HAL open science

Modèles dynamiques en tomographie - Application à l'imagerie cardiaque

Sébastien Roux

To cite this version:

Sébastien Roux. Modèles dynamiques en tomographie - Application à l'imagerie cardiaque. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00007803

HAL Id: tel-00007803

https://theses.hal.science/tel-00007803v1

Submitted on 17 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph Fourier- Grenoble I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Spécialité : Mathématiques Appliquées

préparée au laboratoire TIMC-IMAG

dans le cadre de

l'Ecole Doctorale « Mathématiques, Sciences et Technologies de L'Information, Informatique »

présentée et soutenue publiquement par

Sébastien ROUX

le 14 octobre 2004

Modèles dynamiques en tomographie - Application à l'imagerie cardiaque

Directeur de thèse	:	Laurent DESBAT
Co-encadrants	:	Pierre GRANGEAT et Anne KOENIG

JURY

Mme Valérie PERRIER	Présidente
M. Rolf CLACKDOYLE	Rapporteur
M. Dominikus NOLL	Rapporteur
Mme Isabelle MAGNIN	Examinatrice
M. Laurent DESBAT	Directeur de thèse
M. Pierre GRANGEAT	Co-encadrant
Mme Anne KOENIG	Invitée

A l'issue de ces trois années de thèse, je tiens à remercier particulièrement :

Jean Chabbal, Olivier Peyret, Jean-Louis Amans et Philippe Rizo pour m'avoir accueilli dans leur service et laboratoire au CEA LETI ainsi que Jacques Demongeot pour m'avoir accueilli au laboratoire TIMC,

Mes encadrants Laurent Desbat, Pierre Grangeat et Anne Koenig pour leur investissement, leurs conseils et pour m'avoir initié à la recherche,

Dominikus Noll, Rolf Clackdoyle, Isabelle Magnin et Valérie Perrier pour avoir accepté d'expertiser mon travail de thèse,

Thomas Rodet et Stéphane Bonnet pour avoir été des interlocuteurs priviligiés concernant nos thèmes de recherche en tomographie,

Mes collègues du TIMC et du CEA, notamment Anne, Joachim, Laurent, Patrick, Thomas, Jean, Eric, Thomas, Alexandre pour leur bonne humeur,

Enfin je n'oublie pas ma famille et Virginie, pour leur soutien et leurs encouragements.

Table des matières

1 Introduction : de l'imagerie cardiaque à la tomographie dynamique **1**
1.1 Généralités sur l'imagerie cardiaque 1
1.1.1 L'imagerie cardiaque : un enjeu de société 1
1.1.2 Modalités établies en imagerie cardiaque 1
1.1.3 Contrainte de résolution temporelle pour l'imagerie cardiaque 2
1.2 Description de la modalité tomographie X 3
1.3 La tomographie dynamique 5
1.4 Problématique et plan de la thèse 5

2 Etat de l'art en tomographie statique **7**
2.1 Généralités : modélisation, géométries, liens entre transformées, échantillonnage 7
2.1.1 Modélisation : géométries et transformées 7
2.1.1.1 Les géométries parallèles 7
2.1.1.2 La géométrie 2D divergente 9
2.1.1.3 La géométrie 3D conique 9
2.1.2 Liens entre transformées 10
2.1.2.1 Liens directs 11
2.1.2.2 Liens indirects : Formule de Hamaker et applications 11
2.1.3 Echantillonnage des transformées 13
2.1.3.1 Echantillonnage dans $\mathbb{R}$ 14
2.1.3.2 Echantillonnage dans $\mathbb{R}^n$ 14
2.1.3.3 Applications aux transformées utilisées en tomographie . . . 15
2.2 La transformée de Radon: propriétés et inversion 20
2.2.1 Théorème coupe-projection 20
2.2.2 Quelques propriétés de la transformée de Radon 21
2.2.2.1 Consistance 21
2.2.2.2 Transformée de Radon des déformées affines 22
2.2.2.3 Quelques transformées de Radon calculables 22
2.2.3 Inversion de la transformée de Radon 23
2.3 Reconstruction en tomographie 2D 24
2.3.1 Reconstruction en géométrie parallèle 24
2.3.1.1 Suffisance de données 24
2.3.1.2 Formule de reconstruction 24
2.3.2 Reconstruction classique en géométrie 2D divergente 25
2.3.2.1 Suffisance de données 25
2.3.2.2 Reconstruction 25

2.3.3 Nouvelles approches en géométrie 2D divergente : 27
2.3.3.1 Suffisance de données 27
2.3.3.2 Reconstruction 28
2.4 Reconstruction en tomographie 3D 29
2.4.1 Inversion de la transformée de Radon 3D 29
2.4.1.1 Suffisance des données 29
2.4.1.2 Reconstruction 29
2.4.2 Reconstruction en géométrie conique 29
2.4.2.1 Lien entre transformées 3D : suffisance des données et reconstruction par réarrangement 30
2.4.2.2 Approche Defrise and Clack [16] 31
2.4.2.3 Approche Katsevich pour des géométries quelconques [34] . 31
2.4.3 Tomographie 3D avec trajectoire hélicoïdale 33
2.4.3.1 Problématique de reconstruction de données axialement tronquées 34
2.4.3.2 Méthodes approchées avec rétroprojection 2D 35
2.4.3.3 Méthodes approchées avec rétroprojection 3D 35
2.4.3.4 Approche exacte de Katsevich 36
2.4.3.5 Discussion 38
2.5 Méthodes discrètes en tomographie 38

3 Etat de l'art en tomographie dynamique 41
3.1 Acquisition des mesures en tomographie dynamique 42
3.1.1 Dispositifs d'acquisition optimisant la résolution temporelle 42
3.1.2 Analogie avec la tomographie hélicoïdale et application à l'échantillonnage 43
3.1.2.1 Principe de l'analogie 43
3.1.2.2 Application à l'échantillonnage des transformées 44
3.2 La résolution temporelle en tomographie dynamique 45
3.2.1 Géométrie parallèle 45
3.2.2 Géométrie divergente 45
3.2.2.1 Résolution temporelle pour les méthodes classiques de reconstruction sur 2π 45
3.2.2.2 Résolution temporelle pour les méthodes de reconstruction sur l'intervalle short-scan 46
3.2.2.3 Résolution temporelle pour les méthodes de reconstruction sur l'intervalle very short-scan 46
3.3 Premier type de modèle : a priori nul ou faible sur la déformation 47
3.3.1 Méthodes de pondération des données 47
3.3.2 A priori temporel : variations faibles et redondance 49
3.3.2.1 Introduction d'un formalisme adapté : l'espace des états . . . 49
3.3.2.2 Stationnarité locale et direction prépondérante du mouvement 49
3.3.2.3 Objet à variation périodique 51
3.3.2.4 Utilisation plus large de la redondance : approche de Wang [98] 51
3.4 Deuxième type de modèle : a priori fort de connaissance de la déformation . . . 52

3.4.1 Intérêt de cette classe de méthodes 52
3.4.2 Formalisations continue et discrète 53
3.4.2.1 Formalisation continue 53
3.4.2.2 Formalisation discrète 53
3.4.3 Méthodes de résolution analytiques 54
3.4.3.1 Méthodes basées sur des modèles de déformations simples . 54
3.4.3.2 Méthodes basées sur des modèles de déformations généraux . 56
3.4.4 Méthodes algébriques et statistiques 57
3.4.4.1 Résolution par ART 58
3.4.4.2 Résolution par filtre de Kalman 58
3.4.4.3 Schéma d'estimation et de reconstruction simultanées 58
3.4.4.4 Limitations 58
3.5 Apprentissage des modèles utilisés 58
3.5.1 Modèle de stationnarité ou de redondance 59
3.5.1.1 L'électro-cardiogramme (ECG) 59
3.5.1.2 Modèles temporels appris à partir des projections 60
3.5.2 Modèle de déformation 61
3.5.2.1 Méthode développée au LETI [66] 61
3.5.2.2 Méthode de Blondel [49] 61
3.5.2.3 Méthodes d'estimation dans l'espace des projections : 61
3.6 Cas de la tomographie cardiaque: algorithmes de synchronisation a priori ou a posteriori 62
3.6.1 Principe des usages prospectif ou rétrospectif de la périodicité 62
3.6.2 Algorithmes utilisant un cycle cardiaque 63
3.6.3 Algorithmes utilisant plusieurs cycles cardiaques 63
3.6.3.1 Méthodes de reconstruction exactes et approchées 63
3.6.3.2 Méthodes basée sur une rétroprojection 2D 63
3.6.3.3 Méthodes basées sur une rétroprojection 3D 66
3.6.3.4 Discussion 67
3.7 Bilan de l'état de l'art : définition des axes de recherche 67

4 Etude de la résolution temporelle en tomographie dynamique périodique : acquisition et reconstruction efficaces 69
4.1 Principe 69
4.2 Géométrie parallèle : Etude de la synchronisation 70
4.2.1 Notations et modèle utilisé 70
4.2.2 Espace d'acquisition et critère de résolution temporelle 71
4.2.2.1 Définition du critère de résolution temporelle 71
4.2.2.2 Calcul de la résolution temporelle 71
4.2.3 Optimisation des paramètres d'acquisition 73
4.2.4 Prise en compte de la propriété de symétrie 74
4.2.5 Quelques tests de validation 75
4.2.5.1 Objet simulé 75
4.2.5.2 Algorithme de reconstruction 75
4.2.5.3 Résultats 76
4.3 Géométrie parallèle : schéma d'échantillonnage discret efficace 77

4.3.1 Principe . . . 77
4.3.2 Utilisation de la périodicité sur le schéma $L_{W_{helHI}}$ . . . 78
4.4 Géométrie divergente : étude de la synchronisation . . . 80
4.4.1 Notations et modèle utilisé . . . 80
4.4.2 Généralisation de l'espace d'acquisition et propriétés spécifiques . . . 81
4.4.2.1 Premier choix possible . . . 81
4.4.2.2 Deuxième choix intégrant la symétrie . . . 81
4.4.3 Critère de résolution temporelle . . . 82
4.5 Nouveau schéma de reconstruction basé sur la permutation des étapes filtrage-réarrangement . . . 83
4.5.1 Principe . . . 83
4.5.1.1 Algorithme en géométrie divergente . . . 84
4.5.1.2 Algorithme en géométrie parallèle . . . 85
4.5.2 Tests . . . 86
4.5.2.1 Objet simulé . . . 86
4.5.2.2 Résultats des reconstructions . . . 87
4.6 Bilan de cette étude . . . 88

5 Reconstruction avec compensation des déformations affines dépendant du temps 91
5.1 Principe général de la méthode . . . 91
5.1.1 Utilisation d'un opérateur de déformation pour changer la géométrie . . . 91
5.1.2 Le cas des déformations affines dépendant du temps . . . 93
5.1.2.1 Propriétés des déformations affines . . . 93
5.1.2.2 Notations pour les déformations affines . . . 93
5.1.3 Formule de Hamaker pour les déformations affines . . . 94
5.1.4 Situation par rapport à l'état de l'art . . . 95
5.1.5 Plan du chapitre . . . 95
5.2 Compensation pour les géométries 2D parallèle et divergente . . . 96
5.2.1 Conditions d'admissibilité sur la déformation . . . 96
5.2.1.1 Cas de la géométrie parallèle . . . 96
5.2.1.2 Cas de la géométrie divergente . . . 97
5.2.1.3 Exemple de la condition d'admissibilité dans le cas de rotations 98
5.2.2 Algorithmes de reconstruction . . . 99
5.2.2.1 Cas de la géométrie parallèle . . . 100
5.2.2.2 Cas de la géométrie divergente . . . 101
5.2.3 Etude de l'implémentation dans le cas de la géométrie équi-angulaire . 103
5.2.3.1 Notations . . . 103
5.2.3.2 Formule d'inversion en géométrie équi-angulaire . . . 103
5.2.3.3 Retour sur la question des poids . . . 105
5.2.3.4 Détails de l'implémentation de la formule (5.36) . . . 106
5.2.4 Résultats sur données simulées . . . 108
5.2.4.1 Principes des tests effectués . . . 108
5.2.4.2 Paramètres de simulation . . . 109
5.2.4.3 Résultats des reconstructions . . . 110
5.3 Extension à la reconstruction en géométrie conique . . . 111
5.3.1 Reconstruction exacte en géométrie conique . . . 113

5.3.1.1 Admissibilité 113
5.3.1.2 Inversion en géométrie conique 114
5.3.1.3 Commentaires sur la formule d'inversion exacte 119
5.3.2 Reconstruction approchée par une méthode de type Feldkamp 119
5.4 Bilan de cette approche 121

6 Conclusion et perspectives 123
6.1 Bilan de nos contributions 123
6.2 Perspectives en tomographie dynamique 124
6.2.1 Perspective 1 : vers le traitement de plus grandes classes de déformations 124
6.2.2 Perspective 2 : sur l'extension des modèles affines à des déformations quelconques 125
6.2.2.1 Description des simulations effectuées 126
6.2.2.2 Résultats et conclusion sur les approximations locales 127
6.2.3 Perspectives 3 : les problèmes d'estimation des déformations 127

Chapitre 1

Introduction : de l'imagerie cardiaque à la tomographie dynamique

1.1 Généralités sur l'imagerie cardiaque

1.1.1 L'imagerie cardiaque : un enjeu de société

Les maladies cardio-vasculaires constituent un problème de santé publique majeur dans les pays développés. En 1998, environ une mort sur cinq en Europe ou aux Etats Unis était liée à un problème cardiaque. Le diagnostic et la prévention des problèmes cardiaques sont donc des enjeux de société majeurs dont le succès est indissociable du développement de modalités d'imagerie fiables et non-invasives.

Ces problèmes cardiaques désignent plus particulièrement les problèmes coronariens. Les artères coronaires sont les petits vaisseaux qui couvrent le coeur par un réseau tri-dimensionnel complexe, et assurent l'approvisionnement en sang et en oxygène du myocarde (voir la figure 1.1). La pathologie la plus courante des artères coronaires est *l'athérosclérose*, qui consiste en l'obstruction (ou sténose) progressive des artères par la formation d'un dépôt au niveau de leur paroi. Ce dépôt peut être composé de lipides, de glucides ou de calcium. La réduction de l'oxygénation (ou ischémie) provoque la mort plus ou moins progressive de certaines zones du myocarde (ou nécroses). Cette pathologie peut provoquer dans le pire des cas l'arrêt du muscle cardiaque.

1.1.2 Modalités établies en imagerie cardiaque

De nombreuses modalités sont utilisées en imagerie cardiaque. Nous opposons les modalités invasives et les modalités non-invasives et les situons par rapport à l'imagerie coronarienne. La modalité de référence pour le diagnotic de problème coronarien est l'angiographie par rayons X. C'est une modalité invasive car elle nécessite l'insertion d'un cathéter dans les artères afin de diffuser un produit de contraste radio-opaque. Plusieurs radiographies sont alors prises sous différents angles de vue. Cette modalité est efficace mais invasive et expose le patient à une importante quantité de rayonnement. Des modalités non-invasives peuvent aussi être utilisées en imagerie cardiaque (voir par exemple [54] ou le chapitre 2 de [84]) :

- L'imagerie cardiaque par ultrasons (échocardiographie) permet d'accéder aux formes et à l'épaisseur des parois cardiaques de manière dynamique. En mode Doppler, les ultrasons

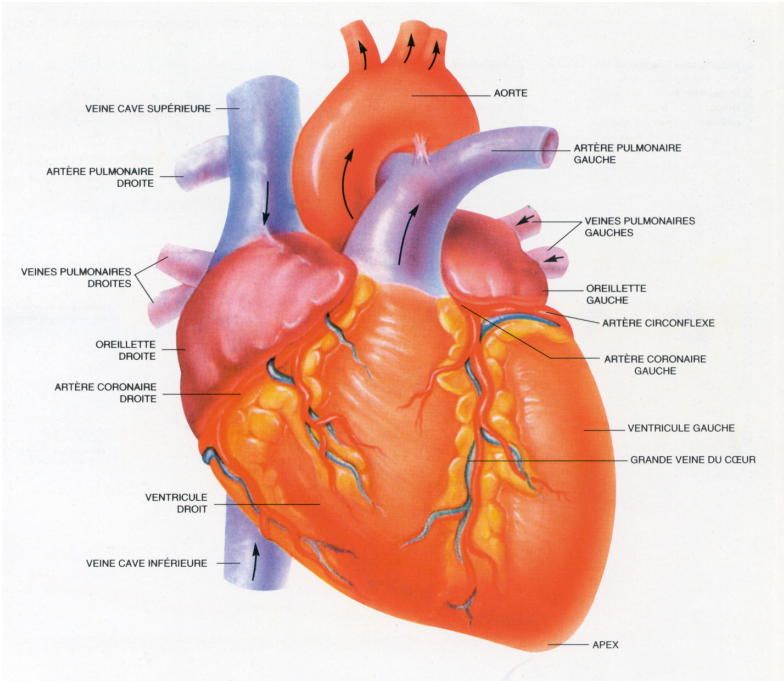


FIG. 1.1 – *Schéma du coeur (extrait de [103])*

permettent d'étuder la vitesse d'écoulement du sang, ce qui renseigne sur la cinétique musculaire. Par ailleurs, grâce à l'usage de sondes, l'imagerie intravasculaire ultrasonore permet d'explorer les parois des vaisseaux. Toutefois, une autre modalité (comme le couplage avec des radiographies par rayons X) est nécessaire pour obtenir une localisation globale.

– L'imagerie nucléaire est très au point pour les études fonctionnelles, comme la perfusion myocardique ou le métabolisme de certains tissus. Les techniques d'imagerie par émissions de positons (TEP) ou d'émission mono-photonique (TEMP) peuvent être utilisées. Ces techniques ne permettent cependant pas d'accéder à la morphologie coronarienne.
– L'imagerie par résonance magnétique a un potentiel fort pour l'imagerie cardiaque dynamique, aussi bien pour la morphologie que pour certaines études fonctionnelles. Malgré cela, la résolution spatiale, les longs temps d'examens, limitent quelque peu l'intérêt de cette modalité.
– Les dispositifs scanners sont très prometteurs : cette modalité (relativement) non-invasive a bénéficié de nombreux progrès techniques ces dix dernières années, qui permettent des reconstructions volumiques de haute résolution spatiale. Ces progrès rendent ambitieuses mais envisageables les études des problèmes coronariens par cette modalité, même si la résolution temporelle est un problème important.

Avant de décrire plus précisément cette modalité à laquelle est lié ce travail de thèse, nous décrivons les contraintes de résolution temporelle requises pour l'imagerie cardiaque.

1.1.3 Contrainte de résolution temporelle pour l'imagerie cardiaque

Les techniques d'imagerie utilisées en imagerie cardiaque doivent avoir une forte résolution temporelle, c'est à dire être capables de générer des images à partir de temps d'acquisition très

courts afin d'éviter de produire des images perturbées par les évolutions des organes. Pour le coeur, ces évolutions sont importantes. Les contraintes de résolution temporelle en imagerie cardiaque dépendent de l'instant du cycle pour lequel on souhaite obtenir une image. En effet, le mouvement du coeur n'a pas la même amplitude durant tout le cycle. Ce dernier est décomposable en deux phases distinctes : une phase appelée *diastole* pendant laquelle les cavités cardiaques se dilatent et se remplissent de sang, et une phase appelée *systole*, pendant laquelle le coeur se contracte pour expulser le sang hors des cavités cardiaques vers le reste du corps. Les contraintes de résolution temporelle sont moins grandes dans la phase diastolique, car elle contient une phase de moindre mouvement (ou phase stationnaire).
Des ordres de grandeur de la résolution requise peuvent être extraits de certaines études effectuées sur des modalités d'imagerie très rapides. Nous rassemblons ces critères dans la table 1.1. Ces valeurs proviennent des travaux de :

- Ritchie [87] dont les résultats sont issus d'études sur scanner EBCT,
- Ulzheimer [96] qui a utilisé des angiographies biplan en mode dynamique en étudiant des points particuliers de l'arbre coronarien,
- Ohnesorge ([84] p.23), qui se réfère en partie à Stehling [94] qui a utilisé de l'imagerie par résonance magnétique.

Des critères comme la phase du cycle dont on souhaite faire l'image et le rythme cardiaque doivent être pris en compte.

	fréquence cardiaque faible (<70 bpm)	fréquence cardiaque élevée (>70 bpm)
phase stationnaire	250ms[84] 100ms[96]	150ms [84] 50ms[96]
autre phase	50ms[84] 10ms[96] 20ms [87]	

TAB. 1.1 – *Résolution temporelle requise pour enlever les artefacts de mouvement. L'ordre de grandeur de la limite entre fréquences cardiaques faible et élevée est fixée à 70 battements par minute (bpm).*

Il faut également noter, comme le reporte par exemple Ulzheimer [96] pour l'étude des coronaires, qu'il existe une grande variabilité de la phase de moindre mouvement suivant la coronaire et suivant la fréquence cardiaque.

1.2 Description de la modalité tomographie X

La tomographie par rayons X (ou tomodensitométrie) permet d'obtenir la carte de densité des tissus humains. Un rayonnement X est généré par une source, traverse le corps du patient. Le rayonnement atténué par le corps est mesuré par un détecteur. Sous l'hypothèse de rayonnement monochromatique et de faisceau infiniment mince, le flux ϕ de photons transmis, mesuré en un point y du détecteur, est relié au flux émis ϕ_0 par la loi de Beer-Lambert :

$$\phi(y) = \phi_0 e^{-\int_{L(y)} \mu(x)dx} \tag{1.1}$$

ou de manière équivalente :

$$-Log\left(\frac{\phi(y)}{\phi_0}\right) = \int_{L(y)} \mu(x)dx \tag{1.2}$$

μ désigne le coefficient d'atténuation linéaire, $L(y)$ la droite reliant la source au point y du détecteur. Ainsi, l'équation (1.2) modélise *le problème direct*, qui permet de calculer une mesure à partir du paramètre physique μ.
Le problème mathématique associé à la tomographie X est *le problème inverse* de détermination du paramètre physique μ à partir des mesures. Il s'agit d'un problème de reconstruction d'une fonction à partir de la connaissance de ses intégrales sur une famille de droites de l'espace. A ce problème inverse sont alors associées classiquement les questions d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution.
Ce modèle est simplifié : il suppose que le rayonnement est monophotonique, que la source de rayons X est ponctuelle, que l'atténuation est le seul phénomène physique intervenant; le rayonnement diffusé notamment n'est pas du tout pris en compte. Toutefois, ces limites sont soit négligeables, soit réduites par un pré-traitement adapté.
Les scanners modernes mesurent donc des projections suivant des ensembles de directions. Ils utilisent des détecteurs composés de plusieurs lignes de barrettes détectrices. Le couple source-détecteurs est animé d'une rotation continue permettant d'acquérir des projections suivant plusieurs incidences. La vitesse de rotation à l'heure actuelle est de l'ordre de $0.4s$ par tour. De plus, dans les scanners conventionnels modernes, le lit du patient est en translation continue dans l'anneau d'émission/détection, ce qui crée une trajectoire en forme d'hélice dans le référentiel du patient (voir la figure 1.2).

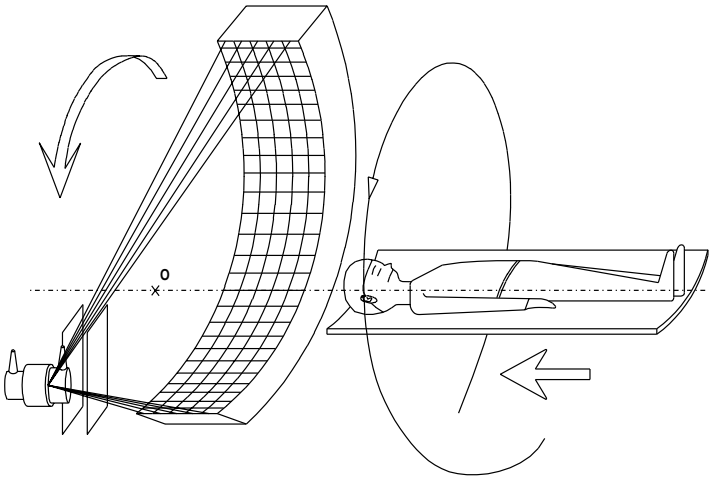


FIG. 1.2 – *Illustration de la géométrie d'acquisition sur les scanners modernes. Du fait de la translation du lit, la trajectoire devient une hélice relativement au patient.*

Cette technologie est largement répandue et est l'objet de nombreux efforts de recherche pour être utilisée en imagerie cardiaque. Les technologies de scanner utilisant 16, 32 voire 64 coupes couplées avec l'acquisition synchronisée de l'électrocardiogramme du patient permettent déjà, grâce à des techniques de reconstruction dédiées que nous décrirons, de réaliser

des examens cliniques des coronaires. Les perspectives d'imagerie dynamique haute résolution spatiale incitent au développement de matériels et de logiciels encore plus élaborés.

1.3 La tomographie dynamique

Un scanner est un dispositif qui scrute un ensemble de projections suivant des incidences différentes acquises à des instants différents. La rotation de la source se fait à une vitesse angulaire fixe (de l'ordre de deux tours par seconde). Si l'objet évolue, les projections acquises sur un tour ou un demi-tour de scanner deviennent inconsistantes car elles correspondent à des objets différents. L'application sur ces données d'une technique de reconstruction standard ignorant ces évolutions conduit à des dégradations des images. Ces dégradations sont classiquement appelées des artefacts, et peuvent prendre des aspects très variés dans les images reconstruites. Les contours peuvent devenir difformes, des dédoublements de structure peuvent apparaître. Des raies d'intensité positive ou négative peuvent être présentes près de contours mal reconstruits. Ces raies peuvent parfois avoir une grande portée dans l'image. Ce type d'artefacts sévères peut masquer les éléments importants de l'image et conduire à un mauvais diagnostic.

Nous considérons donc dans cette thèse le problème de la tomographie dynamique : comment reconstruire un objet à un instant donné à partir de ses projections obtenues par une modalité de type scanners à rayons X mesurées pendant une évolution.

Cette problématique est plus générale que celle de l'imagerie cardiaque. On la retrouve par exemple en radiothérapie [79] : dans ce cas le mouvement respiratoire perturbe l'estimation des contours des zones à irradier. On la retrouve également en tomofluoroscopie interventionnelle [51] où un chirurgien suit une aiguille de biopsie sous scanner pour effectuer une ponction lombaire : les dégradations dues aux mouvements perturbent l'estimation de la position de l'instrument.

1.4 Problématique et plan de la thèse

Cette thèse concerne donc l'étude des techniques logicielles qui permettent l'amélioration de la qualité des images reconstruites à partir de données scanner inconsistantes du fait de l'évolution de l'objet pendant l'acquisition des mesures. Ces techniques doivent compenser la résolution temporelle insuffisante des dispositifs d'acquisition.
Dans le chapitre 2, nous présentons un état de l'art des techniques mathématiques de reconstruction d'images à partir de données "statiques". Dans ce cas, les projections sont consistantes et des algorithmes de reconstruction standard peuvent être utilisés . Dans le chapitre 3, nous décrivons et analysons en profondeur les techniques existantes de reconstruction en tomographie dynamique, pour aboutir à la définition de nos axes de recherche dans la section 3.7. Puis nous présentons dans le chapitre 4 une première étude sur la résolution temporelle en tomographie dynamique, en proposant des techniques efficaces d'acquisition et de reconstruction quand l'évolution de l'objet à reconstruire est périodique, ce qui est une hypothèse largement utilisée en tomographie cardiaque. Le chapitre 5 est consacré à la présentation de notre seconde approche, qui consiste à intégrer dans une formule de reconstruction un modèle de déformation de l'objet. Nous détaillons alors nos travaux originaux sur la compensation des déformations affines dépendant du temps. Enfin nous présentons un bilan de nos études et les perspectives qu'elles amènent.

Chapitre 2

Etat de l'art en tomographie statique

2.1 Généralités : modélisation, géométries, liens entre transformées, échantillonnage

2.1.1 Modélisation : géométries et transformées

Plusieurs géométries peuvent être considérées en tomographie, auxquelles sont associés des paramétrages particuliers des projections acquises et des opérateurs agissant sur des fonctions et modélisant le problème direct.

2.1.1.1 Les géométries parallèles

Description de la géométrie d'acquisition

La géométrie parallèle plane correspond aux cas où les rayons sont émis suivant des faisceaux de droites parallèles. Si les premiers dispositifs scanner correspondaient bien à ce type de géométries, ce n'est plus le cas des scanners modernes où les rayons divergent à partir d'une source. Notons quand même que cette géométrie est adéquate pour décrire l'acquisition de mesures obtenues par un dispositif comme le synchrotron de Grenoble où les détecteurs sont loin de la source d'émission ou encore en tomographie d'émission, par exemple en tomographie d'émission mono-photonique avec collimateurs parallèles.

Malgré cela, la géométrie parallèle reste fondamentale du fait de sa simplicité par rapport aux autres géométries d'un point de vue mathématique, si bien qu'il est naturel d'étudier un algorithme dans cette géométrie avant de l'étendre aux géométries réelles.

En tomographie 2D parallèle, les projections sont modélisées par la transformée de Radon de la fonction f à reconstruire, qui associe à f ses intégrales suivant les droites du plan. Dans la géométrie parallèle, une droite L est repérée par un vecteur unitaire $\vec{\theta}$ perpendiculaire à la droite de projection et par la distance algébrique notée s du rayon à l'origine du repère. A la place de $\vec{\theta}$, l'angle φ caractérisant $\vec{\theta} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ est aussi utilisé (voir la figure 2.1).

La transformée de Radon La transformée de Radon R appliquée à une fonction f appartenant à $S(\mathbb{R}^2)$ [1], que nous noterons également Rf ou plus commodément p modélise les mesures

1. $S(\mathbb{R}^2)$ est l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^2$ composé des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui sont à décroissance rapide de même que leurs dérivées.

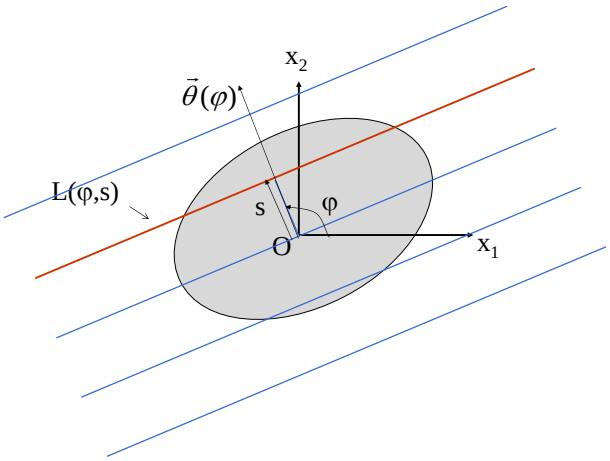


FIG. 2.1 – *Géométrie parallèle d'acquisition dans le plan.* $L(\varphi,s)$ *désigne la droite de normale* $\vec{\theta}(\varphi)$ *située à la distance* s *de l'origine.*

et est définie par :

$$\begin{aligned} Rf(\vec{\theta},s) = p(\vec{\theta},s) &= \int_{L(\varphi,s)} d\vec{x}\ f(\vec{x}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta^{\perp}}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}\ \delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta} - s) f(\vec{x}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dans l'expression précédente, $\vec{\theta^{\perp}}$ est le vecteur directement normal à $\vec{\theta}$. Alternativement, nous noterons $p(\varphi,s)$ la transformée de Radon 2D de f en utilisant l'angle caractérisant $\vec{\theta} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Notons que nous avons utilisé dans la dernière définition *la fonction Dirac* δ, qui n'est pas une fonction au sens classique. En revanche, il existe des suites de fonctions classiques $\delta_{b,b\to\infty}$ qui convergent ponctuellement vers la distribution δ dans $S'(\mathbb{R}^2)$. Par exemple $\delta_b(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} ds\ e^{its}$. Ainsi (voir [40] p.12) pour f dans $S(\mathbb{R}^2)$,

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}\ \delta_b(\vec{x}\cdot\vec{\theta} - s) f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta^{\perp}}) \tag{2.2}$$

Cette notation utilisant la fonction δ est très utile pour alléger les calculs et nous l'utiliserons massivement dans toute la suite.

La définition de la transformée de Radon s'étend facilement à la dimension n, où l'on mesure les projections sur des hyperplans de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{R}f(\vec{\theta},s) = p(\vec{\theta},s) = \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x}\ \delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta} - s) f(\vec{x})\ . \tag{2.3}$$

Nous illustrons dans la figure 2.2 le cas de la dimension 3.

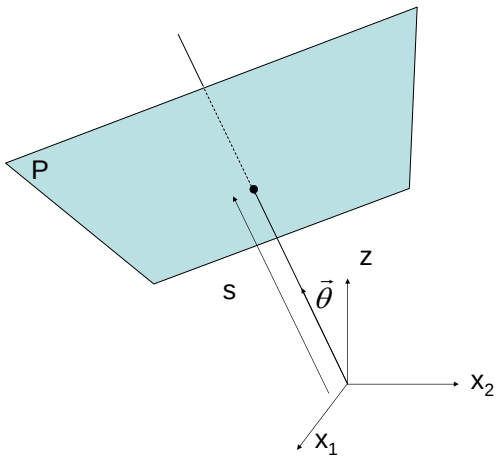


FIG. 2.2 – *Transformée de Radon en dimension trois. On mesure alors l'intégrale suivant le plan P de normale $\vec{\theta}$ situé à la distance s de l'origine.*

2.1.1.2 La géométrie 2D divergente

Les scanners récents utilisent une source de rayonnement d'où divergent simultanément les rayons X, avant de traverser l'objet puis d'être mesurés par des barrettes détectrices. Cette source se déplace dans le plan sur une trajectoire composée des points $\vec{a}(\lambda)$, pour λ appartenant à un certain ensemble noté Λ. Cette trajectoire est le plus souvent un cercle. D'une manière générale, un paramétrage de droite adapté à la géométrie divergente est constitué :

- de la valeur λ du paramètre de la trajectoire de la source,
- d'un vecteur unitaire $\vec{\alpha}$ directeur de la droite d'intégration.

Ainsi les mesures sont modélisées par la transformée rayons X 2D, que nous notons $g(\lambda,\vec{\alpha})$:

$$g(\lambda,\vec{\alpha}) = \int_0^\infty dl\ f(\vec{a}(\lambda) + l\vec{\alpha}) \tag{2.4}$$

$$\text{où } \begin{cases} \vec{a}(\lambda) \in \mathbb{R}^2 \text{ est la position de la source sur la trajectoire paramétrée par } \lambda \in \Lambda \\ \vec{\alpha} \in S^1 \text{ est le vecteur unitaire directeur de la droite de mesure} \end{cases}$$

En pratique, deux types de détecteurs sont utilisés : les détecteurs ligne et les détecteurs arc. On utilise alors à la place du vecteur $\vec{\alpha}$ respectivement l'abscisse u d'une cellule de détection ou l'angle γ mesurant la différence angulaire au rayon central du faisceau (voir la figure 2.3). Dans le cas du détecteur arc, nous notons γ_m le demi-angle d'ouverture du faisceau. Ce détecteur est situé à une distance R de la source de rayons X qui est située sur un cercle de rayon R_0 (voir la figure 2.3).

2.1.1.3 La géométrie 3D conique

L'utilisation de plusieurs lignes de cellules détectrices ou même de détecteurs 2D permet de recueillir des mesures en géométrie 3D. Les rayons provenant de la source forment alors un cône. Les définitions précédentes sont étendues en utilisant la transformée rayons X 3D qui est définie par :

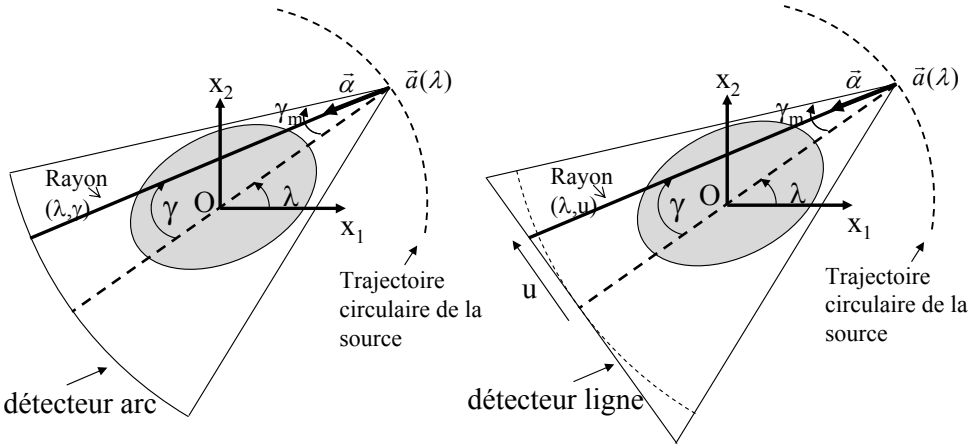


FIG. 2.3 – *Géométrie 2D divergente. A gauche, détecteur arc (ou équi-angulaire) centré sur la source : un rayon est paramétré par les angles* (λ,γ). *A droite, détecteur ligne : un rayon est paramétré par l'angle* λ *et l'abcisse* u *du rayon sur le détecteur.*

$$g(\lambda,\vec{\alpha}) = \int_0^{\infty} dt\ f(\vec{a}(\lambda) + t\vec{\alpha}) \tag{2.5}$$

où $\begin{cases} \vec{a}(\lambda) \in \mathbb{R}^3 \text{ est la position du sommet du cône d'émission} \\ \vec{\alpha} \in S^2 \text{ est le vecteur unitaire directeur de la droite de mesure} \end{cases}$

Nous illustrons la géométrie conique dans le cas de détecteurs plans ou cylindriques dans la figure 2.4.

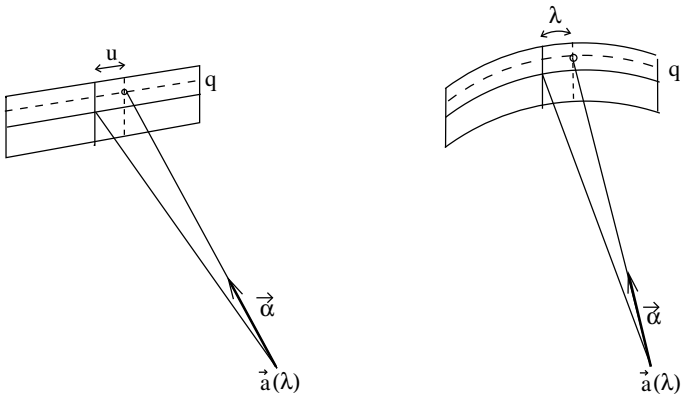


FIG. 2.4 – *Géométrie 3D conique. A gauche, détecteur plan : un rayon est paramétré par l'angle* λ, *l'abscisse* u *et la cote* q. *A droite, détecteur cylindrique: un rayon est paramétré par les angles* (λ,γ) *et la cote* q.

2.1.2 Liens entre transformées

Nous avons dit que les géométries parallèles étaient plus simples. C'est pourquoi les liens entre les transformées divergentes et parallèles sont fondamentaux en tomographie. Nous les

utiliserons dans la section suivante pour l'établissement des conditions de suffisance de données pour la reconstruction de l'objet qui sont portées par la trajectoire de la source de rayonnement. Nous distinguerons les liens directs des liens indirects (c'est à dire via une transformée).

2.1.2.1 Liens directs

Les liens directs consistent simplement à écrire la relation entre les paramétrisations des différentes transformées. Nous donnons ici l'exemple du lien entre le paramétrage de la transformée de Radon et le paramétrage de la transformée rayons X 2D. Nous avons, par des arguments géométriques simples :

$$g(\lambda,\vec{\alpha}(\gamma)) = g(\lambda,\vec{\alpha}(u)) = p(\vec{\theta}(\varphi),s)$$

pour :

$$s = R_0 \sin\gamma \tag{2.6}$$

$$\varphi = \lambda + \frac{\pi}{2} - \gamma \tag{2.7}$$

$$u = R \tan\gamma \tag{2.8}$$

Ces équations sont appelées équations de réarrangement. Elles sont utilisées explicitement pour l'établissement de formules d'inversion en géométrie divergente 2D (voir section 2.3.2) ou pour reconstruire dans une géométrie virtuelle parallèle à partir d'acquisitions obtenues sur une géométrie divergente.

2.1.2.2 Liens indirects : Formule de Hamaker et applications

D'autres liens peuvent être établis entre les transformées divergentes et parallèles (voir par exemple l'article de synthèse de Grangeat [25]). Nous présentons ici certains de ces liens (ce qui ne fut pas le cas originellement) comme des cas particuliers d'une formule due à Hamaker [26]. Nous réécrivons ici la formule de Hamaker avec nos notations :
Si h est une fonction mesurable sur S^{n-1} et $H(\vec{x}) = |\vec{x}|^{1-n} h(-\vec{x}/|\vec{x}|)$, alors :

$$\int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha}\; g(\lambda,\vec{\alpha}) h(\vec{\alpha}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x}\; f(\vec{x}) H(\vec{a}(\lambda) - \vec{x}) = (f * H)(\vec{a}(\lambda))$$

Une conséquence directe (voir [41] p.23) est obtenue pour les fonctions h de $\mathbb{R}^1$ homogènes de degré $1-n$

$$\int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha}\; g(\lambda,\vec{\alpha}) h(\vec{\alpha}\cdot\vec{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^1} ds\; p(\vec{\theta},s) h(s - \vec{a}(\lambda)\cdot\vec{\theta}) \tag{2.9}$$

<u>Preuve de la formule (2.9)</u> Notons $g_h(\lambda,\vec{\theta}) = \int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha}\; g(\lambda,\vec{\alpha}) h(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha})$

$$g_h(\lambda,\vec{\theta}) = \int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha} \int_{\mathbb{R}^+} dl\; f\left(\vec{a}(\lambda) + l\vec{\alpha}\right) h(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha})$$

Nous utilisons le changement de variable $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ changeant $(l,\vec{\alpha})$ en $\vec{x}$ basé sur la relation $\vec{x} = \vec{a}(\lambda) + l\vec{\alpha}$. Son jacobien vaut $\frac{1}{l^{n-1}}$. En utilisant l'homogénéité de h, ce jacobien disparaît et il vient:

$$g_h(\lambda,\vec{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x}\; f(\vec{x}) h(\vec{\theta}\cdot(\vec{x} - \vec{a}(\lambda))) \tag{2.10}$$

En utilisant la fonction delta, nous pouvons écrire :

$$h(\vec{\theta}\cdot(\vec{x}-\vec{a}(\lambda))) = \int_{\mathbb{R}} ds\ \delta(\vec{\theta}\cdot\vec{x}-s)h(s-\vec{\theta}\cdot\vec{a}(\lambda)), \tag{2.11}$$

Finalement, la substitution de (2.11) dans (2.10) donne (2.9).

Application en dimension 2 : L'application de cette formule en dimension 2 fut faite récemment par Noo et al [42] dans un article décrivant une nouvelle méthode de reconstruction en tomographie divergente que nous étudierons plus loin. Nous utilisons le filtre de Hilbert h_H qui peut être défini par :

$$h_H * f(x) = \frac{1}{\pi}\text{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{x-y}dy \quad \text{où Vp signifie valeur principale} \tag{2.12}$$

Nous allons considérer ce filtre comme une fonction:[2]

$$h_H(x) = \frac{1}{\pi}\text{Vp}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -i\text{sign}(\nu)e^{i\nu x}\ d\nu \tag{2.13}$$

Nous obtenons, du fait de l'imparité de h_H:

$$\int_{S^1} d\vec{\alpha}\ g(\lambda,\vec{\alpha})h_H(\vec{\alpha}\cdot\vec{\theta}) = -\int_{\mathbb{R}^1} ds\ p(\vec{\theta},s)h_H(\vec{a}(\lambda)\cdot\vec{\theta}-s) \tag{2.14}$$

Ainsi en notant :

$$p_H(\vec{\theta},s) = (h_H *_s p)(\vec{\theta},s) = \int_{\mathbb{R}} ds'\ h_H(s-s')p(\vec{\theta},s') \tag{2.15}$$

qui correspond à une transformée de Hilbert des projections parallèles, et

$$g_H(\lambda,\vec{\theta}) = -\int_{S^1} d\vec{\alpha}\ g(\vec{a}(\lambda),\vec{\alpha})h_H(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha}) \tag{2.16}$$

qui correspond à une sorte de transformée de Hilbert des projections divergentes, nous avons la relation suivante, introduite récemment dans [42] :

$$g_H(\lambda,\vec{\theta}) = p_H(\vec{\theta},\vec{\theta}\cdot\vec{a}(\lambda)) \tag{2.17}$$

Nous avons donc ici un lien entre transformées parallèle et divergente via le filtre de Hilbert. Nous réutiliserons cette relation dans la section traitant de reconstruction.

Application en dimension 3 : Formule de Grangeat Appliquons cette formule en dimension 3, avec le "filtre dérivé" δ' défini par :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta'(x_0-x)\Phi(x) = \Phi'(x_0) \tag{2.18}$$

Nous obtenons :

$$g_G(\lambda,\vec{\theta}) = \int_{S^2} d\vec{\alpha}\ g(\lambda,\vec{\alpha})\delta'(\vec{\alpha}\cdot\vec{\theta}) = -\frac{\partial p}{\partial s}(\vec{\theta},\vec{a}(\lambda)\cdot\vec{\theta}) \tag{2.19}$$

Nous avons donc ici un lien entre transformées parallèle et conique via la dérivée de la transformée de Radon. Cette formule a été initialement introduite par Grangeat ([23] [24]) dans un autre système de coordonnées.

2. h_H est en réalité une distribution non régulière

Formule de Tuy Historiquement, Tuy proposa le premier une formule d'inversion d'une fonction 3D à partir de projections coniques pour une trajectoire de source bornée. Ces travaux datent de 1983 ([48]). Nous présentons ici un résultat intermédiaire de sa formule d'inversion, connu aujourd'hui sous le nom de *formule de Tuy*. Tuy a étendu la définition de la transformée divergente 3D (2.5) à $\Lambda \times ,\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, en définissant la fonction généralisée suivante :

$$g_{pro}(\lambda,\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} g(\lambda,\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}) \tag{2.20}$$

Puis il a introduit la fonction intermédiaire $G(\lambda,\xi)$ définie comme la transformée de Fourier (qui est ici une distribution) de g_{pro} :

$$G(\lambda,\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x}\ g_{pro}(\lambda,\vec{x}) e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{x}} \tag{2.21}$$

Nous avons pris ici la même définition que Natterer pour la tranformée de Fourier écrite ici en dimension n:

$$Ff(\vec{\xi}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\, d\vec{x}$$

Tuy a ensuite établi la relation :

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda,\vec{\xi}) = i\ \vec{a}'(\lambda)\cdot\vec{\xi} \int_0^\infty d\rho\ \rho^2 Ff(\rho\vec{\xi}) e^{i\rho\vec{\xi}\cdot\vec{a}(\lambda)} \tag{2.22}$$

Cette relation établit un lien entre une transformée des projections coniques et la dérivée seconde de la transformée de Radon qu'il est possible d'identifier dans le terme de droite, dans le domaine de Fourier. Nous reparlerons de cette relation dans la section 2.4.2.1 concernant les conditions d'acceptabilité d'une trajectoire pour la reconstruction d'un objet à partir de ses projections coniques.

2.1.3 Echantillonnage des transformées

Nous abordons à présent un autre aspect important lié au fait qu'en pratique, les mesures sont en nombre fini, alors que nous avons présenté des modélisations continues. Cette discrétisation a des conséquences sur la résolution et la qualité des images qui seront reconstruites.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'échantillonnage en tomographie parallèle suivant des treillis de points. Les résultats principaux que nous présentons sont basés sur l'analyse dans l'espace de Fourier et consistent en des relations reliant la résolution de l'objet à reconstruire, le nombre de projections et l'échantillonnage des projections.

Nos conventions sont celles de Natterer pour la tranformée de Fourier :

$$Ff(\vec{\xi}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\, d\vec{x}$$

ainsi que pour la tranformée inverse :

$$\bar{F}f(\vec{x}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{\xi}) e^{i\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\, d\vec{\xi}$$

Nous nous référons principalement au livre de Natterer [40] et au chapitre du traité IC2 rédigé par Desbat [20]. Nous rappelons d'abord les éléments de théorie d'échantillonnage sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{R}^n$, avant de décrire l'application à la tomographie.

2.1.3.1 Echantillonnage dans $\mathbb{R}$

Nous cherchons à échantillonner une fonction dont le spectre ne comporte pas de fréquences supérieures à une valeur b : Supp $Ff \subset [-b,b]$. La formule de Poisson (pour une fonction continue intégrable de transformée de Fourier intégrable) relie le spectre du signal échantillonné avec un pas h à celui de la fonction de départ (voir par exemple [104] p. 285) :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} Ff(\nu - \frac{2\pi n}{h}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} h \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nh) e^{-inh\nu} \tag{2.23}$$

Nous en déduisons que le spectre du signal échantillonné est un spectre périodique obtenu en prenant les translatés du spectre de f. Par ailleurs, nous pouvons retrouver la condition d'échantillonnage de Shannon : il faut que $h \leq \frac{\pi}{b}$ pour qu'il n'y ait pas de chevauchement des spectres périodisés (voir la figure 2.5). Dans ce cas, il est possible de retrouver f grâce à la formule d'interpolation de Shannon, en multipliant (2.23) par l'indicatrice $\chi_{[-\frac{\pi}{b},\frac{\pi}{b}]}$ et en prenant la transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nh) \frac{\sin \frac{\pi}{h}(t - nh)}{\frac{\pi}{h}(t - nh)} \tag{2.24}$$

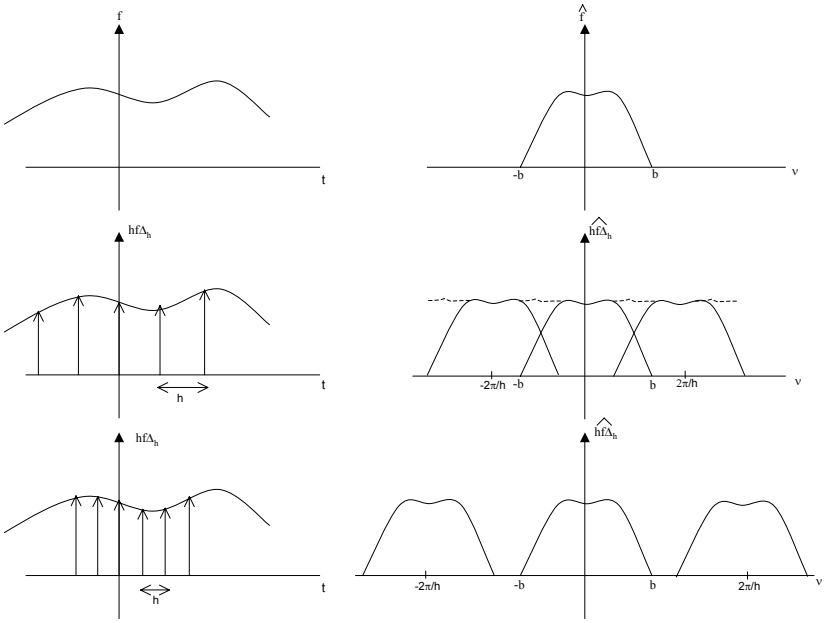


FIG. 2.5 – *Echantillonnage sur $\mathbb{R}$. 1ère ligne : signal continu; 2ème ligne : signal échantillonné à une cadence trop faible; 3ème ligne : signal échantillonné à une cadence vérifiant la condition de Shannon*

2.1.3.2 Echantillonnage dans $\mathbb{R}^n$

Formule de Poisson Nous pouvons généraliser ces résultats dans $\mathbb{R}^n$ dans le cas de schémas d'échantillonnage suivant des grilles standards ou non standards. L'utilisation de grilles non

standards peut aboutir à des schémas plus efficaces, c'est-à-dire à nombre de points réduit. Dans $\mathbb{R}^n$, les points d'échantillonnage peuvent être écrits sous la forme $W\vec{k}$, où W est une matrice non singulière de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{k} \in \mathbb{Z}^n$. Les colonnes de W sont des vecteurs qui engendrent le schéma d'échantillonnage. Dans le cas d'une grille standard, ces vecteurs sont colinéaires avec ceux de la base orthonormée du repère et W est diagonale. La formule de Poisson peut être étendue à $\mathbb{R}^n$ pour des grilles définies par une matrice W:

$$\sum_{\vec{l}\in\mathbb{Z}^n} Ff(\vec{\nu} - 2\pi W^{-T}\vec{l}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\det W| \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^n} f(W\vec{k}) e^{-i<\vec{\nu}\cdot W\vec{k}>} \tag{2.25}$$

Notons alors K le support de la transformée de Fourier de f. Alors nous pouvons déduire de la formule (2.25) une condition de Shannon généralisée: *les ensembles* $K + 2\pi W^{-T}\vec{l}$ *pour* $\vec{l} \in \mathbb{Z}^n$ *doivent être sans recouvrement*. L'efficacité d'un schéma peut être donnée par l'aire de la maille élémentaire qui est égale au déterminant de la matrice W noté $(\det W)$. La recherche de schémas efficaces consiste alors à trouver, parmi les schémas vérifiant la condition de non-recouvrement, ceux qui maximisent $(\det W)$. Ceux-ci en effet contiennent autant d'information, mais sont moins denses.

Extension aux fonctions essentiellement limitées en fréquence En tomographie, les fonctions que nous allons considérer sont à support compact, et ne peuvent donc pas être également à support compact dans l'espace de Fourier à moins d'être nulles. Mais nous pouvons supposer que les fonctions sont *essentiellement limitées en fréquence*, c'est à dire que $\int_{\vec{x}\notin K} |f(\vec{x})d\vec{x}|$ est négligeable devant $\|f\|_{L^1}$. K est alors appelé le support essentiel de f. Dans ce cas, le terme d'erreur supplémentaire dans la formule de reconstruction (2.24) est négligeable devant $\|f\|_{L^1}$ (voir par exemple [20]). Nous nous placerons dorénavant dans le cas de fonctions essentiellement limitées en fréquence.

2.1.3.3 Applications aux transformées utilisées en tomographie

Nous montrons maintenant comment les résultats précédents sont applicables en tomographie. Nous détaillons le cas de la tomographie 2D parallèle et décrivons ensuite quelques extensions à la tomographie 3D. Nous n'aborderons pas le cas de la tomographie divergente.

Echantillonnage en tomographie 2D parallèle

Support de la transformée de Fourier de la transformée de Radon Nous cherchons quels schémas d'échantillonnage sont efficaces pour échantillonner la transformée de Radon 2D d'une fonction f dont le support essentiel en fréquence est un disque de rayon b. Nous devons tout d'abord définir la transformée de Fourier de la transformée de Radon, qui est périodique selon sa première variable.

$$Fp(k,\sigma) = (2\pi)^{\frac{-3}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\varphi,s) e^{-i(k\varphi+\sigma s)}\, d\varphi ds \tag{2.26}$$

Une étape cruciale est alors la détermination d'un support essentiel K de Fp. Nous avons le résultat suivant ([40] p.71) pour une fonction dont le support est inclus dans le disque unité :

$$K = \{(k,\sigma) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R} \text{ où } |\sigma| < b \text{ et } |k| < \max(\frac{|\sigma|}{\vartheta}, b(\frac{1}{\vartheta} - 1))\} \tag{2.27}$$

Cet ensemble a une forme caractéristique de papillon (figure 2.6). Le paramètre $\vartheta \in]0,1[$ est un paramètre d'ajustement. Pour b grand, il peut être choisi arbitrairement proche de 1 ([18] p.45).

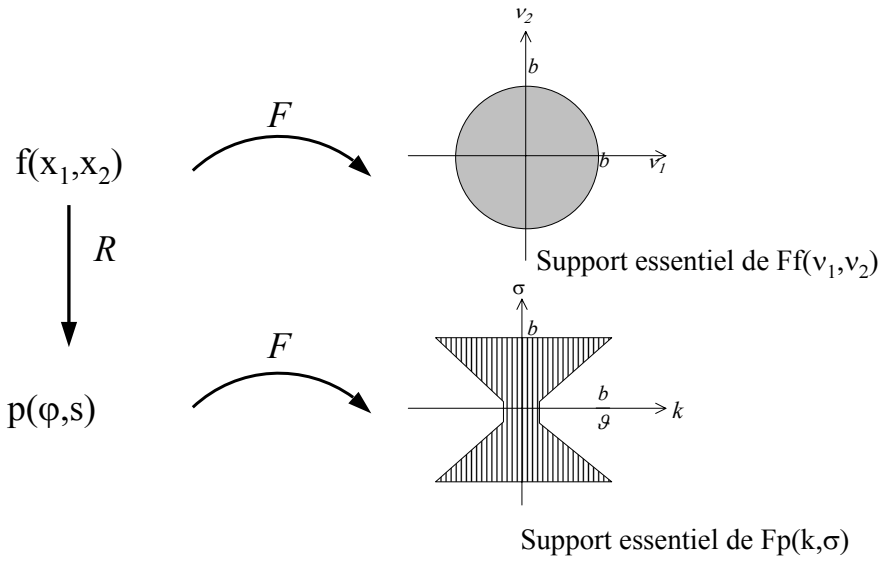


FIG. 2.6 – *Supports essentiels de la transformée de Fourier de f, et de sa transformée de Radon (pour le cas ϑ proche de 1).*

Schémas d'échantillonnage standard et entrelacé Connaissant du support K, nous pouvons considérer les schémas d'échantillonnage suivants:

– Le schéma d'échantillonnage standard:
Il est décrit par la matrice d'échantillonnage :

$$W_S = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{P} & 0 \\ 0 & \frac{2}{Q} \end{bmatrix}$$

L'entier P désigne le nombre de positions angulaires par tour et Q le nombre de projections parallèles par position angulaire. Les conditions d'échantillonnage associées, qui assurent le non-recouvrement des translatés de l'ensemble K sont : $b \leq P\vartheta$ et $b \leq \pi\frac{Q}{2}$. On peut d'ailleurs déduire que le nombre P d'angles préconisés par cette théorie est alors légèrement supérieur à $\frac{\pi}{2}$ fois le nombre de droites de mesures par projection.

– Le schéma d'échantillonnage entrelacé:
Le schéma entrelacé est donné par la matrice :

$$W_I = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & \frac{-\pi}{P} \\ 0 & \frac{2}{Q} \end{bmatrix}$$

Il vérifie les conditions de Shannon si $2P \leq \pi\frac{Q}{\vartheta'}$ et si $b \leq \pi\frac{Q}{2}$ (avec $\vartheta' = \frac{\vartheta}{2-\vartheta}$). On peut remarquer que ce schéma entrelacé est presque deux fois plus efficace que le schéma standard, car $\det W_I \simeq 2 \det W_S$ (voir aussi la figure 2.7).

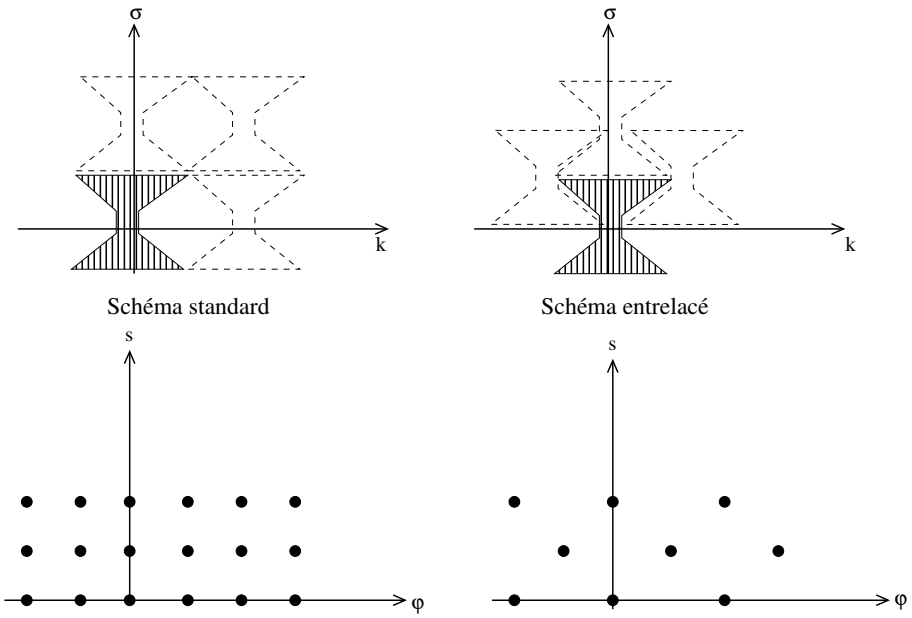


FIG. 2.7 – *Echantillonnage en tomographie 2D suivant les schémas standard (à gauche) et entrelacé (à droite). La première ligne représente le domaine de Fourier. Le schéma entrelacé est plus dense. La seconde ligne correspond aux points d'échantillonnage dans le domaine direct. Le schéma entrelacé est plus creux donc plus efficace.*

Extension à d'autres transformées

Echantillonnage en tomographie 3D parallèle Desbat [19] a calculé en géométrie 3D le support essentiel noté $K3$ de la transformée de Fourier 3D de la transformée rayons X 3D parallèle. Cette tranformée est définie par:

$$g(\varphi,s,z) = \int_{\mathbb{R}} f(s\vec{\theta} + u\vec{\zeta} + z\vec{e}_z)du \tag{2.28}$$

où : $\varphi \in [0,2\pi[$, $s \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $\vec{\theta} = (\cos\varphi, \sin\varphi,0)$, $\vec{\zeta} = (-\sin\varphi, \cos\varphi,0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$. Les rayons considérés sont donc parallèles quand z est fixé. Le support englobant $K3$ est représenté dans la figure 2.8, et correspond intuitivement à l'intersection de 2 cylindres : un cylindre de base K avec un cylindre orthogonal de base circulaire (de rayon b) (voir la figure 2.8).

$$\begin{aligned} K3 = \{\ (k,\sigma,\tau) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2, \quad \text{où} \quad & |\sigma| < b, \\ & |k| < max(\frac{|\sigma|}{\vartheta}, b(\frac{1}{\vartheta} - 1)), \\ & |\tau| < c(b,\sigma)\ \} \end{aligned} \tag{2.29}$$

avec:

$$\begin{aligned} c(b,\sigma) &= b && \text{si } |\sigma| \leq \vartheta_{\vartheta,b} = max(1,(1-\vartheta)b) \\ &= \sqrt{b^2 - \sigma^2} && \text{si } \vartheta_{\vartheta,b} < |\sigma| < b \\ &= 0 && \text{sinon} \end{aligned} \tag{2.30}$$

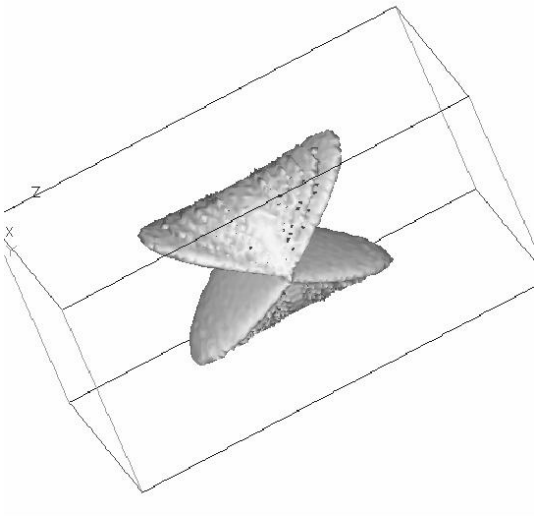


FIG. 2.8 – *Représentation 3D du support essentiel $K3$ de la transformée de Fourier de la transformée rayons X 3D parallèle (figure extraite de ([18]).*

La détermination de cet ensemble permet de trouver des schémas d'échantillonnage plus ou moins efficaces pour la transformée rayons X 3D parallèle :

– Le schéma d'échantillonnage standard:
Il est décrit par la matrice d'échantillonnage:

$$W_S = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

P désigne le nombre de positions angulaires par tour, h la distance entre deux projections parallèles coplanaires consécutives de même position angulaire, et H l'écart suivant z entre les plans parallèles. Les conditions d'échantillonnage associées, qui assurent le non-recouvrement des translatés de l'ensemble $K3$ sont les suivantes:

$$\begin{cases} P \text{ légèrement plus grand que } 2b \\ h \leq \frac{\pi}{b} \\ H \leq \frac{\pi}{b} \end{cases}$$

– Le schéma d'échantillonnage entrelacé:
Ce schéma introduit par Desbat [18] exploite les propriétés géométriques de $K3$ pour gagner en efficacité par rapport au schéma standard. Il combine un schéma d'échantillonnage hexagonal suivant z et un schéma entrelacé suivant φ et s. Ce schéma hexagonal entrelacé peut être décrit par la matrice :

$$W_{HI} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ h & 2h & 0 \\ \frac{H}{2} & 0 & H \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

W_{HI} vérifie les conditions d'échantillonnage si :

$$\begin{cases} P \text{ est légèrement plus grand que } 2b \\ h = \frac{\pi}{b} \\ H = \frac{2\pi}{\sqrt{3}b} \end{cases}$$

Ce schéma est de l'ordre de $\frac{4}{\sqrt{3}}$ plus efficace que le schéma standard W_S.

Echantillonnage en tomographie 3D hélicoïdale parallèle Cette géométrie correspond à un dispositif où une source animée d'un mouvement de rotation et de translation suivant z émet des rayons parallèles (transverses à l'axe z) vers un détecteur mono-ligne (voir la figure 2.9). L'acquisition hélicoïdale ajoute par rapport au cas précédent une contrainte : $z = \frac{2\pi}{H}\varphi$, où H désigne alors le pas de l'hélice. L'échantillonnage en tomographie hélicoïdale parallèle a été étudié par Desbat [4].

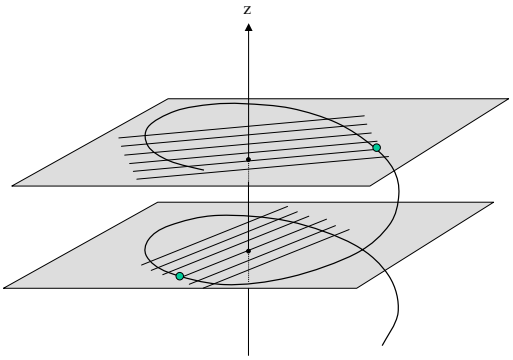


FIG. 2.9 – *Géométrie d'acquisition 3D hélicoïdale parallèle.*

Le premier schéma envisageable est le schéma standard généré par la matrice W_{helS}:

$$W_{helS} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ \frac{H}{P} & 0 & \frac{H}{2} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Le nombre P doit être pair. Ce schéma exploite la relation de symétrie : $g(\varphi,s,z) = g(\varphi+\pi,-s,z)$ de la transformée rayons X 3D parallèle. La relation de symétrie est en effet comprise dans le vecteur d'échantillonnage suivant e_z : $(0, \quad 0, \quad \frac{H}{2})$. Les conditions d'échantillonnage sont alors vérifiées si :

$$\begin{cases} P \text{ est légèrement plus grand que } 2b \\ h \leq \frac{\pi}{b} \\ H \leq \frac{2\pi}{b} \end{cases}$$

Un schéma plus efficace est obtenu en utilisant un décalage du détecteur d'un quart de pixel. Ce décalage associé à l'utilisation de la relation de symétrie permet d'obtenir les points d'échantillonnage $(0 \quad h/2 \quad 0) + L_{W_{helHI}}$, où $L_{W_{helHI}}$ désigne les points associés à la matrice W_{helHI}:

$$W_{helHI} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ h & 2h & 0 \\ \frac{H}{2} + \frac{H}{P} & 0 & H \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Cette matrice en réalité ne satisfait pas directement la contrainte hélicoïdale. Mais les points $(0 \quad h/2 \quad 0) + L_{W_{helHI}}$ sont effectivement atteints par une acquisition hélicoïdale en exploitant à la fois la relation de symétrie et le décentrage du détecteur (voir [4] pour plus de précisions). Les conditions d'échantillonnage sont vérifiées pour :

$$\begin{cases} P \text{ légèrement plus grand que } 2b \\ h = \frac{\pi}{b} \\ H = \frac{2\pi}{\sqrt{3}b} \end{cases}$$

Le schéma obtenu est alors $\frac{4}{\sqrt{3}}$ plus efficace que le schéma standard W_{helS}.

Nous utiliserons ces résultats dans le chapitre suivant en tomographie 2D parallèle dynamique.

2.2 La transformée de Radon: propriétés et inversion

Nous présentons dans cette section l'outil central en tomographie : la transformée de Radon. Nous présentons d'abord le théorème qui relie la transformée de Radon à l'objet via la transformée de Fourier. Nous relevons ensuite quelques propriétés de la transformée de Radon qui nous seront utiles par la suite. Enfin, nous exposerons les formules d'inversion. Notons que les formules d'inversion sont anciennes : la première est due à Radon et date de 1917 ([46]).

2.2.1 Théorème coupe-projection

La formule d'inversion de la transformée de Radon repose sur un résultat d'analyse de Fourier appelé théorème coupe-projection, que nous énonçons pour une fonction $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Soit $Fp(\vec{\theta},\sigma)$ la transformée de Fourier 1D suivant la variable s évaluée en σ de la projection parallèle de direction $\vec{\theta}$.
Soit $Ff(\sigma\vec{\theta})$ la transformée de Fourier de la fonction $f \in S(\mathbb{R}^n)$ évaluée au point $\sigma\vec{\theta}$.
Alors le thérèome coupe-projection consiste en l'égalité suivante :

$$\boxed{Fp(\vec{\theta},\sigma) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} Ff(\sigma\vec{\theta})} \tag{2.35}$$

La preuve formelle de ce théorème est simple :

$$\begin{aligned} Fp(\vec{\theta},\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta} - s)\, d\vec{x}\, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} f(\vec{x})\delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta} - s)\, ds \right) d\vec{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sigma\vec{x}\cdot\vec{\theta}} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} Ff(\sigma\vec{\theta}) \end{aligned}$$

Ce théorème relie la coupe de la transformée de Fourier de f avec la transformée de Fourier 1D de ses projections (voir aussi la figure 2.10).

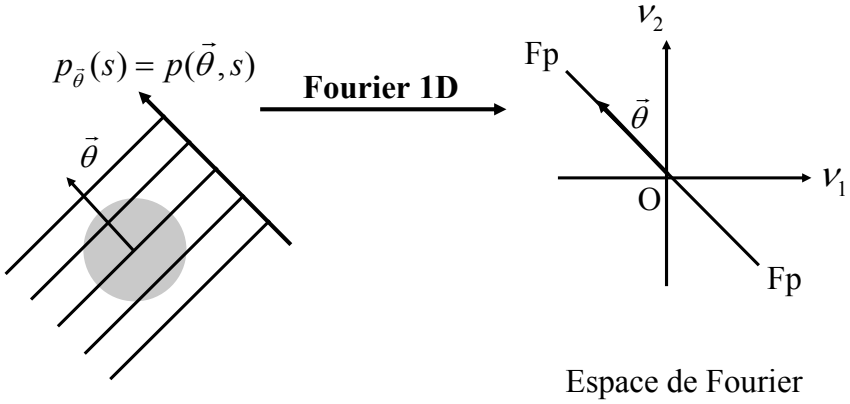


FIG. 2.10 – *Visualisation du théorème coupe-projection : la transformée de Fourier 1D d'une projection donne une coupe de la transformée de Fourier 2D de l'objet.*

2.2.2 Quelques propriétés de la transformée de Radon

Nous nous intéressons à quelques propriétés de la transformée de Radon qui sont utiles en pratique.

2.2.2.1 Consistance

Nous abordons dans cette section la question de la consistance des mesures, c'est à dire à des conditions nécessaires vérifiées par toute fonction appartenant à l'image de l'opérateur.

Condition de Helgason-Ludwig ([15] page 184, ou [40] page 36) Cette condition nous dit que le moment d'ordre m de la transformée de Radon est un polynôme homogène[3]de degré m en $\vec{\theta}$:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} R_{\vec{\theta}} f(s) s^m ds = p_m(\vec{\theta})$$

où p_m est un polynôme homogène de degré m.

Conséquences:

- En prenant $m = 0$, nous retrouvons la conservation de la masse : pour tout $\vec{\theta} \in S^{n-1}$, l'intégrale (suivant s) des projections est constante et égale à la masse de l'objet.
- En prenant $m = 1$, nous déduisons la conservation du centre de masse : le centre de masse de l'objet se projette sur le centre de masse de la projection.

Nous verrons comment cette propriété peut être utilisée en tomographie dynamique par exemple pour suivre la trajectoire du centre de masse (section 3.5.1.2).

3. Un polynôme $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est homogène de dégré m si :

$$\forall \lambda, P(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2.2.2.2 Transformée de Radon des déformées affines

La transformée de Radon de la transformée affine d'une fonction peut être facilement calculée. Nous avons en effet, pour une matrice A non singulière, et tout vecteur $\vec{b}$, la relation suivante, qui relie la transformée de Radon de l'objet $f_{A,\vec{b}}$ défini par $f_{A,\vec{b}}(\vec{x}) = f(A\vec{x} + \vec{b})$

$$Rf_{A,\vec{b}}(\vec{\theta},s) = \frac{1}{|detA|\ \|A^{-T}\vec{\theta}\|} Rf\left(\frac{A^{-T}\vec{\theta}}{\|A^{-T}\vec{\theta}\|}, \frac{s + A^{-1}\vec{b}\cdot\vec{\theta}}{\|A^{-T}\vec{\theta}\|}\right) \tag{2.36}$$

Nous nous servirons de cette formule dans le chapitre 5 sur la compensation des déformations affines dépendant du temps.

2.2.2.3 Quelques transformées de Radon calculables

Enfin nous clôturons cette partie sur les propriétés de la transformée de Radon en précisant quelques transformées de Radon usuelles:

- transformée de Radon d'un point source :
  Nous prenons $f(x_1,x_2) = \delta(x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02})$. Alors, à partir de la définition (2.1), nous avons :
  $$p(\varphi,s) = \delta(s - x_{01}\cos\varphi - x_{02}\sin\varphi) \tag{2.37}$$
  Nous en déduisons que la transformée de Radon d'un point source dans le domaine de Radon a la forme d'une sinusoïde. On appelle d'ailleurs sinogramme la représentation de la transformée de Radon d'une image du fait de cette propriété.
- transformée de Radon d'un disque :
  Il est possible de calculer explicitement la transformée de Radon d'un disque de centre (x_1,x_2), de rayon R et de densité uniforme égale à un. Nous obtenons :
  $$p(\varphi,s) = 2R\sqrt{1 - \left(\frac{s - x_{01}\cos\varphi - x_{02}\sin\varphi}{R}\right)^2}$$
  dans le cas où cette expression est définie, 0 ailleurs.
- transformée de Radon d'une ellipse :
  Par utilisation de la propriété de déformation affine (2.36), nous en déduisons la transformée de Radon d'une ellipse de centre (x_1,x_2) et de demi-axes (a,b) :
  $$p(\varphi,s) = 2\frac{ab}{r_\varphi^2}\sqrt{1 - \left(\frac{s - x_{01}\cos\varphi - x_{02}\sin\varphi}{r_\varphi}\right)^2} \tag{2.38}$$
  avec $r_\varphi = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$, et $p(\varphi,s) = 0$ dans le cas où (2.38) n'est pas définie.

Ces transformées de Radon explicites ainsi que la formule donnant la transformée de Radon de la déformée affine sont couramment utilisées en simulation pour obtenir des projections d'objets virtuels composés d'objets élémentaires, comme le fantôme de Shepp and Logan [47] que nous utiliserons plus tard.

2.2.3 Inversion de la transformée de Radon

Nous présentons dans cette section la formule fondamentale d'inversion de la transformée de Radon. Nous reprenons la démarche de Natterer ([40], chap II.2), en utilisant le potentiel de Riesz I^α défini pour $\alpha < n$ par:

$$F(I^\alpha f)(\vec{\xi}) = |\vec{\xi}|^{-\alpha} F f(\vec{\xi}) \tag{2.39}$$

Nous introduisons également l'opérateur $R^\sharp$ de rétroprojection,

$$R^\sharp g(\vec{x}) = \int_{S^{n-1}} g(\vec{\theta},\vec{x}\cdot\vec{\theta})\, d\vec{\theta} \tag{2.40}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(\vec{x}) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{\xi}\, e^{i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} |\vec{\xi}|^{-\alpha} F f(\vec{\xi}) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{S^{n-1}} d\vec{\theta} \int_0^{+\infty} d\sigma\, e^{i\vec{x}\cdot\sigma\vec{\theta}} |\sigma|^{n-1-\alpha} F f(\sigma\vec{\theta}) \qquad \text{en posant } \vec{\xi} = \sigma\vec{\theta} \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{2} \int_{S^{n-1}} d\vec{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, e^{i\vec{x}\cdot\sigma\vec{\theta}} |\sigma|^{n-1-\alpha} F f(\sigma\vec{\theta}) \qquad \text{par symétrie} \\
&= \frac{(2\pi)^{-n+\frac{1}{2}}}{2} \int_{S^{n-1}} d\vec{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, e^{i\vec{x}\cdot\sigma\vec{\theta}} |\sigma|^{n-1-\alpha} F R f(\vec{\theta},\sigma) \qquad \text{par théorème coupe projection} \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1} R^\sharp I^{\alpha+1-n} R f(\vec{x})
\end{aligned}$$

D'où la formule d'inversion, en appliquant le potentiel inverse $I^{-\alpha}$ et en reprenant la notation condensée p pour la transformée de Radon:

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{-\alpha} R^\sharp I^{\alpha+1-n} p \tag{2.41}$$

Posons alors $\alpha = 0$ dans (2.41). Nous obtenons :

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} R^\sharp I^{1-n} p \tag{2.42}$$

Remarquons à présent que l'opérateur I^{1-n} peut être exprimé en fonction d'opérateurs usuels. Nous commençons par écrire dans le domaine de Fourier[4] :

$$F(I^{1-n}p)(\vec{\theta},\sigma) = |\sigma|^{n-1} F p(\vec{\theta},\sigma) = i^{n-1}\sigma^{n-1}(\frac{1}{i})^{n-1}(\text{sign } \sigma)^{n-1} F p(\vec{\theta},\sigma) \tag{2.43}$$

– <u>cas n=2</u>
  Nous avons :

$$F(I^{-1}p)(\vec{\theta},\sigma) = |\sigma| F p(\vec{\theta},\sigma) = i\sigma(-i)(\text{sign } \sigma) F p(\vec{\theta},\sigma) \tag{2.44}$$

  Nous reconnaissons alors les expressions dans le domaine de Fourier de l'opérateur de dérivation et de l'opérateur de Hilbert. Nous avons dans le domaine direct:

$$f = \frac{1}{4\pi} R^\sharp H \frac{\partial}{\partial s} p \tag{2.45}$$

4. la tranformée de Fourier agit ici sur la seconde variable

Nous introduisons par h_R la distribution définie par : $h_R * q = \frac{1}{2\pi} H \frac{\partial q}{\partial s}$. Du fait de sa forme dans l'espace de Fourier (qui vaut avec nos conventions $Fh_R(\nu) = (2\pi)^{-3/2}|\nu|$), elle est appelée filtre rampe. La formule (2.45) devient alors en utilisant le filtre rampe:

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[h_R(s) *_s p(\vec{\theta}(\varphi),s)) \right]_{s=\vec{x}\cdot\vec{\theta}} d\varphi} \tag{2.46}$$

– <u>cas n=3</u>

$$F(I^{-2}p)(\vec{\theta},\sigma) = \sigma^2 Fp(\vec{\theta},\sigma)$$

Ainsi,

$$\boxed{f = \frac{-1}{8\pi^2} R^\sharp \frac{\partial^2}{\partial s^2} p} \tag{2.47}$$

2.3 Reconstruction en tomographie 2D

Nous présentons dans cette section les principales méthodes de reconstruction valables pour les géométries parallèles et divergentes que nous avons précédemment décrites. Ces approches et leur implémentation sont décrites avec précision dans l'ouvrage de Kak et Slaney [31] pour les approches classiques. Les approches récentes correspondent principalement aux articles de Noo [42], Kudo [36], et Chen [12].

2.3.1 Reconstruction en géométrie parallèle

2.3.1.1 Suffisance de données

Le théorème coupe-projection (2.35) permet de résoudre la question de la suffisance des données pour la reconstruction, c'est à dire quelles intégrales de droites doivent être mesurées pour pouvoir reconstruire l'objet, ou encore quels intervalles les variables φ et s doivent décrire. Il est clair qu'à φ fixé, s doit décrire la projection du support de l'objet. La variable angulaire φ doit quant à elle décrire un intervalle de mesure π, car ainsi la transformée de Fourier de l'objet peut être partout calculée à partir de celle des projections.

2.3.1.2 Formule de reconstruction

La reconstruction en géométrie parallèle est directement basée sur la formule (2.46). Notons d'abord que cette formule utilise l'intervalle $[0,2\pi]$. En réalité, elle peut aussi être écrite sur l'intervalle $[0,\pi]$ en utilisant la symétrie de la transformée de Radon : $p(\varphi,s) = p(\varphi+\pi,-s)$. Ainsi,

$$\boxed{f(\vec{x}) = \int_0^{\pi} \left[h_R(s) *_s p(\vec{\theta}(\varphi),s)) \right]_{s=\vec{x}\cdot\vec{\theta}} d\varphi} \tag{2.48}$$

2.3.2 Reconstruction classique en géométrie 2D divergente

Nous étendons maintenant les méthodes de reconstruction aux géométries 2D adaptées à un rayonnement divergent. Nous voulons obtenir une formule d'inversion en fonction du paramétrage du détecteur. Nous prenons ici l'exemple du paramétrage (λ,γ) correspondant au détecteur arc (voir section 2.1.1.2), et notons les projections dans cette géométrie $g^m(\lambda,\gamma)$.
La méthode classique consiste à écrire le lien entre la transformée rayons X et la transformée de Radon que nous avons vue à la section 2.1.2.1 pour effectuer un changement de variable $(\varphi,s) \mapsto (\lambda,\gamma)$. Nous redonnons ici les formules correspondant à nos conventions géométriques :

$$\begin{aligned} s &= R_0 \sin\gamma \\ \varphi &= \lambda + \frac{\pi}{2} - \gamma \\ u &= R \tan\gamma \end{aligned} \tag{2.49}$$

2.3.2.1 Suffisance de données

La condition de suffisance de données consiste à regarder l'image par le changement de paramétrage des intervalles de suffisance de données définis en géométrie parallèle.

Intervalle $[0,2\pi]$:
Soit $s_m = R_0 \sin\gamma_m$, où γ_m désigne la demi-ouverture du faisceau divergent de droites. Les intervalles $s \in [-s_m,s_m]$ et $\varphi \in [0,2\pi]$, correspondent exactement par changement de variable, aux intervalles $\lambda \in [0,2\pi]$ et $\gamma \in [\arcsin\frac{-s_m}{R_0}, \arcsin\frac{s_m}{R_0}]$. Nous en concluons que la portion de trajectoire définie par $\lambda \in [0,2\pi]$ est suffisante pour pouvoir reconstruire à partir de projections divergentes non tronquées. Nous donnerons une formule explicite d'inversion dans la section suivante.

Intervalle "short-scan" $[0,\pi + 2\gamma_m]$:
Nous avons vu que la relation de symétrie de la transformée de Radon permettait la reconstruction pour φ variant sur un intervalle de longueur π. Nous en déduisons alors qu'il est possible de relaxer la condition précédente. Les projections divergentes non tronquées obtenues quand la source décrit l'intervalle appelé <u>short-scan</u> défini par $\lambda \in [0,\pi + 2\gamma_m]$ contiennent toutes les droites de l'intervalle $s \in [-s_m,s_m]$ et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Par conséquent, cet intervalle est suffisant pour la reconstruction de l'objet. Notons que l'intervalle short-scan contient des données redondantes : certaines droites de cet intervalle sont en effet vues deux fois (voir la figure 2.11).

2.3.2.2 Reconstruction

Reconstruction sur 2π L'utilisation du changement de paramétrage (2.49) dans la formule d'inversion (2.46) de la transformée de Radon conduit à la formule de reconstruction (voir par exemple [31] pour une démonstration) :

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}(\lambda) - \vec{x}\|^2} \int_{-\gamma_m}^{+\gamma_m} d\gamma\ R_0 \cos(\gamma) g^m(\lambda,\gamma) h_R^{ang}(\gamma(\vec{x}) - \gamma)} \tag{2.50}$$

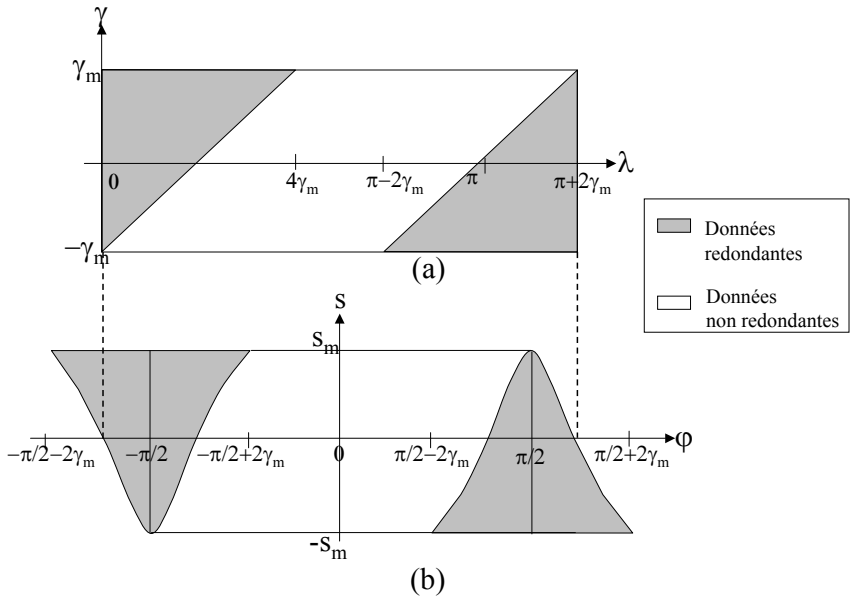


FIG. 2.11 – *Visualisation des données redondantes dans l'intervalle short-scan. (a): sinogramme dans la géométrie divergente sur un intervalle short-scan. (b): données correspondantes exprimées avec le paramétrage de la géométrie parallèle. Les zones blanches correspondent à des droites mesurées une fois; les zones grises à des droites mesurées deux fois.*

$$\text{où :} \qquad h_R^{ang}(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 h_R(\gamma)$$

$\gamma(\vec{x})$ est à λ fixé la valeur du paramètre γ de la droite passant par $\vec{x}$

La formule (2.50) est une formule de type filtrage-rétroprojection (ou FBP pour Filtered Back-Projection) : l'image reconstruite est obtenue par rétroprojection des projections préalablement pondérées par le terme $R_0\cos(\gamma)$ et filtrées suivant la variable angulaire γ par une variante du filtre rampe h_R^{ang}.

Reconstruction sur un "short scan" : gestion de la redondance Il est également possible d'obtenir une formule d'inversion de type filtrage-rétroprojections à partir d'un intervalle short-scan. Cela impose de gérer la redondance contenue dans cet ensemble de projections, qui provoque la non-injectivité du changement de variable de (φ,s) vers (λ,γ) suivant les formules (2.49). Cette non-injectivité est corrigée en multipliant les données préalablement à la reconstruction par une fonction de poids lisse vérifiant une condition de normalisation : la somme des poids affectés aux rayons correspondant à une même droite doit être égale à un. Ces poids portent aussi le nom de "poids de Parker", car Parker suggéra le premier l'utilisation d'une telle fonction de poids [45], que nous récrivons ici avec nos conventions :

$$w(\lambda,\gamma) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi\lambda}{4(\gamma_m+\gamma)}\right) & \text{pour : } 0 \leq \lambda \leq 2\gamma_m + 2\gamma \\ 1 & \text{pour : } 2\gamma_m + 2\gamma \leq \lambda \leq \pi + 2\gamma \\ \sin^2\left(\frac{\pi(\pi+2\gamma_m-\lambda)}{4(\gamma_m-\gamma)}\right) & \text{pour : } \pi + 2\gamma \leq \lambda \leq \pi + 2\gamma_m \end{cases}$$

La formule de reconstruction de type filtrage-rétroprojection est alors :

$$\boxed{f(\vec{x}) = \int_0^{\pi+2\gamma_m} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}(\lambda)-\vec{x}\|^2} \int_{-\gamma_m}^{+\gamma_m} d\gamma \; R_0 \cos(\gamma) w(\lambda,\gamma) g^m(\lambda,\gamma) h_R^{ang}(\gamma(\vec{x})-\gamma)} \quad (2.51)$$

où : $h_R^{ang}(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 h_R(\gamma)$

$\gamma(\vec{x})$ est à λ fixé la valeur du paramètre γ de la droite passant par $\vec{x}$

Les poids de Parker interviennent comme une pondération du sinogramme préalablement à la reconstruction.

2.3.3 Nouvelles approches en géométrie 2D divergente :

Nous présentons maintenant les nouvelles approches en tomographie divergente 2D. Le premier article à présenter ces résultats est celui de Noo et al [42] publié en juillet 2002. Depuis, des variantes ont été proposées par Kudo et al [36] et Chen [12]. Ces travaux ont une importance toute particulière dans cette thèse, puisque nous utilisons certains aspects de cette technique dans nos deux contributions des chapitres 4 et 5.

Ces travaux ont introduit une nouvelle condition de suffisance de données plus souple que la condition précédente, déduite de la formule de Hamaker 2D (2.17). Une formule de reconstruction de type filtrage-rétroprojection (ou FBP) associée à cet ensemble minimal de positions de source est aussi proposée.

2.3.3.1 Suffisance de données

Nous récrivons ici la formule de Hamaker 2D (2.17):

$$g_H(\lambda,\vec{\theta}) = p_H(\vec{\theta},\vec{\theta}\cdot\vec{a}(\lambda))$$

Cette formule est un lien indirect entre données divergentes et données parallèles via la transformée de Hilbert. Nous avons vu dans la formule d'inversion (2.45) que le filtre rampe de reconstruction pouvait être écrit comme la composition d'une dérivée et du filtre de Hilbert. Nous en déduisons donc que la connaissance de la transformée de Hilbert p_H pour toutes les droites passant au voisinage d'un point $\vec{x}$ permet la reconstruction en ce point, en appliquant une dérivation puis une rétroprojection. Or, d'après la formule (2.17), on peut calculer p_H pour une droite de normale $\vec{\theta}$ passant par $\vec{x}$ en filtrant des projections divergentes provenant de la position de source $\vec{a}(\lambda)$ telle que : $\vec{\theta}\cdot\vec{a}(\lambda) = \vec{\theta}\cdot\vec{x}$. Les solutions correspondent aux intersections de la droite de normale $\vec{\theta}$ passant par $\vec{x}$ avec la trajectoire $\vec{a}(\lambda)$. Nous venons donc d'établir la condition de suffisance de données suivante : *une région d'intérêt peut être reconstruite à partir de projections divergentes non tronquées si toute ligne passant au voisinage de la région d'intérêt coupe la trajectoire de la source.* L'ensemble de positions de source associé à une région d'intérêt est appelé "very short-scan". C'est un ensemble plus court que le "short scan". Ce dernier revient à imposer la condition précédente à tous les points du support de l'objet pour la reconstruction de n'importe quel point. Pour une trajectoire circulaire, il est facile de voir que l'ensemble minimal associé à un point est la portion de trajectoire délimitée par la plus petite corde (voir la figure 2.12).

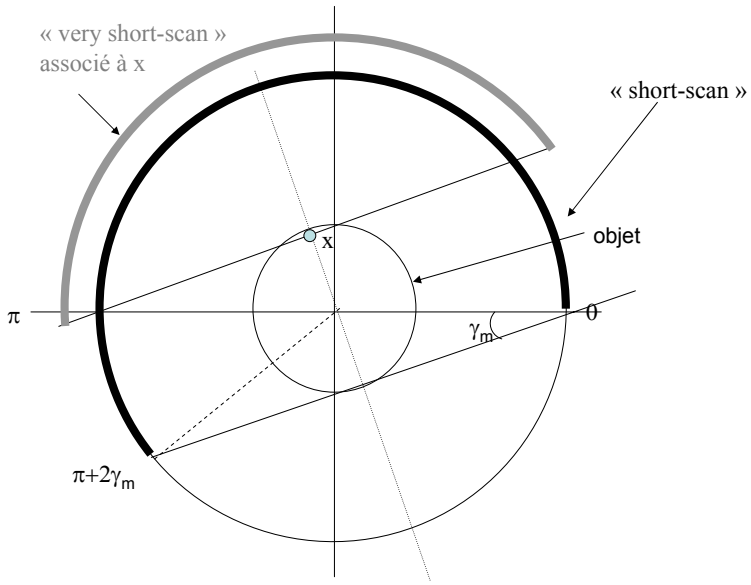


FIG. 2.12 – *Visualisation de l'ensemble minimal "very short-scan" associé à un point. Cet ensemble (en gris) est plus court que l'ensemble "short-scan".*

2.3.3.2 Reconstruction

Noo [42] propose aussi une formule de reconstruction de type filtrage-rétroprojection valable sur un ensemble de positions de source noté $\Lambda(\vec{x})$ vérifiant la condition d'admissibilité par rapport à un point $\vec{x}$. Cet ensemble n'est pas forcément minimal : une correction de la redondance est gérée par une fonction de poids, qui dans cette formule, est appliquée non pas sur les projections acquises, mais sur les projections filtrées, juste avant la rétroprojection :

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda(\vec{x})} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}(\lambda)-\vec{x}\|}\left[w(\lambda,\vec{\theta})g_F(\lambda,\vec{\theta})\right]_{\vec{\theta}=\vec{\theta}^*}} \tag{2.52}$$

$$\text{où } \; g_F(\lambda,\vec{\theta}) = -\int h_H(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha})g'(\lambda,\vec{\alpha}) \tag{2.53}$$

$$\text{avec } \; g'(\lambda,\vec{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial\lambda_{|\vec{\alpha}}}g(\lambda,\vec{\alpha}) \tag{2.54}$$

La formule (2.52) est écrite pour un paramétrage divergent général, faisant intervenir le vecteur unitaire $\vec{\alpha}$. Les projections acquises $g(\lambda,\vec{\alpha})$ sont d'abord dérivées suivant λ à direction $\vec{\alpha}$ fixée, ce que nous notons par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial\lambda_{|\vec{\alpha}}}$. Ces projections dérivées sont ensuite filtrées par le filtre de Hilbert, pour obtenir les projections filtrées $g_F(\lambda,\vec{\theta})$. Ces projections filtrées sont ensuite pondérées par $w(\lambda,\vec{\theta})$ puis rétroprojetées sur l'ensemble $\Lambda(\vec{x})$. Le vecteur $\vec{\theta}^*$ désigne en effet le vecteur normal à la droite reliant $\vec{x}$ à la source $\vec{a}(\lambda)$ de même orientation que la tangente à la trajectoire. La fonction de poids est définie de manière similaire à la fonction de Parker : c'est une fonction lisse qui corrige la redondance en imposant que la somme des poids affectés aux rayons $(\lambda,\vec{\alpha})$ correspondant à une même droite soit égale à un.
Il est possible d'écrire cette formule suivant l'un ou l'autre des paramétrages utilisés en tomographie divergente. Nous nous limitons ici au paramétrage (λ,γ) des mesures $g^m(\lambda,\gamma)$ (le

lecteur est renvoyé à l'article [42] pour les résultats écrits avec l'autre paramétrage (λ,u)). Nous notons:

$$g_F^m(\lambda,\xi) = \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} d\gamma \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\right) g_\lambda^m(\lambda,\gamma)\, h_H^{ang}(\xi-\gamma) \tag{2.55}$$
$$\text{avec } h_H^{ang}(\gamma) = \left|\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right| h_H(\gamma)$$

Alors, nous avons la formule :

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda(\vec{x})} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}(\lambda)-\vec{x}\|}\Big[w(\lambda,\xi)g_F^m(\lambda,\xi)\Big]_{\xi=\xi^*(\vec{x},\lambda)}} \tag{2.56}$$

où ξ^* est l'angle caractérisant le rayon divergent de $\vec{a}(\lambda)$ et passant par $\vec{x}$.

2.4 Reconstruction en tomographie 3D

La reconstruction tomographique en géométrie conique est un domaine de recherche actuellement très actif, comme l'illustre la part accrue dévouée à ce thème de recherche lors du congrès international sur la reconstruction 3D (*"Fully 3D reconstruction in radiology and nuclar medicine"*).

L'état de l'art que nous proposons ici n'est pas exhaustif. Nous avons choisi de décrire les grandes familles de méthodes, et de détailler plus précisément les quelques approches qui sont liées à notre contribution.

2.4.1 Inversion de la transformée de Radon 3D

2.4.1.1 Suffisance des données

L'utilisation de la version 3D du théorème coupe-projection (2.35) donne la condition de suffisance des données pour la transformée de Radon 3D (c'est à dire pour des projections suivant les plans de l'espace) : *les projections suivant tous les plans ayant une intersection avec le support de l'objet à reconstruire doivent être acquises*.

2.4.1.2 Reconstruction

Nous pouvons récrire sous une autre forme la formule d'inversion (2.47) établie dans la section 2.2 :

$$f(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_{S^2} d\vec{\theta}\, \frac{\partial}{\partial s^2} p(\vec{\theta},s=\vec{x}\cdot\vec{\theta}) \tag{2.57}$$

2.4.2 Reconstruction en géométrie conique

Nous nous intéressons à la géométrie conique modélisant les dispositifs scanner à rayons X. Nous présentons ici les approches exactes qui supposent les projections non-tronquées.

2.4.2.1 Lien entre transformées 3D : suffisance des données et reconstruction par réarrangement

Les méthodes exactes de reconstruction en géométrie conique sont toujours constituées d'une étape plus ou moins visible permettant de se ramener à la transformée de Radon 3D. Nous avons vu dans la section 2.1.2.1 que deux liens importants ont été formulés : celui de Tuy et celui de Grangeat. C'est historiquement de la formule de Tuy qu'est issue la condition de suffisance de données sur la trajectoire appelée aujourd'hui *Condition de Tuy* que nous énonçons maintenant :

Tous les plans ayant une intersection non vide avec le support de l'objet à reconstruire ont au moins une intersection non tangentielle avec la trajectoire de la source.

Il est aisé de comprendre la provenance de cette condition à partir de la formule (2.22) : si la trajectoire vérifie la condition de Tuy, alors $\frac{\partial^2}{\partial s^2}p(\vec{\xi},s)$ est calculable en tout point à partir des projections coniques. La reconstruction 3D est alors possible par rétroprojection de $\frac{\partial^2}{\partial s^2}p(\vec{\xi},s)$ (voir formule (2.57)). Notons aussi que *cette condition est locale* : si elle est vérifiée pour un point donné, alors il est possible de reconstruire l'objet en ce point. Remarquons aussi que l'on arrive à la même conclusion en appliquant à la formule de Grangeat (2.19) une dérivation suivant λ à direction $\vec{\theta}$ constante.

Il est intéressant de regarder quelques trajectoires de source communes : la trajectoire circulaire et la trajectoire hélicoïdale (voir la figure 2.13). La trajectoire circulaire n'est pas complète au sens de Tuy, à la différence de la trajectoire hélicoïdale.

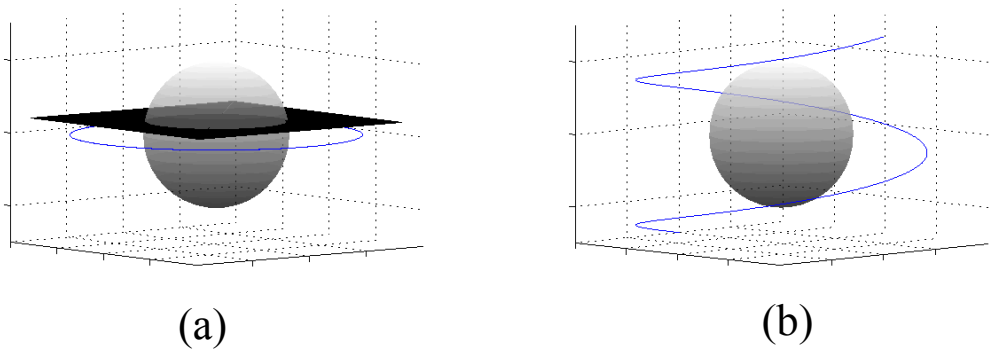


FIG. 2.13 – *Illustration de la condition de Tuy pour deux trajectoires. (a) : pour la trajectoire circulaire, les plans parallèles au plan de la trajectoire mais distincts de celui-ci et qui rencontrent le support de l'objet montrent que la trajectoire n'est pas complète. (b) La trajectoire hélicoïdale par contre vérifie la condition de Tuy.*

Une première classe d'algorithmes est alors envisageable, notamment à partir de la formule de Grangeat (2.19). Dans ce cas, la fonction intermédiaire est utilisée pour calculer à partir des projections acquises la dérivée première de la transformée de Radon, à partir de laquelle il est possible de reconstruire la fonction f. Dans cette approche, la redondance des données peut être facilement gérée. Cependant, ces approches par réarrangement nécessitent toutes les données dans l'espace de Radon, ce qui pose problème quand les données acquises sont tronquées (nous reviendrons en détail sur ce problème dans la section sur la tomographie hélicoïdale). De

plus, les formulations de type filtrage-rétroprojection sont préférables car numériquement plus efficaces.

2.4.2.2 Approche Defrise and Clack [16]

Defrise et Clack [16] ont établi une formulation de type filtrage-rétroprojection surun ensemble suffisant de positions de sources Λ dérivant de la méthode de Grangeat. La formule qu'ils ont établie est la suivante:

$$f(\vec{x}) = \int_{\Lambda} d\lambda \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\|^2} g_F(\lambda,\vec{\beta}(\lambda,\vec{x})) \tag{2.58}$$

avec $\vec{\beta}(\lambda,\vec{x}) = \dfrac{\vec{x} - \vec{a}(\lambda)}{\|\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\|}$ et pour $\vec{\omega} \in S^2$ et $\lambda \in \Lambda$:

$$g_F(\lambda,\vec{\omega}) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{S^2/2} d\vec{\theta}\, |\vec{a}'(\lambda) \cdot \vec{\theta}| M(\vec{\theta},\lambda) \delta'(\vec{\omega} \cdot \vec{\theta}) g_G(\lambda,\vec{\theta}) \tag{2.59}$$

où $\vec{a}'(\lambda)$est le vecteur tangent à la trajectoire au point $\vec{a}(\lambda)$

La fonction intermédiaire $g_G(\lambda,\vec{\theta})$ a été définie dans la formule (2.19). L'algorithme consiste dans une première étape à calculer pour chaque λ la fonction intermédiaire $g_G(\lambda,\vec{\theta})$. Puis à calculer les projections filtrées $g_F(\lambda,\vec{\omega})$; une fonction de poids $M(\vec{\theta},\lambda)$ très importante dans cette méthode intervient à ce stade pour corriger la redondance des données.

$$M(\vec{\theta},\lambda) = \frac{|\vec{a}'(\lambda) \cdot \vec{\theta}|^m c(\lambda)}{\sum_{k=1}^{n(\vec{\theta},\lambda)} |\vec{a}'(\lambda_k) \cdot \vec{\theta}|^m c(\lambda_k)} \tag{2.60}$$

où $c(\lambda)$ est une fonction lisse égale à un partout sauf au voisinage des extrémités de Λ où elle tend vers zéro; m est un entier positif supérieur ou égal à deux. La fonction entière $n(\vec{\theta},\lambda)$ est le nombre des λ_k points d'intersections du plan de normale $\vec{\theta}$ passant par $\vec{a}(\lambda)$ avec la trajectoire. Cette fonction de poids vérifie une condition de normalisation : $\sum_{k=1}^{n(\vec{\theta},\lambda)} M(\vec{\theta},\lambda_k) = 1$. De plus, elle est différentiable. Enfin, les données filtrées sont rétroprojetées en 3D. Une approche comparable a été donnée par Kudo et Saito [38].

Cette formule présente donc l'avantage d'avoir une structure de type FBP. Cependant, elle nécessite une lourde étape de calcul de la fonction intermédiaire ainsi qu'une lourde étape de filtrage. Nous détaillons maintenant la récente formule de Katsevich qui permet de réduire nettement ces calculs.

2.4.2.3 Approche Katsevich pour des géométries quelconques [34]

Le schéma pour obtenir cette formule consiste à insérer la dérivée de la fonction intermédiaire de Grangeat dans la formule d'inversion de la transformée de Radon (2.57), ce qui permet d'obtenir après quelques transformations la formule intermédiaire suivante (voir [34] ou l'an-

nexe B de [44]) :

$$f(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Lambda(\vec{x})} d\lambda \, \frac{1}{||\vec{x} - \vec{a}(\lambda)||} g_F(\lambda,\vec{x},\vec{\beta}(\lambda,\vec{x})) \tag{2.61}$$

avec : $\vec{\beta}(\lambda,\vec{x}) = \dfrac{\vec{x} - \vec{a}(\lambda)}{\|\vec{x} - \vec{a}(\lambda)\|}$

et : $g_F(\lambda,\vec{x},\vec{\beta}(\lambda,\vec{x})) = \displaystyle\int_{S^2} d\vec{\theta} \, \text{sgn}(\vec{\theta} \cdot \vec{a}'(\lambda)) \, \omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}) \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}} g_G(\lambda,\vec{\theta}) \right) \, \delta(\vec{\theta} \cdot \vec{\beta}(\lambda,\vec{x}))$

Ainsi, $f(\vec{x})$ est le résultat de la rétroprojection des projections coniques filtrées. Ce filtrage, à ce stade, fait intervenir la dérivée de la fonction intermédiaire de Grangeat g_G. La fonction de poids $\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x})$ pondère les $(\lambda_j)_{j=1\ldots n(\vec{x},\vec{\theta})}$ intersections de la trajectoire $\Lambda(\vec{x})$ avec les plans contenant $\vec{x}$ de normale $\vec{\theta}$. Cette fonction de poids, à la différence de celle de la formule (2.60), peut dépendre de $\vec{x}$, et peut être discontinue. Elle doit vérifier la contrainte de normalisation (2.62) :

$$\sum_{j=1}^{n(\vec{x},\vec{\theta})} \omega(\lambda_j,\vec{\theta},\vec{x}) = 1 \tag{2.62}$$

Notons que du fait de la présence du terme $\delta(\vec{\theta} \cdot \vec{\beta})$, l'intégrale sur S^2 définissant g_F peut être ramenée à une intégrale sur un cercle intersection de la sphère unité avec le plan de normale $\vec{\beta}$. Nous notons ce cercle $\vec{\beta}^{\perp}$. Ainsi, nous pouvons restreindre $\vec{\theta}$ à ce cercle et le paramétrer par un angle φ, ce qui donne une expression simplifiée de g_F :

$$g_F(\lambda,\vec{x},\vec{\beta}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \text{sgn}(\vec{\theta}(\varphi) \cdot \vec{a}(\lambda)') \, \omega(\lambda,\vec{\theta}(\varphi),\vec{x}) \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}(\varphi)} g_G(\lambda,\vec{\theta}(\varphi)) \right)$$

Katsevich prend ensuite le repère particulier orthonormé de $\mathbb{R}^3$ défini par les vecteurs :

$$\vec{\beta}, \quad \vec{\theta} = \vec{\theta}(\varphi) \in \beta^{\perp}, \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta} \wedge \vec{\theta}$$

Il définit $U(\lambda,\vec{\theta}(\varphi),\vec{x})$:

$$U(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}) = \text{sgn}(\vec{\theta} \cdot \vec{a}(\lambda)') \, \omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}) \tag{2.63}$$

Alors, si la fonction de poids vérifie la contrainte "$\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x})$ constant par morceaux" à λ et $\vec{x}$ fixés pour $\vec{\theta} \in \vec{\beta}^{\perp}$, la fonction $U(\lambda,\vec{\theta}(\varphi),\vec{x})$ est constante par morceaux suivant φ. Nous pouvons écrire ses sauts (c_m), pour $m = 1 \cdots M$:

$$c_m(\lambda,\vec{x}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} U(\lambda,\vec{\theta}(\varphi_m + \epsilon),\vec{x}) - U(\lambda,\vec{\theta}(\varphi_m - \epsilon),\vec{x}) \tag{2.64}$$

Après calculs, Katsevich [34] obtient la formule suivante,:

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Lambda(\vec{x})} d\lambda \, \frac{1}{||\vec{x} - \vec{a}(\lambda)||} \sum_{m=1}^{M} c_m(\lambda,\vec{x}) \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{\sin\gamma} \, g_d(\lambda, \cos\gamma \, \vec{\beta}(\lambda,\vec{x}) + \sin\gamma \, \vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_m))} \tag{2.65}$$

La propriété fondamentale de la formule (2.65) est qu'elle ne fait intervenir qu'une suite de filtrages 1D des données acquises dérivées $g_d(\lambda,\vec{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\alpha}} g(\lambda,\vec{\alpha})$. Katsevich donne l'exemple

d'une fonction de poids répartissant uniformément les contributions des intersections d'un plan donné avec la trajectoire. Dans ce cas particulier, il montre (voir la section 3 de [34]) deux propriétés de la formule (2.65):

- $c_m(\lambda,\vec{x})$ et $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_m)$ ne dépendent de $\vec{x}$ que via le vecteur $\vec{\beta}(\lambda,\vec{x})$,
- l'intégrale suivant γ dans (2.65) peut se ramener à une convolution.

La formule obtenue admet donc dans ce cas une implémentation efficace. Les données qu'elle utilise pour la reconstruction en un point $\vec{x}$ pour une position de source $\vec{a}(\lambda)$ sont limitées aux M plans de vecteurs base $(\vec{\beta}(\lambda,\vec{x}),\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_m))$ et passant par $\vec{x}$ (voir la figure 2.14). Ils dépendent donc de la fonction de poids utilisée. Les conséquences sont importantes : si $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_m)$ est à peu près horizontal, les données utilisées pour le filtrage seront contenues dans le détecteur indépendamment du support de l'objet suivant z. Ce ne sera par contre pas le cas si $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_m)$ est proche de l'axe z. Ce type de plan pose des problèmes en pratique. L'enjeu de la méthode de Katsevich est donc de trouver les fonctions de poids répondant à certaines contraintes, notamment de pouvoir gérer les données axialement tronquées. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.4.3.4.

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier de la tomographie hélicoïdale.

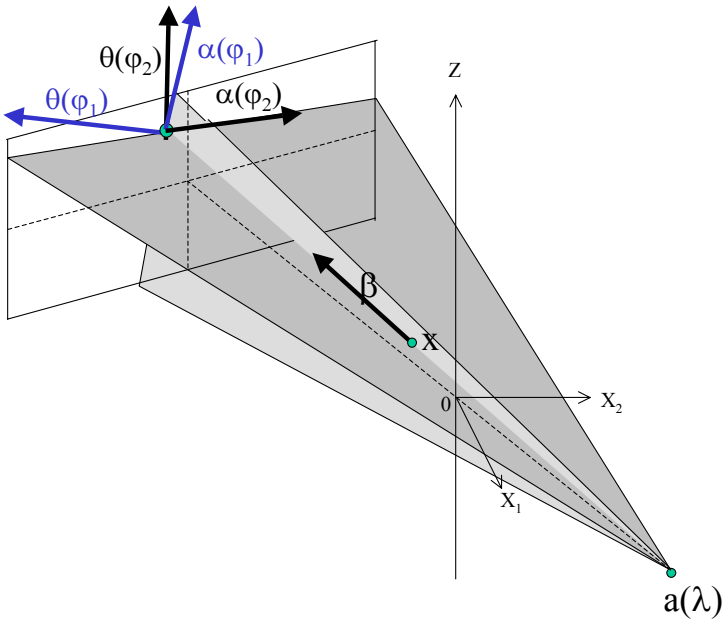


FIG. 2.14 – *Définition des lignes de filtrage dans l'algorithme de Katsevich. Suivant les discontinuités de la fonction de poids, différents plans interviennent: dans cet exemple, le plan* $(\vec{\beta}(\lambda,\vec{x}),\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_1))$ *ne peut être traité avec des données axialement tronquées si le support en* z *de l'objet est long. Ce n'est pas le cas de l'autre plan* $(\vec{\beta}(\lambda,\vec{x}),\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x},\varphi_2))$.

2.4.3 Tomographie 3D avec trajectoire hélicoïdale

La géométrie 3D avec trajectoire de source hélicoïdale est très importante car elle correspond à la géométrie d'acquisition des scanners modernes. En effet, ceux-ci sont caractérisés

par la translation du lit du patient au travers du plan de la trajectoire circulaire de la source de rayons X. Ainsi, dans le repère propre au patient, la trajectoire de la source est une hélice (voir la figure 2.15).

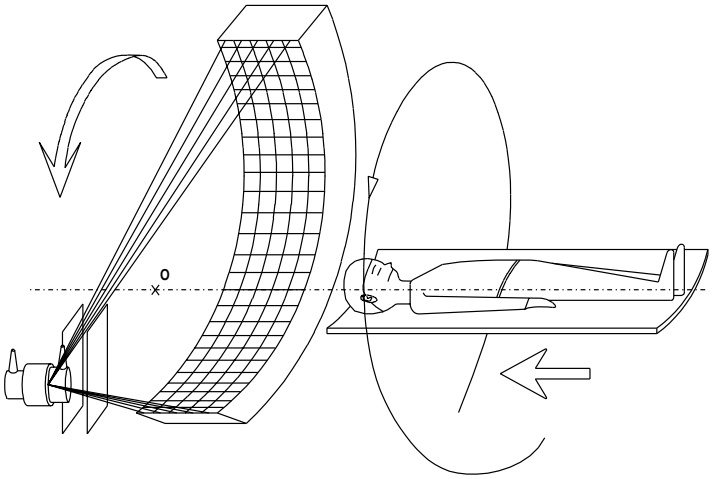


FIG. 2.15 – *Illustration de la géométrie d'acquisition sur les scanners modernes. Du fait de la translation du lit, la trajectoire relativement au patient devient une hélice.*

2.4.3.1 Problématique de reconstruction de données axialement tronquées

Nous avons vu dans la section 2.4.2.1 que la trajectoire hélicoïdale était complète au sens de Tuy, c'est à dire qu'une reconstruction exacte est possible à partir de données non tronquées. Plus précisément, la plus petite portion de trajectoire (notée $I_{pi}(\vec{x})$) vérifiant la condition de Tuy pour un point donné $\vec{x}$ est définie à partir d'un segment particulier appelé π-ligne. La π-ligne est le plus petit segment reliant un point donné à deux points de l'hélice séparés par moins d'un pas. La π-ligne existe et est unique en tout point du cylindre inclus dans l'hélice (voir la figure 2.16 et la référence [14]).

Il est donc possible de reconstruire exactement un point $\vec{x}$ à partir de la portion de trajectoire associée à sa π-ligne d'après la condition de Tuy. Mais cela suppose d'avoir des données non tronquées, notamment axialement. Ce n'est pas le cas si on utilise un détecteur de taille finie. Beaucoup d'efforts ont donc été consacrés à la résolution du "problème de l'objet long" : trouver une méthode de reconstruction exacte permettant de reconstruire une coupe d'équation $z = z_0$ à partir des données mesurées sur un détecteur pour une portion de l'hélice comprise entre les cotes $z_0 - \Delta z$ et $z_0 + \Delta z$, avec Δz indépendant du support suivant z de l'objet à reconstruire. Une solution efficace numériquement de ce problème a été donnée par Katsevich [32] en 2001 : les données utilisées pour la reconstruction sont comprises dans la zone du détecteur délimitée par les projections de l'hélice de part et d'autre de la projection du point source (voir la figure 2.17) ainsi que sur un voisinage de cette zone. Cette portion de détecteur est aussi appelée fenêtre de Tam-Danielsson (voir la figure 2.17). La méthode de Katsevich est caractérisée par son exactitude et son efficacité numérique (voir la section 2.4.3.4).

Dans la suite, nous décrivons les grandes familles de reconstruction approchée, basées soit sur une rétroprojection 2D soit sur une rétroprojection 3D. Ces méthodes sont généralisables au

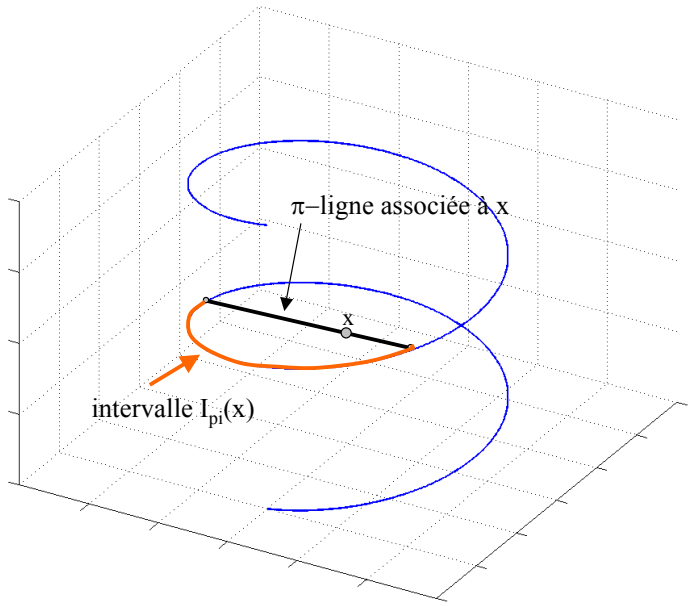


FIG. 2.16 – *Visualisation de la π-ligne associée à un point $\vec{x}$. La portion de trajectoire associée (en rouge) permet la reconstruction exacte en ce point à partir de données non tronquées d'après la condition de Tuy.*

cas de la tomographie cardiaque, comme nous le verrons au chapitre 3. Nous détaillons ensuite la méthode de Katsevich.

2.4.3.2 Méthodes approchées avec rétroprojection 2D

Ces méthodes consistent à interpoler rayon par rayon des jeux de données correspondant à des plans transverses à partir des projections acquises. Cette interpolation permet ainsi d'obtenir des jeux de données planaires dans la géométrie 2D divergente ou parallèle. La reconstruction de la coupe est alors simplement obtenue par application d'un algorithme de tomographie 2D, utilisant donc une opération de rétroprojection 2D (voir par exemple [13]). Une extension de ces approches permettant d'améliorer les performances consiste à considérer des plans obliques qui minimisent la distance à l'hélice (voir la figure 2.18). L'interpolation de données sur ces plans est plus performante que sur des plans transverses (voir par exemple l'article de Kachelriess [30]). Une approche unificatrice sur les méthodes par réarrangement est donnée par Defrise dans [17].

2.4.3.3 Méthodes approchées avec rétroprojection 3D

Des approches utilisant une rétroprojection 3D doivent être utilisées pour les problèmes où la conicité devient trop grande. Ces méthodes sont des variantes de la méthode approchée de Feldkamp [21] initialement conçue pour la reconstruction à partir d'une trajectoire circulaire, dont les étapes sont les suivantes :

- pondération par le cosinus de l'angle du cône (voir la figure 2.19),
- pondération corrigeant la redondance des données (relativement à un plan transverse),

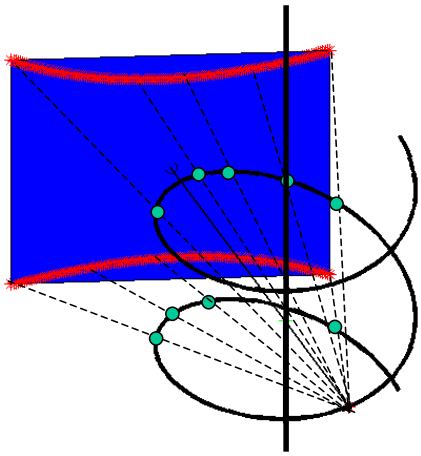


FIG. 2.17 – *Représentation de la fenêtre de Tam-Danielson sur le détecteur. Les limites de cette fenêtre sont les projections de l'hélice de part et d'autre de la projection du point source.*

- filtrage par le filtre rampe des données pondérées,
- rétroprojection respectant la géométrie

La méthode de Feldkamp est une manière empirique mais efficace d'étendre à la géométrie conique des algorithmes de reconstruction valables en géométrie 2D divergente. Elle peut être facilement étendue de la trajectoire circulaire à la trajectoire hélicoïdale. Ainsi, Kudo [37] relève plusieurs variantes de l'extension de l'algorithme de Feldkamp à la géométre hélicoïdale :

- une première version basée sur l'algorithme de reconstruction 2D "short-scan",
- des versions basées sur l'algorithme de reconstruction 2D "very short-scan" ([42],[36])

Un avantage notable des versions basées sur la généralisation des approches "very short-scan" est la place de la pondération corrigeant la redondance, qui a lieu après le filtrage des données pour ces méthodes. Ce n'était pas le cas pour les approches "short-scan", ce qui avait pour conséquence de requérir une étape de filtrage pour chaque coupe à reconstruire (voir [37] pour plus de détails).
Notons enfin deux points importants sur les méthodes basées sur la rétroprojection 3D :

- certaines variantes réarrangent préalablement à la reconstruction les données du détecteur ligne à ligne en géométrie parallèle (voir par exemple [39]),
- une amélioration des méthodes approchées est obtenue grâce un filtrage des données du détecteur suivant les lignes parallèles à la projection de la tangente de l'hélice (voir par exemple [93]).

2.4.3.4 Approche exacte de Katsevich

La formule de reconstruction exacte de Katsevich ([33],[32]) est un cas particulier de la formule générale (2.65) comme cela est décrit dans [34]. Il faut pour cela considérer la fonction de poids définie par :

$$\omega_{kat}(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}) = \omega_{I_{pi}}(\vec{x},\lambda)\mathrm{sgn}(\vec{\theta}\cdot\vec{a}(\lambda)')\mathrm{sgn}(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x})) \tag{2.66}$$

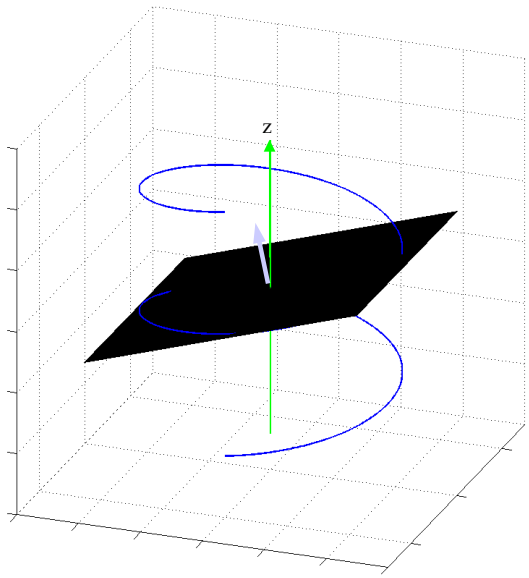


FIG. 2.18 – *Reconstruction en tomographie hélicoïdale par rétroprojection sur des plans obliques proches de l'hélice.*

Dans cette expression, $\omega_{I_{pi}}(\vec{x},\lambda)$ vaut 1 si $\lambda \in I_{pi}(\vec{x})$, 0 sinon. Le vecteur $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x})$ correspond à l'intersection du plan du détecteur avec un plan noté $\mathcal{K}(\lambda,\psi)$ contenant les quatre points $[\vec{x}, \vec{a}(\lambda), \vec{a}(\lambda+\psi), \vec{a}(\lambda+2\psi)]$. Il existe toujours pour $\lambda \in I_{pi}(\vec{x})$ un plan $\mathcal{K}(\lambda,\psi)$ passant par un point $\vec{x}$ donné (en cas de non unicité, c'est celui associé à Ψ minimal qui est choisi) (voir [33] ou [43]). Ceci permet donc bien la définition des poids (2.66).
Katsevich a prouvé que ce choix de $\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x})$ satisfait, pour les intersections de paramètres λ_j du plan de normale $\vec{\theta}$ et passant par $\vec{x}$, la condition de normalisation suivante:

$$\sum_{j=1}^{n(\vec{x},\vec{\theta})} \omega_{kat}(\lambda_j,\vec{\theta},\vec{x}) = 1$$

La formule générale (2.65) peut donc être appliquée. La formule (2.63) définissant la fonction $U(\lambda,\vec{\theta},\vec{x})$ devient :

$$U(\lambda,\vec{\theta}(\varphi),\vec{x}) = \omega_{I_{pi}}(\vec{x},\lambda)\mathrm{sgn}(\vec{\theta}(\varphi)\cdot\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x})) \tag{2.67}$$

Ainsi, $U(\lambda,\vec{\theta}(\varphi),\vec{x})$ est discontinue en φ quand $\vec{\theta}(\varphi)$ est perpendiculaire à $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x})$. On obtient ainsi une (unique) direction de filtrage pour $(\lambda,\vec{x})$ donnés. Comme $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x})$ ne dépend de $\vec{x}$ que via $\vec{\beta}(\lambda,\vec{x})$, tous les points de même projection sur le détecteur partagent les mêmes lignes de filtrage. Les directions de ces lignes sont compatibles avec la contrainte de troncature axiale des projections. Nous avons représenté ces lignes dans la figure 2.20.
La formule d'inversion (2.65) devient dans ce cas ([33],[34]) :

$$f(\vec{x}) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_{I_{pi}(\vec{x})} d\lambda\ \frac{1}{||\vec{x}-\vec{a}(\lambda)||}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{\sin\gamma}\ g_d(\lambda,\cos\gamma\ \vec{\beta}(\lambda,\vec{x})+\sin\gamma\ \vec{\alpha}(\lambda,\vec{\beta}(\lambda,\vec{x}))) \tag{2.68}$$

La formule (2.68) admet une implémentation efficace de type filtrage-rétroprojection. Les dé-

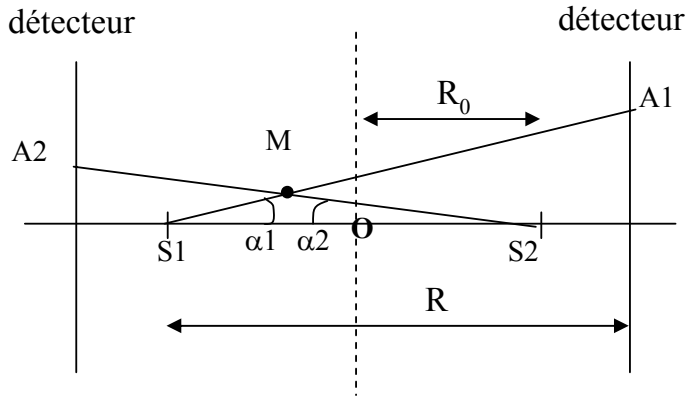


FIG. 2.19 – *Etapes de pondération et de rétroprojection de l'algorithme de feldkamp, pour une trajectoire circulaire, avec deux positions de sources S1 et S2, . Les projections sont pondérées par le terme* $\cos\alpha$*, filtrées ligne à ligne puis rétroprojetées en 3D (en M à partir des points A1 et A2).*

tails de celle-ci sont décrits avec beaucoup de précision par Noo dans [43] dans le cas des paramétrages des détecteurs plan et cylindrique.

2.4.3.5 Discussion

La tomographie hélicoïdale est un thème riche, où des méthodes de reconstruction exactes et approchées sont envisageables. Le choix d'une méthode dépend beaucoup de la conicité de la géométrie : les méthodes approchées basées sur des rétroprojections 2D sont maniables et très efficaces mais ne peuvent être utilisées que lorsque la conicité est faible. Lorsque la conicité est trop grande, des méthodes avec rétroprojections 3D doivent être utilisées. La méthode efficace et exacte de Katsevich est attractive. Mais un autre aspect important pour notre application concerne également l'usage simple des données redondantes, qui est délicat avec les méthodes exactes. Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, cet usage est souhaitable en tomographie dynamique, à la fois pour une meilleure utilisation de la dose émise, mais aussi pour la réduction des artefacts de mouvement (voir par exemple [27]).
Les algorithmes exacts et approchés doivent donc à la fois être envisagés pour une application en tomographie dynamique.

2.5 Méthodes discrètes en tomographie

Nous clotûrons ce chapitre par quelques éléments sur les méthodes discrètes en tomographie. Notre objectif ici est juste d'introduire très succinctement ces méthodes dont certaines peuvent être envisagées en tomographie dynamique comme nous le verrons dans le chapitre 3. Nous basons notre description sur le chapitre de Benali et Peyrin du traité IC2 [11].
Par opposition à toutes les méthodes que nous venons de décrire, les méthodes discrètes reposent sur une modélisation discrète de l'image à reconstruire. L'image à reconstruire est décomposée

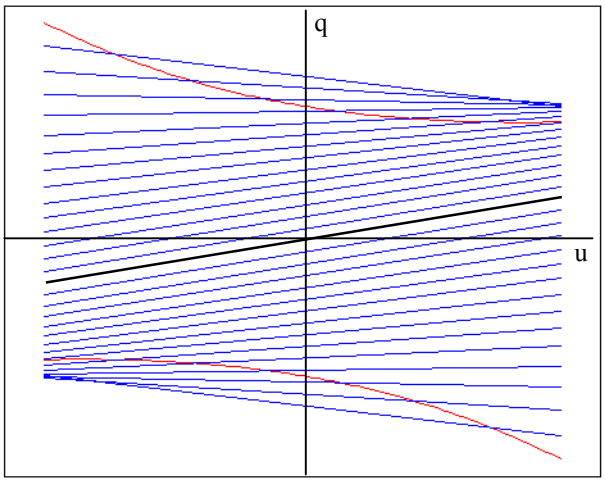


FIG. 2.20 – *Représentation des lignes de filtrage sur un détecteur plan pour l'algorithme de Katsevich. La ligne noire centrale est la projection de la tangente à l'hélice.*

dans une base de fonctions :

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} f_j h_j(\vec{x})$$

Dans le choix le plus simple, les fonctions de base h_j correspondent à des fonctions indicatrices de voxels.
Une mesure m_i représente l'intégrale de la fonction f suivant un rayon L_i :

$$m_i = \int_{L_i} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Du fait de la linéarité des opérateurs, le problème tomographique s'exprime ainsi par une relation matricielle, qu'il faut inverser :

$$m = Rf$$

La taille de ce système est $N \times M$, où N est le nombre de fonctions de base et M le nombre de mesures effectuées. Cette formulation du problème tomographique aboutit donc à des problèmes dont la taille est grande. Cette taille est encore rédhibitoire pour leur utilisation en tomographie conique haute résolution. Toutefois, elles présentent un grand intérêt pour la richesse de la modélisation qu'elles permettent d'inclure. Nous verrons ainsi dans le chapitre 3 des exemples d'application en tomographie dynamique.

Chapitre 3

Etat de l'art en tomographie dynamique

Nous faisons dans ce chapitre l'état de l'art des méthodes de reconstruction en tomographie dynamique.

La tomographie dynamique est relative au problème de reconstruction d'une séquence de n images $(f_i)_{i=1...n}$ représentant l'objet au cours de son évolution au cours de n pas de temps. Ce problème n'est pas toujours équivalent aux générations indépendantes des n images f_i. Ainsi, Wernick [99] indique quatre possibilités pour générer une séquence d'images tomographiques :

- 1 : reconstruction image par image des f_i
- 2 : reconstruction image par image après régularisation suivant l'axe de temps,
- 3 : reconstruction de la séquence d'images en une fois, en utilisant des contraintes de régularisation entre les images à différents instants
- 4 : décomposition des données suivant l'axe de temps dans une base adéquate, troncature régularisante de la décomposition, reconstruction composante par composante et recomposition de l'image. Cette méthode est utilisée avec la décomposition de Karhunen-Loève (voir [99]).

L'utilisation de ces méthodes était considérée par Wernick dans le cas de la tomographie dynamique d'émission de positons (TEP).

Nous faisons deux remarques par rapport aux techniques 2,3,4 :

- en tomographie X cardiaque, l'évolution consiste surtout en des déformations : la corrélation n'est pas purement temporelle, c'est-à-dire entre les valeurs d'un même point de la séquence d'images, mais spatio-temporelle , c'est à dire entre les valeurs d'un point au cours du temps sur sa trajectoire. La différence est très notable : une régularisation comprenant uniquement des aspects temporels va nuire à la netteté des images reconstruites. L'introduction des trajectoires est donc requise dans ces approches.
- la modélisation dans la technique 3 génère des problèmes de grande taille qui ne sont plus envisageables dans le cas de la tomographie X cardiaque à haute résolution spatiale.

En conclusion, nous ne dirons que quelques mots sur ce type de méthode dans la section 3.4.4. Nous consacrons essentiellement l'état de l'art à l'étude des méthodes de génération améliorée d'images indépendantes. **Notre problème de tomographie dynamique est reformulable en un problème de génération améliorée d'une image à partir de mesures acquises au cours de son évolution**.

La génération d'une image en tomographie dynamique est le résultat des étapes décrites dans la figure 3.1. Chacune de ces étapes peut être considérée pour améliorer les images reconstruites. Cette amélioration doit être guidée par les critères suivants, afin de préserver la possibilité de diagnostic et la faisabilité de l'examen (voir [84]) :

- la résolution temporelle,
- la résolution spatiale,
- le rapport signal sur bruit,
- et bien sûr la dose délivrée au patient.

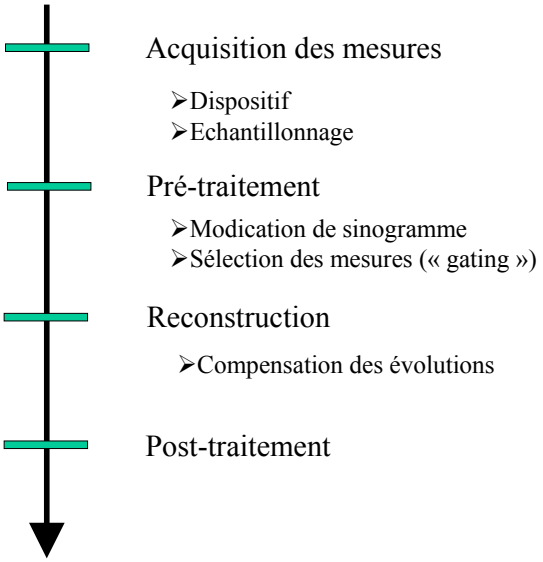


FIG. 3.1 – *Chaîne d'opérations aboutissant à une image : en tomographie dynamique, chaque opération peut être optimisée.*

Chaque traitement algorithmique effectué en tomographie dynamique repose sur un modèle plus ou moins complexe. Nous décrivons dans une première partie les méthodes liées à l'acquisition ou l'échantillonnage des mesures. Nous revenons ensuite sur la notion de résolution temporelle en détaillant cette fois ses propriétés. Puis nous étudions les méthodes utilisant explicitement un modèle : nous détaillons d'abord le cas des modèles bas niveau (a priori temporel faible) puis le cas des modèles évolués de déformation. Nous concluons avec la définition des axes de recherche de cette thèse.

3.1 Acquisition des mesures en tomographie dynamique

3.1.1 Dispositifs d'acquisition optimisant la résolution temporelle

La période de rotation des scanners classiques actuels est de l'ordre de 0.4 à $0.5s$. Comme nous l'avons déja vu, ce n'est pas suffisant pour l'imagerie cardiaque, même pour la phase stationnaire pour les rythmes élevés (voir la table 1.1).
Le dispositif "Electron Beam Computed Tomography" (EBCT) permet de faire de l'imagerie tomographique à des cadences bien plus rapides (période de rotation de l'ordre de 0.1s).

Le mouvement de la source n'est plus réalisé de manière mécanique, ce qui permet d'obtenir des cadences de rotation plus élevées que les dispositifs standards. Il convient aux études cardiaques. Cependant la résolution spatiale est réduite et ne peut globalement pas concurencer les dispositifs classiques.
Certains dispositifs marginaux ont utilisé plusieurs sources de rayonnement, ce qui permet aussi d'augmenter la résolution temporelle. Ce fut le cas par exemple du "Dynamic Spatial Reconstructor" [90].
Nous restons dans la suite dans le cadre de la tomographie classique avec une source de rayonnement et des cadences de rotation de l'ordre de la demi-seconde.

3.1.2 Analogie avec la tomographie hélicoïdale et application à l'échantillonnage

Nous nous intéressons maintenant à l'acquisition des données sur un scanner standard, en nous plaçant dans l'optique de la tomographie dynamique. Certains aspects sur l'échantillonnage en tomographie dynamique ont été étudiés par Willis dans [100] [101]. Ce travail concerne la définition de schémas efficaces d'échantillonnage optimisant le nombre et la densité des positions de source dans le temps en fonction des limites fréquentielles spatiales et temporelles de l'objet à reconstruire. Cela suppose que le temps entre l'acquisition de projections successives est décorrélé de l'angle de rotation, ce qui n'est pas le cas en tomographie X. Nous ne détaillons donc pas d'avantage cette méthode.

Nous décrivons à présent l'analogie entre le tomographie dynamique et la tomographie hélicoïdale. Nous l'appliquons ensuite au problème d'échantillonnage.

3.1.2.1 Principe de l'analogie

Nous avons vu un premier aspect de cette analogie dans la section 1.3. Nous avions remarqué que la tomographie hélicoïdale était de la tomographie dynamique où l'évolution de la scène est provoquée par le mouvement du lit devant l'anneau de détection.
Nous renversons maintenant le point de vue en faisant l'analogie dans le sens inverse. Nous pouvons en effet voir la tomographie dynamique comme la *tomographie hélicoïdale en remplaçant l'axe z par l'axe du temps*. Nous avons introduit cette analogie pour la première fois dans [2]. Il faut pour cela se limiter au problème de reconstruction d'une coupe évoluant notée $f(x_1,x_2,t)$. Nous notons T_{rot} la période de rotation du scanner. Nous rassemblons les éléments de l'analogie dans la table 3.1. L'analogie concerne la tomographie hélicoïdale avec un détec-

	tomographie dynamique	tomographie hélicoïdale
objet à reconstruire	$f(x_1,x_2,t)$	$f(x_1,x_2,z)$
équation de l'hélice	$t = \frac{\lambda T_{\mathrm{rot}}}{2\pi} = \frac{\lambda}{\omega}$	$z = \frac{\lambda H}{2\pi}$
pas de l'hélice	T_{rot}	H
détecteur	$1D$	$1D$

TAB. 3.1 – *Eléments de l'analogie entre la tomographie dynamique et la tomographie hélicoïdale*

teur mono-coupe : en effet, les mesures doivent être perpendiculaires à l'axe de l'hélice, car les instants d'émission et de réception des rayons sont égaux.

3.1.2.2 Application à l'échantillonnage des transformées

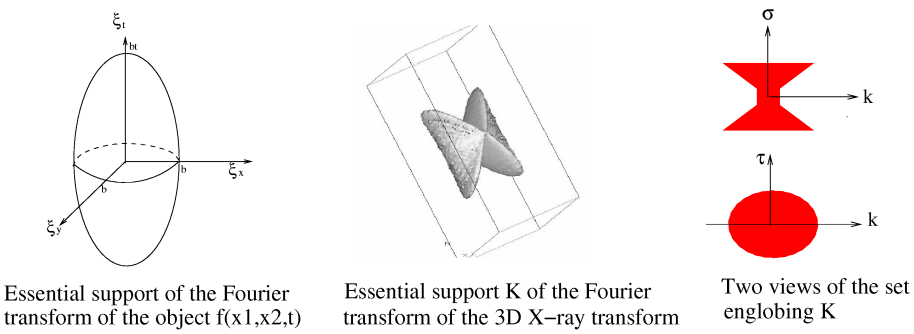
Nous exploitons à présent les résultats de Desbat ([3], [4]) sur l'échantillonnage 3D vus dans la section 2.1.3.3, grâce à l'analogie que nous venons de présenter.

Nous en déduisons les conditions d'échantillonnage associées aux schémas standard et hexagonal entrelacé. Pour élargir légèrement l'hypothèse sur le support de l'objet, nous introduisons la limite fréquentielle temporelle b_t, et supposons que la coupe évoluante a un support essentiel inclus dans un ellipsoïde de demi-axes (b,b,b_t) : $\frac{\xi_x^2}{b^2} + \frac{\xi_y^2}{b^2} + \frac{\tau^2}{b_t^2} < 1$. Cette ajout permet de décorréler les fréquences spatiales et temporelles. Le support essentiel de la transformée de Fourier de la transformée rayons X devient (voir la figure figure 3.2) :

$$\begin{aligned} K = \{\ (k,\sigma,\tau) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2, \quad \text{où} \quad & |\sigma| < b, \\ & |k| < max(\frac{|\sigma|}{\vartheta}, b(\frac{1}{\vartheta} - 1)), \\ & |\tau| < c(b,b_t,\sigma)\ \} \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec:

$$\begin{aligned} c(b,b_t,\sigma) &= b_t && \text{si } |\sigma| \leq \vartheta_{\vartheta,b} = max(1,(1-\vartheta)b) \\ &= \sqrt{b_t^2 - \sigma^2} && \text{si } \vartheta_{\vartheta,b} < |\sigma| < b \\ &= 0 && \text{sinon} \end{aligned} \tag{3.2}$$



Essential support of the Fourier transform of the object f(x1,x2,t)

Essential support K of the Fourier transform of the 3D X–ray transform

Two views of the set englobing K

FIG. 3.2 – *Supports de la transformée de Fourier de l'objet dynamique f (à gauche) et de sa transformée rayons X (au milieu et à droite) (figure tirée de [6]).*

Schéma standard Le schéma standard correspond aux points $W_{helS}l, l \in \mathbb{Z}^3$, avec:

$$W_{helS} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ \frac{T_{\text{rot}}}{P} & 0 & \frac{T_{\text{rot}}}{2} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

W_{helS} vérifie les conditions d'échantillonnage si P est légèrement plus grand que $2b$, $h \leq \frac{\pi}{b}$, $T_{\text{rot}} \leq \frac{2\pi}{b_t}$.

Schéma hexagonal entrelacé A partir de l'analogie avec la tomographie hélicoïdale, nous pouvons déduire des résultats de la section 2.1.3.3 que le décentrage d'un quart de pixel permet de générer le schéma optimal hexagonal entrelacé $(0 \quad h/2 \quad 0) + L_{W_{helHI}}$, décrit par W_{helHI} :

$$W_{helHI} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ h & 2h & 0 \\ \frac{T_{\mathrm{rot}}}{2} + \frac{T_{\mathrm{rot}}}{P} & 0 & T_{\mathrm{rot}} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

W_{helHI} vérifie les conditions d'échantillonnage si P est légèrement plus grand que $2b$, $h = \frac{\pi}{b}$, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}b_t}$.

Le schéma W_{helHI} est $\frac{4}{\sqrt{3}}$ plus efficace que le schéma standard W_{helS}. La réduction de flot de données concerne le nombre de positions angulaires et le nombre de cellules de détecteurs; malheureusement pour notre application, le schéma efficace requiert aussi une vitesse de rotation plus rapide d'un facteur $\sqrt{3}$ par rapport au schéma standard, alors que cette vitesse a un rôle critique en tomographie dynamique.

Nous nous intéressons maintenant aux méthodes utilisant une information supplémentaire extérieure de type modèle, pour améliorer la reconstruction d'un objet évoluant.

3.2 La résolution temporelle en tomographie dynamique

Nous approfondissons la notion de résolution temporelle. Nous l'analysons précisément dans le cas des différentes géométries en tomographie standard. La généralisation à la tomographie avec utilisation de l'hypothèse de périodicité sera abordée dans le chapitre 4.

3.2.1 Géométrie parallèle

En géométrie parallèle, si on utilise un algorithme classique, la résolution temporelle est de $T_{\mathrm{rot}}/2$ pour une reconstruction sur un intervalle angulaire π. C'est simplement la longueur (temporelle) de la fenêtre de reconstruction. Cette résolution temporelle a aussi la propriété d'être la même pour tous les points de l'image.

3.2.2 Géométrie divergente

La résolution temporelle en géométrie divergente est moins directement caractérisable, car à la fois la longueur de la fenêtre de reconstruction et les poids gérant la redondance des données ont de l'importance. La dépendance à la largeur de la fenêtre de reconstruction est claire; elle pourrait même suffire pour caractériser la résolution temporelle. Mais la fonction de pondération a aussi une influence qui doit être prise en compte, comme l'ont remarqué par exemple Tagushi [95] ou Hsieh [28]. Selon l'algorithme utilisé, largeurs de fenêtre et poids varient. Nous nous attardons maintenant sur différents algorithmes.

3.2.2.1 Résolution temporelle pour les méthodes classiques de reconstruction sur 2π

Dans ce cadre, la résolution temporelle, comme dans le cas parallèle, est uniforme et égale au temps d'acquisition, ici égale à la période de rotation. La fonction de poids est uniforme et ne joue aucun rôle.

3.2.2.2 Résolution temporelle pour les méthodes de reconstruction sur l'intervalle short-scan

Dans ce cas, tous les points sont reconstruits à partir de la même fenêtre "short-scan". Cependant, comme nous l'illustrons dans la figure 3.3, l'importance des projections utilisées pour la reconstruction dépend des points de l'image considérés ainsi que de la fonction de poids spécifique utilisée. Pour certains points de l'image, l'influence des projections extrêmes est moins importante (voir la figure 3.3). Comme nous le verrons dans la section 3.3.1, il est même possible d'optimiser la pondération pour améliorer les reconstructions en tomographie dynamique.

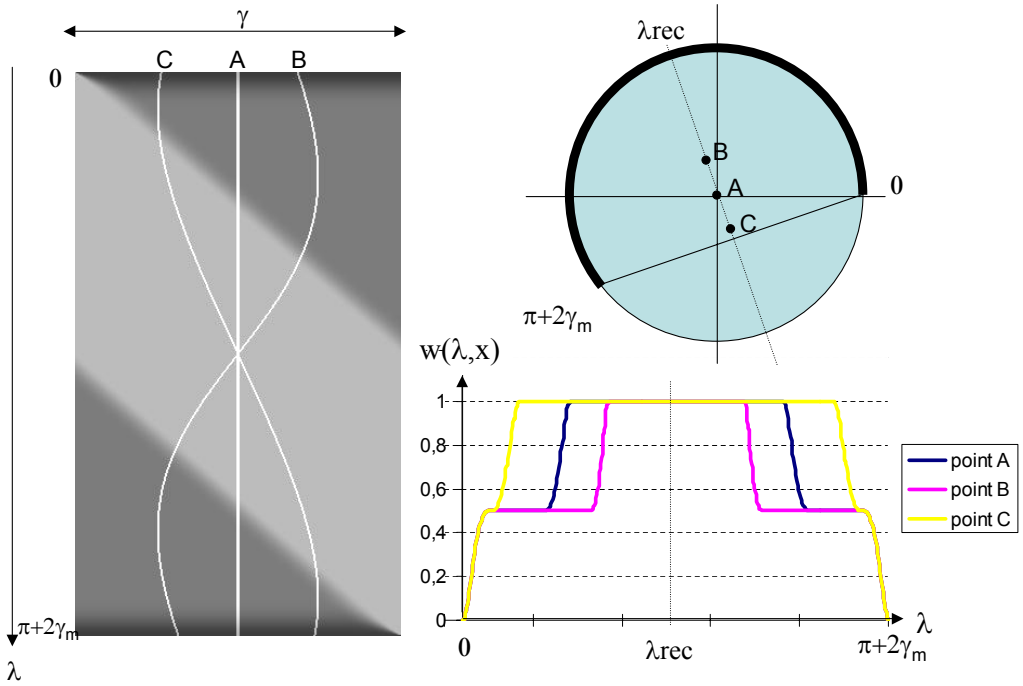


FIG. 3.3 – *Illustration de l'influence de la fonction de poids sur la résolution temporelle. A gauche, une fonction de pondération appliquée à un intervalle "short-scan", avec la trace de trois points A, B et C du croquis. Les poids spécifiques correspondant à ces traces sont représentés sur un même graphique en bas à droite.*

3.2.2.3 Résolution temporelle pour les méthodes de reconstruction sur l'intervalle very short-scan

Dans les cas précédents, le support de la fonction de poids était le même pour tous les points de l'image. Or, la théorie de Noo [42] montre qu'en tomographie divergente 2D, ce support peut être plus court pour certains points, en considérant l'intervalle "very short scan" associé à sa reconstruction. Ainsi, la résolution temporelle d'un point peut être réduite au temps d'acquisition du plus petit arc de trajectoire dont il est sur la corde. On obtient alors la carte de résolution temporelle de la figure 3.4.

Nous étendrons ces résultats à la tomographie périodique dans le chapitre suivant. Nous étudions à présent les méthodes de reconstruction guidées par un modèle.

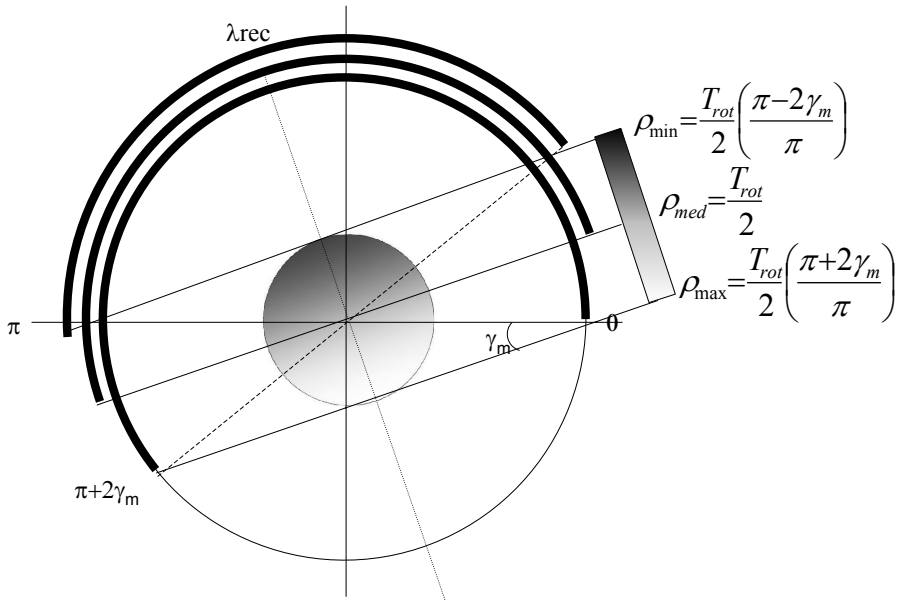


FIG. 3.4 – *Variation de la résolution temporelle optimale ρ en géométrie divergente, en lien avec la théorie de la reconstruction sur un intervalle "very short scan" : $\rho \in [\rho_{min},\rho_{max}]$. Les ensembles de positions sont centrés autour d'un même point de paramètre λ_{rec}.*

3.3 Premier type de modèle : a priori nul ou faible sur la déformation

Nous abordons maintenant les techniques existantes en tomographie dynamique utilisant un modèle faible sur l'évolution. Nous commençons par les techniques de pondération des données, qui n'ont a priori pas besoin d'information sur l'évolution, avant d'aborder les méthodes qui utilisent l'information de redondance ou de stationnarité locale de l'évolution.

3.3.1 Méthodes de pondération des données

Une manière efficace pour réduire les artefacts de mouvement est d'utiliser ou d'introduire de la redondance dans le jeu de mesures utilisées et d'appliquer un moyennage sur les données redondantes. En effet, dans un jeu de projections acquis sur un objet évoluant, ce sont les projections du début et de la fin du sinogramme qui sont les plus inconsistantes du fait de l'acquisition séquentielle des mesures. Ces projections violent le plus les propriétés de 2π-périodicité ou de symétrie de la transformée modélisant l'acquisition (transformée rayons X ou transformée de Radon, suivant la géométrie d'acquisition). Ces inconsistances sont une source importante d'artefacts, notamment des raies dont la portée est parfois grande dans l'image.
L'utilisation de données redondantes a un effet très bénéfique sur ces artefacts. Ainsi, Bontus [52] et Heuscher [27] notamment ont mis en évidence des performances améliorées vis à vis des artefacts de mouvement des algorithmes de reconstruction qui exploitent davantage la re-

dondance des données acquises. La pondération par exemple réduit la portée des artefacts en raies.
Nous pouvons expliquer qualitativement ces effets. La fonction de poids privilégie les projections les plus proches de l'instant central en faisant diminuer de manière lisse la contribution des projections les plus lointaines. Elle affecte ainsi d'une certaine manière un indice de confiance aux projections, améliorant ainsi la résolution temporelle. Le deuxième effet bénéfique est la transition douce vers zéro qu'elle impose aux extrémités du sinogramme. Celle-ci réduit la violation de la propriété de 2π périodicité et concrètement réduit la portée des artefacts en raies.
Nous illustrons ces effets sur un exemple simple : nous effectuons dans la figure 3.5 deux reconstructions d'une sphère en translation au cours de l'acquisition. Dans un cas, la fenêtre de poids est uniforme, dans l'autre, une fenêtre "d'underscan" est appliquée, comme celle définie par Pelc dans [86]. La fonction de poids conduit à des reconstructions ayant moins d'artefacts.

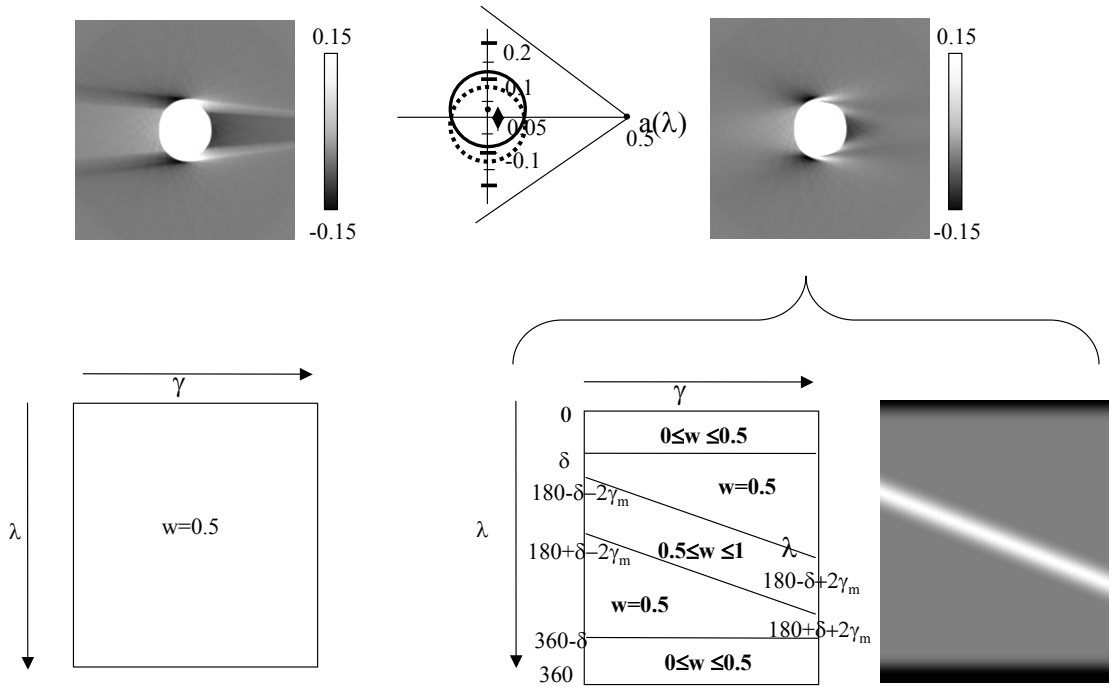


FIG. 3.5 – *Illustration de l'utilisation de poids de redondance pour réduire les artefacts de mouvements. Nous avons simulé les projections divergentes d'une sphère en translation pendant un tour de scanner. La distance parcourue par le centre pendant un tour de scanner est la moitié du rayon de la sphère. Nous avons représenté les images reconstruites ainsi que les fenêtres de poids utilisées pour deux exemples : à gauche, une fenêtre de poids uniformes. A droite, une fenêtre privilégiant les projections centrales avec décroissance vers* 0*. La valeur du paramètre* δ *utilisé est* $30°$*.*

Hsieh [68] a remarqué cependant que l'utilisation d'une fenêtre "d'underscan" a tendance à affecter le rapport signal sur bruit, et a suggéré d'adapter en conséquence la largeur de la fenêtre. Dans une autre étude [70], il a mis en évidence la variation de la réponse temporelle des algorithmes en fonction des fenêtres de poids utilisées.

3.3.2 A priori temporel : variations faibles et redondance

Beaucoup de méthodes utilisent un a priori temporel pour améliorer la reconstruction d'un objet évoluant. Nous détaillons dans cette section les méthodes utilisant un a priori concernant la nature de l'évolution : amplitude et redondance. Pour cela, nous introduisons un formalisme basé sur la notion d'état de l'objet. Nous illustrons son utilisation dans certaines méthodes de reconstruction dynamique. La description des modèles et de leur apprentissage sera abordée dans la section 3.5.

3.3.2.1 Introduction d'un formalisme adapté : l'espace des états

L'idée principale est de changer d'espace de description des évolutions dynamiques de manière à intégrer une information "bas niveau" sur la forme. Ce formalisme est en réalité proche de celui introduit par Wang [98] décrit en section 3.3.2.4 même si notre présentation est plus mathématique.
Nous nous plaçons dans le cadre de la reconstruction d'un objet 2D évoluant, noté $f(x,y,t)$. Nous introduisons une relation d'équivalence notée $\mathcal{R}$ agissant sur les images f_t définies par $f_t(x,y) = f(x,y,t)$. Ainsi si f_t représente l'objet dans le même état que $f_{t'}$, alors nous dirons qu'elles sont en relation : $f_t \mathcal{R} f_{t'}$. La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence définissent naturellement les états de l'objet. Dans l'espace des états, nous cherchons à reconstruire à état constant, et non plus à temps constant, ce qui permet l'obtention d'un problème mieux posé dans certains cas.
Une manière pratique de définir $\mathcal{R}$ est d'utiliser un indicateur dynamique ξ prenant la forme d'une fonction du temps. Posons:

$$f_t \ \mathcal{R} \ f_{t'} \Leftrightarrow \xi(t) = \xi(t')$$

Alors l'espace des états est exactement l'image de ξ.
Les méthodes utilisant un a priori sur l'évolution temporelle consistent alors à effectuer les étapes suivantes (voir aussi la figure 3.6) :

- définir l'indicateur $\xi(t)$,
- partitionner l'espace des états $Im(\xi)$ en un espace discret $(e_1,e_2,...,e_n)$ de manière à assurer la complétude des données pour la reconstruction; cela correspond à définir un partitionnement optimal des données au sens des états,
- reconstruire chaque état e_k.

Notons que si $\xi(t)$ est un indicateur d'évolution de forme, il est normalement continu sur l'acquisition. La discrétisation de $Im(\xi)$ doit faire en sorte d'assurer la suffisance de données et doit aussi idéalement adapter la taille des états à la quantité de mouvement, par exemple en utilisant $\frac{d\xi}{dt}$ qui est un indicateur sur la vitesse d'évolution de l'objet ($\frac{d\xi}{dt}(t_0) = 0$ indique en effet une stationnarité locale de l'état de l'objet autour de l'instant t_0).

3.3.2.2 Stationnarité locale et direction prépondérante du mouvement

Ces méthodes sont utilisées en imagerie respiratoire ([89],[69], [64]) ainsi qu'en imagerie cardiaque (voir la section 3.6). Elles consistent à centrer la fenêtre de reconstruction sur la phase de l'objet la moins perturbée par le mouvement. Elles cherchent ainsi à utiliser les données acquises tout en réduisant au mieux les artefacts liés aux mouvements (figure 3.7). Ce principe

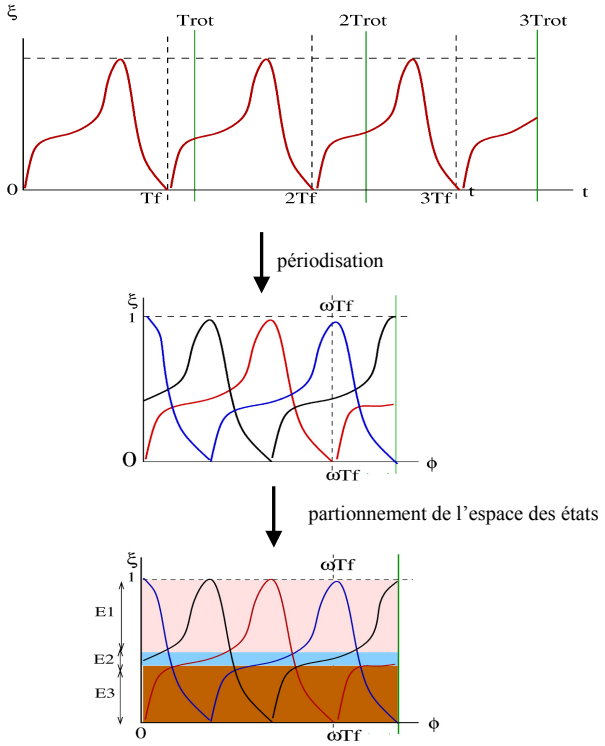


FIG. 3.6 – *Illustration de la méthodologie basée sur l'utilisation d'un indicateur de redondance ξ continu.*

était déjà bien décrit dans le brevet de 1991 de Crawford et Pelc [59], qui proposent en plus de centrer la fenêtre de reconstruction sur l'instant où la direction principale du mouvement est perpendiculaire au rayon source-détecteur. En effet, ce mouvement n'aura pas d'incidence au début et à la fin de la fenêtre (minimale) de reconstruction. Par conséquent, dans le cas où cette direction existe, cette technique réduit les inconsistances dues au mouvement associé. Notons quand même que l'existence et la prévision de la direction prépondérante posent généralement problème en imagerie médicale.

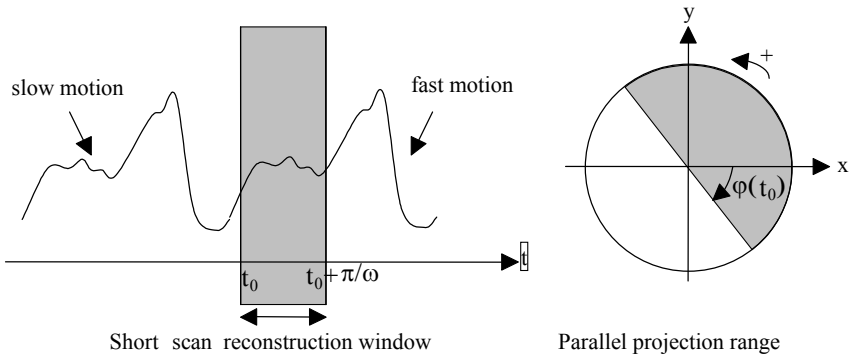


FIG. 3.7 – *Illustration de l'utilisation des phases stationnaires de l'évolution pour centrer la fenêtre de reconstruction.*

Nous pouvons réécrire ces méthodes dans le formalisme précédent. Dans le cas des phases stationnaires, $\xi(t)$ peut être un indicateur binaire: $\xi(t) = 1$ si t est dans l'intervalle stationnaire, 0 sinon. On reconstruit alors l'état 1.

3.3.2.3 Objet à variation périodique

L'hypothèse de périodicité est très utilisée en tomographie cardiaque. Nous détaillerons l'usage pratique dans la section 3.6. L'exploitation de la redondance dans une évolution cyclique permet d'améliorer la résolution temporelle en utilisant des données discontinues en temps mais correspondant au même état du cycle. On peut ainsi facilement améliorer la résolution temporelle des algorithmes, même si la synchronisation entre la période de l'objet et celle du scanner doit être prise en compte (voir le chapitre 4). On peut obtenir théoriquement dans les cas de synchronisation optimale une résolution temporelle de $\frac{T_{\text{rot}}}{2N}$ pour une reconstruction utilisant N cycles.

Un indicateur de périodicité permet de passer de l'information de temps à l'information de phase, c'est à dire en notant T_f la période de l'évolution de l'objet, de passer de t à $t \bmod T_f$. L'indicateur $\xi(t) = t \bmod T_f$ qui est utilisé pour les méthodes de périodicité est donc une fonction périodique linéaire par morceaux (figure 3.8).

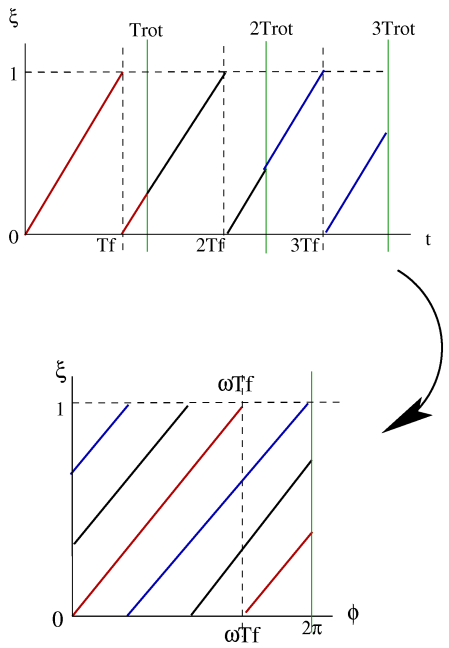


FIG. 3.8 – *Passage à l'espace des phases avec un indicateur de périodicité*

3.3.2.4 Utilisation plus large de la redondance : approche de Wang [98]

Wang [98] a proposé une méthode pour la reconstruction en imagerie cardiaque basée sur un indicateur dynamique complexe liée à une information anatomique. L'indicateur proposé est le volume du ventricule gauche (voir la figure 3.9) qu'il est possible de corréler à l'ECG.

Cet indicateur lui permet donc de travailler dans l'espace des volumes du ventricule. Wang effectue ensuite des reconstructions améliorées à volume constant en sélectionnant et interpolant

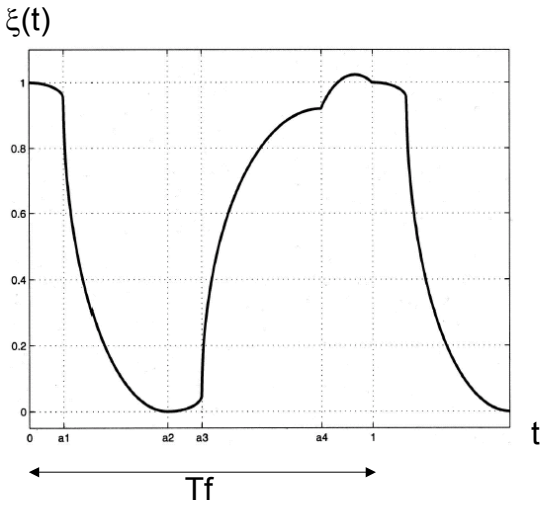


FIG. 3.9 – *Indicateur continu ξ dans l'approche de Wang. ξ est un modèle de volume du ventricule gauche (figure extraite de [98])*

de manière optimale au sens des états les données nécessaires à la reconstruction (voir la figure 3.6).
Cette méthode constitue une amélioration par rapport aux méthodes n'utilisant que l'ECG. Elle intègre en effet une connaissance supplémentaire liée à l'anatomie. L'indicateur $\xi(t)$ qui en résulte est continu, plus complet qu'un simple modèle linéaire de périodicité, et peut donc permettre des reconstructions améliorées. L'enjeu de ce type de méthode est alors d'obtenir un indicateur $\xi(t)$ de bonne qualité. Nous en discuterons dans la section 3.5 sur l'apprentissage des ces modèles.

Nous abordons maintenant la famille de méthode basées sur la compensation des évolutions à partir d'un modèle de déformation.

3.4 Deuxième type de modèle : a priori fort de connaissance de la déformation

3.4.1 Intérêt de cette classe de méthodes

La réalisation de méthodes performantes réalisant la compensation des évolutions a deux intérêts principaux :

- le gain en résolution temporelle dû à l'utilisation de jeux de données dont l'inconsistance est corrigée,
- la possibilité de faire des acquisitions et des reconstructions sur les jeux de données plus longs ("long scan acquisition mode" voir [66] et [1]), ce qui peut permettre de réduire les doses de rayonnement en conservant le niveau de signal dans les images reconstruites.

Nous nous intéressons à la compensation des déformations, qui sont la source la plus sévère d'artefacts. D'autres inconsistances peuvent être provoquées par les variations d'atténuation de certains points pendant l'acquisition, notamment en tomographie d'émission, mais leur impact en terme d'artefacts est moindre. Nous décrivons les méthodes existantes de compensation par

des méthodes analytiques de reconstruction, et abordons également le problème sous l'angle des méthodes discrètes de reconstruction en tomographie. Nous n'évoquerons dans cette partie que l'étape de reconstruction *à partir d'un modèle connu*; le problème délicat de l'apprentissage des modèles de déformation est abordé dans la section 3.5.

3.4.2 Formalisations continue et discrète

Nous présentons ici la formalisation des approches de compensation des déformations dans le cadre continu puis discret.

3.4.2.1 Formalisation continue

L'hypothèse utilisée consiste à supposer que la scène à reconstruire peut être vue comme la déformation régulière d'un objet par rapport à une situation initiale de référence. Nous supposons que cette déformation a les propriétés d'un changement de variable (C^1 difféomorphisme). Nous notons alors Γ_t (ici de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) la déformation permettant de passer de la scène à l'instant t à la scène à l'instant de référence t_0 :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad f_t(\vec{x}) = f_{t_0}(\Gamma_t(\vec{x})) \tag{3.5}$$

Nous cherchons alors à reconstruire l'objet f_{t_0} (noté aussi f_0) à partir de ses projections parallèles ou divergentes acquises au cours de la déformation Γ_t. Notons que dans le cas de la géométrie parallèle, le lien entre les paramètres d'acquisition et le temps apparaît dans la relation $\varphi = \omega t$, alors que dans le cas de la géométrie divergente, nous avons $\lambda = \omega t$. Nous utiliserons donc comme paramétrisation du temps la variable φ en géométrie parallèle et la variable λ en géométrie divergente.

3.4.2.2 Formalisation discrète

Nous montrons comment il est possible de ramener le problème de reconstruction avec compensation des déformations à un problème inverse linéaire classique, tel que nous l'avons décrit dans la section 2.5. Une telle formulation a été présentée notamment par De Murcia [62].

Nous notons f_k l'objet discrétisé à l'instant k mis sous la forme d'une matrice colonne de taille N^2 en 2D. La déformation est représentée par une matrice D_k (connue) de taille $N^2 \times N^2$ en 2D de sorte que si $X = (0 \dots 1 \dots 0)^T$ est un vecteur dont seule la i-ième composante est non nulle et vaut 1, alors $Y = D_k X$ est non nul et vaut 1 sur la coordonnée de l'image du point de coordonnée i par la déformation D_k. Alors, l'équation de déformation s'exprime de manière matricielle:

$$f_k = D_k f_0 \tag{3.6}$$

De plus, on obtient classiquement l'équation de mesure des projections dans la répresentation discrète matricielle, utilisant la matrice (ligne)R_k de projection à l'instant k et la mesure (scalaire) m_k (voir la section 2.5) :

$$m_k = R_k f_k \tag{3.7}$$

Ainsi, en combinant (3.6) et (3.7), on voit que l'on est ramené à un classique problème inverse matriciel : résoudre en f_k le système d'équations:

$$\forall k = 1 \dots N_{proj} \;\; m_k = R_k D_k f_0$$

Notons que ce problème n'est linéaire que si l'inconnue est seulement f_0, c'est à dire si la déformation D_k est connue.

3.4.3 Méthodes de résolution analytiques

Le but de ces méthodes est de résoudre analytiquement, éventuellement de manière approchée, le problème de reconstruction avec déformation. Elles sont de type filtrage-rétroprojection (FBP).

3.4.3.1 Méthodes basées sur des modèles de déformations simples

Méthode de Crawford Nous étudions dans cette section l'approche de Crawford ([58], [61]) qui a inspiré une bonne part de notre contribution du chapitre 5.
Crawford a établi une formule de type FBP dans le cas des géométries 2D parallèle et divergente compensant les artefacts liés à des mouvements globaux du type :

$$\Gamma_t(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

Ce modèle lui permet de décrire un mouvement respiratoire simplifié.

– Formule de Crawford en géométrie parallèle
Dans le cas de la géométrie parallèle, la variable temporelle est l'angle φ. Crawford a généralisé le théorème coupe-projection (2.35) pour lier la transformée de Fourier 1D Fp_φ des mesures dynamiques p_φ à la transformée de Fourier 2D Ff_0 de l'objet de référence f_0 (figure 3.10) :

$$Fp_\varphi(\sigma,\vec{\theta}_\varphi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi)} Ff_0\left(\frac{\sigma\cos\varphi}{\alpha_1(\varphi)},\frac{\sigma\sin\varphi}{\alpha_2(\varphi)}\right).e^{2j\pi\sigma\left(\frac{b_1(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)}\cos\varphi+\frac{b_2(\varphi)}{\alpha_2(\varphi)}\sin\varphi\right)}$$

où : $\vec{\theta}_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

A l'aide de ce théorème, il établit la formule de reconstruction suivante écrite en un point $\vec{x}_0$:

$$f_0(\vec{x}_0) = f_0(x_{01},x_{02}) = \int_0^\pi d\varphi\; q(\varphi) p_{F\varphi}\left(\vec{\theta}_\varphi, \frac{x_{01}-b_1(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)}\cos\varphi + \frac{x_{02}-b_2(\varphi)}{\alpha_2(\varphi)}\sin\varphi\right) \tag{3.8}$$

$$\text{où :} \quad \begin{aligned} p_{\varphi F}(\vec{\theta}_\varphi,s) &= h_R(s) *_s p_\varphi(\vec{\theta}_\varphi,s) \\ q(\varphi) &= \frac{1}{\alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi)}\left|1+\frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{\alpha_1'(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)}-\frac{\alpha_2'(\varphi)}{\alpha_2(\varphi)}\right)\right| \end{aligned} \tag{3.9}$$

Il s'agit d'une formule d'inversion de type FBP, avec un terme spécifique $q(\varphi)$ de pondération et une étape de rétroprojection qui suit le mouvement du point au cours de l'acquisition.

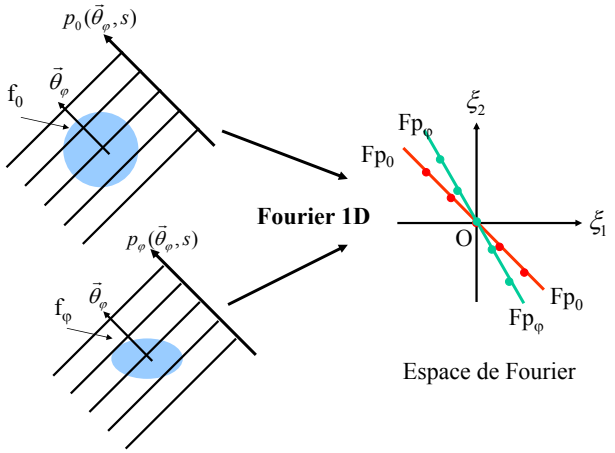


FIG. 3.10 – *Illustration de la généralisation du théorème coupe-projection. La transformée de Fourier des projections p_φ donne aussi une coupe de la transformée de Fourier de f_0, mais pas suivant la même direction qu'en tomographie statique.*

– Formule de Crawford en géométrie divergente (sur $[0,2\pi]$)
Dans le cas de la géométrie divergente, la variable temporelle est l'angle λ. La généralisation de la formule précédente à la géométrie divergente est faite par changement de variable (2.49). Ce changement de variable permet de relier une projection divergente $g^m(\lambda,\gamma)$ à une projection parallèle $p(\vec{\theta}_\varphi,s)$:

$$g^m(\lambda,\gamma) = p(\vec{\theta}_{\lambda+\frac{\pi}{2}-\gamma}, R_0 \sin\gamma)$$

Crawford utilise une approximation (cf paragraphe suivant), et obtient la formule suivante :

$$f_0(\vec{x}_0) \simeq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}(\lambda) - \Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0)\|^2} \int_{-\gamma_m}^{+\gamma_m} d\gamma\; w(\lambda+\frac{\pi}{2}-\gamma) g_\lambda^m(\lambda,\gamma) h_R^{ang}(\gamma(\Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0))-\gamma) \tag{3.10}$$

où : $h_R^{ang}(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 h_R(\gamma)$

$w(\lambda + \frac{\pi}{2} - \gamma) = R_0 \cos(\gamma) q(\lambda + \frac{\pi}{2} - \gamma)$

$\gamma(\Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0))$ est à λ fixé l'angle caractérisant la droite passant par $\Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0)$

– Approximations dans les formules de Crawford
La formule (3.10) est obtenue par changement de variable sur la formule en géométrie parallèle, qui est valable pour des transformations paramétrées par l'angle φ, c'est à dire par $\lambda + \frac{\pi}{2} - \gamma$ après changement de variable. Or en divergent, le paramétrage d'une transformation dépend de λ uniquement, c'est à dire de $\varphi - \sin^{-1}(s/R_0)$ par changement de variable inverse. Il n'est donc pas possible de déduire exactement le résultat en géométrie divergente à partir du résultat en géométrie parallèle.
Par ailleurs, le théorème coupe-projection généralisé fait apparaître le fait que la suffisance des données pour la reconstruction n'est pas forcément assurée dans la formule de

Crawford : la transformée de Fourier 1D de la projection dynamique p_φ donne en effet la coupe de la transformée de Fourier 2D de f_0 pour la direction :

$$\vec{\theta}^{\Gamma}(\varphi) = \begin{bmatrix} \theta_1/\alpha_1(\varphi) \\ \theta_2/\alpha_2(\varphi) \end{bmatrix} \text{ si } \vec{\theta}(\varphi) = (\theta_1,\theta_2)$$

Quand l'angle φ parcourt l'intervalle $[0,\pi]$, l'angle polaire de $\vec{\theta}^{\Gamma}(\varphi)$ ne le parcourt pas forcément.

Autres approches Li [80] a aussi proposé une méthode compensant les mouvements rigides en adaptant l'étape de rétroprojection. Son approche est également incomplète par rapport aux conditions de suffisance des données pour pouvoir reconstruire. Lu [82] et Zerfowski [102] ont proposé la détection/correction de mouvements de type translation-dilatation directement dans les projections, mais le modèle est très simple et l'estimation du mouvement qu'ils proposent peu fiable (voir section 3.5). Enfin, Wang [97] corrige le mouvement de translation dans les plans transverses en tomographie hélicoïdale. Le vecteur de translation est utilisé dans l'étape d'interpolation hélicoïdale.
Nous proposerons dans le chapitre 5 des résultats originaux sur la compensation des déformations affines dépendant du temps où ces approximations n'apparaîtront plus.

3.4.3.2 Méthodes basées sur des modèles de déformations généraux

Approximation locale : méthode de Ritchie Ritchie ([60],[88]), afin d'enrichir le modèle de mouvement contraignant de Crawford, a cherché à appliquer localement la formule (3.8). Plus précisément, il l'applique en prenant pour chaque point à reconstruire des paramètres de translation et de dilatation spécifiques, calculés localement :

$$\text{si } \Gamma_t(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \text{ alors } \alpha_1 = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_1} \text{ et } \alpha_2 = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x_2}$$

Ces termes n'apparaissent que dans le calcul $q(\vec{x}_0,\varphi)$ [1]. La rétroprojection est effectuée en gardant la déformation exacte suivant la formule (en géométrie parallèle):

$$f_0(\vec{x}_0) \approx \int_0^\pi d\varphi \; q(\vec{x}_0,\varphi) p_{F\varphi}(\vec{\theta}_\varphi,\Gamma_\varphi^{-1}(\vec{x}_0) \cdot \vec{\theta}_\varphi)$$

Cette méthode consiste donc à approximer la compensation d'une déformation générale (globale) par la modification d'un algorithme en utilisant seulement des paramètres locaux pour la correction. C'est dans ce sens que nous parlons d'approximation locale.

Approche LETI Grangeat et son équipe [66] [78] ont proposé une formule de reconstruction approchée également basée sur une rétroprojection spécifique, adaptée aux mouvements. La formule initiale en géométrie parallèle (3.11) est proche de celle de Ritchie. Seule l'étape de rétroprojection fait intervenir la déformation Γ. Cette formule réalise également une approximation locale.

$$f_0(\vec{x}_0) \approx \int_0^\pi d\varphi \; p_{F\varphi}(\vec{\theta}_\varphi,\Gamma_\varphi^{-1}(\vec{x}_0) \cdot \vec{\theta}_\varphi) \tag{3.11}$$

1. $q(\varphi)$ défini par la formule (3.9) dépend désormais de $\vec{x}_0$, d'où la notation.

Cependant, la technique d'utilisation d'une déformation connue n'est qu'un aspect de l'approche globale développée au LETI. L'algorithme proposé inclut par ailleurs une prédiction spatio-temporelle du terme de rétroprojection élémentaire $p_{F\varphi}(\vec{\theta}_\varphi,\Gamma^{-1}(\vec{x}_0)\cdot\vec{\theta}_\varphi)$ à partir des autres rétroprojections élémentaires de même direction $\vec{\theta}_\varphi$, ce qui permet :

- de compenser en plus du mouvement les évolutions de densité,
- de réduire la dose en reconstruisant sur plusieurs demi-tours (reconstruction "long-scan", voir [1]).

Par contre, il est important de noter que cette prédiction ne pouvant agir que sur des rétroprojections élémentaires *de même direction*, le pas d'échantillonnage de la série temporelle correspondante est forcément multiple de la demi-période de rotation du scanner, ce qui limite son intérêt en imagerie cardiaque, à moins d'utiliser l'hypothèse de périodicité.
Enfin la méthode met en place un découpage de l'intervalle $[0,\pi]$ en blocs afin de factoriser les calculs pour la génération d'une séquence d'images (voir la figure 3.11).

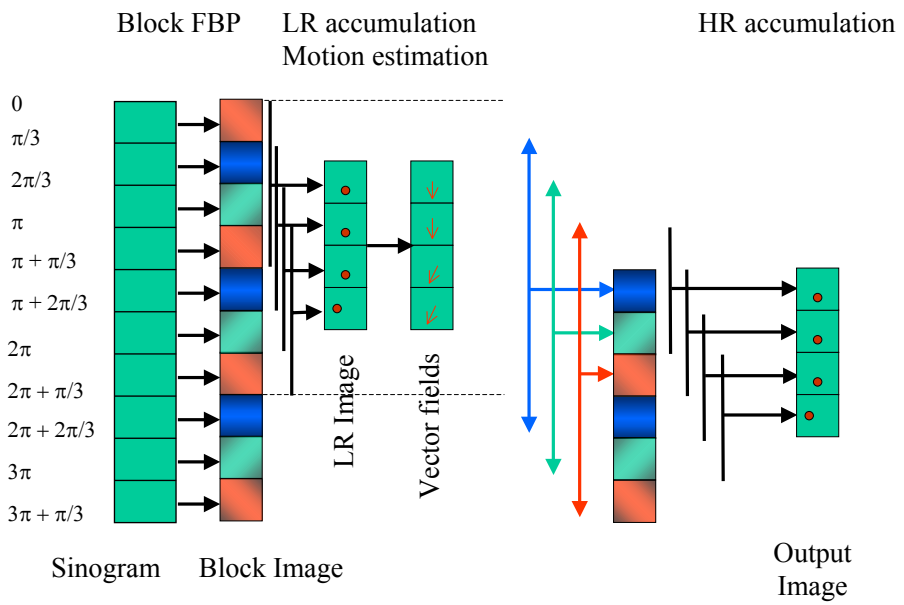


FIG. 3.11 – *Schéma de principe de la méthode de reconstruction dynamique développée au LETI (schéma repris de [78]). Une première série de reconstructions sans compensation permet d'apprendre un modèle de mouvement. Ce modèle est ensuite utilisé suivant la formule (3.11) couplée avec la prédiction spatio-temporelle. Les calculs sont effectués par blocs de projections rétroprojetées qui sont appelés "block images".*

3.4.4 Méthodes algébriques et statistiques

Ces méthodes permettent d'introduire très simplement les a priori concernant la déformation dans le processus de reconstruction, comme nous l'avons vu dans la section 3.4.2.2. De

plus elles ont l'attrait de permettre facilement l'introduction complémentaire de traitements de type régularisation spatio-temporelle sur l'ensemble de la séquence. Cependant comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, elles ne sont vraiment applicables que pour des problèmes de taille réduite.

3.4.4.1 Résolution par ART

Dans ce cadre, une méthode ART (voir par exemple [11]) avec projection et rétroprojection suivant la géométrie généralisée définie par la matrice $R_k D_k$ est utilisée par Blondel [50] pour la reconstruction des coronaires à partir d'un faible nombre de vues.

3.4.4.2 Résolution par filtre de Kalman

De Murcia [62] a proposé une méthode de résolution par filtrage de Kalman dans le cas de la tomographie d'émission mono-photonique cardiaque. Sa modélisation fait intervenir des bruits blancs gaussiens centrés indépendants w_k et b_k, modélisant respectivement l'erreur de prédiction et l'erreur de mesure :

$$\begin{aligned} f_k &= D_k f_0 + w_k \\ m_k &= R_k f_k + b_k \end{aligned}$$

La solution du problème est la détermination d'un maximum a posteriori qui est faite récursivement par la technique de Kalman.

3.4.4.3 Schéma d'estimation et de reconstruction simultanées

Giland [65] a proposé une méthode d'estimation et de reconstruction simultanées en tomographie d'émission, par optimisation d'une fonctionnelle incluant l'attache aux données, la déformation de l'objet et un terme de régularisation.

3.4.4.4 Limitations

Ces exemples montrent la possibilité et la puissance de l'utilisation des méthodes discrètes pour la compensation des déformations en tomographie dynamique. Elle permettent d'introduire de la régularisation spatio-temporelle avec compensation des mouvements dans les méthodes de reconstruction tomographiques [62]. Cependant, elles sont toutes relatives à des problèmes de taille réduite (tomographie d'émission ou reconstruction creuse en angiographie rotationnelle).
L'application en tomographie X à haute résolution spatiale est liée à des volumes de données bien trop grands pour que ces méthodes soient envisageables sur des problèmes de taille réelle (volumes $512 \times 512 \times 32$) à l'heure actuelle.

3.5 Apprentissage des modèles utilisés

Nous décrivons les techniques possibles d'apprentissage des modèles bas-niveau et haut-niveau dont nous venons d'expliquer l'utilisation en reconstruction tomographique.

3.5.1 Modèle de stationnarité ou de redondance

Certaines méthodes utilisent un modèle temporel $\xi(t)$, qui doit être soit appris à partir des projections, soit acquis par un dispositif externe. Nous décrivons dans cette section quelques exemples.

3.5.1.1 L'électro-cardiogramme (ECG)

L'indicateur externe utilisé est classiquement l'électro-cardiogramme (ECG) en imagerie cardiaque. L'ECG est l'enregistrement à la surface du corps du potentiel éléctrique généré par l'activité du coeur.

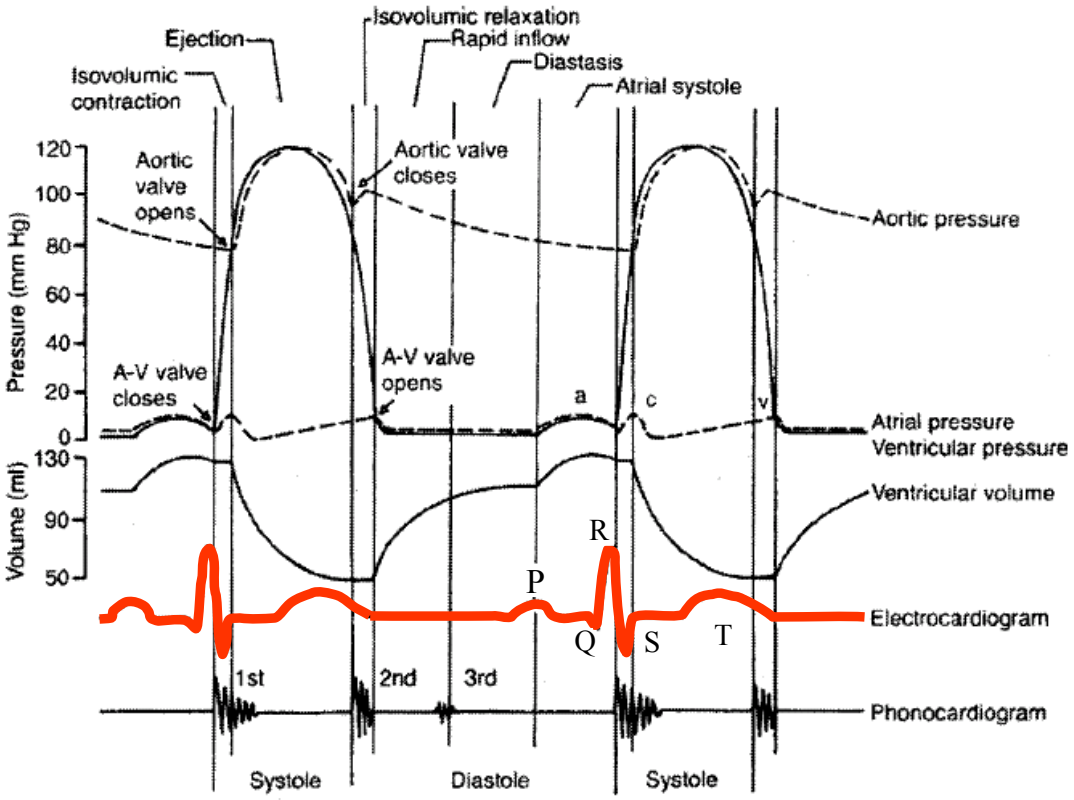


FIG. 3.12 – *Evénements physiologiques du cycle cardiaque et relation à l'ECG (figure extraite de [98] et [105]).*

L'ECG est composé idéalement de pics PQRST, qu'il est possible de corréler avec la physiologie du coeur : le pic le plus important est le pic QRS (ou pic R) : il correspond à la dépolarisation des ventricules; qui initialise la phase de contraction des ventricules (systole). La phase de relaxation (diastole) a lieu juste après le pic T, qui représente la repolarisation des ventricules (voir par exemple [98] et la figure 3.12).

Il est souvent préconisé de centrer les fenêtres de reconstruction sur la phase diastolique du cycle afin de réduire les artefacts de mouvements. Toutefois, l'instant de centrage optimal varie

suivant les patients, suivant le rythme cardiaque, ou même pour un individu suivant la structure étudiée : Ulzheimer [96] relève ainsi une grande variabilité de l'instant de moindre mouvement dans un cycle entre les segments coronaires (voir aussi [84] p.79).

3.5.1.2 Modèles temporels appris à partir des projections

L'intérêt des méthodes reposant sur ces modèles est de s'affranchir d'un système externe et des problèmes de synchronisation associés. Ces méthodes sont basées sur des propriétés de consistance des projections vues dans la section 2.2.2.1.

Tracking du centre de masse :

Kachelriess [75] a proposé une méthode pour générer un signal à partir de l'analyse du centre de masse des projections. En effet, une propriété intéressante des projections tomographiques (non tronquées) est que leur centre de masse est la projection du centre de masse de l'objet. C'est une conséquence des propriétés de consistance de la transformée de Radon, que nous avons vues au chapitre 2 dans la section 2.2.2.1. Cette propriété permet de suivre le mouvement approximatif du centre de masse au cours du temps. Ensuite une analyse fréquentielle des variations de ce mouvement au cours du temps permet de générer un signal séparant les différents cycles de l'évolution.

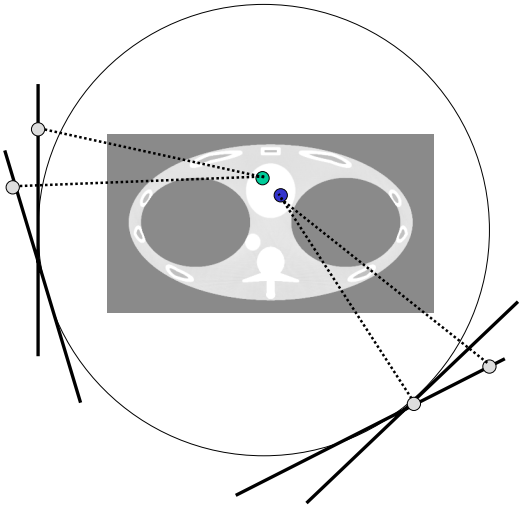


FIG. 3.13 – *Illustration de la possibilité de suivre la position du centre de masse au cours du temps par rétroprojection des centres de masse des projections.*

Bruder [55] a proposé une variante consistant à traquer la variation de la masse entre deux projections complémentaires.

Notons au passage que la violation de la propriété de symétrie entre projections complémentaires peut aussi être utilisée pour trouver les zones de l'image perturbées par le mouvement [81].

L'indicateur de volume de Wang [98]:

Cet indicateur est un modèle d'évolution plus évolué qu'un simple signal repérant les diffé-

rents cycles. Il est de ce fait plus compliqué à générer. Wang donne deux pistes (complémentaires):

- la génération par un modèle théorique issu d'un atlas ou d'une autre modalité,
- la génération à partir de l'analyse d'images déjà reconstruites. La méthode est alors d'une certaine manière itérative.

3.5.2 Modèle de déformation

L'apprentissage du modèle de déformation est une étape à la fois fondamentale et très complexe des méthodes réalisant de la compensation du mouvement.

Plusieurs méthodes sont mises en place dans les différentes approches que nous avons présentées. Elles appartiennent à l'une ou l'autre des familles suivantes:

- méthodes utilisant un modèle externe (atlas, autre modalité..),
- méthodes à partir des projections acquises,
- méthodes à partir d'image reconstruites sans compensation.

3.5.2.1 Méthode développée au LETI [66]

Cette méthode est à rattacher à la troisième famille : des champs de déplacement sont obtenus par régularisation de champs estimés par la technique de mise en correspondance par blocs de voxels (voir la figure 3.11). Ces champs sont ensuite utilisés dans le processus de reconstruction avec compensation, suivant la formule (3.11).

Une méthode assez similaire est proposée par Ritchie [88]: les champs de déplacements sont déduits du mouvement de points remarquables extraits de manière semi-automatique d'images reconstruites sans compensation.

Notons que ces méthodes reposent sur le principe que les images initiales n'ont pas d'artefacts d'amplitude trop grande qui perturberaient l'estimation.

3.5.2.2 Méthode de Blondel [49]

La méthode utilisée par Blondel permet d'obtenir la déformation 4D des coronaires. La première étape de sa méthode est la reconstruction statique de l'arbre coronarien à un instant favorable, ce qui est possible à partir de 3 projections synchrones du fait de la simplicité géométrique de l'image. Ensuite, une procédure complexe d'optimisation lui permet d'obtenir un modèle 4D du mouvement sur tout le cycle cardiaque, en cherchant la déformation de l'arbre initial qui correspond le mieux aux projections acquises.

Notons que la simplicité géométrique de l'image à reconstruire est massivement utilisée dans cette méthode, qui est de ce fait peu applicable en tomographie cardiaque classique.

3.5.2.3 Méthodes d'estimation dans l'espace des projections :

Quelques auteurs ont abordé l'estimation d'un mouvement dans le sinogramme.
La méthode de Lu [82] repose sur l'existence de structures très contrastées identifiables dans le sinogramme pour l'estimation des paramètres du modèle respiratoire de Crawford [61]. Chez Zerfowski [102], l'estimation repose sur l'analyse dans les projections de la déformation (par le

même modèle) du support supposé elliptique de l'objet. Enfin Wang [97] estime des paramètres de translation à partir des projections de même direction, ce qui limite la résolution temporelle.

D'une manière générale, l'impact d'une déformation dans le domaine image n'a pas d'équivalent simple dans le domaine de Radon (par exemple, on perd toute localité). C'est pourquoi ce genre de méthode ne semble réaliste que pour des déformations affines très simples, à moins d'avoir des indices géométriques fort, comme c'était le cas pour Blondel dans la section précédente.

3.6 Cas de la tomographie cardiaque: algorithmes de synchronisation a priori ou a posteriori

Dans cette section, nous détaillons les principaux algorithmes dédiés à la reconstruction en tomographie cardiaque. Ces méthodes sont toutes adaptées à la tomographie hélicoïdale et sont basées soit sur l'hypothèse de stationnarité locale, soit sur l'hypothèse de périodicité ou de pseudo-périodicité. L'usage de ces hypothèses est ancien et était déjà abordé dans les années 1980, par exemple dans l'article de synthèse de 1983 de Boyd [53].

3.6.1 Principe des usages prospectif ou rétrospectif de la périodicité

Grâce un modèle externe, il est possible de déclencher l'émission des rayons X de manière à n'acquérir que les projections nécessaires, ce qui permet de réduire la dose administrée au patient (cf figure 3.14). Ces méthodes sont utilisées avec des scanners "Electron Beam Computed Tomography" ou classiques. L'indicateur utilisé est classiquement l'ECG en imagerie cardiaque dont les pics R sont détectés.

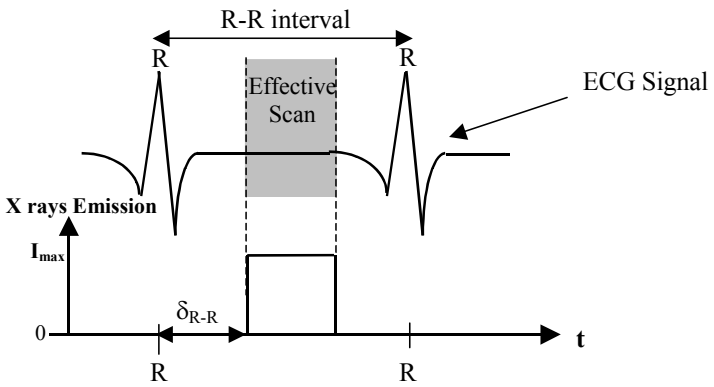


FIG. 3.14 – *Illustration de l'utilisation prospective de la périodicité pour déclencher l'acquisition des mesures.*

Il existe deux types de prédiction de l'intervalle entre deux pics R (ou intervalle RR) : (voir [84] p.27)

- calcul de la durée moyenne sur les trois cycles précédents,
- calcul de la durée médiane sur les cinq cycles précédents.

L'utilisation rétrospective, par opposition à l'utilisation prospective est caractérisée par :

- une meilleure couverture en z,

– une meilleure robustesse vis à vis des changements de rythme (la prédiction peut se tromper). Il est de plus possible de réajuster le temps de reconstruction s'il n'est pas bon,
– la possibilité de faire des études fonctionnelles, en reconstruisant à différents instants du cycle,
– une exposition plus importante au rayonnement, même si des techniques de réduction sont à l'étude.

3.6.2 Algorithmes utilisant un cycle cardiaque

Ces méthodes sont basées sur le principe de stationnarité locale décrit au chapitre précédent. Elles sont plutôt adaptées à des rythmes cardiaques lents.
Tagushi [95] ("helical half scan with time shift"), Kachelriess [76] ("Cardio-Delta" et "MultiSlice Cardio-Delta") et Ohnesorge [85] ("MultiSlice Cardiac Volume Reconstruction") ont proposé des méthodes adaptées à un faible nombre de coupes (4), qui consistent à reconstruire en tomographie hélicoïdale à partir d'un ensemble continu de mesures centrées sur la phase d'intérêt du cycle cardiaque.
La résolution temporelle obtenue est donc limitée à $\frac{T_{\text{rot}}}{2}\frac{\pi+2\gamma_m}{\pi}$, et ne peut être suffisante que pour des rythmes cardiaques lents (voir le tableau 1.1).

3.6.3 Algorithmes utilisant plusieurs cycles cardiaques

Pour des rythmes cardiaques rapides, des méthodes utilisant plusieurs cycles sont requises. Nous les classons suivant l'algorithme de reconstruction statique qui est couplé avec l'hypothèse de périodicité. Nous notons c_R la phase du cycle cardiaque normalisé que l'on cherche à reconstruire ($c_R \in [0,1]$).

3.6.3.1 Méthodes de reconstruction exactes et approchées

Les méthodes les plus récentes tiennent compte de la conicité du rayonnement quand on utilise des détecteurs à grand nombre de lignes (≥ 16). Elles reposent sur des extensions des méthodes approchées au cadre cardiaque, malgré le développement récent des algorithmes exacts et efficaces en tomographie hélicoïdale ([32],[33]). Grass [67] donne deux obstacles à l'utilisation des méthodes exactes de Katsevich :
– un problème pour une utilisation généralisée de la redondance des données,
– un problème pour vérifier la condition de suffisance de données sur les plans horizontaux pour une trajectoire correspondant à des segments discontinus d'hélice (voir la figure 3.15).

Par conséquent, les méthodes de reconstruction en tomographie cardiaque basées sur l'utilisation de plusieurs cycles sont nécessairement des schémas basés sur une méthode approchée de reconstruction 3D. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, suivant l'importance de la conicité, les méthodes utilisées sont basées sur une rétroprojection 2D ou 3D.

3.6.3.2 Méthodes basée sur une rétroprojection 2D

Rétroprojections sur des plans transverses : Ces approches consistent à générer pour une coupe donnée un ensemble de mesures correspondant à la phase c_R, en couplant les méthodes

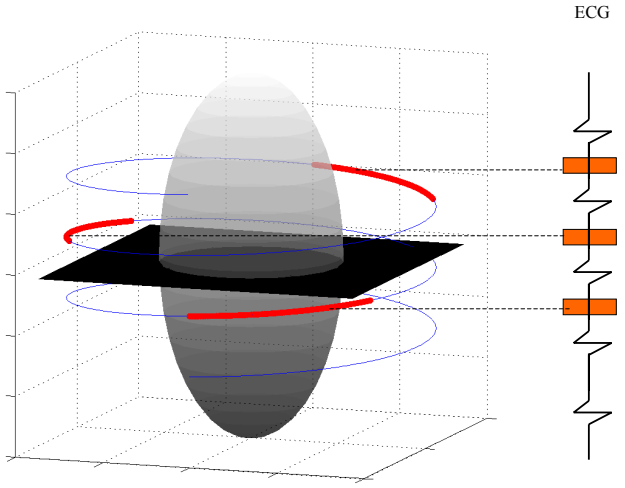


FIG. 3.15 – *Illustration de l'impossibilité de faire de la reconstruction exacte par des algorithmes de type "gating": on peut exhiber des plans qui ne coupent pas les portions de la trajectoire centrées sur une phase cardiaque d'intérêt. Ces plans violent la condition de Tuy.*

d'interpolation utilisées en tomographie hélicoïdale avec une interpolation basée sur la périodicité.

Algorithmes de Kachelriess [73] [77] [76]: "Cardio Interpolation" et "Multislice Cardio Interpolation"

Kachelriess a proposé des algorithmes en tomographie cardiaque incluant une interpolation hélicoïdale (voir la section 2.4) des données pour obtenir des mesures dans un plan transverse, et comprenant également une pondération permettant de sélectionner les données correspondant à la phase cardiaque d'intérêt c_R. L'algorithme "CI" [73] correspond à un dispositif avec détecteur mono-coupe tandis que l'algorithme "MCI" est adapté aux détecteurs multi-coupes ([77] [76]). Plus précisément, les données planaires nécessaires à la reconstruction de la coupe z_R sont données par la formule d'interpolation suivante:

$$g_{MCI}(\lambda,\gamma,z_R,c_R) = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z},m=1\ldots M} w_{km} g(\lambda_k,\gamma_k,m)}{\sum_{k\in\mathbb{Z},m=1\ldots M} w_{km}} \tag{3.12}$$

Dans la formule (3.12), les couples (λ_k,γ_k) désignent les valeurs correspondant au même rayon (2D) que celui repéré par (λ,γ) : $\lambda_k = \lambda + k\pi, \quad \gamma_k = (-1)^k\gamma$. L'indice $m = 1\ldots M$ désigne l'une des M lignes du détecteur. L'algorithme réalise donc une interpolation rayon par rayon, avant de faire une reconstruction directe. Les poids w_{km} dépendent de (z_R,c_R) et combinent l'interpolation hélicoïdale avec l'interpolation basée sur la périodicité (voir la figure 3.16). Kachelriess propose de prendre dans [76] la fonction suivante:

$$w_{km} = \Delta\left(\frac{z(\lambda_k,m) - z_R)}{\bar{z}}\right)\Delta\left(\frac{c(\lambda_k,m) - c_R)}{\bar{c}}\right) \tag{3.13}$$

Dans l'équation (3.13), Δ est une fonction triangle d'aire 1 et de base 2. La résolution tempo-

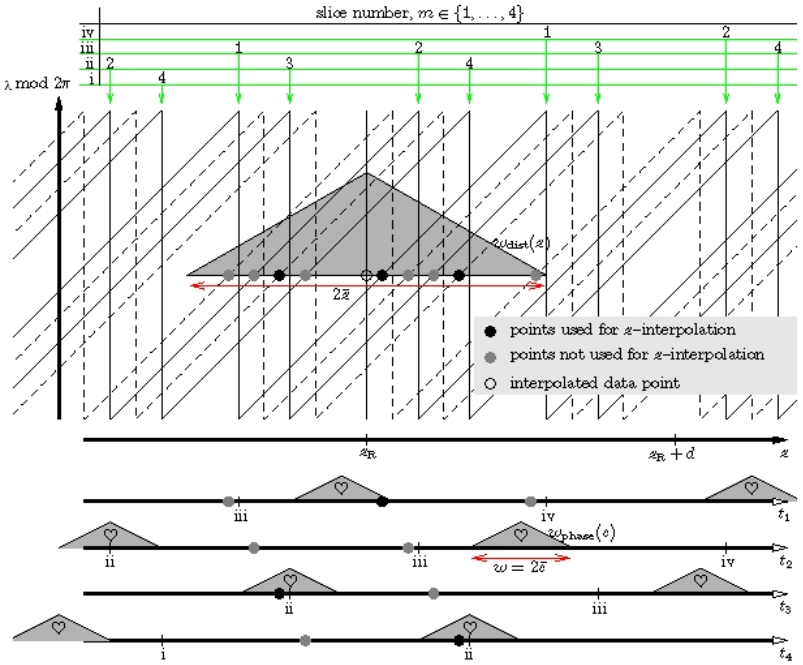


FIG. 3.16 – *Illustration de la technique d'interpolation de Kachelriess. Parmi les mesures qui correspondant à la même direction dans le plan, seuls celles proches de la phase c_R et de la coupe z_R sont prises en compte et pondérées par des fonctions triangles. (figure tirée de [76] avec l'accord de l'auteur)*

relle de cet algorithme est donc, du fait du support des fonctions Δ, de $2\bar{c}$. Les autres paramètres étant donnés, c'est la largeur $\bar{c}$ qui est ajustée de manière à assurer la suffisance de données pour reconstruire la coupe z_R.

Algorithmes de Flohr [63]: ("Adaptive Cardio-Volume")

Flohr a aussi proposé un algorithme réalisant une interpolation hélicoïdale couplée avec une pondération cardiaque. La spécificité principale de cette approche est l'adaptation du nombre de cycles utilisés en fonction du rythme cardiaque : pour les rythmes lents, un seul cycle est utilisé. Pour les rythmes les plus rapides, afin de garder de la robustesse et de préserver la résolution en z, le nombre maximum de cycles utilisés est de trois. La résolution temporelle varie ainsi de 250ms (reconstruction sur un cycle) à 85ms (reconstruction sur trois cycles avec synchronisation optimale).

Dans le cas d'utilisation de plusieurs cycles, l'intervalle de reconstruction est divisé en segments composés chacun de projections issues du même cycle (voir la figure 3.17). Notons aussi que la reconstruction d'une coupe est effectuée après réarrangement des segments vers la géométrie parallèle et que pour réduire les inhomogénéités entre les blocs, ceux-ci se chevauchent légèrement.

Autres méthodes : D'autres méthodes présentent de grandes similarités avec les approches que nous venons de décrire. L'approche de Wang [98] est spécifique par l'interpolation liée à l'indicateur dynamique complexe (voir la section 3.3.2.4). La variante de l'approche multi-

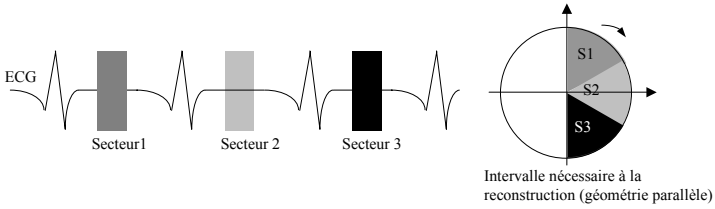


FIG. 3.17 – *Reconstruction multi-secteur par la méthode "ACV". Les données nécessaires à la reconstruction sont extraites par bloc sur plusieurs cycles cardiaques.*

secteur proposée par Hsieh [71] comprend une adaptation de la taille des secteurs issus des différents cycles en fonction des poids de redondance qui sont utilisés pour une reconstruction en géométrie divergente.

Rétroprojections sur des plans obliques : Les algorithmes approchés de reconstruction en tomographie hélicoïdale basés sur la reconstruction 2D de plans obliques ont aussi été adaptés au cadre cardiaque par Kachelriess [72] et par Bruder [57]. Quand la conicité devient grande, comme dans le cas statique, des méthodes avec rétroprojection 3D doivent être utilisées.

3.6.3.3 Méthodes basées sur une rétroprojection 3D

Les méthodes précédentes ne sont efficaces que si la conicité est faible. Dans le cas d'utilisation de détecteurs avec un nombre important de coupes (≥ 16), la conicité est importante et des approches 3D plus fines sont requises. Plusieurs méthodes très voisines ont été introduites récemment.
Les chercheurs de Philips, Grass, Manzke, Shechter [67] [83] [92], ont proposé une méthode de reconstruction combinant l'utilisation de la périodicité avec une approche de reconstruction de type Feldkamp utilisant un réarrangement des données acquises en géométrie parallèle. Kachelriess [74] a décrit une méthode similaire dans laquelle le filtrage est effectué suivant la direction de la tangente à la trajectoire. La variante proposée par Sourbelle [93] évite l'étape de réarrangement et reste dans la géométrie divergente d'acquisition.

Les étapes des méthodes utilisant le réarrangement sont les suivantes (voir par exemple [67]) :

– réarrangement de données du détecteur ligne à ligne en géométrie parallèle:

$$p1(\varphi,s,m) = g(\varphi - \arcsin(\frac{s}{R_0}), \arcsin(\frac{s}{R_0}),m)$$

– pondération conique

$$p2(\varphi,s,m) = \frac{R^2}{\sqrt{R^2+m^2}} p1(\varphi,s,m)$$

– filtrage 1D par un filtre rampe suivant les lignes du détecteur ou suivant la tangente à la trajectoire (écrit ici dans le cas des lignes):

$$p3(\varphi,s,m) = \int_{\mathbb{R}} p2(\varphi,s',m) h_R(s-s')\, ds'$$

– pondération gérant la redondance et la phase cardiaque et rétroprojection 3D sur la fenêtre de visibilité du voxel :

$$f(\vec{x}) = \int_{\varphi_1(\vec{x})}^{\varphi_2(\vec{x})} w_{all}(\varphi,\vec{x}) p3\left(\varphi,s(\varphi,\vec{x}),m(\varphi,\vec{x})\right)$$

La fonction de poids w_{all} est, comme dans la formule (3.13), la combinaison d'une fonction de poids gérant la redondance des données et d'une fonction de poids sélectionnant les données proches de la phase cardiaque d'intérêt. Un grand intérêt de ces méthodes est de considérer pour la reconstruction en un point $\vec{x}$ la fenêtre de visibilité $[\varphi_1(\vec{x}),\varphi_2(\vec{x})]$: ceci permet l'usage de toutes les données du détecteur. Notons aussi que la résolution temporelle dans ce type de méthode dépend donc du point de l'image à reconstruire. La largeur de la fenêtre de "gating" doit être choisie pour que chaque voxel reçoive des rétroprojections sur un intervalle de longueur π. Cette condition peut être appliquée voxel par voxel, car le filtrage est effectué *avant ces pondérations* [92]. Nous rediscuterons de ces aspects dans l'étude de la résolution temporelle du chapitre suivant.

3.6.3.4 Discussion

Tout en reconnaissant leur efficacité, il est important de noter quelques limites des méthodes basées sur la périodicité :

– Le gain potentiel en résolution temporelle est proportionnel au nombre N de cycles utilisés. Or l'augmentation de N conduit à une perte de résolution en z, à moins de réduire le pas de l'hélice et donc d'augmenter la dose.
– Le gain en résolution temporelle varie beaucoup selon la synchronisation entre la période du scanner avec le rythme cardiaque; nous détaillerons cet aspect dans le prochain chapitre.

3.7 Bilan de l'état de l'art : définition des axes de recherche

Notre but est d'élaborer des méthodes de reconstruction adaptées à la géométrie d'acquisition divergente et pouvant être appliquées au cadre cardiaque, ce qui requiert une très forte résolution temporelle.

– Les approches basées sur des schémas de pondération comme l'"underscan" (voir la section 3.3.1) et sur l'hypothèse de stationnarité locale n'apportent pas de gain en résolution temporelle. Toutefois elles peuvent être intégrées aux autres méthodes car elles permettent une amélioration des images.
– Les approches basées sur la périodicité sont intéressantes mais limitées à quelques cycles dans l'usage de la périodicité, ce qui réduit la résolution temporelle effective accessible. La sensibilité de la résolution temporelle à la synchronisation est cruciale dans ces méthodes. Nous allons approfondir cet aspect dans le chapitre 4, pour les géométries parallèles et divergentes. Nous étudierons également l'impact de l'opération de réarrangement vers la géométrie parallèle sur la résolution temporelle en proposant un schéma amélioré.
– Les méthodes discrètes sont attractives dans la gestion de la déformation et des a priori que l'on peut inclure. Mais elles sont encore trop coûteuses en mémoire et temps de calcul pour être appliquées au cadre de la tomographie conique.

– Les méthodes analytiques de compensation des déformations permettent d'atteindre une résolution temporelle parfaite si la déformation est parfaitement connue, compensable et compensée. Elles souffrent aussi de quelques limites : traitement imparfait des déformations simples, notamment pour la question de la suffisance des données ou la gestion du rayonnement divergent. Elles mettent en place aussi un schéma intéressant : résolution sur des déformations simples et généralisation pour des déformations complexes. C'est ce schéma qui est explicitement mis en place dans les approches de Ritchie [88] ou de Grangeat [66]. Quel que soit le type d'approximation permettant d'étendre les résultats obtenus sur un modèle simple à un modèle plus compliqué (les schémas réalisent une approximation locale qui n'est pas forcément la meilleure dans tous les cas), il semble important d'élargir la classe de déformations sur laquelle une approche de compensation de type filtrage-rétroprojection peut être mise en place. Nous consacrons le chapitre 5 à la description de notre contribution à la compensation des déformations affines dépendant du temps. Nous envisagerons ensuite la généralisation et l'utilisation pratique dans le chapitre de perspectives.

Chapitre 4

Etude de la résolution temporelle en tomographie dynamique périodique : acquisition et reconstruction efficaces

4.1 Principe

Dans ce chapitre, nous approfondissons les méthodes de reconstruction avec un modèle d'évolution temporelle de type périodicité. Nous nous plaçons d'abord dans le cadre de la géométrie 2D parallèle et étudions les conditions de synchronisation. Nous définissons pour cela un espace périodisé 2D d'acquisition des mesures, sur lequel nous pouvons facilement caractériser la résolution temporelle et identifier sa sensibilité en fonction des différents paramètres, en particulier les périodes de rotation du scanner et d'évolution de l'objet. Nous montrons ensuite comment les conditions optimales obtenues peuvent être exploitées dans le cadre de la théorie de l'échantillonnage efficace. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [6] parue en octobre 2003 dans la revue IEEE Transactions on Nuclear Sciences, et avaient été en partie présentés au congrès IEEE Medical Imaging Conference 2002 [5]. Nous nous plaçons ensuite dans le cadre de la géométrie divergente pour nous rapprocher de la géométrie des scanners modernes. Nous étendons la définition de notre espace d'acquisition périodisé, en étudions les propriétés et en déduisons les incidences sur la résolution temporelle. Enfin, nous proposons un nouveau schéma de reconstruction sous hypothèse de périodicité caractérisé par une résolution temporelle améliorée et pouvant être aisément intégré dans les approches de reconctruction 3D récentes. Nous illustrons l'efficacité de la méthode sur un exemple très simple.

Situation par rapport à l'état de l'art:
L'acquisition efficace des données est abordée par Bruder [56] Flohr [63], Kachelriess [73] [77]. Des critères de synchronisation sont donnés, permettant d'obtenir une résolution presque optimale. La méthode pour obtenir ces critères repose sur la décomposition de l'intervalle short-scan en N segments. L'acquisition, en tomographie divergente (voir la section 2.1.1.2 pour nos notations) utilisant N cycles d'un objet périodique de période T_f, doit alors permettre d'acquérir les segments consécutivement sur les différents cycles (voir la figure 4.1).

Le critère obtenu est alors : $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{1+\frac{\pi+2\gamma_m}{2\pi N}} T_f$ et la résolution temporelle associée $\frac{T_{\mathrm{rot}}}{2N}\frac{\pi+2\gamma_m}{\pi}$. Nous montrons que ces critères peuvent être raffinés en introduisant une dépendance au point de reconstruction en utilisant la théorie de reconstruction sur un "very short scan" [42], ce qui

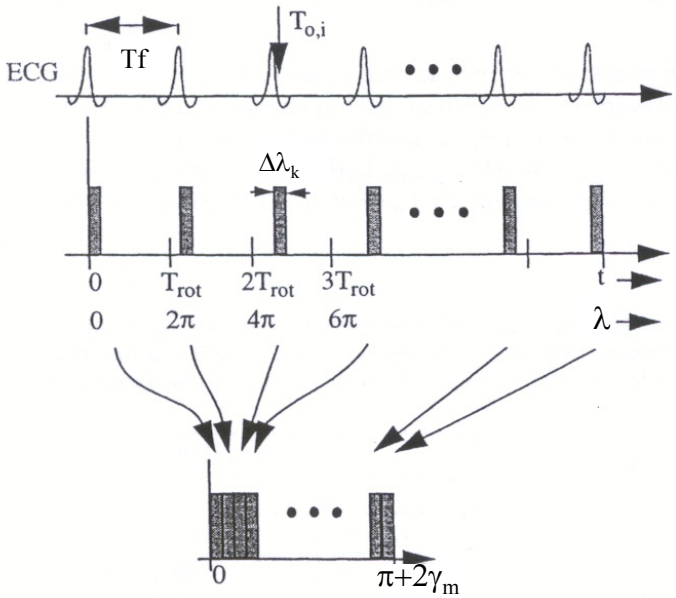


FIG. 4.1 – *Définition d'un critère d'optimalité de la synchronisation. Les segments sont obtenus successivement sur les différents cycles (figure extraites de [56]).*

permet d'obtenir une résolution supérieure dans certaines zones de l'image.
La dépendance de la résolution au point de l'image a aussi été remarquée notamment par Grass, Manzke et Shechter [67] [83] [92]. Toutefois, l'exploitation qu'ils proposent utilise un réarrangement de la géométrie divergente vers la géométrie parallèle dont nous montrons les limites par rapport à la méthode que nous proposons.

4.2 Géométrie parallèle : Etude de la synchronisation

4.2.1 Notations et modèle utilisé

Nous reprenons le modèle de coupe évoluante $f(x_1,x_2,t)$ défini dans la section 3.1.2.2. Nous supposons en plus que f est une fonction périodique de période T_f suivant sa troisième variable t. Les mesures possibles de g sont définies par :

$$g(\varphi,s,t) = \int_{\mathbb{R}} f(s\vec{\theta} + u\vec{\zeta} + t\vec{e_3})du \tag{4.1}$$

où $\varphi \in [0,2\pi[$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $\vec{\theta} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\vec{\zeta} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$. Elles sont donc aussi périodiques de période T_f suivant t. Nous nous plaçons dans le cadre de l'acquisition des projections de f pendant un temps d'acquisition T qui est un multiple de T_f: $T = NT_f$.

Dans un premier temps, nous supposons que les variables φ et s sont continues; le problème discret sera en partie abordé dans la section 4.3. Nous étudions la sensibilité de la résolution temporelle en fonction des différents paramètres : N,T_f,T_{rot}. Les résultats que nous obtenons permettent d'optimiser le réglage de T_{rot} en supposant les autres paramètres connus. Nos résultats permettent aussi d'identifier les variations de la résolution en fonction de la période de l'objet quand les autres paramètres sont fixés.

4.2.2 Espace d'acquisition et critère de résolution temporelle

Nous définissons un espace 2D où nous pouvons aisément visualiser l'acquisition des mesures et la condition de périodicité de l'évolution. Cet espace est la portion notée $\mathcal{P}$ du plan (φ,t), pour $t \in [0,T_f]$ et $\varphi \in [0,2\pi]$. Du fait de la périodicité de l'évolution, nous avons :

$$g(\varphi,s,t) = g(\varphi + 2k\pi,s,t \text{ Mod } T_f) \tag{4.2}$$

Nous en déduisons qu'une acquisition parallèle (correspondant aux projections suivant une famille de droites parallèles) peut être représentée dans le plan $\mathcal{P}$ par un point.

4.2.2.1 Définition du critère de résolution temporelle

Nous caractérisons maintenant les projections nécessaires à la reconstruction de f à l'instant $t = t_0$. Pour l'utilisation d'un algorithme standard, toutes les données doivent correspondre à l'objet dans le même état de son évolution. Ces données correspondent pour la reconstruction à l'instant t_0 à l'ensemble des mesures $g(\varphi,s,t_0)$, pour $\varphi \in [0,2\pi]$ et s décrivant tout le support de l'objet. Elles sont donc situées sur le segment horizontal d'équation $t = t_0$. Mais, du fait de l'acquisition séquentielle des mesures, une seule projection parallèle d'équation $\varphi_0 = \omega t_0$ est effectivement acquise à l'instant t_0 (voir figure 4.2). Les données acquises sont localisées sur des droites obliques de pente $\frac{1}{\omega}$.
Nous pouvons alors dans ce plan $\mathcal{P}$, caractériser la résolution temporelle, notée $\rho(t_0)$ comme étant deux fois la distance maximale entre t_0 et la projection acquise la plus proche sur tout l'intervalle $\varphi \in [0,2\pi]$ (voir figure 4.2).

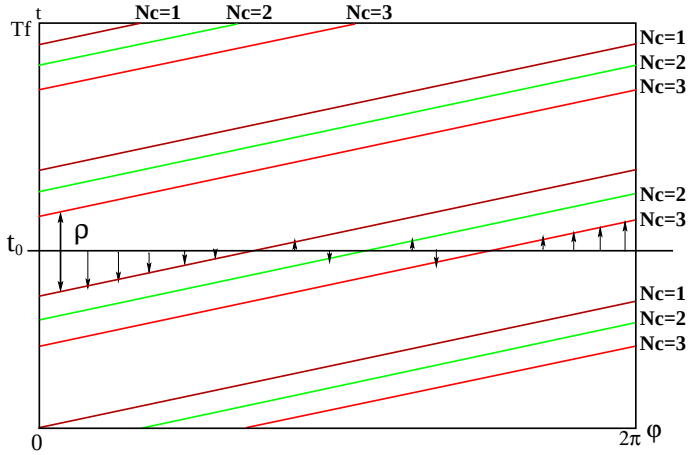


FIG. 4.2 – *Exemple d'espace $\mathcal{P}$ avec $N = 3$; la résolution temporelle ρ est représentée pour $t = t_0$. Les indices N_c indiquent de quel cycle proviennent les projections.*

4.2.2.2 Calcul de la résolution temporelle

Nous remarquons que le $\rho(t_0)$ ne dépend pas du choix de t_0 car si $\rho(t_0)$ est atteint en φ_0, alors $\rho(t_0 + \frac{\varphi}{\omega})$ sera atteint en $\varphi_0 + \varphi$ et vaudra $\rho(t_0)$ $\forall\varphi$. Nous remarquons aussi que $\rho(t_0)$ ne dépend pas non plus de l'instant de début d'acquisition.

Nous montrons maintenant comment il peut être calculé en fonction des paramètres d'acquisition. Nous cherchons donc à calculer la résolution ρ à $t = 0$. Pour cela, nous nous plaçons dans l'espace $\mathcal{P}$ (voir la figure 4.3).

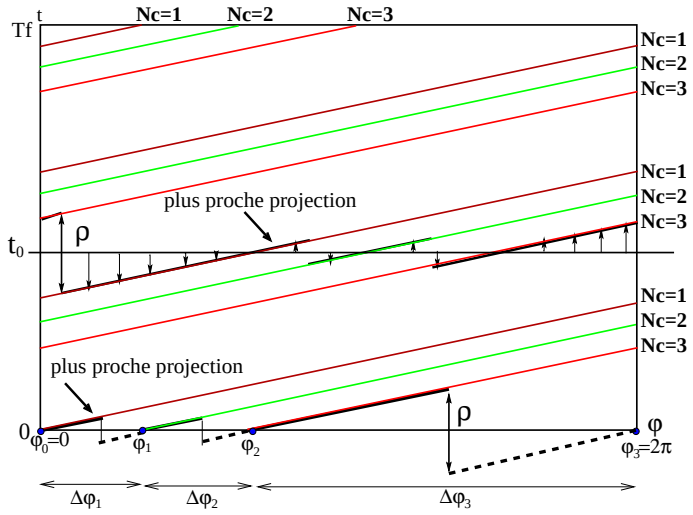


FIG. 4.3 – *Représentation de la résolution temporelle à l'instant $t = 0$ dans l'espace d'acquisition $\mathcal{P}$. Les indices N_c indiquent de quel cycle proviennent les projections.*

Nous montrons qu'il est possible de relier ρ aux intersections des lignes d'acquisition avec l'axe $t = 0$. Nous notons ces $q \in [1 \ldots N]$ intersections $(\varphi_k)_{k=0,\ldots,q-1}$. Ainsi :

$$\varphi_k = k\ \omega\ T_f \text{ Mod } 2\pi \tag{4.3}$$

Comme les valeurs $(\varphi_k)_{k=0,\ldots,q-1}$ ne sont pas ordonnées, nous utilisons une bijection σ de l'ensemble $\{0,1,\ldots,q-1\}$, telle que la famille de valeurs $\left(\varphi_{\sigma(k)}\right)_{k=0,\ldots,q-1}$ soit à présent ordonnée :

$$0 = \varphi_{\sigma(0)} \leq \varphi_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq \varphi_{\sigma(q-1)} \tag{4.4}$$

Nous rajoutons le point $\varphi_{\sigma(q)} = 2\pi$, de manière à définir les longueurs $\Delta\varphi_k$ des intervalles entre des intersections successives:

$$\Delta\varphi_k = \varphi_{\sigma(k)} - \varphi_{\sigma(k-1)}, \text{ pour } k = 1,\ldots,q \tag{4.5}$$

Il est alors clair que la résolution temporelle peut être directement exprimée en fonction des $\Delta\varphi_k$:

$$\boxed{\rho = \text{Max}_{k=1,\ldots,q} \frac{\Delta\varphi_k}{\omega}} \tag{4.6}$$

Nous pouvons de plus minorer notre critère, en remarquant que l'utilisation de N périodes de l'objet entraîne $q \leq N$, et donc

$$\Delta\varphi_k \geq \frac{2\pi}{N} \tag{4.7}$$

Nous en déduisons que : $\rho \geq \frac{2\pi}{\omega N}$. De plus l'égalité est atteinte pour le cas de N intersections équi-espacées. Ces configurations donnent :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2\pi}{\omega N} \\ &= \frac{T_{\text{rot}}}{N} \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2.3 Optimisation des paramètres d'acquisition

Nous pouvons calculer le critère ρ en fonction des paramètres d'acquisition suivant la formule (4.6). Il est alors intéressant de tracer la courbe théorique ρ en fonction de T_{rot} (voir la figure 4.4). Cette courbe indique comment T_{rot} doit être choisi connaissant le temps d'acquisition T et la période T_f afin d'obtenir la meilleure résolution temporelle. Elle montre également comment un mauvais réglage peut faire perdre le bénéfice de l'évolution périodique.

Nous nous concentrons à présent sur les configurations des paramètres conduisant à un remplissage régulier de l'espace $\mathcal{P}$. Nous établissons que les paramètres conduisant à ces situations vérifient :

$$\rho = \frac{T_{\text{rot}}}{q} \tag{4.9}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{q.T_f}{k + p.q} \tag{4.10}$$

où :

$$\begin{cases} N \text{ est le nombre de cycles utilisés} \\ q \text{ est un entier compris entre } 1 \text{ et } N \\ 0 < k < q, \text{ avec } k \text{ premier avec } q \\ p \text{ correspond au nombre entier de tours pendant un cycle } T_f \end{cases}$$

La pire résolution temporelle est obtenue pour $q = 1$, et la meilleure pour $q = N$, comme on peut le voir sur la figure 4.4.
Nous en concluons que les relations conduisant à une utilisation optimale de la périodicité en géométrie parallèle prennent la forme suivante :

$$T_{\text{rot}} = \frac{N.T_f}{k + p.N} \tag{4.11}$$

où :

$$\begin{cases} N \text{ est le nombre de cycles utilisés} \\ k \text{ est un entier premier avec } N \text{ vérifiant } 0 < k < N \\ p \text{ correspond au nombre entier de tours pendant un cycle } T_f : p\, T_{\text{rot}} \leq T_f < (p+1)T_{\text{rot}} \end{cases}$$

Preuve : Nous cherchons les valeurs de T_{rot} conduisant à N intersections équi-espacées des lignes d'acquisition avec l'axe $t = 0$. Une telle configuration est obtenue si et seulement si:

$$\varphi_1 = \frac{2k\pi}{N}, \text{ avec } k \in [1, N-1] \text{ premier avec } N \tag{4.12}$$

Puisque k est premier avec N, on évite l'existence de sous-cycles qui conduiraient à un nombre d'intersections strictement inférieur à N. Nous calculons φ_1:

$$\varphi_1 = \omega\, T_f \text{ Mod } 2\pi = 2\pi \frac{T_f}{T_{\text{rot}}} - 2p\pi \tag{4.13}$$

$$\text{avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } p\, T_{\text{rot}} \leq T_f < (p+1)T_{\text{rot}}$$

Enfin, nous résolvons l'équation (4.12) en utilisant (4.13), ce qui est équivalent à résoudre (4.14):

$$\frac{T_f}{T_{\text{rot}}} = \frac{k}{N} + p \tag{4.14}$$

Cette dernière expression est équivalente à (4.11).

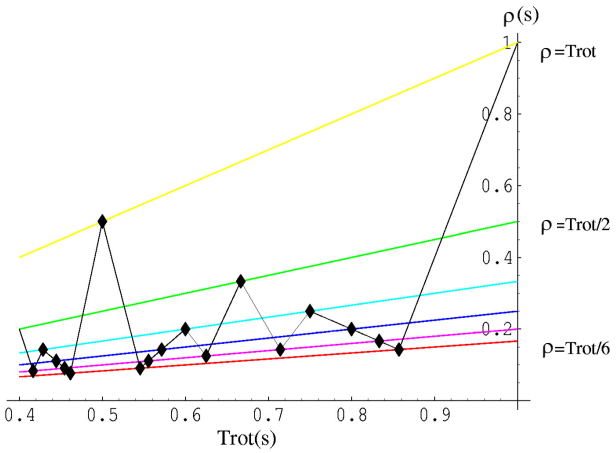


FIG. 4.4 – *Courbe de la résolution temporelle (synchronisation sur* $[0,2\pi]$*) quand* $N = 6$, $T_f = 1s$, $T_{\text{rot}} \in [0.4s,1s]$. *Les équations de certaines droites particulières sont également représentées*

4.2.4 Prise en compte de la propriété de symétrie

L'étude précédente ne prenait pas en compte la symétrie de la transformée rayons X :

$$g(\varphi + k\pi,s,t) = g(\varphi,(-1)^k s,t) \tag{4.15}$$

Cette propriété peut être intégrée dans notre méthodologie en réduisant l'espace d'acquisition $\mathcal{P}$ à $t \in [0,T_f]$ et $\varphi \in [0,\pi]$. Les points de ce nouvel espace correspondent toujours à l'acquisition d'une projection parallèle, mais ils comprennent aussi les projections déduites par la relation de symétrie.

Nous pouvons alors suivre le même schéma de raisonnement pour obtenir des courbes de résolution temporelle de même nature (voir la figure 4.5). Nous concluons que les relations conduisant à la meilleure résolution temporelle prennent la forme suivante:

$$\rho = \frac{T_{\text{rot}}}{\mathbf{2N}} \tag{4.16}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{2.N.T_f}{k + \tilde{p}.N} \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} N \text{ est le nombre de cycles utilisés} \\ k \text{ est un entier premier avec } N \text{ vérifiant } 0 < k < N \\ \tilde{p} \text{ correspond au nombre entier de demi-tours pendant un cycle } T_f \end{cases}$$

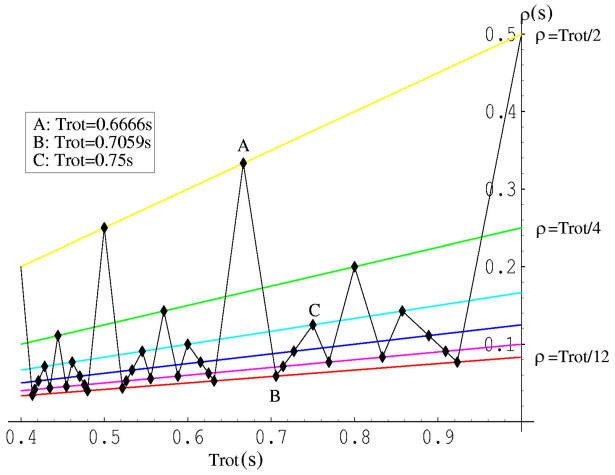


FIG. 4.5 – *Courbe de la résolution temporelle (synchronisation sur* $[0,\pi]$*) quand* $N = 6$*,* $T_f = 1s$*,* $T_{\text{rot}} \in [0.4s,1s]$*. Les équations de certaines droites particulières sont également représentées.*

4.2.5 Quelques tests de validation

Dans cette section, nous présentons quelques tests dont le but est d'illustrer la pertinence de nos critères. Nous avons donc défini un objet évoluant très simple, calculé ses projections pour différentes synchronisations entre les périodes du scanner et de l'évolution. Puis nous avons comparé les résultats obtenus en reconstruisant cet objet à partir des différents sinogrammes à l'aide d'un algorithme utilisant la périodicité.

4.2.5.1 Objet simulé

Nous avons pris l'objet le plus simple et l'évolution la plus simple : notre objet est une sphère qui apparaît périodiquement, pour les valeurs :

$$(t \text{ Mod } T_f) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \text{ pour } \delta \in \mathbb{R}^+$$

Ce fantôme très simple permet très bien de mettre en évidence les erreurs de reconstruction, qui apparaîtront comme des artefacts de faible nombre de vues. Il est à ce titre suffisant pour nos vérifications.

4.2.5.2 Algorithme de reconstruction

Comme une bonne partie des algorithmes présentés dans le chapitre précédent (voir la section 3.6), notre méthode consiste à générer un jeu de mesures à un instant de reconstruction donné à l'aide d'une interpolation utilisant la périodicité de l'évolution. Nous prenons une technique d'interpolation au plus proche voisin, qui correspond donc à une interpolation dans l'espace d'acquisition $\mathcal{P}$, en utilisant la symétrie (voir la figure 4.2). Nous appliquons ensuite un algorithme d'inversion de la transformée de Radon sur le jeu de mesures interpolées.

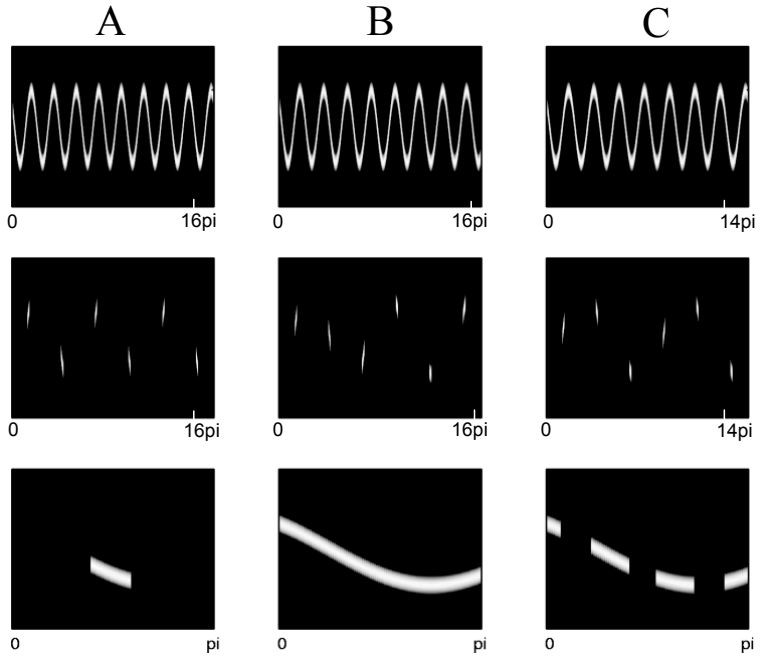


FIG. 4.6 – *Projections de l'objet simulé pour les trois différents cas de la figure 4.5 : A:* $T_{\text{rot}} = 0.6666s$, *B:* $T_{\text{rot}} = 0.7059s$ *et C:* $T_{\text{rot}} = 0.75s$. *Chaque colonne correspond à un cas. La première ligne représente les sinogrammes de l'objet statique, la seconde les sinogrammes de l'objet clignotant et la troisième les sinogrammes interpolés grâce à la périodicité sur un intervalle angulaire de longueur* π *(*$Tf = 1s$, $N = 6$, $t_0 = 0.5s$, $\delta = 0.03125s$*). On remarque que le cas B vérifie :* $0.7059 = \frac{2.N.T_f}{k+\tilde{p}.N}$ *avec* $k = 5$, $\tilde{p} = 2$.

4.2.5.3 Résultats

Nous nous intéressons aux trois valeurs particulières (A) : $T_{\text{rot}} = 0.6666s$, (B) : $T_{\text{rot}} = 0.7059s$ et (C) : $T_{\text{rot}} = 0.75s$ de la période de rotation du scanner et dans le cas $N = 6$, $T_f = 1s$, $t_0 = 0.5s$, $\delta = 0.03125s$. Les projections acquises et interpolées sont présentées dans la figure 4.6, et les images reconstruites dans la figure 4.7. Le schéma d'interpolation est suffisant pour (B) : $T_{\text{rot}} = 0.7059$, mais pas pour $T_{\text{rot}} = 0.75s$. Les résultats les plus mauvais sont obtenus pour $T_{\text{rot}} = 0.6666s$ quand une très faible portion du sinogramme est correcte, alors que ce cas correspond à la période de rotation du scanner la plus élevée sur nos trois points. Nous représentons également l'espace d'acquisition $\mathcal{P}$ dans la figure 4.7, afin d'illustrer la concordance des résultats avec l'analyse du remplissage de l'espace d'acquisition périodisé.

Enfin, pour clore cette étude, nous mettons en évidence le lien entre le critère de résolution temporelle et la qualité des images reconstruites, ce qui est facile pour notre fantôme. La figure 4.8 représente l'erreur L_2 des images reconstruites en fonction de T_{rot}. Bien que cette relation ne soit pas linéaire, la corrélation avec le critère de résolution temporelle est nette.

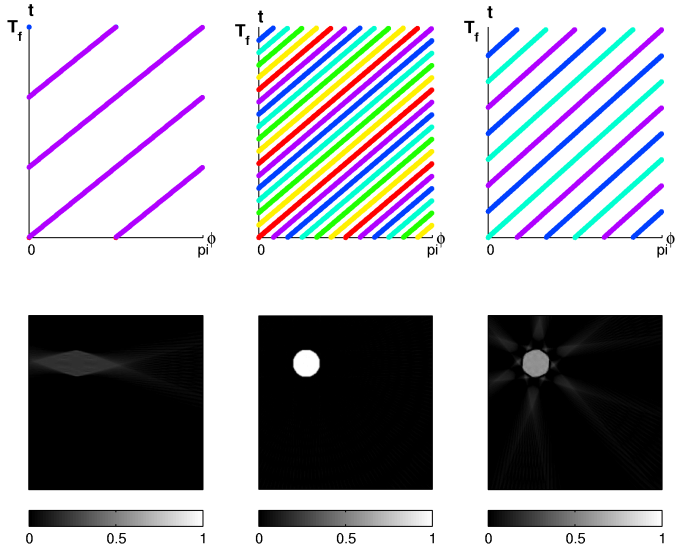


FIG. 4.7 – *Espaces d'acquisition $\mathcal{P}$ et résultats des reconstructions à l'instant $t_0 = 0.5s$ de la sphère clignotante pour les trois différentes valeurs de T_{rot} correspondant aux points A,B,C dessinés dans la figure 4.5 pour la cas $N = 6$, $T_f = 1s$, $t_0 = 0.5s$, $\delta = 0.03125s$.*

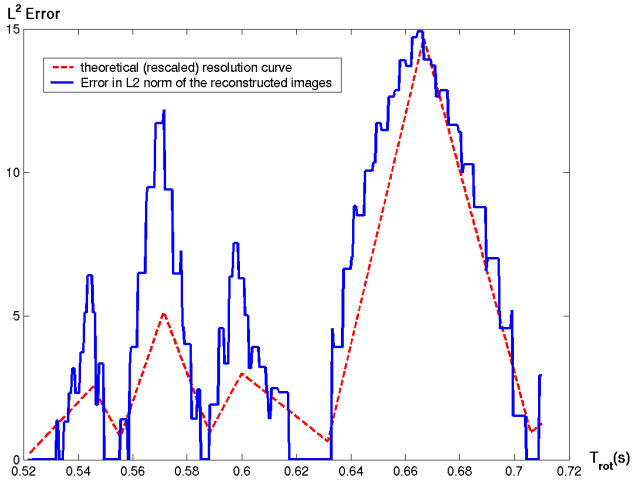


FIG. 4.8 – *Comparaison de l'erreur de reconstruction L_2 et de la courbe de résolution temporelle (nous avons changé l'échelle de la courbe de résolution temporelle afin qu'elle soit visible sur le même graphique).*

4.3 Géométrie parallèle : schéma d'échantillonnage discret efficace

4.3.1 Principe

Nous avons défini dans la section 4.2 des conditions optimales de synchronisation entre la rotation du scanner et la période d'évolution de l'objet. Cette étude a été menée dans un cadre

continu. Nous nous intéressons maintenant au problème de définition d'un schéma efficace (dans le sens défini dans la partie 2.1.3) compatible avec ces conditions de synchronisation. Nous avons vu dans la section 3.1.2.2 que l'échantillonnage en tomographie dynamique 2D était analogue à l'échantillonnage hélicoïdal en tomographie classique avec détecteur ligne. Les schémas optimaux pour ces géométries ont été définis par Desbat dans [4] et ont été rappelés dans la section 2.1.3.3.

Nous cherchons ici à montrer que l'utilisation du schéma optimal $(0 \quad h/2 \quad 0) + L_{W_{helHI}}$ sous hypothèse de périodicité avec quelques contraintes supplémentaires permet d'obtenir le schéma périodisé $(0 \quad h/2 \quad 0) + L_{W_{helHI^p}}$ avec :

$$W_{helHI^p} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ h & 2h & 0 \\ \frac{T_{\text{rot}}}{2N} + \frac{T_{\text{rot}}}{P} & 0 & \frac{T_{\text{rot}}}{N} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Nous pourrons facilement écrire des conditions d'échantillonnage associées et conclure sur les schémas optimaux en tomographie dynamique parallèle 2D avec hypothèse de périodicité.

4.3.2 Utilisation de la périodicité sur le schéma $L_{W_{helHI}}$

Nous allons alors montrer que le schéma périodisé produit peut être généré par la matrice W_{helHI^p} de la formule (4.18).

Preuve : Nous nous plaçons sous les hypothèses suivantes:

- H1: l'objet a une évolution périodique de période T_f : $g(\varphi,s,t) = g(\varphi,s,t \text{ Mod } T_f)$,
- H2: la synchronisation optimale est établie relativement à l'utilisation de N cycles : $T_{\text{rot}} = \frac{N.T_f}{k+p.N}$, avec k premier avec N,
- H3: le nombre P de projections par tour est un multiple de N,
- H4: on acquiert des projections d'une fonction essentiellement limitée en fréquence (b,b,b_t) suivant le schéma $L_{W_{HI}}$,
- H5: le nombre N est impair.

Nous remarquons déjà que les hypothèses H1,H2,H3 assurent que l'utilisation sur le schéma $L_{W_{helHI}}$ de l'hypothèse de périodicité conduit à un schéma périodique (le nombre de projections par période est en effet entier).
Nous montrons maintenant que, sous les hypothèses précédentes, $L_{W_{helHI}} = L_{W_{helHI^p}}$. Pour cela, nous notons $(\vec{e}_i)_{i=1,2,3}$ les vecteurs engendrant le schéma $L_{W_{helHI}}$ et $(\vec{e}_i^{\,p})_{i=1,2,3}$ les vecteurs engendrant le schéma $L_{W_{helHI^p}}$.

$\mathbf{L_{helW_{HI}} \subset L_{W_{helHIP}}}$ Nous montrons que les vecteurs $(\vec{e}_i)_{i=1,2,3}$ peuvent être écrits comme des combinaisons linéaires entières des vecteurs $(\vec{e}_i^{\,p})_{i=1,2,3}$. En effet, il est facile de vérifier que :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_1^{\,p} + \frac{N-1}{2}\vec{e}_3^{\,p} \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_2^{\,p} \\ \vec{e}_3 = N\vec{e}_3^{\,p} \end{cases} \tag{4.19}$$

Notons que les combinaisons linéaires ainsi définies sont entières grâce à l'hypothèse H5.

$\mathbf{L_{W_{helHIP}}} \subset \mathbf{L_{W_{helHI}}}$ Nous utilisons l'hypothèse $H2$: Comme k est premier avec N, il existe, d'après le théorème de Bezout, deux entiers a et b tels que : $ak + bN = 1$.
Alors, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{T_{\text{rot}}k}{N} + pT_{\text{rot}} \\ aT_f &= \frac{T_{\text{rot}}(1-bN)}{N} + paT_{\text{rot}} \\ aT_f &= \frac{T_{\text{rot}}}{N} + qT_{\text{rot}} \qquad \text{avec } q = pa - b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\vec{e}_3^p = \frac{T_{\text{rot}}}{N}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-qT_{\text{rot}} + aT_f)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -q\vec{e}_3 \text{ Mod } T_f = q\vec{e}_3$$

Calculons $\vec{e}_1 + \frac{q(1-N)}{2}\vec{e}_3$, avec $q = (pa - b)$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 + \frac{q(1-N)}{2}\vec{e}_3 &= \vec{e}_1 + \frac{(1-N)}{2}\vec{e}_3^p \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} \\ h \\ \frac{T_{\text{rot}}}{2} + \frac{T_{\text{rot}}}{P} + \frac{(1-N)T_{\text{rot}}}{2N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{P} \\ h \\ \frac{T_{\text{rot}}}{2N} + \frac{T_{\text{rot}}}{P} \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_1^p \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \vec{e}_1^p = \vec{e}_1 + \frac{q(1-N)}{2}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2^p = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3^p = q\vec{e}_3 \end{cases} \tag{4.20}$$

Nous en concluons que, sous les hypothèses faites, le schéma $L_{W_{helHI}}$ periodisé conduit exactement au schéma $L_{W_{helHI^p}}$.

Nous considérons maintenant le problème de l'échantillonnage. Nous calculons pour cela la matrice $W_{helHI^p}^{-T}$:

$$2\pi\ W_{helHI^p}^{-T} = \begin{bmatrix} P & -\frac{P}{2} & -\frac{P}{2} - N \\ 0 & \frac{\pi}{h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi N}{T_{\text{rot}}} \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons les conditions d'échantillonnage du schéma $L_{W_{helHI^p}}$, dans le cas où $P \gg N$:

$$\begin{gathered} P > 2b \\ h = \frac{\pi}{b} \\ T_{\text{rot}} = N\frac{2\pi}{b_t\sqrt{3}} \end{gathered}$$

Ainsi, nous avons montré que nous pouvons utiliser de manière optimale la périodicité de l'objet, par un choix optimal de la période T_{rot} tout en continuant à générer un schéma hexagonal

entrelacé. L'utilisation de la périodicité dans les conditions d'échantillonnage peut se lire de deux façons:

- pour respecter la condition de Shannon dans l'axe du temps, il est suffisant de tourner N fois moins vite
- ou bien à vitesse de rotation égale, la périodicité permet d'atteindre les fréquence Nb_t.

Enfin, nous pouvons calculer l'efficacité du schéma $L_{W_{HIP}}$:

$$\det W_{helHIP} = N \det W_{helHI}$$

Nous vérifions ainsi que le bénéfice de la périodicité a été maximal. Notons que le même type de raisonnement peut être conduit pour des schémas non-optimaux comme le schéma standard.

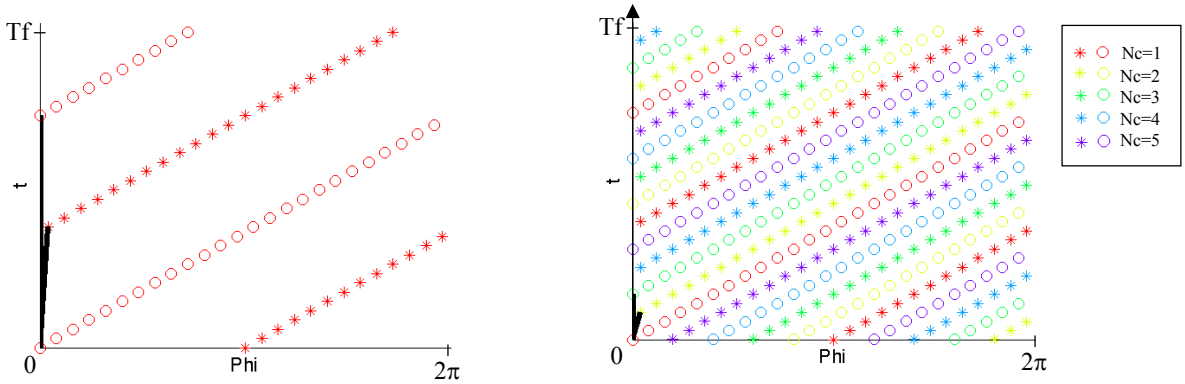


FIG. 4.9 – *Illustration du schéma $L_{W_{helHIP}}$ dans le plan (φ,t). A gauche: avant la périodisation; à droite : après la périodisation $(N = 5)$ quand les contraintes sont satisfaites. Les signes 'o' et '*' signifient que les mesures correspondantes sont entrelacées dans la direction s.*

4.4 Géométrie divergente : étude de la synchronisation

Dans la section 4.2, nous avons étudié très précisément les conditions de synchronisation dans le cas de la géométrie parallèle, en nous basant sur un espace d'acquisition 2D des mesures. Nous proposons maintenant une extension de ces concepts au cas de la tomographie divergente (nous prendrons le paramétrage équi-angulaire). Notre premier point d'intérêt est la généralisation de l'espace d'acquisition des mesures.

4.4.1 Notations et modèle utilisé

Nous supposons à présent que les projections de l'objet $2D + t$ sont acquises suivant une géométrie divergente. Les mesures sont alors paramétrées par :

$$g(\lambda,\gamma,t), \text{ avec } \lambda \in [0,2\pi],\gamma \in [-\gamma_m,\gamma_m],t \in [0,T]$$

La contrainte hélicoïdale correspondant aux mesures effectivement acquises est simplement $\lambda = \frac{2\pi t}{T_{\text{rot}}}$.

4.4.2 Généralisation de l'espace d'acquisition et propriétés spécifiques

4.4.2.1 Premier choix possible

Nous cherchons à généraliser l'espace d'acquisition. Nous pouvons choisir l'espace $\mathcal{P}_{fan}^{2\pi}$: $\lambda \in [0,2\pi]$,$t \in [0,T_f]$. Dans cet espace, nous représentons par un point l'acquisition d'une projection divergente entière à l'instant t et pour la position angulaire λ de la source. Dans la perspective de faire une reconstruction utilisant des données sur un tour entier, nous définissons alors le critère ρ comme la distance maximale sur l'ensemble $\lambda \in [0,2\pi]$ entre la droite horizontale d'équation $t = t_0$ et la projection acquise la plus proche d'angle λ (voir figure 4.10).

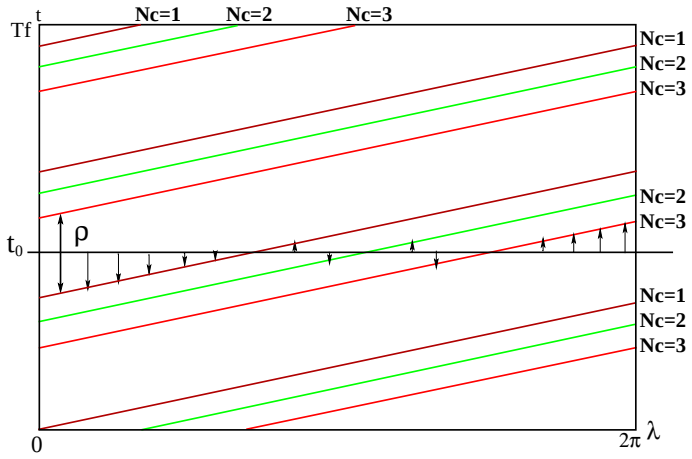


FIG. 4.10 – *Exemple d'espace $\mathcal{P}_{fan}^{2\pi}$ avec $N = 3$; la résolution temporelle ρ est représentée pour $t = t_0$. Les indices N_c indiquent de quel cycle proviennent les projections.*

Des critères similaires à ceux de la section 4.2 sont alors obtenus. Mais ces critères n'intègrent pas l'information supplémentaire contenue dans la propriété de symétrie, ce qui est pourtant requis pour exploiter de manière optimale la redondance. Nous cherchons donc une représentation permettant de prendre en compte la symétrie.

4.4.2.2 Deuxième choix intégrant la symétrie

L'avantage de la représentation $\mathcal{P}_{fan}^{2\pi}$ est que nous sommes parvenus, comme dans le cas de la géométrie parallèle, à nous ramener à un espace d'acquisition 2D, représentatif de l'espace 3D. Malheureusement, ce n'est plus possible si on exploite la propriété de symétrie. En effet, dans ce cas, l'intervalle angulaire nécessaire à la reconstruction n'est pas constant suivant les points (voir le chapitre 2.3). Dans le cas où celui-ci est forcé à être constant (c'est la cas de l'intervalle short-scan par exemple), le jeu de données est alors déjà redondant. L'étude faisant intervenir cet intervalle est donc sous-optimale.

Afin de trouver des conditions relatives à l'ensemble minimal de mesures, il est donc nécessaire de faire intervenir *une dépendance au point de reconstruction*. Nous définissons alors l'espace $\mathcal{P}_{fan}(\vec{x})$: $\varphi \in [0,\pi]$,$t \in [0,T_f]$. Dans cet espace, un point représente l'acquisition de la droite de normale $\vec{\theta} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, passant par le point $\vec{x} = (x_1,x_2)$.

Plus précisément, pour une durée d'acquisition donnée $\lambda \in [0,NT_f]$, pour un point $\vec{x}$, l'ex-

pression de φ en fonction de $(\vec{x},\lambda)$ est :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda,\vec{x}) &= \lambda + \frac{\pi}{2} - \gamma(\vec{x},\lambda) \text{ Mod } \pi \\ &= \lambda + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-x_1 \sin\lambda + x_2 \cos\lambda}{R_0 - x_1 \cos\lambda - x_2 \sin\lambda} \text{ Mod } \pi \end{aligned} \tag{4.21}$$

Les acquisitions effectuées sont donc visualisées dans l'espace $\mathcal{P}_{fan}^{2\pi}$ par les points $[\varphi(\lambda,\vec{x}),\frac{\lambda}{\omega} \text{ Mod } T_f)]$. L'espace $\mathcal{P}_{fan}(\vec{x})$ a donc les propriétés suivantes (voir la figure 4.11):

- il dépend du point $\vec{x}$ à reconstruire,
- les acquisitions ne forment plus des droites dans cet espace.

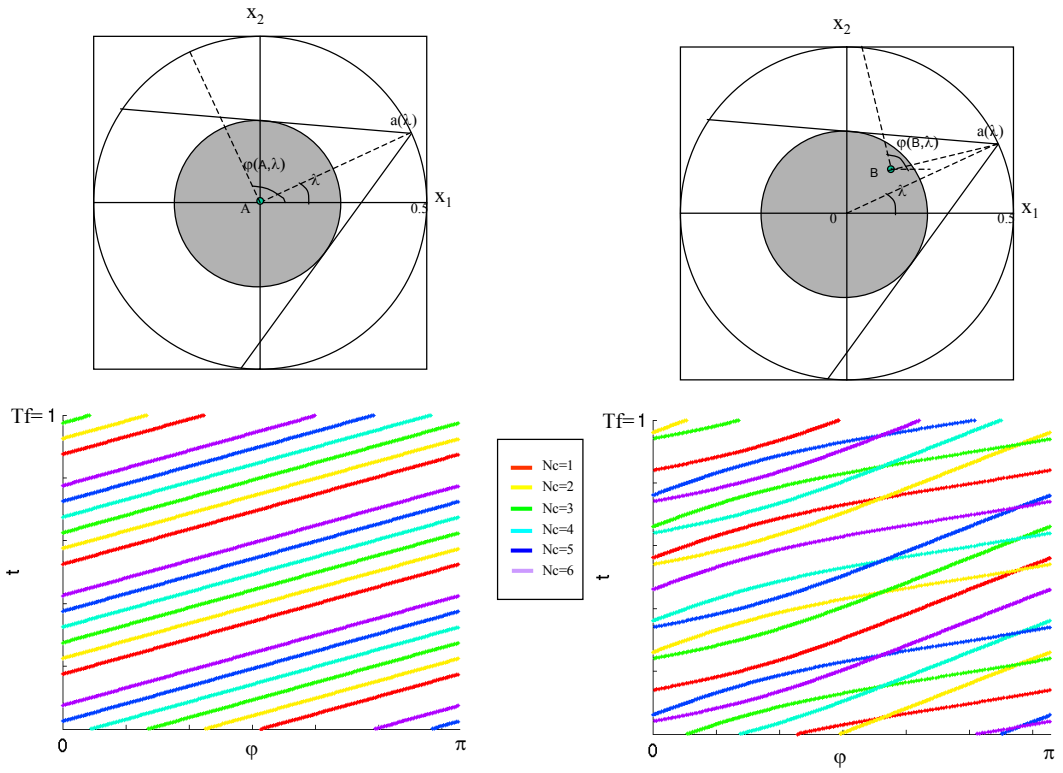


FIG. 4.11 – *Exemple d'espace $\mathcal{P}_{fan}$ avec $N = 6$, $T_f = 1$,$T_{\text{rot}} = 0.70s$ pour 2 points différents. Colonne gauche : point $A = (0,0)$. Colonne droite $B = (0.3,0.3)$*

4.4.3 Critère de résolution temporelle

Il est quand même possible de définir de la même manière que pour le cas parallèle le critère de résolution temporelle dans l'espace $\mathcal{P}_{fan}^{2\pi}$: $\rho(\vec{x},t_0)$ est le maximum pour $\varphi \in [0,\pi]$ des distances minimales entre t_0 et les projections acquises à φ fixé (voir figure 4.12). Il est clair que ce critère dépend de t_0 et de $\vec{x}$, comme l'ont aussi remarqué Grass [67] et Manzke [83]. A la différence du cas parallèle, il ne peut pas être caractérisé simplement à partir des intersections des courbes avec les axes. Il peut par contre être évalué numériquement. Nous pouvons d'autre part faire le lien avec l'étude de la résolution en géométrie parallèle en remarquant que le critère

obtenu en géométrie divergente au centre de l'objet coïncide avec celui défini globalement en géométrie parallèle (section 4.2.4), ce que nous vérifions dans la figure 4.13.

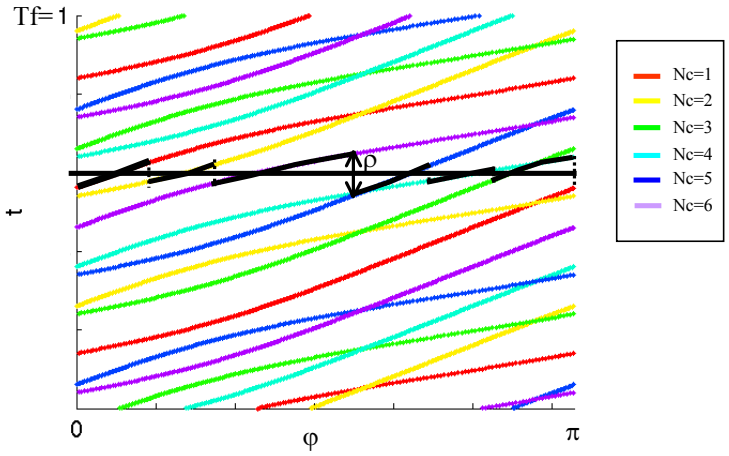


FIG. 4.12 – *Visualisation de la résolution temporelle dans l'espace $\mathcal{P}_{fan}$ pour le point $B = (0.3,0.3)$ avec $N = 6$, $T_f = 1$,$T_{\text{rot}} = 0.70s$. Les indices N_c indiquent de quel cycle proviennent les projections.*

L'évaluation numérique donne des indications sur l'efficacité de l'utilisation de la périodicité, en calculant pour une région d'intérêt Ω le critère : $\rho(\Omega,t_0) = \max_{\vec{x}\in\Omega} \rho(\vec{x},t_0)$. Il est notamment possible de tracer le courbes ρ_{Ω,t_0} en fonction de T_{rot}, connaissant N et T_f. Nous avons tracé dans la figure 4.13, $\rho(\Omega,t_0)$ ainsi que l'écart type de $\rho(\vec{x},t_0)$ sur l'ensemble des points de Ω, en fonction de la période T_{rot}. De telles courbes peuvent être utilisées a priori pour optimiser la résolution temporelle relativement à une région d'intérêt.

4.5 Nouveau schéma de reconstruction basé sur la permutation des étapes filtrage-réarrangement

4.5.1 Principe

Nous terminons ce chapitre avec une proposition de modification des algorithmes standards utilisés. Comme nous l'avons vu au chapitre 3.6, les approches récentes mettent en place des schémas de reconstructions 3D de type Feldkamp en incluant une pondération permettant de sélectionner les mesures acquises autour d'un instant précis du cycle cardiaque. Qu'elles utilisent ou non un réarrangement des données de la géométrie divergente vers la géométrie parallèle, ces méthodes ont en commun le fait que l'étape de filtrage n'est pas effectuée sur les données divergentes acquises. Dans l'approche de Kachelriess [77], les données sont réarrangées rayon par rayon grâce à la périodicité en un autre jeu de projections divergentes. Dans les approches de Grass et Manzke ([67], [83]), de Kachelriess [74] ou de Flohr [63] le filtrage est effectué sur les données réarrangées en géométrie parallèle, le réarrangement périodique n'intervenant que juste avant la rétroprojection.
Or le filtre utilisé en reconstruction est un filtre passe-haut et non local. Il nous semble donc

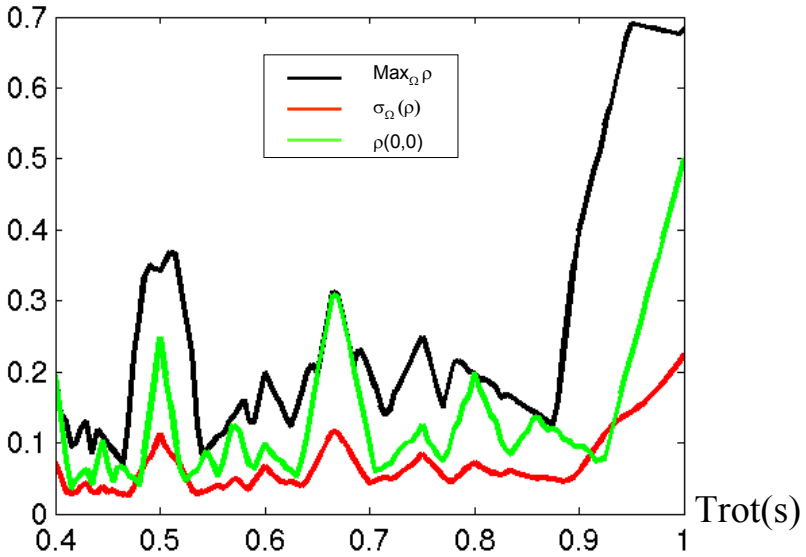


FIG. 4.13 – *Evolution du critère de résolution temporelle pour* $t_0 = 0.5$, $T_f = 1$, $N = 6$, Ω *le cercle de rayon* $1/2$. *Nous avons représenté le maximum du critère sur la région d'intérêt* Ω, *le critère pour le point central, et l'écart type du critère sur* Ω.

important de l'appliquer sur les mesures acquises au même instant. Ce n'est pas possible si on réarrange les projections acquises de la géométrie divergente vers la géométrie parallèle. Ce n'est pas possible non plus dans le cas où les données acquises sont réarrangées grâce à la périodicité en un autre sinogramme en géométrie divergente, dans le cas (préférable) où la relation de symétrie est exploitée.
Nous proposons donc d'utiliser les approches récentes de reconstruction en géométrie divergente, introduites initialement par Noo [42], afin d'utiliser un filtrage directement sur les données acquises dans le cadre d'un algorithme exploitant au mieux la périodicité de l'évolution de l'objet à reconstruire. Nous proposons deux variantes, suivant que l'on souhaite ou non rester dans la géométrie divergente :

4.5.1.1 Algorithme en géométrie divergente

Dans ce cas, les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- 1) Filtrage des données acquises suivant la formule (2.54) de Noo [42], que nous redonnons ici:

$$g_F(\lambda,\vec{\theta}) = -\int_{S^1} d\vec{\alpha}\; h_H(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha}) g'(\lambda,\vec{\alpha})$$

- 2) Interpolation temporelle exploitant l'hypothèse de périodicité ("gating")
- 3) Gestion de la redondance des données et rétroprojection

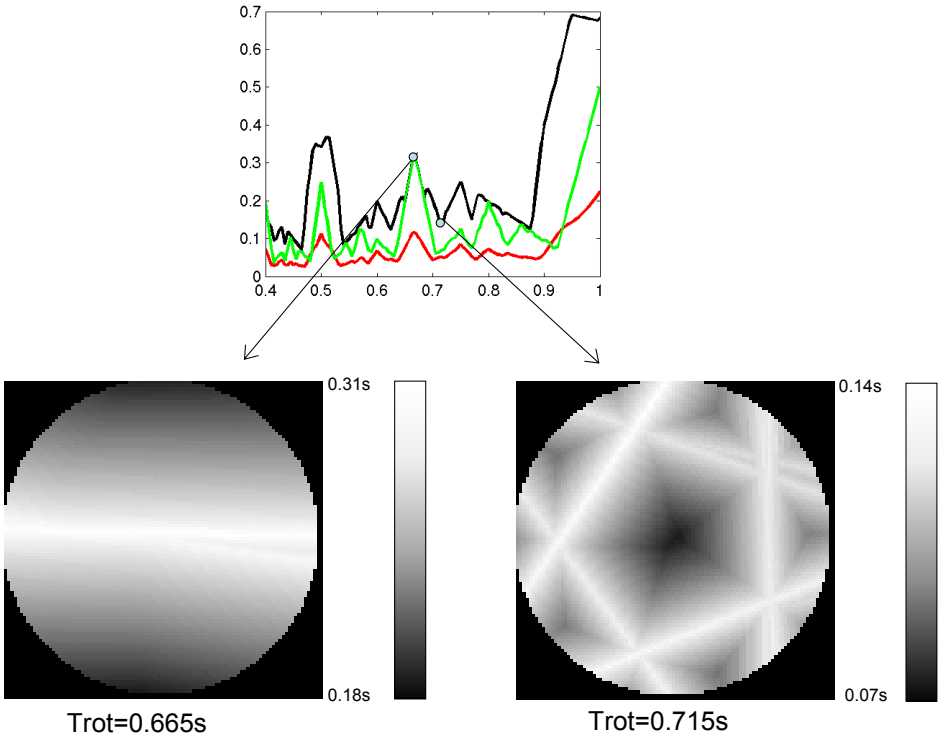


FIG. 4.14 – *Visualisation de la dépendance au point de la résolution temporelle, pour deux cas* $T_{\text{rot}} = 0.665s$ *et* $T_{\text{rot}} = 0.715s$ *pour* $T_f = 1$, $N = 6$, Ω *le cercle de rayon* $R/2$. *Ces images de résolution temporelle sont à opposer à la forme en dégradé obtenue dans le cas non périodique (figure 3.4)*

4.5.1.2 Algorithme en géométrie parallèle

Cette variante permet d'obtenir un sinogramme filtré réarrangé en géométrie parallèle. Les étapes de la reconstruction sont les suivantes:

- 1) Filtrage des données acquises et réarrangement géométrique (4.22) suivant la formule de Noo [42]. Cette formule est obtenue simplement par dérivation de la formule de Hamaker 2D (2.17). A l'issue de cette étape, les projections parallèles filtrées par le filtre rampe sont accessibles.

$$p_F(\vec{\theta},\vec{a}(\lambda)\cdot\vec{\theta}) = \frac{1}{2\pi\vec{a}'(\lambda)\cdot\vec{\theta}} g_F(\lambda,\vec{\theta}) \tag{4.22}$$

- 2) Interpolation temporelle du sinogramme filtré suivant l'hypothèse de périodicité ("gating").
- 3) Rétroprojection

Dans la suite, nous conservons cette deuxième variante, que nous opposons schématiquement aux autres méthodes dans la figure 4.15.
Notons que la permutation entre filtrage et réarrangement que nous proposons est intégrable dans les approches 3D récentes, comme celles de Grass et Manzke ([67], [83]) , pour lesquelles il suffit simplement de supprimer l'étape de filtrage et de la remplacer par un pré-traitement des

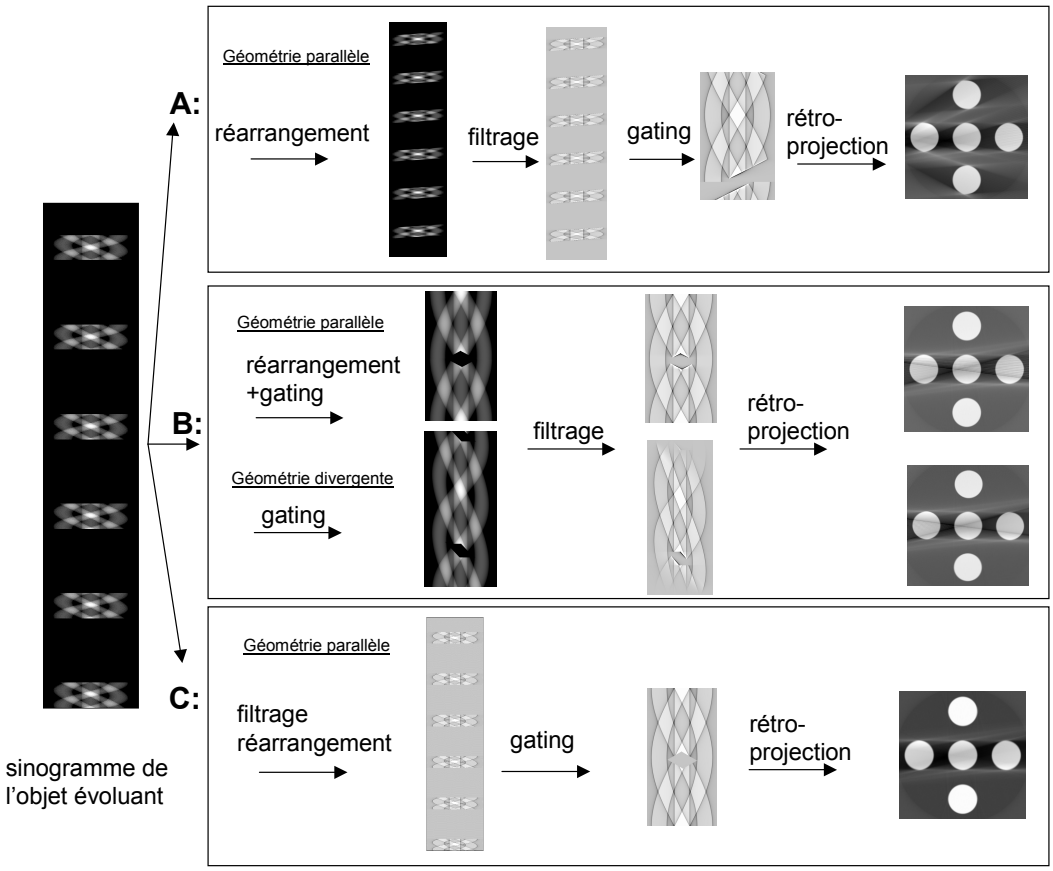


FIG. 4.15 – *Mise en évidence de la différence de notre schéma de reconstruction (C) avec les approches existantes. La méthode (A) correspond à [67], [83] [74], la méthode (B) à [77]. Notre schéma est caractérisé par la position du filtrage dans l'algorithme. Celui-ci est effectué en premier, sur les données acquises, suivant la formule (4.22). Dans ce schéma, le terme réarrangement désigne le réarrangement géométrique des rayons de la géométrie divergente vers la géométrie parallèle, et le terme "gating" l'interpolation temporelle basée sur l'hypothèse de périodicité.*

données acquises correspondant à l'application de la formule (4.22). Des détails sur l'implémentation de (4.22) sont donnés dans la section 5.2.3.4.

4.5.2 Tests

4.5.2.1 Objet simulé

Nous utilisons un fantôme constitué de cinq sphères de rayon 0.1, situées dans les cinq positions suivantes : $C_1 = (0,0)$, $C_2 = (-0.3,0)$, $C_3 = (0.3,0)$, $C_4 = (0,-0.3)$, $C_5 = (0,0.3)$. La distance source-détecteur est égale à un. Nous faisons clignoter le fantôme pendant une durée δ autour des instants $t_0 + kT_f$ (voir la figure 4.16). Le sinogramme et la reconstruction exacte du fantôme sont regroupés dans la figure 4.18.

Nous prenons $T_f = 1$, $N = 6$, et choisissons pour ce test, dans l'idée de mettre en évidence des différences entre les algorithmes, $\delta = 0.14s$, $t_0 = 0.5s$, $T_{\text{rot}} = 0.665s$. D'après la courbe

4.13 et la figure 4.14, nous savons que la variance de la résolution temporelle est élevée pour ce réglage des paramètres, et que la résolution temporelle est plus mauvaise au centre de l'image que sur les bords verticaux. Nous allons mettre en évidence les différences entre les méthodes de reconstruction décrites dans la figure 4.15.

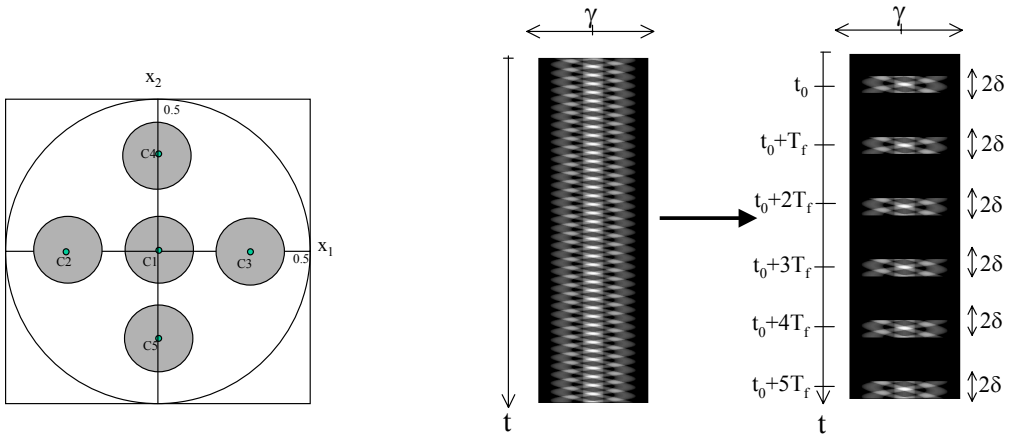


FIG. 4.16 – *Principe des tests effectués. Nous faisons clignoter un fantôme composé de cinq sphères.Ici* $N = 6,\ t_0 = 0.5s$ *et* $\delta = 0.14s$*. A gauche : la définition du fantôme. A droite : les sinogrammes avant et après masquage des projections simulant le clignotement.*

4.5.2.2 Résultats des reconstructions

Nous avons testé les trois algorithmes A,B,C de la figure 4.15. Nous avons utilisé la variante de notre méthode en géométrie parallèle (ainsi que pour la méthode B). Tous les réarrangements basés sur la périodicité utilisent une interpolation au plus proche voisin.

La figure 4.14 nous indique que notre réglage permet théoriquement de reconstruire exactement les sphères situées en $x_2 = \pm 0.3$. Par contre, la résolution temporelle est insuffisante pour reconstruire la sphère centrale. L'insuffisance de données se manifeste par des "trous" dans les sinogrammes de la figure 4.19 .

Méthode A ([67], [83] [74])

La méthode A qui réalise un réarrangement vers la géométrie parallèle préalablement au filtrage produit une projection filtrée de mauvaise qualité sur notre exemple (voir la figure 4.19). L'approximation de cette méthode est d'affecter le même temps d'acquisition (celui de la projection centrale) à tous les rayons d'une projection parallèle obtenue par réarrangement. Or le temps d'acquisition varie suivant la variable radiale s. Il est facile de montrer que, si $t_{\varphi,0}$ désigne l'instant d'acquisition du rayon central $(\varphi,s = 0)$ dans la projection parallèle d'angle φ, alors l'instant d'acquisition du rayon (φ,s) est :

$$t_{\varphi,s} = t_{\varphi,0} + \frac{\arcsin(s/R_0)}{\omega}$$

Seule la projection centrale a un temps d'acquisition juste (voir la figure 4.17). L'écart augmente avec s jusqu'à $\pm\frac{\arcsin(s/R_0)}{\omega}$. Il y a donc perte de résolution temporelle loin du centre dans

les images reconstruites, mais également près du centre du fait de la non-localité du filtre de reconstruction (voir la figure 4.20).

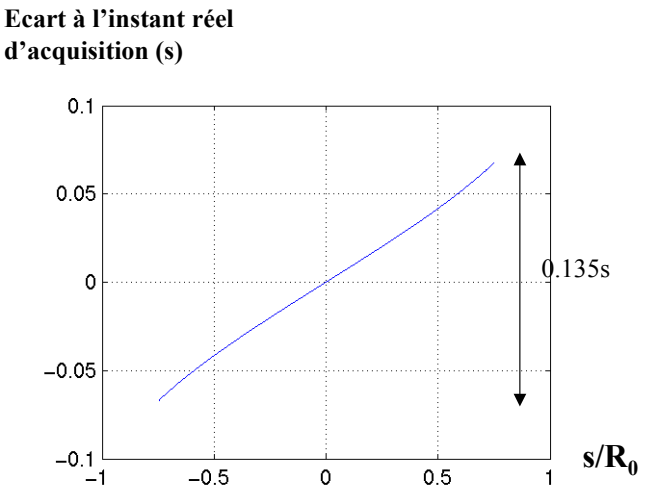


FIG. 4.17 – *Ecart entre le temps d'acquisition d'un rayon d'une projection parallèle réarrangée par rapport à l'instant d'acquisition du rayon central. Dans cet exemple,* $T_{\mathrm{rot}} = 0.5s$, *et* $s/R_0 \in [-0.75,0.75]$.

Méthode B (variante en géométrie parallèle de [73] [77])

Dans cette méthode, la périodicité est utilisée en même temps que le réarrangement en géométrie parallèle. Il n'y a donc pas d'erreurs temporelles pour l'instant d'acquisition des rayons. Par contre, la non-localité du filtre propage la plus mauvaise résolution temporelle présente au sein d'une projection. Les sphères situées en $x_2 = \pm 0.3$ ne sont pas reconstruites parfaitement et des artefacts apparaissent au centre de l'image (voir la figure 4.20).

Méthode C (le schéma que nous proposons)

A la différence des autres méthodes, grâce à la formule (4.22), nous filtrons les projections acquises au même instant. Nous vérifions que nous parvenons ainsi à atteindre la résolution temporelle théorique, car nous reconstruisons parfaitement les sphères situées en $x_2 = \pm 0.3$ (voir la figure 4.20). D'autre part, peu d'artefacts en raies apparaissent au centre de l'image. Pour confirmer ces observations, des tests sur données réalistes doivent être menés dans un cadre proche de l'application cardiaque.

4.6 Bilan de cette étude

Dans cette partie, nous avons approfondi les conditions d'acquisition pour la reconstruction d'un objet à variation périodique. Dans le cas de la géométrie parallèle, nous avons donné des critères optimaux de synchronisation à partir de la description de l'acquisition dans un espace 2D. Nous avons montré que l'utilisation des configurations optimales est compatible

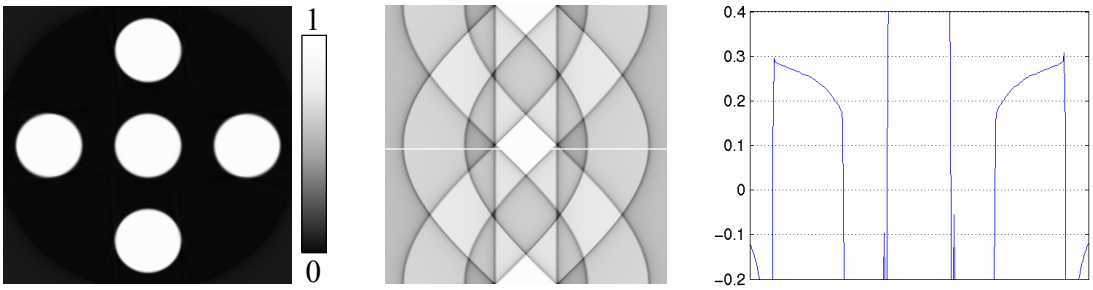


FIG. 4.18 – *Image de référence avec sinogramme filtré et une coupe particulière de ce sinogramme pour le fantôme simulé composé de cinq sphères.*

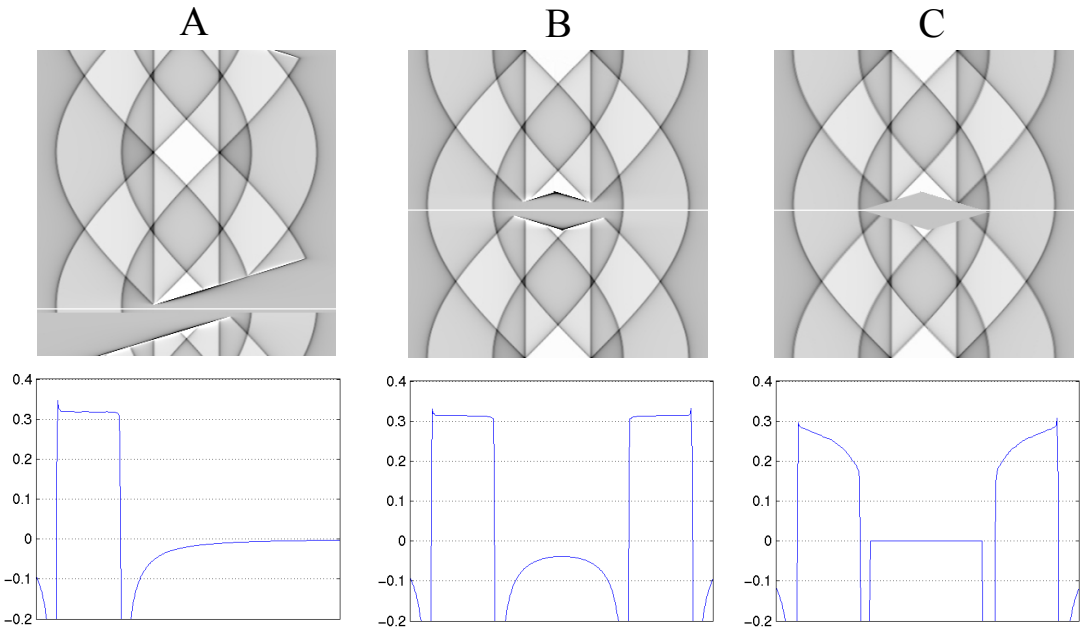


FIG. 4.19 – *Comparaison des sinogrammes juste avant rétroprojection pour les méthodes A,B et C dans le cas :* $T_{\text{rot}} = 0.665s$ *pour* $T_f = 1$, $N = 6$ *pour le fantôme clignotant caractérisé par* $t_0 = 0.5s$ *et* $\delta = 0.14s$. *Les résultats sont à comparer au sinogramme exact de la figure 4.18 et mettent en évidence les meilleurs résultats obtenus par notre méthode (C).*

avec l'échantillonnage efficace suivant un schéma hexagonal entrelacé. Ces résultats permettent de tirer bénéfice de l'évolution périodique et de réduire le flux de données nécessaires à la reconstruction.

Nous avons également étudié en partie le cas de la géométrie divergente. Une difficulté majeure apparaît lors de l'utilisation de la propriété de symétrie. Nous avons alors mis en évidence que l'utilisation de la symétrie rendait la résolution temporelle dépendante du point de reconstruction. Enfin, nous avons proposé un nouveau schéma de reconstruction, basé sur les formules de Noo [42], qui permet d'atteindre exactement cette résolution temporelle, à la différence des schémas existants. Les formules de Noo permettent de filtrer les données acquises suivant la

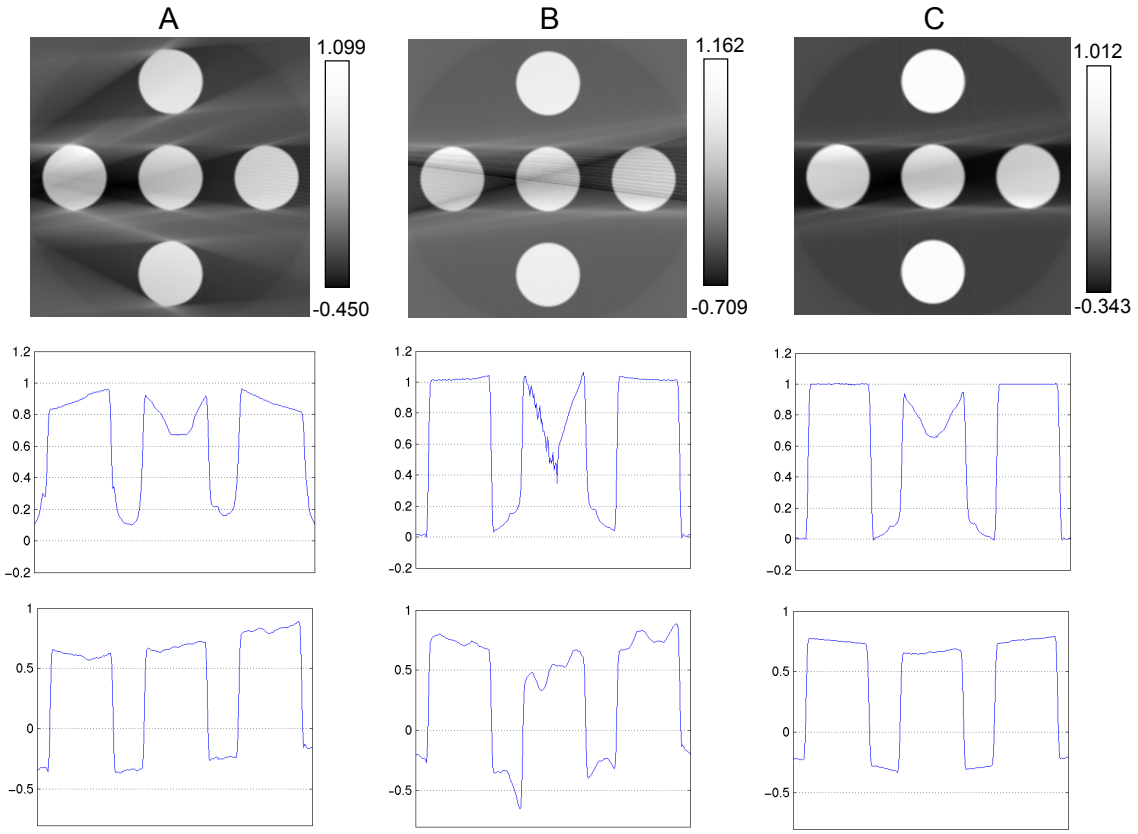


FIG. 4.20 – *Reconstructions obtenues par les trois algorithmes (A,B,C) à l'instant* $t = 0.5$ *dans le cas :* $T_{\text{rot}} = 0.665s$ *pour* $T_f = 1$, $N = 6$ *pour le fantôme clignotant caractérisé par* $t_0 = 0.5s$ *et* $\delta = 0.14s$. *Colonne gauche : filtrage après gating. Colonne droite : filtrage avant gating. Les courbes représentent les profils des images reconstruites suivant les lignes centrales verticale (2ème ligne) et horizontale (3ème ligne).*

géométrie divergente d'acquisition, ce qui apporte une amélioration. Nous avons mis en évidence cette amélioration sur un cas très simple, en utilisant un ordre d'interpolation bas. Des tests complémentaires sont requis en utilisant des techniques d'interpolation plus évoluées, de même que des tests sur fantômes réalistes, pour évaluer le gain de la méthode dans des situations réelles.

Nous n'avons pas étudié l'échantillonnage dans les géométrie divergentes. Comme l'a montré Desbat [4], l'utilisation efficace de la symétrie est un obstacle encore non résolu.

L'acquisition hélicoïdale limite l'utilisation de la périodicité à un faible nombre de cycles, à moins d'utiliser un très faible pas et donc de fortes doses (voir par exemple [77] ou [85]). Par conséquent, en pratique, seuls quelques cycles peuvent être utilisés avec une trajectoire hélicoïdale, ce qui réduit le gain en résolution temporelle.

Ce phénomène justifie de porter de l'intérêt aux méthodes incluant de la compensation de l'évolution de l'objet à reconstruire pendant l'acquisition. Nous y consacrons les prochains chapitres.

Chapitre 5

Reconstruction avec compensation des déformations affines dépendant du temps

Nous présentons dans ce chapitre notre approche sur la compensation des déformations affines dépendant du temps. Nous commençons par étudier le cas d'une déformation générale. La résolution générale du problème ainsi formulé est extrêmement complexe. Elle suggère cependant la restriction du problème à des classes de déformations plus simples pour obtenir des méthodes de résolution analytiques. Dans ce contexte, nous étudions la reconstruction d'un objet à partir des projections acquises pendant une déformation affine dépendant du temps. Nous avons vu dans le chapitre 3 que les méthodes existantes sont approchées sur cette classe. Nous exposons ici des méthodes de reconstruction exactes pour les géométries 2D parallèle et divergente, ainsi que pour la géométrie conique.

5.1 Principe général de la méthode

5.1.1 Utilisation d'un opérateur de déformation pour changer la géométrie

Nous supposons que la scène à reconstruire peut être vue comme la déformation régulière d'un objet par rapport à une situation initiale de référence. Nos supposons que cette déformations a les propriétés d'un changement de variable (C^1 difféomorphisme). Nous notons alors Γ_t la déformation (ici de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) permettant de passer de la scène à l'instant t à la scène à l'instant de référence t_0 :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad f_t(\vec{x}) = f_{t_0}(\Gamma_t(\vec{x})) \tag{5.1}$$

Nous utilisons l'opérateur de déformation Γ_t pour reformuler le problème de reconstruction en t_0. Pour cela, nous nous plaçons par exemple en géométrie divergente et écrivons le lien entre les transformées rayons X 2D entre les instants t et t_0:

$$\begin{aligned} g_t(\lambda,\vec{\alpha}) &= \int_{\mathbb{R}^+} dl\, f_t(\vec{a}(\lambda) + l\vec{\alpha}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}\; f_{t_0}(\Gamma_t(\vec{x}))\; \delta\left(\vec{x}\cdot\vec{n} - \vec{a}(\lambda)\cdot\vec{n}\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

où $\vec{n}$ est normal à la droite $L(\lambda,\vec{\alpha})$ passant par $\vec{a}(\lambda)$et de vecteur directeur $\vec{\alpha}$

En appliquant dans la formule (5.2) le changement de variable $\vec{x}_0 = \Gamma_t(\vec{x})$ et en notant Jac$(\Gamma_t^{-1}(\vec{x}_0))$ la valeur du Jacobien de ce changement de variable au point $\vec{x}_0$, nous avons:

$$g_t(\lambda,\vec{\alpha}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}_0 \; f_{t_0}(\vec{x}_0)\text{Jac}(\Gamma_t^{-1}(\vec{x}_0)) \; \delta\left(\Gamma_t^{-1}(\vec{x}_0)\cdot\vec{n} - \vec{a}(\lambda)\cdot\vec{n}\right) \tag{5.3}$$

Afin de simplifier le problème, nous supposons alors que ce Jabobien est unitaire:

$$\forall t, \forall \vec{x} \qquad \text{Jac}(\Gamma_t^{-1}(\vec{x})) = 1 \tag{5.4}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} g_t(\lambda,\vec{\alpha}) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}_0 f_{t_0}(\vec{x}_0)\delta\left(\Gamma_t^{-1}(\vec{x}_0)\cdot\vec{n} - \vec{a}(\lambda)\cdot\vec{n}\right) \\ &= \int_{\Gamma(L(\lambda,\vec{\alpha}))} d\vec{x}_0 f_{t_0}(\vec{x}_0) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ainsi pour chaque instant, nous nous ramenons à une acquisition sur l'objet de référence f_{t_0} au travers d'une projection suivant l'image $\Gamma(L(\lambda,\vec{\alpha}))$ de la droite d'acquisition $L(\lambda,\vec{\alpha})$ par l'opérateur de déformation. Nous appellerons cette image un rayon virtuel, et l'ensemble objet de référence-rayons virtuels, la géométrie virtuelle (figure 5.1).

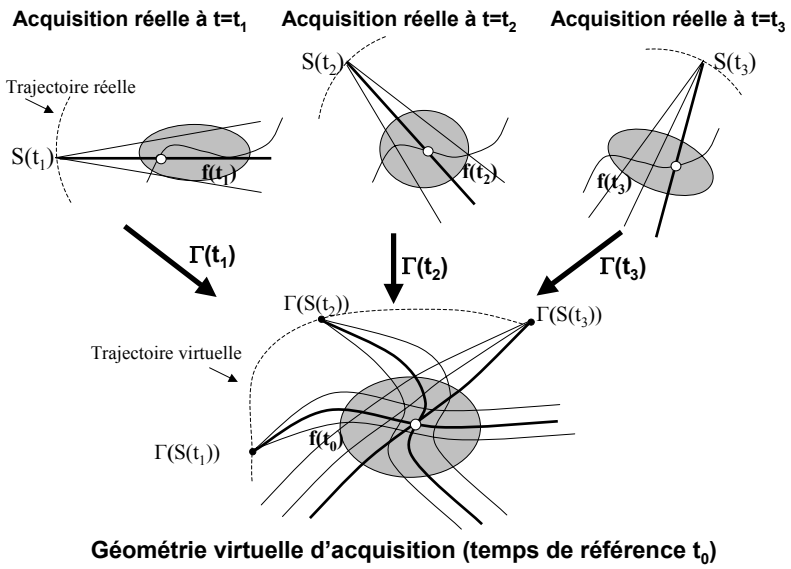


FIG. 5.1 – *Définition de la géométrie d'acquisition virtuelle*

Nous nous ramenons ainsi à un problème de reconstruction d'un objet à partir de ses intégrales acquises non plus sur des droites, mais sur des courbes quelconques, images des droites par la déformation.
Notons que si l'hypothèse sur le Jacobien n'est pas vérifiée, alors nous faisons une approximation qui entraîne la perte du principe de conservation de masse. Elle entraînera très probablement des erreurs (de basses fréquences) en quantification dans les images reconstruites. Cependant cette approximation ne peut avoir que peu d'influence au niveau des discontinuités sur lesquelles ont lieu les artefacts de mouvement les plus sévères.

5.1.2 Le cas des déformations affines dépendant du temps

5.1.2.1 Propriétés des déformations affines

Le problème ainsi formulé est très complexe et n'a pas à notre connaissance de solution analytique dans le cas général. C'est pourquoi nous avons d'abord cherché la plus grande classe structurée de déformations qui préserve la géométrie des droites, sur laquelle sont connues des formules d'inversion et des algorithmes efficaces. Cette famille est la classe des déformations affines, par application directe du théorème fondamental de la géométrie affine (voir par exemple [106]). Cette classe comprend les translations, les rotations, les dilatations ainsi que leurs combinaisons. Notons que ces déformations affines dépendent de la variable temporelle. Comme une transformation affine préserve le parallélisme et les intersections des droites, une projection parallèle est transformée en une autre projection parallèle, et une projection divergente en une autre projection divergente (figure 5.2). La géométrie virtuelle est donc aussi soit une géométrie parallèle, soit une géométrie divergente. Ce résultat clé nous sert de point de départ pour établir les formules d'inversion.

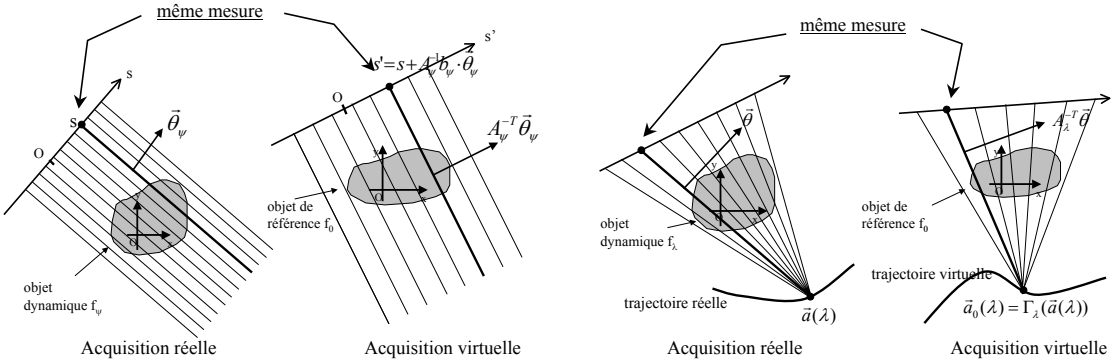


FIG. 5.2 – *Transformation affine dans le cas parallèle (gauche) et éventail (droite)*

5.1.2.2 Notations pour les déformations affines

Nous introduisons ici en dimension 2, le modèle de déformation affine dépendant du temps :

$$\Gamma_t(\vec{x}) = A_t\vec{x} + \vec{b}_t \text{ où : } A_t = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b}_t = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Nous supposons que cette déformation est inversible, c'est à dire que : $\forall t, \det A_t \neq 0$.

Géométrie parallèle Nous supposons en géométrie parallèle que la direction[1] $\vec{\theta}_\psi = (\cos\psi, \sin\psi)$ de la projection est une fonction linéaire du temps : $\psi(t) = \omega t$, avec $\omega > 0$. Comme $\psi(t)$ est une fonction monotone de t, nous pouvons paramétrer le temps par l'angle ψ. Les projections

1. nous gardons la notation φ pour la géométrie virtuelle d'acquisition

acquises sur l'objet dynamique sont données par :

$$p_\psi(\vec{\theta}_\psi,s) = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}\ \delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta}_\psi - s) f_\psi(\vec{x}) \tag{5.7}$$

Dans ce cas, nous étudions les conditions sur Γ_ψ requises pour reconstruire l'objet dans son état de référence f_{t_0} ou plus simplement f_0 à partir des projections p_ψ et proposons une formule de reconstruction associée à cette condition.

Géométrie divergente Dans ce cas, c'est le paramètre λ de la source qui est une fonction monotone du temps : $\lambda(t) = \omega t$ (λ représente en effet l'angle caractérisant la position de la source sur un cercle). Nous remplaçons donc ici aussi la variable t par le paramètre de trajectoire λ. Les mesures dynamiques sont alors données par:

$$g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha}) = \int_0^\infty dl\ f_\lambda(\vec{a}(\lambda) + l\vec{\alpha}) \tag{5.8}$$

Nous étudions donc les conditions sur Γ_λ requises pour reconstruire f_0 à partir des mesures g_λ acquises sur l'objet dynamique, et établissons des formules de reconstruction. Ces résultats généralisent l'approche de Noo [42] décrite au chapitre 2.

5.1.3 Formule de Hamaker pour les déformations affines

Un résultat central que nous avons établi et qui permet de résoudre le problème de reconstruction pour les géométries divergentes est la généralisation de la formule de Hamaker (2.9) aux déformées affines.

Nous raisonnons ici en dimension n et considérons une fonction h homogène impaire. Nous notons $\Gamma_\lambda(\vec{x}) = A_\lambda\vec{x} + \vec{b}_\lambda$, où A_λ est une matrice inversible de taille $n \times n$, et $\vec{b}_\lambda$ un vecteur de taille n. Les coefficients de A_λ et de $\vec{b}_\lambda$ peuvent dépendre de λ. Nous notons p_{0h} le résultat du filtrage par h des projections parallèles p_0 de l'objet de référence f_0 :

$$p_{0h}(\vec{\theta},s) = (h *_s p_0)(\vec{\theta},s) = \int_{\mathbb{R}} ds'\ h(s-s')p_0(\vec{\theta},s') \tag{5.9}$$

Et nous notons $g_{h\lambda}$ le résultat du filtrage[2] par h des projections divergentes g_λ de l'objet dynamique f_λ :

$$g_{h\lambda}(\lambda,\vec{\theta}) = -\int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha}\ g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})h(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha}) \tag{5.10}$$

Nous avons alors la relation suivante, que nous appelons la formule de Hamaker généralisée:

$$\boxed{g_{h\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) = \frac{1}{|detA_\lambda|}p_{0h}(\vec{\theta},\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)) \text{ avec } \vec{a}_0(\lambda) = \Gamma_\lambda(\vec{a}(\lambda))} \tag{5.11}$$

Cette relation fait intervenir $\Gamma_\lambda(\vec{a}(\lambda))$, qui est l'image de la trajectoire de la source par la déformation. Nous notons cette image $\vec{a}_0(\lambda)$ et l'appelons *trajectoire virtuelle de la source*. Nous utiliserons la relation de Hamaker généralisée en 2D avec le filtre de Hilbert et en 3D avec le filtre dérivé.

2. par abus de langage, car nous n'avons pas à ce stade une convolution dans cette expression

Preuve:

$$\begin{aligned} g_{h\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) &= -\int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha}\; g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})h(A_\lambda^T\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha}) \\ &= -\int_{S^{n-1}} d\vec{\alpha} \int_{\mathbb{R}^+} dl\; f_0\left(\vec{a}_0(\lambda)+lA_\lambda\vec{\alpha}\right) h(\vec{\theta}\cdot A_\lambda\vec{\alpha}) \end{aligned}$$

Nous utilisons le changement de variable $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ changeant $(l,\vec{\alpha})$ en $\vec{x}_0$ basé sur la relation $\vec{x}_0 = \vec{a}_0(\lambda) + lA_\lambda\vec{\alpha}$. Son Jacobien vaut $\frac{1}{l^{n-1}|detA_\lambda|}$. En utilisant l'homogénéité de h, ce jacobien se simplifie et il vient:

$$g_{h\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) = -\int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x}_0\; \frac{f_0(\vec{x}_0)}{|detA_\lambda|} h(\vec{\theta}\cdot(\vec{x}_0-\vec{a}_0(\lambda))) \tag{5.12}$$

Utilisant la fonction delta et l'imparité de h, nous avons :

$$h(\vec{\theta}\cdot(\vec{x}_0-\vec{a}_0(\lambda))) = -\int_{\mathbb{R}} ds\; \delta(\vec{\theta}\cdot\vec{x}_0 - s)h(\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)-s), \tag{5.13}$$

Et finalement, la substitution de (5.13) dans (5.12) donne (5.11).

5.1.4 Situation par rapport à l'état de l'art

Des méthodes analytiques compensant de manière approchée des mouvements généraux ont été introduites par Ritchie [88] et Grangeat [66]. D'autres mettent en place des schémas pour des modèles particuliers tels que les translations globales, les dilatations et les rotations pour corriger soit au niveau du sinogramme ([82], [102]), soit dans le cadre d'une formule d'inversion (Crawford [61] et Li [80], notamment). Ces dernières formules ont pour cadre des sous-ensembles de déformations affines, et présentent des approximations, omettant notamment de traiter l'admissibilité de la déformation et les conséquences sur l'ensemble de rétroprojection.

Nous apportons plusieurs améliorations suivantes vis à vis de ces méthodes existantes :

- la classe des déformations affines générales contient les déformations pour lesquelles des formules exactes ont été proposées,
- des conditions d'admissibilité sur les déformations affines en 2D et en 3D sont établies,
- des formules d'inversion exactes des géométries 2D et 3D sont démontrées,
- une implémentation efficace a été testée dans le cas 2D.

Nous discuterons des extensions de cette méthode dans le chapitre 6.

5.1.5 Plan du chapitre

L'approche de reconstruction compensant les déformations affines 2D est décrite en section 5.2. La contribution majeure est fondée sur une extension des résultats de Noo et al [42]. Elle a fait l'objet d'une présentation orale [7] au congrès *Fully 3D reconstruction in radiology and nuclear medicine* en juin 2003 , d'un article [8] paru en juin 2004 dans la revue *Physics in Medicine and Biology*, et d'un dépôt de brevet en juin 2003 [10]. Ces travaux furent aussi présentés au congrès national d'analyse numérique en juin 2004 [9]. Nous présentons l'approche théorique pour les géométries 2D parallèle et divergente, ainsi que les tests effectués sur données simulées à partir de notre implémentation de la formule en géométrie divergente.

Dans la section 5.3 , nous présentons une extension à la géométrie 3D conique, basée sur une généralisation de la formule générale d'inversion de Katsevich [34]. Nous nous limitons dans ce cas à la condition d'admissibilité et à la formule d'inversion, du fait des problèmes d'implémentation que nous précisons. Nous proposons alors un schéma approché dans la section 5.3.2 et terminons par un bilan de ces méthodes.

5.2 Compensation pour les géométries 2D parallèle et divergente

Dans cette partie, nous traitons complètement les cas des géométries d'acquisition 2D parallèle et divergente. Nous résolvons la question de l'admissibilité d'une déformation, en établissant une condition suffisante pour la reconstruction d'un objet à partir de ses projections acquises au cours de sa déformation affine dépendant du temps. Nous présentons ensuite des formules d'inversion basées sur des approches par réarrangement ou de type filtrage rétroprojection (FBP). Dans le cas de la géométrie divergente, notre travail est une extension de la formule de Noo [42] valable en tomographie statique. Cette approche nous permet d'éviter l'approximation faite par Crawford dans son passage à la géométrie divergente pour le modèle translation-rotation. Nous présentons enfin notre implémentation dans le cas de la géométrie avec détecteurs en arc de cercle, ainsi que les résultats obtenus sur des données simulées.

5.2.1 Conditions d'admissibilité sur la déformation

5.2.1.1 Cas de la géométrie parallèle

Le point de départ pour résoudre le cas de la géométrie parallèle est l'équation (5.14) qui lie les projections p_ψ de l'objet dynamique f_ψ avec les projections p_0 de l'objet de référence f_0. Nous reformulons ici la formule 2.36 vue au chapitre 2.2, et en donnons la preuve :

$$\boxed{p_\psi(\vec{\theta}_\psi,s) = \frac{1}{|\det A_\psi|\ \|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|} p_0\left(\frac{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|}, \frac{s + A_\psi^{-1}\vec{b}_\psi\cdot\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|}\right)} \tag{5.14}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
p_\psi(\vec{\theta}_\psi,s) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}\ f_\psi(\vec{x})\delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta}_\psi - s) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{x}\ f_0(A_\psi\vec{x}+\vec{b}_\psi)\delta(\vec{x}\cdot\vec{\theta}_\psi - s) \\
&= \frac{1}{|\det A_\psi|}\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{y}\ f_0(\vec{y})\delta(\vec{y}\cdot A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi - (s + A_\psi^{-1}\vec{b}_\psi\cdot\vec{\theta}_\psi)) \text{ en posant } \vec{y} = A_\psi\vec{x}+\vec{b}_\psi \\
&= \frac{1}{|\det A_\psi|\ \|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|} p_0\left(\frac{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|}, \frac{s + A_\psi^{-1}\vec{b}_\psi\cdot\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|}\right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire très simplement la condition d'admissibilité sur Γ_ψ: *L'objet de référence f_0 peut être reconstruit exactement à partir de ses projections non tronquées acquises durant une déformation affine si l'angle polaire de $A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi$ couvre un intervalle de mesure π pendant la durée d'acquisition.*

Nous pouvons interpréter géométriquement ce résultat en utilisant les notions de source et de trajectoire virtuelle : en géométrie parallèle, la source de rayonnement peut être vue comme un point rejeté à l'infini dans la direction d'angle ψ. Dans le cas affine dynamique, le changement de variable Γ_ψ permet de se ramener à une géométrie virtuelle équivalente autour de l'objet de référence avec une source virtuelle repérée par l'angle du vecteur $A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi$. La condition précédente revient simplement à imposer que la source virtuelle couvre un demi-cercle au moins autour de l'objet de référence pendant la durée d'acquisition des mesures.

5.2.1.2 Cas de la géométrie divergente

Le cas de la géométrie divergente est plus complexe et ne peut pas être directement déduit du cas parallèle car les paramétrisations en temps sont différentes, ce qui est d'ailleurs la source d'une approximation dans l'approche de Crawford. L'originalité de notre approche consiste donc à repartir d'une généralisation de la formule de Hamaker [26] pour obtenir un lien entre les transformées de Hilbert des données divergentes dynamiques et la transformée de Hilbert de projections parallèles de l'objet de référence. Nous pouvons ensuite établir une formule d'inversion en suivant la procédure de Noo valable dans le cas statique.
Nous notons p_{0H} la transformée de Hilbert des projections parallèles p_0 de l'objet de référence :

$$p_{0H}(\vec{\theta},s) = (h_H *_s p_0)(\vec{\theta},s) = \int_{\mathbb{R}} ds'\ h_H(s-s')p_0(\vec{\theta},s') \tag{5.15}$$

Et nous notons $g_{H\lambda}$ la transformée de Hilbert des projections divergentes g_λ de l'objet dynamique :

$$g_{H\lambda}(\lambda,\vec{\theta}) = -\int_{S^1} d\vec{\alpha}\ g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})h_H(\vec{\theta}\cdot\vec{\alpha}) \tag{5.16}$$

Alors en appliquant la formule généralisée (5.11) avec le filtre de Hilbert h_H, nous obtenons la formule de Hamaker (2D) généralisée:

$$\boxed{g_{H\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) = \frac{1}{|\det A_\lambda|}p_{0H}(\vec{\theta},\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)) \text{ avec } \vec{a}_0(\lambda) = \Gamma_\lambda(\vec{a}(\lambda))} \tag{5.17}$$

Nous pouvons remarquer qu'à la différence du cas statique,

- la trajectoire de la source qui apparaît est **la trajectoire virtuelle** $\vec{a}_0(\lambda) = \Gamma_\lambda(\vec{a}(\lambda))$ autour de l'objet de référence f_0. C'est l'image de la source $\vec{a}(\lambda)$ par la déformation Γ_λ (voir figure 5.3); la trajectoire virtuelle dépend donc aussi de l'instant de référence, car la déformation Γ_λ est définie par rapport à cet instant,
- la direction qui donne l'égalité est changée par rapport au cas statique et fait intervenir la matrice A_λ^T,
- un poids intervient $\frac{1}{|\det A_\lambda|}$. Celui-ci peut disparaître si on impose la conservation globale de la masse.

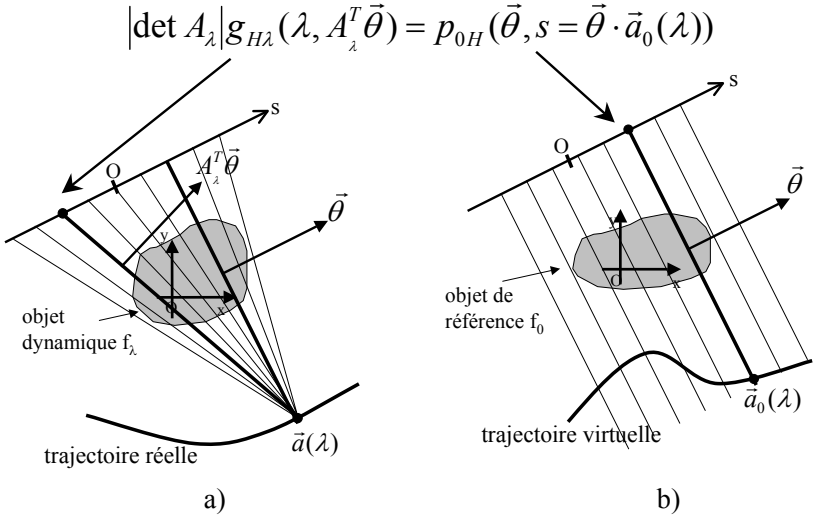


FIG. 5.3 – *Illustration de la formule de Hamaker généralisée: a) acquisition divergente réelle avec la source $\vec{a}(\lambda)$. b) acquisition équivalente avec des projections parallèles et la source virtuelle $\vec{a}_0(\lambda)$.*

Nous en déduisons la condition d'admissibilité de la déformation Γ_λ, sous la forme d'une condition géométrique de type Tuy 2D : ***une région d'intérêt d'un objet de référence peut être reconstruite à partir de projections divergentes non tronquées acquises au cours d'une déformation affine dépendant du temps si toute ligne passant au voisinage cette région d'intérêt coupe la trajectoire virtuelle de la source.*** Cette condition est cohérente avec la condition établie en géométrie parallèle, si on fait tendre la distance source-objet vers l'infini.

Preuve de la condition d'admissibilité : Il suffit de remarquer que pour pouvoir reconstruire f_0, il suffit de connaître ses projections filtrées par le filtre rampe, et que celles-ci peuvent être obtenues en dérivant la transformée de Hilbert appliquée aux projections parallèles. Enfin, ces dernières peuvent être calculées grâce à la formule (5.17) à partir des données divergentes si l'équation suivante en λ a une solution pour tout $\vec{\theta}$ en tout point $\vec{x}$ de la région d'intérêt :

$$\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda) = \vec{\theta}\cdot\vec{x} \tag{5.18}$$

De telles solutions correspondent exactement aux intersections avec la trajectoire virtuelle $\vec{a}_0(\lambda)$ des droites de normale $\vec{\theta}$ et passant par $\vec{x}$.

5.2.1.3 Exemple de la condition d'admissibilité dans le cas de rotations

Nous illustrons à présent cette condition d'admissibilité et la notion de trajectoire virtuelle dans le cas d'une rotation. Nous supposons que l'acquisition des projections divergentes dure le temps de faire un intervalle short-scan autour de l'objet, puis nous supposons que l'objet

tourne suivant la loi : $\Gamma_\lambda(\vec{x}) = R_{q\lambda}\vec{x}$, où $R_{q\lambda}$ est la rotation centrée dépendant du temps d'angle $q\lambda$. Quand $q > 0$, l'objet et la source tournent en sens inverse. Ils tournent dans le même sens lorsque $q < 0$, avec une vitesse de même module si $q = -1$. Le cas statique est couvert pour $q = 0$. Dans la figure 5.4, nous avons dessiné la trajectoire virtuelle pour différentes valeurs de q, ainsi que les zones reconstructibles. Nous voyons que la trajectoire virtuelle appartient au même cercle que la trajectoire réelle. Mais la longueur de l'arc est plus longue pour $q > 0$, ce qui signifie que la région reconstructible est plus grande que dans le cas statique. A l'inverse, le trajectoire virtuelle est plus courte et la zone reconstructible réduite quand $q < 0$. Quand $q = -1$, la trajectoire virtuelle est réduite à un point. Cette situation correspond à une vitesse relative nulle entre la source et l'objet. Nous retrouvons dans ce cas trivial le fait qu'on ne puisse pas reconstruire à partir d'une seule projection.

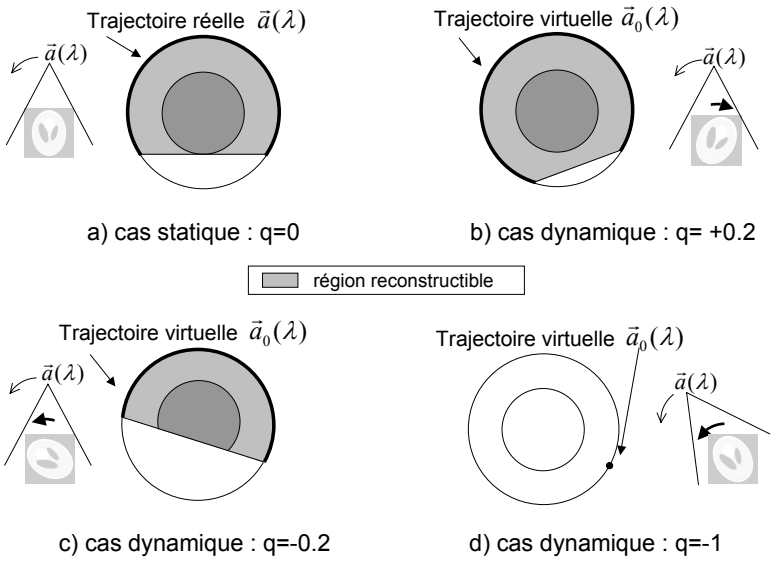


FIG. 5.4 – *Illustration de la condition d'admissibilité dans le cas d'une rotation centrée d'angle $q\lambda$ pour différentes valeurs de q et $\lambda \in [0,\pi + 2\gamma_m]$. La trajectoire virtuelle est représentée en noir et les régions reconstructibles sont colorées en gris.*

5.2.2 Algorithmes de reconstruction

Nous présentons dans cette section des méthodes de reconstruction de l'objet f_0 à partir des projections acquises au cours de sa déformation. Nous introduisons des méthodes de réarrangement ainsi que des méthodes de type filtrage-rétroprojection pour les géométries parallèle et divergente. Les méthodes par réarrangement consistent à interpoler un jeu de projections parallèles (filtrées ou pas) sur la géométrie virtuelle puis à appliquer un algorithme de reconstruction statique. Les formulations directes de type filtrage-rétroprojection permettent de traiter les données acquises dès leur acquisition.

5.2.2.1 Cas de la géométrie parallèle

Méthode par réarrangement Nous utilisons l'équation (5.14). Si la transformation Γ_ψ est admissible, alors nous pouvons trouver un ensemble I défini par:

$$\forall \vec{\theta} \in S^1 \; \exists \psi \in I \text{ tel que } \vec{\theta} = \frac{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|} \text{ , où } \vec{\theta}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Nous pouvons alors obtenir avec (5.14) un ensemble suffisant de projections parallèles sur l'objet de référence f_0 à partir des projections de l'objet dynamique. Il suffit ensuite d'appliquer un algorithme de reconstruction statique pour reconstruire f_0 .

Méthode de type filtrage-rétroprojection Nous établissons une formule d'inversion de type filtrage-rétroprojection permettant de traiter séquentiellement les projections dynamiques. Nous faisons pour cela un changement de variable sur l'espace des projections dans la formule d'inversion de la transformée de Radon. Notons qu'une approche équivalente consiste à utiliser une généralisation du théorème coupe-projection, comme l'avait fait Crawford [61]) pour son modèle particulier.

Nous commençons par relier les projections filtrées de l'objet dynamique avec celles de l'objet de référence. Nous notons p_{0F} les projections p_0 de l'objet de référence filtrées par le filtre rampe :

$$p_{0F}(\vec{\theta},s) = (h_R *_s p_0)(\vec{\theta},s) = \int_{\mathbb{R}} ds' \; h_R(s-s')p_0(\vec{\theta},s') \tag{5.20}$$

Et nous notons $p_{\psi F}$ les projections p_ψ de l'objet dynamique filtrées par le filtre rampe :

$$p_{\psi F}(\vec{\theta},s) = (h_R *_s p_\psi)(\vec{\theta},s) = \int_{\mathbb{R}} ds' \; h_R(s-s')p_\psi(\vec{\theta},s')$$

Nous pouvons alors montrer que:

$$p_{\psi F}(\vec{\theta}_\psi,s) = \frac{1}{|\det A_\psi| \; \|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|^2} p_{0F}\left(\frac{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|}, \frac{s + A_\psi^{-1}\vec{b}_\psi \cdot \vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|}\right) \tag{5.21}$$

Cette relation est maintenant utilisée pour établir la formule d'inversion suivante, dans laquelle le symbole $'$ désigne l'opération de dérivation par rapport au paramètre ψ :

$$f_0(\vec{x}_0) = \int_I d\psi \; w(\psi)q(\psi) \; p_{\psi F}\left(\vec{\theta}_\psi, A_\psi^{-1}(\vec{x}_0 - \vec{b_\psi}) \cdot \vec{\theta}_\psi\right) \tag{5.22}$$

où : $q(\psi) = |\det A_\psi| \left|((A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi)' \cdot \vec{e}_2)(A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi \cdot \vec{e}_1) - ((A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi)' \cdot \vec{e}_1)(A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi \cdot \vec{e}_2)\right|$

et où : $\vec{e}_1 = [1,0]^T$ et $\vec{e}_2 = [0,1]^T$

Cette formule est de type filtrage-rétroprojection. Elle contient une étape de filtrage par le filtre rampe, une pondération par le terme $w(\psi)q(\psi)$ et une rétroprojection sur les droites correspondant à la position du point au moment de l'acquisition. L'intervalle I est celui défini dans (5.19). Son existence est équivalente à l'admissibilité de la déformation. Les poids $w(\psi)$ corrigent la

redondance présente dans les mesures si plus d'une valeur de ψ satisfont la définition (5.19). Ces poids sont appliqués *après* l'étape de filtrage. Nous vérifions également que si $A_\lambda = \mathrm{Id}$ et $\vec{b}_\lambda = \vec{0}$, alors $I = [0,\pi]$ et $q(\psi) = 1$: nous retrouvons la formule d'inversion classique.

Preuve Le point de départ est la formule d'inversion de la transformée de Radon.

$$f(\vec{x}_0) = \int_0^\pi d\varphi \; p_{0F}(\vec{\theta}_\varphi, \vec{x}_0 \cdot \vec{\theta}_\varphi) \tag{5.23}$$

Nous utilisons le changement de variables qui va de $[0,\pi]$ vers un ensemble admissible I, changeant φ en ψ de sorte que:

$$\vec{\theta}_\varphi = \frac{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|} \tag{5.24}$$

Calculons son Jacobien :

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\varphi}{d\psi}\right| &= \left|\frac{d}{d\psi}\left(\arctan\frac{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi \cdot \vec{e}_2}{A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi \cdot \vec{e}_1}\right)\right| \text{ où } \vec{e}_1 = (1,0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0,1) \\ &= \frac{\left|((A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi)' \cdot \vec{e}_2)(A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi \cdot \vec{e}_1) - ((A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi)' \cdot \vec{e}_1)(A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi \cdot \vec{e}_2)\right|}{\|A_\psi^{-T}\vec{\theta}_\psi\|^2} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors en utilisant (5.21) et ce Jacobien le terme $q(\psi)$ de la formule (5.22). Le changement de variables est surjectif si la condition d'admissibilité est satisfaite. Les poids $w(\psi)$ corrigent la non-injectivité et permettent d'obtenir la formule d'inversion (5.22).

5.2.2.2 Cas de la géométrie divergente

Méthode par réarrangement Nous pouvons utiliser la formule d'Hamaker généralisée (5.17) pour élaborer une méthode de reconstruction par réarrangement en un point $\vec{x}$. Pour une déformation admissible, nous pouvons trouver un ensemble noté $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$ de valeurs du paramètre de la source vérifiant : $\forall\varphi \in [0,\pi]\ \exists\lambda_* \in \Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$ tel que :

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\theta}_\varphi = \vec{x}_0 \cdot \vec{a}_0(\lambda_*) \tag{5.25}$$

Nous pouvons alors à partir de cet ensemble $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$ obtenir la transformée de Hilbert p_{0H} des projections de l'objet de référence et appliquer la formule d'inversion :

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\varphi \left[\frac{\partial}{\partial s} p_{0H}(\vec{\theta}, s)\right]_{s=\vec{x}_0\cdot\vec{\theta}}$$

Méthode de type filtrage-rétroprojection Nous adaptons ici la méthode introduite par Noo [42] en utilisant dans notre cas la formule de Hamaker généralisée. Nous notons $\frac{\partial}{\partial\lambda_{|\vec{\theta}}}$ la dérivation en λ en maintenant la direction $\vec{\theta}$ constante. Nous obtenons alors la formule d'inversion suivante:

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}_0(\lambda)-\vec{x}_0\|}\left[w(\lambda,\vec{\theta})g_{F\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta})\right]_{\vec{\theta}=\vec{\theta}^*} \tag{5.26}$$
$$\text{avec } \; g_{F\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}}|\det A_\lambda| g_{H\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta})$$

Cette formule contient une étape pouvant être interprétée dans un premier temps comme un filtrage où $g_{F\lambda}$ est calculé, suivi d'une rétroprojection dans la direction $A_\lambda^T\vec{\theta}^*$, où $\vec{\theta}^*$ est le vecteur unitaire du rayon reliant $\vec{a}_0(\lambda)$ à $\vec{x}_0$ de signe choisi de sorte que sign$(\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)') > 0$. L'ensemble $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$ est celui de la définition (5.25). Son existence équivaut à la vérification de la condition d'admissibilité. Les poids $w(\lambda,\vec{\theta})$ corrigent la redondance des mesures si plus d'une valeur λ vérifie (5.25) sur $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$. Ces poids sont définis sur la géométrie virtuelle et appliqués *après* le filtrage, comme dans la formule de Noo. Nous détaillerons leurs valeurs dans la section 5.2.3.3. Il est par ailleurs simple de vérifier que nous obtenons la formule de Noo quand $A_\lambda = \text{Id}$ et $\vec{b}_\lambda = \vec{0}$.

Preuve: La première étape est d'exprimer les projections de l'objet de référence filtrées par le filtre rampe en fonction des données dynamiques acquises g_λ. Il suffit pour cela de dériver suivant λ la formule de Hamaker généralisée en maintenant la direction $\vec{\theta}$ fixe:

$$\forall\vec{\theta}\in S^1,\; p_{0F}\left(\vec{\theta},s=\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)\right) = \frac{1}{2\pi(\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)')}\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}}|(\det A_\lambda)|g_{H\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) \tag{5.27}$$

Nous définissons : $g_{F\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}}|(\det A_\lambda)|g_{H\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta})$
Nous cherchons alors à faire un changement de variable dans la formule (2.48) d'inversion de la transformée de Radon pour nous ramener à une intégration suivant le paramètre λ de la source. Pour cela, nous changeons la paramétrisation de la ligne passant par $\vec{x}_0$ et de normale $\vec{\theta}_\varphi$. Cette ligne est aussi définie comme la ligne passant par $\vec{x}_0$ et $\vec{a}_0(\lambda)$. La valeur correspondante du paramètre λ est solution de $s = \vec{x}_0\cdot\vec{\theta}_\varphi = \vec{a}_0(\lambda)\cdot\vec{\theta}_\varphi$. Elle peut être trouvée par définition dans $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$ si la condition d'admissibilité sur Γ_λ est satisfaite. Un point $\vec{x}_0$ de cette ligne peut être écrit:

$$\vec{x}_0 + t\,\vec{\theta}_\varphi^\perp = \vec{a}_0(\lambda) \;\text{ avec : } |t| = \|\vec{a}_0(\lambda)-\vec{x}_0\| \tag{5.28}$$

Cette équation (5.28) définit un changement de variables entre φ et λ, allant de $[0,\pi]$ vers $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$. En différenciant (5.28) par rapport à λ suivant la technique de l'appendix B de [42], nous obtenons son Jacobien:

$$\left|\frac{d\varphi}{d\lambda}\right| = \frac{|\vec{a}_0(\lambda)'\cdot\vec{\theta}|}{\|\vec{a}_0(\lambda)-\vec{x}_0\|} \tag{5.29}$$

Si l'équation (5.25) a plus d'une solution dans l'ensemble $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$, alors le changement de variables $\varphi\mapsto\lambda$ n'est pas injectif. Ceci peut être corrigé en pondérant les projections filtrées par les poids $w(\lambda,\vec{\theta})$, comme dans [42]. Avec ces poids, le changement de variable appliqué à la formule (2.48) d'inversion de la transformée de Radon donne la formule (5.26).

5.2.3 Etude de l'implémentation dans le cas de la géométrie équi-angulaire

Nous étudions l'implémentation pratique de la formule d'inversion pour le cas de l'une des géométries divergentes : la géométrie équi-angulaire.

5.2.3.1 Notations

La trajectoire de la source $\vec{a}(\lambda)$ est un cercle centré de rayon R_0, et λ désigne son angle polaire: $\vec{a}(\lambda) = R_0(\cos\lambda, \sin\lambda)$. Nous associons à la source un système de coordonnées $(\vec{e}_{1\lambda},\vec{e}_{2\lambda})$, où $\vec{e}_{1\lambda} = (-\cos\lambda, -\sin\lambda)$ et $\vec{e}_{2\lambda} = (-\sin\lambda, \cos\lambda)$. Un rayon est paramétré par les angles λ et γ, où γ est l'angle entre un rayon d'intérêt et la ligne reliant $\vec{a}(\lambda)$ à l'origine (voir figure 5.5). $g_\lambda^m(\lambda,\gamma)$ représente la projection acquise en utilisant le paramètre γ.

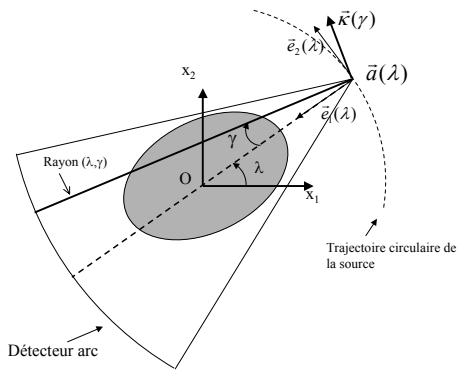


FIG. 5.5 – *Géométrie d'acquisition pour le cas du détecteur arc.*

Sur l'objet dynamique, la normale à un rayon passant par un point $\vec{x}$ est notée $\vec{\kappa}(\lambda,\xi)$, où ξ est l'angle du rayon reliant $\vec{a}(\lambda)$ à $\vec{x}$ dans le faisceau divergent de droites: $\vec{\kappa}(\lambda,\xi) = -\sin\xi\vec{e}_{1\lambda} + \cos\xi\vec{e}_{2\lambda}$. Nous utilisons dans la suite la notation $\vec{\kappa}(\xi)$ à la place de $\vec{\kappa}(\lambda,\xi)$.
Soit $\vec{\theta}_\varphi$ la normale au rayon acquis : $\vec{\theta}_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Nous avons les relations suivantes (voir la figure 5.6):

$$\vec{x} - \vec{a}(\lambda) = A_\lambda^{-1}\left(\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)\right) \tag{5.30}$$

$$\vec{\kappa}(\xi) = \frac{A_\lambda^T\vec{\theta}_\varphi}{\|A_\lambda^T\vec{\theta}_\varphi\|} \tag{5.31}$$

5.2.3.2 Formule d'inversion en géométrie équi-angulaire

Nous exprimons la formule d'inversion (5.26) en fonction de la paramétrisation (λ,ξ) des projections acquises $g_\lambda^m(\lambda,\xi)$. Elle fait intervenir le filtre de Hilbert modifié $h_H^{ang}(\gamma) = \left|\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right| h_H(\gamma)$

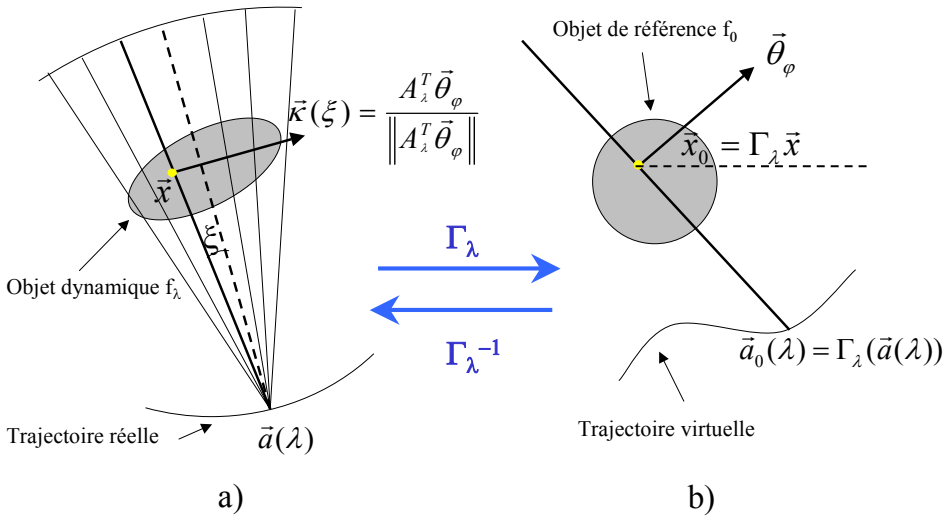


FIG. 5.6 – *Correspondance entre la géométrie d'acquisition réelle(a) et la géométrie d'acquisition virtuelle(b) pour le cas divergent équi-angulaire.*

que nous avons vu dans le cas statique dans la formule (2.56). Nous notons:

$$g_{H\lambda}^m(\lambda,\xi) = (g_\lambda^m *_\xi h_H^{ang})(\lambda,\xi) \tag{5.32}$$

$$g_{wH\lambda}^m(\lambda,\xi) = |\det A_\lambda| \|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\xi)\| g_{H\lambda}^m(\lambda,\xi) \tag{5.33}$$

$$g_{F\lambda}^m(\lambda,\xi) = \frac{\partial}{\partial\lambda} g_{wH\lambda}^m(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa})) + \frac{\partial}{\partial\xi} g_{wH\lambda}^m(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa})) \cdot \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi} \tag{5.34}$$

avec:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi} = 1 + \frac{1}{\|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\xi)\|^2}\left[(A'_\lambda\vec{e}_{2\lambda}\cdot A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\xi))(\vec{e}_{1\lambda}\cdot\vec{\kappa}(\xi)) - (A'_\lambda\vec{e}_{1\lambda}\cdot A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\xi))(\vec{e}_{2\lambda}\cdot\vec{\kappa}(\xi))\right] \tag{5.35}$$

Alors, nous avons la formule de reconstruction :

$$\boxed{f_0(\vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}_0(\lambda) - \vec{x}_0\|}\left[w(\lambda,\xi) g_{F\lambda}^m(\lambda,\xi)\right]_{\xi=\xi^*(\vec{x}_0,\lambda)}} \tag{5.36}$$

où ξ^* est l'angle caractérisant le rayon divergent de $\vec{a}(\lambda)$ et passant par $\vec{x} = \Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0)$.

Preuve: Nous calculons en fonction du paramétrage angulaire (λ,γ) les différents termes de la formule (5.26). Nous montrons d'abord que $g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi) = |\det A_\lambda| g_{H\lambda}(\lambda,A^T_\lambda\vec{\theta})$:

$$\begin{aligned}
|\det A_\lambda| g_{H\lambda}(\lambda,A^T_\lambda\vec{\theta}) &= -\frac{|\det A_\lambda|}{\|A^T_\lambda\vec{\theta}\|}\int_{S^1} d\vec{\alpha}\; g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha}) h_H(\frac{A^T_\lambda\vec{\theta}}{\|A^T_\lambda\vec{\theta}\|}\cdot\vec{\alpha}) \\
&= -|\det A_\lambda| \|A^{-T}_\lambda\vec{\kappa}\| \int_{S^1} d\vec{\alpha}\; g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha}) h_H(\vec{\kappa}(\xi)\cdot\vec{\alpha(\gamma)}) \\
&= |\det A_\lambda| \|A^{-T}_\lambda\vec{\kappa}(\xi)\| \int_{-\gamma_m}^{-\gamma_m} d\gamma\; g^m_\lambda(\lambda,\gamma) \left|\frac{\xi-\gamma}{\sin(\xi-\gamma)}\right| h_H(\xi-\gamma) \\
&= g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi) \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

Nous voulons ensuite calculer $\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta_\varphi}}|\det A_\lambda| g_{H\lambda}(\lambda,A^T_\lambda\vec{\theta_\varphi}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\varphi}|\det A_\lambda| g_{H\lambda}(\lambda,A^T_\lambda\vec{\theta})$ en fonction des paramètres λ et ξ. La règle de dérivation en chaîne donne:

$$\begin{aligned}
g_{F\lambda}(\lambda,A^T_\lambda\vec{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}}|\det A_\lambda| g_{H\lambda}(\lambda,A^T_\lambda\vec{\theta}) \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\varphi} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa})) \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa})) + \frac{\partial}{\partial\xi} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa}))\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi} \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

Nous calculons $\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi}$:

$$\xi(\lambda,\vec{\kappa}) = -\text{arctan}\frac{\vec{\kappa}(\xi)\cdot\vec{e}_{1\lambda}}{\vec{\kappa}(\xi)\cdot\vec{e}_{2\lambda}} = -\text{arctan}\frac{\vec{\theta}_\varphi\cdot A_\lambda\vec{e}_{1\lambda}}{\vec{\theta}_\varphi\cdot A_\lambda\vec{e}_{2\lambda}}$$

ce qui conduit à:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi} &= 1 + (A'_\lambda\vec{e}_{2\lambda}\cdot\vec{\theta}_\varphi)(A_\lambda\vec{e}_{1\lambda}\cdot\vec{\theta}_\varphi) - (A'_\lambda\vec{e}_{1\lambda}\cdot\vec{\theta}_\varphi)(A_\lambda\vec{e}_{2\lambda}\cdot\vec{\theta}_\varphi) \\
&= 1 + \frac{1}{\|A^{-T}_\lambda\vec{\kappa}(\xi)\|^2}\left[(A'_\lambda\vec{e}_{2\lambda}\cdot A^{-T}_\lambda\vec{\kappa}(\xi))(\vec{e}_{1\lambda}\cdot\vec{\kappa}(\xi)) - (A'_\lambda\vec{e}_{1\lambda}\cdot A^{-T}_\lambda\vec{\kappa}(\xi))(\vec{e}_{2\lambda}\cdot\vec{\kappa}(\xi))\right]
\end{aligned}$$

La rétroprojection dans la formule (5.26) est faite suivant la direction du vecteur $\vec{\theta}^*$ auquel correspond sur la géométrie réelle le vecteur $\vec{\kappa}(\xi) = \frac{A^T_\lambda\vec{\theta}^*}{\|A^T_\lambda\vec{\theta}^*\|}$. Ce vecteur est colinéaire au rayon reliant $\vec{a}(\lambda)$ à $\vec{x} = \Gamma^{-1}_\lambda(\vec{x}_0)$ (voir la figure 5.6). Il est caractérisé par l'angle ξ^*. Enfin, les équations (5.38), et (5.35) injectées dans la formule (5.26) conduisent à la formule (5.36).

5.2.3.3 Retour sur la question des poids

Nous détaillons ici l'usage des poids de redondance des formules (5.26) et (5.36). Ces poids permettent de gérer les solutions multiples de l'équation (5.25) sur $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$. Ceci a pour but l'utilisation d'un maximum de projections, ce qui a des répercussions à la fois sur les questions de dose et de rapport signal à bruit sur les images reconstruites.

Ces poids correspondent classiquement à affecter à chacune des $N(\vec{x}_0,\vec{\theta})$ intersections notées $(\lambda_i)_{i=1..N(\vec{x}_0,\vec{\theta})}$ un poids $w_{\vec{x}_0,\vec{\theta}}(\lambda_i)$ vérifiant une condition de normalisation :

$$\sum_{i=1}^{N(\vec{x}_0,\vec{\theta})} w_{\vec{x}_0,\vec{\theta}}(\lambda_i) = 1 \qquad (5.39)$$

Ces poids peuvent être choisis de manière uniforme : $w_{\vec{x}_0,\vec{\theta}}(\lambda_i) = \frac{1}{N(\lambda,\vec{\theta})}$, ou bien sous la forme de fonctions lisses qui permettent de réduire les artefacts causés par les discontinuités. Mis à part le fait qu'il faille changer la direction des rayons et la trajectoire, nous sommes très exactement dans la même situation que Noo (voir [42]). La différence importante concerne la spécificité de l'application dynamique. Pour générer la fonction de poids, il est nécessaire de connaître *avant la reconstruction* toute la trajectoire de la source, ce qui équivaut en tomographie affine dynamique à connaître la déformation elle-même. L'usage complet de la redondance est donc incompatible avec les implémentations de type "temps réel".

Une version plus faible de l'usage de la redondance est cependant possible, en reprenant la notion de "reconstruction en mode $N\pi$" introduite par Grangeat dans [66]. Il s'agit ici de fixer *a priori* le nombre N de solutions de l'équation (5.25) qui vont être prises en compte, et d'utiliser pour chaque point de reconstruction l'intervalle minimal permettant d'obtenir exactement ces N solutions. Les poids sont ainsi constants (égaux à $\frac{1}{N}$), et l'implémentation ne requiert pas la connaissance a priori de la déformation future pour traiter une projection.

5.2.3.4 Détails de l'implémentation de la formule (5.36)

Nous présentons quelques points précis de notre implémentation de la formule (5.36), en distinguant les variantes provenant de la gestion de la redondance.

Mode $N\pi$ (reconstruction progressive) L'algorithme pour le mode $N\pi$ correspond aux étapes suivantes:

Initialisations
Boucle sur les angles:
    Lecture de la projection d'angle λ_k et des paramètres de déformation
    Filtrage de Hilbert suivant la formule (5.32)
    Pondération dynamique suivant la formule (5.33)
    Dérivation le long de la trajectoire virtuelle suivant la formule (5.34)
    Boucle sur les points $\vec{x}_0$ de l'image
        Test de rétroprojection:
            si positif : détermination de la projection acquise passant par $\vec{x} = \Gamma^{-1}(\vec{x}_0)$
            et rétroprojection en $\vec{x}_0$
    Fin de la boucle sur les points de l'image
Fin de la boucle sur les angles

Description du test avant rétroprojection:
Il s'agit de déterminer pour chaque point $\vec{x}_0$ un ensemble $\Lambda^{\Gamma}(\vec{x}_0)$ tel que l'équation (5.25) ait exactement N solutions. Nous procédons en suivant projection à projection l'angle formé par $\vec{x}_0$ et la trajectoire virtuelle $\vec{a}_0(\lambda)$. Soit :

- d_k l'angle polaire d'un vecteur $\overrightarrow{a_0(\lambda)x_0}$ au temps λ_k
- Δ_k^{eff} l'intervalle angulaire effectif parcouru depuis l'instant initial jusqu'à l'instant k
- Δ_k^{cour} l'angle courant parcouru entre l'instant initial jusqu'à l'instant k : $\Delta_k^{cour} = d_k - d_0$

Alors, en supposant le sens de variation angulaire positif, la projection filtrée λ_{k+1} est rétroprojetée en $\vec{x}_0$ si:

- $d_{k+1} - d_k > 0$ (le nouveau point λ_{k+1} de la trajectoire virtuelle est "du bon côté" de la droite $(\vec{x}_0,\lambda_k)$,
- $N\pi > \Delta_k^{cour} + d_{k+1} - d_k > \Delta_k^{eff}$ (le nouveau point λ_{k+1} permet d'augmenter l'intervalle angulaire effectif Δ_k^{eff} sans dépasser la limite $N\pi$

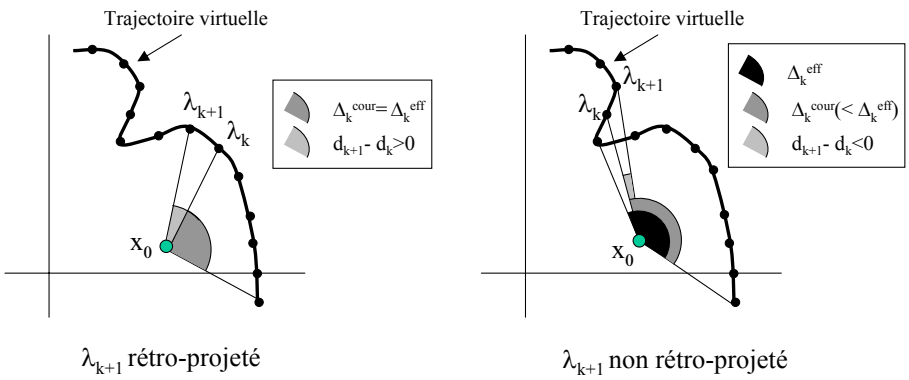


FIG. 5.7 – *Exemples de tests de rétroprojection : positif à gauche, négatif à droite*

Cas rétrospectif : reconstruction après la fin de l'acquisition Dans ce cas, on suppose la déformation connue avant la reconstruction, ce qui permet de générer la fonction de poids, ce qui conduit à l'algorithme suivant :

Initialisations
Génération de la fonction de poids
Boucle sur les angles:
    Lecture de la projection d'angle λ_k et des paramètres de déformation
    Filtrage de Hilbert suivant la formule (5.32)
    Pondération dynamique suivant la formule (5.33)
    Dérivation le long de la trajectoire virtuelle suivant la formule (5.34)
    Boucle sur les points $\vec{x}_0$ de l'image
        Détermination de la projection acquise passant par $\vec{x} = \Gamma^{-1}(\vec{x}_0)$
        Pondération et rétroprojection en $\vec{x}_0$
    Fin de la boucle sur les points de l'image
Fin de la boucle sur les angles

Dans ces deux cas, nous avons réalisé le filtrage de Hilbert dans le domaine de Fourier après avoir coupé à la fréquence de Nyquist. La dérivation suivant λ et ξ est réalisée dans le domaine spatial avec une formule centrée sur trois points. Pour les détails de l'implémentation de l'opération de dérivation ou de filtrage de Hilbert, nous renvoyons le lecteur à l'article [43] de Noo sur l'implémentation de l'algorithme de Katsevich.

Enfin, il est intéressant de donner une interprétation du terme spécifique de pondération $\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}_{|\varphi}$. Il est aisé de voir, à partir de (5.35), que ce terme :

- est égal à un si A'_λ=0,
- est égal à un pour des dilatations isotropes,
- est constant dans chaque projection pour une rotation pure, égal à un plus la dérivée de l'angle de rotation.

Ce terme ainsi compense le changement d'échantillonnage entre les trajectoires réelle et virtuelle.

5.2.4 Résultats sur données simulées

5.2.4.1 Principes des tests effectués

Nous présentons quelques résultats de reconstruction obtenus sur des données simulées. Nous avons choisi deux types de mouvements : une rotation pure et une composition d'une translation avec une dilatation. Nous appliquons la rotation au fantôme Shepp and Logan (voir la figure 5.8), défini dans [47]). Le mouvement composé translation-dilatation permet de simuler un mouvement respiratoire [61]. Nous l'appliquons au fantôme de thorax (www.imp.uni-erlangen.de/forbild) (voir la figure 5.9).

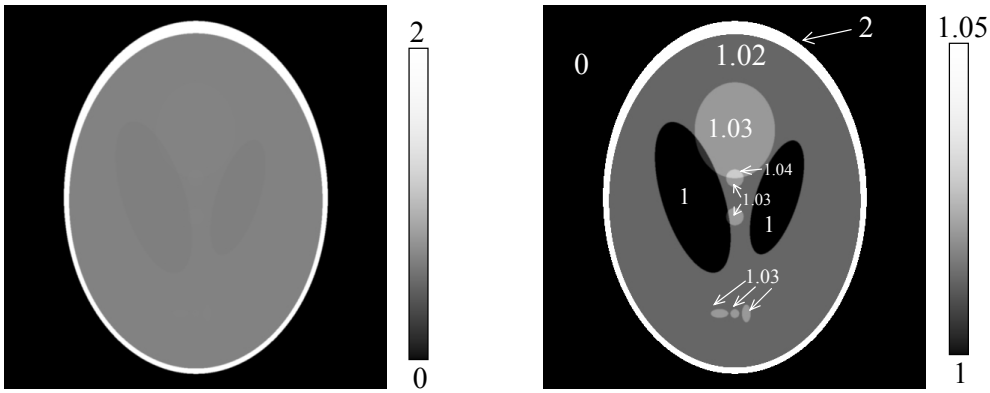


FIG. 5.8 – *Présentation du fantôme Shepp and Logan [47]. A gauche : affichage de tous les niveaux de gris. A droite : affichage des niveaux de gris de l'intervalle* $[1,1.05]$.

Le but de ces tests est de vérifier que notre algorithme aboutit à une reconstruction exacte. C'est pourquoi nous avons simulé des mouvements de grande amplitude et de haute fréquence. Nous comparons nos résultats aux algorithmes issus de l'état de l'art, que nous avons également implémentés. Il s'agit de l'algorithme de compensation de la rétroprojection pour le cas rotation (principe commun de [80], [88] et [66]). Dans le cas du mouvement respiratoire, nous comparons avec la méthode de Crawford, qui contient une étape de rétroprojection spécifique ainsi qu'un terme de pondération qui modifie légèrement le filtre.

Nos simulations sont réalisées en modifiant l'objet avant chaque projection suivant la loi de déformation : $f_\lambda(\vec{x}) = f_0(\Gamma_\lambda \vec{x})$. Nous utilisons ensuite l'algorithme de Joseph [29] pour le calcul des projections discrètes. Nous utilisons des techniques de suréchantillonage et de lissage

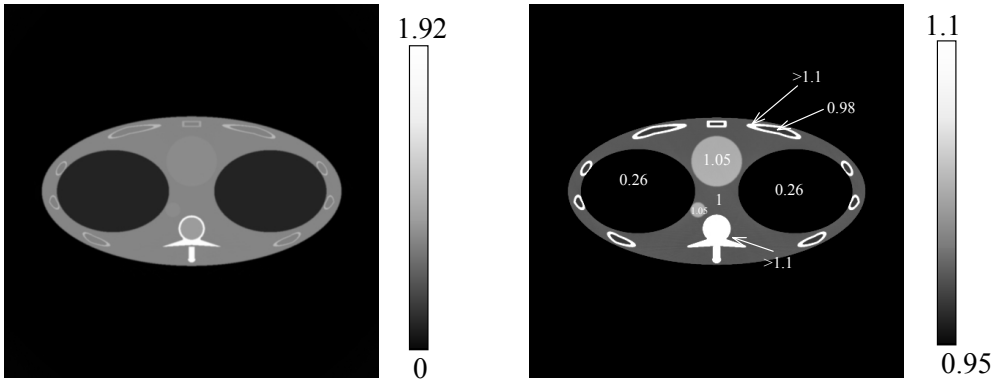
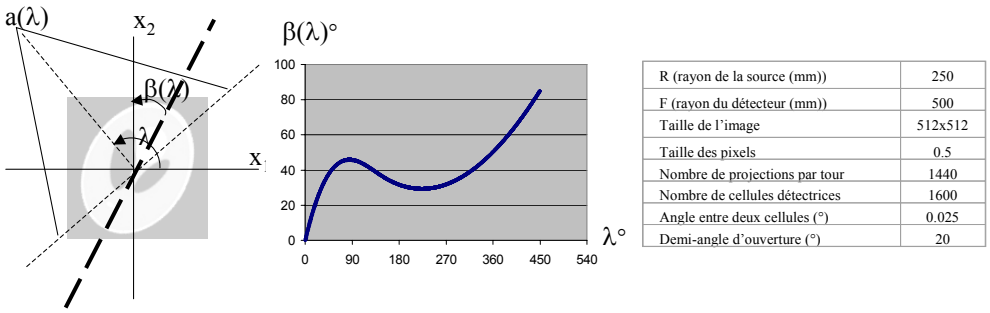


FIG. 5.9 – *Présentation du fantôme de thorax (www.imp.uni-erlangen.de/forbild). A gauche : affichage de tous les niveaux de gris. A droite : affichage des niveaux de gris de l'intervalle* $[0.95,1.1]$.

afin d'éviter des artefacts de type aliasing dans ces projections et qui peuvent se répercuter dans les images reconstruites, comme l'a montré Goertzen [22].

5.2.4.2 Paramètres de simulation



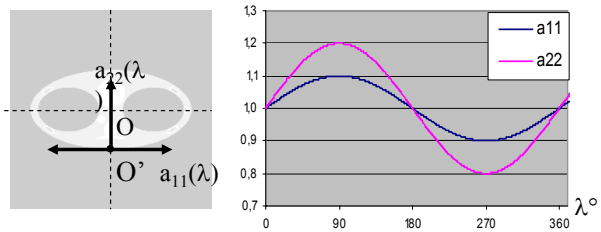
R (rayon de la source (mm))	250
F (rayon du détecteur (mm))	500
Taille de l'image	512x512
Taille des pixels	0.5
Nombre de projections par tour	1440
Nombre de cellules détectrices	1600
Angle entre deux cellules (°)	0.025
Demi-angle d'ouverture (°)	20

FIG. 5.10 – *Définition de l'angle de la rotation et des paramètres géométriques utilisés pour la simulation. L'angle* $\beta(\lambda)$ *a été défini comme une spline cubique passant par les points* $(0,0),(100,45),(150,36),(200,30),(460,90)$.

Rotation dépendant du temps du fantôme Shepp and Logan La loi d'animation du fantôme Shepp and Logan est donnée par :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \cos\beta(\lambda) & -\sin\beta(\lambda) \\ \sin\beta(\lambda) & \cos\beta(\lambda) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons représenté le graphe de la fonction d'angle $\beta(\lambda)$ ainsi que la géométrie dans la figure 5.10. L'amplitude du mouvement est grande pour accentuer les écarts entre les algorithmes (60° de rotation pendant un tour de scanner).



R (rayon de la source (mm))	250
F (rayon du détecteur (mm))	500
Taille de l'image	512x512
Taille des pixels	0.5
Nombre de projections par tour	1440
Nombre de cellules détectrices	1600
Angle entre deux cellules (°)	0.025
Demi-angle d'ouverture (°)	20

FIG. 5.11 – *Définition des paramètres du mouvement respiratoire et des paramètres géométriques utilisés pour la simulation*

Translation et dilatation du fantôme de thorax La loi d'animation du fantôme de thorax est donnée par :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1+0.1\sin(\lambda) & 0 \\ 0 & 1+0.2\sin(\lambda) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_{0'}0.2\sin(\lambda) \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\vec{b}_\lambda$ ainsi choisi impose que le point $0' = (0,y_{0'})$ situé en bas du fantôme reste fixe pendant le mouvement (voir figure 5.11), comme l'avait fait Crawford [61]. Cependant nous avons pris une grande fréquence de mouvement (un cycle par tour de scanner).

5.2.4.3 Résultats des reconstructions

Rotation dépendant du temps du fantôme Shepp and Logan

Trajectoire virtuelle Nous traçons pour une rotation de la source sur un intervalle $[0,2\pi]$ la trajectoire virtuelle (figure 5.12). Nous constatons qu'elle est plus grande que la trajectoire réelle, et qu'elle a un échantillonnage irrégulier. La condition sur la durée d'acquisition dans ce cas est rélachée par rapport au cas statique.

Images reconstruites Nous comparons dans la figure 5.13 les images reconstruites pour un instant donné par notre algorithme (formule (5.36)), avec les images fournies par un algorithme statique (reconstruction short-scan) centré sur le même instant de reconstruction. Nous avons également reconstruit avec un algorithme de compensation des rétroprojections agissant sur un intervalle de longueur 2π.

Nous constatons que les algorithmes statiques et de compensation simple des rétroprojections donnent des résultats médiocres. Toutefois, nous remarquons que les contours dans l'approche par compensation simple des rétroprojections semblent mieux préservés. Nous vérifions également que notre approche est exacte, et que notre mise en oeuvre est satisfaisante.

Translation et dilatation du fantôme de thorax

Trajectoire virtuelle Nous représentons dans la figure 5.14 les trajectoires réelle et virtuelle pour une rotation d'un tour de la source. La trajectoire virtuelle n'est plus un cercle. C'est un cercle déformé qui, par périodicité du mouvement simulé, boucle sur lui-même au même moment que la trajectoire réelle. Sauf pour une reconstruction en mode 2π, la longueur de l'intervalle de reconstruction est donc légèrement différente par rapport au cas statique.

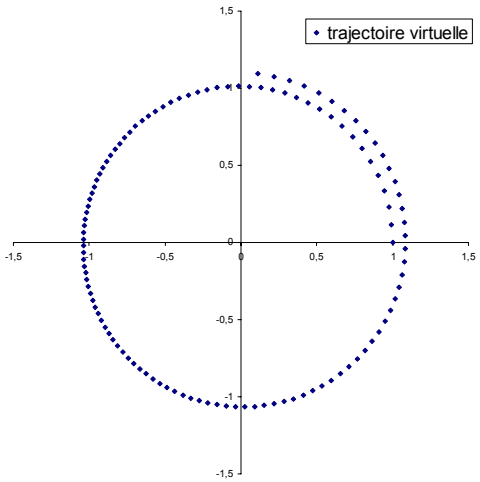


FIG. 5.12 – *trajectoire virtuelle pour la rotation définie dans la figure 5.10. Pour améliorer la clarté de la figure, les points ont été décalés du cercle (de rayon 1) auxquels ils appartiennent théoriquement.*

Images reconstruites Dans ce cas, nous avons comparé dans la figure 5.15, notre algorithme avec un algorithme statique et avec l'algorithme de Crawford qui s'applique pour ce modèle de mouvement. L'algorithme statique donne des images très dégradées. L'algorithme de Crawford sur un intervalle de 2π reconstruit bien les contours mais perturbe les niveaux de gris, comme le montre les coupes réalisées. Notre algorithme restitue correctement contours et niveaux de gris.

Notons qu'il est probable que la période du mouvement (2π) ait une influence positive sur les méthodes approchées utilisant ce même intervalle 2π. Nous avons en effet constaté une dégradation des images reconstruites par la méthode de Crawford pour ce fantôme dans le cas d'une utilisation d'un intervalle short-scan.

5.3 Extension à la reconstruction en géométrie conique

Dans cette section, nous cherchons à étendre les résultats précédents à la géométrie conique. Nous considérons dans ce cas que :

$$\Gamma_\lambda(\vec{x}) = A_\lambda \vec{x} + \vec{b}_\lambda \tag{5.40}$$

où :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \\ \vec{b}_\lambda &= \begin{bmatrix} b_1(\lambda) \\ b_2(\lambda) \\ b_3(\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

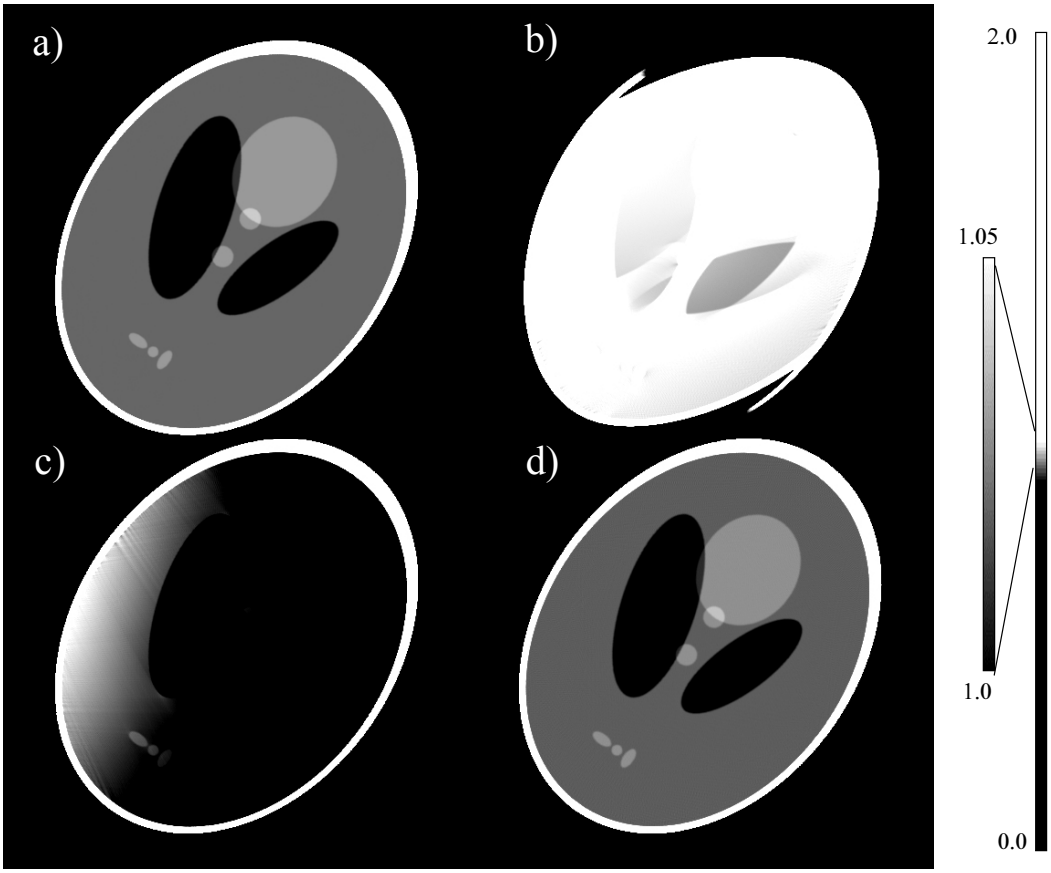


FIG. 5.13 – *Résultats de reconstruction pour la rotation à l'instant $\lambda = 300°$: (a) fantôme simulé à $\lambda = 300°$, (b) reconstruction avec un algorithme statique appliqué sur un ensemble inconsistant de mesures, (c) image reconstruite avec un algorithme de compensation des rétroprojections sur un intervalle centré de longueur 2π et (d) reconstruction par notre algorithme*

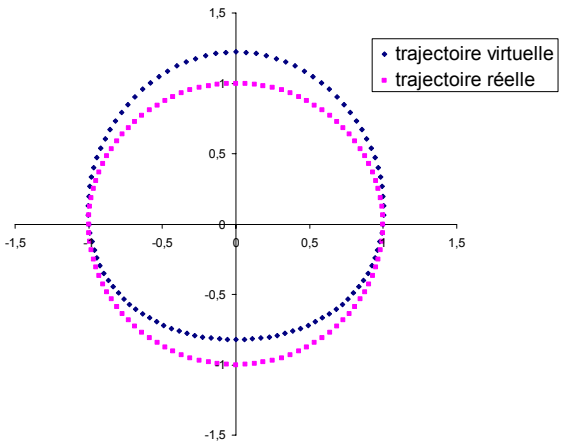


FIG. 5.14 – *trajectoire virtuelle pour la simulation du mouvement respiratoire.*

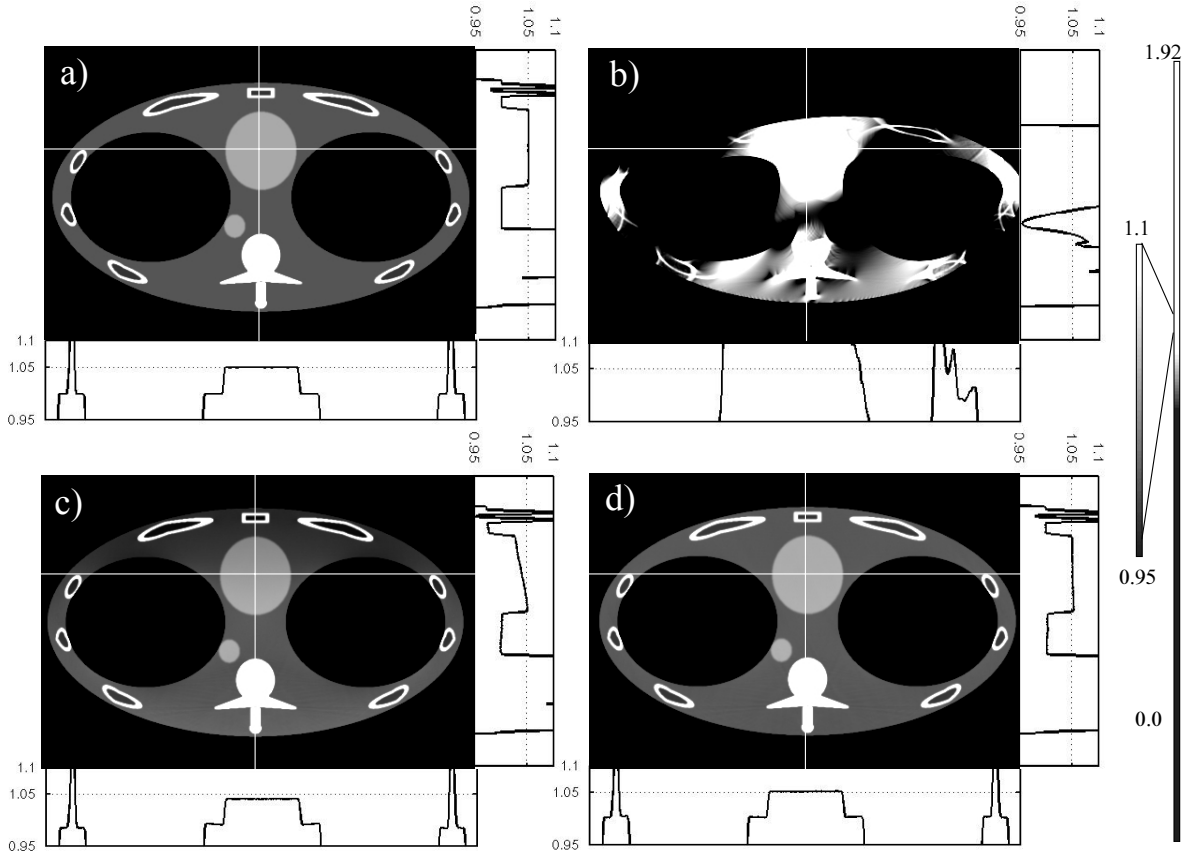


FIG. 5.15 – *Résultats de reconstruction pour le mouvement respiratoire simulé à l'instant* $\lambda = 300°$ *: (a) fantôme simulé à* $\lambda = 300°$*, (b) reconstruction avec un algorithme statique appliqué sur un ensemble inconsistant de mesures, (c) image reconstruite avec l'algorithme de Crawford et (d) reconstruction par notre algorithme. Les profils tracés sont obtenus le long des traits blancs indiqués sur les images*

5.3.1 Reconstruction exacte en géométrie conique

Nous cherchons à résoudre le cas conique complet, en étendant à la géométrie 3D les résultats obtenus en 2D, sans faire d'approximation. Notons tout d'abord que le concept de géométrie virtuelle est toujours valable en géométrie conique, car une déformation affine transforme un cône en un autre cône (figure 5.16). Nous nous posons ici aussi les questions de l'admissibilité de la déformation affine 3D et des méthodes de reconstruction envisageables.

5.3.1.1 Admissibilité

La condition d'admissibilité est identique au cas 2D. Elle est basée sur l'application de la formule généralisée de Hamaker avec le filtre dérivé pour obtenir une généralisation de la formule de Grangeat [24]. En effet, en appliquant la formule (5.11) avec le filtre dérivé, nous

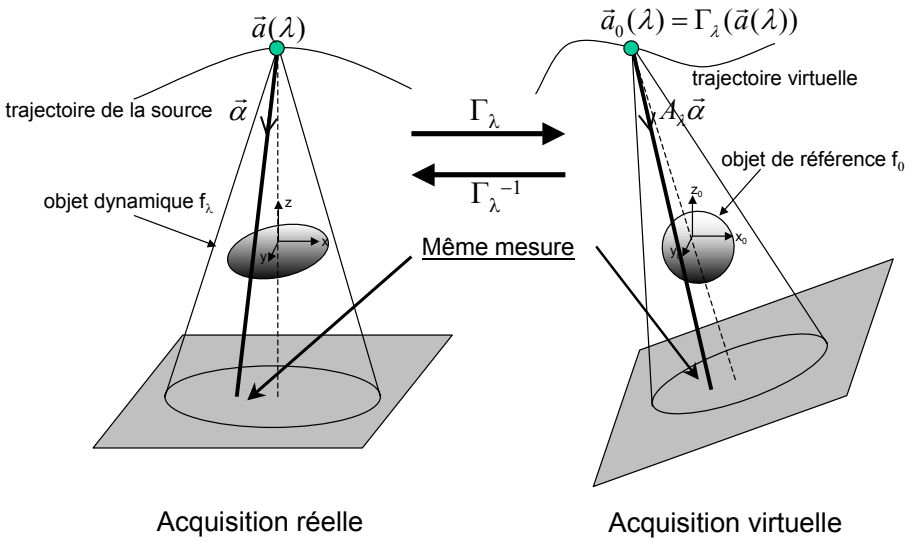


FIG. 5.16 – *Illustration de la correspondance entre acquisitions réelles et virtuelles en géométrie conique*

obtenons :

$$\begin{aligned} g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T\vec{\theta}) &\overset{déf}{=} \int_{S^2} d\vec{\alpha}\; g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})\delta'(\vec{\alpha}\cdot\vec{\theta}) \\ &= -\frac{1}{|detA_\lambda|}\frac{\partial}{\partial s}p_0(\vec{\theta}, s = \vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)) \end{aligned} \tag{5.41}$$

Cette formule de Grangeat permet alors d'énoncé la généralisation de la condition d'admissibilité des déformations affines pour la reconstruction en géométrie conique : ***un volume d'intérêt de l'objet de référence peut être reconstruit à partir de projections coniques non tronquées acquises au cours d'une déformation affine dépendant du temps si tout plan passant au voisinage de ce volume d'intérêt coupe la trajectoire virtuelle de la source.***

5.3.1.2 Inversion en géométrie conique

De la même manière qu'en géométrie 2D, la recherche d'une formule d'inversion exacte va être basée sur un changement de variable permettant de se ramener à une géométrie virtuelle où une source virtuelle tourne autour d'un objet de référence et émet un rayonnement conique. Par conséquent, nous devons choisir une formule d'inversion efficace valable pour une trajectoire quelconque. Nous utilisons donc l'approche de Katsevich [34] que nous avons présentée au chapitre 2. L'établissement de la formule d'inversion 3D (5.45) a été réalisée avec l'aide de Stéphane Bonnet, membre de l'équipe tomographie dynamique du CEA-LETI.

Formule d'inversion en un point $\vec{x}_0$ de l'objet de référence :

Soit $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)}{||\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)||}$ et $\vec{\beta}_\lambda = \frac{A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0}{||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||}$,

Soit $\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0)$ une fonction de poids définie sur la géométrie virtuelle vérifiant : $\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0)$

constant par morceaux à λ et $\vec{x}_0$ fixés pour $\vec{\theta} \in \vec{\beta}_0^{\perp}$ [3], et satisfaisant une condition de normalisation sur les $n(\vec{x}_0,\vec{\theta})$ intersections λ_j de la trajectoire virtuelle $\vec{a}_0(\lambda)$ avec le plan de normale $\vec{\theta}$ et passant par un point $\vec{x}_0$:

$$\sum_{j=1}^{n(\vec{x}_0,\vec{\theta})} \omega(\lambda_j,\vec{\theta},\vec{x}_0) = 1. \tag{5.42}$$

Soit la fonction $U(\lambda,\vec{\kappa},\vec{x}_0)$ définie pour $\vec{\kappa} \in \vec{\beta}_\lambda^{\perp}$ ($\vec{\kappa}$ peut ainsi être paramétré par un angle φ) par :

$$U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi),\vec{x}_0) = \text{sgn}(A_\lambda^{-T}\vec{\kappa(\varphi)} \cdot \vec{a}_0(\lambda)')\ \omega(\lambda,\frac{A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\varphi)}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\varphi)||},\vec{x}_0)$$

Du fait de l'hypothèse sur les poids, cette fonction est constante par morceaux suivant φ et ses sauts aux valeurs φ_m sont notés $(c_m)_{m=1...M}$:

$$c_m(\lambda,\vec{x}_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi_m+\epsilon),\vec{x}_0) - U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi_m-\epsilon),\vec{x}_0) \tag{5.43}$$

Alors, en notant $g_{d\lambda}$ les données acquises $g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})$ dérivées à direction $A_\lambda\vec{\alpha}$ constante :

$$g_{d\lambda}(\lambda,\vec{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda\vec{\alpha}}|(detA_\lambda)|g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha}) \tag{5.44}$$

nous avons la formule d'inversion au point $\vec{x}_0$:

$$f(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda\ \frac{1}{|detA_\lambda|||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||\ ||\vec{x}_0-\vec{a}_0(\lambda)||} \sum_{m=1}^{M} c_m(\lambda,\vec{x}_0)\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{\sin\gamma}\ g_{d\lambda}(\lambda,\cos\gamma\ \vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0)+\sin\gamma\ \vec{\alpha}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi_m)) \tag{5.45}$$

avec $\vec{\alpha}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi_m) = \vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0) \wedge \vec{\kappa}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi_m)$

Preuve :

Les étapes de cette preuve consistent à étendre au cas dynamique des étapes détaillées dans [34].
Dérivation de la formule de Grangeat généralisée
Nous commençons par dériver la formule de Grangeat généralisée par rapport au paramètre de la trajectoire, en maintenant une direction $\vec{\theta}$ constante sur l'objet virtuel.

$$-\frac{\partial}{\partial^2 s}p_0\left(\vec{\theta},s=\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)\right) = \frac{1}{(\vec{\theta}\cdot\vec{a}_0(\lambda)')}\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\vec{\theta}}|(detA_\lambda)|g_{G\lambda}(\lambda,A_\lambda^T\vec{\theta}) \tag{5.46}$$

Utilisation de la formule de Grangeat généralisée dans la formule d'inversion de la transformée de Radon
Nous injectons la formule (5.46) dans la formule d'inversion (2.57) de la transformée de Radon 3D, que nous redonnons ici appliquée à l'objet de référence f_0:

$$f(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_{S^2} d\vec{\theta}\ \frac{\partial}{\partial s^2}p_0(\vec{\theta},s=\vec{x}_0\cdot\vec{\theta}) \tag{5.47}$$

3. rappelons que nous notons $\vec{\beta}_0^{\perp}$ le cercle intersection de la sphère unité avec le plan de normale $\vec{\beta}_0$

Nous supposons pour cela que l'équation (5.48) a au moins une solution λ^* pour chaque $\vec{\theta} \in S^2$ sur un intervalle noté $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$ (nous supposons ainsi la déformation admissible sur $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$).

$$\vec{\theta} \cdot \vec{x}_0 = \vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda) \tag{5.48}$$

Nous obtenons alors :

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^2} d\vec{\theta} \left(\frac{1}{(\vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda)')} \frac{\partial}{\partial \lambda}_{|\vec{\theta}} |(detA_\lambda)| g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) \right)_{\lambda=\lambda^*} \tag{5.49}$$

Pour tenir compte de toutes les solutions $(\lambda_j)_{j=1...n(\vec{x}_0,\vec{\theta})}$ de (5.48), c'est à dire de toutes les intersections avec la trajectoire virtuelle $\vec{a}_0(\lambda)$ des plans contenant $\vec{x}_0$ de normale $\vec{\theta}$, nous introduisons les poids $\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0)$, satisfaisant la contrainte de normalisation (5.42) :

$$\sum_{j=1}^{n(\vec{x}_0,\vec{\theta})} \omega(\lambda_j,\vec{\theta},\vec{x}_0) = 1 \tag{5.50}$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^2} d\vec{\theta} \sum_{j=1}^{n(\vec{x}_0,\vec{\theta})} \omega(\lambda_j,\vec{\theta},\vec{x}_0) \left(\frac{1}{(\vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda)')} \frac{\partial}{\partial \lambda}_{|\vec{\theta}} |(detA_\lambda)| g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) \right)_{\lambda=\lambda_j} \tag{5.51}$$

Obtention d'une intégrale suivant le paramètre λ de la trajectoire

Plutôt que de considérer pour chaque plan les intersections avec la trajectoire de la source virtuelle, nous nous intéressons pour chaque position de source aux plans de Radon correspondants. En d'autres termes, nous voulons faire apparaître une intégrale suivant λ. Pour cela, toujours comme dans [34], nous utilisons la propriété suivante de la fonction delta. Soit $Q(\lambda,\vec{\theta})$ une fonction arbitraire et soient $(\lambda_j)_{j=1...n(\vec{x}_0,\vec{\theta})}$ les solutions de (5.48), alors

$$\sum_{j=1}^{n(\vec{x}_0,\vec{\theta})} \frac{Q(\lambda_j,\vec{\theta})}{(\vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda)')_{\lambda=\lambda_j}} = \int d\lambda \ \mathrm{sgn}(\vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda)') Q(\lambda,\vec{\theta}) \ \delta\left(\vec{\theta} - (\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda))\right) \tag{5.52}$$

En appliquant ce résultat dans (5.51) avec $Q(\lambda,\vec{\theta}) = \omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0) \frac{\partial}{\partial \lambda}_{|\vec{\theta}} |(detA_\lambda)| g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta})$, il vient:

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^2} d\vec{\theta} \int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda \ \mathrm{sgn}(\vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda)') \omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}_{|\vec{\theta}} |(detA_\lambda)| g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) \right) \ \delta\left(\vec{\theta} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda))\right) \tag{5.53}$$

Nous introduisons alors le vecteur normé $\vec{\beta}_0$ et la fonction h :

$$\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)}{||\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)||} \tag{5.54}$$

$$h(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) = \ \mathrm{sgn}(\vec{\theta} \cdot \vec{a}_0(\lambda)') \ \omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}_{|\vec{\theta}} |(detA_\lambda)| g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) \right) \tag{5.55}$$

Alors, en inversant l'ordre d'intégration, nous aboutissons à:

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda \ \frac{1}{||\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)||} \int_{S^2} d\vec{\theta} \ h(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) \ \delta(\vec{\theta} \cdot \vec{\beta}_0) \tag{5.56}$$

Réécriture de $g_{G\lambda}$

Nous notons $\vec{\kappa} = \frac{A_\lambda^T \vec{\theta}}{||A_\lambda^T \vec{\theta}||}$ et $\vec{\nabla} g_\lambda$ le gradient de $g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})$ suivant $\vec{\alpha}$.

$$\begin{aligned} g_{G\lambda}(\lambda, A_\lambda^T \vec{\theta}) &= g_{G\lambda}(\lambda, \frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||}) \\ &= ||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^2 \int_{\vec{\kappa}^\perp} d\vec{\alpha}\ \vec{\kappa} \cdot \vec{\nabla} g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha}) \end{aligned} \tag{5.57}$$

Dans l'équation (5.57), $\vec{\kappa}^\perp$ désigne le cercle centré de rayon 1 et de normale $\vec{\kappa}$ (voir la figure 5.17).

Changement de vecteur d'intégration $\vec{\theta}$ en $\vec{\kappa} = \frac{A_\lambda^T \vec{\theta}}{||A_\lambda^T \vec{\theta}||}$

Dans la formule (5.56), pour chaque position de source λ de l'ensemble $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$, deux intégrales apparaissent : la première est suivant le cercle $\vec{\beta}_0^{\perp}$, la seconde suivant le cercle $\vec{\kappa}^\perp$. Dans l'approche initiale de Katsevich, ces deux cercles sont orthogonaux, ce qui est explicitement utilisé plus loin lors du choix d'un système de coordonnées permettant d'éliminer l'une de ces intégrales. Pour nous ramener à ce cas, nous utilisons donc le changement de variable: $\vec{\theta} \to \vec{\kappa}(\vec{\theta})$ dans (5.56): ainsi nous aurons une intégrale sur $\left(\frac{A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0}{||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||}\right)^\perp$ au lieu de $\vec{\beta}_0^{\perp}$. Comme $\frac{A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0}{||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||} \cdot \vec{\kappa} = 0$, nous serons dans la situation de deux cercles orthogonaux (voir la figure 5.17).

A λ fixé, le changement de variable $\vec{\theta} = \frac{A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||}$ est admissible et son jacobien vaut : $\frac{1}{|detA_\lambda|||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^3}$.

Alors, en notant $\vec{\beta}_\lambda = \frac{A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0}{||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||}$, l'équation (5.56) devient :

$$f_0(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda\ \frac{1}{|detA_\lambda|||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||\ ||\vec{x}_0 - \Gamma_\lambda(\vec{a}_\lambda)||} \int_{\vec{\beta}_\lambda^\perp} d\vec{\kappa} \frac{1}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^2} h(\lambda, \frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||}) \tag{5.58}$$

Nous notons:

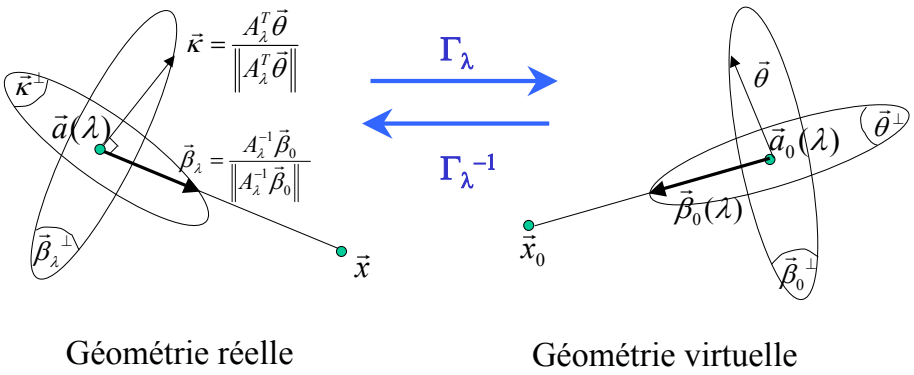


FIG. 5.17 – *Correspondances entre les géométries réelles et virtuelles*

$$\mathcal{I}(\lambda,\vec{x}_0) = \int_{\vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0)^\perp} d\vec{\kappa} \frac{1}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^2}\ h(\lambda, \frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||}) \tag{5.59}$$

de sorte que

$$f(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda\ \frac{1}{|detA_\lambda|||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0||\ ||\vec{x}_0 - \Gamma_\lambda(\vec{a}_\lambda)||} \mathcal{I}(\lambda,\vec{x}_0) \tag{5.60}$$

Changement du terme de dérivée en λ

Nous évaluons $h(\lambda,\frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||})$:

$$h(\lambda,\frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||}) = \text{sgn}(A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}\cdot\Gamma_\lambda(\vec{a}_\lambda)')\ \omega(\lambda,\frac{A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||},\vec{x}_0)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}|(detA_\lambda)|g_{G\lambda}(\lambda,\frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||})\right)$$

Nous définissons :

$$\Psi(\vec{\kappa}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}\left(|(detA_\lambda)|g_{G\lambda}(\lambda,\frac{\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||})\right)$$

Alors, en utilisant (5.57), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{\kappa}) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}\left(|(detA_\lambda)|||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^2\int_{\vec{\kappa}^\perp}d\vec{\alpha}\ \vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla}g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})\right)\\ &= ||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^2\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}\left(\int_{\vec{\kappa}^\perp}d\vec{\alpha}\ \vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla}|(detA_\lambda)|g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})\right)\\ &= ||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||^2\left(\int_{\vec{\kappa}^\perp}d\vec{\alpha}\ \vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda\vec{\alpha}}|(detA_\lambda)|g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})\right]\right)\end{aligned} \tag{5.61}$$

Pour obtenir (5.61), nous avons successivement utilisé (5.57), le fait que la dérivée est faite à direction $A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}$ constante, et le fait que maintenir cette direction fixe revient à maintenir la direction orthogonale $A_\lambda\vec{\alpha}$ fixe. Nous introduisons la notation $g_{d\lambda}$ pour le terme de dérivation des projections acquises pondérées:

$$g_{d\lambda}(\lambda,\vec{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|A_\lambda\vec{\alpha}}|(detA_\lambda)|g_\lambda(\lambda,\vec{\alpha})$$

Nous pouvons réécrire $\mathcal{I}(\lambda,\vec{x}_0)$:

$$\mathcal{I}(\lambda,\vec{x}_0) = \int_{\vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0)^\perp}d\vec{\kappa}\ \text{sgn}(A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}\cdot\vec{a}_0(\lambda)')\ \omega(\lambda,\frac{A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||},\vec{x}_0)\int_{\vec{\kappa}^\perp}d\vec{\alpha}\ \vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla}g_{d\lambda}(\lambda,\vec{\alpha}) \tag{5.62}$$

En définissant à présent $U(\lambda,\vec{\kappa},\vec{x}_0)$:

$$U(\lambda,\vec{\kappa},\vec{x}_0) = \text{sgn}(A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}\cdot\vec{a}_0(\lambda)')\ \omega(\lambda,\frac{A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}}{||A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}||},\vec{x}_0)$$

Nous avons :

$$\mathcal{I}(\lambda,\vec{x}_0) = \int_{\vec{\beta}_\lambda^\perp}d\vec{\kappa}\ U(\lambda,\vec{\kappa},\vec{x}_0)\int_{\vec{\kappa}^\perp}d\vec{\alpha}\ \vec{\kappa}\cdot\vec{\nabla}g_{d\lambda}(\lambda,\vec{\alpha}) \tag{5.63}$$

Ecriture dans un système de coordonnées particulier

Nous pouvons à présent remarquer que l'expression (5.63) a la même forme générique que l'étape intermédiaire (2.20) dans l'article de Katsevich [34]. Par conséquent, il suffit de prendre le système particulier de coordonnées sphériques suivant:

$$\vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \vec{\kappa}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi)\in\vec{\beta}_\lambda^\perp = \begin{bmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{bmatrix},\quad \vec{\alpha}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi) = \vec{\beta}_\lambda\wedge\vec{\kappa} = \begin{bmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\0\end{bmatrix}$$

Et les mêmes étapes permettent de transformer (5.63) :

$$\mathcal{I}(\lambda,\vec{x}_0) = \int_0^{2\pi}d\varphi\ \frac{\partial}{\partial\varphi}U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi),\vec{x}_0)\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{\sin\gamma}\ g_{d\lambda}(\lambda,\cos\gamma\ \vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0)+\sin\gamma\ \vec{\alpha}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi)) \tag{5.64}$$

Formule d'inversion
Si la fonction de poids que nous avons définie sur la géométrie virtuelle vérifie la même contrainte dans le cas statique ($\omega(\lambda,\vec{\theta},\vec{x}_0)$ constant par morceaux à λ et $\vec{x}_0$ fixé pour $\vec{\theta} \in \vec{\beta}_0^{\perp}$), alors la fonction $U(\lambda,\vec{\kappa},\vec{x}_0)$ est constante par morceaux suivant φ. L'intégrale en φ dans(5.64) devient donc une somme sur les discontinuités $(\varphi_m)_m$ de $U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi),\vec{x}_0)$. En notant $(c_m)_{m=1...M}$ les M sauts de la fonction U :

$$c_m(\lambda,\vec{x}_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi_m+\epsilon),\vec{x}_0) - U(\lambda,\vec{\kappa}(\varphi_m-\epsilon),\vec{x}_0)$$

Alors, (5.60) devient (5.45):

$$f(\vec{x}_0) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda \, \frac{1}{|detA_\lambda|||A_\lambda^{-1}\vec{\beta}_0|| \, ||\vec{x}_0 - \vec{a}_0(\lambda)||} \sum_{m=1}^{M} c_m(\lambda,\vec{x}_0) \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{\sin\gamma} \, g_{d\lambda}(\lambda, \cos\gamma \, \vec{\beta}_\lambda(\vec{x}_0) + \sin\gamma \, \vec{\alpha}(\lambda,\vec{x}_0,\varphi_m))$$

5.3.1.3 Commentaires sur la formule d'inversion exacte

Nous avons donc obtenu avec la formule (5.45) une généralisation de la formule générale de Katsevich permettant d'inverser exactement une fonction à partir de ses projections coniques non tronquées acquises au cours d'une déformation 3D affine dépendant du temps.

Un point crucial pour l'applicabilité de méthodes en 3D, comme nous l'avons vu au chapitre 2, est la possibilité de reconstruire à partir de données axialement tronquées. Or dans le cas statique, de tels résultats, qui sont obtenus en prenant des fonctions de poids bien choisies (voir par exemple la fonction de poids en tomographie hélicoïdale dans la section 2.4.3.4), sont extrêmement dépendantes de la trajectoire considérée. Il est très improbable, d'après Katsevich (voir l'introduction de [34]), qu'une méthode générale pour choisir la fonction de poids optimale pour une trajectoire complète quelconque existe. Or c'est précisément ce qui arrive dans notre cas dans notre formule (5.45), puisque la trajectoire virtuelle *dépend de la déformation affine*.

Par conséquent, nous concluons qu'il n'est probablement pas possible pour les déformations affines dépendant du temps d'avoir un schéma exact et général résolvant le problème des données axialement tronquées. Remarquons que c'est quand même possible pour certaines déformations, par exemple les translations suivant l'axe de l'hélice pour une acquisition réelle hélicoïdale, comme le montre le résultat de Katsevich sur le problème équivalent de reconstruction exacte pour une trajectoire hélicoïdale à pas variable [35].

5.3.2 Reconstruction approchée par une méthode de type Feldkamp

Le résultat précédent incite donc à s'intéresser pour le cas des déformations 3D à des méthodes approchées de type Feldkamp. Nous proposons ici, en temps que perspective, une formule d'inversion approchée dans le cas d'un détecteur 2D cylindrique de rayon R centré sur la source (voir figure 5.18); nous n'avons pas développé l'algorithme correspondant.

Cette extension reproduit le schéma de généralisation introduit par Kudo dans [37] pour étendre les approches "very short-scan" [42] et [36] aux géométries 3D. L'ensemble des positions de source utilisées $(\lambda \in \Lambda^\Gamma(\vec{x}_0))$ est défini dans la géométrie virtuelle. C'est une portion

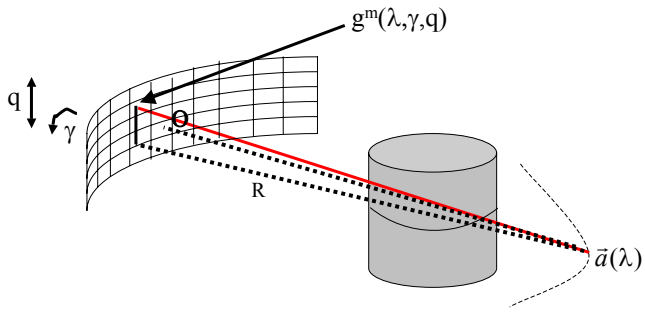


FIG. 5.18 – *Géométrie réelle d'acquisition avec détecteur cylindrique*

de la trajectoire virtuelle centrée sur la coupe[4] à reconstruire, dont la projection sur cette coupe vérifie la condition d'admissibilité 2D. Les étapes de l'algorithme approché proposé sont alors les suivantes, avec les notations du chapitre 2 :

– pondération des données acquises par un terme corrigeant la conicité

$$g_{\lambda w1}(\lambda,\gamma,q) = \frac{R}{\sqrt{R^2+q^2}} g^m_\lambda(\lambda,\gamma,q)$$

– pondération et filtrage de Hilbert ligne à ligne sur le détecteur (comme en 2D) :

$$g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi,q) = |detA_\lambda| \|A_\lambda^{-T}\vec{\kappa}(\xi)\| \left(g_{\lambda w1} *_\xi h^{ang}_H\right)(\lambda,\xi,q)$$

– dérivation ligne à ligne (comme en 2D) :

$$g^m_{F\lambda}(\lambda,\xi,q) = \frac{\partial}{\partial\lambda} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi,q) + \frac{\partial}{\partial\xi} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi,q) \cdot \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi} \quad \text{(avec } \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}_{|\varphi} \text{ défini en (5.35))}$$

– pondération par $w(\lambda,\xi)$ et rétroprojection 3D passant par le point acquis $\Gamma_\varphi^{-1}(\vec{x}_0)$, sur l'ensemble $\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)$:

$$f_0(\vec{x}_0) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda^\Gamma(\vec{x}_0)} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}_0(\lambda) - \vec{x}_0\|} \left[w(\lambda,\xi) g^m_{F\lambda}(\lambda,\xi,q) \right]_{\xi=\xi^*(\Gamma_\varphi^{-1}(\vec{x}_0),\lambda), q=q^*(\Gamma_\varphi^{-1}(\vec{x}_0),\lambda)}$$

Remarquons que les étapes de filtrage de Hilbert et de dérivation peuvent alternativement être menées suivant les lignes obliques du détecteur qui sont dans la géométrie réelle parallèles à l'image par Γ^{-1} de la tangente à la trajectoire virtuelle (ceci généralise le choix des lignes tangentes à la trajectoire proposées notamment dans [93]).
Remarquons enfin que la troncature axiale peut rester un problème dans le cas de déformations qui changent beaucoup la pente des lignes de filtrage, comme le font par exemple certaines rotations.

4. notons que la notion de coupe sur l'objet de référence est liée à la trajectoire et peut être délicate à définir

5.4 Bilan de cette approche

Dans ce chapitre, nous nous sommes demandé pour quelles déformations il est possible d'obtenir des méthodes analytiques précises de reconstruction avec compensation. Du changement de variable décrit au début du chapitre, nous avons déduit que ce problème complexe est soluble dans le cas de la conservation de la géométrie de droites, qui permet de se ramener à une géométrie virtuelle de même nature que la géométrie réelle. Nous avons dans ce cadre étudié précisément les déformations affines dépendant du temps, en établissant de nouveaux résultats concernant :

- les conditions d'admissibilité en géométrie 2D et 3D
- des formules d'inversion exactes de type filtrage-rétroprojection pour les géométries 2D parallèles et divergentes
- une formule d'inversion pour la géométrie conique

D'un point de vue numérique, nous avons implémenté efficacement la méthode en géométrie 2D, et discuté des problèmes d'implémentation de la formule d'inversion exacte 3D. La formule proposée ne permet pas de résoudre le problème de l'objet long. Nous avons enfin proposé pour ce problème une méthode basée sur une approximation de type Feldkamp.

Des perspectives d'étude subsistent pour compléter ce travail :

- Analyse numérique précise de la sensibilité au modèle. Nous illustrons ici par quelques images l'importance de cette question dans la figure 5.19. Le modèle intervenant dans l'étape de rétroprojection entraîne une forte dégradation même pour de faibles perturbations du modèle.
- Etude en 3D des erreurs d'approximation de la formulation Feldkamp.
- Etude pour le cas des déformations affines de la possibilité d'apprendre la déformation dans les mesures.

Evidemment, une autre voie d'investigation importante est la recherche sur d'autres classes de déformations plus larges, possédant idéalement des propriétés d'approximation des déformations générales, pour lesquelles des méthodes de reconstruction analytiques efficaces pourraient être mises en place. Nous proposerons quelques pistes comme perspectives de cette thèse.

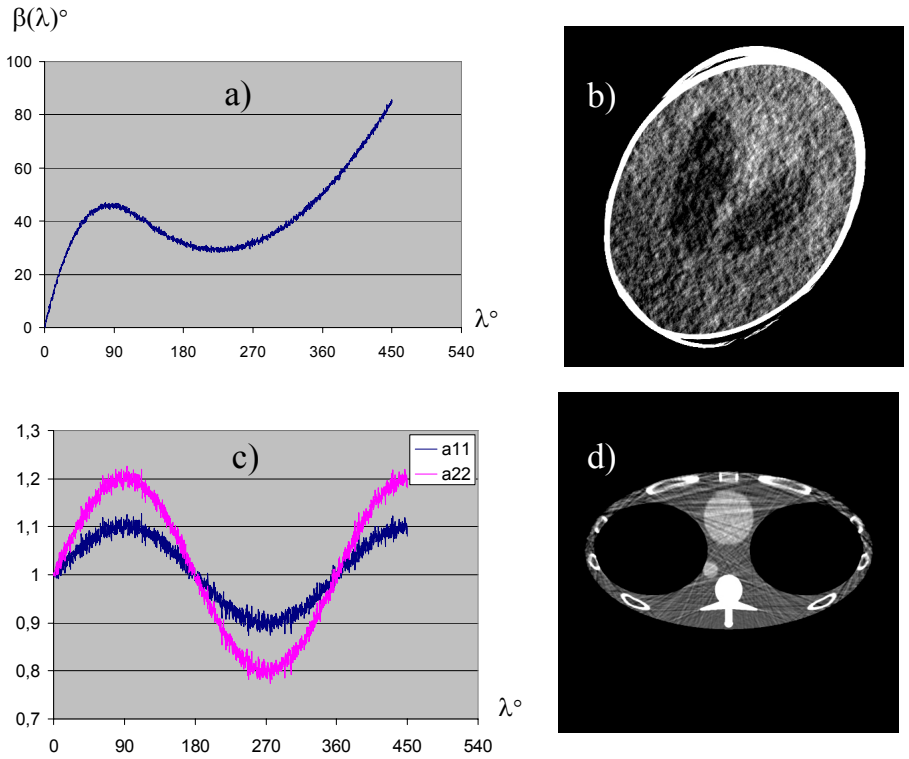


FIG. 5.19 – *Reconstruction des fantômes animés (voir les figures 5.10 et 5.11), avec perturbation de modèle affine utilisé pour la reconstruction par notre algorithme. (a) Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type* 0.01 *a été ajouté à l'angle de la rotation du fantôme Shepp and Logan. (b) Image reconstruite avec ce modèle perturbé. (c) Le même bruit a été ajouté aux paramètres* a_{11} *et* a_{22} *du modèle utilisé pour la reconstruction du fantôme de thorax. (d) Image reconstruite avec ce modèle.*

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Bilan de nos contributions

La modalité tomographie par rayons X est une modalité attractive en imagerie cardiaque. Toutefois, la résolution temporelle intrinsèque à cette modalité est insuffisante pour reconstruire des séquences d'images de qualité sur tout un cycle, et nécessite donc l'introduction de modèles pour régulariser le problème inverse.
L'étude approfondie des méthodes existantes a fait ressortir deux types fondamentaux de modèles en tomographie dynamique qui sont appliqués (ou peuvent l'être) à l'imagerie cardiaque : le modèle temporel d'évolution périodique et le modèle spatial de déformation.

Dans l'étude du chapitre 4, nous avons approfondi les conditions d'acquisition pour la reconstruction d'un objet à variation périodique. Dans le cas de la géométrie parallèle, nous avons caractérisé la résolution temporelle en fonction des différents paramètres, en particulier les périodes de rotation du scanner et d'évolution de l'objet. Nous avons aussi établi les conditions d'optimalité. Nous avons mis en évidence la difficulté qui apparaît dans le cas de la géométrie divergente lors de l'utilisation de la propriété de symétrie. Celle-ci produit une dépendance de la résolution temporelle par rapport au point de reconstruction. Nous avons proposé une amélioration des schémas de reconstruction existants permettant d'atteindre effectivement ces critères théoriques en chaque point.

Les modèles utilisant la périodicité souffrent de plusieurs limites, en particulier la limite de validité du modèle en tomographie hélicoïdale et les problèmes de synchronisation. Les approches correspondantes peuvent donc être complétées par les techniques basées sur la compensation du mouvement. Nous avons étudié l'état de l'art de ces méthodes, qui a fait ressortir le fait que les méthodes existantes étaient basées sur l'extension de formules exactes établies pour des déformations simples. Nous avons alors cherché à élargir la classe des déformations pour lesquelles il est possible d'avoir des méthodes analytiques précises de reconstruction avec compensation. Du changement de variable décrit au début du chapitre 5, nous avons déduit que ce problème complexe est soluble dans le cas de la conservation de la géométrie de droites, qui permet de se ramener à une géométrie virtuelle de même nature que la géométrie réelle. Nous avons dans ce cadre étudié précisément dans le chapitre 5 les déformations affines dépendant du temps, en établissant de nouveaux résultats concernant :

– les conditions d'admissibilité en géométrie 2D et 3D,

– des formules d'inversion exactes de type filtrage-rétroprojection pour les géométries 2D parallèle et divergente ainsi que pour la géométrie 3D conique.

6.2 Perspectives en tomographie dynamique

6.2.1 Perspective 1 : vers le traitement de plus grandes classes de déformations

La première perspective de notre travail est relative à la question : existe-t-il des classes de déformations plus grandes que la classe des déformations affines sur lesquelles des formules d'inversion analytique existent ?
Nous pouvons déjà obtenir une réponse partielle en repartant de notre analyse basée sur le passage à la géométrie virtuelle. Une classe plus grande sur laquelle des résultats de type inversion analytique sont possibles est *la classe des déformations qui conservent les droites de mesures* (voir la figure 6.1). Cette classe contient les déformations affines qui conservent *toutes les droites*. Une déformation de ce type permet d'associer à une mesure d'intégrale de droite dans la géométrie réelle une autre mesure d'intégrale de droite sur la géométrie virtuelle. Il devient alors possible d'utiliser des techniques de reconstruction standard pour reconstuire l'objet dans son état de référence. La déformation sera admissible si elle permet d'obtenir un jeu de mesures suffisant dans la géométrie virtuelle.

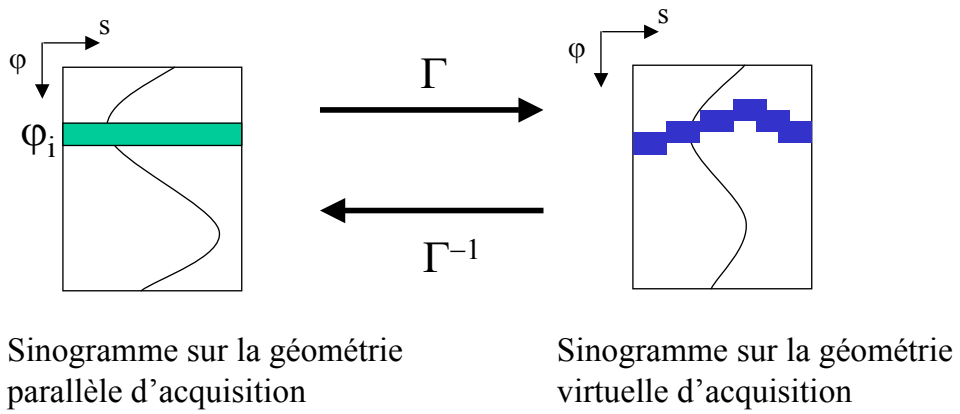


FIG. 6.1 – *Illustration de la possibilité de réarrangement d'une projection parallèle de la géométrie réelle vers la géométrie virtuelle si la déformation transforme les droites acquises en d'autres droites. Chaque mesure* (φ_i, s_j) *dans le sinogramme acquis a une image dans le sinogramme défini dans la géométrie virtuelle.*

Nous pouvons également remarquer que ce type de déformation peut éventuellemnt être utilisé pour obtenir une méthode approchée, en trouvant la droite la plus proche de l'image par la déformation de chaque rayon acquis. Cette approximation autorise un réarrangement du sinogramme réel vers le sinogramme défini sur la géométrie virtuelle. Un filtrage par le filtre rampe peut être mis en place ligne à ligne sur ce sinogramme et avant de rétroprojeter les mesures filtrées en tenant compte de la déformation exacte.

Les résultats que nous avons obtenus dans ce travail de thèse concernent une petite classe de déformations, qu'il est possible d'étendre quelque peu comme nous venons de le voir. Mais la possibilité d'étendre encore à d'autres types de déformations est ensuite liée à la possibilité de reconstruire dans des géométries qui ne sont plus des droites. D'autres résultats de géométrie intégrale sont alors requis. Peut-être aussi, dans les cas généraux, les techniques de reconstruction discrètes sont-elles l'outil pratique permettant de reconstruire le mieux, grâce notamment à l'intégration de régularisations spatio-temporelles.

6.2.2 Perspective 2 : sur l'extension des modèles affines à des déformations quelconques

Nous abordons dans cette section les méthodes heuristiques permettant de traiter de manière approchée des mouvements généraux. L'analyse de l'état de l'art a révélé deux méthodes analytiques permettant de traiter les déformations quelconques : la méthode de Ritchie [88] et la méthode de Grangeat [66]. Ces techniques, comme nous l'avons vu dans la section 3.4.3.2, reposent sur l'extension d'une formule de reconstruction valable pour un modèle simple global à des déformations générales. Les paramètres des modèles globaux (translation pour [66], translation et dilatation pour [88]) sont définis localement pour chaque pixel.
Comme notre méthode permet d'élargir les algorithmes exacts de type filtrage-rétroprojection à la classe entière des déformations affines dépendant du temps, il est légitime de tenter d'étudier l'extension "locale" de notre approche. Cette dernière consiste à approximer localement un champ de déplacement quelconque par un champ affine, sur lequel on applique notre formule d'inversion pour les étapes de pondération, de filtrage, et de définition de l'intervalle de rétroprojection. Pour l'étape de rétroprojection cependant, nous gardons le modèle exact de déformation , et non pas son approximation locale.
Nous écrivons la formule de reconstruction correspondante : les paramètres de la déformation affine sont définis par approximation locale :

$$A_\lambda(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \Gamma_{x_1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Gamma_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \Gamma_{x_2}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \text{ en écrivant : } \Gamma(\vec{x_0}) = \begin{bmatrix} \Gamma_{x_1} \\ \Gamma_{x_2} \end{bmatrix}$$

La formule de reconstruction approchée écrite au point $\vec{x}_0$ est la suivante :

$$g^m_{H\lambda}(\lambda,\xi) = (g^m_\lambda *_\xi h^{ang}_H)(\lambda,\xi) \tag{6.1}$$

$$g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi) = |\det A_\lambda(\vec{x}_0)| \|A^{-T}_\lambda(\vec{x}_0)\vec{\kappa}(\xi)\| g^m_{H\lambda}(\lambda,\xi) \tag{6.2}$$

$$g^m_{F\lambda}(\lambda,\xi) = \frac{\partial}{\partial\lambda} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa})) + \frac{\partial}{\partial\xi} g^m_{wH\lambda}(\lambda,\xi(\lambda,\vec{\kappa})) \cdot \frac{\partial\xi}{\partial\lambda_{|\varphi}}(\vec{x}_0) \tag{6.3}$$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial\lambda_{|\varphi}}(\vec{x}_0) = 1 + \frac{1}{\|A^{-T}_\lambda(\vec{x}_0)\vec{\kappa}(\xi)\|^2} \big[& (A'_\lambda(\vec{x}_0)\vec{e}_{2\lambda} \cdot A^{-T}_\lambda(\vec{x}_0)\vec{\kappa}(\xi))(\vec{e}_{1\lambda} \cdot \vec{\kappa}(\xi)) - \\ & (A'_\lambda(\vec{x}_0)\vec{e}_{1\lambda} \cdot A^{-T}_\lambda(\vec{x}_0)\vec{\kappa}(\xi))(\vec{e}_{2\lambda} \cdot \vec{\kappa}(\xi)) \big] \end{aligned} \tag{6.4}$$

Alors, nous avons la formule de reconstruction :

$$f_0(\vec{x}_0) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda^\Gamma_{aff}(\vec{x}_0)} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}_0(\lambda) - \vec{x}_0\|} \Big[w(\lambda,\xi) g^m_{F\lambda}(\lambda,\xi) \Big]_{\xi=\xi^*(\vec{x}_0,\lambda)} \tag{6.5}$$

où ξ^* est l'angle caractérisant le rayon divergent de $\vec{a}(\lambda)$ et passant par $\vec{x} = \Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0)$. Les poids $w(\lambda,\xi)$ et l'ensemble de rétroprojection $\Lambda_{aff}^{\Gamma}(\vec{x}_0)$ sont calculés sur la géométrie virtuelle avec l'approximation locale.
Nous allons comparer cette formule avec l'approche de Ritchie en géométrie divergente. Pour la méthode de Ritchie, nous avons négligé la modification du filtrage et implémenté la formule sur l'intervalle short-scan en utilisant les poids de Parker $w(\lambda,\gamma)$ selon la formule (6.6) écrite à l'instant $\pi/2 + \gamma_m$:

$$f_{\pi/2+\gamma_m}(\vec{x}_0) \approx \int_0^{\pi+2\gamma_m} d\lambda \frac{1}{\|\vec{a}(\lambda) - \vec{x}_0\|^2} \int_{-\gamma_m}^{+\gamma_m} d\gamma \; w(\lambda,\gamma) g_\lambda^m(\lambda,\gamma) h_R^{ang}(\gamma(\Gamma_\lambda^{-1}(\vec{x}_0)) - \gamma) \tag{6.6}$$

Cette formule ne diffère de la formule classique de reconstruction sur un intervalle short-scan que par l'étape de rétroprojection, qui tient compte des trajectoires des points.

6.2.2.1 Description des simulations effectuées

Nous avons mis au point une simulation permettant de savoir si l'approximation locale réalisée par la formule (6.5) est plus intéressante que l'approximation suivant la méthode de Ritchie [88]. Pour cela, nous avons modifié le fantôme de thorax (www.imp.uni-erlangen.de/forbild) en rajoutant des structures dans le coeur (voir la figure 6.2). Puis nous l'avons animé d'un mouvement affine local, composé d'une rotation et d'une dilatation (voir la figure 6.3). La période de ce mouvement est égale au double de la période de rotation du scanner. Les amplitudes du mouvements ne sont pas très grandes (voir la figure 6.3).

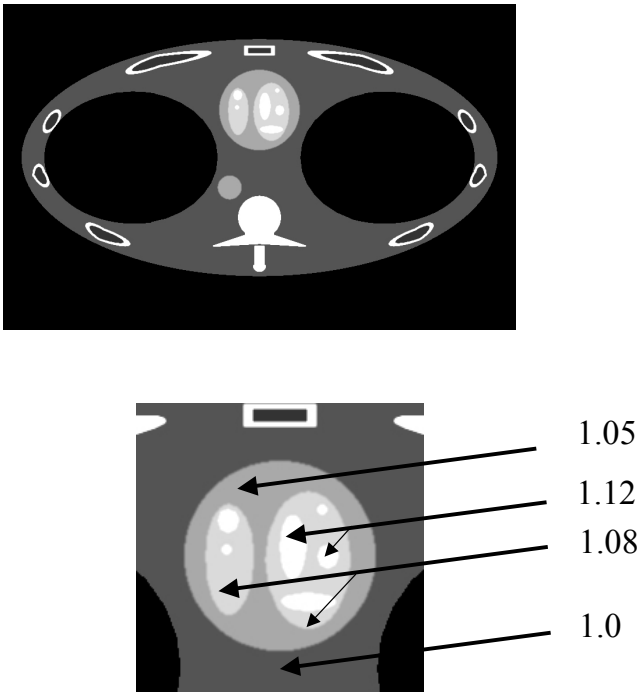


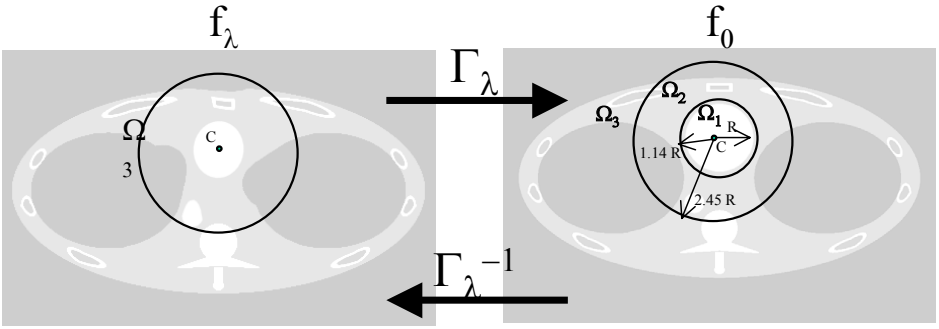
FIG. 6.2 – *Description de la modification du fantôme de thorax .*

6.2.2.2 Résultats et conclusion sur les approximations locales

Nous comparons dans la figure 6.4 à deux instants du cycle les reconstructions obtenues par un algorithme statique, par l'algorithme de Ritchie (formule (6.6)) et par l'extension locale (formule (6.5)) de notre méthode de compensation des déformations affines.
Les résultats les meilleurs sont obtenus avec l'approche de Ritchie. Les images produites par notre extension contiennent des raies qui dégradent l'image. Ces tests indiquent que l'utilisation des paramètres locaux dans le filtrage et dans la détermination de l'ensemble de rétroprojection n'apporte pas d'amélioration par rapport à une méthode de compensation simple des rétroprojections. La méthode de Ritchie semble plus robuste que ce type d'approximation locale.
Ce résultat incite donc soit à chercher d'autres manières pour étendre la formule de reconstruction compensant les déformations affines, soit à se satisfaire des résultats finalement assez bons de l'approximation de Ritchie.
Des tests complémentaires sont de toute façon requis pour tester l'efficacité dans des situations réalistes de la formule de Ritchie. Ainsi, nous pensons que le fantôme appelé NCAT, définissant un modèle dynamique réaliste et paramétrable de thorax respirant avec coeur battant, développé par Segars [91], pourrait être utilisé.

6.2.3 Perspectives 3 : les problèmes d'estimation des déformations

Nous terminons les perspectives en soulevant le problème de l'estimation de mouvement dans les méthodes de compensation basées sur un modèle connu. L'idée directrice de ces méthodes, d'une certaine manière, consiste à augmenter le nombre d'inconnues en ajoutant le problème d'estimation du mouvement et en reposant le problème de reconstruction comme un problème de reconstruction avec déformation connue.
Nous n'avons dans cette thèse abordé que le second aspect. L'aspect estimation est fondamental, comme nous l'avons vu dans le test de la figure 5.19 où notre formule de reconstruction exacte était appliquée avec un modèle perturbé par un bruit. Beaucoup d'efforts restent à faire pour obtenir des techniques robustes d'estimation. Dans ce cadre, une possibilité parmi d'autres en imagerie cardiaque est de régulariser le problème d'estimation des déformations par l'utilisation de l'hypothèse de périodicité.



Dans Ω_3 : $\Gamma_\lambda = Id$

Dans Ω_1 : mouvement affine pur

$\beta(\lambda) = \sin^2(\lambda/4)$

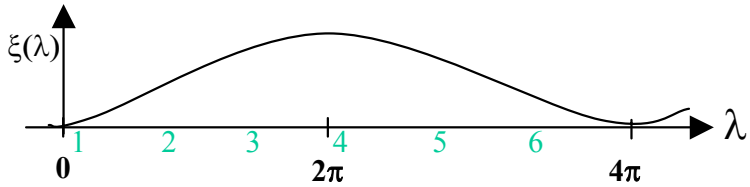
$\Gamma_\lambda(\vec{x}) = A_\lambda(\vec{x}) + b_\lambda$

avec $A_\lambda = D_\lambda R_\lambda$ où $R_\lambda = Rotation(C, \beta(\lambda)/4)$

$D_\lambda = Dilatation(C, \sigma_x = 1 + 0.5\beta(\lambda), \sigma_y = 1 + 0.3\beta(\lambda))$

b_λ défini pour que C soit un point fixe

Dans Ω_2 : transition continue entre les deux régions



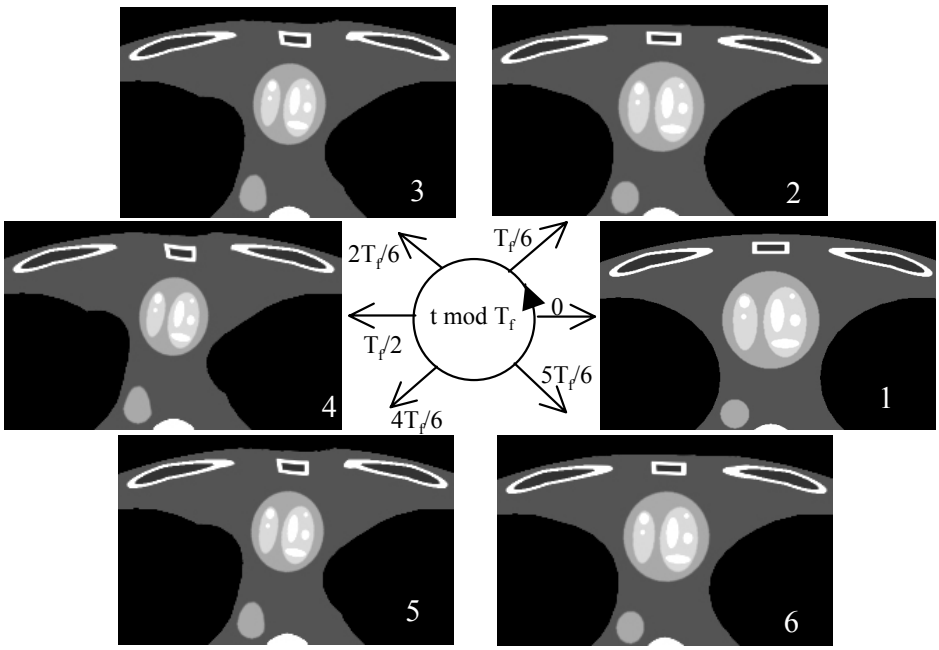


FIG. 6.3 – *Description du mouvement affine local que nous avons imposé. Le mouvement est purement affine au niveau du coeur, nul loin du coeur. Une zone de transition assure la continuité. Les lois du mouvement sont précisées dans le cadre central. Nous avons aussi inclus les images à différents instants du cycle.*

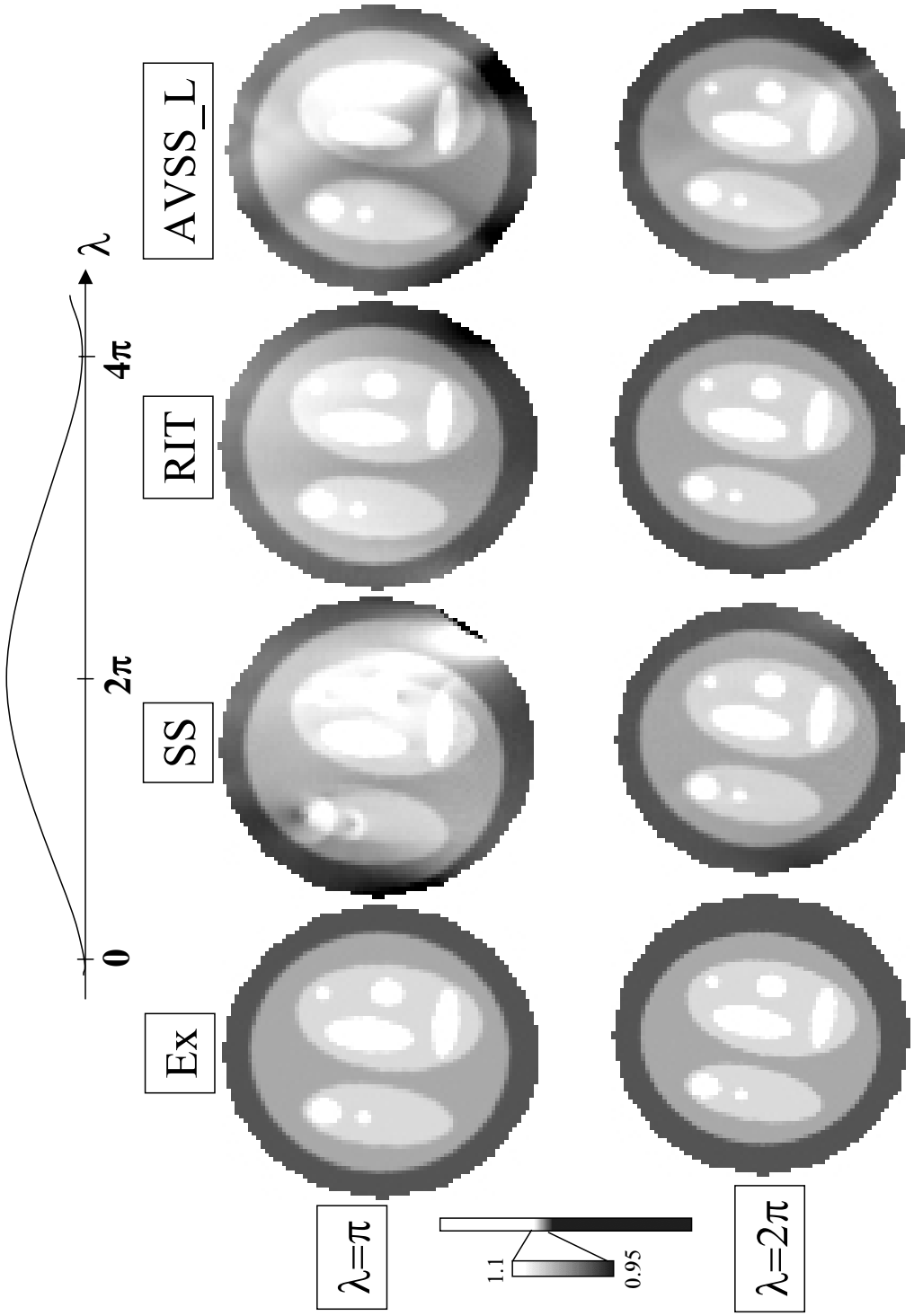


FIG. 6.4 – *Résultats des reconstructions approchées du fantôme de thorax modifié animé localement. Nous proposons les résultats de la reconstruction à deux instants $\lambda = \pi$ sur la première ligne et $\lambda = 2\pi$ sur la seconde ligne. La colonne "Ex" représente les images exactes, la colonne "SS" les images reconstruites par l'algorithme statique (sur un intervalle short-scan), "RIT" les images reconstruites par l'algorithme de Ritchie (formule (6.6)) et "$AVSS_L$" les images reconstruites par l'algorithme issu de la nouvelle approximation locale (formule (6.5)).*

Bibliographie

Bibliographie personelle

[1] S. Bonnet, A. Koenig, S. Roux, P. Hugonnard, R. Guillemaud, and P. Grangeat. Dynamic X-ray computed tomography. *Proceedings of the IEEE*, 91(10):1574–87, October 2003.

[2] L. Desbat, S. Roux, P. Grangeat, and A. Koenig. Efficient sampling in dynamic tomography. In *Fifth International Conference on Curves and Surfaces*, June 27 - July 3, 2002.

[3] L. Desbat, S. Roux, P. Grangeat, and A. Koenig. Sampling conditions of 3D fan beam X ray transform. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Saint Malo, 2003.

[4] L. Desbat, S. Roux, P. Grangeat, and A. Koenig. Sampling conditions of 3D parallel and fan-beam X-ray CT with application to helical tomography. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2377–90, June 2004.

[5] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Efficient acquisition protocol for cardiac dynamic CT. In *IEEE Medical Imaging Conference 2002*, Norfolk, Virginia, USA, 2002.

[6] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Efficient acquisition for periodic dynamic CT. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 50(5):1672–77, October 2003.

[7] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Exact fan-beam compensated reconstruction formula for time-dependent affine deformations. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Saint Malo, 2003.

[8] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Exact reconstruction in 2D dynamic CT: compensation of time-dependent affine deformations. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2169–82, June 2004.

[9] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Méthodes analytiques de compensation des déformations en tomographie dynamique. In *Congrès national d'analyse numérique (CANUM)*, Obernai, 2004.

[10] S. Roux, A. Koenig, L. Desbat, and P. Grangeat. Procédé de reconstruction d'une image tomographique par une méthode analytique comprenant une modélisation améliorée du mouvement de l'objet, Juin 2003. Brevet Français n° 03 07848.

Bibliographie en tomographie statique

[11] H. Benali and F. Peyrin. *Chapitre 4 : Les méthodes discrètes*, pages 111–39. Paris, Hermès Science Publication, 2002. Sous la direction de P. Grangeat.

[12] G. H. Chen. A new framework of image reconstruction from fan beam projections. *Medical Physics*, 30(6):1151–1161, June 2003.

[13] C.R. Crawford and K.F. King. Computed tomography scanning with simultaneous patient translation. *Medical Physics*, 17(6):967–82, November 1990.

[14] P.E. Danielsson, P. Edholm, and M. Seger. Towards exact 3d-reconstruction for helical cone-beam scanning of longs objects. a new detector arrangement and a new completeness condition. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Pittsburgh, 1997.

[15] S. R. Deans. *The Radon transform and some of its applications*. Wiley-Interscience, 1983.

[16] M. Defrise and R. Clack. A cone-beam reconstruction algorithm using shift-variant filtering and cone-beam backprojection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13:186–195, March 1994.

[17] M. Defrise, F. Noo, and H. Kudo. Rebinning-based algorithms for helical cone-beam CT. *Phys. Med. Biol.*, 46:2911–37, 2001.

[18] L. Desbat. *Échantillonnage efficace en tomographie.* PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, Octobre 1997.

[19] L. Desbat. Echantillonnage parallèle efficace en tomographie 3D. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 324*, pages 1193–1199, 1997.

[20] L. Desbat and C. Menessier. *Chapitre 3 : Conditions d'échantillonnage en tomographie*, pages 87–110. Paris, Hermès Science Publication, 2002. Sous la direction de P. Grangeat.

[21] L.A. Feldkamp, L.C. Davis, and J.W. Kress. Pratical cone-beam algorithm. *Optical Society of America*, 1:612–619, 1984.

[22] A. L. Goertzen, F. J. Beekman, and S. R. Chery. Effect of phantom voxelization in CT simulations. *Phys. Med. Biol.*, 29(4):492–98, 2002.

[23] P. Grangeat. *Analyse d'un sytème d'imagerie 3D par reconstructions à partir de radiographies X en géométrie conique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France, 1987.

[24] P. Grangeat. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. *Mathematical Methods in Tomography, G.T. Herman, A.K. Louis, F. Natterer, Lecture Notes in Mathematics*, pages 66–97, 1991.

[25] P. Grangeat, P. Sire, R. Guillemaud, and V. La. *Chapter 2 : Indirect cone-beam three-dimensional image reconstruction*, volume 30, pages 39–52 and 343–350. IOP Press, 1997. Editors : C. Roux and J-L. Coatrieux.

[26] C. Hamaker, K.T. Smith, D.C. Solmon, and S.L Wagner. The divergent beam x-ray transform. *Rocky Mountain J. Math.*, 10:253–283, 1980.

[27] D. Heuscher, K. Brown, and F. Noo. Redundant data and exact helical cone-beam reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2219–38, June 2004.

[28] J. Hsieh. *Computed Tomography. Principles, design, artifacts and recent advances*. SPIE Press, 2003.

[29] P. M. Joseph. An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-1(3):192–196, 1982.

[30] M. Kachelriess, S. Schaller, and W. Kalender. Advanced single-slice rebinning in cone-beam spiral CT. *Medical Physics*, 27:754–72, 2000.

[31] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomography Imaging*. IEEE Press, 1987.

[32] A. Katsevich. Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone beam CT. *Phys. Med. Biol.*, 47:2583–98, 2002.

[33] A. Katsevich. Theoretically exact filtered back-projection type inversion algorithm for spiral CT. *SIAM. J. Appl. Math.*, 62:2012–26, 2002.

[34] A. Katsevich. A general scheme for contructing inversion algorithms for cone beam CT. *International journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21:1305–1321, 2003.

[35] A. Katsevich, S. Basu, and J. Hsieh. Exact filtered backprojection reconstruction for dynamic pitch helical cone beam computed tomography. *Phys. Med. Biol.*, 49(14):3089–3103, 2004.

[36] H. Kudo, F. Noo, M. Defrise, and R. Clackdoyle. New super-short-scan algorithms for fan-beam and cone-beam reconstruction. In *IEEE Medical Imaging Conference 2002*, Norfolk, Virginia, USA, 2002.

[37] H. Kudo, T. Rodet, F. Noo, and M. Defrise. Exact and approximate algorithms for helical cone-beam CT. *Phys. Med. Biol.*, 49(13):2913–31, 2004.

[38] H. Kudo and T. Saito. Derivation and implementation of a cone-beam reconstruction algorithm for nonplanar orbits. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(1):196–211, 1994.

[39] T. Köhler, C. Bontus, K. Brown, D. Heuscher, M. Grass, G. Shechter, and R. Proksa. Evaluation of helical cone-beam CT reconstruction algorithms. In *IEEE Medical Imaging Conference 2002*, Norfolk, Virginia, USA, 2002.

[40] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.

[41] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, 2001.

[42] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short-scan. *Phys. Med. Biol.*, 47:2525–2546, July 2002.

[43] F. Noo, J. Pack, and D. Heuscher. Exact helical reconstruction using native cone-beam geometries. *Phys. Med. Biol.*, 48:3787–3818, 2003.

[44] J.D. Pack, F. Noo, and H. Kudo. Investigation of saddle trajectories for cardiac CT imaging in cone-beam geometry. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2317–36, June 2004.

[45] D. L. Parker. Optimal short-scan convolution reconstruction for fan-beam CT. *Medical Physics*, 9(2):245–257, 1982.

[46] J. Radon. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys.*, 69:262–267, 1917.

[47] L.A. Shepp and B.F. Logan. The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 21(1):21–43, 1974.

[48] H.K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM. J. Appl. Math.*, 43:546–552, 1983.

Bibliographie en tomographie dynamique

[49] C. Blondel, G. Malandain, R. Vaillant, and N. Ayache. 4D deformation field of coronary arteries from monoplane rotational X-ray angiography. In *Proc. Computer Assisted Radiology and Surgery*, volume 1256 of ICS (London: Elsevier, pages 1073–78, 2003.

[50] C. Blondel, R. Vaillant, G. Malandain, and N. Ayache. 3D tomographic reconstruction of coronary arteries using a precomputed 4D motion field. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2197–2208, June 2004.

[51] S. Bonnet, A. Koenig, P. Hugonnard, and P. Grangeat. Time delay analysis in online 4-D CT. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Saint Malo, 2003.

[52] C. Bontus, R. Proksa, J. Timmer, T. Köhler., and M. Grass. Movement artifacts in helical CT cone-beam reconstruction. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 199–202, Asilomar, 2001.

[53] D. P. Boyd and M. J. Lipton. Cardiac computed tomography. *Proceedings of IEEE*, 71:298–307, March 1983.

[54] J. Gunn Bronson. Cardiac imaging: big changes ahead. *Imaging economics*, pages 52–58, May 2003.

[55] H. Bruder, E. Maguet, K. Stierstorfer, and T. Flohr. Cardiac spiral imaging in Computed Tomography without ECG using complementary projections for motion detection. In *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 5032, pages 1798–1809, February 2003.

[56] H. Bruder, S. Schaller, B. Ohnesorge, and T. Mertelmeier. High temporal resolution volume heart imaging with multirow computed tomography. In *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 3661, pages 420–432, February 1999.

[57] H. Bruder, K. Stierstorfer, B. Ohnesorge, S. Schaller, and T. Flohr. A novel reconstruction scheme for cardiac volume imaging with MSCT providing cone correction. In *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 4684, February 2002.

[58] C. R. Crawford. Motion artefact reduction in projection imaging, October 1993. U.S Patent 5251128.

[59] C. R. Crawford and N.J. Pelc. Method for reduction motion induced artifacts in projection imaging, February 1991. U.S Patent 4994965.

[60] C. R. Crawford and C.J. Ritchie. Localized motion artefact reduction in projection imaging, February 1994. U.S Patent 5297276.

[61] C.R. Crawford, K.F. King, C.J. Ritchie, and J.D. Godwin. Respiratory compensation in projection imaging using a magnification and displacement model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15:327 –332, 1996.

[62] J. de Murcia. *Reconstruction d'images cardiaques en tomographie d'émission monophotonique à l'aide de modèles spatio-temporels*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, juin 1996.

[63] T. Flohr and B. Ohnesorge. Heart rate adaptative optimization of spatial and temporal resolution for electrocardiogram-gated multislice spiral CT of the heart. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 25(6):907–923, 2001.

[64] E. C. Ford, G. S. Mageras, E. Yorke, and C. C. Ling. Respiratory-correlated spiral CT: a method of measuring respiratory-induced anatomic motion for radiation treatment planning. *Medical Physics*, 30(1):88–97, January 2003.

[65] D. R. Gilland, B. A. Mair, J. E. Bowsher, and R. J. Jaszczak. Simultaneous reconstruction and motion estimation for gated cardiac ECT. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 49:2344–2349, October 2002.

[66] P. Grangeat, A. Koenig, T. Rodet, and S. Bonnet. Theoretical framework for a dynamic cone-beam reconstruction algorithm based on a dynamic particle model. *Phys. Med. Biol.*, 47(15):2611–2625, August 2002.

[67] M. Grass, R. Manzke, T. Nielsen, P. Koken, R. Proksa, M. Natanzon, and G. Shechter. Helical cardiac cone beam reconstruction using retrospective ECG gating. *Phys. Med. Biol.*, 48:3069–3083, September 2003.

[68] J. Hsieh. Adaptative motion artifact suppression in CT. In *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 2847, pages 429–427, 7-9 Aug. 1996,Denver, CO, USA, 1996.

[69] J. Hsieh. Motion artifact reduction with predictive gating. In *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 2824, 4-5 Aug. 1996,Denver, CO, USA, 1996.

[70] J. Hsieh. Analysis of the temporal response of computed tomography fluoroscopy. *Med. Phys.*, 24(5):665–675, May 1997.

[71] J. Hsieh, J. Mayo, K. Acharya, and T. Pan. Adaptative phase-coded reconstruction for cardiac CT. In Anne V. Clouh Editors, editor, *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 3978, pages 501–505, 2000.

[72] M. Kachelriess, T. Fuchs, R. Lapp, D.-A. Sennst, S. Schaller, and W. Kalender. Image to volume weighting generalized ASSR for arbitrary pitch 3D and phase-correlated 4D spiral cone-beam CT reconstruction. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Asilomar, 2001.

[73] M. Kachelriess and W. A. Kalender. Electrocardiogram-correlated image reconstruction from subsecond spiral computed tomography scans of the heart. *Medical Physics*, 25(12):2417–2431, December 1998.

[74] M. Kachelriess, M. Knaup, and W. A. Kalender. Extended parallel backprojection for standard three-dimensional and phase-correlated four-dimensional axial and spiral cone-beam CT with arbitrary pitch, arbitrary cone-angle, and 100 % dose usage. *Medical Physics*, 31(6):1623–41, June 2004.

[75] M. Kachelriess, D. Sennst, W. Maxlmoser, and W. A. Kalender. Kymogram detection and kymogram-correlated image reconstruction from subsecond spiral computed tomography scans of the heart. *Medical Physics*, 29(7):1489–1503, July 2002.

[76] M. Kachelriess, S. Ulzeimer, and W. A. Kalender. Ecg-correlated imaging of the heart with subsecond multislice spiral CT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19:888–901, September 2000.

[77] M. Kachelriess, S. Ulzeimer, and W. A. Kalender. Ecg-correlated reconstruction from subsecond multi-slice spiral CT scans of the heart. *Medical Physics*, 27(5):1881–1902, August 2000.

[78] A. Koenig, S. Bonnet, P. Grangeat, U. Van Stevendaal, M. Grass, and R. Proksa. First results on motion compensated dynamic reconstruction for CT fluoroscopy. In *European Congress on Radiology*, Wien (Austria), 2004.

[79] A. Koenig, P. Grangeat, S. Bonnet, and P. Hugonnard. Dynamic reconstruction for radiotherapy planning. In *Proc. Computer Assisted Radiology and Surgery*, pages 521–526, Paris, 2002.

[80] J. Li, R. J. Jaszczak, H. Wang, and R.E. Coleman. A filtered-backprojection algorithm for fan-beam SPECT which corrects for patient motion. *Phys. Med. Biol.*, 40:283–294, 1995.

[81] N.C. Linney and P.H. Gregson. Organ motion detection in CT images using opposite rays in fan-beam projections systems. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(11):1109–1122, November 2001.

[82] W. Lu and T.R. Mackie. Tomographic motion detection and correction directly in sinogram space. *Phys. Med. Biol.*, 47:1267–1284, April 2002.

[83] R. Manzke, M. Grass, T. Nielsen, G. Shechter, and D. Hawkes. Adaptative temporal resolution optimization in helical cardiac cone beam CT reconstruction. *Medical Physics*, 30(12):3072–80, December 2003.

[84] B. Ohnesorge, C. Becker, T.Flohr, and M.F. Reiser. *Multi-slice CT Cardiac Imaging*. Springer, 2002.

[85] B. Ohnesorge, T. Flohr, C. Becker, A. F. Kopp, U. J. Schoepf, U. Baum, A. Knez, K. Klingenbeck-Regn, and M. F. Reiser. Cardiac imaging by means of electrocardiographically gated multisection spiral CT : Initial experience. *Radiology*, 217:564–71, 2000.

[86] N. J. Pelc and G. H. Glover. Method for reducing image artifacts due to projection measurement inconsistencies, April 1986. U.S Patent 4 580 219.

[87] C. J. Ritchie, J. D. Godwin, C. R. Crawford, W. Stanford, H. Anno, and Y. Kim. Minimum scan speeds for suppression of motion artefacts. *Radiology*, 185:37–42, October 1992.

[88] C.J. Ritchie, C.R. Crawford, J.D. Godwin, and K.F. King Land Yongmin Kim. Correction of computed tomography motion artifacts using pixel-specific back-projection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15:333 –342, 1996.

[89] C.J. Ritchie, J. Hsieh, M.F. Gard, J.D. Godwin, Y. Kim, and C. R. Crawford. Predictive respiratory gating : a new method to reduce motion artifacts on CT scans. *Radiology*, 190:847–852, 1994.

[90] E. L. Ritman, L. D. Harris, J. H. Kinsey, and R. A. Robb. Computed tomographic imaging of the heart : The dynamic spatial reconstructor. *Radiologic Clinics of North America*, 18:547–556, December 1980.

[91] W. P. Segars, D. S. Lalush, and B.M.W. Tsui. A realistic spline-based dynamic heart phantom. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 46:503–06, 1999.

[92] G. Shechter, G. Naveh, A. Altman, R. Proksa, and M. Grass. Cardiac image reconstruction on a 16-slice CT scanner using a retrospectively ECG-gated, multi-cycle 3D backprojection algorithm. In M. Sonka and J.M. Fitzpatrick Editors, editors, *SPIE Conf. on Med. Im.*, volume 5032, pages 1820–28, San Diego ,18-20 Feb 2001, 2003.

[93] K. Sourbelle and W. A. Kalender. Generalization of Feldkamp reconstruction for clinical spiral cone-beam CT. In *Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Saint Malo, 2003.

[94] M.K. Stehling, R. Turner, and P. Mansfield. Echo-planar imaging : magnetic resonance imaging in a fraction of a second. *Science*, 254:43–50, 1991.

[95] K. Tagushi and H. Anno. High temporal resolution for multislice helical computed tomography. *Medical Physics*, 27(5):861–872, May 2000.

[96] S. Ulzheimer. *Cardiac Imaging with X-ray Computed Tomography : New Approaches to Image Acquisition and Quality Assurance*. PhD thesis, Berichte aus dem Institut für Medizinische Physik, June 2001.

[97] G. Wang and M. W. Vannier. Preliminary study on helical CT algorithm for patient motion estimation and compensation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(2):205–11, June 1995.

[98] G. Wang, S. Zhao, and D. Heuscher. A knowledge-based cone-beam X-ray CT algorithm for dynamic volumetric cardiac imaging. *Medical Physics*, 29(8):1807–1822, August 2002.

[99] M. Wernick, J. Infusino, and M. Milosevic. Fast Spatio-Temporal Image Reconstruction for Dynamic PET. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(3):185–195, 1999.

[100] N. P. Willis and Y. Bresler. Optimal scan for time-varying tomography i : Theoretical analysis and fundamental limitations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(3):642–53, May 1995.

[101] N. P. Willis and Y. Bresler. Optimal scan for time-varying tomography ii : Efficient design and experimental validation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(3):654–66, May 1995.

[102] D. Zerfowski. Motion artifact compensation in CT. In *SPIE Conf. on Med. Im.*, San Diego, 1998.

Autres références

[103] Pour la science : dossier spécial sur le coeur, Juillet 2003.

[104] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique et ondelettes*. Dunod, 2000.

[105] A. C. Guyton and J. E. Hall. *Textbook of medical physiology, 9th ed.* W. B. Saunders Co, Philadelphia, 2000.

[106] C. Tisseron. *Géométries affine, projective et euclidienne*. Hermann, 1983.

FOLIO ADMINISTRATIF
THÈSE SOUTENUE DEVANT L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER DE GRENOBLE

NOM : Roux **DATE DE SOUTENANCE :** 14 octobre 2004
PRÉNOM : Sébastien

TITRE : Modèles dynamiques en tomographie. Application à l'imagerie cardiaque.

RÉSUMÉ :

Les techniques mathématiques de reconstruction d'image jouent un rôle important dans le domaine médical. Elles permettent d'exploiter, par résolution d'un problème inverse, les mesures issues d'appareils médicaux comme le scanner pour obtenir une image volumique représentant la répartition spatiale d'une propriété, comme la densité des tissus. Les progrès des scanners rendent désormais possible l'étude dynamique de certains organes, comme le coeur. Cependant, les techniques de reconstruction classiques doivent être améliorées pour prendre en compte les évolutions des organes durant l'acquisition des mesures, qui provoquent une perte de qualité et donc d'information dans les images reconstruites. L'objectif de ce travail de thèse est d'investiguer l'usage de modèles additionnels permettant de régulariser le problème de reconstruction tomographique.

Dans une première étude, nous approfondissons les méthodes couramment utilisées en tomographie cardiaque basées sur l'utilisation d'un modèle de périodicité de l'évolution. Nous étudions les problèmes de synchronisation dans les géométries parallèles et divergentes et leur lien avec l'échantillonnage des mesures. Nous proposons par ailleurs un schéma de reconstruction amélioré dans le cas des géométries divergentes.

La seconde étude concerne les méthodes dites de compensation du mouvement, qui utilisent dans l'algorithme de reconstruction un modèle de déformation de la scène connu a priori. Nous proposons des méthodes analytiques de reconstruction qui compensent les déformations affines dépendant du temps, en établissant des conditions d'admissibilité et des formules d'inversion exactes.

MOTS CLÉS : Tomographie, Imagerie dynamique, Imagerie cardiaque, Déformation, Synchronisation, Modèle affine.

TITLE : Dynamic models for tomography. Application to cardiac imaging.

ABSTRACT :

Image reconstruction techniques are a fundamental tool in medicine. Applied to the inverse problem in X-ray Computed Tomography (XRCT), they give access to the map of tissues density. With the technical progress of CT scanner, dynamic imaging of organs such as the heart is now feasible. However the classical mathematical reconstruction methods have to be improved to take into account the evolution of the organs during the acquisition, which can lead to strong artifacts in the images. The goal of this thesis work is to investigate the use of additional models to regularize the reconstruction problem.

We first study the classical model used in cardiac CT, based on the heart periodic evolution. We treat the synchronization problem in the parallel and divergent acquisition geometries, linking it with sampling theory. Moreover we propose an improved reconstruction scheme for the divergent geometries.

The second part of this work deals with the motion compensation methods, where an a priori known model of spatial deformation is integrated into the reconstruction process. We extend the class of deformations where admissibility conditions and analytic reconstruction formulas exist by considering the class of general time-dependent affine deformations.

KEYWORDS : Tomography, Dynamic imaging, Cardiac imaging, Deformation, Synchronization, Affine model.

LABORATOIRE	: TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525 Institut d'Ingénierie de l'Information de Santé Faculté de Médecine - 38706 La Tronche cedex - France
DIRECTEUR DE THÈSE	: Laurent DESBAT
RESPONSABLES CEA	: Pierre GRANGEAT et Anne KOENIG
PRÉSIDENTE DU JURY	: V. PERRIER
COMPOSITION DU JURY	: D. NOLL, R. CLACKDOYLE, I. MAGNIN, L. DESBAT, P. GRANGEAT.