



# Etude théorique et numérique de couplages entre écoulements et déformations mécaniques dans l'extraction d'hydrocarbures

Fatima Zahra Daim

## ► To cite this version:

Fatima Zahra Daim. Etude théorique et numérique de couplages entre écoulements et déformations mécaniques dans l'extraction d'hydrocarbures. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT: . tel-00007909v2

**HAL Id: tel-00007909**

**<https://theses.hal.science/tel-00007909v2>**

Submitted on 18 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE : 7781

|                                                         |
|---------------------------------------------------------|
| <b>UNIVERSITE PARIS XI<br/>UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY</b> |
|---------------------------------------------------------|

THESE

présentée

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

Par

Fatima-Zahra DAÏM

Titre :

Etude théorique et numérique de couplages entre  
écoulements et déformations mécaniques dans  
l'extraction d'hydrocarbures

Soutenue le 15 décembre 2004 devant la Commission d'examen :

|                          |                     |
|--------------------------|---------------------|
| M. François ALOUGES      | Président du jury   |
| M. Florian DE VUYST      | Rapporteur          |
| M. Olivier GOUBET        | Rapporteur          |
| Mme Danielle HILHORST    | Directrice de thèse |
| M. Jacques LAMINIE       | Directeur de thèse  |
| Mme Monique MADAUNE-TORT |                     |
| M. Hatem ZAAG            |                     |



# Remerciements

Ces pages sont dédiées à tous ceux qui m’ont permis de mener à bien mes travaux de recherche durant ces années de thèse.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes directeurs Danielle Hilhorst et Jacques Laminie pour m’avoir encadrée et initiée à la recherche. Je remercie Robert Eymard d’avoir proposé des sujets intéressants ainsi que pour ses précieux conseils.

Je suis très reconnaissante envers Danielle de m’avoir fait découvrir l’analyse non linéaire. Je la remercie vivement pour ses idées qui m’ont été précieuses, pour son soutien et pour m’avoir fait rencontrer de nombreuses personnes enrichissantes.

Que Jacques trouve ici ma profonde gratitude tant pour sa vision de l’analyse numérique qui m’a beaucoup apportée que pour son expérience en calcul scientifique qui m’a été d’un grand secours quand ça “bugguait”. Au delà du cadre scientifique, je le remercie chaleureusement pour sa disponibilité permanente, ses conseils, son soutien indéfectible lors des moments difficiles. Mille fois merci Jacques !

Je remercie chaleureusement Florian De Vuyst et Olivier Goubet d’avoir accepté de rapporter ma thèse et aussi de l’intérêt qu’ils ont porté à mon travail. Je tiens à remercier vivement François Alouges, Monique Madaune-Tort et Hatem Zaag de m’avoir fait l’honneur de faire partie de mon jury.

Je souhaiterais remercier vivement tous les membres de l’équipe d’Analyse Numérique & EDP que j’ai eu le plaisir de rencontrer et plus particulièrement Bernard Helffer, Stéphane Labbé et Frédéric Pascal. Je pense également à Danielle Le Meur, Dominique Girardot sans oublier Marie-Christine Myoupo pour leur aide.

Je remercie chaleureusement bien sûr la “sensationnelle” équipe de doctorants du 425 et 430 que j’ai eu la chance de côtoyer durant ces années et avec qui j’ai partagé des moments géniaux. Je pense tout particulièrement à Christophe Bing M., Zitouna, Ludovic, Madalina, Sylvain, Antoine, Aline, Karim, Mehdi, Martin, Bisma, Graham et Rémi. Je ne pourrai oublier de remercier Virginie pour sa grande générosité et sa précieuse aide et aussi de m’avoir fait découvrir le “ch’ti nord”.

Que Benoît trouve ici un chaleureux merci tout particulier pour avoir répondu à mes questions (nombreuses, elles étaient !), pour les agréables pauses café et surtout pour être toujours là quand ça allait mal. Choukran Béné !

Un super grand merci à mes amis pour leurs présences chaleureuses et leurs énormes encouragements : Zahéra, Bouthaina, Mohamed, Nassima, Faïza, Safia, Sana, Lounès, Youcef, Nacer Eddine, Siham, Amina, Saoussen, Abdelwahab, le grand frère Makram et son adorable fiancée, Imène et je n'oublie pas bien évidemment mon petit belge préféré Berti.

Je remercie chaleureusement "les .dz et ses sympatisants", en particulier Yacine Chitour, Djalil Kateb et Jean-Paul Chehab dit l'Oriental pour leurs encouragements et leurs conseils avisés.

Un immense merci à Niar Anis et Bouzar Cheikh, mes professeurs (au lycée et à la fac), pour m'avoir fait aimé les mathématiques grâce à leur légendaire pédagogie.

Je suis très reconnaissante aux personnes qui m'ont continuellement soutenue et encouragée sans cesse :

- \* Malika & Alain pour leur immense gentillesse et leur grande présence à mes cotés.
- \* Ma superbe Mamie Jacqueline pour tous ces nombreux et précieux conseils.
- \* Mes deux adorables chekies : Fatima et Selma de m'avoir tout simplement supportée (je sais que c'était dur !)

Enfin et surtout, je remercie du fond du cœur toute ma grande famille en Algérie : mes tontons Mohammed et Houari, Samia, toutes mes tata, mes cousins et cousines en particulier Fayssal.

Je ne remercierai jamais assez ma petite maman pour ses sacrifices et sa tendresse ainsi que mes chers Amina, Miriam, Mohamed El Amine, Seïf Eddine et Soummaya pour leur immense soutien sans faille et leur grand amour.

Les mots ne suffisent pas et ne suffiront jamais pour dire merci à mon ange gardien : mon papa adoré qui m'a appris la vie tout court.

*à la mémoire de mon papa...*



# Etude théorique et numérique de couplages entre écoulement et déformation mécanique du sol dans l'extraction d'hydrocarbures

**Résumé :** L'objet de cette thèse est l'étude de modèles mathématiques pour les phénomènes de couplage entre l'écoulement de fluides et les déformations mécaniques du sol lors de l'extraction d'hydrocarbures en milieu poreux. La production d'hydrocarbures dans des réservoirs homogènes très compactables peut induire un effondrement de la structure poreuse de la roche réservoir, qui à son tour peut endommager l'équipement des puits. Il nous faut donc inclure dans le modèle l'influence des déformations du solide sur l'écoulement et la prévision des phénomènes induits par l'exploitation du gisement sur l'environnement. On étudie à la fois des aspects théoriques et numériques de ce problème.

Dans la partie théorique, on considère deux modèles de couplage, d'une part (1) entre les déformations du sol et un écoulement linéaire compressible, et d'autre part (2) entre les déformations du sol et un écoulement diphasique non linéaire. Pour le modèle (1), on prouve l'existence et l'unicité d'une solution faible par la méthode de Galerkin. Le modèle (2) est fortement couplé et comporte une équation parabolique dégénérée; pour démontrer l'existence de solution, on considère une suite de problèmes uniformément paraboliques associés et on démontre qu'ils admettent une solution classique à l'aide du théorème de point fixe de Schauder. On s'appuie ensuite sur des estimations a priori pour des différences de translatées en espace et en temps et sur le théorème de Fréchet-Kolmogorov pour prouver la compacité relative des suites de solutions et établir la convergence d'une sous-suite vers une solution faible du problème initial.

Dans une seconde partie, on aborde l'étude numérique. On compare deux algorithmes pour les modèles de couplage. Le premier, utilisé par les ingénieurs de pétrole, est basé sur une méthode de point fixe; le second, que nous proposons et qui est plus robuste que le premier, s'appuie sur la méthode du gradient conjugué préconditionné.

**Mots Clés :** Ecoulement en milieu poreux, Déformations mécaniques, Equations paraboliques non linéaires dégénérées, Théorème de point fixe de Schauder, Estimations a priori, Théorème de Fréchet-Kolmogorov.

**Classification AMS :** 35K55, 35K65, 65F10, 65F50, 74F10, 74G15, 74G30, 74S05, 74S10.



# Table des matières

|                                                                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                                         | <b>11</b> |
| <b>1 Modélisation des réservoirs et aspects mathématiques</b>                                               | <b>17</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                                                  | 17        |
| 1.2 Le gisement d'hydrocarbures et le milieu poreux . . . . .                                               | 18        |
| 1.2.1 Caractéristiques du milieu poreux . . . . .                                                           | 18        |
| 1.2.2 Caractéristiques du réservoir pétrolier . . . . .                                                     | 22        |
| 1.3 Ecoulement et déformations du sol . . . . .                                                             | 22        |
| 1.4 Modélisation des réservoirs . . . . .                                                                   | 23        |
| <b>2 Etude d'un système couplé entre déformations mécaniques du sol et écoulement linéaire compressible</b> | <b>27</b> |
| 2.1 Le modèle mathématique . . . . .                                                                        | 28        |
| 2.1.1 Les notations . . . . .                                                                               | 29        |
| 2.1.2 Les hypothèses . . . . .                                                                              | 30        |
| 2.1.3 La formulation variationnelle . . . . .                                                               | 32        |
| 2.2 Le problème discret . . . . .                                                                           | 35        |
| 2.3 Estimations a priori . . . . .                                                                          | 39        |
| 2.4 Convergence vers la solution faible . . . . .                                                           | 45        |
| <b>3 Existence de solutions pour un modèle d'écoulement diphasique incompressible</b>                       | <b>61</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                                                  | 61        |
| 3.2 Le modèle mathématique . . . . .                                                                        | 62        |
| 3.2.1 Hypothèses . . . . .                                                                                  | 68        |
| 3.2.2 Notations . . . . .                                                                                   | 69        |
| 3.3 Problème régularisé ( $\mathcal{P}_\epsilon$ ) . . . . .                                                | 71        |
| 3.4 Estimations a priori uniformes en $\epsilon$ . . . . .                                                  | 88        |
| 3.5 Solutions faibles du Problème ( $\mathcal{P}$ ) . . . . .                                               | 100       |

|          |                                                                                                                                 |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Algorithmes de couplage entre les déformations du sol et l'écoulement linéaire</b>                                           | <b>107</b> |
| 4.1      | Le modèle mathématique . . . . .                                                                                                | 108        |
| 4.1.1    | Le modèle géomécanique . . . . .                                                                                                | 109        |
| 4.1.2    | Le modèle réservoir . . . . .                                                                                                   | 110        |
| 4.1.3    | Loi du couplage : Loi de Biot . . . . .                                                                                         | 112        |
| 4.2      | La discrétisation du problème . . . . .                                                                                         | 112        |
| 4.2.1    | Schéma de volumes finis pour le réservoir . . . . .                                                                             | 114        |
| 4.2.2    | La méthode des éléments finis pour la géomécanique . . . . .                                                                    | 117        |
| 4.2.3    | Discrétisation de la loi de Biot . . . . .                                                                                      | 118        |
| 4.2.4    | Ecriture matricielle pour le modèle linéaire . . . . .                                                                          | 118        |
| 4.2.5    | Condition inf-sup discrète . . . . .                                                                                            | 123        |
| 4.2.6    | Ecriture des opérateurs pour le modèle non linéaire . . . . .                                                                   | 124        |
| 4.2.7    | Méthode de Newton . . . . .                                                                                                     | 126        |
| 4.3      | Schéma itératif à pas fractionnaire vu comme la méthode de Gauss-Seidel pour le modèle linéaire . . . . .                       | 128        |
| 4.4      | Le schéma itératif à pas fractionnaire multi-échelle . . . . .                                                                  | 130        |
| 4.4.1    | Le schéma pour le modèle linéaire . . . . .                                                                                     | 130        |
| 4.4.2    | Le schéma pour le modèle non linéaire multi-échelle ( $q > 1$ ) . . . . .                                                       | 131        |
| 4.5      | La méthode du gradient conjugué préconditionné . . . . .                                                                        | 132        |
| 4.5.1    | Application de la méthode du gradient conjugué préconditionné pour le modèle linéaire et pour $q = 1$ . . . . .                 | 132        |
| 4.5.2    | Extension de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné pour les deux modèles quand $q > 1$ . . . . .                     | 134        |
| 4.5.3    | Comparaison du coût des opérations entre les deux schémas à pas fractionnaires et du gradient conjugué préconditionné . . . . . | 138        |
| 4.6      | Tests numériques . . . . .                                                                                                      | 138        |
| 4.6.1    | Modèle linéaire . . . . .                                                                                                       | 139        |
| 4.6.2    | Modèle non linéaire . . . . .                                                                                                   | 151        |
| 4.7      | Conclusion . . . . .                                                                                                            | 171        |

# Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude théorique et numérique de quelques modèles de couplage entre les écoulements de fluides en milieu poreux et les déformations mécaniques du sol lors de l'extraction des hydrocarbures. L'exploitation d'un gisement pétrolier nécessite la simulation d'écoulements en milieu poreux à la fois pour optimiser la récupération des hydrocarbures en place ainsi que pour en évaluer les impacts techniques, économiques et environnementaux. De plus il est essentiel de prendre en compte la déformation mécanique des sols induite par les écoulements (Cf. [SM94], [SM98], [TF93]). En effet, la production d'hydrocarbures dans des réservoirs homogènes très compactables peut induire un effondrement de la structure poreuse de la roche réservoir, qui à son tour peut endommager l'équipement des puits. Il nous faut donc inclure l'influence des déformations du solide sur l'écoulement et la prévision des phénomènes induits par l'exploitation du gisement sur l'environnement, ce qui explique la nécessité du couplage entre les écoulements et la géomécanique dans un milieu poreux déformable.

La thèse comporte quatre chapitres.

- Le Chapitre 1 est introductif; nous y présentons quelques modèles mathématiques utilisés par les ingénieurs en réservoirs et les spécialistes de la mécanique du sol pour décrire l'écoulement des fluides et la déformation du milieu poreux. Nous introduisons les paramètres physiques intervenant dans ces modèles. Nous expliquons la nécessité du couplage due à l'influence du comportement mécanique du milieu poreux sur l'écoulement des fluides et inversement. Nous considérons un modèle de couplage entre un écoulement compressible monophasique (huile) dans un milieu poreux et les déplacements du sol; un second modèle décrit le couplage entre un écoulement diphasique (eau-huile) dans un milieu poreux et les déplacements du sol.
- Dans le Chapitre 2, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de couplage entre un écoulement monophasique linéaire d'un fluide

compressible et les déformations d'un milieu poreux à comportement élastique. L'équation qui décrit l'écoulement linéaire du fluide compressible est donnée par

$$\phi_0 c_o \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{k}{\eta_o} \nabla p \right) = Q \quad \text{dans } \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

avec une condition de Dirichlet homogène sur une partie de la frontière, une condition de Neumann sur l'autre partie et une condition initiale sur la pression  $p$  du fluide; la constante  $c_o$  est le coefficient de compressibilité du fluide et la constante  $\eta_o$  sa viscosité. Le domaine  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et on suppose que  $T$  est un réel positif. Les fonctions inconnues sont la pression du fluide  $p$  et la porosité du milieu  $\phi$ . L'équation (1) est uniformément parabolique en  $p$ .

L'équation modélisant le comportement mécanique du milieu poreux est elliptique; plus précisément elle est donnée par l'équation d'élasticité linéaire

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{X} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

avec une condition de Dirichlet homogène sur une partie de la frontière et une condition de Neumann sur l'autre. Le tenseur des contraintes totales  $\underline{\sigma}$ , le tenseur des déformations

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right),$$

et la pression du fluide  $p$  sont liés par la relation

$$\underline{\sigma} = 2 \mu \epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - p \mathbf{I}. \quad (3)$$

Le système des équations (1) et (2) est couplé par la loi de Biot qui relie la variation des déplacements du milieu à sa porosité :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{sur } \Omega \times (0, T]. \quad (4)$$

Notre démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (1)-(2) s'appuie sur la méthode de Galerkin. Nous écrivons tout d'abord une formulation variationnelle du problème, où nous substituons la loi de Biot dans (1) pour ne plus conserver que les deux inconnues  $p$  et  $\mathbf{u}$ ; nous présentons également une notion de solution faible. Nous introduisons une triangulation  $\tau_h$  de diamètre  $h$  du domaine  $\Omega$ , et définissons le pas de discrétisation  $\Delta t$  de

l'intervalle  $[0, T]$ , ce qui nous permet de proposer un problème discret associé au problème (1)-(2) avec un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps. Nous montrons que les problèmes discrets admettent une solution unique  $(p_{h,\Delta t}, \mathbf{u}_{h,\Delta t})$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T; (H^1(\Omega))^2)$ . Nous dérivons ensuite des estimations a priori pour le couple  $(p_{h,\Delta t}, \mathbf{u}_{h,\Delta t})$  indépendantes de  $h$  et  $\Delta t$ . Plus précisément nous montrons que

- (i) la suite de fonctions  $\{p_{h,\Delta t}\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ;
- (ii) la suite de fonctions  $\{\mathbf{u}_{h,\Delta t}\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))^2)$ .

Pour montrer (i) et (ii), on s'appuie sur l'inégalité de Korn qui implique la coercivité de l'application

$$\mathbf{u} \rightarrow \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x},$$

et qui étend l'inégalité de Poincaré et on utilise également l'inégalité de Gronwall discrète. Ces estimations permettent de démontrer la convergence faible d'une sous-suite de  $\{(p_{h,\Delta t}, \mathbf{u}_{h,\Delta t})\}$  vers une limite  $(p, \mathbf{u})$ . On démontre que cette limite est solution faible du problème (1)-(4). Pour prouver l'unicité de la solution faible de ce problème, on s'appuie sur le fait que la fonction

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (5)$$

est absolument continue sur  $[0, T]$  pour tout  $w \in W$ . Ce chapitre est un résultat d'une collaboration avec D. Hilhorst.

- Le couplage présenté au Chapitre 3 est exprimé par la loi de Biot, qui relie la variation de la porosité du milieu à sa déformation mécanique. Cette loi ne suffit pas à décrire le couplage dans un milieu sensible à la teneur en eau “weakening water”, où le milieu absorbe aussi l'eau présente ou injectée artificiellement pour développer un processus de drainage forcé. Dans ce cas, la variation de la porosité est liée à la variation de la pression globale introduite par [CJ86] et à la saturation en eau. C'est ce qui nous a induit à démontrer, au Chapitre 3, l'existence d'une solution pour un système couplé entre écoulements diphasiques et déformations mécaniques dans un milieu poreux sensible à la teneur en eau. L'exemple géophysique le plus cité est le dépôt Ekofisk en mer du nord dont la roche est constituée essentiellement de craie. Le modèle mathématique que nous proposons est un système de deux équations couplées, la première uniformément

parabolique non linéaire et la seconde parabolique non linéaire dégénérée, où le couplage entre les équations d'évolution se situe dans les parties convection-diffusion et dans les dérivées en temps. Le modèle mathématique est donné par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(p)S) &= k \operatorname{div}(k_w(S) \nabla p_w) + \\ &+ \alpha(f_w(S^*)(\bar{p} - p)^+ - f_w(S)(\bar{p} - p)^-), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(p)(1 - S)) &= k \operatorname{div}(k_o(S) \nabla (p_w + p_c)) + \\ &+ \alpha(f_o(S^*)(\bar{p} - p)^+ - f_o(S)(\bar{p} - p)^-), \end{cases} \quad (6)$$

sur  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ , avec des conditions aux limites et des conditions initiales appropriées. Les inconnues sont la saturation de la phase mouillante  $S = S_w$  et la pression de la phase mouillante  $p_w$ . La démonstration de l'existence de solution s'appuie sur l'application du théorème de point fixe de Schauder pour un problème régularisé et donc en particulier sur des arguments liés à la compacité. Plus précisément, on récrit tout d'abord le problème sous une forme où les fonctions inconnues sont la saturation  $S$  et la pression globale  $p$  donnée par

$$p = p_w + \int_0^S \frac{k_o(u)}{M(u)} p'_c(u) \, du. \quad (7)$$

On considère ensuite une suite de problèmes régularisés et on démontre l'existence de solutions classiques  $(p_\epsilon, S_\epsilon)$  à l'aide du théorème de point fixe de Schauder. On établit ensuite des estimations a priori indépendantes du paramètre  $\epsilon$  pour la paire de fonctions  $(p_\epsilon, S_\epsilon)$ . Plus précisément, on montre que

- (i) si  $p_* \leq p_0 \leq p^*$ , où  $p_0$  est la condition initiale en pression, et  $p_*$  et  $p^*$  sont des constantes positives et si  $0 \leq S_0 \leq 1$ , où  $S_0$  est la condition initiale en saturation, alors  $p_* \leq p_\epsilon \leq p^*$  et  $0 \leq S_\epsilon \leq 1$ ; on s'appuie pour cela sur un théorème de comparaison lié au principe du maximum fort;
- (ii) la suite de fonctions  $\{\varphi_\epsilon(p_\epsilon)\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et la suite de fonctions  $\{\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p_\epsilon)\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ , où  $\varphi_\epsilon$  est une approximation de la fonction  $\varphi$ ;

(iii) on montre aussi des estimations sur la norme  $L^2$  de différences de translatés en espace et en temps d'une quantité liée à la fonction  $S_\epsilon$ .

On déduit de (ii) et d'un théorème de compacité que la suite  $\{\varphi_\epsilon(p_\epsilon)\}$  est relativement compacte dans  $L^2(Q_T)$  et par conséquent qu'une sous-suite converge fortement vers une limite  $\chi$  quand le paramètre  $\epsilon$  tend vers zéro. On utilise la croissance de la fonction  $\varphi$  pour montrer qu'une sous-suite de la suite  $\{p_\epsilon\}$  converge fortement vers  $\varphi^{-1}(\chi)$  quand le paramètre  $\epsilon$  tend vers zéro où  $\varphi^{-1}$  est la fonction réciproque de  $\varphi$ . On déduit de (iii) et du théorème de Fréchet-Kolmogorov qu'une quantité liée à  $S_\epsilon$  est relativement compacte dans  $L^2(Q_T)$  et par conséquent qu'une sous-suite converge fortement dans  $L^2(Q_T)$  quand le paramètre  $\epsilon$  tend vers zéro. On en déduit finalement l'existence d'une solution  $(p, S)$  dans  $(L^\infty(Q_T))^2$  du problème initial. Ce chapitre est le résultat d'une collaboration avec D. Hilhorst et R. Eymard.

- Au Chapitre 4, on propose des algorithmes de couplage entre les écoulements et les déformations du milieu poreux. Comme de nombreux simulateurs pour l'écoulement et pour la géomécanique existent déjà dans les industries pétrolières, Il est plutôt avantageux de combiner l'exploitation des deux types de logiciels : un modèle de réservoir pour pouvoir obtenir une bonne description des phases fluides et un modèle géomécanique pour pouvoir évaluer les déformations du sol. On utilise séquentiellement les modèles d'écoulement et d'équilibre mécanique si bien que l'information doit être échangée entre les deux logiciels.

Les inconnues principales sont les inconnues liées à l'écoulement multiphasique (saturations et pressions) et au déplacement. Nous nous appuyons sur la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations décrivant l'écoulement et sur celle des éléments finis standards pour la discrétisation de l'équation d'élasticité linéaire.

Les déplacements varient lentement en comparaison avec les inconnues du réservoir ; c'est pourquoi on se base sur une méthode numérique multi-échelle ; plus précisément les simulations sont effectuées sur des périodes de temps telles que les inconnues du réservoir sont calculées avec des pas de temps qui correspondent à des petites subdivisions de ces périodes, tandis que les équations de la mécanique sont résolues une seule fois par période.

Nous avons comparé deux algorithmes de couplage ; l'un d'entre eux est classiquement utilisé, alors que le second est une nouvelle approche que nous proposons. Ces algorithmes sont les suivants :

- (i) un algorithme itératif de couplage, qui consiste au calcul par une méthode de point fixe des inconnues liées au réservoir et au déplacement ; cet algorithme s'identifie à un algorithme de Gauss-Seidel dans le cas de la simulation d'un problème linéaire à une phase ;
- (ii) un algorithme itératif de couplage, basé sur la méthode du gradient conjugué. Une résolution des équations de la mécanique est suivie par deux séries de simulations de réservoir pendant la période.

En particulier, nous avons montré que l'algorithme de type gradient conjugué que nous avons proposé est plus rapide que le premier et qu'il est également plus robuste.

Ces deux algorithmes sont appliqués aussi bien à la simulation du problème linéaire (1)-(2) qu'à celui du couplage entre l'écoulement non linéaire diphasique entre eau et huile en milieu poreux avec l'équation pour les déformations mécaniques du sol.

Ce chapitre est le résultat d'une collaboration avec D. Hilhorst, R. Eymard et J. Laminie.

# Chapitre 1

## Modélisation des réservoirs et aspects mathématiques

### 1.1 Introduction

La modélisation des écoulements polyphasiques en milieu poreux joue un rôle central dans les problèmes liés à la production d'énergie à base d'hydrocarbures, ainsi que plus récemment dans les problèmes environnementaux de dépollution du sous-sol. De ce fait, les simulateurs de réservoirs pétroliers sont devenus un des principaux outils en ingénierie pétrolière du réservoir. Ils interviennent à toutes les étapes de l'exploitation d'un gisement et ont été l'objet depuis quelques années d'avancées technologiques remarquables dans plusieurs domaines. L'un des grands buts des simulations est la prévision de récupération des hydrocarbures. La précision de leurs prédictions dépend de la qualité des données, de la représentation des phénomènes physiques, de l'efficacité des algorithmes numériques.

La simulation du réservoir implique la prise en compte de différents phénomènes physiques : mécanique des fluides en milieu poreux, déformations du squelette, thermodynamique, thermochimie.

Le soutirage des fluides contenus dans un réservoir s'effectue au moyen de puits. En raison des dimensions importantes qui peuvent être atteintes par le réservoir (plusieurs kilomètres), un dispositif de production classique peut dénombrer plusieurs dizaines, voire centaines de puits d'injection et de production, qu'il est essentiel de modéliser de façon très précise. Mais le rôle des puits ne se limite pas à l'extraction des hydrocarbures. Les puits interviennent également en amont de la mise en production du gisement, durant une phase dite d'exploration, afin de caractériser les propriétés de la roche découverte.

## 1.2 Le gisement d'hydrocarbures et le milieu poreux

De plus en plus souvent, la modélisation pétrophysique des réservoirs s'appuie sur des études géostatistiques. Les forages d'exploration permettent de connaître la succession de couches géologiques sur une ligne verticale et les outils géostatistiques permettent de déterminer les caractéristiques du sol.

### 1.2.1 Caractéristiques du milieu poreux

Pour qu'une roche (Fig. 1.1) puisse constituer un réservoir, il est nécessaire qu'elle vérifie certaines propriétés et en particulier les trois suivantes :

- La roche doit posséder une certaine capacité de stockage ; cette propriété est caractérisée par la **porosité**.

Une roche sédimentaire est constituée de particules solides agglomérées ou cimentées, entre lesquelles existent des espaces, appelés **pores**, qui constituent des canaux microscopiques remplis de gaz ou de liquide.

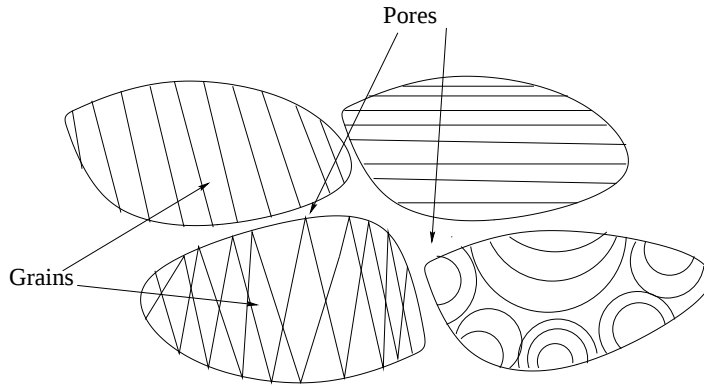


FIG. 1.1 – Echantillon de milieu poreux.

Considérons un échantillon de roche d'un volume total, ou volume apparent  $V_{Tot}$ . Celui-ci se compose d'un volume solide  $V_s$  et d'un volume de pores  $V_p = V_{Tot} - V_s$ . La porosité de la roche  $\phi$  est exprimée par le rapport

$$\phi = \frac{V_p}{V_{Tot}} = \frac{V_{Tot} - V_s}{V_{Tot}} = 1 - \frac{V_s}{V_{Tot}}.$$

La porosité est une fonction de l'espace qui est définie par maille au niveau discret. C'est une grandeur adimensionnée, généralement comprise entre 10 % (porosité faible) et 40% (porosité excellente).

- La roche doit également permettre la libre circulation des fluides ; cette propriété est caractérisée par la **perméabilité**.

La perméabilité est une fonction de l'espace et est définie par maille. Elle est homogène à une surface.

- Enfin, pour constituer un réservoir, il faut que la roche contienne une quantité suffisante d'hydrocarbures avec une concentration suffisante qui sont les  **saturations**.

La saturation d'un échantillon de roche en un fluide est le rapport du volume de ce fluide dans l'échantillon, sur le volume de pores  $V_{Tot} - V_s$  de l'échantillon. Ainsi, si  $i$  désigne un indice de phase, la saturation de cette phase est donnée par

$$S_i = \frac{V_i}{V_{Tot} - V_s},$$

où

$$\sum_i S_i = 1.$$

Dans le cas de problèmes diphasiques, on note  $S$  la saturation de **la phase mouillante**. Pour un problème d'écoulement huile-eau la phase mouillante est l'eau, tandis que dans le cas d'un écoulement huile-gaz la phase mouillante est l'huile. Par exemple, on utilise  $S$  pour noter la saturation de l'eau dans le problème d'écoulement huile-eau, c'est à dire

$$\begin{cases} S_w &= S, \\ S_o &= 1 - S, \end{cases}$$

où  $S_o$  est la saturation de la phase huile. En ce qui concerne les fluides en place dans un gisement, on distingue deux situations :

- Soit un seul fluide est présent dans la roche, ou éventuellement deux fluides dont l'un est immobile ; l'écoulement est alors qualifié de monophasique.
- Soit deux ou trois fluides circulent simultanément ; on dit alors que l'écoulement est polyphasique.

La pression du fluide  $i$  est notée par  $p_i$ . Dans le cas où la pression capillaire est négligeable, on peut utiliser une seule variable  $p$  pour représenter la pression dans tout le milieu.

### Pression capillaire et saturation résiduelle

A l'échelle du pore, il apparaît, de part et d'autre de l'interface séparant les fluides  $i$  et  $j$ , une différence de pression (fonction de la tension interfaciale). C'est la pression capillaire. Localement, on peut la définir en tout point du milieu diphasique huile-eau par

$$p_c = p_o - p_w.$$

On remarque que  $p_c$  est une fonction monotone décroissante de la saturation de la phase mouillante (Fig. 1.2),  $S_m$  et  $S_M$  sont les **saturation résiduelles** qui sont les saturations minimale et maximale dans le milieu poreux, soit

$$S_m \leq S \leq S_M.$$

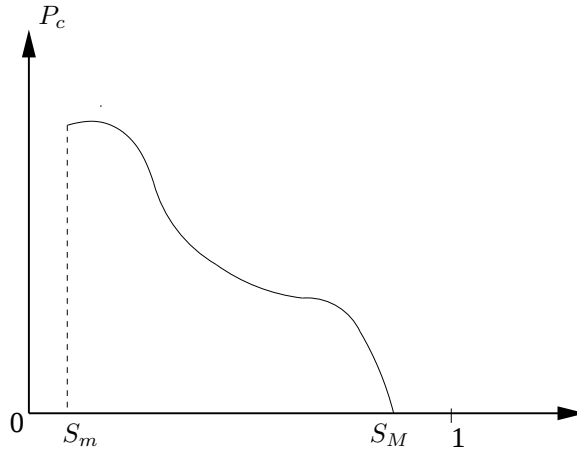


FIG. 1.2 – Exemple de pression capillaire.

On fait souvent l'approximation  $S_m = 0$  et  $S_M = 1$ .

### Loi de Darcy et perméabilité relative

On considère la loi de Darcy généralisée dans l'écoulement monophasique

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g} \nabla z), \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{g}$  est l'accélération de la gravité et  $z$  est la coordonnée verticale dirigée vers le haut. Si le milieu contient deux fluides non miscibles, on admet, en général, que

l'écoulement de chaque fluide est régi par la loi de Darcy. Dans cette thèse, on considère toujours un problème huile-eau où les vitesses de déplacement des deux fluides sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_w &= -k_w \left( \nabla p_w - \rho_w \mathbf{g} \nabla z \right), \\ \mathbf{v}_o &= -k_o \left( \nabla p_o - \rho_o \mathbf{g} \nabla z \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $k_w$  et  $k_o$  sont les perméabilités effectives de l'eau et de l'huile,  $\rho_w$  et  $\rho_o$  leurs masses volumiques et  $\vec{\mathbf{v}}_w$  et  $\vec{\mathbf{v}}_o$  leurs vitesses. D'après les connaissances expérimentales géophysiques,  $k_w$  et  $k_o$  sont des fonctions de la saturation croissante et décroissante respectivement (Fig. 1.3). En pratique, on exprime  $k_w$  et  $k_o$  comme le produit de la perméabilité absolue (la perméabilité du milieu poreux) et de la perméabilité relative qui est notée par  $kr_{wo}$  pour l'eau et  $kr_{ow}$  pour l'huile,

$$\begin{cases} k_w(\mathbf{x}, S_w) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \frac{kr_{wo}(S)}{\mu_w}, \\ k_o(\mathbf{x}, S_o) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \frac{kr_{ow}(S)}{\mu_o}. \end{cases} \quad (1.3)$$

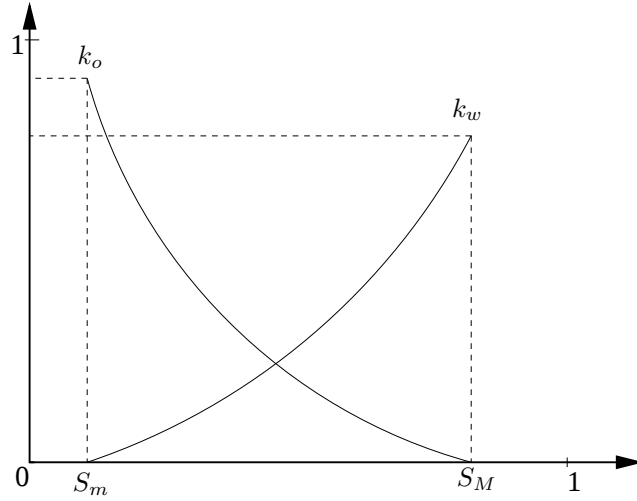


FIG. 1.3 – Exemple de perméabilités effectives.

### 1.2.2 Caractéristiques du réservoir pétrolier

Un réservoir pétrolier est une formation du sous-sol, poreuse et perméable, dont les contours sont limités par des barrières imperméables (argiles, aquifères) qui piègent les hydrocarbures.

Sous l'action naturelle de la pesanteur, les fluides se répartissent de façon verticale dans la cavité comme l'illustre la Figure 1.4.

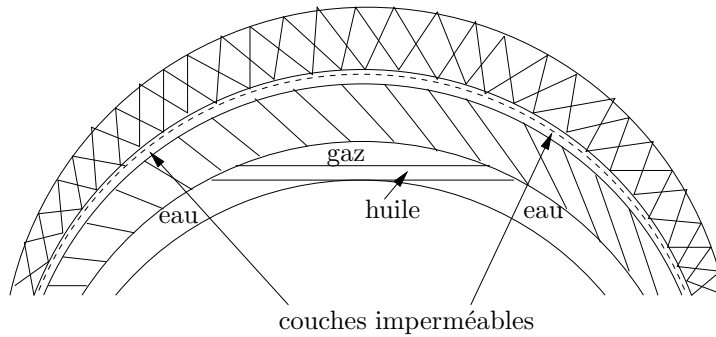


FIG. 1.4 – Coupe d'un gisement pétrolier.

## 1.3 Ecoulement et déformations du sol

Dans le cas de réservoirs homogènes faiblement consolidés et très compactables contenant un fluide peu compressible, la compaction de la roche réservoir augmente les quantités récupérables d'un champ pétrolier et il est donc nécessaire de savoir évaluer la contribution de la déformation de la roche sur la production. Par contre, il peut y avoir aussi des effets très négatifs. En effet, lors de l'exploitation d'un gisement pétrolier, la diminution de la pression des pores induite par l'extraction du fluide peut provoquer, pour les matériaux très poreux, un effondrement de la structure poreuse de la roche réservoir sous le poids des matériaux sus-jacents. Il peut ainsi s'ensuivre des effets environnementaux indésirables comme l'affaissement du sol. L'étude des cas répertoriés dans la littérature montre que l'affaissement du sol et les compactations de grandes amplitudes concernent deux grands types de formations : les sédiments détritiques (sables, grès, sables argileux, silt) et les craies. Nous présentons ci-dessous des exemples de travaux qui ont été effectués pour lutter contre les conséquences de la subsidence, c'est-à-dire l'affaissement du sol :

- Au Vénézuéla, pour protéger le sol sablonneux près du lac Maracaibo, un double système de digues de plusieurs kilomètres de longueur (de 5km à 30

km) a été construit : une première digue le long de la côte pour protéger la zone subsidente des eaux du lac et un deuxième système de digues à l'intérieur des terres pour protéger la zone subsidente des eaux de ruissellement ;

- Le dépôt de la mer du nord est constitué de craie et pour s'adapter à la subsidence du gisement d'Ekofisk, les plateformes ont du être relevées de six mètres ;
- Aux Pays-Bas, pour des raisons économiques et écologiques, la subsidence doit être limitée suivant les zones à quelques centimètres ou dizaines de centimètres dans le cas du gisement de Groningue.

## 1.4 Modélisation des réservoirs

Les équations différentielles qui décrivent l'écoulement diphasique de deux fluides incompressibles immiscibles ont fait l'objet de nombreux travaux. Le système qui régit ce phénomène est donné [GMT96] par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \rho_w S \right) + \operatorname{div} \left( \rho_w \mathbf{v}_w \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \rho_o (1 - S) \right) + \operatorname{div} \left( \rho_o \mathbf{v}_o \right) = 0, \\ p_c = p_o - p_w, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}_i$  est la vitesse de déplacement de la phase  $i$  introduite dans (1.2), pour  $i, j \in \{w, o\}$  et  $i \neq j$ , avec des conditions aux limites et initiales appropriées. Selon les notations et les définitions introduites dans la section 1.2.1,  $w$  est la phase mouillante qui est ici la phase eau,  $o$  la phase non mouillante qui est ici la phase huile. On récrit le système (1.4) en utilisant la notion de pression globale. On prend la somme de la première et la seconde équation du système (1.4) et on utilise le fait que comme les deux fluides sont incompressibles, leurs densités volumiques  $\rho_w$  et  $\rho_o$  sont constantes ainsi que le fait que le milieu est peu déformable  $\phi = \phi(\mathbf{x})$  ; on substitue l'expression de la pression capillaire  $p_c$  de (1.4) pour obtenir

$$\operatorname{div} \left( (k_w(S) + k_o(S)) \nabla p_w + k_o(S) \nabla p_c - (k_w(S) \rho_w + k_o(S) \rho_o) \mathbf{g} \right) = 0, \quad (1.5)$$

où  $k_o(S)$  et  $k_w(S)$  sont les perméabilités de phases introduites dans (1.3). Puisque  $k_w(S) + k_o(S) \neq 0$ , on écrit encore

$$\operatorname{div} \left( (k_w(S) + k_o(S)) \left\{ \nabla p_w + \frac{k_o(S)}{k_w(S) + k_o(S)} \nabla p_c \right\} - \{k_w(S) \rho_w + k_o(S) \rho_o\} \mathbf{g} \right) = 0. \quad (1.6)$$

On note  $p$  la pression globale introduite [CJ86] qui s'exprime sous la forme

$$p = p_w + \int_0^S \frac{k_o(u)}{M(u)} p'_c(u) du. \quad (1.7)$$

On substitue (1.7) dans (1.6) pour obtenir l'équation elliptique en pression

$$\operatorname{div} \left( (k_w(S) + k_o(S)) \nabla p \right) = \operatorname{div} \left( (k_w(S) \rho_w + k_o(S) \rho_o) \mathbf{g} \right). \quad (1.8)$$

La première équation du système (1.4) s'écrit

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} S - \operatorname{div} \left( k_w(S) \nabla p \right) + \operatorname{div} \left( \frac{k_w(S) k_o(S)}{k_w(S) + k_o(S)} \nabla p_c \right) = \operatorname{div} \left( \rho_w \mathbf{g} \right). \quad (1.9)$$

Si l'on pose

$$\psi(S) = \int_0^S -\frac{k_o(u) k_w(u)}{M(u)} p'_c(u) du, \quad (1.10)$$

on obtient l'équation parabolique non linéaire

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} S - \Delta \psi(S) - \operatorname{div} \left( k_w(S) \nabla p \right) = \operatorname{div} \left( \rho_w \mathbf{g} \right), \quad (1.11)$$

si bien que le système (1.4) s'écrit

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial}{\partial t} S - \Delta \psi(S) - \operatorname{div} \left( k_w(S) \nabla p \right) = \operatorname{div} \left( \rho_w \mathbf{g} \right), \\ \operatorname{div} \left( (k_w(S) + k_o(S)) \nabla p \right) = \operatorname{div} \left( (k_w(S) \rho_w + k_o(S) \rho_o) \mathbf{g} \right). \end{cases} \quad (1.12)$$

On remarque que l'équation en saturation dans (1.12) est parabolique dégénérée puisque

$$k_w(0) = k_o(1) = p'_c(0) = 0.$$

L'existence de solutions faibles pour ce système d'équations a été montrée avec des hypothèses variées [AD85], [AKM90], [Arb92], [CJ86], [KL84] et [KS77]. Kruzkov

et Sukorjanskii [KS77] établissent l'existence de solutions classiques en supposant l'équation en saturation uniformément parabolique. Kroener et Luckhaus [KL84] imposent des hypothèses sur les conditions initiales et sur les conditions aux limites pour assurer que la saturation  $S$  est strictement positive et strictement inférieure à 1 ; ils obtiennent ainsi un système où l'équation en pression est uniformément parabolique, ce qui les mène à un résultat d'existence. On citera aussi les résultats d'existence de solution dus à Antoncev, Kazhikhov et Monahov [AKM90], Chavent et Jaffré [CJ86] et à Alt et Di Benedetto [AD85]. Plus récemment Chen [Che01] a reconsidéré le système (1.12), en s'appuyant en particulier sur les articles d'Arbogast [Arb92] et d'Alt et Luckhaus [AL83] pour montrer l'existence de solutions faibles du problème dégénéré ; il obtient une solution faible comme limite de solutions de problèmes discrets en temps. La dégénérescence de ce système fortement non linéaire (1.12) rend la démonstration de l'unicité de la solution et l'étude de la régularité très difficile. En particulier [AKM90] et [KS77] ont seulement démontré l'unicité de solutions classiques tandis que Chen a prouvé dans une série de travaux concernant le problème dégénéré décrivant l'écoulement diphasique [Che01] et [Che02] l'unicité de la solution faible en supposant dans le premier que la pression globale est continue lipschitzienne en espace, et en affaiblissant les hypothèses de régularité sur la solution dans le second. Des études numériques de ce problème ont également été effectuées par exemple par Chen et Ewing [CE97] qui ont montré la convergence de la méthode des éléments finis mixtes vers la solution faible et par Michel [Mic03] qui a prouvé l'existence de solutions faibles obtenues comme limites de solutions d'un schéma de volumes finis. On remarquera que ces travaux ne concernent que des systèmes d'équations décrivant un écoulement diphasique où la porosité  $\phi$  est une fonction connue qui ne dépend que de l'espace, ce qui revient à faire l'hypothèse que l'écoulement a lieu dans un milieu peu déformable.

L'originalité de cette thèse est qu'elle porte sur le couplage entre écoulement monophasique ou diphasique et géomécanique ; plus précisément nous supposons le milieu poreux déformable et considérons des aspects théoriques et numériques du couplage entre l'écoulement et la géomécanique ou bien quand ce couplage est donné :

- par la loi de Biot (2.8), dans les chapitres 1 et 3 ;
- ou bien quand il s'exprime par la dépendance de la porosité  $\phi$  en la pression globale  $p$ , dans le chapitre 2.



# Chapitre 2

## Etude d'un système couplé entre déformations mécaniques du sol et écoulement linéaire compressible

### Introduction

Dans ce chapitre, on démontre l'existence et l'unicité de la solution pour un problème décrivant le couplage entre l'écoulement monophasique linéaire d'un fluide compressible et les déplacements d'un milieu poreux hétérogène à comportement élastique. Dans ce but, on s'inspire des travaux de Zenicek [Zen84] qui établit l'existence et l'unicité de la solution lors de l'écoulement d'un fluide incompressible dans un milieu poreux homogène. L'écoulement monophasique linéaire du fluide compressible est modélisé par une équation uniformément parabolique (2.1) dont les inconnues sont la pression du fluide  $p$  et la porosité du milieu  $\phi$  avec une condition initiale  $p_0$  et des conditions au bords mixtes. L'équation de la mécanique est modélisée par une équation d'élasticité linéaire dont l'inconnue est le déplacement  $\mathbf{u}$ . Finalement le système est fermé grâce à la loi de Biot qui relie les variations de la porosité à celle du déplacement.

Le chapitre s'organise de la façon suivante. Dans la Section 2.1, on présente le contexte physique du problème que l'on étudie. On introduit les notations utilisées et les hypothèses sur les données ainsi qu'une notion de solution faible. Dans la Section 2.2, on considère des problèmes discrets associés, que l'on obtient à l'aide de la méthode de Galerkin et d'une discrétisation en temps de type Euler implicite. Plus précisément, on s'appuie sur une discrétisation par éléments finis  $\mathbb{P}^1$  ; on définit une triangulation  $\tau_h$  de diamètre  $h$  du domaine  $\Omega$ , un pas de discrétisation  $\Delta t$  de l'intervalle  $[0, T]$  et on démontre l'existence de solution  $(p_{h,\Delta t}, \mathbf{u}_{h,\Delta t})$ . On présente

ensuite dans la Section 2.3 des estimations a priori uniformes en  $h$  et  $\Delta t$  pour les solutions approchées. Finalement, dans la Section 2.4, on montre que la solution approchée converge vers une solution faible du problème continu quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro et on démontre l'unicité de cette solution faible.

## 2.1 Le modèle mathématique

Le comportement mécanique du milieu poreux est modélisé par une équation d'élasticité linéaire dont l'inconnue est le vecteur de déplacement du sol. Comme ce milieu ne subit qu'une petite déformation, on écrit les équations de l'écoulement et de géomécanique en coordonnées euliennes. On note  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  le domaine géométrique de la géomécanique et de l'écoulement monophasique d'un fluide compressible. Le couplage entre la géomécanique et l'écoulement de Darcy est donné par la loi de Biot qui relie la variation de la porosité du milieu à sa déformation mécanique. Pour modéliser ce problème, on s'appuie sur un système d'équations qui représente l'évolution des inconnues : la pression de fluide dans les pores  $p$ , la porosité  $\phi$  et le déplacement  $\mathbf{u}$  du milieu poreux.

**L'écoulement linéaire compressible** est donné par

$$\phi_0 c_o \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{k}{\eta_o} \nabla p \right) = Q \quad \text{dans } Q_T, \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} p = 0 & \text{sur } \Gamma_{p1} \times (0, T], \\ \frac{k}{\eta_o} \nabla p \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \Gamma_{p2} \times (0, T], \end{cases} \quad (2.2)$$

et la condition initiale

$$p(\cdot, 0) = p_0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (2.3)$$

**la géomécanique** est modélisée par l'équation d'élasticité linéaire

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{X} = 0 \quad \text{dans } \overline{Q}_T, \quad (2.4)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_{u1} \times [0, T], \\ \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} & \text{sur } \Gamma_{u2} \times [0, T], \end{cases} \quad (2.5)$$

ou alternativement

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) - \nabla p + \mathbf{X} = 0 \text{ dans } \overline{Q}_T, \quad (2.6)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}_1} \times [0, T], \\ \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} - p \mathbf{n} &= \mathbf{q} & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}_2} \times [0, T], \end{cases} \quad (2.7)$$

tandis que **la loi de Biot** permet de lier la variation de la porosité du milieu à celle de son déplacement

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{sur } Q_T, \quad (2.8)$$

où  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ .

### 2.1.1 Les notations

On introduit les notations suivantes

- $\Gamma$  est la frontière de  $\Omega$  telle que  $\Gamma = \Gamma_{p_1} \cup \Gamma_{p_2} = \Gamma_{\mathbf{u}_1} \cup \Gamma_{\mathbf{u}_2}$ , où  $\Gamma_{p_1}$ ,  $\Gamma_{p_2}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{u}_1}$  et  $\Gamma_{\mathbf{u}_2}$  sont des sous-ensembles de  $\Gamma$ ;
- $p = p(\mathbf{x}, t)$  est la pression du fluide;
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur des déplacements du squelette;
- $\phi_0$  est la porosité initiale du milieu;
- $c_o$  est la compressibilité du fluide;
- $\eta_o$  est la viscosité du fluide;
- $k = k(\mathbf{x})$  est la perméabilité du milieu poreux;
- $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes totales tel que

$$\underline{\sigma} = \sigma - p \mathbf{I}, \quad (2.9)$$

où le tenseur des contraintes effectives  $\sigma$  est donné par

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2 \mu \epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}, \quad (2.10)$$

et le tenseur des déformations  $\epsilon$  est donné par

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

- $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

### 2.1.2 Les hypothèses

On fait les hypothèses suivantes

( $\mathcal{H}_0$ )  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  régulière de classe  $C^2$  tel que

$$\overline{\Gamma}_{\mathbf{u}_1} \cap \overline{\Gamma}_{\mathbf{u}_2} = \Gamma_{p_1} \cap \Gamma_{p_2} = \emptyset \text{ et } \text{mes}(\Gamma_{\mathbf{u}_1}) > 0; \quad (2.11)$$

( $\mathcal{H}_1$ )  $k \in L^2(\Omega)$ ,  $0 < k_* \leq k(\mathbf{x}) \leq k^*$ ;

( $\mathcal{H}_2$ )  $Q \in L^2(Q_T)$ ;

( $\mathcal{H}_3$ )  $g \in L^2(\Gamma_{p_2} \times (0, T))$ ;

( $\mathcal{H}_4$ )  $\mathbf{X} \in AC\left([0, T]; (L^2(\Omega))^3\right)$  et  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \in L^2\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$ ;

( $\mathcal{H}_5$ )  $\mathbf{q} \in AC\left([0, T]; (L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3\right)$  et  $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \in L^2\left(0, T; (L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3\right)$ ;

( $\mathcal{H}_6$ )  $p_0 \in H^2(\Omega)$ ;

On rappelle ci-dessous la définition des espaces de fonctions absolument continues

#### Définition 2.1.1

Soit  $\mathbf{Y}$  un espace de Banach, on dénote par  $\|\cdot\|_{\mathbf{Y}}$  sa norme. Une fonction  $\varphi$  de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbf{Y}$  est dite absolument continue si :

- pour tout  $\epsilon > 0$ , pour toute famille d'intervalles  $\{[a_i, b_i]\}_{i=1, \dots, n}$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\cup_{i=1, \dots, n} [a_i, b_i] = [a, b]$  et  $]a_i, b_i[ \cap ]a_j, b_j[ = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, n\}$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta \text{ alors } \sum_{i=1}^n \|\varphi(b_i) - \varphi(a_i)\|_{\mathbf{Y}} < \epsilon. \quad (2.12)$$

L'espace des fonctions absolument continues est noté  $AC([a, b]; \mathbf{Y})$ .

### Espaces de discrétisation

Soit  $\tau_h$  une triangulation arbitraire du domaine  $\Omega$ . On note  $h$  le diamètre de la triangulation tel que

$$h = \sup_{K \in \tau_h} \text{diam } K,$$

où

$$\text{diam } K = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

On associe à la triangulation  $\tau_h$  un espace de dimension finie  $Z_h$ , tel que

- $Z_h \subset C(\overline{\Omega})$  ;
- chaque fonction  $v \in Z_h$  est déterminée d'une façon unique par ses valeurs aux sommets des tétraèdres de  $\tau_h$  ;
- la restriction de  $v \in Z_h$  sur chaque tétraèdre est linéaire.

On définit aussi les espaces fonctionnels

$$W = \left\{ w \in H^1(\Omega), \quad w = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{p_1} \right\},$$

et

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in \left( H^1(\Omega) \right)^3, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}_1} \right\},$$

ainsi que les espaces

$$W_h = \left\{ w_h \in Z_h, \quad w_h = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{p_1} \right\},$$

et

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (Z_h)^3, \quad \mathbf{v}_h = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}_1} \right\}.$$

On a les propriétés

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^3} = 0, \quad (2.13)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{w \in W_h} \|g - w\|_{H^1(\Omega)} = 0, \quad (2.14)$$

pour tout  $\mathbf{f} \in \mathbf{V}$  et pour tout  $g \in W$ .

### 2.1.3 La formulation variationnelle

On substitue (2.8) dans (2.1), on multiplie par  $w$  arbitraire dans  $W$  et on intègre sur  $\Omega$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \phi_0 c_o \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} w \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} w \, d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Omega} Q w \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{p_2}} g w \, ds. \end{aligned} \quad (2.15)$$

On va montrer que

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{u_2}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad (2.16)$$

pour tout  $\mathbf{v} \in V$ . On rappelle tout d'abord la formule d'intégration par partie

$$\langle \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{((H^1(\Omega))^3)', (H^1(\Omega))^3} = \langle \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3, (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3} - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

pour tout  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  dans  $\left(H^1(\Omega)\right)^3$ , où

$$\sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \, \epsilon_{ij}(\mathbf{u}),$$

si l'on note  $\sigma(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij})_{i,j}$  et  $\epsilon(\mathbf{u}) = (\epsilon_{ij})_{i,j}$ . On multiplie (2.4) par  $\mathbf{v}$  arbitraire dans  $\mathbf{V}$  et on intègre sur  $\Omega$ . On utilise la formule d'intégration (2.17) et la formule de Green pour obtenir

$$- \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{u_2}} (\sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{u_2}} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

où l'on a aussi substitué (2.9). On déduit finalement (2.16).

On rappelle ci-dessous des résultats standards qui seront utiles dans la suite.

#### Lemme 2.1.2

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  arbitraires dans  $\left(H^1(\Omega)\right)^3$ ; on a

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 2\mu \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{u})) \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

où  $\operatorname{tr}(\epsilon(\cdot))$  est la trace du tenseur des déformations  $\epsilon(\cdot)$ .

*Démonstration.*

On utilise la définition (2.10) de  $\sigma$  pour en déduire l'égalité

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = 2\mu \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathbf{I}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

ce qui implique l'égalité (2.19) par les identités ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : \epsilon(\mathbf{v}) &= \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{v})) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{u})) \quad \text{pour tout } \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3. \end{aligned} \tag{2.20}$$

□

**Lemme 2.1.3 (Inégalité de Korn)** *Il existe une constante positive  $C = C(\Omega)$  telle que*

$$\int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \geq C \|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \tag{2.21}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

*Démonstration.*

voir la démonstration du Théorème 6.3-4 de [Cia00], p. 292.

□

**Corollaire 2.1.4** *Il existe une constante positive  $C$  telle que*

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \geq C \|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \tag{2.22}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

On définit le sous-espace

$$\mathcal{H} = \{\psi \in C^2[0, T] \cap C(\mathbb{R}^+) \text{ telle que } \psi(t) = 0 \text{ pour tout } t \geq T\}.$$

On multiplie (2.15) et (2.16) par  $\psi$  arbitraire dans  $\mathcal{H}$  et on intègre sur  $(0, T)$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & -\phi_0 c_o \int_0^T \int_{\Omega} p w \psi'(t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p \cdot \nabla w \psi(t) d\mathbf{x} dt - \\
 & - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} w \psi'(t) d\mathbf{x} dt = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega} Q w \psi(t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{p_2}} g w \psi(t) ds dt + \\
 & + \phi_0 c_o \int_{\Omega} p_0 w \psi(0) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 w \psi(0) d\mathbf{x},
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

pour tout  $w \in W$  et

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \psi(t) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \psi(t) d\mathbf{x} dt = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} \psi(t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{u_2}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \psi(t) ds dt,
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

**Définition 2.1.5 (Solution faible)**

La paire de fonctions  $(p, \mathbf{u}) \in L^2(0, T; W) \times L^\infty(0, T; \mathbf{V})$  est une solution faible du problème (2.1)-(2.8) si

- (i) les égalités intégrales (2.23)-(2.24) sont vérifiées pour tout  $w \in W$ , pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  et pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ ,
- (ii) la fonction

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{2.25}$$

est absolument continue sur  $[0, T]$  pour tout  $w \in W$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

**Théorème 2.1.6**

Le problème (2.1)-(2.8) admet une unique solution faible  $(p, \mathbf{u})$ .

**Proposition 2.1.7**

Il existe une et une seule fonction  $\mathbf{u}_0$  dans  $(H^2(\Omega))^3$  vérifiant le problème

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_0) = \nabla p_0 - \mathbf{X}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.26)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 &= 0 & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}_1}, \\ \sigma(\mathbf{u}_0) \mathbf{n} &= p_0 \mathbf{n} + \mathbf{q}_0 & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}_2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

On remarque que (2.26)-(2.27) coïncide avec (2.6)-(2.7) au temps initial.

*Démonstration.*

Il s'agit de montrer que le problème

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_0) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\nabla p_0 - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} (p_0 \mathbf{n} + \mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad (2.28)$$

admet une solution unique dans  $\mathbf{V}$ , pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Comme  $\nabla p_0 - \mathbf{X}_0 \in (L^2(\Omega))^3 \subset (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^3$  et  $p_0 \mathbf{n} + \mathbf{q}_0 \in (L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3 \subset (L^{\frac{4}{3}}(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3$ , on déduit du Théorème 6.3-5 de [Cia00], p. 295 l'existence et l'unicité de la solution  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$  de (2.26)-(2.27). On utilise le Théorème 6.3-6, de [Cia00], p. 296 et l'hypothèse  $(\mathcal{H}_0)$  pour conclure que  $\mathbf{u}_0 \in (H^2(\Omega))^3$ , ce qui achève la démonstration de la Proposition 2.1.7.  $\square$

**Remarque 2.1.1** L'hypothèse  $(\mathcal{H}_0)$  n'est pas nécessaire dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet pour appliquer le Théorème 6.3-6 de régularité, de [Cia00], mais elle l'est dans le cas de conditions aux limites mixtes Dirichlet et Neumann.

## 2.2 Le problème discret

Soit  $\Delta t$  un pas de discrétisation de l'intervalle  $[0, T]$ . On définit  $t_i = i \Delta t$  pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  et on suppose que  $t_0 = 0$  et  $t_m = T$ . On définit pour tout  $i = 1, \dots, m$ , le système linéaire

$$\begin{aligned} \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_h^i - p_h^{i-1}) w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_h^i \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) w_h \, d\mathbf{x} = \\ = \Delta t \int_{\Omega} Q^i w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Gamma_{p_2}} g^i w_h \, ds, \end{aligned} \quad (2.29)$$

pour tout  $w_h \in W_h$  et

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^i \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{u_2}} \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{v}_h ds, \quad (2.30)$$

pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ .

On définit pour tout  $i = 1, \dots, m$  les approximations suivantes

$$\begin{aligned} Q^i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(., t) dt, \\ g^i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(., t) dt, \\ \mathbf{X}^i &= \mathbf{X}(., t_i), \\ \mathbf{q}^i &= \mathbf{q}(., t_i). \end{aligned} \quad (2.31)$$

On note par  $\mathbf{u}_h^0$  l'interpolée de la solution  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$  dans  $\mathbf{V}_h$  et par  $p_h^0$  l'interpolée de  $p_0$  dans  $W_h$ . On déduit du (p. 80, [Bra01]) les estimations suivantes,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^0 - \mathbf{u}_0\|_{(H^1(\Omega))^3} &\leq C h \|\mathbf{u}_0\|_{(H^2(\Omega))^3}, \\ \|\mathbf{u}_h^0\|_{(H^1(\Omega))^3} &\leq \|\mathbf{u}_h^0 - \mathbf{u}_0\|_{(H^1(\Omega))^3} + \|\mathbf{u}_0\|_{(H^1(\Omega))^3} \\ &\leq \tilde{C} \|\mathbf{u}_0\|_{(H^2(\Omega))^3}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

et

$$\begin{aligned} \|p_h^0 - p_0\|_{(H^1(\Omega))^3} &\leq C h \|p_0\|_{(H^2(\Omega))^3}, \\ \|p_h^0\|_{H^1(\Omega)} &\leq \tilde{C} \|p_0\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $\tilde{C}$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $h$ .

**Lemme 2.2.1 (Solution du problème discret)**

*Le système linéaire (2.29)-(2.30) admet une solution unique  $(p_h^i, \mathbf{u}_h^i)$  dans  $W_h \times \mathbf{V}_h$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ .*

*Démonstration.*

On va montrer par récurrence sur  $i$  que le système (2.29)-(2.30) admet une solution unique pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . On définit pour tout  $i$  l'hypothèse de récurrence  $(\mathcal{R}^i)$  par

$(\mathcal{R}^i)$ : le problème (2.29)-(2.30) admet une solution unique  $(p_h^i, \mathbf{u}_h^i)$  dans  $W_h \times \mathbf{V}_h$ .

**Initialisation**  $i = 1$

On va prouver que  $(\mathcal{R}^1)$  est vraie. Pour montrer l'existence de la solution, il suffit de montrer son unicité. On suppose qu'il existe deux paires de solutions  $(p_{1,h}^1, \mathbf{u}_{1,h}^1)$  et  $(p_{2,h}^1, \mathbf{u}_{2,h}^1)$  du système (2.29)-(2.30). Ces deux paires vérifient

$$\begin{aligned} \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_{1,h}^1 - p_h^0) w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{1,h}^1 \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_h^0) w_h \, d\mathbf{x} = \\ = \Delta t \int_{\Omega} Q^1 w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Gamma_{p_2}} g^1 w_h \, ds, \end{aligned} \quad (2.34)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_{2,h}^1 - p_h^0) w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{2,h}^1 \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_{2,h}^1 - \mathbf{u}_h^0) w_h \, d\mathbf{x} = \\ = \Delta t \int_{\Omega} Q^1 w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Gamma_{p_2}} g^1 w_h \, ds, \end{aligned} \quad (2.35)$$

pour tout  $w_h \in W_h$ , ainsi que

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{1,h}^1) : \epsilon(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_{1,h}^1 \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{X}^1 \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{u_2}} \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{v}_h \, ds, \quad (2.36)$$

et

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{2,h}^1) : \epsilon(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_{2,h}^1 \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{X}^1 \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{u_2}} \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{v}_h \, ds, \quad (2.37)$$

pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ .

On soustrait (2.35) de (2.34) et (2.37) de (2.36), pour obtenir

$$\begin{aligned} \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1) w_h \, d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla (p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1) \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1) w_h \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

pour tout  $w_h \in W_h$  et

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1) : \epsilon(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1) \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = 0, \quad (2.39)$$

pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ . On prend  $w_h = p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1$  et  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1$ . On prend la somme des deux équations (2.38) et (2.39) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1)^2 d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla(p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1)^2 d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1) : \epsilon(\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Notons que par le Corollaire 2.1.4, on a

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1) : \epsilon(\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1) d\mathbf{x} \geq C \|\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \quad (2.41)$$

où  $C$  est une constante positive. Par conséquent, l'égalité (2.40), l'inégalité (2.41) et l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  impliquent que

$$\|p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 = 0. \quad (2.42)$$

Donc

$$p_{1,h}^1 - p_{2,h}^1 = 0,$$

et

$$\mathbf{u}_{1,h}^1 - \mathbf{u}_{2,h}^1 = 0.$$

### Démonstration de l'existence pour $i$ arbitraire

On suppose que  $(\mathcal{R}^{i-1})$  est vraie et on démontre  $(\mathcal{R}^i)$ . Puisque le problème (2.29)-(2.30) est linéaire, l'unicité de la solution suffit. On suppose qu'il y a deux paires de solutions  $(p_{1,h}^i, \mathbf{u}_{1,h}^i)$  et  $(p_{2,h}^i, \mathbf{u}_{2,h}^i)$ . Par le même raisonnement que pour  $(\mathcal{R}^1)$  on déduit que

$$\|p_{1,h}^i - p_{2,h}^i\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{1,h}^i - \mathbf{u}_{2,h}^i\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 = 0,$$

soit encore

$$p_{1,h}^i = p_{2,h}^i,$$

$$\mathbf{u}_{1,h}^i = \mathbf{u}_{2,h}^i,$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2.2.1. □

## 2.3 Estimations a priori

### Définition 2.3.1

On définit les fonctions  $p_{h,\Delta t}$  et  $\mathbf{u}_{h,\Delta t}$  par

$$p_{h,\Delta t}(\mathbf{x}, t) = p_h^i(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \in (t_{i-1}, t_i], \quad (2.43)$$

et

$$\mathbf{u}_{h,\Delta t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_h^i(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \in (t_{i-1}, t_i], \quad (2.44)$$

où la paire de fonctions  $(p_h^i, \mathbf{u}_h^i)$  est la solution du système linéaire (2.29)-(2.30), pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ .

### Lemme 2.3.2 (Estimations a priori)

Soient  $p_{h,\Delta t}$  et  $\mathbf{u}_{h,\Delta t}$  les fonctions définies par (2.43) et (2.44). Il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $h$  et de  $\Delta t$  telle que

$$\|p_{h,\Delta t}\|_{L^2(0,T;W)} \leq C, \quad (2.45)$$

$$\|\mathbf{u}_{h,\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V})} \leq C. \quad (2.46)$$

*Démonstration.*

On remplace  $w_h$  et  $\mathbf{v}_h$  par  $p_h^i$  et  $\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}$  respectivement dans (2.29) et (2.30), pour obtenir

$$\begin{aligned} & \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_h^i - p_h^{i-1}) p_h^i d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} (\nabla p_h^i)^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) p_h^i d\mathbf{x} = \\ & = \Delta t \int_{\Omega} Q^i p_h^i d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Gamma_{p_2}} g^i p_h^i ds, \end{aligned} \quad (2.47)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h^i \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{X}^i \cdot (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^i \cdot (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) ds. \end{aligned} \quad (2.48)$$

On fait la somme des égalités obtenues en ajoutant (2.47) et (2.48) de  $i = 1$  à  $i = j$  tel que  $j \leq m$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \phi_0 c_o \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} (p_h^i - p_h^{i-1}) p_h^i d\mathbf{x} + \Delta t \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} (\nabla p_h^i)^2 d\mathbf{x} + \\
 & + \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} = \\
 & = \Delta t \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} Q^i p_h^i d\mathbf{x} + \Delta t \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma_{p_2}} g^i p_h^i ds + \\
 & + \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \mathbf{X}^i \cdot (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma_{u_2}} \mathbf{q}^i \cdot (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) ds.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \phi_0 c_o \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} (p_h^i - p_h^{i-1}) p_h^i d\mathbf{x} &= \frac{\phi_0 c_o}{2} \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \left( (p_h^i)^2 - (p_h^{i-1})^2 + (p_h^i - p_h^{i-1})^2 \right) d\mathbf{x} \\
 &\geq \frac{\phi_0 c_o}{2} \int_{\Omega} \left( (p_h^j)^2 - (p_h^0)^2 \right) d\mathbf{x} \\
 &\geq -\frac{\phi_0 c_o}{2} \|p_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\geq -\frac{\phi_0 c_o}{2} \|p_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

où  $\|w\|_{H^1(\Omega)} := \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^3}$ . On déduit de (2.50) et de (2.33) que

$$\phi_0 c_o \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} (p_h^i - p_h^{i-1}) p_h^i d\mathbf{x} \geq -C \|p_0\|_{H^2(\Omega)}^2, \tag{2.51}$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de  $h$  et de  $\Delta t$ . On a de plus

$$\Delta t \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} (\nabla p_h^i)^2 d\mathbf{x} \geq \frac{k_*}{\eta_o} C \Delta t \sum_{i=1}^j \|p_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{2.52}$$

où  $C$  est la constante positive de l'inégalité de Poincaré. D'autre part

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} Q^i p_h^i d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(\cdot, t) p_h^i dt ds \\
&\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|Q(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \|p_h^i\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{c_1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^j \|p_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2 c_1} \|Q\|_{L^2(Q_T)}^2,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma_{p_2}} g^i p_h^i ds &= \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma_{p_2}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g p_h^i dt ds \\
&\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|g(\cdot, t)\|_{L^2(\Gamma_{p_2})} \|p_h^i\|_{L^2(\Gamma_{p_2})} dt, \\
&\leq \frac{c_2}{2} \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|p_h^i\|_{L^2(\Gamma_{p_2})}^2 dt + \frac{1}{2 c_2} \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|g(\cdot, t)\|_{L^2(\Gamma_{p_2})}^2 dt \\
&\leq \frac{c_2}{2} \Delta t \sum_{i=1}^j \|p_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2 c_2} \|g\|_{L^2(\Gamma_{p_2} \times (0, T))}^2.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

où l'on a encore utilisé le théorème de trace.

### Remarque 2.3.1

Par le Lemme 2.1.2, la forme bilinéaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

est symétrique, ce qui implique

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \\
&+ \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u} - \mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

On revient maintenant aux estimations des différents termes de l'égalité (2.49). On déduit de (2.55) que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \left( \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i) - \sigma(\mathbf{u}_h^{i-1}) : \epsilon(\mathbf{u}_h^{i-1}) \right) d\mathbf{x} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \left( \sigma(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) \right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ce qui implique, en utilisant aussi le Lemme 2.1.2 et le Corollaire 2.1.4, que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^j) : \epsilon(\mathbf{u}_h^j) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^0) : \epsilon(\mathbf{u}_h^0) d\mathbf{x} \\ &\geq \mu \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}_h^j) : \epsilon(\mathbf{u}_h^j) d\mathbf{x} - \mu \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}_h^0) : \epsilon(\mathbf{u}_h^0) d\mathbf{x} - \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \text{tr}(\epsilon(\mathbf{u}_h^0)) \right)^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité de Korn (Lemme 2.1.3) et l'inégalité (2.32) impliquent l'estimation

$$\sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_h^i) : \epsilon(\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} \geq \mu \|\mathbf{u}_h^j\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 - C_1 \|\mathbf{u}_0\|_{(H^2(\Omega))^3}^2, \quad (2.56)$$

où  $C_1$  est une constante positive indépendante de  $h$  et de  $\Delta t$ . On considère le terme en  $\mathbf{X}$  de (2.49)

$$\sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \mathbf{X}^i \cdot (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{X}^j \cdot \mathbf{u}_h^j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{X}^1 \cdot \mathbf{u}_h^0 d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega} (\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i) \cdot \mathbf{u}_h^i d\mathbf{x}.$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{X}^j \cdot \mathbf{u}_h^j d\mathbf{x} \right| &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{X}^j\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{c_3}{2} \|\mathbf{u}_h^j\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 \\ \left| \int_{\Omega} \mathbf{X}^1 \cdot \mathbf{u}_h^0 d\mathbf{x} \right| &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{X}^1\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^0\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

et d'autre part

$$\sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega} (\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i) \cdot \mathbf{u}_h^i \, d\mathbf{x} \leq \sum_{i=1}^{j-1} \|\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(L^2(\Omega))^3}.$$

On déduit alors de l'assertion (i) de [KJF77] p. 125, que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega} (\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i) \cdot \mathbf{u}_h^i \, d\mathbf{x} \right| &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\partial_t \mathbf{X}(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(L^2(\Omega))^3} \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\partial_t \mathbf{X}(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \, dt + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{X}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(H^1(\Omega))^3}^2. \end{aligned} \tag{2.58}$$

On considère finalement le terme en  $\mathbf{q}$  du membre de droite de (2.49)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^i \cdot (\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}) \, ds &= \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^j \cdot \mathbf{u}_h^j \, ds - \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{u}_h^0 \, ds - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} (\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i) \cdot \mathbf{u}_h^i \, ds \end{aligned}$$

On déduit du théorème de trace et de l'assertion (i) de [KJF77] p. 125 que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^j \cdot \mathbf{u}_h^j \, ds \right| &\leq \frac{1}{2c_4} \|\mathbf{q}^j\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3}^2 + \frac{c_4}{2} \|\mathbf{u}_h^j\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \\ \left| \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{u}_h^0 \, ds \right| &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{q}^1\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{(H^1(\Omega))^3}^2, \end{aligned} \tag{2.59}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} (\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i) \cdot \mathbf{u}_h^i ds \right| &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \|\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3} \\
 &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\partial_t \mathbf{q}(t)\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(H^1(\Omega))^3} dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{q}(t)\|_{L^2(0,T;(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3)}^2 + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(H^1(\Omega))^3}^2.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

On substitue les inégalités (2.52)-(2.60) dans (2.49) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{k_*}{\eta_o} C - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} \right) \Delta t \sum_{i=1}^j \|p_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left( \mu - \frac{c_3}{2} - \frac{c_4}{2} \right) \|\mathbf{u}_h^j\|_{(H^1(\Omega))^3}^2 \leq \\
 &\leq C_1 \|p_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left( C_2 + 1 \right) \|\mathbf{u}_0\|_{(H^2(\Omega))^3}^2 + \frac{1}{2 c_1} \|Q\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2 c_2} \|g\|_{L^2(\Gamma_{p_2} \times (0,T])}^2 + \\
 &+ \frac{1}{2 c_3} \|\mathbf{X}^j\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}^1\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{X}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 d\mathbf{x} + \\
 &+ \frac{1}{2 c_4} \|\mathbf{q}^j\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{q}^1\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{q}(t)\|_{L^2(0,T;(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_2}))^3)}^2 + \\
 &+ \Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \|\mathbf{u}_h^i\|_{(H^1(\Omega))^3}^2.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

On choisit

$$c_1 \leq \frac{k_*}{\eta_o} \frac{C}{2}, c_2 \leq \frac{k_*}{\eta_o} \frac{C}{2},$$

et

$$c_3 \leq \frac{\mu}{2}, c_4 \leq \frac{\mu}{2},$$

on écrit alors

$$\Delta t \sum_{i=1}^j \|p_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_h^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq A + B \Delta t \sum_{i=1}^j \|\mathbf{u}_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{2.62}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $\Delta t$ . On applique à (2.62) l'inégalité de Gronwall discrète [Ram99] qu'on rappelle ci-dessous.

**Lemme 2.3.3**

Soit  $m \geq 2$  et soit  $(a_n)_{0 \leq n \leq m}$  une suite de réels tels que

$$a_0 = 0,$$

et

$$a_n \leq A + B \Delta t \sum_{i=0}^n a_i, \text{ pour tout } n \in [0, m],$$

où  $A$  est une constante positive. Alors il existe une constante positive  $C$  telle que

$$a_n \leq C A.$$

Donc il existe une constante positive  $\tilde{C}$  ne dépendant pas de  $h$  et de  $\Delta t$  telle que

$$\|\mathbf{u}_h^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{C} A, \quad (2.63)$$

on déduit de (2.62) que

$$\Delta t \sum_{i=1}^j \|p_h^i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq A(1 + \tilde{C} T). \quad (2.64)$$

Par conséquent, il existe une constante positive  $C_0$  qui ne dépend pas de  $h$  et de  $\Delta t$  telle que

$$\begin{aligned} \|p_{h,\Delta t}\|_{L^2(0,T;W)} &\leq C_0, \\ \|\mathbf{u}_{h,\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V})} &\leq C_0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 3.4.  $\square$

## 2.4 Convergence vers la solution faible

On va montrer ci-dessous l'existence et l'unicité de la solution faible du problème continu.

**Théorème 2.4.1 (Existence de solution faible)**

Il existe une paire de fonctions  $(p, \mathbf{u}) \in L^2(0, T; W) \times L^\infty(0, T; \mathbf{V})$  solution faible du problème (2.1)-(2.8).

*Démonstration.*

On déduit du Lemme 3.4 qu'il existe des sous-suites  $(p_{h_m, \Delta t_m}, \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m})$  et une paire de fonction  $(p, \mathbf{u}) \in L^2(0, T; W) \times L^\infty(0, T; \mathbf{V})$  telles que

$$p_{h_m, \Delta t_m} \text{ converge faiblement vers } p \text{ dans } L^2(0, T; W), \quad (2.66)$$

$$\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \text{ converge faiblement vers } \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad (2.67)$$

quand  $h_m$  et  $\Delta t_m$  tendent vers 0. Soit  $\psi \in \mathcal{H}$ . Pour tout  $i = 1, \dots, m-1, m, \dots$ , on définit

$$\psi^i = \psi(t_i), \quad (2.68)$$

ce qui implique en particulier que  $\psi^i = 0$  pour tout  $i \geq m$ . On définit aussi les fonctions  $\psi_{\Delta t_m}$  et  $\tilde{\psi}_{\Delta t_m}$  par

$$\psi_{\Delta t_m}(t) = \psi(t_{i+1}) \text{ si } t \in (t_i, t_{i+1}], \quad (2.69)$$

et par

$$\tilde{\psi}_{\Delta t_m}(t) = \frac{(\psi(t_{i+2}) - \psi(t_{i+1}))}{\Delta t_m} \text{ si } t \in (t_i, t_{i+1}]. \quad (2.70)$$

On remarque qu'il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $h_m$  et de  $\Delta t_m$  telle que

$$\|\psi_{\Delta t_m} - \psi\|_{L^2(0, T)} \leq C \Delta t_m, \quad (2.71)$$

$$\|\tilde{\psi}_{\Delta t_m} - \psi'\|_{L^2(0, T)} \leq C \Delta t_m, \quad (2.72)$$

et on définit aussi sur l'intervalle  $(t_i, t_{i+1}]$  et pour tout  $i = 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} Q_{\Delta t} &= Q^{i+1}, \\ g_{\Delta t} &= g^{i+1}, \\ \mathbf{X}_{\Delta t} &= \mathbf{X}^{i+1}, \\ \mathbf{q}_{\Delta t} &= \mathbf{q}^{i+1}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Notons que puisque  $\mathbf{X}_{\Delta t}$  et  $\mathbf{q}_{\Delta t}$  sont des approximations constantes par morceaux en temps des fonctions  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{q}$ , on a les propriétés de convergences suivantes

$$\|\mathbf{X}_{\Delta t} - \mathbf{X}\|_{(L^2(Q_T))^3} \rightarrow 0, \quad (2.74)$$

$$\|\mathbf{q}_{\Delta t} - \mathbf{q}\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_1} \times (0,T)))^3} \rightarrow 0, \quad (2.75)$$

quand  $\Delta t$  tend vers 0. Soient  $w \in W$  et  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  et soient des suites de fonctions  $\{w_{h_m}\}_m \subset W_{h_m}$  et  $\{\mathbf{v}_{h_m}\}_m \subset \mathbf{V}_{h_m}$  telles que

$$\|w_{h_m} - w\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (2.76)$$

$$\|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^3} \rightarrow 0, \quad (2.77)$$

quand  $h_m \rightarrow 0$ . On multiplie les égalités intégrales (2.29) et (2.30) par  $\psi^i$  et on prend la somme de  $i = 1$  à  $i = m$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_{h_m}^i - p_{h_m}^{i-1}) \psi^i w_{h_m} d\mathbf{x} + \Delta t \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{h_m}^i \cdot \nabla w_{h_m} \psi^i d\mathbf{x} + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_{h_m}^i - \mathbf{u}_{h_m}^{i-1}) \psi^i w_{h_m} d\mathbf{x} = \\ & = \sum_{i=1}^m \Delta t \int_{\Omega} Q^i \psi^i w_{h_m} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \Delta t \int_{\Gamma_{p_2}} g^i \psi^i w_{h_m} ds. \end{aligned} \quad (2.78)$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h_m}^i) : \epsilon(\mathbf{v}_{h_m}) \psi^i d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} p_{h_m}^i \operatorname{div} \mathbf{v}_{h_m} \psi^i d\mathbf{x} = \\ & = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{v}_{h_m} \psi^i d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{v}_{h_m} \psi^i ds. \end{aligned} \quad (2.79)$$

On fait ci-dessous l'analogie discret d'une intégration par parties. Il vient en utilisant aussi les définitions (2.43) de  $p_{h_m, \Delta t_m}$ , (2.44) de  $\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}$ , (2.68) de  $\psi^i$  et (2.70) de  $\tilde{\psi}_{\Delta t_m}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \phi_0 c_o \int_{\Omega} (p_{h_m}^i - p_{h_m}^{i-1}) \psi^i w_{h_m} d\mathbf{x} = \\
& = -\phi_0 c_o \int_{\Omega} p_{h_m}^0 \psi^1 w_{h_m} d\mathbf{x} - \phi_0 c_o \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\Omega} p_{h_m}^i (\psi^{i+1} - \psi^i) w_{h_m} d\mathbf{x} \quad (2.80) \\
& = -\phi_0 c_o \int_{\Omega} p_{h_m}^0 \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} - \phi_0 c_o \int_0^T \int_{\Omega} p_{h_m, \Delta t_m} \tilde{\psi}_{\Delta t_m} w_{h_m} d\mathbf{x} dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_{h_m}^i - \mathbf{u}_{h_m}^{i-1}) \psi^i w_{h_m} d\mathbf{x} = \\
& = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m}^0 \psi^1 w_{h_m} d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m}^i (\psi^{i+1} - \psi^i) w_{h_m} d\mathbf{x} \quad (2.81) \\
& = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m}^0 \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \tilde{\psi}_{\Delta t_m} w_{h_m} d\mathbf{x} dt.
\end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de récrire les égalités (2.78) et (2.79) sous les formes intégrales

$$\begin{aligned}
& -\phi_0 c_o \int_0^T \int_{\Omega} p_{h_m, \Delta t_m} w_{h_m} \tilde{\psi}_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{h_m, \Delta t_m} \cdot \nabla w_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} w_{h_m} \tilde{\psi}_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt = \quad (2.82) \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} Q_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} w_{h_m} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{p_2}} g_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} w_{h_m} ds dt + \\
& + \phi_0 c_o \int_{\Omega} p_{h_m}^0 \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m}^0 \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}) : \epsilon(\mathbf{v}_{h_m}) \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_{h_m, \Delta t_m} \operatorname{div} \mathbf{v}_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X}_{\Delta t_m} \cdot \mathbf{v}_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q}_{\Delta t_m} \cdot \mathbf{v}_{h_m} \psi_{\Delta t_m} ds dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

On fait tendre ci-dessous les paramètres  $h_m$  et  $\Delta t_m$  vers 0 dans (2.82) et (2.83). Dans ce but, on pose

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p_{h_m, \Delta t_m} + \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \right) w_{h_m} \tilde{\psi}_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3, \quad (2.84)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p_{h_m, \Delta t_m} + \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \right) w \psi' d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_2 &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p_{h_m, \Delta t_m} + \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \right) (w_{h_m} - w) \psi' d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_3 &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p_{h_m, \Delta t_m} + \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \right) w_{h_m} (\tilde{\psi}_{\Delta t_m} - \psi') d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

D'après (2.66) et (2.67),  $(p_{h_m, \Delta t_m}, \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m})$  converge faiblement vers  $(p, \mathbf{u})$  dans  $L^2(Q_T) \times L^2(0, T; \mathbf{V})$  quand  $h_m$  et  $\Delta t_m$  tendent vers 0 et comme  $w \psi' \in L^2(Q_T)$ , on déduit que

$$\mathcal{I}_1 \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p + \operatorname{div} \mathbf{u} \right) w \psi' d\mathbf{x} dt$$

quand  $h_m$  et  $\Delta t_m$  tendent vers 0. On utilise (2.45), (2.46) et (2.76) pour montrer que

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2| &\leq T^{\frac{1}{2}} \|\psi'\|_{C([0, T])} \left( \phi_0 c_o \|p_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(Q_T)} + \|\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}\|_{(H^1(\Omega))^2} \right) \|w_{h_m} - w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_3| &\leq \|w_{h_m}\|_{L^2(\Omega)} \left( \phi_0 c_o \|p_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(Q_T)} + \|\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}\|_{(H^1(\Omega))^2} \right) \|\tilde{\psi}_{\Delta t_m} - \psi'\|_{L^2(0, T)} \\ &\leq C \|\tilde{\psi}_{\Delta t_m} - \psi'\|_{L^2(0, T)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{par (2.72),} \end{aligned}$$

quand  $h_m$  et  $\Delta t_m$  tendent vers 0. En conséquence

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p_{h_m, \Delta t_m} + \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m} \right) w_{h_m} \tilde{\psi}_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p + \operatorname{div} \mathbf{u} \right) w \psi' d\mathbf{x} dt, \quad (2.85)$$

quand  $h_m$  et  $\Delta t_m$  tendent vers 0.

On considère maintenant le deuxième terme du membre de gauche de (2.82). On écrit

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{h_m, \Delta t_m} \cdot \nabla w_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3, \quad (2.86)$$

où

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{h_m, \Delta t_m} \cdot \nabla w \psi d\mathbf{x} dt,$$

$$\mathcal{J}_2 = - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{h_m, \Delta t_m} \cdot \nabla (w - w_{h_m}) \psi d\mathbf{x} dt,$$

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p_{h_m, \Delta t_m} \cdot \nabla w_{h_m} (\psi_{\Delta t_m} - \psi) d\mathbf{x} dt.$$

On déduit de la convergence faible de  $p_{h_m, \Delta t_m}$  dans  $L^2(0, T; W)$  et du fait que  $k \nabla w \psi' \in L^2(Q_T)$

$$\mathcal{J}_1 \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p \cdot \nabla w \psi d\mathbf{x} dt.$$

On a de plus que

$$|\mathcal{J}_2| \leq \frac{k^*}{\eta_o} T^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{C([0, T])} \|w - w_{h_m}\|_{H^1(\Omega)} \|p_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}$$

$$\rightarrow C \|w - w_{h_m}\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{par (2.76),}$$

et

$$\mathcal{J}_3 \leq \frac{k^*}{\eta_o} \|w_h\|_{H^1(\Omega)} \|p_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \|\psi_{\Delta t} - \psi\|_{L^2(0, T)}$$

$$\leq C \|\psi_{\Delta t_m} - \psi\|_{L^2(0, T)}$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{par (2.71),}$$

quand les paramètres  $h_m$  et  $\Delta t_m$  tendent vers 0.

On considère ci-dessous le membre de droite de (2.82),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_{h_m}^0 \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} p_0 \psi(\Delta t_m) w d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p_0 \psi(\Delta t_m) (w_{h_m} - w) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} (p_{h_m}^0 - p_0) \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} \\ &\rightarrow \int_{\Omega} p_0 \psi(0) w d\mathbf{x} \quad \text{par (2.33),} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h_m}^0 \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \psi(\Delta t_m) w d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \psi(\Delta t_m) (w_{h_m} - w) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_{h_m}^0 - \mathbf{u}_0) \psi(\Delta t_m) w_{h_m} d\mathbf{x} \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \psi(0) w d\mathbf{x} \quad \text{par (2.32).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} Q_{\Delta t_m} w_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\Omega} Q_{\Delta t_m} w_{h_m} \psi^{i+1} d\mathbf{x} dt \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{i+1} \int_{\Omega} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} Q dt \right) w_{h_m} d\mathbf{x} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} Q w_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} Q w \psi d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} Q (w_{h_m} - w) \psi d\mathbf{x} dt + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} Q w_{h_m} (\psi_{\Delta t_m} - \psi) d\mathbf{x} dt \\ &\rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} Q w \psi d\mathbf{x} dt \quad \text{par (2.71).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g_{\Delta t_m} w_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g_{\Delta t_m} w_{h_m} \psi^{i+1} d\mathbf{x} dt \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{i+1} \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} g dt \right) w_{h_m} d\mathbf{x} \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g w_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g w \psi d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g (w_{h_m} - w) \psi d\mathbf{x} dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g w_{h_m} (\psi_{\Delta t_m} - \psi) d\mathbf{x} dt \\
&\rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} g w \psi d\mathbf{x} dt \quad \text{par (2.71).}
\end{aligned}$$

On déduit finalement des passages à la limite ci-dessus que

$$\begin{aligned}
& -\phi_0 c_o \int_0^T \int_{\Omega} p w \psi' d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla p \cdot \nabla w \psi d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} w \psi' d\mathbf{x} dt = \\
& = \int_{\Omega} p_0 w \psi(0) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 w \psi(0) d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} Q w \psi d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{p_2}} g w \psi d\mathbf{x} dt,
\end{aligned} \tag{2.87}$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$  et pour tout  $w \in W$ .

On se propose maintenant de passer à la limite dans l'équation (2.83) pour les déformations mécaniques. On a

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}) : \epsilon(\mathbf{v}_{h_m}) \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_{h_m, \Delta t_m} \operatorname{div} \mathbf{v}_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt = \\
& = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{K}_4 + \mathcal{K}_5 + \mathcal{K}_6,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}) : \epsilon(\mathbf{v}) \psi \, d\mathbf{x} \, dt, \\
\mathcal{L}_2 &= \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}) : \epsilon(\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}) \psi \, d\mathbf{x} \, dt, \\
\mathcal{L}_3 &= \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}) : \epsilon(\mathbf{v}_{h_m}) (\psi_{\Delta t_m} - \psi) \, d\mathbf{x} \, dt, \\
\mathcal{K}_1 &= - \int_0^T \int_{\Omega} p_{h, \Delta t_m} \operatorname{div} \mathbf{v} \psi \, d\mathbf{x} \, dt, \\
\mathcal{K}_2 &= - \int_0^T \int_{\Omega} p_{h_m, \Delta t_m} \operatorname{div} (\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}) \psi \, d\mathbf{x} \, dt, \\
\mathcal{K}_3 &= - \int_0^T \int_{\Omega} p_{h_m, \Delta t_m} \operatorname{div} \mathbf{v}_{h_m} (\psi_{\Delta t_m} - \psi) \, d\mathbf{x} \, dt.
\end{aligned}$$

Grâce aux convergences faibles des suites de fonctions  $\mathbf{p}_{h_m, \Delta t_m}$  et de  $\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}$  vers leurs limites (cf. (2.66)-(2.67) ), on déduit que

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{K}_1 \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \psi \, d\mathbf{x} \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \psi \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (2.89)$$

Notons que pour tout  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  et  $\psi \in \mathcal{H}$ , par (2.19) il existe une constante positive  $K_0 = K_0(n, \lambda, \mu)$  telle que

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \psi \, d\mathbf{x} \, dt \right| \leq K_0 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\psi\|_{L^2(0, T)}. \quad (2.90)$$

Grâce à l'estimation (2.45), (2.46) et (2.77), on déduit les convergences suivantes

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_2| &\leq K_0 \|\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})} \|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\psi\|_{L^2(Q_T)} \\
&\rightarrow 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_3| &\leq K_0 \|p_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})} \|\mathbf{v}_{h_m}\|_{\mathbf{V}} \|\psi_{\Delta t_m} - \psi\|_{L^2(0, T)} \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Par (2.45), (2.46) et (2.71), on a également

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}_3| &\leq K_0 \|\mathbf{u}_{h_m, \Delta t_m}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \|\mathbf{v}_{h_m}\|_{\mathbf{V}} \|\psi_{\Delta t_m} - \psi\|_{L^2(0,T)} \\
 &\rightarrow 0, \\
 |\mathcal{K}_2| &\leq \|p_{h_m, \Delta t}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\psi\|_{L^2(0,T)} \\
 &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

On considère maintenant le membre de droite de (2.83)

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X}_{\Delta t_m} \mathbf{v}_{h_m} \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X} \psi \mathbf{v} d\mathbf{x} dt + \\
 &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{X}_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} - \mathbf{X} \psi) \mathbf{v} d\mathbf{x} dt + \\
 &+ \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X}_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} (\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt \\
 &\longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X} \psi \mathbf{v} d\mathbf{x} dt,
 \end{aligned}$$

car en effet par (2.71), (2.74) et (2.77)

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X}_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} (\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt &\leq \|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \int_0^T \|\mathbf{X}_{\Delta t_m}\|_{(L^2(\Omega))^3} |\psi_{\Delta t_m}| dt \\
 &\leq \|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \\
 &\quad \left( \|\mathbf{X}_{\Delta t_m} - \mathbf{X}\|_{(L^2(Q_T))^3} + \|\mathbf{X}\|_{(L^2(Q_T))^3} \right) \\
 &\quad \left( \|\psi_{\Delta t_m} - \psi\|_{L^2(0,T)} + \|\psi\|_{L^2(0,T)} \right) \\
 &\longrightarrow 0,
 \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_1}} \mathbf{q}_{\Delta t_m} \mathbf{v}_h \psi_{\Delta t_m} d\mathbf{x} dt &= \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_1}} \mathbf{q} \psi \mathbf{v} d\mathbf{x} dt + \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_1}} (\mathbf{q}_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} - \mathbf{q} \psi) \mathbf{v} d\mathbf{x} dt + \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_1}} \mathbf{q}_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt \\
&\longrightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_1}} \mathbf{q} \psi \mathbf{v} d\mathbf{x} dt
\end{aligned}$$

car en effet, par le Théorème de Trace, (2.71), (2.75) et (2.77)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_1}} \mathbf{q}_{\Delta t_m} \psi_{\Delta t_m} (\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt &\leq C \|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \int_0^T \|\mathbf{q}_{\Delta t_m}\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_1}))^3} |\psi_{\Delta t_m}| dt \\
&\leq C \|\mathbf{v}_{h_m} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \\
&\quad \left( \|\mathbf{q}_{\Delta t_m} - \mathbf{q}\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_1} \times (0,T]))^3} + \|\mathbf{q}\|_{(L^2(\Gamma_{\mathbf{u}_1} \times (0,T]))^3} \right) \\
&\quad \left( \|\psi_{\Delta t_m} - \psi\|_{L^2(0,T)} + \|\psi\|_{L^2(0,T)} \right) \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

En rassemblant les limites précédentes, on aboutit à l'égalité intégrale

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \psi(t) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \psi(t) d\mathbf{x} dt = \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} \psi(t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Gamma_{\mathbf{u}_2}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \psi(t) ds dt,
\end{aligned} \tag{2.91}$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  et pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ . Il nous reste à montrer que la fonction

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2.92}$$

est absolument continue sur  $[0, T]$ , pour tout  $w \in W$ . Pour cela, on définit les fonctions sur  $[0, T]$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t) &= \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \mathcal{F}(t) &= - \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x})}{\eta_o} \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ &\quad + \int_{\Gamma_{p_2}} g(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}) ds,\end{aligned}\tag{2.93}$$

pour tout  $w \in W$ . Comme  $p \in L^2(0, T; W)$ ,  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ ,  $Q \in L^2(Q_T)$  et  $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_{p_2}))$ , on déduit que  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont dans  $L^2(0, T)$ . On définit la fonction

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^t \mathcal{F}(r) dr\tag{2.94}$$

qui est absolument continue sur  $[0, T]$  et satisfait la relation

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}(t) = \mathcal{F}(t) \quad p.p. \text{ sur } (0, T).\tag{2.95}$$

On suppose que  $\psi(0) = 0$ , on intègre par parties et on utilise (2.87) pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^T \left( \mathcal{G}(t) - \mathcal{T}(t) \right) \psi'(t) dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o p(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) \psi'(t) dt d\mathbf{x} - \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x})}{\eta_o} \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \psi(t) dt d\mathbf{x} + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}) \psi(t) dt d\mathbf{x} + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_{p_2}} g(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}) \psi(t) dt ds \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.96}$$

On déduit de (2.96) en utilisant [Tem77] qu'il existe une constante  $c$  telle que

$$\mathcal{G} - \mathcal{T} = c \quad p.p. \text{ sur } (0, T).\tag{2.97}$$

On a donc  $\mathcal{G} = \mathcal{T} + c$ , où  $\mathcal{T}$  est une fonction absolument continue sur  $[0, T]$ , ce qui achève la démonstration du Théorème 2.4.1.  $\square$

### Théorème 2.4.2 (Unicité de la solution faible)

*La solution faible  $(p, \mathbf{u})$  du Problème (2.1)-(2.8) est unique.*

*Démonstration.*

Supposons que le Problème (2.1)-(2.8) admette deux solutions faibles  $(p_1, \mathbf{u}_1)$  et  $(p_2, \mathbf{u}_2)$ ; on fait la différence entre les équations (2.23) pour  $p_1$  et pour  $p_2$  et les équations (2.24) pour  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ . On pose  $\tilde{p} = p_1 - p_2$  et  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ . Il vient

$$\begin{aligned} & -\phi_0 c_o \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}) \psi'(t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k}{\eta_o} \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla w(\mathbf{x}) \psi(t) d\mathbf{x} dt - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}) \psi'(t) d\mathbf{x} dt = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

pour tout  $w \in W$  et pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ , et

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) : \epsilon(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \psi(t) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \psi(t) d\mathbf{x} dt = 0, \quad (2.99)$$

pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  et pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ . On déduit de (2.99) que

$$\int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \epsilon(\mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \tilde{p} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad (2.100)$$

et comme  $\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \epsilon(\mathbf{v}) - \tilde{p} \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^1(Q_T)$  pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , on en déduit que,

$$\int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) : \epsilon(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad (2.101)$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$ , ce qui implique en posant  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  dans (2.101)

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) : \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = 0. \quad (2.102)$$

Si l'on suppose que  $\psi(0) = 0$  dans (2.98) et que l'on intègre par parties, il vient

$$\int_0^T \left[ \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} (\phi_0 c_o \tilde{p}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) + \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x})}{\eta_o} \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla w d\mathbf{x} \right] \psi(t) dt = 0. \quad (2.103)$$

Puisque la fonction

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o \tilde{p}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

est absolument continue sur  $[0, T]$ , la relation (2.103) implique que

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left( \phi_0 c_o \tilde{p}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \right) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) + \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x})}{\eta_o} \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \nabla w d\mathbf{x} = 0, \quad (2.104)$$

pour tout  $w \in W$  et pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

On intègre (2.104) sur  $(0, t)$ , où  $t \in (0, T]$  et on pose  $w(\mathbf{x}) = \tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ , ce qui implique

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{k(\mathbf{x})}{\eta_o} \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, r) \cdot \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dr = - \int_{\Omega} \phi_0 c_o \tilde{p}^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.105)$$

Si l'on définit le vecteur  $\xi$  par

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \int_0^t k^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, r) dr, \quad (2.106)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} k \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, r) \cdot \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dr &= \int_{\Omega} \xi(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \xi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \xi^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Si l'on substitue (2.102) et (2.107) dans (2.105), il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) : \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} dt + \phi_0 c_o \int_0^T \|\tilde{p}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2\eta_o} \int_{\Omega} \xi^2(\mathbf{x}, T) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.108)$$

On déduit du Corollaire 2.1.4 que

$$C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))^3)}^2 + \phi_0 c_o \|\tilde{p}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2\eta_o} \int_{\Omega} \xi^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \leq 0, \quad (2.109)$$

et donc

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= 0 \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \quad p.p. \text{ sur } Q_T,\end{aligned}\tag{2.110}$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 2.4.2.  $\square$



# Chapitre 3

## Existence de solutions pour un modèle d'écoulement diphasique incompressible

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence d'une solution pour un système couplé écoulements diphasiques-déformations mécaniques dans un milieu poreux. Nous nous plaçons dans le cadre d'écoulements diphasiques incompressibles et non miscibles (eau-huile). Le milieu poreux considéré est homogène isotrope : il est caractérisé par sa perméabilité  $k(\mathbf{x})$  qui se réduit à  $k$  une constante scalaire strictement positive. La perméabilité mesure les efforts nécessaires pour que le fluide traverse le milieu poreux. La porosité du milieu est caractérisée par une quantité adimensionnée mesurant le volume des pores par rapport au volume total du squelette. Dans le modèle de l'écoulement liée à un gisement dont la roche est peu déformable, la variation de la porosité est soit négligée, soit représentée par un coefficient appelé "compressibilité de la roche". Par contre, on ne peut pas la négliger pour un gisement dont la roche est sensible à la déformation mécanique comme par c'est le cas pour les gisements dont la roche est essentiellement constituée de sable ou d'argile. Le rôle du couplage des écoulements diphasiques avec les déformations du milieu poreux a fait l'objet de plusieurs études (cf. [SM94], [SM98], [SW99]). Ce couplage se traduit souvent par une équation (par exemple la loi de Biot) reliant les variations de la porosité du milieu à celle de la pression. Toutefois, cette relation n'est pas suffisante dans le cadre d'un milieu poreux sensible à la teneur en eau, comme l'illustre le dépôt d'Ekofisk en mer du nord : puisque la roche est constituée essentiellement de craie, le milieu absorbe l'eau présente ou injectée artificiellement pour développer un processus de drainage forcé. Sylte et al. [STR<sup>+</sup>99] ainsi que Chin et al.

[CT99] ont effectué des simulations numériques mais ils n'ont pas abordé l'analyse mathématique de ce problème. L'originalité du travail que nous présentons ici, réside dans le fait que nous considérons un modèle d'écoulement diphasique où la porosité s'exprime en fonction de la pression "globale" (encore appelée "fictive"), introduite par Chavent et Jaffré [CJ86]. Cette pression globale dépend de la saturation et de la pression de l'eau.

Le plan de ce Chapitre est le suivant. La section 3.2 introduit le problème original ( $\mathcal{P}$ ) proposé par les physiciens. Nous récrivons deux formulations alternatives du problème ( $\mathcal{P}$ ) pour lesquelles les fonctions inconnues sont la pression globale  $p$  et la saturation en eau  $S$ . Nous définissons alors une notion de solution faible. L'équation pour la pression globale est uniformément parabolique tandis que celle pour la saturation est parabolique dégénérée. A la Section 3.3, on considère les problèmes régularisés associés, notés ( $\mathcal{P}_\epsilon$ ) d'inconnues  $p_\epsilon$  pour la pression globale et  $S_\epsilon$  pour la saturation. On démontre l'existence de solution  $(p_\epsilon, S_\epsilon)$  pour le problème ( $\mathcal{P}_\epsilon$ ) à l'aide du Théorème de point fixe de Schauder. On présente ensuite à la Section 3.4 des estimations a priori uniformes en  $\epsilon$ , en particulier des estimations sur des différences de translatées en espace et en temps liées à la fonction  $S_\epsilon$ . Finalement, on étudie la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0 à la Section 3.5, ce qui achève la démonstration d'existence d'une solution du problème initial ( $\mathcal{P}$ ). Une forme simplifiée de ce système où la porosité est considérée comme une fonction connue constante ou dépendant de l'espace, a été étudiée par [GMT96], [AD85], [AKM90], [Arb92], [CJ86], [KL84], [KS77].

## 3.2 Le modèle mathématique

On considère un système d'équations non linéaires qui modélise un écoulement à deux phases (eau-huile) lié à une déformation mécanique; la porosité  $\varphi = \varphi(p)$  dépend de la pression globale  $p$  introduite par [CJ86]. Notre but est de déduire du Problème ( $\mathcal{P}$ ) ci-dessous un système où les seules inconnues sont la saturation  $S$  de

la phase eau et la pression globale  $p$ . On introduit le Problème ( $\mathcal{P}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(p)S) = k \operatorname{div} \left( \frac{\rho_w k r_{wo}(S)}{\mu_w} \nabla p_w \right) + \\ \quad + \alpha \left( f_w(S^*)(\bar{p} - p)^+ - f_w(S)(\bar{p} - p)^- \right), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(p)(1 - S)) = k \operatorname{div} \left( \frac{\rho_o k r_{ow}(S)}{\mu_o} \nabla (p_w + p_c) \right) + \\ \quad + \alpha \left( f_o(S^*)(\bar{p} - p)^+ - f_o(S)(\bar{p} - p)^- \right), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

sur  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ . Les conditions aux limites et les conditions initiales sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p_w \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ \nabla (p_w + p_c) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ \nabla S \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \\ p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où

- $a^+ = \max(0, a)$  et  $a^- = \max(0, -a)$ ,
- $S = S(\mathbf{x}, t)$  est la saturation de la phase eau,
- $p_w = p_w(\mathbf{x}, t)$  est la pression de la phase eau,
- $p_c = p_c(S)$  est la pression capillaire, qui est une fonction décroissante,
- $kr_{ij} = kr_{ij}(S)$  est la mobilité de la phase  $i$  en présence de la phase  $j$ , telle que  $i, j \in \{w, o\}$  et  $i \neq j$ . Les fonctions  $kr_{wo}$  et  $kr_{ow}$  sont respectivement croissante et décroissante. Les lois régissant l'expression des perméabilités relatives dans le cas d'écoulements diphasiques non miscibles incompressibles pour les

simulations numériques sont données par

$$\begin{aligned} kr_{wo}(S) &= S^a, \\ kr_{ow}(S) &= (1 - S)^a, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où  $a \in \{1, 2, 3\}$ ,

- $\rho_i$  est la densité de la phase  $i$ ,
- $\mu_i$  est la viscosité de la phase  $i$ ,
- $S^*$  est une constante telle que  $S^* \in [0, 1]$ ,
- $p = p(\mathbf{x}, t)$  est la pression globale, définie de la façon suivante.

On pose

$$k_i(S) = \frac{\rho_i kr_{ij}(S)}{\mu_i} \quad \text{avec } i, j \in \{w, o\},$$

$$M(S) = k_w(S) + k_o(S),$$

et

$$p = p_w + \int_0^S \frac{k_o(u)}{M(u)} p'_c(u) du. \tag{3.4}$$

Pour  $i \in \{w, o\}$ , la fonction  $f_i$  est donnée par

$$f_i(S) = \frac{k_i(S)}{M(S)}. \tag{3.5}$$

Ainsi

$$0 \leq f_i(S) \leq 1,$$

et l'on remarque en particulier que  $f_w + f_o = 1$ .

On fait la somme des deux équations du système (3.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) &= k \operatorname{div} \left( M(S) \nabla p_w + k_o(S) \nabla p_c(S) \right) + \alpha(\bar{p} - p)^+ - \alpha(\bar{p} - p)^- \\ &= k \operatorname{div} \left( M(S) \nabla p_w + k_o(S) \nabla p_c(S) \right) + \alpha(\bar{p} - p). \end{aligned}$$

D'après la définition (3.4), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) = k \operatorname{div} \left( M(S) \nabla p \right) + \alpha(\bar{p} - p). \quad (3.6)$$

On récrit la première équation du système (3.1) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi(p) S \right) &= k \operatorname{div} \left( k_w(S) \left( \nabla p_w + \frac{k_o(S)}{M(S)} \nabla p_c(S) - \frac{k_o(S)}{M(S)} \nabla p_c(S) \right) \right) \\ &\quad + \alpha \left( f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^- \right) \\ &= k \operatorname{div} \left( k_w(S) \nabla p \right) - k \operatorname{div} \left( \frac{k_o(S) k_w(S)}{M(S)} \nabla p_c(S) \right) \\ &\quad + \alpha \left( f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^- \right), \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi(p) S \right) &= k \Delta \psi(S) + k \operatorname{div} \left( f_w(S) M(S) \nabla p \right) + \\ &\quad + \alpha \left( f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^- \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où

$$\psi(S) = \int_0^S -\frac{k_o(u) k_w(u)}{M(u)} p'_c(u) du, \quad (3.8)$$

est une fonction continûment différentiable sur  $[0, 1]$ . On dénotera par  $\kappa$  sa constante de Lipschitz. On obtient ainsi une première reformulation du problème  $(\mathcal{P})$  pour les fonctions inconnues  $(S, p)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) = k \operatorname{div} \left( M(S) \nabla p \right) + \alpha(\bar{p} - p), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi(p) S \right) = k \Delta \psi(S) + k \operatorname{div} \left( f_w(S) M(S) \nabla p \right) + \\ \quad + \alpha \left( f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^- \right), \end{array} \right. \quad (3.9)$$

sur  $Q_T$ , avec les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla p \cdot \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ \nabla \psi(S) \cdot \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ S(\mathbf{x}, 0) & = & S_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \\ p(\mathbf{x}, 0) & = & p_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Il est difficile de démontrer que  $0 \leq S \leq 1$  à l'aide de la deuxième équation de (3.9) ce qui conduit à rechercher un système équivalent où l'estimation de  $S$  apparait plus clairement. On multiplie la première équation de (3.9) par  $f_w(S)$  et on la soustrait de la deuxième équation de (3.9). On déduit d'un calcul formel que

$$\begin{aligned} \varphi(p) \frac{\partial}{\partial t} S + S \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) - f_w(S) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) &= k \Delta \psi(S) + \\ &+ k f_w(S) \operatorname{div} (M(S) \nabla p) + \\ &+ k M(S) \nabla p \cdot \nabla f_w(S) - \\ &- k f_w(S) \operatorname{div} (M(S) \nabla p) - \\ &- \alpha f_w(S) \left( (\bar{p} - p) + (\bar{p} - p)^- \right) + \\ &+ \alpha f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (S - f_w(S)) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) + \varphi(p) \frac{\partial}{\partial t} S &= k \Delta \psi(S) + \\ &+ k M(S) \nabla p \cdot \nabla f_w(S) + \\ &+ \alpha (f_w(S^*) - f_w(S)) (\bar{p} - p)^+. \end{aligned} \quad (3.11)$$

On obtient ainsi une seconde reformulation du Problème  $\mathcal{P}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p) = k \operatorname{div} \left( M(S) \nabla p \right) + \alpha (\bar{p} - p), \\ \frac{\partial}{\partial t} S = \frac{k}{\varphi(p)} \Delta \psi(S) + \frac{k M(S)}{\varphi(p)} \nabla p \cdot \nabla f_w(S) + \\ \quad + \frac{\alpha}{\varphi(p)} \left( f_w(S^*) - f_w(S) \right) (\bar{p} - p)^+ - \\ \quad - \frac{\left( S - f_w(S) \right)}{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(p), \end{array} \right. \quad (3.12)$$

sur  $Q_T$ , avec les conditions aux limites et initiales (3.10). On va maintenant présenter les hypothèses précises que l'on fait sur les données du problèmes, introduire les notations correspondant aux espaces fonctionnels utilisés et définir une notion de solution faible.

On choisira dans notre étude  $\psi \in C^1([0, 1])$  telle qu'il existe deux constantes strictement positives  $C_*$  et  $C^*$  vérifiant

$$C_* S^{m-1} \leq \psi'(S) \leq C^* S^{m-1} \quad \text{où } m \in \mathbb{N}^*. \quad (3.13)$$

Des fonctions de mobilité compatibles avec ce choix sont données par

$$\begin{aligned} k r_{wo}(S) &= S^a, \\ k r_{ow}(S) &= (1 - S)^a, \end{aligned}$$

où  $a \in \mathbb{N}^*$  est telle que

$$a \geq \max\left(1, \frac{m-1}{2}\right). \quad (3.14)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} k_w(S) &= \frac{\rho_w}{\mu_w} S^a, \\ k_o(S) &= \frac{\rho_o}{\mu_o} (1 - S)^a, \end{aligned} \quad (3.15)$$

et donc

$$M(S) = \frac{\rho_w}{\mu_w} S^a + \frac{\rho_o}{\mu_o} (1 - S)^a.$$

On peut finalement déduire l'expression de la pression capillaire  $p_c$  de l'égalité (3.8).

### 3.2.1 Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes

( $\mathcal{H}_0$ )  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega \in C^{5+\beta}$ , où  $\beta \in (0, 1)$  est une constante donnée ;

( $\mathcal{H}_1$ )  $M$  est une fonction régulière sur  $[0, 1]$  donnée par

$$M(S) = \frac{\rho_w}{\mu_o} S^a + \frac{\rho_o}{\mu_o} (1 - S)^a, \quad (3.16)$$

telle que

$$0 < M_* \leq M(S) \leq M^* \quad \text{sur } [0, 1]; \quad (3.17)$$

( $\mathcal{H}_2$ )  $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$  est une fonction continue sur  $\overline{\Omega}$ , et l'on définit  $\alpha^* = \sup_{\overline{\Omega}} \alpha$ ;

( $\mathcal{H}_3$ )  $\overline{p} = \overline{p}(\mathbf{x})$  est une fonction continue  $\overline{\Omega}$ , et l'on définit  $p_* = \inf_{\overline{\Omega}} \overline{p}$  et  $p^* = \sup_{\overline{\Omega}} \overline{p}$ ,  
où  $0 \leq p_* \leq p^*$ ;

( $\mathcal{H}_4$ )  $\varphi$  est une fonction continûment différentiable sur  $[p_*, p^*]$ , strictement croissante, telle que  $\varphi(p_*) > 0$ ;

( $\mathcal{H}_5$ )  $\psi \in C^1([0, 1])$  vérifie

$$C_* S^{m-1} \leq \psi'(S) \leq C^* S^{m-1} \quad \text{pour } 0 \leq S \leq 1,$$

avec  $m \in \mathbb{N}^*$  ;

( $\mathcal{H}_6$ )  $f_w$  est une fonction continûment différentiable et croissante sur  $[0, 1]$  telle que

$$0 \leq f_w \leq 1, f_w(0) = 0 \text{ et } f_w(1) = 1; \quad (3.18)$$

$(\mathcal{H}_7) \ (p_0, S_0) \in (L^2(\Omega))^2$  satisfait

$$p_* \leq p_0 \leq p^*, \quad (3.19)$$

et

$$0 \leq S_0 \leq 1, \quad (3.20)$$

presque partout sur  $\Omega$ .

### 3.2.2 Notations

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $0 < \beta < 1$ . Soit  $f$  une fonction définie continue sur  $\overline{Q}_T$  dont les dérivées de la forme  $\frac{\partial^{r+s} f}{\partial t^r \partial x^s}$ , avec  $2r + s \leq m$ , sont continues. On définit la norme  $|f|_{Q_T}^{m+\beta, \frac{m+\beta}{2}}$  par

$$|f|_{Q_T}^{m+\beta, \frac{m+\beta}{2}} = \sum_{j=0}^m \langle f \rangle^{(j)} + \langle f \rangle_{Q_T}^{(m+\beta)}, \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle f \rangle^{(j)} &= \sum_{2r+s=j} \max_{Q_T} \left| \frac{\partial^{r+s} f}{\partial t^r \partial x^s} \right|, \\ \langle f \rangle_{Q_T}^{(m+\beta)} &= \sum_{2r+s=m} \left\langle \frac{\partial^{r+s} f}{\partial t^r \partial x^s} \right\rangle_{x, Q_T}^{(\beta)} + \sum_{2r+s=m} \left\langle \frac{\partial^{r+s} f}{\partial t^r \partial x^s} \right\rangle_{t, Q_T}^{(\frac{\beta}{2})}, \\ \langle f \rangle_{x, Q_T}^{(\beta)} &= \sup_{(\mathbf{x}_1, t), (\mathbf{x}_2, t) \in \overline{Q}_T} \frac{|f(\mathbf{x}_1, t) - f(\mathbf{x}_2, t)|}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^\beta}, \\ \langle f \rangle_{t, Q_T}^{(\frac{\beta}{2})} &= \sup_{(\mathbf{x}, t_1), (\mathbf{x}, t_2) \in \overline{Q}_T} \frac{|f(\mathbf{x}, t_1) - f(\mathbf{x}, t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\frac{\beta}{2}}}. \end{aligned}$$

On note  $C^{m+\beta, \frac{m+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  l'espace des fonctions  $f$  telles que  $|f|_{Q_T}^{m+\beta, \frac{m+\beta}{2}} < +\infty$  : c'est un espace de Banach pour la norme  $|\cdot|_{Q_T}^{m+\beta, \frac{m+\beta}{2}}$ .

#### Définition 3.2.1 (Solutions faibles du problème)

Le couple  $(p, S) \in (L^\infty(Q_T))^2$  est solution faible du problème  $(\mathcal{P})$  s'il vérifie les deux conditions suivantes

(i)  $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\psi(S) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ;

(ii) les égalités intégrales

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(p(T)) v(T) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \varphi(p_0) v(0) d\mathbf{x} + \int \int_{Q_T} \left( \varphi(p) \partial_t v - \right. \\ &\quad \left. -k M(S) \nabla p \cdot \nabla v + \alpha (\bar{p} - p) v \right) d\mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(p(T)) S(T) v(T) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \varphi(p_0) S_0 v(0) d\mathbf{x} + \int \int_{Q_T} \left( \varphi(p) S \partial_t v + k \psi(S) \Delta v - \right. \\ &\quad \left. -k f_w(S) M(S) \nabla p \cdot \nabla v + \right. \\ &\quad \left. + \alpha (f_w(S^*)(\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^-) v \right) d\mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (3.23)$$

pour tout  $v$  dans  $\mathcal{V} = \left\{ w \in C^{2,1}(\overline{Q_T}), \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \right\}$ .

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant

### Théorème 3.2.2

On suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}_0)$ - $(\mathcal{H}_7)$  sont satisfaites. Alors le Problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution faible  $(p, S) \in (L^\infty(Q_T))^2$ .

### Remarque 3.2.1

Dans les démonstrations, on remplace la fonction  $\psi$  par une fonction  $\tilde{\psi}$  telle que

$$\tilde{\psi}(S) = \begin{cases} \psi(S) & \text{si } 0 \leq S \leq R, \\ \psi'(S)(S - R) + \psi(R) & \text{si } S \geq R, \end{cases}$$

où  $R > 1$ . Si on montre que  $0 \leq S \leq 1$ , on aura résolu le problème de départ. Par commodité, cette fonction  $\tilde{\psi}$  sera encore notée  $\psi$ .

### 3.3 Problème régularisé ( $\mathcal{P}_\epsilon$ )

Soit  $\epsilon$  une constante réelle assez petite. On définit les suites

- $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0} \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{aligned}
 \varphi_\epsilon &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \varphi && \text{uniformément sur l'intervalle } [p_*, p^*], \\
 \varphi(p_*) &\leq \varphi_\epsilon(p) \leq \varphi(p^*) + 1, \\
 0 < c_\epsilon &\leq \varphi'_\epsilon(p) && \text{pour tout } p \in \mathbb{R}, \\
 \varphi'_\epsilon(p) &\leq \sup_{[p_*, p^*]} \varphi' && \text{pour tout } p \in [p_*, p^*],
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

où  $c_\epsilon$  est une constante dépendant de  $\epsilon$ ;

- $\alpha_\epsilon \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  telle que

$$\begin{aligned}
 \alpha_\epsilon &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \alpha \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\
 \alpha_\epsilon &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \alpha \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \\
 \alpha_\epsilon &\leq \alpha^*;
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

- $\overline{p}_\epsilon \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  telle que

$$\begin{aligned}
 \overline{p}_\epsilon &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \overline{p} \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\
 \overline{p}_\epsilon &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \overline{p} \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \\
 p_* &\leq \overline{p}_\epsilon \leq p^*;
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

- $S_{0,\epsilon} \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  telle que

$$\begin{aligned} S_{0,\epsilon} &\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} S_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ S_{0,\epsilon} &\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} S_0 \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \\ 0 &\leq S_{0,\epsilon} \leq 1; \end{aligned} \tag{3.27}$$

- $p_{0,\epsilon} \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  telle que

$$\begin{aligned} p_{0,\epsilon} &\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} p_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ p_{0,\epsilon} &\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} p_0 \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \\ p_* &\leq p_{0,\epsilon} \leq p^*; \end{aligned} \tag{3.28}$$

- $\psi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\psi_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \psi \quad \text{dans } C^1([0, 1]), \tag{3.29}$$

$$C_* S^{m-1} + \lambda_* \epsilon \leq \psi'_\epsilon(S) \leq C^* S^{m-1} + \lambda^* \epsilon \quad \text{pour tout } S \in [0, 1],$$

où les constantes  $\lambda_*$  et  $\lambda^*$  sont strictement positives et dépendent de la fonction  $\psi$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , on définit les fonctions

$$\begin{aligned} a^+(r) &= r^+, \\ a^-(r) &= r^-, \end{aligned}$$

et des suites des fonctions  $\{a_\epsilon^+\}_{\epsilon>0}$  et  $\{a_\epsilon^-\}_{\epsilon>0}$  dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  telles que

$$a_\epsilon^-(r) = a_\epsilon^+(r) - r. \tag{3.30}$$

De plus

- $a_\epsilon^+ \rightarrow a^+$  uniformément sur chaque compact dans  $\mathbb{R}$  ;
- $a_\epsilon^- \rightarrow a^-$  uniformément sur chaque compact dans  $\mathbb{R}$  ;
- $0 \leq a_\epsilon^{+'} \leq 1$  et  $-1 \leq a_\epsilon^{-'} \leq 0$  ;
- $a_\epsilon^+ \geq 0$  et  $a_\epsilon^- \geq 0$ .

Afin de prouver l'existence de la solution du problème ( $\mathcal{P}$ ), on définit une suite de problèmes approchées  $\{\mathcal{P}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ , par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} S = \frac{k}{\varphi_\epsilon(p)} \Delta \psi_\epsilon(S) + \frac{kM(S)}{\varphi_\epsilon(p)} \nabla p \cdot \nabla f_w(S) + \\ \quad + \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} (f_w(S^*) - f_w(S)) a_\epsilon^+ (\bar{p}_\epsilon - p) - \\ \quad - \frac{(S - f_w(S))}{\varphi_\epsilon(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p) = k \operatorname{div} (M(S) \nabla p) + \alpha_\epsilon (\bar{p}_\epsilon - p), \end{array} \right. \quad (3.31)$$

sur  $Q_T$ , avec les conditions aux limites et initiales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla S \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ S(\mathbf{x}, 0) &= S_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \\ p(\mathbf{x}, 0) &= p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

### **Théorème 3.3.1 (Solution classique du problème régularisé)**

Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une solution classique  $(p_\epsilon, S_\epsilon) \in \left( C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T) \right)^2$  du Problème ( $\mathcal{P}_\epsilon$ ). Cette solution vérifie

$$0 \leq S_\epsilon \leq 1,$$

$$p_* \leq p_\epsilon \leq p^*.$$

*Démonstration.*

On définit l'ensemble

$$K_\epsilon := \left\{ w \in C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q_T}), \ p_* \leq w \leq p^* \text{ sur } Q_T, \right. \\ \left. w(\mathbf{x}, 0) = p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) \text{ sur } \Omega, \nabla w \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T] \right\}. \quad (3.33)$$

L'ensemble  $K_\epsilon$  est un convexe fermé dans  $C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q_T})$ . Soit  $\tilde{p} \in K_\epsilon$  arbitraire. On considère le Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon^S)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} S &= \frac{k}{\varphi_\epsilon(\tilde{p})} \Delta \psi_\epsilon(S) + \frac{kM(S)}{\varphi_\epsilon(\tilde{p})} \nabla \tilde{p} \cdot \nabla f_w(S) + \\ &+ \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(\tilde{p})} (f_w(S^*) - f_w(S)) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - \tilde{p}) - \\ &- \frac{(S - f_w(S))}{\varphi_\epsilon(\tilde{p})} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\tilde{p}) & \text{sur } \Omega \times (0, T], \\ \nabla S \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ S(\mathbf{x}, 0) &= S_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Le Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon^S)$  est uniformément parabolique. On déduit du Théorème 7.4, Chapitre 5, p. 491, [LSU67], qu'il possède une solution classique unique  $S_\epsilon$  dans  $C^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$ .

On a aussi le résultat suivant que l'on démontrera ultérieurement.

**Lemme 3.3.2**

*La fonction  $S_\epsilon$  est telle que*

$$0 \leq S_\epsilon \leq 1 \quad \text{sur } Q_T. \quad (3.35)$$

**Remarque 3.3.1**

Dans ce qui va suivre, on va montrer que la régularité des coefficients de l'opérateur différentiel du Problème ( $\mathcal{P}_\epsilon^S$ ) permet d'obtenir davantage de régularité pour la solution. Plus précisément, on montre que  $S_\epsilon \in C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  et que

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} \leq B_\epsilon^1 |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + B_\epsilon^2,$$

où les constantes positives  $B_\epsilon^1$  et  $B_\epsilon^2$  dépendent de  $\epsilon, S_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

On applique le Théorème 7.2, Chapitre 5, p. 486, de [LSU67], pour obtenir

$$\max_{Q_T} |\nabla S_\epsilon| \leq C_\epsilon^1 |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + C_\epsilon^2, \quad (3.36)$$

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{1+\delta, \frac{1+\delta}{2}} \leq D_\epsilon^1 |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + D_\epsilon^2, \quad (3.37)$$

où les constantes positives  $C_\epsilon^1, C_\epsilon^2, D_\epsilon^1, D_\epsilon^2$  et  $\delta$  dépendent de  $\epsilon, S_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

On peut écrire l'équation (3.34) sous la forme linéaire suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} S = \sum_{i=1}^n a_{ii}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} S + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} S + a(\mathbf{x}, t) S + f(\mathbf{x}, t), \quad (3.38)$$

où

$$a_{ii}(\mathbf{x}, t) = k \frac{\psi'_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t))},$$

$$a_i(\mathbf{x}, t) = k \frac{\psi''_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t))} \frac{\partial}{\partial x_i} S(\mathbf{x}, t) + k \frac{M(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t))} f_w'(S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{p}(\mathbf{x}, t),$$

$$a(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t))} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t)),$$

et

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, t) = & \frac{\alpha_\epsilon(\mathbf{x})}{\varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t))} \left( f_w(S^*) - f_w(S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon(\mathbf{x}) - \tilde{p}(\mathbf{x}, t)) + \\ & + \frac{f_w(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t))} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\tilde{p}(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

On applique 4 fois le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.34). Par récurrence sur  $i$ , on montre que  $S_\epsilon \in C^{i+2+\beta, \frac{i+2+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  où  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

### Remarque 3.3.2

*Les conditions de compatibilités d'ordre  $m$  pour le problème (3.34) s'écrivent*

$$\nabla \frac{\partial^m S_\epsilon}{\partial t^m} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.39)$$

*On doit ainsi satisfaire les conditions de compatibilités d'ordre 0, 1, 2.*

**Pour  $i = 0$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.34) avec l'exposant  $\beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.38) et le second membre  $f$  sont dans  $C^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Il reste à montrer que les conditions de compatibilités d'ordre 0 sont vérifiées, c'est-à-dire

$$\nabla S_{0,\epsilon} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.40)$$

condition qui est vérifiée grâce au choix de  $S_{0,\epsilon}$ . On obtient

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,0} |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,0},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,0}$  et  $h_\epsilon^{2,0}$  dépendent de  $\epsilon$ ,  $S_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

**Pour  $i = 1$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.34) avec l'exposant  $1 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.38) et le second membre  $f$  sont dans  $C^{1+\beta, \frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Il reste à montrer que les conditions de compatibilités d'ordre 1 sont vérifiées, c'est-à-dire

$$\nabla \frac{\partial S_\epsilon}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (3.41)$$

On substitue la première équation de (3.34) dans (3.41) pour obtenir

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial S_\epsilon}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} &= \nabla \left( \frac{k}{\varphi_\epsilon(p_{0,\epsilon})} \Delta \psi_\epsilon(S_{0,\epsilon}) + \frac{kM(S_{0,\epsilon})}{\varphi_\epsilon(p_{0,\epsilon})} \nabla p_{0,\epsilon} \cdot \nabla f_w(S_{0,\epsilon}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p_{0,\epsilon})} \left( f_w(S^*) - f_w(S_{0,\epsilon}) \right) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p_{0,\epsilon}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(S_{0,\epsilon} - f_w(S_{0,\epsilon}))}{\varphi_\epsilon(p_{0,\epsilon})} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\tilde{p}) \Big|_{t=0} \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ce qui est vérifié grâce aux propriétés de l'ensemble  $K_\epsilon$  et du fait que les suites  $p_{0,\epsilon}$ ,  $S_{0,\epsilon}$ ,  $\bar{p}_\epsilon$  et  $\alpha_\epsilon$  sont à support compact dans  $\Omega$ . On déduit finalement que

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,1} |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,1},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,1}$  et  $h_\epsilon^{2,1}$  dépendent de  $\epsilon$ ,  $S_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

**Pour  $i = 2$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.34) avec l'exposant  $2 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.38) et le second membre  $f$  sont dans  $C^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Comme les conditions de compatibilités d'ordre 1 sont vérifiées, alors

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{4+\beta, \frac{4+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,2} |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,2},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,2}$  et  $h_\epsilon^{2,2}$  dépendent de  $\epsilon$ ,  $S_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

**Pour  $i = 3$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.34), avec l'exposant  $3 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.38) sont dans  $C^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ , ainsi que le second membre  $f$ . Il reste à satisfaire les conditions de compatibilités d'ordre 2 données par

$$\nabla \frac{\partial^2 S_\epsilon}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.43)$$

D'après les propriétés des fonctions de l'ensemble  $K_\epsilon$  et comme les suites  $S_{0,\epsilon}$ ,  $p_{0,\epsilon}$ ,  $\alpha_\epsilon$ , et  $\bar{p}_\epsilon$  sont à support compact dans  $\Omega$ , on déduit alors

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial^2 S_\epsilon}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} &= \nabla \left( \sum_{i=1}^n a_{ii}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial t} S_\epsilon + \frac{\partial}{\partial t} a_{ii}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} S_\epsilon + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} S_\epsilon + \frac{\partial}{\partial t} a_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} S_\epsilon + \right. \\ &\quad \left. + a(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} S_\epsilon + S_\epsilon \frac{\partial}{\partial t} a(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) \right) \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} \\ &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ainsi la condition (3.43) est satisfaite. On a donc

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} \leq B_\epsilon^1 |\tilde{p}|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + B_\epsilon^2, \quad (3.44)$$

où les constantes positives  $B_\epsilon^1$  et  $B_\epsilon^2$  dépendent de  $\epsilon$ ,  $S_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

On considère maintenant le Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon^p)$  défini par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p) &= k \operatorname{div} \left( M(S_\epsilon) \nabla p \right) + \alpha_\epsilon (\bar{p}_\epsilon - p) & \text{sur } \Omega \times (0, T], \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T], \\ p(\mathbf{x}, 0) &= p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.45)$$

Ce problème est uniformément parabolique, il possède donc une solution classique unique (Théorème 7.4, Chapitre 5, p.491 de [LSU67])  $\hat{p}_\epsilon \in C^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$ . On a le résultat suivant que l'on démontrera ultérieurement.

### Lemme 3.3.3

*La fonction  $\hat{p}_\epsilon$  est telle que*

$$p_* \leq \hat{p}_\epsilon(\mathbf{x}, t) \leq p^* \quad \text{dans } Q_T. \quad (3.46)$$

En appliquant le Théorème 7.2 du chapitre 5 de, p. 486 de [LSU67], on obtient

$$\max_{Q_T} |\nabla \widehat{p}_\epsilon| \leq A_\epsilon^1 |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + A_\epsilon^2, \quad (3.47)$$

$$|\widehat{p}_\epsilon|_{\overline{Q}_T}^{1+\theta, \frac{1+\theta}{2}} \leq E_\epsilon^1 |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + E_\epsilon^2, \quad (3.48)$$

où  $A_\epsilon^1, A_\epsilon^2, E_\epsilon^1, E_\epsilon^2$  et  $\theta$  dépendent de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

### Remarque 3.3.3

Dans ce qui va suivre, on va montrer que la régularité des coefficients de l'opérateur différentiel du Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon^p)$  permet de préciser davantage la régularité pour la solution. On montre que  $p_\epsilon \in C^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  et que

$$|p_\epsilon|_{Q_T}^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}} \leq M_\epsilon^1 |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + M_\epsilon^2,$$

où les constantes positives  $M_\epsilon^1$  et  $M_\epsilon^2$  dépendent que de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

La première équation de (3.45) peut être réécrite sous la forme linéaire suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{p}_\epsilon = \sum_{i=1}^n b_{ii}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \widehat{p}_\epsilon + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \widehat{p}_\epsilon + b(\mathbf{x}, t) \widehat{p}_\epsilon + g(\mathbf{x}, t), \quad (3.49)$$

avec

$$b_{ii}(\mathbf{x}, t) = \frac{M(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\varphi'_\epsilon(\widehat{p}(\mathbf{x}, t))},$$

$$b_i(\mathbf{x}, t) = \frac{M'_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\varphi'_\epsilon(\widehat{p}(\mathbf{x}, t))} \frac{\partial}{\partial x_i} S_\epsilon(\mathbf{x}, t),$$

$$b(\mathbf{x}, t) = -\frac{\alpha_\epsilon(\mathbf{x})}{\varphi'_\epsilon(\widehat{p}(\mathbf{x}, t))},$$

et

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{\alpha_\epsilon(\mathbf{x}) \overline{p}_\epsilon(\mathbf{x})}{\varphi'_\epsilon(\widehat{p}(\mathbf{x}, t))}.$$

En appliquant 5 fois le Théorème 5.3 du chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.45), on montrera que  $p_\epsilon \in C^{i+2+\beta, \frac{i+2+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  par récurrence sur  $i$  où  $i = 0, \dots, 4$ .

**Remarque 3.3.4**

Les conditions de compatibilités d'ordre  $m$  pour le problème (3.45) se ramènent à

$$\nabla \frac{\partial^m p_\epsilon}{\partial t^m} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.50)$$

On doit ainsi satisfaire les conditions de compatibilités d'ordre 0, 1, 2.

**Pour  $i = 0$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.45) avec l'exposant  $\beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.49) et le second membre  $g$  sont dans  $C^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Il reste à montrer que les conditions de compatibilités d'ordre 0 sont vérifiées, c'est-à-dire

$$\nabla p_{0,\epsilon} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.51)$$

condition qui est vérifiée grâce au choix de  $S_{0,\epsilon}$ . On obtient

$$|p_\epsilon|_{Q_T}^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,0} |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,0},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,0}$  et  $h_\epsilon^{2,0}$  dépendent de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

**Pour  $i = 1$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.45) avec l'exposant  $1 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.49) et le second membre  $g$  sont dans  $C^{1+\beta, \frac{1+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Il reste à montrer que les conditions de compatibilités d'ordre 1 sont vérifiées, plus précisément

$$\nabla \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.52)$$

On substitue la première équation de (3.45) dans (3.52). Comme les suites  $p_{0,\epsilon}$ ,  $S_{0,\epsilon}$ ,  $\overline{p}_\epsilon$  et  $\alpha_\epsilon$  sont à support compact dans  $\Omega$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} &= \nabla \left( \frac{k}{\varphi'_\epsilon(p_{0,\epsilon})} \operatorname{div} \left( M(S_{0,\epsilon}) \nabla p_{0,\epsilon} \right) + \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi'_\epsilon(p_{0,\epsilon})} (\overline{p}_\epsilon - p_{0,\epsilon}) \right) \cdot \mathbf{n} \\ &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.53)$$

On déduit finalement que

$$|p_\epsilon|_{Q_T}^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,1} |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,1},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,1}$ , et  $h_\epsilon^{2,1}$  dépendent de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

**Pour  $i = 2$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.45) avec l'exposant  $2 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.49) et le second membre  $g$  sont dans  $C^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Comme les conditions de compatibilités d'ordre 1 sont vérifiées, alors

$$|p_\epsilon|_{Q_T}^{4+\beta, \frac{4+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,2} |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,2},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,2}$  et  $h_\epsilon^{2,2}$  dépendent de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

**Pour  $i = 3$  :**

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.45) avec l'exposant  $3 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.49) et le second membre  $g$  sont dans  $C^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Il reste à satisfaire les conditions de compatibilités d'ordre 2, c'est-à-dire

$$\nabla \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.54)$$

Il faut donc calculer

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n} &= \nabla \left( \sum_{i=1}^n b_{ii}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial t} p_\epsilon + \frac{\partial}{\partial t} b_{ii}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} p_\epsilon + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} p_\epsilon + \frac{\partial}{\partial t} b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} p_\epsilon + \right. \\ &\quad \left. + b(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} p_\epsilon + p_\epsilon \frac{\partial}{\partial t} b(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{x}, t) \right) \Big|_{t=0} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

La condition (3.54) est satisfaite grâce aux propriétés de la solution  $S_\epsilon$  et du fait que  $S_{0,\epsilon}, p_{0,\epsilon}, \alpha_\epsilon$  et  $\bar{p}_\epsilon$  sont à support compact sur  $\Omega$ . On a donc

$$|p_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} \leq h_\epsilon^{1,3} |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + h_\epsilon^{2,3},$$

où les constantes positives  $h_\epsilon^{1,3}$  et  $h_\epsilon^{2,3}$  dépendent de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

Pour  $i = 4$  :

On applique le Théorème 5.3 du Chapitre 4, p.320 de [LSU67] au problème (3.45) pour l'exposant  $3 + \beta$ . Les coefficients de l'opérateur (3.38) et le second membre  $g$  sont dans  $C^{4+\beta, \frac{4+\beta}{2}}(\overline{Q_T})$ . Comme les conditions de compatibilités d'ordre 2 sont vérifiées, on obtient

$$|p_\epsilon|_{Q_T}^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}} \leq M_\epsilon^1 |S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} + M_\epsilon^2, \quad (3.55)$$

où les constantes positives  $M_\epsilon^1$  et  $M_\epsilon^2$  dépendent de  $\epsilon, p_{0,\epsilon}$  et  $\partial\Omega$ .

On a ainsi défini une application  $\mathcal{F}$  du convexe fermé  $K_\epsilon \subset C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q_T})$  dans  $K_\epsilon$  : à tout  $\tilde{p} \in K_\epsilon$ , on associe  $\hat{p}_\epsilon = \mathcal{F}(\tilde{p})$ , solution du Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon^p)$ .

Pour montrer que le Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon)$  admet une solution, il suffit de montrer que l'application  $\mathcal{F}$  admet un point fixe ou encore que  $\mathcal{F}$  est compacte et continue. On rappelle le Théorème du point fixe de Schauder ([Sma74], Théorème 4.1.4, p.26).

### Théorème 3.3.4 (Point fixe de Schauder)

*Soit  $K$  un sous-ensemble convexe fermé d'un espace normé. Si  $\mathcal{F}$  est une application continue et compacte de  $K$  dans  $K$ , alors  $\mathcal{F}$  admet un point fixe.*

### Compacité de l'application $\mathcal{F}$

Pour simplifier les notations, on omet d'indiquer la dépendance en  $\epsilon$  des constantes intervenant ci-dessous.

On définit

$$\mathcal{B}_C = \{w \in K_\epsilon, |w|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} \leq C\},$$

un fermé borné de  $K_\epsilon$ . Pour montrer que l'application  $\mathcal{F}$  est compacte, il suffit de montrer que  $\mathcal{F}(\mathcal{B}_C)$  est compacte dans  $K_\epsilon$ . Soient  $p \in \mathcal{B}_C$  arbitraire et  $S_\epsilon$  la solution de (3.34). Comme  $|p|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} \leq C$  et grâce à (3.44), on a

$$|S_\epsilon|_{Q_T}^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}} \leq \widetilde{M}(C). \quad (3.56)$$

Soit  $\hat{p}_\epsilon = \mathcal{F}(p)$  la solution de (3.45). De (3.55), on a

$$|\hat{p}_\epsilon|_{Q_T}^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}} \leq \widetilde{C}(C). \quad (3.57)$$

On a ainsi montré que

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}_C) \subset \left\{ w \in C^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T), |w|^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T) \leq \tilde{C}(C) \right\}.$$

Ainsi  $\mathcal{F}(\mathcal{B}_C)$  est borné dans  $C^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ . Comme l'injection de  $C^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  dans  $C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  est compacte, on en déduit que  $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{B}_C)}$  est compacte dans  $K_\epsilon$  et donc la compacité de l'application  $\mathcal{F}$ .

### Continuité de l'application $\mathcal{F}$

Pour montrer la continuité, on considère une suite de  $K_\epsilon$  notée  $\{p^\zeta\}_{\zeta>0}$  telle que

$$p^\zeta \xrightarrow[\zeta \rightarrow 0]{} p \text{ dans } K_\epsilon. \quad (3.58)$$

Il existe alors une suite  $\{S_\epsilon^\zeta\}_{\zeta>0}$  et une fonction  $S_\epsilon$  dans  $C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} S_\epsilon^\zeta &= \frac{k}{\varphi_\epsilon(p^\zeta)} \Delta \psi_\epsilon(S_\epsilon^\zeta) + \frac{kM(S_\epsilon^\zeta)}{\varphi_\epsilon(p^\zeta)} \nabla p^\zeta \cdot \nabla f_w(S_\epsilon^\zeta) + \\ &+ \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p^\zeta)} \left( f_w(S^*) - f_w(S_\epsilon^\zeta) \right) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p^\zeta) - \\ &- \frac{\left( S_\epsilon^\zeta - f_w(S_\epsilon^\zeta) \right)}{\varphi_\epsilon(p^\zeta)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p^\zeta) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla S_\epsilon^\zeta \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ S_\epsilon^\zeta(\mathbf{x}, 0) &= S_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.59)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} S_\epsilon &= \frac{k}{\varphi_\epsilon(p)} \Delta \psi_\epsilon(S_\epsilon) + \frac{kM(S_\epsilon)}{\varphi_\epsilon(p)} \nabla p \cdot \nabla f_w(S_\epsilon) + \\ &+ \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} \left( f_w(S^*) - f_w(S_\epsilon) \right) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p) - \\ &- \frac{\left( S_\epsilon - f_w(S_\epsilon) \right)}{\varphi_\epsilon(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla S_\epsilon \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ S_\epsilon(\mathbf{x}, 0) &= S_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Comme la suite  $\{p^\zeta\}_{\zeta>0}$  est bornée, grâce à (3.44) et à la compacité de l'injection de  $C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  dans  $C^{4+\beta, \frac{4+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ , il existe une fonction  $\widehat{S}_\epsilon \in C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  et on peut extraire une sous-suite  $\{S_\epsilon^{\zeta_n}\}_{n \geq 0}$  telle que

$$S_\epsilon^{\zeta_n} \xrightarrow[\zeta_n \rightarrow 0]{} \widehat{S}_\epsilon \text{ dans } C^{4+\beta, \frac{4+\beta}{2}}(\overline{Q}_T).$$

On va montrer que  $\widehat{S}_\epsilon$  coïncide avec la solution unique  $S_\epsilon$  du problème (3.60). En faisant tendre  $\zeta_n$  vers 0 dans (3.59), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{S}_\epsilon &= \frac{k}{\varphi_\epsilon(p)} \Delta \psi_\epsilon(\widehat{S}_\epsilon) + \frac{kM(\widehat{S}_\epsilon)}{\varphi_\epsilon(p)} \nabla p \cdot \nabla f_w(\widehat{S}_\epsilon) + \\ &+ \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} \left( f_w(S^*) - f_w(\widehat{S}_\epsilon) \right) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p) - \\ &- \frac{\left( \widehat{S}_\epsilon - f_w(\widehat{S}_\epsilon) \right)}{\varphi_\epsilon(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla \widehat{S}_\epsilon \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \widehat{S}_\epsilon(\mathbf{x}, 0) &= S_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Par unicité de la solution pour le problème uniformément parabolique (3.60) (Théorème

7.4, Chapitre 5, p.491 de [LSU67]), on déduit de (3.60) et de (3.61) que

$$S_\epsilon = \widehat{S}_\epsilon.$$

Soit  $(\widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n})_{n>0}$  la suite solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n}) &= k \operatorname{div} \left( M(S_\epsilon^{\zeta_n}) \nabla \widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n} \right) + \alpha_\epsilon(\overline{p}_\epsilon - \widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n}) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla \widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n}(\mathbf{x}, 0) &= p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.62)$$

Grâce à (3.55) et à la compacité de l'injection de  $C^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  dans  $C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ , il existe une fonction  $\theta_\epsilon \in C^{6+\beta, \frac{6+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  et une sous-suite de  $(\widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n})_{n>0}$  encore notée  $(\widehat{p}_\epsilon^{\zeta_n})_{n>0}$  telle que

$$p_\epsilon^{\zeta_n} \xrightarrow[\zeta_n \rightarrow 0]{} \theta_\epsilon \text{ dans } C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T).$$

En faisant tendre  $\zeta_n$  vers 0 dans l'équation (3.62), on déduit que  $\theta_\epsilon$  satisfait le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\theta_\epsilon) &= k \operatorname{div} \left( M(S_\epsilon) \nabla \theta_\epsilon \right) + \alpha_\epsilon(\overline{p}_\epsilon - \theta_\epsilon) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla \theta_\epsilon \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \theta_\epsilon(\mathbf{x}, 0) &= p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.63)$$

D'autre part, la fonction  $\widehat{p}_\epsilon = \mathcal{F}(p)$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(\widehat{p}_\epsilon) &= k \operatorname{div} \left( M(S_\epsilon) \nabla \widehat{p}_\epsilon \right) + \alpha_\epsilon(\overline{p}_\epsilon - \widehat{p}_\epsilon) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla \widehat{p}_\epsilon \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \widehat{p}_\epsilon(\mathbf{x}, 0) &= p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (3.64)$$

Donc par unicité de la solution (Théorème 7.4, Chapitre 5, p.491 de [LSU67]), on déduit que

$$\theta_\epsilon = \mathcal{F}(p),$$

si bien que l'application  $\mathcal{F} : \tilde{p} \rightarrow \hat{p}_\epsilon$  est continue et compacte pour la topologie de  $C^{5+\beta, \frac{5+\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$  du convexe fermé  $K_\epsilon$  dans lui-même ; on déduit du Théorème du point fixe de Schauder 3.3.4 qu'il existe une solution  $(S_\epsilon, p_\epsilon)$  du Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon)$ .  $\square$

On va démontrer les Lemmes 3.3.2 et 3.3.3.

*Démonstration du Lemme 3.3.2*

Soit  $S_\epsilon$  solution du problème (3.34) pour  $(\tilde{S}, \tilde{p})$  arbitraire dans  $K_\epsilon$ . On définit l'opérateur

$$\mathcal{L}_\epsilon(S) = \frac{\partial}{\partial t} S - \frac{\psi'_\epsilon(S_\epsilon)}{\varphi_\epsilon(p)} \Delta S + \left( \frac{kM(S_\epsilon)}{\varphi_\epsilon(p)} f'_w(S_\epsilon) \nabla p - \frac{k}{\varphi_\epsilon(p)} \nabla \psi'_\epsilon(S_\epsilon) \right) \cdot \nabla S, \quad (3.65)$$

et la fonction

$$f_\epsilon(\mathbf{x}, t, S) = \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} \left( f_w(S^*) - f_w(S) \right) a_\epsilon^+ \left( \bar{p}_\epsilon - p \right) - \frac{(S - f_w(S))}{\varphi_\epsilon(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p).$$

Comme  $S = 0$  et  $S = 1$  sont respectivement sous et sur-solution du Problème  $(\mathcal{L}_\epsilon)$  (définition 3.1 du Chapitre 2 de [Pao92], p. 57), c'est -à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon(0) - f_\epsilon(\mathbf{x}, t, 0) &= 0 - \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} f_w(S^*) a_\epsilon^+ \left( \bar{p}_\epsilon - p \right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon(1) - f_\epsilon(\mathbf{x}, t, 1) &= 0 - \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} (f_w(S^*) - 1) a_\epsilon^+ \left( \bar{p}_\epsilon - p \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

on déduit du Lemme 3.6 du Chapitre 2 de [Pao92], p. 61 que  $0 \leq S_\epsilon \leq 1$ .  $\square$

*Démonstration du Lemme 3.3.3*

Soit  $S_\epsilon$  la solution du problème (3.34) et soit  $\hat{p}_\epsilon$  solution du problème (3.45). On définit

$$\mathcal{M}_\epsilon(p) = \frac{\partial}{\partial t} p - \frac{M(S_\epsilon)}{\varphi'_\epsilon(p_\epsilon)} \Delta p - \frac{M'(S_\epsilon)}{\varphi'_\epsilon(p_\epsilon)} \nabla S_\epsilon \nabla p, \quad (3.66)$$

et le second membre

$$g_\epsilon(\mathbf{x}, t, p) = \alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p).$$

Comme  $p = p_*$  et  $p = p^*$  sont respectivement sous et sur-solution du Problème  $(\mathcal{M}_\epsilon)$  (définition 3.1 du Chapitre 2 de [Pao92], p. 57), c'est -à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\epsilon(p_*) - g_\epsilon(\mathbf{x}, t, p_*) &= 0 - \alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p_*) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\epsilon(p^*) - g_\epsilon(\mathbf{x}, t, p^*) &= 0 - \alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p^*) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

on déduit du Lemme 3.6 du Chapitre 2 de [Pao92], p. 61 que  $p_* \leq \hat{p}_\epsilon \leq p^*$ .  $\square$

### Lemme 3.3.5

Le Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon)$  est équivalent au Problème  $(\mathcal{P}'_\epsilon)$  défini sur  $Q_T$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p) = k \operatorname{div} \left( M(S) \nabla p \right) + \alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p) \\ \frac{\partial}{\partial t} S = \frac{k}{\varphi_\epsilon(p)} \Delta \psi_\epsilon(S) + \frac{k}{\varphi_\epsilon(p)} \operatorname{div} \left( f_w(S) M(S) \nabla p \right) + \\ \quad + \frac{\alpha_\epsilon}{\varphi_\epsilon(p)} \left( f_w(S^*) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p) - f_w(S) a_\epsilon^-(\bar{p}_\epsilon - p) \right) - \\ \quad - \frac{S}{\varphi_\epsilon(p)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p), \end{array} \right. \quad (3.67)$$

avec les conditions aux limites et initiales,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \nabla S \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ S(\mathbf{x}, 0) &= S_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \\ p(\mathbf{x}, 0) &= p_{0,\epsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.68)$$

*Démonstration.*

On a montré à la Section 3.2 la correspondance entre les deux problèmes ; la régularité des coefficients des EDP dans (3.31)-(3.32) et (3.67)-(3.68) et le fait que

$$a_\epsilon^+(r) - a_\epsilon^-(r) = r, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R},$$

permettent de conclure que les problèmes  $(\mathcal{P}_\epsilon)$  et  $(\mathcal{P}'_\epsilon)$  sont équivalents.  $\square$

On a ainsi terminé la démonstration du Théorème 3.3.1. Pour montrer que le Problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution faible au sens de la définition 3.2.1, on va faire tendre le paramètre  $\epsilon$  vers zéro. Dans ce but, on établit tout d'abord un certain nombre d'estimations a priori.

### 3.4 Estimations a priori uniformes en $\epsilon$

#### Lemme 3.4.1 (Estimations a priori $p_\epsilon$ )

Soient  $\epsilon \in (0, 1]$  et  $(p_\epsilon, S_\epsilon)$  solution du Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon)$ , il existe une constante positive  $C$  qui ne dépend pas de  $\epsilon$  telle que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|p_\epsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \\ (ii) \quad & \|\varphi_\epsilon(p_\epsilon)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \\ (iii) \quad & \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p_\epsilon) \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq C. \end{aligned} \tag{3.69}$$

*Démonstration.*

(i) La fonction  $p_\epsilon$  satisfait le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p) &= k \operatorname{div} \left( M(S_\epsilon) \nabla p \right) + \alpha_\epsilon (\bar{p}_\epsilon - p) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ p(\cdot, 0) &= p_{0,\epsilon} & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.70}$$

On multiplie l'équation (3.70) par  $p_\epsilon$  et on intègre sur  $Q_T$  pour obtenir

$$\int \int_{Q_T} p_\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p_\epsilon) d\mathbf{x} dt + \int \int_{Q_T} kM(S_\epsilon)(\nabla p_\epsilon)^2 d\mathbf{x} dt = \int \int_{Q_T} \alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) p_\epsilon d\mathbf{x} dt.$$

On pose

$$\Phi_\epsilon(s) = \int_0^s r \varphi'_\epsilon(r) dr.$$

On a

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} p_\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p_\epsilon) d\mathbf{x} dt &= \int \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_\epsilon(p_\epsilon) d\mathbf{x} dt \\ &= \int_\Omega \left( \Phi_\epsilon(p_\epsilon(\cdot, T)) - \Phi_\epsilon(p_{0,\epsilon}) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On déduit de (3.70) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi_\epsilon(p_\epsilon(\cdot, T)) d\mathbf{x} + kM_* \int \int_{Q_T} (\nabla p_\epsilon)^2 d\mathbf{x} dt &\leq \int \int_{Q_T} a\alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) p_\epsilon d\mathbf{x} dt + \\ &+ \int_\Omega \Phi_\epsilon(p_{0,\epsilon}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$kM_* \int \int_{Q_T} (\nabla p_\epsilon)^2 d\mathbf{x} dt \leq \alpha^* T |\Omega| p^{*2} + |\Omega| p^{*2} \sup_{[p^*, p^*]} \varphi'(p).$$

On a ainsi démontré (i) avec  $C = C(M_*, T, |\Omega|, p^*, \alpha^*)$ .

(ii) découle immédiatement de (i) et de (3.24).

(iii) Soit  $\phi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ; pour tout  $\epsilon > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p_\epsilon), \phi \right\rangle \right| &\leq k \int \int_{Q_T} |M(S_\epsilon) \nabla p_\epsilon \cdot \nabla \phi| d\mathbf{x} dt + \\ &+ \int \int_{Q_T} |\alpha_\epsilon(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) \phi| d\mathbf{x} dt \\ &\leq \left( k M^* \|\nabla p_\epsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\nabla \phi\|_{L^2(Q_T)} + \alpha^* p^* \|\phi\|_{L^2(Q_T)} \right) \\ &\leq (k M^* C + \alpha^* p^*) \|\phi\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(p_\epsilon) \right\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq \tilde{C}.$$

□

**Lemme 3.4.2 (Estimations a priori sur  $S_\epsilon$ )**

On suppose que  $\epsilon \in \left(0, \min(1, \frac{\lambda_* C_*^{*2}}{\lambda_*^{*2} C_*})\right]$ . Soit  $(p_\epsilon, S_\epsilon)$  solution du Problème  $(\mathcal{P}_\epsilon)$ , il existe une constante positive  $C$  qui ne dépend pas de  $\epsilon$  telle que

$$(i) \quad \int \int_{Q_T} |\nabla \mathcal{G}_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))|^2 d\mathbf{x} dt \leq C,$$

$$(ii) \quad \int \int_{Q_T} |\nabla \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))|^2 d\mathbf{x} dt \leq C,$$

$$(iii) \quad \int \int_{Q_T} \left| \nabla \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right|^2 d\mathbf{x} dt \leq C,$$

$$(iv) \quad \int_0^T \int_{\Omega_\xi} \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x} + \xi, t)) S_\epsilon(\mathbf{x} + \xi, t)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right)^2 d\mathbf{x} dt \leq C|\xi|^2,$$

$$(v) \quad \int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right)^2 d\mathbf{x} dt \leq C\tau,$$

où

$$\mathcal{G}_\epsilon(S) = \int_0^S \sqrt{C_* r^{m-1} + \lambda_* \epsilon} dr, \tag{3.71}$$

$$\mathcal{K}(a) = \frac{1}{m} a^m,$$

et

$$\Omega_\xi := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{x} + r\xi \in \Omega \text{ pour tout } 0 \leq r \leq 1\}.$$

*Démonstration.*

(i) On multiplie l'équation pour  $S_\epsilon$  dans (3.67) par  $\varphi_\epsilon(p_\epsilon)$  et on utilise (3.5) et (3.15) pour déduire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon \right) &= k \Delta \psi_\epsilon(S_\epsilon) + k \frac{\rho_w}{\mu_w} \operatorname{div} \left( S_\epsilon^a \nabla p_\epsilon \right) + \\ &+ \alpha_\epsilon \left( f_w(S^*) a_\epsilon^+ (\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) - f_w(S_\epsilon) a_\epsilon^- (\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

On multiplie (3.72) par  $\varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon$  et on intègre sur  $Q_T$  pour obtenir

$$\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5 = 0, \quad (3.73)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon \right)^2 d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_1 &= k \int_0^T \int_\Omega \varphi_\epsilon(p_\epsilon) \psi'_\epsilon(S_\epsilon) \left( \nabla S_\epsilon \right)^2 d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_2 &= k \int_0^T \int_\Omega S_\epsilon \psi'_\epsilon(S_\epsilon) \nabla S_\epsilon \nabla \varphi_\epsilon(p_\epsilon) d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_3 &= k \frac{\rho_w}{\mu_w} \int_0^T \int_\Omega S_\epsilon^{a+1} \nabla p_\epsilon \nabla \varphi_\epsilon(p_\epsilon) d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_4 &= k \frac{\rho_w}{\mu_w} \int_0^T \int_\Omega \varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon^a \nabla S_\epsilon \nabla p_\epsilon d\mathbf{x} dt, \\ \mathcal{I}_5 &= - \int_0^T \int_\Omega \alpha_\epsilon \left( f_w(S^*) a_\epsilon^+ (\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) - f_w(S_\epsilon) a_\epsilon^- (\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) \right) \varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

On estime chacune des quantités  $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4$  et  $\mathcal{I}_5$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \int_\Omega \frac{1}{2} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, T)) S_\epsilon(\mathbf{x}, T) \right)^2 d\mathbf{x} - \int_\Omega \frac{1}{2} \left( \varphi_\epsilon(p_{0,\epsilon}(\mathbf{x})) S_{\epsilon,0}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} \\ &\geq - \int_\Omega \frac{1}{2} \left( \varphi_\epsilon(p_{0,\epsilon}(\mathbf{x})) S_{\epsilon,0}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} \\ &\geq - \frac{1}{2} |\Omega| \varphi(p^*). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Pour  $\mathcal{I}_1$ , on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_1 &= k \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \left( \sqrt{\psi'_{\epsilon}(S_{\epsilon})} \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt \\
 &\geq k \varphi(p_*) \int_0^T \int_{\Omega} \left( (\sqrt{C_* S_{\epsilon}^{m-1} + \lambda_* \epsilon}) \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt \\
 &\geq k \varphi(p_*) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \mathcal{G}_{\epsilon}(S_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Intéressons-nous à  $\mathcal{I}_2$ ,

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{I}_2| &= k \left| \int_0^T \int_{\Omega} S_{\epsilon} \psi'_{\epsilon} \nabla S_{\epsilon} \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) d\mathbf{x} dt \right| \\
 &\leq k \frac{c_1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} S_{\epsilon}^2 \left( \psi'(S_{\epsilon}) \right)^2 \left( \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{k}{2 c_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt \\
 &\leq k c_1 \int_0^T \int_{\Omega} S_{\epsilon}^2 \left( C_*^2 S_{\epsilon}^{2(m-1)} + \lambda_*^2 \epsilon^2 \right) \left( \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \\
 &\quad + \frac{k}{2 c_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt.
 \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités  $\epsilon \leq \min\left(1, \frac{\lambda_* C_*^2}{\lambda_*^2 C_*}\right)$  et  $S_{\epsilon} \leq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{I}_2| &\leq k c_1 \frac{C_*^2}{C_*} \int_0^T \int_{\Omega} \left( C_* S_{\epsilon}^{m-1} + \lambda_* \epsilon \right) \left( \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \\
 &\quad + \frac{k}{2 c_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt \\
 &\leq k c_1 \frac{C_*^2}{C_*} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \mathcal{G}_{\epsilon}(S_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{k}{2 c_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Majorons  $\mathcal{I}_3$ ,

$$|\mathcal{I}_3| \leq \frac{k \rho_w}{2 \mu_w} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla p_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{k \rho_w}{2 \mu_w} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt. \tag{3.77}$$

Pour  $\mathcal{I}_4$ , on a

$$|\mathcal{I}_4| \leq \frac{k c_2}{2} \frac{\varphi(p^*) \rho_w}{\mu_w} \int_0^T \int_{\Omega} \left( S_{\epsilon}^a \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{k}{2 c_2} \frac{\varphi(p^*) \rho_w}{\mu_w} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla p_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt.$$

Grâce à la condition (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &\leq \frac{k c_2}{2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \varphi(p^*) \int_0^T \int_{\Omega} S_{\epsilon}^{m-1} \left( \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{k}{2 c_2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \varphi(p^*) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla p_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &\leq \frac{k c_2}{2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \frac{\varphi(p^*)}{C_*} \int_0^T \int_{\Omega} \left( C_* S_{\epsilon}^{m-1} + \lambda_* \epsilon \right) \left( \nabla S_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \\ &\quad + \frac{k}{2 c_2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \varphi(p^*) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla p_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &\leq \frac{k c_2}{2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \frac{\varphi(p^*)}{C_*} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \mathcal{G}_{\epsilon}(S_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{k}{2 c_2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \varphi(p^*) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla p_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Finalement, on a

$$\mathcal{I}_5 \leq \alpha^* \varphi(p^*) |\Omega| T^2 (p^* - p_*). \tag{3.79}$$

On déduit de l'égalité (3.73) que

$$\mathcal{I}_0 = -\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_4 - \mathcal{I}_5.$$

Ceci implique par (3.74), (3.75), (3.76), (3.76), (3.78) et (3.79) que

$$\begin{aligned} k \varphi(p_*) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \mathcal{G}_{\epsilon}(S_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt &\leq \mathcal{I}_1 \leq -\mathcal{I}_0 + |\mathcal{I}_2| + |\mathcal{I}_3| + |\mathcal{I}_4| + |\mathcal{I}_5| \\ &\leq \frac{1}{2} |\Omega| \varphi(p^*) + \left( k c_1 \frac{C_*^2}{C_*} + \frac{k c_2}{2} \frac{\rho_w}{\mu_w} \frac{\varphi(p^*)}{C_*} \right) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \mathcal{G}_{\epsilon}(S_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt + \\ &\quad + \left( \frac{k}{2 c_1} + \frac{k \rho_w}{2 \mu_w} \right) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{\epsilon}(p_{\epsilon}) \right)^2 d\mathbf{x} dt + \\ &\quad + \frac{\rho_w}{\mu_w} \left( \frac{k}{2} + \frac{k}{2 c_2} \varphi(p^*) \right) \int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla p_{\epsilon} \right)^2 d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \tag{3.80}$$

On choisit par exemple

$$c_1 \leq \frac{C_*}{C_*^{*2}} \frac{\varphi(p^*)}{4} \quad \text{et} \quad c_2 \leq \frac{\mu_w}{\rho_w} \frac{C_*}{2}.$$

On déduit finalement du Lemme 3.4.1 (i)-(ii) et de (3.80) que

$$\int \int_{Q_T} |\nabla \mathcal{G}_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))|^2 d\mathbf{x} dt \leq C, \quad (3.81)$$

où  $C$  est indépendant de  $\epsilon$ .

(ii) Par (3.29), (3.81), (3.35), on a pour tout  $\epsilon \leq \min\left(1, \frac{\lambda_* C_*^{*2}}{\lambda_*^{*2} C_*}\right)$ ,

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} |\nabla \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))|^2 d\mathbf{x} dt &= \int \int_{Q_T} \left(\psi'_\epsilon(S_\epsilon)\right)^2 \left(\nabla S_\epsilon\right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &= \int \int_{Q_T} \left(C_*^* S_\epsilon^{m-1} + \lambda_*^* \epsilon\right)^2 \left(\nabla S_\epsilon\right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &\leq 2 \int \int_{Q_T} \left(C_*^{*2} (S_\epsilon^{m-1})^2 + \lambda_*^{*2} \epsilon^2\right) \left(\nabla S_\epsilon\right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &\leq 2 \frac{C_*^{*2}}{C_*} \int \int_{Q_T} \left(C_* S_\epsilon^{m-1} + \lambda_* \epsilon\right) \left(\nabla S_\epsilon\right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &\leq 2 \frac{C_*^{*2}}{C_*} \int \int_{Q_T} \left(\nabla \mathcal{G}_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t))\right)^2 d\mathbf{x} dt \\ &\leq C, \end{aligned}$$

où  $C$  est indépendant de  $\epsilon$ .

(iii) Pour tout  $\epsilon \leq \min\left(1, \frac{\lambda_* C_*^{*2}}{\lambda_*^{*2} C_*}\right)$ , on a

$$\begin{aligned}
\int \int_{Q_T} |\nabla \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon)|^2 d\mathbf{x} dt &= \int \int_{Q_T} \left| \varphi_\epsilon^{m-1}(p_\epsilon) S_\epsilon^{m-1} \nabla \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon \right) \right|^2 d\mathbf{x} dt \\
&\leq \varphi^{m-1}(p^*) \int \int_{Q_T} \left| \left( \nabla \varphi_\epsilon(p_\epsilon) \right) \right|^2 d\mathbf{x} dt + \\
&\quad + \varphi^{2m}(p^*) \int \int_{Q_T} \left| S_\epsilon^{m-1} \nabla S_\epsilon \right|^2 d\mathbf{x} dt \\
&\leq \varphi^{m-1}(p^*) \int \int_{Q_T} \left| \left( \nabla \varphi_\epsilon(p_\epsilon) \right) \right|^2 d\mathbf{x} dt + \\
&\quad + \frac{\varphi^{2m}(p^*)}{C_*} \int \int_{Q_T} \left( C_* S_\epsilon^{m-1} + \lambda_* \epsilon \right) \left| \nabla S_\epsilon \right|^2 d\mathbf{x} dt \\
&\leq \varphi^{m-1}(p^*) \int \int_{Q_T} \left| \left( \nabla \varphi_\epsilon(p_\epsilon) \right) \right|^2 d\mathbf{x} dt + \\
&\quad + \frac{\varphi^{2m}(p^*)}{C_*} \int \int_{Q_T} \left| \nabla \mathcal{G}_\epsilon(S_\epsilon) \right|^2 d\mathbf{x} dt.
\end{aligned}$$

De (i) du Lemme 3.4.1 et de (i) précédent, on déduit

$$\int \int_{Q_T} |\nabla \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon)|^2 d\mathbf{x} dt \leq \tilde{C}.$$

(iv) En utilisant aussi (iii), il vient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega_\xi} \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x} + \xi, t)) S_\epsilon(\mathbf{x} + \xi, t)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right)^2 d\mathbf{x} dt \\
 &= \int_0^T \int_{\Omega_\xi} \left( \int_0^1 \nabla \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x} + r\xi, t)) S_\epsilon(\mathbf{x} + r\xi, t)) \cdot \xi dr \right)^2 d\mathbf{x} dt \\
 &\leq \int_0^T \int_{\Omega_\xi} \left( \int_0^1 \left( \nabla \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x} + \xi, t)) S_\epsilon(\mathbf{x} + \xi, t)) \right)^2 dr \right) \left( \int_0^1 \xi^2 dr \right) d\mathbf{x} dt \\
 &\leq C_4 |\xi|^2.
 \end{aligned}$$

(iv) On pose

$$\mathcal{J}_0 = \int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right)^2 d\mathbf{x} dt,$$

ce qui implique, grâce à (3.24),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_0 &\leq A^* \int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) \\
 &\quad \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau) - \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} dt, \\
 &= A^* \int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) \\
 &\quad \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r) \right) dr d\mathbf{x} dt,
 \end{aligned}$$

avec  $A^* = (\varphi(p^*) + 1)^{m-1}$ ; d'où l'on déduit par (3.72) que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 \leq A^* \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega & \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) \\ & \left( k \Delta \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) + k \frac{\rho_w}{\mu_w} \operatorname{div} \left( S_\epsilon^a(\mathbf{x}, t + r) \nabla p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r) \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_\epsilon(\mathbf{x}) \left( f_w(S^*) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon(\mathbf{x}) - p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - f_w(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) a_\epsilon^-(\bar{p}_\epsilon(\mathbf{x}) - p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) \right) \right) dr d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

ce que l'on récrit sous la forme

$$\mathcal{J}_0 \leq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3, \quad (3.82)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) \\ &\quad \Delta \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) d\mathbf{x} dt dr, \\ \mathcal{J}_2 &= \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) \\ &\quad \operatorname{div} \left( f_w(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) M(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) \nabla p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r) \right) d\mathbf{x} dt dr, \\ \mathcal{J}_3 &= \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) - \mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right) \\ &\quad \alpha_\epsilon(\mathbf{x}) \left( f_w(S^*) a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon(\mathbf{x}) - p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) - \right. \\ &\quad \left. - f_w(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) a_\epsilon^-(\bar{p}_\epsilon(\mathbf{x}) - p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) \right) d\mathbf{x} dt dr. \end{aligned}$$

On intègre  $\mathcal{J}_1$  par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1 &= - \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau) \right) - \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right) \\
 &\quad \nabla \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) \, d\mathbf{x} \, dt \, dr \\
 &\leq \int_0^\tau \left( \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau) \right) - \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right)^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left( \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) \right)^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} dr \\
 &\leq 2 \int_0^\tau \int_0^T \int_\Omega \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right)^2 d\mathbf{x} dt \, dr + \\
 &\quad + \int_0^\tau \int_0^T \int_\Omega \left( \nabla \psi_\epsilon(S_\epsilon(\mathbf{x}, t)) \right)^2 d\mathbf{x} dt \, dr.
 \end{aligned}$$

En utilisant (ii) et (iii), on déduit

$$\mathcal{J}_1 \leq C_1 \tau. \quad (3.83)$$

On intègre  $\mathcal{J}_2$  par parties pour avoir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_2 &= - \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega f_w(S_\epsilon(\mathbf{x}, t + r)) M(S_\epsilon)(\mathbf{x}, t + r) \\
 &\quad \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right) \cdot \nabla p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r) \, d\mathbf{x} \, dt \, dr.
 \end{aligned} \quad (3.84)$$

On utilise (3.17) et (3.18) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &\leq M_* \int_0^\tau \left( \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau) \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right)^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left( \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r) \right)^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} dr \\
&\leq M_* \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t + \tau) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right)^2 d\mathbf{x} dt dr + \\
&\quad + M_* \int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left( \nabla p_\epsilon(\mathbf{x}, t + r) \right)^2 d\mathbf{x} dt dr \\
&\leq 2 M_* \int_0^\tau \int_0^T \int_\Omega \left( \nabla \mathcal{K} \left( \varphi_\epsilon(p_\epsilon(\mathbf{x}, t)) S_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right) \right)^2 d\mathbf{x} dt dr + \\
&\quad + M_* \int_0^\tau \int_0^T \int_\Omega \left( \nabla p_\epsilon(\mathbf{x}, t) \right)^2 d\mathbf{x} dt dr.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

De (iii) et du Lemme 3.4.1 (i), on déduit que

$$\mathcal{J}_2 \leq C_2 \tau. \tag{3.86}$$

Pour  $\mathcal{J}_3$ , on a

$$\mathcal{J}_3 \leq C_3 \tau, \tag{3.87}$$

avec  $C_3 = \frac{2}{m} T |\Omega| \alpha^* (\varphi(p^*) + 1)^m (p^* - p_*)$ .

De (3.82), (3.83), (3.86) et (3.87), on déduit que

$$\mathcal{J}_0 \leq C \tau.$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 3.4.2.  $\square$

### 3.5 Solutions faibles du Problème $(\mathcal{P})$

#### Théorème 3.5.1 (Solution faible de $(\mathcal{P})$ )

Le Problème  $\mathcal{P}$  admet une solution faible  $(p, S) \in \left(L^\infty(Q_T)\right)^2$ .

*Démonstration.*

Soit  $(p_\epsilon, S_\epsilon)$  une solution classique du problème régularisé  $(\mathcal{P}_\epsilon)$ . On déduit du Lemme 3.4.1 (ii) et (iii) que la famille de fonctions  $\{\varphi_\epsilon(p_\epsilon)\}_\epsilon$  est relativement compacte dans  $L^2(Q_T)$  (cf. [Tem77]); par conséquent il existe une sous-suite  $\{\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})\}_{\epsilon_n}$  et une fonction  $\eta \in L^2(Q_T)$  telle que

$$\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta \quad \text{dans } L^2(Q_T), \quad (3.88)$$

$$\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta \quad p.p. \text{ dans } Q_T. \quad (3.89)$$

De plus, on déduit du Lemme 3.3.3 qu'il existe  $p \in L^2(Q_T)$  telle que

$$p_{\epsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p. \quad (3.90)$$

Pour démontrer la compacité relative de la suite de fonctions  $\{\mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon) S_\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ , on va utiliser le Théorème de Fréchet-Kolmogorov.

#### Théorème 3.5.2 (Théorème de Kolmogorov)

Soit  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions dans  $L^2(Q_T)$  telle que

- il existe  $M_1 > 0$  telle que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_m\|_{L^\infty(Q_T)} \leq M_1, \quad (3.91)$$

- il existe  $M_2 > 0$  telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\tau(0, T)$ ,

$$\int_{\Omega} \int_0^{T-\tau} \left(f_m(\mathbf{x}, t + \tau) - f_m(\mathbf{x}, t)\right)^2 d\mathbf{x} dt \leq \tau M_2, \quad (3.92)$$

- il existe  $M_3 > 0$  et une suite de réels positifs  $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  avec  $h_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , tels que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\int_{\Omega_\xi} \int_0^T \left(f_m(\mathbf{x} + \xi, t) - f_m(\mathbf{x}, t)\right)^2 d\mathbf{x} dt \leq |\xi| (|\xi| + h_m) M_3, \quad (3.93)$$

en définissant  $\Omega_\xi := \{\mathbf{x} \in \Omega, [\mathbf{x} + \xi, \mathbf{x}] \subset \Omega\}$ .

Alors il existe une sous-suite de  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $L^2(Q_T)$ .

Grâce aux estimations (iv) – (v) du Lemme 3.4.2, de (3.24), on peut appliquer le Théorème de Kolmogorov, d'où l'on déduit que la famille  $\{\mathcal{K}(\varphi_\epsilon(p_\epsilon)S_\epsilon)\}_\epsilon$  est relativement compacte dans  $L^2(Q_T)$ . Il existe alors une sous-suite  $\{\mathcal{K}(\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})S_{\epsilon_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  et une fonction  $\chi \in L^2(Q_T)$  telles que

$$\mathcal{K}(\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})S_{\epsilon_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi \quad \text{dans } L^2(Q_T), \quad (3.94)$$

$$\mathcal{K}(\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})S_{\epsilon_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \chi \quad p.p. \text{ dans } Q_T. \quad (3.95)$$

De la stricte monotonie de la fonction  $\mathcal{K}$ , on conclut que

$$\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{K}^{-1}(\chi) \quad \text{dans } L^2(Q_T), \quad (3.96)$$

$$\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{K}^{-1}(\chi) \quad p.p. \text{ dans } Q_T, \quad (3.97)$$

où  $\mathcal{K}^{-1}$  est la fonction réciproque de  $\mathcal{K}$ . On déduit de (3.89) et (3.97) que

$$S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\mathcal{K}^{-1}(\chi)}{\eta} \quad p.p. \text{ dans } Q_T. \quad (3.98)$$

Comme  $0 \leq S_\epsilon \leq 1$ , on conclut d'une part qu'il existe  $S$  dans  $L^2(Q_T)$  telle que

$$S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S \quad \text{dans } L^2(Q_T), \quad (3.99)$$

et d'autre part, en utilisant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, que

$$S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\mathcal{K}^{-1}(\chi)}{\eta} \quad \text{dans } L^2(Q_T). \quad (3.100)$$

On déduit de (3.99) et (3.100) que

$$S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S \quad \text{dans } L^2(Q_T), \quad (3.101)$$

$$S_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S \quad p.p. \text{ sur } Q_T.$$

On va montrer que

$$\varphi(p_{\epsilon_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \eta. \quad (3.102)$$

En effet, pour  $n$  grand,

$$\|\varphi(p_{\epsilon_n}) - \eta\|_{L^2(Q_T)} \leq \|\varphi(p_{\epsilon_n}) - \varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})\|_{L^2(Q_T)} + \|\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) - \eta\|_{L^2(Q_T)}. \quad (3.103)$$

Puisque  $\varphi_{\epsilon_n}$  converge uniformément vers  $\varphi$  sur  $[p_*, p^*]$ , on a

$$\|\varphi(p_{\epsilon_n}) - \varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow 0. \quad (3.104)$$

Pour montrer que

$$\eta = \varphi(p) \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \quad (3.105)$$

on utilise un Lemme de [EGH98], qu'on rappelle ci-dessous :

**Lemme 3.5.3**

*Soit  $\{u_m\}_{m \geq 0}$  une suite qui converge faiblement vers  $u$  dans  $L^2(Q_T)$  telle que  $c(u_m)$  converge fortement vers  $\gamma$  dans  $L^2(Q_T)$  pour  $c$  une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$ . Si*

$$c(u_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \gamma, \quad (3.106)$$

*alors*

$$\gamma = c(u) \quad p.p. \text{ sur } Q_T. \quad (3.107)$$

Appliquons le Lemme 3.5.3 avec  $c = \varphi$  et  $u_m = p_{\epsilon_n}$  pour obtenir

$$\varphi(p_{\epsilon_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(p) \quad \text{dans } L^2(Q_T). \quad (3.108)$$

Finalement, on obtient qu'il existe une sous-suite de  $\{p_{\epsilon_n}\}_n$  que l'on note de nouveau  $\{p_{\epsilon_n}\}_n$  telle que

$$p_{\epsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \quad \text{dans } L^2(Q_T), \quad (3.109)$$

$$(3.110)$$

et

$$p_{\epsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \quad p.p. \text{ sur } Q_T. \quad (3.111)$$

On déduit des Lemmes 3.3.2 et 3.3.3 que

$$p_* \leq p(\mathbf{x}, t) \leq p^* \quad p.p. \text{ dans } Q_T, \quad (3.112)$$

$$0 \leq S(\mathbf{x}, t) \leq 1 \quad p.p. \text{ dans } Q_T. \quad (3.113)$$

De plus, la convergence (3.109) et le Lemme 3.4.1 (i) impliquent que

$$\nabla p_{\epsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nabla p \quad \text{dans } L^2(Q_T). \quad (3.114)$$

On va montrer que

$$\psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \psi(S) \quad \text{dans } L^2(Q_T). \quad (3.115)$$

En effet, pour  $n$  grand,

$$\begin{aligned} \|\psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) - \psi(S)\|_{L^2(Q_T)} &\leq \|\psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) - \psi(S_{\epsilon_n})\|_{L^2(Q_T)} + \|\psi(S_{\epsilon_n}) - \psi(S)\|_{L^2(Q_T)} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus le Lemme 3.4.2 (iii) et (3.115) impliqueraient que

$$\nabla \psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nabla \psi(S) \quad \text{dans } L^2(Q_T). \quad (3.116)$$

Notons que la convergence uniforme des suites  $a_\epsilon^+$  et  $a_\epsilon^-$  vers  $a^+$  et  $a^-$  respectivement sur le compact  $[p_* - p^*, p^* - p_*]$ , les majorations

$$\|a_\epsilon^{+'}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1, \text{ et } \|a_\epsilon^{-'}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1,$$

et les convergences (3.26) permettent de conclure que

$$\begin{aligned} \|a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) - (\bar{p} - p)^+\|_{L^2(Q_T)} &\leq \|a_\epsilon^+(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) - (\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon)^+\|_{L^2(Q_T)} + \\ &\quad + \|(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon)^+ - (\bar{p} - p)^+\|_{L^2(Q_T)} \quad (3.117) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

et de façon similaire

$$\begin{aligned} \|a_\epsilon^-(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) - (\bar{p} - p)^-\|_{L^2(Q_T)} &\leq \|a_\epsilon^-(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon) - (\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon)^-\|_{L^2(Q_T)} + \\ &\quad + \|(\bar{p}_\epsilon - p_\epsilon)^- - (\bar{p} - p)^-\|_{L^2(Q_T)} \quad (3.118) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On peut donc extraire des sous-suites  $\{a_{\epsilon_n}^+(\bar{p}_{\epsilon_n} - p_{\epsilon_n})\}_{n \geq 0}$  et  $\{a_{\epsilon_n}^-(\bar{p}_{\epsilon_n} - p_{\epsilon_n})\}_{n \geq 0}$  telles que

$$\begin{aligned} a_{\epsilon_n}^+(\bar{p}_{\epsilon_n} - p_{\epsilon_n}) &= (\bar{p} - p)^+ \quad p.p. \text{ sur } Q_T, \\ a_{\epsilon_n}^-(\bar{p}_{\epsilon_n} - p_{\epsilon_n}) &= (\bar{p} - p)^- \quad p.p. \text{ sur } Q_T. \end{aligned} \quad (3.119)$$

On multiplie la seconde équation du système (3.31) par  $v \in \mathcal{V}$  et on intègre sur  $Q_T$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) v d\mathbf{x} dt &= -k \int \int_{Q_T} M(S_{\epsilon_n}) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v d\mathbf{x} dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon_n} (\bar{p}_{\epsilon_n} - p_{\epsilon_n}) v d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (3.120)$$

On intègre par partie le membre de gauche de (3.120) et on fait tendre  $n$  vers l'infini pour obtenir d'une part

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}(\mathbf{x}, t)) v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt &= - \int_{\Omega} \varphi_{\epsilon_n}(p_{0, \epsilon_n}(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} - \\ &- \int \int_{Q_T} \varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \varphi(p_0(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} - \\ &- \int \int_{Q_T} \varphi(p(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} - \int \int_{Q_T} M(S_{\epsilon_n}) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v d\mathbf{x} dt &= - \int \int_{Q_T} (M(S_{\epsilon_n}) - M(S)) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v d\mathbf{x} dt + \\ &+ \int \int_{Q_T} M(S) (\nabla p - \nabla p_{\epsilon_n}) \nabla v d\mathbf{x} dt - \\ &- \int \int_{Q_T} M(S) \nabla p \nabla v d\mathbf{x} dt \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int \int_{Q_T} M(S) \nabla p \nabla v d\mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (3.121)$$

et finalement

$$\int \int_{Q_T} \alpha_{\epsilon_n} (\bar{p}_{\epsilon_n} - p_{\epsilon_n}) v \, d\mathbf{x} \, dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \int_{Q_T} \alpha (\bar{p} - p) v \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (3.122)$$

En regroupant les précédentes limites, on obtient donc

$$\int_{\Omega} \varphi(p_0)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} + \int \int_{Q_T} \left( \varphi(p) \frac{\partial}{\partial t} v - k M(S) \nabla p \nabla v + \alpha (\bar{p} - p) v \right) d\mathbf{x} \, dt = 0.$$

Soit  $v \in \mathcal{V}$ , on multiplie la première équation du système (3.31) par  $v$  et on intègre sur  $Q_T$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) S_{\epsilon_n}) v \, d\mathbf{x} \, dt &= - \int \int_{Q_T} \nabla \psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt - \\ &\quad - \int \int_{Q_T} f_w(S_{\epsilon_n}) M(S_{\epsilon_n}) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt + \\ &\quad + \int \int_{Q_T} \alpha_{\epsilon_n} \left( f_w(S^*) a_{\epsilon}^+ (\bar{p}_{\epsilon} - p) - \right. \\ &\quad \left. - f_w(S_{\epsilon}) a_{\epsilon}^- (\bar{p}_{\epsilon} - p) \right) v \, d\mathbf{x} \, dt. \end{aligned} \quad (3.123)$$

On fait tendre  $n$  à l'infini dans (3.123).

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) S_{\epsilon_n}) v \, d\mathbf{x} \, dt &= - \int_{\Omega} \varphi_{\epsilon_n}(p_{0,\epsilon_n}) S_{0,\epsilon_n} v(\cdot, 0) \, d\mathbf{x} - \\ &\quad - \int \int_{Q_T} \varphi_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n}) S_{\epsilon_n} \frac{\partial}{\partial t} v \, d\mathbf{x} \, dt \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \varphi(p_0) S_0 v(\cdot, 0) \, d\mathbf{x} - \\ &\quad - \int \int_{Q_T} \varphi(p) S \frac{\partial}{\partial t} v \, d\mathbf{x} \, dt. \end{aligned} \quad (3.124)$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 - \int \int_{Q_T} \nabla \psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt &= \int \int_{Q_T} \psi_{\epsilon_n}(S_{\epsilon_n}) \Delta v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \int_{Q_T} \psi(S) \Delta v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &= - \int \int_{Q_T} \nabla \psi(S) \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &\quad - \int \int_{Q_T} f_w(S_{\epsilon_n}) M(S_{\epsilon_n}) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &= - \int \int_{Q_T} \left( f_w(S_{\epsilon_n}) - f_w(S) \right) M(S_{\epsilon_n}) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &\quad + \int \int_{Q_T} f_w(S) \left( M(S) - M(S_{\epsilon_n}) \right) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt \tag{3.125} \\
 &\quad - \int \int_{Q_T} f_w(S) M(S) \nabla p_{\epsilon_n} \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \int \int_{Q_T} f_w(S) M(S) \nabla p \nabla v \, d\mathbf{x} \, dt,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\int \int_{Q_T} \alpha_{\epsilon_n} \left( f_w(S^*) a_{\epsilon}^+(\bar{p}_{\epsilon} - p_{\epsilon}) - f_w(S_{\epsilon}) a_{\epsilon}^-(\bar{p}_{\epsilon} - p_{\epsilon}) \right) v \, d\mathbf{x} \, dt \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \int_{Q_T} \alpha \left( f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^- \right) v \, d\mathbf{x} \, dt.
 \end{aligned}$$

En collectant les précédentes limites, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \varphi(p(T)) S(T) v(T) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \varphi(p_0) S_0 v(0) \, d\mathbf{x} + \int \int_{Q_T} \left( \varphi(p) S \partial_t v - k \nabla \psi(S) \cdot \nabla v - \right. \\
 &\quad \left. - k f_w(S) M(S) \nabla p \cdot \nabla v + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha (f_w(S^*) (\bar{p} - p)^+ - f_w(S) (\bar{p} - p)^-) v \right) d\mathbf{x} dt.
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.5.1. □

# Chapitre 4

## Algorithmes de couplage entre les déformations du sol et l'écoulement linéaire

### Introduction

Afin de modéliser l'écoulement des fluides dans un milieu poreux déformable, on considère un système d'équations décrivant le couplage entre cet écoulement et les déformations mécaniques du sol. On distingue essentiellement deux méthodes de résolution numérique de ce problème. La première approche consiste en la résolution globale de toutes les équations du système tandis que la seconde couple le simulateur de la géomécanique avec celui du réservoir. Comme de nombreux simulateurs pour l'écoulement et pour la géomécanique existent déjà dans les industries pétrolières, Il est plutôt avantageux de combiner l'exploitation des deux types de logiciels : un modèle de réservoir pour pouvoir obtenir une bonne description des phases fluides et un modèle géomécanique pour pouvoir évaluer les déformations du sol. On effectue les calculs indépendamment pour chaque simulateur et on procède ensuite à un échange de données entre les deux. Cette technique est appelée **couplage des simulateurs**.

Les inconnues principales du problème sont les pressions, les saturations des fluides liées à l'écoulement et le vecteur du déplacement lié à la géomécanique. On utilise la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations d'écoulement et celle des éléments finis standards pour les calculs de la géomécanique. Comme les déplacements varient lentement en comparaison avec les inconnues du réservoir, on s'appuie sur une méthode numérique multi-échelle. Plus précisément, pour une

période de temps donnée, l'équation de la géomécanique est résolue une seule fois tandis que les inconnues du réservoir sont calculées avec des pas de temps qui correspondent à une petite subdivision de cette période.

Dans ce présent chapitre, on s'intéresse à deux modèles de couplage :

- (i) le modèle linéaire traduisant le couplage entre la géomécanique et l'écoulement monophasique linéaire d'un fluide compressible dans un milieu poreux. L'existence et l'unicité de la solution de ce problème ont été traité au Chapitre 1 ;
- (ii) le modèle non linéaire exprimant le couplage entre la géomécanique et l'écoulement diphasique non linéaire de deux fluides compressibles (eau-huile).

Pour la résolution numérique de ces modèles, on va étudier et comparer deux algorithmes de couplage. La première approche est classiquement utilisés par les ingénieurs. La seconde est une nouvelle approche que nous proposons et développons ici :

- le premier algorithme consiste à calculer par une méthode de type point fixe les inconnues du réservoir et du déplacement. Cet algorithme s'identifie à un algorithme de type Gauss-Seidel dans le cas du modèle de couplage linéaire ;
- le second algorithme est basé sur la méthode du gradient conjugué préconditionné.

Notons que la méthode mixte utilisée volumes finis-éléments finis n'est pas stable pour un écoulement de fluides peu compressibles, en effet la condition inf-sup n'est pas vérifiée, comme nous le montrons à la Section 4.2.5. Toutefois, l'algorithme de type gradient conjugué préconditionné surmonte cette difficulté et se montre robuste contrairement à l'algorithme classique. On remarquera que le coût des opérations est pratiquement semblable pour les deux algorithmes dans le cadre d'un écoulement de fluides de compressibilités significatives.

## 4.1 Le modèle mathématique

Comme le milieu ne subit qu'une petite déformation, on écrit les équations d'écoulement et de géomécanique en coordonnées eulériennes.

On note  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  le domaine du calcul de la géomécanique. Le couplage entre la géomécanique et l'écoulement des fluides est donné par la loi de Biot qui relie la variation de la porosité du milieu à sa déformation mécanique. Le réservoir est supposé de perméabilité nulle en dehors du domaine  $\omega \subset \Omega$  de l'écoulement des fluides. Ce

couplage se traduit par le système d'équations représentant l'évolution des quantités suivantes :

- la pression du fluide  $p = p(\mathbf{x}, t)$  dans les pores et la saturation  $S = S(\mathbf{x}, t)$  de la phase mouillante ;
- le déplacement  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  du milieu poreux.

Le milieu poreux est supposé homogène mais notre étude peut s'étendre facilement au cas d'un milieu hétérogène.

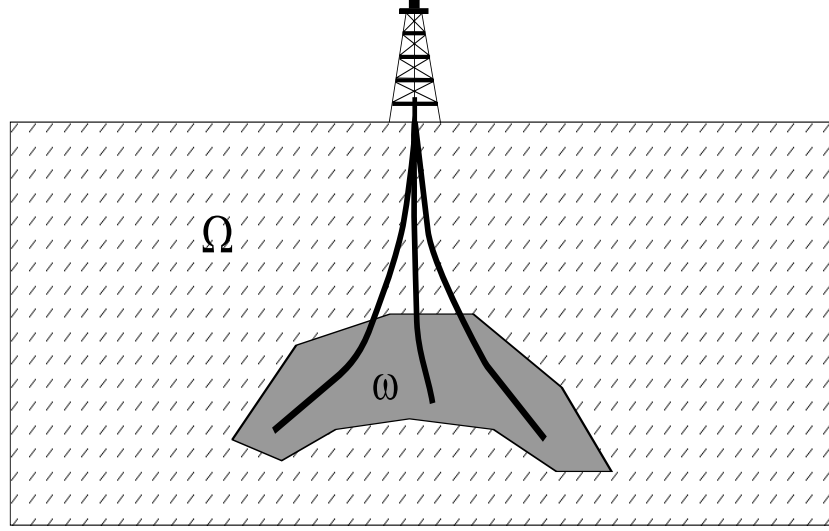


FIG. 4.1 – Les domaines géométriques de la géomécanique et de l'écoulement.

#### 4.1.1 Le modèle géomécanique

Comme le comportement mécanique de la roche est supposée élastique dans notre étude, la géomécanique est modélisée par une équation d'élasticité linéaire dans un milieu poreux avec une déformation instantanée. L'équation de la géomécanique qui est une équation elliptique, est donnée donc par

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) - b(\mathbf{x}) \nabla p = 0 & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\ \sigma(\mathbf{u}) = 2 \mu \epsilon(\mathbf{u}) + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (4.1)$$

où

- le tenseur des déformations  $\epsilon$  est donné par

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T); \quad (4.2)$$

- les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé ;
- la fonction  $b(\mathbf{x})$  est définie par

$$b(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega, \\ 1 & \text{sur } \omega, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{q} & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$  et  $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ .

#### 4.1.2 Le modèle réservoir

Le modèle d'écoulement des fluides est aussi appelé modèle du réservoir. On écrit ci-dessous les équations d'écoulement monophasique puis diphasique et on explique ensuite les notations utilisées.

##### Écoulement monophasique linéaire

Un écoulement linéaire d'un fluide compressible est modélisé par une équation d'évolution dont les inconnues sont la pression de fluide  $p$  et la porosité du milieu  $\phi$ . Cette équation de conservation de masse, uniformément parabolique en  $p$ , est donnée par

$$\phi_0 \rho_o^0 c_o \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_o^0}{\eta_o} \operatorname{div} (k \nabla p) + \rho_o^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = Q \quad \text{sur } \omega \times (0, T], \quad (4.4)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{\rho_o^0}{\eta_o} k \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \gamma_N \times (0, T], \\ p &= p_D & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

et la condition initiale

$$p(\cdot, 0) = p_0 \quad \text{sur } \omega. \quad (4.6)$$

**Écoulement diphasique non linéaire (eau-huile)**

L'écoulement des deux fluides compressibles eau-huile est décrit par le système d'équations de conservation de masse dont les inconnues sont  $S$  et  $p$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_w(p) S \phi \right) - \operatorname{div} \left( \frac{\rho_w(p) k r_{wo}(S)}{\eta_w} k \nabla p \right) = 0 & \text{sur } \omega \times (0, T], \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_o(p) (1 - S) \phi \right) - \operatorname{div} \left( \frac{\rho_o(p) k r_{ow}(S)}{\eta_o} k \nabla p \right) = 0 & \text{sur } \omega \times (0, T], \end{cases} \quad (4.7)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} p = p_D & \text{sur } \partial\omega \times (0, T], \\ \frac{k}{\eta_i} \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \gamma_N \times (0, T] \text{ et pour } i = o \text{ ou } w, \end{cases} \quad (4.8)$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} p(\cdot, 0) = p_0 & \text{sur } \omega, \\ S(\cdot, 0) = S_0 & \text{sur } \omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Les indices  $w$  et  $o$  désignent respectivement les phases *eau* et *huile*. Dans notre modèle, on néglige les effets capillaires, par conséquent les pressions des deux phases eau et huile sont égales ; on a donc  $p_w = p_o = p$ . On néglige aussi les forces gravitationnelles.

**Notations**

On introduit maintenant les notations utilisées dans les deux modèles d'écoulement linéaire et non linéaire

- $\gamma_N$  est un sous-ensemble de la frontière de  $\omega$  notée  $\partial\omega$  ;
- $p = p(\mathbf{x}, t)$  est la pression des deux phases eau et huile ;
- $S = S(\mathbf{x}, t)$  est la saturation de la phase mouillante “eau” ;
- $\rho_i = \rho_i(p)$  est la densité volumique de la phase  $i$  où  $i \in \{o, w\}$ . En pratique, la densité  $\rho_i$  dépend linéairement de la pression sous la forme

$$\rho_i(p) = \rho_i^0 (1 + c_i p);$$

- $\rho_i^0$  est la densité initiale de la phase  $i$  ;
- $c_i$  est la compressibilité du fluide de la phase  $i$  où  $i \in \{o, w\}$  ;
- $kr_{ij} = kr_{ij}(S)$  est la mobilité de la phase  $i$  en présence de la phase  $j$  avec  $i, j \in \{w, o\}$  et  $i \neq j$ . Les fonctions  $kr_{wo}$  et  $kr_{ow}$  sont respectivement croissante et décroissante. Les lois régissant l'expression des perméabilités relatives dans le cas d'écoulements diphasiques non miscibles compressibles pour les simulations numériques sont données par

$$\begin{aligned} kr_{wo}(S) &= S^a, \\ kr_{ow}(S) &= (1 - S)^a, \end{aligned} \tag{4.10}$$

où  $a \in \{1, 2, 3\}$  ;

- $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  est la porosité du milieu ;
- $Q$  est le terme source ;
- $\eta_i$  est la viscosité dynamique du fluide de la phase  $i$  où  $i \in \{o, w\}$  ;
- $k$  est la perméabilité absolue du milieu de l'écoulement ;

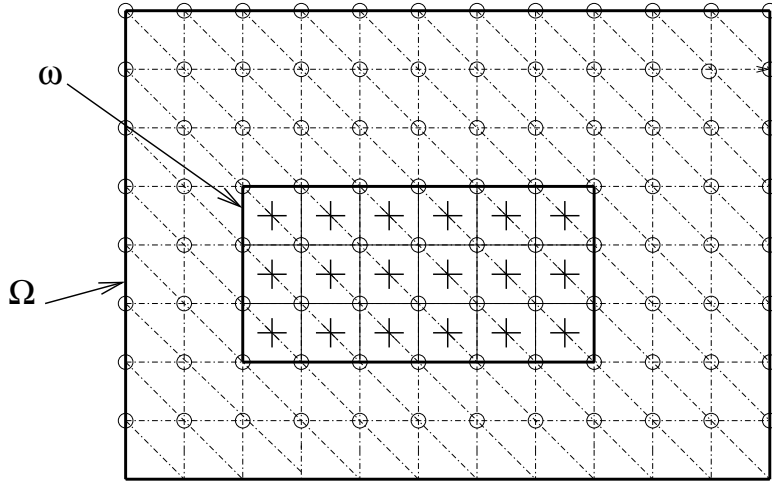
### 4.1.3 Loi du couplage : Loi de Biot

Le modèle de la géomécanique et celui du réservoir sont couplés par la loi de Biot reliant la variation de la porosité du milieu à sa déformation mécanique, comme le traduit l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = b(\mathbf{x}) \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \quad \text{sur } \Omega \times (0, T]. \tag{4.11}$$

## 4.2 La discrétisation du problème

Afin d'approcher les flux et d'assurer la conservation de la masse, on utilise d'une part la méthode des volumes finis (notée VF) pour discrétiser le problème de l'écoulement et d'autre part la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}^1$  (notée EF) pour discrétiser l'équation de la géomécanique. Le maillage des domaines est donné à la Figure 4.2. Le choix de ces méthodes de discrétisations est assez standard pour ce problème.



- Calcul du déplacement aux sommets des triangles.
- + Calcul de la pression aux centres des mailles.

FIG. 4.2 – Le maillage VF-EF utilisé.

En pratique, le déplacement  $\mathbf{u}$  varie peu par rapport aux inconnues de l'écoulement (la pression  $p$  dans le cas linéaire ou la pression et la saturation dans le cas d'un écoulement diphasique non linéaire). Par conséquent, le déplacement  $\mathbf{u}$  est calculé aux instants  $\{T^k\}_{k=1,\dots,p}$  tels que

$$T^0 = 0 < T^1 < \dots < T^k < \dots < T^p = T,$$

où les  $\{T^k\}_{k=0,\dots,p}$  forment une partition de  $(0, T]$ . On suppose que pour tout  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  on a  $T^{k+1} - T^k = T^*$  et on appellera cette constante  $T^*$  la période de la simulation géomécanique.

Les inconnues du réservoir ( $p, \phi$  dans le cas d'un écoulement linéaire et  $p, S, \phi$  dans le cas d'un écoulement non linéaire) sont calculées aux instants

$$t^{1,k+1}, \dots, t^{n,k+1}, \dots, t^{q,k+1},$$

où

$$t^{0,k+1} = T^k < t^{1,k+1} < \dots < t^{n,k+1} < \dots < t^{q,k+1} = T^{k+1}, \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, p-1\}.$$

On appelle les instants  $\{T^k\}_{k=0,\dots,p}$  les instants de rencontre des deux simulations. On pose  $t^{n+1,k+1} - t^{n,k+1} = \Delta t$ ,  $n = 0, \dots, q-1$ ,  $k = 0, \dots, p-1$ .

Les paramètres  $\Delta t$  et  $T^*$  peuvent varier au cours de la simulation mais par souci de simplicité, on les considère fixés dans notre présentation.

### 4.2.1 Schéma de volumes finis pour le réservoir

Dans cette section, nous discrétisons par la méthode des volumes finis le modèle du réservoir introduit à la Section 4.1.2. Commençons par donner les notations utilisées pour la discrétisation.

Soit  $\tau_h$  une triangulation du domaine  $\omega$ , elle est dite admissible si

- l'adhérence de l'union des volumes de contrôle de  $\tau_h$  coïncide avec  $\overline{\omega}$ . On note par  $h$  le diamètre de la triangulation telle que

$$h = \sup_{K \in \tau_h} \text{diam}(K);$$

- pour tout  $(K, L) \in \tau_h^2$  avec  $K \neq L$ , on note  $e_{K,L}$  la face commune entre  $K$  et  $L$  telle que

$$\overline{K} \cap \overline{L} = e_{K,L},$$

et pour tout  $K \in \tau_h$ , on note l'ensemble des volumes voisins de  $K$

$$\mathcal{N}(K) = \{L \in \tau_h; e_{K,L} \neq \emptyset\};$$

- il existe une famille de points notés  $\{\mathbf{x}_K\}_{K \in \tau_h}$  telle que  $\mathbf{x}_K \in K$  et le segment  $[\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L]$  est orthogonal à la face commune  $e_{K,L}$  pour tout  $K \in \tau_h$  et  $L \in \mathcal{N}(K)$  (cf. Figure 4.3). Dans le cas où  $\overline{K} \cap \partial\omega = e_{K\partial\omega} \neq \emptyset$ , on définit par  $\mathbf{x}_L$  le point du bord tel que  $[\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L]$  est orthogonal à  $e_{K\partial\omega}$  (cf. Figure 4.4).

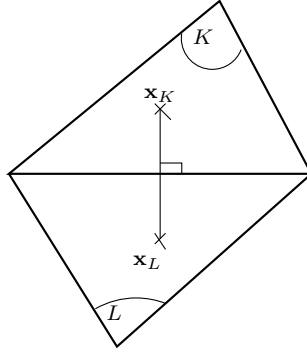


FIG. 4.3 – Deux volumes de contrôle voisins.

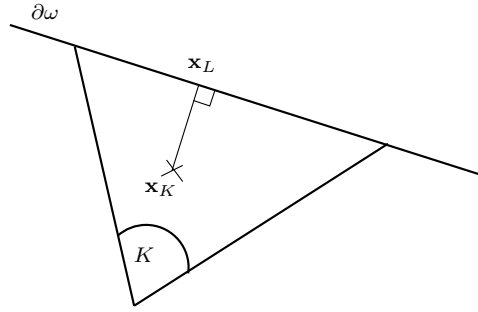


FIG. 4.4 – Volume de contrôle s'appuyant sur le bord.

Pour tout  $K \in \tau_h$  et pour tout  $L \in \mathcal{N}(K)$ , on dénote respectivement par  $m(K)$  et  $m(e_{K,L})$  la mesure du volume de contrôle  $K$  et de la face commune  $e_{K,L}$ . On définit la transmissivité  $T_{K,L}$  entre deux volumes de contrôle voisins  $K$  et  $L$  par  $T_{K,L} = \frac{m(e_{K,L})}{d(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L)}$  où  $d(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L)$  est la distance entre deux points  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$ .

On définit respectivement  $p_{h,\Delta t}$ ,  $S_{h,\Delta t}$  et  $\phi_{h,\Delta t}$  les fonctions de la pression, de la saturation et de la porosité approchées par la méthode des volumes finis telles que

$$\begin{aligned} p_{h,\Delta t}(\mathbf{x}, t) &= p_K^{n,k} \quad \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ et } t \in (t^{n,k}, t^{n+1,k}], \\ S_{h,\Delta t}(\mathbf{x}, t) &= S_K^{n,k} \quad \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ et } t \in (t^{n,k}, t^{n+1,k}], \\ \phi_{h,\Delta t}(\mathbf{x}, t) &= \phi_K^{n,k} \quad \text{si } \mathbf{x} \in K \text{ et } t \in (t^{n,k}, t^{n+1,k}], \end{aligned} \tag{4.12}$$

pour tout  $n = 1, \dots, q$  et pour tout  $k = 0, \dots, p$ . Pour alléger les notations, on omettra l'indice  $k$  dans  $p_K^{n,k}, S_K^{n,k}$  et  $\phi_K^{n,k}$  calculées aux instants  $t^{n,k}$  sur les volumes de contrôle  $K$ . On définit les densités  $\rho_{i,K}^n$ , ( $i = o, w$ ) de manière similaire.

### Discrétisation de l'écoulement linéaire

On intègre l'équation (4.4) sur la cellule  $K \times (t^{n,k+1}, t^{n+1,k+1}]$  et on utilise les définitions des fonctions approchées (4.12) pour obtenir

$$m(K)\phi_0\rho_o^0c_o\frac{p_K^{n+1}-p_K^n}{\Delta t}+\frac{\rho_o^0}{\eta_o}k\sum_{L\in\mathcal{N}(K)}T_{K,L}\left(p_K^{n+1}-p_L^{n+1}\right)+m(K)\rho_o^0\frac{\phi_K^{n+1}-\phi_K^n}{\Delta t}=Q_K^{n+1}, \quad (4.13)$$

où  $Q_K^{n+1}$  est l'approximation de  $\int_K \int_{t^{n,k+1}}^{t^{n+1,k+1}} Q \, d\mathbf{x} \, dt$ .

Pour calculer  $\phi_K^{n+1}$ , on interpole linéairement pour déduire

$$\phi_K^{n+1,k+1} = \phi_K^{0,k+1} + \Delta\phi_K^{k+1}\frac{(n+1)\Delta t}{T^*}, \quad (4.14)$$

pour tout  $n = 0, \dots, q-1$ ,  $k = 0, \dots, p-1$  et pour tout  $K \in \tau_h$  où la variation de la porosité  $\Delta\phi_K^{k+1}$  est définie par

$$\Delta\phi_K^{k+1} = \phi_K^{q,k+1} - \phi_K^{0,k+1}, \quad (4.15)$$

et elle est calculée grâce à la formule (4.19) que l'on introduira ci-dessous et qui provient de la discrétisation de la loi de Biot. On remarque que quand  $q = 1$ , l'équation (4.15) se réduit à

$$\phi_K^{k+1} = \phi_K^k + \Delta\phi_K^{k+1}. \quad (4.16)$$

### Discrétisation de l'écoulement non linéaire

On intègre l'équation (4.7) sur la cellule  $K \times (t^{n,k+1}, t^{n+1,k+1}]$  et on utilise les définitions des fonctions approchées (4.12) et un schéma implicite en temps pour la pression et explicite en saturation (impes) pour obtenir

$$\begin{cases} m(K)\frac{\phi_K^{n+1}\rho_{w,K}^{n+1}S_K^{n+1}-\phi_K^n\rho_{w,K}^nS_K^n}{\Delta t}-\sum_{L\in\mathcal{N}(K)}\Lambda_{w,K,L}^{n+1}(p_L^{n+1}-p_K^{n+1}) & = 0, \\ m(K)\frac{\phi_K^{n+1}\rho_{o,K}^{n+1}(1-S_K^{n+1})-\phi_K^n\rho_{o,K}^n(1-S_K^n)}{\Delta t}-\sum_{L\in\mathcal{N}(K)}\Lambda_{o,K,L}^{n+1}(p_L^{n+1}-p_K^{n+1}) & = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

où on utilise un décentrement amont pour les termes de convection ([EGHM02]) :

$$\Lambda_{w,K,L}^{n+1} = \begin{cases} T_{K,L} \frac{\rho_{w,K}^n kr_{w,o}(S_K^n)}{\eta_w} k & \text{si } p_L^{n+1} > p_K^{n+1}, \\ T_{K,L} \frac{\rho_{w,L}^n kr_{w,o}(S_L^n)}{\eta_w} k & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\Lambda_{o,K,L}^{n+1} = \begin{cases} T_{K,L} \frac{\rho_{o,K}^n kr_{o,w}(S_K^n)}{\eta_o} k & \text{si } p_L^{n+1} > p_K^{n+1}, \\ T_{K,L} \frac{\rho_{o,L}^n kr_{o,w}(S_L^n)}{\eta_o} k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme dans le cas linéaire, on utilise la formule d'interpolation linéaire (4.14) pour le calcul de  $\phi_K^{n+1}$  ainsi que la loi de Biot discrète qui sera donnée par (4.19). Pour une porosité  $\phi$  donnée, le schéma (4.17) est stable puisqu'on utilise un schéma d'Euler implicite.

### 4.2.2 La méthode des éléments finis pour la géomécanique

On introduit l'espace des fonctions test

$$\mathbf{X}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbb{P}^1(\Omega), \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\},$$

et on définit la fonction affine par morceaux  $\mathbf{u}_{h,T^*}(\cdot, T^k) \in \mathbf{X}_h$  par la relation

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_{h,T^*}(\cdot, T^k)) : \epsilon(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_{\omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) p_{h,\Delta t}(\cdot, T^k) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}_{h,T^*}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad (4.18)$$

avec

$$\langle \mathbf{f}_{h,T^*}, \mathbf{v}_h \rangle = \int_{\Gamma_N} (\sigma(\mathbf{u}_{h,T^*}(\cdot, T^k)) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h ds - \int_{\partial\omega} p_D \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h ds,$$

pour tout  $k = 0, \dots, p$  et pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$ . Où  $\sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{u})$ , si l'on note  $\sigma(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij})_{i,j}$  et  $\epsilon(\mathbf{u}) = (\epsilon_{ij})_{i,j}$ .

### 4.2.3 Discrétisation de la loi de Biot

Finalement, on exprime la relation entre les déplacements discrets et la porosité discrète dérivant de la discrétisation de la loi de Biot (4.11).

$$m(K)\Delta\phi_K^{k+1} = \int_K \operatorname{div}\{\mathbf{u}_{h,T^*}(\mathbf{x}, T^{k+1}) - \mathbf{u}_{h,T^*}(\mathbf{x}, T^k)\} d\mathbf{x}, \quad (4.19)$$

pour  $k = 0, \dots, p-1$ , et pour tout  $K \in \tau_h$ .

### 4.2.4 Ecriture matricielle pour le modèle linéaire

Par souci de simplicité des notations, on commence par considérer le cas où les inconnues du réservoir et de la géomécanique sont calculées aux mêmes instants, ce qui correspond à  $q = 1$ . On étendra ensuite l'étude au cas  $q > 1$  : l'inconnue de la géomécanique est calculée une seule fois à l'instant  $T^{k+1}$  durant la période  $T^{k+1} - T^k = T^*$ , alors que la pression est calculée aux instants  $\{t^{n,k+1}\}_{n=1,\dots,q}$  de subdivision de la période  $T^*$ .

Pour tout  $n = 0, \dots, p-1$ , on pose

$$\mathbf{p}^{n+1} = (p_K^{n+1})_{K \in \tau_h},$$

le vecteur dont les composantes sont les valeurs de la solution approchée sur chaque volume de contrôle  $K$  à l'instant  $t^{n+1}$ .

On note  $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_s}$  l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux et on considère  $\{\{\psi_i\}_{i=1}^{N_s} \times \mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{0} \times \{\psi_i\}_{i=1}^{N_s}\}$  les fonctions de bases de  $\mathbb{P}^1(\Omega)$  ; la solution approchée à l'instant  $t^{n+1}$  s'écrit sous la forme

$$\mathbf{u}_{h,T^*}(\mathbf{x}, t^{n+1}) = \begin{pmatrix} u_{h,T^*}^1(\mathbf{x}, t^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_s} u_i^{1,n+1} \psi_i(\mathbf{x}) \\ u_{h,T^*}^2(\mathbf{x}, t^{n+1}) = \sum_{j=1}^{N_s} u_j^{2,n+1} \psi_j(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

On pose

$$\mathbf{u}^{n+1} = \left( u_1^{1,n+1}, u_1^{2,n+1}, u_2^{1,n+1}, u_2^{2,n+1}, \dots, u_i^{1,n+1}, u_i^{2,n+1}, \dots, u_{N_s}^{1,n+1}, u_{N_s}^{2,n+1} \right)^T, \quad (4.21)$$

où

- $N_s$  est le nombre de sommets de la triangulation  $\tau_h$  appartenant à  $\Omega \setminus \Gamma_D$  ;
- $u_i^{1,n+1}$  et  $u_i^{2,n+1}$  sont les valeurs respectives de la première et la seconde composante de la solution approchée  $\mathbf{u}_{h,T^*}$  au sommet  $i$ .

### Forme matricielle pour l'écoulement linéaire

On multiplie l'équation discrète (4.13) par  $\Delta t$ . En substituant la loi de Biot discrète (4.19), on écrit

$$d_{KK}(p_K^{n+1} - p_K^n) + \Delta t r_{KK} p_K^{n+1} + \Delta t \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} r_{KL} p_L^{n+1} + \sum_{i \in K} b_{iK} (u_i^{n+1} - u_i^n) = \frac{\Delta t}{\rho_o^0} Q_K^{n+1}, \quad (4.22)$$

où

$$d_{KK} = m(K) c_o \phi_0, \quad (4.23)$$

$$r_{KK} = \frac{k}{\eta_o} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} T_{K,L} \quad \text{pour tout } K \in \tau_h, \quad (4.24)$$

$$r_{KL} = -\frac{k}{\eta_o} T_{K,L} \quad \text{pour tout } K \in \tau_h \text{ et } L \in \mathcal{N}(K),$$

et

$$b_{iK} = \begin{cases} \int_K \frac{\partial}{\partial x} \psi_j dx dz & \text{si } i = 2j - 1, \\ \int_K \frac{\partial}{\partial z} \psi_j dx dz & \text{si } i = 2j. \end{cases} \quad (4.25)$$

On écrit (4.22) sous forme matricielle

$$\mathbf{D}_h(\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n) + \Delta t \mathbf{R}_h \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = \Delta t \mathbf{Q}_h^{n+1}. \quad (4.26)$$

Si l'on note par  $N_v$  le nombre de volumes de contrôle et  $N_s$  le nombre de sommets de la triangulation, on a

- la matrice creuse  $\mathbf{R}_h$  est symétrique définie positive et est telle que  $\mathbf{R}_h = (r_{KL})_{K,L=1,\dots,N_v}$ , où  $r_{KL} = 0$  si  $K$  et  $L$  ne sont pas voisins. Ses termes diagonaux  $r_{KK}$  et extradiagonaux  $r_{KL}$  sont donnés dans (4.24). Cette matrice a au plus 5 éléments par ligne ;

- la matrice diagonale  $\mathbf{D}_h$  est telle que  $\mathbf{D}_h = (d_{KK})_{K=1, N_v}$  ; ses termes  $d_{KK}$  sont donnés par (4.23),
- La matrice  $\mathbf{B}_h = (b_{mn})_{m=1, \dots, 2N_s, n=1, \dots, N_v}$  est une matrice creuse et sa matrice transposée  $\mathbf{B}_h^T$  est telle que  $b_{mn} = 0$  dès que  $m$  n'est pas un sommet de  $n$ . Les termes  $b_{mn}$  sont donnés par (4.25) ;
- $\Delta t \mathbf{Q}_h^{n+1}$  est le vecteur du second membre du réservoir (4.22) tel que

$$\mathbf{Q}_h^{n+1} = \left( \frac{1}{\rho_o^0} Q_K^{n+1} \right)_K.$$

On note par  $\mathcal{R}_h$  la matrice du réservoir linéaire telle que

$$\mathcal{R}_h = \mathbf{D}_h + \Delta t \mathbf{R}_h. \quad (4.27)$$

### Forme matricielle pour la géomécanique

Pour la modélisation de la géomécanique (4.18), on définit la fonction  $\mathbf{v}_h$  pour tout  $m = 1, \dots, 2N_s$  par

$$\mathbf{v}_h = \begin{cases} (\psi_l, 0) & \text{si } m = 2l - 1, \\ (0, \psi_l) & \text{si } m = 2l. \end{cases} \quad (4.28)$$

On utilise (4.18) et (4.20) pour obtenir :

Si  $m = 2l - 1$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \left( \left( \sum_{p=1}^{N_s} u_p^{1,n+1} \psi_p, \sum_{p=1}^{N_s} u_p^{2,n+1} \psi_p \right)^T \right) \epsilon_{ij} \left( (\psi_l, 0)^T \right) d\mathbf{x} - \int_{\omega} \frac{\partial \psi_l}{\partial x} p_{h,\Delta t}(\cdot, T^k) d\mathbf{x} = \\ & = \langle \mathbf{f}_{h,T^*}, (\psi_l, 0) \rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Si  $m = 2l$ , on alors a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \left( \left( \sum_{p=1}^{N_s} u_p^{1,n+1} \psi_p, \sum_{p=1}^{N_s} u_p^{2,n+1} \psi_p \right)^T \right) \epsilon_{ij} \left( (0, \psi_l)^T \right) d\mathbf{x} - \int_{\omega} \frac{\partial \psi_l}{\partial z} p_{h,\Delta t}(\cdot, T^k) d\mathbf{x} = \\ & = \langle \mathbf{f}_{h,T^*}, (0, \psi_l) \rangle. \end{aligned} \quad (4.30)$$

On utilise (4.21) et la définition de la matrice  $\mathbf{B}_h$  pour écrire

$$\mathbf{G}_h \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{F}_h^{n+1}, \quad (4.31)$$

où

- la matrice  $\mathbf{G}_h$  est la matrice de rigidité telle que  $\mathbf{G}_h = (g_{m,n})_{m,n=1,\dots,2N_s}$ , avec

$$\begin{aligned} g_{2i-1,2j-1} &= \int_{\Omega} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right] dx dz, \\ g_{2i,2j-1} &= \int_{\Omega} \left[ \lambda \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right] dx dz, \\ g_{2i-1,2j} &= \int_{\Omega} \left[ \lambda \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right] dx dz, \\ g_{2i,2j} &= \int_{\Omega} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right] dx dz, \end{aligned} \quad (4.32)$$

pour tout  $i = 1, \dots, N_s$  et  $j = 1, \dots, N_s$ . Les coefficients  $g_{2i-1,2j-1}$ ,  $g_{2i,2j-1}$ ,  $g_{2i-1,2j}$ , et  $g_{2i,2j}$  sont nuls quand les sommets  $i$  et  $j$  ne sont pas les extrémités d'une même arête. La matrice  $\mathbf{G}_h$  est une matrice creuse symétrique définie positive avec au plus 8 éléments par ligne.

- $\mathbf{F}_h^{n+1}$  est le vecteur de discrétisation du second membre de la géomécanique donné par les équations (4.29) et (4.30).

Finalement, les systèmes linéaires (4.26)-(4.31) s'écrivent sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_h & -\mathbf{B}_h \\ \mathbf{B}_h^T & \mathcal{R}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h^{n+1} \\ \Delta t \mathbf{Q}_h^{n+1} + \mathbf{D}_h \mathbf{p}^n + \mathbf{B}_h^T \mathbf{u}^n \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

### Ecriture matricielle pour $q > 1$

Soit  $T^{k+1} - T^k = T^*$  une période de temps. Le but est de coupler la géomécanique et le réservoir tous les  $q$  pas de temps, c'est-à-dire qu'on calcule une seule fois le déplacement à la fin de la période (à l'instant  $T^{k+1}$ ), alors qu'on calcule  $q$  fois la pression durant la période  $T^*$ . On utilise les notations précédentes ainsi que les

équations (4.13)-(4.14) et (4.31) pour obtenir le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{R}_h \mathbf{p}^{1,k+1} & = & \mathbf{S}_h^{1,k+1} + \mathbf{D}_h \mathbf{p}^{0,k+1} - \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1}, \\ \mathcal{R}_h \mathbf{p}^{2,k+1} & = & \mathbf{S}_h^{2,k+1} + \mathbf{D}_h \mathbf{p}^{1,k+1} - \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1}, \\ \vdots & & \\ \mathcal{R}_h \mathbf{p}^{q-1,k+1} & = & \mathbf{S}_h^{q-1,k+1} + \mathbf{D}_h \mathbf{p}^{q-2,k+1} - \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1}, \\ \mathcal{R}_h \mathbf{p}^{q,k+1} & = & \mathbf{S}_h^{q,k+1} + \mathbf{D}_h \mathbf{p}^{q-1,k+1} - \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1}, \end{array} \right. \quad (4.34)$$

où pour tout  $n \in \{0, \dots, q-1\}$ , on a

$$\mathbf{S}_h^{n+1,k+1} = \Delta t \mathbf{Q}_h^{n,k+1} + \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^k. \quad (4.35)$$

Le déplacement  $\mathbf{u}^{k+1}$  à la fin de période est donné par le système linéaire

$$\mathbf{G}_h \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}^{q,k+1} = \mathbf{F}_h^{k+1}, \quad (4.36)$$

ce qui permet d'obtenir après substitution successive de l'expression des pressions  $\mathbf{p}^{n,k+1}$ , la relation

$$\mathcal{R}_h^q \mathbf{p}^{q,k+1} = \sum_{i=0}^{q-1} \mathbf{D}_h^{q-1-i} \mathcal{R}_h^i \mathbf{S}_h^{i+1,k+1} - \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{R}_h^i \mathbf{D}_h^{q-1-i} \right) \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{D}_h^q \mathbf{p}^{0,k+1}. \quad (4.37)$$

Ceci revient finalement à résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{R}_h^q \mathbf{p}^{q,k+1} + \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{R}_h^i \mathbf{D}_h^{q-1-i} \right) \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1} & = & \sum_{i=0}^{q-1} \mathbf{D}_h^{q-1-i} \mathcal{R}_h^i \mathbf{S}_h^{i+1,k+1} + \mathbf{D}_h^q \mathbf{p}^{0,k+1}, \\ \mathbf{G}_h \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}^{q,k+1} & = & \mathbf{F}_h^{k+1}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

**Remarque 4.2.1** En posant  $\Delta\Phi^{k+1} = (\Delta\phi_K^{k+1})_K$  et en utilisant les notations précédentes, la loi de Biot discrète (4.19) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1} = \mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k), \quad (4.39)$$

où  $\mathbf{M}_h = (m_{KK})$  est une matrice diagonale telle que  $m_{KK} = m(K)$  et sera exploitée ultérieurement.

### 4.2.5 Condition inf-sup discrète

On montre dans cette section que la méthode mixte utilisée EF-VF n'est pas stable dans le cas du modèle linéaire quand le fluide est peu compressible ( $c_o$  petit) et le pas de temps de discrétisation  $\Delta t$  est petit. En effet, sous ces hypothèses le système (4.33) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_h & -\mathbf{B}_h \\ \mathbf{B}_h^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h^{n+1} \\ \mathbf{B}_h^T \mathbf{u}^n \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Puisque la matrice  $\mathbf{G}_h$  est symétrique définie positive, on déduit du Théorème 4.3, p. 127 de [Bra01] que le problème mixte (4.40) admet une solution si et seulement si **la condition LBB** (Ladyshenskaja-Babuska-Brezzi) appelée généralement **la condition inf-sup**, est vérifiée. Cette condition se réduit dans notre cas à

$$\exists \beta > 0 \text{ telle que } \|\mathbf{B}_h \eta_h\| \geq \beta \|\eta_h\| \quad \text{pour tout } \eta_h \in \mathbf{V}_h, \quad (4.41)$$

où  $\mathbf{V}_h$  est l'espace des fonctions constantes sur chaque volume de contrôle. La condition (4.41) implique que l'application associée à la matrice  $\mathbf{B}_h$  est surjective *i.e.*  $\ker \mathbf{B}_h^T = 0$ . Le complément de Schur  $\mathcal{S}_h$  associé au système (4.40) est donné par  $\mathcal{S}_h = \mathbf{B}_h^T \mathbf{G}_h^{-1} \mathbf{B}_h$ . Cet opérateur est symétrique positif.

Notons que **la condition inf-sup** implique que l'opérateur  $\mathcal{S}_h$  est défini. En effet, soient  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$  l'ensemble des valeurs propres du complément de Schur tel que  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  et soient  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,n}$  l'ensemble des vecteurs propres associés. Notons respectivement par  $\eta_{\min}$  et  $\eta_{\max}$  la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $\mathbf{G}_h^{-1}$ . Nous avons pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \eta_{\min} \|\mathbf{B}_h \mathbf{v}_i\|^2 &\leq (\mathcal{S}_h \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) \leq \eta_{\max} \|\mathbf{B}_h \mathbf{v}_i\|^2, \\ \eta_{\min} \|\mathbf{B}_h \mathbf{v}_i\|^2 &\leq \lambda_i \|\mathbf{v}_i\|^2 \leq \eta_{\max} \|\mathbf{B}_h \mathbf{v}_i\|^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Si la condition (4.41) est vérifiée, alors on en déduit que

$$\eta_{\min} \beta^2 \leq \lambda_1, \quad (4.43)$$

ce qui impliquerait que l'opérateur  $\mathcal{S}_h$  est défini.

Nous constatons que la plus petite valeur propre  $\lambda_1$  tend vers 0 quand le pas d'espace  $h$  tend vers 0 (cf. Fig. 4.5). D'après (4.43), on a alors  $\beta$  tend vers 0. Par conséquent la méthode mixte EF-VF n'est pas stable.

Dans le cas d'un écoulement de fluides peu compressibles, ceci mène aux conclusions suivantes :

- nous ne pouvons pas prendre la compressibilité  $c_o$  et le pas de temps de discrétisation  $\Delta t$  petits simultanément. Dans la pratique, pour les algorithmes classiques, si  $c_o$  est petite, cette lacune est comblée en imposant une borne inférieure du pas de discrétisation  $\Delta t_{\min}$ , fait non courant. Cela permet de converger comme le montre le Tableau 1.1 de la Section 4.6.1 ;
- il est nécessaire d'utiliser une méthode de résolution numérique robuste pour surmonter cette difficulté. La méthode du gradient conjugué préconditionné que nous allons introduire assure la convergence en l'absence de la condition inf-sup, comme le montre le tableau 1.2 de la Section 4.6.1.

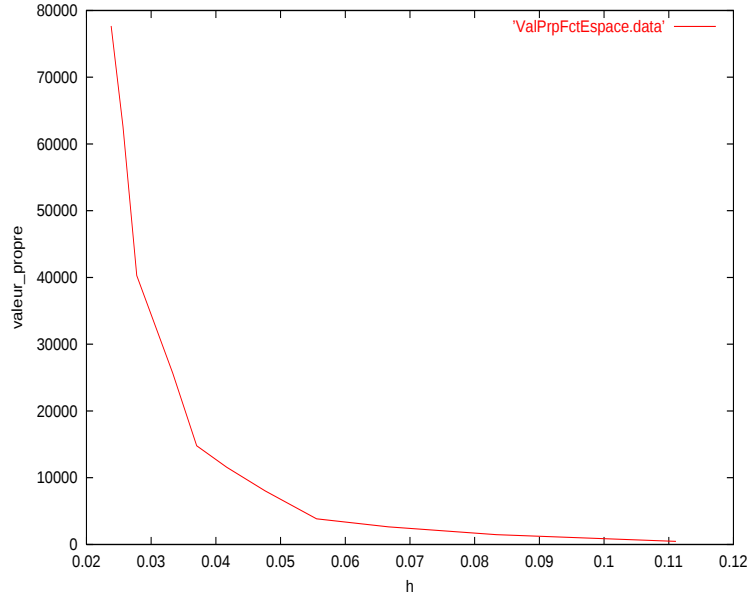


FIG. 4.5 – La plus petite valeur propre  $\lambda_1$  de  $\mathcal{S}_h$  en fonction du pas d'espace  $h$ , calculée à l'aide de la méthode de la puissance inverse.

#### 4.2.6 Ecriture des opérateurs pour le modèle non linéaire

Pour une variation de la porosité  $\Delta\Phi^{k+1}$  liée au déplacement  $\mathbf{u}^{k+1}$  par la loi de Biot discrète (4.39), durant la période  $T^*$ , la pression  $\mathbf{p}^{n,k+1} = (p_K^n)_K$  et la saturation  $\mathbf{S}^{n,k+1} = (S_K^{n,k+1})_K$  sont calculés aux instants de la subdivision  $t^{n,k}$ . La géomécanique est similaire au modèle linéaire, donnée par le système (4.31). En posant  $\Phi^{n,k+1} = (\phi_K^{n,k+1})_K$ , on déduit de (4.14)

$$\Phi^{n+1,k+1} = \Phi^{0,k+1} + \frac{(n+1) \Delta t}{T^*} \Delta\Phi^{k+1}. \quad (4.44)$$

On substitue (4.44) dans (4.17) pour écrire

$$\mathcal{R}_h(\Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}, \mathbf{S}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}^{n+1,k+1}) = 0, \quad (4.45)$$

pour tout  $n \in \{0, \dots, q-1\}$  où  $\mathcal{R}_h$  dénote l'opérateur non linéaire qui traduit la dépendance des différentes quantités  $\Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}, \mathbf{S}^{n+1,k+1}$  et  $\mathbf{p}^{n+1,k+1}$  du système (4.17), entre elles. Pour  $\Delta\Phi^{k+1}$  et  $(\mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1})$  donnés, le couple  $(\mathbf{S}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}^{n+1,k+1})$  est la solution numérique de (4.45) obtenue par la méthode de Newton introduite dans la Section 4.2.7. Ce couple de solutions est noté

$$(\mathbf{S}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}^{n+1,k+1}) = \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}). \quad (4.46)$$

On écrit la succession de résolutions suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{S}^{1,k+1}, \mathbf{p}^{1,k+1}) &= \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{0,k+1}, \mathbf{p}^{0,k+1}), \\ (\mathbf{S}^{2,k+1}, \mathbf{p}^{2,k+1}) &= \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{1,k+1}, \mathbf{p}^{1,k+1}), \\ \vdots & \\ (\mathbf{S}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}^{n+1,k+1}) &= \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}), \\ \vdots & \\ (\mathbf{S}^{q-1,k+1}, \mathbf{p}^{q-1,k+1}) &= \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{q-2,k+1}, \mathbf{p}^{q-2,k+1}), \\ (\mathbf{S}^{q,k+1}, \mathbf{p}^{q,k+1}) &= \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{q-1,k+1}, \mathbf{p}^{q-1,k+1}). \end{array} \right. \quad (4.47)$$

On note  $\mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}) = \mathbf{p}^{q,k+1}$ , la suite de résolutions (4.47) telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Do } n = 0, \dots, q-1 \\ (\mathbf{S}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}^{n+1,k+1}) = \mathcal{R}_h^{-1}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}), \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Suite à cette notation, la résolution numérique du système couplé (4.17), (4.36) et (4.39) revient à la résolution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{p}^{q,k+1} &= \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1}), \\ \mathbf{G}_h \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}^{q,k+1} &= \mathbf{F}_h^{k+1}, \\ \mathbf{M}_h \Delta\Phi^{k+1} &= \mathbf{B}_h^T(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k). \end{array} \right. \quad (4.49)$$

**Remarque 4.2.2** La succession de résolutions  $\mathcal{R}_h^{-q}$  sera appelée la simulation du réservoir, et  $\mathbf{G}_h^{-1}$  est la résolution de la géomécanique.

### 4.2.7 Méthode de Newton

Pour résoudre l'équation non linéaire (4.45) découlant du système (4.17), on utilise la méthode de Newton [Kel95]. L'algorithme est donné par

$$\begin{array}{l}
 \text{Pour } \mathbf{S}_0^{n+1,k+1} \text{ et } \mathbf{p}_0^{n,k+1} \text{ donnés} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Do } l = 0, \dots, \text{ jusqu'à convergence} \\
 \text{Calcul de } \nabla \mathcal{R}_h(\mathbf{S}_l^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_l^{n+1,k+1}), \\
 \text{Factorisation de } \nabla \mathcal{R}_h = LU, \\
 \text{Résolution } LU(\delta \mathbf{S}, \delta \mathbf{p}) = -\mathcal{R}_h(\Delta \Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}, \mathbf{S}_l^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_l^{n,k+1}), \\
 (\mathbf{S}_{l+1}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_{l+1}^{n,k+1}) = (\mathbf{S}_l^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_l^{n,k+1}) + (\delta \mathbf{S}, \delta \mathbf{p}) \\
 \mathbf{r}_{l+1} = \|\mathcal{R}_h(\Delta \Phi^{k+1}, \mathbf{S}^{n,k+1}, \mathbf{p}^{n,k+1}, \mathbf{S}_{l+1}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_{l+1}^{n,k+1})\|, \\
 \text{End Do.}
 \end{array} \right.
 \end{array} \tag{4.50}$$

Pour appliquer l'algorithme (4.50), il suffit de pouvoir calculer

$$\nabla \mathcal{R}_h(\mathbf{S}_l^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_l^{n+1,k+1}) = (\delta r_{ij})_{2N_v, 2N_v}.$$

Pour tout  $n$ , on note  $(\mathbf{S}_l^{n,k+1}, \mathbf{p}_l^{n,k+1})$  le vecteur

$$(S_{1,l}^{n,k+1}, p_{1,l}^{n,k+1}, \dots, S_{K,l}^{n,k+1}, p_{K,l}^{n,k+1}, \dots, S_{N_v,l}^{n,k+1}, p_{N_v,l}^{n,k+1})^T.$$

Par conséquent, pour tout  $K \in \tau_h$  et pour tout  $L \in \mathcal{N}(K)$

$$\begin{aligned}
\delta r_{2K-1,2K-1} &= m(K) \left( \phi_K^{0,k+1} + \frac{(n+1)\Delta t}{T^*} \Delta \phi_K^{k+1} \right) S_{K,l}^{n+1,k+1} \rho_{w,K}^0 c_w + \\
&\quad + \Delta t \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Lambda_{w,K,L,l}, \\
\delta r_{2K-1,2K} &= m(K) \left( \phi_K^{0,k+1} + \frac{(n+1)\Delta t}{T^*} \Delta \phi_K^{k+1} \right) \rho_{w,K}^0 (1 + c_w p_{K,l}^{n+1,k+1}), \\
\delta r_{2K,2K-1} &= m(K) \left( \phi_K^{0,k+1} + \frac{(n+1)\Delta t}{T^*} \Delta \phi_K^{k+1} \right) S_{K,l}^{n+1,k+1} \rho_{o,K}^0 c_o + \\
&\quad + \Delta t \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Lambda_{o,K,L,l}, \\
\delta r_{2K,2K} &= m(K) \left( \phi_K^{0,k+1} + \frac{(n+1)\Delta t}{T^*} \Delta \phi_K^{k+1} \right) \rho_{o,K}^0 (1 + c_o p_{K,l}^{n+1,k+1}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\delta r_{2K-1,2L-1} &= -\Delta t \Lambda_{w,K,L,l}, \\
\delta r_{2K,2L-1} &= -\Delta t \Lambda_{o,K,L,l},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Lambda_{w,K,L,l}^{n+1} &= \begin{cases} T_{K,L} \frac{\rho_{w,K,l}^n k r_{w,o}(S_{K,l}^n)}{\eta_w} k & \text{si } p_{L,l}^{n+1} > p_{K,l}^{n+1}, \\ T_{K,L} \frac{\rho_{w,L,l}^n k r_{w,o}(S_{L,l}^n)}{\eta_w} k & \text{sinon,} \end{cases} \\
\Lambda_{o,K,L,l}^{n+1} &= \begin{cases} T_{K,L} \frac{\rho_{o,K,l}^n k r_{o,w}(S_{K,l}^n)}{\eta_o} k & \text{si } p_{L,l}^{n+1} > p_{K,l}^{n+1}, \\ T_{K,L} \frac{\rho_{o,L,l}^n k r_{o,w}(S_{L,l}^n)}{\eta_o} k & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Les quantités  $\delta r_{2K-1,2L}$  et  $\delta r_{2K,2L-1}$  sont nulles dès que  $K$  et  $L$  ne sont pas voisins.

### 4.3 Schéma itératif à pas fractionnaire vu comme la méthode de Gauss-Seidel pour le modèle linéaire

Dans cette section, on présente le schéma itératif à pas fractionnaire qui consiste à calculer les inconnues du réservoir et celles de la mécanique en même temps ( $q = 1$ ), autrement dit  $\Delta t = T^*$ . On verra ce schéma dans le cas du modèle de couplage linéaire, comme un algorithme de Gauss-Siedel. On montrera aussi que la correction introduite dans le simulateur du réservoir par les ingénieurs, grâce au paramètre appelé compressibilité de roche  $c_r$ , peut être vue comme une méthode de Gauss-Seidel relaxée.

L'algorithme de résolution du système (4.33) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Do } k = 0, \dots, p-1 \\ \mathbf{p}_0^{k+1} = \mathbf{p}^k, \mathbf{u}_0^{k+1} = \mathbf{u}^k, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Do } l = 0, \dots, \text{ jusqu'à convergence} \\ \mathbf{D}_h \left( \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{p}^k \right) + \Delta t \mathbf{R}_h \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} + \mathbf{B}_h^T \left( \mathbf{u}_l^{k+1} - \mathbf{u}^k \right) = \Delta t \mathbf{Q}_h^{k+1}, \\ -\mathbf{B}_h \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} + \mathbf{G}_h \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} = \mathbf{F}_h^{k+1}, \\ \text{End Do.} \\ \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}_{l+1}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}_{l+1}^{k+1}, \end{array} \right. \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \quad (4.51)$$

On rappelle l'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel ([LT94]) :

Soit  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  un système linéaire ; la méthode consiste à écrire la matrice sous la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$  et

$$\mathbf{M} \mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{N} \mathbf{x}_l + \mathbf{b}, \quad (4.52)$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice triangulaire supérieure qui correspond à  $\mathbf{A}$ . Cette méthode converge si et seulement si le spectre de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$  vérifie  $\rho(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}) < 1$ .

On pose

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_h & \mathbf{B}_h^T \\ -\mathbf{B}_h & \mathbf{G}_h \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_h & 0 \\ -\mathbf{B}_h & \mathbf{G}_h \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{B}_h^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{flow}^{k+1} \\ \mathbf{F}_h^{k+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{l+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} \\ \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{S}_{flow}^{k+1} = \mathbf{D}_h \mathbf{p}^k + \mathbf{B}_h^T \mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{Q}^{k+1}. \quad (4.53)$$

En utilisant ces notations, le schéma itératif (4.51) peut s'écrire sous la forme (4.52), qui est l'algorithme de Gauss-Seidel.

### La méthode de relaxation pour le schéma itératif à pas fractionnaire

Dans les simulations du réservoir, les ingénieurs utilisent un paramètre qui est la compressibilité de la roche  $c_r$ . Cette quantité est utilisée dans le modèle du réservoir pour prendre en compte la déformation mécanique. Dans ce qui suit, on va montrer que cette correction dans le cas  $q = 1$ , n'est qu'une relaxation de paramètre  $\gamma = \left(1 + \frac{c_r}{c_o}\right)^{-1}$ . L'algorithme du schéma itératif à pas fractionnaire corrigé est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Do } k = 1, \dots, p, \\ \mathbf{p}_0^{k+1} = \mathbf{p}^k, \mathbf{u}_0^{k+1} = \mathbf{u}^k, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Do } l = 0, \dots, \text{ jusqu'à convergence,} \\ \left(1 + \frac{c_r}{c_o}\right) \mathbf{D}_h \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} + \Delta t \mathbf{R}_h \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} + \mathbf{B}_h^T \mathbf{u}_l^{k+1} = \mathbf{S}_{flow}^{k+1} + \frac{c_r}{c_o} \mathbf{D}_h \mathbf{p}_l^{k+1}, \\ -\mathbf{B}_h \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} + \mathbf{G}_h \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} = \mathbf{F}_h^{k+1}, \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \\ \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}_{l+1}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}_{l+1}^{k+1}, \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Le système (4.54) s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \Delta t \mathbf{R}_h + \left(1 + \frac{c_r}{c_o}\right) \mathbf{D}_h & 0 \\ -\mathbf{B}_h & \mathbf{G}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{l+1}^{k+1} \\ \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_r}{c_o} \mathbf{D}_h & -\mathbf{B}_h^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_l^{k+1} \\ \mathbf{u}_l^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{flow}^{k+1} \\ \mathbf{F}_h^{k+1} \end{pmatrix},$$

qui peut être vu comme une relaxation partielle de l'algorithme de Gauss-Seidel avec  $\left(1 + \frac{c_r}{c_o}\right)^{-1}$  comme paramètre de relaxation.

## 4.4 Le schéma itératif à pas fractionnaire multi-échelle

On introduit dans cette section le schéma à pas fractionnaire multi-échelle relaxé, tout d'abord pour le modèle de couplage linéaire et ensuite pour le modèle non linéaire. Ce schéma consiste à calculer le déplacement  $\mathbf{u}^{k+1}$  une seule fois en fin de période  $T^*$ , alors que les inconnues du réservoir sont calculées aux instants  $\{t^{n,k+1}\}$  par une méthode de point fixe.

### 4.4.1 Le schéma pour le modèle linéaire

Pour résoudre l'ensemble des équations (4.13)-(4.14) et (4.18), on utilise la méthode du point fixe. Les deux simulateurs : réservoir et géomécanique se rencontrent tous les  $q$  pas de temps.

L'algorithme est donné par :

**Initialisation de la période :**

$\mathbf{p}_0^{0,k+1} = \mathbf{p}_1^{0,k+1} = \mathbf{p}^{q,k}, \mathbf{u}_0^k = \mathbf{u}^k$  donnés par la période précédente,

**Itérations sur la période :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Do } l = 0, \dots, \text{ jusqu'à convergence,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{La simulation du réservoir :} \\ \text{Do } n = 0, \dots, q-1, \\ \left( 1 + \frac{c_r}{c_o} \right) \mathbf{D}_h (\mathbf{p}_{l+1}^{n+1,k+1} - \mathbf{p}_{l+1}^{n,k+1}) + \Delta t \mathbf{R}_h \mathbf{p}_{l+1}^{n+1,k+1} + \frac{\Delta t}{T^*} \mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_l^{k+1} - \mathbf{u}^k) = \\ = \Delta t \mathbf{Q}^{n+1} + \frac{c_r}{c_o} \frac{\Delta t}{T^*} \mathbf{D}_h (\mathbf{p}_l^{q,k+1} - \mathbf{p}^{0,k}), \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{La résolution géomécanique :} \\ \mathbf{G}_h \mathbf{u}_{l+1}^k + \mathbf{B}_h \mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1} = \mathbf{F}_h^k, \end{array} \right. \\ \text{End Do.} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}_{l+1}^{k+1}, \mathbf{p}^{q,k+1} = \mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1}.$$

(4.55)

### 4.4.2 Le schéma pour le modèle non linéaire multi-échelle ( $q > 1$ )

Introduisons maintenant l'algorithme

**Initialisation de la période :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_0^{0,k+1} = \mathbf{S}^{0,k+1} \text{ est donnée par la précédente période où } \mathbf{S}_0^{0,k+1} = \mathbf{S}^{q,k}; \\ \mathbf{p}_0^{0,k+1} = \mathbf{p}^{0,k+1} \text{ est donnée par la précédente période où } \mathbf{p}_0^{0,k+1} = \mathbf{p}^{q,k}; \\ \Phi_0^{0,k+1} = \Phi^{0,k+1} \text{ est donnée par la précédente période où } \Phi_0^{0,k+1} = \Phi^{q,k}; \\ \mathbf{u}_0^k = \mathbf{u}^k, \Delta\Phi_0^{k+1} = 0. \end{array} \right. \quad (4.56)$$

**Itérations sur la période :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Do } l = 0, \dots, \text{ jusqu'à convergence,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{La simulation du réservoir :} \\ \text{Do } n = 0, \dots, q-1, \\ \text{Résoudre par la méthode de Newton :} \\ \mathcal{R}_h \left( \mathbf{M}_h \Delta\Phi_l^{k+1} + c_r \frac{T^*}{(n+1)\Delta t} (\mathbf{p}_{l+1}^{n+1,k+1} - \mathbf{p}^{0,k+1}), \mathbf{S}_{l+1}^{n,k+1}, \mathbf{p}_{l+1}^{n,k+1}, \mathbf{S}_{l+1}^{n+1,k+1}, \mathbf{p}_{l+1}^{n+1,k+1} \right) = 0, \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{La résolution géomécanique :} \\ \mathbf{G}_h \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1} = \mathbf{F}_h^{k+1}, \\ \Delta\Phi_{l+1}^{k+1} = \mathbf{M}_h^{-1} \mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{u}^k) - c_r (\mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1} - \mathbf{p}^{0,k+1}), \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.57)$$

Cet algorithme est illustré à la Figure 4.6,

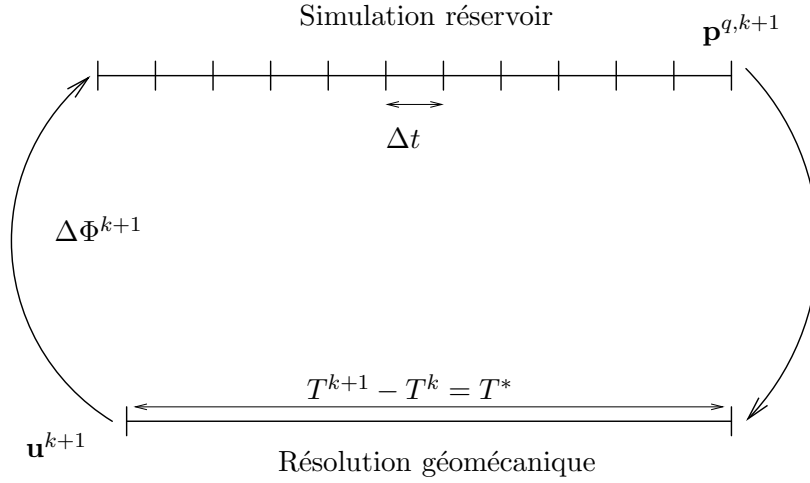


FIG. 4.6 – Illustration de la simulation réservoir et de la résolution géomécanique durant une itération sur une période  $T^*$ .

## 4.5 La méthode du gradient conjugué préconditionné

Dans cette section, on introduit une nouvelle approche basée sur la méthode du gradient conjugué préconditionné pour coupler les deux simulateurs : réservoir et géomécanique. On applique cette méthode, tout d'abord, dans le cas du modèle linéaire avec  $q = 1$  ou encore  $\Delta t = T^*$ . Puis on la généralise pour le même type de modèle au cas multi-échelle c'est-à-dire  $q > 1$ . Pour finir, on étend la méthode au cas du modèle non linéaire multi-échelle avec  $q > 1$ .

### 4.5.1 Application de la méthode du gradient conjugué préconditionné pour le modèle linéaire et pour $q = 1$

Le système linéaire qui traduit le couplage entre l'écoulement linéaire d'un fluide dans un milieu et ses déformations mécaniques (4.33) s'écrit aussi

$$\begin{cases} \mathcal{R}_h \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{B}_h^T \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{S}_{flow}^{n+1}, \\ \mathbf{G}_h \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{F}_h^{n+1}. \end{cases} \quad (4.58)$$

L'idée consiste à construire le complément de Schur en éliminant une des inconnues d'une des équations et la substituant dans l'autre. On applique ensuite la méthode

du gradient conjugué préconditionné [Saa03] au système obtenu. Par conséquent, on a les deux approches suivantes :

- (a) La première approche consiste à éliminer l'inconnue  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Il vient à résoudre finalement

$$\begin{cases} \left( \mathcal{R}_h + \mathbf{B}_h^T \mathbf{G}_h^{-1} \mathbf{B}_h \right) \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{B}_h^T \mathbf{G}_h^{-1} \mathbf{F}_h^{n+1} + \mathbf{S}_{flow}^{n+1}, \\ \mathbf{G}_h \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}_h \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{F}_h^{n+1}. \end{cases} \quad (4.59)$$

On applique alors la méthode du gradient conjugué préconditionné [Saa03] à la première équation du système (4.59) même si l'opérateur n'est pas une fonction quadratique. On prend la matrice  $\mathbf{C} = \mathcal{R}_h + c_r \mathbf{I}$  comme matrice de préconditionnement car dans la pratique la matrice  $\mathbf{B}_h^T \mathbf{G}_h^{-1} \mathbf{B}_h$  est proche de  $c_r \mathbf{I}$ .

- (b) La deuxième approche consiste à éliminer cette fois-ci  $\mathbf{p}^{n+1}$  de la seconde équation du système (4.58) et la substituer dans la première du même système. Ceci revient à résoudre l'ensemble des équations suivantes

$$\begin{cases} \left( \mathbf{G}_h + \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-1} \mathbf{B}_h^T \right) \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-1} \mathbf{S}_{flow}^{n+1} + \mathbf{F}_h^{n+1}, \\ \mathcal{R}_h \mathbf{p}^{n+1} = -\mathbf{B}_h^T \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{S}_{flow}^{n+1}. \end{cases} \quad (4.60)$$

On applique la méthode du gradient conjugué préconditionné à la première équation du système (4.60). On prend la matrice  $\mathbf{C} = \mathbf{G}_h$  comme matrice de préconditionnement. Dans le cas linéaire, on peut utiliser  $\mathbf{G}_h + \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-1} \mathbf{B}_h^T$  comme matrice de préconditionnement. Par contre dans le cas non linéaire et à cause du fait de la difficulté d'utiliser et de calculer  $\mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-1} \mathbf{B}_h^T$  comme une partie du préconditionneur, on se contente de  $\mathbf{G}_h$  comme matrice de préconditionnement.

Les tests numériques effectués montrent que les deux approches sont similaires en terme de coût, quand  $q = 1$ . La difficulté pour la première approche (a) réside dans le fait qu'on ne peut pas généraliser l'algorithme du gradient conjugué préconditionné au cas multi-échelle *i.e.* le couplage entre les deux simulateurs : réservoir et géomécanique tous les  $q$  pas de temps, contrairement à la seconde approche (b) où l'extension de l'algorithme est possible. Cette extension va être abordée dans le paragraphe ci-dessous.

### 4.5.2 Extension de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné pour les deux modèles quand $q > 1$

Dans cette partie, on considère les deux types de couplage entre les déformations mécaniques et l'écoulement linéaire monophasique et diphasique non linéaire tous les  $q$  pas de temps  $\Delta t$ .

#### Extension pour le modèle linéaire avec $q > 1$

Soit  $T^{k+1} - T^k = T^*$  une période de temps. On calcule une fois le déplacement à la fin de la période  $T^k$  alors qu'on calcule  $q$  fois la pression durant une période  $T^*$ . On extrait l'expression de la pression  $\mathbf{p}^{q,k}$  de la première équation du système (4.38) et on la substitue dans la seconde pour déduire

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mathbf{G}_h + \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q} \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{R}_h^i \mathbf{D}_h^{q-1-i} \right) \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \right) \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{F}_h^{k+1} + \mathbf{D}_h^q \mathbf{p}^{0,k+1} + \\ \quad + \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q} \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathbf{D}_h^{q-1-i} \mathcal{R}_h^i \mathbf{S}_h^{i+1,k+1} \right), \\ \mathcal{R}_h^q \mathbf{p}^{q,k+1} \end{array} \right. = - \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{R}_h^i \mathbf{D}_h^{q-1-i} \right) \frac{\mathbf{B}_h^T}{q} \mathbf{u}^{k+1} + \\ + \sum_{i=0}^{q-1} \mathbf{D}_h^{q-1-i} \mathcal{R}_h^i \mathbf{S}_h^{i+1,k+1} + \mathbf{D}_h^q \mathbf{p}^{0,k+1}. \quad (4.61)$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_h &= \mathbf{G}_h + \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q} \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{R}_h^i \mathbf{D}_h^{q-1-i} \right) \frac{\mathbf{B}_h^T}{q}, \\ \mathbf{b}_h^{k+1} &= \mathbf{F}_h^{k+1} + \mathbf{D}_h^q \mathbf{p}^{0,k+1} + \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q} \left( \sum_{i=0}^{q-1} \mathbf{D}_h^{q-1-i} \mathcal{R}_h^i \mathbf{S}_h^{i+1,k+1} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Finalement, on applique l'algorithme du gradient conjugué préconditionné au système  $\mathcal{Z}_h \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{b}_h^{k+1}$  et on préconditionne par la matrice  $\mathbf{C} = \mathbf{G}_h$ .

#### Extension pour le modèle non linéaire avec $q > 1$

On étend maintenant la méthode du gradient conjugué préconditionné dans le cas du modèle de couplage non linéaire. On calcule une fois le déplacement  $\mathbf{u}^{k+1}$  à la fin

de la période  $T^*$  alors qu'on calcule  $q$  fois la pression et la saturation durant cette période. On déduit de (4.49)

$$\begin{cases} \mathbf{G}_h \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)) &= \mathbf{F}_h^{k+1}, \\ \mathbf{p}^{q,k+1} &= \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)). \end{cases} \quad (4.63)$$

On applique alors la méthode du gradient conjugué préconditionné non linéaire à la première équation du système (4.63), donné dans [She94] qu'on rappelle ci-dessous

### Rappel du gradient conjugué préconditionné non linéaire

On suppose qu'on cherche à minimiser une fonctionnelle continue  $f$  dont le gradient  $\nabla f$  existe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0), \\ \text{calcul du préconditionneur } \mathbf{C} = \mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{C} \mathbf{z}_0 = \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{d}_0 = \mathbf{z}_0, \\ \text{Do } l = 0, \dots \end{array} \right. \\ \alpha_l = \frac{(\nabla f(\mathbf{x}_l), \mathbf{d}_l)}{(\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_l) \mathbf{d}_l, \mathbf{d}_l)} \\ \mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{x}_l + \alpha_l \mathbf{d}_l, \\ \mathbf{r}_{l+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{l+1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{calcul du préconditionneur } \mathbf{C} = \mathcal{H}_f(\mathbf{x}_l) \\ \mathbf{C} \mathbf{z}_{l+1} = \mathbf{r}_{l+1} \\ \beta_{l+1} = \frac{(\mathbf{r}_{l+1}, \mathbf{z}_{l+1})}{(\mathbf{r}_l, \mathbf{z}_l)} \\ \mathbf{d}_{l+1} = \mathbf{z}_{l+1} + \beta_{l+1} \mathbf{d}_l \\ \text{End Do} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.64)$$

où  $\mathcal{H}_f$  est la hessienne de  $f$ . On suppose que la fonctionnelle

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_h \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}) - (\mathbf{F}_h^{k+1}, \mathbf{x}) \quad (4.65)$$

existe et est telle que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_h \mathbf{x} - \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{x} - \mathbf{u}^k)) - \mathbf{F}_h^{k+1}. \quad (4.66)$$

**Remarque 4.5.1** *Malgré l'absence de critères usuels de convergence de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné non linéaire (4.64) dans notre cas (puisque l'existence de la fonctionnelle  $f$  n'est pas assurée) il converge rapidement. De plus, il se montre robuste face aux difficultés causées par le choix de la méthode de discrétisation VF-EF (la non satisfaction de la condition inf-sup).*

Pour appliquer l'algorithme (4.64) afin de résoudre la première équation du système (4.63), il suffit de définir  $\alpha_l$  et le résidu  $\mathbf{r}_{l+1}$ . Pour calculer le résidu  $\mathbf{r}_{l+1}$  pour des itéré  $\mathbf{u}_{l+1}^{k+1}$  et  $\mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1}$ , on a

$$\mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1} = \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{u}^k)), \quad (4.67)$$

on substitue (4.67) dans (4.66) pour obtenir

$$\nabla f(\mathbf{u}_{l+1}^{k+1}) = \mathbf{G}_h \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1} - \mathbf{F}_h^{k+1}. \quad (4.68)$$

Pour déterminer  $\alpha_l$ , il suffit de déterminer  $\mathcal{H}_f(\mathbf{u}_l^{k+1}).\mathbf{d}_l$ , on a

$$\mathcal{H}_f(\mathbf{u}_l^{k+1}).\mathbf{d}_l = \mathbf{G}_h \mathbf{d}_l - \nabla \left( \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_l^{k+1} - \mathbf{u}^k)) \right) \mathbf{d}_l, \quad (4.69)$$

il suffit alors d'approcher

$$\nabla \left( \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T \mathbf{M}_h^{-1}(\mathbf{u}_l^{k+1} - \mathbf{u}^k)) \right) \mathbf{d}_l,$$

par

$$\frac{\mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_l^{k+1} + \epsilon \mathbf{d}_l - \mathbf{u}^k)) - \mathbf{B}_h \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_l^{k+1} - \mathbf{u}^k))}{\epsilon}, \quad (4.70)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre. Soit  $\tilde{\mathbf{p}}_l^{q,k+1}$  la pression appelée intermédiaire et donnée par

$$\tilde{\mathbf{p}}_l^{q,k+1} = \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_l^{k+1} + \epsilon \mathbf{d}_l - \mathbf{u}^k)), \quad (4.71)$$

On substitue les égalités (4.67) et (4.71) dans (4.70), et on reporte l'équation obtenue dans (4.69) pour déduire

$$\mathcal{H}_f(\mathbf{u}_l^{k+1}).\mathbf{d}_l = \mathbf{G}_h \mathbf{d}_l - \frac{(\mathbf{B}_h \tilde{\mathbf{p}}_l^{q,k} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}_l^{q,k+1})}{\epsilon} \quad (4.72)$$

Pour le préconditionneur, on se contente d'utiliser  $\mathbf{C} = \mathbf{G}_h$ . On est en mesure d'écrire l'algorithme de gradient conjugué préconditionné. Pour une période  $T^*$ . Cet

l'algorithme s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation de la période :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0^{k+1} \text{ donné,} \\ \mathbf{p}_0^{q,k+1} = \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_0^{k+1} - \mathbf{u}^k)), \quad \longrightarrow \text{simulation réservoir} \\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{F}_h^{k+1} - \mathbf{G}_h \mathbf{u}_0^{k+1} + \mathbf{B}_h \mathbf{p}_0^{q,k+1}, \\ \mathbf{C} \mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{z}_0 = \mathbf{d}_0. \end{array} \right. \\ \\ \text{Itérations sur la période :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Do } l = 0, \dots, \text{ jusqu'à convergence} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{l+1}^{q,k+1} = \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_l^{k+1} + \epsilon \mathbf{d}_l - \mathbf{u}^k)), \quad \longrightarrow \text{simulation réservoir} \\ \mathbf{y}_l = \mathbf{G}_h \mathbf{d}_{l+1} + \frac{\left( \mathbf{B}_h \tilde{\mathbf{p}}_{l+1}^{q,k+1} - \mathbf{B}_h \mathbf{p}_l^{q,k+1} \right)}{\epsilon}, \quad (4.73) \\ \alpha_l = \frac{(\mathbf{r}_l, \mathbf{z}_l)}{(\mathbf{y}_l, \mathbf{d}_l)}, \\ \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} = \mathbf{u}_l^{k+1} + \alpha_l \mathbf{d}_l, \\ \mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1} = \mathcal{R}_h^{-q}(\mathbf{B}_h^T (\mathbf{u}_{l+1}^{k+1} - \mathbf{u}^k)), \quad \longrightarrow \text{simulation réservoir} \\ \mathbf{r}_{l+1} = \mathbf{F}_h^{k+1} - \mathbf{G}_h \mathbf{u}_{l+1}^{k+1} + \mathbf{B}_h \mathbf{p}_{l+1}^{q,k+1}, \\ \mathbf{G}_h \mathbf{z}_{l+1} = \mathbf{r}_{l+1}, \quad \longrightarrow \text{résolution géomécanique} \\ \beta_{l+1} = \frac{(\mathbf{r}_{l+1}, \mathbf{z}_{l+1})}{(\mathbf{r}_l, \mathbf{z}_l)}, \\ \mathbf{d}_{l+1} = \mathbf{z}_{l+1} + \beta_{l+1} \mathbf{d}_l. \\ \text{End Do.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Remarque 4.5.2** *Notons que l'algorithme (4.73) coïncide bien avec l'algorithme du gradient conjugué préconditionné appliqué pour le modèle linéaire (4.62).*

### 4.5.3 Comparaison du coût des opérations entre les deux schémas à pas fractionnaires et du gradient conjugué préconditionné

On compare le coût d'opérations entre les deux algorithmes (4.73) et (4.56)-(4.57) pour le modèle non linéaire.

- Pour l'étape d'initialisation, on note que l'algorithme basé sur la méthode du gradient conjugué préconditionné nécessite une simulation réservoir contrairement à l'algorithme itératif à pas fractionnaire multi-échelle.
- Pour chaque itération de période, on note que l'algorithme basé sur la méthode du gradient conjugué préconditionné nécessite deux simulations réservoir et une résolution géomécanique. Tandis que le schéma itératif à pas fractionnaire multi-échelle ne demande qu'une simulation réservoir et une résolution géomécanique.

Notons qu'en pratique la simulation de réservoir n'est pas aussi coûteuse que la résolution géomécanique. En effet, la simulation réservoir demande entre 10 à 15 min, tandis que la résolution géomécanique demande 6h de calcul (estimations temporelle données par l'Institut Français du Pétrole), donc le fait d'avoir 2 simulations réservoir en une itération pour le schéma du gradient conjugué préconditionné n'est pas coûteux.

## 4.6 Tests numériques

Dans cette section, on commence par présenter les résultats numériques dans le cas du modèle linéaire, on s'attachera ensuite au du modèle non linéaire. Dans un premier temps, on valide numériquement les schémas présentés dans les sections 4.3, 4.4 et 4.5. On donne des solutions analytiques : la pression  $p$  et le déplacement  $\mathbf{u}$  à partir desquelles on calcule les seconds membres pour le réservoir et la géomécanique à l'aide du système d'équations (4.1), (4.4) et (4.11).

Ceci nous permettra de faire une étude de l'ordre de convergence de la méthode de discrétisation du système et de vérifier que le schéma à pas fractionnaire et la méthode du gradient conjugué préconditionné quand ( $q = 1$ ) donnent des résultats

semblables ; de ce fait les deux méthodes sont validées.

Ensuite, on montre l'influence de la durée de la période c'est-à-dire l'influence de  $q$  sur le comportement des solutions ; pour cela et dans le but d'imiter la physique, on choisit deux solutions analytiques  $p$  et  $\mathbf{u}$  telles que la fonction déplacement  $\mathbf{u}$  varie peu devant  $p$  (cf. Figure 4.7). On validera l'approche du schéma multi-échelle en temps pour les deux algorithmes. On montrera aussi que la méthode du gradient conjugué est plus rapide et plus robuste que le schéma à pas fractionnaire notamment quand la condition inf-sup introduite dans la section 4.2.5 n'est pas vérifiée ou encore quand les fluides sont peu compressibles.

Grâce à un cas test 1D non linéaire effectué en collaboration avec l'Institut Français du Pétrole, on établira les mêmes conclusions que pour le cas du modèle linéaire 2D. Ensuite, on validera les deux algorithmes dans le cas du modèle non linéaire 2D. Notons que dans le cas non linéaire, notre solution de référence va être celle qui est donnée par le schéma itératif à pas fractionnaire ( $q = 1$ ). On présentera également dans ce cas l'influence du rapport des viscosités sur les solutions et on observera que les résultats obtenus concordent avec les prévisions de la physique.

On finira par conclure que la méthode du gradient conjugué préconditionné est moins coûteuse et plus robuste que le schéma à pas fractionnaire ; et ceci malgré l'absence des critères usuels de convergence du premier algorithme dans le cas du modèle non linéaire.

### 4.6.1 Modèle linéaire

On se donne un cas test où les solutions exactes la pression  $p$  et le vecteur du déplacement  $\mathbf{u}$  sont données respectivement sur les domaines  $\omega \subset \Omega$  où  $\omega = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^2$  et  $\Omega = [0, 1]^2$  par

$$\begin{aligned} p(x, z, t) &= 10^4 \cos t \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \left(z - \frac{2}{3}\right)^2, \\ \mathbf{u}(x, z, t) &= \begin{pmatrix} 100 \cos t (x^2 - x)^2 (z^2 - z)^2 \\ 100 \cos t (x^2 - x)^2 (z^2 - z)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.74}$$

comme l'illustrent les Figures 4.8 et 4.9. Les seconds membres,  $Q$  pour le réservoir et  $\mathbf{f}$  pour la géomécanique, sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 Q(t, x, z) = & -c_o 10^4 \sin(t) \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 - \\
 & -2 \cdot 10^4 \cos(t) \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 \left(2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) + (2x - 1)^2\right) - \\
 & -2 \cdot 10^4 \cos(t) \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(2\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{2}{3}\right) + (2z - 1)^2\right) - \\
 & -200 \sin(t) z^2 (z - 1)^2 x (x - 1) (2x - 1) - \\
 & -200 \sin(t) x^2 (x - 1)^2 z (z - 1) (2z - 1), \\
 \mathbf{f}(t, x, z) = & \begin{pmatrix} f_1(t, x, z) \\ f_2(t, x, z) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_1(t, x, z) = f_2(t, z, x) = & 600 \cos(t) z^2 (z - 1)^2 (2x(x - 1) + (2x - 1)^2) + \\
 & + 800 \cos(t) x z (x - 1) (z - 1) (2x - 1) (2z - 1) + \\
 & + 200 \cos(t) x^2 (x - 1)^2 (2z(z - 1) + (2z - 1)^2) - \\
 & - 2 \cdot 10^4 \cos(t) \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) (2x - 1).
 \end{aligned}$$

L'intervalle de temps des simulations est  $[0, 10]$ . Nous commençons par comparer le schéma à pas fractionnaire (4.51) et le schéma basé sur la méthode du gradient conjugué préconditionné appliquée à (4.60) dans le cas  $\Delta t = T^*$  ou encore  $q = 1$ .

Nous constatons que dans ce cas, ces deux algorithmes ont le même comportement, comme le montrent les Figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13 où une étude de l'ordre de convergence des schémas de discrétisation est faite. Notons que ces comparaisons sont effectuées dans le cas où la condition inf-sup est réalisée c'est-à-dire avec une compressibilité assez grande ( $c_o = 1$ ).

Les Figures 4.10 et 4.11 montrent le comportement de la norme  $L^2(\omega)$  de l'erreur

$p - p_h$  en fonction du pas d'espace  $\Delta x$  où  $p_h$  est donnée respectivement par le schéma itératif à pas fractionnaire et la méthode du gradient conjugué préconditionné. Nous remarquons que le schéma de volumes finis est d'ordre 2 en espace pour la pression  $p$ .

Les Figures 4.12 et 4.13 montrent le comportement de la norme  $L^2(\Omega)$  de l'erreur  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  en fonction du pas d'espace  $\Delta x$  où  $\mathbf{u}_h$  est donnée respectivement par le schéma itératif à pas fractionnaire et la méthode du gradient conjugué préconditionné. On note qu'à partir de  $\Delta x < \frac{1}{45}$ , on n'a plus un schéma d'ordre 2 pour  $\Delta t = 0.01$ . Nous constatons alors qu'il y a une condition CFL à respecter du type  $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq C$  pour avoir un schéma est d'ordre 2 en déplacement, ce qui mène à déduire qu'il y a une borne supérieure pour  $\Delta t$ , ce qui est classique.

**Remarque 4.6.1** *Nous rappelons que dans la section 4.2.5, nous avons vu que l'absence de la condition inf-sup impose une borne inférieure à  $\Delta t$  ; fait qui n'est pas courant comme le montre le Tableau 4.1 où en présence d'un fluide peu compressible ( $c_o = 0.5$ ), on n'a pas la condition inf-sup mais en augmentant  $\Delta t$ , le schéma à pas fractionnaire converge.*

Le Tableau 4.2 montre la robustesse du schéma du gradient conjugué préconditionné face au cas où la condition inf-sup n'est pas vérifiée (par exemple pour  $c_o = 0.5$ ). On constate que le schéma itératif à pas fractionnaire converge jusqu'à  $T^1 = 1$  et ensuite il ne converge plus, contrairement à la méthode du gradient conjugué préconditionné qui converge en nombre petit d'itérations. Dans ce même cas et en relaxant le schéma itératif à pas fractionnaire par  $c_r = 0.2$  (cf. Algorithme (4.54)) on note qu'en terme de nombre d'itérations et de temps CPU, la méthode proposée du gradient conjugué est moins coûteuse et plus rapide (cf. Tableaux 4.1 et 4.2).

Nous remarquons aussi que pour notre exemple de solutions régulières, la méthode du gradient conjugué est plus rapide que le schéma à pas fractionnaire dans les deux cas  $q = 1$  ou multi-échelle comme l'illustrent les Tableaux 4.3 et 4.4, où on établit une comparaison de nombre d'itérations et de temps CPU entre les deux schémas.

On s'intéresse ensuite à la validation entre des deux schémas dans le cadre multi-échelle c'est-à-dire  $q > 1$ . On considère que les deux domaines de la géomécanique et de l'écoulement sont identiques  $\Omega = \omega = [0, 1]^2$  et que les fonctions tests sont telles que la fonction déplacement  $\mathbf{u}$  varie peu devant la fonction pression  $p$  pour imiter

le cas physique où

$$\begin{aligned}
 p(x, z, t) &= 10 \cos 2t (x^2 - x)^2 (z^2 - z)^2 + 10, \\
 \mathbf{u}(x, z, t) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{5} (x^2 - x)^2 (z^2 - z)^2 + 10 \\ \cos \frac{t}{5} (x^2 - x)^2 (z^2 - z)^2 + 10 \end{pmatrix}, \tag{4.75}
 \end{aligned}$$

et telles que les normes  $L^2(\Omega)$  des fonctions  $p$  et  $\mathbf{u}$  sont données par la Figure 4.7. Les seconds membres dans ce cas sont donnés par

$$\begin{aligned}
 Q(t, x, z) &= -c_o 20 \sin(2t) x^2 (x - 1)^2 z^2 (z - 1)^2 - \\
 &\quad - 20 \cos(2t) z^2 (z - 1)^2 (2x(x - 1) + (2x - 1)) - \\
 &\quad - 20 \cos(2t) x^2 (x - 1)^2 (2z(z - 1) + (2z - 1)) - \\
 &\quad - \sin\left(\frac{t}{5}\right) z^2 (z - 1)^2 x(x - 1)(2x - 1) - \\
 &\quad - \sin\left(\frac{t}{5}\right) x^2 (x - 1)^2 z(z - 1)(2z - 1), \\
 \mathbf{f}(t, x, z) &= \begin{pmatrix} f_1(t, x, z) \\ f_2(t, x, z) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_1(t, x, z) = f_2(t, z, x) &= 6 \cos\left(\frac{t}{5}\right) z^2 (z - 1)^2 (2x(x - 1) + (2x - 1)^2) + \\
 &\quad + 8 \cos\left(\frac{t}{5}\right) xz(x - 1)(z - 1)(2x - 1)(2z - 1) + \\
 &\quad + 2 \cos\left(\frac{t}{5}\right) x^2 (x - 1)^2 (2z(z - 1) + (2z - 1)^2) - \\
 &\quad - 20 \cos(2t) z^2 (z - 1)^2 x(x - 1)(2x - 1).
 \end{aligned}$$

Les Figures 4.14, 4.15, 4.16 et 4.17 montrent l'influence de la durée de la période du couplage  $T^* = q \Delta t$  sur les solutions.

Pour les Figures 4.14 et 4.15, nous remarquons que les courbes d'erreur de la pression pour  $q = 1$ ,  $q = 10$  et  $q = 20$  sont semblables ; ce qui valide et renforce l'idée du multi-échelle en temps pour les deux schémas : itératif à pas fractionnaire et gradient conjugué préconditionné. De  $q = 50$  à  $q = 200$ , l'erreur augmente avec  $q$ . Alors que sur le déplacement (Figures 4.16 et 4.17), on constate que l'erreur sur la pression n'a pas une grande influence sur les déplacements. On voit qu'aux instants de rencontres les points des courbes d'erreur se superposent. Mais nous considérons que la solution est bonne si à la fois le déplacement et la pression sont bons. Nous constatons aussi que les courbes d'erreur des deux schémas : itératif à pas fractionnaire et la méthode du gradient conjugué préconditionné ont un comportement semblable.

Noutons que le problème du  $q$  optimal reste ouvert, c'est-à-dire déterminer un critère pour l'instant de rencontre des deux simulateurs : réservoir et géomécanique.

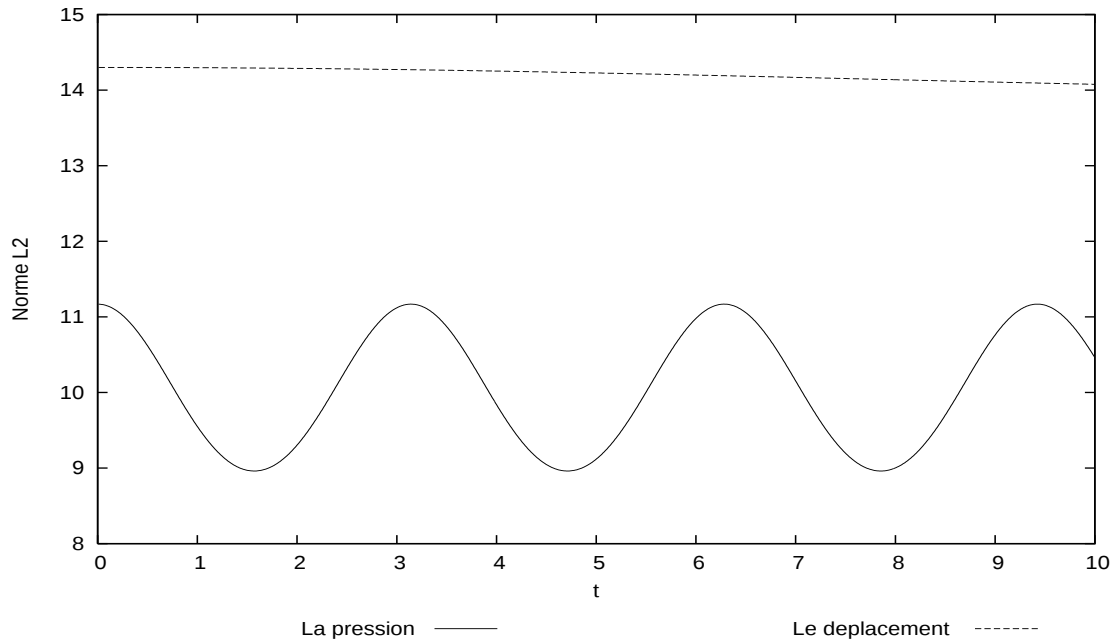
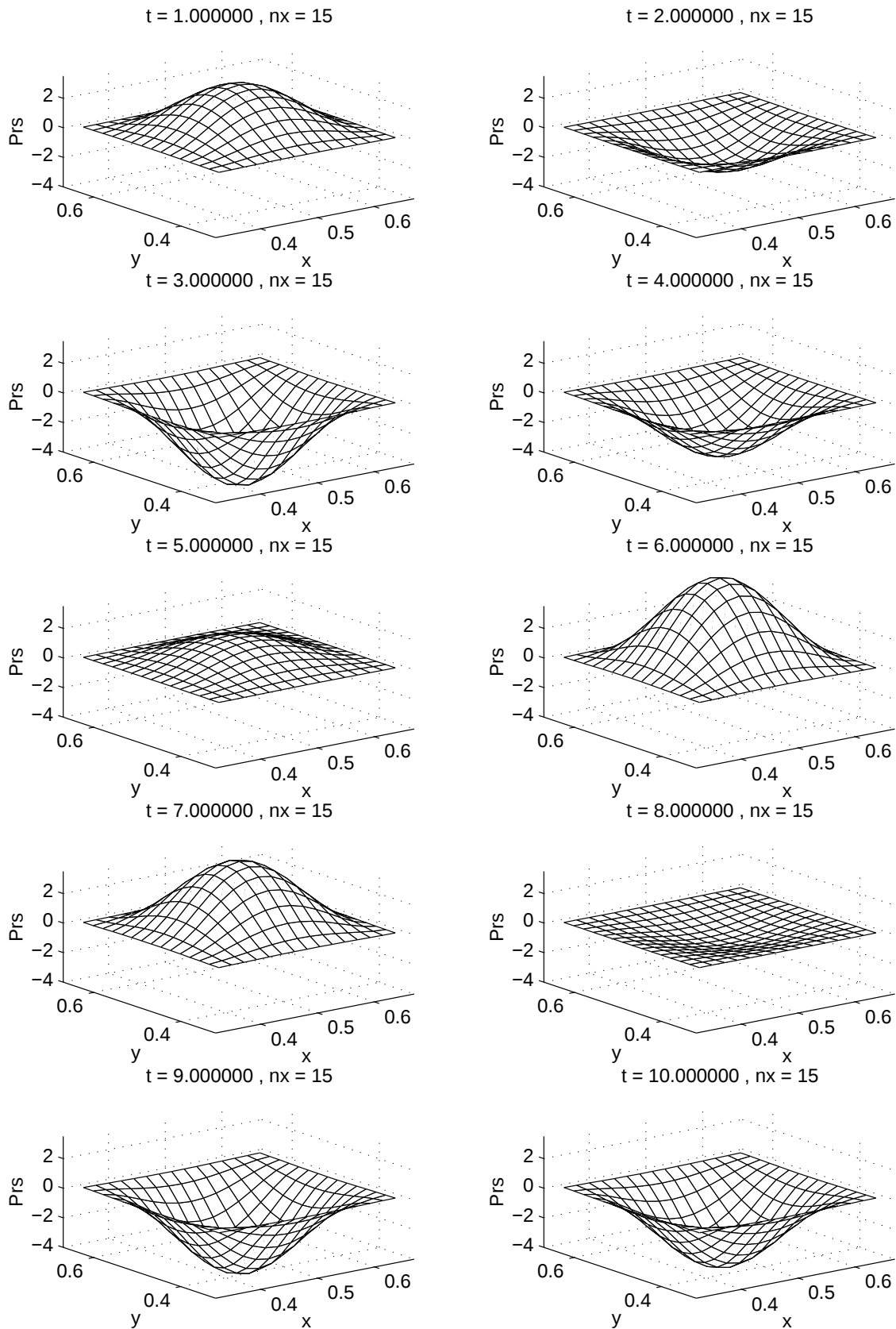
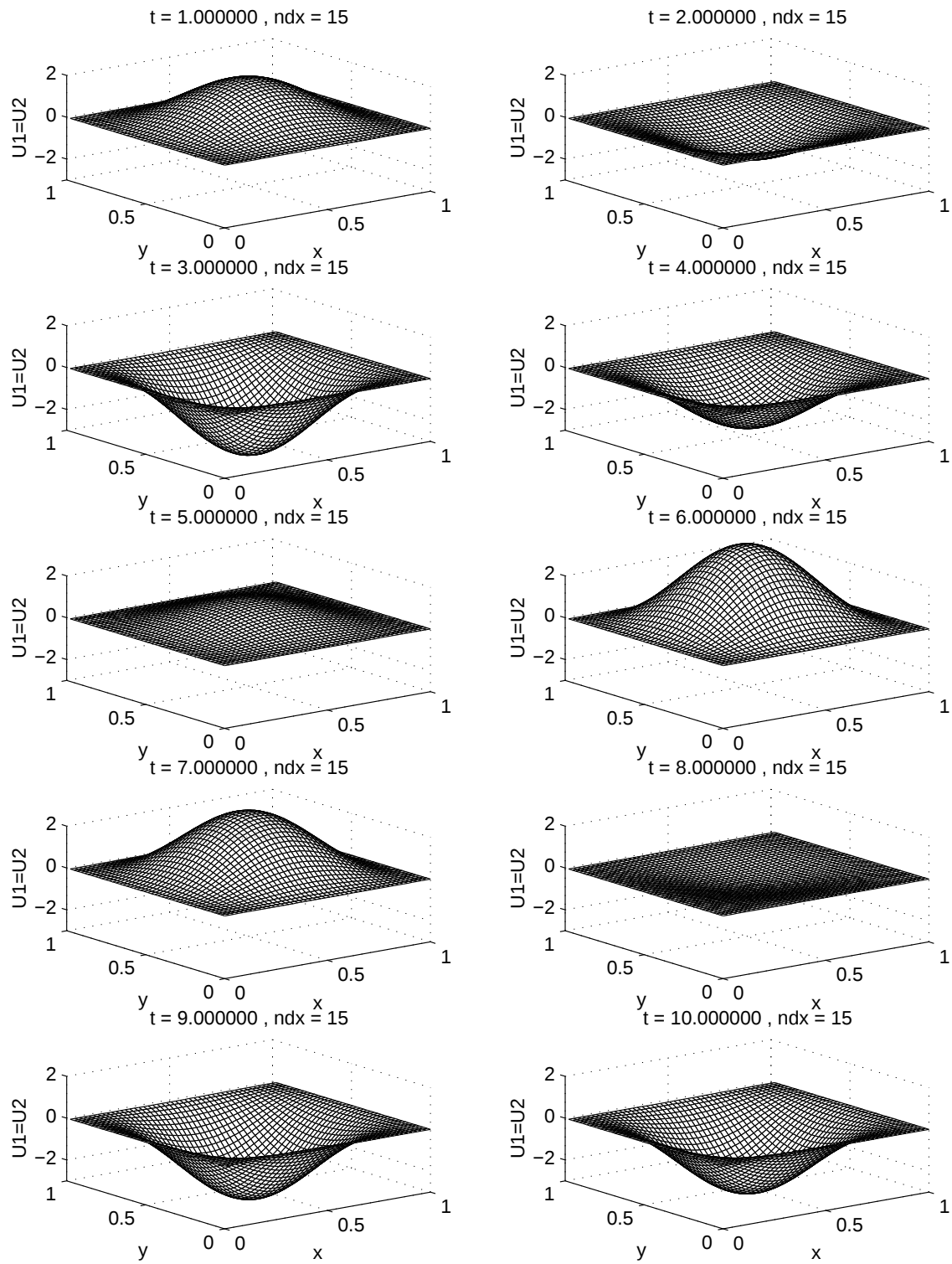


FIG. 4.7 – La norme  $L^2$  de  $p$  et  $\mathbf{u}$ .


 FIG. 4.8 – La pression exacte  $p$  correspondant à l'exemple analytique (4.75).

FIG. 4.9 – Le déplacement exacte  $u$  correspondant à l'exemple analytique (4.75).

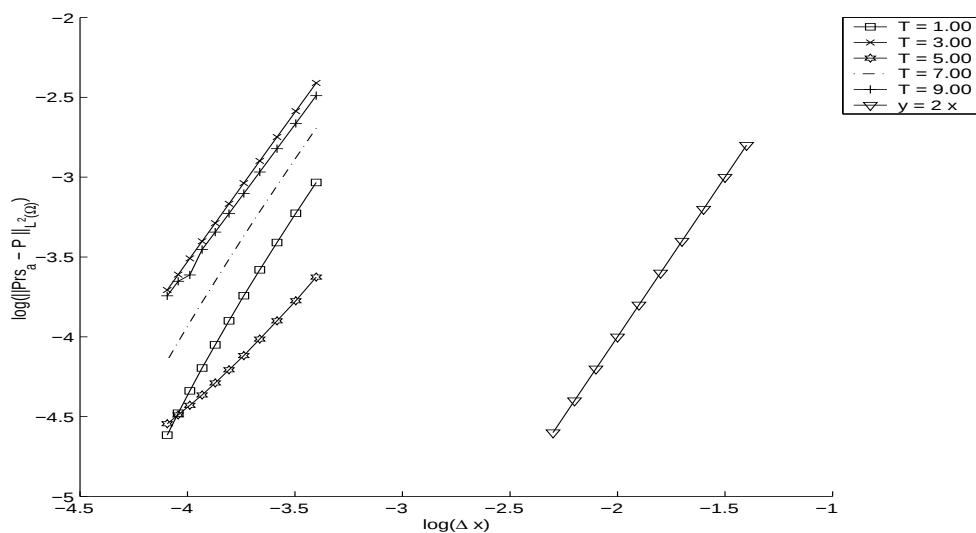


FIG. 4.10 – La norme  $L^2(\omega)$  de l'erreur  $p - p_h$ , où  $p_h$  donnée par le schéma itératif à pas fractionnaire ( $q = 1$ ) par rapport à  $\Delta x$  où  $c_o = 1$  et  $\Delta t = 0.01$ .

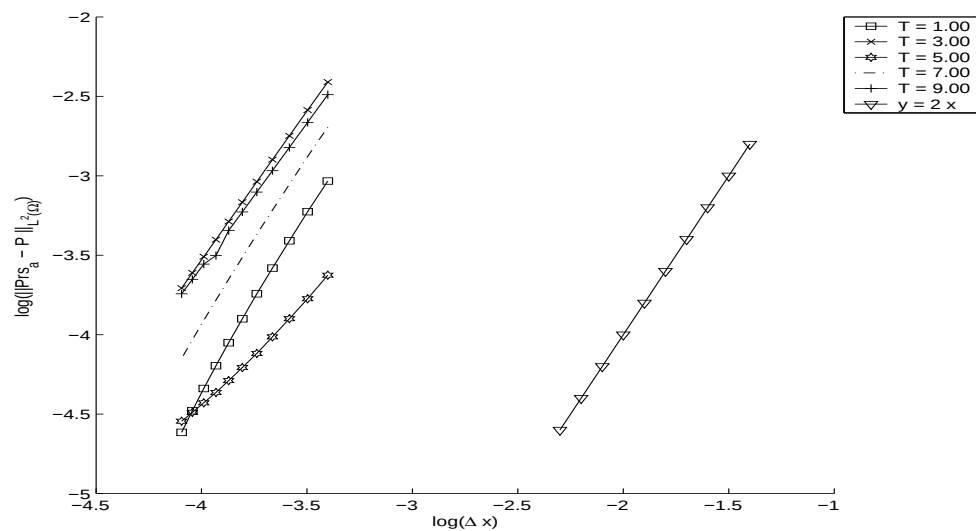


FIG. 4.11 – La norme  $L^2(\omega)$  de l'erreur  $p - p_h$ , où  $p_h$  donnée par le schéma du gradient conjugué préconditionné ( $q = 1$ ) par rapport à  $\Delta x$  où  $c_o = 1$  et  $\Delta t = 0.01$ .

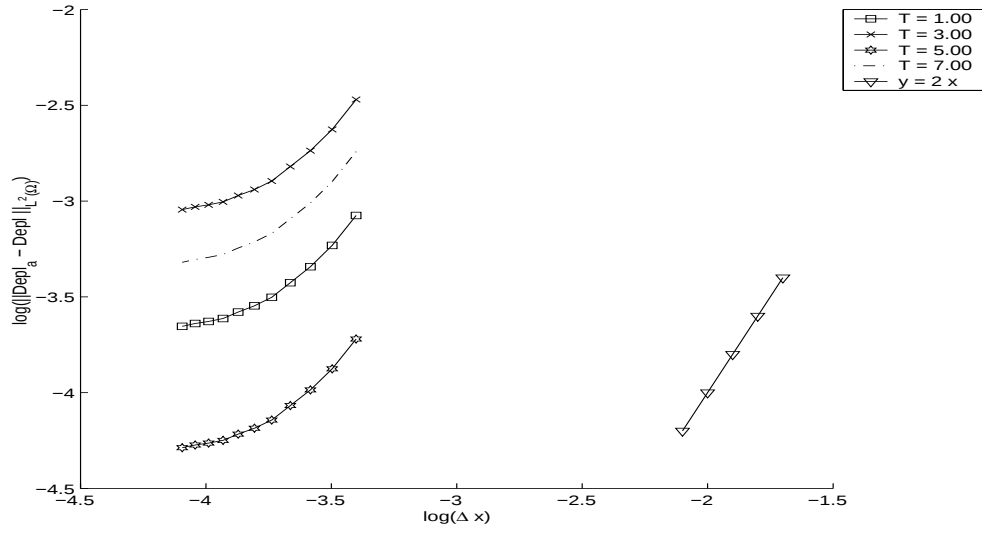


FIG. 4.12 – La norme  $L^2(\Omega)$  de l'erreur  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ , où  $\mathbf{u}_h$  donnée par le schéma itératif à pas fractionnaire ( $q = 1$ ) par rapport à  $\Delta x$  où  $c_o = 1$  et  $\Delta t = 0.01$ .

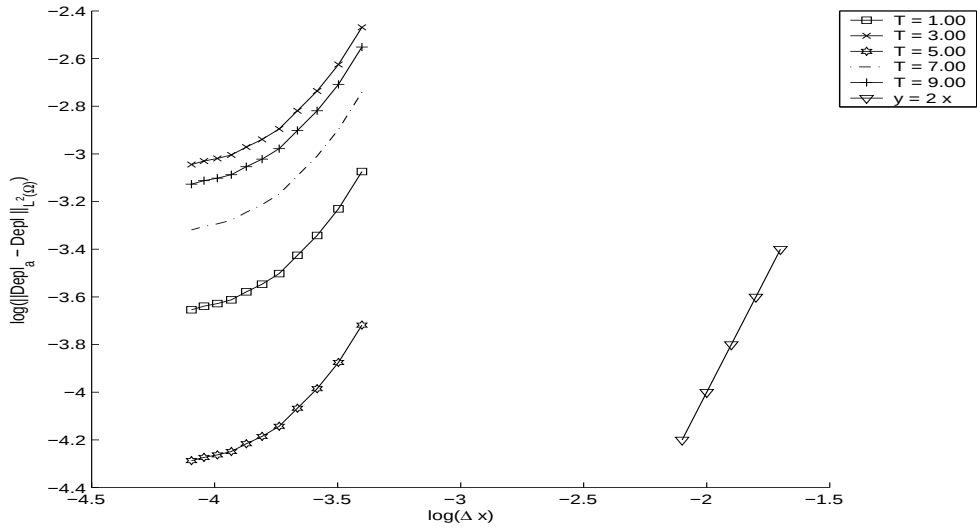


FIG. 4.13 – La norme  $L^2(\Omega)$  de l'erreur  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ , où  $\mathbf{u}_h$  donnée par le schéma du gradient conjugué preconditionné ( $q = 1$ ) par rapport à  $\Delta x$  où  $c_o = 1$  et  $\Delta t = 0.01$ .

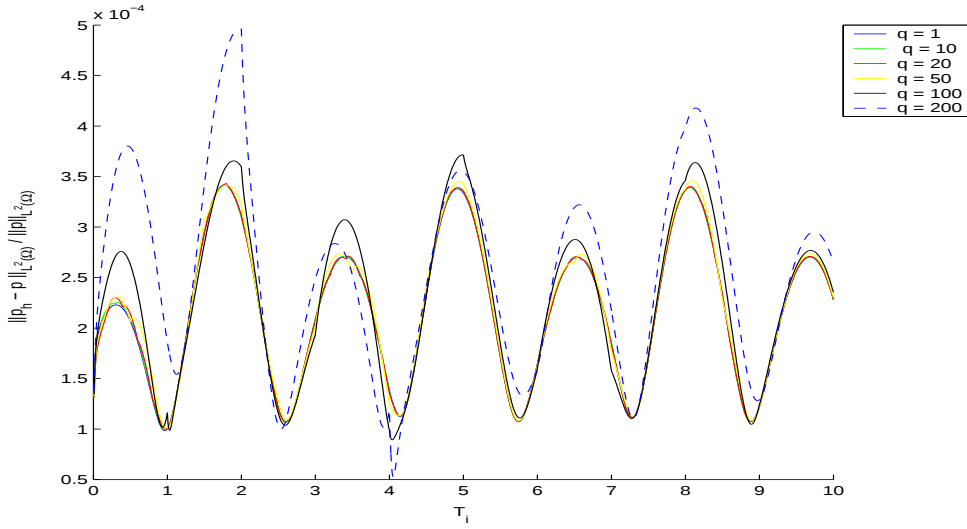


FIG. 4.14 – L'erreur relative de  $p - p_h$  en norme  $L^2(\omega)$ , où  $p_h$  donnée par le schéma itératif à pas fractionnaire multi-échelle pour différent  $q$  par rapport aux instants  $T^i$  où  $c_o = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$  et  $\Delta x = \frac{1}{40}$ .

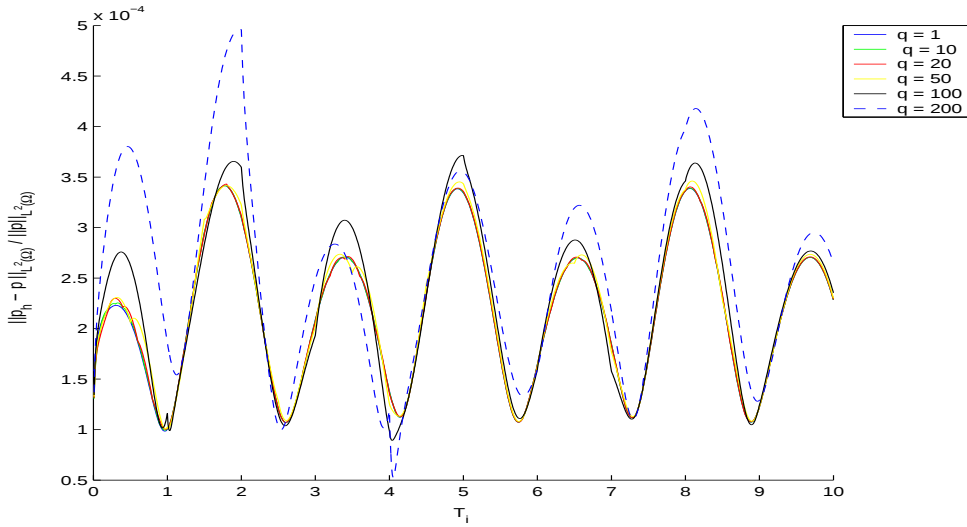


FIG. 4.15 – L'erreur relative de  $p - p_h$  en norme  $L^2(\omega)$ , où  $p_h$  donnée par le schéma du gradient conjugué preconditionné multi-échelle pour différents  $q$  par rapport aux instants  $T^i$  où  $c_o = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$  et  $\Delta x = \frac{1}{40}$ .

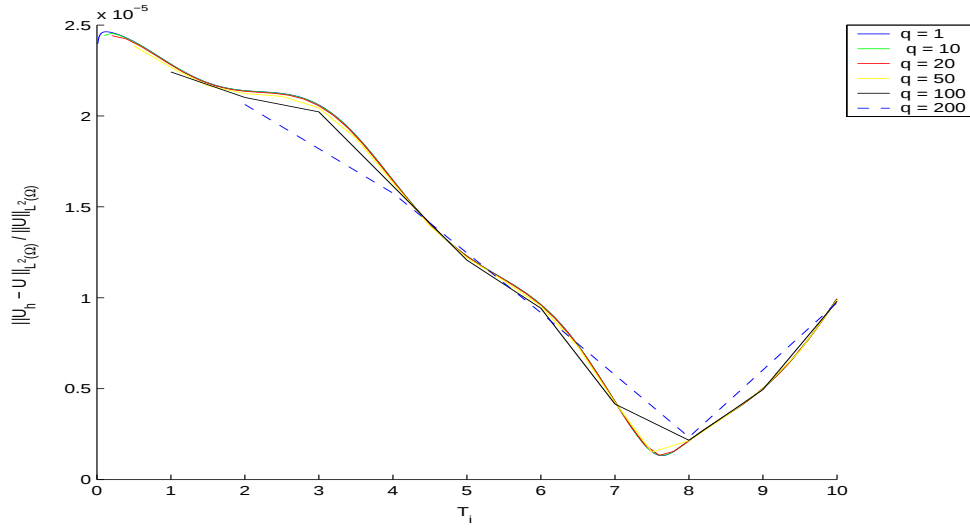


FIG. 4.16 – L'erreur relative de  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  en norme  $L^2(\Omega)$ , où  $\mathbf{u}_h$  donnée par le schéma itératif à pas fractionnaire multi-échelle pour différents  $q$  par rapport aux instants  $T^i$  où  $c_o = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$  et  $\Delta x = \frac{1}{40}$ .

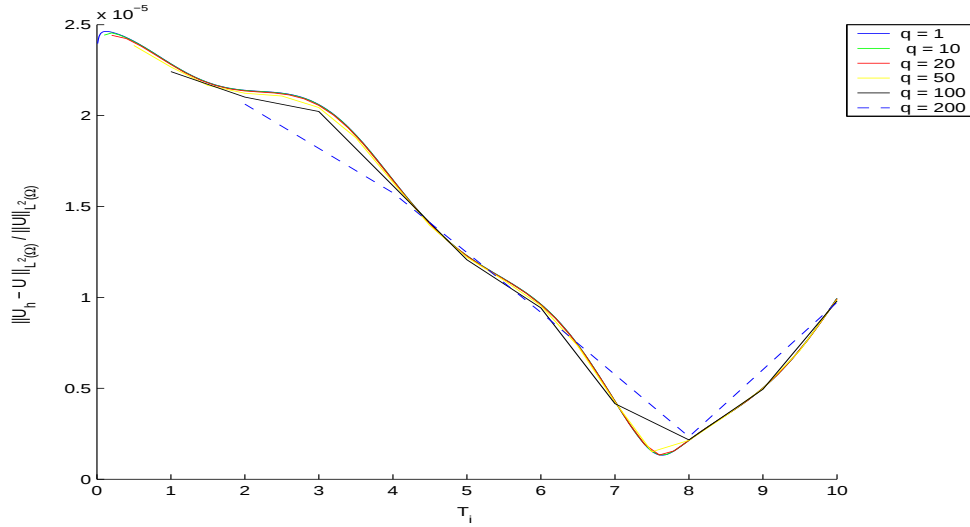


FIG. 4.17 – L'erreur relative de  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  en norme  $L^2(\Omega)$ , où  $\mathbf{u}_h$  donnée par le schéma du gradient conjugué préconditionné pour différents  $q$  par rapport aux instants  $T^i$  où  $c_o = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$  et  $\Delta x = \frac{1}{40}$ .

|           | Relaxé par $c_r = 0.2$ , $\Delta t = 0.01$ |          | $c_r = 0$ et $\Delta t = 0.1$ |          |
|-----------|--------------------------------------------|----------|-------------------------------|----------|
| $T^i$     | Nombre d'itérations                        | CPU      | Nombre d'itérations           | CPU      |
| $T^1 = 1$ | 13                                         | 4.176E+0 | 23                            | 6.740E+0 |
| $T^3 = 3$ | 12                                         | 3.872E+0 | 25                            | 7.300E+0 |
| $T^5 = 5$ | 13                                         | 4.196E+0 | 24                            | 7.160E+0 |
| $T^7 = 7$ | 13                                         | 4.185E+0 | 24                            | 6.920E+0 |
| $T^9 = 9$ | 13                                         | 4.208E+0 | 26                            | 7.650E+0 |

TAB. 4.1 – Le nombre d'itérations et le temps CPU du schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  où  $c_o = 0.5$  d'une part relaxé par  $c_r = 0.2$ , et d'autre part en prenant un pas de temps  $\Delta t$  plus grand.

|           | Schéma à pas fractionnaire |          | Gradient conjugué préconditionné |          |
|-----------|----------------------------|----------|----------------------------------|----------|
| $T^i$     | Nombre d'itérations        | CPU      | Nombre d'itérations              | CPU      |
| $T^1 = 1$ | 117                        | 3.523E+1 | 7                                | 2.079E+0 |
| $T^3 = 3$ | ×                          | ×        | 10                               | 4.190E+0 |
| $T^5 = 5$ | ×                          | ×        | 10                               | 2.929E+0 |
| $T^7 = 7$ | ×                          | ×        | 9                                | 6.649E+0 |
| $T^9 = 9$ | ×                          | ×        | 9                                | 2.680E+0 |

TAB. 4.2 – Le nombre d'itérations et le temps CPU pour le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et le schéma du gradient conjugué préconditionné dans le cas où la condition inf-sup n'est pas satisfaite ( $c_o = 0.5$  et  $\Delta t = 0.01$ ), durant les instants  $T^1, T^3, T^5, T^7$ , et  $T^9$ , (× désigne la non convergence).

|           | Schéma à pas fractionnaire $q = 1$ |          | Gradient Conjugé Préconditionné $q = 1$ |          |
|-----------|------------------------------------|----------|-----------------------------------------|----------|
| $T^i$     | Nombre d'itérations                | CPU      | Nombre d'itérations                     | CPU      |
| $T^1 = 1$ | 11                                 | 3.538E+0 | 5                                       | 1.993E+0 |
| $T^3 = 3$ | 12                                 | 3.871E+0 | 9                                       | 3.318E+0 |
| $T^5 = 5$ | 12                                 | 3.895E+0 | 9                                       | 3.317E+0 |
| $T^7 = 7$ | 13                                 | 4.228E+0 | 7                                       | 2.660E+0 |
| $T^9 = 9$ | 13                                 | 4.212E+0 | 8                                       | 2.971E+0 |

TAB. 4.3 – Comparaison du nombre d'itérations et du temps CPU entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et schéma du gradient conjugué préconditionné  $q = 1$ , dans le cas où la condition inf-sup est vérifiée ( $c_o = 1$ ) durant les instants  $T^1, T^3, T^5, T^7$ , et  $T^9$ .

|           | Schéma à pas fractionnaire $q = 10$ |          | Gradient Conjugé Préconditionné $q = 10$ |          |
|-----------|-------------------------------------|----------|------------------------------------------|----------|
| $T^i$     | Nombre d'itérations                 | CPU      | Nombre d'itérations                      | CPU      |
| $T^1 = 1$ | 11                                  | 5.362E+0 | 6                                        | 3.950E+0 |
| $T^3 = 3$ | 12                                  | 5.862E+0 | 9                                        | 5.790E+0 |
| $T^5 = 5$ | 13                                  | 6.356E+0 | 10                                       | 6.399E+0 |
| $T^7 = 7$ | 13                                  | 6.378E+0 | 8                                        | 5.170E+0 |
| $T^9 = 9$ | 13                                  | 6.361E+0 | 9                                        | 5.800E+0 |

TAB. 4.4 – Comparaison du nombre d'itérations et du temps CPU entre le schéma à pas fractionnaire multi-échelle et le schéma du gradient conjugué préconditionné multi-échelle, dans le cas où la condition inf-sup est vérifiée ( $c_o = 1$ ), durant les instants  $T^1, T^3, T^5, T^7$ , et  $T^9$ .

## 4.6.2 Modèle non linéaire

Dans cette section, on valide les schémas (4.56)-(4.57) et (4.73) présentés dans les sections 4.3, 4.4 et 4.5 pour le modèle non linéaire 1D d'espace et ensuite en 2D. L'exemple 1D a été validé en collaboration avec l'IFP (Institut Français du Pétrole) et il a fait l'objet de l'article [DEH<sup>+</sup>02]. Ce cas test qui a permis de valider le cas 2D ; autrement dit, on a utilisé le 2D périodique pour retrouver les résultats du 1D.

### Cas test 1D

L'écoulement s'effectue dans un cylindre isotropique qui représente le milieu poreux de rayon  $R = 0.25 \text{ m}$  et de longueur  $L = 1 \text{ m}$  (cf. Figure 4.18) et avec des

|                        |                     |
|------------------------|---------------------|
| $\mu_o$                | $5.10^{-3} Pa.s$    |
| $\mu_w$                | $1.10^{-3} Pa.s$    |
| $k$                    | $2.10^{-14}$        |
| $\phi_0$               | 0.30                |
| $\rho_o^0$             | $950 kg.m^{-3}$     |
| $\rho_w^0$             | $1000 kg.m^{-3}$    |
| $c_w$                  | $4.10^{-8} Pa^{-1}$ |
| $c_o$                  | $1.10^{-8} Pa^{-1}$ |
| $\lambda$              | $5.10^8 Pa$         |
| $\mu$                  | $2.10^8 Pa$         |
| Pression atmosphérique | $10^5 Pa$           |

TAB. 4.5 – Paramètres de simulations.

mouvements latéraux nuls.

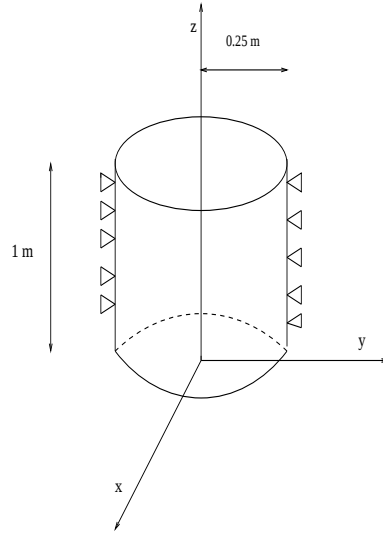


FIG. 4.18 – Cylindre avec des mouvements latéraux nuls.

On injecte l'eau par le bas du cylindre et on extrait l'huile par le haut. On fixe la pression  $p$  à la sortie alors qu'on impose un flux d'eau  $Q_w$  et un flux d'huile  $Q_o = 0$  entrant tels que  $Q_o = 0$ . Les paramètres de la simulation sont donnés par le tableau 4.5. L'intervalle de simulation =  $[0, 3600]$ .

En absence des effets capillaires, on est en présence d'un problème de type Buckley-

Leverett ; la saturation alors satisfait une équation de loi de conservation de premier ordre dont la solution est une fonction discontinue. La Figure 4.19 présente le voyage d'un choc à travers le cylindre représentés aux instants 180 s, 360 s, 600 s, 1200 s, 1560 s, 1800 s, et 3660 s. Comme l'huile est 5 fois plus visqueuse que l'eau, pour faire bouger l'huile au début, il nous faut un grand champ de pression et ensuite ce champ diminue au cours du temps (cf Figure 4.20).

Les Figures 4.21 et 4.22 valident l'idée de la méthode du gradient conjugué préconditionné dans le cas non linéaire malgré l'absence des critères usuels de convergence de cet algorithme. On constate que l'erreur en norme  $L^\infty$  sur les saturations (cf. Figure 4.21) et sur les pressions (cf. Figure 4.22) entre la méthode du gradient conjugué préconditionné et le schéma itératif à pas fractionnaire  $q = 1$ , est acceptable et qu'elle est telle que les plus grandes amplitudes pour les saturations se localisent aux discontinuités. Pour les pressions, l'erreur en  $t = 60$  s est grande là où on a un champ de pression grand et elle diminue avec la diminution de ce gradient. Ce test assure la fiabilité de la méthode du gradient conjugué préconditionné ( $q = 1$ ) proposée dans le cas non linéaire et la solution qu'il donne va être considérée comme solution de référence quand la condition inf-sup est absente et lorsque le schéma itératif à pas fractionnaire n'est pas capable d'en donner une.

Les Figures 4.23 et 4.24 représentent les courbes d'erreur en norme  $L^\infty$  entre les saturations en huile données par le schéma à pas fractionnaire ( $q = 1$ ) et respectivement données par le schéma à pas fractionnaire multi-échelle et par la méthode du gradient conjugué multi-échelle avec ( $q = 60$ ) aux différents instants  $t$ . On constate que l'erreur de plus grande amplitude se localise aux discontinuités de contact.

Les Figures 4.25 et 4.26 représentent les courbes d'erreur en norme  $L^\infty$  entre la pression donnée par le schéma à pas fractionnaire ( $q = 1$ ) et respectivement données par le schéma à pas fractionnaire multi-échelle et par la méthode du gradient conjugué multi-échelle avec ( $q = 60$ ), aux différents instants  $t$ . On remarque qu'en  $t = 60$  s l'amplitude de l'erreur est maximale à cause du grand champ de pression du début de la sortie d'huile et qu'ensuite cette amplitude baisse avec le temps.

Les Figures 4.23, 4.24, 4.25 et 4.26 montrent aussi que contrairement au cas linéaire, on a une petite différence entre l'erreur du schéma à pas fractionnaire multi-échelle et la méthode du gradient conjugué préconditionné multi-échelle ( $q = 60$ ) où le premier algorithme se montre légèrement plus précis que le second.

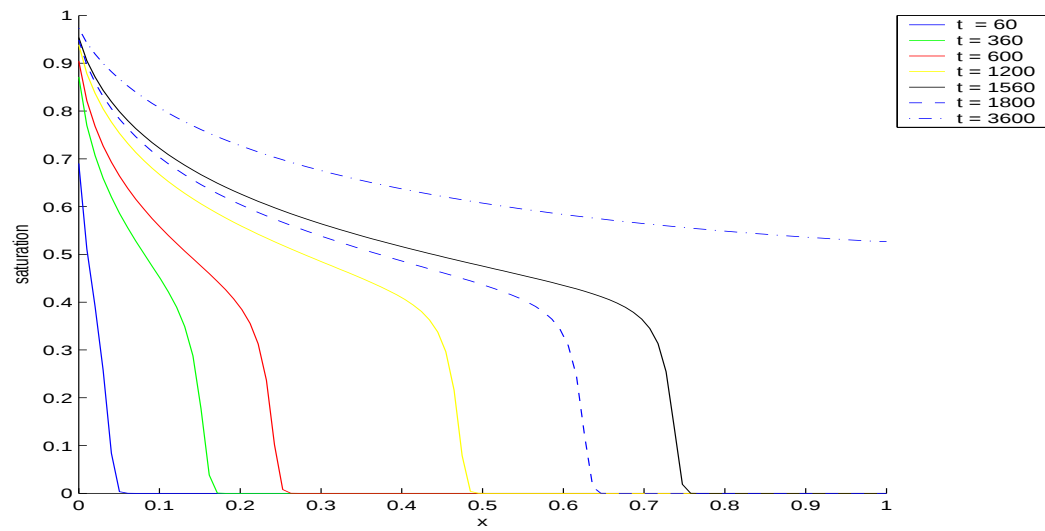


FIG. 4.19 – Saturations en eau données par le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  aux différents instants  $t$ .

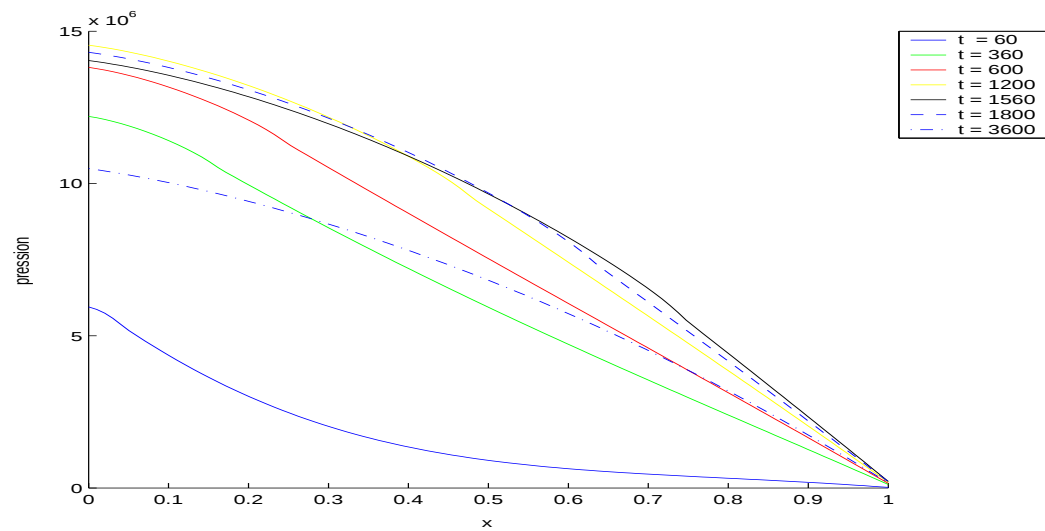


FIG. 4.20 – Pressions données par le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  aux différents instants  $t$ .

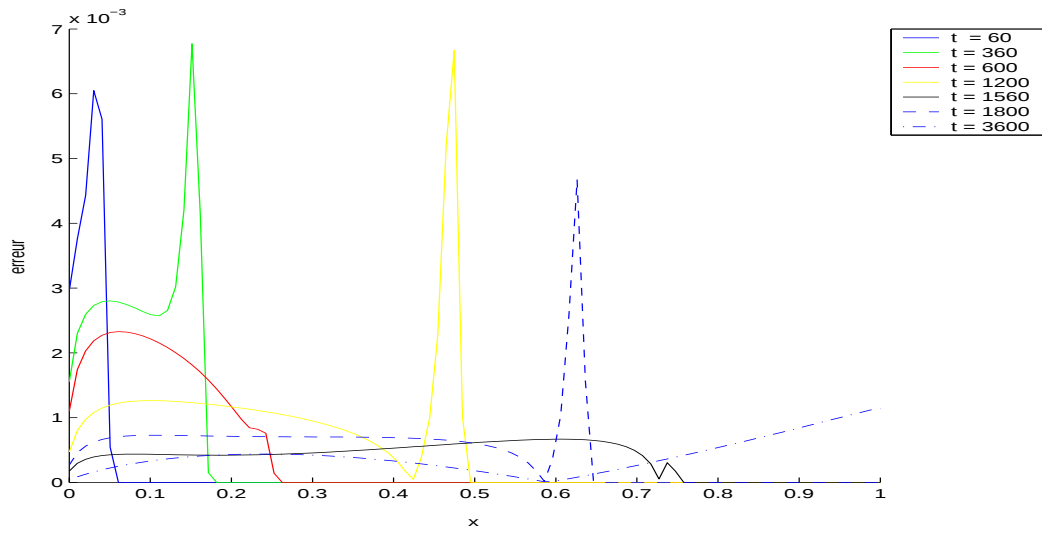


FIG. 4.21 – Erreur en norme  $L^\infty$  sur les saturations en eau entre le schéma à pas fractionnaire et la méthode du gradient conjugué quand  $q = 1$ .

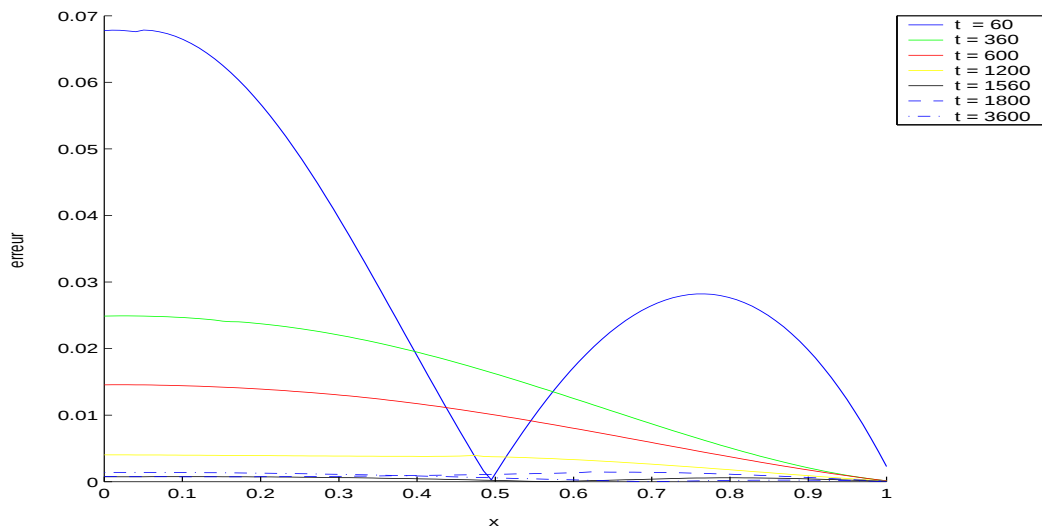


FIG. 4.22 – Erreur en norme  $L^\infty$  sur les pressions entre le schéma à pas fractionnaire et la méthode du gradient conjugué quand  $q = 1$ .

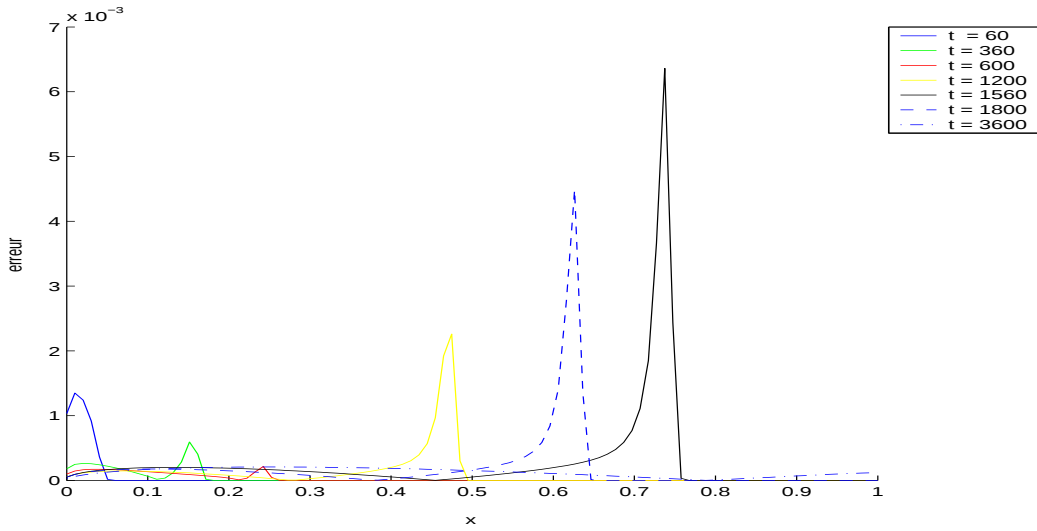


FIG. 4.23 – Erreur en norme  $L^\infty$  sur les saturations en huile entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et multi-échelle  $q = 60$ .

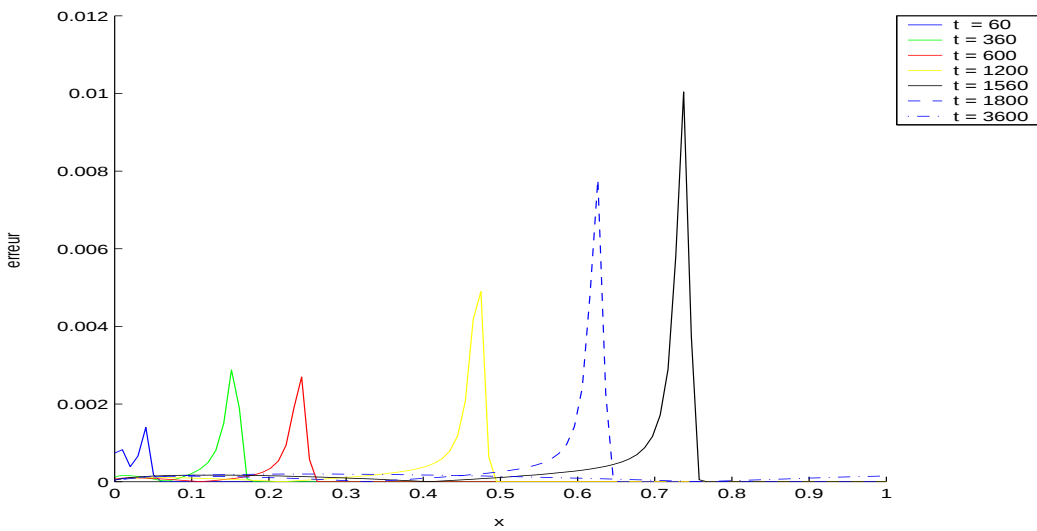


FIG. 4.24 – Erreur en norme  $L^\infty$  sur les saturations en huile entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et la méthode du gradient conjugué avec  $q = 60$ .

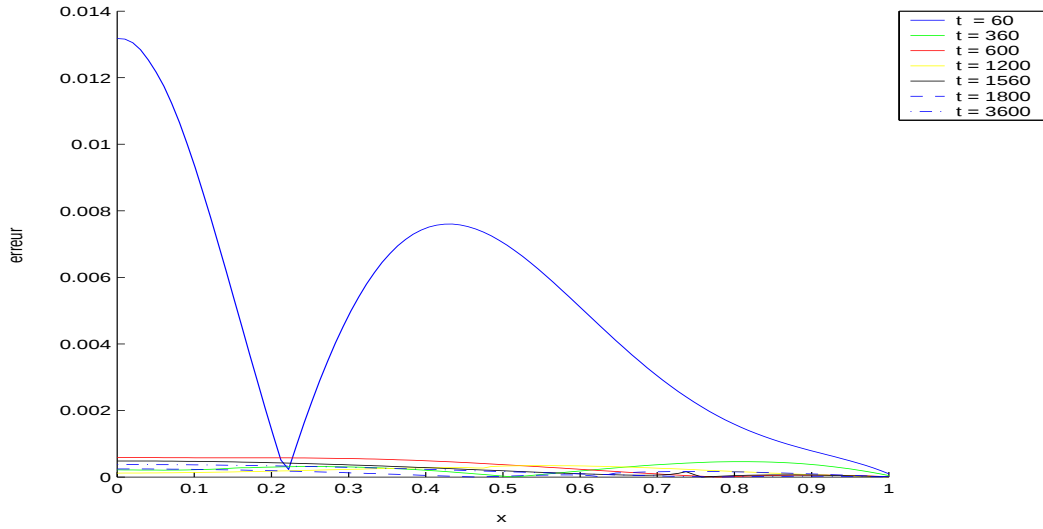


FIG. 4.25 – Erreur en norme  $L^\infty$  sur les pressions entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et multi-échelle  $q = 60$ .

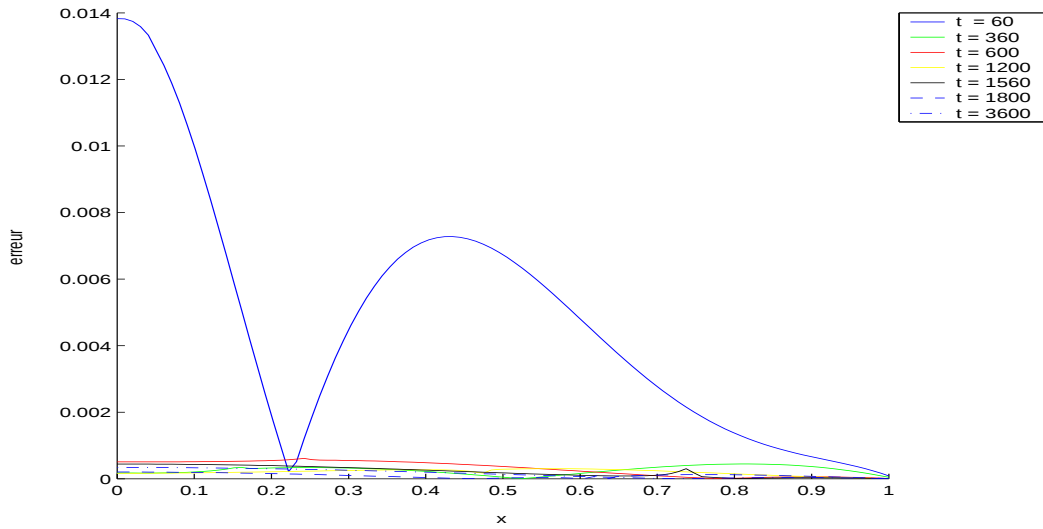


FIG. 4.26 – Erreur en norme  $L^\infty$  sur les pressions entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et la méthode du gradient conjugué avec  $q = 60$ .

### Cas test 2D

Dans cette section, on considère un écoulement de deux fluides eau-huile dans le milieu poreux  $\Omega = [0, 1]^2$ . On procède comme dans le cas 1D par injection d'eau

pour faire bouger l'huile. On fixe la pression  $p$  à la sortie alors qu'on impose des flux entrants : un flux d'eau  $Q_w$  fixé et un flux d'huile  $Q_o = 0$ , comme l'illustre la Figure 4.27. Les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux utilisés dans le cas 1D sauf pour les viscosités des fluides  $\eta_o$  et  $\eta_w$  ainsi que les compressibilités  $c_o$  et  $c_w$  qui vont être précisées lors des résultats. On note par  $R$  le rapport des viscosités tel que  $R = \frac{\eta_o}{\eta_w}$ . On fait varier ce rapport pour voir son influence sur l'écoulement. La pression au temps initial  $t = 0$  est égale à la pression atmosphérique  $10^5 Pa$  et la pression de sortie est fixée à  $0 Pa$ .

Les Figures 4.29 et 4.28 montrent respectivement la saturation en huile et la pression au cours du temps. Comme l'huile est 100 fois plus visqueuse que l'eau ou encore  $R = 100$ , le réservoir se vide en suivant essentiellement l'axe reliant le point d'injection et le point de sortie (cf. Figure 4.28). Dans le but de déplacer l'huile et parce que  $R = 100$ , il nous faut au début de la simulation un grand champ de pression qui diminuera au cours du temps (cf. Figure 4.29).

Les Figures 4.30 et 4.31 montrent l'influence de la durée de la période sur les saturations données respectivement par le schéma à pas fractionnaire multi-échelle et la méthode du gradient conjugué multi-échelle pour différents  $q$ . Ces figures représentent la variation de l'erreur en norme  $L^2(\Omega)$  de ces solutions par rapport à la solution de référence donnée par le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$ . On constate que plus la durée de période est grande ( $q$  grand) plus l'erreur augmente. Les Figures 4.32 et 4.33 ainsi que les Figures 4.34 et 4.35 représentent la variation de la norme  $L^2$  de l'erreur sur respectivement la pression et les déplacements pour les deux algorithmes : à pas fractionnaire multi-échelle et gradient conjugué préconditionné multi-échelle pour différents  $q$ . On constate que plus la période est grande plus l'erreur est grande.

Pour le coût d'opérations en terme de nombre d'itérations et de temps CPU, le Tableau 4.6 illustre la comparaison entre les deux algorithmes : à pas fractionnaire multi-échelle et gradient conjugué préconditionné multi-échelle avec  $q = 20$ . On constate que le premier est beaucoup plus cher car les compressibilités sont telles que  $c_o = c_w = 4.10^{-9}$  (la condition inf-sup est difficile à satisfaire). Le Tableau 4.7 représente la même comparaison que le tableau précédent mais avec des fluides plus compressibles tels que  $c_o = 1.10^{-8} Pa^{-1}$  et  $c_w = 4.10^{-8} Pa^{-1}$ . On remarque que les deux algorithmes ont une légère différence en terme de nombre d'itérations. Le temps CPU est plus important pour la méthode du gradient conjugué préconditionné multi-échelle que pour le schéma à pas fractionnaire multi-échelle dans ce cas, mais cela n'est pas significatif dans notre exemple car le modèle de géomécanique traité

est un modèle simple et prend moins de temps que la simulation réservoir. Dans notre simulation, la roche est considérée à comportement élastique alors qu'en réalité la mécanique de la roche est beaucoup plus complexe. Le comportement de la roche peut être plastique, élasto-plastique, ... etc. En pratique, la résolution de la géomécanique dure 6 heures alors que la simulation réservoir ne prend que 15 min.

La Figure 4.36 représente la saturation en huile et la pression telles que le rapport des viscosités  $R = 100$  ou encore la phase huile est 100 fois plus visqueuse que la phase eau. On constate la présence d'un doigt pour la saturation et la pression montrant la direction privilégiée de la sortie d'huile en  $t = 100$  s, contrairement à la Figure 4.37 où le rapport des viscosités  $R = 1$  et où on remarque qu'il n'y pas de direction privilégiée et tout se passe d'une manière symétrique par rapport aux points d'injection et d'extraction. Les Figures 4.38 et 4.39 ainsi que les Figures 4.40 et 4.41 représentent le même phénomène mais aux instants  $t = 580$  s et  $t = 3660$  s, respectivement. Notons que ces résultats concordent avec ce que prévoit la physique. La Figure 4.42 montre l'influence du maillage sur la saturation à l'instant  $t = 100$  s où on constate que le schéma de discrétisation diffuse dans le sens de la direction du maillage. Autrement dit, si les mailles sont allongées verticalement, la diffusion suivra ce sens et pareillement pour les mailles allongées horizontalement. Le même phénomène est observé et relevé à l'instant  $t = 580$  s (cf. Figure 4.43). Les Figures 4.44 et 4.45 illustrent l'influence du sens du maillage sur la pression aux instants respectifs  $t = 100$  s et  $t = 580$  s.

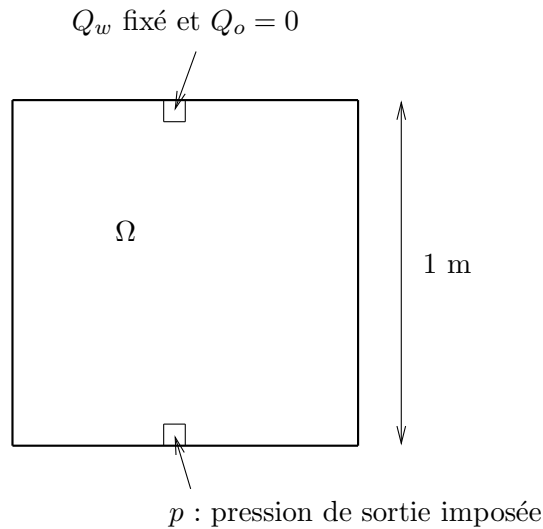


FIG. 4.27 – Domaines de l'écoulement et de la géomécanique.

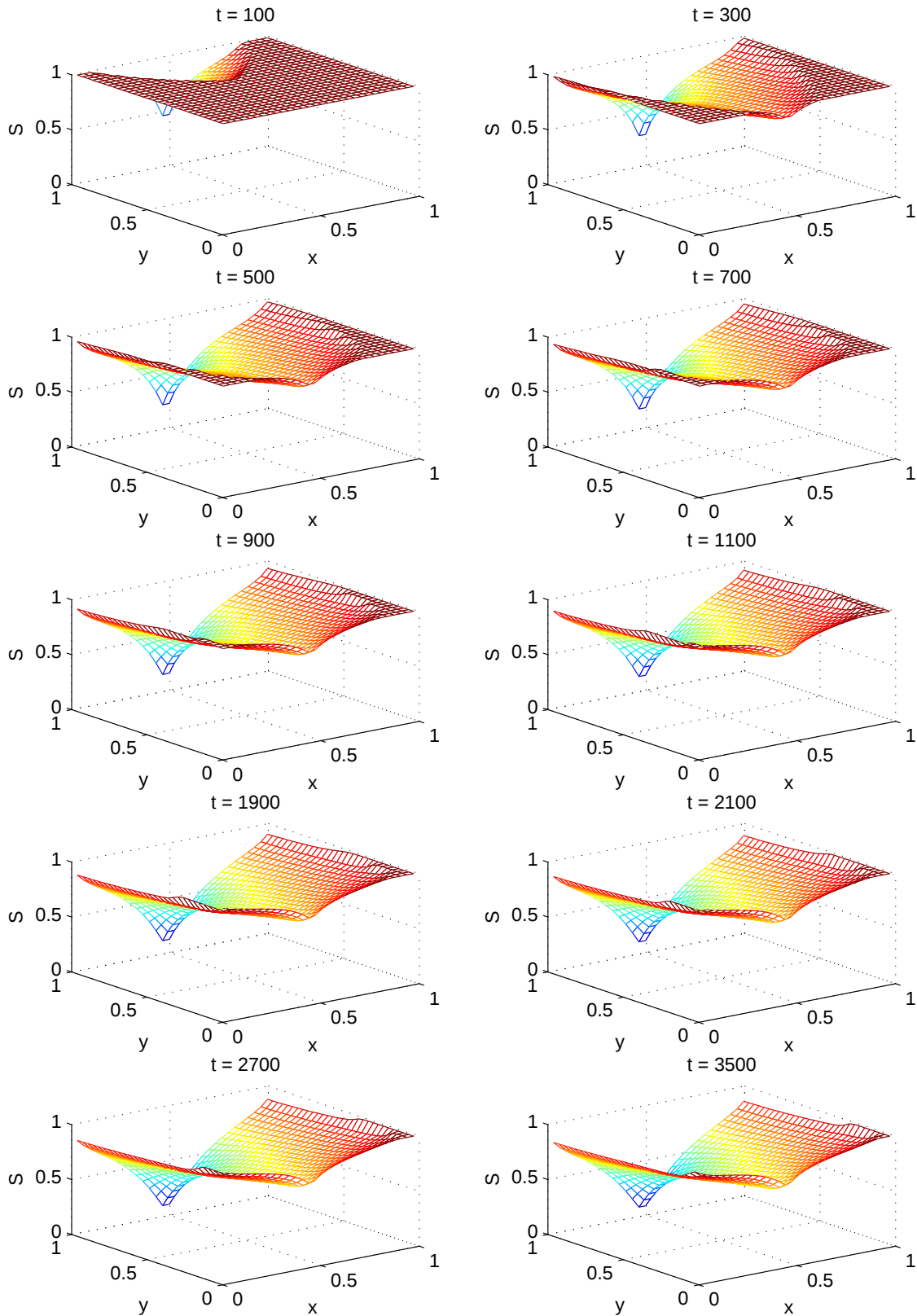


FIG. 4.28 – La saturation en huile durant les instants  $t$  donnée par le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$ .

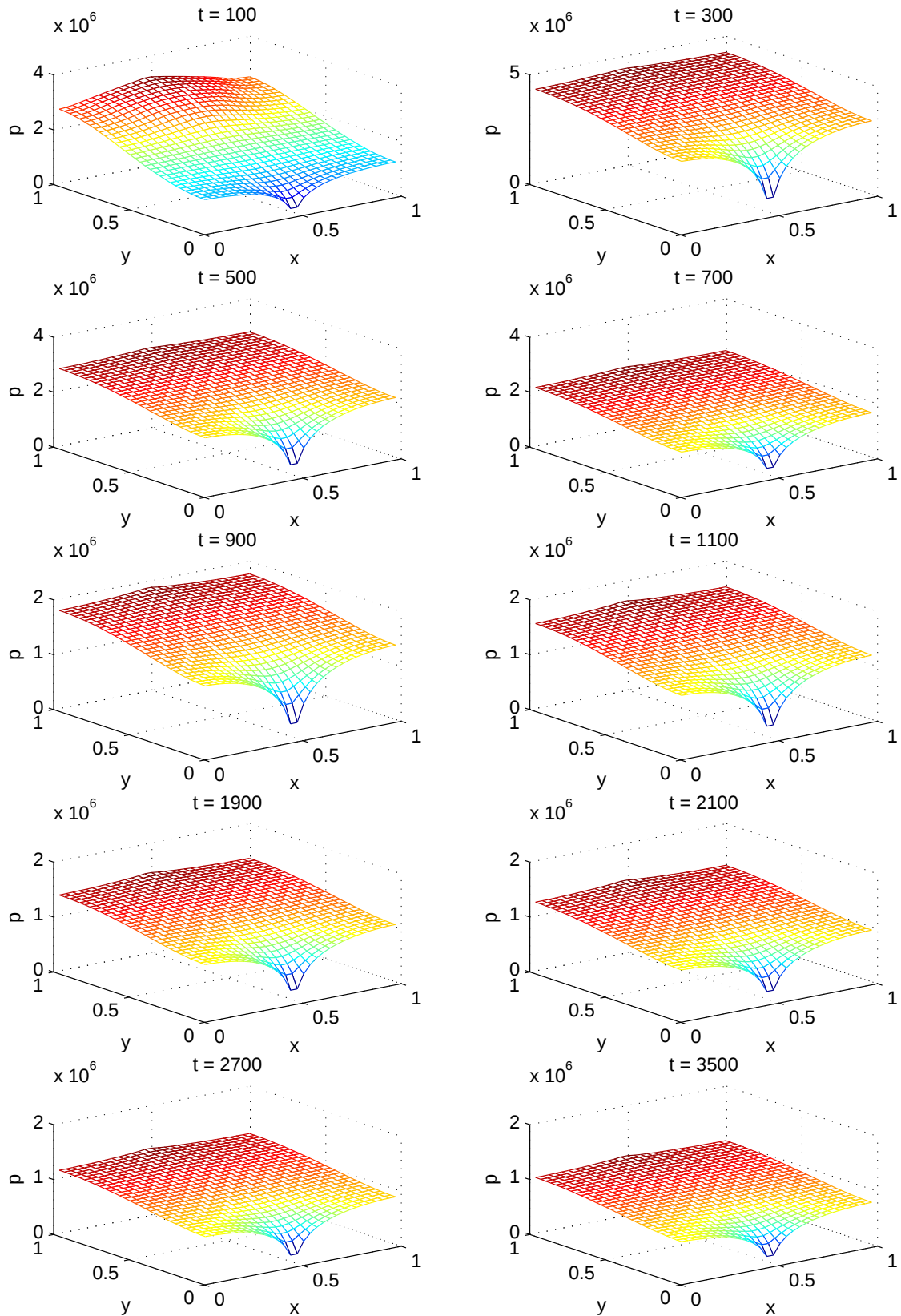


FIG. 4.29 – La pression  $p$  du fluide durant les instants  $t$  donnée par le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$ .

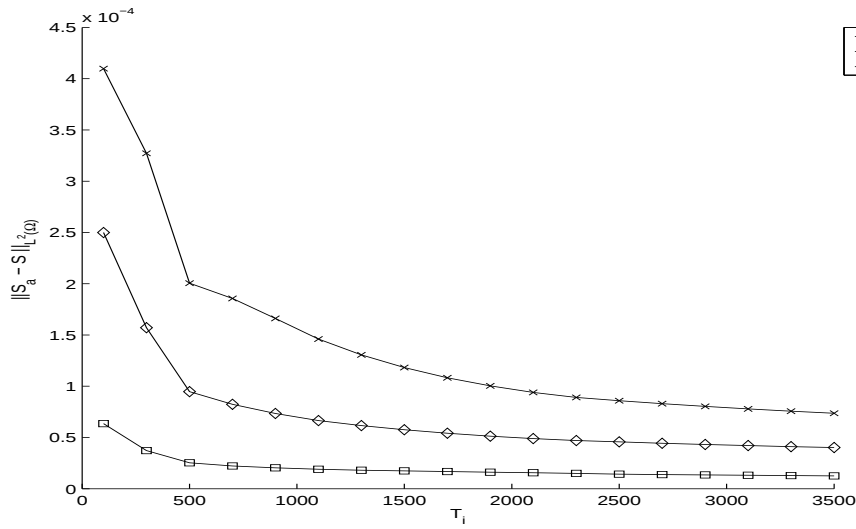


FIG. 4.30 – Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  sur les saturations entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et multi-échelle à différents  $q$ , à différents instants.

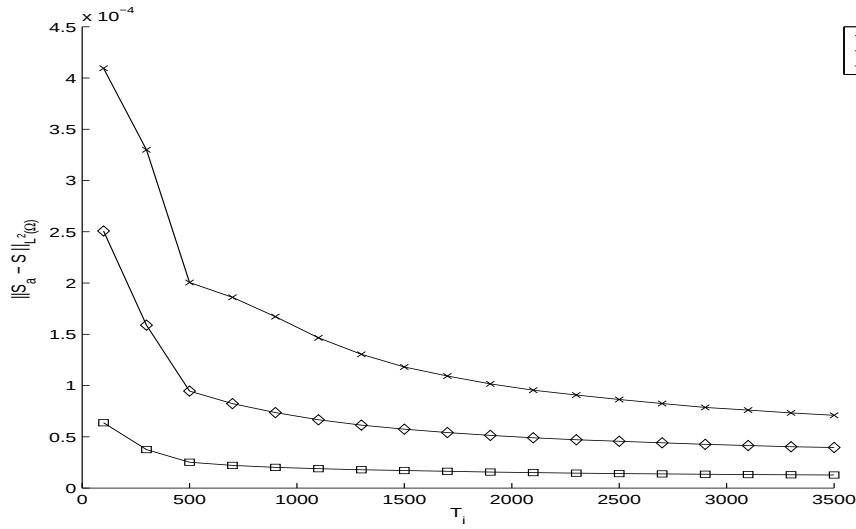


FIG. 4.31 – Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  sur les saturations entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et la méthode du gradient conjugué multi-échelle à différents  $q$ , à différents instants.

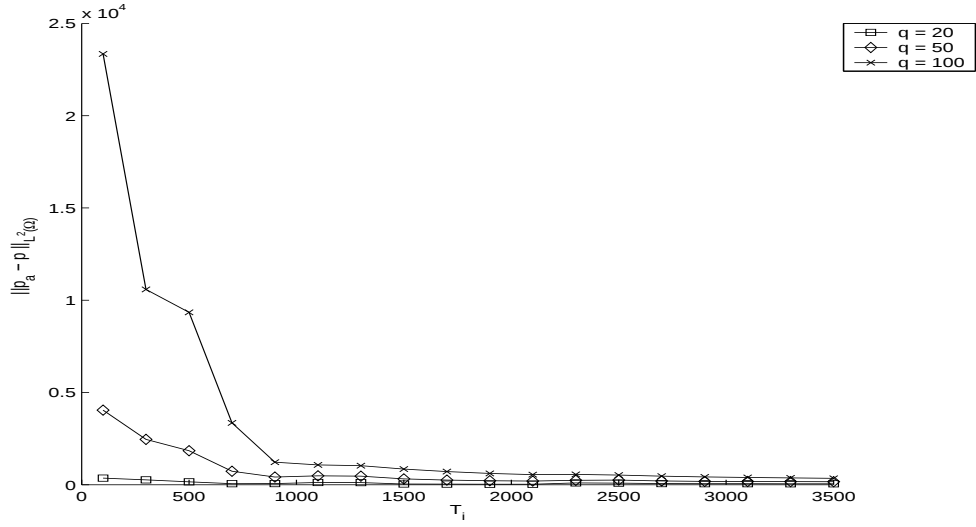


FIG. 4.32 – Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  sur les pressions entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et multi-échelle à différents  $q$ , à différents instants.

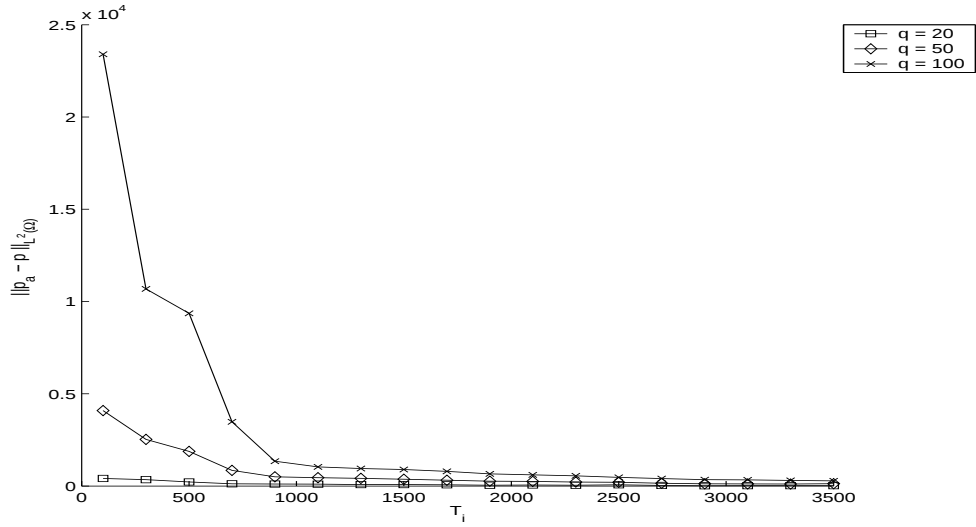


FIG. 4.33 – Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  sur les pressions entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et la méthode du gradient conjugué multi-échelle à différents  $q$ , à différents instants.

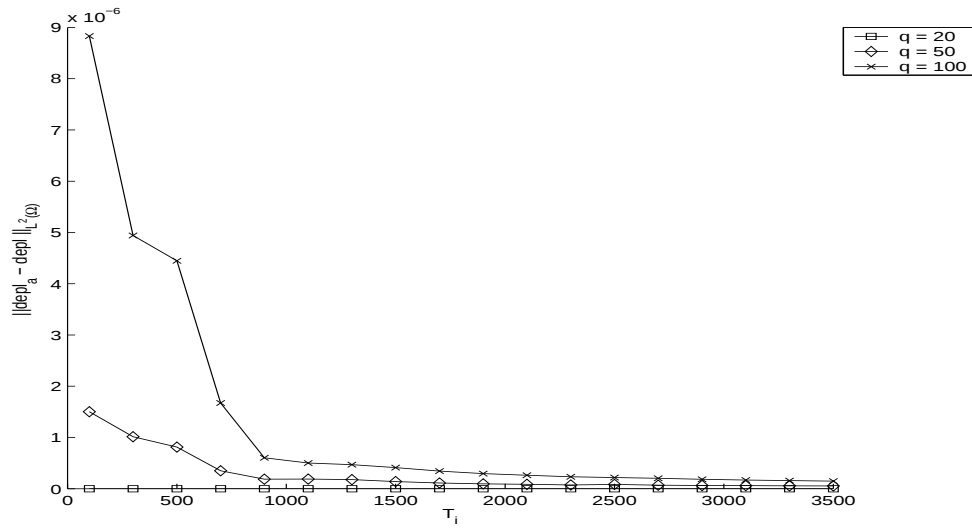


FIG. 4.34 – Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  sur les déplacements entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et multi-échelle à différents  $q$ , à différents instants.

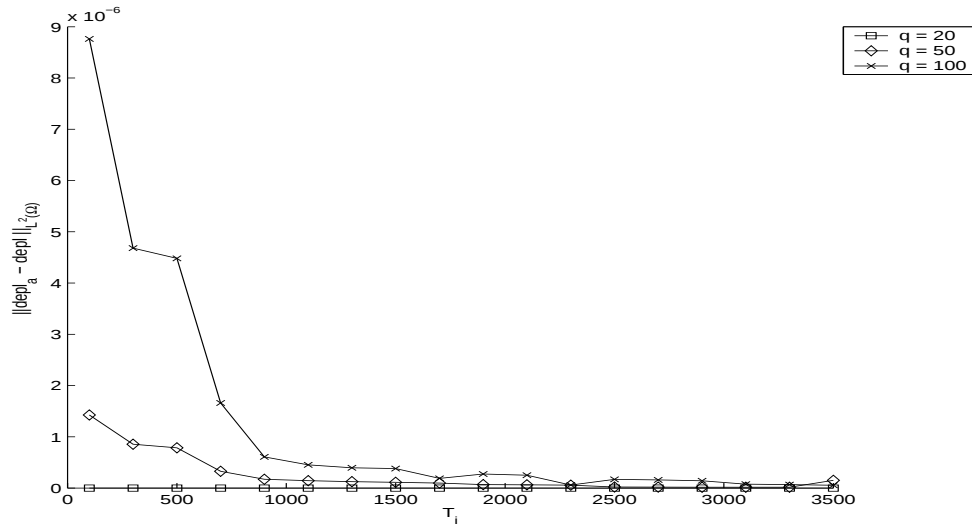


FIG. 4.35 – Erreur en norme  $L^2(\Omega)$  sur les déplacements entre le schéma à pas fractionnaire  $q = 1$  et la méthode du gradient conjugué multi-échelle à différents  $q$ , à différents instants.

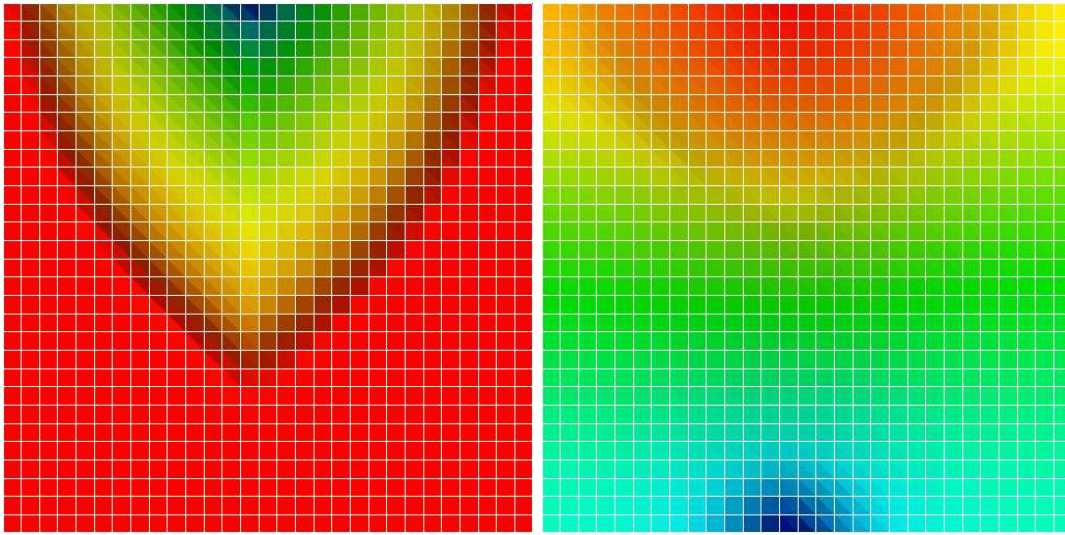


FIG. 4.36 – Saturation et pression à l'instant  $t = 100$  s avec un rapport des viscosités de fluides  $R = 100$  et un maillage régulier.

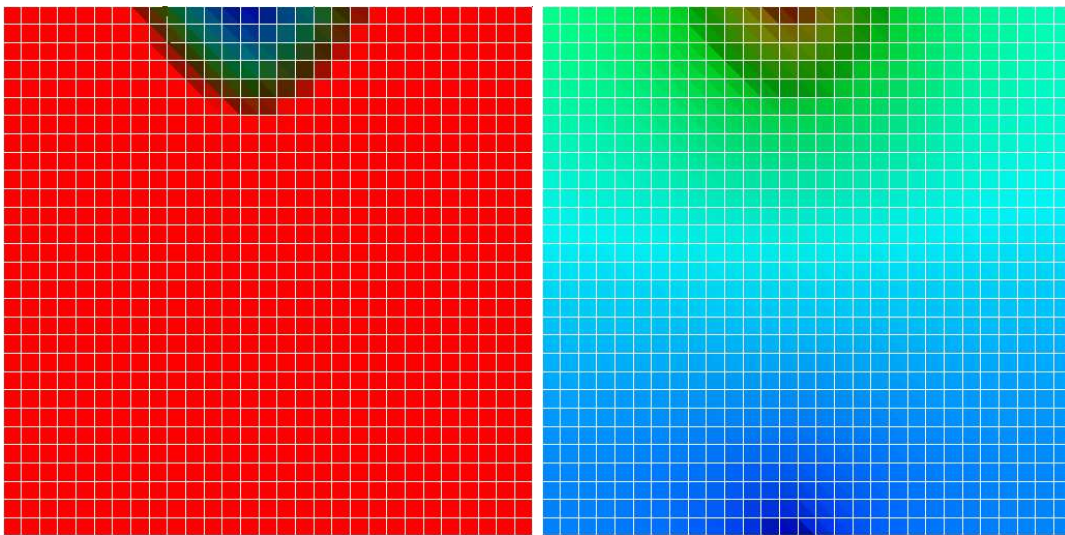


FIG. 4.37 – Saturation et pression à l'instant  $t = 100$  s avec un rapport des viscosités de fluides  $R = 1$  et un maillage régulier.

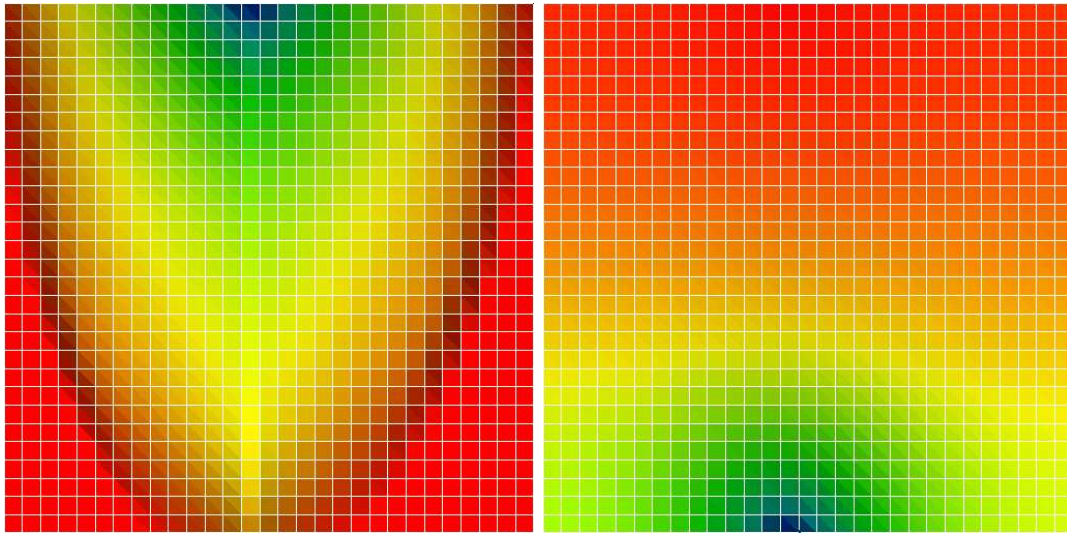


FIG. 4.38 – Saturation et pression à l'instant  $t = 580$  s avec un rapport des viscosité de fluides  $R = 100$  et un maillage régulier.

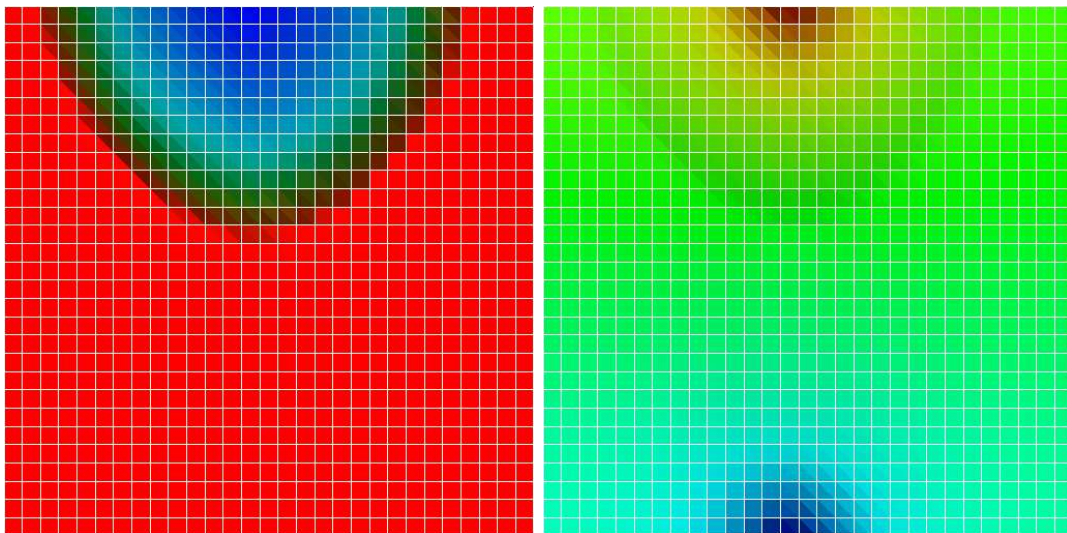


FIG. 4.39 – Saturation et pression à l'instant  $t = 580$  s avec un rapport des viscosités de fluides  $R = 1$  et un maillage régulier.

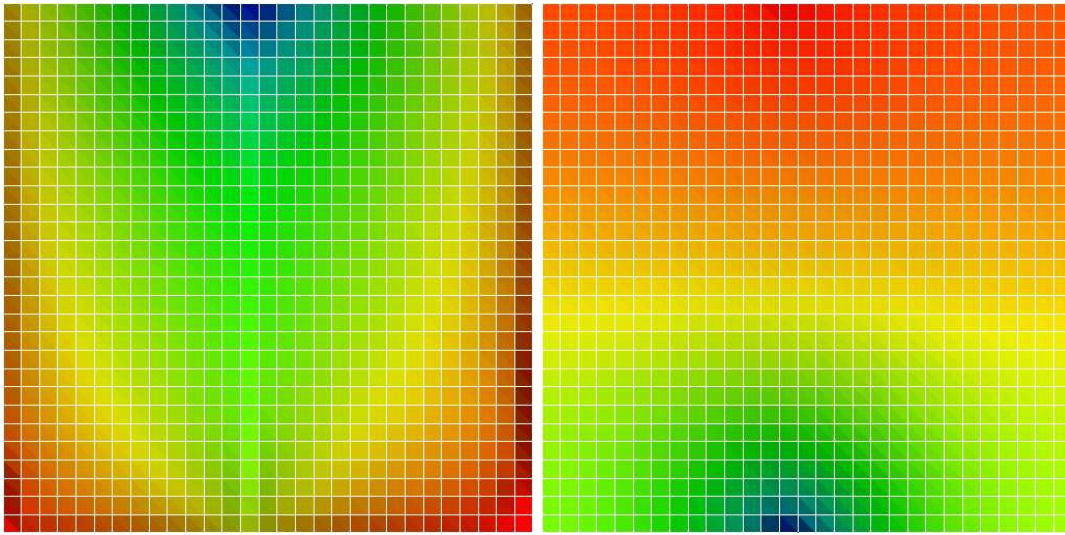


FIG. 4.40 – Saturation et pression à l'instant  $t = 3660$  s avec un rapport des viscosités de fluides  $R = 100$  et un maillage régulier.

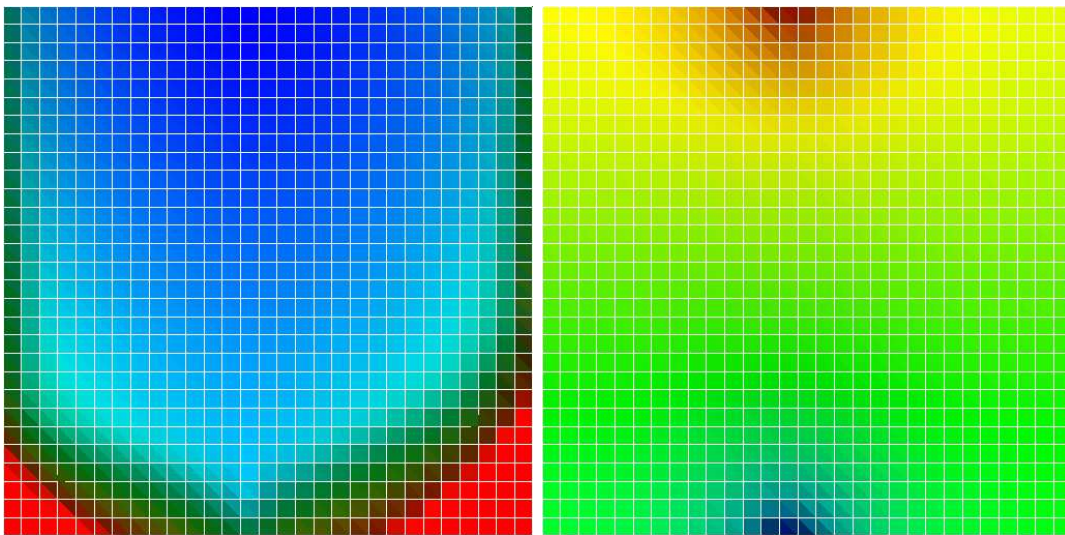


FIG. 4.41 – Saturation et pression à l'instant  $t = 3660$  s avec un rapport des viscosités de fluides  $R = 1$  et un maillage régulier.

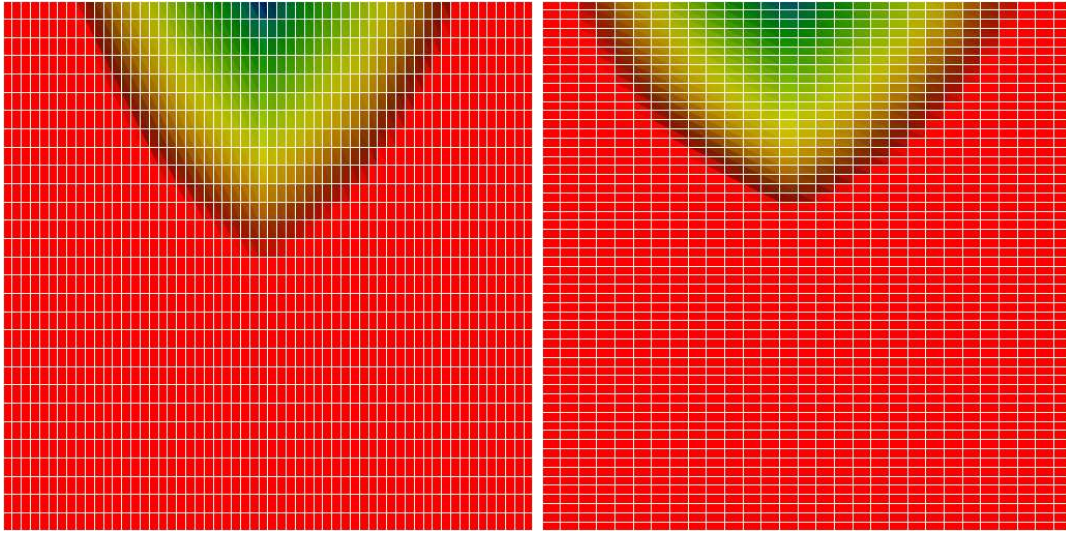


FIG. 4.42 – Saturation à l'instant  $t = 100$  s où le rapport des viscosités  $R = 100$ , donnée en utilisant deux maillages différents : à gauche par des mailles allongées verticalement et à droite avec des mailles allongées horizontalement.

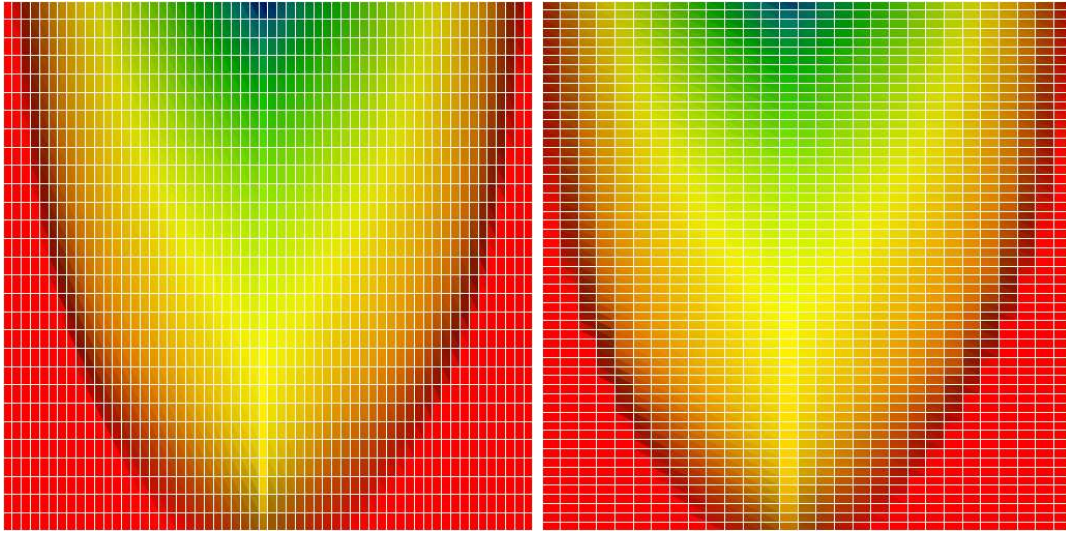


FIG. 4.43 – Saturation à  $t = 580$  s où le rapport des viscosités  $R = 100$ , donnée en utilisant deux maillages différents : à gauche par des mailles allongées verticalement et à droite avec des mailles allongées horizontalement.

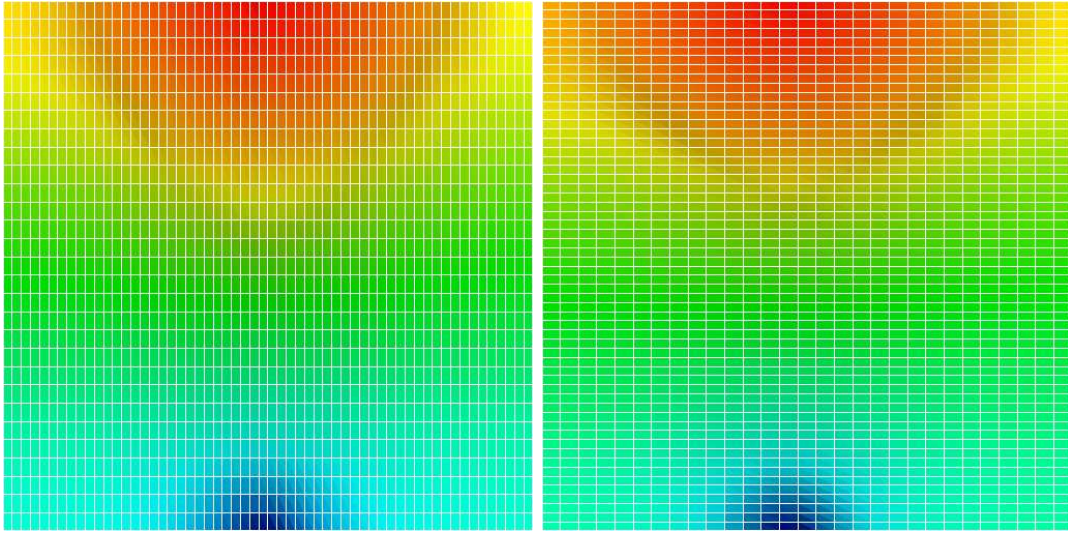


FIG. 4.44 – Pression à  $t = 100$  s où le rapport des viscosités  $R = 100$ , donnée en utilisant deux maillages différents : à gauche par des mailles allongées verticalement et à droite avec des mailles allongées horizontalement.

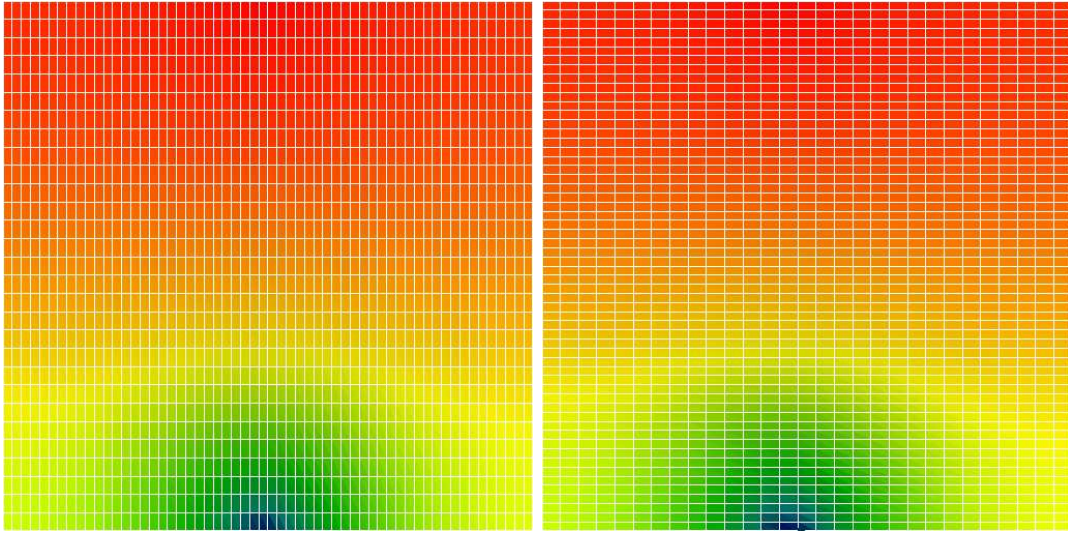


FIG. 4.45 – Pression à  $t = 580$  s où le rapport des viscosités  $R = 100$ , donnée en utilisant deux maillages différents : à gauche par des mailles allongées verticalement et à droite avec des mailles allongées horizontalement.

|                | Schéma à pas fractionnaire $q = 20$ |          | Gradient Conjugé Préconditionné $q = 20$ |          |
|----------------|-------------------------------------|----------|------------------------------------------|----------|
| $T^i$          | Nombre d'itérations                 | CPU      | Nombre d'itérations                      | CPU      |
| $T^1 = 20$     | 126                                 | 0.611E+3 | 19                                       | 0.172E+3 |
| $T^3 = 60$     | 122                                 | 0.507E+3 | 17                                       | 0.145E+3 |
| $T^7 = 140$    | 113                                 | 0.368E+3 | 16                                       | 0.107E+3 |
| $T^9 = 180$    | 108                                 | 0.350E+3 | 15                                       | 0.997E+2 |
| $T^{10} = 200$ | 104                                 | 0.378E+3 | 15                                       | 0.110E+3 |
| $T^{20} = 400$ | 52                                  | 0.110E+2 | 12                                       | 0.524E+2 |

TAB. 4.6 – Comparaison de nombre d'itérations et le temps CPU entre le schéma à pas fractionnaire multi-échelle et le schéma du gradient conjugué préconditionné multi-échelle durant les instants  $T^1, T^3, T^7, T^9, T^{10}$  et  $T^{20}$  où  $c_o = c_w = 4.10^{-9} Pa^{-1}$ .

|                | Schéma à pas fractionnaire $q = 20$ |          | Gradient Conjugé Préconditionné $q = 20$ |          |
|----------------|-------------------------------------|----------|------------------------------------------|----------|
| $T^i$          | Nombre d'itérations                 | CPU      | Nombre d'itérations                      | CPU      |
| $T^1 = 20$     | 11                                  | 0.488E+2 | 14                                       | 0.319E+3 |
| $T^3 = 60$     | 11                                  | 0.464E+2 | 12                                       | 0.285E+3 |
| $T^7 = 140$    | 10                                  | 0.217E+2 | 12                                       | 0.142E+3 |
| $T^9 = 180$    | 10                                  | 0.216E+2 | 11                                       | 0.129E+3 |
| $T^{10} = 200$ | 9                                   | 0.196E+2 | 11                                       | 0.130E+3 |
| $T^{20} = 400$ | 6                                   | 0.130E+2 | 7                                        | 0.742E+2 |

TAB. 4.7 – Comparaison de nombre d'itérations et le temps CPU entre le schéma à pas fractionnaire multi-échelle et la méthode du gradient conjugué préconditionné multi-échelle durant les instants  $T^1, T^3, T^7, T^9, T^{10}$  et  $T^{20}$  où  $c_o = 1.10^{-8} Pa^{-1}$  et  $c_w = 4.10^{-8} Pa^{-1}$ .

**Remarque 4.6.2** *Le critère d'arrêt pour toutes les simulations pour les deux modèles du couplage était pris sur la pression tel que*

$$\frac{\|p_{l+1} - p_l\|_\infty}{p_{atm}} < 10^{-j} \quad (4.76)$$

où  $p_{atm}$  est la pression atmosphérique et  $j = 6$  pour le cas du modèle linéaire et  $j = 3$  pour le modèle non linéaire. Tandis que,  $p_{l+1} - p_l$  est la différence entre deux pressions de deux itérations successives.

## 4.7 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre deux approches pour la résolution numérique des deux modèles de couplage entre l'écoulement et la géomécanique : linéaire et non linéaire. On a écrit essentiellement, un nouvel algorithme basé sur la méthode du gradient conjugué préconditionné. Dans le cas non critique, c'est-à-dire un écoulement de fluides de compressibilités significatives, la nouvelle approche proposée se montre aussi coûteuse et aussi précise que celle utilisée classiquement : le schéma à pas fractionnaire mutli-échelle. Toutefois, et face à la condition inf-sup qui n'est pas vérifiée à cause du choix de la méthode de discrétisation utilisée en pratique, la nouvelle méthode se montre robuste et surmonte cette difficulté et ceci malgré l'absence de critères usuels de convergence de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné.

Toutefois, le problème de la période optimal, c'est-à-dire le choix de  $q$  reste un problème ouvert et à déterminer. Il est important aussi, de voir l'extension de cette nouvelle approche, intuitivement possible, au cas 3D et pour d'autres modèles de la géomécanique : plastique, élasto-plastique.

# Theoretical and numerical study in coupling between multiphase flow and mechanical deformations in hydrocarbons extraction

**Abstract :** The purpose of this thesis is to study theoretical and numerical aspects of some coupled models between a flow in porous medium and the mechanical deformation of the ground. We consider two coupled models on the one hand (1) between a linear compressible flow and the mechanical deformation of the ground, and on the other hand (2) between a nonlinear two-phase flow and the mechanical deformation of the medium. For the first model (1), we show the existence and the uniqueness of the weak solution by means of the Galerkin method. The second model (2) is strongly coupled and involves a parabolic degenerate equation. In order to show the existence of a weak solution, we consider a sequence of related uniformly parabolic problems and apply the Schauder fixed point theorem to show that they possess a classical solution. We then prove the relative compactness of sequences of solutions by means of the Fréchet-Kolmogorov theorem which yields the convergence of a subsequence to a weak solution of the parabolic system. The second part is devoted to the numerical study ; we compare two coupling algorithms for the coupled models. The first one, which is used by engineers, is based upon computations by means of a fixed point method ; the second one, which we propose, relies on a preconditionned conjugate gradient approach. We show that the second algorithm is more robust than the first one.

**Key words :** Flow in porous medium, Mechanical deformation, Nonlinear degenerate parabolic equations, Schauder's fixed point theorem, Fréchet-Kolmogorov theorem.

**Classification AMS :** 35K55, 35K65, 65F10, 65F50, 74F10, 74G15, 74G30, 74S05, 74S10.

# Bibliographie

- [AD85] H. W. Alt and E. DiBenedetto. Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 12(3) :335–392, 1985.
- [AKM90] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. Translated from the Russian.
- [AL83] H. W. Alt and S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 183(3) :311–341, 1983.
- [Arb92] T. Arbogast. The existence of weak solutions to single porosity and simple dual-porosity models of two-phase incompressible flow. *Nonlinear Anal.*, 19(11) :1009–1031, 1992.
- [Bra01] D. Braess. *Finite elements*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics, Translated from the 1992 German edition by Larry L. Schumaker.
- [CE97] Z. Chen and R. E. Ewing. Fully discrete finite element analysis of multiphase flow in groundwater hydrology. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(6) :2228–2253, 1997.
- [Che01] Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow. I. Existence, uniqueness and regularity of a weak solution. *J. Differential Equations*, 171(2) :203–232, 2001.
- [Che02] Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow. II. Regularity, stability and stabilization. *J. Differential Equations*, 186(2) :345–376, 2002.
- [Cia00] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. III*, volume 29 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000. Theory of shells.

- [CJ86] G. Chavent and J. Jaffré. *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media*. North-Holland., Amsterdam, 1986. Studies in Mathematics and its Applications. 17.
- [CT99] L.Y. Chin and L.K. Thomas. Fully coupled analysis of improved oil recovery by reservoir compaction. *SPE Phillips Petroleum Compagny*, 1999.
- [DEH<sup>+</sup>02] F. Z. Daïm, R. Eymard, D. Hilhorst, R. Masson, and M. Mainguy. A preconditioned conjugate gradient based algorithm for coupling geomechanical-reservoir simulations. *Oil & Gas Science and Technology*, 57(5) :515–523, 2002.
- [EGH98] R. Eymard, M. Gutnic, and D. Hilhorst. The finite volume method for an elliptic-parabolic equation. *Acta Math. Univ. Comen., New Ser.*, 67(1) :181–195, 1998.
- [EGHM02] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, and A. Michel. Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations. *Numer. Math.*, 92(1) :41–82, 2002.
- [GMT96] Gérard Gagneux and Monique Madaune-Tort. *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, volume 22 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. With a preface by Charles-Michel Marle.
- [Kel95] C. T. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, volume 16 of *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995. With separately available software.
- [KJF77] A. Kufner, O. John, and S. Fucík. *Function spaces*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids ; Mechanics : Analysis.
- [KL84] D. Kroener and S. Luckhaus. Flow of oil and water in a porous medium. *J. Differential Equations*, 55(2) :276–288, 1984.
- [KS77] S. N. Kruzkov and S. M. Sukorjanskii. Boundary value problems for systems of equations of two-phase filtration type ; formulation of problems, questions of solvability, justification of approximate methods. *Mat. Sb. (N.S.)*, 104(146)(1) :69–88, 175–176, 1977.
- [LSU67] O. A. Ladyvzenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by

- S. Smith. *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [LT94] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 2*. Masson, Paris, second edition, 1994. Méthodes itératives. [Iterative methods].
- [Mic03] A. Michel. A finite volume scheme for two-phase immiscible flow in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(4) :1301–1317 (electronic), 2003.
- [Pao92] C. V. Pao. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press, New York, 1992.
- [Ram99] N. Ramarozzy. *Application de la méthode des volumes finis à des problèmes d'environnement et de traitement d'image*. Université De Paris-Sud, 1999. Thèse.
- [Saa03] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, second edition, 2003.
- [She94] J. R. Shewchuk. *An introduction to the conjugate gradient method without agonizing pain*. Pittsburgh, 1 edition, 1994.
- [SM94] A. Settari and F.M. Mourits. Coupling of geomechanics and reservoir simulation models. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, 3 :2151–2158, 1994.
- [SM98] A. Settari and F.M. Mourits. A coupled reservoir and geomechanical simulation system. *Paper SPE 50939*, pages 219–226, 1998.
- [Sma74] D. R. Smart. *Fixed point theorems*. Cambridge University Press, London, 1974. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66.
- [STR<sup>+</sup>99] J.E. Sylte, L.K. Thomas, D.W. Rhett, D.D. Bruning, and N.B. Nagel. Water induced compaction in the ekofisk filed. *SPE Phillips Petroleum Compagny*, 1999.
- [SW99] A. Settari and D.A. Walters. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, 1999.
- [Tem77] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publ., Amsterdam - New York - Oxford, 1977. Studies in Mathematics and its Applications. 2.
- [TF93] W.S. Tortike and S. M. Ali Farouq. Reservoir simulation integrated with geomechanics. *J. C. P. T.*, 32 :28 :37, 1993.
- [Zen84] Zenisek, A. The existence and uniqueness theorem in Biot's consolidation theory. *Apl. Mat.*, 29 :194–211, 1984.