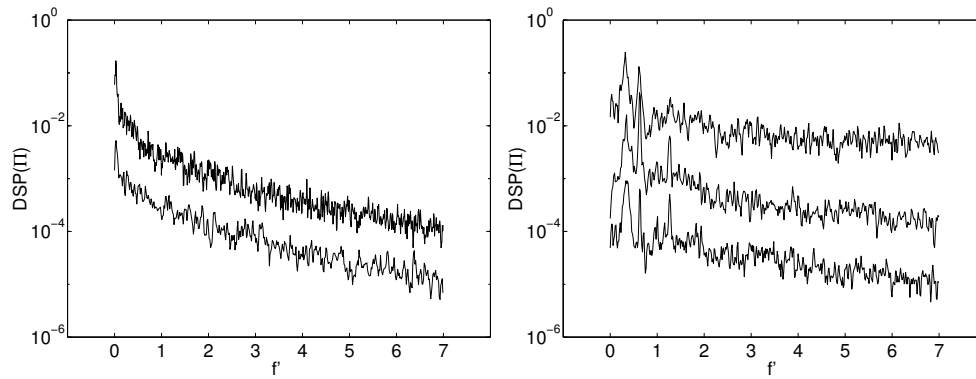


FIG. 5.13 – Densités spectrales de puissance des fluctuations de pression pour les deux types d’écoulement possibles en  $\Theta = 225^\circ$ . Sur les graphes, les courbes ont été décalées artificiellement de plus ou moins une décade en fonction de la position du point de mesure. Les courbes du haut correspondent aux mesures faites en haut de l’écoulement, etc. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles. a) Ecoulement à deux cellules de recirculation, spectres de puissance des fluctuations de pression dans le plan équatorial et en bas de l’écoulement. b) Ecoulement à une cellule de recirculation, dans le cas où la turbine du haut expulse le fluide. Spectres de puissance des fluctuations de pression en haut, dans le plan équatorial et en bas de l’écoulement.

en figure 5.13b, présentent eux des pics bien marqués. Ces pics sont situés en  $f' \simeq 0.3, 0.6$  et  $1.3$ , et apparaissent sur un fond de fluctuations continu. Le fond continu est “blanc” en haut de l’écoulement dans cette gamme de fréquence, et décroît légèrement vers les hautes fréquences dans le bas et au milieu.

### Amplitude *rms* des fluctuations de pression

La figure 5.14 représente la valeur *rms* adimensionnelle des fluctuations de pression en fonction de l’angle  $\Theta$  dans les différentes configurations de l’écoulement, lorsque le capteur est placé dans le plan équatorial. Nous avons malheureusement dû retirer un grand nombre des points de cette courbe, qui étaient affectés par des problèmes de bulles. Afin de lui rendre sa lisibilité, nous avons tracé en trait fin la dépendance qui nous paraissait “vraisemblable”, et nous l’avons complétée par symétrie sur sa partie de droite. Nous pouvons voir sur les points restants que les fluctuations de pression dans le plan équatorial varient beaucoup en intensité en fonction de l’angle  $\Theta$ . En co-rotation, en  $\Theta = 135^\circ$ , elles sont très faibles, car le fluide est presque en rotation solide. Lorsque  $\Theta$  augmente, l’écoulement est dans l’état à une cellule où le disque du haut expulse le fluide. Les fluctuations augmentent progressivement jusqu’en  $\Theta \simeq 200^\circ$ , avant de décroître. Lorsque nous dépassons l’angle  $\Theta = 225^\circ$ , les fluctuations continuent à diminuer jusqu’au moment où l’écoulement passe dans la configuration où la turbine du bas expulse le fluide. En  $\Theta = 225^\circ$ , nous pouvons voir que les fluctuations de pression dans le plan équatorial sont environ une fois et demi plus fortes si l’écoulement est dans l’état à deux cellules que s’il est dans l’une des configurations à cellule.

La figure 5.15 représente l’amplitude *rms* des fluctuations de pression, mesurées en bas du montage, lorsque l’angle  $\Theta$  varie de  $135^\circ$  à  $315^\circ$  et retour. Nous pouvons suivre une fois de plus l’écoulement quand il parcourt le cycle d’hystérésis. Au départ de  $\Theta = 135^\circ$ , le capteur est situé au voisinage de la turbine qui tourne à la fréquence la plus faible, celle qui reçoit le fluide. Lorsque  $\Theta$  augmente, l’amplitude des fluctuations augmente, et passe par un maximum pour une valeur

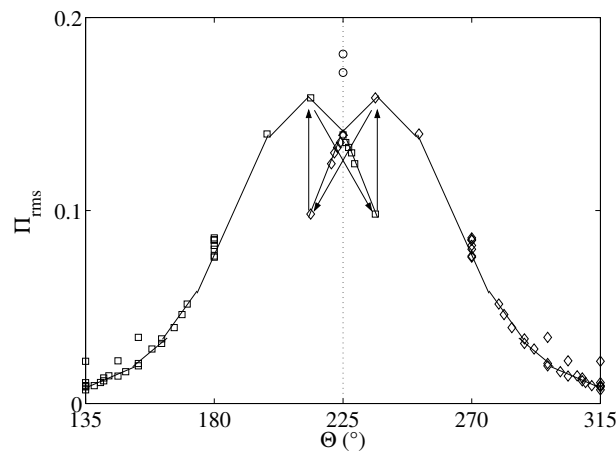


FIG. 5.14 – Valeur rms des fluctuations de pression mesurées dans le plan équatorial pour les turbines “TM60” munies de pales de  $0.2R_c$ , au voisinage de la bifurcation globale. Les cercles correspondent à l’état de l’écoulement qui a deux cellules. Les carrés représentent les états où le disque du haut expulse le fluide. Les losanges, que nous avons déduits par symétrie, représentent les états où le disque du bas expulse le fluide. La droite pointillée verticale marque l’angle  $\Theta = 225^\circ$ . Les flèches marquent le cycle d’hystérésis parcouru par l’écoulement. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles.

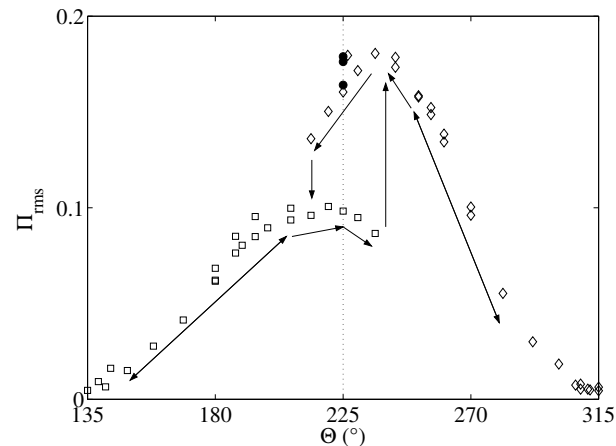


FIG. 5.15 – Valeur rms adimensionnelle des fluctuations de pression mesurées à mi-chemin entre le plan équatorial et le disque du bas pour les turbines “TM60” munies de pales de 20 mm, au voisinage de la bifurcation globale. Les carrés (resp. losanges) correspondent aux mesures effectuées dans l’état où le disque du haut (resp. bas) expulse le fluide. Les cercles pleins correspondent à l’état à deux cellules. Les flèches marquent le cycle d’hystérésis parcouru par l’écoulement. La droite pointillée marque l’angle  $\Theta = 225^\circ$ . Toutes les grandeurs sont adimensionnelles.

de  $\Theta$  proche de  $220^\circ$ . Aux environs de  $\Theta = 230^\circ$ , l’écoulement se “retourne”. A partir de ce moment, les rôles des turbines sont échangés : la turbine 2, à proximité de laquelle se trouve le capteur, expulse le fluide, et c’est la turbine 1 qui le reçoit. Nous voyons que l’amplitude rms des fluctuations turbulentes augmente très fortement au moment de cette transition. En continuant à augmenter la valeur de  $\Theta$ , nous pouvons rejoindre continûment le deuxième état de co-rotation

exacte possible, image du premier par  $\mathcal{R}_\pi$ . Si nous diminuons la valeur de  $\Theta$ , l’amplitude *rms* des fluctuations augmente jusqu’en  $\Theta \simeq 245^\circ$ , avant de décroître jusqu’aux alentours de  $\Theta = 215^\circ$ , où la transition d’un état à une cellule à l’autre se produit en sens inverse. En  $\Theta = 225^\circ$ , il semble que l’amplitude *rms* des fluctuations de pression dans le bas de l’écoulement à deux cellules soit très semblable à celle qui est mesurée près du disque qui expulse le fluide dans les écoulements à une cellule. Elle est par contre nettement supérieure à celle qui est observée au voisinage du disque qui reçoit le fluide.

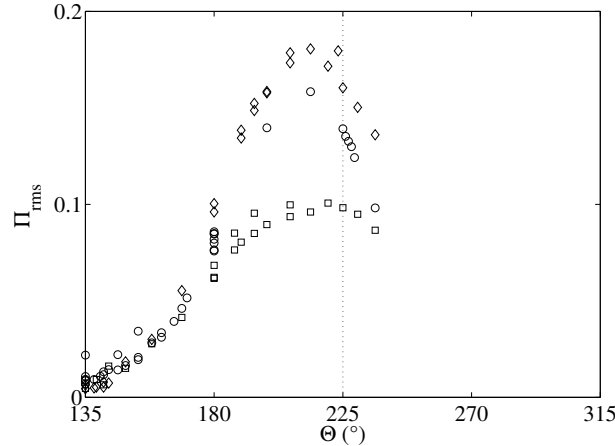


FIG. 5.16 – Evolution en fonction de l’angle  $\Theta$  de l’amplitude *rms* des fluctuations de pression aux différents points de l’écoulement à une cellule dans lequel la turbine du haut expulse le fluide. Les carrés (resp. cercles, losanges) correspondent aux mesures effectuées en bas (resp. milieu, haut). La droite pointillée marque l’angle  $\Theta = 225^\circ$ . Toutes les grandeurs sont adimensionnelles.

Nous avons enfin rassemblé les différents résultats dans la figure 5.16, qui montre l’évolution de l’amplitude *rms* des fluctuations de pression en fonction de l’angle  $\Theta$ , pour les différentes positions du capteur dans l’écoulement à une cellule dans lequel la turbine du haut expulse le fluide. Nous voyons que l’amplitude des fluctuations de pression est presque homogène dans l’écoulement sur la plage d’angle  $\Theta$  qui va de  $135^\circ$  à  $180^\circ$  environ. A partir de  $\Theta = 180^\circ$ , nous voyons que les fluctuations deviennent très nettement plus intenses près du disque qui expulse le fluide et dans le plan équatorial de l’écoulement qu’au voisinage du disque qui reçoit le fluide. En  $\Theta \simeq 215^\circ$ , nous avons ainsi des amplitudes *rms* de respectivement 0,18, 0,16 et 0,096 dans le haut, le milieu et le bas de l’écoulement. Au-delà de  $\Theta = 225^\circ$ , nous voyons que les fluctuations de pression au voisinage de la turbine du bas ne changent que peu, alors que les fluctuations au voisinage de la turbine du haut et dans le plan équatorial diminuent elles fortement. Le niveau des fluctuations dans le plan équatorial de l’écoulement rejoint ainsi presque celui des fluctuations dans le bas de l’écoulement, au voisinage de la transition.

### 5.1.5 Conclusion de l’étude de la “bifurcation globale”

En conclusion de cette section, nous rappellerons les points suivants :

- Nous avons pu observer une zone de l’espace des paramètres de notre montage dans laquelle l’écoulement, qui est pleinement turbulent, peut suivant la façon dont il a été préparé se trouver dans trois configurations, qui se distinguent l’une de l’autre par les valeurs de différentes grandeurs statistiques.
- Les grandeurs statistiques associées à l’une des configurations sont invariantes par le retour-



nement  $\mathcal{R}_\pi$ . Cette configuration n’a pu être observée que pour des fréquences de rotation des turbines exactement équilibrées. Même dans ces circonstances, elle est instable dans un sens qui reste à définir. Lors d’expériences menées à faible fréquence de rotation des turbines, donc en présence d’un bruit expérimental faible, il a été possible de la préserver pendant un temps proche d’une journée. Lors d’expériences à haute vitesse, au cours desquelles le bruit expérimental est plus fort, elle peut se déstabiliser en un temps plus court, de l’ordre de quelques dizaines de minutes.

– Dans le cas de la contra-rotation exacte, les deux autres configurations sont statistiquement images l’une de l’autre par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ . Ces deux configurations diffèrent de la première par la forme de l’écoulement moyen, par la répartition des fluctuations de vitesse et de pression, ainsi que par des valeurs moyennes des couples fournis par les moteurs plus élevées d’un facteur 3.

– Lorsque l’angle  $\Theta$  qui fixe le déséquilibre des fréquences de rotation des moteurs est très différent de  $225^\circ$ , l’écoulement ne peut se trouver pour chacune des gammes  $\Theta < 225^\circ$  et  $\Theta > 225^\circ$  que dans un seul des états à une cellule, celui dans lequel la turbine qui tourne à la fréquence la plus élevée expulse le fluide.

– Pour des valeurs du déséquilibre plus modérées, il est possible de faire parcourir au système une large boucle d’hystérésis, au cours de laquelle il passe dans les deux états à une cellule, mais ne repasse jamais dans l’état à deux cellules.

## 5.2 Les états intermittents

### 5.2.1 Le contexte

Des réflexions inspirées par les arguments qui seront développés au chapitre 6 nous ont amenés à constater que la quantité totale de moment cinétique contenue dans le volume de l’écoulement est très différente, suivant que l’écoulement se trouve dans l’une ou l’autre des configurations présentées au paragraphe précédent. L’intégration numérique à partir des champs de vitesses que nous avons présentés en début de chapitre donne pour les deux configurations à une cellule un moment cinétique adimensionnel total  $\sigma^\pm = \pm 2.3$ , et pour la configuration à deux cellules  $\sigma^0 = 0.10$ . L’unité de moment cinétique, définie pour la circonstance comme  $\rho R_c^5 2\pi f$ , vaut  $0.30 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$  lorsque  $f = 5 \text{ Hz}$ . Nous voyons donc qu’au moment où l’écoulement réalise la transition irréversible de l’état à deux cellules, dont le moment cinétique total vaut presque 0 par symétrie, à l’un des deux états à une cellule, la quantité totale de moment cinétique qu’il contient fait un saut important. Nous verrons au chapitre 6 que le moment cinétique contenu dans le montage expérimental vérifie l’équation suivante :

$$\frac{d\sigma}{dt'} = C_2 - C_1 + C_p$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_p$  sont respectivement les couples adimensionnels exercés sur le fluide par le moteur 1, le moteur 2 et la paroi de la cuve du montage. Le couple fourni par la paroi étant un couple de frottement, nous pouvons considérer sans nous tromper beaucoup que son signe est généralement opposé à celui de  $\sigma$ . Il joue donc le rôle d’un “frein”, et tend à ramener en permanence  $\sigma$  vers 0. Si nous décidons de négliger pour l’instant ce terme, nous voyons que la différence des couples doit être assez grande pour que les 10 unités de temps que dure la transition suffisent aux moteurs pour injecter dans l’écoulement 2.3 unités de moment cinétique. La différence des couples doit donc être au moins égale en valeur absolue à  $2.3/10 \simeq 0.25$ . Comme la valeur moyenne des couples eux-mêmes dans l’état à deux cellules vaut approximativement 0.17, une valeur aussi élevée de

leur différence devrait être clairement visible. Nous voyons sur la figure 5.17, qui représente les

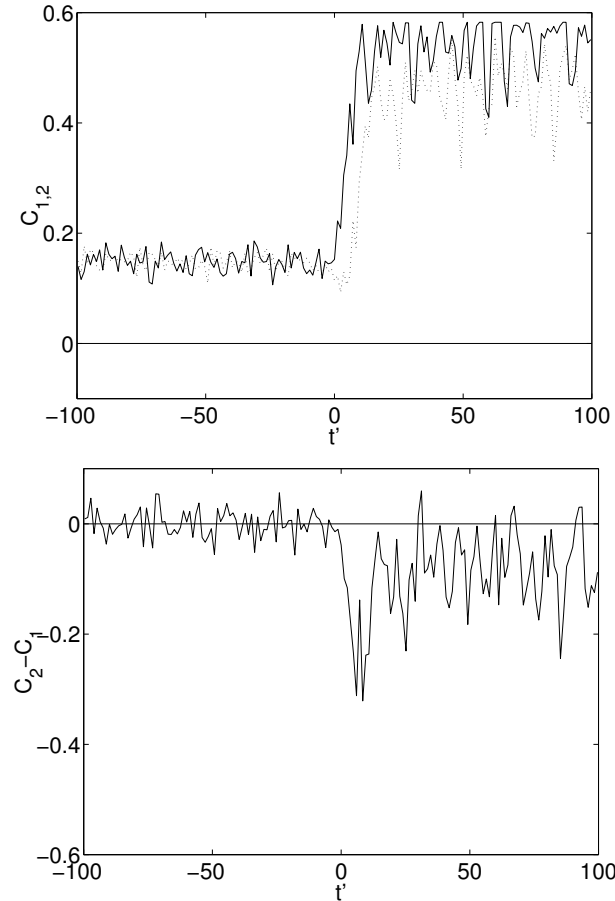


FIG. 5.17 – a) Séries temporelles des couples des moteurs au moment de la transition de l'état à deux cellules vers l'état à une cellule où la turbine 1 expulse le fluide ( $\sigma = -2.3$ ). Le trait plein (resp. pointillé) représente le couple fourni par le moteur 1 (resp. 2). La dispersion des valeurs des couples après la transition est due au fait que les moteurs sont alors en très forte surcharge. b) Séries temporelles de la différence des couples des moteurs au même moment. Toutes les grandeurs sont adimensionnelles.

valeurs des couples des moteurs au cours de la transition, que ces arguments sont qualitativement vérifiés. La différence des couples connaît bien un saut brusque au moment de la transition, et l'ordre de grandeur de sa valeur absolue est bien proche de 0.25. Nous avons alors décidé de réaliser une série de mesures en commandant les *couples* des deux moteurs de manière à faire tourner les turbines en contra-rotation exacte à fréquence négative. Comme, en procédant de cette manière, nous pouvons obliger les couples à être égaux à chaque instant, nous devons en principe être en mesure d'interdire la transition de l'état à deux cellules vers les états à une cellule.

Les résultats expérimentaux sont en accord avec notre intuition : lorsque nous forçons les couples fournis par les moteurs à avoir exactement la même valeur, l'état de l'écoulement qui a deux cellules est bien stable. Si nous déséquilibrons fortement les couples fournis par les deux moteurs, nous pouvons provoquer le passage dans l'une ou l'autre des configurations à une cellule, mais ce passage est désormais réversible : si nous passons dans un état à une cellule, et si nous

ramenons les deux consignes de couple à une même valeur, le couple de frottement visqueux sur la paroi joue son rôle de frein, et l'écoulement revient de lui-même dans l'état à deux cellules.

### 5.2.2 Présentation des états intermittents.

Nous avons alors réalisé des mesures en faisant varier les couples des moteurs,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , afin de compléter notre étude de la bifurcation globale. Le but était de mesurer les fréquences de rotation des turbines en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , de manière à rajouter dans nos différents graphes les états qu'il n'est possible d'atteindre qu'en fixant les couples des moteurs. Dans ces mesures, nous ne fixons plus la fréquence de rotation des turbines, mais les valeurs des couples qu'elles doivent fournir au fluide. Nous ne pouvons donc plus utiliser les mêmes grandeurs adimensionnelles que dans les mesures habituelles, puisque par exemple l'angle  $\Theta$  et la fréquence  $f$  ne peuvent plus être choisis, mais constituent de fait le résultat des mesures. Nous avons donc adimensionné les différentes grandeurs de la manière suivante : à partir des deux consignes de couple  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , nous avons commencé par définir l'échelle de couple  $\gamma$  et l'angle  $\Psi$  tels que

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma\sqrt{2}\cos(\Psi), \gamma\sqrt{2}\sin(\Psi)).$$

En utilisant  $\gamma$  comme échelle de couple, il est ensuite possible de construire une échelle des fréquences

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R_c^5}}.$$

Nous avons donc adimensionné les fréquences de rotation que nous avons obtenues au cours de cette série de mesures comme  $f'_1 = f_1/f$ ,  $f'_2 = f_2/f$ , et les dates des échantillons comme  $t' = ft$ . Il est difficile de trouver une interprétation intuitive de  $f$ . Pour les valeurs des couples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  que nous avons utilisées,  $f \simeq 2.7$  Hz.

Au cours de cette série de mesures à couples imposés, nous avons pu observer un nouveau comportement inattendu du montage : dans certaines plages du plan  $(\gamma_1, \gamma_2)$ , l'écoulement ne parvient pas à rester dans un état fixé, et fait des allers-retours continuels entre l'état à deux cellules et un état à une cellule. C'est ce comportement que nous avons qualifié d'“intermittence”.

La figure 5.18 représente des séries temporelles des fréquences de rotation des moteurs, pour différentes valeurs du déséquilibre des couples.

– Une première constatation qui s'impose est que les déséquilibres des couples que nous avons imposés sont toujours minuscules ! En effet, les couples fournis par les moteurs sont identiques lorsque  $\Psi = 225^\circ$ , et nous n'avons pas observé d'état intermittent pour des valeurs de  $\Psi$  supérieures à  $227,5^\circ$ . Par contre, nous voyons que dans cette plage les fréquences de rotation  $f'_1$  et  $f'_2$  balaient une gamme très large, allant de  $f'_1 = -1.63$ ,  $f'_2 = -1.24$  pour  $\Psi = 227,5^\circ$  (figure 5.18a) à  $f'_1 = -2.54$ ,  $f'_2 = -2.74$  pour  $\Psi = 225,7^\circ$  (figure 5.18e).

– Lorsque le déséquilibre est trop important ( $\Psi > 227,5^\circ$ ), l'écoulement reste en permanence dans l'état à une seule cellule qui lui est naturel (la turbine qui fournit le couple le plus important expulse le fluide). Lorsque l'écoulement est dans cette configuration, il n'est pas nécessaire que les turbines soient rapides pour qu'elles arrivent à transmettre au fluide le couple que leur appliquent les moteurs. Les fréquences de rotation observées sont assez faibles. ( $f'_1 = -1.63$  et  $f'_2 = -1.24$  pour  $\Psi = 227,5^\circ$ ). Notons au passage que la turbine 2, qui fournit au fluide le couple le plus important, et qui est celle qui expulse le fluide, est aussi celle qui tourne le moins vite.

– Lorsque le déséquilibre diminue, la différence des couples imposée n'est pas assez importante pour compenser l'effet du frottement visqueux sur la paroi. Le moment cinétique “fuit” peu à peu hors de l'écoulement, jusqu'au moment où celui-ci passe brutalement dans la configuration

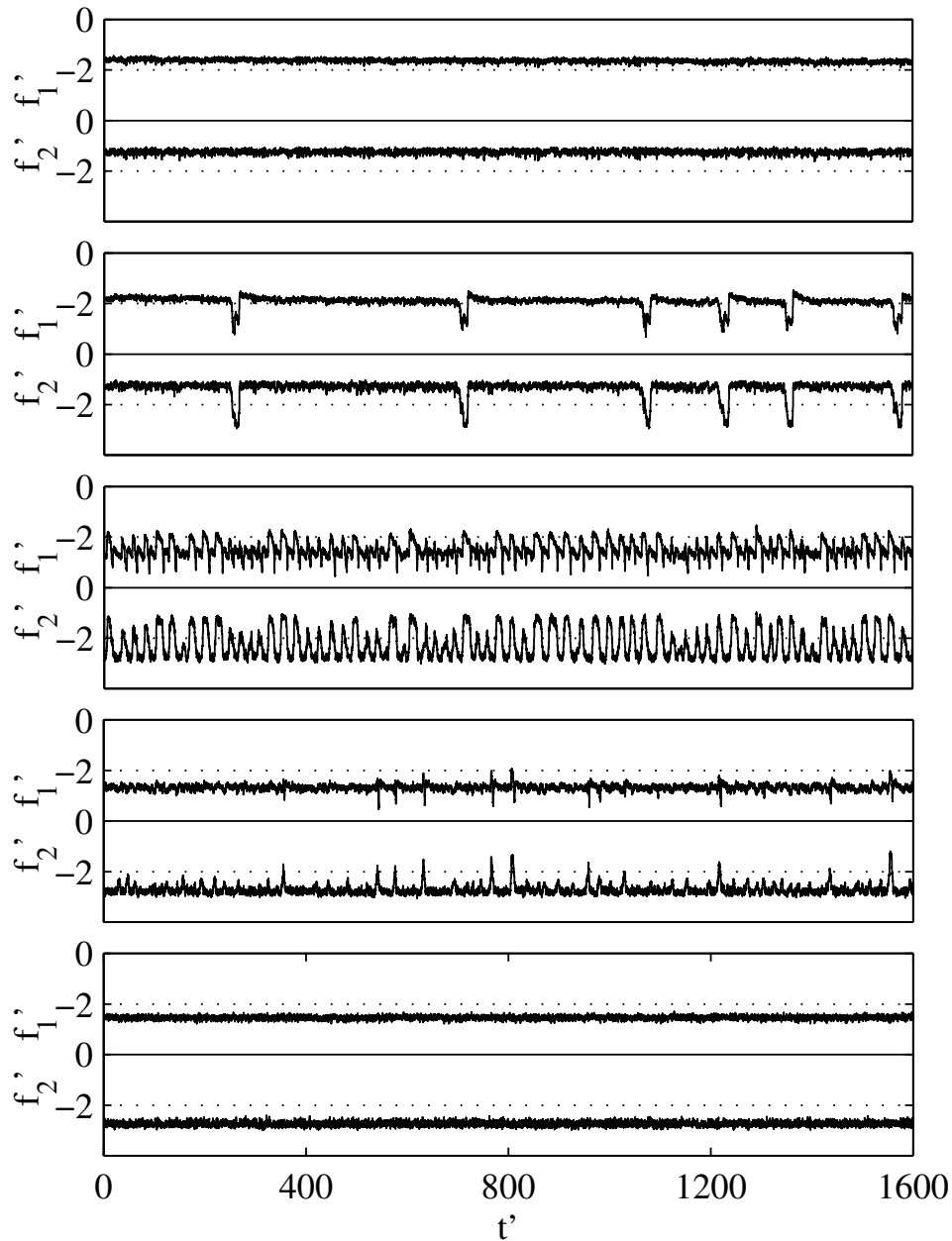


FIG. 5.18 – Séries temporelles des fréquences de rotation des turbines, pour des valeurs décroissantes du déséquilibre des couples. a)  $\Psi = 227.49^\circ$ . b)  $\Psi = 227.39^\circ$ . c)  $\Psi = 226.77^\circ$ . d)  $\Psi = 226.42^\circ$ . e)  $\Psi = 225.73^\circ$ . Les lignes pointillées marquent les lignes  $f'_{1,2} = -2$ . Voir le texte pour la définition des grandeurs adimensionnelles. La durée “dimensionnelle” de chaque mesure est de l’ordre de 10 minutes.

à deux cellules. Dans cette configuration, il faut que les turbines aillent beaucoup plus vite pour que l’écoulement oppose aux moteurs le même couple turbulent. Nous voyons donc sur le signal de la figure 5.18b des passages par un état “rapide”, dans lequel les fréquences de rotation des turbines sont environ une fois et demie plus négatives. Lors des passages par l’état “rapide”, la turbine 2, qui fournit le plus fort couple, va plus vite que la turbine 1.

- Il semble alors que le déséquilibre des couples, qui est insuffisant pour maintenir l’écoulement dans l’état à une cellule, soit tout de même trop fort pour qu’il reste longtemps dans l’état à deux cellules. Au bout d’un temps plus court, l’écoulement repasse donc dans l’état à une cellule, dans lequel les turbines tournent moins vite.
- Au fur et à mesure que le déséquilibre diminue, nous voyons que la longueur des “créneaux” qui sont visibles sur le signal varie peu, mais qu’ils se produisent par contre de plus en plus fréquemment.
- Pour les valeurs intermédiaires du déséquilibre, l’alternance entre l’état “rapide” et l’état “lent” devient presque périodique. Cette situation est représentée en figure 5.18c. Les passages dans l’état rapide durent toujours un temps comparable à la largeur des premiers créneaux aperçus dans le signal de la figure 5.18b, mais la durée des passages dans l’état lent a par contre énormément diminué.
- Lorsque le déséquilibre devient très faible, nous voyons en figure 5.18d que l’écoulement reste presque en permanence dans l’état à deux cellules, mais que des sautes brusques restent visibles, qui sont séparées d’intervalles dont la durée semble encore comparable à la largeur des premiers créneaux.
- Lorsque les deux consignes de couple sont presque identiques, l’écoulement reste en permanence dans l’état à deux cellules. La turbine 2, à qui nous imposons de fournir au fluide un couple très légèrement plus élevé, tourne un peu plus vite que la turbine 1. Cette situation correspond à la figure 5.18e.

### 5.2.3 Début de caractérisation des états intermittents.

Nous n’avons observé les états intermittents que dans le dernier mois qui a précédé le début de la rédaction de ce mémoire. Nous n’avons donc malheureusement pas eu le temps matériel d’en mener une étude soignée. Nous présenterons cependant dans ce paragraphe quelques résultats concernant les grandeurs “de première nécessité”, faute de mieux. Pour des raisons de disponibilité des différents montages, ces mesures ont été réalisées dans l’expérience “V.K.R.”, avec les turbines “TM60”, munies de pales hautes de  $0.2R_c$ .

#### Séries temporelles des transitions.

La figure 5.19 montre des agrandissements des séries temporelles de fréquences de rotation des turbines, pour des valeurs décroissantes du déséquilibre des couples des moteurs.

La figure 5.19a présente des données obtenues pour un fort déséquilibre. Nous pouvons voir que les transitions sont absentes, mais que les fréquences de rotation des turbines présentent des oscillations de faible amplitude.

Sur la figure 5.19b, nous voyons un agrandissement d’une transition, dans le cas d’un déséquilibre fort. Il s’agit de la quatrième des transitions visibles en figure 5.18b.

- Une première constatation qui s’impose est que les deux signaux sont très corrélés, et que leurs évolutions brusques ont lieu approximativement aux mêmes instants.
- Au début du tronçon de signal que nous avons représenté, l’écoulement est dans l’état lent, et nous avons pu voir en l’ensemencant de bulles qu’il n’a qu’une seule cellule de recirculation méridienne.
- Au début de la transition, une deuxième cellule de recirculation se forme, en partant de la turbine 1, qui a la fréquence de rotation la plus élevée et fournit le couple le plus faible. Nous pouvons voir sur le graphe représentant  $f'_1$  que la turbine 1 accélère alors assez brutalement (sa fréquence de rotation devenant ainsi plus négative), puis ralentit brusquement. Elle reprend

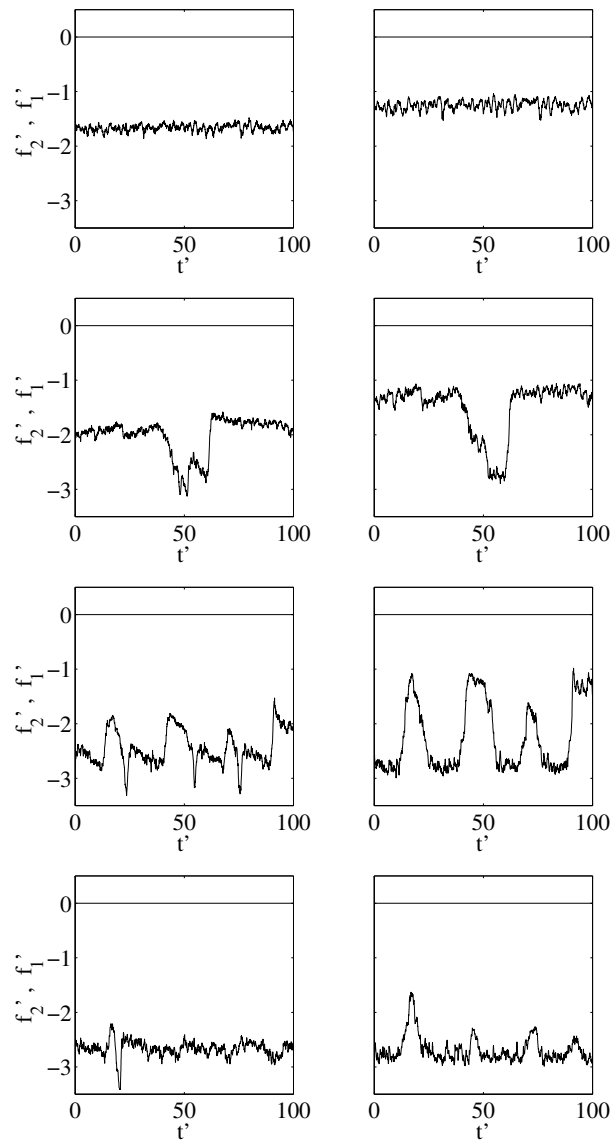


FIG. 5.19 – *Agrandissement des séries temporelles de fréquences de rotation présentant des transitions entre états, pour des déséquilibres décroissants des couples. La colonne de gauche (resp. droite) présente les fréquences de rotation mesurées pour la turbine 1 (resp. 2). Voir le texte pour la définition des grandeurs adimensionnelles. a)  $\Psi = 227.49^\circ$ . b)  $\Psi = 227.39^\circ$ . c)  $\Psi = 226.77^\circ$ . d)  $\Psi = 226.42^\circ$ .*

alors une accélération plus modérée. Pendant ce temps, la fréquence de rotation de la turbine 2 augmente elle aussi rapidement, puis stagne jusqu'au moment où la turbine 1 est freinée. Elle réaugmente alors rapidement jusqu'à atteindre un plateau. Le système est alors dans son état rapide. L'écoulement possède deux cellules de recirculation méridienne bien formées, et la couche de cisaillement turbulente est bien visible dans le plan équatorial de la cuve.

– Au bout de dix unités de temps environ, la couche de cisaillement est repoussée sur la turbine 1, et la cellule de recirculation qui se trouve au voisinage de cette turbine disparaît brutalement. Les deux turbines ralentissent alors brusquement.

– Lorsque les transitions ne sont pas encore trop fréquentes, il est possible d’observer une relaxation assez lente, pendant lequel la turbine 1 reprend progressivement sa vitesse de départ.

Les figures 5.19c et 5.19d montrent ensuite les transitions observées pour des valeurs plus faibles du déséquilibre des couples. Dans le premier cas, nous reconnaissons bien la séquence d’événements que nous avons déjà décrite. Nous pouvons voir sur le signal de  $f'_1$  des pics très marqués, qui se produisent à l’apparition de la deuxième cellule de recirculation. Le signal de  $f'_2$  semble comparativement moins heurté, mais a une allure en créneaux très nette. Sur la figure 5.19d, par contre, nous voyons que l’écoulement ne va plus que très rarement jusqu’à l’état lent. Il présente encore une succession d’événements de moindre intensité, qui sont séparés d’intervalles dont la longueur rappelle celle des plateaux observés sur les autres graphes. Le premier événement présent sur la figure, au cours duquel l’écoulement parvient peut-être à l’état lent, présente le pic de  $f'_1$  que nous avons décrit plus haut.

Le régime à faible déséquilibre, que nous n’avons pas montré en figure 5.19, présente des fluctuations de fréquence de rotation provoquées par la couche de cisaillement qui se trouve alors dans le plan équatorial (voir [142] pour une étude de ces fluctuations).

**Lieux des états accessibles au système dans le plan  $(f'_1, f'_2)$ .**

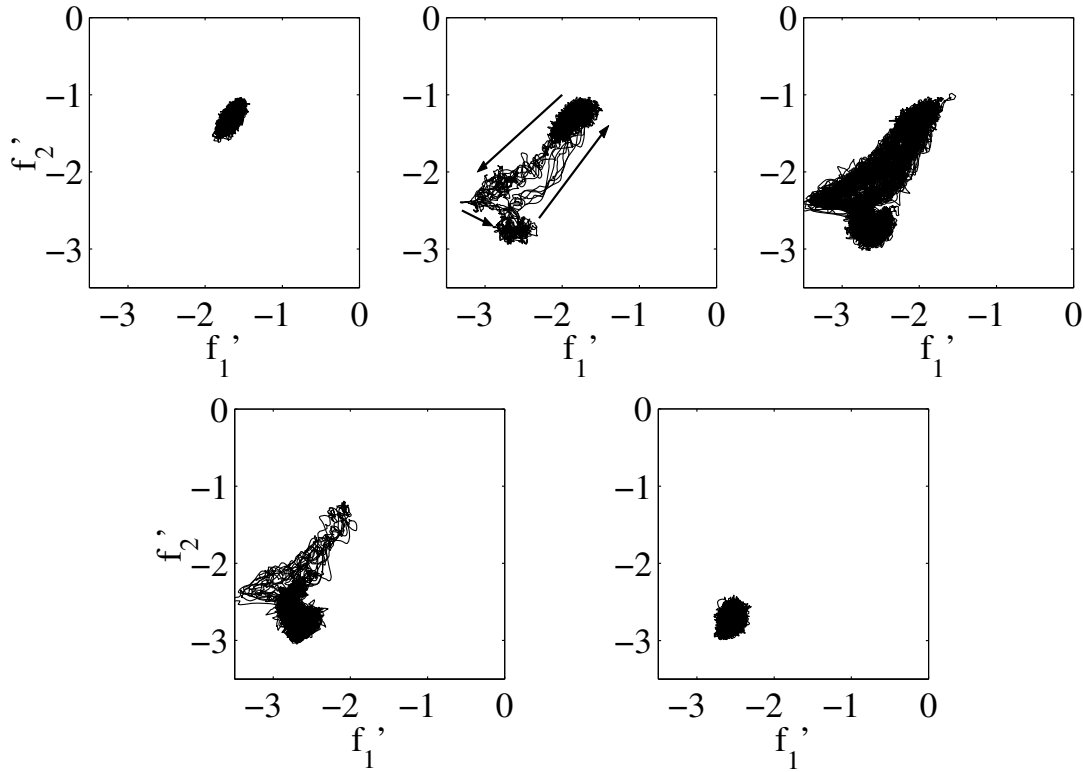


FIG. 5.20 – Lieux des états accessibles au système dans le plan  $(f'_1, f'_2)$ , pour des déséquilibres décroissants des couples. Les flèches marquent le trajet effectué par le point qui représente le système au cours des transitions. a)  $\Psi = 227.49^\circ$ . b)  $\Psi = 227.39^\circ$ . c)  $\Psi = 226.77^\circ$ . d)  $\Psi = 226.42^\circ$ . e)  $\Psi = 225.73^\circ$ .

La figure 5.20 représente les lieux des états accessibles au système pour différentes valeurs du déséquilibre imposé aux couples fournis par les moteurs.

- Lorsque le déséquilibre est fort (figure 5.20a), le point qui représente les fréquences de rotation des turbines reste dans une région assez petite du plan  $(f'_1, f'_2)$ , qu'il visite sous l'effet des fluctuations turbulentes. Cette zone correspond à l'état "lent" du système, nous voyons que  $f'_2$  y est plus petite en valeur absolue que  $f'_1$ .
- Dès que les premières transitions commencent à se produire (figure 5.20b), le point peut s'aventurer assez loin de la zone dans laquelle il restait confiné auparavant. Les fluctuations turbulentes font qu'il ne suit pas exactement le même chemin à chaque cycle, mais les différents trajets semblent s'accumuler dans une portion assez bien définie du plan.
- Le chemin parcouru lors des transitions est représenté en figure 5.20b. Au début, le système est dans l'état lent. Lorsqu'il quitte cet état,  $f'_1$  commence par devenir brusquement plus négative, puis rediminue en valeur absolue. L'évolution de  $f'_2$  pendant ce temps étant elle monotone, le point qui représente le système fait un virage brusque, qui est assez visible dans la partie de gauche du graphe. Ce virage correspond au pic observé sur les séries temporelles de  $f'_1$ . Le point qui représente le système passe alors par un étranglement, qui est un peu moins visible, et entre dans l'amas de points qui représente l'état rapide. Lorsque le système quitte cet état, il est obligé de repasser par l'étranglement, et revient alors assez directement à l'état lent. Ce trajet est parcouru dans son intégralité dès les premières transitions. Les "demi-transitions" au cours desquelles le système quitterait l'état lent et y reviendrait sans passer par l'état rapide sont interdites.
- Au fur et à mesure que l'amplitude du déséquilibre s'amenuise, le chemin parcouru par le système au cours des transitions est de plus en plus marqué. Les accumulations de points aux endroits des états lents et rapides restent cependant bien visibles (figure 5.20c et 5.20d).
- A la fin de la plage de déséquilibre où nous pouvons observer les états intermittents, nous voyons sur la figure 5.20d que la zone explorée par le point qui représente le système rapetisse progressivement. Nous rappelons que lors de l'apparition des états intermittents aux grands déséquilibres, le point a au contraire immédiatement accès à une zone très large, et passe dans l'état rapide à chaque transition.
- Enfin, lorsque le déséquilibre est trop faible, nous voyons sur la figure 5.20e que le système reste au voisinage de l'état rapide.

Un point marquant qui ressort de ces différentes observations est que l'apparition des passages par l'état rapide pour les grandes valeurs du déséquilibre ne se fait pas de la même manière que l'apparition des passages par l'état lent aux petites valeurs. Nous avons donc en réalité deux évolutions successives, qui devront être étudiées séparément.

### Statistiques des fréquences de rotation des turbines.

La figure 5.21a présente l'évolution des fréquences de rotation moyennes des turbines en fonction du déséquilibre  $\delta\Psi = \Psi - 225^\circ$ . En partant des grandes valeurs du déséquilibre, la fréquence de rotation de la turbine 1, qui fournit le couple le plus faible, devient de plus en plus négative lorsque le déséquilibre diminue, et ce de façon presque monotone. Un accident est visible dans la courbe à l'apparition des transitions, mais il peut être d'origine expérimentale. La fréquence de rotation de la turbine 2, qui fournit le couple le plus fort, est quant à elle tout d'abord assez fortement négative, puis diminue en valeur absolue. Pour  $\delta\Psi < 3^\circ$ , la turbine 2 tourne moins vite que la turbine 1. A l'apparition des états intermittents, vers  $\delta\Psi = 2.45^\circ$ , la courbe des valeurs moyennes de  $f'_2$  connaît une brusque rupture de pente.  $f'_2$  recommence alors à augmenter en valeur absolue de manière assez forte, jusqu'à la fin des états intermittents, en  $\delta\Psi = 1.42^\circ$ . Là, les deux courbes se stabilisent, la turbine 2 accélère moins vite, et la turbine 1 ralentit. Nous rappelons que leurs fréquences de rotation sont égales en  $\delta\Psi = 0^\circ$ , par symétrie.



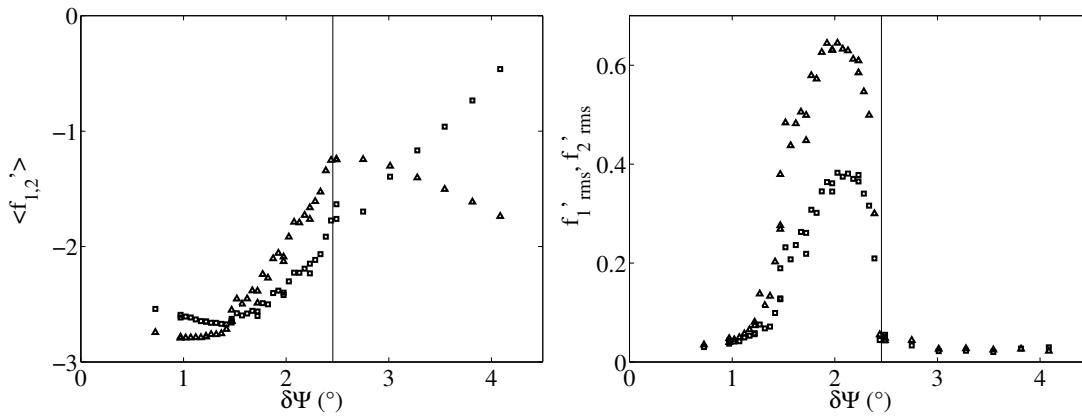


FIG. 5.21 – Statistiques des fréquences de rotation des turbines  $f'_1$  et  $f'_2$ , en fonction du déséquilibre  $\delta\Psi = \Psi - 225^\circ$ . Les carrés  $\square$  et les triangles  $\triangle$  représentent les grandeurs associées respectivement aux turbines 1 et 2. Les droites verticales marquent l'apparition des états intermittents à grand déséquilibre. a) Valeurs moyennes de  $f'_1, f'_2$ . b) amplitude rms des fluctuations de  $f'_1$  et  $f'_2$ .

La figure 5.21b présente elle l'évolution de l'amplitude *rms* des fluctuations des fréquences de rotation des turbines. Nous voyons sur cette courbe que l'apparition des transitions entre les deux états se marque du côté des grands déséquilibres par une augmentation spectaculaire de l'amplitude *rms* des fluctuations de fréquences de rotation. Du côté des petits déséquilibres, par contre, l'amplitude des fluctuations décroît continûment, et atteint une valeur plancher aux alentours de  $\delta\Psi = 1^\circ$ . Tout ceci est cohérent avec le fait que nous avons déjà constaté que le point qui représente le système dans le plan  $(f'_1, f'_2)$  peut visiter une grande zone de cet espace dès l'apparition des premières transitions aux grands déséquilibres, alors qu'aux petits déséquilibres il reste confiné dans une zone qui ne s'étend que graduellement.

La figure 5.22 présente enfin l'évolution des distributions de probabilité des fréquences de rotation des turbines en fonction du déséquilibre  $\delta\Psi$ . Nous pouvons une fois de plus suivre l'apparition, puis la disparition, des transitions entre états lorsque le déséquilibre diminue. Pour de fortes valeurs de  $\delta\Psi$ , nous voyons que les densités de probabilité des deux fréquences de rotation sont très piquées. Le système reste bloqué dans l'état lent, et les fréquences de rotation ne varient pas beaucoup. Lorsque les transitions commencent à se produire, nous voyons que les distributions s'élargissent très fortement. Les pics correspondant à l'état rapide gagnent alors progressivement de l'importance, les pics correspondant à l'état lent suivant le chemin inverse. Lorsque le déséquilibre devient faible, les densités de probabilité sont piquées autour de l'état rapide.

### Evolution des statistiques associées aux états du système.

#### – Critère de détection des états

Après avoir déterminé les lieux des points qui représentent le système dans le plan  $(f'_1, f'_2)$ , nous avons essayé de tirer de ces informations un critère permettant de distinguer sur le signal expérimental les plages passées dans chacun des états. Pour chaque mesure, nous avons tout d'abord filtré le signal passe-bas, avec une fréquence de coupure égale à  $0.2f$ . Ensuite, nous avons déterminé l'état dans lequel se trouvait le système lors de la mesure de chaque échantillon, en regardant la position du point représentant le système dans le plan  $(f'_1, f'_2)$  par rapport aux deux droites représentées en figure 5.23. Nous avons vérifié sur les différentes séries temporelles

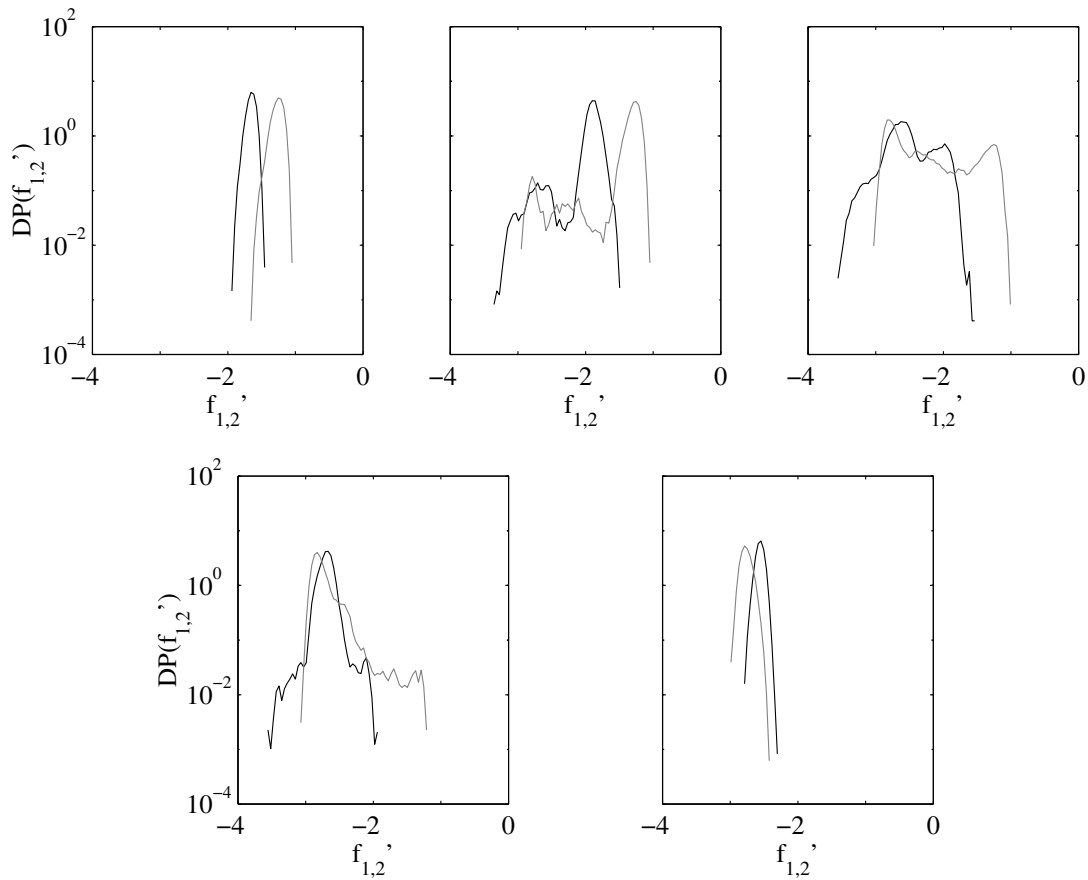


FIG. 5.22 – Distributions de probabilité des fréquences de rotation  $f_1'$  et  $f_2'$ , pour des déséquilibres décroissants des couples. Sur chaque graphe, la ligne en trait noir représente la distribution de  $f_1'$ , et la ligne en trait plus clair représente celle de  $f_2'$ . a)  $\delta\Psi = 2.49^\circ$ . b)  $\delta\Psi = 2.39^\circ$ . c)  $\delta\Psi = 1.77^\circ$ . d)  $\delta\Psi = 1.42^\circ$ . e)  $\delta\Psi = 0.73^\circ$ .

que ce critère donne des résultats acceptables sur toute la gamme de déséquilibres que nous avons explorée. Il nous a semblé plus facilement réalisable de scinder le critère en deux tests disjoints déterminant l'un la présence dans l'état rapide et l'autre la présence dans l'état lent que de déterminer un critère unique lent/rapide. Ce choix permet de traiter simplement le cas des transitions “ratées” qui se produisent aux faibles déséquilibres, au cours desquelles le système quitte l'état rapide sans arriver à l'état lent.

– *Fréquences des différentes transitions.*

Nous avons essayé d'apporter un début de caractérisation des fréquences des transitions. Cette section a été déplacée en annexe A, pour ne pas surcharger le texte.

– *Taux de présence dans les deux états.*

La figure 5.24 montre les taux de présence du système dans l'état rapide et l'état lent et la fraction du temps qu'il passe en transit entre ces deux états (état “intermédiaire”), en fonction de  $\delta\Psi$ . Nous voyons qu'au voisinage de l'apparition des transitions, vers les grands déséquilibres, la fraction du temps que le système passe dans l'état rapide est assez bien approchée par une droite. Le coefficient directeur de cette droite vaut  $-0.79$ , ce qui signifie que la fraction du temps que le

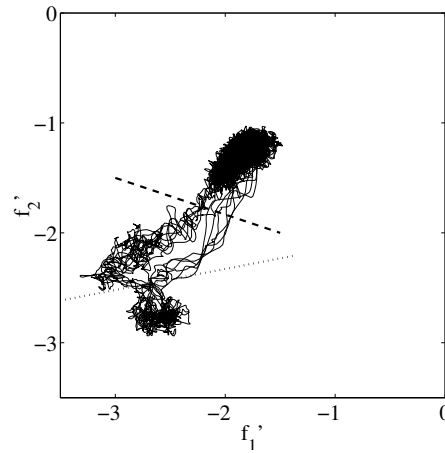


FIG. 5.23 – Schéma du critère utilisé pour la détection de l'état du système. Le système est dans l'état “lent” si le point qui le représente se situe au-dessus de la droite tiretée dans le plan  $(f'_1, f'_2)$ . Il est dans l'état “rapide” si le point qui le représente se situe sous la droite pointillée. Les données représentées sur le schéma correspondent à  $\Psi = 227.39^\circ$ .

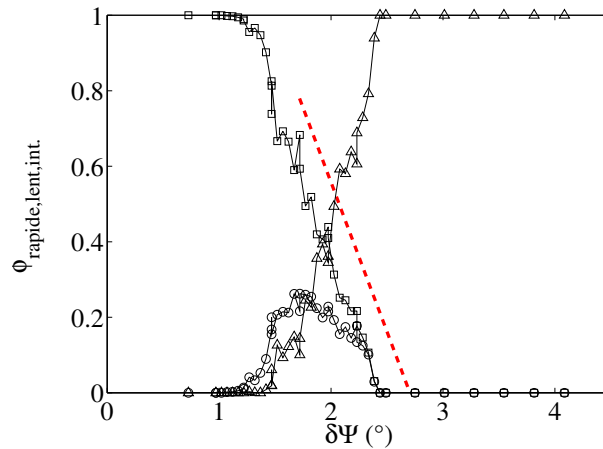


FIG. 5.24 – Taux de présence du système dans l'état rapide ( $\square$ ), dans l'état lent ( $\triangle$ ), et dans l'état intermédiaire ( $\circ$ ) en fonction du déséquilibre des couples  $\delta\Psi = \Psi - 225^\circ$ . La droite tiretée représente l'ajustement linéaire du taux de présence dans l'état rapide, lors de l'apparition des états intermittents aux fortes valeurs du déséquilibre. Le coefficient de régression vaut 0.987. La droite de régression coupe l'axe des abscisses en  $\delta\Psi = 2.454^\circ$ . Nous l'avons représentée décalée de  $0.25^\circ$  vers la droite pour améliorer la lisibilité du graphe.

système passe dans l'état rapide augmente de 0.79 lorsque le déséquilibre  $\delta\Psi$  diminue d'un degré. Nous constatons une fois de plus que la plage d'existence des états intermittents est vraiment très étroite. Nous pouvons ensuite déterminer à partir de cette droite une valeur du “seuil haut” en  $\delta\Psi$  de l'apparition des transitions, qui vaut  $\delta\Psi_h = 2.454^\circ$ . Cette valeur est compatible avec la valeur de  $\delta\Psi$  à partir de laquelle le système n'est plus en permanence dans l'état lent. C'est cette valeur du seuil qui a été représentée sur la figure 5.21. En regardant maintenant la courbe du taux de présence dans l'état lent, nous pouvons voir que celle-ci atteint la valeur 0 pour une valeur de  $\delta\Psi$  supérieure d'environ  $0.4^\circ$  à celle pour laquelle la courbe du taux de présence dans

l'état rapide atteint la valeur 1. Dans cette plage, le système est en fait soit dans l'état rapide, soit dans l'état intermédiaire, mais n'arrive plus à l'état lent.

– *Durée des passages par les différents états.*

La figure 5.25 présente enfin les valeurs moyennes et les écarts-types des durées des passages

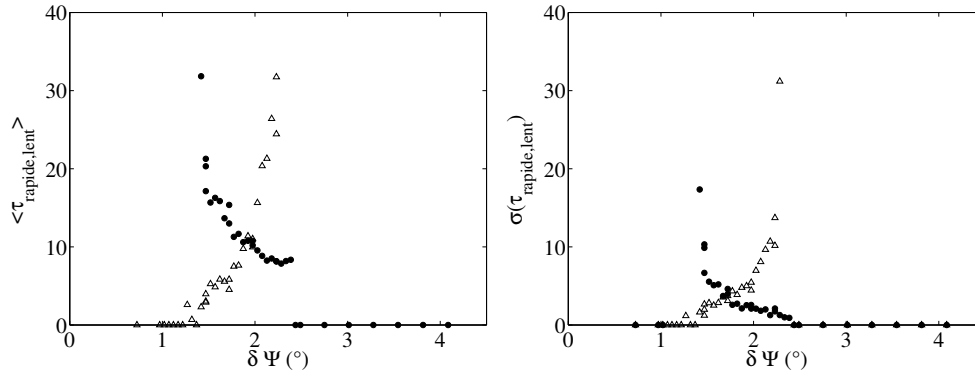


FIG. 5.25 – *Statistiques des durées des passages du système par l'état rapide (●) et par l'état lent (△), en fonction du déséquilibre des couples. a) Durée moyenne des passages par les différents états. b) Ecart-type des passages par les différents états.*

du système dans les deux états. Nous pouvons voir sur la figure 5.25a que les valeurs moyennes des temps de résidence évoluent de manière très différentes. En partant des forts déséquilibres, nous voyons que le temps pendant lequel le système réside dans l'état rapide a immédiatement une valeur finie, proche de 10 environ. Cette valeur reste dans un premier temps constante, de  $\delta\Psi = 2.45^\circ$  à  $\delta\Psi = 2^\circ$  environ. Elle augmente ensuite rapidement, et diverge lorsque  $\delta\Psi$  vaut légèrement moins que  $1.15^\circ$ . Pour les valeurs plus faibles de  $\delta\Psi$ , elle est égale à la durée de la mesure. La valeur moyenne de la durée des passages dans l'état lent, elle, évolue de manière très différente lorsque nous regardons l'évolution dans le sens des  $\delta\Psi$  croissants. Nous voyons en effet que cette durée moyenne est très proche de 0 tant que  $\delta\Psi < 1.15^\circ$ , et qu'elle augmente progressivement, sans saut brusque, avant de diverger elle aussi pour  $\delta\Psi = 2.45^\circ$ .

Lorsque nous regardons maintenant les écarts-types de ces durées, nous pouvons constater deux choses :

- Tout d'abord, les écarts-types sont dans les deux cas de l'ordre de grandeur de la moitié de la valeur moyenne. Ces valeurs sont donc très importantes.
- Ensuite, nous pouvons constater que les écarts-types suivent des évolutions assez semblables en fonction du déséquilibre. Là où l'écart-type de la durée des intervalles passés dans l'état lent part de 0 en  $\delta\Psi = 1.15^\circ$ , augmente assez rapidement puis s'annule en  $2.45^\circ$ , nous pouvons voir que l'écart-type de la durée des intervalles passés dans l'état rapide part de 0 en  $\delta\Psi = 2.45^\circ$ , augmente assez rapidement lorsque  $\delta\Psi$  diminue et s'annule lorsque  $\delta\Psi$  vaut  $1.15^\circ$ .

### Diagramme complet du déséquilibre des couples au voisinage de la bifurcation globale.

Nous pouvons pour finir utiliser le résultat de nos mesures des fréquences de rotation des turbines lorsqu'elles sont forcées à couple constant pour compléter le diagramme 5.9. Ce diagramme représentait le déséquilibre des couples mesurés, en fonction de l'angle  $\Theta$  qui paramètre la différence des fréquences de rotation des turbines. Rien ne nous interdit de rajouter sur ce diagramme les points qui représentent le déséquilibre de fréquence que le système adopte, lorsque

nous lui imposons de travailler avec un déséquilibre des couples *dimensionnels* fixé. Nous avons donc repris nos mesures pour toutes les valeurs des couples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , et nous avons déterminé les valeurs moyennes dimensionnelles des fréquences de rotation des turbines correspondant à l'état rapide et à l'état lent. A partir de ces valeurs, il est facile de déterminer les valeurs de  $\Theta$  et de  $C_1 - C_2$  correspondant aux deux états, et de rajouter ces points au graphe 5.9. Le graphe

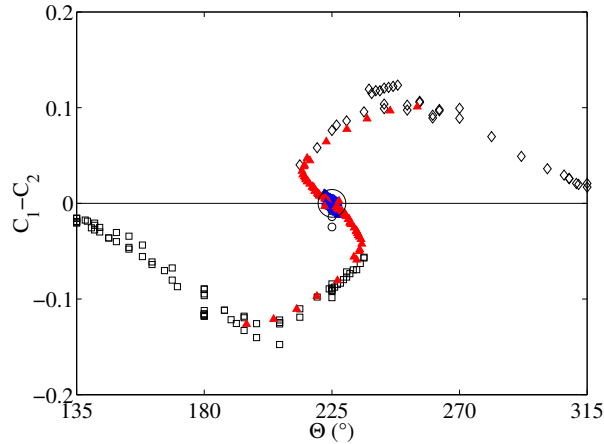


FIG. 5.26 – Graphe représentant l'ensemble des états accessibles à l'écoulement dans le plan  $(\Theta, C_1 - C_2)$ . Les symboles clairs représentent les résultats des mesures menées à fréquence de rotation des turbines imposées, et les symboles pleins représentent les résultats des mesures menées à déséquilibre des couples dimensionnels imposé. L'ensemble des points correspondant à l'état de deux cellules est contenu dans le cercle noir situé en  $\Theta = 22^\circ$ ,  $C_1 - C_2 = 0$ . Les symboles pleins situés dans la partie inférieure du graphe ne correspondent pas à des mesures réelles, mais ont été déduits de ceux de la partie supérieure par symétrie.

complet est représenté en figure 5.26. Sur ce graphe, nous avons dû multiplier les données obtenues à déséquilibre des couples fixé par un coefficient 1.2 pour qu'elles se raccordent bien aux mesures réalisées à fréquence fixée. Ce biais est probablement dû aux couples de friction, dont il est plus difficile de corriger l'effet dans cette configuration. Ceci étant dit, nous voyons que les dépendances de la différence de couples en fonction de l'angle  $\Theta$  sont très semblables dans la zone où les deux séries de mesures se recoupent, et connaissent toutes deux un changement de comportement en  $\Theta = 210^\circ$  environ. Ce changement de comportement est associé lors des mesures à vitesse constante à la disparition de l'état à une cellule dans lequel la différence des couples est positive, et à l'apparition des états intermittents lors des mesures à couples constants. Nous voyons immédiatement qu'une portion de courbe s'est rajoutée dans la gamme des déséquilibres de couples intermédiaires, c'est à dire petits sans pour autant être nuls. Cette portion de courbe, qui suit approximativement la deuxième diagonale du graphe, regroupe les points qui représentent le système lorsqu'il est dans les états lents. Lorsque le système est dans l'état rapide, la différence dimensionnelle des couples reste constante, alors que les fréquences de rotation des turbines augmentent fortement : la différence des couples adimensionnelle des couples est donc bien plus faible, et c'est pourquoi les points correspondants sont regroupés dans le centre du graphe.

### 5.2.4 Conclusion de l'étude des états intermittents.

Nous avons présenté au cours de ce chapitre les résultats expérimentaux obtenus en contraignant des turbines munies de pales courbes, tournant dans la direction dans laquelle leurs pales présentent leurs faces concaves au fluide, à fournir à l'écoulement des couples de valeurs fixées, très légèrement différentes. Nous avons pu observer dans ces circonstances un régime dans lequel l'écoulement fait des allers-retours répétés entre un état à deux cellules, dans lequel les fréquences de rotation des turbines sont élevées, et un état à une seule cellule, où elles sont faibles. Ce comportement inattendu nous a paru très intéressant, mais nous n'avons malheureusement pas eu le temps matériel de l'étudier de manière approfondie. Nous n'avons par conséquent pu obtenir que peu de données expérimentales, que nous n'avons par ailleurs certainement pas complètement exploitées. Comme nous avons toujours travaillé dans la même zone de l'espace des paramètres, nous n'avons en pratique fait varier que le déséquilibre des consignes de couple des moteurs. Dans le cadre d'une étude plus approfondie, il conviendrait de vérifier l'indépendance des comportements observés en fonction du nombre de Reynolds, ainsi que leur variation en fonction de l'inertie des turbines employées (cf. [142]). Nous n'avons pas non plus étudié l'influence de la courbure des pales des turbines. Nous n'avons à ce jour aucune raison d'exclure que ces comportements puissent se reproduire avec des turbines munies de pales droites. Sur la base des mesures que nous avons effectuées, nous pouvons toutefois affirmer les points suivants :

- Nous avons observé une dynamique non-triviale des grandes échelles de notre écoulement, lequel était nous le rappelons complètement turbulent. Cette dynamique prend nous la forme d'oscillations entre une configuration où l'écoulement a deux cellules, et une configuration où il n'en a qu'une.
- Dans une gamme intermédiaire de déséquilibre des couples, ces oscillations peuvent être presque exactement périodiques.
- Aux deux extrémités de cette gamme, l'écoulement reste préférentiellement dans l'un ou l'autre des états, et la forme des oscillations est assez affectée par les fluctuations turbulentes.
- Lorsque le déséquilibre est trop fort pour que les oscillations soient périodiques, nous pouvons voir que les départs de l'état à une cellule se font d'une manière "erratique", qui reste à caractériser, mais que le retour de l'état à deux cellules se fait lui au bout d'un temps fini, non nul, qui est assez précisément déterminé.
- Lorsque par contre le déséquilibre est trop faible, les départs de l'état à deux cellules se font de manière aléatoire, mais seule une partie des tentatives de transitions réussit. La proportion des essais qui donne lieu à une transition est nulle aux faibles déséquilibres, et tend vers 1 aux forts déséquilibres.

## 5.3 Conclusion de l'étude de la bifurcation globale.

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté quelques éléments de caractérisation des phénomènes "étranges" que nous avons pu observer lors des mesures hydrodynamiques menées dans le montage "VKE". Cette étude, bien que très partielle, nous a permis de constater que notre écoulement peut dans certaines conditions briser *même au sens statistique* certaines des symétries du montage expérimental, alors qu'il est extrêmement turbulent. Nous avons pu observer deux types de comportements, suivant que les moteurs entraînaient les turbines à fréquence de rotation fixée, ou qu'ils fournissaient à l'écoulement un couple fixé. Dans le cas du forçage à fréquence de rotation constante, nous avons pu observer les phénomènes suivants :

- Si les turbines sont munies de pales courbes, et si elles tournent en contra-rotation exacte en présentant la face concave de leurs pales au fluide, l'écoulement peut, suivant la manière dont il

a été préparé, se trouver dans trois états distincts. Les différences entre ces états apparaissent nettement sur les visualisations de l’écoulement, sur les valeurs moyennes temporelles des couples fournis par les moteurs, sur le champ de vitesse moyen de l’écoulement, ainsi que sur la répartition des fluctuations de pression.

– L’un des états possède deux cellules de recirculation poloïdales, et est statistiquement invariant par le retournement que nous avons noté  $\mathcal{R}_\pi$ . Il n’est stable que lorsque les turbines tournent en contra-rotation exacte. Il est facile de forcer l’écoulement à quitter cet état, en déséquilibrant légèrement les fréquences de rotation des moteurs. Il arrive alors dans l’un de deux états, qui n’ont chacun qu’une cellule de recirculation poloïdale, et qui sont images l’un de l’autre par le retournement. Chacun de ces deux états est stable sur une large plage de fréquences de rotation. Il est possible, en jouant sur les fréquences de rotation des turbines, de forcer l’écoulement à passer de l’un de ces états à l’autre. Ces transitions sont très fortement hystérétique, et ne se produisent pas de manière spontanée. Il est impossible de ramener l’écoulement à son état de départ.

Si par contre les moteurs d’entraînement sont réglés de telle sorte qu’ils fournissent à l’écoulement un *couple* constant, l’écoulement peut, dans une plage étroite de paramètres, briser l’invariance par translation dans le temps du montage, et alterner entre l’état qui possède deux cellules de recirculation et l’un des deux autres états. L’étude de ces transitions nous a permis de dégager les points suivants :

- Lorsque les couples fournis par les moteurs sont assez différents, l’écoulement reste en permanence dans l’état à une cellule de recirculation poloïdale dans lequel la turbine qui fournit le couple le plus fort expulse le fluide.
- Lorsque le déséquilibre des couples diminue, l’écoulement commence à effectuer des transitions vers l’état à deux cellules de recirculation. Ces transitions, qui sont à ce stade assez rares, amènent toujours l’écoulement dans l’état à deux cellules. Il y reste pendant une durée assez bien définie, qui varie assez peu sur la gamme où les transitions sont possibles. Lorsque l’écoulement est dans cet état, les turbines tournent à une fréquence nettement plus élevée.
- Lorsque le déséquilibre des couples diminue encore, l’écoulement passe une fraction de plus en plus grande de son temps dans l’état à deux cellules. Il arrive fréquemment qu’il sorte de cet état pour y rentrer aussitôt, sans passer par l’état à une seule cellule.
- Enfin, lorsque le déséquilibre entre les deux couples est très petit, l’écoulement reste en permanence dans l’état à deux cellules.

Nous allons maintenant préciser un certain nombre de voies possibles pour une étude plus fouillée de ces phénomènes, que nous n’avons malheureusement pu explorer faute de temps :

- Bon nombre des graphes que nous avons présentés au chapitre 4 portaient la marque de comportements étranges pour des valeurs de l’angle  $\Theta$  proches de  $225^\circ$ . Ceci semble indiquer que les phénomènes que nous avons présentés dans ce chapitre peuvent se produire dans d’autres circonstances que celles que nous avons étudiées.
- Nous ne nous sommes jusqu’à présent intéressés qu’au comportement à très grand nombre de Reynolds de notre système. Une étude de la “bifurcation globale” et des “états intermittents” dans un écoulement moins turbulent aiderait certainement à mettre à jour les mécanismes de ces phénomènes. Il est notamment tentant de définir la “bifurcation globale” comme une absence de “Symmetry-Increasing Bifurcation” [34]. Le lien avec ce concept pourrait bien entendu être plus facilement étudié dans un écoulement plus stable.
- Nous n’avons pu qu’ébaucher l’étude des “états intermittents”. Il semble cependant que l’alternance entre états rapides et état lents garde, en plus de ses aspects fluctuants d’origine turbulente, une part importante de déterminisme. La manière dont ce comportement déterministe parvient à survivre dans un écoulement aussi désordonné, ainsi que la manière dont il est affecté par la

présence des fluctuations turbulentes, nous semble mériter une étude approfondie. Une caractérisation du système par les méthodes habituellement appliquées aux systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté est actuellement en cours, en collaboration avec Paul Manneville.





## Chapitre 6

# Conservation du moment cinétique

L'étude de la bifurcation globale nous a amenés à faire une constatation simple : lorsque l'écoulement change de configuration, les couples exercés par les deux moteurs sur le fluide augmentent simultanément, et dans des proportions presque identiques. Ceci semble indiquer qu'un mécanisme de communication existe entre les deux moteurs, qui leur permet de s'accorder sur le couple qu'ils vont fournir au fluide. Nous avons alors développé des arguments, fondés sur le principe de conservation du moment cinétique, que nous présentons dans ce chapitre.

### 6.1 Etablissement de la relation de bilan.

Cherchons une équation d'évolution pour la composante sur  $z$  du moment cinétique en  $O$  de la matière contenue dans le volume de contrôle  $\mathbf{V}(Z)$  représenté en figure 6.1. Le volume est choisi de telle sorte que la surface  $\Sigma(Z)$  qui le ferme par le haut ne coupe pas les turbines.

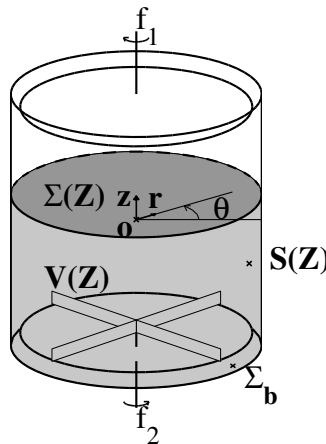


FIG. 6.1 – Schéma du volume de contrôle utilisé.  $\mathbf{V}(Z)$  est fermé en haut par  $\Sigma(Z)$ , en bas par  $\Sigma_b$ , et sur les cotés par  $\mathbf{S}(Z)$ .

Le mouvement de chaque particule de matière présente dans le volume de contrôle est décrit par le principe fondamental de la dynamique

$$D_t(\rho\vec{v}) = \vec{f}.$$

Ici  $D_t(\rho\vec{v})$  est la dérivée temporelle de la quantité de mouvement de la particule de matière de masse volumique  $\rho$  qui passe au point considéré à l'instant considéré, et  $\vec{f}$  est la résultante volumique des forces qui s'appliquent sur la matière en ce point et à cet instant. Considérons maintenant la composante sur  $z$  du produit vectoriel du vecteur position du point considéré  $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$  avec l'expression du principe fondamental de la dynamique ci-dessus :

$$r(D_t(\rho\vec{v}))_\theta = r f_\theta$$

En remplaçant  $(D_t(\rho\vec{v}))_\theta$  par son expression eulérienne classique, nous obtenons :

$$r [\partial_t(\rho\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \text{grad}(\rho\vec{v}))]_\theta = r f_\theta$$

Et donc :

$$r \left[ \partial_t(\rho v_\theta) + v_r \partial_r(\rho v_\theta) + \frac{v_\theta}{r} (\partial_\theta(\rho v_\theta) + \rho v_r) + v_z \partial_z(\rho v_\theta) \right] = r f_\theta$$

Cette relation se transforme aisément en :

$$\partial_t(\rho r v_\theta) + \text{div}(\rho r v_\theta \vec{v}) - \rho r v_\theta \text{div}(\vec{v}) = r f_\theta$$

Dans la suite, nous supposons que les mouvements au sein de  $\mathbf{V}(Z)$  sont tels que  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . Intégrons maintenant cette relation sur le volume de contrôle. En utilisant le théorème de Gauss, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\partial\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\mathbf{V}(Z)} r f_\theta d\tau.$$

Ici  $\partial\mathbf{V}(Z)$  est la surface du volume  $\mathbf{V}(Z)$ , et  $\vec{n}$  est la normale sortante à cette surface. Comme la cuve qui contient l'écoulement est imperméable, nous voyons que le seul endroit de  $\partial\mathbf{V}(Z)$  où  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  peut être différent de 0 est la surface  $\Sigma(Z)$ . Sur cette surface,  $\vec{n} = \vec{e}_z$ . Nous obtenons donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(Z)} \rho r v_\theta v_z dS = \int_{\mathbf{V}(Z)} r f_\theta d\tau. \quad (6.1)$$

Cette expression signifie que la variation de la composante sur  $z$  du moment cinétique en  $O$  présent dans  $\mathbf{V}(Z)$  peut avoir deux origines : soit le moment dynamique résultant des forces qui s'appliquent sur la matière présente dans  $\mathbf{V}(Z)$  est différent de 0, soit du moment cinétique est transporté au travers de la surface  $\Sigma(Z)$  par de la matière qui entre ou sort. Intéressons-nous maintenant au membre de droite de l'équation 6.1. La mécanique des milieux continus nous apprend que, sous des conditions très générales satisfaites dans notre montage expérimental (voir par exemple [126]), la distribution de forces  $\vec{f}$  peut s'écrire comme la somme d'une résultante des forces de volume exercées à distance par l'extérieur, et de la divergence d'un tenseur  $\bar{\sigma}$ , appelé "tenseur de Cauchy", qui représente l'effet des forces de contact que les particules du système s'exercent les unes sur les autres. Afin de simplifier les notations, nous "recyclerons" le symbole  $\vec{f}$ , qui désignera désormais la seule résultante des forces de volume exercées par l'extérieur. La relation 6.1 s'exprime alors, en explicitant les composantes du membre de droite :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(Z)} \rho r v_\theta v_z dS = \int_{\mathbf{V}(Z)} r f_\theta d\tau + \int_{\mathbf{V}(Z)} r \left[ \frac{1}{r} \partial_\theta(\sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r(r\sigma_{\theta r}) + \frac{\sigma_{\theta r}}{r} + \partial_z(\sigma_{\theta z}) \right] r dr d\theta dz$$

Nous pouvons alors séparer les différentes intégrations du membre de droite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(Z)} \rho r v_\theta v_z dS &= \int_{\mathbf{V}(Z)} r f_\theta d\tau + \\ \int_{\mathbf{V}(Z)} \partial_\theta(\sigma_{\theta\theta}) d\theta dz r dr + \int_{\mathbf{V}(Z)} \partial_r(r^2 \sigma_{\theta r}) dr d\theta dz &+ \int_{\mathbf{V}(Z)} \partial_z(\sigma_{\theta z}) dz d\theta r^2 dr \end{aligned}$$

Nous voyons alors que la deuxième intégrale du membre de droite s'annule, et que les deux suivantes s'expriment sous forme d'intégrales de surfaces sur des portions de  $\partial\mathbf{V}(Z)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(Z)} \rho r v_\theta v_z dS &= \int_{\mathbf{V}(Z)} r f_\theta d\tau + \\ \int_{\mathbf{S}(Z)} r \sigma_{\theta r} dS + \int_{\Sigma(Z)} r \sigma_{\theta z} dS - \int_{\Sigma_b} r \sigma_{\theta z} dS & \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'intégrale sur  $\Sigma_b$  est un peu particulière : en effet, la contrainte  $\sigma_{\theta z}$  peut avoir deux origines. Dans la partie de  $\Sigma_b$  qui est incluse dans l'arbre qui entraîne la turbine, la contrainte est une contrainte élastique. C'est cette contrainte qui transmet le mouvement de rotation de la partie de l'arbre qui est située hors de  $\mathbf{V}(Z)$  à la partie située dans  $\mathbf{V}(Z)$ . Celle-ci transmet ensuite le moment cinétique au fluide, *via* la turbine. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système constitué du rotor du moteur électrique, des poulies, de la courroie et de la partie de l'arbre située hors de  $\mathbf{V}(Z)$ , nous voyons aisément que le moment dynamique associé aux contraintes élastiques dans l'arbre est égal au couple fourni par le moteur, diminué des couples de friction divers provenant des joints et roulements. (Si la vitesse de rotation n'est pas constante, il faut soustraire une contribution provenant de l'inertie de ce système). Nous noterons ce couple  $\gamma$ . Sur le restant de  $\Sigma_b$ , sur  $\Sigma(Z)$  et sur  $\mathbf{S}(Z)$ , le tenseur des contraintes est donnée par son expression classique dans un fluide (newtonien dans notre expérience) :

$$\bar{\sigma} = \mu(\text{grad}(\vec{v}) + \text{grad}^T(\vec{v})) - p Id$$

Dans cette expression,  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide utilisé,  $p$  est la pression dynamique au point considéré, et  $Id$  est le tenseur identité. Nous obtenons pour  $\sigma_{\theta z}$  et  $\sigma_{\theta r}$  les expressions suivantes :

$$\sigma_{\theta z} = \mu \left[ \partial_r v_\theta + \frac{1}{r}(\partial_\theta v_r - v_\theta) \right], \quad \sigma_{\theta r} = \mu \left[ \frac{1}{r} \partial_\theta v_z + \partial_z v_\theta \right]$$

En reportant dans l'expression 6.2, nous obtenons (les intégrales de surfaces des dérivées en  $\theta$  s'annulent et  $v_\theta$  s'annule sur  $\mathbf{S}(Z)$ ). Nous n'appelons plus  $\Sigma_b$  que la partie de cette surface qui ne coupe pas l'arbre) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(Z)} \rho r v_\theta v_z dS &= \int_{\mathbf{V}(Z)} r f_\theta d\tau + \\ \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} r \partial_r v_\theta dS + \mu \int_{\Sigma(Z)} r \partial_z v_\theta dS - \mu \int_{\Sigma_b} r \partial_z v_\theta dS &+ \gamma \end{aligned}$$

Prenons maintenant la moyenne temporelle de cette expression, et effectuons la décomposition de Reynolds du champ de vitesse instantané  $\vec{v}(t)$  en sa partie moyenne temporelle,  $\vec{V} = \overline{\vec{v}(t)}$ , et sa partie fluctuante  $\tilde{v}(t)$ , telle que  $\overline{\tilde{v}(t)} = \vec{0}$ . La moyenne temporelle de la dérivée en temps s'annule, et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma(Z)} \rho r V_\theta V_z dS + \int_{\Sigma(Z)} \rho r \overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_z} dS = \int_{\mathbf{V}(Z)} r \overline{f_\theta} d\tau + \\
& \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} r \partial_r V_\theta dS + \mu \int_{\Sigma(Z)} r \partial_z V_\theta dS - \mu \int_{\Sigma_b} r \partial_z V_\theta dS + \overline{\gamma} \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Nous désignons désormais par  $\Gamma_v(Z)$  la somme des termes de frottement visqueux sur  $\Sigma_b$  et  $\mathbf{S}(Z)$ , par  $\Gamma_{ext}(Z)$  le moment dynamique que les forces extérieures exercent sur la matière de  $\mathbf{V}(Z)$ , et par  $\Gamma$  la moyenne temporelle de  $\gamma$ . L'expression 6.3 se résume alors à :

$$\begin{aligned}
\Gamma + \Gamma_{ext}(Z) = -\Gamma_v(Z) - \mu \int_{\Sigma(Z)} r \partial_z V_\theta dS & + \int_{\Sigma(Z)} \rho r V_\theta V_z dS \\
& + \int_{\Sigma(Z)} \rho r \overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_z} dS \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Le sens de cette expression est le suivant : en régime permanent, le moment cinétique fourni par le moteur,  $\Gamma$ , augmenté du moment dynamique des forces extérieures  $\Gamma_{ext}$ , est soit évacué par frottement visqueux vers la cuve (terme  $\Gamma_v$ ), soit transmis, au travers de  $\Sigma(Z)$ , à l'autre partie de l'écoulement. Ce transfert peut être assuré, soit par viscosité (deuxième terme du membre de droite), soit par transport par des particules fluides (termes inertiels du membre de droite). Le transport, lui, peut se produire de deux façons : soit les particules ont au point considéré un mouvement moyen tel que  $V_z$  et  $V_\theta$  sont différents de zéro (avant-dernier terme du membre de droite), soit le produit  $V_z V_\theta$  est égal à zéro, mais les fluctuations de vitesses sont telles que le signe de  $\tilde{v}_z$  est statistiquement corrélé à celui de  $\tilde{v}_\theta$  (dernier terme du membre de droite, appelé "tension de Reynolds"). Symétriquement, nous imaginons sans peine que le moment cinétique qui a été transmis à l'autre partie de l'écoulement va y être évacué, soit par frottement visqueux sur les parois, soit sous l'effet des forces extérieures, soit sous forme de contraintes élastiques dans l'arbre qui entraîne l'autre turbine. Si nous prenons maintenant comme échelle des longueurs de l'écoulement le rayon du cylindre  $R_c$ , et comme échelle des vitesses  $\mathcal{V} = 2\pi f R_c$ , où  $f$  est la fréquence de rotation des turbines, nous pouvons mettre cette équation sous la forme adimensionnelle suivante (nous avons marqué par des "primes" les différentes quantités adimensionnelles) :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} + \frac{\Gamma_{ext}(Z')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} = - \frac{\Gamma_v(Z')}{\rho(2\pi f)^2 R_c^5} - \frac{1}{Re} \int_{\Sigma(Z')} r' \partial'_z V'_\theta dS' \\
+ \int_{\Sigma(Z')} r' V'_\theta V'_z dS' + \int_{\Sigma(Z')} r' \overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} dS' \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Ici  $Re = (2\pi f R_c^2)/\nu$  est le nombre de Reynolds de l'écoulement, tel que nous l'avons défini au chapitre 3. Nous avons pu voir au cours de ce même chapitre que, en l'absence de force extérieure, et si la forme du montage expérimental est tenue fixée à une homothétie près, les champs de vitesses adimensionnels qui interviennent dans l'expression ci-dessus ne dépendent que très faiblement de  $Re$  dans notre gamme de mesure, tout au moins dans la masse du fluide (c'est-à-dire loin des parois). De ceci nous pouvons déduire que, aux grandes valeurs de  $Re$ , le deuxième terme du membre de droite de l'expression ci-dessus va avoir une influence très faible sur le flux de moment cinétique au travers de  $\Sigma(Z)$ . Il serait tentant d'appliquer le même

type d'argument au terme  $\Gamma_v(Z)$ , qui est lui aussi d'origine visqueuse. Malheureusement, les gradients de vitesse azimutale qui interviennent dans ce terme sont localisés près des parois, dans des couches limites dont la structure varie en fonction du nombre de Reynolds. Il n'est donc pas possible de se prononcer *a priori* sur l'ordre de grandeur de ce terme. La forme limite de l'équation de bilan adimensionnelle, valable lorsque le nombre de Reynolds est grand, et en l'absence de moment résultant des forces de volume, est donc :

$$C = -C_v(Z') + \int_{\Sigma(Z')} r' V'_\theta V'_z dS' + \int_{\Sigma(Z')} r' \overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} dS' \quad (6.6)$$

Dans cette expression,  $C$  et  $C_v(Z')$  sont respectivement les couples adimensionnels fournis au fluide par la turbine du bas et la portion de la paroi du cylindre qui est située en-dessous de la surface  $\Sigma(Z')$ .

## 6.2 Vérification expérimentale de la relation de bilan

Nous avons effectué des mesures de Vélocimétrie Laser Doppler pour vérifier l'équation de bilan 6.6. Ces mesures ont été effectuées dans le montage "VKE", donc dans l'eau et sans rotation d'ensemble. La seule force de volume appliquée de l'extérieur est dans ce cas la force de gravité, et, le montage étant vertical, elle n'a pas de composante azimutale. Comme de plus le nombre de Reynolds de l'écoulement est très grand (à  $f = 2\text{Hz}$ ,  $R_e = 1.2 \cdot 10^5$ ), l'emploi de la forme simplifiée 6.6 est justifié. L'écoulement étant statistiquement axisymétrique, ni le produit  $V'_\theta V'_z$  ni  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$  ne dépendent de  $\theta$ . Les intégrales de l'équation de bilan peuvent donc s'exprimer comme :

$$C = -C_v(Z') + 2\pi \int_0^1 (V'_\theta V'_z)(r', Z') r'^2 dr' + 2\pi \int_0^1 \overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}(r', Z') r'^2 dr' \quad (6.7)$$

Passons en revue les différents termes de cette expression :

– Nous avons vu au chapitre 3 que le vélocimètre laser permet la mesure d'une composante de la vitesse au cours du temps. La mesure de  $V'_z$  et  $V'_\theta$  ne semble donc pas poser de problèmes particuliers.

– En ce qui concerne la mesure de  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ , nous avons dû avoir recours à une "astuce". La figure 6.2 ci-dessous donne un exemple de ce qu'il serait possible d'observer si le vélocimètre donnait simultanément accès aux deux composantes de la vitesse, dans un cas où  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} > 0$ .

En observant cette figure, nous pouvons voir que ce qui s'exprime mathématiquement par  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} > 0$  s'exprime de façon équivalente (et plus imagée) par : "Quand  $\tilde{v}'_\theta(t)$  est positif,  $\tilde{v}'_z(t)$  est plus souvent positif que négatif. De même, quand  $\tilde{v}'_\theta(t)$  est négatif,  $\tilde{v}'_z(t)$  est plus souvent négatif que positif. Le point de coordonnées  $(\tilde{v}'_\theta(t), \tilde{v}'_z(t))$  est donc plus souvent dans le premier quadrant ou dans le troisième quadrant que dans le deuxième ou le quatrième." Intuitivement, il nous semble alors que la variance de la projection de la vitesse sur la première bissectrice, que nous noterons  $\overline{v'_{45}}(t)$ , sera plutôt plus élevée que celle de la projection  $\overline{v'_{135}}(t)$  sur la deuxième bissectrice si  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} > 0$ , et plutôt moins élevée si  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} < 0$ . Ceci peut se formaliser de la manière suivante : comme  $\overline{v'_{45}}(t) = (\overline{\tilde{v}'_\theta(t) + \tilde{v}'_z(t)})/\sqrt{2}$ , nous savons que  $2\overline{v'_{45}}^2 = \overline{\tilde{v}'_\theta}^2 + \overline{\tilde{v}'_z}^2 + 2\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ . De même,  $\overline{v'_{135}}(t) = (\overline{\tilde{v}'_\theta(t) - \tilde{v}'_z(t)})/\sqrt{2}$  entraîne que  $2\overline{v'_{135}}^2 = \overline{\tilde{v}'_\theta}^2 + \overline{\tilde{v}'_z}^2 - 2\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ . En combinant ces deux expressions, nous obtenons que :

$$\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z} = (\overline{v'_{45}}^2 - \overline{v'_{135}}^2)/2$$

Nous voyons alors qu'il est possible d'obtenir une estimation de la corrélation que nous cherchons à mesurer, à condition de mesurer en chaque point, en plus des valeurs moyennes  $V'_\theta$  et  $V'_z$ , les

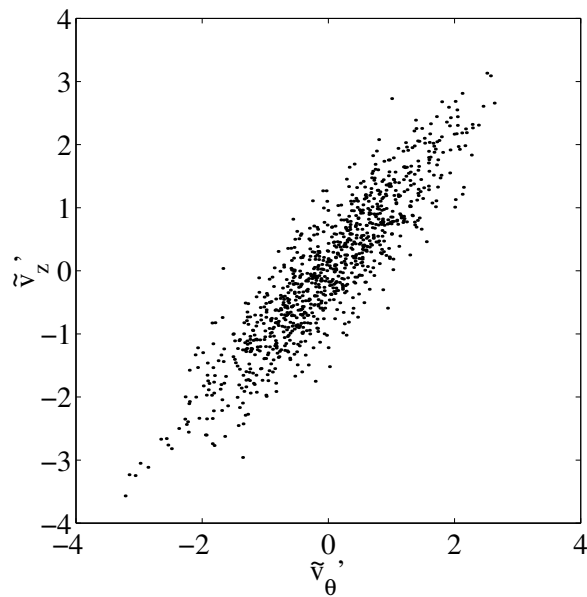


FIG. 6.2 – Nuage d'"échantillons de vitesses" tirés aléatoirement, tels que  $\overline{\tilde{v}'_{\theta} \tilde{v}'_z} > 0$ .

variances  $\overline{v'_{45}{}^2}$  et  $\overline{v'_{135}{}^2}$ .

- Le premier terme du membre de droite de 6.7, le moment dynamique du frottement visqueux  $C_v(Z)$ , reste lui malheureusement inaccessible. Pour le mesurer, il faudrait en effet connaître précisément la structure des couches limites proches des parois, ce qui est difficile par LDV. Intuitivement, nous pouvons juste imaginer que le frottement visqueux le long de la paroi lisse aura une influence moindre sur l'écoulement que les disques, s'ils sont munis de pales.
- En ce qui concerne le dernier terme de 6.7, nous avons déjà vu au chapitre 3 comment le couple fourni par les moteurs peut être mesuré.

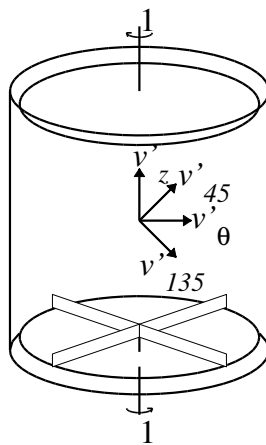


FIG. 6.3 – Directions des mesures de vélocimétrie.

Nous avons mesuré les composantes de la vitesse dans les quatre directions  $v'_{\theta}$ ,  $v'_z$ ,  $v'_{45}$  et  $v'_{135}$  représentées sur la figure 6.3 sur une grille située dans le plan  $\theta = 0$  de l'expérience. Nous avons effectué des mesures dans 5 configurations différentes, en faisant varier la courbure des

pales et le sens de rotation des disques. La vitesse des disques avait été fixée à 2 Hz, pour que l'eau ne s'échauffe pas trop au cours des mesures. En utilisant l'équation 6.7, nous avons pu alors estimer numériquement pour chaque position de la surface  $\Sigma(Z')$  les quantités de moment cinétique transportées par la composante moyenne et la composante fluctuante de l'écoulement. Le terme de frottement visqueux sur les parois, lui, reste inconnu.

La figure 6.4 ci-dessous présente les résultats de ces mesures dans le cas de turbines "TM60" munies de pales de 10 mm de haut.

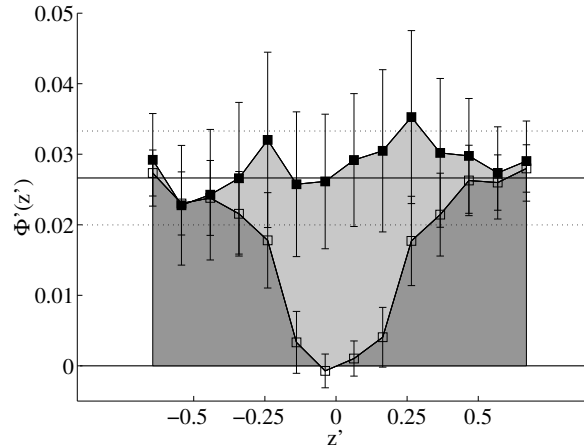


FIG. 6.4 – Flux de moment cinétique adimensionnel en fonction de l'altitude adimensionnelle  $Z'$ . L'aire gris sombre, délimitée par la courbe en symboles ouverts, représente la quantité de moment cinétique qui est transportée au travers de  $\Sigma(Z')$  par l'écoulement moyen. L'aire gris clair représente la quantité de moment cinétique transportée par les fluctuations. Le flux de moment cinétique total est représenté par la courbe en symboles pleins. Enfin, la ligne horizontale pleine et les lignes pointillées représentent le résultat des mesures de couple du chapitre 4 ainsi que ses barres d'erreur.

A ce point, un certain nombre de commentaires s'imposent :

- Tout d'abord, nous pouvons voir que la somme des termes de transport reste sensiblement constante, aux erreurs expérimentales près. Par conséquent, si nous considérons maintenant le volume de contrôle compris entre deux positions axiales  $Z'_1$  et  $Z'_2$  (avec  $Z'_1 < Z'_2$ ), nous voyons que le flux de moment cinétique qui entre dans le volume au travers de  $\Sigma(Z'_1)$  est identique à celui qui sort du volume en  $\Sigma(Z'_2)$ . En revenant dans l'expression de départ 6.6, nous voyons que cela signifie que le frottement visqueux sur la paroi du cylindre est peu important, au moins dans la zone dans laquelle les mesures étaient possibles. Ce point, qui n'était pas connu *a priori*, est déjà un résultat en lui-même.
- Ensuite, nous voyons que l'accord entre la mesure du flux de moment cinétique par vélocimétrie et la mesure du couple des moteurs par voie électrique est très bon. Ceci montre l'utilité pratique (et l'exactitude ?) de l'équation de bilan, alors même que l'écoulement est pleinement turbulent.
- Enfin, nous voyons que le "canal" par lequel transite le moment cinétique varie pendant son trajet du moteur du bas vers le moteur du haut. Près des turbines, nous pouvons voir que la contribution de l'écoulement moyen est dominante. Dans le plan équatorial de l'écoulement, par contre, nous avons pu voir au chapitre 4 que les deux composantes  $V'_\theta$  et  $V'_z$  de l'écoulement moyen s'annulent simultanément. Il est dans ces conditions évident que leur produit va aussi s'annuler, de même que le flux de moment cinétique qui lui est associé. Dans cette partie de l'écoulement, le transport est donc *intégralement* assuré par le terme de tension de Reynolds. Dans le cas de



l'écoulement "bifurqué" qui possède une seule cellule de recirculation (cf. chapitre 5), nous avons pu au contraire vérifier que le transport de moment cinétique est assuré par l'écoulement *moyen*, sur toute la hauteur de l'écoulement. L'équation de bilan est alors vérifiée avec la même précision.

La table 6.1 rapporte les valeurs moyennées en  $z$  des flux de moment cinétique obtenues dans les autres configurations et en utilisant les autres estimations possibles de  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ , ainsi que les valeurs de couple mesurées. Nous pouvons voir que l'accord est bon dans tous les cas. Notre relation de bilan est donc robuste, et il ne semble qu'une méthode soit préférable aux autres pour estimer  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ .

Turbines	TM70	TM60a	TM60a ( $f < 0$ )	TM60b	TM60b ( $f < 0$ )
$\Phi'_1$	0.060	0.026	-0.080	0.090	-0.153
$\Phi'_2$	0.066	0.033	-0.080	0.090	-0.139
$\Phi'_3$	0.066	0.026	-0.080	0.090	-0.146
$(C_1 + C_2)/2$	0.060	0.026	-0.080	0.090	-0.146

TAB. 6.1 – Flux de moment cinétique pour les différentes configurations.  $\Phi'_1$ ,  $\Phi'_2$ ,  $\Phi'_3$  ont été obtenus en utilisant respectivement  $\langle \tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z \rangle = (\langle \tilde{v}'_\theta{}^2 \rangle + \langle \tilde{v}'_z{}^2 \rangle)/2 - \langle \tilde{v}'_{135}{}^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z \rangle = \langle \tilde{v}'_{45}{}^2 \rangle - (\langle \tilde{v}'_\theta{}^2 \rangle - \langle \tilde{v}'_z{}^2 \rangle)/2$ ,  $\langle \tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z \rangle = (\langle \tilde{v}'_{45}{}^2 \rangle - \langle \tilde{v}'_{135}{}^2 \rangle)/4$ .  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) est le couple adimensionnel appliqué par le moteur 1 (resp. moteur 2), mesuré directement.

### 6.3 Etude du produit $v'_\theta v'_z$ .

A ce stade de l'étude, nous savons qu'après des disques, le moment cinétique est transporté par l'écoulement moyen, et que, dans le plan équatorial, il est transporté par les fluctuations turbulentes, sous la forme de tensions de Reynolds. Nous avons donc dans notre expérience l'occasion d'étudier "dans son élément naturel" un terme non-diagonal du tenseur de Reynolds. Nous en présenterons ci-dessous quelques aspects, sa distribution spatiale dans l'écoulement, l'allure de l'écoulement là où il domine, et enfin la gamme de fréquence des fluctuations qui y contribuent.

#### 6.3.1 Distribution spatiale de $v'_\theta v'_z$ .

La figure 6.5 ci-dessous montre la distribution spatiale du produit des vitesses moyennes  $V'_\theta V'_z$  et de la corrélation  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ , pour les turbines "TM60" munies de pales de 10 mm de haut, obtenue par vélocimétrie lors des mesures présentées plus haut.

Nous pouvons voir sur ces figures que les deux composantes du flux de moment cinétique sont distribuées de façons très différentes dans l'écoulement.

- Tout d'abord, nous pouvons voir que la gamme sur laquelle évoluent les valeurs du produit  $V'_\theta V'_z$  est plus large d'un ordre de grandeur environ que celle des valeurs de la corrélation  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$ .
- Dans les deux cas, les valeurs les plus élevées sont rencontrées près de la paroi du cylindre, pour des valeurs de  $r$  supérieures à environ 0.8.
- La corrélation  $\overline{\tilde{v}'_\theta \tilde{v}'_z}$  est maximale dans le plan équatorial, tandis que le produit des valeurs moyennes s'annule sur ce plan.
- Dans le cœur de l'écoulement, la corrélation est sensiblement nulle, mais le produit des valeurs moyennes est négatif ou nul.
- Les valeurs négatives de  $V'_\theta V'_z$  montrent que le transport de moment cinétique d'un moteur vers

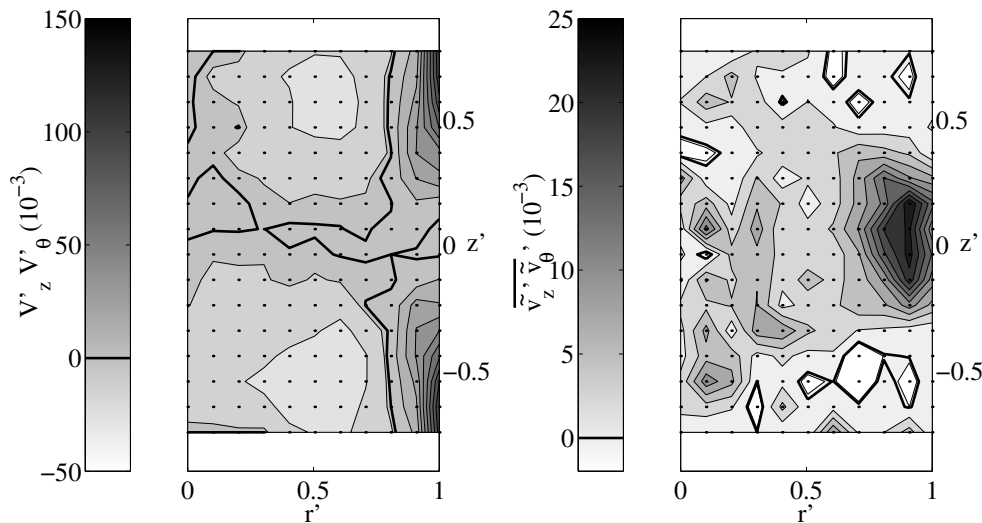


FIG. 6.5 – (a) Distribution spatiale du produit des vitesses moyennes adimensionnelles,  $V'_\theta V'_z$ , dans le plan  $\theta = 0$ . (b) Distribution spatiale de la corrélation adimensionnelle  $\overline{v'_\theta v'_z}$  dans le plan  $\theta = 0$ . La valeur zéro est indiquée en trait fort noir.

l'autre dans le “bon” sens est accompagné d'un transport de moment cinétique à contre-courant, plus petit environ de moitié.

### 6.3.2 Visualisations de l'écoulement.

Nous savons désormais dans quelle zone de l'écoulement le terme  $\overline{v'_\theta v'_z}$  du tenseur de Reynolds domine. Nous avons injecté des bulles d'air dans l'écoulement, afin de pouvoir visualiser la structure des fluctuations turbulentes dans cette zone. Les figures 6.6a et 6.6b ci-dessous représentent deux photographies de l'écoulement, toutes deux prises avec des turbines “TM60” munies de pales de 10 mm, tournant en contra-rotation à 15 Hz.

Nous pouvons voir sur ces deux photographies, pourtant prises dans des conditions expérimentales identiques, que la physionomie de l'écoulement change du tout au tout selon que nous regardons ses structures qui évoluent rapidement (photo de gauche), ou au contraire ses structures lentes (photo de droite). La photographie prise avec une pause de  $\frac{1}{500}s$  fixe la position instantanée des bulles, donc la position instantanée de toutes les structures qu'elles matérialisent. Nous voyons ainsi sur la figure 6.6a qu'à chaque instant se trouve dans l'écoulement un grand nombre de structures tourbillonnaires.

La photographie prise au  $\frac{1}{20}s$ , elle, ne peut fixer que les structures qui restent en place pendant le temps de la pause. La plupart des structures tourbillonnaires présentes sur la première photographie bougent très vite : elles sont en effet entraînées par l'écoulement moyen, déformées par lui, peut-être intrinsèquement instables. Nous ne pouvons donc plus les voir sur la deuxième photographie, car elles sont “floues”. Par contre, nous pouvons voir dans le plan équatorial de très grosses structures, qui bougent suffisamment lentement pour être fixées par l'appareil. Ces structures ont la même forme générale que celles qui ont été observées dans l'écoulement dit de “couche de mélange turbulente”, où leur apparition à faible nombre de Reynolds porte le nom d'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Ici, la couche de mélange évolue dans une géométrie cylindrique, et elle est soumise à un étirement radial par l'écoulement moyen. Elle se présente sous la forme d'une alternance de points de stagnation et de gros vortex (d'un diamètre typique de l'ordre de

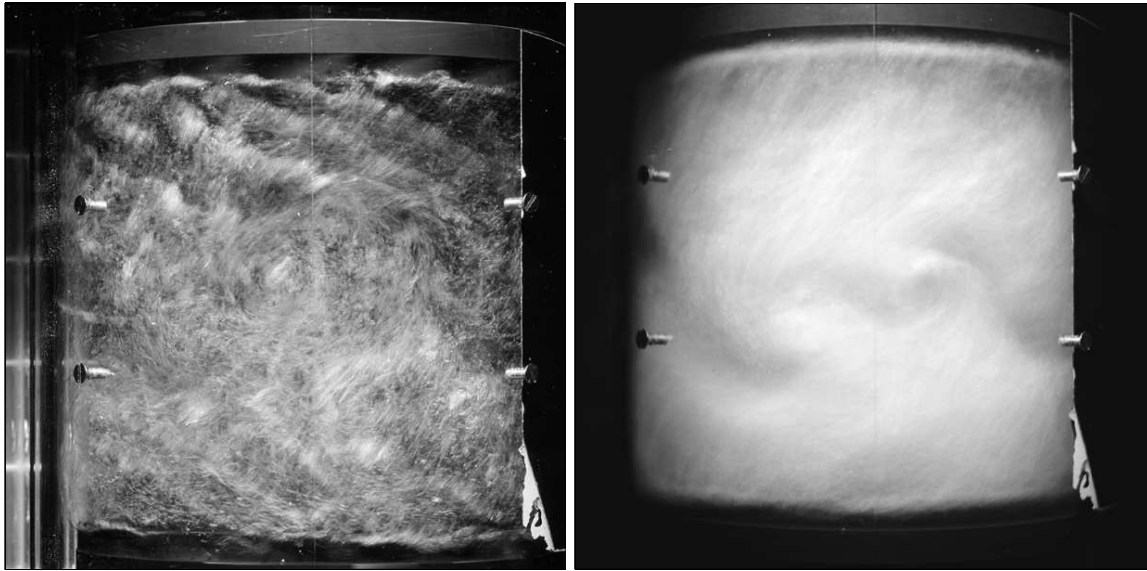


FIG. 6.6 – Photographies de l’écoulement. Les turbines sont du type “TM60”, et sont munies de pales de 10 mm de haut. Elles tournent en contra-rotation à 15 Hz. La turbine du haut (resp. du bas) va vers la gauche (resp. droite) de la figure. La vraie hauteur est de 180 mm environ. (a) Photographie de l’écoulement prise avec un flash. Le temps de pause est de  $\frac{1}{500}$  s. (b) Photographie de l’écoulement prise avec un temps de pause de  $\frac{1}{20}$  s.

5 cm, soit un quart de la distance qui sépare les disques). Les vortex tournent tous dans le même sens, et les directions de contraction des points de stagnation sont toujours orientées de la même manière. Les vortex ont un mouvement d’ensemble assez lent, et se déplacent erratiquement vers la droite ou vers la gauche de l’expérience. Ils sont assez robustes, et chaque vortex peut rester dans l’écoulement pendant plusieurs dizaines de périodes de rotation des disques. Ils peuvent ensuite disparaître, soit par coalescence, soit en se déstabilisant et en donnant naissance aux filaments de vorticité étudiés par M.-E. Brachet *et al.*, O. Cadot puis C. Titon. Un complément de description de la dynamique de cette couche de mélange peut être trouvé dans la thèse d’O. Cadot. Nous-mêmes n’avons pas eu le temps de l’étudier plus avant. Toujours est-il que nous savons désormais que, dans la région où les fluctuations turbulentes assurent le plus fort transport de moment cinétique, deux types de structures coexistent : des structures “rapides”, de petite taille, très nombreuses, et des structures “lentes”, beaucoup moins nombreuses, mais beaucoup plus grosses, qui semblent avoir une dynamique propre assez riche.

### 6.3.3 Distribution spectrale de $v'_\theta v'_z$ .

Nous avons alors cherché à déterminer les importances relatives des deux types de structures présentes dans l’écoulement dans les phénomènes de transport de moment cinétique. Nous sommes partis de la remarque suivante : la valeur moyenne du produit  $\tilde{v}_\theta' \tilde{v}_z'$  peut se comprendre comme la composante à fréquence nulle de la transform  e de Fourier du signal  $(\tilde{v}_\theta' \tilde{v}_z')(t)$ . Si nous exprimons cette transform  e de Fourier comme le produit de convolution de la transform  e de Fourier  $\hat{v}_\theta$  de  $\tilde{v}_\theta'$  par celle  $\hat{v}_z$  de  $\tilde{v}_z'$ , nous obtenons :

$$\overline{\tilde{v}_\theta' \tilde{v}_z'} = \widehat{v_\theta v_z}(f = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_\theta(f) \hat{v}_z(-f) df$$

Comme les signaux temporels de vitesses sont réels,  $\widehat{v}_z(-f) = \widehat{v}_z^*(f)$ , et nous pouvons mettre l'expression sous la forme :

$$\overline{\widetilde{v}'_\theta \widetilde{v}'_z} = 2 \int_0^\infty \Re [\widehat{v}_\theta(f) \widehat{v}_z^*(f)] df \quad (6.8)$$

Le terme  $\widehat{v}_\theta^*(f) \widehat{v}_z(f)$  s'appelle co-spectre de  $\widetilde{v}'_\theta$  et  $\widetilde{v}'_z$ . Nous voyons qu'il fournit une décomposition naturelle de la corrélation des deux vitesses en contributions provenant des fluctuations aux différentes fréquences de l'écoulement.

Comme au paragraphe 6.2, faisons intervenir les projections  $v_{45}'$  et  $v_{135}'$  de la vitesse fluctuante sur la première et la deuxième médiatrice. Les densités spectrales de puissance de  $v_{45}'$  et  $v_{135}'$  s'expriment comme :

$$|\widehat{v}_{45}|^2(f) = \left( \frac{\widehat{v}_\theta^* + \widehat{v}_z^*}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\widehat{v}_\theta + \widehat{v}_z}{\sqrt{2}} \right)(f)$$

et

$$|\widehat{v}_{135}|^2(f) = \left( \frac{\widehat{v}_\theta^* - \widehat{v}_z^*}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\widehat{v}_\theta - \widehat{v}_z}{\sqrt{2}} \right)(f)$$

En manipulant ces expressions, nous obtenons alors :

$$2|\widehat{v}_{45}|^2(f) = |\widehat{v}_\theta|^2(f) + |\widehat{v}_z|^2(f) + 2\Re [\widehat{v}_\theta^*(f) \widehat{v}_z(f)]$$

et

$$2|\widehat{v}_{135}|^2(f) = |\widehat{v}_\theta|^2(f) + |\widehat{v}_z|^2(f) - 2\Re [\widehat{v}_\theta^*(f) \widehat{v}_z(f)]$$

Il suffit alors de combiner les deux expressions pour obtenir l'intégrande de l'expression 6.8 comme :

$$2\Re [\widehat{v}_\theta^*(f) \widehat{v}_z(f)] = |\widehat{v}_{45}|^2(f) - |\widehat{v}_{135}|^2(f) \quad (6.9)$$

Nous voyons donc qu'il est possible de savoir quelles échelles temporelles sont responsables du transport de moment cinétique par les fluctuations, en mesurant la différence des spectres de puissance de  $v_{45}'$  et  $v_{135}'$ .

Nous avons mesuré les densités spectrales de puissance des projections de la vitesse dans les quatre directions de la figure 6.3 au point du plan  $\theta = 0$  où la valeur de la corrélation  $\overline{\widetilde{v}'_\theta \widetilde{v}'_z}$  est la plus élevée, c'est-à-dire à 1 cm de la paroi du cylindre, dans le plan équatorial de l'écoulement. Les turbines étaient du type "TM60", munies de pales de 10 mm de haut. Leur fréquence de rotation avait été prise égale à 15 Hz, qui est la fréquence de rotation maximale pour laquelle il n'y a pas de problèmes de cavitation. La figure 6.7 ci-dessous représente les densités spectrales adimensionnelles de puissance de  $v_{45}'$  et  $v_{135}'$ , ainsi que le double de la partie réelle de leur densité spectrale croisée adimensionnelle. Les fréquences sont adimensionnées par la fréquence de rotation des disques.

Nous pouvons remarquer que les amplitudes de  $|\widehat{v}_{45}|^2$  et  $|\widehat{v}_{135}|^2$  sont très différentes aux grandes échelles de temps. Ceci révèle une fois de plus une très forte anisotropie des grandes échelles de l'écoulement dans cette région. Aux très basses fréquences, les deux densités spectrales semblent présenter un pic diffus, aux alentours de  $f' = 0.02$ . Ce pic peut sans doute être relié au mouvement désordonné des grandes structures présentées au paragraphe 6.3.2. De  $f' = 0.02$  à  $f' \sim 0.6$ ,  $|\widehat{v}_{45}|^2$  et  $|\widehat{v}_{135}|^2$  décroissent,  $|\widehat{v}_{135}|^2$  ayant une décroissance algébrique. Un peu avant la fréquence de rotation des disques ( $f' \sim 0.6$ ), les deux densités spectrales de puissance adoptent une décroissance algébrique plus rapide. Jusqu'aux environs de  $f' = 3$ ,  $2\Re(\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z)$  reste positif. Ceci est la marque d'un fort excès d'événements dirigés dans la direction de  $v_{45}$ . La courbe de

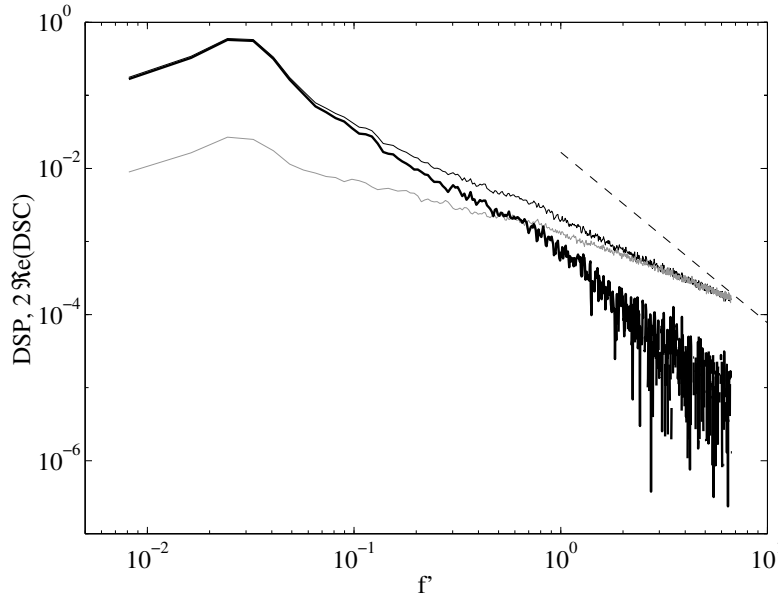


FIG. 6.7 – Densités spectrales de puissance adimensionnées de  $\tilde{v}_{45}'$  (trait noir fin) et  $\tilde{v}_{135}'$  (trait gris fin), en fonction de la fréquence adimensionnée par la fréquence de rotation des disques. Double de la partie réelle de leur densité spectrale croisée adimensionnelle (trait noir fort). Pente  $-7/3$  (trait tireté).

$2\Re(\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z)$  suit d'assez près celle de  $|\widehat{v}_{45}|^2$  jusqu'à  $f' \sim 0.1$ , puis décroît plus rapidement. Aux alentours de la fréquence de rotation des moteurs cette décroissance devient elle aussi algébrique. Après  $f' = 3$ , le signe de  $2\Re(\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z)$  ne reste plus constant. Le graphe logarithmique n'est alors plus approprié.

Il existe une prédiction du comportement à haute fréquence spatiale du co-spectre de  $\tilde{v}_\theta$  et  $\tilde{v}_z$ . Cette prédiction, formulée par J. L. Lumley en 1967 [83], se fonde sur l'analyse dimensionnelle. Dans notre cas, l'argument se transpose de la manière suivante : nous souhaitons obtenir une théorie reliant entre eux le co-spectre de  $\tilde{v}_\theta$  et  $\tilde{v}_z$ , le nombre d'onde spatial  $k$ , la dissipation par unité de masse  $\epsilon$ , et le gradient de l'écoulement moyen  $\partial_z V_\theta$ . Ces quatre quantités s'expriment en fonction de seulement deux unités, les mètres et les secondes. Le théorème de Vaschy-Buckingham nous apprend alors que la théorie peut se mettre sous la forme :  $f(N_1, N_2) = 0$ , où  $f$  est une fonction sans dimension qui ne dépend que de deux nombres sans dimensions  $N_1$  et  $N_2$ , qui s'expriment en fonction des grandeurs de départ. Nous voyons qu'un choix possible parmi d'autres pour  $N_1$  et  $N_2$  est :

$$N_1 = \frac{\partial_z V_\theta'}{\epsilon^{1/3} k^{2/3}}$$

et

$$N_2 = \frac{\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z}{\epsilon^{2/3} k^{-5/3}}$$

Dans les conditions assez générales d'application du théorème des fonctions implicites, nous pouvons supposer que la théorie peut se mettre sous la forme :

$$N_2 = g(N_1)$$

Ici  $g$  est une nouvelle fonction sans dimensions de  $N_1$ . Quand  $k$  tend vers l'infini, à  $\epsilon$  et  $\partial_z V_\theta$  fixés

(cas d'une mesure de  $N_2$  aux différents nombres d'ondes dans un montage dont les paramètres de contrôle sont tenus fixés), nous voyons que  $N_1$  tend vers zéro.

Si nous supposons maintenant que  $g(N_1)$  a un comportement "sympathique" quand  $N_1$  tend vers 0 (elle reste bornée et n'a pas d'asymptote verticale), nous pouvons l'approcher par son développement en série de Taylor en 0, et nous voyons qu'alors  $N_2 = C_0 + C_1 N_1 + \mathcal{O}(N_1^2)$ , soit :

$$\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z = C_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} + C_1 \epsilon^{1/3} k^{-7/3} \partial_z V_\theta + \mathcal{O}((\partial_z V_\theta)^2 k^{-3})$$

Comme cela est fréquent avec les arguments dimensionnels, nous voyons que la simple supposition du résultat final ( $g$  a un comportement sympathique) suffit à le justifier (le premier ordre en  $k$  après  $-5/3$  est  $-7/3$ ). Intuitivement, nous voyons ensuite que le co-spectre de  $\tilde{v}_\theta$  et  $\tilde{v}_z$  caractérise d'une certaine façon l'anisotropie des fluctuations turbulentes. Si le gradient de l'écoulement moyen  $\partial_z V_\theta$  est nul, l'écoulement moyen n'a pas d'anisotropie marquée. Les fluctuations turbulentes n'ont donc pas de raison particulières d'être anisotropes, ni donc d'avoir un co-spectre très différent de 0. Nous pouvons donc supposer que le préfacteur  $C_0$  de la partie d'ordre 0 en  $\partial_z V_\theta$  est petit, et que donc le co-spectre s'exprime comme :

$$\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z \simeq C_1 \epsilon^{1/3} k^{-7/3} \partial_z V_\theta + \mathcal{O}((\partial_z V_\theta)^2 k^{-3})$$

Nous avons tracé sur la figure 6.7 (qui représente un co-spectre temporel) la droite qui correspond à une décroissance d'exposant  $-7/3$ . Nous pouvons voir que l'accord est assez bon, ce qui est relativement étonnant puisque que nous n'avons pas vu de gamme de décroissance d'exposant  $-5/3$  sur les spectres de vitesse... Nous avons par ailleurs vérifié que les droites d'exposants  $-5/3$  et  $-3$  sont beaucoup moins convaincantes.

Tout ceci montre que les valeurs du co-spectre de  $\tilde{v}_\theta'$  et  $\tilde{v}_z'$  ne sont grandes qu'à basse fréquence, et que les fluctuations aux petites échelles de temps n'ont que des contributions faibles au transport de moment cinétique, qui semblent pouvoir être décrites par une décroissance algébrique en  $k$ , d'exposant peu éloigné de  $-7/3$ .

La figure 6.8 ci-dessous représente le résultat de l'intégration de l'équation 6.8 en fonction de la borne d'intégration supérieure  $f_c$ , divisé par sa valeur finale.  $f_c$  est adimensionnée par la fréquence de rotation des disques.

En revenant à l'équation 6.8, nous voyons que cette figure représente en fait la fraction du transport de moment cinétique qui est due aux fluctuations de fréquence inférieure à  $f_c$ , en fonction de  $f_c$ . Nous pouvons voir que cette courbe tend très rapidement vers son asymptote. En effet, nous voyons que le résultat final est obtenu à moins de 10 % près si nous prenons en compte les fluctuations dont la fréquence est inférieure à un cinquième de la fréquence de rotation des disques, à moins de 5 % près pour  $f_c = 0.5$ , et à moins de 0.5 % dès que  $f_c > 2$ . Tout ceci semble indiquer que la majeure partie du terme  $\overline{\tilde{v}_\theta' \tilde{v}_z'}$  du tenseur de Reynolds dans notre écoulement est associée aux structures à grande échelle que nous avons pu y observer. La contribution de la partie plus "homogène et isotrope" de l'écoulement semble en pratique négligeable.

## 6.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté quelques aspects des mécanismes de transport de moment cinétique dans l'écoulement de von Kármán. Nous avons tout d'abord établi une relation intégrale qui permet de relier le couple exercé par les moteurs sur le montage expérimental aux fluctuations turbulentes présentes au sein de l'écoulement. Cette relation fait apparaître que l'écoulement est le siège d'un flux de moment cinétique qui le traverse en allant d'un moteur

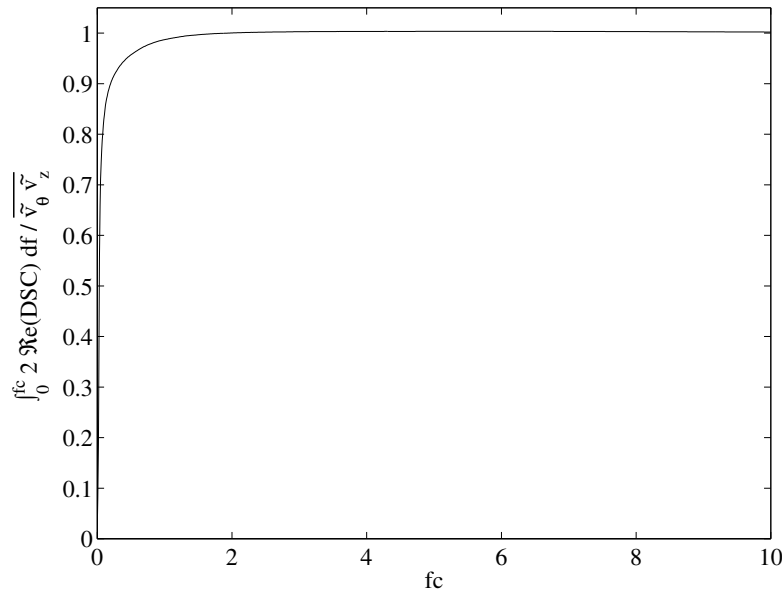


FIG. 6.8 – Intégrale de  $2\Re[\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z]$  de 0 à  $f_c$ , divisée par  $\overline{\widetilde{v}_\theta' \widetilde{v}_z'}$ .  $f_c$  est adimensionnée par la fréquence de rotation des turbines.

à l'autre. Le moment cinétique qui part du moteur du bas est obligé (aux “fuites” visqueuses près) de traverser la cellule de bout en bout, et ne peut sortir que par le moteur du haut. Aux fuites près, les deux moteurs doivent donc donner des couples égaux, même s'ils ne tournent pas à la même vitesse. Cette relation fait pressentir que, dans le cas d'un écoulement turbulent, le moment cinétique est transporté par le mouvement des particules fluides. Des arguments de symétrie montrent alors que, dans le cas de disques en contra-rotation, le transport de moment cinétique est le fait des *seules* fluctuations turbulentes dans le plan équatorial du montage. Le flux de moment cinétique dans ce plan s'exprime comme l'intégrale de surface d'une composante non-diagonale du tenseur de Reynolds,  $\overline{\widetilde{v}_\theta \widetilde{v}_z}$ . Nous avons alors présenté des mesures de vélocimétrie qui nous ont permis de vérifier cette relation avec une assez bonne précision, de l'ordre de la dizaine de pour cent. Nous avons réalisé ces mesures dans plusieurs configurations, avec à chaque fois un bon accord. Il est donc possible d'avoir accès au couple moyen fourni par les moteurs en réalisant des mesures de vélocimétrie dans l'un quelconque des plans perpendiculaires à l'axe de l'écoulement. Les valeurs mesurées seront identiques quel que soit le plan, aux fuites près, et elles seront égales au couple des moteurs. Au cours des mesures, nous avons pu déterminer dans quelle région de l'écoulement les valeurs importantes de la composante du tenseur de Reynolds peuvent être observées. Nous avons alors réalisé des visualisations de l'écoulement, et nous avons enfin pu relier, par une analyse spectrale des fluctuations de vitesse dans cette région, l'importance du terme  $\overline{\widetilde{v}_\theta \widetilde{v}_z}$  du tenseur de Reynolds à la présence de structures cohérentes de grande taille. Cette analyse spectrale fait (ré-)apparaître le co-spectre des composantes de la vitesse comme une mesure naturelle de la répartition du transport de moment cinétique dans les échelles. Ce fait semble bien connu de la communauté des océanologues, ainsi que de celle des météorologues. Les physiciens auraient-ils oublié de nous en informer ? Pour finir, nous avons présenté en annexe A un certain nombre de bilans similaires, portant sur d'autres quantités conservées et sur d'autres écoulements fréquemment utilisés pour des expériences de physique de la turbulence. Ces expériences ont un point commun : dans chaque cas un fluide est tenu hors d'équilibre par le flux d'une quantité

conservée.

Dans chaque cas, nous avons pu mettre en évidence un terme d'injection de la quantité par le milieu extérieur, un mode de transport "moléculaire", qui est prédominant pour de petites valeurs du flux, et deux modes de transport convectif, l'un lié à l'écoulement moyen et l'autre aux fluctuations turbulentes de l'écoulement, sous forme d'un terme du tenseur de Reynolds. Dans le cas où la quantité conservée est la quantité de mouvement, un quatrième terme s'ajoute, qui est lié à la pression. Ces termes entrent en jeu pour de grandes valeurs du flux. Dans chaque cas, il semble que l'étude du co-spectre des variables qui interviennent dans le terme du tenseur de Reynolds puisse apporter des informations sur les caractéristiques de l'écoulement impliquées dans le flux convectif turbulent.





## Chapitre 7

# L'influence de la force de Coriolis.

Au cours des chapitres précédents, nous avons pu constater à de nombreuses reprises le rôle central joué dans la dynamique de l'écoulement de von Kármán par la couche de cisaillement qui évolue dans son plan équatorial. Ces fluctuations à grande échelle de temps et d'espace risquant d'affecter les propriétés magnéto-hydrodynamique de l'écoulement de l'expérience "VKS", il nous a paru d'une importance cruciale de pouvoir en contrôler les caractéristiques. Depuis les travaux de A. Ibbetson et D. J. Tritton [67] et ceux, plus récents, de L. Jacquin *et al.* [68], il semblait exister un consensus sur le fait que la mise en rotation d'ensemble d'un écoulement permettait de le "structurer", et d'en diminuer les fluctuations turbulentes. Nous avons donc réalisé un nouveau montage afin d'étudier l'influence de la force de Coriolis sur l'écoulement de von Kármán de contra-rotation.

### 7.1 La force de Coriolis

#### 7.1.1 Présentation générale.

Avant de présenter le cadre théorique de l'hydrodynamique des fluides tournants, nous allons illustrer par deux exemples simples deux propriétés des écoulements en rotation qui sont à l'origine de beaucoup de phénomènes contre-intuitifs couramment observés.

Considérons pour commencer une toupie fixée sur l'axe d'une table tournante en rotation rapide. Nous noterons  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation de la table. Supposons maintenant qu'un observateur solidaire de la table décide de détacher la toupie. Comme elle est située exactement sur l'axe, elle ne ressent aucune force centrifuge, et va donc rester en place. De plus, elle va continuer à tourner à la même fréquence de rotation que la table, et va donc adopter le comportement normal pour une toupie lancée, qui est de rester droite. Pour l'observateur lié à la table, il s'agit là d'une première surprise : dans son référentiel, la toupie est immobile, et devrait donc se coucher. Si maintenant il décide de la coucher de force, il va ressentir une forte résistance, qui est pour lui toujours aussi surprenante. Enfin, s'il parvient à incliner l'axe de la toupie, il la verra adopter un mouvement de précession très rapide, dirigé dans la direction opposée à celle de la rotation du référentiel. Nous voyons ainsi que, dans un référentiel en rotation, les objets qui paraissent ne pas avoir de mouvement de rotation propre possèdent en réalité un moment cinétique en leur centre de gravité "invisible", qui est d'autant plus élevé que la fréquence de rotation du référentiel est grande, et qui leur fait adopter des comportements surprenants. La transposition de ces arguments dans le contexte de l'hydrodynamique en référentiel tournant est que les particules de fluide possèdent, en plus de leur vorticité "visible"  $\vec{\omega}$ , une contribution  $2\vec{\Omega}$  provenant de la rotation d'ensemble, qu'il est nécessaire de garder présente à l'esprit dans l'interprétation des observations. (Ces idées

ne sont pas nouvelles. Les articles fondateurs de J. Proudman et G. I. Taylor, parus à quelques mois d'intervalle en 1916, s'intitulaient déjà respectivement "On the motion of solids in liquids possessing vorticity" et "Motion of solids in fluids when the flow is not irrotationnal")

Dans le deuxième exemple, nous considérerons le cas de la même toupie, que l'observateur solidaire du référentiel tournant éloigne progressivement de l'axe en la poussant dans la direction radiale. Cet observateur n'appliquant qu'une poussée radiale, il est persuadé la toupie ne peut que s'éloigner de l'axe de rotation en ligne droite. Il est donc extrêmement surpris de la voir réagir à une force dirigée dans la direction radiale en acquérant une vitesse orthoradiale d'autant plus élevée que la table tourne vite, et dirigée en sens inverse de la rotation de celle-ci ! Pour un observateur situé dans le référentiel du laboratoire, par contre, cette constatation s'explique tout simplement par le fait que, la toupie n'ayant au départ aucun moment cinétique en l'axe de rotation, et n'étant soumise qu'à une force dirigée radialement, elle n'a aucune raison d'en gagner, et ne peut donc que s'éloigner de l'axe en ligne droite *dans le référentiel du laboratoire*, donc en spiralant dans le référentiel de la table. Nous illustrons ainsi la deuxième propriété que possèdent les corps lorsqu'ils sont étudiés dans un référentiel en rotation : leur moment cinétique en un point  $M$  quelconque comprend bien sûr sa partie "visible", mais aussi une deuxième contribution due à la rotation du référentiel, et seule la somme des deux est conservée. La contribution au moment cinétique en  $M$  d'un objet dont le centre de masse est situé en  $G$  qui est due à la rotation du référentiel s'exprime comme  $\vec{\Omega}r^2$ , où  $r$  est la distance qui sépare  $G$  de la droite de vecteur  $\vec{\Omega}$  qui passe par  $M$ .

### 7.1.2 Force de Coriolis et hydrodynamique.

Si les exemples précédents permettent de mettre en évidence simplement l'effet des forces de référentiel, il risquent d'en faire sous-estimer l'importance : après tout, l'étude du mouvement des toupies, si elle est enrichissante, n'est pas un but en elle-même. Nous voyons de plus que dans notre exemple nous pourrions choisir de travailler dans le référentiel au repos, dans lequel les choses semblent se passer de manière plus simple. Si cependant nous nous penchons sur des problèmes plus complexes, nous nous apercevrons rapidement qu'il existe des cas où l'introduction de forces de référentiel peut être perçue comme un moindre mal tant le passage en référentiel galiléen est compliqué. Dans le cas de l'étude des écoulements atmosphériques, par exemple, nous voyons que le fait de passer en référentiel galiléen nous oblige à travailler dans un espace dont la forme varie en fonction du temps, puisque la rotation de la Terre entraîne chaque soir les montagnes avec lesquelles le vent interagit loin du domaine d'étude pour les y ramener chaque matin. Il est dans ce cas bien plus simple de travailler dans un domaine dont la forme est fixe, quitte à adjoindre quelques termes supplémentaires aux équations.

Nous voyons donc que les écoulements en rotation d'ensemble, s'il peuvent *a priori* être étudiés de manière classique, ont des particularités qui peuvent justifier le développement de méthodes spécifiques. Loin d'être une simple lubie de physiciens soucieux de compliquer à plaisir des problèmes simples, cette étude permet de trouver des "raccourcis" plus élégants que la simple application des méthodes éprouvées.

Avant de nous intéresser plus spécifiquement à l'écoulement de von Kármán, nous allons commencer par rappeler les équations de l'hydrodynamique en référentiel tournant, ainsi que quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Dans un référentiel tournant, le mouvement d'un fluide n'est pas décrit par les équations de Navier-Stokes "habituelles", mais par des équations modifiées qui comportent les deux termes de

force de Coriolis et de force centrifuge. Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f} \\ \text{div}(\vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\vec{f}$  et  $\vec{r}$  sont respectivement la vitesse du fluide, la pression, la résultante des forces à distance qui s'appliquent par unité de masse et la position du point considéré *mesurées dans le référentiel tournant*.  $\nu$  et  $\rho$  sont la viscosité cinématique et la masse volumique du fluide, que nous supposons Newtonien, et  $\vec{\Omega}$  est le vecteur rotation du référentiel. En adaptant un raisonnement classique d'hydrodynamique, il est possible de voir que, si la masse volumique du fluide est homogène dans l'écoulement, si la résultante des forces à distance peut être exprimée comme le gradient d'un potentiel, et si il est possible d'obtenir un état hydrostatique dans le montage étudié, les équations peuvent se ramener à la forme plus simple :

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div}(\vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

dans laquelle la pression  $p$  est une pression "réduite", qui contient à elle seule l'effet de la pression, des forces à distance et de la force centrifuge. Pour écrire ces équations sous forme adimensionnelle, nous devons choisir l'échelle de taille  $\mathcal{L}$ , l'échelle de vitesse  $\mathcal{V}$  et l'échelle des temps  $\mathcal{T}$  des phénomènes qui nous intéressent. Si nous choisissons de nous intéresser à des phénomènes dont la durée caractéristique est de l'ordre de la période de rotation du référentiel, nous pouvons choisir  $\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Notant  $\hat{\Omega}$  un vecteur unitaire colinéaire au vecteur rotation du référentiel, nous pouvons écrire les équations vérifiées par les grandeurs sans dimensions

$$r' = \frac{r}{\mathcal{L}}, \quad z' = \frac{z}{\mathcal{L}}, \quad t' = \frac{\Omega t}{2\pi}, \quad p' = \frac{p}{\rho \mathcal{V}^2}, \quad v' = \frac{v}{\mathcal{V}}$$

comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \partial_{t'} \vec{v}' + \frac{\mathcal{V}}{\Omega \mathcal{L}} (\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}') \vec{v}' &= -\frac{\mathcal{V}}{\Omega \mathcal{L}} \vec{\text{grad}}' p' - 2\hat{\Omega} \times \vec{v}' + \frac{\nu}{\Omega \mathcal{L}^2} \Delta' \vec{v}' \\ \text{div}'(\vec{v}') &= 0\end{aligned}$$

Nous voyons que ces équations font intervenir deux rapports sans dimensions. Le premier, appelé nombre de Rossby et noté  $\text{Ro}$ , est égal au rapport de l'échelle des vitesses de l'écoulement mesuré dans le référentiel en rotation et des vitesses d'entraînement dues à la rotation d'ensemble. Il compare l'ordre de grandeur des efforts dus aux termes non-linéaires des équations avec celui des efforts dus à la force de Coriolis. Lorsqu'il est petit, l'écoulement est très proche de la rotation d'ensemble lorsqu'il est observé d'un référentiel galiléen. Dans le référentiel tournant, les termes non-linéaires des équations sont très faibles devant la force de Coriolis. C'est par exemple le cas des écoulements atmosphériques à l'échelle planétaire. Dans ce cas en effet, nous pouvons considérer que l'échelle des vitesses  $\mathcal{V}$  est de l'ordre de la vitesse des vents, soit une centaine de kilomètres par heure, là où l'échelle des vitesses d'entraînement vaut environ  $1600 \text{ km.h}^{-1}$  à l'équateur. Un observateur situé sur Mars considérerait probablement que l'atmosphère de la Terre tourne en bloc avec elle, mais un navigateur pris dans un coup de vent sur son voilier estime avoir de bonnes raisons de penser que l'écart perturbativement petit mérite encore qu'on s'y intéresse. Le deuxième rapport sans dimension est appelé nombre d'Ekman, et noté  $\text{Ek}$ . Il joue dans les écoulements en rotation le rôle de l'inverse d'un nombre de Reynolds, et compare

l'influence des efforts visqueux à celle de la force de Coriolis. Il est petit lorsque le fluide est faiblement visqueux. Nous rappelons ci-dessous l'expression de ces deux nombres sans dimensions,

$$\text{Ro} = \frac{\mathcal{V}}{\Omega \mathcal{L}}, \quad \text{Ek} = \frac{\nu}{\Omega \mathcal{L}^2}$$

ainsi que l'expression adimensionnelle des équations de Navier-Stokes en référentiel tournant

$$\frac{1}{2\pi} \partial_{t'} \vec{v}' + \text{Ro} (\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}') \vec{v}' = -\text{Ro} \vec{\text{grad}}' p' - 2\hat{\Omega} \times \vec{v}' + \text{Ek} \Delta' \vec{v}' \quad (7.1)$$

$$\text{div}'(\vec{v}') = 0 \quad (7.2)$$

Si nous prenons maintenant le rotationnel de l'équation 7.1, nous obtenons les équations d'évolution pour la vorticité  $\vec{\omega}'$  de l'écoulement, mesurée dans le référentiel en rotation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \partial_{t'} \vec{\omega}' &= \text{rot}'(\vec{v}' \times (2\hat{\Omega} + \text{Ro} \vec{\omega}')) + \text{Ek} \Delta' \vec{\omega}' \\ \text{rot}'(\vec{v}') &= \vec{\omega}' \end{aligned}$$

Nous pouvons manipuler ces équations pour les mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \partial_{t'} \vec{\omega}' &= \text{Ro} \text{rot}'(\vec{v}' \times \vec{\omega}') + (2\hat{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}}') \vec{v}' + \text{Ek} \Delta' \vec{\omega}' \\ \text{rot}'(\vec{v}') &= \vec{\omega}' \end{aligned}$$

En prenant maintenant leur moyenne temporelle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Ro} \text{rot}'(\overline{\vec{v}' \times \vec{\omega}'}) + (2\hat{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}}') \overline{\vec{v}'} + \text{Ek} \Delta' \overline{\vec{\omega}'} \\ \text{rot}'(\overline{\vec{v}'}) &= \overline{\vec{\omega}'} \end{aligned}$$

où  $\bar{q}$  est la valeur moyenne temporelle de la quantité  $\vec{q}$ . Dans le cœur de l'écoulement, il est peu probable que le champ moyen de vorticité varie très brusquement en espace. Si le nombre d'Ekman est petit devant 1, le terme visqueux peut donc certainement être négligé. Si le nombre de Rossby est lui aussi petit devant 1, il est tentant de négliger le terme non-linéaire de la première équation. Si nous faisons ces deux approximations, nous obtenons :

$$0 = (2\hat{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}}') \overline{\vec{v}'}$$

Le sens de cette expression est simple : elle signifie que, si le nombre de Rossby et le nombre d'Ekman d'un écoulement sont simultanément petits, le champ de vitesse moyen de cet écoulement est invariant le long de toute droite parallèle à l'axe de rotation. Ce résultat très surprenant, qui a été obtenu par J. Proudman [115] et vérifié expérimentalement par G.I. Taylor [140] en 1916, est connu sous le nom de "Théorème de Proudman-Taylor". Il a depuis été vérifié et re-vérifié dans un très grand nombre d'études expérimentales, ce qui montre paradoxalement qu'il a un statut assez ambigu. En effet, sa démonstration, qui a elle aussi été déclinée d'autant de manières qu'il existe d'articles sur le sujet, ne fait pas apparaître clairement le mécanisme responsable de cette "bi-dimensionnalisation". De plus, si elle montre qu'un écoulement invariant dans la direction du vecteur rotation du référentiel est solution des équations du mouvement linéarisées autour de l'écoulement de rotation solide, elle ne permet pas de montrer qu'il s'agit d'une solution stable de ces équations, et encore moins qu'il s'agit de la seule solution de l'équation complète, qui est elle non-linéaire. Peut-être serait-il par exemple possible de trouver un montage dans lequel une perturbation de l'écoulement serait amplifiée suffisamment pour "réveiller" les termes non-linéaires

des équations, et pour atteindre un état dans lequel l'écoulement moyen n'est plus solution de l'équation simplifiée

$$0 = (2\hat{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}}')\overline{v'}$$

mais de l'équation qui fait aussi intervenir les perturbations,

$$0 = \text{Ro} \vec{\text{rot}}'(\overline{v' \times \omega'}) + (2\hat{\Omega} \cdot \vec{\text{grad}}')\overline{v'}$$

L'étude d'un tel écoulement dans lequel la bi-dimensionnalisation serait "cassée" apporterait peut-être des informations sur le mécanisme qu'elle met en œuvre, et sur lequel il n'existe à ce jour pas de consensus. Dans ce contexte, il nous a semblé prometteur de placer notre écoulement de von Kármán dans un référentiel dont le vecteur rotation était parallèle aux axes des turbines. En effet, lorsque les turbines tournent en contra-rotation, elles induisent un forçage qui dépend fortement de la position dans la direction de l'axe de rotation. Lorsque le référentiel est arrêté, nous savons de plus que les fluctuations de l'écoulement sont très importantes, et qu'un terme semblable à celui que nous souhaitons voir apparaître joue un rôle déterminant dans le transport de moment cinétique.

### 7.1.3 Etude bibliographique.

L'immédiat intérêt géophysique des écoulements en rotation d'ensemble a suscité un certain nombre de travaux, tant au plan théorique qu'au plan expérimental. Par ailleurs, nous avons eu l'occasion de voir que sous l'effet des forces de référentiel des phénomènes assez variés peuvent se manifester. Parmi ces phénomènes nous citerons bien sûr la "bi-dimensionnalisation", mais aussi l'apparition d'ondes (ondes inertielles, ondes de Rossby). Cette richesse en comportements inédits a amené un certain nombre d'auteurs à se lancer dans l'étude *per se* des écoulements en rotation.

Notre écoulement étant assez éloigné des situations déjà étudiées dans un but géophysique, nous n'avons pas eu l'occasion d'approfondir nos recherches bibliographiques dans cette direction. Le lecteur intéressé par les aspects océanographiques et météorologiques de l'hydrodynamique des fluides tournants se reportera avec profit aux monographies de Pedlosky [105] et Gill [58], ainsi qu'à la collection d'articles [123]. L'article de revue [122] pourra lui servir d'introduction aux aspects liés à la géodynamique interne (mouvements de convection dans le noyau, etc.).

En ce qui concerne les études purement hydrodynamiques, nous commencerons par citer l'ouvrage de référence de H. P. Greenspan [60], qui fait la synthèse des travaux antérieurs à 1969, date de la première édition. Dans l'ensemble, ces travaux mettent l'accent sur l'étude des écoulements laminaires en rotation. Les couches limites d'Ekman, de Stewardson et de Bödewadt font l'objet de beaucoup d'attention, ainsi que les problèmes de mise en rotation "spin-up" et d'arrêt "spin-down". Enfin, une étude poussée est consacrée aux ondes inertielles et aux ondes de Rossby. Rien ou presque n'est dit de l'influence de la rotation d'ensemble sur les écoulements turbulents. La tendance des écoulements en rotation à ne varier que lentement dans la direction de l'axe de rotation est constatée dans un grand nombre d'expériences, mais aucune explication convaincue n'en est donnée.

Un certain nombre d'auteurs ont poursuivi l'étude expérimentale de ces phénomènes, dans des montages variés. Un premier type de montage consiste en une cuve cylindrique en rotation d'ensemble, dans laquelle un écoulement à petite échelle est créé par l'injection et l'aspiration d'eau par des orifices percés dans le fond. Ce type de montage a été utilisé par McEwan [84] pour étudier l'apparition de cyclones cohérents à partir du fond "turbulent", et par Colin de Verdière [37] pour mettre en évidence l'apparition d'un écoulement de circulation zonale à grande

échelle à partir d'ondes de Rossby excitées artificiellement. Un montage similaire a ensuite été utilisé par Sommeria *et al.* [132] pour étudier des ondes de Rossby "naturelles".

Les montages du deuxième type sont constitués de cuves et tunnels hydrodynamiques en rotation. Nous citerons l'étude que Heikes et Maxworthy [62] ont consacrée aux ondes inertielles en aval d'un obstacle remorqué au fond d'une cuve parallélépipédique, ainsi que l'étude de l'influence de la rotation d'ensemble sur une couche de mélange due à Bidokhti et Tritton [11]. De nombreux travaux ont été consacrés dans des montages de ce type à l'étude des "colonnes de Taylor". Nous renvoyons pour ces travaux aux références citées par [62], ainsi qu'à l'article de revue [17].

D'autres études encore emploient comme mécanisme de forçage de l'écoulement des grilles horizontales déplacées verticalement. C'est avec un forçage de ce type qu'Hopfinger *et al.* [65] ont étudié la propagation de solitons le long de vortex alignés avec l'axe de rotation.

En ce qui concerne l'étude des fluctuations turbulentes proprement dites, il semble que peu d'études aient été conduites. Nous citerons le travail pionnier d'Ibbetson et Tritton [67], mené dans l'air dans une cuve cylindrique en rotation, dans laquelle le déplacement rapide de deux grilles en début d'expérience génère une turbulence en déclin, ainsi que celui de Dickinson et Long [41], mené dans l'eau dans un montage semblable à celui de Hopfinger *et al.* Il semble qu'à l'heure actuelle le travail de très loin le plus complet soit dû à Jacquin *et al.* [68], qui ont étudié de manière systématique les propriétés d'une turbulence produite dans une soufflerie par un ensemble chambre de stabilisation/grille tournant. Dans ce cadre, les auteurs constatent que l'effet de la force de Coriolis est d'introduire une longueur de corrélation des fluctuations turbulentes plus grande dans la direction axiale que dans les directions transverses, et d'inhiber le transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles. Nous citerons enfin la récente étude de Baroud *et al.* [6], menée dans le montage utilisé par Sommeria *et al.*, et qui met en évidence des propriétés d'invariance d'échelle inhabituellement conformes aux prédictions théoriques.

## 7.2 Le deuxième montage expérimental

### 7.2.1 Le montage.

Les photographies de la figure 7.1 sont une vue d'ensemble et une vue de détail du montage "VKR" (Von Kármán en Rotation). Ce montage est dans ses grandes lignes semblable au montage "VKE", nous n'en donnerons donc pas une description aussi détaillée. Le montage est construit sur un bâti micro-contrôle, vestige d'un montage précédent destiné à l'étude de l'écoulement de Couette-Taylor. Ce bâti est lui-même monté sur un marbre. Il supporte deux platines en duralumin épaisses de 30 mm, percées en leur milieu de trous de diamètre 190 mm. Ces trous servent de centrages à deux disques, eux aussi en duralumin, qui sont munis d'appendices sur lesquels sont pris les roulements qui assurent le guidage en rotation des pièces tournantes. Nous avons choisi d'assurer ce guidage par deux paliers indépendants, représentés en figure 7.2. Le palier qui guide l'arbre qui porte la turbine est un palier à roulements classique, copié sur le montage "VKE". Il comporte deux roulements à billes, tenus dans l'appendice par un épaulement et une bride, et sur l'arbre par un épaulement, deux entretoises et un écrou. Le palier qui guide la cuve cylindrique est réalisé autour de l'appendice. Il comporte lui aussi deux roulements à billes d'un diamètre intérieur de 50 mm, et d'un diamètre extérieur de 65 mm. Ces roulements sont serrés sur l'appendice par un épaulement, une entretoise et une bride, et sont serrés dans le "couvercle" entre un épaulement et la bride qui supporte le joint "spi" qui assure l'étanchéité. Ce couvercle et l'ensemble des brides et entretoises sont réalisés en acier inoxydable, pour éviter la corrosion. La cuve de plexiglas qui contient l'écoulement lui-même a un rayon intérieur de 99 mm.

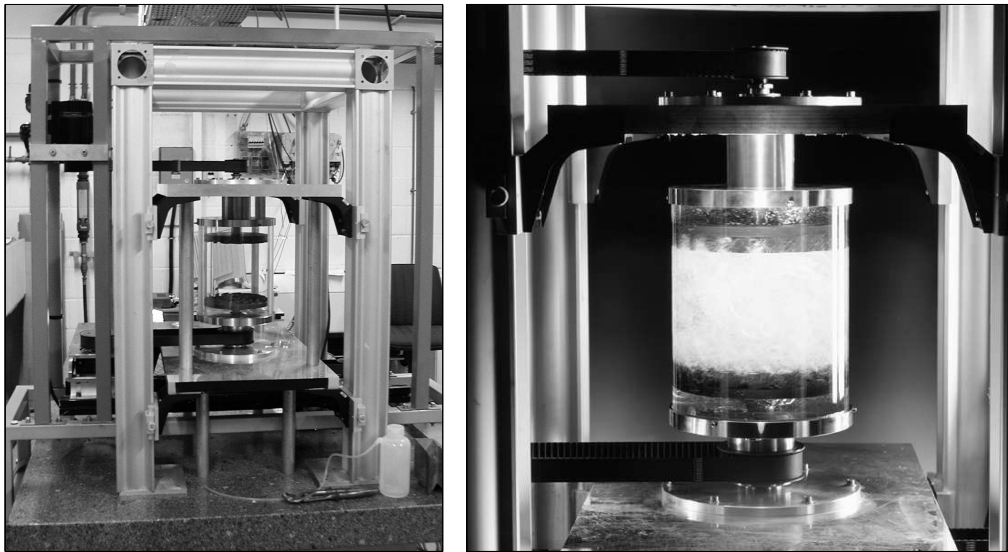


FIG. 7.1 – Photographies du montage “VKR” (Von Kármán Rotation). a) Vue d’ensemble. Il est possible de voir le bâti qui supporte la cuve et les paliers, et le bâti indépendant qui supporte les moteurs. Les moteurs 1 (du haut) et 3 (d’entraînement du cylindre) sont visibles en noir sur la gauche de l’image. Le moteur 2 (du bas) est à droite, il est caché par le pied du bâti. La cuve cylindrique, visible au milieu avec les deux turbines, est vide. b) Vue de l’écoulement. Il est possible de voir les courroies d’entraînement du cylindre et de la turbine du haut.

Les couvercles sont percés chacun d’un trou, afin de permettre le remplissage et la vidange. Lors du montage initial, nous avons pris soin d’aligner précisément les deux platines, de telle sorte que l’écart entre l’axe des deux turbines est inférieur à 0.1 mm. La rigidité du bâti micro-contrôle est suffisante pour que cet écart ne change pas lors des démontages pour changement des turbines. L’écart entre les deux platines est tenu constant par quatre cales de duralumin, visibles autour de la cuve cylindrique sur la photographie 7.1a. Pour l’ensemble des mesures que nous allons présenter, les turbines utilisées étaient du type “TM60”, et elles étaient munies de pales de 20 mm, soit  $0.2 R_c$ . La distance qui séparait les faces intérieures des disques des deux turbines était de  $180 \pm 1$  mm. L’entraînement des turbines se fait par un système de poulies et de courroies identique à celui du montage “VKE”. L’entraînement du cylindre se fait par l’intermédiaire d’une poulie de grand diamètre, alésée pour permettre le passage du “couvercle” du bas, et tenue sur celui-ci par des vis pointeaux.

Pour les mesures de vélocimétrie, il est possible d’installer une contre-cuve de plexiglas, selon le même principe que pour le montage “VKE”. Le fond est réalisé en PVC, et il est surélevé par quatre pieds pour permettre le passage de la courroie qui entraîne la cuve cylindrique. Le passage du “couvercle” du bas est tenu étanche par un joint “spi” de corde 85 mm. Pour que cette cuve soit (relativement) facile à monter et démonter, elle est composée d’un fond en “U” collé, réalisé en plexiglas épais, et d’une face d’entrée d’épaisseur 12 mm, plus soignée, qui est rapportée et fixée avec de la colle silicone. Pour éviter les projections d’eau, un couvercle en deux morceaux permet de fermer la contre-cuve par en haut.



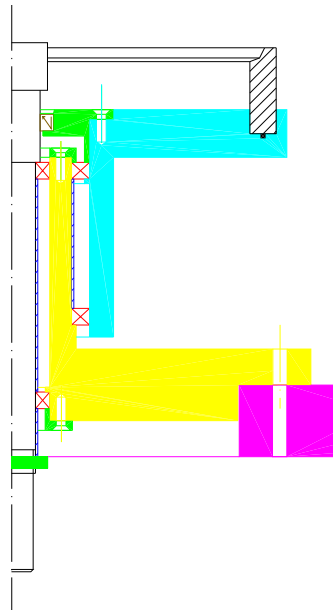


FIG. 7.2 – Dessin des paliers de guidage des pièces tournantes du montage “VKR”. La cuve cylindrique est représentée hachurée. La pièce représentée en violet est la platine en duralumin qui soutient l’ensemble. La pièce qui soutient les paliers est marquée en jaune. Les roulements sont marqués par des croix en trait rouge. Le “couvercle” qui soutient la cuve de plexiglas est en bleu, et les différentes brides qui assurent le serrage des roulements sont marqués en vert. L’axe de la turbine est blanc, il est situé sur la gauche de la figure.

### 7.2.2 Les moteurs.

Les moteurs utilisés sont du même type que ceux utilisés sur le montage “VKE”, quoique plus petits. (La complexité du montage interdit de toute façon d’installer un système de mise en pression que des moteurs plus puissants rendraient nécessaire). Les moteurs qui entraînent les turbines peuvent fournir un couple nominal de 2.84 N.m en tournant à 25 Hz, et le moteur qui entraîne le cylindre, qui est plus gros, peut fournir un couple nominal de 5.39 N.m. Les moteurs 1 et 2 entraînent respectivement les turbines du haut et du bas, le moteur 3 entraîne le cylindre. Tous trois tournent dans le sens positif lorsque leur arbre, vu de face, tourne dans le sens trigonométrique. Cette convention est la même que celle adoptée dans le montage “VKE”. Ils peuvent être commandés de la même manière que les moteurs du montage “VKE”, et permettent eux aussi une mesure directe par liaison série. Nous n’avons pas vérifié la qualité de la calibration de cette mesure, que nous avons trouvée suffisante dans l’autre montage. Il est possible de leur donner une consigne de couple et de mesurer leur fréquence de rotation par le biais d’entrées/sorties analogiques. C’est cette possibilité qui a été exploitée lors de la campagne de mesure consacrée aux “états intermittents” du chapitre 5.

Pour corriger les couples de friction des différents roulements, nous avons une fois de plus tenté de les obtenir par des mesures *a priori*. Nous avons finalement décidé lors des mesures systématiques de couples de réaliser en chaque point deux mesures, une “utile”, et l’autre sans eau, de façon à pouvoir appliquer en chaque point la correction nécessaire. Nous avons pu nous rendre compte que cette méthode elle-même introduit une erreur, car le couple de friction des roulements de la cuve cylindrique est plus faible lorsque leur graisse est chaude...

### 7.2.3 Les paramètres de contrôle.

Dans l'étude de notre montage expérimental, l'échelle des temps naturelle est la période de rotation du référentiel  $2\pi/\Omega$ , et elle des longueurs le rayon de la cuve  $R_c$ . Nous pouvons reprendre comme échelle des fréquences de rotation

$$f = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2}}$$

en utilisant cette fois les valeurs des fréquences de rotation des turbines mesurées dans le référentiel tournant. Nous pouvons d'ailleurs adapter la définition de l'angle  $\Theta$  de la même manière, afin qu'il exprime désormais le déséquilibre des fréquences de rotation mesurées dans le référentiel tournant. Un choix possible d'échelle des vitesses est alors  $2\pi R_c f$ . Tout ceci nous amène alors à définir le nombre de Rossby et d'Ekman dans chaque configuration comme :

$$\text{Ro} = \frac{2\pi f}{\Omega}, \quad \text{Ek} = \frac{\nu}{\Omega R_c^2}$$

## 7.3 Mesures de vélocimétrie.

Le premier point que nous avons cherché à quantifier est l'influence de la force de Coriolis sur la partie moyenne temporelle de l'écoulement, mesurée dans le référentiel en rotation.

### 7.3.1 Adaptation des arguments dimensionnels.

En reprenant les arguments dimensionnels du chapitre 3, nous voyons que lorsque le référentiel est en rotation

$$\begin{aligned} \frac{v_r(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_r(r', z', t', \Theta, \text{Ro}, \text{Ek}, \{n\}) \\ \frac{v_\theta(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_\theta(r', z', t', \Theta, \text{Ro}, \text{Ek}, \{n\}) \\ \frac{v_z(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_z(r', z', t', \Theta, \text{Ro}, \text{Ek}, \{n\}) \end{aligned}$$

Dans ces expressions, les composantes de la vitesse sont mesurées dans le référentiel en rotation. Nous rappelons que les différentes grandeurs sans dimensions qui interviennent sont définies de la manière suivante :

$$r' = \frac{r}{R_c}, \quad z' = \frac{z}{R_c}, \quad t' = \frac{\Omega t}{2\pi}, \quad \text{Ro} = \frac{2\pi f}{\Omega}, \quad \text{Ek} = \frac{\nu}{\Omega R_c^2}$$

Les  $\{n\}$  sont comme au chapitre 3 les nombres sans dimension qui définissent la forme géométrique du montage. Nous rappelons que  $\Omega$  est la pulsation de rotation du référentiel, et que  $f$  et  $\Theta$  sont tels que  $(f_1, f_2) = (\sqrt{2} \cos(\Theta) f, \sqrt{2} \sin(\Theta) f)$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont les valeurs des fréquences de rotation des turbines, mesurées dans le référentiel tournant. Nous voyons que les composantes de la vitesse, si elles dépendent toujours de la position dans l'écoulement et du temps, dépendent désormais de la viscosité du fluide par le nombre d'Ekman, et de la rotation du référentiel par le nombre de Rossby.

Dans le cas de mesures effectuées dans un référentiel arrêté, le nombre d'Ekman et le nombre de Rossby sont tous deux infinis. Si nous mettons à part ce cas particulier, les plus grandes

valeurs du nombre d'Ekman que nous avons réalisées au cours de nos mesures ont été obtenues pour  $\Omega = \frac{1}{4} 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Dans ce cas, nous voyons que :

$$\text{Ek} = \frac{10^{-6}}{2\pi 0.25 (0.099)^2} \sim 6.5 \cdot 10^{-5}$$

Nous voyons que dans ce cas les efforts visqueux sont toujours très petits en comparaison des efforts dus à la force de Coriolis. Nous pouvons donc présumer que dans ce cas, l'influence de la valeur exacte du nombre d'Ekman sur les résultats de mesures est faible. Nous pouvons donc probablement considérer qu'en bonne approximation :

$$\begin{aligned} \frac{v_r(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_r(r', z', t', \Theta, \text{Ro}, \{n\}) \\ \frac{v_\theta(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_\theta(r', z', t', \Theta, \text{Ro}, \{n\}) \\ \frac{v_z(r', z', t')}{2\pi f R_c} &= v'_z(r', z', t', \Theta, \text{Ro}, \{n\}) \end{aligned}$$

Nous soulignons par contre que dans ces expressions la dépendance en fonction du nombre de Rossby est *fondamentalement importante*. Le champ de vitesse mesuré pour  $f = 2 \text{ Hz}$ ,  $\Omega = 2 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$  n'a ainsi aucune raison de ressembler à celui mesuré pour  $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $\Omega = 2 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ , donc pour un nombre de Rossby moitié.

### 7.3.2 Protocole de mesure.

Dans notre nouveau montage, il est possible de faire varier indépendamment les fréquences de rotation des trois moteurs. L'espace des paramètres est donc extrêmement vaste, et il nous est matériellement impossible de l'explorer dans son intégralité. Nous avons alors choisi une situation "standard" (turbines "TM60" munies de pales de  $0.2 R_c$ , séparées de  $1.8 R_c$ , tournant en contra-rotation exacte dans une cuve dépourvue d'ailettes), et nous avons mesuré le champ de vitesse moyen de l'écoulement pour les valeurs du nombre de Rossby récapitulées dans le tableau 7.1. Comme les conditions aux limites de l'écoulement restent identiques d'une mesure à l'autre, lorsqu'elles sont vues dans le référentiel en rotation, nous pouvons être sûrs que tout changement entre les différents champs de vitesse ne peut être dû qu'à l'influence de la force de Coriolis.

$\Omega (2\pi \text{ rad.s}^{-1})$	f (Hz)	Ro	Ek
0	2	$\infty$	$\infty$
0.25	4	16	$6.5 \cdot 10^{-5}$
0.5	4	8	$3.2 \cdot 10^{-5}$
0.5	2	4	$3.2 \cdot 10^{-5}$
1	2	2	$1.6 \cdot 10^{-5}$
2	2	1	$1.6 \cdot 10^{-5}$
6	2	1/3	$1.6 \cdot 10^{-5}$
6	1	1/6	$0.8 \cdot 10^{-5}$

TAB. 7.1 – Récapitulatif des valeurs des fréquences de rotation et des valeurs des nombres de Rossby et d'Ekman pour nos mesures.

Nous avons réalisé les mesures de la manière décrite au chapitre 3. La cuve cylindrique était entourée de la contre-cuve parallélépipédique, le programme de tracé de rayons était utilisé pour

préparer les grilles de mesures. La température de l'eau était mesurée régulièrement au long des mesures. Nous avons déduit les valeurs de  $v'_\theta$  et  $v'_z$  dans le référentiel tournant à partir des valeurs  $v_\theta$  et  $v_z$  mesurées dans le référentiel du laboratoire par :

$$\begin{aligned} v'_\theta(r', z') &= \frac{v_\theta - \Omega R_c}{2\pi f R_c} \\ v'_z(r', z') &= \frac{v_z}{2\pi f R_c} \end{aligned}$$

Nous avons ensuite calculé les valeurs de  $v'_r$  en passant par l'intermédiaire d'une fonction de courant poloïdale, de la manière décrite au chapitre 4. Ce sont les valeurs adimensionnelles des composantes de la vitesse ainsi ramenées dans le référentiel tournant que nous allons présenter au cours de cette section.

### 7.3.3 Mesures de l'écoulement moyen en fonction du nombre de Rossby.

Les figures 7.3, 7.4 et 7.5 présentent le résultat des mesures de l'écoulement moyen pour des valeurs du nombre de Rossby égales respectivement à 16, 1 et 1/6. Les résultats des autres mesures ont été déplacés en annexe A, afin d'alléger le texte. Pour l'ensemble de ces mesures, nous voyons que la vitesse adimensionnelle du bord des pales des turbines est égale à 0.925 en haut et à  $-0.925$  en bas, mais que le référentiel est en rotation de plus en plus rapide. La vitesse d'entraînement au niveau de l'extrémité des pales, qui est égale à  $0.925/\text{Ro}$ , vaut suivant les cas 0.058, 0.925 et 5.55.

Si nous passons rapidement en revue les différents champs de vitesse, nous pouvons voir que la force de Coriolis a sur la composante moyenne de notre écoulement un effet très marqué : au fur et à mesure que la fréquence de rotation du référentiel augmente, nous voyons que la cellule de recirculation du haut s'affaiblit très rapidement, puis disparaît. La structure à deux cellules de recirculation de l'écoulement est remplacée par une structure à une cellule de recirculation dès  $\text{Ro} = 2$  environ. Lorsque le nombre de Rossby continue à diminuer, nous voyons sur les graphes que les lignes de niveau de la vitesse azimutales sont de plus en plus verticales dans le cœur de l'écoulement, et que les flèches qui représentent la vitesse dans le plan méridien  $y$  sont de plus en plus alignées avec l'axe du cylindre. Dans les deux cas, nous voyons là la marque d'une forte tendance à la "bi-dimensionnalisation". L'écoulement ne peut bien sûr pas être parfaitement indépendant de la coordonnée  $z'$ , puisque la vitesse axiale  $v'_z$  doit s'annuler au niveau des disques des deux turbines, alors qu'elle est d'ordre 1 dans le cœur de l'écoulement, mais il semble que les zones de variations rapides en fonction de  $z'$  aient été repoussées au voisinage des turbines.

En regardant maintenant plus attentivement les différents champs de vitesse, il est possible de voir que l'écoulement passe par deux régimes successifs lorsque le nombre de Rossby diminue de l'infini à 1/6. Lorsqu'il est assez grand ( $\text{Ro} = 16, 8$  et  $4$ ), nous voyons que l'écoulement possède deux cellules de recirculation, mais que sa structure est déformée par la force de Coriolis. L'effet de celle-ci est double : d'une part, elle éjecte vers la paroi du cylindre le fluide qui a une vitesse azimutale positive dans le référentiel tournant (rotation "cyclonique"), et elle ramène vers l'axe le fluide dont la vitesse azimutale est négative ("anti-cyclonique"). D'autre part, elle accélère dans la direction azimutale le fluide qui a un mouvement rentrant, et ralentit le fluide qui a un mouvement sortant. Au fur et à mesure que le nombre de Rossby diminue, nous voyons ainsi la force de Coriolis empêcher progressivement la turbine du haut, qui est en rotation anti-cyclonique, d'expulser le fluide vers la paroi, et aider la cellule de recirculation du bas, qui est elle en rotation cyclonique, à prendre de l'importance. De même, nous voyons qu'en sortie des pales des turbines, où la vitesse radiale est sortante, la vitesse azimutale du fluide est biaisée vers

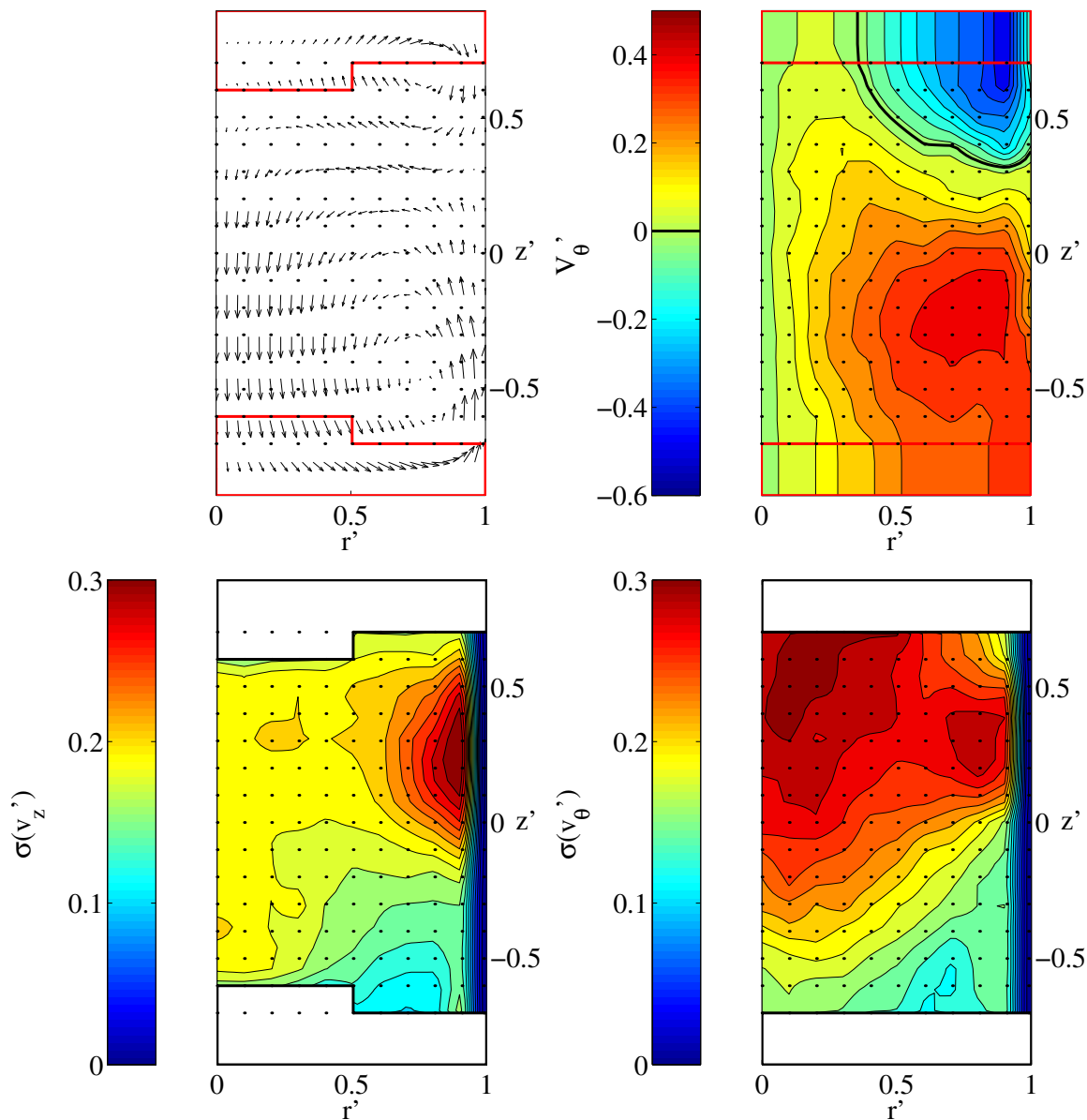


FIG. 7.3 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 16$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 4$  Hz,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.50$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.

les valeurs négatives, alors que le fluide qui arrive sur l'axe dans le milieu de l'écoulement a une vitesse azimutale de plus en plus positive.

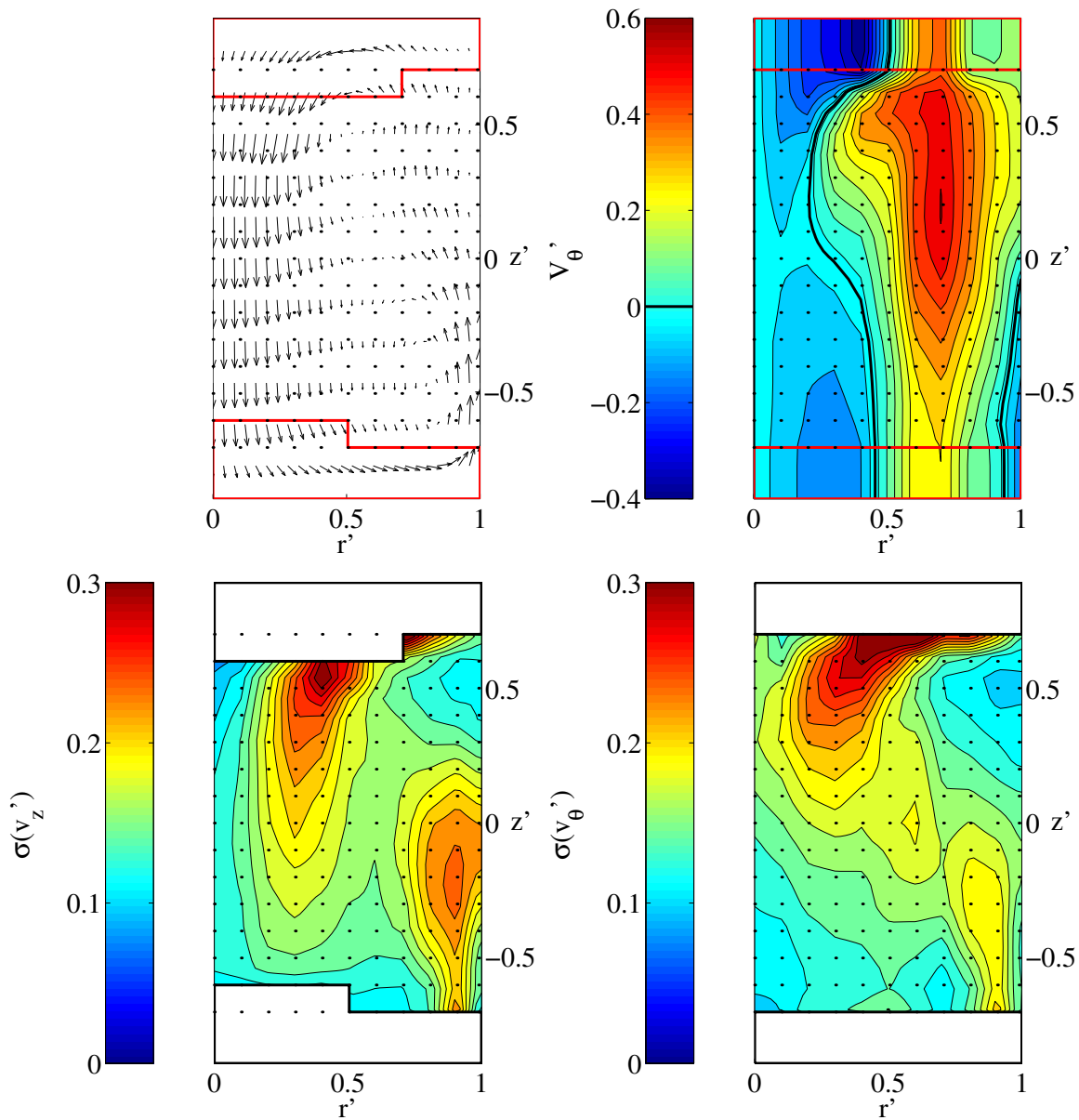


FIG. 7.4 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 1$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 2 \text{ Hz}$ ,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 2 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.90$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.

Lorsque maintenant le nombre de Rossby augmente en partant des petites valeurs, ( $Ro = 1/6, 1/3$  et  $1$ ), nous voyons que nous sommes dans la situation opposée, où l'écoulement est

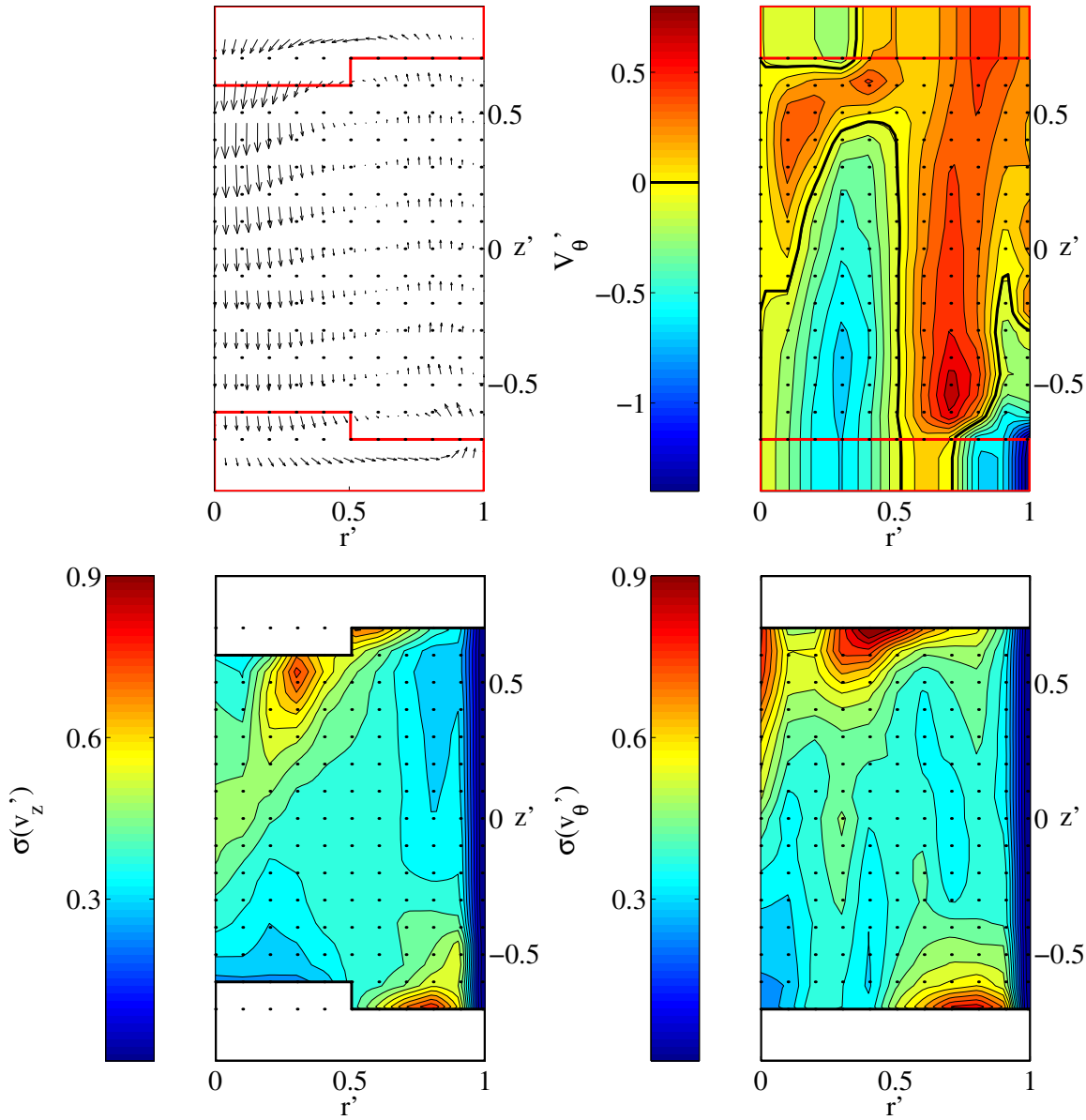


FIG. 7.5 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 1/6$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 1$  Hz,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 6 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $2.40$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.

principalement déterminé par la force de Coriolis, mais est perturbé par l'influence croissante des termes non-linéaires des équations du mouvement. Nous voyons ainsi que, lorsque le nombre

de Rossby est très petit, le champ de vitesse moyen de l'écoulement dépend peu de  $z'$  dans le cœur du fluide, comme cela est attendu par le théorème de Taylor-Proudman. Nous nous heurtons cependant au problème classique de l'hydrodynamique en référentiel tournant, qui est précisément de déterminer la forme que l'écoulement peut adopter pour être invariant en  $z'$ , puisque ses conditions aux limites ne le sont pas. D'habitude, ce problème est résolu en étudiant séparément la forme de l'écoulement dans les couches limites qui se développent sur les bords du montage. Le nombre d'Ekman construit à partir de l'épaisseur de ces couches limites est alors d'ordre 1, la valeur du nombre de Rossby restant inchangée. Dans ces conditions, l'écoulement dans les couches limites est défini par un équilibre entre efforts visqueux et force de Coriolis, et est donc solution d'équations de Navier-Stokes simplifiées, qui sont privées de leur terme non-linéaire. Il est alors possible de résoudre ces équations séparément dans les différentes couches limites et dans le cœur de l'écoulement, et d'obtenir la solution du problème complet en raccordant les solutions partielles. Dans notre cas, cette approche ne peut pas s'appliquer, puisque le forçage est assuré de façon inertielle par les pales des turbines. Le nombre d'Ekman que nous pourrions définir avec cette échelle de taille n'est en fait relevé que d'un facteur quelques centaines, et reste donc très petit. Au voisinage des turbines, notre écoulement reste donc déterminé par un équilibre entre la force de Coriolis et les termes non-linéaires traduisant l'inertie des particules fluides. Cet équilibre a été peu étudié au voisinage de parois, et nous ne pouvons donc bâtir que des arguments qualitatifs pour expliquer l'allure générale de l'écoulement. Au voisinage de la turbine du haut, les mesures de couples relatées dans la section suivante nous montrent que les pales poussent l'écoulement dans la direction cyclonique. Pour que la force de Coriolis équilibre cette poussée, il faut que la vitesse radiale du fluide soit rentrante, et c'est en effet ce que nous observons sur la figure 7.5. De façon symétrique, nous voyons que la vitesse radiale du fluide doit être positive au voisinage de la turbine du bas pour que la force de Coriolis équilibre la poussée des pales, qui est cette fois anti-cyclonique. De façon paradoxale, nous voyons ensuite que ces mouvements radiaux sont tels que la force de Coriolis accélère alors les particules de fluide dans la direction anti-cyclonique au voisinage de la turbine du haut, et cyclonique près de la turbine du bas, ce qui est effectivement observé sur la figure 7.5. L'effet de la force de Coriolis est tel que les turbines produisent un mouvement azimutal du fluide qui va en sens contraire de leur rotation !

#### 7.3.4 Etude du cœur de l'écoulement moyen à petit nombre de Rossby.

Si nous nous intéressons maintenant de plus près au champ de vitesse moyen dans le cœur de l'écoulement, nous pouvons voir qu'il existe malgré le théorème de Taylor-Proudman des régions, certes localisées, où il peut varier assez rapidement en fonction de  $z'$ . Dans le cas des composantes de la vitesse poloïdale, l'étude de ces variations est compliquée par la présence de composantes non nulles du gradient de pression. Dans le cas de la vitesse azimutale, par contre, l'axisymétrie du champ de vitesse moyen de l'écoulement fait que la composante azimutale du gradient de pression moyen s'annule. Les régions de variation rapide de  $v'_\theta$  nous donnent donc une occasion d'étudier (un peu) plus finement l'équilibre entre la force de Coriolis et les termes non-linéaires des équations du mouvement. Si nous prenons la moyenne temporelle de la composante azimutale de l'équation 7.1, après en avoir négligé le terme visqueux, nous obtenons que le champ de vitesse moyen de l'écoulement vérifie l'équation :

$$\text{Ro}(\overline{v' \cdot \text{grad}' v'})_\theta = -2\overline{v'_r}$$

Cette expression signifie que la valeur moyenne de l'accélération dans la direction azimutale ressentie par les particules qui passent en un point donné de l'écoulement est reliée à la valeur



moyenne de la vitesse radiale en ce point. Lorsque le nombre de Rossby est très petit, nous voyons qu'une vitesse radiale d'ordre 1 donne lieu à une très forte accélération des particules dans la direction azimutale par le biais de la force de Coriolis. Lorsque au contraire le nombre de Rossby est grand, nous voyons que la force de Coriolis seule ne peut provoquer qu'une faible accélération des particules dans la direction azimutale. Nous pouvons alors utiliser une fois de plus la décomposition de Reynolds de l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante. Nous obtenons alors :

$$\text{Ro} \left[ \overline{(\vec{v}' \cdot \text{grad}' \vec{v}')}_\theta + \overline{(\tilde{v}' \cdot \text{grad}' \tilde{v}')}_\theta \right] = -2\overline{v'_r} \quad (7.3)$$

Cette expression nous donne une meilleure vision des équilibres possibles en fonction de la valeur du nombre de Rossby. Lorsqu'il est petit, nous voyons qu'une valeur d'ordre 1 de la vitesse radiale moyenne est équilibrée par une accélération moyenne d'ordre  $1/\text{Ro}$  dans la direction azimutale. Cette accélération très forte peut être soit reliée à l'écoulement moyen, soit à une tension de Reynolds. Lorsque le nombre de Rossby est grand, nous voyons qu'équilibrer la tension de Reynolds directement avec l'écoulement moyen est en fait la seule manière de vérifier l'équation sans que les vitesses radiales ne deviennent déraisonnables. La figure 7.6 représente les distributions en

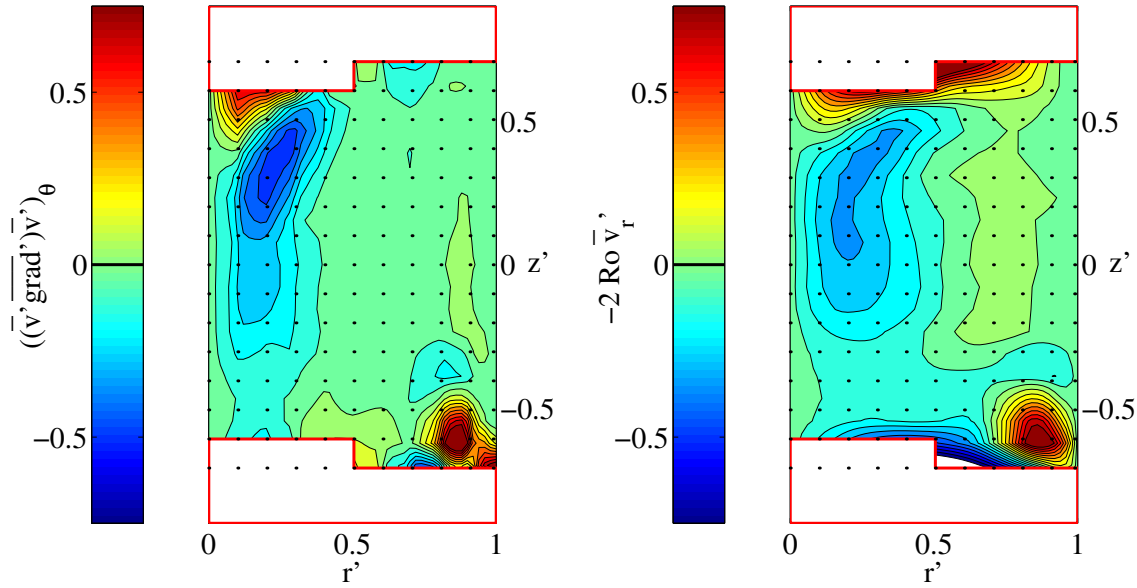


FIG. 7.6 – Termes associés à l'écoulement moyen dans l'équation 7.3, pour  $\text{Ro} = 1/6$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. a) Termes provenant de l'écoulement moyen dans l'expression de la dérivée particulaire de la vitesse azimutale. b) Membre de droite de l'équation 7.3, égal à  $-2\text{Ro}\overline{v'_r}$

espace des deux termes associés à l'écoulement moyen dans l'équation 7.3, estimées à partir de nos mesures de vélocimétrie à  $\text{Ro} = 1/6$ . La mesure de la tension de Reynolds, qui est délicate, n'a malheureusement pas été effectuée. Nous voyons malgré cela que les deux graphes sont très semblables. Les grandeurs qu'ils représentent varient sensiblement dans la même gamme, et sont distribuées de manières très semblables. Elles sont généralement du même signe, et atteignent leurs valeurs extrémales en des points très proches, situés près des régions où  $v'_\theta$  connaît des variations rapides. Nous pouvons donc considérer que le cœur de l'écoulement à  $\text{Ro} = 1/6$  se

trouve à un bon degré d'approximation dans l'équilibre entre force de Coriolis et termes d'inertie décrit par l'équation 7.3. Nous avons vérifié que les distributions spatiales de ces deux termes restent semblables jusqu'aux alentours de  $Ro = 1$ . Au-delà de cette valeur, l'équilibre se fait entre la tension de Reynolds et le terme dû à l'écoulement moyen, et non plus avec la force de Coriolis.

### 7.3.5 Grandeurs statistiques de l'écoulement en fonction du nombre de Rossby.

Evolution des valeurs moyennes des composantes de la vitesse.

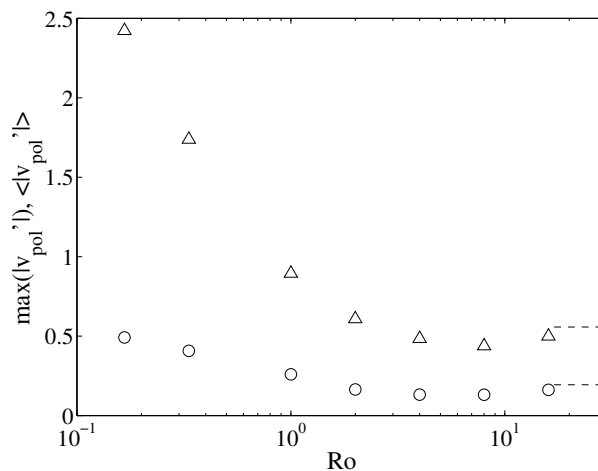


FIG. 7.7 – Valeurs maximales et moyennes de la norme de la vitesse poloïdale de l'écoulement de contra-rotation en fonction du nombre de Rossby. Les  $\Delta$  (resp.  $\circ$ ) représentent les valeurs maximales (resp. moyennes sur le volume mesuré). Les traits pointillés sur le bord de droite marquent les valeurs obtenues en contra-rotation dans le référentiel fixe ( $Ro = \infty$ ). Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l'une de l'autre. Toutes les grandeurs représentées sont adimensionnelles.

Nous nous sommes jusqu'ici attachés à décrire la distribution spatiale des différentes composantes de la vitesse. Nous allons maintenant décrire brièvement l'évolution de leurs amplitudes adimensionnelles en fonction du nombre de Rossby. Nous avons représenté en figure 7.7 les valeurs maximales et moyennées sur le volume mesuré de la norme de la vitesse poloïdale moyenne, en fonction du nombre de Rossby. Les évolutions de ces deux grandeurs sont assez similaires. En partant des grandes valeurs du nombre de Rossby (les valeurs pour  $Ro = \infty$  sont marquées par des traits pointillés sur le bord droit de la figure), nous voyons que toutes deux commencent par décroître légèrement, jusqu'aux alentours de  $Ro = 8$ , puis réaugmentent lorsque  $Ro$  continue à diminuer. La courbe qui représente la valeur moyennée sur le volume mesuré semble avoir un point d'inflexion pour  $Ro$  compris entre  $1/3$  et  $1$ . Nous n'avons pas pu réaliser de mesures à des nombres de Rossby suffisamment faibles pour pouvoir dire avec certitude si cette valeur tend vers une limite finie, mais ce comportement semble plausible. La valeur de la vitesse poloïdale maximale rencontrée sur le volume mesuré semble elle continuer à augmenter, et la courbe ne présente pas de point d'inflexion. Là encore, nous ne pouvons pas affirmer que cette augmentation se poursuit dans la limite des très petits nombres de Rossby, mais ce comportement paraît plausible. D'une certaine manière, nous voyons donc que l'"efficacité" du système d'entraînement

du fluide augmente lorsque le nombre de Rossby devient petit, puisque le rapport de la vitesse poloïdale maximale par la vitesse du bord des pales *mesurée dans le référentiel tournant* devient alors de plus en plus élevé. Le rapport de la vitesse poloïdale moyenne par la vitesse du bord des pales semble lui saturer.

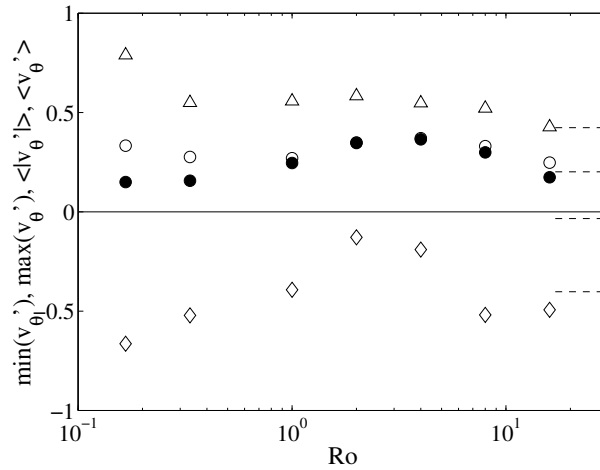


FIG. 7.8 – Valeurs extrémales et moyennes de la vitesse azimutale de l’écoulement de contra-rotation en fonction du nombre de Rossby. Les  $\Delta$  (resp.  $\bullet$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$ ) représentent les valeurs maximales (resp. moyennes sur le volume mesuré, moyennes sur le volume mesuré en norme, minimales). Les traits pointillés sur le bord de droite marquent les valeurs obtenues en contra-rotation dans le référentiel fixe ( $Ro = \infty$ ). Mesures réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l’une de l’autre. Toutes les grandeurs représentées sont adimensionnelles.

De façon similaire, nous avons représenté en figure 7.8 les valeurs extrémales de la vitesse azimutale, ainsi que les valeurs moyennées sur le volume mesuré de sa valeur et de sa norme, en fonction du nombre de Rossby. Nous voyons que la plupart des courbes connaissent maintenant deux extréma au lieu d’un seul. Ainsi, lorsque le nombre de Rossby commence à diminuer en partant de  $+\infty$ , la valeur maximale de la vitesse azimutale rencontrée dans le volume de mesure augmente légèrement, jusqu’en  $Ro = 2$ . Là, elle commence à décroître, et connaît un minimum entre  $Ro = 1$  et  $Ro = 1/3$ . Lorsque le nombre de Rossby continue à diminuer, elle réaugmente. Si nos données ne permettent pas d’affirmer que cette augmentation se poursuit indéfiniment, elles ne permettent pas non plus d’exclure cette possibilité. La valeur la plus négative de la vitesse rencontrée dans le volume mesuré connaît une évolution légèrement différente. En partant des grandes valeurs du nombre de Rossby, elle commence par devenir plus négative, avant de s’effondrer pour  $Ro = 8$  et  $Ro = 4$ . Pour ces valeurs, il est possible que les zones où la vitesse azimutale est très négative aient été déplacées vers les pales des turbines, et qu’il ne soit pas possible de les observer. Pour  $Ro < 1$ , il est possible d’observer des valeurs de plus en plus négatives de la vitesse azimutale dans le volume de mesure. Là encore, le comportement précis en  $Ro \rightarrow 0$  ne peut pas être déduit de nos données. Les deux dernières courbes sont complémentaires, et représentent l’évolution de la valeur moyenne de la vitesse azimutale sur le volume, ainsi que l’évolution de la valeur moyenne de sa norme. Pour  $Ro = \infty$ , la valeur moyenne de la vitesse azimutale est très proche de 0. Ceci est attendu puisque, l’écoulement étant alors presque invariant par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ , les zones où la vitesse azimutale est négative sont symétriques des zones où elle est positive. La valeur moyenne de la norme de la vitesse azimutale est elle très

nettement différente de 0. Pour  $Ro = 16$ , les deux valeurs sont devenues très semblables. La valeur moyenne de la norme n'a que peu varié, mais la valeur moyenne a connu un saut très net. Ceci montre que les vitesses azimutales sont restées sensiblement du même ordre de grandeur dans l'écoulement, mais que les zones où elles sont négatives ont très fortement diminué en étendue. Nous avons déjà constaté ce fait lors de l'étude qualitative des champs de vitesses. Dans une gamme de nombre de Rossby qui s'étend alors de  $Ro = 16$  à 1, les courbes qui représentent les deux valeurs moyennes restent sensiblement confondues, ce qui montre que les zones où la vitesse azimutale est négative sont très peu étendues dans l'écoulement. Lorsque  $Ro$  devient inférieur à 1, par contre, nous voyons que les deux courbes se séparent assez nettement. La moyenne de la norme de la vitesse reprend une augmentation assez marquée, là où la moyenne décroît ou stagne. Dans ce régime les zones où la vitesse azimutale est négative reprennent donc de l'importance, et la valeur moyenne de la vitesse azimutale sur ces zones augmente sensiblement aussi rapidement que celle sur les zones où elle est positive. Ceci correspond d'ailleurs assez bien avec l'observation que nous avons déjà faite que la gamme des vitesses azimutales observées dans l'écoulement s'étend très sensiblement pour ces valeurs du nombre de Rossby. Nous constatons donc là encore une augmentation de l'“efficacité” du système d'entraînement du fluide lorsque le nombre de Rossby devient petit, qui se traduit par une augmentation de l'étendue de la gamme balayée par la vitesse azimutale adimensionnelle. La saturation de la valeur moyenne de la vitesse azimutale adimensionnelle est moins marquée que celle de la valeur moyenne de la vitesse axiale adimensionnelle.

#### Evolution des fluctuations de la vitesse.

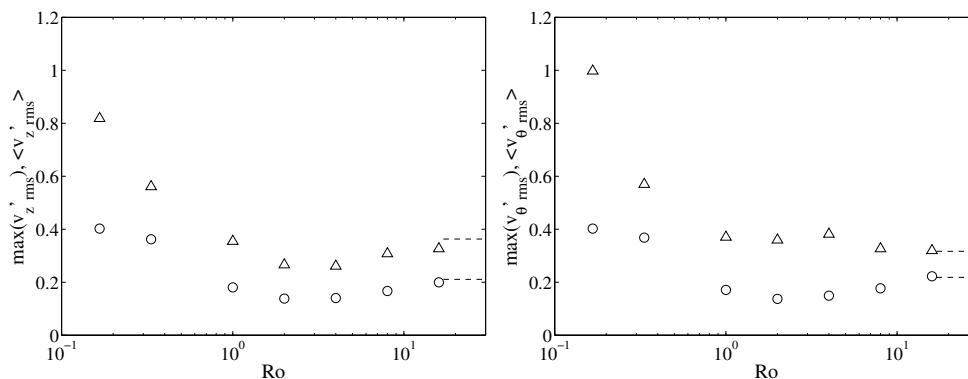


FIG. 7.9 – Valeurs extrémales et moyennes de l'amplitude *rms* des fluctuations de vitesse dans l'écoulement de contra-rotation en fonction du nombre de Rossby. Les  $\triangle$  (resp.  $\circ$ ) représentent les valeurs maximales (resp. moyennes sur le volume mesuré). Les traits pointillés sur le bord de droite marquent les valeurs obtenues en contra-rotation dans le référentiel fixe ( $Ro = \infty$ ). Mesures réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l'une de l'autre. Toutes les grandeurs représentées sont adimensionnelles. a) Amplitude *rms* des fluctuations de vitesse axiale. b) Amplitude *rms* des fluctuations de vitesse azimutale.

Nous avons représenté en figure 7.9a et 7.9b les valeurs maximales et moyennées sur le volume mesuré de l'amplitude *rms* des fluctuations des composantes axiale et azimutale de la vitesse. Nous remarquons immédiatement que les évolutions de ces grandeurs pour les deux composantes de la vitesse sont très semblables. Dans les deux cas, en partant de  $Ro = \infty$ , l'amplitude *rms*

moyennée des fluctuations commence par décroître légèrement, connaît un minimum aux alentours de  $Ro = 2$ , un point d'inflexion entre  $Ro = 1$  et  $Ro = 1/3$ , et semble saturer pour une valeur proche de 0.4 lorsque  $Ro$  tend vers 0. Les comportements des amplitudes *rms* maximales pour  $Ro > 1$  n'ont pas de tendance très affirmée, et sont peut-être moins nettement semblables. Lorsque  $Ro$  devient inférieur à 1, nous voyons en tout cas que l'amplitude *rms* des deux composantes de la vitesse peut atteindre des valeurs de plus en plus élevées, qui ne semblent pas devoir saturer. Les fluctuations de la vitesse azimutale semblent pouvoir être plus intenses que celles de la vitesse axiale, puisqu'elles peuvent atteindre une amplitude *rms* adimensionnelle de 1 environ, au lieu de 0.8.

### 7.3.6 Conclusion des mesures de vélocimétrie.

En résumé de cette section, nous rappellerons les points suivants :

- L'étude par vélocimétrie laser doppler du champ de vitesse moyen d'un écoulement de von Kármán mis en rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des turbines fait apparaître un effet très marqué de la force de Coriolis, qui se manifeste notamment par une bi-dimensionnalisation de l'écoulement moyen.
- Lorsque le nombre de Rossby de l'écoulement est grand, il est possible dans une certaine mesure d'interpréter l'effet de la force de Coriolis comme une perturbation imposée à l'écoulement obtenu en l'absence de rotation. A petit nombre de Rossby, il semble au contraire plus conforme à la réalité de considérer l'écoulement comme un écoulement dominé par la force de Coriolis, mais perturbé par les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes. Le changement de régime se produit entre  $Ro = 4$  et  $Ro = 2$ .
- A petit nombre de Rossby, les composantes de la vitesse moyenne ne varient que faiblement en fonction de la coordonnée axiale  $z'$  dans le cœur de l'écoulement. Ce n'est par contre pas vrai au voisinage des turbines, où l'écoulement est le produit d'un équilibre entre le gradient de pression au voisinage de la paroi des pales, les termes non-linéaires des équations du mouvement, et la force de Coriolis.
- Contrairement à ce qui se produit dans les situations "classiques", la taille caractéristique de notre mécanisme d'entraînement est fixée. Il n'est donc possible ni de traiter la mise en mouvement du fluide au voisinage des turbines par une approximation de couche limite, ni de négliger les effets non-linéaires devant les effets visqueux dans cette zone.
- Pour les petits nombres de Rossby, nous avons vérifié avec une assez bonne approximation sur une composante de la vitesse moyenne que l'écoulement est le produit d'un équilibre entre les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes et la force de Coriolis. Ceci signifie que la force de Coriolis agit sur l'écoulement en couplant les composantes horizontales de la vitesse à leurs dérivées le long des lignes de courant. La vitesse azimutale décroîtra ainsi le long des lignes de courant dans les régions où la vitesse radiale est positive, et la vitesse radiale aura tendance à augmenter le long des lignes de courant dans les régions où la vitesse azimutale est positive. Cette dernière tendance devra bien sûr être composée avec une contribution complémentaire provenant du terme de pression. Ces variations le long des lignes de courant seront d'autant plus violentes que le nombre de Rossby sera petit.
- Nous avons pu constater sur un certain nombre de grandeurs statistiques associées à l'écoulement que la force de Coriolis semble avoir pour effet de faire augmenter la gamme sur laquelle varient les composantes de la vitesse ainsi que leurs fluctuations. Les valeurs moyennées sur le volume de l'écoulement de ces différentes grandeurs semblent cependant avoir des limites finies lorsque le nombre de Rossby devient petit. Il semble donc que l'écoulement devienne le siège de comportements de plus en plus intenses, mais qui sont restreints à une fraction du volume qui

diminue en proportion. Nous ne pouvons malheureusement pas être catégoriques sur ces points, qui nécessiteraient une étude plus approfondie à petit nombre de Rossby.

– Et pourtant, le théorème de Taylor-Proudman marche !

## 7.4 Mesures des couples, bilan de moment cinétique

### 7.4.1 Adaptation des arguments dimensionnels.

En reprenant les arguments dimensionnels du chapitre 3, nous voyons que lorsque le référentiel est en rotation

$$\frac{\Gamma_1(t')}{\rho R_c^3 (2\pi f R_c)^2} = C_1(t', \Theta, \text{Ro}, \text{Ek}, \{n\})$$

$$\frac{\Gamma_2(t')}{\rho R_c^3 (2\pi f R_c)^2} = C_2(t', \Theta, \text{Ro}, \text{Ek}, \{n\})$$

Nous rappelons que les différentes grandeurs sans dimensions qui interviennent sont définies de la manière suivante :

$$t' = \frac{\Omega t}{2\pi}, \quad \text{Ro} = \frac{2\pi f}{\Omega}, \quad \text{Ek} = \frac{\nu}{\Omega R_c^2}$$

Les  $\{n\}$  sont comme au chapitre 3 les nombres sans dimension qui définissent la forme géométrique du montage. Nous rappelons enfin que  $\Omega$  est la pulsation de rotation du référentiel, et que  $f$  et  $\Theta$  sont tels que  $(f_1, f_2) = (\sqrt{2} \cos(\Theta) f, \sqrt{2} \sin(\Theta) f)$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont les valeurs des fréquences de rotation des turbines, mesurées dans le référentiel tournant. Comme nous sommes encore dans le régime où les efforts visqueux sont très petits en comparaison des efforts dus à la force de Coriolis, nous pouvons présumer que l'influence de la valeur exacte du nombre d'Ekman sur les résultats de mesures est faible. Nous pouvons donc probablement considérer qu'en bonne approximation :

$$\frac{\Gamma_1(t')}{\rho R_c^3 (2\pi f R_c)^2} = C_1(t', \Theta, \text{Ro}, \{n\})$$

$$\frac{\Gamma_2(t')}{\rho R_c^3 (2\pi f R_c)^2} = C_2(t', \Theta, \text{Ro}, \{n\})$$

### 7.4.2 Dépendance des valeurs moyennes des couples des moteurs en fonction du nombre de Rossby.

Nous avons représenté en figure 7.10 le couple **dimensionnel** fourni au fluide par la turbine 2, en fonction de la fréquence de rotation de celle-ci, lorsque la fréquence de rotation du référentiel augmente. Nous avons choisi de ne représenter que le couple fourni par cette turbine pour ne pas surcharger le graphe. Le couple fourni par la turbine 1 est toujours très proche, mais sa mesure est légèrement moins précise. (Le sens de rotation du moteur 2 dans le référentiel du laboratoire reste constant sur l'ensemble des mesures. Il est donc plus facile de corriger l'effet des couples de friction parasites sur ce moteur que sur le moteur 1, dont le sens de rotation change en  $\text{Ro} = 1$ ). L'effet de la rotation du référentiel sur l'écoulement est une fois de plus bien visible. Aux petites fréquences de rotation du référentiel, la dépendance du couple en fonction de la fréquence de rotation des turbines est assez conforme à celle observée au cours du chapitre 4. Elle est sensiblement quadratique, et les courbes qui représentent les couples sont convexes. Lorsque la

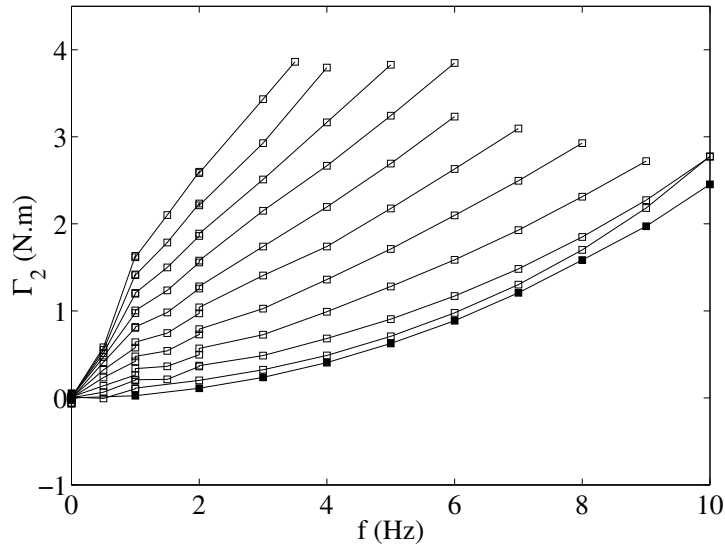


FIG. 7.10 – Valeurs moyennes temporelles du couple **dimensionnel** fourni par la turbine du bas au fluide, en fonction de sa fréquence de rotation mesurée dans le référentiel tournant, pour des fréquences de rotation du référentiel allant de 0 Hz à 10 Hz. Les symboles pleins marquent les mesures effectuées dans un référentiel au repos. Les traits relient les points correspondant aux séries de mesures réalisées pour une même fréquence de rotation du référentiel. Les séries de mesures correspondant aux fréquences de rotation du référentiel les plus faibles (resp. élevées) sont situées dans le bas (resp. haut) de la figure. Ce décalage est naturel, il n'a pas été introduit artificiellement. Entre deux séries de mesures successives, la fréquence de rotation du référentiel augmente de 1 Hz. Les mesures ont été réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l'une de l'autre.

fréquence de rotation du référentiel augmente, les courbes deviennent de moins en moins convexes. Dans la gamme des fréquences de rotation des turbines intermédiaires, ces courbes deviennent des droites, dont la pente et l'ordonnée à l'origine augmentent avec la fréquence de rotation du référentiel.

La figure 7.10 a peut-être été un peu déroutante pour le lecteur : en effet les résultats de mesures de couples qu'elle représente semblent ne pas dépendre quadratiquement de la fréquence de rotation des turbines. Ceci s'explique par le fait, que nous avons déjà souligné, que la dépendance doit être quadratique à *nombre de Rossby fixé*. Comme les courbes de la figure 7.10 représentent les couples fournis par les moteurs en fonction de  $f$ , à  $\Omega$  fixé, elles relient des points mesurés pour des valeurs différentes du nombre de Rossby, et n'ont donc pas de raison d'être quadratiques. La figure 7.11 présente elle les valeurs adimensionnelles du couple fourni par le moteur 2 au fluide, en fonction du nombre de Rossby. Nous voyons que les résultats de mesure que nous avons "mal" représentés en figure 7.10 se placent en réalité sur une courbe très bien définie, lorsqu'ils sont exprimés sous forme adimensionnelle. Pour les grandes valeurs du nombre de Rossby, cette courbe connaît un léger ressaut. Pour aller se raccorder à la valeur mesurée pour  $Ro = \infty$ , elle doit probablement posséder un maximum au-delà de  $Ro = 10$ , mais nous ne pouvons pas l'assurer. Dans la gamme de nombres de Rossby comprise entre  $Ro = 1$  et  $Ro = 0.1$ , la valeur du couple adimensionnel augmente très brusquement. Dans les axes logarithmique de la figure 7.11, la courbe est bien approchée par une droite dont le coefficient directeur est proche de  $-1.26$ . Enfin, pour  $Ro < 0.1$ , cette divergence algébrique semble "limée" par un autre comportement.

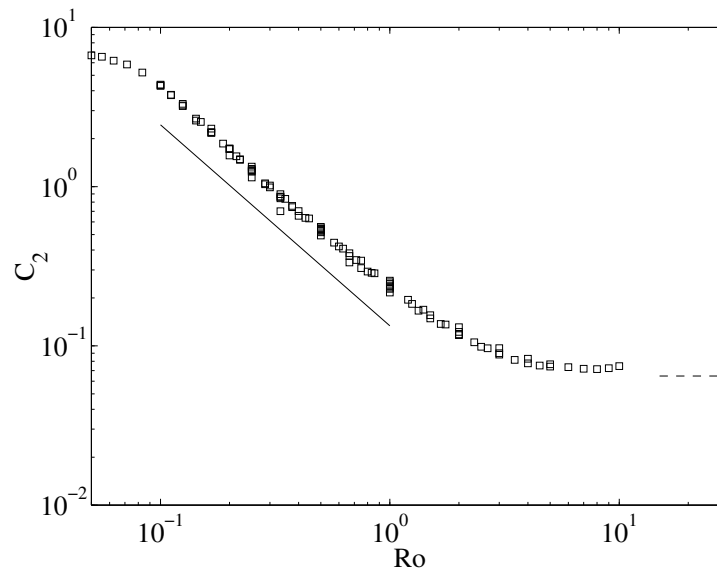


FIG. 7.11 – Valeurs moyennes temporelles du couple adimensionnel fourni par le moteur 2 au fluide, en fonction du nombre de Rossby de l’écoulement. Le trait pointillé sur le bord de droite marque la valeur obtenue en contra-rotation dans le référentiel fixe ( $Ro = \infty$ ). Le trait fin marque lui l’ajustement linéaire des points du graphe. Cet ajustement correspond à un exposant  $-1.26 \pm 0.1$ , il a été obtenu sur la plage  $Ro \in [0.1; 1]$  avec un coefficient de détermination de 0.998. Les mesures ont été réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l’une de l’autre.

Nous avons vérifié que la divergence est aussi présente sur les résultats de mesure du couple fourni par le moteur 1, et qu’elle est là aussi caractérisée par un exposant proche de  $-1.25$ . De même, nous avons vérifié qu’elle n’est pas simplement due à une erreur expérimentale simple. Dans la zone de l’espace des paramètres où elle est franche, les couples fournis par les moteurs sont significativement supérieurs aux couples de friction parasites. Il est possible de faire légèrement varier l’allure de la courbe en jouant sur la correction de ces couples, et notamment d’en éloigner ou d’en rapprocher les points obtenus pour les faibles valeurs de  $f$ . Cependant, l’enveloppe du lieu où les points s’accumulent demeure rectiligne, et l’exposant reste systématiquement proche de  $-1.25$ . Nous n’avons donc pas lieu de considérer que cette divergence est un *artefact*.

Il est plus difficile de trancher en ce qui concerne le changement de comportement en  $Ro = 0.1$ . Les points de mesures correspondants ont en effet été obtenus pour  $f = 0.5$  Hz,  $\Omega = 2\pi \cdot 10$  Hz. Il est visible sur la figure 7.10 que les couples “dimensionnels” obtenus pour ces valeurs des fréquences sont très faibles, du même ordre de grandeur que les couples de friction parasites. (La correction, qui vaut environ 0.3 N.m, représente en effet plus de 60 % des valeurs finalement retenues.) Il est donc difficile, soit de se résoudre à leur faire confiance, soit de les déclarer “inutilisables”. Tout au plus peuvent-ils servir à modérer notre enthousiasme en nous rappelant que toute divergence algébrique, si jolie et inattendue soit-elle, reste suspecte lorsqu’elle est observée sur moins d’une décade dans des données expérimentales. Par ailleurs, il y a lieu de se demander s’ils ne marquent pas le début du “vrai” régime asymptotique à petit nombre de Rossby, qui nous aurait dans ce cas complètement échappé...

Une des conséquences de cette (presque) divergence est que les couples dimensionnels fournis au fluide par des turbines tournant en contra-rotation à  $f$  fixée augmentent (et divergent?)



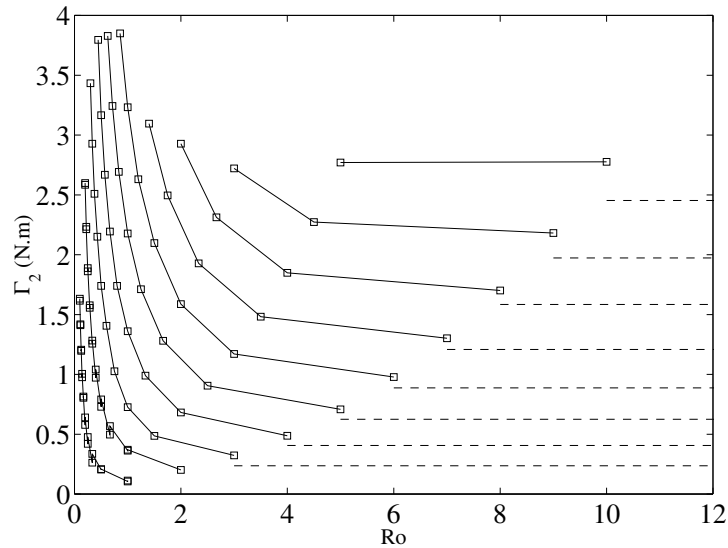


FIG. 7.12 – Valeurs moyennes temporelles du couple **dimensionnel** fourni au fluide par le moteur 2 en fonction du nombre de Rossby, pour différentes valeurs de la fréquence  $f$  de rotation des turbines mesurée dans le référentiel tournant. Les traits pointillés sur la droite de la figure marquent les valeurs mesurées pour un référentiel arrêté ( $Ro = \infty$ ). Les traits relient les points correspondant aux séries de mesures réalisées pour une même valeur de  $f$ . Les séries de mesures correspondant aux valeurs de  $f$  les plus faibles (resp. élevées) sont situées dans en bas à gauche (resp. haut à droite) de la figure. Entre deux séries de mesures successives, la fréquence de rotation des turbines augmente de 1 Hz. Les mesures ont été réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l’une de l’autre.

lorsque la fréquence de rotation du référentiel augmente : il est environ  $10^{1.25}$  fois plus difficile de faire tourner deux turbines en contra-rotation à 1 Hz dans un référentiel tournant à 100 Hz que dans un référentiel tournant à 10 Hz. Ce point apparaît très clairement sur la figure 7.12, qui représente le couple dimensionnel fourni au fluide par le moteur 2 en fonction du nombre de Rossby le long d’un certain nombre de courbes  $f = C^{te}$ . Nous voyons que le long de chaque courbe le couple fourni par le moteur augmente très rapidement lorsque le nombre de Rossby tend vers 0 (référentiel en rotation très rapide).

### 7.4.3 Mécanisme de transport de moment cinétique en référentiel tournant.

L’étude de l’écoulement de von Kármán dans un référentiel en rotation nous a fourni une bonne occasion d’appliquer l’équation intégrale de conservation du moment cinétique présentée au chapitre 6 à un cas dans lequel une force de volume est présente.

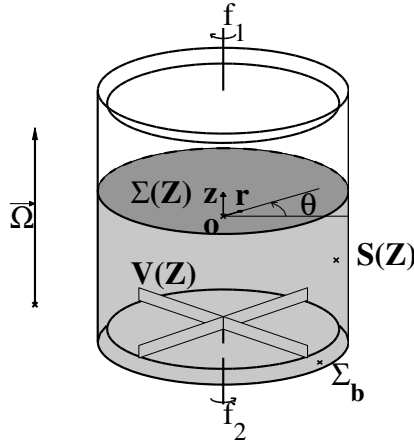


FIG. 7.13 – Schéma du volume de contrôle utilisé.  $\mathbf{V}(Z)$  est fermé en haut par  $\Sigma(Z)$ , en bas par  $\Sigma_b$ , et sur les côtés par  $\mathbf{S}(Z)$ .  $f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences de rotation des turbines, mesurées dans le référentiel tournant. Le vecteur rotation du référentiel,  $\vec{\Omega}$ , est colinéaire à l'axe du cylindre, et pointe dans la direction des  $z$  croissants.

#### Bilan de moment cinétique en référentiel tournant.

L'équation 6.3 du chapitre 6 exprime la conservation du moment cinétique contenu dans le volume  $\mathbf{V}(Z)$  de la figure 7.13 de la manière suivante :

$$\int_{\Sigma(Z)} \rho r V_\theta V_z dS + \int_{\Sigma(Z)} \rho r \overline{v_\theta v_z} dS = \int_{\mathbf{V}(Z)} r \overline{f_\theta} d\tau + \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} r \partial_r V_\theta dS + \mu \int_{\Sigma(Z)} r \partial_z V_\theta dS - \mu \int_{\Sigma_b} r \partial_z V_\theta dS + \Gamma_2 \quad (7.4)$$

La définition des différentes quantités qui interviennent dans cette expression peut être trouvée au chapitre 6, nous ne la rappellerons donc pas ici. Au chapitre 6, nous n'avions considéré que le cas d'écoulements pour lesquels le terme associé aux forces en volume s'annulait. Si maintenant nous nous plaçons dans un référentiel en rotation pour étudier notre écoulement, nous voyons que l'expression 7.4 peut toujours s'appliquer, mais que nous devons prendre en compte l'effet de la force de Coriolis dans le membre de droite. Nous supposons à partir de maintenant que seule la force de Coriolis exerce sur le fluide contenu dans le volume  $\mathbf{V}(Z)$  un moment dynamique non nul. Si le vecteur rotation du référentiel est pris égal à  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ , nous voyons aisément que la valeur moyenne de la composante azimutale de la force de Coriolis qui s'exerce par unité de volume est reliée en chaque point à la valeur moyenne de la vitesse radiale du fluide par :

$$\overline{f_\theta} = -2\Omega \rho V_r$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation de conservation du moment cinétique valide *dans le référentiel en rotation* comme :

$$\int_{\Sigma(Z)} \rho r V_\theta V_z dS + \int_{\Sigma(Z)} \rho r \overline{v_\theta v_z} dS = -2\Omega \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r V_r d\tau + \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} r \partial_r V_\theta dS + \mu \int_{\Sigma(Z)} r \partial_z V_\theta dS - \mu \int_{\Sigma_b} r \partial_z V_\theta dS + \Gamma_2$$

Nous voyons donc que le moment dynamique total appliqué au fluide contenu dans  $\mathbf{V}(Z)$  par la force de Coriolis s'exprime sous la forme :

$$\Gamma_{Coriolis}(Z) = -2\Omega \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho r V_r d\tau \quad (7.5)$$

Il est possible de réarranger cette intégrale pour lui donner une forme plus explicite. Le mouvement de la matière qui constitue la turbine n'a pas de composante radiale. Les seules contribution à la composante azimutale de la force de Coriolis proviennent donc du fluide, dont la masse volumique,  $\rho$  est constante sur le volume de l'écoulement. Comme de plus le champ de vitesse moyen de l'écoulement est axisymétrique, nous obtenons

$$\Gamma_{Coriolis}(Z) = -4\pi\Omega\rho \int_{\mathbf{V}(Z)} r'^2 V_r(r', z') dr' dz'$$

En exploitant le fait que le mouvement du fluide est incompressible, il est alors possible de ramener par des manipulations sans intérêt particulier cette intégrale à la forme :

$$\Gamma_{Coriolis}(Z) = -\rho \int_{\Sigma(Z)} r(\Omega r) V_z dS$$

Nous voyons que cette expression ne fait intervenir que les valeurs de la composante axiale de la vitesse, et ce uniquement sur la surface  $\Sigma(Z)$ . Nous pouvons alors l'incorporer à l'équation de conservation du moment cinétique.

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(Z)} \rho r V_\theta V_z dS + \int_{\Sigma(Z)} \rho r \overline{v_\theta v_z} dS &= - \int_{\Sigma(Z)} \rho r(\Omega r) V_z dS + \\ \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} r \partial_r V_\theta dS + \mu \int_{\Sigma(Z)} r \partial_z V_\theta dS &- \mu \int_{\Sigma_b} r \partial_z V_\theta dS + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Nous pouvons maintenant introduire dans cette équation les expressions adimensionnelles des variables que nous avons définies au début de ce chapitre. La forme adimensionnelle du bilan de moment cinétique en référentiel tournant est alors :

$$\begin{aligned} \text{Ro } C_2 &= \text{Ro} \left[ \int_{\Sigma'(Z')} r' V'_\theta V'_z dS' + \int_{\Sigma'(Z')} r' \overline{v'_\theta v'_z} dS' \right] + \int_{\Sigma'(Z')} r'^2 V'_z dS' \\ &- \text{Ek} \left[ \int_{\mathbf{S}'(Z')} r' \partial_{r'} V'_\theta dS' + \int_{\Sigma'(Z')} r' \partial_{z'} V'_\theta dS' - \int_{\Sigma'_b} r' \partial_{z'} V'_\theta dS' \right] \end{aligned} \quad (7.7)$$

Cette équation signifie que le moment cinétique injecté dans le volume  $\mathbf{V}'(Z)'$  par la turbine du bas peut connaître trois destinées :

- Il peut être emporté par convection dans l'autre partie du volume de l'écoulement, par le biais de l'écoulement moyen (1<sup>er</sup> terme convectif) ou des fluctuations (2<sup>me</sup> terme convectif).
- Il peut servir à combattre l'effet de la force de Coriolis (2<sup>me</sup> terme du membre de droite). La quantité de moment cinétique ainsi "consommée" peut s'exprimer soit en fonction de l'intégrale de la vitesse radiale contenue dans le volume de contrôle, soit en fonction des valeurs de la seule composante axiale de la vitesse moyenne, et ce sur la seule surface  $\Sigma(Z')$ .
- Il peut être transmis par le biais des termes visqueux aux parois de la cuve (1<sup>er</sup> et 3<sup>me</sup> termes visqueux du membre de droite), ou au reste du volume de l'écoulement (2<sup>me</sup> terme visqueux).

Comme nous travaillons toujours dans la limite où le nombre d'Ekman est très petit, nous sommes tentés de supprimer les différents termes visqueux du membre de droite. Nous avons vu au chapitre 6 que le seul terme visqueux qu'il est justifié de supprimer *a priori* est le terme de transport visqueux au travers de  $\Sigma'(Z')$ . Cependant, dans le cas des mesures réalisées en référentiel arrêté, nous avons pu constater qu'il était légitime de les négliger tous. Nous considérerons donc dans la suite de cette section que le nombre d'Ekman est exactement égal à 0, ce qui revient à négliger systématiquement les effets visqueux devant les effets convectifs et les effets de la force de Coriolis. Dans cette approximation, nous voyons que le couple fourni par la turbine 2 est égal à la somme de trois termes :

$$\text{Ro } C_2 = \text{Ro} \left[ \int_{\Sigma'(Z')} r' V'_\theta V'_z dS' + \int_{\Sigma'(Z')} r' \widetilde{v}'_\theta \widetilde{v}'_z dS' \right] + \int_{\Sigma'(Z')} r'^2 V'_z dS' \quad (7.8)$$

Cette expression présente une particularité assez étonnante : le dernier terme du membre de droite est le seul à ne pas être de l'ordre du nombre de Rossby. Ceci lui impose, soit de s'annuler sur chacune des surfaces  $\Sigma'(Z')$  possibles dans la limite des très petits nombres de Rossby, soit d'être compensé par l'un des autres termes, *qui est alors obligé de diverger en  $\text{Ro} \rightarrow 0$* .

**Vérification de la relation de bilan par vélocimétrie dans le cas  $\text{Ro} = 1/6$ .**

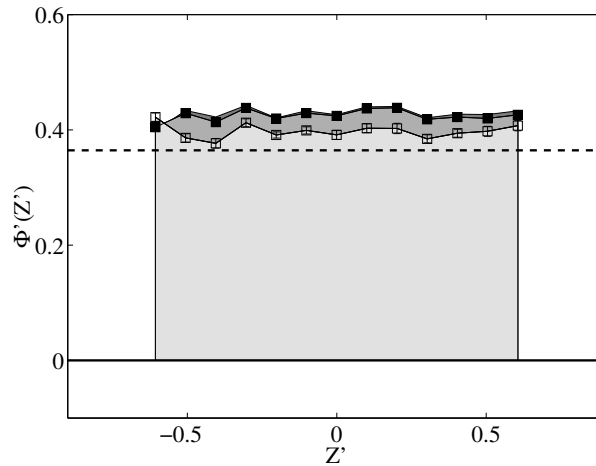


FIG. 7.14 – Membre de droite de l'équation de bilan de moment cinétique 7.8, pour les différentes altitudes  $Z'$  de l'écoulement, à  $\text{Ro} = 1/6$ . Les mesures ont été réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2 R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8 R_c$  l'une de l'autre. La contribution au membre de droite apportée par l'effet de la force de Coriolis sur le fluide contenu dans le volume  $\mathbf{V}(Z')$  est représentée par l'aire gris pâle. Une aire plus foncée représente la contribution du flux convectif dû à l'écoulement moyen, et l'aire la plus sombre représente la contribution du flux convectif dû aux fluctuations. Cette dernière contribution est **négative**, et masque donc une partie de celle apportée par l'écoulement moyen. La courbe en symboles clairs représente la contribution de la force de Coriolis, et la courbe en symboles pleins la somme de toutes les contributions. La ligne en traits pointillés marque la valeur du membre de gauche de l'équation, estimée à partir du couple fourni par le moteur 2.

Afin de vérifier l'équation 7.8, nous avons mesuré par vélocimétrie les différents termes qu'elle fait intervenir. La mesure de la corrélation de fluctuations de vitesses a été réalisée de la manière

décrite au chapitre 6, par des mesures dans les directions “inclinées”. Le résultat de ces mesures est représenté en figure 7.14. Trois points sont immédiatement apparents :

- Nous voyons tout d’abord que l’accord est bon entre les estimations des deux membres de l’équation. Curieusement, le flux de moment cinétique déduit des mesures de vélocimétrie semble nettement surestimé par rapport à la valeur déduite des mesures de couple. Nous n’avons pas d’explication de ce fait.
- Un deuxième point qui est flagrant est que l’équilibre entre les deux membres de l’équation 7.8 semble s’établir entre le terme de force de Coriolis d’une part, et le terme d’injection de moment cinétique par le moteur d’autre part. La part du moment cinétique qui est transportée par l’écoulement lui-même est très faible devant les deux contributions dominantes.
- Enfin, un dernier point curieux est que la contribution au transport de moment cinétique due aux fluctuations de l’écoulement est négative sur toute la hauteur de l’écoulement. Ceci signifie que les fluctuations transportent le moment cinétique à rebours, l’amenant de la turbine du haut, qui joue pourtant le rôle d’un “puit” de moment cinétique, à la turbine du bas, qui en injecte dans l’écoulement. Le transport par l’écoulement moyen se fait lui dans le sens “normal”.

De ces trois points, le deuxième mérite une attention plus particulière, car c’est lui qui met le plus nettement en lumière l’influence de la rotation d’ensemble sur le transport de moment cinétique dans l’écoulement. Il signifie en effet qu’un observateur qui déterminerait le flux de moment cinétique transporté par convection dans l’écoulement à partir de mesures de vélocimétrie réalisées dans le référentiel tournant ne verrait qu’une très faible partie du flux “réel”, obtenu par les mesures des couples fournis par les moteurs. La plus grande partie du transport de moment cinétique se produit donc d’une façon “invisible” dans le référentiel en rotation. Il existe deux points de vue complémentaires pour interpréter cette observation :

- Si nous décidons de continuer à travailler avec les équations qui contiennent le terme de Coriolis sous la forme d’une force de volume, nous pouvons retourner à l’équation 7.5. Cette équation montre que l’expulsion du fluide près de la turbine 2, qui s’accompagne de vitesses radiales positives, “consomme” une grande quantité de moment cinétique. Seule la faible quantité de moment cinétique restante doit alors être transportée par l’écoulement, et le flux convectif de moment cinétique est donc faible. L’inconvénient expérimental de cette approche est qu’elle rend nécessaire la mesure de la vitesse radiale du fluide au niveau des pales des turbines, qui est délicate. La forme adimensionnelle de l’équation de bilan qui correspond à ce point de vue est la suivante :

$$\text{Ro } C_2 = \text{Ro} \left[ \int_{\Sigma'(Z')} r' V'_\theta V'_z dS' + \int_{\Sigma'(Z')} r' \overline{v'_\theta v'_z} dS' \right] + 2 \int_{\mathbf{V}'(Z')} r' V'_r d\tau' \quad (7.9)$$

- Nous avons implicitement adopté un autre point de vue, en écrivant l’équation de bilan sous la forme 7.8. L’idée qui est sous-jacente à cette expression est que le moment cinétique d’une particule, mesuré dans le référentiel tournant, ne représente qu’une faible part de son moment cinétique total, mesuré dans un référentiel au repos, qui est la vraie quantité transportée. Une contribution très importante provient de la rotation d’ensemble du fluide, qui est invisible dans le référentiel tournant. Cette démarche conduit à écrire l’équation de bilan sous la forme suivante

$$\text{Ro } C_2 = \int_{\Sigma'(Z')} \overline{v'_z (r'^2 + \text{Ro } r' v'_\theta)} dS' \quad (7.10)$$

Cette expression fait bien apparaître le moment cinétique total d’une particule fluide comme la somme d’une petite contribution  $\text{Ro } r' v'_\theta$ , qui est le moment cinétique “vu” par un observateur situé dans le référentiel en rotation, et d’une contribution  $r'^2$ , que la rotation du référentiel

dissimule. Nous voyons donc que les écoulements en référentiel tournant mettent en jeu des particules de fluide qui possèdent beaucoup plus de moment cinétique qu'elles n'en ont l'air. Ceci explique pourquoi le terme de flux de moment cinétique associé à la force de Coriolis ne fait intervenir que la composante axiale de la vitesse, et non le produit de la vitesse axiale et de la vitesse azimutale : il traduit juste le fait que l'écoulement axial déplace des particules qui ont un moment cinétique "intrinsèque", dû à la rotation du référentiel.

#### 7.4.4 Conclusion des mesures de couples.

En résumé de cette section, nous rappellerons les points suivants :

- L'étude des couples fournis par les turbines à l'écoulement de contra-rotation lorsque le référentiel est en rotation globale a montré une fois de plus que la force de Coriolis exerce une influence très nette sur l'écoulement.
- Le fait que les mesures du couple adimensionnel fourni par les moteurs au fluide se rassemblent sur une courbe bien définie dont le paramètre est le nombre de Rossby montre que l'écoulement vérifie les arguments dimensionnels que nous avons développés dans une bonne approximation, et nous permet notamment de conclure que l'influence de la valeur du nombre d'Ekman est petite.
- Les mesures font apparaître le fait que les couples adimensionnels fournis par les moteurs sont beaucoup plus élevés lorsque le référentiel est en rotation solide que lorsqu'il est au repos. Il est possible que cette forte augmentation se traduise par une divergence des couples adimensionnels lorsque le nombre de Rossby de l'écoulement tend vers 0. Nous ne pouvons malheureusement pas avoir de certitude sur ce point, car la singularité se produit dans une zone de l'espace des paramètres dans laquelle les mesures sont peu précises. Une étude plus complète de ce phénomène nécessiterait peut-être la mise au point d'un montage différent, dans lequel l'ensemble du système serait monté sur une table tournante, afin de minimiser les couples de frottement parasites.
- Enfin, des mesures de vélocimétrie nous ont permis de vérifier une équation de conservation du moment cinétique prenant en compte l'effet de la force de Coriolis. Ces mesures nous ont permis de mettre en évidence un mécanisme de transport de moment cinétique spécifique, qui est dominant lorsque l'écoulement est en rotation globale. Ce mécanisme peut être interprété de deux façons complémentaires. La première interprétation peut être de dire que le moment cinétique fourni par le moteur du bas est consommé presque intégralement par la circulation méridienne au voisinage d'une des turbines, et restitué au voisinage de l'autre. Le fluide n'a donc qu'un très faible transport à assurer par le mécanisme convectif classique. Le deuxième point de vue peut être de considérer que le moment cinétique est toujours transporté par un mécanisme convectif, mais que les particules de fluide possèdent, en plus du moment cinétique mesuré dans le référentiel en rotation, une contribution "cachée", qu'il est nécessaire de prendre en compte pour équilibrer le bilan.

## 7.5 Conclusion de l'étude de l'écoulement de von Kármán en rotation d'ensemble.

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les résultats de mesures d'un certain nombre de grandeurs hydrodynamiques de l'écoulement de von Kármán de contra-rotation, placé dans un référentiel tournant. Nous rappellerons en conclusion les points suivants :

- Les mesures de vélocimétrie faites dans le régime de contra-rotation exacte pour des fréquences de rotation du référentiel de plus en plus élevées montrent un effet très marqué de la force de Coriolis sur le champ de vitesse moyen. L'invariance de l'écoulement par retournement disparaît

complètement, et ce dès les grandes valeurs du nombre de Rossby. La structure à deux cellules de l'écoulement est remplacée par une structure possédant une seule cellule de recirculation méridienne.

– La mise en rotation du référentiel perturbe de même de façon très marquée la distribution spatiale et l'amplitude *rms* des fluctuations de vitesse. Nous n'avons pas observé de diminution significative de l'amplitude des fluctuations.

– Nos mesures montrent que la tendance à la bi-dimensionnalisation de l'écoulement moyen est robuste, et peut être observée même dans un écoulement forcé par un mécanisme inertiel. Nous rappelons que peu d'études à ce jour rapportaient des résultats obtenus dans ces circonstances. Nous n'avons toujours pas d'explication sur le mécanisme physique qui impose la bi-dimensionnalisation.

– Les valeurs moyennes temporelles des couples fournis par les moteurs sont très affectées par la mise en rotation du référentiel. Les valeurs adimensionnelles des couples semblent augmenter fortement lorsque le nombre de Rossby associé au mécanisme de forçage diminue. Il est possible que cette augmentation prenne la forme d'une divergence algébrique caractérisée par un exposant compris entre  $-1.15$  et  $-1.35$ . La vérification de l'existence de cette divergence, ainsi que la détermination exacte de son exposant, nécessiteront probablement l'usage d'un montage de conception différente.

– Nous avons réinterprété les mesures de couples effectuées dans l'expérience "VKE" dans le régime de contra-rotation déséquilibrée en termes d'un nombre de Rossby construit sur la moitié de la différence des fréquences de rotation des turbines et sur leur fréquence de rotation moyenne. Les résultats de cette étude, que nous n'avons pas présentés ici, sont en excellent accord avec ceux obtenus dans le montage "VKR". Ce fait montre que l'étude des régimes "déséquilibrés" et celle des régimes de contra-rotation exacte placés dans un référentiel en rotation ont en définitive le même objet, et doivent être considérées comme complémentaires. Ceci ne s'applique bien sûr qu'au cas de montages munis de parois cylindriques lisses.

– Enfin, nous avons adapté l'équation de bilan de moment cinétique introduite au chapitre 6 au cas des écoulements en référentiel tournant. Notre étude fait apparaître, en plus des termes déjà existants, un terme supplémentaire dû à la force de Coriolis, qui est dominant à petit nombre de Rossby. Ce terme met en évidence le fait que les particules fluide possèdent, en plus de leur moment cinétique "visible" dans le référentiel tournant, une contribution très importante provenant de la rotation d'ensemble, et qu'il est nécessaire de prendre en compte dans les équations de bilan.

## Chapitre 8

# Conclusion de la partie hydrodynamique.

En conclusion de cette première partie consacrée à la caractérisation hydrodynamique de l'écoulement de von Kármán, nous rappellerons une fois de plus que nous avons pu constater que ses structures à grande échelle peuvent avoir une dynamique non-triviale.

Nous avons vérifié qu'elles étaient dans l'ensemble bien décrites par les arguments dimensionnels, qu'elles respectaient les arguments de symétrie, et qu'elles conservaient le moment cinétique. Nous avons par contre constaté que la forme de l'écoulement et les différents préfacteurs ne pouvaient pas être déterminés *a priori* de manière simple. Ces différents éléments ont donc été mesurés expérimentalement, et ont été exploités au cours du travail sur la magnétohydrodynamique rapporté dans la deuxième partie de ce mémoire.

Nous avons pu voir que l'écoulement n'est pas nécessairement invariant par toutes les opérations de symétrie qui laissent le montage inchangé, et ce *même à très haut nombre de Reynolds*. Notre "bifurcation globale" peut être considérée comme un contre-exemple du phénomène de "restauration au sens statistique des symétries", qui semble pourtant considéré comme universel.

Nous avons par ailleurs montré que le comportement adopté par l'écoulement lorsque le flux de moment cinétique qu'il doit transporter d'une turbine à l'autre est fixé est qualitativement différent de celui qui est observé lorsque la vitesse de rotation des turbines est imposée. Nous avons ainsi pu observer un comportement instationnaire très marqué, et caractérisé par des échelles de temps très lentes.

Enfin, nous avons étudié l'influence sur l'écoulement de la mise en rotation d'ensemble. Nous constatons que l'écoulement a bien une tendance nette à la bi-dimensionnalisation alors qu'il est forcé de manière inertielle. Nous rappelons que les études précédentes rapportaient principalement des résultats obtenus avec un forçage visqueux. Nous ne constatons par contre pas de diminution de la consommation en énergie de l'écoulement dans le régime à faible nombre de Rossby. Nous observons au contraire une très forte augmentation des couples fournis par les moteurs au fluide dans cette gamme de paramètres.





## Deuxième partie

# Etude magnéto-hydrodynamique de l'écoulement de von Kármán.



## Chapitre 9

# Introduction de la partie Magnéto-Hydrodynamique

Dans ce chapitre d'introduction, nous commençons par rappeler le contexte général de notre étude de l'effet dynamo. Après avoir présenté les équations qui décrivent l'évolution du système, nous rappelons brièvement quelques résultats qui concernent l'effet dynamo. Nous présentons ensuite les montages expérimentaux majeurs dédiés à son étude, avec bien sûr un accent particulier sur le montage "Von Kármán Sodium". Pour finir, nous présentons la démarche de notre étude.

### 9.1 Le contexte général

#### 9.1.1 Le champ magnétique terrestre

La Terre, comme de nombreux corps célestes (soleil, étoiles, galaxies), possède un champ magnétique propre. La composante dipolaire de ce champ, qui contient environ 90% de l'énergie magnétique totale, est approximativement alignée avec la direction des pôles géographiques. Le pôle Sud magnétique dérive lentement autour du pôle Nord géographique avec une vitesse de l'ordre du km par an.

Des calculs d'ordre de grandeur ont montré que la source du champ était nécessairement située à l'intérieur du noyau de la Terre, qui est constitué d'une partie liquide, mélange de fer et de nickel, entourant une sphère de fer solide, la graine.

Une caractéristique importante du champ est que le sens du dipôle peut s'inverser. Ces inversions semblent avoir un comportement chaotique, et la durée qui sépare deux d'entre elles peut varier fortement : elles sont intervenues en moyenne au rythme de quatre par million d'années pendant les derniers millions d'années, mais la dernière en date remonte à 780 000 ans. De même, il y a 120 millions d'années, la polarité du champ est restée stable pendant 40 millions d'années. Il arrive enfin que le champ amorce une inversion, puis revienne à son orientation initiale. Ce phénomène porte le nom d'*excursion*. Le mécanisme des inversions reste inconnu des géophysiciens, malgré de nombreuses tentatives d'explication.

#### 9.1.2 La géodynamo

De nombreuses théories ont été proposées au cours de ce siècle pour expliquer l'existence du champ magnétique terrestre. Toutes ont été écartées, soit parce que de nouvelles données expérimentales venaient les contredire, soit parce qu'elles ne correspondaient pas aux ordres de

grandeurs observés. La seule théorie qui n'a à ce jour pas été réfutée est celle qui voit la source du champ terrestre dans *l'effet dynamo* dans le noyau. Le terme d'effet dynamo désigne un mécanisme possible d'amplification d'un champ magnétique par couplage avec un écoulement de fluide conducteur : un champ magnétique crée dans le fluide une force électro-motrice induite. Celle-ci engendre des courants, eux-même à l'origine d'un champ magnétique. Si le champ ainsi engendré est colinéaire au champ incident, il est possible d'observer une croissance de celui-ci. Cette théorie, introduite à l'origine par J. Larmor [77] en 1919 pour expliquer le champ magnétique du soleil, est actuellement considérée comme la plus plausible. Sa vérification expérimentale n'est toutefois intervenue qu'en 2000 [135, 52], pour des raisons que nous verrons par la suite, et les moyens de calcul nécessaires au traitement d'un modèle numérique réaliste de la Terre ne seront pas disponibles avant longtemps. Le nombre d'Ekman du noyau terrestre, qui fixe l'échelle la plus petite sur laquelle le champ de vitesse peut varier, est en effet si faible ( $10^{-15}$  environ) qu'une simulation, pour pouvoir être réalisée sans approximation, devrait recouvrir le noyau dont le rayon est de l'ordre de 3500 kilomètre avec des mailles de côté inférieur à une cinquantaine de mètres.

## 9.2 La magnéto-hydrodynamique

### 9.2.1 Les équations de la Magnéto-Hydrodynamique

#### L'équation d'induction

L'évolution du champ électro-magnétique est décrite par les équations de Maxwell [33, 90, 122, 46] :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (9.1)$$

$$\operatorname{r\otot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.2)$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \quad (9.3)$$

$$\operatorname{r\otot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.4)$$

Dans ces équations,  $\vec{E}$  est le champ électrique,  $\vec{H}$  le champ magnétique,  $\vec{B}$  le champ d'induction magnétique,  $\vec{D}$  le champ d'induction électrique,  $\rho$  la densité de charges et  $\vec{j}$  la densité de courants. A ces équations se rajoute l'expression de la loi d'Ohm dans un conducteur en mouvement :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \rho \vec{v} \quad (9.5)$$

Dans les cas que nous considérerons,  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  et  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ .

Si nous remplaçons maintenant  $\vec{j}$  par son expression dans l'équation 9.4, et si nous prenons le rotationnel de cette équation, nous obtenons l'équation d'induction, qui explicite le couplage entre le champ magnétique et l'écoulement du fluide conducteur :

$$\operatorname{r\otot}(\operatorname{r\otot}(\vec{H})) = \operatorname{r\otot}(\sigma \vec{E}) + \operatorname{r\otot}(\sigma \vec{v} \times \vec{B}) + \operatorname{r\otot}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad (9.6)$$

Cette expression est la forme la plus générale de l'équation d'induction.

Dans une masse de fluide homogène,  $\sigma$ ,  $\mu$  et  $\epsilon$  sont uniformes, et peuvent être "sorties" des opérateurs différentiels. Nous pouvons alors remplacer  $\operatorname{r\otot}(\vec{D})$  par son expression 9.2, et  $\operatorname{r\otot}(\operatorname{r\otot}(\vec{H}))$

par  $\frac{1}{\mu} \text{grad}(\text{div}(\vec{B})) - \frac{1}{\mu} \Delta \vec{B}$ . En utilisant 9.1, nous obtenons alors :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\sigma \vec{\text{rot}}(\vec{v} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B} \quad (9.7)$$

$c$  désigne la célérité des ondes électro-magnétiques dans le milieu considéré. Si nous prenons maintenant une échelle des longueurs  $\mathcal{L}$ , une échelle des vitesses  $\mathcal{V}$ , une échelle des inductions magnétiques  $\mathcal{B}$  et une échelle des temps  $\mathcal{T}$ , nous pouvons exprimer l'équation dans les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$\vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{\mathcal{B}}, \vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{\mathcal{V}}, \vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{\mathcal{L}}, t^* = \frac{t}{\mathcal{T}}$$

Nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{L}^2}{c^2 \mathcal{T}^2} \frac{\partial^2 \vec{B}^*}{\partial t^{*2}} + \frac{\mu\sigma \mathcal{L}^2}{\mathcal{T}} \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t^*} = \mu\sigma \mathcal{V} \mathcal{L} \vec{\text{rot}}^*(\vec{v}^* \times \vec{B}^*) + \Delta^* \vec{B}^* \quad (9.8)$$

Si nous nous intéressons de plus près aux échelles caractéristiques que nous avons introduites, nous voyons que la valeur caractéristique de l'induction magnétique,  $\mathcal{B}$ , n'intervient pas, que les valeurs caractéristiques  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  sont fixées par les conditions expérimentales, mais que le choix de l'échelle de temps caractéristique reste libre. Trois valeurs particulières pour  $\mathcal{T}$  se distinguent tout de même, parce qu'elles apporteraient des simplifications dans les coefficients des différents termes de l'équation d'induction. Nous pourrions choisir  $\mathcal{T} = \mathcal{L}/c$ ,  $\mathcal{T} = \mathcal{L}/\mathcal{V}$  ou  $\mathcal{T} = \mu\sigma \mathcal{L}^2$ . Dans le premier cas, l'échelle de temps est celle des phénomènes de propagation d'ondes électro-magnétiques. Dans le deuxième cas, il s'agit de l'échelle de temps de l'advection d'une perturbation du champ magnétique par le champ de vitesse. Enfin, le troisième cas correspond à l'échelle de temps caractéristique de la diffusion du champ magnétique dans le fluide conducteur. C'est cette échelle de temps, la plus "lente", que nous utiliserons pour étudier le comportement à grande échelle du champ magnétique dans l'écoulement. L'équation d'induction devient alors :

$$\frac{1}{\mu^2 \sigma^2 \mathcal{L}^2 c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}^*}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t^*} = \mu\sigma \mathcal{V} \mathcal{L} \vec{\text{rot}}^*(\vec{v}^* \times \vec{B}^*) + \Delta^* \vec{B}^* \quad (9.9)$$

Nous remarquons alors que le facteur qui multiplie le premier terme est très petit devant l'unité. Avec  $\mu\sigma \simeq 10$  et  $L \simeq 1m$ , qui sont les ordres de grandeurs obtenus pour une expérience de laboratoire utilisant du sodium liquide, nous obtenons  $\frac{1}{\mu^2 \sigma^2 \mathcal{L}^2 c^2} \simeq 10^{-19}$ . Ce terme est donc tout à fait négligeable devant les autres si nous observons la dynamique lente du champ. Nous pouvons définir le nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement comme  $\text{Rm} = \mu\sigma \mathcal{L} \mathcal{V}$ . Comme son homologue le nombre de Reynolds cinétique, il représente le rapport entre l'influence de l'advection et l'influence de la diffusion : si il est grand, l'advection du champ magnétique domine devant la diffusion. En omettant les \*, nous obtenons la forme sous laquelle nous allons dorénavant manipuler l'équation d'induction.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{Rm} \vec{\text{rot}}(\vec{v} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B} \quad (9.10)$$

Nous voyons que, si nous faisons tendre  $\text{Rm}$  vers 0, soit en utilisant un fluide peu conducteur, soit en ayant des vitesses ou des tailles faibles, cette équation se ramène à l'équation de la diffusion. Il est possible d'obtenir une meilleure idée de l'effet du terme  $\vec{\text{rot}}(\vec{v} \times \vec{B})$  en réécrivant l'équation sous sa forme équivalente, valide si l'écoulement est de divergence nulle :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B} = \text{Rm} (\vec{B} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \Delta \vec{B} \quad (9.11)$$

Nous pouvons reconnaître dans les trois premier termes l'advection d'un vecteur passif par un écoulement, et dans le dernier terme la diffusion : le vecteur induction magnétique se comporte comme un élément matériel placé dans l'écoulement, et peut donc être "étiré" ou "écrasé" par lui. Le terme de diffusion, lui, tend toujours à "raccourcir" le vecteur induction magnétique. Plus le facteur  $Rm$  est grand, et plus le terme d'advection est efficace.

### Les équations de Navier-Stokes

L'écoulement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Pour un fluide newtonien et incompressible, nous avons donc :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = -\overline{\text{grad}} P / \rho + \frac{\vec{f}}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} \quad (9.12)$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (9.13)$$

où  $\vec{f}$  représente la résultante des forces volumiques en chaque point.  $\nu$  et  $\rho$  sont respectivement la viscosité cinématique et la masse volumique du fluide considéré.

L'expression de la force exercée par le champ magnétique est donnée par la loi de Laplace :  $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ . L'équation 9.4 nous donne  $\vec{j} = \text{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu})$ . Nous pouvons alors remplacer  $\vec{f}$  par son expression dans 9.12, et obtenir :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = -\overline{\text{grad}} P / \rho + \frac{1}{\rho \mu} \text{rot}(\vec{B}) \times \vec{B} + \nu \Delta \vec{v} \quad (9.14)$$

Nous pouvons maintenant écrire les équations dans les variables adimensionnelles choisies plus haut. En choisissant pour échelle de pression  $\mathcal{P} = \rho \mathcal{V}^2$ , et pour échelle de l'induction magnétique  $\mathcal{B} = \sqrt{\rho \mu \mathcal{V}^2}$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + Rm (\vec{v}^* \cdot \overline{\text{grad}}^*) \vec{v}^* = -Rm \overline{\text{grad}}^* p^* + Rm \text{rot}^* \vec{B}^* \times \vec{B}^* + Pm \Delta^* \vec{v}^* \quad (9.15)$$

$Pm$  est le nombre de Prandtl magnétique du milieu, défini comme  $Rm/Re = \mu \sigma \nu$ , où  $Re$  est le nombre de Reynolds cinétique de l'écoulement. Dans le sodium  $Pm$  est de l'ordre de  $10^{-6}$ , ce qui signifie que les perturbations du champ magnétique diffusent dans l'écoulement beaucoup plus rapidement que les perturbations du champ de vitesse. Nous pouvons donc nous attendre à ce que le champ magnétique présente beaucoup moins de structures localisées que le champ de vitesse.

En conclusion, nous pouvons rappeler les quatre équations de la magnéto-hydrodynamique, écrites dans les variables adimensionnelles :

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + Rm (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B}$	$=$	$Rm (\vec{B} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \Delta \vec{B}$
$\text{div}(\vec{B})$	$=$	$0$
$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + Rm (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}$	$=$	$-Rm \overline{\text{grad}} p + Rm \text{rot} \vec{B} \times \vec{B} + Pm \Delta \vec{v}$
$\text{div}(\vec{v})$	$=$	$0$

### 9.2.2 Le problème de la dynamo cinématique

La solution des équations de la magnéto-hydrodynamique n'est pas connue dans le cas général, et leur traitement numérique est restreint par les capacités de calcul actuelles à l'étude de configurations extrêmement simples.

Il est par contre envisageable de traiter le problème de la *dynamo cinématique*, qui est en fait l'analyse linéaire de stabilité de la solution  $\vec{B} = \vec{0}$ , avec un écoulement fixé. Il y a dans ce cas "effet dynamo" si le champ de vitesse induit une amplification d'une perturbation du champ magnétique.

Cette approche est dite cinématique, car elle ne prend pas en compte la rétro-action du champ magnétique sur l'écoulement, qui assure à terme une amplitude finie du champ. Elle a cependant permis historiquement de tester un grand nombre de champs de vitesses vis à vis de l'effet dynamo, et sert actuellement comme outil de conception pour les expériences.

Comme l'équation qui détermine le mouvement du fluide est dans ce cas ignorée, le problème de la dynamo cinématique s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{Rm} \vec{\text{rot}}(\vec{v} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B} \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0\end{aligned}$$

A ces deux équations, il faut adjoindre des conditions aux limites sur  $\vec{B}$ , qui dépendent de la conductivité électrique et de la perméabilité magnétique de l'enveloppe et du milieu extérieur. Nous sommes alors amenés à chercher les éléments propres de l'opérateur  $\vec{F} \mapsto \text{Rm} \vec{\text{rot}}(\vec{v} \times \vec{F}) + \Delta \vec{F}$ , défini sur l'espace des champs de vecteurs de divergence nulle, définis sur l'espace physique, qui vérifient les conditions aux limites.

Si l'écoulement est instable vis à vis de l'effet dynamo, la partie réelle d'une ou de plusieurs de ses valeurs propres change de signe pour une valeur de  $\text{Rm}$  appelée nombre de Reynolds magnétique critique, qui dépend de l'écoulement. Dans le cas où une valeur propre passe en zéro, la dynamo est stationnaire. Dans le cas où il s'agit de deux valeurs propres complexes conjuguées différentes de zéro, elle a, dès son démarrage, un comportement oscillant.

### 9.2.3 Quelques résultats sur l'effet dynamo

#### Les théorèmes anti-dynamo

Tout écoulement ne peut pas nécessairement produire un effet dynamo, même pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds magnétique. Plusieurs théorèmes anti-dynamo ont ainsi été démontrés, le plus connu étant le théorème de Cowling, énoncé en 1934. Ces théorèmes sont exposés dans l'ouvrage de H.K. Moffatt [90], mais nous rappellerons ici les principaux.

– *Théorème de Cowling :*

*Un champ magnétique axisymétrique ne peut être entretenu par un effet dynamo.*

Ce théorème anti-dynamo a depuis été étendu aux cas de champs de vitesse et de champs magnétiques variables dans le temps, de fluides compressibles, et de distributions de la conductivité électrique non uniformes mais axisymétriques.

– *Théorème de Cowling (bis) :*

*Un champ magnétique indépendant d'une coordonnée cartésienne ne peut être entretenu par un effet dynamo.*



- *Écoulement toroïdal :*  
Un écoulement purement toroïdal ne peut entretenir un champ magnétique par effet dynamo.
- *Écoulement plan :*  
Un écoulement plan ne peut entretenir un champ magnétique par effet dynamo.
- *Écoulement radial de dépendance radiale :*  
Un écoulement dont le champ de vitesse est de la forme  $\vec{v} = V(r,t)\vec{e}_r$  ne peut entretenir un champ magnétique par effet dynamo.

### Quelques modèles d'écoulements produisant l'effet dynamo

- *La dynamo de Bullard*

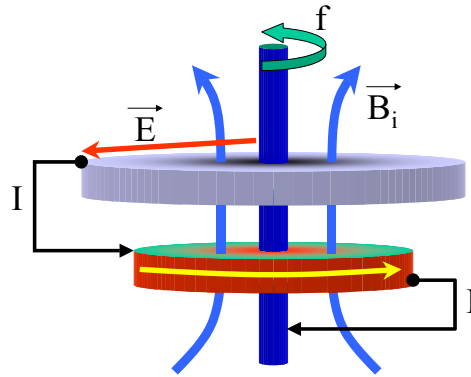


FIG. 9.1 – Schéma de la dynamo de Bullard. Le disque conducteur est représenté en bleu, le bobinage est en rouge. La flèche jaune indique le sens de circulation d'un courant positif dans la bobine.

La figure 9.1 représente un premier exemple d'“écoulement” dynamo permettant d'observer la croissance d'un champ magnétique auto-entretenu. Un disque conducteur tourne sur lui-même à la fréquence  $f$  en face d'un bobinage. L'une des bornes de la bobine est en contact avec l'axe du disque, et l'autre est en contact avec son pourtour. Une perturbation de champ magnétique induit entre l'axe et le tour du disque une différence de potentiel, qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du disque et à l'intensité du champ magnétique. Cette différence de potentiel permet de faire circuler un courant  $I$  dans le bobinage. Ce courant induit à son tour un champ magnétique  $\vec{B}_i$ , à partir duquel il est possible de répéter l'argument. Si la vitesse de rotation du disque est suffisamment élevée, et si bien sûr la bobine est branchée dans le bon sens, la petite perturbation de champ magnétique originale peut croître exponentiellement, jusqu'au moment où le champ magnétique est suffisamment fort pour parvenir à freiner le disque, et où sa croissance sature. Le seuil d'apparition du champ magnétique, ainsi que son niveau de saturation, ont été étudiés à l'origine par E. Bullard [25]. Si la vitesse de rotation du disque est tenue constante, le champ magnétique et le couple fourni par le moteur croissent exponentiellement. Si par contre le moteur qui entraîne le disque est asservi de telle sorte qu'il lui communique un couple constant, il est possible d'observer des oscillations non-linéaires de grande amplitude de la fréquence de rotation et du champ magnétique. Le champ magnétique ne présente toutefois pas d'inversions. Dans ce système, le champ magnétique n'est pas produit par un effet dynamo au sens où nous l'entendons. En effet, il est nécessaire pour qu'il existe que le courant électrique induit soit canalisé dans les

spires de la bobine. La dynamo homopolaire de Bullard n'en reste pas moins un exemple agréable à manipuler de système capable de produire par son mouvement un champ magnétique auto-entretenu, et continue à faire régulièrement l'objet de travaux théoriques. Elle n'a par contre à notre connaissance jamais donné lieu à une réalisation expérimentale.

– *La dynamo de Rikitake*

La figure 9.2 représente le modèle étudié peu après par Rikitake [119]. Dans ce modèle, deux

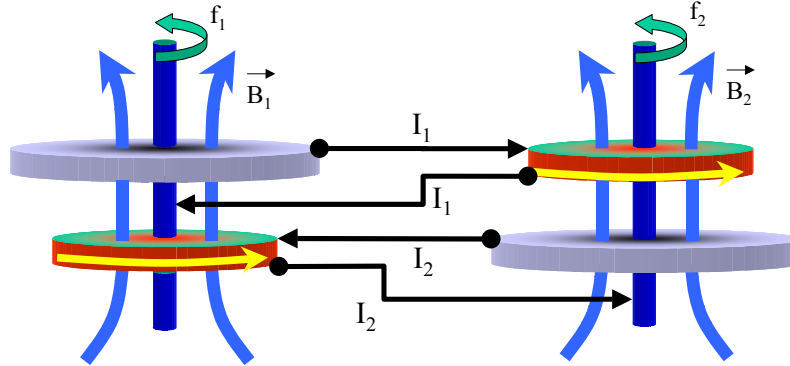


FIG. 9.2 – Schéma du modèle étudié par Rikitake. Les disques conducteurs sont représentés en bleu, les bobinages sont en rouge. Les flèches jaunes indiquent le sens de circulation des courants positifs dans les bobines.

dynamos de Bullard sont couplées, chacune d'elle servant à produire le courant électrique qui excite l'autre. Ce modèle est capable de présenter des inversions de champ magnétique. Il a de plus été démontré par A. E. Cook et P. H. Roberts [38] qu'il peut avoir une dynamique chaotique, pour certaines valeurs des paramètres. Ce point n'est bien sûr pas mentionné dans l'article original de Rikitake, qui n'avait pas les moyens de calcul nécessaires pour intégrer suffisamment longtemps les équations du mouvement du système. Ce modèle présente les mêmes défauts que le modèle de Bullard qu'il généralise, mais il est lui aussi l'objet d'un intérêt soutenu.

– *La dynamo de Bullard et Gellmann*

Bullard et Gellmann ont proposé en 1954 [26] le premier écoulement instable vis à vis de l'effet dynamo en géométrie sphérique, en considérant un milieu extérieur isolant. Ils ont introduit la décomposition du champ magnétique et du champ de vitesses en composantes poloïdales et toroïdales :

$$\vec{v} = \vec{r}\text{ot}(t\vec{r}) + \vec{r}\text{ot}\ \vec{r}\text{ot}(s\vec{r}) \text{ et } \vec{B} = \vec{r}\text{ot}(T\vec{r}) + \vec{r}\text{ot}\ \vec{r}\text{ot}(S\vec{r}),$$

où  $t$ ,  $s$ ,  $T$  et  $S$  sont des fonctions scalaires, exprimées ensuite dans la base des fonctions harmoniques sphériques. Les coefficients des différentes fonctions harmoniques sphériques composant le champ magnétique vérifient un système d'équations aux dérivées partielles (en temps et en  $r$ ), qu'il est possible d'intégrer numériquement. Bullard et Gellmann ont trouvé un effet dynamo stationnaire, qu'il est normalement impossible d'observer avec l'écoulement qu'ils avaient choisi. On a depuis pu constater que les moyens de calcul dont ils disposaient ne leur avaient pas permis d'utiliser un nombre d'harmoniques sphériques suffisant pour obtenir une bonne convergence du champ magnétique. Leur méthode est cependant devenue incontournable dans l'étude de l'effet dynamo en géométrie sphérique, et elle a depuis servi à la résolution du problème de la dynamo cinématique pour de très nombreuses configurations d'écoulement [44, 61, 107, 48].

– *La dynamo de Lowes et Wilkinson*

La dynamo de Lowes et Wilkinson [82] est une réalisation expérimentale d'un modèle proposé

à l'origine par Herzenberg [63]. Cette dynamo “presque” homogène, qui a produit un champ auto-entretenu dès 1963, fonctionne sur le principe suivant : deux cylindres de matériau ferromagnétique, d'un diamètre unitaire d'environ 10 cm, tournent dans des cavités usinées dans un bloc lui aussi ferromagnétique. Le contact électrique entre les cylindres et le bloc qui les entoure est réalisé à l'aide de mercure. Chacun des cylindres produit le champ magnétique qui excite l'autre. Ce modèle a permis d'observer des états saturés stationnaires, oscillants, ainsi que des inversions. La saturation du champ magnétique est par contre due à la saturation de la susceptibilité des matériaux ferromagnétiques employés, et non à l'effet des forces de Laplace. F. J. Lowes et I. Wilkinson l'ont étudié de 1963 à 1970 environ, en lui apportant de légères retouches successives. Ils ne sont pas parvenus à faire l'économie des matériaux ferromagnétiques.

– *La dynamo périodique de G.O. Roberts*

Dans cette configuration, l'écoulement utilisé est un réseau de cellules dans lesquelles l'écoulement est invariant en  $z$ , mais a la forme :  $\vec{v} = \sin(y)\vec{e}_x + \sin(x)\vec{e}_y + (\cos(x) - \cos(y))\vec{e}_z$ . Dans chaque cellule, l'écoulement est approximativement hélicoïdal, et les cellules sont disposées de manière à alterner une hélice montante avec une hélice descendante. L'écoulement est invariant en  $z$ , mais l'effet dynamo n'est pas exclu a priori, puisqu'il est possible qu'un champ magnétique dépendant de  $z$  se développe. G. O. Roberts a montré en 1972 [120] qu'un champ de la forme  $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, y, t)e^{(\sigma t + ikz)}$  pouvait exister avec une partie réelle de  $\sigma$  positive. Cet écoulement a donné lieu à une réalisation expérimentale, à Karlsruhe, dans laquelle la croissance d'un champ magnétique a été observée en 2000 [135].

– *La dynamo de Ponomarenko*

L'écoulement de Y. Ponomarenko [114] est un écoulement hélicoïdal, entouré de fluide conducteur au repos. Pour  $r < 1$ , l'écoulement est donné par :

$$v_r = 0, v_\theta = \epsilon r, v_z = 1$$

Pour  $r > 1$ , toutes les composantes de la vitesse sont nulles. Cet écoulement, dont l'expression est très simple, permet de réaliser à la main de nombreux calculs. Il a donc été étudié extrêmement intensivement. Nous citerons bien sûr les travaux de A. Gaïlitis, de l'équipe de Riga [51], ceux de A. P. Bassom et A. D. Gilbert [7], R. Kaiser et A. Tilgner [69], ainsi que le travail de thèse de F. Pétrélis [109]. Il a donné lieu à deux réalisations expérimentales successives à Riga, en Lettonie, et a lui aussi permis d'observer l'effet dynamo en 2000 [52].

## Les mécanismes d'induction classiques

– *L'effet “ $\Omega$ ”*

La figure 9.3 présente le mécanisme de l'effet “ $\Omega$ ”, qui est le plus simple des mécanismes d'induction classiques. Dans un milieu infiniment conducteur de l'électricité, les lignes de champ magnétique se comportent comme des éléments matériels, ce qui signifie que des particules de fluide points qui sont reliées par une ligne de champ magnétique l'entraînent au cours de leur mouvement. Si l'écoulement n'est pas uniforme, nous voyons que cela implique que des lignes de champ qui sont initialement rectilignes vont être distordues, et donc que l'écoulement va créer un champ induit. Dans un milieu de conductivité finie, ces arguments peuvent être reproduits. Les lignes de champ ne suivent plus exactement les particules fluides, mais “dérivent” par rapport à l'écoulement. La dérive est bien sûr d'autant plus faible que la conductivité est élevée. Enfin, il est possible de voir que l'amplitude des champs magnétiques induits par ce mécanisme est proportionnelle bien sûr au champ appliqué, mais aussi au nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement.

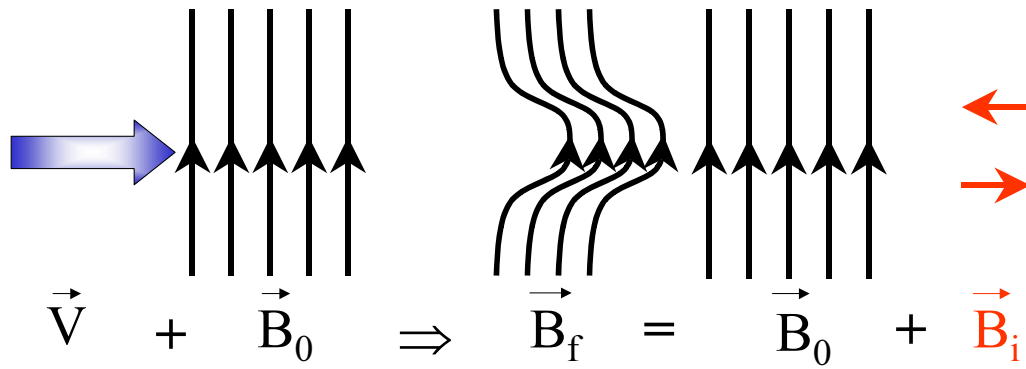


FIG. 9.3 – Schéma représentant l'effet  $\Omega$ . Le champ de vitesse est représenté en bleu, les lignes de champ magnétique en noir. Les flèches rouges représentent le champ magnétique induit.

– L'effet d'étirement

Le schéma précédent montrait l'effet  $\Omega$ , qui ne se produit au sens strict que lorsqu'une composante du champ de vitesse qui est perpendiculaire au champ magnétique appliqué varie dans la direction de ce champ. La figure 9.4 représente maintenant un effet très similaire, qui permet

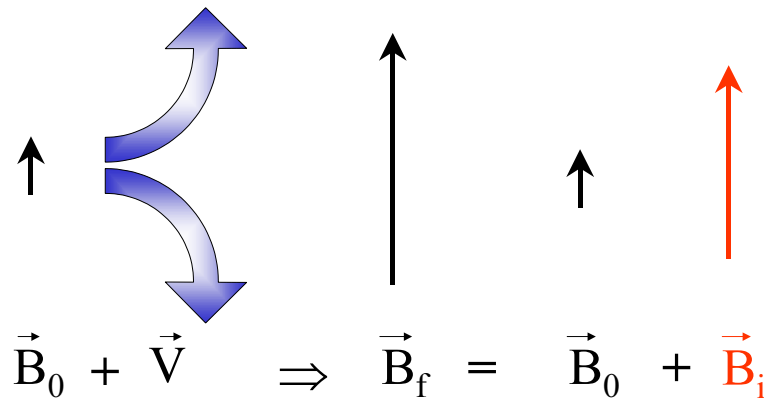


FIG. 9.4 – Schéma représentant l'effet d'"étirement". Le champ de vitesse est représenté en bleu, les lignes de champ magnétique en noir. Les flèches rouges représentent le champ magnétique induit.

lui aussi d'engendrer des champs induits proportionnels au nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, mais cette fois dans la même direction que le champ appliqué. Ce mécanisme n'a pas reçu de nom officiel, mais nous le présentons cependant car il illustre bien l'une des difficultés du problème de la dynamo cinématique. En effet, comme il permet d'amplifier fortement un champ magnétique incident, il pourrait donner l'impression qu'il constitue à lui seul un mécanisme permettant un effet dynamo. Or, il convient de remarquer qu'il crée un champ induit certes plus fort que le champ appliqué, mais situé *dans* le point de stagnation de l'écoulement. En amont du point de stagnation, c'est-à-dire là où le champ de départ avait été appliqué, il ne reste plus rien ! L'un des aspects du casse-tête qu'est l'effet dynamo est le fait que les mécanismes qui permettent d'amplifier un champ magnétique créent toujours un champ induit qui est soit normal au champ appliqué, soit situé en un autre point de l'écoulement. Trouver un écoulement favorable, cela signifie donc arriver à déterminer un écoulement qui parvient à allonger un champ appliqué, puis

à en ramener une portion suffisante à son point de départ, sur la bonne composante, le tout avec la contrainte que le champ de vitesse doit être incompressible ! Une modification du champ de vitesse qui permet d'améliorer le mécanisme d'amplification pouvant être catastrophique du point de vue de la réinjection, il est nécessaire de trouver un équilibre très subtil.

– L'effet “ $\alpha$ ”

L'effet “ $\alpha$ ” est le dernier mécanisme d'induction “classique”, et il est de loin le plus compliqué. Il a été introduit de façon heuristique par E. Parker en 1955 [103] pour expliquer le mécanisme par lequel le champ magnétique solaire est entretenu. En effet, celui-ci est presque axisymétrique et se développe, en apparence contradiction avec le théorème de Cowling, sur un écoulement qui est lui aussi en première approximation axisymétrique. L'équation d'induction montre que, dans ce cas, il est possible de transformer aisément du champ magnétique méridien en champ azimutal par effet  $\Omega$ , mais que le passage en sens inverse n'est pas possible. Il est donc nécessaire, pour que le champ solaire soit entretenu, qu'un mécanisme parvienne à assurer la conversion de champ azimutal en champ méridien, ou à produire un courant électrique azimutal à partir d'un champ azimutal, ce qui n'est pas possible de façon “classique”. L'effet “ $\alpha$ ” introduit par E. Parker est donc un mécanisme par lequel des fluctuations non-axisymétriques du champ de vitesse, de moyenne nulle, parviennent par un effet coopératif à produire un courant à grande échelle dirigé parallèlement au champ magnétique de départ. L'effet d'une telle fluctuation de l'écoulement

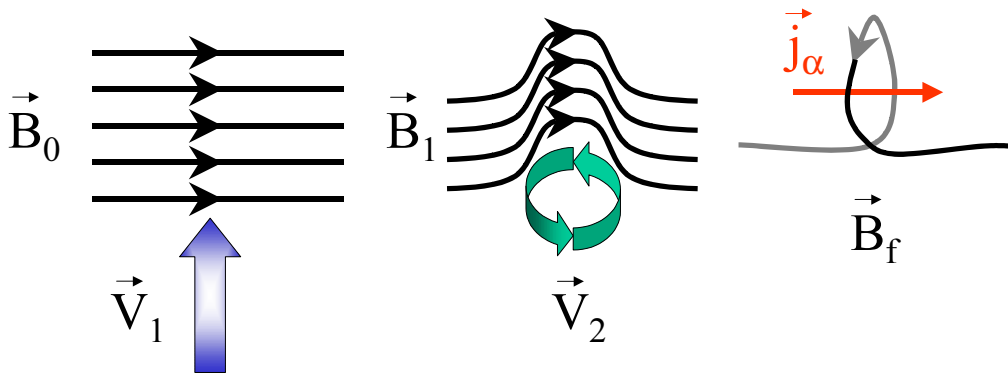


FIG. 9.5 – Schéma représentant l'effet “ $\alpha$ ”. Les lignes de champ magnétique sont déformées d'abord par le mouvement de translation, puis le mouvement de rotation du fluide, et ont à la fin une forme de “ $\alpha$ ”. Les flèches rouges représentent le courant électrique induit.

sur une ligne de champ magnétique est représenté en figure 9.5. Cet effet se décompose en deux étapes : les lignes de champ magnétique doivent être déformées une première fois par la composante de translation du champ de vitesse, puis une deuxième fois par sa composante rotatoire. Les lignes de champ magnétique possèdent à la fin une structure en  $\alpha$ , qui est associée à un courant électrique dirigé parallèlement au champ appliqué. Dans l'argument original de E. Parker, il est nécessaire que la moyenne spatiale des fluctuations de champ de vitesse s'annule. Ceci signifie par exemple qu'à chaque fluctuation dont la vitesse de translation est dirigée vers le haut du graphe doit être associée une fluctuation dirigée vers le bas du graphe. Pour que la moyenne des courants électriques soit par contre non nulle, les fluctuations doivent toutes avoir la forme d'une hélice “droite”, ou toutes celle d'une hélice “gauche”. Ces arguments ont depuis été formalisés par S. I. Braginsky [20] dans le cas de la dynamo terrestre, et par F. Krause et K.-H. Rädler [72] dans le cas général. Dans le cas où l'échelle des fluctuations de vitesse est très petite devant celle du champ magnétique, ces derniers auteurs ont montré que l'importance de

l'effet  $\alpha$  est proportionnelle à leur hélicité. *Aucun résultat similaire n'a à notre connaissance été démontré en l'absence d'une telle séparation d'échelle.* Cet effet est à l'œuvre dans l'écoulement de G. O. Roberts, où la séparation d'échelle existe. La structure en hélice de l'écoulement de Ponomarenko donne à penser qu'il pourrait aussi s'y développer, mais l'absence de séparation d'échelle ne permet aucune simplification des calculs par ce biais.

## 9.3 Les projets de dynamos expérimentales

Un certain nombre de projets d'expériences visant à mettre en évidence l'effet dynamo sont actuellement à l'étude. Toutes ces expériences utilisent le sodium comme fluide conducteur, dans des configurations différentes. Nous n'avons rassemblé ici que les expériences sodium existantes, mais nous mentionnons les montages en cours de construction de P. Frick [49] et S. A. Colgate [36], ainsi que le projet de J. Léorat (expérience ATER de rotation-précession).

### 9.3.1 Les dynamos "contraintes"

Dans les expériences de ce type, la structure de l'écoulement est imposée par la présence de parois. Comme la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement ne peut pas s'exercer librement, le régime de saturation non-linéaire est *a priori* perturbé.

#### La dynamo "Ponomarenko" de Riga

L'écoulement de Ponomarenko est un écoulement très simple qui est instable vis à vis de l'effet dynamo pour un nombre de Reynolds magnétique assez bas, de l'ordre d'une vingtaine. Cet écoulement a été choisi par l'équipe de A. Gailitis, de Riga, comme base d'une première expérience, en 1988. Cette expérience a été détruite par rupture mécanique avant que l'effet dynamo ne soit observé. Une nouvelle expérience, dont le principe est exposé ci-dessous en figure 9.6, a été reconstruite et mise en route en décembre 1999. Après un nouveau contretemps dû à un feu de sodium au passage de l'arbre de la turbine, cette expérience a permis d'observer l'effet dynamo en juillet 2000.

Le mode instable du champ magnétique est dans cette géométrie oscillant, et prend la forme d'un double "ruban" de champ magnétique, qui s'enroule à l'interface qui sépare l'écoulement hélicoïdal descendant et l'écoulement de retour. Le seuil observé est très semblable à celui qui avait été déterminé par calcul, malgré la présence probable de fluctuations turbulentes dans l'écoulement. Les résultats des mesures sont présentés dans [52], et l'étude du mécanisme de saturation est exposée dans [53, 108].

#### La dynamo quasi-cinématique de Karlsruhe

Cette expérience met en œuvre une adaptation de taille finie de l'écoulement périodique de G.O. Roberts évoqué plus haut. Elle a commencé à fonctionner en février 2000. Elle a permis d'observer la croissance d'un champ magnétique, et ce à un nombre de Reynolds magnétique très légèrement plus faible que celui qui avait été prévu par les simulations numériques. Une fois sa phase de croissance exponentielle terminée, le champ magnétique observé est stationnaire et perpendiculaire à l'axe des tubes. Il prend à chaque essai la même orientation par rapport aux directions du réseau de l'écoulement. Dans cette direction, son amplitude semble être assez bien décrite par une bifurcation de type "pitchfork" imparfaite. Les premiers résultats sont décrits dans [135]. L'étude du mécanisme de saturation est exposée dans [136].

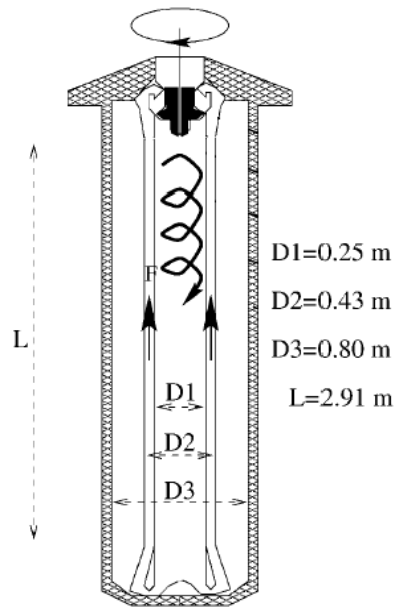


FIG. 9.6 – Schéma de l'expérience dynamo de Riga, montrant la turbine d'entraînement (en haut), l'écoulement hélicoïdal (au centre), l'écoulement de retour et la couche de sodium au repos (sur le pourtour). Figure extraite de [52].

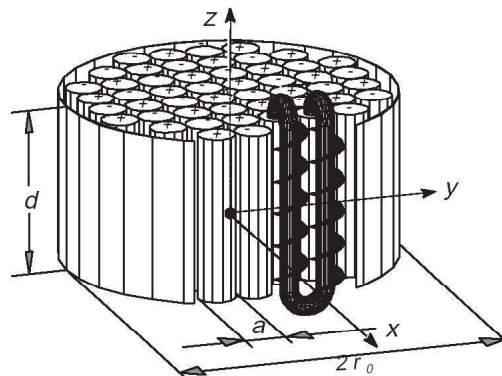


FIG. 9.7 – Schéma de la dynamo de Karlsruhe. Chaque conduite contient une tubulure centrale et une couronne extérieure comprenant un déflecteur en forme de spirale, qui permet de donner au fluide un mouvement hélicoïdal. Les conduites sont raccordées par des tubes en “U”, qui permettent de créer un écoulement similaire à celui de G. O. Roberts. Deux jeux de pompes permettent de régler le débit de sodium qui circule dans les tubes intérieurs indépendamment de celui qui circule dans les couronnes extérieures. La longueur des conduites est  $d = 70$  cm, leur rayon de  $a = 21$  cm. Le rayon du montage est de  $r_0 = 85$  cm. Figure extraite de [136].

Le schéma 9.7 représente l'expérience de Karlsruhe.

### 9.3.2 Les dynamos homogènes

Dans les expériences de ce type, aucune paroi ne vient imposer sa structure à l'écoulement. Les caractéristiques de celui-ci sont moins bien contrôlées, mais il peut plus facilement être perturbé

par les forces de Laplace. La dynamique non-linéaire du champ magnétique peut ainsi *a priori* s'exprimer plus librement.

### Les dynamos sphériques de C. Forest (Wisconsin) et D. P. Lathrop (Maryland)

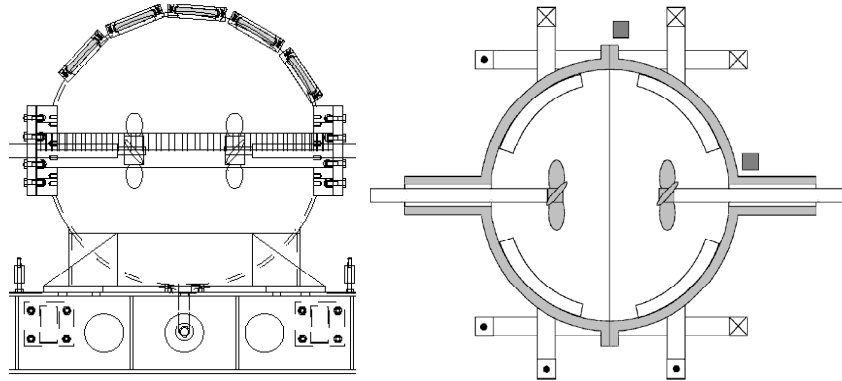


FIG. 9.8 – Schéma des montages “dynamo” de C. B. Forest (gauche) et D. P. Lathrop (droite). Dans les deux cas, le sodium est contenu dans une sphère, et mis en mouvement par deux hélices coaxiales en contra-rotation. La sphère de l’expérience de C. B. Forest a un diamètre intérieur de 1 m, celle de l’expérience de D. P. Lathrop a un diamètre d’environ 30 cm. Figures extraites de [48, 106].

Dans ces deux expériences, le sodium est contenu dans une sphère, et mis en mouvement par deux hélices coaxiales. La géométrie est donc semblable à celle d’un écoulement de “von Kármán sphérique”. Après des travaux menés dans une sphère de petit diamètre [106], l’équipe de D. P. Lathrop s’est lancée dans la construction d’une sphère de 3 m de diamètre, pouvant tourner en rotation d’ensemble à 5 Hz environ, et contenant deux hélices coaxiales pouvant tourner indépendamment. La puissance totale des moteurs employés sera de l’ordre du MégaWatt. Si l’effet dynamo échappe à cette équipe, il sera temps de réfléchir ! Ce montage est décrit dans [129].

De son côté, l’équipe de C. Forest a construit un montage semblable, lui aussi sphérique, et lui aussi muni de deux hélices concentriques, mais d’un diamètre plus raisonnable d’un mètre. Les moteurs peuvent fournir chacun une puissance de 75 kW. Ce montage, ainsi que la procédure qui a été utilisée pour l’optimisation du mécanisme d’entraînement du fluide, sont décrits dans [48]. Cette expérience, bien que prête depuis plus d’un an aux dires de ses constructeurs, semble ne pas avoir fonctionné à ce jour.

### L’expérience “Derviche Tourneur Sodium”

L’expérience “DTS” n’est pas à proprement parler une expérience “dynamo”. Il s’agit d’un montage utilisant du sodium liquide, construit par l’équipe du Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique de l’université de Grenoble [30]. Sa fonction est de permettre l’étude d’un écoulement de métal liquide dans des conditions assez proches de celles qui règnent dans le noyau terrestre, c’est-à-dire en présence d’une forte rotation d’ensemble et d’un fort champ magnétique [97]. L’écoulement est provoqué par la rotation différentielle de la “graine” et de la sphère extérieure. Il est possible de placer un aimant permanent dans la sphère intérieure, afin d’étudier l’influence d’un champ magnétique sur la structure de l’écoulement.



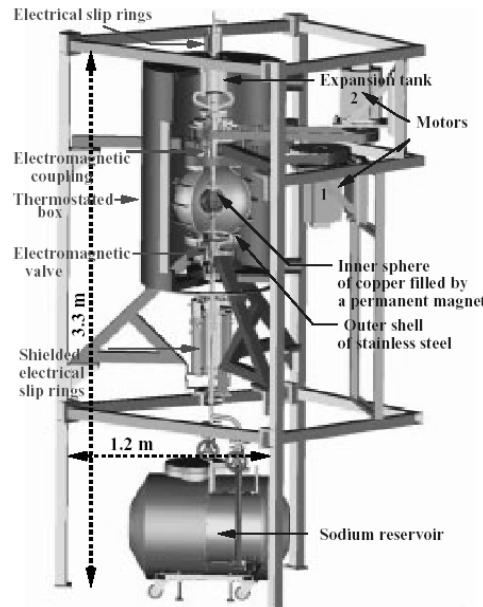


FIG. 9.9 – Schéma de l'expérience "DTS". La sphère extérieure qui contient le sodium est en acier inoxydable, elle a un rayon de 21 cm. La sphère intérieure est en cuivre, et a un rayon de 7.4 cm. Toutes deux sont entraînées en rotation par des moteurs de 10 kW. Figure extraite de [30].

En plus de son intérêt scientifique intrinsèque, ce montage sert de prototype pour la préparation d'une expérience plus importante, qui pourrait à terme être construite pour étudier l'effet dynamo dans des conditions géophysiques.

## 9.4 L'expérience Von Kármán Sodium

L'expérience "Von Kármán Sodium" est le fruit d'une collaboration entre les centres de Saclay et de Cadarache du C.E.A., et les Ecoles Normales Supérieures de Paris et de Lyon. Cette expérience met en œuvre l'écoulement de Von Kármán produit par deux disques munis de pales tournant en contra-rotation dans une cuve cylindrique. Le choix de cet écoulement comme configuration de base de l'expérience "VKS" a été motivé par le fait que c'est un écoulement de rotation différentielle, qu'il possède de l'hélicité, et qu'il comporte des zones où l'étirement est important. Tous ces ingrédients semblent favorables à l'amplification d'un champ magnétique.

L'écoulement a tout d'abord été étudié avec des fluides simples (eau, air), et plusieurs méthodes de mesure ont été mises au point (pression, puissance, vorticité). Le champ de vitesse moyen a également été cartographié par Vélocimétrie Laser Doppler. Nous renvoyons le lecteur à la première partie de ce mémoire de thèse pour un certain nombre d'aspects de cette étude, ainsi que pour les références bibliographiques qui s'y rattachent.

Des expériences de magnéto-hydrodynamique utilisant le gallium liquide ont été menées à l'E.N.S. de Lyon, pour étudier le champ magnétique induit par un champ appliqué [100, 101]. Le gallium présente l'avantage d'être beaucoup plus facile à manipuler que le sodium, mais sa conductivité électrique 2.5 fois moins bonne et sa masse volumique 6 fois plus grande empêchent d'obtenir des valeurs élevées du nombre de Reynolds magnétique. L'expérience Von Kármán Sodium a ensuite été construite au C.E.A. Cadarache.

La cuve a un diamètre intérieur de 43 cm, et la distance qui sépare les deux turbines est de

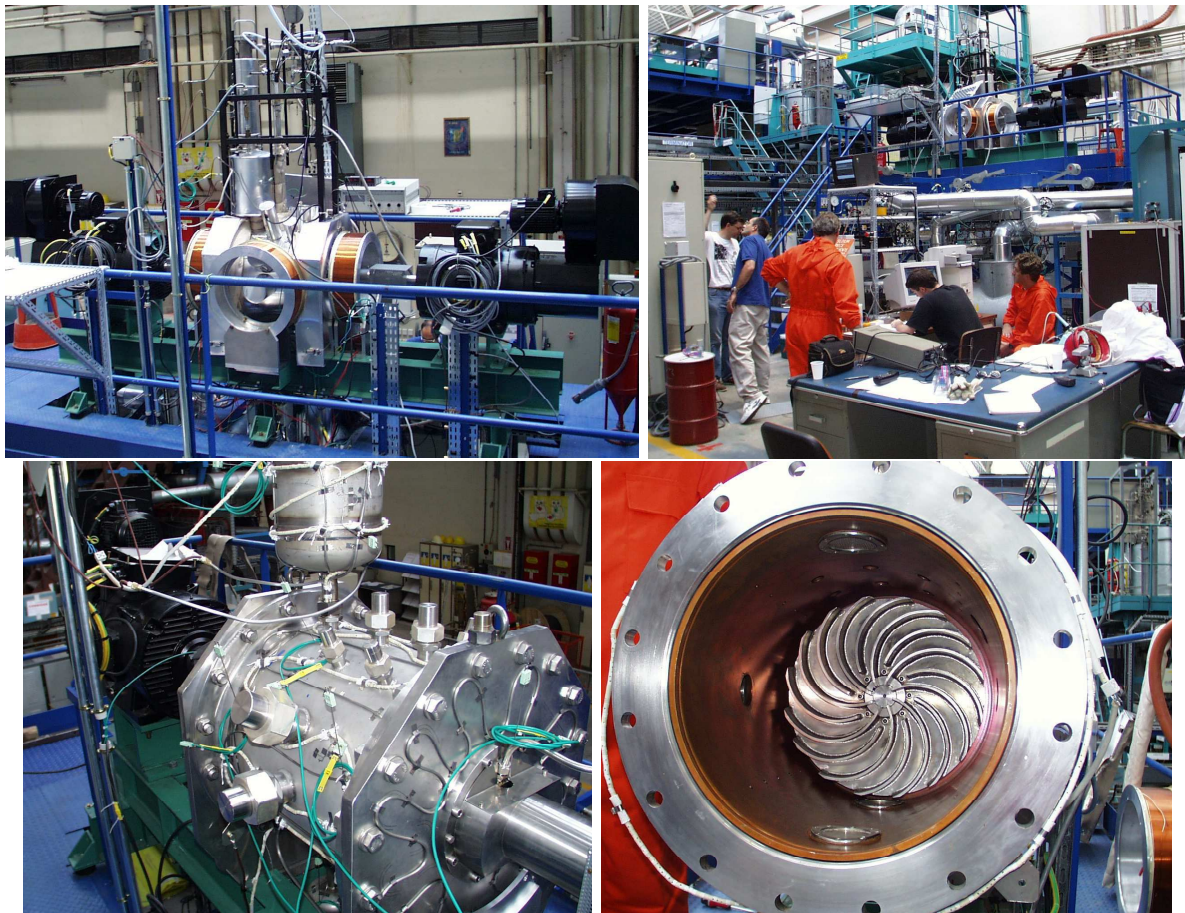


FIG. 9.10 – Photographies de l'expérience "VKS". a) vue d'ensemble de la cuve, des moteurs, et des bobines excitatrices. b) vue de la cuve sur son bâti, et de l'équipe au travail. c) vue de près de la cuve. d) vue de la turbine montée, à l'intérieur de la cuve. La chemise de cuivre est bien visible.

40 cm. Une chemise de cuivre d'une épaisseur de 10 mm est montée à l'intérieur. Les moteurs développent une puissance unitaire de 75 kW. La plupart des mesures ont été effectuées avec des turbines de type "TM60" (voir première partie du mémoire), en cuivre ou en acier inoxydable. Quelques campagnes ont été réalisées avec des turbines à pales droites de plus petit diamètre. Pour la moitié environ des campagnes, quatre ailettes de section carrée de côté 20 mm étaient montées sur le pourtour du cylindre. Un jeu de quatre bobines excitatrices permet d'appliquer de l'extérieur un champ magnétique à l'écoulement, afin de mesurer les champs induits. Un Gaussmètre FW-Bell relié à une sonde Hall à trois composantes permet la mesure du champ magnétique dans l'écoulement.

Ce montage a permis de réaliser un certain nombre de campagnes de mesures, au cours desquelles des nombres de Reynolds magnétique de l'ordre de 50 ont pu être atteints régulièrement. Il présentait toutefois trois défauts majeurs : d'une part, les garnitures mécaniques qui assuraient l'étanchéité au passage des arbres des turbines étaient fragiles, et ont dû être changées fréquemment. D'autre part, elles injectaient un débit continu d'argon dans l'écoulement, ce qui est préjudiciable à la qualité des mesures. Enfin, le montage n'étant pas régulé en température, les mesures à grande vitesse de rotation des turbines ne pouvaient durer qu'environ une minute, les

150 kW délivrés par les moteurs provoquant une élévation de température du sodium d'environ  $1^{\circ}\text{C}$  par seconde...

Pour remédier à ces différents problèmes, ainsi que pour étendre la plage de travail en nombre de Reynolds magnétique, un montage "VKS 2" est actuellement en construction. Le diamètre de la cuve du nouveau montage sera de 60 cm, et il sera doté d'un refroidisseur permettant de travailler à température constante. Enfin, il sera doté de moteurs plus puissants, d'une puissance totale d'environ 300 kW. Les nouveaux passages d'axes devraient être étanches et solides. Ces différentes modifications devraient permettre d'effectuer des mesures stables jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds magnétique de l'ordre de 70.

#### 9.4.1 Le plan de notre étude

Ayant ainsi rappelé le contexte de notre étude de l'effet dynamo, nous pouvons maintenant en donner les grandes lignes, et clore l'introduction de cette deuxième partie. Le chapitre 10 présente les résultats de simulations numériques de l'évolution du champ magnétique dans des champs de vitesse obtenus expérimentalement par les méthodes présentées en première partie. Ces simulations traitent le problème du point de vue de l'effet dynamo cinématique. Les résultats obtenus avec les champs de vitesse mesurés dans le montage "VKR", donc soumis à l'influence de la force de Coriolis, sont rapportés en fin du chapitre. Nous exposons ensuite au chapitre 11 quelques considérations d'ordre plus théorique. Nous expliquons d'une part les propriétés de symétrie des modes de champ magnétique observés dans les simulations, et nous essayons d'autre part de dégager le mécanisme par lequel ces modes peuvent être amplifiés. Un certain nombre de résultats obtenus au cours des campagnes de mesures menées sur l'expérience "VKS" sont ensuite exposés au chapitre 12.

## Chapitre 10

# Etude numérique des propriétés magnéto-hydrodynamiques de l'écoulement de von Kármán

Ce chapitre reproduit le texte d'un article paru dans l'*European Journal of Physics B*, **33**, 469, (2003), qui présente les résultats d'un travail numérique réalisé en collaboration avec F. Daviaud, J. Burguete (Université de Pampelune) et J. Léorat (Observatoire de Meudon). Le code de simulation a été développé par J. Léorat, et a ensuite été légèrement modifié par J. Burguete pour accepter les champs de vitesses mesurés dans le montage "VKE". Nous présentons un certain nombre de propriétés Magnéto-Hydrodynamiques des écoulements de von Kármán, étudiés du point de vue de la dynamo "cinématique". Nous mettons notamment à jour une grande sensibilité de l'instabilité dynamo vis-à-vis de la forme de l'écoulement. Nous étudions l'influence sur le taux de croissance de l'instabilité d'un certain nombre de paramètres, ainsi que la structure spatiale et temporelle des modes de champ magnétique auto-entretenus. Enfin, des résultats portant sur le champ magnétique induit par l'écoulement en présence d'un champ extérieur appliqué sont exposés, et comparés avec les mesures d'induction obtenues dans l'expérience "VKS".

En fin du chapitre, nous présentons succinctement les taux de croissance obtenus par cette méthode pour les champs de vitesse mesurés en présence de force de Coriolis.

# Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows

L. Marié<sup>1</sup>, J. Burguete<sup>1,2</sup>, F. Daviaud<sup>1</sup> and J. Léorat<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Service de Physique l'État Condensé, CEA/Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup> Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra, E-31080 Pamplona, Spain

<sup>3</sup> Observatoire de Paris-Meudon, F-92195 Meudon, France

**Abstract** A numerical study of the magnetic induction equation has been performed on von Kármán type flows. These flows are generated by two co-axial counter-rotating propellers in cylindrical containers. Such devices are currently used in the von Kármán sodium (VKS) experiment designed to study dynamo action in an unconstrained flow. The mean velocity fields have been measured for different configurations and are introduced in a periodic cylindrical kinematic dynamo code. Depending on the driving configuration, on the poloidal to toroidal flow ratio and on the conductivity of boundaries, some flows are observed to sustain growing magnetic fields for magnetic Reynolds numbers accessible to a sodium experiment. The response of the flow to an external magnetic field has also been studied : The results are in excellent agreement with experimental results in the single propeller case but can differ in the two propellers case.

## 10.1 Introduction

Dynamo action [1, 2], which converts kinetic energy into magnetic energy in astronomical objects, is the manifestation of the coupling between kinetic and magnetic excitations in a conducting fluid and, as such, could be considered as ordinary a physical phenomenon as is thermal convection. This is in fact not the case, when one considers the modest knowledge acquired from all the approaches carried out up to now from theory, numerical computation or experiments. Since the recent results obtained by the Riga [3, 4] and Karlsruhe [5, 6] experiments, the occurrence of dynamo action is no longer questionable, but the nonlinear regimes are very poorly known : most basic problems set for example by geomagnetism or heliomagnetism remain without satisfying answers.

As for hydrodynamic turbulence, the experimental approach could represent an efficient tool to study the nonlinear effects in MHD flows. We will here concentrate on an analysis of a particular type of flow - namely von Kármán flow - without trying to give a complete account of this field of activity. These flows are used in the von Kármán sodium (VKS) experiment [7, 8] that is devoted to study the approach towards a self-generating dynamo in an unconstrained flow. No self-excitation has been reported yet and the ability of these flows to generate a magnetic field remains an open question. Some numerical examples [9] have shown that dynamo action is present in flows for magnetic Reynolds numbers  $R_m = \mu_0 \sigma UL \geq R_m^c \simeq 100$  where  $U$  and  $L$  are respectively the maximal speed of the flow and the typical size of the conducting volume,  $\mu_0$  is the magnetic permeability and  $\sigma$  the electrical conductivity. Using the best available fluid conductor, liquid sodium at about 150° C, the condition  $R_m = 100$  implies that  $UL = 10m^2/s$ ,

which represents the main technical challenge to be achieved by any experimental fluid dynamo. In the natural dynamos, such as the Earth, large magnetic Reynolds numbers are achieved with scales above 1000 km and small velocities, while in an experimental device, cost constraints ask for sizes not too far from one meter and thus a relatively high speed is needed.

Note also that using liquid sodium as a conducting fluid, the kinetic Reynolds number of the flow is  $Re = UL/\nu = R_m/P_m$ , where  $P_m = \mu_0\sigma\nu$  is the magnetic Prandtl number and  $\nu$  the kinematic viscosity. As  $P_m \sim 10^{-5}$  for liquid metals,  $Re \simeq 10^5 \times R_m \simeq 10^7$ , which shows that the flow is in a regime of fully developed turbulence. Moreover, as is well known, the threshold  $R_m^c$  for dynamo action depends strongly on the characteristics of the flow. Three different methods may then be used to select an experimental configuration :

(i) reproduce flows already known to lead to dynamo action, based on previous theoretical or numerical knowledge. Very recently, this approach has been successfully used in constrained flows in recent experiments in Riga [4], based on the Ponomarenko model [10], and Karlsruhe [6], based on the G. O. Roberts model [11]. However, imposing the desired flow topology may require internal walls, which may have an influence on the non-linear regime also. Despite different attempts [12, 13, 7, 8], dynamo action in an unconstrained turbulent flow has not yet been observed.

(ii) try various forcing mechanisms and geometries using directly a conducting flow prototype, and determine the corresponding critical magnetic Reynolds numbers (e.g. by measuring the decay times of an external magnetic field or the response to an external magnetic field). This approach has been used in sodium by Gans [14], by Odier et al. [15] in gallium and by Peffley et al. [12, 13] in the sodium Maryland experiment. The main drawback is the lack of knowledge of the velocity field : if the selected configuration leads to a threshold  $R_m^c$  being too high to be feasible, there is no guide besides trials and errors to make it smaller.

(iii) study various forcing mechanisms and geometries in water models to measure the mean velocity fields which are then introduced in the numerical computation of a kinematic dynamo problem. This is the way chosen in particular by the Madison [16], the Perm [17] and the VKS experiments [7, 8].

In this work, a numerical study of the induction equation is performed on von Kármán type flows similar to those used in the VKS experiment. These flows are generated by counter-rotating disks in a cylindrical geometry and have been extensively studied in the past [18, 19, 20, 21, 22, 23]. They are supposed to be good candidates to the realization of an experimental homogeneous fluid dynamo. In particular, kinematic dynamo simulations in a sphere [9] and direct numerical simulations of the Taylor-Green geometry [24] have shown that similar flows lead to self-excitation for accessible  $R_m^c$ . No dynamo action has been presently observed in these unconstrained geometries, but two types of MHD measurements have been performed : in a sphere filled with sodium, Peffley et al. [12] have used pulse-decay rates to obtain an estimation of  $R_m^c$  ; the VKS experiment [8] has studied the response of the flow to an external field and exhibited large magnetic induction effects. However, the dependence of the threshold on the different parameters of the problems remains unknown. In this paper, the mean velocity fields are measured in a water model experiment for various configurations and introduced in an axially periodic cylindrical kinematic dynamo code. The dependence of the threshold on the main characteristics of the flow and on the boundary conditions is then studied.

The paper is organized as follows. The setup and the velocity fields of the model experiment are presented in Section 2 and the numerical approach in Section 3. The determination of threshold, the description of the self-excited magnetic field and the response of the system to an external magnetic field are then reported in Section 4. The results are finally discussed and compared to available results in Section 5.

## 10.2 Water model experiment

### 10.2.1 Experimental setup

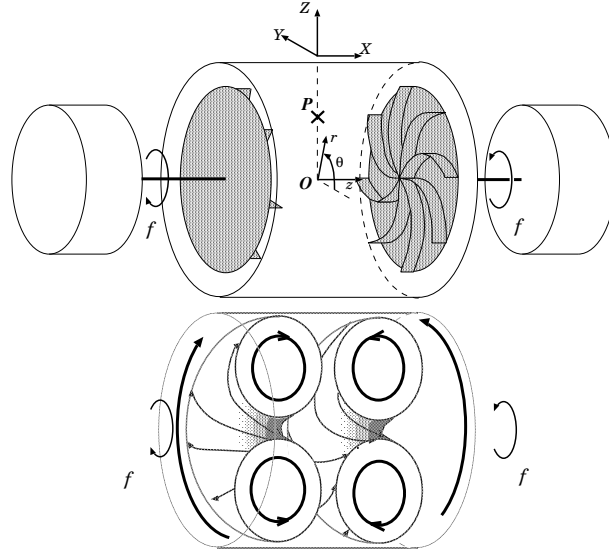


FIG. 10.1 – *Top : experimental setup. The flow is produced in a cylindrical container of radius  $R_c$  by two counter-rotating propellers driven by two independent motors. The distance between the propellers is  $H_d$ .  $(r, \theta, z)$  are the usual cylindrical coordinates.  $P$  represents the point where the magnetic field probe is located inside the VKS apparatus.  $(X, Y, Z)$  are the cartesian coordinates corresponding to the probe measurement axes. Bottom : schematic drawing of the von Kármán flow showing the mean toroidal and poloidal flows.*

The experimental setup shown in figure 10.1 is a half-scale model of the sodium VKS experiment [8]. It consists of a cylindrical container of internal radius  $L = R_c = 10$  cm and height  $H_c = 30$  cm, filled with water. The system is driven by two counter-rotating co-axial disks of radius  $R_d$ , with their inner faces a distance  $H_d = 18$  cm apart. Different disks have been used : smooth or rough disks, disks with straight or curved blades with different heights. In the following, we report results concerning two different propellers : Propeller TM28 (resp. TM60) has a 180 mm diameter (resp. 185 mm), 8 blades (resp. 16) of 2 cm height. The blades of TM60 have a curvature slightly larger than those of TM28. Both propellers rotate as shown in figure 10.1. The propellers presently used in the VKS experiment are of the TM60 type. Baffles of different width and length can be introduced on the internal wall of the cylinder in order to change the ratio of axial to azimuthal components of the velocity field.

Two 2 kW motors are used to drive the disks in opposite directions at an adjustable frequency  $f$  in the range 0-25 Hz. The measurements reported here have been performed in the range 0-10 Hz. A kinematic Reynolds number based on the driving is defined as :  $Re = 2\pi f R_c^2 / \nu$ , where  $\nu$  is the kinematic viscosity of water.

Global measurements such as torque or power and pressure measurements have been performed in order to characterize the turbulence. The results will be reported in details elsewhere and show results typical of fully turbulent flows. In the following, we focus on the velocity measurements which are used in the numerical study.

### 10.2.2 Velocity fields

#### Measurement of the velocity field

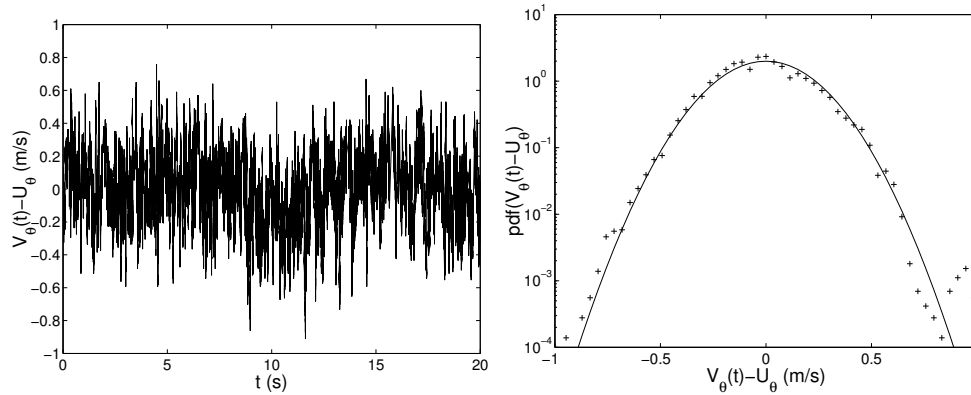


FIG. 10.2 – (a) Temporal evolution of the fluctuating part of the azimuthal velocity of TM60 propeller recorded using Laser Doppler Velocimetry at  $r = 60$  mm,  $z = 65$  mm for  $f = 2$  Hz. The value of the mean azimuthal velocity is  $U_\theta = 0.42$  ms $^{-1}$ . (b) Probability density function for the same signal : data (+) and gaussian fit (solid line).

Velocity fields have been obtained via laser Doppler velocimetry (LDV) using a DANTEC system. The axial and azimuthal velocities  $V_z$  and  $V_\theta$  have been measured as functions of  $r$ ,  $z$  and time. At the rotation rates used in the experiment, the flow is highly turbulent :  $Re \simeq 6.10^5$  for  $f = 10$  Hz. Figure 10.2 shows the temporal evolution of the local velocity at a given point : velocity fluctuations appear to be of the order of magnitude of the mean velocity, and have a nearly gaussian distribution. In fact, the amplitude of the fluctuations as well as the shape of their probability density function strongly depend on the position inside the flow. The amplitude is particularly high in the plane between the two recirculation cells, where the strong toroidal shear maintains a vigorous mixing layer. More quantitatively, the turbulence intensity defined as  $K_V = V_{rms}/U_{rim}$ , where  $V_{rms}$  is the order of magnitude of the standard deviation of the velocity throughout the flow and  $U_{rim}$  is the rim velocity of the disks, is roughly 40 %.

As a consequence, the velocity can be seen as a mean flow plus a turbulent part :  $\vec{V} = \vec{U} + \vec{u}$ . In the following,  $\vec{U}$  denotes a time averaged flow, and  $\vec{V}$  a velocity field that depends on time.

The LDV facility gives only the axial and azimuthal instantaneous velocity, whereas the induction equation asks for the three time-averaged components. The missing mean radial velocity is derived as follows. Note that, although  $\vec{U}$  is not a solution of the Navier Stokes equations, it is a solenoidal vector field, and it can always be decomposed into toroidal and poloidal components :

$$\vec{U}(r, \theta, z) = \nabla \times (T\hat{z}) + \nabla \times \nabla \times (P\hat{z}) = \vec{U}_{tor} + \vec{U}_{pol}$$

where  $\hat{z}$  is the unit vector in the axial direction. Assuming now that  $\vec{U}$  is axisymmetric (it is not strictly the case when four axial baffles are used), its toroidal component reduces to the azimuthal velocity, while its poloidal component is found to lie in the meridian planes

$$\begin{aligned} \vec{U}_{tor}(r, z) &= U_\theta(r, z) \hat{\theta} \\ \vec{U}_{pol}(r, z) &= \nabla \times (\partial_r P \hat{\theta}) = \hat{\theta} \times (1/r \nabla \psi(r, z)) \\ \vec{U}_{pol}(r, z) &= U_r(r, z) \hat{r} + U_z(r, z) \hat{z} \end{aligned}$$



where  $\hat{r}$  and  $\hat{\theta}$  are the unitary vectors in the radial and azimuthal directions. The poloidal scalar  $P$  is thus replaced by the flux function  $\psi(r, z)$ , such that

$$\begin{aligned} U_r(r, z) &= 1/r \partial_z \psi \\ U_z(r, z) &= -1/r \partial_r \psi \end{aligned}$$

so that finally  $U_r$  can be derived from the experimental knowledge of the field  $U_z(r, z)$ .

The velocity field input in the kinematic dynamo code is obtained in the following way : (i) The time averaged  $U_\theta$  and  $U_z$  are measured on a  $11 \times 15$  grid in the plane  $\theta = 0$  of figure 10.1, outside the region swept by the propeller blades. (ii) In the region swept by the propeller blades, we interpolate lines  $z = 0, 16, 17$ , making the hypothesis that  $U_z$  depends linearly in  $z$  and  $U_\theta$  does not depend on  $z$ . (iii) From the obtained  $11 \times 18$   $U_z$  velocity field, we compute the flux function  $\psi$  by a radial integration between the axis and the container wall. (iv)  $\psi$  and  $U_\theta$  are smoothed using a standard  $3 \times 3$  convolution filter. (v)  $\psi$  and  $U_\theta$  are then periodized in the  $z$ -direction in order to eliminate Gibbs phenomenon in the code. Axial periodicity is obtained by completing the measured flow by its symmetric with respect to the plane of any of the container tops (as translation of length  $L$  is obtained by the product of two reflections by parallel planes distant of  $L/2$ ). (vi)  $\psi$  and  $U_\theta$  are then interpolated linearly to the final  $48(z) \times 51(r)$  simulation resolution. (vii)  $U_r$  is then derived from  $\psi$ .

Note that the periodization of the flow implies that the toroidal flow can be decomposed on  $n'$  odd modes, while the poloidal flow can be decomposed on  $n'$  even modes. The magnetic eigenmodes depend on these symmetry properties of the simulated flow.

### Characterization of the velocity field

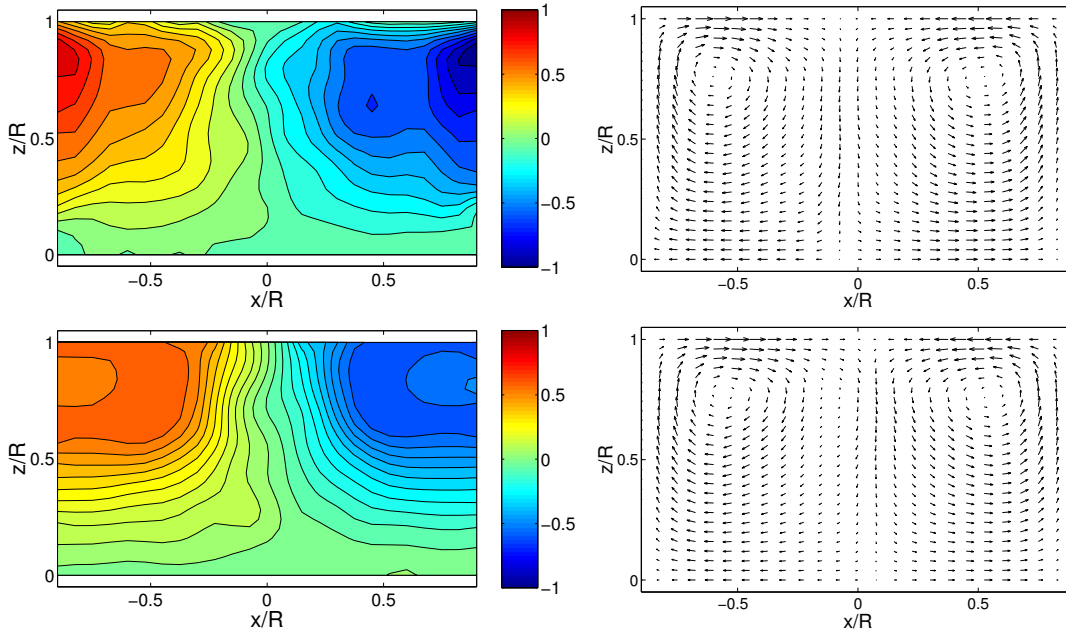


FIG. 10.3 – *Mean velocity field. TM28 propeller velocity field : (a) toroidal and (b) poloidal component in a meridional plane. TM60 propeller velocity field : (c) toroidal and (d) poloidal component.*

Different driving devices have been tested and each configuration gives a different velocity field. Figure 10.3 shows the toroidal and poloidal components of the mean velocity field for the propellers TM28 and TM60 without baffles. The two velocity fields appear to be similar, but we will see later that TM28 and TM60 display quite different dynamo properties.

	$U_{pol}(ms^{-1})$		$U_{tor}(ms^{-1})$		$U_{pol}/U_{tor}$		$E_f$
	Mean	Max	Mean	Max	Mean	Max	
TM28	0.51	1.26	0.72	1.77	0.71	0.71	0.64
TM60	0.47	1.20	0.58	0.94	0.82	1.27	0.52

TAB. 10.1 – *Characteristics of two experimental velocity fields corresponding to propeller TM28 and TM60 at  $f = 4.53Hz$ . The definitions of mean and maximum velocity, poloidal and toroidal components are given in section 10.2.2. The efficiency corresponds to  $E_f = U_{max}/2\pi R_c f$ .*

In table 10.1, the main characteristics of these velocity fields are summarized. The spatial mean speed in the measured volume, including blades, is defined as :

$$U_{mean} = \frac{1}{V} \int_V |\vec{U}(r, z)| dV$$

and the efficiency  $E_f$  of the propeller as :  $E_f = U_{max}/2\pi R_c f$ .  $U_{max}$  represents the maximum value of the speed in the measured volume. Typically,  $U_{max} \leq U_{rim}$ .

As can be seen in table 10.1, the efficiency of propeller TM28 is 25% larger than that of propeller TM60. Note that the efficiency of a straight-blade propeller is closer to unity. As could be expected from the curvature difference, the poloidal-to-toroidal ratio of propeller TM60 is larger than that of propeller TM28. This gain in poloidal-to-toroidal ratio is however offset by the loss in efficiency, so that the poloidal flow of TM60 is smaller than that of TM28.

The largest values of the velocity can be found close to the propeller rims. This is true for both the poloidal and the toroidal velocities, regardless of the propeller used.

For a typical pair of propellers, we have performed velocity field measurements at different rotation rates, 2.5, 5 and 7.5 Hz. At every location inside the flow, the measured velocity is proportional to the rotation rate. This result could be expected from standard hydrodynamics arguments. As a further consequence, changing the magnetic Reynolds number by a simple scaling of the flow seems reasonable. This property will be used in the numerical code.

## 10.3 Numerical resolution of the induction equation

### 10.3.1 Scope of the numerical approach

The numerical dynamo problem asks for the resolution of two coupled sets of equations, one for the velocity field and one for the induction equation. In the context of experimental dynamos using liquid sodium, at  $R_m = 100$ , the kinetic Reynolds number of the flow will reach  $10^7$ , which is far out of range of any direct numerical simulation. This is why scaled down water experiments are needed to measure the mean flow velocity field, to estimate the mechanical torque necessary to drive the flow as well as the dissipated power. Although the chaotic properties of the flow may play an essential role for the dynamo action in specific configurations, there is presently no way to determine the time dependent turbulent velocity field.

An alternative to the fully nonlinear dynamo solution is the "kinematic" approach, where the flow is considered as given in the evolution equation of the magnetic field. Starting with a weak

seed field, this approximation is valid as long as the magnetic force field remains small. A better contact with experiments may be obtained if the time dependent solutions are obtained, instead of choosing to solve an eigenvalue problem. In this case, for flows at magnetic Reynolds numbers below the critical value, one may study the magnetic response to external magnetic fields, possibly time-dependent, in order to get an experimental estimate of the critical  $R_m$ . Finally, note that while the nonlinear simulations need a challenging amount of numerical resources, the parameter space may be explored more rapidly and thoroughly using the kinematic solution. When following an optimization procedure, this is a meaningful practical point. A typical example is given below by the variation of the thickness of an high conductivity blanket, which allows to reduce the critical  $R_m$ .

### 10.3.2 The kinematic dynamo code

As explained above, we consider that the velocity field is known in a cylindrical container of radius  $R_c$ . Moreover we assume that the conductivity  $\sigma$  of the fluid inside the cylinder is uniform, the external medium is insulating and that the magnetic permeability is uniform in all space.

The induction equation is nondimensionalized using the cylinder radius as length unit and the ohmic diffusion time

$$t_d = \mu_0 \sigma R_c^2$$

as time unit. The induction equation reads then

$$\partial_t \vec{B} = R_m \nabla \times (\vec{U} \times \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B}.$$

Notice that the initial magnetic field must satisfy

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Boundary conditions are implemented as follows. The magnetic field must be continuous at the cylinder boundary, from Maxwell equations. The external field is curl-free and derives from an harmonic scalar potential, which is completely defined by, say, its gradient normal to the cylinder, i.e. the magnetic field orthogonal to the boundary. For a given conducting volume, the numerical determination of the external harmonic potential from its gradient at the surface boundary may involve substantial numerical resources, and this is in particular the case for a cylinder of finite length. We have chosen here to avoid this problem by solving the induction equation for axially periodic flows, where there is an analytical solution for the external potential, as is also the case for the spherical geometry.

The magnetic field has thus the following representation,

$$\vec{B}(r, \varphi, z, t) = \sum_{n,m} \vec{B}^{n,m}(r, t) \exp [i(m\theta + nz)],$$

where the  $z$  coordinate ( $0 \leq z \leq 2\pi$ ) has been scaled with the axial period and the integers  $n$  et  $m$  characterize the axial and azimuthal modes. The spatial scheme is pseudospectral in the azimuthal and axial directions, and uses compact finite differences in the radial direction.

Let us summarize now the formal organisation of the temporal scheme. Suppose that at time  $t^i$  the internal magnetic field  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t^i)$  is known : from the normal component of the surface field  $\mathbf{b}_\perp(\mathbf{S}, t^i)$ , where  $\mathbf{S}$  is a point on the surface  $r = 1$ , one may get the external potential for the next time step,  $\phi(\mathbf{r}, t^{i+1})(r > 1)$  and the corresponding tangential magnetic field is then obtained by

differentiation  $\mathbf{b}_{\parallel}(\mathbf{S}, t^{i+1}) = \vec{\nabla}_{\parallel}\phi(\mathbf{S}, t^{i+1})$ . These two components are the two boundary conditions used for the integration of the dynamo equation within the cylinder, which gives finally the internal field  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t^{i+1})$ , ( $r < 1$ ) at time step  $i + 1$ . The time scheme is second order Adams-Bashforth for the non linear terms, while the purely multiplicative parts of the diffusive terms are integrated exactly. The integration variables are the three components of the magnetic field, and this allows to follow the growth of the divergence of the magnetic field, whose solenoidal property is not preserved under this algorithm (the discretized expression of  $\text{div curl}$  is not zero). To keep the divergence small, the numerical solution is projected, every 40 steps, say, on a divergenceless field. Other features of the code have been described elsewhere [30].

Comparisons with a finite cylinder dynamo code (performed by F. Stefani, RFZ, Dresden) have not shown significant differences for the critical  $R_m$  with respect to the simpler periodic solution having an identical aspect ratio, at least for a few flow configurations which have been tested.

## 10.4 Results

Dynamo action may take place if the energy generation by stretching dominates the ohmic dissipation. This is measured in a loose way by the magnitude of the magnetic Reynolds number  $R_m$  which appears after adimensionalization of the equation with the maximal flow speed  $U$  and a container typical scale  $L$ . This necessary condition is useless to select flows which are indeed efficient dynamos, i.e. flows with small critical magnetic Reynolds numbers. Numerical kinematic dynamos are generally obtained from successive attempts with flows given by a few velocity components selected for analytical simplicity (see e.g. [9]). In this section, we present numerical results obtained with the mean experimental velocity fields presented above.

As explained in paragraph 4.2.2, these velocity fields present a slight experimental asymmetry, which has a small influence on the obtained results. We have thus preferred to first present the results with a symmetrized velocity field and then to study the influence of this additional parameter. These results first concern threshold determination and the influence of different parameters on it. We then give a description of the spatio-temporal characteristics of the self-excited magnetic field mode. In order to compare the numerical results to available experimental data, we finally study the response of the system to an external magnetic field for  $R_m$  below the dynamo threshold.

### 10.4.1 Threshold determination

For a given experimental configuration, the mean velocity field shape is fixed, and cannot be varied. As indicated in Section 2, varying the propellers rotation rate, we are only modifying  $R_m$  in the induction equation, but not the field shape. The effect of turbulence is not taken into account.

For each experimental velocity field, we have performed a series of numerical runs with the kinematic dynamo code, at different  $Rm$ , and checked the energy evolution of each mode  $m, n$ , defined as follows :

$$E^{n,m}(t) = \int_0^1 |\vec{B}^{n,m}(r, t)|^2 r dr \sim e^{\sigma_{n,m} t}$$

Note that the different azimuthal  $m$ -modes are decoupled, since only axisymmetric flows are considered. Self excitation is achieved when the energy  $E^{n,m}$  grows in at least a single mode

without external magnetic excitation that is if  $\sigma_{n,m} > 0$  for at least a pair  $n, m$ . If  $\sigma_{n,m} < 0 \forall n, m$ , ohmic diffusion dominates.

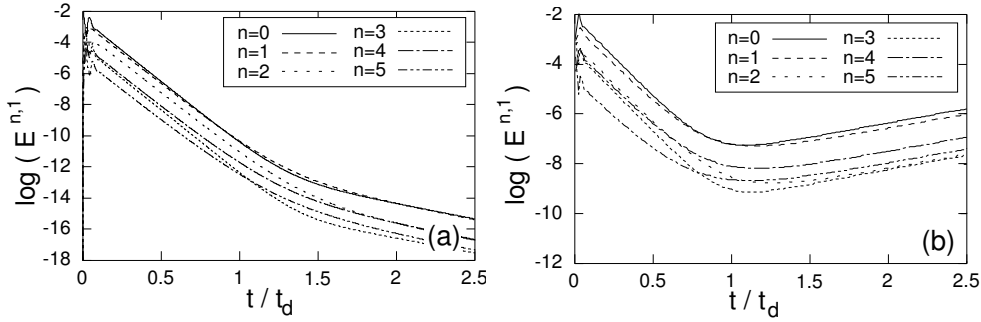


FIG. 10.4 – Temporal evolution of the energy of modes  $m = 1; n = 0, \dots, 5$  for TM28 propeller. (a)  $R_m = 100 < R_m^c$  (b)  $R_m = 140 > R_m^c$ . The time unit corresponds to the ohmic diffusion time. Two different regions can be distinguished : for  $t/t_d \leq 1$ , relaxation of the fast stable modes; for  $t/t_d \geq 1$ , relaxation of the slow stable modes (a), or growth of the unstable modes (b). Note that in both cases the evolution is exponential with a growth rate  $\sigma < 0$  (a) and  $\sigma > 0$  (b).

Figure 10.4 displays the evolution in time of  $E^{n,m}$  for  $m = 1$  and  $n = 0, \dots, 5$  for the velocity field labelled TM28 under and above threshold. The initial condition is :

$$E^{n,m}(t) = \begin{cases} 1.0 & \text{when } m = 0, 1, 2, 3; n = 0 \\ 0.2 & \text{when } m = 0, 1, 2, 3; n = 1, \dots, 7 \\ 0.0 & \text{in any other case} \end{cases}$$

In both cases, a transient regime corresponding to the relaxation of the initial field is observed until  $t \simeq t_d$ . For  $R_m < R_m^c$ , the energy in all modes decreases in time, i.e. the growth rates are negative (figure 10.4a). For  $R_m \geq R_m^c$ , the energy of some modes begins to grow (figure 10.4b). The critical magnetic Reynolds number  $R_m^c$  is defined as the value for which at least one growth rate is greater or equal to zero. For the velocity fields tested, self-excitation always appears through the  $m = 1$  mode. Remember that, as the flow is axisymmetric, an axisymmetric ( $m = 0$ ) self-excited magnetic field is forbidden by anti-dynamo theorems [1].

In the following, for numerical efficiency, a different initial condition has been used, namely the (solenoidal) eigenmode of the vector laplacian which is closest in shape to the most unstable mode of the induction equation (cf. section 4.2). The energy is thus initially distributed on the  $m = 1, n$  odd Fourier modes. This leads to the near elimination of the transient regimes of figure 10.4. The variation of the maximal growth rate is presented in figure 10.5 as a fonction of  $R_m$  for the two velocity fields of figure 10.3. The velocity field corresponding to propeller TM28 exhibits a growth rate that crosses the zero line for  $R_m^c \simeq 120$  and gives rise to dynamo action. On the contrary, for the propeller TM60, the growth rate remains negative : it saturates for  $R_m \simeq 80$ , and then decreases again. This latter result corresponds to a non-dynamo velocity field. Performing simulations for  $R_m$  up to 300, we have observed that the growth rate for TM28 (resp. TM60) keeps increasing (resp. decreasing). At those large values of  $R_m$ , simulation results are not accurate enough to obtain a precise scaling of  $\sigma(R_m)$ . A linear scaling of  $\sigma$  with  $R_m$  would indicate a saturation of  $\sigma$ , if expressed with the convective time unit  $t_d/R_m$ .

The existence and the exact value of  $R_m^c$  strongly depends on the characteristics of the velocity field and on the boundary conditions. To investigate this dependence, we have modified different parameters. First, the velocity fields have been modified in a controlled manner in the numerical

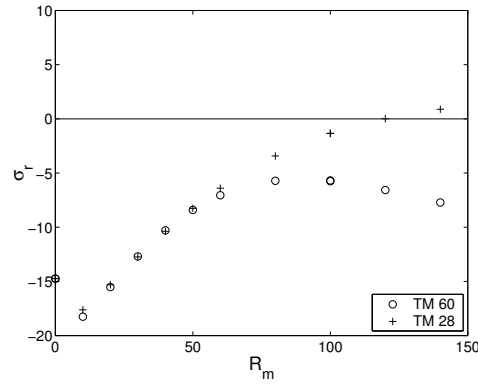


FIG. 10.5 – Energy growth rates  $\sigma_r$  for the most unstable mode ( $n = 1$  and  $m = 1$ ) as a function of  $R_m$ . Crosses (resp. circles) correspond to the symmetrized velocity field of TM28 (resp. TM60) propeller. The TM28 propeller gives rise to dynamo action for  $R_m \simeq 120$  whereas TM60 does not.

simulations, changing the ratio between the poloidal and toroidal velocity components. We have then investigated the effect of a conducting layer (with various thicknesses) surrounding the flow container.

### Ratio between the poloidal and toroidal velocity components

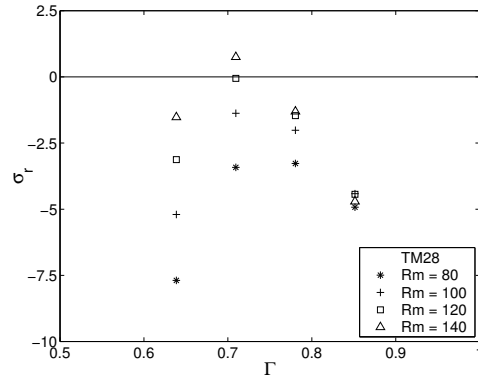


FIG. 10.6 – Energy growth rates  $\sigma_r$  for the mode  $n = 1$  and  $m = 1$  as a function of the mean poloidal-to-toroidal ratio  $\Gamma = U_{pol}/U_{tor}$  for various  $R_m$ . The plotted data correspond to the symmetrized TM28 velocity field which as a natural ratio  $\Gamma = 0.71$ .

Because of the flow axisymmetry (see section 10.2.2), we can keep the solenoidal character of the flow, when changing the ratio  $\Gamma = |\overline{\vec{U}_{pol}}| / |\overline{\vec{U}_{tor}}|$  where

$$\overline{|\vec{U}_{pol,tor}|} = \int_V |\vec{U}_{pol,tor}| r dr dz$$

and look at the effect of  $\Gamma$  on the critical magnetic Reynolds number. The  $\Gamma$  parameter strongly affects the growth rates, as can be observed in figure 10.6 for TM28 propeller : a negative growth rate can become positive and vice-versa. Most of the studied velocity fields present a maximum growth rate for  $\Gamma \simeq 0.75$ . This result is recovered for both dynamo and non-dynamo velocity fields

such as the TM60. The optimal value  $\Gamma_{\text{opt}}$  corresponds nearly to the experimental value for the TM28 propeller ( $\Gamma_{\text{exp}} = 0.71$ ), while it is different in the case of TM60 propeller ( $\Gamma_{\text{exp}} = 0.82$ ).

In a von Kármán flow, this parameter can be adjusted within certain limits in various ways e.g. by changing the diameter of the disc or the curvature of the blades (cf. Table 10.1) or by fitting baffles located on the cylinder wall. Four baffles can be placed parallel to the cylinder axis at azimuthal intervals of  $\pi/2$ . These baffles break the axisymmetry of the problem, making it necessary to measure the full three-dimensional velocity field. This also imposes a higher resolution in the azimuthal direction in the code, making simulations more time-consuming. We have not performed systematic exploration of these effects, and will not present here the corresponding results.

Figure 10.6 also reveals a difference in the variation of the growth rate with  $R_m$  depending on the value of  $\Gamma$ . For  $\Gamma \simeq 0.5$ ,  $\sigma$  varies almost linearly with  $R_m$ , while for  $\Gamma \simeq 1$ ,  $\sigma$  seems independent of  $R_m$ .

### Conducting layer

It is empirically known that a stagnant layer of conducting material surrounding some fluid dynamos may reduce the critical magnetic Reynolds number. In the case of the Riga experiment [3], this has also been numerically verified by Stefani et al. [37]. The example of the Ponomarenko dynamo has been systematically examined in [39], varying the thickness of the static conducting layer, and the authors show that there is an optimal thickness leading to a lowest critical  $R_m$ . A similar configuration is available in the VKS experiment [8] with a copper wall put inside the stainless steel cylindrical container.

As indicated in Section 3, the numerical simulations are performed with a conductivity which is uniform inside a cylinder and insulating boundary conditions. A static conductive shell of arbitrary thickness may thus be easily introduced only if it has the same conductivity as the fluid. If the flow lies within a radius  $R_c$ , the stationary shell goes from  $r = R_c$ , to  $r = R_{\text{ext}}$ , and we can use as control parameter the relative width  $W = (R_{\text{ext}}/R_c) - 1$ . Note that we have chosen to present the numerical results with the magnetic Reynolds defined with the radius  $R_c$ .

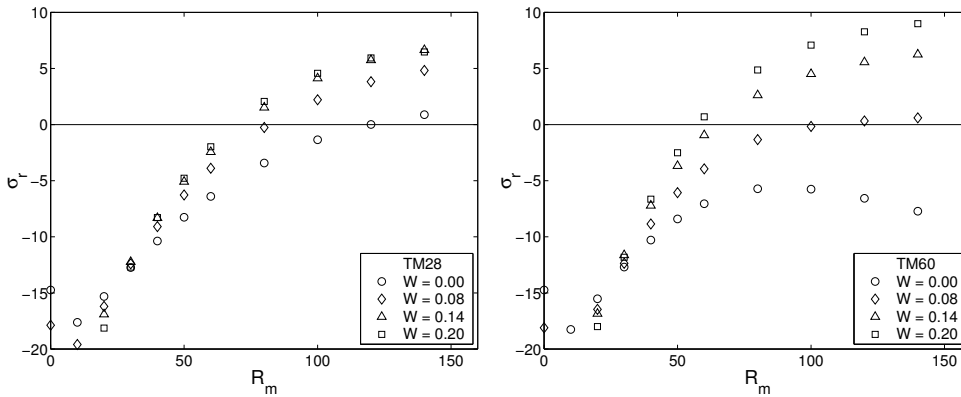


FIG. 10.7 – *Conducting layer effect : Maximal growth rate  $\sigma_r$  as a function of  $R_m$  for different layer thicknesses  $W = (R_{\text{ext}}/R_c) - 1$ ; symmetrized velocity field of propeller (a) TM28 and (b) TM60.*

Figure 10.7 displays the effect of a conductive layer for propeller TM28 and for propeller TM60. The first effect concerns the growth rates that increase with  $W$ , until they saturate for  $W = W_s \simeq 0.2$ . For propeller TM28, the threshold  $R_m^c$  decreases from 120 for  $W = 0$  to 70

for  $W = 0.2$  (cf. Figure 10.7a). The second important effect concerns the fact that the presence of a conducting layer can actually change a non-dynamo velocity field into a dynamo velocity field :  $R_m^c = 60$  for propeller TM60 and  $W = 0.2$ , which is actually smaller than the threshold for TM28 (cf. Figure 10.7b).

### 10.4.2 Description of the self-excited magnetic field

In the following, we describe the self-excited magnetic field numerically observed with propeller TM28. This field appears to have a very complicated spatial structure and its temporal behaviour depends on the symmetry of the velocity field.

#### Spatial characteristics

It is well known that a smooth velocity field with a few spatial modes gives generally rise to magnetic eigenmodes with a broad band spectrum, and complex spatial configuration, and we have verified that it is indeed the case for the flows we have used. Although small variations of the flow may induce large changes in the value of the critical magnetic Reynolds number, we have observed that the overall neutral mode topology is not much altered, so that we choose to present a single example.

As noted above, in an axisymmetric flow, the different azimuthal modes evolve independently and close to the critical  $R_m$ , it is the mode  $m=1$  which has the largest growth rate (recall that  $m=0$  modes always decay). The magnetic axial modes ( $n$ ) are coupled by the kinetic ones, so that the axial spectrum is continuous from  $n=1$  to the ohmic dissipation wavenumber.

Figure 10.8 represents a typical example of the growing mode structure, obtained for  $R_m = 140$ , with the TM28 velocity field, in which symmetry has been artificially imposed. Figure 10.8a shows the zones where the magnetic field intensity is higher than 50% of its maximum value. The magnetic field appears to be strong principally in two banana-shaped regions, located on either sides of the cylinder axis. Figure 10.8b shows the poloidal component of the magnetic field in the plane XOY of figure 10.1. In that plane, the magnetic field is roughly dipolar, oriented perpendicularly to the cylinder axis. This corresponds to an  $m=1$  angular dependency. On either sides of the dipole, we can see in figure 10.8b the ends of the banana-shaped regions of figure 10.8a. Figure 10.8c shows the poloidal component of the magnetic field in the plane XOZ of figure 10.1. The magnetic field has a large amplitude in a significant portion of the regions in this plane. The magnetic field there is axial, and has the expected  $m=1$  angular dependency. Figure 10.8d and 10.8e show the components of the magnetic field normal to the XOY and XOZ planes, respectively.

From all these figures, we can gather that the magnetic field of the most unstable mode is roughly a dipole, oriented perpendicularly to the cylinder axis, in the plane of figure 10.8b, normally into the plane of figure 10.8e. Around this dipole, a group of magnetic field lines comes upwards from the bottom left-hand of figure 10.8d, follows the arrows in the top half of figure 10.8c, and then goes downwards at the top right-hand of figure 10.8d. The  $m=1$  angular dependency implies that another group of magnetic field lines goes in the converse way, going into the bottom right-hand of figure 10.8d, to the left in figure 10.8c, and then upwards in the top left-hand corner of figure 10.8d.

The electric current distribution associated to this magnetic field structure is also quite similar in all situations. The electric currents concentrate in an elongated cylindrical region, located between the two regions of large magnetic field amplitude. Inside this region, the currents point perpendicularly to the axis, in the same direction as the magnetic field dipole.



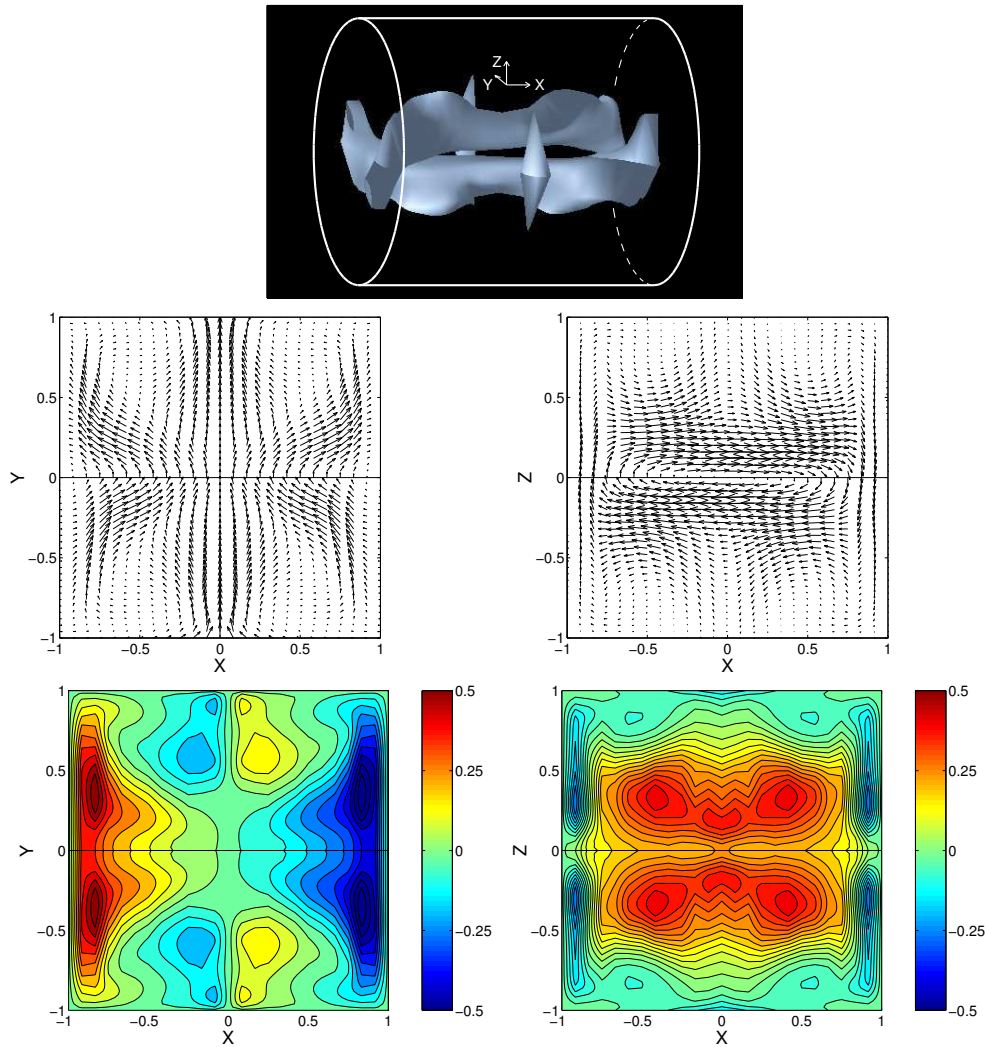


FIG. 10.8 – Self-excited magnetic field of propeller *TM28* for  $R_m = 140$ ; symmetrized velocity field,  $W = 0$ ,  $\Gamma = 0.71$ . (a) Isosurface of the magnetic energy at 50 % of the maximum value in the simulation volume. Poloidal component of the magnetic field in  $(X, Y)$  plane (b) and  $(X, Z)$  plane (c). (d)  $Z$  component of the magnetic field in  $(X, Y)$  plane; red (resp. blue) corresponds to vectors pointing out of (resp. into) the plane. (e)  $Y$  component in the  $(X, Z)$  plane; blue (resp. red) corresponds to vectors pointing out of (resp. into) the plane.

### Temporal characteristics

We have observed that the growth rate of the most unstable mode can have an imaginary part. The corresponding frequency is associated with a rotation of the magnetic field around the cylinder axis. This frequency is very sensitive to the level of symmetry of the velocity field. In fact, for a very symmetric velocity field such as the TM28, the neutral mode is nearly stationary, whereas for strongly dissymmetric ones the growth rate can have a much larger imaginary part.

In order to study this dependency, we have separated the TM28 velocity field into two parts  $\vec{U}_{even}$  and  $\vec{U}_{odd}$  defined by their parities with respect to the rotation around the OP axis of figure 10.1.

In the case of TM28, we have checked that the velocity field odd component  $\vec{U}_{odd}$ , being mainly due to experimental imperfections, is small compared to the even component  $\vec{U}_{even}$  :  $\vec{U}_{odd} \simeq 0.1\vec{U}_{even}$ . We have then performed simulations of the composite flow  $\vec{U} = \vec{U}_{even} + \varepsilon\vec{U}_{odd}$  for various values of  $\varepsilon$ , while keeping the  $R_m$  based on  $\vec{U}_{even}$  at a constant value of 160. The value  $\varepsilon = 1$  corresponds to the experimental TM 28 flow.

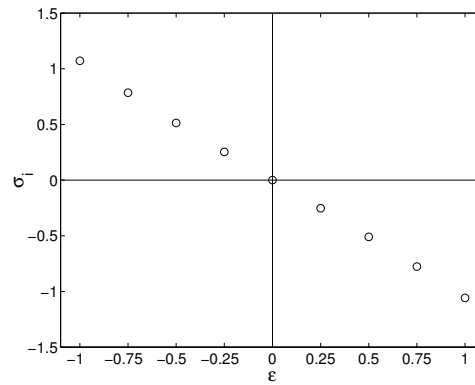


FIG. 10.9 – Imaginary part of the neutral mode growth rate  $\sigma_i$  for  $R_m = 160$  as a function of the symmetry parameter of the velocity field  $\varepsilon$  as defined in the text. Symmetrized velocity field of TM 28 propeller which has a natural parameter  $\varepsilon = 1$ , is defined on the even component of the velocity field.

The dependency of the imaginary part of the growth rate on  $\varepsilon$  is shown in figure 10.9. We can see that this dependency is very nearly linear, and that  $\varepsilon = 0$ , which means a perfectly symmetric flow, is associated with a stationary magnetic field neutral mode. This behaviour is observed with other velocity fields and seems to be robust in von Kármán type flows. Note that the real part of the growth rate presents a small variation with  $\varepsilon$ .

#### 10.4.3 Magnetic induction by an external field

In the following, we want to address the following question : is it possible to use the magnetic response of the experimental flow below  $R_m^c$  to an external magnetic field to predict the value of  $R_m^c$  ?

The kinematic code and the experimental velocity fields can be used to obtain the response of the system to an external magnetic field  $\vec{B}_0$  and to perform a comparison with sodium experiments. We have checked the response to two different external magnetic fields : an axial field, parallel to the axis of rotation (along  $X$ ) or a transverse field, orthogonal to the rotation axis (along  $Y$ ).

In both cases, we have performed global and local measurements. We have first determined the decay times of the energy of each mode, and the saturation value of the magnetic field induced inside the numerical box. In order to make a quantitative comparison with the results obtained in the VKS experiment, we have then studied the local components of the induced magnetic field at a particular point in the experiment (point P of figure 10.1).

For the magnetic fields applied in the VKS experiment, the interaction parameter  $N$  defined as the ratio of the Lorentz forces to the pressure forces [8]

$$N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}$$

is much less than unity ( $10^{-4} < N < 10^{-2}$ ). We can thus neglect the Lorentz forces (there is no *back-reaction* from the magnetic to the velocity field) and the sodium velocity field remains similar to the one used in the computations.

### Magnetic energy measurements

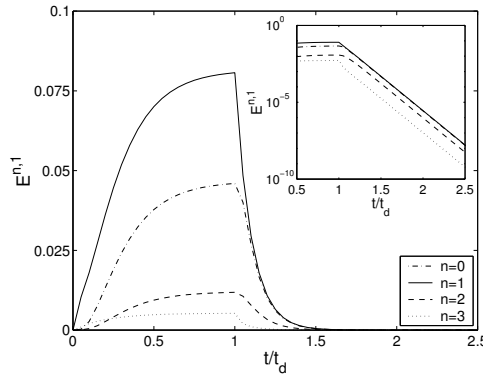


FIG. 10.10 – *Response to an external transverse magnetic field, varying sinusoidally along the axis, of the symmetrized TM28 velocity field : temporal evolution of the energy for the modes  $m = 1; n = 0, \dots, 3$  when  $R_m = 40 < R_m^c$ . The external field is applied for  $0 < t < 1$ . It has an  $n=1$  axial dependency, and has a maximal amplitude of 1.*

Each numerical run is performed for a given velocity field as follows. The initial condition corresponds to no magnetic field inside the cylinder. At  $t = 0$ , an external magnetic field is switched on and we let the system evolve in time. This transverse field is directed along Y. It is sinusoidal with a  $n = 1$  axial dependency and its maximal amplitude is 1. We have chosen this external field structure because a uniform ( $n = 0$ ) transverse field, which would have been easier to implement, as well as closer to the experimental setup, is orthogonal to the growing magnetic field eigenmodes we have observed. This feature is specific to the axially periodic induction code.

For small  $t$ , the external field enters the cylinder, until it approaches asymptotically a stationary saturated state of energy  $E_{\text{sat}}$  (see figure 10.10, for  $t < 1$ ,  $m = 1, n = 0 - 3$ ) :

$$E(t) = E_{\text{sat}} (1 - \exp(-t/\tau_{\text{sat}}))$$

Where  $\tau_{\text{sat}}$  is the saturation characteristic time. This time diverges at the dynamo threshold of the TM28 system. After the stationary state has been reached, the external field is disconnected, and we look at the magnetic energy decay time (see figure 10.10, for  $t > 1$ ) :

$$E(t) = E_{\text{sat}} \exp(-t/\tau_{\text{decay}})$$

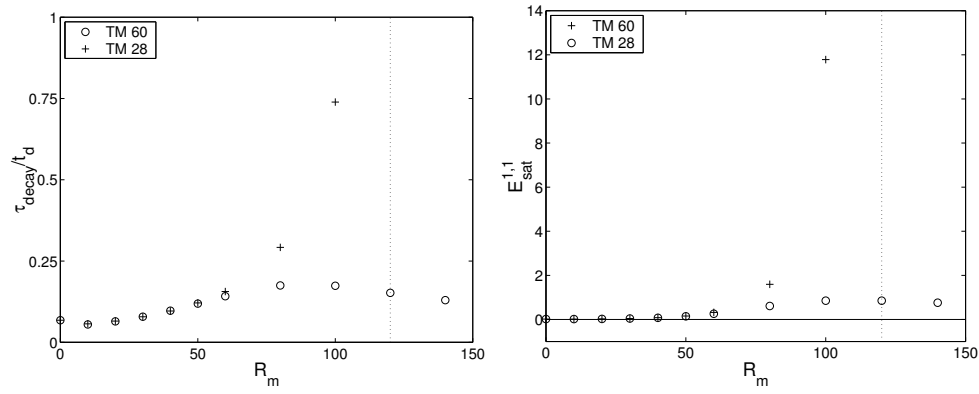


FIG. 10.11 – variation of (a) the energy decay time  $\tau_{\text{decay}}$  and (b) the saturation value of the magnetic energy  $E_{\text{sat}}^{n=1,m=1}$  as a function of  $R_m$  for an external transverse magnetic field. Crosses : TM28 propeller ; circles : TM60 propeller. Note that both the decay time and the energy diverge when TM28 approaches threshold (dotted line).

Figure 10.11 shows the variation of the decay characteristic times  $\tau_{\text{decay}}$  and the saturation value of the magnetic energy with  $R_m$ . Both quantities diverge for TM28 propeller near  $R_m^c = 120$  while they saturate near  $R_m = 80$  and then decrease for TM60 propeller. We found that, below  $R_m = 60$ , these features do not appear in practice to be good candidates to discriminate between a dynamo and a non dynamo velocity field.

### Local magnetic field measurements

The spatial structure of the magnetic field in the presence of the transverse magnetic field is represented in the plane (XOZ) in figure 10.12. For  $R_m = 50$ , the structures of the two magnetic fields look similar, and the intensity of the induced field appears to be slightly larger for TM28 than for TM60 velocity field. The difference between the two fields increases with  $R_m$ . For  $R_m = 80$ , the amplitude of the magnetic field corresponding to TM28 appears to be twice that corresponding to TM60. Spatially, a spreading of the magnetic field is observed in the case of TM60, while strong gradients along  $X$  can be evidenced for TM28, with an inversion of the magnetic field close to the disks.

We have studied the magnetic field induced at the point P of figure 10.1 by an external axial or transverse field in the symmetrized TM28 and TM60 flows. This point corresponds to the main measurement location in the VKS experiment [8]. In figure 10.13, we have plotted the variation of the three components of the magnetic field as a function of  $R_m$ . We can see that in all cases the Z-component of the magnetic field is equal to zero. We have checked that this is a consequence of the symmetry of the flow [25].

In the case of an axial external magnetic field (figure 10.13 a and b), the magnetic field components increase, then saturate for  $R_m \simeq 30$  and eventually decrease to zero for both propellers. This behaviour is akin to the expulsion of poloidal magnetic field expected in poloidal circulation [1] in spite of the existence of a toroidal flow.

For a transverse field, figures 10.13 c and d show that, for the TM28 velocity field which gives rise to dynamo action, the amplitude of the induced magnetic field components diverges as one approaches the threshold. Conversely, in the case of the TM60 velocity field, which does not lead to dynamo instability, the amplitudes remain bounded. Indeed we can see that the magnetic field components increase for an interval in  $R_m$ , then saturate for  $R_m \simeq 80$ , and eventually start

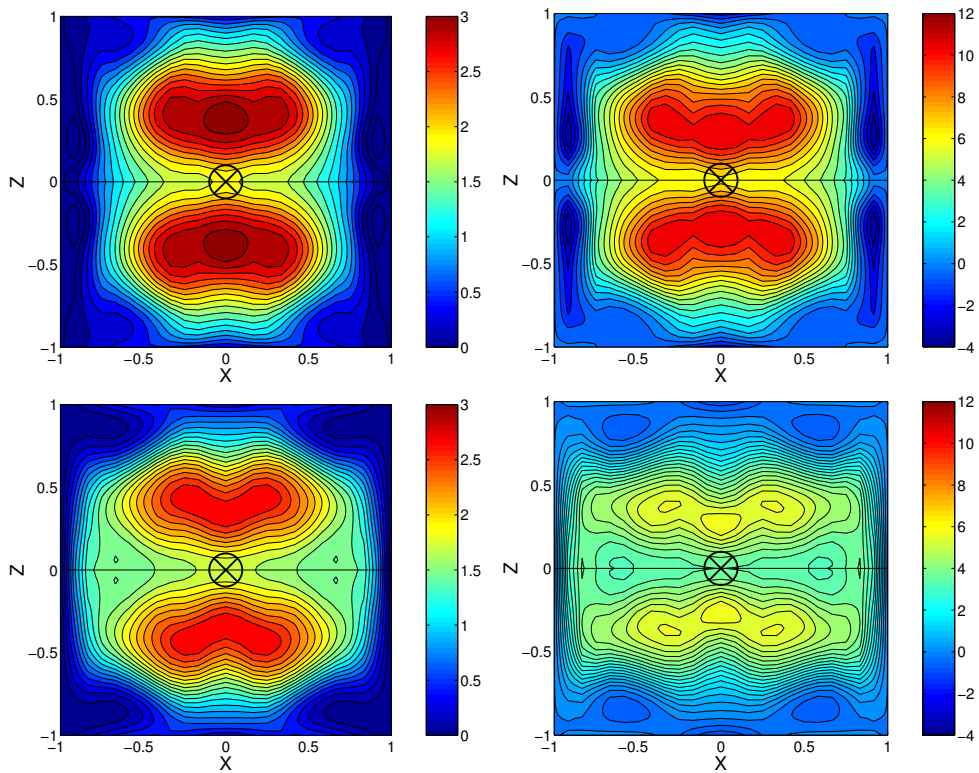


FIG. 10.12 – Representation in the plane  $(X, Z)$  of the  $B_Y$  component of the magnetic field in the presence of an external transverse magnetic field varying sinusoidally along the axis (reprented schematically by the central cross). Propeller TM28, symmetrized,  $W = 0$ ,  $\Gamma = 0.71$  : (a)  $R_m = 50$  and (b)  $R_m = 80$ . Propeller TM60, symmetrized,  $W = 0$ ,  $\Gamma = 0.82$  : (c)  $R_m = 50$  and (d)  $R_m = 80$ . blue (resp. red) corresponds to vectors pointing out of (resp. into) the plane.

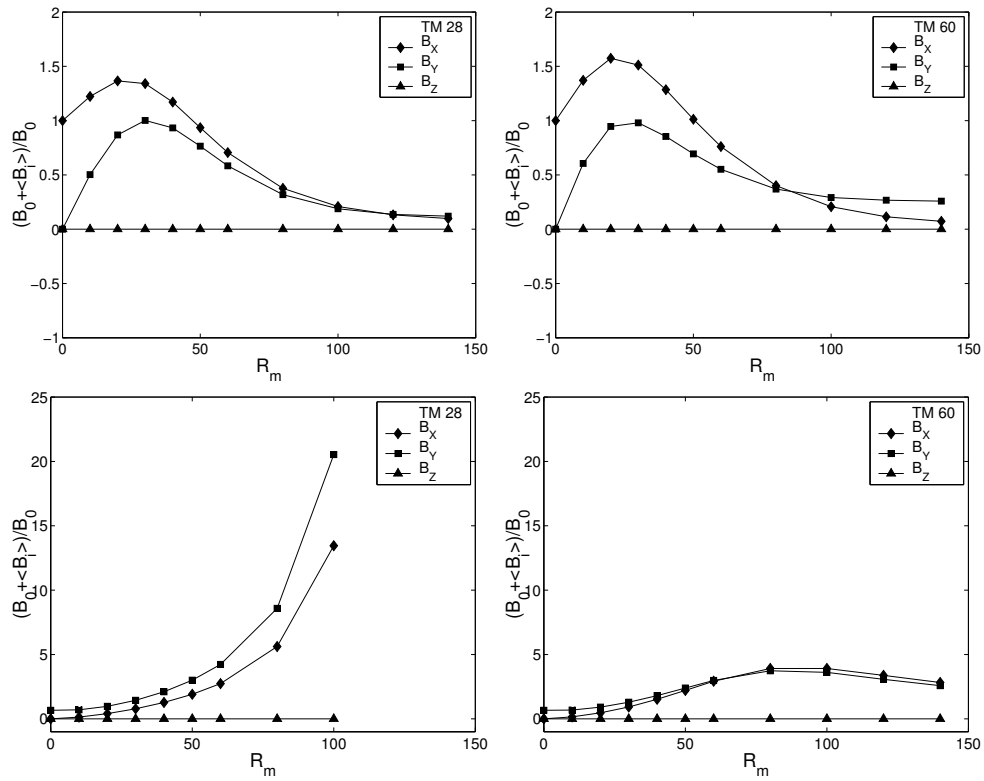


FIG. 10.13 – Asymptotic values of three components of the magnetic field at position  $P$  as a function of  $R_m$ . Diamonds, squares and disks respectively refer to  $B_x$ ,  $B_y$  and  $B_z$ . Response of the TM28 (a) and the TM60 (b) symmetrized velocity field, to an axial magnetic field. Response of the TM28 (c) and the TM60 (d) velocity field, to a transverse magnetic field varying sinusoidally along the axis.

to decrease. Inspection of the growth rates shows that the magnetic field growth rate, while remaining negative, has a maximum for the same value of  $R_m$  (cf. figure 10.5).

## 10.5 Discussion

### 10.5.1 Status of the von Kármán flow with respect to other dynamo flows

Starting from an experimentally produced flow, we have shown that it may produce kinematic dynamo action above some critical  $R_m^c$ , which could not be reached up to now in the VKS experiment due to insufficient driving power. It is instructive to examine how these results compare with other known laminar axisymmetric dynamos, on the one hand, and available experimental dynamos, on the other hand.

Most numerical dynamo flows in a finite volume are produced in a spherical container, since the magnetic transmission conditions at the conducting-insulating interface are easier to implement. For example, the Von Kármán flow has the same symmetry properties as the spherical configuration denoted *s2t2* by [9], which has a  $R_m^c = 54$  with the particular radial function chosen by these authors. The same spherical *s2t2* configuration has been chosen for the Maryland [12, 13] and the Madison experiment [16], which use two counter-rotating coaxial turbines set in motion by two motors to drive the flow. The Maryland experiment uses a 30 cm diameter sphere and has not produced dynamo action. The Madison installation is based on a one meter diameter sphere, where the velocity field could be measured using water as a fluid in a first step and the driving configuration has been optimized with the help of a kinematic dynamo code to get  $R_m^c = 100$ . The liquid sodium installation is almost ready to be set in operation.

The two existing experimental dynamos in Riga and in Karlsruhe were based on flows of previous theoretical interest as occurrence of dynamo action in these flows may be proved analytically. They are not axisymmetric but involve helicoidal streamlines winding around unbounded cylinders, the conducting fluid filling all space. In the experimental devices, the flow is constrained by cylindrical pipes of finite length, with guiding blades (Riga) or internal helicoidal walls (Karlsruhe) and occupies obviously a finite volume container. In both cases, the design studies have concentrated on the search of a lower  $R_m^c$ . Although the two configurations are very different, they lead to comparable critical magnetic Reynolds numbers based on a flow maximal speed  $V$  and a typical scale for the conducting fluid :

- Riga experiment :  $R_m^c \simeq 61$ , with  $V = 15$  m/s,  $L = 0.4$  m ( $L =$  external cylinder radius)
- Karlsruhe experiment :  $R_m^c \simeq 36$ , with  $V = 4$  m/s,  $L = 0.9$  m ( $L =$  container radius)

Recall from Section 4 that  $R_m^c$  around 60 (resp. 70) has also been found for the TM60 (resp. TM28) flow with the adjunction of a conducting shell  $W = 0.2$ , so that the lowest  $R_m^c$  are indeed comparable for these cylindrical dynamos. There remains however a fundamental difference between these MHD flows at large  $R_m$  : the turbulence level varies from a few percent for the flows with internal walls to 40% for the VKS configuration, where the flow is not guided. In the latter case, it has been verified that the power scales as  $R_m^3$  [8], in agreement with dimensional analysis arguments. To reach the numerically predicted  $R_m^c$ , one has thus to overcome a power challenge : this is the price to pay to drive a flow without the constraint of internal walls, such that its non linear saturation regime could have a link with those observed in natural dynamos.

### 10.5.2 Threshold : comparison with VKS experiment

The kinematic dynamo simulations based on experimental mean velocity fields of von Kármán flows exhibit the existence of self-excitation in some range of parameters that can be compared

to experimental results of the VKS experiment. The minimum threshold value  $R_m^c \simeq 60$  is found for the TM60 propeller, with a 20% layer of liquid at rest. These numerical results correspond to a 4 cm sodium layer of conductivity  $\sigma_{\text{Na}}$  at rest, whereas the experiment is performed with a 1 cm thick copper boundary of conductivity  $\sigma_{\text{Cu}} \simeq 4\sigma_{\text{Na}}$ . Note that as far as the ohmic diffusion time is concerned, we expect 4 cm of sodium to correspond to 2 cm of copper.

Using the following definition for the experimental magnetic Reynolds number :

$$R_m = \mu_0 \sigma E_f R_c^2 2\pi f \quad (10.1)$$

$R_m^c = 60$  would correspond to a critical rotation frequency  $f^c = 44$  Hz in the VKS experiment ( $R_c = 0.205$  m, TM60 propeller [8]). This last value can be compared to the maximum frequency obtained in the sodium experiment  $f = 25$  Hz. As the flow is highly turbulent, the power needed to maintain the flow scales as [38] :

$$P = K_P \rho L^2 U^3 \quad (10.2)$$

where  $K_P$  is a dimensionless factor that depends on the geometry of the container and of the shape of the propellers. We can write the magnetic Reynolds number as :

$$R_m = \mu_0 \sigma E_f \left( \frac{PL}{K_P \rho} \right)^{1/3}. \quad (10.3)$$

Going from 25 to 44 Hz thus implies to increase the power or the scale of the experiment by a factor 5, that is  $P = 750$  kW or  $R_c = 1$  m.

In the case of the TM28 propeller, the minimum threshold value is  $R_m^c \simeq 70$  which corresponds to a critical  $f^c = 41$  Hz. This lower value of the critical frequency of rotation can be related to the efficiency of propeller TM28 that is superior to that of TM60. In fact, the important parameter of a flow configuration is given by the ratio  $E_f/K_p^{1/3}$ , and a minimum  $R_m^c$  does not necessary corresponds to the most easily achievable critical frequency.

### 10.5.3 Sensitivity to configuration parameters

#### Propellers

One aim of this work is to test the effect of various characteristics of the velocity fields on the existence and the value of the critical magnetic Reynolds number  $R_m^c$ . One method would be to try different velocity fields that can be obtained from analytical expressions, or to modify continuously an experimental one. A continuous optimization could be performed in this way until the velocity field with the minimum  $R_m^c$  is obtained. However, in a real system with no guiding walls, it is a technological challenge to design a propeller able to reproduce the numerically optimized velocity field.

We have taken an experimental approach having in mind a possible sodium experiment. Consequently, we have not varied a configuration in a continuous manner but tried several driving configurations. Although the presented results concern only two different propellers, we have tested approximatively 30 other configurations. Various parameters have been varied : the height and curvature of the blades, the propeller diameter, and other characteristics. Nevertheless, the presented cases correspond to representative ones, and enlighten the fact that two very close velocity fields can have very different dynamo properties. The results do not reveal which characteristics a propeller must fulfill to produce dynamo action, but nevertheless some conclusions can be drawn.



The poloidal to toroidal ratio appears to be a crucial parameter to obtain a dynamo velocity field, as already known from other numerical studies, in various geometries. The condition  $\Gamma \simeq 0.75$  (see figure 10.6) corresponds to a maximum growth rate for the explored velocity fields, but it is not a sufficient condition. No dynamo action has been observed with velocity fields with  $\Gamma < 0.6$  or  $\Gamma > 0.9$ . The intuitive idea is then to obtain propellers with an appropriate  $\Gamma$ . This can be tried by changing the propeller geometry, the curvature of blades or by placing baffles in the inner part of the cylinder of the water experiment, i.e. parallel to the generatrix. In this case, the toroidal component of the velocity field could be reduced, and, maybe, converted into poloidal velocity. The cost to be paid is that the velocity field is no more axisymmetric. In fact, the introduction of baffles greatly changes the flow pattern, and the results are far more complicated than expected : the poloidal component — and consecutively  $\Gamma$ — can even decrease with baffles.

The relation of  $\Gamma$  to the dynamo properties of the flow may be appreciated with the help of the following toy model : Assume that the toroidal velocity at scale  $l$  is coupled to the poloidal part of the magnetic field to increase the toroidal field, as is the case in a pure differential rotation :

$$\frac{d\vec{B}_{tor}}{dt} = \left(\frac{u_{tor}}{l}\right)\vec{B}_{pol},$$

and, conversely, for the poloidal component :

$$\frac{d\vec{B}_{pol}}{dt} = \left(\frac{u_{pol}}{l}\right)\vec{B}_{tor}.$$

For a given total “velocity”  $u_{tor} + u_{pol}$ , the fastest growth rate (at scale  $l$ ) is obtained when  $u_{tor} = u_{pol}$ , i.e.  $\Gamma = 1$ . This very crude argument based on two scalar variables may in principle be examined further using numerical computations.

### Conducting layer

In the section 4.1.2, we have observed that the magnetic energy growth rate increases with a conductive layer. As the induction equation is a linear equation, the energy evolution can be described by the equation  $\partial_t E = \sigma_{n,m} E$  where  $\sigma_{n,m}$  is the growth rate of a given mode. This growth rate comes from a competition between the magnetic field generation, in some way proportional to  $R_m E$  and the ohmic diffusion. This term takes into account the dissipation produced by the currents  $\vec{j}$  in the conductive volume ( $-\vec{\nabla} \times \vec{j} = \vec{\nabla}^2 \vec{B}$ ), and then is proportional to  $E/L^2$ , where  $L$  is the spatial scale of the diffusion. For a conducting shell (with the same conductivity of the fluid) of size  $L > R_c$ , we can write  $L = R_c(1 + W)$  and then the growth rate takes the form :  $\sigma \sim Rm - \frac{1}{(1+W)^2}$ , as shown in figure 10.7. The effect of the conducting wall saturates, but the exact values at which this effect is negligible depends on the velocity field, and we are not able to obtain it. This effect has been studied numerically in a recent work[39]. This work shows that, for time dependent solutions, this effect can be perturbed by a skin effect, that reduces the effective volume where the dissipation takes place. In our case, as we are looking for a stationary magnetic field (see Sec. 4.2.2), this skin effect does not appear.

### Symmetry

In order to explain the temporal characteristics presented in figure 10.9, we develop the following arguments based on the symmetries of the flow. When the flow is exactly even with respect to rotation of angle  $\pi$  around the OP axis of figure 10.1, axial symmetry implies that it

is even with respect to rotation of angle  $\pi$  around *any* axis going through O and perpendicular to the cylinder axis. If the magnetic field itself is even with respect to the rotation of angle  $\pi$  around such an axis, so will its time derivative  $\partial_t \vec{B}$ . This means that if a magnetic field is even with respect to rotation around such an axis, it will remain so. It is then straightforward to see that such a magnetic field must be stationary, or consist of standing waves originating from the symmetry axis.

For a symmetrized velocity field and in the studied parameter range (i.e.  $\Gamma > 0.5$  and  $R_m < 200$ ), the preferred structure for the magnetic field eigenmode is invariant with respect to rotation of angle  $\pi$  around the dipole axis. The magnetic field is then stationary at threshold. If the flow does not have the required symmetry, the above argument does not apply. The most general case is then that the magnetic fields will rotate around the cylinder axis, hence be time-dependent.

We can check these arguments against the numerical results of Dudley and James[9]. In the case of their  $s_2t_2$  flow, which has a structure close enough to that of a von Kármán flow, and possesses the required symmetry properties, the magnetic field eigenmode is stationary at threshold. Conversely, in the case of the  $s_2t_1$  and  $s_1t_1$  flows, in which no constraints prevent the magnetic field from rotating around the axis of the flow, the most unstable mode is always oscillating for  $R_m \neq 0$ .

In the VKS experiment as in the present water experiment, the symmetry can be broken very easily, and then generically we can expect a slightly rotating magnetic field, if the dynamo threshold is reached. Depending on the (slight) asymmetries, the frequency will be more or less important.

#### 10.5.4 Induction effects : comparison with the VKS experiment

The turbines that have been used in the first runs of the VKS experiment correspond to the TM60 propellers used in this study. This should allow us to compare the experimental data with the numerical results we have obtained, and could provide us with a valuable check of the relevance of our analysis process. Note however that this comparison can only concern the mean values of the induction and that the very fast and large fluctuations observed in the VKS experiment [8] cannot be taken into account.

#### Induced magnetic field

The accuracy of the threshold determination can not be checked, since the threshold expected with the TM60 turbines is beyond available power, (see section 5.2). At most can we say that the numerical results are not disproven. Still, the response of the flow to a small externally imposed magnetic field has been measured in the VKS experiment, and can be compared with the results of figure 10.13b and 10.13d. We recall that since the interaction parameter  $N$  is small in the VKS experiment, there is no back-reaction of the magnetic field on the flow.

Figure 10.14a shows the values of the magnetic field components measured at the point P of figure 10.1, with an axial external field applied. On the same plot are shown the numerical results obtained for an applied field that is axial and uniform outside the cylinder and with no conducting layer. We can see that the measured values of the Y-component agree fairly well with the simulation results. The agreement is correct but not as good for the X-component of the magnetic field. Lastly, we can see that the Z-component of the measured magnetic field is significantly different from zero, its expected value. This seems to imply that the symmetry considered in paragraph 4.3.2, which forces the Z-component to zero, is somehow broken in the experiment.

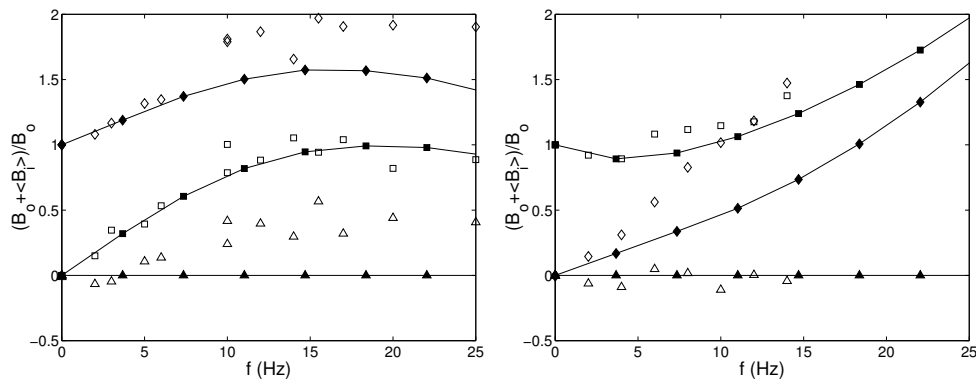


FIG. 10.14 – Comparison with the VKS experiment in the case of 2 counter-rotating TM60 propellers. Response to an axial (a) and a uniform transverse (b) magnetic field. Diamonds, squares and disks respectively refer to  $B_X$ ,  $B_Y$  and  $B_Z$ . The dark symbols and solid lines correspond to the predicted behavior based on the velocity field used in the experiment. The white symbols correspond to the measured data.

The results obtained for a transverse external field are presented in Figure 10.14b. The transverse external field is this time uniform outside the cylinder, with no conducting layer. We can see a strong discrepancy between the measured and the simulated values of the X-component. Indeed, the measured values seem to be a factor of two larger than the computed results. On the contrary, the agreement is good for the Y-component. Finally, we can see that the measured Z-component remains in this case close to zero : either the symmetry is no longer broken in these experimental runs, or the configuration is less sensitive to dissymetry. Numerical runs have also been performed with a  $W = 0.2$  (see paragraph 4.1.2) conducting layer, showing only slight differences.

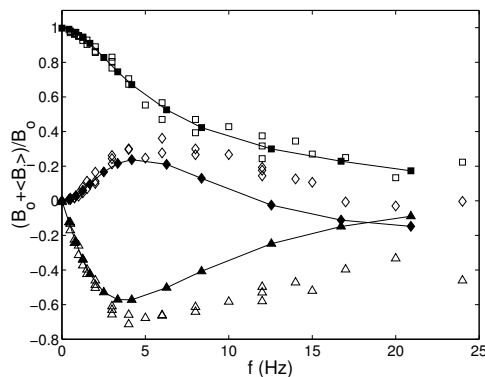


FIG. 10.15 – Comparison with the VKS experiment in the case of one rotating TM60 disk. Diamonds, squares and disks respectively refer to  $B_X$ ,  $B_Y$  and  $B_Z$ . The dark symbols and solid lines correspond to the predicted response to a uniform transverse magnetic field based on the velocity field used in the experiment. The white symbols correspond to the measured data.

Finally, figure 10.15 shows the results obtained in the case where only one TM60 turbine is rotating inside the vessel, the second being at rest, with a transverse field applied. The agreement is this time far better than in both the above configurations, at least for small values of the rotation rate. The Y-component of the magnetic field decreases to zero. This corresponds to an

expulsion of the applied transverse magnetic field [40, 1, 41]. The X- and Y-components of the induced field also exhibit a quadratic dependency on the rotation frequency. Finally, we have checked numerically that the velocity field obtained for one rotating disk does not give rise to dynamo action for  $R_m < 200$ .

To sum up, we can see that the agreement between simulation and measurements can be satisfactory in the case where only one disk rotates, or less satisfactory in the case where both disks rotate. The good agreement in the case of one disk seems to imply that the numerical code and the measurement process are relevant. In the case where two disks rotate, however, we can see that the measurement point lies precisely at the position where the turbulence intensity is highest, and the average flow magnitude is weakest. It may be possible that the time-averaged velocity field is not sufficient to properly reproduce the experimental induction effects at this position.

### Decay rates

It would be interesting to check the decay times presented in figure 10.11 against the experimental value. For the maximum value of the magnetic Reynolds number achievable in the VKS apparatus, the magnetic field energy decays in  $\simeq 0.12\mu_0\sigma R_c^2 \simeq 0.05$  s for TM60 propeller with no conducting layer. Propeller TM28 exhibits the same decay time (within 2%) at  $R_m = 50$ . This means that, in an experiment without conducting layer, it is very difficult to determine by pulse decay measurements alone if the turbines are of the TM28 (*i.e.* capable of dynamo action) or of the TM60 (*i.e.* incapable of dynamo action) type.

If a very large conducting layer ( $W = 0.2$ ) surrounds the experiment, however, the magnetic field energy decays in  $\simeq 0.12$  s for TM28, and  $\simeq 0.23$  s for TM60. In this case, it would be possible to determine which velocity field has the smallest threshold by pulse decay measurements.

### Turbulent effects ?

In the VKS apparatus, the flow shows very large turbulent fluctuations, which in turn induce very large magnetic field fluctuations [8]. It is expected that under certain circumstances, such fluctuations could induce a large scale component of the magnetic field through what is termed an  $\alpha$ -effect [1]. We have shown (figure 10.15) that, if only one propeller rotates, our numerical results are quite close to the experimental data, though the numerical simulations have been performed with the time-averaged component of the flow only. This good agreement could imply that, in that case, the leading contribution to the induction effects comes from the time-averaged component of the flow. Conversely, a discrepancy is observed in the case of two counter-rotating disks, where the time-averaged component of the flow is weaker, and where large vortices sweep the measurement location. This could possibly be ascribed to turbulence effects, either  $\alpha$ -effect or reduction of the electric conductivity [1, 42].

## 10.6 Conclusion

The existence of dynamo effect has been recently confirmed in constrained flows in the Riga and Karlsruhe experiments. The case of experimental dynamos without internal walls remains today an open question. The numerical study of von Kármán type flows shows the possibility to have self-generation of magnetic fields for magnetic Reynolds numbers accessible to a homogeneous sodium experiment. These flows appear to be very sensitive to the precise driving

configuration and to boundary conditions. The comparison of the predictions concerning the induction effects with the data of the VKS experiment exhibits paradoxical results : the agreement is excellent in the case of one disk and intermediate  $R_m$  while the results differ in the case of two counter-rotating disks. This effect could be due to the existence of the turbulent shear layer in the mid-plane, which is not accounted for in the mean velocity fields.

## Acknowledgements

We would like to thank the VKS team (M. Bourgoïn, J.B., A. Chiffaudel, F.D., S. Fauve, L.M., P. Odier, F. Petrelis, J.-F. Pinton) for fruitful discussions and to make available their not yet published data. We are grateful to F. Stefani for providing us with numerical results in a non-periodic cylindrical geometry. J.B. thanks the Ministerio de Educación y Ciencia (spanish government) for a post-doctoral grant when working at the CEA.

## 10.7 List of References

- [1] Moffatt H. K., *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press (Cambridge 1978).
- [2] Moreau R., *Magneto-hydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1990).
- [3] Gailitis A., Lielausis O., Dement'ev S., Placatis E., Cifersons A., Gerbeth G., Gundrum T., Stefani F., Christen M., Hänel H., Will G., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4365 (2000).
- [4] Gailitis A., Lielausis O., Dement'ev S., Placatis E., Cifersons A., Gerbeth G., Gundrum T., Stefani F., Christen M., Hänel H., Will G., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024 (2001).
- [5] Stieglitz R., Müller U., *Naturwissenschaften*, **87**, 381 (2000).
- [6] Stieglitz R., Müller U., *Phys. Fluids*, **13**, 561 (2001).
- [7] Marié L., Burguete J., Chiffaudel A., Daviaud F., Ericher D., Gasquet C., Pétrélis F., Fauve S., Bourgoïn M., Moulin M., Odier P., Pinton J.-F., Guigon A., Luciani J.-B., Namer F. and Léorat J., p. 35 *in* *Dynamo and Dynamics, A Mathematical Challenge*, Cargèse (France) August 21-26, 2000. Eds. Chossat P., Armbruster D., Oprea I., NATO ASI series, Kluwer Academic Publ. (2001).
- [8] Bourgoïn M., Marié L., Pétrélis F., Burguete J., Chiffaudel A., Daviaud F., Fauve S., Odier P., Pinton J.-F., *Phys. Fluids*, **14**, 3046 (2002).
- [9] Dudley N.L., James R.W., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A425**, 407 (1989).
- [10] Ponomarenko Yu. B., *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **14**, 755 (1972).
- [11] Roberts G. O., *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **271**, 411 (1972).
- [12] Peffley N.L., Cawthorne A.B., Lathrop D.P., *Phys. Rev. E*, **61**, 5287 (2000).
- [13] Shew W.L., Sisan D.R., Lathrop D.P., p. 83 *in* *Dynamo and Dynamics, A Mathematical Challenge*, Cargèse (France) August 21-26, 2000. Eds. Chossat P., Armbruster D., Oprea I., NATO ASI series, Kluwer Academic Publ. (2001).
- [14] Gans R.F., *J. Fluid Mech.* **45**, 111 (1970).
- [15] Odier P., Pinton J.-F., Fauve S., *Phys. Rev. E*, **58**, 7397 (1999).
- [16] O'Connell R., Kendrick R., Nornberg M., Spence E., Bayliss A. and Forest C.B., p. 59 *in* *Dynamo and Dynamics, A Mathematical Challenge*, Cargèse (France) August 21-26, 2000. Eds. Chossat P., Armbruster D., Oprea I., NATO ASI series, Kluwer Academic Publ. (2001).

- [17] Frick P., Denisov S., Khripchenko S., Noskov V., Sokoloff D. and Stepanov R., p. 1 *in* *Dynamo and Dynamics, A Mathematical Challenge*, Cargèse (France) August 21-26, 2000. Eds. Chossat P., Armbruster D., Oprea I., NATO ASI series, Kluwer Academic Publ. (2001).
- [18] Picha, K. G. and Eckert, E. R. G. *Proc. 3rd US Natl. Cong. Appl. Mech.*, 791 (1958).
- [19] Welsh, W. E. and Harnett, J. P., *Proc. 3rd US Natl. Cong. Appl. Mech.* (1958).
- [20] Zandbergen P. J., Dijkstra D., *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 465 (1987).
- [21] Fauve S., Laroche C., Castaing B., *J. Phys. II* **3**, 271 (1993).
- [22] Pinton J.-F., Labbé R., *J. Phys. II (France)* **4**, 1461 (1994).
- [23] Mordant N., Pinton J.-F., Chillà F., *J. Phys. II* **7**, 1 (1997).
- [24] Nore C., Brachet M.-E., Politano H., Pouquet A., *Phys. Plasmas* **4**, 1 (1997).
- [25] Pétrélis F., Bourgoin M., Marié L., Burguete J., Chiffaudel A., Daviaud F., Fauve S., Odier P., Pinton J.-F., *to appear in Phys. Rev. Lett.* (2003)
- [26] Alemany A., Moreau R., Sulem L., Frisch U., *J. Mécanique* **18**, 278 (1979).
- [27] Fauve S., Laroche C., Libchaber A., *J. Phys. Lettres* **42**, 455 (1981) and **45**, 101 (1984).
- [28] Moreau R., Sommeria J., *J. Fluid Mech.* **118**, 507 (1982).
- [29] Larmor J., *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci*, 159 (1919).
- [30] Léorat J., *Progress Series of American Institute of Astronautics and Aeronautics*, **162**, 282 (1994).
- [31] Sweet D., Ott E., Antonsen T. and Lathrop D.P., *Phys. Plasmas* **8**, 1944 (2001).
- [32] Dérnoncourt B., Pinton J.-F. and Fauve S., *Physica D*, **117**, 181 (1998).
- [33] Golitsyn G. S., *Sov. Phys. Dokl.* **5**, 536 (1960).
- [34] Moffatt H. K., *J. Fluid Mech.* **11**, 625 (1961).
- [35] Martin A., Odier P., Pinton J.-F., Fauve S., *Eur. J. Phys.* **B18**, 337 (2000).
- [36] Frisch U., Pouquet A., Léorat J., Mazure A., *J. Fluid Mech.* **68**, 769 (1975).
- [37] Stefani F., Gerbeth G., Gailitis A., *Numerical simulations for the Riga dynamo*, in *Laboratory Experiments on Dynamo Action, Riga (Latvia), 14-16 June 1998*, Eds. O. Lielausis, A. Gailitis, G. Gerbeth, F. Stefani.
- [38] Frisch U., *Turbulence*, Cambridge University Press (Cambridge 1995).
- [39] Kaiser R., A. Tilgner, *Phys. Rev. E* **60**, 2949 (1999).
- [40] Weiss N.O., *Proc. Roy. Soc.* **A291**, 60 (1966).
- [41] Odier, P., Pinton J.-F., Fauve S., *Eur. Phys.J. B* **16**, 373 (2000).
- [42] Reighard A., Brown M., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2794 (2002)

## 10.8 Influence de la force de Coriolis sur les propriétés magnéto-hydrodynamiques de l'écoulement de von Kármán.

Dans cette section, nous présentons brièvement les résultats de simulations obtenus avec les champs de vitesse mesurés dans l'expérience "VKR", c'est-à-dire en présence de force de Coriolis.

### 10.8.1 Traitement des champs de vitesse.

Nous avons conservé pour l'essentiel le même processus de re-traitement pour les champs de vitesse obtenus en présence de force de Coriolis que pour ceux que nous avons utilisé pour l'article ci-dessus. Les champs de vitesse "bruts", qui ne comportent que les composantes axiale et azimutale de la vitesse, ont tout d'abord été "complétés" dans la zone balayée par les pales des turbines. La fonction de courant  $\psi$  a alors été calculée à partir de la vitesse axiale. A la différence de ce qui avait été fait pour les champs de vitesses utilisés dans l'article, nous n'avons pas lissé les champs de  $v_\theta$  et de  $\psi$ . De plus, nous n'avons pas "étiré" ces champs pour les amener à un allongement unitaire. Les simulations présentées ici ont donc été réalisées avec des écoulements d'allongement 0.9, plus conformes à la réalité, mais peut-être moins étudiés... Pour éliminer le "phénomène de Gibbs", les écoulements ont été "périodisés" dans la direction axiale. Les champs  $v_\theta$  et  $\psi$  obtenus ont été interpolés sur la grille de simulation, de résolution  $51 \times 48$ . Les vitesses radiale et axiale ont enfin été obtenues sur cette nouvelle grille par dérivation de la fonction de courant  $\psi$ .

### 10.8.2 Absence de "force de Coriolis magnétique".

Au chapitre 7 de la première partie de ce mémoire, nous avons étudié l'influence qu'a sur notre écoulement de von Kármán la mise en rotation de plus en plus rapide du référentiel du montage. Avant de réaliser des simulations à partir des écoulements ainsi mesurés, il convient de s'assurer qu'il n'existe pas de "force de Coriolis magnétique", c'est-à-dire que le fait de se placer dans un référentiel en rotation pour étudier l'évolution du champ magnétique n'introduit pas de terme supplémentaire dans l'équation d'induction. Une démonstration de ce résultat est donnée par F. Pétrélis dans sa thèse [109], mais nous avons souhaité en avoir une confirmation numérique, ne serait-ce que pour vérifier que le système d'équations résolu par le code possédait lui aussi cette propriété...

Pour tester cette prédiction, nous avons pris le champ de vitesse obtenu dans le référentiel tournant pour les mesures réalisées pour  $Ro = 1/6$  (voir chapitre 7). Nous avons "remis" ce champ de vitesse dans un référentiel tournant à une fréquence  $f$  croissante, en lui ajoutant une composante de rotation solide  $2\pi r f \vec{e}_\theta$ . Nous avons alors réalisé des simulations de la réponse à un champ magnétique initial, en gardant le nombre de Reynolds magnétique construit sur l'écoulement "de base" constant et égal à 200. Les résultats de ces simulations sont représentées en figure 10.16. Nous voyons immédiatement que le taux de croissance mesuré est indifférent à la présence de la composante de rotation solide. La pulsation, elle, varie de façon affine en fonction de  $f$ , d'une manière qui se déduit simplement des équations de changement de référentiel. La composante rajoutée à la pulsation par le passage dans un référentiel en rotation à la fréquence  $f$  s'exprime, après mûre réflexion et adimensionnement, comme  $R_m \frac{f}{E_f}$ , où  $E_f$  est l'"efficacité" des turbines, telle que définie dans l'article. Nous voyons donc que l'ajout au champ de vitesse d'une composante de rotation solide ne modifie pas le taux de croissance de l'énergie magnétique, et modifie la pulsation du mode propre de façon triviale, à condition que la définition du nombre de Reynolds magnétique tienne compte de ce fait. Une première conclusion que nous pouvons tirer

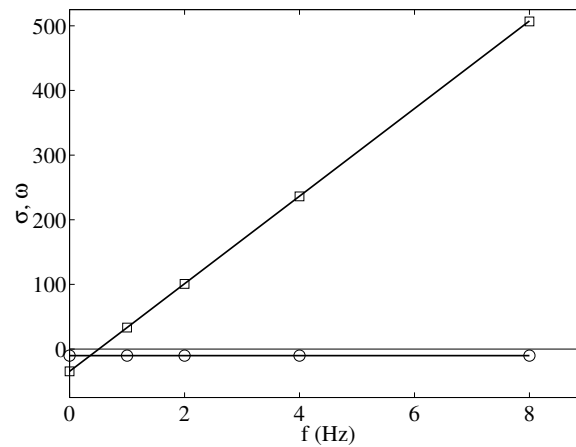


FIG. 10.16 – Valeurs du taux de croissance de l'énergie magnétique (□) et de la pulsation (○) du mode le moins atténué en fonction de la fréquence  $f$  de rotation du référentiel. Le champ de vitesse utilisé est le champ de vitesse mesuré pour  $Ro = 1/6$ . Le nombre de Reynolds magnétique vaut 200. Les lignes correspondent respectivement à  $\sigma_0$ , et aux valeurs de  $\omega_0 + R_m \frac{f}{E_f}$  ( $\sigma_0$  et  $\omega_0$  sont les valeurs obtenues pour  $f = 0$ ).

est qu'il est légitime de considérer les écoulements mesurés dans le référentiel en rotation pour les simulations portant sur des écoulements obtenus en présence de force de Coriolis. Une deuxième conclusion moins rassurante est qu'il est très difficile de définir sans ambiguïté le nombre de Reynolds magnétique ainsi que le rapport  $\Gamma$  d'un écoulement, puisque deux écoulements ne se distinguant que par une composante de rotation solide, et donc considérés comme identiques par le champ magnétique, risquent d'être associés à des valeurs très différentes de ces deux nombres, s'il ne sont pas définis avec attention. Un écoulement de rotation solide pure peut ainsi être associé à une valeur très élevée du nombre de Reynolds magnétique dans un référentiel arrêté, mais à une valeur nulle dans un référentiel en rotation à la même vitesse que lui ! Il est donc nécessaire de distinguer dans un écoulement donné la partie "de rotation solide" et de la soustraire, afin de savoir réellement quel est son nombre de Reynolds magnétique et son rapport  $\Gamma$ . Partant de la constatation que l'ajout d'une composante de rotation solide notable a pour effet d'augmenter de façon artificielle la valeur de la vitesse toroïdale telle que nous l'avons définie dans l'article, sans affecter la valeur de la vitesse poloïdale, nous avons décidé d'effectuer les simulations de manière systématique dans le référentiel dans lequel la valeur du rapport  $\Gamma$  était maximale. Il va sans dire que d'autres définitions plus judicieuses auraient pu être trouvées. Celle-ci présente l'avantage d'être cohérente avec notre article. La figure 10.17 rassemble les valeurs du rapport  $\Gamma$  et de l'efficacité obtenues pour les différentes valeurs du nombre de Rossby (voir chapitre 7 pour les détails des mesures).

### 10.8.3 Résultats des simulations pour les différentes valeurs du nombre de Rossby.

#### Remarques générales

Nous avons réalisé des simulations systématiques de la réponse des différents écoulements mesurés en présence de force de Coriolis à une excitation initiale. Après nous être heurtés au problème de la définition du nombre de Reynolds magnétique et du rapport  $\Gamma$ , nous avons dû



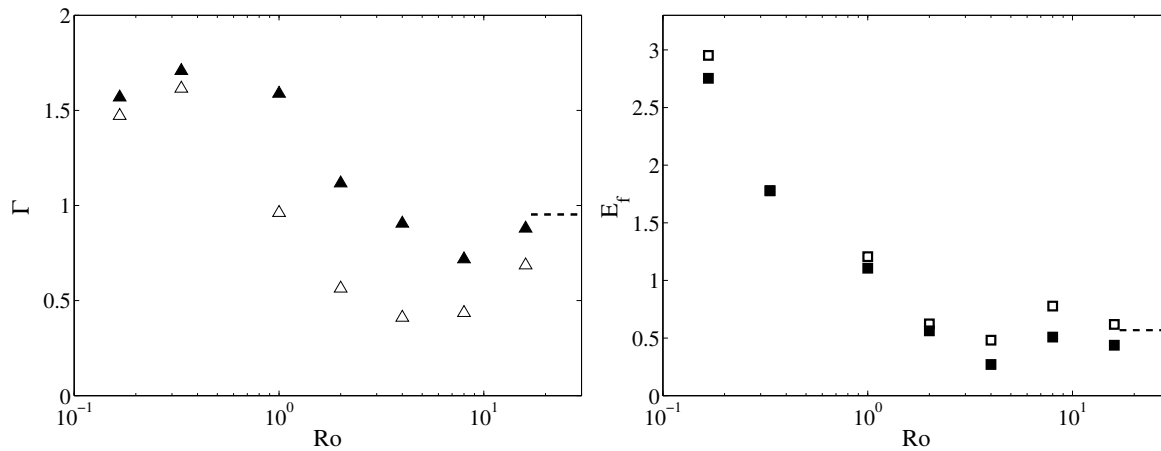


FIG. 10.17 – *Caractéristiques de l'écoulement pour les différentes valeurs du nombre de Rossby. a) Valeurs du rapport  $\Gamma$  de l'intensité de l'écoulement poloïdal sur celle de l'écoulement toroïdal. b) Valeurs de l'efficacité. Les symboles ouverts (esp. fermés) représentent les valeurs brutes (resp. corrigées des effets de la rotation solide).*

constater que les résultats obtenus pour les différentes valeurs du nombre de Rossby restaient difficilement comparables ! Nous avons alors remarqué que les propriétés magnétiques obtenues pour  $Ro = 16, 4, 2$  et  $1/6$  étaient visiblement influencées par la périodisation du champ de vitesse, et étaient donc probablement peu représentatives des propriétés de l'écoulement physique. Un point particulièrement flagrant est que les modes de champs magnétiques qui sont invariants par la réflexion par le plan de symétrie introduit pour supprimer le phénomène de Gibbs possèdent des taux de croissance extrêmement différents de ceux des modes qui sont transformés en leur opposés par cette réflexion (voir chapitre 11). Ce point signifie que les résultats des simulations sont très affectés par un détail inhérent à la modélisation, et absent de la situation physique réelle. Ce qui n'est généralement pas bon signe... Les résultats des simulations effectuées avec les champs de vitesse obtenus pour  $Ro = \infty, 8, 1, 1/3$ , par contre, ne présentent pas cette particularité, et peuvent donc être considérés comme plus fiables. Nous ne présenterons donc que les résultats obtenus avec ces champs de vitesses. Nous n'avons pas d'explication à ces différences entre les propriétés des différents écoulements. Le lecteur pourra se reporter aux figures de l'annexe A, et constater par lui-même qu'il est bien difficile de trouver une différence frappante entre le champ mesuré à  $Ro = 16$ , qui donne de "mauvais" résultats et celui mesuré à  $Ro = 8$ , qui en donne, lui, de "bons".

### Taux de croissance en fonction du nombre de Rossby

Nous avons représenté en figure 10.18 les taux de croissance de l'énergie des modes propres de champ magnétique les moins amortis, en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour les écoulements mesurés aux différents nombres de Rossby. Tous ces modes propres sont transformés en leur opposé par la réflexion par le plan de symétrie "numérique" de l'écoulement. Les taux de croissance obtenus pour les modes invariants par cette réflexion sont peu différents. Nous pouvons reconnaître sur cette figure le taux de croissance obtenu pour  $Ro = \infty$ , c'est à dire pour l'écoulement de contra-rotation "normale". Nous voyons là encore que l'écoulement produit par les turbines utilisées, du type "TM60", ne permet pas d'observer l'effet dynamo. Le taux de croissance semble remonter aux très hautes valeurs du nombre de Reynolds magnétique, ce que

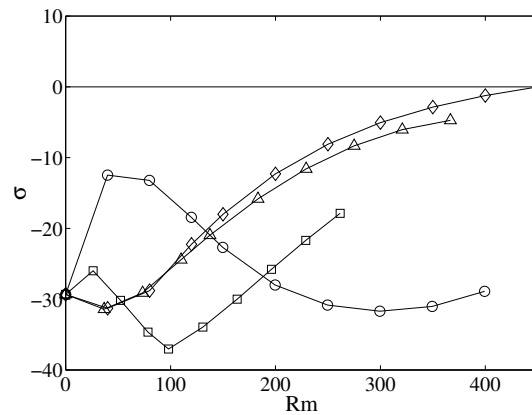


FIG. 10.18 – Taux de croissance de l'énergie des modes de champ magnétique les moins amortis en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour les champs de vitesse obtenus à  $Ro = \infty$  ( $\circ$ ),  $Ro = 8$  ( $\square$ ),  $Ro = 1$  ( $\triangle$ ),  $Ro = 1/3$  ( $\diamond$ ). Les valeurs du nombre de Reynolds magnétique sont corrigées de l'effet de la rotation solide.

nous n'avions pas mis en évidence dans l'article. Pour  $Ro = 8$ , le taux de croissance commence par décroître assez brutalement, et la courbe reprend ensuite une pente positive. La courbe possède déjà une allure assez voisine de celles observées pour les valeurs plus petites du nombre de Rossby. Pour toutes les valeurs finies du nombre de Rossby, les modes de champ magnétiques sont oscillants. Ces fréquences sont associées à une rotation en bloc du mode neutre autour de l'axe de l'écoulement, elles sont de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds magnétique. Les arguments présentés plus haut sur l'effet du passage dans un référentiel en rotation montrent que cette rotation se produirait dans une expérience à une fréquence comprise entre celles des deux turbines. Pour  $Ro = 1$  et  $Ro = 1/3$ , nous voyons que les courbes obtenues ont des allures très similaires. Elles commencent par une courte phase de décroissante, jusqu'en  $R_m \simeq 40$ . A ce point, les taux de croissance sont très négatifs, proches de  $-30$  environ. Les valeurs remontent alors très lentement, jusqu'à être proches de 0 en  $R_m \simeq 400$ . La courbe obtenue pour l'écoulement à  $Ro = 1/3$  franchit d'ailleurs l'axe des abscisses pour  $R_m$  compris entre 400 et 450.

### Taux de croissance en fonction de $\Gamma$ , pour les petites valeurs du nombre de Rossby.

Nous avons alors fait varier le rapport  $\Gamma$ , afin de voir s'il était possible par ce biais d'abaisser la valeur critique du nombre de Reynolds magnétique. Les résultats correspondants pour  $Ro = 1$  et  $Ro = 1/3$  sont représentés en figure 10.19. Nous voyons sur cette figure que la dépendance de  $\sigma$  en fonction de  $\Gamma$  est plus lisse dans le cas des écoulements à petit nombre de Rossby que dans le cas habituel, mais qu'elle conserve une dépendance "en cloche" assez similaire. L'optimum est déplacé en  $\Gamma \simeq 1$  environ pour  $Ro = 1/3$ , mais cette valeur semble dépendre légèrement de l'écoulement considéré et du nombre de Reynolds magnétique. Pour  $Ro = 1/3$ , la valeur du nombre de Reynolds magnétique critique est minimale, et est comprise entre 175 et 200. Ces valeurs sont bien plus faibles que celle obtenue à partir de l'écoulement "naturel", qui vaut environ 450, mais restent bien entendu hors de portée de tout montage expérimental.

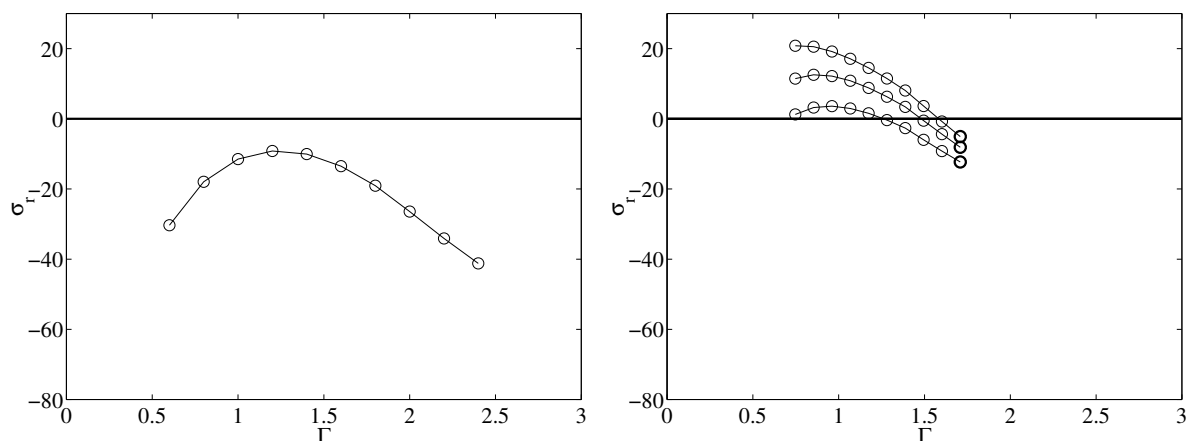


FIG. 10.19 – Taux de croissance de l'énergie des modes de champ magnétique les moins amortis en fonction du rapport  $\Gamma$ . a) Champ de vitesse obtenu pour  $Ro = 1$ . Toutes les simulations ont été effectuées pour  $R_m = 250$ . Les valeurs de  $\Gamma$  et de  $R_m$  sont corrigées de l'effet de la rotation solide. b) Champ de vitesse obtenu pour  $Ro = 1/3$ . de bas en haut : simulations effectuées pour  $R_m = 250, 300, 350$ . Les valeurs de  $\Gamma$  ont été corrigées de l'effet de la rotation solide, mais pas celles de  $R_m$ . Les corrections sur la valeur de  $R_m$  sont au plus de l'ordre de 10%, pour les petites valeurs de  $\Gamma$ . Les symboles gras représentent les résultats obtenus avec l'écoulement "naturel".

### Structure du mode neutre de champ magnétique pour $Ro = 1/3$ .

Nous avons représenté en figure 10.20 la structure du mode neutre de champ magnétique, pour  $Ro = 1/3$ ,  $\Gamma = 0.9$ ,  $R_m = 200$ . Nous constatons que le champ magnétique a une fois de plus une dépendance azimutale en  $\sin(\theta + \phi)$ . Sa forme est par contre très différente de celles que nous avons pu observer pour l'écoulement de contra-rotation. Ainsi, il est notablement plus intense au voisinage de la turbine qui expulse le fluide (située sur la gauche des graphes) que dans le reste de l'écoulement. Sa structure au voisinage de la turbine est très complexe. Dans le reste de l'écoulement, il prend la forme de deux fuseaux, situés de part et d'autre de l'axe. Le champ magnétique est dans ces régions principalement axial, et est concentré à l'interface entre la partie centrale de l'écoulement, où la vitesse axiale est dirigée vers la turbine qui expulse, et la partie externe. Notons que c'est aussi dans cette région que la vitesse azimutale change de signe.

## 10.9 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté un certain nombre de résultats qui concernent les propriétés magnétohydrodynamiques de l'écoulement de von Kármán. S'il ne s'agit pour le moment que des résultats d'une "expérience numérique", ils n'en posent pas moins un certain nombre de questions à l'expérimentateur qui s'agite en nous :

- Si nous avons pu constater que les valeurs du seuil d'amplification du champ magnétique étaient de manière générale trop élevées pour pouvoir être atteintes avec le montage "VKS", nous avons vu qu'elles étaient très sensibles à la présence autour de l'écoulement d'une couche de sodium au repos. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'expérience "VKS" a été équipée d'une chemise interne de cuivre. Il serait intéressant de comprendre précisément le mécanisme par lequel cette couche conductrice affecte le champ.
- Nous avons pu constater que les modes du champ magnétique, qu'ils soient amplifiés ou non,

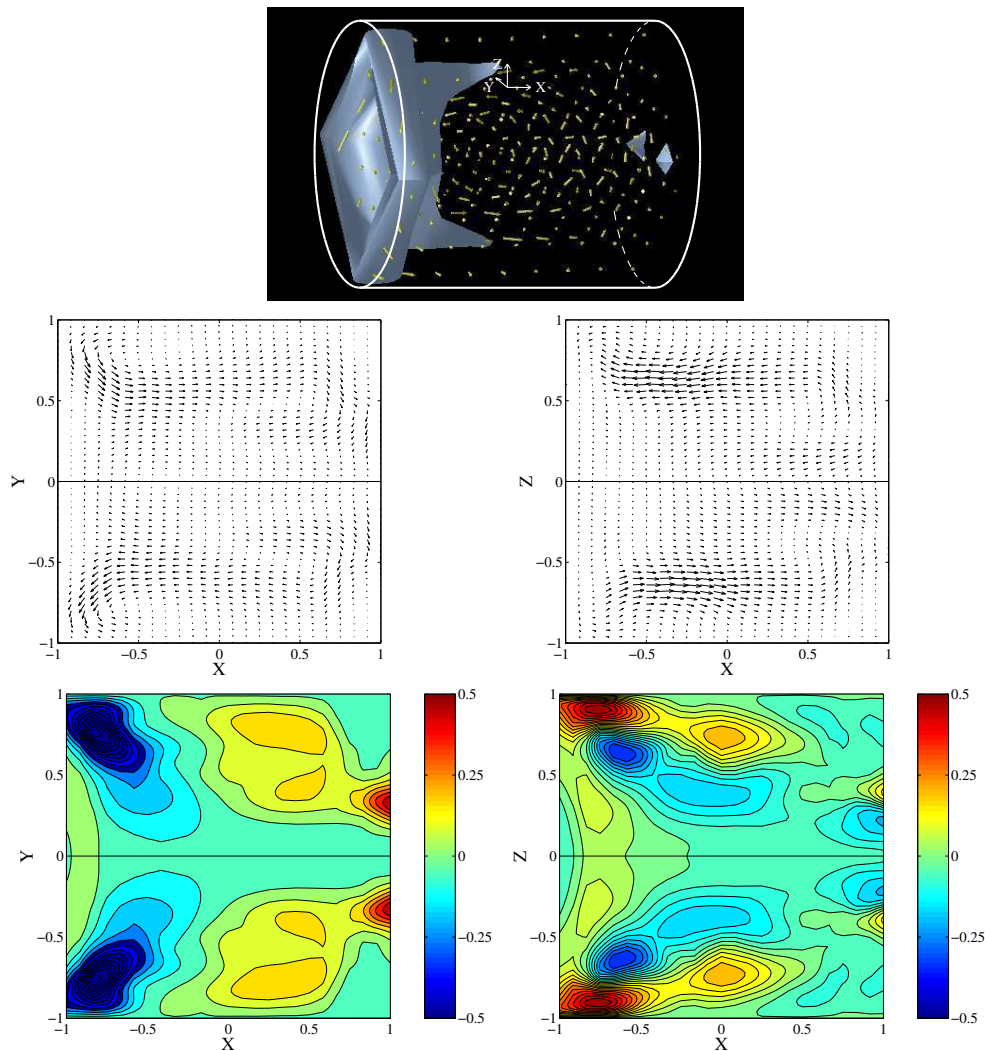


FIG. 10.20 – Mode neutre du champ magnétique pour le champ de vitesse  $Ro = 1/3$  pour  $R_m = 200$ ,  $\Gamma = 0.9$ . (a) Isosurface de l'énergie magnétique à 40 % de sa valeur maximale dans le volume de simulation. Composante poloïdale du champ magnétique dans le plan  $(X, Y)$  (b) et le plan  $(X, Z)$  (c). (d) Composante  $Z$  du champ magnétique dans le plan  $(X, Y)$  plane; le rouge (resp. bleu) correspond à des vecteurs qui sortent du (rentrent dans le) plan. (e) Composante  $Y$  du champ magnétique dans le plan  $(X, Z)$  plane; le rouge (resp. bleu) correspond à des vecteurs qui sortent du (rentrent dans le) plan.

possèdent des propriétés de symétrie assez remarquables, dont l'étude mérite d'être approfondie. S'agit-il de propriétés de symétrie d'origine numérique, ou de propriétés robustes, pouvant être considérées comme des prédictions portant sur les résultats expérimentaux ?

– Des résultats (non représentés dans ce chapitre) obtenus avec une grande variété de champs de vitesse nous ont montré que la courbe qui représente le taux de croissance en fonction du rapport  $\Gamma$  qui quantifie les amplitudes relatives de la composante poloïdale et de la composante toroïdale du champ de vitesse est étonnamment robuste. Pour tous les champs de vitesse du type “von Kármán” que nous avons pu étudier, elle possède la même forme générale, et a toujours son maximum entre  $\Gamma \simeq 0.6$  et  $\Gamma \simeq 0.9$ . Ceci donne à penser que tous ces champs parviennent à produire l'effet dynamo par un mécanisme identique, dont cette courbe est une caractéristique. Il est bien tentant d'essayer de trouver des méthodes complémentaires d'analyse de ce mécanisme, afin de pouvoir un jour tenter de le rendre plus efficace.

Par ailleurs, nous avons étudié brièvement les propriétés magnéto-hydrodynamiques des champs de vitesse mesurés dans des écoulements en rotation d'ensemble. Les résultats des simulations sont totalement différents de ceux obtenus dans des écoulements de contra-rotation. Outre les problèmes techniques liés à la définition du nombre de Reynolds magnétique et du rapport  $\Gamma$  dans ce contexte, nous constatons que la structure des modes de champ magnétique est bouleversée, de même que la dépendance des taux de croissance en fonction des paramètres de l'écoulement. L'étude des propriétés de ces champs de vitesse, pour être complète, aurait donc demandé un travail identique à celui déjà effectué sur les autres. Les résultats de M. L. Dudley et R. W. James [44] semblant montrer que les valeurs du nombre de Reynolds magnétique critique obtenues pour les écoulements ne possédant qu'une cellule de recirculation sont généralement supérieures à celles obtenues pour des écoulements de contra-rotation, nous n'avons pas persévéré dans cette voie.

# Chapitre 11

## Réflexions théoriques sur le problème de la dynamo cinématique

### 11.1 Introduction

Les résultats de simulations numériques que nous avons présentés au chapitre 10 font apparaître une grande disparité dans les propriétés magnéto-hydrodynamiques des écoulements que nous avons étudiés. Cependant, au milieu de ce désordre, nous avons vu poindre quelques résultats qualitatifs robustes, auxquels il aurait été vexant de ne pas (au moins) chercher d'explication.

Parmi ces résultats robustes, certains se rapportent à des propriétés de symétrie des modes de champ magnétique. Par exemple, le lecteur est en droit de désirer une tentative d'explication du fait que les modes sont stationnaires lorsque l'écoulement est invariant par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ . De même, le lecteur aura remarqué que les calculs de champ magnétique induit en réponse à un champ appliqué transverse ont été réalisés avec un champ appliqué qui varie sinusoïdalement dans la direction de l'axe du cylindre. Pourquoi les mêmes calculs, réalisés avec un champ magnétique transverse uniforme, ne permettent-ils pas de déceler le franchissement du seuil d'apparition de l'effet dynamo ? Intuitivement, il est bien sûr évident que les propriétés de symétrie des modes de champ magnétique que nous avons observés sont, sinon expliquées, du moins influencées par les propriétés de symétrie de l'écoulement de von Kármán qui leur sert de "substrat". Les méthodes qui permettent de confirmer cette intuition, et qui permettent de prédire systématiquement les propriétés de symétrie des modes de champ magnétique à partir de celles du champ de vitesse constituent une part (heureusement pour nous infime) de la gigantesque masse de connaissances éparses qui porte le nom de "Théorie des groupes". L'utilisation de ces méthodes permet de retrouver les propriétés de symétrie des modes propres de l'opérateur d'induction que nous avons pu constater dans les résultats de nos simulations. Après avoir expliqué l'"astuce" qui sous-tend notre raisonnement, nous les appliquons au cas de notre écoulement. Nous avons rassemblé en annexe B la majorité des définitions et des énoncés rigoureux que nous utilisons sauvagement dans le corps du texte.

Un autre résultat qui est d'une surprenante robustesse est la forme de la courbe qui exprime la dépendance de la partie réelle du taux de croissance en fonction du rapport de l'intensité de l'écoulement poloïdal sur celle de l'écoulement toroïdal. Cette robustesse, que nous avons pu constater sur une assez grande variété d'écoulements, donne à penser que le mécanisme par lequel le champ magnétique est entretenu dans l'écoulement, s'il est assez sensible aux détails de celui-ci, reste dans son principe le même dans les différents cas que nous avons étudiés. Nous avons alors cherché par quel moyen il était possible de caractériser ce mécanisme, s'il était

possible de le décomposer en processus élémentaires (modèle  $\alpha\Omega$ ,  $\alpha^2$ , etc.), et ensuite d'étudier comment les paramètres de ces différents processus élémentaires évoluaient en fonction de la forme de l'écoulement. L'objectif de ce travail était bien sûr de déterminer quels étaient les différents termes du compromis à chercher pour obtenir la forme d'un écoulement ayant un seuil dynamo à la fois bas et robuste. Nous inspirant d'approches "classiques" de ce problème (voir l'ouvrage de K. Moffatt [90]), nous avons commencé par réexprimer le problème de l'analyse de stabilité linéaire sous la forme d'une matrice exprimant le couplage induit par l'écoulement entre différentes "briques" élémentaires de champ magnétique (méthode "à la" Galerkin). Dans l'esprit des méthodes classiques, nous avons alors tronqué ce système, pour n'en conserver que les termes dominants. Il est alors apparu que les propriétés du système ainsi "réduit" étaient trop différentes de celles du système original pour qu'il soit possible d'en tirer des informations sur les mécanismes d'induction dans l'écoulement. Nous avons alors été amenés à adapter à notre problème la méthode de projection sur la variété centrale couramment utilisée dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires. Cette méthode permet, au prix d'une complexité légèrement supérieure à celle de la simple troncature, de prendre en compte l'influence de la présence de modes "esclaves" dans la dynamique de modes "centraux", et de déterminer les coefficients "effectifs" des couplages entre ces derniers, qui sont très différents des valeurs "naïves" obtenues par simple troncature. Le seuil d'apparition de l'effet dynamo déterminé à partir des coefficients ainsi obtenu est identique à celui obtenu par étude du système complet. Nous présenterons dans la deuxième partie de ce chapitre la méthode de Galerkin que nous avons employée, ainsi que la manière dont nous avons adapté la méthode de la projection sur la variété centrale. Nous présenterons les résultats de tests permettant de valider cette méthode, ainsi qu'un début de caractérisation du mécanisme de l'effet dynamo dans l'écoulement de von Kármán.

## 11.2 Considérations de symétries

Dans cette section, nous utilisons des arguments de théorie des groupes pour déterminer les propriétés de symétrie des modes propres de l'opérateur d'induction dans l'écoulement de von Kármán. Les résultats sont donnés ici sans justification, pour ne pas alourdir trop le texte. Nous avons regroupé l'ensemble des définitions et des résultats rigoureux utilisés en annexe B.

### 11.2.1 La démarche générale.

Après concertation avec divers lecteurs cobayes (que nous tenons à remercier), il est apparu qu'une rapide description des grandes lignes de la démarche que nous tentons d'illustrer dans cette section était nécessaire. Nous soutenons qu'il ne s'agit pas que de mathématiques, et qu'il y a bien énormément de **physique** derrière ces choses-là!

#### Le cadre général de l'analyse de stabilité linéaire.

Dans beaucoup de problèmes de physique, il est nécessaire à un moment ou à un autre de procéder à l'analyse de stabilité linéaire d'un opérateur. Dans bien des cas, cette analyse de stabilité peut se faire *a posteriori*, puisque l'instabilité mise en jeu peut être étudiée expérimentalement. L'analyse de stabilité intervient alors dans un deuxième temps, en tant qu'explication. Dans le cas de l'étude de l'effet dynamo, cette démarche n'est pas envisageable, car la construction "en aveugle" d'un montage permettant à coup sûr sa mise en évidence nécessiterait des moyens énormes. Nous sommes donc, bien qu'expérimentateurs dans l'âme, obligés de réaliser

des analyses de stabilité linéaire, si nous voulons avoir un jour quelque chose à regarder. Dans le cas de l'effet dynamo cinématique, nous avons un opérateur d'induction,  $\mathbf{M}$ , qui dépend d'un écoulement et d'un paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds magnétique  $Rm$ . La démarche que nous suivons alors est la suivante : nous choisissons un écoulement, nous donnons au nombre de Reynolds magnétique une valeur quelconque, nous calculons les valeurs propres de l'opérateur d'induction, puis nous recommençons pour une autre valeur du paramètre de contrôle. A la fin, nous obtenons des courbes qui représentent les différents taux de croissance du champ magnétique possibles en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour l'écoulement choisi. Parfois, la partie réelle d'un des taux de croissance devient positive, pour une valeur critique du nombre de Reynolds magnétique, le "seuil". A ce point, nous changeons la forme de l'écoulement, et nous recommençons l'analyse en espérant que la modification nous a permis de faire baisser le seuil. Considérons maintenant le problème élémentaire, qui est de calculer les valeurs propres de l'opérateur à écoulement et  $Rm$  fixés, et choisissons une valeur propre  $\lambda$  parmi toutes. Nous voyons que ce dernier choix ne restreint pas la portée des arguments que nous allons développer, puisqu'il suffira de les répéter successivement sur toutes les valeurs propres. Il existe par définition de  $\lambda$  au moins un "vecteur" propre  $\mathbf{X}_1$  tel que

$$\mathbf{M}\mathbf{X}_1 = \lambda\mathbf{X}_1.$$

Ce vecteur propre est dans le cas de l'effet dynamo cinématique un champ à trois composantes, défini sur l'espace physique. Nous le considérerons surtout comme un "bloc" indécomposable, qui peut être multiplié par un nombre, additionné à un autre bloc, "tourné", "symétrisé", etc. Il arrive que ce vecteur propre  $\mathbf{X}_1$  ne soit pas le seul vecteur propre de  $\mathbf{M}$  pour la valeur propre  $\lambda$ . Mis à part bien sûr le fait qu'il suffit de le multiplier par n'importe quel nombre pour réobtenir un vecteur propre de  $\mathbf{M}$ , il peut par exemple exister  $\mathbf{X}_2$  tel que

$$\mathbf{M}\mathbf{X}_2 = \lambda\mathbf{X}_2.$$

Dans ce cas, nous voyons de plus que toute somme de deux vecteurs propres pour  $\lambda$  reste un vecteur propre pour  $\lambda$ , de même que toute somme de trois vecteurs propres. L'ensemble de tous les vecteurs propres de  $\mathbf{M}$  pour  $\lambda$  est un sous-espace vectoriel de l'espace de tous les champs magnétiques possibles, qui est noté  $\ker(\mathbf{M} - \lambda\text{Id})$ . Dans la plupart des cas, cet espace est de dimension finie, ce qui signifie qu'il existe un nombre fini  $n$  de vecteurs  $\mathbf{X}_i$  tels que tout vecteur propre  $\mathbf{X}$  quelconque de  $\mathbf{M}$  pour  $\lambda$  s'écrive  $\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{X}_i$ , pour un jeu **unique** de  $a_{\{1\dots n\}}$ . Nous insistons sur le fait que chacun des  $\mathbf{X}_i$  reste un champ magnétique à part entière, qui peut être "retourné" ou multiplié par un scalaire indépendamment des autres. De même,  $\mathbf{X}$  peut aussi être considéré comme un bloc à part entière. Finalement, nous voyons que toute l'information qu'il est possible d'obtenir sur les vecteurs propres associés à  $\lambda$  est concentrée dans les  $n$  vecteurs propres  $\mathbf{X}_{\{1\dots n\}}$ , puisqu'il y a besoin d'eux pour pouvoir construire tous les modes propres, mais qu'il n'y a besoin que d'eux. La recherche de ces vecteurs propres "élémentaires" peut être faite au moyen d'un code numérique "général" qui les fournira tous sans se poser de questions.

### L'influence des symétries sur les résultats d'une analyse de stabilité linéaire.

Si maintenant le système étudié possède des "symétries", il est tentant de les utiliser pour essayer d'"aider" le code à trouver les modes propres élémentaires, en lui disant par exemple qu'ils seront axisymétriques, ou invariants par une symétrie miroir quelconque. C'est à ce moment-là qu'il convient d'être très prudent, et qu'en pratique l'apprentissage des méthodes que nous allons exposer peut s'avérer indispensable. En effet, si nous obligeons le code à ne chercher que les modes



propres qui possèdent des propriétés de symétrie données, et qu'il s'avère que ces propriétés sont incompatibles, nous pouvons l'empêcher de trouver les "bons" modes propres, ou, ce qui est pire, l'obliger à en produire de faux. L'appareillage mathématique que nous présentons dans la suite permet d'éviter de telles erreurs, et de déterminer *exactement* et *systématiquement* les propriétés des modes propres. Nous pouvons alors fournir ces informations à un code plus simple, qui permet de trouver les valeurs des taux de croissance qui leur correspondent ainsi que les détails de leurs formes. Nous soutenons qu'utiliser anecdotiquement des méthodes mathématiques pour se servir "proprement" des symétries physiques d'un montage physique pour déterminer les propriétés de symétrie des modes d'instabilités qui peuvent s'y développer est une démarche de physicien. L'idée qui fonde la méthode est la suivante : choisissons  $\lambda$  une valeur propre réelle du problème. Si le problème est invariant (dans un sens que nous décrivons en annexe B) par des opérations de symétrie, l'image de chacun de ses modes propres par ces opérations de symétrie reste un mode propre. Par conséquent, si  $g$  est l'opérateur (linéaire) qui effectue une opération de symétrie donnée sur le mode de champ magnétique  $\mathbf{X}_1$  **considéré comme un bloc**, le champ magnétique  $g(\mathbf{X}_1)$  est un mode propre. Ceci implique en particulier qu'il appartient à  $\ker(\mathbf{M} - \lambda \text{Id})$ , et donc qu'il peut être décomposé dans la base des  $\mathbf{X}_i$ . En appliquant ainsi l'opérateur  $g$  à tous les champs magnétiques de base  $\mathbf{X}_i$ , considérés comme des blocs, et en décomposant ensuite les  $g(\mathbf{X}_i)$  sur la base des  $\mathbf{X}_i$ , nous voyons que nous pouvons décrire l'action de  $g$  sur les vecteurs de  $\ker(\mathbf{M} - \lambda \text{Id})$  par une matrice. En agissant de cette manière avec toutes les opérations de symétrie qui laissent invariant le problème, nous voyons que nous pouvons définir un ensemble de matrices qui représentent chacune l'effet d'une des opérations de symétrie. En termes mathématiques, cet ensemble de matrices est une *représentation* du *groupe* des opérations de symétrie qui laissent le problème invariant. Nous rappellerons plus bas les définitions de ces différents termes. Le résultat fort que nous utilisons dans ce chapitre est que si un groupe d'opérations de symétrie (qui doit tout de même avoir certaines propriétés) laisse un problème invariant, ses représentations sur les sous-espaces propres du problème ont des propriétés *extrêmement particulières*. Dans le cas des groupes courants, les représentations qui possèdent ces propriétés sont tellement rares qu'elles ont été répertoriées. Nous voyons donc que, quelle que soit la valeur propre  $\lambda$  réelle (pour l'instant) de l'opérateur que nous avons choisi, le sous-espace propre qui lui est associé correspond forcément à l'un des 5 ou 6 cas répertoriés, ce qui impose des conditions sur son nombre de dimensions et donne des informations sur l'expression des matrices qui représentent les opérations de symétrie. Munis de ces informations, nous pouvons alors prendre le problème dans l'autre sens, et traiter séparément les différents cas répertoriés, en cherchant les valeurs propres qui leur correspondent. Nous sommes ainsi sûrs d'avoir exploité au mieux les symétries du problème, tout en n'ayant oublié aucun mode propre.

### L'analyse de stabilité linéaire d'un problème symétrique.

Partant de là, la méthode est donc la suivante : nous commençons par déterminer le groupe des opérations de symétrie qui laissent le problème invariant. Nous allons regarder dans un livre de théorie des groupes les représentations absolument irréductibles de ce groupe. Si nous avons de la chance, elles sont tabulées. Dans le cas contraire, il est possible de les trouver en appliquant "à la physicienne" des méthodes de théorie des représentations (ce qui est tout de même moins drôle). Nous avons alors à notre disposition la liste *exhaustive* de la demi-douzaine de manières dont les propriétés de symétrie d'un mode propre peuvent se combiner, ainsi que le nombre de dimensions des sous-espaces propres correspondants. Nous pouvons alors choisir la première représentation de la liste. Imaginons qu'il s'agit d'une représentation de dimension 1, ce qui est en pratique très fréquent, et choisissons une valeur propre de l'opérateur d'induction qui correspond

à cette représentation. Nous voyons que le sous-espace propre associé est de dimension 1, ce qui signifie qu'il ne contient qu'un seul vecteur de base. Appliquer une opération de symétrie à ce vecteur le transforme en un autre vecteur propre associé à la même valeur propre, qui se trouve donc dans le même sous-espace propre. Comme celui-ci est de dimension 1, nous voyons que l'image du mode propre par l'opération de symétrie doit être égale au mode propre multiplié par un nombre réel. Ce nombre, qui est égal la plupart du temps à 1 ou à  $-1$ , est appelé le *caractère* de l'opération de symétrie pour la représentation que nous avons choisie. Comme nous avons choisi l'espace propre quelconque, nous voyons que les vecteurs propres contenus dans tous les sous-espaces propres associés à cette représentation possèdent les mêmes propriétés de symétrie. Nous pouvons donc donner au code l'indication qu'il doit chercher les valeurs propres associées à des modes propres sur lesquels par exemple une rotation de  $90^\circ$  donnée a le même effet qu'une multiplication par 1, une symétrie miroir de plan donné a le même effet qu'une multiplication par  $-1$ , etc. Le code fournit alors la liste des valeurs propres correspondantes, ainsi que l'allure précise des modes propres. Nous pouvons alors passer à la deuxième ligne de la table des représentations du groupe, et demander au code la liste des vecteurs propres associées à des espaces de dimension 2, et sur lesquels la rotation de  $90^\circ$  a le même effet qu'une multiplication par  $-1$ , etc. En passant en revue les différentes situations possibles, nous pouvons avoir accès à l'intégralité des valeurs propres réelles de l'opérateur, triées selon les propriétés de symétrie des modes propres qui leur correspondent. Le cas des valeurs propres complexes peut être ensuite traité d'une manière similaire, en adaptant légèrement les différentes définitions. C'est tout !

### 11.2.2 Le groupe de symétrie du montage "VKE"

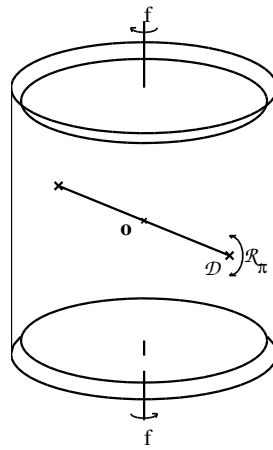


FIG. 11.1 – Schéma du montage expérimental et de l'axe de symétrie.

Considérons maintenant le schéma 11.1, qui représente le montage expérimental "VKE", dans la situation où les turbines qui entraînent le fluide sont en contra-rotation exacte. Nous avons déjà constaté au chapitre 5 de la première partie de ce mémoire que le fait de retourner le montage expérimental autour de l'axe  $\mathcal{D}$  de la figure le laisse inchangé, de même que le fait de le faire tourner d'un angle quelconque autour de l'axe du cylindre (dans le cas d'un cylindre et de turbines "lisses"). Par ailleurs, nous pouvons voir qu'il n'existe pas d'autre opération de symétrie qui laisse notre écoulement inchangé. Nous voyons donc que le groupe de symétrie du montage "VKE" est engendré par l'ensemble des rotations d'angle quelconque autour de son axe, auquel il convient d'ajouter le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ . De plus nous voyons que faire tourner le montage d'un

angle quelconque  $\theta$ , puis lui appliquer le retournement  $\mathcal{R}_\pi$  revient au même que le fait de lui appliquer d'abord le retournement, avant de le faire tourner de  $-\theta$ . Il est possible de voir que cette relation de commutation montre que le groupe de symétrie  $\Gamma$  du montage est isomorphe au groupe des rotations/inversions du plan,  $O(2)$ . Ce groupe est un groupe de Lie, et est compact, ce qui signifie que les résultats que nous souhaitons utiliser s'appliquent. Il n'est par contre pas commutatif.

### 11.2.3 “Démonstration” de l' $O(2)$ -équivariance de l'opérateur d'induction.

Considérons un champ magnétique  $\vec{B}$  quelconque, qui évolue dans notre écoulement  $\vec{V}$  selon :

$$\frac{d}{dt}\vec{B} = \mathbf{M}(\vec{V}, \vec{B})$$

Si nous décidons de construire un deuxième montage, image du premier par  $\mathcal{R}_\pi$ , et si nous conduisons parallèlement deux expériences, images en tout point l'une de l'autre par  $\mathcal{R}_\pi$ , nous voyons que l'évolution du champ magnétique dans le montage “1” et dans le montage “2” vont elles aussi être images l'une de l'autre. Nous avons donc à chaque instant :

$$\vec{B}_2 = \mathcal{R}_\pi \vec{B}_1$$

et par conséquent aussi

$$\frac{d}{dt}\vec{B}_2 = \mathcal{R}_\pi \frac{d}{dt}\vec{B}_1$$

Comme les lois d'évolution du champ magnétique ne dépendent pas de la position du montage dans lequel on l'observe, nous savons que l'opérateur  $\mathbf{M}$  va être le même dans les deux montages, mais que par contre les champs de vitesses seront images l'un de l'autre. Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{B}_1 &= \mathbf{M}(\vec{V}, \vec{B}_1) \\ \frac{d}{dt}\vec{B}_2 &= \mathbf{M}(\mathcal{R}_\pi \vec{V}, \vec{B}_2) \end{aligned}$$

L'égalité  $\frac{d}{dt}\vec{B}_2 = \mathcal{R}_\pi \frac{d}{dt}\vec{B}_1$  nous permet alors d'écrire :

$$\mathbf{M}(\mathcal{R}_\pi \vec{V}, \mathcal{R}_\pi \vec{B}_1) = \mathcal{R}_\pi \mathbf{M}(\vec{V}, \vec{B}_1)$$

Dans le cas dont nous cherchons à étudier les propriétés de symétrie, l'écoulement lui-même est invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ . Nous pouvons donc amener cette égalité à sa forme finale :

$$\mathbf{M}(\vec{V}, \mathcal{R}_\pi \vec{B}_1) = \mathcal{R}_\pi \mathbf{M}(\vec{V}, \vec{B}_1)$$

Comme cette égalité est vérifiée quel que soit le champ magnétique  $\vec{B}_1$ , nous voyons que l'opérateur différentiel qui détermine l'évolution temporelle du champ magnétique dans notre écoulement commute avec l'opérateur de symétrie  $\mathcal{R}_\pi$ . Dans notre cas, il est possible de répéter cet argument pour montrer que l'opérateur d'évolution commute avec toutes les opérations de symétrie qui laissent invariant le champ de vitesse.

### 11.2.4 Propriétés de symétrie des modes associés à des valeurs propres réelles.

Le groupe  $O(2)$  étant un groupe de Lie compact, et chaque valeur propre de l'opérateur d'induction étant (probablement) associée à un nombre fini de modes propres linéairement indépendants, la proposition 1 de l'annexe B nous apprend que toute représentation  $\psi$  de  $O(2)$  sur un sous-espace propre associé à une valeur propre réelle de l'opérateur d'induction est absolument irréductible.

Un peu de recherche bibliographique nous montre alors que toute représentation réelle absolument irréductible de  $O(2)$  peut être ramenée par changement de base à l'une des trois formes suivantes :

#### Première forme possible

En dimension 1, il existe tout d'abord la représentation triviale :  $\forall \rho_\theta, \psi(\rho_\theta) = 1, \psi(\mathcal{R}_\pi) = 1$ . Dans ce cas, nous voyons que le fait de faire tourner le mode propre de champ magnétique de *n'importe quel angle* autour de l'axe de l'écoulement revient au même que le fait de le multiplier par 1, et le laisse donc inchangé. Il est donc axisymétrique. De plus, le fait de le faire tourner de  $180^\circ$  autour d'un axe  $\mathcal{D}$  possible (qui peut être ramené à l'axe  $\theta = 0, z = 0$  par changement de base) revient lui aussi au même que le fait de le multiplier par 1. Le mode propre de champ magnétique est donc dans ce cas axisymétrique, et invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ .

#### Deuxième forme possible

Il existe une deuxième représentation de dimension 1, qui est définie par :  $\forall \rho_\theta, \psi(\rho_\theta) = 1, \psi(\mathcal{R}_\pi) = -1$ . Dans ce cas, le mode de champ magnétique est aussi axisymétrique, mais le fait de le retourner par  $\mathcal{R}_\pi$  revient au même que le fait de le multiplier par  $-1$ . Il est donc transformé en son opposé par l'opération  $\mathcal{R}_\pi$ .

#### Troisième forme possible

En dimension 2, il existe un nombre infini de représentations d'un dernier type, qui sont définies par :

$$\forall \rho_\theta, \psi(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) \\ \sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{bmatrix}, \psi(\mathcal{R}_\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'entier non nul  $m$  qui intervient dans cette expression est appelé l'indice de la représentation. Les représentations d'indice négatif étant isomorphes aux représentations d'indice positif, nous pouvons considérer  $m > 0$ . Dans ce cas, nous voyons qu'il existe deux modes propres linéairement indépendants de l'opérateur d'induction. Notons le premier de ces vecteurs  $\mathbf{X}_1$ , et le deuxième  $\mathbf{X}_2$ . Dans cette base, nous voyons que l'expression de  $\mathbf{X}_1$  est  $\mathbf{X}_1 = 1 \cdot \mathbf{X}_1 + 0 \cdot \mathbf{X}_2$ . Si nous faisons tourner le champ magnétique  $\mathbf{X}_1$  en tant que "bloc" de  $\frac{\pi}{2m}$  autour de l'axe du cylindre, nous obtenons un autre champ magnétique, dont l'expression est donnée dans la base  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$  par le produit de la matrice  $\psi(\rho_{\frac{\pi}{2m}})$  avec le vecteur-colonne des coordonnées de  $\mathbf{X}_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Nous voyons que le champ magnétique  $\mathbf{X}_1$  se transforme lorsqu'on le fait tourner de  $\frac{\pi}{2m}$  autour de l'axe du cylindre en un autre champ magnétique, qui peut s'écrire  $0 \cdot \mathbf{X}_1 + 1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2$ . Le champ magnétique  $\mathbf{X}_2$  est donc l'image de  $\mathbf{X}_1$  par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2m}$  autour de l'axe du cylindre ! Si nous répétons cette série d'opérations pour un certain nombre d'éléments "remarquables" de  $O(2)$ , nous pouvons gagner des informations supplémentaires. Chaque mode est transformé en son opposé par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{m}$ , et est invariant par la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{m}$ . Le premier mode est invariant par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ , là où le deuxième est transformé en son opposé. La

décomposition en série de Fourier dans la direction azimutale de chacun des modes ne comporte que des composantes en  $\sin(m\theta)$  et en  $\cos(m\theta)$ , il n'est pas possible d'observer de composante à une autre fréquence que  $m$ . Nous exploiterons ces différentes informations lors de l'analyse de stabilité linéaire par la méthode de Galerkin qui fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

### Comparaison aux résultats numériques

Le théorème de Cowling [39] interdit à un mode de champ magnétique axisymétrique de croître dans l'écoulement de von Kármán. Lors des simulations numériques rapportées au chapitre précédent, nous n'avons donc pas apporté d'attention particulière aux modes propres des deux premiers types, qui sont axisymétriques, et donc nécessairement amortis. Par contre, nous avons très couramment observé des modes propres de la dernière catégorie, qui correspondent à la représentation d'indice  $m = 1$  de  $O(2)$ . Le lecteur pourra se reporter au chapitre précédent pour vérifier sur les figures que les modes de champ magnétique que nous avons représentés se transforment en eux-mêmes par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ , en leur opposé par la rotation de  $\pi$  autour de l'axe du cylindre, et que leurs images par rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe sont des modes neutres de l'opérateur d'induction qui en sont linéairement indépendants.

#### 11.2.5 Propriétés de symétrie des modes propres associés à des paires de valeurs propres complexes conjuguées.

Dans ce cas, la proposition qui s'applique est la proposition 2 de l'annexe B. Nous savons donc que les modes oscillants de champ magnétique peuvent appartenir à deux catégories, la première rassemblant ceux qui sont associés à une représentation non-absolument irréductible de  $O(2)$ , la deuxième rassemblant des modes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont associées à une même représentation absolument irréductible de  $O(2)$ .

#### Modes oscillants du premier type

Les modes propres oscillants du premier type sont associés aux représentations non-absolument irréductibles du groupe de symétrie du problème. Le groupe  $O(2)$  ne possède pas de telles représentations. Nous n'avons donc pas pu observer de tels modes lors des simulations effectuées à partir de champs de vitesse "symétrisés". Dans le cas où l'écoulement souffre d'une légère dissymétrie d'origine expérimentale, par contre, cette invariance est brisée, et le groupe de symétrie de l'écoulement n'est plus le groupe  $O(2)$ , mais le groupe  $SO(2)$ . Ce groupe possède des représentations non-absolument irréductibles, et nous avons pu constater (cf. chapitre précédent) que les modes de champ magnétique auto-entretenus avaient au seuil un caractère oscillant, dont la fréquence était faible si la dissymétrie était faible.

C'est aussi un mode de ce type qui croît dans l'expérience dynamo de Riga. En effet, l'écoulement de sodium qui se produit dans ce montage possède lui aussi le groupe de symétrie  $SO(2)$ . Les représentations non-absolument irréductibles de  $SO(2)$  sont de dimension 2, et ont la forme :

$$\forall \rho_\theta, \psi(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) \\ \sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{bmatrix},$$

pour des valeurs de l'indice  $m$  signées, différentes de 0. Une première constatation est alors que les modes de champ magnétique sont des modes sinusoïdaux en  $\theta$ , dont le motif se reproduit  $m$  fois sur la circonférence du cylindre. Ils peuvent se décomposer en deux composantes indépendantes, dont la deuxième est image de la première par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2m}$ . D'autre part, nous savons

que la restriction de l'opérateur d'évolution du champ magnétique au sous-espace propre réel  $E_\mu$  associé à  $\mu$  peut s'exprimer comme :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

La matrice qui exprime la transformation que subit le champ magnétique lorsqu'on le laisse évoluer librement un temps  $t$  est donnée par :

$$\mathbf{T}(t) = \exp(\mathbf{M}t) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Cette expression est, au préfacteur  $\exp(\sigma t)$  près, la même que celle qui représente la rotation d'un angle  $\frac{\omega t}{m}$  du champ magnétique autour de l'axe du cylindre. Nous voyons donc que le mode de champ magnétique tourne autour de l'axe du cylindre à la fréquence  $\frac{\omega}{m}$ . Il tourne dans le sens positif si le produit  $\omega m$  est positif, et dans le sens négatif si  $\omega m < 0$ . Dans l'expérience de Riga comme dans nos simulations,  $|m| = 1$ .

### Modes oscillants du deuxième type

Il est possible d'observer des modes de champ magnétique du deuxième type dans les simulations que nous avons réalisées sur l'écoulement de von Kármán. Ces modes, qui sont amortis, sont visibles notamment lorsque la valeur du rapport Poloïdal/Toroïdal de l'écoulement est artificiellement abaissée aux environs de 0.5. La première tâche qu'il nous faut réaliser pour déduire leurs propriétés de symétrie de la proposition 2 est de trouver une représentation absolument irréductible de  $O(2)$ , que nous injecterons alors dans l'expression de la représentation de  $O(2)$  sur l'espace  $E_\mu$ . Nous avons vu que dans ce cas trois choix étaient possibles :

– Nous pourrions choisir de travailler avec la représentation triviale de  $O(2)$ , qui est de dimension 1. Nous pourrions alors exprimer les matrices de la représentation de  $O(2)$  sur  $E_\mu$  et la matrice  $\mathbf{M}$  comme :

$$\forall \rho_\theta \in O(2), \phi_{E_\mu}(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi_{E_\mu}(R_\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le mode de champ magnétique est un mode axisymétrique, qui est à chaque instant image de lui-même par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ , mais qui oscille entre deux configurations linéairement indépendantes, qui sont la partie réelle et la partie imaginaire du mode propre de l'opérateur. Comme ce mode est axisymétrique, nous ne l'avons pas observé dans nos simulations.

– Nous pourrions choisir de travailler avec l'autre représentation de dimension 1 de  $O(2)$ . Nous pourrions alors exprimer les matrices  $2 \times 2$  de la représentation de  $O(2)$  sur  $E_\mu$  et la matrice  $\mathbf{M}$  comme :

$$\forall \rho_\theta \in O(2), \phi_{E_\mu}(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi_{E_\mu}(R_\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Nous obtiendrions alors un mode de champ magnétique axisymétrique, très semblable au premier sur ses caractéristiques, mais qui serait la somme de deux contributions qui se transformeraient chacune en son opposé par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$ .

– La dernière possibilité est de choisir l'une des représentations de dimension 2 de  $O(2)$ , et de choisir une valeur quelconque (strictement positive) de l'indice  $m$ . Nous prendrons  $m = 1$ , de

manière à alléger les écritures. C'est de toute façon le cas que nous avons pu observer dans nos simulations. Nous obtenons alors :

$$\forall \rho_\theta \in O(2), \phi_{E_\mu}(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\phi_{E_\mu}(R_\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & -\omega \\ \omega & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Cette représentation est par construction telle que les opérateurs de symétrie agissent de manière diagonale par blocs sur  $E_\mu$ . Par contre, l'opérateur d'évolution dans le temps couple des composantes qui sont éparpillées dans la matrice, et n'est pas très lisible. Il est possible par un changement de base d'écrire la représentation du groupe sous une forme isomorphe à la première, mais plus lisible :

$$\forall \rho_\theta \in O(2), \phi_{E_\mu}(\rho_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\phi_{E_\mu}(R_\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Lorsque la représentation du groupe est écrite dans ces coordonnées, il est plus facile de comprendre la structure des modes propres : tout d'abord, nous voyons que l'opérateur d'évolution dans le temps est désormais diagonal par blocs. Cela signifie qu'il est possible de considérer les modes de champ magnétique comme deux modes qui oscillent tous deux de façon indépendante entre deux configurations, avec des amplitudes et des phases qui sont déterminées par les conditions initiales. Ensuite, nous voyons que les matrices qui représentent les rotations sont elles aussi diagonales par blocs. Le fait de tourner les modes autour de l'axe du cylindre ne les "mélange" donc pas. Si nous calculons comme précédemment la matrice  $\mathbf{T}(t)$  qui permet de calculer les amplitudes du champ après un temps d'évolution  $t$ , nous obtenons :

$$\mathbf{T}(t) = \exp(\mathbf{M}t) = \exp(\sigma t) \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Nous voyons que le champ que nous obtenons après une durée d'évolution  $t$  est identique au champ composé du premier mode tourné de  $\frac{\omega t}{m}$ , et du deuxième mode tourné de  $\frac{-\omega t}{m}$ , c'est à dire du même angle mais *en sens inverse*. Chacun des modes est donc associé à une onde propagative, mais ces ondes tournent autour du cylindre dans des sens différents.

Enfin, il est facile de voir que la matrice qui représente  $\mathcal{R}_\pi$  a pour seul effet d'échanger les amplitudes et les phases du premier et du deuxième mode. Nous voyons donc que nous avons deux modes de champ magnétique dans l'écoulement, qui sont images l'un de l'autre par la

rotation  $\mathcal{R}_\pi$ , et qui tournent chacun dans un sens. Lorsque nous les observons dans les résultats des simulations, chacun de ces modes a l'aspect d'une onde propagative, localisée au voisinage d'une des turbines, et qui tourne dans le même sens qu'elle.

### 11.2.6 Prise en compte des symétries supplémentaires imposées par le code numérique.

Les propriétés de symétrie supplémentaires.

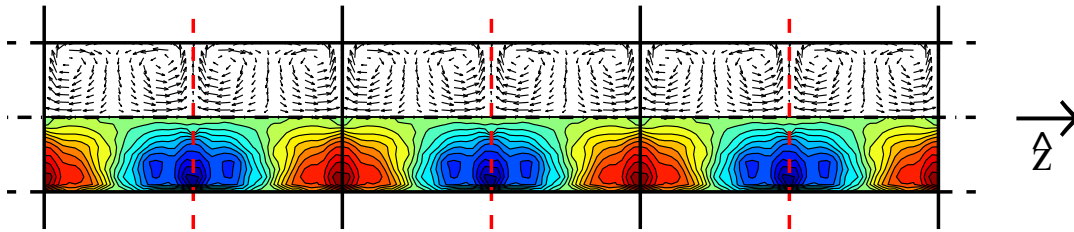


FIG. 11.2 – Schéma “couché” de l’écoulement, tel qu’il est “vu” par le code, dans le cas où le champ de vitesse n’est pas invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ . L’axe du cylindre est marqué en trait mixte. La partie du graphe située au-dessus de l’axe du cylindre représente le champ de vitesse poloïdale, et la partie située sous l’axe du cylindre représente le champ de vitesse toroïdale. Les lignes en pointillé rouge marquent la symétrisation introduite pour éviter le phénomène de Gibbs, et les lignes en trait plein noir marquent les extrémités des différentes cellules créées par la périodisation.

Le code avec lequel nous avons effectué les simulations numériques est un code “périodique” ce qui signifie qu’il ne calcule pas l’évolution du champ magnétique dans un seul écoulement de von Kármán, mais dans une infinité de petits écoulements empilés dans la direction de l’axe du cylindre. De plus, pour minimiser les problèmes numériques dus aux oscillations parasites provoquées par le “phénomène de Gibbs”, nous avons commencé par rendre le champ de vitesse azimutale continu en accolant à l’écoulement son image par réflexion par le plan d’une des turbines. Nous avons représenté en figure 11.2 l’écoulement, tel qu’il est “vu” par le code. Nous voyons bien qu’il possède bien plus de propriétés de symétrie que l’écoulement expérimental sur lequel nous avons raisonné jusqu’à présent. Nous devons donc nous attendre à voir apparaître dans les résultats de simulation d’autres propriétés de symétrie que celles que nous avons jusqu’ici mentionnées, et qu’il est important de savoir distinguer des “vraies”, qui ont pour cause les symétries de l’écoulement lui-même. Nous nous heurtons alors à un problème de taille : le groupe de symétrie de l’écoulement ainsi périodisé contient visiblement le groupe des translations de vecteur constant et égal à la hauteur de la cellule élémentaire. Or ce groupe n’est pas compact, ce qui nous interdit d’utiliser les proposition 1 et 2 pour déterminer tous les jeux de propriétés de symétrie possibles pour les modes propres de l’opérateur d’induction. Parmi les modes propres, nous pouvons tout de même espérer que certains sont périodiques en  $z$ , et ont une longueur d’onde égale à une hauteur de “double boîte”. Ce sont d’ailleurs ces modes qui paraissent le plus pertinents physiquement, car il paraît douteux qu’un mode à très grande longueur d’onde constitue une bonne approximation du champ magnétique qui nous intéresse, qui n’a lui qu’une seule “demi-double boîte” pour s’ébattre. Nous voyons alors que les seules propriétés de symétrie de l’écoulement qui affectent les modes de ce type sont :

- L’axisymétrie.
- La symétrie miroir que nous avons introduite pour éliminer le phénomène de Gibbs, que nous



noterons  $\mathcal{M}_1$ . Les plans correspondant sont marqués en rouge sur la figure 11.2.

– Le cas échéant, une version “périodisée” de la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ . Au cours de cette opération, l’écoulement est retourné autour de l’un des axes possibles. Une portion sort alors de la boîte élémentaire de la simulation, et est ramenée à son emplacement de départ. Il est facile de voir que cette opération effectuée en fait l’opération  $\mathcal{R}_\pi$  “habituelle” sur chacune des deux demi-boîtes.

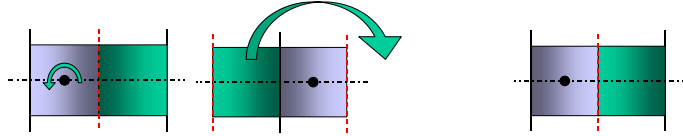


FIG. 11.3 – Différentes étapes de l’opération de symétrie  $\mathcal{R}_\pi$ , effectuées sur l’écoulement “couché”. La ligne en pointillé rouge marque la symétrisation introduite pour éviter le phénomène de Gibbs, et les lignes en trait plein noir marquent les extrémités de la cellule élémentaire de l’écoulement périodique.

Notons  $\Gamma$  le groupe des rotations qui laissent l’écoulement “physique” invariant, qui est selon les cas isomorphe à  $O(2)$  ou  $SO(2)$ . Nous pouvons voir relativement facilement que l’opération  $\mathcal{M}_1$  commute avec les éléments de  $\Gamma$ . Enfin, il est facile au vu des effets d’un élément quelconque du groupe de symétrie de l’écoulement de déterminer si sa définition fait ou non intervenir  $\mathcal{M}_1$ . Chaque élément du groupe peut donc être associé de manière unique à un élément  $g$  de  $\Gamma$ , et décomposé en  $\mathcal{M}_1 \circ g$  ou en  $\text{Id} \circ g$ . Ces deux propriétés font que le groupe de symétrie de l’écoulement est isomorphe au produit direct du groupe  $\mathbb{Z}_2$  et de  $\Gamma$ , qui est noté  $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ .

### Les représentations de $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ .

Il existe un théorème qui montre que toute représentation absolument irréductible du produit direct de deux groupes peut s’écrire comme le “produit” d’une représentation absolument irréductible du premier avec une représentation absolument irréductible du deuxième. Les matrices d’une représentation produit sont égales aux produits tensoriels des matrices des deux représentations qui la composent. Par exemple, si un élément  $g_1$  d’un groupe  $G_1$  est représenté en dimension 2 par une matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , et si un élément  $g_2$  d’un groupe  $G_2$  est représenté par une matrice  $\mathbf{M}$  de taille  $n$ , alors l’élément  $g_1 g_2$  du groupe produit  $G_1 \times G_2$  sera représenté par la matrice de taille  $2n$  :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \mathbf{M} = \left[ \begin{array}{c|c} a\mathbf{M} & b\mathbf{M} \\ \hline c\mathbf{M} & d\mathbf{M} \end{array} \right]$$

Cette définition n’est pas spécialement intuitive, mais comme les deux seules représentations absolument irréductibles de  $\mathbb{Z}_2$  sont de dimension 1, nous n’aurons heureusement pas besoin de rentrer dans les détails. Les représentations absolument irréductibles de  $\mathbb{Z}_2$  peuvent être trouvées dans tout livre de théorie des groupes, ce sont :

$$\psi_{\mathbb{Z}_2}^1 : \begin{cases} \text{Id} & \mapsto 1 \\ \mathcal{M}_1 & \mapsto 1 \end{cases}, \text{ et } \psi_{\mathbb{Z}_2}^2 : \begin{cases} \text{Id} & \mapsto 1 \\ \mathcal{M}_1 & \mapsto -1 \end{cases}$$

Si nous choisissons maintenant une représentation absolument irréductible  $\psi_\Gamma$  de  $\Gamma$ , nous voyons que nous pouvons construire à partir d’elle deux représentations absolument irréductibles de  $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ , en faisant son produit avec  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^1$  ou avec  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^2$ . Dans le premier cas, les éléments de  $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$  qui se mettent sous la forme  $\text{Id} \circ g$ ,  $g \in \Gamma$  sont représentés par  $\psi_\Gamma(g)$ , de même que ceux

qui se mettent sous la forme  $\mathcal{M}_1 \circ g$ ,  $g \in \Gamma$ . Dans le deuxième cas, les  $\text{Id} \circ g$ ,  $g \in \Gamma$  sont toujours représentés par  $\psi_\Gamma(g)$ , mais les autres éléments de  $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ , ceux qui font intervenir  $\mathcal{M}_1$ , sont représentés par  $-\psi_\Gamma(g)$ .

Dans la partie précédente, qui était consacrée aux symétries de l'écoulement "physique", nous avons vu que nous pouvions associer à chaque mode propre de l'opérateur d'induction une représentation de  $\Gamma$ , qui était selon les cas absolument irréductible, non-absolument irréductible, etc. Nous constatons maintenant que la présence de la symétrie miroir "parasite"  $\mathcal{M}_1$  permet d'associer à chacune de ces représentations **deux** représentations de  $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ , la représentation produit avec  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^1$ , et la représentation produit avec  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^2$ , qui auront les mêmes propriétés d'irréductibilité qu'elle. Nous voyons donc que cette symétrie parasite "dédoublé" chaque représentation du groupe  $\Gamma$  de départ, qui est celui du vrai problème physique. Pour chaque type de mode propre du problème physique, nous aurons donc deux types de modes propres numériques, qui se distingueront par le fait que l'un se transforme en lui-même par la symétrie  $\mathcal{M}_1$ , alors que l'autre se transforme en son opposé par cette même symétrie. Comme aucune opération de symétrie ne permet de passer d'un vecteur propre du premier type à un vecteur du second type, ils auront des taux de croissances différents, et les valeurs du nombre de Reynolds magnétique critique qui leur seront associées seront différentes.

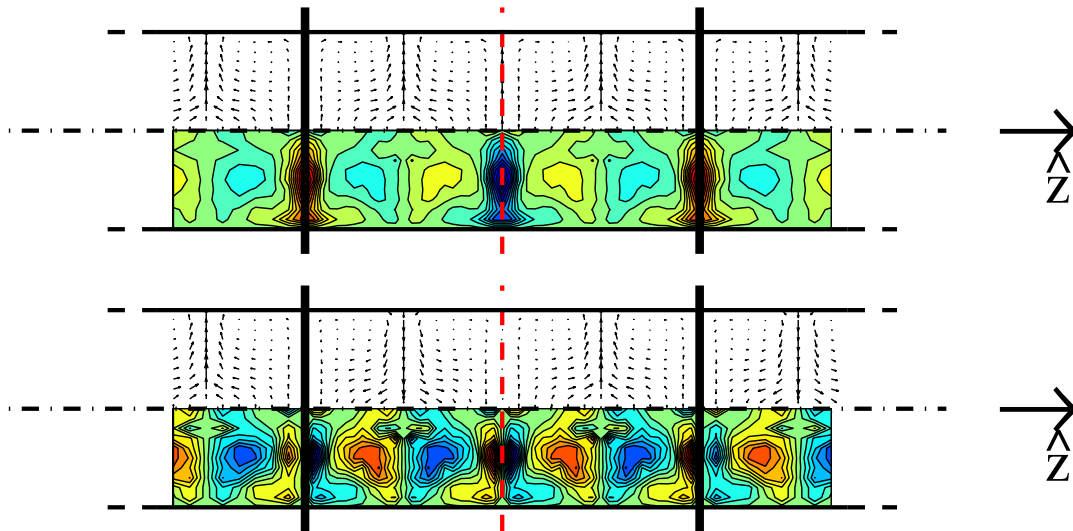


FIG. 11.4 – Schémas "couchés" de deux modes de champ magnétique associés à la représentation d'indice 1 de  $O(2)$ , mais à deux représentations différentes de  $\mathbb{Z}_2$ . Les simulations ont été effectuées avec un champ de vitesse produit par des turbines de type "TM60", "symétrisé", "périodisé", pour  $\text{Rm} = 120$ . L'axe du cylindre est marqué en trait mixte. Les parties du graphe situées au-dessus et au-dessous de l'axe du cylindre représentent respectivement les parties poloïdale et toroïdale du champ magnétique. Les lignes en pointillé rouge marquent le plan de la réflexion  $\mathcal{M}_1$ , et les lignes en trait plein noir marquent les extrémités de la cellule élémentaire de l'écoulement périodique. a) Mode associé à la représentation triviale de  $\mathbb{Z}_2$ . b) Mode associé à la représentation  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^2$ .

La figure 11.4a montre l'allure d'un mode de champ magnétique associé au produit de la représentation d'indice 1 de  $O(2)$  avec la représentation triviale de  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^1$ . Nous pouvons voir que ce mode de champ magnétique est identique à son image par la réflexion  $\mathcal{M}_1$ . Le mode de champ magnétique représenté sur la figure 11.4b, lui, est associé à l'autre représentation de  $\mathbb{Z}_2$ , celle qui

fait agir la réflexion  $\mathcal{M}_1$  comme  $-\text{Id}$ . Nous pouvons constater que la composante azimutale du champ magnétique change de signe au passage du plan de symétrie, et que les dipôles situés dans les deux volumes élémentaires adjacents sont anti-parallèles. Nous avons pu vérifier que les taux de croissance obtenus pour ces deux types de mode sont toujours différents sauf coïncidence, et que les seuils en nombre de Reynolds magnétique pour lesquels ils deviennent critiques sont différents. Empiriquement, le mode qui devient critique le premier appartient toujours à la classe de modes associés à la représentation  $\psi_{\mathbb{Z}_2}^2$ , qui correspondent donc à des dipôles adjacents anti-parallèles. Enfin, nous avons pu voir que les conditions initiales ou les champs magnétiques imposés possédant les propriétés de symétrie de l'un des types de modes laissent de marbre les modes propres de l'autre type. Il est ainsi possible de ne pas voir le moindre signe de l'approche du seuil associé à l'un des types de modes en mesurant le champ magnétique induit en réponse à une excitation adaptée à l'autre. Lorsque le seuil est dépassé, des couplages numériques parasites font que les erreurs d'arrondi permettent au mode instable de commencer à croître, même s'il n'est pas excité directement. C'est pour cette raison que nous avons réalisé les simulations présentées au chapitre précédent avec un champ magnétique transverse imposé dépendant sinusoidalement de la coordonnée axiale  $z$ . Seule cette méthode permet d'avoir des courbes "franches", puisque le champ magnétique transverse uniforme n'excite en réalité le mode instable que par les erreurs d'arrondi, ce qui n'a pas une bonne répétabilité...

### 11.2.7 Conclusion des arguments de théorie des groupes.

En résumé de cette section, nous rappellerons les points suivants :

- Il est possible, par des méthodes certes peu familières à la communauté des physiciens expérimentateurs, mais néanmoins d'une difficulté abordable, de déterminer l'influence des propriétés de symétrie d'un montage sur les modes propres d'instabilités qui peuvent s'y développer. Une recherche plus approfondie peut ensuite permettre de déterminer les formes générales des équations qui décrivent la dynamique des amplitudes de ces modes, mais nous-mêmes n'avons pas poussé nos travaux jusqu'à ce point.
- Ces arguments peuvent servir d'outils pratiques dans l'analyse de stabilité linéaire d'un problème, en permettant au physicien de décomposer de façon rationnelle l'étude de la stabilité vis-à-vis de perturbations générales en l'étude de la stabilité vis-à-vis de perturbations appartenant à un nombre fini de classes, se distinguant par leurs propriétés de symétrie, et pouvant être exhaustivement déterminées. Le physicien peut alors, sur la base de considérations heuristiques, décider de traiter ou non les différents cas, mais il a au moins la possibilité de faire ce choix consciemment.
- Dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire réalisée de façon numérique par intégration en temps des équations du mouvement linéarisées, ces considérations peuvent servir de guide dans l'élaboration de conditions initiales permettant d'exciter tous les modes possibles du système, afin de réaliser une analyse exhaustive, ou au contraire de n'exciter que les modes appartenant à une classe précise, afin de s'affranchir du "bruit" des autres modes.
- La détermination par les méthodes de la théorie des groupes des différentes classes de modes propres envisageables permet de classer de façon simple les modes observés dans les résultats expérimentaux et numériques, et notamment d'interpréter plus aisément leurs propriétés temporelles.
- Enfin, nous rappelons une dernière fois qu'une présentation rigoureuse des différents concepts que nous avons utilisés ici peut être trouvée dans l'ouvrage, certes assez mathématique, de Golubitsky *et al.* [54].

## 11.3 L'analyse de stabilité linéaire par la méthode de Galerkin

Les simulations que nous avons présentées au chapitre 10, si elles ont l'avantage d'être d'une grande souplesse d'utilisation, ne permettent pas une analyse simple du mécanisme par lequel les différents modes propres de champ magnétique se construisent. Comme notre objectif est d'assister ce mécanisme afin de le rendre plus efficace, il nous a paru souhaitable de tenter d'en obtenir une décomposition en étapes élémentaires, chacune de ces étapes couplant différentes composantes "globales" du champ. Nous présentons dans cette section comment nous avons effectué cette décomposition, et les résultats qu'elle nous a permis d'obtenir. Ce travail a été réalisé en collaboration avec C. Normand.

### 11.3.1 Le principe de la méthode

#### Le contexte.

A la lecture de l'ouvrage classique de K. Moffatt [90], il nous est rapidement apparu que de très nombreux auteurs avaient avant nous utilisé avec bonheur des décompositions du champ magnétique en "briques" élémentaires afin d'en étudier la régénération au cours de l'effet dynamo. Un exemple de ces méthodes de décomposition est bien sûr la décomposition en champ "poloïdal" et en champ "toroïdal", qui semble avoir été introduite très tôt [26], et qui a été à l'origine des concepts d'"effet alpha" et d'"effet omega". Nous avons souhaité réaliser une telle décomposition du champ magnétique dans notre écoulement, ne serait-ce bien sûr que pour déterminer le type exact de la "dynamo von Kármán", afin de savoir à quelle partie de la littérature nous devons nous rapporter. La méthode originale de décomposition en champ "poloïdal" et en champ "toroïdal" ayant été conçue dans le cadre de l'étude des dynamos sphériques, nous avons dû commencer par en développer un équivalent en géométrie cylindrique, en choisissant une décomposition du champ magnétique en contributions élémentaires, et en déterminant les équations d'évolution de ces différentes portions du champ total par une méthode "à la Galerkin".

#### La méthode de Galerkin.

La méthode de Galerkin est l'une des multiples méthodes dérivées de la "Méthode des Résidus Pondérés" (voir [47]). Nous allons rappeler brièvement le principe général de ces méthodes. Soit à résoudre une équation d'évolution pour un champ  $\psi$  qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{M}(\psi) \quad (11.1)$$

Dans cette expression,  $\mathbf{M}$  est un opérateur qui peut être quelconque, mais que nous considérons pour notre part linéaire. Des arguments heuristiques peuvent nous amener à dissocier les dépendances en espace et en temps de  $\psi$  en l'écrivant sous la forme d'une somme de "fonctions d'essai" *ne dépendant que de l'espace*, les  $\Psi_{\{1\dots N\}}$ , multipliées par des amplitudes ne dépendant que du temps, les  $a_{\{1\dots N\}}$ . Cette décomposition permet de transformer le problème original 11.1, qui dépend à la fois de l'espace et du temps, en un problème exclusivement temporel, qui prend la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires qui régit l'évolution des amplitudes  $a_{\{1\dots N\}}$ . Le nombre  $N$  d'amplitudes indépendantes considérées est appelé "ordre de troncature" de l'approximation. Notons  $\psi_N$  l'approximation d'ordre  $N$  de  $\psi$ ,

$$\psi_N = \sum_{i=0}^N a_i \Psi_i$$

Nous pouvons définir le “résidu” de l’approximation d’ordre  $N$  de la manière suivante :

$$R_N = \frac{\partial \psi_N}{\partial t} - \mathbf{M}(\psi_N)$$

Dans le cas où  $\psi_N$  est la solution exacte du problème de départ, le résidu est bien entendu identiquement nul. Dans le cadre de la méthode des résidus pondérés, nous choisissons plutôt d’imposer au résidu d’être orthogonal, au sens d’un produit scalaire défini sur l’espace de fonctions dans lequel nous cherchons la solution, à  $N$  nouvelles fonctions linéairement indépendantes, les “fonctions de pondération”  $\Phi_{\{1\dots N\}}$ . Ceci s’exprime :

$$\forall j \in \{1 \dots N\}, \langle \Phi_j, \sum_{i=1}^N \partial_t a_i \Psi_i - \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{M}(\Psi_i) \rangle = 0$$

Nous pouvons alors déduire de cette expression les équations qui régissent l’évolution des  $a_{\{1\dots N\}}$  :

$$\forall j \in \{1 \dots N\}, \sum_{i=1}^N \partial_t a_i \langle \Phi_j, \Psi_i \rangle = \sum_{i=1}^N a_i \langle \Phi_j, \mathbf{M}(\Psi_i) \rangle$$

Cette expression peut se mettre sous une forme matricielle plus lisible :

$$\begin{bmatrix} \langle \Phi_1, \Psi_1 \rangle & \cdot & \langle \Phi_1, \Psi_N \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle \Phi_N, \Psi_1 \rangle & \cdot & \langle \Phi_N, \Psi_N \rangle \end{bmatrix} \times \partial_t \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \Phi_1, \mathbf{M}(\Psi_1) \rangle & \cdot & \langle \Phi_1, \mathbf{M}(\Psi_N) \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle \Phi_N, \mathbf{M}(\Psi_1) \rangle & \cdot & \langle \Phi_N, \mathbf{M}(\Psi_N) \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix}$$

Nous voyons alors que pour obtenir le système d’équations différentielles qui nous intéresse, il suffit de multiplier à gauche les deux membres de cette équation par l’inverse de la matrice de projection  $\langle \Phi_i, \Psi_j \rangle_{(i,j) \in \{1\dots N\}^2}$ .

La méthode des résidus pondérés a donné lieu à un nombre infini de variations, qui se distinguent par le choix des fonctions d’essai et des fonctions de pondération. Nous avons choisi d’utiliser la méthode de Galerkin, qui se distingue par le fait que les fonctions d’essai et les fonctions de pondération sont **identiques**, et **vérifient les conditions aux limites** du problème.

### 11.3.2 Mise en œuvre pratique

#### Description de la classe d’écoulements envisagée.

Nous avons décidé de restreindre notre étude à la classe d’écoulement déjà étudiée dans le chapitre 10, sur laquelle nous avons la plus grande quantité d’informations. Les écoulements de cette classe possèdent le groupe de symétrie  $O(2)$  complet (c’est-à-dire sont axisymétriques et invariants par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ ). Ils ont lieu dans un cylindre de rayon 1, entre deux turbines infiniment minces situées en  $z = -\mathcal{H}$  et  $z = \mathcal{H}$ . La figure 11.5 représente un exemple de champ de vitesse de ce type.

Pour pouvoir déterminer aisément les conditions aux limites vérifiées par le champ magnétique, nous avons ensuite choisi de “périodiser” le champ de vitesse, c’est à dire que nous avons étudié les modes de champ magnétique créés par effet dynamo dans une “pile” infinie de cellules élémentaires. Chacune de ces cellules contient en réalité 2 écoulements, qui sont accolés par le plan  $z = \mathcal{H}$  pour éviter que la vitesse azimutale présente des discontinuités. La période de l’écoulement dans la direction axiale est donc de  $4\mathcal{H}$ . La structure du champ de vitesse est alors identique à celle que nous avons représenté plus haut en figure 11.2.

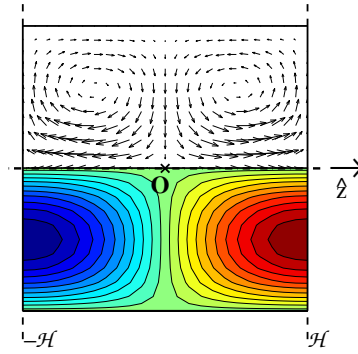


FIG. 11.5 – *Champ de vitesse*  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ . La partie haute du graphe représente le champ de vitesse méridienne. La partie basse représente les lignes de niveau de la vitesse azimutale. L'écoulement se produit dans un cylindre de rayon 1, entre  $z = -\mathcal{H}$  et  $z = \mathcal{H}$ .

L'expression d'un champ de vitesse "acceptable" est donc :

$$\begin{aligned} v_r(r, z) &= \sum_n u_{2n}(r) \cos\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ v_\theta(r, z) &= \sum_n v_{2n+1}(r) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ v_z(r, z) &= \sum_n w_{2n}(r) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \end{aligned}$$

Où les  $u_{2n}$ ,  $v_{2n+1}$  et  $w_{2n}$  sont des fonctions qui s'annulent en  $r = 1$ . Les  $u_{2n}$  et les  $w_{2n}$  sont de plus reliées par la condition d'incompressibilité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_{2n}) + \frac{n\pi}{\mathcal{H}} w_{2n} = 0$$

Cette condition laisse par contre libres les  $v_{2n+1}$ . Nous avons choisi de représenter les dépendances radiales des champs de vitesse par des polynômes en  $r$ . Pour n'avoir à manipuler que des fonctions scalaires indépendantes, nous avons décidé de représenter les vitesses poloïdales par la fonction de courant  $\psi$  telle que  $\vec{v}_{pol} = \text{rot}(\psi \vec{e}_\theta)$ . Les "briques" élémentaires de champ de vitesse avec lesquelles nous avons mené notre étude sont donc les

$$v_p^{n,k} = \text{rot}\left(r^k \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \vec{e}_\theta\right)$$

et les

$$v_\theta^{n,k} = r^k \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \vec{e}_\theta.$$

### Les conditions aux limites.

L'une des très grandes originalités du problème de l'effet dynamo cinématique en tant que problème de stabilité linéaire réside dans les conditions aux limites qui sont imposées au champ magnétique. En effet, à la différence de ce qui peut se produire dans la plupart des analyses de stabilité linéaire d'écoulements, la perturbation qui est étudiée ne reste pas confinée à l'intérieur du montage expérimental, mais peut s'étendre jusqu'à l'infini, et peut subir des perturbations

ou être amplifiée en dehors de l'écoulement. La seule condition aux limites que le champ doit satisfaire est qu'il doit tendre vers 0 à distance infinie de l'écoulement. Lors de l'étude pratique d'un problème, il est donc nécessaire de calculer l'évolution du champ magnétique à l'intérieur **et** à l'extérieur de l'écoulement, et de raccorder les solutions en lui imposant d'être continu sur tout l'espace (dans le cas où la perméabilité magnétique est homogène) [33]. Dans le cas général, la résolution à l'extérieur de l'écoulement pose les mêmes problèmes numériques que la résolution à l'intérieur, en plus de ceux qui sont liés au fait que le domaine de calcul s'étend à l'infini.

Dans la plupart des cas réalistes, cependant, le milieu conducteur est d'extension finie, et est entouré d'une région isolante. Dans cette région, nous voyons que les courants électriques sont nuls, et donc que le champ magnétique est irrotationnel et de divergence nulle. Nous pouvons donc écrire qu'il dérive d'un potentiel,  $\psi$ , tel que  $\vec{B} = \nabla\psi$  et  $\Delta\psi = 0$ . Il n'est donc pas nécessaire d'intégrer en temps l'équation d'évolution de  $\vec{B}$ , puisque le potentiel  $\psi$  est à chaque instant solution d'une simple équation de Laplace [80]. Les conditions aux limites qu'il est nécessaire d'ajouter à cette équation sont données d'une part par la continuité du champ magnétique à la surface du milieu conducteur, d'autre part par la condition de décroissance à l'infini. Comme la donnée de la seule composante normale à la surface du champ magnétique suffit à rendre le problème bien posé, nous voyons qu'il est possible, à partir de cette composante du champ, de déterminer le potentiel  $\psi$  sur l'ensemble de la surface, puis d'en tirer les composantes tangentielles du champ magnétique par dérivation. La condition de raccord permet donc de déterminer deux composantes du champ magnétique à partir de la troisième, et joue donc le rôle d'une "condition aux limites" sur la surface du milieu conducteur. Lorsque le champ magnétique est périodique en  $z$ , et évolue dans un cylindre de longueur infinie entouré d'un milieu isolant pour  $r > 1$ , il est possible de déterminer analytiquement le potentiel  $\psi$ , en prenant la transformée de Fourier de l'équation de Laplace dans la direction azimutale et axiale. Il est alors possible d'exprimer les conditions aux limites que doivent vérifier les composantes de Fourier du champ en  $r = 1$ . Les expressions correspondantes sont rassemblées dans l'article de J. Léorat [80].

### Les fonctions d'essai, les fonctions de pondération

Des considérations heuristiques nous ont amenés à choisir pour fonctions d'essai les modes diffusifs du champ magnétique qui vérifient les conditions aux limites du problème. Pour que ces dernières aient une expression simple, nous avons choisi de travailler dans un cylindre infini de rayon  $r = 1$ , entouré d'un milieu isolant, et de décomposer le champ magnétique en série de Fourier dans les directions azimutale et axiale.

Dans cette "base" de fonctions, la matrice de l'opérateur d'induction est diagonale lorsque le nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement est nul, et faiblement non-diagonale dans la gamme des nombres de Reynolds magnétique modérés, situation dans laquelle se trouve par nécessité toute dynamo fluide expérimentale. Ce choix de fonctions d'essai fait donc bien ressortir la nature essentiellement diffusive de notre problème, et permet de mettre clairement en lumière le rôle de perturbation joué par l'écoulement aux petits nombres de Reynolds magnétique. Par ailleurs, il fournit une manière simple d'imposer aux modes propres que nous cherchons de vérifier les conditions aux limites en  $r = 1$ , puisque, comme celles-ci sont linéaires en champ magnétique, toute somme (finie...) de fonctions les respectant ne peut que les respecter.

Cette famille de fonctions d'essai présente par contre de nombreux défauts, parmi lesquels celui de ne probablement pas être une "base" au sens mathématique du terme. N'étant pas mathématiciens, nous n'avons de toute façon pas une idée bien claire de l'espace de fonctions que nous souhaiterions lui voir engendrer. De plus, elle n'est pas orthogonale, lorsqu'elle est prise telle quelle. Une manière élégante de contourner ce dernier point pourrait être alors d'utiliser

comme fonctions de pondération les modes propres de l'opérateur adjoint de l'opérateur de la diffusion. Dans ce cas, la matrice de projection serait par définition diagonale. Quelques tentatives dans cette voie nous ont montré que les conditions aux limites "inédites" du problème direct font qu'il n'est pas facile de déterminer avec confiance l'expression de l'opérateur adjoint, et bien sûr encore moins de le diagonaliser. Sur ce point particulier, nous renvoyons le lecteur aux travaux de C. Normand [99] et F. Pétrélis [109]. Nous nous sommes donc arrêtés à mi-chemin dans cette direction, en utilisant des fonctions de pondération qui étaient "presque" des modes de l'adjoint du laplacien, puis en multipliant à gauche par l'inverse de la matrice de projection. Notre méthode n'est donc pas une méthode de Galerkin à proprement parler, mais s'en rapproche fortement.

Les expressions des fonctions d'essai et des fonctions de pondération que nous avons utilisées sont rassemblées en annexe B.

### L'opérateur d'induction, mise en forme de la méthode.

Nous pouvons maintenant rassembler les différents éléments que nous avons mis en place. Nous cherchons à résoudre le problème aux valeurs propres en  $\vec{B}$  :

$$\sigma \vec{B} = \text{Rm} \text{rot}(\vec{V} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B}$$

L'expression de  $\vec{B}$  dans la base de fonctions d'essais que nous avons choisie est :

$$\vec{B} = \sum_{n,k} Y^{n,k} \Psi_p^{n,k} + \sum_{n,k} Z^{n,k} \Psi_i^{n,k}$$

Ces fonctions étant par construction les modes propres du laplacien, et vérifiant les conditions aux limites du problème, nous savons que :

$$\Delta \vec{B} = \sum_{n,k} Y^{n,k} \lambda_p^{n,k} \Psi_p^{n,k} + \sum_{n,k} Z^{n,k} \lambda_i^{n,k} \Psi_i^{n,k}$$

Nous avons choisi d'exprimer les champs de vitesse de la manière suivante :

$$\vec{V}(r, z) = \sum_{n',k'} A^{n',k'} v_p^{n',k'} + \sum_{n',k'} B^{n',k'} v_\theta^{n',k'}$$

En introduisant les différentes expressions dans l'équation d'induction, en développant le produit  $\vec{V} \times \vec{B}$ , et en exploitant la linéarité des différents opérateurs, nous pouvons alors écrire notre problème sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma \left[ \sum_{n,k} Y^{n,k} \Psi_p^{n,k} + \sum_{n,k} Z^{n,k} \Psi_i^{n,k} \right] &= \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} A^{n',k'} Y^{n,k} \text{rot} \left( v_p^{n',k'} \times \Psi_p^{n,k} \right) \\ &+ \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} A^{n',k'} Z^{n,k} \text{rot} \left( v_p^{n',k'} \times \Psi_i^{n,k} \right) \\ &+ \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} B^{n',k'} Y^{n,k} \text{rot} \left( v_\theta^{n',k'} \times \Psi_p^{n,k} \right) \\ &+ \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} B^{n',k'} Z^{n,k} \text{rot} \left( v_\theta^{n',k'} \times \Psi_i^{n,k} \right) \\ &+ \left[ \sum_{n,k} Y^{n,k} \lambda_p^{n,k} \Psi_p^{n,k} + \sum_{n,k} Z^{n,k} \lambda_i^{n,k} \Psi_i^{n,k} \right] \end{aligned}$$



Nous voyons à ce point que le terme d'induction est décomposé en une somme de contributions correspondant aux interactions des constituants du champ de vitesse avec les différentes fonctions d'essai. Un calcul long, mais simple, permet alors d'obtenir les expressions de ces contributions.

Nous pouvons alors effectuer le produit scalaire de cette expression avec les différentes fonctions de pondération. Nous avons utilisé la définition usuelle du produit scalaire de deux fonctions définies sur le volume du cylindre, c'est-à-dire :

$$\forall \vec{f}, \vec{g}, \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \frac{1}{4\pi\mathcal{H}} \int_{-\mathcal{H}}^{3\mathcal{H}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{f}^* \cdot \vec{g} r dr d\theta dz$$

Avec cette définition du produit scalaire, nous savons que deux fonctions possédant des nombres d'ondes différents dans la direction axiale sont orthogonales. Nous savons donc d'avance que les  $\Phi_p^{n'',k''}$  sont orthogonales aux  $\Psi_i^{n,k}$ , et que les  $\Phi_i^{n'',k''}$  sont orthogonales aux  $\Psi_p^{n,k}$ . De plus, comme l'action du champ de vitesse méridienne conserve la parité des nombre d'ondes, tandis que l'action du champ de vitesse azimutale la change, nous savons que de nombreux termes d'induction correspondent à des produits scalaires nuls. En effectuant le produit scalaire avec les fonctions de pondération  $\Phi_p^{n'',k''}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall n'', k'', \sigma \sum_{n,k} Y^{n,k} \langle \Phi_p^{n'',k''}, \Psi_p^{n,k} \rangle &= \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} A^{n',k'} Y^{n,k} \langle \Phi_p^{n'',k''}, \vec{\text{rot}} \left( v_p^{n',k'} \times \Psi_p^{n,k} \right) \rangle \\ &+ \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} B^{n',k'} Z^{n,k} \langle \Phi_p^{n'',k''}, \vec{\text{rot}} \left( v_\theta^{n',k'} \times \Psi_i^{n,k} \right) \rangle \\ &+ \sum_{n,k} Y^{n,k} \lambda_p^{n,k} \langle \Phi_p^{n'',k''}, \Psi_p^{n,k} \rangle \end{aligned}$$

Le produit scalaire avec les  $\Phi_i^{n'',k''}$  donne de son côté :

$$\begin{aligned} \forall n'', k'', \sigma \sum_{n,k} Z^{n,k} \langle \Phi_i^{n'',k''}, \Psi_i^{n,k} \rangle &= \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} A^{n',k'} Z^{n,k} \langle \Phi_i^{n'',k''}, \vec{\text{rot}} \left( v_p^{n',k'} \times \Psi_i^{n,k} \right) \rangle \\ &+ \text{Rm} \sum_{n',k',n,k} B^{n',k'} Y^{n,k} \langle \Phi_i^{n'',k''}, \vec{\text{rot}} \left( v_\theta^{n',k'} \times \Psi_p^{n,k} \right) \rangle \\ &+ \sum_{n,k} Z^{n,k} \lambda_i^{n,k} \langle \Phi_i^{n'',k''}, \Psi_i^{n,k} \rangle \end{aligned}$$

Si nous choisissons maintenant un ordre de troncature  $N$  dans la direction axiale, et un ordre de troncature  $K$  dans la direction radiale, nous pouvons arranger les coefficients  $Y^{n,k}$  et  $Z^{n,k}$  en un vecteur colonne de longueur  $2NK$ ,  $\mathbf{X}$ , et écrire l'équation aux valeurs propres sous la forme :

$$\sigma \mathbf{G} \mathbf{X} = \text{Rm}(\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\theta) \mathbf{X} + \mathbf{G} \mathbf{L} \mathbf{X}$$

Pour mettre cette équation sous sa forme définitive, il ne nous reste plus alors qu'à multiplier ses deux membres à gauche par l'inverse de  $\mathbf{G}$ . Nous obtenons alors :

$$\sigma \mathbf{X} = \text{Rm}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{R}_p + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{R}_\theta) \mathbf{X} + \mathbf{L} \mathbf{X}$$

Les compositions des différents vecteurs ou matrices sont les suivantes :

$$\mathbf{X} = [Y^{0,0} \dots Y^{N,K} Z^{0,0} \dots Z^{N,K}]^T$$

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{c|c} \langle \Phi_p^i, \Psi_p^j \rangle & 0 \\ \hline 0 & \langle \Phi_i^i, \Psi_i^j \rangle \end{array} \right]$$

$$\mathbf{R}_p = \left[ \begin{array}{c|c} \langle \Phi_p^i, \vec{\text{rot}}(v_p \times \Psi_p^j) \rangle & 0 \\ \hline 0 & \langle \Phi_i^i, \vec{\text{rot}}(v_p \times \Psi_i^j) \rangle \end{array} \right]$$

$$\mathbf{R}_\theta = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \langle \Phi_p^i, \vec{\text{rot}}(v_\theta \times \Psi_i^j) \rangle \\ \hline \langle \Phi_i^i, \vec{\text{rot}}(v_\theta \times \Psi_p^j) \rangle & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{L} = \text{diag}(\lambda_p^{0,0}, \dots, \lambda_p^{N,K}, \lambda_i^{0,0}, \dots, \lambda_i^{N,K})$$

Tous les coefficients qui interviennent dans ces expressions sont réels. La structure de  $\mathbf{G}$  fait que la multiplication à gauche par son inverse ne change pas la structure en blocs de  $\mathbf{R}_p$  et  $\mathbf{R}_\theta$ .

### Implémentation numérique.

Deux versions du code ont été programmées, l'une en langage MATLAB sur un ordinateur de bureau, et l'autre en Fortran 77 sur station de travail SUN. Le code MATLAB est une "maquette", qui a été réalisée en travail préparatoire à la programmation du code Fortran. L'ensemble des tâches numériques lourdes étant réalisées à l'aide des routines de MATLAB, il n'a demandé qu'un faible travail de programmation, mais n'est pas très optimisé. Le code Fortran, qui a été programmé par C. Normand, confie les tâches lourdes aux routines de la librairie NAG. Il est plus robuste et plus rapide, mais sa mise au point a pris plus de temps.

Ces détails mis à part, les deux codes fonctionnent sur le principe suivant :

- La relation transcendante qui permet de définir les fonctions d'essai et les fonctions de pondération (voir annexe B) est résolue numériquement, dans une étape préliminaire. Les valeurs propres du laplacien, ainsi que les préfacteurs des fonctions de Bessel qui interviennent dans les différentes expressions sont stockés sur disque pour usage ultérieur. Le code MATLAB stocke de plus la matrice  $\mathbf{G}$ .
- Le code reçoit en entrée la décomposition du champ de vitesse en blocs  $v_p^{n,k}$  et  $v_\theta^{n,k}$  (cf section 11.3.2.0).
- Les coefficients des matrices  $\mathbf{R}_p$  et  $\mathbf{R}_\theta$  sont alors calculés. Les dérivations des différents champs sont effectuées analytiquement, à l'aide des relations de récurrence vérifiées par les fonctions de Bessel. Les intégrations qui interviennent dans les produits scalaires sont effectuées numériquement.
- A ce stade, le code MATLAB multiplie à gauche les matrices  $\mathbf{R}_p$  et  $\mathbf{R}_\theta$  par l'inverse de  $\mathbf{G}$ . L'inversion est effectuée numériquement.

– Les préfacteurs qui permettent au champ de vitesse d’avoir la valeur souhaitée du coefficient  $\Gamma$  (voir chapitre 10) et d’avoir une amplitude maximale égale à 1 sont calculés. Les définitions de  $\Gamma$  et du nombre de Reynolds magnétique sont cohérentes avec celles employées dans l’article du chapitre 10.

Différentes méthodes de diagonalisation peuvent alors être employées :

- Lorsque seules quelques valeurs propres sont nécessaires, le code MATLAB appelle la routine EIGS, qui effectue la recherche des valeurs propres dont la partie réelle est la plus positive de la matrice  $[\text{Rm}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{R}_p + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{R}_\theta) + \mathbf{L}]$ . Cette routine, qui met en œuvre l’algorithme d’Arnoldi [4], permet d’obtenir quelques valeurs propres, sans diagonaliser complètement la matrice.
- Lorsque la totalité du spectre est nécessaire, le code MATLAB appelle la routine EIG, qui elle-même appelle la routine DGEEV de la librairie LAPACK [2].
- De son côté, le code Fortran appelle la routine F02BJF de la librairie NAG, qui utilise l’algorithme QZ [92] de recherche de vecteurs propres “généralisés”. Cette routine fournit toutes les valeurs propres du problème “généralisé”  $\sigma\mathbf{G}\mathbf{X} = [\text{Rm}(\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\theta) + \mathbf{GL}]\mathbf{X}$ . Il n’est donc pas nécessaire de multiplier par l’inverse de  $\mathbf{G}$ .

### 11.3.3 Quelques résultats obtenus par la méthode de Galerkin.

Nous avons utilisé nos codes “Galerkin” pour étudier un grand nombre d’écoulements différents. Nous ne présenterons ici que quelques résultats, qui portent sur l’écoulement défini par  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ . Ce champ de vitesse est celui pour lequel nous avons pu observer l’effet dynamo pour les valeurs les plus faibles du nombre de Reynolds magnétique. Il est représenté plus haut, en figure 11.5. Pour l’ensemble de cette étude,  $\mathcal{H}$  est fixé à 1. Les ordres de troncature sont de 21 modes dans la direction axiale pour le code MATLAB, et 23 modes dans la direction axiale pour le code Fortran. Tous deux utilisent 30 modes dans la direction radiale. Le code pseudo-spectral d’intégration temporelle de l’équation d’induction, qui nous a été fourni par J. Léorat, utilise 51 points dans la direction radiale, 48 points dans la direction axiale, et 4 points dans la direction azimutale. Il a été présenté dans l’article du chapitre 10. Nous avons conservé l’ensemble des conventions de l’article. Ceci implique notamment que les graphes représentent le taux de croissance de l’énergie contenue dans les modes de champ magnétique. Ce taux de croissance est égal au double de la partie réelle de la valeur propre correspondante de la matrice. Nous le noterons  $2\lambda_r$ .

#### Validation des codes.

Pour vérifier que nos différents codes donnaient des résultats cohérents, nous avons effectué une série de simulations de validation, avec l’écoulement  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ . Pour ces simulations, le rapport  $\Gamma$  est fixé à 0.8.

– *Valeurs des taux de croissance.*

La figure 11.6 représente les taux de croissance obtenus par les trois différents codes que nous avons à notre disposition, pour la configuration “de test”  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ . Nous voyons immédiatement que les résultats obtenus par les trois codes sont en excellent accord sur l’ensemble de la gamme de nombre de Reynolds magnétique explorée. Le rapport de la différence des taux de croissance obtenus par les deux codes “Galerkin” par l’étendue de la gamme balayée en  $2\lambda_r$  est partout inférieur à 7 pour mille. Le même chiffre évalué à partir de la différence des taux de croissance obtenus par le code MATLAB et le code pseudo-spectral est inférieur à 3 pour cent. Les écarts les plus importants sont observés pour  $\text{Rm} = 200$ , ce qui est conforme à l’intuition : il paraît en effet logique que la qualité des

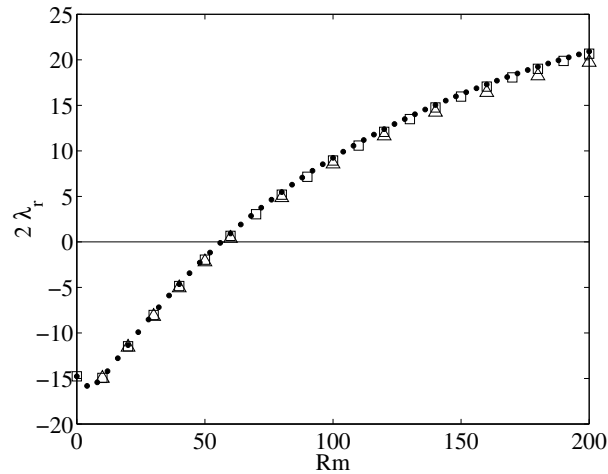


FIG. 11.6 – Taux de croissance de l'énergie magnétique du mode le moins amorti, pour l'écoulement défini par :  $\psi = r(r-1)^2(2r+1) \sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r) \sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ . Les  $\bullet$  (resp.  $\square$ ,  $\triangle$ ), représentent les valeurs déterminées par le code MATLAB (resp. code Fortran, code pseudo-spectral).

approximations faites par les différents codes baisse légèrement aux hautes valeurs du paramètre de contrôle. Il semble que les taux de croissance estimés par la méthode de Galerkin soient légèrement supérieurs à ceux obtenus par intégration temporelle, mais ces différences restent faibles. Le nombre de Reynolds magnétique critique semble être déterminée à  $\pm 2$  près.

– *Allure des vecteurs propres instables, pour  $Rm = 100$ ,  $\Gamma = 0.8$ .*

Un autre test de validation réside dans l'observation de la structure spatiale des modes propres. Nous avons représenté en figure 11.7 le mode instable du champ magnétique pour la configuration de test, pour  $Rm = 100$ , calculé au moyen du code MATLAB et du code pseudo-spectral. Les axes de coordonnées sont les mêmes que ceux utilisés dans l'article du chapitre 10. Le choix de coordonnées cartésiennes dans un volume cylindrique est rendu nécessaire par la structure dipolaire du champ magnétique. Nous voyons une fois de plus que les résultats obtenus par les deux codes sont extrêmement voisins. Les seules différences notables qu'il est possible d'observer se situent au cœur de la cellule, où le code "Galerkin" semble filtrer légèrement les petites variations du champ magnétique. Ce point est particulièrement visible sur les graphes de la dernière ligne de la figure. En tout état de cause, les différences sont très faibles. La structure du code Fortran fait qu'il n'a pas été possible de le soumettre à ce test.

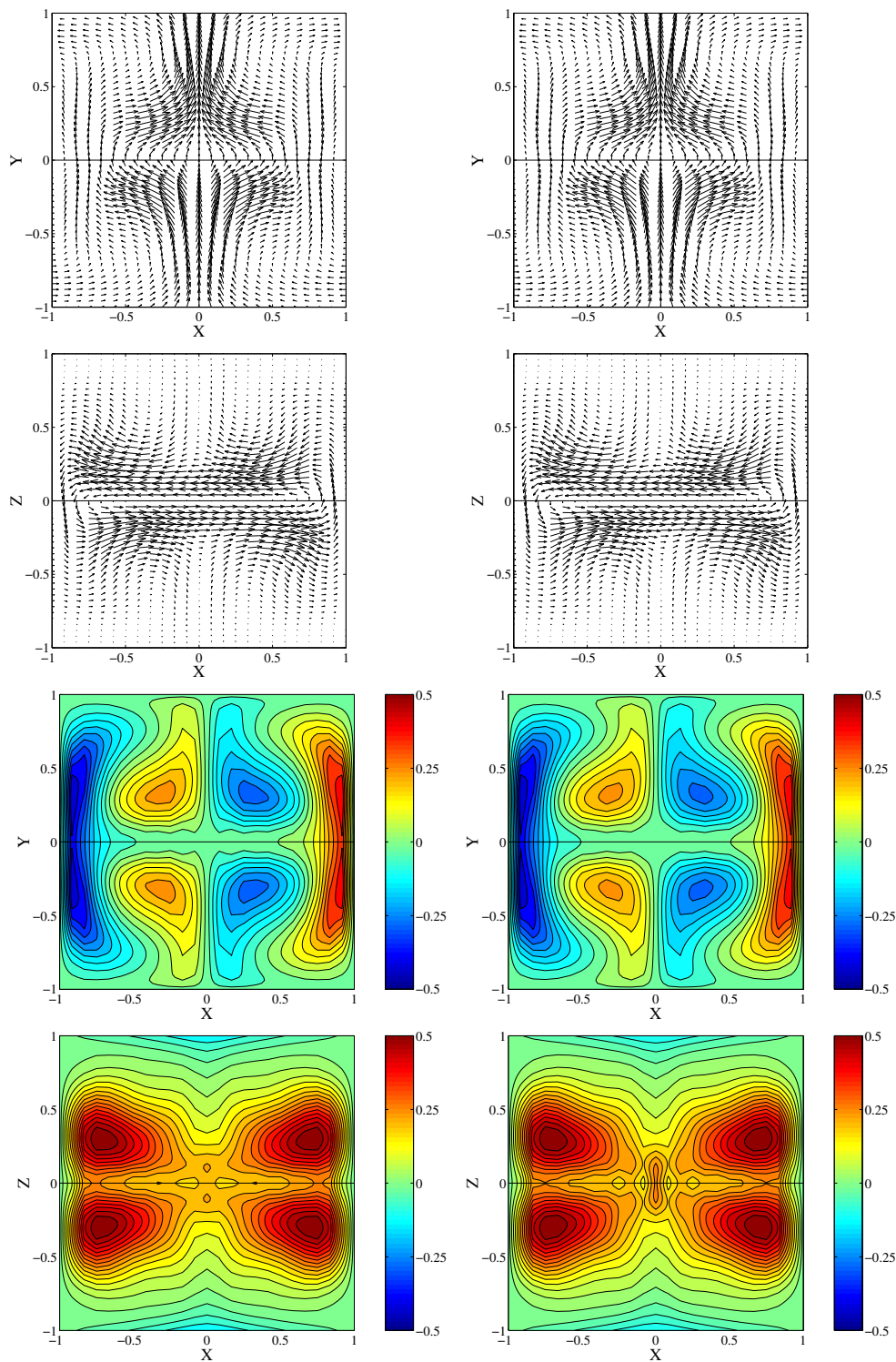


FIG. 11.7 – *Mode instable du champ magnétique, pour l'écoulement défini par :  $\psi = r(r - 1)^2(2r + 1) \sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1 - r) \sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $Rm = 100$ ,  $\Gamma = 0.8$ . Gauche : code *MATLAB*. Droite : code pseudo-spectral. Composante méridienne du champ magnétique dans les plans  $(X, Y)$  (1<sup>ère</sup> ligne) et  $(X, Z)$  (2<sup>ème</sup> ligne). Composante  $Z$  dans le plan  $(X, Y)$  (3<sup>ème</sup> ligne). Les zones rouges correspondent à des vecteurs qui sortent du plan. Composante  $Y$  dans le plan  $(X, Z)$  (4<sup>ème</sup> ligne). Les zones bleues correspondent à des vecteurs qui sortent du plan.*

## – Conclusion des tests de validation

La conclusion de ces tests de validation est double : d'une part, nous voyons que les trois codes dont nous disposons sont cohérents entre eux. Ceci nous montre qu'il est légitime de placer sur un pied d'égalité les résultats qu'ils nous permettent d'obtenir. Pour effectuer l'étude d'un point particulier, nous pouvons donc choisir le code le plus adapté, tout en sachant que ce choix n'aura pas d'incidence sur les résultats. D'autre part, nous voyons que les codes "Galerkin", qui fonctionnent pourtant sur un principe radicalement différent de celui du code pseudo-spectral, donnent sensiblement les mêmes résultats. Ceci nous donne à penser que les solutions de l'équation d'induction calculées par les trois codes sont représentatives des solutions exacte. Nous rappelons cependant que notre étude est limitée au cas des écoulements périodiques en espace, et stationnaires. L'influence de l'étendue finie des écoulements physiques, d'une part, et de leur nature extrêmement fluctuante, d'autre part, attendent encore d'être évaluées.

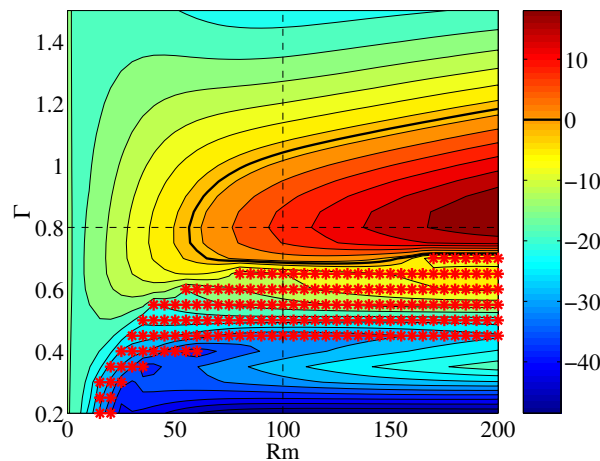
Valeurs du taux de croissance dans le plan  $(Rm, \Gamma)$ .

FIG. 11.8 – Lignes de niveau du taux de croissance de l'énergie magnétique du mode le moins amorti, pour l'écoulement  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ . La ligne noire marque les valeurs critiques du nombre de Reynolds magnétique. Les lignes pointillées marquent les droites  $Rm = 100$  et  $\Gamma = 0.8$ . Les taux de croissance sont imaginaires (et négatifs) dans la partie marquée d'étoiles rouges.

L'un des avantages de la méthode de Galerkin sur l'intégration temporelle est qu'elle donne directement accès aux taux de croissance des différents modes propres. Il est donc possible de balayer plus rapidement l'espace des paramètres. La figure 11.8 représente ainsi les lignes de niveau de  $2\lambda_r$  dans le plan  $(Rm, \Gamma)$ . Sur cette figure, nous constatons tout d'abord que la zone dans laquelle l'effet dynamo est possible commence pour des valeurs de  $Rm$  plus faibles que celles que nous avons pu obtenir avec les champs de vitesse du chapitre 10. Nous n'avons (malheureusement) pas d'explication de ce point. La plage favorable de valeurs du paramètre  $\Gamma$ , elle, ne semble pas avoir changé fortement. Dans une plage intermédiaire située vers les petites valeurs de ce paramètre, nous voyons que les taux de croissance du mode le moins amorti possèdent une partie imaginaire. Des simulations réalisées dans cette gamme avec le code pseudo-spectral nous ont permis de vérifier que les modes propres correspondants peuvent se ranger dans la deuxième

catégorie de modes oscillants que nous avons définie dans la première partie de ce chapitre : deux ondes propagatives sont situées aux voisinage des turbines, et sont images l'une de l'autre par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$ . Les conditions de symétrie que nous avons imposées aux modes propres dans la mise en œuvre de la méthode de Galerkin font que les amplitudes de ces deux ondes sont égales, mais elles seraient indépendantes dans le cas général. La dépendance du taux de croissance en fonction de  $\Gamma$  semble être une caractéristique robuste de l'effet dynamo dans les écoulements de type "von Kármán". Pour tous les champs de vitesse que nous avons étudié, nous avons pu observer une plage de modes oscillants aux petites valeurs de  $\Gamma$ , des valeurs importantes du taux de croissance pour  $0.7 < \Gamma < 1.1$ , puis une décroissance lente pour les grandes valeurs.

### Structure du spectre de l'équation d'induction sur les droites $\Gamma = 0.8$ et $\text{Rm} = 100$ .

L'aspect accidenté des lignes de niveau de  $2\lambda_r$  dans certaines parties du plan  $(\text{Rm}, \Gamma)$  nous a poussé à étudier de plus près les trajectoires suivies par les différentes valeurs propres de l'opérateur d'induction lorsque ces deux paramètres sont variés. Nous avons donc réalisé avec le code MATLAB deux séries de simulations, au cours desquelles nous avons enregistré la totalité du spectre de la matrice, le long de la droite  $\Gamma = 0.8$ , en faisant varier  $\text{Rm}$ , puis le long de la droite  $\text{Rm} = 100$ , en faisant varier  $\Gamma$ . Ces deux droites sont représentées en trait pointillé sur la figure 11.8.

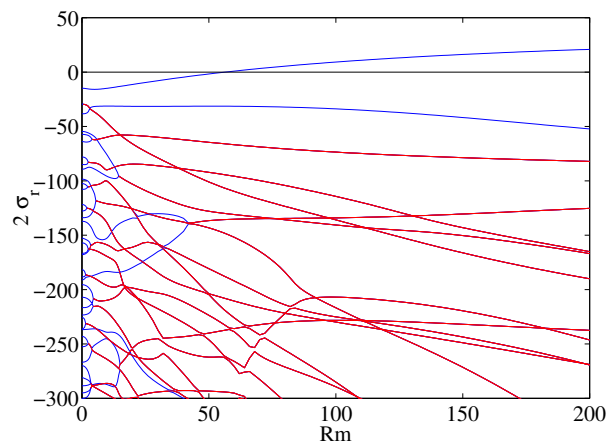


FIG. 11.9 – Parties réelles des taux de croissance de l'énergie magnétique des modes les moins amortis en fonction de  $\text{Rm}$ , pour l'écoulement  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ . Les portions marquées en bleu (resp. rouge) correspondent à des modes stationnaires (resp. oscillants).

La figure 11.9 représente ainsi les trajectoires des valeurs propres les moins négatives de l'opérateur d'induction lorsque le nombre de Reynolds magnétique varie de 0 à 200. Nous voyons immédiatement que ces trajectoires sont incroyablement complexes au voisinage de  $\text{Rm} = 0$  ! En  $\text{Rm} = 0$  exactement, l'opérateur coïncide avec le laplacien. Les valeurs propres sont donc toutes réelles et négatives. Lorsque  $\text{Rm}$  augmente, nous voyons que les valeurs propres se déplacent de façon relativement désordonnée, avant de s'apparier progressivement en devenant complexes. Lorsque deux valeurs propres se rejoignent, elles semblent avoir un comportement singulier, associé à des tangentes verticales aux courbes au point de jonction. Il ne semble pas possible que deux valeurs propres complexes se séparent. Les valeurs propres réelles sont donc de plus en plus rares lorsque  $\text{Rm}$  augmente. Certaines valeurs propres restent cependant simples sur une

assez grande gamme sans s'apparier, et elles sont encore relativement nombreuses en  $Rm = 200$ , dans la gamme des très grandes valeurs négatives toutefois. Nous n'avons pas mené d'étude plus approfondie de ces points. Paradoxalement, il semble que la valeur propre qui devient positive, qui nous donne pourtant tant de fil à retordre, soit celle qui a le comportement le plus "raisonnable".

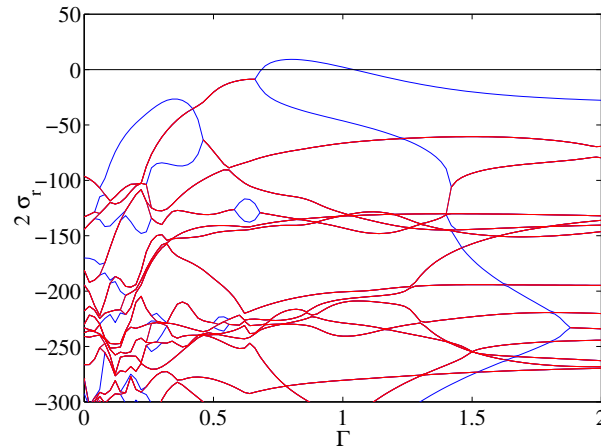


FIG. 11.10 – Parties réelles des taux de croissance de l'énergie magnétique des modes les moins amortis en fonction de  $\Gamma$ , pour l'écoulement  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $Rm = 100$ . Les portions marquées en bleu (resp. rouge) correspondent à des modes stationnaires (resp. oscillants).

La figure 11.10 présente les résultats obtenus sur la droite transversale  $Rm = 100$ . Là encore, nous pouvons voir que les valeurs propres ont en fonction de  $\Gamma$  un comportement très complexe. Il n'est cette fois pas rare de voir deux valeurs propres se séparer et mener ensuite des existences distinctes, ou au contraire se séparer pour se réunir peu de temps après ! Les phénomènes les plus confus ont lieu aux plus petites valeurs de  $\Gamma$ . De nombreuses valeurs propres sont complexes dès  $\Gamma = 0$ , qui correspond à un écoulement exclusivement toroïdal. Le mode qui devient instable est issu de la séparation de deux valeurs propres, qui s'opère aux alentours de  $\Gamma = 0.7$ . Pour les plus petites valeurs, nous observons la plage où le mode le moins amorti est oscillant. La trajectoire de la valeur propre plonge ensuite dans un entrelac de courbes qui ne laisse pas d'espoir de la voir en sortir un jour. Du côté des grandes valeurs de  $\Gamma$ , la valeur propre la plus positive semble de nouveau avoir un comportement calme, ce qui était visible sur les lignes de niveau de la figure 11.8.

De ces deux figures, il ressort que l'allure accidentée des lignes de niveau de  $2\lambda_r$ , qui avait suscité notre inquiétude, est la marque de l'extraordinaire complexité de la dépendance du spectre de l'opérateur d'induction en fonction des différents paramètres. Dans une certaine mesure, nous pourrions nous sentir rassurés de n'avoir à nous soucier que de la valeur propre la plus instable dans notre étude, car c'est malgré tout une de celles dont le comportement semble le moins erratique.



### 11.3.4 Méthode approchée de recherche de la valeur propre de plus petit module d'une matrice.

#### La motivation

Les fonctions d'essais que nous avons utilisées dans notre adaptation de la méthode de Galerkin possèdent une structure spatiale étendue, et qui n'est pas perturbée par l'opérateur de la diffusion. Nous avons donc en commençant ce travail l'intuition qu'un faible nombre d'entre elles suffirait pour obtenir une estimation relativement précise du taux de croissance du mode le plus instable. Nous aurions alors pu nous lancer dans l'étude des différents coefficients de couplage, afin de déterminer les caractéristiques de l'écoulement qui permettraient de jouer sur eux. A terme, l'objectif aurait été de parvenir à trouver une forme optimale de l'écoulement, puis de tenter de s'en approcher expérimentalement. En réalité, il n'a pas échappé au lecteur que les résultats que nous avons présentés jusqu'ici ont été réalisés avec plus de 20 nombres d'onde dans la direction axiale, et 30 dépendances radiales différentes pour chacun de ces nombres d'ondes. Plus de 600 fonctions de base différentes sont donc nécessaires pour obtenir une bonne précision ! La figure 11.11 montre ainsi la valeur du taux de croissance obtenu pour notre écoulement "test",

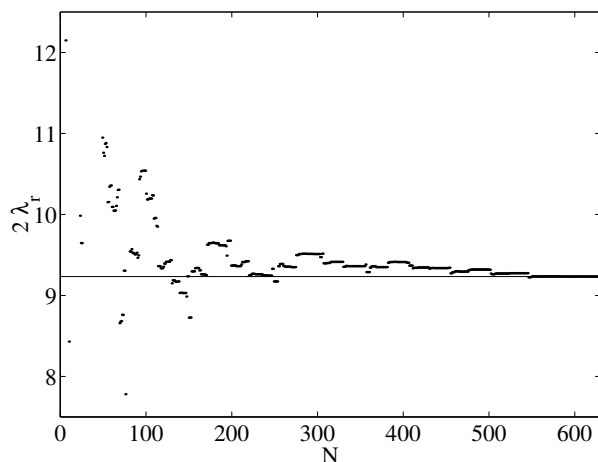


FIG. 11.11 – Valeurs de la partie réelle du taux de croissance de l'énergie magnétique du mode le moins amorti en fonction du nombre de fonctions d'essai utilisées, pour l'écoulement  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ ,  $Rm = 100$ . La ligne horizontale marque la valeur limite atteinte pour 21 nombres d'ondes et 30 dépendances radiales.

pour  $Rm = 100$ ,  $\Gamma = 0.8$ , en fonction du nombre de fonctions d'essai utilisées. Il est visible que la précision du résultat est très mauvaise pour  $N < 200$ , médiocre pour  $N$  compris entre 200 et 500, et ne devient satisfaisante qu'au-delà de  $N = 500$ . Ces chiffres posent plusieurs problèmes :

- Tout d'abord un problème de temps de calcul : diagonaliser une matrice d'ordre 600 est long, et nécessite un ordinateur puissant.
- Ensuite, il est illusoire d'essayer d'étudier le mécanisme par lequel les modes propres sont entretenus, puisque le nombre de coefficients de couplage est très grand.
- Enfin, ils posent un problème de physique : comment se fait-il que des modes aussi amortis que les 300 derniers puissent avoir une influence sur les modes "moteurs" que sont les quelques premiers, qui semblent physiquement les plus importants ?

### L'approximation

En étudiant plus attentivement la matrice de l'opérateur d'induction, nous avons été amenés à faire la constatation suivante : dans l'immense majorité des cas, les termes de la diagonale, qui proviennent directement du laplacien, sont très fortement négatifs. Par ailleurs, nous avons vu que la valeur propre de la matrice qui nous intéresse est en fait la seule qui reste sensiblement au voisinage de l'origine du plan complexe. Par conséquent, cette valeur propre est très petite devant la majorité des termes de la diagonale de l'opérateur. Lorsque nous recherchons cette valeur propre, nous cherchons le couple  $(\lambda, \mathbf{X})$  tel que

$$(\mathbf{M} - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0$$

Si nous décomposons maintenant l'opérateur d'induction  $\mathbf{M}$  en sa diagonale  $\mathbf{D}$  et sa partie non-diagonale  $\mathbf{N}$ , nous pouvons écrire :

$$\mathbf{N}\mathbf{X} + (\mathbf{D} - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0$$

En réarrangeant l'ordre des éléments de la matrice, il est possible de ramener les termes les moins négatifs de la diagonale vers le coin situé en haut à gauche. Il est alors possible de décomposer la matrice en un bloc situé en haut,  $\mathbf{M}_c$ , qui possède une diagonale  $\mathbf{D}_c$  dont les éléments sont du même ordre de grandeur que  $\lambda$ , et en un bloc situé en bas,  $\mathbf{M}_s$ , qui possède une diagonale  $\mathbf{D}_s$  dont tous les termes sont beaucoup plus grands que  $\lambda$ . Nous pouvons alors scinder le système complet

$$\mathbf{N}\mathbf{X} + (\mathbf{D} - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0$$

En deux sous-systèmes :

$$\mathbf{N}_c\mathbf{X} + (\mathbf{D}_c - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0$$

$$\mathbf{N}_s\mathbf{X} + (\mathbf{D}_s - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0$$

Comme tous les termes de  $\mathbf{D}_s$  sont grands devant  $\lambda$ , nous voyons qu'il est légitime de négliger  $\lambda$  dans le deuxième sous-système. Nous pouvons par conséquent écrire :

$$(\mathbf{M}_c - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0$$

$$\mathbf{N}_s\mathbf{X} + \mathbf{D}_s\mathbf{X} = 0$$

Et donc :

$$(\mathbf{M}_c - \lambda \text{Id})\mathbf{X} = 0 \tag{11.2}$$

$$\mathbf{M}_s\mathbf{X} = 0 \tag{11.3}$$

Par conséquent, nous voyons que la "vraie" condition qui détermine les valeurs de  $\lambda$  et  $\mathbf{X}$  est que  $\mathbf{X}$  doit être un vecteur propre de la seule matrice associée aux fonctions d'essai faiblement amorties (centrales),  $\mathbf{M}_c$ , et simultanément être dans le noyau de la matrice associée aux fonctions d'essai très amorties (esclaves),  $\mathbf{M}_s$ . Il est alors possible de tirer de ce dernier point **beaucoup** d'informations sur la structure de  $\mathbf{X}$ , et donc de simplifier énormément le processus de diagonalisation. Cette approximation est très similaire à celle qui est faite dans le cadre de la méthode de "projection sur la variété centrale" dans le contexte non-linéaire. Nous n'avons cependant pas

eu le temps d'établir ce lien de façon formelle. Pour exploiter notre approximation, introduisons maintenant une nouvelle décomposition de la matrice  $\mathbf{M}$  et du vecteur  $\mathbf{X}$ , en leur donnant les structures suivantes :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_s \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Les séparations entre les différents blocs ont bien sûr été placées de telle manière que :

$$\mathbf{M}_c = [ \mathbf{A} \mid \mathbf{B} ], \mathbf{M}_s = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} \right]$$

Dans ce cas, nous pouvons réécrire le système 11.3 sous la forme :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \text{Id})\mathbf{X}_c + \mathbf{B}\mathbf{X}_s &= 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_c + \mathbf{D}\mathbf{X}_s &= 0 \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{D}$  est carrée, et inversible. (Si elle ne l'est pas, cela signifie qu'elle possède un vecteur propre pour  $\lambda = 0$ , et donc que le sous-système qu'elle représente est le système qui atteint un seuil d'instabilité. Nous avons donc fait fausse route depuis le début). En multipliant la deuxième équation à gauche par  $\mathbf{D}^{-1}$ , nous obtenons l'expression du vecteur  $\mathbf{X}_s$  en fonction du vecteur  $\mathbf{X}_c$ ,

$$\mathbf{X}_s = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}_c$$

En reportant cette expression dans la première équation, nous obtenons un nouveau problème au valeurs propres,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{X}_c = \lambda\mathbf{X}_c$$

Nous constatons que ce problème ne fait plus intervenir que les amplitudes associées aux fonctions d'essai "centrales", mais qu'il prend en compte l'existence des fonctions d'essai "esclaves", au travers de la correction  $-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ . Si l'approximation que nous avons faite est justifiée, et si le choix des fonctions d'essai "centrales" a été bien fait, nous voyons qu'il nous donne accès à la valeur de  $\lambda$ , tout en étant de taille nettement moins grande que le problème de départ. Nous sommes donc parvenu à produire une matrice qui nous donne les coefficients "effectifs" de couplage entre les fonctions d'essais centrales. Ces coefficients, en nombre réduit, prennent en compte la présence des fonctions d'essais esclaves, dont nous n'avons désormais plus à nous soucier. Nous noterons  $\mathbf{E}$  la matrice "effective"  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ .

### Mise en œuvre

Nous avons réalisé un certain nombre de tests, en faisant varier le nombre de fonctions d'essai "centrales" ainsi que la façon de les choisir. En définitive, nous avons constaté qu'il était suffisant de se limiter à 2 fonctions pour obtenir des résultats convenables ! Les deux fonctions que nous considérerons désormais comme centrales sont  $\Psi_p^0$  et  $\Psi_i^0$ . Ces deux fonctions d'essai sont représentées en figure 11.12. Nous voyons que  $\Psi_p^0$  permet de décrire la composante purement axiale du champ magnétique, tandis que  $\Psi_i^0$  permet de représenter sa composante dipolaire.

Nous avons alors modifié notre code MATLAB pour utiliser notre méthode de réduction de la façon suivante :

– Pour chaque valeur du nombre de Reynolds magnétique, la matrice de l'opérateur d'induction

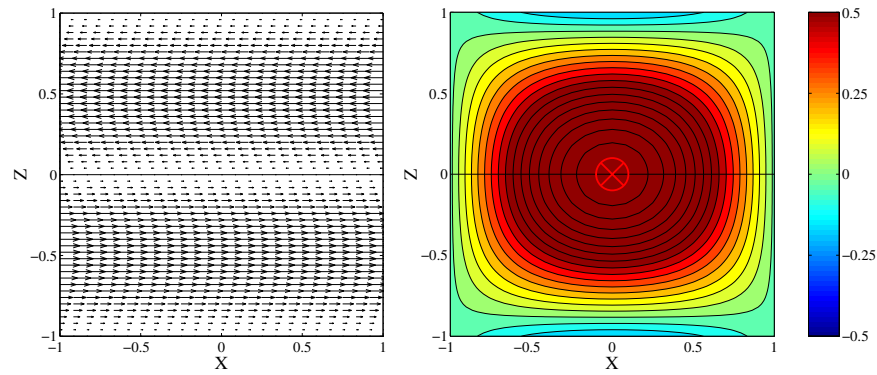


FIG. 11.12 – Allures des fonctions d’essai “centrales” utilisées dans la méthode de réduction. a) Composante méridienne de la fonction d’essai  $\Psi_p^0$  dans le plan  $(X, Z)$ . b) Composante  $Y$  de la fonction d’essai  $\Psi_i^0$  dans le même plan  $(X, Z)$ . Les zones rouges correspondent à des vecteurs qui entrent dans le plan. L’orientation du dipôle est représentée en rouge.

complète est construite. Les lignes et les colonnes sont réarrangées pour que les coefficients correspondant aux fonctions d’essai centrales soient dans un bloc situé en haut à gauche. La matrice est alors scindée en ses différents blocs **A**, **B**, **C** et **D**.

- L’inverse de la matrice **D** est alors appliquée par une méthode itérative aux deux vecteurs colonnes qui constituent le bloc **C**.
- Le produit avec la matrice **B** est effectué, et le bloc  $2 \times 2$  résultant est soustrait au bloc **A**.
- A ce stade, nous pouvons soit déterminer les éléments propres de la matrice **E** “à la main”, soit confier cette lourde tâche à la routine EIG.

### Validation. Premiers résultats.

- *Courbes du taux de croissance en fonction de  $Rm$*

La figure 11.13 présente les valeurs du taux de croissance obtenues par la méthode de “réduction” que nous avons exposée, ainsi que celles obtenues par la méthode de Galerkin habituelle. Nous voyons que l’accord est très bon jusqu’aux alentours de  $Rm = 120$ , avant de se détériorer lorsque la valeur de la valeur propre devient trop élevée. Un point particulièrement agréable est que le seuil d’apparition de l’effet dynamo est précisément le point où l’approximation est la meilleure, puisque c’est à cet endroit que le module de la valeur propre est le plus faible.

- *Allure du mode neutre pour  $Rm = 100$ ,  $\Gamma = 0.8$*

Comme lors des tests de validation des codes “Galerkin”, nous avons vérifié que la structure des modes propres obtenus par la méthode de “réduction” est proche de celle obtenue par une diagonalisation classique. Pour cela, nous avons déterminé les coefficients “centraux” du mode propre pour  $Rm = 100$ ,  $\Gamma = 0.8$ , puis nous avons utilisé l’expression  $\mathbf{X}_s = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}_c$  pour “compléter” le vecteur **X**. Le vecteur propre ainsi complété est représenté sur la droite de la figure 11.14. Nous constatons là encore que la méthode de réduction que nous avons développée permet d’obtenir des résultats très semblables à ceux de la diagonalisation directe, pour un temps de calcul bien moins élevé.

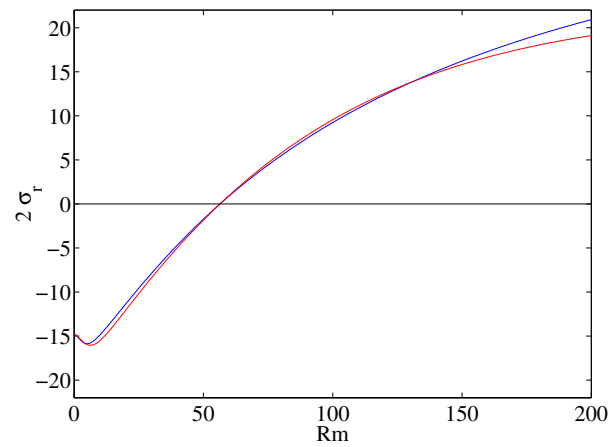


FIG. 11.13 – Valeurs de la partie réelle du taux de croissance de l'énergie magnétique du mode le moins amorti en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour l'écoulement  $\psi = r(r - 1)^2(2r + 1) \sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1 - r) \sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ . La ligne bleue marque les valeurs obtenues avec le code "Galerkin" MATLAB. La ligne rouge marque les valeurs obtenues par la méthode de "réduction".

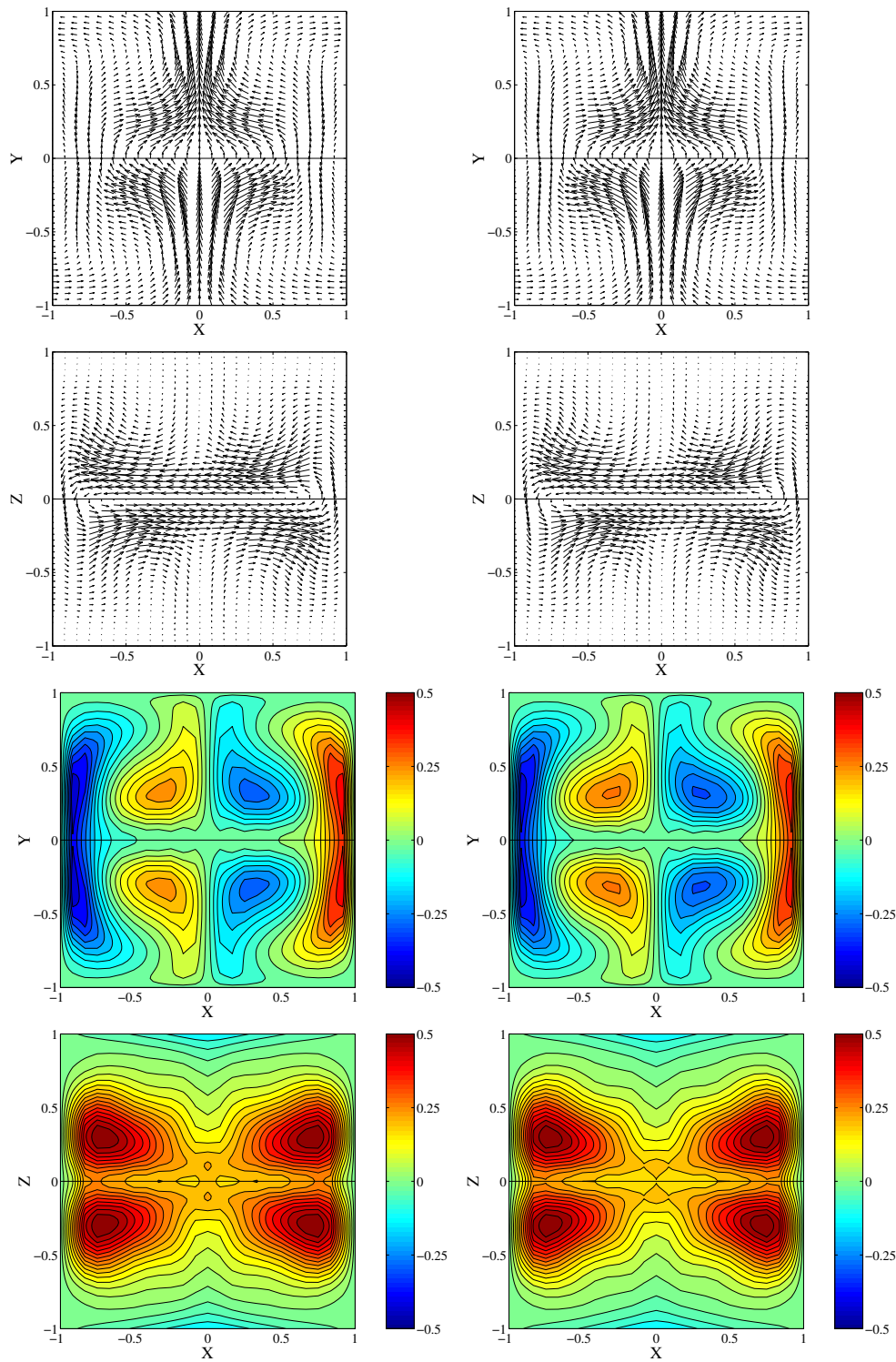


FIG. 11.14 – Mode instable du champ magnétique, pour l'écoulement défini par :  $\psi = r(r - 1)^2(2r + 1) \sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1 - r) \sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\text{Rm} = 100$ ,  $\Gamma = 0.8$ . Gauche : code *MATLAB*. Droite : méthode de "réduction". Composante méridienne du champ magnétique dans les plans  $(X, Y)$  (1<sup>ère</sup> ligne) et  $(X, Z)$  (2<sup>ème</sup> ligne). Composante  $Z$  dans le plan  $(X, Y)$  (3<sup>ème</sup> ligne). Les zones rouges correspondent à des vecteurs qui sortent du plan. Composante  $Y$  dans le plan  $(X, Z)$  (4<sup>ème</sup> ligne). Les zones bleues correspondent à des vecteurs qui sortent du plan.

– Dépendance en  $Rm$  des coefficients de couplage effectifs

Nous avons représenté en figure 11.15 les valeurs des coefficients de la matrice de couplage effec-

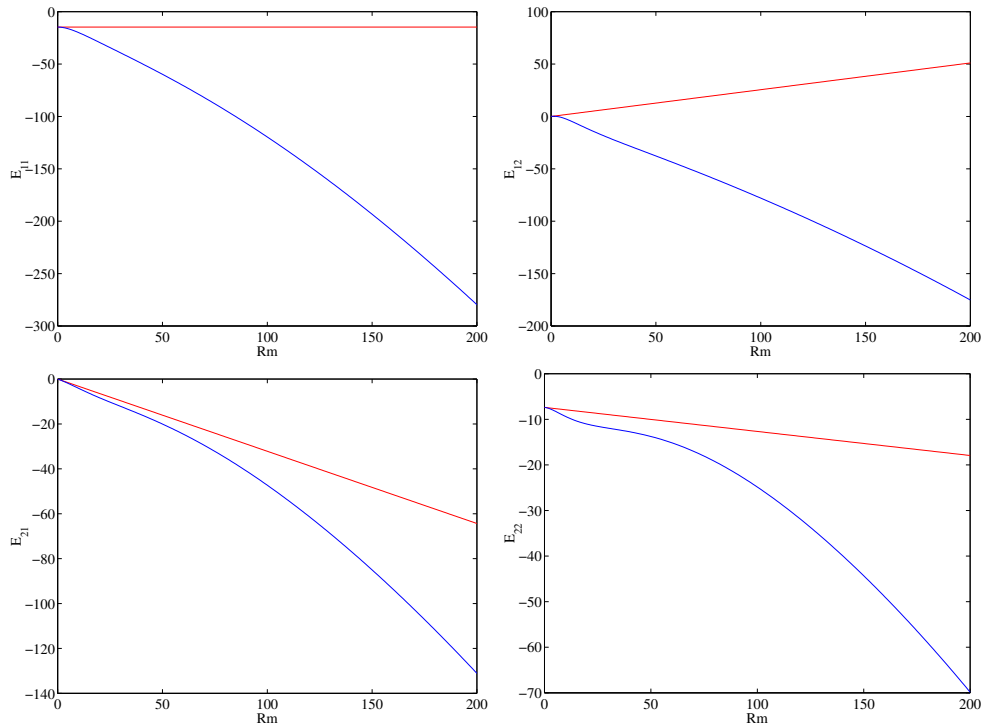


FIG. 11.15 – Coefficients de la matrice  $\mathbf{E}$  en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour l'écoulement défini par :  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ . a)  $E_{11}(Rm)$ . b)  $E_{12}(Rm)$ . c)  $E_{21}(Rm)$ . d)  $E_{22}(Rm)$ . L'amplitude 1 (resp. 2) est associée à la fonction d'essai  $\Psi_p^0$  ( $\Psi_i^0$ ). Les lignes bleues marquent les valeurs effectives calculées par la méthode de réduction. Les lignes rouges marquent les valeurs obtenues par simple troncature du système à 2 fonctions d'essai.

tive, en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour  $\Gamma = 0.8$ . Nous avons aussi porté sur le graphe les valeurs qui seraient obtenues par restriction de la méthode de Galerkin aux fonctions  $\Psi_p^0$  et  $\Psi_i^0$ . Une observation attentive des courbes au voisinage de  $Rm = 0$  montre que ces valeurs “naïves” sont en réalité les tangentes à l'origine des valeurs effectives réelles. Nous voyons sur ces courbes que la dépendance des coefficients effectifs en fonction du nombre de Reynolds magnétique est tout-à-fait non-triviale, puisque  $E_{22}$  a un point d'inflexion en  $Rm = 50$ , et que  $E_{12}$ , malgré son apparence très linéaire, est fortement négative à grand  $Rm$ , là où sa tangente à l'origine semble pointer dans la direction positive. La valeur naïve de  $E_{11}$  est constante, là où  $E_{11}$ , qui a donc à l'origine une tangente horizontale, part vers les valeurs fortement négatives. Seul  $E_{21}$  semble ne pas trop différer de l'extrapolation linéaire de son comportement à l'origine jusqu'en  $Rm = 50$ . A ce point, la courbe s'infléchit et  $E_{21}$  commence à décroître plus fortement. Les sens physiques des différents coefficients sont les suivants : le coefficient  $E_{11}$ , qui caractérise l'amplification du champ magnétique proportionnel à  $\Psi_p^0$  par l'écoulement, est négatif. Cela signifie que, lorsque le nombre de Reynolds magnétique est grand, le point de stagnation qui est situé au cœur de l'écoulement ne parvient plus à étirer le champ magnétique dirigé dans la direction parallèle à l'axe. Ce coefficient effectif est celui qui a la valeur absolue de loin la plus élevée. Le coefficient  $E_{22}$ , qui caractérise lui l'amplification du champ magnétique propor-

tionnel à  $\Psi_i^0$  par l'écoulement, est lui aussi négatif, ce qui signifie là encore que l'écoulement tend à écraser cette composante du champ. La valeur est par contre bien moins élevée que celle du coefficient  $E_{11}$ . Le coefficient  $E_{21}$ , lui, caractérise la capacité de l'écoulement à transformer du champ magnétique proportionnel à  $\Psi_p^0$ , c'est-à-dire parallèle à l'axe du cylindre, en champ proportionnel à  $\Psi_i^0$ , transverse. Ce coefficient caractérise donc en quelque sorte l'effet  $\Omega$  produit par l'écoulement. Le coefficient  $E_{12}$ , enfin, caractérise la capacité de l'écoulement à changer le champ transverse, porté par  $\Psi_i^0$ , en champ axial, porté par  $\Psi_p^0$ . Il est difficile de conclure sur la nature exacte du mécanisme par lequel cette conversion est effectuée. Les amplitudes des deux coefficients non-diagonaux sont assez semblables.

La valeur propre la plus positive de la matrice  $\mathbf{E}$  est donnée par l'expression simple :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\text{tr}^2(\mathbf{E}) - 4\det(\mathbf{E})} + \text{tr}(\mathbf{E})}{2}$$

Dans le cas que nous avons représentés, tous les termes sont sensiblement du même ordre de grandeur, et il n'est pas possible de simplifier cette expression par une approximation. Nous pouvons toutefois constater que la trace de la matrice intervient dans cette expression de façon directe. Il paraît donc peu intéressant pour l'effet dynamo qu'elle soit fortement négative. Il semble donc qu'un point susceptible de bloquer ou tout au moins de retarder l'arrivée de l'effet dynamo puisse être la valeur très fortement négative de  $E_{11}$ . Cette valeur pourrait être due au fait que l'écoulement poloïdal du point de stagnation central pousse l'une contre l'autre les deux régions de fort champ magnétique de  $\Psi_p^0$ , amenant ainsi les composantes axiales de signe opposés situées de part et d'autre de l'axe à se "neutraliser". Le vecteur propre instable possède en  $Rm = 100$  deux composantes de signes opposés. La valeur absolue de la première composante est plus faible que celle de la deuxième.

– *Dépendance en  $\Gamma$  des coefficients de couplage effectifs*

Nous avons enfin représenté en figure 11.16 les variations subies par les coefficients de couplage effectifs lorsque le rapport  $\Gamma$  de l'écoulement augmente de 0.7 à 1.3. (La composante poloïdale gagnant ainsi en amplitude). Nous voyons sur ces graphes que les valeurs du coefficient  $E_{11}$  deviennent de plus en plus négatives lorsque la vigueur de l'écoulement poloïdal augmente. Le coefficient  $E_{22}$  évolue dans la direction opposée, mais de façon nettement moins marquée. L'amplitude du coefficient  $E_{12}$  diminue, alors que celle du coefficient  $E_{21}$  connaît un maximum, pour  $\Gamma \simeq 0.9$ . Il est tentant d'attribuer à ce maximum la responsabilité de l'optimum du taux de croissance, qui est atteinte sensiblement dans cette gamme.



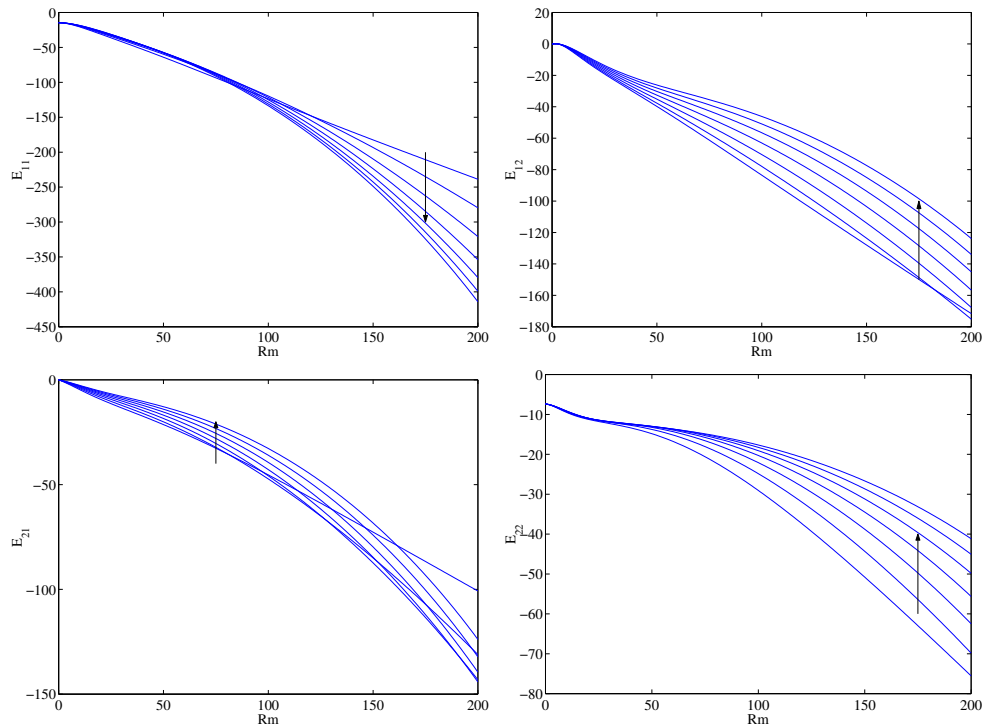


FIG. 11.16 – Coefficients de la matrice  $\mathbf{E}$  en fonction du nombre de Reynolds magnétique, pour l'écoulement défini par :  $\psi = r(r-1)^2(2r+1)\sin(\pi z/\mathcal{H})$ ,  $v_\theta = r(1-r)\sin(\pi z/2\mathcal{H})$ .  $\mathcal{H} = 1$ ,  $\Gamma = 0.8$ . a)  $E_{11}(\text{Rm})$ . b)  $E_{12}(\text{Rm})$ . c)  $E_{21}(\text{Rm})$ . d)  $E_{22}(\text{Rm})$ . L'amplitude 1 (resp. 2) est associée à la fonction d'essai  $\Psi_p^0$  ( $\Psi_i^0$ ). Les lignes marquent les valeurs effectives calculées par la méthode de réduction. Les flèches indiquent le sens dans lequel les différents coefficients évoluent lorsque le rapport  $\Gamma$  augmente, entre 0.7 et 1.3.

### 11.3.5 Conclusion de l'étude par la méthode de Galerkin

En résumé de cette section consacrée à l'étude de l'effet dynamo cinématique par la méthode de Galerkin, nous retiendrons les points suivants :

- Nous avons développé et validé deux codes permettant l'analyse de stabilité linéaire de l'équation d'induction dans des écoulements "analytiques" du type "von Kármán". Les résultats obtenus par cette méthode coïncident avec ceux obtenus à l'aide d'un code pseudo-spectral, tant du point de vue des valeurs numériques des taux de croissance obtenus que du point de vue de la structure spatiale du mode neutre le plus instable. Ce bon accord de résultats obtenus par des méthodes aussi différentes donne à penser que les solutions numériques obtenues sont proches des solutions exactes du problème étudié.
- L'étude du spectre de l'opérateur d'induction en fonction des paramètres  $R_m$  et  $\Gamma$  montre que cette évolution est marquée par des comportements d'une très grande complexité. La valeur propre la plus instable semble heureusement avoir un comportement peu perturbé.
- Nous avons mis au point une méthode de "réduction" de la matrice représentant l'opérateur dans la base des fonctions d'essai, qui permet de faciliter très nettement la détermination de celle de ses valeurs propres qui possède le plus petit module. Cette méthode qui semble porter une analogie profonde avec la méthode de "projection de la dynamique sur la variété centrale" permet de remplacer la diagonalisation de la matrice originale, opération coûteuse en temps de calcul, par la diagonalisation d'une matrice "effective", de taille très réduite dans notre cas, et qui peut être déterminée par l'application de l'inverse d'une portion de la matrice initiale à un bloc de petite taille. Le gain en temps de calcul ainsi réalisé est de plusieurs ordres de grandeur. Cette méthode est adaptée à la recherche des valeurs propres de petit module des matrices possédant des termes diagonaux d'amplitudes très différentes, ce qui lui confère un domaine d'application extrêmement large. Nous n'avons pas étudié de manière exhaustive les questions pratiques de choix des modes "centraux". Ce point mériterait sans doute une étude plus approfondie.
- Nous ne sommes pas parvenus à formuler cette méthode en termes d'opérateurs agissant dans un espace de dimension finie. Une telle formulation permettrait peut-être d'obtenir des expressions explicites des différents coefficients de couplage, en fonction des caractéristiques de l'écoulement.
- Nous avons vérifié que les résultats obtenus par cette méthode coïncident avec ceux obtenus par diagonalisation "orthodoxe".
- Enfin, nous avons présenté une ébauche d'étude des coefficients de couplage effectifs que la méthode de réduction permet de dégager. Cette étude, quoique prometteuse, n'a faute de temps pas pu être menée de façon plus approfondie.

## 11.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté deux contributions à l'étude théorique de l'effet dynamo cinématique dans l'écoulement de von Kármán. Dans une première section, nous avons montré comment des arguments de théorie des groupes permettaient d'expliquer les propriétés de symétrie des modes propres de champ magnétique observés dans les simulations présentées au chapitre 10. Ces propriétés sont à notre sens complètement élucidées. Nous n'avons toutefois pas examiné la question de l'existence de modes sous-harmoniques (dans la direction axiale) du champ magnétique. Ce point est cependant essentiellement académique. Dans une deuxième section, nous avons rapporté notre étude de l'effet dynamo cinématique par la méthode de Galerkin. Nous avons présenté quelques résultats que nous avons obtenus de cette manière, avant de présenter une méthode de recherche de valeurs propres de matrices, dont le principe est similaire à celui de la "projection sur la variété centrale". L'usage de cette approximation dans le contexte de

la recherche de valeurs propres d'un problème linéaire est à notre connaissance inédit. Cette méthode donne de bons résultats, et semble posséder un champ d'application assez vaste.

## Chapitre 12

# Etude expérimentale sur le montage “VKS”

L’expérience “VKS” n’a à ce jour pas permis d’observer un champ magnétique auto-entretenu par effet dynamo. Il a par contre été possible d’y mesurer de façon assez détaillée le champ magnétique induit par l’écoulement en réponse à un champ magnétique appliqué de l’extérieur, et ce à haut nombre de Reynolds magnétique. Ce chapitre présente les résultats de cette étude qui ont été obtenus avec des turbines de type “TM60”, dans différentes configurations. Dans une première partie, nous décrivons le montage “VKS”. Nous présentons ensuite quelques résultats d’hydrodynamique qu’il a permis d’obtenir. Une troisième section contient enfin les différents résultats de mesure d’induction obtenus avec des turbines de type “TM60”.

### 12.1 Description de l’expérience “VKS”

#### 12.1.1 Le sodium

L’utilisation de sodium liquide dans l’expérience “VKS” a un double avantage : d’une part, sa très bonne conductivité électrique permet d’obtenir des valeurs du nombre de Reynolds élevées. D’autre part, sa faible masse volumique permet de minimiser la puissance mécanique à fournir pour obtenir une vitesse donnée dans l’écoulement (voir chapitre 3 de la première partie de ce mémoire). Un point de moindre importance est que, comme sa viscosité est très semblable à celle de l’eau, il est possible d’extrapoler avec une relative confiance les résultats obtenus au cours des études de caractérisation réalisées dans le montage “VKE”. Le tableau 12.1 rassemble les valeurs des différentes propriétés physiques pertinentes du sodium en fonction de la température [31]. Le sodium liquide présente par contre un certain nombre de défauts. Mis à part le fait que sa température de fusion de 98°C impose de travailler à chaud, ses propriétés chimiques ne sont pas très sympathiques. Ainsi, il s’enflamme au contact de l’air lorsqu’il est à une température supérieure à environ 200°C. Il réagit de façon très exothermique avec l’eau, en dégageant de l’hydrogène, qui ne demande bien sûr qu’à s’enflammer. Il réagit enfin assez violemment avec la silice, ce qui interdit de le laisser entrer en contact avec du verre ou du béton. Dans l’ensemble, le seul matériau avec lequel il ne semble pas avoir d’incompatibilité particulière est l’acier inoxydable. C’est pour toutes ces raisons qu’il a semblé avantageux de construire l’expérience “VKS” sur le centre du CEA de Cadarache, qui possède une bonne expérience de la manipulation du sodium, ainsi que des infrastructures adaptées.

T (°C)	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\nu$ (10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	$\sigma$ (10 <sup>6</sup> Ω <sup>-1</sup> .m <sup>-1</sup> )	$\mu\sigma$ (m <sup>-2</sup> .s <sup>1</sup> )
100	937	0.748	9.84	12.4
120	932	0.678	9.33	11.7
140	926	0.620	8.84	11.1
160	921	0.572	8.38	10.5
180	916	0.532	7.95	10.0

TAB. 12.1 – Propriétés physiques du sodium liquide en fonction de la température sur la gamme 100°C < T < 180°C.

### 12.1.2 La “boucle” sodium

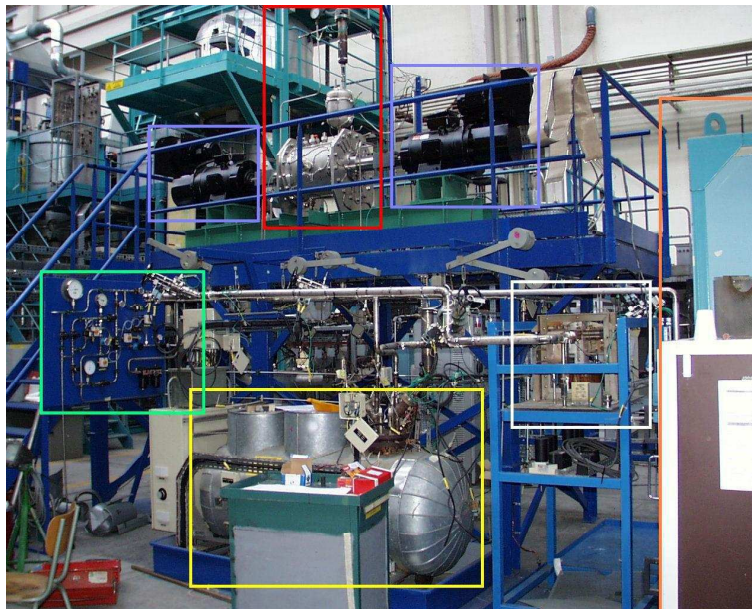


FIG. 12.1 – Vue d’ensemble de l’expérience “VKS”. La cuve proprement dite et le vase d’expansion sont encadrés en rouge, et les moteurs en bleu. Le réservoir de stockage est marqué en jaune, la pompe électromagnétique en blanc, et le bloc de purification, qui est situé sur la droite de la photographie, en orange. Le tableau de commande de la circulation d’argon est marqué en vert.

La figure 12.1 est une photographie du montage “VKS”, sur laquelle nous avons marqué par des cadres de couleurs les éléments importants. La conception de l’expérience a été très fortement influencée par les contraintes de sécurité imposées par les propriétés chimiques du sodium. Pour cette raison, le montage “VKS” est conçu comme une “boucle” hermétiquement fermée, qui relie ensemble la cuve dans laquelle l’écoulement est produit, le système de purification du sodium et le réservoir de stockage dans lequel il est contenu lorsque l’expérience est à l’arrêt. Toutes les canalisations sont calorifugées et équipées de résistances chauffantes, afin de pouvoir être maintenues à une température assez élevée pour que le sodium ne gèle pas. Le sodium peut être déplacé du ballon de stockage à la cuve soit au moyen d’une pompe électromagnétique à canal annulaire, soit par poussée sous pression d’argon. Le système de purification possède sa propre pompe de circulation. La cuve et les moteurs sont situés sur une plate-forme, à deux mètres de haut environ, de façon à ce que le sodium puisse descendre dans le réservoir de stockage par

gravité en cas de défaut de fonctionnement. L'axe de la cuve est horizontal. Elle est dotée d'un vase d'expansion en point haut, qui donne la souplesse nécessaire à la régulation de la pression et du niveau de sodium. Lors de chaque changement de configuration expérimentale, l'étanchéité de la cuve est contrôlée par un test de mise en pression d'hélium. Pour toute intervention sur la boucle, il est nécessaire de revêtir une combinaison ignifuge et un masque de protection.

### 12.1.3 La cuve d'essai.

La cuve elle-même est réalisée en acier inoxydable 316 L. Elle est constituée d'une virole cylindrique, fermée aux deux bouts par des flasques. Chaque flasque est serré sur la virole au moyen de boulons. L'étanchéité entre les flasques et la virole est assurée par des joints métalliques de type "hélicoflex". Une chemise cylindrique de cuivre d'épaisseur 10 mm est montée dans la cuve. Cette chemise est vissée par un de ses fonds à l'un des flasques. L'autre fond est indépendant, et est fixé sur l'autre flasque. Le diamètre intérieur de la chemise cylindrique est de 410 mm, la distance qui sépare les faces intérieures des fonds est de 500 mm. Le volume total de sodium contenu dans la cuve est donc d'environ 70 litres, auxquels il faut soustraire le volume occupé par les turbines. Les faces intérieures des disques des turbines sont séparées de 400 mm, soit 1.95 fois le rayon de la cuve. Cette valeur est assez différente de la valeur 1.78 qui correspond au montage "VKE" dans lequel nous avons effectué les mesures de caractérisation de la première partie de ce mémoire. Des études ont montré [141, 116] qu'un changement de cet ordre apporte aux résultats de mesures des corrections de l'ordre de la dizaine de pour-cent, mais n'introduit pas de changements qualitatifs marqués. Les paliers qui guident les arbres des turbines en rotation sont fixés sur les flasques, à l'extérieur de la cuve. Ces paliers sont d'une conception classique, ils emploient chacun une paire de roulements à rouleaux coniques. Les arbres sont réalisés en acier inoxydable spécial. L'étanchéité aux passages d'arbres est assurée par des garnitures mécaniques de marque Burgmann, alimentées en argon. Ces garnitures sont doubles, ce qui signifie que l'étanchéité est assurée une première fois entre la cuve et l'intérieur des garnitures, et une deuxième fois entre l'intérieur des garnitures et l'extérieur. L'espace intérieur des garnitures doit être maintenu à une pression supérieure de 3 bars à la pression qui règne dans la cuve. L'équipage mobile de chaque garniture est fixé sur l'arbre par des vis pointeaux, tandis que sa partie fixe est serrée sur le flasque au moyen de goujons. Pour éviter que des particules de sodium gelé ne fassent gripper les garnitures, leur température est régulée au moyen de thermocouples et de résistances chauffantes. La cuve est percée de nombreux trous, qui permettent l'introduction des capteurs dans des "doigts de gant". Il est possible de visser sur la chemise en cuivre quatre ailettes de section carrée de côté 20 mm, et de longueur 300 mm. A l'heure actuelle, la cuve n'est dotée d'aucun système de contrôle de la température. Lorsque les moteurs fournissent tous deux au fluide leur puissance nominale de 75 kW, la température du sodium passe ainsi de 120 à 180°C en moins d'une minute. Cette augmentation de la température se traduit par une baisse graduelle du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement au cours de chaque acquisition. Comme il n'est de plus pas souhaitable de dépasser la température de 180°C pour des raisons mécaniques, la durée maximale des acquisitions à haut nombre de Reynolds magnétique est limitée à environ 40 secondes. L'expérience "VKS2", actuellement en cours de montage, sera dotée d'un système de régulation thermique, et permettra normalement d'effectuer des mesures plus stables.

### 12.1.4 Les moteurs.

Les moteurs qui entraînent les turbines sont deux moteurs asynchrones à cage de marque Leroy-Somer. Ils délivrent chacun une puissance de 75 kW, pour un couple nominal de 480 N.m.

Leur fréquence de rotation nominale est de 25 Hz. Pour fonctionner dans de bonnes conditions, ils doivent être refroidis par une circulation d'air forcée par des ventilateurs. Ces moteurs sont alimentés en courant triphasé à fréquence variable par des variateurs qui sont eux aussi de marque Leroy-Somer. Ces variateurs peuvent accepter leur consigne de vitesse soit sous forme numérique, au moyen de touches situées en façade, soit sous forme analogique. Ils possèdent des fonctionnalités légèrement moins évoluées que ceux de l'expérience "VKE". La lecture du couple fourni par les moteurs est ainsi notablement moins facile. Cette lecture peut être effectuée par mesure sur une sortie analogique, mais le coefficient de calibration semble à ce jour introuvable. Nous avons enfin rencontré sur l'expérience "VKS" les mêmes problèmes de bruit électromagnétique que sur le montage "VKE". Il est par contre moins facile d'installer des filtres d'anti-parasitage, puisque ceux-ci doivent être capables de supporter des courants de l'ordre de 170 A sous des tensions de 400 V.

### 12.1.5 L'unité de purification.

L'unité de purification fonctionne sur le principe d'un piège froid : une pompe fait circuler le sodium dans un échangeur où il est refroidi, puis dans un récipient garni de filtres en grillage métallique. Les impuretés peu solubles présentes dans le sodium précipitent alors, et restent accrochées aux mailles des filtres. L'utilisation du bloc de purification permet donc de travailler à des températures assez basses dans la cuve d'essai sans craindre de bouchage, puisque les impuretés susceptibles de se déposer sont retenues dans le piège froid. En plus du piège froid, l'unité de purification contient un indicateur de pureté du sodium qui fonctionne sur le principe suivant : un déverseur à pression constante permet d'imposer à une buse calibrée de travailler à perte de charge constante. Cette buse est progressivement refroidie, jusqu'au moment où les impuretés présentes dans le sodium commencent à s'y déposer. Le débit qui la traverse baisse alors brutalement, ce qui est enregistré par un débit-mètre situé en aval. Il est donc possible par cet appareil d'avoir une mesure indicative de la propreté du sodium utilisé. De plus, le refroidisseur du bloc de purification permet d'évacuer progressivement une part de la chaleur injectée dans l'écoulement par les moteurs.

### 12.1.6 Les bobines d'excitation.

Les bobines utilisées pour appliquer à l'écoulement un champ extérieur sont au nombre de quatre. Une paire est disposée transversalement à l'axe du cylindre, l'autre est longitudinale. Ces bobines ont un diamètre de 450 mm, et une largeur bobinée de 140 mm. Chaque bobine a une inductance propre de 100 mH et une résistance d'environ  $20 \Omega$ . Les bobines sont placées de façon symétrique par rapport à la cuve. Les centres des bobines transverses sont séparés de 760 mm, et ceux des bobines axiales sont séparés de 860 mm. Ces bobines sont alimentées en courant continu par une source de courant stabilisée KEPCO, et peuvent produire au centre de la cuve un champ magnétique de l'ordre de 30 G ( $3 \cdot 10^{-3}$  T).

### 12.1.7 L'instrumentation.

#### L'instrumentation de contrôle de la boucle.

Un certain nombre de moyens de mesures sont tout d'abord mis en œuvre pour assurer un contrôle de routine de l'état de l'expérience. Au cours des campagnes de mesures, un ordinateur enregistre environ toutes les 6 secondes la température du sodium à l'entrée, à l'intérieur et à la sortie de la cuve d'essai, le débit de sodium qui y circule pour la refroidir, la pression qui y

règne, ainsi que les couples fournis par les moteurs et les fréquences de rotation des turbines. Ces données constituent un complément d'information indispensable à la compréhension d'un "cahier de manip" sur lequel peuvent écrire simultanément jusqu'à six personnes. L'étude des couples fournis par les moteurs permet notamment de détecter lors du dépouillement la présence de bulles d'argon dans la cuve au moment des mesures. Ces bulles, qui sont injectées par les garnitures d'étanchéité, et dont la présence est difficile à déceler dans le feu de l'action, peuvent représenter jusqu'à 30 % du volume de "sodium" brassé au cours des acquisitions de la première campagne de mesure ! Des vidanges et des remplissages de la cuve ont été pratiqués à intervalles réguliers au cours des campagnes suivantes afin d'éviter ce problème.

### **La sonde de pression.**

Un capteur de pression piézoélectrique Kistler monté en paroi dans le plan équatorial de l'écoulement permet de caractériser les fluctuations de pression dynamique de l'écoulement. Ce capteur est très semblable à celui qui est utilisé sur le montage "VKE" (voir au chapitre 3). Le diamètre de sa face sensible est de l'ordre de 5 mm, sa fréquence de coupure basse est de l'ordre de quelques centièmes de Hertz, et sa fréquence de coupure haute est supérieure à 100 kHz. Le signal qu'il fournit est converti en tension et filtré passe-haut par un amplificateur de charge Brüel & Kjaer, puis transmis à un amplificateur de marque Stanford Research. Il passe alors par un filtre numérique programmable Alligator Technologies. La numérisation du signal est réalisée au moyen d'une carte Data Translation DT3005, qui a une résolution de 16 bits. La fréquence d'acquisition est en général de 3 kHz, et la fréquence de coupure basse de l'amplificateur de charge est en général de 1 Hz. Les données sont alors stockées sur un ordinateur.

### **Les mesures de champ magnétique.**

Les mesures de champ magnétique sont réalisées au moyen d'une sonde à effet Hall compensée en température, reliée à un gaussmètre FW-Bell 9953 à trois voies. Ce gaussmètre fournit sur ses sorties analogiques des tensions proportionnelles aux composantes du champ magnétique, qui sont filtrées à l'aide du filtre numérique Alligator Technologies, puis numérisées à l'aide de la carte DT3005. Le gaussmètre possède une gamme de mesure de l'ordre de 60 dB, et sa fréquence de coupure est de 400 Hz environ. La sonde à effet Hall permet la mesure simultanée des trois composantes du champ. Elle est introduite dans l'écoulement dans des doigts de gant en acier inoxydable 316 L (non magnétique), de diamètre extérieur 26 mm. Ces doigts de gant sont montés dans des perçages d'axe vertical, situés en point haut de la cuve. Les différentes positions possibles de la sonde, ainsi que les bobines excitatrices et les moteurs, sont représentés en figure 12.2. Le doigt de gant que nous avons principalement utilisé est coulissant, et permet de déplacer continûment la sonde de 40 à 200 mm de l'axe du cylindre. L'incertitude sur la position de la sonde est en général de l'ordre de 10 mm dans la direction radiale. L'autre doigt de gant utilisé est de longueur fixe, et permet de placer la zone sensible de la sonde à 105 ou 114 mm de l'axe du cylindre, selon qu'une pastille cylindrique de 12 ou 3 mm d'épaisseur est placée au fond... La sonde de champ magnétique est fragile, et doit notamment être constamment maintenue à une température inférieure à 70°C, pour ne pas être définitivement détériorée. Elle est donc refroidie en permanence par une injection d'air comprimé dans le doigt de gant. Sa température est enregistrée au cours des acquisitions, ce qui permet d'appliquer *a posteriori* une correction pour ramener les valeurs mesurées du champ magnétique à celles qui auraient été obtenues à la température de référence de 49°C.



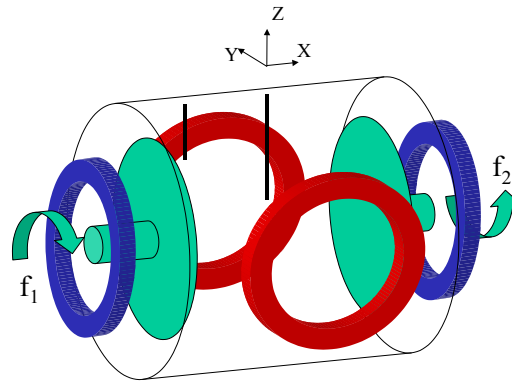


FIG. 12.2 – Schéma des bobines excitatrices de l'expérience “VKS”. Les bobines permettant d'appliquer un champ axial sont représentées en bleu, les bobines d'excitation transverse sont en rouge. Le moteur 1 (resp. 2) entraîne la turbine située sur la gauche (resp. droite) du montage. Les lignes verticales en trait fort noir représentent les positions des doigts de gant utilisés pour les mesures de champ magnétique. Le trièdre des composantes du champ magnétique est représenté dans le haut de la figure. Un courant positif circulant dans les bobines d'excitation axiales (resp. transverses) crée une composante  $B_X$  (resp.  $B_Y$ ) positive au milieu de la cuve. Le deuxième trou de mesure de champ magnétique est situé à 126 mm du plan équatorial, au voisinage de la turbine 1.

## 12.2 Résultats de mesures hydrodynamiques.

### 12.2.1 Avertissement.

Les mesures hydrodynamiques ne constituaient pas la motivation principale de l'expérience “VKS”, et ont donc été réalisées avec moins de soin que les mesures de champ magnétique. Le coefficient de calibration de la mesure du couple fourni par les moteurs n'est pas connu, et l'évaluation par calorimétrie de la puissance injectée au cours des expériences est rendue difficile par la mauvaise connaissance de la capacité calorifique de la cuve et du sodium qu'elle contient (voir toutefois [15]). En ce qui concerne les mesures de pression, les gains des trois amplificateurs successifs que le signal traverse ne sont notés simultanément que rarement. De plus, l'aspect visuel et la densité spectrale du signal enregistré pendant les campagnes de mesures récentes laissent à penser que le capteur utilisé n'était peut-être pas de taille à supporter longtemps un environnement de travail sévère... Enfin, la présence fréquente de bulles d'argon dans la cuve perturbe les mesures de façon parfois importante. Nous ne présenterons donc dans cette section que quelques résultats, que nous avons obtenus sur des mesures qui nous paraissent *a priori* dignes de confiance.

### 12.2.2 Valeurs moyennes des couples

#### Dépendance en fonction de la fréquence de rotation des turbines.

Comme nous l'avons dit, le coefficient de calibration de la mesure des couples fournis par les moteurs n'est pas bien connu. Sans pour l'instant nous préoccuper de leurs valeurs absolues, il est toutefois possible d'étudier leur évolution en fonction de la fréquence de rotation des turbines. La figure 12.3 représente ainsi les couples mesurés durant la journée du 30/11/00 en fonction du carré de la fréquence de rotation des turbines. Nous voyons que les points s'alignent sensiblement

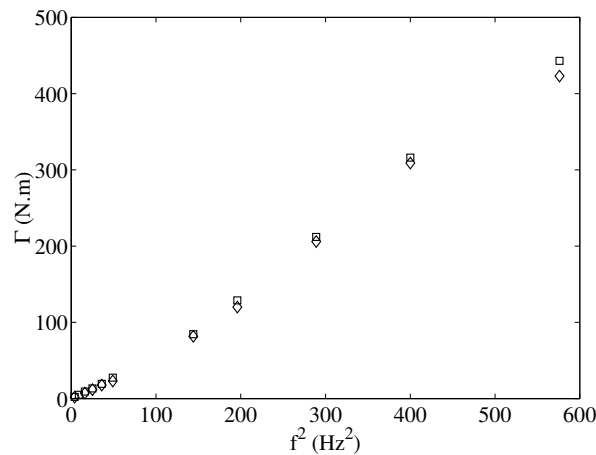


FIG. 12.3 – Valeurs moyennes des couples fournis par les moteurs de l’expérience “VKS” au cours des mesures du 30/11/00 (Campagne VKS1b), en fonction du carré de la fréquence de rotation des turbines. ( $\diamond$ ) : moteur 1. ( $\square$ ) : moteur 2. Les turbines utilisées sont du type “TM60”, elles sont en contra-rotation exacte.

sur une droite, comme cela est attendu par l’analyse dimensionnelle (voir première partie de ce mémoire). Il semble donc que ce résultat, que nous avons vérifié en eau pour les valeurs du nombre de Reynolds inférieures à  $1.2 \cdot 10^6$  environ, s’applique encore dans l’expérience “VKS”, c’est-à-dire dans un fluide différent, et pour des valeurs du nombre de Reynolds plus élevées d’un ordre de grandeur (jusqu’à  $1.0 \cdot 10^7$  environ pour  $f = 24$  Hz).

#### Dépendance en fonction de la configuration.

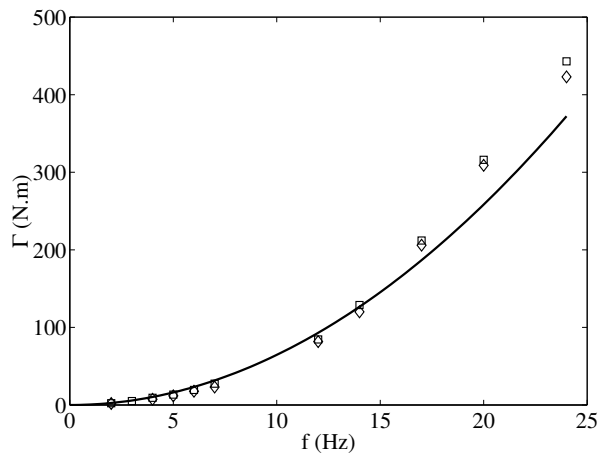


FIG. 12.4 – Valeurs moyennes des couples fournis par les moteurs de l’expérience “VKS” au cours des mesures du 30/11/00 (Campagne VKS1b), en fonction de la fréquence de rotation des turbines. ( $\diamond$ ) : moteur 1. ( $\square$ ) : moteur 2. Les turbines utilisées sont du type “TM60”, elles sont en contra-rotation exacte. La ligne noire représente les valeurs obtenues par extrapolation des résultats de l’expérience “VKE”.

En extrapolant les résultats obtenus dans l’expérience “VKE” avec les turbines “TM60” en

contra-rotation, nous pouvons maintenant estimer le coefficient de calibration de la sortie analogique des variateurs. Prenant pour référence la mesure N°1 du 23/11/00, qui a été effectuée immédiatement après le remplissage de la cuve, c'est-à-dire avec un sodium exempt de bulles d'argon, et extrapolant les résultats de l'expérience "VKE", nous obtenons pour le facteur de calibration une valeur d'environ 85 N.m/V. La figure 12.4 présente de nouveau les résultats des mesures du 30/11/00, mais cette fois en fonction de la fréquence de rotation des turbines, ainsi que la courbe obtenue par extrapolation. Nous voyons que l'accord est raisonnable sur l'ensemble de la gamme, alors que le coefficient a été calé à partir d'une seule mesure, effectuée un autre jour, à 8 Hz.

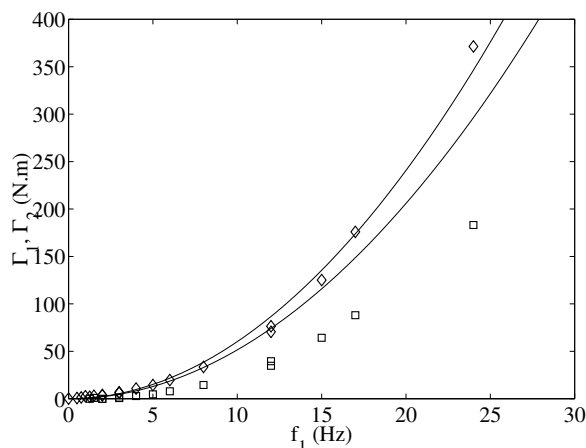


FIG. 12.5 – Valeurs moyennes des couples fournis par les moteurs de l'expérience "VKS" au cours des mesures du 24/11/00 (Campagne VKS1b), en fonction de la fréquence de rotation de la turbine 1. (◇) : moteur 1. (□) : moteur 2. Les turbines utilisées sont du type "TM60", seule la turbine 1 tourne. Les lignes noires représentent les valeurs obtenues par extrapolation des résultats de l'expérience "VKE".

La figure 12.5 compare maintenant les valeurs des couples fournis par les moteurs au cours des mesures du 24/11/00, pendant lesquelles seule la turbine 1 était en rotation, avec les résultats obtenus dans l'expérience "VKE" dans la même configuration. Nous voyons que les résultats de mesures sont en bon accord avec les valeurs extrapolées pour la turbine 1 (qui tourne). Cet accord est d'autant plus satisfaisant que l'allongement du montage "VKE" est légèrement plus faible que celui du montage "VKS", ce qui induit probablement déjà une légère correction. Ceci montre que la similitude entre les valeurs des couples mesurées dans le montage "VKE" et celles mesurées dans "VKS" ne se limite pas à la dépendance en fonction de la fréquence de rotation des turbines. Le préfacteur de cette dépendance a dans les deux cas des valeurs comparables. En ce qui concerne l'autre turbine, nous voyons que le couple que le moteur 2 doit fournir pour la maintenir immobile est plus faible dans le montage "VKS" que dans le montage "VKE". Ceci peut s'expliquer simplement à la lumière des arguments de conservation du moment cinétique présentés au chapitre 6 de la première partie de ce mémoire. Le couple fourni par le moteur 1 est égal à la quantité de moment cinétique qu'il injecte dans l'écoulement par unité de temps. Dans le cas où la cuve du montage expérimental est lisse (cas de "VKE"), ce moment cinétique ne peut ressortir de l'écoulement que par le biais du couple fourni par le moteur 2. Si maintenant nous ajoutons le doigt de gant de la sonde de champ magnétique entre les deux moteurs, les efforts hydrodynamiques qui vont s'exercer sur lui vont créer une "fuite" de moment cinétique. Il est donc normal que le flux de moment cinétique retiré de l'écoulement par le moteur 2 soit plus faible.

L'influence du doigt de gant est moins visible lorsque les deux turbines sont en contra-rotation exacte, puisque dans ce cas les deux couples sont égaux par symétrie.

### 12.2.3 Fluctuations de pression.

Là encore, il n'est pas aisé à la lecture du "cahier de manip" de savoir par combien il faut multiplier les volts qui sont enregistrés par la carte d'acquisition pour obtenir l'amplitude en bars des fluctuations de pression qui se produisent dans la cuve. Nous pouvons cependant utiliser les mesures effectuées dans le montage "VKS" en complément de celles effectuées dans le montage "VKE". La taille double de l'expérience "VKS" repousse en effet d'une octave la fréquence de coupure due à la taille de la face sensible du capteur, et permet de plus d'obtenir un signal quatre fois plus intense à fréquence de rotation des turbines identique.

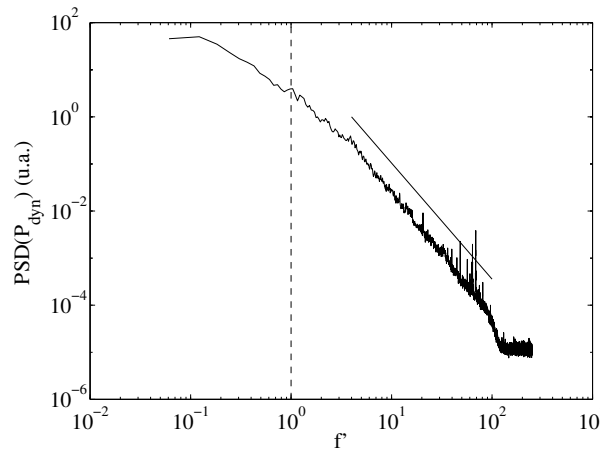


FIG. 12.6 – Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression dynamique dans le plan équatorial du montage "VKS", au cours de la mesure 25 du 28/06/00 (VKS1a). Les turbines sont du type "TM60", elles sont en contra-rotation exacte à 10 Hz. Les fréquences sont rapportées à la fréquence de rotation des turbines. La ligne pointillée verticale marque la fréquence de rotation des turbines. La ligne en trait fin marque la décroissance algébrique d'exposant  $-7/3$  attendue par des arguments dimensionnels.

La figure 12.6 représente ainsi la densité spectrale de puissance des fluctuations de pression dans le plan équatorial de l'écoulement. Nous voyons cette fois une zone assez nette de décroissance algébrique d'exposant proche de la valeur  $-7/3$  attendue par des arguments "à la Kolmogorov". Cette décroissance, prédite dans [56], avait déjà été observée dans des montages similaires par O. Cadot [27] et P. Chainais *et al.* [32].

Enfin, la figure 12.7 présente la distribution de probabilité des fluctuations de pression dans le plan équatorial de l'écoulement. Cette distribution de probabilité a une forme en tout point comparable à celle observée dans le montage "VKE", et présentée au chapitre 4 de ce mémoire.

La faible durée (1 minute environ) des mesures réalisées au cours des campagnes passées sur l'expérience "VKS" ne permet pas une caractérisation plus poussée des fluctuations de la pression (comportements intermittents à petite échelle, etc.). Il pourrait cependant être intéressant à l'avenir de réaliser des mesures plus longues pour étudier spécifiquement ces aspects, car il existe en définitive peu de montages permettant d'obtenir un signal de pression aussi intense, tout en donnant accès à une gamme d'échelles aussi étendue.

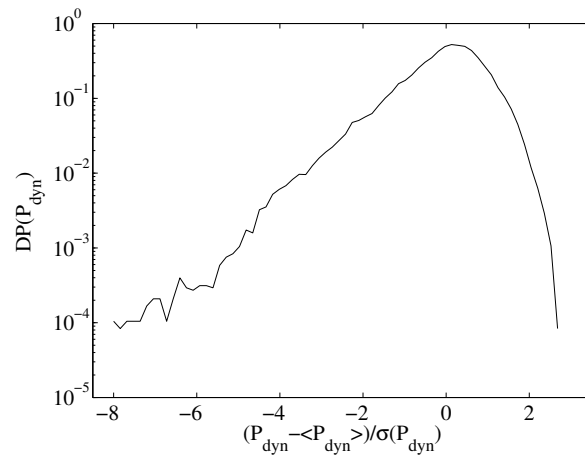


FIG. 12.7 – *Distribution de probabilité des fluctuations de pression dynamique dans le plan équatorial du montage “VKS”, au cours de la mesure 25 du 28/06/00 (VKS1a). Les turbines sont du type “TM60”, elles sont en contra-rotation exacte à 10 Hz.*

## 12.3 Les résultats des mesures d’induction

Dans cette section, nous présentons les résultats des mesures d’induction menées dans le montage “VKS”. Après une brève introduction au cours de laquelle nous rappelons les différentes configurations étudiées, nous rappelons le principe des mesures effectuées. Nous définissons les différentes quantités utilisées, et nous précisons les corrections appliquées aux données, ainsi que les incertitudes qui les affectent. Nous vérifions brièvement que le champ magnétique appliqué ne perturbe pas l’écoulement de façon importante. Nous présentons enfin les résultats des mesures d’induction réalisées avec une seule, puis deux turbines en rotation.

### 12.3.1 Introduction

Les résultats présentés dans cette section concernent le champ magnétique induit à haut nombre de Reynolds magnétique par notre écoulement, en réponse à un champ magnétique faible appliqué de l’extérieur. Cette étude a été menée de façon assez détaillée dans le montage “VKS”, et ce dans une assez grande variété de configurations. Afin de ne pas submerger le lecteur sous une trop grande masse de données, nous avons choisi de ne présenter ici qu’une synthèse des résultats obtenus dans les configurations utilisant des turbines de type “TM60”. Ce sont en effet ces turbines qui ont été de loin les plus étudiées en eau, qui ont été utilisées pour les simulations numériques présentées au chapitre 10, et aussi celles qui ont donné lieu au plus grand nombre d’essais en sodium. Chaque médaille ayant son revers, ce sont aussi celles qui ont été étudiées en premier dans le montage “VKS”, à un moment où l’équipe n’était pas encore tout à fait au point. Les incertitudes qui portent sur les données sont donc relativement élevées en comparaison de celles qui affectent les mesures présentées dans les articles plus récents [110, 86, 40], mais il nous a semblé intéressant de les rassembler, afin de pouvoir en comparer les tendances générales.

Les différentes configurations que nous avons testées sont les suivantes :

- Ecoulement à un et à deux disques, cuve lisse, turbines “TM60” en acier inoxydable, champ appliqué transverse. Sonde dans le plan équatorial, à environ 100 mm de l’axe. Campagne “VKS1a”.
- Ecoulement à un et à deux disques, cuve lisse, turbines “TM60” en cuivre, champ appliqué principalement transverse. Quelques mesures en champ axial. Sonde dans le plan équatorial, à environ

90 mm de l'axe, puis à 40 mm de l'axe. Ensuite, sonde près de la turbine 1, à 110 mm de l'axe. Campagne "VKS1b".

– Écoulement à un et à deux disques, cuve munie de quatre ailettes, turbines "TM60" en acier inoxydable, champ appliqué transverse (surtout) et axial (un peu). Sonde dans le plan équatorial, à environ 90 mm de l'axe. Début de la campagne "VKS1c".

– Écoulement à deux disques, cuve munie de quatre ailettes, contenant 32% en volume de billes d'acier doux de diamètre 6.35 mm. Champ appliqué transverse. Sonde dans le plan équatorial, à environ 150 mm de l'axe. Suite et fin de la campagne "VKS1b".

### 12.3.2 Principe des mesures.

#### Les équations du problème en présence d'un champ appliqué.

Si nous reprenons les équations établies au chapitre 9, et si nous décidons de scinder le champ magnétique total  $\vec{B}$  en un champ appliqué  $\vec{B}_0$  indépendant du temps et un champ induit  $\vec{b}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{b} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B}_0 &= \text{Rm} (\vec{b} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \text{Rm} (\vec{B}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \Delta \vec{b} + \Delta \vec{B}_0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} &= -\text{Rm} \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{Rm} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{B}_0 + \vec{b}) \times (\vec{B}_0 + \vec{b}) \\ &\quad + \text{Pm} \Delta \vec{v} \\ \text{div}(\vec{v}) &= 0 \\ \text{div}(\vec{b}) &= 0 \end{aligned}$$

Dans l'expérience "VKS", le champ magnétique appliqué est produit par des courants qui circulent dans des bobines situées hors de l'écoulement. Sur le volume de celui-ci, le rotationnel de  $\vec{B}_0$  est donc uniformément nul, de même que son laplacien. Comme de plus le champ appliqué est presque uniforme dans l'écoulement, nous pouvons supposer que le terme de l'équation d'induction qui fait intervenir son gradient est négligeable devant les autres. Nous obtenons donc les équations "simplifiées" sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{b} &= \text{Rm} (\vec{b} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \text{Rm} (\vec{B}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \Delta \vec{b} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} &= -\text{Rm} \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{Rm} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{b}) \times (\vec{B}_0 + \vec{b}) + \text{Pm} \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

Lorsque le nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement est faible, nous voyons que le champ magnétique induit est lui aussi petit. Si nous ne conservons que les termes du premier ordre en  $\vec{b}$  dans l'équation d'évolution de l'écoulement, nous obtenons :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{Rm} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = -\text{Rm} \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{Rm} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{b}) \times \vec{B}_0 + \text{Pm} \Delta \vec{v}$$

Nous voyons donc que si les valeurs adimensionnelles du champ appliqué  $\vec{B}_0$  et du champ induit  $\vec{b}$  sont suffisamment faible, le terme de force de Laplace peut être négligé. Dans cette limite, le champ de vitesse ne subit aucune influence de la part du champ magnétique, et son évolution est régie par les équations de Navier-Stokes habituelles, adimensionnées toutefois d'une manière "exotique". Nous n'avons plus alors à nous préoccuper que de l'équation d'évolution du champ

Configuration	Efficacité
Contra-rotation, $f > 0$	0.56
Contra-rotation, $f < 0$ , 2 cellules	1.05
Contra-rotation, $f < 0$ , 1 cellule	1.74
1 turbine seule, $f > 0$	0.8

TAB. 12.2 – Efficacité des turbines “TM60” en rotation dans une cuve “lisse”, pour les différentes configurations étudiées.

magnétique induit. Si nous ne conservons que les termes du premier ordre en  $Rm$  et en  $\vec{b}$  dans l'équation d'induction, nous voyons que  $\vec{b}$  est en première approximation solution de :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = Rm (\vec{B}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \Delta \vec{b} \quad (12.1)$$

Nous voyons aisément que le champ magnétique induit  $\vec{b}$  dépend linéairement de  $Rm$ , ainsi que de  $\vec{B}_0$ . Ce régime, qui est accessible aux expériences utilisant des métaux liquides usuels, tels que le mercure ou le gallium, a été intensivement étudié [121, 96, 22, 100, 131]. L'utilisation de sodium permet d'augmenter le nombre de Reynolds magnétique très fortement. A ce point, il n'est plus légitime de négliger les termes d'ordre plus élevé en  $Rm$  et en  $\vec{b}$ , et le champ induit est solution de l'équation complète :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + Rm (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{b} = Rm (\vec{b} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + Rm (\vec{B}_0 \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} + \Delta \vec{b}$$

En étudiant la façon dont le champ induit est ré-injecté dans le terme d'induction, et en cherchant à maximiser l'efficacité de cette ré-injection, nous pouvons espérer nous rapprocher par étapes d'une configuration dans laquelle elle permettrait l'auto-entretien du champ.

### Définition des différentes grandeurs.

– *Le nombre de Reynolds magnétique*

Nous avons essayé dans la mesure du possible d'adopter des conventions compatibles avec celles du chapitre 10 et de l'article [15]. Nous avons donc défini le nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement comme :

$$Rm = \mu \sigma R_c^2 2\pi f E_f$$

Où  $\mu$  et  $\sigma$  sont la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du sodium à la température à laquelle la mesure est effectuée,  $R_c$  est le rayon de l'écoulement, 0.205 m,  $f$  est la fréquence de rotation des turbines, et  $E_f$  est l'efficacité des turbines, définie comme la vitesse maximale observée dans l'écoulement lors des mesures de vélocimétrie, divisée par  $2\pi f R_c$ . Les efficacités mesurées pour les turbines “TM60” dans une cuve lisse pour les différentes configurations sont rassemblées en tableau 12.2. Nous avons utilisé les mêmes valeurs, faute de mieux, dans le cas des mesures de champ effectuées dans une cuve munie d'ailettes.

– *Le champ magnétique mesuré*

Dans le chapitre 10, le champ magnétique induit au point de mesure était rapporté à l'amplitude du champ appliqué. Dans l'expérience “VKS”, cela n'est en pratique pas réalisable. En effet, le champ magnétique appliqué n'étant pas exactement uniforme, pour qu'une mesure réalisée avec

un champ appliqué de 3 G à 40 mm de l'axe puisse être comparée avec une mesure réalisée à 100 mm de l'axe, il faut que cette dernière soit réalisée avec un champ appliqué valant 2.81 G seulement ! La seule manière de comparer des mesures réalisées en des points différents de l'écoulement est donc en fait de ramener les champs mesurés au courant qui circule dans les bobines excitatrices. Les courbes d'induction que nous présentons dans cette section sont donc graduées en Gauss par Ampère.

– *Les corrections appliquées. Estimation des incertitudes de mesure.*

De façon à pouvoir assurer un dépouillement homogène des mesures, nous avons réduit au minimum le nombre de corrections apportées aux données que nous avons représentées. Les valeurs du nombre de Reynolds magnétique qui marquent les abscisses des points sont calculées en utilisant la valeur moyenne de la température du sodium au cours de chaque mesure. A partir de la campagne "VKS1b", les résultats des mesures sont de plus corrigés de la dérive en température du gaussmètre. Cette correction ne peut pas être appliquée aux données de la campagne "VKS1a", au cours de laquelle la température de la sonde était notée avec moins de précision. Les corrections appliquées de cette manière sont de toute façon faibles devant les incertitudes dues à la présence des bulles d'argon. Il aurait été possible de soustraire du champ magnétique mesuré le champ statique qui règne dans le hall d'expérience, qui a été enregistré assez régulièrement, au cours de mesures faites moteurs arrêtés. Cette correction est elle aussi assez faible (de l'ordre de 5% des valeurs mesurées), et elle n'est pas toujours possible. Nous avons par conséquent choisi de ne jamais l'appliquer. En définitive, nous dirons que les biais dus aux différents problèmes "standards" de mesure (dérive des instruments, bruit, décalages, mauvais positionnement de la sonde) introduisent sur les valeurs moyennes des composantes du champ des barres d'erreurs comprises entre cinq et dix pour cents. La très grande amplitude des fluctuations de champ magnétique enregistrées à grande fréquence de rotation des disques ajoute alors une incertitude statistique sensiblement proportionnelle au nombre de Reynolds magnétique, atteignant une dizaine de pour cents environ aux plus hautes fréquences de rotation étudiées. Le problème posé par les bulles d'argon est plus sérieux, car il est relativement difficile de les détecter, et encore plus difficile d'être certain qu'elles sont absentes de l'écoulement. Elles biaisent les mesures d'une manière qu'il est difficile d'estimer, et il semble que leur effet dépende de la configuration étudiée. Il est possible qu'elles soient responsables pour une part de l'assez grande dispersion rencontrée à haut nombre de Reynolds magnétique. Nous avons écarté des courbes certains points obtenus au cours de mesures où les couples fournis par les moteurs étaient trop visiblement faibles, mais un grand nombre de points douteux est probablement passé au travers des mailles bien lâches de ce filet.

### **Perturbations de l'écoulement dues au champ magnétique appliqué.**

Nous avons vu dans le chapitre d'introduction de la partie de ce mémoire consacrée à la magnétohydrodynamique que l'échelle de champ magnétique qu'il faut considérer pour écrire les équations de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle que nous utilisons est donnée par  $\mathcal{B} = \sqrt{\rho\mu\mathcal{V}^2}$ . Si nous supposons que l'ordre de grandeur du champ induit est  $|\vec{b}| \sim \text{Rm}|\vec{B}_0|$ , nous voyons que l'ordre de grandeur adimensionnel du terme de force de Laplace de l'équation d'évolution de l'écoulement est donné par :

$$|\text{Rm} \vec{\text{rot}}(\vec{b}) \times \vec{B}_0| \sim \text{Rm}^2 \frac{|\vec{B}_0|^2}{\rho\mu\mathcal{V}^2}$$

Nous voyons que l'effet du champ magnétique sur l'écoulement sera négligeable si le rapport de l'ordre de grandeur du terme de force de Laplace sur celui des termes inertiels est petit devant



1. Comme ces termes sont d’ordre  $Rm$ , nous voyons que le rapport, qui est souvent appelé le “paramètre d’interaction” de l’écoulement, s’exprime comme :

$$N = \frac{\sigma \mathcal{L} |\vec{B}_0|^2}{\rho \mathcal{V}}$$

Dans notre cas, si nous prenons pour échelle de longueur  $R_c$  et pour échelle de vitesse  $2\pi f R_c$ , nous voyons que les valeurs du paramètre d’interaction les plus élevées que nous ayons obtenues ont été réalisées lorsque le champ magnétique appliqué valait environ 30 G, et que les turbines tournaient à 1 Hz. Dans ce cas,

$$\frac{\sigma R_c |\vec{B}_0|^2}{\rho 2\pi R_c f} = \frac{9.8 \cdot 10^6 \cdot 0.2 \cdot (30 \cdot 10^{-4})^2}{930 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.2} = 0.015$$

Nous voyons donc que dans l’ensemble des mesures que nous avons effectué, les forces de Laplace créées par le champ appliqué n’avaient *a priori* qu’une très faible influence sur l’écoulement.

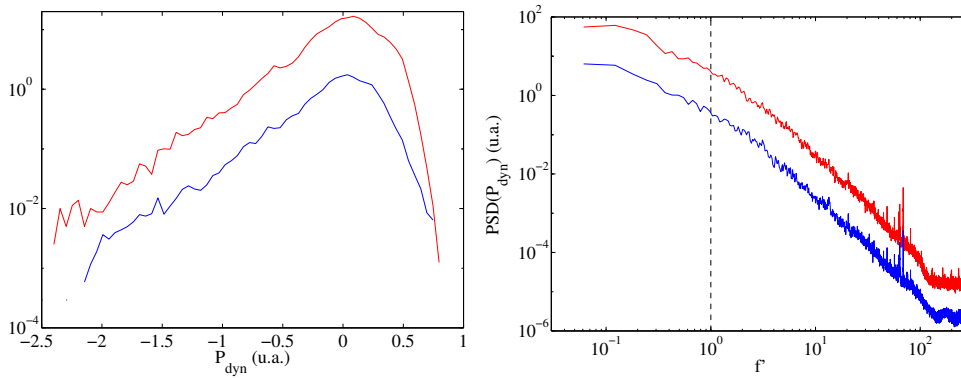


FIG. 12.8 – Influence d’un champ magnétique sur les fluctuations de pression dans le plan équatorial de l’écoulement. Les turbines sont du type “TM60”, elles sont en contra-rotation à 10 Hz. a) Densité de probabilité des fluctuations de pression avec (courbe du haut) et sans (courbe du bas) champ magnétique. b) Densité spectrale de puissance des fluctuations de pression avec (courbe du haut) et sans (courbe du bas) champ magnétique. Les courbes ont été artificiellement décalées d’une décade pour améliorer la lisibilité des graphes. Les fréquences sont adimensionnées la fréquence de rotation des turbines, qui vaut ici 10 Hz. La ligne pointillée marque la fréquence de rotation des turbines. Mesure N°26 du 28/06/00 (VKS1a).

La figure 12.8 présente des résultats de fluctuations de pression obtenus au cours d’une expérience dans laquelle l’écoulement était soumis à des créneaux de champ magnétique transverse d’une amplitude d’environ 20 G. Nous voyons que la densité de probabilité des fluctuations de pression obtenue en ne considérant que les intervalles “avec champ” est identique à celle obtenue sur les périodes “sans champ”. Les densités spectrales de puissance, représentées sur le graphe de droite, sont de même identiques.

Un autre test vient du fait que, dans la limite où le champ magnétique n’agit pas sur l’écoulement, nous avons vu que le champ induit doit dépendre linéairement du champ appliqué. La figure 12.9 montre ainsi les composantes du champ magnétique, auquel nous avons soustrait le champ appliqué, en fonction de l’intensité du courant qui circule dans les bobines d’excitation transverse. Nous pouvons voir que la composante qui est significativement différente de 0,  $b_X$ , est linéaire en  $I_0$  dans une bonne approximation. La composante parallèle au champ appliqué,  $b_Y$ ,

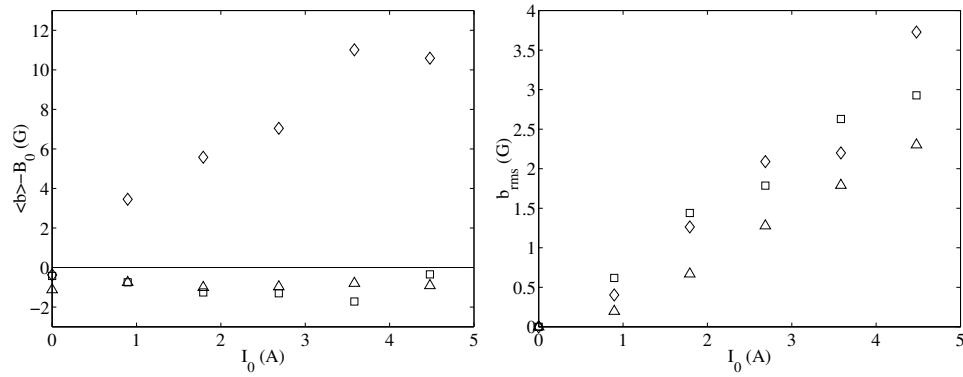


FIG. 12.9 – *Champ magnétique induit au point de mesure situé à 100 mm de l'axe, en fonction du courant qui circule dans les bobines d'excitation transverses. Les turbines sont en contra-rotation à la fréquence de 8 Hz ( $Rm \simeq 12.3$ ). Composantes  $b_X$  ( $\diamond$ ),  $b_Y$  ( $\square$ ) et  $b_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données du 30/06/00 (VKS1a).*

qui est très faible, ne présente tout au moins pas de comportement non-linéaire. La composante  $b_Z$ , qui doit s'annuler par symétrie, a une valeur sensiblement constante, et très faible. De même, nous voyons que les amplitudes rms des fluctuations des composantes du champ magnétique au point de mesure ont elles aussi une dépendance sensiblement linéaire en  $I_0$ , à laquelle se rajoute un petit décalage. Cette linéarité, jointe au fait que les propriétés statistiques des fluctuations de pression ne changent pas en présence du champ extérieur, nous amène à conclure que le champ magnétique ne perturbe pas l'écoulement de manière significative.

### Caractéristiques du signal de champ magnétique.

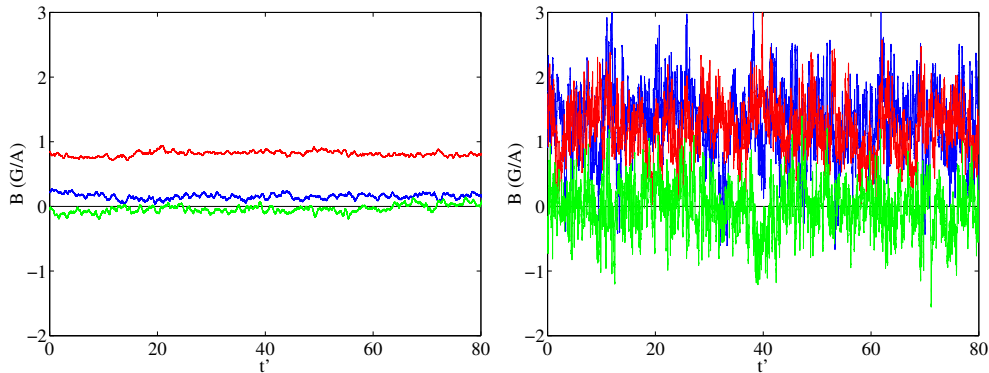


FIG. 12.10 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l'axe, en fonction du temps, pour deux fréquences de rotation des turbines, en contra-rotation. Composantes  $B_X$  (bleu),  $B_Y$  (rouge) et  $B_Z$  (vert). Les temps sont adimensionnés par le temps de diffusion ohmique  $\mu\sigma R_c^2 \simeq 0.4$  s. a)  $f_1 = f_2 = 2$  Hz ( $Rm \simeq 3$ ). Mesure N °16 du 29/11/00 (VKS1b). b)  $f_1 = f_2 = 14$  Hz ( $Rm \simeq 22$ ). Mesure N °23 du 29/11/00 (VKS1b).*

La figure 12.10 représente deux segments de signal de champ magnétique obtenus dans des conditions identiques, mais pour des fréquences de rotation des turbines différentes. Sur le signal

obtenu à petit nombre de Reynolds magnétique, nous voyons nettement que chaque composante du champ magnétique fluctue autour d’une valeur moyenne. Sur le signal obtenu pour  $Rm = 22$ , par contre, les fluctuations sont très importantes, et il est bien plus difficile de distinguer la composante moyenne. Les caractéristiques de ces fluctuations ont été étudiées dans [15, 40, 86, 109, 16], et nous n’en traiterons pas ici en détail. Parmi les résultats principaux de cette étude, nous rappellerons que les fluctuations sont sensiblement gaussiennes, et que leur densité spectrale décroît algébriquement aux hautes fréquences, avec un exposant  $-11/3$ . Cet exposant est compatible avec des arguments simples considérant le champ magnétique comme un vecteur passif évoluant dans un champ de vitesse “à la Kolmogorov”. Aux basses fréquences, des comportements assez variés ont pu être observés, suivant la configuration étudiée. Dans le cas de la contra-rotation équilibrée à haut nombre de Reynolds magnétique, un régime algébrique caractérisé par un exposant proche de  $-1$  aux fréquences inférieures à la fréquence de rotation des turbines a pu être mis en évidence. Dans la suite, nous ne présentons que les résultats portant sur les valeurs moyennes des composantes du champ magnétique et sur l’amplitude *rms* de leurs fluctuations.

### 12.3.3 Résultats des mesures effectuées sur l’écoulement à une turbine.

Dans cette section, nous présentons les résultats des mesures de champ magnétique induit par l’écoulement engendré par la rotation d’une seule des turbines, dans différentes configurations.

#### Cuve lisse, turbines en acier inoxydable

– *Champ transverse.*

La figure 12.11 présente les résultats de mesures de champ magnétique menées au cours de la

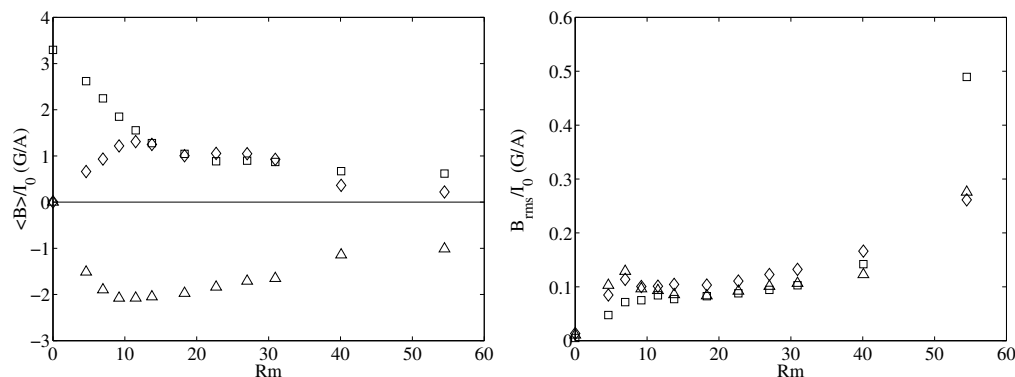


FIG. 12.11 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 100 mm de l’axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l’écoulement, en réponse à une excitation transverse. Seule la turbine 2 tourne. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données du 07/07/00 (VKS1a).*

première campagne, au cours desquelles seule la turbine 2 est en rotation. Cette turbine est située sur la droite du montage. Les turbines utilisées sont réalisées en acier inoxydable, elles sont du type “TM60”. Nous pouvons voir aisément que l’écoulement parvient à créer par induction des composantes du champ magnétique dans toutes les directions à partir du champ magnétique appliqué, qui est dirigé transversalement au cylindre, et que les dépendances des amplitudes de ces composantes en fonction du nombre de Reynolds magnétique ne sont absolument plus

linéaires. L'expérience "VKS" nous donne donc bien accès au régime à haut nombre de Reynolds magnétique de la magnétohydrodynamique. Dans la direction verticale (triangles), le champ induit est négatif, c'est-à-dire dirigé vers le bas. Son amplitude augmente assez rapidement jusqu'en  $Rm = 10$  environ. A ce point, elle vaut environ 0.6 fois celle du champ appliqué. Elle se rapproche alors lentement de l'axe, et ne vaut plus qu'un tiers de celle du champ appliqué en  $Rm = 60$ . De son côté, la composante du champ dirigé le long de l'axe du cylindre est positive, ce qui signifie que le champ est dirigé vers la droite de l'écoulement, et donc vers la turbine qui tourne. Cette composante croît elle aussi assez rapidement, et atteint un maximum pour une valeur de  $Rm$  comprise entre 10 et 20. La forme "étrange" de la courbe dans cette gamme, ainsi que la relative faiblesse des fluctuations de champ, peuvent laisser penser que quelques bulles se sont manifestées dans l'écoulement à ce stade des mesures. La composante du champ magnétique dans la direction du champ appliqué décroît sur toute la gamme de nombre de Reynolds magnétique que nous avons pu étudier. Cela signifie en réalité que l'écoulement produit par induction un champ dirigé en sens inverse du champ appliqué, et tend donc à l'expulser. Cette expulsion d'un champ magnétique appliqué par un écoulement à forte composante azimutale est assez bien connue, et a été étudiée de façon théorique et expérimentale [90, 100]. La création d'un champ induit dans la direction parallèle à l'axe du cylindre était par contre moins étudiée. L'effet observé semble s'apparenter à un "effet  $\alpha$ ", mais dans lequel il n'y aurait pas de séparation claire entre l'échelle de l'écoulement et celle du champ magnétique créé. L'article [110] fournit une analyse plus approfondie de cet effet, sur la base des données similaires obtenues durant la campagne "VKS1b" qui sont présentées dans l'un des paragraphes suivants. En ce qui concerne les amplitudes des fluctuations des composantes de champ magnétique, nous voyons qu'elles sont très semblables sur l'ensemble de la gamme de mesure, et ne révèlent donc pas d'anisotropie particulière. Elles commencent par connaître une phase de croissance assez rapide (sur trois points...) avant de revenir à des valeurs plus modérées, de l'ordre du dixième des valeurs moyennes mesurées dans cette gamme. Un point "curieux" est visible en  $Rm = 55$ , mais il semblait associé à une valeur raisonnable du couple fourni par les moteurs, et l'inspection visuelle du signal n'a rien révélé de choquant. La lecture du "cahier de manip" semble indiquer que des problèmes liés aux bulles d'argon ont été rencontrés au cours de cette série de mesures.

– *Champ axial.*

La figure 12.12 présente le résultats de mesures de champ magnétique menées au cours de la

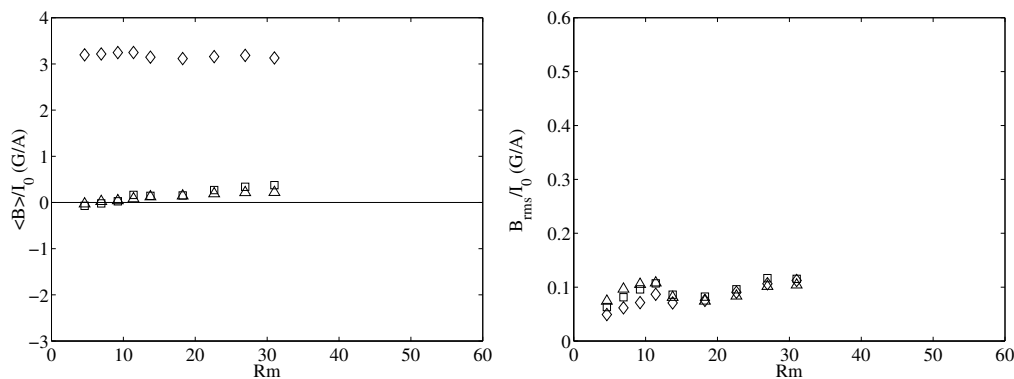


FIG. 12.12 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 100 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation axiale. Seule la turbine 2 tourne. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données du 07/07/00 (VKS1a).*

même journée, dans des circonstances sensiblement identiques, mais avec un champ appliqué dirigé le long de l’axe du cylindre. Les composantes du champ induit sont dans ce cas très faibles sur les trois composantes, ce qui montre que le phénomène d’induction est cruciallement affecté par la géométrie de l’écoulement. La réponse à un champ appliqué parallèlement à l’axe de l’écoulement n’a visiblement rien à voir avec la réponse à un champ appliqué transversalement. Les amplitudes *rms* des fluctuations sont par contre très comparable à celles qui avaient été observées ci-dessus, et semblent donc être moins affectée par l’orientation du champ appliqué.

### Cuve lisse, turbines en cuivre

#### – Champ transverse.

Les données représentées sur la figure 12.13 ont été obtenues au cours de la campagne de

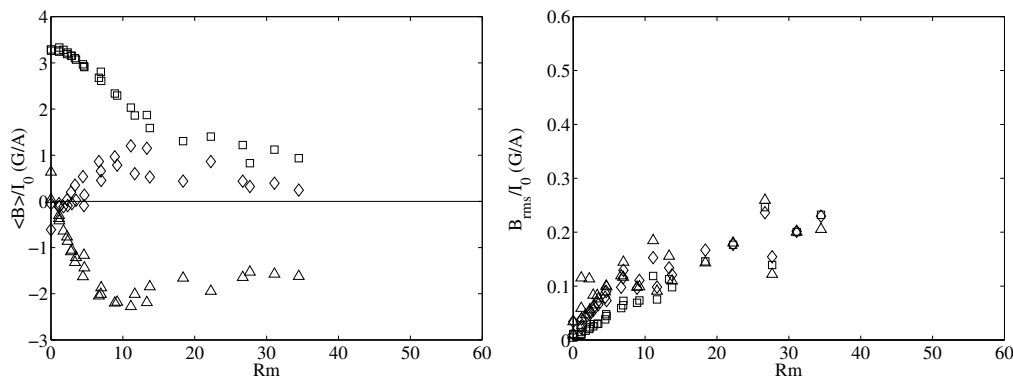


FIG. 12.13 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l’axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l’écoulement, en réponse à une excitation transverse. Seule la turbine 2 tourne. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude *rms* des fluctuations de champ. Données des 24/11/00 et 28/11/00 (VKS1b).*

mesures “VKS1b”, dans les mêmes circonstances que celles présentées en figure 12.11. Les turbines utilisées étaient cette fois réalisées en cuivre, pour permettre une circulation plus facile des courants électriques. C’est au cours de cette série de mesures que le problème des bulles a été découvert, et elles ont donc réalisées avec des précautions particulières (appoints en sodium réguliers pour chasser l’argon, surveillance plus attentive des couples, etc.). Ces données ont été étudiées en détail dans l’article [110]. Nous pouvons constater sur le graphe de gauche que les valeurs moyennes des composantes ont en fonction du nombre de Reynolds magnétique des évolutions assez semblables à celles qui avaient été montrées lors des mesures effectuées avec des disques en acier. A bas nombre de Reynolds magnétique, il est maintenant possible de voir clairement que la courbe de  $B_Y$  a une tangente horizontale, ce qui indique que le champ induit dirigé dans cette direction est le produit d’un mécanisme du second ordre en  $Rm$ . Un champ induit linéaire en  $Rm$  est d’abord créé à partir du champ appliqué, puis réutilisé pour produire le champ dirigé selon  $B_Y$ . Une étude numérique de tels mécanismes itératifs de production de champ magnétique a été réalisée par M. Bourgoïn au cours de sa thèse [16]. Le cas de la composante axiale  $B_X$  est moins tranché. Un dépouillement plus soigneux des données a permis de montrer qu’il avait une composante quadratique assez marquée, qui pourrait provenir d’un effet “ $\alpha$ ”, qui est lui aussi un mécanisme “à deux coups”. Cette composante quadratique, à laquelle se rajoute une contribution linéaire plus faible, est plus ou moins nette suivant la position du point de

mesure (voir [110]). Les amplitudes *rms* des fluctuations sont très nettement plus élevées que dans le cas des mesures réalisées avec les turbines en acier, et elles sont maintenant sensiblement linéaires en  $Rm$ . Aucun élément n'interdit bien sûr d'attribuer cette augmentation à la matière des turbines, mais il reste plus probable qu'elle est due à la meilleure qualité des mesures. Dans un cas comme dans l'autre, nous pouvons constater que les valeurs moyennes des composantes du champ semblent assez robuste.

– *Champ axial.*

De la même manière, la figure 12.14 représente les données obtenues en champ appliqué axial,

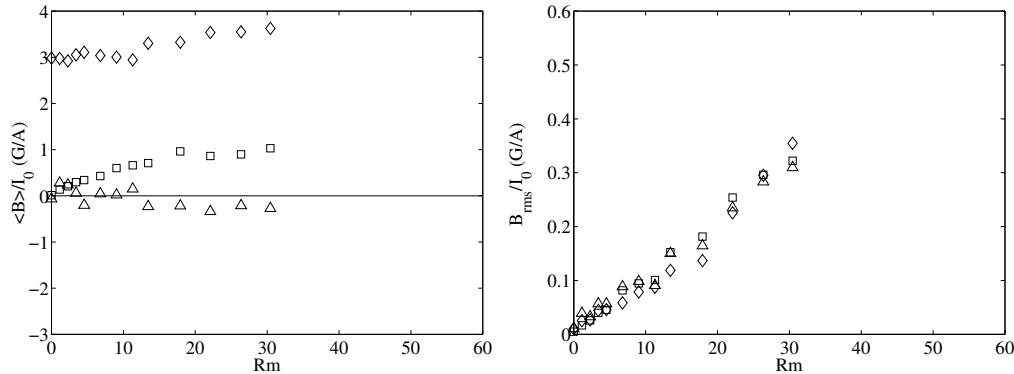


FIG. 12.14 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation axiale. Seule la turbine 2 tourne. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude *rms* des fluctuations de champ. Données du 29/11/00 (VKS1b).*

avec les turbines de cuivre. Nous voyons cette fois une nette augmentation de l'amplitude de la composante  $B_Y$  du champ, qui est dans cette géométrie égale à la composante orthoradiale du champ magnétique, qui est axisymétrique. La composante verticale  $B_Z$ , qui est alors égale à la composante radiale du champ magnétique, reste faible. La composante axiale augmente légèrement avec le nombre de Reynolds magnétique, ce qui signifie que le champ appliqué est légèrement étiré, et n'est pas expulsé de façon visible. La valeur positive de la composante orthoradiale du champ indique que celui-ci est en quelque sorte "entraîné" par la turbine au cours de sa rotation, ce qui correspond à l'image intuitive d'un effet " $\Omega$ " classique. Là encore, il est difficile de savoir avec certitude si l'augmentation des amplitudes du champ magnétique est liée à la matière des turbines ou à la meilleure qualité des mesures. Nous pouvons par contre conclure que, quelle que soit l'origine du changement, la composante orthoradiale du champ y est sensible.

### Cuve munie d'ailettes, turbines en acier inoxydable

Les courbes de la figure 12.15 montrent maintenant les résultats obtenus dans une configuration identique à la première (seule la turbine 2 tourne, elle est en acier inoxydable), mais dans laquelle la paroi de la cuve cylindrique est munie de quatre ailettes de cuivre, de "hauteur" 20 mm, et de longueur 300 mm. L'efficacité du système d'entraînement, qui n'est pas connue dans cette situation, a été faite de mieux prise égale à la valeur obtenue dans une cuve "lisse". Nous pouvons voir immédiatement que les valeurs moyennes aussi bien que les amplitudes *rms* des différentes composantes du champ magnétique sont très affectées par la présence des ailettes. Tout d'abord, la composante  $B_Y$  commence par augmenter à petit nombre de Reynolds

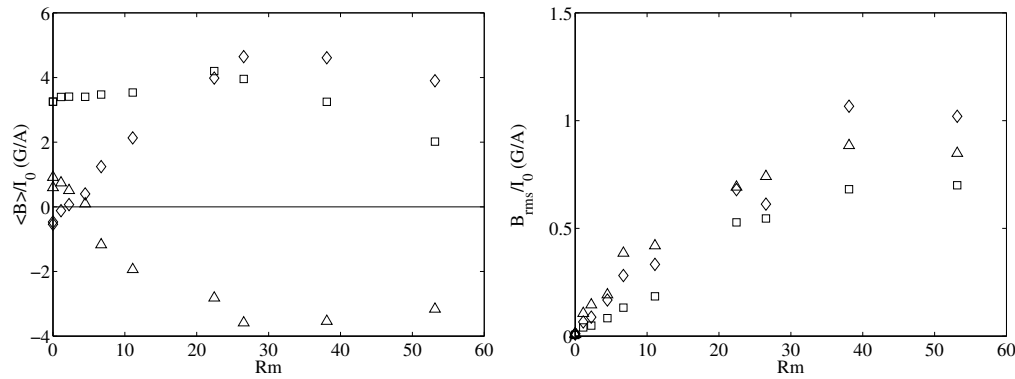


FIG. 12.15 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation transverse. Seule la turbine 2 tourne. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données du 19/02/01 (VKS1c).*

magnétique, là où nous n'avions pu observer jusqu'ici que des décroissances monotones. Au delà de  $Rm = 30$ , elle semble se mettre à décroître. Le fait que cette valeur soit plus élevée que dans le cas des mesures effectuées en cuve lisse peut provenir du coefficient d'efficacité qui entre dans notre définition du nombre de Reynolds magnétique, et qui est probablement sur-estimé dans cette configuration. La composante dirigée le long de l'axe du cylindre,  $B_X$ , est toujours positive, mais elle parvient cette fois à atteindre des valeurs assez largement supérieures à celles de la composante  $B_Y$ . Il y a donc lieu de penser que l'effet " $\alpha$ " est dans une certaine mesure favorisé par l'ajout des ailettes. Elle augmente elle aussi à petit nombre de Reynolds magnétique, avant d'atteindre un maximum légèrement plus tard, aux alentours de  $Rm \simeq 30$ . La composante verticale,  $B_Z$ , est toujours dirigée vers le bas. Elle atteint elle aussi des valeurs plus élevées que celles de la composante transverse  $B_Y$ . Elle suit une évolution très similaire à celle de la composante  $B_X$ , atteint des valeurs très proches, et a un maximum pour la même valeur du nombre de Reynolds magnétique. Comme elles sont reliées au champ appliqué par des mécanismes très différents (le passage  $B_Y \rightarrow B_Z$  se fait par un simple effet  $\Omega$ , là où le passage  $B_Y \rightarrow B_X$  met *a priori* en jeu un effet  $\alpha$ , bien plus complexe), il est possible que l'une soit produite à partir de l'autre de façon directe par l'écoulement. Il est difficile d'apporter des éléments quantitatifs sur ce point. En ce qui concerne les amplitudes des fluctuations, nous pouvons constater qu'elles ont plus que doublé lors de l'ajout des ailettes. Il semble que des différences soient visibles entre les différentes composantes. Jusqu'aux environs de  $Rm = 30$ , l'amplitude *rms* la plus élevée est visible sur la composante  $B_Z$ . Sur les deux derniers points, c'est la composante  $B_X$  qui présente les fluctuations les plus importantes. Les trois amplitudes semblent connaître un maximum en  $Rm \simeq 40$ . Une fois de plus, il est difficile de conclure sur l'origine de la décroissance observée. Elle pourrait provenir soit d'un problème de bulles, soit d'une diminution réelle des fluctuations, qui pourrait alors être associée à la décroissance des amplitudes moyennes des composantes du champ.

#### 12.3.4 Résultats des mesures effectuées sur l'écoulement de contra-rotation.

Dans cette section, nous présentons les résultats des mesures de champ magnétique induit par l'écoulement engendré par la contra-rotation exacte des deux turbines, dans différentes confi-

gurations.

### Cuve lisse, turbines en acier inoxydable

– *Champ transverse.*

La figure 12.16 rassemble les résultats des mesures de champ induit en réponse à un champ appli-

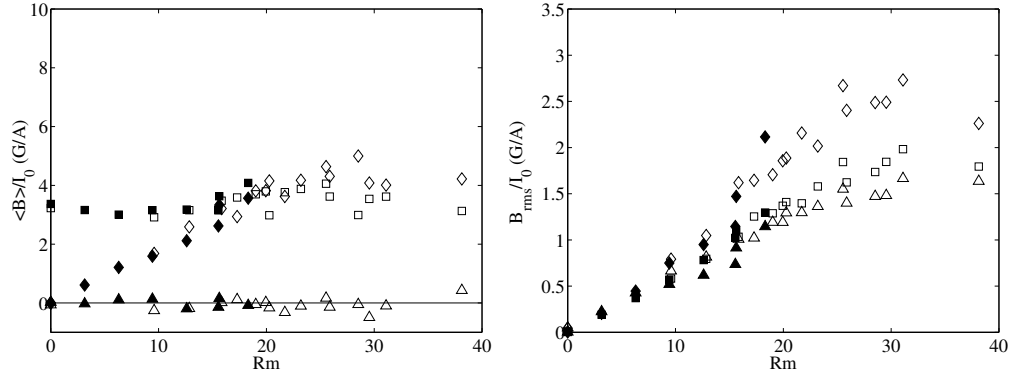


FIG. 12.16 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 100 mm de l’axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l’écoulement, en réponse à une excitation transverse. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). Les symboles pleins (resp. ouverts) correspondent aux mesures effectuées sur le calibre 30 G (resp. 300 G) du gaussmètre. a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données des 28/06/00 et 29/06/00 (VKS1a).*

qué transverse par l’écoulement provoqué par la contra-rotation à fréquence positive de turbines “TM60” en acier inoxydable, dans la cuve “lisse”. Nous voyons immédiatement que l’allure des courbes représentant les valeurs moyennes des différentes composantes est radicalement différente de celles des courbes obtenues avec l’écoulement engendré par la rotation d’une turbine seule. La valeur moyenne de la composante  $B_Z$  est ainsi nulle sur l’ensemble de la gamme de nombre de Reynolds magnétique étudiée. Ce point est une conséquence de l’invariance du montage par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$  autour de l’axe vertical qui passe par la sonde. Cette invariance impose en effet au champ magnétique total d’être transformé en son opposé par le retournement, ce qui est impossible si sa composante verticale n’est pas identiquement nulle sur l’axe vertical. (Les propriétés de symétrie du champ magnétique induit en réponse à une excitation extérieure ont été étudiées en grand détail dans [110, 109, 16]). Les autres composantes du champ magnétique sont non nulles. La composante parallèle au champ appliqué,  $B_Y$ , semble décroître très légèrement aux petites valeurs de  $R_m$ , mais cette tendance est très largement inférieure aux incertitudes de mesure. Elle a par contre été nettement mise en évidence sur des données obtenues avec d’autres turbines (voir [40, 86]). Pour  $R_m > 10$ ,  $B_Y$  réaugmente légèrement, puis semble saturer. La composante axiale  $B_X$ , enfin, a une dépendance linéaire en  $R_m$  jusqu’aux alentours de 30 environ, puis sature elle aussi. La forte dispersion des points dans cette gamme peut être due aux bulles d’argon, mais aussi à la très grande amplitude des fluctuations, qui ne permet pas d’estimer avec précision la valeur moyenne du signal en un temps de mesure d’une minute. Il est en définitive bien difficile de savoir si la saturation des valeurs mesurées est réelle ou due à un *artefact*. De leur côté, les amplitudes rms des fluctuations de champ sont très importantes. Elles sont sensiblement identiques jusqu’en  $R_m = 20$ , et dépendent linéairement du nombre de Reynolds magnétique. Au delà de  $R_m = 20$ , leur amplitude selon  $B_X$  semble augmenter brusquement. Il n’est pas possible



de savoir si cette augmentation est réelle, ou due à un problème d’acquisition quelconque. En tout état de cause, les fluctuations sont dans cette gamme de l’ordre de grandeur de la moitié des composantes moyennes du champ. L’amplitude  $rms$  des fluctuations selon  $B_Z$ , qui n’est fixée à zéro par aucun argument de symétrie, est aussi élevée que les autres. La saturation semble nettement moins apparente sur l’amplitude des fluctuations que sur les valeurs moyennes.

– *Ecoulement “bifurqué”.*

Nous avons présenté au chapitre 5 une “bifurcation globale” de l’écoulement, que nous avons

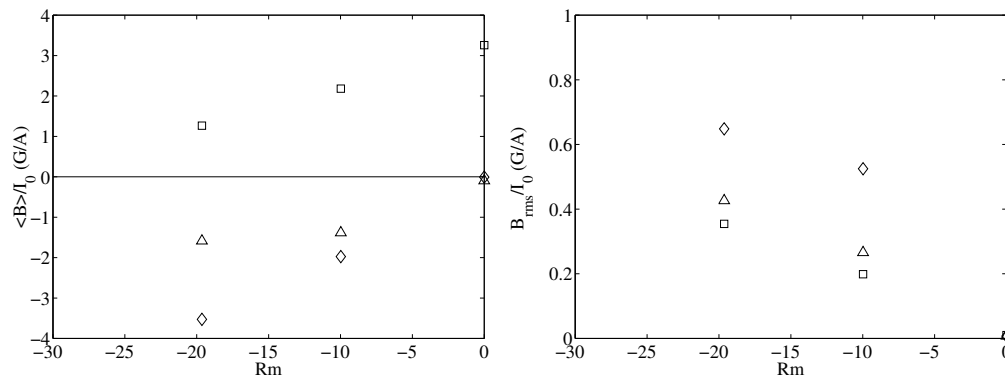


FIG. 12.17 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 100 mm de l’axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l’écoulement, en réponse à une excitation transverse. L’écoulement ne possède qu’une cellule de recirculation, il est engendré par la contra-rotation à fréquence “négative” des turbines. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données des 28/06/00 et 29/06/00 (VKS1a).*

observée et caractérisée en eau dans le montage “VKE”. Cette “bifurcation globale” a aussi pu être observée dans l’expérience “VKS”, lors de mesures effectuées en contra-rotation à fréquence négative, pendant la campagne VKS1a. Les points correspondant sont présentés ci-dessus en figure 12.17. Nous voyons aisément que dans ce cas la composante  $B_Z$  du champ est nettement différente de 0, ce qui montre que la symétrie par retournement est effectivement brisée, alors que les turbines tournent en sens opposés à la même vitesse. Les évolutions des amplitudes des différentes composantes se rapprochent plus de celles qui avaient été observées dans le cas des écoulements créés par la rotation d’un seul disque, qui eux non plus ne sont pas invariants par retournement. Nous voyons que la composante transverse  $B_Y$  du champ est nettement expulsée, et que la composante verticale  $B_Z$  commence par devenir négative, avant de saturer. La composante axiale  $B_X$  est par contre très nettement négative, et semble croître presque linéairement jusqu’en  $Rm = -20$ , qui est le dernier point de mesure disponible (nous rappelons que la consommation énergétique de l’écoulement est très élevée dans cette situation). Les mesures de couple indiquent que c’est dans ces mesures la turbine 1 qui expulse le fluide au voisinage de la paroi cylindrique. Les amplitudes  $rms$  des fluctuations sont relativement intenses, mais restent dans la gamme déjà observée pour les écoulements à un disque. L’amplitude des fluctuations dans la direction axiale est par contre notablement plus élevée que celles qui sont observées dans les directions transverses de l’écoulement. Nous n’avons pas eu l’occasion d’observer jusqu’ici d’anisotropie aussi marquée des fluctuations.

## Cuve lisse, turbines en cuivre

– Champ transverse, 90 mm de l'axe.

La figure 12.18 rassemble les résultats de mesures effectuées en champ magnétique appliqué

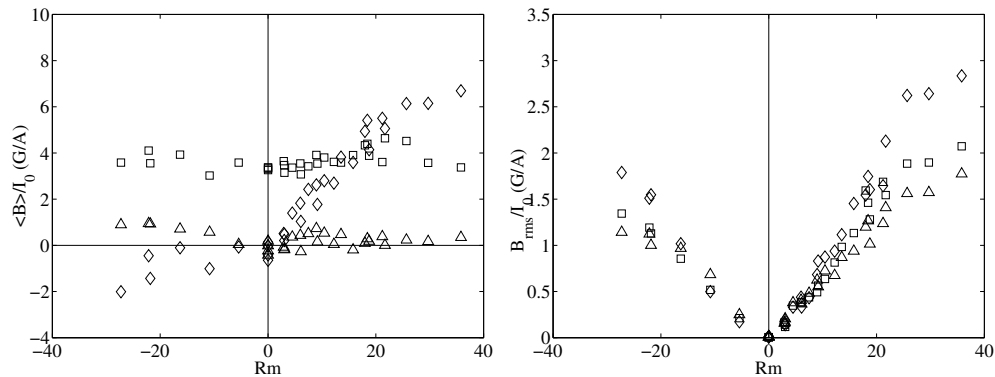


FIG. 12.18 – Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation transverse. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). Lors des mesures à fréquence négative, l'écoulement possède deux cellules de recirculation. a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données des 29/11/00, 30/11/00 et 01/12/00 (VKS1b).

transverse, dans l'expérience "VKS" équipée de turbines de cuivre. Une fois de plus, . Pour les valeurs positives du nombre de Reynolds magnétique, il ne semble pas exister de différence qualitative entre les résultats de ces mesures et ceux obtenus avec les turbines en acier inoxydable. La composante verticale du champ est nulle. La composante axiale  $B_X$  commence par croître sensiblement linéairement. Cette croissance ralentit aux environs de  $Rm = 20$ . La composante transverse  $B_Y$  commence par rester stationnaire, avant d'augmenter légèrement, puis de saturer sur les derniers points. Les amplitudes des différentes composantes ne semblent pas avoir connu de modification notable. Les amplitudes rms ont une évolution similaire à celle qui avait été observée avec les disques en acier inoxydables. L'amplitude des fluctuations semble plus importante sur la composante  $B_X$  que sur les autres, en accord avec l'observation faite sur la figure 12.16. Cette légère anisotropie des fluctuations semble donc confirmée. Nous avons vérifié sur les mesures de couple que l'écoulement présent dans l'expérience lors des mesures réalisées aux valeurs négatives du nombre de Reynolds magnétique était un écoulement à deux cellules de recirculation, invariant statistiquement par le retournement  $\mathcal{R}_\pi$  (voir chapitre 5). Les pales des turbines étant courbées, cet écoulement est toutefois différent de celui obtenu pour les fréquences de rotation positives. Le facteur d'efficacité a été changé en conséquence lors du calcul des valeurs du nombre de Reynolds magnétique correspondant aux mesures. Nous voyons que cet écoulement convertit de façon moins efficace le champ magnétique appliqué selon  $B_Y$  en champ magnétique axial dirigé selon  $B_X$ . La composante  $B_Y$  semble par contre peu affectée par le changement d'écoulement. La courbe qui la représente est en effet presque symétrique par rapport à la droite  $Rm = 0$ . Un résultat qu'il est intéressant de dégager de ces mesures est donc la robustesse de la composante transverse du champ magnétique vis-à-vis de modifications de l'écoulement. De manière opposée, nous pouvons d'ailleurs constater que le mécanisme qui crée la composante  $B_X$  à partir du champ transverse semble lui assez sensible. De façon surprenante, la composante verticale du champ magnétique semble significativement différente de 0, alors qu'elle devrait normalement s'annuler par symétrie. Nous n'avons pas d'interprétation de ce point. Il est cependant certain que l'écoulement est dans

l'état à deux cellules lors de ces mesures. Dans le cas contraire, il n'aurait de toute façon pas été possible d'atteindre des fréquences de rotation élevées, ce qui aurait été noté sur le "cahier de manip". Les amplitudes des fluctuations sont légèrement moins élevées dans le cas des valeurs négatives du nombre de Reynolds magnétique que dans le cas des valeurs positives. Une fois de plus, ce sont les fluctuations de champ selon la direction axiale  $B_X$  qui possèdent l'amplitude  $rms$  la plus élevée aux grandes valeurs du nombre de Reynolds. Ce point semble donc lui aussi robuste.

– *Champ transverse, 40 mm de l'axe.*

Sur la figure 12.19, nous avons représenté les résultats de mesures effectuées dans les mêmes

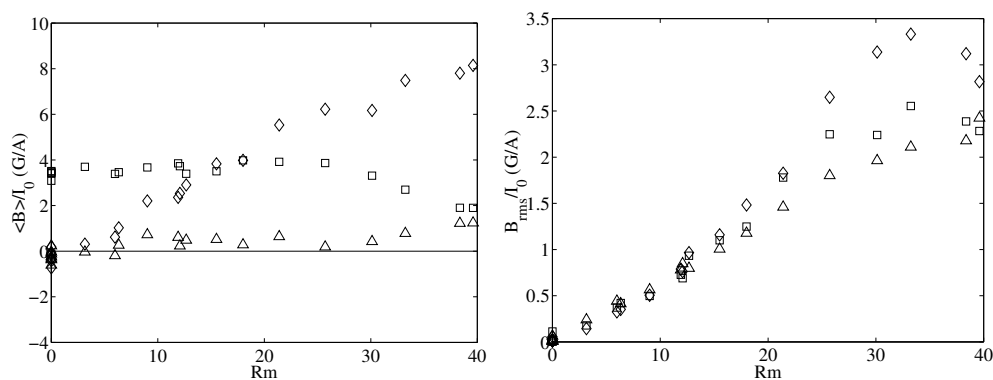


FIG. 12.19 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 40 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation transverse. Lors de ces mesures, le doigt de gant situé au voisinage de la turbine 1 est monté. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données des 05/12/00 et 06/12/00 (VKS1b).*

circonstances que celles de la figure 12.18, mais au cœur de l'écoulement, à 40 mm de l'axe de la cuve cylindrique. Nous voyons que les amplitudes des différentes composantes sont cette fois assez différentes. La composante axiale  $B_X$  croît presque linéairement sur l'ensemble de la gamme de nombre de Reynolds magnétique balayée, et ne semble accuser qu'un très léger fléchissement aux grandes valeurs de  $Rm$ . Les amplitudes obtenues pour cette composante sont assez nettement plus élevées, et leur dispersion est faible. Deux points situés aux alentours de  $Rm = 7$ , qui attribuent tous deux une amplitude assez faible à  $B_X$ , laissent penser que la dépendance de cette composante en fonction du nombre de Reynolds magnétique pourrait être quadratique à l'origine, ce qui correspondrait à l'idée intuitive d'une production à partir du champ appliqué par un effet "α" à deux coups. La composante transverse  $B_Y$ , elle, n'évolue que très faiblement jusqu'en  $Rm \simeq 25$ . Pour cette valeur, elle commence à décroître assez rapidement, et est descendue à la moitié de sa valeur à l'origine pour  $Rm = 40$ . Le début de la décroissance semble correspondre à une rupture de pente dans la courbe de  $B_X$ , mais cette dernière composante parvient toujours à croître, alors même que le champ appliqué semble presque complètement expulsé. La composante  $B_Z$ , elle, reste nulle jusqu'aux alentours de  $Rm = 30$ , puis commence à croître de façon anormale. Il est possible que les deux points incriminés ne s'écartent de l'axe horizontal qu'à cause de la grande amplitude  $rms$  des fluctuations. Par ailleurs, la présence du doigt de gant dans le trou proche de la turbine 1 brise probablement légèrement l'invariance par retournement de l'écoulement. Les amplitudes  $rms$  sont en effet elles aussi assez nettement plus élevées près de l'axe que sur les données présentées en figure 12.18. Une fois de plus, les fluctuations les plus intenses sont

enregistrées dans la direction axiale. Il semble cette fois possible d'affirmer que les fluctuations de la composante transverse  $B_Y$  sont plus élevées que celles de la composante  $B_Z$ . Les derniers points font là encore état d'un changement de comportement, qui peut être une fois de plus dû à la présence de bulles, ou au fait que le champ appliqué est presque totalement expulsé de l'écoulement.

– *Champ transverse, 110 mm de l'axe, au voisinage de la turbine 1.*

Nous avons également effectué des mesures en un autre point de l'écoulement, situé à 110 mm

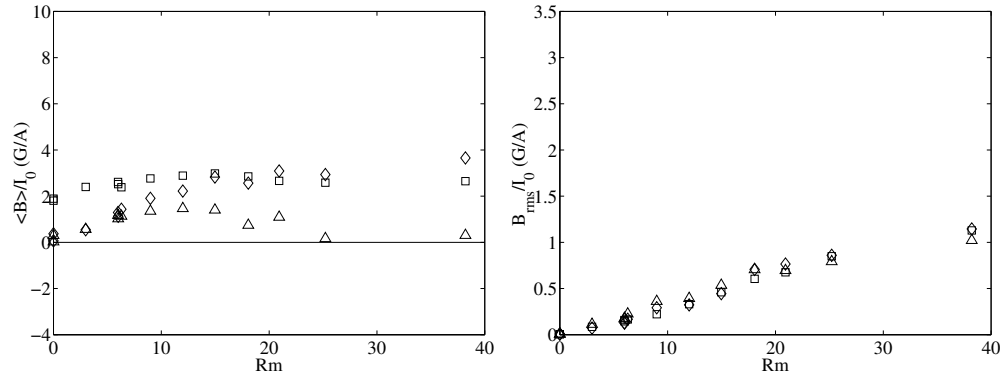


FIG. 12.20 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 110 mm de l'axe, au voisinage de la turbine 1, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation transverse. Lors de ces mesures, le doigt de gant situé dans le plan équatorial de la cuve est présent. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données des 05/12/00 et 06/12/00 (VKS1b).*

de l'axe du cylindre, et à 75 mm du disque de la turbine 1. Les résultats correspondants sont représentés en figure 12.20. Nous pouvons voir sur cette figure que les valeurs moyennes des différentes composantes du champ sont de façon consistante plus faibles qu'au cœur de l'écoulement. Le champ induit dans la direction axiale  $B_X$  est positif, ce qui signifie qu'il est dirigé de la turbine vers le reste de l'écoulement. Sa valeur semble augmenter jusqu'en  $Rm = 22$ . Il est possible qu'elle décroisse au-delà, ou qu'elle se contente de saturer. Il existe malheureusement un intervalle sans mesure assez large, et il est difficile de se résoudre à faire confiance au dernier point, par trop isolé. La composante induite dans la direction transverse  $B_Y$  est elle aussi positive jusqu'en  $Rm = 12.5$  environ, ce qui signifie que l'écoulement amplifie le champ appliqué au lieu de l'expulser. Au-delà de cette valeur, elle semble au moins saturer, sinon décroître. La composante verticale  $B_Z$ , qui n'est plus forcée à 0 par symétrie, est elle aussi positive sur l'ensemble de la gamme étudiée. Elle croît jusqu'en  $Rm = 12$  environ, puis décroît franchement. Il n'est pas possible de savoir si elle tend alors vers 0 par valeur positive, ou si elle franchit l'axe horizontal. Le dernier point de mesure permet cependant d'exclure l'hypothèse d'une valeur trop franchement négative en  $Rm = 40$ . Les amplitudes rms des fluctuations sont elles aussi bien plus faibles au voisinage de la turbine qu'au cœur de l'écoulement. Elles semblent cependant croître de façon monotone sur l'intervalle étudié. Il n'est pas possible d'observer une quelconque anisotropie.

– *Champ axial.*

Le dernier type de mesures effectuées dans la cuve lisse correspond aux mesures de champ induit en réponse à un champ appliqué axial. Les résultats de ces mesures sont présentés en figure 12.21. Nous voyons que le champ induit dans la direction du champ appliqué, qui est

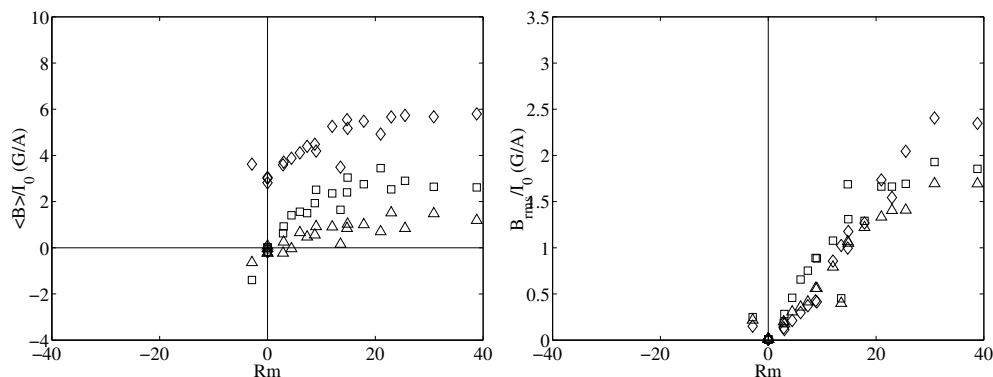


FIG. 12.21 – Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l’axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l’écoulement, en réponse à une excitation axiale. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données des 30/11/00 et 01/12/00 (VKS1b).

cette fois la direction axiale  $B_X$ , est positif sur tout l’intervalle de valeurs de  $Rm$  étudié. Sur l’ensemble de la gamme, l’effet de l’écoulement est donc d’amplifier le champ appliqué. Cette amplification, d’abord vigoureuse, sature pour les valeurs de  $Rm$  supérieures à environ 20. Le point à fréquence négative, pour lequel l’écoulement possédait deux cellules de recirculation, montre que l’amplification ne dépend pas du sens de rotation des turbines, et peut donc être attribuée en plus grande part à l’écoulement de recirculation, dont le sens n’est pas affecté non plus. Ce même point permet au contraire de dire que la production de champ dans la direction transverse  $B_Y$  doit être majoritairement le fait de l’écoulement azimutal, puisque cette composante change de signe lorsque le sens de rotation de la turbine est inversé. Cette composante augmente elle aussi d’abord linéairement en  $Rm$ , avant de saturer sensiblement pour la même valeur. La composante verticale  $B_Z$ , qui devrait être nulle, ne l’est manifestement pas. Nous n’avons pas d’explication de ce phénomène. Sur le graphe représentant les amplitudes rms, nous pouvons voir que celles-ci ont des valeurs “normales”, très sensiblement identiques à celles observées sur les figures 12.16 et 12.18, pour des champs appliqués transverses. La composante axiale  $B_X$  présente une fois de plus les fluctuations les plus intenses aux grandes valeurs de  $Rm$ .

### Cuve munie d’ailettes, turbines en acier inoxydable

Nous avons représenté en figure 12.22 les résultats des mesures effectuées en champ appliqué transverse avec des turbines en acier inoxydable, la cuve étant munie d’ailettes longitudinales. Cette série de mesures nous permet d’observer un changement considérable dans les résultats d’induction. Pour la première fois, nous observons une amplification claire du champ magnétique appliqué dans la direction transverse  $B_Y$  ! Le champ induit dans cette direction est en effet constamment positif, ce qui se traduit par une augmentation nette du champ magnétique mesuré dans la direction du champ appliqué. La valeur de la composante  $B_Y$  du champ double presque entre  $Rm = 0$  et  $Rm = 35$  environ, ce qui signifie que le système parvient à créer un champ aussi fort que celui qui l’excite dans cette direction. Au-delà de cette valeur du nombre de Reynolds magnétique, cette composante du champ sature néanmoins, avant de décroître. La composante axiale du champ induit croît elle aussi très rapidement sur cette gamme, avant de saturer pour une valeur bien plus élevée que toutes celles que nous avons pu observer jusqu’à présent, de l’ordre de 10 G/A. La composante verticale vient tempérer notre enthousiasme, en étant significativement

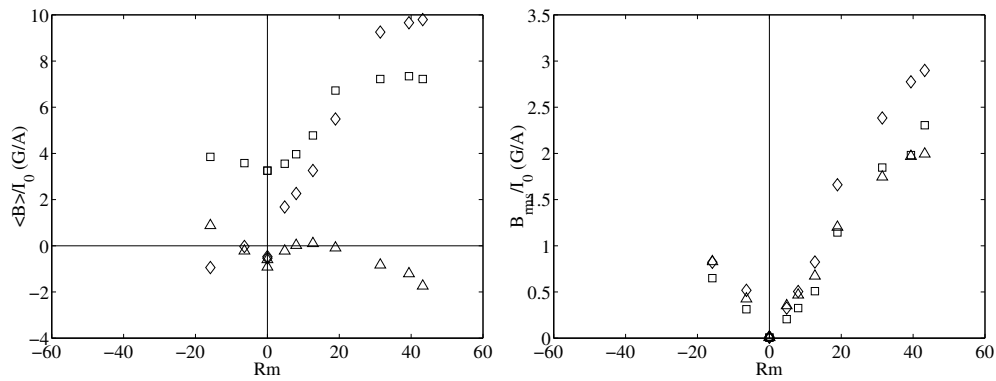


FIG. 12.22 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 90 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation transverse. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données du 19/02/01 (VKS1c).*

négative, ce qui n'augure pas bien de la qualité des mesures pour les grandes valeurs de  $Rm$ . Les ailettes ont été laissées en place pour l'ensemble des campagnes effectuées depuis sur le montage "VKS", mais les turbines étudiées, étant différentes, ne permettent pas de comparaison directe avec les résultats que nous avons déjà présentés. Les résultats correspondants sont rassemblés dans [40, 86, 16, 109]. La forme des courbes aux valeurs négatives du nombre de Reynolds magnétique montre toutefois que le mécanisme d'amplification de  $B_Y$  n'est pas aussi robuste dans cette configuration que dans la configuration sans ailettes présentée en figure 12.18. Les amplitudes *rms* des fluctuations se situent elles dans la gamme "normale". Les fluctuations de  $B_X$  sont les plus intenses à haut  $Rm$ .

### Cuve munie d'ailettes, turbines en acier inoxydable, 32% en volume de billes d'acier doux.

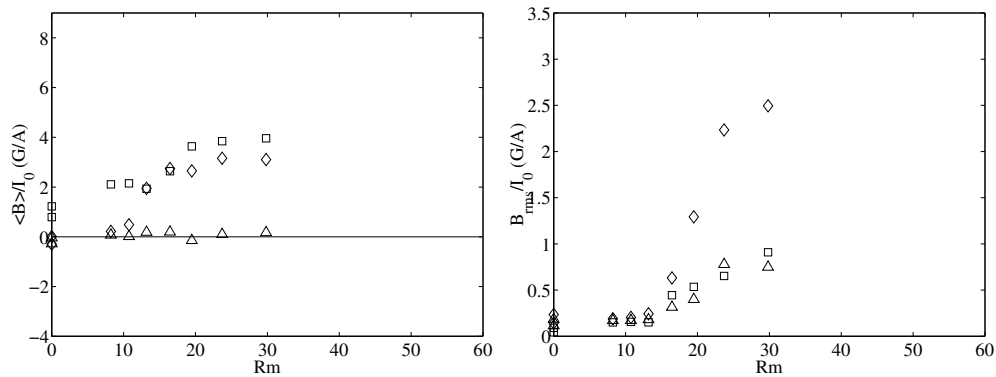


FIG. 12.23 – *Champ magnétique total au point de mesure situé à 100 mm de l'axe, en fonction du nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement, en réponse à une excitation transverse. Composantes  $B_X$  ( $\diamond$ ),  $B_Y$  ( $\square$ ) et  $B_Z$  ( $\triangle$ ). a) Valeurs moyennes des composantes du champ. b) Amplitude rms des fluctuations de champ. Données du 22/02/01 (VKS1c).*

Nous avons représenté en figure 12.23 les résultats de mesures effectuées dans le montage

“VKS” muni de turbines en acier inoxydable, d’ailettes longitudinales, et rempli à 32% en volume de billes d’acier doux de diamètre 6.35 mm. Des mesures similaires, effectuées dans le gallium à l’ENS de Lyon [88], avaient permis de mettre en évidence une nette augmentation des champs magnétiques induits en réponse à un champ appliqué. Il est manifeste sur les courbes de la figure 12.23 que cette démarche ne peut pas être immédiatement appliquée à tous les écoulements ! En effet, les valeurs mesurées des composantes du champ sont nettement plus faibles que dans le cas des mesures effectuées sans billes. Les amplitudes *rms* des fluctuations connaissent d’ailleurs un saut brusque aux alentours de  $Rm = 25$ , qui semble indiquer que c’est vers cette valeur que les billes sont suffisamment bien brassées par les turbines pour atteindre la position de la sonde. Un certain nombre d’effets peuvent expliquer la différence des résultats obtenus dans le gallium et dans le sodium. Tout d’abord, il convient de remarquer que la masse volumique du gallium est bien plus proche de celle de l’acier que celle du sodium. Les billes étaient donc soumises à une poussée d’Archimède bien plus faible dans le gallium, ce qui avait probablement pour effet de faciliter leur fluidisation. Un autre effet aux conséquences probablement plus subtiles vient de ce que les billes ont une conductivité électrique assez proche de celle du gallium, là où elles sont de très mauvaises conductrices d’électricité vis-à-vis du sodium. Peut-être un phénomène d’écrantage inattendu a-t’il donné au mélange la conductivité électrique des billes, et la perméabilité magnétique du sodium, au lieu de l’inverse, qui était espéré ? Par ailleurs, nous ne savons pas dans quelle mesure la présence des billes perturbe la structure de l’écoulement. Les mesures d’induction avec billes, dont nous ne présentons ici qu’une infime partie, nous ont permis d’observer (et d’entendre !) un grand nombre d’effets curieux, qu’il serait certainement intéressant d’étudier plus en détail, ce que nous n’avons pu faire faute de temps.

## 12.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté un certain nombre de résultats obtenus lors des campagnes de mesures effectuées sur l’expérience “VKS”. Nous avons tout d’abord montré que cette expérience pouvait permettre d’étudier des aspects purement hydrodynamiques dans une gamme de paramètres difficile à atteindre dans des montages “de coin de table”. Nous avons ainsi pu observer une gamme inertielle dans le spectre de puissance des fluctuations de pression, qui ne nous était pas accessible pour des raisons de taille dans l’expérience “VKE”, et prolonger d’un ordre de grandeur la gamme de nombres de Reynolds cinétiques sur laquelle nous avons vérifié la dépendance quadratique des couples fournis par les moteurs en fonction de la fréquence de rotation des turbines. Nous avons aussi pu vérifier que la bifurcation globale présentée au chapitre 5 se produit également dans un montage deux fois plus grand, utilisant un autre fluide, et dans une gamme de nombre de Reynolds bien plus large. Sur le plan des mesures magnétohydrodynamiques, nous avons pu mettre en évidence une dépendance non-linéaire, non-triviale, des composantes du champ magnétique induit en fonction du nombre de Reynolds magnétique. Cette dépendance peut prendre la forme d’une saturation à haut nombre de Reynolds magnétique ou d’une expulsion progressive du champ appliqué, dont la forme fonctionnelle et les mécanismes restent mal connus. En ce sens, l’expérience “VKS”, si elle n’a à ce jour pas permis d’observer l’effet dynamo, a permis de commencer à explorer le régime à haut nombre de Reynolds magnétique de la magnétohydrodynamique, et a apporté des résultats expérimentaux nouveaux, qu’il est désormais important de comprendre. Enfin, des expériences menées avec un milieu hétérogène composé de particules ferro-magnétiques et de sodium ont montré qu’il existait là aussi une quantité importante de phénomènes non-triviaux qu’il pourrait être intéressant de comprendre et de maîtriser. Un effet subtil des gradients de conductivité électrique a d’ailleurs été récemment

mis en lumière par M. Bourgoïn, au cours de son travail de thèse [16]. Une utilisation rationnelle de matériaux conducteurs d'électricité ou ferro-magnétique pourrait peut-être à terme permettre de réaliser des dynamos "semi-fluides", dans lesquelles le mécanisme de production du champ magnétique agirait dans un volume de fluide, mais dans lesquelles le mécanisme de rétro-action positive qui semble si difficile à réaliser dans l'écoulement de von Kármán serait aidé par des composants solides astucieusement disposés. Le régime de saturation du champ magnétique produit par ces machines serait probablement affecté par les phénomènes de saturation ferro-magnétique, mais elles constitueraient une étape intermédiaire intéressante dans l'étude de l'influence de la turbulence hydrodynamique sur la croissance de l'effet dynamo en tant qu'instabilité.





## Chapitre 13

# Conclusion de la partie Magnéto-Hydrodynamique

En conclusion de cette partie consacrée à l'étude des propriétés magnéto-hydrodynamiques des écoulements de von Kármán de fluides conducteurs d'électricité, nous rappellerons qu'il nous a été possible d'observer, numériquement comme expérimentalement, des comportements extrêmement variés.

Nous avons ainsi pu constater que la forme de l'écoulement était un paramètre extrêmement sensible du système, dont dépendent très fortement les taux de croissances des modes, les valeurs critiques du nombre de Reynolds magnétique, ainsi que les amplitudes des composantes du champ magnétique induit en réponse à un champ appliqué. La conductivité du milieu immédiatement adjacent à l'écoulement semble elle aussi avoir une influence critique.

Il semble que la prédiction des caractéristiques "intéressantes" (c'est-à-dire les symétries de l'écoulement) des champs magnétiques induits ou auto-entretenus, telles que leurs amplitudes, leurs formes, ou les dépendances des taux de croissances en fonction de la forme de l'écoulement et du nombre de Reynolds magnétique ne puisse à ce jour être réalisée que par le biais de simulations numériques, et ne soit pas à la portée de méthodes d'approximation usuelles. Une approche novatrice de ce problème a toutefois été proposée par M. Bourgoïn dans son travail de thèse [16], sous la forme d'un développement du champ induit en puissances du nombre de Reynolds magnétique, développement ensuite ajusté par des approximants de Padé.

La poursuite du seuil d'apparition de l'effet dynamo dans l'expérience "VKS" fait ainsi apparaître un "vide théorique" qu'il pourrait être intéressant de combler, et qui concerne l'étude du comportement des systèmes physiques étendus lorsqu'ils sont forcés sous le seuil d'une instabilité. Ainsi, il est surprenant de constater qu'aucune méthode éprouvée n'existe à ce jour pour estimer expérimentalement la valeur du seuil d'une instabilité avant d'en être perturbativement près... Une étude approfondie des liens qu'entretiennent les méthodes d'approximations "semi-analytiques" qui ont été utilisées par les différents thésards de l'équipe "VKS" (développement en série entière, approximants de Padé, recherche des modes propres par la méthode de Galerkin, projection sur la variété centrale, etc.) permettrait peut-être d'apporter des éclaircissements sur ce point. Si un lien robuste pouvait être ainsi établi entre les caractéristiques des différents modes propres de l'opérateur d'induction et les amplitudes du champ induit en réponse à un champ appliqué, il trouverait une application immédiate dans la ré-analyse des données obtenues au cours des différentes campagnes de mesures menées sur l'expérience "VKS".

L'expérience "VKS 2", en cours de montage au centre du C.E.A. de Cadarache, possèdera un système de refroidissement, ainsi que des moteurs plus puissants. Il devrait de plus être

possible d'y créer une zone de sodium au repos semblable à celles utilisées dans les simulations du chapitre 10. Cette expérience devrait donc permettre de conduire des mesures plus précises, et pour des valeurs du nombre de Reynolds magnétique proches des valeurs critiques observées dans les simulations. Les résultats de telles mesures devraient être d'une grande aide dans l'étude des différents points que nous venons de soulever.

# Chapitre 14

## Conclusion Générale

Il n'aura pas échappé au lecteur que les deux parties de ce mémoire de thèse sont presque totalement indépendantes, et que le lien qu'il est possible d'établir entre elles réside essentiellement dans l'écoulement dont elles rapportent l'étude. Notre conclusion sera donc elle aussi double, et maintiendra la distinction entre les propriétés purement hydrodynamiques et les propriétés magnétiques de l'écoulement de von Kármán.

### Conclusions et perspectives de l'étude hydrodynamique

Un premier point qui mérite à notre sens d'être rappelé est l'extraordinaire diversité des comportements que nous avons pu observer. Il semble que la caractérisation de l'écoulement de von Kármán, qui a pourtant déjà fait l'objet de très nombreuses études, soit encore loin d'être achevée. Si la structure et les caractéristiques des fluctuations turbulentes des écoulements de co- et de contra-rotation sont désormais relativement bien connues, nous sommes cependant loin du niveau de détail auquel a été portée l'étude des écoulements en canaux, ou celle des écoulements de couche limite. La zone d'angle  $\Theta$  comprise entre  $45^\circ$  et  $135^\circ$ , dans laquelle nous avons pourtant pu observer une grande variété de comportements périodiques, semble n'avoir pour l'instant suscité que peu de travaux.

De façon disjointe de cette étude systématique, les comportements non-triviaux de la structure à grande échelle de l'écoulement que nous avons mis en lumière ("bifurcation globale", "états intermittents") semblent ouvrir un vaste champ d'étude. L'étude de cette dynamique de la structure même de l'écoulement, qui parvient à garder un caractère cohérent au milieu de fluctuations à petite échelle extrêmement intenses, devrait à notre sens permettre de grands progrès dans la compréhension des rapports qu'entretiennent les structures à grande échelle des écoulements turbulents avec les fluctuations auxquelles elles donnent naissance.

Par ailleurs, nous avons pu mettre en évidence le fait que l'écoulement de von Kármán est traversé par un flux important de moment cinétique dirigé d'une turbine à l'autre. Ce flux établit un lien entre les caractéristiques de l'écoulement sur ses différentes sections transverses. La structure de l'écoulement est ainsi soumise à une contrainte forte, dont les conséquences pratiques restent à déterminer. Nous avons par ailleurs montré que cette situation pouvait être retrouvée dans de nombreuses autres configurations expérimentales classiques.

Enfin, les premiers résultats obtenus dans le montage "VKR" montrent que l'influence de la force de Coriolis sur l'écoulement de von Kármán est très marquée, et qu'elle provoque des modifications importantes de la structure de la circulation à grande échelle, de la distribution des fluctuations turbulentes, ainsi que des couples fournis par les moteurs. Nous soulignons que nos résultats ne constituent qu'une ébauche d'étude. En particulier, ils ne se rapportent qu'à un jeu de

turbines, placées systématiquement dans la situation de contra-rotation exacte dans un référentiel en rotation. Ils ont été obtenus dans une cuve lisse, et l'allongement du montage n'a pas été varié. L'étude des modifications subies par les fluctuations turbulentes pourrait permettre un parallèle intéressant avec les résultats de [67, 68, 130]. Par ailleurs, il pourrait être intéressant d'étudier l'influence sur la dynamique à grande échelle de l'écoulement d'une perturbation introduite par la mise en rotation d'ensemble du système.

### Propriétés magnéto-hydrodynamiques

Du point de vue magnétohydrodynamique, nous retiendrons tout d'abord que des mesures expérimentales du champ magnétique induit par l'écoulement de von Kármán en réponse à un champ appliqué ont été effectuées. Si l'effet dynamo proprement dit n'a pas été observé expérimentalement, les mesures mettent en lumière un certain nombre de phénomènes qui semblent caractéristiques du régime à haut nombre de Reynolds magnétique de la magnétohydrodynamique, parmi lesquels l'expulsion du champ appliqué, ou la saturation de certaines composantes du champ induit en fonction du paramètre de contrôle. Ces phénomènes, dont les mécanismes sont mal compris, ne peuvent à notre connaissance pas être prédits analytiquement par des méthodes d'approximation usuelles, mais semblent correctement représentés par le code de simulation que nous avons utilisé. L'expérience "VKS 2", qui est en cours de montage au centre de Cadarache du C.E.A., devrait permettre d'effectuer des mesures mieux contrôlées, et d'étudier l'influence de la proximité du seuil d'apparition de l'effet dynamo sur les différents effets d'induction.

Les simulations numériques, de leur côté, nous ont permis de mettre en évidence l'extrême sensibilité des taux de croissance des modes de champ magnétique et des valeurs critiques du nombre de Reynolds magnétique à la forme du champ de vitesse de l'écoulement. Dans les cas que nous avons étudiés, la présence d'une zone de fluide conducteur au repos située autour de la zone "active" de l'écoulement semble être favorable, mais nous n'avons pas d'explication de ce fait. La méthode de projection de la dynamique sur la variété centrale, que nous avons adaptée au contexte de l'analyse de stabilité linéaire, semble pouvoir être utilisée comme un outil d'analyse quantitative des mécanismes d'amplification du champ magnétique.

La question cruciale de l'influence des fluctuations turbulentes de l'écoulement sur ses propriétés d'induction, qui constitue un aspect extrêmement intéressant de l'effet dynamo dans un écoulement "libre" n'a jusqu'ici pas été abordée.

# Annexe A

## Annexes de la partie I

### A.1 Quelques rappels d'électrotechnique

Afin d'expliquer la spécificité des moteurs brush-less en ce qui concerne l'émission de bruit, nous allons rappeler brièvement le principe des différents systèmes de motorisation électrique. Il existe deux grandes lignées de moteurs électriques, lesquelles se scindent ensuite en plusieurs familles, dont chacune a ses avantages et inconvénients. La première lignée est constituée par les moteurs dont le stator crée un champ fixe, la deuxième lignée rassemblant ceux dont le stator crée un champ tournant.

#### **Le moteur à courant continu**

Le moteur à courant continu est le seul membre de la première lignée, et descend en assez droite ligne de la roue de Barlow. Le stator de ces moteurs crée un champ magnétique indépendant du temps, soit à l'aide d'aimants permanents, soit par des bobinages parcourus par un courant continu. Des balais frottant sur un collecteur permettent d'alimenter en courant continu (d'où le nom) des bobinages portés par le rotor. Ces bobinages subissent la force de Laplace exercée par le champ magnétique du stator, et la transmettent au rotor, qui se met à tourner. Le collecteur présente alors une nouvelle paire de contacts aux balais, et c'est une autre bobine du rotor qui est alimentée, au moment où elle se trouve dans la position qu'occupait la première au début du cycle. Une disposition judicieuse des contacts et des bobines du rotor permet en fait d'obtenir une distribution des courants du rotor indépendante du temps, alors que les bobines qui portent ces courants sont perpétuellement renouvelées au cours de la rotation de la machine. Dans les moteurs de ce type, l'intensité qui circule dans les bobines du rotor fixe le couple fourni, et la fréquence de rotation est ensuite contrôlée par un asservissement. Ils ont été les premiers à être utilisés de façon répandue, et sont encore omniprésents dans notre vie quotidienne (démarreurs de voitures, moteurs de perceuses, de jouets, etc.) Leur avantage sur les autres types de moteurs est qu'ils n'ont pas besoin de variateurs coûteux pour tourner à des fréquences variables. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'ils émettent aussi moins de bruit électro-magnétique. Ils souffrent d'inconvénients spécifiques liés à la présence du collecteur (usure des balais, étincelles, etc.), mais partagent certains problèmes des moteurs des autres types, tels que l'imprécision de la régulation de la vitesse, l'impossibilité de maintenir une vitesse nulle, etc.

## Le moteur asynchrone

Le moteur asynchrone est le plus rustique des représentants de la lignée des moteurs à champ tournant. Dans les moteurs de ce type, le rotor est muni de bobinages en court-circuit, qui ne sont pas alimentés de l'extérieur. Lorsque le champ créé par le stator tourne autour du rotor, il se crée dans les bobinages de celui-ci des courants induits. Ceux-ci subissent la force de Laplace, et poussent le rotor à suivre le champ statorique dans sa rotation. Evidemment, si le rotor parvient à tourner exactement à la même vitesse que le champ statorique, les courants induits dans ses bobinages cessent, et il n'est plus entraîné. Dans ces moteurs, le rotor tourne donc toujours légèrement moins vite que le champ créé par le stator. Si la fréquence de rotation doit être fixée précisément, il est donc nécessaire d'ajouter au système une boucle de régulation. Dans le cas contraire, le raccordement de trois cables d'alimentation au réseau triphasé à 50 Hz suffit à fabriquer une installation qui entraîne à 48 Hz un escalator, un ascenseur ou un ventilateur industriel. En pratique, les bobinages du rotor sont remplacées par quelques barres de cuivre ou d'aluminium placées parallèlement à l'axe, et reliées au deux extrémités par des anneaux conducteurs. Ces moteurs présentent l'avantage d'une très grande robustesse, et une grande facilité de mise en œuvre dans les situations simples. Ils représentent la grande majorité des moteurs en usage dans l'industrie. Ils présentent par contre l'inconvénient d'ajuster d'eux-même leur fréquence de rotation en fonction de la charge. De plus, leur utilisation à des fréquences de rotation variables rend nécessaire l'usage d'un variateur capable de produire un système de trois tensions triphasées à la fréquence voulue, à partir de la tension sinusoïdale à 50 Hz disponible sur le réseau public. Ces variateurs sont coûteux, et produisent comme nous l'avons dit du bruit. Ce sont des moteurs de ce type qui équipent l'expérience "VKS".

## Le moteur synchrone

Dans les moteurs synchrones, le stator produit toujours un champ tournant, mais les bobinages du rotor sont eux-même alimentés en courant continu par un jeu de balais. Les forces de Laplace maintiennent alors les courants du rotor dans une position fixe par rapport au champ statorique. La fréquence de rotation du rotor est donc strictement égale à celle du courant d'alimentation. Si la charge est trop importante pour que le rotor parvienne à suivre le champ statorique, il "décroche" du champ magnétique, et subit bien sûr un à-coup violent. Nous serions tentés de dire que ces moteurs combinent les inconvénients des moteurs à courant continu et des moteurs asynchrones, mais il semble que leur utilisation soit encore relativement répandue dans la gamme des très fortes puissances (emploi en tant que génératrices dans les centrales de production d'électricité, notamment).

## Le moteur brush-less

Le moteur brush-less, enfin, petite merveille de technologie, allie la rusticité du moteur asynchrone à la synchronicité du moteur synchrone grâce à un rotor muni d'aimants permanents, entraîné par un champ statorique tournant à la fréquence désirée. Sa précision et sa robustesse font des miracles dans les chaînes de production automatisées, où il positionne les pièces avant usinage, entraîne les machines-outils, etc. Ce goût pour la difficulté fait que les variateurs de fréquence qui ont été développés pour lui peuvent être programmés pour lui faire exécuter des manœuvres d'une infinie complexité. Mais ils sont coûteux, et ils émettent du bruit. Les moteurs utilisés sur les montages "VKE" et "VKR" sont de ce type.

### Les variateurs.

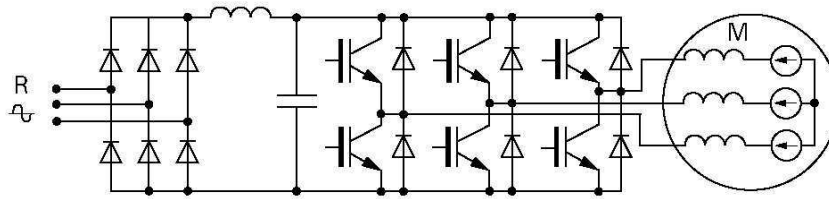


FIG. A.1 – Schéma de principe d'un variateur de fréquence à modulation de largeur d'impulsion.

Nous ne sommes pas parvenus à déceler précisément la source du bruit émis par les variateurs, mais nous rapporterons ici les informations que nous sommes tout de même parvenus à rassembler sur leur fonctionnement. Il semble que la plupart des variateurs produisent le courant sinusoïdal à fréquence variable par la technique dite de “modulation de largeur d'impulsions” (MLI en français, PWM en anglais). Le schéma du pont de puissance d'un variateur fonctionnant sur ce principe est représenté en figure A.1. La tension sinusoïdale en provenance du réseau public est tout d'abord redressée à l'aide d'un pont à diodes classique, puis lissée à l'aide d'un circuit LC. Trois branches de pont onduleur, visibles sur la droite de la figure, raccordent alors épisodiquement les lignes triphasées menant au moteur à l'une ou l'autre des deux bornes de la capacité. La longueur des impulsions de tensions ainsi envoyées est calculée de telle sorte qu'elles forcent un courant sinusoïdal à la fréquence désirée dans les bobinages du moteur. La tension est hachée à une fréquence de l'ordre de quelques kHz, mais présente tout de même une composante sinusoïdale bien nette à la fréquence désirée. Une portion de signal synthétique est représentée en figure A.2. Le variateur de fréquence qui produirait ce signal aurait une fréquence de découpage de 10 Hz, et

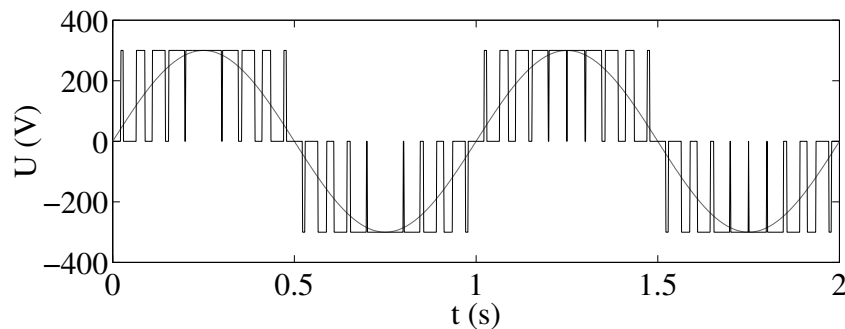


FIG. A.2 – Echantillon synthétique de signal de tension en sortie d'un variateur de fréquence. La tension de sortie est figurée en trait noir fort, et sa composante sinusoïdale en trait fin.

entraînerait le moteur à 1 Hz. Il est probable que les impulsions de tension de plusieurs centaines de Volts se succédant à une fréquence de plusieurs kiloHertz qui parcourent les lignes qui mènent du moteur au variateur produisent une part des émissions. Il existe des filtres, appelés “filtres sinus”, capables de réduire efficacement la hauteur de ces impulsions sans gêner le fonctionnement du moteur, mais ils ne semblent pas être d'un emploi courant. Le fournisseur de nos moteurs a plutôt préconisé de placer des filtres en amont du variateur, afin de réduire le bruit qu'il réinjecte dans le réseau d'alimentation. Ces filtres, de marque Schaffner, nous ont permis de réduire assez nettement les perturbations ressenties par les autres appareils, et nous avons décidé de nous en tenir là dans un premier temps. F. Ravelet a depuis équipé le montage de câbles blindés, afin de



réduire le rayonnement émis entre les variateurs et les moteurs. Cette modification semble avoir permis de réduire encore le bruit.

## A.2 Résultats des mesures de couples pour une cuve cylindrique munie de quatre ailettes.

Les mesures présentées dans cette section ont été effectuées dans une cuve cylindrique munie de quatre ailettes longitudinales, de hauteur  $h_a = 0.1R_c$ .

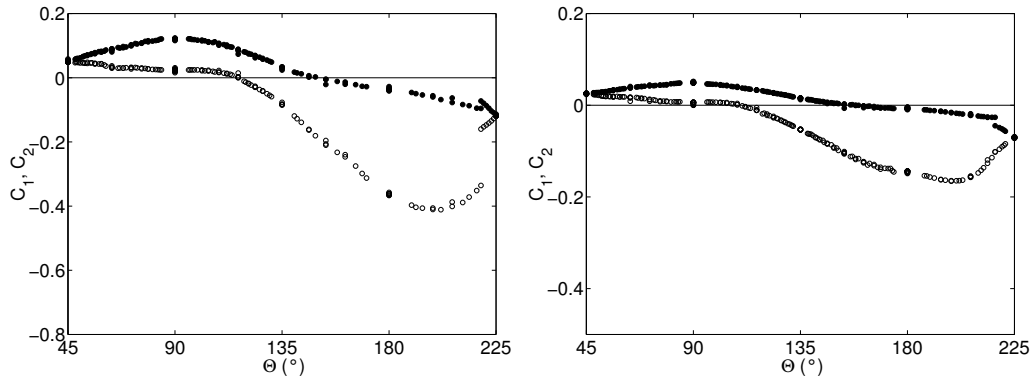


FIG. A.3 – Mesures des valeurs moyennes des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$ , sur la plage  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ , pour des turbines de type “TM60” séparées de  $1.78R_c$ , tournant dans une cuve de rayon  $R_c = 100$  mm munie de quatre ailettes de hauteur  $0.1R_c$ . Les symboles ouverts (resp. pleins) représentent les valeurs de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ). a) pales hautes de  $0.2R_c$ . b) pales hautes de  $0.1R_c$ .

La figure A.3 présente les résultats des mesures de couples effectuées dans la cuve munie d'ailettes longitudinales, avec les deux jeux de turbines “TM60”. Le graphe de gauche représente les données obtenues pour  $h = 0.2R_c$ , le graphe de droite présente les données obtenues pour  $h = 0.1R_c$ .

– Nous voyons tout d'abord que, si l'ordre de grandeur des couples fournis par les moteurs ne change pas lorsque nous montons les ailettes dans la cuve, la valeur maximale atteinte pour  $\Theta \simeq 200^\circ$  diminue d'environ 25%. (cf. figure 4.18).

– Par contre, nous pouvons constater que la différence des couples des deux moteurs peut atteindre des valeurs bien plus importantes lorsque les ailettes sont montées que lorsque la cuve cylindrique est lisse. Ce fait se comprend à la lumière des arguments présentés au chapitre 6, si nous voyons que la différence entre les deux couples représente la quantité de moment cinétique qui quitte l'écoulement par la paroi du cylindre. Nous avons vu que, lorsque celui-ci est lisse, le moment cinétique doit traverser une couche limite, ce qui lui est difficile. Si nous munissons le cylindre d'ailettes, nous permettons au moment cinétique de sortir de l'écoulement par un mécanisme inertiel, qui est bien plus efficace. Nous pouvons donc observer de plus grandes différences entre les couples des moteurs.

– Nous pouvons voir par ailleurs que les couples fournis par les moteurs dans le régime de co-rotation exacte sont bien plus élevés lorsque les ailettes sont présentes que lorsque le cylindre est lisse. Leurs signes, par contre, ne changent pas.

– Nous constatons ensuite que, contrairement à ce qu'aurait pu nous suggérer l'intuition, la présence des ailettes sur les parois du cylindre n'implique pas nécessairement que les couples fournis

par les moteurs soient plus élevés. Ainsi, nous voyons qu'en  $\Theta = 90^\circ$ , si le moteur 2, qui tourne le plus vite, fournit effectivement plus de couple que lorsque le cylindre est lisse, il n'en est pas de même du moteur 1, qui fournit lui un couple notablement plus faible. Le même phénomène se reproduit d'ailleurs aux environs de  $\Theta = 180^\circ$ , et ce indépendamment de la hauteur des pales des turbines.

– Enfin, nous pouvons remarquer que, si la valeur des couples semble bien définie en  $\Theta = 225^\circ$ , un décrochement brusque est très visible sur les courbes en  $\Theta \simeq 220^\circ$ . Là encore, il semble que ce comportement soit la trace de la bifurcation globale présentée au chapitre 5. Malheureusement, nos savants arguments de symétrie nous ont amenés à tellement réduire le nombre de mesures effectuées dans cette région de l'espace des paramètres que nous ne pouvons pas présenter de courbes plus explicites...

La table A.1 rassemble ci-dessous les valeurs des couples adimensionnels obtenus pour les valeurs “remarquables” de  $\Theta$ , lorsque la cuve cylindrique est munie d'ailettes.

$\Theta$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$
$45^\circ$	4.9	5.0	2.5	2.5
$90^\circ$	2.4	12.1	0.6	4.9
$135^\circ$	-8.4	3.3	-5.3	1.5
$180^\circ$	-36.4	-3.6	-14.5	-0.8
$225^\circ$	-11.9	-11.7	-7.0	-7.1

TAB. A.1 – Récapitulatif des valeurs des couples adimensionnels obtenus pour certaines valeurs de  $\Theta$ , pour des turbines de type “TM60”, dans une cuve munies de quatre ailettes de hauteur  $0.1R_c$ . Partie gauche du tableau :  $h = 0.2R_c$ . Partie droite du tableau :  $h = 0.1R_c$ .

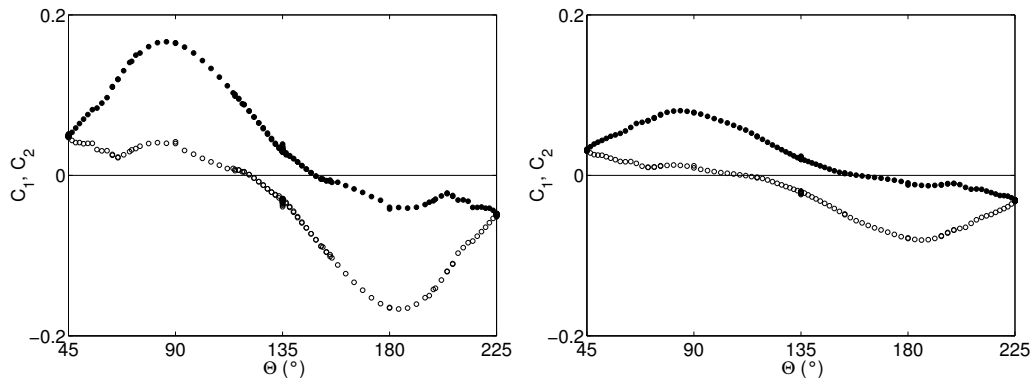


FIG. A.4 – Mesures des valeurs moyennes des couples adimensionnels  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de l'angle  $\Theta$ , sur la plage  $45^\circ < \Theta < 225^\circ$ , pour des turbines de type “TM70” (pales droites), séparées de  $1.78R_c$ , tournant dans une cuve rayon  $R_c = 100$  mm munie de quatre ailettes de hauteur  $0.1R_c$ . a) pales hautes de  $0.2R_c$ . b) pales hautes de  $0.1R_c$ .

La figure A.4 présente enfin les résultats des mesures de couples effectuées dans la cuve munie d'ailettes longitudinales, avec les deux jeux de turbines “TM70” (pales droites hautes de  $0.1$  et  $0.2R_c$ ,  $R_t = 1.46R_c$ ). Le graphe de gauche représente les données obtenues pour  $h = 0.2R_c$ , le graphe de droite présente les données obtenues pour  $h = 0.1R_c$ . Là encore, les courbes ont été construites par symétrie à partir de mesures effectuées dans la seule gamme  $45^\circ < \Theta < 135^\circ$ .

– Nous voyons une fois de plus que l'ordre de grandeur des couples fournis par les moteurs ne

change pas de manière très marquée lorsque nous montons les ailettes sur le cylindre, mais que la différence des deux couples peut avoir des valeurs plus élevées.

– Nous constatons enfin que, si le couple fourni par la turbine qui tourne le plus vite peut être légèrement plus élevé avec les ailettes que sans, le couple de l’autre turbine est lui généralement notablement plus faible.

La table A.2 rassemble ci-dessous les valeurs des couples adimensionnels obtenus pour les valeurs “remarquables” de  $\Theta$ , lorsque la cuve cylindrique est munie d’ailettes.

$\Theta$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$	$C_1 (10^{-2})$	$C_2 (10^{-2})$
45°	5.0	4.8	3.2	3.1
90°	4.1	16.5	1.1	7.8
135°	-3.4	3.0	-2.1	2.0

TAB. A.2 – Récapitulatif des valeurs des couples adimensionnels obtenus pour certaines valeurs de  $\Theta$ , pour des turbines de type “TM70”, dans une cuve munies de quatre ailettes de hauteur  $0.1R_c$ . Partie gauche du tableau :  $h = 0.2R_c$ . Partie droite du tableau :  $h = 0.1R_c$ .

### A.3 Variations en $\Theta$ de l’amplitude *rms* des fluctuations de pression en paroi.

#### A.3.1 Turbines “TM60”, pales hautes de $0.2R_c$ , cuve lisse, différents points de mesure.

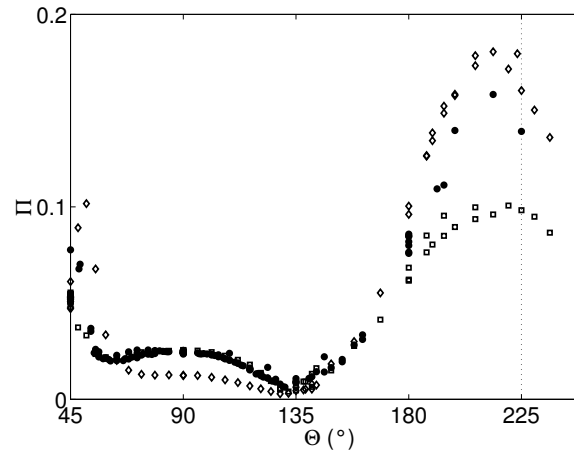


FIG. A.5 – Amplitude *rms* adimensionnelle des fluctuations de pression en fonction de l’angle  $\Theta$ , pour les trois points de mesure  $z' = 0, \pm 0.4R_c$ . Les cercles pleins  $\bullet$  représentent les valeurs mesurées en  $z' = 0$ , les losanges  $\diamond$  (resp. carrés  $\square$ ) les valeurs mesurées en  $z' = +0.4R_c$  (resp.  $z' = -0.4R_c$ ). Les mesures ont été réalisées avec des turbines “TM60” munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ , tournant dans une cuve lisse de rayon  $R_c = 100$  mm.

La figure A.5 représente l’évolution de l’amplitude *rms* adimensionnelle des fluctuations de pression en fonction de l’angle  $\Theta$  aux différents points de mesure dans l’écoulement, lorsque les turbines sont du type “TM60”, et sont munies de pales de hauteur  $0.2R_c$ . Nous pouvons distinguer trois zones sur ce graphe :

- Au voisinage de la contra-rotation, près de  $\Theta = 45^\circ$ , nous voyons que lorsque l'angle  $\Theta$  augmente, l'amplitude des fluctuations baisse au milieu et en bas de l'écoulement, et augmente dans le haut de l'écoulement, près de la turbine 1. Nous voyons donc que le moteur 2 "chasse" progressivement une zone de fortes fluctuations vers la turbine 1.
- Lorsque  $\Theta$  devient plus grand qu'environ  $60^\circ$ , et jusqu'en  $\Theta = 135^\circ$ , nous voyons que la zone de fortes fluctuations disparaît brusquement, et que les fluctuations au voisinage de la turbine 1 deviennent très faibles. Dans le même temps, les fluctuations ont sensiblement la même intensité au voisinage de la turbine 2 que dans le plan équatorial de l'écoulement. Nous rappelons que dans cette gamme c'est la turbine 2 qui a la fréquence de rotation la plus élevée.
- Au-delà de  $\Theta = 135^\circ$ , et jusqu'en  $\Theta = 225^\circ$ , nous observons une évolution similaire, avec toutefois des valeurs beaucoup plus élevées de l'amplitude des fluctuations de pression. La turbine qui tourne à la fréquence la plus élevée est désormais la turbine 1, et elle présente la face concave de ses pales au fluide lors de sa rotation. C'est à son voisinage que nous observons l'amplitude de fluctuations la plus élevée, les fluctuations dans le plan équatorial de l'écoulement étant d'amplitude similaire. Les fluctuations au voisinage de la turbine 2, la plus lente, sont moins importantes. Nous n'observons pas l'apparition d'une zone de fluctuations intenses à l'approche de  $\Theta = 225^\circ$ . (cf. chapitre 5).

### A.3.2 Différents jeux de turbines, cuve lisse. Mesures en paroi dans le plan équatorial.

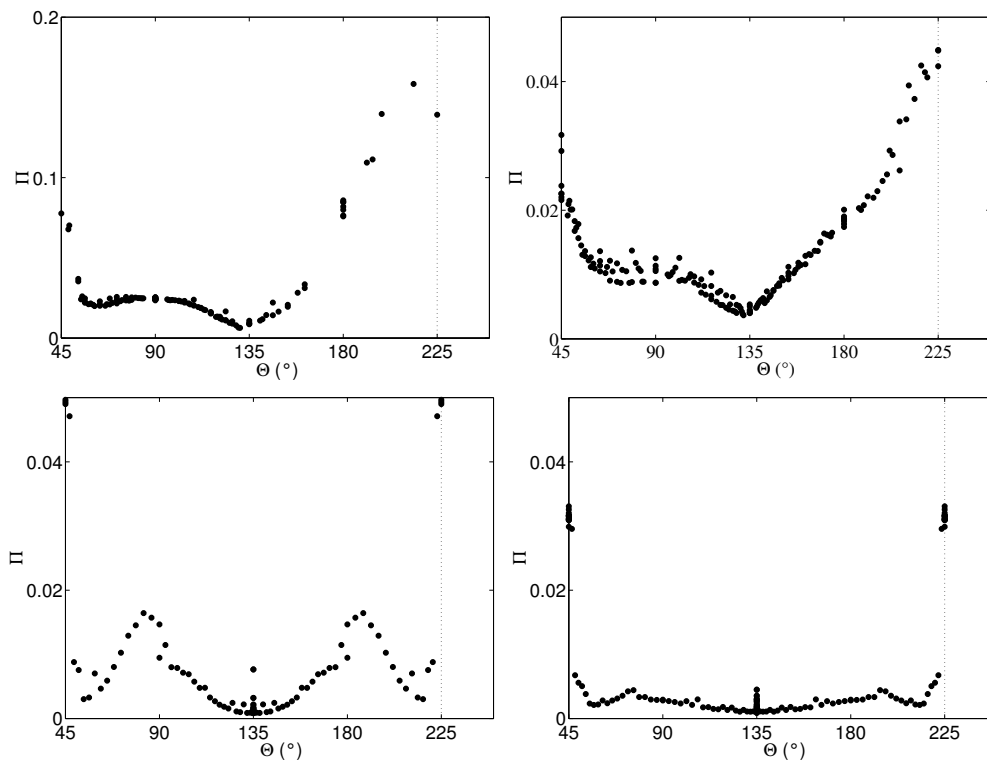


FIG. A.6 – Valeurs de l'amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de pression dans le plan équatorial de l'écoulement, en fonction de l'angle  $\Theta$ , pour des turbines de différents types séparées de  $1.78R_c$ , tournant dans une cuve "lisse". a) "TM60", pales hautes de  $0.2R_c$ . b) "TM60", pales hautes de  $0.1R_c$ . c) "TM70", pales hautes de  $0.2R_c$ . d) "TM70", pales hautes de  $0.1R_c$ .

La figure A.6 rassemble les résultats des mesures d'amplitude *rms* des fluctuations de pression dans le plan équatorial en fonction de l'angle  $\Theta$  pour les différents jeux de turbines, dans une cuve cylindrique "lisse". La rangée de graphes du haut rassemble les résultats obtenus avec les turbines "TM60" (pales courbes,  $R_t/R_c = 0.92$ ) pour les deux hauteurs de pales, la rangée du bas rassemble les résultats obtenus avec les turbines "TM70" (pales droites,  $R_t/R_c = 0.73$ ) pour les deux hauteurs de pales.

– Un premier point apparent sur ces graphes est que, à type de turbine fixé, les fluctuations de pression sont nettement moins intenses lorsque les pales sont hautes de  $0.1R_c$  que lorsque les pales sont hautes de  $0.2R_c$ . Comme dans le cas des mesures de couple, la différence ne se réduit pas à une simple division de l'amplitude par un facteur 2.

– D'autre part, nous voyons que l'augmentation de l'amplitude *rms* des fluctuations au voisinage de  $\Theta = 225^\circ$  est nettement moins sensible lorsque les turbines "TM60" sont munies de petites pales que lorsqu'elles sont munies de pales hautes. Nous avons par ailleurs constaté que le signal de pression obtenu en  $\Theta = 225^\circ$  lors des mesures avec les turbines munies de petites pales ne présente pas les caractéristiques d'un signal de contra-rotation "standard" (les pics de basse pression sont absents, il n'y a pas de dynamique à grande échelle de temps). Il semble donc qu'au cours de ces mesures l'écoulement obtenu pour  $\Theta = 225^\circ$  n'ait pas été un écoulement de contra-rotation "habituel". L'étude de ce type de phénomènes fait l'objet du chapitre 5.

– Ensuite, nous remarquons que la dépendance en  $\Theta$  de l'amplitude *rms* des fluctuations n'est pas la même suivant que les turbines montées sont du type "TM60" ou du type "TM70". Dans le cas des turbines "TM60", cette dépendance semble relativement continue sur l'ensemble de la gamme. Dans le cas des turbines "TM70", une discontinuité est clairement visible au voisinage de la contra-rotation, en  $\Theta = 48^\circ$  environ. Nous avons observé le signal de pression dans ces deux plages. En  $\Theta = 45^\circ$ , le signal ressemble qualitativement à celui que nous avons déjà décrit pour les turbines "TM60" (structures de basse pression, grandes échelles de temps). Au delà de  $\Theta = 50^\circ$ , le signal a une densité spectrale de puissance "blanche", à laquelle peuvent s'ajouter des composantes périodiques de faible amplitude.

### A.3.3 Différents jeux de turbines, cuve munie d'ailettes.

La figure A.7 rassemble les résultats des mesures d'amplitude *rms* des fluctuations de pression dans le plan équatorial en fonction de l'angle  $\Theta$  pour les différents jeux de turbines, dans une cuve cylindrique munie d'ailettes verticales de hauteur  $h_a = 0.1R_c$ . Pour ces mesures, le capteur de pression était monté à mi-chemin entre deux ailettes, dans le plan équatorial. La rangée de graphes du haut rassemble les résultats obtenus avec les turbines "TM60" pour les deux hauteurs de pales, la rangée du bas rassemble les résultats obtenus avec les turbines "TM70" pour les deux hauteurs de pales. Nous voyons immédiatement sur ces graphes que l'ajout d'ailettes sur la cuve cylindrique s'accompagne de modifications profondes de l'amplitude *rms* des fluctuations de pression.

– Dans le cas des turbines "TM60", les ailettes réduisent notablement l'amplitude des fluctuations de pression au voisinage du capteur. L'amplitude semble peu affectée entre  $\Theta = 90^\circ$  et  $\Theta = 180^\circ$ , mais les fortes augmentations observées sans ailettes dans les régions de contra-rotation semblent "gommées". Dans les deux régions de contra-rotation, il est cependant possible de voir sur le signal des pics de basse pression.

– Dans le cas des turbines "TM70", l'influence de la présence des ailettes varie selon la valeur de  $\Theta$ . Les décrochements en  $\Theta = 45^\circ$  et  $\Theta = 225^\circ$  sont atténués (cas  $h = 0.2R_c$ ) ou supprimés (cas  $h = 0.1R_c$ ), mais les ailettes semblent introduire un niveau de fluctuation minimal dans la région de co-rotation  $90^\circ < \Theta < 180^\circ$ . L'amplitude des fluctuations dans le cas des turbines "TM70"

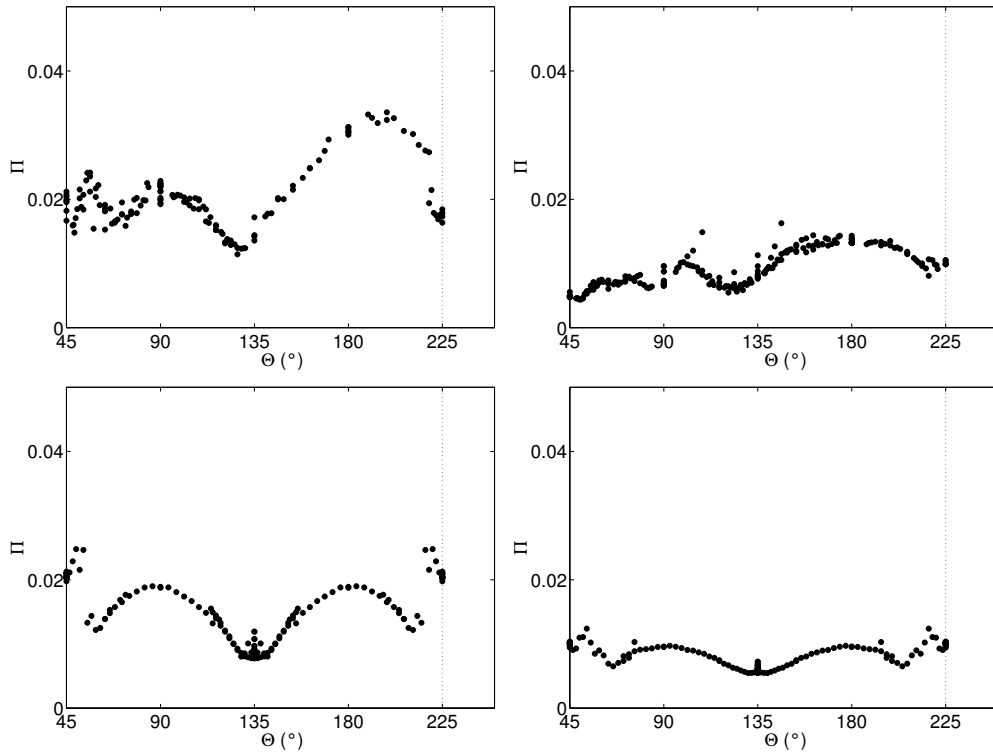


FIG. A.7 – Valeurs de l’amplitude rms adimensionnelle des fluctuations de pression dans le plan équatorial de l’écoulement, en fonction de l’angle  $\Theta$ , pour des turbines de différents types séparées de  $1.78R_c$ , tournant dans une cuve munie de quatre ailettes. a) “TM60”, pales hautes de  $0.2R_c$ . b) “TM60”, pales hautes de  $0.1R_c$ . c) “TM70”, pales hautes de  $0.2R_c$ . d) “TM70”, pales hautes de  $0.1R_c$ .

munies de pales de  $0.1R_c$  est ainsi notablement augmentée sur l’ensemble de la plage de mesure, excepté aux deux extrémités.

## A.4 Compléments de caractérisation des états intermittents.

– Taux de présence dans les deux états aux faibles déséquilibres.

Nous avons représenté l’évolution du complément à 1 du taux de présence dans l’état rapide  $\phi_{rapide}$  en fonction de  $\delta\Psi$  en figure A.8a, pour différents critères de définition de l’état rapide. Nous voyons sur cette figure que  $\phi_{rapide}$  tend vers 1 exponentiellement lorsque le déséquilibre  $\delta\Psi$  diminue, et ce même si le critère est déplacé sur une gamme assez large (voir figure A.8b). Nous avons ajusté les dépendances en fonction de  $\delta\Psi$ , soit par ajustement linéaire de  $\log(1 - \phi_{rapide})$ , soit par ajustement direct de  $1 - \phi_{rapide}$  par la forme  $\exp(a\delta\Psi + b)$ . Les résultats obtenus sont très proches, nous ne donnerons que ceux obtenus par régression linéaire. Dans le cas du critère le plus proche de l’état rapide, (ligne du bas sur le graphe A.8b), le coefficient  $a$  vaut  $12.6/^\circ$ , pour les autres critères (lignes du milieu et du haut), il vaut respectivement  $14.4/^\circ$  et  $20.6/^\circ$ . Les coefficients de détermination valent respectivement 0.992, 0.996 et 0.985. Il semble donc que, pour une gamme assez large de définitions de l’état rapide, le taux de présence dans cet état tende vers 1 exponentiellement lorsque le déséquilibre des couples des moteurs diminue. La rapidité de cette variation exponentielle dépend elle du critère de définition adopté.

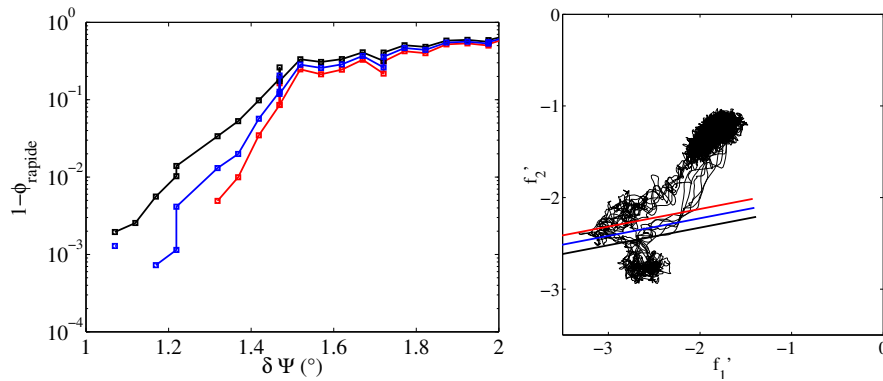


FIG. A.8 – a) *Ecart à 1 du taux de présence dans l'état rapide  $\phi_{rapide}$  en fonction du déséquilibre, pour différents critères de définition de l'état rapide.* b) *Droites du plan  $(f'_1, f'_2)$  correspondant aux différents critères.*

– *Nombres de transitions par unité de temps.*

La figure A.9 représente les nombres de transitions effectuées par le système par unité de

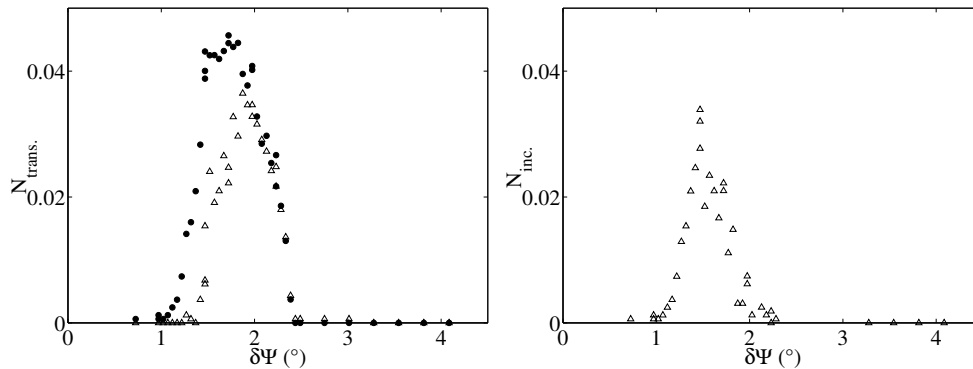


FIG. A.9 – a) *Nombre de transitions par unité de temps, en fonction du déséquilibre  $\delta\Psi$ . Les points  $\bullet$  représentent le nombre d'arrivées dans l'état rapide par unité de temps, et les triangles  $\triangle$  représentent le nombre de sorties de l'état lent par unité de temps.* b) *Nombre de transitions incomplètes par unité de temps en fonction de  $\delta\Psi$ .*

temps adimensionnelle, en fonction du déséquilibre des couples des moteurs. En suivant la courbe du nombre de sorties de l'état lent par unité de temps en partant des forts déséquilibres, ce nombre de sorties commence par valoir 0 de  $\delta\Psi = 4.5^\circ$  à  $\delta\Psi = 2.45^\circ$ , puisque le système reste en permanence dans l'état lent. De  $\delta\Psi = 2.5^\circ$  à  $\delta\Psi \simeq 2^\circ$ , le nombre de sorties augmente de manière monotone. La qualité de nos données ne nous permet malheureusement pas de nous avancer sur la forme exacte de cette dépendance. Lorsque  $\delta\Psi$  devient inférieur à  $2^\circ$ , le nombre de départs de l'état lent diminue assez rapidement, et s'annule pour  $\delta\Psi \simeq 1.3^\circ$ . Si nous nous intéressons maintenant à la courbe du nombre d'arrivées dans l'état rapide, nous voyons que de  $\delta\Psi = 2.45^\circ$  à  $\delta\Psi = 2^\circ$ , le système arrive dans l'état rapide autant de fois qu'il quitte l'état lent. Une fois de plus, nous constatons que les transitions sont toujours complètes dans cette gamme de déséquilibres : il est visiblement très rare que l'écoulement s'arrête avant l'état rapide lorsqu'il a quitté l'état lent, de même qu'il est rare que le système arrive dans l'état rapide sans provenir directement de l'état lent. Cependant, nous pouvons remarquer qu'à partir de  $\delta\Psi = 2^\circ$

le nombre d'arrivées dans l'état rapide continue d'augmenter sur une certaine plage alors que le nombre de départs de l'état lent diminue fortement. La différence de fréquence de ces deux types événements est due aux transitions incomplètes au cours desquelles le système quitte l'état rapide et y revient immédiatement sans passer par l'état lent. La fréquence de ces transitions incomplètes est représentée en figure A.9b. Nous voyons que ces transitions ne se produisent jamais jusqu'en  $\delta\Psi = 2^\circ$ , ont une fréquence d'apparition maximale en  $\delta\Psi = 1.5^\circ$ , puis redeviennent de plus en plus rares quand le déséquilibre s'annule.

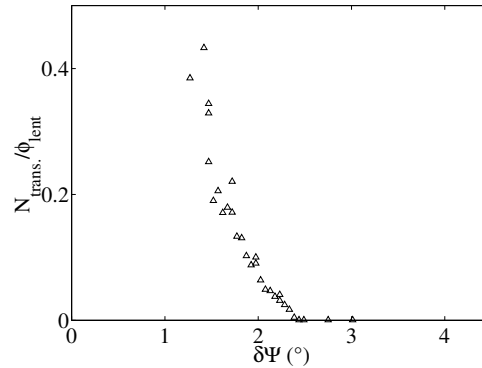


FIG. A.10 – Nombre de sorties de l'état lent par unité de temps passée dans l'état lent.

Nous avons vu sur la figure A.9 que lorsque le déséquilibre devenait inférieur à  $2^\circ$ , le nombre de sorties de l'état lent diminue. Il pourrait paraître surprenant à première vue que le système sorte de moins en moins d'un état qui est *a priori* de plus en plus instable. Ce paradoxe se résout en fait si nous réalisons que, le système n'arrivant presque plus jamais dans l'état lent, il n'est pas étonnant qu'il n'en sorte presque plus jamais... La bonne manière de caractériser la fréquence des sorties de l'état lent n'est donc pas de mesurer le nombre de sorties par unité de temps. La figure A.10 représente ainsi le nombre de sorties de l'état lent par unité de temps *passée dans l'état lent*. Nous voyons que, loin de décroître, cette grandeur augmente en fait lorsque le déséquilibre diminue, et ce sur toute la plage où nous avons pu observer des passages par l'état lent. Il serait bien évidemment intéressant de caractériser cette augmentation, et notamment de déterminer si elle se traduit par une divergence pour une valeur du déséquilibre. Malheureusement, nous nous heurtons une fois de plus à l'insuffisante qualité de nos mesures. Un autre point qui est remarquable sur cette courbe est que le nombre de transitions par unité de temps passée dans l'état lent peut atteindre des valeurs 10 fois plus élevées que le nombre de transitions par unité de temps. Ceci signifie que dans la gamme de déséquilibre qui va de  $1^\circ$  à  $2^\circ$  environ, ce n'est pas le temps que met le système à sortir de l'état lent qui freine la succession des transitions, mais bien le temps qu'il met à y revenir.

La même ligne de réflexion nous a alors conduit à représenter sur la figure A.11 le nombre des retours à l'état lent et le nombre des transitions incomplètes, non pas par unité de temps, mais par unité de temps passée dans l'état rapide. Nous voyons que le nombre des retours à l'état lent ne décroît pas aux grands déséquilibres dans cette représentation, mais que la courbe n'a par contre pas la même allure que celle représentée en figure A.10. Nous pouvons remarquer tout d'abord que les valeurs obtenues sont bien plus faibles, étant inférieures à 0.15 retours par unité de temps passée dans l'état rapide, valeur obtenue pour le déséquilibre maximal,  $\delta\Psi = 2.40$ . De plus, leur croissance ne semble pas s'accélérer lorsque le déséquilibre augmente. L'ajustement des données sur la plage  $1.5^\circ < \delta\Psi < 2.35^\circ$  a un coefficient de détermination de 0.966, et le coefficient directeur de la droite vaut 0.136. Sur la figure A.11b, nous voyons par contre que le nombre de transitions



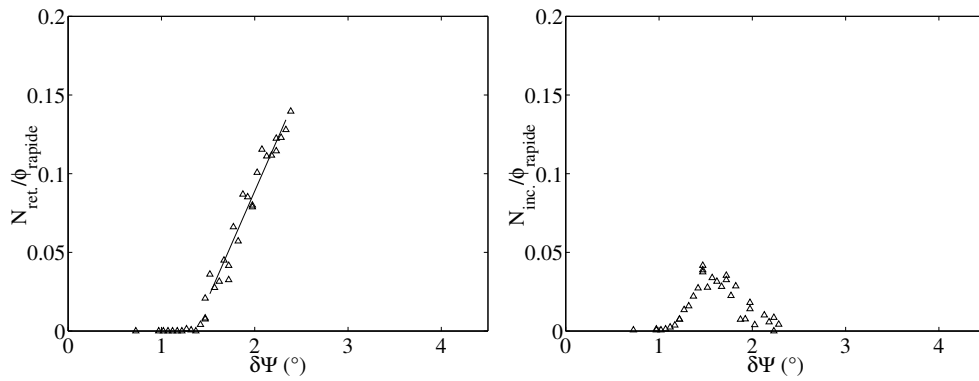


FIG. A.11 – a) Nombre d’entrées dans l’état lent par unité de temps passée dans l’état rapide. La ligne en trait fin représente l’ajustement linéaire des données sur la plage  $1.5^\circ < \delta\Psi < 2.35^\circ$ . b) Nombre de transitions incomplètes par unité de temps passée dans l’état rapide.

incomplètes par unité de temps passée dans l’état rapide décroît nettement pour les fortes valeurs du déséquilibre. Ceci signifie que la décroissance du nombre de ces événements que nous avons pu observer ne provient pas d’un biais simple comme celui qui cachait les augmentations de la fréquence des sorties des états instables. Il semble que la probabilité pour que le système retourne dans l’état rapide sans passer par l’état lent soit réellement plus faible lorsque le déséquilibre des couples fournis par les moteurs est fort.

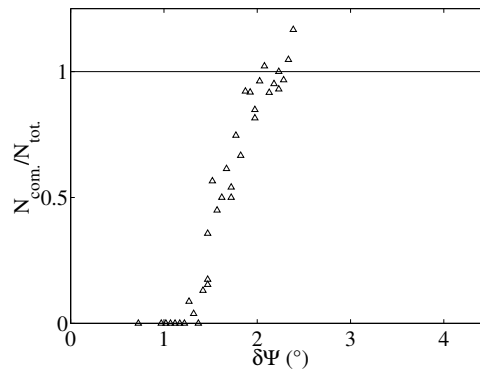


FIG. A.12 – Taux de “réussite” des transitions de retour vers l’état lent, défini comme le rapport du nombre d’entrées dans l’état lent par le nombre de sorties de l’état rapide. Ce nombre vaut 1 dans le cas où toutes les transitions sont complètes. La ligne en trait fin représente la valeur limite 1.

La figure A.12 représente ainsi la fraction des transitions de retour vers l’état lent qui “réussissent”, déterminée comme le rapport du nombre d’arrivées dans l’état lent sur le nombre de départs de l’état rapide. Nous voyons sur cette courbe que ce taux de réussite est nul pour de petits déséquilibres des couples, et qu’il augmente progressivement de  $\delta\Psi = 1.2^\circ$  environ à  $\delta\Psi = 2.3^\circ$ . Il est assez remarquable qu’il puisse être légèrement supérieur à 1 en  $\delta\Psi = 2.2^\circ$ . Il semble que notre système de détection puisse encore recevoir quelques perfectionnements...

## A.5 “Catalogue” de bilans de quantités conservées.

La démarche que nous avons adoptée au chapitre 6 est très générale, et peut s’appliquer aux cas de très nombreuses autres situations couramment rencontrées dans les expériences visant à étudier la turbulence hydrodynamique. L’exemple du calcul de la force de traînée qui s’exerce sur un corps placé dans la veine d’une soufflerie est ainsi bien connu. Nous présentons ci-dessous, sous une forme bien sûre plus concise, un certain nombre d’autres bilans portant sur des quantités conservées diverses, dans un certain nombre de situations.

### A.5.1 La quantité de mouvement dans l’écoulement de von Kármán

Si nous étudions maintenant l’évolution de la composante verticale de la *quantité de mouvement* contenue dans le volume  $\mathcal{V}(Z)$  de la figure 6.1, en intégrant sur  $\mathcal{V}(Z)$  la composante sur  $z$  de l’équation de Navier-Stokes, nous obtenons (en l’absence d’autre force de volume que le poids) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho v_z d\tau + \int_{\Sigma(Z)} \rho v_z^2 dS &= \int_{\Sigma_b} p dS - \int_{\Sigma(Z)} p dS \\ &+ \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} \partial_r v_z dS - \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho g d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Dans cette expression,  $p$  est la pression “complète” (comprenant la partie hydrostatique) mesurée au point d’intégration, et  $g$  désigne l’accélération de la gravité, supposée dirigée vers les  $z$  décroissants. La surface  $\Sigma_b$  comprend la section de l’axe de la turbine du bas. En prenant la moyenne temporelle de cette équation, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(Z)} \rho V_z^2 dS + \int_{\Sigma(Z)} \rho \overline{\tilde{v}_z^2} dS &= \int_{\Sigma_b} \bar{p} dS - \int_{\Sigma(Z)} \bar{p} dS \\ &+ \mu \int_{\mathbf{S}(Z)} \partial_r V_z dS - \int_{\mathbf{V}(Z)} \rho g d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nous reconnaissons dans le premier terme du membre de droite la composante sur  $z$  de la force exercée par l’extérieur sur le fluide au travers de  $\Sigma_b$ ,  $f_z$ . Nous voyons ensuite que le fluide contenu dans  $\mathcal{V}(Z)$  exerce en moyenne une force sur le fluide situé dans l’autre portion de l’écoulement, et cette fois par quatre biais, la viscosité, la pression moyenne, l’écoulement moyen et le terme  $\overline{\tilde{v}_z^2}$  du tenseur de Reynolds. Là encore, nous pourrions réaliser l’analyse spectrale de ce terme, et nous obtiendrions que :

$$\overline{\tilde{v}_z \tilde{v}_z} = 2 \int_0^\infty |\widehat{v}_z|^2(f) df \quad (\text{A.3})$$

Le co-spectre de  $\tilde{v}_z$  et de lui-même est bien évidemment égal à son spectre de puissance. Le comportement de  $|\widehat{v}_z|^2(f)$  pour les grandes valeurs de  $f$  est bien connu, il est donné par la théorie de Kolmogorov. Il est par ailleurs aussi bien connu que  $|\widehat{v}_z|^2(f)$  décroît *beaucoup moins rapidement* que  $2\Re[\widehat{v}_\theta^* \widehat{v}_z](f)$ . Nous pouvons voir sur la figure A.13, qui présente l’intégrale du spectre de puissance de  $\tilde{v}_z$ , calculée à partir de données obtenues comme précédemment, que l’intégrale de  $|\widehat{v}_z|^2(f)$  converge beaucoup moins rapidement vers sa valeur finale que l’intégrale du co-spectre que nous avons présentée en figure 6.7.

Nous voyons donc que, si le terme non-diagonal du tenseur de Reynolds  $\overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_z}$  semble être principalement dû aux structures à grande échelle présentes dans la couche de cisaillement, c’est

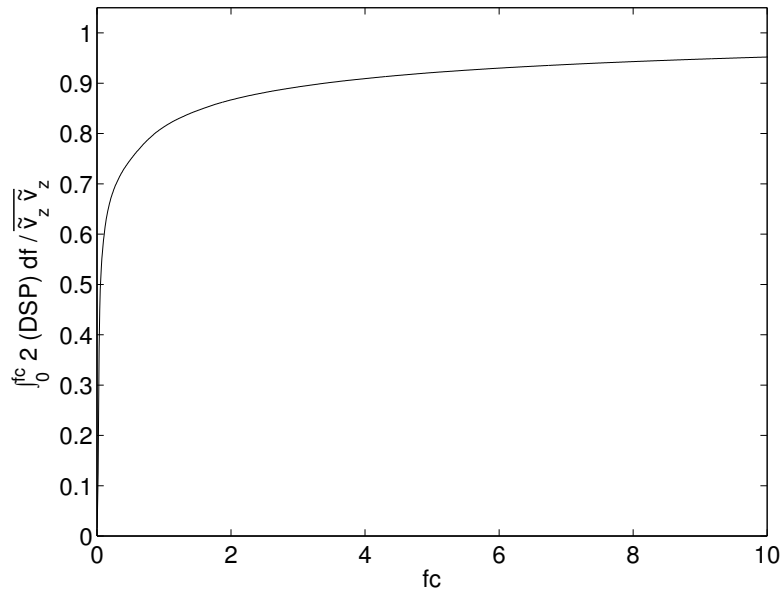


FIG. A.13 – Intégrale de  $2|\hat{v}_z|^2(f)$  de 0 à  $f_c$ , divisée par  $\overline{v_z^2}$ .

*beaucoup moins vrai* du terme diagonal  $\overline{v_z^2}$ . Il semble donc que sur ce point chaque cas doive être traité séparément.

### A.5.2 Le moment cinétique dans l'écoulement de Taylor-Couette

Ce cas se traite d'une manière très similaire, en considérant la composante sur  $z$  du produit vectoriel de la position du point courant,  $\vec{r}$  avec l'équation de Navier-Stokes. Le volume d'intégration est représenté ci-dessous en figure A.14.

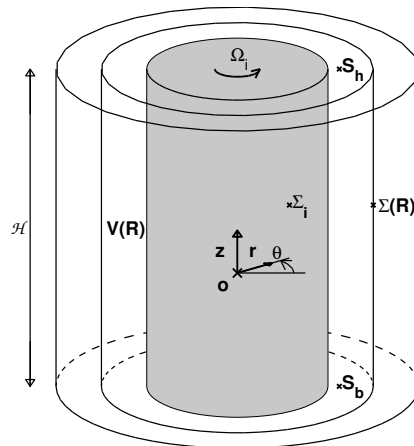


FIG. A.14 – Volume de contrôle utilisé pour le bilan de moment cinétique dans l'écoulement de Taylor-Couette.  $S_b$  et  $S_h$  ferment  $V(R)$  en bas et en haut respectivement, et  $\Sigma_i$  est la surface du cylindre intérieur.

Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(R)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(R)} \rho r v_\theta v_r dS &= \mu \int_{\Sigma(R)} r^2 \partial_r \left( \frac{v_\theta}{r} \right) dS - \mu \int_{\Sigma_i} r^2 \partial_r \left( \frac{v_\theta}{r} \right) dS \\ &+ \mu \int_{S_h} r \partial_z v_\theta dS - \mu \int_{S_b} r \partial_z v_\theta dS \end{aligned}$$

En prenant la moyenne de cette expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(R)} \rho V_\theta V_r dS + \int_{\Sigma(R)} \overline{\rho \tilde{v}_\theta \tilde{v}_z} dS &= \mu \int_{\Sigma(R)} r^2 \partial_r \left( \frac{V_\theta}{r} \right) dS - \mu \int_{\Sigma_i} r^2 \partial_r \left( \frac{V_\theta}{r} \right) dS \\ &+ \mu \int_{S_h} r \partial_z V_\theta dS - \mu \int_{S_b} r \partial_z V_\theta dS \end{aligned}$$

A vitesse de rotation constante, il est de nouveau possible de voir que le frottement visqueux sur la surface du cylindre intérieur est égal au couple fourni par le moteur diminué des divers frottements,  $\Gamma$ . En notant  $\Gamma_v(R)$  le moment dynamique résultant des frottements sur  $S_h$  et  $S_b$ , nous obtenons comme expression finale :

$$\int_{\Sigma(R)} \rho V_\theta V_r dS + \int_{\Sigma(R)} \overline{\rho \tilde{v}_\theta \tilde{v}_r} dS = \mu \int_{\Sigma(R)} r^2 \partial_r \left( \frac{V_\theta}{r} \right) dS + \Gamma + \Gamma_v(R) \quad (\text{A.4})$$

Comme dans l'écoulement de von Kármán, nous voyons que le moment cinétique peut emprunter trois voies pour traverser la surface  $\Sigma(R)$  :

- Il peut être transmis par  $\mathbf{V}(R)$  au reste de l'écoulement par le terme de frottement visqueux du membre de droite de l'équation A.4.
- Il peut être transporté au travers de  $\Sigma(R)$  par l'écoulement moyen.
- Il peut être transporté par le terme  $\overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_r}$  du tenseur de Reynolds.

A faible nombre de Reynolds, il est bien connu que le terme de transport visqueux domine largement les autres. A grand nombre de Reynolds, on peut s'attendre à ce que les termes de transports exercent une influence dominante vers le milieu de l'entrefer, c'est à dire loin des parois. Près des parois, par contre, la composante normale de la vitesse,  $v_r$ , est obligée de s'annuler. La corrélation  $\overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_r}$  ne peut donc pas atteindre de grandes valeurs. Il y a donc des régions de *couches limites*, de faible épaisseur, dans lesquelles la viscosité reste le mécanisme de transport de moment cinétique dominant, alors même que le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand, et que le cœur de celui-ci est très turbulent.

La valeur de la corrélation  $\overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_r}$  peut bien sûr être décomposée en contributions provenant des différentes fréquences temporelles :

$$\overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_r} = 2 \int_0^\infty \Re [\hat{v}_\theta(f) \hat{v}_r^*(f)] df$$

Revenons à l'équation de bilan instantané, et plaçons  $\Sigma(r)$  loin des parois, à grand nombre de Reynolds. Si de plus nous considérons un montage de très grand allongement, l'influence des contributions visqueuses sur  $S_b$  et  $S_h$  est très faible devant celle du terme inertiel, qui s'exerce sur une surface beaucoup plus grande. Nous pouvons obtenir l'équation de bilan instantané simplifiée :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(R)} \rho r v_\theta d\tau + \int_{\Sigma(R)} \rho r v_\theta v_r dS \sim \gamma \quad (\text{A.5})$$

Dans cette expression,  $\gamma$  représente la valeur instantanée du couple du moteur (corrigé comme ci-dessus). En définissant maintenant l'opération de moyenne comme une moyenne spatiale sur  $\Sigma(R)$ , nous obtenons la forme moyennée de l'équation comme :

$$\rho 2\pi \mathcal{H} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^R r^2 V_\theta dr + R^2 \overline{v_\theta v_r} \right] = \gamma \quad (\text{A.6})$$

Il est facile de voir que le fait que la divergence du champ de vitesse soit nulle impose à la vitesse radiale moyenne d'être nulle, en l'absence d'entrée ou de sortie de fluide par les extrémités. La valeur moyenne du produit des vitesses se ramène alors à celle du produit des vitesses fluctuantes. En faisant intervenir maintenant les transformées de Fourier de  $\tilde{v}_\theta$  et  $\tilde{v}_r$  en  $\theta$  et  $z$  (comme les vitesses sont périodiques en  $\theta$ , et comme le montage est fini en  $z$ , les nombres d'ondes peuvent être pris discrets, et notés  $m$  et  $n$ ), nous avons :

$$\overline{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_r} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_\theta(m,n) \hat{v}_r(-m,-n)$$

Cette fois, la valeur instantanée du transport de moment cinétique au travers de  $\Sigma(R)$  peut être décomposée en contributions provenant des différentes structures spatiales présentes dans l'écoulement. La contribution des structures axisymétriques, pour lesquelles  $m = 0$ , correspondrait par exemple à :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_\theta(0,n) \hat{v}_r(0,-n)$$

### A.5.3 La chaleur en convection de Rayleigh-Bénard

Dans le cas de l'expérience classique de l'écoulement de convection de Rayleigh-Bénard, il est possible d'obtenir une équation pour l'évolution de la quantité de chaleur présente dans le volume  $\mathbf{V}(Z)$  représenté en figure A.15.

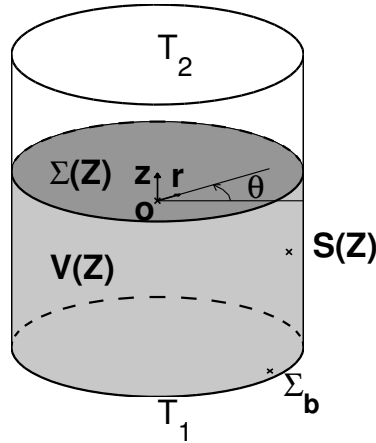


FIG. A.15 – Volume de contrôle utilisé pour le bilan de chaleur en convection de Rayleigh-Bénard.  $\mathbf{V}(Z)$  est fermé en haut par  $\Sigma(Z)$ , en bas par  $\Sigma_b$ , et sur les côtés par  $\mathbf{S}(Z)$ .

En convection de Rayleigh-Bénard, l'évolution de la température au sein de l'écoulement est décrite dans l'approximation de Boussinesq par l'équation :

$$\partial_t(\rho C_p T) + (\vec{v} \cdot \text{grad})(\rho C_p T) = k \Delta T$$

Dans cette expression,  $\vec{v}$  est le champ de vitesse,  $T$  est le champ de température dans le fluide, et  $\rho$ ,  $C_p$  et  $k$  sont respectivement la masse volumique, la capacité calorifique massique et la conductivité thermique du fluide, supposées constantes. En intégrant cette équation sur  $\mathbf{V}(Z)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}(Z)} T d\tau + \rho C_p \int_{\Sigma(Z)} T v_z dS &= \\ k \int_{\mathbf{S}(Z)} \partial_r T dS + k \int_{\Sigma(Z)} \partial_z T dS &- k \int_{\Sigma_b} \partial_z T dS \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Nous pouvons voir aisément que l'intégrale sur  $\Sigma_b$  est égale au flux de chaleur  $\Phi_1$  fourni par le système de chauffage de la plaque du bas. En prenant la moyenne temporelle de l'équation, et en faisant intervenir les parties moyennes et fluctuantes de la température ( $\bar{T}$  et  $\tilde{T}$ ), nous obtenons alors :

$$\Phi_1 = \rho C_p \int_{\Sigma(Z)} \bar{T} v_z dS + \rho C_p \int_{\Sigma(Z)} \overline{\tilde{T} \tilde{v}_z} dS - k \int_{\mathbf{S}(Z)} \partial_r \bar{T} dS - k \int_{\Sigma(Z)} \partial_z \bar{T} dS$$

Cette expression s'interprète de la manière suivante : la chaleur injectée par le système de chauffage de la plaque du bas peut partir par les cotés de la cellule sous forme de fuites (intégrale sur  $\mathbf{S}(Z)$ ), ou traverser  $\Sigma(Z)$  pour rejoindre la plaque du haut. La traversée de  $\Sigma(Z)$  peut se faire de trois manières :

- Par conduction (dernier terme du membre de droite). On imagine intuitivement que c'est ce terme qui domine tant que le fluide reste au repos.
- Par convection par l'écoulement moyen (premier terme du membre de droite).
- Par convection par les fluctuations turbulentes (deuxième terme du membre de droite). Nous voyons ici apparaître une "tension de Reynolds",  $\overline{\tilde{T} \tilde{v}_z}$ . La corrélation  $\overline{\tilde{T} \tilde{v}_z}$  peut être décomposée comme l'intégrale du co-spectre de  $\tilde{T}$  et  $\tilde{v}_z$ , après analyse de Fourier temporelle ou spatiale.

## A.6 Champs de vitesse moyens de l'écoulement de contra-rotation pour différentes valeurs du nombre de Rossby.

Cette section rassemble les champs de vitesses moyens mesurés dans le montage "VKR" pour les différentes valeurs du nombre de Rossby.

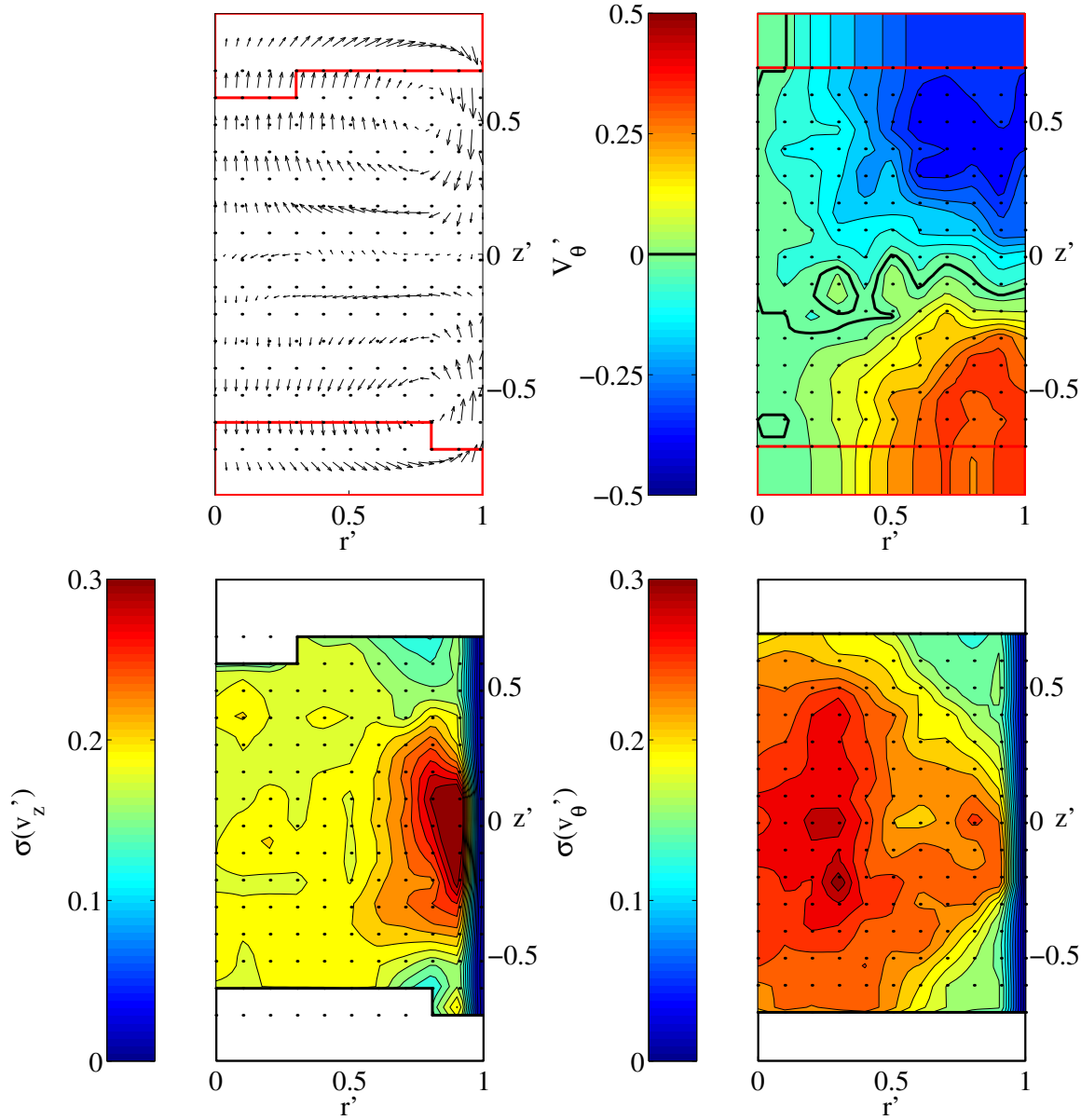


FIG. A.16 – *Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = \infty$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 2$  Hz,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 0$  rad.s $^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.55$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.*

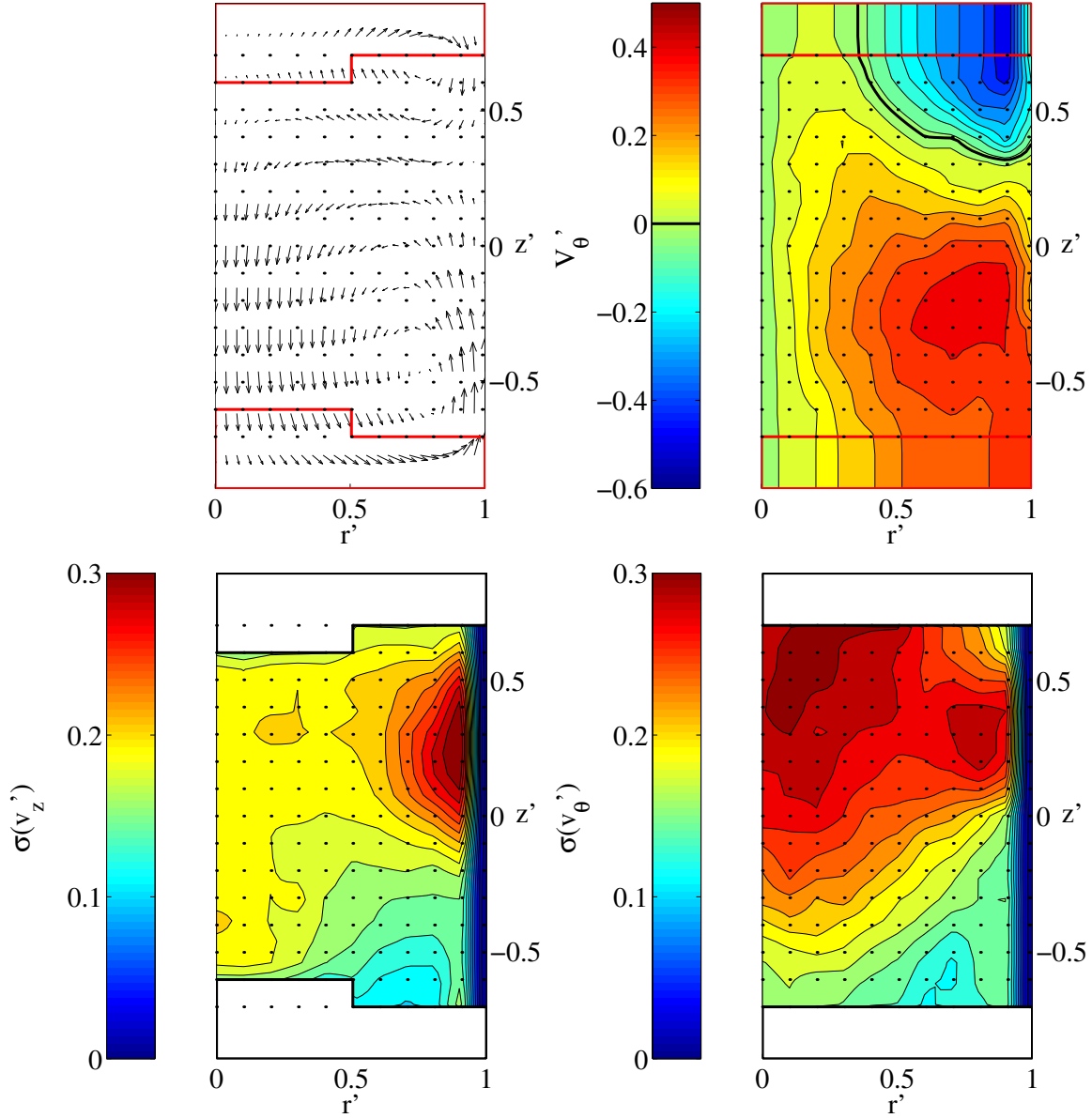


FIG. A.17 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 16$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 4$  Hz,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimuthale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.50$ . En haut à droite : vitesse azimuthale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimuthale.



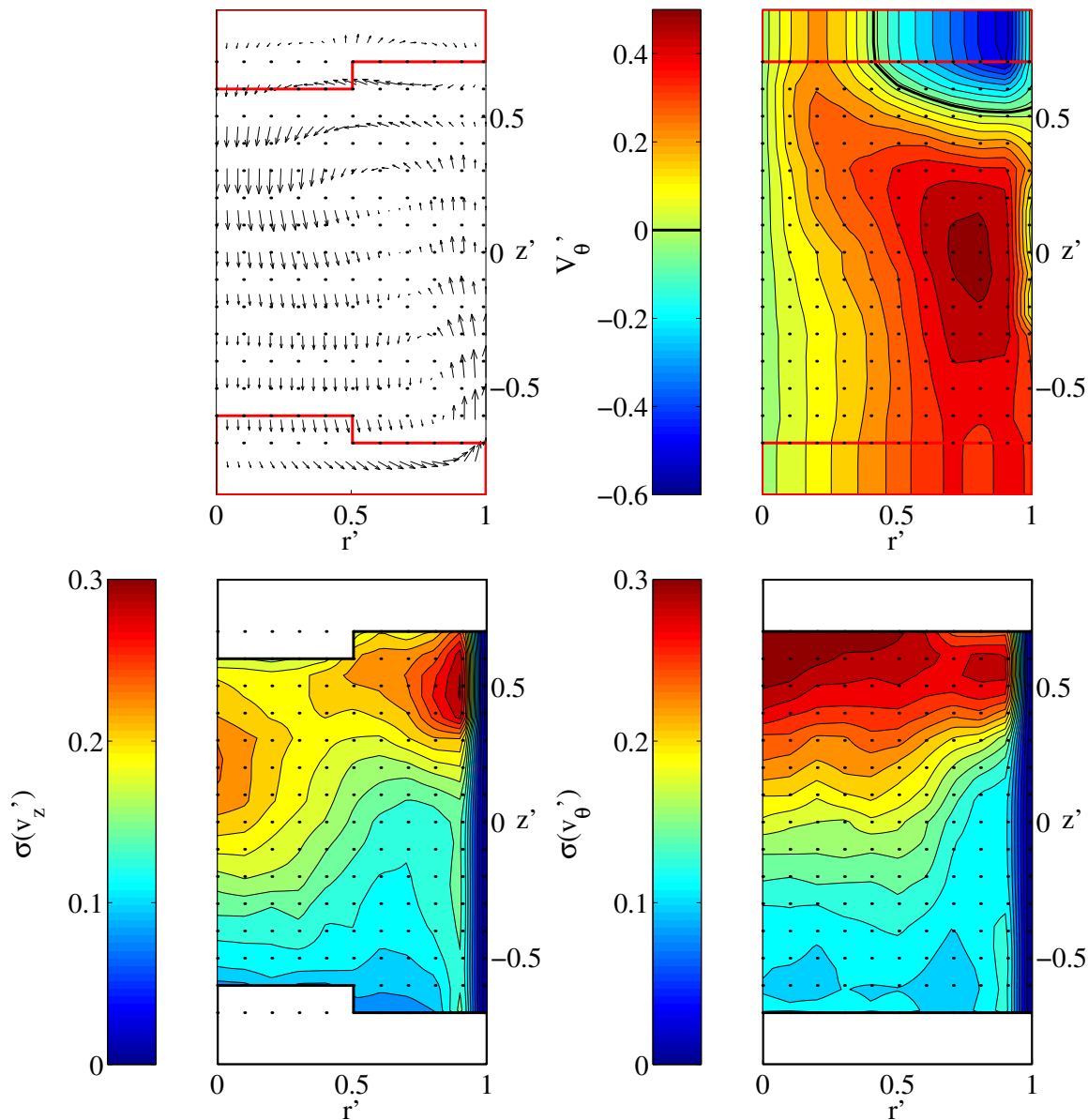


FIG. A.18 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 8$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 4$  Hz,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.44$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.

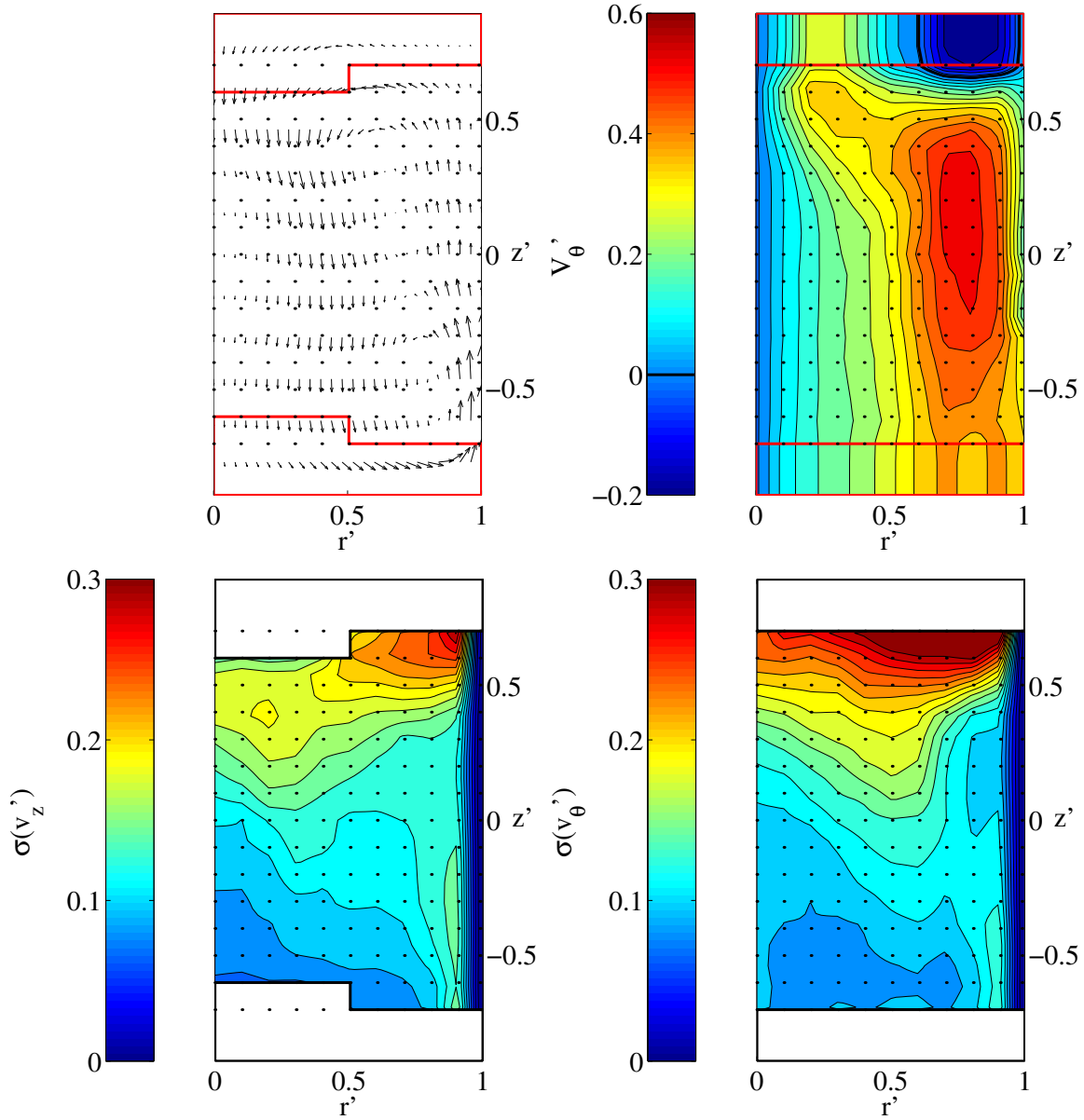


FIG. A.19 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 4$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 2 \text{ Hz}$ ,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimuthale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.48$ . En haut à droite : vitesse azimuthale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimuthale.

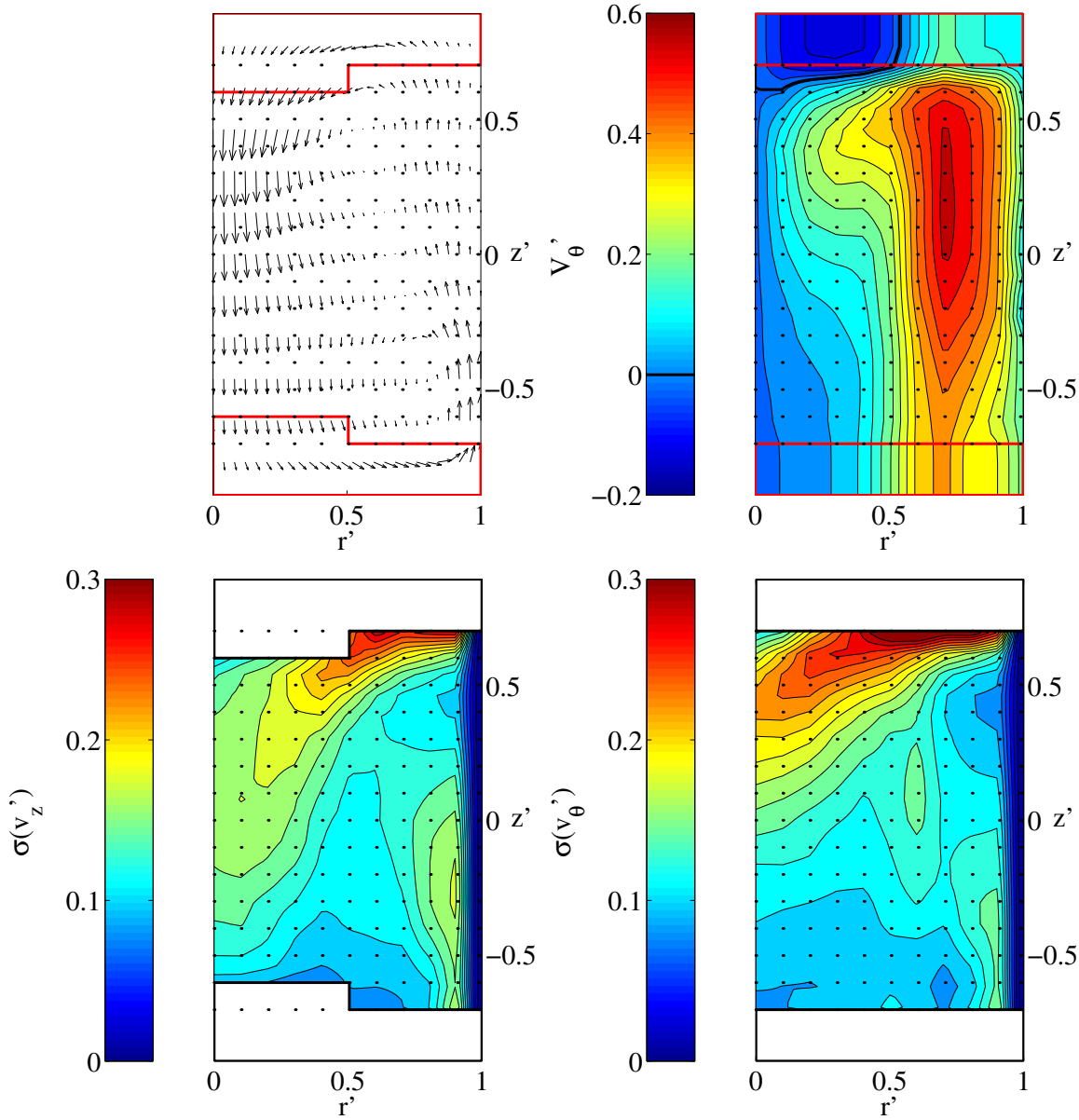


FIG. A.20 – *Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 2$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 2$  Hz,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 2\pi$  rad.s $^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut 0.925 (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de 0.60. En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.*

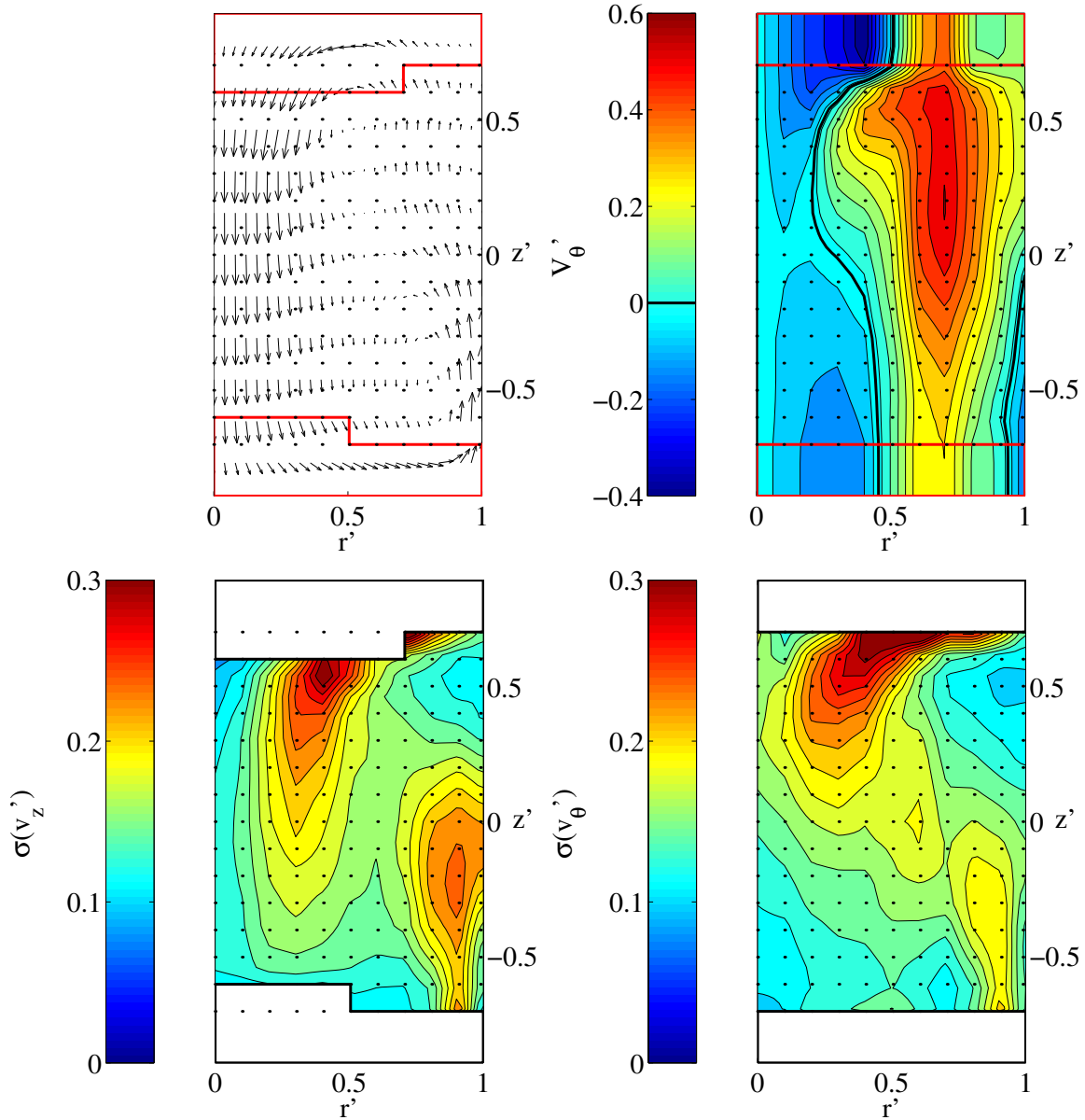


FIG. A.21 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 1$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines “TM60” munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 2 \text{ Hz}$ ,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 2 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimuthale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $0.90$ . En haut à droite : vitesse azimuthale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimuthale.

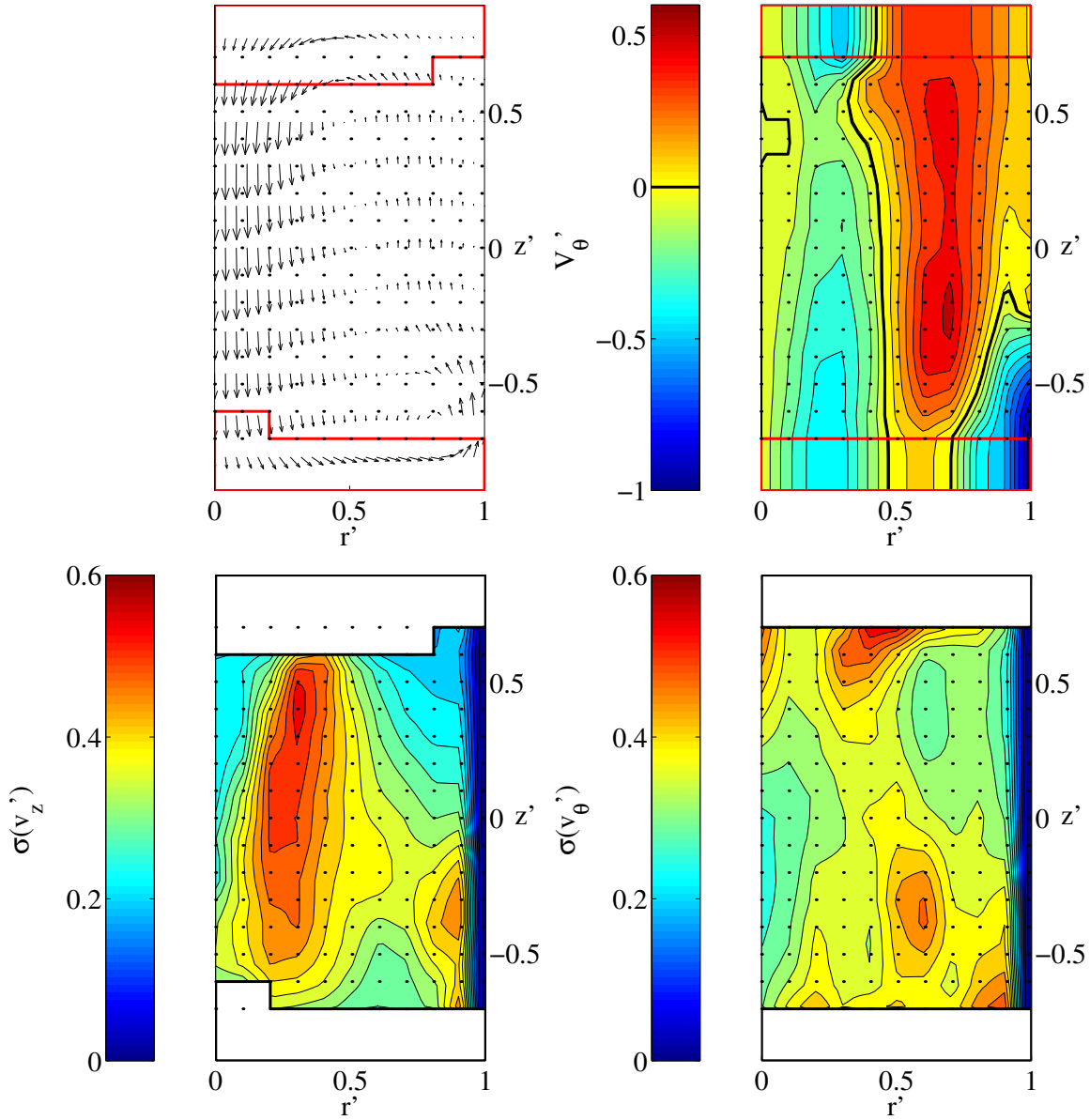


FIG. A.22 – *Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 1/3$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 2 \text{ Hz}$ ,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 6 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $1.75$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.*

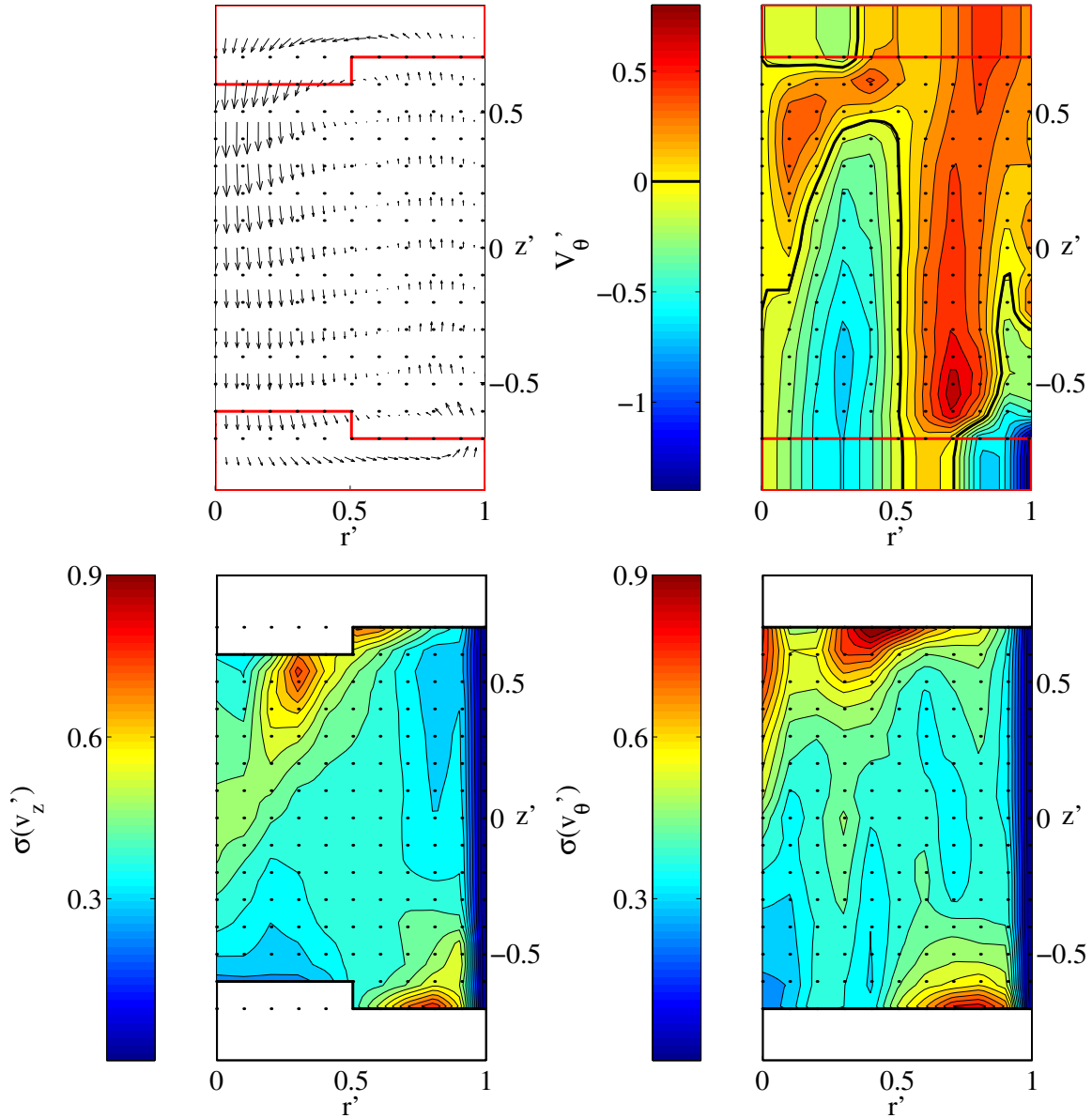


FIG. A.23 – Champ de vitesse moyen de l'écoulement pour  $Ro = 1/6$ . Mesures réalisées avec le jeu de turbines "TM60" munies de pales hautes de  $0.2R_c$ , tournant en contra-rotation à  $1.8R_c$  l'une de l'autre. Les mesures ont été effectuées pour  $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $\Theta = 45^\circ$ ,  $\Omega = 6 \cdot 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Toutes les grandeurs qui interviennent dans les graphes sont sans dimensions, le vecteur rotation du référentiel est égal au vecteur  $\vec{e}_z$  des coordonnées cylindriques naturelles. La vitesse azimutale du bout des pales de la turbine du bas (resp. haut) vaut  $0.925$  (resp.  $-0.925$ ). Les lignes rouges délimitent les zones où l'écoulement n'a pu être mesuré. En haut à gauche : vitesse poloidale. La flèche la plus longue correspond à une vitesse adimensionnelle de  $2.40$ . En haut à droite : vitesse azimutale. En bas à gauche : amplitude rms des fluctuations de vitesse axiale. En bas à droite : amplitude rms des fluctuations de vitesse azimutale.



# Annexe B

## Annexes de la partie II

### B.1 Quelques rappels de théorie des groupes

#### B.1.1 Avertissement

Dans cette annexe, nous présentons un certain nombre des concepts et résultats que nous avons utilisés au chapitre 11. Nous avons pris le parti de recopier textuellement les différentes définitions et propositions à partir d'ouvrages de références, et d'en donner ensuite lorsque cela nous était possible une illustration plus parlante. De cette manière, si cette présentation est extrêmement incomplète, nous espérons que les énoncés rigoureux qu'elle rassemble ne contiennent pas d'erreurs grossières. Dans tous les cas, si le lecteur rencontre un point qui lui paraît suspect, il peut et doit se rapporter aux chapitres *XII*, *XIII* et *XVI* du tome *II* de l'excellent livre de Golubitsky, Stewart et Schaeffer [54], dont l'essentiel de cette section est tirée. Les deux résultats majeurs que nous utilisons, les propositions 1 et 2, peuvent notamment être trouvées en pages 82 et 264 de cet ouvrage. Par ailleurs, nous rappelons que n'avons présenté ici qu'une infime partie des méthodes qui ont été développées pour utiliser les symétries dans l'étude des systèmes physiques en général et des instabilités en particulier. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les méthodes de recherche d'équations d'amplitudes, d'étude de phénomènes de couplage de modes et autres à l'ouvrage cité plus haut, dans lequel il trouvera tout ce qu'il désire, et probablement bien plus...

#### B.1.2 Définition d'un groupe. Groupes isomorphes.

**Définition 1** *Le couple formé d'un ensemble d'éléments  $\Gamma$  et d'une application  $\phi$  de  $\Gamma \times \Gamma$  dans  $\Gamma$  est un **groupe** s'il possède les propriétés suivantes :*

- $\exists e \in \Gamma / \forall f \in \Gamma, \phi(e, f) = \phi(f, e) = f.$
- $\forall f \in \Gamma, \exists f^{-1} \in \Gamma / \phi(f, f^{-1}) = \phi(f^{-1}, f) = e.$
- $\forall (f, g, h) \in \Gamma \times \Gamma \times \Gamma, \phi(f, \phi(g, h)) = \phi(\phi(f, g), h).$

*Un groupe est dit **commutatif** s'il possède de plus la propriété*

- $\forall (f, g) \in \Gamma \times \Gamma, \phi(f, g) = \phi(g, f).$

*L'application  $\phi$  est appelée **loi du groupe**, et est souvent notée “.”. Comme dans la plupart des cas il n'y a pas de risque de confusion, on parle souvent du couple  $(\Gamma, \phi)$  comme du “groupe  $\Gamma$ ”, sans faire explicitement référence à la loi utilisée.*



Nous voyons que l'ensemble des opérations de symétrie qui laissent le montage "VKE" invariant est un groupe, puisque la composition de deux opérations qui laissent le montage invariant le laisse invariant, que la rotation de  $0^\circ$  autour de l'axe peut être composée avec tout élément de l'ensemble sans le changer, et que toute opération de symétrie peut être "défaite" par l'application d'une opération de symétrie qui laisse le montage invariant. Il est moins facile de voir que la troisième propriété est vérifiée, mais il se trouve que c'est le cas. Le groupe des opérations de symétrie qui laissent le montage "VKE" invariant n'est par contre pas un groupe commutatif, puisque, si nous notons  $\rho(\theta)$  la rotation d'angle  $\theta$ , nous avons :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[ , \mathcal{R}_\pi \cdot \rho(\theta) = \rho(-\theta) \cdot \mathcal{R}_\pi$$

A ce stade, nous sommes parvenus à démontrer que l'ensemble des opérations de symétrie qui laissent invariant le montage "VKE" possède la structure d'un groupe, au sens mathématique du terme. Du point de vue de la physique, l'intérêt reste discutable. En effet, nous avons vu que notre objectif n'est pas d'apprendre la théorie des groupes, mais de l'utiliser. Or, il est douteux qu'un mathématicien quelconque se soit appliqué à démontrer des théorèmes portant sur le groupe des opérations de symétrie du montage "VKE". C'est alors qu'intervient une nouvelle notion de théorie des groupes, qui est celle d'*homomorphisme*, et dont nous rappelons la définition ci-dessous :

**Définition 2** Soient  $(G, \phi)$  et  $(H, \psi)$  deux groupes. Une application  $f : G \rightarrow H$  est un **homomorphisme de groupes** si elle possède la propriété suivante :

$$- \forall (g, h) \in G \times G, f(\phi(g, h)) = \psi(f(g), f(h)).$$

C'est un **isomorphisme de groupes** si elle est de plus bijective. Deux groupes entre lesquels il est possible de définir un isomorphisme de groupes sont dits **isomorphes**.

Deux groupes isomorphes sont donc deux groupes dont les éléments sont différents, mais dont les tables de multiplication sont **exactement** identiques (en particulier, cela impose qu'il n'est pas possible que deux éléments différents du premier groupe soient associés au même élément du deuxième). Ils sont alors considérés comme identiques du point de vue de la théorie des groupes. Les conséquences physiques de cette définition sont simples : aucun mathématicien n'a démontré de théorèmes pour le groupe des symétries du montage "VKE", mais nous avons le droit de nous servir de tous ceux qui ont été démontrés pour des groupes auxquels il est isomorphe. Un peu de recherche bibliographique montre que nous avons ainsi à notre disposition tous les théorèmes démontrés pour le groupe des rotations et des réflexions du plan, qui est noté  $O(2)$ . Les opérations de symétrie qui laissent le montage "VKE" invariant ne sont pas des isométries du plan, puisqu'elles s'appliquent au montage "VKE" et non au plan. Comme par contre elles vérifient **exactement** la même table de multiplication, il est possible de définir un isomorphisme entre les deux groupes, et donc de les considérer comme identiques.

Les résultats que nous cherchons à exploiter ne sont valides que pour des "groupes de Lie compacts". Il semble possible de résumer la propriété qui définit un groupe de Lie en disant qu'un groupe de Lie doit être isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe des matrices réelles inversibles de dimension  $n$ , pour un  $n$  quelconque. En pratique, cela signifie qu'il est possible de trouver un ensemble de matrices inversibles de dimension  $n$  qui vérifie la même table de multiplication que les éléments du groupe. Un groupe de Lie est dit "compact" si de plus tous les coefficients de ces matrices sont bornés. Nous voyons que les groupes usuels des rotations,  $SO(n)$ , des rotations et des inversions,  $O(n)$ , des translations sur un tore  $\mathbf{T}^n$ , ainsi que tous les groupes finis sont des groupes de Lie compacts. Le groupe des translations du plan, par contre, est un

groupe de Lie qui n'est pas compact, puisqu'il suffit de choisir les matrices qui représentent les translation en  $x$  de distances multiples de 200000 km pour obtenir des coefficients aussi proches de l'infini que l'on veut. En tout état de cause, le groupe qui nous intéresse,  $O(2)$ , est un groupe de Lie compact.

### B.1.3 Les représentations d'un groupe.

Au cours du paragraphe précédent, nous sommes parvenus à la conclusion que nous avons le droit de nous servir des théorèmes de théorie des groupes qui s'appliquent au groupe  $O(2)$ . Sans entrer plus avant dans l'étude de cette discipline, nous allons donc commencer à nous rapprocher du problème qui nous préoccupe, en nous orientant vers celle de ses branches qui traite de l'interaction entre les groupes et les différents concepts d'algèbre linéaire que sont l'opérateur de l'équation d'induction et ses modes propres.

#### Définition des représentations d'un groupe.

Notre premier pas dans cette direction sera de définir rigoureusement la manière dont un groupe peut agir sur les éléments d'un espace vectoriel.

**Définition 3** Soient  $\Gamma$  un groupe de Lie,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires inversibles de  $E$  dans  $E$ , qui est un groupe pour la loi de composition  $\circ$ . Alors une **représentation réelle** de  $\Gamma$  sur  $E$  est un homomorphisme  $\psi$  de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Si la dimension de  $E$  est égale à  $n$ , on dit que  $\psi$  est une représentation de dimension  $n$ . Enfin, si  $\psi$  est injective, on dit que la représentation est fidèle.

Cette définition, qui doit malheureusement être mathématiquement rébarbative pour être mathématiquement exacte, dissimule la très simple réalité suivante : une représentation du groupe  $\Gamma$  sur un espace vectoriel  $E$ , ce n'est qu'un ensemble d'applications linéaires inversibles sur  $E$  qui vérifient la table de multiplication du groupe  $\Gamma$  lorsqu'on les compose. Si  $E$  est de dimension  $n$ , ce sont des matrices réelles de taille  $n$ . Si la représentation est fidèle, c'est qu'il y a autant de matrices différentes que d'éléments du groupe (il n'est pas possible qu'une seule matrice représente deux éléments différents du groupe). Il est bien sûr possible de définir des représentations complexes, agissant sur des espaces vectoriels complexes, mais il les résultats qui nous intéressent peuvent s'exprimer en termes de représentations réelles uniquement. Il ne sera donc question que de ces dernières dans la suite. Nous avertissons par ailleurs le lecteur qu'un abus de langage fréquemment rencontré dans la littérature consiste à dire la "représentation  $E$ " au lieu de "l'espace  $E$  sur lequel sont définies les applications linéaires de la représentation". Nous tenterons pour notre part de ne pas y recourir, mais la tentation est forte, et un accident est vite arrivé...

Nous pouvons maintenant définir rapidement deux notions utiles, qui sont celles de représentations isomorphes et de caractères des représentations. Ces notions peuvent être passées en première lecture.

**Définition 4** Soient  $\Gamma$  un groupe de Lie,  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\phi$  et  $\psi$  deux représentations de  $\Gamma$  sur  $E$  et  $F$ , respectivement. Alors  $\phi$  et  $\psi$  sont **isomorphes** s'il existe une application linéaire inversible  $\mathbf{A}$  de  $E$  dans  $F$  telle que :

$$\forall g \in \Gamma, \psi(g) \circ \mathbf{A} = \mathbf{A} \circ \phi(g)$$

Une fois de plus, le sens exact de cette définition reste assez mystérieux, mais ses conséquences pratiques sont simples : si  $\phi$  et  $\psi$  sont isomorphes, il est possible de définir un changement de

base sur l'un ou l'autre des espaces  $E$  et  $F$  tel que les matrices qui représentent les éléments du groupe soient les mêmes dans les deux espaces. Une fois de plus, cela exprime le fait que le groupe agit sur  $E$  et  $F$  de façon identique, mais que cela est caché par le fait que les systèmes de coordonnées utilisés dans les espaces  $E$  et  $F$  sont différents.

**Définition 5** Soit  $\Gamma$  un groupe de Lie,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\phi$  une représentation de  $\Gamma$  sur  $E$ . On appelle **caractère** de la représentation  $\phi$  du groupe l'application

$$\begin{aligned}\chi_\phi : \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \text{tr}(\phi(g))\end{aligned}$$

Les caractères des représentations ont une infinité de propriétés captivantes, nous n'en retiendrons que deux : les caractères d'une représentation de dimension 1 sont égaux aux "matrices" de la représentation, et, dans le cas contraire, le caractère de l'identité est égal au nombre de dimensions de la représentation. Comme les caractères des représentations des groupes usuels sont tabulés, il suffit de regarder les annexes du premier ouvrage de théorie des groupes venu pour connaître sans avoir besoin de réfléchir tous les jeux de nombres qui peuvent représenter un groupe donné sur un espace de dimension 1, et de savoir sur combien d'autres espaces il est possible de le faire.

En définissant les représentations, nous avons établi le lien qui nous manquait entre la notion purement algébrique de groupe et le domaine de l'algèbre linéaire, qui nous est plus familier. Nous avertissons cependant le lecteur qu'il va encore lui falloir fournir quatre autres gros efforts avant que ce lien puisse nous mener à quelque chose.

### Les représentations irréductibles.

Les premiers de ces efforts vont être consacrés à l'assimilation des définitions de deux sortes particulières de représentations, les représentations irréductibles et les représentations absolument irréductibles.

**Définition 6** Soient  $\Gamma$  un groupe de Lie et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une représentation  $\psi$  de  $\Gamma$  sur  $E$  est dite **irréductible** si les seuls sous-espaces vectoriels de  $E$  qui sont invariants par toutes les applications linéaires  $\psi(g)$ ,  $g \in \Gamma$  sont  $\{0\}$  et  $E$ . Une représentation qui n'est pas irréductible est dite **réductible**.

Il est difficile d'expliquer simplement ce qu'est une représentation irréductible, mais il est possible inversement de montrer simplement un exemple de représentation réductible. Cherchons par exemple une représentation de dimension 3 du groupe  $SO(2)$  des rotations du plan. La "table de multiplication" des éléments de  $SO(2)$  est la suivante :

$$\forall(\rho_\theta, \rho_{\theta'}) \in SO(2) \times SO(2), \rho_\theta \cdot \rho_{\theta'} = \rho_{\theta'} \cdot \rho_\theta = \rho_{\theta+\theta'}$$

Par ailleurs, nous savons que  $\rho_{2\pi} = \rho_0$ . Chercher une représentation de dimension 3 de  $SO(2)$ , c'est chercher une application  $\psi$  qui associe à tout élément  $\rho_\theta$  de  $SO(2)$  une matrice d'ordre 3,  $\psi(\rho_\theta)$ . Les matrices doivent vérifier la même table de multiplication que les éléments de  $SO(2)$ , c'est-à-dire :

$$\forall(\rho_\theta, \rho_{\theta'}) \in SO(2) \times SO(2), \psi(\rho_\theta)\psi(\rho_{\theta'}) = \psi(\rho_{\theta'})\psi(\rho_\theta) = \psi(\rho_{\theta+\theta'})$$

Enfin, il faut bien sûr que  $\psi(\rho_{2\pi}) = \psi(\rho_0) = \text{Id}_3$ , où  $\text{Id}_3$  est la matrice identité d'ordre 3. Il est démontré que toute représentation d'ordre 3 de  $SO(2)$  peut se ramener par un changement de base adapté à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi : SO(2) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \rho_\theta &\mapsto \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) & 0 \\ \sin(m\theta) & \cos(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans cette expression,  $m$  est un nombre entier arbitraire, appelé "indice" de la représentation.

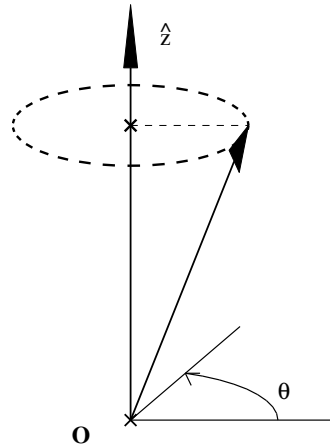


FIG. B.1 – Exemple de représentation réductible : la représentation de dimension 3 de  $SO(2)$  qui agit comme les rotations d'axe  $\hat{z}$ .

La figure B.1 est un schéma qui montre comment une représentation de dimension 3 de  $SO(2)$  agit sur un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Si le vecteur a été choisi quelconque, et si l'indice  $m$  de la représentation a été choisi différent de 0, nous voyons que l'extrémité du vecteur parcourt  $m$  fois le cercle tracé en pointillés lorsque  $\rho_\theta$  parcourt  $SO(2)$ . Un vecteur quelconque n'est donc pas invariant par cette représentation de  $SO(2)$ . Par contre, nous voyons que si le vecteur a été choisi colinéaire à l'axe de rotation, toutes les applications de la représentation le laissent invariant : l'axe de rotation est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  qui est invariant par toutes les applications de la représentation, et qui n'est ni réduit à  $\{0\}$ , ni égal à  $\mathbb{R}^3$ . La représentation de dimension 3 de  $SO(2)$  et d'indice  $m$  que nous avons trouvée est donc réductible. En pratique, cela signifie que les matrices de la représentation peuvent être mises simultanément sous forme diagonale par blocs par un changement de base bien choisi. Cet exemple nous permet enfin de voir que les seules représentations fidèles de  $SO(2)$  qu'il est possible de définir sur un espace de dimension 3 ont pour indice 1 ou  $-1$ , puisque pour  $m = 0$  toutes les matrices de la représentation sont égales à l'identité, et que pour  $|m| > 1$  tous les éléments  $\rho_{k\frac{2\pi}{m}}$ ,  $k \in \{0 \dots m - 1\}$  de  $SO(2)$  sont représentés par l'identité de  $\mathbb{R}^3$ , alors qu'ils sont différents.

### Les représentations absolument irréductibles

Après avoir ainsi tenté d'illustrer au mieux la notion d'irréductibilité d'une représentation, nous allons maintenant définir la notion d'irréductibilité absolue. Le lecteur peut passer cette définition en première lecture, et n'y revenir qu'après avoir vu l'importance que lui communique la proposition 1.

**Définition 7** Soient  $\Gamma$  un groupe de Lie et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une représentation  $\psi$  de  $\Gamma$  sur  $E$  est dite **absolument irréductible** si les seules applications linéaires de  $E$  dans  $E$  qui commutent avec toutes les applications linéaires  $\psi(g)$ ,  $g \in \Gamma$  sont multiples réelles de l'identité.

Nous ne sommes pas parvenus à avoir une image physique claire de cette notion. Son intérêt est que l'absolue irréductibilité est une propriété visiblement très forte, qui est donnée "en cadeau" par les théorèmes que nous cherchons à utiliser, et qu'il serait donc dommage de négliger. Par ailleurs, il est possible de montrer que toute représentation absolument irréductible d'un groupe de Lie compact est aussi une représentation irréductible, ce qui ne paraît finalement pas évident à la lecture de la définition.

#### B.1.4 Définition d'un opérateur équivariant.

**Définition 8** Soient  $\Gamma$  un groupe,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et  $\psi$  une représentation fidèle de  $\Gamma$  sur  $E$ . Soit  $\mathbf{M}$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .  $\mathbf{M}$  est dite  $\Gamma$ -**équivariante** si elle possède la propriété suivante :  $\forall g \in \Gamma, \mathbf{M} \circ \psi(g) = \psi(g) \circ \mathbf{M}$ .

Une conséquence simple de cette définition est qu'appliquer une des applications linéaires de la représentation de  $\Gamma$  à un vecteur propre de  $\mathbf{M}$  donne un nouveau vecteur propre de  $\mathbf{M}$ . En effet, si nous considérons un vecteur propre  $X_0$  de  $\mathbf{M}$ , associé à une valeur propre  $\lambda_0$ , et un élément  $g$  du groupe  $\Gamma$ , nous avons :

$$\mathbf{M}X_0 = \lambda_0 X_0$$

Si nous appliquons  $\psi(g)$  aux deux membres de cette égalité, nous avons :

$$\psi(g)(\mathbf{M}X_0) = \psi(g)(\lambda_0 X_0)$$

Mais  $\psi(g)$  commute avec  $\mathbf{M}$ , et c'est une application linéaire. Nous pouvons donc faire passer  $\mathbf{M}$  et  $\lambda_0$  "au travers" de  $\psi(g)$ . D'où

$$\mathbf{M}(\psi(g)X_0) = \lambda_0 \psi(g)X_0$$

Ce qui montre que le vecteur  $\psi(g)X_0$  est un vecteur propre de  $\mathbf{M}$ , pour la même valeur propre. Nous voyons donc que le fait que  $\mathbf{M}$  soit  $\Gamma$ -équivariant impose à ses sous-espaces propres d'avoir une structure très particulières, puisque chacun des vecteurs propres qu'ils contiennent amène avec lui ses images par toutes les applications de la représentation du groupe.

#### B.1.5 La première propriété sympathique.

Nous sommes arrivés au point où le lecteur a trop souffert pour que nous lui refusions plus longtemps la proposition suivante :

**Proposition 1** Soient  $\Gamma$  un groupe de Lie compact,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathbf{M}$  une application linéaire  $\Gamma$ -équivariante de  $E$  dans  $E$ . Alors génériquement toute représentation de  $\Gamma$  sur  $\ker(\mathbf{M})$  est réelle et absolument irréductible.

Le terme "génériquement" signifie ici que cette proposition n'est mise en défaut que dans le cas exceptionnel où deux modes propres de  $\mathbf{M}$  qui ne sont pas reliés par une opération de symétrie sont simultanément présents dans  $\ker(\mathbf{M})$ . Dans ce cas, il suffit de perturber de façon

infinitésimale le système décrit par  $\mathbf{M}$  pour chasser l'un des modes de  $\ker(\mathbf{M})$ , ce qui rétablit la validité de la proposition. Par ailleurs, nous voyons que cette proposition nous renseigne en réalité sur les sous-espaces de l'opérateur associés à toutes ses valeurs propres réelles, puisqu'il suffit pour tout savoir sur le sous-espace associé à la valeur propre réelle  $\lambda$  d'étudier  $\ker(\mathbf{M} - \lambda \text{Id})$ .

L'intérêt de cette proposition est que nous avons vu que l'absolue irréductibilité est une propriété extrêmement forte, qu'en pratique très peu de représentations possèdent. Dans le cas des groupes de symétrie des figures géométriques usuelles, par exemple, le nombre de représentations absolument irréductibles différentes (c'est-à-dire non reliées par un isomorphisme) qu'il est possible de définir se compte dans la plupart des cas sur les doigts d'une seule main. Dans le cas du groupe des rotations du plan,  $SO(2)$ , il n'en existe qu'une seule! Nous voyons donc que la proposition 1 permet, par un investissement finalement faible (déterminer le groupe exact avec l'action duquel l'opérateur à diagonaliser commute, aller chercher dans un livre les représentations absolument irréductibles de ce groupe), de déterminer la liste *exhaustive* des 5 ou 6 manières différentes dont les modes propres de l'opérateur peuvent se transformer par l'action du groupe.

### B.1.6 Cas des paires de valeurs propres complexes conjuguées.

Dans ce cas, nous voyons que nous ne pouvons pas nous servir de la proposition 1, puisque les modes propres que nous cherchons ne sont pas dans le noyau d'une application linéaire réelle. Il nous faut donc l'adapter au cas qui nous préoccupe, en définissant d'une part l'espace vectoriel dans lequel se trouvent les modes propres de l'opérateur, puis en définissant la propriété que l'équivariance de l'opérateur avec le groupe de symétrie  $\Gamma$  va lui conférer. Commençons par le premier point :

**Définition 9** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathbf{M}$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ , qui possède une valeur propre complexe  $\mu$ . Alors on définit le **sous-espace propre réel** associé à  $\mu$  par :

$$- E_\mu = \{x \in E / (\mathbf{M} - \mu \text{Id}) \circ (\mathbf{M} - \bar{\mu} \text{Id})x = 0\}$$

Pour justifier le nom de "sous-espace propre réel", notons que l'espace  $E_\mu$ , qui est un sous-espace d'un espace vectoriel réel, ne peut pas contenir les vecteurs propres  $\mathbf{X}$  et  $\bar{\mathbf{X}}$  associés à  $\mu$  et  $\bar{\mu}$ , puisqu'ils sont complexes. Par contre, il est facile de voir qu'il contient la partie réelle et la partie imaginaire de  $\mathbf{X}$  et  $\bar{\mathbf{X}}$ , qui ne sont **pas** des vecteurs propres de  $\mathbf{M}$ , lorsqu'ils sont pris séparément. L'espace  $E_\mu$  est donc bien le sous-espace réel de  $E$  pris comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel qui a les propriétés les plus proches de celles que nous avons l'habitude d'attribuer à un sous-espace propre.

Nous allons maintenant définir la notion qui joue dans le cas des paires de valeurs propres complexes conjuguées le rôle de la notion d'absolue irréductibilité.

**Définition 10** Soient  $\Gamma$  un groupe de Lie et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.  $E$  est dit  $\Gamma$ -**simple** s'il possède l'une des deux propriétés suivantes :

- Toute représentation de  $\Gamma$  sur  $E$  est irréductible, mais **pas** absolument irréductible. On dit alors que la représentation est **non-absolument irréductible**.
- Toute représentation de  $\Gamma$  sur  $E$  peut être décomposée en deux représentations de  $\Gamma$  qui sont isomorphes entre elles, réelles et absolument irréductibles, et qui agissent sur deux sous-espaces  $V$  et  $W$  de  $E$  tels que  $E = V \oplus W$ .

Nous pouvons enfin énoncer la proposition :

**Proposition 2** *Soit  $\Gamma$  un groupe de Lie compact,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $\mathbf{M}$  une application linéaire  $\Gamma$ -équivariante de  $E$  dans  $E$ , qui possède une valeur propre complexe  $\mu$ . Alors génériquement le sous-espace propre réel  $E_\mu$  associé à  $\mu$  est  $\Gamma$ -simple.*

Concrètement, cette proposition signifie que, soit l'action du groupe  $\Gamma$  sur  $E_\mu$  est non-absolument irréductible, ce qui nous ramène au problème de chercher les représentations de  $\Gamma$  qui possèdent cette propriété, soit il est possible de ramener par des changements de bases appropriés les expressions de  $\mathbf{M}$  et des matrices de la représentation de  $\Gamma$  sur  $E_\mu$  aux formes :

$$\forall g \in \Gamma, \phi_{E_\mu}(g) = \left[ \begin{array}{c|c} \psi(g) & 0 \\ \hline 0 & \psi(g) \end{array} \right], \mathbf{M} = \left[ \begin{array}{c|c} \sigma Id & -\omega Id \\ \hline \omega Id & \sigma Id \end{array} \right]$$

Dans l'expression de la première matrice,  $\psi$  est une représentation absolument irréductible de  $\Gamma$ , qui agit deux fois, de façon diagonale par blocs, sur deux sous-espaces  $V$  et  $W$  qui sont complémentaires dans  $E_\mu$ . Dans l'expression de la deuxième matrice,  $\sigma$  et  $\omega$  sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $\mu$ . Nous voyons que  $E_\mu$  contient deux ensembles de vecteurs qui possèdent des propriétés de symétrie identiques, mais qui sont distincts, et que l'opérateur d'évolution en temps couple. Le premier ensemble de vecteurs correspond aux parties réelles des vecteurs propres, et le deuxième à leurs parties imaginaires.

## B.2 Détails techniques de l'analyse de stabilité linéaire.

### B.2.1 Application des arguments de théorie des groupes au choix des fonctions d'essai.

Les arguments de théorie des groupes que nous avons présentés dans la première section du chapitre 11 nous indiquent que les modes propres de champ magnétique que nous cherchons sont associés à une représentation absolument irréductible du groupe,  $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ . Un résultat que nous n'avons pas rappelé (voir [54] p. 41) permet de plus de montrer que des champs magnétiques associés à des représentations irréductibles différentes du groupe de symétrie du problème sont nécessairement découplés. Nous savons donc que les champs magnétiques ne correspondant pas à la même représentation du groupe que les modes "intéressants" ne peuvent pas intervenir dans l'analyse de leur stabilité linéaire. Enfin, les simulations numériques présentées au chapitre précédent nous ont permis de déterminer la représentation absolument irréductible qui est associée aux modes qui sont critiques en premier dans notre gamme de paramètres. Ces modes sont associés à des valeurs propres réelles, et au produit de la représentation absolument irréductible non-triviale de  $\mathbb{Z}_2$  avec la représentation absolument irréductible d'indice  $m = 1$  de  $O(2)$ . Cette représentation est de dimension 2, mais nous pouvons nous restreindre à ne chercher qu'un seul des vecteurs propres, l'autre s'en déduisant par une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe du cylindre.

Mettant bout à bout toutes ces informations, nous voyons que les champs magnétiques que nous aurons à représenter comme une somme de fonctions d'essais posséderont les propriétés suivantes :

- Ils seront sinusoïdaux en  $z$ , de période  $4\mathcal{H}$ .
- Leur dépendance en  $\theta$  pourra être décrite par la somme d'une contribution en  $\sin(\theta)$  et d'une contribution en  $\cos(\theta)$ .
- Ils seront invariants par la rotation  $\mathcal{R}_\pi$  autour de l'axe  $\theta = 0$ ,  $z = 0$ .
- Ils seront transformés en leurs opposés par la symétrie miroir  $\mathcal{M}_1$ , dont le plan de réflexion est situé en  $z = \mathcal{H}$ .

Les deux premières propriétés nous montrent que tout mode propre de champ magnétique "intéressant" peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \theta, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}^n(r) \cos(\theta) \cos\left(\frac{n2\pi z}{4\mathcal{H}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{b}^n(r) \cos(\theta) \sin\left(\frac{n2\pi z}{4\mathcal{H}}\right) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{c}^n(r) \sin(\theta) \cos\left(\frac{n2\pi z}{4\mathcal{H}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{d}^n(r) \sin(\theta) \sin\left(\frac{n2\pi z}{4\mathcal{H}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

L'invariance par  $\mathcal{R}_\pi$  montre de plus que

$$\begin{aligned} \forall(r, \theta, z), B_r(r, \theta, z) &= B_r(r, -\theta, -z), \\ B_\theta(r, \theta, z) &= -B_\theta(r, -\theta, -z), \\ B_z(r, \theta, z) &= -B_z(r, -\theta, -z) \end{aligned}$$

Le fait que le mode de champ doit se transformer en son opposé par la réflexion par le plan  $z = \mathcal{H}$  nous permet enfin d'imposer :

$$\begin{aligned} \forall(r, \theta, z), B_r(r, \theta, z) &= -B_r(r, \theta, 2\mathcal{H} - z), \\ B_\theta(r, \theta, z) &= -B_\theta(r, \theta, 2\mathcal{H} - z), \\ B_z(r, \theta, z) &= B_z(r, \theta, 2\mathcal{H} - z) \end{aligned}$$

L'expression des modes propres de champ magnétique qui résume tout ce que nous avons pu apprendre sur leur forme par des considérations de symétrie est alors :

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \theta, z) = & \vec{e}_r \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_r^{2n+1}(r) \cos(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} d_r^{2n}(r) \sin(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \right] \\ & + \vec{e}_\theta \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_\theta^{2n+1}(r) \sin(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_\theta^{2n}(r) \cos(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \right] \\ & + \vec{e}_z \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_z^{2n+1}(r) \cos(\theta) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} c_z^{2n}(r) \sin(\theta) \cos\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \right] \end{aligned}$$

Nous voyons alors que les composantes des modes propres dont les nombres d'onde sont différents ne sont couplées ni par la diffusion, ni par la contrainte de divergence nulle, ni par les conditions aux limites. Elles sont donc représentées par des familles de fonctions d'essai distinctes, chaque famille regroupant des fonctions de même dépendance en  $z$ , mais se distinguant par leur structure radiale. La théorie des groupes introduit un autre découplage : comme la partie méridienne de l'écoulement est invariante, non pas par les seuls éléments de  $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$  que nous avons déjà cités, mais de plus par les toutes les réflexions par des plans méridiens, nous savons que la portion de l'opérateur d'induction qui lui correspond découplera les composantes des modes propres associées à des représentations absolument irréductibles différentes de  $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times O(2))$ . Il est facile de voir que les fonctions d'essai associées à un nombre d'onde axial multiple demi-entier de  $\frac{\pi z}{\mathcal{H}}$  sont invariantes par la réflexion par le plan méridien  $\theta = 0$ , là où les fonctions d'essai associées à des multiples entiers sont changées en leurs opposées. Nous pouvons donc prédire que la composante méridienne de l'écoulement découplera les fonctions du premier type, que nous noterons  $\Psi_i^{n,k}$ , des fonctions du deuxième type, que nous noterons  $\Psi_p^{n,k}$ . L'indice  $i$  ou  $p$  fait référence à la parité du nombre d'onde axial, l'indice  $n$  au nombre d'onde lui-même,



et l'indice  $k$  repère la dépendance radiale de la fonction d'essai. L'intérêt de ces différentes subdivisions apparaîtra lorsque nous aurons déterminé les expressions des fonctions appartenant aux différentes classes. Les fonctions d'essai de la famille des  $\Psi_p^{n,k}$  possèdent la structure suivante :

$$\begin{aligned}\Psi_p^{n,k}(r, \theta, z) &= \vec{e}_r a^{n,k}(r) \sin(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ &+ \vec{e}_\theta b^{n,k}(r) \cos(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ &+ \vec{e}_z c^{n,k}(r) \sin(\theta) \cos\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right)\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Les  $\Psi_i^{n,k}$  ayant elles la forme :

$$\begin{aligned}\Psi_i^{n,k}(r, \theta, z) &= \vec{e}_r a^{n,k}(r) \cos(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ &+ \vec{e}_\theta b^{n,k}(r) \sin(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ &+ \vec{e}_z c^{n,k}(r) \cos(\theta) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right)\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

## B.2.2 Détermination pratique des fonctions d'essai.

### Détermination des fonctions scalaires harmoniques sur $r > 1$

Nous avons vu au chapitre 11 que le champ magnétique doit être en  $r = 1$  le gradient d'une fonction  $\psi$  telle que :

$$\forall r > 1, \Delta\psi = 0$$

Dans le cas où nous choisissons pour  $\vec{B}$  une expression de la forme  $\Psi_p^{n,k}$  ou  $\Psi_i^{n,k}$ , nous voyons que la fonction  $\psi$  doit avoir les mêmes dépendances axiale et azimutale que  $\vec{B}$ . Pour pouvoir exprimer les conditions aux limites vérifiées par les fonctions d'essai de chaque catégorie, nous voyons que nous avons besoin des fonctions scalaires de laplacien nul sur  $r > 1$  qui possèdent les mêmes dépendances dans les directions périodiques. Ce calcul est élémentaire, nous n'en donnerons que les résultats :

– Dans le cas des  $\Psi_p^{0,k}$ ,

$$\psi_p^{0,k}(r, \theta, z) = 0$$

– Dans le cas des  $\Psi_p^{n,k}$ ,  $n \neq 0$ ,

$$\psi_p^{n,k}(r, \theta, z) = K_1\left(\frac{n\pi r}{\mathcal{H}}\right) \sin(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right)$$

– Dans le cas des  $\Psi_i^{n,k}$ ,  $n \neq 0$ ,

$$\psi_i^{n,k}(r, \theta, z) = K_1\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2\mathcal{H}}\right) \cos(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right)$$

Dans ces expressions, les fonctions  $K$  sont des fonctions de Bessel modifiées. Les préfacteurs des différentes formes peuvent être déterminés à l'aide de la condition :

$$B_r(r=1) = \partial_r \psi(r=1)$$

Nous pouvons donc écrire les potentiels dont doivent dériver les différentes fonctions d'essai sur la surface  $r = 1$  pour être admissibles :

– Dans le cas des  $\Psi_p^{0,k}$ ,

$$\psi_p^{0,k}(r, \theta, z) = 0$$

– Dans le cas des  $\Psi_p^{n,k}$ ,  $n \neq 0$ ,

$$\psi_p^{n,k}(r=1, \theta, z) = -\frac{2\mathcal{H}}{n\pi} \frac{K_1(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})}{K_0(\frac{n\pi}{\mathcal{H}}) + K_2(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})} (\Psi_p^{n,k})_r(r=1, \theta, z)$$

– Dans le cas des  $\Psi_i^{n,k}$ ,  $n \neq 0$ ,

$$\psi_i^{n,k}(r=1, \theta, z) = -\frac{2\mathcal{H}}{(2n+1)\pi} \frac{K_1(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}})}{K_0(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}) + K_2(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}})} (\Psi_i^{n,k})_r(r=1, \theta, z)$$

### Le cas particulier des $\Psi_p^{0,k}$

A l'intérieur du cylindre, la seule composante non nulle des fonctions  $\Psi_p^{0,k}$  est la composante axiale, et elles doivent pour être fonctions propres du Laplacien s'exprimer sous la forme :

$$\Psi_p^{0,k}(r, \theta, z) = \vec{e}_z J_1(\alpha_p^{0,k} r) \sin(\theta)$$

La condition de raccord impose au champ de s'annuler en  $r=1$ , et permet de fixer la valeur des  $\alpha_p^{0,k}$ , en leur imposant d'être les zéros de la fonction de Bessel d'indice 1 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, J_1(\alpha_p^{0,k}) = 0$$

Enfin, les valeurs propres associées de l'opérateur de la diffusion sont les  $\lambda_p^{0,k}$ , données par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_p^{0,k} = -(\alpha_p^{0,k})^2$$

### Les fonctions d'essai $\Psi_p^{n,k}$

Dans ce cas, pour être des modes propres du laplacien, les fonctions d'essai  $\Psi_p^{n,k}$  doivent avoir à l'intérieur du cylindre la forme :

$$\begin{aligned} \forall r < 1, \Psi_p^{n,k}(r, \theta, z) = & \vec{e}_r \frac{1}{2} \left[ a_p^{n,k} J_0(\alpha_p^{n,k} r) + b_p^{n,k} J_2(\alpha_p^{n,k} r) \right] \sin(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_\theta \frac{1}{2} \left[ a_p^{n,k} J_0(\alpha_p^{n,k} r) - b_p^{n,k} J_2(\alpha_p^{n,k} r) \right] \cos(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_z c_p^{n,k} J_1(\alpha_p^{n,k} r) \sin(\theta) \cos\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \end{aligned}$$

Les conditions de raccord en  $r=1$  permettent de fixer les amplitudes relatives des différents coefficients  $a_p^{n,k}$ ,  $b_p^{n,k}$  et  $c_p^{n,k}$  aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a_p^{n,k} &= \frac{1}{J_0(\alpha_p^{n,k})} \frac{K_0(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})}{K_1(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})} \\ b_p^{n,k} &= \frac{1}{J_2(\alpha_p^{n,k})} \frac{K_2(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})}{K_1(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})} \\ c_p^{n,k} &= -\frac{1}{J_1(\alpha_p^{n,k})} \end{aligned}$$

La contrainte de divergence nulle impose alors aux  $\alpha_p^{n,k}$  d'être les racines d'une équation transcendante peu sympathique :

$$0 = \alpha_p^{n,k} J_1(\alpha_p^{n,k}) \left[ J_2(\alpha_p^{n,k}) \frac{K_0(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})}{K_1(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})} - J_0(\alpha_p^{n,k}) \frac{K_2(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})}{K_1(\frac{n\pi}{\mathcal{H}})} \right] - \frac{2n\pi}{\mathcal{H}} J_0(\alpha_p^{n,k}) J_2(\alpha_p^{n,k})$$

Une fois résolue cette équation, les valeurs propres du laplacien sont enfin reliées aux valeurs des  $\alpha_p^{n,k}$  par :

$$\lambda_p^{n,k} = -(\alpha_p^{n,k})^2 - \left(\frac{n\pi}{\mathcal{H}}\right)^2$$

### Les fonctions d'essai $\Psi_i^{n,k}$

Là encore, la résolution permet de montrer que la forme des fonctions d'essai  $\Psi_i^{n,k}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall r < 1, \Psi_i^{n,k}(r, \theta, z) = & \vec{e}_r \frac{1}{2} \left[ a_i^{n,k} J_2(\alpha_i^{n,k} r) + b_i^{n,k} J_0(\alpha_i^{n,k} r) \right] \cos(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_\theta \frac{1}{2} \left[ a_i^{n,k} J_2(\alpha_i^{n,k} r) - b_i^{n,k} J_0(\alpha_i^{n,k} r) \right] \sin(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_z c_i^{n,k} J_1(\alpha_i^{n,k} r) \cos(\theta) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \end{aligned}$$

Les conditions de raccord en  $r = 1$  permettent de fixer les amplitudes relatives des différents coefficients  $a_p^{n,k}$ ,  $b_p^{n,k}$  et  $c_p^{n,k}$  aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a_i^{n,k} &= \frac{1}{J_2(\alpha_i^{n,k})} \frac{K_2\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)}{K_1\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)} \\ b_i^{n,k} &= \frac{1}{J_0(\alpha_i^{n,k})} \frac{K_0\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)}{K_1\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)} \\ c_i^{n,k} &= \frac{1}{J_1(\alpha_i^{n,k})} \end{aligned}$$

L'équation transcendante qui détermine les valeurs admissibles des  $\alpha_i^{n,k}$  est identique à celle qui permettait le choix des  $\alpha_p^{n,k}$  :

$$0 = \alpha_i^{n,k} J_1(\alpha_i^{n,k}) \left[ J_2(\alpha_i^{n,k}) \frac{K_0\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)}{K_1\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)} - J_0(\alpha_i^{n,k}) \frac{K_2\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)}{K_1\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)} \right] - \frac{(2n+1)\pi}{\mathcal{H}} J_0(\alpha_i^{n,k}) J_2(\alpha_i^{n,k})$$

Les valeurs propres du laplacien sont enfin données par :

$$\lambda_i^{n,k} = -(\alpha_i^{n,k})^2 - \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\mathcal{H}}\right)^2$$

### B.2.3 Choix des fonctions de pondération.

Dans la version originale de la méthode de Galerkin, les fonctions de pondération sont prises strictement identiques aux fonctions d'essai. Dans notre cas, nous avons cependant trouvé avantageux d'adapter légèrement cette règle, en conservant la dépendance radiale en fonctions de Bessel des fonctions d'essai, mais en leur affectant des amplitudes légèrement différentes. Ce choix des amplitudes, inspiré de ce que nous sommes parvenus à déterminer des fonctions propres de l'adjoint du problème diffusif, fait que les composantes radiales et azimutales de fonctions de pondération et de fonctions d'essai associées à des dépendances radiales différentes sont orthogonales. Nous ne sommes pas parvenus à mener cette recherche jusqu'à son terme, et les composantes

axiales ne vérifient pas cette propriété sympathique. Les définitions que nous avons retenues sont les suivantes :

$$\forall r < 1, \Phi_p^{0,k}(r, \theta, z) = \vec{e}_z J_1(\alpha_p^{0,k} r) \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} \forall r < 1, \Phi_p^{n,k}(r, \theta, z) = & \vec{e}_r \frac{1}{2} \left[ \frac{J_0(\alpha_p^{n,k} r)}{J_0(\alpha_p^{n,k})} + \frac{J_2(\alpha_p^{n,k} r)}{J_2(\alpha_p^{n,k})} \right] \sin(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_\theta \frac{1}{2} \left[ \frac{J_0(\alpha_p^{n,k} r)}{J_0(\alpha_p^{n,k})} - \frac{J_2(\alpha_p^{n,k} r)}{J_2(\alpha_p^{n,k})} \right] \cos(\theta) \sin\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \\ & - \vec{e}_z \frac{J_1(\alpha_p^{n,k} r)}{J_1(\alpha_p^{n,k})} \sin(\theta) \cos\left(\frac{n\pi z}{\mathcal{H}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall r < 1, \Phi_i^{n,k}(r, \theta, z) = & \vec{e}_r \frac{1}{2} \left[ \frac{J_2(\alpha_i^{n,k} r)}{J_2(\alpha_i^{n,k})} + \frac{J_0(\alpha_i^{n,k} r)}{J_0(\alpha_i^{n,k})} \right] \cos(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_\theta \frac{1}{2} \left[ \frac{J_2(\alpha_i^{n,k} r)}{J_2(\alpha_i^{n,k})} - \frac{J_0(\alpha_i^{n,k} r)}{J_0(\alpha_i^{n,k})} \right] \sin(\theta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \\ & + \vec{e}_z \frac{J_1(\alpha_i^{n,k} r)}{J_1(\alpha_i^{n,k})} \cos(\theta) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2\mathcal{H}}\right) \end{aligned}$$



# Bibliographie

- [1] Adrian R.J., C.S. Yao, "Power spectra of fluid velocities measured by laser doppler velocimetry", *Exp. in Fluids*, **5**, 17, (1987).
- [2] Anderson E., Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen, *LAPACK User's Guide, Third Edition*. SIAM, (Philadelphia 1999).
- [3] Andreotti B., "Action et réaction entre étirement et rotation, du laminaire au turbulent", Thèse de doctorat de l'université Paris VII, (1999).
- [4] Arnoldi W.E., "The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem", *Quart. J. Applied Mathematics*, **9**, 17, (1951).
- [5] Aumaître S., S. Fauve, J.-F. Pinton, "Large scale correlations for energy injection mechanisms in swirling turbulent flows", *Eur. Phys. J. B*, **16**, 563, (2000).
- [6] Baroud C.N., B. B. Plapp, Z.-S. She, H. L. Swinney, "Anomalous self-similarity in a turbulent rotating fluid", *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 114501, (2002).
- [7] Bassom A.P., A. D. Gilbert, "Nonlinear equilibration of a dynamo in a smooth helical flow", *J. Fluid Mech.*, **343**, 375, (1997).
- [8] Batchelor G.K., "Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing rotationally-symmetric flow", *Q. J. Mech. Appl. Maths.*, **4**, 29 (1951).
- [9] Belin F., J. Maurer, P. Tabeling, H. Willaime, "Observation of intense filaments in fully developed turbulence", *J. Phys. II France*, **6**, 573 (1996).
- [10] Bergeon A., D. Henry, E. Knobloch, "Three-dimensional Marangoni-Bénard flows in square and nearly-square containers", *Phys. of Fluids*, **13**, 92, (2001).
- [11] Bidokhti A.A., D.J. Tritton, "The structure of a turbulent free shear layer in a rotating fluid", *J. Fluid Mech.*, **241**, 469, (1992).
- [12] Blackman R.B., J.W. Tukey, *The measurement of power spectra from the point of view of communication engineering*. Dover Publications, (1958).
- [13] Bödewadt U.T., "Die drehstromung über festem grunde", *Z. Angew. Math. Mech.*, **20**, 241 (1940).
- [14] Bosh-Vivancos I., P. Chossat, J. Oprea, "Bifurcation of self-sustained magnetic fields in planar convective flows", *Eur. J. Mech. B/ Fluids*, **14**, 115, (1995).
- [15] Bourgoïn M., L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guigon, J.-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton, "Magneto-hydrodynamics measurement in the von Kármán sodium experiment", *Phys. of Fluids*, **14**, 3046, (2002).
- [16] Bourgoïn M., "Etudes en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo", Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, (2003).

- [17] Boyer D.L., P.A. Davies, "Laboratory studies of orographic effects in rotating and stratified flows", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **32**, 165, (2000).
- [18] Brachet M.-E., D.I. Meiron, S. Orszag, B.G. Nickel, R.H. Morf and U. Frisch, "Small-scale structure of the Taylor-Green vortex", *J. Fluid Mech.*, **130**, 411, (1983).
- [19] Brady J.F., L. Durlofsky, "On rotating disk flow", *J. Fluid Mech.* **175**, 363, (1987).
- [20] Braginsky S.I., "Nearly axially symmetric model of the geomagnetic dynamo of the Earth, I", *Geomagn. Aeron.*, **15**, 122, (1975).
- [21] Bramwell S.T., P. C. W. Holdsworth, J.-F. Pinton, "Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena", *Nature*, **396**, 552, (1998).
- [22] Brito D., "Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre : tourbillon géostrophique de gallium liquide dans un champ magnétique, anisotropie et rotation de la graine, chemins d'inversion", Thèse de doctorat de l'université Paris VII, (1998).
- [23] Buchhave P., W. K. George Jr., J. L. Lumley, "The measurement of turbulence with the laser-doppler anemometer", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 443, (1979).
- [24] Buckingham E., "On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations", *Phys. Rev.*, **4**, 345, (1914).
- [25] Bullard E., "The stability of a homopolar dynamo", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 744, (1955).
- [26] Bullard E., H. Gellman, "Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism", *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **247**, 213, (1954).
- [27] Cadot O., "Etude des structures de basse pression dans la turbulence développée", Thèse de Doctorat de l'université Paris VII, (1995).
- [28] Cadot O., S. Douady, Y. Couder, "Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow", *Phys. of Fluids*, **7**, 630, (1995).
- [29] Cadot O., Y. Couder, A. Daerr, S. Douady, A. Tsinober, "Energy injection in closed turbulent flows : Stirring through boundary layers versus inertial stirring", *Phys. Rev. E*, **56**, 427, (1997).
- [30] Cardin P., D. Brito, D. Jault, H.-C. Nataf, J.-P. Masson, "Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 177, (2002).
- [31] Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache, Commissariat à l'Energie Atomique, *Cours de l'école du sodium*.
- [32] Chainais P., P. Abry, J.-F. Pinton, "Intermittency and coherent structures in a swirling flow : a wavelet analysis of joint pressure and velocity measurements", *Phys. of Fluids*, **11**, 3524, (1999).
- [33] Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, (Oxford 1961).
- [34] Chossat P., M. Golubitsky, "Symmetry-increasing bifurcation of chaotic attractors", *Physica D*, **32**, 423, (1988).
- [35] Cochran W.G., "The flow due to a rotating disk", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **30**, 365, (1934).
- [36] Colgate S.A., V. I. Pariev, H. F. Beckley, R. Ferrel, V. D. Romero, J. C. Weatherall, "The new mexico  $\alpha\omega$  dynamo experiment : modelling astrophysical dynamos", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 129, (2002).
- [37] Colin de Verdière A., "Mean flow Generation by topographic Rossby waves", *J. Fluid Mech.*, **94**, 39, (1979).

- [38] Cook A.E., P. H. Roberts, "The Rikitake two-disk dynamo system", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **68**, 547, (1970).
- [39] Cowling T.G., "The magnetic field of sunspots", *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, **94**, 39, (1934).
- [40] Daviaud F., "Expérience VKS : vers la dynamo turbulente?", *Bulletin de la Société Française de Physique*, **135**, 24, (2002).
- [41] Dickinson S.C., R. R. Long "Oscillating-grid turbulence including effects of rotation", *J. Fluid Mech.*, **126**, 315, (1983).
- [42] Dijkstra D., G. J. F. van Heijst, "The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder", *J. Fluid Mech.*, **128**, 123 (1983).
- [43] Douady S., Y. Couder, M.-E. Brachet, "Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 983, (1991).
- [44] Dudley N.L., R.W. James, "Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows", *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **425**, 407,(1989).
- [45] Fauve S., C. Laroche, B. Castaing, "Pressure fluctuations in swirling turbulent flows", *J. Phys. II France*, **4**, 271, (1993).
- [46] Fauve S., F. Pétrélis, "The dynamo effect", in *Peyresq lectures on nonlinear phenomena, Vol. II*, J.-A. Sepulchre, Ed., World Scientific, (Singapore 2003).
- [47] Finlayson B.A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer*. Academic Press, (1972).
- [48] Forest C.B., R. A. Bayliss, R. D. Kendrick, M. D. Nornberg, R. O'Connell, E.J. Spence, "Hydrodynamic and numerical modeling of a spherical homogeneous dynamo experiment", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 107, (2002).
- [49] Frick P., V. Noskov, S. Denisov, S. Khripchenko, D. Sokoloff, R. Stepanov, A. Sukhanovsky, "Non-stationary screw flow in a toroidal channel : way to a laboratory dynamo experiment", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 143, (2002).
- [50] Frisch U., *Turbulence*, Cambridge University Press (Cambridge 1995).
- [51] Gailitis A., Ya Freiberg, "Non-uniform model of a helical dynamo", *Magnetohydrodynamics*, **16**, 116, (1980).
- [52] Gailitis A., O. Lielausis, E. Platacis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, G. Will, "Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment", *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3024, (2001).
- [53] Gailitis A. *et al.*, "On back-reaction effects in the Riga dynamo experiment", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 15, (2002).
- [54] Golubitsky M., I. Stewart, D. Schaeffer, *Singularities and Groups in bifurcation theory, Vol. II*, Springer-Verlag, (New York 1988).
- [55] Gauthier G., P. Gondret, F. Moisy, M. Rabaud, "Instabilities in the flow between co- and counter-rotating disks", *J. Fluid Mech.*, **473**, 1 (2002).
- [56] George W., P. Beuther, R. Arndt, "Pressure spectra in turbulent free shear flows", *J. Fluid Mech.*, **148**, 155, (1984).
- [57] Gilbert A.D., "Magnetic field evolution in steady chaotic flows", *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **339**, 627, (1992).
- [58] Gill A.E., *Atmosphère-Ocean Dynamics*. Academic Press, (1982).



- [59] Glatzmaier, G.A., P.H. Roberts, "A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal", *Nature*, **377**, 203, (1995).
- [60] Greenspan H.P., *The Theory of Rotating Fluids*, 2<sup>e</sup> Ed., Cambridge University Press (Cambridge 1980).
- [61] Gubbins D., "Kinematic dynamos and geomagnetism", *Nature*, **238**, 119, (1972).
- [62] Heikes K.E., T. Maxworthy, "Observations of inertial waves in a homogeneous rotating fluid", *J. Fluid Mech.*, **125**, 319, (1982).
- [63] Herzenberg A., "Geomagnetic Dynamos", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **250**, 543, (1958).
- [64] Hinze J.O., *Turbulence*, McGraw-Hill (New York 1959).
- [65] Hopfinger E.J., F.K. Browand, Y. Gagne, "Turbulence and waves in a rotating tank", *J. Fluid Mech.*, **125**, 505, (1982).
- [66] *Cours donné par S. Houard*, 1997.
- [67] Ibbetson A., D.J. Tritton, "Experiments on turbulence in a rotating fluid", *J. Fluid Mech.*, **68**, 639, (1975).
- [68] Jacquin L., O. Leuchter, C. Cambon, J. Mathieu, "Homogeneous turbulence in the presence of rotation", *J. Fluid Mech.*, **220**, 1, (1990).
- [69] Kaiser R., A. Tilgner, "Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor", *Phys. Rev. E*, **60**, 2949, (1999).
- [70] von Kármán T., "Über laminare und turbulente reibung", *Z. Angew. Math. Mech.*, **1**, 233 (1921).
- [71] Kolmogorov A.N., "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **30**, 9, (1941). (réédité en Proc. Roy. Soc. Lond. A **434**, 9, (1991).)
- [72] Krause F., K.-H. Rädler, *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*, Pergamon Press (Oxford 1980).
- [73] Labbé R., J.-F. Pinton, S. Fauve, "Power fluctuations in turbulent swirling flows", *J. Physique II France*, **6**, 1099, (1996).
- [74] Labbé R., J.-F. Pinton, S. Fauve, "Study of the von Kármán flow between coaxial corotating disks", *Phys. of Fluids*, **8**, 914, (1996).
- [75] La Porta A., G. A. Voth, F. Moisy, E. Bodenschatz, "Using cavitation to measure statistics of low-pressure events in large-Reynolds-number turbulence", *Phys. of Fluids*, **12**, 1485, (2000).
- [76] La Porta A., G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, E. Bodenschatz, "Fluide particle accelerations in fully developed turbulence", *Nature*, **409**, 1017, (2001).
- [77] Larmor J., "How could a rotating body such as the sun become a magnet ?", *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, 159 (1919).
- [78] Le Mouél J.-L., "L'origine du champ magnétique terrestre", in *Traité de Géophysique interne. Vol II. Magnétisme et Géomagnétisme*. J. Coulomb, G. Jobert, Ed. Masson (Paris 1976).
- [79] Leneman O.A.Z., J.B. Lewis, "Random sampling of random processes : mean square comparison of various interpolators", *IEEE Trans. Autom. Control*, **11**, 396, (1966).
- [80] Léorat J., "Numerical simulations of cylindrical dynamos : scope and methods", *Progress Series of American Institute of Astronautics and Aeronautics*, **162**, 282, (1994).

- [81] Lesieur M., *Turbulence in fluids*, Kluwer Academic Publisher (Dordrecht 1997).
- [82] Lowes F. J., J. Wilkinson, "Geomagnetic Dynamo : A Laboratory Model", *Nature*, **198**, 1158, (1963).
- [83] Lumley J.L., "Similarity and the turbulent energy spectrum", *Phys. of Fluids*, **10**, 855 (1967).
- [84] McEwan A.D., "Angular momentum diffusion and the initiation of cyclones", *Nature*, **260**, 126, (1976).
- [85] Marié L., "Optimisation d'une expérience de dynamo fluide", Rapport de stage de DEA, (2000).
- [86] Marié L., F. Pétrélis, M. Bourgoïn, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton, "Open questions about homogeneous fluid dynamos : the VKS experiment", *MagnetoHydroDynamics*, **38**, 156, (2002).
- [87] Marié L., J. Burguete, F. Daviaud, J. Léorat, "Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows", *Eur. Phys. J. B*, **33**, 469, (2003).
- [88] Martin A., P. Odier, J.-F. Pinton, S. Fauve, "Magnetic permeability of a diphasic flow, made of liquid gallium and iron beads", *Eur. Phys. J. B*, **18**, 337, (2000).
- [89] Matthews P.C., "Dynamo action in simple convective flows", *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **455**, 1829, (1999).
- [90] Moffatt H.K., *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press (Cambridge 1978).
- [91] Moisy F., P. Tabeling, H. Willaime, "Kolmogorov equation in fully developed turbulence", *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3994, (1999).
- [92] Moler C.B., G. W. Stewart, "An algorithm for generalized matrix eigenproblems", *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 241, (1973).
- [93] Monin A.S., A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press (Cambridge 1975).
- [94] Mordant N., J.-F. Pinton, F. Chillà, "Characterization of turbulence in a closed flow", *J. Phys. II France*, **7**, 1729, (1997).
- [95] Mordant N., P. Metz, O. Michel, J.-F. Pinton, "Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence", *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 214501, (2001).
- [96] Moreau R., *MagnetoHydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers, (1990).
- [97] Nataf H.-C., "Dynamo and convection experiments", in *Earth's core and lower mantle*, C. A. Jones, A. M. Soward, K. Zhang, Eds., Gordon and Breach, (2002).
- [98] Nore C., L. S. Tuckerman, O. Daube, S. Xin, "The 1 :2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow", *J. Fluid Mech.*, **477**, 51, (2003).
- [99] Normand C., "Ponomarenko dynamo with time-periodic flow", *Phys. of Fluids*, **15**, 1606, (2003).
- [100] Odier P., J.-F. Pinton, S. Fauve, "Magnetic induction by coherent vortex motion", *Eur. Phys. J. B*, **16**, 373, (2000).
- [101] Odier P., J.-F. Pinton, S. Fauve, "Magnetic induction by coherent vortex motion", *Eur. Phys. J. B*, **58**, 7397, (1998).
- [102] Okaya T., M. Hasegawa, "On the friction to the disk rotating in a cylinder", *Jap. Jour. Physics*, **13**, 29 (1939).

- [103] Parker E.N., "Hydromagnetic dynamo models", *Astrophys. J.*, **163**, 255 (1955).
- [104] Pearson C.E., "Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks", *J. Fluid Mech.*, **21**, 623 (1965).
- [105] Pedlosky J., *Geophysical Fluid Dynamics*, 2<sup>e</sup> Ed. Springer-Verlag, (New York 1987).
- [106] Peffley N.L., A. B. Cawthorne, D. P. Lathrop, "Toward a self-generating magnetic dynamo : the role of turbulence", *Phys. Rev. E*, **61**, 5287, (2000).
- [107] Pekeris C.L., Y. Accad, B. Shkoller, "Kinematic dynamos and the earth's magnetic field", *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **275**, 425, (1973).
- [108] Pétrélis F., S. Fauve, "Saturation of the magnetic field above the dynamo threshold", *Eur. Phys. J. B*, **22**, 273, (2001).
- [109] Pétrélis F., "Effet dynamo : étude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique", Thèse de Doctorat de l'université Paris VI, (2002).
- [110] Pétrélis F., M. Bourgoïn, L. Marié, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton, "Nonlinear Magnetic Induction by Helical Motion in a Liquid Sodium Turbulent Flow", *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 174501, (2003).
- [111] Picha K.G., E. R. G. Eckert, "Study of the air flow between coaxial disks rotating with arbitrary velocities in an open or enclosed space", Proc. 3rd US Natl Cong. Appl. Mech., 791 (1958).
- [112] Pinton J.-F., R. Labbé, "Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows", *J. Phys. II France*, **4**, 1461, (1994).
- [113] Pinton J.-F., F. Chillà, N. Mordant, "Intermittency in the closed flow between coaxial corotating disks", *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **17**, 535, (1998).
- [114] Ponomarenko Y., "Theory of the hydromagnetic generator", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **14**, 775, (1973).
- [115] Proudman J., "On the motion of solids in liquids possessing vorticity", *Proc. Roy. Soc. A*, **92**, 408, (1916).
- [116] Ravelet F., communication privée.
- [117] Reynolds O., "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", *Phil. Trans. Royal Soc. London, Series A*, **186**, 123, (1895).
- [118] Richardson L.F., *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press (Cambridge 1922).
- [119] Rikitake T., "Oscillations of a system of disk dynamos", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, 89, (1958).
- [120] Roberts G.O., "Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **271**, 411, (1972).
- [121] Roberts P.H., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, American Elsevier, (New York 1967).
- [122] Roberts P.H., A.M. Soward, "Magnetohydrodynamics of the Earth's core", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, 117, (1972).
- [123] Roberts P.H., A.M. Soward, *Rotating Fluids in Geophysics*. Academic Press, (1978).
- [124] *Engineering turbulence modelling and experiments IV*, Proceedings of the 4th international symposium on engineering turbulence modelling and measurements, Ajaccio, Corsica, France, 24-26 May, 1999. Eds. Rodi W., D. Laurence, Elsevier (1999).

- [125] Rucklidge A.M., N. O. Weiss, D. P. Brownjohn, P. C. Matthews, M. R. E. Proctor, "Compressible magnetoconvection in three dimensions : pattern formation in a strongly stratified layer", *J. Fluid Mech.*, **419**, 283, (2000).
- [126] Salençon J., *Mécanique des milieux continus*, Editions Ellipse (Paris 1988).
- [127] Schouveiler L., P. Le Gal, M.-P. Chauve, "Instabilities of the flow between a rotating and a stationary disk", *J. Fluid Mech.*, **443**, 329, (2001).
- [128] Schultz-Grunow F.Z., "Der reibungswiderstand rotierender scheiben in gehausen", *Z. Angew. Math. Mech.*, **14**, 191, (1935).
- [129] Shew W.L., D. R. Sisan, D. P. Lathrop, "Mechanically forced and thermally driven flows in liquid sodium", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 121, (2002).
- [130] Simand C., "Etude de la turbulence inhomogène au voisinage d'un vortex intense", Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, (2002).
- [131] Sisan D.R., W. L. Shew, D. P. Lathrop, "Lorentz force effects in magneto-turbulence", *Phys. Earth Planet. Int.*, **135**, 137, (2003).
- [132] Sommeria J., S. D. Meyers, H. L. Swinney, "Laboratory model of a planetary eastward jet", *Nature*, **337**, 58, (1989).
- [133] Sreenivasan K.R., "On the scaling of the turbulence energy dissipation rate", *Phys. of Fluids*, **27**, 1048, (1984).
- [134] Stewartson K., "On the flow between two rotating coaxial disks", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49**, 333 (1953).
- [135] Stieglitz R., U. Müller, "Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo", *Phys. of Fluids*, **13**, 561, (2001).
- [136] Stieglitz R., U. Müller, "Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo", *Magnetohydrodynamics*, **38**, 27, (2002).
- [137] Szeri A.Z., M. L. Adams, "Laminar throughflow between closely spaced rotating disks", *J. Fluid Mech.*, **86**, 1 (1978).
- [138] Szeto R. K.-H., "The flow between rotating disks", Ph. D. thesis, California institute of technology (1978).
- [139] Szeri A.Z., S. J. Schneider, F. Labbe, H. N. Kaufman, "Flow between rotating disks. Part 1. Basic flow", *J. Fluid Mech.*, **134**, 103 (1983).
- [140] Taylor G.I., "Motion of solids in fluids when the flow is not irrotationnal", *Proc. Roy. Soc. A*, **93**, 99, (1916).
- [141] Titon J.-H., communication privée.
- [142] Titon J.-H., O. Cadot, "The statistics of power injected in a closed turbulent flow : constant torque forcing vs. constant velocity forcing", *Phys. of Fluids*, **15**, 625, (2003).
- [143] Welch P.D., "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms", *IEEE Trans. Aud. and Electroac.*, **AU-15**, 70, (1967).
- [144] Welsh W.E., J. P. Hartnett, "Velocity measurements in the boundary layer and in the main flow between two coaxial disks rotating with equal velocities in air", Proc. 3rd US Natl Cong. Appl. Mech., 847, (1958).
- [145] Zandbergen P.J., D. Dijkstra, "Von Kármán swirling flows", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19**, 465 (1987).

- [146] Zocchi G., P. Tabeling, J. Maurer, and H. Willaime , "Measurement of the scaling of the dissipation at high Reynolds numbers", *Phys. Rev. E*, **50**, 3693 (1994).



## Résumé

L'écoulement de von Kármán est l'écoulement produit par la rotation de deux disques coaxiaux placés en vis-à-vis.

Dans la première partie de cette thèse, nous présentons un certain nombre de résultats expérimentaux visant à la caractérisation des fluctuations à grande échelle d'un écoulement d'allongement sensiblement unitaire. Dans certaines circonstances, nous mettons notamment à jour une "bifurcation globale" ainsi qu'un "comportement intermittent" de la structure de l'écoulement. Nous présentons par ailleurs une relation qui relie les statistiques des fluctuations de l'écoulement aux valeurs des couples fournis par les moteurs. Enfin, nous ébauchons l'étude de l'influence de la force de Coriolis sur l'écoulement.

La deuxième partie de cette thèse présente des résultats numériques et expérimentaux portant sur l'étude des caractéristiques magnéto-hydrodynamique de l'écoulement, et notamment sur sa capacité à produire un champ magnétique par "effet dynamo". Les résultats expérimentaux ont été obtenus à haut nombre de Reynolds magnétique dans le montage "VKS", qui utilise du sodium liquide.

**Mots-clés:** Ecoulement de von Kármán, hydrodynamique, fluctuations turbulentes, transport turbulent, force de Coriolis, magnéto-hydrodynamique.

## Abstract

The generic term "Von Kármán flows" designates the class of flows induced by the rotation of two coaxial disks facing each other.

We have collected in the first part of this dissertation a variety of experimental results pertaining to the characterization of the large-scale fluctuations of the flow generated in a cylindrical vessel of nearly unitary aspect ratio. We show that in certain circumstances the overall structure of the flow can undergo a "global bifurcation", or have an "intermittent behaviour". Independently, we report on a relationship linking quantitatively simple flow statistics to the torque exerted on the flow by the driving mechanism. We then present a brief survey of the influence of global rotation on the flow.

The second part of this dissertation gathers numerical and experimental results related to the magneto-hydrodynamical properties of the flow. A particular emphasis is set on the study of its ability to generate a magnetic field through the "dynamo effect". The experimental results have been obtained for large values of the magnetic Reynolds number in a dedicated setup using liquid sodium, the "VKS" apparatus.

**Keywords:** Von Kármán flow, hydrodynamics, turbulent fluctuations, turbulent transport, Coriolis force, magnéto-hydrodynamics.