



Etude asymptotique de certains estimateurs dans des modèles ARMA spatiaux

Aude Illig

► To cite this version:

Aude Illig. Etude asymptotique de certains estimateurs dans des modèles ARMA spatiaux. Mathématiques [math]. INSA de Toulouse, 2004. Français. NNT : . tel-00007866

HAL Id: tel-00007866

<https://theses.hal.science/tel-00007866>

Submitted on 29 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 751

THÈSE

présentée devant

**L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES
DE TOULOUSE**

en vue de l'obtention du

DOCTORAT

Discipline : Mathématiques appliquées

Spécialité : Statistiques

par

Aude ILLIG

**Etude asymptotique de certains estimateurs pour
des modèles ARMA spatiaux**

Soutenue le 15/12/2004 devant le jury composé de
Mesdames et Messieurs les Professeurs :

Alain BERLINET	Université de Montpellier II	Rapporteur
Fabrice GAMBOA	Université de Toulouse III	Examinateur
Xavier GUYON	Université de Paris I	Rapporteur
Béatrice LAURENT-BONNEAU	INSA de Toulouse	Examinatrice
Christine THOMAS-AGNAN	Université de Toulouse I	Examinatrice
Benoît TRUONG-VAN	INSA de Toulouse	Directeur de thèse

**Laboratoire de Statistique et Probabilités
UMR CNRS 5583, Université Paul Sabatier, Toulouse III**

*À toi,
Rien qu'à toi,
Mon Âme soeur.*

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Benoît TRUONG-VAN d'avoir encadré mes travaux de recherche. Pendant ces années de thèse, ses larges connaissances en probabilités ainsi que ses nombreux conseils m'ont guidé dans ma démarche scientifique. Je lui suis également reconnaissante pour ses encouragements dans les moments plus difficiles et pour sa grande gentillesse.

Je suis très touchée de l'honneur que me font Alain BERLINET et Xavier GUYON en acceptant de rapporter ma thèse et les remercie pour leur lecture approfondie de mon manuscrit.

Je remercie vivement Christine THOMAS-AGNAN et Béatrice LAURENT-BONNEAU pour avoir accepté sans hésiter de faire partie de mon jury.

Merci à Fabrice GAMBOA pour ses cours de DEA sur la statistique asymptotique mais aussi pour sa lecture attentive de mon manuscrit. Ses remarques m'ont permis d'en améliorer la rédaction et plusieurs de ses questions m'ont permis de voir les choses sous un autre angle.

Je tiens aussi à remercier Laure COUTIN, Monique PONTIER et Michel LEDOUX qui m'ont donné au travers de leurs enseignements le goût pour les probabilités. Je les remercie également pour leur écoute et le soutien qu'ils m'ont apporté.

Je tiens à exprimer ma gratitude à l'équipe de recherche du LSP où j'ai effectué ma thèse et remercie également l'équipe enseignante de l'INSA pour son accueil très chaleureux.

Mes remerciements vont aussi aux doctorants et anciens doctorants du LSP que j'ai eu le plaisir de cotoyer pendant ces quelques années. Merci pour les pauses café et nos longues conversations...

Je n'oublie pas, sur ses conseils, de remercier tout spécialement Solenn.

Merci aussi à Elie de m'avoir accompagnée pendant cette longue période de rédaction. Sans lui cet été, l'INSA aurait été un désert !

Enfin, je remercie particulièrement Caroline et Céline pour tous les moments que nous avons partagés depuis la licence jusqu'à cette dernière année de thèse.

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires et notations	17
1.1 Introduction	17
1.2 Relations d'ordre - Ensembles indexants	18
1.2.1 Ordre total et ordre partiel	18
1.2.2 Ensembles indexants	19
1.3 Modèles ARMA spatiaux quadrantaux	19
1.3.1 Définitions	19
1.3.2 Modèles ARMA et différences de martingales	21
1.4 Martingales fortes	22
1.4.1 Définitions	22
1.4.2 Propriétés	25
2 Théorèmes de la limite centrale et principe d'invariance pour des martingales fortes	29
2.1 Introduction	29
2.2 Théorème de la limite centrale de Tjøstheim (1983) pour des différences de martingales quadrantaux	31
2.3 Autres résultats asymptotiques pour des différences de martingales spatiales	33
2.3.1 Théorème de la limite centrale de Huang (1992)	33
2.3.2 Théorème de la limite centrale de Nahapetian (1995)	34
2.3.3 Principe d'invariance de Poghosyan et Roelly (1998)	35
2.4 Théorème de la limite centrale pour des martingales fortes sous condition de Lindeberg conditionnelle	35
2.4.1 Conditional Lindeberg central limit theorem	36
2.4.2 Proofs	38
2.5 Principe d'invariance pour des martingales fortes sous condition de Lindeberg conditionnelle	43
2.5.1 Notations	43
2.5.2 Une inégalité de martingales fortes	44
2.5.3 Un premier principe d'invariance	46
2.5.4 Principe d'invariance sous condition de Lindeberg conditionnelle	52

3	Résultats asymptotiques pour des champs ARMA	59
3.1	Introduction	59
3.2	Champs AR quadrantaux de Tjøstheim (1983)	61
3.2.1	Estimateurs	61
3.2.2	Consistance et normalité asymptotique des estimateurs	63
3.2.3	Identification de l'ordre p du modèle	65
3.3	Autres champs ARMA	65
3.3.1	Champs ARMA de Huang et Anh (1992)	65
3.3.2	Champs ARMA de Etchison, Pantula et Brownie (1994) . . .	69
3.4	Estimateur des moindres carrés ordinaires dans des modèles ARMA spatiaux quadrantaux	70
3.4.1	Estimateur des moindres carrés	71
3.4.2	Non consistance	71
3.5	Estimateurs consistants et asymptotiquement normaux dans des modèles ARMA spatiaux quadrantaux	78
3.5.1	Preliminaries and assumptions	78
3.5.2	Some asymptotic results for linear random fields	81
3.5.3	Estimation and identification for a spatial ARMA	84
4	Une étude en simulation de modèles ARMA spatiaux	93
4.1	Introduction	93
4.2	Simulation de champs ARMA	94
4.2.1	Choix des polynômes	95
4.2.2	Modèles étudiés en simulation	96
4.2.3	Représentations graphiques	97
4.3	Identification de modèles $MA(q)$ spatiaux	101
4.3.1	Résultats théoriques	101
4.3.2	Procédure d'identification	104
4.4	Identification de modèles $AR(p)$ spatiaux	109
4.4.1	Résultats théoriques	109
4.4.2	Procédure d'identification	112
4.5	Identification de modèles $ARMA(p,q)$ spatiaux	114
A	Programmes	117
B	Représentations graphiques et résultats des simulations	137
	Bibliographie générale	170

Introduction

Dans des domaines variés tels que la météorologie, l'océanographie, la géologie ou encore l'économétrie, de nombreuses situations d'étude conduisent à récolter des données de type spatial, c'est-à-dire des observations sur une grille ou encore sur un réseau tridimensionnel. Ainsi, l'intérêt pour les modèles spatiaux sur un réseau s'est largement accru au cours de ces dernières années. Les champs de Markov et de Gibbs sont les modèles les plus étudiés dans la littérature, avec comme principale application, la restauration d'image.

Nous nous intéressons à une classe de champs aléatoires sur un réseau appelés modèles ARMA (Autoregressive Moving Average) spatiaux. Le but de la thèse est d'étudier les propriétés asymptotiques de certaines statistiques permettant d'estimer les paramètres autorégressifs et de déterminer les ordres de ces modèles. Nous établissons d'abord des théorèmes limites pour des tableaux de martingales spatiales sur un réseau. Puis, nous obtenons des propriétés asymptotiques de certains estimateurs pour des modèles ARMA spatiaux quadrantaux. Nous appliquons ensuite ces propriétés en les complétant, à l'identification de ces modèles.

Les champs aléatoires ARMA généralisent la notion, bien connue pour des séries temporelles, de processus ARMA. Cependant, contrairement au cas temporel, la distinction entre le passé et le futur n'apparaît plus de manière aussi naturelle. Par conséquent, plusieurs types de modèles ARMA spatiaux peuvent être définis (voir Guyon (1995) [Guy95]), selon la notion d'ordre ou de "passé" que l'on souhaite considérer.

Nous considérons ici les champs ARMA spatiaux quadrantaux étudiés par Tjøstheim (1978) [Tjø78] et (1983) [Tjø83] : Il s'agit de champs $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ indexés par $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant un équation du type

$$X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t + \sum_{k \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle} \theta_k \epsilon_{t-k} \quad (1)$$

où les ensembles $S\langle \mathbf{0}, r \rangle$ sont définis à l'aide de l'ordre partiel usuel sur $\mathbb{Z}^d$ et où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de bruit blanc. Comme Tjøstheim (1983), nous nous limitons, dans ce travail, aux champs causaux, autrement dit ceux admettant une expression unilatérale de la forme suivante

$$X_t = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, \infty]} \psi_j \epsilon_{t-j}.$$

L'étude de ces champs ARMA spatiaux stationnaires présente plusieurs intérêts. D'une part, ils peuvent être des modèles judicieux pour représenter certaines données récoltées sur un réseau puisque, comme dans le cas des séries temporelles, un champ stationnaire peut être approché par un champ ARMA de dimension paramétrique relativement faible. D'autre part, ils peuvent être utilisés comme moyen de simulation de champs aléatoires complexes tels que ceux vérifiant une équation de Ornstein-Uhlenbeck de dimension deux pour le drap Brownien. Comme décrit par Carmona, Coutin et Montseny (voir [CCM00]), les champs vérifiant l'équation de Ornstein-Uhlenbeck, discrétisés par rapport au double indice temporel, peuvent être vus comme des champs ARMA quadrantaux.

Le cas des champs AR quadrantaux a été étudié par de nombreux auteurs dont Tjøstheim ([Tj87], [Tj83]), Ha et Newton (1993) (voir [HN93]) et Choi (1997) (voir [Cho97]). Nous nous sommes particulièrement intéressés aux résultats obtenus par Tjøstheim (1983). Dans cet article, Tjøstheim étudie le comportement asymptotique des estimateurs des moindres carrés $\hat{\phi}_p = (\hat{\phi}_{p,j})_{j \in S(\mathbf{0},p]}$ et de Yule-Walker des coefficients $\phi_p = (\phi_j)_{j \in S(\mathbf{0},p]}$ d'un modèle AR quadrantal causal. Il démontre, sous certaines hypothèses, la consistance des deux estimateurs ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_p$:

$$N^{d/2}(\hat{\phi}_p - \phi_p) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1}),$$

où Γ_p est la matrice des covariances $(\gamma(i-j))_{i,j \in S(\mathbf{0},p]}$.

Cette étude est faite dans le cadre d'innovations $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) mais également pour des innovations vérifiant la propriété de différence de martingales quadrantaux. Afin d'obtenir la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés, Tjøstheim étudie certaines propriétés de martingales spatiales, obtenues par sommation de différences de martingales quadrantaux. Il est alors amené à généraliser, à un tableau de martingales spatiales $(X^n)_n$, le premier théorème de la limite centrale de Hall et Heyde (1980) (voir [HH80]). Cependant, certaines hypothèses de ce théorème, notamment les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \\ \mathbb{E}(\max_{x \in \Delta_n} (X_{\{x\}}^n)^2) &\text{ borné en } n \end{aligned}$$

sont difficiles à satisfaire pour des applications statistiques.

Nous avons alors cherché à établir un théorème de la limite centrale sous d'autres hypothèses, statistiquement plus adéquates. Ainsi, pour le même type de martingales spatiales, mais sous la condition de Lindeberg conditionnelle suivante

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

nous avons obtenu une extension au cas spatial du théorème correspondant de Hall et Heyde (1980) pour des processus indexés par le temps.

Afin de démontrer ce résultat, nous avons adapté, au cas discret, le formalisme de processus indexés par des ensembles A d'une collection indexante $\mathcal{A}$ de Ivanoff et Merzbach (2000) (voir [IM00]) et introduit la notion de martingale forte sur un réseau. Une telle martingale sur un réseau se caractérise par des accroissements $X_{\{x\}}$ en chaque singleton vérifiant la propriété de différence de martingales quadrantes considérée par Tjøstheim (1983). L'introduction de ce formalisme nous a permis de mieux distinguer les termes $X_{\{x\}}$ jouant le rôle d'accroissements d'autres termes $X_A = \sum_{y \in A} X_{\{y\}}$ formés par les sommes de tels accroissements et de pouvoir ainsi adapter les techniques de démonstrations utilisées pour les processus indexés par le temps.

Ensuite, nous avons étendu ce théorème de la limite centrale pour des martingales fortes à un principe d'invariance également sous la condition de Lindeberg conditionnelle, obtenant ainsi une convergence dans la version multidimensionnelle des fonctions càd-làg. Ce théorème constitue une généralisation au cas spatial des résultats de McLeish (1974) (voir [McL74]).

L'étude des champs ARMA autres que AR s'avère plus complexe. Contrairement à la dimension un, Ha et Newton (1993) ont démontré que l'estimateur de Yule-Walker des coefficients autorégressifs $(\phi_j)_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$ du modèle (1), bien que consistant, est biaisé pour la normalité asymptotique. De manière analogue, dans le cas de processus CAR à temps continu, Souchet et Guyon (2002) (voir [SG02]) ont démontré que l'estimateur de Yule-Walker obtenu à partir d'une observation discrète du processus est asymptotiquement normal mais biaisé.

Il est alors nécessaire de considérer de nouveaux estimateurs du vecteur des coefficients autorégressifs. Après vérification de la non consistance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires, nous avons défini un nouvel estimateur $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)} = (\hat{\phi}_{\lambda,j}^{(\nu)})_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle}$ déduit des équations de Yule-Walker généralisées suivantes

$$\mathbb{E}(Y_{\lambda,t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}) = 0 \quad \forall j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle,$$

avec

$$Y_{\lambda,t}^{(\nu)} = X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \phi_{\lambda,j}^{(\nu)} X_{t-j}.$$

Cet estimateur est différent de l'estimateur de Yule-Walker généralisé mais coïncide dans le cas d'un modèle $\text{AR}(p)$ de paramètre p connu, c'est-à-dire lorsque $\lambda = p$ et $\nu = \mathbf{0}$, avec l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_p$.

Dans le cas d'un modèle $\text{ARMA}(p, q)$, $q \neq 0$ la consistance de l'estimateur $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ peut être obtenue, pour des bruits $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ vérifiant la propriété de différence de martingales quadrantes, de manière analogue au cas AR. Mais, contrairement au cas d'un champ AR, le terme étudié pour obtenir la normalité asymptotique n'est plus une martingale sous l'hypothèse de différence de martingales quadrantes. En dimension un, Truong-Van (1995) définit dans [TV95] la notion de suite

semi-stationnaire de processus linéaires (SSLP), proche des mixingales de Mc Leish (voir [McL75], [McL77]) pour étudier ce terme et obtenir la normalité asymptotique de l'estimateur correspondant. Une démarche possible pour établir la normalité asymptotique de $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ lorsque les bruits $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ sont des différences de martingales quadrantaes, consisterait à étendre cette approche au cas spatial en définissant la notion de "suite semi-stationnaire de champs aléatoires linéaires".

Nous nous sommes limités cependant, dans notre étude, au cas de bruits i.i.d. Nous obtenons, dans ce cadre, la consistance de $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ ainsi que sa normalité asymptotique :

$$N^{d/2}(\phi_\lambda^{(\nu)} - \hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\lambda^{(\nu)} V \Sigma_\lambda^{(\nu)'})$$

où $\Sigma_\lambda^{(\nu)}$ est l'inverse de la matrice des covariances $\Gamma_\lambda^{(\nu)}$ et où pour tous $u, v \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$, $V(u, v)$ est donné par la formule suivante

$$V(u, v) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h) \gamma_x(h - u + v) + \gamma_{yx}(-h - \nu - v) \gamma_{yx}(h - \nu - u).$$

Pour établir le résultat ci-dessus, nous avons été amenés à utiliser, mais aussi à étendre, des propriétés sur les covariances et covariances croisées empiriques de champs aléatoires linéaires $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ de Choi (2000) (voir [Cho00]), c'est-à-dire des champs admettant une écriture de la forme suivante

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \psi_j \epsilon_{t-j}$$

avec (ϵ_t) des variables aléatoires i.i.d. Les champs MA quadrantaes dont les bruits sont i.i.d., constituent un cas particulier des champs linéaires.

Nous proposons ensuite dans notre travail, une procédure pour déterminer les ordres p et q de modèles $\text{AR}(p)$ et $\text{ARMA}(p, q)$ spatiaux fondée sur les estimateurs $\hat{\phi}_{\lambda, \lambda}^{(\nu)}$, que nous avons considérés puisqu'ils constituent une version spatiale de la fonction d'autocorrélation partielle généralisée empirique pour des séries temporelles (voir Woodward et Gray (1981) [WG81], Choi (1992) [Cho92]). Le modèle identifié, les paramètres autorégressifs $\phi_p^{(q)}$ sont ensuite estimés par l'estimateur consistant $\hat{\phi}_p^{(q)}$.

Pour les modèles $\text{MA}(q)$ spatiaux, nous proposons aussi une procédure d'identification fondée sur la fonction d'autocorrélation empirique, après avoir établi ses propriétés asymptotiques.

Enfin, nous donnons, à partir de nombreuses simulations, une étude à "taille finie" des estimateurs et des procédures d'identification que nous avons considérés.

Les différents résultats que nous avons obtenus durant cette thèse sont exposés, dans ce manuscrit, de la manière suivante.

Le Chapitre 1 est consacré à l'introduction des notations et outils que nous employons dans la suite. En particulier, nous rappelons la définition de champs ARMA

quadrantaux dont l'étude sera faite dans le Chapitre 3 et définissons les martingales fortes qui seront étudiées au Chapitre 2.

Le Chapitre 2 est dédié à l'étude de théorèmes asymptotiques que nous proposons pour des tableaux de martingales fortes, après une revue des résultats dans la littérature sur le sujet.

Le théorème de la limite centrale, que nous avons obtenu, a donné lieu à un article soumis [ITV02] intitulé “Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales”. Il constitue le corps de la Section 2.4. La Section 2.5 est consacrée à la démonstration du principe d'invariance correspondant.

L'étude des champs ARMA quadrantaux est effectuée dans le Chapitre 3. Afin de mieux situer notre étude, nous rappelons tout d'abord les résultats de Tjøstheim (1983) puis des résultats concernant l'estimation des paramètres et la détermination des ordres dans d'autres modèles ARMA spatiaux.

Nous démontrons la non consistance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires dans la Section 3.4. Puis, dans la Section 3.5, dont le corps est constitué par l'article soumis [ITV04] intitulé “Asymptotic results for spatial ARMA models”, nous introduisons l'estimateur $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ obtenu à partir des équations de Yule-Walker généralisées et démontrons la consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur.

Enfin, le Chapitre 4 est consacré à l'étude en simulation de modèles ARMA spatiaux quadrantaux. Nous donnons d'abord des représentations graphiques de plusieurs champs simulés afin de visualiser leur comportement. Ensuite, à partir des simulations pour différents modèles ARMA spatiaux, nous présentons une étude de nos procédures d'identification de modèles $MA(q)$, $AR(p)$ et $ARMA(p,q)$ et des estimateurs retenus pour les paramètres autorégressifs.

Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé

L^p est l'ensemble des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre p fini

$\sigma\{\cdot\}$ est la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $\{\cdot\}$

Pour deux sous-tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

Pour deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E , $A \setminus B$ est l'ensemble $A \cap B^c$ où B^c est le complémentaire de B dans E

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Z}^d$ est le produit cartésien de d copies de $\mathbb{Z}$

$\xrightarrow{\mathbb{P}}$ désigne la convergence en probabilité

$\xrightarrow{p.s.}$ désigne la convergence presque sûre

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en loi

$\xrightarrow{\mathcal{L}} (stable)$ désigne la convergence en loi stable

$\xrightarrow{L^p}$ désigne la convergence dans L^p

$\xrightarrow{L^1} (faiblement)$ désigne la convergence faible dans L^1

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$ désigne la convergence dans l'espace de dimension d des fonctions càd-làg

Chapitre 1

Préliminaires et notations

Dans ce chapitre nous précisons le cadre dans lequel nous étudierons le comportement asymptotique de certains estimateurs des coefficients d'un modèle ARMA spatial, tout en donnant les définitions, notations et outils qui seront utilisés tout au long de la thèse.

1.1 Introduction

Plusieurs définitions de modèles ARMA spatiaux, indexés par le réseau $\mathbb{Z}^d$ de dimension $d \geq 2$, ont été données dans la littérature. Ces définitions diffèrent principalement selon le choix des valeurs voisines dont est supposé dépendre un point du réseau. Ce choix permet de définir une structure de passé au sens large pour le modèle. Il est alors nécessaire de préciser le type de passé que nous considérons pour définir le modèle ARMA spatial. Nous devons, de plus, indiquer les hypothèses que nous considérons pour les innovations du champ ARMA.

Ces innovations sont, la plupart du temps, supposées indépendantes et identiquement distribuées mais on peut aussi affaiblir ces hypothèses en considérant que les innovations sont des différences de martingales. Or, en dimension $d \geq 2$, plusieurs types de différences de martingales ont été définies et nous précisons, dans ce chapitre, lesquelles nous avons retenues.

Les définitions de champs ARMA et de différences de martingales spatiales, différant principalement de part la notion d'ordre choisie sur le réseau, nous rappelons, dans une première partie, les deux principales relations d'ordre que nous considérerons sur $\mathbb{Z}^d$. Nous introduisons également certains sous-ensembles de $\mathbb{Z}^d$ dont nous ferons usage dans la définition de champs ARMA quadrantaux mais aussi pour indexer certains champs.

Nous précisons ensuite la définition de modèle ARMA spatial quadrantal de Tjøstheim (1978) (voir [Tjø78]) qui sera utilisée dans l'étude du Chapitre 3 ainsi que les hypothèses sur les innovations et sur le champ lui-même, que nous serons amenés à considérer lors des démonstrations du Chapitre 3.

Enfin, dans une dernière partie, nous introduisons la notion de martingales fortes, dont les accroissements possèdent la propriété de différence de martingales quadrantes de Tjøstheim (1983) (voir [Tjø83]) et pour lesquelles nous démontrerons au Chapitre 2 un théorème centrale limite et le principe d'invariance correspondant sous condition de Lindeberg conditionnelle. Il s'agit de champs indexés par les ensembles introduits à la Section 1.2 et vérifiant la propriété de martingale forte de Ivanoff et Merzbach (2000) (voir [IM00]). Pour définir ce type de martingale, nous avons adapté au cas dicret le formalisme de Ivanoff et Merzbach (2000) pour des champs indexés par des collections indexantes continues. Ce formalisme rigoureux peut sembler abstrait mais permet de synthétiser certaines notations et surtout d'exposer certains résultats et preuves de manière plus claire, dans la Section 2.4 du Chapitre 2. Nous donnons, pour ce type de martingales, les principales propriétés qui seront utilisées dans le Chapitre 2.

1.2 Relations d'ordre - Ensembles indexants

Nous notons $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et pour $d \geq 2$, $\mathbb{Z}^d$ le produit cartésien de d copies de $\mathbb{Z}$. Dans toute la suite, nous utiliserons deux principales indexations de champs aléatoires en considérant :

- des champs indexés par des points de $\mathbb{Z}^d$,
- des champs indexés par des sous-ensembles de $\mathbb{Z}^d$, lorsqu'il sera fait usage de martingales spatiales.

Sur $\mathbb{Z}^d$, nous définissons, dans le paragraphe suivant, l'ordre partiel usuel et l'ordre lexicographique. Ces notions d'ordre vont nous permettre de préciser la notion de passé et de présent considérée dans la définition de martingales spatiales et de champs ARMA. Ainsi, nous pourrons définir certains ensembles utiles à la description de modèles ARMA spatiaux mais aussi employés pour définir la collection indexante de martingales fortes.

1.2.1 Ordre total et ordre partiel

Sur $\mathbb{Z}$, la notion d'ordre est claire. En revanche lorsque $d \geq 2$, plusieurs ordres peuvent être définis sur $\mathbb{Z}^d$. Nous donnons ici les deux ordres que nous utiliserons par la suite.

D'abord sur $\mathbb{Z}^d$, l'ordre partiel usuel est défini pour deux points $s = (s_1, \dots, s_d)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$ de $\mathbb{Z}^d$ par

$$s \preceq t \text{ (respectivement } s \prec t \text{)} \quad (1.1)$$

si pour $i = 1 \dots d$,

$$s_i \leq t_i \text{ (respectivement } s_i < t_i \text{)}.$$

L'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^d$ est l'ordre total défini pour deux points $s = (s_1, s')$ et $t = (t_1, t')$ de $\mathbb{Z}^d$ tels que s_1 et t_1 appartiennent à $\mathbb{Z}$ par

$$s \ll t \quad (1.2)$$

si et seulement si $s_1 < t_1$ ou $s_1 = t_1$ et $s' \ll t'$ dans $\mathbb{Z}^{d-1}$.

1.2.2 Ensembles indexants

Pour deux éléments a, b de $\mathbb{Z}^d$, tels que $a \preceq b$ et $a \neq b$, nous considérons maintenant les ensembles de $\mathbb{Z}^d$ suivants

$$S[a, b] = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x \preceq b\}, \quad (1.3)$$

$$S[a, \infty] = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x\}, \quad (1.4)$$

$$S\langle a, b \rangle = S[a, b] \setminus \{a\}, \quad (1.5)$$

$$S\langle a, \infty \rangle = S[a, \infty] \setminus \{a\}. \quad (1.6)$$

Enfin, pour $N \in \mathbb{N}$, nous notons $\mathbf{N}$ l'élément de $\mathbb{Z}^d$ dont toutes les composantes sont égales à N .

Par la suite, nous choisirons souvent $a = \mathbf{0}$ ou bien $a = \mathbf{1}$ en considérant les ensembles $S\langle \mathbf{0}, p \rangle$, $S\langle \mathbf{0}, q \rangle$ (pour définir des processus ARMA spatiaux) et $S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]$ (pour certaines martingales spatiales). Même lorsque $d > 2$ ou bien lorsque $b = \infty$, nous continuerons à appeler ces ensembles des “rectangles de $\mathbb{Z}^d$ ”.

Remarque 1.2.1. Lorsque a est fixé, on constate qu'il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des points $b \succeq a$ de $\mathbb{Z}^d$ et l'ensemble des rectangles $S[a, b]$ inclus dans $S[a, \infty]$. Ceci, nous conduira alors à introduire, dans la Section 1.4, une collection de rectangles avec laquelle nous indexerons certains champs.

1.3 Modèles ARMA spatiaux quadrantaux

Nous définissons, dans cette section, les champs ARMA quadrantaux qui seront étudiés dans les Chapitres 3 et 4.

1.3.1 Définitions

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire à valeurs réelles de carré intégrable et indexés par $\mathbb{Z}^d$. Sa fonction d'autocovariance γ est définie par

$$\gamma(u, v) = \mathbb{E}(X_u - \mathbb{E}(X_u))(X_v - \mathbb{E}(X_v))$$

pour u et v dans $\mathbb{Z}^d$.

Définition 1.3.1. *Un champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est dit stationnaire si*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= m \quad \forall t \in \mathbb{Z}^d, \\ \gamma(u, v) &= \gamma(u + h, v + h) \quad \forall u, v, h \in \mathbb{Z}^d.\end{aligned}$$

Définition 1.3.2. *Un champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est dit stationnaire au sens strict si $(X_t)_{t \in S[a, b]}$ et $(X_{t+h})_{t \in S[a, b]}$ ont même loi pour tout h, a, b dans $\mathbb{Z}^d$.*

Puisque $\gamma(u, v) = \gamma(u - v, 0)$ pour tout u, v, h dans $\mathbb{Z}^d$ pour un champ stationnaire, il sera plus commode de redéfinir la fonction d'autocovariance comme une fonction d'une seule variable de la manière suivante

$$\gamma(h) = \gamma(h, 0). \quad (1.7)$$

Introduisons ici la définition de champ ARMA (de l'anglais Autoregressive Moving Average) quadrantal explicitée dans [Tjø78], [Tjø83], [Guy95] et [Cho97].

Définition 1.3.3. *Un champ de carré intégrable $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est appelé modèle ARMA(p, q) spatial de paramètres $p, q \in \mathbb{Z}^d$ s'il satisfait l'équation*

$$X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t + \sum_{k \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle} \theta_k \epsilon_{t-k} \quad (1.8)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de carré intégrable stationnaire vérifiant pour tout $s, t \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0 \quad \mathbb{E}(\epsilon_s \epsilon_t) = 0. \quad (1.9)$$

Si q (respectivement p) est égal à 0, la somme sur $S\langle \mathbf{0}, q \rangle$ (respectivement sur $S\langle \mathbf{0}, p \rangle$) est supposée nulle et le champ est appelé champ AR(p) (respectivement MA(q)).

Remarque 1.3.4. Le champ $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est couramment appelé champ de bruit blanc.

De part les hypothèses que nous considérons ci-dessous, les champs ARMA que nous étudierons sont des champs stationnaires.

Lors de l'étude asymptotique des estimateurs de coefficients pour des modèles ARMA spatiaux, nous aurons besoin de supposer, comme dans Tjøstheim (1983) (voir [Tjø83]), que le champ ARMA admet une écriture unilatérale du type (1.10). Nous rappelons ici la notion de champ ARMA causal.

Définition 1.3.5. *Un champ ARMA(p, q) est causal s'il existe une famille de coefficients $(\psi_j)_{j \in S[\mathbf{0}, \infty]}$ tels que*

$$X_t = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, \infty]} \psi_j \epsilon_{t-j} \quad (\psi_{\mathbf{0}} = 1) \quad (1.10)$$

et

$$\sum_{j \in S[\mathbf{0}, \infty]} |\psi_j| < \infty \quad (1.11)$$

avec $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ défini comme dans la Définition 1.3.3.

Pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, on note $\phi(z) = 1 - \sum_{j \in S(\mathbf{0}, p]} \phi_j z^j$ le polynôme autorégressif et $\theta(z) = 1 + \sum_{k \in S(\mathbf{0}, q]} \theta_k z^k$ le polynôme moyenne mobile. Une condition suffisante pour que le champ soit causal a été donnée dans Tjøstheim (1978) (voir [Tj87] Theorem 5.1). Nous rappelons cette condition dans la proposition suivante.

Proposition 1.3.6. *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ ARMA(p, q). Si le polynôme autorégressif n'a pas de zéros dans le polydisque unité fermé de $\mathbb{C}^d$, alors le champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est causal.*

Remarque 1.3.7. Nous supposons désormais que la condition de la Proposition 1.3.6 est vérifiée pour tout modèle ARMA spatial que nous serons amené à considérer.

Pour des conditions d'identifiabilité, nous supposons de plus au Chapitre 4 que les deux polynômes ϕ et θ n'ont pas de facteurs communs dans la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans l'anneau factoriel $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$.

1.3.2 Modèles ARMA et différences de martingales

Un champ ARMA $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est toujours défini à partir d'un champ de bruit blanc $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ vérifiant (1.9). Lors de l'étude asymptotique de certains estimateurs dans des modèles ARMA spatiaux, $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est supposée être une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées vérifiant ainsi la Condition (1.9). Dans [Tj87], Tjøstheim (1978) étudie le comportement asymptotique des estimateurs des moindres carrés et de Yule-Walker des coefficients autorégressifs d'un champ AR pour des innovations indépendantes et identiquement distribuées.

En dimension 1, de nombreux résultats asymptotiques pour des processus ARMA sont obtenus dans le cas d'innovations indépendantes et identiquement distribuées (voir Brockwell et Davis [BD91], Tsay et Tiao [TT83], [TT84]). D'autres auteurs ont établi des propriétés asymptotiques en supposant que les innovations sont des différences de martingales. Ainsi, dans Lai et Wei (1983) (voir [LW83]), la consistance de l'estimateur des moindres carrés des paramètres d'un modèle autorégressif est obtenue pour des innovations différences de martingales. La normalité asymptotique d'un estimateur de type moindres carrés des coefficients autorégressifs d'un modèle ARMA est étudiée par Truong-Van (1995) (voir [TV95]) toujours sous l'hypothèse de différence de martingales.

De même, en dimension $d \geq 2$, afin d'affaiblir l'hypothèse sur le champ $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, on peut supposer que les bruits $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ sont des différences de martingales. Ainsi, comme nous le verrons dans la Section 3.2 du Chapitre 3, pour étudier le comportement asymptotique de l'estimateur des moindres carrés des coefficients d'un modèle AR spatial causal, Tjøstheim (1983) suppose dans [Tj83], que les innovations sont des différences de martingales quadrantaes, c'est-à-dire vérifiant la condition (2.3) rappelée au Chapitre 2.

1.4 Martingales fortes

Nous introduisons ici la notion de martingale forte sur $\mathbb{Z}^d$ dont la propriété caractéristique des accroissements est analogue à la propriété de différence de martingales quadrantes considérée dans Tjøstheim (1983). Ces martingales seront étudiées au Chapitre 2.

1.4.1 Définitions

Etant donné $a, b \in \mathbb{Z}^d$ fixés, tels que $a \preceq b$ et $a \neq b$, notons T l'un des deux sous-ensembles $S[a, b]$ ou $S[a, \infty]$ de $\mathbb{Z}^d$, représentant respectivement le cas fini et le cas infini.

La majeure partie des auteurs ont considéré des champs $(X_x, x \in T)$ indexés par des points de T mais, comme annoncé dans la Remarque 1.2.1, un tel champ peut, de manière équivalente, être indexé par les ensembles $S[a, x]$ inclus dans T .

Nous allons ici adapter à des collections indexantes discrètes le formalisme introduit par Ivanoff et Merzbach (2000) dans [IM00] pour des collections indexantes continues et ainsi considérer des champs indexés par des rectangles, i.e. $\mathcal{A}$ -indexés avec

$$\mathcal{A} = \{S[a, x], x \in T\} \cup \{\emptyset\}.$$

Lorsque T est fini, il sera parfois nécessaire d'ordonner les éléments de $\mathcal{A}$. Ivanoff et Merzbach (2000) ordonnent ces éléments "de manière consistante par rapport au passé fort" : on note $A_0 = \{a\}$ et étant donné $A_1, \dots, A_{i-1}$, on choisit un ensemble A_i dans $\mathcal{A}$ tel que $A \subset A_i$ implique que $A = A_j$ pour un $j = 0, \dots, i-1$.

Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous définissons la notion de filtration $\mathcal{A}$ -indexée comme suit :

Définition 1.4.1. Une collection $\mathcal{A}$ -indexée $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est appelée filtration si elle vérifie la condition de filtration suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_B. \quad (1.12)$$

Supposons maintenant que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est muni d'une telle filtration $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$. Comme Ivanoff et Merzbach (2000), nous supposons parfois que cette filtration vérifie la condition supplémentaire suivante permettant de commuter les espérances conditionnelles :

Définition 1.4.2. La filtration $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$ satisfait la condition d'indépendance conditionnelle (IC) si

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \mathbb{E}[\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_A] | \mathcal{F}_B] = \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_{A \cap B}]. \quad (1.13)$$

Pour établir la mesurabilité de certaines variables aléatoires par rapport à une tribu donnée, nous ferons appel dans les chapitres suivants au lemme de Slonowsky (voir [IM00] Lemma 1.4.3) s'appuyant sur la Condition d'indépendance conditionnelle (1.13). Ce lemme est énoncé ci-dessous.

Lemme 1.4.3. *Supposons que la Condition (1.13) est vérifiée et qu'il existe une opération $\vee$ telle que $\cap$ soit distributive sur $\vee$ dans $\mathcal{A}$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tels que $A_i \cap A_j \subseteq A \forall i \neq j$, et pour tout $X \in L^1(\mathcal{F}_A)$,*

$$\mathbb{E}(X \mid \bigvee_{i=1}^n \mathcal{F}_{A_i}) = \mathbb{E}(X \mid \bigvee_{i=1}^n \mathcal{F}_{A \cap A_i}),$$

où pour deux sous-tribus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ désigne la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Pour deux rectangles A_1 et A_2 de $\mathcal{A}$, $A_1 \vee A_2$ est défini comme le plus petit rectangle A de $\mathcal{A}$ tel que $A_1 \cup A_2 \subseteq A$.

Dans le but de définir la notion de martingales et martingales fortes, nous sommes amenés à donner les préliminaires suivants empruntés à Ivanoff et Merzbach (2000) pour des ensembles indexants continus.

Nous considérons la classe $\mathcal{A}(u)$ des unions finies d'ensembles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ la classe de tous les sous-ensembles de T de la forme $A \setminus B$ avec A dans $\mathcal{A}$ et B dans $\mathcal{A}(u)$, où $A \setminus B$ désigne l'intersection entre A et le complémentaire de B . Remarquons que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ et introduisons la notion de champ additif.

Définition 1.4.4. *Soit $X = \{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ un champ $\mathcal{A}$ -indexé. X est dit additif s'il admet une extension additive presque sûre à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si $X_\emptyset = 0$ et si pour tous $C, C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C = C_1 \cup C_2$ et $C_1 \cap C_2 = \emptyset$,*

$$X_C = X_{C_1} + X_{C_2}.$$

Remarque 1.4.5. Nous supposons désormais que tous les champs $\mathcal{A}$ -indexés sont additifs.

Afin d'illustrer cette propriété pour un champ $X = \{X_A, A \in \mathcal{A}\}$, considérons pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans T tels que $y \preceq x$ et $y \neq x$, l'ensemble de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$ suivant

$$]y, x] = \prod_{i=1}^d]y_i, x_i]. \quad (1.14)$$

La propriété d'additivité permet alors d'écrire que

$$X_{]y, x]} = \sum_{i=1 \dots d, \epsilon_i=0,1} (-1)^{d-\sum_{i=1}^d \epsilon_i} X_{S[a, (y_1+\epsilon_1(x_1-y_1), \dots, y_d+\epsilon_d(x_d-y_d))]}]. \quad (1.15)$$

Il s'ensuit alors que $X_{]y, x]}$ est $\mathcal{F}_{S[a, x]}$ -mesurable.

Puisqu'un rectangle $S[a, x]$ peut s'écrire comme la réunion disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$ de la manière suivante,

$$S[a, x] = \cup_{y \in S[a, x]} \{y\},$$

la propriété d'additivité permet d'obtenir la relation

$$X_{S[a, x]} = \sum_{y \in S[a, x]} X_{\{y\}}. \quad (1.16)$$

Ainsi, pour un champ additif, X_A peut s'écrire comme la somme des accroissements élémentaires $X_{\{y\}}$ pour y dans A . Un tel champ pourra donc être défini de manière équivalente sur ses accroissements élémentaires.

Étendons maintenant la filtration aux ensembles de $\mathcal{A}(u)$: Pour $B \in \mathcal{A}(u)$, posons

$$\mathcal{F}_B = \bigvee_{A \in \mathcal{A}, A \subseteq B} \mathcal{F}_A.$$

Définissons pour chaque ensemble $C \in \mathcal{C}$, la tribu du passé fort $\mathcal{G}_C^*$ par

$$\mathcal{G}_C^* = \mathcal{F}_\emptyset \text{ si } C \in \mathcal{A} \quad (1.17)$$

et par

$$\mathcal{G}_C^* = \bigvee_{B \in \mathcal{A}(u), B \cap C = \emptyset} \mathcal{F}_B \text{ si } C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}. \quad (1.18)$$

Pour certains ensembles C de $\mathcal{C}$, il est possible d'obtenir une expression simple de $\mathcal{G}_C^*$. Par exemple, pour $C =]y, x]$ avec $y = (y_1, \dots, y_d)$ et $x = (x_1, \dots, x_d)$ dans T tels que $y \preceq x$ et $y \neq x$, la formule (1.18) peut s'écrire plus simplement de la manière suivante

$$\mathcal{G}_{]y, x]}^* = \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(y_i) \quad (1.19)$$

où pour $t \in \mathbb{Z}$ et $i = 1 \dots d$,

$$\mathcal{F}^i(t) = \bigvee_{z \in T, z_i \leq t} \mathcal{F}_{S[a, z]} \text{ si } \{z \in T, z_i \leq t\} \neq \emptyset \quad (1.20)$$

et

$$\mathcal{F}^i(t) = \{\Omega, \emptyset\} \text{ sinon.}$$

En particulier, pour $C = \{x\}$ avec $x = (x_1, \dots, x_d) \in T \setminus \{a\}$,

$$\mathcal{G}_{\{x\}}^* = \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(x_i - 1). \quad (1.21)$$

Les définitions de martingales et martingales fortes indexées par des ensembles sont données dans la définition ci-dessous.

Définition 1.4.6. Soit $X = \{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ un champ $\mathcal{A}$ -indexé, additif, intégrable et adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$. On dit que

(i) X est une martingale (resp. sous-martingale) si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subseteq B$, alors

$$\mathbb{E}(X_B | \mathcal{F}_A) = X_A \text{ (resp. } \geq X_A) \text{ p.s.}$$

(ii) X est une martingale forte si pour tout $C \in \mathcal{C}$,

$$\mathbb{E}(X_C | \mathcal{G}_C^*) = 0 \text{ p.s.}$$

1.4.2 Propriétés

La Proposition suivante donne une relation entre martingales et martingales fortes.

Proposition 1.4.7. *Soit $X = \{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ un champ $\mathcal{A}$ -indexé. Si X est une martingale forte, alors X est une martingale.*

PREUVE. Supposons que X est une martingale forte. X est donc intégrable et adapté. Soient $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subseteq B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{C}$ et par additivité

$$X_B - X_A = X_{B \setminus A}.$$

De plus, puisque $A \cap (A \setminus B) = \emptyset$, la relation (1.18) permet d'en déduire que

$$\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{G}_{B \setminus A}^*.$$

Ainsi, par application de la propriété de martingale forte, on obtient que

$$\mathbb{E}(X_B - X_A | \mathcal{F}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{B \setminus A} | \mathcal{G}_{B \setminus A}^*) | \mathcal{F}_A) = 0 \text{ p.s.} \quad \square$$

Pour des martingales fortes discrètes, on obtient la caractérisation suivante.

Proposition 1.4.8. *Soit $X = \{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ un champ $\mathcal{A}$ -indexé, intégrable et adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$. Alors X est une martingale forte si, et seulement si, pour tout $x \in T$,*

$$\mathbb{E}(X_{\{x\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) = 0 \text{ p.s.} \quad (1.22)$$

PREUVE. Si X est une martingale forte, alors pour tout $x \in T$, $\{x\} \in \mathcal{C}$ et donc $\mathbb{E}(X_{\{x\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) = 0$ p.s.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in T$, $\mathbb{E}(X_{\{x\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) = 0$ p.s. Considérons un ensemble $C \in \mathcal{C}$ et démontrons que $\mathbb{E}(X_C | \mathcal{G}_C^*) = 0$ p.s. Par additivité du champ X , on peut écrire que

$$X_C = \sum_{x \in C} X_{\{x\}}.$$

De plus, pour tout $B \in \mathcal{A}(u)$, si $B \cap C = \emptyset$, alors pour tout $x \in C$, $B \cap \{x\} = \emptyset$. De la relation (1.18), on en déduit ainsi que $\mathcal{G}_C^* \subseteq \mathcal{G}_{\{x\}}^*$. D'où,

$$\mathbb{E}(X_C | \mathcal{G}_C^*) = \sum_{x \in C} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{\{x\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) | \mathcal{G}_C^*) = 0. \quad \square$$

Remarque 1.4.9. Tjøstheim (1983) considère sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ des martingales spatiales $\{X_x, x \in S[1, \infty]\}$ s'écrivant sous la forme

$$X_x = \sum_{y \in S[1, x]} H_y,$$

où $\{H_y, y \in \mathbb{Z}^d\}$ est une différence de martingales i.e. un champ indexé par $\mathbb{Z}^d$ vérifiant pour tout $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}(H_y | \mathcal{F}^i(y_i - 1)) = 0 \text{ p.s.}$$

Ces martingales sont en fait des martingales fortes. En effet, de part la bijection entre les points de $T = S[\mathbf{1}, \infty]$ et les ensembles de la collection $\mathcal{A}$ associée à T et la relation (1.16), $\{X_x, x \in S[\mathbf{1}, \infty]\}$ peut être considéré comme un champ $\mathcal{A}$ -indexé additif. De plus, la relation (1.20) couplée à la Proposition 1.4.8, permet de dire que $\{X_x, x \in S[\mathbf{1}, \infty]\}$ est une martingale forte au sens de la Définition 1.4.6.

Remarque 1.4.10. A lieu de la Condition (1.13) d'indépendance conditionnelle, Cairoli et Walsh (voir [CW75], [Wal86]), ont considéré la Condition (1.23) suivante, souvent appelée condition (F4). Pour tout $x \in T$,

$$\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_{S[a,x]}) = \mathbb{E}(\dots \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}^1(x_1)) \dots | \mathcal{F}^d(x_d)) \quad (1.23a)$$

$$\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_{S[a,x]}) = \mathbb{E}(\dots \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}^d(x_d)) \dots | \mathcal{F}^1(x_1)). \quad (1.23b)$$

Remarquons tout d'abord que cette relation implique que pour tout $x \in T$,

$$\mathcal{F}_{S[a,b]} = \cap_{i=1}^d \mathcal{F}^i(x_i). \quad (1.24)$$

Afin de pouvoir appliquer l'inégalité maximale de Cairoli (voir [Wal86]) à une sous-martingale spatiale positive, la filtration considérée doit vérifier la Condition (1.23). La proposition suivante établit le lien entre les Conditions (1.13) et (1.23).

Proposition 1.4.11. *La Condition (1.23) implique la Condition (1.13) et lorsque T est fini i.e. de la forme $S[a, b]$, la Condition (1.13) implique aussi la Condition (1.23).*

PREUVE. Pour simplifier les notations, supposons que $d = 2$. La preuve reste cependant valable pour d quelconque.

Supposons que la condition (1.23) est vérifiée. Soient $A = S[a, x]$, $B = S[a, x']$ dans $\mathcal{A}$ et F une fonction mesurable bornée.

Si x et x' sont comparables pour l'ordre partiel (1.1), le résultat est évident. Il reste donc à démontrer le résultat lorsque x et x' ne sont pas comparables, par exemple lorsque $x_1 < x'_1$ et $x'_2 < x_2$. Dans ce cas,

$$\mathcal{F}_{S[a,x]} = \mathcal{F}^1(x_1) \cap \mathcal{F}^2(x_2) \subseteq \mathcal{F}^1(x'_1)$$

et

$$S[a, x] \cap S[a, x'] = S[a, (x_1, x'_2)].$$

D'après la Condition (1.23), on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,x]}) | \mathcal{F}_{S[a,x']}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,x]}) | \mathcal{F}^1(x'_1)) | \mathcal{F}^2(x'_2)\right).$$

Puisque $\mathcal{F}_{S[a,x]} \subseteq \mathcal{F}^1(x'_1)$, on en déduit que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,x]}) | \mathcal{F}_{S[a,x']}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,x]}) | \mathcal{F}^2(x'_2)).$$

De la même manière, on démontre que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,x]}) | \mathcal{F}^2(x'_2)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}^1(x_1)) | \mathcal{F}^2(x'_2)).$$

En appliquant une nouvelle fois la condition (1.23), on obtient finalement que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}^1(x_1)) | \mathcal{F}^2(x'_2)) = \mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,(x_1,x'_2)]}).$$

Dans le cas où $T = S[a, b]$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}^1(t)$ et $\mathcal{F}^2(t)$ s'écrivent plus simplement. En effet,

$$\mathcal{F}^1(t) = \mathcal{F}_{S[a,(t,b_2)]}$$

et

$$\mathcal{F}^2(t) = \mathcal{F}_{S[a,(b_1,t)]}.$$

D'où, pour toute fonction mesurable et bornée F ,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}^1(x_1)) | \mathcal{F}^2(x_2)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,(x_1,b_2)]}) | \mathcal{F}_{S[a,(b_1,x_2)]}).$$

En appliquant la Condition (1.13), on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}^1(x_1)) | \mathcal{F}^2(x_2)) &= \mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,(x_1,b_2)] \cap S[a,(b_1,x_2)]}) \\ &= \mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{S[a,x]}). \end{aligned}$$

□

La proposition suivante énonce l'inégalité maximale de Cairoli, démontrée par Walsh (1986) dans [Wal86], dont nous ferons usage dans les démonstrations du Théorème 2.4.3 et du Lemme 2.4.5 au Chapitre 2.

Proposition 1.4.12. *Soit $\{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ une sous martingale positive adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$. Si la Condition (1.23) est vérifiée, alors pour tout $\lambda > 0$,*

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{A \in \mathcal{A}} X_A \geq \lambda\right) \leq \alpha + \beta \sup_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(X_A (\log^+ X_A)^{d-1}), \quad (1.25)$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{A \in \mathcal{A}} X_A\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{dp} \sup_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(X_A^p), \quad p > 1. \quad (1.26)$$

où α et β sont des constantes dépendant uniquement de d .

Bibliographie

[BD91] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time series : theory and methods*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

- [Cho97] B. S. Choi. A recursive algorithm for solving the spatial Yule-Walker equations of causal spatial AR models. *Statist. Probab. Lett.*, 33(3) :241–251, 1997.
- [CW75] R. Cairoli and J. B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.*, 134 :111–183, 1975.
- [Guy95] X. Guyon. *Random fields on a network*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995. Modeling, statistics, and applications, Translated from the 1992 French original by Carenne Ludeña.
- [IM00] G. Ivanoff and E. Merzbach. *Set-indexed martingales*, volume 85 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [LW83] T. L. Lai and C. Z. Wei. Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least-squares estimates of their parameters. *J. Multivariate Anal.*, 13(1) :1–23, 1983.
- [TjØ78] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. *Advances in Appl. Probability*, 10(1) :130–154, 1978.
- [TjØ83] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. II. Some further results on unilateral lattice processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 15(3) :562–584, 1983.
- [TT83] G. C. Tiao and R. S. Tsay. Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models. *Ann. Statist.*, 11(3) :856–871, 1983.
- [TT84] R. S. Tsay and G. C. Tiao. Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary ARMA models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 79(385) :84–96, 1984.
- [TV95] B. Truong-Van. Invariance principles for semi-stationary sequence of linear processes and applications to ARMA process. *Stochastic Process. Appl.*, 58(1) :155–172, 1995.
- [Wal86] J. B. Walsh. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. In *Lectures in probability and statistics (Santiago de Chile, 1986)*, volume 1215 of *Lecture Notes in Math.*, pages 329–491. Springer, Berlin, 1986.

Chapitre 2

Théorèmes de la limite centrale et principe d'invariance pour des martingales fortes

Nous donnons d'abord une revue des différents théorèmes de la limite centrale obtenus dans la littérature pour des différences de martingales spatiales. Nous présentons ensuite les résultats que nous avons obtenus sur le sujet : un théorème de la limite centrale et un principe d'invariance. Ces deux résultats sont obtenus sous une condition de Lindeberg conditionnelle.

2.1 Introduction

La notion de martingale spatiale sur $\mathbb{R}_+^2$ a été traitée par de nombreux auteurs dont Cairoli, Walsh (voir [CW75], [Wal86]), Wong et Zakaï (voir [WZ74], [WZ76]). Plus récemment, des martingales indexées par des ensembles, généralisant le cas $\mathbb{R}_+^2$, ont été étudiées par Ivanoff et Merzbach (2000) dans [IM00].

D'autres auteurs se sont aussi intéressés à la notion de martingales sur un réseau. Lorsque la dimension d du réseau $\mathbb{Z}^d$ est plus grande que deux, la distinction entre le passé et le futur n'est plus aussi claire que dans le cas unidimensionnel. Selon le choix du passé que l'on fait, plusieurs types de martingales spatiales peuvent être définies.

Cette notion de passé apparaît souvent être reliée à l'ordre choisi sur $\mathbb{Z}^d$. Nous avons rappelé, dans le premier chapitre, l'ordre partiel (1.1) et l'ordre lexicographique (1.2) sur $\mathbb{Z}^d$. Ces deux ordres permettent de définir deux structures de passé complètement différentes sur $\mathbb{Z}^d$. La notion d'ordre étant arbitraire, la structure de passé peut être considérée d'un point de vue plus large. Par exemple, le "passé" d'un point de $\mathbb{Z}^d$ peut aussi être défini comme l'ensemble de certains de ses plus proches voisins sur le réseau.

De nombreux travaux, parmi eux Nahapetian et Petrosian (1992) (voir [NP92]), ont mis en évidence qu'il est plus commode de considérer, quand la dimension de l'ensemble indexant est supérieur à 1, des différences de martingales plutôt que des martingales. La notion d'accroissements pour des champs aléatoires apparaît être un outil plus maniable.

Ainsi, Tjøstheim (1983) considère dans [Tj83] des différences de martingales quadrantaes définies à l'aide de l'ordre partiel (1.1), alors que Huang (1992) étudie dans [Hua92] des différences de martingales relativement à l'ordre lexicographique (1.2). Nahapetian et Petrosian (voir [NP92], [NP95], [Nah95]) définissent quant à eux, des différences de martingales sans aucune notion d'ordre. Le "passé" est défini, en un point t du réseau, comme étant le complémentaire du singleton $\{t\}$. Cette notion de différence de martingales s'avère être un cas particulier des deux précédentes. Ces quelques définitions de différences de martingales spatiales sont rappelées à la Section 2.3. Les sommes de différences de martingales spatiales ne sont pas nécessairement des martingales spatiales. Cependant pour certaines d'entre elles, comme c'est le cas dans Tjøstheim (1983) et dans Nahapetian et Petrosian (1995) (voir [NP95]), elles forment des martingales.

De nombreux théorèmes de la limite centrale (TCL), dont nous citons les principaux dans la Section 2.3, ont été obtenus pour des martingales indexées par un réseau. Dans le cas de collection indexante continue, Ivanoff et Merzbach (2000) obtiennent un théorème centrale limite fonctionnel pour des martingales fortes. De même, un principe d'invariance a aussi été établi par Poghosyan et Roelly (1998) (voir [PR98]) pour des différences de martingales quadrantaes sur un réseau. Nous rappelons ce résultat dans la Section 2.3.

Nous avons choisi, dans le Chapitre 1, d'adapter le formalisme de Ivanoff et Merzbach (2000) au cas d'ensembles indexants discrets, pour définir des martingales et martingales fortes indexées par des rectangles de $\mathbb{Z}^d$. Nous nous intéressons ici, plus particulièrement aux martingales fortes, caractérisées par des accroissements vérifiant la propriété de différence de martingales quadrantaes introduite dans Tjøstheim (1983).

Certaines des hypothèses du TCL de Tjøstheim (1983), notamment la Condition de borne L^2 (2.7), sont statistiquement difficiles à vérifier. C'est pourquoi, nous établissons, dans la Section 2.4, un TCL pour des martingales fortes sous la Condition de Lindeberg conditionnelle (2.22). Pour démontrer ce résultat, nous sommes d'abord conduit à étendre le TCL de Tjøstheim (1983) à des champs aléatoires proches de martingales spatiales et ensuite à généraliser au cas spatial certains résultats de Hall et Heyde (1980) (voir [HH80]) et McLeish (1974) (voir [McL74]). Nous étendons également au cas spatial un lemme de Dvoretzky (1972) (voir [Dvo72]), dont la preuve s'appuie sur notre formalisme d'indexation des champs sur des réseaux par des ensembles car il permet de considérer des classes d'accroissements plus grandes que celles habituellement utilisées. La démonstration de ce TCL fait l'objet d'un article [ITV02] que nous soumettons actuellement, intitulé "Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales". Cet article constitue le corps

de la Section 2.4.

Nous étendons, à la Section 2.5, le TCL précédent sous condition de Lindeberg conditionnelle à un principe d'invariance. Pour ce faire, nous procédons de la même manière que Mc Leish (1974), où le TCL sous condition de Lindeberg de Hall et Heyde (1980) pour des martingales classiques est étendu à un principe d'invariance. Nous sommes alors conduit à généraliser à des martingales fortes, une inégalité de Brown (1971) (voir [Bro71]) dans le Paragraphe 2.5.2 et certains résultats de Mc Leish (1974) dans le Paragraphe 2.5.3.

2.2 Théorème de la limite centrale de Tjøstheim (1983) pour des différences de martingales quadrantes

Nous rappelons la définition des différences de martingales quadrantes introduites par Tjøstheim (1983) dans [Tjø83] et énonçons le théorème de la limite centrale obtenu par Tjøstheim pour ce type de différences de martingales. Ce résultat est employé par Tjøstheim (1983) pour étudier la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés des coefficients d'un champ AR quadrantal causal.

Nous considérons dans cette section et dans toute la suite du chapitre un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous considérons également une famille $\{\mathcal{F}_x, x \in S[a, b]\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ pour a et b donnés dans $\mathbb{Z}^d$. Nous notons pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $i = 1 \dots d$,

$$\mathcal{F}^i(t) = \bigvee_{x \mid x_i \leq t} \mathcal{F}_x. \quad (2.1)$$

Nous supposons que la famille de tribus $\{\mathcal{F}_x, x \in S[a, b]\}$ vérifie la condition de filtration suivante :

$$\forall x \preceq y, \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_y. \quad (2.2)$$

Définition 2.2.1. Une famille de variables aléatoires intégrables $\{G(x), x \in S[a, b]\}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_x, x \in S[a, b]\}$ si

1. $\forall x, G(x)$ est $\mathcal{F}_x$ -mesurable,
2. $\forall x \preceq y, \mathbb{E}(G(y) \mid \mathcal{F}_x) = G(x)$ p.s.

Définition 2.2.2. Une famille de variables aléatoires $\{W(x), x \in S[a, b]\}$ adaptées à la filtration $\{\mathcal{F}_x, x \in S[a, b]\}$ est une différence de martingales si

$$\forall x, \mathbb{E}(W(x) \mid \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(x_i - 1)) = 0 \text{ p.s.} \quad (2.3)$$

où pour $t \in \mathbb{Z}$ et $i = 1 \dots d$, $\mathcal{F}^i(t)$ est défini par la relation (2.1).

Une somme de différence de martingales est alors une martingale.

Le lemme suivant est une généralisation due à Tjøstheim (1983) du Lemme 3.1 de Hall et Heyde (1980) (voir [HH80]) au cas d'un réseau. Comme dans Hall et Heyde (1980), nous dirons qu'une suite de variables aléatoires intégrables $(Y_n)_n$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ converge faiblement dans L^1 vers une variable intégrable Y de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si pour tout $E \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}(Y_n 1_E) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y 1_E).$$

Dans ce cas, nous noterons $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y$ faiblement dans L^1 .

Lemme 2.2.3. (Tjøstheim (1983)) Soit $\{H_y(x), x \in S[\mathbf{1}, y], y \in S[\mathbf{1}, \infty]\}$ un tableau de variables aléatoires et notons

$$U_y(t) = \prod_{x \in S[\mathbf{1}, y]} (1 + iH_y(x)).$$

Soit η^2 une variable aléatoire bornée. Supposons que

$$\max_{x \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} |H_{\mathbf{N}}(x)| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0, \quad (2.4)$$

$$\sum_{x \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} H_{\mathbf{N}}^2(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \eta^2 \quad (2.5)$$

où $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}}$ désigne la convergence en probabilité. Supposons de plus que pour tout t ,

$$U_{\mathbf{N}}(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 1 \text{ faiblement dans } L^1. \quad (2.6)$$

Alors $\sum_{x \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} H_{\mathbf{N}}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z$, où Z est une variable aléatoire de fonction caractéristique $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2))$ et $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en loi.

Le théorème de la limite centrale suivant généralise le Théorème 3.2 de Hall et Heyde (1980) au cas de martingales spatiales. La notation $Y_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y$ (*stable*) désigne comme dans Hall et Heyde (1980), la convergence en loi stable d'une suite de variables aléatoires (Y_n) . Nous rappelons qu'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ converge en loi stable vers une variable aléatoire Y de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si pour tout $E \in \mathcal{F}$, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{Y_n \leq y\} \cap E)$ existe et converge vers $\mathbb{P}(E)$ quand y converge vers l'infini ou, de manière équivalente, s'il existe une variable aléatoire Y' de même loi que Y telle que $\exp(itY_n)$ converge faiblement dans L^1 vers $\exp(itY') = Z(t)$ et si $t \rightarrow \mathbb{E}(Z(t)1_E)$ est continue pour tout $E \in \mathcal{F}$.

Théorème 2.2.4. (Tjøstheim (1983)) Soit $\{H_y(x), x \in S[\mathbf{1}, y], y \in S[\mathbf{1}, \infty]\}$ un tableau de différences de martingales où $\mathcal{F}_u$ est la tribu engendrée par la famille $\{H_y(x), x \in S[\mathbf{1}, u]\}$ et supposée ne pas dépendre de y . Supposons que les Conditions (2.4) et (2.5) sont vérifiées et que de plus

$$\mathbb{E}\left(\max_{x \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} H_{\mathbf{N}}^2(x)\right) \leq K, \quad (2.7)$$

avec K une constante ne dépendant pas de N . Alors, $\sum_{x \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} H_N(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z$ (stable), où Z est une variable aléatoire de fonction caractéristique $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2))$.

2.3 Autres résultats asymptotiques pour des différences de martingales spatiales

Nous présentons dans cette section une revue non exhaustive des théorèmes de la limite centrale et principes d'invariance obtenus pour plusieurs sortes de différences de martingales spatiales.

2.3.1 Théorème de la limite centrale de Huang (1992)

Huang (1992) (voir [Hua92]) définit des différences de martingales relativement à l'ordre lexicographique (1.2), plus générales que celles considérées par Tjøstheim (1983). Il obtient alors un théorème de la limite centrale pour des champs indexés par $\mathbb{Z}^2$ sous des conditions plus faibles, qu'il applique ensuite à l'étude des lois limites de moyennes et covariances empiriques de certains champs aléatoires stationnaires.

Nous rappelons ici la définition de différences de martingales relativement à l'ordre lexicographique.

Définition 2.3.1. *Un champ aléatoire $\{x_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$ est une différence de martingale spatiale si*

$$\forall t, \mathbb{E}(x_t | x_s, s \ll t, s \neq t) = 0 \text{ p.s.} \quad (2.8)$$

Pour ce type de différences de martingales spatiales, il est important de noter que la somme de différences de martingales n'est plus nécessairement une martingale au sens de Cairoli et Walsh (voir [CW75]).

Nous donnons dans le théorème ci-dessous le théorème de la limite centrale obtenus pour des différences de martingales de Huang (1992).

Théorème 2.3.2. (Huang (1992)) *Soit $\{x_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$ un champ aléatoire vérifiant la condition de différence de martingales (2.8) et*

$$\frac{1}{N^2} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} x_t^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \eta^2, \quad (2.9)$$

$$\sup_t \mathbb{E}(|x_t|^2 1_{\{|x_t| > C\}}) \xrightarrow[C \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.10)$$

Alors $\frac{1}{N} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} x_t \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z$ (stable), où Z est une variable dont la fonction caractéristique est $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2))$.

2.3.2 Théorème de la limite centrale de Nahapetian (1995)

Pour les différences de martingales spatiales introduites par Nahapetian et Petrosian (1992) (voir [NP92]), nous énonçons ici, le théorème de la limite centrale de Nahapetian (1995) (voir [Nah95]). Ce théorème est appliqué à certains champs de Gibbs.

Les théorèmes de la limite centrale de Nahapetian et Petrosian (1992) et de Nahapetian et Petrosian (1995) (voir [NP95]), pour le même type de différences de martingales spatiales, sont de même nature.

Dans cette section et dans la section suivante, nous supposons que $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et que $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les cylindres de Ω . Nous notons $\mathcal{L}$ la tribu des ensembles invariants de Ω :

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall a \in \mathbb{Z}^d, \tau_a A = A\},$$

où $\{\tau_a, a \in \mathbb{Z}^d\}$ est le groupe de translations opérant sur Ω par

$$(\tau_a X)(t) = X(t - a), a \in \mathbb{Z}^d.$$

Définition 2.3.3. *Un champ aléatoire $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ de loi P est invariant par translation si pour tout $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(\tau_a A) = P(A), \forall a \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.11)$$

Définition 2.3.4. *Un champ aléatoire $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est ergodique si sa loi P sur $\mathcal{L}$ est triviale, i.e.*

$$P(A) = 0 \text{ ou } 1 \forall A \in \mathcal{L}. \quad (2.12)$$

Définition 2.3.5. *Soit $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire de variables aléatoires intégrables. On dit que $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une différence de martingale si pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\mathbb{E}(\xi_t \mid \xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}) = 0 \text{ p.s.} \quad (2.13)$$

Notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^d$.

Définition 2.3.6. *Pour toute différence de martingale $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ et pour tout $V \in \mathcal{W}$, on définit*

$$S_V = \sum_{t \in V} \xi_t \text{ et } \mathcal{F}_V = \sigma(\xi_t, t \in V).$$

Ainsi, pour toute suite croissante $(V_i)_i$ de $\mathcal{W}$, la suite $(S_{V_i}, \mathcal{F}_{V_i})$, forme une martingale au sens classique.

Le théorème suivant est appliqué ensuite par Nahapetian (1995) à un champ aléatoire de Gibbs invariant par translation et ergodique.

Théorème 2.3.7. (Nahapetian (1995)) *Soit $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ une différence de martingales invariante par translation, ergodique telle que $0 < \sigma^2 = \mathbb{E}(\xi_0^2) < \infty$. Alors,*

$$\frac{S_{V_n} - \mathbb{E}(S_{V_n})}{\text{Var}(S_{V_n})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $V_n = S[a, a + \mathbf{n}]$ est un cube de largeur n .

2.3.3 Principe d'invariance de Poghosyan et Roelly (1998)

Dans Poghosyan et Roelly (1998) (voir [PR98]), un principe d'invariance pour des martingales spatiales quadrantes est établi à l'aide d'un critère multi-dimensionnel de convergence vers un mouvement Brownien indexé par $[0, 1]^d$. Ce théorème est une extension du Théorème 23.1 de Billingsley (1968) (voir [Bil68]) au cas spatial.

Notons pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{Z}_-^d(t) = \{s \in \mathbb{Z}^d, \exists j = 1 \dots d \mid s_j \leq t_j\}$$

et définissons pour un champ $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ et pour tout u dans $\mathbb{Z}^d$, les tribus suivantes

$$\mathcal{P}(u) = \sigma\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}_-^d(u)\},$$

où $\sigma\{\cdot\}$ désigne la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $\{\cdot\}$.

Définition 2.3.8. *Un champ $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ est une différence de martingale si*

$$\forall t, \mathbb{E}(\xi_t \mid \mathcal{P}(t - \mathbf{1})) = 0 \text{ p.s.} \quad (2.14)$$

Remarque 2.3.9. La condition (2.14) est équivalente à la Condition (2.3) de Tjøstheim (1983) lorsque $\mathcal{F}_x$ est la tribu engendrée par $\{W(y), y \preceq x\}$.

Le principe d'invariance suivant est établi pour les statistiques

$$X_N(t) = \frac{1}{\sigma N^{d/2}} \sum_{u \in S[\mathbf{1}, ([Nt_1], \dots, [Nt_d])]} \xi_u,$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Théorème 2.3.10. (Poghosyan et Roelly (1998)) *Soit une différence de martingale spatiale invariante par translation, ergodique telle que $\mathbb{E}(\xi^2(0)) = \sigma^2 > 0$. Alors, $X_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$, où W est un mouvement brownien indexé par $[0, 1]^d$ et $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}}$ désigne la convergence en loi dans la version multi-dimensionnelle des fonctions càd-làg.*

2.4 Théorème de la limite centrale pour des martingales fortes sous condition de Lindeberg conditionnelle

Strong lattice martingale arrays over $\mathbb{Z}^d$ are considered under the form of set-indexed processes and a central limit theorem is established under conditional Lindeberg condition, after having extended the limit theorem in Tjøstheim (1983) to spatial processes that are nearly lattice martingales.

2.4.1 Conditional Lindeberg central limit theorem

Here we are given an arbitrary point a in $\mathbb{Z}^d$ and the countable indexing collection $\mathcal{A} = \{S[a, x], x \in S[a, \infty]\} \cup \{\emptyset\}$ of all rectangles starting from a . We define strong lattice martingale arrays. For this, let $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ be an increasing sequence of sets in $\mathcal{A}$. Denote for each $n \geq 1$, $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n\}$ and $\mathcal{C}_n$ the $\mathcal{C}$ class associated with the finite indexing collection $\mathcal{A}_n$.

Definition 2.4.1. $(X_A^n, \mathcal{F}_A^n; A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n, n \geq 1)$ is called a strong lattice martingale array if for each $n \geq 1$, $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ is a filtration i.e. it satisfies condition (1.12) and $(X_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ is a strong lattice martingale relative to $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$.

For example, if $(X_A)_{A \in \mathcal{A}}$ is a strong lattice martingale (LMG) relative to a filtration $(\mathcal{F}_A)_{A \in \mathcal{A}}$, then for each $n \geq 1$, $X_A^n = \frac{1}{n^{d/2}} X_A$ is a strong LMG relative to the filtration $\mathcal{F}_A^n = \mathcal{F}_A$. Thus, $(X_A^n, \mathcal{F}_A^n; A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n, n \geq 1)$ is a strong LMG array.

For usual discrete time martingales (MG) (Y_n) , that is when $d = 1$, Hall & Heyde (1980) established several central limit theorems, more precisely they showed that under suitable conditions the (Y_n) converges stably in distribution to some mixed random normal variable Y . Recall that a sequence (Y_n) is said to converge stably in distribution to a random variable Y , if for any continuity point y of Y and any event $E \in \mathcal{F}$, the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{Y_n \leq y\} \cap E)$ exists and converges to $\mathbb{P}(E)$ when y tends to infinity, or equivalently if there exists a random variable Y' having the same distribution as Y such that $\exp(itY_n)$ converges weakly in L^1 to $\exp(itY') = Z(t)$, and if $t \rightarrow \mathbb{E}(Z(t)1_E)$ is continuous for any $E \in \mathcal{F}$. Here, L^1 denotes the space of random variables having a first absolute moment.

Tjøstheim (1983) extended to lattice martingales arrays the first CLT in Hall & Heyde (1980). As seen in Remark 1.4.9, lattice martingale arrays considered in Tjøstheim (1983) are in fact $\mathcal{A}$ -indexed strong LMG arrays. For the clarity, we state in Theorem 2.4.2 below, the CLT obtained in Tjøstheim (1983), while using the formalism of $\mathcal{A}$ -indexed processes. As in Hall & Heyde (1980), the notation $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y$ (stably) means the stable convergence in distribution of a sequence (Y_n) .

Theorem 2.4.2. Let $(X_A^n, \mathcal{F}_A^n; A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n, n \geq 1)$ be a strong LMG array. Under the following assumptions :

$$\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.15)$$

$$(U_{\Delta_n}^n)^2 = \sum_{x \in \Delta_n} (X_{\{x\}}^n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \eta^2 \quad (2.16)$$

$$\mathbb{E}\left(\max_{x \in \Delta_n} (X_{\{x\}}^n)^2\right) \text{ is bounded in } n \quad (2.17)$$

and

$$\forall n \geq 1 \forall A \in \mathcal{A}_n, \mathcal{F}_A^n \subseteq \mathcal{F}_A^{n+1} \quad (2.18)$$

we have $X_{\Delta_n}^n = \sum_{x \in \Delta_n} X_{\{x\}}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z(\text{stably})$ where the random variable Z has characteristic function $t \rightarrow \mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}t^2\eta^2))$ and η^2 is some bounded random variable.

We first need to extend the above theorem to additive processes which are close in some sense, to strong LMG arrays. This is done in the following Theorem 2.4.3, which generalizes Theorem 2.6 of Mc Leish (1974) (c.f. [McL74]) to our spatial framework.

Theorem 2.4.3. *For all $n \geq 1$, let $(X_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ be a process adapted to a filtration $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ satisfying assumption (1.13). If conditions (2.15), (2.16), (2.17) and (2.18) in Theorem 2.4.2 hold and if the two following additional assumptions are verified*

$$\sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.19)$$

$$\sum_{x \in \Delta_n} (\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.20)$$

then the conclusion of Theorem 2.4.2 still holds.

Now, we establish the conditional Lindeberg CLT for a strong LMG array $(X_A^n, \mathcal{F}_A^n; A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n, n \geq 1)$. Instead of the quadratic variation $(U_{\Delta_n}^n)^2$, we consider the conditional variance $(V_{\Delta_n}^n)^2 = \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$ of $(X_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ and replace conditions (2.15) (2.16) and (2.17) by the two following ones :

$$(V_{\Delta_n}^n)^2 = \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \eta^2 \quad (2.21)$$

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.22)$$

where for $\{x\} \in \mathcal{C}_n$, $\mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}$ is the strong past σ -field of $\{x\}$ associated to the filtration $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ and η^2 is some bounded random variable.

Relation (2.22) is known as conditional Lindeberg condition. The major interest of our CLT is that for statistical applications, it is easier to check conditional Lindeberg condition (2.22) than both conditions (2.15) and (2.17).

Theorem 2.4.4. *Let $(X_A^n, \mathcal{F}_A^n; A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n, n \geq 1)$ be a strong LMG array. Assume that (2.18) holds and that for all $n \geq 1$, $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ satisfies the conditional independence property (1.13). Under assumptions (2.21) and (2.22), we have $X_{\Delta_n}^n = \sum_{x \in \Delta_n} X_{\{x\}}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z(\text{stably})$ where the random variable Z has characteristic function $t \rightarrow \mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}t^2\eta^2))$.*

Theorem 2.4.4 is proved in the next paragraph but for the convenience of the reader, we sketch here its proof. First, we consider for every $n \geq 1$, the additive process $Y^n = (Y_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ defined by $Y_A^n = \sum_{x \in A} Y_{\{x\}}^n$ for every $A \in \mathcal{A}_n$, where

$$Y_{\{x\}}^n = X_{\{x\}}^n 1_{\{|X_{\{x\}}^n| \leq 1\}}. \quad (2.23)$$

The process $(Y_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ is not a strong LMG relative to $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ but verifies conditions (2.15) (2.16) (2.17) and (2.18), (2.19) and (2.20) in Theorem 2.4.3. Obviously, (Y^n) satisfies condition (2.17) and (2.18). In order to prove that (Y^n) satisfies also conditions (2.15) and (2.16), we need to establish the following lemma.

Lemma 2.4.5. *Let $(X_A^n, \mathcal{F}_A^n; A \in \mathcal{A}, A \subseteq \Delta_n, n \geq 1)$ be a strong LMG array. Assume that for every $n \geq 1$, $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ satisfies condition (1.13), that $(V_{\Delta_n})^2$ is tight i. e.*

$$\sup_n \mathbb{P}((V_{\Delta_n})^2 > \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

and that the conditional Lindeberg condition (2.22) holds. Then

$$\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(U_A^n)^2 - (V_A^n)^2| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

To prove Lemma 2.4.5, we are led to extend below, a result due to Dvoretzky (1972) (c.f. [Dvo72]) to spatial $\mathcal{A}$ -indexed processes.

Lemma 2.4.6. *Let $C \in \mathcal{C}$ and $(\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{S[a,x]}, x \in C)$ a collection of sub- σ -fields of $\mathcal{F}$ satisfying the filtration condition (1.12). For each $x \in \mathcal{C}$, let $A_x \in \mathcal{F}_x$ such that $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*)$ is $\mathcal{F}_x$ -measurable. Finally, let $\mathcal{G}$ be a σ -field included in $\mathcal{G}_C^*$. Then for each positive $\mathcal{G}$ -measurable function η ,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \mathcal{C}} A_x \mid \mathcal{G}\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \mathcal{C}} \mathbb{P}(A_x \mid \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta \mid \mathcal{G}\right).$$

Thanks to Lemma 2.4.5, we prove under assumptions (2.21) and (2.22) that the array (Y^n) satisfies both conditions (2.15) and (2.16). We then show that the term $\sum_{x \in \Delta_n} |\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})|$ converges in probability to 0, so that the array (Y^n) also satisfies conditions (2.19) and (2.20).

Consequently, Theorem 2.4.3 can be applied to the array (Y^n) to conclude that $Y_{\Delta_n}^n$ converges stably in distribution to a random variable Z with characteristic function $t \rightarrow \mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}t^2\eta^2))$. Finally, we achieve the proof while proving that (X^n) satisfies condition (2.15).

2.4.2 Proofs

We give here the proofs of our results. By the sake of simplicity, we assume that $d = 2$ but all the proofs remain valid for any integer $d \geq 2$.

PROOF OF THEOREM 2.4.3. For all integers $n \geq 1$, let $Y^n = (Y_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$ be the additive process defined on its elementary increments by $Y_{\{x\}}^n = X_{\{x\}}^n - \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$. Let us prove now that for all $n \geq 1$, Y^n is a strong LMG relative to the filtration $(\mathcal{F}_A^n)_{A \in \mathcal{A}_n}$.

First, for all $A \in \mathcal{A}_n$, we have $Y_A^n = \sum_{x \in A} Y_{\{x\}}^n$. Since for all $x \in \Delta_n$, $X_{\{x\}}^n$ is $\mathcal{F}_{S[a,x]}^n$ -measurable, it remains to show that $\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$ is also $\mathcal{F}_{S[a,x]}^n$ -measurable. But $\Delta_n \in \mathcal{A}$, so Δ_n can be written as $S[a, (\alpha_1^n, \alpha_2^n)]$ with $(\alpha_1^n, \alpha_2^n) \in \mathbb{Z}^2$. If we denote $A = S[a, x]$, $A_1 = S[a, (x_1 - 1, \alpha_2^n)]$ and $A_2 = S[a, (\alpha_1^n, x_2 - 1)]$, we can write $\mathcal{G}_{\{x\}}^{n*} = \mathcal{F}_{A_1} \vee \mathcal{F}_{A_2}$. Thanks both to lemma 1.4.3 of Ivanoff & Merzbach (2000) in [IM00] and condition (1.13), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) &= \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{F}_{A_1} \vee \mathcal{F}_{A_2}) \\ &= \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{F}_{A \cap A_1} \vee \mathcal{F}_{A \cap A_2}) \end{aligned}$$

because $A_1 \cap A_2 \subseteq A$ by definition and $X_{\{x\}}^n$ is $\mathcal{F}_A$ -measurable. Thus, $\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$ is $\mathcal{F}_{S[a,x]}^n$ -measurable. Finally, it is clear that for every $x \in \Delta_n$, $\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) = 0$. Hence, $(Y_A^n, \mathcal{F}_A^n, A \in \mathcal{A}_n)$ is a strong LMG array.

Let us prove now that $(Y_A^n, \mathcal{F}_A^n, A \in \mathcal{A}_n)$ satisfies the assumptions of Theorem 2.4.2. We only prove that conditions (2.16) and (2.17) hold because demonstration of condition (2.15) is routine. To prove condition (2.16), observe that

$$\sum_{x \in \Delta_n} (Y_{\{x\}}^n)^2 = \sum_{x \in \Delta_n} (X_{\{x\}}^n)^2 - 2 \sum_{x \in \Delta_n} X_{\{x\}}^n \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) + \sum_{x \in \Delta_n} (\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2.$$

Since (X^n) satisfies both (2.16) and (2.20), it suffices to prove that the term $\sum_{x \in \Delta_n} X_{\{x\}}^n \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$ converges in probability to 0. But by Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\left| \sum_{x \in \Delta_n} X_{\{x\}}^n \mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) \right| \leq \left[\sum_{x \in \Delta_n} (X_{\{x\}}^n)^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{x \in \Delta_n} (\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2 \right]^{1/2}.$$

Again with (2.16) and (2.20), the right-hand side converges in probability to 0. To prove condition (2.17), observe that

$$\mathbb{E} \left(\max_{x \in \Delta_n} (Y_{\{x\}}^n)^2 \right) \leq 2 \mathbb{E} \left(\max_{x \in \Delta_n} (X_{\{x\}}^n)^2 \right) + 2 \mathbb{E} \left[\max_{x \in \Delta_n} (\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2 \right].$$

As the first term in the right-hand side is bounded by assumption (2.17), it remains to show that the second term is also bounded. For this, we observe that

$$\max_{x \in \Delta_n} (\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2 \leq \max_{x \in \Delta_n} \left[\mathbb{E} \left(\max_{y \in \Delta_n} |X_{\{y\}}^n| | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*} \right) \right]^2$$

and that $S_{S[a,x]}^n = \mathbb{E}(\max_{y \in \Delta_n} |X_{\{y\}}^n| | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$ is a martingale relative to the filtration $\mathcal{H}_{S[a,x]}^n = \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}$. Thus, by assumption (1.13) and Cairoli maximal inequality for positive lattice submartingales (Proposition 1.4.12), we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max_{x \in \Delta_n} (\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2 \right] &\leq 2^4 \max_{x \in \Delta_n} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\max_{y \in \Delta_n} |X_{\{y\}}^n| | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*} \right) \right]^2 \\ &\leq 2^4 \max_{x \in \Delta_n} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\max_{y \in \Delta_n} |X_{\{y\}}^n|^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*} \right) \right] \\ &\leq 2^4 \mathbb{E} \left(\max_{y \in \Delta_n} |X_{\{y\}}^n|^2 \right) \end{aligned}$$

which is bounded by assumption (2.17).

Therefore by Theorem 2.4.2, $Y_{\Delta_n}^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ (stably), where Z is a random variable with characteristic function $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}t^2\eta^2))$. Consequently, by assumption (2.19), $X_{\Delta_n}^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ (stably). $\square$

PROOF OF LEMMA 2.4.6. The proof is made by induction on the cardinal of C which will be denoted $|C|$.

Suppose first that $C = \{x\}$ that is $|C| = 1$. Consider a σ -field $\mathcal{F}_x$ and a set A_x in $\mathcal{F}_x$ such that $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*)$ is $\mathcal{F}_x$ -measurable, a σ -field $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_{\{x\}}^*$ and a positive $\mathcal{G}$ -measurable function η . If $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}) \leq \eta$, the result is obvious. But, if $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}) > \eta$, $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta$ because $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_{\{x\}}^*$. Hence $\mathbb{P}(\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta | \mathcal{G}) = 1$ and consequently $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}) \leq \eta + \mathbb{P}(\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta | \mathcal{G})$.

Suppose now that C belongs to $\mathcal{C}$ with $|C| = n$ and that the lemma is true for all $C' \in \mathcal{C}$ with cardinal equal to $n - 1$. Let $(\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{S[a,x]}, x \in C)$ be a collection satisfying condition (1.12). For each $x \in C$, let A_x be a set of $\mathcal{F}_x$ such that $\mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*)$ is $\mathcal{F}_x$ -measurable and consider a σ -field $\mathcal{G}$ contained in $\mathcal{G}_C^*$ and η a positive $\mathcal{G}$ -measurable function. Define $y = \min_{x \in C} x$ where the minimum is taken with respect to the lexicographic order.

Since $\mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}_{\{y\}}^*) \leq \sum_{x \in C} \mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*)$, thus if $\mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}) > \eta$, then we obtain that $\mathbb{P}(\sum_{x \in C} \mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta | \mathcal{G}) = 1$ which implies the desired inequality.

Otherwise $\mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}) \leq \eta$, take $C' = C \setminus \{y\}$. Its cardinal equals $n - 1$ and by the choice of y , C' belongs to $\mathcal{C}$. Since $y \notin C'$, $\mathcal{F}_y \subseteq \mathcal{G}_{C'}^*$ and $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_C^* \subseteq \mathcal{G}_{C'}^*$. Consider a positive $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y$ -measurable function η' . According to the induction assumption, we can apply the lemma to C' , $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y$ and η' and obtain

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in C'} A_x | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y\right) \leq \eta' + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in C'} \mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta' | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y\right).$$

Now choose $\eta' = \eta - \mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}_{\{y\}}^*)$ which is $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y$ -measurable. The above inequality becomes

$$\mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}_{\{y\}}^*) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in C'} A_x | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in C'} \mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) + \mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}_{\{y\}}^*) > \eta | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y\right).$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in C} A_x | \mathcal{G}\right) &\leq \mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in C'} A_x | \mathcal{G}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(A_y | \mathcal{G}_{\{y\}}^*) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in C'} A_x | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_y\right) | \mathcal{G}\right). \end{aligned}$$

Combining the last two inequalities yields

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in C} A_x | \mathcal{G}\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in C} \mathbb{P}(A_x | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) > \eta | \mathcal{G}\right). \quad \square$$

PROOF OF LEMMA 2.4.5. The proof of lemma 2.4.5 is similar to that given in Hall & Heyde (1980) but with some adaptations to spatial framework that we give now.

For each $\epsilon > 0$ and each $n \geq 1$ let us take $\mathcal{G}$ equal to the trivial σ -field, $C = \Delta_n$, $A_x = \{|X_{\{x\}}^n| > \epsilon\} \in \mathcal{F}_{S[a,x]}^n$. As in the proof of Theorem 2.4.3, thanks to Lemma 1.4.3 in Ivanoff & Merzbach (2000), $\mathbb{E}(1_{A_x} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})$ is $\mathcal{F}_{S[a,x]}^n$ -measurable. So by Lemma 2.4.6, for every positive constant η ,

$$\mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| > \epsilon\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{P}(|X_{\{x\}}^n| > \epsilon | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) > \eta\right).$$

Applying the conditional version of Chebyshev's inequality to the second term of the right-hand side yields

$$\mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| > \epsilon\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) > \eta \epsilon^2\right). \quad (2.24)$$

Let ϵ , δ and $\lambda > 0$ be positive reals and define

$$\begin{aligned} Y_{\{x\}}^n &= X_{\{x\}}^n 1_{\{|X_{\{x\}}^n| \leq \epsilon \text{ and } (V_{S[a,x]}^n)^2 \leq \lambda\}}, \\ C_A^n &= \sum_{x \in A} (Y_{\{x\}}^n)^2, \\ D_A^n &= \sum_{x \in A} \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) = \sum_{x \in A} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^n| \leq \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) 1_{\{(V_{S[a,x]}^n)^2 \leq \lambda\}}. \end{aligned}$$

Set $p_n = \mathbb{P}((U_A^n)^2 \neq (C_A^n)^2 \text{ or } |(V_A^n)^2 - (D_A^n)^2| > \delta \text{ for some } A \in \mathcal{A}_n)$. Then,

$$p_n \leq \mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| > \epsilon\right) + \mathbb{P}((V_{\Delta_n}^n)^2 > \lambda) + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) > \delta\right).$$

Now,

$$\mathbb{P}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(U_A^n)^2 - (V_A^n)^2| > 2\delta\right) \leq p_n + \mathbb{P}(\exists A \in \mathcal{A}_n, |(C_A^n)^2 - (D_A^n)^2| > \delta).$$

Applying Chebyshev's inequality to the second term of the right-hand side gives

$$\mathbb{P}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(C_A^n)^2 - (D_A^n)^2| > \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2} \mathbb{E}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} \left[\sum_{x \in A} ((Y_{\{x\}}^n)^2 - \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))\right]^2\right).$$

Observe that $S_A = \sum_{x \in A} ((Y_{\{x\}}^n)^2 - \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))$ is a LMG relative to the filtration $\mathcal{H}_A = \mathcal{F}_A^n$. Thus by assumption (1.13) and Cairoli maximal inequality for positive lattice submartingales (Proposition 1.4.12),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(C_A^n)^2 - (D_A^n)^2| > \delta\right) &\leq \frac{2^4}{\delta^2} \max_{A \in \mathcal{A}_n} \mathbb{E}\left(\sum_{x \in A} (Y_{\{x\}}^n)^2 - \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2\right) \\ &\leq \frac{2^4}{\delta^2} \max_{A \in \mathcal{A}_n} \mathbb{E}\left(\sum_{x \in A} [(Y_{\{x\}}^n)^2 - \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})]^2\right). \end{aligned}$$

The last inequality derives from strong martingale property. Finally, we get

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(C_A^n)^2 - (D_A^n)^2| > \delta\right) &\leq \frac{2^4}{\delta^2} \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 - \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}))^2 \\
&\leq \frac{2^4}{\delta^2} \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^4) \\
&\leq \epsilon^2 \frac{2^4}{\delta^2} \mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((Y_{\{x\}}^n)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})\right) \\
&\leq \epsilon^2 \lambda \frac{2^4}{\delta^2}.
\end{aligned}$$

Hence for ϵ , δ and $\lambda > 0$, from inequality (2.24) and condition (2.22)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(U_A^n)^2 - (V_A^n)^2| > 2\delta\right) \leq \sup_n \mathbb{P}((V_{\Delta_n}^n)^2 > \lambda) + \epsilon^2 \lambda \frac{2^4}{\delta^2}.$$

Letting first ϵ tend to 0 and then λ tend to ∞ yields

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max_{A \in \mathcal{A}_n} |(U_A^n)^2 - (D_A^n)^2| > 2\delta\right) = 0. \quad \square$$

PROOF OF THEOREM 2.4.4. We first prove that the array $(Y_A^n; A \in \mathcal{A}_n, n \geq 1)$ defined by equation (2.23) satisfies the assumptions in Theorem 2.4.3. Condition (2.17) is clearly satisfied. It remains then to prove conditions (2.15), (2.16), (2.19) and (2.20).

As (X^n) satisfies the assumptions in lemma 2.4.5, it verifies inequality (2.24) which implies with condition (2.22) that $\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n|$ converges in probability to 0. We easily deduce that so does $\max_{x \in \Delta_n} |Y_{\{x\}}^n|$. Thus condition (2.15) holds. For condition (2.16), by assumptions (2.22) and (2.21) for (X^n) , according to Lemma 2.4.5 it follows that $(U_{\Delta_n}^n)^2$ converges in probability to η^2 . But for all $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_n} (Y_{\{x\}}^n)^2 - \eta^2\right| > \delta\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| > 1\right) + \mathbb{P}(|(U_{\Delta_n}^n)^2 - \eta^2| > \frac{\delta}{2}).$$

Hence, $\sum_{x \in \Delta_n} (Y_{\{x\}}^n)^2$ converges in probability to η^2 .

To prove conditions (2.19) and (2.20), it suffices to show that $\sum_{x \in \Delta_n} |\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})|$ converges in probability to 0. For this, we have by strong martingale property

$$\sum_{x \in \Delta_n} |\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})| = \sum_{x \in \Delta_n} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > 1\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})|.$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \Delta_n} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^n 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > 1\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})| &\leq \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}(|X_{\{x\}}^n| 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > 1\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}) \\
&\leq \sum_{x \in \Delta_n} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^n)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^n| > 1\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*}).
\end{aligned}$$

According to the conditional Lindeberg condition, $\sum_{x \in \Delta_n} |\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^n | \mathcal{G}_{\{x\}}^{n*})|$ converges in probability to 0.

We can now apply Theorem 2.4.3 to the array $(Y_A^n; A \in \mathcal{A}_n, n \geq 1)$ and conclude that $Y_{\Delta_n}^n$ converges stably in distribution to a random variable Z with characteristic function $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}t^2\eta^2))$. Now for all $F \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}\left(1_F \exp\left(it \sum_{x \in \Delta_n} X_{\{x\}}^n\right)\right) - \mathbb{E}\left(1_F \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\eta^2\right)\right) \right| \\ & \leq 2 \mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_n} |X_{\{x\}}^n| > 1\right) + \left| \mathbb{E}\left(1_F \exp\left(it \sum_{x \in \Delta_n} Y_{\{x\}}^n\right)\right) - \mathbb{E}\left(1_F \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\eta^2\right)\right) \right|. \end{aligned}$$

Consequently, $X_{\Delta_n}^n$ converges stably in distribution to Z . $\square$

2.5 Principe d'invariance pour des martingales fortes sous condition de Lindeberg conditionnelle

Dans cette partie, nous étendons le théorème de la limite centrale sous condition de Lindeberg conditionnelle de la section précédente à un principe d'invariance correspondant.

On suppose dans cette partie que $d = 2$ de manière à simplifier les notations. Cependant, les résultats énoncés ainsi que les preuves restent valables pour $d \geq 2$.

2.5.1 Notations

Dans toute la suite, nous posons $a = \mathbf{1}$ et $T = S[a, \infty]$ et considérons la collection indexante $\mathcal{A}$ associée, comme définie dans le Chapitre 1.

Nous rappelons que pour qu'un champ additif et intégrable soit une martingale forte, il suffit de démontrer, pour tout $x \in T$, que $X_{\{x\}}$ est $\mathcal{F}_{S[a,x]}$ -mesurable et vérifie $\mathbb{E}(X_{\{x\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^*) = 0$ p.s.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, notons $\Delta_N = S[a, \mathbf{N}]$ et considérons un tableau de martingales fortes $(X_A^N, \mathcal{F}_A^N, N \geq 1, A \subseteq \Delta_N, A \in \mathcal{A})$. Le théorème de la limite centrale de Tjøstheim (1983) et le théorème de la limite centrale que nous avons établi dans la section précédente donnent la normalité asymptotique de sommes d'accroissements de martingales fortes sur Δ_N , c'est-à-dire pour les quantités

$$X_{\Delta_N}^N = \sum_{x \in \Delta_N} X_{\{x\}}^N. \quad (2.25)$$

Introduisons pour tout $t = (t_1, t_2)$ de $[0, 1]^2$, l'ensemble

$$\Delta_N(t) = S[a, [Nt_1], [Nt_2]] \quad (\Delta_N((0, 0)) = \emptyset), \quad (2.26)$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Les principes d'invariance que nous allons établir dans les Paragraphes 2.5.3 et 2.5.4. concernent les quantités

$$W_N(t) = \sum_{x \in \Delta_N(t)} X_{\{x\}}^N. \quad (2.27)$$

Notons maintenant, $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]^2$ muni de la topologie uniforme. Pour tous s et t dans $[0, 1]^2$ tels que $s \prec t$, considérons les ensembles $]s, t]$, définis au Chapitre 1 par la relation (1.14). Ces ensembles seront appelés “ blocs de $[0, 1]^2$ ”.

Dans le but d'identifier le champ limite dans les principes d'invariances, rappelons qu'un champ aléatoire $(W_t)_{t \in [0, 1]^2}$ est appelé mouvement brownien si

1. $\mathbb{P}(W \in \mathcal{C}_2) = 1$.
2. $\mathbb{P}(W(t) = 0) = 1$ pour tout $t \in T_0^d = \{t \in [0, 1]^2, \exists j = 1, 2 \mid t_j = 0\}$.
3. Si $B_1, \dots, B_k$ sont des blocs disjoints de $[0, 1]^2$, $W(B_1), \dots, W(B_k)$ sont des variables normales indépendantes centrées et de variances $|B_1|, \dots, |B_k|$ où

$$W(B) = \sum_{\alpha_i=0,1 \ i=1\dots d} (-1)^{d-\sum_{i=1}^d \alpha_i} B(s_1 + \alpha_1(t_1 - s_1), \dots, s_d + \alpha_d(t_d - s_d))$$

et $|B|$ représente le volume du bloc $B =]s, t]$.

2.5.2 Une inégalité de martingales fortes

Nous donnons ici, quelques définitions et propriétés données par Walsh (1986) (voir [Wal86]) sur les ensembles et lignes d'arrêt. Pour tout ensemble $D \subseteq T$, on définit

$$D^\circ = \{s \in D, \exists t \in D \mid s \prec t\}. \quad (2.28)$$

Définition 2.5.1. *Un ensemble d'arrêt est un sous-ensemble aléatoire D de T tel que*

- $\forall \omega \in \Omega, D(\omega) \in \mathcal{A}(u)$,
- $\forall t \in T, \{t \in D^\circ\}$ et $\{t \in D\}$ sont $\mathcal{F}_{S[a,t]}$ -mesurables.

On dit qu'il est borné s'il existe un rectangle $A \in \mathcal{A}$ tel que $D \subseteq A$ p.s. et l'ensemble $D \setminus D^\circ$ est appelé ligne d'arrêt de D .

Remarque 2.5.2. Tout ensemble $A \in \mathcal{A}(u)$ est un ensemble d'arrêt borné. De plus, pour deux ensembles d'arrêt D_1 et D_2 , les ensembles $D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2$ sont aussi des ensembles d'arrêt.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ un champ à valeurs réelles adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_A, A \in \mathcal{A}\}$ tel qu'il existe $B \in \mathcal{A}$ vérifiant $X_B \in K$. Alors, l'ensemble

$$D_K = \cup_{A \in \mathcal{A}} \{A \mid X_B \in K^c, \forall B \subseteq A^\circ\} \quad (2.29)$$

est un domaine d'arrêt dont la ligne d'arrêt est le premier “temps d'entrée” en K .

Définition 2.5.3. *Pour un ensemble d'arrêt D , définissons la tribu suivante*

$$\mathcal{F}_D^* = \{\Lambda \in \mathcal{F}, \Lambda \cap \{t \notin D^\circ\} \in \mathcal{G}_{\{t+\}}^* \forall t \in T\}, \quad (2.30)$$

où pour tout $t \in T$, $t^+ = (t_1 + 1, t_2 + 1)$.

Remarque 2.5.4. Si D_1 et D_2 sont deux ensembles d'arrêt tels que $D_1 \subseteq D_2$, alors $\mathcal{F}_{D_1}^* \subseteq \mathcal{F}_{D_2}^*$. En outre, pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{F}_{S[a,t]}$ -mesurable et tout ensemble d'arrêt D , la variable aléatoire $Y1_{\{t \in D\}}$ est $\mathcal{F}_D^*$ -mesurable.

Le lemme suivant, que nous présentons avec les notations du Chapitre 1, est un résultat dû à Walsh (1979) (voir [Wal79]).

Lemme 2.5.5. (Walsh (1979)) Soient D_1 et D_2 deux ensembles d'arrêt bornés tels que $D_1 \subseteq D_2$ et $X = (X_A)_{A \in \mathcal{A}}$ une martingale forte. Alors

$$\mathbb{E}(X_{D_2} | \mathcal{F}_{D_1}^*) = X_{D_1} \text{ p.s.}$$

Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$, $m \geq a_1$, $n \geq a_2$ et D un ensemble d'arrêt inclus dans un rectangle $S[a, (m, n)]$ et dont nous notons L sa ligne d'arrêt. Pour $(i, j) \in T$, on note

$$R_{i\infty} = \{t \in T, t_1 \leq i\}$$

et

$$R_{\infty j} = \{t \in T, t_2 \leq j\}.$$

La proposition suivante donne la décomposition, donnée par Walsh (1979), d'une martingale forte le long d'une ligne d'arrêt.

Proposition 2.5.6. (Walsh (1979)) Soit $\{X_A, A \in \mathcal{A}\}$ une martingale forte. Alors, pour tous $(i, j) \in L$,

$$X_{S[a, (i, j)]} = X_i^1 + X_j^2 - X_D$$

où $X_1^1, \dots, X_m^1, X_{S[a, (m, n)]}$ et $X_1^2, \dots, X_n^2, X_{S[a, (m, n)]}$ sont deux martingales classiques.

Nous établissons dans le théorème ci-dessous une inégalité pour des martingales fortes analogue à celle de Brown (1971) (voir [Bro71]) pour des martingales classiques. Nous ferons usage de cette inégalité pour démontrer le principe d'invariance de la Section 2.5.3.

Théorème 2.5.7. Etant donné $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, considérons $(X_A, A \in \mathcal{A}, A \subseteq S[a, (m, n)])$ un tableau de martingales fortes. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{(i, j) \in S[a, (m, n)]} |X_{S[a, (i, j)]}| \geq \lambda\right) \leq 12 \mathbb{E}(|X_{S[a, (m, n)]}| 1_{\{|X_{S[a, (m, n)]}| \geq \frac{\lambda}{6}\}}).$$

PREUVE. La preuve utilise les techniques employées par Walsh (1986) pour démontrer certaines inégalités de martingales fortes sur un réseau.

Notons

$$\mathcal{A}_{(m, n)} = \{A \in \mathcal{A}, A \subseteq S[a, (m, n)]\}.$$

Pour $\lambda > 0$, définissons l'ensemble d'arrêt, de la forme (2.29), suivant

$$D = \cup_{A \in \mathcal{A}_{(m, n)}} \{A : |X_{S[a, (i, j)]}| < \lambda \forall (i, j) \in A^o\}.$$

Si

$$\sup_{A \in \mathcal{A}_{(m,n)}} |X_A| \geq \lambda,$$

alors il existe au moins un point $(i, j) \in L$ tel que

$$X_{S[a,(i,j)]} \geq \lambda.$$

En effet, supposons par l'absurde que pour tout $(i, j) \in L$, $X_{S[a,(i,j)]} < \lambda$. Par définition de D , chaque $(i, j) \in D^o$ vérifie $X_{S[a,(i,j)]} < \lambda$ et on en déduit alors que pour tout $(i, j) \in D$, $X_{S[a,[i,j)]} < \lambda$. Par suite,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}_{(m,n)}} |X_A| < \lambda,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Pour ce point $(i, j) \in L$, d'après la Proposition 2.5.6,

$$X_{S[a,(i,j)]} = X_i^1 + X_j^2 - X_D.$$

Pour que $|X_{S[a,(i,j)]}|$ soit plus grand que λ , il est nécessaire que $|X_i^1|$, $|X_j^2|$ ou $|X_D|$ soit plus grand que $\frac{\lambda}{3}$.

Puisque $X_1^1, \dots, X_m^1, X_{S[a,(m,n)]}$ est une martingale classique, il s'en suit par application de l'inégalité de Brown (1971) pour des martingales (voir Lemme 4. dans [Bro71]),

$$\mathbb{P}\left(\sup_{i \leq m} |X_i^1| \geq \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{6}{\lambda} \mathbb{E}(1_{\{|X_{mn}| \geq \frac{\lambda}{6}\}} |X_{S[a,(m,n)]}|).$$

De la même manière,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j \leq n} |X_j^2| \geq \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{6}{\lambda} \mathbb{E}(1_{\{|X_{mn}| \geq \frac{\lambda}{6}\}} |X_{S[a,(m,n)]}|).$$

De plus, $X_D = X_m^1 = X_n^2$ si bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{A \in \mathcal{A}_{(m,n)}} |X_A| \geq \lambda\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{i \leq m} |X_i^1| \geq \frac{\lambda}{3} \text{ ou } \sup_{j \leq n} |X_j^2| \geq \frac{\lambda}{3}\right) \\ &\leq \frac{12}{\lambda} \mathbb{E}(1_{\{|X_{S[a,(m,n)]}| \geq \frac{\lambda}{6}\}} |X_{S[a,(m,n)]}|). \end{aligned} \quad \square$$

2.5.3 Un premier principe d'invariance

Dans cette section nous démontrons un principe d'invariance pour les quantités (2.27). Au préalable, nous devons étendre dans le lemme ci-dessous le théorème de la limite centrale du Corollaire 2.8 de Mc Leish (1974) (voir [McL74]) à des martingales fortes.

Lemme 2.5.8. Soit $(X_A^N, \mathcal{F}_A^N, N \geq 1, A \subseteq \Delta_N, A \in \mathcal{A})$ un tableau de martingales fortes satisfaisant les conditions suivantes :

$$\sum_{x \in \Delta_N} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \quad (2.31)$$

$$\max_{x \in \Delta_N} |X_{\{x\}}^N| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.32)$$

$$\forall \epsilon \geq 0, \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2 < 1 - \epsilon\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.33)$$

et

$$\forall N \geq 1 \forall A \in \mathcal{A}_N, \mathcal{F}_A^N \subseteq \mathcal{F}_A^{N+1}. \quad (2.34)$$

Alors,

$$X_{\Delta_N}^N = \sum_{x \in \Delta_N} X_{\{x\}}^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

PREUVE. Nous allons appliquer le Théorème 2.4.2. Vérifions donc que les hypothèses (2.15), (2.16), (2.17) de ce théorème sont satisfaites et le résultat du lemme en découlera. L'hypothèse (2.32) correspond exactement à l'hypothèse (2.15).

D'après le Lemme 2.11 de Mc Leish (1974) et les hypothèses (2.31) et (2.33),

$$\sum_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^1} 1$$

où pour $p \in \mathbb{N}^*$ $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^p}$ désigne la convergence dans L^p . Ainsi l'hypothèse (2.16) est vérifiée.

De plus,

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\max_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2\right).$$

Le dernier terme étant borné d'après l'hypothèse (2.31), l'hypothèse (2.17) est donc vérifiée. $\square$

Le principe d'invariance suivant correspond à une généralisation au cas des martingales fortes, du Théorème 3.2 de Mc Leish (1974).

Théorème 2.5.9. Soit $(X_A^N, \mathcal{F}_A^N, N \geq 1, A \subseteq \Delta_N, A \in \mathcal{A})$ un tableau de martingales fortes vérifiant la condition (2.34). Supposons de plus que

$$\max_{x \in \Delta_N(t)} |X_{\{x\}}^N| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^2} 0 \quad (2.35)$$

$$\sum_{x \in \Delta_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} t_1 t_2 \quad (2.36)$$

pour tout $t \in [0, 1]^2$.

Alors $W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$, où $W_N(t) = \sum_{x \in \Delta_N(t)} X_{\{x\}}^N$ et W est le mouvement brownien sur $[0, 1]^2$.

Remarque 2.5.10. $W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$ signifie que la suite de champs $(W_N)_N$ converge vers le champ W dans la version multidimensionnelle des fonctions càd-làg $\mathcal{D}_2$ (voir Bickel et Wichura (1971) [BW71] et Straf (1972) [Str72]).

PREUVE. La preuve se décompose en trois étapes principales.

Étape 1 : Définissons un nouveau tableau de champs additifs (Y_A^N) sur ses accroissements élémentaires

$$Y_{\{x\}}^N = X_{\{x\}}^N 1_{\{\sum_{y \in V_N(x-1)} (X_{\{y\}}^N)^2 \leq 2\}}$$

où

$$V_N(x-1) = \cup_{j=1}^2 \{y \in \Delta_N, y_j \leq x_j - 1\}.$$

On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N, X_{\{x\}}^N \neq Y_{\{x\}}^N) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\exists x \in \Delta_N, \sum_{y \in V_N(x-1)} (X_{\{y\}}^N)^2 > 2\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\left| \sum_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2 - 1 \right| > 1\right). \end{aligned}$$

D'après (2.36) pour $t = (1, 1)$, on déduit que $\mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N, X_{\{x\}}^N \neq Y_{\{x\}}^N)$ converge en probabilité vers 0.

Considérons maintenant, pour tout $t \in [0, 1]^2$, l'ensemble aléatoire

$$R_N(t) = \{x \in \Delta_N(t), \sum_{y \in V_N(x-1)} (X_{\{y\}}^N)^2 \leq 2\}$$

où $\Delta_N(t)$ est défini par la relation (2.26), et définissons la variable aléatoire

$$x_N^*(t) = \max\{x, x \in R_N(t)\}.$$

Alors, comme dans Tjøstheim (1983),

$$R_N(t) \subseteq V_N(x_N^*(t) - 1) \cup \{x_N^*(t)\},$$

si bien que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Delta_N(t)} (Y_{\{x\}}^N)^2 &= \sum_{x \in R_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2 \\ &\leq \sum_{x \in V_N(x_N^*(t)-1)} (X_{\{x\}}^N)^2 + (X_{\{x_N^*(t)\}}^N)^2 \\ &\leq 2 + \max_{x \in \Delta_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2. \end{aligned}$$

Or, $\max_{x \in \Delta_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2$ est uniformément intégrable d'après (2.35). Par suite, $\sum_{x \in \Delta_N(t)} (Y_{\{x\}}^N)^2$ est aussi uniformément intégrable.

De manière évidente, $Y_{\{x\}}^N$ est $\mathcal{F}_{S[1,x]}^N$ -mesurable et

$$\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) = 1_{\{\sum_{y \in V_N(x-1)} (X_{\{y\}}^N)^2 \leq 2\}} \mathbb{E}(X_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) = 0.$$

Par conséquent, (Y_A^N) est un tableau de martingales fortes vérifiant

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Delta_N} |Y_{\{x\}}^N| &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \\ \sum_{x \in \Delta_N} (Y_{\{x\}}^N)^2 &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^1} t_1 t_2 \quad \forall t. \end{aligned}$$

Montrons que $W_N^Y \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$ avec $W_N^Y(t) = \sum_{x \in \Delta_N(t)} Y_{\{x\}}^N$, nous pourrions alors en déduire que $W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$. En effet,

$$\mathbb{P}(W_N \neq W_N^Y) \leq \mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N, Y_{\{x\}}^N \neq X_{\{x\}}^N)$$

et le terme majorant converge en probabilité vers 0. Ainsi, on est ramené à démontrer la convergence de $(W_N^Y)_N$ vers W dans $\mathcal{D}_2$.

Étape 2 : Convergence en distributions finies

Soient $u_1, \dots, u_m$ des nombres réels quelconques et $0 \prec t_1, \dots, t_m$ des éléments de $[0, 1]^2$. Quitte à rajouter des t_i et éventuellement à changer leurs indices, on peut supposer que la suite $A_0 = \{a\}$, $A_1 = \Delta_N(t_1), \dots, A_m = \Delta_N(t_m)$ est numérotée de façon consistante par rapport au passé fort (voir Section 1.4.1 du Chapitre 1).

Maintenant, posons

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 \\ C_j &= A_j \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} A_i) \text{ for } j = 1 \dots m \end{aligned}$$

et définissons un nouveau tableau de martingales fortes de la manière suivante

$$Z_{\{x\}}^N = \begin{cases} u_j \cdot Y_{\{x\}}^N & \text{if } x \in C_j \\ 0 & \text{if } x \notin \cup_{i=1}^m A_i. \end{cases}$$

Puisque

$$\max_{x \in \Delta_N} |Z_{\{x\}}^N| \leq \max_{j=1 \dots m} |u_j| \cdot \max_{x \in \Delta_N} |X_{\{x\}}^N|,$$

on déduit que $\max_{x \in \Delta_N} |Z_{\{x\}}^N|$ converge en probabilité vers 0.

Définissons

$$\begin{aligned} B_1 &= (0, t_1] \\ B_j &= (0, t_j] \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} (0, t_i]) \text{ for } j = 2 \dots m. \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{x \in \Delta_N} (Z_{\{x\}}^N)^2 = \sum_{j=1}^m u_j^2 \sum_{x \in C_j} (Y_{\{x\}}^N)^2$$

et par hypothèse (2.36) pour le tableau (Y_A^N) , on en déduit que

$$\sum_{x \in \Delta_N} (Z_{\{x\}}^N)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^1} \sum_{j=1}^m u_j^2 |B_j| = \sigma^2,$$

où $|B_j|$ représente la mesure de Lebesgue de l'ensemble B_j (qui n'est pas nécessairement un bloc).

Appliquons le Lemme 2.5.8 avec variance σ^2 au lieu de 1. On en déduit alors que $\sum_{x \in \Delta_N} Z_{\{x\}}^N$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Puisque $\sum_{x \in \Delta_N} Z_{\{x\}}^N = \sum_{j=1}^m u_j Y_{C_j}^N$, le procédé de Cramér-Wold permet d'en déduire que $(Y_{C_1}^N, \dots, Y_{C_m}^N)$ converge en loi vers $\mathcal{N}_m(0, \Gamma)$, avec $\Gamma = \text{diag}(|B_1|, \dots, |B_m|)$.

D'où $(W_N^Y(t_1), \dots, W_N^Y(t_m)) = (Y_{C_1}^N, Y_{C_1}^N + Y_{C_2}^N, \dots, Y_{C_1}^N + \dots + Y_{C_m}^N)$ converge aussi en loi.

Nous allons démontrer, à l'étape 3, un critère de tension dans $\mathcal{C}_2$. D'après le Théorème 5.6 de Straf (1972), le champ limite appartiendra donc à $\mathcal{C}_2$ presque sûrement.

De plus, pour $t \in T_0^2$, nous avons démontré que $W_N^Y(t)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $|B_1| = 0$ avec $B_1 = [0, t]$. Par conséquent, $W(t) = 0$ presque sûrement.

Remarquons que pour tout $j = 1 \dots m$, $W_N^Y(B_j) = Y_{C_j}^N$. Nous avons donc démontré que $(W_N^Y(B_1), \dots, W_N^Y(B_m))$ converge en loi vers $\mathcal{N}_m(0, \Gamma)$ de matrice de variance-covariance $\Gamma = \text{diag}(|B_1|, \dots, |B_m|)$.

Si l'on considère maintenant, les blocs disjoints $B_1, \dots, B_k$ pour un bon choix de $t_1, \dots, t_k$, on peut montrer que $W(B_1), \dots, W(B_k)$ sont des variables aléatoires indépendantes centrées de variances $|B_1|, \dots, |B_k|$.

Le champ limite W est donc un mouvement Brownien.

Étape 3 : Tension

Pour démontrer la tension, il est suffisant de prouver pour tout $\epsilon > 0$ que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{\|s-t\| < \delta} |W_N^Y(s) - W_N^Y(t)| > \epsilon \right) = 0 \quad (2.37)$$

où $\|s-t\| = \max(|s_1 - t_1|, |s_2 - t_2|)$.

Fixons $\epsilon > 0$ et remarquons que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{\|s-t\| < \delta} |W_N^Y(s) - W_N^Y(t)| > \epsilon \right) \\ & \leq \sum_{k, k\delta < 1} \sum_{l, l\delta < 1} \mathbb{P} \left(\sup_{\substack{k\delta < t_1 \leq (k+1)\delta \\ l\delta < t_2 \leq (l+1)\delta}} |W_N^Y(t) - W_N^Y((k, l)\delta)| > \frac{\epsilon}{4} \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\sup_{\substack{k\delta < t_1 \leq (k+1)\delta \\ l\delta < t_2 \leq (l+1)\delta}} |W_N^Y(t) - W_N^Y((k, l)\delta)| \leq \sup_{\substack{r \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ r \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} \left| \sum_{\substack{x \in \Delta_r \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} Y_{\{x\}}^N \right|$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{||s-t|| < \delta} |W_N^Y(s) - W_N^Y(t)| > \epsilon \right) \\ & \leq \sum_{k, k\delta < 1} \sum_{l, l\delta < 1} \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{r \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ r \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} \left| \sum_{\substack{x \in \Delta_r \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} Y_{\{x\}}^N \right| > \frac{\epsilon}{4} \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de martingale du Théorème 2.5.7,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{||s-t|| < \delta} |W_N^Y(s) - W_N^Y(t)| > \epsilon \right) \\ & \leq \sum_{k, k\delta < 1} \sum_{l, l\delta < 1} \frac{12 \times 4}{\epsilon} \mathbb{E}\left(\left| \sum_{\substack{x \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} Y_{\{x\}}^N \right| 1 \left\{ \left| \sum_{\substack{x \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} Y_{\{x\}}^N \right| > \frac{\epsilon}{6 \times 4} \right\} \right) \end{aligned}$$

et par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{||s-t|| < \delta} |W_N^Y(s) - W_N^Y(t)| > \epsilon \right) \\ & \leq \sum_{k, k\delta < 1} \sum_{l, l\delta < 1} \frac{12 \times 4}{\epsilon} \left(\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{x \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} (Y_{\{x\}}^N)^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\mathbb{P}\left(\left| \sum_{\substack{x \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} Y_{\{x\}}^N \right| > \frac{\epsilon}{6 \times 4} \right) \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{x \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} (Y_{\{x\}}^N) \right) = (k+1)(l+1)\delta^2 - kl\delta^2$$

et

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{\substack{x \in \Delta_n((k+1, l+1)\delta) \\ x \notin \Delta_n((k, l)\delta)}} Y_{\{x\}}^N \right| > \frac{\epsilon}{6 \times 4} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0, (k+l+1)\delta^2)| > \frac{\epsilon}{6 \times 4}).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
& \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{\|s-t\| < \delta} |W'_N(s) - W'_N(t)| > \epsilon \right) \\
& \leq \sum_{k, k\delta < 1} \sum_{l, l\delta < 1} \frac{12 \times 4}{\epsilon} \left((k+l+1)\delta^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0, (k+l+1)\delta^2)| > \frac{\epsilon}{6 \times 4}) \right)^{1/2} \\
& \leq \frac{1}{\delta^{3/2}} \frac{12 \times 4 \times \sqrt{3}}{\epsilon} \left(\int_{|x| > \frac{\epsilon}{6.4 \sqrt{3}\delta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)^{1/2} \\
& \leq \frac{12.4 \sqrt{3}}{\epsilon} \left(\int_{|x| > \frac{C}{\sqrt{\delta}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|x|^6}{C^6} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

car $1 + k + l \leq \frac{3}{\delta}$.

Puisque le terme de droite de l'inégalité précédente converge vers 0 lorsque δ converge vers 0, la Condition (2.37) est alors vérifiée pour le processus $(W_N^Y(t))_{t \in [0,1]^2}$. $\square$

2.5.4 Principe d'invariance sous condition de Lindeberg conditionnelle

Afin d'obtenir un principe d'invariance sous condition de Lindeberg conditionnelle pour des tableaux de martingales fortes, nous démontrons, tout d'abord, le résultat suivant, qui est une extension du Théorème 3.6 de Mc Leish (1974) au cas martingale forte.

Théorème 2.5.11. *Soit $(X_A^N, \mathcal{F}_A^N, N \geq 1, A \in \mathcal{A}, A \in \Delta_N)$ un tableau de martingales fortes vérifiant l'hypothèse (1.13) d'indépendance conditionnelle. Supposons, de plus, que les Conditions (2.32), (2.34) et (2.36) sont vérifiées et qu'il existe une constante positive C telle que*

$$\sum_{x \in \Delta_N(t)} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| \leq C\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.38)$$

Alors, $W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$.

PREUVE. Définissons un nouveau tableau de champs additifs sur leurs accroissements élémentaires par la formule suivante :

$$Y_{\{x\}}^N = X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| \leq C\}}.$$

D'après (2.32), ce tableau vérifie

$$\mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N, X_{\{x\}}^N \neq Y_{\{x\}}^N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N} (Y_{\{x\}}^N)^2 - t_1 t_2\right| > \epsilon\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2 - t_1 t_2\right| > \epsilon/2\right) + \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N} (X_{\{x\}}^N)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > C\}}\right| > \epsilon/2\right). \end{aligned}$$

Donc, d'après les hypothèses (2.32) et (2.36)

$$\sum_{x \in \Delta_N} (Y_{\{x\}}^N)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} t_1 t_2.$$

Considérons maintenant, un autre tableau de champs additifs défini de la manière suivante :

$$Z_{\{x\}}^N = Y_{\{x\}}^N - \mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})$$

Montrons que ce tableau vérifie les hypothèses du Théorème 2.5.9.

Grâce à la Condition (1.13), pour tout $x \in \Delta_N$, $Z_{\{x\}}^N$ est $\mathcal{F}_{S[a,x]}^N$ -mesurable et vérifie $\mathbb{E}(Z_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) = 0$. Par suite, (Z_A^N) est une martingale forte.

Pour obtenir la Condition (2.36), remarquons que

$$\sum_{x \in \Delta_N} (Z_{\{x\}}^N)^2 = \sum_{x \in \Delta_N} (Y_{\{x\}}^N)^2 - 2 \sum_{x \in \Delta_N} Y_{\{x\}}^N \mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) + \sum_{x \in \Delta_N} \left(\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right)^2. \quad (2.39)$$

Comme le premier terme du membre de droite de (2.39) converge en probabilité vers $t_1 t_2$, d'après la Condition (2.36) appliquée à (Y_A) , il reste à démontrer uniquement la convergence en probabilité vers 0 des deux autres termes. L'inégalité de Jensen nous permet d'écrire que

$$\sum_{x \in \Delta_N} \left(\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right)^2 \leq C \sum_{x \in \Delta_N} \left|\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right|$$

et le terme majorant converge vers 0 d'après (2.38).

Maintenant, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire que

$$\left|\sum_{x \in \Delta_N} Y_{\{x\}}^N \mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right| \leq \left(\sum_{x \in \Delta_N} (Y_{\{x\}}^N)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{x \in \Delta_N} (\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}))^2\right)^{1/2}$$

D'après ce qui précède, le terme majorant converge en probabilité vers 0.

Comme $|Z_{\{x\}}^N|$ est borné, il suffit de démontrer que $\max_{x \in \Delta_N} |Z_{\{x\}}^N|$ converge en probabilité vers 0 pour obtenir la Condition (2.35). Or,

$$\max_{x \in \Delta_N} |Z_{\{x\}}^N| \leq \max_{x \in \Delta_N} |X_{\{x\}}^N| + \sum_{x \in \Delta_N} |\mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})|$$

et le terme majorant converge en probabilité vers 0 d'après la Condition (2.32) appliqué à (X_A) et la Condition (2.38).

Par conséquent, $W_N^Z \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$, avec $W_N^Z(t) = \sum_{x \in \Delta_N(t)} Z_{\{x\}}^N$.

L'hypothèse (2.38) implique que

$$\sup_{s \in [0,1]^2} \sum_{x \in \Delta_N(s)} \mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

ce qui nous permet d'en déduire que $\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}(Y_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) \right)_{t \in [0,1]^2} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$. D'où $W_N^Y \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$.

Et, finalement, puisque

$$\mathbb{P}(W_N \neq W_N^Y) \leq \mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N, X_{\{x\}}^N \neq Y_{\{x\}}^N),$$

il s'ensuit que $W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$. □

Nous démontrons maintenant un principe d'invariance sous condition de Lindeberg conditionnelle pour des martingales fortes (la Condition (2.42) étant automatiquement vérifiée) mais aussi pour des tableaux de champs additifs proches de martingales fortes. Ce théorème généralise le Corollaire 3.8 de Mc Leish (1974) au cas d'un réseau.

Théorème 2.5.12. *Soit $(X_A^N, \mathcal{F}_A^N, N \geq 1, A \in \mathcal{A}, A \in \Delta_N)$ un tableau de champs additifs tel que $(\mathcal{F}_A^N)$ vérifie les Conditions (1.12), (1.13) et (2.34). Supposons de plus que*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.40)$$

$$\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} t_1 t_2 \quad (2.41)$$

$$\sum_{x \in \Delta_N(t)} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (2.42)$$

pour tout $t \in [0, 1]^2$. Alors, $W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W$.

PREUVE. Le Lemme 2.4.6 et la Condition (1.13), permettent d'écrire, pour tous $\epsilon, \eta > 0$ et $t \in [0, 1]^2$ que

$$\mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_N(t)} |X_{\{x\}}^N| > \epsilon\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{P}(|X_{\{x\}}^N| > \epsilon | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) > \eta\right)$$

et l'inégalité de Tchebychev conduit à

$$\mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_N(t)} |X_{\{x\}}^N| > \epsilon\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > \epsilon\}}) > \eta \epsilon^2\right).$$

Par conséquent, $\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{x \in \Delta_N(t)} |(X_{\{x\}}^N| > \epsilon) \leq \eta$ pour tout $\eta > 0$. D'où,

$$\max_{x \in \Delta_N(t)} |(X_{\{x\}}^N| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Soit maintenant C une constante strictement positive. Montrons que

$$\sum_{x \in \Delta_N(t)} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > C\}}) | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

D'après l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > C\}}) | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| &\leq \mathbb{E}(|X_{\{x\}}^N| 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > C\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) \\ &\leq \frac{1}{C} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > C\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) \end{aligned}$$

et le terme majorant converge vers 0 grâce à la condition de Lindeberg (2.40). La Condition (2.38) se déduit de l'hypothèse (2.42) et de l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in \Delta_N(t)} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| \leq C\}}) | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| \\ &\leq \sum_{x \in \Delta_N(t)} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| + \sum_{x \in \Delta_N(t)} |\mathbb{E}(X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| > C\}}) | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})|. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, 1]^2$ et $\epsilon > 0$. Définissons un nouveau tableau de champs additifs :

$$V_{\{x\}}^N = X_{\{x\}}^N 1_{\{|X_{\{x\}}^N| \leq \epsilon, \sum_{y \in S[a, x]} \mathbb{E}((X_{\{y\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{y\}}^{N*}) \leq t_1 t_2 + 1\}}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N(t), X_{\{x\}}^N \neq V_{\{x\}}^N) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{x \in \Delta_N(t)} |X_{\{x\}}^N| > \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) > t_1 t_2 + 1\right). \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.41) conduit donc à

$$\mathbb{P}(\exists x \in \Delta_N(t), X_{\{x\}}^N \neq V_{\{x\}}^N) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Soit $\eta > 0$. Remarquons que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 - (V_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right| > \eta\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^N| \leq \epsilon\}} | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) > \eta\right). \end{aligned}$$

D'après (2.40), $\mathbb{P}(|\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 - (V_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})| > \eta)$ converge vers 0. En outre,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} ((V_{\{x\}}^N)^2 - \mathbb{E}((V_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}))\right)^2 \\ & = \sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}\left((V_{\{x\}}^N)^4\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}((V_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})^2\right) \\ & \leq \sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((V_{\{x\}}^N)^2 (X_{\{x\}}^N)^2 1_{\{|X_{\{x\}}^N| \leq \epsilon\}}) \\ & \leq \epsilon^2 \mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*}) 1_{\{\sum_{y \in S[a, x]} \mathbb{E}((X_{\{y\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{y\}}^{N*}) \leq t_1 t_2 + 1\}}\right) \\ & \leq \epsilon^2 (t_1 t_2 + 1). \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2 - \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right| > \eta\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2 - (V_{\{x\}}^N)^2\right| > \frac{\eta}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N(t)} \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 - (V_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right| > \frac{\eta}{4}\right) \\ & + \frac{4}{\eta^2} \mathbb{E}\left(\left[\sum_{x \in \Delta_N(t)} (V_{\{x\}}^N)^2 - \mathbb{E}((V_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right]^2\right). \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{x \in \Delta_N(t)} (X_{\{x\}}^N)^2 - \mathbb{E}((X_{\{x\}}^N)^2 | \mathcal{G}_{\{x\}}^{N*})\right| > \eta\right) \leq \epsilon^2 (t_1 t_2 + 1).$$

Puisque ϵ est quelconque, on en déduit que la limite est égale à 0. Enfin, d'après (2.41), l'hypothèse (2.36) est vérifiée.

Finalement, le Théorème 2.5.11 permet de conclure. $\square$

Bibliographie

- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [Bro71] B. M. Brown. Martingale central limit theorems. *Ann. Math. Statist.*, 42 :59–66, 1971.
- [BW71] P. J. Bickel and M. J. Wichura. Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *Ann. Math. Statist.*, 42 :1656–1670, 1971.
- [CW75] R. Cairoli and J. B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.*, 134 :111–183, 1975.
- [Dvo72] A. Dvoretzky. Asymptotic normality for sums of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory*, pages 513–535, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [HH80] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. Probability and Mathematical Statistics.
- [Hua92] D. W. Huang. Central limit theorem for two-parameter martingale differences with application to stationary random fields. *Sci. China Ser. A*, 35(4) :413–425, 1992.
- [IM00] G. Ivanoff and E. Merzbach. *Set-indexed martingales*, volume 85 of *Monoographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [ITV02] A. Illig and B. Truong-Van. Conditional lindeberg central limit theorem for strong lattice martingale. <http://www.mathpreprints.com/Statistics/0304010/>, 2002.
- [McL74] D. L. McLeish. Dependent central limit theorems and invariance principles. *Ann. Probability*, 2 :620–628, 1974.
- [Nah95] B. Nahapetian. Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(12) :1539–1544, 1995.
- [NP92] B. S. Nahapetian and A. N. Petrosian. Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 17(1) :105–110, 1992.
- [NP95] B. S. Nahapetian and A. N. Petrosian. Limit theorems for martingale-differences random fields. *Izvestiya Natslionaloi Akademii Nauk Armenii Matematika*, 30 :2–17, 1995.
- [PR98] S. Poghosyan and S. Roelly. Invariance principle for martingale-difference random fields. *Statist. Probab. Lett.*, 38(3) :235–245, 1998.

- [Str72] M. L. Straf. Weak convergence of stochastic processes with several parameters. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory*, pages 187–221, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [Tjø83] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. II. Some further results on unilateral lattice processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 15(3) :562–584, 1983.
- [Wal86] J. B. Walsh. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. In *Lectures in probability and statistics (Santiago de Chile, 1986)*, volume 1215 of *Lecture Notes in Math.*, pages 329–491. Springer, Berlin, 1986.
- [Wal79] J. B. Walsh. Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 46(2) :177–192, 1978/79.
- [WZ74] E. Wong and M. Zakai. Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 29 :109–122, 1974.
- [WZ76] E. Wong and M. Zakai. Weak martingales and stochastic integrals in the plane. *Ann. Probability*, 4(4) :570–586, 1976.

Chapitre 3

Résultats asymptotiques pour des champs ARMA

Une revue des résultats obtenus pour différents champs ARMA est d'abord présentée. Nous exposons ensuite notre étude sur les modèles ARMA spatiaux quadrantaux et les propriétés asymptotiques que nous avons obtenues pour les estimateurs.

3.1 Introduction

Contrairement au cas des processus indexés par le temps, plusieurs sortes de représentations ARMA spatiales peuvent être définies (voir [Guy95]). Afin de mieux situer le cadre de notre étude, nous rappelons tout d'abord les principales définitions de modèles ARMA spatiaux introduites dans la littérature ainsi que les résultats concernant l'estimation et l'identification obtenus pour de tels modèles.

Comme c'est le cas pour les différences de martingales spatiales, ces différentes représentations ARMA spatiales sont souvent reliées à l'ordre choisi sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Ainsi, les modèles ARMA spatiaux quadrantaux, que nous avons définis au Chapitre 1, utilisent l'ordre partiel (1.1). Pour ce type de modèles ARMA spatiaux, seulement le cas AR a largement été étudié (voir [Tj78], [Tj83], [HN93], [Cho97]).

Dans Tjøstheim (1983) (voir [Tj83]), la consistance des estimateurs des moindres carrés et de Yule-Walker des coefficients d'un champ $AR(p)$ causal est établie. Tjøstheim y obtient aussi la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés. Quant à l'estimateur de Yule-Walker, il est asymptotiquement normal mais, contrairement au résultat annoncé par Tjøstheim (1983), de moyenne asymptotique non nulle. Une expression explicite de cette moyenne est donnée par Ha et Newton (1993) dans [HN93] pour le cas $d = 2$. Dans le cas de modèles CAR à temps continu, Souchet et Guyon (2002) (voir [SG02]) démontrent également que l'estimation de Yule-Walker obtenue à partir d'une observation discrète est biaisée. Par ailleurs, une méthode pour déterminer l'ordre p d'un modèle $AR(p)$ est aussi présentée dans Tjøstheim (1983).

L'ensemble de ces résultats est établi sous l'hypothèse d'innovations indépendantes

et identiquement distribuées mais, une extension à des variables aléatoires vérifiant la propriété de différence de martingales quadrantes (2.3) est aussi donnée. Ainsi, pour obtenir la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés des paramètres de modèles AR spatiaux, Tjøstheim applique le Théorème 2.2.4 de la limite centrale pour des différences de martingales quadrantes rappelé au Chapitre 2.

Dans la Section 3.2, nous rappelons les résultats de Tjøstheim (1983). Nous en donnons, à la Section 3.5, une extension au cas des modèles ARMA spatiaux.

Huang et Anh (1992) (voir [HA92]) considèrent des champs ARMA définis à partir de l'ordre lexicographique total (1.2). Pour des innovations ayant la propriété de différence de martingales spatiales (2.8) relativement à l'ordre lexicographique, ils donnent une méthode pour sélectionner les ordres du modèle et estimer les paramètres. Nous présentons une description de leur méthode dans le Paragraphe 3.3.1.

D'autres champs ARMA ont été définis sans faire appel à une notion d'ordre sur $\mathbb{Z}^d$. Par exemple, Etchison, Pantula et Brownie (1994) (voir [EPB94]) s'intéressent à des champs ARMA séparables sur un réseau de dimension deux. Il s'agit en fait de "produits" de deux processus ARMA indexés sur $\mathbb{Z}$ dans le sens où les polynômes autorégressifs et moyenne mobile sont les produits de polynômes à variables séparées. Etchison, Pantula et Brownie (1994) donnent une méthode d'identification pour certains modèles ARMA spatiaux séparables. Cette méthode dérive de celle connue pour des processus ARMA indexés par $\mathbb{Z}$ et ne peut en aucun cas s'appliquer aux champs ARMA quadrants.

Dans l'étude asymptotique de modèle ARMA spatiaux présentée dans les Sections 3.4 et 3.5, nous considérons uniquement des champs ARMA spatiaux de type quadrantal comme dans Tjøstheim (1978) (voir [Tj78]).

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la consistance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires du vecteur de coefficients autorégressifs pour un modèle ARMA(p, q) avec $q \neq 0$. Nous démontrons dans la Section 3.4, sous hypothèse de différence de martingales, que cet estimateur n'est pas toujours consistant. Ce résultat diffère néanmoins de celui connu pour les processus ARMA indexés par le temps.

Dans un second temps, nous étudions, dans le cas où les innovations sont indépendantes et identiquement distribuées, le comportement asymptotique d'un autre estimateur, obtenu à partir des équations de Yule-Walker généralisées. Comme nous l'avons mentionné précédemment, Ha et Newton (1993) [HN93] ont montré que l'estimateur de Yule-Walker dans un modèle AR spatial est biaisé pour la normalité asymptotique et ont donné une expression explicite de ce biais. L'estimateur que nous introduisons est différent de l'estimateur de Yule-Walker généralisé. Nous établissons pour cet estimateur la consistance et la normalité asymptotique. Pour cela, nous établissons certaines propriétés asymptotiques des covariances et covariances croisées empiriques pour deux champs aléatoires linéaires. Ces résultats étendent en partie ceux de Choi (2000) (voir [Cho00]) et généralisent aussi les résultats connus

pour les processus linéaires indexés par le temps (voir [BD91]).

L'estimateur que nous avons introduit, correspond à une extension au cas spatial de la fonction d'autocorrélation partielle généralisée empirique connue pour les séries temporelles et utilisée pour l'identification de modèle ARMA par Woodward et Gray (1981) (voir [WG81]). Nous verrons ainsi au Chapitre 4 comment cet estimateur peut être employé pour déterminer les ordres p et q d'un modèle ARMA(p, q).

Toute cette étude fait l'objet de l'article [ITV04] que nous soumettons actuellement pour publication intitulé "Asymptotic results for spatial ARMA models", dont une majeure partie constitue le corps de la Section 3.5.

3.2 Champs AR quadrantiaux de Tjøstheim (1983)

Nous présentons, dans cette section, principalement les résultats de Tjøstheim (1983) (voir [Tj83]).

Considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un champ AR(p) spatial causal $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, avec $p \in \mathbb{Z}^d$ et $p \neq \mathbf{0}$, de fonction de covariance $\gamma(\cdot)$, défini par

$$X_t - \sum_{i \in S(\mathbf{0}, p]} \phi_i X_{t-i} = \epsilon_t, \quad (3.1)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ stationnaire vérifiant la condition (1.9).

Introduisons pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$ la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ associée au champ $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\epsilon_s, s \preceq t\}, \quad (3.2)$$

où $\sigma\{\cdot\}$ désigne la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $\{\cdot\}$.

Nous supposons désormais que le champ $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ vérifie l'hypothèse de différence de martingales (2.3).

De part la causalité, l'hypothèse de différence de martingales est équivalente à la condition d'innovations suivante

$$\forall t \in \mathbb{Z}^d, \epsilon_t = X_t - \mathbb{E}(X_t \mid \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(t_i - 1)) \text{ p.s.} \quad (3.3)$$

3.2.1 Estimateurs

Étant donné un ensemble d'observations $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$ du champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, nous souhaitons estimer les coefficients $\{\phi_j, j \in S(\mathbf{0}, p]\}$ du modèle (3.1). Pour cela, deux types d'estimateurs suivants sont considérés.

L'estimateur des moindres carrés

Notons $\hat{\phi}_p = (\hat{\phi}_{p,j})_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$ l'estimateur des moindres carrés de $\phi_p = (\phi_j)_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$ obtenu par minimisation de la quantité suivante

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \left(X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} \right)^2.$$

Cette minimisation revient à résoudre le système linéaire d'équations suivant

$$\forall j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle, \sum_{i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \hat{\phi}_{p,i} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-j} \right) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t-j}. \quad (3.4)$$

En introduisant les quantités suivantes

$$\hat{\Gamma}_p(i, j) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-j}, \quad (3.5)$$

$$\hat{\gamma}_p(i) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_t, \quad (3.6)$$

le système d'équations (3.4) peut alors s'écrire sous la forme de l'équation matricielle suivante

$$\hat{\Gamma}_p \hat{\phi}_p = \hat{\gamma}_p, \quad (3.7)$$

où la matrice $\hat{\Gamma}_p$ et les vecteurs $\hat{\phi}_p, \hat{\gamma}_p$ ont été formés en ordonnant les éléments de $S\langle \mathbf{0}, p \rangle$ par l'ordre lexicographique (1.2).

L'estimateur de Yule-Walker

En multipliant successivement l'équation (3.1) par X_{t-j} pour $j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$ et en prenant ensuite l'espérance, l'hypothèse de causalité permet d'obtenir les équations de Yule-Walker suivantes

$$\gamma(j) = \sum_{i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \gamma(i-j) \phi_i \quad \forall j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle. \quad (3.8)$$

L'estimateur de Yule-Walker est obtenu à partir de ces équations en estimant les covariances par

$$\overline{R}(h) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t+h} \quad \forall h \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle. \quad (3.9)$$

Plus précisément, l'estimateur de Yule-Walker $\bar{\phi}_p = (\bar{\phi}_{p,j})_{j \in S(\mathbf{0}, \mathbf{p}]}$ est solution de l'équation matricielle suivante

$$\bar{\Gamma}_p \bar{\phi}_p = \bar{\gamma}_p, \quad (3.10)$$

où pour $i, j \in S(\mathbf{0}, p]$,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_p(i, j) &= \bar{R}(i - j), \\ \bar{\gamma}_p(j) &= \bar{R}(j). \end{aligned}$$

3.2.2 Consistance et normalité asymptotique des estimateurs

La consistance des estimateurs des moindres carrés et de Yule-Walker est obtenue par Tjøstheim (1983). Ce résultat est énoncé dans le Théorème 3.2.1 dont la démonstration utilise les mêmes arguments que ceux employés dans la preuve du Lemme 3.4.1.

Théorème 3.2.1. (Tjøstheim (1983)) *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ $AR(p)$, $p \neq \mathbf{0}$, causal. Supposons que $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ strictement stationnaire vérifiant la condition d'innovations (3.3) et tel que pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}(\epsilon_t^4) < \infty$. Si de plus pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2 \mid \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(t_i - 1)) = \sigma^2 \text{ p.s.},$$

alors les estimateurs des moindres carrés $\hat{\phi}$ et de Yule-Walker $\bar{\phi}$ convergent presque sûrement vers ϕ lorsque N tend vers l'infini.

La preuve de la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés est donnée dans Tjøstheim (1983). Cependant, pour la commodité du lecteur, nous donnons ci-dessous les grandes lignes de cette preuve.

Pour établir la normalité asymptotique de $\hat{\phi}_p$, nous étudions la convergence en loi du vecteur $\hat{\Gamma}_p(\hat{\phi}_p - \phi_p)$. Les relations (3.1) et (3.7) permettent d'exprimer les coordonnées de ce vecteur comme suit : la i ième composante est donnée par

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_t. \quad (3.11)$$

Le procédé de Cramér-Wold (voir [BD91]) conduit alors à étudier pour toute famille de réels $(r_u)_{u \in S(\mathbf{0}, p]}$, la convergence en loi des statistiques

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \sum_{u \in S(\mathbf{0}, p]} r_u X_{t-u} \epsilon_t. \quad (3.12)$$

En remplaçant, dans (3.12), X_{t-u} par son expression unilatérale (1.10) induite par l'hypothèse de causalité, aux effets de bords près, on est alors ramené pour tout

$K \in \mathbb{N}^*$ grand, à l'étude de la convergence en loi des termes de la forme

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \sum_{u \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} r_u \sum_{v \in S[\mathbf{1}, \mathbf{K}]} \psi_v \epsilon_{t-u-v} \epsilon_t. \quad (3.13)$$

Les termes de (3.13) forment, sous certaines conditions, une martingale somme de différence de martingales quadrantaes, qui vérifie les hypothèses du Théorème 2.2.4. On en déduit ainsi la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés. Le Théorème 3.2.2 énonce ce résultat de Tjøstheim (1983).

Théorème 3.2.2. (Tjøstheim (1983)) *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 3.2.1, on a*

$$N^{d/2}(\hat{\phi}_p - \phi_p) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1}),$$

où $\Gamma_p = (\gamma(i-j))_{i,j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$ et $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en loi.

Tjøstheim (1983) affirmait, dans le théorème 4.2 de [Tj83], que l'estimateur de Yule-Walker était asymptotiquement normal et sans biais. Or, pour un réseau de dimension 2 et des innovations indépendantes et identiquement distribuées, Ha et Newton (1993) (voir [HN93]) démontrent la normalité asymptotique de l'estimateur de Yule-Walker mais avec un biais asymptotique non nul. Dans le Théorème 3.2.3 ci-dessous, nous rappelons ce résultat ainsi que l'expression du biais dans le cas $d = 2$.

Théorème 3.2.3. (Ha et Newton (1993)) *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ $AR(p)$ causal avec $p \neq \mathbf{0}$. Supposons que $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de variables i.i.d. centrées et de variance σ^2 non nulle. Alors,*

$$N(\bar{\phi}_p - \phi_p) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\Gamma_p^{-1} \Gamma_p^* \phi, \sigma^2 \Gamma_p^{-1}),$$

où pour $(h, k) \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$,

$$\Gamma_p^*(h, k) =$$

$$\begin{cases} -(k_2 + k_1) \gamma((h_1 - k_1, h_2 - k_2)) & \text{si } h_1 - k_1 \geq 0, h_2 - k_2 \geq 0 \\ -(2h_2 - k_2 + k_1) \gamma((h_1 - k_1, h_2 - k_2)) & \text{si } h_1 - k_1 \geq 0, h_2 - k_2 \leq 0 \\ -(2h_1 + k_2 - k_1) \gamma((h_1 - k_1, h_2 - k_2)) & \text{si } h_1 - k_1 \leq 0, h_2 - k_2 \geq 0 \\ -(2h_2 - k_2 + 2h_1 - k_1) \gamma((h_1 - k_1, h_2 - k_2)) & \text{si } h_1 - k_1 \leq 0, h_2 - k_2 \leq 0 \end{cases}$$

et $\Gamma_p = (\gamma(i-j))_{i,j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$.

Remarque 3.2.4. Signalons qu'un algorithme de type Levinson-Durbin, permettant le calcul de l'estimateur de Yule-Walker, est présenté par Choi (1997) dans [Cho97].

3.2.3 Identification de l'ordre p du modèle

Considérons ici, un modèle $AR(p)$ spatial causal $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ de paramètre $p \in \mathbb{Z}^d$ inconnu et d'innovations $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ indépendantes et identiquement distribuées. Sur la base d'un ensemble d'observations $\{X_t, t \in S[1, \mathbf{N}]\}$, nous souhaitons déterminer l'ordre p du modèle.

Tjøstheim (1983) propose d'estimer p par $\hat{p}$, obtenu en minimisant la fonction critère d'information suivante

$$C(r) = \ln \hat{\sigma}^2(r) - \frac{1}{N^d} f(N^d) d(r) \quad (3.14)$$

pour des valeurs de r ordonnées selon l'ordre partiel (1.1) et variant dans un rectangle $S[0, \mathbf{K}]$ suffisamment grand.

Le coefficient $d(r) = \prod_{i=1}^d (r_i + 1) - 1$ représente le nombre de paramètres autorégressifs à estimer, le terme $\hat{\sigma}^2(r)$ est la variance résiduelle après ajustement d'un champ $AR(r)$ aux données par estimation des moindres carrés et la fonction f détermine le poids accordé au terme de pénalité de (3.14).

L'utilisation de ce critère est justifié par le théorème suivant.

Théorème 3.2.5. (Tjøstheim (1983)) *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ $AR(p)$ causal engendré par des innovations $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ i.i.d. Si $p \preceq \mathbf{K}$ et si f est telle que $\frac{1}{x}f(x) \rightarrow \infty$ et $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$, alors $\mathbb{P}(\hat{p} \neq p) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$.*

3.3 Autres champs ARMA

Cette section est dédiée à une présentation de résultats sur des modèles ARMA spatiaux autres que les champs ARMA quadrantaux.

3.3.1 Champs ARMA de Huang et Anh (1992)

Nous donnons dans ce paragraphe, dans le cas $d = 2$, la définition de champs ARMA spatiaux de Huang et Anh (1992) (voir [HA92]) lorsque $\mathbb{Z}^2$ est muni de l'ordre lexicographique. Nous présentons ensuite, les différents résultats relatifs à l'estimation des coefficients et à la sélection de modèle.

Pour trois entiers n_1, n_2 et n_3 , notons $n = (n_1, n_2, -n_3)$. Définissons alors le sous-ensemble $G(n)$ de $\mathbb{Z}^2$ par

$$G(n) = \{t = (t_1, t_2) \mid 1 \leq t_1 \leq n_1 \text{ et } -n_3 \leq t_2 \leq n_2, \text{ ou } t_1 = 0 \text{ et } 0 \leq t_2 \leq n_2\}.$$

Définition 3.3.1. *Un champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est un $ARMA(p, q)$ relativement à l'ordre lexicographique avec $p = (p_1, p_2, -p_3)$ et $q = (q_1, q_2, -q_3)$ s'il vérifie*

$$\sum_{k \in G(p)} \alpha_k X_{j-k} = \sum_{j \in G(q)} \beta_j \epsilon_{t-j} \quad (3.15)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est une différence de martingale relativement à l'ordre lexicographique, i.e. satisfaisant (2.8).

Pour un tel champ, nous supposons que les conditions d'inversibilité suivantes sont satisfaites,

$$\sum_{j \in G(q)} \beta_j z^j \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1, |z_2| = 1, \quad (3.16)$$

$$\sum_{(0, j_2) \in G(q)} \beta_{(0, j_2)} z_2^{j_2} \neq 0 \text{ pour } |z_2| \leq 1. \quad (3.17)$$

Nous supposons aussi que la condition d'identifiabilité suivante est remplie : étant donnés $\sum_{k \in G(p)} \alpha_k z^k$ et $\sum_{j \in G(q)} \beta_j z^j$, s'il existe $\sum_{k \in G(p')} a_k z^k$ et $\sum_{j \in G(q')} b_j z^j$ avec $\sum_{j \in G(q')} |b_j|^2 > 0$ tels que

$$\frac{\sum_{k \in G(p)} \alpha_k z^k}{\sum_{j \in G(q)} \beta_j z^j} \sum_{j \in G(q')} b_j z^j = \sum_{k \in G(p')} a_k z^k \quad (3.18)$$

alors

$$G(p) \subseteq G(p') \text{ et } G(q) \subseteq G(q').$$

Nous donnons, uniquement pour $d = 2$, la méthode décrite par Huang et Anh (1992) pour estimer les coefficients et identifier les ordres p et q . Cette méthode est une généralisation d'une méthode d'identification pour des processus ARMA indexés par $\mathbb{Z}$ également décrite par Huang et Anh (1992).

Lemme 3.3.2. (Huang et Anh (1992)) Si les conditions (3.16) et (3.17) sont satisfaites, alors il existe une famille de coefficients $(\phi_t)_{t \gg \mathbf{0}}$ telle que pour tout z de l'ensemble $\{z = (z_1, z_2) \mid |z_1| = 1 \text{ et } |z_2| = 1\}$,

$$\frac{\sum_{k \in G(p)} \alpha_k z^k}{\sum_{j \in G(q)} \beta_j z^j} = \sum_{t \gg \mathbf{0}} \phi_t z^t \text{ avec } \phi_{\mathbf{0}} = 1 \quad (3.19)$$

$$\sum_{j \in G(q)} \beta_j z^j = \begin{cases} \alpha_t & t \in G(p), \\ 0 & t \notin G(p). \end{cases} \quad (3.20)$$

La condition (3.19) du lemme précédent permet de définir un nouveau champ

$$Y_t = \sum_{k \gg \mathbf{0}} \phi_k \epsilon_{t-k} \quad (\phi_{\mathbf{0}} = 1), \quad (3.21)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est le champ de bruit blanc de (3.15). De la relation (3.20), on déduit que le champ $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ satisfait la relation ARMA suivante

$$\sum_{j \in G(q)} \beta_j Y_{t-j} = \sum_{k \in G(p)} \alpha_k \epsilon_{t-k}. \quad (3.22)$$

La relation (3.21) permet ensuite d'écrire

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{0}} &= \epsilon_{\mathbf{0}} + \sum_{k \gg \mathbf{0}, k \neq \mathbf{0}} \phi_k \epsilon_{-k} \\ &= \epsilon_{\mathbf{0}} + P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \in G'(p)\}} Y_{\mathbf{0}} + P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \notin G'(p), t \gg \mathbf{0}, t \neq \mathbf{0}\}} Y_{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

et

$$Y_{-j} = P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \in G'(p)\}} Y_{-j} + P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \notin G'(p), t \gg \mathbf{0}, t \neq \mathbf{0}\}} Y_{-j},$$

où $L\{\cdot\}$ est l'espace de Hilbert engendré par les variables aléatoires de $\{\cdot\}$, $P_{L\{\cdot\}}$ la projection sur $L\{\cdot\}$ et $G'(p) = G(p) \cap \{t \gg \mathbf{0}, t \neq \mathbf{0}\}$.

En posant $Y_{-j|p} = P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \in G'(q)\}} Y_{-j}$, on déduit que

$$Y_{\mathbf{0}} - P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \in G'(p); Y_{-j} \mid j \in G'(q)\}} Y_{\mathbf{0}} = \epsilon_{\mathbf{0}} + Y_{\mathbf{0}|p} - P_{L\{Y_{-j|p} \mid j \in G'(q)\}} Y_{\mathbf{0}|p}$$

et en supposant que pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \sigma^2$, on obtient

$$\| Y_{\mathbf{0}} - P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \in G'(p); Y_{-j} \mid j \in G'(p)\}} Y_{\mathbf{0}} \|^2 = \sigma^2 \| Y_{\mathbf{0}|p} - P_{L\{Y_{-j|p} \mid j \in G'(q)\}} Y_{\mathbf{0}|p} \|^2.$$

Introduisons les quantités suivantes

$$\sigma_{qp}^2 = \| Y_{\mathbf{0}} - P_{L\{\epsilon_{-t} \mid t \in G'(p); Y_{-j} \mid j \in G'(p)\}} Y_{\mathbf{0}} \|^2, \quad (3.23)$$

$$\mu_{qp}^2 = \frac{\| Y_{\mathbf{0}|p} - P_{L\{Y_{-j|p} \mid j \in G'(q)\}} Y_{\mathbf{0}|p} \|^2}{\sigma^2}, \quad (3.24)$$

reliées entre elles par la relation ci-dessous

$$\mu_{qp}^2 = \frac{\sigma_{qp}^2}{\sigma^2} - 1.$$

Si $G(q) \subseteq G(q')$ et $G(p) \subseteq G(p')$ alors $\sigma_{qp}^2 \geq \sigma_{q'p'}^2$ et par suite,

$$\mu_{qp}^2 \geq \mu_{q'p'}^2. \quad (3.25)$$

On peut ensuite exprimer μ_{qp}^2 de la manière explicite suivante

$$\mu_{qp}^2 = \min_{b_j, j \in G(q)} \sum_{t \gg \mathbf{0}, t \neq \mathbf{0} \mid t \notin G'(p)} \left| \sum_{j \in G(q)} b_j \phi_{t-j} \right|^2. \quad (3.26)$$

Théorème 3.3.3. (Huang et Anh (1992)) Sous la condition d'identifiabilité (3.18),

- (i) $\mu_{q'p'}^2 = 0$ si et seulement si $G(q) \subseteq G(q')$ et $G(p) \subseteq G(p')$.
- (ii) $G(q) \not\subseteq G(q') \Rightarrow \min_{b_j, \sum |b_j|^2 \geq 1, j \in G(q')} \sum_{t \gg \mathbf{0}, t \neq \mathbf{0}, t \notin G'(p)} \left| \sum_{j \in G(q')} b_j \phi_{t-j} \right|^2 > 0$.

Étant donné un ensemble d'observations $\{X_t, t \in S[\mathbf{0}, \mathbf{N}]\}$, les coefficients $(\phi_k)_{k \gg \mathbf{0}}$ de (3.21) doivent, dans un premier temps, être estimés. Pour cela, on effectue une autorégression de taille croissante $K_N = (2 \log N)^\alpha$ avec $\alpha > 1$, par laquelle on obtient l'estimation de Yule-Walker (ou bien des moindres carrés) $\hat{\phi}_{K_N}$ du vecteur

$\phi_{K_N} = (\phi_j)_{j \in S[(-K_N, -K_N), (K_N, K_N)]}$. Huang et Anh (1992) donnent une description détaillée de cette procédure dans [HA92].

Dans un deuxième temps, on estime les ordres et les coefficients du modèle (3.15). On pose $\hat{\phi}_j = 0$ pour $j \ll 0, j \neq 0$ ou j en dehors de $S[(-K_N, -K_N), (K_N, K_N)]$. On définit ensuite un estimateur $\hat{\mu}_{q'p'}^2$ de $\mu_{q'p'}^2$ par

$$\hat{\mu}_{q'p'}^2 = \min_{b_j} \sum_{t \notin G(p')} \left(\sum_{j \in G(q')} b_j \hat{\phi}_{t-j} \right)^2 \quad (b_0 = 1). \quad (3.27)$$

On estime alors (q, p) par $(\hat{q}, \hat{p})$ tel que

$$(\hat{q}, \hat{p}) \in G, \quad \sum_{i=1}^3 (\hat{p}_i + \hat{q}_i) = \min \left\{ \sum_{i=1}^3 (p'_i + q'_i) \mid (q', p') \in G \right\}, \quad (3.28)$$

où $G = \{(q', p') \mid \hat{\mu}_{q'p'}^2 \leq 2 K_N^2 \log N/N\}$.

Finalement, on définit $(\beta_j)_{j \in G(\hat{q})}$ en minimisant (3.27) avec $p' = \hat{p}$ et $q' = \hat{q}$ et $(\alpha_k)_{k \in G(\hat{p})}$ se déduit de la relation,

$$\hat{\alpha}_k = \sum_{j \in G(\hat{q})} \hat{\beta}_j \hat{\phi}_{t-j}.$$

Cette procédure d'identification de Huang et Anh (1992) est fondée sur leurs résultats suivants.

Théorème 3.3.4. (Huang et Anh (1992)) Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ ARMA(p, q) relativement à l'ordre lexicographique vérifiant (3.15). Supposons que les conditions d'inversibilité (3.16) et (3.17) et d'identifiabilité (3.18) sont satisfaites. Si les conditions de stationnarité suivantes

$$\sum_{k \in G(p)} \alpha_k z^k \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1, |z_2| = 1, \quad (3.29)$$

$$\sum_{(0, k_2) \in G(p)} \alpha_{(0, k_2)} z_2^{k_2} \neq 0 \text{ pour } |z_2| \leq 1 \quad (3.30)$$

sont vérifiées et si $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est tel que

$$\sup_t \mathbb{E}(\epsilon_t^2 \mid \epsilon_s, s \ll t, s \neq t) < \infty \text{ p.s.}, \quad (3.31)$$

$$\sup_t \mathbb{E}|\epsilon_t|^{4+\delta} < \infty \text{ pour un } \delta > 0, \quad (3.32)$$

alors

$$\hat{q} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} q, \quad \hat{p} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} p,$$

où $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.}$ désigne la convergence presque sûre, et

$$\hat{\beta}_j - \beta_j = O \left(K_N \sqrt{\frac{\log \log(N^2)}{N^2}} \right), \quad \hat{\alpha}_k - \alpha_k = O \left(K_N \sqrt{\frac{\log \log(N^2)}{N^2}} \right) \text{ p.s.}$$

3.3.2 Champs ARMA de Etchison, Pantula et Brownie (1994)

Dans le cas $d = 2$, nous rappelons les définitions de champs ARMA séparables et énonçons les résultats obtenus par Etchison, Pantula et Brownie dans [EPB94].

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ stationnaire de fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation γ et ρ .

Définition 3.3.5. *Un champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est séparable s'il est stationnaire et si sa fonction d'autocovariance est proportionnelle au produit de deux fonctions d'autocovariance de processus indexés par $\mathbb{Z}$.*

En conséquence, pour $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\rho(u, v) = \rho(u, 0)\rho(0, v). \quad (3.33)$$

Une sous-classe particulière de champs aléatoires séparables est l'ensemble des champs $\text{ARMA}(p_1, p_2) \times \text{ARMA}(q_1, q_2)$ stationnaires.

Définition 3.3.6. *Un champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est un $\text{ARMA}(p_1, p_2) \times \text{ARMA}(q_1, q_2)$ s'il vérifie*

$$(1 - \sum_{u=1}^{p_1} \alpha_u B_1^u)(1 - \sum_{v=1}^{p_2} \beta_v B_2^v)X_t = (1 + \sum_{k=1}^{q_1} \theta_k B_1^k)(1 + \sum_{l=1}^{q_2} \delta_l B_2^l)\epsilon_t,$$

où B_1 et B_2 sont les opérateurs de décalage sur les premier et deuxième indices et $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance $\sigma^2 > 0$.

On notera $\text{AR}(p_1)$ pour $\text{ARMA}(p_1, 0)$ et $\text{MA}(q_1)$ pour $\text{ARMA}(0, q_1)$.

On étend la notion de fonction d'autocorrélation partielle aux champs ARMA séparables.

Définition 3.3.7. *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ $\text{ARMA}(p_1, p_2) \times \text{ARMA}(q_1, q_2)$ séparable. Pour $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on définit la fonction d'autocorrélation partielle par*

$$\rho^*(u, v) = \text{Corr}(X_t, X_{(t_1-u, t_2-v)} \mid R(t, (u, v)))$$

où $R(t, (u, v)) = \{X_{t-s}, s_1 = 0 \dots u, s_2 = 0 \dots v\} \setminus \{X_t, X_{(t_1-u, t_2-v)}\}$.

Théorème 3.3.8. (Etchison, Pantula et Brownie (1994)) *Pour un champ $\text{AR}(p_1) \times \text{AR}(p_2)$ stationnaire, la fonction d'autocorrélation partielle $\rho^*(u, v)$ est nulle si $u > p_1$ ou $v > p_2$.*

Corollaire 3.3.9. (Etchison, Pantula et Brownie (1994)) *Pour un champ $\text{AR}(p_1) \times \text{ARMA}(p_2, q_2)$ stationnaire, la fonction d'autocorrélation partielle $\rho^*(u, v)$ est nulle si $u > p_1$.*

Ainsi, la fonction d'autocorrélation partielle $\rho^*(u, 0)$ pourra être utilisée, de la même manière que pour les processus ARMA indexés sur $\mathbb{Z}$, comme un outil pour déterminer l'ordre p_1 dans un modèle $\text{AR}(p_1) \times \text{ARMA}(p_2, q_2)$. Dans ce but, il est nécessaire d'estimer la fonction d'autocorrélation partielle et plus particulièrement, les quantités $\rho^*(u, 0)$.

Du système d'équations suivant,

$$\begin{pmatrix} \gamma(0, 0) & \gamma(1, 0) & \cdots & \gamma(u-1, 0) \\ \gamma(1, 0) & \gamma(0, 0) & \cdots & \gamma(u-2, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(u-1, 0) & \gamma(u-2, 0) & \cdots & \gamma(0, 0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(1, 0) \\ \gamma(2, 0) \\ \vdots \\ \gamma(u, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \vdots \\ \phi(u) \end{pmatrix},$$

on obtient $\rho^*(u, 0) = \phi(u)$.

Sur la base d'un ensemble d'observations $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, (m, n)]\}$, il est alors naturel d'estimer $\rho^*(u, 0)$ par le coefficient $\hat{\phi}(u)$ de $X_{(t_1-u, t_2)}$ dans la régression de X_t sur $X_{(t_1-1, t_2)}, \dots, X_{(t_1-u, t_2)}$.

Le théorème suivant donne la distribution asymptotique de $\hat{\rho}^*(p_1 + 1, 0)$.

Théorème 3.3.10. (*Etchison, Pantula et Brownie (1994)*) Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ $\text{AR}(p_1) \times \text{ARMA}(p_2, q_2)$ stationnaire séparable. Alors,

$$\sqrt{mn}(\hat{\rho}^*(p_1 + 1, 0)) \xrightarrow[m, n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \rho^2(0, h)\right)\right) \quad (3.34)$$

Le Corollaire 3.3.9 et le Théorème 3.3.10 peuvent donc être appliqués à l'estimation du paramètre p_1 d'un modèle $\text{AR}(p_1) \times \text{AR}(p_2, q_2)$. Etchison, Pantula et Brownie (1994) donnent ensuite une illustration numérique de l'utilisation de ces résultats pour un champ $\text{AR}(1) \times \text{AR}(1)$.

De plus, un test asymptotique de séparabilité basé sur les propriétés de la fonction d'autocovariance d'un champ AR séparable est proposé dans Shitan et Brockwell (1995) (voir [SB95]).

Les champs ARMA séparables sont aussi des champs ARMA quadrantaux. Cependant, les résultats ci-dessus permettant de déterminer le paramètre p_1 reposent sur la propriété de séparabilité du champ. Ces résultats ne peuvent donc pas être étendus aux champs ARMA quadrantaux généraux.

3.4 Estimateur des moindres carrés ordinaires dans des modèles ARMA spatiaux quadrantaux

Nous considérons dans cette section, l'estimateur des moindres carrés ordinaires du vecteur des coefficients autorégressifs d'un modèle $\text{ARMA}(p, q)$ spatial quadrantal avec $q \neq \mathbf{0}$ et démontrons, sous hypothèses de différences de martingales, qu'il

n'est pas toujours consistant.

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que nous munissons d'une famille $\{\mathcal{F}_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition de filtration (2.2). Donnons nous un champ ARMA(p, q) causal $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, de fonction de covariance γ , vérifiant

$$X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t + \sum_{k \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle} \theta_k \epsilon_{t-k}, \quad (3.35)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ et vérifie la Condition (2.3) de différence de martingales quadrantaes.

3.4.1 Estimateur des moindres carrés

A partir d'un ensemble d'observations $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$ du champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, on définit de la même manière que dans la Section 3.2, l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_p = (\phi_{p,j})_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$ du vecteur des coefficients autorégressifs $\phi_p = (\phi_j)_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$. Plus précisément, $\hat{\phi}_p$ est obtenu par minimisation de la quantité suivante

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \left(X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} \right)^2.$$

En adoptant les notations introduites dans la Section 3.2, $\hat{\phi}_p$ est alors solution de l'équation matricielle suivante

$$\hat{\Gamma}_p \hat{\phi}_p = \hat{\gamma}_p. \quad (3.36)$$

avec $\hat{\Gamma}_p$ et $\hat{\gamma}_p$ définis respectivement par (3.5) et (3.6).

3.4.2 Non consistance

Afin d'étudier la consistance de l'estimateur des moindres carrés, nous nous intéressons au vecteur $\hat{\Gamma}_p(\hat{\phi}_p - \phi_p)$. Remarquons tout d'abord que

$$\hat{\Gamma}_p(\hat{\phi}_p - \phi_p) = \left\{ \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \left(X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} \right) \right\}_{i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$$

et puisque $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ ARMA vérifiant (3.35), on en déduit finalement que $\hat{\Gamma}_p(\hat{\phi}_p - \phi)$ est le vecteur dont la i ième composante est donnée par

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle} \theta_j \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_{t-j}. \quad (3.37)$$

L'étude de la convergence en probabilité de $\hat{\Gamma}_p(\hat{\phi}_p - \phi_p)$, se réduit alors à l'étude, pour tout $i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$, des termes de (3.37).

Le champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est causal, donc admet une écriture unilatérale de la forme

$$X_t = \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty]} \psi_k \epsilon_{t-k}$$

avec $\sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty]} |\psi_k| < \infty$. Par conséquent, pour $j \in S[\mathbf{0}, q]$,

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_{t-j} = \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty]} \psi_k \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j}. \quad (3.38)$$

Lemme 3.4.1. *Soit $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ une différence de martingales quadrantes vérifiant*

$$\sup_t \mathbb{E}(\epsilon_t^4) < \infty \quad (3.39)$$

et pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2 \mid \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(t_i - 1)) = \sigma^2 \text{ p.s.} \quad (3.40)$$

Alors, pour $i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$ et $j \in S[\mathbf{0}, q]$,

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \text{ si } i+k \neq j,$$

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-j}^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

PREUVE. Pour $i+k \neq j$, considérons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^{2d}} \sum_{\substack{t_1 \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t_1-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \sum_{\substack{t_2 \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t_2-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j} \epsilon_{t_2-i-k} \epsilon_{t_2-j}). \end{aligned}$$

Pour $t_1 = t_2$,

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j} \epsilon_{t_2-i-k} \epsilon_{t_2-j}) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k}^2 \epsilon_{t_1-j}^2).$$

Puisque $i + k \neq j$, il existe u tel que $i_u + k_u \neq j_u$. Supposons par exemple que $j_u < i_u + k_u$. Par suite, ϵ_{t_1-i-k} est $\mathcal{F}^u(t_{1,u} - j_u - 1)$ -mesurable et

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k}^2 \epsilon_{t_1-j}^2) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k}^2 \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-j}^2 \mid \bigvee_{v=1}^d \mathcal{F}^v(t_{1,v} - j_v - 1))).$$

Enfin, d'après l'hypothèse (3.40), $\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-j}^2 \mid \bigvee_{v=1}^d \mathcal{F}^v(t_{1,v} - j_v - 1)) = \sigma^2$. Par conséquent pour $t_1 = t_2$,

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j} \epsilon_{t_2-i-k} \epsilon_{t_2-j}) = \sigma^4.$$

Si $t_1 \neq t_2$, alors plusieurs cas sont à distinguer.

- Si $t_1 - j = t_2 - i - k$, alors $t_2 = t_1 - j + i + k$ et

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j} \epsilon_{t_2-i-k} \epsilon_{t_2-j}) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j}^2 \epsilon_{t_2-2j+i+k}).$$

- Si de plus, il existe u tels que $i_u + k_u < j_u$, alors

$$i_u + k_u - 2j_u < -j_u < -(i_u + k_u)$$

et

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j}^2 \epsilon_{t_2-i-k}) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_2-2j+i+k} \epsilon_{t_1-j}^2 \mathbb{E}(\epsilon_{t_2-2j+i+k} \mid \bigvee_{v=1}^d \mathcal{F}^v(t_{1,v} - i_v - k_v - 1))).$$

Finalement, puisque $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une différence de martingales quadrantes, on en conclut que

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j}^2 \epsilon_{t_2-2j+i+k}) = 0.$$

- Si au contraire il existe u tel que $i_u + k_u > j_u$, alors

$$i_u + k_u - 2j_u > -j_u > -(i_u + k_u)$$

et comme précédemment

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j}^2 \epsilon_{t_2-2j+i+k}) \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j}^2 \mathbb{E}(\epsilon_{t_2-2j+i+k} \mid \bigvee_{v=1}^d \mathcal{F}^v(t_{1,v} - i_v - k_v - 1))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Le cas $t_1 - i - k = t_2 - j$ se traite exactement de la même manière que le cas $t_1 - j = t_2 - i - k$.
- Supposons maintenant que $t_1 - i - k \neq t_2 - j$ et $t_1 - j \neq t_2 - i - k$. Les quatre indices $t_1 - j$, $t_1 - i - k$, $t_2 - j$ et $t_2 - i - k$ sont tous différents et l'hypothèse de différence de martingales implique à nouveau que

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i-k} \epsilon_{t_1-j} \epsilon_{t_2-i-k} \epsilon_{t_2-j}) = 0.$$

On a donc établi que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^{2d}} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \sigma^4 \\
&= \sigma^4 \frac{\prod_{i=1}^d (N-p_i)}{N^{2d}}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

et d'après l'inégalité de Tchebychev,

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Pour étudier la convergence en probabilité vers σ^2 du terme

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \epsilon_{t-j}^2,$$

on considère le terme suivant

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\frac{1}{N_p} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \epsilon_{t-j}^2 - \sigma^2 \right)^2 \\
&= \frac{1}{N_p} \sum_{\substack{t_1 \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t_1-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \sum_{\substack{t_2 \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t_2-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \mathbb{E}((\epsilon_{t_1-j}^2 - \sigma^2)(\epsilon_{t_2-j}^2 - \sigma^2)).
\end{aligned}$$

où $N_p = \prod_{i=1}^d (N - p_i)$ est exactement le cardinal de l'ensemble de sommation.

Pour $t_1 = t_2$,

$$\mathbb{E}((\epsilon_{t_1-j}^2 - \sigma^2)(\epsilon_{t_2-j}^2 - \sigma^2)) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-j}^4 - \sigma^4)$$

et le dernier terme est borné par hypothèse.

Si $t_1 \neq t_2$, il existe u tel que par exemple $t_{1,u} > t_{2,u}$ et

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((\epsilon_{t_1-j}^2 - \sigma^2)(\epsilon_{t_2-j}^2 - \sigma^2)) \\
&= \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-j}^2 \epsilon_{t_2-j}^2) - \sigma^4 \\
&= \mathbb{E}(\epsilon_{t_2-j}^2 \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-j}^2 \mid \bigvee_{v=1}^d \mathcal{F}^v(t_{1,v} - j_v - 1))) - \sigma^4 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de l'hypothèse (3.39).

Finalement,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N_p} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} (\epsilon_{t-j}^2 - \sigma^2)^2\right) \leq \frac{C}{N_p}.$$

Le terme majorant de l'inégalité précédente converge vers 0 quand N tend vers l'infini et par application de l'inégalité de Tchebychev, on en déduit que

$$\frac{1}{N_p} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2$$

et par suite que

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

□

Théorème 3.4.2. *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ ARMA quadrantal vérifiant (3.35). Supposons que $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une différence de martingales quadrantes satisfaisant les Conditions (3.39) et (3.40). Si de plus Γ_p est inversible, alors*

$$\hat{\phi}_p - \phi_p \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Gamma_p^{-1} \left(\sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle, j \succeq i} \theta_j \psi_{j-i} \sigma^2 \right)_{i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$$

avec $\sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle, j \succeq i} \theta_j \psi_{j-i} \sigma^2 = 0$ si pour tout $j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle$, $i \not\succeq j$.

PREUVE. Étudions tout d'abord, la convergence en probabilité pour tout $i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$ et tout $j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle$ des termes

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_{t-j}.$$

Au vu de la relation (3.38), on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_{t-j} \\ &= \begin{cases} \psi_{j-i} \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty], k \neq j-i} \psi_k \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} & \text{si } j \succeq i \\ \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty], k \neq j-i} \psi_k \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Considérons les termes tronqués suivants

$$Y_{NK} = \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K}], k \neq j-i} \psi_k \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j}$$

et notons

$$Y_N = \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty], k \neq j-i} \psi_k \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j}.$$

D'après le lemme précédent,

$$Y_{N,K} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} Y_K = 0.$$

Pour en déduire la convergence en probabilité vers 0 de Y_N , il suffit d'après la Proposition 6.3.9 de Brockwell et Davis (1991) (voir [BD91]), de démontrer que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}|Y_N - Y_{N,K}| = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|Y_N - Y_{N,K}| \\ & \leq \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty] \setminus S[\mathbf{0}, \mathbf{K}], k \neq j-i} |\psi_k| \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \mathbb{E}|\epsilon_{t-i-k} \epsilon_{t-j}| \\ & \leq \sigma^2 \frac{N_p}{N^d} \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty] \setminus S[\mathbf{0}, \mathbf{K}]} |\psi_k|. \end{aligned}$$

Le terme majorant de la dernière inégalité converge vers 0 quand K tend vers l'infini, car par hypothèse, $\sum_k |\psi_k| < \infty$. Par conséquent,

$$Y_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

On en déduit alors, grâce au lemme précédent, que

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-p \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} \epsilon_{t-j} = \begin{cases} \psi_{j-i} \sigma^2 & \text{si } j \succeq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi d'après la relation (3.37), $\hat{\Gamma}_p(\hat{\phi}_p - \phi)$ converge en probabilité quand N tend vers l'infini vers le vecteur dont la i ème composante est donnée par

$$\sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle, j \succeq i} \theta_j \psi_{j-i} \sigma^2,$$

où la somme est nulle lorsque l'ensemble de sommation est vide.

Par les mêmes techniques que celles employées dans la preuve du lemme précédent, on démontre que

$$\hat{\Gamma}_p \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Gamma_p.$$

Par hypothèse, Γ_p est supposée inversible, donc

$$\hat{\phi}_p - \phi_p \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Gamma_p^{-1} \left\{ \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle, j \succeq i} \theta_j \psi_{j-i} \sigma^2 \right\}_{i \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}. \quad \square$$

Exemple 3.4.3. Si $d = 2$, $p = (1, 0)$, $q \neq (0, 0)$ et $\gamma(0) \neq 0$ alors

$$\hat{\phi}_p - \phi_p \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{\gamma(0)} \left(\sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle, j \succeq (1, 0)} \theta_j \psi_{j-i} \sigma^2 \right).$$

Pour qu'il y ait un biais effectif, il faut que $q \succeq p$, par exemple $q = (1, 0)$ ou $q = (1, 1)$. Si, au contraire, $q = (0, 1)$ par exemple, il n'y a pas de biais. Plus généralement, si $p \not\succeq q$, alors l'estimateur des moindres carrés est consistant.

Ce exemple illustre bien la différence avec la dimension $d = 1$, pour laquelle l'estimateur des moindres carrés des coefficients autorégressifs dans un modèle ARMA(p, q) avec $q \neq 0$ est toujours biaisé (voir Tiao et Tsay (1983) [TT83]).

L'estimateur des moindres carrés n'étant pas toujours consistant, il est alors nécessaire de considérer de nouveaux estimateurs du vecteur des coefficients autorégressifs. C'est l'objet de la section suivante.

3.5 Estimateurs consistants et asymptotiquement normaux dans des modèles ARMA spatiaux quadrantaux

Causal quadrantal-type spatial ARMA(p, q) models with independent and identically distributed innovations are considered. In order to select the orders (p, q) of these models and estimate their autoregressive parameters, estimators of the autoregressive coefficients, derived from the extended Yule-Walker equations are defined. Then, consistency and asymptotic normality are obtained for these estimators.

3.5.1 Preliminaries and assumptions

Throughout this work, $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ denotes a family of independent and identically distributed (i.i.d) centered random variables with variance $\sigma^2 > 0$. We say that a random field $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is linear if for any t ,

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \psi_j \epsilon_{t-j} \quad (3.41)$$

with $\sum |\psi_j| < \infty$.

Remark 3.5.1. Linear random fields as defined above are strictly stationary. They are called MA random fields in Choi (2000) (c.f. [Cho00]).

For two linear random fields $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ and $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, we define their crosscovariance function as $\gamma_{xy}(h) = \mathbb{E}(X_t Y_{t+h})$ for every h in $\mathbb{Z}^d$.

Given two samples $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$ and $\{Y_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$, we define the sample crosscovariance function as follows :

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t Y_{t+h} \quad (3.42)$$

with $N_h = \prod_{i=1 \dots d} (N - h_i)$ and where for $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, we denote by $\mathbf{N}$ the element of $\mathbb{Z}^d$ whose all components equal N .

In the particular case when $X_t = Y_t$, γ and $\hat{\gamma}$ are respectively (resp.) denoted for γ_{xy} and $\hat{\gamma}_{xy}$.

Following Tjøstheim (1978) (c.f. [Tj78]) and Guyon (1995) (c.f. [Guy95]), we say that a random field $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is a spatial ARMA(p, q) with parameters $p, q \in \mathbb{Z}^d$ if it is stationary and satisfies the following equation

$$X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t + \sum_{k \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle} \theta_k \epsilon_{t-k} \quad (3.43)$$

where $(\phi_j)_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle}$ and $(\theta_k)_{k \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle}$ denotes resp. the autoregressive and the moving-average parameters with the convention that $\phi_{\mathbf{0}} = \theta_{\mathbf{0}} = 1$. If p (resp. q) equals 0, the sum over $S\langle \mathbf{0}, p \rangle$ (resp. $S\langle \mathbf{0}, q \rangle$) is supposed to be 0 and the process is called an $\text{AR}(p)$ (resp. $\text{MA}(q)$) random field.

The ARMA random field is called causal if it has the following unilateral expansion

$$X_t = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, \infty]} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad (3.44)$$

with $\sum |\psi_j| < \infty$.

Remark 3.5.2. Let $\phi(z) = 1 - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j z^j$ and $\theta(z) = 1 + \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, q \rangle} \theta_j z^j$ where $z = (z_1, \dots, z_d)$. Then, a sufficient condition (c.f. [TjØ78]) for the random field to be causal is that the autoregressive polynomial $\phi(z)$ has no zeroes in the closure of the open disc D^d in $\mathbb{C}^d$.

For the identifiability of model (3.43), we assume in addition that these two polynomials have no common irreducible factors in the factorial ring $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$.

The ARMA order selection procedure that we consider herein is based on extended Yule-Walker equations. More precisely, for spatial $\text{ARMA}(p, q)$ random field $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ with $p \neq \mathbf{0}$, we define for $\lambda \in S\langle \mathbf{0}, \infty \rangle$ and $\nu \in S[\mathbf{0}, \infty]$, the coefficients $\phi_\lambda^{(\nu)} = (\phi_{\lambda, j}^{(\nu)})_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle}$ as the solution, when it exists, of the following extended Yule-Walker equations,

$$\mathbb{E}(Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}) = 0 \quad \forall j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle, \quad (3.45)$$

where $Y_{\lambda, t}^{(\nu)} = X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \phi_{\lambda, j}^{(\nu)} X_{t-j}$.

If we arrange vectors and matrix in the lexicographic order, these equations can be rewritten under the form of the following single matricial equation

$$\Gamma_\lambda^{(\nu)} \phi_\lambda^{(\nu)} = \gamma_\lambda^{(\nu)} \quad (3.46)$$

with for all $i, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$

$$\Gamma_\lambda^{(\nu)}(j, i) = \gamma(\nu + j - i),$$

and

$$\gamma_\lambda^{(\nu)}(j) = \gamma(\nu + j).$$

Given a sample $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$, we might also consider the extended Yule-Walker estimator $\overline{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ of $\phi_\lambda^{(\nu)}$ defined as the solution of the following matricial equation

$$\overline{\Gamma}_\lambda^{(\nu)} \overline{\phi}_\lambda^{(\nu)} = \overline{\gamma}_\lambda^{(\nu)},$$

where for $i, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\overline{\Gamma}_\lambda^{(\nu)}(j, i) = \overline{R}(\nu + j - i),$$

$$\overline{\gamma}_\lambda^{(\nu)}(j) = \overline{R}(\nu + j),$$

with for $h \in S\langle \mathbf{0}, \tau \rangle$,

$$\overline{R}(h) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t-h}.$$

As mentioned above, Ha & Newton (1993) (c.f. [HN93]) proved for an $\text{AR}(p)$ random field, indexed over $\mathbb{Z}^2$, that the estimator $\overline{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ is biased for the asymptotic normality. The bias appears because, in the terms $\overline{R}(h)$, the summation set $\{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t-h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$ depends on h and simultaneously, the normalization coefficient N^d does not match this cardinal. By modifying the normalization coefficient, they proposed then an unbiased estimator called ‘unbiased Yule Walker estimator’ for which they proved the asymptotic normality. Here we take another approach to obtain unbiased estimators from the extended Yule-Walker equations (3.45). More precisely, we define the estimators $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)} = (\hat{\phi}_{\lambda,j}^{(\nu)})_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle}$ of the coefficients $(\phi_{\lambda,j}^{(\nu)})_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle}$ by the following equations

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \hat{Y}_{\lambda,t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} = 0 \quad \forall j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle \quad (3.47)$$

where $\hat{Y}_{\lambda,t}^{(\nu)} = X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \hat{\phi}_{\lambda,j}^{(\nu)} X_{t-j}$ and $\tau = \lambda + \nu$.

These equations can also be rewritten under the following matricial form

$$\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)} \hat{\phi}_\lambda^{(\nu)} = \hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)} \quad (3.48)$$

with for all $i, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)}(j, i) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-\nu-j}$$

and

$$\hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)}(j) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t-\nu-j}.$$

For the convenience of the reader, we list below assumptions that will be considered.

ASSUMPTION 1 A1. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is a spatial $\text{ARMA}(p, q)$ with $p \neq 0$.

ASSUMPTION 2 A2. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is causal.

ASSUMPTION 3 A3. $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is a family of i.i.d centered random variables with variance $\sigma^2 > 0$.

ASSUMPTION 4 A4. $\mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \eta \sigma^4$ with η being some positive constant.

3.5.2 Some asymptotic results for linear random fields

We consider now two linear random fields $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$, $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ under the form

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad Y_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad (3.49)$$

with the crosscovariance function $\gamma_{xy}(\cdot)$. We first establish below the consistency of their sample crosscovariance function $\hat{\gamma}_{xy}(\cdot)$ as defined in (3.42).

Proposition 3.5.3. *Let $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ and $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ be two linear random fields as defined in (3.49). Under Assumptions A3 and A4, for all $h \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \gamma_{xy}(h),$$

where $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}}$ means the convergence in probability when N tends to infinity.

PROOF. We first observe that

$$\gamma_{xy}(h) = \sigma^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \psi_i \theta_{i+h}$$

and

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \psi_i \theta_j \frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t+h-j}.$$

For $i = j - h$, from the weak law of large numbers

$$\frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i}^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2. \quad (3.50)$$

Now, let us prove that for $i \neq j - h$

$$\frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t+h-j} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0. \quad (3.51)$$

We have

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t+h-j} \right)^2 = \frac{1}{N_h^2} \sum_{\substack{t_1 \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t_1+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \sum_{\substack{t_2 \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t_2+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i} \epsilon_{t_1+h-j} \epsilon_{t_2-i} \epsilon_{t_2+h-j}).$$

If $t_1 \neq t_2$ and $t_1 - i \neq t_2 + h - j$,

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i}\epsilon_{t_1+h-j}\epsilon_{t_2-i}\epsilon_{t_2+h-j}) = 0$$

by the independence property.

If $t_1 \neq t_2$ and $t_1 - i = t_2 + h - j$,

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i}\epsilon_{t_1+h-j}\epsilon_{t_2-i}\epsilon_{t_2+h-j}) = \mathbb{E}(\epsilon_{t_1-i}^2)\mathbb{E}(\epsilon_{t_2-i})\mathbb{E}(\epsilon_{t_1+h-j}) = 0$$

again by the independence property.

Thus,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i}\epsilon_{t+h-j}\right)^2 = \frac{1}{N_h^2} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2 \epsilon_{t+h-j}^2).$$

Since $i \neq j - h$, we have

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i}\epsilon_{t+h-j}\right)^2 = \frac{\sigma^4}{N_h}.$$

The right hand side of the above equality converges to 0 as N tends to ∞ so that (3.51) follows from Chebyshev's inequality.

Let us denote for $K \in \mathbb{N}$,

$$Z_{N,K} = \sum_{i \in S[-\mathbf{K}, \mathbf{K}]} \sum_{j \in S[-\mathbf{K}, \mathbf{K}]} \psi_i \theta_j \frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i}\epsilon_{t+h-j}$$

and

$$Z_N = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \psi_i \theta_j \frac{1}{N_h} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+h \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} \epsilon_{t-i}\epsilon_{t+h-j}.$$

From (3.50) and (3.51), we deduce that

$$Z_{N,K} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} Z_K = \sum_{\substack{i \in S[-\mathbf{K}, \mathbf{K}] \\ i+h \in S[-\mathbf{K}, \mathbf{K}]}} \psi_i \theta_{i+h} \sigma^2.$$

Moreover, Z_K converges to $\gamma_{xy}(h)$ as K tends to ∞ . Following proposition 6.3.9 in Brockwell & Davis (1991) (c.f. [BD91]), it suffices then to show that

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}|Z_N - Z_{N,K}| = 0.$$

But, this is immediately deduced from the absolute summability of $\sum \psi_j$ and $\sum \theta_j$. $\square$

Remark 3.5.4. Tjøstheim (1983) (c.f. [Tjø83]) has shown the consistency of $\hat{\gamma}(\cdot)$ under martingale differences assumptions for linear random fields having unilateral expansions like (3.44). It could be shown that Proposition 3.5.3 also holds under martingale differences assumptions as in Tjøstheim (1983) by using the same proof with only some slight modifications.

Choi (2000) proved consistency for various estimators of the autocovariance function of a spatial linear random field. This result is a special case of Proposition 3.5.3 when $X_t = Y_t$.

We consider again the two linear random fields $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ and $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ and denote by $\gamma_x(h)$ and $\gamma_y(h)$ the covariance functions of (Y_t) and (X_t) respectively.

Proposition 3.5.5. *Let $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ and $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ be two linear random fields as in (3.49). If Assumptions A3 and A4 hold, then for $p \in S\langle 0, \infty \rangle$ and $q \in S[0, \infty]$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Cov}\left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-u}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-v}\right) = V(u, v) \quad \forall u, v \in S\langle 0, p \rangle$$

with

$$\begin{aligned} V(u, v) &= (\eta - 3)\gamma_{yx}(-q - u)\gamma_{yx}(-q - v) \\ &+ \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h)\gamma_x(h - u + v) + \gamma_{yx}(-h - q - v)\gamma_{yx}(h - q - u). \end{aligned}$$

PROOF. Observe first that for $i, j, k, l \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E}(\epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k \epsilon_l) = \begin{cases} \eta \sigma^4 & \text{if } i = j = k = l, \\ \sigma^4 & \text{if } i = j \neq k = l, \\ \sigma^4 & \text{if } i = k \neq j = l, \\ \sigma^4 & \text{if } i = l \neq j = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Now for $h \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Y_t X_{t-q-u} Y_{t-h-q-u} X_{t-h-2q-u-v}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \theta_i \psi_{j-q-u} \theta_{k-q-u-h} \psi_{l-2q-u-v-h} \mathbb{E}(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j} \epsilon_{t-k} \epsilon_{t-l}). \end{aligned}$$

From above,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Y_t X_{t-q-u} Y_{t-h-q-u} X_{t-h-2q-u-v}) \\ &= (\eta - 3)\sigma^4 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \theta_i \psi_{i-q-u} \theta_{i-q-u-h} \psi_{i-2q-u-v-h} + \gamma_{yx}(-q - u)\gamma_{yx}(-q - v) \\ &+ \gamma_y(q + u + h)\gamma_x(q + v + h) + \gamma_{yx}(-2q - u - v - h)\gamma_{yx}(h). \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}\left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-u}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-v}\right) \\
&= \frac{1}{N^{2d}} \sum_{s \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \mathbb{E}(Y_t X_{t-q-u} Y_s X_{s-q-v}) - \gamma_{yx}(-q-u) \gamma_{yx}(-q-v) \\
&= \frac{1}{N^{2d}} \sum_{s \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} [(\eta-3)\sigma^4 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \theta_i \psi_{i-q-u} \theta_{i+(s-t)} \psi_{i-q+(s-t)-v} \\
&\quad + \gamma_y(t-s) \gamma_x(t-s-u+v) + \gamma_{yx}(s-t-q-v) \gamma_{yx}(t-s-q-u)].
\end{aligned}$$

Setting $h = t - s$ and permutating the two summations yield

$$\begin{aligned}
& N^d \text{Cov}\left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-u}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-v}\right) \\
&= \frac{1}{N^{2d}} \sum_{h \in S[-(\mathbf{N}-\mathbf{1}), \mathbf{N}-\mathbf{1}]} \prod_{i=1 \dots d} \left(1 - \frac{|h_i|}{N}\right) [(\eta-3)\sigma^4 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \theta_i \psi_{i-q-u} \theta_{i-h} \psi_{i-q-h-v} \\
&\quad + \gamma_y(h) \gamma_x(h-u+v) + \gamma_{yx}(-h-q-v) \gamma_{yx}(h-q-u)].
\end{aligned}$$

As a consequence,

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Cov}\left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-u}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_t X_{t-q-v}\right) \\
&= (\eta-3) \gamma_{yx}(-q-u) \gamma_{yx}(-q-v) \\
&\quad + \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h) \gamma_x(h-u+v) + \gamma_{yx}(-h-q-v) \gamma_{yx}(h-q-u),
\end{aligned}$$

which is exactly $V(u, v)$. $\square$

Remark 3.5.6. Proposition 3.5.5 extends to random fields the well-known results for two linear processes indexed over $\mathbb{Z}$. More precisely, for the special case when $d = 1$ and $X_t = Y_t$, Proposition 3.5.5 corresponds to Proposition 7.3.1 in Brockwell & Davis (1991). Furthermore, for random fields, Lemma 8 in Choi (2000) is the particular case of Proposition 3.5.5 when $Y_t = \epsilon_t$.

3.5.3 Estimation and identification for a spatial ARMA

We are now interested in asymptotic behaviour of estimators for the autoregressive parameters of a spatial ARMA(p, q) random field $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ with $p \neq \mathbf{0}$. First the consistency of the autoregressive coefficients estimators is stated in the following proposition.

Proposition 3.5.7. *If Assumptions A1, A2, A3 and A4 hold, then for all i, j in $S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,*

$$\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)}(j, i) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \gamma(\nu + j - i)$$

and

$$\hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)}(j) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \gamma(\nu + j).$$

PROOF. For $i \in S[\mathbf{0}, \lambda]$, $j \in S(\mathbf{0}, \lambda]$, we have

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - \tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-\nu-j} = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-i \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\nu-j \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-\nu-j} - R_N^1,$$

with

$$R_N^1 = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in I_N^1} X_{t-i} X_{t-\nu-j}$$

and

$$I_N^1 = \{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t - i \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t - \nu - j \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t - \tau \notin S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}.$$

But,

$$\#I_N^1 \leq \#\{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t - \tau \notin S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\} \leq \sum_i \tau_i N^{d-1},$$

where $\#E$ denotes the cardinal of a finite subset E of $\mathbb{Z}^d$. Therefore,

$$\mathbb{E}|R_N^1| \leq \gamma_x(\mathbf{0}) \frac{\sum_i \tau_i}{N}$$

which implies that $R_N^1 = o_{\mathbb{P}}(1)$.

Furthermore,

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-i \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\nu-j \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-\nu-j} = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+(i-\nu-j) \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t+(i-\nu-j)} - R_N^2$$

with

$$R_N^2 = \begin{cases} 0 & \text{if } i = \mathbf{0} \\ \sum_{t \in I_N^2} X_t X_{t+(i-\nu-j)} & \text{if } i \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

where $I_N^2 = \{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t + (i - \nu - j) \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}], t + i \notin S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$.

As for R_N^1 , we show that $R_N^2 = o_{\mathbb{P}}(1)$.

Consequently, we have

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-\nu-j} = \frac{N_{i-\nu-j}}{N^d} \frac{1}{N_{i-\nu-j}} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+(i-\nu-j) \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t+(i-\nu-j)} + o_{\mathbb{P}}(1)$$

which converges in probability to $\gamma(i - \nu - j)$ by Proposition 3.5.3. $\square$

From equations (3.46) and (3.48), the following theorem is established.

Theorem 3.5.8. *If Assumptions A1, A2, A3 and A4 hold and if for some λ in $S\langle \mathbf{0}, \infty \rangle$ and ν in $S[\mathbf{0}, \infty]$, $\Gamma_\lambda^{(\nu)}$ is invertible, then*

$$\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \phi_\lambda^{(\nu)}.$$

Remark 3.5.9. For causal AR(p) models, Tjøstheim has proved in Tjøstheim (1983) the strong consistency of the least squares (LS) estimator of the vector of autoregressive coefficients under the assumption that the ϵ_t are strong martingale-differences and strictly stationary. Since, for an AR(p) model, $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ coincides with the LS estimator when $\lambda = p$ and $\nu = \mathbf{0}$, in the case of i.i.d. innovations, Theorem 3.5.8 extends in fact Tjøstheim's result to ARMA(p, q) random fields.

In order to study the asymptotic normality of the estimator $\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}$ of the vector of coefficients $\phi_\lambda^{(\nu)}$, we consider the $S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$ -indexed vector $\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)}(\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)} - \phi_\lambda^{(\nu)})$ whose j^{th} component equals

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - \tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t - \nu - j}.$$

First, we consider truncated random fields and sums over $S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]$. More precisely, for some $K \in \mathbb{N}$, we study the $S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$ -indexed vector with components

$$\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} X_{t - \nu - j}^K, \quad (3.52)$$

where

$$X_t^K = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K}]} \psi_j \epsilon_{t-j}$$

and

$$Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} = X_t^K - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \phi_{\lambda, j}^{(\nu)} X_{t-j}^K$$

which can be rewritten as follows

$$Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K} + \lambda]} \beta_j^K \epsilon_{t-j}$$

while using the expansion of X_t^K .

According to the Cramér-Wold device, the asymptotic normality of the vector whose j^{th} component is defined in (3.52) amounts to that of the term

$$W_{N, K} = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} r_j X_{t - \nu - j}^K$$

where $(r_j)_{j \in S(\mathbf{0}, \lambda]}$ are arbitrary vectors of reals.

As in Choi (2000), the tool we use to establish the asymptotic normality of the quantities $W_{N,K}$ is based on m -dependent random fields whose definition is recalled below.

Definition 3.5.10. For $m \in S[\mathbf{0}, \infty]$, a random field $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is m -dependent if it is stationary and if for any $s, t \in \mathbb{Z}^d$, Z_s and Z_t are independent when $|t_i - s_i| > m_i$ for at least one $i = 1 \dots d$.

For such random fields, we quote from Choi (2000) the following central limit theorem.

Theorem 3.5.11. Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a stationary m -dependent random field with mean zero and autocovariance function $\gamma(\cdot)$. If $v_m = \sum_{h \in S[-m, m]} \gamma(h) < \infty$, then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Z_t \right) = v_m$$

and

$$\frac{1}{N^{d/2}} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Z_t \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v_m),$$

where $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}}$ means the convergence in distribution as N tends to infinity.

The following lemma shows that $W_{N,K}$ is a sum of $(N + \tau)$ -dependent random variables.

Lemma 3.5.12. If $(\epsilon_t)_t$ satisfies Assumption A3, then $(Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} \sum_{j \in S(\mathbf{0}, \lambda]} r_j X_{t-\nu-j}^K)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is a $(K + \tau)$ -dependent random field.

PROOF. Let $Z_t = (Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} X_{t-\nu-j}^K)_{j \in S(\mathbf{0}, \lambda]}$. Then $(Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} \sum_{j \in S(\mathbf{0}, \lambda]} r_j X_{t-\nu-j}^K)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is $(K + \tau)$ -dependent as soon as $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ is.

Observe that (Z_t) is strictly stationary because the ϵ_t are i.i.d.

For $h \in \mathbb{Z}^d$ such that $h_l \neq \tau_l + K$, for example $h_l > \tau_l + K$, we show that Z_t and Z_{t+h} are independent. For this, observe that

$$Z_t = \left(\sum_{i \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K} + \lambda]} \beta_i^K \epsilon_{t-i} \right) \left(\sum_{k \in S[j + \nu, \mathbf{K} + j + \nu]} \psi_{k-\nu-j} \epsilon_{t-k} \right),$$

so that Z_t is a function of the ϵ_{t-i} for $i_l \geq 0$. In the same way,

$$Z_{t+h} = \left(\sum_{i \in S[-h, \mathbf{K} + \lambda - h]} \beta_{i+h}^K \epsilon_{t-i} \right) \left(\sum_{k \in S[\nu + j - h, \mathbf{K} + \nu + j - h]} \psi_{k-\nu-j+h} \epsilon_{t-k} \right)$$

only depends on the ϵ_i for $i_l < 0$.

The independence of Z_t and Z_{t+h} follows from that of the ϵ_t 's. Hence (Z_t) is $(\mathbf{K} + \tau)$ -dependent. $\square$

Let us denote by $\gamma_{xy}^K(h)$ the crosscovariance function $\mathbb{E}(Y_t^K X_{t+h}^K)$ and by $\gamma_x^K(h)$, $\gamma_y^K(h)$ the covariances of X_t^K and $Y_{\lambda,t}^{(\nu)K}$ respectively. The following lemma gives the asymptotic normality of the truncated term $W_{N,K}$ as N tends to infinity.

Lemma 3.5.13. *Assume that $(\epsilon_t)_t$ satisfies Assumptions A3 and A4. Then*

$$N^{d/2}(W_{N,K} - \mathbb{E}(W_{N,K})) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v_K),$$

where $v_K = r'V_K r$ with A' denoting the tranpose of a matrix A and for $u, v \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\begin{aligned} V_K(u, v) &= (\eta - 3)\gamma_{yx}^K(-\nu - u)\gamma_{yx}^K(-\nu - v) \\ &+ \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y^K(h)\gamma_x^K(h - u + v) + \gamma_{yx}^K(-h - \nu - v)\gamma_{yx}^K(h - \nu - u). \end{aligned}$$

PROOF. From Theorem 3.5.11, it follows that

$$N^{d/2}(W_{N,K} - \mathbb{E}(W_{N,K})) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v_K),$$

where

$$\begin{aligned} v_K &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var}(W_{N,K}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} r' N^d \text{Var} \left[\left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda,t}^{(\nu)K} X_{t-\lambda-j}^K \right)_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \right] r \\ &= r' V_K r. \end{aligned}$$

From Proposition 3.5.5,

$$\begin{aligned} V_K(u, v) &= (\eta - 3)\gamma_{xy}^K(-\nu - u)\gamma_{xy}^K(-\nu - v) \\ &+ \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y^K(h)\gamma_x^K(h - u + v)\gamma_{xy}^K(-h - \nu - v)\gamma_{xy}^K(h - \nu - u) \end{aligned}$$

for $u, v \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$. □

The following lemma establishes the asymptotic normality of the quantities

$$W_N = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda,t}^{(\nu)} \sum_{j \in \langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} r_j X_{t-\nu-j}$$

which correspond to the original untruncated terms.

Lemma 3.5.14. *If Assumptions A1, A2, A3 and A4 hold, then*

$$N^{d/2}W_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, r'Vr),$$

where for $u, v \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$

$$V(u, v) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h)\gamma_x(h - u + v) + \gamma_{yx}(-h - \nu - v)\gamma_{yx}(h - \nu - u).$$

PROOF. From Lemma 3.5.13,

$$N^{d/2}(W_{N,K} - \mathbb{E}(W_{N,K})) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} W_K = \mathcal{N}(0, v_K)$$

with $v_K = r'V_K r$. But for $u, v \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} V_K(u, v) &= (\eta - 3)\gamma_{yx}(-\nu - u)\gamma_{yx}(-\nu - v) \\ &+ \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h)\gamma_x(h - u + v) + \gamma_{yx}(-h - \nu - v)\gamma_{yx}(h - \nu - u). \end{aligned}$$

Moreover, from equations (3.45), the first term in the asymptotic variance equals 0.

As a consequence, $W_K \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, r'Vr)$.

Now to prove the lemma, we use again proposition 6.3.9 in Brockwell & Davis (1991) and show that for all $\epsilon > 0$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N^{d/2}|W_N - (W_{N,K} - \mathbb{E}(W_{N,K}))| > \epsilon) = 0.$$

But according to Chebyshev's inequality, it amounts to prove that for every j in $S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} (Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} - Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K) \right) = 0.$$

For this, observe that

$$\begin{aligned} &\text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} (Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} - Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K) \right) \\ &= \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right) \\ &+ \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K \right) \\ &- 2 \text{Cov} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K \right). \end{aligned}$$

By Proposition 3.5.5,

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right) \\ &= (\eta - 3)\gamma_{yx}(-\nu - j)^2 + \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h)\gamma_x(h) + \gamma_{yx}(-h - \nu - j)\gamma_{yx}(h - \nu - j). \end{aligned}$$

Since $\gamma_{yx}(-\nu - j) = 0$, the last term equals $V(j, j)$.

Again by Proposition 3.5.5,

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K \right) \\ &= (\eta - 3)\gamma_{yx}^K(-\nu - j)^2 + \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y^K(h)\gamma_x^K(h) + \gamma_{yx}^K(-h - \nu - j)\gamma_{yx}^K(h - \nu - j). \end{aligned}$$

But,

$$\gamma_x^K(h) = \sum_{j \in S[\text{extbf}0, K-h]} \psi_j \psi_{j+h} \sigma^2,$$

which converges to $\gamma_x(h)$ when K tends to infinity.

Furthermore,

$$\gamma_y^K(h) = \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \sum_{k \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \phi_{\lambda, j}^{(\nu)} \phi_{\lambda, k}^{(\nu)} \gamma_x^K(h - k + j).$$

Thus, $\gamma_y^K(h)$ converges to $\gamma_y(h)$ when K tends to infinity.

In the same way, it can be shown that $\gamma_{yx}^K(h)$ converges to $\gamma_{yx}(h)$ so that finally,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K \right) = V(j, j).$$

Using the same arguments as in Proposition 3.5.5, we get

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} N^{d/2} \text{Cov} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} (Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K) \right) \\ &= (\eta - 3) \gamma_{yx}(-\nu - j) \gamma_{yx^K}(-\nu - j) \\ &+ \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{yy^K}(h) \gamma_{xx^K}(h) + \gamma_{yx^K}(-h - \nu - j) \gamma_{yx^K}(h - \nu - j). \end{aligned}$$

Observing that $\gamma_{yx}(-\nu - j) = 0$ and taking the limit when K tends to infinity yields

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{d/2} \text{Cov} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}, \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} (Y_{\lambda, t}^{(\nu)K} X_{t-\nu-j}^K) \right) = V(j, j). \quad \square$$

Now, from Lemma 3.5.14,

$$r' N^{d/2} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right)_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, r' V r)$$

for all arbitrary vector of reals $r = (r_j)_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle}$. Hence, from the Cramér-Wold device, Proposition 3.5.15 follows.

Proposition 3.5.15. *If Assumptions A1, A2, A3 and A4 hold, then*

$$N^{d/2} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right)_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V).$$

The next proposition states the asymptotic normality of the statistics

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}.$$

Proposition 3.5.16. *Under Assumptions A1, A2, A3, A4,*

$$N^{d/2} \left(\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)} (\hat{\phi}_\lambda^{(\nu)} - \phi_\lambda^{(\nu)}) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V),$$

here for $u, v \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$V(u, v) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h) \gamma_x(h - u + v) + \gamma_{yx}(-h - \nu - v) \gamma_{yx}(h - \nu - u).$$

PROOF. Let us prove that for all $j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$N^{d/2} \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} - \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t-\tau \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

By the same calculations as in Proposition 3.5.5,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{1}{N^{d/2}} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \setminus S[\mathbf{1}+\tau, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \setminus S[\mathbf{1}+\tau, \mathbf{N}]} \sum_{s \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \setminus S[\mathbf{1}+\tau, \mathbf{N}]} [(\eta - 3) \sigma^4 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \theta_i \psi_{i-\nu-j} \theta_{i+(s-t)} \psi_{i-\nu+(s-t)-j} \\ &+ \gamma_{yx}((s-t) - \nu - j) \gamma_{yx}((t-s) - \nu - j) + \gamma_y(t-s) \gamma_x(t-s)]. \end{aligned}$$

Now, set $h = t - s$ and

$$T_h = (\eta - 3) \sigma^4 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \theta_i \psi_{i-\nu-j} \theta_{i-h} \psi_{i-\nu-h-j} + \gamma_{yx}(-h - \nu - j) \gamma_{yx}(h - \nu - j) + \gamma_y(h) \gamma_x(h).$$

Since $\sum |\psi_j| < \infty$ and $\sum |\theta_j| < \infty$, it follows that $\sum |T_h| < \infty$. Hence,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{1}{N^{d/2}} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \setminus S[\mathbf{1}+\tau, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \setminus S[\mathbf{1}+\tau, \mathbf{N}]} \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} |T_h| \\ & \leq \frac{\sum_{i=1 \dots d} \tau_i}{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} |T_h|. \end{aligned}$$

Since the last term converges to 0 when N tends to infinity, the proof then ends. $\square$

The following theorem is immediately deduced from Proposition 3.5.16.

Theorem 3.5.17. *If Assumptions A1, A2, A3 and A4 hold and if for some $\lambda \in S\langle \mathbf{0}, \infty \rangle$ and $\nu \in S[\mathbf{0}, \infty]$, $\Gamma_\lambda^{(\nu)}$ is invertible, then*

$$N^{d/2} (\phi_\lambda^{(\nu)} - \hat{\phi}_\lambda^{(\nu)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\lambda^{(\nu)} V \Sigma_\lambda^{(\nu)'})$$

with $\Sigma_\lambda^{(\nu)} = (\Gamma_\lambda^{(\nu)})^{-1}$ and V as defined in Proposition 3.5.16.

Remark 3.5.18. The asymptotic normality for the LS estimator of the vector of autoregressive coefficients in the case of a spatial causal AR(p) model was obtained by Tjøstheim (1983). If the innovations are i.i.d., this result is a special case of Theorem 3.5.17, for $\nu = \mathbf{0}$ and $\lambda = p$.

Bibliographie

- [BD91] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time series : theory and methods*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Cho97] B. S. Choi. A recursive algorithm for solving the spatial Yule-Walker equations of causal spatial AR models. *Statist. Probab. Lett.*, 33(3) :241–251, 1997.
- [Cho00] B. S. Choi. On the asymptotic distributions of mean, autocovariance, autocorrelation, crosscovariance and impulse response estimators of a stationary multidimensional random field. *Comm. Statist. Theory Methods*, 29(8) :1703–1724, 2000.
- [EPB94] T. Etchison, S. G. Pantula, and C. Brownie. Partial autocorrelation function for spatial processes. *Statist. Probab. Lett.*, 21(1) :9–19, 1994.
- [Guy95] X. Guyon. *Random fields on a network*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995. Modeling, statistics, and applications, Translated from the 1992 French original by Carenne Ludeña.
- [HA92] D. Huang and V. V. Anh. Estimation of spatial ARMA models. *Austral. J. Statist.*, 34(3) :513–530, 1992.
- [HN93] E. Ha and H. J. Newton. The bias of estimators of causal spatial autoregressive processes. *Biometrika*, 80(1) :242–245, 1993.
- [ITV04] A. Illig and B. Truong-Van. Asymptotic results for spatial ARMA models. <http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Illig/>, 2004.
- [SB95] M. Shitan and P. J. Brockwell. An asymptotic test for separability of a spatial autoregressive model. *Comm. Statist. Theory Methods*, 24(8) :2027–2040, 1995.
- [SG02] S. Souchet and X. Guyon. Estimation de Yule-Walker d’un $CAR(p)$ observé à temps discret. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(6) :1093–1100, 2002. En l’honneur de J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, I. Ibragimov.
- [TjØ78] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. *Advances in Appl. Probability*, 10(1) :130–154, 1978.
- [TjØ83] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. II. Some further results on unilateral lattice processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 15(3) :562–584, 1983.
- [TT83] G. C. Tiao and R. S. Tsay. Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models. *Ann. Statist.*, 11(3) :856–871, 1983.
- [WG81] W. A. Woodward and H. L. Gray. On the relationship between the S array and the Box-Jenkins method of ARMA model identification. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 76(375) :579–587, 1981.

Chapitre 4

Une étude en simulation de modèles ARMA spatiaux

Dans ce chapitre, nous présentons une application numérique des résultats obtenus dans les chapitres précédents à travers une étude en simulation de modèles ARMA spatiaux quadrantaux.

4.1 Introduction

Nous nous intéressons d'abord à la mise en oeuvre pratique des simulations de champs $\text{ARMA}(p,q)$ quadrantaux afin

- d'illustrer leurs comportements par des visualisations,
- et d'appliquer les résultats obtenus au chapitre précédent à l'identification des paramètres p et q et à l'estimation des paramètres autorégressifs du modèle.

Afin de pouvoir appliquer les théorèmes du Chapitre 3, les polynômes autorégressifs et moyenne mobile, intervenant dans la définition d'un modèle ARMA spatial, doivent vérifier certaines conditions introduites au Chapitre 1. Or, ces polynômes sont à plusieurs indéterminées, la traduction de ces conditions n'est pas immédiate contrairement au cas des modèles ARMA temporels. Aussi, dans la première section, nous donnons, en dimension 2, une procédure pour construire de tels polynômes et décrivons une méthode pour simuler les champs ARMA associés.

Pour un certain nombre de modèles ARMA spatiaux judicieusement choisis, nous illustrons leurs comportements sous forme de graphes tridimensionnels, que nous appelons cartes et de cartes planes, qui sont des seuillages graphiques. Nous proposons ensuite des méthodes d'identification qui sont étudiées dans les sections suivantes sur des simulations.

Pour des modèles $\text{MA}(q)$ spatiaux, qui n'étaient pas étudiés de façon explicite, nous proposons deux méthodes d'identification, en nous appuyant sur les travaux de Choi (2000) (voir [Cho00]) pour certains champs aléatoires linéaires, en les adaptant

et les complétant. Ces procédures sont basées sur les propriétés de la fonction d'autocorrélation et sur la normalité asymptotique de ses estimateurs. Elles sont donc tout à fait analogues à la procédure d'identification de modèles MA temporels et ne diffèrent que par le choix de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation. Pour la mise en oeuvre pratique de ces deux procédures, nous proposons une visualisation graphique des résultats de tests séquentiels basés sur la fonction d'autocorrélation spatiale empirique.

Nous étudions ces deux procédures sur les simulations obtenues d'un modèle $MA((1, 0))$.

Pour l'identification de modèles $AR(p)$ spatiaux, Tjøstheim (1983) (voir [Tj83]) a proposé une technique fondée sur les critères d'information (AIC, BIC, ...). Ces critères sont habituellement destinés à la sélection de modèles, aussi nous proposons dans la Section 4.4, une autre méthode de détermination de l'ordre p , s'appuyant sur une version spatiale $\hat{\phi}_{k,k}$ de la fonction d'autocorrélation partielle empirique des séries temporelles. Elle est donc tout à fait analogue à la procédure d'identification de modèles AR temporels. Dans la Section 4.4, nous déduisons les propriétés statistiques, principalement la normalité asymptotique de l'estimateur $\phi_{k,k}$, des résultats obtenus dans le Chapitre 3. Comme pour des modèles MA spatiaux, nous proposons pour une mise en oeuvre de notre procédure d'identification basée sur la fonction d'autocorrélation spatiale partielle empirique, une visualisation graphique des résultats des tests séquentiels.

Nous appliquons cette méthode pour identifier un modèle $AR((1, 1))$. Une fois l'ordre déterminé, nous calculons une estimation préliminaire des paramètres.

Pour une famille de modèles ARMA spatiaux définis à l'aide de l'ordre lexicographique, autres que les modèles ARMA quadrantaux, Huang et Anh (1992) (voir [HA92]) proposent une méthode d'identification que nous avons décrite au Chapitre 3. Dans la Section 4.5, nous appliquons les résultats sur les estimateurs du Chapitre 3 à l'identification de modèles ARMA spatiaux quadrantaux. Ces estimateurs correspondent à une version spatiale de la fonction d'autocorrélation partielle généralisée empirique de séries temporelles. La procédure d'identification que nous avons retenue est une extension de la méthode d'identification proposée par Woodward et Gray (1981) (voir [WG81]) pour des modèles ARMA indexés par le temps.

Nous l'étudions ensuite sur plusieurs simulations de différents modèles ARMA spatiaux et calculons une estimation des paramètres autorégressifs.

4.2 Simulation de champs ARMA

Nous indiquons ici, les différents modèles ARMA spatiaux que nous avons simulés. Pour toute notre étude en simulation, nous avons choisi $d = 2$.

4.2.1 Choix des polynômes

Les modèles ARMA $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ choisis ici vérifient l'équation suivante

$$X_t - \sum_{j \in S(\mathbf{0}, p]} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t + \sum_{k \in S(\mathbf{0}, q]} \theta_k \epsilon_{t-k}, \quad (4.1)$$

avec $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ une famille de variables aléatoires centrées, indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Comme dans le Chapitre 1, nous notons

$$\phi(z) = 1 - \sum_{j \in S(\mathbf{0}, p]} \phi_j z^j$$

et

$$\theta(z) = 1 + \sum_{k \in S(\mathbf{0}, q]} \theta_k z^k$$

les polynômes autorégressif et moyenne mobile associés, avec $z = (z_1, z_2)$ et pour $j \in \mathbb{N}^d$, $z^j = (z_1^{j_1}, z_2^{j_2})$.

Puisque les théorèmes du Chapitre 3 sont obtenus sous l'hypothèse de causalité, dont une condition suffisante est donnée dans la Proposition 1.3.6, ϕ doit être choisi tels que ses zéros sont à l'extérieur du polydisque unité fermé $\overline{D}$ de $\mathbb{C}^2$. Nous devons choisir de plus, pour l'identifiabilité du modèle, ϕ et θ n'ayant pas de facteurs communs dans la décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}^2[z_1, z_2]$.

Le choix des polynômes ϕ et θ satisfaisant ces conditions n'est pas immédiat car ils dépendent de deux indéterminées, aussi nous proposons la procédure suivante pour les choisir :

Construisons tout d'abord, des polynômes autorégressifs n'ayant pas de racines dans $\overline{D}$ pour différents degrés $\deg = (\deg_1, \deg_2)$.

Pour un degré $\deg = (1, 0)$, le polynôme $1 - az_1$ a pour ensemble de solutions

$$\{z_1 = \frac{1}{a}, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Il suffit alors de choisir $a < 1$. Par exemple, le polynôme $1 - 0.45z_1$ convient.

De même, pour un degré $\deg = (1, 1)$, le polynôme $(1 - az_1)(1 - bz_2)$ admet pour ensemble de solutions l'ensemble suivant

$$\{z_1 = \frac{1}{a}, z_2 \in \mathbb{C}\} \cup \{z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \frac{1}{b}\}$$

et il suffit de choisir $a < 1$ et $b < 1$. Ainsi, le polynôme $1 - 0.7z_1 - 0.8z_2 + 0.56z_1z_2$, employé dans Choi (1997) (voir [Cho97]) pour illustrer l'algorithme de Levinson-Durbin, satisfait l'hypothèse recherchée. On construit, selon le même schéma, des polynômes autorégressifs de degrés $\deg = (2, 1)$ et $\deg = (2, 2)$.

Remarque 4.2.1. En perturbant légèrement les coefficients de ces polynômes, on peut obtenir des polynômes à variables non séparées vérifiant les mêmes hypothèses.

En ce qui concerne les polynômes moyenne mobile, il suffit de les choisir sans facteurs communs avec les polynômes autorégressifs. Les tableaux TAB. 4.1 et TAB. 4.2 récapitulent les différents polynômes autorégressifs et moyenne mobile que nous avons considérés.

Numéro	Degré	Polynôme autorégressif
1	(0, 0)	1
2	(1, 0)	$1 - 0.45 z_1$
3	(1, 1)	$1 - 0.7 z_1 + 0.56 z_1 z_2 - 0.8 z_2$
4	(2, 1)	$1 - z_1 + 0.7 z_1 z_2 - 0.7 z_2 + 0.16 z_1^2 - 0.112 z_1^2 z_2$
5	(2, 2)	$1 - 1.3 z_1 + 0.455 z_1 z_2 - 0.35 z_2 + 0.4 z_1^2 - 0.14 z_1^2 z_2 - 0.228 z_1^2 z_2^2 + 0.741 z_1 z_2^2 - 0.57 z_2^2$

TAB. 4.1 – Polynômes autorégressifs

Lettre	Degré	Polynôme moyenne mobile
A	(0, 0)	1
B	(1, 0)	$1 + 0.2 z_1$
C	(1, 1)	$1 - 0.8 z_1 + 0.3 z_1 z_2 - 0.5 z_2$

TAB. 4.2 – Polynômes moyenne mobile

4.2.2 Modèles étudiés en simulation

Les modèles ARMA spatiaux que nous avons retenus pour notre étude en simulation sont déterminés à partir du choix d'un polynôme autorégressif du tableau TAB 4.1 et d'un polynôme moyenne mobile du tableau TAB 4.2, plus précisément les modèles que nous considérons sont les suivants :

1B, 1C, 2A, 2B, 2C, 3A, 3B, 3C, 4A, 4B, 4C, 5A, 5B, 5C

avec la signification suivante : Par exemple, le modèle **1B** est choisi en prenant pour polynôme autorégressif le polynôme **1** du tableau TAB 4.1, et pour polynôme moyenne mobile, le polynôme **B** du tableau TAB 4.2 ; de même, le modèle **3A** est choisi en prenant pour polynôme autorégressif le polynôme **3** du tableau TAB 4.1, et pour polynôme moyenne mobile, le polynôme **A** du tableau TAB 4.2.

Ainsi, les modèles **1B, 1C** sont des modèles MA, les modèles **2A, 3A, 4A, 5A** sont des modèles AR et les autres modèles **2B, 2C, 3B, 3C, 4B, 4C, 5B, 5C** sont des modèles ARMA.

Dans un souci de clarté, nous n'exposons dans ce chapitre que les résultats de simulation des modèles

$$\begin{aligned}
\mathbf{1B} : & X_t = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1, t_2)}, \\
\mathbf{3A} : & X_t - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t-1, t_2-1)} = \epsilon_t, \\
\mathbf{3C} : & X_t - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t-1, t_2-1)} \\
& = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 \epsilon_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t_1, t_2-1)},
\end{aligned}$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ sont indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Plus précisément, l'identification des modèles **1B**, **3A** et **3C** est étudiée respectivement dans les Sections 4.3, 4.4 et 4.5.

Pour les autres modèles, nous donnons les résultats de notre étude en simulation à l'Annexe B. Le tableau TAB 4.3 ci-dessous résume les études effectuées sur tous les modèles que nous avons retenus.

Poly AR - Poly MA	A	B	C
1		★ ♥	★ ♥
2	★	★	★ ●
3	★ ● ♠	★ ●	★ ●
4	★	★	★ ●
5	★	★	★ ●

TAB. 4.3 – ★ Représentation graphique, ● Détermination de p et q et estimation des paramètres autorégressifs, ♥ Sélection de q , ♠ Sélection de p et estimation.

Nous décrivons maintenant une méthode pour simuler les champs ARMA spatiaux en dimension 2. Cette méthode est similaire à celle employée pour des processus ARMA indexés par le temps.

Pour générer une carte de taille $(N-100) \times (N-100)$ d'un champ ARMA(p, q) sur $S[\mathbf{1}, \mathbf{N-100}]$, on suppose tout d'abord que X_t et ϵ_t sont nuls pour t dans l'ensemble $S[\mathbf{0}, (\max(p_1, q_1), 0)]$ ou dans l'ensemble $S[(0, \max(p_2, q_2)), \mathbf{0}]$. Ensuite, pour t dans $S[(\max(p_1, q_1), \max(p_2, q_2)) + \mathbf{1}, \mathbf{N}]$, on génère ϵ_t selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et X_t se déduit de la relation (4.1). Finalement, on pose pour tout t dans $S[\mathbf{1}, \mathbf{N-100}]$, $Y_t = X_{t+\mathbf{100}}$ et par stationnarité et causalité, $\{Y_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N-100}]\}$ peut être assimilé à une réalisation sur $S[\mathbf{1}, \mathbf{N-100}]$ du modèle ARMA(p, q).

Toutes nos simulations ont été effectuées en utilisant le logiciel MATLAB.

4.2.3 Représentations graphiques

Pour les représentations graphiques, nous nous limitons aux cartes de taille 50×50 , correspondant à $N = 150$. Ces cartes sont ensuite seuillées à l'aide de la fonction MATLAB *contourf*. Pour les modèles **1B** et **1C**, nous avons effectué un seuillage entre -10 et 10 pour un pas de 1. Quant aux modèles **3A**, **3B**, **3C**, **4A**, **4B**, **4C**, **5A**, **5B** et **5C**, ils ont été seuillés entre -20 et 20 pour un pas de 2. Enfin, les modèles **5A**, **5B** et **5C** ont été seuillés entre -50 et 50 pour un pas de 5.

Par exemple, pour les modèles **1B**, **3A** et **3C**, que nous avons choisi de considérer dans ce chapitre, les figures FIG 4.1, FIG 4.3 et FIG 4.5 représentent le champ dans l'espace et les figures FIG 4.2, FIG 4.4 et FIG 4.6 sont les cartes associées obtenues après seuillage.

Toutes les autres représentations graphiques que nous avons obtenues, sont situées dans l'Annexe B.

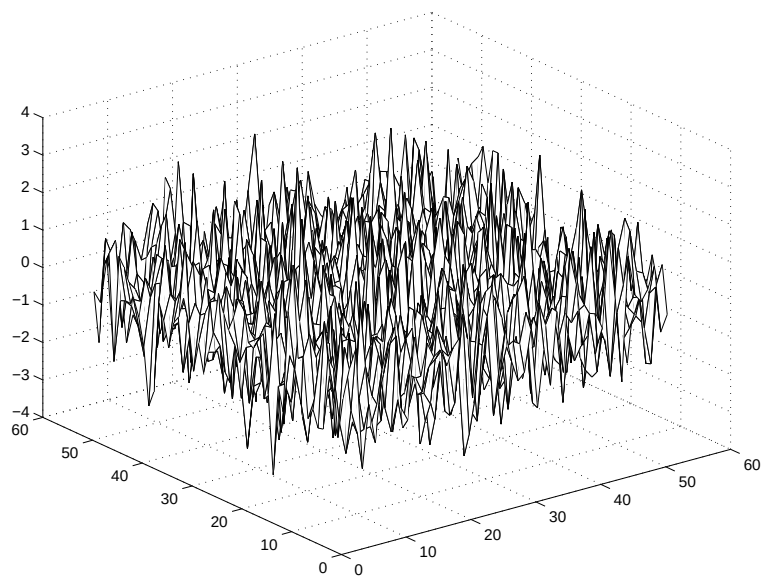


FIG. 4.1 – Carte du modèle 1B

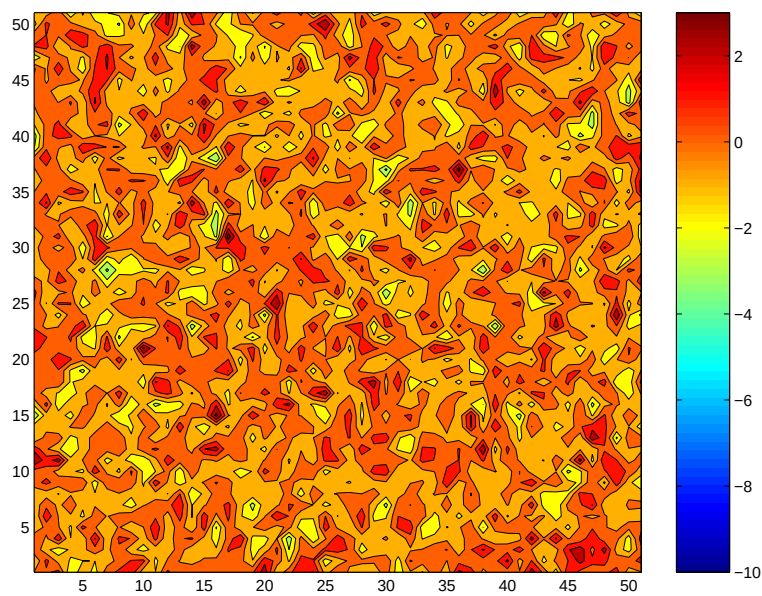


FIG. 4.2 – Carte seuillée du modèle 1B

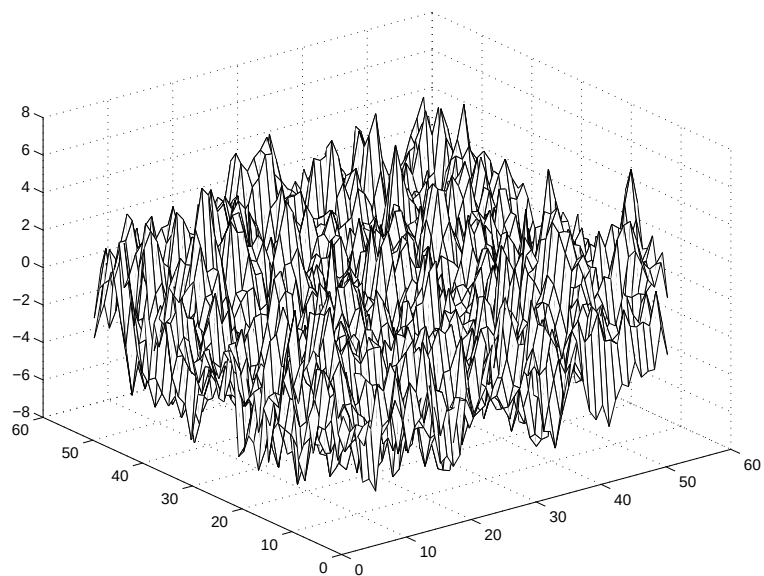


FIG. 4.3 – Carte du modèle 3A

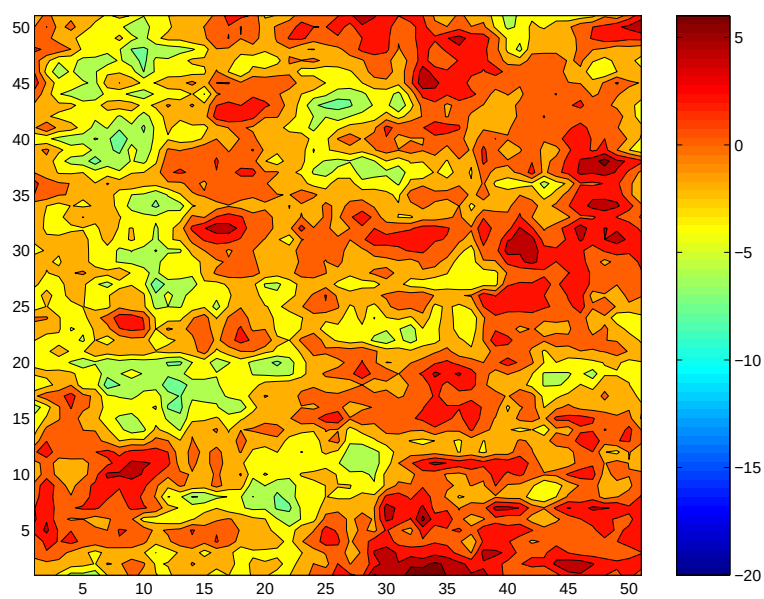


FIG. 4.4 – Carte seuillée du modèle 3A

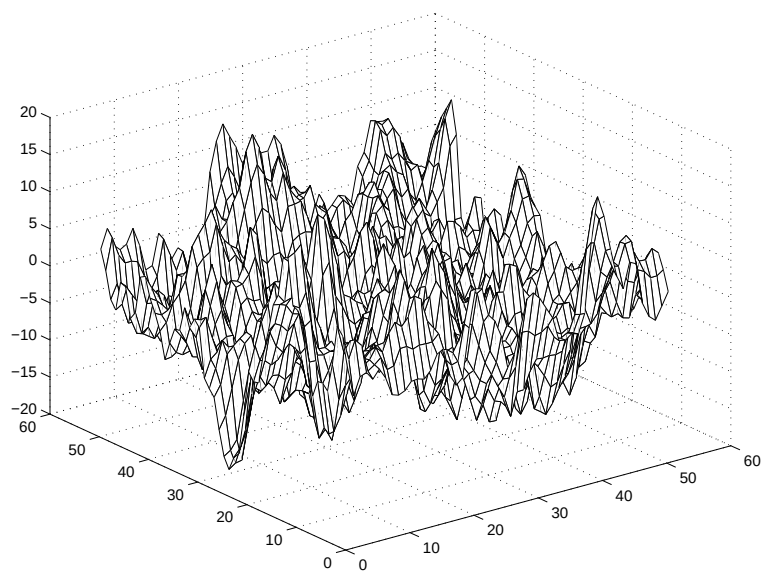


FIG. 4.5 – Carte du modèle 3C

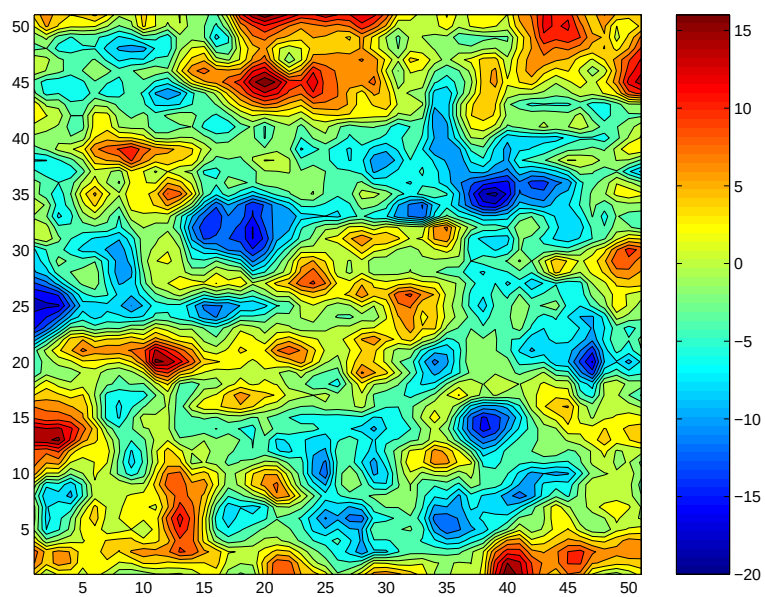


FIG. 4.6 – Carte seuillée du modèle 3C

4.3 Identification de modèles MA(q) spatiaux

En adaptant et en complétant les résultats de Choi (2000) (voir [Cho00]), nous proposons une procédure d'identification de modèles MA(q) spatiaux quadrantiaux. Elle est similaire à celle pour des processus MA temporels.

4.3.1 Résultats théoriques

Dans tout ce paragraphe, nous considérons un champ MA(q) $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ défini par

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j \in S(0, q]} \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad (4.2)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 > 0$.

Nous notons γ et ρ les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation du champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$.

Le proposition suivante donne l'expression de la fonction d'autocovariance d'un processus MA(q).

Proposition 4.3.1. *$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ MA(q) défini par la relation (4.2) avec $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance σ^2 . Alors,*

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \sum_{j \in S[\mathbf{0}, q-|u|]} \sigma^2 \theta_j \theta_{j+|u|} \text{ si } |u| \preceq q, \\ \gamma(u) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

PREUVE. Puisque $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ vérifie (4.2), on peut écrire pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$,

$$\gamma(u) = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, q]} \theta_j \sum_{k \in S[\mathbf{0}, q]} \theta_k \mathbb{E}(\epsilon_{t-j} \epsilon_{t+u-k}), \quad (4.3)$$

où $\theta_0 = 1$.

Supposons tout d'abord que $u \in S[-q, q]$. Si $k \neq u+j$, alors $\mathbb{E}(\epsilon_{t-j} \epsilon_{t+u-k}) = 0$ car $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. centrées. Par contre, si $k = u+j$, alors $\mathbb{E}(\epsilon_{t-j} \epsilon_{t+u-k}) = \sigma^2$ et j appartient à $S[\max(\mathbf{0}, u), \min(q-u, q)]$, où les fonctions min et max sont définies composante par composante. On déduit alors de la relation (4.3) que

$$\gamma(u) = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, q-|u|]} \theta_j \theta_{|u|+j} \sigma^2.$$

En particulier,

$$\gamma(\mathbf{0}) = \sum_{j \in S[\mathbf{0}, q]} \theta_j^2 \sigma^2.$$

Supposons maintenant que $u \notin S[-q, q]$. Il existe alors i , tel que $|u_i| > q_i$. Le terme $\gamma(u)$ vérifiant la relation (4.3), on se demande s'il est possible que $-j = u-k$.

Remarquons tout d'abord que $-j \in S[-q, \mathbf{0}]$ et que $u - k \in S[u - q, u]$. Si $u_i > q_i$, alors $u_i - q_i > 0$ et par suite $u - k \notin S[-q, \mathbf{0}]$. De même, si $u_i < -q_i$, alors $u - k \notin S[-q, \mathbf{0}]$. Il est donc impossible que $-j = u - k$. Par conséquent, $\gamma(u) = 0$. $\square$

Corollaire 4.3.2. *Avec les même hypothèses que celles de la Proposition 4.3.1, on a*

$$\rho(u) = 0 \text{ pour } u \notin S[-q, q].$$

Ce corollaire va nous permettre, de manière analogue au cas $d = 1$, d'identifier l'ordre du champ $\text{MA}(q)$. Pour cela, nous devons définir des estimateurs des corrélations et en étudier leur distribution asymptotique.

Pour une observation $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$, définissons la moyenne empirique par

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]} X_t. \quad (4.4)$$

Dans Choi (2000), plusieurs estimateurs des covariances sont introduits. Nous en retenons ici les deux types de covariances empiriques suivants :

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N_k} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t+k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} (X_{t+k} - \bar{X}_N)(X_t - \bar{X}_N) \quad (4.5)$$

$$\tilde{\gamma}(k) = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}-k]} (X_{t+k} - \bar{X}_N)(X_t - \bar{X}_N) \quad (4.6)$$

pour tout k .

Remarque 4.3.3. Pour $k \in S[\mathbf{0}, \infty]$, $\tilde{\gamma}(k) = \frac{N_k}{N^d} \hat{\gamma}(k)$.

Remarque 4.3.4. Pour $k \notin S[\mathbf{0}, \infty]$, $\tilde{\gamma}(k)$ ne peut être utilisé pour estimer $\gamma(k)$ car nous ne disposons que de l'observation $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$.

On en déduit alors deux types de corrélations empiriques :

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} \quad (4.7)$$

pour $k \in \mathbb{Z}^d$ et

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{\tilde{\gamma}(k)}{\tilde{\gamma}(0)} \quad (4.8)$$

pour $k \in S[\mathbf{0}, \infty]$.

Dans Choi (2000), la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs des corrélations sont étudiés dans le cas de champs aléatoires $\text{MA}(\infty)$. Nous résumons, dans le Théorème 4.3.5 suivant, les corollaires 4 et 5 de Choi (2000) pour le cas particulier de champs $\text{MA}(q)$.

Théorème 4.3.5. (Choi (2000)) Si les hypothèses de la Proposition 4.3.1 sont satisfaites et si de plus,

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \eta\sigma^4$$

alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} N^{d/2}(\hat{\rho}(k) - \rho(k)) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w_{kk}), \\ N^{d/2}(\tilde{\rho}(k) - \rho(k)) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w_{kk}), \end{aligned}$$

avec

$$w_{kk} = \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} [\rho(a+k)^2 + \rho(a-k)(\rho(a+k) - 4\rho(k)\rho(a)\rho(a+k) + 2\rho(k)^2\rho(a)^2)].$$

Corollaire 4.3.6. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ $MA(q)$ défini par la relation (4.2). Supposons que $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. centrées de variance σ^2 telle que

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \eta\sigma^4.$$

Alors, pour tout $k \in S[\mathbf{0}, \infty] \setminus S[\mathbf{0}, q]$,

$$\begin{aligned} N^{d/2}\hat{\rho}(k) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w_k), \\ N^{d/2}\tilde{\rho}(k) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w_k), \end{aligned}$$

avec

$$w_k = \sum_{a \in S[-q, q]} \rho(a)^2. \quad (4.9)$$

PREUVE. La preuve découle du Théorème 4.3.5 et du Corollaire 4.3.2, mais pour plus de clarté, nous la détaillons ici.

On applique le Théorème 4.3.5 dans le cas $k \in S[\mathbf{0}, \infty] \setminus S[\mathbf{0}, q]$ et on note w_k la variance asymptotique. Puisque $\rho(k) = 0$ d'après le Corollaire 4.3.2, on en déduit que

$$w_k = \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} [\rho(a+k)^2 + \rho(a-k)(\rho(a+k))].$$

Par hypothèse, il existe $i = 1 \dots d$, tel que $k_i > q_i$. Si $a_i \geq 0$, alors $a_i + k_i > q_i$ et $\rho(a-k)\rho(a+k) = 0$ d'après le Corollaire 4.3.2. De même, si $a_i < 0$, alors $a_i - k_i < -q_i$ et $\rho(a-k)\rho(a+k) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{a \mid a+k \in S[-q, q]} \rho(a+k)^2, \\ &= \sum_{a \in S[-q, q]} \rho(a)^2. \end{aligned}$$

□

4.3.2 Procédure d'identification

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ un champ $\text{MA}(q)$ comme défini dans le Chapitre 1, de paramètre q inconnu. Sur la base d'une observation $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$, on cherche à déterminer l'ordre q .

Afin de pouvoir utiliser les résultats précédents, nous devons maintenant estimer la variance asymptotique w_k donnée par la relation (4.9). Suite à la Remarque 4.3.4, nous choisissons d'estimer w_k par $\hat{w}_k$ obtenu, à partir des estimateurs $\hat{\rho}(a)$ de la manière suivante

$$\hat{w}_k = \sum_{a \in S[-q, q]} \hat{\rho}(a).$$

On en déduit grâce au lemme de Slutsky (voir Theorem 5.5 de [Bil68] par exemple) et au Corollaire 4.3.6 que $\frac{N^{d/2}}{\sqrt{\hat{w}_k}} \hat{\rho}(k)$ et $\frac{N^{d/2}}{\sqrt{\hat{w}_k}} \tilde{\rho}(k)$ sont asymptotiquement distribués selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On peut alors construire deux procédures séquentielles pour déterminer l'ordre q du modèle. Ces procédures sont analogues à celles connues pour les modèles MA temporels.

Procédure d'identification 1

En faisant varier q_0 dans $S[\mathbf{0}, \infty]$, on teste successivement $H_{0, q_0} : q = q_0$ contre $H_{1, q_0} : q \neq q_0$ comme suit.

Sous H_{0, q_0} , $\rho(k) = 0$ pour tout $k \notin S[\mathbf{0}, q_0]$ d'après le Corollaire 4.3.2 et $\frac{N^{d/2}}{\sqrt{\hat{w}_k}} \hat{\rho}(k)$ est asymptotiquement distribué selon une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On se donne alors $K \in \mathbb{N}^*$ assez grand et pour $\alpha = 5\%$, on décide alors d'accepter H_{0, q_0} si

$$\hat{\rho}(k) \in [-u_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{w}_k}}{N^{d/2}}, u_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{w}_k}}{N^{d/2}}], \quad (4.10)$$

pour tout $k \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K}] \setminus S[\mathbf{0}, q_0]$, où $u_{\alpha/2} = 1,96$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Procédure d'identification 2

Cette procédure est analogue à la précédente en remplaçant $\hat{\rho}$ par $\tilde{\rho}$. La Condition (4.10) est alors remplacée par la condition suivante

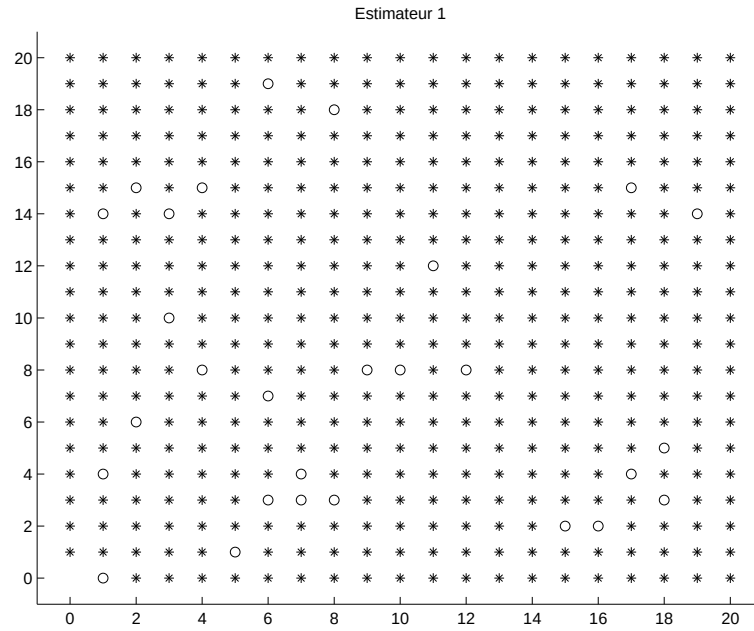
$$\tilde{\rho}(k) \in [-u_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{w}_k}}{N^{d/2}}, u_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{w}_k}}{N^{d/2}}]. \quad (4.11)$$

Nous avons appliqué ces deux procédures au modèle **1B**, c'est-à-dire au champ $\text{MA}((1, 0))$ défini par :

$$X_t = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1, t_2)},$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite.

Pour une simulation $\{X_t, t \in S[\mathbf{0}, \mathbf{500}]\}$ sur le rectangle $S[\mathbf{0}, \mathbf{500}]$, les résultats obtenus par la première (resp. seconde) procédure peuvent se présenter, pour chaque

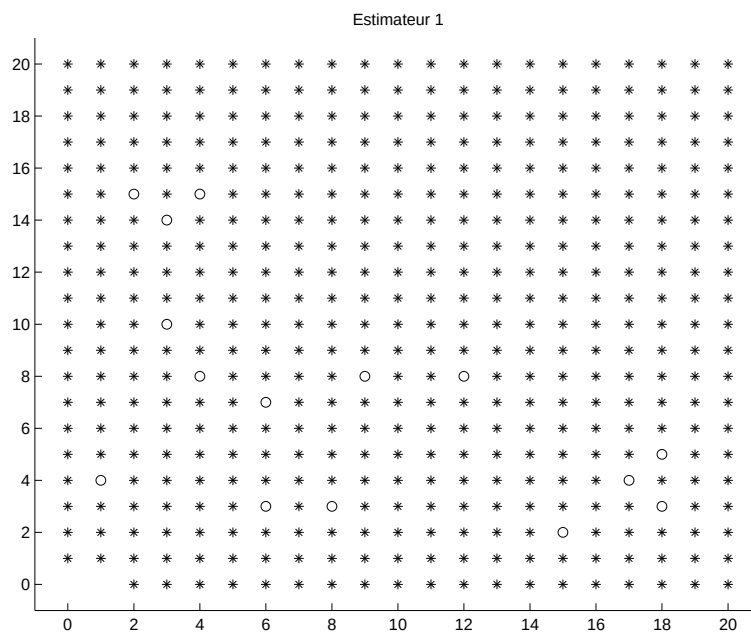
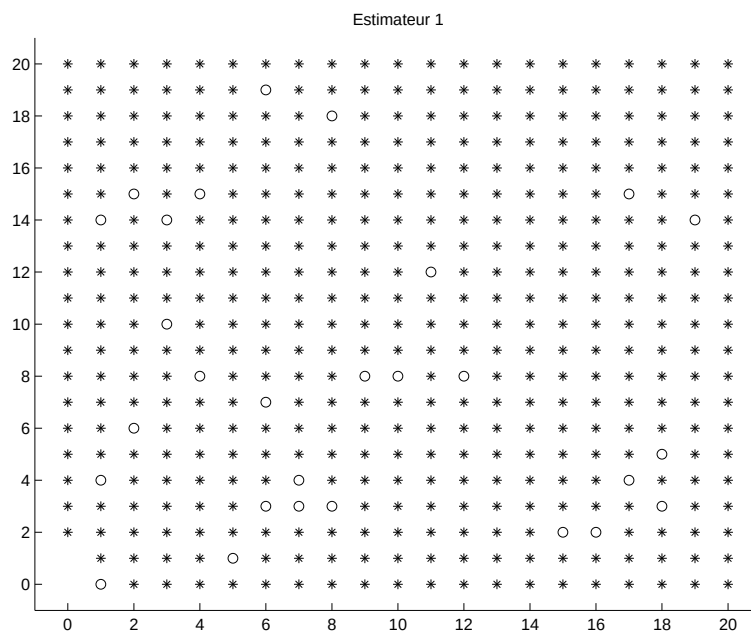
FIG. 4.7 – Procédure 1 - Test $q = (0, 0)$

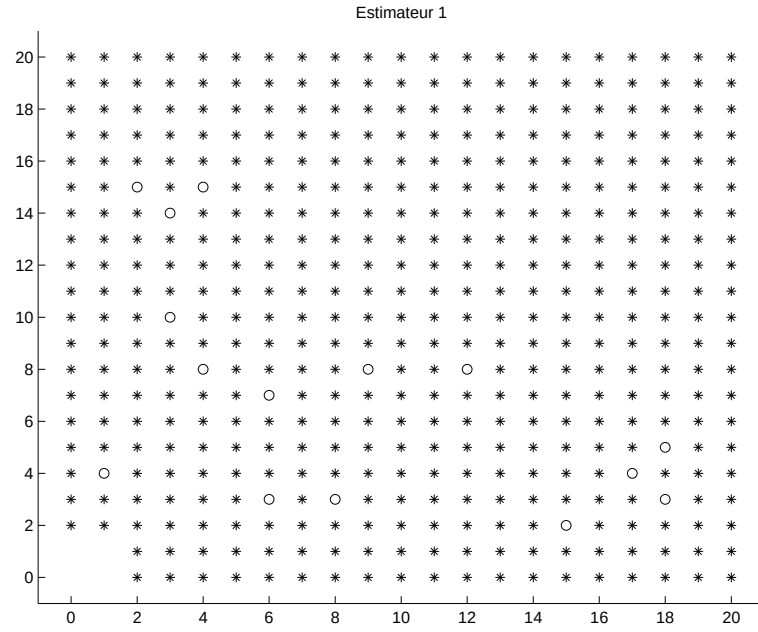
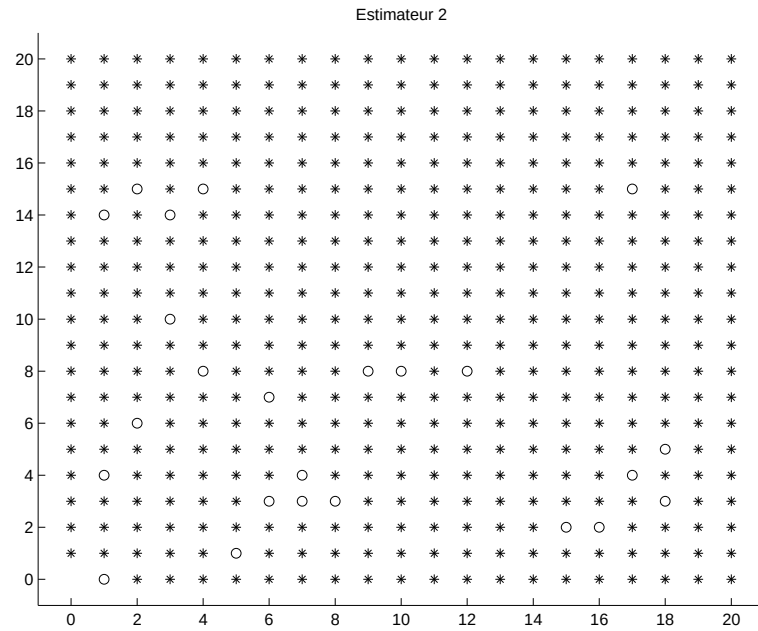
valeur q_0 testée, sous forme d'un maillage sur $S[0, 20]$, où en chaque point k apparaît une $*$ si la condition (4.10) (resp. (4.11)) est vérifiée et un $\circ$ sinon. Ces résultats ont été obtenus grâce au programme MATLAB de l'Annexe A page 125.

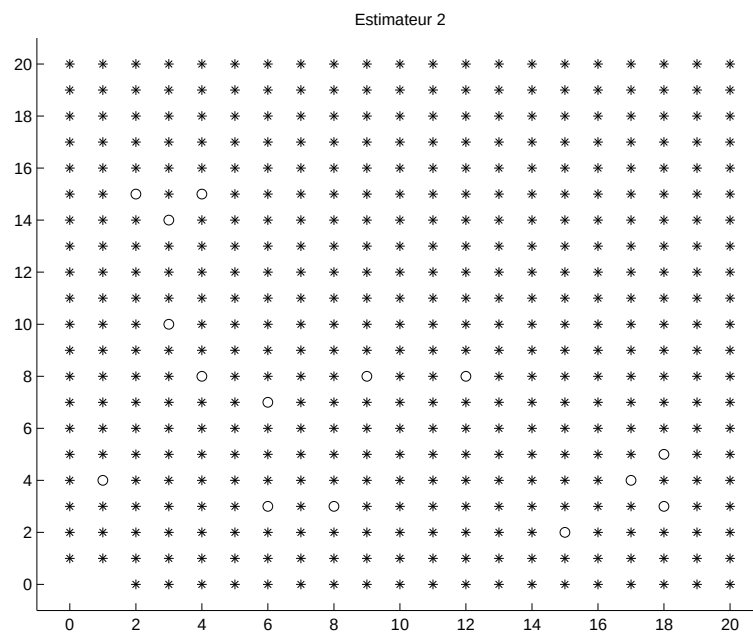
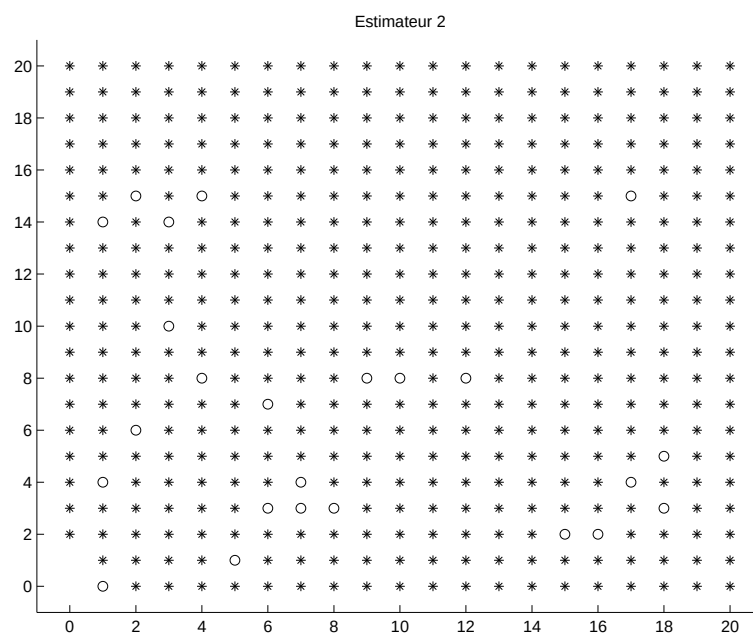
Les résultats de la première procédure sont donnés par les figures FIG. 4.7, FIG. 4.9, FIG. 4.8 et FIG. 4.10. Cette procédure conduit à décider $q = (1, 0)$. En effet, pour $q_0 = (0, 0)$ et $q_0 = (0, 1)$, on obtient les figures FIG. 4.7 et FIG. 4.9 sur lesquelles le $\circ$ à l'emplacement $(1, 0) \notin S[0, q_0]$ permet de rejeter H_{0, q_0} . Pour $q_0 = (1, 0)$, malgré quelques $\circ$ lointains à l'extérieur de $S[0, q_0]$, la figure FIG. 4.8 inciterait plutôt à accepter H_{0, q_0} . Pour une valeur de q_0 égale à $(1, 1)$, la figure FIG. 4.10 que nous avons obtenue est identique à la figure FIG. 4.8. Il en est de même pour des valeurs de q_0 supérieures à $(1, 1)$. On peut donc en conclure que $q = (1, 0)$.

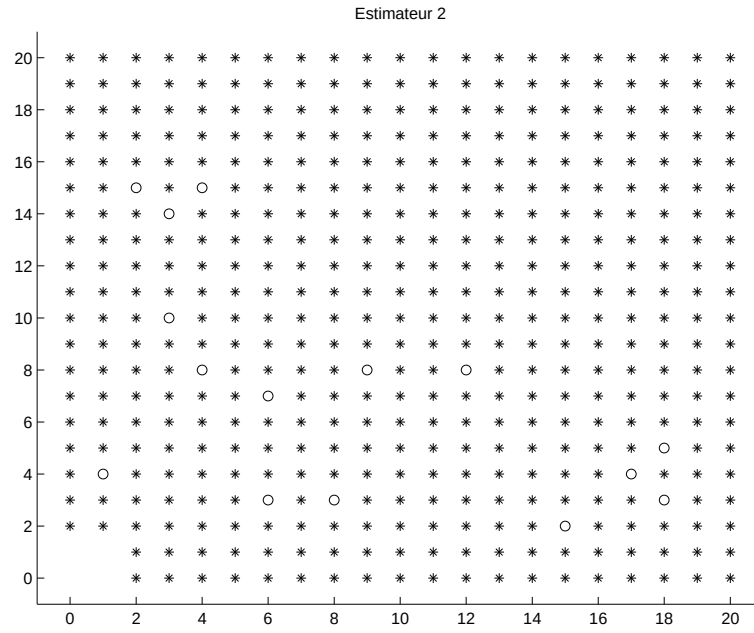
Pour la seconde procédure, les résultats sont donnés par les figures FIG. 4.11, FIG. 4.13, FIG. 4.12 et FIG. 4.14. Leur interprétation est analogue à celle donnée ci-dessus. On peut observer que les deux procédures d'identification conduisent à la même conclusion.

Nous avons aussi appliqué les deux procédures d'identification au modèle **1C**, qui est un champ $MA((1, 1))$. Les résultats obtenus sur les simulations effectuées (voir Annexe B figures FIG. B.5, FIG. B.7, FIG. B.9 et FIG. B.11 pour la première procédure et figures FIG. B.6, FIG. B.8, FIG. B.10 et FIG. B.12 pour la seconde procédure) confirment que les deux procédures conduisent à des conclusions identiques et sont des outils pertinents pour déterminer l'ordre de modèles MA spatiaux.

FIG. 4.8 – Procédure 1 - Test $q = (1, 0)$ FIG. 4.9 – Procédure 1 - Test $q = (0, 1)$

FIG. 4.10 – Procédure 1 - Test $q = (1, 1)$ FIG. 4.11 – Procédure 2 - Test $q = (0, 0)$

FIG. 4.12 – Procédure 2 - Test $q = (1, 0)$ FIG. 4.13 – Procédure 2 - Test $q = (0, 1)$

FIG. 4.14 – Procédure 2 - Test $q = (1, 1)$

4.4 Identification de modèles $AR(p)$ spatiaux

Lorsque l'ordre p d'un champ $AR(p)$ est connu, on peut employer le Théorème 3.2.1 de la Section 3.2 pour estimer ses paramètres. En ce qui concerne l'identification de l'ordre p du modèle, il est possible d'utiliser la méthode de Tjøstheim (1983) (voir [Tjø83]) fondée sur les critères d'information (AIC, BIC) pour la sélection de modèles, méthode rappelée dans la Section 3.2 au paragraphe 3.2.3. Nous donnons ici une autre méthode d'identification fondée sur une version spatiale de la fonction d'autocorrélation partielle empirique usuelle. Elle est donc analogue à la procédure d'identification de modèles AR temporels.

4.4.1 Résultats théoriques

Dans cette partie, nous utilisons les mêmes notations que dans la Section 3.2 et considérons un champ $AR(p)$ causal $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ de paramètre $p \neq \mathbf{0}$ inconnu et de fonction de covariance γ , vérifiant

$$X_t - \sum_{j \in S(\mathbf{0}, p]} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t, \quad (4.12)$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une différence de martingale quadrantale c'est-à-dire vérifiant la condition (2.3).

De la même manière que dans la Section 3.5 du Chapitre 3, introduisons pour tout $\lambda \in S(\mathbf{0}, \infty]$, le vecteur de coefficients $\phi_\lambda = (\phi_{\lambda, j})_{j \in S(\mathbf{0}, \lambda]}$ solution, lorsqu'elle

existe, des équations de Yule-Walker,

$$\mathbb{E}(Y_{\lambda,t}X_{t-j}) = 0 \quad \forall j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle, \quad (4.13)$$

où $Y_{\lambda,j} = X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle} \phi_{\lambda,j} X_{t-j}$.

En ordonnant les termes de $S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$ par l'ordre lexicographique (1.2), ces équations se résument par l'équation matricielle suivante

$$\Gamma_\lambda \phi_\lambda = \gamma_\lambda \quad (4.14)$$

avec pour $i, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\Gamma_\lambda(j, i) = \gamma(j - i),$$

et

$$\gamma_\lambda(j) = \gamma(j).$$

Enfin, nous considérons pour une observation $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]\}$, l'estimateur $\hat{\phi}_\lambda$ de ϕ_λ solution, lorsque elle existe, de l'équation matricielle suivante

$$\hat{\Gamma}_\lambda \hat{\phi}_\lambda = \hat{\gamma}_\lambda, \quad (4.15)$$

avec pour $i, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\hat{\Gamma}_\lambda(j, i) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - \lambda \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-i} X_{t-j}$$

et

$$\hat{\gamma}_\lambda(j) = \frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - \lambda \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_t X_{t-j}.$$

Nous étudions la consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur afin d'obtenir une procédure d'identification.

Proposition 4.4.1. *Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ $AR(p)$ causal vérifiant (4.12) où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est une différence de martingale quadrantale telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}(\epsilon_t^4) < \infty$ et vérifie pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2 \mid \bigvee_{i=1}^d \mathcal{F}^i(t_i - 1)) = \sigma^2 \quad p.s.$$

alors, pour tout $i, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\hat{\Gamma}_\lambda(j, i) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Gamma_\lambda(j, i)$$

et

$$\hat{\gamma}_\lambda(j) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \gamma_\lambda(j).$$

PREUVE. La démonstration se fait en employant exactement les mêmes techniques de martingales utilisées dans la Section 3.4 pour la démonstration de la non consistance de l'estimateur des moindres carrés dans un modèle ARMA(p, q), $p \neq \mathbf{0}$. $\square$

Des équations (4.14) et (4.15) on déduit le résultat de consistance suivant.

Corollaire 4.4.2. *Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ vérifie les hypothèses de la proposition précédente et si de plus Γ_λ est inversible pour un certain $\lambda \in S\langle \mathbf{0}, \infty \rangle$, alors*

$$\hat{\phi}_\lambda \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \phi_\lambda.$$

Étudions maintenant la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\phi}_\lambda$. D'après la Proposition 4.4.1,

$$\hat{\Gamma}_\lambda \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Gamma_\lambda.$$

Donc, dans l'hypothèse où Γ_λ est inversible, l'étude de la convergence en loi de $\hat{\phi}_\lambda$ peut se ramener à celle du vecteur $S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$ -indexé $\hat{\Gamma}_\lambda(\hat{\phi}_\lambda - \phi_\lambda)$ dont la j ième composante est donnée par

$$\frac{1}{N^d} \sum_{\substack{t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}] \\ t - \lambda \in S[\mathbf{1}, \mathbf{N}]}} X_{t-j} Y_{\lambda, t}. \quad (4.16)$$

Le lemme suivant montre que les quantités définies par la relation (4.16) sont du même type que ceux considérés par Tjøstheim (1983), qui vérifient la relation (3.11).

Lemme 4.4.3. *Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ AR(p) causal vérifiant la relation (4.12) pour $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ une différence de martingales quadrantes, alors, pour tout $\lambda \succeq p$,*

$$Y_{\lambda, t} = \epsilon_t \text{ p.s.}$$

PREUVE. Dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, définissons pour tout $t \in \mathbb{Z}^d$, l'ensemble $H_{\lambda, t}$ comme l'adhérence de $CL\{X_{t-j}, j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle\}$, où $CL\{\cdot\}$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{\cdot\}$. Par définition de $Y_{\lambda, t}$,

$$Y_{\lambda, t} = X_t - P_{H_{\lambda, t}} X_t,$$

où $P_{H_{\lambda, t}} X_t$ est la projection dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de X_t sur $H_{\lambda, t}$. Démontrons alors que

$$P_{H_{\lambda, t}} X_t = \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j}.$$

Puisque $\lambda \succeq p$, on en déduit que $S\langle \mathbf{0}, p \rangle \subseteq S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$ et donc que

$$\sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j} \in H_{\lambda, t}.$$

De plus pour tout $i \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\mathbb{E}(X_{t-i}(X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j})) = \mathbb{E}(X_{t-i} \epsilon_t)$$

car $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ vérifie (4.12). Puisque $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est causal, pour tout $i \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\mathbb{E}(X_{t-i}(X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j})) = \sum_{k \in S[\mathbf{0}, \infty]} \psi_k \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t-i-k}).$$

Or, l'hypothèse de différence de martingale implique que pour tout $i \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$ et tout $k \in S[\mathbf{0}, \infty]$, $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t-i-k}) = 0$. Par suite, pour tout $i \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$,

$$\mathbb{E}(X_{t-i}(X_t - \sum_{j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle} \phi_j X_{t-j})) = 0. \quad \square$$

Remarque 4.4.4. D'après l'unicité de la projection $P_{H_{\lambda,t}} X_t$, la démonstration précédente permet d'en déduire que pour tout $j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$,

$$\phi_{\lambda,j} = \phi_j$$

et que pour tout $j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle \setminus S\langle \mathbf{0}, p \rangle$,

$$\phi_{\lambda,j} = 0.$$

Théorème 4.4.5. *Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ $AR(p)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3.2.2, où p est remplacé par λ , avec $\lambda \succeq p$ et tel que Γ_λ est inversible, alors,*

$$N^{d/2}(\hat{\phi}_\lambda - \phi_\lambda) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma_\lambda^{-1}).$$

PREUVE. Pour tout $j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle$, le terme défini par (4.16) est exactement du même type que ceux définis par (3.11) étudiés lors de la démonstration du Théorème 3.2.2. En conséquence, la suite de la démonstration se poursuit exactement comme celle du Théorème 3.2.2. $\square$

4.4.2 Procédure d'identification

La Remarque 4.4.4, combinée au Théorème 4.4.5 permet d'obtenir pour $k \succeq p$, $k \neq p$, que

$$N^{d/2} \hat{\phi}_{k,k} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 w_k),$$

où w_k est le terme d'indice (k, k) de la matrice Γ_k^{-1} .

En dimension $d = 1$, on montre par des techniques de calcul matriciel relativement élémentaires que la variance asymptotique $\sigma^2 w_k$ est égale à 1.

Il semble naturel de s'attendre au même résultat en dimension $d \geq 2$. Cependant, la multiplication du nombre de termes et d'indices entrant en jeu complexifie considérablement les calculs et la démonstration de ce résultat ne semble dès lors pas complètement évidente. D'ailleurs, Tjøstheim (1983) évite le calcul de $\sigma^2 w_k$ et propose dans le cas de variables indépendantes et identiquement distribuées une méthode d'identification basée sur la minimisation d'un critère d'information (3.14) utilisé pour la sélection de modèles.

Néanmoins, les résultats de simulation que nous avons obtenus sur plusieurs champs AR spatiaux semblent confirmer numériquement la propriété $\sigma^2 w_k = 1$ pour $k \succeq p$ et $k \neq p$. En effet, quel que soit l'ordre total utilisé pour ordonner les termes de la matrice Γ_k , les estimations obtenues pour $\sigma^2 w_k$ à partir des simulations, sont toujours proches de 1.

Si l'on suppose que $\sigma^2 w_k = 1$, alors pour $k \succeq p, k \neq p$

$$N^{d/2} \hat{\phi}_{k,k} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

et l'on peut tester $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$ de la manière suivante. Sous H_0 , $\phi_{k,k} = 0$ pour tout $k \succeq p_0, k \neq p_0$. On se donne alors une constante $K \in \mathbb{N}^*$ grande, un risque $\alpha = 5\%$ et on décide d'accepter H_0 si

$$\hat{\phi}_{k,k} \in \left[-u_{\alpha/2} \frac{1}{N^{d/2}}, u_{\alpha/2} \frac{1}{N^{d/2}} \right] \quad (4.17)$$

pour tout $k \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K}] \setminus S[\mathbf{0}, p_0]$, où $u_{\alpha/2} = 1.96$ est la quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une loi normale centrée réduite.

Remarque 4.4.6. La procédure d'identification ci-dessus est tout à fait analogue à celle pour des processus AR temporels : Plus précisément, contrairement au cas MA, les bornes des intervalles ci-dessus ne dépendent pas de p_0 . De ce fait, le test est le même pour toutes les valeurs de p_0 testées et un seul graphique est alors nécessaire.

Nous avons appliqué la procédure d'identification décrite ci-dessus au modèle **3A** qui est le champ AR((1.1)) défini par

$$X_t - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t_1, t_2-1)} = \epsilon_t,$$

avec $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ une famille de variables aléatoires i.i.d de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. A partir d'une simulation $\{X_t, t \in S[\mathbf{0}, \mathbf{500}]\}$, nous avons obtenus les valeurs $\hat{\phi}_{k,k}$, pour $k \in S[\mathbf{0}, \mathbf{20}]$ et construit un maillage sur $S[\mathbf{0}, \mathbf{20}]$ où, au point k apparaît une * si la relation (4.17) est vérifiée et un o sinon. Cette procédure est effectuée grâce au programme MATLAB décrit à la page 130 de l'Annexe A. Le graphique obtenu est celui de la figure FIG. 4.15. L'examen de ce graphique permet globalement de retenir l'ordre $p = (1, 1)$, si on se limite à des faibles valeurs de l'ordre p , suivant le principe de parcimonie.

L'estimation des moindres carrés $\hat{\phi}_p$, calculée sur la même simulation a pour valeurs : $(0.7018, -0.5603, 0.8000)$. Cette estimation est calculée par la fonction MATLAB page 132 de l'Annexe A. Elle donne une idée sur la bonne précision des estimateurs $\hat{\phi}_{k,k}$, $k \succeq p$.

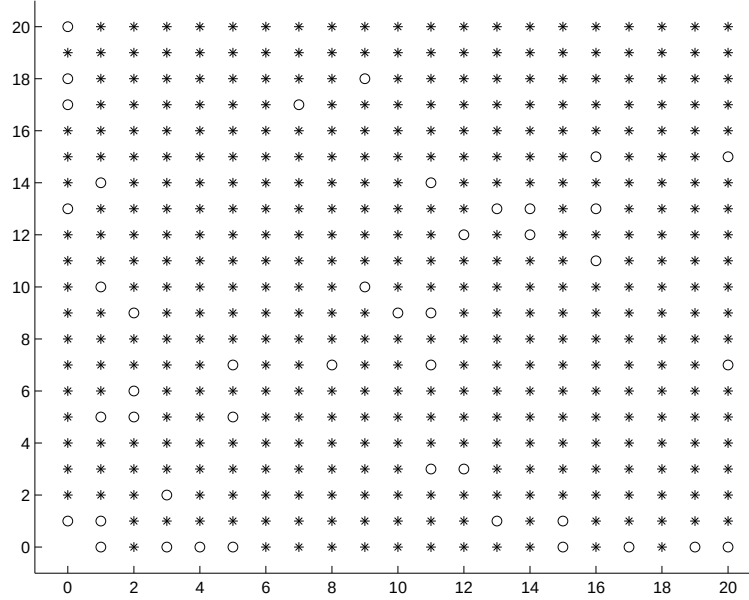


FIG. 4.15 – Identification d'un AR((1, 1))

4.5 Identification de modèles ARMA(p, q) spatiaux

Dans cette section, nous appliquons les résultats obtenus au Chapitre 3 à l'identification de modèles ARMA(p, q) spatiaux. La procédure d'identification, que nous avons choisie, est basée sur les estimateurs $(\hat{\phi}_{\lambda, \lambda}^{(\nu)})$, qui correspondent à une version spatiale de la fonction d'autocorrélation partielle généralisée empirique de séries temporelles (voir [WG81], [Cho91], [Cho92]). Elle est une extension de notre procédure d'identification précédente de modèles AR spatiaux et ne peut donc s'appliquer qu'à des champs ARMA(p, q), avec $p \neq 0$.

Nous appliquons, dans cette section, notre procédure d'identification au modèle **3C**, qui est considéré dans [ITV04].

Sous les hypothèses faites sur les polynômes autorégressifs et moyenne mobile faites à la Section 4.2, comme dans le cas de la dimension $d = 1$ (voir Woodward et Gray (1981) [WG81]), on peut démontrer les propriétés suivantes :

$$\phi_{p,p}^{(\nu)} = \phi_p \text{ pour } \nu \succeq p$$

et

$$\phi_{\lambda, \lambda}^{(q)} = 0 \text{ pour } \lambda \succeq p, \lambda \neq p.$$

De plus, d'après les Théorèmes 3.5.8 et 3.5.17, on a :

$$\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \phi_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$$

et

$$\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)} \text{ est } \mathcal{AN}(\phi_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}, \frac{(\Sigma_{\lambda}^{(\nu)} V \Sigma_{\lambda}^{(\nu)'})_{\lambda,\lambda}}{N^d}).$$

Nous avons appliqué ces différentes propriétés à l'identification du modèle **3C** qui est le champ ARMA((1, 1), (1, 1)) :

$$\begin{aligned} X_t - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t_1, t_2-1)} \\ = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 X_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t_1, t_2-1)}, \end{aligned}$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normales centrée réduite. Nous avons simulé 500 répliques du champ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ sur le rectangle $S[\mathbf{1}, \mathbf{500}]$ et calculé la moyenne et l'écart-type empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour différentes valeurs de λ et ν par le programme MATLAB décrit à la page 133 de l'Annexe A. Ces résultats sont résumés dans le tableau TAB. 4.5, où la valeur entre parenthèse est l'écart-type et le symbole $-$ représente une valeur numérique supérieure à 10.

$\lambda \backslash \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(1,0)	0.8459 (0.0020)	0.7000 (0.0043)	0.7000 (0.0049)	0.8438 (0.0023)	0.7000 (0.0061)	0.6999 (0.0069)	0.6998 (0.0086)	0.6999 (0.0061)	0.8437 (0.0031)
(1,1)	-0.7503 (0.0013)	-0.6101 (0.0031)	-0.5601 (0.0069)	-0.6596 (0.0039)	-0.5997 (1.7355)	-0.2984 (6.0822)	-1.1390 (8.0254)	-0.6380 (2.6394)	-0.5413 (-)
(0,1)	0.8838 (0.0014)	0.8816 (0.0019)	0.7998 (0.0032)	0.7999 (0.0027)	0.8816 (0.0029)	0.7996 (0.0047)	0.7996 (0.0057)	0.7998 (0.0039)	0.7999 (0.0033)
(2,0)	-0.4338 (0.0037)	0.0000 (0.0121)	0.0001 (0.0138)	-0.4264 (0.0042)	-0.4450 (5.4970)	-0.0853 (-)	-0.3282 (6.4597)	0.0001 (0.0172)	-0.4264 (0.0054)
(2,1)	0.3932 (0.0019)	0.0000 (0.0059)	-0.0005 (0.0181)	0.2864 (0.0059)	0.5477 (3.6307)	0.5395 (7.7085)	1.5315 (-)	0.5473 (-)	0.1703 (8.9229)
(2,2)	-0.1815 (0.0022)	-0.0001 (0.0051)	-0.0004 (0.0181)	-0.0008 (0.0066)	-0.0514 (4.2746)	-0.0619 (1.3050)	-0.4253 (-)	-0.0007 (0.1578)	0.1915 (7.6861)
(1,2)	0.2977 (0.0021)	0.1985 (0.0048)	-0.0023 (0.0185)	-0.0003 (0.0071)	0.4390 (-)	3.3713 (-)	0.5123 (8.9413)	0.2076 (5.1532)	2.0309 (-)
(0,2)	-0.3391 (0.0030)	-0.3295 (0.0037)	0.0005 (0.0134)	0.0005 (0.0110)	-0.3296 (0.0056)	0.0001 (0.0195)	-0.4246 (-)	-0.5123 (-)	0.2107 (-)

TAB. 4.4 – Moyennes et écarts-types empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour le modèle 3C
Estimation : (0.7038, -0.5628, 0.7989)

Si l'on applique les propriétés précédentes à ce modèle, on obtient que

- (i) $\hat{\phi}_{(1,1),(1,1)}^{(\nu)} \sim \hat{\phi}$ pour $\nu \succeq q = (1, 1)$,
- (ii) $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{((1,1))} \sim 0$ pour $\lambda \succeq p = (1, 1)$, $\lambda \neq p$.

Les résultats de notre étude en simulation du modèle **3C**, sont résumés dans le tableau TAB. 4.5. Ils confirment la pertinence de notre procédure d'identification. En effet, si l'on observe les valeurs de l'écart-type de l'estimateur $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$, on remarque

tout d'abord que la propriété (i) semble vérifiée à l'intersection de la troisième ligne avec la quatrième colonne puis que la propriété (ii) qui se repère facilement à l'intersection de la quatrième colonne avec les sixième, septième et huitième lignes, est clairement satisfaite.

L'estimation $\hat{\phi}_p^{(q)}$ calculée par la fonction MATLAB page 132 de l'Annexe A, pour une réalisation $\{X_t, t \in S[\mathbf{1}, \mathbf{500}]\}$ a pour valeurs $(0.7038, -0.5628, 0.7989)$. Elle donne une idée de la bonne précision statistique des estimateurs $\hat{\phi}_{\lambda\lambda}^{(\nu)}$.

Pour la clarté du chapitre, les résultats de simulation obtenus pour les modèles **3A**, **3B**, **2C**, **4C** et **5C** sont reportés dans l'Annexe B.

Bibliographie

- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [Cho91] B. S. Choi. On the asymptotic distribution of the generalized partial autocorrelation function in autoregressive moving-average processes. *J. Time Ser. Anal.*, 12(3) :193–205, 1991.
- [Cho92] B. S. Choi. *ARMA model identification*. Springer Series in Statistics : Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Cho97] B. S. Choi. A recursive algorithm for solving the spatial Yule-Walker equations of causal spatial AR models. *Statist. Probab. Lett.*, 33(3) :241–251, 1997.
- [Cho00] B. S. Choi. On the asymptotic distributions of mean, autocovariance, autocorrelation, crosscovariance and impulse response estimators of a stationary multidimensional random field. *Comm. Statist. Theory Methods*, 29(8) :1703–1724, 2000.
- [HA92] D. Huang and V. V. Anh. Estimation of spatial ARMA models. *Austral. J. Statist.*, 34(3) :513–530, 1992.
- [ITV04] A. Illig and B. Truong-Van. Asymptotic results for spatial ARMA models. <http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Illig/>, 2004.
- [Tjø83] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. II. Some further results on unilateral lattice processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 15(3) :562–584, 1983.
- [WG81] W. A. Woodward and H. L. Gray. On the relationship between the S array and the Box-Jenkins method of ARMA model identification. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 76(375) :579–587, 1981.

Annexe A

Programmes

Dans cette annexe, nous donnons les programmes et fonctions MATLAB suivants :

- La fonction *simulate* permettant de simuler un champ ARMA quadrantal de paramètres donnés.
- Un programme donnant les cartes et cartes seuillées pour un champ ARMA donné.
- La fonction *estimate* calculant l'estimateur introduit au Chapitre 3 pour des valeurs ν et λ données. Cette fonction fait appel aux deux fonctions *Gam_mat* et *Gam_vect* :
 - La fonction *Gam_mat* calcule la matrice des covariances $\Gamma_{\lambda}^{(\nu)}$.
 - La fonction *Gam_vect* calcule le vecteur $\gamma_{\lambda}^{(\nu)}$.
- Un programme mettant en oeuvre les deux procédures d'identification d'un modèle MA(q) spatial décrites au Chapitre 4 et donnant pour les valeurs de q_0 testée les représentations graphiques correspondantes. Ce programme utilise les fonctions *Gamma2* et *Gamhat* :
 - La fonction *Gamma2* calcule les deux covariances empiriques $\hat{\gamma}(k)$ et $\tilde{\gamma}(k)$ en un point de k donné de coordonnées positives.
 - La fonction *Gamhat* calcule la covariance empirique $\hat{\gamma}(k)$ en un point k donné de coordonnées non nécessairement positives.
- Un programme mettant en oeuvre la procédure d'identification d'un modèle AR spatial donné décrite au Chapitre 4 et donnant la représentation graphique des résultats de la procédure. Le modèle identifié, les paramètres autorégressifs sont estimés au moyen de la fonction *esti*.
- La fonction *esti* donnant une estimation des paramètres autorégressifs d'un modèle ARMA(p, q) de paramètres p et q connus.
- Un programme calculant la moyenne et l'écart-type empirique de l'estimateur $\hat{\phi}_{\lambda}^{(\nu)}$ introduit au Chapitre 3 pour différentes valeurs de λ et ν .

Nous n'avons pas inclus, dans cette annexe, les fonctions élémentaires suivantes :

- Les fonctions *phichoice* et *thetachoice* utilisées dans l'initialisation des paramètres pour différents programmes qui permettent de choisir respectivement les coefficients autorégressifs et les coefficients moyenne mobile du modèle.
- La fonction *indice* qui calcule les coordonnées d'un point du réseau en fonction de sa numérotation.

```

%*****%
% Fonction simulant un champ ARMA de paramètres donnés %
%*****%

function X=simulate(nx,ny,phi,theta,sig)

global px py qx qy

X=zeros(nx,ny);
E=zeros(nx,ny);

for j=max(px,qx)+1:nx
    for k=max(py,qy)+1:ny
        E(j,k)=sig*randn(1);
        for kk=1:py+1
            for jj=1:px+1
                X(j,k)=X(j,k)+phi(jj,kk)*X(j-jj+1,k-kk+1);
            end
        end
        for kk=1:qy+1
            for jj=1:qx+1
                X(j,k)=X(j,k)+theta(jj,kk)*E(j-jj+1,k-kk+1);
            end
        end
        X(j,k)=X(j,k)+E(j,k);
    end
end
end

```

```

%*****%
% Représentation graphique d'un champ ARMA de paramètres donnés %
%*****%

clear;
clear all;
clear figure;

global px py qx qy

%-----
% Initialisation
%-----
nx=250;
ny=250;

px=input('px= ');
py=input('py= ');
phi=phichoice;

qx=input('qx= ');
qy=input('qy= ');
theta=thetachoice;

sig=1;

%-----
% Simulation
%-----
X=simulate(nx,ny,phi,theta,sig);
Y=X(200:nx,200:ny);

%-----
% Représentation graphique
%-----
figure(1)
mesh(Y);

figure(2);
contourf(Y,[-10:1:10]);

```

```

%*****%
% Fonction calculant l'estimateur introduit au chapitre 3 %
%*****%

function hat=estimate(lax,lay,nux,nuy,Y)

global Gamma gam

[mx,my]=size(Y);

taux=lax+nux;
tauy=lay+nuy;

c=(lax+1)*(lay+1)-1;

Gamma=Gam_mat(lax,lay,nux,nuy,Y);
gam=Gam_vect(lax,lay,nux,nuy,Y);

Vhat=Gamma^(-1)*gam;

hat=Vhat(c);

```

```

%*****%
% Fonction calculant la matrice Gamma intervenant dans %
% la définition de l'estimateur introduit au Chapitre 3 %
%*****%

function Gamma=Gam_mat(lax,lay,nux,nuy,Y)

[mx,my]=size(Y);

taux=lax+nux;
tauy=lay+nuy;

c=(lax+1)*(lay+1)-1;

Gamma=zeros(c,c);

k=0;
for i=0:lax
    if i==0
        for j=1:lay
            k=k+1;
            l=0;
            U=Y(1+taux-i:mx-i,1+tauy-j:my-j);
            for ii=0:lax
                if ii==0
                    for jj=1:lay
                        l=l+1;
                        V=Y(1+lax-ii:mx-nux-ii,1+lay-jj:my-nuy-jj);
                        Gamma(l,k)=sum(sum(U.*V))/(mx*my);
                    end
                end
            else
                for jj=0:lay
                    l=l+1;
                    V=Y(1+lax-ii:mx-nux-ii,1+lay-jj:my-nuy-jj);
                    Gamma(l,k)=sum(sum(U.*V))/(mx*my);
                end
            end
        end
    end
end
else
    for j=0:lay
        k=k+1;
        l=0;
        U=Y(1+taux-i:mx-i,1+tauy-j:my-j);

```

```

        for ii=0:lax
            if ii==0
                for jj=1:lay
                    l=l+1;
                    V=Y(1+lax-ii:mx-nux-ii,1+lay-jj:my-nuy-jj);
                    Gamma(l,k)=sum(sum(U.*V))/(mx*my);
                end
            else
                for jj=0:lay
                    l=l+1;
                    V=Y(1+lax-ii:mx-nux-ii,1+lay-jj:my-nuy-jj);
                    Gamma(l,k)=sum(sum(U.*V))/(mx*my);
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

%*****%
% Fonction calculant le vecteur gamma intervenant dans %
% la définition de l'estimateur introduit au Chapitre 3 %
%*****%

function gam=Gam_vect(lax,lay,nux,nuy,Y)

[mx,my]=size(Y);

taux=lax+nux;
tauy=lay+nuy;

c=(lax+1)*(lay+1)-1;

gam=zeros(c,1);

Z=Y(1+taux:mx,1+tauy:my);
k=0;
for i=0:lax
    if i==0,
        for j=1:lay
            T=Y(1+lax-i:mx-nux-i,1+lay-j:my-nuy-j);
            k=k+1;
            gam(k)=sum(sum(Z.*T))/(mx*my);
        end
    else
        for j=0:lay
            T=Y(1+lax-i:mx-nux-i,1+lay-j:my-nuy-j);
            k=k+1;
            gam(k)=sum(sum(Z.*T))/(mx*my);
        end
    end
end
end

```

```

%*****%
% Sélection de l'ordre q dans un modèle MA %
%*****%

clear;
clear all;
clear figure;

global px py qx qy

%-----
% Initialisation
%-----
nx=600;
ny=600;

px=0;
py=0;
phi=zeros(px+1,py+1);

qx=input('qx= ');
qy=input('qy= ');
theta=thetachoice;

sig=1;

%-----
% Simulation
%-----
X=simulate(nx,ny,phi,theta,sig);
Y=X(101:nx,101:ny);
[mx,my]=size(Y);

%-----
% Calcul des estimateurs et représentation graphique
%-----
k=0;
a=20;
c=(a+1)*(a+1)-1;
hat1=zeros(c,c);
hat2=zeros(c,c);

moy=sum(sum(X))/(mx*my);

```



```

[gam01,gam02]=Gamma2(Y,0,0,moy);
for k=1:c
    [kx,ky]=indice(k);
    [gam1,gam2]=Gamma2(Y,kx,ky,moy);
    hat1(k)=gam1/gam01;
    hat2(k)=gam2/gam02;
end

cont=1;
while cont==1
    bool1=zeros(c,c);
    bool2=zeros(c,c);
    disp('Test: ');
    nux=input('nux= ');
    nuy=input('nuy= ');

    w=0;
    if nux~=0
        for kx=-nux:1:nux
            if nuy~=0
                for ky=-nuy:1:nuy
                    w=w+Gamhat(Y,kx,ky,moy);
                end
            else
                w=w+Gamhat(Y,kx,0,moy);
            end
        end
    else
        for ky=-nuy:1:nuy
            w=w+Gamhat(Y,0,ky,moy);
        end
    end
    w=w/gam01;

    figure;
    axis([-1 a+1 -1 a+1]);
    hold on;
    for k=1:c
        if abs(hat1(k))<(1.96*sqrt(w))/sqrt(mx*my)
            bool1(k)=1;
        end
        if bool1(k)==1
            [indx,indy]=indice(k);
            plot(indx,indy,'*');
        end
    end
end

```

```

        hold on;
    else
        [indx,indy]=indice(k);
        plot(indx,indy,'o');
        hold on;
    end
    hold on;
end
title('Estimateur 1');
hold off;

figure;
axis([-1 a+1 -1 a+1]);
hold on;
for k=1:c
    if abs(hat2(k))<(1.96*sqrt(w))/sqrt(mx*my)
        bool2(k)=1;
    end
    if bool2(k)==1
        [indx,indy]=indice(k);
        plot(indx,indy,'*');
        hold on;
    else
        [indx,indy]=indice(k);
        plot(indx,indy,'o');
        hold on;
    end
end
title('Estimateur 2');
hold off;
cont=input('continue (1 pour oui, 0 pour non)= ');
end

```

```

%*****%
% Fonction calculant les deux types d'estimateurs      %
% des covariances en un point de coordonnées positives %
%*****%

function [res1,res2]=Gamma2(Y,kx,ky,moy)

[mx,my]=size(Y);
    U=Y(1:mx-kx,1:my-ky)-moy*ones(1:mx-kx,1:my-ky);
    V=Y(1+kx:mx,1+ky:my)-moy*ones(1:mx-kx,1:my-ky);
    res2=sum(sum(U.*V))/(mx*my);
res1=sum(sum(U.*V))/((mx-kx)*(my-ky));

```

```

%*****%
% Fonction calculant le premier estimateur des covariances %
% en un point de coordonnées non nécessairement positives %
%*****%

function res=Gamhat(Y,kx,ky,moy)

[mx,my]=size(Y);
U=Y(max(1,1-kx):min(mx,mx-kx),max(1,1-ky):min(my,my-ky))
-moy*ones(mx-abs(kx),my-abs(ky));

V=Y(max(1,1-kx)+kx:min(mx,mx-kx)+kx,max(1,1-ky)+ky:min(my,my-ky)+ky)
-moy*ones(mx-abs(kx),my-abs(ky));

alph=sum(sum(U.*V));
res=alph/((mx-abs(kx))*(my-abs(ky)));

```

```

%*****%
% Sélection de l'ordre p dans un modèle AR %
%*****%

clear;
clear all;
clear figure;

global px py qx qy

%-----
% Initialisation
%-----
nx=600;
ny=600;

px=input('px= ');
py=input('qy= ');
phi=phichoice;

qx=0;
qy=0;
theta=zeros(qx+1,qy+1);

sig=sqrt(0.5);

%-----
% Simulation
%-----
X=simulate(nx,ny,phi,theta,sig);
Y=X(101:nx,101:ny);

%-----
% Calcul des estimateurs
%-----
k=0;
a=20;
c=(a+1)*(a+1)-1;
hat=zeros(c,c);
bool=zeros(c,c);
nux=0;
nuy=0;

for lax=1:a

```

```

    for lay=0:lax
        k=k+1;
        hat(k)=estimate(lax,lay,nux,nuy,Y);
    end
    for lay=lax-1:-1:0
        k=k+1;
        hat(k)=estimate(lay,lax,nux,nuy,Y);
    end
end

%-----
% Représentation graphique
%-----
figure(1);
axis([-1 a+1 -1 a+1]);
hold on;
for k=1:c
    if abs(hat(k))<1.96/500
        bool(k)=1;
    end
    if bool(k)==1
        [indx,indy]=indice(k);
        plot(indx,indy,'*');
        hold on;
    else
        [indx,indy]=indice(k);
        plot(indx,indy,'o');
        hold on;
    end
end
hold off;

%-----
% Estimation des paramètres autorégressifs
%-----
disp('Estimation : ');
esti(px,py,qx,qy,Y)
disp(' ');
disp('Coefficients exacts: ');
phi

```

```

%*****%
% Fonction calculant l'estimateur du vecteur des %
% coefficients autorégressifs introduit %
% au Chapitre 3 lorsque p et q sont connus %
%*****%

function Vhat=esti(lax,lay,nux,nuy,Y)

global Gamma gam

[mx,my]=size(Y);

taux=lax+lax;
tauy=nuy+nuy;

Gamma=Gam_mat(lax,lay,nux,nuy,Y);
gam=Gam_vect(lax,lay,nux,nuy,Y);
Vhat=Gamma^(-1)*gam;

```

```

%*****%
% Calcul de la moyenne et de l'écart-type empiriques %
% de l'estimateur du Chapitre 3 %
% pour plusieurs valeurs de lambda et nu %
%*****%

clear;
clear all;

global px py qx qy Gamma gam

%-----
% Initialisation
%-----
nx=600;
ny=600;
N=500; %Nombre de simulation pour le tableau moyenne

px=input('px= ');
py=input('py= ');
phi=phichoice;

qx=input('qx= ');
qy=input('qy= ');
theta=thetachoice;

sig=1;

a=15;
c1=(a+1)*(a+1)-1;
c2=(a+1)*(a+1);
hat=zeros(c1,c2,N);
hat_moy=zeros(c1,c2);
hat_std=zeros(c1,c2);
disp(' ');

%-----
% Calcul pour chaque trajectoire
%-----
for nb=1:N

    X=simulate(nx,ny,phi,theta,sig);
    Y=X(101:nx,101:ny);

```



```

k=0;
for lax=1:a
    for lay=0:lax
        k=k+1;
        l=0;
        for nux=0:a
            for nuy=0:nux
                l=l+1;
                hat(k,l,nb)=estimate(lax,lay,nux,nuy,Y);
            end
            if nux~=0
                for nuy=nux-1:-1:0
                    l=l+1;
                    hat(k,l,nb)=estimate(lax,lay,nuy,nux,Y);
                end
            end
        end
    end
    for lay=lax-1:-1:0
        k=k+1;
        l=0;
        for nux=0:a
            for nuy=0:nux
                l=l+1;
                hat(k,l,nb)=estimate(lay,lax,nux,nuy,Y);
            end
            if nux~=0
                for nuy=nux-1:-1:0
                    l=l+1;
                    hat(k,l,nb)=estimate(lay,lax,nuy,nux,Y);
                end
            end
        end
    end
end
end
end

%-----
% Affichage des résultats
%-----
for i=1:c1
    for j=1:c2
        hat_moy(i,j)=mean(hat(i,j,:));
        hat_std(i,j)=std(hat(i,j,:),1);
    end
end

```

```
        if hat_std(i,j)>10
            hat_std(i,j)=0;
        end
    end
end

disp('Tableau moyennes');
hat_moy
disp(' ');
disp('Tableau ecart-types associes');
hat_std
```


Annexe B

Représentations graphiques et résultats des simulations

Poly AR - Poly MA	A (0,0) 1	B (1,0) 1 + 0.2 z_1	C (1,1) 1 + 0.8 z_1 + 0.3 $z_1 z_2$ + 0.5 z_2
1 (0,0) 1		★ ♡	★ ♡
2 (1,0) 1 - 0.45 z_1	★	★	★ ●
3 (1,1) 1 - 0.7 z_1 + 0.56 $z_1 z_2$ - 0.8 z_2	★ ● ♠	★ ●	★ ●
4 (2,1) 1 - z_1 + 0.7 $z_1 z_2$ - 0.7 z_2 + 0.16 z_1^2 - 0.112 $z_1^2 z_2$	★	★	★ ●
5 (2,2) 1 - 1.3 z_1 + 0.455 $z_1 z_2$ - 0.35 z_2 + 0.4 z_1^2 - 0.14 $z_1^2 z_2$ - 0.228 $z_1^2 z_2^2$ + 0.741 $z_1 z_2^2$ - 0.57 z_2^2	★	★	★ ●

TAB. B.1 – Simulations (★ Representation graphique, ● Identification ARMA et estimation, ♡ Identification MA, ♠ Identification AR et estimation)

Modèles MA

1B : $X_t = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1, t_2)}$

- Représentations graphiques

1C : $X_t = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 \epsilon_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t_1, t_2-1)}$

- Représentations graphiques
- Procédures graphiques de détermination de l'ordre du modèle

Cartes seuillées : seuillage entre -10 et 10 avec un pas de 1

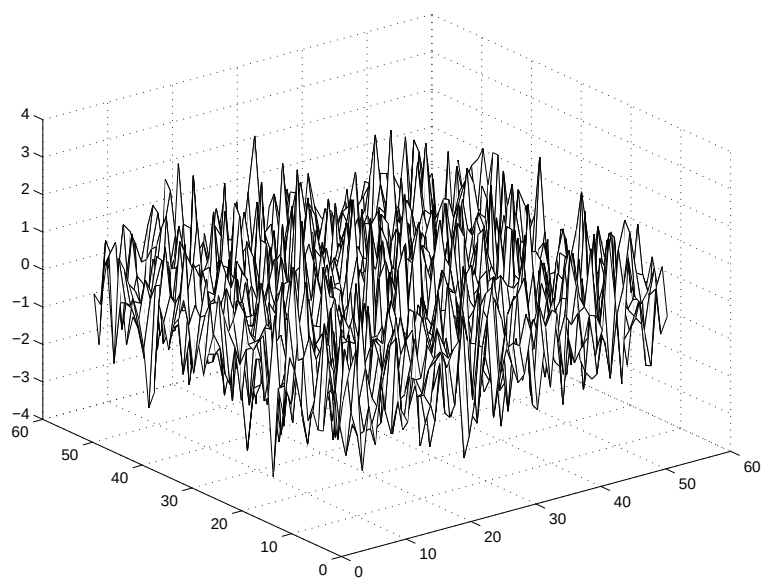


FIG. B.1 – Carte du modèle 1B

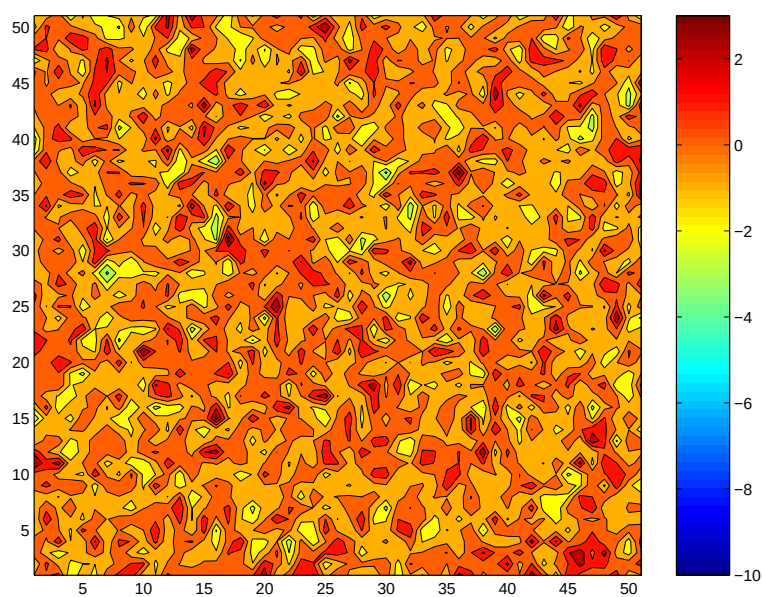


FIG. B.2 – Carte seuillée du modèle 1B

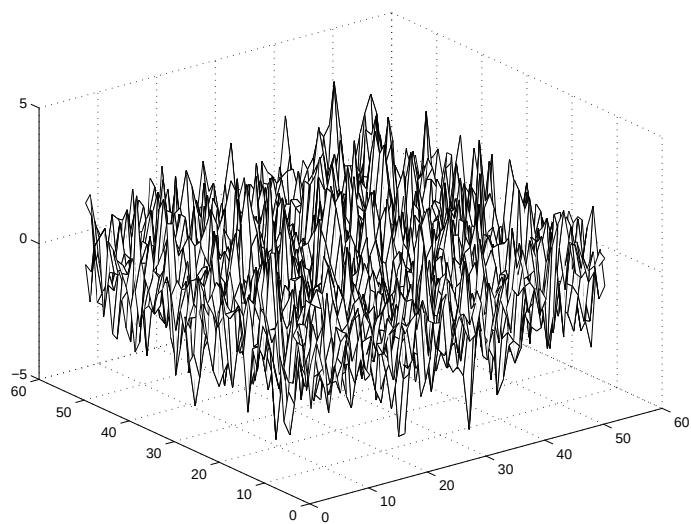


FIG. B.3 – Carte du modèle 1C

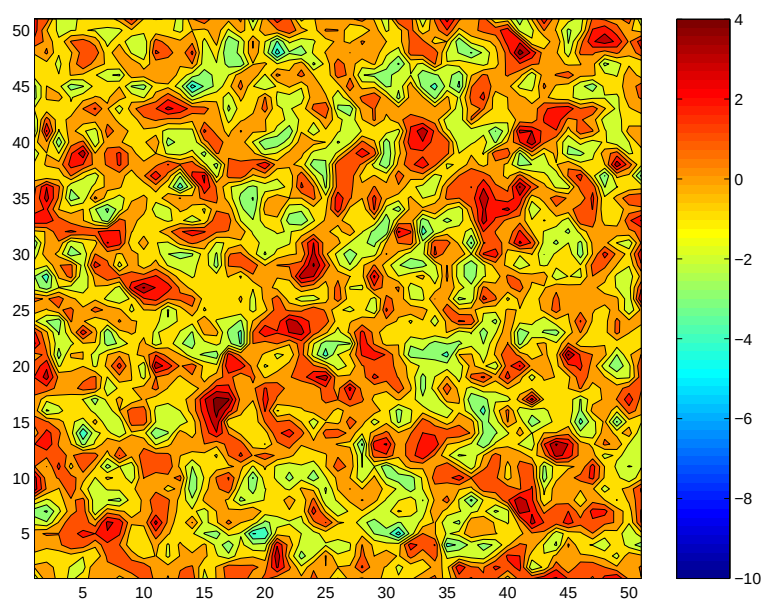
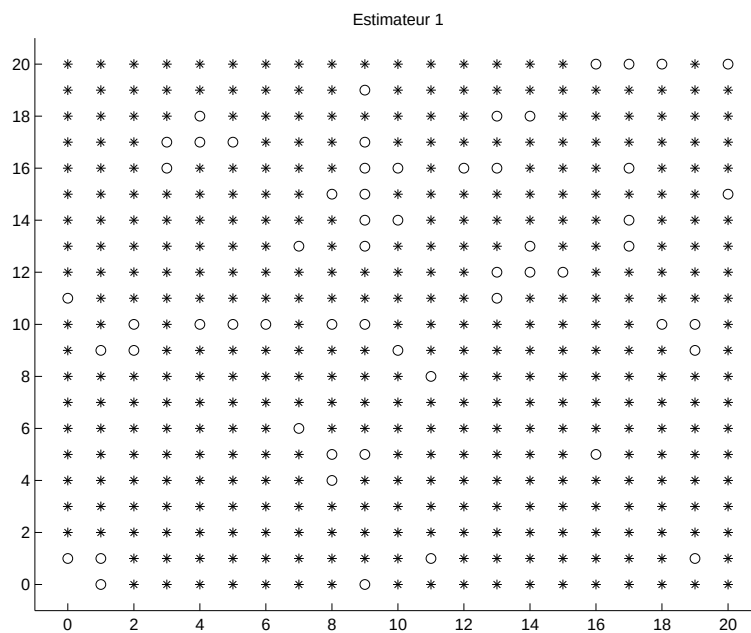
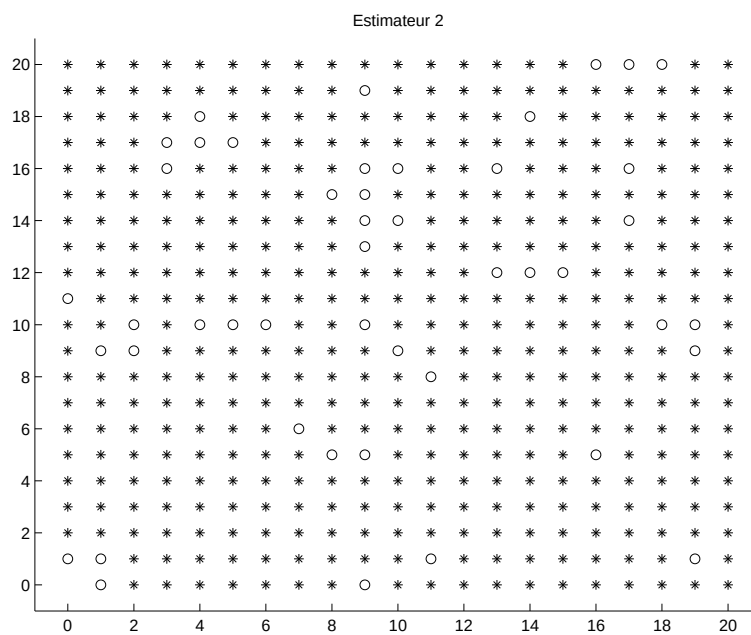
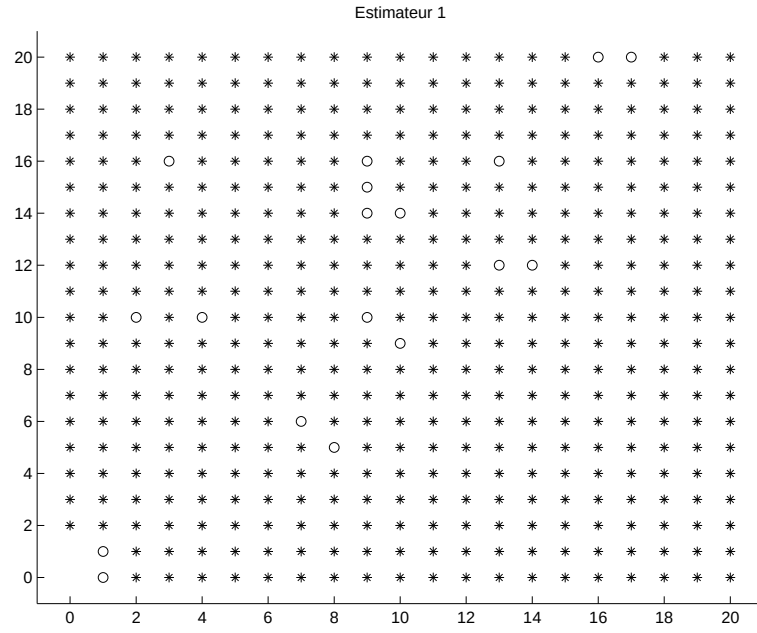
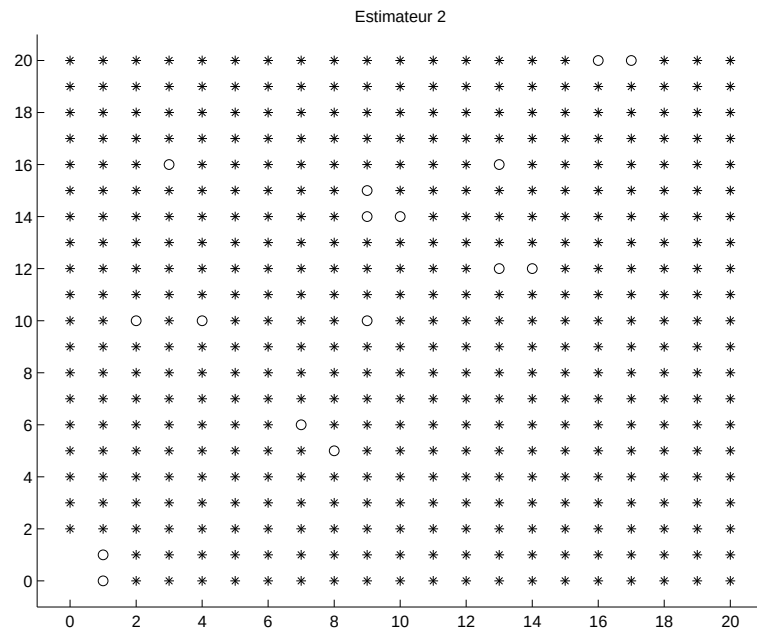
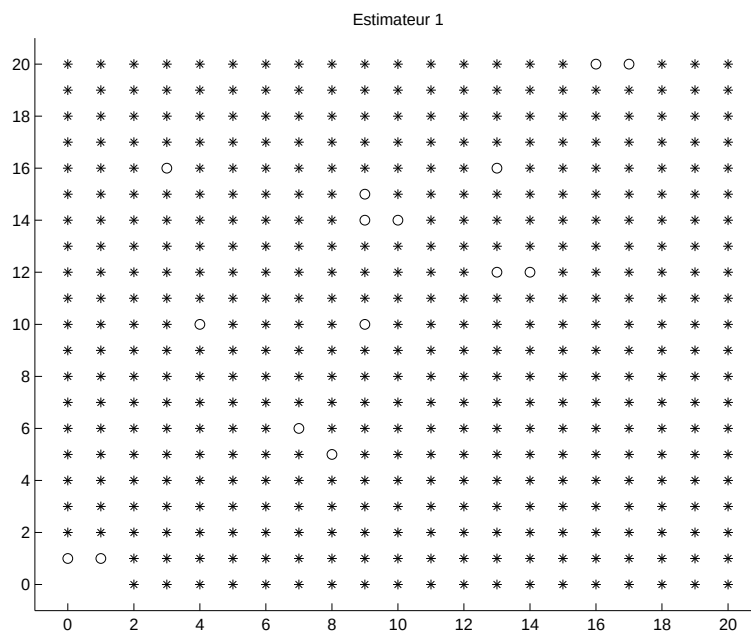
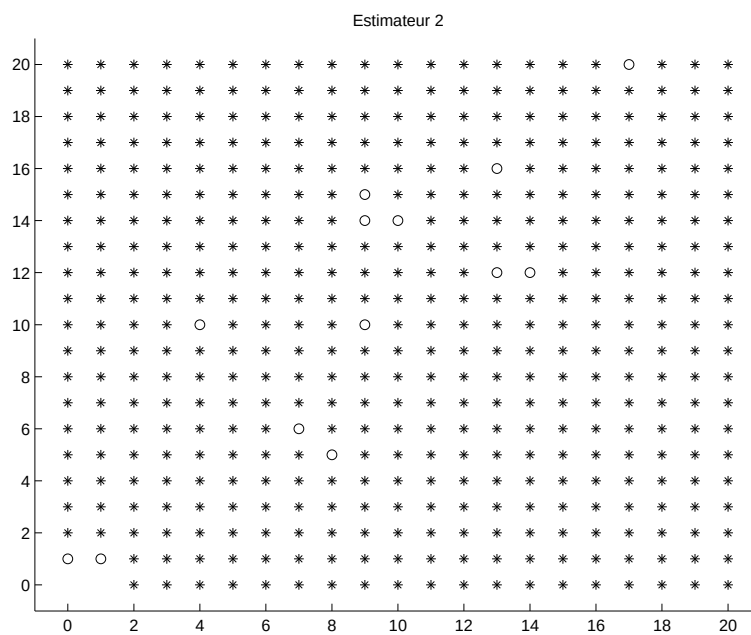
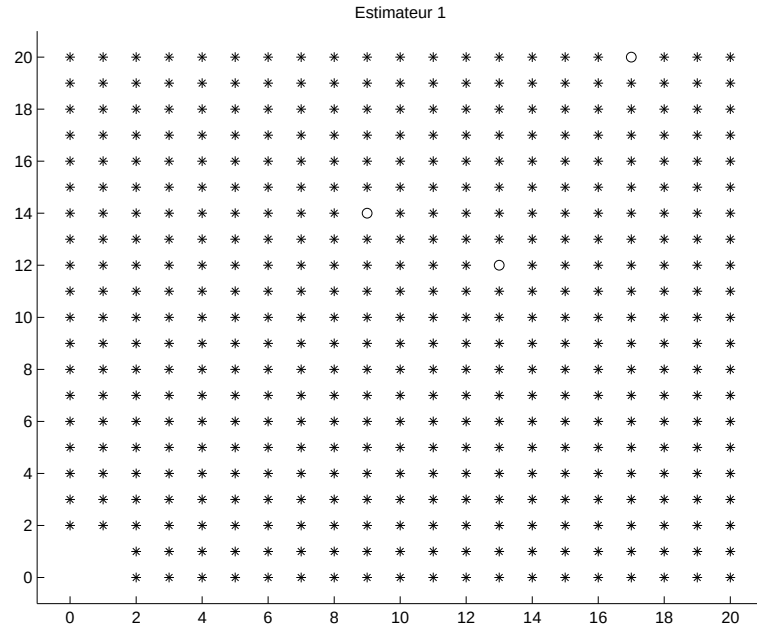
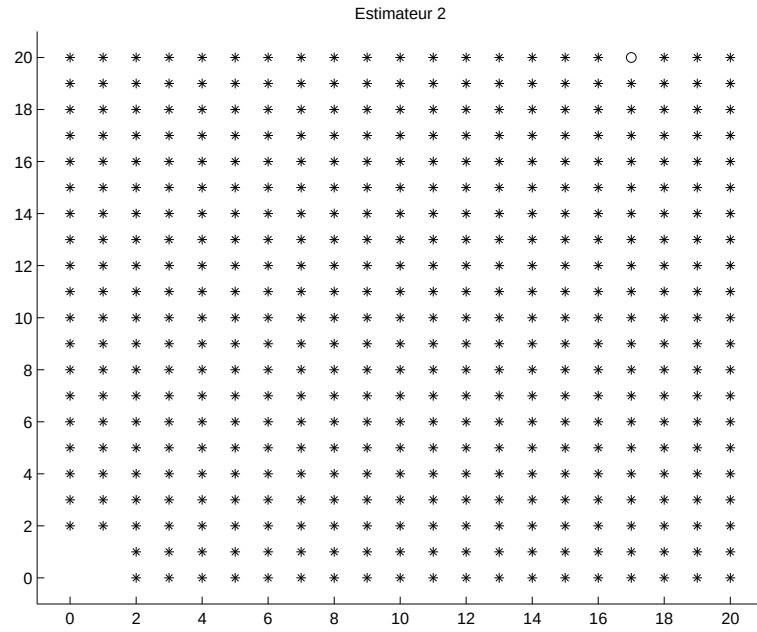


FIG. B.4 – Carte seuillée du modèle 1C

FIG. B.5 – Procédure 1 - Test $q = (0, 0)$ FIG. B.6 – Procédure 2 - Test $q = (0, 0)$

FIG. B.7 – Procédure 1 - Test $q = (0, 1)$ FIG. B.8 – Procédure 2 - Test $q = (0, 1)$

FIG. B.9 – Procédure 1 - Test $q = (1, 0)$ FIG. B.10 – Procédure 2 - Test $q = (1, 0)$

FIG. B.11 – Procédure 1 - Test $q = (1, 1)$ FIG. B.12 – Procédure 2 - Test $q = (1, 1)$

Modèles 2A, 2B, 2C

$$\mathbf{2A} : X_t - 0.45 X_{(t_1-1, t_2)} = \epsilon_t$$

- Représentations graphiques

$$\mathbf{2B} : X_t - 0.45 X_{(t_1-1, t_2)} = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1, t_2)}$$

- Représentations graphiques

$$\mathbf{2C} : X_t - 0.45 X_{(t_1-1, t_2)} = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 \epsilon_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t-1, t_2-1)}$$

- Représentations graphiques
- Tableau de l'identification ARMA

Cartes seuillées : seuillage entre -10 et 10 avec un pas de 1

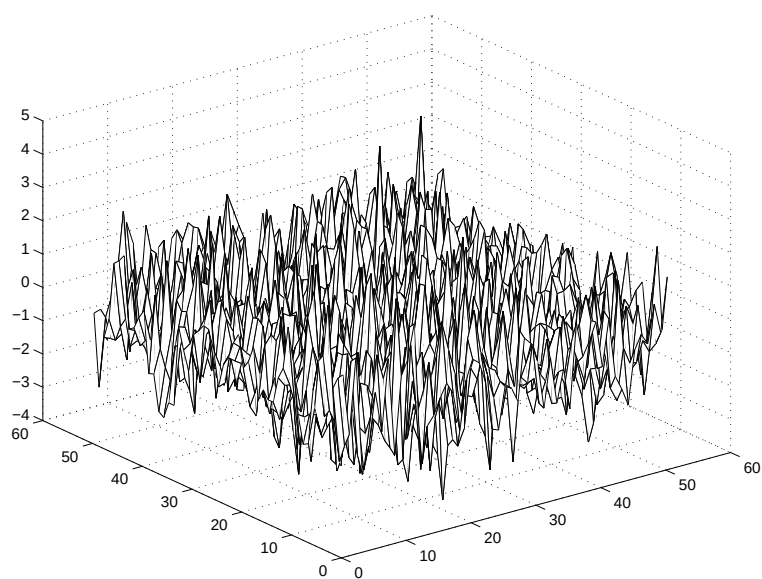


FIG. B.13 – Carte du modèle 2A

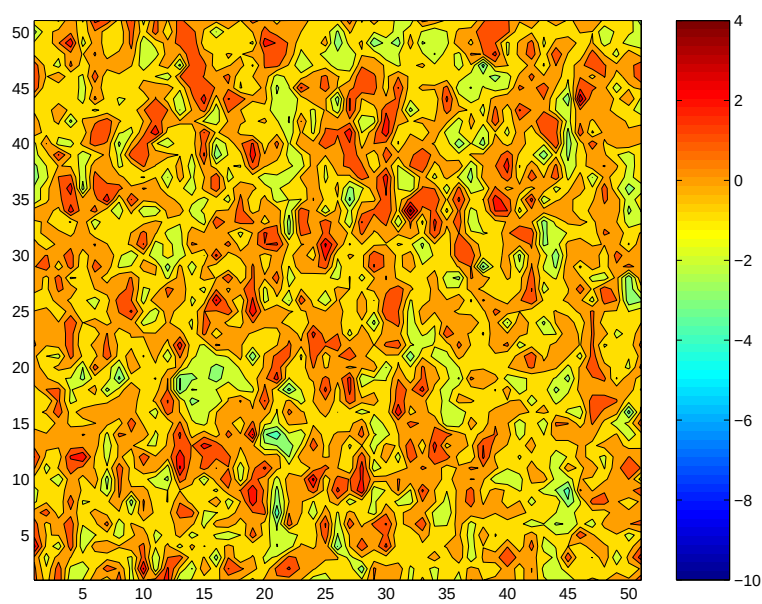


FIG. B.14 – Carte seuillée du modèle 2A

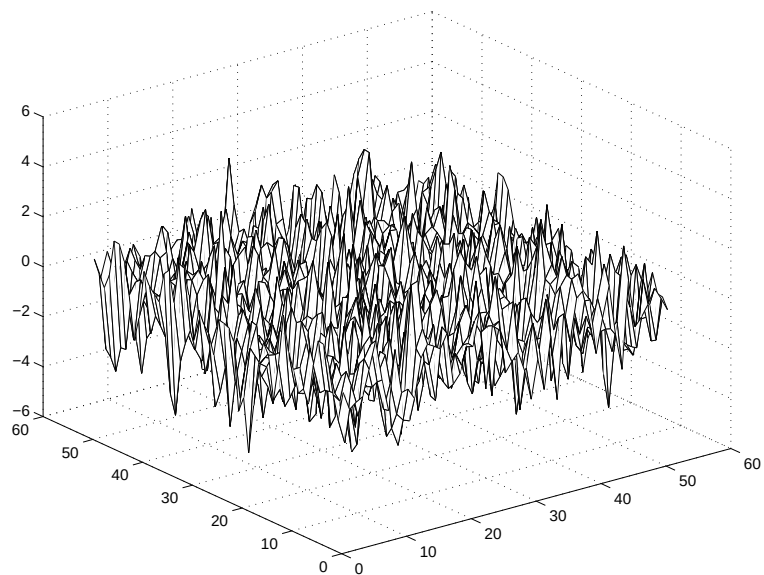


FIG. B.15 – Carte du modèle 2B

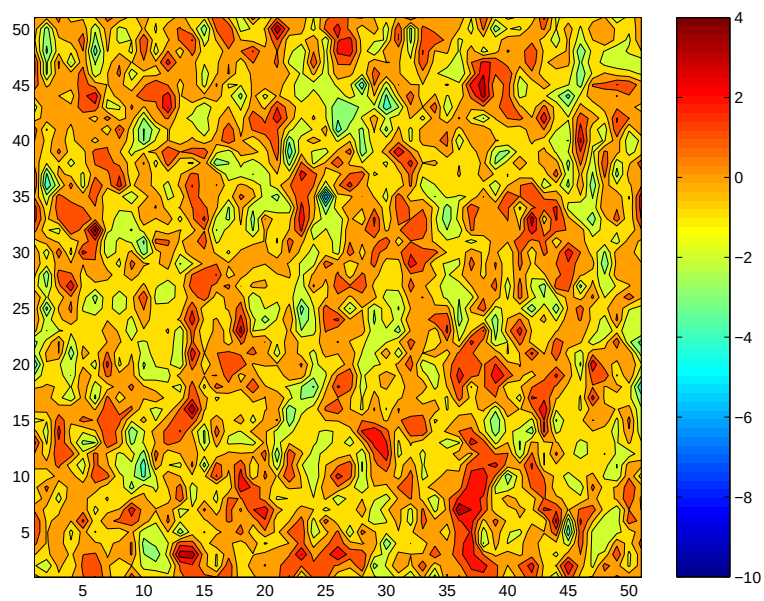


FIG. B.16 – Carte seuillée du modèle 2B

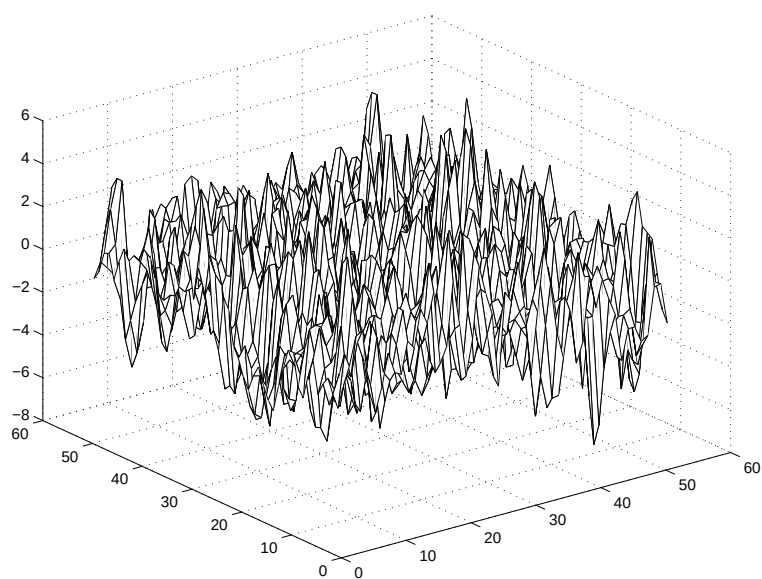


FIG. B.17 – Carte du modèle 2C

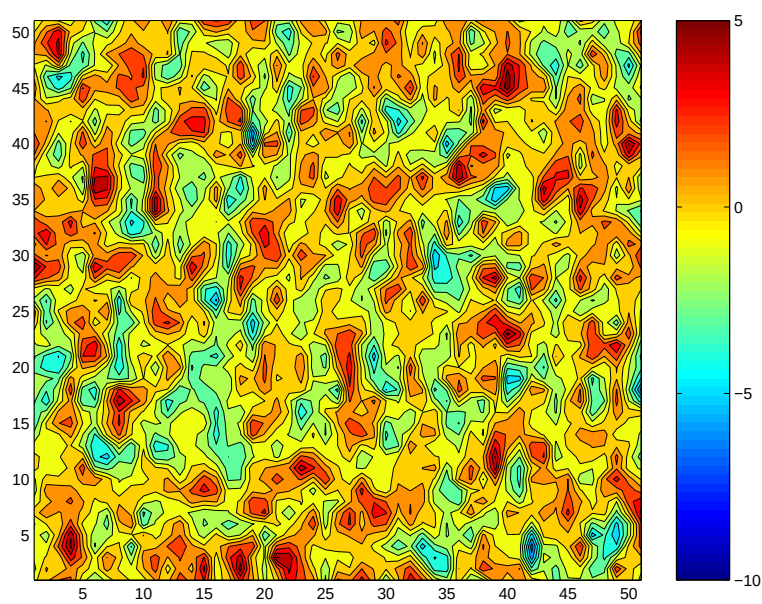


FIG. B.18 – Carte seuillée du modèle 2C

$\lambda \backslash \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(1,0)	0.7172 (0.0012)	0.4499 (0.0031)	0.4502 (0.0088)	0.6769 (0.0047)	0.4497 (0.0068)	0.4507 (0.0188)	1.2235 (6.1640)	1.0867 (-)	7.8041 (-)
(1,1)	-0.2844 (0.0024)	-0.1418 (0.0048)	0.0012 (0.0181)	-0.0001 (0.0070)	-1.3710 (-)	6.9291 (-)	1.9625 (-)	-0.1541 (3.2444)	-1.0473 (8.3497)
(0,1)	0.3723 (0.0024)	0.3513 (0.0038)	0.0006 (0.0139)	0.0004 (0.0092)	0.3516 (0.0090)	0.0010 (0.0310)	1.8608 (-)	0.5371 (-)	0.0766 (8.6866)
(2,0)	-0.3948 (0.0018)	-0.0002 (0.005)	0.0011 (0.0171)	-0.3125 (0.0057)	-0.6797 (-)	0.6606 (-)	-1.7196 (-)	-14.8985 (-)	-0.4356 (-)
(2,1)	0.2821 (0.0020)	0.0005 (0.0050)	-0.0001 (0.0178)	0.0004 (0.0064)	0.0296 (1.6530)	-0.2416 (5.4740)	-0.0755 (9.0395)	0.0186 (0.4735)	1.2248 (-)
(2,2)	-0.0946 (0.0022)	-0.0002 (0.0052)	0.0018 (0.0222)	-0.0001 (0.0064)	-0.0710 (0.5430)	0.0266 (0.4521)	0.0108 (0.4164)	-0.0042 (0.2834)	0.0407 (0.7350)
(1,2)	0.1305 (0.0022)	0.0518 (0.0051)	-0.0017 (0.0182)	-0.0005 (0.0072)	0.3636 (3.9829)	0.0364 (5.0420)	0.1368 (4.0839)	-0.0169 (0.3811)	-0.1154 (1.7624)
(0,2)	-0.1607 (0.0029)	-0.1428 (0.0042)	0.0003 (0.0137)	0.0003 (0.0091)	-0.1428 (0.0095)	0.0005 (0.0305)	0.0060 (0.1859)	0.0463 (0.7546)	0.0003 (0.0408)

TAB. B.2 – Moyennes et écarts-types empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour le modèle 2C
Estimation : 0.4445

Modèles 3A, 3B, 3C

$$\mathbf{3A} : 1 - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t_1-1, t_2-1)} = \epsilon_t$$

- Représentations graphiques
- Tableau de l'identification ARMA

$$\mathbf{3B} : 1 - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t_1-1, t_2-1)} = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1, t_2)}$$

- Représentations graphiques
- Tableau de l'identification ARMA

$$\mathbf{3C} : 1 - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t_1-1, t_2-1)} = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 \epsilon_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t-1, t_2-1)}$$

- Représentations graphiques

Cartes seuillées : seuillage entre -20 et 20 avec un pas de 2

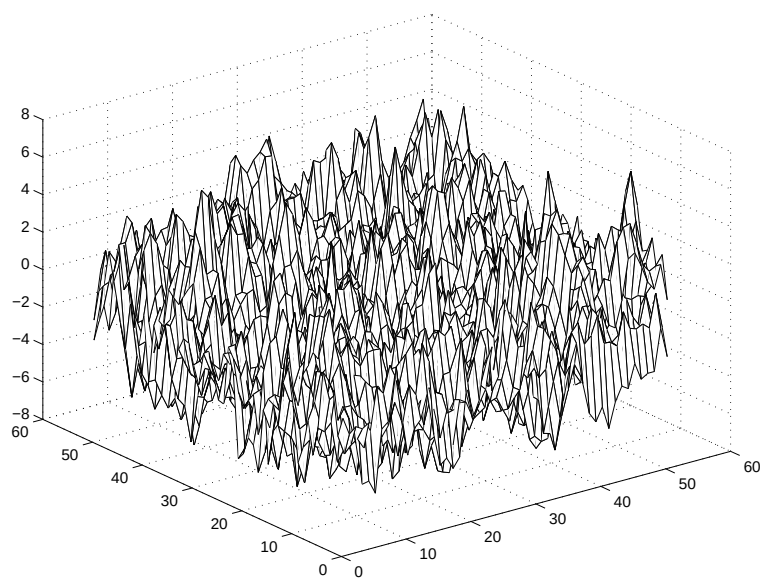


FIG. B.19 – Carte du modèle 3A

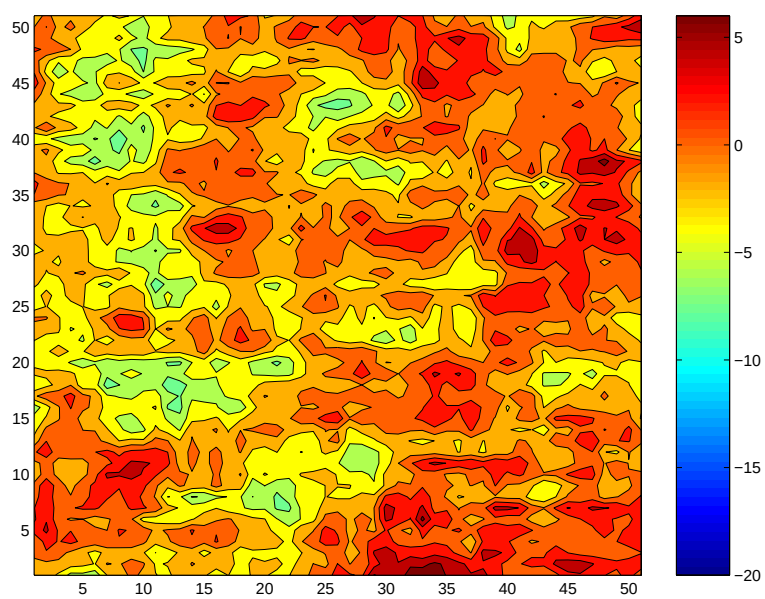


FIG. B.20 – Carte seuillée du modèle 3A

$\lambda \backslash \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(1,0)	0.7000 (0.0033)	0.7001 (0.0046)	0.7000 (0.0058)	0.6999 (0.0041)	0.7001 (0.0064)	0.7001 (0.0079)	0.7000 (0.0100)	0.6999 (0.0073)	0.6998 (0.0051)
(1,1)	-0.5601 (0.0017)	-0.3475 (8.2019)	0.1285 (-)	-0.8935 (3.5836)	-0.9066 (2.7635)	0.8137 (-)	1.0221 (-)	-0.7364 (9.9443)	-0.7486 (3.3424)
(0,1)	0.7999 (0.0021)	0.7998 (0.0030)	0.7997 (0.0037)	0.7998 (0.0025)	0.7998 (0.004)	0.7996 (0.0054)	0.7996 (0.0065)	0.7998 (0.0045)	0.7999 (0.0031)
(2,0)	0.0001 (0.0044)	-0.0699 (-)	-0.2362 (7.3441)	0.0002 (0.0054)	0.3506 (-)	-0.0100 (6.3285)	-0.2107 (-)	6.9489 (-)	0.0002 (0.0068)
(2,1)	0.00000 (0.0021)	0.1736 (-)	8.4821 (-)	4.5925 (-)	-2.3428 (-)	-2.9050 (-)	-0.3542 (7.9098)	6.1482 (-)	-0.6376 (-)
(2,2)	-0.0001 (0.0020)	0.0098 (0.1488)	0.4577 (-)	-0.0046 (0.01614)	1.1580 (-)	-0.9049 (-)	2.7588 (-)	-0.0029 (-)	-149.8937 (-)
(1,2) 0.0000	-0.4257 (0.0021)	1.3519 (-)	0.6823 (-)	2.1319 (-)	-2.1446 (-)	0.2333 (-)	-14.6722 (9.6087)	-5.1676 (-)	(-)
(0,2)	-0.0003 (0.0032)	-0.0003 (0.0047)	0.4145 (-)	1.6333 (-)	-0.0005 (0.0068)	-8.9879 (-)	-0.7466 (-)	-0.4094 (-)	-2.1408 (-)

TAB. B.3 – Moyennes et écarts-types empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour le modèle 3A
 Estimation : (0.6994, -0.5614, 0.0.8009)

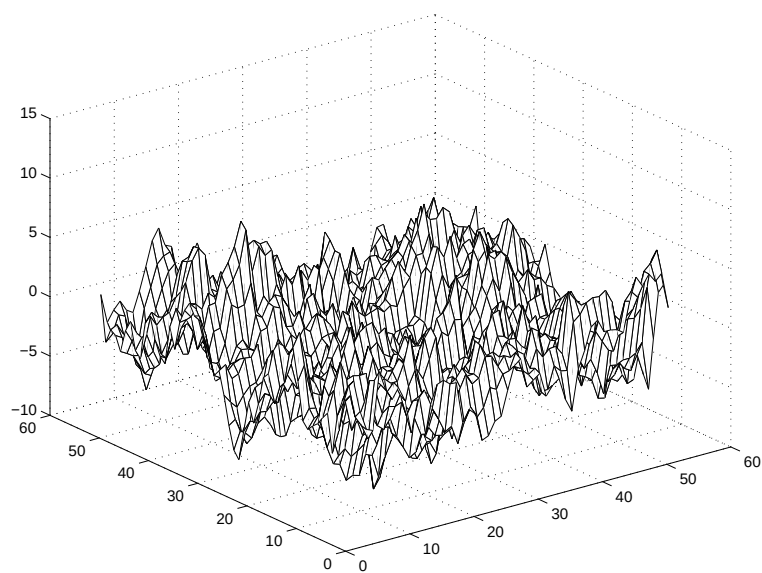


FIG. B.21 – Carte du modèle 3B

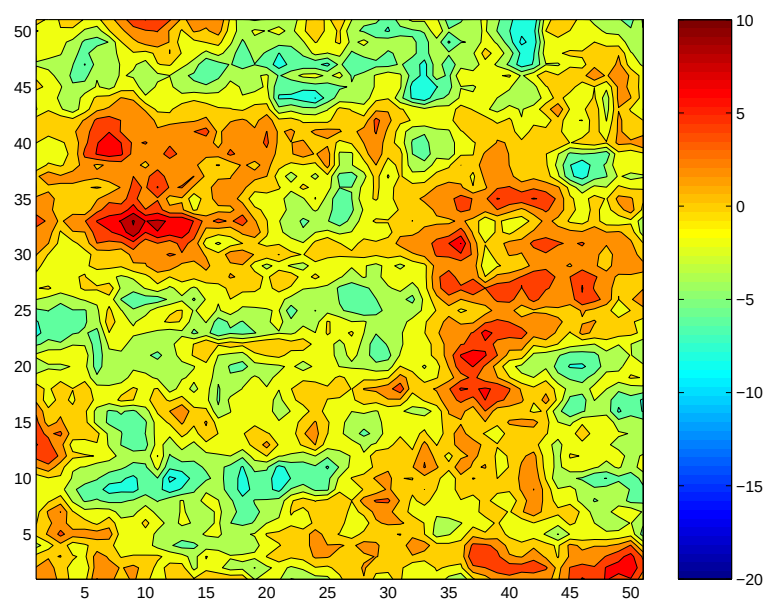


FIG. B.22 – Carte seuillée du modèle 3B

$\lambda \backslash \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(1,0)	0.7773 (0.0025)	0.7000 (0.0042)	0.7000 (0.0053)	0.7772 (0.0032)	0.7000 (0.0059)	0.7000 (0.0073)	0.6999 (0.0092)	0.6999 (0.0066)	0.7771 (0.0041)
(1,1)	-0.6219 (0.0016)	-0.5597 (0.0066)	-0.7925 (4.9929)	-7.6185 (-)	0.0950 (-)	-0.8301 (5.8081)	-1.4697 (7.2376)	-0.6161 (9.4878)	-0.8309 (2.6418)
(0,1)	0.7999 (0.0023)	0.7999 (0.0029)	0.7997 (0.0036)	0.7998 (0.0027)	0.7998 (0.0042)	0.7996 (0.0052)	0.7996 (0.0063)	0.7998 (0.0043)	0.7999 (0.0033)
(2,0)	-0.1516 (0.0043)	0.0003 (0.0231)	0.0005 (0.0289)	-0.1515 (0.0052)	-9.3821 (-)	-4.8844 (-)	-21.3199 (-)	0.0009 (0.0363)	-0.1515 (0.0066)
(2,1)	0.1214 (0.0021)	-0.0004 (0.0117)	0.1322 (9.7836)	2.5782 (-)	-0.3797 (-)	0.1719 (4.6517)	0.3297 (-)	1.6850 (-)	0.2117 (-)
(2,2)	-0.0001 (0.0020)	-0.0005 (0.0108)	0.0309 (0.4898)	0.0880 (2.0865)	0.0031 (0.1920)	-0.5987 (-)	-2.8598 (-)	-3.8740 (-)	1.6642 (-)
(1,2)	0.0001 (0.0021)	-0.0001 (0.0107)	1.5987 (-)	0.7920 (-)	0.7973 (-)	-0.7994 (-)	0.6997 (-)	0.2858 (-)	-3.2276 (-)
(0,2)	-0.0003 (0.0034)	-0.0003 (0.0045)	1.2779 (-)	-0.1668 (7.1937)	-0.0005 (0.0065)	-1.5316 (-)	-7.2131 (-)	0.1358 (-)	0.6945 (-)

TAB. B.4 – Moyennes et écarts-types empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour le modèle 3B
 Estimation : (0.6996, -0.5680, 0.8109)

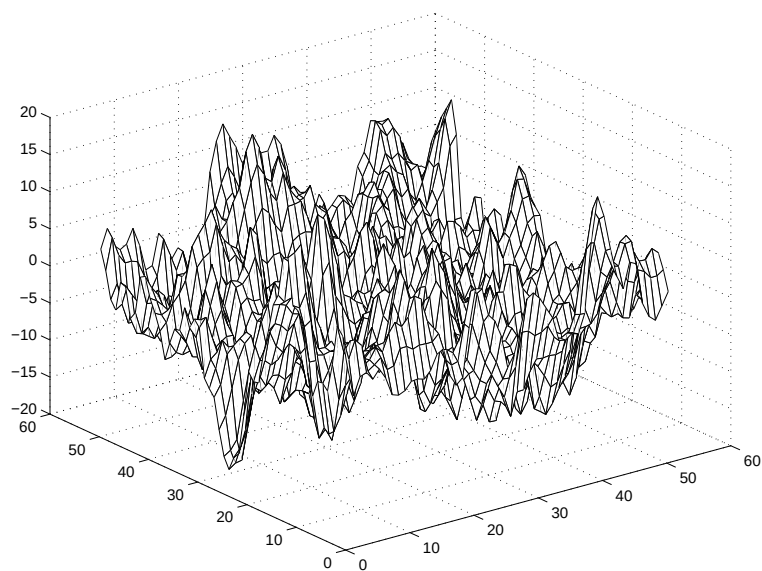


FIG. B.23 – Carte du modèle 3C

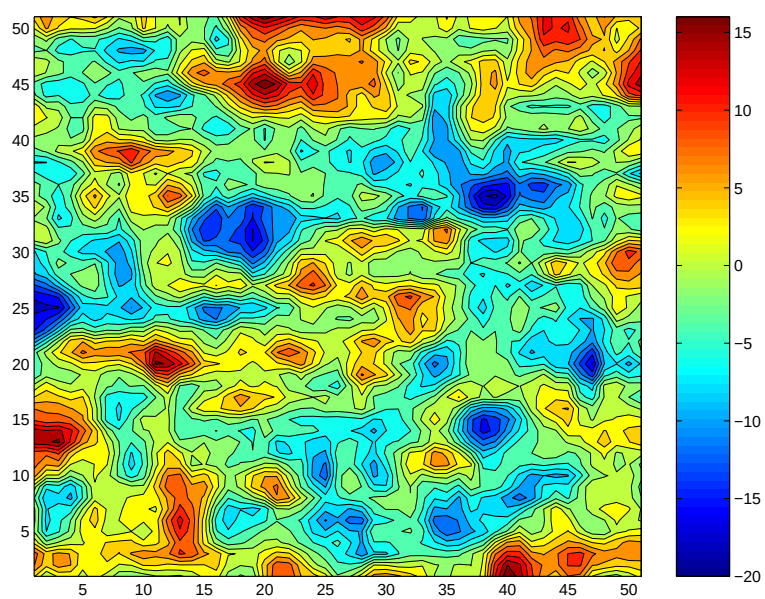


FIG. B.24 – Carte seuillée du modèle 3C

Modèles 4A, 4B, 4C

$$\mathbf{4A : } X_t - X_{(t_1-1,t_2)} + 0.7 X_{(t_1-1,t_2-1)} - 0.7 X_{(t_1,t_2-1)} + 0.16 X_{(t_1-2,t_2)} - 0.112 X_{(t_1-2,t_2-1)} = \epsilon_t$$

- Représentations graphiques

$$\mathbf{4B : } X_t - X_{(t_1-1,t_2)} + 0.7 X_{(t_1-1,t_2-1)} - 0.7 X_{(t_1,t_2-1)} + 0.16 X_{(t_1-2,t_2)} - 0.112 X_{(t_1-2,t_2-1)} = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1,t_2)}$$

- Représentations graphiques

$$\mathbf{4C : } X_t - X_{(t_1-1,t_2)} + 0.7 X_{(t_1-1,t_2-1)} - 0.7 X_{(t_1,t_2-1)} + 0.16 X_{(t_1-2,t_2)} - 0.112 X_{(t_1-2,t_2-1)} = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1,t_2)} + 0.3 \epsilon_{(t_1-1,t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t_1-2,t_2-1)}$$

- Représentations graphiques
- Tableau de l'identification ARMA

Cartes seuillées : seuillage entre -20 et 20 avec un pas de 2

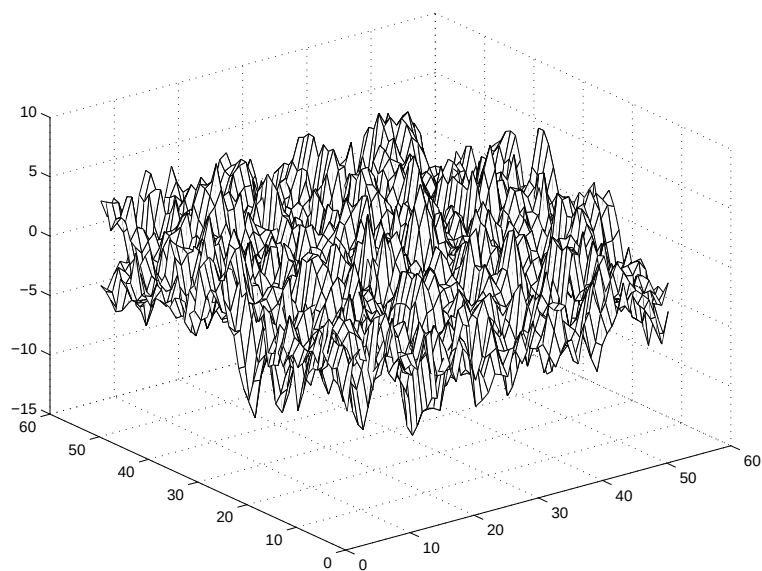


FIG. B.25 – Carte du modèle 4A

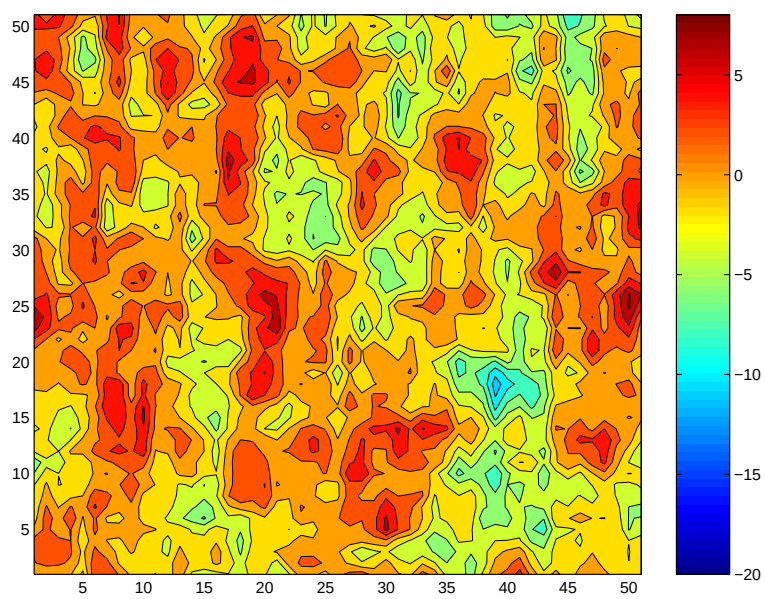


FIG. B.26 – Carte seuillée du modèle 4A

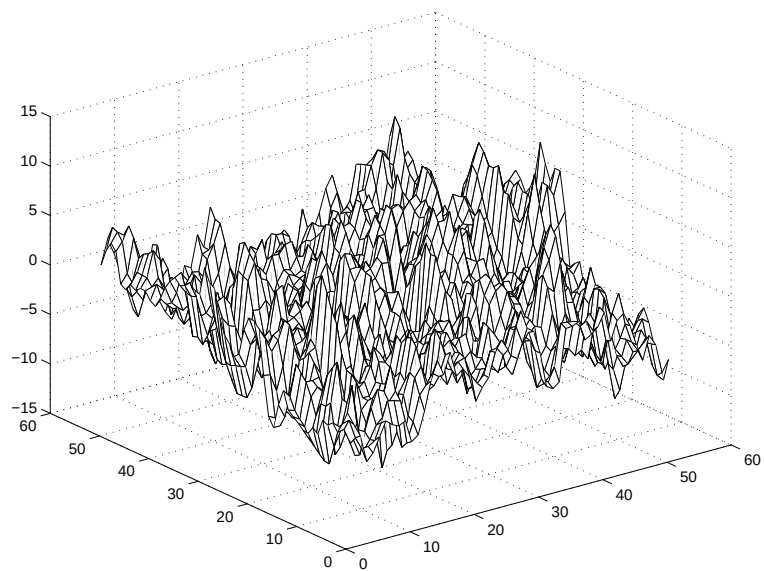


FIG. B.27 – Carte du modèle 4B

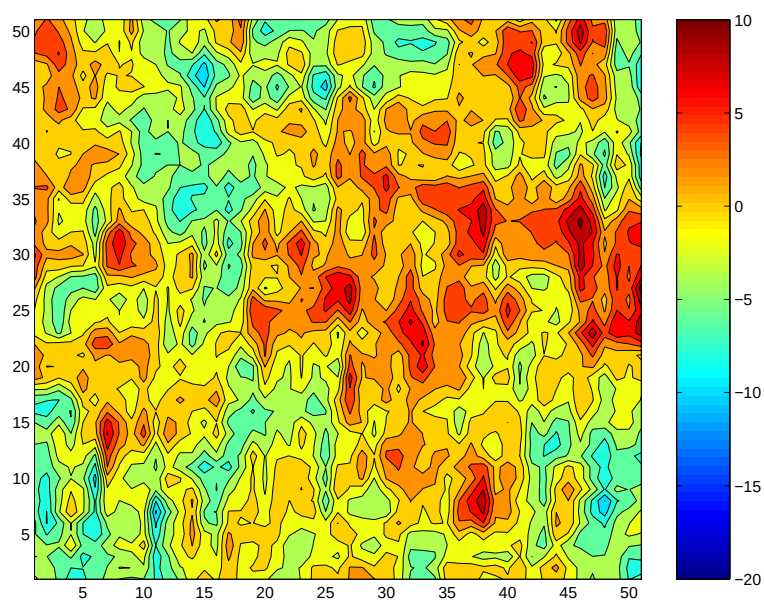


FIG. B.28 – Carte seuillée du modèle 4B

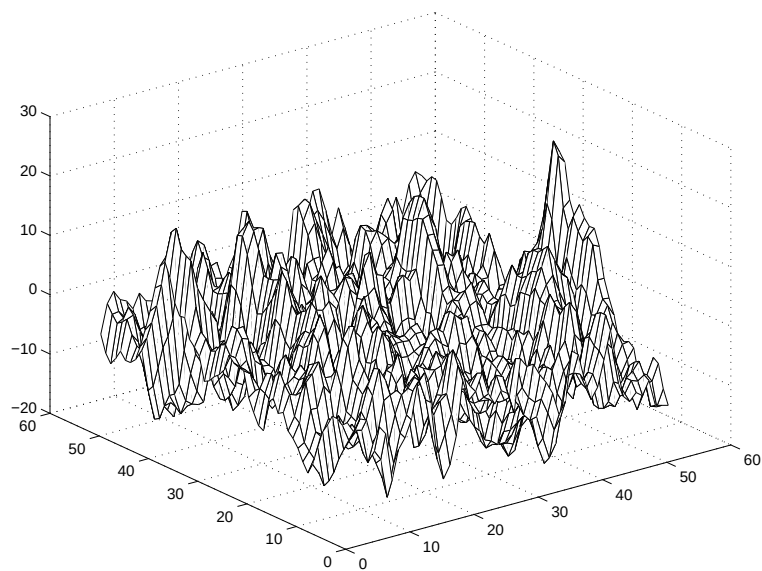


FIG. B.29 – Carte du modèle 4C

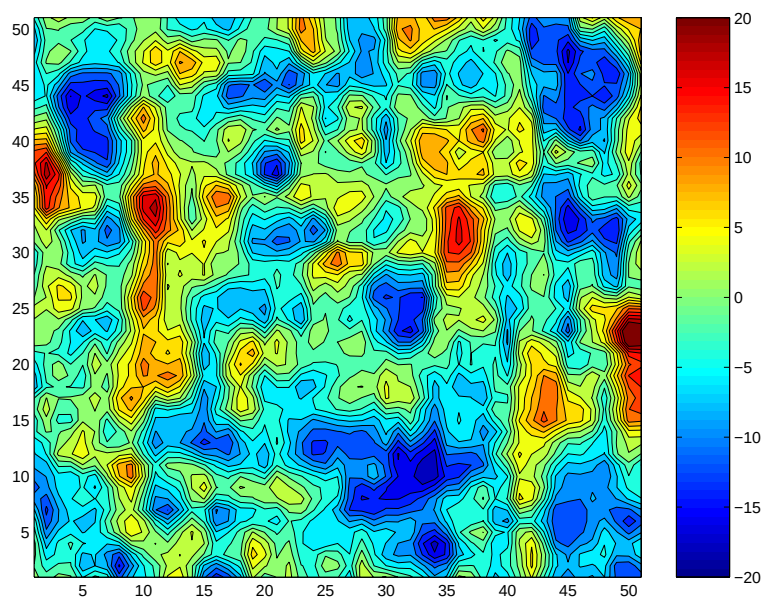


FIG. B.30 – Carte seuillée du modèle 4C

$\lambda \setminus \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(0,3)
(1,0)	0.9186 (0.0010)	0.8258 (0.0023)	0.8255 (0.0028)	0.9168 (0.0014)	0.8063 (0.0031)	0.8062 (0.0038)	0.8061 (0.0034)	0.8254 (0.0041)	0.9158 (0.0023)	0.8017 (0.0039)	0.8017 (0.0048)	0.8017 (0.0067)	0.8017 (0.0094)	0.8061 (0.0075)	0.8253 (0.0058)	0.9167 (0.0037)
(1,1)	-0.7594 (0.0013)	-0.6710 (0.0029)	-0.5765 (0.0060)	-0.6351 (0.0036)	-0.6542 (0.0149)	-0.5622 (0.0237)	-0.4895 (0.1937)	-0.8793 (4.5031)	-0.7456 (1.2101)	-0.6274 (0.1335)	-0.9892 (-)	-0.5465 (2.4848)	-1.1582 (6.5457)	0.2652 (-)	-1.1259 (-)	-0.7365 (1.3932)
(0,1)	0.8245 (0.0021)	0.8229 (0.0024)	0.6997 (0.0046)	0.6997 (0.0042)	0.8226 (0.0030)	0.6996 (0.0055)	0.6995 (0.0077)	0.6996 (0.0064)	0.6996 (0.0059)	0.8225 (0.0040)	0.6996 (0.0068)	0.6995 (0.0096)	0.6995 (0.0138)	0.6997 (0.0111)	0.6997 (0.0091)	0.6996 (0.0084)
(2,0)	-0.5453 (0.0027)	-0.1596 (0.0077)	-0.1594 (0.0095)	-0.5357 (0.0035)	-0.1537 (0.0409)	-0.1518 (0.0507)	-0.1469 (0.0733)	-0.1522 (0.0134)	-0.5356 (0.0053)	-0.0664 (0.4306)	0.0695 (2.9850)	0.0093 (3.5023)	-2.9299 (-)	-0.1394 (0.1096)	-0.1590 (0.0189)	-0.5355 (0.0078)
(2,1)	0.4599 (0.0017)	0.1290 (0.0047)	0.1120 (0.0158)	0.3382 (0.0056)	0.1823 (0.7817)	-0.1799 (6.5564)	1.2880 (-)	1.3489 (7.6387)	-3.8964 (-)	0.2182 (1.0762)	0.5040 (-)	0.9454 (8.1740)	1.1932 (-)	-9.7935 (-)	1.7227 (-)	0.6166 (6.9884)
(2,2)	-0.2030 (0.0021)	-0.0427 (0.0050)	0.0002 (0.0174)	-0.0001 (0.0063)	-0.3496 (2.8912)	-0.0857 (0.7986)	-0.8723 (-)	-0.0775 (3.3243)	-0.1486 (8.2879)	-0.1394 (1.1863)	-0.1410 (1.6158)	-0.0146 (6.1387)	-1.8928 (-)	1.8577 (-)	0.0702 (8.5988)	-0.4371 (7.6925)
(1,2)	0.3011 (0.002)	0.2355 (0.0043)	0.0001 (0.0146)	0.0002 (0.0077)	0.2303 (0.0234)	-0.0026 (0.0793)	0.6377 (-)	0.8511 (-)	-2.3042 (-)	0.2550 (0.1505)	0.1681 (2.1358)	-0.8857 (-)	0.6878 (-)	2.0743 (-)	0.6773 (-)	0.1477 (-)
(0,2)	-0.3213 (0.0039)	-0.3167 (0.0044)	-0.0003 (0.0151)	-0.0005 (0.0136)	-0.3157 (0.0055)	-0.0001 (0.0185)	-0.4011 (-)	0.0551 (7.3136)	-0.8167 (7.6539)	-0.3156 (0.0070)	0.0002 (0.0232)	-0.2778 (8.9892)	0.2989 (-)	0.7669 (-)	-0.2804 (5.5909)	-0.7247 (5.6651)
(3,0)	0.3258 (0.0032)	0.0012 (0.0096)	0.0015 (0.0119)	0.3126 (0.0041)	0.1454 (4.2740)	0.2353 (2.4486)	1.9145 (-)	0.0021 (0.0168)	0.3126 (0.0061)	19.4633 (-)	0.1011 (1.9936)	0.0982 (0.8318)	0.0840 (1.1398)	0.2150 (3.3742)	0.0027 (0.0240)	0.3126 (0.0090)
(3,1)	-0.2834 (0.0020)	0.0003 (0.0054)	0.0020 (0.0184)	-0.1697 (0.0060)	-0.2330 (2.7011)	-0.3146 (6.2019)	14.6118 (-)	-0.5235 (6.1918)	-0.7402 (7.8009)	0.1160 (3.6119)	-0.0167 (3.0244)	0.6810 (-)	0.2768 (-)	-0.7106 (6.2531)	0.1381 (5.8730)	0.8820 (-)
(3,2)	0.1438 (0.0021)	0.0003 (0.0051)	-0.0012 (0.0184)	-0.0001 (0.0063)	-0.0008 (0.5900)	0.0058 (0.1626)	-0.0992 (3.9993)	-0.1160 (3.4018)	0.0082 (7.3146)	0.0975 (3.3591)	0.0633 (2.6020)	0.2320 (6.7507)	-2.4904 (-)	-0.7738 (-)	0.1880 (9.3698)	-2.1889 (-)
(3,3)	-0.0784 (0.0021)	-0.0001 (0.0051)	0.0058 (0.0468)	0.0001 (0.0066)	-0.0150 (0.1326)	0.0495 (0.7498)	0.0024 (0.3718)	0.0100 (0.2339)	0.0004 (0.1698)	-0.0156 (0.8670)	-0.1620 (1.2244)	-0.0741 (1.8371)	0.1078 (1.4699)	-0.1206 (1.8776)	-0.0050 (0.6409)	-0.1555 (1.6310)
(2,3)	0.0988 (0.0021)	0.0156 (0.0050)	-0.0015 (0.0197)	-0.0001 (0.0066)	0.1537 (2.0222)	0.0124 (2.1544)	-0.7141 (-)	-0.0173 (0.3826)	-0.2237 (3.5295)	0.3051 (3.2049)	0.1613 (1.4208)	0.0086 (5.4899)	-1.0287 (-)	0.1390 (2.7182)	1.6406 (-)	-0.0853 (-)
(1,3)	-0.1331 (0.0026)	-0.0917 (0.0045)	0.0018 (0.0164)	0.0007 (0.0080)	-0.0893 (0.0240)	0.0246 (0.1225)	0.1489 (4.3537)	-0.0149 (0.1952)	-0.0034 (0.4397)	-0.0408 (0.7293)	0.3255 (-)	0.2502 (-)	0.1928 (-)	0.4568 (9.1253)	-0.1408 (-)	-0.8978 (-)
(0,3)	0.1394 (0.0045)	0.1357 (0.0049)	0.0003 (0.0155)	0.0001 (0.0141)	0.1350 (0.0060)	0.0006 (0.0190)	-0.0216 (0.9306)	-0.0036 (0.1988)	-0.1164 (2.6657)	0.1350 (0.0076)	0.0008 (0.0239)	-0.0911 (2.2689)	-0.6478 (-)	2.1856 (-)	0.1046 (7.3959)	0.9907 (-)

TAB. B.5 – Moyennes et écarts-types empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour le modèle 4C
 Estimation : (1.0252, -0.7316, 0.7107, -0.1878, 0.1379)

Modèles 5A, 5B, 5C

$$\mathbf{5A} : X_t - 1.3 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.455 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.35 X_{(t_1, t_2-1)} + 0.4 X_{(t_1-2, t_2)} - 0.14 X_{(t_1-2, t_2-1)} - 0.228 X_{(t_1-2, t_2-2)} + 0.741 X_{(t_1-1, t_2-2)} - 0.57 X_{(t_1, t_2-2)} = \epsilon_t$$

- Représentations graphiques

$$\mathbf{5B} : X_t - 1.3 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.455 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.35 X_{(t_1, t_2-1)} + 0.4 X_{(t_1-2, t_2)} - 0.14 X_{(t_1-2, t_2-1)} - 0.228 X_{(t_1-2, t_2-2)} + 0.741 X_{(t_1-1, t_2-2)} - 0.57 X_{(t_1, t_2-2)} = \epsilon_t + 0.2 \epsilon_{(t_1-1, t_2)}$$

- Représentations graphiques

$$\mathbf{5C} : X_t - 1.3 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.455 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.35 X_{(t_1, t_2-1)} + 0.4 X_{(t_1-2, t_2)} - 0.14 X_{(t_1-2, t_2-1)} - 0.228 X_{(t_1-2, t_2-2)} + 0.741 X_{(t_1-1, t_2-2)} - 0.57 X_{(t_1, t_2-2)} = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 \epsilon_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t-1, t_2-1)}$$

- Représentations graphiques
- Tableau de l'identification ARMA

Cartes seuillées : seuillage entre -50 et 50 avec un pas de 5

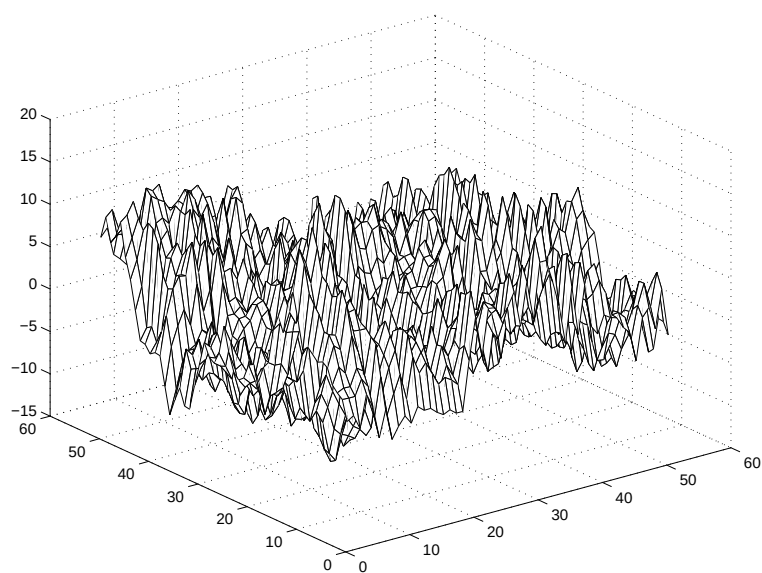


FIG. B.31 – Carte du modèle 5A

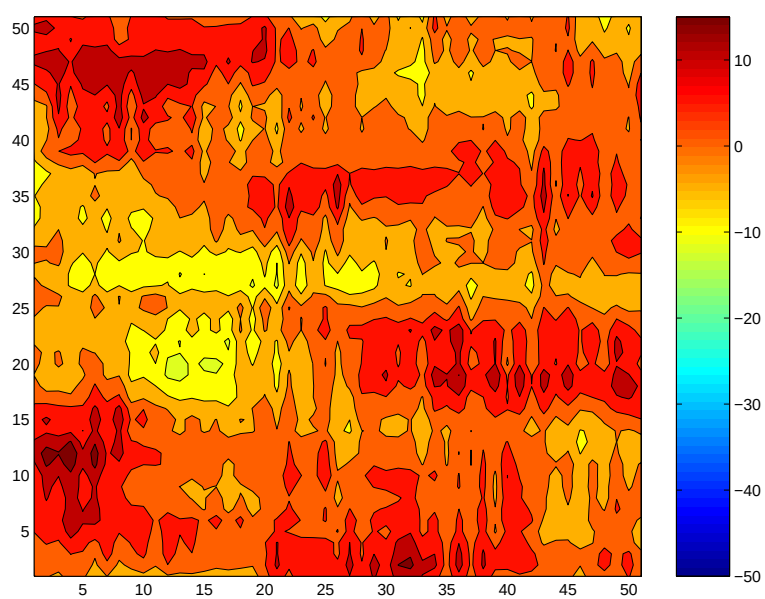


FIG. B.32 – Carte seuillée du modèle 5A

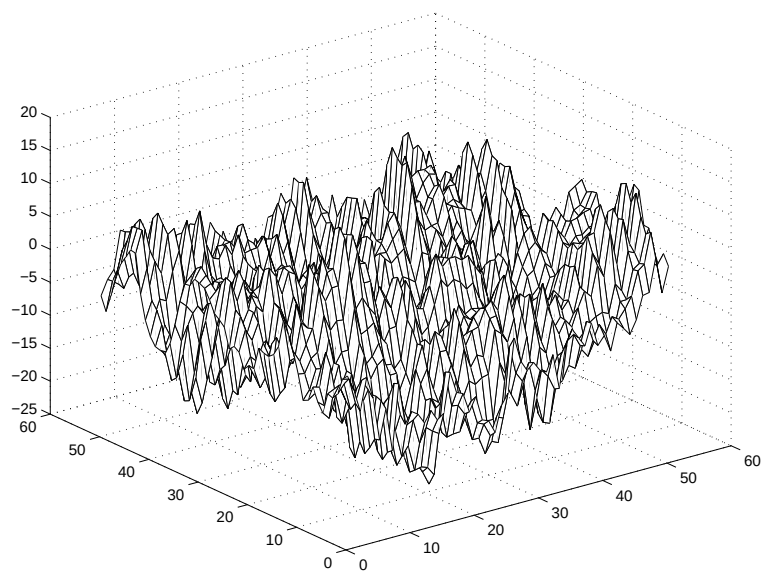


FIG. B.33 – Carte du modèle 5B

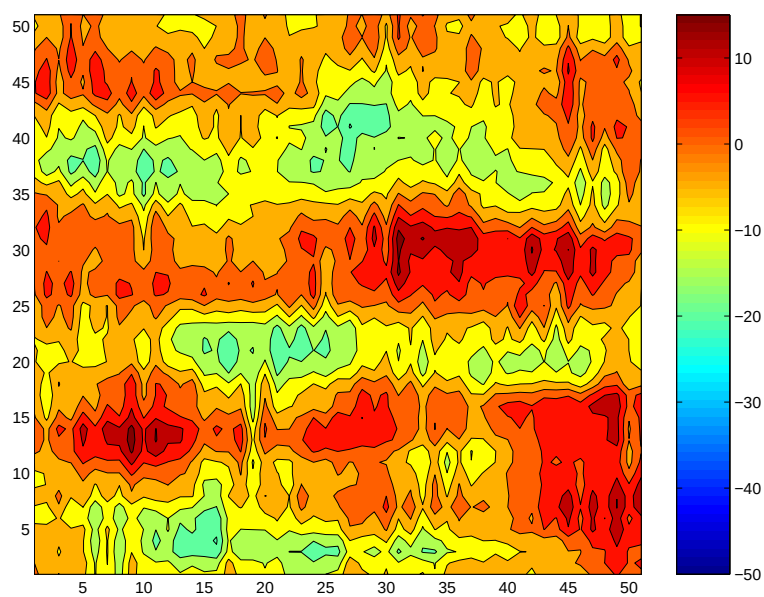


FIG. B.34 – Carte seuillée du modèle 5B

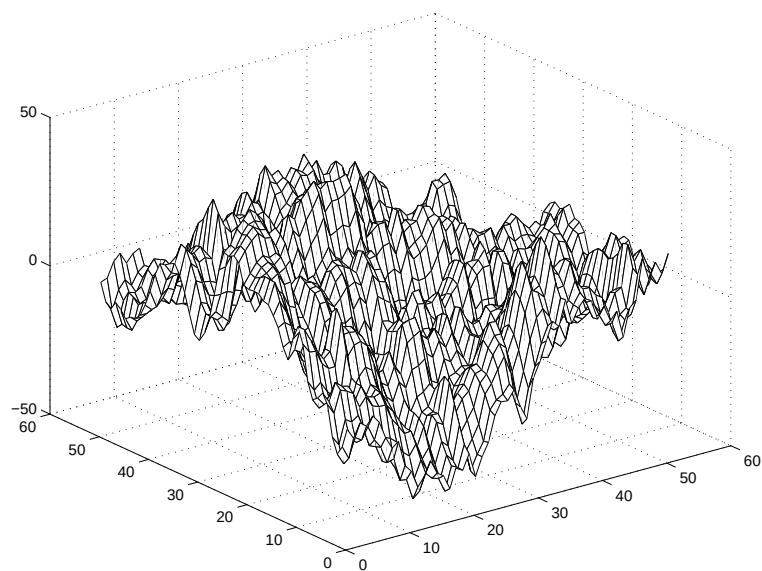


FIG. B.35 – Carte du modèle 5C

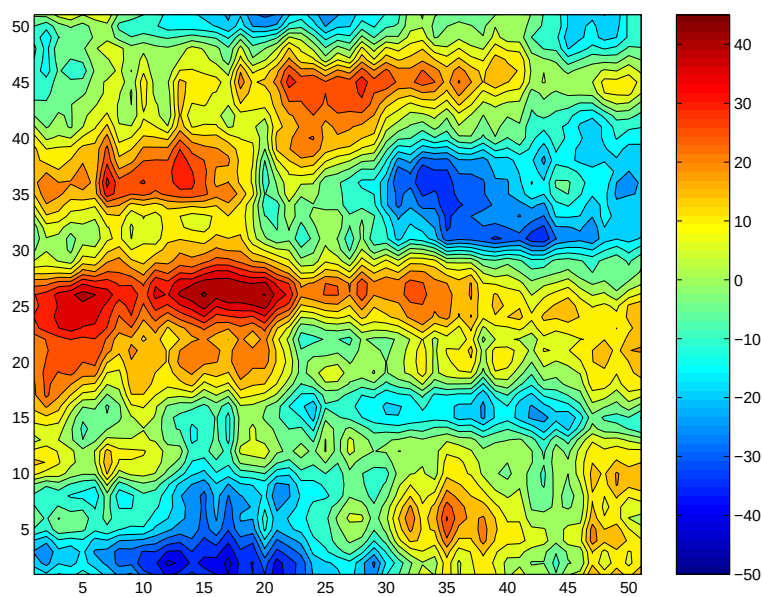


FIG. B.36 – Carte seuillée du modèle 5C

$\lambda \setminus \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(0,3)
(1,0)	0.9495 (0.0018)	0.8787 (0.0038)	0.8786 (0.0040)	0.9492 (0.0017)	0.8448 (0.0054)	0.8447 (0.0058)	0.8447 (0.0060)	0.8786 (0.0042)	0.9493 (0.0018)	0.8265 (0.0071)	0.8264 (0.0076)	0.8264 (0.0079)	0.8264 (0.0083)	0.8447 (0.0064)	0.8785 (0.0065)	0.9492 (0.0020)
(1,1)	-0.8898 (0.0012)	-0.8214 (0.0018)	-0.8509 (0.0058)	-0.9274 (0.0044)	-0.7896 (0.0036)	-0.8145 (0.0076)	-0.8366 (0.0141)	-0.8366 (0.0103)	-0.9140 (0.0079)	-0.7717 (0.0092)	-0.7804 (0.0109)	-0.7804 (0.0208)	-0.7859 (0.0201)	-0.8066 (0.0208)	-0.8437 (0.0160)	-0.9216 (0.0131)
(0,1)	0.9365 (0.0021)	0.9362 (0.0022)	0.9587 (0.0016)	0.9585 (0.0015)	0.9360 (0.0025)	0.9587 (0.0018)	0.9443 (0.0023)	0.9444 (0.0021)	0.9445 (0.0020)	0.9359 (0.0029)	0.9588 (0.0022)	0.9442 (0.0027)	0.9533 (0.0026)	0.9534 (0.0022)	0.9534 (0.0019)	0.9533 (0.0018)
(2,0)	-0.6820 (0.0049)	-0.3996 (0.0128)	-0.3996 (0.0137)	-0.6802 (0.0053)	-0.3991 (0.0303)	-0.3989 (0.0325)	-0.3988 (0.0340)	-0.3995 (0.0042)	-0.6813 (0.0056)	-0.3935 (0.0060)	-0.3925 (0.0715)	-0.3918 (0.0753)	-0.3910 (0.0806)	-0.3986 (0.0362)	-0.3995 (0.0150)	-0.6806 (0.0059)
(2,1)	0.6445 (0.0013)	0.3724 (0.0035)	0.3848 (0.0146)	0.7742 (0.0081)	0.3966 (0.3103)	0.3752 (0.5970)	0.3675 (0.4061)	0.3769 (0.0254)	0.7637 (0.0147)	0.3880 (0.5718)	0.4282 (0.4806)	0.3928 (0.4101)	0.5498 (4.3231)	0.4356 (0.5809)	0.3836 (0.0402)	0.7719 (0.0249)
(2,2)	0.0894 (0.0024)	0.0928 (0.0049)	0.2278 (0.0089)	0.3635 (0.0103)	0.2044 (4.0451)	14.5113 (-)	-13.0201 (-)	1.4594 (-)	-0.5170 (-)	1.6774 (-)	6.6843 (-)	0.5331 (-)	-0.8650 (-)	-1.0855 (-)	0.1196 (-)	-0.1910 (-)
(1,2)	-0.1542 (0.0030)	-0.1670 (0.0042)	-0.4994 (0.0185)	-0.5375 (0.0162)	-0.1597 (0.0101)	-0.4833 (0.0444)	-0.6192 (1.0188)	-0.7793 (4.6304)	-0.3301 (5.2549)	-0.1556 (0.0226)	-0.4829 (0.1065)	-0.4762 (2.4145)	-1.0403 (6.3249)	-0.6626 (1.3019)	-2.0995 (-)	-0.5968 (0.8338)
(0,2)	0.1680 (0.0058)	0.1712 (0.0061)	0.5708 (0.0310)	0.5709 (0.0296)	0.1727 (0.0069)	0.5709 (0.0352)	0.5686 (0.0577)	0.5695 (0.0514)	0.5701 (0.0500)	0.1735 (0.0081)	0.5712 (0.0494)	0.5674 (0.0677)	0.5734 (0.1183)	0.5723 (0.0994)	0.5716 (0.0875)	0.5712 (0.0844)
(3,0)	0.3792 (0.0072)	-0.0004 (0.0229)	-0.0004 (0.0247)	0.3757 (0.0078)	0.5626 (5.4219)	0.3710 (3.3419)	1.0416 (8.9379)	-0.0003 (0.0258)	0.3779 (0.0081)	1.0266 (9.6434)	0.3406 (4.9944)	-0.1908 (-)	-0.3109 (-)	-1.9251 (-)	-0.0003 (0.0274)	0.3766 (0.0086)
(3,1)	-0.3688 (0.0017)	-0.0002 (0.0052)	0.0010 (0.0220)	-0.6268 (0.0117)	-0.5390 (4.2922)	0.2725 (-)	-0.1567 (3.1105)	0.0007 (0.0330)	-0.6195 (0.0192)	-0.8688 (-)	-0.2408 (2.5287)	0.8674 (-)	-0.2256 (2.8419)	-0.4049 (2.2864)	0.0013 (0.0590)	-0.6260 (0.0350)
(3,2)	-0.0197 (0.0022)	-0.0003 (0.0051)	0.0000 (0.0178)	-0.1707 (0.0077)	-17.6255 (-)	-0.3822 (-)	-5.0228 (-)	-0.6237 (7.6012)	-0.7913 (8.0596)	-0.0607 (7.0210)	-0.2440 (5.4022)	-0.4203 (8.3948)	0.0597 (-)	-1.6408 (-)	-1.3184 (-)	-0.6185 (-)
(3,3)	0.0155 (0.0021)	-0.0001 (0.0047)	-0.0029 (0.0199)	0.0002 (0.0065)	0.0403 (0.3688)	-0.0155 (0.6423)	0.0106 (1.9797)	-0.0292 (0.6174)	0.3507 (2.1626)	0.2068 (5.4084)	-0.3405 (5.8003)	0.3443 (-)	0.3537 (9.3447)	-127.8783 (-)	0.3561 (5.1136)	-0.1011 (-)
(2,3)	-0.0740 (0.0023)	-0.0346 (0.0051)	0.0006 (0.0190)	-0.0002 (0.0072)	-0.4491 (-)	-1.4386 (-)	-0.7540 (-)	-0.1302 (1.6789)	-0.6115 (-)	1.7440 (-)	0.0786 (-)	-123.6141 (-)	-0.3869 (-)	-0.3547 (9.2427)	-2.1795 (-)	1.3509 (-)
(1,3)	0.0691 (0.0028)	0.0698 (0.0042)	-0.0030 (0.0142)	-0.0014 (0.0088)	0.0669 (0.0101)	-0.0085 (0.0362)	-2.3590 (-)	0.4602 (7.0993)	0.7050 (7.5897)	0.0651 (0.0223)	-0.0050 (0.7302)	0.5615 (5.7670)	3.1737 (-)	1.2999 (-)	0.4425 (5.3968)	-0.5738 (-)
(0,3)	-0.0743 (0.0054)	-0.0751 (0.0057)	0.0001 (0.0177)	0.0001 (0.0166)	-0.0755 (0.0065)	-0.0001 (0.0203)	0.0484 (-)	-0.8412 (-)	-0.9265 (7.9368)	-0.0757 (0.0077)	-0.0002 (0.0241)	-0.0188 (9.6316)	0.6927 (-)	1.2483 (-)	-0.7060 (8.0544)	-0.6698 (5.5934)

TAB. B.6 – Moyennes et écarts-types empiriques de $\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$ pour le modèle 5C
 Estimation : (1.3174, -0.4391, 0.3317, -0.4128, 0.1361, 0.2423, -0.7693, 0.5856)

Bibliographie générale

- [BD91] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time series : theory and methods*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [Bro71] B. M. Brown. Martingale central limit theorems. *Ann. Math. Statist.*, 42 :59–66, 1971.
- [BW71] P. J. Bickel and M. J. Wichura. Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *Ann. Math. Statist.*, 42 :1656–1670, 1971.
- [CCM00] Philippe Carmona, Laure Coutin, and G. Montseny. Approximation of some Gaussian processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 3(1-2) :161–171, 2000. 19th “Rencontres Franco-Belges de Statisticiens” (Marseille, 1998).
- [Cho91] B. S. Choi. On the asymptotic distribution of the generalized partial autocorrelation function in autoregressive moving-average processes. *J. Time Ser. Anal.*, 12(3) :193–205, 1991.
- [Cho92] B. S. Choi. *ARMA model identification*. Springer Series in Statistics : Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Cho97] B. S. Choi. A recursive algorithm for solving the spatial Yule-Walker equations of causal spatial AR models. *Statist. Probab. Lett.*, 33(3) :241–251, 1997.
- [Cho00] B. S. Choi. On the asymptotic distributions of mean, autocovariance, autocorrelation, crosscovariance and impulse response estimators of a stationary multidimensional random field. *Comm. Statist. Theory Methods*, 29(8) :1703–1724, 2000.
- [CW75] R. Cairoli and J. B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.*, 134 :111–183, 1975.
- [Dvo72] A. Dvoretzky. Asymptotic normality for sums of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971)*, Vol. II : Probability theory, pages 513–535, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [EPB94] T. Etchison, S. G. Pantula, and C. Brownie. Partial autocorrelation function for spatial processes. *Statist. Probab. Lett.*, 21(1) :9–19, 1994.

- [Guy95] X. Guyon. *Random fields on a network*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995. Modeling, statistics, and applications, Translated from the 1992 French original by Carenne Ludeña.
- [HA92] D. Huang and V. V. Anh. Estimation of spatial ARMA models. *Austral. J. Statist.*, 34(3) :513–530, 1992.
- [HH80] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. Probability and Mathematical Statistics.
- [HN93] E. Ha and H. J. Newton. The bias of estimators of causal spatial autoregressive processes. *Biometrika*, 80(1) :242–245, 1993.
- [Hua92] D. W. Huang. Central limit theorem for two-parameter martingale differences with application to stationary random fields. *Sci. China Ser. A*, 35(4) :413–425, 1992.
- [IM00] G. Ivanoff and E. Merzbach. *Set-indexed martingales*, volume 85 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [ITV02] A. Illig and B. Truong-Van. Conditional lindeberg central limit theorem for strong lattice martingale. <http://www.mathpreprints.com/Statistics/0304010/>, 2002.
- [ITV04] A. Illig and B. Truong-Van. Asymptotic results for spatial ARMA models. <http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Illig/>, 2004.
- [LW83] T. L. Lai and C. Z. Wei. Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least-squares estimates of their parameters. *J. Multivariate Anal.*, 13(1) :1–23, 1983.
- [McL74] D. L. McLeish. Dependent central limit theorems and invariance principles. *Ann. Probability*, 2 :620–628, 1974.
- [McL75] D. L. McLeish. Invariance principles for dependent variables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 32(3) :165–178, 1975.
- [McL77] D. L. McLeish. On the invariance principle for nonstationary mixingales. *Ann. Probability*, 5(4) :616–621, 1977.
- [Nah95] B. Nahapetian. Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(12) :1539–1544, 1995.
- [NP92] B. S. Nahapetian and A. N. Petrosian. Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 17(1) :105–110, 1992.
- [NP95] B. S. Nahapetian and A. N. Petrosian. Limit theorems for martingale-differences random fields. *Izvestiya Natsionaloi Akademii Nauk Armenii Matematika*, 30 :2–17, 1995.

- [PR98] S. Poghosyan and S. Roelly. Invariance principle for martingale-difference random fields. *Statist. Probab. Lett.*, 38(3) :235–245, 1998.
- [SB95] M. Shitan and P. J. Brockwell. An asymptotic test for separability of a spatial autoregressive model. *Comm. Statist. Theory Methods*, 24(8) :2027–2040, 1995.
- [SG02] S. Souchet and X. Guyon. Estimation de Yule-Walker d'un CAR(p) observé à temps discret. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(6) :1093–1100, 2002. En l'honneur de J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, I. Ibragimov.
- [Str72] M. L. Straf. Weak convergence of stochastic processes with several parameters. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971)*, Vol. II : *Probability theory*, pages 187–221, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [Tjø78] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. *Advances in Appl. Probability*, 10(1) :130–154, 1978.
- [Tjø83] D. Tjøstheim. Statistical spatial series modelling. II. Some further results on unilateral lattice processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 15(3) :562–584, 1983.
- [TT83] G. C. Tiao and R. S. Tsay. Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models. *Ann. Statist.*, 11(3) :856–871, 1983.
- [TT84] R. S. Tsay and G. C. Tiao. Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary ARMA models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 79(385) :84–96, 1984.
- [TV95] B. Truong-Van. Invariance principles for semi-stationary sequence of linear processes and applications to ARMA process. *Stochastic Process. Appl.*, 58(1) :155–172, 1995.
- [Wal86] J. B. Walsh. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. In *Lectures in probability and statistics (Santiago de Chile, 1986)*, volume 1215 of *Lecture Notes in Math.*, pages 329–491. Springer, Berlin, 1986.
- [Wal79] J. B. Walsh. Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 46(2) :177–192, 1978/79.
- [WG81] W. A. Woodward and H. L. Gray. On the relationship between the S array and the Box-Jenkins method of ARMA model identification. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 76(375) :579–587, 1981.
- [WZ74] E. Wong and M. Zakai. Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 29 :109–122, 1974.

- [WZ76] E. Wong and M. Zakai. Weak martingales and stochastic integrals in the plane. *Ann. Probability*, 4(4) :570–586, 1976.

Etude asymptotique de certains estimateurs pour des modèles ARMA spatiaux

Résumé

Nous nous intéressons à l'étude asymptotique de certaines statistiques dans des modèles ARMA spatiaux quadrantaux dont les innovations sont supposées être indépendantes et identiquement distribuées ou plus généralement vérifier une propriété de martingales fortes. Après une revue des théorèmes limites pour des martingales spatiales sur un réseau, nous démontrons d'abord un théorème de la limite centrale et un principe d'invariance sous la condition de Lindeberg conditionnelle pour des tableaux de martingales fortes. Afin de mieux situer notre étude des champs ARMA quadrantaux, nous rappelons divers résultats concernant l'estimation et l'identification dans d'autres modèles ARMA spatiaux. Puis, dans le but de sélectionner les ordres et d'estimer les paramètres autorégressifs de modèles ARMA spatiaux quadrantaux, nous introduisons un nouvel estimateur obtenu à partir des équations de Yule-Walker généralisées. Nous démontrons sa consistance et sa normalité asymptotique. Enfin, pour un certain nombre de modèles ARMA spatiaux, nous illustrons leurs comportements par des représentations graphiques et nous présentons une étude de procédures pour les identifier à partir de nombreuses simulations.

Asymptotic study of some estimators for spatial ARMA models

Abstract

We study the asymptotic behaviour of some statistics for spatial quadrantal ARMA models with independent and identically distributed innovations or more generally strong martingale innovations. After giving a review of limit theorems for lattice martingales, we establish a central limit theorem and an invariance principle under the conditional Lindeberg condition for strong lattice martingales. For a better understanding of our study on quadrantal ARMA random fields, we recall various results on estimation and identification for others spatial ARMA models. Then, in order to select orders and estimate autoregressive coefficients in spatial quadrantal ARMA models, we introduce a new estimator based on a derivation of extended Yule-Walker equations and prove that it is consistent and asymptotically normal. Finally, we illustrate with graphic representations the behaviour of several spatial ARMA models and present a study of procedures for their identification.