



HAL
open science

Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes et Problème avec source dans un écoulement cisailé

Simon Félix

► **To cite this version:**

Simon Félix. Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes et Problème avec source dans un écoulement cisailé. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2002. Français. NNT : . tel-00007890

HAL Id: tel-00007890

<https://theses.hal.science/tel-00007890>

Submitted on 3 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
LE MANS, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

Simon FÉLIX

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**PROPAGATION ACOUSTIQUE DANS LES GUIDES D'ONDES COURBES
&
PROBLÈME AVEC SOURCE DANS UN ÉCOULEMENT CISAILLÉ**

Soutenue le 26 novembre 2002

devant le jury composé de :

| | | |
|-------------------|------------------------------------|-----------------------|
| Y. AURÉGAN | Chargé de recherche, LAUM, Le Mans | co-directeur de thèse |
| A. CHAIGNE | Professeur, UME-ENSTA, Palaiseau | Président de jury |
| Y. GERVAIS | Professeur, LEA, Poitiers | rapporteur |
| V. GIBIAT | Professeur, LAMI, Toulouse | rapporteur |
| C. MORFEY | Professeur, ISVR, Southampton (RU) | examineur |
| V. PAGNEUX | Chargé de recherche, LAUM, Le Mans | co-directeur de thèse |

Vincent Pagneux m'a proposé ces sujets de recherche et a accompagné mon travail, l'enrichissant de nombreuses, riches et fort utiles discussions. Je le remercie vivement pour son engagement dans cette thèse qui, plus qu'un encadrement, fut un réel apprentissage à la recherche et à la curiosité scientifique.

Je tiens à remercier Yves Aurégan, qui a suivi cette thèse avec intérêt, bienveillance et disponibilité.

Je remercie également Yves Gervais et Vincent Gibiat, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire de thèse, ainsi que MM. Antoine Chaigne et Christopher Morfey, qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury de soutenance.

Merci à Claude Depollier, Jean Hardy, Denis Lafarge et bien d'autres, pour leurs nombreuses réponses à mes nombreuses questions.

Qu'ils se soient consacrés aux processus thermovisqueux, à Joyce, Freud, aux méthodes paramétriques ou aux particules supersymétriques, que nous ayons discuté billard (quantique !), matrice de diffusion, hétérostructures d'oxyde ou self-dualité, de nombreux doctorants et amis ont partagé avec moi, au quotidien ou occasionnellement, l'expérience de la thèse et ses petits tracasseries. Je les remercie pour ses trois ans passés ensemble.

Un grand merci à Xavier, pour son génie du croquis simple et efficace, et pour la touche artistique apportée à ce mémoire et à la présentation de soutenance.

Merci enfin à Sophie pour ses *engagements* durant ces trois ans, son soutien et ses encouragements, et à Pauline pour son soutien innocent mais si efficace.

à mon père

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Généralités sur la propagation multimodale dans un guide d'ondes | 5 |
| 1.1 Propagation dans un guide d'ondes cylindrique : théorie modale | 5 |
| 1.1.1 Formulation | 5 |
| 1.1.2 Guide de section rectangulaire | 7 |
| 1.1.3 Guide de section circulaire | 8 |
| 1.1.4 Formalisme vectoriel | 9 |
| 1.2 Propagation multimodale dans un guide de section variable | 10 |
| 1.2.1 Etude des discontinuités | 11 |
| 1.2.2 Propagation dans un guide de section continûment variable | 12 |
| 1.3 Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes | 13 |
| 2 Analyse multimodale de la propagation acoustique dans un guide d'ondes courbe | 17 |
| 2.1 Introduction | 17 |
| 2.2 Formulation de la méthode multimodale | 18 |
| 2.2.1 Reformulation des équations d'Euler | 18 |
| 2.2.2 Conditions aux limites | 21 |
| 2.2.3 Intégration numérique des équations pour Z , \mathbf{P} et \mathbf{U} | 21 |
| 2.3 Validation de la méthode multimodale | 22 |
| 2.3.1 Coude de courbure faible | 22 |
| 2.3.2 Propagation du premier mode de coude | 24 |
| 2.3.3 Conclusion | 28 |
| 2.4 Applications | 28 |
| 2.5 Guide courbe de section variable | 30 |
| 2.5.1 Formulation | 30 |
| 2.5.2 Résultats | 31 |
| 2.6 Conclusion | 32 |
| 3 Propagation acoustique dans un coude de section circulaire | 39 |
| 3.1 Introduction | 39 |
| 3.2 Formulation | 40 |
| 3.3 Calcul du champ : étude de la convergence | 43 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.4 | Propriétés de diffusion | 45 |
| 3.5 | Résonances de cavités annulaires | 47 |
| 3.5.1 | Matrice de diffusion et calcul des fréquences de résonance | 47 |
| 3.5.2 | Résonances d'une cavité torique | 48 |
| 3.5.3 | Résonances d'une cavité annulaire comportant des parties droites | 49 |
| 3.6 | Conclusion | 50 |
| 4 | Prise en compte de traitements aux parois dans la formulation multimodale | 57 |
| 4.1 | Introduction | 57 |
| 4.2 | Formulation multimodale | 58 |
| 4.2.1 | Problème à deux dimensions | 58 |
| 4.2.2 | Problème à trois dimensions : coude de section circulaire | 60 |
| 4.2.3 | Equation de Riccati, matrice de diffusion | 61 |
| 4.3 | Atténuation dans un coude traité en parois | 62 |
| 4.3.1 | Flux d'énergie dans le coude | 62 |
| 4.3.2 | Atténuation d'une onde incidente $\mathbf{P}^{(i)}$ donnée | 62 |
| 4.3.3 | Cas d'une source incohérente | 63 |
| 4.4 | Résultats | 64 |
| 4.4.1 | Onde plane incidente | 64 |
| 4.4.2 | Source incohérente | 72 |
| 4.4.3 | Etude de la propagation d'un mode par la méthode des rayons et prévision de l'atténuation | 74 |
| 4.5 | Conclusion | 75 |
| 5 | Propagation à haute fréquence dans un guide courbe | 79 |
| 5.1 | Introduction | 79 |
| 5.2 | Validation de la formulation multimodale aux hautes fréquences | 80 |
| 5.2.1 | Propriétés de la matrice de diffusion | 80 |
| 5.2.2 | Convergence de la formulation multimodale | 82 |
| 5.2.3 | Calcul direct du champ de pression dans le coude | 83 |
| 5.2.4 | Application : synthèse d'un rayon par un groupe de modes | 84 |
| 5.3 | Caractérisation géométrique des propriétés de diffusion d'un guide d'ondes | 86 |
| 5.3.1 | Matrice \mathcal{S} : approche ondulatoire | 86 |
| 5.3.2 | Matrice \mathcal{S} : approche <i>rayons</i> | 86 |
| 5.3.3 | Géométries étudiées | 87 |
| 5.3.4 | Résultats | 89 |
| 5.4 | Conclusion | 97 |
| 6 | Problème avec source dans un écoulement cisailé | 99 |
| 6.1 | Introduction | 99 |
| 6.2 | Formulation du problème | 100 |
| 6.2.1 | Fonction de Green | 101 |
| 6.2.2 | Intégration de $\hat{G} \exp(-j\alpha x)$ | 103 |

| | | |
|-------|---------------------------------------|------------|
| 6.3 | Résultats | 105 |
| 6.3.1 | Propagation sans écoulement | 107 |
| 6.3.2 | Écoulement cisailé | 107 |
| 6.4 | Perspectives | 113 |
| | Conclusions | 118 |
| | Bibliographie | 121 |

Introduction

Le problème de la propagation d'une onde acoustique dans un guide peut être considéré comme un problème unidimensionnel si les dimensions transversales du guide sont petites devant la longueur d'onde caractéristique λ et le rayon de courbure moyen, et si ce guide peut être assimilé localement - sur une distance de l'ordre de λ - à un conduit uniforme, c'est-à-dire si les variations des dimensions (section et courbure) sont faibles. L'onde acoustique est alors une onde plane, invariante sur une section transverse du guide, et solution de l'équation d'onde unidimensionnelle $(d_{s2}^2 + k^2)\phi = 0$. Des termes correctifs peuvent être ajoutés à l'équation d'onde pour décrire l'effet, supposé faible, des variations de la section (équation dite de Webster, voir [18, 13]) ou l'effet de la courbure (voir par exemple [73]).

Si la fréquence augmente et si les variations de la section ne peuvent être supposées lentes ou la courbure faible, la prise en compte de modes d'ordres supérieurs est nécessaire pour décrire la propagation dans le guide. D'une part ces modes supérieurs peuvent être propagatifs et contribuer au transport de l'énergie dans le guide, d'autre part les variations, continues ou discontinues, de la section ou de la courbure du guide induisent un couplage entre les modes. Il importe donc de prendre en compte tous les modes, propagatifs et évanescents, qui contribuent de façon significative au champ acoustique dans le guide pour caractériser avec précision la propagation.

La mise en place de formulations multimodales de la propagation en conduit permet ainsi d'étendre l'étude théorique des guides d'ondes aux cas de larges sections ou de géométries non triviales, dans une gamme de fréquence d'autant plus large qu'il est possible de prendre en compte un grand nombre de modes.

L'objet des travaux présentés dans les chapitres 1 à 5 de ce mémoire est l'analyse multimodale de la propagation d'ondes dans les guides courbes.

Des aspects généraux de la propagation multimodale dans un guide d'ondes sont présentés dans le premier chapitre, introductif. Les principales notions et grandeurs utiles à notre étude sont définies et des résultats élémentaires sont donnés dans le cas d'un guide cylindrique. La méthode de la matrice impédance, développée auparavant pour les guides de section variable et que nous avons souhaité adapter à l'étude des guides courbes, est présentée ensuite succinctement.

La formulation de la méthode de la matrice impédance est décrite en détail au chapitre 2 pour un coude bidimensionnel. Une équation de Riccati pour la matrice impédance est construite, déduite des équations matricielles régissant les variations dans le coude de la pression et de la vitesse longitudinale projetées sur les fonctions propres du problème transverse local. Les résultats obtenus sont validés dans deux cas où une solution analytique peut être déterminée, et la convergence de la méthode est évaluée. Plusieurs applications sont données et nous mettons en évidence des caractéristiques de la propagation

dans un coude et la pertinence de la méthode développée pour ce type de problème. Nous étendons enfin cette étude au cas de guides courbes de section variable, en établissant de nouvelles équations matricielles pour l'impédance et les composantes de la pression et de la vitesse.

Le chapitre 3 est consacré à la mise en place de la méthode multimodale dans des coudes de section circulaire, à trois dimensions. L'équation de Riccati et les équations pour la pression et la vitesse peuvent être exprimées sous la même forme que pour l'étude bidimensionnelle. A nouveau, la vitesse de convergence de la méthode est évaluée. Nous proposons une formulation algébrique des matrices des coefficients de réflexion et de transmission, ne nécessitant que des opérations simples d'inversion de matrices et par conséquent aucun processus itératif ni aucune intégration numérique. La caractérisation des propriétés de diffusion de coudes et de systèmes plus complexes est alors possible, et nous en donnons plusieurs applications, notamment le calcul des fréquences de résonance d'une cavité composée de parties droites et coudées.

La prise en compte de conditions limites mixtes aux parois dans la formulation multimodale a été envisagée et nous a amenés à nous intéresser à la transmission d'une onde acoustique par un coude traité aux parois par un matériau absorbant (chapitre 4). Nous donnons pour ce faire une première expression, déduite de la matrice de transmission, de l'atténuation d'une onde incidente donnée dans un guide d'ondes traité aux parois. L'introduction de la conductance, quantité usuelle pour caractériser le transport dans un guide mésoscopique, nous permet de donner une seconde expression de l'atténuation, plus générale, pour une source supposée incohérente. Des résultats obtenus avec ces deux expressions pour plusieurs géométries de guides et types de traitement, nous déduisons les principales caractéristiques de la transmission dans un coude. Une approche de type rayon, enfin, nous permet de prévoir les lieux d'absorption maximale de l'énergie d'un mode le long des parois traitées.

L'utilisation de la méthode multimodale pour la résolution de problèmes à très haute fréquence fait l'objet du cinquième chapitre. Les calculs directs de la matrice de diffusion et du champ de pression dans un coude sont validés lorsqu'un grand nombre de modes propagatifs (de 100 à 1000) est pris en compte. Une étude de la correspondance de l'approche, ondulatoire, que nous avons développée et utilisée jusqu'ici, avec l'approche géométrique correspondant à la limite asymptotique haute fréquence est ensuite réalisée. Les matrices de diffusion de guides composés de parties droites et coudées sont déterminées avec ces deux approches, et nous montrons une grande similitude entre les résultats obtenus.

Outre la géométrie du conduit qui, lorsqu'elle n'est pas uniforme, perturbe la propagation de l'onde acoustique guidée, le milieu de propagation également, s'il est inhomogène ou en mouvement, modifie les caractéristiques de l'onde. Ainsi la présence d'un écoulement dans un conduit induit-elle une interaction complexe entre l'acoustique et l'hydrodynamique. Les modes et constantes de propagation sont ainsi modifiés par les effets de convection de l'onde acoustique et de réfraction si l'écoulement est cisailé.

Le chapitre 6 présente l'étude de la propagation acoustique dans un guide droit siège d'un écoulement parallèle cisailé, en présence d'une source. La source étant supposée ponctuelle, nous déterminons la fonction de Green de l'équation de Pridmore-Brown, équation aux valeurs propres régissant les modes et les constantes de propagation associées à ces modes dans un guide droit en présence d'un écoulement cisailé. Par transformée de Fourier spatiale inverse, les pôles de la fonction de Green font apparaître les modes acoustiques perturbés par l'écoulement, dont il est alors possible de déterminer l'amplitude. La présence d'un spectre continu dû à la singularité de l'équation de Pridmore-Brown est également mise en évidence, et la contribution du continuum de modes hydrodynamiques

correspondant est étudiée et décrite.

Chapitre 1

Généralités sur la propagation multimodale dans un guide d'ondes

1.1 Propagation dans un guide d'ondes cylindrique : théorie modale

Nous présentons dans cette section une approche classique de l'étude de la propagation multimodale dans le cas simple des guides cylindriques, en vue d'introduire les principales notions et grandeurs utiles à notre étude, notamment la notion de modes en conduit. Les cas particuliers des guides de section rectangulaire et circulaire sont étudiés plus en détail à titre d'exemple, afin de rappeler quelques résultats classiques auxquels nous ferons référence à plusieurs reprises dans la suite de ce mémoire. Nous présentons enfin un formalisme vectoriel pour l'étude de la propagation multimodale, formalisme que nous adopterons dans la suite de ce chapitre et pour toute l'étude des guides d'ondes courbes, qui constitue la majeure partie de ce mémoire.

1.1.1 Formulation

Soit le domaine Ω (fig. 1.1), définissant un guide d'ondes cylindrique infini.

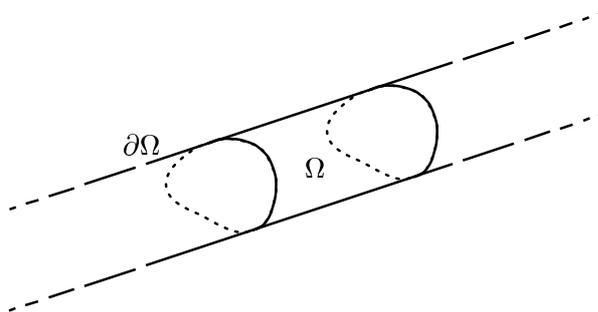


FIG. 1.1: Guide d'ondes cylindrique infini

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, adiabatique, sans viscosité ni conductivité thermique, dans un fluide au repos dans Ω , la pression acoustique p et la vitesse \mathbf{v} satisfont aux équations de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (1.1)$$

et de conservation de la masse

$$-\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

où ρ_0 est la densité du fluide et c_0 la vitesse du son. Les conditions de fluide parfait sur les parois supposées rigides et parfaitement réfléchissantes imposent une vitesse normale nulle sur $\partial\Omega$.

Dans le domaine fréquentiel, les équations satisfaites par les amplitudes complexes associées à p et \mathbf{v} (nous les noterons de la même manière, en omettant le facteur $\exp(j\omega t)$) déduites des équations (1.1) et (1.2) et de la condition aux parois peuvent être réduites au problème suivant pour p :

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.4)$$

où $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde et $\partial/\partial n$ la dérivée normale par rapport à la paroi.

Il existe 11 systèmes de coordonnées, dont les systèmes usuels (cartésien, cylindrique, sphérique, etc.), dans lesquels l'équation de Laplace, et par conséquent l'équation de Helmholtz (1.3), sont séparables [52]. Si de plus les conditions aux limites dans le système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) s'appliquent sur des surfaces $\xi_i = \text{constante}$ (on parle de *géométrie séparable*), alors le problème (1.3, 1.4) est dit *séparable* : des solutions élémentaires de (1.3, 1.4) de la forme

$$p_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_\alpha(\xi_1)g_\alpha(\xi_2)h_\alpha(\xi_3) \quad (1.5)$$

peuvent être construites, où ξ_2 et ξ_3 sont les coordonnées transversales et $\psi_\alpha(\xi_2, \xi_3) = g_\alpha(\xi_2)h_\alpha(\xi_3)$ vérifie l'équation aux valeurs propres

$$\Delta_\perp \psi_\alpha = -\mu_\alpha^2 \psi_\alpha. \quad (1.6)$$

La condition aux parois (1.4) impose des valeurs propres $-\mu_\alpha^2$ négatives et discrètes ; l'ensemble des valeurs de l'indice α est donc discret, à valeurs dans \mathbb{N} , \mathbb{N}^2 ou \mathbb{N}^3 par exemple. Le problème transverse définit donc une infinité de modes (1.5). Les fonctions f_α sont solutions de l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^2}{d\xi_1^2} + k_\alpha^2 \right) f_\alpha = 0,$$

avec

$$k_\alpha^2 = k^2 - \mu_\alpha^2, \quad (1.7)$$

et s'écrivent $f_\alpha(\xi_1) = \exp(\pm j k_\alpha \xi_1)$. Ainsi, les solutions élémentaires (1.5) s'écrivent

$$p_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{\pm j k_\alpha \xi_1} \psi_\alpha(\xi_2, \xi_3)$$

et toute solution du problème (1.3, 1.4) peut être exprimée comme une combinaison linéaire de ces fonctions :

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha} (\Lambda_{\alpha}^{+} e^{j k_{\alpha} \xi_1} + \Lambda_{\alpha}^{-} e^{-j k_{\alpha} \xi_1}) \psi_{\alpha}(\xi_2, \xi_3).$$

La relation de dispersion (1.7) fait apparaître des modes propagatifs, pour lesquels $k_{\alpha}^2 > 0$, et des modes évanescents, pour lesquels $k_{\alpha}^2 < 0$. Chaque mode est ainsi caractérisé par une fréquence de coupure μ_{α} et seul un nombre fini de modes, ceux dont la fréquence de coupure est inférieure à la fréquence k de la source, est propagatif.

1.1.2 Guide de section rectangulaire

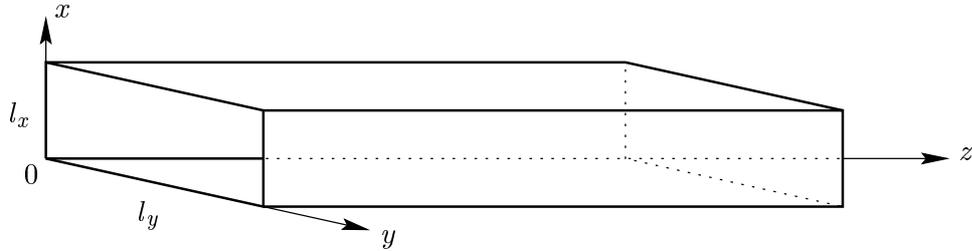


FIG. 1.2: Guide de section rectangulaire

Dans le cas particulier où la section du guide est rectangulaire, c'est le système de coordonnées cartésiennes (fig. 1.2) qui est adapté à l'expression des conditions aux limites sur les parois, en $x = 0$, l_x et $y = 0$, l_y . Les modes transversaux, solutions de (1.6), sont les fonctions orthogonales

$$\psi_{mn}(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right), \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,$$

associées aux valeurs propres

$$\mu_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2}.$$

La forme des premiers modes transversaux est donnée sur la figure 1.3.

Le champ dans le guide d'ondes de section rectangulaire peut alors être obtenu en sommant tous les modes :

$$p(x, y, z) = \sum_{m,n} (\Lambda_{mn}^{+} e^{j k_z z} + \Lambda_{mn}^{-} e^{-j k_z z}) \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right),$$

où $k_z^2 = k^2 - \mu_{mn}^2$. Des conditions de non réflexion (si le guide est infini ou semi-infini), de rayonnement ou de continuité (si le guide est de longueur finie), ou traduisant la présence de sources, permettront de déterminer les constantes Λ_{mn}^{\pm} .

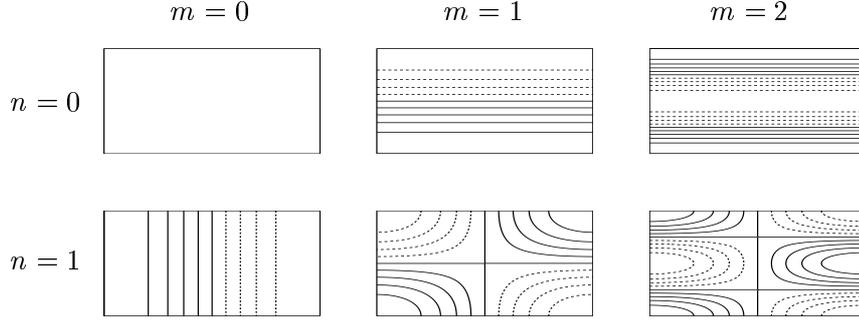


FIG. 1.3: Modes transversaux d'un guide de section rectangulaire

1.1.3 Guide de section circulaire



FIG. 1.4: Guide de section circulaire

Dans le système de coordonnées cylindriques (fig. 1.4), la condition de Neumann homogène (1.4) s'écrit $\partial_r p = 0$ sur la surface $r = r_0$ définissant la paroi, r_0 étant le rayon constant du guide. Les modes transversaux sont les solutions $\psi_\alpha(r, \theta) = R_\alpha(r)\Theta_\alpha(\theta)$ de l'équation

$$\frac{1}{R_\alpha} \frac{d^2 R_\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r R_\alpha} \frac{dR_\alpha}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta_\alpha} \frac{d^2 \Theta_\alpha}{d\theta^2} + \mu_\alpha^2 = 0$$

et s'écrivent

$$\psi_\alpha(r, \theta) = A_\alpha J_m\left(\frac{\gamma_{mn} r}{r_0}\right) \sin\left(m\theta + \frac{\sigma\pi}{2}\right), \quad (1.8)$$

où J_m est la fonction de Bessel d'ordre m et γ_{mn} le $(n+1)$ ème zéro de J'_m , dérivée de J_m . La forme des premiers modes est donnée sur la figure 1.5. La fréquence de coupure du mode ψ_α est γ_{mn}/r_0 et α est le triplet d'indices (m, n, σ) , où m est l'indice circonférentiel ($m \geq 0$), n l'indice radial ($n \geq 0$) et σ l'indice de symétrie ($\sigma = 0, 1$). La base des fonctions (1.8) est orthogonale et peut être normée en prenant

$$A_\alpha = \begin{cases} 1/\sqrt{J_0^2(\gamma_{0n})} & \text{si } m = 0 \\ 1/\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{m^2}{\gamma_{mn}^2}\right)J_0^2(\gamma_{mn})} & \text{si } m > 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

de sorte que

$$\int_S \psi_\alpha \psi_\beta dS = \pi r_0^2 \delta_{\alpha\beta}.$$

La solution générale dans le guide de section circulaire est alors donnée par

$$p(r, \theta, z) = \sum_{\alpha} (\Lambda_{mn}^+ e^{jk_z z} + \Lambda_{mn}^- e^{-jk_z z}) A_{\alpha} J_m\left(\frac{\gamma_{mn} r}{r_0}\right) \sin\left(m\theta + \frac{\sigma\pi}{2}\right),$$

où $k_z^2 = k^2 - (\gamma_{mn}/r_0)^2$.

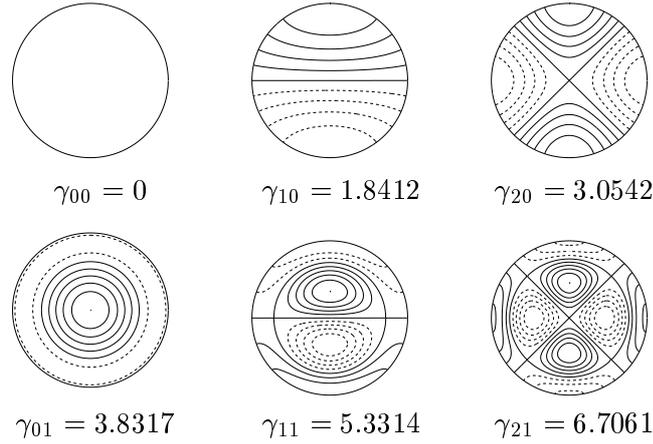


FIG. 1.5: Modes transversaux d'un guide de section circulaire et valeurs de γ_{mn} correspondantes.

1.1.4 Formalisme vectoriel

Sur une section transversale d'un guide d'ondes, les modes ψ_{α} , solutions du problème transverse, forment une base complète sur laquelle la pression et la vitesse peuvent être projetées. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement peuvent ainsi être reformulées en fonction des vecteurs \mathbf{P} et \mathbf{U} des composantes de la pression et de la vitesse longitudinale dans la base (ψ_{α}) .

Soit les développements suivants de la pression p et de la vitesse longitudinale v_1 sur la base des fonctions propres ψ_{α} :

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\xi_1) \psi_{\alpha}(\xi_2, \xi_3) = {}^t\boldsymbol{\psi} \mathbf{P}$$

$$v_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha} U_{\alpha}(\xi_1) \psi_{\alpha}(\xi_2, \xi_3) = {}^t\boldsymbol{\psi} \mathbf{U}.$$

Ces nouvelles expressions sont introduites dans les équations (1.1) et (1.2), dans lesquelles les composantes transverses de la vitesse ont été éliminées :

$$j\omega {}^t\boldsymbol{\psi} \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho_0} {}^t\boldsymbol{\psi} \frac{d\mathbf{P}}{d\xi_1}, \quad (1.10)$$

$$-\frac{j\omega}{\rho_0 c_0^2} {}^t\boldsymbol{\psi} \mathbf{P} = {}^t\boldsymbol{\psi} \frac{d\mathbf{U}}{d\xi_1} - \frac{1}{j\omega \rho_0} \Delta_{\perp} {}^t\boldsymbol{\psi} \mathbf{P}. \quad (1.11)$$

Les fonctions propres étant choisies normées (et sans dimension) - elles vérifient

$$\int_S \psi_\alpha \psi_\beta \, dS = S \delta_{\alpha\beta},$$

où S est l'aire de section du guide - la projection de (1.10) et (1.11) sur celles-ci donne les équations

$$\mathbf{P}' = -jk\rho_0 c_0 \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk\rho_0 c_0} K \mathbf{P}$$

régissant l'évolution suivant ξ_1 des variables vectorielles \mathbf{P} et \mathbf{U} . Le symbole $'$ désigne la dérivée par rapport à ξ_1 et la matrice K traduit la relation de dispersion : $K_{\alpha\beta} = (k^2 - \mu_\alpha^2)\delta_{\alpha\beta}$. Ces équations montrent un découplage total entre les différents modes. Chaque composante satisfait à une équation de propagation unidimensionnelle simple :

$$P_\alpha'' + (k^2 - \mu_\alpha^2)P_\alpha = 0.$$

Ainsi, si les vecteurs pression $\mathbf{P}(\xi_1)$ et vitesse $\mathbf{U}(\xi_1)$ sont connus en un point de coordonnée longitudinale ξ_1 dans le guide droit, leur valeur au point $\xi_1 + l$ ($l > 0$ ou $l < 0$) peut aisément être calculée :

$$\mathbf{P}(\xi_1 + l) = D_1 \mathbf{P}(\xi_1) - D_2 Z_c \mathbf{U}(\xi_1), \tag{1.12}$$

$$\mathbf{U}(\xi_1 + l) = -D_2 Z_c^{-1} \mathbf{P}(\xi_1) + D_1 \mathbf{U}(\xi_1), \tag{1.13}$$

où D_1 , D_2 et Z_c sont des matrices diagonales données par $D_{1\alpha} = \cos k_\alpha l$, $D_{2\alpha} = j \sin k_\alpha l$ et $Z_{c\alpha} = \rho_0 c_0 k / k_\alpha$ [65, 66].

1.2 Propagation multimodale dans un guide de section variable : méthode de la matrice impédance

L'étude des discontinuités constituant une part importante des travaux publiés sur la propagation guidée, c'est à cette fin qu'ont été développées nombre de méthodes modales, analytiques ou partiellement numériques. La méthode de la matrice impédance, que nous avons souhaité adapter à l'analyse de la propagation multimodale dans les guides d'ondes courbes, a ainsi été proposée pour résoudre des problèmes de discontinuités de section, de direction (raccordement anguleux) ou par changement brusque de l'impédance des parois du guide [65, 66, 35], avant d'être revue de manière plus complète, formalisée et étendue à l'étude des guides de section continûment variable [57, 4]. Nous présentons ici très succinctement cette méthode, dans le contexte dans lequel elle a été formulée, afin de donner plusieurs résultats auxquels nous pourrions faire référence au cours des chapitres suivants.

1.2.1 Etude des discontinuités

Lorsque la section d'un guide d'ondes varie par discontinuités successives, ou si le problème peut être traité comme tel (fig. 1.6), les méthodes présentées dans la section précédente peuvent être appliquées à chaque guide cylindrique élémentaire constituant le guide d'ondes. Les différentes solutions sont raccordées aux discontinuités en appliquant les lois de conservation fondamentales [1, 65, 66, 35]. Nous donnons ici la méthode proposée par Roure.

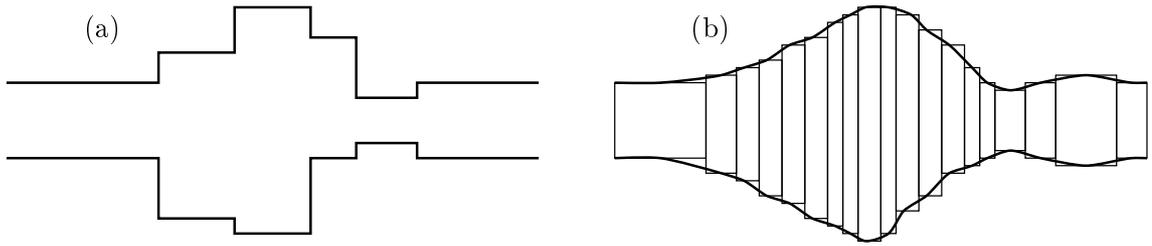


FIG. 1.6: Guides de section variable; (a) discontinuités brusques de section, (b) section continûment variable et discrétisation sous forme d'une succession de guides cylindriques.

Considérons le raccordement de deux éléments cylindriques de sections différentes (fig. 1.7). L'écriture de la continuité de la pression et de la vitesse sur la petite section S_1 et de la nullité de la vitesse longitudinale sur le complément à S_1 , $S_2 - S_1$, donne [36]

$$\mathbf{P}^{(1)} = F\mathbf{P}^{(2)}, \quad (1.14)$$

$$a {}^tF\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)}, \quad (1.15)$$

avec $a = S_1/S_2$ et

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \psi_{\alpha}^{(1)} \psi_{\beta}^{(2)} dS,$$

où les fonctions $\psi_{\alpha}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) sont les modes propres du guide de section S_i .

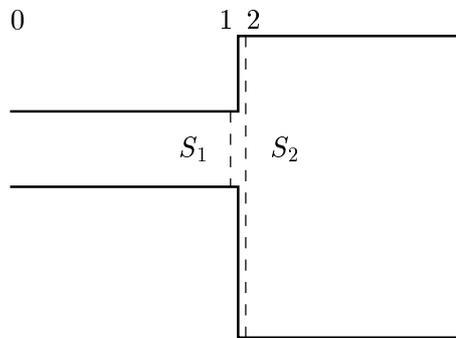


FIG. 1.7: Exemple de changement de section : expansion brusque

Nous disposons ainsi d'un ensemble d'équations algébriques (équations 1.12 à 1.15) décrivant la propagation acoustique dans un guide composé de segments droits de différentes sections. Reste qu'il n'est pas possible à ce stade de calculer directement la pression ou la vitesse à partir des seules équations (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15). En effet, si l'on considère le problème typique d'un guide de longueur finie, en aval duquel on donne une condition de rayonnement (une impédance), et en amont duquel est placée une source connue, de telles conditions ne suffisent pas à la résolution des équations pour \mathbf{P} ou \mathbf{U} [57]. On ne peut en outre donner une condition pour la pression et pour sa dérivée en aval du guide, ce qui ne laisserait aucun degré de liberté au niveau de la source. De la même manière, imposer une condition pour la pression et sa dérivée au niveau de la source ne laisserait aucun degré de liberté au niveau de la terminaison du guide, donc pour le choix de l'impédance de rayonnement. D'autre part, parce que les termes en $\cos k_\alpha l$ et $\sin k_\alpha l$ dans les équations (1.12) et (1.13) peuvent être très grands si k_α est imaginaire, l'utilisation directe de ces équations peut induire des problèmes numériques de convergence.

On introduit donc une impédance généralisée Z , définie par la relation $\mathbf{P} = Z\mathbf{U}$. L'impédance de rayonnement étant connue et donnée sous une forme matricielle Z_r , Z est calculée d'aval en amont jusqu'au point où est définie la source, en utilisant alternativement les relations

$$Z^{(1)} = {}_a F Z^{(2)} {}_t F$$

aux discontinuités, et

$$Z^{(0)} = D_3(I + D_2^{-1}Z^{(1)}(Z^{(1)} + D_3^{-1}Z_c)^{-1}D_2^{-1})Z_c \quad (1.16)$$

dans les parties droites (fig. 1.7), déduites de (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15). D_3 est une matrice diagonale donnée par $D_{3\alpha} = j \tan k_\alpha l$, et $Z^{(0)}$ est l'impédance d'entrée du segment droit considéré [65, 66, 57]. A l'extrémité amont du guide d'onde la valeur de \mathbf{P} ou \mathbf{U} est connue - c'est ainsi qu'est définie la source - donc la pression et la vitesse peuvent à leur tour être calculées dans le guide, à l'aide de relations du type

$$\mathbf{U}^{(1)} = (-D_2 Z_c^{-1}(Z^{(0)} - Z_c) + e^{-jk_\alpha l})\mathbf{U}^{(0)}$$

déduites des équations (1.12), (1.13) et (1.16), et des équations de continuité (1.14) et (1.15).

Le calcul préalable de l'impédance permet donc de résoudre un problème réaliste, défini par des données physiques (source, condition de rayonnement). Il permet également de s'affranchir des problèmes numériques liés à la présence de modes évanescents dans les équations des champs de pression et de vitesse.

1.2.2 Propagation dans un guide de section continûment variable

Dans le cas « discret » que nous venons de voir, nous avons obtenu pour \mathbf{P} , \mathbf{U} et Z des équations algébriques régissant leur évolution dans le guide. Le cas d'un guide d'ondes de section continûment variable peut être traité de façon similaire. Les équations sont désormais des équations différentielles ordinaires, déduites des équations (1.12) à (1.15) en prenant le cas limite de segments de longueurs

infinitésimales [37], ou obtenues en projetant directement les équations d'Euler dans le guide sur les modes transverses locaux, suivant la méthode proposée par Stevenson [69]. L'impédance Z satisfait à une équation non-linéaire de Riccati [57, 4].

Dans la plupart des cas, une solution analytique de ces équations ne peut être obtenue ; elles sont donc résolues numériquement. L'impédance Z est calculée dans le guide par un algorithme de type Runge-Kutta. Les termes de la matrice Z peuvent varier rapidement le long du guide, présenter des pics importants, aussi l'utilisation d'un pas d'intégration adaptatif est-elle nécessaire. L'impédance Z , ou l'admittance Y ($Y = Z^{-1}$), ayant été calculée en remontant le guide de la terminaison au point source, le champ acoustique peut à son tour être calculé en sens inverse, d'amont en aval. La résolution des équations différentielles pour \mathbf{P} et \mathbf{U} nécessite de connaître la valeur de l'impédance en chaque point d'intégration. Lors de l'intégration de l'équation de Riccati, on impose donc, dans la procédure de calcul du pas adaptatif, le passage par un ensemble de points régulièrement espacés de l'axe du guide. Ce « stockage » des valeurs de l'impédance, qui peut être coûteux en terme de mémoire, impose de surcroît un pas fixe pour l'intégration des équations satisfaites par \mathbf{P} et \mathbf{U} .

Cette méthode, qui tient compte du couplage entre les modes, qu'ils soient propagatifs ou évanescents, permet l'analyse de toute géométrie de guide d'axe rectiligne, dans une large gamme de fréquence. Il est possible en outre d'accéder directement à l'impédance d'entrée ou à la matrice des coefficients de réflexion pour caractériser les propriétés acoustiques du guide, et la formulation des conditions de rayonnement est particulièrement aisée. L'approche multimodale permet également de déterminer les modes propres et les fréquences de résonance de cavités ouvertes [56] ou fermées [66, 3].

1.3 Propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes

Malgré l'intérêt pratique de solutions du problème acoustique dans les guides d'ondes courbes, souligné par de nombreux auteurs (voir [29, 15, 71, 34], par exemple), très peu de travaux ont été publiés avant les années 1970 sur ce sujet, essentiellement à cause des difficultés mathématiques rencontrées, en particulier pour la résolution de l'équation d'onde dans le système de coordonnées cylindriques.

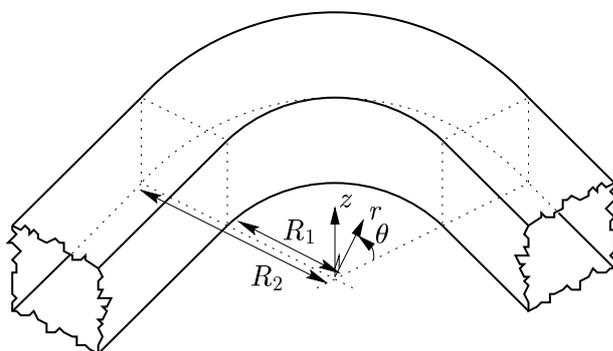


FIG. 1.8: Coude de section rectangulaire

Dans ce système, adapté à l'expression des conditions aux parois d'un coude de section rectangulaire (fig. 1.8), l'équation d'onde (1.3) peut être résolue par séparation de variables, pour donner la solution

générale

$$p_\alpha(r, \theta, z) = [A_\alpha J_\nu(k_r r) + B_\alpha N_\nu(k_r r)] [C_\alpha \cos(k_z z) + D_\alpha \sin(k_z z)] e^{\pm j\nu\theta}, \quad (1.17)$$

où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques, J_ν et N_ν les fonctions de Bessel et de Neumann respectivement, k_r et k_z les composantes du vecteur d'onde ($k_r^2 + k_z^2 = k^2$) [41]. Les *nombre d'onde angulaires* ν , nombres sans dimension, sont les solutions de la relation de dispersion

$$\begin{vmatrix} j\zeta N_\nu(k_r R_1) + N'_\nu(k_r R_1) & j\zeta J_\nu(k_r R_1) + J'_\nu(k_r R_1) \\ j\zeta N_\nu(k_r R_2) + N'_\nu(k_r R_2) & j\zeta J_\nu(k_r R_2) + J'_\nu(k_r R_2) \end{vmatrix} = 0,$$

où R_1 est le rayon de la paroi intérieure du coude, R_2 le rayon de la paroi extérieure et $\zeta = \rho_0 c_0 v_r / p$ l'admittance réduite aux parois, avec v_r la composante radiale de la vitesse [29]. C'est la résolution de cette équation implicite et l'expression des solutions (1.17), mettant en jeu des fonctions de Bessel et de Neumann d'indices complexes (ou réels et imaginaires purs si $\zeta = 0$), qui constituent la principale difficulté et ont amené les auteurs à adopter différentes méthodes approchées : approche en perturbation, en supposant le coude faiblement courbé [41, 61, 73], développement en série des fonctions de Bessel et de Neumann [29, 62], approximation basses fréquences [62] ou restriction aux seuls modes propagatifs dans le coude [55], voire au premier mode uniquement [15]. Plusieurs méthodes numériques ont également été utilisées [12, 19, 45, 16].

Les coudes de section circulaire et plus généralement ceux dont la section n'est pas rectangulaire ont suscité peu de travaux théoriques, l'équation d'onde n'étant pas accessible à une solution analytique exacte dans ces géométries [52]. A nouveau, des méthodes approchées [34, 23, 25, 26] ou purement numériques [20, 16] ont été privilégiées.

Ces études théoriques et numériques, en plus de nombreux travaux expérimentaux, ont permis de mettre en évidence plusieurs caractéristiques de la propagation acoustique dans un coude :

- Le nombre d'onde angulaire, tout d'abord, paramètre sans dimension, pendant du nombre d'onde qui caractérise la propagation en conduit droit. Ce nombre est fonction de la fréquence et de la courbure du coude.
- « L'inaptitude du mode plan à se propager dans un coude » [64]. Le champ de pression sur une section transversale du coude n'est jamais uniforme. Il en résulte qu'à l'interface d'un coude et d'un guide droit, même aux basses fréquences, un couplage de modes est observé et des modes évanescents sont générés.
- La vitesse de phase, l'impédance et les résonances dans le coude ont également fait l'objet de travaux, en vue notamment d'étudier l'influence de la courbure sur ces grandeurs, en comparaison de leur valeur dans un guide droit.
- L'influence de la courbure sur l'atténuation d'une onde dans un conduit dont les parois sont traitées par un matériau absorbant est connue empiriquement depuis longtemps - l'atténuation est en général plus importante aux hautes fréquences dans un coude que dans un conduit droit de même longueur - et plusieurs travaux théoriques et numériques ont été réalisés pour retrouver ces caractéristiques et en proposer une interprétation [30, 51, 39, 40, 63, 8, 42].

Il n'existe toutefois aucune approche systématique pour caractériser les propriétés acoustiques d'un coude, et plusieurs aspects méritent d'être approfondis.

- Les méthodes proposées sont généralement propres à une configuration donnée (par exemple un

coude reliant deux guides droits semi-infinis) et ne peuvent être directement utilisées pour d'autres configurations. Une approche plus générale, d'une plus grande modularité, permettrait l'étude des coudes dans des configurations diverses, réalistes, et éventuellement complexes sans pour autant augmenter la complexité de la méthode elle-même.

- Les propriétés de réflexion et de transmission d'un coude ont été peu étudiées, faute d'une méthode analytique ou numérique simple pour accéder à ces grandeurs.
- Si les principales caractéristiques de la propagation dans un conduit courbe traité aux parois ont été mise en évidence théoriquement, les conclusions apportées par ces travaux sont parfois confuses.
- Aucune approche n'est adaptée à une étude à haute fréquence de la propagation acoustique.

Chapitre 2

Analyse multimodale de la propagation acoustique dans un guide d'ondes courbe

Ce chapitre s'inspire dans une large mesure d'un article publié au *Journal of the Acoustical Society of America* en septembre 2001 [21], adapté et complété.

2.1 Introduction

Parce qu'elle est un prolongement logique de la théorie de la propagation d'ondes guidées, acoustiques ou électromagnétiques, l'étude de la propagation dans les guides courbes a suscité de nombreux travaux et publications (pour une revue en acoustique, voir [64]).

L'approche la plus courante pour résoudre ce problème est la méthode par séparation de variables [41, 29, 62, 15, 55], qui conduit au calcul de modes de coude, équivalents des modes en conduit droit. Nous y ferons référence dans la suite comme *méthode des modes de coude*. Dans un coude de section rectangulaire, et par conséquent dans un coude bidimensionnel, le problème (1.3, 1.4) est en effet séparable. Cependant, s'agissant d'un coude de longueur finie, la solution obtenue doit être raccordée aux solutions en amont et en aval du coude, qui ne sont pas a priori développées sur la base des modes du coude. Dans les premières études, proposées par Krasnushkin [41] et Grigor'Yan [29] entre autres, ce problème est écarté en considérant des coudes infiniment longs. Le cas d'un coude joignant deux guides d'ondes droits est traité plus tard par Rostafinski [62], Cummings [15] et Osborne [55].

La relation de dispersion pour les modes de coude obtenue avec cette méthode met en jeu des fonctions de Bessel et de Neumann d'ordres non entiers (ils sont réels ou imaginaires purs si les parois du coude sont rigides et parfaitement réfléchissantes, et complexes si l'admittance aux parois est non nulle, comme nous le verrons au chapitre 4). Les difficultés posées par cette relation de dispersion implicite ont amené à proposer différentes approximations : une approche en perturbation (Krasnushkin [41]), en supposant le coude faiblement courbé, un développement en série des fonctions de Bessel et de Neumann (Grigor'Yan [29], et Rostafinski [62] en limitant l'étude aux grandes longueurs d'onde), la propagation du seul mode plan (Cummings [15]), ou une théorie modale simplifiée ne considérant notamment que les modes propagatifs (Osborne [55]). Plus récemment, Kim et Ih [38] ont proposé une expression simple de la matrice de transfert d'une chambre d'expansion courbe en limitant aux ondes

planes la propagation de part et autre de la chambre et en déterminant une formule empirique pour le premier mode de coude.

Des méthodes autres que la méthode des modes de coude ont été utilisées pour l'étude de la propagation acoustique dans les coudes : Galerkin (Tam [71], voir également [24]), différences finies (Cabelli [12]), éléments de frontière (El-Raheb et Wagner [19]), éléments finis spectraux (Lin [45]), ou une méthode basée sur les équations d'Euler 2D (Dequand *et coll.* [16]). Ces approches, si elles peuvent être utilisées pour l'étude de cas plus généraux que ceux présentés auparavant et fournir de nombreuses informations, ne permettent toutefois pas une interprétation physique directe et ne sont pas toujours adaptées à la formulation des conditions de rayonnement en aval du coude.

Nous nous proposons de développer dans ce chapitre une formulation multimodale de la propagation acoustique dans un guide courbe à deux dimensions, quelles que soient sa courbure et la fréquence de la source. Une telle approche a déjà été formulée et validée pour les guides d'ondes d'axe rectiligne et de section variable (Pagneux *et coll.* [57, 4]), dont nous avons présenté les principes au chapitre précédent. Faisant suite aux travaux de Stevenson [69], Alfredson [1], Roure [65, 66] et Kergomard [35, 36] sur la propagation multimodale dans les guides de section variable, les auteurs construisent deux équations différentielles d'ordre 1 de dimension infinie pour les composantes de la pression et de la vitesse longitudinale projetées sur les modes du problème transverse local, puis déduisent de celles-ci une équation non-linéaire de Riccati pour la matrice impédance. Cette équation peut être intégrée numériquement après troncature à un nombre suffisant de modes.

Nous donnons dans la section suivante la formulation de la méthode multimodale pour les guides de courbure et de section constantes, en mettant en évidence le caractère très général et modulaire de cette méthode, ainsi que sa pertinence pour la formulation des conditions de rayonnement. Deux exemples particuliers sont traités dans la section 2.3, pour lesquels une solution analytique peut être obtenue, permettant ainsi de valider la méthode multimodale ; plusieurs applications sont ensuite proposées (section 2.4). Enfin, cette étude est étendue aux guides courbes de section variable et plusieurs résultats sont présentés.

2.2 Formulation de la méthode multimodale

Nous considérons une section de courbure finie et constante d'un guide d'ondes bidimensionnel (fig. 2.1). R_0 est le rayon de courbure de l'axe circulaire du coude, s_f la longueur de l'axe et h la largeur du guide. Les parois sont supposées rigides et parfaitement réfléchissantes.

2.2.1 Reformulation des équations d'Euler

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, adiabatique, dans un fluide au repos dans le guide, la pression acoustique p et la vitesse \mathbf{v} , dont les composantes sont v_r et v_s dans le repère $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_s)$, satisfont aux équations (1.1) et (1.2), qui s'écrivent dans le domaine fréquentiel

$$-jk\mathbf{v} = \nabla p \quad (2.1)$$

$$-jkp = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.2)$$

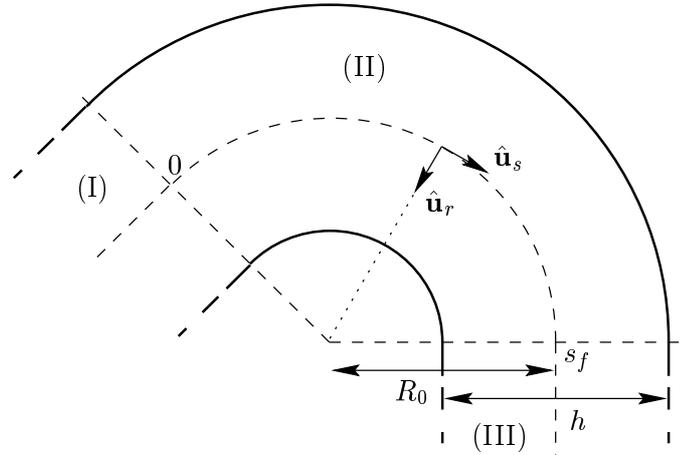


FIG. 2.1: Guide de courbure constante et système de coordonnées.

pour p et \mathbf{v} adimensionnées par $\rho_0 c_0^2$ et c_0 respectivement, avec $k = \omega/c_0$ et en omettant le facteur $\exp(j\omega t)$. La composante v_r éliminée, ces équations donnent dans le coude

$$-jk(1 - \kappa r)v_s = \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (2.3)$$

$$-jk(1 - \kappa r)p = \frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{1}{jk} \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \kappa r) \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

où $\kappa = 1/R_0$ est la courbure de l'axe.

La pression p et la vitesse longitudinale v_s sont exprimées à l'aide des séries infinies

$$p(r, s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} P_\alpha(s) \psi_\alpha(r), \quad (2.5)$$

$$v_s(r, s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha(s) \psi_\alpha(r), \quad (2.6)$$

où les fonctions ψ_α sont les solutions du problème aux valeurs propres $d_r^2 \psi_\alpha = -\mu_\alpha^2 \psi_\alpha$, satisfaisant à la condition de Neumann homogène aux parois

$$\left(\frac{d\psi_\alpha}{dr} \right)_{r=\pm h/2} = 0.$$

P_α et U_α sont des fonctions scalaires. Les modes propres ψ_α , qui sont les modes transverses d'un guide droit de largeur h , sont les fonctions

$$\psi_\alpha(r) = A_\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{h}\left(r - \frac{h}{2}\right)\right),$$

associées aux valeurs propres $\mu_\alpha = \alpha\pi/h$. Ils sont orthogonaux et peuvent être normés en prenant $A_\alpha = \sqrt{2 - \delta_{\alpha 0}}$, de sorte que

$$\int_{-h/2}^{h/2} \psi_\alpha \psi_\beta \, dr = h \delta_{\alpha\beta}.$$

Ainsi définis, ces modes sont des fonctions sans dimension, comme le sont les fonctions P_α et U_α . Suivant un formalisme matriciel, les décompositions modales (2.5) et (2.6) s'écrivent

$$p = {}^t\boldsymbol{\psi}\mathbf{P},$$

$$v_s = {}^t\boldsymbol{\psi}\mathbf{U},$$

où $\mathbf{P} = (P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ sont les vecteurs des composantes de p et v_s dans la base $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$, et $\boldsymbol{\psi}$ est le vecteur des modes propres ψ_α . En projetant sur la base des fonctions ψ_α les équations (2.3) et (2.4) (cf. annexe A), il vient

$$\mathbf{P}' = -jkB\mathbf{U}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{P}, \quad (2.8)$$

où le symbole $'$ désigne la dérivée par rapport à s et $K_{\alpha\beta} = (k^2 - \mu_\alpha^2)\delta_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Les matrices B et C sont données par

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \kappa r) \psi_\alpha(r) \psi_\beta(r) \, dr, \quad (2.9)$$

$$C_{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \psi_\alpha'(r) \psi_\beta(r) \, dr,$$

soit

$$B_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ A_\alpha A_\beta \frac{\kappa h}{\pi^2} ((-1)^{\alpha+\beta} - 1) \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases},$$

$$C_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ A_\alpha A_\beta \frac{\kappa}{h} ((-1)^{\alpha+\beta} - 1) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases};$$

elles ne dépendent que des paramètres géométriques h et κ et non de k . Il n'est donc pas nécessaire de les recalculer pour chaque fréquence.

Pour les raisons évoquées au chapitre précédent, notamment l'instabilité numérique due à la présence de modes évanescents (correspondants à $K_{\alpha\beta} < 0$), les équations (2.7) et (2.8) ne peuvent être intégrées directement (cf. §1.2.1 et [57]). On définit alors une impédance généralisée Z telle que

$$\mathbf{P} = Z\mathbf{U}. \quad (2.10)$$

Cette matrice est appelée *impédance généralisée* car, suivant la relation (2.10), elle est une généralisation à la propagation multimodale de l'impédance classique en ondes planes. Z est solution de l'équation non-linéaire de Riccati

$$Z' = -jkB - \frac{1}{jk}Z(C + KB)Z, \quad (2.11)$$

obtenue en substituant à \mathbf{P}' et \mathbf{U}' leurs expressions (2.7) et (2.8) dans la dérivée de (2.10), $\mathbf{P}' = Z'\mathbf{U} + Z\mathbf{U}'$. Cette équation différentielle ordinaire pour Z peut être intégrée numériquement dès lors qu'une condition initiale est imposée en aval du coude.

2.2.2 Conditions aux limites

Une condition de rayonnement est imposée en aval du coude sous la forme d'une matrice Z_r , condition initiale pour l'intégration de l'équation de Riccati (2.11). Par exemple, l'impédance de rayonnement d'un coude débouchant sur un guide droit semi-infini est la matrice impédance caractéristique Z_c , diagonale, donnée par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad Z_{c\alpha} = \frac{k}{k_\alpha},$$

avec $k_\alpha = \sqrt{k^2 - \mu_\alpha^2}$ pour les modes propagatifs, $k_\alpha = -j\sqrt{\mu_\alpha^2 - k^2}$ pour les modes évanescents. Z_r étant donnée, la matrice impédance Z est calculée en tout point le long du coude, qu'il est alors possible de caractériser, par son impédance d'entrée ou la matrice des coefficients de réflexion comme nous le verrons dans la suite.

Lorsque l'impédance est connue dans le coude, le champ acoustique peut à son tour être intégré : une condition sur \mathbf{P} ou \mathbf{U} , définissant la source, est imposée en amont du coude, et les champs de pression et de vitesse sont calculés à l'aide des équations (2.7) et (2.8) reformulées comme suit :

$$\mathbf{P}' = -jkB\mathbf{Y}\mathbf{P}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)Z\mathbf{U}, \quad (2.13)$$

où Y est la matrice admittance ($Y = Z^{-1}$). Du fait de la présence de la matrice impédance, ces équations sont numériquement stables [57]. L'une ou l'autre de ces équations est donc intégrée de l'entrée à la terminaison du coude pour obtenir la vitesse ou la pression, l'autre quantité étant ensuite calculée avec la relation (2.10) ou son inverse, $\mathbf{U} = Y\mathbf{P}$.

2.2.3 Intégration numérique des équations pour Z , \mathbf{P} et \mathbf{U}

L'approche que nous présentons ici est celle adoptée par Pagneux *et coll.* [57, 4] pour les guides d'axe rectiligne et de section variable. Après troncature à un nombre suffisant de modes, l'équation

de Riccati pour Z est intégrée d'aval en amont dans le coude au moyen d'un algorithme de Runge-Kutta avec un pas d'intégration adaptatif. L'impédance Z est alors enregistrée sur un ensemble de points régulièrement espacés de l'axe du coude, permettant une intégration de l'équation (2.12) ou (2.13) dans le sens inverse, d'amont en aval. Le nombre de modes « suffisant » auquel il est possible de tronquer les différentes équations dépend de la fréquence et de la géométrie du coude, et il n'est pas possible de le déterminer a priori. La méthode la plus appropriée consiste à réitérer les calculs en augmentant progressivement le nombre de modes, jusqu'à ce que la convergence soit atteinte avec la tolérance souhaitée.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la condition de rayonnement est donnée par une matrice impédance Z_r . Ce formalisme permet une description précise de la condition de rayonnement, et n'importe quelle « charge » peut être considérée en aval du coude (mis à part un tube fermé par une paroi rigide, auquel cas il est nécessaire d'introduire un mécanisme de pertes dans le modèle pour assurer la convergence [57]). Outre ceci, il est également possible, grâce au calcul de l'impédance le long du guide, de raccorder le coude avec un autre guide d'ondes, quelle qu'en soit la géométrie. A l'inverse, avec la méthode des modes de coude, la formulation et le calcul des équations de continuité à l'interface entre le coude et un autre guide d'ondes peut induire des problèmes mathématiques et numériques, notamment en terme de convergence (voir par exemple [44]). De manière générale, le raccordement de solutions développées sur des bases de fonctions de natures différentes peut être source de difficultés numériques. Le calcul de l'impédance le long du système permet de s'affranchir de ces difficultés.

2.3 Validation de la méthode multimodale

Deux cas particuliers de propagation acoustique dans un coude sont considérés dans cette section, pour lesquels une solution analytique peut être obtenue : un coude de courbure faible dans un premier temps, puis la propagation du premier mode de coude. Dans chaque cas les approches analytique et multimodale sont comparées et discutées, en vue de valider la méthode multimodale.

2.3.1 Coude de courbure faible

2.3.1.1 Solution analytique

Lorsque la largeur du coude et par conséquent la courbure sont faibles, c'est-à-dire lorsque $\tilde{\kappa} = \kappa h \ll 1$ avec $\Omega = kR_0$ fixé, une solution asymptotique de l'équation de Helmholtz pour la pression

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\kappa}{1 - \kappa r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{(1 - \kappa r)^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) p = 0 \quad (2.14)$$

peut être cherchée sous la forme d'un développement en puissances de $\tilde{\kappa}$, soit $p = \pi_0 + \tilde{\kappa}\pi_1 + \tilde{\kappa}^2\pi_2 + \dots$ où $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ sont des fonctions à déterminer. Les coordonnées radiale et longitudinale adimensionnées par h et R_0 respectivement, l'équation (2.14) donne

$$(1 - \tilde{\kappa}\tilde{r})^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{r}^2} - \tilde{\kappa}(1 - \tilde{\kappa}\tilde{r}) \frac{\partial p}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\kappa}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{s}^2} + \tilde{\kappa}^2 (1 - \tilde{\kappa}\tilde{r})^2 \Omega^2 p = 0. \quad (2.15)$$

La condition

$$(p)_{\tilde{s}=0} = 1 \quad (2.16)$$

est imposée à l'entrée du coude, et la condition pseudo-anéchoïque simple

$$(\partial_{\tilde{s}}p)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega p \quad (2.17)$$

est imposée à la sortie. Ces relations impliquent, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(\pi_n)_{\tilde{s}=0} = \delta_{n0}$$

et

$$\left(\frac{\partial \pi_n}{\partial \tilde{s}} \right)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega \pi_n.$$

Calculée par une méthode de perturbation (cf. annexe B), la pression est alors donnée au second ordre par

$$p = e^{-j\Omega\tilde{s}} + j\frac{\tilde{\kappa}^2}{24} \left(\Omega\tilde{s}e^{-j\Omega\tilde{s}} - e^{-j2\Omega\tilde{s}_f} \sin(\Omega\tilde{s}) \right). \quad (2.18)$$

A cet ordre, la solution est indépendante de r .

2.3.1.2 Approche multimodale

La formulation multimodale de la condition pseudo-anéchoïque à la sortie du coude s'obtient en substituant à $\partial_s p$ son expression (2.3) dans $(\partial_s p)_{s=s_f} = -jkp$ et en projetant cette relation sur la base de modes $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$:

$$B\mathbf{U} = \mathbf{P},$$

donnant ainsi la condition initiale $Z = B$ pour l'intégration de l'équation de Riccati. La condition $(p)_{s=0} = 1$, d'autre part, est équivalente à $P_\alpha = \delta_{\alpha 0}$, condition qui permet l'intégration du champ acoustique.

2.3.1.3 Résultats

La valeur de \tilde{s}_f , correspondant à l'angle total du coude, est choisie égale à $\pi/2$ et la fréquence adimensionnée Ω fixée à 1. La pression au point $\tilde{s} = \pi/4$ est donnée sur la figure 2.2 en fonction du petit paramètre $\tilde{\kappa}$, calculée avec les deux méthodes : la solution à l'ordre 2 en $\tilde{\kappa}$ de l'équation de Helmholtz, donnée par l'équation (2.18), et la solution du calcul multimodal avec 15 modes pris en compte. Une des principales caractéristiques de la propagation du son dans un guide courbe est la non-uniformité du champ de pression sur une section transversale de ce guide (voir Rostafinski [62] ou Cummings [15], par exemple), ou comme le mentionne Rostafinski [64] « l'inaptitude du mode plan à se propager dans un coude ». Toutefois le champ de pression transversal tend à être uniforme pour de faibles courbures du guide. Afin d'évaluer la dépendance du champ en r pour les différentes valeurs de $\tilde{\kappa}$ considérées, les valeurs minimales et maximales du profil de pression obtenu avec la méthode

multimodale sont reportées sur la figure 2.2 : pour de faibles valeurs de $\tilde{\kappa}$, l'écart entre ces valeurs peut être considéré comme négligeable. Pour $\tilde{\kappa} = 0.1$, il est de l'ordre de 0.01%, relativement à la valeur moyenne de p sur la section, et pour $\tilde{\kappa} = 0.4$, il est encore inférieur à 1%. La solution du calcul multimodal, dont on représente la valeur moyenne sur la section, concorde parfaitement avec la solution asymptotique, toutes deux convergeant vers $\pi_0(\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2}$ lorsque $\tilde{\kappa}$ décroît.

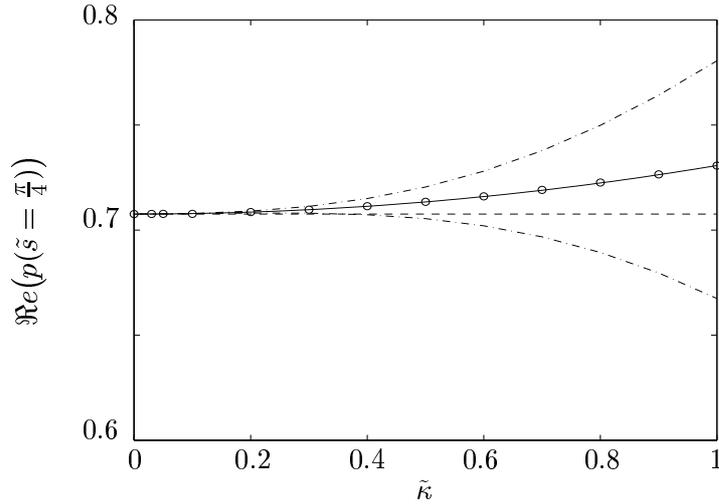


FIG. 2.2: Partie réelle de la pression dans un coude d'angle total $\pi/2$ au point $\tilde{s} = \pi/4$, en fonction du petit paramètre $\tilde{\kappa}$ donnant la courbure du coude. Solution asymptotique (—), méthode multimodale (—·). Les valeurs minimales et maximales du profil de pression obtenu avec la méthode multimodale sont reportées, en vue d'évaluer la dépendance de la solution en r . Sont données également la valeur moyenne de la solution de la méthode multimodale (o) et la solution à l'ordre 0 en $\tilde{\kappa}$, $\pi_0(\frac{\pi}{4}) = \exp(-j\Omega\pi/4)$ (---).

2.3.2 Propagation du premier mode de coude

Nous l'avons déjà mentionné, l'équation de Helmholtz est séparable dans le système de coordonnées (r, s) ; des solutions à variables séparées peuvent donc être construites : $p(r, s) = R(r)S(s)$. Ces modes sont caractérisés dans le coude par un nombre d'onde sans dimension appelé *nombre d'onde angulaire* (« angular wavenumber » [41]). Pour un coude dont les parois sont rigides et parfaitement réfléchissantes, les nombres d'onde angulaires sont réels ou imaginaires purs, correspondant, respectivement, aux modes propagatifs et évanescents. Ces nombres étant classés par ordre décroissant de leur carré, ils sont notés ν_n , $n \in \mathbb{N}$. Nous cherchons à déterminer le premier mode, caractérisé par ν_0 .

2.3.2.1 Solution analytique

Dans un coude de longueur infinie et de courbure quelconque, l'équation de Helmholtz peut être résolue par séparation de variable, pour donner la solution générale

$$p(r, s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\Lambda_n^- e^{-j\nu_n \kappa s} + \Lambda_n^+ e^{j\nu_n \kappa s}) [N'_{\nu_n}(kR_0(1 - \kappa \frac{h}{2})) J_{\nu_n}(kR_0(1 - \kappa r)) - J'_{\nu_n}(kR_0(1 - \kappa \frac{h}{2})) N_{\nu_n}(kR_0(1 - \kappa r))], \quad (2.19)$$

satisfaisant à la condition de Neumann homogène ($\partial_r p = 0$) aux parois $r = \pm h/2$. Les nombres d'onde angulaires ν_n sont les solutions de la relation de dispersion

$$N'_{\nu}(kR_0(1 - \kappa \frac{h}{2})) J'_{\nu}(kR_0(1 + \kappa \frac{h}{2})) - J'_{\nu}(kR_0(1 - \kappa \frac{h}{2})) N'_{\nu}(kR_0(1 + \kappa \frac{h}{2})) = 0 \quad (2.20)$$

pour une valeur donnée de $k = \omega/c_0$, où J_{ν} et N_{ν} sont les fonctions de Bessel et de Neumann respectivement [41].

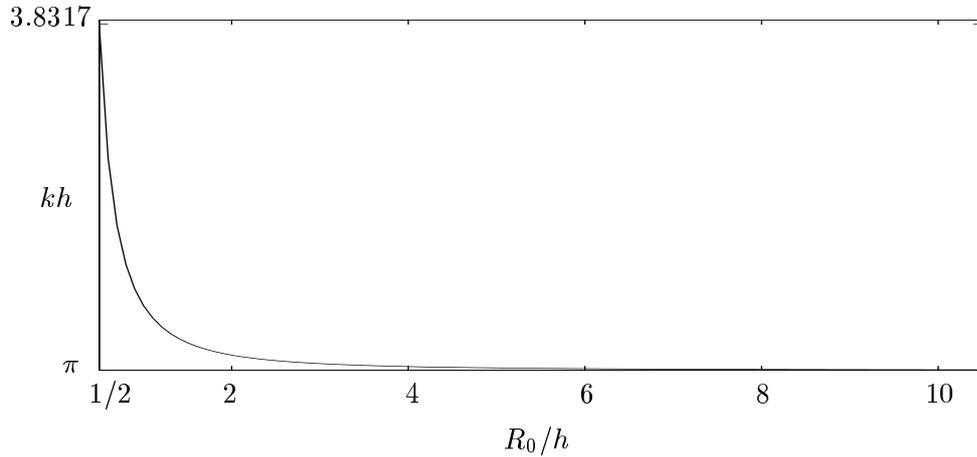


FIG. 2.3: Première fréquence de coupure dans un coude, adimensionnée par h , en fonction du paramètre R_0/h .

Les fréquences de coupure des modes sont les solutions k de l'équation (2.20) avec $\nu = 0$ [55]. La courbe de la figure 2.3 montre l'évolution de la première fréquence de coupure kh avec le paramètre R_0/h : elle est toujours supérieure à π - sa valeur dans un guide droit - et tend naturellement vers cette limite pour de petites valeurs de la courbure, c.-à-d. de grandes valeurs de R_0/h . Les fréquences de coupure d'un coude dans lequel les solutions de l'équation d'onde satisfont à la condition de Dirichlet aux parois (guides électromagnétiques ou quantiques) sont inférieures à celles d'un guide droit. Il est donc possible de mettre en évidence des modes piégés dans un coude reliant deux guides droits semi-infinis [44, 68, 28]. Le fait que les fréquences de coupure dans un coude « acoustique » soient supérieures à celles d'un guide droit remet en cause ce résultat et il semble beaucoup moins aisé de montrer l'existence de modes piégés dans ce type de géométrie.

Pour un coude de longueur finie, l'expression (2.19) est aussi une solution analytique exacte, mais avec des conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du coude qui doivent être déterminées ; ce point

sera abordé dans la suite pour la formulation multimodale de ce problème. On se restreint maintenant au premier mode

$$p(r, s) = \Lambda_0^- e^{-j\nu_0 \kappa s} \left[N'_{\nu_0} \left(kR_0 \left(1 - \kappa \frac{h}{2} \right) \right) J_{\nu_0} (kR_0 (1 - \kappa r)) \right. \\ \left. - J'_{\nu_0} \left(kR_0 \left(1 - \kappa \frac{h}{2} \right) \right) N_{\nu_0} (kR_0 (1 - \kappa r)) \right]. \quad (2.21)$$

2.3.2.2 Approche multimodale

Pour pouvoir calculer le premier mode de coude avec la méthode multimodale, la longueur de l'axe du coude, sur laquelle les équations matricielles pour l'impédance et la pression seront intégrées, doit être finie. Deux conditions aux limites, l'une en amont du coude et l'autre en aval, doivent donc être déterminées, qui seront les conditions initiales pour l'intégration des équations multimodales. Une condition initiale en $s = s_f$ pour l'intégration de l'équation de Riccati est obtenue en projetant sur la base $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ la relation

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -j \frac{\nu_0}{R_0} p,$$

déduite de la solution exacte (2.21); il vient

$$Z_r = \frac{kR_0}{\nu_0} B.$$

A l'entrée du coude, $\mathbf{P}(0)$ est calculé en projetant l'équation (2.21) en $s = 0$ sur $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad P_\alpha(0) = A_\alpha \Lambda_0^- \int_{-h/2}^{h/2} \left[N'_{\nu_0} \left(kR_0 \left(1 - \kappa \frac{h}{2} \right) \right) J_{\nu_0} (kR_0 (1 - \kappa r)) \right. \\ \left. - J'_{\nu_0} \left(kR_0 \left(1 - \kappa \frac{h}{2} \right) \right) N_{\nu_0} (kR_0 (1 - \kappa r)) \right] \cos \left(\frac{\alpha \pi}{h} \left(r - \frac{h}{2} \right) \right) dr.$$

Avec ces deux conditions et les équations (2.11) et (2.12) ou (2.13) le champ de pression dans le coude peut être calculé (cf. §2.2.3) et comparé avec la solution exacte (2.21).

2.3.2.3 Résultats

Les paramètres géométriques du coude sont choisis de telle sorte que $R_0/h = 1$ et $s_f/R_0 = \pi/2$, et la fréquence est telle que $kh = \pi/4$; le nombre d'onde ν_0 vaut dans ce cas 0.76. La solution exacte (2.21) et celle issue du calcul multimodal, calculée avec 17 modes, s'accordent parfaitement (fig. 2.4). En outre, la méthode multimodale donne un champ de pression dont le module est indépendant de la coordonnée axiale s et la phase indépendante de r , comme c'est le cas pour la solution (2.21) : l'écart maximum par rapport à la valeur moyenne est en effet dans chaque cas inférieur à 0.001%.

Afin de déterminer la vitesse de convergence de la méthode multimodale, la solution analytique (2.21) est prise comme solution de référence et on définit l'erreur

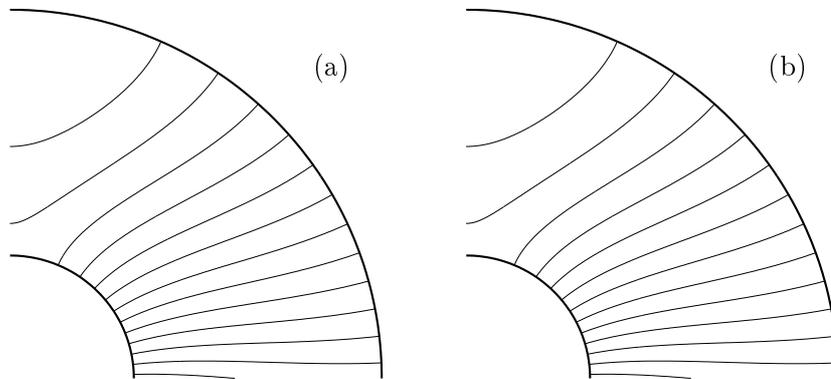


FIG. 2.4: Champ de pression (partie réelle) pour le premier mode de coude, calculé (a) analytiquement, (b) avec la méthode multimodale; $R_0/h = 1$, $s_f/R_0 = \pi/2$, $kh = \pi/4$.

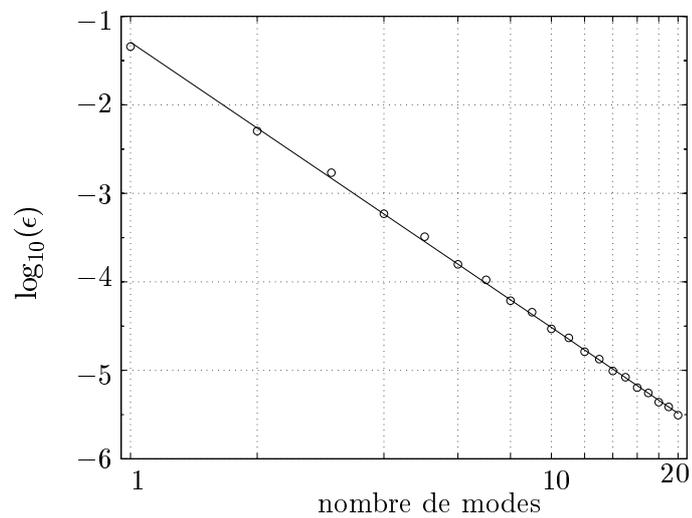


FIG. 2.5: Convergence de la méthode multimodale. Le logarithme de l'erreur, $\log_{10}(\epsilon)$, est tracé en fonction du nombre de modes pour la configuration représentée sur la figure 2.4.

$$\epsilon = \left(\frac{\int_S \|p - p_{ref}\|^2 dS}{\int_S \|p_{ref}\|^2 dS} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

où S est la surface représentée sur la figure 2.4. L'erreur ϵ est donnée sur la figure 2.5 en fonction du nombre N de modes pris en compte dans le calcul numérique : elle décroît de façon monotone, suivant une loi géométrique en $1/N^{3.23 \pm 0.1}$. La méthode multimodale converge donc rapidement vers la solution exacte.

2.3.3 Conclusion

Dans chacun des exemples présentés dans cette section, la méthode multimodale a été validée, donnant des résultats en parfait accord avec les solutions analytiques. En outre, parce que le second exemple - le calcul du premier mode de coude - n'est pas limité à des valeurs particulières de la fréquence et des paramètres géométriques, il constitue une validation intéressante de la méthode multimodale dans les coudes de section constante. La solution cherchée dans ce deuxième exemple est de plus une solution non triviale au regard de notre méthode, et elle a été calculée avec une très grande précision.

2.4 Applications

Nous présentons dans cette section un exemple d'application de la méthode multimodale pour la caractérisation d'un coude particulier, qui a déjà fait l'objet d'études expérimentales et numériques (différences finies) publiées [12].

Le guide est constitué d'un coude reliant deux guides droits semi-infinis (fig. 2.6), avec $R_0/h = 0.625$ et $s_f/R_0 = 2.62$. Le champ de pression représenté sur la figure 2.6 est calculé avec 15 modes suivant la procédure décrite au paragraphe 2.2.3. Le calcul du champ dans les parties droites est effectué à l'aide des équations données au paragraphe 1.2.1. Une condition de type piston en pression ($P_\alpha = \delta_{\alpha 0}$) est imposée à une distance $2h$ en amont du coude, à une fréquence telle que $kh = 3$. Cette fréquence étant inférieure à la première fréquence de coupure π , seul le mode plan est propagatif dans les parties droites du système considéré. L'effet de la courbure sur le profil de pression dans le coude peut donc être apprécié, de même que l'influence des modes évanescents dans les parties droites, même relativement loin des discontinuités. Ainsi, malgré la fréquence, relativement basse, et le type de source, parfaitement uniforme, le champ acoustique obtenu est loin d'être trivial.

Le coefficient de réflexion en amplitude pour le mode plan (cf. Pagneux *et coll.* [57]) est calculé à l'entrée du coude, dans le système décrit précédemment, en fonction de la fréquence, variant entre zéro et la première fréquence de coupure (fig. 2.7). Les résultats numériques et expérimentaux de Cabelli [12] sont également reportés, et montrent un bon accord de la méthode multimodale avec les mesures expérimentales. En revanche, alors que la méthode des différences finies semble donner des résultats satisfaisants aux basses fréquences, les valeurs proches de la coupure sont sous-estimées. Deux raisons peuvent expliquer ces imprécisions. La formulation de la condition d'anéchoïcité, tout d'abord : Cabelli impose à une distance $0.8h$ en aval du coude une condition assurant l'absence de réflexion du mode propagatif et du premier mode évanescent uniquement. Proche de la coupure, cette condition peut

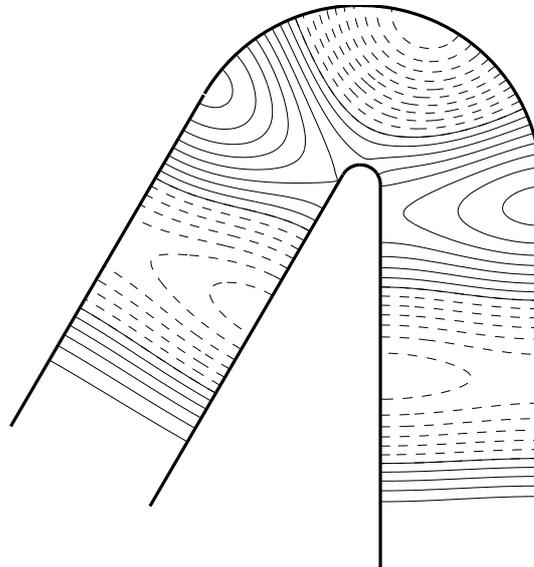


FIG. 2.6: Champ de pression (partie réelle) dans un coude; $R_0/h = 0.625$, $s_f/R_0 = 2.62$. Une condition de type piston en pression de fréquence $kh = 3$ est imposée à une distance $2h$ en amont du coude.

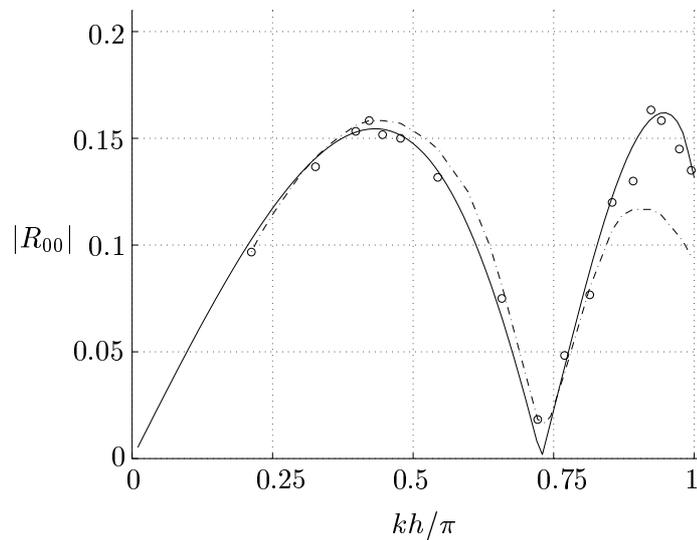


FIG. 2.7: Variations du coefficient de réflexion en amplitude pour le mode plan avec la fréquence adimensionnée kh/π . Méthode multimodale (—), différences finies (---) [12], résultats expérimentaux (\circ) [12]; $R_0/h = 0.625$, $s_f/R_0 = 2.62$.

s'avérer trop simpliste. Enfin, le calcul du coefficient de réflexion lui-même : Cabelli le déduit du taux d'onde stationnaire, ce qui suppose que l'onde est plane, donc qu'il n'y a pas d'effet significatif des modes évanescents. Les résultats donnés précédemment, le champ représenté sur la figure 2.6 notamment, montrent que l'effet des modes évanescents est tout à fait significatif proche de la coupure. L'hypothèse d'onde plane au niveau des discontinuités peut donc être une source notable d'erreur, que la méthode multimodale permet d'éviter dès lors qu'un nombre suffisant de modes évanescents est pris en compte pour obtenir des résultats précis.

2.5 Guide courbe de section variable

Dans cette section, L'étude initiée par Pagneux *et coll.* [57, 4] pour les guides d'axe rectiligne et de section variable est étendue aux guides courbes de section variable. Une nouvelle équation de Riccati pour l'impédance est déterminée et différents résultats de cette formulation généralisée sont présentés. Les notations utiles sont définies sur la figure 2.8.

2.5.1 Formulation

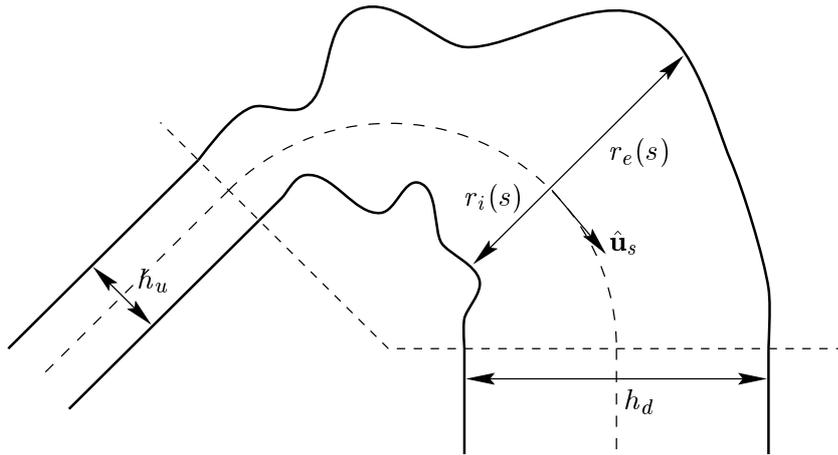


FIG. 2.8: Guide courbe de section variable et notations.

Les modes ψ_α sont ici fonctions de r et s :

$$\psi_\alpha(r, s) = \sqrt{2 - \delta_{\alpha 0}} \cos \left(\alpha \pi \frac{r_i(s) - r}{r_i(s) - r_e(s)} \right).$$

D'autre part, la condition de Neumann sur les parois supposées rigides et parfaitement réfléchissantes est maintenant $\partial_n p = 0$, n désignant la normale à la paroi. La projection des équations (2.3) et (2.4) sur la base de fonctions $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ donne, en tenant compte des deux remarques précédentes (cf. annexe C),

$$\mathbf{P}' = -jkBU + (E - D)\mathbf{P}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{P} - DU, \quad (2.24)$$

où

$$D_{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{1 - \delta_{\alpha 0}}{2} \frac{r'_i - r'_e}{r_i - r_e} & \text{pour } \alpha = \beta \\ A_\alpha A_\beta \frac{r'_i - (-1)^{\alpha+\beta} r'_e}{r_i - r_e} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} & \text{pour } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.25)$$

et

$$E_{\alpha\beta} = A_\alpha A_\beta \frac{r'_i - (-1)^{\alpha+\beta} r'_e}{r_i - r_e}, \quad (2.26)$$

avec $A_\alpha = \sqrt{2 - \delta_{\alpha 0}}$. L'équation de Riccati satisfaite par l'impédance Z , déduite des équations (2.23), (2.24) et (2.10) est dans ce cas :

$$Z' = -jkB - \frac{1}{jk} Z(C + KB)Z + ZD - DZ + EZ.$$

Les équations (2.7), (2.8) sont donc simplement modifiées par l'addition de termes, fonctions de r'_i et r'_e , c'est-à-dire des variations de la section du guide. La même procédure que celle décrite au paragraphe 2.2.3 peut maintenant être utilisée pour calculer le champ acoustique ou le coefficient de réflexion d'une telle géométrie.

2.5.2 Résultats

Le guide que nous considérons ici est une « trompe » (fig. 2.9), reliant deux guides droits semi-infinis, dont les largeurs h_u (en amont) et h_d (en aval) vérifient $h_d/h_u = 0.25$. $r_i(s)$ et $r_e(s)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} r_i(s) &= -(h_d - h_u) \left(\frac{s}{s_f}\right)^3 + \frac{3}{2}(h_d - h_u) \left(\frac{s}{s_f}\right)^2 + \frac{h_u}{2}, \\ r_e(s) &= -r_i(s), \end{aligned} \quad (2.27)$$

où R_0 et s_f vérifient $R_0/h_u = 1.25$ et $s_f/R_0 = 2.62$. Le champ de pression représenté sur cette figure est calculé en prenant en compte 15 modes, avec une fréquence telle que $kh_u = 3$. Une condition de type piston en pression ($P_\alpha = \delta_{\alpha 0}$) est imposée à une distance $d = 1.25h_u$ en amont du coude.

Afin de déterminer la vitesse de convergence de la méthode reformulée, le champ calculé dans ce même guide, en prenant $d = 0$ et 20 modes, est pris comme solution de référence - on suppose donc la convergence atteinte - et l'erreur (2.22) est calculée en fonction du nombre de modes pris en compte (fig. 2.10). Elle suit une loi géométrique en $1/N^{2\pm 0.5}$, N étant le nombre de modes. La vitesse de convergence est donc plus faible que dans le cas d'une section constante, bien qu'elle reste relativement élevée, car les fonctions de base ψ_α ne satisfont plus à la condition de Neumann imposant une dérivée normale nulle aux parois. Des travaux sont en cours pour améliorer la convergence de la méthode multimodale par l'utilisation de bases mixtes de modes [7].

La figure 2.10 montre d'autre part un comportement inattendu : l'addition des modes transverses antisymétriques (N pair) dans le calcul semble n'avoir aucune incidence sur l'erreur, ce qui signifie que

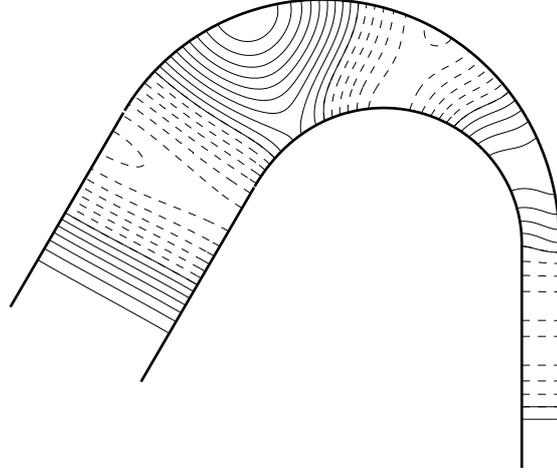


FIG. 2.9: Champ de pression (partie réelle) dans une trompe; $h_d/h_u = 0.25$, $R_0/h_u = 1.25$, $s_f/R_0 = 2.62$. $r_i(s)$ et $r_e(s)$ sont donnés par les équations (2.27). Une condition de type piston en pression de fréquence $kh_u = 3$ est imposée à une distance $1.25h_u$ en amont du coude.

la contribution de ces modes à la solution est négligeable, à l'exception du premier mode antisymétrique ($N = 2$). Ceci est dû vraisemblablement à la nature du couplage entre les modes. Rappelons que deux causes de couplage doivent être considérées dans une telle géométrie : la courbure du guide et les variations de sa section. La première contribue à la génération des premiers modes d'ordres supérieurs seulement, les effets de la seconde étant ensuite prépondérants. Or le couplage dû aux variations de la section est responsable de la génération de modes symétriques uniquement, du fait de la nature de la source - un piston plan - dans notre exemple. D'où sans doute la faible influence des modes antisymétriques.

Coefficient de réflexion

Le coefficient de réflexion en amplitude pour le mode plan est calculé à l'entrée de la trompe ($s = 0$) en fonction de la fréquence, variant entre zéro et la première fréquence de coupure dans le tube amont, de largeur h_u (fig. 2.11). Sa valeur limite pour $kh_u = 0$ est naturellement

$$\left| \frac{h_u - h_d}{h_u + h_d} \right| = 0.6 ;$$

cette limite correspond au coefficient de réflexion d'une discontinuité de section dans un tube droit, dans la limite basse fréquence. Comme c'était le cas pour le coude de section constante, les effets de la courbure s'estompent aux basses fréquences.

2.6 Conclusion

Une formulation multimodale de la propagation acoustique dans un coude bidimensionnel a été mise en place et validée. Cette méthode est valable quelles que soient les dimensions du coude et la fréquence

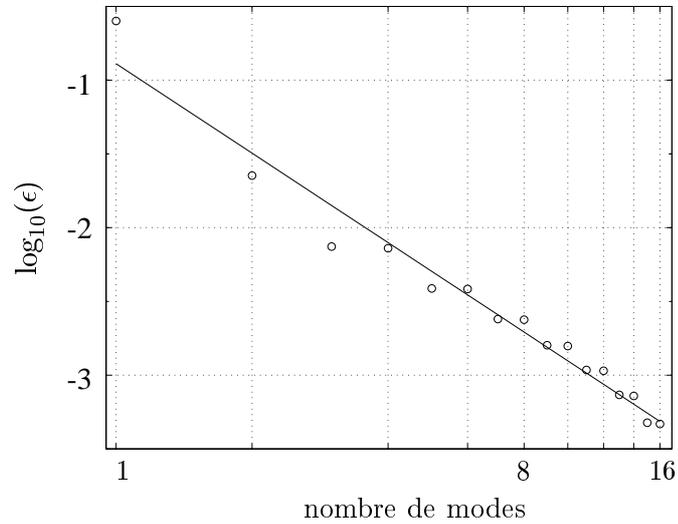


FIG. 2.10: Convergence de la méthode reformulée. Le logarithme de l'erreur, $\log_{10}(\epsilon)$, est tracé en fonction du nombre de modes pour la configuration représentée sur la figure 2.9, avec la source placée à l'entrée de la partie courbe.

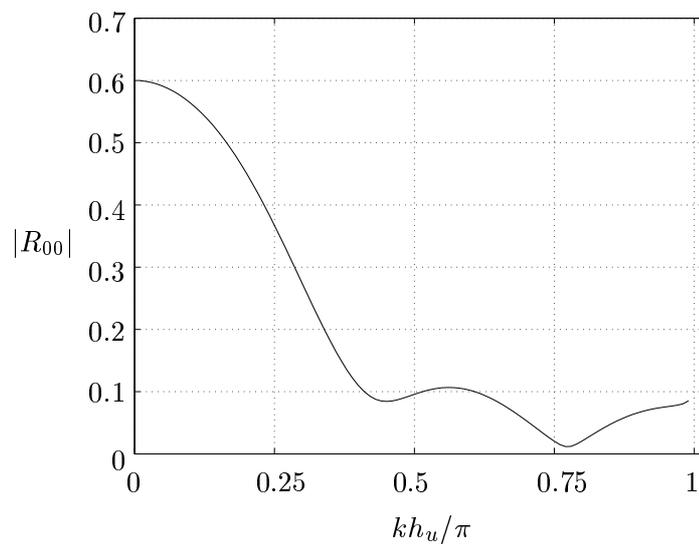


FIG. 2.11: Variations du coefficient de réflexion en amplitude pour le mode plan avec la fréquence adimensionnée kh_u/π , calculée à l'entrée de la trompe représentée sur la figure 2.9.

de la source, et, au contraire de la méthode des modes de coude, elle permet de s'affranchir du calcul pour chaque fréquence des nombres d'ondes angulaires, solutions de la relation de dispersion implicite dans le coude, ainsi que des difficultés mathématiques et numériques de raccordement aux extrémités. Le raccordement du coude avec des guides de géométries variées peut donc aisément être envisagé. En particulier, la pertinence de cette méthode pour la formulation des conditions de rayonnement a été montrée.

L'observation de l'influence des modes évanescents au niveau des discontinuités aux extrémités du coude montre l'importance d'une méthode prenant en compte ces modes. L'extension de la méthode multimodale aux guides courbes de section variable a également été étudiée et met en évidence son large champ d'application.

Annexe A

En intégrant sur la section du guide l'équation d'Euler $-jk(1 - \kappa r)v_s = \partial_s p$, après multiplication de celle-ci par la fonction propre ψ_α , il vient

$$-jk \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \kappa r)v_s \psi_\alpha \, dr = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial p}{\partial s} \psi_\alpha \, dr. \quad (2.28)$$

En substituant alors à p et v_s les décompositions en série (2.5) et (2.6), l'équation (2.28) donne

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad -jk \sum_{\beta \in \mathbb{N}} \left(\int_{-h/2}^{h/2} (1 - \kappa r) \psi_\alpha \psi_\beta \, dr \right) U_\beta = h \frac{\partial}{\partial s} P_\alpha,$$

d'où

$$-jkB\mathbf{U} = \mathbf{P}',$$

avec B donnée par (2.9). L'équation (2.8) se déduit de la même manière de l'équation de conservation de la masse (2.4).

Annexe B

On souhaite établir par un calcul en perturbation la solution de l'équation (2.15), soit

$$(1 - 2\tilde{\kappa}\tilde{r} + \tilde{\kappa}^2\tilde{r}^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{r}^2} - (\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}^2\tilde{r}) \frac{\partial p}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\kappa}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{s}^2} + (\tilde{\kappa}^2 - 2\tilde{\kappa}^3\tilde{r} + \tilde{\kappa}^4\tilde{r}^2) \Omega^2 p = 0, \quad (2.29)$$

qui satisfait aux conditions aux limites (2.16) et (2.17) et à la condition de Neumann homogène aux parois. Le développement asymptotique $p = \pi_0 + \tilde{\kappa}\pi_1 + \tilde{\kappa}^2\pi_2 + \dots$ est introduit dans un premier temps dans l'équation (2.29), puis les termes à chaque ordre de $\tilde{\kappa}$ sont annulés :

ordre 0

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \tilde{r}^2} = 0$$

$$(\pi_0)_{\tilde{s}=0} = 1, \quad \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \tilde{s}} \right)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega\pi_0, \quad \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=\pm 1/2} = 0$$

ordre 1

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \tilde{r}^2} = 0$$

$$(\pi_1)_{\tilde{s}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial \tilde{s}} \right)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega\pi_1, \quad \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial \tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=\pm 1/2} = 0$$

ordre 2

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \tilde{s}^2} + \Omega^2 \pi_0 = 0$$

$$(\pi_2)_{\tilde{s}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial \tilde{s}} \right)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega \pi_2, \quad \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial \tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=\pm 1/2} = 0$$

ordre 3

$$\frac{\partial^2 \pi_3}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \tilde{s}^2} + \Omega^2 \pi_1 - 2\tilde{r}\Omega^2 \pi_0 = 0$$

$$(\pi_3)_{\tilde{s}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \pi_3}{\partial \tilde{s}} \right)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega \pi_3, \quad \left(\frac{\partial \pi_3}{\partial \tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=\pm 1/2} = 0$$

ordre 4

$$\frac{\partial^2 \pi_4}{\partial \tilde{r}^2} - 2\tilde{r} \frac{\partial^2 \pi_3}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{\partial \pi_3}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial \tilde{s}^2} + \Omega^2 \pi_2 - 2\tilde{r}\Omega^2 \pi_1 + \tilde{r}^2 \Omega^2 \pi_0 = 0$$

$$(\pi_4)_{\tilde{s}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \pi_4}{\partial \tilde{s}} \right)_{\tilde{s}=\tilde{s}_f} = -j\Omega \pi_4, \quad \left(\frac{\partial \pi_4}{\partial \tilde{r}} \right)_{\tilde{r}=\pm 1/2} = 0$$

Cet ensemble de problèmes linéaires simples peut maintenant être résolu pour calculer les fonctions π_0 , π_1 et π_2 , et par conséquent la solution (2.18) à l'ordre 2 en $\tilde{\kappa}$.

Annexe C

Lorsque les fonctions propres ψ_α dépendent de s , on utilise la règle de Leibniz pour calculer la projection de $\partial_s p$ (ou $\partial_s v_s$) sur la base $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$:

$$\int_{r_e}^{r_i} \frac{\partial p \psi_\alpha}{\partial s} dr = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{r_e}^{r_i} p \psi_\alpha dr \right) - r'_i [p \psi_\alpha]_{r_i} + r'_e [p \psi_\alpha]_{r_e}.$$

Compte tenu de l'égalité

$$\int_{r_e}^{r_i} \frac{\partial p}{\partial s} \psi_\alpha dr = \int_{r_e}^{r_i} \frac{\partial p \psi_\alpha}{\partial s} dr - \int_{r_e}^{r_i} p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} dr,$$

il vient

$$\int_{r_e}^{r_i} \frac{\partial p}{\partial s} \psi_\alpha dr = (r_i - r_e) (P'_\alpha + D_{\alpha\beta} P_\beta - E_{\alpha\beta} P_\beta),$$

avec les matrices D et E données par (2.25) et (2.26).

D'autre part, la projection de $\partial_r((1 - \kappa r)\partial_r p)$ dans l'équation (2.3) fait apparaître le terme

$$[(1 - \kappa r)\partial_r p \psi_\alpha]_{r_e}^{r_i}. \quad (2.30)$$

La condition aux parois étant

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{r'_{i,e}}{(1 - \kappa r_{i,e})^2} \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad (2.31)$$

où n désigne la normale à la paroi, on calcule (2.30) en substituant $\partial_s p$ à $-jk(1 - \kappa r)v_s$ dans (2.31) :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -jk \frac{r'_{1,2}}{1 - \kappa r_{1,2}} v_s.$$

Ainsi,

$$\left[(1 - \kappa r) \frac{\partial p}{\partial r} \psi_\alpha \right]_{r_e}^{r_i} = -jk E_{\alpha\beta} U_\alpha.$$

Chapitre 3

Analyse multimodale de la propagation acoustique dans un coude de section circulaire

Ce chapitre est présenté sous la forme d'un article publié dans la revue *Wave Motion* en août 2002 [22], traduit, adapté et complété.

3.1 Introduction

Dans le système de coordonnées toroïdales, adapté à l'expression des conditions aux limites aux parois d'un coude de section circulaire, c'est-à-dire dans lequel cette géométrie est séparable (cf. §1.1.1), l'équation de Helmholtz n'est, quant à elle, pas séparable [52]. La résolution de ce problème n'est donc pas triviale, et, par conséquent, relativement peu de travaux ont été publiés sur ce sujet ; dans la plupart des cas des méthodes approchées ou purement numériques ont été adoptées (voir [64] pour une revue).

Cummings [15], qui est l'un des premiers à avoir souligné le problème posé par l'impossibilité de « séparer » l'équation d'onde dans le système de coordonnées toroïdales, a suggéré, sur la base de mesures expérimentales, de diviser le domaine - le coude - en une superposition de tranches de section rectangulaire, toutes dans le plan du coude. Chacune de ces tranches est un coude de section rectangulaire dans lequel une résolution analytique est possible. Plus simplement, toujours selon Cummings, il est raisonnable de considérer un unique coude équivalent de section rectangulaire, dont la largeur est égale au diamètre de la section circulaire originale et la hauteur est telle que l'aire de la section rectangulaire est égale à celle de la section circulaire. La méthode « par tranches » a été utilisée en 1983 par Keefe et Benade [34] pour l'analyse de coudes dont la courbure est importante, dans la limite des grandes longueurs d'onde, puis par Nederveen [54] en 1998. En limitant l'étude aux guides de courbure faible, des solutions approchées de l'équation d'onde ont été construites par une approche en perturbation [61, 73].

Outre ces méthodes approchées, des méthodes numériques ont également fait l'objet de publications, dont une méthode d'éléments de frontière (El-Raheb et Wagner [20]), et un calcul basé sur les équations

d'Euler 2D [16].

Une autre approche a été proposée par Firth et Fahy [23] pour déterminer les *modes de tore*, c'est-à-dire les modes d'un coude de section circulaire, par une méthode spectrale. Dans cette étude, les solutions sont supposées de la forme $A(r, \phi)\exp(jk_s s)$, où (r, ϕ, s) sont les coordonnées toroïdales (fig. 3.1). Les solutions $A(r, \phi)$ - les modes de tore -, qui ne sont pas séparables en r et ϕ , sont évaluées sous forme d'un développement sur les modes transversaux d'un guide droit. Les auteurs ont évalué l'allure des modes et les constantes de propagation k_s de ces modes de tore, ainsi que les coefficients de réflexion et de transmission pour un coude d'angle $\pi/2$ rad, en considérant une onde plane incidente et une condition de non-réflexion à chaque extrémité, en amont et en aval du coude. Plus récemment, Furnell et Bies [25, 26] ont mis en place une méthode similaire, de type Rayleigh-Ritz, pour le calcul des fonctions propres transverses dans un guide courbe de section arbitraire, avec une application à un coude de section elliptique. Les solutions obtenues ont été utilisées pour calculer les matrices caractérisant les propriétés modales de réflexion et de transmission du coude. Ces approches pour déterminer les modes de tore « non séparables » sont toutefois difficiles à mettre en place numériquement, entre autres parce qu'il est nécessaire de recalculer les modes pour chaque fréquence, et du fait de la difficulté pour raccorder les solutions obtenues dans le coude avec les solutions extérieures.

Nous présentons dans ce chapitre la formulation d'une méthode modale exacte pour l'analyse de la propagation acoustique dans les coudes tri-dimensionnels de section circulaire. Cette méthode est particulièrement intéressante, tant d'un point de vue théorique que pratique, car elle n'est pas limitée à des valeurs particulières des paramètres géométriques et de la fréquence, et permet en outre un calcul algébrique de la matrice de diffusion d'un coude, et par conséquent, comme nous le verrons, de presque tout système usuel de conduits. Cette approche multimodale a déjà été validée pour les guides d'ondes d'axe rectiligne et de section variable ([57, 4], cf. sec. 1.2) et pour les guides courbes bidimensionnels de section constante ou variable ([21], cf. ch. 2). Son extension aux coudes de section circulaire ouvre un grand champ d'applications, la plupart des systèmes de conduits pratiquement rencontrés étant de section circulaire. D'autre part, outre le fait qu'aucune solution analytique exacte de l'équation d'onde ne peut être obtenue en coordonnées toroïdales, les alternatives à la méthode multimodale sont beaucoup plus contraignantes : les *modes de tore*, dont la détermination n'est pas simple comme nous l'avons vu, ou des méthodes purement numériques qui nécessitent des maillages 3D et/ou de lourdes implémentations.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la définition du problème et à la formulation de la méthode multimodale. Les grandeurs utiles sont introduites et les principales étapes de la formulation sont données, des informations plus détaillées pouvant être obtenues dans les deux chapitres précédents. Un exemple de calcul du champ de pression est présenté dans une seconde partie pour évaluer la vitesse de convergence de la méthode. Enfin, un calcul algébrique de la matrice de diffusion est proposé, suivi d'exemples d'application pour la caractérisation de coudes et de systèmes plus complexes.

3.2 Formulation

Soit une section de courbure finie et constante d'un guide d'ondes à trois dimensions de section circulaire (fig. 3.1). Les notations sont celles du chapitre précédent, et r_0 est le rayon de section du

guide. Les parois sont supposées rigides, parfaitement réfléchissantes et on se place dans le cadre de l'acoustique linéaire, adiabatique, dans un fluide au repos.

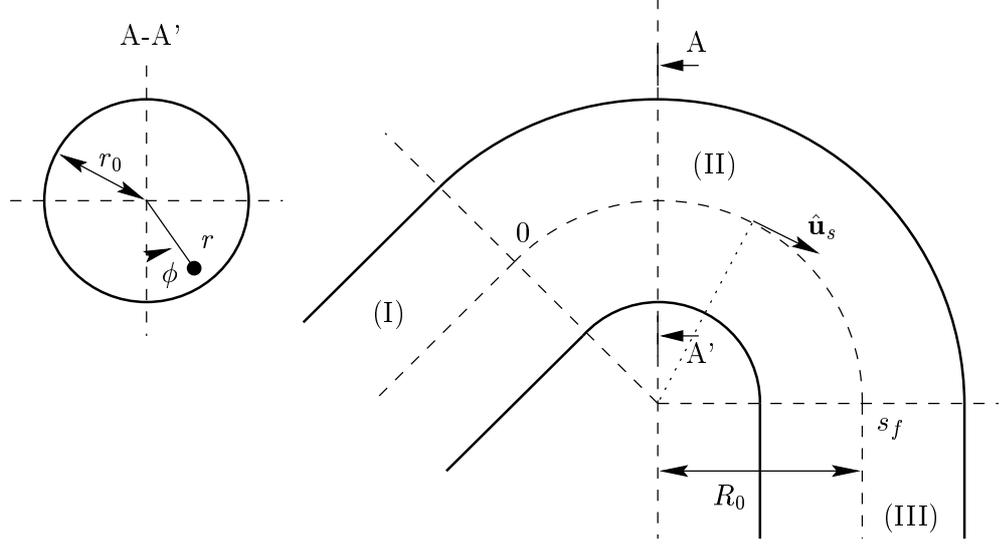


FIG. 3.1: Guide courbe de section circulaire et système de coordonnées.

Les coordonnées adaptées à l'expression des conditions aux parois d'un guide de courbure constante et de section circulaire sont les coordonnées toroïdales (r, ϕ, s) (fig. 3.1). Dans ce système de coordonnées, les équations (2.1) et (2.2), issues des équations de conservation de la quantité de mouvement (1.1) et de conservation de la masse (1.2), s'écrivent (cf. annexe A)

$$\begin{cases} -jkv_r = \frac{\partial p}{\partial r} \\ -jkv_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ -jkv_s = \frac{1}{1 - \kappa r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial s} \end{cases},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\kappa \cos \phi}{1 - \kappa r \cos \phi} \right) v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\kappa \sin \phi}{1 - \kappa r \cos \phi} v_\phi + \frac{1}{1 - \kappa r \cos \phi} \frac{\partial v_s}{\partial s} = -jkp,$$

où v_r , v_ϕ et v_s sont les composantes de la vitesse \mathbf{v} et $\kappa = 1/R_0$ est la courbure de l'axe du coude. Les composantes v_r et v_ϕ éliminées, ces équations donnent

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -jk(1 - \kappa r \cos \phi)v_s, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{1}{jk} \left[(1 - \kappa r \cos \phi)k^2 p + (1 - \kappa r \cos \phi) \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + (1 - 2\kappa r \cos \phi) \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - \kappa r \cos \phi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \kappa \sin \phi \frac{\partial p}{\partial \phi} \right]. \quad (3.2)$$

La pression p et la vitesse longitudinale v_s sont alors projetées sur la base orthonormée (ψ_α) des modes transversaux d'un guide droit de rayon r_0 (cf. §1.1.3) :

$$p(r, \phi, s) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(s) \psi_{\alpha}(r, \phi), \quad (3.3)$$

$$v_s(r, \phi, s) = \sum_{\alpha} U_{\alpha}(s) \psi_{\alpha}(r, \phi), \quad (3.4)$$

où P_{α} et U_{α} sont des fonctions scalaires. Le paramètre α étant un triplet d'entiers, p et v_s sont ici exprimées sous la forme d'une somme triple, qui peut avantageusement être simplifiée en une somme simple. En effet, le guide ayant un plan de symétrie parallèle au plan du tore contenant le coude, une distribution de sources symétrique par rapport à ce plan produira un champ acoustique également symétrique ; de la même manière, une distribution de sources antisymétrique produira un champ antisymétrique [23]. En d'autres termes, il n'y a aucun couplage entre les modes caractérisés par un indice de symétrie $\sigma = 1$ (modes symétriques) et ceux caractérisés par $\sigma = 0$ (modes antisymétriques). Nous pouvons donc éliminer la somme sur cette indice et considérer deux problèmes similaires et indépendants. Sans cette symétrie on observerait un couplage entre les modes symétriques et antisymétriques, sans que cela compromette la formulation de la méthode multimodale. D'autre part, la double somme sur les indices radial et circonférentiel peut être réduite à une somme simple en classant les modes ψ_{α} par ordre croissant de leur fréquence de coupure. Ainsi, on considérera dans la suite que σ a une valeur fixe, déterminée par la source, et que α est un entier positif (associé aux indices m et n), ψ_0 correspondant au mode plan.

Les décompositions modales (3.3) et (3.4) sont écrites vectoriellement :

$$p = {}^t\psi \mathbf{P},$$

$$v_s = {}^t\psi \mathbf{U}.$$

En projetant sur la base des fonctions ψ_{α} les équations (3.1) et (3.2), il vient

$$\mathbf{P}' = -jkB\mathbf{U}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{P}, \quad (3.6)$$

avec

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \quad K_{\alpha\beta} = \left(k^2 - \frac{\gamma_{mn}^2}{r_0^2}\right) \delta_{\alpha\beta},$$

où γ_{mn} est le $(n+1)$ ème zéro de J'_m , dérivée de la fonction de Bessel d'ordre m (cf. §1.1.3). Les matrices B et C sont données en annexe B ; comme dans le cas à deux dimensions (cf. §2.2.1), ces matrices ne dépendent que des paramètres géométriques, et n'ont donc pas à être recalculées pour chaque fréquence. Telles qu'elles sont écrites, les équations différentielles couplées (3.5) et (3.6) sont identiques aux équations (2.7) et (2.8) obtenues au chapitre précédent pour le problème à deux dimensions. Nous

rappellerons donc uniquement les principales étapes de la formulation de la méthode multimodale, et le lecteur pourra se référer aux chapitres 1 et 2 pour d'éventuelles précisions.

Du fait de la présence de modes évanescents (correspondants à $K_{\alpha\beta} < 0$), les équations (3.5) et (3.6) sont numériquement instables et ne peuvent être intégrées directement. Ce problème est évité en calculant les valeurs de la matrice impédance, donnée par $\mathbf{P} = \mathbf{Z}\mathbf{U}$, le long du guide. Z est solution de l'équation de Riccati

$$Z' = -jkB - \frac{1}{jk}Z(C + KB)Z.$$

L'impédance connue, les champs de pression et de vitesse peuvent être calculés à l'aide des équations

$$\mathbf{P}' = -jkBY\mathbf{P},$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{Z}\mathbf{U},$$

où Y est la matrice admittance ($Y = Z^{-1}$). Ainsi reformulées, ces équations sont numériquement stables. Ce formalisme permet notamment d'étendre le calcul de Z , \mathbf{P} et \mathbf{U} à tout type de guide de section circulaire en amont ou en aval du coude et permet, par conséquent, l'étude de systèmes complexes.

3.3 Calcul du champ : étude de la convergence

Nous supposons dans cette section que la région (III) en aval du coude (fig. 3.1) est un guide droit semi-infini de section constante. La condition de rayonnement est donc l'impédance caractéristique Z_c , diagonale et donnée par

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad Z_{c\alpha} = \frac{k}{k_\alpha}, \quad (3.7)$$

où

$$k_\alpha = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{\gamma_{mn}}{r_0}\right)^2} & \text{pour les modes propagatifs,} \\ -j\sqrt{\left(\frac{\gamma_{mn}}{r_0}\right)^2 - k^2} & \text{pour les modes évanescents.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Le champ de pression étant obtenu à l'aide des équations données précédemment, les quantités ϵ_1 et ϵ_2 suivantes sont définies pour évaluer la vitesse de convergence de la méthode :

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\int_{\phi=0,\pi} \|p - p_{ref}\|^2 (1 - \kappa r) dr ds}{\int_{\phi=0,\pi} \|p_{ref}\|^2 (1 - \kappa r) dr ds} \right)^{1/2},$$

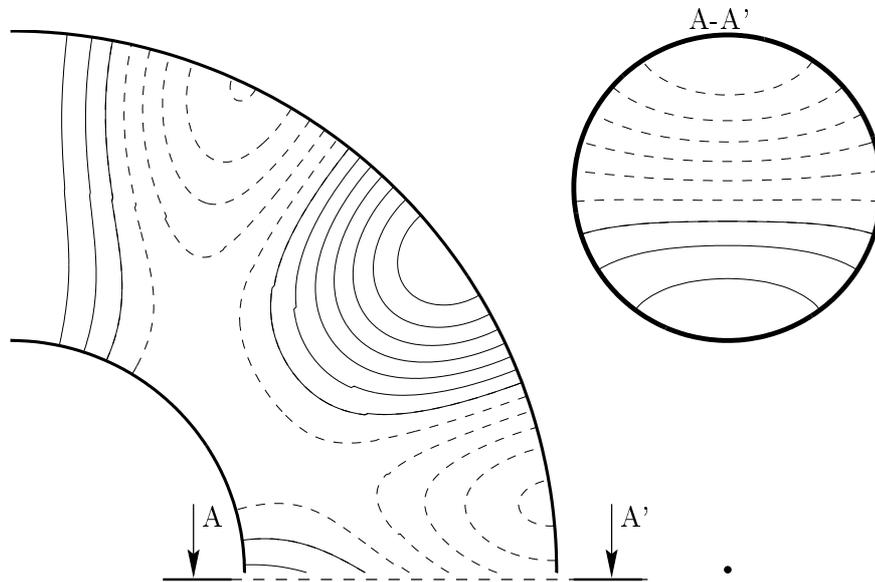


FIG. 3.2: Champ de pression (partie réelle); $R_0/r_0 = 2.5$, $\theta_f = s_f/R_0 = \frac{\pi}{2}$, $kr_0 = 2.4$.

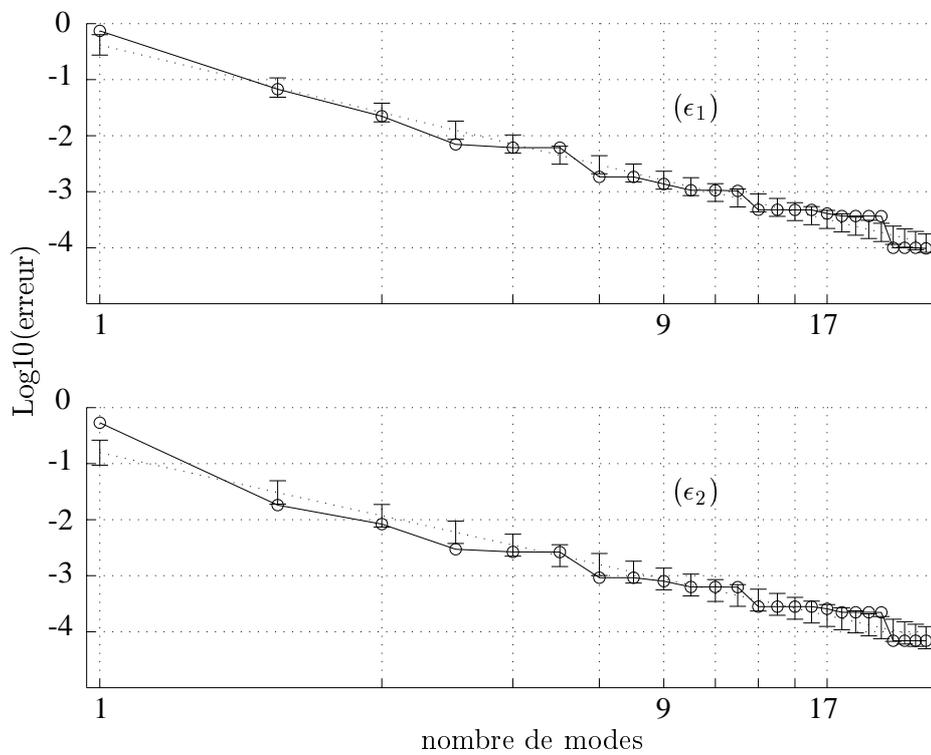


FIG. 3.3: Convergence de la méthode multimodale.

$$\epsilon_2 = \left(\frac{\int_{s=s_f} \|p - p_{ref}\|^2 r \, dr d\phi}{\int_{s=s_f} \|p_{ref}\|^2 r \, dr d\phi} \right)^{1/2},$$

où la solution de référence p_{ref} est celle obtenue par la méthode multimodale avec 30 modes pris en compte dans le calcul, en supposant donc que la convergence est atteinte. L'erreur ϵ_1 est intégrée sur la surface représentée sur la figure 3.2 à gauche et ϵ_2 est calculée sur la section A - A' (fig. 3.2 à droite). Une condition de type piston en pression est imposée à l'entrée du coude ($s = 0$), et les paramètres sont $R_0/r_0 = 2.5$, $\theta_f = s_f/R_0 = \pi/2$ et $kr_0 = 2.4$. Les erreurs ϵ_1 et ϵ_2 décroissent quand le nombre N de modes pris en compte dans le calcul numérique augmente, suivant une loi géométrique en $1/N^{2.5 \pm 0.3}$ (fig. 3.3). Chaque mode introduit dans le calcul contribue bien sûr de manière différente à la convergence de la solution. Ainsi, outre les premiers modes, les 7^e, 13^e ou 22^e modes dans notre exemple (fig. 3.3) contribuent de manière significative à la convergence, quand la contribution d'autres modes (par exemple les 8^e, 11^e, 14^e, 16^e, ...) semble négligeable. Les 7^e, 13^e et 22^e modes sont ceux dont l'indice circonférentiel m vaut 1, soit ceux ayant des symétries similaires à celles de la solution transverse (voir la section A - A' sur la figure 3.2). Par contre, ceux dont la contribution semble négligeable sont essentiellement des modes « circonférentiels », avec de relativement grandes valeurs de m . Au vu des faibles variations de la solution avec ϕ , il est clair que ces modes apportent une information d'importance secondaire. Comme nous l'avons précisé précédemment, les modes ont été classés par ordre croissant de leur fréquence de coupure ; il apparaît donc qu'un autre arrangement pourrait accroître la vitesse de convergence, sous réserve toutefois d'une connaissance a priori des symétries de la solution.

3.4 Propriétés de diffusion

La suite de ce chapitre concerne l'application de la méthode multimodale à l'étude des propriétés de diffusion d'un coude, dans la présente section, et de systèmes plus complexes, dans la suivante.

Soient $\mathbf{P}^{(i)}$, $\mathbf{P}^{(r)}$ et $\mathbf{P}^{(t)}$ les ondes incidente, réfléchie et transmise, respectivement, par le coude. Les relations $\mathbf{P}^{(r)} = R\mathbf{P}^{(i)}$ et $\mathbf{P}^{(t)} = T\mathbf{P}^{(i)}$ définissent les matrices R et T caractérisant les propriétés modales de réflexion et de transmission du coude. Lorsque l'impédance à l'entrée du coude est connue, la matrice des coefficients de réflexion R peut aisément être obtenue, sans qu'il soit nécessaire de calculer le champ acoustique au préalable ou de définir une source, comme on l'a vu au chapitre précédent (voir également [57]) : on a $R = Z_c(Z + Z_c)^{-1}(Z - Z_c)Z_c^{-1}$, où Z est l'impédance d'entrée du coude et Z_c l'impédance caractéristique (éq. 3.7 et 3.8). En outre, lorsque la section du guide est constante, et c'est le cas dans notre étude à l'exception de la section 2.5, le formalisme que nous avons adopté nous permet de proposer pour R et T une formulation algébrique (cf. annexe C). Cette formulation, similaire à celle publiée par Tam [71], est particulièrement intéressante dans la mesure où elle permet de calculer les matrices réflexion et transmission par simple inversion de matrices d'ordre $N_{modes} \times N_{modes}$, et ne nécessite donc aucun processus itératif ni aucune intégration numérique.

Sur la figure 3.4 sont représentés les modules des coefficients de réflexion R_{00} , R_{10} , R_{20} et de transmission T_{00} , T_{10} , T_{20} du coude considéré dans la section 3.3, dont les dimensions sont $R_0/r_0 = 2.5$

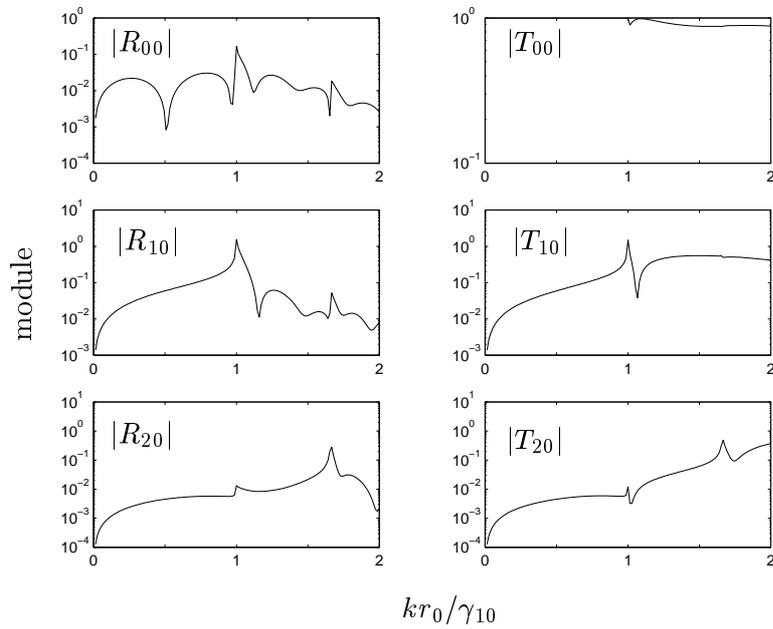


FIG. 3.4: Coefficients de réflexion et transmission du coude : méthode multimodale.

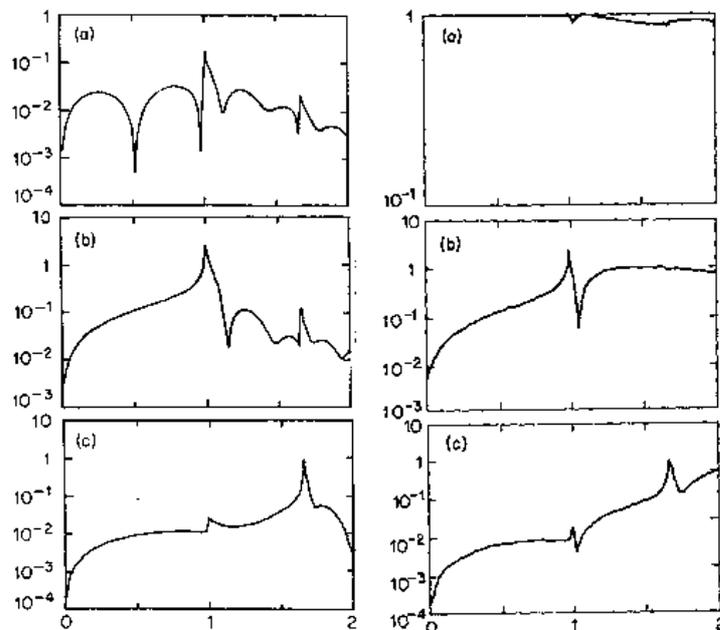


FIG. 3.5: Coefficients de réflexion et transmission du coude : résultats de Firth et Fahy [23]. La représentation (ordre des figures, axes, échelles, ...) est identique à celle de la figure 3.4.

et $\theta_f = \pi/2$. La fréquence varie de zéro à deux fois la première fréquence de coupure dans un guide droit : $kr_0 \in [0, 2\gamma_{10}]$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $R_{\alpha 0}$ (respectivement $T_{\alpha 0}$) donne la contribution de l'onde plane incidente au $(\alpha + 1)$ ème mode réfléchi (respectivement transmis). Les différents paramètres ont été choisis pour permettre une comparaison avec les résultats publiés par Firth et Fahy [23] : l'accord entre ces résultats et le calcul algébrique est très bon (fig. 3.5).

3.5 Résonances de cavités annulaires

Nous disposons avec la formulation algébrique des matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une méthode simple et directe pour déterminer les propriétés de diffusion d'un coude. Mais ce résultat rend également possible la caractérisation de systèmes plus complexes. A titre d'exemple, nous présentons dans cette section une application pour le calcul des fréquences de résonance de deux systèmes annulaires.

3.5.1 Matrice de diffusion et calcul des fréquences de résonance

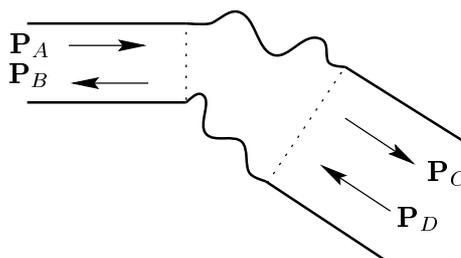


FIG. 3.6: Élément diffuseur dans un guide d'ondes.

Considérons un élément quelconque d'un guide d'ondes (fig. 3.6) ; la matrice de diffusion de cet élément relie les ondes « sortantes » \mathbf{P}_C et \mathbf{P}_B aux ondes « entrantes » \mathbf{P}_A et \mathbf{P}_D :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_C \\ \mathbf{P}_B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{P}_A \\ \mathbf{P}_D \end{pmatrix}.$$

Elle s'écrit donc

$$S = \begin{pmatrix} T & R' \\ R & T' \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

où R et T sont les matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente se propageant vers la droite, et R' et T' les matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente se propageant vers la gauche. Si l'élément diffuseur est symétrique, la matrice S est symétrique par blocs : $R = R'$, $T = T'$. Dans le cas d'un coude, les matrices R et T peuvent être calculées analytiquement comme nous l'avons vu. Il en est de même pour la matrice de transmission d'un segment droit, dont l'expression est rappelée en annexe D (la matrice de réflexion est nulle dans ce cas). Considérons maintenant un système composé d'une succession de différents éléments. Si la

matrice de diffusion de chaque élément est connue, il est possible, par un calcul itératif, de déterminer analytiquement la matrice de diffusion $S_{sys.}$ du système complet (cf. annexe D), et d'accéder ainsi à ses propriétés de réflexion et de transmission. De plus, si ce système est fermé - il s'agit alors d'une cavité annulaire - la formulation de la condition de fermeture conduit à la relation de dispersion

$$\det(S_{sys.} - I) = 0, \quad (3.10)$$

où I est la matrice identité ($I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Les solutions de l'équation (3.10) sont les fréquences de résonance de la cavité.

3.5.2 Résonances d'une cavité torique

Le tore est un coude d'angle 2π dont la matrice de diffusion S_{tore} peut être calculée directement avec les expressions de R et T données en annexe C. Les solutions de l'équation (3.10), avec $S_{sys.} = S_{tore}$, qui traduit le fait que ce coude est fermé sur lui-même, nous donnent les fréquences de résonance du tore.

TAB. 3.1: Fréquences de résonance du tore, adimensionnées par γ_{10}/r_0 . Seules les fréquences inférieures à la première fréquence de coupure γ_{10}/r_0 sont données. Première colonne : S_{tore} est la matrice de diffusion d'un coude d'angle total 2π , calculée avec 15 modes; deuxième colonne : $S_{approx.}$ est la matrice de diffusion d'un tube droit de longueur $2\pi R_0$, calculée avec 15 modes; troisième colonne : résultats déduits des courbes de dispersion pour le premier mode de tore, publiées par Firth and Fahy [23].

| $\det(S_{torus} - I) = 0$ | $\det(S_{approx.} - I) = 0$ | Firth & Fahy |
|---------------------------|-----------------------------|--------------|
| 0.2210 | 0.2173 | 0.22 |
| 0.4367 | 0.4345 | 0.44 |
| 0.6434 | 0.6518 | 0.64 |
| 0.8397 | 0.8690 | 0.84 |

Les fréquences obtenues pour un tore dont les dimensions sont telles que $R_0/r_0 = 2.5$ sont données dans la première colonne du tableau 3.1. Seules les fréquences inférieures à la première fréquence de coupure γ_{10}/r_0 (cf. §1.1.3) sont données. La deuxième colonne du tableau montre les mêmes résultats, mais cette fois sans prendre en compte les effets de courbure, c'est-à-dire en considérant un segment droit de longueur $2\pi R_0$, la longueur de l'axe du tore, auquel on impose artificiellement la condition (3.10). Ces résultats sont comparés avec des valeurs déduites des courbes de dispersion publiées par Firth et Fahy [23] pour le premier mode de tore. Bien que l'effet de la courbure soit a priori faible dans ce domaine de fréquence - les résultats des deux premières colonnes sont très proches - il est tout de même possible de distinguer les résultats des première et troisième colonnes de ceux de la deuxième¹, donc de mettre en évidence cet effet.

¹ malgré la plus faible précision avec laquelle nous avons pu déduire ces valeurs des courbes de Firth et Fahy (tab. 3.1)

3.5.3 Résonances d'une cavité annulaire comportant des parties droites

Nous nous intéressons maintenant à une cavité annulaire plus complexe, composée de coudes d'angle $\pi/2$ et de segments droits de longueurs l_1 et l_2 (fig. 3.7). La matrice de diffusion de chaque élément étant connue, la matrice globale $S_{ann.}$ est calculée itérativement par la formule donnée en annexe D. Les zéros de $|S_{ann.} - I|$ sont alors calculés afin de déterminer les fréquences de résonance de cette cavité (fig. 3.8). A nouveau ces résultats sont comparés avec ceux obtenus sans prendre en compte les effets de courbure, c'est-à-dire en calculant les fréquences de résonance d'un guide droit de longueur $2l_1 + 2l_2 + 2\pi R_0$ artificiellement fermé. Les dimensions de la cavité sont telles que $R_0/r_0 = 1.25$, $l_1/r_0 = 1.5$, et $l_2/r_0 = 0.75$.

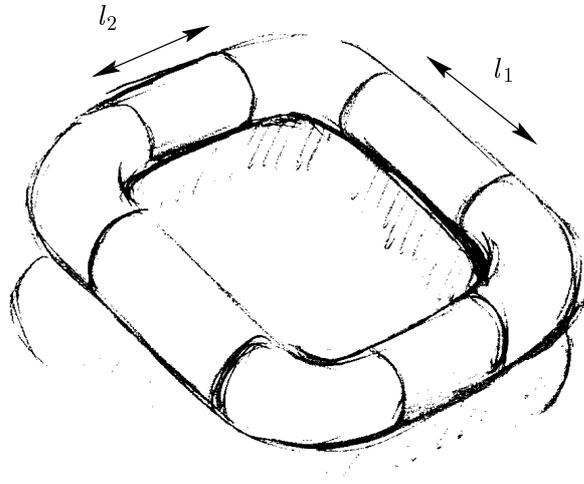


FIG. 3.7: Schéma de la cavité.

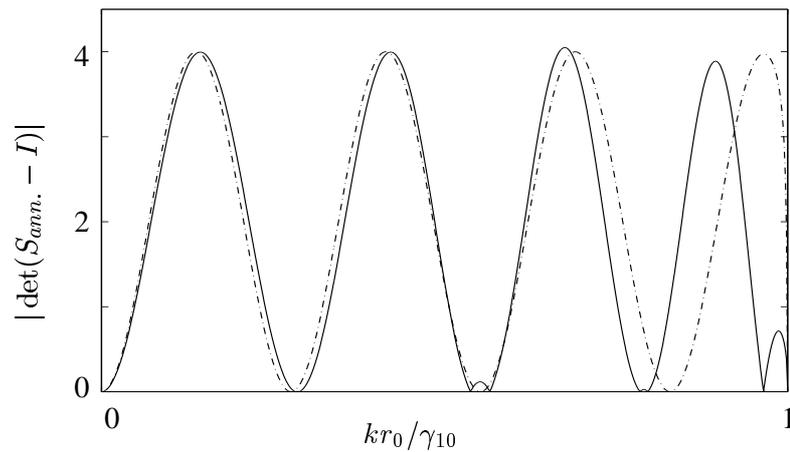


FIG. 3.8: Module du déterminant de $S_{ann.} - I$ (—) et module du déterminant de $S_{approx.} - I$ (---) en fonction de la fréquence, où $S_{approx.}$ est la matrice de diffusion d'un guide droit de longueur $2l_1 + 2l_2 + 2\pi R_0$. $R_0/r_0 = 1.25$, $l_1/r_0 = 1.5$, $l_2/r_0 = 0.75$.

La courbure des coudes étant relativement grande, les résultats des deux approches se distinguent rapidement lorsque la fréquence augmente. Notons d'autre part que chaque zéro de la courbe en trait plein (chaque fréquence de résonance de la cavité) se sépare en deux valeurs distinctes. Lors du calcul des fréquences de résonance du tore, nous n'avons pas observé ce dédoublement. Les propriétés de symétrie de ces géométries expliquent cette différence : chaque valeur propre k est dégénérée deux fois pour le tore, dont la géométrie est invariante par toute rotation autour de l'axe normal au plan du tore. La présence des parties droites dans la cavité représentée sur la figure 3.7 lève cette dégénérescence, car la propriété de symétrie est perdue (cette géométrie possède seulement deux plans de symétrie). Considérons maintenant la même cavité avec $l_1 = l_2$: elle possède un plan de symétrie supplémentaire, et une valeur propre sur deux est à nouveau dégénérée (fig. 3.9).

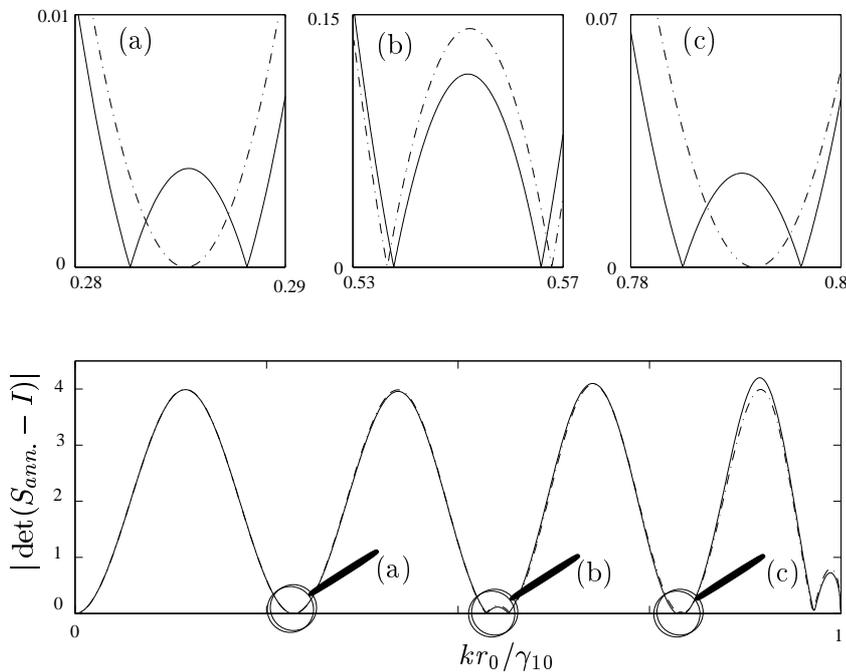


FIG. 3.9: Module du déterminant de $S_{ann.} - I$ pour $l_1/r_0 = 1.5$ et $l_2/r_0 = 0.75$ (—), et pour $l_1/r_0 = l_2/r_0 = 1.125$ (-·-). La longueur $2l_1 + 2l_2 + 2\pi R_0$ est la même pour ces deux cavités. Les zones (a), (b) et (c) où les déterminants s'annulent sont représentées au-dessus à plus petite échelle.

3.6 Conclusion

Une méthode multimodale pour l'analyse de la propagation acoustique dans un coude de section circulaire a été mise en place. Grâce au calcul de l'impédance le long du guide, cette méthode est adaptée à la formulation des conditions de rayonnement et à l'étude de guides assemblés.

Quels que soient la fréquence de la source et les dimensions du coude, une caractérisation directe et précise est possible par l'impédance d'entrée ou les propriétés de réflexion, sans qu'un calcul préalable du champ ou que des hypothèses sur la source soient nécessaires. Une formulation algébrique des

matrices des coefficients de réflexion et de transmission a été donnée, qui permet l'étude des propriétés de diffusion et les résonances de systèmes complexes.

La formulation de la méthode multimodale dans un coude dont la section n'est ni rectangulaire ni circulaire est réalisable de la même manière, dès lors qu'une base de fonctions propres est déterminée.

Annexe A

Les coordonnées toroïdales utilisées dans ce chapitre sont $r \in [0, r_0]$, $\phi \in [0, 2\pi[$ et $s \in [0, s_f]$ (fig. 3.1). Elles sont orthogonales et l'élément différentiel $d\mathbf{r}$ est donné par

$$d\mathbf{r} = h_r dr \hat{\mathbf{u}}_r + h_\phi d\phi \hat{\mathbf{u}}_\phi + h_s ds \hat{\mathbf{u}}_s,$$

avec $h_r = 1$, $h_\phi = r$, $h_s = 1 - \kappa r \cos \phi$. Les opérateurs gradient et divergence sont donc dans ce système de coordonnées

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{u}}_\phi + \frac{1}{1 - \kappa r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial s} \hat{\mathbf{u}}_s$$

et

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} = & \frac{\partial F_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\kappa \cos \phi}{1 - \kappa r \cos \phi} \right) F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\kappa \sin \phi}{1 - \kappa r \cos \phi} F_\phi \\ & + \frac{1}{1 - \kappa r \cos \phi} \frac{\partial F_s}{\partial s}, \end{aligned}$$

où f est une fonction scalaire de r , ϕ et s et $\mathbf{F} = (F_r, F_\phi, F_s)$ une fonction vectorielle.

Annexe B

Le paramètre α est associé aux indices circonférentiel et radial m et n , et β aux indices μ et ν .

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta \frac{\kappa}{\pi r_0^2} \mathcal{J}_{m\mu} \int_0^{r_0} r^2 J_m \left(\frac{\gamma_{mn} r}{r_0} \right) J_\mu \left(\frac{\gamma_{\mu\nu} r}{r_0} \right) dr, \\ C_{\alpha\beta} = & A_\alpha A_\beta \frac{\gamma_{mn} \kappa}{\pi r_0^3} \mathcal{J}_{m\mu} \int_0^{r_0} r J_{m+1} \left(\frac{\gamma_{mn} r}{r_0} \right) J_\mu \left(\frac{\gamma_{\mu\nu} r}{r_0} \right) dr \\ & - A_\alpha A_\beta m \frac{\kappa}{\pi r_0^2} \left(\mathcal{J}_{m\mu} - \mathcal{H}_{m\mu} \right) \int_0^{r_0} J_m \left(\frac{\gamma_{mn} r}{r_0} \right) J_\mu \left(\frac{\gamma_{\mu\nu} r}{r_0} \right) dr, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{m\mu} = & \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \left(m\phi + \frac{\sigma\pi}{2} \right) \sin \left(\mu\phi + \frac{\sigma\pi}{2} \right) d\phi \\ = & \frac{\pi}{2} \delta_{|m-\mu|,1} \left(1 + (\delta_{\sigma 1} - \delta_{\sigma 0})(\delta_{m0} + \delta_{\mu 0}) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{m\mu} &= \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \left(m\phi + \frac{\sigma\pi}{2} \right) \sin \left(\mu\phi + \frac{\sigma\pi}{2} \right) d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\delta_{\mu-m,1} (1 - (\delta_{\sigma 1} - \delta_{\sigma 0}) \delta_{m0}) - \delta_{m-\mu,1} (1 + (\delta_{\sigma 1} - \delta_{\sigma 0}) \delta_{\mu 0}) \right).
\end{aligned}$$

Annexe C

Une formulation algébrique des matrices réflexion et transmission, similaire à celle proposée par Tam [71], est développée dans cette annexe.

Le système que nous considérons (fig. 3.1) est constitué d'un coude de courbure constante joignant deux guides droits semi-infinis. Les ondes incidente et réfléchie dans la région (I) et transmise dans la région (III) sont écrites respectivement :

$$p^{(i)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} P_{\alpha}^{(i)} \psi_{\alpha}(r, \phi) e^{j(\omega t - k_{\alpha} s)}, \quad (3.11)$$

$$p^{(r)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} P_{\alpha}^{(r)} \psi_{\alpha}(r, \phi) e^{j(\omega t + k_{\alpha} s)}, \quad (3.12)$$

et

$$p^{(t)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} P_{\alpha}^{(t)} \psi_{\alpha}(r, \phi) e^{j(\omega t - k_{\alpha} s)}. \quad (3.13)$$

Dans la région (II), on déduit des équations (3.5) et (3.6) une équation différentielle du deuxième ordre pour \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}'' + B(C + KB)\mathbf{P} = 0. \quad (3.14)$$

Une solution générale de (3.14) peut être construite en fonction des valeurs propres ν_1^2, ν_2^2, \dots et des vecteurs propres $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ de la matrice $B(C + KB)$:

$$\mathbf{P} = XD(s)\mathbf{C}_1 + XD^{-1}(s)\mathbf{C}_2, \quad (3.15)$$

où $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots]$ et $D(s)$ est diagonale, donnée par

$$D_{\alpha}(s) = e^{-j\nu_{\alpha} s},$$

avec

$$\nu_{\alpha} = \begin{cases} \sqrt{\nu_{\alpha}^2} & \text{si } \nu_{\alpha}^2 > 0, \\ -j\sqrt{-\nu_{\alpha}^2} & \text{si } \nu_{\alpha}^2 < 0. \end{cases}$$

Les vecteurs \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 sont des constantes arbitraires. Le terme $XD(s)\mathbf{C}_1$ dans (3.15) correspond aux ondes aller (se propageant vers la région (III)), le deuxième terme correspondant aux ondes retour (se propageant vers la région (I)).

On raccorde maintenant la solution pour la pression dans le coude et sa dérivée normale (parallèlement à l'axe du guide) aux solutions (3.11), (3.12) et (3.13) au niveau des discontinuités :

en $s = 0$,

$$\mathbf{P}^{(i)} + \mathbf{P}^{(r)} = X\mathbf{C}_1 + X\mathbf{C}_2, \quad (3.16)$$

$$jkY_c(\mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{P}^{(r)}) = B^{-1}X\nu^{-1}(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2), \quad (3.17)$$

et de la même manière en $s = s_f$,

$$\mathbf{P}^{(t)} = X(D\mathbf{C}_1 + D^{-1}\mathbf{C}_2), \quad (3.18)$$

$$jkY_c\mathbf{P}^{(t)} = B^{-1}X\nu^{-1}(D\mathbf{C}_1 - D^{-1}\mathbf{C}_2), \quad (3.19)$$

avec $D = D(s_f)$, Y_c l'admittance caractéristique ($Y_{c\alpha} = k_\alpha/k$), et où le α ème terme de la matrice diagonale ν est $1/j\nu_\alpha$. On a $B^{-1}X\nu^{-1} = -jkHY$, avec $H = \frac{1}{jk}(C + KB)$ et $Y = X\nu$. Les équations (3.16) à (3.19) donnent alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(i)} + \mathbf{P}^{(r)} &= X\mathbf{C}_1 + X\mathbf{C}_2 \\ -Y_c(\mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{P}^{(r)}) &= HY(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \\ \mathbf{P}^{(t)} &= X(D\mathbf{C}_1 + D^{-1}\mathbf{C}_2) \\ -Y_c\mathbf{P}^{(t)} &= HY(D\mathbf{C}_1 - D^{-1}\mathbf{C}_2). \end{aligned}$$

Les matrices de réflexion R et de transmission T sont définies respectivement par $\mathbf{P}^{(r)} = R\mathbf{P}^{(i)}$ et $\mathbf{P}^{(t)} = T\mathbf{P}^{(i)}$. Elles sont obtenues en résolvant le système d'équations ci-dessus, en faisant attention à ne garder que la matrice D dans les expressions de R et T . D^{-1} est en effet source de problèmes numériques, les termes $\exp(\sqrt{-\nu_\alpha^2}s_f)$ pouvant être excessivement grands lorsque ν_α^2 est négatif et grand en valeur absolue. On obtient donc :

$$R = -\Delta^{-1}\tilde{\Delta}, \quad (3.20)$$

$$T = 4\Delta^{-1}D(Y_cX - HY)^{-1}Y_c, \quad (3.21)$$

avec

$$\Delta = D(Y_cX - HY)^{-1}(Y_cX + HY)D(X^{-1} + Y^{-1}H^{-1}Y_c) + (X^{-1} - Y^{-1}H^{-1}Y_c),$$

$$\tilde{\Delta} = (X^{-1} + Y^{-1}H^{-1}Y_c) + D(Y_cX - HY)^{-1}(Y_cX + HY)D(X^{-1} - Y^{-1}H^{-1}Y_c).$$

Annexe D

Soit un guide d'ondes droit de longueur finie l ; les matrices des coefficients de réflexion R et R' sont nulles et les matrices T et T' diagonales et données par

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad T_\alpha = T'_\alpha = e^{-jk_\alpha l}.$$

Nous nous intéressons à présent au calcul de la matrice de diffusion d'un guide composé de deux éléments assemblés (fig. 3.10) lorsque la matrice de diffusion de chaque élément est connue.

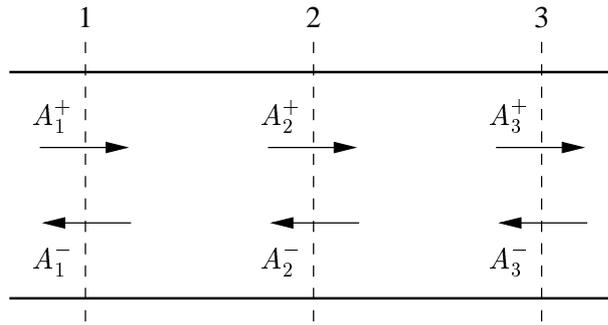


FIG. 3.10: Guide composé de deux éléments assemblés.

Les matrices de diffusion des éléments (1 – 2) et (2 – 3) sont

$$S_{12} = \begin{pmatrix} T_{12} & R'_{12} \\ R_{12} & T'_{12} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_{23} = \begin{pmatrix} T_{23} & R'_{23} \\ R_{23} & T'_{23} \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} A_2^+ \\ A_1^- \end{pmatrix} = S_{12} \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_2^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3^+ \\ A_2^- \end{pmatrix} = S_{23} \begin{pmatrix} A_2^+ \\ A_3^- \end{pmatrix}.$$

A_1^- et A_3^+ sont alors exprimées en fonction de A_1^+ et A_3^- , pour donner l'expression suivante de la matrice globale S_{13} :

$$S_{13} = \begin{pmatrix} T_{23}(1 - R'_{12}R_{23})^{-1}T_{12} & R'_{23} + T_{23}(1 - R'_{12}R_{23})^{-1}R'_{12}T'_{23} \\ R_{12} + T'_{12}(1 - R_{23}R'_{12})^{-1}R_{23}T_{12} & T'_{12}(1 - R_{23}R'_{12})^{-1}T'_{23} \end{pmatrix}.$$

La matrice de diffusion d'un guide composé de n éléments sera obtenue en réitérant $n - 1$ fois cette opération.

Chapitre 4

Prise en compte de traitements aux parois dans la formulation multimodale

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, les parois du guide étaient supposées rigides et parfaitement réfléchissantes, et le milieu de propagation sans viscosité ni conductivité thermique. Aucun processus dissipatif n'était donc considéré dans la formulation de la propagation multimodale. De tels processus peuvent toutefois être pris en compte et élargir le champ d'application de cette approche à des problèmes plus réalistes, sans en augmenter la complexité.

L'introduction de pertes viscothermiques aux parois d'un guide d'ondes a déjà été envisagée dans le cadre de la théorie multimodale, pour les guides de section variable [57, 4]. Il suffit de modifier dans la matrice diagonale K (définie au paragraphe 1.1.4) les constantes de propagation des différents modes en y introduisant des termes décrivant la dissipation par effets viscothermiques aux parois. Ces expressions des constantes de propagation sont données par Bruneau *et coll.* [11]; elles sont pour un guide bidimensionnel de largeur h

$$k_m^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + 2k \frac{2 - \delta_{m0}}{h} [\text{Im}(\varepsilon_m) - j\text{Re}(\varepsilon_m)],$$

et pour un guide de section circulaire de rayon r_0

$$k_{mn}^2 = k^2 - \left(\frac{\gamma_{mn}}{r_0}\right)^2 + 2k \frac{1}{r_0(1 - (m/\gamma_{mn})^2)} [\text{Im}(\varepsilon_{mn}) - j\text{Re}(\varepsilon_{mn})],$$

où $\varepsilon_m = (1 - (m\pi/kh)^2)\varepsilon_v + \varepsilon_t$ pour le guide bidimensionnel, $\varepsilon_{mn} = (1 - (\gamma_{mn}^2 - m^2)/(kr_0)^2)\varepsilon_v + \varepsilon_t$ pour le guide de section circulaire, avec $\varepsilon_v = (1 + j)\sqrt{k/2}\ell_v^{1/2}$ et $\varepsilon_t = (1 + j)\sqrt{k/2}(\gamma - 1)\ell_t^{1/2}$. ℓ_v et ℓ_t sont des longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques¹, et $\gamma = C_p/C_v$ le rapport des chaleurs spécifiques.

Pour certaines géométries de guides, notamment pour ceux dont la terminaison est une paroi rigide ($\mathbf{U} = 0$) ou un tube ouvert sans rayonnement ($\mathbf{P} = 0$), la prise en compte des pertes viscothermiques

¹Pour l'air, dans les conditions normales de température et de pression, $\ell_v = 4.10^{-8}\text{m}$ et $\ell_t = 6.10^{-8}\text{m}$.

peut n'être pas seulement un raffinement, mais une condition nécessaire pour assurer la convergence de la méthode. L'impédance Z présente en effet des pics infinis dans ces configurations (pics dus à la condition initiale $Z = \infty$ ou $Z = 0$) si le milieu n'est pas dissipatif, donc, concrètement, la solution de l'équation de Riccati diverge. D'où la nécessité d'introduire un mécanisme de pertes.

La prise en compte des effets viscothermiques aux parois dans le cadre de la propagation multimodale en conduits courbes n'a pas fait l'objet d'une étude particulière de notre part ; elle est toutefois envisageable, comme pour tout autre type de géométrie, en modifiant la matrice K comme nous venons de le voir.

L'objet de ce chapitre est la prise en compte dans la formulation multimodale de conditions d'impédance de surface aux parois, traduisant les effets d'un traitement (matériau poreux, structure en nid d'abeille, etc.). De nouvelles équations matricielles sont établies pour Z , \mathbf{P} et \mathbf{U} , compte tenu des conditions d'impédance *localisée*. Si le traitement est uniforme le long des parois, la formulation algébrique des matrices de réflexion et de transmission (cf. annexe C du chapitre 3) peut être généralisée aux coudes traités. Deux expressions de l'atténuation dans un coude sont proposées. L'une est définie pour une onde incidente donnée, et prend en compte le couplage entre les modes et les effets de diffusion à l'entrée et à la sortie de la zone traitée. L'autre, plus générale, est déduite de la conductance du guide traité, dans l'hypothèse d'une source incohérente. Ces deux expressions sont utilisées pour l'étude de plusieurs configurations de coudes traités en parois par un matériau poreux, et nous mettons en évidence les principales caractéristiques de la propagation en conduit courbe traité.

4.2 Formulation multimodale

La formulation établie au cours des chapitres précédents (sec. 2.2 et 3.2) pour les coudes à deux et trois dimensions est reprise dans cette section, en considérant des conditions d'impédance localisée aux parois.

4.2.1 Problème à deux dimensions

Les hypothèses et notations sont celles adoptées au chapitre 2 (cf. fig. 4.1). Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse s'écrivent dans le repère $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_s)$

$$-jk(1 - \kappa r)v_s = \frac{\partial p}{\partial s}, \tag{2.3}$$

$$-jk(1 - \kappa r)p = \frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{1}{jk} \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \kappa r) \frac{\partial p}{\partial r} \right). \tag{2.4}$$

Les conditions d'impédance aux parois sont

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=h/2} = -jk\zeta_1 p, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=-h/2} = jk\zeta_2 p, \tag{4.3}$$

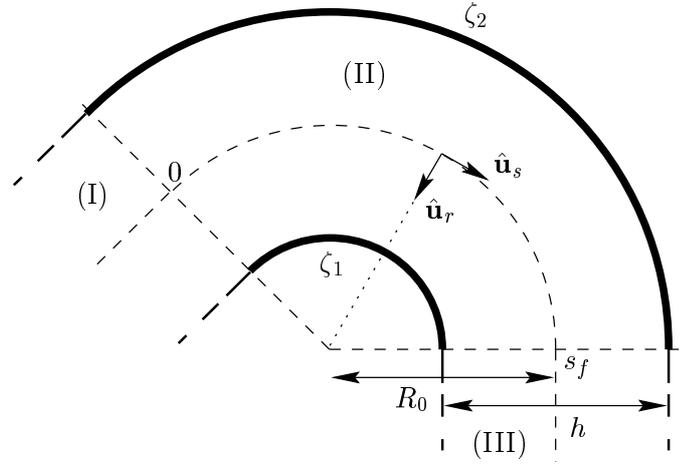


FIG. 4.1: Guide de courbure constante et système de coordonnées. L'effet des traitements des parois est traduit par les admittances localisées ζ_1 et ζ_2 .

où $\zeta_1 = \rho_0 c_0 / z_1$ et $\zeta_2 = \rho_0 c_0 / z_2$ sont des admittances réduites, et $z_1 = z_1(\omega)$ et $z_2 = z_2(\omega)$ les impédances de surface des parois interne et externe respectivement.

Les fonctions propres solutions de $d_{r^2}^2 \psi_\alpha = -\mu_\alpha^2 \psi_\alpha$ et satisfaisant aux conditions (4.3) ne peuvent être obtenues simplement, aussi la pression p et la vitesse longitudinale v_s sont-elles développées sur la base des fonctions propres du guide rigide droit

$$\psi_\alpha(r) = \sqrt{2 - \delta_{0\alpha}} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{h}\left(r - \frac{h}{2}\right)\right)$$

satisfaisant à la condition de Neumann homogène aux parois (cf. §2.2.1) :

$$\left(\frac{d\psi_\alpha}{dr}\right)_{r=\pm h/2} = 0.$$

Les fonctions propres ψ_α et la pression ne satisfont pas à la même condition aux parois dans le coude ; on peut donc s'attendre à ce que la prise en compte d'admittances aux parois « ralentisse » la convergence de la méthode multimodale, comme c'était le cas lorsque des variations de la section ont été considérées (cf. §2.5.2).

La projection de (2.3) sur la base de fonctions $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ donne l'équation

$$\mathbf{P}' = -jkB\mathbf{U},$$

indépendante des conditions imposées aux parois, et de ce fait identique à celle obtenue pour des parois parfaitement réfléchissantes (éq. 2.7). Le résultat de la projection de (2.4) est quant à lui différent du cas sans traitement :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \quad U'_\alpha = \frac{1}{jk}(C + KB)_{\alpha\beta} P_\beta + \frac{1}{jk} \frac{1}{h} \left[(1 - \kappa r) \frac{\partial p}{\partial r} \psi_\alpha \right]_{-h/2}^{h/2},$$

soit, compte tenu de (4.3),

$$U'_\alpha = \frac{1}{jk}(C + KB)_{\alpha\beta}P_\beta + \frac{1}{jk} \frac{1}{h} \left(\left(1 - \frac{\kappa h}{2}\right) (-jk\zeta_1 p(\frac{h}{2})) \psi_\alpha(\frac{h}{2}) - \left(1 + \frac{\kappa h}{2}\right) (jk\zeta_2 p(-\frac{h}{2})) \psi_\alpha(-\frac{h}{2}) \right),$$

avec les matrices B , C et K définies au chapitre 2 (cf. §2.2.1). Ainsi,

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{P} + \frac{1}{jk}F\mathbf{P},$$

avec

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \quad F_{\alpha\beta} = -jk \frac{A_\alpha A_\beta}{h} \left(\zeta_1 \left(1 - \frac{\kappa h}{2}\right) + \zeta_2 \left(1 + \frac{\kappa h}{2}\right) (-1)^{\alpha+\beta} \right).$$

Les termes $F_{\alpha\beta}$ s'exprimant simplement en fonction de k et de $\zeta_{1,2}$, le calcul de la matrice F pour chaque fréquence ne présente aucune difficulté.

4.2.2 Problème à trois dimensions : coude de section circulaire

Les hypothèses et notations sont celles adoptées au chapitre 3, et on considère un traitement uniforme de la paroi, à réaction localisée, décrit par une impédance $z = z(\omega)$. La condition de frontière sur la paroi est donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0} = -jk\zeta p, \tag{4.4}$$

où $\zeta = \rho_0 c_0 / z$.

La pression et la vitesse longitudinale sont projetées sur la base orthonormée (ψ_α) des modes transversaux d'un guide droit de rayon r_0 dont les parois sont rigides et parfaitement réfléchissantes (cf. §1.1.3). Ces modes sont ordonnés selon les critères établis au chapitre précédent (sec. 3.2).

Comme dans le cas à deux dimensions, l'équation obtenue par projection sur les modes ψ_α de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est inchangée par rapport au cas où la paroi est supposée parfaitement réfléchissante (éq. 3.5) :

$$\mathbf{P}' = -jkB\mathbf{U}.$$

La projection sur la base (ψ_α) de l'équation de conservation de la masse (3.2) donne

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{P} + \frac{1}{jk} \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{2\pi} \left[r(1 - \kappa r \cos \phi) \frac{\partial p}{\partial r} \psi_\alpha \right]_0^{r_0} d\phi,$$

où les matrices B , C et K sont données au chapitre précédent (sec. 3.2 et annexe B). Compte tenu de la condition d'impédance de surface (4.4), il vient

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB + F)\mathbf{P}.$$

La matrice F est donnée par

$$F_{\alpha\beta} = -jkr_0\zeta \frac{A_\alpha A_\beta}{\pi r_0^2} J_m(\gamma_{mn}) J_\mu(\gamma_{\mu\nu}) (\mathcal{I}_{m\mu} - \kappa r_0 \mathcal{J}_{m\mu}),$$

où J_m est la fonction de Bessel d'ordre m , γ_{mn} le $(n + 1)$ ème zéro de J'_m , dérivée de J_m . $\mathcal{J}_{m\mu}$ est donnée dans l'annexe B du chapitre 3 et

$$\mathcal{I}_{m\mu} = \int_0^{2\pi} \sin\left(m\phi + \frac{\sigma\pi}{2}\right) \sin\left(\mu\phi + \frac{\sigma\pi}{2}\right) d\phi = \pi\delta_{m\mu}(1 + (\delta_{\sigma 1} - \delta_{\sigma 0})\delta_{m0}).$$

Ainsi, la forme des équations multimodales pour \mathbf{P} et \mathbf{U} à deux et trois dimensions est identique. Notons que dans ce cas également la matrice F s'exprime très simplement en fonction de la fréquence k et de l'admittance ζ .

4.2.3 Equation de Riccati, matrice de diffusion

Les calculs précédents à deux et trois dimensions montrent que la prise en compte d'admittances localisées aux parois se traduit dans les équations multimodales par l'ajout simple d'un terme, une matrice F fonction des admittances aux parois et de la fréquence. La nouvelle équation de Riccati pour la matrice impédance Z se déduit alors simplement de ce résultat² :

$$Z' = -jkB - \frac{1}{jk}Z(C + KB + F)Z,$$

et est intégrée dans le coude traité de la même manière qu'auparavant. La procédure pour l'intégration numérique du champ acoustique et le calcul de la matrice R des coefficients de réflexion à partir de Z sont également identiques.

Si dans cette section, nous avons considéré le cas d'un traitement uniforme des parois du coude, une impédance de parois variable pourrait également être envisagée dans le cadre de la formulation multimodale.

Nous supposons dans la suite de ce chapitre que l'impédance de chaque paroi est constante spatialement et ne dépend que de la fréquence. Dans ce cas la matrice F , comme les matrices B et C , est indépendante de la coordonnée longitudinale s . Une formulation algébrique des matrices R et T des coefficients de réflexion et de transmission peut donc être obtenue. Le calcul est identique à celui développé dans l'annexe C du chapitre 3, seule l'équation $\mathbf{P}'' + B(C + KB)\mathbf{P} = 0$ (3.14) est modifiée, remplacée par $\mathbf{P}'' + B(C + KB + F)\mathbf{P} = 0$.

²Il convient de distinguer dans ce chapitre deux grandeurs différentes : l'impédance de surface z aux parois du guide d'ondes, notée en minuscule et définie comme le rapport de la pression acoustique p sur la vitesse radiale v_r , et l'impédance multimodale Z , qui est une matrice, notée en majuscule et définie à partir des vecteurs \mathbf{P} et \mathbf{U} : $\mathbf{P} = Z\mathbf{U}$.

4.3 Atténuation dans un coude traité en parois

4.3.1 Flux d'énergie dans le coude

L'atténuation d'une onde acoustique se propageant dans le coude est déterminée par la variation du flux d'énergie

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p\mathbf{v}^*) d\vec{S} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}({}^t\mathbf{P}\mathbf{U}^*) \end{aligned}$$

entre l'entrée et la sortie du coude. S désigne la section du guide. Le milieu de propagation étant supposé sans perte, seuls les traitements des parois, s'il y en a, peuvent induire une atténuation de l'onde.

On vérifie qu'avec les équations multimodales le flux d'énergie $W(s)$ est bien constant dans le coude si les parois sont parfaitement réfléchissantes : les variations de $W(s)$ le long de l'axe du coude sont données par

$$\frac{dW(s)}{ds} = W'(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}({}^t\mathbf{P}'\mathbf{U}^* + {}^t\mathbf{P}\mathbf{U}'^*).$$

Comme $\mathbf{P}' = -jkB\mathbf{U}$ et $\mathbf{U}' = \frac{1}{jk}(C + KB)\mathbf{P}$, on a

$$W'(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(-jk {}^t\mathbf{U}B\mathbf{U}^* - \frac{1}{jk} {}^t\mathbf{P}(C + KB)\mathbf{P}^*\right);$$

B est une matrice réelle symétrique, donc le terme $-jk {}^t\mathbf{U}B\mathbf{U}^*$ est imaginaire pur. D'autre part, on montre aisément que $C + KB$ est réelle symétrique, donc le second terme, $-\frac{1}{jk} {}^t\mathbf{P}(C + KB)\mathbf{P}^*$, est également imaginaire pur et $W'(s) = 0$: le flux d'énergie est bien constant.

Supposons maintenant que les parois du coude sont traitées. Compte tenu des résultats précédents,

$$W'(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{jk} {}^t\mathbf{P}F\mathbf{P}^*\right),$$

or F est la matrice complexe symétrique faisant intervenir l'impédance de paroi, donc $W'(s) \neq 0$: le flux d'énergie n'est pas constant dans le coude traité.

4.3.2 Atténuation d'une onde incidente $\mathbf{P}^{(i)}$ donnée

L'atténuation est donnée en décibels par

$$A_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left(\frac{W_{\text{trans.}}}{W_{\text{inc.}}} \right). \quad (4.5)$$

$W_{\text{inc.}}$ et $W_{\text{trans.}}$ sont les valeurs du flux d'énergie incident et du flux transmis. On les détermine en fonction des matrices des coefficients de réflexion R et de transmission T . Soit une onde incidente $\mathbf{P}^{(i)}$ émise par une source située en amont du coude (zone (I) sur la figure 4.1). Le flux d'énergie incident est

$$W_{\text{inc.}} = \frac{1}{2} \text{Re}({}^t \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{U}^{(i)*}),$$

or $\mathbf{U}^{(i)} = Y_c \mathbf{P}^{(i)}$, où Y_c est l'admittance caractéristique et I la matrice identité. Il vient donc

$$W_{\text{inc.}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{P}^{(i)\dagger} Y_c \mathbf{P}^{(i)}), \quad (4.6)$$

où \dagger désigne l'opération de transposition-conjugaison. Le flux d'énergie transmis est le flux à la sortie du coude :

$$W_{\text{trans.}} = W(s_f) = \frac{1}{2} \text{Re}({}^t \mathbf{P}(s_f) \mathbf{U}^*(s_f))$$

avec $\mathbf{P}(s_f) = T \mathbf{P}^{(i)}$ et $\mathbf{U}(s_f) = Y_c T \mathbf{P}^{(i)}$, d'où :

$$W_{\text{trans.}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{P}^{(i)\dagger} T^\dagger Y_c T \mathbf{P}^{(i)}). \quad (4.7)$$

Ainsi, la matrice de transmission T étant connue (cf. §4.2.3), il est possible de calculer, à partir des équations (4.6) et (4.7), l'atténuation (4.5) pour une onde incidente $\mathbf{P}^{(i)}$ donnée, quelle qu'elle soit.

4.3.3 Cas d'une source incohérente

Le calcul que nous venons de présenter permet de déterminer l'atténuation d'une onde incidente donnée dans un coude. Des cas précis, pour lesquels l'onde incidente est connue, pourront donc être étudiés, en tenant compte du couplage entre les modes. Dans bien des cas pratiques toutefois, la source de bruit en amont du dispositif silencieux est indéterminée - il peut s'agir d'un multitude de sources de bruit - et une telle approche n'est pas adaptée, car elle ne prend pas en compte l'aspect éventuellement statistique de la distribution de modes incidents. Il serait donc intéressant de définir une grandeur caractérisant l'atténuation dans un guide dans un cadre plus général, pour une source quelconque, indéterminée.

Supposons que les modes ψ_α sont excités en amont du coude par une source incohérente. La transmission par un guide d'ondes de ce type de distribution de modes peut être caractérisée par la conductance [5]

$$G = \text{Tr}(\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}), \quad (4.8)$$

où \mathcal{T}^\dagger est l'adjoint de \mathcal{T} et Tr la trace. \mathcal{T} est la matrice de transmission des coefficients $\mathcal{P}^{(i)}$ de l'onde incidente

$$p^{(i)} = \sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{j k_\alpha}} \mathcal{P}_\alpha^{(i)} \psi_\alpha,$$

limitée aux N_p modes propagatifs (\mathcal{T} est donc de dimensions $N_p \times N_p$). Le flux d'énergie transmis s'écrit en effet $W_{\text{trans.}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{P}^{(i)\dagger} \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} \mathcal{P}^{(i)})$, soit

$$W_{\text{trans.}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^* \mathcal{T}_{\alpha\gamma} \mathcal{P}_\beta^{(i)*} \mathcal{P}_\gamma^{(i)} \right).$$

L'hypothèse de source incohérente implique $\langle \mathcal{P}_\beta^{(i)*} \mathcal{P}_\gamma^{(i)} \rangle = 0$ si $\beta \neq \gamma$, donc, en supposant que l'énergie est répartie uniformément sur les N_p modes ($\langle |\mathcal{P}_\beta^{(i)}|^2 \rangle = 1$),

$$W_{\text{trans.}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{\alpha\beta} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^* \mathcal{T}_{\alpha\beta} \right),$$

soit

$$W_{\text{trans.}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}).$$

La formule de Landauer [43] (éq. 4.8, donnée ici sous une forme adimensionnée) est l'expression la plus usuelle, standard, pour caractériser le transport dans un système mésoscopique [74, 49, 27, 46]. L'atténuation est alors donnée par

$$A_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left(\frac{W_{\text{trans.}}}{W_{\text{inc.}}} \right) = -10 \log_{10} \left(\frac{G}{N_p} \right). \quad (4.9)$$

4.4 Résultats

Les expressions (4.5) et (4.9) de l'atténuation sont valables tant à deux dimensions qu'à trois dimensions, dès lors que nous savons calculer la matrice de transmission du guide traité. Par souci de simplicité toutefois, nous considérerons dans la suite de ce chapitre, sauf remarque particulière, un coude bidimensionnel.

Les dimensions du coude sont $h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m et $\theta_f = 60^\circ$, et les parois sont traitées par un matériau poreux. Dans l'hypothèse d'un matériau à réaction locale, l'impédance de surface des revêtements est choisie égale à celle d'une couche plane de même épaisseur en incidence normale, soit

$$z(\omega) = -\frac{j}{\phi} (\rho K)^{1/2} \cot \left(\omega \left(\frac{\rho}{K} \right)^{1/2} d \right),$$

où d est l'épaisseur de matériau, ϕ la porosité, ρ la densité effective et K le module de compressibilité effectif de l'air dans le matériau. Les expressions de ρ et K sont données en annexe A, et nous choisissons pour les grandeurs caractéristiques du poreux les valeurs suivantes : porosité $\phi = 0.98$, tortuosité $\alpha_\infty = 1.2$, résistance au passage de l'air $\sigma = 40000$ N.m⁻⁴.s, longueurs caractéristiques visqueuse $\Lambda = 2 \times 10^{-4}$ m et thermique $\Lambda' = 4 \times 10^{-4}$ m, épaisseur de matériau $d = 0.05$ m.

4.4.1 Onde plane incidente

Tous les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus avec le calcul présenté dans le paragraphe 4.3.1, en considérant une onde plane incidente, émise par une source en amont du coude. L'atténuation dans un conduit droit peut être calculée avec les mêmes équations (4.5), (4.6) et (4.7) : le calcul de R et T décrit en annexe C du chapitre 3 peut être en effet directement utilisé pour un conduit droit, en prenant $\kappa = 0$.

4.4.1.1 Résultats généraux

Dans un conduit droit traité en parois par un matériau poreux, l'atténuation suit l'allure typique représentée sur la figure 4.2. Aux basses fréquences, l'atténuation est faible. La courbe atteint un maximum lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la largeur du guide (soit $kh/\pi \sim 2$; l'effet conjoint de la dissipation thermique et de la dissipation visqueuse est alors maximal), puis décroît. Les hautes fréquences sont peu atténuées. Cette diminution de l'atténuation peut être attribuée à un « effet rayon » [30] : l'onde acoustique, assimilée à un rayon, se propage le long du conduit traité sans en « voir » les parois.

L'allure de la courbe d'atténuation en fonction de la fréquence dans un coude traité est connue empiriquement des ingénieurs depuis longtemps [30] (fig. 4.2). Après un lobe semblable à celui observé pour un conduit droit aux basses fréquences, en général d'amplitude plus grande, un plateau d'atténuation apparaît (pour $kh/\pi = 100$, l'atténuation dans le coude est encore supérieure à 9 dB).

La courbure du guide, bien que faible dans notre exemple, induit donc une augmentation importante de l'atténuation aux hautes fréquences. En outre, à longueur de traitement égale, c'est-à-dire en gardant $R_0\theta_f$ constant, l'absorption croît avec la courbure. Notons que le niveau d'absorption dans le coude n'est pas systématiquement supérieur au niveau dans le conduit droit ; il peut être localement plus faible (voir par exemple la figure 4.2 pour $kh/\pi \sim 3$).

Problème à trois dimensions. Les courbes d'atténuation pour un coude de section circulaire (de dimensions $r_0 = 0.1$ m, $R_0 = 0.9$ m et $\theta_f = 60^\circ$) et un conduit droit de même section et de même longueur sont données sur la figure 4.3. Leur comportement est similaire au cas à deux dimensions : l'absorption est plus importante aux hautes fréquences si le conduit est coudé, et un plateau d'atténuation apparaît.

Autres traitements. Un plateau d'atténuation est également observé si l'on considère une impédance de paroi arbitraire, constante (fig. 4.4). Sur la figure 4.5 sont représentées les courbes d'atténuation pour un coude et un guide droit dont les parois sont constituées d'un mince écran résistif sur une structure en nid d'abeille, dans la configuration étudiée par Ko et Ho [39] et Lafarge [42], dans un plus large intervalle de fréquence. Ces courbes se composent d'une succession de lobes d'absorption, l'atténuation s'annulant chaque fois que la profondeur des cellules ($d = h/2$) correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'onde (soit $kh/\pi = 4n$, $n \in \mathbb{N}$). La vitesse radiale est alors nulle sur l'écran résistif. Dans ce cas également nous pouvons parler de plateau d'atténuation, au sens où la décroissance de l'amplitude des lobes d'absorption observée pour le conduit droit n'est plus observée si ce conduit est coudé.

Limite basse fréquence. Aux basses fréquences, l'influence de la courbure diminue et la courbe d'atténuation du coude converge vers celle du conduit droit, pour tendre progressivement vers zéro. Rostafinski [63] conclut son étude aux très basses fréquences (pour une longueur d'onde supérieure d'au moins deux ordres de grandeur à la largeur h du coude, soit $kh/\pi < 10^{-2}$) en observant que l'atténuation est plus faible (de 2% à 7% pour les paramètres considérés par l'auteur) dans un coude que dans un guide droit de mêmes dimensions et traité identiquement aux parois. Aucune des applications que nous avons pu envisager ne nous a amenés à retrouver ce comportement, l'écart entre les deux courbes étant toujours inférieur, voire très inférieur, à 1% dans ce domaine de fréquences.

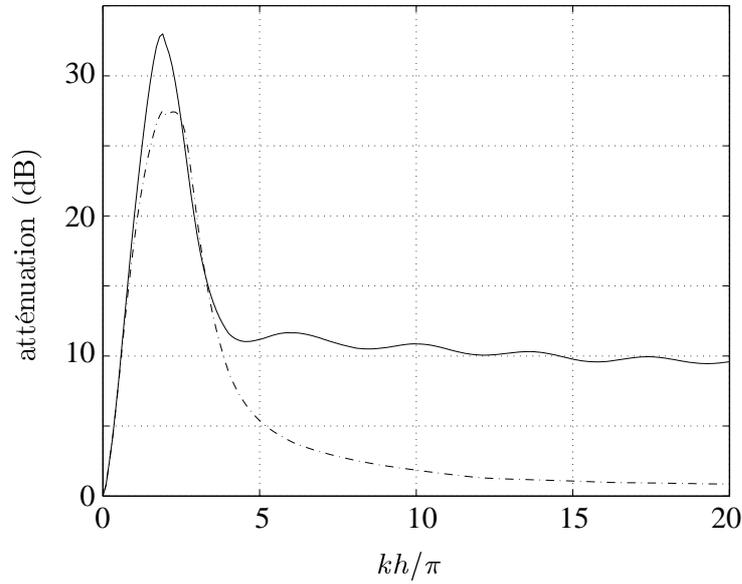


FIG. 4.2: Courbes d'atténuation pour un coude bidimensionnel (—, $h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m, $\theta_f = 60^\circ$) et un conduit droit de même largeur et de longueur $l = R_0\theta_f$ (---) traités en parois par un matériau poreux. L'onde incidente est une onde plane. Les valeurs des paramètres caractéristiques du matériau sont celles données en début de paragraphe (cf. p. 64).

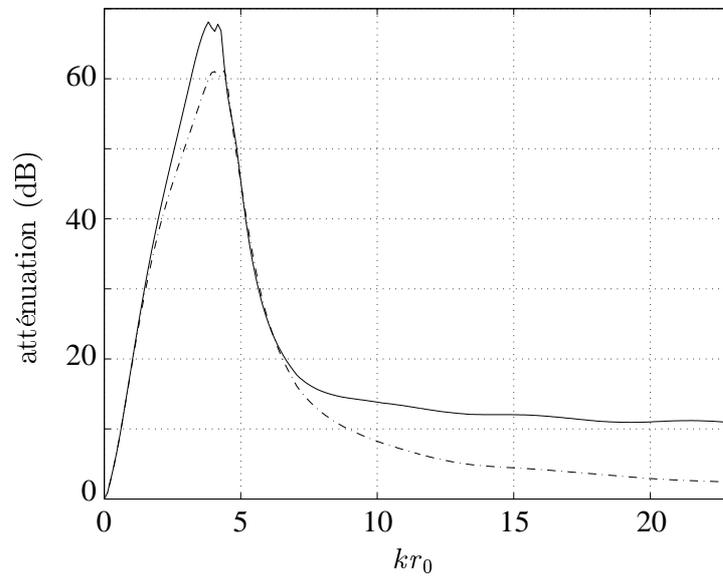


FIG. 4.3: Courbes d'atténuation pour un coude de section circulaire (—, $r_0 = 0.1$ m, $R_0 = 0.9$ m, $\theta_f = 60^\circ$) et un conduit droit de même rayon et de longueur $l = R_0\theta_f$ (---) traités en parois par un matériau poreux. L'onde incidente est une onde plane. Les valeurs des paramètres caractéristiques du matériau sont celles données en début de paragraphe (cf. p. 64).

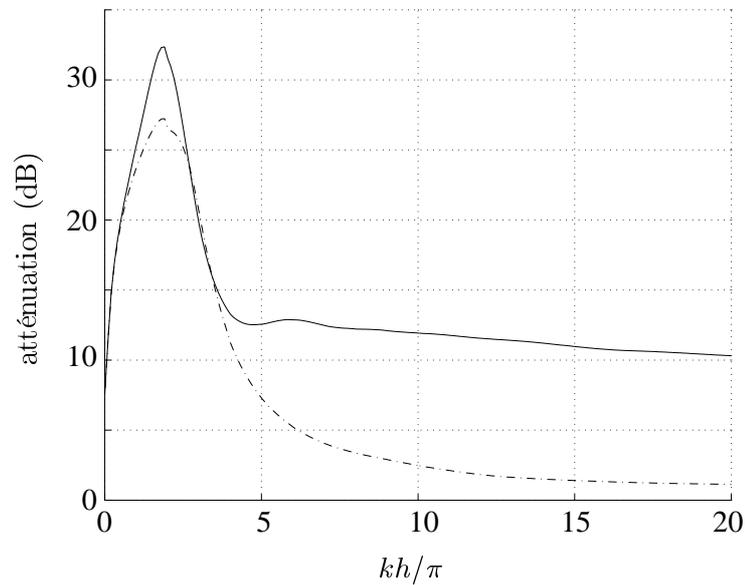


FIG. 4.4: Courbes d'atténuation pour un coude 2D (—, $h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m, $\theta_f = 60^\circ$) et un conduit droit de même largeur et de longueur $l = R_0\theta_f$ (---), pour une onde plane incidente. L'admittance réduite ζ des parois est constante, égale à $0.5 + j0.25$.

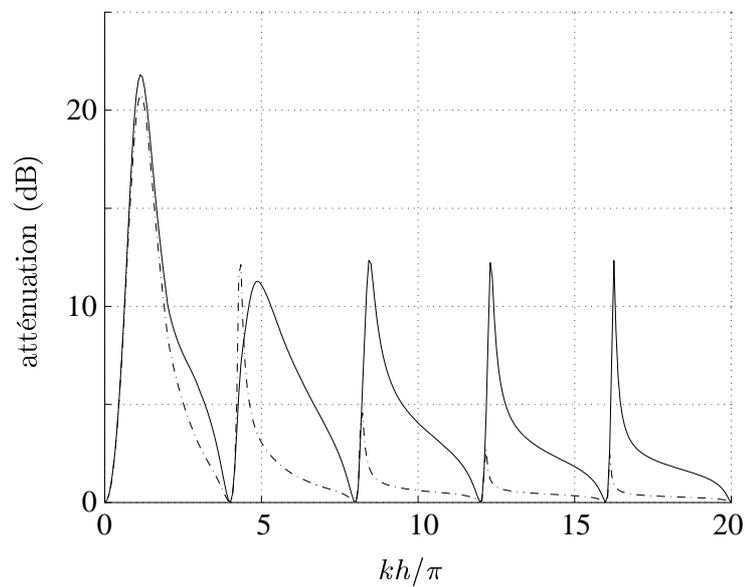


FIG. 4.5: Courbes d'atténuation pour un coude 2D (—, $h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m, $\theta_f = 45^\circ$) et un conduit droit de même largeur et de longueur $l = R_0\theta_f$ (---), pour une onde plane incidente. Les parois sont constituées d'un mince écran résistif sur une structure en nid d'abeille, dont les caractéristiques sont données dans [39].

4.4.1.2 Traitement sur une seule paroi

L'atténuation d'une onde acoustique dans un coude dont une seule paroi est recouverte de matériau absorbant diffère grandement selon la paroi qui est traitée (fig. 4.6). Elle est beaucoup plus importante s'il s'agit de la paroi extérieure. En outre, lorsque la paroi intérieure uniquement est traitée, le plateau d'atténuation n'apparaît plus aux hautes fréquences, et l'atténuation est de surcroît plus faible que dans un guide droit. La courbure n'induit donc pas systématiquement une augmentation de l'atténuation [30]. Ko et Ho [39] émettent l'hypothèse que l'écart entre les deux courbes d'atténuation est dû à la différence entre les longueurs des deux parois, la paroi extérieure étant plus longue que la paroi intérieure. Si la longueur de traitement a bien sûr une influence sur l'atténuation, la différence de longueur entre les parois du coude ne saurait toutefois expliquer cet écart important à elle seule. Les courbes d'atténuation de deux coudes de mêmes dimensions R_0 et h , l'un étant traité sur la paroi intérieure et l'autre sur la paroi extérieure, et dont les angles sont tels que les longueurs de traitement sont égales, restent d'ailleurs très différentes (fig. 4.7). Nous proposons, dans le paragraphe suivant, d'expliquer ces résultats.

4.4.1.3 Localisation de l'énergie : effet de « whispering gallery »

Les parois d'un coude diffèrent par leur longueur, et par conséquent par leur rayon de courbure, mais également parce que l'une est concave - la paroi extérieure - et l'autre convexe. Or, lorsque la fréquence augmente, l'onde se propageant dans un coude vient « adhérer » à la paroi concave, laissant dans l'« ombre » la paroi convexe [30]. La figure 4.8 illustre cet effet de « whispering gallery » lorsqu'une onde plane incidente se propage en amont du coude. La composante longitudinale j_s de l'intensité $\mathbf{j} = \frac{1}{2}\text{Re}(p\mathbf{v}^*)$, calculée dans un coude non traité reliant deux guides droits semi-infinis, est représentée sur la figure 4.8 pour différentes fréquences. Répartie uniformément sur la section en amont du coude, l'intensité se localise dans le coude près de la paroi extérieure.

L'intensité étant à son minimum au voisinage de la paroi intérieure - on peut observer sur la figure 4.8 des zones où l'intensité s'annule sur cette paroi - il semble alors clair qu'un traitement de cette paroi est de peu d'effet, et qu'au contraire un traitement de la paroi extérieure, où l'intensité est à son maximum, induit une atténuation importante, même aux hautes fréquences. D'autre part, la distribution d'énergie sur la section d'un guide droit est plus homogène, ce qui explique la position intermédiaire de la courbe d'atténuation pour un guide droit traité sur une seule paroi, sur la figure 4.6.

Lorsque la fréquence augmente, la zone du maximum d'intensité sur la paroi concave du coude devient plus étroite (fig. 4.8). Compte tenu de l'interprétation proposée précédemment, un traitement partiel de la paroi extérieure, au niveau de cette zone de maximum d'intensité, doit produire une atténuation proche aux hautes fréquences d'un traitement complet des deux parois. Autrement dit, en supposant que les effets des différentes zones traitées puissent être considérés comme additifs, la seule zone de maximum d'intensité mise en évidence sur la figure 4.8 doit expliquer en grande partie l'atténuation dans le coude.

Soit un coude de dimensions $h = 0.1$ m, $R_0 = 0.9$ m et $\theta_f = 60^\circ$, traité sur 30° au milieu de la paroi extérieure par un matériau poreux (fig. 4.9). L'atténuation dans ce coude traité localement est donnée sur la figure 4.10. Le résultat aux hautes fréquences est proche de celui obtenu pour un coude traité sur l'intégralité des deux parois (l'écart est de l'ordre de 2 dB), et l'atténuation reste beaucoup

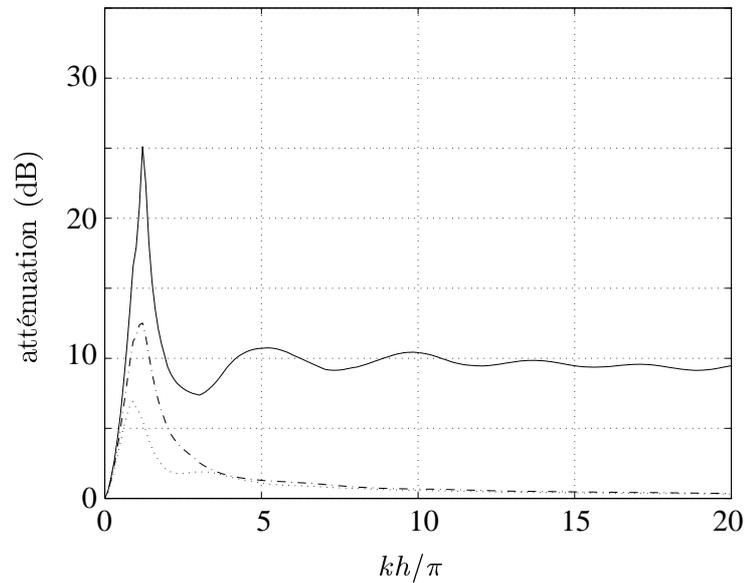


FIG. 4.6: Courbes d'atténuation pour un coude 2D dont une seule paroi est traitée ($h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m, $\theta_f = 60^\circ$), pour une onde plane incidente. (—) paroi extérieure, (---) paroi intérieure, (-·-) conduit droit traité sur une seule paroi.

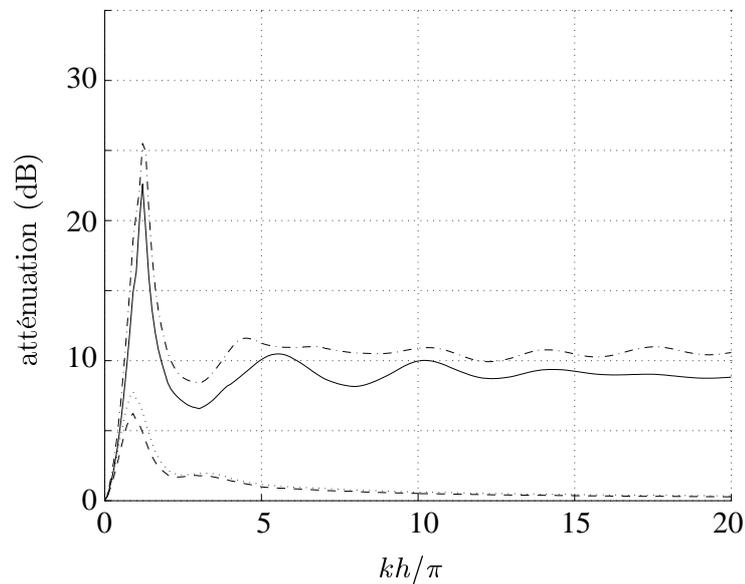


FIG. 4.7: Courbes d'atténuation pour un coude traité sur une paroi ($h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m), pour une onde plane incidente. (—) paroi extérieure, $\theta_f = 54^\circ$, (---) paroi intérieure, $\theta_f = 54^\circ$, (-·-) paroi extérieure, $\theta_f = 67.5^\circ$, (···) paroi intérieure, $\theta_f = 67.5^\circ$. La variation de l'angle θ_f modifie peu l'atténuation due à une même paroi. En revanche, les longueurs de traitement pour les configurations (—) et (···) sont égales, et les niveaux d'absorption très différents.

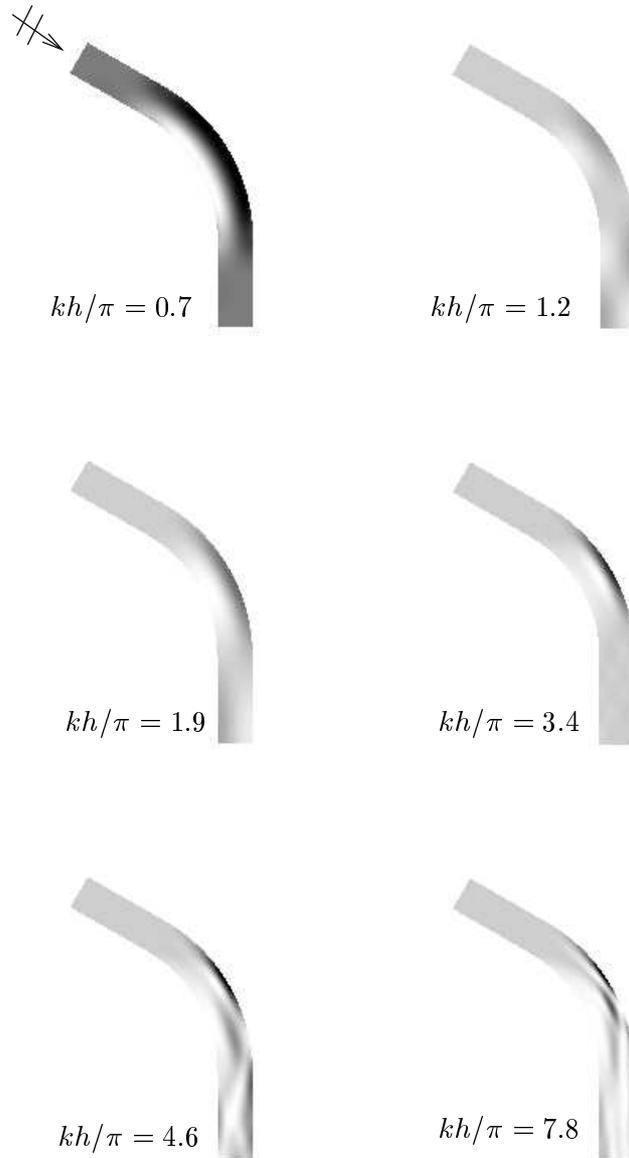


FIG. 4.8: Composante longitudinale j_s de l'intensité $\mathbf{j} = \frac{1}{2}\text{Re}(p\mathbf{v}^*)$ dans un coude 2D non traité en parois, pour différentes fréquences ($Ro/h = 9$, $\theta_f = 60^\circ$). Une onde plane ($j_s = 1$, unité arbitraire) est émise en amont du coude. Pour toutes les figures à l'exception de la première ($kh/\pi = 0.7$), les nuances de gris donnent les valeurs de j_s entre 0 (blanc) et 5 (noir). Les variations de j_s sur la première figure étant inférieures à 7%, le code de couleurs est différent : les zones blanches correspondent à la valeur 0.93 et les zones noires à 1.07.

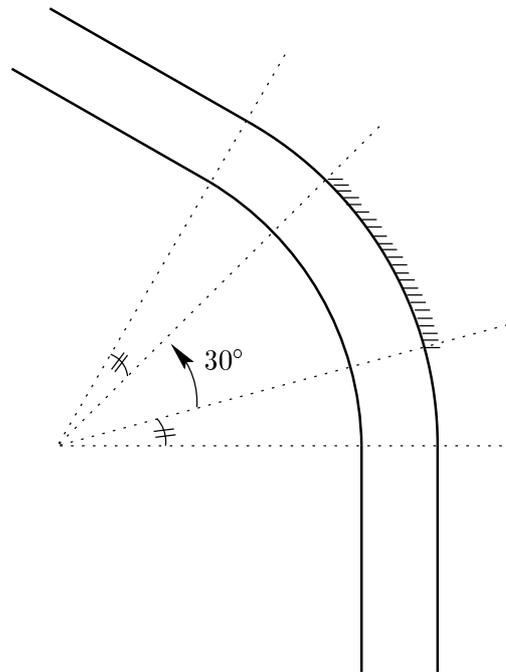


FIG. 4.9: Paroi extérieure partiellement traitée.

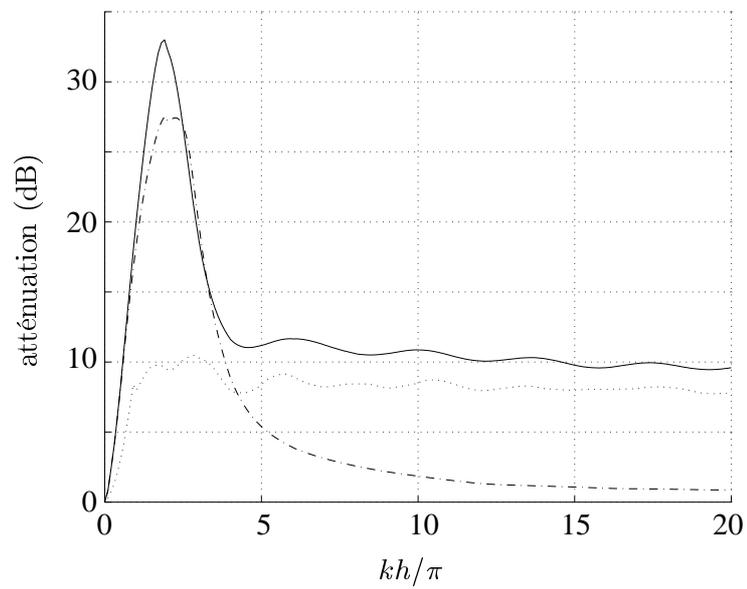


FIG. 4.10: Courbe d'atténuation pour un coude 2D dont une partie seulement (30°) de la paroi extérieure est traitée (voir fig. 4.9, $h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m, $\theta_f = 60^\circ$), pour une onde plane incidente. Les courbes de la figure 4.2, donnant l'atténuation dans un coude (—) et un conduit droit (—·) traités aux deux parois, sont redonnées pour comparaison.

plus importante que dans un conduit droit dont les deux parois sont traitées. Si l'étendue de la zone traitée est réduite à 20° , le niveau du plateau d'atténuation est proche de 7 dB. D'autre part, pour une longueur donnée de traitement sur la paroi extérieure, la position de cette zone absorbante sur la paroi n'est pas indifférente et l'atténuation est maximale lorsque cette zone est celle du maximum d'énergie, soit à peu près au centre de la paroi comme l'illustre la figure 4.9.

4.4.2 Source incohérente

Nous ne supposons plus à présent que l'onde incidente est une onde plane, mais un champ produit par une source incohérente. Les résultats présentés dans ce paragraphe sont par conséquent calculés avec l'expression (4.9), déduite de la conductance (4.8).

Le calcul de (4.9) pour un coude bidimensionnel traité sur les deux parois par un matériau poreux (fig. 4.11) donne un résultat qualitativement proche de celui obtenu avec une onde plane incidente (fig. 4.2), avec notamment un plateau d'atténuation aux hautes fréquences, après le lobe pour $kh/\pi \sim 2$. Du fait de la contribution de tous les modes propagatifs, et parce que ceux-ci sont plus atténués que le mode plan, le niveau du plateau d'atténuation est plus important.

Pour le conduit droit en revanche, l'allure de la courbe d'atténuation est différente de celle obtenue au paragraphe précédent. Parce que l'onde plane est très peu atténuée aux hautes fréquences, la courbe d'atténuation donnée sur la figure 4.2 est rapidement proche de zéro. La prise en compte des autres modes propagatifs fait apparaître un plateau d'atténuation, qui reste toutefois en-dessous du plateau du coude. La courbure induit toujours une augmentation de l'atténuation.

Ce même calcul de l'atténuation (4.9) pour les configurations des figures 4.4 et 4.5, soit pour d'autres types de traitement, confirme ces observations. L'atténuation reste plus importante si le conduit est coudé, et la prise en compte des modes propagatifs d'ordres supérieurs fait apparaître un plateau d'atténuation pour les conduits droits.

La contribution de la paroi concave à l'atténuation reste plus importante que celle de la paroi convexe, même si la différence est moindre. L'effet de « whispering gallery » que nous avons vu au paragraphe précédent et qui explique en grande partie l'écart important que nous avons observé est plus particulier à l'onde plane. La localisation de l'énergie au voisinage de la paroi concave est moins nette lorsque le champ incident est plus complexe. La méthode des rayons, que nous utiliserons au paragraphe suivant, permet de « voir » cet effet des modes supérieurs sur la répartition de l'énergie. Une conséquence de cette re-répartition de l'énergie dans le coude est l'émergence d'un plateau d'atténuation lorsque la paroi intérieure seule est traitée.

L'expression classiquement utilisée pour calculer l'atténuation dans un coude traité [39, 40, 42] (dans un guide droit également) est

$$A_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N_p-1} e^{2\text{Im}(\nu_n)\theta_f}}{N_p} \right), \quad (4.10)$$

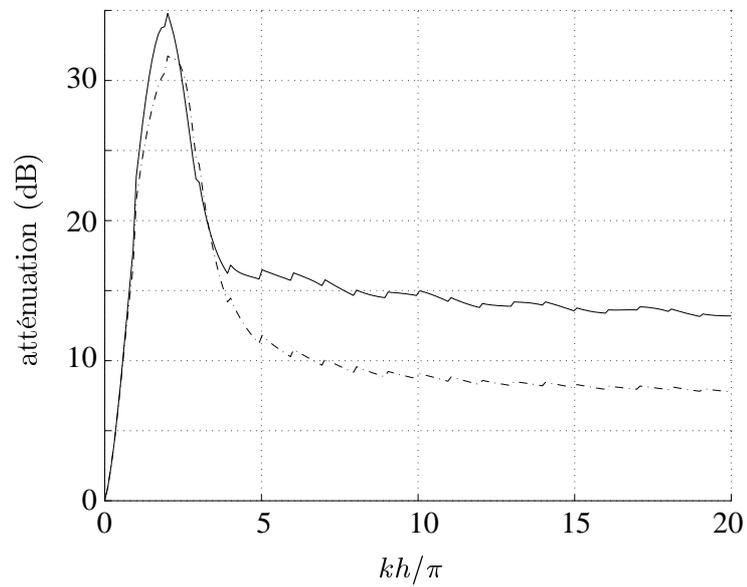


FIG. 4.11: Courbes d'atténuation pour un coude et un conduit droit dans la configuration de la figure 4.2, déduites du calcul de la conductance (éq. 4.9).

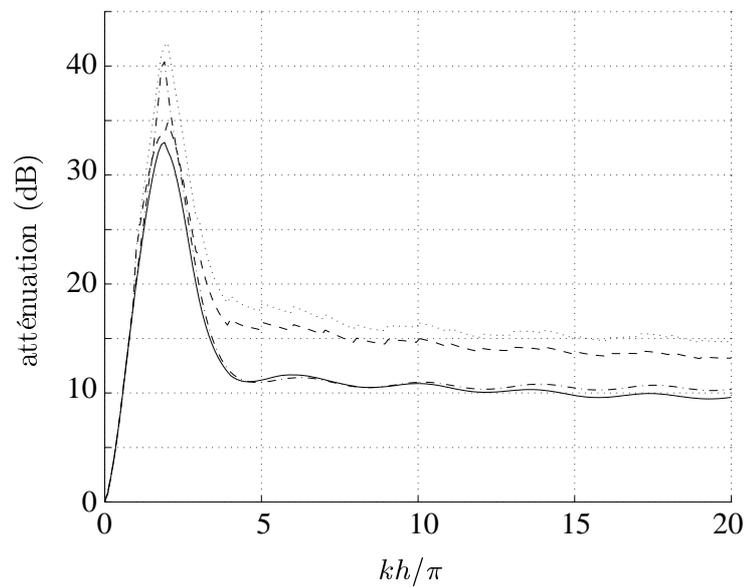


FIG. 4.12: Courbes d'atténuation pour un coude dans la configuration de la figure 4.2, calculées avec (—) l'expression (4.5) de l'atténuation et une onde plane incidente, (---) l'expression (4.9), (···) l'expression (4.10), (—·) l'expression (4.10) et $N_p = 1$ (mode fondamental uniquement).

où θ_f est l'angle du coude, N_p est le nombre de modes de coude rigide propagatifs et ν_n , $n \in \mathbb{N}$, les nombres d'onde angulaires, solutions de l'équation de dispersion

$$\begin{aligned} & \left[j\zeta_1 N_\nu(kR_0(1 - \kappa\frac{h}{2})) + N'_\nu(kR_0(1 - \kappa\frac{h}{2})) \right] \left[j\zeta_2 J_\nu(kR_0(1 + \kappa\frac{h}{2})) + J'_\nu(kR_0(1 + \kappa\frac{h}{2})) \right] \\ - & \left[j\zeta_1 J_\nu(kR_0(1 - \kappa\frac{h}{2})) + J'_\nu(kR_0(1 - \kappa\frac{h}{2})) \right] \left[j\zeta_2 N_\nu(kR_0(1 + \kappa\frac{h}{2})) + N'_\nu(kR_0(1 + \kappa\frac{h}{2})) \right] \\ = & 0. \end{aligned}$$

Ce calcul est généralement limité au premier mode [30, 42, 63], le mode fondamental d'un conduit traité, droit ou courbe, étant en général le moins atténué [17, 30, 39, 42].

La courbe d'atténuation obtenue avec l'expression (4.10) pour le coude bidimensionnel de dimensions $h = 0.2$ m, $R_0 = 0.9$ m et $\theta_f = 60^\circ$ est peu différente de celle obtenue avec la conductance (fig. 4.12). Nous donnons d'autre part une comparaison des calculs (4.10) avec le premier mode de coude uniquement et (4.5) avec une onde plane incidente, pour la même configuration. Les résultats sont également très proches (fig. 4.12). Dans cet exemple où la courbure du coude est faible, le transfert d'énergie du mode plan incident se fait essentiellement vers le premier mode de coude, qui est le mode le moins atténué. Si par contre la courbure est importante ou si l'impédance des parois est grande, les calculs de l'expression (4.10) et de la conductance ne sont plus semblables. L'expression simple (4.5) n'est alors plus une mesure pertinente de l'atténuation.

4.4.3 Etude de la propagation d'un mode par la méthode des rayons et prévision de l'atténuation

A un mode ψ_α d'un guide d'ondes rectiligne bidimensionnel sont classiquement associées deux ondes planes, se propageant dans les directions $\theta_\alpha = \sin^{-1}(\alpha\pi/kh)$ et $-\theta_\alpha$. Par interférence, ces deux ondes planes créent une onde transversale stationnaire qui n'est autre que ψ_α . Par conséquent, la propagation de ce mode peut être appréhendée en étudiant les trajectoires de deux familles de rayons, de directions θ_α et $-\theta_\alpha$.

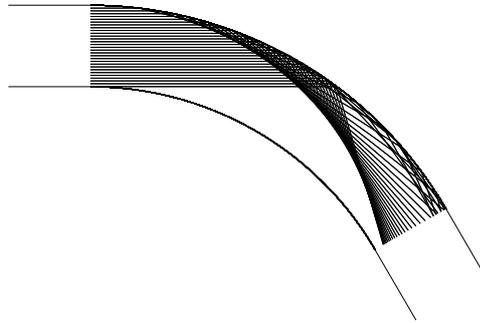


FIG. 4.13: Propagation d'une onde plane incidente, par la méthode des rayons.

Intéressons-nous tout d'abord à la propagation du mode plan incident dans un conduit constitué de deux guides droits reliés par un coude non traité (les dimensions du coude sont $R_0/h = 4.5$ et

$\theta_f = 60^\circ$, comme dans toute cette section) (fig. 4.13). La paroi intérieure du coude est dans une zone d'ombre, aucun rayon ne s'y réfléchit. Nous retrouvons donc a posteriori ce que les calculs d'atténuation et d'intensité ont mis en évidence.

Considérons à présent, autour d'une fréquence donnée, la propagation d'un mode d'ordre $\alpha > 0$, par exemple $kh/\pi = 17.5$ et $\alpha = 12$ (fig. 4.14; par souci de lisibilité, l'effet de la courbure sur les trajectoires des rayons a été accentué en choisissant une courbure plus grande, $R_0/h = 1$). Du fait de l'angle d'incidence non nul des rayons (à cette fréquence, l'angle θ_{12} vaut 43.3°), la paroi intérieure n'est plus « dans l'ombre », même si la densité de rebonds sur cette paroi est globalement plus faible que sur la paroi extérieure. L'atténuation du mode 12 incident dans l'intervalle de fréquence $kh/\pi \in]17, 18[$, égale à 0.8 ± 0.1 dB si la paroi intérieure seule est traitée, est en effet plus grande si la paroi extérieure seule est traitée : elle vaut alors 4.3 ± 0.1 dB (la largeur du coude et le traitement sont ceux adoptés dans toute cette section). Si les deux parois sont traitées, l'atténuation vaut 4.8 ± 0.1 dB.

Sur la figure 4.14, deux zones se distinguent sur la paroi extérieure : une première partie, sur 35° environ, où la densité de rebonds est importante, et une seconde, sur 50° , où elle est plus faible. L'atténuation dans le coude si les 35 premiers degrés de la paroi extérieure sont traités vaut 3 ± 0.1 dB, et 0.5 ± 0.05 dB si les 50 degrés suivants sont traités, bien que la surface de traitement soit plus grande dans ce dernier cas.

Ainsi, les niveaux relatifs d'atténuation pour les différentes configurations envisagées sont conformes à ce que la lecture des figures 4.13 et 4.14 permet de prévoir. Si l'on considère le problème pratique d'une source de bruit avec une fréquence émergente, sur un mode particulier (due aux pales d'une hélice par exemple), il est donc possible de prévoir un traitement efficace localisé sur les zones d'absorption. Il serait en outre intéressant de voir si une information quantitative sur l'atténuation peut être déduite du nombre de rebonds sur une zone donnée.

4.5 Conclusion

La prise en compte de conditions mixtes aux parois dans la formulation multimodale développée dans les chapitres précédents a été étudiée et de nouvelles équations multimodales pour l'impédance, le champ acoustique et la matrice de diffusion d'un coude ont été établies. Elles permettent d'étendre le champ d'application de la méthode multimodale aux guides dont les parois sont traitées par des matériaux absorbants, dans l'hypothèse de matériaux à réaction localisée.

Deux calculs ont été proposés pour la mesure de l'atténuation dans un guide d'ondes traité en parois, l'un donnant l'atténuation d'une onde incidente donnée et l'autre défini dans l'hypothèse d'une source incohérente et déduit de la conductance. Ces deux résultats ont été appliqués à l'étude des caractéristiques d'un coude comme dispositif silencieux, en prenant en compte différents types de traitement.

De manière générale, la courbure du guide induit une hausse notable de l'atténuation. Aux hautes fréquences, le mode fondamental, qui dans un conduit droit tend à ne plus être atténué, l'est toujours dans un coude, faisant apparaître un plateau d'atténuation. Un effet de whispering gallery du mode fondamental se manifeste le long de la paroi concave dans un guide courbe bidimensionnel ou de section rectangulaire, qui a pour conséquence des contributions très différentes des deux parois à l'atténuation.

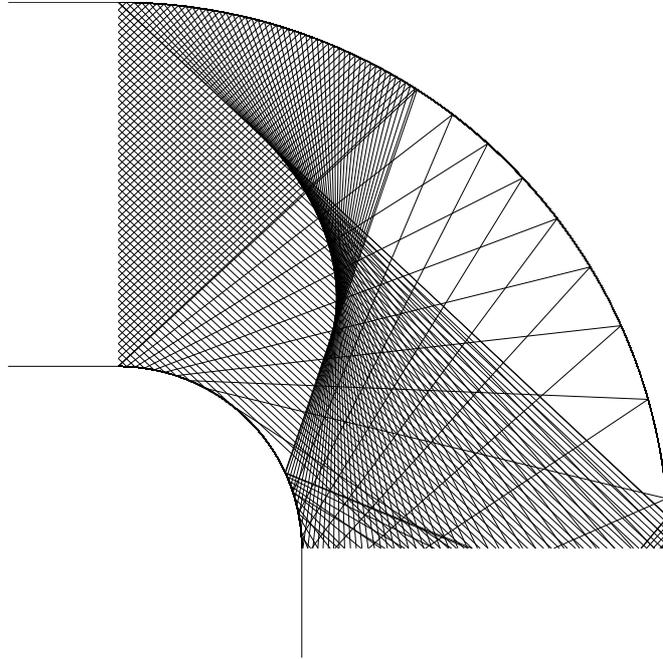


FIG. 4.14: Propagation dans un coude de dimensions $R_0/h = 1$ et $\theta_f = 90^\circ$ du mode ψ_{12} incident, à la fréquence $kh/\pi = 17.5$, par la méthode des rayons.

| | atténuation (dB) | | atténuation (dB) |
|--|------------------|--|------------------|
| | 4.8 ± 0.1 | | 3 ± 0.1 |
| | 4.3 ± 0.1 | | 0.5 ± 0.05 |
| | 0.8 ± 0.1 | | |

FIG. 4.15: Niveau d'atténuation dans la bande de fréquence $kh/\pi \in]17, 18[$ pour le coude représenté sur la figure 4.14 avec $h = 0.2$ m, pour différents traitements (les zones de traitement sont représentées en trait fort), pour le mode ψ_{12} incident. Les configurations représentées dans la troisième colonne du tableau correspondent à un traitement sur les 35 premiers degrés de la paroi extérieure, puis à un traitement sur les 50 degrés suivants.

Cette dissymétrie est toujours observée si l'onde incidente n'est pas une onde plane (elle est observée quelque soit la source sonore) : un coude traité uniquement sur la paroi intérieure atténue peu - moins qu'un conduit droit - l'onde acoustique. Lorsque la section du coude est circulaire, elliptique ou plus généralement lorsqu'il n'est plus possible de distinguer une paroi intérieure et une paroi extérieure, nous pouvons quand même supposer que cet effet de « whispering gallery » se manifeste également, l'énergie étant maximum sur la partie extérieure de la paroi du coude.

Par une méthode simple de rayons, enfin, il est possible de prévoir les zones des parois du guide traité où l'énergie acoustique d'un mode est principalement absorbée. Si cette méthode de rayons est plus difficile à appréhender à trois dimensions, il doit toutefois être possible de faire le même type d'observations.

Annexe A

Les expressions suivantes de la densité effective ρ et du module de compressibilité de l'air K dans un matériau poreux sont extraites de l'ouvrage de J.-F. Allard [2] :

$$\rho = \rho_0 \alpha_\infty \left(1 + \frac{\sigma \phi}{j\omega \rho_0 \alpha_\infty} \sqrt{1 + \frac{4j\omega \rho_0 \alpha_\infty^2 \eta}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}} \right),$$

$$K = \gamma P_0 / \left[\gamma - (\gamma - 1) \left[1 + \frac{\sigma' \phi}{j\omega \rho_0 \alpha_\infty P_r} \sqrt{1 + \frac{4j\omega \rho_0 \alpha_\infty^2 \eta P_r}{\sigma'^2 \Lambda'^2 \phi^2}} \right]^{-1} \right].$$

Les paramètres caractéristiques du poreux sont la porosité ϕ , la tortuosité α_∞ , la résistance au passage de l'air σ , et les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques Λ et Λ' . Le paramètre σ' se déduit de Λ' par la relation

$$\Lambda' = \sqrt{\frac{8\alpha_\infty \eta}{\phi \sigma'}}.$$

P_r est la nombre de Prantl, P_0 la pression atmosphérique, η la viscosité dynamique de l'air et $\gamma = C_p/C_v$ le rapport des chaleurs spécifiques. Dans les conditions normales de température et de pression (20°C et 1.1033×10^5 Pa), les valeurs de ces dernières grandeurs, ainsi que celles de la densité de l'air de la célérité du son, sont

$$P_r = 0.707$$

$$\eta = 1.813 \times 10^{-5} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

$$\gamma = 1.4$$

$$\rho_0 = 1.204 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_0 = 343.2 \text{ m.s}^{-1}.$$

Chapitre 5

Propagation à haute fréquence dans un guide courbe

5.1 Introduction

Le calcul algébrique de la matrice de diffusion d'un coude qui a été donné au chapitre 3 et utilisé à plusieurs reprises par la suite - pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission, des fréquences de résonance d'une cavité fermée, de la conductance et de l'atténuation - ne met en jeu que des opérations simples d'inversion et de calcul de valeurs propres de matrices $N \times N$. Il est donc possible de prendre en compte un grand nombre de modes et d'étudier par conséquent les propriétés à haute fréquence de tout guide composé de coudes et de conduits droits.

La première partie de ce chapitre a pour objet la validation de ce calcul à très haute fréquence (de 100 à 1000 modes propagatifs). Les propriétés de symétrie et d'unitarité de la matrice de diffusion sont évaluées, ainsi que la convergence du calcul. Un calcul direct de la pression multimodale \mathbf{P} dans un coude est proposé ensuite, qui permet le calcul du champ acoustique en prenant en compte un grand nombre de modes.

Le problème fondamental du passage de la théorie ondulatoire à la limite asymptotique géométrique suscite depuis longtemps de nombreux travaux, en particulier en mécanique quantique (*correspondance quantique-classique*). Dans les cas où la dynamique classique est irrégulière notamment, où le comportement des rayons peut par conséquent être sensible à une perturbation infiniment petite, le caractère ondulatoire de l'approche quantique lisse quant à lui les détails aux échelles plus petites que la longueur d'onde. Il est particulièrement intéressant pour ce problème de pouvoir monter très haut en fréquence.

Dans une étude récente de la correspondance quantique-classique pour un système chaotique ouvert [46, 50], l'approche ondulatoire et une approche classique du calcul de la matrice de diffusion du système sont comparées. Nous présentons dans la seconde partie de ce chapitre (sec. 5.3) une étude similaire pour des cavités composées de coudes et de conduits droits. Une matrice de diffusion *rayons* est construite et nous étudions les similitudes avec l'approche ondulatoire et les caractéristiques de la propagation dans ce type de conduit, notamment l'apparition d'une dynamique irrégulière des rayons¹.

¹Notons que la possibilité de prendre en compte un grand nombre de modes peut, en pratique, présenter un intérêt autre que l'étude de la limite géométrique. Dans un guide de section circulaire, de diamètre 60 cm, à 7000 Hz, plus de 200 modes sont propagatifs. Un problème courant d'acoustique audible dans un guide de dimensions raisonnables peut

5.2 Validation de la formulation multimodale aux hautes fréquences

Dans la présente section, nous étudions la possibilité de prendre en compte un très grand nombre de modes dans la formulation multimodale, en vue d'étudier la propagation à haute fréquence dans des conduits ou des cavités. Les propriétés de la matrice de diffusion ainsi que la convergence du calcul de S sont évaluées, et un calcul multimodal direct du champ de pression dans un coude est développé. Dans l'ensemble de ce chapitre, nous limiterons notre étude aux cas de guides d'ondes à deux dimensions.

5.2.1 Propriétés de la matrice de diffusion

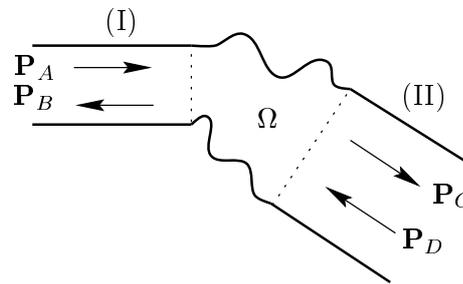


FIG. 5.1: Élément diffuseur dans un guide d'ondes.

Soit un élément de géométrie quelconque d'un guide d'ondes, reliant deux guides droits semi-infinis (fig. 5.1). La matrice de diffusion de cet élément est la matrice²

$$S = \begin{pmatrix} R & T' \\ T & R' \end{pmatrix},$$

où R et T sont les matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente se propageant vers la droite (\mathbf{P}_A), et R' et T' les matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente se propageant vers la gauche (\mathbf{P}_D). S relie ainsi les ondes « sortantes », \mathbf{P}_B et \mathbf{P}_C , aux ondes « entrantes », \mathbf{P}_A et \mathbf{P}_D :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_B \\ \mathbf{P}_C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{P}_A \\ \mathbf{P}_D \end{pmatrix}.$$

La condition d'invariance de l'opérateur $\Delta + k^2$ par renversement du temps et la condition de conservation de l'énergie imposent à la matrice S , telle que nous l'avons définie (en se limitant aux modes propagatifs), les propriétés suivantes [59] :

$${}^t S M_0 = M_0 S, \quad (5.1)$$

et

donc nécessiter de considérer beaucoup de modes.

²Par convenance, nous adoptons dans ce chapitre une forme de S différente de celle adoptée au chapitre 3 (éq. 3.9), qui ne modifie cependant en rien la définition de cet opérateur.

$$S^\dagger M_1 S = M_0, \quad (5.2)$$

avec

$$M_0 = \begin{pmatrix} Y_c^{(I)} & 0 \\ 0 & Y_c^{(II)} \end{pmatrix},$$

et

$$M_1 = \begin{pmatrix} Y_c^{(II)} & 0 \\ 0 & Y_c^{(I)} \end{pmatrix},$$

où $S^\dagger = {}^t\bar{S}$ est l'adjoint de S . $Y_c^{(I)}$ et $Y_c^{(II)}$ sont les matrices admittances caractéristiques définies dans les conduits droits (I) et (II) respectivement ($Y_{c(\alpha\beta)} = \frac{k_\alpha}{k} \delta_{\alpha\beta}$).

Un formalisme plus courant consiste à écrire les solutions de l'équation d'onde sous la forme :

$$p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{j k_\alpha}} P_\alpha \psi_\alpha.$$

Avec cette normalisation, la matrice \mathcal{S} reliant les coefficients P_α des ondes sortantes aux coefficients P_α des ondes entrantes vérifie alors, si l'on considère uniquement les modes propagatifs,

$${}^t\mathcal{S} = \mathcal{S},$$

$$\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = \mathcal{S} \mathcal{S}^\dagger = I,$$

où I est la matrice identité. \mathcal{S} est symétrique et unitaire.

Lorsque l'élément diffuseur qui relie les conduits (I) et (II) est un coude ou un système composé de coudes et de conduits droits, nous savons en calculer la matrice de diffusion (cf. §3.6.1). Afin de valider ce calcul, aux hautes fréquences notamment, lorsque plusieurs centaines de modes sont propagatifs dans les conduits droits, nous évaluons les propriétés (5.1) et (5.2) de la matrice de diffusion d'un coude simple, en calculant les quantités

$$\epsilon_1 = \frac{\| {}^t\mathcal{S} M_0 - M_0 \mathcal{S} \|}{\| M_0 \mathcal{S} \|},$$

$$\epsilon_2 = \frac{\| \mathcal{S}^\dagger M_1 \mathcal{S} - M_0 \|}{\| M_0 \|},$$

où la norme choisie est $\| M \| = \sqrt{\text{Tr}(M^\dagger M)}$. Dans tous les cas envisagés (100, 500 et 1000 modes propagatifs, le nombre de modes pris en compte variant entre 100 et 1050), nous obtenons des erreurs ϵ_1 et ϵ_2 de l'ordre de 10^{-13} . Selon toute vraisemblance, ces erreurs sont liées à la précision de la machine utilisée et dues aux opérations « élémentaires » de multiplication et d'inversion de matrices effectuées dans la procédure de calcul de \mathcal{S} . Les propriétés généralisées de symétrie et d'unitarité sont vérifiées par \mathcal{S} par construction, intrinsèquement à la formulation de la matrice.

5.2.2 Convergence de la formulation multimodale

Une autre validation du calcul de la matrice de diffusion aux hautes fréquences est possible, en vérifiant la convergence de ce calcul lorsque N - le nombre de modes pris en compte - augmente. Nous considérons à nouveau un coude simple, de dimensions $R_0/h = 0.75$ et $\theta_f = \pi/2$, et nous nous intéresserons uniquement à la partie propagative de la matrice de diffusion. Aussi, afin d'annuler tous les termes évanescents, le coude est supposé relié de part et d'autre à un guide droit de longueur h , et nous considérons la matrice S du système global (si par exemple $kh/\pi = 99.5$, le premier mode non propagatif est atténué d'un facteur 10^{13} sur une distance h dans les parties droites).

Afin d'évaluer la vitesse de convergence du calcul de S , l'erreur

$$\epsilon = \frac{\| S_N^{N_p} - S_{1050}^{N_p} \|}{\| S_{1050}^{N_p} \|}$$

est mesurée en fonction de N , pour une valeur fixée du nombre N_p de modes propagatifs. La valeur de la matrice de diffusion pour $N = 1050$, $S_{1050}^{N_p}$, est choisie comme solution de référence.

Calculée pour trois fréquences ($N_p = 100, 500$ et 1000), l'erreur ϵ décroît en fonction de $(N - N_p)$ - le nombre de modes évanescents pris en compte - suivant une loi géométrique en $1/(N - N_p)^{2 \pm 0.2}$ (fig. 5.2). La convergence est donc rapide, et la prise en compte d'un faible nombre de modes propagatifs suffit pour s'assurer de la précision du calcul de S .

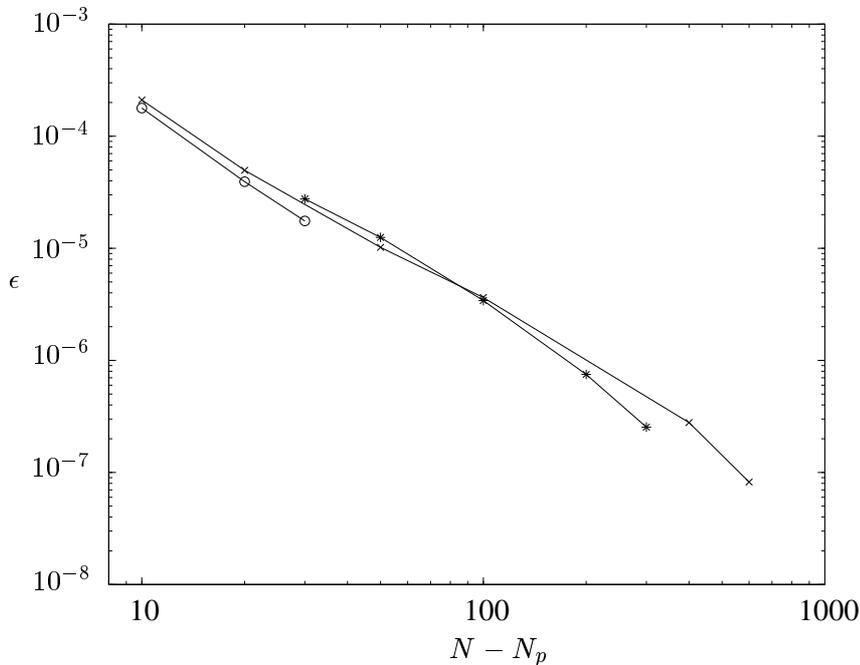


FIG. 5.2: Convergence du calcul de la matrice de diffusion : (\times) $N_p = 100$, ($*$) $N_p = 500$, (\circ) $N_p = 1000$.

5.2.3 Calcul direct du champ de pression dans le coude

La matrice impédance Z , solution dans un coude de l'équation de Riccati (2.11), présente le long du guide des variations qui peuvent être rapides, importantes, d'où la nécessité d'un pas adaptatif pour l'intégration numérique de (2.11). Lorsque la fréquence augmente et qu'un grand nombre de modes est pris en compte, ces variations deviennent encore plus brusques pour les termes de Z correspondant aux modes d'ordres élevés, et l'intégration numérique, ralentie, est rendue plus difficile.

Toutefois, si la section du guide est constante, un calcul direct du champ acoustique est possible, qui permettra de prendre en compte un grand nombre de modes propagatifs. Dans un coude, la pression \mathbf{P} , solution de l'équation $\mathbf{P}'' + B(C + KB)\mathbf{P} = 0$ (cf. annexe C du chapitre 3), s'écrit

$$\mathbf{P} = XD(s)\mathbf{C}_1 + XD^{-1}(s)\mathbf{C}_2, \quad (5.3)$$

où X est la matrice des vecteurs propres de $B(C + KB)$ associés aux valeurs propres ν_α^2 , et $D(s)$ est diagonale, donnée par

$$D_\alpha(s) = e^{-j\nu_\alpha s},$$

avec

$$\nu_\alpha = \begin{cases} \sqrt{\nu_\alpha^2} & \text{si } \nu_\alpha^2 > 0, \\ -j\sqrt{-\nu_\alpha^2} & \text{si } \nu_\alpha^2 < 0, \end{cases}$$

Les vecteurs \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 sont des constantes, fonctions des conditions aux extrémités du coude. Une onde incidente $\mathbf{P}^{(i)}$ étant donnée, la formulation des conditions de continuité aux interfaces avec les conduits droits semi-infinis de part et d'autre du coude donne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(i)} + \mathbf{P}^{(r)} &= X\mathbf{C}_1 + X\mathbf{C}_2 \\ -Y_c(\mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{P}^{(r)}) &= HY(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \\ \mathbf{P}^{(t)} &= X(D\mathbf{C}_1 + D^{-1}\mathbf{C}_2) \\ -Y_c\mathbf{P}^{(t)} &= HY(D\mathbf{C}_1 - D^{-1}\mathbf{C}_2), \end{aligned}$$

où $D = D(s_f)$. Les solutions $\mathbf{P}^{(r)}$ et $\mathbf{P}^{(t)}$ de ce système d'équations sont les ondes réfléchie et transmise, dont la détermination permet de définir les matrices de réflexion et de transmission du coude, comme nous l'avons vu précédemment. Les solutions \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 déterminent quant à elles la pression (5.3) dans le coude. Toutefois, comme nous l'avons précisé lors du calcul des matrices R et T , la matrice $D^{-1}(s)$, qui apparaît dans l'expression (5.3), peut être source de problèmes numériques de convergence (cf. p. 54). On définit donc $\tilde{\mathbf{C}}_2 = D^{-1}\mathbf{C}_2$, et les solutions \mathbf{C}_1 et $\tilde{\mathbf{C}}_2$ sont

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= (1 - D^2)^{-1}(X^{-1} - DX^{-1}T)\mathbf{P}_0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 &= (1 - D^2)^{-1}(X^{-1}T - DX^{-1})\mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

où $\mathbf{P}_0 = (1 + R)\mathbf{P}^{(i)}$ est la valeur de \mathbf{P} au point $s = 0$. Il est alors possible de calculer

$$\mathbf{P} = X \left(D(s) \mathbf{C}_1 + D(s_f - s) \tilde{\mathbf{C}}_2 \right)$$

dans le coude, et cette dernière expression n'est fonction que de D , avec un argument, s ou $s_s - s$, positif, et ne dépend pas de D^{-1} .

5.2.4 Application : synthèse d'un rayon par un groupe de modes

La propagation d'un groupe de modes dans un guide rectiligne, à haute fréquence, montre un comportement de type rayon : par interférences constructives et destructives des modes, l'énergie est localisée sur deux trajectoires - deux faisceaux - qui, depuis la source, suivent les « rayons modaux » associés au mode central du groupe [72, 31, 32, 33]. Ces rayons modaux sont les rayons d'angles $\theta_\alpha = \pm \sin^{-1}(\alpha\pi/kh)$, classiquement utilisés pour décrire la propagation du mode α (cf. §4.4.3). Dans ce paragraphe, nous proposons d'étudier la propagation d'un tel faisceau, émis par une source ponctuelle harmonique, dans un guide comportant une partie courbe.

Considérons un coude de largeur h reliant deux conduits droits semi-infinis et, en amont du coude, une source ponctuelle harmonique. Les coordonnées de la source sont (r_s, s_s) dans le repère $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_s)$ (fig. 2.1), et l'onde incidente $\mathbf{P}^{(i)}$ dans le conduit droit en amont du coude est donnée par

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad P_\alpha^{(i)}(s) = \frac{k}{k_\alpha} \psi_\alpha(r_s) e^{-jk_\alpha(s-s_s)} e^{-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Afin de sélectionner un groupe de modes propagatifs, les différentes composantes de $\mathbf{P}^{(i)}$ sont pondérées par une fenêtre gaussienne, $\exp(-\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2\sigma^2})$, où α_0 est l'ordre du mode central du groupe sélectionné. La source est placée sur une des parois du guide ($r_s = \pm r_0$), de sorte qu'un seul faisceau est généré (deux faisceaux, de directions θ_{α_0} et $-\theta_{\alpha_0}$, sont générés a priori). La pression à l'entrée du coude ($s = 0$) est $\mathbf{P}(0) = (I + R)\mathbf{P}^{(i)}(0)$

Calculée avec la méthode directe donnée au paragraphe précédent, l'amplitude du champ de pression dans un coude de dimensions $R_0/h = 0.75$ et $\theta_f = \pi/2$ est représentée sur la figure 5.3. 550 modes sont pris en compte dans le calcul multimodal, dont 500 sont propagatifs. La fenêtre gaussienne, dont la largeur est donnée par $\sigma = 31.6$, est centrée sur le mode d'ordre 250 (fig. 5.3, en médaillon). La fréquence étant très élevée et la fenêtre gaussienne large, le faisceau obtenu est étroit, se disperse peu, et le résultat approche la limite asymptotique des rayons : un rayon, de largeur toutefois finie, a été synthétisé et se propage dans le coude en se réfléchissant sur les parois selon les lois de l'acoustique géométrique. Nous donnons pour comparaison le rayon tiré depuis le point source, dans la direction $\theta_{250} = \sin^{-1}(250\pi/kh) \sim \pi/6$ correspondant au mode 250. Les trajectoires de ce rayon et du faisceau correspondent parfaitement.

D'autre part, nous pouvons noter l'effet de la paroi concave, qui refocalise le faisceau, de sorte qu'au moment du second rebond, la largeur du faisceau est comparable à sa largeur initiale. Peut-on alors imaginer, par une succession de réflexions sur des parois concaves, conserver indéfiniment la cohérence du faisceau, et le propager sans qu'il se disperse ?

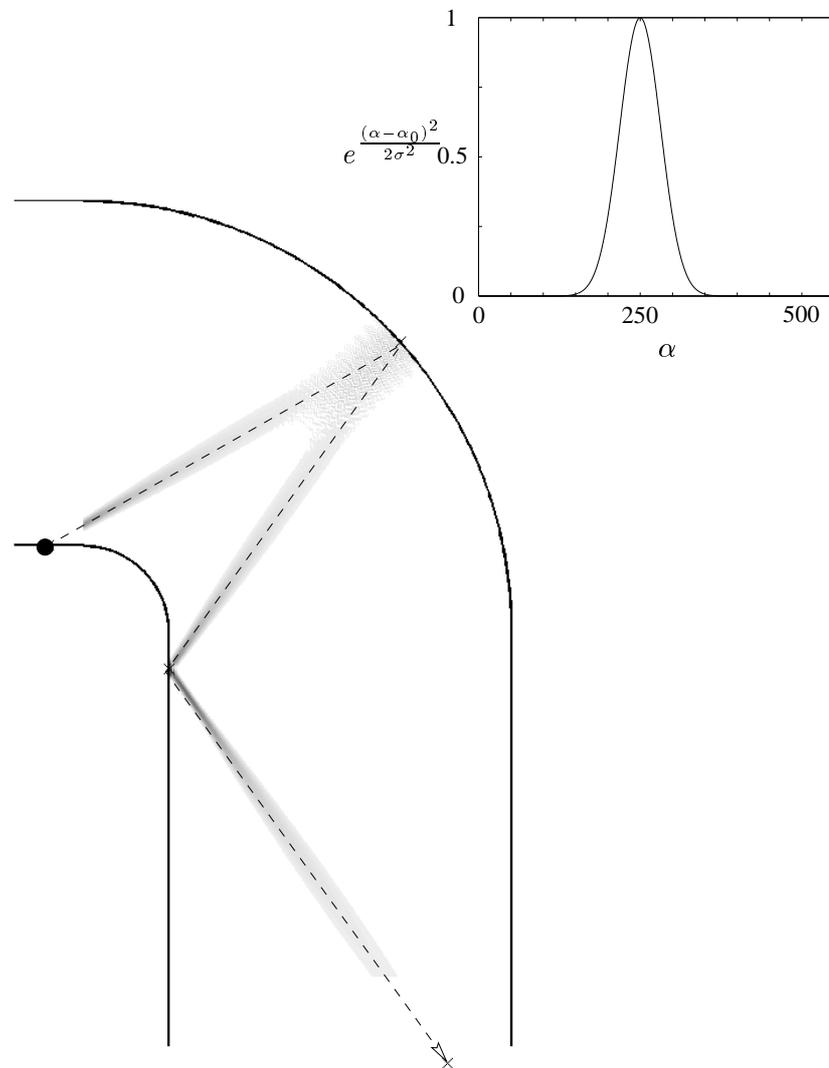


FIG. 5.3: Module de la pression dans un coude reliant deux guides droits semi-infinis. Une source ponctuelle harmonique (\bullet), placée sur une des parois du conduit en amont du coude, émet une onde acoustique à une fréquence telle que 500 modes sont propagatifs dans les parties droites. L'onde émise par cette source est fenêtrée spectralement par une gaussienne centrée sur le mode 250 (en médaillon), de sorte qu'un faisceau est émis, faisant avec l'axe du guide un angle $\pi/6$. Dans la limite asymptotique des rayons, la trajectoire correspondante est celle donnée en surimpression (—). 550 modes sont pris en compte dans le calcul multimodal.

5.3 Caractérisation géométrique des propriétés de diffusion d'un guide d'ondes

Par une approche géométrique, il est possible de construire pour un guide d'ondes une matrice de diffusion *rayons*, donnant la contribution $|S_{\alpha\beta}|^2$ d'un mode β incident au mode α réfléchi ou transmis. Dans deux articles récents [46, 50], cette matrice est définie et calculée pour des guides d'ondes quantiques, afin de comparer les approches classique (rayons) et ondulatoire. A haute fréquence (200 modes propagatifs [50]), mais également à moyenne fréquence (30 modes [46]), les résultats obtenus présentent une très grande similitude. L'étude des structures de la matrice *rayons* et de la nature des rayons qui génèrent ces structures permet de prévoir et d'interpréter physiquement les caractéristiques de la matrice *ondes*.

Nous détaillons dans cette section la construction de la matrice de diffusion *rayons*, que nous déterminons ensuite pour plusieurs géométries de guides, composés de parties droites et courbes. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus avec la formulation multimodale, et nous mettons en évidence plusieurs caractéristiques de la propagation à haute fréquence dans le type de géométrie considéré.

5.3.1 Matrice \mathcal{S} : approche ondulatoire

Le formalisme que nous adopterons dans la suite de ce chapitre est celui donnant \mathcal{S} unitaire et symétrique (cf. §5.2.1). Les matrices \mathcal{R} , \mathcal{R}' , \mathcal{T} et \mathcal{T}' se déduisent simplement des matrices R , R' , T et T' par la transformation

$$\mathcal{R} = E\tilde{R}E^{-1}$$

(idem pour les autres matrices), où \tilde{R} est la restriction de R aux N_p modes propagatifs, et E , diagonale, est donnée par $E_\alpha = \sqrt{jk_\alpha}$, $\alpha = 0, \dots, N_p - 1$. C'est ce formalisme que nous avons utilisé au chapitre précédent pour définir la conductance. Seule la partie propagative de la matrice de diffusion, celle qui peut être obtenue par l'approche géométrique, est donc prise en compte.

5.3.2 Matrice \mathcal{S} : approche *rayons*

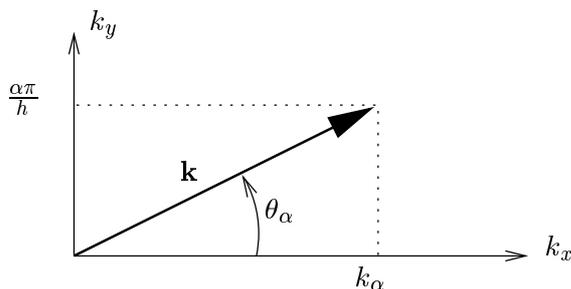
Chaque mode ψ_α d'un guide d'ondes rectiligne étant caractérisé par une constante de propagation

$$k_\alpha^2 = k^2 - \frac{\alpha^2\pi^2}{h^2},$$

où h est la largeur du guide, on peut lui associer, si ce mode est propagatif, un angle θ_α formé dans l'espace des nombres d'onde par le vecteur \mathbf{k} et sa composante longitudinale k_α (fig. 5.4), de sorte que

$$\theta_\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha\pi}{kh} \right).$$

La méthode pour construire la matrice de diffusion *rayons* d'une cavité ouverte est la suivante : considérons une particule entrant par la gauche dans la cavité, avec un angle θ_i quelconque. Si le nombre de modes propagatifs est fini (si la fréquence est finie), il ne correspond à θ_i aucun mode dans la plupart des cas. Toutefois, cet angle étant inclus dans un intervalle $[\theta_\beta, \theta_{\beta+1}[$, $\beta \in \mathbb{N}$, on lui associe le mode β . La particule se propage alors dans le guide, le rayon qu'elle décrit se réfléchissant sur les

FIG. 5.4: Vecteur d'onde \mathbf{k} dans l'espace des nombres d'onde.

parois selon les lois de l'acoustique géométrique, puis ressort, à gauche ou à droite, avec un angle θ_e . A cet angle θ_e correspond un mode α ($\theta_e \in [\theta_\alpha, \theta_{\alpha+1}]$). En faisant varier l'angle θ_i et la position initiale de la particule de manière à décrire un grand nombre de trajectoires (rayons), on établit pour chaque valeur de β une distribution de valeurs de α . En distinguant les rayons émergeant à gauche de ceux émergeant à droite, ces distributions donnent les contributions du mode β incident au mode α réfléchi et transmis, soit $|\mathcal{R}_{\alpha\beta}|^2$ et $|\mathcal{T}_{\alpha\beta}|^2$. En supposant maintenant que la particule entre par la droite, la même procédure donne $|\mathcal{R}'_{\alpha\beta}|^2$ et $|\mathcal{T}'_{\alpha\beta}|^2$.

5.3.3 Géométries étudiées

Nous souhaitons comparer, à haute fréquence, l'approche ondulatoire et la limite asymptotique pour l'étude des propriétés de diffusion de guides d'ondes. Nous étudierons donc des cavités ouvertes constituées de coudes et de conduits droits assemblés, avec de part et d'autres un guide droit semi-infini (fig. 5.5). Les rayons sont tirés depuis l'un ou l'autre de ces guides semi-infinis, et les conditions initiales que nous considérons sont les valeurs de $y_i \in [0, 1]$ donnant la position sur la section du guide au niveau de l'interface avec la cavité, et de l'angle d'incidence $\theta_i \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Nous pouvons d'ores et déjà relever une première caractéristique évidente de ces cavités : la section étant constante, un rayon ne peut pas faire demi-tour et se propager à nouveau dans le guide depuis lequel il a été émis. Les sous-matrices \mathcal{R} et \mathcal{R}' de la matrice de diffusion *rayons* sont donc nulles. Ce résultat est cohérent avec les propriétés de la matrice *ondes*. Nous avons vu que la conservation de l'énergie implique la relation $\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = \mathcal{S} \mathcal{S}^\dagger = I$. Pour un coude - on a alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ car le coude est symétrique - cette relation implique à son tour $\mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} + \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = I$, d'où

$$\text{Tr}(\mathcal{R}^\dagger \mathcal{R}) + \text{Tr}(\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}) = N_p,$$

où Tr est la trace. La figure 5.6 donne les traces de $\mathcal{R}^\dagger \mathcal{R}$ et $\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}$ en fonction de N_p . Les termes de \mathcal{R} deviennent rapidement très petits, dès que la fréquence est suffisamment grande pour que plusieurs modes puissent se propager. Comme le prévoit l'approche géométrique, la réflexion d'une onde par un coude, et par conséquent par tout système constitué de coudes et de conduits droits, est négligeable aux hautes fréquences.

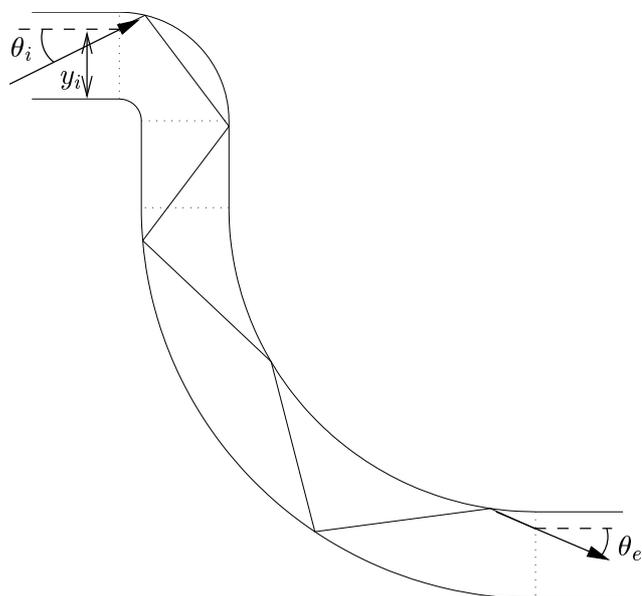
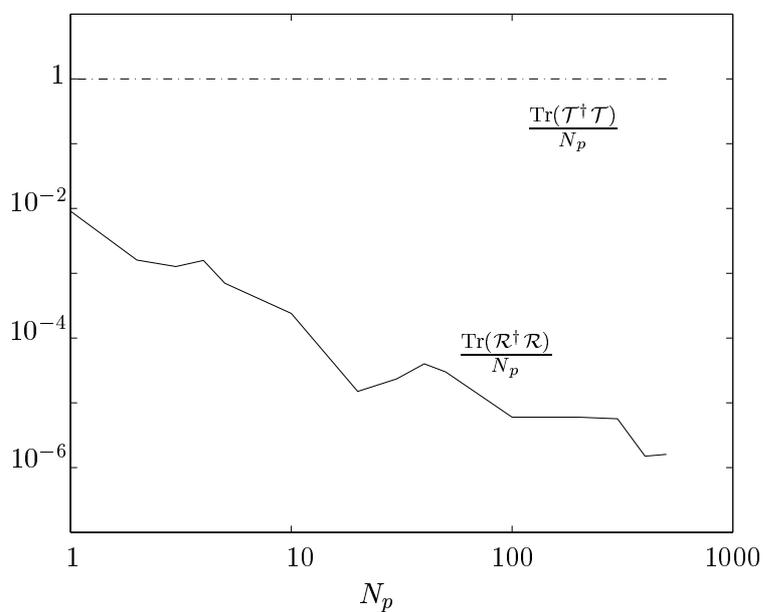


FIG. 5.5: Exemple de géométrie étudiée.

FIG. 5.6: Traces de $\mathcal{R}^\dagger \mathcal{R}$ et $\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}$ en fonction du nombre de modes propagatifs N_p , pour un coude de dimensions $R_0/h = 0.75$ et $\theta_f = 90^\circ$.

5.3.4 Résultats

Dans ce paragraphe, nous étudions quatre géométries de cavités ouvertes : deux coudes, l'un de courbure faible, l'autre de courbure plus grande, puis deux cavités composées d'une succession de quatre coudes, reliés par des segments droits : l'une de courbure faible, à nouveau, et l'autre de courbure plus grande. Dans chaque cas, nous donnons la matrice de transmission *rayons* et la matrice de transmission *ondes* \mathcal{T} obtenue avec la formulation multimodale. Les matrices de réflexion ne sont pas données, puisqu'il a été montré que la réflexion par ce type de cavités est négligeable aux hautes fréquences.

Deux méthodes ont été adoptées pour le choix des conditions initiales des rayons : un tirage aléatoire de ces conditions, ou les combinaisons de deux ensembles réguliers de valeurs de y_i et θ_i respectivement. Les résultats obtenus sont similaires si un grand nombre de conditions initiales est considéré. Les résultats présentés ont été obtenus avec 10^6 ou 10^7 paires de valeurs (y_i, θ_i) .

5.3.4.1 Coude faiblement courbé

La cavité considérée est un coude simple, de dimensions $R_0/h = 4$ et $\theta_f = \pi/2$, avec 1000 modes propagatifs (fig. 5.7). 1050 modes ont été pris en compte pour le calcul multimodal de T .

La similitude entre les deux matrices, *rayons* et *ondes*, est remarquable. L'approche géométrique, dont le principe est au demeurant très simple, permet d'obtenir les multiples structures de la matrice de transmission et de prédire par conséquent les caractéristiques de la propagation dans le coude. Aucune information de phase n'est pourtant prise en compte dans l'approche géométrique, et les effets de diffraction et d'interférence sont ignorés.

La structure de la matrice, qui se concentre autour de la première diagonale dans la partie supérieure droite, montre que les rayons entrant avec un angle d'incidence grand sont peu dispersés. Les modes correspondants, d'ordres élevés, se transmettent donc essentiellement sur le même mode en sortie du coude. L'effet de la courbure sur la propagation de ces modes est faible (pour un conduit droit, une telle représentation de la matrice de transmission donne uniquement une diagonale ; il n'y a aucun couplage de modes). La dispersion des rayons augmente par contre lorsque l'angle d'incidence diminue.

5.3.4.2 Coude fortement courbé

Pour un coude de courbure plus grande ($R_0/h = 0.75$), la structure de la matrice de transmission change radicalement (fig. 5.8). La dispersion des rayons est beaucoup plus importante.

Un arc de grande intensité apparaît, en outre, dont le centre de courbure est le point $(\beta, \alpha) = (0, 0)$. Les trajectoires qui contribuent à cet arc sont celles des rayons traversant directement le coude, sans se réfléchir ni sur la paroi extérieure, ni sur la paroi intérieure. Un transfert important de l'énergie du mode α vers le mode $N_p - 1 - \alpha$ est ainsi mis en évidence, à l'exception des modes d'ordres très élevés (le coin supérieur droit de la matrice) qui, comme dans le coude de courbure faible, se transmettent essentiellement sur le même mode.

L'existence de « whispering gallery orbits » [50] est connue dans les cavités possédant des parois concaves. Ces orbites correspondent aux rayons qui se propagent en suivant cette paroi. La présence de ces orbites dans une cavité produit des structures auto-similaires [53, 50]. La matrice de transmission du coude, en particulier la matrice classique, présente une telle structure dans la partie inférieure gauche (voir également l'agrandissement de cette zone, figure 5.9). Le point de convergence de cette structure

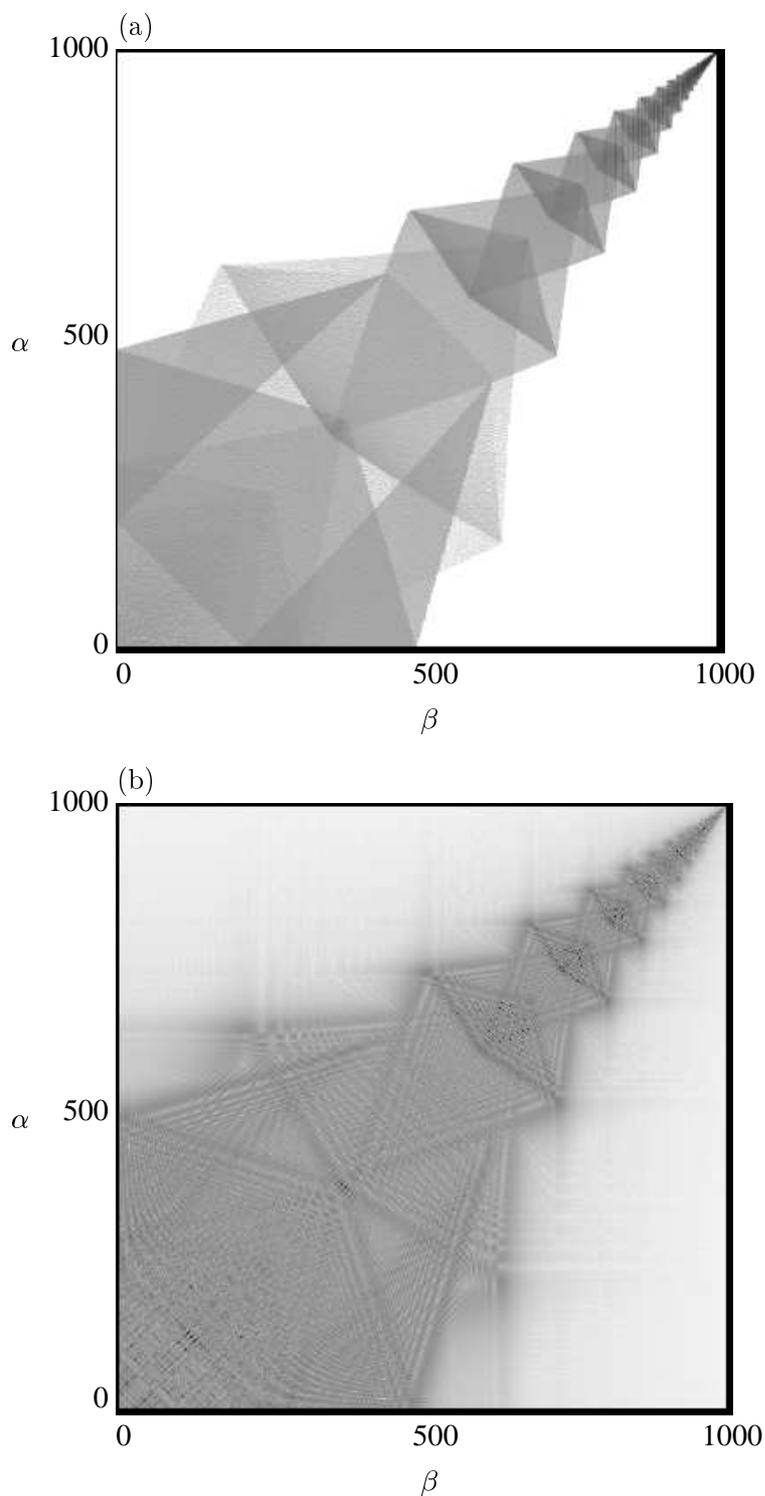


FIG. 5.7: Matrice de transmission (a) rayons et (b) ondes, $|\mathcal{T}_{\alpha\beta}|^2$, d'un coude de dimensions $R_0/h = 4$ et $\theta_f = \pi/2$. 1050 modes sont pris en compte dans le calcul de (b), dont 1000 sont propagatifs.

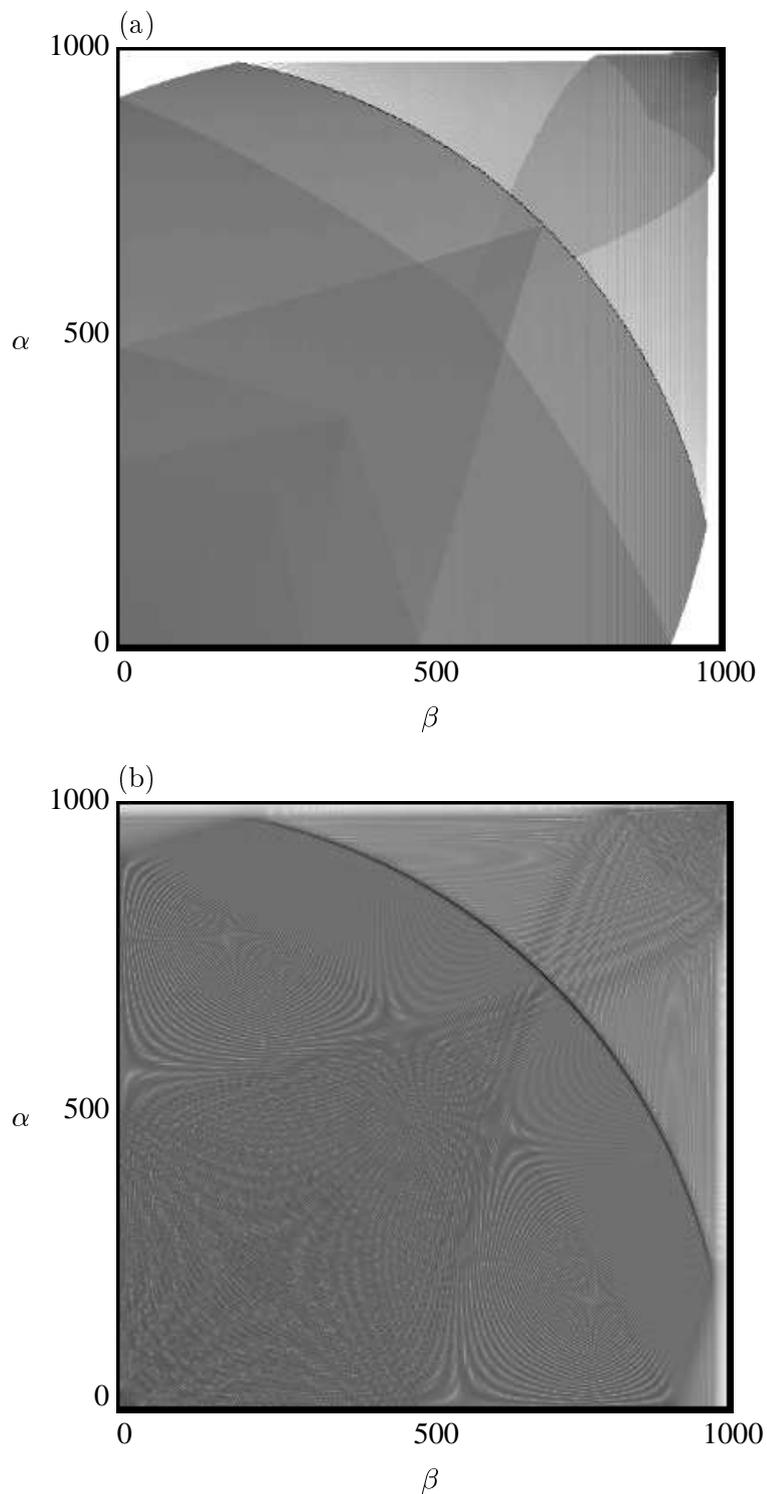


FIG. 5.8: Matrice de transmission (a) rayons et (b) ondes, $|\mathcal{T}_{\alpha\beta}|^2$, d'un coude de dimensions $R_0/h = 0.75$ et $\theta_f = \pi/2$. 1050 modes sont pris en compte dans le calcul de (b), dont 1000 sont propagatifs.

auto-similaire est le point $(\theta_i, \theta_e) = (0, 0)$, correspondant aux rayons arrivant tangentiellement à la paroi concave, effectuant donc une infinité de rebonds sur cette paroi. Cette propriété de la matrice *rayons* nous permet de prévoir l'existence de « whispering gallery » modes (modes de galerie) dans le coude.

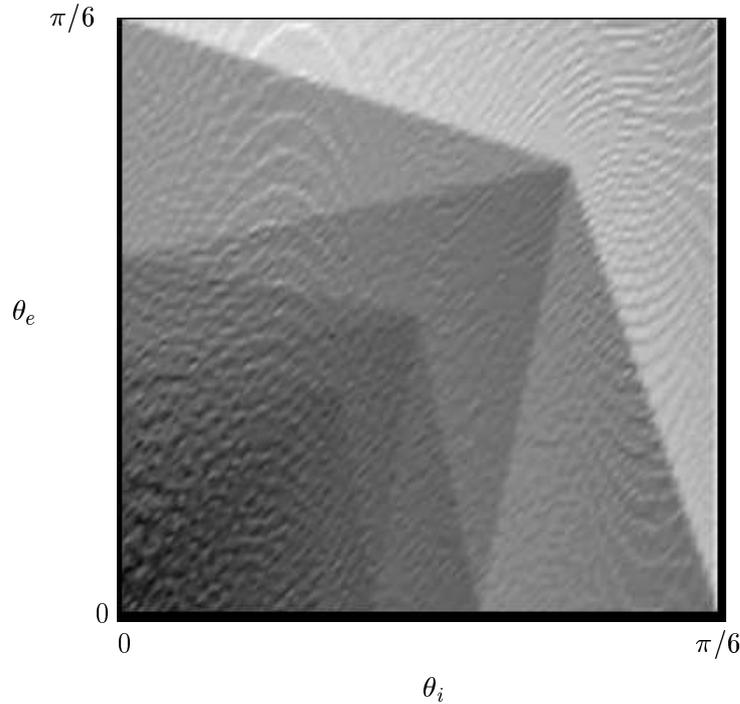


FIG. 5.9: Agrandissement de la figure 5.8, représenté en fonction de l'angle, pour $\theta_{i,e} \in [0, \pi/6]$.

5.3.4.3 Quatre coudes faiblement courbé

Lorsque la cavité est constituée non plus d'un unique coude, mais de plusieurs coudes reliés par des conduits droits, la dynamique des rayons est modifiée. La figure 5.10 montre la matrice de transmission classique pour une cavité composée de 1, 2, 3 puis 4 coudes, de dimensions $R_0/h = 4$ et $\theta_f = \pi/2$. Mis à part le coin supérieur droit, correspondant aux modes d'ordres les plus élevés, la structure de la matrice s'élargit autour de la première diagonale. De plus, aux structures très nettes que l'on observe lorsque la cavité est un coude simple se substitue progressivement une zone quasi-uniforme. Une zone uniforme telle que celle-ci apparaît si un ensemble de rayons tirés dans un petit intervalle $\Delta\theta_i$ se répartit uniformément à la sortie de la cavité sur un intervalle $\Delta\theta_e$ beaucoup plus étendu. Cette grande sensibilité aux conditions initiales montre que la dynamique des rayons est vraisemblablement irrégulière. La dynamique, régulière dans un coude, devient donc chaotique lorsque la cavité est composée d'une alternance de coudes et de conduits droits. Comme pour de nombreux billards quantiques, ouverts ou fermés - stade, billard de Sinaï, « rippled billiard », billard circulaire tronqué, etc. (fig. 5.11) - c'est la présence conjointe de parois courbes et droites qui est responsable de l'apparition d'une dynamique chaotique.

Une étude plus précise de la dynamique des rayons (régulière, mixte ou chaotique) reste bien sûr

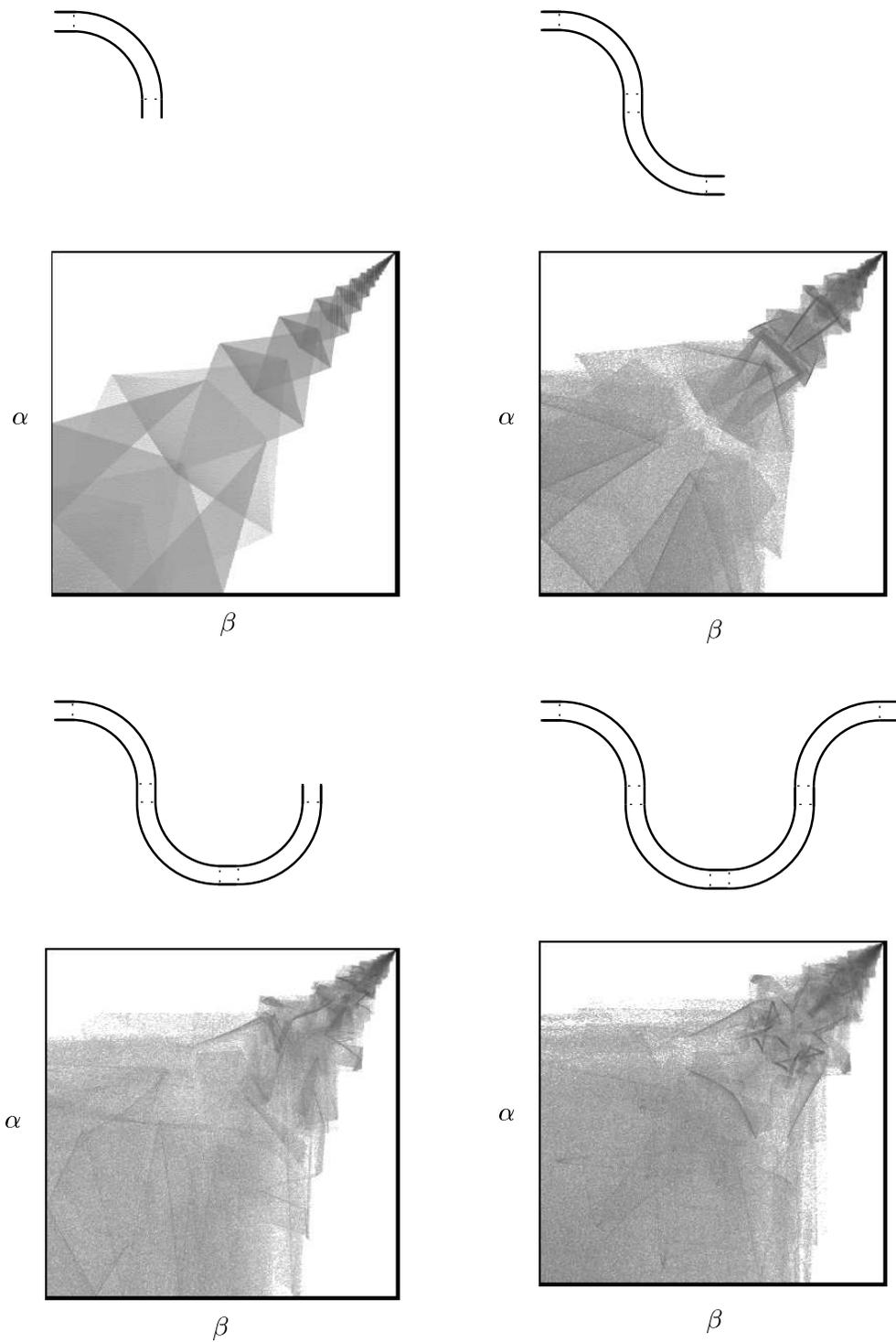


FIG. 5.10: Matrice de transmission *rayons* pour une cavité composée de un, deux, trois et quatre coudes de dimensions $R_0/h = 4$ et $\theta_f = \pi/2$, reliés par des conduits droits de longueur $l/h = 1$.

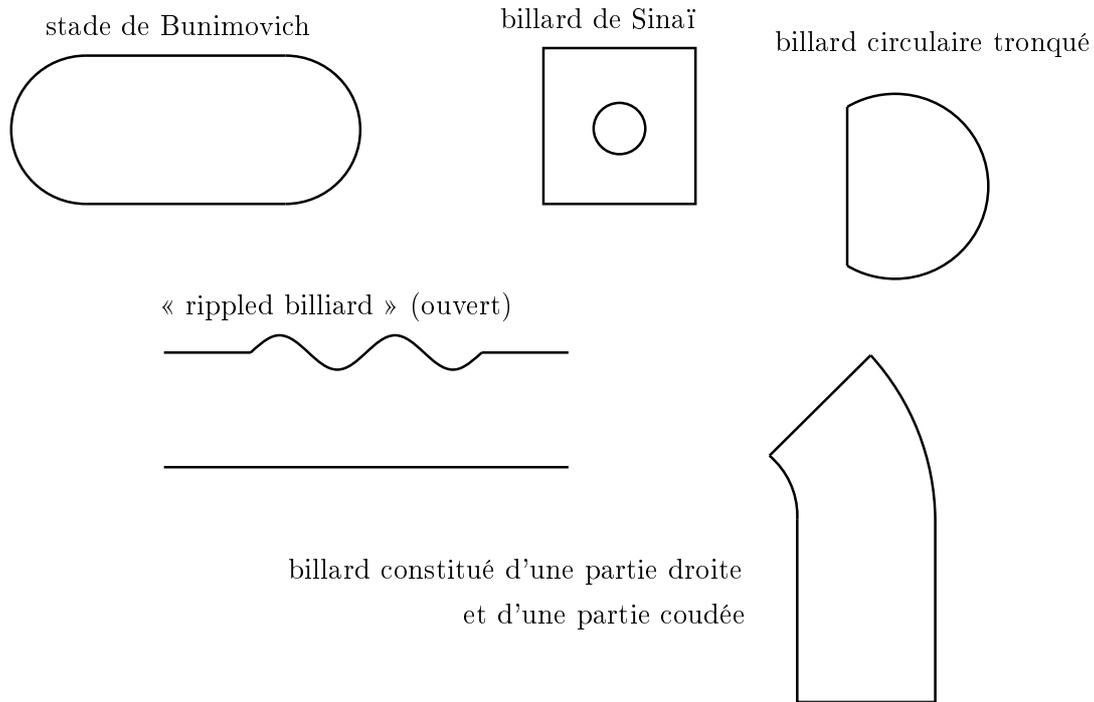


FIG. 5.11: Exemples de billards quantiques.

à faire. L'observation de la matrice de diffusion nous permet seulement de suspecter l'apparition d'un comportement chaotique. D'autre part, des structures sont encore discernables sur les matrices de transmission *rayons* et *ondes* de la cavité composée de quatre coudes (fig. 5.12), qu'il conviendrait d'interpréter.

5.3.4.4 Quatre coudes fortement courbés

Les matrices de transmission *rayons* et *ondes* de la figure 5.13 sont celles d'une cavité composée de quatre coudes, de dimensions $R_0/h = 0.75$. La dispersion des rayons est très grande ; pour tout angle d'incidence, on observe une répartition quasi-uniforme des angles d'émergence sur tout l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$. Comme dans l'exemple précédent, nous pouvons supposer que la dynamique des rayons est irrégulière.

Quelques structures, faiblement contrastées, se dégagent toutefois, ainsi que trois segments (notés (1), (2) et (3) sur la figure 5.13 (a)) de plus grande intensité. Les trajectoires qui contribuent à ces trois segments correspondent aux rayons qui se réfléchissent uniquement sur les parois rectilignes de la cavité, sans rencontrer les parois courbes (fig. 5.14). Dans un voisinage proche des conditions initiales correspondant à ces trajectoires, la dynamique des rayons est régulière. Une faible variation de ces conditions modifie peu la trajectoire du rayon.

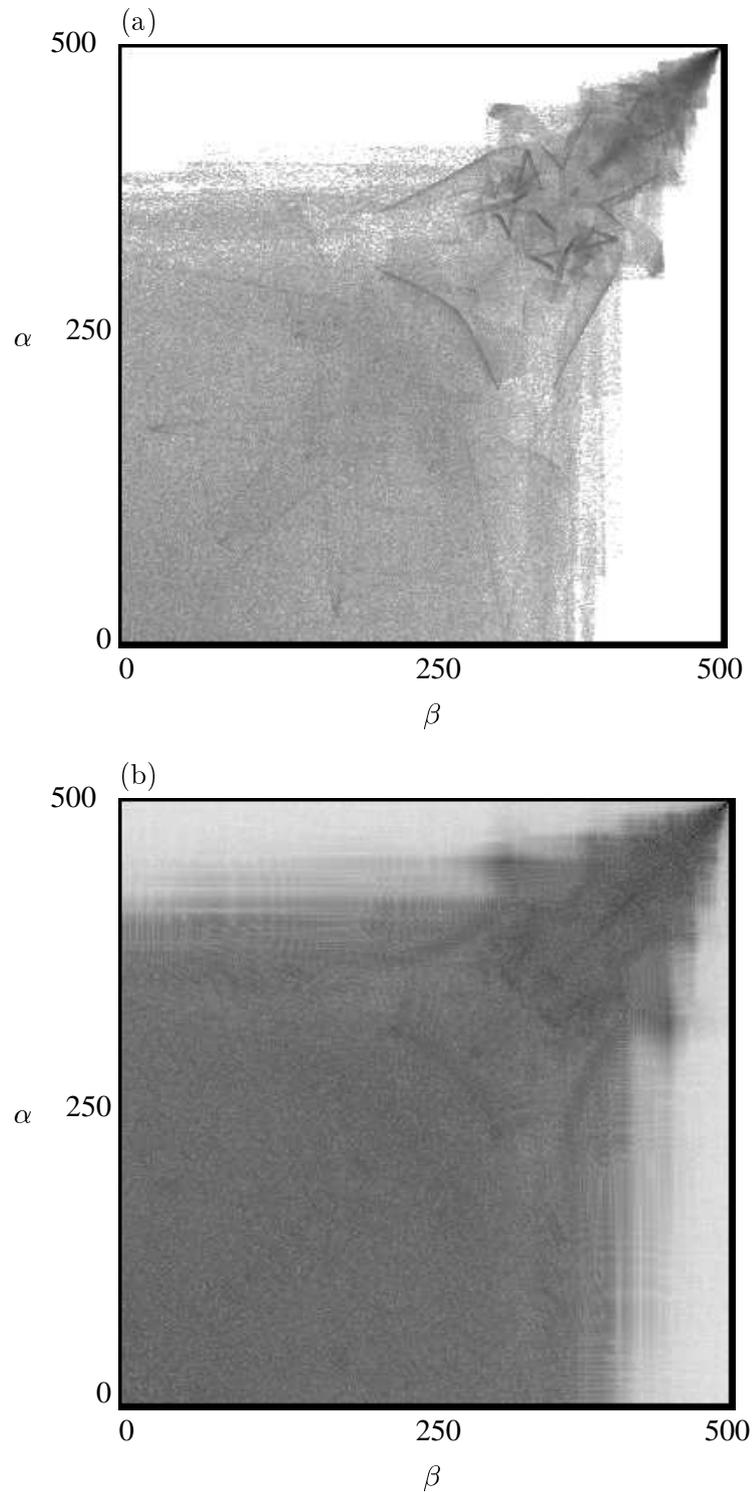


FIG. 5.12: Matrice de transmission (a) rayons et (b) ondes, $|\mathcal{T}_{\alpha\beta}|^2$, de quatre coudes de dimensions $R_0/h = 4$ et $\theta_f = \pi/2$, reliés par des conduits droits de longueur $l/h = 1$. 550 modes sont pris en compte dans le calcul de (b), dont 500 sont propagatifs.

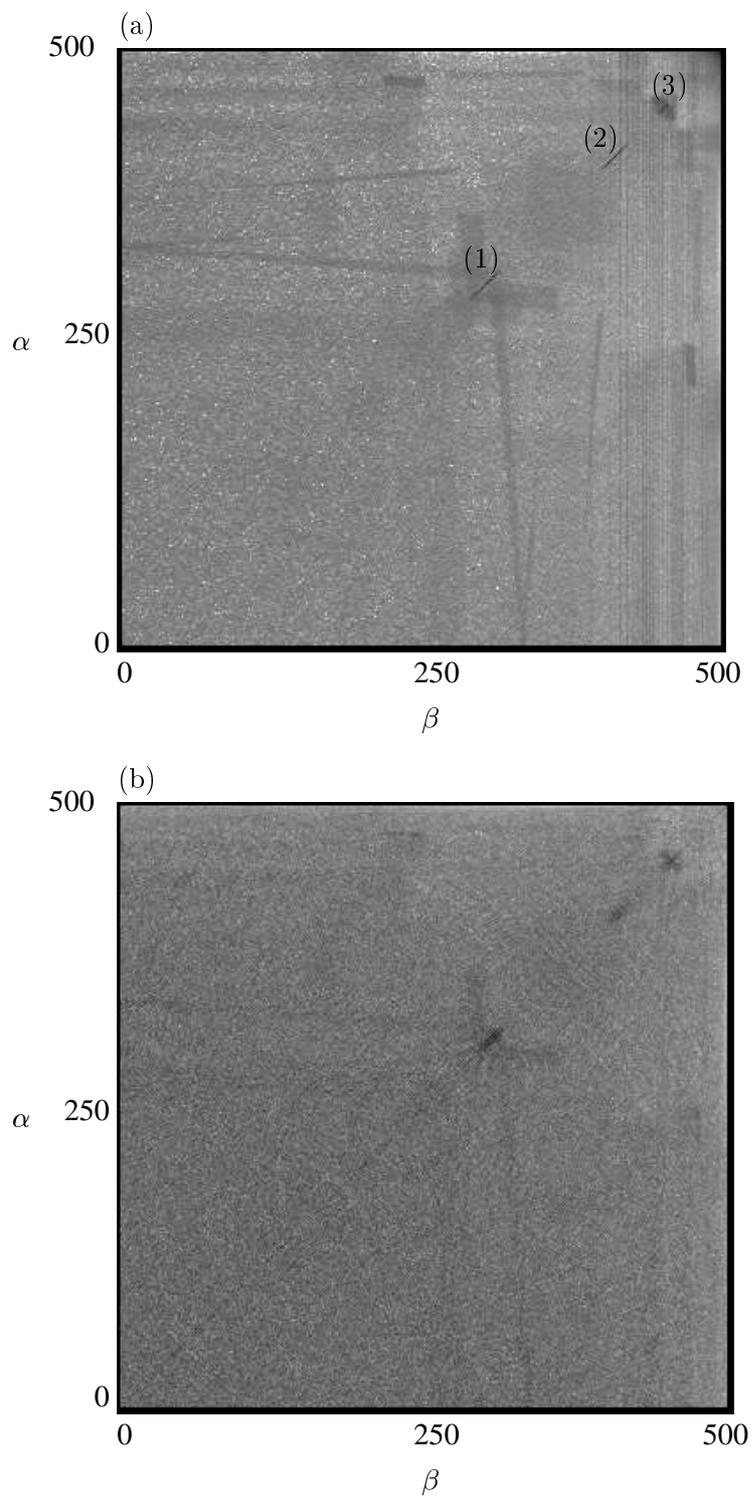


FIG. 5.13: Matrice de transmission (a) rayons et (b) ondes, $|\mathcal{T}_{\alpha\beta}|^2$, de quatre coudes de dimensions $R_0/h = 0.75$ et $\theta_f = \pi/2$, reliés par des conduits droits de longueur $l/h = 1$. 550 modes sont pris en compte dans le calcul de (b), dont 500 sont propagatifs.

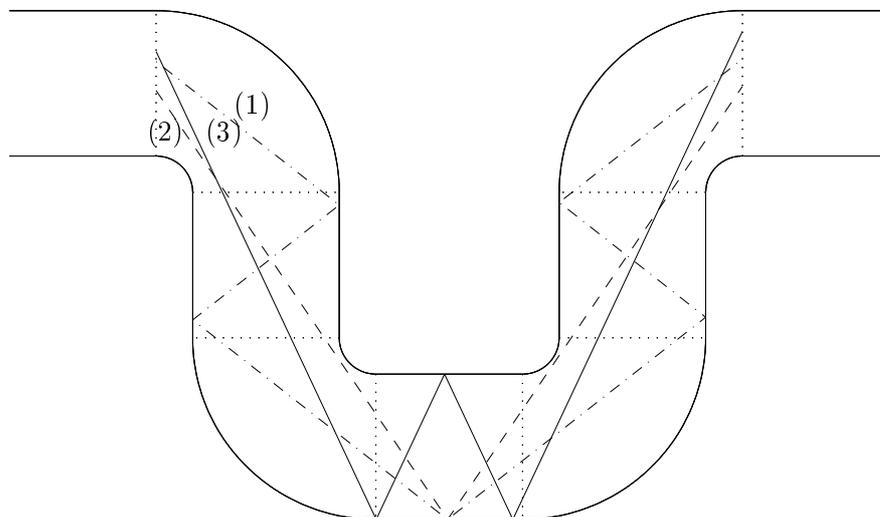


FIG. 5.14: Trajectoires typiques correspondant aux zones annotées sur la figure 5.13 (a).

5.4 Conclusion

Les calculs directs de la matrice de diffusion et du champ de pression dans un coude permettent de prendre en compte un très grand nombre de modes. Il est ainsi possible de décrire la propagation multimodale à très haute fréquence dans des guides d'ondes coudés ou comportant des parties coudées. Le calcul de la matrice de diffusion a été validé avec 100 à 1000 modes propagatifs; ce nombre peut sans aucun doute, au prix seulement de calculs plus longs, être notablement augmenté (avec MatLab et la programmation actuelle du calcul, le calcul pour 2000 modes pourra être validé). La synthèse d'un faisceau modal gaussien par un groupe de modes dans un coude a permis de retrouver, avec une approche ondulatoire, les lois de l'acoustique géométrique.

Les travaux présentés dans la seconde partie de ce chapitre constituent un préliminaire à l'étude de la correspondance ondes-rayons dans des guides et cavités fermées courbes. Cette première approche qualitative a permis de mettre en évidence une très grande similitude entre les matrices de diffusion *ondes* et *rayons*. Une comparaison quantitative de ces matrices reste à faire. Il sera en outre intéressant de poursuivre l'étude de la dynamique des rayons dans ces guides et cavités en fonction des différents paramètres géométriques.

Chapitre 6

Problème avec source dans un écoulement cisailé

6.1 Introduction

Le problème théorique des modes dans un conduit en présence d'un écoulement peut être résolu simplement lorsque l'écoulement est uniforme. La seule action de l'écoulement sur la propagation acoustique est alors l'effet de convection, et seules les constantes de propagation des modes sont modifiées : $\alpha_n^\pm = (-M_0 k \pm \sqrt{k^2 - (1 - M_0^2) (\frac{n\pi}{h})^2}) / (1 - M_0^2)$. Les modes ψ_n sont ceux d'un guide droit sans écoulement.

En revanche, lorsque l'écoulement est cisailé, le problème est plus délicat. L'équation d'onde pour la pression dans le conduit n'est plus d'ordre 2 comme dans le cas classique (équation de Helmholtz), mais d'ordre 3 ; du fait de l'interaction complexe entre l'acoustique et l'hydrodynamique, de nouvelles solutions apparaissent. Par transformée de Fourier spatiale, cette équation d'onde complexe donne l'équation de Pridmore-Brown [60], équation aux valeurs propres régissant les modes transverses ψ_n et les valeurs propres associées α_n . Pour un écoulement cisailé, ces valeurs et fonctions propres ne peuvent être déterminées analytiquement. En outre, l'équation de Pridmore-Brown n'étant pas d'un type classique (par exemple Sturm-Liouville), il n'est pas possible a priori d'établir la complétude des modes. On ne sait donc pas s'il est possible de décrire toute solution dans le guide sous forme d'un développement sur ces modes. Une autre difficulté, enfin, est liée au fait que les modes ne sont pas nécessairement orthogonaux.

Ces problèmes de complétude et d'orthogonalité des modes sont particulièrement délicats lorsqu'on souhaite déterminer le champ généré par une source dans le conduit. Swinbanks [70], en 1975 a traité ce problème de manière originale, en reformulant l'équation de Pridmore-Brown sous forme d'un problème aux valeurs propres $[L(y, \alpha) - \Omega^2 r(y, \alpha)] \phi_{\Omega^2}(y, \alpha, k) = 0$, en supposant que $k = \omega/c_0$ et α sont des paramètres fixes, dont dépend la valeur propre Ω^2 . La fonction de Green de cette équation est ensuite établie comme une somme sur les fonctions propres $\phi_{\Omega^2}(y, \alpha, k)$, qui sont orthogonales. Chaque terme du développement de la fonction de Green ayant un pôle simple en $\omega^2 = \Omega^2$, le calcul de la transformée de Fourier inverse de cette fonction fait apparaître pour chacun de ces pôles un mode acoustique. Le résidu de la fonction de Green à chaque pôle détermine l'amplitude du mode correspondant. La projection de la source sur les modes, impossible par une approche classique (comme celle utilisée dans les chapitres

précédents) du fait des problèmes de complétude et d'orthogonalité, peut donc être réalisée par le calcul de la fonction de Green et la théorie des résidus. Mani [48], en 1980, a repris cette approche, en utilisant cette fois une transformée de Laplace au lieu de la transformée de Fourier.

Outre le spectre discret de valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown, correspondant aux modes acoustiques perturbés par l'écoulement, un spectre continu, dû à la singularité de l'équation, apparaît lorsque l'écoulement est cisailé. Swinbanks montre que la contribution de ce continuum de modes hydrodynamiques, présent uniquement en aval de la source, peut dans la plupart des cas - « pour la plupart des distributions de source » - être négligée. Mani également ne prend en compte dans son étude que les modes acoustiques.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier la contribution des modes acoustiques et du continuum de modes hydrodynamiques au champ généré par une source ponctuelle dans un conduit droit infini, à deux dimensions, en présence d'un écoulement parallèle cisailé. Les modes acoustiques, en amont et en aval de la source, sont déterminés en calculant les résidus de la fonction de Green de l'équation de Pridmore-Brown. La contribution du continuum de modes est ensuite étudiée, en intégrant la fonction de Green autour du continuum de valeurs propres. Les amplitudes du champ acoustique et du champ hydrodynamique peuvent alors être comparées. Nous nous intéressons également à la décroissance du champ hydrodynamique.

6.2 Formulation du problème

Soit un conduit rectiligne dont les parois sont supposées rigides, siège d'un écoulement parallèle cisailé $U(y)$ (fig. 6.1). Nous limiterons notre étude au cas d'un conduit bidimensionnel. En l'absence de perturbation, la pression et la densité du fluide sont supposées uniformes, et notées p_0 et ρ_0 respectivement.

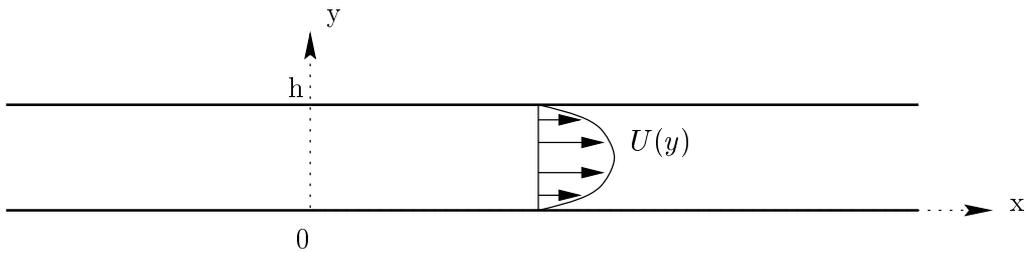


FIG. 6.1: Écoulement parallèle cisailé dans un conduit rectiligne.

Une source de débit $q(x, y, t)$ génère une perturbation infinitésimale des champs de vitesse, pression et densité. Les quantités perturbées, $\mathbf{v} = (U(y) + u, v)$, $p_0 + p$ et $\rho_0 + \rho'$, satisfont aux équations linéarisées de conservation de la masse

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho' + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho_0 q, \quad (6.1)$$

et de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \rho_0 v \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.2)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (6.3)$$

avec aux parois la condition de vitesse normale nulle $v = 0$ pour $y = 0$ et h , soit $\partial_y p = 0$. Dans l'hypothèse de conditions adiabatiques, les quantités acoustiques p et ρ' sont liées par l'équation d'état

$$\frac{Dp}{Dt} = c_0^2 \frac{D\rho'}{Dt},$$

où $D/Dt = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla = \partial_t + U \partial_x$ est l'opérateur de dérivée convective.

En prenant la dérivée convective de l'équation (6.1) et la divergence des équations (6.2) et (6.3), il vient

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt^2} \right) p = -2\rho_0 \frac{dU}{dy} \frac{\partial v}{\partial x} - \rho_0 \frac{Dq}{Dt}.$$

Cette équation d'onde fait intervenir dans les termes sources la vitesse v , qui peut être éliminée en calculant la dérivée convective de l'équation, et en utilisant l'égalité (6.3) :

$$\frac{D}{Dt} \left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt^2} \right) p = 2 \frac{dU}{dy} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \rho_0 \frac{D^2 q}{Dt^2}. \quad (6.4)$$

Cette nouvelle équation d'onde est d'ordre 3 si l'écoulement est cisailé (c'est-à-dire si $U'(y) \neq 0$), et non d'ordre deux comme l'équation d'onde classique. L'interaction complexe entre l'onde acoustique et l'écoulement cisailé augmente l'ordre de l'équation pour la pression, faisant apparaître de nouvelles solutions.

6.2.1 Fonction de Green

L'équation (6.4) étant linéaire, la solution du problème avec une source harmonique $q(x, y)e^{j\omega t}$ quelconque peut être déduite de la fonction de Green $G(x, y, y_s, t)$, solution de (6.4) pour une source ponctuelle $\delta(x)\delta(y - y_s)e^{j\omega t}$ située en un point y_s quelconque du guide. G étant exprimée au moyen de l'intégrale de Fourier

$$G(x, y, y_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\alpha, y, y_s) e^{-j\alpha x} d\alpha, \quad (6.5)$$

la fonction \hat{G} est alors solution de

$$\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial y^2} + \frac{2M'\alpha}{k - M\alpha} \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} + ((k - M\alpha)^2 - \alpha^2) \hat{G} = -j(k - M\alpha) \rho_0 c_0 \delta(y - y_s), \quad (6.6)$$

et satisfait à la condition de paroi rigide $\partial_y \hat{G} = 0$ en $y = 0$ et h .

Pour α donné, la fonction de Green \hat{G} peut être calculée de la manière suivante : ψ_1 et ψ_2 étant deux solutions de l'équation homogène (6.7), vérifiant les conditions aux parois

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)_{y=h} = 0,$$

la fonction de Green \hat{G} est donnée par

$$\hat{G}(\alpha, y, y_s) = -j\rho_0 c_0 (k - M(y_s)\alpha) \frac{\psi_1(y_<)\psi_2(y_>)}{W(\psi_1, \psi_2, y_s)},$$

où $y_< = y$ et $y_> = y_s$ pour $y < y_s$, et inversement $y_< = y_s$ et $y_> = y$ pour $y > y_s$. $W(\psi_1, \psi_2, y_s)$ est le Wronskien des fonctions ψ_1 et ψ_2 au point y_s .

6.2.1.1 Singularités de la fonction de Green \hat{G}

Les singularités de \hat{G} dans le plan complexe $(\text{Re}(\alpha), \text{Im}(\alpha))$ sont les valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown, [60], équation régissant les modes propres ψ dans un conduit en présence d'un écoulement cisailé :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2M'\alpha}{k - M\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y} + ((k - M\alpha)^2 - \alpha^2)\psi = 0. \quad (6.7)$$

On distingue deux familles de valeurs propres de cette équation (fig. 6.2) :

- Un spectre discret, d'une part, correspondant aux modes acoustiques perturbés par l'écoulement. Ces valeurs sont les pôles de \hat{G} , zéros du Wronskien $W(\psi_1, \psi_2, y_s)$.
- Un spectre continu, d'autre part, dû à la singularité de l'équation (6.7). En effet, pour $\alpha \in [k/M_{\max}, k/M_{\min}]$, M_{\min} et M_{\max} étant les valeurs minimum et maximum de $M(y)$ dans $[0, h]$, le coefficient du terme en $\partial_y \psi$ a une singularité régulière en y_c , où $k - M(y_c)\alpha = 0$. A ce spectre continu correspond un continuum de modes hydrodynamiques. Ces valeurs de α sont les singularités des fonctions ψ_1 et ψ_2 .

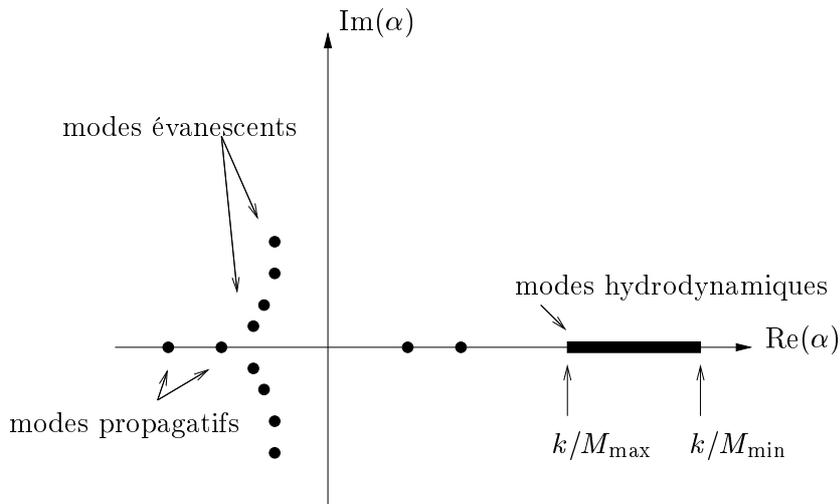


FIG. 6.2: Valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown.

6.2.2 Intégration de $\hat{G} \exp(-j\alpha x)$

Pour calculer l'intégrale (6.5),

$$G(x, y, y_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\alpha, y, y_s) e^{-j\alpha x} d\alpha, \quad (6.5)$$

nous utilisons la méthode des résidus. Pour cela, un contour fermé est défini dans le plan complexe ($\text{Re}(\alpha), \text{Im}(\alpha)$) (fig. 6.3), dans le demi-plan supérieur ou inférieur, selon que x est négatif ou positif. Lorsque le rayon du demi-cercle tend vers l'infini, l'intégrale sur cette partie du contour tend vers 0, et le théorème des résidus donne alors l'intégrale (6.5), compte tenu des singularités de \hat{G} contenues dans le contour fermé.

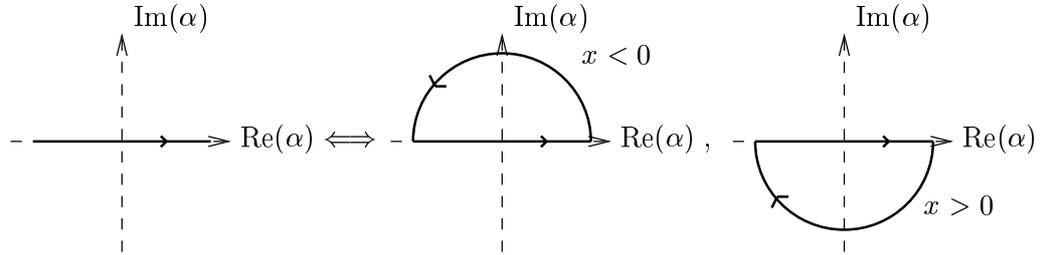


FIG. 6.3: Application du théorème des résidus pour le calcul de (6.5) : définition des contours d'intégration pour $x < 0$ et $x > 0$.

Or le spectre continu, ainsi qu'une partie des pôles (ceux correspondant aux modes acoustiques propagatifs), sont situés sur l'axe α réel (fig. 6.2), c'est-à-dire sur le contour d'intégration. Il est donc nécessaire de distinguer les valeurs propres correspondant aux modes amonts de celles correspondant aux modes avals, afin de déterminer si ces valeurs propres situées sur l'axe réel doivent être incluses dans le contour fermé $x < 0$ (modes amonts) ou dans le contour $x > 0$ (modes avals). Nous utilisons pour cela le critère de Briggs [10] (cf. Annexe A) : considérant une source divergeant en temps ($\omega = \omega_r + j\omega_j$ avec $\omega_j \rightarrow -\infty$), il est possible de distinguer les valeurs propres situées dans le demi-plan supérieur, correspondant aux modes amonts, et celles situées dans le demi-plan inférieur, correspondant aux modes avals. Pour chaque demi-espace, $x < 0$ et $x > 0$, le contour d'intégration peut alors être défini (fig. 6.4).

L'intégration de $\hat{G} \exp(-j\alpha x)$ sur ces deux contours donne

$$G(x < 0, y, y_s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2j\pi \text{Res}(\hat{G}(\alpha, y, y_s), \alpha_n^-) e^{-j\alpha_n^- x} \quad (6.9)$$

et

$$G(x > 0, y, y_s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} -2j\pi \text{Res}(\hat{G}(\alpha, y, y_s), \alpha_n^+) e^{-j\alpha_n^+ x} - \int_{\mathcal{C}} \hat{G}(\alpha, y, y_s) e^{-j\alpha x} d\alpha, \quad (6.10)$$

où $\text{Res}(\hat{G}(\alpha, y), \alpha_n^\pm)$ est le résidu de \hat{G} au pôle α_n^- (dans le demi-plan supérieur) ou α_n^+ (dans le demi-plan inférieur). \mathcal{C} est le contour d'intégration (orienté, cf. fig. 6.4) autour du continuum. L'amplitude des modes acoustiques est ainsi déterminée en calculant les résidus de \hat{G} aux pôles α_n^\pm .

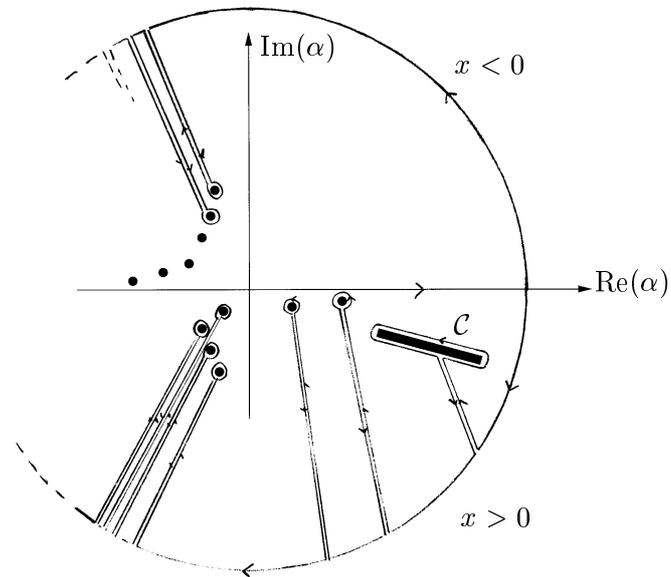


FIG. 6.4: Valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown (6.7) pour $\omega = \omega_r + j\omega_j$ et $\omega_j < 0$, et contours d'intégration de (6.5)

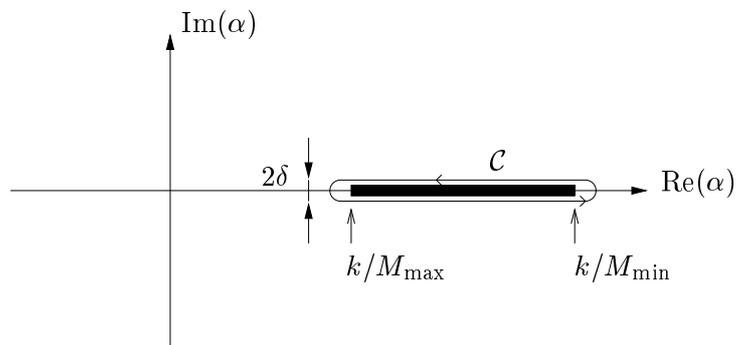


FIG. 6.5: Intégration autour du spectre continu, lorsque $w_j = \text{Im}(w) = 0$.

Les expressions (6.9) et (6.10) obtenues, il est possible de revenir au cas d'une source sinusoïdale, en faisant tendre continûment w_j vers 0. Ces expressions sont inchangées, et le contour d'intégration \mathcal{C} autour du continuum est le contour fermé donné sur la figure 6.5. L'intégration sur ce contour fermé est possible car \hat{G} est continue autour de $[k/M_{\max}, k/M_{\min}]$.

Ainsi, l'équation (6.10) montre, en aval de la source, la contribution des modes acoustiques, sous forme d'une somme discrète, et celle du continuum de modes hydrodynamiques sous forme d'une somme continue. En amont de la source, seuls des modes acoustiques sont générés. Nous donnons dans la section suivante le calcul des solutions (6.9) et (6.10) pour un profil simple d'écoulement parallèle cisailé dans un conduit droit.

6.3 Résultats

Nous considérons un profil d'écoulement simple, donné par

$$M(y) = M_0 \left(1 - \eta \left(\frac{y}{h}\right)^2\right), \quad (6.11)$$

avec $0 < M_0 < 1$ (écoulement subsonique¹) et $0 < \eta < 1$. Dans les applications suivantes, nous prendrons $M_0 = 0.4$ et $\eta = 0.5$. Une source ponctuelle harmonique, de fréquence $kh = 1$, est placée au point $y_s = 0.7h$ dans le conduit.

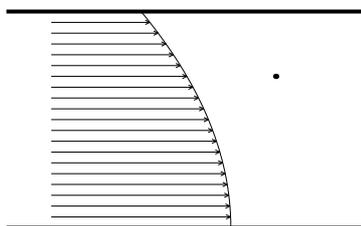


FIG. 6.6: Profil de vitesse de l'écoulement (éq. 6.11) et position de la source ($y_s = 0.7h$).

Deux méthodes numériques ont été adoptées pour calculer \hat{G} : un calcul des solutions ψ_1 et ψ_2 de (6.7) par une méthode de Runge-Kutta, et un calcul direct de \hat{G} par une méthode d'éléments finis. Les calculs des résidus et du continuum de modes hydrodynamiques sont ensuite effectués par intégration numérique de \hat{G} autour des pôles, pour les résidus, et de $\hat{G} \exp(-j\alpha x)$ autour du spectre continu, pour le continuum. Dans le paragraphe suivant, ces calculs numériques sont validés dans le cas d'une propagation sans écoulement, où $G(x, y, y_s)$ peut être déterminée analytiquement. La fonction de Green G est ensuite calculée pour le profil de vitesse donné précédemment (éq. 6.11).

¹Pour un écoulement supersonique, des valeurs propres du spectre discret peuvent être dans le continuum, et le problème est alors plus compliqué.

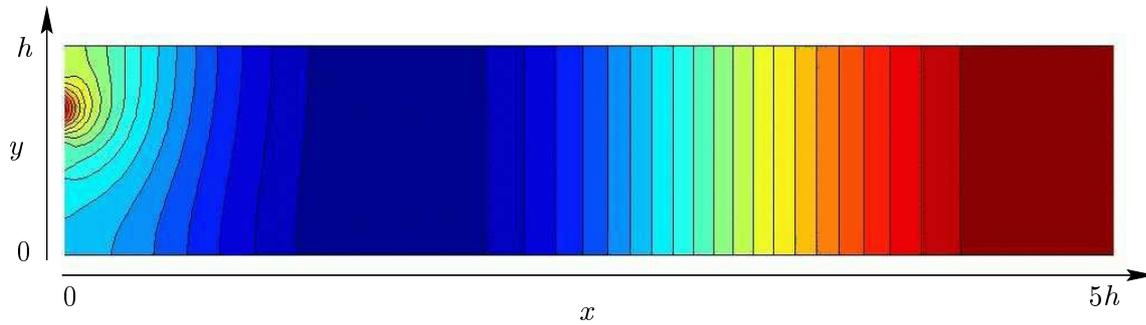


FIG. 6.7: Fonction de Green ($\text{Im}(G)$, cf. éq. 6.12) dans un conduit droit sans écoulement, avec 10 modes pris en compte. La source ponctuelle, de fréquence $kh = 1$, est située au point $(0, 0.7h)$.

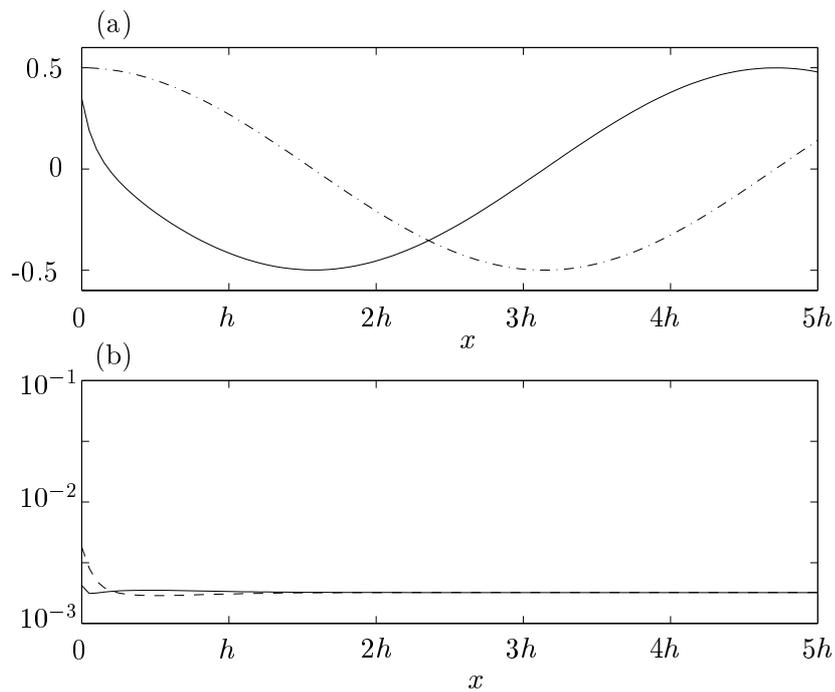


FIG. 6.8: (a) Fonction de Green (6.12) en $y = 0.67h$ ($kh = 1$, $y_s = 0.7h$, 10 modes sont pris en compte); (—) partie imaginaire, (---) partie réelle. (b) Erreur des calculs (---) Runge-Kutta et (—) éléments finis; l'erreur calculée est $|G_{\text{num.}} - G_{\text{anal.}}|/|G_{\text{anal.}}|$, où $G_{\text{num.}}$ est la solution numérique (Runge-Kutta ou éléments finis) et $G_{\text{anal.}}$ la solution analytique (6.12).

6.3.1 Propagation sans écoulement

Dans un guide d'ondes rectiligne, en l'absence d'écoulement, la fonction de Green dans le demi-espace $x > 0$ est

$$G(x > 0, y, y_s) = \frac{\rho_0 c_0}{h} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{k}{\alpha_n^+} \left(1 - \frac{\delta_{n0}}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h}y_s\right) e^{-j\alpha_n^+ x}, \quad (6.12)$$

où $\alpha_n^+ = \sqrt{k^2 - (n\pi/h)^2}$ pour $k > n\pi/h$ et $\alpha_n^+ = -j\sqrt{(n\pi/h)^2 - k^2}$ pour $k < n\pi/h$. Il n'y a bien sûr pas de continuum de modes hydrodynamiques dans ce cas, l'équation régissant les modes transverses étant régulière. Le champ obtenu en prenant en compte les dix premiers modes dans (6.12) est représenté sur la figure 6.7.

Afin de valider le calcul du champ modal par la méthode des résidus, nous déterminons la fonction de Green \hat{G} calculée par la méthode de Runge-Kutta et par le calcul par éléments finis, puis les résidus de \hat{G} aux pôles α_n^+ , $n \in [0, 9]$ sont obtenus par intégration numérique de \hat{G} autour de ces pôles. Pour chacun de ces calculs, la fonction G obtenue diffère de la fonction exacte (6.12) de moins de 0.3% (fig. 6.8). Lorsque x augmente, tous les modes évanescents finissent par s'annuler, et il ne reste de G que le mode plan; l'erreur de chaque calcul numérique converge donc vers l'erreur sur le résidu du mode 0.

6.3.2 Écoulement cisailé

6.3.2.1 Détermination des valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown

Nous avons vu (cf. §6.2.2) que les singularités de \hat{G} sont les valeurs propres α de l'équation de Pridmore-Brown (6.7). Ces valeurs ne pouvant être déterminées analytiquement si l'écoulement est cisailé, nous les calculons numériquement, en discrétisant l'équation de Pridmore-Brown,

$$-\alpha^3 M(M^2 - 1)\psi + \alpha^2(3M^2 - 1)k\psi - \alpha(M \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2M' \frac{\partial}{\partial y} + 3Mk^2)\psi + (k \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^3)\psi = 0, \quad (6.13)$$

par une méthode de Chebyshev [75]. Il vient

$$\alpha^3 A\psi + \alpha^2 B\psi + \alpha C\psi + D\psi = \mathbf{0}, \quad (6.14)$$

où A , B , C et D sont des matrices résultant de la projection des coefficients, non constants, de (6.13) et des opérateurs différentiels ∂_y et ∂_y^2 , compte tenu des conditions aux limites en 0 et h . Les composantes du vecteur ψ sont les valeurs de ψ aux points de Chebyshev.

L'équation (6.14) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ D & C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \alpha\psi \\ \alpha^2\psi \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \alpha\psi \\ \alpha^2\psi \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité. Les valeurs propres α sont alors les solutions d'un problème propre généralisé $(\Lambda_1 - \alpha\Lambda_2)\mathbf{X} = 0$.

Ainsi, du problème propre différentiel (6.7), nous avons déduit un problème propre matriciel, discrétisé, dont les valeurs propres sont des solutions approchées du problème propre original [58]. Ces valeurs peuvent alors être utilisées comme conditions initiales pour une détermination plus précise des solutions de (6.7).

Les valeurs propres de (6.7) pour l'écoulement décrit par (6.11) sont données sur la figure 6.9, pour $M_0 = 0.4$, $\eta = 0.5$ et $kh = 1$ (h est fixé à 1). Le critère de Briggs nous permet de distinguer les valeurs propres correspondant aux modes amonts de celles correspondant aux modes aval. Nous pouvons observer, en plus du spectre discret, le spectre continu (ici nécessairement discrétisé), sur l'axe réel entre $k/M_{\max} = k/M_0 = 2.5$ et $k/M_{\min} = k/(M_0(1 - \eta)) = 5$.

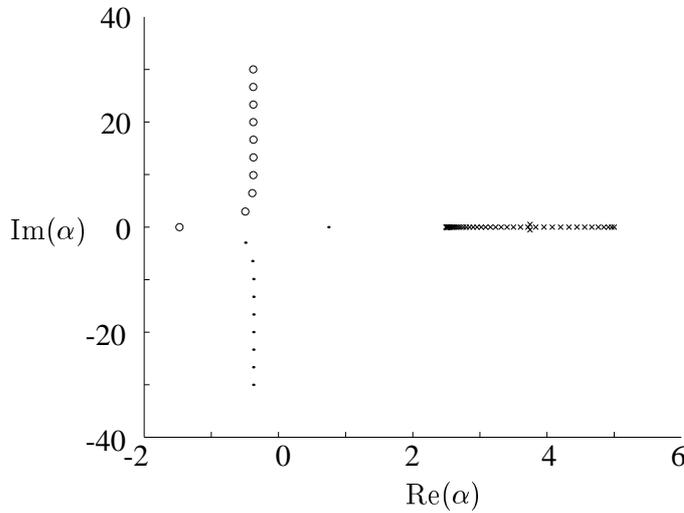


FIG. 6.9: Valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown (6.7); (○) modes amonts, (·) modes aval, (×) modes hydrodynamiques.

Une valeur, et son conjugué, apparaissent de part et d'autre du continuum, ayant par conséquent une partie imaginaire non nulle. Un calcul direct des modes propres selon la méthode décrite en annexe C montre que ces valeurs ne correspondent pas à des valeurs propres de (6.7). Il s'agit par conséquent d'artefacts numériques.

6.3.2.2 Modes acoustiques

Une fois les pôles α_n^\pm évalués par la méthode de Chebyshev, les dix premiers modes amonts et aval sont déterminés en calculant les résidus $\text{Rés}(\hat{G}(\alpha, y, y_s), \alpha_n^\pm)$. La contribution au champ des modes acoustiques peut alors être obtenue à l'aide des équations (6.9) et (6.10) sans le terme intégral (qui donne la contribution du continuum de modes hydrodynamiques, voir paragraphe suivant). Comme dans le cas sans écoulement, la méthode de Runge-Kutta et le calcul par éléments finis donnent des résultats très proches (fig. 6.10).

Nous pouvons observer sur ces figures l'effet de réfraction de l'écoulement, qui « distord » le mode plan, et l'effet Doppler - effet de convection - qui modifie la longueur d'onde de ce même mode plan.

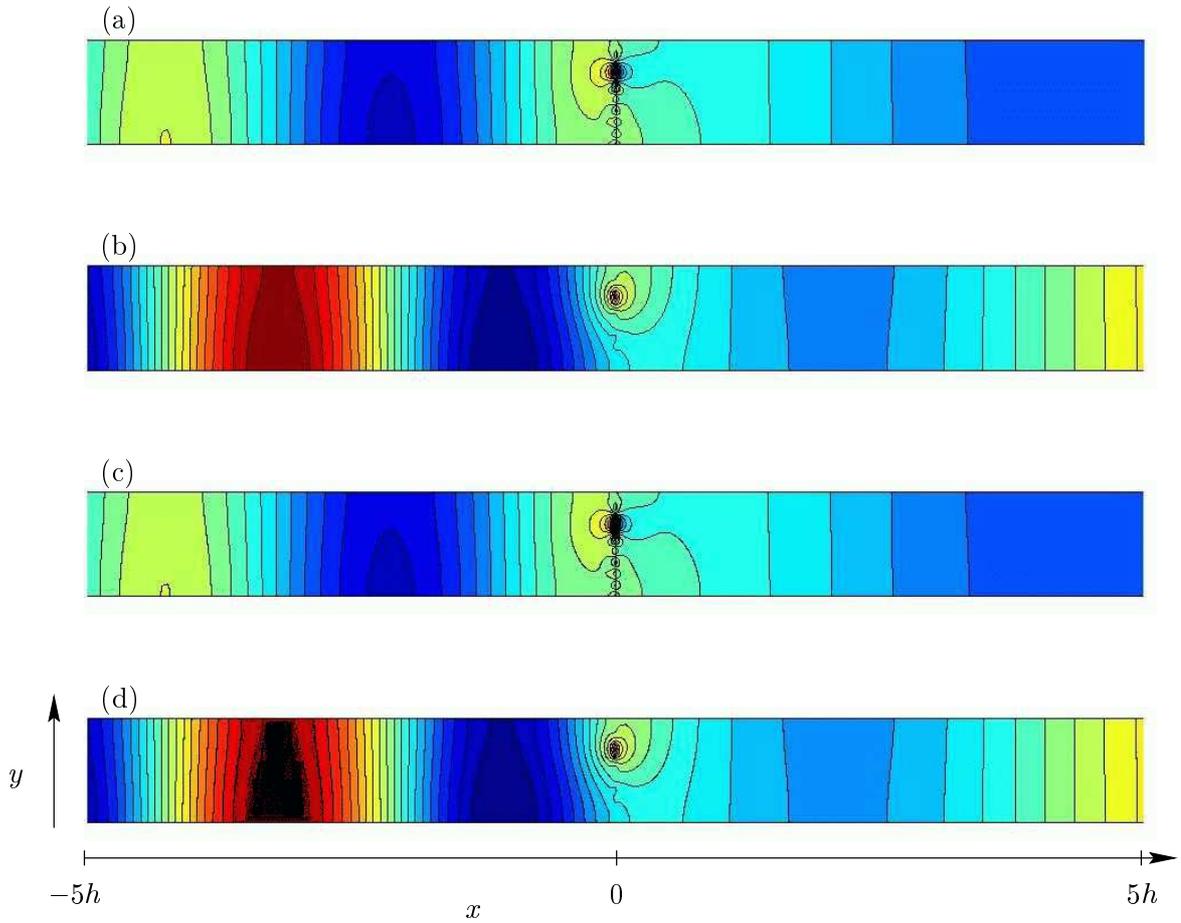


FIG. 6.10: Fonction de Green partielle $G(x, y, y_s)$ (contribution des 10 premiers modes acoustiques seulement) dans un conduit droit en présence d'un écoulement cisailé (éq. 6.11), avec $M_0 = 0.4$ et $\eta = 0.5$. La source ponctuelle, de fréquence $kh = 1$, est située au point $(0, 0.7h)$. Méthode de Runge-Kutta : (a) $\text{Re}(G)$, (b) $\text{Im}(G)$. Calcul par éléments finis : (c) $\text{Re}(G)$, (d) $\text{Im}(G)$.

Celle-ci est en effet plus grande en aval de la source, dans le sens de l'écoulement, et plus petite en amont, dans le sens opposé à l'écoulement.

6.3.2.3 Champ hydrodynamique

Nous souhaitons maintenant déterminer le champ hydrodynamique généré par la source dans l'écoulement. Avant d'intégrer directement $\hat{G} \exp(-j\alpha x)$ sur le contour fermé \mathcal{C} représenté sur la figure 6.5, il convient de préciser que \hat{G} a deux valeurs singulières, α_c et α_s , pour lesquelles $k - M(y)\alpha_c = 0$ et $k - M(y_s)\alpha_s = 0$, et qu'à cette seconde valeur correspondent deux singularités distinctes : un pôle simple et une singularité logarithmique du type $(k - M(y_s)\alpha)^2 \log(k - M(y_s)\alpha)$ [70]. La fonction de Green \hat{G} peut par conséquent être reformulée de la manière suivante :

$$\hat{G}(\alpha, y, y_s) = \hat{G}_1(\alpha, y, y_s) + \frac{\hat{G}_2(y, y_s)}{\alpha - \alpha_s},$$

de sorte que le champ hydrodynamique G_{hydro} s'écrit

$$G_{\text{hydro}}(x, y, y_s) = \int_{\mathcal{C}} \hat{G}_1(\alpha, y, y_s) e^{-j\alpha x} d\alpha + \hat{G}_2(y, y_s) e^{-j\alpha_s x}.$$

Il apparaît donc que ce champ hydrodynamique est constitué d'un continuum proprement dit, le premier terme, obtenu par intégration de $\hat{G}_1 e^{-j\alpha x}$ autour du spectre continu, et d'un mode hydrodynamique discret, le second terme, dont la vitesse de propagation est celle de l'écoulement au niveau du point source, soit $U(y_s)$.

Pour $\delta \ll 1$ (fig. 6.5), le premier terme - l'intégrale - peut être exprimée simplement par

$$\begin{aligned} G_1(x, y, y_s) &= \int_{\mathcal{C}} \hat{G}_1(\alpha, y, y_s) e^{-j\alpha x} d\alpha \\ &\approx \int_{k/M_{\max}}^{k/M_{\min}} \left(\hat{G}_1(\tau - j\delta, y, y_s) e^{-j(\tau - j\delta)x} - \hat{G}_1(\tau + j\delta, y, y_s) e^{-j(\tau + j\delta)x} \right) d\tau. \end{aligned}$$

L'amplitude de G_1 est représentée sur la figure 6.11. Ce champ, dû au continuum de modes hydrodynamiques, est beaucoup plus faible que le champ acoustique (fig. 6.12). L'amplitude du mode hydrodynamique discret, dont le profil est donné sur la figure 6.13, est également beaucoup plus faible que celle du champ acoustique.

En aval de la source, le mode plan que l'on observe en l'absence d'écoulement est ainsi perturbé d'une part par l'effet de réfraction de l'écoulement (fig. 6.12) et d'autre part par le continuum de modes hydrodynamiques (fig. 6.11) et le mode hydrodynamique discret.

La contribution du mode discret mise à part - l'amplitude moyenne de ce mode sur la section du conduit est constante - l'amplitude du champ hydrodynamique décroît lorsque la distance x à la source augmente. Plusieurs auteurs ont prédit, sur la bases de considérations mathématiques sur l'expression intégrale de \hat{G}_1 , et pour des écoulements compressibles [70, 67] ou incompressibles [14], une décroissance en $1/x$ de l'amplitude du continuum de modes hydrodynamiques. Pour une valeur

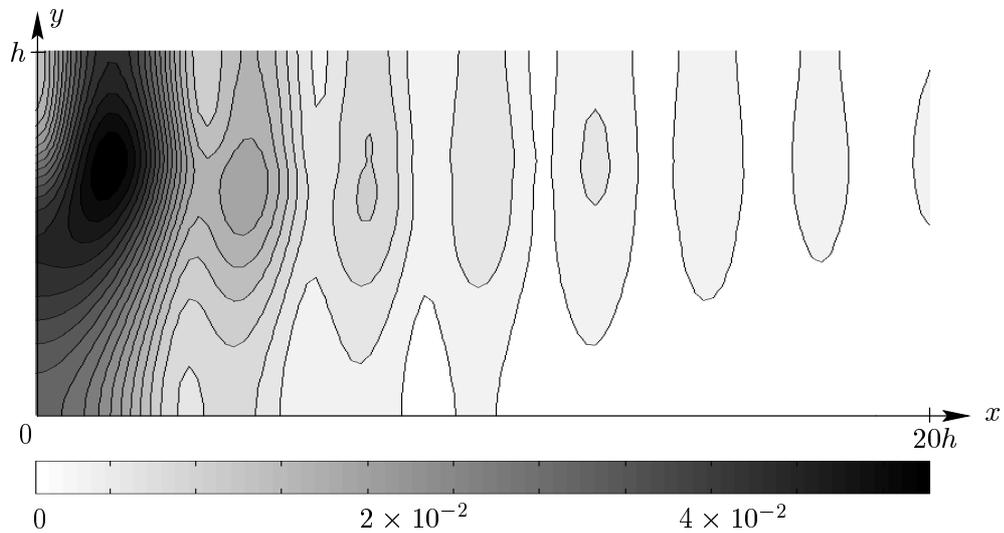


FIG. 6.11: Module de $G_1(x, y, y_s)$ (unité arbitraire) en aval de la source, dans un conduit droit en présence d'un écoulement cisailé (éq. 6.11), avec $M_0 = 0.4$ et $\eta = 0.5$. La source ponctuelle, de fréquence $kh = 1$, est située au point $(0, 0.7h)$.

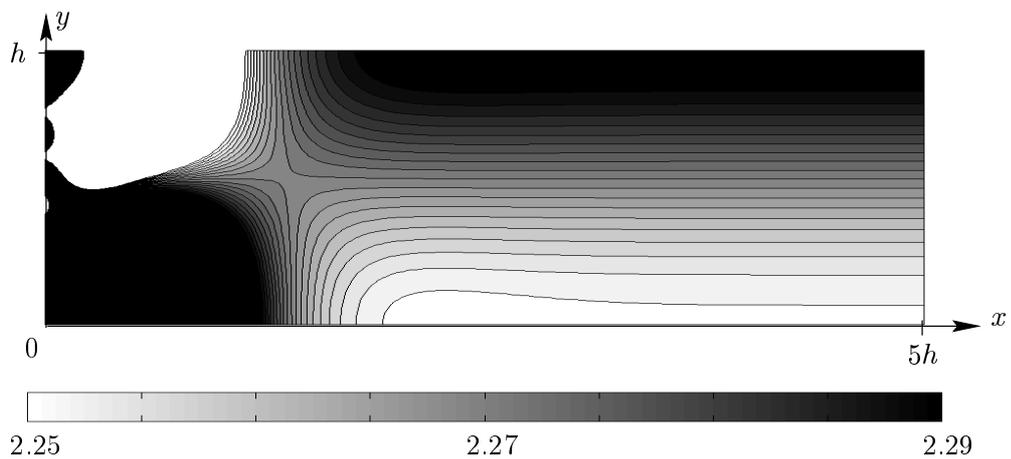


FIG. 6.12: Module de la partie « acoustique » de G (unité arbitraire) en aval de la source, dans un conduit droit en présence d'un écoulement cisailé (éq. 6.11), avec $M_0 = 0.4$ et $\eta = 0.5$, et pour 10 modes pris en compte dans le calcul. La source ponctuelle, de fréquence $kh = 1$, est située au point $(0, 0.7h)$.

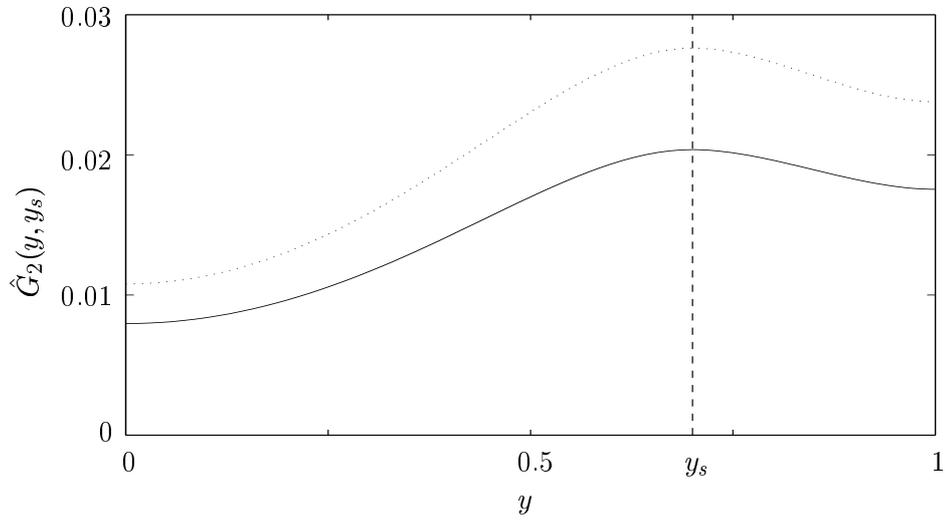


FIG. 6.13: Parties réelle (—) et imaginaire (\cdots) de $\hat{G}_2(y, y_s)$.

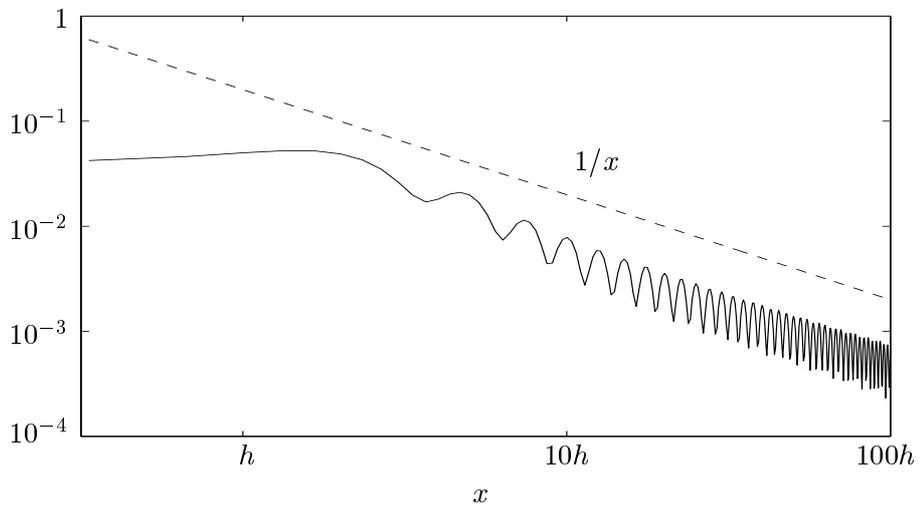


FIG. 6.14: Amplitude du champ hydrodynamique G_1 (unité arbitraire) en fonction de la distance au point source, pour $y = 0.59h$; (—) pente correspondant à une décroissance en $1/x$.

fixée de y ($y = 0.59h$), l'amplitude de ce continuum est représentée sur la figure 6.14 en fonction de la distance x à la source : nous pouvons en effet observer cette décroissance géométrique, suivant une loi en $1/x$.

6.4 Perspectives

Dans un guide droit infini, en présence d'un écoulement parallèle cisailé, la fonction de Green a été calculée, pour une approche modale. Les modes acoustiques perturbés par l'écoulement ont été déterminés en calculant les résidus de la fonction Green de l'équation de Pridmore-Brown. La contribution du continuum de modes hydrodynamique a également été déterminée, et son comportement (amplitude, décroissance) décrit.

Le contour d'intégration autour du spectre continu de valeurs propres a été défini en fonction d'un petit paramètre δ non nul. Il est donc intéressant d'envisager le passage à la limite $\delta \rightarrow 0$. Un développement de \hat{G} en série de Frobenius nous permet de décrire le comportement local de la fonction au voisinage des points singuliers y_c pour $\delta = 0$ (cf. annexe B). Le passage du cas $\delta \ll 1$ que nous avons vu dans ce chapitre au cas $\delta = 0$ doit permettre de trouver la détermination du logarithme qui apparaît dans les développements de Frobenius. Il sera alors possible de calculer le champ hydrodynamique dans la limite δ nul.

Enfin, nous avons présenté dans ce chapitre la méthode de résolution du problème avec source dans un écoulement cisailé. Il reste donc maintenant à caractériser de manière plus complète les champs acoustiques et hydrodynamiques dans le conduit, notamment en étudiant les effets du profil de vitesse de l'écoulement, de la fréquence ou de la position de la source sur la génération des différents modes.

Annexe A (d'après [56])

Nous présentons dans cette annexe le critère de Briggs [10], qui permet de déterminer le caractère amont ou aval d'un mode, et de ce fait sa stabilité.

Un mode, solution de l'équation de Pridmore-Brown (6.7), étant donné sous la forme

$$p(x, y, t) = P(y)e^{j(\omega t - \alpha x)}, \quad (6.15)$$

la valeur propre α qui lui est associée ne permet pas, en général, d'en déterminer le caractère amont ou aval. En l'absence d'écoulement, le signe de $\alpha_r = \text{Re}(\alpha)$ permet de savoir si la solution (6.15) est du type $f(x + ct)$, donc amont, ou $f(x - ct)$, donc aval. En revanche, en présence d'un écoulement, le signe de α_r n'est pas nécessairement négatif pour une propagation en amont et positif pour une propagation en aval. Par exemple, la constante de propagation du mode n aval dans un écoulement uniforme (cf. introduction), donnée par

$$\alpha_n^+ = \frac{-M_0 k + \sqrt{k^2 - (1 - M_0^2) \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}}{1 - M_0^2},$$

peut avoir une partie réelle négative, bien que ce mode soit aval.

La détermination du caractère amont ou aval d'un mode est par ailleurs importante pour connaître sa stabilité. En effet, la valeur propre α étant a priori complexe ($\alpha_j = \text{Im}(\alpha) \neq 0$), le mode (6.15) s'écrit

$$p(x, y, t) = P(y)e^{\alpha_j x} e^{j(\omega t - \alpha_r x)}.$$

Ainsi, si α_j est négatif pour un mode amont ($x \rightarrow -\infty$) ou positif pour un mode aval ($x \rightarrow -\infty$), le mode est instable (l'amplitude de $p(x, y, t)$ croît exponentiellement). Il est donc nécessaire de connaître le sens de propagation d'un mode pour pouvoir conclure sur sa stabilité.

Le critère de Briggs est le suivant : considérant une source dont l'amplitude diverge en temps, c'est-à-dire $\omega = \omega_r + j\omega_j$, avec $\omega_j \rightarrow -\infty$, tous les modes doivent être stables spatialement. Ainsi, les modes tels que $\alpha_j > 0$ sont amonts, et ceux pour lesquels $\alpha_j < 0$ sont avals. Les solutions du problème avec une dépendance sinusoïdale sont obtenues en passant continûment de $\omega_j = -\infty$ à $\omega_j = 0$. La valeur propre α décrit alors un chemin dans le plan complexe (α_r , α_j) et la valeur cherchée est celle correspondant à $\omega_j = 0$ (fig. 6.15). Il apparaît ainsi trois familles de modes :

- les modes amonts pour lesquels α_j est positif et ne change pas de signe,
- les modes avals pour lesquels α_j est négatif et ne change pas de signe,
- les modes instables, amont ou aval, pour lesquels α_j change de signe.

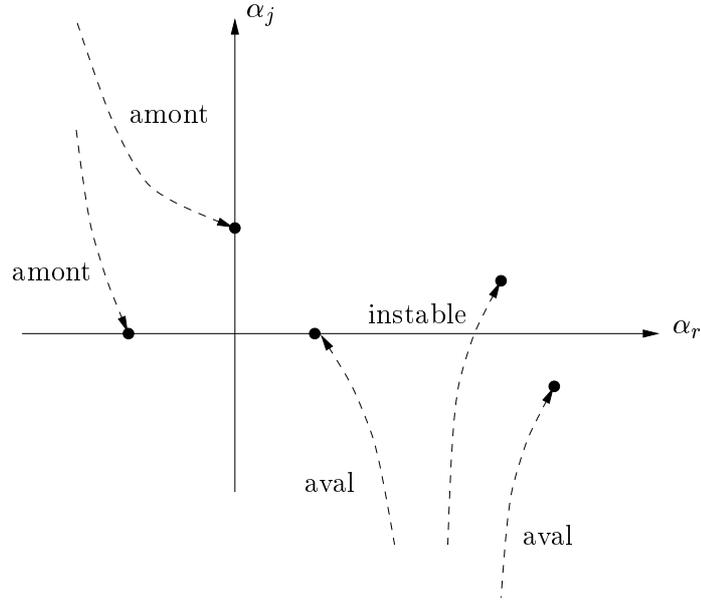


FIG. 6.15: Critère de Briggs : chemin parcouru par α quand la partie imaginaire de ω passe continûment d'une très grande valeur négative à 0. Les valeurs de α solutions du problème de départ (ω réel) sont marquées par un cercle plein.

Annexe B

Nous donnons dans cette annexe les solutions ψ_1 et ψ_2 de l'équation de Pridmore-Brown (6.7) sous forme d'un développement de Frobenius-Fuchs [6], dans le cas où α est dans le continuum de valeurs propres $[k/M_{\max}, k/M_{\min}]$ ou dans ce continuum.

Dans $[0, h]$, l'équation (6.7) a une singularité (et une seule car $M(y)$ est monotone) en $y_c = h\sqrt{(M_0\alpha - k)/(\eta M_0\alpha)}$, où $k - M(y_c)\alpha = 0$. Nous introduisons la variable $\xi = (y - y_c)/h$, et la fonction $\phi(\xi) \equiv \psi(y)$ qui vérifie

$$-(2\sqrt{\Lambda}\xi + \xi^2)\left(\phi'' + [(2\sqrt{\Lambda}\xi + \xi^2)^2 - 1]K^2\phi\right) + 2(2\sqrt{\Lambda} + 2\xi)\phi' = 0. \quad (6.16)$$

$\xi = 0$ est une singularité régulière de (6.16), il existe donc une solution sous la forme d'une série de Frobenius-Fuchs :

$$\phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma)\xi^{n+\sigma} \quad (6.17)$$

où l'indice σ et les coefficients a_n doivent être déterminés. En substituant (6.17) dans (6.16), on obtient la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
& -2\sqrt{\Lambda}(n+\sigma)(n+\sigma-3)a_n(\sigma) \\
= & (n+\sigma-1)(n+\sigma-6)a_{n-1}(\sigma) \\
& -2\sqrt{\Lambda}K^2a_{n-2}(\sigma) \\
& -K^2a_{n-3}(\sigma) \\
& +8K^2\eta^2M_0^2\Lambda^{3/2}a_{n-4}(\sigma). \\
& +12K^2\eta^2M_0^2\Lambda a_{n-5}(\sigma). \\
& +6K^2\eta^2M_0^2\sqrt{\Lambda}a_{n-6}(\sigma). \\
& +K^2\eta^2M_0^2a_{n-7}(\sigma).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

L'équation indicielle $-2\sqrt{\Lambda}\sigma(\sigma-3)a_0 = 0$, donnée par (6.18) pour $n = 0$, détermine les deux valeurs possibles de l'indice σ , qui sont 0 et 3. S'il une solution du type (6.17) peut toujours être déterminée avec la plus grande des deux solutions de l'équation indicielle, il n'est en revanche pas toujours possible, quand les deux valeurs de σ diffèrent d'une valeur entière, d'obtenir une seconde solution avec l'autre. Dans le cas présent, nous obtiendrions deux fois la même solution. Nous déterminons donc une première solution ϕ_R , régulière, en prenant pour σ la plus grande des deux solutions, $\sigma = 3$:

$$\phi_R(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(3)\xi^{n+3}.$$

L'équation (6.16) peut s'écrire $\mathcal{L}\phi = 0$, où \mathcal{L} est un opérateur linéaire. Considérons alors une fonction ϕ de la forme (6.17) dont les coefficients $a_n(\sigma)$ satisfont à la relation de récurrence (6.18). ϕ vérifie alors

$$\mathcal{L}\phi = -2\sqrt{\Lambda}\sigma(\sigma-3)a_0\xi^{\sigma-1},$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}(\partial_\sigma\phi) = \partial_\sigma(\mathcal{L}\phi) = -2\sqrt{\Lambda}\left((2\sigma-3) + \sigma(\sigma-3)\ln\xi\right)a_0\xi^{\sigma-1}.$$

Ainsi, si l'on considère une solution $\bar{\phi}$ de l'équation

$$\mathcal{L}\bar{\phi} = -2\sqrt{\Lambda}(2\sigma-3)a_0\xi^2$$

pour $\sigma = 3$, alors $\phi_S = \bar{\phi} - (\partial_\sigma\phi)_{\sigma=3}$ vérifie $\mathcal{L}\phi_S = 0$ et est linéairement indépendante de ϕ_R obtenue précédemment. La fonction $\bar{\phi}$ peut aisément être obtenue sous forme d'une série de Frobenius-Fuchs

$$\bar{\phi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n,$$

avec $\sigma = 0$. La solution ϕ_S est singulière, du fait de la présence d'un terme $\ln\xi$.

Enfin, les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont déduites de ϕ_R et ϕ_S :

$$\begin{cases} \psi_1(y) = \phi'_S(\xi(0))\phi_R(\xi) - \phi'_R(\xi(0))\phi_S(\xi) \\ \psi_2(y) = \phi'_S(\xi(h))\phi_R(\xi) - \phi'_R(\xi(h))\phi_S(\xi) \end{cases},$$

et le Wronskien de ces fonctions en y_s est

$$W(\psi_1, \psi_2, y_s) = -\left(\phi'_S(\xi(0))\phi'_R(\xi(h)) - \phi'_S(\xi(h))\phi'_R(\xi(0))\right)W(\phi_R, \phi_S, y_s).$$

Annexe C

Soit l'impédance z définie par $\partial_y \psi = z\psi$, ψ étant une solution de l'équation de Pridmore-Brown (6.7). z vérifie l'équation non linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -z^2 - \frac{2M'\alpha}{k - M\alpha}z - ((k - M\alpha)^2 - \alpha^2). \quad (6.19)$$

Si α est une valeur propre de (6.7), le mode ψ associé satisfaisant à la condition de Neumann homogène en $y = 0$ et h , z doit être nulle en ces mêmes points. En imposant $z = 0$ à une extrémité de l'intervalle $[0, h]$ et en intégrant numériquement (par une méthode de Runge-Kutta) l'équation (6.19), il est donc possible de vérifier si une valeur α correspond à une valeur propre.

Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire avaient pour cadre l'approche modale de la propagation d'ondes en conduit. Deux aspects ont été abordés : la propagation acoustique dans les guides d'ondes courbes, sans écoulement, et le problème d'une source dans un écoulement cisailé, dans un conduit rectiligne.

Une formulation multimodale de la propagation dans les guides d'ondes courbes a été mise en place et validée. Pour un coude bidimensionnel (et par conséquent pour un coude à trois dimensions de section rectangulaire) et un coude de section circulaire de dimensions quelconques, des équations différentielles matricielles ont été établies pour les composantes de la pression et de la vitesse longitudinale projetées sur les modes, propagatifs et évanescents, solutions du problème transverse local. Déduite de ces équations, une équation de Riccati a été construite pour l'impédance, dont le calcul permet une caractérisation directe des propriétés acoustiques du coude, par l'impédance d'entrée ou la matrice des coefficients de réflexion. Ce formalisme d'impédance est de plus particulièrement adapté à la formulation des conditions de rayonnement ou de continuité aux extrémités du coude.

La prise en compte de variations de la section du coude ou de conditions d'impédance aux parois a été envisagée et se traduit dans les équations multimodales par l'addition simple de termes supplémentaires. Il est donc possible d'étendre notablement le champ d'application de la méthode multimodale, sans en augmenter la complexité.

Pour un coude dont la section est constante et l'impédance aux parois uniforme (qu'elle soit infinie, finie ou nulle) des solutions algébriques simples de la matrice de diffusion et du champ de pression dans un coude ont été établies. Le champ pouvant ainsi être calculé dans un coude par des opérations simples sur des matrices, et sans intégration préalable de l'équation de Riccati pour l'impédance, un grand nombre de modes peut être pris en compte, et l'utilisation de la formulation multimodale pour des problèmes à haute fréquence est possible. Le calcul de la matrice de diffusion permet quant à lui une caractérisation directe des propriétés modales de réflexion et de transmission d'un coude, également de tout système complexe comprenant des éléments coudés, dès lors que la matrice de diffusion de chaque élément du système est connue. Ces résultats ont notamment été appliqués au calcul des fréquences de résonance de cavités annulaires complexes.

Ce même calcul direct des matrices de réflexion et de transmission permet de déterminer l'atténuation dans un guide d'ondes traité aux parois par un matériau absorbant. Deux expressions de l'atténuation ont été données, pour une onde incidente connue ou une source incohérente. Les principales caractéristiques de la transmission dans un coude traité ont ainsi été mises en évidence et

décrites, notamment l'apparition d'un plateau d'atténuation aux hautes fréquences. Le calcul de l'intensité acoustique dans le coude ou une méthode simple de rayons permettent de déterminer les lieux des parois où l'absorption d'une onde incidente donnée est maximale. Ces résultats peuvent être intéressants pour l'optimisation des traitements de systèmes silencieux.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux propriétés de diffusion à haute fréquence de guides composés de parties droites et coudées, et plus particulièrement au problème de la correspondance entre la théorie ondulatoire et la limite de l'acoustique géométrique. Pour plusieurs géométries différentes de guides, la matrice de diffusion de ces guides a été comparée avec une matrice construite par une approche de type rayon, correspondant à la limite géométrique. À haute fréquence (plusieurs centaines de modes propagatifs), ces matrices présentent une très grande similitude. Cette similitude augmente bien sûr avec le nombre de modes, mais peut déjà être observée lorsque quelques dizaines de modes seulement sont propagatifs.

L'étude des trajectoires contribuant aux structures de la matrice *rayons* permet d'interpréter les propriétés de diffusion *ondulatoires*. Les zones de forte intensité des matrices *ondes* et *rayons* notamment, correspondent à des trajectoires stables de rayons qui peuvent aisément être identifiées. La présence de « *whispering gallery* » modes a en outre été mise en évidence par l'étude de la matrice de diffusion *rayons*. Il serait intéressant de poursuivre ces premières observations, jusqu'ici qualitatives, par une comparaison quantitative des matrices de diffusion obtenues avec les deux approches ondulatoire et géométrique.

Dans le type de cavités ouvertes auquel nous nous intéressons, la dynamique des rayons peut être régulière, mixte ou chaotique selon les paramètres géométriques de la cavité. L'étude des matrices de diffusion a déjà permis d'observer la transition d'un régime régulier vers un régime irrégulier lorsque le nombre de coudes du guide ou leur courbure augmente. Une étude plus précise, systématique, au moyen des surfaces de Poincaré ou par l'étude de cavités fermées « équivalentes », par exemple, permettra de déterminer précisément les conditions d'observation des différentes dynamiques dans ces géométries.

Ces travaux sur les propriétés des guides et cavités courbes à haute fréquence pourront également être poursuivis par l'étude « comparée » des distributions de Husimi (ou d'autres approches équivalentes) et des surfaces de Poincaré [50].

Nous nous sommes enfin intéressés au problème d'une source ponctuelle dans un conduit rectiligne infini, en présence d'un écoulement parallèle cisailé. La fonction de Green de l'équation de Pridmore-Brown a été déterminée, et les singularités de cette fonction, qui sont les valeurs propres de l'équation de Pridmore-Brown, ont été calculées. Ces singularités sont de deux types : un ensemble discret de pôles et un continuum de singularités logarithmiques. Par transformée de Fourier inverse, les pôles font apparaître les modes acoustiques perturbés par l'écoulement : le calcul du résidu de la fonction de Green aux pôles nous permet donc de déterminer l'amplitude des modes acoustiques générés par la source. D'autre part, nous avons étudié la contribution du continuum de modes hydrodynamiques, en évaluant notamment l'amplitude de ce continuum par rapport au champ acoustique et sa décroissance, géométrique, en $1/x$.

Une étude plus systématique de l'influence de la fréquence, du profil de vitesse de l'écoulement et de la position de la source doit maintenant être effectuée pour compléter ces travaux, qui portent essentiellement sur la méthode de résolution du problème.

Bibliographie

- [1] R. J. Alfredson, *The propagation of sound in a circular duct of continuously varying cross-sectional area*, J. Sound. Vib. **23**(4), 433-442 (1972).
- [2] J.-F. Allard, *Propagation of sound in porous media (modelling sound absorbing materials)*, Elsevier applied science (1993).
- [3] N. Amir et R. Starobinski, *Finding the eigenmodes of two-dimensional cavities with two axes of symmetry*, Acustica - acta acustica **82**(6), 811-823 (1996).
- [4] N. Amir, V. Pagneux et J. Kergomard, *A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition - Part II : Results*, J. Acoust. Soc. Am. **101**(5), 2504-2517 (1997).
- [5] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams et D. S. Fisher, *New method for a scaling theory of localization*, Phys. Rev. B **22**(8), 3519-3526 (1980).
- [6] G. Arfken, *Mathematical method for physicists*, 3rd edition, Academic Press Inc. (1985).
- [7] E. Bangratz, C. Hazard et V. Pagneux, *Improved multimodal approach in waveguides with varying cross-section*, 17th I.C.A. Proceedings, Rome (2001).
- [8] K. J. Baumeister, *Acoustic propagation in curved ducts with extended reacting wall treatment*, NASA TM-102110 (1989).
- [9] A. Bergassoli, R. Germain et A. Roure, *Solution de quelques problèmes de raccordement de guides acoustiques*, Acustica **34**(5), 306-310 (1976).
- [10] R. J. Briggs, *Electron stream interaction with plasma*, M.I.T. Press (1964).
- [11] A.-M. Bruneau, M. Bruneau, Ph. Herzog et J. Kergomard, *Boundary layer attenuation of higher order modes in waveguides*, J. Sound Vib. **119**(1), 15-27 (1987).
- [12] A. Cabelli, *The acoustic characteristics of duct bends*, J. Sound Vib. **68**(3), 369-388 (1980).
- [13] L. M. B. C. Campos, *Some general properties of the exact acoustic fields in horns and baffles*, J. Sound Vib. **95**(2), 177-201 (1984).
- [14] K. M. Case, *Stability of inviscid plane couette flow*, Phys. of Fluids **3**(2), 143-148 (1960).
- [15] A. Cummings, *Sound transmission in curved duct bends*, J. Sound Vib. **35**(4), 451-477 (1974).
- [16] S. Dequand, S. J. Hulshoff, Y. Aurégan, J. Huijnen, R. ter Riet, L. J. van Lier et A. Hirschberg, *Acoustics of 90 degree sharp bends. Part I : Low-frequency acoustical response*, soumis pour publication à acta acustica - Acustica (2001).

- [17] P. E. Doak et P. G. Vaidya, *Attenuation of plane wave and higher order mode sound propagation in lined ducts*, J. Sound Vib. **12**(2), 201-224 (1970).
- [18] E. Eisner, *Complete solutions of the "Webster" horn equation*, J. Acoust. Soc. Am. **41**(4), 1126-1146 (1967).
- [19] M. El-Raheb et P. Wagner, *Acoustic propagation in rigid sharp bends and branches*, J. Acoust. Soc. Am. **67**(6), 1914-1923 (1980).
- [20] M. El-Raheb and P. Wagner, *Acoustic Propagation in a rigid torus*, J. Acoust. Soc. Am. **71**(6), 1335-1346 (1982).
- [21] S. Félix et V. Pagneux, *Sound propagation in rigid bends : A multimodal approach*, J. Acoust. Soc. Am. **110**(3), 1329-1337 (2001).
- [22] S. Félix et V. Pagneux, *Multimodal analysis of acoustic propagation in three-dimensional bends*, Wave Motion **36**(2), 157-168 (2002).
- [23] D. Firth and F. J. Fahy, *Acoustic characteristics of circular bends in pipes*, J. Sound. Vib. **97**(2), 287-303 (1984).
- [24] G. D. Furnell, *Corrections to "A study of sound transmission in curved duct bends by the Galerkin method"*, J. Sound. Vib. **130**(2), 329-332 (1989).
- [25] G. D. Furnell and D. A. Bies, *Characteristics of modal wave propagation within longitudinally curved acoustic waveguides*, J. Sound Vib. **130**(3), 405-423 (1989).
- [26] G. D. Furnell and D. A. Bies, *Matrix analysis of acoustic wave propagation within curved ducting systems*, J. Sound Vib. **132**(2), 245-263 (1989).
- [27] R. Gębarowski, P. Šeba, K. Życzkowski et J. Zakrewski, *Quantum scattering in the strip : From ballistic to localized regimes*, Eur. Phys. J. B **6**, 399-409 (1998).
- [28] J. Goldstone et R. L. Jaffe, *Bound states in twisting tubes*, Phys. Rev. B **45**(24), 14100-14107 (1992).
- [29] F. E. Grigor'yan, *Theory of sound wave propagation in curvilinear waveguides*, Akust. Zh. **14**, 376-384 (1968) [traduction anglaise : Sov. Phys. Acoust. **14**, 315-321 (1969)].
- [30] F. E. Grigor'yan, *Soundproofing by means of ducts with curved porous walls*, Akust. Zh. **16**(2), 229-235 (1970) [traduction anglaise : Sov. Phys. Acoust. **16**(2), 192-196 (1970)].
- [31] K. M. Guthrie et C. T. Tindle, *Ray effects in the normal mode approach to underwater acoustics*, J. Sound. Vib. **47**(3), 403-413 (1976).
- [32] A. Kamel et L. B. Felsen, *Hybrid ray-mode formulation of parallel plane waveguide Green's functions*, Transactions on Antennas and Propagation AP-**29**(4), 637-649 (1981).
- [33] A. Kamel et L. B. Felsen, *On the ray equivalent of a group of modes*, J. Acoust. Soc. Am. **71**(6), 1145-1452 (1982).
- [34] D. H. Keefe and A. H. Benade, *Wave propagation in strongly curved ducts*, J. Acoust. Soc. Am. **74**(1), 320-332 (1983).
- [35] J. Kergomard, A. Garcia, G. Tagui et J.-P. Dalmont, *Analysis of higher order mode effects in an expansion chamber using modal theory and equivalent electrical circuits*, J. Sound Vib. **129**(3), 457-475 (1989).

- [36] J. Kergomard, *Calculation of discontinuities in waveguides using mode-matching method : an alternative to the scattering matrix approach*, J. Acoustique **4**, 111-137 (1991).
- [37] J. Kergomard, *Une équation matricielle des pavillons*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. II **316**, 1691-1694 (1993).
- [38] J.-T. Kim et J.-G. Ih, *Transfer matrix of curved duct bends and sound attenuation in curved expansion chamber*, Appl. Acoust. **56**, 297-309 (1999).
- [39] S. H. Ko et L. T. Ho, *Sound attenuation in acoustically lined curved ducts in the absence of fluid flow*, J. Sound Vib. **53**(2), 189-201 (1977).
- [40] S. H. Ko, *Three-dimensional acoustic waves propagating in acoustically lined cylindrically curved ducts without fluid flow*, J. Sound Vib. **66**(2), 165-179 (1979).
- [41] P. E. Krasnushkin, *On waves in curved tubes*, Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ., No 75, Bk 2, Pt 2, 927 (1945).
- [42] D. Lafarge, *Etude 2D de l'atténuation acoustique dans un guide semi-circulaire traité en parois par un matériau poreux*, XXe Journée Technologique, C.T.T.M., Le Mans (1998).
- [43] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957).
- [44] K. Lin et R. L. Jaffe, *Bound states and threshold resonances in quantum wires with circular bends*, Phys. Rev. B **54**(8), 5750-5762 (1996).
- [45] W. H. Lin, *A least-square spectral element method for sound propagation in acoustic ducts*, J. Acoust. Soc. Am. **104**(5), 3111-3114 (1998).
- [46] G. A. Luna-Acosta, J. A. Méndez-Bermúdez, P. Šeba et K. N. Pichugin, *Classical versus quantum structure of the scattering probability matrix : Chaotic waveguides*, Phys. Rev. E **65**, 046605 1-8 (2002).
- [47] P. Malbéqui, C. Glandier et C. Reynier, *Sound propagation and radiation in a curved duct*, AIAA Journal **34**(9), 1778-1784 (1996).
- [48] R. Mani, *Sound propagation in parallel sheared flows in ducts : the mode estimation problem*, Proc. R. Soc. Lond. A **371**, 393-412 (1980).
- [49] P. A. Mello, P. Pereyra et N. Kumar, *Macroscopic approach to multichannel disordered conductors*, J. Phys. **181**, 290-317 (1988).
- [50] J. A. Méndez-Bermúdez, G. A. Luna-Acosta, P. Šeba et K. N. Pichugin, *Understanding quantum scattering properties in terms of purely classical dynamics. 2D open chaotic billiards*, Phys. Rev. E **66**, 046207 (2002).
- [51] M. K. Meyer et P. Mungur, *Sound propagation in curved ducts*, Progress in Astronautics and Aeronautics **44**, 347-362 (1976).
- [52] P. M. Morse et H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw Hill, New York (1953).
- [53] R. G. Nazmitdinov, K. N. Pichugin, I. Rotter et P. Šeba, *Whispering gallery modes in open quantum billiards*, Phys. Rev. E **64**, 056214 1-5 (2001).
- [54] C. J. Nederveen, *Influence of a toroidal bend on wind instrument tuning*, J. Acoust. Soc. Am. **104**(3), 1616-1626 (1998).

- [55] W. C. Osborne, *Higher mode propagation of sound in short curved bends of rectangular cross-section*, J. Sound Vib. **45**(1), 39-52 (1976).
- [56] V. Pagneux, *Propagation acoustique dans les guides à section variable et effets d'écoulement*, Thèse de Doctorat, Université du Maine (1996).
- [57] V. Pagneux, N. Amir et J. Kergomard, *A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition - Part I : Theory and validation*, J. Acoust. Soc. Am. **100**(4), 2034-2048 (1996).
- [58] V. Pagneux et A. Maurel, *Determination of Lamb modes eigenvalues*, J. Acoust. Soc. Am. **110**(3), 1307-1314 (2001).
- [59] V. Pagneux et A. Maurel, *Properties of the scattering matrix in waveguides*, (2002, en préparation).
- [60] D. C. Pridmore-Brown, *Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct*, J. Fluid Mech. **4**, 393-406 (1958).
- [61] V. Yu. Prikhod'ko et V. V. Tyutekin, *Natural modes of curved waveguides*, Sov. Phys. Acoust. **28**(5), 422 (1982).
- [62] W. Rostafinski, *On propagation of long waves in curved ducts*, J. Acoust. Soc. Am. **52**(5), 1411-1420 (1972).
- [63] W. Rostafinski, *Propagation of long waves in acoustically treated, curved ducts*, J. Acoust. Soc. Am. **71**(1), 36-41 (1982).
- [64] W. Rostafinski, *Monograph on propagation of sound waves in curved ducts*, NASA Reference Publication 1248 (1991).
- [65] A. Roure, *Propagation guidée, étude des discontinuités*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille (1976).
- [66] A. Roure, *Propagation du son dans des conduits à section continuellement variable - application à la détermination des fréquences propres de certains volumes complexes*, Euromech 94, Marseille (1977).
- [67] B. K. Shivamoggi, *Inviscid stability of parallel flows of a compressible fluid as an initial-value problem*, Acta Mech. **44**, 237-243 (1982).
- [68] F. Sols et M. Macucci, *Circular bends in electron waveguides*, Phys. Rev. B **41**(17), 11887-11891 (1990).
- [69] A. F. Stevenson, *Exact and approximate equations for wave propagation in acoustic horns*, J. Appl. Phys. **22**(12), 1461-1463 (1951).
- [70] M. A. Swinbanks, *The sound field generated by a source distribution in a long duct carrying sheared flow*, J. Sound. Vib. **40**(1), 51-76 (1975).
- [71] C. K. W. Tam, *A study of sound transmission in curved duct bends by the Galerkin method*, J. Sound Vib. **45**(1), 91-104 (1976).
- [72] C. T. Tindle et K. M. Guthrie, *Rays as interfering modes in underwater acoustics*, J. Sound. Vib. **34**(2), 292-295 (1974).
- [73] L. Ting et M. J. Miksis, *Wave propagation through a slender curved tube*, J. Acoust. Soc. Am. **74**(2), 631-639 (1983).

-
- [74] J. Torrès, *Transport et bruit quantique des les fils mésoscopiques*, Ann. Phys. Fr. **27**(1), 1-121 (2002).
- [75] J. A. C. Weidemann et S. C. Reddy, A MATLAB Differentiation Matrix Suite, <http://ucs.orst.edu/~weidemaj/differ.html> (2000).