



**HAL**  
open science

# Etude de perturbations adiabatiques de l'équation de Schrödinger périodique

Magali Marx

► **To cite this version:**

Magali Marx. Etude de perturbations adiabatiques de l'équation de Schrödinger périodique. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2004. Français. NNT : . tel-00007868

**HAL Id: tel-00007868**

**<https://theses.hal.science/tel-00007868>**

Submitted on 30 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ETUDE DE PERTURBATIONS ADIABATIQUES DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER PERIODIQUE

## THÈSE

présentée et soutenue le 6 décembre 2004

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université Paris XIII**

**Discipline : Mathématiques**

par

Magali MARX

### Composition du jury

*Président :* Alain Grigis  
*Rapporteurs :* Alain Joye  
Johannes Sjöstrand  
*Examineurs :* Mouez Dimassi  
Bernard Helffer  
*Directeur de thèse :* Frédéric Klopp



# Table des matières

<b>1</b>		
<b>Introduction</b>		<b>1</b>
1.1	Motivation physique . . . . .	2
1.2	Perturbation des opérateurs périodiques . . . . .	2
1.3	Principales étapes de l'étude . . . . .	2
<b>2</b>		
<b>Les principaux résultats</b>		<b>5</b>
2.1	Le potentiel $V$ . . . . .	5
2.2	La perturbation $W$ . . . . .	6
2.3	Le cas de la croix simple . . . . .	8
2.4	Cas de la croix double . . . . .	14
<b>3</b>		
<b>Schéma de l'étude</b>		<b>21</b>
3.1	Opérateurs périodiques perturbés en dimension 1 . . . . .	21
3.2	Construction de solutions de Jost cohérentes. Coefficient de transmission . . . . .	22
3.3	Prolongement des asymptotiques . . . . .	23
<b>4</b>		
<b>Opérateurs de Schrödinger périodiques en dimension 1</b>		<b>25</b>
4.1	Fonctions de Bloch et structure en bande du spectre . . . . .	25
4.2	Quasi-moment de Bloch . . . . .	26
4.3	Composantes périodiques des solutions de Bloch . . . . .	27
4.4	Les solutions analytiques de Bloch de l'équation (4.1) . . . . .	27
4.5	Formules utiles . . . . .	28

<b>5</b>		
<b>Les principaux outils de la méthode WKB complexe</b>		<b>29</b>
5.1	Les domaines canoniques . . . . .	29
5.2	Solutions canoniques de Bloch . . . . .	31
5.3	La notion de cohérence . . . . .	32
5.4	Le théorème de la méthode WKB complexe sur un domaine compact . . . . .	32
5.5	Les objets géométriques principaux de la méthode WKB complexe . . . . .	33
5.6	Construction de déterminations du moment dans le cas de la croix simple et de la croix double . . . . .	34
5.7	Lignes de Stokes . . . . .	40
5.8	La construction d'une base cohérente à l'asymptotique standard autour de la croix	42
5.9	Compléments pour le cas où $\kappa(\varphi_r^-) = \pi$ . . . . .	51
<b>6</b>		
<b>Solutions de Jost cohérentes de l'équation (1.3).</b>		<b>53</b>
6.1	Construction des fonctions de Jost . . . . .	53
6.2	Propriétés de $F_-^g$ . . . . .	55
6.3	Renormalisation des fonctions $F_-^g$ et $F_+^d$ . . . . .	57
6.4	Quelques remarques . . . . .	59
<b>7</b>		
<b>Le théorème WKB sur des domaines non compacts</b>		<b>61</b>
7.1	Théorème de prolongement sur des domaines non compacts . . . . .	61
7.2	Construction d'une $\delta$ -chaîne de domaines strictement canoniques . . . . .	65
<b>8</b>		
<b>Calcul du coefficient de transmission dans le cas d'une croix.</b>		<b>67</b>
8.1	Hypothèses. Notations . . . . .	67
8.2	Méthode de calcul des asymptotiques des wronskiens . . . . .	69
8.3	Calcul du coefficient $a_g^-$ . . . . .	71
8.4	Calcul du coefficient $a_d^+$ . . . . .	74
<b>9</b>		
<b>Valeurs propres associées à la croix simple</b>		<b>77</b>
9.1	Démonstration du Lemme 2.2 . . . . .	77

---

9.2	Equation aux valeurs propres . . . . .	81
9.3	Localisation des valeurs propres . . . . .	86
9.4	Application à la formule de trace . . . . .	88
9.5	Développement asymptotique des valeurs propres . . . . .	91
<hr/>		
<b>10</b>		
	<b>Etude de la croix double</b>	<b>93</b>
<hr/>		
10.1	Compléments sur les coefficients de phases, et d'actions . . . . .	93
10.2	Démonstration du Théorème 2.2 . . . . .	95
10.3	Localisation des valeurs propres : démonstration des Théorèmes 2.3 et 2.4 . . . . .	102
<hr/>		
<b>11</b>		
	<b>Démonstrations des résultats de la méthode WKB sur des domaines non compacts</b>	<b>105</b>
<hr/>		
11.1	Démonstration de la Proposition 7.1 . . . . .	105
11.2	Démonstration du Théorème de prolongement 7.1 . . . . .	113
<hr/>		
<b>12</b>		
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>115</b>
<hr/>		
12.1	Généralisation au problème à $n$ puits . . . . .	115
12.2	Extensions techniques de la méthode WKB . . . . .	115
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>



# 1

## Introduction

L'objectif de ma thèse est d'étudier le spectre d'opérateurs de Schrödinger périodiques perturbés, en dimension 1. Précisément, pour  $\varepsilon > 0$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ , on considère l'opérateur défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  par :

$$H_{\varphi,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(\varepsilon x + \varphi)], \quad (1.1)$$

lorsque  $V$  est une fonction périodique de carré localement intégrable et  $W$  décroît suffisamment vite vers 0 à l'infini.

L'opérateur  $H_{\varphi,\varepsilon}$  apparaît comme une perturbation d'un opérateur périodique  $H_0$  :

$$H_0 = -\Delta + V. \quad (1.2)$$

Le spectre de  $H_0$  est absolument continu et est constitué d'intervalles réels appelés bandes séparés par des lacunes.

Si la perturbation  $W$  est relativement compacte par rapport à  $H_0$ , il apparaît dans les lacunes de  $H_0$  des valeurs propres [39, 31]. On se propose de localiser ces valeurs propres appelées niveaux d'impureté.

L'équation

$$H_{\varphi,\varepsilon}\psi = E\psi \quad (1.3)$$

dépend de deux paramètres  $\varepsilon$  et  $\varphi$ . On se place dans le cadre de la limite adiabatique où le paramètre  $\varepsilon$  est petit. La périodicité de  $V$  implique que les valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  sont  $\varepsilon$ -périodiques en  $\varphi$ . On choisira donc le paramètre  $\varphi$  complexe et on supposera que  $W$  est analytique dans une bande du plan complexe.

Lorsque le potentiel  $V$  est nul, le problème a été largement étudié. Par exemple, le cas où  $W$  est un puits de potentiel est bien connu : dans l'intervalle  $]\inf_{\mathbb{R}} W, 0[$ , il y a une suite quantifiée de valeurs propres [9]. On donne une description similaire des valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  dans un intervalle  $J$  hors du spectre de  $H_0$ . Précisément, lorsque  $W$  et  $J$  vérifient de plus quelques conditions supplémentaires décrites dans les paragraphes 2.2.1, 2.2.3 et 2.3.1 du chapitre 2, on montre que les valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  oscillent autour de certaines énergies quantifiées par une condition de type Bohr-Sommerfeld ; l'amplitude des oscillations est exponentiellement petite et est déterminée par un coefficient tunnel.

Des perturbations plus compliquées du laplacien ont été étudiées. Le cas où  $W$  est un double puits est notamment un problème intéressant [34, 20, 26, 19]. Ces études ont en particulier mis



en évidence des phénomènes de « splitting » entre les valeurs propres associées à chaque puits. On démontre au chapitre 10 des résultats analogues pour  $H_{\varphi,\varepsilon}$ .

## 1.1 Motivation physique

L'opérateur  $H_{\varphi,\varepsilon}$  est un des modèles importants de la physique du solide. La fonction  $\psi$  est la fonction d'onde d'un électron dans un cristal avec des impuretés.  $V$  représente le potentiel du cristal parfait : il est périodique. Le potentiel  $W$  modélise la perturbation induite par les impuretés. Dans les semi-conducteurs notamment, cette perturbation est à variation lente ([40], [2] chap. 29) ; il est donc naturel de se placer dans le cadre de la limite semi-classique, c'est à dire lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Les valeurs propres du problème à un électron forment une échelle de niveaux d'énergie quantifiés. La statistique de Fermi-Dirac appliquée à ces niveaux d'énergie pour une particule permet de développer une théorie du transport similaire à celle des gaz ou des métaux ([2] chap. 28, [3] chap. 15, [22] chap. 8).

## 1.2 Perturbation des opérateurs périodiques

Dans  $\mathbb{R}^d$ , la théorie spectrale des perturbations d'un opérateur périodique

$$H_P = H_0 + P \tag{1.4}$$

a donné lieu à de nombreuses études avec des points de vue différents.

La caractérisation de l'existence des valeurs propres n'est pas aisée : en particulier, en dimension quelconque, [23] met en évidence la présence de valeurs propres plongées dans les bandes. Sur l'axe réel, la situation est plus claire. Si la perturbation est intégrable, les seules valeurs propres possibles sont dans l'adhérence des lacunes ([32, 21]).

Pour dénombrer les valeurs propres dans les lacunes, l'étude des fonctions de comptage a de multiples applications. Dans le cas des grandes constantes de couplage, c'est-à-dire lorsque  $P = \lambda U$ , et  $\lambda \rightarrow +\infty$ , [1, 4, 35] ont étudié  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{tr}(P_{[E,E']}^{(\lambda)})$ , où  $P_{[E,E']}^{(\lambda)} = 1_{[E,E']} H_\lambda$  (projecteur spectral de  $H_\lambda$  sur un intervalle  $[E, E']$  d'une lacune de  $H_0$ ). Dans le cadre semi-classique, [8] a donné, sous des hypothèses voisines des miennes, un développement asymptotique de  $\text{tr}[f(H_{\varphi,\varepsilon})]$ , pour  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $\text{Supp } f$  dans un gap de  $H_0$ . Ces formules asymptotiques de trace sont valables en toute dimension mais peuvent s'avérer insuffisantes. Dans l'asymptotique obtenue dans [8] par exemple, la précision du reste dépend des dérivées successives de la fonction  $f$  et ne donne pas une localisation exponentiellement précise des valeurs propres.

En dimension 1, la théorie de la diffusion bien connue dans le cas  $V = 0$  a été développée dans ce cadre plus général [16, 27]. Précisément, on construit des solutions particulières de l'équation (1.4) tendant vers 0 en  $\pm\infty$ , appelées récessives. Les valeurs propres de l'équation (1.3) sont alors simplement données par une relation de colinéarité entre ces solutions.

## 1.3 Principales étapes de l'étude

On donne ici les grandes lignes qui vont guider ce travail. Une des difficultés principales de l'étude est de prendre en compte la dépendance de l'équation en les paramètres  $\varepsilon$  et  $\varphi$  et, en particulier, de découpler la variable « rapide »  $x$  et la variable « lente »  $\varepsilon x$ . L'idée nouvelle

développée dans [10, 12] est la suivante : on construit des solutions particulières de (1.3), vérifiant une relation dite de cohérence :

$$f(x+1, \varphi, E, \varepsilon) = f(x, \varphi + \varepsilon, E, \varepsilon). \quad (1.5)$$

Cette relation permet de relier le comportement en  $x$  et le comportement en  $\varphi$ .

Pour trouver une solution récessive de (1.3), il suffit de trouver une solution de (1.3) qui vérifie (1.5) et qui tend vers 0 quand  $|\operatorname{Re} \varphi|$  tend vers  $+\infty$ . On commence donc par construire, sur la demie-bande horizontale  $\{\varphi \in \mathbb{C} ; \varphi \in ]-\infty, -A] + i[-Y, Y]\}$ , une solution  $h_-^g$  de l'équation (1.3) qui est cohérente et tend vers 0 quand  $\operatorname{Re} \varphi$  tend vers  $-\infty$ . De même, on construit  $h_+^d$  pour  $\{\varphi \in \mathbb{C} ; \varphi \in [A, +\infty[ + i[-Y, Y]\}$  (chapitres 6 et 7). Ces deux fonctions sont récessives en la variable  $x$ . La caractérisation des valeurs propres est alors simplement donnée par la relation de colinéarité entre  $h_-^g$  et  $h_+^d$  :

$$w(h_-^g, h_+^d) = 0.$$

Dans l'équation ci-dessus,  $w$  désigne le wronskien dont la définition est rappelée en (3.4).

Il reste alors à calculer  $w(h_-^g, h_+^d)$ . Pour cela, on utilise la méthode WKB complexe établie par A. Fedotov et F. Klopp. Cette méthode consiste principalement à décrire certains domaines du plan complexe, appelés domaines canoniques, sur lesquels on construit des fonctions vérifiant (1.5) et admettant de plus une asymptotique particulière :

$$f_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int^{\varphi} \kappa} (\psi_{\pm}(x, \varphi, E) + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Dans la relation (1.6), la fonction  $\kappa$  est une fonction analytique multi-valuée définie en (2.4) ; les fonctions  $\psi_{\pm}$  sont des solutions particulières de l'équation

$$H_0 \psi = (E - W(\varphi)) \psi,$$

analytiques en  $\varphi$  sur ces domaines canoniques, appelées solutions de Bloch. On justifiera l'existence de telles solutions au paragraphe 5.2 du chapitre 5.

A. Fedotov et F. Klopp ne prouvent l'existence de fonctions avec l'asymptotique (1.6) que sur des domaines compacts du plan complexe des  $\varphi$ . Nous étendrons certains résultats à des bandes infinies du plan complexe. La relation de cohérence (1.5) implique en fait que la fonction  $h_-^g$  vérifie à gauche de  $-A$  l'asymptotique (1.6) et que  $h_+^d$  vérifie une propriété analogue à droite de  $A$ . Le calcul de  $w(h_-^g, h_+^d)$  ainsi formulé est alors similaire aux calculs traités par A. Fedotov et F. Klopp. Il s'agit de trouver un domaine suffisamment grand du plan complexe dans lequel on connaît le wronskien de  $h_-^g$  et  $h_+^d$ .

Les techniques mises en place dans leurs travaux mettent en évidence des obstacles topologiques qui modifient l'asymptotique (1.6) et qui dépendent de l'allure de  $W$  et de  $E$ .

Mon étude envisagera essentiellement deux cas pour  $W$ , dont les exemples les plus parlants sont respectivement le simple et le double puits. Les hypothèses précises sont données aux paragraphes 2.2 et 2.3.1 du chapitre 2.



## 2

# Les principaux résultats

Dans ce chapitre, on décrit le cadre général et les résultats principaux de la thèse. On commence par présenter les hypothèses concernant les potentiels  $V$  et  $W$ , ainsi que l'intervalle  $J$ . Ces hypothèses sont essentiellement de trois types. Tout d'abord, l'étude demande certaines hypothèses de décroissance sur le potentiel, nécessaires pour mettre en place la théorie de la diffusion. D'autre part, étant donné les hypothèses imposées par la méthode WKB complexe de [10], on exigera que  $W$  soit analytique dans un certain domaine du plan complexe. En dernier lieu, il faut fixer le cadre géométrique, et en particulier l'allure de l'ensemble  $(E - W)^{-1}(\mathbb{R})$  lorsque  $E$  est réel.

Au vu des études menées dans le cas  $V = 0$  ([18, 6, 19]), deux exemples de potentiel  $W$  ont principalement motivé ce travail : le simple et le double puits.

Pour chaque cas, on énonce une équation aux valeurs propres qui s'écrit en termes d'objets géométriques construits à partir de  $H_0$ ,  $W$  et  $E$  : les intégrales de phases et d'actions, définies précisément aux paragraphes 2.3.2 et 2.4.4 de ce chapitre.

### 2.1 Le potentiel $V$

On suppose que  $V$  a les propriétés suivantes :

**(H<sub>V,p</sub>)  $V$  est  $L^2_{\text{loc}}$ , 1-périodique et à valeurs réelles.**

On considère alors (1.3) comme une perturbation de l'équation périodique :

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = (E - W(\varphi))\psi(x). \quad (2.1)$$

On utilisera donc certains résultats connus de la théorie des opérateurs périodiques, que l'on présente en détail au chapitre 4.

L'opérateur  $H_0$  défini en (1.2) est un opérateur auto-adjoint sur  $H^2(\mathbb{R})$ . Le spectre de  $H_0$  est formé d'intervalles réels :

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E_{2n+1}, E_{2n+2}], \quad (2.2)$$

où les  $\{E_n\}$  vérifient :

$$E_1 < E_2 \leq E_3 < E_4 \dots E_{2n} \leq E_{2n+1} < E_{2n+2} \dots, \quad E_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

Ces intervalles  $[E_{2n+1}, E_{2n+2}]$  sont tous de longueur positive mais peuvent se toucher. Ils sont appelés zones spectrales. On posera  $E_0 = -\infty$ . Les intervalles  $(E_{2n}, E_{2n+1})$  sont les lacunes. Lorsque  $E_{2n} \neq E_{2n+1}$ , on dit que la lacune  $(E_{2n}, E_{2n+1})$  est ouverte.

On supposera de plus que  $V$  est tel que :

**(H<sub>V,g</sub>) Toutes les lacunes de  $\mathbf{H}_0$  sont ouvertes.**

Revenons quelque peu sur l'hypothèse  $(H_{V,g})$ . Cette hypothèse est assez « générique ». Par exemple, s'il y a un nombre fini de lacunes, alors  $V$  est une fonction analytique réelle sur  $\mathbb{R}$ . Pour les détails et des compléments, on renvoie à [29], section XIII.16.

Un des objets principaux de la théorie des opérateurs périodiques est le quasi-moment de Bloch noté  $k$  (voir paragraphe 4.2 du chapitre 4). Cette fonction de l'énergie à valeurs complexes est multivaluée et admet un point de branchement en chaque borne du spectre  $E_n$  ; ces points de branchement sont de type racine carrée. En fait, cette fonction  $k$  généralise au cas  $V$  périodique, le rôle joué par la racine carrée pour le laplacien libre ; on trouvera des exemples dans les études de [9, 17]. Le lecteur trouvera plus de détails sur cette fonction  $k$  au chapitre 4. Enfin, on notera :

**(H<sub>V</sub>)  $V$  vérifie  $(H_{V,p})$  et  $(H_{V,g})$ .**

## 2.2 La perturbation $W$

### 2.2.1 Hypothèses de régularité

On suppose que  $W$  est tel que :

**(H<sub>W,r</sub>) Il existe  $Y > 0$  tel que  $W$  est analytique dans la bande  $S_Y = \{|\operatorname{Im}(\xi)| \leq Y\}$  et il existe  $s > 1$  et  $C > 0$  tels que pour  $z \in S_Y$ , on a :**

$$|W(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|^s}. \quad (2.3)$$

Ces deux hypothèses sont essentielles pour mettre en place la méthode WKB complexe. L'analyticité est l'un des points clefs dans la théorie de [10]. La condition de décroissance à l'infini supplée à la compacité découlant de l'hypothèse de périodicité de [10].

Avant d'énoncer les hypothèses géométriques sur  $W$ , on introduit le moment complexe, essentiel dans la méthode WKB. Celui-ci fait apparaître en particulier de façon tout-à-fait naturelle l'importance de  $W^{-1}(\mathbb{R})$ .

### 2.2.2 Le moment complexe et ses points de branchement

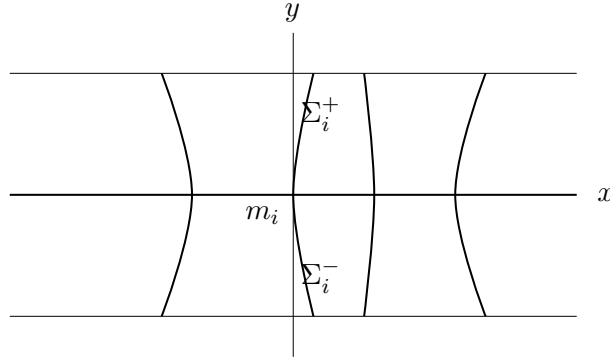
On note :

$$\mathbb{C}_+ = \{\varphi \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} \varphi \geq 0\} \text{ et } \mathbb{C}_- = \{\varphi \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} \varphi \leq 0\}.$$

Pour l'équation (1.3), on considère la fonction analytique  $\kappa$  définie par la relation

$$\kappa(\varphi) = k(E - W(\varphi)), \quad (2.4)$$

où la fonction  $k$  est le quasi-moment de Bloch (voir section 2.1). La fonction  $\kappa$  est appelée moment complexe. Elle joue un rôle crucial dans les problèmes perturbés adiabatiquement, voir [5, 10].


 FIG. 2.1 – Une partie de  $W^{-1}(\mathbb{R}) = \{(x, y) ; W(x + i.y) \in \mathbb{R}\}$ 

On définit :

$$\Upsilon(E) = \{\varphi \in S_Y ; \exists n \in \mathbb{N}^* ; E - W(\varphi) = E_n\}. \quad (2.5)$$

L'ensemble des points de branchement de  $\kappa$  est clairement inclus dans  $\Upsilon(E)$ . Le résultat suivant donne une caractérisation des points de  $\Upsilon(E)$  qui sont des points de branchement de  $\kappa$ . On rappelle que  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

**Lemme 2.1.** *Soit  $\varphi \in \Upsilon(E)$ . Si  $\inf\{q ; W^{(q)}(\varphi) \neq 0\} \in 2\mathbb{N} + 1$ , alors  $\varphi$  est un point de branchement pour  $\kappa$ .*

Ce résultat est une conséquence directe du fait que les bords du spectre de  $H_0$  sont des points de branchement en racine carrée pour  $k$ .

### 2.2.3 Hypothèses géométriques

Le spectre  $\sigma(H_0)$  est composé d'intervalles réels. Soit  $E \in \mathbb{R}$ . Si  $E - W(\varphi)$  est dans le spectre  $\sigma(H_0)$ , alors  $W(\varphi)$  est réel. L'étude spectrale de (1.3) est donc étroitement liée à la géométrie de  $W^{-1}(\mathbb{R})$ .

On donne maintenant les hypothèses géométriques sur  $W$ . Ces hypothèses sont essentiellement une description de  $W^{-1}(\mathbb{R})$  dans une bande autour de l'axe réel. Dans toute la suite, on appelle ligne strictement verticale une courbe dont la pente est toujours strictement positive. On renvoie au paragraphe 5.1.2 du chapitre 5 pour une définition plus précise.

**(H<sub>W,g</sub>)**

1.  $W|_{\mathbb{R}}$  est réel et a un nombre fini d'extrema qui sont tous non dégénérés.
2. Il existe  $Y > 0$  et une suite finie de lignes strictement verticales  $\{\Sigma_i\}_{i \in \{1..p\}}$ , chacune passant par un extremum réel de  $W$ , tels que :

$$W^{-1}(\mathbb{R}) \cap S_Y = \bigcup_{i \in \{1..p\}} \Sigma_i \cup \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

### 2.2.4 Quelques remarques

- Etant donné que  $W$  est analytique et réel sur  $\mathbb{R}$ , on sait que  $W(\bar{\varphi}) = \overline{W(\varphi)}$ ; en particulier,  $W^{-1}(\mathbb{R})$  est symétrique par rapport à l'axe réel.
- Certaines hypothèses de comportement asymptotique de  $W$  assurent que le point (1) de  $(H_{W,g})$  implique (2). C'est le cas par exemple si :

$$\exists s > 1 \quad W(z) \sim \frac{1}{1 + |z|^s}, x \rightarrow \pm\infty.$$

- On pose  $\Sigma_i^+ = \Sigma_i \cap \mathbb{C}_+$  et  $\Sigma_i^- = \Sigma_i \cap \mathbb{C}_-$ .
- La figure 2.1 montre un exemple de la pré-image du réel par un tel potentiel.

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 1.3 du chapitre 1, on recouvre la bande  $S_Y$  par des domaines canoniques. Sur ces domaines, on construit des fonctions cohérentes à l'asymptotique standard (c'est à dire vérifiant (1.5) et (1.6)). Pour faire le lien entre les bases associées à des domaines différents, il faut en particulier contourner les points de branchement (pour des études similaires, on renvoie à [17, 12]). On va donc énoncer certaines hypothèses plus précises sur la configuration des points de branchement ; ces hypothèses permettent de fixer en particulier  $(E - W)^{-1}(\sigma(H_0))$ . Les résultats spectraux obtenus par A. Fedotov et F. Klopp pour l'équation périodique perturbée par un potentiel périodique ont clairement mis en évidence l'importance des positions relatives de  $J$  et  $\sigma(H_0)$ .

## 2.3 Le cas de la croix simple

### 2.3.1 Hypothèses sur l'intervalle $J$

On décrit maintenant l'intervalle d'énergie  $J$  où l'on étudie la famille d'équations (1.3).

#### Enoncé

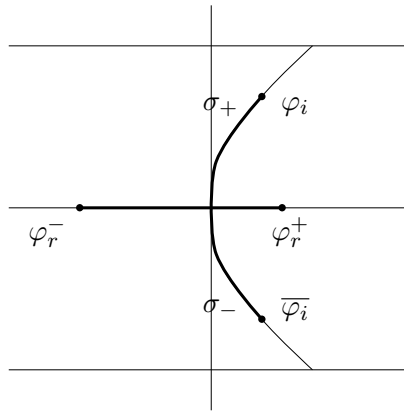
On suppose que l'intervalle  $J$  est un intervalle compact vérifiant :

#### (H<sub>J</sub>)

1. Pour tout  $E \in J$ , il existe une seule bande  $B$  de  $\sigma(H_0)$  telle que  $(E - W)^{-1}(B)$  est non vide.
2. Pour tout  $E \in J$ ,  $C := (E - W)^{-1}(B)$  est connexe et compact et  $(E - W)^{-1}(\overset{\circ}{B})$  contient exactement un extremum réel de  $W$ .

#### Conséquences

- Ces hypothèses impliquent que l'intervalle  $J$  est inclus dans un gap.
- La bande  $B$  intervenant dans le point (1) de  $(H_J)$  dépend de  $E$  a priori. Mais puisque  $J$  est connexe, la bande  $B$  est la même pour tous les  $E$  dans  $J$ .
- De même, l'extremum de  $W$  intervenant dans le point (2) de  $(H_J)$  dépend également de  $E$ , mais par connexité, c'est le même pour tous les  $E$  dans  $J$ .


 FIG. 2.2 -  $(E - W)^{-1}(\sigma(H_0))$ 

### Notations

On pose alors  $B = [E_{2n-1}, E_{2n}]$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

De plus, quitte à modifier  $W$  ou  $\varphi$ , on peut supposer que l'extremum de  $W$  intervenant dans (2) est 0.

L'hypothèse  $(H_J)$  a alors les conséquences suivantes :

1. Pour tout  $E \in J$ ,  $(E - W)^{-1}(\sigma(H_0)) \cap S_Y = (E - W)^{-1}(B) \cap S_Y$ .
2. Soit  $E_r \in \{E_{2n-1}, E_{2n}\}$  l'extrémité de  $B$  vérifiant  $E_r \in (E - W)(\mathbb{R})$  pour tout  $E$  dans  $J$ . On définit aussi  $E_i$  tel que  $\{E_i, E_r\} = \{E_{2n-1}, E_{2n}\}$ .
3. Il y a exactement quatre points de branchement  $(\varphi_r^-, \varphi_r^+) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)$  dans  $S_Y$  associés à  $E_r$  et  $E_i$ . On choisit les notations de telle façon que :

$$E - W(\varphi_r^+) = E_r = E - W(\varphi_r^-), \quad \varphi_r^- < 0 < \varphi_r^+,$$

$$E - W(\varphi_i) = E - W(\bar{\varphi}_i) = E_i, \quad \text{Im } \varphi_i > 0.$$

4. Il existe une ligne strictement verticale  $\sigma$  passant par 0 et reliant  $\bar{\varphi}_i$  et  $\varphi_i$ , telle que  $(E - W)^{-1}(B) \cap S_Y = [\varphi_r^-, \varphi_r^+] \cup \sigma$ . On pose alors  $\sigma_+ = \sigma \cap \mathbb{C}_+$  et  $\sigma_- = \sigma \cap \mathbb{C}_-$ . On notera  $\Sigma = (E - W)^{-1}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}$ . La ligne  $\sigma$  vérifie  $\sigma \subset \Sigma$ .

On a illustré ces faits dans la figure 2.2.

### Quelques exemples

On appelle  $C$  la croix.

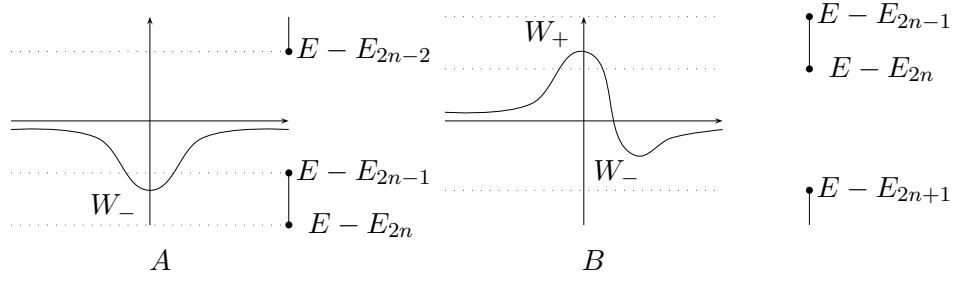
Pour mettre en lumière ces hypothèses peu explicites, on va maintenant donner quelques exemples ainsi que des conditions nécessaires sur l'intervalle  $J$ . On a représenté quelques exemples dans la figure 2.3.

- Le cas le plus simple est lorsque  $W$  admet un unique minimum non dégénéré  $W_-$  (cf. figure 2.3 A).

Concrètement, on peut penser à l'exemple :

$$W(x) = \frac{-\alpha}{1+x^2}, \quad \alpha > 0,$$




 FIG. 2.3 – Exemples de potentiel  $W$ 

Alors, si on fixe  $B = [E_{2n-1}, E_{2n}]$  et  $Y < 1$ , on peut choisir  $J = [a, b]$  tel que :

$$\max\{E_{2n-2}, E_{2n-1} - \alpha, E_{2n} - \frac{\alpha}{1 - Y^2}\} < a < b < \min\{E_{2n-1}, E_{2n} - \alpha, E_{2n+1} - \frac{\alpha}{1 - Y^2}\}$$

- On peut également envisager le cas où  $W$  admet un maximum  $W_+$  et un minimum  $W_-$ , lorsque  $J$  est choisi pour ne voir la bande qu'autour du maximum (cf. figure 2.3 B). Concrètement, prenons l'exemple suivant :

$$W(x) = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + (x - 5)^2}$$

$$J \subset ]E_{2n-1} + W_+, E_{2n-2} + W_+[ \cup ]E_{2n}, E_{2n+1} + W_-[, \quad |J| \leq |E_{2n-2} - E_{2n-1}|$$

Détaillons un peu cet exemple. Le choix de  $Y$  est un peu plus compliqué ici. L'étude de l'équation  $W(u) = w$  pour  $w > W_+$  montre qu'il existe une unique solution dans la bande  $\{\text{Im } u \in ]0, 1[ \}$  que l'on note  $Z(w)$ ; on choisit donc  $Y \in ]\sup_{E \in J} Z(E - E_{2l-1}), \inf_{E \in J} Z(E - E_{2l-2})[$ .

- On verra par la suite que l'on pourrait adapter notre méthode avec des hypothèses plus faibles, comme par exemple lorsqu'on ne voit pas les points de branchement  $\varphi_i$  et  $\bar{\varphi}_i$  (croix non entière), c'est-à-dire lorsque la ligne verticale  $\sigma$  ne contient pas de points de branchement de  $\kappa$ . On renvoie au paragraphe 2.3.3.
- Pour des raisons de simplicité, on a supposé que tous les extrema de  $W$  étaient non dégénérés. Il suffit en fait de supposer que seul l'extremum de  $W$  au niveau de la croix, c'est-à-dire en 0, est non dégénéré.
- On pourrait affaiblir l'hypothèse  $(H_{V,g})$ . Il suffit que les lacunes contigües à la bande  $B$  intervenant dans  $(H_J)$  soient ouvertes.

### 2.3.2 Phases et action

Dans ce paragraphe on définit le coefficient tunnel  $t$  et les phases  $\Phi$  et  $\Phi_d$ ; ces objets analytiques ont un rôle essentiel dans la localisation des valeurs propres. Ces coefficients s'expriment en particulier comme des intégrales du moment complexe  $\kappa$  dans le plan des  $\varphi$ .

Dans  $S_Y$ , on considère  $\kappa$  une détermination du moment complexe continue sur la croix  $C$ .

### Définition et propriétés

On introduit maintenant l'action  $S$  et les phases  $\Phi$  et  $\Phi_d$  associées à la détermination  $\kappa$ .

**Définition 2.1.** On définit la phase :

$$\Phi(E) = \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} (\kappa(u) - \kappa(\varphi_r^-)) du, \quad (2.7)$$

l'action :

$$S(E) = i \int_{\sigma} (\kappa(u) - \kappa(\varphi_i)) du, \quad (2.8)$$

la seconde phase :

$$\Phi_d(E) = \int_{\varphi_r^-}^0 (\kappa(u) - \kappa(\varphi_r^-)) du + \int_{\varphi_r^+}^0 (\kappa(u) - \kappa(\varphi_r^+)) du + \int_{\sigma_+} (\kappa(u) - \kappa(\varphi_i)) du - \int_{\sigma_-} (\kappa(u) - \kappa(\overline{\varphi_i})) du, \quad (2.9)$$

les intégrales étant considérées dans le sens des parties imaginaires croissantes.

Dans le chapitre 9, on démontre le résultat suivant sur le comportement des coefficients  $\Phi$ ,  $S$  et  $\Phi_d$ .

**Lemme 2.2.** *Il existe une détermination  $\tilde{\kappa}_i$  telle que les intégrales de phases et d'action ont les propriétés suivantes :*

1. *Les fonctions  $E \mapsto \Phi(E)$ ,  $E \mapsto S(E)$ ,  $E \mapsto \Phi_d(E)$  sont analytiques dans un voisinage complexe de l'intervalle  $J$ .*
2.  *$\Phi$ ,  $S$ ,  $\Phi_d$  prennent des valeurs réelles sur  $J$ .  $\Phi$  et  $S$  sont positives sur  $J$ .*
3.  *$\forall E \in J$ ,  $\Phi'(E)(E_i - E_r) > 0$ ,  $S(E) \leq 2\pi \operatorname{Im}(\varphi_i(E))$ .*

On définit le *coefficient de tunnel* :

$$t(E, \varepsilon) = \exp(-S(E)/\varepsilon). \quad (2.10)$$

Le coefficient  $t$  est exponentiellement petit en vertu du point (2) du Lemme 2.2.

### Remarque

La phase et l'action sont simplement une généralisation de coefficients du type  $\int \sqrt{E - W(\varphi)} d\varphi$ , bien connus lorsque  $V = 0$  (on renvoie par exemple à [9, 17, 28]).

On notera également que le coefficient  $\Phi$  fait intervenir uniquement la valeur de  $W$  sur le réel, alors que  $S$  et  $\Phi_d$  dépendent des valeurs prises par  $W$  sur le complexe et donc de l'analyticité de  $W$ .

### 2.3.3 Les valeurs propres dans le cas de la croix simple

On va maintenant énoncer l'équation aux valeurs propres de l'équation (1.3).

### Caractérisation des valeurs propres

**Proposition 2.1.** *On suppose que les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H_J)$  sont vérifiées. Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , un voisinage  $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$  de  $J$ , deux fonctions  $(E, \varepsilon) \mapsto \tilde{\Phi}(E, \varepsilon)$  et  $(E, \varepsilon) \mapsto \tilde{\Phi}_d(E, \varepsilon)$  définies sur  $\mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$  et deux fonctions  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto F(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto R_2(\varphi, E, \varepsilon)$  définies sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$  telles que :*

1.  $E$  est une valeur propre de  $H_{\varphi, \varepsilon}$  si et seulement si :

$$F(\varphi, E, \varepsilon) = 0$$

2. La fonction  $F$  vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, \forall E \in \mathcal{V}, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad \overline{F(\varphi, \overline{E}, \varepsilon)} = F(\varphi, E, \varepsilon)$$

3. La fonction  $\varphi \mapsto F(\varphi, E, \varepsilon)$  est  $\varepsilon$ -périodique et son développement en série de Fourier s'écrit :

$$F(\varphi, E, \varepsilon) = \cos\left(\frac{\tilde{\Phi}(E)}{\varepsilon}\right) + e^{-S(E)/\varepsilon} \cos\left(\frac{\tilde{\Phi}_d(E)}{\varepsilon} + \frac{2\pi\varphi}{\varepsilon} + \rho\right) + e^{-S(E)/\varepsilon} R_2(\varphi, E, \varepsilon) \quad (2.11)$$

4. Les fonctions  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{\Phi}_d$  vérifient les propriétés suivantes pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  :

- $E \mapsto \tilde{\Phi}(E, \varepsilon)$  et  $E \mapsto \tilde{\Phi}_d(E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $\mathcal{V}$ .
- $\tilde{\Phi}(E, \varepsilon) = \Phi(E) + o(\varepsilon)$  et  $\tilde{\Phi}_d(E, \varepsilon) = \Phi_d(E) + o(\varepsilon)$  uniformément pour  $E \in \mathcal{V}$ .

5. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , la fonction  $(\varphi, E) \mapsto R_2(\varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ . De plus, il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , et tout  $E$  dans  $\mathcal{V}$ , la fonction  $R_2$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\int_0^\varepsilon R_2(u, E, \varepsilon) du = 0, \quad \int_0^\varepsilon R_2(u, E, \varepsilon) e^{\frac{2i\pi u}{\varepsilon}} du = 0, \quad \int_0^\varepsilon R_2(u, E, \varepsilon) e^{\frac{-2i\pi u}{\varepsilon}} du = 0,$$

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}, E \in \mathcal{V}} |R_2(\varphi, E, \varepsilon)| \leq e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}.$$

Les fonctions  $\Phi$ ,  $\Phi_d$ ,  $S$  sont définies au Lemme 2.2.  $\rho$  est un coefficient réel indépendant de  $E, \varphi, \varepsilon$  et défini en (9.6).

### Les niveaux d'énergie quantifiés

On commence par s'intéresser aux zéros de l'équation :

$$\cos \frac{\tilde{\Phi}(E, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0. \quad (2.12)$$

On a la description suivante :

**Lemme 2.3.** *L'équation (2.12) admet dans  $J$  un nombre fini de zéros que l'on note  $\{E^{(l)}(\varepsilon)\}$  pour  $l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}$  :*

$$\frac{\tilde{\Phi}(E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon)}{\varepsilon} = l\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}. \quad (2.13)$$

De plus, il existe une constante  $c > 0$  telle que les zéros  $\{E^{(l)}(\varepsilon)\}$  vérifient :

$$\frac{1}{c} \varepsilon < |E^{(l+1)}(\varepsilon) - E^{(l)}(\varepsilon)| < c\varepsilon, \quad \forall l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon) - 1\} \quad (2.14)$$

## Asymptotiques des valeurs propres

On décrit maintenant les valeurs propres pour la croix simple.

**Théorème 2.1.** *Soient  $V$ ,  $W$  et  $J$  vérifiant les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H_J)$ .*

*Il existe un voisinage complexe  $\mathcal{V}$  de  $J$ , un réel  $\varepsilon_0 > 0$  et deux fonctions  $\widetilde{\Phi}$  et  $\widetilde{\Phi}_d$  à valeurs complexes, définies sur  $\mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$  tels que :*

*- Les fonctions  $\widetilde{\Phi}(\cdot, \varepsilon)$  et  $\widetilde{\Phi}_d(\cdot, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $\mathcal{V}$ . De plus,  $\widetilde{\Phi}$  et  $\widetilde{\Phi}_d$  vérifient :*

$$\widetilde{\Phi}(E, \varepsilon) = \Phi(E) + h_0(E, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Phi}_d(E, \varepsilon) = \Phi_d(E) + \varepsilon\rho + h_1(E, \varepsilon),$$

*où  $\rho$  est un coefficient réel,  $h_0(E, \varepsilon) = o(\varepsilon)$  et  $h_1(E, \varepsilon) = o(\varepsilon)$  uniformément en  $E \in \mathcal{V}$ .*

*- Si on considère les niveaux d'énergie  $\{E^{(l)}(\varepsilon)\}$  dans  $J$  définis par (2.13), alors, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,*

*- le spectre de  $H_{\varphi, \varepsilon}$  dans  $J$  est constitué d'un nombre fini de valeurs propres, c'est-à-dire*

$$\sigma(H_{\varphi, \varepsilon}) \cap J = \bigcup_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} \{E_l(\varphi, \varepsilon)\}, \quad (2.15)$$

*- ces valeurs propres vérifient*

$$E_l(\varphi, \varepsilon) = E^{(l)}(\varepsilon) + \varepsilon(-1)^{l+1} \frac{t(E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon)}{\Phi'(E^{(l)}(\varepsilon))} \left[ \cos \left( \frac{\widetilde{\Phi}_d(E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon) + 2\pi\varphi}{\varepsilon} \right) + r(E^{(l)}(\varepsilon), \varphi, \varepsilon) \right], \quad (2.16)$$

*où il existe une constante  $c > 0$  telle que :*

$$\sup_{E \in \mathcal{V}, \varphi \in \mathbb{R}} |r(E, \varphi, \varepsilon)| < \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{\varepsilon}}.$$

On démontrera ces résultats au chapitre 9.

## Remarque

Comme nous l'avons dit précédemment, on peut affaiblir les hypothèses du Théorème 2.1. Supposons par exemple que l'on ne voit pas les points de branchement  $\varphi_i$  et  $\overline{\varphi}_i$  (croix non entière), c'est-à-dire que la ligne verticale  $\sigma$  ne contient pas de points de branchement de  $\kappa$ . Dans ce cas, l'asymptotique (2.16) est remplacée par une majoration de la distance :

$$|E_l(\varphi, \varepsilon) - E^{(l)}(\varepsilon)| < C e^{-\frac{2\pi Y}{\varepsilon}}$$

où  $2Y$  est la largeur de la bande  $S_Y$ .

## Application : développement asymptotique de la trace

En exploitant le résultat précédent, on peut calculer le premier terme dans le développement asymptotique de la formule de la trace, et retrouver partiellement un résultat de [8].

**Corollaire 1.** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  une fonction telle que  $\text{Supp } f \in J$ . Alors la fonction  $f(H_{\varphi, \varepsilon})$  est  $\varepsilon$ -périodique en  $\varphi$  et son développement de Fourier vérifie :*

$$\text{tr} [f(H_{\varphi, \varepsilon})] = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \text{tr} [f(H_{u, \varepsilon})] du + O(e^{-S/\varepsilon}) \quad (2.17)$$

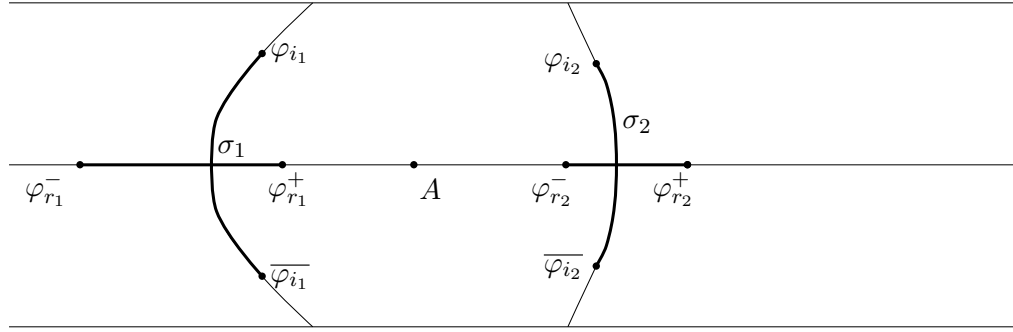


FIG. 2.4 -  $(E - W)^{-1}(\sigma(H_0))$

avec

$$\int_0^\varepsilon \text{tr} [f(H_{u,\varepsilon})] du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_u} \int_{[-\pi,\pi]} f(W(u) + E(\kappa)) d\kappa du + o(\varepsilon) \quad (2.18)$$

où  $S = \inf_{e \in \text{Supp } f} S(e) > 0$

On trouvera plus de détails et la preuve de ce corollaire au paragraphe 9.4 du chapitre 9.

## 2.4 Cas de la croix double

### 2.4.1 Hypothèses géométriques sur $W$ et l'intervalle $J$

On suppose que  $V$  et  $W$  vérifient les hypothèses  $(\mathbf{H}_V)$ ,  $(\mathbf{H}_{W,g})$  et  $(\mathbf{H}_{W,r})$ . On suppose désormais que l'intervalle  $J$  est un intervalle compact vérifiant les conditions suivantes :

$(H'_J)$

1. Pour tout  $\mathbf{E} \in J$ , il existe deux bandes spectrales  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  de  $\sigma(\mathbf{H}_0)$  distinctes ou non, telles que :
  - $(\mathbf{E} - \mathbf{W})^{-1}(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2)$  est non vide.
  - $(\mathbf{E} - \mathbf{W})^{-1}(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2)$  a exactement deux composantes connexes compactes. On les note  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$ .
2. Pour tout  $\mathbf{E} \in J$ , il existe exactement deux extrema réels  $m_1$  et  $m_2$  distincts de  $W$  vérifiant :

$$m_1 \in (\mathbf{E} - \mathbf{W})^{-1}(\overset{\circ}{\mathbf{B}}_1) \text{ et } m_2 \in (\mathbf{E} - \mathbf{W})^{-1}(\overset{\circ}{\mathbf{B}}_2).$$

### 2.4.2 Conséquences

On donne tout de suite des conséquences de l'hypothèse  $(H'_J)$ .

- Comme pour la croix simple, la connexité de  $J$  implique que les bandes  $B_1, B_2$  et les extrema  $m_1, m_2$  sont indépendants de  $E \in J$ .

- Fixons  $j \in \{1, 2\}$ , on va décrire chaque croix  $C_j$  en utilisant le formalisme de la croix simple décrit au paragraphe 2.3.1 de ce chapitre.
- On note  $E_{r_j}$  et  $E_{i_j}$  les extrémités de  $B_j$  vérifiant  $E_{r_j} \in (E - W)(\mathbb{R})$  et  $E_{i_j} \notin (E - W)(\mathbb{R})$  pour tout  $E \in J$ .
- Dans  $S_Y$ , les points de branchement de  $\kappa$  ont la configuration suivante :
  - Dans  $S_Y \cap \{\text{Re}(\varphi) \leq A\}$ , il y a exactement quatre points de branchement  $\{\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_1}^-\}$  et  $(\varphi_{i_1}, \overline{\varphi_{i_1}})$  associés à  $E_{r_1}$  et  $E_{i_1}$ .
  - Dans  $S_Y \cap \{\text{Re}(\varphi) \geq A\}$ , il y a exactement quatre points de branchement  $\{\varphi_{r_2}^+, \varphi_{r_2}^-\}$  et  $(\varphi_{i_2}, \overline{\varphi_{i_2}})$  associés à  $E_{r_2}$  et  $E_{i_2}$ .
- Pour  $j \in \{1, 2\}$ , il existe une ligne verticale  $\sigma_j$  passant par  $m_j$  et reliant  $\overline{\varphi_{i_j}}$  et  $\varphi_{i_j}$ . On note  $\Sigma_j$  la composante connexe de  $(E - W)^{-1}(\mathbb{R})$  contenant  $\sigma_j$ .
- On a alors  $C_j = [\varphi_{r_j}^-, \varphi_{r_j}^+] \cup \sigma_j$ .

On a représenté cette configuration géométrique dans la figure 2.4.

### 2.4.3 Remarques et exemples

Analysons quelque peu l'hypothèse  $(H'_j)$ .

- Considérons les bandes  $B_1$  et  $B_2$ . Ces deux bandes sont identiques ou consécutives. En effet, par connexité, l'image  $(E - W)([\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-])$  est incluse dans un gap. Par conséquent, les points  $\varphi_{r_1}^+$  et  $\varphi_{r_2}^-$  sont associés, soit à deux points de branchement consécutifs de  $\sigma(H_0)$ , soit au même point de branchement.
- Doubles puits de potentiel symétrique et non symétrique.  
C'est un des exemples les plus représentatifs. On considère un potentiel  $W$  avec deux minima  $W_1^- \leq W_2^-$ , séparés par un maximum local  $W_+ = \sup_{\mathbb{R}} W$ . Concrètement, on peut penser à l'exemple :

$$W(x) = -\frac{A}{1 + (x - 5)^2} - \frac{B}{1 + (x + 5)^2},$$

$$J \subset ]E_{2n-1} + W_+, E_{2n}[\cap]E_{2n} + W_2^-, E_{2n+1} + W_1^-[.$$

On a représenté en figure 2.5A et B les doubles puits de potentiel symétrique et non symétrique.

- L'hypothèse  $(H'_j)$  recouvre aussi le cas de l'interaction de deux extrema de type différent. On peut penser à l'exemple :

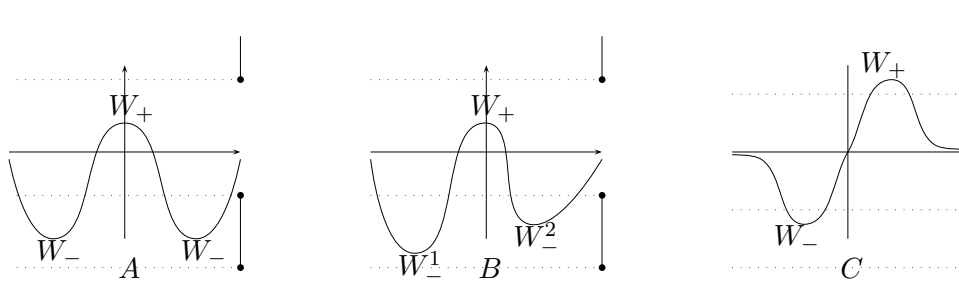
$$W(x) = \frac{A}{1 + (x - 5)^2} - \frac{B}{1 + (x + 5)^2},$$

$$J \subset ]\max\{E_{2n-1} + W_-, E_{2n-3} + W_+, E_{2n-2}\}, \min\{E_{2n-1}, E_{2n} + W_-, E_{2n-2} + W_+\}[.$$

Un tel exemple est représenté en figure 2.5C.

### 2.4.4 Phases et actions

La croix double (figure 2.4) apparaît comme la réunion de deux croix simples (figure 2.2). Pour écrire l'équation aux valeurs propres dans ce cas, on va donc considérer les phases et actions associées à chaque croix simple ainsi que l'action entre les deux croix (voir figure 2.4).


 FIG. 2.5 – Exemples de potentiel  $W$ 

### Coefficients associés séparément à chaque croix $C_j$

Pour chaque croix  $C_j$  ( $j \in \{1, 2\}$ ), on considère donc les phases  $\Phi_j$ ,  $\Phi_{d,j}$  et l'action  $S_j$  associées à  $C_j$ . On a présenté ces coefficients au paragraphe 2.3.2.

On notera  $t_j$  les deux coefficients tunnel associés à chacune des croix  $C_j$ .

### Coefficient tunnel d'action entre les croix

Soit  $\kappa$  une détermination du moment complexe continue entre  $\varphi_{r_1}^+$  et  $\varphi_{r_2}^-$ .

**Définition 2.2.** On définit le coefficient d'action entre les deux croix associé à  $\kappa$  par :

$$iS_I(E) = 2 \int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} \kappa(u) du. \quad (2.19)$$

On démontrera au paragraphe 10.1.2 du chapitre 10 le résultat suivant :

**Lemme 2.4.** *Il existe une détermination  $\kappa_0$  telle que l'action associée  $S_I$  vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $E \mapsto S_I(E)$  est analytique dans un petit voisinage complexe de l'intervalle  $J$ .
2.  $S_I$  prend des valeurs réelles sur  $J$ .
3.  $\forall E \in J, \quad S_I(E) > 0$ .

On définit alors le coefficient tunnel d'action horizontal :

$$t_I(E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{-S_I(E)}{\varepsilon}\right). \quad (2.20)$$

Le coefficient  $t_I$  est exponentiellement petit en vertu du point (3) du Lemme 2.4.

### 2.4.5 Résultats

A ma connaissance, il y a très peu de résultats dans le cas de la croix double pour des perturbations lentes de potentiels périodiques. En revanche, les études dans le cas  $V = 0$  perturbé par un double puits sont assez nombreuses [34, 20, 26, 18, 6, 19, 7] et on revient sur ces résultats au chapitre 10.

**Equation aux valeurs propres**

On donne une caractérisation des valeurs propres de la croix double sous la forme suivante :

**Théorème 2.2.** *On suppose que  $V$ ,  $W$  et  $J$  vérifient les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H'_J)$ . Soit  $Y_0 \in ]0, Y[$ .*

*Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et un voisinage complexe  $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$  de  $J$  tels que, il existe un réel  $\gamma \geq 0$ , une constante  $c$  et pour  $j \in \{1, 2\}$ , il existe des fonctions  $(E, \varepsilon) \mapsto \widetilde{\Phi}_j(E, \varepsilon)$  et  $(E, \varepsilon) \mapsto \widetilde{\Phi}_{d,j}(E, \varepsilon)$ ,  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto F_j(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto \eta_j(\varphi, E, \varepsilon)$  telles que, pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  :*

*-  $E \in \mathcal{V}$  est une valeur propre de  $H_{\varphi, \varepsilon}$  si et seulement si  $E$  est solution de l'équation :*

$$F_1(\varphi, E, \varepsilon)F_2(\varphi, E, \varepsilon) + (-1)^e \gamma t_I(E, \varepsilon) \eta_1(\varphi, E, \varepsilon) \eta_2(\varphi, E, \varepsilon) = 0, \quad (2.21)$$

*où  $e$  est le nombre d'extrema de  $W$  entre  $m_1$  et  $m_2$ .*

*- Pour  $j \in \{1, 2\}$ ,  $(\varphi, E) \mapsto F_j(\varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $S_{Y_0} \times \mathcal{V}$ . De plus  $\varphi \mapsto F_j(\varphi, E, \varepsilon)$  est  $\varepsilon$ -périodique et son développement en série de Fourier s'écrit :*

$$F_j(\varphi, E, \varepsilon) = \cos\left(\frac{\widetilde{\Phi}_j(E, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + t_j(E, \varepsilon) \left( \cos\left(\frac{\widetilde{\Phi}_{d,j}(E, \varepsilon) + 2\pi\varphi}{\varepsilon}\right) + h_j(\varphi, E, \varepsilon) \right)$$

$$\text{où } \sup_{\varphi \in S_{Y_0}, E \in \mathcal{V}} |h_j(\varphi, E, \varepsilon)| < \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{\varepsilon}}.$$

*- Pour  $j \in \{1, 2\}$ , la fonction  $(\varphi, E) \mapsto \eta_j(\varphi, E, \varepsilon)$  est une fonction analytique sur  $S_{Y_0} \times \mathcal{V}$ . De plus  $\varphi \mapsto \eta_j(\varphi, E, \varepsilon)$  est  $\varepsilon$ -périodique et son développement en série de Fourier s'écrit :*

$$\eta_j(\varphi, E, \varepsilon) = \left( \sin\left(\frac{\widetilde{\Phi}_j(E, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + O(t_j(E, \varepsilon)) \right) [1 + g_j(\varphi, E, \varepsilon)],$$

$$\text{où } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S_{Y_0}, E \in \mathcal{V}} g_j(\varphi, E, \varepsilon) = 0.$$

*- Pour  $j \in \{1, 2\}$ , les fonctions  $F_j$  et  $\eta_j$  vérifient également les propriétés suivantes :*

$$\forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall \varphi \in S_{Y_0}, \quad \overline{F_j(\overline{\varphi}, \overline{E}, \varepsilon)} = F_j(\varphi, E, \varepsilon), \quad \overline{\eta_j(\overline{\varphi}, \overline{E}, \varepsilon)} = \eta_j(\varphi, E, \varepsilon).$$

*- Pour  $j \in \{1, 2\}$ , les fonctions  $\widetilde{\Phi}_j(\cdot, \varepsilon)$  et  $\widetilde{\Phi}_{d,j}(\cdot, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $\mathcal{V}$  pour tout  $j \in \{1, 2\}$  et vérifient uniformément pour  $E \in \mathcal{V}$  :*

$$\widetilde{\Phi}_j(E, \varepsilon) = \Phi_j(E) + o(\varepsilon), \quad \widetilde{\Phi}_{d,j}(E, \varepsilon) = \Phi_{d,j}(E) + \varepsilon(\rho_j + o(1)),$$

*où les coefficients  $\rho_j$  sont des réels définis en (10.1).*

**Analyse de l'équation (2.21)**

L'équation (2.21) apparaît comme une perturbation exponentiellement petite de l'équation  $F_1.F_2 = 0$ . Pour  $j \in \{1, 2\}$ , chacune des fonctions  $F_j$  correspond à la caractérisation des valeurs propres dans le cas de la croix simple  $C_j$ . Au paragraphe 2.3.3, on s'est intéressé aux zéros de  $F_j$  dans  $J$ . On les note alors, pour  $j \in \{1, 2\}$  :

$$Z(F_j) = \{E_j^{(l_j)}(\varphi, \varepsilon)\}_{l_j \in \{L_j^-(\varepsilon), \dots, L_j^+(\varepsilon)\}},$$

Ces zéros oscillent autour de valeurs quantifiées  $\{E_j^{(l_j)}(\varepsilon)\}_{l_j \in \{L_j^-(\varepsilon), \dots, L_j^+(\varepsilon)\}}$  décrites par le Lemme 2.3 ; ils sont donc séparés par une distance d'ordre  $\varepsilon$ .



### Asymptotiques des valeurs propres

De la caractérisation précédente, on déduit tout d'abord un résultat immédiat pour les valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  :

**Théorème 2.3.** *On suppose que  $V$ ,  $W$  et  $J$  vérifient les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H'_j)$ . On définit  $\hat{S}_I = \inf_{e \in J} S_I(e)$  et  $\hat{t}_I(\varepsilon) = e^{-\hat{S}_I/\varepsilon}$ . Dans  $J$ , l'opérateur  $H_{\varphi,\varepsilon}$  admet un nombre fini de valeurs propres exponentiellement proches des zéros associés à chaque croix simple ; plus précisément, pour  $\varepsilon$  assez petit :*

$$\sigma(H_{\varphi,\varepsilon}) \cap J = \left[ \bigcup_{l_1 \in \{L_1^-(\varepsilon), \dots, L_1^+(\varepsilon)\}} \widehat{E}_1^{l_1}(\varphi, \varepsilon) \quad \bigcup_{l_2 \in \{L_2^-(\varepsilon), \dots, L_2^+(\varepsilon)\}} \widehat{E}_2^{l_2}(\varphi, \varepsilon) \right] \cap J,$$

où, pour  $j \in \{1, 2\}$ , et  $l_j \in \{L_j^-(\varepsilon), \dots, L_j^+(\varepsilon)\}$ ,

$$\widehat{E}_j^{l_j}(\varphi, \varepsilon) \in E_j^{l_j}(\varphi, \varepsilon) + \left[ -\sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)}, \sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)} \right].$$

Comme le coefficient tunnel  $\widehat{t}_I(\varepsilon)$  est exponentiellement petit, on remarque que les valeurs d'une même suite  $\{\widehat{E}_j^{l_j}(\varphi, \varepsilon)\}$ , pour  $j \in \{1, 2\}$ , sont espacées d'une distance de taille  $\varepsilon$ . Cependant, il est possible que deux valeurs  $\{\widehat{E}_1^{l_1}(\varphi, \varepsilon)\}$  et  $\{\widehat{E}_2^{l_2}(\varphi, \varepsilon)\}$  soient très proches. A priori, le Théorème 2.3 n'exclut pas qu'elles soient même confondues. Puisque le problème est unidimensionnel, on sait que c'est impossible.

Considérons  $E_1(\varphi, \varepsilon)$  un zéro de  $F_1$ . On s'intéresse à la distance  $d(E_1, Z(F_2))$  de  $E_1(\varphi, \varepsilon)$  aux zéros de  $F_2$ . Considérons une fonction positive  $\varepsilon \mapsto d(\varepsilon)$  telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)}}{d(\varepsilon)} = 0. \quad (2.22)$$

Le Théorème 2.3 nous dit qu'il y a une seule valeur propre  $\widehat{E}_1(\varphi, \varepsilon)$  de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  dans un voisinage de taille  $d(\varepsilon)$  de  $E_1(\varphi, \varepsilon)$ . Lorsque la distance  $d(E_1, Z(F_2))$  est inférieure à  $d(\varepsilon)$ , il y a exactement une valeur propre  $\{\widehat{E}_2(\varphi, \varepsilon)\}$  à une distance inférieure à  $2d(\varepsilon)$  de  $\widehat{E}_1(\varphi, \varepsilon)$ . Au vu des études menées dans le cas  $V = 0$  ([20, 34, 26]), on peut se demander s'il existe une distance minimale dite de splitting séparant ces deux valeurs propres. C'est ce que prouve le résultat suivant.

**Théorème 2.4.** *On suppose que  $V$ ,  $W$  et  $J$  vérifient les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H'_j)$ . Soit  $E_1(\varphi, \varepsilon)$  un zéro de  $F_1$ . Soit  $d$  une fonction vérifiant (2.22).*

1. *Si  $d(E_1, Z(F_2)) > d(\varepsilon)$ , alors dans  $E_1(\varphi, \varepsilon) + \left[ -\sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)}, \sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)} \right]$ ,  $H_{\varphi,\varepsilon}$  admet exactement une valeur propre notée  $\widehat{E}_1(\varphi, \varepsilon)$  qui vérifie l'asymptotique suivante :*

$$\widehat{E}_1(\varphi, \varepsilon) = E_1(\varphi, \varepsilon) + \gamma \cdot \varepsilon \cdot (-1)^{e+1} t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) \frac{1}{\Phi'_1(E_1(\varphi, \varepsilon)) \tan \frac{\Phi_2(E_1(\varphi, \varepsilon))}{\varepsilon}} + o(\varepsilon t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)). \quad (2.23)$$

2. Si  $d(E_1(\varphi, \varepsilon), Z(F_2)) < d(\varepsilon)$ , on note  $E_2(\varphi, \varepsilon)$  l'unique zéro de  $F_2$  le plus proche de  $E_1(\varphi, \varepsilon)$ . Alors, dans  $[E_1(\varphi, \varepsilon), E_2(\varphi, \varepsilon)] + \left[-\sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)}, \sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)}\right]$ ,  $H_{\varphi, \varepsilon}$  admet exactement deux valeurs propres, notées  $\widehat{E}_+(\varphi, \varepsilon)$  et  $\widehat{E}_-(\varphi, \varepsilon)$  vérifiant l'asymptotique :

$$\widehat{E}_{\pm}(\varphi, \varepsilon) = \frac{E_1(\varphi, \varepsilon) + E_2(\varphi, \varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_2(\varphi, \varepsilon) - E_1(\varphi, \varepsilon))^2}{4} + \gamma \varepsilon^2 t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) \frac{[1 + o(1)]}{|\Phi'_1(E_1(\varphi, \varepsilon))\Phi'_2(E_2(\varphi, \varepsilon))|}}. \quad (2.24)$$

### Quelques remarques

- On remarque que l'asymptotique (2.24) coïncide avec l'asymptotique (2.23) lorsqu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\frac{|E_2 - E_1|}{\varepsilon} \in \left] \varepsilon^{-\alpha/2} \sqrt{\widehat{t}_I(\varepsilon)}, \varepsilon^\alpha \right[$ . En effet, il suffit d'écrire dans (2.24) :

$$\tan \frac{\Phi_2(E_1(\varphi, \varepsilon))}{\varepsilon} = \Phi'_2(E_2(\varphi, \varepsilon)) \frac{E_1 - E_2}{\varepsilon} (1 + O(\varepsilon^\alpha)),$$

et de faire un développement limité de la racine carrée dans (2.24) :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(E_2(\varphi, \varepsilon) - E_1(\varphi, \varepsilon))^2}{4} + \gamma \varepsilon^2 t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) \frac{[1 + o(1)]}{|\Phi'_1(E_1(\varphi, \varepsilon))\Phi'_2(E_2(\varphi, \varepsilon))|}} \\ &= \frac{|E_2(\varphi, \varepsilon) - E_1(\varphi, \varepsilon)|}{2} \left[ 1 + 2\gamma \varepsilon^2 t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) \frac{[1 + o(1)]}{|\Phi'_1(E_1(\varphi, \varepsilon))\Phi'_2(E_2(\varphi, \varepsilon))|(E_2(\varphi, \varepsilon) - E_1(\varphi, \varepsilon))^2} \right]. \end{aligned}$$

- On a représenté dans la figure 2.6 les allures des valeurs propres associées à la croix double. Les zéros de  $F_1$  et  $F_2$  oscillent en  $\varphi$ . Si les images des fonctions  $E_1([-1, 1], \varepsilon)$  et  $E_2([-1, 1], \varepsilon)$  sont séparées par une distance très supérieure au coefficient tunnel, les zéros associés à chaque croix ne se croisent pas et on est toujours dans le cas (1) du Théorème 2.4. Tout se passe comme si on voyait séparément les deux croix. En revanche, si l'amplitude des oscillations et les valeurs moyennes des zéros  $E_1(\varphi, \varepsilon)$  et  $E_2(\varphi, \varepsilon)$  sont telles que les images se croisent, on est dans le cas représenté en figure 2.6B. Dans cette figure, on a représenté en traits pleins l'allure des valeurs propres et en traits pointillés les zéros associés à chaque croix. Sur chaque période les zéros associés à chacune des deux croix se croisent deux fois ; au niveau de chaque croisement, il y a un éclatement donné par (2.24).
- L'expression (2.24) est analogue aux résultats obtenus dans le cas où  $V = 0$  ([20, 34, 26]), l'action  $S_I$  jouant ici le rôle du double de la distance d'Agmon entre les deux puits.

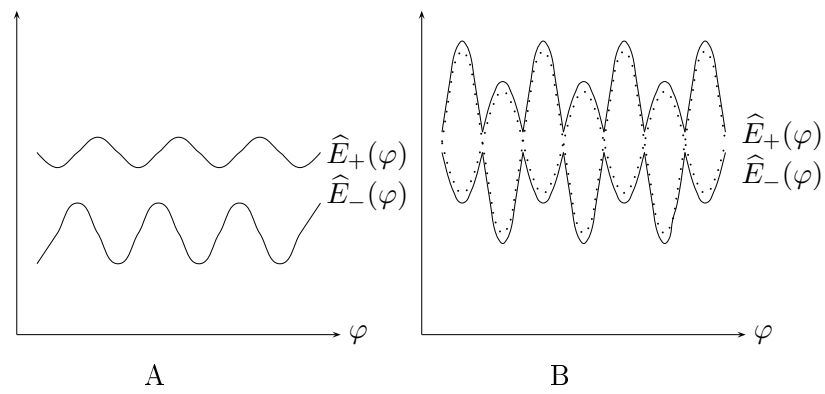


FIG. 2.6 – Spectre de la croix double

# 3

## Schéma de l'étude

On va détailler ici la philosophie et les différentes étapes de l'étude.

### 3.1 Opérateurs périodiques perturbés en dimension 1

#### 3.1.1

On traitera l'équation (1.3) comme une perturbation de l'équation périodique

$$H_0\psi = E\psi \tag{3.1}$$

où l'opérateur  $H_0$  est défini en (1.2). Pour cela, on décrira la théorie spectrale des opérateurs périodiques au chapitre 4.

Pour l'instant, on se contente d'introduire les solutions de Bloch de (3.1). On appelle *solution de Bloch* de (3.1) une fonction  $\Psi$  vérifiant (2.1) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x+1, E) = \lambda(E)\Psi(x, E), \tag{3.2}$$

pour  $\lambda$  non nul indépendant de  $x$ . Le coefficient  $\lambda(E)$  est alors appelé *multiplicateur de Bloch-Floquet*. On peut choisir  $k(E) \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda(E) = e^{ik(E)}$ ;  $k$  est le quasi-moment présenté au paragraphe 2.1 du chapitre 2 et étudié au paragraphe 4.2 du chapitre 4. Lorsque  $E \notin \sigma(H_0)$ , il existe deux solutions de Bloch de (3.1) linéairement indépendantes (voir paragraphe 4.1 du chapitre 4). On les note  $\tilde{\Psi}_+$  et  $\tilde{\Psi}_-$ ; les multiplicateurs de Bloch-Floquet associés sont inverses l'un de l'autre et les fonctions  $\tilde{\Psi}_\pm$  s'écrivent :

$$\tilde{\Psi}_\pm(x, E) = e^{\pm ik(E)x} p_\pm(x, E) \quad \text{avec} \quad p_\pm(x+1, E) = p_\pm(x, E).$$

Quand  $\text{Im } k(E) > 0$ ,  $\tilde{\Psi}_+(x, E)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $\tilde{\Psi}_-(x, E)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . En fait, la relation (3.2) définit les fonctions  $\tilde{\Psi}_+$  et  $\tilde{\Psi}_-$  à un coefficient multiplicatif près. Précisément, l'équation (3.2) définit deux espaces vectoriels de dimension 1 que l'on appellera *sous-espaces de Bloch*.

Pour l'étude du spectre discret des perturbations d'opérateurs périodiques, [16] et [27] prouvent,

lorsque  $\text{Im } k(E) > 0$ , qu'il existe des fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto F_+(x, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto F_-(x, \varphi, E, \varepsilon)$  solutions de (1.3) définies par :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_+(x, \varphi, E, \varepsilon) - \tilde{\Psi}_+(x, E)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [F_-(x, \varphi, E, \varepsilon) - \tilde{\Psi}_-(x, E)] = 0 \quad (3.3)$$

La condition (3.3) garantit l'unicité de  $F_+$  (respectivement de  $F_-$ ) car la fonction  $\tilde{\Psi}_+$  (respectivement  $\tilde{\Psi}_-$ ) tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ). Les fonctions de Jost  $F_+$  et  $F_-$  sont généralement construites comme des solutions d'une équation intégrale de type Lippman-Schwinger. Cette construction est une adaptation de la théorie classique du scattering (Chapitre XI de [30]) pour une perturbation du laplacien et consiste à chercher des solutions particulières de (1.3) à partir des solutions de l'équation périodique.

On appellera *sous-espaces de Jost* les sous-espaces vectoriels  $\mathcal{J}_+$  et  $\mathcal{J}_-$  engendrés par  $F_+$  et  $F_-$ .  $\mathcal{J}_+$  (respectivement  $\mathcal{J}_-$ ) est l'ensemble des solutions de (1.3) appartenant à  $L^2([0, \infty))$  (respectivement  $L^2((-\infty, 0])$ ).

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables, le *wronskien* de  $f$  et  $g$  noté  $w(f, g)$  est défini par

$$w(f, g) = f'g - fg' \quad (3.4)$$

On rappelle que lorsque  $f$  et  $g$  sont les solutions d'une équation du second ordre, leur wronskien est indépendant de  $x$ . L'intérêt spectral des sous-espaces de Jost réside notamment dans le résultat suivant :

**Proposition 3.1.** *On suppose que  $\text{Im } k(E) > 0$ . Soient deux solutions de Jost non triviales  $h_g^- \in \mathcal{J}_-$  et  $h_d^+ \in \mathcal{J}_+$ .  $E$  est une valeur propre de  $H_{\varphi, \varepsilon}$  si et seulement si :*

$$w(h_d^+, h_g^-) = 0 \quad (3.5)$$

Pour calculer les valeurs propres, il suffit désormais de construire les sous-espaces de Jost.

## 3.2 Construction de solutions de Jost cohérentes. Coefficient de transmission

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, une idée essentielle pour étudier (1.3) est de construire des solutions cohérentes, c'est-à-dire vérifiant (1.5). On commence donc par choisir dans  $\mathcal{J}_-$  et  $\mathcal{J}_+$  des représentants cohérents. On démontre précisément le résultat suivant :

**Proposition 3.2.** *On suppose que  $V$  vérifie  $(H_V)$ ,  $W$  vérifie  $(H_{W,r})$  et  $J$  vérifie  $(H_J)$  (ou  $(H'_J)$ ). Soit  $X > 1$  et  $\lambda > 1$  fixés. Alors, il existe un voisinage complexe  $\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}}$  de  $J$ , un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , une constante  $C > 0$ , deux nombres complexes  $m_g$  et  $m_d$ , et deux fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto h_g^-(x, \varphi, E, \varepsilon)$ ,  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto h_d^+(x, \varphi, E, \varepsilon)$  tels que, si on note*

$$B_\varepsilon^g = \left\{ \varphi \in S_Y ; \text{Re } \varphi < -C\varepsilon^{-\frac{\lambda}{s-1}} \right\} \text{ et } B_\varepsilon^d = \left\{ \varphi \in S_Y ; \text{Re } \varphi > C\varepsilon^{-\frac{\lambda}{s-1}} \right\},$$

alors :

- Les fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto h_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont définies et cohérentes sur  $\mathbb{R} \times S_Y \times \mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$ .
- Pour tout  $x \in [-X, X]$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $(\varphi, E) \mapsto h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E) \mapsto h_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $S_Y \times \mathcal{V}$ .
- Les fonctions  $h_-^g$  et  $h_+^d$  ont le comportement asymptotique suivant :

$$h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_g}^{\varphi} \kappa(u) du} \psi_-(x, \varphi, E) (1 + R_g(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (3.6)$$

où  $R_g$  vérifie :

$$\exists M > 0, \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad \forall x \in [-X, X], \quad \forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall \varphi \in B_\varepsilon^g, \quad |R_g(x, \varphi, E, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon |Re \varphi|^{s-1}}$$

$$h_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_d}^{\varphi} \kappa(u) du} \psi_+(x, \varphi, E) (1 + R_d(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (3.7)$$

où  $R_d$  vérifie :

$$\exists M > 0, \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad \forall x \in [-X, X], \quad \forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall \varphi \in B_\varepsilon^d, \quad |R_d(x, \varphi, E, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon |Re \varphi|^{s-1}}$$

- Les asymptotiques (3.6) et (3.7) sont une fois différentiables en  $x$ .
- La fonction  $x \mapsto h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon)$  (respectivement  $x \mapsto h_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon)$ ) est une base de  $\mathcal{J}_-$  (respectivement  $\mathcal{J}_+$ ).
- Il existe deux réels  $\sigma_g \in \{-1, 1\}$ ,  $\sigma_d \in \{-1, 1\}$ , un entier  $p$  et deux fonctions  $E \mapsto \alpha_g(E)$  et  $E \mapsto \alpha_d(E)$  tels que :

1. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E \in \mathcal{V}$ , et  $\varphi \in S_Y$ , on a :

$$\overline{\alpha_g(E) h_-^g(x, \overline{\varphi}, \overline{E}, \varepsilon)} = i \sigma_g e^{-\frac{i}{\varepsilon} 2p\pi x} \alpha_g(E) h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) \quad (3.8)$$

$$\overline{\alpha_d(E) h_+^d(x, \overline{\varphi}, \overline{E}, \varepsilon)} = i \sigma_d e^{\frac{i}{\varepsilon} 2p\pi x} \alpha_d(E) h_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon) \quad (3.9)$$

2. Les fonctions  $\alpha_g$  et  $\alpha_d$  sont analytiques et données par (6.18) et (6.21). Elles ne s'annulent pas sur  $\mathcal{V}$ .

- Les fonctions  $\psi_+$  et  $\psi_-$  sont les solutions canoniques de Bloch de l'équation périodique (2.1) présentées au paragraphe 5.2 du chapitre 5.

On prouvera ce résultat au chapitre 6. Les Propositions 3.1 et 3.2 impliquent que les valeurs propres sont caractérisées par :

$$w(h_-^g, h_+^d) = 0. \quad (3.10)$$

### 3.3 Prolongement des asymptotiques

Pour calculer  $w(h_-^g, h_+^d)$ , il suffit de connaître l'asymptotique de la fonction  $h_-^g$  lorsque  $\varphi \rightarrow +\infty$ .

L'asymptotique (3.6) n'est pas une asymptotique tout à fait comparable à celle intervenant dans les travaux de A. Fedotov et F. Klopp dans la mesure où elle n'est vérifiée que sur un domaine qui dépend de  $\varepsilon$ . On doit donc étudier comment se prolonge cette asymptotique sur un domaine indépendant de  $\varepsilon$ . Pour ce faire, nous étendrons leurs résultats dans un cadre non compact (cf.

chapitre 7) ; la décroissance de  $W$  compense alors l'absence de compacité.

Ensuite, pour prolonger plus loin l'asymptotique de  $h_-^g$ , les études effectuées dans [10] mettent en évidence certains obstacles topologiques. En particulier dans les deux cas que l'on considère, on doit contourner la ou les croix centrales :  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+] \cup \sigma$  dans le premier cas (cf. figure 2.2),  $C_1$  et  $C_2$  dans le deuxième (cf. figure 2.4).

On montrera au chapitre 5 qu'il existe au voisinage de chaque croix un domaine compact muni d'une base cohérente  $f_{\pm}^i$ . On exprimera les fonctions  $h_-^g$  et  $h_+^d$  sur cette base intermédiaire (chapters 8, 9 et 10).

# 4

## Opérateurs de Schrödinger périodiques en dimension 1

Dans ce chapitre, je vais rappeler des résultats importants de la théorie des opérateurs de Schrödinger périodiques en dimension 1, dont je me servirai plus loin. Ces opérateurs ont été beaucoup étudiés (on renvoie par exemple à [36, 25, 24, 33]). On considère l'opérateur  $H_0$  défini en (1.2). On suppose que  $V$  vérifie l'hypothèse  $(H_V)$  (cf. 2.1 du chapitre 2).

### 4.1 Fonctions de Bloch et structure en bande du spectre

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation :

$$H_0\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x) \quad (4.1)$$

On commence par donner les propriétés des fonctions de Bloch en fonction de  $\mathcal{E}$ . On a présenté les fonctions de Bloch au paragraphe 3.1.1 du chapitre 3. Les solutions de Bloch sont en fait des vecteurs propres de l'opérateur de translation  $\widehat{L} : \Psi \mapsto \widehat{L}\Psi$ , avec  $\widehat{L}\Psi(x) = \Psi(x+1)$ .

On considère deux copies  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$  du plan complexe des énergies coupé le long des zones spectrales. On les recolle pour obtenir une surface de Riemann avec des points de branchement en racine carrée. On appelle cette surface de Riemann  $\Gamma$ . On peut construire une solution de Bloch  $\widetilde{\Psi}(x, \mathcal{E})$  de l'équation (4.1) méromorphe sur cette surface de Riemann. Les pôles de cette solution sont situés dans les lacunes spectrales. Plus précisément, pour chaque lacune, il existe un unique pôle se projetant dans la lacune. Ce pôle est situé soit dans  $\Gamma_+$ , soit dans  $\Gamma_-$ . La position du pôle est indépendante de  $x$ . Ces résultats sont présentés en détail dans [16].

En dehors des extrémités des zones spectrales (c'est-à-dire des points de branchement de  $\Gamma$ ), les restrictions  $\widetilde{\Psi}_\pm$  de  $\widetilde{\Psi}$  à  $\Gamma_\pm$  sont des solutions linéairement indépendantes de (4.1).

Enfin, les fonctions  $\widetilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E})$  sont à valeurs réelles lorsque  $\mathcal{E}$  est dans une lacune. Précisément :

$$\overline{\widetilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E} - i0)} = \widetilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E} + i0), \quad \forall \mathcal{E} \in ]E_{2n}, E_{2n+1}[ , n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

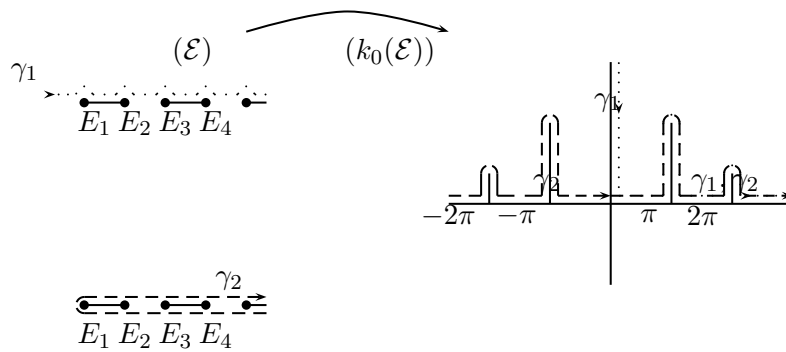
Les fonctions  $\widetilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E})$  sont complexes conjuguées quand  $\mathcal{E}$  est dans une bande, c'est-à-dire :

$$\overline{\widetilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E} - i0)} = \widetilde{\Psi}_\mp(x, \mathcal{E} + i0), \quad \forall \mathcal{E} \in ]E_{2n+1}, E_{2n+2}[ , n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

On note également

$$w_0(\mathcal{E}) = w(\widetilde{\Psi}_+(\cdot, \mathcal{E}), \widetilde{\Psi}_-(\cdot, \mathcal{E})) \quad (4.4)$$




 FIG. 4.1 – Le quasi-moment  $k$ 

## 4.2 Quasi-moment de Bloch

### 4.2.1

On va décrire en détail le quasi-moment de Bloch  $k$  correspondant à la fonction de Bloch décrite ci-avant.  $k$  a les mêmes points de branchement que  $\tilde{\Psi}(x, \mathcal{E})$  mais la surface de Riemann associée est plus compliquée. Pour décrire les propriétés principales de  $k$ , on considère le plan complexe coupé le long de l'axe réel de  $E_1$  à  $+\infty$ , que l'on note  $\mathbb{C}_0$ . On peut fixer une détermination univaluée du quasi-moment par la condition :

$$ik_0(\mathcal{E}) < 0, \quad \text{si } \mathcal{E} < E_1. \quad (4.5)$$

L'image de  $\mathbb{C}_0$  par  $k_0$  est située dans le demi-plan supérieur du plan complexe, c'est-à-dire :

$$\forall \mathcal{E} \in \mathbb{C}_0, \quad \text{Im}(k_0(\mathcal{E})) > 0. \quad (4.6)$$

Dans la figure 4.1, on trace quelques courbes dans  $\mathbb{C}_0$  et leurs images par l'application  $\mathcal{E} \mapsto k_0(\mathcal{E})$ . Le quasi-moment  $k_0(\mathcal{E})$  est réel le long des zones spectrales, et, le long des lacunes spectrales, sa partie réelle est constante ; en particulier, on a pour  $l \in \mathbb{N}$  :

$$k_0(E_1) = 0, \quad k_0(E_{2l} \pm i0) = k_0(E_{2l+1} \pm i0) = \pm\pi l. \quad (4.7)$$

Soit  $E_m$  un des points de branchement de  $k$ . Alors si  $\sqrt{\cdot}$  est la détermination principale de la racine carrée, chacune des fonctions :

$$\mathcal{E} \in \mathbb{C}^\pm \mapsto f_m^\pm(\mathcal{E}) = (k_0(\mathcal{E}) - k_0(E_m \pm i0)) / \sqrt{\mathcal{E} - E_m}, \quad \mathcal{E} \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

peut être prolongée analytiquement dans un voisinage du point de branchement  $E_m$  (cf. [10]).

### 4.2.2

On rappelle que :

$$k_0(\mathcal{E}) = \sqrt{\mathcal{E}} + O(1/\sqrt{\mathcal{E}}) \quad \text{quand } |\mathcal{E}| \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{E} \in \Gamma$  et  $0 < \arg(\mathcal{E}) < 2\pi$  (cf. [25]). Soit  $\delta \in ]0, 2\pi[$ . Cette asymptotique est uniforme en  $\mathcal{E}$  pour  $0 < \delta < \arg(\mathcal{E}) < 2\pi - \delta$ .

Les valeurs du quasi-moment  $k_0$  de chaque côté de la coupure  $]E_1, +\infty[$  sont reliées par la formule :

$$\forall \mathcal{E} \in ]E_1, +\infty[, \quad k_0(\mathcal{E} + i0) = -\overline{k_0(\mathcal{E} - i0)}, \quad E_1 \leq \mathcal{E} \quad (4.10)$$

Pour  $l \in \mathbb{N}$ , on considère la lacune spectrale  $]E_{2l}, E_{2l+1}[$ . Soit  $\mathbb{C}_l$  le plan complexe coupé de  $-\infty$  à  $E_{2l}$  et de  $E_{2l+1}$  à  $+\infty$ . On note  $k_l$  la détermination du quasi-moment analytique sur  $\mathbb{C}_l$  et coïncidant avec  $k_0$  pour  $\text{Im}(\mathcal{E}) > 0$ . On a :

$$\forall \mathcal{E} \in ]-\infty, E_{2l}[ \cup ]E_{2l+1}, +\infty[, \quad k_l(\mathcal{E} + i0) + \overline{k_l(\mathcal{E} - i0)} = 2\pi l \quad (4.11)$$

Cette formule provient de (4.7) et de l'analyticité des fonctions définies dans (4.8) .

### 4.3 Composantes périodiques des solutions de Bloch

On fixe  $l \in \mathbb{N}$ . On considère les solutions  $\tilde{\Psi}_\pm$  introduites dans le paragraphe 4.1. Elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E}) = e^{\pm ik_l(\mathcal{E})x} p_l^\pm(x, \mathcal{E}), \quad \mathcal{E} \in \mathbb{C}_l \quad (4.12)$$

où  $p_l^\pm(x, \mathcal{E})$  sont des fonctions 1-périodiques en  $x$

$$p_l^\pm(x + 1, \mathcal{E}) = p_l^\pm(x, \mathcal{E}), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

### 4.4 Les solutions analytiques de Bloch de l'équation (4.1)

On construit des solutions normalisées de l'équation (4.1). Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\Gamma$  ne contenant pas de points de branchement du quasi-moment  $k$ . On fixe sur  $\mathcal{D}$  une détermination continue  $k$  du quasi-moment et un point  $\mathcal{E}_0 \in \mathcal{D}$ . On rappelle le résultat suivant tiré de [10, 13] :

**Lemme 4.1.** *On définit les fonctions  $g_\pm : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  par :*

$$g_\pm(\mathcal{E}) = -\frac{\int_0^1 p_\mp(x, \mathcal{E}) \partial_\mathcal{E} p_\pm(x, \mathcal{E}) dx}{\int_0^1 p_+(x, \mathcal{E}) p_-(x, \mathcal{E}) dx}, \quad (4.14)$$

et les fonctions  $\psi_\pm^0 : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  par :

$$\psi_\pm^0(x, \mathcal{E}) = \sqrt{k'(\mathcal{E})} e^{\int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}} g_\pm(e) de} \tilde{\Psi}_\pm(x, \mathcal{E}). \quad (4.15)$$

Les fonctions  $\mathcal{E} \mapsto \psi_\pm^0(x, \mathcal{E})$  sont analytiques sur  $\mathcal{D}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $\psi_\pm^0$  sont appelées solutions analytiques de Bloch normalisées en  $\mathcal{E}_0$ .

Pour faire apparaître le point de normalisation, si besoin est, on notera parfois  $\psi_\pm^0(x, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0)$ . On renvoie au paragraphe 1.4.4 de [13] pour les détails de la démonstration. La preuve est simplement basée sur l'étude des pôles des fonctions  $\tilde{\Psi}_\pm$  et des zéros de  $\sqrt{k'}$  dans  $\mathcal{D}$ . Les pôles de  $g_\pm$  sont simples et situés exactement aux pôles de  $\tilde{\Psi}_\pm$  ou aux zéros de  $k'$ . L'étude des résidus en ces points permet d'obtenir le résultat. Précisément, si on note  $P$  l'ensemble des pôles de  $\tilde{\Psi}_\pm$  et  $Q$  l'ensemble des zéros de  $k'$ , alors :

1. Si  $p \in P \setminus Q$ ,  $\text{res}_p g_{\pm} = 1$ .
2. Si  $p \in P \cap Q$ ,  $\text{res}_p g_{\pm} = -1/2$ .
3. Si  $p \in Q \setminus P$ ,  $\text{res}_p g_{\pm} = 1/2$ .

On renvoie à [13] pour plus de précisions.

## 4.5 Formules utiles

On termine cette partie en donnant quelques formules utiles par la suite. On introduit d'abord une nouvelle notation.

Pour une fonction  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ , on définit la fonction  $f^* : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{C}^p$  :

$$f^*(Z) = \overline{f(\overline{Z})}. \quad (4.16)$$

On rappelle que les fonctions  $g_{\pm}$  sont définies en (4.14). Les relations (4.2) et (4.3) impliquent les relations suivantes :

$$g_{\pm}^*(\mathcal{E}) = g_{\pm}(x, \mathcal{E}), \quad \forall \mathcal{E} \in ]E_{2n}, E_{2n+1}[ , \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

$$g_{\pm}^*(\mathcal{E}) = g_{\mp}(x, \mathcal{E}), \quad \forall \mathcal{E} \in ]E_{2n+1}, E_{2n+2}[ , \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

On note enfin que, si  $\mathcal{E}_0 \notin \partial\sigma(H_0) \cup Q$ ,

$$w(\psi_+^0(\cdot, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0), \psi_-^0(\cdot, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0)) = w_0(\mathcal{E}_0)k'(\mathcal{E}_0).$$

On rappelle également la formule suivante tirée de [10]. Pour  $\mathcal{E}_0 \notin \partial\sigma(H_0) \cup Q$  et  $\mathcal{E}_1 \notin \partial\sigma(H_0) \cup Q$ ,

$$\frac{w(\psi_+^0(\cdot, \mathcal{E}, \mathcal{E}_1), \psi_-^0(\cdot, \mathcal{E}, \mathcal{E}_1))}{w(\psi_+^0(\cdot, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0), \psi_-^0(\cdot, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0))} = e^{\int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_0} (g_+ + g_-)(e) de} \quad (4.19)$$

# Les principaux outils de la méthode WKB complexe

Dans ce chapitre, on présente les résultats principaux de la méthode WKB complexe sur des domaines compacts. La méthode WKB consiste à construire des bases cohérentes de solutions de (1.3) ayant l'asymptotique (1.6). Ceci n'est pas possible sur des domaines arbitraires du plan complexe, mais l'est sur des domaines dits canoniques.

On appliquera les résultats obtenus par [10, 12, 11] pour les hypothèses  $(H_{W,g})$  et  $(H_J)$  ou  $(H'_J)$ . En particulier, on exhibe un voisinage de chaque croix, dans lequel on construit une base cohérente à l'asymptotique (1.6). On travaille désormais dans la bande  $S_Y$  définie dans les hypothèses  $(H_{W,g})$  et  $(H_J)$  ou  $(H'_J)$ . Pour simplifier l'exposé, on supposera donc dans tout ce chapitre que  $Y$  est choisi pour que cette condition soit vérifiée.

## 5.1 Les domaines canoniques

Le domaine canonique est la notion géométrique principale de la méthode WKB complexe.

### 5.1.1 Le moment complexe

Les domaines canoniques sont décrits grâce au moment complexe  $\kappa(\varphi)$ . On rappelle que cette fonction est définie par la relation (2.4). On a étudié les propriétés de  $\kappa$  au paragraphe 2.2.2 du chapitre 2. Les propriétés de  $\kappa$  et la structure de la surface de Riemann dépendent des propriétés analytiques de la fonction  $W$  et de la valeur du paramètre spectral  $E$ . On présente maintenant quelques définitions.

### 5.1.2 Verticalité, verticalité stricte

**Définition 5.1.** On dit qu'une courbe complexe régulière  $\gamma$  est *verticale* si elle intersecte les droites  $\text{Im } z = \text{Const}$  en des angles  $\theta$  non nuls.

S'il existe un nombre strictement positif  $\delta$  tel que, en tout point de  $\gamma$ , l'angle d'intersection  $\theta$  vérifie l'inégalité :

$$\delta < \theta < \pi - \delta \tag{5.1}$$

alors on dit que  $\gamma$  est *strictement verticale*.

**Définition 5.2.** Si  $\gamma$  est une courbe verticale du plan complexe, on l'oriente dans le sens de parties imaginaires croissantes.

On appelle domaine à gauche d'une courbe verticale  $\gamma$  tout domaine inclus dans l'ensemble :

$$G(\gamma) = \{z + r ; z \in \gamma, r \in \mathbb{R}_-\}. \quad (5.2)$$

### 5.1.3 Canonicité, $\delta$ -stricte canonicité

Soit  $\gamma$  une courbe verticale ne contenant pas de points de branchement. Sur  $\gamma$ , on fixe une détermination continue du moment  $\kappa$ .

**Définition 5.3.** On dit que  $\gamma$  est une *ligne canonique* pour la détermination  $\kappa$  si, pour  $\varphi \in \gamma$ ,

- $\text{Im } \varphi \mapsto \text{Im} \int_{\varphi}^{\varphi'} \kappa(u) du$  est strictement croissante
- $\text{Im } \varphi \mapsto \text{Im} \int_{\varphi}^{\varphi'} (\kappa(u) - \pi) du$  est strictement décroissante.

où les intégrales sont considérées le long de  $\gamma$ .

On suppose que  $\gamma$  est strictement verticale. S'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\text{Im} \int_{\varphi}^{\varphi'} \kappa(u) du \geq \delta \text{Im} (\varphi' - \varphi) \quad \forall (\varphi, \varphi') \in \gamma^2 \quad (5.3)$$

et

$$\text{Im} \int_{\varphi}^{\varphi'} (\pi - \kappa(u)) du \geq \delta \text{Im} (\varphi' - \varphi) \quad \forall (\varphi, \varphi') \in \gamma^2 \quad (5.4)$$

alors, on dit que  $\gamma$  est  $\delta$ -*strictement canonique*. Dans (5.3) et (5.4), on intègre le long de  $\gamma$ .

On identifie de façon usuelle  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$ . La construction des lignes canoniques se ramène à l'étude des deux champs de vecteurs  $\kappa$  et  $\kappa - \pi$ , ou plutôt de leurs courbes intégrales. Pour  $\varphi \in D$ , on note  $S(\varphi) \subset \mathbb{C}$  le secteur de sommet  $\varphi$  tel que, pour tout vecteur  $z \in S(\varphi)$ , on a

$$\text{Im} (i\overline{\kappa(\varphi)}(z - \varphi)) > 0 \text{ et } \text{Im} (i\overline{(\kappa(\varphi) - \pi)}(z - \varphi)) < 0. \quad (5.5)$$

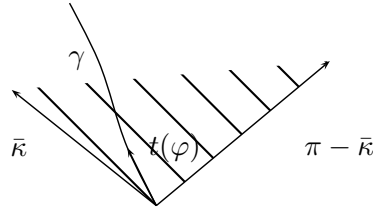
Alors une courbe  $\gamma \in D$  régulière est canonique pour la détermination  $\kappa$  si et seulement si pour tout  $\varphi \in \gamma$ , le vecteur  $t(\varphi)$  tangent à  $\gamma$  en  $\varphi$ , et orienté dans le sens des  $\text{Im } \varphi$  croissants, appartient à  $S(\varphi)$  (voir figure 5.1). Le cône  $S(\varphi)$  dépend de la détermination de  $\kappa$ . En particulier lorsque cette détermination  $\kappa$  vérifie  $\text{Re } \kappa \in ]0, \pi[$ , ce cône est non vide.

### 5.1.4

Dans ce qui suit,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont deux points de  $\mathbb{C}$  tels que

$$\text{Im } \xi_1 < \text{Im } \xi_2.$$

On notera  $\gamma$  une courbe régulière reliant  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .


 FIG. 5.1 – Le secteur  $S(\varphi)$ 

### 5.1.5 Définition du domaine canonique relativement compact

Soit  $K$  un domaine simplement connexe inclus dans  $\{\text{Im } \varphi \in [\text{Im } \xi_1, \text{Im } \xi_2]\}$  et ne contenant pas de points de branchement du moment complexe. Sur  $K$ , on fixe une détermination continue du moment complexe notée  $\kappa$ .

**Définition 5.4.** On dit que  $K$  est un *domaine canonique pour  $\kappa$*  s'il est l'union de courbes canoniques reliant  $\xi_1$  et  $\xi_2$  fixés comme ci-dessus, privée des points  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .

S'il existe  $\delta > 0$  tel que  $K$  est l'union de courbes  $\delta$ -strictement canoniques, on dit que  $K$  est  $\delta$ -*strictement canonique*.

### 5.1.6

Supposons que  $K$  est un domaine canonique. On note  $\partial K$  sa frontière. Soit un nombre  $\delta > 0$  fixé. On appelle  $\mathcal{C} = \{z \in K ; \text{dist}(z, \partial K) > \delta\}$  un *sous domaine admissible* de  $K$ . On note que les points de branchement du moment complexe sont à l'extérieur de  $\mathcal{C}$ , à une distance plus grande que  $\delta$ .

## 5.2 Solutions canoniques de Bloch

Pour décrire les formules asymptotiques de la méthode WKB complexe pour l'équation (1.3), on va exprimer les solutions de (1.3) à l'aide des solutions analytiques de (4.1) définies dans le Lemme 4.1, pour le paramètre spectral  $\mathcal{E} = E - W(\varphi)$ . Précisément, on s'intéresse à l'équation :

$$H_0 \psi = (E - W(\varphi)) \psi \quad (5.6)$$

### 5.2.1

Soit  $D$  un domaine simplement connexe de la bande  $S_Y$ , ne contenant pas de points de branchement de  $\kappa$ . L'image  $\mathcal{D}$  de  $D$  par l'application  $\varphi \mapsto E - W(\varphi)$  ne contient pas de points de branchement de  $k$ . Soit  $\varphi_0 \in D$  tel que  $k'(E - W(\varphi_0)) \neq 0$ .

Dans le Lemme 4.1, on a construit les solutions analytiques de Bloch  $\{\psi_{\pm}^0\}$  de l'équation (4.1) normalisées en  $E - W(\varphi_0)$ . Fixons  $\varphi \in D$ . On pose :

$$\psi_{\pm}(x, \varphi, E) = \psi_{\pm}^0(x, E - W(\varphi)), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in D. \quad (5.7)$$

Dans [10], les auteurs prouvent que les fonctions  $\varphi \mapsto \psi_{\pm}(x, \varphi, E)$  se prolongent analytiquement à tout le domaine  $D$ . On appelle  $\psi_{\pm}$  les *solutions canoniques de Bloch* de l'équation (5.6).

Pour faire apparaître le point de normalisation, on notera parfois  $\psi_{\pm}(x, \varphi, E, \varphi_0) = \psi_{\pm}^0(x, E - W(\varphi), E - W(\varphi_0))$ .

Enfin, on pose :

$$q(\varphi) = \sqrt{k'(E - W(\varphi))} \quad (5.8)$$

## 5.3 La notion de cohérence

### 5.3.1 Fonctions et bases cohérentes

On rappelle qu'une fonction est *cohérente* lorsqu'elle vérifie la relation (1.5).

On dira de plus qu'une base  $\{f_{\pm}\}$  de solutions de (1.3) est *une base cohérente* lorsque :

- Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  sont cohérentes.
- Leur wronskien est indépendant de  $\varphi$ .

### 5.3.2 Analyticité et cohérence

On définit tout d'abord la largeur d'un ensemble :

**Définition 5.5.** Soit  $Y_0 > 0$  et  $M$  un ensemble de points de  $S_{Y_0}$ . On définit la *largeur* de  $M$  dans  $S_{Y_0}$ , notée  $l(M, Y_0)$  par :

$$l(M, Y_0) = \inf_{y \in [-Y_0, Y_0]} \sup \{ |\operatorname{Re} \varphi - \operatorname{Re} \varphi'|; (\varphi, \varphi') \in M^2 \text{ tels que } \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi' = y \} \quad (5.9)$$

On énonce ensuite le résultat suivant :

**Lemme 5.1.** Soit  $E$  fixé. On considère  $X > 0$ ,  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  et  $K$  un domaine de  $\mathbb{C}$  tel que  $l(K, \tilde{Y}) > \varepsilon_0$ . On suppose que pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $f(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)$  est une solution cohérente de (1.3) pour  $\varphi \in K$  et que pour tout  $x \in [-X, X]$ , la fonction  $\varphi \mapsto f(x, \varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $K$ . Alors pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et tout  $x \in [-X, X]$ , la fonction  $\varphi \mapsto f(x, \varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $S_{\tilde{Y}}$ .

Ce résultat est prouvé dans [11, 13].

## 5.4 Le théorème de la méthode WKB complexe sur un domaine compact

Dans cette partie, on rappelle le résultat principal de la méthode WKB complexe sur des domaines compacts. Ce théorème, établi dans [10], construit sur les domaines canoniques, des solutions cohérentes de l'équation (1.3) au comportement asymptotique (1.6).

### 5.4.1 La notion de comportement asymptotique standard

On commence par rappeler la notion de comportement asymptotique standard telle qu'elle est présentée dans [13]. On dit qu'une fonction a le comportement asymptotique standard lorsqu'elle a les propriétés suivantes :

Soit  $E_0 \in \mathbb{C}$  et soit  $D \subset \mathbb{C}$  un domaine connexe ne contenant pas de points de branchement. Soit  $\kappa$  une détermination continue sur  $D$  et  $\psi_{\pm}$  les solutions canoniques de Bloch associées à  $D$  et normalisées en  $\xi_0 \in D$ . On dit qu'une fonction cohérente  $f$  solution de (1.3) a le comportement asymptotique standard  $f \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int^{\varphi} \kappa(u) du} \psi_+(x, \varphi, E)$ , respectivement  $f \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int^{\varphi} \kappa(u) du} \psi_-(x, \varphi, E)$ , dans  $D$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

- il existe un voisinage  $\mathcal{V}_0$  de  $E_0$  et  $X > 0$  telle que  $f$  est une solution cohérente (vérifiant (1.5)) de l'équation (1.3) pour tout  $(x, \varphi, E) \in [-X, X] \times D \times \mathcal{V}_0$  ;
- pour tout  $x \in [-X, X]$ , l'application  $(\varphi, E) \mapsto f(x, \varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $D \times \mathcal{V}_0$  ;
- pour tout domaine admissible  $A$  de  $D$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_A$  de  $E_0$  tel que :

$$\forall (x, \varphi, E) \in [-X, X] \times D \times \mathcal{V}_A, \quad f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_+(x, \varphi, E) + r_+(x, \varphi, E, \varepsilon)), \quad (5.10)$$

$$\text{avec } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[-X, X] \times D \times \mathcal{V}_A} |r_+(x, \varphi, E, \varepsilon)| = 0 ;$$

respectivement

$$\forall (x, \varphi, E) \in [-X, X] \times D \times \mathcal{V}_A, \quad f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_-(x, \varphi, E) + r_-(x, \varphi, E, \varepsilon)), \quad (5.11)$$

$$\text{avec } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[-X, X] \times D \times \mathcal{V}_A} |r_-(x, \varphi, E, \varepsilon)| = 0 ;$$

- les asymptotiques (5.10) et (5.11) sont une fois différentiables en  $x$ .

#### 5.4.2

On énonce maintenant le Théorème WKB sur un domaine compact.

#### **Théorème 5.1.** [10, 13]

Supposons que  $V$  vérifie  $(H_V)$  et que  $W$  vérifie  $(H_{W,r})$ . On fixe  $X > 1$ ,  $E_0 \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$ . Soit  $K \subset S_{\tilde{Y}}$  un domaine canonique borné pour (1.3) tel que  $l(K, \tilde{Y}) > 0$  ; soit  $\kappa$  une branche du moment complexe pour laquelle  $K$  est canonique.

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et une base cohérente  $\{f_+(x, \varphi, E, \varepsilon), f_-(x, \varphi, E, \varepsilon)\}$  de solutions de (1.3) ayant le comportement asymptotique standard (5.10) et (5.11) dans  $K$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, les fonctions  $\varphi \mapsto f_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $S_{\tilde{Y}}$ . Enfin, les solutions sont normalisées en  $\varphi_0 \in K$  et

$$w(f_+(\cdot, \varphi, E, \varepsilon), f_-(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)) = (w_0 k')(E - W(\varphi_0)). \quad (5.12)$$

où  $k$  est le quasi-moment associé à  $\kappa$ .

## 5.5 Les objets géométriques principaux de la méthode WKB complexe

L'objectif est de construire des domaines canoniques et plus généralement des domaines sur lesquels l'asymptotique standard reste valide. Pour cela, on définit les objets géométriques principaux de la méthode WKB. Pour cela, on reprend des idées développées notamment dans [9, 10, 11, 38].



### 5.5.1 Les lignes de Stokes

La définition des lignes de Stokes est relativement classique [9, 10]. L'intégrale  $\varphi \mapsto \int^\varphi \kappa(u)du$  a les mêmes points de branchement que le moment complexe. Soit  $\varphi_0$  l'un d'entre eux. On considère les courbes commençant en  $\varphi_0$ , et vérifiant l'équation

$$\operatorname{Im} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\kappa(\xi) - \kappa(\varphi_0))d\xi = 0 \quad (5.13)$$

où l'intégrale est prise le long de  $\gamma$ . Ces courbes sont *les lignes de Stokes* issues de  $\varphi_0$ . D'après les relations (4.10) et (4.11), la définition des lignes de Stokes est indépendante de la détermination choisie de  $\kappa$ .

Décrivons brièvement les lignes de Stokes en  $\varphi_0$ . Supposons que  $W'(\varphi_0) \neq 0$ . Les formules (2.4) et (4.8) impliquent qu'il y a trois lignes de Stokes issues de  $\varphi_0$ . En  $\varphi_0$ , l'angle entre deux lignes de Stokes adjacentes est  $2\pi/3$ .

### 5.5.2 Les lignes de type de Stokes

On rappelle que  $D \subset S_Y$  est un domaine simplement connexe ne contenant pas de points de branchement. Soit  $\gamma \subset D$  une courbe régulière. Sur  $\gamma$ , on fixe une détermination continue du moment  $\kappa$ . On dit que  $\gamma$  est une *ligne de type de Stokes* pour  $\kappa$ , si le long de  $\gamma$ , on a :

$$\operatorname{Im} \left( \int^\varphi \kappa(u)du \right) = \text{Const} \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im} \left( \int^\varphi (\kappa(u) - \pi)du \right) = \text{Const}$$

### 5.5.3 Les lignes pré-canoniques

Soit  $\gamma \subset D$  une courbe verticale. La courbe  $\gamma$  est une *ligne pré-canonique* si elle est la réunion finie de segments bornés de lignes canoniques ou de lignes de type de Stokes.

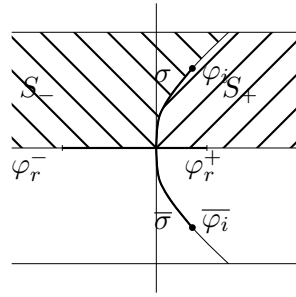
## 5.6 Construction de déterminations du moment dans le cas de la croix simple et de la croix double

Dans cette partie, on va décrire les différentes déterminations de  $\kappa$  près des points de branchement dans les cas décrits en 2.3.1 et 2.4.1. Dans le cas de la croix simple, la configuration géométrique est assez proche de celle décrite dans [12]. Dans le cas de la croix double, c'est essentiellement deux croix simples. Ce cas est proche du cas étudié dans [14].

### 5.6.1 La croix simple : différents cas possibles

#### Choix d'une détermination au voisinage de la croix

On suppose que les hypothèses  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$ ,  $(H_J)$  sont vérifiées. Pour étudier les objets géométriques principaux de la méthode WKB complexe, on doit préciser les propriétés de  $\operatorname{Im} \kappa$  et  $\operatorname{Re} \kappa$ . L'hypothèse  $(H_J)$  recouvre essentiellement deux cas différents selon la nature de la bande  $B$  dans  $(H_J)$ . L'étude des opérateurs périodiques résumée au chapitre 4 entraîne que  $\kappa(\varphi_r^\pm) \equiv 0[\pi]$ .


 FIG. 5.2 – Les domaines  $S_-$  et  $S_+$ 

On distingue les cas où  $\kappa(\varphi_r^\pm) \equiv 0[2\pi]$ , et  $\kappa(\varphi_r^\pm) \equiv \pi[2\pi]$ . On définit tout d'abord  $S_-$  le domaine ouvert délimité en bas par la droite réelle et à droite par  $\Sigma_+$  :

$$S_- = \{\varphi - r ; \varphi \in \Sigma_+^*, r \in \mathbb{R}_+^*\} \cap S_Y \quad (5.14)$$

De même, on définit  $S_+$  le domaine ouvert délimité en bas par la droite réelle et à gauche par  $\Sigma_+$  :

$$S_+ = \{\varphi + r ; \varphi \in \Sigma_+^*, r \in \mathbb{R}_+^*\} \cap S_Y \quad (5.15)$$

Les domaines  $S_+$  et  $S_-$  sont représentés sur la figure 5.2. On va prouver le résultat suivant :

**Lemme 5.2.** *On suppose que les hypothèses  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$ ,  $(H_J)$  sont vérifiées. Il existe une détermination  $\kappa_i$  du moment complexe telle que*

1. *Im  $\kappa_i(\varphi) > 0$  pour  $\varphi \in S_-$ ,  $\kappa_i(\varphi_r^- + i0) = 0$  et  $\kappa_i(\varphi_i - 0) = \pi$ ,  
ou*
2. *Im  $\kappa_i(\varphi) < 0$  pour  $\varphi \in S_-$ ,  $\kappa_i(\varphi_r^- + i0) = \pi$  et  $\kappa_i(\varphi_i - 0) = 0$ .*

**Démonstration** On s'intéresse au cas  $\kappa_i(\varphi_r^-) \equiv 0[2\pi]$ .

- On commence par fixer le signe de la partie imaginaire de  $\kappa_i$ . L'image  $(E - W)(\mathbb{R} - [\varphi_r^-, \varphi_r^+])$  est incluse dans une lacune  $G$ . On pose  $\Lambda_- = (E - W)(S_-)$ . On va prouver que  $\Lambda_-$  est un domaine connexe du plan complexe qui ne rencontre  $\mathbb{R}$  que dans la lacune  $G$ . D'après l'hypothèse  $(H_{W,g})$  (2.2.3), il existe une suite de lignes verticales  $\tilde{\Sigma}_k$  telles que :

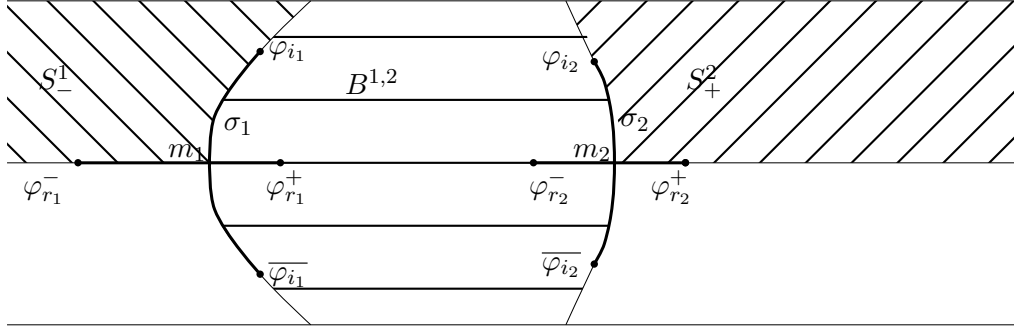
$$\Lambda_- \cap \mathbb{R} = (E - W)((-\infty, \varphi_r^-] \cup [\varphi_r^+, +\infty)) \cup (E - W)(\tilde{\Sigma}_k^+).$$

$(E - W)(\tilde{\Sigma}_k^+)$  est un connexe de  $\mathbb{R}$  qui contient au moins un point de  $G$  et qui ne rencontre pas  $\partial\sigma(H_0)$ . Par conséquent,  $(E - W)(\tilde{\Sigma}_k^+)$  est inclus dans  $G$  et finalement :

$$\Lambda_- \cap \mathbb{R} = G.$$

On fixe sur  $\Lambda_-$  une détermination continue du quasi-moment  $k$ . La partie imaginaire de cette détermination ne change pas de signe car  $(E - W)(S_-)$  ne rencontre pas  $\sigma(H_0)$ . Par conséquent, si on pose  $\kappa_i(\varphi) = k(E - W(\varphi))$ , Im  $\kappa_i$  reste de signe constant sur  $S_-$ . On peut supposer que Im  $\kappa_i > 0$  sur  $S_-$ .

- On va désormais préciser la partie réelle de  $\kappa_i$ . D'après le paragraphe 4.2 du chapitre 4, on peut choisir  $\kappa_i$  tel que  $\kappa_i(\varphi_r^- + i0) \in \{0, \pi\}$ . Décrivons tout d'abord les deux possibilités recouvertes par l'hypothèse  $\kappa_i(\varphi_r^-) = 0$ .


 FIG. 5.3 – Les domaines  $S_-^1$ ,  $S_+^2$  et  $B^{1,2}$ 

1. Le point 0 est un minimum de  $W$  et la bande  $B$  intervenant dans  $(H_J)$  est du type  $[E_{4l+1}, E_{4l+2}]$ . Alors les points  $E_r$  et  $E_i$  vérifient  $E_r = E_{4l+1}$  et  $E_i = E_{4l+2}$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $[\varphi_r^-, 0] \cup \sigma$  tel que  $(E - W)(S_- \cap V) \subset \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{R}$ . En effet, au voisinage de 0, on a  $\text{Im}(E - W(\varphi)) \geq 0$ . De plus, d'après  $(H_{W,g})$ , il existe un voisinage  $V$  de  $[\varphi_r^-, 0] \cup \sigma$  tel que  $(E - W)(S_- \cap V)$  ne rencontre pas  $\mathbb{R}$ . Comme elle est continue,  $\varphi \mapsto \text{Im}(E - W(\varphi))$  reste strictement positive sur  $S_- \cap V$ . Il existe une détermination  $k$  du moment de Bloch telle que

$$\text{Im } k(\mathcal{E}) > 0 \text{ pour } \text{Im } \mathcal{E} > 0 \text{ et } k(E_r + i0) = 0, k(E_i + i0) = \pi.$$

On pose  $\kappa_i(\varphi) = k(E - W(\varphi))$ , ce qui donne le résultat annoncé.

2. Le point 0 est un maximum et la bande  $B$  est du type  $[E_{4l+3}, E_{4l+4}]$ ; avec les notations introduites dans  $(H_J)$ , les points  $E_r$  et  $E_i$  vérifient  $E_r = E_{4l+4}$ ,  $E_i = E_{4l+3}$ . Dans ce cas, on a  $E - W(\varphi_r^- + i0) = E_r - i0$  et  $E - W(\varphi_i - 0) = E_i - i0$ . Si  $k$  est la détermination du moment de Bloch telle que  $\text{Im } k(\mathcal{E}) > 0$  pour  $\text{Im } \mathcal{E} < 0$ , et  $k(E_r) = 0$ , alors  $k(E_i) = \pi$ . On obtient donc le résultat.

On traite de même le cas où  $\kappa_i(\varphi_r^-) = \pi$ .

Ceci termine la preuve du Lemme 5.2.

◇

Pour fixer les idées, dans toutes les preuves pour la croix simple, on se placera désormais dans le cas :

$$\kappa_i(\varphi_r^- + i0) = 0 \text{ et } \kappa_i(\varphi_i - 0) = \pi \quad (5.16)$$

Les arguments dans le deuxième cas sont identiques et on ne donnera pas les détails.

### 5.6.2 Le cas de la croix double

On suppose désormais que les hypothèses  $(H'_{W,g})$ ,  $(H'_J)$  sont vérifiées. Par un raisonnement similaire à celui du Lemme 5.2, on peut décrire au voisinage de chaque croix  $C_1$  et  $C_2$  deux déterminations  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  vérifiant les points (1) ou (2) de ce lemme. On s'intéresse au choix d'une détermination du moment complexe entre les points de branchement  $\varphi_{r1}^+$  et  $\varphi_{r2}^-$ .

On introduit comme pour la croix simple le domaine ouvert  $S_-^1$  délimité en bas par l'axe réel et à droite par  $\Sigma_{1,+}$  :

$$S_-^1 = \{\varphi - r ; \varphi \in \Sigma_{1,+}^*, r \in \mathbb{R}_+^*\} \cap S_Y. \quad (5.17)$$

On définit aussi  $S_+^2$  délimité en bas par l'axe réel et à gauche par  $\Sigma_{2,+}$ .

$$S_+^2 = \{\varphi + r ; \varphi \in \Sigma_{2,+}^*, r \in \mathbb{R}_+^*\} \cap S_Y. \quad (5.18)$$

On note  $B^{1,2}$  le domaine ouvert compris entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et coupé sur  $[m_1, \varphi_{r_1}^+]$  et  $[\varphi_{r_2}^-, m_2]$ . Ces différents domaines du plan complexe sont représentés dans la figure 5.3.

**Lemme 5.3.** *Il existe dans le domaine  $B^{1,2}$  une détermination continue  $\kappa_0$  du moment complexe ayant les propriétés suivantes :*

1.  $\text{Im } \kappa_0(\varphi) > 0$  pour  $\varphi \in B^{1,2}$ .
2.  $\kappa_0(\varphi_{r_1}^+ + 0) = \kappa_0(\varphi_{r_2}^- - 0) \in \{0, \pi\}$ .
3.  $\kappa_0(\overline{\varphi_{i_1}} + 0) = \kappa_0(\varphi_{i_2} - 0)$  ;  $\kappa_0(\overline{\varphi_{i_2}} - 0) = \kappa_0(\varphi_{i_1} + 0)$ .
4.  $\kappa_0(\overline{\varphi_{i_1}} + 0) + \kappa_0(\varphi_{i_1} + 0) = 2\kappa_0(\varphi_{r_1}^+ + 0)$ .

**Démonstration** On note que par continuité, l'image de l'intervalle réel  $[\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-]$  est incluse dans le gap  $G$  contigu aux bandes  $B_1$  et  $B_2$  de l'hypothèse  $(H'_j)$ . On s'intéresse à  $\Lambda = (E - W)^{-1}(B^{1,2})$ .  $\Lambda$  est un domaine du plan complexe qui ne rencontre l'axe réel que dans  $G$ . En effet, d'après  $(H_{W,g})$  (paragraphe 2.2.3 du chapitre 2) il existe une suite de lignes verticales  $\{\tilde{\Sigma}_k\}_{k \in \{p_1 \dots p_2\}}$  telles que :

$$\Lambda \cap \mathbb{R} = (E - W)([\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-]) \cup \bigcup_{k \in \{p_1 \dots p_2\}} (E - W)(\tilde{\Sigma}_k)$$

$(E - W)(\tilde{\Sigma}_k)$  est un connexe de  $\mathbb{R}$  qui contient au moins un point de  $G$  et qui ne rencontre pas  $\partial\sigma(H_0)$ . Par suite,  $(E - W)(\tilde{\Sigma}_k) \subset G$ , et  $\Lambda \cap \mathbb{R} = G$ .

On considère le plan complexe coupé le long de  $\mathbb{R} - G$ . Sur ce domaine, il existe une détermination continue  $k$ . Cette détermination a une partie imaginaire de signe constant. On peut donc supposer que  $\text{Im } k > 0$ . On sait de plus (paragraphe 4.2 du chapitre 4) que :

$$k(E_{r_1}) = k(E_{r_2}) \in \pi\mathbb{Z}$$

On fixe donc la détermination  $k$  pour que  $k(E_{r_1}) \in \{0, \pi\}$ . On pose désormais  $\kappa_0(\varphi) = k(E - W(\varphi))$ . On va maintenant préciser les valeurs de  $\kappa_0$  en les points de branchement. On a vu (paragraphe 2.4.3 du chapitre 2) que l'hypothèse  $(H'_j)$  recouvre deux cas :

- Les bandes  $B_1$  et  $B_2$  sont deux bandes consécutives. Dans ce cas,  $E_{r_1}$  et  $E_{r_2}$  sont deux extrémités différentes de la lacune  $G$ . Les extrema  $m_1$  et  $m_2$  sont de type différent et il y a un nombre pair d'extrema entre  $m_1$  et  $m_2$ . Supposons pour fixer les idées que  $m_1$  est un maximum et  $m_2$  est un minimum. Alors  $E_{r_1} < E_{r_2}$  et la bande  $B_1$  est en-dessous de la bande  $B_2$ . Cette situation est représentée en figure 5.4A. Dans ce cas, on effectue un raisonnement identique à celui de la preuve du Lemme 5.2 pour étudier le signe de  $\text{Im } (E - W(\varphi))$  au voisinage de chaque croix. Cette étude montre qu'il existe deux voisinages  $V_1$  de la croix  $C_1$  et  $V_2$  de la croix  $C_2$  tels que :

$$\text{Im } (E - W(\varphi)) > 0 \quad \text{pour } \varphi \in V_1 \cap B^{1,2} \cap \mathbb{C}^+$$

$$\operatorname{Im} (E - W(\varphi)) > 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \in V_2 \cap B^{1,2} \cap \mathbb{C}^+$$

De cette étude, on déduit que :

$$\begin{aligned} \kappa_0(\varphi_{r_1}^+ + 0) &= k(E_{r_1}) = \kappa_0(\varphi_{r_2}^- + 0) = k(E_{r_2}) \\ \kappa_0(\varphi_{i_1} + 0) &= k(E_{i_1} + i0) ; \kappa_0(\varphi_{i_2}^- - 0) = k(E_{i_2} + i0) \end{aligned}$$

Enfin, on a les relations suivantes pour les valeurs du quasi-moment (paragraphe 4.2 du chapitre 4) :

$$k(E_{i_1} + i0) = k(E_{i_2} - i0) ; k(E_{i_1} - i0) = k(E_{i_2} + i0) ; k(E_{i_1} + i0) + k(E_{i_1} - i0) = 2k(E_{r_1}).$$

ce qui implique le résultat lorsque  $m_1$  est un maximum et  $m_2$  un minimum. On raisonne de la même manière lorsque  $m_2$  est un maximum et  $m_1$  un minimum.

- Les bandes  $B_1$  et  $B_2$  sont confondues. Dans ce cas,  $E_{r_1} = E_{r_2}$ ,  $E_{i_1} = E_{i_2}$  et les extrema  $m_1$  et  $m_2$  sont de même type ; pour fixer les idées, supposons que ce sont deux minima (voir figure 5.4B). De même, on s'intéresse au signe de  $\operatorname{Im} (E - W(\varphi))$  au voisinage de chacune des croix. Il existe un voisinage  $V_1$  de  $C_1$  et un voisinage  $V_2$  de  $C_2$  tels que :

$$\operatorname{Im} (E - W(\varphi)) < 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \in V_1 \cap B^{1,2} \cap \mathbb{C}^+$$

$$\operatorname{Im} (E - W(\varphi)) > 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \in V_2 \cap B^{1,2} \cap \mathbb{C}^+$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \kappa_0(\varphi_{r_1}^+ + 0) &= k(E_{r_1}) = \kappa_0(\varphi_{r_2}^- + 0) = k(E_{r_2}) \\ \kappa_0(\varphi_{i_1} + 0) &= k(E_{i_1} - i0) ; \kappa_0(\varphi_{i_2}^- - 0) = k(E_{i_2} + i0) \end{aligned}$$

Le quasi-moment vérifie

$$k(E_{i_1} + i0) + k(E_{i_1} - i0) = 2k(E_{r_1}),$$

ce qui implique le résultat. On traite de même le cas de deux maxima.

Ceci achève la preuve du Lemme 5.3.

◇

De même que pour la croix simple, on se placera pour les preuves de la croix double dans le cas :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \kappa_0(\varphi) &> 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \in B^{1,2}, & (5.19) \\ \kappa_0(\varphi_{r_1}^+ + 0) &= \kappa_0(\varphi_{r_2}^- - 0) = 0, \\ \kappa_0(\overline{\varphi_{i_1}} + 0) &= \kappa_0(\varphi_{i_2} - 0) = \pi, \\ \kappa_0(\varphi_{i_1} + 0) &= \kappa_0(\overline{\varphi_{i_2}} - 0) = -\pi. \end{aligned}$$

### 5.6.3 Les autres déterminations possibles

On décrit ici certaines déterminations du moment complexe et les domaines qui leur sont attachés. Les propriétés générales du moment complexe sont des conséquences des hypothèses sur  $W$  et de la description du quasi-moment de Bloch. Les propriétés de  $\kappa$  près des points de branchement  $\varphi_i$ ,  $\overline{\varphi_i}$ ,  $\varphi_r^+$ ,  $\varphi_r^-$  découlent des propriétés de  $k$  près de  $E_r$  et  $E_i$ .

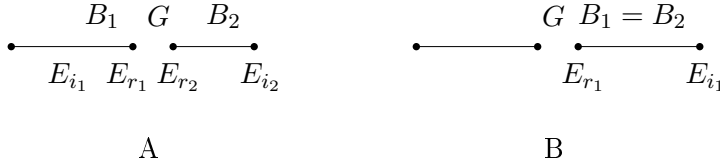


FIG. 5.4 – Image des croix dans le plan des énergies

### Le cas de la croix simple

Les déterminations décrites ici sont obtenues par prolongement à partir de la détermination  $\kappa_i$  définie au Lemme 5.2. On considère la détermination continue  $\kappa_i$  définie dans le Lemme 5.2. On se place dans le cas (5.16).

- On note  $\kappa_g$  le prolongement de cette détermination  $\kappa_i$  au domaine  $\{\text{Re}(\varphi) < \text{Re}(\varphi_r^-)\}$ .  $\kappa_g$  vérifie :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\kappa_g(\varphi)) &> 0 \text{ pour } \{\text{Re}(\varphi) < \text{Re}(\varphi_r^-)\} \\ \text{Re}(\kappa_g(\varphi)) &\rightarrow 0 \text{ quand } \text{Re}(\varphi) \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

$\kappa_g$  est le prolongement de  $\kappa_i$  à travers  $(-\infty, \varphi_r^-]$ .

- On considère la bande  $S_Y$  coupée le long de  $(\Sigma \setminus \sigma) \cup (\overline{\Sigma} \setminus \overline{\sigma}) \cup (-\infty, \varphi_r^-) \cup (\varphi_r^+, +\infty)$ . On note encore  $\kappa_i$  le prolongement de  $\kappa_i$  à travers  $C$ .
- De même, sur  $\{\text{Re}(\varphi) > \text{Re}(\varphi_r^+)\}$ , on fixe une détermination continue  $\kappa_d$  par les conditions :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\kappa_d(\varphi)) &> 0 \text{ pour } \{\text{Re}(\varphi) > \text{Re}(\varphi_r^+)\} \\ \text{Re}(\kappa_d(\varphi)) &\rightarrow 0 \text{ quand } \text{Re}(\varphi) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

$\kappa_d$  est le prolongement de  $\kappa_i$  à travers  $\overline{S}_+$ .

On décrit ici les liens entre ces différentes déterminations de  $\kappa$  :

$$\forall \varphi \in S_-^1, \quad \kappa_g(\varphi) = \kappa_i(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \overline{S}_-, \quad \kappa_g(\varphi) = -\kappa_i(\varphi). \quad (5.20)$$

$$\forall \varphi \in S_+^2, \quad \kappa_d(\varphi) = -\kappa_i(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \overline{S}_+, \quad \kappa_d(\varphi) = \kappa_i(\varphi). \quad (5.21)$$

### Le cas de la croix double

On décrit maintenant le choix des déterminations  $\kappa$  dans le cas de la croix double :

- De même que pour la croix simple, on considère la détermination  $\kappa_1$  du moment complexe fixée au niveau de la croix  $C_1$  par l'équation (5.16). On note encore  $\kappa_1$  le prolongement continu de  $\kappa_1$  à travers  $C_1$ .  $\kappa_1$  vérifie :

1.  $\text{Im} \kappa_1(\varphi) > 0$  pour  $\varphi \in S_-$ ,
2.  $\kappa_1(\varphi_{r_1}^-) = \kappa_1(\varphi_{r_1}^+) = 0$ ,
3.  $\kappa_1(\varphi_{i_1}) = \kappa_1(\overline{\varphi_{i_1}}) = \pi$ .

- On définit de manière analogue  $\kappa_2$  le prolongement de  $\kappa_2$  à travers  $C_2$ .  $\kappa_2$  vérifie :

1.  $\text{Im} \kappa_2(\varphi) < 0$  pour  $\varphi \in S_+$ ,
2.  $\kappa_2(\varphi_{r_2}^-) = \kappa_2(\varphi_{r_2}^+) = 0$ ,
3.  $\kappa_2(\varphi_{i_2}) = \kappa_2(\overline{\varphi_{i_2}}) = \pi$ .

- On note  $\kappa_g$  le prolongement de  $\kappa_1$  au domaine  $\{\operatorname{Re}(\varphi) < \operatorname{Re}(\varphi_{r_1}^-)\}$ .  $\kappa_g$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\kappa_g(\varphi)) &> 0 \text{ pour } \{\operatorname{Re}(\varphi) < \operatorname{Re}(\varphi_{r_1}^-)\} \\ \operatorname{Re}(\kappa_g(\varphi)) &\rightarrow 0 \text{ quand } \operatorname{Re}(\varphi) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

- De même, sur  $\{\operatorname{Re}(\varphi) > \operatorname{Re}(\varphi_{r_2}^+)\}$ , on considère le prolongement  $\kappa_d$  de  $\kappa_2$ . La fonction  $\kappa_d$  vérifie :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\kappa_d(\varphi)) &> 0 \text{ pour } \{\operatorname{Re}(\varphi) > \operatorname{Re}(\varphi_{r_2}^+)\} \\ \operatorname{Re}(\kappa_d(\varphi)) &\rightarrow 0 \text{ quand } \operatorname{Re}(\varphi) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

- Entre  $\varphi_{r_1}^+$  et  $\varphi_{r_2}^-$ , on rappelle que  $\kappa_0$  est la détermination décrite dans le Lemme 5.3. On se place dans le cas (5.19).  $\kappa_0$  vérifie :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\kappa_0(\varphi)) &> 0 \text{ pour } \varphi \in ]\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-[ \\ \operatorname{Re}(\kappa_0(\varphi)) &= 0 \text{ pour } \varphi \in [\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-] \end{aligned}$$

On décrit maintenant les liens entre ces diverses déterminations :

- Les relations entre  $\kappa_g$  et  $\kappa_1$  d'une part et  $\kappa_d$  et  $\kappa_2$  d'autre part sont similaires aux relations (5.20) et (5.21), c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in S_-^1, \quad \kappa_g(\varphi) = \kappa_1(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \overline{S_-^1}, \quad \kappa_g(\varphi) = -\kappa_1(\varphi). \quad (5.22)$$

$$\forall \varphi \in S_+^2, \quad \kappa_d(\varphi) = -\kappa_2(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \overline{S_+^2}, \quad \kappa_d(\varphi) = \kappa_2(\varphi). \quad (5.23)$$

- On s'intéresse également aux relations dans le domaine entre les deux croix :

$$\forall \varphi \in B^{1,2} \cap \mathbb{C}_+, \quad \kappa_0(\varphi) = -\kappa_1(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in B^{1,2} \cap \mathbb{C}_-, \quad \kappa_0(\varphi) = \kappa_1(\varphi). \quad (5.24)$$

$$\forall \varphi \in B^{1,2} \cap \mathbb{C}_+, \quad \kappa_0(\varphi) = \kappa_2(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in B^{1,2} \cap \mathbb{C}_-, \quad \kappa_0(\varphi) = -\kappa_2(\varphi). \quad (5.25)$$

## 5.7 Lignes de Stokes

Dans ce paragraphe, on va décrire les lignes de Stokes au voisinage des points  $\varphi_r^-$ ,  $\varphi_r^+$ ,  $\varphi_i$  et  $\overline{\varphi_i}$ . On a représenté cette configuration sur la figure 5.5. Sur cette figure, on a indiqué entre parenthèses la valeur prise par  $\kappa$  aux points de branchement.

Etant donné que  $W$  est réel sur l'axe réel, on sait que la figure représentative des lignes de Stokes admet l'axe réel pour axe de symétrie.

Tout d'abord,  $\kappa_i$  est réel sur le segment  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+] \subset \mathbb{R}$  ; par conséquent,  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+]$  est une ligne de Stokes. Il y a deux autres lignes de Stokes issues de  $\varphi_r^-$  ; on note  $b$  la ligne qui va vers le haut et  $\bar{b}$ , sa symétrique par rapport à l'axe réel. De même, on désigne par  $a$  et  $\bar{a}$  les deux autres lignes de Stokes issues de  $\varphi_r^+$  ;  $a$  est celle qui va vers le haut.

Pour ce qui concerne les lignes de Stokes issues de  $\varphi_i$ , il y en a trois, séparées par un angle de  $2\pi/3$ . Dans la région délimitée par  $\Sigma$  et  $e^{\frac{2i\pi}{3}}\Sigma$ , il existe une ligne de Stokes, qui est localement dirigée vers la droite de  $\Sigma$  ; on la note  $d$ . De même, il existe une ligne de Stokes entre  $\Sigma$  et  $e^{-\frac{2i\pi}{3}}\Sigma$ . On la note  $e$ . Enfin, la troisième ligne de Stokes issue de  $\varphi_i$  est dirigée vers le haut. On l'appelle  $c$ . Par symétrie, on en déduit l'existence des lignes de Stokes  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$  et  $\bar{e}$  issues de  $\overline{\varphi_i}$ .

Le comportement des lignes de Stokes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  dans la bande  $S_Y$  est décrit dans le lemme suivant.

**Lemme 5.4.** *On suppose que  $V$  et  $W$  vérifient les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_W)$ . Lorsque  $J$  vérifie  $(H_J)$  ou  $(H'_J)$ , les lignes de Stokes autour d'une croix ont les propriétés suivantes :*

1. *a* reste verticale ; elle coupe  $\{\text{Im}(\varphi) = Y\}$  et ne rencontre aucune ligne de Stokes d'équation  $\text{Im} \int \kappa = 0$ .
2. *b* reste verticale ; elle coupe  $\{\text{Im}(\varphi) = Y\}$  et ne rencontre aucune ligne de Stokes d'équation  $\text{Im} \int \kappa = 0$ .
3. *d* coupe *a* au-dessus du point  $\varphi_r^+$  ; le segment de *d* entre  $\varphi_i$  et l'intersection avec *a* est vertical.
4. *e* coupe *b* au-dessus de  $\varphi_r^-$  ; le segment entre  $\varphi_i$  et l'intersection avec *b* est vertical.
5. *c* reste verticale, coupe  $\{\text{Im}(\varphi) = Y\}$  et ne coupe pas  $\sigma$ .
6. *a* et *c* ne se coupent pas dans  $S_Y$ .
7. *b* et *c* ne se coupent pas dans  $S_Y$ .

**Démonstration** On énonce tout d'abord deux remarques générales sur les lignes de Stokes. D'abord, une ligne de Stokes devient horizontale seulement en un point où  $\text{Im} \kappa = 0$ , c'est à dire en un point de la pré-image d'une bande spectrale. D'autre part, une ligne de Stokes issue de  $\varphi_r^\pm$  (respectivement issue de  $\varphi_i$  ou  $\bar{\varphi}_i$ ) est localement orthogonale à  $i\overline{\kappa(\varphi)}$  (respectivement à  $i(\pi - \kappa(\varphi))$ ).

On effectue la démonstration en détail lorsque  $J$  vérifie  $(H_J)$ . Le cas où  $J$  vérifie  $(H'_J)$  est analogue et on indiquera juste les modifications.

On commence par démontrer le point (1). D'après  $(H_J)$ , la pré-image des bandes spectrales est  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+] \cup \sigma$ . *a* devient donc horizontale seulement si elle rencontre  $\sigma$ . Montrons par l'absurde que c'est impossible. Supposons que *a* coupe la ligne  $\sigma$  en  $\varphi_a$ , alors :

$$\text{Im} \int_{\varphi_r^+}^{\varphi_a} \kappa(u) du = 0 = \text{Im} \int_0^{\varphi_a} \kappa(u) du$$

où cette dernière intégrale est prise le long de  $\sigma$ ,

$$= \int_0^{\varphi_a} (\text{Re} \kappa(u)) d(\text{Im}(u)) \leq -k_1(E - W_-) \text{Im} \varphi_a < 0$$

ce qui est impossible. Donc, *a* reste verticale. De plus, lorsque  $\varphi \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \in S_Y$ ,  $\text{Im}(i\bar{\kappa}) \rightarrow 0$ . Donc, *a* admet une asymptote verticale et intersecte  $\{\text{Im}(\varphi) = Y\}$ . Deux lignes de Stokes du même type et distinctes ne se rencontrent pas ; par conséquent, *a* ne rencontre aucune ligne de Stokes d'équation  $\text{Im} \int \kappa(u) du = 0$ .

On obtient de la même façon le point (2).

Pour démontrer le point (3), on considère la ligne de Stokes *d*. Si *a* et *d* ne se coupent pas, alors *d* rencontre soit  $\sigma$ , soit  $[0, \varphi_r^+]$ . Dans le premier cas, si on note  $\varphi_d$  le point d'intersection, on a :

$$\text{Im} \int_{\varphi_d}^{\varphi_i} (\kappa(u) - \pi) du = 0 = \int_{\varphi_d}^{\varphi_i} \text{Re}(\kappa(u) - \pi) d(\text{Im}(u)) < 0$$

Par conséquent, *d* et *a* se coupent. Entre  $\varphi_i$  et son intersection avec *a*, *d* ne rencontre pas la pré-image d'une bande spectrale et donc reste verticale. On démontre de manière analogue les propriétés de *e*.

On s'intéresse maintenant au point (5). *c* est dirigée vers le haut. Cette ligne ne devient horizontale



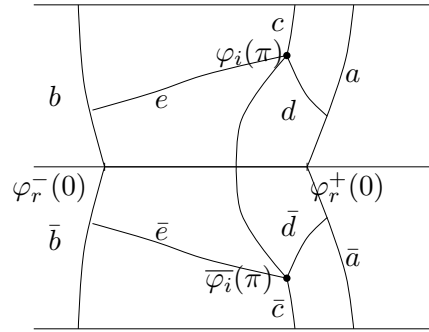


FIG. 5.5 – Lignes de Stokes

que si elle rencontre la pré-image d'une bande spectrale. Ceci est impossible dans le domaine  $\{\text{Im } \varphi \in ]\text{Im } \varphi_i, Y[ \}$ .  $c$  reste donc verticale.

On prouve enfin le point (6) par l'absurde. Supposons qu'il existe  $\varphi_a \in a \cap c$ . Alors on calcule :

$$\text{Im} \int_0^{\varphi_a} \kappa(u) du = 0 = \text{Im} \int_{\sigma} \kappa(u) du + \text{Im} \int_{\varphi_i}^{\varphi_a} \kappa(u) du$$

en intégrant le long de  $[0, \varphi_r^+] \cup a$ . D'une part  $\text{Im} \int_{\varphi_i}^{\varphi_a} \kappa(u) du = \pi \text{Im} (\varphi_a - \varphi_i) > 0$  et d'autre part  $\text{Im} \int_{\sigma} \kappa(u) du = \int_{\sigma} \text{Re } \kappa(u) d(\text{Im } u) > 0$ .

Il y a donc une contradiction ; par conséquent,  $a$  et  $c$  ne se coupent pas dans  $S_Y$ .

Lorsque  $J$  vérifie  $(H'_J)$ , on note  $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j$  les lignes de Stokes associées à chacune des croix  $C_j$ . On imite la preuve du cas  $(H_J)$  en remarquant les faits suivants :

- $a_1$  et  $b_2$  ne se rencontrent pas. En effet,  $a_1$  et  $b_2$  sont des lignes de Stokes de même type et donc ne se coupent pas.
- $a_1$  ne rencontre pas  $\sigma_2$ . Puisque  $b_2$  est strictement à gauche de  $\sigma_2$ , et que  $a_1$  et  $b_2$  ne se coupent pas,  $a_1$  ne rencontre pas  $\sigma_2$ . Par conséquent,  $a_1$  reste verticale.
- De même,  $b_2$  ne rencontre pas  $\sigma_1$  et reste donc verticale.
- $c_1$  ne rencontre pas  $\sigma_2$  et reste donc verticale.
- $c_2$  ne rencontre pas  $\sigma_1$  et reste donc verticale.

Ceci termine la preuve du Lemme 5.4.

◇

## 5.8 La construction d'une base cohérente à l'asymptotique standard autour de la croix

### 5.8.1 Description du domaine $K_i^\infty$

On va décrire désormais certains domaines canoniques relativement compacts autour de la croix simple. La configuration géométrique est similaire à celle présentée dans la section 7 de [12], à l'exception de la parité du potentiel  $W$ .

On commence par introduire une nouvelle notation.

Soient deux lignes de Stokes  $r$  et  $s$ , admettant un point d'intersection. On note  $r_s$ , le segment de  $r$  compris entre le point de branchement à l'origine de  $r$  et son intersection avec  $s$ .

On définit :

$$L_i = \bar{b} \cup b_e \cup e_b \cup c, \quad (5.26)$$

$$R_i = \bar{c} \cup \bar{d}_a \cup \bar{a}_d \cup a. \quad (5.27)$$

D'après le Lemme 5.4, les lignes  $L_i$  et  $R_i$  ne se coupent pas dans  $S_Y$ . Par suite, les lignes  $L_i$  et  $R_i$  ainsi que les droites d'équation  $\text{Im } \varphi = -Y$ ,  $\text{Im } \varphi = Y$  délimitent un domaine connexe du plan complexe, que l'on note  $K_i^\infty$ .  $K_i^\infty$  est représenté dans la figure 5.7.

Soient  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deux points de  $K_i^\infty$  tels que  $\text{Im } \xi_1 = -Y$  et  $\text{Im } \xi_2 = Y$ .

### 5.8.2 Description des lignes de type de Stokes

On donne ici une description des lignes de type de Stokes  $\text{Im } \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa(u) du = \text{Const}$  et  $\text{Im } \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\pi - \kappa(u)) du = \text{Const}$ . On a défini ces lignes au paragraphe 5.5.2 de ce chapitre. La situation a été étudiée en détail dans [12]. On reprend donc leurs constructions.

On notera de façon générique  $\gamma_A$  les lignes de type de Stokes  $\text{Im } \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa(u) du = \text{Const}$  et  $\gamma_B$  les lignes de type de Stokes  $\text{Im } \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\pi - \kappa(u)) du = \text{Const}$ .

On dit que les lignes d'une famille  $(l_v)_{v \in U}$  fibrent un domaine  $D$  si  $D$  est l'union disjointe des lignes  $(l_v)_{v \in U}$ . Les familles de lignes de type de Stokes  $\gamma_A$  et  $\gamma_B$  fibrent toutes deux le domaine  $K_i^\infty$  ([12]).

Pour représenter les familles de lignes de type de Stokes, il suffit d'étudier les champs de vecteurs  $i\bar{\kappa}$  et  $i(\pi - \bar{\kappa})$ . Pour  $j \in \{1, 2\}$ , et  $\xi_j \in K_i^\infty$ , on note  $\gamma_A(\xi_j)$  et  $\gamma_B(\xi_j)$  les courbes passant par  $\xi_j$  et vérifiant :

$$\gamma_A(\xi_j) : \text{Im } \int_{\xi_j}^{\varphi} \kappa(u) du = 0$$

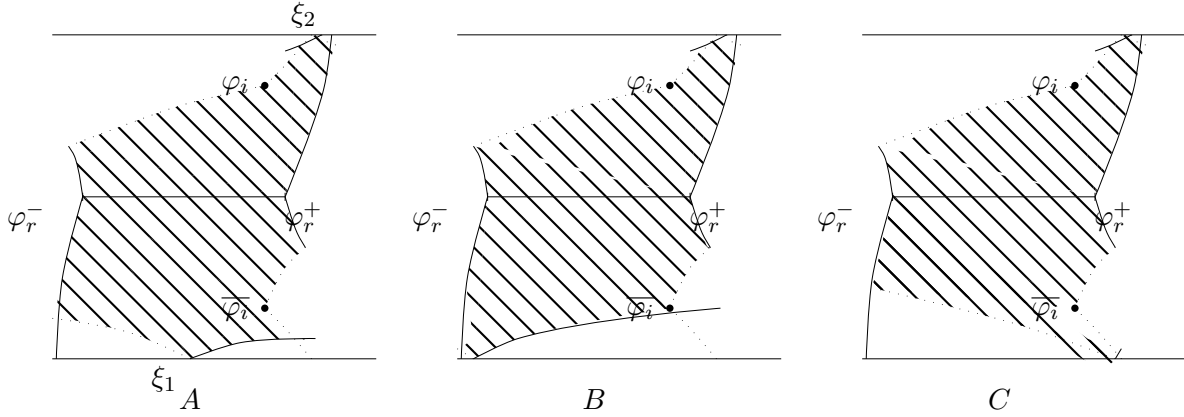
$$\gamma_B(\xi_j) : \text{Im } \int_{\xi_j}^{\varphi} (\pi - \kappa(u)) du = 0$$

### 5.8.3 Le domaine $K_i(\xi_1, \xi_2)$

Là encore, on se réfère à la section 7 de [12]. L'étude des lignes de type de Stokes  $\gamma_A$  montre que la ligne de type de Stokes  $\gamma_A(\xi_1)$  coupe  $R_i$  (définie en (5.27)) dans  $S_Y$ . De même, la ligne  $\gamma_B(\xi_1)$  coupe  $L_i$  (définie en 5.26) dans  $S_Y$ . Enfin, les lignes  $\gamma_B(\xi_2)$  et  $R_i$  se coupent ainsi que les lignes  $\gamma_A(\xi_2)$  et  $L_i$ . On note  $K_i(\xi_1, \xi_2)$  le domaine limité à gauche par  $L_i$ , à droite par  $R_i$ , en bas par  $\gamma_B(\xi_1) \cup \gamma_A(\xi_1)$  et en haut par  $\gamma_A(\xi_2) \cup \gamma_B(\xi_2)$ . Ce domaine est représenté sur la figure 5.6A. Sur cette figure, les lignes  $\gamma_A$  sont représentées par des courbes continues et les lignes  $\gamma_B$  sont représentées par des courbes en pointillés. On démontre désormais le résultat suivant :

**Lemme 5.5.**  $K_i(\xi_1, \xi_2)$  est un domaine canonique relativement compact.

Le reste du paragraphe 5.8.3 est consacré à la démonstration de ce résultat. En fait, la preuve est la même que celle de la Proposition 7.1 de [12]. On ne donne donc que les grandes lignes et on renvoie à cet article pour les détails. Il y a essentiellement deux étapes :


 FIG. 5.6 – Les domaines  $K_i(\xi_1, \xi_2)$ ,  $K_i^g$ ,  $K_i^d$ 

- La première étape est la construction d'une ligne canonique  $\gamma$  reliant  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Pour cela, on construit une ligne pré-canonique  $\beta$  comme réunion de segments de courbes des familles  $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$  et de lignes canoniques. On « lisse » ensuite  $\beta$  grâce à la propriété suivante :

**Lemme 5.6.** [12]

*Soit  $\beta$  une ligne pré-canonique. On suppose qu'elle commence et se termine par des segments de lignes canoniques  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ . On note  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  les extrémités de ces segments, qui sont des points intérieurs à  $\beta$ , choisis tels que  $\text{Im } \varphi_a < \text{Im } \varphi_b$ . Alors, pour  $\delta > 0$ , il existe une ligne canonique située dans un  $\delta$ -voisinage de  $\beta$ , contenant  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ , privées d'un  $\delta$ -voisinage de  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$ .*

- Ensuite, on utilise la propriété suivante pour construire le domaine  $K_i(\xi_1, \xi_2)$  à partir de  $\gamma$  :

**Proposition 5.1.** [12] Domaines canoniques entourant une courbe

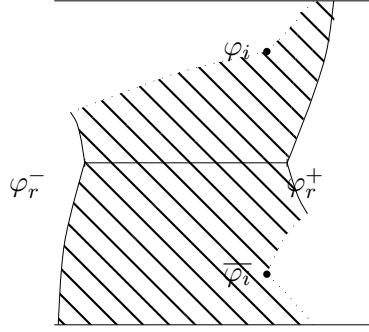
*Soit  $\gamma$  une ligne canonique pour la détermination  $\kappa$ . On suppose que  $K \subset D$  est un domaine simplement connexe contenant  $\gamma$  (sans ses extrémités). Le domaine  $K$  est un domaine canonique entourant  $\gamma$  s'il est la réunion de courbes pré-canoniques, chacune étant obtenue à partir de  $\gamma$  en remplaçant certains segments intérieurs par une ligne pré-canonique par rapport à  $\kappa$ .*

Il suffit alors de prouver que  $K_i(\xi_1, \xi_2)$  est un domaine canonique entourant  $\gamma$ . Pour cela, on se donne un point quelconque  $\xi_0$  de  $K_i(\xi_1, \xi_2)$ . On montre ensuite que, dans  $K_i(\xi_1, \xi_2)$ , il existe une courbe pré-canonique  $\beta$  reliant deux points intérieurs de  $\gamma$  et contenant  $\xi_0$ . On renvoie à la section 7 de [12] pour les détails de cette construction.

#### 5.8.4 Les domaines canoniques $K_i^g$ et $K_i^d$

Dans toute la suite, on choisit  $\tilde{Y} \in ] \sup_{E \in J} \text{Im } \varphi_i(E), Y[$ .

En choisissant les points  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de façon particulière, on va construire deux domaines canoniques  $K_i^g$  et  $K_i^d$ .


 FIG. 5.7 – Le domaine  $K_i^\infty$ 

On considère les lignes  $b_e \cup e_b$ ,  $d_a \cup a_d$  et  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+]$ , ces lignes délimitent un « pentagone curviligne » que l'on note  $P$ . On a représenté  $P$  dans la figure 5.8.

**Lemme 5.7.** *Il existe  $\xi_1^g \in K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi = -Y\}$  et  $\xi_2^g \in K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi = Y\}$  tels que le domaine  $K_i^g = K_i(\xi_1^g, \xi_2^g)$  vérifie les propriétés suivantes :*

- 1)  $K_i^g \cap S_{\tilde{Y}}$  contient  $L_i \cap S_{\tilde{Y}}$ .
- 2)  $K_i^g$  contient  $P$ .

**Démonstration** Soit  $\xi_1 \in K_i^\infty$  tel que  $\text{Im } \xi_1 = -Y$ . On rappelle que  $\gamma_B(\xi_1)$  est la ligne de la famille  $\gamma_B$  passant par  $\xi_1$ . On pose  $Z_0 = L_i \cap \{\text{Im } \varphi = -Y\}$ . Les relations  $Z \in L_i$  et  $\text{Im} \int_{\xi_1}^Z (\pi - \kappa(u)) du = 0$  définissent implicitement une fonction  $\xi_1 \mapsto Z(\xi_1)$  continue sur  $\text{Im } \xi_1 = -Y$ . Cette fonction vérifie de plus :

$$\|Z(\xi_1) - Z_0\| \leq C \|\xi_1 - Z_0\|.$$

En effet, soit  $[0, \alpha] \rightarrow L_i$ ;  $s \mapsto Z(s)$  un paramétrage curviligne de  $L_i$  tel que  $Z(0) = Z_0$ . On considère alors la fonction définie sur  $[0, \alpha] \times \{\text{Im } \varphi = -Y\}$  par :

$$F(s, \xi_1) = \text{Im} \int_{\xi_1}^{Z(s)} (\pi - \kappa(u)) du.$$

$F$  vérifie les propriétés suivantes :

$$F(0, Z_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s}(0, Z_0) \neq 0.$$

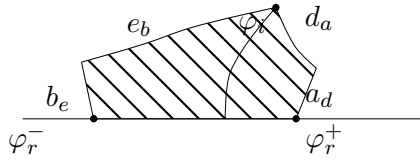
Il existe donc une fonction  $f$  continue sur un voisinage de  $Z_0$  telle que :

$$f(Z_0) = 0, \quad F(s, \xi_1) = 0 \Leftrightarrow s = f(\xi_1).$$

$f$  vérifie de plus :

$$\|f(\xi_1)\| \leq C \|\xi_1 - Z_0\|.$$

Par suite, pour  $\xi_1^g$  assez proche de  $L_i$ ,  $\gamma_B(\xi_1^g)$  coupe  $L_i$  en-dessous de la droite  $\text{Im } \varphi = -\tilde{Y}$ . On choisit de même le point  $\xi_2^g$  assez proche de  $L_i$  pour que la ligne de Stokes  $\gamma_A(\xi_2^g)$  coupe  $L_i$


 FIG. 5.8 – Le domaine  $P$ 

au-dessus de la droite  $\text{Im } \varphi = \tilde{Y}$ .

Par construction, la courbe  $\gamma_B(\xi_1^g)$  coupe  $L_i$  en-dessous de  $\text{Im } \varphi = -\tilde{Y}$  et  $\gamma_A(\xi_2^g)$  coupe  $L_i$  au-dessus de  $\text{Im } \varphi = \tilde{Y}$ . Le domaine  $K_i^g = K_i(\xi_1^g, \xi_2^g)$  contient donc  $L_i \cap S_{\tilde{Y}}$ .

On montre maintenant que  $K_i^g$  contient  $P$ . Par construction,  $\gamma_A(\xi_2^g)$  coupe  $L_i$  au-dessus de  $\varphi_i$ . De plus, les deux courbes  $\gamma_B(\xi_2^g)$  et  $d$  sont deux lignes de type de Stokes  $\int^\varphi (\pi - \kappa) = \text{Const}$ . Elles ne se rencontrent donc pas et  $\gamma_B(\xi_2^g)$  reste au-dessus de  $d$ . Par conséquent,  $K_i^g$  contient  $P$ . On note que  $K_i^g$  contient en particulier  $\sigma$ .

◇

On a le résultat correspondant pour  $R_i$  :

**Lemme 5.8.** *Il existe  $\xi_1^d \in K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi = -Y\}$  et  $\xi_2^d \in K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi = Y\}$  tels que le domaine  $K_i^d = K_i(\xi_1^d, \xi_2^d)$  vérifie les propriétés suivantes :*

- 1)  $K_i^d \cap S_{\tilde{Y}}$  contient  $R_i \cap S_{\tilde{Y}}$ .
- 2)  $K_i^d$  contient  $\bar{P}$ .

La démonstration de ce lemme est complètement similaire à la démonstration précédente. On ne donne pas les détails.

### 5.8.5 Construction d'une base à l'asymptotique standard sur $K_i^\infty$

On prouve maintenant le résultat suivant.

**Proposition 5.2.** *Soit  $H_{\varphi, \varepsilon}$  vérifiant  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H_J)$ . Soient  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$  et  $X > 1$  fixés. Soit  $E_0 \in J$  et  $A \subset K_i^\infty$  un sous-domaine admissible de  $K_i^\infty$ . On pose  $A_{\tilde{Y}} = A \cap S_{\tilde{Y}}$ .*

*Alors, il existe un voisinage  $\mathcal{U}_A$  complexe de  $E_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  et deux fonctions  $f_\pm^i(x, \varphi, E, \varepsilon)$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- Les fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto f_\pm^i(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont définies sur  $\mathbb{R} \times A \times \mathcal{U}_A \times ]0, \varepsilon_0[$  et forment une base cohérente de solutions de (1.3).
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , les fonctions  $((\varphi, E) \mapsto f_\pm^i(x, \varphi, E, \varepsilon))$  sont analytiques sur  $S_{\tilde{Y}} \times \mathcal{U}_A$ .
- Pour  $(x, \varphi, E) \in [-X, X] \times A_{\tilde{Y}} \times \mathcal{U}_A$  les fonctions ont les représentations asymptotiques suivantes :

$$f_\pm^i(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^\varphi \kappa(u) du} (\psi_\pm^i(x, \varphi, E) + r_\pm(x, \varphi, E, \varepsilon)). \quad (5.28)$$

- Les fonctions  $r_\pm$  vérifient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(x, \varphi, E) \in [-X, X] \times A_{\tilde{Y}} \times \mathcal{U}_A} \max\{|r_\pm(x, \varphi, E, \varepsilon)|, |\partial_x r_\pm(x, \varphi, E, \varepsilon)|\} = 0.$$

– Il existe un réel  $\sigma_i \in \{1, -1\}$  tel que les fonctions  $f_{\pm}^i$  vérifient les relations de symétrie :

$$(f_{\pm}^i)^*(x, \varphi, E, \varepsilon) = \overline{f_{\pm}^i(x, \overline{\varphi}, \overline{E}, \varepsilon)} = \sigma_i f_{\pm}^i(x, \varphi, E, \varepsilon).$$

– La détermination  $\kappa_i$  est décrite au Lemme 5.2.

– Le wronskien des fonctions  $f_{\pm}^i$  vérifie :

$$w(f_+^i(\cdot, \varphi, E, \varepsilon), f_-^i(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)) = (w_0 k'_i)(E - W(0)).$$

où  $k_i$  est la détermination du quasi-moment associée à  $\kappa_i$ .

Le reste de cette partie est consacré à la démonstration de la Proposition 5.2. Soit  $E_0 \in J$  fixé et  $A$  un sous-domaine admissible de  $K_i^\infty$  (on renvoie au paragraphe 5.1.6 de ce chapitre pour la définition de cette notion). Le domaine  $K_i^\infty \cap S_{\tilde{Y}}$  n'est pas à proprement parler un domaine canonique. On ne peut donc pas lui appliquer directement le Théorème 5.1. La construction se rapproche en fait plus des notions de domaine maximal introduites plus récemment par A. Fedotov et F. Klopp (cf. [13]).

Les domaines  $K_i^g$  et  $K_i^d$  sont des domaines canoniques. Le Théorème 5.1 implique donc l'existence d'un voisinage  $\mathcal{U}_A$ , d'un nombre réel  $\varepsilon_0 > 0$  et de deux bases cohérentes  $(f_{\pm}^{i,g})$  et  $(f_{\pm}^{i,d})$  à l'asymptotique standard sur  $K_i^g$  et  $K_i^d$ .

On commence par montrer que les fonctions  $f_+^{i,g}$  et  $f_-^{i,d}$  gardent la même asymptotique sur  $A \cap S_{\tilde{Y}}$ . Pour cela, on rappelle tout d'abord certaines techniques de prolongement des asymptotiques développées dans [10, 13].

### 5.8.6 Résultats préliminaires de prolongement des asymptotiques

#### Lemme de prolongement sur des domaines compacts

**Lemme 5.9.** [10] Soit  $\varphi_-, \varphi_+, \varphi_0$ , des points fixés tels que

- $\text{Im } \varphi_- = \text{Im } \varphi_+$  ;
- il n'y a pas de points de branchement de  $\varphi \mapsto \kappa(\varphi)$  sur l'intervalle  $[\varphi_-, \varphi_+]$  ;
- $\varphi_0 \in (\varphi_-, \varphi_+)$ ,  $q(\varphi_0) \neq 0$ .

On fixe une détermination continue de  $\kappa$  sur  $[\varphi_-, \varphi_+]$ . Soit  $f(x, \varphi, E, \varepsilon)$ ,  $f_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon)$  des solutions de (1.3) pour  $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$  et  $x \in [-X, X]$ , vérifiant (1.5) et telles que :

1.  $f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_+(x, \varphi, E) + o(1))$  pour  $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_0]$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et les asymptotiques sont différentiables en  $x$  ;
2.  $f_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_{\pm}(x, \varphi, E) + o(1))$  pour  $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et les asymptotiques sont différentiables en  $x$ .

On rappelle que  $(\psi_{\pm})$  sont les solutions de Bloch canoniques associées au moment complexe  $\kappa$ .

Alors,

- si  $\text{Im } (\kappa(\varphi)) > 0$  pour tout  $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$ , il existe  $C > 0$  telle que, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,

$$\left| \frac{df}{dx}(x, \varphi, E, \varepsilon) \right| + |f(x, \varphi, E, \varepsilon)| \leq C e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} |\text{Im } \kappa(u)| du}, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_+]; \quad (5.29)$$

- si  $\text{Im } (\kappa(\varphi)) < 0$  pour tout  $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$ , alors

$$f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_+(x, \varphi, E) + o(1)), \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_+], \quad (5.30)$$

et les asymptotiques sont différentiables en  $x$ .

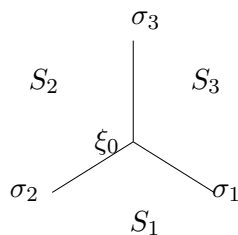


FIG. 5.9 – Les lignes de Stokes

Moralement, ce résultat signifie que le comportement asymptotique standard d'une solution reste vérifié le long d'une ligne horizontale tant que le terme principal reste croissant (pour des résultats analogues pour la méthode WKB réelle [37]).

### Principe du Domaine Canonique Adjacent

L'estimation obtenue dans le Lemme 5.9 pour la solution décroissante est loin d'être optimale. On va rappeler un résultat qui précise l'asymptotique d'une solution décroissante. On introduit d'abord quelques notations. Soit  $\gamma$  une courbe verticale. Soit  $U$  un domaine du plan complexe. On dit que  $U$  est un voisinage gauche s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\{z - r ; r \in ]0, \alpha[ ; z \in \gamma\} \subset U.$$

On dit de même que  $U$  est un voisinage à droite de  $\gamma$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\{z + r ; r \in ]0, \alpha[ ; z \in \gamma\} \subset U.$$

La proposition suivante donne un résultat plus précis :

**Proposition 5.3.** [11] *On suppose que la solution  $f$  a un comportement asymptotique standard (voir paragraphe 5.4.1) dans un voisinage constant gauche ou droit d'une courbe verticale  $\gamma$ . On suppose que  $\gamma$  est canonique par rapport à une détermination donnée du moment complexe. Alors  $f$  a un comportement asymptotique standard dans n'importe quel domaine canonique entourant  $\gamma$ .*

### Le Lemme de Stokes

Notations et hypothèses :

On suppose que  $\xi_0$  est un point de branchement du moment complexe tel que  $W'(\xi_0) \neq 0$ . Il y a trois lignes de Stokes commençant en  $\xi_0$ . Les angles entre elles au point  $\xi_0$  sont égaux à  $2\pi/3$ . On note ces lignes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . On choisit la numérotation pour que  $\sigma_1$  soit verticale en  $\xi_0$ . Soit  $V$  un voisinage de  $\xi_0$  assez petit pour que  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  divisent  $V$  en trois secteurs. On note ces

trois secteurs  $S_1, S_2$  et  $S_3$  de telle façon que  $S_1$  est délimité par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et  $S_2$  est situé entre  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . On a représenté cette situation dans la figure 5.9.

On énonce maintenant le résultat :

**Lemme 5.10.** [13] *Lemme de Stokes.*

Soit  $V$  un voisinage assez petit de  $\xi_0$  pour que la description ci-dessus soit vérifiée. Soit  $f$  une solution qui a l'asymptotique standard  $f = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int^\varphi \kappa(u) du} (\psi_+(x, \varphi) + o(1))$  à l'intérieur du secteur  $S_1 \cup \sigma_2 \cup S_2$  de  $V$ . De plus, on suppose que, dans  $S_1$ , près de  $\sigma_1$ , on a  $\text{Im } \kappa > 0$  si  $S_1$  est à gauche de  $\sigma_1$  et  $\text{Im } \kappa < 0$  sinon. Alors  $f$  a le comportement asymptotique standard  $f = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int^\varphi \kappa(u) du} (\psi_+(x, E, \varphi) + o(1))$  à l'intérieur de  $V \setminus \sigma_1$  où  $\kappa$  est prolongé analytiquement de  $S_1 \cup \sigma_2 \cup S_2$  à  $V \setminus \sigma_1$ .

Heuristiquement, le Lemme de Stokes signifie que le comportement asymptotique standard reste valide en « contournant » les points de branchement dans le sens des  $\text{Im } \kappa$  croissants.

### 5.8.7 Asymptotiques de $f_+^{i,g}$

On prouve le résultat suivant :

**Lemme 5.11.** *La fonction  $f_+^{i,g}$  garde l'asymptotique standard dans le domaine  $K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\tilde{Y}, \tilde{Y}]\}$ .*

**Démonstration** On commence par montrer qu'il existe une ligne canonique  $\gamma_d \subset K_i^d$  reliant  $\xi_1^d$  et  $\xi_2^d$  telle que  $f_+^{i,g}$  a l'asymptotique standard dans le domaine de  $K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\tilde{Y}, \tilde{Y}]\}$  à gauche de  $\gamma_d$ .

D'après le Lemme 5.8,  $K_i^d$  contient  $\bar{\sigma}$  donc il existe une ligne canonique  $\gamma_d$  reliant  $\xi_1^d$  à  $\xi_2^d$  telle que :

$$\{\varphi \in \gamma_d ; \text{Im } \varphi \in [-\text{Im } \varphi_i, 0]\} \subset \bar{S}_-$$

On va montrer que  $f_+^{i,g}$  a l'asymptotique standard à gauche de cette ligne  $\gamma_d$ . On distingue quatre bandes :

–  $\text{Im } \varphi \in [-Y, -\text{Im } \varphi_i]$ .

Dans cette bande,  $\text{Im } \kappa_i < 0$ . Le Lemme 5.9 montre donc que l'asymptotique de  $f_+^{i,g}$  reste vérifiée dans toute la bande.

–  $\text{Im } \varphi \in [-\text{Im } \varphi_i, 0]$ .

Dans cette bande,  $\text{Im } \kappa_i(\varphi) < 0$  tant que  $\text{Im } \varphi \in \bar{S}_-$ . Puisque  $\{\varphi \in \gamma_d ; \text{Im } \varphi \in [-\text{Im } \varphi_i, 0]\}$  est inclus dans  $\bar{S}_-$ , l'asymptotique de  $f_+^{i,g}$  reste vérifiée à gauche de  $\gamma_d \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\text{Im } \varphi_i, 0]\}$ .

–  $\text{Im } \varphi \in [0, \text{Im } \varphi_i]$ .

D'après le Lemme 5.7,  $\sigma \subset K_i^g$ . A droite de  $\sigma$ ,  $\text{Im } \kappa_i < 0$  donc  $f_+^{i,g}$  garde l'asymptotique standard dans  $K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\text{Im } \varphi_i, 0]\}$ .

–  $\text{Im } \varphi \in [\text{Im } \varphi_i, Y]$ .

A droite de  $c$ ,  $\text{Im } \kappa_i < 0$  donc  $f_+^{i,g}$  garde l'asymptotique standard dans  $K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\tilde{Y}, -\text{Im } \varphi_i]\}$ .

En utilisant la Proposition 5.3, on en déduit que  $f_+^{i,g}$  garde l'asymptotique standard dans tout le domaine  $K_i^d$ . Par conséquent,  $f_+^{i,g}$  garde l'asymptotique standard dans le domaine  $K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\tilde{Y}, \tilde{Y}]\}$ . Ceci termine la preuve du Lemme 5.11.



◇

On montre de la même manière que  $f_-^{i,d}$  garde l'asymptotique standard dans  $K_i^\infty \cap \{\text{Im } \varphi \in [-\tilde{Y}, \tilde{Y}]\}$ .

### 5.8.8 Base cohérente

Pour conclure, on va déformer légèrement la base  $\{f_+^{i,g}, f_-^{i,d}\}$  pour construire une base cohérente. On calcule dans  $K_i^\infty$  le wronskien :

$$w(f_+^{i,g}, f_-^{i,d}) = [1 + o(1)]$$

La base  $\left\{ f_+^{i,g}, \frac{f_-^{i,d}}{w(f_+^{i,g}, f_-^{i,d})} \right\}$  est une base cohérente que l'on note  $\{f_+^i, f_-^i\}$ .

### 5.8.9 Construction d'une base $\{f_i, f_i^*\}$ du domaine $K_i^\infty$

On a prouvé l'existence d'une base cohérente  $\{f_\pm^i\}$  possédant l'asymptotique standard dans le domaine  $K_i^\infty$ . On a choisi le point 0 comme point base (cf. (5.28)). On va construire à partir de  $\{f_\pm^i\}$  une base cohérente du type  $\{f_i, f_i^*\}$ . On va étudier tout d'abord l'asymptotique de  $f_+^i$  à gauche de  $c$ . Pour cela, on va utiliser le Lemme 5.10. On considère désormais un rectangle  $R$  de  $S_{\tilde{Y}}$  dans un voisinage gauche de  $c \cup \sigma \cup \bar{c}$ . On étudie maintenant l'asymptotique de  $f_+^i$  et  $(f_+^i)^*$  dans  $R$ . On rappelle que les fonctions  $g_\pm$  sont définies en (4.14). On pose :

$$\omega_\pm(\varphi, E) = -W'(\varphi)g_\pm(E - W(\varphi)) \quad (5.31)$$

**Calcul du wronskien  $w(f_+^i, (f_+^i)^*)$ .**

On commence par étudier, dans  $R$ , les objets liés au moment complexe  $\kappa_i$ . Soit  $k_i$  la détermination du moment de Bloch de l'équation (4.1), continue à travers  $[E_r, E_i]$  et vérifiant de plus :

$$k_i(E_r) = 0 \quad \text{et} \quad k_i(E_i) = \pi$$

$k_i$  est réel sur  $[E_r, E_i]$  donc  $k_i(\bar{\mathcal{E}}) = \overline{k_i(\mathcal{E})}$ . La détermination  $\kappa_i$  vérifie  $\kappa_i(\varphi) = k_i(E - W(\varphi))$ . Les solutions de Bloch associées  $\Psi_\pm^i$  vérifient donc  $\overline{\Psi_+^i(x, \bar{\varphi})} = \Psi_-^i(x, \varphi)$ .

On en déduit donc les relations suivantes dans  $R$  :

$$\kappa_i^*(\varphi) = \kappa_i(\varphi) \quad (\Psi_+^i)^*(\varphi) = \Psi_-^i(\varphi) \quad (\omega_+^i)^*(\varphi) = \omega_-^i(\varphi), \quad \forall \varphi \in R \quad (5.32)$$

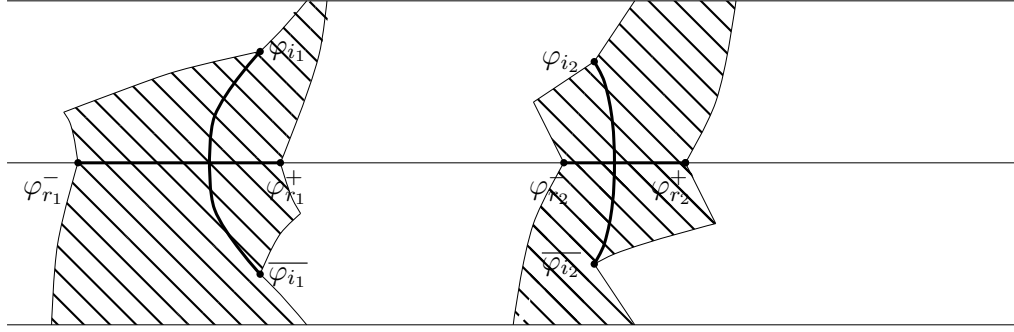
De plus, puisque  $k_i'$  est réel sur la bande, il existe un réel  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$  tel que :

$$q_i^*(\varphi) = \sigma_i q_i(\varphi) \quad (5.33)$$

On précisera ce coefficient  $\sigma_i$  au paragraphe 8.1.2 du chapitre 8. On calcule :

$$w(f_+^i(\cdot, \varphi, E, \varepsilon), (f_+^i)^*(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)) = q_i(0)q_i^*(0)w(\Psi_+^i(\cdot, 0), \Psi_-^i(\cdot, 0))g(\varphi, E, \varepsilon)$$

Puisque  $\overline{w(\Psi_+^i(\cdot, 0), \Psi_-^i(\cdot, 0))} = -w(\Psi_+^i(\cdot, 0), \Psi_-^i(\cdot, 0))$ , le facteur  $g(\varphi, E, \varepsilon)$  vérifie  $g^*(\varphi, E, \varepsilon) = g(\bar{\varphi}, \bar{E}, \varepsilon) = g(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $g(\varphi, E, \varepsilon) = [1 + o(1)]$ . Comme le wronskien est analytique et  $\varepsilon$ -périodique, cette asymptotique est vérifiée dans  $S_{\tilde{Y}}$ .


 FIG. 5.10 – Les domaines  $K_1^\infty$  et  $K_2^\infty$ 

### Conclusion

Puisque  $g^* = g$  et  $g = [1 + o(1)]$ , il existe une fonction analytique  $(\varphi, E) \mapsto h(\varphi, E, \varepsilon)$  sur  $S_{\tilde{Y}} \times \mathcal{U}$  telle que :

- $g(\varphi, E, \varepsilon) = h(\varphi, E, \varepsilon)h^*(\varphi, E, \varepsilon)$ ,
- $h(\varphi, E, \varepsilon) = [1 + o(1)]$ .

On va modifier légèrement la fonction  $f_+^i$  et poser  $f_i = \frac{f_+^i}{h(\varphi, E, \varepsilon)}$ , la base  $\{f_i, f_i^*\}$  est une base cohérente. Ceci termine la preuve de la Proposition 5.2.

### 5.8.10 Remarques et compléments

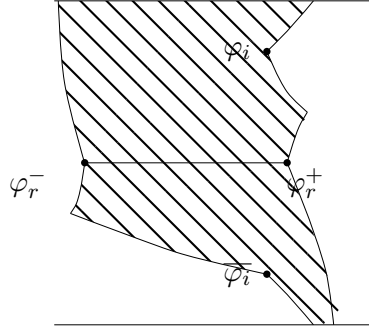
Les résultats de la Proposition 5.2 restent valides lorsqu'on remplace  $(H_J)$  lorsque l'hypothèse  $(H'_J)$  est vérifiée. En effet, tout d'abord la construction du domaine  $K_i^\infty$  dépend du comportement des lignes de Stokes. Ensuite, la construction développée pour la croix simple et pour la Proposition 5.2 est une construction locale subordonnée au choix de la détermination  $\kappa_i$ , au comportement des champs de vecteurs  $i\overline{\kappa_i}$  et  $i(\pi - \kappa_i)$  au voisinage des points de branchement et à la description des lignes de Stokes. Soient  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  les déterminations décrites au paragraphe 5.6.3 de ce chapitre. On a alors le résultat suivant :

**Proposition 5.4.** *Soit  $H_{\varphi, \varepsilon}$  vérifiant  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H'_J)$ . Soit  $\tilde{Y} < Y$ . Soit  $E_0 \in J$ . Il existe deux domaines  $K_1^\infty$  et  $K_2^\infty$  disjoints et vérifiant les résultats de la Proposition 5.2 pour les déterminations  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ .*

Sur chaque domaine  $K_j^\infty \cap S_{\tilde{Y}}$  pour  $j \in \{1, 2\}$ , il existe une base  $\{f_j, (f_j)^*\}$  cohérente, à l'asymptotique standard. On a représenté ces deux domaines dans la figure 5.10.

## 5.9 Compléments pour le cas où $\kappa(\varphi_r^-) = \pi$

On commence par décrire brièvement ici les diverses déterminations du moment complexe lorsqu'on est dans le cas (2) du Lemme 5.2.


 FIG. 5.11 – Le domaine  $K_i^\infty$  dans le cas  $\kappa_i(\varphi_r^-) = \pi$ 

- La détermination  $\kappa_i$  vérifie :

$$\text{Im } \kappa_i(\varphi) < 0 \text{ pour } \varphi \in S^-,$$

$$\kappa_i(\varphi_r^-) = \kappa_i(\varphi_r^+) = \pi, \quad \kappa_i(\varphi_i) = \kappa_i(\overline{\varphi_i}) = 0.$$

- Soit  $\kappa_g$  la détermination du moment complexe qui coïncide avec  $\kappa_i$  dans  $\overline{S^-}$  prolongée continuellement à travers  $(-\infty, \varphi_r^-]$ . La détermination  $\kappa_g$  vérifie :

$$\text{Im } \kappa_g(\varphi) > 0 \text{ pour } \text{Re } \varphi < \varphi_r^-,$$

$$\text{Re } \kappa_g(\varphi) \rightarrow \pi \text{ quand } \text{Re } \varphi \rightarrow -\infty.$$

- Soit  $\kappa_d$  la détermination du moment complexe qui coïncide avec  $\kappa_i$  dans  $S^+$  prolongée continuellement à travers  $[\varphi_r^+, +\infty)$ . La détermination  $\kappa_d$  vérifie :

$$\text{Im } \kappa_d(\varphi) > 0 \text{ pour } \text{Re } \varphi > \varphi_r^+,$$

$$\text{Re } \kappa_d(\varphi) \rightarrow \pi \text{ quand } \text{Re } \varphi \rightarrow +\infty.$$

- Les relations entre  $\kappa_g$  et  $\kappa_i$  d'une part et  $\kappa_d$  et  $\kappa_i$  s'écrivent :

$$\forall \varphi \in S_-, \quad \kappa_g(\varphi) = 2\pi - \kappa_i(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \overline{S_-}, \quad \kappa_g(\varphi) = \kappa_i(\varphi). \quad (5.34)$$

$$\forall \varphi \in S_+, \quad \kappa_d(\varphi) = \kappa_i(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \overline{S_+}, \quad \kappa_d(\varphi) = 2\pi - \kappa_i(\varphi). \quad (5.35)$$

Les lignes de Stokes aux points de branchement  $\varphi_r^-$ ,  $\varphi_r^+$ ,  $\varphi_i$  et  $\overline{\varphi_i}$  ont les propriétés décrites au Lemme 5.4. On peut construire pour la détermination  $\kappa_i$  un domaine  $K_i^\infty$  représenté sur la figure 5.11 qui vérifie les propriétés de la Proposition 5.2.

## 6

# Solutions de Jost cohérentes de l'équation (1.3).

Le but de ce chapitre est de démontrer la Proposition 3.2. En fait, on va en donner la preuve lorsque  $J$  vérifie l'hypothèse suivante, plus faible que  $(H_J)$  :

**(H<sub>J</sub><sup>0</sup>) Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $J$  est un intervalle compact de  $]E_{2n}, E_{2n+1}[$ .**

On va construire des solutions de Jost cohérentes (vérifiant (1.5)) de l'équation (1.3). Pour ce faire, on considère l'équation (1.3) comme une perturbation de l'équation (2.1) avec le paramètre  $\mathcal{E} = E$ . On s'inspire de la construction des fonctions de Jost présentée dans [16, 27]. Précisément, pour  $\varepsilon$  fixé, on cherche des solutions de (1.3) sous la forme :

$$F_-^g = e^{-ik(E)\varphi/\varepsilon}\psi_-^0(x, E)(1 + o(1)), x \rightarrow \infty, \quad F_+^d = e^{ik(E)\varphi/\varepsilon}\psi_+^0(x, E)(1 + o(1)), x \rightarrow +\infty.$$

Les fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto e^{\pm ik(E)\varphi/\varepsilon}\psi_{\pm}(x, E)$  sont cohérentes. Elles nous permettent donc de construire une résolvante cohérente pour l'équation périodique. Cette propriété couplée à l'invariance de l'équation (1.3) par la transformation de cohérence  $(x, \varphi) \mapsto (x-1, \varphi+\varepsilon)$  entraîne la cohérence des fonctions de Jost.

### 6.1 Construction des fonctions de Jost

On commence par construire  $F_-^g$ . La construction de  $F_+^d$  est similaire. Puisque le paramètre  $E$  est au voisinage d'une lacune, la partie imaginaire de  $k(E)$  est non nulle ; la solution  $F_-^g$  est donc exponentiellement décroissante et tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Une telle solution est appelée récessive.

#### 6.1.1

Sur un voisinage  $\mathcal{V}$  assez petit de  $J$ , tel que  $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$ , on choisit une détermination  $k$  telle que :

$$\operatorname{Im} k(E) \geq \beta > 0, \quad \forall E \in \mathcal{V}$$

On fixe  $m_g$  un point de  $S_Y$  tel que :

1. Le point  $m_g$  n'est pas un point de branchement de  $\kappa$ .
2. Le point  $m_g$  vérifie  $\text{Im } m_g \geq 0$  et  $k'_E(m_g) \neq 0$ .
3. Le domaine  $\{\varphi \in S_Y ; \text{Re } (\varphi - m_g) < 0 \text{ et } \text{Im } (\varphi - m_g) > 0\}$  ne contient pas de points de branchement de  $\kappa$ .

On pose alors  $E_g = E - W(m_g)$ . On note  $\psi_{\pm}^0$  les solutions analytiques de Bloch de l'équation (2.1) normalisées au point  $E_g$ . Ces solutions sont définies au Lemme 4.1. On pose :

$$\psi_{\pm}^0(x, E) = e^{\pm ik(E)x} p_{\pm}^0(x, E) \quad \text{avec} \quad p_{\pm}^0(x+1, E) = p_{\pm}^0(x, E)$$

Soit

$$\widetilde{\psi}_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\pm ik(E)(x + \frac{\varphi}{\varepsilon})} p_{\pm}^0(x, E) = e^{\pm ik(E)\frac{\varphi}{\varepsilon}} \psi_{\pm}^0(x, E).$$

On considère la résolvante  $R$  de  $H_0 - E$ , définie par :

$$(Rg)(x) = - \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{+}^0(x, E)\psi_{-}^0(x', E) - \psi_{+}^0(x', E)\psi_{-}^0(x, E)}{(k'w_0)(E_g)} g(x') dx'$$

### 6.1.2

Puisque  $\widetilde{\psi}_{-}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , on cherche une solution cohérente récessive  $\widetilde{f}$  de (1.3) sous la forme :

$$\widetilde{f}(x, \varphi, E, \varepsilon) = \widetilde{\psi}_{-}(x, \varphi, E, \varepsilon) - R[W(\varepsilon x + \varphi)\widetilde{f}(x, \varphi, E, \varepsilon)]. \quad (6.1)$$

On définit  $\widetilde{f}(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-ik(E)(x + \frac{\varphi}{\varepsilon})} f(x, \varphi, E, \varepsilon)$  ; l'équation (6.1) devient :

$$f(x, \varphi, E, \varepsilon) = p_{-}^0(x, E) + \int_{-\infty}^x A(x, x', E) W(\varepsilon x' + \varphi) f(x', \varphi, E, \varepsilon) dx' \quad (6.2)$$

où la fonction  $A$  est définie par :

$$A(x, x', E) = \frac{e^{2ik(E)(x-x')} p_{+}^0(x, E) p_{-}^0(x', E) - p_{+}^0(x', E) p_{-}^0(x, E)}{(k'w_0)(E_g)}. \quad (6.3)$$

Puisque sur  $\mathcal{V}$ ,  $\text{Im } k(E) \geq \beta > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall x > x', \quad \forall E \in \mathcal{V}, \quad |A(x, x', E)| \leq C \quad (6.4)$$

### 6.1.3

Soit  $X_0 \in \mathbb{R}$  et un réel  $a > 0$ . Pour un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , on note :

$$R_I = \{\varphi \in S_Y ; \text{Re } \varphi \in I\}.$$

Soit  $B((-\infty, X_0] \times R_{[-a, a]})$  l'ensemble des fonctions  $\{f : (x, \varphi) \mapsto f(x, \varphi)\}$  bornées sur  $(-\infty, X_0] \times R_{[-a, a]}$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in (-\infty, X_0], \text{Re } \varphi \in [-a, a]} |f(x, \varphi)|$$

On définit l'opérateur  $T_E$  par :

$$T_E : \begin{array}{ccc} B((-\infty, X_0] \times R_{[-a,a]}) & \rightarrow & B((-\infty, X_0] \times R_{[-a,a]}) \\ f & \mapsto & F \end{array}$$

où  $F(x, \varphi) = \int_{-\infty}^x A(x, x', E)W(\varepsilon x' + \varphi)f(x', \varphi)dx'$ . (6.5)

L'opérateur  $T_E$  est bien défini et on estime sa norme par :

$$\forall x \in (-\infty, X_0], \quad \forall \varphi \in R_{[-a,a]}, \quad |T_E(f)(x, \varphi)| \leq C \|f\|_\infty \int_{-\infty}^x |W(\varepsilon x' + \operatorname{Re}(\varphi) + i\operatorname{Im}(\varphi))| dx'.$$

En utilisant  $(H_{W,r})$  (paragraphe 2.2.1 du chapitre 2), on obtient :

$$\|T_E(f)\| \leq \frac{M}{\varepsilon} \sup_{x \in (-\infty, X_0], \operatorname{Re} \varphi \in [-a,a]} \frac{1}{|\varepsilon x + \operatorname{Re}(\varphi)|^{s-1}} \|f\|_\infty.$$

#### 6.1.4

Fixons  $\lambda > 1$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|X_0| > C\varepsilon^{-\frac{\lambda s}{s-1}} \Rightarrow \|T_E\| < \varepsilon^{s(\lambda-1)}.$$

On réécrit (6.2) sous la forme :

$$(1 - T_E)f = p_-^0(x, E) \tag{6.6}$$

L'opérateur  $(1 - T_E)$  est alors inversible sur  $B((-\infty, X_0] \times R_{[-a,a]})$  et on pose :

$$F_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-ik(E)(x+\varphi/\varepsilon)}((1 - T_E)^{-1}p_-^0)(x, \varphi, E, \varepsilon) \tag{6.7}$$

On s'intéresse maintenant aux propriétés de  $F_-^g$ .

## 6.2 Propriétés de $F_-^g$

### 6.2.1 Asymptotiques en $x$

En écrivant

$$(1 - T_E)^{-1} = 1 - (1 - T_E)^{-1}T_E$$

dans l'équation (6.7), on obtient que :

$$F_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-ik(E)\varphi/\varepsilon}\psi_-(x, E)(1 + R_g(x, \varphi, E, \varepsilon)), \tag{6.8}$$

avec, pour  $x \in (-\infty, X_0]$  et  $\varphi \in R_{[-a,a]}$ ,

$$|R_g(x, \varphi, E, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon|\varepsilon x|^{s-1}}.$$

La fonction  $F_-^g$  est donc dans le sous-espace de Jost  $\mathcal{J}_-$ .

### 6.2.2 Etude de la cohérence

On suppose que  $a > 1$  et  $\varepsilon < 1$ . On montre maintenant que la fonction  $F_-^g$  est une fonction cohérente.

Notons  $G$  la fonction :

$$G : (x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto G(x, \varphi, E, \varepsilon) = F_-^g(x+1, \varphi - \varepsilon, E, \varepsilon)$$

$G$  est définie pour  $x \in (-\infty, X_0 - 1]$  et  $\varphi \in R_{[-a+1, a-1]}$ . De plus, la fonction  $G$  vérifie  $G \in B((-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]})$ . On définit l'opérateur :

$$\widetilde{T}_E : \begin{array}{ccc} B((-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]}) & \rightarrow & B((-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]}) \\ f & \mapsto & F \end{array}$$

$$\text{où } F(x, \varphi) = \int_{-\infty}^x A(x, x', E)W(\varepsilon x' + \varphi)f(x', \varphi)dx'. \quad (6.9)$$

Puisque  $B((-\infty, X_0] \times R_{[-a, a]}) \subset B((-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]})$  et en vertu des équations (6.5) et (6.9), l'opérateur  $\widetilde{T}_E$  est un prolongement de l'opérateur  $T_E$ . Notons  $\widetilde{F}_-^g$  la restriction de  $F_-^g$  à  $(-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]}$ . Calculons dans  $B((-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]})$  :

$$(\widetilde{T}_E(G))(x, \varphi, E, \varepsilon) = (T_E(F_-^g))(x+1, \varphi - \varepsilon, E, \varepsilon)$$

On obtient que :

$$((1 - \widetilde{T}_E)(G))(x+1, \varphi - \varepsilon, E, \varepsilon) = ((1 - T_E)(F_-^g))(x+1, \varphi - \varepsilon, E, \varepsilon) = p_-^0(x+1, E) = p_-^0(x, E),$$

Les fonctions  $\widetilde{F}_-^g$  et  $G$  vérifient donc l'équation :

$$((1 - \widetilde{T}_E)(G)) = ((1 - \widetilde{T}_E)(\widetilde{F}_-^g)).$$

Pour  $\varepsilon_0$  assez petit, l'opérateur  $\widetilde{T}_E$  vérifie pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  :

$$\|\|\widetilde{T}_E\|\| < \frac{1}{2}.$$

L'opérateur  $(1 - \widetilde{T}_E)$  est donc inversible dans  $B((-\infty, X_0 - 1] \times R_{[-a+1, a-1]})$  et :

$$\widetilde{F}_-^g = G.$$

Pour  $\varphi \in R_{[-a+1, a-1]}$ , les fonctions  $F_-^g$  et  $G$  coïncident sur  $(-\infty, X_0 - 1]$ ; par le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles coïncident pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Pour  $x$  fixé, elles coïncident pour  $\varphi \in R_{[-a+1, a-1]}$ . Par analyticité, elles sont égales pour  $\varphi \in S_Y$ .

### 6.2.3 Asymptotiques en $\varphi$

On va utiliser la cohérence de la fonction  $F_-^g$  pour en préciser l'asymptotique lorsque  $\text{Re } \varphi \rightarrow -\infty$ . Soit  $X > 0$  fixé, on étudie  $F_-^g$  pour  $x \in [-X, X]$ . La fonction  $F_-^g$  est cohérente, donc :

$$F_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = F_-^g\left(x + \frac{[\text{Re } (\varphi)]}{\varepsilon}, \varphi - [\text{Re } (\varphi)], E, \varepsilon\right)$$

$$= e^{-ik(E)(x+\varphi/\varepsilon)} p_-^0(x, E) \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon|\varepsilon x + [\operatorname{Re} \varphi]|^{s-1}}\right) \right)$$

Par conséquent, il existe une constante  $C$  telle que, pour  $\operatorname{Re} \varphi < -C\varepsilon^{-\frac{\lambda}{s-1}}$  :

$$F_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-ik(E)(x+\varphi/\varepsilon)} p_-^0(x, E) (1 + \widetilde{R}_g(x, \varphi, E, \varepsilon)),$$

avec, pour  $x \in [-X, X]$  et  $\operatorname{Re} \varphi < -C\varepsilon^{-\frac{\lambda}{s-1}}$ ,

$$|\widetilde{R}_g(x, \varphi, E, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon|\operatorname{Re} \varphi|^{s-1}}.$$

On pose alors  $B_\varepsilon^g = \{\varphi \in S_Y ; \operatorname{Re} \varphi < -C\varepsilon^{-\frac{\lambda}{s-1}}\}$ . On construit de même la fonction  $F_+^d$ .

### 6.3 Renormalisation des fonctions $F_-^g$ et $F_+^d$

On va maintenant renormaliser  $F_-^g$ . On pose :

$$h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_g}^{-\infty} [\kappa(u) - k(E)] du + \frac{ik(E)m_g}{\varepsilon}} F_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) \quad (6.10)$$

La fonction  $E \mapsto \int_{m_g}^{-\infty} [\kappa - k(E)]$  est définie et analytique sur  $\mathcal{V}$ . On a alors pour  $\varphi \in B_\varepsilon^g$  :

$$h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_g}^\varphi [\kappa(u) - k(E)] du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_\varphi^{-\infty} [\kappa - k(E)]} e^{-\frac{ik(E)(\varphi - m_g)}{\varepsilon}} \psi_-^0(x, E) (1 + R(x, \varphi, E, \varepsilon)),$$

avec

$$\sup_{x \in [-X, X], E \in \mathcal{V}, \varphi \in B_\varepsilon^g} |R(x, \varphi, E, \varepsilon)| < \varepsilon^{\lambda-1}.$$

Par analyticité des fonctions analytiques de Bloch, et puisque  $W(\varphi) = O(\varepsilon^{\frac{\lambda s}{s-1}})$  pour  $\varphi \in B_\varepsilon^g$ , on a :

$$\forall \varphi \in B_\varepsilon^g, \quad \psi_-(x, \varphi, E) = \psi_-^0(x, E - W(\varphi)) = \psi_-^0(x, E) (1 + R(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (6.11)$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in [-X, X], E \in \mathcal{V}, \varphi \in B_\varepsilon^g} |R(x, \varphi, E, \varepsilon)| = 0.$$

On en déduit alors que pour  $x \in [-X, X]$  et  $\varphi \in B_\varepsilon^g$  :

$$h_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_g}^\varphi \kappa(u) du} \psi_-(x, \varphi, E) (1 + o(1))$$

#### 6.3.1 Etude des symétries

On remarque que si  $\gamma$  est un chemin du plan complexe et  $f$  une fonction analytique sur  $\gamma$ , on a alors :

$$\int_\gamma f(z) dz = \overline{\int_{\overline{\gamma}} f^*(z) dz}. \quad (6.12)$$

Puisque  $J$  vérifie  $(H_J^0)$ , d'après la relation (4.11), il existe un entier naturel  $p$  tel que :

$$k(E) + k^*(E) = 2p\pi. \quad (6.13)$$



On rappelle que les fonctions  $\omega_{\pm}$  associées à  $\kappa$  sont définies par la relation (5.31). On se donne  $\tilde{\gamma}_g$  un chemin reliant  $\overline{m}_g$  à  $m_g$  symétrique par rapport à l'axe réel et ne contenant pas de points de branchement de  $\kappa$ , et de pôles de  $\omega_{\pm}$ . On suppose qu'une détermination  $q_g$  de  $\sqrt{k'_E}$  continue sur  $\tilde{\gamma}_g$  est fixée. En vertu de la relation (4.11), on a  $(k^*)' = -k'$  ce qui implique qu'il existe  $\sigma_g \in \{-1, 1\}$  tel que :

$$q_g^* = i\sigma_g q_g \quad (6.14)$$

Les fonctions  $\psi_{\pm}(x, \varphi, E, m_g)$  vérifient la relation :

$$\psi_{\pm}^*(x, \varphi, E, m_g) = i\sigma_g e^{\pm \frac{2ip\pi x}{\varepsilon}} e^{\int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_{\pm}^g} \psi_{\pm}^*(x, \varphi, E, m_g). \quad (6.15)$$

De plus, on déduit de (6.12) et (4.17) les égalités suivantes :

$$\overline{\int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_+} = - \int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_+ ; \quad \overline{\int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_-} = - \int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_-. \quad (6.16)$$

D'après  $(H_{W,r})$ ,  $W^* = W$ . En utilisant (6.3), on calcule :

$$A(x, x', E) = \overline{A(x, x', \bar{E})}.$$

L'opérateur  $T_E$  vérifie donc :

$$T_E(f^*) = [T_E(f)]^*.$$

Par conséquent, en utilisant (6.6) et (6.15), on obtient que, pour  $E$  dans  $\mathcal{V}$ ,  $x$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\varphi$  dans  $B_{\varepsilon}^g$ ,

$$(F_-^g)^*(x, \varphi, E, \varepsilon) = \overline{F_-^g(x, \bar{\varphi}, \bar{E}, \varepsilon)} = e^{-\frac{i}{\varepsilon} 2p\pi x} i\sigma_g e^{\int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_-^g} F_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon). \quad (6.17)$$

Ce qui donne finalement :

$$(h_-^g)^* = i\sigma_g e^{-\frac{i}{\varepsilon} 2p\pi x} \frac{\alpha_g(E)}{\alpha_g^*(E)} h_-^g,$$

où

$$\alpha_g(E) = e^{-\frac{i}{2\varepsilon} \left( \int_{\tilde{\gamma}_g} (\kappa(u) - p\pi) du + p\pi(m_g + \overline{m}_g) \right)} e^{\frac{1}{2} \int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_-^g} \quad (6.18)$$

Similairement, on fixe un point  $m_d$  de  $S_Y$  tel que :

1. Le point  $m_d$  n'est pas un point de branchement de  $\kappa$ .
2. Le point  $m_d$  vérifie  $\text{Im } m_d > 0$  et  $k'_E(m_d) \neq 0$ .
3. Le domaine  $\{\varphi \in S_Y ; \text{Re } (\varphi - m_d) > 0 \text{ et } \text{Im } (\varphi - m_d) > 0\}$  ne contient pas de points de branchement de  $\kappa$ .

On pose alors  $E_d = E - W(m_d)$  et on définit la fonction  $h_+^d$  par :

$$h_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_d}^{+\infty} [\kappa(u) - k(E)] du + \frac{ik(E)m_d}{\varepsilon}} F_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon) \quad (6.19)$$

On se donne  $\tilde{\gamma}_d$  un chemin reliant  $\overline{m}_d$  à  $m_d$  symétrique par rapport à l'axe réel et ne contenant pas de points de branchement de  $\kappa$ , et de pôles de  $\omega_{\pm}^d$ . On suppose qu'une détermination  $q_d$  de  $\sqrt{k'_E}$  continue sur  $\tilde{\gamma}_d$  est fixée. Il existe alors un réel  $\sigma_d$  tel que :

$$q_d^* = i\sigma_d q_d \quad (6.20)$$

La fonction  $h_+^d$  vérifie alors :

$$(h_+^d)^* = i\sigma_d e^{\frac{i}{\varepsilon} 2p\pi x} \frac{\alpha_d(E)}{\alpha_d^*(E)} h_+^d,$$

où

$$\alpha_d(E) = e^{\frac{i}{2\varepsilon} \left( \int_{\bar{\gamma}_d} (\kappa(u) - p\pi) du + p\pi(m_d + \bar{m}_d) \right)} e^{\frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}_d} \omega_+^d} \quad (6.21)$$

## 6.4 Quelques remarques

### 6.4.1

L'hypothèse  $(H_{W,r})$  peut être affaiblie pour prouver la Proposition 3.2. En fait, il suffit de supposer que  $W$  est une fonction analytique réelle dans  $S_Y$  et qu'il existe une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sup_{y \in [-Y, Y]} |W(x + iy)| \leq f(x).$$

### 6.4.2

Dans les relations (3.8) et (3.9), on aurait pu inclure les coefficients  $i\sigma_g$  et  $i\sigma_d$  dans les fonctions  $\alpha_g$  et  $\alpha_d$  mais on a préféré rendre apparentes les relations entre  $q_g$  et  $q_g^*$ ,  $q_d$  et  $q_d^*$ .

### 6.4.3

On remarque que cette construction diffère des constructions de domaines canoniques de [10], dans la mesure où les domaines sur lesquels on construit ces fonctions dépendent de  $\varepsilon$ . Néanmoins, grâce au lemme de prolongement sur des domaines non compacts (cf. chapitre 7), on prolongera ces asymptotiques sur une bande fixe indépendante de  $\varepsilon$  au voisinage du réel.

### 6.4.4

On définit alors *le coefficient de transmission* :

$$d(\varphi, E, \varepsilon) = w(\alpha_g h_-^g(\cdot, \varphi, E, \varepsilon), \alpha_g h_+^d(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (6.22)$$

On déduit immédiatement des Propositions 3.1 et 3.2 que les valeurs propres de  $H_{\varphi, \varepsilon}$  sont caractérisées par :

$$d(\varphi, E, \varepsilon) = 0 \quad (6.23)$$



# Le théorème WKB sur des domaines non compacts

Dans ce chapitre, on établit un théorème de prolongement sur des domaines non compacts de  $S_Y$ . Ce résultat est une extension sur des domaines non compacts de la méthode développée dans [10] et en particulier de son Lemme 5.9.

On montre que les principes de prolongement des asymptotiques restent valides sur des domaines  $\{\varphi \in S_Y ; |\operatorname{Re} \varphi| > A\}$  de  $S_Y$ . Pour ce faire, on recouvre ces domaines non compacts par une succession infinie de petits domaines canoniques locaux, appelée  $\delta$ -chaîne (voir au paragraphe 7.1.5 de ce chapitre).

Cette idée rejoint les développements et améliorations récents de la méthode WKB complexe, établis notamment dans [11]. Dans ce nouveau cadre, une des idées est de dépasser le cadre local du domaine canonique au profit de domaines plus étendus appelés *domaines maximaux*. Ces domaines obtenus par des recollements de domaines canoniques sont des domaines sur lesquels une fonction garde l'asymptotique standard (cf. [11]).

## 7.1 Théorème de prolongement sur des domaines non compacts

### 7.1.1 Enoncé

On va prouver le résultat suivant :

**Théorème 7.1.** *Théorème de prolongement non compact.*

Soit  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$ . On suppose que  $V$  vérifie  $(H_V)$ , que  $W$  vérifie  $(H_{W,r})$  et que  $J$  vérifie  $(H_J^0)$ . Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $J$  et deux réels  $A_g$  et  $A_d$  tels que, si  $f$  a les propriétés suivantes :

- La fonction  $f(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)$  est une solution cohérente de (1.3).
- La fonction  $(\varphi, E) \mapsto f(x, \varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $S_{\tilde{Y}} \times \mathcal{V}$  pour tout  $x \in [-X, X]$  et tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ .

Alors,

1. Il existe  $\kappa$ , une détermination continue sur  $\{\varphi \in S_Y ; \operatorname{Re} \varphi < A_g\}$  et telle que  $\operatorname{Im} \kappa > 0$ . De plus, pour tous  $C < B < A_g$ , si la fonction  $f$  vérifie l'asymptotique :

$$f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int^\varphi \kappa(u) du} (\psi_-(x, \varphi, E) + r_C(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (7.1)$$

avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[-X, X] \times R_{(-\infty, C]} \times \mathcal{V}} \max\{|r_C(x, \varphi, E, \varepsilon)|, |\partial_x r_C(x, \varphi, E, \varepsilon)|\} = 0$ ,

alors cette asymptotique reste valide jusqu'à  $B$ . Précisément :

$$f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int^\varphi \kappa(u) du} (\psi_-(x, \varphi, E) + r_B(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (7.2)$$

avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[-X, X] \times R_{(-\infty, B]} \times \mathcal{V}} \max\{|r_B(x, \varphi, E, \varepsilon)|, |\partial_x r_B(x, \varphi, E, \varepsilon)|\} = 0$ .

2. Il existe  $\kappa$ , une détermination continue sur  $\{\varphi \in S_Y ; \operatorname{Re} \varphi > A_d\}$  et telle que  $\operatorname{Im} \kappa > 0$ . De plus, pour tous  $C > B > A_d$ , si  $f$  vérifie l'asymptotique

$$f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int^\varphi \kappa(u) du} (\psi_+(x, \varphi, E) + r_C(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (7.3)$$

avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[-X, X] \times R_{[C, +\infty)} \times \mathcal{V}} \max\{|r_C(x, \varphi, E, \varepsilon)|, |\partial_x r_C(x, \varphi, E, \varepsilon)|\} = 0$ ,

alors cette asymptotique reste valide jusqu'à  $B$ . Précisément :

$$f(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int^\varphi \kappa(u) du} (\psi_+(x, \varphi, E) + r_B(x, \varphi, E, \varepsilon)) \quad (7.4)$$

avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[-X, X] \times R_{[B, +\infty)} \times \mathcal{V}} \max\{|r_B(x, \varphi, E, \varepsilon)|, |\partial_x r_B(x, \varphi, E, \varepsilon)|\} = 0$ .

### 7.1.2 Remarques

On va en fait démontrer le Théorème 7.1 lorsque  $W$  vérifie les hypothèses plus faibles suivantes :

(H1)  $W$  est une fonction analytique réelle dans  $S_Y$ .

(H2)  $\exists C > 0, \exists s > 1$  tel que  $\forall z \in S_Y, |W'(z)| \leq \frac{C}{1+|z|^s}$

(H3)  $\exists f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R} \sup_{y \in [-Y, Y]} |W(x + iy)| \leq f(x)$

Le lemme suivant permet de faire le lien entre  $(H_{W,r})$  et (H1), (H2) et (H3) :

**Lemme 7.1.** Soit  $W$  vérifiant  $(H_{W,r})$  sur  $S_Y$ . Soit  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$ . Alors  $W$  vérifie (H1), (H2) et (H3) sur  $S_{\tilde{Y}}$ .

**Démonstration** Supposons que  $W$  vérifie  $(H_{W,r})$  sur  $S_Y$ . Pour montrer que  $W$  vérifie (H2) sur  $S_{\tilde{Y}}$ , on prouve le lemme suivant :

**Lemme 7.2.** Soit  $f$  une fonction analytique sur  $S_Y$  telle que  $|f(z)| \leq \frac{C}{1+|z|^s}, C > 0$ . Soit  $\eta > 0$ . Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists C_p > 0 \text{ tel que } \forall z \in S_{Y-\eta} \quad |f^{(p)}(z)| \leq \frac{C_p}{1+|z|^s}.$$

### Démonstration

Ce résultat est une conséquence de la formule de Cauchy. Pour  $z \in S_Y$  et  $R > 0$  tel que  $D(z, R) \subset S_Y$ , on écrit :

$$|f^{(p)}(z)| \leq \frac{C}{2\pi R^p} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z + Re^{i\theta}|^s},$$

On remarque que  $D(z, Y - |\operatorname{Im}(z)|) \subset S_Y$ . Donc, si  $\eta > 0$ , il existe  $C_p > 0$  telle que, pour  $|\operatorname{Im}(z)| < Y - \eta$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|f^{(p)}(z)| \leq \frac{C_p}{1 + |z|^s}.$$

Ceci termine la preuve du Lemme 7.2.

◇

-  $W$  vérifie clairement (H1) sur  $S_Y$ .

-  $W$  vérifie également (H3) avec  $f(x) = \frac{C}{1+|x|^s}$ .

Le Lemme 7.1 est ainsi prouvé.

◇

### 7.1.3 Schéma de la preuve

Donnons brièvement une idée de la preuve du Théorème 7.1. On prend l'exemple de  $B_d = \{\varphi \in S_Y; \operatorname{Re}(\varphi) > A_d\}$ . On procède en trois étapes.

On commence par recouvrir  $B_d$  par une suite de domaines canoniques compacts locaux  $K_m$  tels que l'intersection entre deux domaines successifs  $K_m$  et  $K_{m+1}$  est non vide.

Dans chaque domaine canonique  $K_m$ , on sait construire une base cohérente locale grâce au Théorème 5.1. Pour calculer le lien entre les bases cohérentes de  $K_m$  et  $K_{m+n}$ , il suffit de faire le produit des  $n$  matrices de passage entre les bases canoniques de deux domaines successifs. La précision du reste dans l'asymptotique ne peut être meilleure que la somme des précisions obtenues pour chaque domaine. Les restes obtenus dans le Théorème 5.1 sont en  $o(1)$  en la variable  $\varepsilon$ ; la précision est insuffisante si on veut faire tendre  $n$  vers  $\infty$ .

Le calcul des asymptotiques nécessite donc un raffinement du Théorème 5.1 qui consiste essentiellement à prendre en compte la dépendance du reste en le paramètre  $\varphi$ .

### 7.1.4 Points de branchement

Le résultat suivant précise quelque peu la position des points de branchement de  $\kappa$ . On rappelle que l'ensemble  $\Upsilon(E)$  est défini en (2.5).

**Lemme 7.3.** *Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage complexe de l'intervalle  $J$ . Soit  $W$  vérifiant*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{y \in [-Y, Y]} |W(x + iy)| = 0,$$

alors :

$$\exists A > 0 \text{ telle que } \forall E \in \mathcal{V}, \quad \varphi \in \Upsilon(E) \cap S_Y \Rightarrow |\operatorname{Re}(\varphi)| < A.$$

**Démonstration** Puisque  $\bar{\mathcal{V}} \cap \partial\sigma(H_0) = \emptyset$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad |E - E_p| \geq \alpha.$$

Par conséquent, on obtient que, si  $\varphi_p(E)$  vérifie  $E - W(\varphi_p(E)) = E_p$ , alors :

$$\forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad |W(\varphi_p(E))| \geq \alpha.$$

Enfin,  $\{u \in S_Y; |W(u)| \geq \alpha\}$  est inclus dans un compact de  $S_Y$ . Ceci achève la preuve du Lemme 7.3.

◇

### 7.1.5 Asymptotiques WKB uniformes sur une $\delta$ -chaîne

#### Définition de la $\delta$ -chaîne

On introduit d'abord une nouvelle définition. On rappelle que la largeur d'un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  est définie en (5.9).

**Définition 7.1.**  *$\delta$ -chaîne de domaines strictement canoniques.*

Soit  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$ . Soit  $E$  fixé. Soit  $D$  un domaine simplement connexe de  $S_{\tilde{Y}}$  ne contenant pas de points de branchement du moment complexe. On fixe sur  $D$  une détermination continue  $\kappa$  du moment complexe. Soit  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels et  $K$  un compact de  $S_{\tilde{Y}}$ .

On dit que  $\{K + \tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une  $\delta$ -chaîne associée à  $E$ ,  $\kappa$  et  $D$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\bigcup_{n=0}^{\infty} (K + \tau_n) = D$ .
2.  $\exists \tau > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad l((K + \tau_n) \cap (K + \tau_{n+1}), \tilde{Y}) > \tau$ .
3. Le domaine  $K$  est une réunion de courbes  $\gamma$  telles que, pour tout  $n$ ,  $\gamma + \tau_n$  est une courbe  $\delta$ -strictement canonique pour  $\kappa$ .

$K$  est alors appelé le domaine élémentaire de la  $\delta$ -chaîne.

#### Etudes des asymptotiques

On énonce le résultat intermédiaire suivant :

**Proposition 7.1.** *Soit  $V$  vérifiant  $(H_V)$  et  $W$  vérifiant  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$ . Soit  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $J$  et  $D \subset S_{\tilde{Y}}$  un domaine vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\inf_{p \in \mathbb{N}^*, E \in \mathcal{V}} \text{dist}\{D, \varphi_p(E)\} \geq C$ ,
- il existe  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $E \in \mathcal{V}$ ,  $\{K + \tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une  $\delta$ -chaîne associée à  $E$  et  $D$ .

Fixons  $\varphi_0 \in D$ .

Alors, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe deux fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto \psi_{\pm}^n(x, \varphi, E, \varepsilon)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- Les fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto \psi_{\pm}^n(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont définies sur  $\mathbb{R} \times (K + \tau_n) \times \mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$  et forment une base cohérente.
- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  fixés, les fonctions  $(\varphi, E) \mapsto \psi_{\pm}^n(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $(K + \tau_n) \times \mathcal{V}$ .
- pour  $x \in [-X, X]$ ,  $\varphi \in (K + \tau_n)$  et  $E \in \mathcal{V}$ , les fonctions  $\psi_{\pm}^n$  ont la représentation asymptotique suivante :

$$\psi_{\pm}^n(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa du} (\psi_{\pm}(x, \varphi, E) + r_n(x, \varphi, E, \varepsilon)). \quad (7.5)$$

avec pour  $x \in [-X, X]$ ,  $\varphi \in (K + \tau_n)$  et  $E \in \mathcal{V}$  :

$$\max\{|r_n(x, \varphi, E, \varepsilon)|, |\partial_x r_n(x, \varphi, E, \varepsilon)|\} \leq \frac{r(\varepsilon)}{1 + |\tau_n|^s}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = 0.$$

On démontrera ce résultat au chapitre 11.

## 7.2 Construction d'une $\delta$ -chaîne de domaines strictement canoniques

Dans ce paragraphe, nous allons construire une  $\delta$ -chaîne sous les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$ .

**Proposition 7.2.** *Soit  $\tilde{Y} \in ]0, Y[$  fixé. Soit  $V$  vérifiant  $(H_V)$ . Soit  $W$  vérifiant  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$ . Soit  $J$  vérifiant  $(H_J^0)$ . Alors il existe un voisinage complexe  $\mathcal{V}$  de  $J$ , deux réels  $(A_g, A_d) \in \mathbb{R}^2$ , un domaine  $K \subset S_{\tilde{Y}}$  et deux suites de réels  $\{\tau_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\tau_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :*

- pour tout  $E \in \mathcal{V}$ , il existe une détermination continue  $\kappa$  sur  $\{\varphi \in S_{\tilde{Y}} ; \operatorname{Re} \varphi \in (-\infty, A_g]\}$  (resp. sur  $\{\varphi \in S_{\tilde{Y}} ; \operatorname{Re} \varphi \in [A_d, \infty)\}$ ),
- pour tout  $E \in \mathcal{V}$ ,  $\{K + \tau_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $\{K + \tau_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ) est une  $\delta$ -chaîne associée à  $\kappa$ ,  $E$  et  $\{\varphi \in S_{\tilde{Y}} ; \operatorname{Re} \varphi \in (-\infty, A_g]\}$  (resp.  $\{\varphi \in S_{\tilde{Y}} ; \operatorname{Re} \varphi \in [A_d, \infty)\}$ ).

Le reste du paragraphe 7.1.5 est consacré à la preuve de la Proposition 7.2. La preuve n'utilise que des arguments géométriques élémentaires. On ne fait la construction que pour  $\{\varphi \in S_{\tilde{Y}} ; \operatorname{Re} \varphi \in (-\infty, A_g]\}$ . L'autre demie-bande se traite de la même façon.

### 7.2.1 Construction de droites $\delta$ -strictement canoniques

On a présenté les lignes canoniques au paragraphe 5.1.3 du chapitre 5 et donné une description en terme du vecteur tangent  $t(\varphi)$ .

Posons  $\alpha = \frac{1}{2} \inf_{E \in J} \operatorname{Im} k(E)$  et  $m = 2 \sup_{E \in J} |\operatorname{Re} k(E)|$ .

Puisque l'application  $(E, \varphi) \mapsto E - W(\varphi)$  est continue et que  $W(\varphi)$  tend vers 0 quand  $|\operatorname{Re} \varphi|$  tend vers  $+\infty$ , il existe un voisinage complexe  $\mathcal{V}$  de  $J$  et un réel  $A_g$  tels que, pour  $E$  dans  $\mathcal{V}$  et  $\varphi \in (-\infty, A_g]$  :

$$\operatorname{Re}(k(E - W(\varphi))) \in [-m, m], \quad \operatorname{Im} k(E - W(\varphi)) > \alpha$$

On pose  $B_g = (-\infty, A_g] + i[-\tilde{Y}, \tilde{Y}]$ . Les courbes canoniques pour  $\operatorname{Re} \varphi$  au voisinage de  $-\infty$  sont décrites par le lemme suivant :

**Lemme 7.4.** *Il existe  $\theta_0 \in ]0, \pi/2[$  tel que, si  $\gamma$  est une courbe régulière de  $B_g$  vérifiant :*

$$\forall \varphi \in \gamma, \quad \arg[t(\varphi)] \in ]\theta_0, \pi/2 - \theta_0[. \quad (7.6)$$

alors  $\gamma$  est une courbe canonique pour  $\kappa$ .

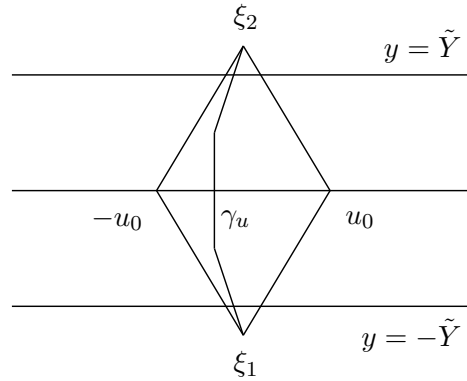
**Démonstration** Pour  $\arg(u) = \theta$  et  $\cot \theta \in ]-\frac{m-\delta}{\alpha}, \frac{\pi+m-\delta}{\alpha}[$ , on a :

$$\operatorname{Im}(\overline{(\kappa - \delta)u}) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\overline{(\pi - \kappa + \delta)u}) > 0$$

Par suite, il suffit de choisir  $\theta_0$  tel que  $\cot \theta_0 = \frac{m-\delta}{\alpha}$  pour que (7.6) soit vérifiée.

◇




 FIG. 7.1 – Le domaine élémentaire  $K$ 

### 7.2.2 Le domaine élémentaire $K$

Soient  $\xi_1 = -i\tilde{Y}$  et  $\xi_2 = i\tilde{Y}$ . On note  $K$  le losange délimité par les droites passant par  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , de vecteurs directeurs d'affixes  $e^{i\theta_0}$  et  $e^{i(\pi-\theta_0)}$ .

On note  $[-u_0, u_0] = K \cap \{y = 0\}$ .  $K$  est représenté sur la figure 7.1. Montrons que  $K + x$  est un domaine  $\delta$ -strictement canonique, pour tout réel  $x$  tel que  $K + x \subset B_g$ . Pour cela, d'après le Lemme 7.4, il suffit d'écrire  $K$  comme une réunion de courbes régulières vérifiant (7.6).

Pour tout  $u \in K$ , on considère un segment vertical  $[\bar{\xi}, \xi]$  contenant  $u$  et inclus dans  $K$  (voir figure 7.1). La ligne brisée  $[\xi_1, \bar{\xi}] \cup [\bar{\xi}, \xi] \cup [\xi, \xi_2]$  vérifie (7.6). La relation (7.6) est stable par déformation  $C^1$ ; on peut donc déformer la ligne  $[\xi_1, \bar{\xi}] \cup [\bar{\xi}, \xi] \cup [\xi, \xi_2]$  pour obtenir une courbe  $C^1$  vérifiant (7.6).

$K$  vérifie donc les propriétés suivantes :

- $K \cap S_{\tilde{Y}}$  contient un rectangle de largeur  $4\eta > 0$ .
- $l((K - n\eta) \cap (K - (n+1)\eta), \tilde{Y}) > \eta$ .
- $K$  est l'union de courbes  $\gamma$  telles que  $\gamma - n\eta$  est  $\delta$ -strictement canonique pour  $n$  assez grand.

### 7.2.3 Conclusion

Le lemme de prolongement est alors la conséquence de la Proposition 7.2 et de la Proposition 7.1. On donne les détails de la preuve au chapitre 11.

## 8

# Calcul du coefficient de transmission dans le cas d'une croix.

Dans ce chapitre, on va calculer dans le domaine  $K_i^\infty$  (décrit au paragraphe 5.8.1 du chapitre 5) le wronskien entre deux solutions de (1.3), cohérentes et analytiques, et dont l'asymptotique croît dans des directions opposées.

Fixons  $\tilde{Y} < Y$ . Soit  $E_0 \in J$ . On suppose qu'il existe un domaine  $K_i^\infty$ , associé à  $E_0$ , décrit au paragraphe 5.8.1 du chapitre 5. On rappelle que les points de branchement sont notés  $\varphi_r^+, \varphi_r^-$  et  $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$ . Les lignes de Stokes sont décrites au paragraphe 5.7 de ce même chapitre.

Soit  $l > 0$ . Pour  $l$  assez petit, on introduit les domaines  $K_g \subset R_{[A,B]}$  et  $K_d \subset R_{[A,B]}$  définis par :

$$K_g = \{\xi - u, \xi \in b \cup \bar{b}, u \in ]0, l[ \},$$

et

$$K_d = \{\xi + u, \xi \in a \cup \bar{a}, u \in ]0, l[ \}.$$

On commence par décrire les hypothèses du calcul.

## 8.1 Hypothèses. Notations

### 8.1.1 Déterminations

#### Hypothèse (C<sub>D</sub>)

On énonce maintenant l'hypothèse fixant les déterminations :

(C<sub>D</sub>)

1. Il existe sur  $K_g$  une détermination  $\kappa_g$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \kappa_g(\varphi) > 0 & \quad \text{pour} \quad \{\operatorname{Re} \varphi < \operatorname{Re} \varphi_r^-\} \\ \kappa_g(\varphi_r^- - 0) &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

2. Il existe sur  $K_d$  une détermination  $\kappa_d$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \kappa_d(\varphi) > 0 & \quad \text{pour} \quad \{\operatorname{Re} \varphi > \operatorname{Re} \varphi_r^+\} \\ \kappa_d(\varphi_r^+ + 0) &= 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

## Notations

On rappelle qu'il existe sur  $K_i^\infty$  une détermination  $\kappa_i$  du moment complexe vérifiant :

$$\operatorname{Im} \kappa_i(\varphi) > 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \in S_- \cap R \quad (8.3)$$

$$\kappa_i(\varphi_r^-) = \kappa_i(\varphi_r^+) = 0 ; \quad \kappa_i(\varphi_i) = \kappa_i(\overline{\varphi_i}) = \pi.$$

$(E - W)^{-1}(K_g)$  est un domaine simplement connexe qui ne rencontre l'axe réel que dans une seule lacune. On note donc  $k_g$  la détermination du quasi-moment vérifiant :

$$k_g(E - W(\varphi)) = \kappa_g(\varphi).$$

On définit de même :

$$k_i(E - W(\varphi)) = \kappa_i(\varphi), \quad k_d(E - W(\varphi)) = \kappa_d(\varphi).$$

On pose également :

$$q_i(\varphi) = \sqrt{k'_i(E - W(\varphi))}, \quad q_g(\varphi) = \sqrt{k'_g(E - W(\varphi))} \quad q_d(\varphi) = \sqrt{k'_d(E - W(\varphi))}.$$

On note alors  $\widetilde{\Psi}_\pm^g(x, \mathcal{E})$ ,  $\widetilde{\Psi}_\pm^i(x, \mathcal{E})$  et  $\widetilde{\Psi}_\pm^d(x, \mathcal{E})$  les solutions de Bloch décrites au paragraphe 4.1 du chapitre 4. On pose alors :

$$\Psi_\pm^i(x, \varphi, E) = \widetilde{\Psi}_\pm^i(x, E - W(\varphi)) ; \quad \Psi_\pm^g(x, \varphi, E) = \widetilde{\Psi}_\pm^g(x, E - W(\varphi)) ; \quad \Psi_\pm^d(x, \varphi, E) = \widetilde{\Psi}_\pm^d(x, E - W(\varphi)).$$

On définit enfin les fonctions  $\omega_\pm^g$ ,  $\omega_\pm^i$  et  $\omega_\pm^d$  associées par la relation (5.31) aux déterminations  $k_g$ ,  $k_i$  et  $k_d$ .

### 8.1.2 Solutions à l'asymptotique standard

#### Hypothèse (C<sub>F</sub>)

On décrit maintenant les hypothèses sur l'asymptotique des fonctions  $f_-^g$  et  $f_+^d$  :

(C<sub>F</sub>)

Il existe un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , un voisinage  $\mathcal{U}_0 = \overline{\mathcal{U}_0}$  de  $E_0$  et deux fonctions  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto f_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon)$ ,  $(x, \varphi, E, \varepsilon) \mapsto f_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon)$  tels que :

1. Les fonctions  $(\varphi, E) \mapsto f_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E) \mapsto f_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $S_{\tilde{\gamma}} \times \mathcal{U}$ .
2. Les fonctions  $f_-^g(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $f_+^d(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)$  sont solutions de l'équation (1.3).
3. La fonction  $f_-^g$ , respectivement  $f_+^d$  vérifie l'asymptotique standard dans  $K_g$ , respectivement  $K_d$  et est normalisée en  $-0 + i0$ , respectivement  $0 + i0$ . Précisément  $f_-^g$  et  $f_+^d$  s'écrivent :

$$f_-^g = q_g e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_g(u) du} e^{\int_0^{\varphi_r^-} \omega_-^g(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi} \kappa_g(u) du} e^{\int_{\varphi_r^-}^{\varphi} \omega_-^g(u) du} (\Psi_-^g + o(1)),$$

$$f_+^d = q_d e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_d(u) du} e^{\int_0^{\varphi_r^+} \omega_+^d(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \kappa_d(u) du} e^{\int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \omega_+^d(u) du} (\Psi_+^d + o(1)),$$

où les chemins  $[0, \varphi_r^-]$ , et  $[0, \varphi_r^+]$  sont situés dans  $\mathbb{C}_+$ .

**Notations. Choix des déterminations**

On rappelle que les fonctions  $f_i$  et  $(f_i)^*$  vérifient les asymptotiques standard suivantes sur  $K_i$  :

$$\begin{aligned} f_i &= q_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\varphi \kappa_i(u) du} e^{\int_0^\varphi \omega_+^i(u) du} (\Psi_+^i + o(1)) \\ (f_i)^* &= q_i^* e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\varphi \kappa_i(u) du} e^{\int_0^\varphi \omega_-^i(u) du} (\Psi_-^i + o(1)) \end{aligned}$$

On rappelle qu'il existe un réel  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$  tel que :

$$\frac{q_i^*}{q_i} = \sigma_i. \quad (8.4)$$

On renvoie au paragraphe 5.8.9 du chapitre 5.

Le wronskien vérifie  $w(f_i, (f_i)^*) = \sigma_i (w_0 k_i')(E - W(0))$ .

Le réel  $\sigma_i$  dépend du signe de  $k'$  le long de la bande  $B$  :

- Si la bande  $B$  est du type  $[E_{4p+1}, E_{4p+2}]$ ,  $k' > 0$  sur  $B$  et  $\sigma_i = 1$ .
- Si la bande  $B$  est du type  $[E_{4p+3}, E_{4p+4}]$ ,  $k' < 0$  sur  $B$  et  $\sigma_i = -1$ .

On choisit alors la détermination  $q_g$  telle que  $q_g = q_i$  dans  $S_-$  et telle que  $q_g$  est prolongée continuellement dans  $K_g$ . D'après la relation (8.4), la détermination  $q_g$  vérifie alors :

$$q_g^* = i\sigma_i q_g \quad (8.5)$$

De même, on fixe  $q_d$  telle que  $q_d = q_i$  dans  $\overline{S_+}$  et telle que  $q_d$  est prolongée continuellement dans  $K_d$ . La détermination  $q_d$  vérifie alors :

$$q_d^* = i\sigma_i q_d \quad (8.6)$$

Le but de ce chapitre est de calculer les coefficients :

$$a_g^- = \frac{w(f_i, f_-^g)}{w(f_i, f_i^*)}, \quad (8.7)$$

et :

$$a_d^+ = \frac{w(f_i, f_+^d)}{w(f_i, f_i^*)}. \quad (8.8)$$

Les calculs des wronskiens sont similaires à ceux effectués dans [12, 10]. Ils reposent sur quelques principes simples que l'on va rappeler ici.

## 8.2 Méthode de calcul des asymptotiques des wronskiens

### 8.2.1 Périodicité

La relation de cohérence (1.5) implique que les wronskiens sont  $\varepsilon$ -périodiques (pour la variable  $\varphi$ ). Pour obtenir les asymptotiques de ces wronskiens, il suffit donc de les estimer sur un segment de longueur  $\varepsilon$ . La périodicité entraîne de plus que ces wronskiens admettent un développement en série de Fourier dont on va chercher à estimer les coefficients.

### 8.2.2 Analyticité

Puisque les fonctions  $(\varphi, E) \mapsto f_-^g(x, \varphi, E, \varepsilon)$ ,  $(\varphi, E) \mapsto f_+^d(x, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E) \mapsto f_{\pm}^i(x, \varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $S_{\tilde{Y}} \times \mathcal{U}$ , leurs wronskiens sont analytiques en  $(\varphi, E) \in S_{\tilde{Y}} \times \mathcal{U}$ . Soit  $w(\varphi, E, \varepsilon)$  une fonction analytique en  $(\varphi, E)$  et  $\varepsilon$ -périodique en la variable  $\varphi$ . Notons le développement en série de Fourier :

$$w(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(E, \varepsilon) e^{\frac{2ik\pi\varphi}{\varepsilon}}$$

La formule de Cauchy nous donne une estimation des coefficients de Fourier :

$$w_k(E, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \varepsilon} w(\varphi, E, \varepsilon) e^{-\frac{2ik\pi\varphi}{\varepsilon}} d\varphi, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \varphi_0 \in S_{\tilde{Y}}. \quad (8.9)$$

En déplaçant  $\text{Im } \varphi_0$  dans  $[-\tilde{Y}, \tilde{Y}]$ , on obtient un contrôle des coefficients positifs et négatifs.

### 8.2.3 Valeurs complexes de $E$ et $\delta$ -sous-domaines admissibles

On insiste sur la notion de sous-domaine admissible. Soit  $\delta > 0$  assez petit, on considère le  $\delta$ -sous-domaine  $\{\varphi \in K_i^\infty ; d(\varphi, \partial K_i^\infty) > \delta\}$ . Sur ce  $\delta$ -sous-domaine admissible, les asymptotiques de  $\{f_{\pm}^i\}$  sont vérifiées et uniformes en  $E$  dans un voisinage constant de  $E_0$ . Par la suite, on notera de façon impropre  $K_i^\infty$  ce  $\delta$ -sous-domaine admissible.

On fixe désormais  $E \in \mathcal{U}$ . On va calculer un développement asymptotique des coefficients  $a_g^-$  et  $a_d^+$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. On démontre le résultat suivant :

**Proposition 8.1.** *On suppose que les hypothèses  $(C_D)$  et  $(C_F)$  sont vérifiées. Il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que les coefficients  $a_g^-$  et  $a_d^+$  admettent les développements de Fourier asymptotiques uniformes suivants pour  $(E, \varphi) \in \mathcal{U} \times S_{Y_0}$  :*

$$a_g^-(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_g^-)_k(E, \varepsilon) e^{\frac{2ik\pi\varphi}{\varepsilon}},$$

avec

$$(a_g^-)_0(E, \varepsilon) = \sigma_i [1 + o(1)], \quad (8.10)$$

et

$$\forall k \neq 0, \quad |(a_g^-)_k(E, \varepsilon)| < C e^{-\alpha/\varepsilon} e^{\frac{-2|k|\pi Y_0}{\varepsilon}}, \quad (8.11)$$

$$a_d^+(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_d^+)_k(E, \varepsilon) e^{\frac{2ik\pi\varphi}{\varepsilon}},$$

avec

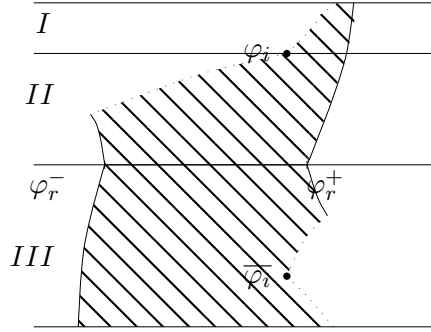
$$(a_d^+)_0(E, \varepsilon) = i\sigma_i [1 + o(1)], \quad (8.12)$$

$$(a_d^+)_1(E, \varepsilon) = -i\sigma_i e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_0^{\overline{\varphi}^i} (\kappa_i - \pi)} e^{\int_{\varphi_r^+}^0 \omega_+^i - \omega_-^i} e^{\int_0^{\overline{\varphi}^i} (\omega_+^i - \omega_-^i)} [1 + o(1)], \quad (8.13)$$

et

$$\forall k > 1, \quad |(a_d^+)_k(\varphi, E, \varepsilon)| < C |(a_d^+)_1(E, \varepsilon)| e^{-\alpha/\varepsilon} e^{\frac{-2|k-1|\pi Y_0}{\varepsilon}}, \quad (8.14)$$

$$\forall k < 0, \quad |(a_d^+)_k(\varphi, E, \varepsilon)| < C e^{-\alpha/\varepsilon} e^{\frac{-2|k|\pi Y_0}{\varepsilon}}, \quad (8.15)$$

FIG. 8.1 – Bandes  $I$ ,  $II$ ,  $III$ 

### 8.3 Calcul du coefficient $a_g^-$

Pour étudier  $a_g^-$  (donné par la formule (8.7)) dans la bande  $S_{\tilde{Y}}$ , on divise cette bande en trois sous-bandes  $I$ ,  $II$ ,  $III$ .

$$I = \{\varphi / \text{Im } \varphi_i < \text{Im } \varphi < \tilde{Y}\} \quad (8.16)$$

$$II = \{\varphi / 0 < \text{Im } \varphi < \text{Im } \varphi_i\} \quad (8.17)$$

$$III = \{\varphi / -\tilde{Y} < \text{Im } \varphi < 0\}. \quad (8.18)$$

Ces trois sous-bandes sont décrites dans la figure 8.1. Chaque sous-bande va demander un calcul différent.

#### 8.3.1 Propriétés des objets analytiques de la méthode WKB dans chaque bande

On commence par décrire les liens entre  $\kappa_g$  et  $\kappa_i$ ,  $\Psi_{\pm}^g$  et  $\Psi_{\pm}^i$ ,  $q_g$  et  $q_i$  dans les bandes  $I$ ,  $II$  et  $III$ .

##### Bande $II$

D'après les définitions données au paragraphe 5.6.3 du chapitre 5, les déterminations  $\kappa_i$  et  $\kappa_g$  du moment complexe coïncident sur  $S_-$ . On a donc les relations suivantes, pour  $\varphi \in b_e \cup e_b$  :

$$\kappa_i(\varphi + 0) = \kappa_g(\varphi - 0), \quad \Psi_{\pm}^i(\varphi + 0) = \Psi_{\pm}^g(\varphi - 0), \quad \omega_{\pm}^i(\varphi + 0) = \omega_{\pm}^g(\varphi - 0). \quad (8.19)$$

Il reste à étudier le lien entre  $q_i$  et  $q_g$ .

$$q_i(\varphi + 0) = q_g(\varphi - 0).$$

##### Bande $III$

Dans cette bande, la frontière de  $K_i^{\infty}$  est la ligne de Stokes  $\bar{b}$  commençant en  $\varphi_r^-$  (cf. chapitre 5, paragraphe 5.7). On considère  $k_g$  et  $k_i$  :  $k_i$  est le prolongement de  $k_g$  à travers la

bande  $[E_r, E_i]$ . D'après la formule (4.10), on a donc les relations suivantes, pour  $\varphi \in \bar{b}$  :

$$\begin{aligned} \kappa_i(\varphi + 0) &= -\kappa_g(\varphi - 0), & \Psi_{\pm}^i(x, \varphi + 0) &= \Psi_{\mp}^g(x, \varphi - 0), \\ \omega_{\pm}^i(\varphi + 0) &= \omega_{\mp}^g(\varphi - 0), & q_i(\varphi + 0) &= -iq_g(\varphi - 0) \end{aligned} \quad (8.20)$$

### Bande I

La frontière de  $K_i^\infty$  dans cette bande est la ligne de Stokes  $c$  (cf. paragraphe 5.7). On considère les quasi-moments  $k_g$  et  $k_i$  associés à  $\kappa_g$  et  $\kappa_i$ . La relation (4.11) appliquée à  $k_g$  et  $k_i$ , de part et d'autre de  $[E_2, E_3]$ , implique que  $\kappa_g$  et  $\kappa_i$  vérifient les relations suivantes, pour  $\varphi \in c$ ,

$$\begin{aligned} \kappa_g(\varphi - 0) &= 2\pi - \kappa_i(\varphi + 0), & \Psi_{\pm}^g(x, \varphi - 0) &= \Psi_{\mp}^i(x, \varphi + 0) \\ w_{\pm}^g(\varphi - 0) &= w_{\mp}^i(\varphi + 0), & q_i(\varphi + 0) &= iq_g(\varphi - 0) \end{aligned} \quad (8.21)$$

### 8.3.2 Calcul du développement asymptotique de $a_g^-$

On peut désormais commencer le calcul du coefficient  $a_g^-$ .

#### Dans la bande II

Dans cette bande, le Lemme 5.9 nous dit que, puisque  $\text{Im } \kappa_g > 0$ , la fonction  $f_-^g$  garde la même asymptotique dans  $K_i^\infty$ . On a donc pour  $E \in \mathcal{U}_0$ , et  $\varphi \in K_i^\infty \cap II$  :

$$f_-^g = q_g e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_r^-} \kappa_i(u) du} e^{\int_0^{\varphi_r^-} \omega_-^i(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi} \kappa_g(u) du} e^{\int_{\varphi_r^-}^{\varphi} \omega_-^g(u) du} (\Psi_-^g + o(1))$$

et

$$f_i = q_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi} \kappa_i(u) du} e^{\int_0^{\varphi} \omega_+^i(u) du} (\Psi_+^i + o(1))$$

et donc

$$\forall \varphi \in II, \quad a_g^-(\varphi, E, \varepsilon) = \sigma_i [1 + o(1)]. \quad (8.22)$$

#### Dans la bande III

Dans cette bande, on va obtenir grâce au Lemme 5.9 une majoration du coefficient  $|a_g^-(\varphi)|$ . On se donne un point  $\varphi_b \in \bar{b}$  tel que  $\text{Im } \varphi_b \in [-\tilde{Y}, 0]$ . Puisque  $\text{Im } \kappa_g > 0$  à gauche de  $\bar{b} \cap S_{\tilde{Y}}$  et que  $\bar{b}$  n'est pas dans l'image réciproque d'une bande, l'asymptotique de  $f_-^g$  est encore vérifiée à droite de cette ligne  $\bar{b} \cap S_{\tilde{Y}}$ . Précisément, soient  $E \in \mathcal{U}_0$ ,  $\varphi$  et  $\varphi_b$  dans  $K_i^\infty \cap III$  tels que  $\text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi_b$ . Alors :

$$f_-^g = q_g e^{\int_0^{\varphi_r^-} \omega_-^i(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_b} \kappa_g(u) du} e^{\int_{\varphi_r^-}^{\varphi} \omega_-^g(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_b}^{\varphi} \kappa_g(u) du} (\Psi_-^g + o(1))$$

On a également :

$$f_i = q_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_b} \kappa_i(u) du} e^{\int_0^{\varphi} \omega_+^i(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_b}^{\varphi} \kappa_i(u) du} (\Psi_+^i + o(1))$$

On obtient que

$$|a_g^-(\varphi, E, \varepsilon)| \leq C \left| e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_b} \kappa_i(u) du} \right| \left| e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_b}^{\varphi} \kappa_i(u) du} \right| \quad (8.23)$$

On va maintenant majorer chacun des facteurs de l'inégalité (8.23).

Tout d'abord,  $\text{Im} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_b^-} \kappa_i(u) du = 0$  car  $\varphi_b$  appartient à la ligne de Stokes  $\bar{b}$  issue de  $\varphi_r^-$ .

Il reste à étudier  $\int_{\varphi_b}^{\varphi} \kappa_i(u) du$ . Par périodicité, il suffit d'estimer ce coefficient sur une bande de taille  $\varepsilon$ . Pour  $\text{Re}(\varphi - \varphi_b) \in [\delta, \delta + \varepsilon]$ , on a :

$$\left| \int_{\varphi_b}^{\varphi} \kappa_i(u) du \right| \leq C\delta$$

L'inégalité (8.23) s'écrit donc :

$$\forall \varphi \in III, \quad |a_g^-(\varphi, E, \varepsilon)| \leq C e^{C\delta/\varepsilon} \quad (8.24)$$

### Bande I

En appliquant le Lemme 5.9, comme  $\text{Im} \kappa_g > 0$  à gauche de  $c \cap S_{\tilde{Y}}$ ,  $f_-^g$  garde la même asymptotique à droite de  $c \cap S_{\tilde{Y}}$ . Soient  $E \in \mathcal{U}_0$ ,  $\varphi_b \in c \cap S_{\tilde{Y}}$  et  $\varphi \in K_i^\infty \cap I$  tels que  $\text{Im} \varphi = \text{Im} \varphi_b$ . Alors :

$$\begin{aligned} f_-^g &= q_g e^{\int_0^{\varphi_r^-} \omega_-^i} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_i} \kappa_g(u) du} e^{\int_{\varphi_r^-}^{\varphi_i} \omega_-^g(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_i}^{\varphi_b} \kappa_g(u) du} e^{\int_{\varphi_i}^{\varphi} \omega_-^g(u) du} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_b}^{\varphi} \kappa_g(u) du} (\Psi_-^g + o(1)) \\ f_i &= q_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_i} \kappa_i(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_i}^{\varphi_b} (2\pi - \kappa_g)(u) du} e^{\int_{\varphi_i}^{\varphi} \omega_+^i} e^{\int_{\varphi_i}^{\varphi} \omega_-^g(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_b}^{\varphi} (2\pi - \kappa_g)(u) du} (\Psi_-^g + o(1)) \end{aligned}$$

Par suite,

$$|a_g^-(\varphi, E, \varepsilon)| \leq C \left| e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_i}^{\varphi_b} (\pi - \kappa_g)(u) du} \right| \left| e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_b}^{\varphi} (\pi - \kappa_g)(u) du} \right| \left| e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i} \right|. \quad (8.25)$$

Dans l'inégalité (8.25), on va majorer chaque terme.

Premièrement,  $\text{Im} \int_{\varphi_i}^{\varphi_b} (\pi - \kappa_g)(u) du = 0$  car  $\varphi_b$  appartient à la ligne de Stokes issue de  $\varphi_i$ .

Ensuite, pour  $\text{Re}(\varphi - \varphi_b) \in [\delta, \delta + \varepsilon]$ , on a :

$$\left| \int_{\varphi_b}^{\varphi} (\pi - \kappa_g)(u) du \right| \leq C\delta.$$

Enfin,  $\kappa_i$  est réel sur  $[0, \varphi_r^-]$ .

On obtient donc l'estimation suivante dans la bande  $I$  :

$$\forall \varphi \in I, \quad |a_g^-(\varphi, E, \varepsilon)| \leq C e^{C\delta/\varepsilon} \quad (8.26)$$

### 8.3.3 Asymptotiques uniformes de $a_g^-(\varphi, E, \varepsilon)$ dans $S_{Y_0}$ .

Dans la bande  $S_{Y_0}$ , on écrit :

$$a_g^-(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{\frac{2i\pi n \varphi}{\varepsilon}} \quad (8.27)$$

Les coefficients  $\alpha_n$  vérifient :

$$\alpha_n = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \varepsilon} a_g^-(\varphi, E, \varepsilon) e^{-2i\pi n \frac{\varphi}{\varepsilon}} d\varphi, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varphi_0 \in \{-Y_0 \leq \text{Im} \varphi \leq Y_0\}. \quad (8.28)$$



Soit  $n > 0$ . On va majorer  $|\alpha_n|$ . En utilisant la majoration (8.24) de la bande *III* et la formule (8.28) pour  $\text{Im } \varphi_0 = -(Y - \delta)$ , on obtient

$$|\alpha_n| \leq C e^{-2\pi n(Y-\delta)/\varepsilon} e^{\frac{C\delta}{\varepsilon}}.$$

Pour  $n < 0$ , on applique le même raisonnement avec  $\text{Im } \varphi_0 = (Y - \delta)$  et la majoration (8.26) de la bande *I* et on obtient :

$$|\alpha_n| \leq C e^{2\pi n(Y-\delta)/\varepsilon} e^{\frac{C\delta}{\varepsilon}}.$$

D'après le calcul (8.22) de la bande *II*, on a

$$\alpha_0 = \sigma_i[1 + o(1)].$$

On choisit  $\delta < \frac{2\pi(Y-Y_0)}{C+2\pi}$ . Pour une constante  $\alpha < 2\pi(Y-Y_0) - \delta(C+2\pi)$ , on obtient la majoration (8.11).

## 8.4 Calcul du coefficient $a_d^+$

On va estimer le développement en série de Fourier de  $a_d^+$ , donné par la formule (8.8). De même que précédemment, on va calculer ce coefficient dans chaque bande *I'*, *II'* et *III'*. Ces bandes sont représentées sur la figure 8.2 et sont définies par

$$I' = \{0 < \text{Im } \xi < Y_0\},$$

$$II' = \{-\text{Im } \varphi_i < \text{Im } \xi < 0\},$$

et

$$III' = \{-Y_0 < \text{Im } \xi < -\text{Im } \varphi_i\}.$$

### 8.4.1 Propriétés des objets analytiques de la méthode WKB dans chaque bande

Dans ce paragraphe, on décrit le lien entre les objets  $\kappa_i$  et  $\kappa_d$ ,  $\Psi_{\pm}^i$  et  $\Psi_{\pm}^d$ ,  $\omega_{\pm}^i$  et  $\omega_{\pm}^d$ ,  $q_i$  et  $q_d$  dans les bandes *I'*, *II'* et *III'*.

#### Bande *I'*

La frontière de  $K_i^{\infty}$  est la ligne de Stokes *a* commençant en  $\varphi_r^+$ , le long de cette ligne, on a les relations suivantes :

$$\kappa_i(\varphi - 0) = -\kappa_d(\varphi + 0), \quad \Psi_{\pm}^i(x, \varphi - 0) = \Psi_{\mp}^d(x, \varphi + 0), \quad (8.29)$$

$$\omega_{\pm}^i(\varphi - 0) = \omega_{\mp}^d(\varphi + 0), \quad q_d(\varphi + 0) = -i q_i(\varphi - 0)$$

#### Bande *II'*

Dans  $K_i^{\infty}$ , on a les relations suivantes :

$$\kappa_i = \kappa_d, \quad \Psi_{\pm}^i = \Psi_{\pm}^d, \quad \omega_{\pm}^i = \omega_{\pm}^d, \quad \text{et} \quad q_i = q_d. \quad (8.30)$$

**Bande III'**

La frontière de  $K_i^\infty$  dans cette bande est la ligne de Stokes  $\bar{c}$  commençant en  $\overline{\varphi_i}$ . On a alors :

$$\kappa_d(\varphi + 0) = 2\pi - \kappa_i(\varphi - 0), \quad \Psi_\pm^d(x, \varphi + 0) = \Psi_\mp^i(x, \varphi - 0) \quad (8.31)$$

$$\omega_\pm^d(\varphi + 0) = \omega_\mp^i(\varphi - 0) \quad q_d(\varphi + 0) = iq_i(\varphi - 0)$$

On va pouvoir désormais calculer le coefficient  $a_d^+$ .

**8.4.2 Calcul du développement asymptotique de  $a_d^+$** 
**Dans la bande I'**

Puisque  $\text{Im } \kappa_d > 0$  à droite de  $a \cup S_{\bar{Y}}$ , la fonction  $f_+^d$  garde la même asymptotique dans  $K_i^\infty \setminus (S_- \cap K_i^\infty) \cap I'$ , à gauche de la ligne  $a \cap S_{\bar{Y}}$ .  $f_+^d$  et  $f_i$  ont les asymptotiques suivantes, pour  $E \in \mathcal{U}_0$  et  $\varphi \in K_i^\infty \setminus (S_- \cap K_i^\infty) \cap I'$  :

$$\begin{aligned} f_+^d &= q_d e^{\int_0^{\varphi_r^+} \omega_-^i} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_i} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \kappa_d(u) du} e^{\int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \omega_+^d(u) du} (\Psi_+^d + o(1)) \\ f_i &= q_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_i(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \kappa_i(u) du} e^{\int_0^{\varphi_r^+} \omega_+^i(u) du} e^{\int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \omega_+^i(u) du} (\Psi_+^i + o(1)) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\forall \varphi \in I', \quad a_d^+(\varphi, E, \varepsilon) = i\sigma_i[1 + o(1)]. \quad (8.32)$$

**Dans la bande III'**

Puisque  $\text{Im } \kappa_d > 0$  à droite de  $\bar{c} \cap III'$ , la fonction  $f_+^d$  garde la même asymptotique à gauche de la ligne  $\bar{c} \cap III'$ . On a donc pour  $E \in \mathcal{U}_0$  et  $\varphi \in K_i^\infty \cap III'$  :

$$\begin{aligned} f_+^d &= q_d e^{\int_0^{\varphi_r^+} \omega_-^i} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_i} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^{\overline{\varphi_i}} \kappa_i(u) du} e^{\int_{\varphi_r^+}^{\overline{\varphi_i}} \omega_+^i(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\overline{\varphi_i}}^{\varphi} \kappa_d(u) du} e^{\int_{\overline{\varphi_i}}^{\varphi} \omega_+^d(u) du} (\Psi_+^d + o(1)) \\ f_i &= q_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\overline{\varphi_i}} \kappa_i(u) du} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\overline{\varphi_i}}^{\varphi} (2\pi - \kappa_d)(u) du} e^{\int_0^{\overline{\varphi_i}} \omega_+^i(u) du} e^{\int_{\overline{\varphi_i}}^{\varphi} \omega_-^d(u) du} (\Psi_-^d + o(1)) \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\forall \varphi \in III', \quad a_d^+(\varphi, E, \varepsilon) = -i\sigma_i e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i(u) du} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_0^{\overline{\varphi_i}} (\kappa_i - \pi)(u) du} e^{\int_{\varphi_r^+}^0 (\omega_+^i(u) - \omega_-^i(u)) du} e^{\int_0^{\overline{\varphi_i}} (\omega_+^i - \omega_-^i)(u) du} e^{\frac{2i\pi\varphi}{\varepsilon}} [1 + o(1)]. \quad (8.33)$$

**Dans la bande II'**

Il n'est pas utile d'étudier  $a_d^+$  dans cette bande. En effet, l'étude dans la bande III' donne une estimée des coefficients de Fourier pour  $n \geq 1$  et l'étude dans I' donne une estimée des coefficients de Fourier pour  $n \leq 0$ .

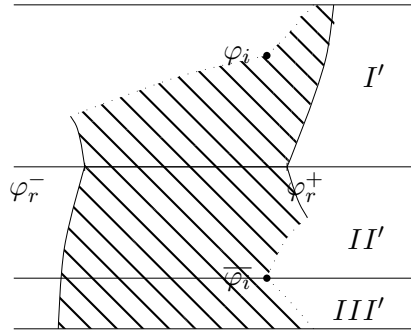


FIG. 8.2 – Bandes  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$

### 8.4.3 Asymptotiques uniformes de $a_d^+$ dans $S_{Y_0}$ .

De même que précédemment, on écrit dans la bande  $S_{Y_0}$  :

$$a_d^+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{\frac{2i\pi n \varphi}{\varepsilon}}$$

Les coefficients  $\beta_n$  sont donnés par :

$$\beta_n = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \varepsilon} a_d^+(\varphi, E, \varepsilon) e^{-2i\pi n \frac{\varphi}{\varepsilon}} d\varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varphi_0 \in \{-\tilde{Y} \leq \text{Im } \varphi \leq \tilde{Y}\}.$$

On en déduit par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 8.3.3 les relations (8.12) à (8.15).

## 9

# Valeurs propres associées à la croix simple

Le but de ce chapitre est de démontrer les résultats énoncés au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2.

Pour cela, on démontre d'abord les propriétés des phases et actions énoncées au Lemme 2.2. Ensuite, on exprime l'équation aux valeurs propres grâce aux coefficients de phases et au coefficient tunnel. L'étude de cette équation donne finalement l'expression asymptotique des valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$ .

On suppose dans tout le chapitre que les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H_J)$  sont vérifiées.

### 9.1 Démonstration du Lemme 2.2

On rappelle qu'on a noté  $\varphi_r^\pm$  et  $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$  les points de branchement du moment complexe,  $E_r$  et  $E_i$  les extrémités de  $\sigma(H_0)$  associées. On va effectuer la démonstration dans le cas (5.16). Soit  $\kappa_i$  la détermination décrite au paragraphe 5.6.1 du chapitre 5.  $\kappa_i$  vérifie de plus (5.32).

On va prouver le Lemme pour la détermination  $\tilde{\kappa}_i = \kappa_i$ .

- On commence par exprimer  $\Phi$ ,  $S$  et  $\Phi_d$  comme des intégrales du moment complexe le long de chemins du plan complexe. Si  $\gamma$  est une courbe orientée, on note  $\gamma^\dagger$  la courbe orientée en sens contraire. Soient  $\varphi_d$  et  $\varphi_g$  deux points du plan complexe tels que :

$$\operatorname{Re} \varphi_d > \operatorname{Re} \varphi_r^+ ; \operatorname{Re} \varphi_g < \operatorname{Re} \varphi_r^-.$$

On commence par définir les chemins  $\gamma_\Phi$ ,  $\gamma_S$  et  $\gamma_{g,d}$  :

$$\gamma_\Phi = [\varphi_r^- + i0, \varphi_r^+ + i0] \cup [\varphi_r^+ - i0, \varphi_r^- - i0],$$

$$\gamma_S = (\sigma + 0) \cup (\sigma^\dagger - 0),$$

$$\gamma_{g,d} = [\varphi_g + i0, 0 + i0] \cup (\sigma_+ - 0) \cup (\sigma_+^\dagger + 0) \cup [0 + i0, \varphi_d + i0].$$

Ces chemins sont représentés sur la figure 9.1. On a alors le résultat suivant :

**Lemme 9.1.** *Les coefficients  $\Phi$ ,  $\Phi_d$  et  $S$  s'écrivent :*

$$\Phi = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_\Phi} \kappa(u) du,$$

$$S = \frac{1}{2i} \oint_{\gamma_S} \kappa(u) du,$$

$$\Phi_d = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma_{g,d}} (\kappa(u) - \pi) du + \int_{\overline{\gamma_{g,d}}} (\tilde{\kappa}(u) - \pi) du \right) + \pi(\varphi_g - \varphi_d).$$

où  $\kappa = \kappa_i$  dans  $S_-$  et est prolongé continuellement le long de chaque chemin et  $\tilde{\kappa} = \kappa_i$  dans  $\overline{S_-}$  est prolongé continuellement le long de  $\overline{\gamma_{g,d}}$ .

**Démonstration**

– On commence par justifier le fait qu'on peut fermer les lacets  $\gamma_\Phi$  et  $\gamma_S$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\kappa$  admet un prolongement continu sur  $\gamma_\Phi$  et  $\gamma_S$ .

Considérons donc la courbe  $\gamma_\Phi$ . On a choisi la coupure de  $\gamma_\Phi$  en  $\varphi_r^-$ . Montrons que  $\kappa$  prend les mêmes valeurs de chaque côté de la coupure.  $\kappa = \kappa_i$  sur  $[\varphi_r^- + i0, \varphi_r^+ + i0]$ , puisque  $\kappa$  est continu à droite de  $\varphi_r^+$ , on obtient que  $\kappa = -\kappa_i$  sur  $[\varphi_r^- - i0, \varphi_r^+ - i0]$ . De plus,  $\kappa(\varphi_r^- + i0) = 0 = \kappa(\varphi_r^- - i0)$ , ce qui montre que l'on intègre sur la courbe fermée  $\gamma_\Phi$ .

On effectue un raisonnement identique pour montrer que  $\kappa$  est continu de part et d'autre de  $\overline{\varphi_i}$ .

– On calcule :

$$\frac{1}{2} \oint_{\gamma_\Phi} \kappa(u) du = \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} \kappa_i(u) du = \Phi(E).$$

On procède de même pour le coefficient  $S(E)$ .

$$\frac{1}{2i} \oint_{\gamma_S} \kappa(u) du = \frac{1}{i} \left[ \int_{\sigma_+} (\pi - \kappa_i(u)) du + \int_{\sigma_-} (\pi - \kappa_i(u)) du \right].$$

– On s'intéresse finalement à l'expression de  $\Phi_d$ . On introduit la détermination  $\kappa_i$  et on décompose  $\gamma_{g,d}$  en segments élémentaires :

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_{g,d}} (\kappa(u) - \pi) du + \int_{\overline{\gamma_{g,d}}} (\tilde{\kappa}(u) - \pi) du \\ &= 2 \int_{\varphi_g}^0 (\kappa_i(u) - \pi) du + 2 \int_{\sigma_+} (\kappa_i(u) - \pi) du + \int_{\varphi_d}^0 (\kappa_i(u) - \pi) du - 2 \int_{\sigma_-} (\kappa_i(u) - \pi) du \\ &= 2 \int_{\varphi_r^-}^0 (\kappa_i(u) - \pi) du + 2 \int_{\sigma_+} (\kappa_i(u) - \pi) du + \int_{\varphi_r^+}^0 (\kappa_i(u) - \pi) du - 2 \int_{\sigma_-} (\kappa_i(u) - \pi) du - 2\pi(\varphi_g - \varphi_r^-) + 2\pi(\varphi_d - \varphi_r^+) \\ &= 2\Phi_d(E) + 2\pi(\varphi_d - \varphi_g) \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 9.1.

◇

- On utilise maintenant le Lemme 9.1 pour prouver l'analyticité de  $\Phi$ ,  $S$  et  $\Phi_d$ .  
 Considérons  $\Phi$  tout d'abord. On peut déformer le contour  $\gamma_\Phi$  en une courbe fermée autour de  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+]$  et restant à une distance non nulle de cet intervalle. De plus,  $\kappa$  est analytique en  $E$  sur le contour d'intégration, lorsque  $E$  est assez proche de l'intervalle  $J$ . On raisonne de la même manière pour le coefficient  $S$ . Pour prouver l'analyticité de  $\Phi_d$ , on déforme les courbes  $\gamma_{g,d}$  et  $\overline{\gamma_{g,d}}$  pour être à une distance strictement positive de la croix.
- Soit  $E \in J$ . Sur l'intervalle  $[\varphi_r^-, \varphi_r^+]$ , la fonction  $\kappa_i$  prend ses valeurs dans  $[0, \pi]$ .  $\Phi(E)$  est donc réel et positif sur  $J$ .  
 On donne maintenant une expression simplifiée de  $S$  :

$$S(E) = -i \left[ \int_{\sigma_+} (\pi - \kappa_i(u)) du + \int_{\sigma_-} (\pi - \kappa_i(u)) du \right] = 2\text{Im} \int_{\sigma_+} (\pi - \kappa_i(u)) du \quad (9.1)$$

De plus, sur  $\sigma$ ,  $\kappa_i$  prend ses valeurs dans  $[0, \pi]$ . D'après (2.8) et (9.1), on obtient que  $0 < S(E) \leq 2\pi \text{Im} \varphi_i(E)$ .

On note finalement que  $\int_{\sigma_-} (\kappa_i(u) - \pi) du = -\overline{\int_{\sigma_+} (\kappa_i(u) - \pi) du}$ . Par conséquent,  $\Phi_d(E)$  est réel.

- On calcule maintenant  $S'$  et  $\Phi'$  sur  $J$ . Soit  $k$  la détermination du moment de Bloch continue à travers  $[E_r, E_i]$ , alors  $\kappa(\varphi) = k(E - W(\varphi))$  et :

$$\Phi'(E) = \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} k'(E - W(u)) du + k(E - W(\varphi_r^+)) - k(E - W(\varphi_r^-)) = \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} k'(E - W(u)) du$$

On rappelle que  $k$  a des points de branchement en racine carrée à la fin des zones spectrales (cf. paragraphe 4.8, chapitre 4); par conséquent, l'intégrale  $\int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} k'(E - W(u)) du$  est convergente. Dans l'intervalle  $[E_r, E_i]$ ,  $k'(\mathcal{E}) > 0$  donc  $(E_i - E_r)\Phi'$  prend des valeurs positives sur  $J$ .

On étudie  $S'$  de la même façon.

- On termine avec les formules suivantes :

$$\Phi_d(E) + iS(E) = \int_{\varphi_r^-}^0 \kappa_i(u) du - 2 \int_{\sigma_-} (\kappa_i - \pi)(u) du + \int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i(u) du \quad (9.2)$$

$$-\Phi_d(E) + iS(E) = - \int_{\varphi_r^-}^0 \kappa_i(u) du - 2 \int_{\sigma_+} (\kappa_i - \pi)(u) du - \int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i(u) du \quad (9.3)$$

Dans le cas où  $\kappa(\varphi_r^-) = \pi$ , la preuve est similaire pour la détermination  $\tilde{\kappa}_i = 2\pi - \kappa_i$ .

### 9.1.1 Calculs complémentaires

On s'intéresse ici aux intégrales de  $\omega_+^i$  et  $\omega_-^i$ , définis en (5.31), le long de certains chemins remarquables du plan complexe. On a les relations suivantes :

**Lemme 9.2.** – Les intégrales de  $\omega_+^i$  et  $\omega_-^i$  vérifient les relations suivantes :

$$\forall E \in J, \quad \int_{[\varphi_r^-, \varphi_r^+]} \omega_+^i(u, E) du = 0, \quad \int_{[\varphi_r^-, \varphi_r^+]} \omega_-^i(u, E) du = 0 \quad (9.4)$$

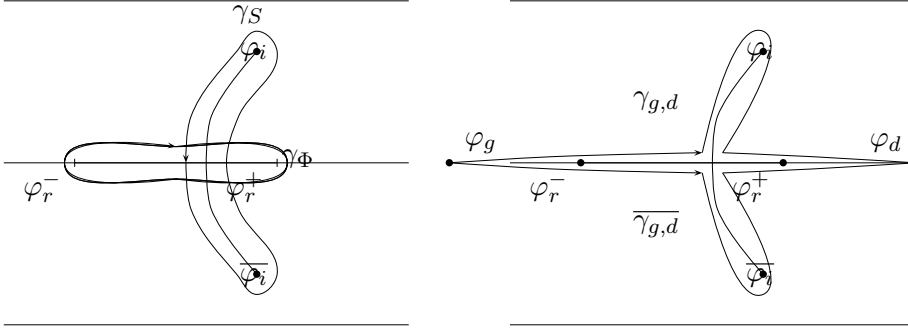


FIG. 9.1 – Les chemins dans le plan complexe

$$\forall E \in J, \quad \int_{\sigma} \omega_+^i(u, E) du = 0, \quad \int_{\sigma} \omega_-^i(u, E) du = 0 \quad (9.5)$$

– Il existe un réel  $\rho$  tel que

$$\forall E \in J, \quad - \int_{[\varphi_r^+, 0] \cup \sigma_+} (\omega_+^i(u, E) + \omega_-^i(u, E)) du - \int_{\sigma_- \cup [0, \varphi_r^-]} (\omega_+^i(u, E) - \omega_-^i(u, E)) du = 2i\rho \quad (9.6)$$

**Démonstration** Comme toujours, on se place dans le cas (5.16).

– On commence par démontrer (9.4). D’après la définition (5.31), on calcule :

$$\int_{[\varphi_r^-, \varphi_r^+]} \omega_+^i(u, E) du = - \int_{[\varphi_r^-, \varphi_r^+]} g_+^i(E - W(u)) W'(u) du = \int_{E-W([\varphi_r^-, \varphi_r^+])} g_+^i(e) de = 0$$

En effet, pour  $E \in J$ , l’image  $E - W([\varphi_r^-, \varphi_r^+])$  est un chemin du plan des énergies reliant  $E_r$  et  $E_r$  passant par  $(E - W(0)) \in ]E_i, E_r[$ . On a représenté ce chemin dans la figure 9.2A. En particulier,  $E - W([\varphi_r^-, \varphi_r^+])$  est un chemin fermé et n’entoure aucun pôle de la fonction méromorphe  $g_+^i$ . Par suite, l’intégrale est nulle. On montre de même que

$$\int_{[\varphi_r^-, \varphi_r^+]} \omega_-^i(u, E) du = 0$$

– On traite maintenant (9.5). On écrit :

$$\int_{\sigma} \omega_+^i(u, E) du = - \int_{E-W(\sigma)} g_+^i(e) de$$

L’image du chemin  $\sigma$  est représentée dans la figure 9.2B. On fait le même raisonnement pour  $\omega_-^i$ .

– Enfin, on calcule :

$$\int_{[\varphi_r^+, 0] \cup \sigma_+} (\omega_+^i(u, E) - \omega_-^i(u, E)) du - \int_{\sigma_- \cup [0, \varphi_r^-]} (\omega_+^i(u, E) - \omega_-^i(u, E)) du$$

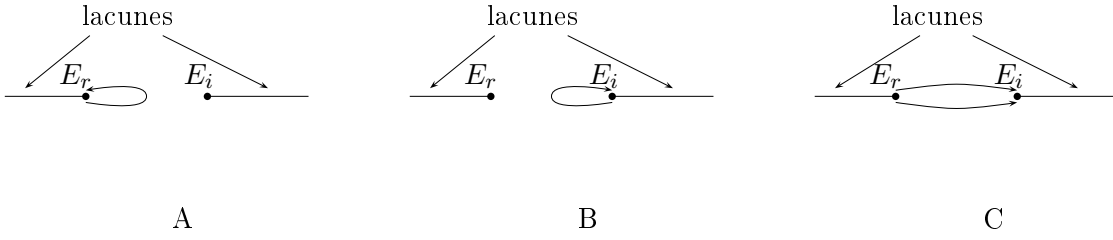


FIG. 9.2 – Chemins dans le plan des énergies

$$= \int_{E-W([\varphi_r^+, 0] \cup \sigma_+)} (g_+^i(e) - g_-^i(e)) de - \int_{E-W(\sigma_- \cup [0, \varphi_r^-])} (g_+^i(e) - g_-^i(e)) de$$

Les chemins images  $E - W([\varphi_r^+, 0] \cup \sigma_+)$  et  $E - W(\sigma_- \cup [0, \varphi_r^-])$  sont deux chemins du plan des énergies reliant  $E_r$  et  $E_i$  (cf. figure 9.2C). Par analyticité de  $(g_+^i - g_-^i)$  dans le domaine  $\text{Re}(e) \in ]E_r, E_i[$ , on obtient finalement que :

$$\int_{[\varphi_r^+, 0] \cup \sigma_+} (\omega_+^i(u, E) - \omega_-^i(u, E)) du - \int_{\sigma_- \cup [0, \varphi_r^-]} (\omega_+^i(u, E) - \omega_-^i(u, E)) du = 2 \int_{E_r}^{E_i} (g_+^i - g_-^i)(e) de \quad (9.7)$$

Il reste à montrer que ce coefficient est imaginaire pur. Pour cela, on remarque que  $(g_-^i)^* = g_+^i$ , d'après (4.18). L'égalité (9.7) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{[\varphi_r^+, 0] \cup \sigma_+} (\omega_+^i - \omega_-^i)(u, E) du - \int_{\sigma_- \cup [0, \varphi_r^-]} (\omega_+^i - \omega_-^i)(u, E) du \\ &= 2 \left( \int_{E_r}^{E_i} g_+^i(e) de - \int_{E_r}^{E_i} (g_+^i)^*(e) de \right) = 2 \left( \int_{E_r}^{E_i} g_+^i(e) de - \overline{\int_{E_r}^{E_i} g_+^i(e) de} \right) \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 9.2.

 

## 9.2 Equation aux valeurs propres

On démontre maintenant la Proposition 2.1.

### 9.2.1 Lien avec le calcul du chapitre 8

On commence par prouver le résultat suivant :

**Lemme 9.3.** *Pour tout  $E_0$  dans  $J$ , il existe un voisinage complexe  $\mathcal{U}_0$  de  $E_0$  et deux fonctions  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto b_g^-(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto b_d^+(\varphi, E, \varepsilon)$  tels que :*

- Le coefficient  $d$  défini en (6.22) s'écrit :

$$d(\varphi, E, \varepsilon) = i\sigma_i w(f_i, (f_i)^*) [b_g^-(b_d^+)^* - (b_g^-)^* b_d^+]. \quad (9.8)$$

- Les fonctions  $(\varphi, E) \mapsto b_g^-(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E) \mapsto b_d^+(\varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $S_Y \times \mathcal{U}_0$ .



- Les fonctions  $\varphi \mapsto b_g^-(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $\varphi \mapsto b_d^+(\varphi, E, \varepsilon)$  sont  $\varepsilon$ -périodiques et admettent le développement en série de Fourier asymptotique suivant, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$b_g^-(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_g^-)_k(E, \varepsilon) e^{\frac{2ik\pi\varphi}{\varepsilon}}, \quad (9.9)$$

avec

$$(b_g^-)_0(E, \varepsilon) = \sigma_i e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i} e^{\frac{1}{2} \int_0^{\varphi_r^-} (\omega_+^i - \omega_-^i)} [1 + o(1)], \quad (9.10)$$

et

$$\forall k \neq 0, \quad |(b_g^-)_k(E, \varepsilon)| < C e^{-\alpha/\varepsilon} e^{\frac{-2|k|\pi Y_0}{\varepsilon}}, \quad (9.11)$$

$$b_d^+(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_d^+)_k(E, \varepsilon) e^{\frac{2ik\pi\varphi}{\varepsilon}}, \quad (9.12)$$

avec

$$(b_d^+)_0(E, \varepsilon) = i\sigma_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_i} e^{\frac{1}{2} \int_0^{\varphi_r^+} (\omega_+^i - \omega_-^i)} [1 + o(1)], \quad (9.13)$$

$$(b_d^+)_1(E, \varepsilon) = -i\sigma_i e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} (\kappa_i - \pi)} e^{\frac{1}{2} \int_{\varphi_r^+}^0 \omega_+^i - \omega_-^i} e^{\int_0^{\varphi_r^+} (\omega_+^i - \omega_-^i)} [1 + o(1)], \quad (9.14)$$

et

$$\forall k > 1, \quad |(b_d^+)_k(\varphi, E, \varepsilon)| < C |(b_d^+)_1(E, \varepsilon)| e^{-\alpha/\varepsilon} e^{\frac{-2|k-1|\pi Y_0}{\varepsilon}}, \quad (9.15)$$

$$\forall k < 0, \quad |(b_d^+)_k(\varphi, E, \varepsilon)| < C e^{-\alpha/\varepsilon} e^{\frac{-2|k|\pi Y_0}{\varepsilon}}, \quad (9.16)$$

### Démonstration

- Soit  $E_0 \in J$ . On considère le domaine  $K_i^\infty$  associé à  $E_0$  décrit au paragraphe 5.8.1 du chapitre 5. Il existe un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de  $E_0$  et une base de fonctions  $f_\pm^i$  vérifiant les propriétés de la Proposition 5.2.

On commence par appliquer les constructions de la Proposition 3.2 pour les points  $m_g = -0 + i0$  et  $m_d = 0 + i0$ . Le Théorème 7.1 montre qu'il existe  $A > 0$  tel que :

$$\forall \varphi \text{ tel que } \operatorname{Re} \varphi \in (-\infty, -A] \quad h_-^g = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi} \kappa_g} \psi_-(x, \varphi, E, -0 + i0) (1 + o(1)).$$

$$\forall \varphi \text{ tel que } \operatorname{Re} \varphi \in [A, +\infty) \quad h_+^d = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_i} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^+}^{\varphi} \kappa_d} \psi_+(x, \varphi, E, 0 + i0) (1 + o(1)).$$

D'après le Lemme 5.9, l'asymptotique de  $h_-^g$  (respectivement  $h_+^d$ ) est encore vérifiée dans  $K_g$  (respectivement dans  $K_d$ ).

On sait qu'il existe deux fonctions analytiques  $\alpha_g(E)$  et  $\alpha_d(E)$  telles que :

$$(\alpha_g h_-^g)^* = i\sigma_g \alpha_g h_-^g,$$

$$(\alpha_d h_+^d)^* = i\sigma_d \alpha_d h_+^d.$$

On peut donc poser :

$$\alpha_g h_-^g = -i\sigma_g (b_g^-)^* f_i + b_g^-(f_i)^*,$$

$$\alpha_d h_+^d = -i\sigma_d (b_d^+)^* f_i + b_d^+(f_i)^*.$$

On considère le chemin  $\tilde{\gamma}_g = [-0 - i0, \varphi_r^- - i0] \cup [\varphi_r^- + i0, 0 + i0]$  et le chemin  $\tilde{\gamma}_d = [+0 - i0, \varphi_r^+ - i0] \cup [\varphi_r^+ + i0, 0 + i0]$ . La détermination  $q_g$  (respectivement  $q_d$ ) décrite

au paragraphe 8.1.2 du chapitre 8 est continue sur  $\tilde{\gamma}_g$  (respectivement  $\tilde{\gamma}_d$ ). D'après les relations (8.5) et (8.6), on a donc :

$$\sigma_g = \sigma_i \quad ; \quad \sigma_d = \sigma_i.$$

On a alors :

$$\int_{\tilde{\gamma}_g} \omega_-^g = \int_0^{\varphi_r^-} (\omega_+^i - \omega_-^i),$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_d} \omega_+^d = \int_0^{\varphi_r^+} (\omega_+^i - \omega_-^i).$$

- Les fonctions  $h_-^g$  et  $h_+^d$  vérifient les propriétés  $(C_D)$  et  $(C_F)$  présentées au chapitre 8 donc les coefficients  $b_g^-$  et  $b_d^+$  vérifient :

$$b_g^- = \alpha_g a_g^-, \quad b_d^+ = \alpha_d a_d^+,$$

où les coefficients  $a_g^-$  et  $a_d^+$  sont donnés dans la Proposition 8.1. En utilisant les expressions de  $\alpha_g$  et  $\alpha_d$  données en (6.18) et (6.21), on obtient que :

$$\alpha_g(E) = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} \kappa_i} e^{\frac{1}{2} \int_0^{\varphi_r^-} (\omega_+^i - \omega_-^i)},$$

$$\alpha_d(E) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^+} \kappa_i} e^{\frac{1}{2} \int_0^{\varphi_r^+} (\omega_+^i - \omega_-^i)}.$$

On calcule alors pour  $E \in \mathcal{U}_0$  :

$$d(\varphi, E, \varepsilon) = w(\alpha_g h_-^g, \alpha_d h_+^d)$$

$$= [b_g^- (b_d^+)^* - b_d^+ (b_g^-)^*] i \sigma_i w(f_i, (f_i)^*).$$

Ceci achève la preuve du Lemme 9.3.

◇

### Démonstration de la Proposition 2.1

- Il reste donc à calculer le développement en série de Fourier :

$$b_g^- (b_d^+)^*(\varphi, E, \varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n(E, \varepsilon) e^{\frac{2in\pi\varphi}{\varepsilon}}.$$

En utilisant les asymptotiques des coefficients de Fourier de  $b_g^-$  et  $b_d^+$  donnés par le Lemme 9.3, on montre que :

$$\gamma_0 = -ie^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} \kappa_i} [1 + o(1)].$$

$$\gamma_1 = +ie^{-\frac{i}{\varepsilon} (\int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i + \int_{\varphi_r^-}^0 \kappa_i)} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} (\kappa_i - \pi)} e^{\int_0^{\varphi_r^+} (\omega_+^i - \omega_-^i)} e^{\int_0^{\varphi_r^-} (\omega_-^i - \omega_+^i)} [1 + o(1)].$$

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} \gamma_n e^{\frac{2in\pi\varphi}{\varepsilon}} \right| = O(e^{-\alpha/\varepsilon}) \quad \text{pour } \varphi \in S_{Y_0}.$$

En effet,

$$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0 + \sum_{n \neq 0} \alpha_n \beta_{-n} = -ie^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} \kappa_i} e^{\frac{1}{2} \left[ \int_0^{\varphi_r^-} (\omega_+^i - \omega_-^i) + \int_0^{\varphi_r^+} (\omega_-^i - \omega_+^i) \right]} [1 + o(1)].$$

D'après (9.4), on simplifie :

$$\left[ \int_0^{\varphi_r^-} (\omega_+^i - \omega_-^i) + \int_0^{\varphi_r^+} (\omega_-^i - \omega_+^i) \right] = 0.$$

De plus, d'après (2.7),  $\int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} \kappa_i = \Phi(E)$ . Par suite,

$$\gamma_0 = -ie^{\frac{i\Phi(E)}{\varepsilon}} [1 + o(1)].$$

On calcule :

$$\gamma_1 = \alpha_0 \beta_1 + \sum_{n \neq 1} \alpha_n \beta_{1-n}$$

On commence par étudier  $\alpha_0 \beta_1$ , pour cela on déduit de la relation (9.2) que :

$$\int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i(\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_r^-}^0 \kappa_i(\varphi) d\varphi - \int_{\sigma_-} (\kappa_i(\varphi) - \pi) d\varphi = \Phi_d(E) + iS(E).$$

$$\alpha_0 \beta_1 = ie^{-\frac{i}{\varepsilon} (\int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i + \int_{\varphi_r^-}^0 \kappa_i)} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_r^-} (\kappa_i - \pi)} e^{\int_0^{\varphi_r^+} \omega_+^i + \int_{\varphi_r^-}^0 \omega_-^i - \int_{\sigma_+} (\omega_+^i - \omega_-^i)} [1 + o(1)] + O(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}) e^{-S(E)/\varepsilon}.$$

La relation (9.2) entraîne que :

$$\int_{\varphi_r^+}^0 \kappa_i(\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_r^-}^0 \kappa_i(\varphi) d\varphi - \int_{\sigma_-} (\kappa_i(\varphi) - \pi) d\varphi = \Phi_d(E) + iS(E).$$

De plus, d'après le Lemme 9.2

$$\int_0^{\varphi_r^+} \omega_+^i + \int_{\varphi_r^-}^0 \omega_-^i - \int_{\sigma_+} (\omega_+^i - \omega_-^i) = i\rho.$$

d'où :

$$\alpha_0 \beta_1 = ie^{-S/\varepsilon} e^{-i\Phi_d/\varepsilon} e^{i\rho} e^{2i\pi\varphi/\varepsilon} [1 + o(1)].$$

Enfin, puisque  $S(E) \leq 2\pi \text{Im } \varphi_i(E)$ , on estime le reste du développement :

$$\left| \sum_{n \neq 0} \alpha_n \beta_{-n} \right| = o(e^{-S/\varepsilon}).$$

Enfin, pour  $p \neq 0, 1$ , on estime :

$$\gamma_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \beta_{p-n}.$$

Pour  $p > 1$ , on a :

$$|\gamma_p| = e^{-S/\varepsilon} e^{-\alpha/\varepsilon} O\left(e^{-\frac{2\pi Y_0(p-1)}{\varepsilon}}\right).$$

De même, on estime pour  $p < 0$ ,

$$|\gamma_p| = e^{-S/\varepsilon} e^{-\alpha/\varepsilon} O\left(e^{-\frac{2\pi Y_0(|p|-1)}{\varepsilon}}\right).$$

- On se restreint désormais à  $\varphi \in \mathbb{R}$ . On en déduit maintenant le développement en série de Fourier du coefficient  $d(E, \varphi, \varepsilon)$  dans un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de  $E_0$  :

$$\begin{aligned} d(\varphi, E, \varepsilon) &= iw(f_i, \sigma_i(f_i)^*) \left( \lambda_0(E, \varepsilon) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\lambda_n(E, \varepsilon) e^{\frac{2in\pi\varphi}{\varepsilon}} + (\lambda_n)^*(E, \varepsilon) e^{\frac{-2in\pi\varphi}{\varepsilon}}) \right) \\ &= i(w_0 k'_i)(E - W(0)) \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(\varphi, E, \varepsilon). \end{aligned}$$

où  $u_n(\varphi, E, \varepsilon) = \lambda_n(E, \varepsilon) e^{\frac{2in\pi\varphi}{\varepsilon}} + (\lambda_n)^*(E, \varepsilon) e^{\frac{-2in\pi\varphi}{\varepsilon}}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u_0(\varphi, E, \varepsilon) = \lambda_0(E, \varepsilon)$ .

On calcule :

$$u_0(\varphi, E, \varepsilon) = \gamma_0(E, \varepsilon) - \gamma_0^*(E, \varepsilon) = -ie^{i\frac{\Phi}{\varepsilon}} g(E, \varepsilon) - ie^{-i\frac{\Phi}{\varepsilon}} g^*(E, \varepsilon).$$

où  $g(E, \varepsilon) = 1 + o(1)$ .

On pose alors  $g(E, \varepsilon) = r_g(E, \varepsilon) e^{i\theta_g(E, \varepsilon)}$  où les fonctions  $E \mapsto r_g(E, \varepsilon)$  et  $E \mapsto \theta_g(E, \varepsilon)$  sont analytiques et vérifient

$$r_g^* = r_g, \quad r_g = 1 + o(1) \quad \theta_g^* = \theta_g, \quad \theta_g = o(1).$$

On simplifie donc :

$$u_0(\varphi, E, \varepsilon) = -ir_g(E, \varepsilon) \cos\left(\frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + \theta_g(E, \varepsilon)\right).$$

De la même façon, on calcule :

$$u_1(\varphi, E, \varepsilon) = ir_h(E, \varepsilon) e^{-S(E)/\varepsilon} \cos\left(\frac{\Phi_d + 2\pi\varphi}{\varepsilon} + \rho + \theta_h(E, \varepsilon)\right).$$

où les fonctions  $E \mapsto r_h(E, \varepsilon)$  et  $E \mapsto \theta_h(E, \varepsilon)$  sont analytiques et vérifient

$$r_h^* = r_h, \quad r_h = 1 + o(1) \quad \theta_h^* = \theta_h, \quad \theta_h = o(1).$$

De plus, on obtient la majoration suivante du reste dans le développement de Fourier :

$$\left| \sum_{p \geq 2} u_p(\varphi, E, \varepsilon) \right| \leq C e^{\frac{-S(E)}{\varepsilon}} e^{\frac{-\alpha}{\varepsilon}} \quad \text{pour } \varphi \in \mathbb{R}.$$

- On a donc démontré que pour  $E$  dans un voisinage de  $E_0$ , le développement en série de Fourier de  $d(E, \varphi, \varepsilon)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi, E, \varepsilon)}{i(w_0 k'_i)(E - W(0))} &= -i[1 + o(1)] \cos\left(\frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + o(1)\right) \\ &+ i[1 + o(1)] e^{\frac{-S(E)}{\varepsilon}} \cos\left(\frac{\Phi_d + 2\pi\varphi}{\varepsilon} + \rho + o(1)\right) + e^{\frac{-S(E)}{\varepsilon}} O(e^{\frac{-\alpha}{\varepsilon}}). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Par compacité de  $J$ , il existe un nombre fini d'intervalles  $\{J_k\}_{k \in \{1 \dots p\}}$  tels que :

1.  $J \subset \bigcup_{k \in \{1 \dots p\}} J_k$
2. Pour tout  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , les intervalles  $J_k$  et  $J_{k+1}$  ont une intersection non vide.
3. Pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , il existe un voisinage complexe  $\mathcal{U}_k$  de  $J_k$  tel que le développement (9.17) est vérifié sur  $\mathcal{U}_k$ .

On va montrer que l'on peut définir des fonctions  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Phi}_d$  sur tout le voisinage  $\mathcal{V} = \bigcup_{k \in \{1 \dots p\}} \mathcal{U}_k$ . Pour cela, on va « recoller » les développements sur chaque intervalle.

Le coefficient  $u_0$  s'écrit :

$$\forall E \in J_k, \quad u_0(E, \varepsilon) = r_{0,k}(E, \varepsilon) \cos \left( \frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + \theta_{0,k}(E, \varepsilon) \right)$$

$$\forall E \in J_{k+1}, \quad u_0(E, \varepsilon) = r_{0,k+1}(E, \varepsilon) \cos \left( \frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + \theta_{0,k+1}(E, \varepsilon) \right)$$

où  $r_{0,k}(E, \varepsilon) = 1 + o(1)$  et  $\theta_{0,k}(E, \varepsilon) = o(1)$  (respectivement  $r_{0,k+1}(E, \varepsilon) = 1 + o(1)$  et  $\theta_{0,k+1}(E, \varepsilon) = o(1)$ ) pour  $E \in J_k$  (respectivement  $E \in J_{k+1}$ ). On obtient que :

$$r_{0,k}(E, \varepsilon) = r_{0,k+1}(E, \varepsilon) = r_0(E, \varepsilon) \text{ et } \theta_{0,k}(E, \varepsilon) = \theta_{0,k+1}(E, \varepsilon) = \theta_0(E, \varepsilon) \text{ pour } E \in J_k \cap J_{k+1}$$

La fonction  $\tilde{\Phi}$  définie par ses restrictions à chaque  $\mathcal{U}_k$  est donc analytique sur  $\mathcal{V}$ .

On raisonne de même pour  $\tilde{\Phi}_d$ .

En posant

$$F(\varphi, E, \varepsilon) = \frac{d(\varphi, E, \varepsilon)}{i(w_0 k'_i)(E - W(0))r_0(E, \varepsilon)},$$

on termine la preuve de la Proposition 2.1.

## 9.3 Localisation des valeurs propres

Dans ce paragraphe, on déduit le Théorème 2.1 de la Proposition 2.1.

On va résoudre l'équation  $F(\varphi, E, \varepsilon) = 0$ , où  $F$  est précisée en (2.11).

### 9.3.1 Niveaux d'énergie $E^{(l)}(\varepsilon)$

Pour  $E \in \mathcal{V}$ , on commence par démontrer le Lemme 2.13. Pour cela, on s'intéresse à l'équation (2.12).

$E \mapsto \tilde{\Phi}(E, \varepsilon)$  est analytique réelle. Pour  $\varepsilon_0$  assez petit, par application du Lemme 2.2, il existe une constante  $m > 0$  telle que :

$$\forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, \quad |\tilde{\Phi}'(E, \varepsilon)| \geq m \tag{9.18}$$

Par conséquent, l'équation (2.12) admet donc un nombre fini de zéros dans  $J$ . On les note  $E^{(l)}(\varepsilon)$ , pour  $l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}$ . Ces zéros sont donnés par :

$$\tilde{\Phi}(E^{(l)}(\varepsilon)) = \varepsilon \left( \frac{\pi}{2} + l\pi \right) \quad l \in \{L_-, \dots, L_+\}$$

et vérifient :

$$E^{(l+1)}(\varepsilon) - E^{(l)}(\varepsilon) = \frac{1}{\tilde{\Phi}'(E^{(l)}(\varepsilon))} \pi\varepsilon + o(\varepsilon) \quad (9.19)$$

En combinant (9.18) et (9.19), on obtient (2.14).

On démontre maintenant le Théorème 2.1. On va commencer par montrer que les zéros de  $F$  sont dans un voisinage exponentiellement petit des énergies  $E^{(l)}(\varepsilon)$ .

### 9.3.2 Approximation au premier ordre

On donne tout d'abord une approximation au premier ordre des zéros de  $F$ .

On pose

$$a_0(E, \varepsilon) = \cos \frac{\tilde{\Phi}(E, \varepsilon)}{\varepsilon}$$

On peut supposer le voisinage  $\mathcal{V}$  assez petit et tel que, pour tout  $E \in \mathcal{V}$ ,

$$\operatorname{Re}(S(E)) > \beta > 0.$$

Alors, il existe une constante positive  $A$  telle que

$$|F(\varphi, E, \varepsilon) - a_0(E, \varepsilon)| < Ae^{-\beta/\varepsilon}.$$

De plus, on a l'inégalité suivante :

$$\exists C > 0 / \left| \cos \frac{\tilde{\Phi}(E, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \geq \frac{C}{\varepsilon} d\left(E, \bigcup_{l \in \{L_-, \dots, L_+\}} E^{(l)}(\varepsilon)\right). \quad (9.20)$$

En effet, il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$|\cos \theta| \geq cd(\theta, \pi\mathbb{Z} + \pi/2).$$

En utilisant (9.18), on obtient l'inégalité :

$$|\tilde{\Phi}(E, \varepsilon) - \tilde{\Phi}(E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon)| \geq m|E - E^{(l)}(\varepsilon)|$$

et finalement :

$$\left| \cos \frac{\tilde{\Phi}(E, \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \geq \frac{C}{\varepsilon} d\left(E, \bigcup_{l \in \{L_-, \dots, L_+\}} E^{(l)}(\varepsilon)\right)$$

Lorsque  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , on note

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r\}.$$

L'inégalité (9.20) implique qu'il n'y a pas de zéros de  $F$  en dehors de voisinages exponentiellement petits des  $E^{(l)}(\varepsilon)$ . Précisément, il existe une constante strictement positive  $D$  telle que, si on choisit  $r \geq D\varepsilon e^{-\beta/\varepsilon}$ , alors pour tout  $E \in \partial D(E^{(l)}(\varepsilon), r)$ , on a :

$$|F(\varphi, E, \varepsilon) - a_0(E, \varepsilon)| < |a_0(E, \varepsilon)|$$

Le théorème de Rouché entraîne donc que, pour chaque  $l$ ,  $F$  a exactement un zéro noté  $E_l(\varphi, \varepsilon)$  dans le disque  $D(E^{(l)}(\varepsilon), D\varepsilon e^{-\beta/\varepsilon})$  de  $E^{(l)}(\varepsilon)$ . La relation  $F = F^*$  permet de retrouver que les valeurs propres sont réelles. En effet, si  $E$  est un zéro de  $F$ ,  $\bar{E}$  l'est aussi. Par unicité, on obtient donc que  $E = \bar{E}$ .

On pose donc

$$E_l(\varphi, \varepsilon) = E^{(l)}(\varepsilon) + \varepsilon \lambda_l(\varphi, \varepsilon).$$

On sait que  $\lambda_l(\varphi, \varepsilon)$  est exponentiellement petit. On va maintenant en préciser l'asymptotique.

### 9.3.3 Approximation au deuxième ordre

On pose

$$a_1(\varphi, E, \varepsilon) = F(\varphi, E, \varepsilon) - a_0(E, \varepsilon)$$

On écrit

$$e^{-S(E_l(\varphi, \varepsilon))/\varepsilon} = e^{-S(E^{(l)}(\varepsilon))/\varepsilon} (1 + O(\lambda_l(\varphi, \varepsilon))).$$

De même, en introduisant  $\widetilde{\Phi}_d$  la phase modifiée, on obtient le développement :

$$\cos\left(\frac{\widetilde{\Phi}_d(E_l(\varphi, \varepsilon)) + 2\pi\varphi + \rho\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \cos\left(\frac{\widetilde{\Phi}_d(E^{(l)}(\varepsilon)) + 2\pi\varphi + \rho\varepsilon}{\varepsilon}\right) + O(e^{-\beta/\varepsilon}).$$

Le développement de  $a_1$  s'écrit donc :

$$a_1(\varphi, E_l(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) = a_1(\varphi, E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon)(1 + r(\varphi, E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon))$$

D'autre part, le développement de Taylor au premier ordre de la fonction  $E \mapsto a_0(E, \varepsilon)$  s'écrit :

$$a_0(E_l(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) = (-1)^{l+1} \widetilde{\Phi}'(E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon) \cdot \lambda_l(\varphi, \varepsilon) \cdot (1 + r(\varphi, E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon)) = (-1)^{l+1} \Phi'(E^{(l)}(\varepsilon)) \cdot \lambda_l(\varphi, \varepsilon) \cdot (1 + o(1)).$$

En remplaçant dans l'inégalité, on obtient finalement que :

$$\lambda_l(\varphi, \varepsilon) = \frac{(-1)^{l+1}}{\Phi'(E^{(l)}(\varepsilon))} e^{-S(E^{(l)}(\varepsilon))/\varepsilon} \left( \cos\left(\frac{\widetilde{\Phi}_d(E^{(l)}(\varepsilon), \varepsilon) + 2\pi\varphi}{\varepsilon} + \rho\right) + o(1) \right).$$

## 9.4 Application à la formule de trace

Dans [8], l'auteur démontre l'existence d'un développement asymptotique de  $\text{tr}[f(H_{\varphi, \varepsilon})]$ , pour  $f \in C_0^\infty$ , lorsque  $\text{Supp } f$  est un intervalle  $J$  disjoint des bandes de  $H_0$ , et calcule explicitement les deux premiers termes de ce développement.

En dimension 1, le Théorème 2.1 est plus précis que la formule de la trace, dans le sens où nous obtenons une localisation exponentiellement précise de chaque valeur propre.

Le Corollaire 1 permet de retrouver les deux premiers termes du développement asymptotique de [8].

**9.4.1**

Soit  $J$  un intervalle vérifiant l'hypothèse  $(H_J)$ . En particulier,  $J$  est tel que  $J \cap (\sigma_{ac}(H_{\varphi,\varepsilon}) \cup \sigma_{sc}(H_{\varphi,\varepsilon})) = \emptyset$ . Pour  $f \in C_0^\infty$ , avec  $\text{Supp } f \subset J$ , on calcule :

$$\text{tr}[f(H_{\varphi,\varepsilon})] = \sum_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} f(E_l(\varphi, \varepsilon)).$$

Soit  $\beta > 0$  tel que  $S(E) > \beta$  pour tout  $E \in J$ ; grâce au Théorème 2.1, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall u \in [0, \varepsilon], \quad |\text{tr}[f(H_{\varphi,\varepsilon})] - \text{tr}[f(H_{u,\varepsilon})]| < C \sum_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} \varepsilon e^{-\beta/\varepsilon}$$

En intégrant par rapport à  $u$ , on obtient que :

$$\text{tr}[f(H_{\varphi,\varepsilon})] = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \text{tr}[f(H_{u,\varepsilon})] du + O(e^{-\beta/\varepsilon})$$

Toujours d'après le Théorème 2.1, il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall u \in [0, \varepsilon], \quad \left| \text{tr}[f(H_{u,\varepsilon})] - \sum_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} f(E^{(l)}(\varepsilon)) \right| < C e^{-\beta/\varepsilon}.$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \text{tr}[f(H_{u,\varepsilon})] du = \sum_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} f(E^{(l)}(\varepsilon)) + O(e^{-\beta/\varepsilon}). \quad (9.21)$$

On évalue maintenant :

$$\sum_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} f(E^{(l)}(\varepsilon)) = \sum_{l \in \{L_-(\varepsilon), \dots, L_+(\varepsilon)\}} f \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon(l\pi + \pi/2))$$

**9.4.2**

On va tout d'abord prouver le résultat suivant :

**Lemme 9.4.** *Soit  $f \in C_0^\infty$  telle que  $\text{Supp } f \subset J$ . La trace de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  vérifie le développement asymptotique suivant :*

$$\int_0^\varepsilon \text{tr}[f(H_{u,\varepsilon})] du = \frac{1}{\pi} \int_J f(\mathcal{E}) \tilde{\Phi}'(\mathcal{E}, \varepsilon) d\mathcal{E} + O(\varepsilon^\infty)$$

**Démonstration** La démonstration de ce Lemme repose sur des résultats relativement élémentaires d'analyse réelle.

- On commence par appliquer la formule de Poisson à la fonction  $f \circ \tilde{\Phi}^{-1} \in C_0^\infty$  :

$$\varepsilon \sum_{l \in \mathbb{Z}} f \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon(l\pi + \pi/2)) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \widehat{(f \circ \tilde{\Phi}^{-1})} \left( \frac{2n}{\varepsilon} \right).$$



De plus, la transformée de Fourier de  $f \circ \tilde{\Phi}^{-1}$  vérifie les estimées :

$$\forall \nu > 1, \quad \exists C_\nu > 0, \quad \text{tq} \quad \left| \widehat{(f \circ \tilde{\Phi}^{-1})} \left( \frac{2n}{\varepsilon} \right) \right| \leq C_\nu \frac{\varepsilon^\nu}{n^\nu}.$$

En effet, puisque  $f \circ \tilde{\Phi}^{-1}$  est de classe  $C^\nu$ ,  $|\xi^\nu \widehat{(f \circ \tilde{\Phi}^{-1})}(\xi)|$  est bornée.

En reportant dans l'expression précédente, on en déduit que :

$$\varepsilon \sum_{p \in \mathbb{Z}} f \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon(p\pi + \pi/2)) = 2 \widehat{(f \circ \tilde{\Phi}^{-1})}(0) + O(\varepsilon^\infty).$$

• Il reste désormais à calculer :

$$2 \widehat{(f \circ \tilde{\Phi}^{-1})}(0) = \frac{1}{\pi} \int f \circ \tilde{\Phi}^{-1}(u) du.$$

En effectuant le changement de variable  $u = \tilde{\Phi}(\mathcal{E})$ , on obtient que :

$$2 \widehat{(f \circ \tilde{\Phi}^{-1})}(0) = \frac{1}{\pi} \int_J f(\mathcal{E}) \tilde{\Phi}'(\mathcal{E}, \varepsilon) d\mathcal{E}.$$

Ceci achève la preuve du Lemme.

◇

### 9.4.3 Conclusion

Pour obtenir un développement asymptotique de la trace à tous les ordres, il suffit donc d'avoir un développement asymptotique de la phase modifiée à tous les ordres. Nos calculs ne sont pas poussés assez loin pour obtenir ce résultat, néanmoins nous savons que  $\tilde{\Phi}'(\mathcal{E}) = \Phi'(E) + o(\varepsilon)$ , donc :

$$\frac{1}{\pi} \int_J f(\mathcal{E}) \tilde{\Phi}'(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_J f(\mathcal{E}) \Phi'(\mathcal{E}) d\mathcal{E} + o(\varepsilon)$$

Pour transformer le deuxième membre de l'égalité précédente, on effectue le changement de variable  $(\kappa, u) \mapsto (E(\kappa) + W(u), u)$  et on remarque que :

$$\frac{1}{\pi} \int_J f(\mathcal{E}) \Phi'(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} f(E(\kappa) + W(u)) d\kappa du.$$

On obtient donc finalement :

$$\int_0^\varepsilon \text{tr} [f(H_{u, \varepsilon})] du = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \int_{\varphi_r^-}^{\varphi_r^+} f(E(\kappa) + W(u)) d\kappa du + o(\varepsilon).$$

Ceci achève la preuve du Corollaire 1.

## 9.5 Développement asymptotique des valeurs propres

On va donner ici une autre application du Théorème 2.1 pour le calcul du développement asymptotique des valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$ . Un tel calcul est présenté lorsque  $V = 0$  dans [6]. Dans ce cas encore, on obtiendra explicitement un développement au premier ordre.

Sous les hypothèses du Théorème 2.1,  $E_r$  est l'unique bord du spectre de  $H_0$  appartenant à  $(E - W)(\mathbb{R})$ .

Soient  $E_n$  et  $E_p$  les deux bords distincts d'une même bande. On définit :

$$d_p(E_n) = \lim_{\substack{E \rightarrow E_n, \\ E \in [E_n, E_p]}} \frac{k(E) - k(E_n)}{\sqrt{E - E_n}}. \quad (9.22)$$

**Corollaire 2.** *Soit  $H_{\varphi,\varepsilon}$  vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1. Les valeurs propres  $E^{(l)}(\varphi, \varepsilon)$  de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  admettent alors le développement asymptotique :*

$$E^{(l)}(\varphi, \varepsilon) = \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon(l\pi + \pi/2)) + o(\varepsilon^\infty).$$

En particulier,  $E^{(l)}(\varphi, \varepsilon)$  admet le développement limité au premier ordre en  $\varepsilon$  :

$$E^{(l)}(\varphi, \varepsilon) = E_r + W(0) + \sqrt{\frac{W''(0)}{2}} \frac{1}{d_i(E_r)} (2l + 1)\varepsilon + o(\varepsilon),$$

où  $d_i(E_r)$  est défini par (9.22).

**Démonstration** La première égalité est évidente. Il suffit donc de donner un développement de  $\tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon(l\pi + \pi/2))$ . Pour cela, on calcule un développement au premier ordre de :

$$\Phi(E_r + W(0) + \alpha) = \int_{\varphi_r^-(E_r + W(0) + \alpha)}^{\varphi_r^+(E_r + W(0) + \alpha)} k(E_r + W(0) + \alpha - W(u)) du.$$

Le potentiel  $W$  est une bijection de  $[0, \varphi_r^+]$  sur  $[W(0), E_r]$ . En faisant le changement de variable  $\alpha v = W(0) + \alpha - W(u)$ , on obtient que :

$$\int_0^{\varphi_r^+(E_r + W(0) + \alpha)} k(E_r + W(0) + \alpha - W(u)) du = \alpha \int_0^1 \frac{k(E_r + \alpha v)}{W' \circ W^{-1}(W(0) + \alpha(1 - v))} dv.$$

$$\text{Or } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{k(E_r + \alpha v)}{W' \circ W^{-1}(W(0) + \alpha(1 - v))} = \frac{d_i(E_r)}{\sqrt{2W''(0)}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1 - v}}.$$

En raisonnant de la même manière sur  $[\varphi_r^-, 0]$ , on trouve finalement que :

$$\Phi(E_r + W(0) + \alpha) = d_i(E_r) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{W''(0)}} \alpha [1 + o(1)].$$

Par conséquent, en inversant le développement limité de  $\tilde{\Phi}$  au voisinage de  $E_r + W(0)$ , on démontre le résultat annoncé.

◇

On note que, comme pour le résultat précédent, un développement asymptotique plus poussé de la phase modifiée nous donnerait un résultat plus précis sur les valeurs propres.



## Etude de la croix double

Dans ce chapitre, on va utiliser le calcul effectué dans le cas de la croix simple ainsi que les techniques de la méthode WKB complexe pour décrire les valeurs propres de l'opérateur  $H_{\varphi,\varepsilon}$  associé à une croix double. Ce calcul est assez comparable à celui effectué dans [15] pour mesurer les effets d'interaction entre deux extrema successifs du cosinus. On suppose donc désormais que les hypothèses  $(H_V)$ ,  $(H_{W,r})$ ,  $(H_{W,g})$  et  $(H'_j)$  sont vérifiées.

Un des exemples les plus connus de tels opérateurs est un opérateur périodique perturbé par un double puits de potentiel. A ma connaissance, peu de résultats ont été établis en ce qui concerne ces potentiels. En revanche, le cas  $V = 0$  perturbé par un double puits a été largement étudié ([34, 20, 26, 6, 18, 19, 7]). D'après ces études, les valeurs propres du double puits se déduisent à une erreur exponentiellement petite près des valeurs propres associées à chaque simple puits. Cette erreur est alors donnée par l'effet tunnel horizontal d'interaction entre les deux puits. Dans le cas du double puits symétrique, de nombreuses études [34, 20, 26] ont précisé l'écart entre les deux plus petites valeurs propres de l'opérateur et ont montré que ce splitting est relié à la distance d'Agmon entre les deux puits. Ces formules basées sur des formules de trace ont été établies en dimension quelconque.

Pour le cas périodique perturbé par la croix double, on démontre un résultat semblable dans le Théorème 2.2, l'interaction est mesurée par l'action horizontale  $\int \kappa$  entre les deux croix.

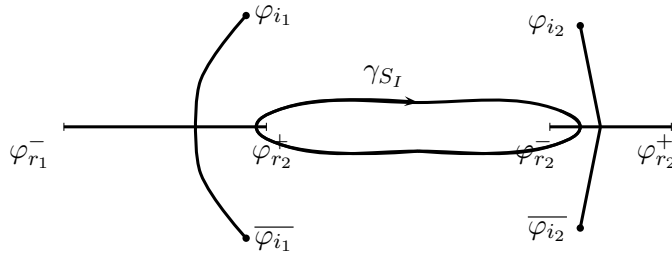
### 10.1 Compléments sur les coefficients de phases, et d'actions

Les notations dans le cas de la croix double ont été introduites au paragraphe 2.4.1 du chapitre 2. En particulier, on a noté  $\varphi_{r_1}^+$ ,  $\varphi_{r_1}^-$  et  $\varphi_{i_1}$ ,  $\overline{\varphi_{i_1}}$  les points de branchement de la première croix et  $\varphi_{r_2}^+$ ,  $\varphi_{r_2}^-$  et  $\varphi_{i_2}$ ,  $\overline{\varphi_{i_2}}$  les points de branchement de la deuxième.

#### 10.1.1 Coefficients associés à chaque croix simple

On a présenté ces coefficients au paragraphe 2.4.4, chapitre 2. Il y a d'une part les coefficients  $\Phi_j$ ,  $\Phi_{d,j}$  et  $S_j$  associés séparément à chaque croix et d'autre part le coefficient d'interaction entre les deux croix. Les coefficients associés à chaque croix ont été bien étudiés au paragraphe du 9.1 du chapitre 9. On définit également, pour  $j \in \{1, 2\}$ , le coefficient réel  $\rho_j$  associé à chaque croix :

$$2i\rho_j = - \int_{[\varphi_{r_j}^+, 0] \cup \sigma_{j,+}} (\omega_+^j(u, E) - \omega_-^j(u, E)) du + \int_{\sigma_{j,-} \cup [0, \varphi_{r_j}^-]} (\omega_+^j(u, E) - \omega_-^j(u, E)) du, \quad (10.1)$$


 FIG. 10.1 – Chemin  $\gamma_{S_I}$ 

on rappelle que ce coefficient est indépendant de  $E$  et on renvoie au paragraphe 9.1.1 du chapitre 9 pour les propriétés de ces coefficients.

### 10.1.2 Coefficient $S_I$

On s'intéresse désormais à l'action  $S_I$  définie en (2.19). Dans le cas  $V = 0$ , ce coefficient correspond au double de la distance d'Agmon entre les deux puits. A la différence des actions verticales  $S_1$  et  $S_2$ , l'action  $S_I$  dépend uniquement de  $W_{/\mathbb{R}}$ . On va prouver le Lemme 2.4.

Le Lemme 5.3 a fixé sur  $B^{1,2}$  une détermination de  $\kappa$ , que l'on note  $\kappa_0$ . On effectue la preuve dans le cas où cette détermination vérifie les conditions (5.19).

On rappelle que  $S_I$  est défini en (2.19). Soit  $E \in J$ .

- On commence par prouver l'analyticité de  $S_I$ . Pour cela, on introduit le chemin  $\gamma_{S_I}$  défini par :

$$\gamma_{S_I} = [\varphi_{r_1}^+ + i0, \varphi_{r_2}^- + i0] \cup [\varphi_{r_2}^- - i0, \varphi_{r_1}^+ - i0].$$

Le chemin  $\gamma_{S_I}$  est représenté en figure 10.1. On réécrit  $S_I$  comme une intégrale de contour :

$$S_I(E) = \frac{1}{i} \oint_{\gamma_{S_I}} \kappa, \quad (10.2)$$

où  $\kappa(\varphi) = \kappa_0(\varphi)$  pour  $\varphi \in B^{1,2} \cap \mathbb{C}_+$  et  $\text{Im } \varphi > 0$  et  $\kappa$  est prolongée continuellement le long de  $\gamma_{S_I}$ . Le raisonnement est similaire à la preuve du Lemme 9.1 et on ne donne pas les détails. La représentation (10.2) implique l'analyticité de  $S_I$  dans un voisinage de  $J$ .

- Soit  $E \in J$ . Sur l'intervalle  $[\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-]$ ,  $\kappa_0$  est imaginaire pur,  $\text{Im } \kappa_0 \geq 0$  et donc  $S_I(E)$  est réel et positif.

### 10.1.3 Compléments

On prouve enfin ce résultat technique qui nous servira par la suite.

**Lemme 10.1.** Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $]\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-[$ . Soit  $\gamma$  un chemin de  $B^{1,2}$  reliant  $a$  et  $b$  et ne contenant pas de pôles de  $\omega_{\pm}^0$ . Alors, on a la relation suivante :

$$\overline{e^{\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0)}} = (-1)^n e^{\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0)},$$

où  $n$  est le nombre de zéros réels de  $k'$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

**Démonstration** On calcule :

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}} (\omega_+^0 + \omega_-^0)^* = \frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}} (\omega_+^0 + \omega_-^0).$$

On utilise les propriétés de  $(\omega_+^0$  et  $\omega_-^0)$  rappelées au paragraphe 4.4 du chapitre 4 pour calculer  $\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}} (\omega_+^0 + \omega_-^0)$ .

Les pôles de la fonction  $\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0)$  admettent un résidu  $\pm \frac{1}{2}$  en les zéros de  $k'$ . Les autres résidus sont 1. La formule des résidus donne donc :

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}} (\omega_+^0 + \omega_-^0) \equiv \tilde{n} \pi [2\pi],$$

où  $\tilde{n}$  est le nombre de zéros de  $k'$  à l'intérieur de  $\gamma \cup \bar{\gamma}$ . Les zéros non réels de  $k'$  à l'intérieur de  $\gamma \cup \bar{\gamma}$  sont deux à deux conjugués, donc :

$$\overline{e^{\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0)}} = (-1)^n e^{\frac{1}{2} \int_{\gamma} (\omega_+^0 + \omega_-^0)}.$$

◇

## 10.2 Démonstration du Théorème 2.2

Dans ce paragraphe, on démontre l'équation de caractérisation des valeurs propres donnée par le Théorème 2.2. On démontre le Théorème dans le cas décrit par (5.19).

Il suffit de raisonner localement, c'est à dire au voisinage d'une énergie  $E_0$  fixée. Par un raisonnement similaire à la preuve de la Proposition 2.1, on recolle alors les asymptotiques.

Soit  $E_0$  dans  $J$ . D'après le chapitre 8, on sait qu'on peut construire autour de chaque croix  $C_j$  un domaine  $K_j^\infty$  et une base du type  $\{f_j, f_j^*\}$  (voir Proposition 5.4).

### 10.2.1 Remarques préliminaires

A partir de maintenant, pour deux fonctions à valeurs complexes ou matricielles  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto P(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto Q(\varphi, E, \varepsilon)$  définies sur  $S_Y \times \mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$ , on note

$$P(\varphi, E, \varepsilon) \sim Q(\varphi, E, \varepsilon)$$

s'il existe une fonction analytique réelle  $(E, \varepsilon) \mapsto \alpha(E, \varepsilon)$  qui ne s'annule pas sur  $\mathcal{V} \times ]0, \varepsilon_0[$  et telle que  $P(\varphi, E, \varepsilon) = \alpha(E, \varepsilon) Q(\varphi, E, \varepsilon)$ .

Soit  $h_-^g$  la solution récessive à gauche de  $C_1$ , normalisée en  $m_1 - 0 + i0$ , à l'asymptotique standard suivante à gauche de  $C_1$  :

$$h_-^g = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_1}^{\varphi_{r_1}^-} \kappa_1} e^{\int_{m_1}^{\varphi_{r_1}^-} \omega_-^1} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_{r_1}^-}^{\varphi} \kappa_g} e^{\int_{\varphi_{r_1}^-}^{\varphi} \omega_-^g} (\Psi_-^0 + o(1)).$$

De même, soit  $h_+^d$ , la solution récessive à droite de  $C_2$ , normalisée en  $m_2 + 0 + i0$  avec l'asymptotique standard suivante :

$$h_+^d = e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_2}^{\varphi_{r_2}^+} \kappa_2} e^{\int_{m_2}^{\varphi_{r_2}^+} \omega_2^-} e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_{r_2}^+}^{\varphi} \kappa_d} e^{\int_{\varphi_{r_2}^+}^{\varphi} \omega_+^d} (\Psi_+^0 + o(1)).$$

Ces deux fonctions sont construites par la Proposition 3.2. D'après la Proposition 3.2 et le Lemme 9.3, il existe une fonction analytique  $\alpha_g(E)$ , un réel  $\sigma_1 \in \{-1, 1\}$  et une fonction  $b_-^1(\varphi, E, \varepsilon)$  tels que :

$$(\alpha_g h_-^g) = -i\sigma_1 (b_-^1)^* f_1 + b_-^1 (f_1)^*,$$

où  $b_-^1$  est le coefficient  $b_g^-$  associé à la croix  $C_1$ .

De même, il existe une fonction analytique  $\alpha_d(E)$ , un réel  $\sigma_2 \in \{-1, 1\}$  et une fonction  $b_+^2(\varphi, E, \varepsilon)$  tel que :

$$(\alpha_d h_+^d) = -i\sigma_2 (b_+^2)^* f_2 + b_+^2 (f_2)^*,$$

où  $b_+^2$  est le coefficient  $b_d^+$  associé à la croix  $C_2$ .

### 10.2.2 Etude des coefficients $\sigma_1$ et $\sigma_2$

– Si les extrema sont de même type, alors la même bande intervient pour les deux croix. Par suite,  $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ .

– Si les extrema sont de signe différent, les coefficients  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  vérifient  $\sigma_1 \sigma_2 = -1$ .

On note pour terminer que le nombre  $n$  de zéros de  $k'$  dans l'intervalle  $]\varphi_{r_1}^+, \varphi_{r_2}^-[$  vérifie :

$$(-1)^n = \sigma_1 \sigma_2.$$

### 10.2.3 Caractérisation des valeurs propres

Pour calculer  $d(\varphi, E, \varepsilon)$ , il suffit donc de calculer la matrice de transfert  $P_{1,2}$  entre les bases  $(f_1, (f_1)^*)$  et  $(f_2, (f_2)^*)$  :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_1^* \end{pmatrix} = P_{1,2} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2^* \end{pmatrix}.$$

Précisément, on a la caractérisation suivante des valeurs propres :

**Lemme 10.2.**  *$E$  est une valeur propre de  $H_{\varphi, \varepsilon}$*

$$\Leftrightarrow w(\alpha_g h_-^g, \alpha_d h_+^d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i\sigma_1 (b_-^1)^* & b_-^1 \end{pmatrix} P_{1,2} \begin{pmatrix} b_+^2 \\ i\sigma_2 (b_+^2)^* \end{pmatrix} = 0$$

**Démonstration** Il suffit de calculer

$$\alpha_g h_-^g = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 (b_-^1)^* & b_-^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 (b_-^1)^* & b_-^1 \end{pmatrix} P_{1,2} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2^* \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$w(\alpha_g h_-^g, \alpha_d h_+^d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \left( \begin{pmatrix} -i\sigma_1 (b_-^1)^* & b_-^1 \end{pmatrix} P_{1,2}, \begin{pmatrix} -i\sigma_2 (b_+^2)^* & b_+^2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

et donc :

$$w(\alpha_g h_-^g, \alpha_d h_+^d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i\sigma_1 (b_-^1)^* & b_-^1 \end{pmatrix} P_{1,2} \begin{pmatrix} b_+^2 \\ i\sigma_2 (b_+^2)^* \end{pmatrix} = 0$$

◇

### 10.2.4 Calcul de la matrice de transfert entre $(f_1, (f_1)^*)$ et $(f_2, (f_2)^*)$

Le but de ce paragraphe est de calculer une asymptotique de la matrice  $P_{1,2}$ . On démontre le résultat suivant :

**Proposition 10.1.** *Il existe des fonctions  $b_+^1(\varphi, E, \varepsilon)$ ,  $b_-^2(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $\mu(\varphi, E, \varepsilon)$  telles que :*

1. *La matrice  $P_{1,2}$  s'écrit :*

$$P_{1,2} \sim \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \begin{pmatrix} -i\sigma_2(b_+^1)(b_-^2)^*(1+\mu) & (b_+^1)b_-^2(1-\mu) \\ -\sigma_1\sigma_2(b_+^1)^*(b_-^2)^*(1-\mu) & i\sigma_1(b_+^1)^*b_-^2(1+\mu) \end{pmatrix}.$$

2. *La fonction  $b_+^1$ , respectivement  $b_-^2$ , est une fonction associée à la croix  $C_1$ , respectivement à la croix  $C_2$ , possédant le développement asymptotique de Fourier donné en (9.9), (9.10), (9.11) respectivement en (9.12), (9.13), (9.14), (9.15), (9.16).*

3. *La fonction  $(\varphi, E) \mapsto \mu(\varphi, E, \varepsilon)$  est analytique sur  $S_Y \times \mathcal{U}_0$ , est  $\varepsilon$ -périodique en  $\varphi$  et admet le développement asymptotique suivant pour  $\varepsilon$  petit :*

$$\mu = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4} e^{\int_{\varphi_+^1}^{\varphi_+^2} (\omega_+^0 - \omega_-^0)} e^{-S_I(E)/\varepsilon} [1 + o(1)].$$

De plus,  $\mu$  vérifie la relation :

$$\mu^*(\varphi, E, \varepsilon) = \mu(\varphi, E, \varepsilon).$$

**Démonstration** La matrice  $P_{1,2}$  s'écrit :

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{w(f_1, (f_2)^*)}{w(f_2, (f_2)^*)} & \frac{w(f_2, f_1)}{w(f_2, (f_2)^*)} \\ \frac{w((f_1)^*, (f_2)^*)}{w(f_2, (f_2)^*)} & \frac{w(f_2, (f_1)^*)}{w(f_2, (f_2)^*)} \end{pmatrix}.$$

On commence par calculer les coefficients de  $P_{1,2}$ . Pour cela, on utilise les techniques présentées au chapitre 8. Ces techniques nécessitent de connaître le comportement de certains prolongements des déterminations  $q_1$  et  $q_2$  associées à chaque croix. On distingue donc les cas  $\sigma_1 \sigma_2 = 1$  et  $\sigma_1 \sigma_2 = -1$ . On commence par le premier cas.

**Lemme 10.3.** *On suppose que  $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ . Il existe trois fonctions  $B_+^1$ ,  $B_-^2$  et  $\tilde{B}_-^2$  telles que la matrice  $P_{1,2}$  admet les asymptotiques suivantes :*

$$P_{1,2} = \frac{q_1(m_2 + i0)}{q_2(m_2 + i0)} e^{\int_{\varphi_+^1}^{\varphi_+^2} \omega_-^0} e^{\frac{1}{2} \int_{m_1 - i0}^{m_2 + i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)} e^{\frac{S_I}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} i\sigma_2(B_+^1)(B_-^2)^* & (B_+^1)\tilde{B}_-^2 \\ \sigma_1\sigma_2(B_+^1)^*(\tilde{B}_-^2)^* & -i\sigma_1(B_+^1)^*(B_-^2) \end{pmatrix},$$

où les coefficients  $B_+^1$ ,  $B_-^2$  et  $\tilde{B}_-^2$  admettent un développement asymptotique en série de Fourier donné par les formules (9.9), (9.10), (9.11) respectivement (9.12), (9.13), (9.14), (9.15), (9.16).

De plus, on a la relation :

$$\det P_{1,2} = \left( \frac{q_1(m_2 + i0)}{q_2(m_2 + i0)} \right)^2 e^{\int_{m_1 - i0}^{m_2 + i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)}.$$

Ici, on a noté abusivement  $[m_1 - i0, m_2 + i0]$  un chemin de  $B^{1,2}$  reliant  $m_1 - i0$  et  $m_2 + i0$  ne contenant pas de pôles de  $(\omega_+^0 + \omega_-^0)$ . La notation  $q_1(m_2 + i0)$  représente la valeur prise par le prolongement de  $q_1$  le long de ce chemin.



**Démonstration**

- Fixons un chemin  $\gamma$  dans  $B^{1,2}$  reliant  $m_1 - i0$  et  $m_2 + i0$  ne contenant pas de pôles de  $(\omega_+^0 + \omega_-^0)$ . On commence par étudier la valeur de  $\left(\frac{q_1(m_2+i0)}{q_2(m_2+i0)}\right)^2$  lorsque la détermination  $q_1$  est prolongée le long de  $\gamma$ . On va montrer que :

$$\left(\frac{q_1(m_2+i0)}{q_2(m_2+i0)}\right)^2 = 1.$$

Puisque  $\sigma_1\sigma_2 = 1$ , les extrema sont de même type. L'image de  $\gamma$  dans le plan des énergies est un chemin qui relie les points  $E - W(m_1 - i0)$  et  $E - W(m_2 + i0)$  avec :

$$\text{Im}(E - W(m_1 - i0))\text{Im}(E - W(m_2 + i0)) > 0.$$

Le chemin  $(E - W)(\gamma)$  rencontre donc le gap  $G$  un nombre pair de fois.

Si  $(E - W)(\gamma)$  ne rencontre pas le gap, le prolongement continu de  $q_1$  vérifie  $q_1^2(m_2 + i0) = k_1'(E - W(m_2 + i0))$ . Puisque les déterminations  $k_1'$  et  $k_2'$  coïncident,  $q_1^2(m_2 + i0) = q_2^2(m_2 + i0)$ .

Pour traiter le cas général, il suffit de faire la remarque suivante. Soit  $\Gamma$  une courbe fermée qui intersecte l'axe réel en deux points  $\mathcal{E}_1 \in G$  et  $\mathcal{E}_2 \in G$  tels que  $k'(\mathcal{E}_1) \neq 0$  et  $k'(\mathcal{E}_2) \neq 0$ . Soit  $Q$  une détermination de  $\sqrt{k'}$  continue en  $\mathcal{E}_1$ . On note  $Q_+$  le prolongement de  $Q$  le long de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}_+$  et  $Q_-$  le prolongement de  $Q$  le long de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}_-$ . Alors  $Q_+^2 = Q_-^2$  sur  $\Gamma$ . En effet, les prolongements continus  $k'_+$  et  $k'_-$  coïncident.

- On va maintenant calculer les coefficients :

$$a = \frac{w(f_1, (f_2)^*)}{w(f_2, (f_2)^*)} ; \quad b = \frac{w(f_2, f_1)}{w(f_2, (f_2)^*)}.$$

Ce calcul est similaire aux calculs effectués au chapitre 8. On ne donne donc que les grandes lignes.

Etudions le cas du coefficient  $b$ .

En utilisant le Lemme de Stokes 5.10, on sait que l'asymptotique de  $f_2$  est obtenue par prolongement à travers  $b_2$  en contournant les lignes de Stokes  $c_2$  et  $\bar{b}_2$ .  $f_2$  admet l'asymptotique standard :

$$f_2 = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{m_2}^{\varphi_{r_2}^-} \kappa_2} e^{\int_{m_2}^{\varphi_{r_2}^+} \omega_+^2} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_{r_2}^-}^{\varphi} \kappa_0} e^{\int_{\varphi_{r_2}^-}^{\varphi} \omega_-^0} (\Psi_-^0 + o(1)).$$

D'après le Lemme de prolongement 5.9, la fonction  $f_2$  garde cette asymptotique dans tout le domaine  $B^{1,2}$ . Le calcul de  $b$  est donc similaire au calcul du coefficient  $a_+^g$  au paragraphe 8.4 du chapitre 8.

On obtient que :

$$b = \frac{q_1(m_2 + i0)}{q_2(m_2 + i0)} e^{\frac{1}{2} \int_{m_1 - i0}^{m_2 + i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)} e^{\frac{1}{2} \int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_-^0 - \omega_+^0)} B_+^1 B_-^2,$$

où le coefficient  $B_+^1$ , respectivement  $B_-^2$  est décrit par les formules (9.9), (9.10), (9.11) respectivement (9.12), (9.13), (9.14), (9.15), (9.16).

On calcule de même le coefficient  $a$ . Pour cela, on applique le Lemme de Stokes à la fonction  $f_2^*$  pour contourner  $\bar{c}_2$  et  $b_2$ . On obtient que :

$$b = -i\sigma_2 \frac{q_1(m_2 + i0)}{q_2(m_2 + i0)} e^{\frac{1}{2} \int_{m_1 - i0}^{m_2 + i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)} e^{\frac{1}{2} \int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_-^0 - \omega_+^0)} \tilde{B}_+^1 (\tilde{B}_-^2)^*.$$

Quitte à modifier légèrement le coefficient  $\tilde{B}_-^2$ , on peut supposer que  $\tilde{B}_+^1 = B_+^1$ .

- Il reste à calculer  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ . Pour cela, on utilise le Lemme 10.1 et l'étude du paragraphe 10.2.2 pour conclure.
- Pour calculer le déterminant de  $P_{1,2}$ , on écrit :

$$\det P_{1,2} = \frac{w(f_1, f_1^*)}{w(f_2, f_2^*)}.$$

On applique alors les relations (5.12) et (4.19) pour obtenir le résultat.

Ceci achève la preuve du Lemme 10.3.

◇

On montre désormais

**Lemme 10.4.** *Il existe trois fonctions  $b_+^1$ ,  $b_-^2$  et  $\mu$  telles que*

- *Les fonctions  $B_+^1$ ,  $B_-^2$  et  $\tilde{B}_-^2$  définies au Lemme 10.3 s'écrivent :*

$$B_+^1 B_-^2 = b_+^1 b_-^2 (1 - \mu),$$

$$B_+^1 (\tilde{B}_-^2)^* = b_+^1 (b_-^2)^* (1 + \mu).$$

- *Les fonctions  $b_+^1$  et  $b_-^2$  vérifient les propriétés du Lemme 9.3.*
- *La fonction  $(\varphi, E) \mapsto \mu(\varphi, E, \varepsilon)$  est analytique. De plus  $\mu$  vérifie :*

$$\mu^*(\varphi, E, \varepsilon) = \mu(\varphi, E, \varepsilon).$$

**Démonstration** On utilise un raisonnement similaire à celui du paragraphe 9.2.1. Il existe deux fonctions  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto r(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E, \varepsilon) \mapsto \theta(\varphi, E, \varepsilon)$  avec les propriétés suivantes :

- $(\varphi, E) \mapsto r(\varphi, E, \varepsilon)$  et  $(\varphi, E) \mapsto \theta(\varphi, E, \varepsilon)$  sont analytiques sur  $S_Y \times \mathcal{U}_0$ .
- Les fonctions  $r$  et  $\theta$  vérifient :

$$r^*(\varphi, E, \varepsilon) = r(\varphi, E, \varepsilon) \quad ; \quad \theta^*(\varphi, E, \varepsilon) = \theta(\varphi, E, \varepsilon).$$

- La fonction  $B_-^2$  s'écrit :

$$B_-^2 = r(\varphi, E, \varepsilon) e^{i\theta(\varphi, E, \varepsilon)}.$$

- Les formules (9.9), (9.10), (9.11) impliquent que les fonctions  $r$  et  $\theta$  vérifient, pour  $E \in \mathcal{U}_0 \cap J \times \mathbb{R}$  :

$$|r - 1| < \frac{1}{2} \quad ; \quad \left| \theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varphi_{r_2}^-} \kappa_2 - \frac{1}{2i} \int_0^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_+^i - \omega_-^i) + \pi \frac{\sigma_2 - 1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

On définit de même les fonctions  $\tilde{r}$  et  $\tilde{\theta}$  associées à  $\tilde{B}_-^2$ . On pose alors :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{r - \tilde{r}}{r + \tilde{r}}, \\ b_+^1 &= B_+^1 e^{i(\theta - \tilde{\theta})/2}, \\ b_-^2 &= \frac{r + \tilde{r}}{2} e^{i(\theta + \tilde{\theta})/2}.\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du Lemme 10.4.

◇

Il reste maintenant à préciser l'asymptotique de la fonction  $\mu$ . Pour cela, on utilise le déterminant de la matrice  $P_{1,2}$ . En utilisant l'expression des coefficients de  $P_{1,2}$  donnée par le Lemme 10.3, on obtient que :

$$4\mu = e^{-S/2\varepsilon} e^{\int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_-^0 - \omega_+^0)} [1 + o(1)].$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 10.1 dans le cas  $\sigma_1\sigma_2 = 1$ . On énonce un résultat similaire au Lemme 10.3 pour  $\sigma_1\sigma_2 = -1$ .

**Lemme 10.5.** *On suppose que  $\sigma_1\sigma_2 = -1$ . Il existe trois fonctions  $B_+^1$ ,  $B_-^2$  et  $\tilde{B}_-^2$  telles que la matrice  $P_{1,2}$  admet les asymptotiques suivantes :*

$$P_{1,2} = \frac{q_1(m_2 - i0)}{q_2(m_2 - i0)} e^{\frac{1}{2} \int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_-^0 - \omega_+^0)} e^{\frac{1}{2} \int_{m_1 - i0}^{m_2 - i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)} e^{\frac{S_I}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} i\sigma_2(B_+^1)(B_-^2)^* & (B_+^1)\tilde{B}_-^2 \\ \sigma_1\sigma_2(B_+^1)^*(\tilde{B}_-^2)^* & -i\sigma_1(B_+^1)^*(B_-^2) \end{pmatrix},$$

où les coefficients  $B_-^2$  et  $\tilde{B}_-^2$ , respectivement  $B_+^1$  admettent un développement asymptotique en série de Fourier donné par les formules (9.9), (9.10), (9.11) respectivement (9.12), (9.13), (9.14), (9.15), (9.16).

De plus, on a la relation :

$$\det P_{1,2} = \left( \frac{q_1(m_2 - i0)}{q_2(m_2 - i0)} \right)^2 e^{\int_{m_1 - i0}^{m_2 - i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)}.$$

Ici, on a noté abusivement  $[m_1 - i0, m_2 - i0]$  un chemin de  $B^{1,2}$  reliant  $m_1 - i0$  et  $m_2 - i0$  ne contenant pas de pôles de  $(\omega_+^0 + \omega_-^0)$ . La notation  $q_1(m_2 - i0)$  représente la valeur prise par le prolongement de  $q_1$  le long de ce chemin.

**Démonstration** La preuve est similaire. Aussi, on ne donne pas les détails. Les seules différences sont les suivantes :

L'origine et l'arrivée du chemin  $(E - W)([m_1 - i0, m_2 - i0])$  sont dans le même demi-plan des énergies et on a donc :

$$\left( \frac{q_1(m_2 - i0)}{q_2(m_2 - i0)} \right)^2 = 1.$$

Le déterminant vérifie :

$$\det P_{1,2} = \frac{w(f_1, f_1^*)}{w(f_2^*, f_2)} = \frac{w_0(\psi_+^0, \psi_-^0)(E - W(m_1 - i0))}{w_0(\psi_+^0, \psi_-^0)(E - W(m_2 - i0))} = e^{\int_{m_1 - i0}^{m_2 - i0} (\omega_+^0 + \omega_-^0)}.$$

◇

Ceci achève la preuve de la Proposition 10.1.

◇

**Equation aux valeurs propres**

La matrice  $P_{1,2}$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1\sigma_2}P_{1,2} &\sim \begin{pmatrix} b_+^1 & \\ i\sigma_1(b_+^1)^* & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma_2(b_-^2)^* & b_-^2 \\ & \end{pmatrix} \\ &+ \mu \begin{pmatrix} b_+^1 & \\ -i\sigma_1(b_+^1)^* & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma_2(b_-^2)^* & -b_-^2 \\ & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 10.2, on en déduit que l'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -i\sigma_1(b_-^1)^* & b_-^1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_+^1 & \\ i\sigma_1(b_+^1)^* & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma_2(b_-^2)^* & b_-^2 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_+^2 & \\ i\sigma_2(b_+^2)^* & \end{pmatrix} + \mu(b_+^1(b_-^1)^* + b_-^1(b_+^1)^*)(b_+^2(b_-^2)^* + b_-^2(b_+^2)^*) = 0.$$

On réécrit cette équation sous la forme :

$$F_1(E, \varphi, \varepsilon)F_2(E, \varphi, \varepsilon) + e^{-\frac{S_I(E)}{\varepsilon}}g(E, \varphi, \varepsilon) = 0,$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont les fonctions associées aux croix  $C_1$  et  $C_2$  et ont l'asymptotique suivante :

$$F_i(E, \varphi, \varepsilon) = \cos \frac{\widetilde{\Phi}_i(E, \varepsilon)}{\varepsilon} + t_i(E) \left( \cos \frac{\widetilde{\Phi}_{d,i}(E, \varepsilon) + 2\pi\varphi}{\varepsilon} + o(1) \right)$$

On renvoie au chapitre 9 pour les détails sur cette fonction  $F_i$ .

La fonction  $g$  s'écrit :

$$g(E, \varphi, \varepsilon) = -\sigma_1\sigma_2 \frac{1}{16} e^{\int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_+^0 - \omega_-^0)} (b_-^1(b_+^1)^* + b_+^1(b_-^1)^*)(b_-^2(b_+^2)^* + b_+^2(b_-^2)^*)[1 + o(1)].$$

Le coefficient  $\int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_+^0 - \omega_-^0)$  est un réel indépendant de  $E$ . Par un raisonnement similaire à la démonstration du Lemme 9.2, on calcule

$$\int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_+^0 - \omega_-^0) = \int_{E_{r_1} + i0}^{E_{r_2} + i0} (g_+^0(e) - g_-^0(e)) de \in \mathbb{R}.$$

Par suite :

$$e^{\int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_+^0 - \omega_-^0)} \in \mathbb{R}^+.$$

On pose :

$$\gamma = \frac{1}{4} e^{\int_{\varphi_{r_1}^+}^{\varphi_{r_2}^-} (\omega_+^0 - \omega_-^0)} > 0. \quad (10.3)$$

Le réel  $\sigma_1\sigma_2$  vérifie :

$$\sigma_1\sigma_2 = -(-1)^e.$$

L'équation aux valeurs propres s'écrit donc :

$$F_1(E, \varphi, \varepsilon)F_2(E, \varphi, \varepsilon) + (-1)^e \gamma e^{-S_I(E)/\varepsilon} \left( \sin\left(\frac{\widetilde{\Phi}_1(E, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + R_1(E, \varphi, \varepsilon) \right) \left( \sin\left(\frac{\widetilde{\Phi}_2(E, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + R_2(E, \varphi, \varepsilon) \right) [1 + o(1)] = 0 \quad (10.4)$$

Ceci achève la preuve du Théorème 2.2. L'équation  $F_j(E, \varphi, \varepsilon) = 0$  est l'équation caractéristique de la croix  $C_j$  (voir Proposition 2.1). Tout se passe donc à une erreur exponentiellement petite près comme si on voyait séparément les deux croix. Le terme d'erreur est donné par l'effet tunnel entre les deux croix.

Comme pour l'étude de la croix simple, on va donner une localisation des valeurs propres de l'opérateur  $H_{\varphi, \varepsilon}$  en étudiant cette équation implicite.

### 10.3 Localisation des valeurs propres : démonstration des Théorèmes 2.3 et 2.4

On note  $E_1$  un zéro de  $F_1$ . on rappelle que la fonction  $d$  vérifie (2.22).

#### 10.3.1 Premier cas $d(E_1, Z(F_2)) > d(\varepsilon)$

Approximation au premier ordre :

Lorsque  $|E - E_1(\varphi, \varepsilon)| < \frac{d(\varepsilon)}{2}$ ,  $|E - E_2(\varphi, \varepsilon)| \geq \frac{d(\varepsilon)}{2}$ . De plus, on a la majoration suivante :

$$|F(E, \varphi, \varepsilon) - (F_1 F_2)(E, \varphi, \varepsilon)| < C \widehat{t}_I(\varepsilon).$$

Or il existe  $m > 0$  tel que :

$$|(F_1 F_2)(E, \varphi, \varepsilon)| > m \frac{|E - E_1(\varphi, \varepsilon)|}{\varepsilon} \frac{|E - E_2(\varphi, \varepsilon)|}{\varepsilon}. \quad (10.5)$$

Par suite, il existe une constante  $c$  telle que, si  $r \geq c \frac{\varepsilon^2 \widehat{t}_I}{d(\varepsilon)}$  :

$$E \in \{E ; |E - E_1(\varphi, \varepsilon)| = r\}, \Rightarrow |F(E, \varphi, \varepsilon) - (F_1 F_2)(E, \varphi, \varepsilon)| < |(F_1 F_2)(E, \varphi, \varepsilon)|.$$

Le théorème de Rouché implique que  $F$  admet exactement un zéro  $\widehat{E}_1(\varphi, \varepsilon)$  dans un voisinage de  $E_1(\varphi, \varepsilon)$ .

Approximation au deuxième ordre :

On pose alors

$$\widehat{E}_1(\varphi, \varepsilon) = E_1(\varphi, \varepsilon) + \lambda_1(\varphi, \varepsilon),$$

$\lambda_1$  vérifie :

$$\lambda_1(\varphi, \varepsilon) = \gamma \varepsilon t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) (-1)^{e+1} \frac{1}{\Phi_1'(E_1(\varphi, \varepsilon)) \tan \frac{\Phi_2(E_1(\varphi, \varepsilon))}{\varepsilon}} + o(\varepsilon t_I(E_1(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)).$$

#### 10.3.2 Deuxième cas $d(E_1, Z(F_2)) < d(\varepsilon)$

Approximation au premier ordre :

Dans ce cas, étant donné que les zéros de  $F_2$  sont séparés par une distance de taille  $\varepsilon$ , il y a un seul zéro  $E_2(\varphi, \varepsilon)$  tel que

$$|E_1(\varphi, \varepsilon) - E_2(\varphi, \varepsilon)| < \varepsilon^2.$$

D'après (10.5), il existe une constante  $c$  telle que, si  $E \in \{E ; |E - \frac{E_1(\varphi, \varepsilon) + E_2(\varphi, \varepsilon)}{2}| = r\}$ , avec  $r \geq \sqrt{\frac{|E_1(\varphi, \varepsilon) - E_2(\varphi, \varepsilon)|^2}{4} + c \widehat{t}_I(\varepsilon)}$ , alors

$$|F(E, \varphi, \varepsilon) - (F_1 F_2)(E, \varphi, \varepsilon)| < |(F_1 F_2)(E, \varphi, \varepsilon)|.$$

En appliquant à nouveau le théorème de Rouché, on en déduit qu'il y a exactement deux zéros de  $F$  dans le cercle de centre  $\frac{E_1(\varphi, \varepsilon) + E_2(\varphi, \varepsilon)}{2}$  et de rayon  $\sqrt{\frac{|E_1(\varphi, \varepsilon) - E_2(\varphi, \varepsilon)|^2}{4} + c \widehat{t}_I(\varepsilon)}$ . Approximation au deuxième ordre :

L'équation (10.4) s'écrit :

$$\tilde{F}(E, \varphi, \varepsilon)$$

$= F_1'(E_1(\varphi, \varepsilon))F_2'(E_2(\varphi, \varepsilon))(E - E_1)(E - E_2) - (-1)^e \gamma t(E) \eta_1(E, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E, \varphi, \varepsilon) [1 + g(E, \varphi, \varepsilon)] = 0$ ,  
 où  $g(E, \varphi, \varepsilon) = o(1)$ .  
 On pose :

$$R(E, \varphi, \varepsilon) = F_1'(E_1(\varphi, \varepsilon))F_2'(E_2(\varphi, \varepsilon))(E - E_1)(E - E_2) - (-1)^e \gamma t(E_1) \eta_1(E_1, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E_1, \varphi, \varepsilon) g(E_1, \varphi, \varepsilon).$$

Puisque  $\frac{\eta_1(E_1, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E_1, \varphi, \varepsilon)}{F_1'(E_1) F_2'(E_2)} = \frac{\varepsilon^2}{\Phi_1'(E_1) \Phi_2'(E_2)} [1 + o(1)]$ , cette équation admet deux racines que l'on va noter  $E_{\pm}^*$  :

$$E_{\pm}^* = \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} - \gamma(-1)^e t_I(E_1) \frac{\eta_1(E_1) \eta_2(E_2) g(E_1)}{F_1'(E_1) F_2'(E_2)}}$$

Estimons la différence

$$|\tilde{F}(E, \varphi, \varepsilon) - R(E, \varphi, \varepsilon)| = |\gamma(-1)^e t_I(E) \eta_1(E, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E, \varphi, \varepsilon) [1 + g(E, \varphi, \varepsilon)] - \gamma(-1)^e t_I(E_1) \eta_1(E_1, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E_1, \varphi, \varepsilon) [1 + g(E_1, \varphi, \varepsilon)]|.$$

$$|\gamma(-1)^e t_I(E) \eta_1(E, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E, \varphi, \varepsilon) [1 + g(E, \varphi, \varepsilon)] - \gamma(-1)^e t_I(E_1) \eta_1(E_1, \varphi, \varepsilon) \eta_2(E_1, \varphi, \varepsilon) [1 + g(E_1, \varphi, \varepsilon)]| \leq C < t_I > \sup g.$$

On en déduit donc que :

$$|\tilde{F}(E, \varphi, \varepsilon) - R(E, \varphi, \varepsilon)| \leq C < t_I > \sup g.$$

De plus, on a la minoration :

$$|R(E, \varphi, \varepsilon)| > D \frac{|E_+^* - E|}{\varepsilon} \frac{|E_-^* - E|}{\varepsilon}.$$

Il existe  $c > 0$  tel que :

$$|E_+^* - E| < c \frac{< t_I > \sup g}{|E_-^* - E_+^*|} \Rightarrow |\tilde{F}(E, \varphi, \varepsilon) - R(E, \varphi, \varepsilon)| < |R(E, \varphi, \varepsilon)|.$$

On applique le Théorème de Rouché sur le disque de centre  $E_+^*$  et de rayon  $c \frac{< t_I > \sup g}{|E_-^* - E_+^*|}$ . On obtient que  $F$  admet un unique zéro réel  $\widehat{E}_+$  dans ce disque soit :

$$\widehat{E}_+ = \frac{E_1 + E_2}{2} + \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} - \gamma(-1)^e t_I(E_1) \frac{\eta_1(E_1) \eta_2(E_2) g(E_1)}{F_1'(E_1) F_2'(E_2)}} + o\left(\frac{\varepsilon < t_I > \sup g}{|E_-^* - E_+^*|}\right).$$

En remarquant que  $\left(o\left(\frac{\varepsilon t_I(E_1)}{|E_-^* - E_+^*|}\right)\right)^2 = o(\varepsilon^2 t_I(E_1))$ , on obtient que :

$$\widehat{E}_+ = \frac{E_1 + E_2}{2} + \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} - \gamma(-1)^e \varepsilon^2 t_I(E_1) \frac{[1 + o(1)]}{\Phi_1'(E_1) \Phi_2'(E_2)}}.$$

En faisant le même raisonnement avec  $E_-^*$ , on obtient qu'il existe un zéro  $\widehat{E}_-$  tel que :

$$\widehat{E}_- = \frac{E_1 + E_2}{2} - \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} - \gamma(-1)^e t_I(E_1) \varepsilon^2 \frac{\eta_1(E_1) \eta_2(E_2)}{\Phi_1'(E_1) \Phi_2'(E_2)}}.$$

Ceci termine la preuve des Théorèmes 2.3 et 2.4.



# Démonstrations des résultats de la méthode WKB sur des domaines non compacts

On complète ici le chapitre 7 en donnant les preuves de la Proposition 7.1 et du Théorème 7.1 de prolongement. Ces deux résultats reposent sur une généralisation des raisonnements développés dans [10].

## 11.1 Démonstration de la Proposition 7.1

Dans ce paragraphe, on démontre la Proposition 7.1. La preuve suit les principes du Théorème WKB de [10], section 4.

### 11.1.1 Solutions de l'équation (1.3) proches des solutions de Bloch de l'équation (5.6)

Soit  $B \subset S_Y$  tel que  $\bar{B}$  ne contient aucun point de branchement du moment complexe. Soit  $\varphi_0 \in B$  et  $\psi_{\pm}(x, \varphi, E)$  les solutions canoniques de Bloch de (5.6) normalisées en  $\varphi_0$ . On rappelle que ces solutions s'écrivent :

$$\psi_{\pm}(x, \varphi, E) = \psi_{\pm}^0(x, E - W(\varphi)), \quad \varphi \in B \quad (11.1)$$

où  $\psi_{\pm}^0(x, \mathcal{E})$  sont les fonctions définies en (4.15).

Puisque  $\bar{B}$  ne contient pas de points de branchement de  $\kappa$ , la fonction  $\varphi \mapsto w_0(E - W(\varphi))$  est analytique sur  $B$  et n'a pas de zéros dans  $\bar{B}$ .

Fixons  $X > 0$ . Pour  $\varepsilon$  petit, on va construire deux solutions  $\psi_{\pm}^1$  de l'équation (5.6) proches de  $\psi_{\pm}^0$ , uniformément en  $\varphi \in \bar{B}$  et  $x \in [-X, X]$ .



On rappelle que  $\mathcal{B}([-X, X] \times B)$  désigne l'ensemble des fonctions  $(x, \varphi) \mapsto f(x, \varphi)$  bornées sur  $[-X, X] \times B$ . On fixe  $X_1 < X$  et on définit l'opérateur intégral  $R_E$  :

$$R_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}([-X, X] \times B) & \rightarrow & \mathcal{B}([-X, X] \times B) \\ f & \mapsto & R_E(f) \end{array} /$$

$$R_E(f)(x, \varphi) = \psi_+(x, \varphi, E) \int_{-X_1}^x \psi_-(t, \varphi, E) f(t, \varphi) dt - \psi_-(x, \varphi, E) \int_{X_1}^x \psi_+(t, \varphi, E) f(t, \varphi) dt \quad (11.2)$$

$R_E$  est la résolvante de l'opérateur  $H_0 - E + W(\varphi)$ , c'est-à-dire :

$$(H_0 - E + W(\varphi))R_E(f) = -w_0(E - W(\varphi)).f \quad (11.3)$$

Pour  $\varphi \in B$  et  $E \in \mathcal{V}$ ,  $W(\varphi)$  est borné. Par suite, il existe une constante  $C$  telle que  $R_E$  vérifie :

$$\sup_{E \in \mathcal{V}} \|R_E(f)\| \leq C \|f\|$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{E \in \mathcal{V}} \|R_E\| \leq C$$

Comme dans [10], on cherche des solutions de l'équation (1.3) sous la forme :

$$\psi_{\pm}^1(x, \varphi, E, \varepsilon) = \psi_{\pm}(x, \varphi, E) + \varepsilon R_E g_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon) \quad (11.4)$$

On a alors :

$$-\Delta \psi_{\pm} = -w_0 g_{\pm} + \Delta \varepsilon R_E g_{\pm} \quad (11.5)$$

avec  $\Delta(x, \varphi, \varepsilon) = \frac{W(\varepsilon x + \varphi) - W(\varphi)}{\varepsilon}$ .

Le lemme suivant permet de contrôler  $\Delta$  :

**Lemme 11.1.**  $\Delta$  vérifie les estimées suivantes :

$$|\Delta(x, \varphi, \varepsilon)| \leq \frac{C}{1 + |\varphi|^s} \quad \forall x \in [-X, X], \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1[, \quad \forall \varphi \in B \quad (11.6)$$

$$|\Delta(x, \varphi, \varepsilon) - W'(\varphi)x| \leq \frac{C\varepsilon}{1 + |\varphi|^s} \quad \forall x \in [-X, X], \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1[, \quad \forall \varphi \in B \quad (11.7)$$

**Démonstration** On écrit simplement  $W(\varepsilon x + \varphi) - W(\varphi) = \varepsilon \int_0^x W'(\varepsilon u + \varphi) du$ . On applique à la fonction  $W$  le Lemme 7.2 pour obtenir :

$$|W'(\varepsilon u + \varphi)| \leq \frac{C}{1 + |\varepsilon u + \varphi|^s}.$$

Puisque la fonction  $(Y, \varphi) \mapsto \frac{1 + |\varphi|^s}{1 + |Y + \varphi|^s}$  est bornée sur  $[-X, X] \times B$ , on en déduit (11.6).

◇

Puisque l'application  $(\varphi, E) \mapsto E - W(\varphi)$  est bornée sur  $\overline{B} \times \mathcal{V}$ , et puisque  $w_0$  n'a pas de zéros dans  $\overline{B} \times \mathcal{V}$ , il existe  $C > 0$  telle que :

$$\left| \frac{\Delta}{w_0} \right| \leq \frac{C}{1 + |\varphi|^s} \quad \forall x \in [-X, X], \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1[, \quad \forall \varphi \in B.$$

Aussi, (11.4) s'écrit :

$$\left[ 1 - \varepsilon \frac{\Delta}{w_0(E - W(\varphi))} R_E \right] g_{\pm} = \frac{\Delta}{w_0(\varphi)} \psi_{\pm} \quad (11.8)$$

Soit  $\varepsilon_0$  assez petit fixé. Pour  $E \in \mathcal{V}$  et  $\varepsilon_0 \in ]0, \varepsilon_0[$ , l'opérateur  $\left[ 1 - \varepsilon \frac{\Delta}{w_0(E - W(\varphi))} R_E \right]$  est inversible sur  $\mathcal{B}([-X, X] \times B)$ . L'équation (11.8) a donc une solution unique qui satisfait de plus :

$$\|g_{\pm}\|_{\infty} \leq \frac{C}{1 + |\varphi|^s} \quad \forall E \in \mathcal{V}, \quad \forall \varphi \in B \quad (11.9)$$

On introduit désormais la notation suivante : on note  $O(x, \varphi, E, \varepsilon)$  une fonction qui vérifie

$$\sup_{x, \varphi, E, \varepsilon} |O(x, \varphi, E, \varepsilon)| < +\infty \quad (11.10)$$

On déduit immédiatement de (11.9) l'estimée uniforme en  $x$  et  $\varphi, E$  suivante :

$$g_{\pm}(x, \varphi, E, \varepsilon) = \frac{\Delta(x, \varphi, \varepsilon)}{w_0(E - W(\varphi))} \psi_{\pm}(x, \varphi, E) + \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^{2s}} O(x, \varphi, E, \varepsilon), \quad \forall \varphi \in B, \quad \forall x \in [-X, X], \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[.$$

Grâce à la formule (11.4), on reconstruit les fonctions  $\psi_{\pm}^1$  qui satisfont les propriétés suivantes :

- Pour tout  $\varphi \in B, E \in \mathcal{V}$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $\psi_{\pm}^1$  vérifie (1.3) ;
- Pour tout  $x \in [-X, X]$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $(\varphi, E) \mapsto \psi_{\pm}^1(x, \varphi, \varepsilon)$  est analytique sur  $B \times \mathcal{V}$  ;
- $\psi_{\pm}^1(x, \varphi, E, \varepsilon) = \psi_{\pm}(x, \varphi, E) + \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon)$ .

On a également besoin des asymptotiques du wronskien  $w_1(\varphi, E, \varepsilon)$  des solutions  $\psi_{\pm}^1(x, \varphi, E, \varepsilon)$  et  $\psi_{\pm}^1(x, \varphi, E, \varepsilon)$ . On pose :

$$w_1(\varphi, E, \varepsilon) = w(\psi_{+}^1(\cdot, \varphi, E, \varepsilon), \psi_{-}^1(\cdot, \varphi, E, \varepsilon)).$$

On établit :

**Lemme 11.2.** *On a, pour  $\varphi \in B, E \in \mathcal{V}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  :*

$$w_1(\varphi, E, \varepsilon) = w_0(E - W(\varphi)) + \varepsilon W'(\varphi) \int_{-X_1}^{X_1} \psi_{+}(x, \varphi, E) \psi_{-}(x, \varphi, E) x dx + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon) \quad (11.11)$$

**Démonstration** Ce calcul est similaire à celui présenté dans le Lemme 4.1 de [10]. On en donne uniquement les étapes principales :

$$w_1(\varphi, E, \varepsilon) = w(\psi_+ + \varepsilon R_{Eg_+}, \psi_- + \varepsilon R_{Eg_-}) = w_0(E - W(\varphi)) + \varepsilon [w(\psi_+, R_{Eg_-}) + w(R_{Eg_+}, \psi_-)] + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + |\varphi|^{2s}} O(\varphi, E, \varepsilon).$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} w(\psi_+, R_{Eg_-}) + w(R_{Eg_+}, \psi_-) &= -w_0(E - W(\varphi)) \int_{X_1}^x \psi_+ g_- dt + w_0(E - W(\varphi)) \int_{-X_1}^x \psi_- g_+ dt \\ &= \int_{-X_1}^{X_1} \Delta \psi_+ \psi_- dt + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + |\varphi|^{2s}} O(\varphi, E, \varepsilon) \end{aligned}$$

D'après (11.7),  $\Delta(x, \varphi, \varepsilon) = W'(\varphi)x + \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon)$ , on obtient finalement le résultat annoncé.

◇

A partir de maintenant, pour plus de lisibilité, on « omet » la dépendance des fonctions en les variables  $E$  et  $\varepsilon$ .

### 11.1.2 Condition de cohérence et asymptotiques des coefficients de $T$

Comme dans [10], les fonctions  $\psi_{\pm}^1$  vérifient l'équation (1.3), mais ne forment pas nécessairement une base cohérente. Pour construire deux solutions cohérentes à partir de ces deux fonctions, on pose :

$$\psi(x, \varphi) = A(\varphi)\psi_+^1(x, \varphi) + B(\varphi)\psi_-^1(x, \varphi), \quad \forall \varphi \in B \quad (11.12)$$

$\psi$  vérifie la condition de cohérence (1.5) si et seulement si pour  $(\varphi, \varphi + \varepsilon) \in B$ ,  $A$  et  $B$  vérifient :

$$\begin{pmatrix} A(\varphi + \varepsilon) \\ B(\varphi + \varepsilon) \end{pmatrix} = T(\varphi) \begin{pmatrix} A(\varphi) \\ B(\varphi) \end{pmatrix} \quad (11.13)$$

où  $T$  est la matrice  $2 \times 2$  dont les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{w(\psi_+^1(\cdot, \varphi), \psi_-^1(\cdot - 1, \varphi + \varepsilon))}{w_1(\varphi + \varepsilon)}, & T_{12} &= \frac{w(\psi_-^1(\cdot, \varphi), \psi_-^1(\cdot - 1, \varphi + \varepsilon))}{w_1(\varphi + \varepsilon)} \\ T_{21} &= \frac{w(\psi_+^1(\cdot - 1, \varphi + \varepsilon), \psi_+^1(\cdot, \varphi))}{w_1(\varphi + \varepsilon)}, & T_{22} &= \frac{w(\psi_+^1(\cdot - 1, \varphi + \varepsilon), \psi_-^1(\cdot, \varphi))}{w_1(\varphi + \varepsilon)} \end{aligned}$$

On renvoie à [10] pour les détails.

On calcule les asymptotiques des coefficients de  $T$  :

**Proposition 11.1.** *Pour  $\varphi \in B$ ,  $E \in \mathcal{V}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , on a :*

$$\begin{aligned} T_{11} &= \exp \left( i\kappa(\varphi + \varepsilon/2) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{d\varphi} \ln k_E(\varphi) + \varepsilon \omega_+^0 \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon) \\ T_{22} &= \exp \left( -i\kappa(\varphi + \varepsilon/2) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{d\varphi} \ln k_E(\varphi) + \varepsilon \omega_-^0 \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon) \\ T_{12} &= \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon), & T_{21} &= \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon) \end{aligned}$$

où  $\omega_{\pm}^0$  sont définies par les formules (5.31) et  $k_E(\varphi) = \left( \frac{d}{dE} \right) k(E - W(\varphi))$ .

**Démonstration** Ce résultat est très proche de la Proposition 4.1 de [10] ; la preuve est basée sur les mêmes idées. On étudie  $T_{12}$  ; l'estimation de  $T_{21}$  est similaire. Puisque les fonctions  $\psi_{\pm}^1$  sont analytiques en  $\varphi \in B$ , on a pour  $x \in [-X, X]$ ,  $\varphi \in B$ ,  $E \in \mathcal{V}$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  :

$$\psi_{-}^1(x-1, \varphi + \varepsilon) = \psi_{-}^1(x-1, \varphi) + \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon)$$

et on obtient  $T_{12} = \frac{w(\psi_{-}^1(\cdot, \varphi), \psi_{-}^1(\cdot - 1, \varphi))}{w_1(\varphi)} + \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon) = \varepsilon \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon)$ .  
Pour étudier les asymptotiques de  $T_{11}$ , on utilise (11.4) ; on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \psi_{-}^1(x-1, \varphi + \varepsilon) \\ &= \psi_{-}(x-1, \varphi + \varepsilon) + \varepsilon \text{REG}_{-}(x-1, \varphi + \varepsilon) \\ &= e^{i\kappa(\varphi + \varepsilon)} \psi_{-}(x, \varphi + \varepsilon) + \varepsilon \text{REG}_{-}(x-1, \varphi + \varepsilon) \\ &= e^{i\kappa(\varphi)} \psi_{-}(x, \varphi) + \varepsilon [i\kappa'(\varphi) e^{i\kappa(\varphi)} \psi_{-}(x, \varphi) + e^{i\kappa(\varphi)} \frac{\partial \psi_{-}}{\partial \varphi}(x, \varphi) + \text{REG}_{-}(x-1, \varphi)] + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon) \end{aligned}$$

En utilisant (11.4), pour  $\psi_{+}^1$ , et le résultat du calcul ci-dessus, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} w(\psi_{+}^1(\cdot, \varphi), \psi_{-}^1(\cdot - 1, \varphi + \varepsilon)) &= e^{i\kappa(\varphi)} w_0 + \varepsilon [i\kappa'(\varphi) e^{i\kappa(\varphi)} w_0 + e^{i\kappa(\varphi)} w(\psi_{+}, \frac{\partial \psi_{-}}{\partial \varphi}) \\ &+ w(\text{REG}_{+}, e^{i\kappa(\varphi)} \psi_{-}) + w(\psi_{+}, \text{REG}_{-}(\cdot - 1))] + \frac{\varepsilon^2}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon) \end{aligned}$$

Les arguments de [10] et l'analyticité de  $W$  entraînent :

$$w(\text{REG}_{+}, e^{i\kappa(\varphi)} \psi_{-}) + w(\psi_{+}, \text{REG}_{-}(\cdot - 1)) = e^{i\kappa(\varphi)} W' \left( \int_{-X_1}^{X_1} \psi_{+} \psi_{-} x dx + \int_{u-1}^u \psi_{+} \psi_{-} x dx \right) + \frac{\varepsilon}{1 + |\varphi|^s} O(x, \varphi, E, \varepsilon).$$

On en déduit alors :

$$w(\psi_{+}^1(\cdot, \varphi), \psi_{-}^1(\cdot - 1, \varphi + \varepsilon)) = e^{i\kappa(\varphi)} \left[ w_1 + \varepsilon \left( i\kappa' w_0/2 + w_0' + w_0 \left( \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \ln k_E + \omega_{+}^0 \right) \right) \right] + \frac{\varepsilon^2}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon),$$

ce qui nous donne enfin :

$$T_{11} = \exp \left[ i\kappa(\varphi + \varepsilon/2) + \varepsilon/2 \frac{d}{d\varphi} \ln k_E + \varepsilon \omega_{+}^0 \right] + \frac{\varepsilon^2}{1 + |\varphi|^s} O(\varphi, E, \varepsilon).$$

◇

### 11.1.3 Solution de l'équation aux différences finies (11.13)

Pour résoudre cette équation, on va utiliser la technique de [10].

Le lemme suivant (Lemme 4.2 de [10]) nous permet de transformer l'équation aux différences en une équation intégrale. On rappelle donc ce résultat :

**Lemme 11.3.** [10] On fixe  $\varepsilon > 0$ . Soit  $f(z)$  une fonction de  $z \in \mathbb{C}$  analytique dans la bande  $Im \ z \in [Y_1, Y_2]$ ,  $(Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Soient  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $Im \ z_1 = Y_1$  et  $Im \ z_2 = Y_2$ , soit  $\gamma_z$  une courbe verticale régulière reliant  $z_1$  et  $z_2$  et passant par  $z$ . La fonction  $g(z) = Lf(z)$  où  $Lf(z) = \frac{1}{2i\varepsilon} \int_{\gamma_z} \cot\left[\frac{\pi(\xi - z - 0)}{\varepsilon}\right] f(\xi) d\xi$  est une solution de l'équation  $g(z + \varepsilon) - g(z) = f(z)$ , analytique dans la bande  $Y_1 < Im \ z < Y_2$ .

On explique désormais la construction de  $\psi_+^\tau$ . On définit :

$$A(\varphi) = e^{i\theta_A(\varphi)}A_1(\varphi), \quad B(\varphi) = e^{i\theta_B(\varphi)}B_1(\varphi), \quad \theta_0 = \frac{i}{\varepsilon} \int_\varphi^{\varphi_0} \kappa d\varphi,$$

$$\theta_A(\varphi) = \frac{i}{\varepsilon} \int_\varphi^{\varphi_0} \kappa d\varphi + \frac{1}{2} \ln k_E + \int_\varphi^{\varphi_0} w_+^0 d\varphi, \quad \theta_B(\varphi) = -\frac{i}{\varepsilon} \int_\varphi^{\varphi_0} \kappa d\varphi + \frac{1}{2} \ln k_E + \int_\varphi^{\varphi_0} w_-^0 d\varphi.$$

Pour  $\varphi \in K + \tau$ , au vu des asymptotiques de  $T$ , l'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_1(\varphi + \varepsilon) \\ B_1(\varphi + \varepsilon) \end{pmatrix} = (I + \widehat{T}_1) \begin{pmatrix} A_1(\varphi) \\ B_1(\varphi) \end{pmatrix}$$

où

$$\widehat{T}_1 = \frac{1}{1 + |\tau|^s} \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) & e^{-2\theta_0} O(\varepsilon) \\ e^{2\theta_0} O(\varepsilon) & O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}$$

On fixe deux points  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $K$  tels que  $\text{Im } \xi_1 < \text{Im } \xi_2$  et une courbe verticale  $\gamma \subset K$  les reliant. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , on effectue la transformation  $B_1 = \varepsilon^\alpha e^{2\theta_0} B_2$ . En utilisant les mêmes principes que dans [10], l'équation aux différences devient :

$$\begin{pmatrix} A_1(\varphi) \\ B_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + |\tau|^s} \begin{pmatrix} L_+^{\gamma+\tau} O(\varepsilon^2) & L_+^{\gamma+\tau} O(\varepsilon^{1+\alpha}) \\ K_+^{\gamma+\tau} O(\varepsilon^{1-\alpha}) & K_+^{\gamma+\tau} O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(\varphi) \\ B_2(\varphi) \end{pmatrix}$$

où  $L_+^\beta$  et  $K_+^\beta$  sont des opérateurs intégraux définis sur une courbe verticale  $\beta$  par :

$$L_+^\beta f(\varphi) = \frac{1}{2i\varepsilon} \int_\beta \left( \cot \frac{\pi(\varphi' - \varphi - 0)}{\varepsilon} - i \right) f(\varphi') d\varphi' \quad (11.14)$$

$$K_+^\beta f(\varphi) = e^{2\theta_0(\varphi)} L_+^\beta \left( e^{2\theta_0(\cdot)} f(\cdot) \right) (\varphi) \quad (11.15)$$

On renvoie à [10] pour les détails.

La prochaine étape consiste donc à estimer les normes de ces opérateurs intégraux sur des espaces bien choisis.

#### 11.1.4 Estimations des normes des opérateurs intégraux $L_+$ et $K_+$

On adapte ici certains calculs de [10] à la  $\delta$ -chaîne. En particulier, on estime les normes de  $L_+^{\gamma+\tau}$  et  $K_+^{\gamma+\tau}$  sur la courbe  $\gamma + \tau$ , indépendamment de  $\tau$ . Pour  $\gamma$ , une courbe suffisamment régulière, on considère les courbes  $\{\gamma + \tau\}_{\tau \in \mathcal{T}}$ . Dans toute la suite, la lettre  $C$  désigne une constante positive indépendante de  $\varepsilon$  et  $\tau \in \mathcal{T}$ .

On rappelle tout d'abord la définition et les propriétés de certains espaces fonctionnels introduits dans [10].

**Espaces fonctionnels  $C_{a,b}(\beta)$** 

On considère une courbe strictement verticale  $\beta$ . On note  $\beta'$ , la courbe  $\beta$  privée de ses extrémités  $\xi_1, \xi_2$ . Pour  $0 < b < a < 1$ , et pour une fonction  $f$  définie sur  $\beta$ , on pose :

$$\|f\|_{C_{a,b}(\beta)} = \sup_{\beta} |\varphi - \xi_1|^a |\varphi - \xi_2|^a |f(\varphi)| + \sup_{(\varphi, \varphi') \in \beta'} \frac{|f_a(\varphi) - f_a(\varphi')|}{|\varphi - \varphi'|^b} \quad (11.16)$$

On rappelle que  $\|\cdot\|_{C(\beta)}$  (resp.  $\|\cdot\|_{C^1(\beta)}$ ) désigne la norme sup sur les fonctions continues sur  $\beta$  (resp. la norme  $C^1$  standard sur  $\beta$ ). Soit  $\tau \in \mathcal{T}$  et  $\gamma$  une courbe strictement verticale dans  $K$ . On a les résultats suivants :

- $C_{a,b}(\gamma + \tau)$  muni de la norme définie en (11.16) est un espace de Banach.
  - $\forall f \in C^1(\gamma + \tau), \quad \|f\|_{C_{a,b}(\gamma + \tau)} \leq \Lambda \|f\|_{C^1(\gamma + \tau)}$
- et  $\|f\|_{C_{a,b}(\gamma + \tau)} \leq \Lambda [\|f\|_{C(\gamma + \tau)} + \|f\|_{C(\gamma + \tau)}^{1-b} \|f'\|_{C(\gamma + \tau)}^b]$ , où  $\Lambda$  est une constante indépendante de  $f$  et  $\tau$ .

Si  $F(\gamma)$  est n'importe quel espace fonctionnel normé sur  $\gamma$ , on définit :

$$\begin{aligned} T_\tau : F(\gamma + \tau) &\rightarrow F(\gamma) \\ f &\mapsto T_\tau f \quad \text{tel que } (T_\tau f)(z) = f(z + \tau) \end{aligned} \quad (11.17)$$

$T_\tau$  est une isométrie bijective.

**11.1.5 Estimations des normes de  $L_+^{\gamma + \tau}, K_+^{\gamma + \tau}$** 

On va désormais estimer les normes de  $L_+^{\gamma + \tau}, K_+^{\gamma + \tau}$  comme des opérateurs bornés agissant sur  $C_{a,b}(\gamma + \tau)$ , indépendamment de  $\tau$ . Précisément, on prouvera le résultat suivant :

**Lemme 11.4.** *Estimation de la norme de  $L_+^{\gamma + \tau}$  et  $K_+^{\gamma + \tau}$ .*

1) Soit  $\gamma$  une courbe verticale assez régulière. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\tau \in \mathcal{T}$ , la norme de  $L_+^{\gamma + \tau}$  dans  $C_{a,b}(\gamma + \tau)$  vérifie l'estimation :

$$\| \|L_+^{\gamma + \tau} \| \| \leq C \varepsilon^{-1-a}.$$

2) Soit  $\gamma$  une courbe verticale assez régulière, telle que  $\{\gamma + \tau\}$  est une courbe  $\delta$ -strictement canonique, pour tout  $\tau \in \mathcal{T}$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\tau \in \mathcal{T}$ , la norme de  $K_+^{\gamma + \tau}$  dans  $C_{a,b}(\gamma + \tau)$  vérifie l'estimation :

$$\| \|K_+^{\gamma + \tau} \| \| \leq C \varepsilon^{-b-a}$$

**Démonstration** Dans [10], ces estimations sont établies dans le cas plus restreint où  $\gamma$  est une courbe fixée. On va donc compléter le raisonnement.

1) On prouve d'abord 1), c'est une conséquence immédiate du calcul de [10], section 4.5 et du fait que  $L_+^{\gamma + \tau} = T_{-\tau} L_+^\gamma T_\tau$ .

2) L'estimation de  $\| \|K_+^{\gamma + \tau} \| \|$  est moins évidente. Comme dans [10], on écrit

$$K_+^{\gamma + \tau} f = R^{\gamma + \tau} f + S^{\gamma + \tau} f$$

où

$$S^{\gamma + \tau} f(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma + \tau} \frac{f(\varphi')}{\varphi' - \varphi - 0} d\varphi' R^{\gamma + \tau} f(\varphi) = \frac{1}{2i\varepsilon} \int_{(\gamma + \tau)'} r_K(\varphi, \varphi') f(\varphi') d\varphi'$$

avec

$$r_K(\varphi, \varphi') = \frac{\varepsilon}{\varphi' - \varphi} \left( \frac{(\varphi' - \varphi)}{\varepsilon} e(\varphi, \varphi') - \frac{1}{\pi} \right),$$

$$e(\varphi, \varphi') = \left( \cot \left( \frac{\pi(\varphi' - \varphi)}{\varepsilon} \right) - i \right) e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi}^{\varphi'} \kappa(u) du}$$

On remarque tout d'abord que  $S^{\gamma+\tau} = T_{-\tau} S^{\gamma} T_{\tau}$ . De plus, les estimées établies dans [10] pour  $R^{\gamma+\tau}$  dépendent de trois éléments :

- le maximum de  $|\kappa|$ .
- la stricte verticalité de  $\gamma$ , qui reste inchangée par translation.
- la constante  $\delta$  de  $\delta$ -stricte canonicité, que l'on suppose uniforme.

On en déduit donc que :

$$\|R^{\gamma+\tau} f\|_{C_{a,b}(\gamma+\tau)} \leq C\varepsilon^{-a} \|f\|_{C_{a,b}(\gamma+\tau)}$$

et que

$$\|(R^{\gamma+\tau} f)'\|_{C_{a,b}(\gamma+\tau)} \leq C\varepsilon^{-1-a} \|f\|_{C_{a,b}(\gamma+\tau)}$$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

◇

### Conclusion

On pose :

$$m_{\tau} = \sup_{K+\tau} \frac{1}{1 + |\varphi|^s} \quad (11.18)$$

La solution  $\psi_{\pm}^{\tau} = A_1^{\tau} \psi_{+}^1 + B_1^{\tau} \psi_{-}^1$  vérifie l'équation :

$$\left[ 1 - m_{\tau} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 L_{+}^{\gamma+\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) & \varepsilon^{1+\alpha} L_{+}^{\gamma+\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) \\ \varepsilon^{1-\alpha} K_{+}^{\gamma+\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) & \varepsilon^2 K_{+}^{\gamma+\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_1^{\tau} \\ B_2^{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $O(\varphi, E, \varepsilon, \tau)$  admet une majoration indépendante de  $\varphi \in B$ ,  $E \in \mathcal{V}$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et  $\tau \in \mathcal{T}$ . On sait de plus que :

$$\|L_{+}^{\gamma+\tau}\| \leq C\varepsilon^{-1-a}, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}$$

$$\|K_{+}^{\gamma+\tau}\| \leq C\varepsilon^{-a-b}, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}$$

En appliquant les méthodes de [10], on en déduit alors que :

$$\begin{pmatrix} A_1^{\tau} \\ B_2^{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + m_{\tau} \varepsilon^{\beta} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) \\ m_{\tau} \varepsilon^{\beta-\alpha} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) \end{pmatrix}, \quad \beta \in ]0, 1[.$$

En utilisant les opérateurs  $L_{-}$  et  $K_{-}$  définis par

$$L_{-}^{\gamma} f(\varphi) = \frac{1}{2i\varepsilon} \int_{\gamma} \left[ \cot \frac{\pi(\varphi' - \varphi - 0)}{\varepsilon} + i \right] f(\varphi') d\varphi',$$

et

$$K_{-} f(\varphi) = e^{2\theta_0(\varphi)} L_{-}(e^{-2\theta_0(\cdot)} f(\cdot))(\varphi),$$

on construit de façon similaire une famille de fonctions  $\{\psi_{-}^{\tau}\}$ .

On a donc construit une famille de fonctions  $\{\psi_{\pm}^{\tau}\}$  sur  $K + \tau$ , telle que :

$\psi_{\pm}^{\tau} = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_{\pm}(x, \varphi) + m_{\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) r(\varepsilon)),$   
 avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = 0.$   
 On a de plus :

$$\forall \tau \in \mathcal{T} \quad w(\psi_{+}^{\tau}, \psi_{-}^{\tau}) = (k'_E w_0)(\varphi_0) (1 + m_{\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) r(\varepsilon))$$

En divisant chacune des deux fonctions  $\psi_{\pm}^{\tau}$  par  $\sqrt{1 + m_{\tau} O(\varphi, E, \varepsilon, \tau) r(\varepsilon)}$ , on obtient finalement une base cohérente.

Ceci termine la preuve de la Proposition 7.1.

## 11.2 Démonstration du Théorème de prolongement 7.1

La preuve est une adaptation assez élémentaire du lemme de prolongement de [10] présenté au paragraphe 5.9.

L'idée directrice reste la même : l'asymptotique WKB d'une solution reste vérifiée tant que son terme dominant est exponentiellement croissant. Le passage à l'infini est une conséquence de la décroissance de  $|W|$ . Pour plus de lisibilité, dans ce paragraphe, on note abusivement  $o(1)$  une fonction des variables  $(x, \varphi, E, \varepsilon, \tau_n)$  qui vérifie :

$$o(1) = O(x, \varphi, E, \varepsilon, \tau_n) r(\varepsilon)$$

avec  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = 0.$

On va prouver le point (1). On recouvre  $\{\varphi \in S_Y; \operatorname{Re} \varphi \in ] - \infty, A_g]\}$  par la  $\delta$ -chaîne  $\{K + \tau_n\}$  construite dans la Proposition 7.2. Soient  $B < C < A_g$ . Il existe deux entiers naturels  $p$  et  $m$  tels que :

$$] - \infty, B] = \bigcup_{n=m+p}^{\infty} \{K + \tau_n\}, \quad ] - \infty, C] = \bigcup_{n=m}^{\infty} \{K + \tau_n\}$$

On introduit les bases cohérentes  $f_{\pm}^m$  et  $f_{\pm}^{m+p}$  construites par la Proposition 7.1 ; elles vérifient :

$$f_{\pm}^m = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa du} \left( \psi_{\pm}(x, \varphi, E) + \frac{1}{1 + |\tau_m|^s} o(1) \right).$$

$$f_{\pm}^{m+p} = e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa du} \left( \psi_{\pm}(x, \varphi, E) + \frac{1}{1 + |\tau_{m+p}|^s} o(1) \right).$$

On commence par faire le lien entre  $f_{-}^m$  et  $f_{-}^{m+p}$ . Pour cela, on pose :

$$\begin{pmatrix} f_{+}^n \\ f_{-}^n \end{pmatrix} = \Delta_{n,m} \begin{pmatrix} f_{+}^m \\ f_{-}^m \end{pmatrix}$$

avec

$$\Delta_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{n,m} & b_{n,m} \\ c_{n,m} & d_{n,m} \end{pmatrix}$$

Soit  $(\varphi_n)$  une suite de nombres réels telle que  $\varphi_n \in (K + \tau_n) \cap (K + \tau_{n+1})$  pour tout  $n$ . On a alors les estimées suivantes pour les coefficients de  $\Delta_{n+1,n}$  :

$$a_{n+1,n} = \frac{w(f_{+}^{n+1}, f_{-}^n)}{w(f_{+}^{n+1}, f_{-}^{n+1})} = 1 + o(1) \sum_{k=n}^{n+1} \frac{1}{1 + |\tau_k|^s}$$



$$\begin{aligned}
 b_{n+1,n} &= \frac{w(f_+^n, f_+^{n+1})}{w(f_+^{n+1}, f_-^{n+1})} = e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_n}} o(1) \sum_{k=n}^{n+1} \frac{1}{1 + |\tau_k|^s} \\
 c_{n+1,n} &= \frac{w(f_+^{n+1}, f_-^n)}{w(f_+^{n+1}, f_-^{n+1})} = e^{-\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_n}} o(1) \sum_{k=n}^{n+1} \frac{1}{1 + |\tau_k|^s} \\
 d_{n+1,n} &= \frac{w(f_+^n, f_-^{n+1})}{w(f_+^{n+1}, f_-^{n+1})} = 1 + o(1) \sum_{k=n}^{n+1} \frac{1}{1 + |\tau_k|^s}
 \end{aligned}$$

En faisant le produit

$$\Delta_{m+p,m} = \prod_{k=m+p}^{m+1} \Delta_{k+1,k}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 c_{m+p,m} &= e^{-\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi_m} \kappa(u) du} o(1) \sum_{k=m}^{m+p} \frac{1}{1 + |\tau_k|^s}, \\
 d_{m+p,m} &= 1 + o(1) \sum_{k=m}^{m+p} \frac{1}{1 + |\tau_k|^s}.
 \end{aligned}$$

On obtient finalement que l'asymptotique de  $f_-^{m+p}$  reste valide sur le domaine  $K + \tau_m$  :

$$f_-^{m+p}(x, \varphi, E, \varepsilon) = e^{\frac{-i}{\varepsilon} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \kappa(u) du} (\psi_-(x, \varphi, E) + o(1))$$

On en déduit la même propriété pour  $f$ .

Les arguments pour le point (2) sont similaires. On remarque que ce cas est une simple variante du Lemme 5.9 de [10].

## Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a effectué l'analyse spectrale d'un opérateur périodique perturbé par un simple et un double puits. Cette étude laisse envisager certaines extensions. On livre ici quelques pistes qu'il nous semble intéressant d'explorer.

### 12.1 Généralisation au problème à $n$ puits

Tous les outils nécessaires au problème à  $n$  puits sont développés ici, le calcul de l'équation aux valeurs propres est relativement immédiat. L'analyse de l'équation est plus délicate cependant, c'est pourquoi cet aspect n'est pas traité dans ce travail.

### 12.2 Extensions techniques de la méthode WKB

Il reste également des améliorations aux résultats techniques de la méthode WKB.

#### 12.2.1 Développements à tous les ordres

Le Théorème WKB sur un domaine compact ou infini donne un développement asymptotique au premier ordre en  $\varepsilon$ . Pour obtenir des résultats plus précis sur la condition de quantification par exemple, il semble fructueux d'obtenir un développement à tous les ordres. Précisément, il s'agit d'obtenir des résultats similaires au développement asymptotique formel obtenu dans [5] grâce à la méthode WKB réelle.

#### 12.2.2 Conditions plus faibles sur le potentiel $W$

La rigidité imposée par l'analyticité de  $W$  est une condition très forte indispensable pour quantifier les oscillations. Pour obtenir des résultats plus satisfaisants pour un potentiel plus général  $\widetilde{W}$ , il faut construire pour ce potentiel  $\widetilde{W}$  un potentiel analytique  $W$  assez proche de  $\widetilde{W}$ . Lorsqu'on dit assez proche, cela signifie par exemple que  $\widetilde{W} - W$  est exponentiellement petit en  $\varepsilon$  autour du puits. Une des difficultés majeures est alors que  $W$  dépend du paramètre  $\varepsilon$ , cela nécessite donc une adaptation des méthodes présentées.

### 12.2.3 Application au calcul des résonances

On souhaite également appliquer cette méthode au cas où  $E$  est dans une bande de  $H_0$  et obtenir des informations sur les résonances. Il s'agit donc d'exprimer une caractérisation des résonances semblable à celle utilisée dans [17] et de la relier aux objets de la méthode WKB.

# Bibliographie

- [1] S. Alama, P.A. Deift, and R. Hempel. Eigenvalue branches of the Schrödinger operator  $H - \lambda W$  in a gap of  $\sigma(H)$ . *Communications in Mathematical physics* 121, 291-321, 1989.
- [2] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin. *Solid State Physics*. HRW International Editions, 1976.
- [3] R. Balian. *From microphysics to macrophysics, Vol II*. Springer-Verlag, 1992.
- [4] M. Sh. Birman. Discrete spectrum in the gaps of the continuous one in the large-coupling-constant limit. *Operator Theory, Adv. and Appl.* 46, 17-25, 1990.
- [5] V. Buslaev. Adiabatic perturbation of a periodic potential. *Teoret. Mat. Fiz.* 58 :223-243 (in Russian), 1984.
- [6] J.M. Combes, P. Duclos, and R. Seiler. Krein's Formula and One Dimensional Multiple-Well. *Journal of Functional Analysis* 52, 257-301, 1983.
- [7] E.B. Davies. Double Well Hamiltonians. *Proc. London. Math. Soc.*(3), 49, 193-206, 1983.
- [8] M. Dimassi. Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique. *Comm. Partial Differential Equations*, 18, 771-803, 1993.
- [9] M.V. Fedoryuk. *Asymptotic Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [10] A. Fedotov and F. Klopp. A complex WKB method for adiabatic problems. *Asymptotic Analysis* 27 : 219-264, 2001.
- [11] A. Fedotov and F. Klopp. On the absolutely continuous spectrum of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operators in the adiabatic limit. *Préprint. Université Paris-Nord*, 2001.
- [12] A. Fedotov and F. Klopp. Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger operators in the adiabatic case. *Communications in Mathematical Physics*, 227, 1-92, 2002.
- [13] A. Fedotov and F. Klopp. Geometric tools for the adiabatic complex WKB method with applications to quasi-periodic operators. *A paraître dans Asymptotic Analysis*, 2004.
- [14] A. Fedotov and F. Klopp. Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques : interactions entre les bandes spectrales d'un opérateur périodique. *Soumis.*, 2004.
- [15] A. Fedotov and F. Klopp. Weakly resonant tunneling for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators. *Prépublication.*, 2004.
- [16] N.E. Firsova. Riemann surface of quasi-momentum and scattering theory for the perturbed Hill operator. *J. Soviet. Math.*, 11, 487-497, 1979.
- [17] S. Fujiié and T. Ramond. Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol 69, n°1*, 31-82, 1998.
- [18] C. Gérard and A. Grigis. Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier. *J. of Diff. Equations*, 72, 149-177, 1988.

- [19] E.M. Harrell. Double Wells. *Comm. Math. Phys.*, 75, 239-261, 1980.
- [20] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple Wells in the Semi-Classical Limit I. *Comm. in Partial Differential Equations*, 9(4), 337-408, 1984.
- [21] D.B. Hinton and J.K. Shaw. On the absolute continuous spectrum of the perturbed Hill's equation. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 50, 175-192, 1985.
- [22] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, 1953.
- [23] P. Kuchment and B. Vainberg. On absence of embedded eigenvalues for Schrödinger operators with perturbed periodic potentials. *Comm. Partial Differential Equations*, 25, 1809-1826, 2000.
- [24] H. MacKean and P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation. *Inventiones Mathematicae*, 30 : 217-274, 1975.
- [25] V.A. Marchenko. *Sturm-Liouville Operators and Applications*. Birkhäuser, 1986.
- [26] A. Martinez. Estimations de l'effet tunnel pour le double puits I. *Journal de Maths Pures et Appliquées*, 66, 195-215, 1987.
- [27] R.G. Newton. Bloch-wave scattering by crystal defects. *J. Math. Phys.* 24, 2152-2162, 1983.
- [28] T. Ramond. Semiclassical study of quantum scattering on the line. *Comm. Math. Phys.*, 177, 221-254, 1996.
- [29] M. Reed and B. Simon. *Methods of Mathematical Physics : Analysis of Operators, IV*. 1978.
- [30] M. Reed and B. Simon. *Methods of Mathematical Physics : Scattering Theory, III*. 1979.
- [31] F.S. Rofe-Beketov. A criterion for the number of discrete levels contributed to the lacunae of the continuous spectrum by perturbations of a periodic potential. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156, 3, 515-518, 1964.
- [32] F.S. Rofe-Beketov. Spectral analysis of the Hill equation and of its perturbations. *Functional Analysis*, 9, *Harmonic Analysis on groups (Ul'yanousk. Gos. Ped. Inst., Ul'yanousk)*, 144-155, 1977.
- [33] M.A. Shubin. *Pseudo-differential Operators and Spectral Theory*. Nauka, Moscow, 1978.
- [34] B. Simon. Semi-classical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling. *Annals of Mathematics*, 120, 89-118, 1984.
- [35] A.V. Sobolev. The Weyl asymptotics for discrete spectrum of the perturbed Hill operator. *Advances in Soviet Mathematics*, 7, 159-178, 1991.
- [36] E.C. Titchmarsh. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Part II*. Oxford, 1958.
- [37] A. Voros. Spectre de l'équation de Schrödinger et méthode WKB. *Publications Mathématiques d'Orsay*, 1980.
- [38] W. Wasow. *Linear Turning Point Theory*. Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, vol. 54, 1985.
- [39] V.A. Zheludev. Eigenvalues of the perturbed Schrödinger operator with a periodic potential. *Topics in Mathematical Physics, vol. 2*, 87-101, 1968.
- [40] J.M. Ziman. *Principles of the Theory of Solids*. Cambridge at the University Press., 1972.

## Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de perturbations adiabatiques de l'équation de Schrödinger périodique en dimension 1. Précisément, on considère l'opérateur  $H_{\varphi,\varepsilon} = -\Delta + [V(x) + W(\varepsilon x + \varphi)]$  lorsque  $V$  est périodique,  $W$  tend vers 0 à l'infini,  $\varepsilon$  et  $\varphi$  sont des paramètres réels. On se place dans le cadre de la limite adiabatique où le paramètre  $\varepsilon$  est petit. On s'intéresse aux valeurs propres de  $H_{\varphi,\varepsilon}$  dans les lacunes de l'opérateur périodique  $-\Delta + V$ ; sous des hypothèses adéquates sur  $W$ , ces valeurs propres sont créées par les extrema de  $W$ . Lorsque  $W$  a un unique extremum, on montre que ces valeurs propres oscillent autour de certaines énergies quantifiées par une condition de type Bohr-Sommerfeld. L'amplitude des oscillations est exponentiellement petite et déterminée par un coefficient tunnel.

Lorsque deux extrema sont en jeu, ils créent chacun une suite de valeurs propres; celles-ci peuvent être « résonantes ». Dans ce cas, on met en évidence un phénomène d'éclatement; ce phénomène est l'analogie de celui bien connu de « splitting » dans le cas du double puits.

**Mots-clés :** équation de Schrödinger périodique, perturbations adiabatiques, méthode WKB complexe, diffusion, valeurs propres, éclatement des valeurs propres.

## Abstract

This work is devoted to the study of adiabatic perturbations of the periodic one-dimensional Schrödinger equation. We consider the operator  $H_{\varphi,\varepsilon} = -\Delta + [V(x) + W(\varepsilon x + \varphi)]$  where  $V$  is periodic,  $W$  tends to zero as  $x$  tends to infinity,  $\varepsilon$  and  $\varphi$  are real. We deal with the adiabatic limit where  $\varepsilon$  is a small parameter. We are interested in the eigenvalues of  $H_{\varphi,\varepsilon}$  in the gaps of the periodic operator  $-\Delta + V$ ; under suitable assumptions for  $W$ , these eigenvalues are created by the extrema of  $W$ . If there is only one extremum, we prove that these eigenvalues oscillate around some quantized energies, given by a Bohr-Sommerfeld quantization rule. The amplitude of the oscillations is exponentially small and determined by a tunneling coefficient.

If there are two extrema, each creates a sequence of eigenvalues; these can be resonant. In that case, we highlight a splitting phenomenon of the eigenvalues; this phenomenon is analogous to the well-known splitting for the double well.

**Keywords:** periodic Schrödinger equation, adiabatic perturbations, complex WKB method, scattering, eigenvalues, splitting.

