



HAL
open science

Sur la conjecture de Kobayashi et l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives en dimension 2 et 3

Erwan Rousseau

► **To cite this version:**

Erwan Rousseau. Sur la conjecture de Kobayashi et l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives en dimension 2 et 3. Mathématiques [math]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2004. Français. NNT: . tel-00007896

HAL Id: tel-00007896

<https://theses.hal.science/tel-00007896>

Submitted on 3 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

T H È S E

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE
OCCIDENTALE**

Mention Mathématiques

par

Erwan ROUSSEAU

Ecole Doctorale SMIS

Université de Brest

Laboratoire de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Sur la conjecture de Kobayashi et l'hyperbolicité des
hypersurfaces projectives en dimension 2 et 3

Soutenue le 13 décembre 2004 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

J.P. DEMAILLY (Grenoble)	rapporteur
J. WINKELMANN (Nancy)	rapporteur
T. LEVASSEUR (Brest)	examineur
J. HUISMAN (Brest)	examineur
C. SORGER (Nantes)	examineur
G. DETHLOFF (Brest)	directeur de thèse

Sur la conjecture de Kobayashi et
l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives en
dimension 2 et 3

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Gerd Dethloff, pour la gentillesse et la générosité dont il a fait preuve pendant ces trois années.

Je remercie vivement Jean-Pierre Demailly et Jörg Winkelmann de l'attention qu'ils ont portée à cette thèse, sur laquelle ils m'ont fait l'honneur de rapporter.

Ma gratitude va aussi à Thierry Levasseur pour l'attention qu'il a portée à mon travail et avec qui les discussions ont été très stimulantes, et également Christoph Sorger et Johannes Huisman qui ont accepté d'être membres de mon jury.

Enfin, je souhaite assurer tous les membres du Département de Mathématiques de Brest de ma profonde sympathie.

Table des matières

1	Introduction et plan de la thèse	9
2	Préliminaires	15
2.1	Hyperbolicité	16
2.2	Espaces des jets et hyperbolicité	18
2.3	Théorie de la représentation, théorie des invariants	28
3	Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe dans \mathbb{P}^2 : le cas des deux composantes	37
3.1	La conjecture de Kobayashi	38
3.2	Enoncé du résultat principal	38
3.3	Les fibrés de jets logarithmiques de Demailly	39
3.4	Utilisation des jets d'ordre 1	42
3.5	Utilisation des jets d'ordre 2	44
4	Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3	55
4.1	Etude algébrique	56
4.2	Applications géométriques	60
4.3	Calculs de caractéristiques d'Euler	64
4.4	Etude de la cohomologie	71
A	Calculs des caractéristiques d'Euler	83
	Bibliographie	105

Chapitre 1

Introduction et plan de la thèse

Le thème de cette thèse est l'étude de l'hyperbolicité des hypersurfaces et complémentaires d'hypersurfaces projectives, en dimension 2 et 3, par l'étude des jets de Demailly-Semple.

La notion d'hyperbolicité au sens de Kobayashi est équivalente dans le cas d'une variété complexe compacte X , à l'absence de courbes holomorphes entières non constantes $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ (critère de Brody).

En 1970, S.Kobayashi [21] a posé le problème suivant : Est-il vrai que le complémentaire d'une hypersurface générique de degré $d \geq 2n + 1$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ est hyperbolique ?

Pour $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, les résultats connus sont que le complémentaire d'une courbe très générique C à k composantes C_1, \dots, C_k de degrés (d_1, \dots, d_k) est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 dans les cas suivants :

- 1) $k \geq 5$ et des degrés quelconques ([1])
- 2) $k = 4$ avec des degrés tels que $\sum d_i \geq 5$ ([15], [11])
- 3) $k = 3$ et $d_1, d_2, d_3 \geq 2$ ([11], [12]); $\sum d_i \geq 5$ ([10],[34])
- 4) $k = 1$ et $d_1 \geq 15$ ([34], [13])

La première partie de ma thèse a consisté en l'étude du cas $k = 2$, en utilisant les techniques de jets développées par J.P. Demailly, J. El Goul, G.Dethloff, S.Lu. ([6] , [9]). Pour X une variété complexe et V un sous fibré vectoriel holomorphe de T_X , la construction due à J.-P. Demailly de fibrés de k -jets de courbes $X_k = P_k V$ permet d'analyser l'hyperbolicité en termes de négativité de courbure. Le fibré $\pi_k : X_k \rightarrow X$ est une tour de fibrés projectifs sur X et il est muni d'un fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{X_k}(1)$. Les images directes $(\pi_k)_* \mathcal{O}_{X_k}(m)$ peuvent être vues comme des fibrés vectoriels d'opérateurs différentiels d'ordre k et de degré m agissant sur les germes de courbes holomorphes dans X tangents à V et invariants par reparamétrage. J.-P. Demailly a démontré que pour tout opérateur différentiel P de ce type, à valeurs dans le dual d'un fibré en droites ample, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à V vérifie l'équation différentielle $P(f) = 0$. Ce résultat précise l'approche de Green et Griffiths [17]. L'utilisation de ces outils a permis à J.-P. Demailly et J. El Goul de prouver l'hyperbolicité des surfaces très génériques de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ de degré $d \geq 21$ [7] et, par l'analogie logarithmique, J. El Goul a montré que le complémentaire d'une courbe très générique de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de degré $d \geq 15$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 . Nous utilisons la même stratégie pour obtenir des résultats sur l'hyperbolicité du complémentaire d'une courbe très générique à 2 composantes.

Dans un deuxième temps nous attaquons le problème de l'hyperbolicité des hypersurfaces projectives génériques de grand degré de dimension 3 pour

lequel il n'y a pas encore de résultats. Suivant la même stratégie qu'en dimension 2, nous étudions les jets de Demailly-Semple. Cette étude est d'abord algébrique avec la caractérisation de l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$. Nous obtenons ensuite la caractérisation du gradué du fibré des 3-jets, qui nous permet, par un calcul de type Riemann-Roch, de prouver la croissance de la caractéristique d'Euler. Nous poursuivons par une étude de la cohomologie nécessaire contrairement au cas de la dimension 2 où des théorèmes d'annulation dus à Bogomolov permettaient de conclure [3].

Chapitre 2 : Préliminaires

Ce chapitre rappelle tout d'abord les principales notions liées à l'hyperbolicité. Ensuite nous introduisons les espaces des jets de Demailly. Soit X une variété complexe de dimension n et $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ un germe d'application holomorphe. On introduit le fibré vectoriel $E_{k,m}^{GG}T_X^* \rightarrow X$ dont les fibres sont les polynômes à valeurs complexes $Q(f', f'', \dots, f^{(k)})$ sur les fibres de $J_k X$, fibré des germes de courbe d'ordre k sur X , de poids m par rapport à l'action de \mathbb{C}^* :

$$Q(\lambda f', \lambda^2 f'', \dots, \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m Q(f', f'', \dots, f^{(k)}).$$

On définit le sous-fibré $E_{k,m}T_X^* \subset E_{k,m}^{GG}T_X^*$, appelé le fibré des opérateurs différentiels invariants d'ordre k et de degré m , i.e :

$$Q((f \circ \phi)', (f \circ \phi)'', \dots, (f \circ \phi)^{(k)}) = \phi'(0)^m Q(f', f'', \dots, f^{(k)})$$

pour tout $\phi \in G_k$ le groupe des germes de k jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. L'importance de ces fibrés provient du théorème annoncé par Green et Griffiths [17] et démontré complètement par Siu : si $P(f', f'', \dots, f^{(k)})$ est défini globalement sur X , à valeur dans le dual d'un fibré ample A , alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ vérifie $P(f) = 0$. Une stratégie alors possible pour étudier l'hyperbolicité est de montrer l'existence de suffisamment de jets de différentielles. Nous démontrons une autre propriété des jets de Demailly : ils permettent de désingulariser les germes de courbes. Finalement, nous rappelons les bases de la théorie des invariants ainsi que celles de la théorie de la représentation du groupe linéaire et nous démontrons un résultat qui fait le lien entre le caractère formel d'une représentation associée à un fibré vectoriel et le caractère de Chern du fibré vectoriel.

Chapitre 3 : Hyperbolicité du complémentaire dans \mathbb{P}^2 d'une courbe à deux composantes

L'étude de l'hyperbolicité du complémentaire dans \mathbb{P}^2 d'une courbe à deux composantes est fondée sur l'utilisation des jets logarithmiques, développés par Dethloff et Lu et utilisés par El Goul dans le cas d'une seule composante.

Le résultat principal de cette étude est :

Théorème *Le complémentaire d'une courbe très générique à deux composantes de degrés $d_1 \leq d_2$ dans \mathbb{P}^2 est hyperbolique pour :*

- 1) $d_1 \geq 5$
- 2) $d_1 = 4$ et $d_2 \geq 7$
- 3) $d_1 = 4$ et $d_2 = 4$
- 4) $d_1 = 3$ et $d_2 \geq 9$
- 5) $d_1 = 2$ et $d_2 \geq 12$.

Ce résultat a donné lieu à une publication (cf. [30]).

Chapitre 4 : Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3

Cette étude est fondée sur l'utilisation de la théorie de la représentation. Si on définit $A_k = \bigoplus_m (E_{k,m} T_X^*)_x$ l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$, celle-ci peut-être vue comme une représentation du groupe linéaire Gl_n . On sait alors que l'on a une décomposition de cette représentation en somme directe de représentations irréductibles de Schur. Ainsi Demailly [6] a caractérisé les fibrés de jets d'ordre 2, de degré m :

$$Gr^\bullet E_{2,m} T_X^* = \bigoplus_{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, 0)} T_X^*,$$

où Γ est le foncteur de Schur.

L'étude algébrique de A_3 , par la théorie classique des invariants, m'a permis d'obtenir une caractérisation des jets d'ordre 3, en dimension 3 :

Théorème *En dimension 3 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f'_i, w_{ij}, w_{ij}^k, W], \quad 1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq k \leq 3$$

$$\text{où } W = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}, \quad w_{ij} = f'_i f''_j - f''_i f'_j,$$

$$w_{ij}^k = (f'_k)^4 d\left(\frac{w_{ij}}{(f'_k)^3}\right) = f'_k (f'_i f''_j - f''_i f'_j) - 3f''_k (f'_i f''_j - f''_i f'_j).$$

De plus, $\text{deg}.tr(\mathbb{C}[f'_i, w_{ij}, w_{ij}^k, W]) = 7$ et le calcul de l'idéal des relations entre les générateurs est fait en annexe.

Cette étude algébrique a conduit à des applications géométriques au niveau des fibrés de jets.

Le résultat principal que j'ai obtenu est la caractérisation du gradué du fibré des jets d'ordre 3 en dimension 3 :

Théorème *Soit X une variété complexe de dimension 3 :*

Alors :

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* \right)$$

où Γ est le foncteur de Schur.

Un calcul de type Riemann-Roch fournit alors :

Proposition *Soit X une hypersurface lisse de degré d de \mathbb{P}^4 , alors*

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8)$$

Corollaire *Pour $d \geq 43$, $\chi(X, E_{3,m}T_X^*) \sim \alpha(d)m^9$ avec $\alpha(d) > 0$.*

Pour obtenir l'existence de suffisamment d'opérateurs différentiels, une étude de la cohomologie s'avère nécessaire contrairement au cas de la dimension 2 où des théorèmes d'annulation dus à Bogomolov permettaient de conclure [3].

L'étude en dimension 3 a montré la nécessité de considérer les jets d'ordre 3. En effet, l'utilisation des complexes de Schur m'a permis d'obtenir le résultat suivant par une méthode élémentaire, qui peut aussi s'obtenir comme corollaire de résultats plus généraux [4]. Ce résultat illustre l'idée plus générale qu'en dimension n , il faut étudier les jets d'ordre n :

Théorème : *Soit X une hypersurface lisse et irréductible de degré $d \geq 2$ de \mathbb{P}^4 :*

Alors :

$$H^0(X, E_{2,m}T_X^*) = 0.$$

Autrement dit, il n'y a pas de jets de différentielles d'ordre 2 défini globalement sur X .

J'ai montré qu'on pouvait utiliser les théorèmes d'annulation classiques pour obtenir le résultat qui peut aussi s'obtenir comme corollaire de [4] :

Théorème *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d .*

Alors pour $q \geq 1$,

$$H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = 0 \text{ pour } a_3(d-1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d-1).$$

L'étude m'a permis de constater que contrairement au cas des jets d'ordre 2 en dimension 2, on ne peut espérer avoir $H^2(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) = 0$ car pour tout m suffisamment grand, il existe $H^2(X, \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*) \neq 0$ par la

Proposition *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré $d \geq 6$.*

Alors

$$h^2(X, S^m T_X^*) \underset{+\infty}{\sim} \left(-\frac{7}{24}d + \frac{1}{8}d^2\right)m^5.$$

La perspective de ce travail est, après avoir démontré l'existence d'opérateurs différentiels à valeur dans le dual d'un fibré ample, d'obtenir des résultats sur l'hyperbolicité des hypersurfaces génériques de \mathbb{P}^4 de degré suffisamment grand.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre a pour but d'introduire les principales notions utilisées par la suite. On y rappelle les principaux concepts liés à l'hyperbolicité et la construction des jets de Demailly-Semple, ainsi que ceux de la théorie classique des invariants et de la théorie de la représentation.

2.1 Hyperbolicité

Soit X une variété complexe de dimension n .

On note par $f : \Delta \rightarrow X$ une application holomorphe arbitraire du disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$ vers X . On définit la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden sur X , pour $x \in X, \xi \in T_{X,x}$, par :

$$k_X(\xi) = \inf\{\lambda > 0; \exists f : \Delta \rightarrow X, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

La pseudo-distance de Kobayashi $d_X(x, y)$ est la pseudo-distance géodésique obtenue en intégrant la métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden.

Définition 2.1.1 *La variété X est dite hyperbolique au sens de Kobayashi si d_X est une distance.*

d_X et k_X vérifient les deux propriétés suivantes :

Proposition 2.1.2 *1) Si $f : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe entre deux variétés complexes alors*

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_X(x, x'), \text{ pour tous } x, x' \in X, \\ k_Y(f(x), f_*(\xi)) &\leq k_X(x, \xi), \text{ pour tout } \xi \in T_{X,x}. \end{aligned}$$

2) Soit X une variété complexe et soient d et F , respectivement une pseudo-distance et une pseudo-métrique sur X vérifiant

$$d(f(p), f(q)) \leq d_\Delta(p, q) \text{ et } F(f(p), f_*(\xi)) \leq k_\Delta(p, \xi)$$

pour toute application holomorphe $f : \Delta \rightarrow X$, tous points p et q dans Δ et tout vecteur $\xi \in T_p\Delta$. Alors :

$$d \leq d_X \text{ et } F \leq k_X.$$

S'il existe une courbe entière passant par $x \in X$ dans la direction $\xi \in T_{X,x}$ alors $k_X(\xi) = 0$. Il est clair par exemple que $k_{\mathbb{C}} \equiv 0$. Une application de \mathbb{C} dans une variété hyperbolique est nécessairement constante. La réciproque n'est vraie en général que dans le cas compact. Rappelons les résultats bien connus de Brody :

Lemme 2.1.3 (*Lemme de reparamétrisation de Brody*) Soit ω une métrique hermitienne sur X et soit $f : \Delta \rightarrow X$ une application holomorphe. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R \geq (1 - \varepsilon) \|f'(0)\|_{\omega}$ et une transformation homographique ϕ du disque $D(0, R)$ sur $(1 - \varepsilon)\Delta$ telle que :

$$\|(f \circ \phi)'(0)\|_{\omega} = 1, \|(f \circ \phi)'(t)\|_{\omega} \leq \frac{1}{1 - |t|^2/R^2} \text{ pour tout } t \in D(0, R).$$

Corollaire 2.1.4 (*Théorème de Brody*) Une variété complexe compacte est hyperbolique si et seulement si toute application holomorphe $g : \mathbb{C} \rightarrow X$ est constante.

Soit (X, V) une variété complexe munie d'un sous-fibré holomorphe $V \subset T_X$. On dit que (X, V) est une variété dirigée. On peut généraliser la notion d'hyperbolicité comme suit :

Définition 2.1.5 Soit (X, V) une variété complexe dirigée.

La métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden de (X, V) est définie pour tout $x \in X, \xi \in V_x$ par :

$$k_{(X,V)}(\xi) = \inf\{\lambda > 0; \exists f : \Delta \rightarrow X, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi, f'(\Delta) \subset V\}$$

On dit que (X, V) est infinitésimalement hyperbolique si $k_{(X,V)}$ est définie positive sur chaque fibre V_x et satisfait $k_{(X,V)}(\xi) \geq \varepsilon \|\xi\|_{\omega}$ pour une métrique hermitienne ω sur X , quand x décrit un sous-ensemble compact de X .

L'une des idées de base concernant l'étude de l'hyperbolicité est que celle-ci est liée à une certaine propriété de négativité de la courbure.

Lemme 2.1.6 (*d'Ahlfors-Schwarz*) Soit $\gamma(t) = \gamma_0(t)id_t \wedge \overline{dt}$ une métrique hermitienne sur Δ_R où $\log \gamma_0$ est une fonction sous-harmonique telle que :

$i\partial\bar{\partial}\log\gamma_0(t) \geq A\gamma(t)$ au sens des courants, pour une constante positive A . Alors γ peut être comparée avec la métrique de Poincaré : $\gamma(t) \leq \frac{2}{A} \frac{R^{-2}|dt|^2}{(1-|t|^2/R^2)^2}$

Exemple 2.1.7 Les surfaces de Riemann hyperboliques sont celles dont le revêtement universel est Δ , i.e celles dont le genre g est supérieur ou égal à 2.

Grâce à la propriété 2 de la proposition précédente 2.1.2, on a le résultat suivant dû à S. Kobayashi :

Théorème 2.1.8 Soit X une variété complexe. Supposons que T_X admette une métrique finslérienne à courbure sectionnelle majorée par une constante négative. Alors X est hyperbolique.

2.2 Espaces des jets et hyperbolicité

Soit X une variété complexe de dimension n . On définit le fibré $J_k \rightarrow X$ des k -jets de germes de courbes dans X , comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des applications holomorphes $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$ modulo la relation d'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si toutes les dérivées $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ coïncident pour $0 \leq j \leq k$. L'application projection $J_k \rightarrow X$ est simplement $f \rightarrow f(0)$. Grâce à la formule de Taylor appliquée à un germe f au voisinage d'un point $x \in X$, on peut identifier $J_{k,x}$ à l'ensemble des k -uplets de vecteurs $(f'(0), \dots, f^{(k)}(0)) \in \mathbb{C}^{nk}$. Ainsi, J_k est un fibré holomorphe sur X de fibre \mathbb{C}^{nk} . On peut voir qu'il ne s'agit pas d'un fibré vectoriel pour $k \geq 2$ (pour $k = 1$, c'est simplement le fibré tangent T_X).

Définition 2.2.1 Soit (X, V) une variété dirigée. Le fibré $J_k V \rightarrow X$ est l'espace des k -jets de courbes $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ tangentes à V , c'est-à-dire telles que $f'(t) \in V_{f(t)}$ pour t au voisinage de 0, l'application projection sur X étant $f \rightarrow f(0)$.

2.2.1 Construction

Nous présentons la construction des espaces de jets introduits par J.-P. Demailly dans [6].

Soit (X, V) une variété dirigée. On définit (X', V') par :

i) $X' = P(V)$

ii) $V' \subset T_{X'}$ est le sous-fibré tel que pour chaque point $(x, [v]) \in X'$ associé à un vecteur $v \in V_x \setminus \{0\}$ on a :

$V'_{(x, [v])} = \{\xi \in T_{X'}; \pi_* \xi \in \mathbb{C}v\}$ où $\pi : X' \rightarrow X$ est la projection naturelle et $\pi_* : T_{X'} \rightarrow \pi^* T_X$

On a donc $V' = \pi_*^{-1}(O_{X'}(-1))$.

On définit par récurrence le fibré de k-jets projectivisé $P_k V = X_k$ et le sous-fibré associé $V_k \subset T_{X_k}$ par :

$(X_0, V_0) = (X, V)$, $(X_k, V_k) = (X'_{k-1}, V'_{k-1})$. On a par construction :

$$\dim X_k = n + k(r - 1), \text{rang} V_k = r := \text{rang} V$$

Soit π_k la projection naturelle $\pi_k : X_k \rightarrow X_{k-1}$, on notera $\pi_{j,k} : X_k \rightarrow X_j$ la composition $\pi_{j+1} \circ \pi_{j+2} \circ \dots \circ \pi_k$, pour $j \leq k$.

Par définition, il y a une injection canonique $O_{P_k V}(-1) \hookrightarrow \pi_k^* V_{k-1}$ et on obtient un morphisme de fibrés en droites

$$O_{P_k V}(-1) \rightarrow \pi_k^* V_{k-1} \xrightarrow{(\pi_k)^*(\pi_{k-1})^*} \pi_k^* O_{P_{k-1} V}(-1)$$

qui admet

$$D_k = P(T_{P_{k-1} V / P_{k-2} V}) \subset P_k V$$

comme diviseur de zéros

Ainsi, on a :

$$O_{P_k V}(1) = \pi_k^* O_{P_{k-1} V}(1) \otimes O(D_k).$$

Remarque 2.2.2 Chaque application non constante $f : \Delta_R \rightarrow X$ de (X, V) se relève en $f_{[k]} : \Delta_R \rightarrow P_k V$. En effet :

si f n'est pas constante, on peut définir la tangente $[f'(t)]$ (aux points stationnaires $f'(t) = (t - t_0)^s u(t)$, $[f'(t_0)] = [u(t_0)]$) et $f_{[1]}(t) = (f(t), [f'(t)])$.

Nous allons décrire cela par des coordonnées dans des cartes affines : pour chaque point $x_0 \in X$, il y a des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) sur un voisinage U de x_0 telles que les fibres $(V_z)_{z \in U}$ peuvent être définies par des équations linéaires :

$V_z = \{\xi = \sum_{1 \leq j \leq n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j}; \xi_j = \sum_{1 \leq k \leq r} a_{jk}(z) \xi_k, \text{ pour } j = r+1, \dots, n\}$. Donc la carte affine $\xi_j \neq 0$ de $P(V)_U$ peut être décrite par le système de coordonnées : $(z_1, \dots, z_n; \frac{\xi_1}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_r}{\xi_j})$

On peut calculer les coordonnées de $f_{[k]}$ dans les cartes affines :

si $f_{[k]} = (F_1, \dots, F_N)$ on obtient $f_{[k+1]} = (F_1, \dots, F_N, \frac{F'_{s_1}}{F'_{s_r}}, \dots, \frac{F'_{s_{r-1}}}{F'_{s_r}})$

où $N = n + k(r - 1)$ et $\{s_1, \dots, s_r\} \subset \{1, \dots, N\}$. Si $k \geq 1$, $\{s_1, \dots, s_r\}$ contient les derniers $r-1$ indices de $\{1, \dots, N\}$ correspondants aux composantes verticales de la projection $P_k V \rightarrow P_{k-1} V$, et s_r est un indice tel que $m(F_{s_r}, 0) = m(f_{[k]}, 0)$, où $m(g, t)$ désigne la multiplicité de la fonction g en t .

Il est clair que la suite $m(f_{[k]}, t_0)$ est décroissante au sens large puisque $f_{[k-1]} = \pi_k \circ f_{[k]}$. En fait, on a :

Proposition 2.2.3 [6] *Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ un germe de courbe non constant tangent à V . Alors pour tout $j \geq 2$, on a $m(f_{[j-2]}, 0) \geq m(f_{[j-1]}, 0)$ et l'inégalité est stricte si et seulement si $f_{[j]}(0) \in D_j$.*

Réciproquement, si $\omega \in P_k V$ est un élément arbitraire et $m_0 \geq \dots \geq m_{k-1} \geq 1$ sont des entiers tels que pour tout $j \in \{2, \dots, k\}$, $m_{j-2} > m_{j-1}$ si et seulement si $\pi_{j,k}(\omega) \in D_j$, alors il existe un germe de courbe, $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ tangent à V tel que $f_{[k]}(0) = \omega$ et $m(f_{[j]}, 0) = m_j$.

2.2.2 Points réguliers et points singuliers

Un point $\omega \in X_k$ est dit régulier s'il existe un germe $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ tel que $f_{[k]}(0) = \omega$ et $m_0(f, 0) = m(f_{[1]}, 0) = \dots = m(f_{[k-1]}, 0) = 1$. Ceci est possible par la proposition précédente si et seulement si $\pi_{j,k}(\omega) \notin D_j$ pour tout $j \in \{2, \dots, k\}$. On définit donc [6] :

$$\begin{aligned} P_k V^{reg} &= \bigcap_{2 \leq j \leq k} \pi_{j,k}^{-1}(P_j V \setminus D_j), \\ P_k V^{sing} &= \bigcup_{2 \leq j \leq k} \pi_{j,k}^{-1}(D_j) = P_k V \setminus P_k V^{reg}. \end{aligned}$$

2.2.2.1 Jets de Demailly et désingularisation

Une question naturelle que l'on peut se poser est de savoir si la construction précédente des jets de Demailly permet de désingulariser les courbes. Le problème de résolution des singularités des courbes est un problème classique. Pour les courbes algébriques planes, une méthode est d'utiliser les séries de Puiseux. Avec cette résolution on a $\pi : B \rightarrow X$ où B est une variété abstraite, alors que la courbe X est plongée dans une surface.

La proposition précédente nous montre que la multiplicité décroît à l'origine lorsque l'on relève les germes, aussi on peut s'intéresser à une question : savoir si l'on peut désingulariser le germe à l'origine par relèvements. Cette question nous amène à comparer la construction précédente avec celle des éclatements. En effet, on sait que l'on peut désingulariser une courbe par éclatements successifs :

Commençons par quelques rappels sur les éclatements [33] :

on considère une variété X , $\xi \in X$ et (x_1, \dots, x_n) des coordonnées pour X centrées en ξ . Considérons le produit $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ et la sous-variété $Y \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$ des points $(x; t_1, \dots, t_n)$ avec $x \in X$, et $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$, tels que $x_i t_j = x_j t_i$ pour $i, j = 1 \dots n$.

L'application $\sigma : Y \rightarrow X$ obtenue comme restriction de la première projection est appelée l'éclatement de X en ξ .

Prenons $\dim X = 2$. Soit C une courbe irréductible sur une surface X passant par ξ . L'image réciproque $\sigma^{-1}(C)$ a deux composantes : la courbe exceptionnelle $L = \sigma^{-1}(\xi)$ et la courbe C' définie comme l'adhérence dans Y de $\sigma^{-1}(C \setminus \xi)$. La courbe C' est appelée la courbe transformée de C .

Le procédé décrit ci-dessus est appelé σ - *process*, ou *transformation quadratique*.

Rappelons le résultat bien connu dont on trouve une démonstration par exemple dans [2] :

Théorème 2.2.4 *Soit C une courbe irréductible sur une surface non singulière X ; alors il existe une surface Y et une application $f : Y \rightarrow X$, telle que f est composée d'éclatements $Y \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow X$ et la courbe transformée C' de C sur Y est régulière.*

Montrons maintenant qu'effectivement les jets de Demailly permettent de désingulariser les germes de courbes.

Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ un germe de courbe, avec une paramétrisation irréductible, i.e f ne peut pas s'écrire sous la forme $f(t) = g(t^s)$. Deux paramétrisations f et g sont dites équivalentes s'il existe une fonction analytique $z(t)$ telle que $z(0) = 0$, $z'(t) \neq 0$, pour laquelle : $g(t) = f(z(t))$.

On peut montrer [36] que deux paramétrisations irréductibles du même ensemble de points sont équivalentes. Ainsi, un point d'une courbe C est régulier si et seulement si $m(f, 0) = 1$, pour une, et donc toute paramétrisation irréductible.

Nous allons montrer le résultat :

Théorème 2.2.5 Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ un germe de courbe, avec une paramétrisation irréductible et une singularité en $f(0)$. Alors on peut désingulariser le germe de courbe par la construction des jets de Demailly, i.e il existe un entier k tel que $m(f_{[k]}, 0) = 1$.

Démonstration. Nous allons faire la démonstration pour $\dim X = 2$. L'idée est de comparer la construction des relevés par les jets de Demailly avec celle des éclatements.

Prenons $V = T_X$ dans la construction des espaces de jets de la variété dirigée (X, V) et traduisons l'éclatement, g_1 , de la courbe en l'origine par les coordonnées des cartes affines :

soit $\xi = f(0)$, (x, y) des coordonnées locales en ξ et $\sigma : Y \rightarrow X$ l'éclatement centré en ξ . Il existe un voisinage U de ξ dans X tel que $\sigma^{-1}(U)$ est la sous-variété de $U \times \mathbb{P}^1$ définie par $t_0 y = t_1 x$, où $(t_0 : t_1)$ sont des coordonnées sur \mathbb{P}^1 .

Dans l'ouvert où $t_0 \neq 0$, l'éclatement est donné par les équations :

$$x = u \text{ et } y = uv, \text{ où } v = t_1/t_0.$$

Ainsi, pour $f = (f_1, f_2)$ où $m(f, 0) = m(f_1, 0)$ on a $g_1 = (f_1, \frac{f_2}{f_1})$

Pour les jets de Demailly-Semple on a : $f_{[1]} = (f_1, f_2, \frac{f_2'}{f_1'})$. On a donc $m(g_1, 0) = m(f_{[1]}, 0)$ car $m(\frac{f_2}{f_1}, 0) = m(\frac{f_2'}{f_1'}, 0)$.

Montrons que si g_k est le germe de courbe transformée de f par k éclatements successifs, on a : $m(g_k, 0) = m(f_{[k]}, 0)$.

Si $f_{[k]} = (f_1^k, \dots, f_N^k)$ alors $f_{[k+1]} = (f_1^k, \dots, f_N^k, \frac{(f_{s_i}^k)'}{(f_{s_j}^k)'})$ où $\{s_1, s_2\}$ contient le dernier indice correspondant à la composante verticale et un indice, s_j , tel que $m(f_{[k]}, 0) = m(f_{s_j}^k, 0)$.

Montrons par récurrence, que pour tout k , $g_k = (g_{s_1}^k, g_{s_2}^k)$ où $m(g_{s_i}^k, 0) = m(f_{s_i}^k, 0)$. Ainsi, on aura bien $m(g_k, 0) = m(f_{[k]}, 0)$.

Pour $k = 1$: $\{f_{s_1}^1, f_{s_2}^1\} = \{f_1, \frac{f_2'}{f_1'}\}$ et $\{g_{s_1}^1, g_{s_2}^1\} = \{f_1, \frac{f_2}{f_1}\}$ donc la propriété est vraie.

Supposons la vraie au rang k , et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$:

on a donc : $g_k = (g_{s_1}^k, g_{s_2}^k)$ et $f_{[k]} = (f_1^k, \dots, f_{s_1}^k, f_{s_2}^k)$ où $m(g_{s_i}^k, 0) = m(f_{s_i}^k, 0)$.

Donc $g_{k+1} = (g_{s_j}^k, \frac{g_{s_i}^k}{g_{s_j}^k})$ et $f_{[k+1]} = (f_1^k, \dots, f_{s_1}^k, f_{s_2}^k, \frac{(f_{s_i}^k)'}{(f_{s_j}^k)'})$ où $m(g_k, 0) = m(g_{s_j}^k, 0) = m(f_{s_j}^k, 0) = m(f_{[k]}, 0)$.

Par définition de $f_{[k+2]}$, on peut prendre $\{f_{s_1}^{k+1}, f_{s_2}^{k+1}\} = \{f_{s_j}^k, \frac{(f_{s_i}^k)'}{(f_{s_j}^k)'})\}$.

Or $\{g_{s_1}^{k+1}, g_{s_2}^{k+1}\} = \{g_{s_j}^k, \frac{g_{s_i}^k}{g_{s_j}^k}\}$ donc $m(g_{s_i}^{k+1}, 0) = m(f_{s_i}^{k+1}, 0)$.

La récurrence est démontrée.

Par le théorème précédent on obtient donc qu'il existe k tel que $m(f_{[k]}, 0) = 1$ i.e la courbe est régulière à l'origine : on a désingularisé notre germe de courbe. On généralise facilement le résultat pour $\dim X = n$.

Montrons que cette propriété reste vraie pour V sous-fibré quelconque de T_X dans la construction des jets de Demailly de la variété dirigée (X, V) .

On a des relations : $f'_j(t) = \sum_{1 \leq k \leq r} a_{jk}(f(t))f'_k(t)$, $j > r$, donc $m(f_j, 0) \geq m(f_k, 0)$, $1 \leq k \leq r$, $j > r$ aussi, les f_j , $j > r$ n'interviennent pas pour la multiplicité.

On a toujours : $m(g_k, 0) = m(f_{[k]}, 0)$ et donc il existe k tel que $m(f_{[k]}, 0) = 1$. \square

Remarquons qu'il est important que la paramétrisation soit irréductible. En effet, soit f un germe de courbe régulier et considérons $g : t \rightarrow f(t^s)$, $s \geq 2$. On a $g_{[k]}(0) = f_{[k]}(0) \in P_k V^{reg}$ pour tout k , car $g_{[k]}(t) = f_{[k]}(t^s)$.

En effet, par récurrence :

si $f_{[k]}(t) = (F_1(t), \dots, F_N(t))$ et $g_{[k]}(t) = f_{[k]}(t^s)$, alors :

$$f_{[k+1]} = (F_1, \dots, F_N, \frac{F'_{s_1}}{F'_{s_r}}, \dots, \frac{F'_{s_{r-1}}}{F'_{s_r}})$$

et

$$g_{[k+1]}(t) = (F_1(t^s), \dots, F_N(t^s), \frac{F'_{s_1}}{F'_{s_r}}(t^s), \dots, \frac{F'_{s_{r-1}}}{F'_{s_r}}(t^s)).$$

Et donc, $g_{[k+1]}(t) = f_{[k+1]}(t^s)$.

Ainsi $m(g_{[k]}, 0) = m(g, 0) > 1$ pour tout k , et donc $m(g_{[k]}, 0)$ n'est jamais égale à 1.

La résolution des singularités des surfaces est beaucoup plus difficile ; un procédé général pour la résolution des singularités de dimension 2 a été trouvé par Hirzebruch en 1952. Pour les variétés algébriques de dimension quelconque, l'existence d'une résolution des singularités a été prouvée par Hironaka en 1964 ; et quelques années plus tard il a pu l'étendre aux espaces complexes arbitraires. La preuve d'Hironaka est parmi les plus difficiles en mathématiques, selon E.Brieskorn, mais l'idée de base est encore l'application de généralisations de transformations quadratiques.

2.2.3 Opérateurs différentiels sur les jets

D'après [17], on introduit le fibré vectoriel des jets de différentielles, d'ordre k et de degré m , $E_{k,m}^{GG} V^* \rightarrow X$ dont les fibres sont les polynômes

à valeurs complexes $Q(f', f'', \dots, f^{(k)})$ sur les fibres de $J_k V$, de poids m par rapport à l'action de \mathbb{C}^* :

$$Q(\lambda f', \lambda^2 f'', \dots, \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m Q(f', f'', \dots, f^{(k)})$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(f', f'', \dots, f^{(k)}) \in J_k V$.

$E_{k,m}^{GG} V^*$ admet une filtration canonique dont les termes gradués sont

$$Gr^l(E_{k,m}^{GG} V^*) = S^{l_1} V^* \otimes S^{l_2} V^* \otimes \dots \otimes S^{l_k} V^*,$$

où $l := (l_1, l_2, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifie $l_1 + 2l_2 + \dots + kl_k = m$. En effet, en considérant l'expression de plus haut degré en les $(f_i^{(k)})$ qui intervient dans l'expression d'un polynôme homogène de poids m , on obtient une filtration intrinsèque :

$$E_{k-1,m}^{GG} V^* = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} = E_{k,m}^{GG} V^*$$

où

$$S_i/S_{i-1} \simeq S^i V^* \otimes E_{k,m-ki}^{GG} V^*.$$

Par récurrence, on obtient bien une filtration dont les termes gradués sont ceux annoncés plus haut.

D'après [6], on définit le sous-fibré $E_{k,m} V^* \subset E_{k,m}^{GG} V^*$, appelé le fibré des jets de différentielles invariants d'ordre k et de degré m , i.e :

$$Q((f \circ \phi)', (f \circ \phi)'', \dots, (f \circ \phi)^{(k)}) = \phi'(0)^m Q(f', f'', \dots, f^{(k)})$$

pour tout $\phi \in G_k$ le groupe des germes de k -jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Pour G'_k le sous-groupe de G_k des germes ϕ tangents à l'identité ($\phi'(0) = 1$) on a $E_{k,m} V^* = (E_{k,m}^{GG} V^*)^{G'_k}$.

La filtration canonique sur $E_{k,m}^{GG} V^*$ induit une filtration naturelle sur $E_{k,m} V^*$ dont les termes gradués sont

$$\left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=m} S^{l_1} V^* \otimes S^{l_2} V^* \otimes \dots \otimes S^{l_k} V^* \right)^{G'_k}.$$

Le lien entre ces espaces d'opérateurs différentiels et les espaces de jets construits précédemment est donné par :

Théorème 2.2.6 [6] *Supposons que V a un rang $r \geq 2$.*

Soit $\pi_{0,k} : P_k V \rightarrow X$, et $J_k V^{reg}$ le fibré des k -jets réguliers i.e $f'(0) \neq 0$.

i) Le quotient $J_k V^{reg}/G_k$ a la structure d'un fibré localement trivial au-dessus de X , et il y a un plongement holomorphe $J_k V^{reg}/G_k \rightarrow P_k V$, qui identifie $J_k V^{reg}/G_k$ avec $P_k V^{reg}$.

ii) Le faisceau image direct $(\pi_{0,k})_* O_{P_k V}(m)$ peut être identifié avec le faisceau des sections holomorphes de $E_{k,m} V^*$.

iii) Pour tout $m > 0$, le lieu de base du système linéaire $|O_{P_k V}(m)|$ est égal à $P_k V^{sing}$. De plus, $O_{P_k V}(1)$ est relativement big (i.e pseudo-ample) au-dessus de X .

2.2.4 Opérateurs différentiels invariants et dérivation (cf.[9])

On peut définir une dérivation, ∇ , sur les opérateurs différentiels par :

$$(\nabla Q)(f)(t) = d(Q(f))/dt.$$

Cependant, on remarque que $E_{k,m} V^*$ n'est pas laissé stable par ∇ : par exemple $f'' = \nabla f'$ n'est pas un polynôme invariant.

Aussi, une question naturelle, qui n'est pas traitée dans l'article de Demailly, est celle de la construction d'une dérivation qui laisse invariant les opérateurs différentiels invariants.

Par le théorème précédent, il est équivalent de construire une dérivation d pour les sections des $O_{P_k V}(m)$.

Soient s et t des sections holomorphes du fibré $O_{P_k V}(m)$. Alors $\frac{s}{t}$ est une fonction méromorphe sur $P_k V$. On peut considérer $d(\frac{s}{t})$ comme une section méromorphe de $O_{P_1(P_k V)}(1)$. En effet, $g = d(\frac{s}{t})$ peut être vue comme une fonction sur $O_{P_1(P_k V)}(-1)$ à valeurs complexes telle que $g(\lambda.v) = \lambda.g(v)$, aussi g est bien une section du dual $O_{P_1(P_k V)}(1)$.

On a une inclusion $P_{k+1} V \subset P_1(P_k V) = P(TP_k V)$, donc aussi une inclusion $O_{P_{k+1} V}(-1) \subset O_{P_1(P_k V)}(-1)$. Ainsi, on peut ramener notre section g à une section méromorphe de $O_{P_{k+1} V}(1)$.

On peut voir t^2 comme une section de $O_{P_{k+1} V}(2m)$, donc $t^2.d(\frac{s}{t})$ comme une section méromorphe de $O_{P_{k+1} V}(2m+1)$.

De plus, cette section est holomorphe. En effet, par une trivialisations locale et la règle de dérivation d'un produit pour les fonctions holomorphes s et t : $t^2.d(\frac{s}{t}) = tds - sdt$, qui est holomorphe.

Ainsi, on a trouvé un procédé, modifiant la dérivation, qui laisse stable les opérateurs différentiels invariants i.e les sections des $O_{P_k V}(m)$.

2.2.5 Métriques sur les k -jets à courbure négative

Définition 2.2.7 [6] Une métrique singulière h_k de k -jets sur une variété complexe dirigée (X, V) est une métrique sur le fibré en droites $O_{P_k V}(-1)$, telle que la fonction de poids ϕ est quasi-plurisousharmonique (Pour une trivialisaton $L|_U \simeq U \times \mathbb{C}$ de L , la métrique est donnée par $|\xi|_{h_k}^2 = |\xi|^2 e^{-\phi}$). On note $\Sigma_{h_k} \subset P_k V$ le lieu singulier de la métrique i.e l'ensemble des points où ϕ n'est pas localement bornée, et $\Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_k V}(1)) = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \phi$ le courant de courbure.

On dit que h_k est à courbure négative au sens des jets s'il existe $\varepsilon > 0$ et une métrique hermitienne ω_k sur $TP_k V$ tels que :

$$\Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_k V}(1))(\xi) \geq \varepsilon |\xi|_{\omega_k}^2, \text{ pour tout } \xi \in V_k$$

Remarque 2.2.8 l'inégalité est prise au sens des distributions :

Comme application du lemme d'Ahlfors-Schwarz on a :

Théorème 2.2.9 [6] Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée. Si (X, V) a une métrique de k -jet avec courbure négative, alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset \Sigma_{h_k}$. En particulier, si $\Sigma_{h_k} \subset P_k V^{sing}$, alors (X, V) est hyperbolique.

En particulier, l'existence de suffisamment de jets de différentielles globales implique l'hyperbolicité :

Corollaire 2.2.10 [6] Supposons qu'il existe des entiers $k, m > 0$ et un fibré en droites ample L sur X tel que

$$H^0(P_k V, O_{P_k V}(m) \otimes \pi_{0,k}^* L^{-1}) \simeq H^0(X, E_{k,m} V^* \otimes L^{-1})$$

ait des sections non nulles $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Soit $Z \subset P_k V$ le lieu de base de ces sections. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset Z$. Autrement dit, pour tout opérateur différentiel P , G_k -invariant à valeurs dans L^{-1} , toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à V vérifie l'équation différentielle $P(f) = 0$.

Définition 2.2.11 [6] Soit A un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X . L'ensemble base des k -jets est défini par :

$$B_k := \bigcap_{m>0} B_{k,m} \subset X_k$$

où $B_{k,m}$ est le lieu de base du fibré $O_{X_k}(m) \otimes \pi_{0,k}^* O(-A)$.

D'après le corollaire précédent toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset B_k$, donc $f(\mathbb{C}) \subset \bigcap_{k>0} \pi_{k,0}(B_k)$.

Ceci peut-être mis en relation avec la conjecture de Green et Griffiths [17] :

Conjecture 2.2.12 Si X est une variété de type général, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ est algébriquement dégénérée et il existe un sous ensemble algébrique propre $Y \subset X$ contenant toutes les images des courbes entières non constantes.

2.2.5.1 Le cas des surfaces

Décrivons la méthode, présente dans [6], pour obtenir l'existence de suffisamment de jets de différentielles dans le cas de la dimension 2.

Dans le cas des surfaces lisses de type général on obtient par Riemann-Roch [18] :

$$\chi(X, S^m T_X^* \otimes O(-A)) = \frac{m^3}{6}(c_1^2 - c_2) + O(m^2),$$

puis par le théorème d'annulation de Bogomolov $h^2(X, S^m T_X^* \otimes O(-A)) = 0$ pour m suffisamment grand donc :

$$h^0(X, S^m T_X^* \otimes O(-A)) \geq \frac{m^3}{6}(c_1^2 - c_2) + O(m^2).$$

Il en résulte que pour $c_1^2 - c_2 > 0$, $O_{X_1}(1)$ est big et donc

$$B_1 := \bigcap_{m>0} B_s(O_{X_1}(m) \otimes O(-A))$$

est un sous-ensemble algébrique propre de X_1 .

Pour obtenir de meilleures estimations la stratégie est d'étudier les jets de plus grand ordre. Malheureusement, il est difficile de trouver une décomposition simple des fibrés $E_{k,m} T_X^*$ pour pouvoir calculer leur caractéristique d'Euler. Ainsi, la troisième partie de cette thèse est consacrée à la détermination de

cette décomposition pour $k = 3$ sur les variétés de dimension 3. Cependant, pour $k = 2$ et sur une surface on a la filtration simple :

$$Gr^\bullet E_{2,m}T_X^* = \bigoplus_{0 \leq j \leq \frac{m}{3}} S^{m-3j}T_X^* \otimes K_X^j.$$

Ceci donne (cf. annexe)

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

En utilisant à nouveau le théorème d'annulation de Bogomolov on obtient :

$$h^0(X, E_{2,m}T_X^*) \geq \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

Par conséquent $O_{X_2}(1)$ est big et $O_{X_2}(-1)$ admet une métrique singulière non triviale à courbure négative sur X_2 dès que $13c_1^2 - 9c_2 > 0$.

Remarque 2.2.13 *Comme le remarque J.P. Demailly dans [6], l'une des motivations principales pour l'étude des jets de différentielles $E_{k,m}T_X^*$ dans les questions d'hyperbolicité est la propriété de positivité du fibré gradué $Gr^\bullet E_{k,m}T_X^*$ par opposition au cas des jets de Green-Griffiths. Par exemple, on voit facilement que dans le cas d'une surface $X \subset \mathbb{P}^3$ de degré d , $S^m T_X^*$ est la seule partie de $Gr^\bullet E_{2,m}T_X^*$ qui n'est pas ample lorsque d est suffisamment grand à m fixé.*

2.3 Théorie de la représentation, théorie des invariants

Cette section a pour but de rappeler les bases de la théorie de la représentation du groupe linéaire $Gl_n \mathbb{C}$ et celles de la théorie classique des invariants. Ces deux théories seront utilisées dans le chapitre 4.

2.3.1 Théorie classique des invariants

2.3.1.1 Polarisation

Soit f un polynôme dont les variables sont des vecteurs, i.e un polynôme en les coordonnées des vecteurs, d'un espace vectoriel fixé V . Pour tous vecteurs s, t on note par $D_s^t f$ le résultat de la différentiation de f par rapport à

s dans la direction de t , i.e :

$$D_s^t f = \sum_i t_i \frac{\partial f}{\partial s_i}$$

où les s_i, t_i sont les coordonnées des vecteurs s et t respectivement.

Les opérateurs de la forme D_s^t sont appelés opérateurs de polarisation. Ils commutent avec l'action du groupe $Gl(V)$ sur l'algèbre des polynômes.

Considérons la somme directe de m copies de V munie de l'action naturelle de $Gl(V)$ et de l'action de Gl_m qui commute avec celle-ci, i.e pour $A \in Gl_m$, $A.(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m)A^{-1}$. Ainsi chaque vecteur x_j est remplacé par une combinaison linéaire de vecteurs x_1, \dots, x_m avec des coefficients pris dans la j -ème colonne de A^{-1} . Cette action induit une action de Gl_m sur l'algèbre des polynômes en les variables x_1, \dots, x_m . Explicitement, la matrice $A = (a_{ij})$ agit sur un polynôme f comme suit :

$$(Af)(x_1, \dots, x_m) = f\left(\sum_i a_{i1}x_i, \dots, \sum_i a_{im}x_i\right).$$

Si un polynôme f dont les variables sont des vecteurs a pour degré p en la variable x , alors l'opérateur $P_x = \frac{1}{p!} D_x^{x_1} \dots D_x^{x_p}$ (où x_1, \dots, x_p n'apparaissent pas dans l'expression de f) transforme f en un polynôme qui est symétrique et multi-linéaire en x_1, \dots, x_p . On peut retrouver f à partir de $P_x f$ en substituant x à la place de x_1, \dots, x_p . Si f est homogène en toutes ses variables, si l'on répète l'opération précédente avec toutes les variables, on obtient une forme multi-linéaire Pf appelée la *polarisation complète* de f . On retrouve f en y substituant les variables originelles.

Définition 2.3.1 (cf. [28]) Soit F une forme multi-linéaire en les variables u_1, \dots, u_l où les u_i sont des vecteurs d'un espace vectoriel V . Soient x_1, \dots, x_m m vecteurs de V . On définit $S^{x_1, \dots, x_m}(F)$, l'espace vectoriel engendré par tous les polynômes obtenus en substituant les variables x_1, \dots, x_m aux variables u_1, \dots, u_l en permettant les répétitions. Cet espace est clairement invariant sous l'action de Gl_m .

Soit G un groupe linéaire arbitraire agissant sur un espace vectoriel de dimension n . On considère le problème de trouver les G -invariants d'un système de vecteurs de V , i.e les polynômes invariants sous l'action de G dans la somme directe de plusieurs copies de V . Il est clair que l'algèbre de tous les G -invariants d'un système de vecteurs est linéairement engendré par les

invariants qui sont homogènes en chaque variable. Si f est un tel invariant, sa polarisation complète en est un aussi. Ainsi si l'on est capable de trouver tous les invariants multi-linéaires, alors on obtient tous les invariants homogènes en y substituant de nouvelles variables (en permettant les répétitions).

Définition 2.3.2 (cf.[28]) *Un ensemble $\{F_\alpha\}$ de formes multi-linéaires G -invariantes est appelé système complet de G -invariants d'un système de m vecteurs si les espaces de polynômes $S^{x_1, \dots, x_m}(F)$ associés aux formes F_α engendrent l'algèbre de tous les G -invariants du système de vecteurs x_1, \dots, x_m .*

Théorème 2.3.3 ([28]) *Soit V un espace vectoriel de dimension n .*

1) *Tout système complet de G -invariants d'un système de n vecteurs est aussi un système complet pour tout nombre de vecteurs.*

2) *Si $G \subset SL(V)$ alors tout système complet de G -invariants d'un système de $n - 1$ vecteurs auquel on ajoute la forme "det" est un système complet de G -invariants pour tout nombre de vecteurs.*

On rappelle qu'un groupe G est dit linéairement réductif si tout G -module V de dimension finie est semi-simple. On a alors le théorème de Hilbert :

Théorème 2.3.4 (cf.[28]) *Soit $G \subset GL(V)$ un groupe réductif. Alors il existe un système fini complet de G -invariants.*

Dans le cas des groupes qui ne sont pas réductifs il y a quelques résultats connus et des conjectures à propos du 14^{ème} problème de Hilbert sur l'existence d'un système fini de générateurs de l'algèbre des invariants. Le cas général se ramène au cas des groupes unipotents. Nagata (1959) a construit un exemple de groupe unipotent dont l'algèbre des invariants n'a pas de système fini de générateurs. Les résultats positifs découlent du

Théorème 2.3.5 (cf.[28]) (Principe de Grosshans) *Soit G un groupe algébrique qui agit rationnellement sur une k -algèbre A , et H un sous-groupe fermé de G . Alors :*

$$A^H \cong (k[G]^H \otimes A)^G.$$

Si G est réductif et A de type fini, cela ramène le problème de savoir si A^H est de type fini à celui de savoir si $k[G]^H = k[G/H]$ est de type fini. D'où la définition suivante :

Définition 2.3.6 (cf.[28]) *Un sous-groupe H d'un groupe réductif G est appelé sous-groupe de Grosshans s'il vérifie les conditions : H est fermé, G/H est quasi-affine, $k[G/H]$ est de type fini.*

On peut alors substituer au problème de Hilbert le problème suivant proposé par K. Pommerening [27] : *Trouver les sous-groupes de Grosshans de Gl_n ou plus généralement d'un groupe réductif G .*

On a alors la conjecture de Popov-Pommerening [27] :

Conjecture 2.3.7 *Tout sous-groupe unipotent régulier, i.e normalisé par un tore maximal, d'un groupe réductif est de Grosshans.*

L. Tan [35] a montré que cette conjecture est vraie pour tous les sous-groupes de $Gl_n(k)$, $Sl_n(k)$, $PSl_n(k)$ (k corps algébriquement clos) pour $n \leq 5$.

2.3.2 Théorie de la représentation

Cette partie rappelle brièvement la théorie de la représentation de $Gl(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie r .

2.3.2.1 Les foncteurs de Schur

A l'ensemble des r -uplets décroissants $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, $a_1 \geq a_2 \dots \geq a_r$, on associe de manière fonctorielle une collection d'espaces vectoriels $\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V$ qui fournit la liste de toutes les représentations polynômiales irréductibles du groupe linéaire $Gl(V)$, à isomorphisme près. Γ^\bullet est appelé foncteur de Schur.

Donnons une description simple de ces foncteurs. Soit $\mathbb{U}_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures $r \times r$. Si tous les a_j sont positifs, on définit

$$\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V \subset S^{a_1}V \otimes \dots \otimes S^{a_r}V$$

comme étant l'ensemble des polynômes $P(x_1, \dots, x_r)$ sur $(V^*)^r$ qui sont homogènes de degré a_j par rapport à x_j et qui sont invariants sous l'action à droite de \mathbb{U}_r sur $(V^*)^r$ i.e tels que

$$P(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + x_k, x_{j+1}, \dots, x_r) = P(x_1, \dots, x_r) \quad \forall k < j.$$

Si (a_1, \dots, a_r) n'est pas décroissant alors on pose $\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V = 0$. Comme cas particuliers on retrouve les puissances symétriques et les puissances extérieures :

$$\begin{aligned} S^k V &= \Gamma^{(k, 0, \dots, 0)}V, \\ \wedge^k V &= \Gamma^{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}V \text{ (avec } k \text{ indices 1)}, \\ \det V &= \Gamma^{(1, \dots, 1)}V. \end{aligned}$$

Les foncteurs de Schur satisfont la formule

$$\Gamma^{(a_1+l, \dots, a_r+l)}V = \Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V \otimes (\det V)^l$$

qui peut être utilisée pour définir $\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V$ si l'on a des a_i négatifs.

On fixe une base de V et on identifie $G = Gl(V)$ avec $Gl_r(\mathbb{C})$. On note $T = \{(x = \text{diag}(x_1, \dots, x_r))\} \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales.

Définition 2.3.8 (cf.[14]) *Un vecteur e d'une représentation E est appelé vecteur de poids $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ (où les α_i sont des entiers) si*

$$x.e = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} e \text{ pour tout } x \text{ de } T.$$

Proposition 2.3.9 (cf.[14]) *Toute représentation E est somme directe de ses espaces de poids :*

$$E = \oplus E_\alpha, \quad E_\alpha = \{e \in E : x.e = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} e, \forall x \in T\}.$$

Définition 2.3.10 (cf.[14]) *Soit $B \subset G$ le groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Un vecteur e d'une représentation E est appelé vecteur de plus haut poids si $B.e = \mathbb{C}^*.e$.*

Proposition 2.3.11 (cf.[14]) *Une représentation (de dimension finie, polynômiale) E de $Gl_r(\mathbb{C})$ est irréductible si et seulement si elle a un unique vecteur de plus haut poids, à multiplication par un scalaire près. De plus, deux représentations sont isomorphes si et seulement si leurs vecteurs de plus haut poids ont le même poids.*

Nous utiliserons aussi la semi-simplicité des représentations holomorphes de $Gl_r(\mathbb{C})$:

Proposition 2.3.12 (cf.[14]) *Toute représentation holomorphe de $Gl_r(\mathbb{C})$ est somme directe de représentations irréductibles.*

Ainsi pour déterminer complètement une représentation holomorphe de $Gl_r(\mathbb{C})$, il suffit de déterminer ses vecteurs de plus haut poids.

2.3.2.2 Dualité de Schur, Tableaux de Young (cf.[14])

Faisons le lien avec les représentations du groupe symétriques. Les représentations irréductibles du groupe symétrique S_r correspondent aux classes de conjugaison de S_r , i.e aux partitions $(l) : r = l_1 + l_2 + \dots + l_d$ avec $l_i \in \mathbb{Z}$ et $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_d > 0$. La partition (l) peut être décrite par un diagramme de Young avec r cases et dont les longueurs des lignes sont l_1, l_2, \dots, l_d . Les longueurs de ses colonnes sont $d_j = \text{card}\{i \in \mathbb{Z} : l_i \geq j\}$ ($j = 1, 2, \dots, l_1$; $l = l_1$: longueur du diagramme; $d = d_1$: hauteur du diagramme; $\sum l_i = \sum d_j = r$). Un tableau de Young t associé à un diagramme de Young est tout simplement une numérotation des cases par les entiers $1, 2, \dots, r$. Pour un tableau de Young fixé t on introduit un idempotent e_t de l'algèbre $\mathbb{C}.S_r$:

$$e_t = \frac{v(l)}{r!} \cdot \left(\sum_{q \in Q_t} \text{sgn}(q) \cdot q \right) \cdot \left(\sum_{p \in P_t} p \right)$$

avec $v(l) = \frac{r!}{d!} \cdot \prod_{i=1}^d \frac{i!}{(l_i + d - i)!} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq d} \binom{l_i - l_j}{j - i} + 1$ et les sous-groupes

$$\begin{aligned} P_t &= \{p \in S_r : p \text{ préserve chaque ligne de } t\}, \\ Q_t &= \{q \in S_r : q \text{ préserve chaque colonne de } t\}. \end{aligned}$$

Un tableau de Young t est appelé tableau standard si sur chaque ligne et chaque colonne les entiers sont rangés par ordre croissant. Le nombre de tableaux standards associé à un diagramme de Young est égal à $v(l)$. Soit $D(r)$ l'ensemble de tous les tableaux standards à r cases. Alors l'identité $1 \in \mathbb{C}.S_r$ se décompose en

$$1 = \sum_{t \in D(r)} e_t$$

et ces idempotents sont orthogonaux deux à deux.

Le groupe symétrique S_r et donc l'algèbre $\mathbb{C}.S_r$ agit sur $V^{\otimes r}$ par permutations des indices des éléments de tenseurs :

$$p(a_1 \otimes a_2 \dots \otimes a_r) = a_{p^{-1}(1)} \otimes a_{p^{-1}(2)} \dots \otimes a_{p^{-1}(r)}, \quad \forall p \in S_r.$$

Par la décomposition précédente de l'identité on obtient

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{t \in D(r)} \Gamma^t V$$

avec $\Gamma^t V = e_t(V^{\otimes r})$. Si les tableaux de Young t, \tilde{t} correspondent au même diagramme de Young, i.e à la même partition (l) alors $\Gamma^t V$ et $\Gamma^{\tilde{t}} V$ sont isomorphes. D'où

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{(l)} (\Gamma^{(l)} V)^{\oplus v(l)}, \quad \text{où } (l) \text{ décrit les partitions de } r.$$

2.3.2.2.1 Cas du fibré cotangent Considérons une variété algébrique lisse X et son fibré cotangent T_X^* . Pour chaque partition (l) ,

$$\dim H^0(X, \Gamma^{(l)} T_X^*)$$

est un invariant birationnel de la variété X (cf.[24]). Dans le cas de certaines partitions particulières, on a par exemple le genre cotangentiel

$$\dim H^0(X, S^m T_X^*)$$

(cf. [32]) pour $(l) = (m, 0, \dots, 0)$, ou bien le nombre de Hodge h^{0r} pour $(l) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec r fois "1". Malheureusement le calcul de ces invariants et celui de groupes de cohomologie d'ordre supérieur est assez difficile (cf. chapitre 4).

2.3.2.2.2 Coefficient de Littlewood-Richardson Un diagramme de Young *gauche* est le diagramme obtenu en enlevant un diagramme plus petit d'un diagramme de Young qui le contient. Si deux diagrammes correspondent aux partitions $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, on écrit $\mu \subset \lambda$ si le diagramme de μ est contenu dans celui de λ , i.e, $\mu_i \leq \lambda_i$ pour tout i . Le diagramme gauche est noté λ/μ . Un tableau gauche est un diagramme gauche rempli par des entiers positifs qui sont en croissance stricte sur les colonnes et croissance faible sur les lignes. On définit *le mot* d'un tableau gauche t (ou mot en ligne), $w(t)$ (ou $w_r(t)$) en lisant les entiers de t de la gauche vers la droite et de bas en haut. Un mot $w = x_1 x_2 \dots x_r$ est dit de *Yamanouchi* si, quand on le lit en partant de la fin jusqu'à n'importe quelle lettre, la suite x_r, x_{r-1}, \dots, x_s contient au moins autant de "1" que de "2", au moins autant de "2" que de "3", ...

Un tableau gauche t est un tableau gauche de Littlewood-Richardson si son mot $w_r(t)$ est de Yamanouchi. Un tableau gauche a pour contenu $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ si les entiers qu'il contient vérifient : il y a μ_1 "1", μ_2 "2" ..., μ_l "l".

Définition 2.3.13 (cf.[14]) *Le coefficient de Littlewood-Richardson $c'_{\lambda, \mu}$ est le nombre de tableaux gauches de Littlewood-Richardson de forme ν/λ de contenu μ .*

Remarque 2.3.14 [14] *C'est aussi la multiplicité de $\Gamma^\nu V$ dans $\Gamma^\lambda V \otimes \Gamma^\mu V$.*

2.3.2.3 Caractères, fonctions de Schur

On définit le caractère multiplicatif de $T = \{x = \text{diag}(x_1, \dots, x_r)\} \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales inversibles comme étant l'application :

$$\chi_\lambda : T \rightarrow \mathbb{C}^* \\ d(t) \rightarrow t_1^{\lambda_1} \dots t_r^{\lambda_r}.$$

On pose : $X^\lambda = X_1^{\lambda_1} \dots X_r^{\lambda_r}$. On définit le caractère formel $ch(E)(X)$ de E comme étant le polynôme :

$$ch(E)(X) = \sum_{\lambda} (\dim E_\lambda) X^\lambda \text{ où } E_\alpha = \{e \in E : x.e = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} e, \forall x \in T\}.$$

Faisons le lien avec le caractère de Chern.

Proposition 2.3.15 *Soit V un fibré vectoriel de rang r sur X .*

Notons la factorisation formelle :

$$\sum_{i=0}^r c_i(V) x^i = \prod_{i=1}^r (1 + a_i x)$$

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Lambda(r, n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r, \sum \lambda_i = n\}$.

Alors :

$$Ch(\Gamma^\lambda V) = ch(\Gamma^\lambda V)(e^{a_1}, \dots, e^{a_r}),$$

où Ch désigne le caractère de Chern.

Démonstration. Par [18] il suffit de le vérifier pour V somme directe de fibrés en droites.

Soit donc :

$V = \bigoplus_{i=1}^r \xi_i$. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert pour lequel les ξ_i sont

représentés par les cocycles $\{a_{ii}^{k,l}\}$:

$$a_{ii}^{k,l} : U_k \cap U_l \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

V est donc représenté par un cocycle :

$$g_{k,l}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}^{k,l}(x) & & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{rr}^{k,l}(x) \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{11}^{k,l}(x), \dots, a_{rr}^{k,l}(x)) \text{ pour } x \in$$

$U_k \cap U_l$.

Soit :

$\rho : GL(V) \rightarrow GL(\Gamma^\lambda V)$ la représentation associée à λ .

Le fibré vectoriel $\Gamma^\lambda V$ est donc représenté par le cocycle $h_{k,l}(x) = \rho(g_{k,l}(x))$.

Par le fait que $\Gamma^\lambda V$ est somme de ses espaces de poids, $\Gamma^\lambda V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(r,n)} (\Gamma^\lambda V)^\mu$

on obtient :

$h_{k,l}(x) = \rho(g_{k,l}(x)) = \text{diag}\left(\begin{array}{ccc} (a_{11}^{k,l})^{\mu_1} \dots (a_{rr}^{k,l})^{\mu_r} & & \\ & \dots & \\ & & (a_{11}^{k,l})^{\mu_1} \dots (a_{rr}^{k,l})^{\mu_r} \end{array} \right)$, ma-
 trice diagonale par blocs où les blocs sont des matrices diagonales de dimen-
 sion $\dim(\Gamma^\lambda V)^\mu$.

Ainsi :

$$\Gamma^\lambda V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(r,n)} (\dim(\Gamma^\lambda V)^\mu) \xi_1^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \xi_r^{\mu_r}.$$

Donc :

$$Ch(\Gamma^\lambda V) = ch(\Gamma^\lambda V)(e^{a_1}, \dots, e^{a_r}). \quad \square$$

Rappelons maintenant [25] qu'en caractéristique 0, ce qui est notre cas, on a accès au caractère formel :

$ch(\Gamma^\lambda V) = ch_\lambda = s_\lambda$ où s_λ est la fonction de Schur de type λ définie par :

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

où pour $\alpha \in \Lambda(r, n) : a_\alpha(X) = \det[(X_i^{\alpha_j})]$ et $\delta = (r-1, r-2, \dots, 0)$.

Chapitre 3

Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe dans \mathbb{P}^2 : le cas des deux composantes

3.1 La conjecture de Kobayashi

En 1970, S.Kobayashi [21] a posé le problème suivant : Est-il vrai qu'une hypersurface générique de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de grand degré d par rapport à n est hyperbolique et que son complémentaire est hyperbolique pour $d \geq 2n + 1$? Des progrès importants ont été réalisés dans la résolution de ce problème, principalement dans le cas de complémentaires de courbes dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Pour $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, les résultats connus sont que le complémentaire d'une courbe très générique C à k composantes C_1, \dots, C_k de degrés (d_1, \dots, d_k) est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 dans les cas suivants :

- 1) $k \geq 5$ et des degrés quelconques ([1])
- 2) $k = 4$ avec des degrés tels que $\sum d_i \geq 5$ ([15], [11])
- 3) $k = 3$ et $d_1, d_2, d_3 \geq 2$ ([11], [12]), $\sum d_i \geq 5$ ([10] et [34])
- 4) $k = 1$ et $d_1 \geq 15$ ([34], [7], [13]).

Les travaux de Dethloff-Schumacher-Wong reposent sur la théorie de Nevanlinna. Les travaux de Y.T. Siu et S.K. Yeung utilisent une construction explicite de différentielles de 2-jets et aboutissent à une borne élevée du degré $d \geq 5.10^{13}$. J. El Goul obtient une meilleure borne en utilisant les jets de Demailly, dont la construction a été étendue au cas logarithmique par G. Dethloff et S. Lu.

Dans ce chapitre nous étudions le cas $k = 2$. On suit la même stratégie que dans [13] avec l'utilisation des jets logarithmiques.

3.2 Énoncé du résultat principal

Théorème 3.2.1 *Le complémentaire d'une courbe très générique à deux composantes de degrés $d_1 \leq d_2$ dans \mathbb{P}^2 est hyperbolique pour :*

- 1) $d_1 \geq 5$
- 2) $d_1 = 4$ et $d_2 \geq 7$
- 3) $d_1 = 4$ et $d_2 = 4$
- 4) $d_1 = 3$ et $d_2 \geq 9$
- 5) $d_1 = 2$ et $d_2 \geq 12$

3.3 Les fibrés de jets logarithmiques de Demailly

Soit X une variété lisse complexe avec un diviseur à croisements normaux D . En suivant [19], on définit le faisceau cotangent logarithmique

$$\overline{T}_X^* = T_X^*(\log D)$$

comme le faisceau localement libre engendré par T_X^* et les différentielles logarithmiques $\frac{ds_j}{s_j}$, où les $s_j = 0$ sont les équations locales des composantes irréductibles de D .

Son dual, le fibré tangent logarithmique

$$\overline{T}_X = T_X(-\log D)$$

est le faisceau des germes de champs de vecteurs tangents à D .

Soit $\omega \in H^0(U, T_X^*)$ une section holomorphe au-dessus d'un ouvert $U \subset X$. Pour un germe d'application holomorphe f dans U on définit $f^*\omega = Z(t)dt$. On a alors une application holomorphe :

$$\tilde{\omega} : J_k X|_U \rightarrow \mathbb{C}^k; j_k(f) \rightarrow (Z^{(j)}(0))_{0 \leq j \leq k-1}.$$

On dit qu'une section holomorphe $s \in H^0(U, J_k X)$ est un champ de k-jet logarithmique si l'application $\tilde{\omega} \circ s|_V : V \rightarrow \mathbb{C}^k$ est holomorphe pour tout $\omega \in H^0(V, \overline{T}_X^*)$ et tout ouvert V de U . L'ensemble des champs de k-jets logarithmiques au-dessus des ouverts de X définit un sous-faisceau de $J_k X$ appelé le fibré des k-jets logarithmiques de (X, D) et noté $\overline{J}_k X$.

Par [9], on obtient une généralisation des jets de Demailly dans le cas logarithmique. On définit une variété logarithmique dirigée comme le triplet (X, D, V) où V est un sous-fibré holomorphe de \overline{T}_X de rang r . On lui associe une suite de variétés dirigées définie par récurrence $(\overline{X}_k, D_k, V_k)$ par le procédé suivant : $(\overline{X}_0, D_0, V_0) = (X, D, V)$, $\overline{X}_k = P(V_{k-1})$ avec la projection naturelle $\pi_k : \overline{X}_k \rightarrow \overline{X}_{k-1}$, $D_k = \pi_k^*(D_{k-1})$ et V_k est le sous-fibré de $T_{\overline{X}_k}(-\log D_k)$ défini au point $(x, [v]) \in \overline{X}_k, v \in V_{k-1, x}$ par

$$V_{k, (x, [v])} = \{\xi \in T_{\overline{X}_k, (x, [v])}(-\log D_k); (\pi_k)_*\xi \in \mathbb{C}.v\}.$$

On note $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1)$ le sous-fibré tautologique de $\pi_k^*V_{k-1}$, tel que

$$\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1)_{(x, [v])} = \mathbb{C}.v.$$

Par définition le fibré V_k donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow T_{\overline{X}_k/\overline{X}_{k-1}} \rightarrow V_k \xrightarrow{(\pi_k)^*} \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1) \rightarrow 0.$$

On a la suite exacte d'Euler :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}_k} \rightarrow \pi_k^* V_{k-1} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(1) \rightarrow T_{\overline{X}_k/\overline{X}_{k-1}} \rightarrow 0.$$

De ces suites on obtient que :

$$\text{rang} V_k = \text{rang} V_{k-1} = \dots = \text{rang} V = r, \dim \overline{X}_k = n + k(r-1).$$

On note $\pi_{k,j} = \pi_{j+1} \circ \dots \circ \pi_{k-1} \circ \pi_k : \overline{X}_k \rightarrow \overline{X}_j$. L'injection canonique $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1) \hookrightarrow \pi_k^* V_{k-1}$ et la suite exacte

$$0 \rightarrow T_{\overline{X}_{k-1}/\overline{X}_{k-2}} \rightarrow V_{k-1} \xrightarrow{(\pi_{k-1})^*} \mathcal{O}_{\overline{X}_{k-1}}(-1) \rightarrow 0$$

donnent un morphisme de fibrés en droites :

$$\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1) \xrightarrow{(\pi_{k,k-2})^* \circ (\pi_{k-1})^*} \pi_k^* \mathcal{O}_{\overline{X}_{k-1}}(-1)$$

qui admet la section hyperplane $\Gamma_k := P(T_{\overline{X}_{k-1}/\overline{X}_{k-2}}) \subset \overline{X}_k$ comme diviseur de zéros. On a alors : $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1) = \pi_k^* \mathcal{O}_{\overline{X}_{k-1}}(-1) \otimes \mathcal{O}(-\Gamma_k)$ et en utilisant la notation $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(a_1, a_2) := \pi_k^* \mathcal{O}_{\overline{X}_{k-1}}(a_1) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(a_2)$,

$$\mathcal{O}(\Gamma_k) \simeq \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1, 1)$$

est associé à un diviseur effectif dans \overline{X}_k .

Dans le cas où $V = \overline{T}_X$, soit $f : \Delta_r \rightarrow X \setminus D$ une application non constante tangente à V . Alors f se relève en une application unique $f_{[k]} : \Delta_r \rightarrow \overline{X}_k \setminus D_k$ tangente à V_k . De plus, la dérivée $f'_{[k-1]}$ nous donne une section

$$f'_{[k-1]} : T_{\Delta_r} \rightarrow f_{[k]}^* \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1)$$

A toute section σ de $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(m)$, $m \geq 0$, sur un ouvert quelconque $\pi_{k,0}^{-1}(U)$, $U \subset X \setminus D$, on peut associer un opérateur différentiel holomorphe d'ordre k , Q , agissant sur les k -jets de germes de courbes $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow U$ tangent à V , en posant :

$$Q(f)(t) = \sigma(f_{[k]}(t)) \cdot f'_{[k-1]}(t)^{\otimes m} \in \mathbb{C}.$$

D'après [6] cette correspondance est bijective.

La généralisation aux jets logarithmiques est donnée par [9] :

Proposition 3.3.1 ([9]) Une fonction holomorphe Q sur $\overline{J_k X}/U$ sur un ouvert connexe $U \subset X$ qui satisfait

$$(*) \quad Q(j_k(f \circ \phi)) = \phi'(0)^m Q(j_k(f)), \forall j_k(f) \in J_k X|V, \forall \phi \in \mathbb{G}_k$$

où \mathbb{G}_k est le groupe des germes de k -jets biholomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$, V est un ouvert de $U \setminus D$, définit une section holomorphe de $\mathcal{O}_{\overline{X_k}}(m)$ sur U , et vice versa.

On obtient :

Proposition 3.3.2 ([9]) L'image directe $(\pi_{k,0})_* \mathcal{O}_{\overline{X_k}}(m)$ coïncide avec le faisceau $\mathcal{O}(E_{k,m} \overline{T_X}^*)$ des différentielles de jets logarithmiques, i.e, le faisceau localement libre engendré par tous les opérateurs polynômiaux en les dérivées d'ordre $1, 2, \dots, k$ de f , auxquelles on ajoute celles de la fonction $\log(s_j(f))$ le long de la j -ème composante de D , qui de plus sont invariants par changement de paramétrisation arbitraire : un germe d'opérateur $Q \in E_{k,m} \overline{T_X}^*$ est caractérisé par la condition que, pour tout germe f dans $X \setminus D$ et tout germe ϕ de k -jet biholomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$,

$$Q(f \circ \phi) = \phi'^m Q(f) \circ \phi.$$

Par le lemme d'Ahlfors on obtient :

Théorème 3.3.3 ([9]) Si (X, D) a une métrique de k -jet, i.e une métrique singulière au sens de Demailly sur $\mathcal{O}_{\overline{X_k}}(-1)$ avec une courbure négative (le long de V_k), alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X \setminus D$ est telle que $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset \Sigma_{h_k}$, où Σ_{h_k} représente le lieu singulier de h_k .

Un cas important où le théorème précédent s'applique est celui où pour des entiers $k, m > 0$ et un fibré en droite ample on a des sections non nulles dans

$$H^0(\overline{X_k}, \mathcal{O}_{\overline{X_k}}(m) \otimes (\pi_{k,0})^* A^{-1}) \simeq H^0(X, E_{k,m} \overline{T_X}^* \otimes A^{-1}).$$

En effet, on peut alors construire une métrique de k -jet à courbure négative, singulière sur le lieu de base des sections $Z \subset \overline{X_k}$. On peut donc appliquer le théorème lorsque $\mathcal{O}_{\overline{X_k}}(1)$ est big.

Pour étudier la dégénérescence des courbes entières sur une variété logarithmique de type général, il est important de calculer le lieu de base des sections globales des différentielles de k-jets, i.e

$$\overline{B}_k := \bigcap_{m>0} \overline{B}_{k,m} \subset \overline{X}_k$$

où $\overline{B}_{k,m}$ est le lieu de base de $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(m) \otimes (\pi_{k,0})^* A^{-1}$ pour A diviseur ample arbitraire sur X.

Revenons à la situation qui nous intéresse. Soit $C = C_1 \cup C_2$, une courbe algébrique dans \mathbb{P}^2 à deux composantes, où C_i est une courbe algébrique irréductible et lisse. $C_i = \{P_i = 0\}$ où P_i est un polynôme de degré d_i , $d_1 \leq d_2$, $d = d_1 + d_2$. On supposera que C_1 et C_2 se coupent transversalement. Soit $\overline{X} = \mathbb{P}^2$, $X = \mathbb{P}^2 \setminus C$.

3.4 Utilisation des jets d'ordre 1

3.4.1 Calcul des classes de Chern logarithmiques

En utilisant Riemann-Roch [18], on montre que si (X, D) est une surface logarithmique de type général avec des classes de Chern logarithmiques telles que $\overline{c}_1^2 > \overline{c}_2$ alors il y a beaucoup de différentielles d'ordre 1 i.e des sections de $E_{1,m} \overline{T}_X^* = S^m \overline{T}_X^*$ et le lieu de base \overline{B}_1 est de dimension 2.

Une différence avec le cas d'une seule composante est que les techniques d'ordre 1 permettent de traiter un certain nombre de cas.

La proposition 3.5.4 ci-dessous montre que contrairement au cas d'une composante, ici $H^0(X, S^m \overline{T}_X^*) \neq 0$ pour tout $m > 0$.

Calculons donc les classes de Chern logarithmiques, qui sont par définition les classes de Chern du fibré tangent logarithmique : $\overline{c}_1 := c_1(\overline{T}_X)$, $\overline{c}_2 := c_2(\overline{T}_X)$.

Proposition 3.4.1

$$\overline{c}_1^2 = (d-3)^2, \quad \overline{c}_2 = d^2 - 3d + 3 - d_1 d_2$$

Démonstration. On utilise les formules démontrées dans [31] :

$$\overline{c}_1^2 = \Gamma^2, \quad \text{où } \Gamma = K_{\mathbb{P}^2} + C$$

et

$$\overline{c}_2 = e(X), \quad (\text{la caractéristique d'Euler de } X).$$

On a

$$\Gamma = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-3)$$

donc

$$\overline{c}_1^2 = (d-3)^2.$$

D'autre part :

$$e(X) = e(\overline{X}) - e(C) \text{ avec } e(C) = \sum_{i=1}^2 (2 - 2g(C_i)) - t_{12}$$

où $g(C_i)$ est le genre géométrique de C_i et t_{ij} , le nombre d' intersection $C_i C_j$.

Donc, ici :

$$e(C) = (2 - (d_1 - 1)(d_1 - 2)) + (2 - (d_2 - 1)(d_2 - 2)) - d_1 d_2 = -d_1^2 - d_2^2 + 3(d_1 + d_2) - d_1 d_2.$$

Or :

$$c(T(\mathbb{P}^2)) = (1 + \omega)^3$$

où $\omega = \eta_H \in H^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$ est la classe d'un hyperplan. Donc :

$$e(\mathbb{P}^2) = c_2(\mathbb{P}^2) = 3.$$

Finalement :

$$\overline{c}_2 = e(X) = e(\mathbb{P}^2) - e(C) = 3 - (-d_1^2 - d_2^2 + 3(d_1 + d_2) - d_1 d_2) = d^2 - 3d + 3 - d_1 d_2.$$

□

3.4.2 Premiers résultats d'hyperbolicité

Les techniques d'ordre 1 vont pouvoir être exploitées grâce à la généralisation au cas logarithmique du théorème principal de [26] que l'on trouve dans [13].

On utilise le corollaire 2.4.3 de [13] :

Proposition 3.4.2 ([13]) *Soit (X, D) une surface de type général logarithmique (i.e avec $\overline{K}_X := K_X \otimes \mathcal{O}(D)$ big) telle que ses classes de Chern logarithmiques vérifient $\overline{c}_1^2 > \overline{c}_2$. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X \setminus D$ est dégénérée.*

Comme conséquence on obtient le :

Théorème 3.4.3 *Soit C la réunion de deux courbes lisses C_i , $i = 1, 2$ dans \mathbb{P}^2 de degré d_i tels que $d_1, d_2 \geq 5$ ou $d_1 \geq 4, d_2 \geq 7$. Alors pour de telles configurations très génériques, $\mathbb{P}^2 \setminus C$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 .*

Démonstration.

$$\bar{c}_1^2 - \bar{c}_2 = -3d + 6 + d_1d_2 = (d_1 - 3)(d_2 - 3) - 3.$$

Donc pour $d_1, d_2 \geq 5$ ou $d_1 \geq 4, d_2 \geq 7$ on a $\bar{c}_1^2 > \bar{c}_2$. Soit f une courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus C$.

$$\overline{K_{\mathbb{P}^2}} = K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(C) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d - 3).$$

Donc (\mathbb{P}^2, C) est une surface de type général logarithmique. Ses classes de Chern logarithmiques vérifient $\bar{c}_1^2 > \bar{c}_2$. Donc par la proposition 3.4.2, f est dégénérée et donc, a son image contenue dans une courbe algébrique plane. Or, toute courbe algébrique plane dans \mathbb{P}^2 intersecte une courbe très générique de degré $d \geq 5$ en au moins 3 points ([34]) et alors f est constante et ([16]) $\mathbb{P}^2 \setminus C$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 . \square

Pour obtenir des résultats pour les cas où d_1 est plus petit, il faut passer aux techniques d'ordre 2.

3.5 Utilisation des jets d'ordre 2

Rappelons tout d'abord une définition utile (cf.[13]) :

Définition 3.5.1 *Soit (X, D) une variété projective lisse de type logarithmique général. On définit :*

$$\bar{\theta}_k = \inf_{m>0} \bar{\theta}_{k,m} \in \mathbb{R}$$

où $\bar{\theta}_{k,m}$ est le plus petit rationnel $\frac{t}{m}$ tel qu'il y ait une section non nulle dans $H^0(X, E_{k,m} \bar{T}_X^* \otimes O(t\bar{K}_X))$.

L'étude du lieu de base des 2-jets \bar{B}_2 est généralisée au cas logarithmique grâce à [13]. Citons d'abord le théorème 1.2.1 de [13] :

Théorème 3.5.2 *Si (X, D) est une surface algébrique de type général logarithmique et A un fibré en droites ample au-dessus de X , alors :*

$$h^0(X, E_{2,m} \overline{T}_X^* \otimes O(-A)) \geq \frac{m^4}{648} (13\overline{c}_1^2 - 9\overline{c}_2) - O(m^3).$$

En particulier : si $13\overline{c}_1^2 - 9\overline{c}_2 > 0$, $\overline{\theta}_2 < 0$ et $\overline{B}_2 \neq \overline{X}_2$.

Corollaire 3.5.3 *Si $d_1 \geq 3$, $d_2 \geq 3$ ou $d_1 = 2$, $d_2 \geq 5$ alors $\overline{\theta}_2 < 0$ et $\overline{B}_2 \neq \overline{X}_2$.*

Démonstration. $13\overline{c}_1^2 - 9\overline{c}_2 = 9(d_1 - 3)(d_2 - 3) - 27 + 4(d - 3)^2$. On applique directement le théorème 3.5.2. \square

Comme conséquence du calcul ci-dessus toute courbe entière holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow X \setminus D$ a un relevé $f_{[2]} : \mathbb{C} \rightarrow \overline{X}_2$ dont l'image est contenue dans une composante irréductible Z de \overline{B}_2 .

L'étude de la restriction du fibré tautologique à Z ([13]) aboutit au théorème 3.5.9 ci-dessous et montre la nécessité d'avoir de bonnes estimations de $\overline{\theta}_i, i = 1, 2$.

3.5.1 Estimation de $\overline{\theta}_1$

Une grande différence avec le cas d'une seule composante est le résultat :

Proposition 3.5.4 *Soit la surface logarithmique (\mathbb{P}^2, C) avec $C = C_1 \cup C_2$. Alors*

$$\overline{\theta}_1 \leq 0.$$

Démonstration. Soit f la fonction méromorphe définie par : $f = \frac{P_1^{d_2}}{P_2^{d_1}}$. Calculons sa dérivée logarithmique : $\frac{df}{f} = d_2 \frac{dP_1}{P_1} - d_1 \frac{dP_2}{P_2}$. Ainsi $\frac{df}{f} \in H^0(\mathbb{P}^2, \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^*)$. Donc $H^0(\mathbb{P}^2, S^m \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^*) \neq 0$ pour tout m . Ainsi $\overline{\theta}_1 \leq 0$. \square

Passons maintenant au calcul d'une borne inférieure. Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ la surface définie comme intersection complète par les équations :

$$\{Z_3^{d_1} = P_1(Z_0, Z_1, Z_2); Z_4^{d_2} = P_2(Z_0, Z_1, Z_2)\}.$$

X est lisse car $\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial Z_0} & \frac{\partial P_2}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial P_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial P_2}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial P_1}{\partial Z_2} & \frac{\partial P_2}{\partial Z_2} \\ -d_1 Z_3^{d_1-1} & 0 \\ 0 & -d_2 Z_4^{d_2-1} \end{pmatrix}$ est bien de rang 2 : au-dessus d'un

point n'appartenant pas à C c'est clair par les deux dernières composantes, sinon c'est dû au fait que C_1 et C_2 sont lisses et se coupent transversalement.

Ainsi, on a un recouvrement ramifié au dessus de $C = C_1 + C_2$:

$$\pi : X \subset \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^2.$$

On a alors un morphisme injectif en prenant le pullback :

$$H^0(\mathbb{P}^2, S^m \overline{T_{\mathbb{P}^2}^*} \otimes \mathcal{O}(k)) \hookrightarrow H^0(X, S^m T_X^*(\log L) \otimes \mathcal{O}(k))$$

où $L = L_1 + L_2$, L_i est la section hyperplane correspondant à C_i . D'où une injection :

$$H^0(\mathbb{P}^2, S^m \overline{T_{\mathbb{P}^2}^*} \otimes \mathcal{O}(k)) \hookrightarrow H^0(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(2m + k)).$$

Proposition 3.5.5 *Soit la surface logarithmique (\mathbb{P}^2, C) avec $C = C_1 \cup C_2$.*

Alors

$$0 \geq \overline{\theta}_{1,m} \geq \min(0; \frac{-1}{d-3} + \frac{d_1-2}{m(d-3)}) \text{ pour tout } m > 0.$$

Démonstration. On a la suite exacte d'Euler :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus 5} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow 0$$

d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k) \longrightarrow S^m(\mathcal{O}^{\oplus 5}) \otimes \mathcal{O}(k-m) \longrightarrow S^{m-1}(\mathcal{O}^{\oplus 5}) \otimes \mathcal{O}(k-m+1) \longrightarrow 0.$$

Comme $H^q(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(p)) = 0$ pour tout $q = 1, 2, 3$ et $q = 0, p < 0$, on conclue que $H^q(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k)) = 0$ dans tous les cas :

$$q = 0, k \leq 2m - 1, \text{ ou } q = 1, k \leq m - 2, \text{ ou } q = 2, 3, k \in \mathbb{Z}.$$

(Le cas $q = 0$ est obtenu en prenant la restriction des sections à des droites arbitraires dans \mathbb{P}^4). L'intersection complète X nous donne les deux suites exactes :

$$(1) 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-d_2) \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow 0$$

$$(2) \ 0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

On tensorise (2) par $S^m T_{\mathbb{P}^4}^*$ et on regarde la suite exacte longue des groupes de cohomologie. On a donc :

$$H^0(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k)) \simeq H^0(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(k))$$

dès que $H^i(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{I}_X) = 0$ pour $i = 0, 1$.

On tensorise (1) par $S^m T_{\mathbb{P}^4}^*$ et on regarde la suite exacte longue des groupes de cohomologie. Il vient :

$$H^0(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{I}_X) = 0 \text{ pour } k - d_1 \leq 2m - 1 \text{ et } k - d \leq m - 2.$$

$$H^1(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{I}_X) = 0 \text{ pour } k - d_1 \leq m - 2.$$

Finalement, on a :

$$H^0(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k)) \simeq H^0(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(k))$$

pour $k \leq m - 2 + d_1$.

De plus, on a

$$H^1(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(k)) = 0 \text{ pour } k \leq m - 2$$

car $H^2(\mathbb{P}^4, S^m T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{I}_X) = 0$. On a la suite exacte :

$$(3) \ 0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbb{P}^4|X} \rightarrow \mathcal{O}_X(d_1) \oplus \mathcal{O}_X(d_2) \rightarrow 0.$$

On dualise (3) et on passe aux puissances symétriques. On obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow S^{m-1} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes (\mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \mathcal{O}_X(-d_2)) \rightarrow S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow S^m T_X^* \rightarrow 0$$

La suite exacte longue des groupes de cohomologie donne :

$$H^0(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(k)) \simeq H^0(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(k))$$

dès que $H^i(X, S^{m-1} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes (\mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \mathcal{O}_X(-d_2)) \otimes \mathcal{O}(k)) = 0$ pour $i = 0, 1$.

Par ce qui précède :

$$H^i(X, S^{m-1} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes (\mathcal{O}_X(-d_1) \oplus \mathcal{O}_X(-d_2)) \otimes \mathcal{O}(k)) = 0 \text{ pour } i = 0, 1; k \leq m - 3 + d_1.$$

Ainsi :

$$H^0(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(k)) = 0$$

pour $k \leq \min(2m - 1, m - 3 + d_1)$.

Supposons qu'il y ait une section non nulle dans $H^0(\mathbb{P}^2, S^m \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes \mathcal{O}(t \overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$ donc on a une section non nulle dans $H^0(X, S^m \overline{T}_X^* \otimes \mathcal{O}(2m + t(d-3)))$. Donc : $2m + t(d-3) \geq \min(2m, m-2+d_1)$, donc : $\frac{t}{m} \geq \min(0, \frac{-1+(d_1-2)/m}{d-3})$. \square

Il y a donc deux situations :

i) soit $\overline{\theta}_1 < 0$: les techniques d'ordre 1 suffisent car alors on a un feuilletage \mathcal{F} sur une surface $\tilde{X} \subset X_1$ et on applique le théorème 2.4.2 de [13] pour conclure à la dégénérescence des courbes entières.

ii) soit $\overline{\theta}_1 = 0$: on a alors besoin des techniques d'ordre 2.

On suppose donc maintenant : $\overline{\theta}_1 = 0$.

3.5.2 Estimation de $\overline{\theta}_2$

Pour l'estimation de $\overline{\theta}_2$ on distingue le cas des différentielles de 2-jets de grand degré m des différentielles de 2-jets de petit degré. Pour les grands degrés on obtient la :

Proposition 3.5.6 *Supposons que le lieu de base des 2-jets, \overline{B}_2 , associé à $(X, D) = (\mathbb{P}^2, C)$ est de la forme $Z_\sigma = Z_0 \cup \Gamma_2$, où Z_σ est le lieu des zéros d'une section $\sigma \in H^0(\overline{X}_2, \mathcal{O}_{\overline{X}_2}(m_0) \otimes \mathcal{O}(t_0 \overline{K}_X))$, $t_0 < 0$ et Z_0 une section irréductible.*

Pour $m_0 \geq 4$ on a l'estimation

$$\overline{\theta}_{2, m_0} \geq -\frac{1}{4}.$$

Démonstration. Supposons que le lieu de base des 2-jets, \overline{B}_2 , associé à $(X, D) = (\mathbb{P}^2, C)$ est de la forme $Z_\sigma = Z_0 \cup \Gamma_2$, où Z_σ le lieu des zéros d'une section $\sigma \in H^0(\overline{X}_2, \mathcal{O}_{\overline{X}_2}(m_0) \otimes \mathcal{O}(t_0 \overline{K}_X))$, $t_0 < 0$. σ peut être considérée comme une section du fibré $E_{2, m_0} \overline{T}_X^* \otimes \mathcal{O}(t_0 \overline{K}_X)$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow S^{m_0} \overline{T}_X^* \longrightarrow E_{2, m_0} \overline{T}_X^* \xrightarrow{\Phi} E_{2, m_0-3} \overline{T}_X^* \otimes \mathcal{O}(\overline{K}_X) \longrightarrow 0$$

On multiplie tous les termes de la suite par $\mathcal{O}(t_0 \overline{K}_X)$ et on considère la suite exacte longue associée en cohomologie.

Comme $t_0 < 0$: $H^0(X, S^{m_0} \overline{T}_X^* \otimes \mathcal{O}(t_0 \overline{K}_X)) = 0$ puisque $\overline{\theta}_1 = 0$. On obtient donc une injection :

$$H^0(X, E_{2, m_0} \overline{T}_X^* \otimes \mathcal{O}(t_0 \overline{K}_X)) \hookrightarrow H^0(X, E_{2, m_0-3} \overline{T}_X^* \otimes \mathcal{O}((t_0 + 1) \overline{K}_X)).$$

Par hypothèse sur \bar{B}_2 , on a $t_0 + 1 \geq 0$. Donc $\frac{t_0}{m_0} \geq \frac{-1}{m_0}$. Ainsi, pour $m_0 \geq 4$ on a : $\bar{\theta}_{2,m_0} \geq -\frac{1}{4}$. \square

Pour les petits degrés ($m = 3$) on obtient la :

Proposition 3.5.7 *Pour $1 \leq d_1 < d_2 \leq 14$, $4 \leq d, d_1 \leq 5$, on a pour la surface logarithmique (\mathbb{P}^2, C) avec $C = C_1 \cup C_2$ générique :*

$$\bar{\theta}_{2,3} \geq \frac{-8}{3(d-3)}.$$

Démonstration. Considérons le système linéaire de courbes :

$$C_\lambda = \{\lambda_0 s_0(z) + \lambda_1 s_1(z) + \lambda_2 s_2(z) = 0\},$$

où $s_0 = z_0^{d_2}$, $s_1 = z_1^{d_2}$, $s_2 = z_2^{d_2-d_1}(\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1})$, $\varepsilon_i \in \mathbb{C}^*$.

On résout le système linéaire :

$$\sum_{0 \leq k \leq 2} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial s_l}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 s_l}{\partial z_i \partial z_j}, 0 \leq i, j, l \leq 3.$$

On obtient une connexion méromorphe $\nabla = \nabla(\Gamma_{ij}^k)$ sur \mathbb{P}^2 telle que C_λ soit totalement géodésique pour tout λ . Soit :

$$C_1 = \{P_1 = \varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1} = 0\},$$

$$C_2 = \{P_2 = z_0^{d_2} + z_1^{d_2} + z_2^{d_2-d_1}(\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1}) = 0\}.$$

Montrons que l'on peut choisir C_2 lisse coupant C_1 transversalement. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial z_0} &= d_2 z_0^{d_2-1} + \varepsilon_0 z_2^{d_2-d_1} d_1 z_0^{d_1-1}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial z_1} &= d_2 z_1^{d_2-1} + \varepsilon_0 z_2^{d_2-d_1} d_1 z_1^{d_1-1}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial z_2} &= d_2 z_2^{d_2-1} + (\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1})(d_2 - d_1) z_2^{d_2-d_1-1}. \end{aligned}$$

Cherchons les points singuliers.

Si $z_2 = 0$ alors $z_0 = z_1 = 0$ ce qui est impossible.

Si $z_2 = 1$, $z_1 = 0$ alors $z_0 \neq 0$ et on est amené à résoudre :

$$\begin{cases} d_2 z_0^{d_2-d_1} + \varepsilon_0 d_1 = 0 \\ d_2 + \varepsilon_0 z_0^{d_1} (d_2 - d_1) = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\left(-\frac{\varepsilon_0 d_1}{d_2}\right)^{\frac{1}{d_2-d_1}} = \left(\frac{-d_2}{\varepsilon_0(d_2-d_1)}\right)^{\frac{1}{d_1}}$$

et donc :

$$\varepsilon_0^{\frac{d_2}{d_2-d_1}} = \left(\frac{-d_2}{d_2-d_1}\right)\left(-\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{d_1}{d_2-d_1}}.$$

Par symétrie entre z_0 et z_1 :

Si $z_2 = 1$, $z_0 = 0$ alors $z_1 \neq 0$ et :

$$\varepsilon_1^{\frac{d_2}{d_2-d_1}} = \left(\frac{-d_2}{d_2-d_1}\right)\left(-\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{d_1}{d_2-d_1}}.$$

Si $z_2 = 1$, $z_0 \neq 0$, $z_1 \neq 0$ alors on résout :

$$\begin{cases} d_2 z_0^{d_2-d_1} + \varepsilon_0 d_1 = 0 \\ d_2 z_1^{d_2-d_1} + \varepsilon_0 d_1 = 0 \\ d_2 + (d_2 - d_1)(\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1}) = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\varepsilon_1^{\frac{d_2}{d_2-d_1}} + \varepsilon_0^{\frac{d_2}{d_2-d_1}} = \left(\frac{-d_2}{d_2-d_1}\right)\left(-\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{d_1}{d_2-d_1}}.$$

Pour s'assurer de la lissité il suffit donc de choisir ε_1 et ε_2 tels que :

(1) $\varepsilon_0^{\frac{d_2}{d_2-d_1}}$, $\varepsilon_1^{\frac{d_2}{d_2-d_1}}$ et $\varepsilon_0^{\frac{d_2}{d_2-d_1}} + \varepsilon_1^{\frac{d_2}{d_2-d_1}}$ soient différents de $\left(\frac{-d_2}{d_2-d_1}\right)\left(-\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{d_1}{d_2-d_1}}$.

Trouvons maintenant les conditions pour que C_1 et C_2 se coupent transversalement. On a :

$$C_1 \cap C_2 = \{z_0^{d_2} + z_1^{d_2} = 0\} \cap \{\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1} = 0\}.$$

De plus, $\{z_0^{d_2} + z_1^{d_2} = 0\} = \bigcup_{\omega^{d_2} = -1} \{z_0 - \omega z_1 = 0\}$. Donc il suffit de choisir ε_1 et ε_2 tels que :

$$(2) \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \neq -\omega^{d_1} \text{ si } \omega^{d_2} = -1.$$

En effet, alors chaque droite $\{z_0 - \omega z_1 = 0\}$ coupe $\{\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1} = 0\}$ en d_1 points distincts. Au total, on a $\text{card}(C_1 \cap C_2) = d_2 d_1$ car deux droites distinctes se coupent en $[0 : 0 : 1]$ qui n'est pas sur $\{\varepsilon_0 z_0^{d_1} + \varepsilon_1 z_1^{d_1} + z_2^{d_1} = 0\}$. Donc par Bezout, C_1 et C_2 se coupent transversalement.

Par (1) et (2), on voit donc qu'il est possible de choisir C_2 lisse coupant C_1 transversalement.

Le diviseur des pôles de ∇ est donné par :

$$B = \{z_0 z_1 z_2 ((d_2 - d_1)\varepsilon_0 z_0^{d_1} + (d_2 - d_1)\varepsilon_1 z_1^{d_1} + d_2 z_2^{d_1}) = 0\}.$$

∇ peut être considérée comme une connexion méromorphe sur $\overline{T}_{\mathbb{P}^2}$ par rapport à la structure logarithmique donnée par $C_1 + C_2$. Donc en prenant l'opérateur wronskien : $W_{\nabla}(f) = f' \wedge f_{\nabla}''$ où $f_{\nabla}'' = \nabla_{f'} f'$, on obtient une section :

$$P_1 \in H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3}\overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(-\overline{K}_{\mathbb{P}^2}) \otimes O(B)) = H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3}\overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t_1\overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$$

où $t_1 = \frac{d_1+3}{d-3} - 1 = \frac{-d_2+6}{d-3}$.

On démontre que :

$$H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3}\overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t\overline{K}_{\mathbb{P}^2})) = 0$$

pour $t < \frac{-8}{d-3}$.

Supposons le contraire :

soit $P_2 \in H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3}\overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t_2\overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$ pour $t_2 < -\frac{8}{d-3}$.

Soit $\beta_i = \Phi(P_i)$. On a : $\beta_1 P_2 - \beta_2 P_1 \in H^0(\mathbb{P}^2, S^3\overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O((1+t_1+t_2)\overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$. $1+t_1+t_2 < \frac{d_1-5}{d-3}$ donc $\beta_1 P_2 - \beta_2 P_1 = 0$ car $\overline{\theta}_{1,3} \geq \frac{d_1-5}{3(d-3)}$ par 3.5.5. (On ne peut pas affirmer que $\overline{\theta}_{1,3} = 0$ car on a choisi une configuration particulière qui peut se trouver en dehors du cas générique $\overline{\theta}_1 = 0$, d'où la nécessité d'avoir une estimation globale de $\overline{\theta}_{1,m}$).

Donc $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{P_2}{P_1}$. Comme $\frac{P_1}{\beta_1}$ est irréductible, on conclut :

$\frac{\beta_2}{\beta_1} \in H^0(\mathbb{P}^2, O((t_2 - t_1)\overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$ doit être holomorphe, ce qui implique $t_2 \geq t_1$.

D'où une contradiction car $t_2 < \frac{-8}{d-3} \leq \frac{-d_2+6}{d-3}$.

Par la semicontinuité de la cohomologie :

$$H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3}\overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t\overline{K}_{\mathbb{P}^2})) = 0$$

pour $t < -\frac{8}{d-3}$ et $C = C_1 \cup C_2$ générique. D'où l'estimation. \square

On peut améliorer le résultat de 3.4.3 pour $d_1 = 4$ grâce à la proposition :

Proposition 3.5.8 *Pour $d_1 = d_2 = 4$, on a pour la surface logarithmique (\mathbb{P}^2, C) avec $C = C_1 \cup C_2$ générique :*

$$\overline{\theta}_{2,3} \geq -\frac{4}{15}.$$

Démonstration. Considérons le système linéaire de courbes :

$$C_{\lambda} = \{\lambda_0 s_0(z) + \lambda_1 s_1(z) + \lambda_2 s_2(z) = 0\},$$

où $s_i = z_i^4$, $i = 0, 1, 2$.

On résout le système linéaire :

$$\sum_{0 \leq k \leq 2} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial s_l}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 s_l}{\partial z_i \partial z_j}, 0 \leq i, j, l \leq 3.$$

On obtient une connexion méromorphe $\nabla = \nabla(\Gamma_{ij}^k)$ sur \mathbb{P}^2 telle que C_λ soit totalement géodésique pour tout λ . On choisit C_1, C_2 dans le système linéaire de courbes C_λ . Pour avoir $C_1 = \{\lambda_0^1 s_0(z) + \lambda_1^1 s_1(z) + \lambda_2^1 s_2(z) = 0\}$ et $C_2 = \{\lambda_0^2 s_0(z) + \lambda_1^2 s_1(z) + \lambda_2^2 s_2(z) = 0\}$ se coupant transversalement il suffit de choisir les coefficients tels que les mineurs de $\begin{pmatrix} \lambda_0^1 & \lambda_0^2 \\ \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$ soient tous non nuls.

Le diviseur des pôles de ∇ est donné par :

$$B = \{z_0 z_1 z_2 = 0\}.$$

∇ peut être considérée comme une connexion méromorphe sur $\overline{T}_{\mathbb{P}^2}$ par rapport à la structure logarithmique donnée par $C_1 + C_2$.

Donc en prenant l'opérateur wronskien $W_\nabla(f) = f' \wedge f''_\nabla$ où $f''_\nabla = \nabla_{f'} f'$, on obtient une section

$$P_1 \in H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3} \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(-\overline{K}_{\mathbb{P}^2}) \otimes O(B)) = H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3} \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t_1 \overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$$

où $t_1 = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5}$.

On démontre que

$$H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3} \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t \overline{K}_{\mathbb{P}^2})) = 0$$

pour $t < -\frac{4}{5}$.

Supposons le contraire :

soit $P_2 \in H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3} \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t_2 \overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$ pour $t_2 < -\frac{4}{5}$.

Soit $\beta_i = \Phi(P_i)$. On a : $\beta_1 P_2 - \beta_2 P_1 \in H^0(\mathbb{P}^2, S^3 \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O((1 + t_1 + t_2) \overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$.

$1 + t_1 + t_2 < \frac{-1}{5}$ donc $\beta_1 P_2 - \beta_2 P_1 = 0$ car $\overline{\theta}_{1,3} \geq \frac{-1}{15}$ par 3.5.5.

Donc $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{P_2}{P_1}$. Comme $\frac{P_2}{P_1}$ est irréductible, on conclut :

$\frac{\beta_2}{\beta_1} \in H^0(\mathbb{P}^2, O((t_2 - t_1) \overline{K}_{\mathbb{P}^2}))$ doit être holomorphe, ce qui implique $t_2 \geq t_1$. D'où une contradiction.

Par la semicontinuité de la cohomologie :

$$H^0(\mathbb{P}^2, E_{2,3} \overline{T}_{\mathbb{P}^2}^* \otimes O(t \overline{K}_{\mathbb{P}^2})) = 0$$

pour $t < -\frac{4}{5}$ pour $C = C_1 \cup C_2$ générique. D'où l'estimation. \square

3.5.3 Applications

On utilise les théorèmes 1.3.3 et 2.4.2 de [13] :

Théorème 3.5.9 (1.3.3 [13]) *Soit (X, D) une surface de type général logarithmique telle que $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Supposons que $\bar{\theta}_2 < 0$ et les classes de Chern logarithmiques satisfassent :*

$$(13 + 12\bar{\theta}_2)\bar{c}_1^2 > 9\bar{c}_2.$$

Alors toute courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow X \setminus D$ est une feuille d'un multi-feuilletage algébrique sur X .

Corollaire 3.5.10 *Toute courbe entière dans le complémentaire de $C = C_1 \cup C_2$ générique, avec $d_1 = 3, d_2 \geq 9$ ou $d_1 = 2, d_2 \geq 12$ est une feuille d'un multi-feuilletage sur \mathbb{P}^2 .*

Démonstration.

$$\begin{aligned} (13 + 12\bar{\theta}_{2,3})\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 &\geq 9(d_1 - 3)(d_2 - 3) - 27 + 4(d - 3)^2 - 32(d - 3) \\ &\geq 9(d_1 - 3)(d_2 - 3) - 27 + 4(d - 3)(d - 11). \end{aligned}$$

Pour $d_1 = 3$:

$$(13 + 12\bar{\theta}_{2,3})\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 \geq 4d_2(d_2 - 8) - 27 > 0 \text{ pour } d_2 \geq 9.$$

Or,

$$\bar{\theta}_2 \geq \min\left(\frac{-1}{4}, \bar{\theta}_{2,3}\right)$$

et

$$\left(13 - \frac{12}{4}\right)\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 = 10\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 = d_2^2 - 27$$

donc pour $d_2 \geq 9$

$$(13 + 12\bar{\theta}_2)\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 > 0.$$

Pour $d_1 = 2$:

$$(13 + 12\bar{\theta}_{2,3})\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 \geq 4(d_2 - 1)(d_2 - 9) - 9(d_2 - 3) - 27 = 4d_2^2 - 49d_2 + 36 > 0$$

pour $d_2 \geq 12$.

$$10\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 = d_2^2 - 11d_2 + 1$$

donc par le même raisonnement que précédemment :

pour $d_2 \geq 12$,

$$(13 + 12\bar{\theta}_2)\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 > 0.$$

On applique le théorème 3.5.9. □

Corollaire 3.5.11 *Toute courbe entière dans le complémentaire de $C = C_1 \cup C_2$ générique, avec $d_1 = d_2 = 4$ est une feuille d'un multi-feuilletage sur \mathbb{P}^2 .*

Démonstration.

$$\begin{aligned} (13 + 12\bar{\theta}_2)\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 &\geq \left(13 - \frac{12 \times 4}{15}\right)\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 = \frac{49}{5}\bar{c}_1^2 - 9\bar{c}_2 \\ &= 49 \times 5 - 9 \times (8^2 - 3 \times 8 + 3 - 4^2) = 245 - 243 = 2. \end{aligned}$$

Donc pour $d_1 = d_2 = 4$ on a

$$(13 + 12\bar{\theta}_2)\bar{c}_1^2 > 9\bar{c}_2.$$

On applique le théorème 3.5.9. □

Théorème 3.5.12 (2.4.2 [13]) *Soit X une surface avec un feuilletage \mathcal{F} et un diviseur D telle que (X, D) soit de type général logarithmique. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X \setminus D$ contenue dans une feuille de \mathcal{F} est dégénérée.*

Théorème 3.5.13 *Soit C la réunion de deux courbes lisses C_i , $i = 1, 2$ dans \mathbb{P}^2 de degré d_i . Alors pour les configurations $d_1 = d_2 = 4$, $d_1 = 3, d_2 \geq 9$ ou $d_1 = 2, d_2 \geq 12$ très génériques, $\mathbb{P}^2 \setminus C$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 .*

Démonstration. Soit f une courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus C$. Par les corollaires 3.5.10 ou 3.5.11, f est une feuille d'un multi-feuilletage sur \mathbb{P}^2 .

Ainsi, il existe un revêtement ([13]) $Y \subset \bar{X}_1$ sur \mathbb{P}^2 muni d'un feuilletage \mathcal{F} tel que $f_{[1]}(\mathbb{C}) \subset Y \setminus \tilde{C}$ et telle que $f_{[2]}(\mathbb{C})$ est une feuille de \mathcal{F} définie par $T_Y \cap V_1$.

Par le théorème 3.5.12, $f_{[1]}$ est dégénérée dans Y , donc f l'est aussi. On termine la démonstration par les mêmes arguments qu'en 3.4.3. pour $d_2 \geq 5$. Pour $d_1 = d_2 = 4$, on peut conclure par exemple grâce au théorème 1.10 de [37] qui montre que $C_1 + C_2$ rencontre une courbe algébrique de genre 0 ou 1 en au moins $d - 4$ points distincts, donc ici 4 points distincts. f est donc constante et on conclut que $\mathbb{P}^2 \setminus C$ est hyperbolique et hyperboliquement plongé dans \mathbb{P}^2 ([16]). □

Chapitre 4

Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3

Soit X une variété complexe de dimension n et $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ un germe d'application holomorphe.

4.1 Etude algébrique

On définit : $A_k = \bigoplus_m (E_{k,m} T_X^*)_x$ l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$.

Soit G'_k le groupe des reparamétrisations $\phi(t) = t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + O(t^{k+1})$ tangentes à l'identité. G'_k agit sur $(f', f'', \dots, f^{(k)})$ par action unipotente. Par exemple pour $k = 3$, on a l'action :

$$(f \circ \phi)' = f'; (f \circ \phi)'' = f'' + 2b_2 f'; (f \circ \phi)''' = f''' + 6b_2 f'' + 6b_3 f'$$

Donc une représentation :

$$G'_3 \hookrightarrow U(3) : \phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer A_k revient donc à déterminer $(\mathbb{C}[(f'), (f''), \dots, (f^{(k)})])^{G'_k}$.

En dimension 2, on a $G'_2 = U(2)$. Les invariants par le groupe unipotent sont bien connus (cf.[29]). Ainsi :

$$\begin{aligned} (i) \quad A_1 &= \mathbb{C}[f'_1, f'_2], \\ (ii) \quad A_2 &= \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}] \text{ où } w_{12} = f'_1 f''_2 - f''_1 f'_2. \end{aligned}$$

On a la propriété suivante :

Proposition 4.1.1

$$A_n = A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}]$$

Démonstration. Il suffit de prouver $A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}] \subset A_n$. Soit $F \in A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}] : F = \frac{P}{(f'_1)^l} = \frac{Q}{(f'_2)^m}$. Ainsi : $(f'_2)^m P = (f'_1)^l Q$ et $(f'_1)^l$ divise P , donc $F \in \mathbb{C}[f', f'', f''']$. De plus F est invariant par reparamétrisation donc $F \in A_n$. \square

4.1.1 Etude de la dimension 3

Nous étudions maintenant la dimension 3 :

$$G'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset U(3).$$

Faisons le lien avec la théorie classique des invariants (partie 3 des préliminaires).

$$G'_3 \text{ agit sur } \begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{pmatrix} \text{ par multiplication à gauche.}$$

Considérons l'action de GL_3 :

$$A \in GL_3, A \cdot \begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Cette action induit une action sur les polynômes $P(f', f'', f''')$ qui commute avec celle de G'_3 . Ainsi on a une action de GL_3 qui laisse A_3 invariant.

Nous cherchons à déterminer les invariants par G'_3 du système de vecteurs

$$(x_1, x_2, x_3) \text{ où } x_i = \begin{pmatrix} f'_i \\ f''_i \\ f'''_i \end{pmatrix}.$$

Appliquons le théorème 2.3.3 des préliminaires à notre situation. On a bien $G'_3 \subset SL_3$. Il nous suffit donc de connaître un système complet de G'_3 -invariants pour deux vecteurs i.e en dimension 2. Cela nous est donné par le théorème annoncé par J.P. Demailly dont nous donnons ici une démonstration :

Théorème 4.1.2 (*Demailly*) *En dimension 2 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^1, w_{12}^2][w_{12}]$$

$$\text{où } w_{12}^i = (f'_i)^4 d\left(\frac{w_{12}}{(f'_i)^3}\right) = f'_i(f'_1 f'_2''' - f_1''' f'_2) - 3f'_i(f'_1 f'_2'' - f_1'' f'_2)$$

$$\text{et } (\mathcal{R}) : 3(w_{12})^2 = f_2' w_{12}^1 - f_1' w_{12}^2.$$

La démonstration nécessite deux lemmes :

Lemme 4.1.3 w_{12} est quadratique sur $\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1]$.

Démonstration. Par (\mathcal{R}) , w_{12} est algébrique sur $\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1]$ de degré 2 ou 1.

Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q tels que :

$$P(f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1)w_{12} = Q(f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1).$$

Par (\mathcal{R}) on remplace w_{12}^2 par $\frac{f'_2 w_{12}^1 - 3(w_{12}^1)^2}{f'_1}$ dans P et Q .

Ainsi on obtient une égalité, après multiplication par $(f'_1)^m$ avec m suffisamment grand, entre deux polynômes en les variables $\{f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1\}$ qui sont algébriquement libres. Mais l'un des polynômes a toutes ses puissances en w_{12} impaires et l'autre, paires ; ce qui implique $P = Q = 0$.

Ainsi le degré de w_{12} est 2. □

Lemme 4.1.4 $\{f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1\}$ sont algébriquement libres.

Démonstration. w_{12} est algébrique sur $\mathbb{C}(f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1)$ donc

$$\begin{aligned} \deg.tr(\mathbb{C}(f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1)) &= \deg.tr(\mathbb{C}(f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1, w_{12})) \\ &\geq \deg.tr(\mathbb{C}(f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1)) = 4. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème 4.1.2 :

Démonstration. D'après la proposition 4.1.1 on est ramené à déterminer $A_3[f_1'^{-1}] \cap A_3[f_2'^{-1}]$. On considère la reparamétrisation $\phi = f_1'^{-1}$ sur la carte ($f_1' \neq 0$). Soit $P \in A_3$. Donc $P(f \circ \phi) = (\phi')^m P(f) \circ \phi$. Remarquons maintenant par le calcul :

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1'^{-1})' &= \frac{f_2'}{f_1'} \circ f_1'^{-1}, \\ (f_2 \circ f_1'^{-1})'' &= \frac{w_{12}}{(f_1')^3} \circ f_1'^{-1}, \\ (f_2 \circ f_1'^{-1})''' &= \frac{w_{12}^1}{(f_1')^5} \circ f_1'^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $P \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}]$ et donc $A_3[f_1'^{-1}] = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}]$. Par symétrie : $A_3[f_2'^{-1}] = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}]$.

L'inclusion

$$\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1, w_{12}^2] \subset \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}]$$

est immédiate puisque par (\mathcal{R}) :

$$w_{12}^2 \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \text{ et } w_{12}^1 \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}].$$

Il reste donc à montrer

$$\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}] \subset \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1, w_{12}^2].$$

Soit $F \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^1][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w_{12}^2][f_2'^{-1}]$:

$$F = \frac{P(f'_1; f'_2; w_{12}; w_{12}^1)}{(f'_1)^l} = \frac{Q(f'_1; f'_2; w_{12}; w_{12}^2)}{(f'_2)^m}$$

Par (\mathcal{R}) :

$$\begin{aligned} P(f'_1; f'_2; w_{12}; w_{12}^1) &= P_1(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2)w_{12} + P_2(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2), \\ Q(f'_1; f'_2; w_{12}; w_{12}^2) &= Q_1(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2)w_{12} + Q_2(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} ((f'_2)^m P_1(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2) - (f'_1)^l Q_1(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2))w_{12} \\ + ((f'_2)^m P_2(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2) - (f'_1)^l Q_2(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2)) = 0. \end{aligned}$$

Or w_{12} est quadratique sur $\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1]$ donc :

$$(f'_2)^m P_i(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2) - (f'_1)^l Q_i(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

$\{f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1\}$ sont algébriquement libres donc :

$$P_i(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2) = (f'_1)^l R_i(f'_1; f'_2; w_{12}^1; w_{12}^2).$$

Et le résultat est prouvé. \square

On peut maintenant caractériser les opérateurs différentiels d'ordre 3 en dimension 3.

En notant $u_i = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{pmatrix}$ et en définissant :

$$\begin{aligned} F_1(u_1) &= u_1^1; \\ F_2(u_1, u_2) &= u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1; \\ F_3(u_1, u_2, u_3) &= u_3^1 (u_1^1 u_2^3 - u_1^3 u_2^1) - 3u_3^2 (u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1). \end{aligned}$$

on obtient que l'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ de formes multilinéaires G'_3 -invariantes est un système complet de G'_3 -invariants d'un système de 2 vecteurs.

Par application du théorème 2.3.3 de Popov, on obtient la caractérisation algébrique de l'algèbre A_3 des germes d'opérateurs invariants en dimension 3 :

Théorème 4.1.5 *En dimension 3 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f'_i, w_{ij}, w_{ij}^k, W], 1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq k \leq 3$$

où W désigne le wronskien
$$\begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}.$$

De plus, $\deg.tr(\mathbb{C}(f'_i, w_{ij}, w_{ij}^k, W)) = 7$ et le calcul de l'idéal des relations entre les générateurs est fait en annexe.

Démonstration. Il ne reste qu'à justifier l'assertion sur le degré de transcendance. Mais celle-ci est une conséquence immédiate du théorème 2.2.6 qui identifie $E_{k,m}T_{X,x}^*$ avec les sections de $O_{P_k V}(m)$ au-dessus de $(\pi_{0,k})^{-1}(x)$. \square

Remarque 4.1.6 1) Pour tout k , $G'_k \subset SL_k$, donc par le raisonnement précédent pour déterminer A_k en toute dimension il suffit de déterminer A_k en dimension $k - 1$.

2) On a montré que le groupe $G'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset U(3)$ est un

groupe de Grosshans de GL_3 i.e $\mathbb{C}[GL_3]^{G'_3}$ est une algèbre de type fini. De plus, ce groupe n'est pas régulier i.e normalisé par un tore maximal car :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2\lambda_1^{-1}\lambda_2 & 1 & 0 \\ 6b_3\lambda_1^{-1}\lambda_3 & 6b_2\lambda_2^{-1}\lambda_3 & 1 \end{pmatrix} \notin G'_3.$$

On ne peut donc pas appliquer le résultat de L. Tan [35] sur la conjecture 2.3.7 de Popov-Pommerening cité dans les préliminaires pour montrer que G'_3 est un sous-groupe de Grosshans.

3) Sans l'utilisation du théorème de Popov, la détermination par un calcul "à la main" des générateurs de A_3 semble difficile.

4.2 Applications géométriques

Il s'agit d'étudier le fibré $E_{3,m}T_X^*$ en dimension 3 pour obtenir sa filtration en représentations irréductibles de Schur qui nous permettra, par un calcul

de Riemann-Roch, de calculer sa caractéristique d'Euler. Rappelons que par la section 2.2.3 des préliminaires, $E_{3,m}T_X^*$ est muni d'une filtration dont les termes gradués sont

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+3l_3=m} S^{l_1}T_X^* \otimes S^{l_2}T_X^* \otimes S^{l_3}T_X^* \right)^{G'_3}.$$

D'après la théorie de la représentation, ces termes gradués se décomposent en représentations irréductibles de $Gl(T_X^*)$: les représentations de Schur. La caractérisation algébrique précédente va nous permettre de trouver les représentations irréductibles qui interviennent dans cette décomposition.

On prouve le théorème :

Théorème 4.2.1 *En dimension 3 on a :*

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma; \lambda_i-\lambda_j \geq \gamma, i < j\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* \right)$$

Pour cela, on a besoin de la filtration des 3-jets en dimension 2 :

Théorème 4.2.2 *En dimension 2 on a :*

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2=m-\gamma; \lambda_1-\lambda_2 \geq \gamma; \lambda_2 \geq \gamma\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2)} T_X^* \right)$$

Démonstration. On sait que

$$A_3 = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^1, w_{12}^2][w_{12}]$$

où $w_{12}^i = (f'_i)^4 d\left(\frac{w_{12}}{(f'_i)^3}\right) = f'_i(f'_1 f_2''' - f_1''' f_2') - 3f_1''(f'_1 f_2'' - f_1'' f_2')$

et $3(w_{12})^2 = f_2' w_{12}^1 - f_1' w_{12}^2$.

$A_{3,m}$ est une représentation polynômiale de GL_2 . La théorie de la représentation (proposition 2.3.11 et 2.3.12) nous dit que $A_{3,m}$ est somme directe de représentations irréductibles qui sont déterminées par les vecteurs de plus haut poids.

Rappelons (définition 2.3.10) qu'un vecteur est vecteur de plus haut poids

s'il est invariant sous l'action de $U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ici :

$$V = \{(f'_1)^\alpha (w_{12}^1)^\gamma (w_{12})^\beta / \alpha + 5\gamma + 3\beta = m\}$$

est clairement un ensemble de vecteurs de plus haut poids, de poids $(\alpha + \beta + 2\gamma, \beta + \gamma)$.

On en déduit que chaque représentation $\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2)}$ vérifiant

$$\{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m - \gamma; \lambda_1 - \lambda_2 \geq \gamma; \lambda_2 \geq \gamma\}$$

apparaît une et une seule fois dans les représentations déterminées par cet ensemble de vecteurs de plus haut poids. En effet, soit (λ_1, λ_2) un tel couple alors

$$\{\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - \gamma; \beta = \lambda_2 - \gamma\}$$

et (α, β, γ) sont déterminés de manière unique.

On a donc :

$$Gr^\bullet E_{3,m} T_X^* \supset \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m - \gamma; \lambda_1 - \lambda_2 \geq \gamma; \lambda_2 \geq \gamma\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2)} T_X^* \right).$$

Pour avoir l'égalité il suffit de montrer que l'ensemble V est l'ensemble de tous les vecteurs de plus haut poids, i.e :

$$V = (A_{3,m})^{U(2)}.$$

Soit $P \in (A_{3,m})^{U(2)} : P = P_1 + P_2.w_{12}$, avec $P_i \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^1, w_{12}^2]$.

Soit $u \in U(2) : u.P = u.P_1 + (u.P_2).w_{12}$ car $u.w_{12} = w_{12}$.

Donc $u.P = P \Leftrightarrow u.P_i = P_i$ (car w_{12} est quadratique par le lemme 4.1.3).

Donc pour déterminer $(A_{3,m})^{U(2)}$, il nous suffit de déterminer $\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)}$.

Soit : $u = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2) :$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u.f'_1 &= f'_1; \\ u.f'_2 &= \lambda f'_1 + f'_2; \\ u.w_{12}^1 &= w_{12}^1; \\ u.w_{12}^2 &= w_{12}^2 + \lambda w_{12}^1. \end{aligned}$$

Rappelons que $\{f'_1, f'_2, w_{12}^2, w_{12}^1\}$ sont algébriquement libres par le lemme 4.1.4, donc déterminer $\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)}$ revient à déterminer les invariants du groupe unipotent $U(2)$ qui sont bien connus en théorie classique des invariants (cf.[29] p.87). Donc on a l'égalité :

$$\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)} = \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, f'_2 w_{12}^1 - f'_1 w_{12}^2] = \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, (w_{12}^2)^2].$$

Finalement on obtient l'inclusion :

$$(A_{3,m})^{U(2)} \subset \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, w_{12}^2].$$

Par l'unicité de (α, β, γ) vue précédemment on obtient bien :

$$(A_{3,m})^{U(2)} = V.$$

□

On passe maintenant à la preuve du théorème principal 4.2.1 :

Démonstration. On suit le même schéma que dans la preuve précédente.

Soit

$$V = \{(f'_1)^\alpha (w_{12}^1)^\gamma (w_{12})^\beta W^\delta \mid \alpha + 5\gamma + 3\beta + 6\delta = m\}.$$

V est un ensemble de vecteurs de plus haut poids de poids $(\alpha + \beta + 2\gamma + \delta; \beta + \gamma + \delta; \delta)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifiant :

$$(\mathcal{P}) : \{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma, 0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}.$$

Comme précédemment on obtient que chaque représentation $\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifie (\mathcal{P}) apparaît une et une seule fois dans les représentations déterminées par cet ensemble de vecteurs de plus haut poids. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifiant (\mathcal{P}) .

Alors :

$$\{\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - \gamma; \beta = \lambda_2 - \lambda_3 - \gamma; \delta = \lambda_3\}$$

et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont déterminés de manière unique.

Donc on a l'inclusion :

$$Gr^\bullet E_{3,m} T_X^* \supset \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* \right).$$

Pour avoir l'égalité il suffit à nouveau de montrer que V est l'ensemble de tous les vecteurs de plus haut poids de $A_{3,m}$ i.e : $V = (A_{3,m})^{U(2)}$.

L'idée importante ici est d'utiliser un argument qui apparaît dans la preuve du théorème 2.3.3 de Popov [28] et permet de voir que le résultat obtenu pour la dimension 2 implique le résultat pour la dimension 3.

Si (x_1, x_2, x_3) est un système de vecteurs en position générale tel que

$$\det(x_1, x_2, x_3) = 0$$

alors par l'action de $U(3)$ on se ramène au système $(x_1, x_2, 0)$.

Soit $P \in (A_{3,m})^{U(3)}$, un vecteur de plus haut poids. Montrons que

$$P \in \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, w_{12}, W]$$

par récurrence sur m . Pour $m = 0$, c'est trivial.

Supposons maintenant $(A_{3,p})^{U(3)} \subset \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, w_{12}, W]$ pour $p < m$. Montrons que le résultat est vrai pour m . Considérons P_1 la restriction de P à l'hypersurface $(W = 0)$. Par l'invariance de P_1 sous l'action de $U(3)$ et la remarque précédente montrant que par $U(3)$ on transforme le système (x_1, x_2, x_3) , en position générale, en le système $(x_1, x_2, 0)$, on obtient que P_1 ne dépend que des deux premiers vecteurs i.e P_1 est un vecteur de plus haut poids de dimension 2, donc par le théorème 4.2.2 $P_1 \in \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, w_{12}]$.

$P - P_1$ est un polynôme qui s'annule sur l'hypersurface $(W = 0)$. Par le Nullstellensatz, on obtient que $(P - P_1) \in \sqrt{(W)}$ donc par l'irréductibilité de W on a :

$$P = P_1 + W.P_2.$$

Il est clair que $P_2 \in (A_{3,m-6})^{U(3)}$ donc par hypothèse de récurrence

$$P_2 \in \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, w_{12}, W]$$

et de même pour P .

On en déduit que $(A_{3,m})^{U(3)} \subset \mathbb{C}[f'_1, w_{12}^1, w_{12}, W]$.

Donc $V = (A_{3,m})^{U(3)}$ par l'unicité de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Le théorème est démontré. □

4.3 Calculs de caractéristiques d'Euler

Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d . Grâce aux filtrations obtenues dans la section précédente nous allons pouvoir calculer les différentes caractéristiques d'Euler qui nous intéressent. Les calculs ont été faits sur le logiciel Maple et détaillés dans l'annexe.

4.3.1 Calcul des classes de Chern

Soit $c_i = c_i(T_X)$.

Proposition 4.3.1

$$\begin{aligned} c_1^3 &= (5 - d)^3 d, \\ c_1 c_2 &= d(5 - d)(d^2 - 5d + 10), \\ c_3 &= d(-d^3 + 5d^2 - 10d + 10). \end{aligned}$$

Démonstration. On a la suite exacte du fibré normal :

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbb{P}^4|X} \rightarrow \mathcal{O}_X(d) \rightarrow 0.$$

Donc par définition des classes de Chern :

$$(1 + c_1 + c_2 + c_3)(1 + dh) = (1 + h)^5$$

où : $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$. Donc, par identification on obtient les identités :

$$\begin{aligned} c_1 &= (5 - d)h, \\ c_2 + dc_1h &= 10h^2, \\ c_3 + dc_2h &= 10h^3, \\ h^3 &= d. \end{aligned}$$

d'où les relations annoncées :

$$\begin{aligned} c_1^3 &= (5 - d)^3d, \\ c_3 &= 10d - 10d^2 + d^3(5 - d), \\ c_1c_2 &= (5 - d)10d - d^2(5 - d)^2. \end{aligned}$$

□

4.3.2 Les 1-jets

L'absence de 1-jets définis globalement est bien connue :

Proposition 4.3.2 ([32])

$$H^0(X, S^m T_X^*) = 0 \text{ pour } m \geq 1.$$

Donc les 1-jets ne pourront pas être utilisés.

Remarque 4.3.3 *Un calcul de type Riemann-Roch (cf. annexe) donne :*

$$\chi(X, S^m T_X^*) = \frac{m^5}{120}(-c_1^3 + 2c_1c_2 - c_3) + O(m^4) = \frac{m^5}{120}5d(3d - 7) + O(m^4).$$

4.3.3 Les 2-jets

On a la filtration [6] :

$$Gr^\bullet E_{2,m}T_X^* = \bigoplus_{l_1+2l_2=m} \Gamma^{(l_1,l_2,0)}T_X^*.$$

d'où le calcul :

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \chi(X, Gr^\bullet E_{2,m}T_X^*) = \sum_{l_1+2l_2=m} \chi(X, \Gamma^{(l_1,l_2,0)}T_X^*).$$

Proposition 4.3.4 (cf. annexe)

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \frac{-m^7}{1837080}(89c_1^3 - 141c_1c_2 + 52c_3) + O(m^6)$$

Donc :

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \frac{m^7}{1837080}(-5d(37d^2 - 452d + 919)) + O(m^6)$$

On constate donc la négativité de la caractéristique d'Euler pour d suffisamment grand. En effet, on démontrera la non existence de jets d'ordre 2 globaux sur X dans le théorème 4.4.2 ci-dessous.

Remarque 4.3.5 Pour les jets de Green-Griffiths (cf. annexe) :

$$\chi(X, \mathcal{J}_{2,m}) = \frac{m^8}{238!} \left(\frac{-15}{8}c_1^3 + 3c_1c_2 - \frac{9}{8}c_3 \right) + O(m^7)$$

Donc :

$$\chi(X, \mathcal{J}_{2,m}) = \frac{-15m^8}{837!} (d(51 - 25d + 2d^2) + O(m^7)).$$

4.3.4 Les 3-jets

Grâce à la filtration obtenue précédemment dans le théorème 4.2.1 on peut effectuer un calcul de Riemann-Roch (cf. annexe) :

Proposition 4.3.6

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = -m^9 \left(\frac{43}{1417500000}c_3 + \frac{29233}{40824000000}c_1^3 - \frac{551}{5670000000}c_1c_2 \right) + O(m^8).$$

Donc :

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8)$$

Corollaire 4.3.7 Pour $d \geq 43$, $\chi(X, E_{3,m}T_X^*) \sim \alpha(d)m^9$ avec $\alpha(d) > 0$.

Remarque 4.3.8 Pour les jets de Green-Griffiths on a (cf.annexe)

$$\begin{aligned}\chi(X, \mathcal{J}_{3,m}) &= \frac{-m^{11}}{6^3 \cdot 11!} \left(\frac{575}{216} c_1^3 - \frac{395}{108} c_1 c_2 + \frac{251}{216} c_3 \right) + O(m^{10}) \\ &= \frac{m^{11}}{6^3 \cdot 11! \cdot 216} d(36d^3 - 1980d^2 + 17985d - 34885) + O(m^{10})\end{aligned}$$

Et on a la positivité pour $d \geq 45$.

Cette positivité renforce l'idée plus générale que sur une variété de dimension n , il faut étudier les jets d'ordre n .

4.3.5 Le cas logarithmique

Nous pouvons appliquer les résultats obtenus au cas logarithmique. Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse et irréductible de degré d . On considère la variété logarithmique (\mathbb{P}^3, X) .

4.3.5.1 Calcul des classes de Chern

On pose :

$$c_i = c_i(T_{\mathbb{P}^3}), \bar{c}_i = c_i(\overline{T_{\mathbb{P}^3}}).$$

Le calcul des classes de Chern est un peu plus long que dans le cas compact.

Proposition 4.3.9

$$\begin{aligned}\bar{c}_1^3 &= (4-d)^3, \\ \bar{c}_1 \bar{c}_2 &= (4-d)(d^2 - 4d + 6), \\ \bar{c}_3 &= -d^3 + 4d^2 - 6d + 4.\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première identité il suffit de remarquer que :

$$\bar{c}_1 = -c_1(\overline{K_{\mathbb{P}^3}}) = -c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d-4)).$$

La troisième vient du fait [20] que :

$$\bar{c}_3 = e(\mathbb{P}^3 \setminus X)$$

où e désigne la caractéristique d'Euler.

On a $e(\mathbb{P}^3 \setminus X) = e(\mathbb{P}^3) - e(X)$ et $e(\mathbb{P}^3) = 4$. Calculons $e(X) = c_2(T_X)$. Par la suite exacte

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbb{P}^3|X} \rightarrow \mathcal{O}_X(d) \rightarrow 0$$

on obtient

$$c(T_{\mathbb{P}^3|X}) = c(T_X)c(\mathcal{O}_X(d))$$

donc

$$(1+h)^4 = (1+c_1(T_X)+c_2(T_X)).(1+dh)$$

où $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ et $h^2 = d$. De plus

$$c_1(T_X) = -c_1(K_X) = (4-d)h$$

donc on a l'égalité

$$1+4h+6h^2 = (1+(4-d)h+c_2(T_X)).(1+dh).$$

On a donc l'identité

$$e(X) = c_2(T_X) = 6h^2 - (4-d)dh^2 = d(6+d^2-4d)$$

d'où finalement

$$e(\mathbb{P}^3 \setminus X) = 4 - d(6+d^2-4d).$$

Montrons la deuxième. Rappelons que par Riemann-Roch, si E est un fibré vectoriel de rang e sur \mathbb{P}^3 , avec des classes de Chern notées d_i , alors ([22] p508) :

$$\chi(\mathbb{P}^3, E) = \frac{1}{6}(d_1^3 - 3d_1d_2 + 3d_3) + \frac{1}{4}c_1(d_1^2 - 2d_2) + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)d_1 + \frac{e}{24}c_1c_2.$$

Par Riemann-Roch :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = \frac{1}{6}(-\overline{c_1}^3 + 3\overline{c_1}\overline{c_2} - 3\overline{c_3}) + \frac{1}{4}c_1(\overline{c_1}^2 - 2\overline{c_2}) - \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)\overline{c_1} + \frac{1}{8}c_1c_2.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(\overline{c_1c_2} - c_1\overline{c_2}) = \chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) - \left(\frac{1}{6}(-\overline{c_1}^3 - 3\overline{c_3}) + \frac{1}{4}c_1\overline{c_1}^2 - \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)\overline{c_1} + \frac{1}{8}c_1c_2 \right).$$

Pour déterminer $\overline{c_1c_2}$, il suffit donc de déterminer $\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*})$.

On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow T_{\mathbb{P}^3}^* \rightarrow \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

où la flèche $\phi : \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*} \rightarrow \mathcal{O}_X$ est donnée par :

soit $x \in \mathbb{P}^3, w \in (\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*})_x$. Si $x \notin X : \phi(w) = 0$. Si $x \in X, w = f_1 \frac{dz_1}{z_1} + f_2 dz_2 + f_3 dz_3$, où $(z_1 = 0)$ est une équation locale de $X : \phi(w) = f_1$.

Donc :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \chi(T_{\mathbb{P}^3}^*).$$

Calculons $\chi(T_{\mathbb{P}^3}^*)$:

on a

$$c_1(T_{\mathbb{P}^3}^*) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) = -4\omega$$

où ω est la classe d'un hyperplan, $c_2(T_{\mathbb{P}^3}^*) = 6\omega^2$, $c_3(T_{\mathbb{P}^3}^*) = -4$.

Par Riemann-Roch :

$$\begin{aligned} \chi(T_{\mathbb{P}^3}^*) &= \frac{1}{6}((-4)^3 + 3 \times 4 \times 6 - 3 \times 4) + \frac{1}{4} \times 4 \times (4^2 - 2 \times 6) \\ &\quad + \frac{1}{12}(4^2 + 6) \times (-4) + \frac{1}{8} \times 4 \times 6 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Calculons $\chi(\mathcal{O}_X)$. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-X) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

qui nous donne :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) - \chi(\mathcal{O}(-X)).$$

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = \frac{1}{24}c_1c_2 \text{ et } \chi(\mathcal{O}(-X)) = \frac{-d^3}{6} + d^2 - \frac{22}{12}d + \frac{1}{24}c_1c_2.$$

Donc :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{d^3}{6} - d^2 + \frac{11}{6}d.$$

Finalement :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = \frac{d^3}{6} - d^2 + \frac{11}{6}d - 1.$$

$c_1 = 4\omega = \frac{4}{4-d}\overline{c_1}$. Donc :

$$\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{4}{4-d})\overline{c_1c_2} = \frac{-d}{2(4-d)}\overline{c_1c_2}.$$

Et :

$$\begin{aligned} \overline{c_1c_2} &= \frac{2(d-4)}{d}(\chi(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) - (\frac{1}{6}(-\overline{c_1}^3 - 3\overline{c_3}) + \frac{1}{4}c_1\overline{c_1}^2 - \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)\overline{c_1} + \frac{1}{8}c_1c_2)) \\ &= \frac{2(d-4)}{d}(\frac{d^3}{6} - d^2 + \frac{11}{6}d - 1 - (\frac{1}{6} \times ((d-4)^3 - 3 \times (-d^3 + 4d^2 - 6d + 4)) \\ &\quad + \frac{1}{4} \times 4 \times (4-d)^2 - \frac{1}{12} \times 22 \times (4-d) + 3) \\ &= (4-d)(d^2 - 4d + 6). \end{aligned}$$

□

4.3.5.2 Calcul des caractérisiques d'Euler

Nous montrons d'abord que les filtrations restent les mêmes que dans le cas compact mis-à-part que le fibré tangent est remplacé par le fibré tangent logarithmique. Comme dans le cas compact (cf.[6]), on munit le faisceau $\mathcal{O}(E_{k,m}^{GG}\overline{T_X^*})$ des différentielles de jets logarithmiques (i.e le faisceau localement libre engendré par tous les opérateurs polynômiaux en les dérivées d'ordre $1,2,\dots,k$ de f , auxquelles on ajoute celles de la fonction $\log(s_j(f))$ le long de la j -ème composante de D) d'une filtration dont les termes gradués sont

$$Gr^\bullet E_{k,m}^{GG}\overline{T_X^*} = S^{l_1}\overline{T_X^*} \otimes \dots \otimes S^{l_k}\overline{T_X^*},$$

$l := (l_1, l_2, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifie $l_1 + 2l_2 + \dots + kl_k = m$. Pour le faisceau des différentielles de jets invariants $\mathcal{O}(E_{k,m}\overline{T_X^*})$ (cf. proposition 3.3.2) on obtient une filtration dont les termes gradués sont

$$Gr^\bullet E_{k,m}\overline{T_X^*} = \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=m} S^{l_1}\overline{T_X^*} \otimes \dots \otimes S^{l_k}\overline{T_X^*} \right)^{G'_k}$$

où l'action de G'_k est étendue de $U \setminus D$, où U est un ouvert de X , à U grâce à l'isomorphisme (cf. [9]) $\overline{T_X^*}|_U \rightarrow T_{X,p}^* \times U$, ($p \in U \setminus D$). On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=m} S^{l_1}\overline{T_X^*} \otimes \dots \otimes S^{l_k}\overline{T_X^*} \right)^{G'_k}_{|U \setminus D} & \rightarrow & \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=m} S^{l_1}T_{X,p}^* \otimes \dots \otimes S^{l_k}T_{X,p}^* \right)^{G'_k}_{\times(U \setminus D)} \\ \downarrow Gl(\overline{T_X^*}) & & \downarrow Gl_3 \times id \\ \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=m} S^{l_1}\overline{T_X^*} \otimes \dots \otimes S^{l_k}\overline{T_X^*} \right)^{G'_k}_{|U \setminus D} & \rightarrow & \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+\dots+kl_k=m} S^{l_1}T_{X,p}^* \otimes \dots \otimes S^{l_k}T_{X,p}^* \right)^{G'_k}_{\times(U \setminus D)} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes qui s'étendent à U . L'action de $Gl_3 \times id$ s'étend clairement à U , donc l'action de $Gl(\overline{T_X^*})$, à gauche dans le diagramme aussi. Les représentations irréductibles à droite s'identifient donc avec celles de gauche car les vecteurs de plus haut poids et les poids s'identifient par la commutativité du diagramme. Ainsi on a bien la même décomposition en représentations irréductibles dans le cas logarithmique et dans le cas compact i.e

$$\begin{aligned} Gr^\bullet E_{2,m}\overline{T_X^*} &= \bigoplus_{l_1+2l_2=m} \Gamma^{(l_1, l_2, 0)}\overline{T_X^*}, \\ Gr^\bullet E_{3,m}\overline{T_X^*} &= \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma; \lambda_i-\lambda_j \geq \gamma, i < j\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}\overline{T_X^*} \right). \end{aligned}$$

D'après les calculs dans le cas compact, on obtient les résultats suivants (cf. annexe) :

Pour les 1-jets :

$$\chi(S^m \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = \frac{m^5}{120}(10d - 20) + O(m^4).$$

Pour les 2-jets :

$$\chi(E_{2,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = m^7 \left(\frac{-37}{459270} d^2 + \frac{247}{306180} d - \frac{1}{129} \right) + O(m^6).$$

On obtient à nouveau la positivité pour les 3-jets :

$$\chi(E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = m^9 \left(\frac{389}{81648000000} d^3 - \frac{6913}{34020000000} d^2 + \frac{6299}{4252500000} d - \frac{1513}{63787500} \right) + O(m^8).$$

Corollaire 4.3.10 *Pour $d \geq 34$, $\chi(X, E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \sim \alpha(d)m^9$ avec $\alpha(d) > 0$.*

4.4 Etude de la cohomologie

Nous étudions maintenant les fibrés $\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*$ et leur cohomologie. Pour obtenir l'existence de suffisamment d'opérateurs différentiels, i.e de sections globales des fibrés $E_{k,m} T_X^*$, il est crucial de contrôler les groupes de cohomologie. En dimension 2 le point clé est l'utilisation d'un théorème d'annulation de Bogomolov valable sur les surfaces de type général. En dimension 3, nous allons voir que l'on ne peut espérer un tel théorème d'annulation et que cette étude des groupes de cohomologie semble beaucoup plus difficile. En effet, on a peu de résultats explicites sur leur détermination. Citons tout de même un théorème d'annulation dû à J.-P. Demailly [6] :

Théorème 4.4.1 *Soit X une variété algébrique projective de dimension n , et L un fibré en droites sur X . Supposons que X est de type général est minimal (i.e. K_X est big et nef) et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n, a_1 \geq \dots \geq a_n$. Si l'on a L pseudoeffectif et $|a| = \sum a_j > 0$, ou L big et $|a| \geq 0$, alors*

$$H^0(X, \Gamma^a T_X \otimes L^*) = 0.$$

Malheureusement ce théorème ne nous renseigne que sur le groupe H^3 par la dualité de Serre. Or, ce que nous souhaitons obtenir est un contrôle du H^2 . Nous allons donc présenter dans cette section une approche élémentaire pour traiter ce problème utilisant des outils algébriques (essentiellement les suites exactes), et des outils provenant de l'analyse complexe (théorèmes d'annulation sous hypothèse de positivité des fibrés).

Rappelons la formule :

$$\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* = \Gamma^{(\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 0)} T_X^* \otimes K_X^{\lambda_3}.$$

4.4.1 Les jets d'ordre 2

Montrons tout d'abord la nécessité d'étudier les jets d'ordre 3. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 4.4.2 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface de degré $d \geq 2$, lisse et irréductible. Alors :*

$$H^0(X, E_{2,m}T_X^*) = 0.$$

Autrement dit, il n'y a pas de jets de différentielles d'ordre 2 définis globalement sur X .

Nous allons donner une démonstration de ce résultat, sans faire appel au théorème de Borel-Weil-Bott [8], à l'aide des complexes de Schur qui ne sont pas utilisés dans la preuve d'un théorème plus général de P. Brückmann et H.G. Rackwitz [4] qui permet de montrer aussi ce résultat :

Théorème 4.4.3 *Soit T tableau de Young, d_i le nombre de cases de la colonne i et X une intersection complète de dimension d de \mathbb{P}^n . Alors*

$$H^0(X, \Gamma^T T_X^*) = 0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n-d} d_i < \dim X = d.$$

L'outil fondamental est l'existence de suites exactes. En effet, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbb{P}^4|X} \rightarrow \mathcal{O}_X(d) \rightarrow 0.$$

Donc par dualité :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-d) \rightarrow T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow T_X^* \rightarrow 0.$$

Rappelons la proposition suivante qui donne une résolution de tout fibré de Schur :

Proposition 4.4.4 ([23]) *Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels. Il y a un complexe $C_\mu \rightarrow \Gamma^\mu C \rightarrow 0$, dont le j -ème terme est $C_\mu^j = \bigoplus_{|\nu|=j, \rho} c_{\nu, \rho}^\mu \Gamma^{\nu^*} A \otimes \Gamma^\rho B$ où $c_{\nu, \rho}^\mu$ est le coefficient de Littlewood-Richardson et ν^* désigne la partition conjuguée de ν .*

On applique cette proposition à la suite exacte précédente pour obtenir une résolution de $\Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^*$:

Proposition 4.4.5 *Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$. On a la suite exacte :*

$$\begin{aligned}
(1) \quad & : \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-2d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \\
& \rightarrow \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \oplus \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \\
& \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^* \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Démonstration. Puisque la dimension du fibré $\mathcal{O}_X(-d)$ est 1, ν^* est de la forme $(\lambda, 0, 0)$ donc les seules possibilités pour ν sont : $\nu = (1, 0, 0)$; $\nu = (1, 1, 0)$ puisque $\nu \subset \mu = (b_1, b_2, 0, 0)$.

Reste la détermination des partitions ρ telles que les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{\nu, \rho}^\mu$ soient non nuls. Par la définition 2.3.13, nous devons déterminer les tableaux gauches de Littlewood-Richardson de type μ/ν de contenu ρ . Pour $\nu = (1, 0, 0)$, la croissance faible sur les lignes et stricte sur les colonnes impose que le mot $w(\mu/\nu) = (2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ où il y a b_2 "2" et $(b_1 - 1)$ "1", ou $w(\mu/\nu) = (1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ où il y a b_1 "1" et $(b_2 - 1)$ "2". Pour $\nu = (1, 1, 0)$, la seule possibilité est $w(\mu/\nu) = (2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ avec $(b_2 - 1)$ "2" et $(b_2 - 1)$ "1". Dans tous ces cas une seule partition ρ convient : respectivement $((b_1 - 1), b_2)$; $(b_1, (b_2 - 1))$ et $(b_1 - 1, b_2 - 1)$. De plus il n'y a qu'un seul tableau gauche de Littlewood-Richardson qui convient dans chaque cas, i.e $c_{\nu, \rho}^\mu = 1$. \square

On considère maintenant la suite exacte d'Euler :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus 5} \rightarrow T_{\mathbb{P}^4} \rightarrow 0.$$

On lui applique la proposition 4.4.4 :

Proposition 4.4.6 *Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$. On a la suite exacte :*

$$\begin{aligned}
(2) \quad & : \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(b_1 + b_2 - 2)^{\oplus s(b_1-1, b_2-1)} \rightarrow \mathcal{O}(b_1 + b_2 - 1)^{\oplus (s(b_1-1, b_2) + s(b_1, b_2-1))} \\
& \rightarrow \mathcal{O}(b_1 + b_2)^{\oplus s(b_1, b_2)} \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Où :

$$s(x, y) = (x - y + 1) \frac{(x + 2)}{2} \frac{(x + 3)}{3} \frac{(x + 4)}{4} (y + 1) \frac{(y + 2)}{2} \frac{(y + 3)}{3}.$$

Démonstration. Le complexe de Schur nous donne la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \Gamma^{(b_1-1, b_2-1, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \rightarrow \Gamma^{(b_1-1, b_2, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \oplus \Gamma^{(b_1, b_2-1, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \\ &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)}T_{\mathbb{P}^4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de déterminer $\Gamma^{(a, b, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5})$. Dans la preuve de la proposition 2.3.15, on a montré que, pour V somme directe de fibrés en droites i.e $V = \bigoplus_{i=1}^r \xi_i$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Lambda(r, n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r, \sum \lambda_i = n\}$, on a

$$\Gamma^\lambda V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(r, n)} (\dim(\Gamma^\lambda V)^\mu) \xi_1^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \xi_r^{\mu_r}.$$

Donc, ici :

$$\Gamma^{(a, b, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) = \mathcal{O}(a+b)^{\oplus d}$$

où d est le rang de $\Gamma^{(a, b, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5})$. Le rang des fibrés de Schur est connue (cf.[14]) :

le rang de $\Gamma^\rho E$ est donné par $s_\rho(1, 1, \dots, 1)$ où s_ρ est la fonction de Schur.

On a la propriété ([14]) :

$$s_\rho(1, 1, \dots, 1) = \prod_{i < j} \frac{\rho_i - \rho_{j+j-i}}{j-i}.$$

Donc :

$$d = s(a, b).$$

□

Passons aux applications au niveau de la cohomologie en utilisant le lemme standard :

Lemme 4.4.7 *Soit E un fibré vectoriel sur X .*

a) Supposons que l'on ait une résolution de longueur m $E^\bullet \rightarrow E \rightarrow 0$, et que $H^{q+j}(X, E^j) = 0$ pour tout $j \geq 0$. Alors $H^q(X, E) = 0$.

b) Supposons que l'on ait une filtration de E et notons $Gr^\bullet E$ la somme directe des quotients successifs de la filtration. Si $H^q(X, Gr^\bullet E) = 0$ pour $q \geq 0$ fixé, alors $H^q(X, E) = 0$.

Démonstration. En notant $E^j \xrightarrow{\phi_j} E^{j-1}$, on obtient les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{im } \phi_1 \rightarrow E^0 \rightarrow E \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \text{im } \phi_i \rightarrow E^{i-1} \rightarrow \text{im } \phi_{i-1} \rightarrow 0, \text{ pour } 2 \leq i \leq m-1, \\ 0 &\rightarrow E^m \rightarrow E^{m-1} \rightarrow \text{im } \phi_{m-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

a) découle immédiatement des suites exactes longues de cohomologie.

Soit

$$E \supset E^1 \supset \dots \supset E^p \supset \dots \supset E^m = 0$$

la filtration. On montre par récurrence sur p que $H^q(X, E/E^p) = 0$ grâce à la suite exacte

$$0 \rightarrow E^p/E^{p+1} \rightarrow E/E^{p+1} \rightarrow E/E^p \rightarrow 0.$$

Et b) est montré. □

On obtient la proposition :

Proposition 4.4.8 *Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$.*

- 1) *Si $l - b_1 - b_2 < 0$ alors $H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*
- 2) *Si $l - b_1 - b_2 + 1 < 0$ alors $H^1(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*
- 3) *Si $l - b_1 - b_2 + 2 < 0$ alors $H^2(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*
- 4) *Si $b_1 + b_2 - l + (d - 5) < 0$ alors $H^3(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*

Démonstration. On applique la partie a) du lemme 4.4.7 précédent à la suite exacte (2) :

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } p + b_1 + b_2 < 0, \\ H^1(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0, \\ H^2(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } -3 - b_1 - b_2 - p < 0, \\ H^3(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } -4 - b_1 - b_2 - p < 0, \\ H^4(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } -5 - b_1 - b_2 - p < 0. \end{aligned}$$

Par la dualité de Serre

$$H^q(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = H^{3-q}(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)).$$

Montrer 1) revient à voir pour quelles conditions

$$H^3(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4/X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l) \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l) \\ &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc : $H^3(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0$ pour

$$\begin{aligned} H^3(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^4(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vrai par ce qui précède pour

$$\begin{aligned} -4 - b_1 - b_2 - (d - 5 - l) &< 0, \\ -5 - b_1 - b_2 - (-5 - l) &< 0. \end{aligned}$$

Et 1) est montré.

Montrer 2) revient à voir pour quelles conditions

$$H^2(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4/X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

Ceci est le cas pour

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^3(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié pour

$$\begin{aligned} -3 - b_1 - b_2 - (d - 5 - l) &< 0, \\ -4 - b_1 - b_2 - (-5 - l) &< 0. \end{aligned}$$

Et 2) est montré.

Montrer 3) revient à voir pour quelles conditions

$$H^1(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

Ceci est le cas pour

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^2(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié pour

$$-3 - b_1 - b_2 - (-5 - l) < 0.$$

Et 3) est montré.

Montrer 4) revient à voir pour quelles conditions

$$H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

Ceci est le cas pour

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d-5-l)) &= 0, \\ H^1(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5-l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié pour

$$(d-5-l) + b_1 + b_2 < 0.$$

Et 4) est montré. □

On en déduit donc :

Proposition 4.4.9 *Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$, $d \geq 2$.*

$$H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0 \text{ pour } l - b_1 - b_2 < 0.$$

Démonstration. On applique la partie a) du lemme 4.4.7 à la suite exacte

(1). $H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$ pour

$$\begin{aligned} H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) &= 0, \\ H^1(X, \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4/X}^* \otimes \mathcal{O}(l) \oplus \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) &= 0, \\ H^2(X, \mathcal{O}_X(-2d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié par la proposition 4.4.8 pour

$$\begin{aligned} l - b_1 - b_2 &< 0, \\ l - d - b_1 - b_2 + 2 &< 0, \\ l - 2d - b_1 - b_2 + 4 &< 0. \end{aligned}$$

Et la proposition est montrée. □

On peut maintenant démontrer le théorème annoncé 4.4.2 :

Démonstration. On sait que : $Gr^\bullet E_{2,m} T_X^* = \bigoplus_{\lambda_1+2\lambda_2=m} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, 0)} T_X^*$. On applique la proposition précédente 4.4.9 et la proposition 4.3.2 qui nous donnent $H^0(X, Gr^\bullet E_{2,m} T_X^*) = 0$. Donc, par la partie b) du lemme 4.4.7,

$$H^0(X, E_{2,m} T_X^*) = 0.$$

□

La prochaine section va montrer que nous pouvons aussi utiliser les théorèmes d'annulation classiques.

4.4.2 Les jets d'ordre 3

Faisons tout d'abord quelques rappels. Soit E un fibré vectoriel hermitien de rang r sur une variété complexe compacte X de dimension n . On note par $C_{p,q}^\infty(E)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de type (p, q) sur X à valeurs dans E et par

$$D_E = D'_E + D''_E : C_{p,q}^\infty(E) \rightarrow C_{p+1,q}^\infty(E) \oplus C_{p,q+1}^\infty(E)$$

la connection de Chern de E . Soient (x_1, \dots, x_n) des coordonnées holomorphes sur X et (e_1, \dots, e_n) un repère orthonormal mobile C^∞ de E . Le tenseur de courbure de Chern $c(E)$ est défini par $D_E^2 = c(E) \wedge \bullet$ et peut s'écrire

$$c(E) = \sum_{i,j,\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu} dx_i d\bar{x}_j \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu, \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \lambda, \mu \leq r.$$

Le tenseur de courbure $ic(E)$ est en fait une $(1, 1)$ -forme à valeur dans le fibré $Herm(E, E)$ des endomorphismes hermitiens de E , i.e $c_{ij\lambda\mu} = \bar{c}_{ji\mu\lambda}$; ainsi $ic(E)$ peut être identifié avec une forme hermitienne sur $T_X \otimes E$.

Rappelons qu'un fibré vectoriel E est positif (respectivement semi-positif) au sens de Griffiths si on peut munir E d'une métrique hermitienne telle qu'en tout point $x \in X$:

$$ic(E)_x(\zeta \otimes v, \zeta \otimes v) = \sum_{i,j,\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu}(x) \zeta_i \bar{\zeta}_j v_\lambda \bar{v}_\mu > 0, \text{ resp. } \geq 0; \text{ où } ic(E) \text{ est}$$

le tenseur de courbure, $\zeta = \sum \zeta_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in T_X, v = \sum v_\lambda e_\lambda \in E_x$. Rappelons également que tout fibré engendré par ses sections, i.e tel que l'application $H^0(X, E) \rightarrow E_x$ est surjective, est semi-positif (cf.[5])

Nous allons utiliser un théorème d'annulation dû à J.-P. Demailly [5] :

Théorème 4.4.10 *Soit X une variété complexe de dimension n et L un fibré en droites sur X ; E un fibré vectoriel de rang r . Supposons $E > 0$ et $L \geq 0$, ou $E \geq 0$ et $L > 0$. Soit $h \in \{1, \dots, r-1\}$ et $\Gamma^a E$ le fibré de Schur de poids $a \in \mathbb{Z}^r$, avec $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_h > a_{h+1} = \dots = a_r = 0$. Alors pour $q \geq 1$, $H^{n,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ pour $l \geq h$.*

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 4.4.11 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d .*

Alors pour $q \geq 1$,

$$H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = 0 \text{ pour } a_3(d-1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d-1).$$

Démonstration. Dans notre situation on a $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d . On a $T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(2)$ qui est engendré par ses sections, puisque $T_{\mathbb{P}^4}^* \hookrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5}$, donc $T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2)$, quotient de $T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(2)$, est semi-positif. Appliquons le théorème précédent à $E = T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2) \geq 0$:

$$\Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} E = \Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2(a_1 - a_3 + a_2 - a_3))$$

et

$$\det E = K_X \otimes \mathcal{O}_X(6).$$

$$\Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} E \otimes (\det E)^2 = \Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2(a_1+a_2) - 4a_3 + 2(d+1)).$$

Donc :

$$H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = H^{3,q}(X, \Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} T_X^* \otimes K_X^{(a_3-1)}) = 0$$

pour

$$(a_3 - 1)(d - 5) > 2(a_1 + a_2) - 4a_3 + 2(d + 1)$$

i.e

$$a_3(d - 1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d - 1).$$

□

Remarque 4.4.12 1) *l'étude des suites exactes décrites précédemment par les complexes de Schur fournissent des résultats équivalents en utilisant le théorème de Borel-Weil-Bott [8] comme l'ont montré [24] et [4]. Ainsi, l'utilisation du Théorème 7 de [4] fournit le résultat :*

$$\text{pour } q \geq 1, H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = 0 \text{ pour } a_3(d - 1) > 2(a_1 + a_2) + 3d - 8.$$

2) *On obtient donc qu'à m fixé, pour d suffisamment grand on a "peu" en proportion de partitions qui donnent une contribution non nulle du H^2 .*

On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 4.4.13 *Pour $a_3(d - 1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d - 1)$,*

$$h^0(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = \chi(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*).$$

Par le théorème de Riemann-Roch on peut donc faire le calcul explicite :

Corollaire 4.4.14 *Soit*

$$Q_m = \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j \\ \lambda_3(d-1) > 2(\lambda_1 + \lambda_2) + 3(d-1) \end{array} \right\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* \right) \subset Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \chi(X, Q_m) &= h^0(X, Q_m) \\ &= \frac{m^9}{1300264648704} \frac{(d-5)^9 d}{(5d+11)^7} (203125d^7 + 1710000d^6 + 2572750d^5 - 11695025d^4 \\ &\quad - 21771095d^3 + 74079478d^2 + 105651588d + 7530907) + O(m^8) \end{aligned}$$

Donc $h^0(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) \underset{+\infty}{\sim} \alpha m^9, \alpha > 0$ pour d suffisamment grand.

Remarque 4.4.15 1) Malheureusement, le corollaire précédent ne permet pas de déduire directement le résultat pour $h^0(X, E_{3,m} T_X^*)$.

2) Contrairement au cas des jets d'ordre 2 en dimension 2, on ne peut espérer avoir $H^2(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) = 0$ car pour tout m suffisamment grand, il existe $H^2(X, \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*) \neq 0$.

En effet :

Proposition 4.4.16 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré $d \geq 6$.*

Alors

$$h^2(X, S^m T_X^*) \underset{+\infty}{\sim} \left(-\frac{7}{24}d + \frac{1}{8}d^2\right)m^5.$$

Démonstration. On sait par la proposition 4.3.2 que

$$h^0(X, S^m T_X^*) = 0.$$

De plus $H^3(X, S^m T_X^*) = H^0(X, S^m T_X \otimes K_X) = 0$ pour $m > 6$ par le théorème 4.4.1 car X est de type général ($d \geq 6$) et

$$S^m T_X \otimes K_X = \Gamma^{(m-2, -2, -2)} T_X \otimes K_X^{-1}.$$

On a les suites exactes :

$$(1) : 0 \rightarrow S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow \bigoplus_{\binom{4+m}{m}} \mathcal{O}(-m) \rightarrow \bigoplus_{\binom{4+m-1}{m-1}} \mathcal{O}(1-m) \rightarrow 0$$

$$(2) : 0 \rightarrow S^{m-1}T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(-d) \rightarrow S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow S^m T_X^* \rightarrow 0.$$

De (1) il vient $H^2(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$ pour $m > 0$ et $l \in \mathbb{Z}$ et $H^1(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^*) = 0$ pour $m \geq 2$. Donc par (2) $H^1(X, S^m T_X^*) = 0$ pour $m \geq 2$. Finalement

$$\chi(X, S^m T_X^*) = h^2(X, S^m T_X^*) \text{ pour } m > 6.$$

On conclut grâce au calcul de la remarque 4.3.3. □

Annexe A

Calculs des caractéristiques d'Euler

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES 1-JETS DE DEMAILLY-SEMPLÉ EN DIMENSION 3

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 3-uplets $(m, 0, 0)$.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> restart:with(linalg):  
Warning, new definition for norm  
Warning, new definition for trace  
> d:=[m+2,1,0]:  
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(d[j]*a[i])):  
> p:=det(A):  
> h:=[2,1,0]:  
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):  
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):  
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):  
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):  
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):  
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):  
> v:=1-u:  
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> n:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

2) Calcul d'un équivalent de la caractéristique d'Euler

```
> eul:=lcoeff(n,m);
```

$$\begin{aligned}
eul := & \frac{1}{120} a_2^2 a_3 + \frac{1}{120} a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{120} a_2 a_3^2 + \frac{1}{120} a_2^3 + \frac{1}{120} a_3^3 + \frac{1}{120} a_1^3 + \frac{1}{120} a_1^2 a_2 \\
& + \frac{1}{120} a_1^2 a_3 + \frac{1}{120} a_1 a_3^2 + \frac{1}{120} a_1 a_2^2
\end{aligned}$$

3) Calcul de l'équivalent en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

```

> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1]:
> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2]:
> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2]:
> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3]:
> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]:
> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3]:
> algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul)));

```

$$\frac{1}{120} c_3 + \frac{1}{120} c_1^3 - \frac{1}{60} c_1 c_2$$

4) Calcul en fonction du degré de l'hypersurface

```

> restart:
> a:=(5-d)^3*d:
> b:=-d*(5-d)*(d^2-5*d+10):
> c:=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10):
> factor(1/120*c+1/120*a-1/60*b);

```

$$\frac{1}{24} d(3d-7)$$

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES 2-JETS DE DEMAILLY-SEMPLÉ EN DIMENSION 2

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 2-uplets $(m-2l, 1)$.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```

> with(linalg):
> d:=[m-2*l+1,1];
      d := [m - 2l + 1, l]
> A:=matrix(2,2,(i,j)->exp(d[j]*a[i]));
      A := [ e^{((m-2l+1)a_1)}  e^{(l a_1)}
             e^{((m-2l+1)a_2)}  e^{(l a_2)} ]
> p:=det(A);
      p := e^{((m-2l+1)a_1)} e^{(l a_2)} - e^{(l a_1)} e^{((m-2l+1)a_2)}
> h:=[1,0]:
> B:=matrix(2,2,(i,j)->exp(h[j]*a[i]));
      B := [ e^{a_1}  1
             e^{a_2}  1 ]
> q:=det(B);
      q := e^{a_1} - e^{a_2}

```

1)b) Rappelons que le caractère de Chern est un polynôme en les "a(i)" de degré 2. On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 4 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 2 :

```

> readlib(mtaylor):
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2]],4));
s := 1/6 (a_1 - a_2) (-3l + m + 1) (a_1^2 m^2 + a_1 a_2 m^2 + a_2^2 m^2 + 2 a_1^2 m + 3 a_1 m + 3 a_2 m
+ 2 a_1 a_2 m - 3 a_2^2 m l - 3 a_1^2 m l + 2 a_2^2 m + 6 - 3 l a_1 - 3 l a_2 + 3 a_1 + 3 a_2
+ 3 l^2 a_2^2 + 3 l^2 a_1^2 - 3 a_2^2 l - 3 a_1^2 l + a_2^2 + a_1^2 + a_2 a_1 - 3 a_1 a_2 l^2)
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2]],4));
      t := 1/6 (a_1 - a_2) (a_1^2 + 3 a_1 + a_2 a_1 + 6 + 3 a_2 + a_2^2)

```

> r:=simplify(s/(a[1]-a[2])):

> u:=simplify(t/(a[1]-a[2])):

> v:=1-u;

$$v := -\frac{1}{6}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{6}a_2a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{6}a_2^2$$

> w:=mtaylor(1+v+v^2, [a[1], a[2]], 3);

$$w := 1 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{12}a_1^2 + \frac{1}{3}a_2a_1 + \frac{1}{12}a_2^2$$

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

> n:=factor(mtaylor(r*w, [a[1], a[2]], 3));

$$n := \frac{1}{12}(-3l + m + 1)(2a_1a_2m^2 + 2a_1^2m^2 + 2a_2^2m^2 - 6a_2^2ml + a_2^2m - 6a_1^2ml + 6a_2m + a_1^2m + 6a_1m - 2a_1a_2m + 12 - 6la_1 - 6la_2 + 6l^2a_2^2 + 6l^2a_1^2 - 3a_2^2l - 3a_1^2l + 6a_2a_1l - 6a_1a_2l^2)$$

2) Calcul d'un équivalent de la caractéristique d'Euler

> P:=expand(sum(n, l=0..m/3));

$$P := \frac{17}{648}a_2a_1m^4 + 1 + \frac{5}{6}m + \frac{1}{6}m^2 + \frac{7}{18}a_2m^2 + \frac{1}{2}a_1m + \frac{1}{2}a_2m + \frac{17}{72}a_2^2m^2 + \frac{1}{9}a_2^2m + \frac{17}{72}a_1^2m^2 + \frac{1}{9}a_1^2m + \frac{37}{324}a_2a_1m^3 + \frac{41}{324}a_1^2m^3 + \frac{2}{27}a_2m^3 + \frac{7}{18}a_1m^2 - \frac{7}{36}a_1a_2m + \frac{1}{24}a_1a_2m^2 + \frac{41}{324}a_2^2m^3 + \frac{13}{648}a_2^2m^4 + \frac{13}{648}a_1^2m^4 + \frac{2}{27}a_1m^3$$

> eul:=lcoeff(P, m);

$$eul := \frac{17}{648}a_2a_1 + \frac{13}{648}a_2^2 + \frac{13}{648}a_1^2$$

3) Calcul de l'équivalent en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

> eq1:=a[1]+a[2]=c[1];

$$eq1 := a_1 + a_2 = c_1$$

> eq2:=a[1]*a[2]=c[2];

$$eq2 := a_2a_1 = c_2$$

```
> eq3:=a[1]^2+a[2]^2=c[1]^2-2*c[2];  
      eq3 := a12 + a22 = c12 - 2 c2  
> algsubs(eq1,algsubs(eq2,algsubs(eq3,eul)));  
      - $\frac{1}{72}c_2 + \frac{13}{648}c_1^2$ 
```

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES 2- JETS DE DEMAILLY-SEMPLÉ EN DIMENSION 3

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 3-uplets $(m-2l, l, 0)$.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> restart:with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> d:=[m-2*l+2,l+1,0]:
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(d[j]*a[i])):
> p:=det(A):
> h:=[2,1,0]:
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> v:=1-u:
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> n:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

2) Calcul d'un équivalent de la caractéristique d'Euler

```
> P:=expand(sum(n,l=0..m/3)):
```

> eul:=lcoeff(P,m);

$$eul := \frac{1}{14580} a_1^2 a_2 + \frac{1}{14580} a_1 a_2^2 + \frac{163}{1837080} a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{14580} a_2 a_3^2 + \frac{1}{14580} a_1^2 a_3$$

$$+ \frac{1}{14580} a_2^2 a_3 + \frac{1}{14580} a_1 a_3^2 + \frac{89}{1837080} a_2^3 + \frac{89}{1837080} a_3^3 + \frac{89}{1837080} a_1^3$$

3) Calcul de l'équivalent en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1]:

> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2]:

> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2]:

> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3]:

> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]:

> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3]:

> algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul)));

$$\frac{13}{459270} c_3 - \frac{47}{612360} c_1 c_2 + \frac{89}{1837080} c_1^3$$

4) Calcul en fonction du degré de l'hypersurface

> restart:

> a:=(5-d)^3*d:

> b:=-d*(5-d)*(d^2-5*d+10):

> c:=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10):

> factor(13/459270*c-47/612360*b+89/1837080*a);

$$-\frac{1}{367416} d(37d^2 - 452d + 919)$$

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES 2-JETS DE GREEN-GRIFFITHS EN DIMENSION 3

1) Calcul du caractère de Chern de la l-ème puissance symétrique.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> restart:with(linalg):  
Warning, new definition for norm  
Warning, new definition for trace  
> d:=[1+2,1,0]:  
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(d[j]*a[i])):  
> p:=det(A):  
> h:=[2,1,0]:  
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):  
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):  
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):  
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):  
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):  
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):  
> v:=1-u:  
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> n:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

1)d) Caractère de Chern de la (m-2l)-ème puissance symétrique.

```
> b:=algsubs(1=m-2*1,n):
```

2) Calcul d'un équivalent de la caractéristique d'Euler

```

> eul:=factor(mtaylor(n*b,[a[1],a[2],a[3]],4)):
> P:=expand(sum(eul,l=0..m/2)):
> eul1:=lcoeff(P,m);

```

$$\begin{aligned}
eul1 := & \frac{1}{172032} a_1^3 + \frac{1}{172032} a_3^3 + \frac{1}{122880} a_1 a_3^2 + \frac{1}{172032} a_2^3 + \frac{1}{122880} a_2^2 a_3 \\
& + \frac{1}{122880} a_1^2 a_2 + \frac{1}{122880} a_2 a_3^2 + \frac{1}{122880} a_1 a_2^2 + \frac{1}{122880} a_1^2 a_3 \\
& + \frac{3}{286720} a_3 a_1 a_2
\end{aligned}$$

3) Calcul de l'équivalent en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

```

> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1]:
> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2]:
> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2]:
> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3]:
> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]:
> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3]:
> algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul1)));

```

$$\frac{1}{286720} c_3 + \frac{1}{172032} c_1^3 - \frac{1}{107520} c_1 c_2$$

4) Calcul en fonction du degré de l'hypersurface

```

> restart:
> a:=(5-d)^3*d:
> b:=-d*(5-d)*(d^2-5*d+10):
> c:=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10):
> factor(1/286720*c+1/172032*a-1/107520*b);

```

$$-\frac{1}{172032} d(2d^2 - 25d + 51)$$

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES 3-JETS DE DEMAILLY-SEMPLÉ EN DIMENSION 3

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 3-uplets $(m-3j-5k-2i, i+j+k, k)$.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> restart:with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> d:=[m-3*j-5*k-2*i+2,i+j+k+1,k]:
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(d[j]*a[i])):
> p:=det(A):
> h:=[2,1,0]:
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> v:=1-u:
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> n:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

2) Calcul d'un équivalent de la caractéristique d'Euler

```
> P:=sum(n,i=0..((m-5*j)/3-2*k)):
> Q:=sum(P,k=0..((m-5*j)/6)):
> R:=expand(sum(Q,j=0..(m/5))):
```

> eul:=lcoeff(R,m);

$$\begin{aligned}
eul := & \frac{11461}{6804000000} a_1 a_2 a_3 + \frac{29233}{40824000000} a_1^3 + \frac{29233}{40824000000} a_2^3 \\
& + \frac{29233}{40824000000} a_3^3 + \frac{2287}{19440000000} a_2 a_1^2 + \frac{2287}{19440000000} a_2^2 a_1 \\
& + \frac{2287}{19440000000} a_3^2 a_1 + \frac{2287}{19440000000} a_2 a_3^2 + \frac{2287}{19440000000} a_3 a_1^2 \\
& + \frac{2287}{19440000000} a_3 a_2^2
\end{aligned}$$

3) Calcul de l'équivalent en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1];

> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2];

> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2];

> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3];

> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2];

> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3];

> algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul)));

$$\frac{43}{141750000} c_3 + \frac{29233}{40824000000} c_1^3 - \frac{551}{5670000000} c_1 c_2$$

4) Calcul en fonction du degré de l'hypersurface dans le cas compact

> restart;

> a:=(5-d)^3*d;

> b:=-d*(5-d)*(d^2-5*d+10);

> c:=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10);

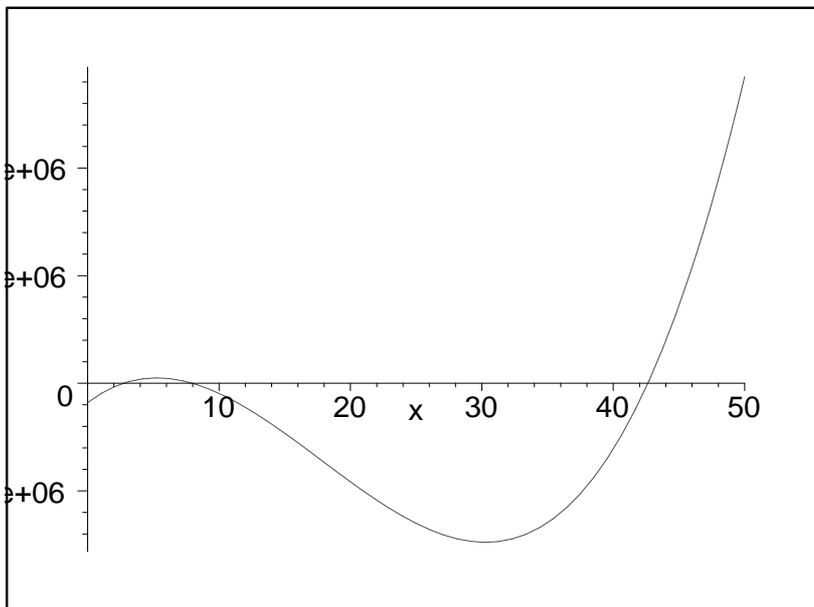
> factor(43/141750000*c+29233/40824000000*a-551/5670000000*b);

$$\frac{1}{81648000000} d (389 d^3 - 20739 d^2 + 185559 d - 358873)$$

5) Détermination du degré à partir duquel la caractéristique d'Euler est positive

> s:=x->389*x^3-20739*x^2+185559*x-358873;

> plot(s(x),x=0..50);



6) Le cas logarithmique

```

> restart:

> a:=- (4-d)^3:

> b:=- (4-d)*(d^2-4*d+6):

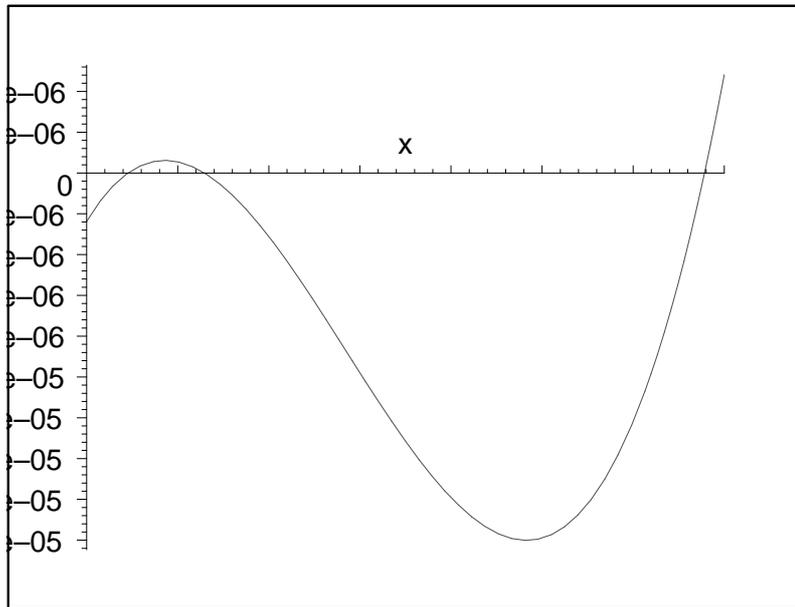
> c:=- (-d^3+4*d^2-6*d+4):

> factor(43/1417500000*c+29233/40824000000*a-551/5670000000*b);
      389      6913      6299      1513
----- d^3 - ---- d^2 + ---- d - ----
81648000000 34020000000 4252500000 637875000

> s:=x->389/81648000000*x^3-6913/34020000000*x^2+6299/4252500000*x-1513
> /637875000:

> plot(s(x),x=0..35);

```



CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES 3-JETS DE GREEN-GRIFFITHS EN DIMENSION 3

1) Calcul du caractère de Chern de la 1-ème puissance symétrique.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> restart:with(linalg):  
Warning, new definition for norm  
Warning, new definition for trace  
> d:=[1+2,1,0]:  
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(d[j]*a[i])):  
> p:=det(A):  
> h:=[2,1,0]:  
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):  
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):  
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):  
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):  
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):  
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):  
> v:=1-u:  
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> n:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):  
> b:=algsubs(1=j,n):  
> e:=algsubs(1=m-3*1-2*j,n):
```

2) Calcul d'un équivalent de la caractéristique d'Euler

```

> eul:=factor(mtaylor(n*b*e,[a[1],a[2],a[3]],4)):
> P:=expand(sum(sum(eul,j=0..(m-3*1)/2),l=0..m/3)):
> eul1:=lcoeff(P,m);

```

$$\begin{aligned}
eul1 := & \frac{17}{33861058560} a_2^2 a_3 + \frac{17}{33861058560} a_1 a_2^2 + \frac{17}{33861058560} a_1 a_3^2 \\
& + \frac{17}{33861058560} a_2 a_3^2 + \frac{17}{33861058560} a_1^2 a_3 + \frac{23}{74494328832} a_3^3 \\
& + \frac{23}{74494328832} a_2^3 + \frac{121}{169305292800} a_1 a_2 a_3 + \frac{17}{33861058560} a_1^2 a_2 \\
& + \frac{23}{74494328832} a_1^3
\end{aligned}$$

3) Calcul de l'équivalent en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

```

> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1]:
> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2]:
> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2]:
> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3]:
> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]:
> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3]:
> algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul1)));

```

$$\frac{251}{1862358220800} c_3 - \frac{79}{186235822080} c_1 c_2 + \frac{23}{74494328832} c_1^3$$

4) Calcul en fonction du degré de l'hypersurface

```

> restart:
> a:=(5-d)^3*d:
> b:=-d*(5-d)*(d^2-5*d+10):
> c:=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10):
> factor(251/1862358220800*c+23/74494328832*a-79/186235822080*b);

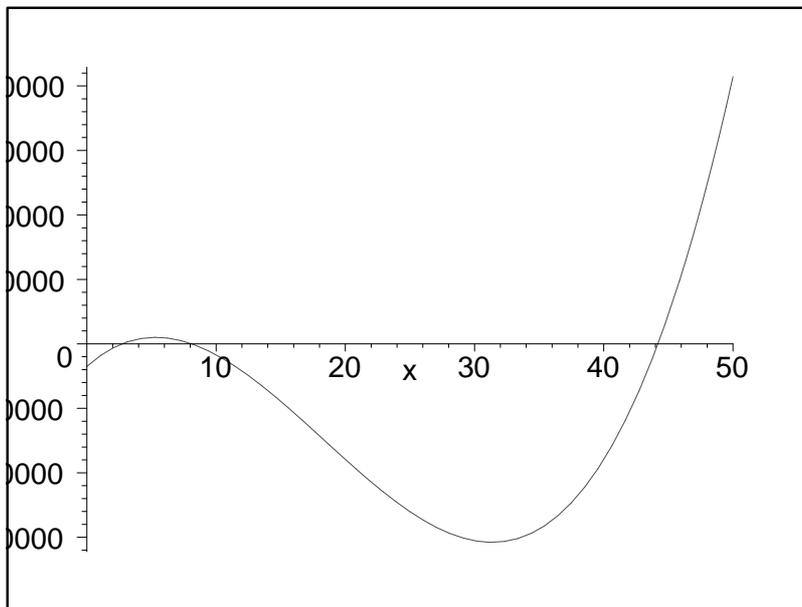
```

$$\frac{1}{1862358220800} d (36 d^3 - 1980 d^2 + 17985 d - 34885)$$

```

> s:=x->(36*x^3-1980*x^2+17985*x-34885):
> plot(s(x),x=0..50);

```



CALCUL DU COROLLAIRE 4.4.14

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 3-uplets $(m-3j-5k-2i, i+j+k, k)$.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> restart:with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> H:=[m-3*j-5*k-2*i+2,i+j+k+1,k]:
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(H[j]*a[i])):
> p:=det(A):
> h:=[2,1,0]:
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> v:=1-u:
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> n:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

2) Calcul de $Q(m)$

```
> P:=(sum(n,i=(m-2*j+3*(d-1)/2-k*(d+7)/2)..((m-5*j)/3-2*k))):
> Q:=sum(P,k=((4*m-2*j+9*(d-1))/(3*(d+3))..((m-5*j)/6))):
> Q1:=lcoeff(Q,m):
> Q2:=coefayl(Q,[m,j]=[0,0],[7,1]):
```

```

> Q3:=coeftayl(Q, [m, j]=[0, 0], [6, 2]):
> Q4:=coeftayl(Q, [m, j]=[0, 0], [5, 3]):
> Q5:=coeftayl(Q, [m, j]=[0, 0], [4, 4]):
> Q6:=coeftayl(Q, [m, j]=[0, 0], [3, 5]):
> Q7:=coeftayl(Q, [m, j]=[0, 0], [2, 6]):
> Q8:=coeftayl(Q, [m, j]=[0, 0], [1, 7]):
> Q9:=lcoeff(Q, j):
> S:=Q1*m^8+Q2*m^7*j+Q3*m^6*j^2+Q4*m^5*j^3+Q5*m^4*j^4+Q6*m^3*j^5+Q7*m^2
> *j^6+Q8*m*j^7+Q9*j^8:
> R:=sum(S, j=0..(m*(d-5)-18*(d-1))/(5*d+11)):

> degree(R, m);

```

9

```

> eul:=lcoeff(R, m):

```

3) Calcul en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

```

> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c:
> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c+e-3*b:
> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]
> ^2*a[2]=1/3*(e-(3*c+e-3*b))-2*c:
> eul1:=algsubs(eq6, algsubs(eq4, algsubs(eq5, eul))):

```

4) Calcul en fonction du degré de l'hypersurface

```

> eq1:=e=-(5-d)^3*d:
> eq2:=b=-d*(5-d)*(d^2-5*d+10):
> eq3:=c=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10):
> factor(algsubs(eq3, algsubs(eq2, algsubs(eq1, eul1)))));

```

$$\frac{1}{1300264648704}(d-5)^9 d(203125 d^7 + 1710000 d^6 + 2572750 d^5 - 11695025 d^4 - 21771095 d^3 + 74079478 d^2 + 105651588 d + 7530907) / (5 d + 11)^7$$

CALCUL DE L'IDEAL DES RELATIONS ENTRE LES GENERATEURS
DE L'ALGEBRE A(3).

Nous effectuons ce calcul à l'aide des bases de Grobner.

1) Définition des générateurs f(i).

```
> w12:=x[1]*y[2]-x[2]*y[1]:
> w13:=x[1]*z[2]-x[2]*z[1]:
> w23:=y[1]*z[2]-y[2]*z[1]:
> w123:=z[1]*(x[1]*y[3]-x[3]*y[1])-3*z[2]*(x[1]*y[2]-x[2]*y[1]):
> w121:=x[1]*(x[1]*y[3]-x[3]*y[1])-3*x[2]*(x[1]*y[2]-x[2]*y[1]):
> w122:=y[1]*(x[1]*y[3]-x[3]*y[1])-3*y[2]*(x[1]*y[2]-x[2]*y[1]):
> w131:=x[1]*(x[1]*z[3]-x[3]*z[1])-3*x[2]*(x[1]*z[2]-x[2]*z[1]):
> w132:=y[1]*(x[1]*z[3]-x[3]*z[1])-3*y[2]*(x[1]*z[2]-x[2]*z[1]):
> w133:=z[1]*(x[1]*z[3]-x[3]*z[1])-3*z[2]*(x[1]*z[2]-x[2]*z[1]):
> w232:=y[1]*(y[1]*z[3]-y[3]*z[1])-3*y[2]*(y[1]*z[2]-y[2]*z[1]):
> w233:=z[1]*(y[1]*z[3]-y[3]*z[1])-3*z[2]*(y[1]*z[2]-y[2]*z[1]):
> w231:=x[1]*(y[1]*z[3]-y[3]*z[1])-3*x[2]*(y[1]*z[2]-y[2]*z[1]):
> W:=x[1]*(y[2]*z[3]-y[3]*z[2])-x[2]*(y[1]*z[3]-y[3]*z[1])+x[3]*(y[1]*z[2]-y[2]*z[1]):
```

2) Calcul d'une base de Grobner de l'idéal I=(f(i)-t(i)).

```
> with(Groebner):
> WL:=[x[1]-t[1],y[1]-t[2],z[1]-t[3],w12-t[4],w23-t[5],w13-t[6],w123-t[7],w121-t[8],w122-t[9],w131-t[10],w133-t[11],w132-t[12],w231-t[13],w232-t[14],w233-t[15],W-t[16]]:
> gb:=gbasis(WL,plex(z[1],z[2],z[3],x[1],x[2],x[3],y[1],y[2],y[3],t[1],t[2],t[3],t[4],t[5],t[6],t[7],t[8],t[9],t[10],t[11],t[12],t[13],t[14],t[15],t[16])):
> nops(gb);
```

135

3) Calcul de l'idéal des relations comme l'intersection de I et C[t(i)].

```
> h:=proc(P) local i,s; s:=0: for i from 1
> to 3 do s:=s+degree(P,x[i]): od: for i from 1 to 3 do
> s:=s+degree(P,y[i]): od: for i from 1 to 3 do s:=s+degree(P,z[i]):
> od: s;
> end:
> g:=proc(q) local s,i; s:=[]: for i from 1
> to 135 do if h(q[i])=0 then s:=[op(s),i]: fi od: s;
> end:
> op(g(gb));
```

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27,
 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61

- > gb[1];gb[2];gb[3];gb[4];gb[5];gb[6];gb[7];gb[8];gb[9];gb[10];gb[11];g
- > b[12];gb[13];gb[14];gb[15];gb[16];gb[17];gb[18];gb[19];gb[20];gb[21];g
- > b[22];gb[23];gb[24];gb[25];gb[26];gb[27];gb[28];gb[29];gb[30];gb[31];g
- > b[32];gb[33];gb[34];gb[35];gb[36];gb[37];gb[38];gb[39];gb[40];gb[41];g
- > b[42];gb[43];gb[44];gb[45];gb[46];gb[47];gb[48];gb[49];gb[50];gb[51];g
- > b[52];gb[53];gb[54];gb[55];gb[56];gb[57];gb[58];gb[59];gb[60];gb[61];

$$t_{14} t_9 t_{11}^2 - t_{14} t_{11} t_{12}^2 + t_{14} t_{11} t_{12} t_{13} - t_{14} t_{11} t_{13}^2 + t_{10} t_{11} t_{14}^2 - t_{15} t_{12} t_9 t_{11} + t_{15} t_{12}^3$$

$$- t_{15} t_{13} t_9 t_{11} + t_9 t_{15}^2 t_{10} - 2 t_{12} t_{14} t_{15} t_{10} + t_{13} t_{14} t_{15} t_{10}$$

$$- t_{14} t_{10} - t_{12} t_{13} - t_9 t_{11} + t_8 t_{15} + t_{12}^2 + t_{13}^2$$

$$t_{14} t_{11} t_8 + t_9 t_{15} t_{10} - t_{12} t_9 t_{11} - t_{13} t_9 t_{11} - 2 t_{12} t_{14} t_{10} + t_{13} t_{14} t_{10} + t_{12}^3$$

$$t_7 + t_{13} - t_{12}$$

$$9 t_6^3 t_{16} - t_{10} t_{11} t_{12} + 2 t_{10} t_{11} t_{13} + t_{11}^2 t_8 - t_{15} t_{10}^2$$

$$- t_6 t_{15} t_{12} + t_6 t_{11} t_{14} + t_5 t_{15} t_{10} - t_{11} t_5 t_{13}$$

$$t_{14} t_6 t_{12} - t_{14} t_6 t_{13} - t_{15} t_9 t_6 + t_5 t_{14} t_{10} + t_5 t_9 t_{11} - t_5 t_{12}^2$$

$$t_{11} t_5 t_8 - t_{10} t_5 t_{12} + t_{10} t_5 t_{13} - t_{11} t_6 t_9 + t_6 t_{12}^2 - t_{13} t_6 t_{12}$$

$$t_8 t_5 t_{14} t_{10} - t_8 t_5 t_{12}^2 + t_9 t_{10} t_5 t_{12} - t_9 t_{10} t_5 t_{13} + t_8 t_{14} t_6 t_{12} - t_8 t_{14} t_6 t_{13} - t_{10} t_{14} t_6 t_9$$

$$+ t_9 t_6 t_{13}^2$$

$$9 t_6^2 t_{16} t_5 + t_{11} t_{12} t_{13} + t_9 t_{11}^2 - t_{11} t_{12}^2 - t_{10} t_{15} t_{12} + t_{10} t_{11} t_{14}$$

$$9 t_5^2 t_{16} t_6 + t_{11} t_{13} t_{14} + t_{15} t_9 t_{11} - t_{15} t_{12}^2$$

$$9 t_5^3 t_{16} - 2 t_{15} t_{12} t_{14} + t_{15} t_{13} t_{14} + t_{15}^2 t_9 + t_{11} t_{14}^2$$

$$- t_6 t_{14} + t_4 t_{15} + t_5 t_{13}$$

$$t_5 t_8 - t_4 t_{13} + t_4 t_{12} - t_6 t_9$$

$$t_5 t_{10} + t_4 t_{11} - t_6 t_{12}$$

$$t_4 t_{14} t_{10} - t_4 t_{13}^2 + t_{12} t_5 t_8 + t_{13} t_5 t_8 - t_5 t_9 t_{10} - t_{14} t_6 t_8$$

$$9 t_{16} t_4 t_6^2 + t_8 t_{11} t_{12} - t_{10} t_9 t_{11} - t_{14} t_{10}^2 + t_{10} t_{12} t_{13}$$

$$9 t_6 t_{16} t_5 t_4 - t_9 t_{15} t_{10} + t_{12} t_9 t_{11} + t_{12} t_{14} t_{10} - t_{13} t_{14} t_{10} - t_{12}^3 + t_{12}^2 t_{13}$$

$$9 t_5^2 t_{16} t_4 - t_{12}^2 t_{14} + 2 t_{12} t_{13} t_{14} - t_{13}^2 t_{14} - t_{13} t_{15} t_9 + t_9 t_{11} t_{14}$$

$$9 t_{16} t_4^2 t_6 - t_{14} t_{10} t_8 + t_8 t_{12}^2 - t_9 t_{12} t_{10} + t_{10} t_{13} t_9$$

$$9 t_{16} t_5 t_4^2 + t_8 t_{12} t_{14} - t_8 t_{13} t_{14} - t_9 t_{14} t_{10} + t_9 t_{13}^2$$

$$9 t_{16} t_4^3 - t_9^2 t_{10} + t_9 t_8 t_{12} - t_{14} t_8^2 + t_9 t_{13} t_8$$

$$- 3 t_{11} t_5^2 + t_{11} t_3 t_{14} + 3 t_{15} t_5 t_6 - t_{15} t_3 t_{12}$$

$$3 t_{11} t_5 t_6 - t_{11} t_3 t_{13} - 3 t_{15} t_6^2 + t_{15} t_3 t_{10}$$

$$\begin{aligned}
& t_{14} t_3 t_{10} - t_{12} t_3 t_{13} - 3 t_5^2 t_{10} + 3 t_{12} t_5 t_6 + 3 t_{13} t_5 t_6 - 3 t_{14} t_6^2 \\
& \quad t_{15} t_9 t_3 - t_{12} t_3 t_{14} + t_{13} t_3 t_{14} + 3 t_{12} t_5^2 - 3 t_5 t_6 t_{14} \\
& \quad t_{11} t_9 t_3 - t_3 t_{12}^2 + t_{12} t_3 t_{13} + 3 t_5^2 t_{10} - 3 t_{13} t_5 t_6 \\
& \quad t_8 t_3 t_{14} - t_9 t_3 t_{13} + 3 t_{13} t_5 t_4 - 3 t_6 t_4 t_{14} - 3 t_8 t_5^2 + 3 t_9 t_5 t_6 \\
& \quad t_8 t_3 t_{12} - t_9 t_3 t_{10} + 3 t_4 t_5 t_{10} - 3 t_6 t_4 t_{13} \\
& \quad t_{11} t_8 t_3 - t_{12} t_3 t_{10} + t_{13} t_3 t_{10} + 3 t_6 t_5 t_{10} - 3 t_{13} t_6^2 \\
& \quad \quad - t_{15} t_{10} + 3 t_6 t_3 t_{16} + t_{11} t_{13} \\
& \quad \quad - t_{15} t_{12} + 3 t_3 t_5 t_{16} + t_{11} t_{14} \\
& 3 t_3 t_4 t_{16} - t_{14} t_{10} + t_{12} t_{13}, t_8 t_3 t_4 t_{13} - t_4 t_9 t_3 t_{10} - t_8^2 t_3 t_5 + t_8 t_3 t_6 t_9 + 3 t_4^2 t_5 t_{10} - 3 t_4^2 t_6 t_{13} \\
& \quad \quad - t_6 t_{15} + t_5 t_{11} + t_3^2 t_{16} \\
& \quad \quad 3 t_5^2 + t_2 t_{15} - t_3 t_{14} \\
& \quad \quad 3 t_5 t_4 - t_{13} t_2 + t_{12} t_2 - t_9 t_3 \\
& \quad \quad 3 t_5 t_6 + t_2 t_{11} - t_3 t_{12} \\
& t_2 t_{14} t_{10} - t_2 t_{13}^2 - t_9 t_3 t_{13} + 6 t_{13} t_5 t_4 - 3 t_6 t_4 t_{14} - 3 t_8 t_5^2 + 3 t_9 t_5 t_6 \\
& \quad - 3 t_4^2 t_{14} + 3 t_4 t_5 t_9 + t_2 t_{14} t_8 - t_2 t_{13} t_9 \\
& \quad - 3 t_4^2 t_{13} - t_2 t_9 t_{10} + t_{13} t_2 t_8 + t_8 t_9 t_3 \\
& \quad \quad 3 t_2 t_6 t_{16} - t_9 t_{11} - t_{14} t_{10} + t_{12}^2 \\
& \quad \quad t_{12} t_{14} - t_{13} t_{14} + 3 t_2 t_5 t_{16} - t_{15} t_9 \\
& \quad - 3 t_4 t_5^2 + t_4 t_3 t_{14} - t_2 t_6 t_{14} + t_2 t_5 t_{13} \\
& \quad t_2 t_5 t_{10} - t_{13} t_2 t_6 + t_3 t_4 t_{13} - t_3 t_5 t_8 \\
& \quad - 3 t_5 t_4^2 + t_5 t_2 t_8 - t_9 t_2 t_6 + t_9 t_3 t_4 \\
& \quad \quad - t_{14} t_8 + 3 t_2 t_{16} t_4 + t_{13} t_9 \\
& \quad \quad t_3 t_2 t_{16} + t_5 t_{12} - t_6 t_{14} \\
& \quad \quad - t_4 t_{14} + t_2^2 t_{16} + t_5 t_9 \\
& \quad \quad t_{15} t_1 + 3 t_5 t_6 - t_3 t_{13} \\
& \quad \quad t_1 t_{14} - t_{13} t_2 + 3 t_5 t_4 \\
& \quad \quad - t_2 t_{10} + t_{13} t_1 + t_8 t_3 \\
& \quad \quad t_{12} t_1 - t_2 t_{10} + 3 t_4 t_6 \\
& 3 t_6^2 + t_1 t_{11} - t_3 t_{10}, 3 t_4^2 - t_2 t_8 + t_1 t_9 \\
& \quad t_{12} t_{10} - t_{13} t_{10} + 3 t_1 t_6 t_{16} - t_8 t_{11} \\
& \quad \quad t_1 t_5 - t_2 t_6 + t_3 t_4 \\
& \quad t_9 t_{10} - t_8 t_{12} + 3 t_1 t_{16} t_4 \\
& \quad t_3 t_1 t_{16} + t_5 t_{10} - t_6 t_{13} \\
& \quad t_2 t_1 t_{16} - t_4 t_{13} + t_5 t_8 \\
& \quad t_1^2 t_{16} - t_{10} t_4 + t_6 t_8
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Babets V.A., *Picard type theorems for holomorphic mappings*, Siberian Math.J. 25 (1984), 195-200.
- [2] Barth W.; Peters C.; Van de Ven A.D.M, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag.
- [3] Bogomolov F.A., *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija 13 (1979), 499-555.
- [4] Brückmann P. and Rackwitz H.G., *T-symmetrical tensor forms on complete intersections*, Math. Ann. 288 (1990), 627-635.
- [5] Demailly J.P., *Vanishing theorems for tensor powers of a positive vector bundle*, Proceedings of the Conference Geometry and Analysis on Manifolds held at Katata, Japan (August 1987), edited by T. Sunada, Lecture Notes in Math. 1339, Springer-Verlag
- [6] Demailly J.-P., *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.62, Amer. Math.Soc., Providence, RI (1997), 285-360.
- [7] Demailly J.-P., El Goul J., *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math 122 (2000), 515-546.
- [8] Demazure M., *A very simple proof of Bott's theorem*, Invent. Math. 33 (1976), 271-272.
- [9] Dethloff G., Lu. S, *Logarithmic jet bundles and applications*, Osaka J. of Math., vol. 38 (2001), 185-237.
- [10] Dethloff G., Lu. S, *Logarithmic surfaces and hyperbolicity*, prépublication 2004, 23 pages.
- [11] Dethloff G., Schumacher G., Wong P.M., *Hyperbolicity of the complement of plane algebraic curves*, Amer. J. Math 117 (1995), 573-599.
- [12] Dethloff G., Schumacher G., Wong P.M., *On the hyperbolicity of the complements of curves in algebraic surfaces : the three component case*, Duke. Math. J. 78 (1995), 193-212.

- [13] El Goul J. : *Logarithmic Jets and Hyperbolicity*, Osaka J.Math. 40 (2003), 469-491.
- [14] Fulton W., *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press.
- [15] Green. M. , *On the functional equation $f^2 = e^{2\phi_1} + e^{2\phi_2} + e^{2\phi_3}$ and a new Picard theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 195 (1974), 223-230.
- [16] Green M., *The hyperbolicity of the complement of $2n+1$ hyperplanes in general position in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ and related results*, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977), 109-113.
- [17] Green M., Griffiths P., *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New-York (1980), 41-74.
- [18] Hirzebruch F., *Topological methods in algebraic geometry*, Grundle. Math. Wiss.131, Springer, Heidelberg, (1966).
- [19] Iitaka S., *On the logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties*, Complex Anal. and Alg. Geom., Ianami Shoten (1977), 175-189.
- [20] Iitaka S., *Geometry on complements of lines in \mathbb{P}^2* , Tokyo J. Math. 1 (1978), 1-19.
- [21] Kobayashi S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, (1970).
- [22] Kobayashi S., Ochiai T., *On complex manifolds with positive tangent bundles*, Journal of the Mathematical Society of Japan 22 (1970), 499-525.
- [23] Lascoux A., *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. in math. 30 (1978), 202-237.
- [24] Manivel L., *Birational invariants of algebraic varieties*, J. reine angew. Math. 458 (1995), 63-91.
- [25] Martin S., *Schur algebras and representation theory*, Cambridge tracts in mathematics 112, Cambridge university press, (1993).
- [26] McQuillan M., *Diophantine approximations and foliations*, Publ. Math. IHES 87 (1998), 121-174.
- [27] Pommerening K., *Invariant theory*, LNM 1278, (1987).
- [28] Popov V.L., *Invariant theory*, algebraic geometry vol.4., EMS, Springer-Verlag.
- [29] Procesi C., *Classical invariant theory*, Brandeis Lect. Notes 1, (1982).
- [30] Rousseau E., *Hyperbolicité du complémentaire d'une courbe : le cas de deux composantes*, CRAS Ser. I 336 (2003), 635-640.

- [31] Sakai F., *Semi-stable Curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps*, Math. Ann. 254 (1980), 89-120.
- [32] Sakai F., *Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties*, Lect. Notes in Math. 732 (1979), Berlin, Heidelberg, New York, Springer.
- [33] Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, (1977), Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag.
- [34] Siu Y.-T., Yeung S.K., *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Invent. Math. 124 (1996), 573-618.
- [35] Tan L., *On the Popov-Pommerening conjecture for groups of type A_n* , Proc. AMS 106 (1989), 611-616.
- [36] Walker R.J., *Algebraic Curves*, (1950), Dover publications New York.
- [37] Xi Chen, *On algebraic hyperbolicity of log surfaces*, prépublication 2000, 37 pages.