



HAL
open science

Contrôle Quantique et Protection de la Cohérence par effet Zénon, Applications à l'Informatique Quantique

Etienne Brion

► **To cite this version:**

Etienne Brion. Contrôle Quantique et Protection de la Cohérence par effet Zénon, Applications à l'Informatique Quantique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00007910v1

HAL Id: tel-00007910

<https://theses.hal.science/tel-00007910v1>

Submitted on 4 Jan 2005 (v1), last revised 9 Jun 2005 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6
Pierre et Marie Curie**

présentée par
Etienne Brion

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris 6

sujet :

**Contrôle Quantique et Protection de la
Cohérence par effet Zénon,
Applications à l'Informatique Quantique**

soutenue le 26 novembre 2004 devant le jury composé de

M. Vladimir Akouline	Directeur de thèse
M. Philippe Grangier	Rapporteur
M. Dima Shepelyansky	Rapporteur
M. Lev Ioffe	Examineur
M. Pierre Pillet	Examineur
M. Jean-Michel Raimond	Examineur

Remerciements

”Un seul mot, usé, mais qui brille comme une vieille pièce de monnaie : merci ! ”

Pablo Neruda.

Je tiens tout d’abord à remercier MM. Christian Colliex et Pierre Pillet, qui se sont succédés à la direction du laboratoire, pour m’avoir accueilli et permis de réaliser mon travail de thèse dans les meilleures conditions.

Je remercie également l’ensemble des membres du jury, MM. Lev Ioffe, Pierre Pillet, Jean-Michel Raimond et plus particulièrement MM. Dima Shepelyansky et Philippe Grangier qui ont accepté la lourde tâche d’être mes rapporteurs.

Je tiens à remercier chaleureusement et sincèrement M. Vladimir Akouline pour m’avoir encadré durant ces trois ans : travailler sous sa direction fut une expérience à la fois passionnante, stimulante et enrichissante.

Merci à l’équipe expérimentale ”Atomes froids”, en particulier à MM. Pierre Pillet et Daniel Comparat pour leur aide précieuse, ainsi qu’à MM. Gil Harel, Ilya Dumer, Gershon Kurizki, et Igor Mazets pour leur collaboration. Je remercie également l’IDRIS (Orsay) qui a mis à ma disposition les ressources informatiques nécessaires au bon déroulement de mon travail.

Merci à l’ensemble du personnel administratif et technique du laboratoire : en particulier, merci à Mme Durand et Melle Trépagny, qui ont toujours su régler avec efficacité et gentillesse les tracasseries administratives que je leur occasionnais, merci à Jocelyne Sinzelle, qui a toujours considéré avec une bienveillante indulgence mon approche très empirique de l’impression de fichiers postscript en milieu hostile, merci à Annik Bachelier qui m’a initié aux joies du calcul parallèle (et même un peu vectoriel).

Merci à mes étudiants de Licence Professionnelle d’Optronique d’Orsay qui, sans le savoir, ont contribué à équilibrer ces trois années de travail.

Symétriquement, je souhaite exprimer ici ma profonde gratitude aux professeurs qui ont marqué ma formation - je pense tout particulièrement à Mme Evelyne Flauw et Mme Denise Jacon qui ont su me transmettre la passion de la Musique et de la Physique - et dont je mesure aujourd'hui les talents de pédagogues avec encore plus d'acuité.

Merci à mes amis, du laboratoire ou d'ailleurs, pour tous les moments que nous avons partagés : merci à Paul et Jean-Guillaume, merci à Catherine qui demeure une amie très chère, merci à Kai, dont la culture musicale ne connaît pas de frontière (son célèbre " ah, mais c'est très bon... mais c'est ... c'est RICKIE LEE JONES! " restera à n'en pas douter l'un des grands moments de ma thèse), merci à Carine pour son humour et son art consommé du créneau, merci à Pierre, le petit nouveau du groupe "Agrégats", pour ses goûts littéraires très sûrs, merci à Frédéric Carlier et Jérôme Leygnier pour avoir accepté de relire mon manuscrit et plus encore pour leur amitié, merci à Julien et Marc, merci à Alain, Nouari, Sophie, Aurélie, Pascal, Vincent, ... et tous ceux que j'ai pu oublier...

Merci également à tous ceux que j'ai croisés durant ces trois ans, et qui, au détour d'une conversation, ont su m'aider, tant scientifiquement qu'humainement, lorsque j'en avais besoin : merci à Maurice Raoult, Jacqueline Chevillard, Eliane Luc, Jean-François Wyart, Marcel Jacon, Jacques Bauche,...

Merci enfin à mes parents, Jean et Geneviève, à ma soeur Cécile, ainsi qu'à toute ma famille pour le soutien si précieux qu'ils m'ont toujours manifesté. Ce travail leur est, bien évidemment, dédié, en faible témoignage de ma gratitude.

Introduction générale

Le terme d'*information* est difficile à définir, même si (ou peut-être *parce que*) son utilisation est des plus courantes : grossièrement, l'information est tout ce que nous pouvons échanger, entendre, lire, dire, etc. Quoiqu'insuffisante et maladroite, cette définition rapide fait néanmoins ressortir un point essentiel : même si elle "existe" indépendamment de son support, l'information n'est exploitable que lorsqu'elle est physiquement "incarnée" (ou *codée*) ; ce n'est en effet que lorsqu'elle est portée par un système (bande magnétique, feuille de papier) ou se manifeste par un phénomène physique (onde électromagnétique, onde sonore) détectable par nos sens ou nos appareils de mesure, qu'elle est susceptible d'être échangée, captée, traitée, interprétée, transformée. De plus, elle est "fongible" : en d'autres termes, elle peut être convertie d'une forme à une autre, passer d'un support à un autre. Ce lien essentiel entre physique et information a été exprimé par R. LANDAUER dans sa formule, restée célèbre, "l'information est physique" [RL91].

L'information contenue dans un système ou émise par une source peut être quantifiée à l'aide du concept d'entropie, introduit, dans ce contexte, par C.E. SHANNON [SW40]. Plus précisément, on peut montrer, par des arguments simples, que, si X désigne la variable aléatoire représentant l'état du système considéré, dont l'espace des phases $\{x\}$ est muni de la distribution de probabilité p ($\sum_x p(x) = 1$), la quantité d'information susceptible d'être extraite de ce système est nécessairement de la forme

$$I(X) = - \sum_x p(x) \log_2 p(x),$$

où \log_2 désigne le logarithme en base 2. L'unité dans laquelle on exprime la fonction I est le *bit* (contraction de *binary digit*), qui correspond à la quantité d'information contenue dans un système à deux niveaux (0,1) équiprobables ($p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$), lui-même souvent appelé "bit" par abus de langage. On peut, en outre, montrer que le bit est le système physique, porteur de l'unité d'information, le plus simple que l'on puisse imaginer : la fonction I donne ainsi une mesure des ressources physiques minimales nécessaires au codage de l'infor-

mation portée par un système ou émise par une source (théorème de codage de SHANNON).

L'informatique, au sens de "computer science", n'est autre que le traitement de l'information. Généralement, il s'agit d'accomplir un calcul (au sens large) sur des *données* afin d'en extraire des *résultats*. Depuis très longtemps, l'Homme s'est aidé dans cette tâche de systèmes physiques particuliers, jouant le rôle d'*ordinateurs*, dont l'évolution dynamique correspond à l'opération désirée : plus précisément, les données à traiter sont stockées (*codées*) dans l'état initial $S(t_i)$ du système dont l'évolution dynamique naturelle amène à l'état final $S(t_f)$, qu'il "suffit" de lire pour obtenir les résultats recherchés¹. Parmi les premiers ordinateurs échafaudés par l'esprit humain citons entre autres le boulier, la machine à calculer de Blaise PASCAL, et, plus "exotique", la maquette que l'architecte GAUDI construisit pour connaître les conditions de stabilité de sa célèbre (et très complexe!) "Sagrada Familia". Tous ces dispositifs, quoiqu'ingénieux, ne permettent de traiter qu'un nombre restreint de problèmes (un seul dans le cas de GAUDI) : se pose alors la question d'un *ordinateur universel*, *i.e.* capable d'effectuer n'importe quelle tâche de calcul.

Ce problème fondamental est à la base de l'informatique théorique. Le mathématicien Alan TURING fut le premier à y répondre en proposant un modèle *théorique* d'ordinateur universel, la machine de TURING (1936), capable de simuler efficacement tous les ordinateurs classiques, *i.e.* d'effectuer toutes les tâches de calcul réalisables par n'importe quel système physique "raisonnable" (thèse de CHURCH-TURING). Ce modèle a été suivi (et même supplanté) par un modèle équivalent, le "*modèle des circuits*", fondé sur la notion de *porte logique*, fonction d'un ensemble de k bits $\{0,1\}^k$ vers un ensemble de l bits $\{0,1\}^l$: dans ce cadre, on construit simplement les algorithmes par combinaison de portes judicieusement choisies.

Peu de temps après ces développements purement théoriques, l'invention du transistor en 1947 par J. BARDEEN, W. BRATTAIN et W. SHOCKLEY permit la mise au point de "l'ordinateur", au sens moderne du terme. La miniaturisation incessante des composants électroniques donne lieu depuis lors à un gain d'efficacité constant : la loi énoncée par MOORE dans les années 1960, selon laquelle la puissance des ordinateurs double (à coût constant) tous les deux ans, se vérifie encore aujourd'hui !

La réalité de l'ordinateur universel, tout d'abord imaginé par TURING, rend particulièrement pertinente la classification (théorique) des problèmes

1. Notons que cette étape de lecture des résultats ne va pas toujours de soi : dans le cas quantique, il faut en effet prendre garde que la mesure du système n'endommage pas l'information que l'on désire en extraire.

en termes de *complexité*. Une tâche de calcul peut en effet être caractérisée par un "temps de calcul" $T(N)$ (à entendre au sens large comme "ressources" mises en jeu par l'algorithme), appelé aussi *complexité*, fonction de la taille N des données². Grossièrement, on peut différencier deux classes principales de problèmes : les problèmes *polynômiaux*, dont la fonction $T(N)$ est un polynôme en N , et les autres, appelés, par abus de langage, problèmes *exponentiels*. Les premiers sont solubles par les ordinateurs actuels tandis que les seconds sont réputés "difficiles", en tant qu'ils demandent des ressources (mémoire) et des temps d'exécution bien au-delà de nos capacités actuelles³. La factorisation en nombres premiers est un exemple célèbre de problème exponentiel : notre incapacité (actuelle) à le résoudre pour des grands nombres est d'ailleurs à la base du système de transmission sécurisée RSA (du nom de ses inventeurs R. RIVEST, A. SHAMIR et L. ADLEMAN), qui est largement utilisé aujourd'hui, notamment pour les paiements par carte bancaire.

Vanter les succès de l'informatique moderne relève d'une conversation de café du commerce, tant il est patent que l'ordinateur a pris, en quelque 50 ans, une place primordiale dans notre vie quotidienne. Néanmoins, sa marge de progression s'amenuise avec le temps, car la taille des composants approche de plus en plus de l'échelle atomique, où les lois classiques cèdent le pas aux lois quantiques. Ainsi, il est couramment admis que, dans les années 2010-2020, le formidable essor que nous connaissons depuis 1960 devrait s'essouffler, à moins que... une nouvelle informatique voie le jour !

Cette informatique nouvelle existe déjà, du moins théoriquement ! Fondée sur les lois quantiques, et née des préoccupations conjointes de BENIOFF et FEYNMAN, elle substitue au *bit* classique le *quantum bit* (ou "*qubit*"), système quantique à deux états $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, et brique élémentaire de l'ordinateur quantique. Dans ce nouveau cadre formel, les portes logiques sont remplacées par des *portes quantiques*, évolutions unitaires particulières du système "ordinateur quantique", et dont la combinaison permet de réaliser n'importe quel calcul sur l'information stockée dans l'état de l'ordinateur. Le changement peut paraître anecdotique, il constitue en fait une véritable révolution, et force à repenser en profondeur notre vision de l'information et de son traitement.

Au premier rang des "bizarreries" quantiques se trouve la mesure qui modifie irréversiblement le système observé (processus de réduction du paquet

2. Typiquement, N désigne le nombre de bits utilisés pour coder l'information initiale.

3. Notons qu'il n'existe pas de problèmes essentiellement insolubles par nos ordinateurs, qui, contrairement aux exemples cités plus haut, sont bien universels. Il n'est ici question que de la faisabilité pratique de la résolution des problèmes exponentiels.

d'ondes) et dont le résultat n'est que probabiliste. L'une des conséquences les plus étranges de la théorie des mesures quantiques est le célèbre théorème dit de "non-clonage", établi indépendamment par D. DIEKS [Die82] et par W.K. WOOTTERS et W.H. ZUREK [WZ82], selon lequel il est impossible de cloner (parfaitement) un état quantique arbitraire inconnu. La situation quantique est ainsi bien différente du cas classique où mesure et copie (clonage) d'information sont deux opérations indolores et couramment effectuées au cours d'un même processus de calcul.

Une autre différence majeure entre informatiques classique et quantique réside dans l'espace des états offert à l'ordinateur : alors que l'ordinateur classique à N bits ne peut occuper que l'un des 2^N états discrets correspondant aux 2^N chaînes de bits $i_1 i_2 \cdots i_N$ possibles, son analogue quantique a accès à l'infinité continue des vecteurs d'états de l'espace de HILBERT engendré par les états factorisés $\otimes_{k=1}^N |i_k\rangle$, où $i_k = 0$ ou 1 . En particulier, l'ordinateur peut se trouver dans un état *intriqué*, *i.e.* un état qui ne peut se décomposer en un produit tensoriel d'états à un qubit : ainsi, contrairement au cas classique, l'information quantique ne réside généralement pas dans les états individuels des qubits composant le système, mais dans leurs corrélations ; en d'autres termes, l'information quantique est généralement délocalisée sur tout le système.

De cette deuxième propriété remarquable viennent à la fois la faiblesse et la puissance de l'informatique quantique : d'une part, la continuité de l'information quantique la rend très sensible (beaucoup plus que l'information classique) aux effets de l'environnement (erreurs quantiques) ; mais, d'autre part, la délocalisation de l'information alliée à la linéarité des lois quantiques permettent une puissance de calcul formidable.

La délocalisation de l'information est en effet à l'origine de ce que D. DEUTSCH a appelé le *parallélisme quantique* [Deu85] et que l'on peut présenter schématiquement de la manière suivante : en préparant l'ordinateur dans une superposition d'états factorisés $\otimes_{k=1}^N |i_k\rangle$, codant chacun pour N bits d'information classique $i_1 i_2 \cdots i_N$, il est possible, par linéarité des lois quantiques, d'effectuer un même calcul en parallèle sur chacun de ces états et donc sur chacune des données classiques $i_1 i_2 \cdots i_N$. Le point le plus délicat consiste ensuite à récupérer l'information contenue dans l'état de l'ordinateur, dans son intégralité et sans l'endommager. Nous ne discuterons pas de ce point ici, mais en resterons à l'idée simple que l'ordinateur quantique possède, potentiellement, une puissance de calcul énorme comparée à l'ordinateur classique. Plus spécifiquement, il a été démontré théoriquement que les algorithmes quantiques de transformée de FOURIER, de recherche dans un ensemble et de simulation du comportement des systèmes quantiques sont plus efficaces

que leurs analogues classiques [NC00]. Ainsi, par exemple, contrairement à sa version classique, la transformée de FOURIER quantique appartient à la classe des problèmes polynômiaux : c'est d'ailleurs en s'appuyant sur cet algorithme très efficace que P. SHOR a proposé, en 1997, son algorithme quantique de factorisation en nombres premiers [Sho97] qui surpasse en efficacité tous les résultats classiques connus jusqu'à lors.

Mais les formidables promesses de l'informatique quantique ne doivent pas masquer sa faiblesse, *i.e.* sa grande sensibilité aux erreurs quantiques. La continuité même de l'information quantique la rend en effet très fragile, les corrélations entre qubits étant facilement endommagées ou détruites par des processus de décohérence. Pour faire face à ce danger, des stratégies ont été mises au point, en analogie avec la correction d'erreurs classique. La théorie formelle des codes correcteurs quantiques est, à ce jour, bien développée et des techniques de construction explicite de tels codes ont également été proposées.

Parallèlement à une activité théorique intense, et suivant un cahier des charges précis établi par D.P. DIVINCENZO [DiV95a], se sont développées diverses réalisations expérimentales : les principales contributions touchent des domaines très variés, allant de la RMN [DiV95b, CFH97, GC97], l'Electrodynamique Quantique en Cavité [DRBH95, THL95], en passant par les ions piégés [CZ95, Ste97, WMI98, PRSG02]. Quoique très prometteuses, ces recherches font encore état de difficultés qui, bien qu'elles ne soient pas théoriquement insurmontables, n'en constituent pas moins un obstacle à la réalisation pratique du futur ordinateur quantique.

Dans le présent travail de thèse, nous abordons deux aspects essentiels de l'informatique quantique.

Dans la première partie, nous traitons du *contrôle* des systèmes quantiques, et plus particulièrement du contrôle de leur opérateur d'évolution : ce type de contrôle est primordial pour le traitement de l'information quantique, puisque, comme nous l'avons indiqué plus haut, les algorithmes quantiques sont réalisés par des évolutions unitaires particulières du système "ordinateur quantique", les portes quantiques. Nous présentons une méthode théorique de contrôle d'évolution, appelée *contrôle non holonôme*, dont nous proposons une application à un système réel de deux atomes de césium froids, placés dans des états de RYDBERG.

Dans la seconde partie, nous abordons le problème de la protection de l'information contre les effets indésirables de l'environnement (erreurs quantiques). Après un bref tour d'horizon de la correction d'erreurs, nous propo-

sons une méthode de protection inspirée de l'effet ZENON quantique, dont les principales caractéristiques sont rappelées dans un chapitre introductif. Après l'exposé théorique de notre technique, nous l'appliquons à un système physique réel, un isotope du rubidium : plus précisément nous montrons qu'il est possible de protéger un qubit d'information codé sur les états de spin de l'atome contre l'action de champs électrique et magnétique quasistatiques incontrôlés.

Table des matières

I	Contrôle des systèmes quantiques	15
1	Généralités sur le contrôle quantique	19
1.1	Exemples	19
1.1.1	Spin $\frac{1}{2}$	19
1.1.2	Atome à 2 niveaux dans un champ électrique	26
1.2	Contrôle des systèmes fermés	30
1.2.1	Contrôle d'un système quantique	30
1.2.2	Système contrôlé, Hamiltonien de contrôle, contrôlabilité(s)	31
1.2.3	Contraintes cinématiques et dynamiques	32
1.2.4	Contrôlabilité(s) d'un système quantique fermé	35
1.2.5	Problèmes de contrôle "concrets"	38
1.3	Cas des systèmes ouverts	41
2	La technique de contrôle non holonôme	43
2.1	Présentation du problème	44
2.2	Lien avec la théorie du contrôle quantique, faisabilité du contrôle	45
2.3	Calcul des temps d'interaction	46
2.3.1	Evolution identité	46
2.3.2	Evolution arbitraire quelconque	50
2.4	Contrôle par l'amplitude des perturbations	56
3	Contrôle d'un système réel	59
3.1	L'atome de césium	59
3.1.1	Spectre du césium, états de Rydberg	60
3.1.2	Atomes de césium en champ électrique statique: effet Stark	61
3.2	Contrôle d'un système de deux atomes de césium froids	63
3.2.1	Présentation du système étudié	65
3.2.2	Hamiltoniens de contrôle	68
3.2.3	Calcul des temps d'interaction	70

3.2.4	Résultats et conclusions	71
II	Protection de l'Information par effet Zénon et	
	contrôle non holonôme	77
1	Correction d'erreurs quantiques	83
1.1	Introduction	84
1.2	Erreurs quantiques et codes correcteurs	87
1.2.1	Erreurs quantiques	87
1.2.2	La théorie des codes quantiques	88
1.3	Construction explicite de codes quantiques	90
2	L'effet Zénon en Mécanique Quantique	93
2.1	L'émergence de l'Effet Zénon Quantique	94
2.1.1	L'idée de John VON NEUMANN	94
2.1.2	Probabilité de survie d'un système quantique soumis à des mesures répétées, effet Zénon	96
2.1.3	Effet Zénon et mesures incomplètes	107
2.1.4	Effet Zénon et mesures non sélectives	110
2.2	Les tests expérimentaux de l'effet Zénon	112
2.2.1	Effet Zénon dans un système oscillant	112
2.2.2	Effet Zénon dans un système instable	119
2.3	L'effet Zénon remodelé	121
2.3.1	Le problème de la mesure	122
2.3.2	Zénon et son contraire	126
3	Protection de l'information par effet Zénon quantique	129
3.1	Effet Zénon et protection de l'information	130
3.2	Effet Zénon dans un système composé	132
3.2.1	Cas trivial	132
3.2.2	Cas général	135
3.2.3	Cas encore plus (!) général	140
3.3	Méthode de protection de l'information	140
3.4	Calcul de la base de code	144
3.4.1	Algorithme itératif	145
3.4.2	Application au calcul de l'espace de code	148
3.5	Réalisation physique de la matrice de codage par contrôle non- holonôme	151

4	Protection d'un système réel	159
4.1	Présentation du problème	160
4.2	Les différentes étapes de la méthode	162
4.2.1	Ajout de l'ancilla	162
4.2.2	Codage	165
4.2.3	Action des erreurs infinitésimales	168
4.2.4	Décodage	168
4.2.5	Projection	170
III	Annexes	181
A	Matrice densité d'un système à deux niveaux, sphère de Bloch	183
A.1	Hypothèses et notations	183
A.2	Cas général	184
A.3	Cas d'un état pur	184
B	Interaction dipôle-dipôle	187
B.1	Hypothèses et notations	187
B.2	Interaction dipôle-dipôle	188
C	Hamiltoniens d'erreurs électriques et magnétiques	191
C.1	Effet d'un champ magnétique quasistatique	191
C.1.1	Calcul dans la base découplée	191
C.1.2	Calcul dans la base couplée	193
C.2	Effet d'un champ électrique quasistatique	193
C.2.1	Hamiltonien et tenseur d'erreur électrique	194
C.2.2	Calcul des différents termes	198
D	Hamiltonien effectif Raman	201
D.1	Effet Raman dans un système à trois niveaux	201
D.2	Généralisations	205

Première partie

Contrôle des systèmes
quantiques

Introduction

Alors que les progrès des LASER permettent de manipuler atomes et molécules toujours plus précisément et de contrôler de mieux en mieux les réactions chimiques, et à l'heure où le très hypothétique ordinateur quantique, assemblage de qubits soumis à des évolutions élémentaires contrôlées (les *portes quantiques*), enthousiasme le monde scientifique, il semble que le contrôle quantique n'ait jamais été plus actuel. Dans cette partie, nous nous proposons de faire un rapide tour d'horizon du domaine et de présenter une méthode de contrôle originale, développée par notre équipe, le *contrôle non holonôme*.

Qu'il s'agisse de contrôle d'état pur, de matrice densité ou d'évolution, une opération de contrôle vise toujours à imposer à une variable dynamique du système une valeur arbitrairement choisie par l'expérimentateur. La méthode consiste généralement à perturber le système considéré, au moyen de champs extérieurs maîtrisés par l'expérimentateur, l'amplitude de ces champs jouant le rôle de paramètres de contrôle ajustables.

Face à un problème de contrôle donné, plusieurs questions se posent. En premier lieu, il convient de savoir si ce problème est soluble, *i.e.* s'il existe des paramètres de contrôle associés aux champs appliqués qui réalisent l'opération désirée. D'autre part, une fois prouvée l'existence d'une solution, il reste à la déterminer explicitement par une méthode appropriée. Ces différents points sont abordés dans le premier chapitre de cette partie, qui présente brièvement la théorie générale du contrôle quantique.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons une méthode de contrôle de l'opérateur d'évolution appelée "contrôle non holonôme". Cette technique est particulièrement pertinente dans le contexte de l'informatique quantique puisqu'elle permet, de manière universelle, d'appliquer n'importe quelle porte quantique à un système quelconque, pris comme ordinateur.

Dans le troisième chapitre enfin, nous présentons une application de notre méthode à un système de deux atomes froids de césium en interaction dipôle-dipôle et soumis à un champ STARK, auquel nous choisissons d'imposer l'évolution particulière CNOT.

Chapitre 1

Généralités sur le contrôle quantique

"Tout pouvoir sans contrôle rend fou."

Alain.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de faire un rapide tour d'horizon du contrôle quantique. Dans le premier paragraphe, nous commençons par traiter deux exemples, spin $\frac{1}{2}$ en champ magnétique et atome à deux niveaux en champ électrique, sur lesquels nous introduisons simplement des notions qui seront reprises et généralisées par la suite. Dans le deuxième paragraphe, nous présentons le cadre formel général des problèmes de contrôle des systèmes fermés. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous abordons le délicat problème du contrôle des systèmes ouverts.

1.1 Exemples

1.1.1 Spin $\frac{1}{2}$

Considérons tout d'abord un spin $\frac{1}{2}$ placé dans un champ magnétique \vec{B} , contrôlé par un opérateur extérieur (en module et en direction). L'espace de HILBERT du système (de dimension 2) est muni de la base orthonormée $(|+\rangle_z, |-\rangle_z)$, formée des états propres de la projection \hat{S}_z du moment cinétique de spin, respectivement associés aux valeurs propres $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$. Le Hamiltonien du spin en interaction avec le champ \vec{B} est le Hamiltonien ZEEMAN $\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = -\gamma \frac{\hbar}{2} (B_x \hat{\sigma}_x + B_y \hat{\sigma}_y + B_z \hat{\sigma}_z)$ où

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sont les matrices de PAULI, et où γ est le facteur gyromagnétique du système (voir [BD96], Chap. 9 et 11). L'opérateur d'évolution du système à la date t s'écrit alors simplement

$$\widehat{U}(t) = e^{i\frac{\gamma t}{2}\widehat{\sigma}\cdot\vec{B}}$$

en supposant que le champ \vec{B} reste constant entre 0 et t .

Contrôle d'état pur

Posons-nous pour commencer le problème simple suivant : partant de l'état $|-\rangle_z$, est-il possible, par un choix judicieux du champ magnétique et du temps d'interaction, d'atteindre l'état $|+\rangle_z$? La réponse est clairement positive. En effet, après quelques calculs simples, on obtient

$$e^{ix\widehat{\sigma}_x} = \begin{bmatrix} \cos x & i \sin x \\ i \sin x & \cos x \end{bmatrix}, \quad e^{iy\widehat{\sigma}_y} = \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix}, \quad e^{iz\widehat{\sigma}_z} = \begin{bmatrix} e^{iz} & 0 \\ 0 & e^{-iz} \end{bmatrix},$$

et, en appliquant le champ $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_x$ pendant $t_1 = \frac{\pi}{\gamma B_1}$, on passe de l'état initial $|-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'état

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 |-\rangle_z &= e^{i\frac{\gamma B_1 t_1}{2}\widehat{\sigma}_x} |-\rangle_z \\ &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= i |+\rangle_z, \end{aligned}$$

puis en appliquant $\vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_z$ pendant $t_2 = \frac{3\pi}{\gamma B_2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{U}_2 \widehat{U}_1 |-\rangle_z &= \widehat{U}_2 (i |+\rangle_z) \\ &= i e^{i\frac{\gamma B_2 t_2}{2}\widehat{\sigma}_z} |+\rangle_z \\ &= i e^{i\frac{3\pi}{2}\widehat{\sigma}_z} |+\rangle_z \\ &= i \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= |+\rangle_z. \end{aligned}$$

Réciproquement, on peut passer de l'état $|+\rangle_z$ à l'état $|-\rangle_z$ en appliquant, par exemple, le champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$ pendant $t_0 = \frac{3\pi}{\gamma B_0}$ correspondant à la transformation unitaire

$$\widehat{U}_0 = -i\widehat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que les solutions proposées ici ne sont pas uniques et que d'autres "chemins" équivalents auraient pu être trouvés. Par exemple, dans le premier cas, on aurait pu passer directement de $|-\rangle_z$ à $|+\rangle_z$ en appliquant le champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$ pendant $t_0 = \frac{3\pi}{\gamma B_0}$ correspondant à la transformation unitaire $\widehat{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; notons également que, même si les deux transformations \widehat{U}_0 et $\widehat{U}_2\widehat{U}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ réalisent la même opération de contrôle ($|-\rangle_z \rightarrow |+\rangle_z$), elles ne sont pas identiques.

On peut facilement généraliser ces résultats au cas de vecteurs d'états quelconques. Pour cela, remarquons tout d'abord qu'un état (pur) $|\psi\rangle$ quelconque peut se mettre sous la forme

$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi} \cos \theta |+\rangle_z + e^{i\varphi} \sin \theta |-\rangle_z,$$

à un facteur de phase global près (sans signification physique), et apparaît comme le vecteur propre, associé à la valeur propre $+\frac{\hbar}{2}$, de l'opérateur $\widehat{S} \cdot \vec{v}$

où $\vec{v} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$. Pour passer de l'état $|\psi\rangle$, qui "pointe" selon $\vec{v} =$

$\begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$, à $|\psi'\rangle$, qui "pointe" selon $\vec{v}' = \begin{bmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{bmatrix}$, il suffit

d'appliquer l'opérateur rotation de l'espace des états de spin (voir [CDL98], complément A_{IX})

$$\widehat{R}(\vec{u}, \alpha) = e^{-i\alpha \widehat{S} \cdot \vec{u}},$$

associé à la rotation spatiale $\mathcal{R}(\vec{u}, \alpha)$ de vecteur $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{v}'$ et d'angle $\alpha = (\vec{v}, \vec{v}')$, qui transforme \vec{v} en \vec{v}' . Pour ce faire, on applique pendant le

temps τ le champ magnétique $\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$ qui vérifie

$$\frac{\gamma B_x}{2} \tau = -\alpha u_x \quad [2\pi]$$

$$\frac{\gamma B_y}{2} \tau = -\alpha u_y \quad [2\pi]$$

$$\frac{\gamma B_z}{2} \tau = -\alpha u_z \quad [2\pi],$$

de sorte que l'opérateur d'évolution

$$\hat{U} = e^{i\frac{\gamma\tau}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}} = \hat{R}(\vec{u}, \alpha)$$

réalise bien la rotation désirée. Les résultats obtenus plus haut pour les états particuliers ($|+\rangle_z, |-\rangle_z$) sont valables pour n'importe quel couple d'états purs ($|\psi\rangle, |\psi'\rangle$): à partir d'un état (pur) initial quelconque, on peut atteindre n'importe quel autre état (pur), à un facteur de phase près (sans signification physique). Remarquons à nouveau que la solution générale proposée n'est pas unique: en effet, au lieu d'appliquer au système la rotation spatiale $\mathcal{R}(\vec{u}, \alpha)$ qui fait passer directement de \vec{v} à \vec{v}' , on pourrait également choisir, par exemple, de combiner les deux rotations $\mathcal{R}(\vec{u}_1, \alpha_1)$ et $\mathcal{R}(\vec{u}_2, \alpha_2)$ faisant respectivement passer de \vec{v} à \vec{e}_z et de \vec{e}_z à \vec{v}' : à ces deux rotations spatiales sont respectivement associés les opérateurs $\hat{R}(\vec{u}_1, \alpha_1) = e^{-i\alpha_1\vec{S}\cdot\vec{u}_1}$ et $\hat{R}(\vec{u}_2, \alpha_2) = e^{-i\alpha_2\vec{S}\cdot\vec{u}_2}$ dont le produit $\hat{R}(\vec{u}_2, \alpha_2) \cdot \hat{R}(\vec{u}_1, \alpha_1)$ transforme $|\psi\rangle$ en $|\psi'\rangle$, mais ne coïncide généralement pas avec $\hat{R}(\vec{u}, \alpha)$

$$\hat{R}(\vec{u}_2, \alpha_2) \cdot \hat{R}(\vec{u}_1, \alpha_1) \neq \hat{R}(\vec{u}, \alpha).$$

Nous retrouvons exactement le même phénomène que dans le passage de $|-\rangle_z$ à $|+\rangle_z$: de nombreuses matrices d'évolution différentes amènent au même résultat. Ceci s'explique facilement. Passer d'un état pur donné $|\psi\rangle$ à un autre $|\psi'\rangle$ ne contraint qu'une ligne (colonne) de l'opérateur d'évolution, correspondant à $\hat{U}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$: les autres lignes (colonnes) sont libres, seulement soumises à la condition d'unitarité de \hat{U} .

Contrôle d'évolution

Pour le système considéré, nous avons la possibilité d'imposer n'importe quelle matrice unitaire d'évolution \hat{U} , à des facteurs de phase globaux près.

Autrement dit, nous pouvons, par un choix judicieux des paramètres contrôlables par un opérateur extérieur, réaliser n'importe quelle transformation spéciale unitaire $\hat{U} \in SU(2) = \{\hat{U} \in U(2), \det \hat{U} = 1\}$. Pour nous en convaincre, il suffit de remarquer que toute matrice unitaire $\hat{U} \in SU(2)$ peut être mise sous la forme $\hat{U} = e^{i\hat{K}}$ où \hat{K} est une matrice hermitique ($\hat{K}^\dagger = \hat{K}$) de trace nulle. De plus, comme l'ensemble des trois matrices de PAULI ($\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$) engendrent le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices hermitiques 2×2 de trace nulle, on peut décomposer \hat{K} sous la forme

$$\hat{K} = a_x \hat{\sigma}_x + a_y \hat{\sigma}_y + a_z \hat{\sigma}_z,$$

où (a_x, a_y, a_z) sont trois nombres réels. Ainsi, en choisissant $\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$ et τ de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma B_x}{2} \tau &= a_x, \\ \frac{\gamma B_y}{2} \tau &= a_y, \\ \frac{\gamma B_z}{2} \tau &= a_z, \end{aligned}$$

on peut réaliser la matrice d'évolution arbitraire désirée

$$e^{i\frac{\gamma\tau}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}} = \hat{U}.$$

Contrôle de matrice densité

Tournons-nous maintenant vers les états *généraux* du système. De tels états sont décrits par leur *matrice densité* (hermitique et de trace unité), qui peut être mise sous la forme

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}.$$

où le vecteur réel $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie $\|\vec{r}\| \leq 1$ (voir annexe A). Les valeurs propres λ_\pm de $\hat{\rho}$ sont reliées à la norme de \vec{r} selon

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \|\vec{r}\|}{2}.$$

La matrice $\hat{\rho}$ est ainsi complètement définie par la donnée du vecteur \vec{r} , et habituellement représentée par un point M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) de la boule de centre O et de rayon 1. On peut montrer que l'égalité $\|\vec{r}\| = 1$ est réalisée si et seulement si $\hat{\rho}$ décrit un état pur du système ($\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$) : dans ce cas, ses valeurs propres sont (0,1) et le point $M(\vec{r})$ est situé sur la sphère de centre O et de rayon 1, appelée "sphère de BLOCH". Plus généralement, deux matrices densités $\hat{\rho}$ (associée à \vec{r}) et $\hat{\rho}'$ (associée à \vec{r}'), de mêmes valeurs propres sont représentées par deux points appartenant à la même sphère de centre O et de rayon $\|\vec{r}\| = \|\vec{r}'\|$ ("sous-sphère de BLOCH" de rayon $\|\vec{r}\|$).

Dans certaines situations physiques, il peut être intéressant de faire passer le système considéré d'un état $\hat{\rho}$ à un autre état $\hat{\rho}'$. Considérons, par exemple, le problème particulier suivant : nous souhaitons passer de l'état

décrit par la matrice densité $\hat{\rho}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ correspondant à $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

à l'état associé à la matrice $\hat{\rho}_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ correspondant à

$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Les résultats obtenus au paragraphe précédent sur le contrôle

d'évolution nous encouragent à rechercher directement quels champ \vec{B} et temps d'interaction τ permettent de réaliser

$$\hat{U}(\tau)\hat{\rho}_1\hat{U}(\tau)^\dagger = e^{i\frac{\tau}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}\hat{\rho}_1e^{-i\frac{\tau}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}} = \hat{\rho}_2.$$

En minimisant à 0 la fonction test

$$F(x,y,z) = \left\| e^{i(x\hat{\sigma}_x + y\hat{\sigma}_y + z\hat{\sigma}_z)}\hat{\rho}_1e^{-i(x\hat{\sigma}_x + y\hat{\sigma}_y + z\hat{\sigma}_z)} - \hat{\rho}_2 \right\|^2$$

à l'aide d'un petit programme Mathematica nous obtenons

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

ce qui amène

$$B_x\tau = \frac{2\pi}{3\gamma}, \quad B_y = 0, \quad B_z = 0.$$

En revanche, si nous cherchons à passer de $\hat{\rho}_1$ à $\hat{\rho}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+i}{6} \\ \frac{1-i}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ (corres-

pondant à $\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$), notre programme ne nous fournit aucune valeur

pour x, y et z (il ne converge pas). Cela n'est pas étonnant, car pour qu'on puisse trouver un jeu de paramètres réels (x, y, z) qui annulent la fonction test F , encore faut-il qu'il existe une transformation $\hat{U} \in SU(2)$ telle que $\hat{U}\hat{\rho}_1\hat{U}^\dagger = \hat{\rho}_3$. Cela n'est possible que si les deux matrices densités $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_3$ possèdent les mêmes valeurs propres, c'est-à-dire si $\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_3\|$, ou encore si leurs points représentatifs respectifs $M_1(\vec{r}_1)$ et $M_2(\vec{r}_2)$ appartiennent à la même "sous-sphère de BLOCH" de centre O et de rayon $\|\vec{r}_1\|$. Or, comme on peut le vérifier aisément, les trois matrices n'ont pas le même spectre : les valeurs propres trouvées sont $(0, 1)$ pour $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_2$, et $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ pour $\hat{\rho}_3$! Il est donc *impossible* de passer de $\hat{\rho}_1$ à $\hat{\rho}_3$ par une évolution Hamiltonienne. Ce genre d'impossibilité est caractéristique de ce que nous appellerons un peu plus loin les *contraintes cinématiques*, qui sont liées à l'unitarité de l'opérateur d'évolution.

Contrôle d'observable

Terminons ce paragraphe par un dernier type de problème de contrôle. Considérons l'observable $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$, et exprimons sa valeur moyenne dans un état décrit par la matrice densité $\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}$: un calcul simple amène

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}\hat{S}_z] = \frac{\hbar}{2}z.$$

Supposons alors que l'on parte de l'état initial $\hat{\rho}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+i}{6} \\ \frac{1-i}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ à $t = 0$: dans cet état, la valeur moyenne de l'observable \hat{S}_z est $\langle \hat{S}_z \rangle(0) = \frac{\hbar}{6}$. Peut-on obtenir, au cours d'une évolution unitaire du système, la valeur moyenne $\frac{\hbar}{2}$? Autrement dit, peut-il exister un temps $T > 0$ tel que $\langle \hat{S}_z \rangle(T) = \text{Tr} [\hat{\rho}(T)\hat{S}_z] = \text{Tr} [\hat{U}(T)\hat{\rho}_3\hat{U}^\dagger(T)\hat{S}_z] = \frac{\hbar}{2}$? La réponse est malheureusement *négative*. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, seuls seront accessibles à partir de $\hat{\rho}_3$ les états de mêmes valeurs propres, ou, de manière équivalente, de même $\|\vec{r}\|$. On calcule facilement $\|\vec{r}_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$: ainsi, les états accessibles à partir de $\hat{\rho}_3$ seront les états de la forme

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}$$

avec $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ce qui impose la condition évidente $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. A partir de $\hat{\rho}_3$, on ne pourra ainsi atteindre que des états réalisant des

valeurs moyennes de \widehat{S}_z comprises entre $-\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$, et \widehat{S}_z ne pourra donc jamais prendre pour valeur moyenne $\frac{\hbar}{2}$.

En revanche, partant de $\widehat{\rho}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, pour lequel $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\|\vec{r}_1\| = 1$ et $\langle \widehat{S}_z \rangle_{\widehat{\rho}_1} = \frac{\hbar}{4}$, il est tout à fait possible d'atteindre la valeur moyenne $\frac{\hbar}{2}$, réalisée, par exemple, par l'état $\widehat{\rho}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui possède les mêmes valeurs propres que $\widehat{\rho}_1$: les deux matrices étant équivalentes, il est en effet possible de trouver une matrice $\widehat{U} \in SU(2)$ telle que $\widehat{U}\widehat{\rho}_1\widehat{U}^\dagger = \widehat{\rho}_4$ et des paramètres de contrôle peuvent être calculés qui réalisent l'évolution \widehat{U} désirée.

Pour conclure, cet exemple nous a permis de mettre en évidence de nombreuses caractéristiques des problèmes de contrôle qui seront reprises par la suite dans un cadre plus général : on a notamment vu que, même lorsqu'il est possible, comme ici, de contrôler complètement la dynamique du système, c'est-à-dire lorsque l'on peut choisir l'opérateur \widehat{U} arbitrairement dans le groupe unitaire, des contraintes cinématiques demeurent, liées à l'unitarité de l'évolution, qui imposent des restrictions sur les états accessibles à partir d'un état initial donné, et sur les valeurs moyennes d'observables qu'il est possible d'atteindre.

Avec l'exemple qui suit, nous allons poursuivre notre tour d'horizon du contrôle quantique en nous plaçant dans un cas moins favorable que celui que nous venons de traiter.

1.1.2 Atome à 2 niveaux dans un champ électrique

Dans l'exemple précédent, nous pouvions passer d'un état pur à un autre, d'un état mélangé à un autre appartenant à la même "sous-sphère de BLOCH", et même choisir l'évolution du système parmi toutes les transformations spéciales unitaires. Nous allons maintenant envisager un cas légèrement plus compliqué, qui nous montrera à quel point nous nous trouvons vite démunis face au contrôle d'un système quantique général, et combien nous avons besoin d'un cadre mathématique adapté.

Considérons un système atomique restreint à deux niveaux d'énergie, de moments cinétiques $l = 0$ et 1 respectivement : le niveau inférieur ne contient qu'un état, noté $|1\rangle = |l = 0, m_l = 0\rangle$, tandis que le deuxième niveau contient 3 états dégénérés en énergie notés $|2\rangle = |l = 1, m_l = -1\rangle$, $|3\rangle = |l = 1, m_l = 0\rangle$, et $|4\rangle = |l = 1, m_l = 1\rangle$ (voir figure 1.1).

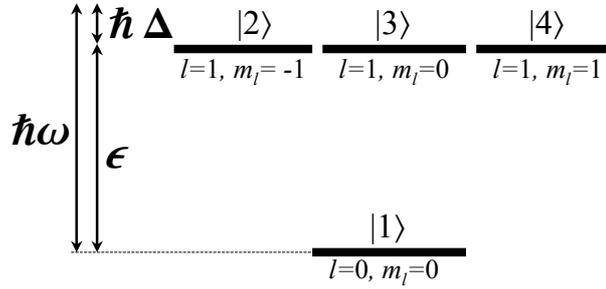


FIG. 1.1 – *Système atomique à deux niveaux ($l = 0, l = 1$).*

Le Hamiltonien propre du système \hat{H}_0 s'écrit, dans la base propre,

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

L'atome est soumis à un champ électrique oscillant $\vec{E}(t)$, légèrement désaccordé avec la transition entre les deux niveaux atomiques ($\hbar\omega = \epsilon - \Delta$). Dans l'approximation de l'onde tournante, le Hamiltonien propre prend la forme

$$\tilde{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}.$$

et le Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique s'écrit

$$\tilde{H}_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega_\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_\pi^*}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si l'onde est polarisée linéairement suivant l'axe de quantification du moment

cinétique (cf règle de sélection $\Delta m = 0$), et

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\sigma_+} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\hbar\Omega_{\sigma_+}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_{\sigma_+}^*}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{H}_{\sigma_-} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega_{\sigma_-}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_{\sigma_-}^*}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

si l'onde est polarisée circulairement, respectivement gauche ou droite, dans le plan perpendiculaire à l'axe de quantification (cf règle de sélection $\Delta m = \pm 1$).

Supposons que l'on applique un champ polarisé π . Dans ce cas, le Hamiltonien total s'écrit

$$\tilde{H}_{Tot} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega_{\pi}}{2} & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_{\pi}^*}{2} & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix},$$

dont on voit qu'il ne couple que les états $|1\rangle$ et $|3\rangle$. Il est alors facile de voir que, si le système est initialement préparé dans l'état $|2\rangle$, il ne pourra jamais atteindre l'état $|3\rangle$ (par exemple), puisque l'opérateur d'évolution \hat{U} pris entre ces deux états est identiquement nul : on s'en convainc aisément en remarquant que chaque terme du développement de l'opérateur d'évolution

$$\langle 2 | \hat{U}(t) | 3 \rangle = \langle 2 | e^{-i\frac{\tilde{H}_{Tot}t}{\hbar}} | 3 \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{-it}{\hbar} \right)^m \frac{\langle 2 | \tilde{H}_{Tot}^m | 3 \rangle}{m!},$$

fait intervenir une amplitude du type

$$\begin{aligned}\langle 2 | \tilde{H}_{Tot}^m | 3 \rangle &= \sum_{i=1}^4 \langle 2 | \tilde{H}_{Tot} | i \rangle \langle i | \tilde{H}_{Tot}^{m-1} | 3 \rangle \\ &= \langle 2 | \tilde{H}_{Tot} | 2 \rangle \langle 2 | \tilde{H}_{Tot}^{m-1} | 3 \rangle \\ &= \left(\langle 2 | \tilde{H}_{Tot} | 2 \rangle \right)^2 \langle 2 | \tilde{H}_{Tot}^{m-2} | 3 \rangle \\ &= \dots \\ &= \left(\langle 2 | \tilde{H}_{Tot} | 2 \rangle \right)^{m-1} \langle 2 | \tilde{H}_{Tot} | 3 \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

De même, si l'on applique simultanément un champ π et un champ σ_+ , il sera impossible de passer de l'état $|1\rangle$ à l'état $|4\rangle$ qui ne sont pas couplés par le Hamiltonien total.

En revanche, si l'on applique simultanément trois champs, π , σ_+ et σ_- , on voit qu'alors tous les états sont couplés par le Hamiltonien total, soit directement ($|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, $|1\rangle \leftrightarrow |4\rangle$), soit indirectement ($|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, etc.). On n'a ainsi plus d'interdiction formelle qui nous empêche de passer d'un état pur $|\psi\rangle$ à un autre $|\psi'\rangle$; néanmoins, *rien ne nous assure* qu'un champ de contrôle existe qui nous permette d'atteindre cet objectif. En d'autres termes, il semble que la connexion de tous les états par le Hamiltonien (ou l'une de ses puissances) soit une condition *nécessaire* au contrôle d'état pur, mais en aucun cas nous ne pouvons affirmer qu'elle soit *suffisante*.

D'autre part, contrairement au premier exemple, les Hamiltoniens \widehat{H}_0 , \widehat{H}_π , \widehat{H}_{σ_+} et \widehat{H}_{σ_-} ne forment pas une base des matrices hermitiennes 4×4 : il est donc impossible de contrôler l'opérateur d'évolution \widehat{U} en appliquant seulement un champ $\vec{E} = \alpha_\pi \vec{E}_\pi + \alpha_{\sigma_+} \vec{E}_{\sigma_+} + \alpha_{\sigma_-} \vec{E}_{\sigma_-}$ combinaison linéaire des trois champs π , σ_+ et σ_- , car une matrice unitaire arbitraire $\widehat{U}_{arb} = e^{-i\widehat{H}_{arb}\tau}$ étant donnée, \widehat{H}_{arb} ne pourra généralement pas se décomposer en une combinaison linéaire des Hamiltoniens \widehat{H}_0 , \widehat{H}_π , \widehat{H}_{σ_+} et \widehat{H}_{σ_-} . En revanche, si nous appliquons alternativement, pendant des temps $\{t_i\}$ bien choisis, les différents Hamiltoniens \widehat{H}_π , \widehat{H}_{σ_+} et \widehat{H}_{σ_-} , et en supposant que leurs commutateurs de tous ordres engendrent l'espace des matrices hermitiennes 4×4 ("bracket generation condition"), il nous suffit d'utiliser la formule de CAMPBELL-BAKER-HAUSDORFF (voir [JFC84] vol. 2, p. 378)

$$\exp A \cdot \exp B = \exp \left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} \{ [A, [A, B]] + [B, [B, A]] \} + \dots \right),$$

pour nous convaincre que la matrice d'évolution

$$e^{-\frac{it_1}{\hbar}(\widehat{H}_0 + \widehat{H}_\pi)} \cdot e^{-\frac{it_2}{\hbar}(\widehat{H}_0 + \widehat{H}_{\sigma_+})} \cdot e^{-\frac{it_3}{\hbar}(\widehat{H}_0 + \widehat{H}_{\sigma_-})} \dots$$

peut être mise sous la forme

$$\exp \left[-i \sum_{k=1}^{16} c_k(t_1, t_2, t_3, \dots) \widehat{h}_k \right]$$

où les \widehat{h}_k forment une base des matrices hermitiennes 4×4 et où les coefficients $c_k(t_1, t_2, t_3, \dots)$ sont fonctions des différents temps d'interaction. En ajustant les paramètres (temps, intensité des champs) de sorte que, pour tout

k , c_k soit égal au coefficient λ_k de \hat{h}_k dans la décomposition du Hamiltonien $\hat{H}_{arb}\tau = \sum_{k=1}^{16} \lambda_k \hat{h}_k$ on réalise alors l'objectif de contrôle désiré. Remarquons tout de même que les équations qui relient les temps d'interaction aux coefficients λ_k sont généralement très difficiles voire impossibles à établir explicitement, et hautement non linéaires, de sorte qu'elles pourraient bien ne pas avoir de solution. Ainsi, la condition selon laquelle les commutateurs de tous ordres des Hamiltoniens mis en jeu doivent engendrer l'espace des matrices hermitiennes semble, pour l'instant, n'être qu'une condition *nécessaire*, mais, a priori pas *suffisante* au contrôle d'évolution.

Cet exemple nous montre à quel point nous sommes démunis lorsque le calcul analytique de l'opérateur d'évolution ne peut être mené jusqu'au bout. D'une part, nous manquons d'un cadre mathématique adapté et de critères nous permettant de décider si l'état pur, la matrice densité ou l'opérateur d'évolution de tel ou tel système peuvent être contrôlés ou non. D'autre part, nous avons besoin de méthodes nous permettant d'exhiber la forme des champs à employer pour réaliser un objectif de contrôle donné.

1.2 Contrôle des systèmes fermés

Dans cette partie, nous nous proposons de broser à grands traits le cadre général des problèmes de contrôle des systèmes quantiques. Nous verrons ainsi que les comportements et les problèmes rencontrés sur les deux cas particuliers précédents sont tout à fait universels et répondrons en partie aux questions laissées en suspens dans la section précédente.

1.2.1 Contrôle d'un système quantique

Parler de *contrôle quantique* est très vague, car il existe différentes sortes de contrôle. Dans les exemples précédents, nous avons rencontré les quatre principaux types de problème de contrôle, tels qu'ils sont présentés dans la littérature récente [SPS03] :

- le contrôle *d'état pur*, dont le but est de passer d'un état pur à un autre arbitrairement choisi,
- le contrôle *de matrice densité*, qui vise à faire passer le système d'une matrice densité à une autre arbitrairement choisie,
- le contrôle *d'évolution*, dont le but est d'imposer une évolution unitaire arbitraire au système,
- et enfin le contrôle *d'observable*, par lequel on cherche à donner à une observable une valeur moyenne choisie.

De manière générale, on voit que le contrôle vise toujours à faire passer une caractéristique du système d'une valeur initiale à une valeur finale choisie par l'opérateur extérieur.

La notion de contrôle étant définie, on peut se poser les questions suivantes : quels moyens physiques doit-on mettre en oeuvre pour contrôler un système ? Tous les objectifs de contrôle sont-ils réalisables ? Est-il possible d'énoncer des critères mathématiques de faisabilité ? Enfin, comment trouver la solution d'un problème de contrôle concret donné, quelles méthodes pratiques employer ? Ces questions fondamentales seront successivement abordées dans les prochains paragraphes.

1.2.2 Système contrôlé, Hamiltonien de contrôle, contrôlabilité(s)

Donnons nous un système, que nous supposons fermé, d'espace de HILBERT \mathcal{H} , de dimension N , et de Hamiltonien propre \widehat{H}_0 .

Si nous laissons le système livré à lui-même à partir de $t = 0$, son opérateur d'évolution à la date t s'écrira $\widehat{U}(t) = e^{-i\frac{\widehat{H}_0 t}{\hbar}}$, soit, dans la base $\{|\alpha\rangle, \alpha = 1, \dots, N\}$ des états propres de \widehat{H}_0 ($\widehat{H}_0 |\alpha\rangle = E_\alpha |\alpha\rangle$)

$$\widehat{U}(t) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-i\frac{E_N t}{\hbar}} \end{bmatrix}.$$

Si le système est initialement préparé dans un état propre $|\alpha\rangle$, il y demeurera et toute observable \widehat{O} gardera, au cours du temps une valeur moyenne constante $\langle \widehat{O} \rangle = \langle \alpha | \widehat{O} | \alpha \rangle$.

Pour modifier le système à notre guise et avoir l'espoir de le contrôler, nous voyons qu'il est *nécessaire* de le perturber. Pour ce faire, nous lui appliquons M champs "classiques" (macroscopiques) dont les amplitudes $f_m(t)$, maîtrisées par l'expérimentateur, joueront le rôle de "contrôles", et dont l'interaction avec le système est modélisée par les Hamiltoniens \widehat{H}_m . Ainsi, le Hamiltonien total, appelé *Hamiltonien de contrôle*, devient

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_0 + \sum f_m(t) \widehat{H}_m, \quad (1.1)$$

de sorte que l'opérateur d'évolution vérifie maintenant

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \widehat{U}(t) &= \widehat{H}(t) \widehat{U}(t) \\ \widehat{U}(0) &= \widehat{Id} \end{aligned}$$

et peut s'écrire explicitement

$$\widehat{U}(t) = \mathcal{T} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{H}(\tau) d\tau} \right\},$$

où \mathcal{T} désigne le produit chronologique. Le comportement dynamique du système se voit ainsi considérablement enrichi; de plus l'expérimentateur maîtrise ce comportement par le biais des contrôles $f_m(t)$.

On peut maintenant donner une formulation générale des problèmes de contrôle: il s'agit toujours de trouver les contrôles $\{f_m(t)\}$ tels que la propriété désirée soit vérifiée à une certaine date T . Par exemple, un problème de contrôle d'état pur consiste à trouver les contrôles $\{f_m(t)\}$, notés sous forme vectorielle $\vec{f}(t)$, tels que pour un certain état pur $|\psi_0\rangle$, et à une certaine date $T > 0$, $\widehat{U}(T) |\psi_0\rangle = \widehat{U} [\vec{f}(T)] |\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle$ où $|\psi_1\rangle$ est un autre état pur du système, arbitrairement choisi.

1.2.3 Contraintes cinématiques et dynamiques

Tous les objectifs de contrôle ne sont malheureusement pas réalisables. Comme nous l'avons vu dans le premier paragraphe, la nature même du système et ses interactions avec les champs de contrôle imposent des contraintes sur son évolution. Plus précisément, nous distinguerons dans la suite les contraintes *cinématiques*, liées à l'unitarité de l'opérateur d'évolution, et les contraintes *dynamiques*, liées à la forme des Hamiltoniens d'interaction.

Contraintes cinématiques

Comme nous l'avons vu sur l'exemple du spin $\frac{1}{2}$, tous les états $\widehat{\rho}_1$ ne sont pas accessibles à partir d'un état donné $\widehat{\rho}_0$: l'évolution d'un système fermé étant unitaire, l'état initial $\widehat{\rho}_0$ et l'état désiré $\widehat{\rho}_1$ doivent vérifier la relation d'équivalence (au sens mathématique du terme) suivante dite *équivalence cinématique*

$$"\widehat{\rho}_1 \text{ est cinématiquement équivalent à } \widehat{\rho}_0" \Leftrightarrow \exists \widehat{U} \in U(N) \text{ t.q. } \widehat{\rho}_1 = \widehat{U} \widehat{\rho}_0 \widehat{U}^\dagger.$$

Il est facile de se convaincre que $\widehat{\rho}_0$ et $\widehat{\rho}_1$ sont cinématiquement équivalents si et seulement si ils ont mêmes valeurs propres [SSL02a]. Ainsi, l'espace des matrices densités du système est partagé en classes d'équivalence $\mathcal{C}(\widehat{\rho}_0)$, définies par

$$\mathcal{C}(\widehat{\rho}_0) = \{\widehat{\rho}_1, \text{ de mêmes valeurs propres que } \widehat{\rho}_0\}.$$

Dans le cas du spin $\frac{1}{2}$, les classes d'équivalence correspondent aux différentes sous-sphères de BLOCH. Une zoologie des classes d'équivalence peut être facilement établie [SSL02b] (on peut montrer en effet que les matrices densités sont essentiellement de trois grands types : les ensembles aléatoires, les ensembles de type "état pur" et les ensembles "généraux").

L'unitarité de l'évolution a aussi des conséquences sur le contrôle d'observable. En effet, si \hat{O} est une observable du système, l'ensemble des valeurs moyennes accessibles à partir de l'état initial $\hat{\rho}_0$ sera

$$\mathcal{M}_{\hat{O}}(\hat{\rho}_0) = \left\{ \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{O} \right], \quad \hat{\rho} \in \mathcal{C}(\hat{\rho}_0) \right\}.$$

On peut montrer [SSL02a, GSLK98] que

$$\mathcal{M}_{\hat{O}}(\hat{\rho}_0) = \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n o_{N+1-n}, \quad \sum_{n=1}^N \lambda_n o_n \right]$$

où $\{o_n, \quad n = 1, \dots, N\}$ et $\{\lambda_n, \quad n = 1, \dots, N\}$ sont respectivement les valeurs propres de l'observable \hat{O} et de la matrice densité initiale $\hat{\rho}_0$ rangées par ordre croissant et en tenant compte de leur dégénérescence. On peut appliquer ce résultat au cas du spin $\frac{1}{2}$ ($N = 2$) rencontré à la section précédente : en prenant pour état initial la matrice densité $\hat{\rho}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+i}{6} \\ \frac{1-i}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, de valeurs propres $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right)$ et en considérant l'observable \hat{S}_z , de valeurs propres $\left(-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2} \right)$, on retrouve

$$\mathcal{M}(\hat{\rho}_3) = \left[\frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\hbar}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\hbar}{2} = -\frac{\hbar}{2\sqrt{3}}, \quad -\frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\hbar}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \right],$$

i.e., en d'autres termes, on ne peut accéder à toutes les valeurs moyennes de l'observable \hat{S}_z .

Contraintes dynamiques

Nous venons de le voir, l'unitarité de l'évolution impose des contraintes cinématiques sur les états et les valeurs moyennes d'observables accessibles au système. Dans ce paragraphe, nous allons voir que la structure des Hamiltoniens d'interaction impose également des restrictions, appelées *contraintes dynamiques*, à l'ensemble \mathbf{A}_U des évolutions accessibles au système et, par voie de conséquence, aux états et aux valeurs moyennes d'observables. Le cadre mathématique adapté pour traiter de ce point est la théorie des groupes

et algèbres de LIE : nous verrons que, dans ce contexte, des théorèmes généraux, fondés sur les notions de groupe et d'algèbre de LIE dynamiques du système peuvent être énoncés.

En explicitant la forme du Hamiltonien de contrôle, l'opérateur \widehat{U} satisfait l'équation d'évolution suivante

$$i\hbar\partial_t\widehat{U} = \widehat{H}_0\widehat{U} + \sum f_m(t)\widehat{H}_m\widehat{U}. \quad (1.2)$$

L'une des conséquences de cette équation est que l'opérateur \widehat{U} est unitaire, il évolue donc dans le groupe (de LIE) $U(N)$. On dit que les contrôles $\{f_m(t)\}$ sont "admissibles" s'ils appartiennent à l'une des trois classes suivantes [JS72] (l'introduction du concept de contrôle admissible sera justifiée un peu plus loin) :

- la classe \mathcal{U}_1 des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , définies sur $[0, +\infty[$, localement bornées et mesurables,
- la classe \mathcal{U}_2 des fonctions de \mathcal{U}_1 à valeurs dans $[-1,1]$,
- la classe \mathcal{U}_3 des fonctions constantes par morceaux à valeurs dans $\{-1,1\}$, définies sur $[0, +\infty[$. (cette classe est souvent appelée classe "bang-bang" en référence aux opérations de contrôle effectuées en RMN et qui consistent à appliquer des pulses de champ magnétique en créneaux).

En général, on désignera par \mathcal{U} l'une (quelconque) de ces classes et on parlera, sans préciser, de "classe des contrôles admissibles \mathcal{U} ".

Si l'on restreint les fonctions $f_m(t)$ à la classe des contrôles *admissibles* \mathcal{U} , on dit que (1.2) est un *système invariant droit* sur le groupe de LIE $U(N)$. Un théorème classique d'analyse permet alors d'affirmer qu'il existe une unique solution $\widehat{U}(t)$ du système (1.2) satisfaisant la condition initiale $\widehat{U}(0) = \widehat{Id}$ [JS72] (en fait, c'est ce théorème qui motive la restriction des contrôles à la classe des contrôles admissibles) : on notera cette solution $\widehat{U}(\vec{f}, t)$.

L'ensemble des évolutions accessibles à la date T , noté $\mathcal{A}_U(T)$, peut être défini par

$$\mathcal{A}_U(T) \equiv \left\{ \widehat{U}(\vec{f}, t), \vec{f} \in \mathcal{U}^m \right\},$$

l'ensemble des évolutions accessibles entre les dates 0 et T , noté $\mathbf{A}_U(T)$, est alors simplement

$$\mathbf{A}_U(T) \equiv \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{A}_U(t)$$

et l'ensemble des évolutions accessibles est

$$\mathbf{A}_U = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{A}_U(T).$$

La détermination de \mathbf{A}_U se fait naturellement dans le cadre de la théorie de LIE. On appelle *algèbre et groupe de LIE dynamiques* du système respectivement l'algèbre de LIE \mathcal{L} engendrée par les opérateurs $\{i\hat{H}_0, i\hat{H}_1, \dots, i\hat{H}_M\}$ et le groupe de Lie \mathcal{G} associé, obtenu par exponentiation de \mathcal{L} . Les théorèmes généraux suivants peuvent alors être énoncés [JS72, RSDRP95] :

- $\mathbf{A}_U(T)$ et \mathbf{A}_U sont inclus dans le groupe de LIE $U(N)$,
- \mathbf{A}_U est un *semi-groupe* (i.e. pour deux éléments g et g' de \mathbf{A}_U^2 , $gg' \in \mathbf{A}_U$). De plus, si \mathbf{A}_U est un sous-groupe de $U(N)$ alors $\mathbf{A}_U = \mathcal{G}$.
- Si \mathcal{G} est compact, $\mathbf{A}_U = \mathcal{G}$ et il existe $T > 0$ tel que $\mathbf{A}_U(T) = \mathbf{A}_U$.

D'autres théorèmes peuvent également être énoncés dans le cas où \mathcal{G} n'est pas compact ; nous ne nous y intéresserons pas ici, car dans les cas que nous considérerons, \mathcal{G} sera compact.

Dans le cas du spin $\frac{1}{2}$ considéré au paragraphe précédent, les opérateurs $(i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z)$ engendrent l'algèbre de LIE $su(2)$, associée au groupe $SU(2)$; ce groupe étant compact (voir [JFC84] par exemple), l'ensemble des évolutions accessibles est $\mathbf{A}_U = SU(2)$. Dans le deuxième exemple (atome à deux niveaux), il est possible de montrer que les quatre opérateurs $(i\hat{H}_0, i\hat{H}_1, i\hat{H}_2, i\hat{H}_3)$ engendrent l'algèbre $u(4)$ associée au groupe de LIE $U(4)$ [SSL02a] ; ce groupe étant compact, l'ensemble des évolutions accessibles est $\mathbf{A}_U = U(4)$.

L'étude de la structure de l'ensemble des évolutions dynamiquement accessibles est de la première importance : les contraintes dynamiques sur l'opérateur d'évolution engendrent en effet des contraintes dynamiques sur les états accessibles ainsi que les valeurs moyennes réalisables. Plus précisément, l'ensemble des états purs accessibles à partir de l'état initial $|\psi_0\rangle$ sera simplement $\mathbf{A}_U |\psi_0\rangle$, l'ensemble des opérateurs densité accessibles à partir de $\hat{\rho}_0$ sera

$$\{\hat{U}\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger, \hat{U} \in \mathbf{A}_U\}$$

et l'ensemble des valeurs moyennes de l'observable \hat{O} dynamiquement accessibles à partir de l'état initial $\hat{\rho}_0$ sera

$$\{\text{Tr} [\hat{U}\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger\hat{O}], \hat{U} \in \mathbf{A}_U\}.$$

Dans le paragraphe suivant nous montrons le lien entre les différentes notions de contrôlabilité et l'ensemble des évolutions dynamiquement accessibles.

1.2.4 Contrôlabilité(s) d'un système quantique fermé

Dans le cadre de la théorie des groupes de LIE, il est possible d'énoncer des critères mathématiques permettant de décider si un problème de contrôle

donné est soluble, c'est-à-dire si le système considéré est contrôlable ou non au sens du problème envisagé. Dans ce paragraphe, nous précisons la notion de contrôlabilité, en montrons la diversité, et donnons, sans démonstration, le critère mathématique de contrôlabilité complète qui nous sera utile par la suite.

Contrôlabilité complète

On dit d'un système qu'il est *complètement contrôlable* si toute évolution unitaire du système est dynamiquement réalisable, autrement dit si pour tout opérateur unitaire \widehat{U} de $U(N)$ il existe un ensemble de contrôles admissibles \vec{f} et un temps T tels que

$$\widehat{U}(\vec{f}, T) = \widehat{U}.$$

De plus, on dispose du critère mathématique suivant [JS72, RSDRP95]: un système est complètement contrôlable si et seulement si l'algèbre de LIE dynamique \mathcal{L} du système est égale à $u(N)$.

Ce critère n'est pas pour nous étonner: en effet, si $\mathcal{L} = u(N)$, le groupe de LIE dynamique est $\mathcal{G} = U(N)$, et comme $U(N)$ est compact, nous savons d'après le paragraphe précédent que l'ensemble des évolutions accessibles est le groupe $U(N)$ lui-même, en d'autres termes le système est complètement contrôlable.

Notons, d'autre part, que nous avons déjà l'intuition de ce résultat dans l'étude du deuxième exemple de la section précédente: il nous semblait alors que la condition, dite "bracket generation condition", selon laquelle les opérateurs $\{\widehat{H}_m, m = 1, \dots, M\}$, leurs combinaisons linéaires et leurs commutateurs de tous ordres doivent engendrer l'espace des matrices hermitiennes $N \times N$, était nécessaire à la contrôlabilité du système. C'est exactement cette condition que nous retrouvons ici (elle devient, de plus, condition suffisante).

Autres contrôlabilités

On peut définir d'autres contrôlabilités [SPS03] auxquelles sont associés des critères mathématiques, exprimés en termes algébriques. Nous donnons ici, pour mémoire, les définitions de ces différentes contrôlabilités, sans toutefois entrer trop dans le détail, car seule nous intéressera la contrôlabilité complète.

Un système est dit "*matrice-densité contrôlable*" si et seulement si pour tout couple $(\widehat{\rho}_0, \widehat{\rho}_1)$ de matrices densités *cinématiquement équivalentes*, il

existe un vecteur contrôle admissible $\vec{f} \in \mathcal{U}^m$ et un temps $T > 0$ tels que $\widehat{U}(T)\widehat{\rho}_0\widehat{U}^\dagger(T) = \widehat{\rho}_1$.

Un système est dit "état pur-contrôlable" si et seulement si pour tout couple d'états purs $(|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle)$, il existe un vecteur contrôle admissible $\vec{f} \in \mathcal{U}^m$ et un temps $T > 0$ tels que $\widehat{U}(T)|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle$.

Enfin, un système est dit "observable-contrôlable" si et seulement si pour toute observable \widehat{O} et tout état initial $\widehat{\rho}_0$, on peut réaliser toutes les valeurs moyennes $\langle \widehat{O} \rangle$ cinématiquement admissibles.

Remarquons, pour finir, que les différentes contrôlabilités ont été présentées par ordre "décroissant d'exigence" : en effet, si un système est complètement contrôlable, il est évidemment matrice densité, état pur et observable-contrôlable. De même, la matrice densité-contrôlabilité entraîne la contrôlabilité "état pur" et "observable", etc.

Vérification pratique de la contrôlabilité d'un système quantique

Pour établir la contrôlabilité complète d'un système quantique, il est possible de construire directement l'algèbre de LIE dynamique \mathcal{L} du système et vérifier (par exemple par la dimension) que $\mathcal{L} = u(N)$. Dans la littérature, on peut trouver des algorithmes explicites de calcul de \mathcal{L} [RSDRP95, SFS01], ainsi que l'étude directe de la contrôlabilité sur certains systèmes atomiques modèles simples [SSL02a].

Néanmoins, si la dimension de l'espace de HILBERT \mathcal{H} du système est grande, le calcul de \mathcal{L} devient lourd. Pour l'éviter, des critères pratiques ont été recherchés.

Par exemple, pour des systèmes dont le Hamiltonien de contrôle est de la forme $\widehat{H}(t) = \widehat{H}_0 + f(t)\widehat{H}_1$ et présente des propriétés de régularité assez sévères [SPS03, Alt02] (les valeurs propres λ_k de \widehat{H}_1 doivent être non-dégénérées, et les différences $(\lambda_k - \lambda_l)$ distinctes), la contrôlabilité du système est assurée si le graphe de transition du Hamiltonien \widehat{H}_1 est connecté, *i.e.* si tous les états propres de \widehat{H}_0 sont reliés, directement ou indirectement, par le Hamiltonien \widehat{H}_1 . Notons que nous avons l'intuition de ce résultat sur l'exemple de l'atome à deux niveaux, puisqu'il nous avait semblé "plausible" qu'une condition nécessaire de contrôlabilité était que le Hamiltonien de contrôle couple, directement ou indirectement, chacun des états de base de l'espace de HILBERT.

D'autres modèles ont été également étudiés, plus spécifiques, et pour lesquels les conditions de régularité forte précédentes ne sont pas nécessaires. Par exemple, on trouvera dans [SFS01] l'étude d'un système en interaction de type dipolaire avec le champ de contrôle, pour lequel les auteurs établissent

des conditions de contrôlabilité complète impliquant les différents paramètres du modèle.

1.2.5 Problèmes de contrôle "concrets"

Comme nous venons de le voir, un problème de contrôle consiste toujours à rechercher les fonctions admissibles $\{f_m \in \mathcal{U}\}$ telles que la propriété désirée soit vérifiée. Pour résoudre un problème de contrôle "concret", défini par son "but" et son Hamiltonien de contrôle $\widehat{H}(t)$, la méthode consiste tout d'abord à vérifier la contrôlabilité du système au moyen d'un des critères présentés ci-dessus. Il "reste" ensuite à trouver explicitement les fonctions $\{f_m \in \mathcal{U}\}$. Pour ce faire, différentes méthodes sont proposées dans la littérature, s'appuyant soit sur des considérations algébriques, soit sur une approche variationnelle. Nous avons déjà rencontré ces deux aspects sur l'exemple du spin $\frac{1}{2}$ traité dans le premier paragraphe. Pour le contrôle d'évolution du système, nous avons alors opté pour une méthode algébrique consistant à décomposer le Hamiltonien de l'opérateur d'évolution désirée sur la base des Hamiltoniens d'interaction du système avec les champs de contrôle. En revanche, pour le contrôle de matrice densité, nous avons choisi une méthode numérique, utilisant l'optimisation d'une certaine fonctionnelle F . Dans ce paragraphe, nous présentons en quelque sorte des généralisations de ces deux approches "simplistes".

Méthodes algébriques

On peut trouver dans la littérature des méthodes purement algébriques de détermination des contrôles $\{f_m \in \mathcal{U}\}$.

Par exemple, les auteurs de [SGRR01, SGRR02], s'inspirant (en les généralisant) de travaux antérieurs [RFRO00, RSDRP95], proposent une méthode fondée sur une décomposition "standard" de l'opérateur cible \widehat{U} en un produit $\prod_k \widehat{V}_k$ d'opérateurs appartenant au groupe de LIE dynamique du système. Tous les \widehat{V}_k ont la même forme analytique (même si leurs paramètres diffèrent) et chacun d'entre eux est physiquement réalisable par application d'un pulse de champ de contrôle dont les caractéristiques (durée, forme, intensité,...) dépendent de l'opérateur \widehat{V}_k considéré. Notons toutefois, que cette méthode requiert de pouvoir adresser, individuellement, chacune des transitions entre les niveaux adjacents du système par l'un des champs de contrôle: ceci impose d'une part que les différents niveaux soient non-dégénérés (ou au moins que des règles de sélection permettent de les isoler les uns des autres), et d'autre part que les champs de contrôle soient suffisamment nombreux (leur nombre augmente linéairement avec la dimension du système). Limitée dans

son application, cette méthode peut en outre se révéler très coûteuse, car le calcul de la décomposition de LIE de l'opérateur d'évolution devient de plus en plus lourd quand la dimension de l'espace de HILBERT augmente (un algorithme détaillé est proposé dans l'appendice B de [SGRR01, SGRR02])

Dans le chapitre suivant, nous proposerons une approche, appelée "contrôle non holonôme", fondée sur des propriétés algébriques de la matrice d'évolution du système contrôlé, et montrerons que cette méthode peut, au contraire de la précédente, s'appliquer à des situations réalistes.

Pour conclure ce paragraphe, signalons une dernière approche, très différente de celles que nous avons présentées précédemment, le contrôle *holonôme* [ZR99]. Cette technique, fondée sur la notion de phase de BERRY généralisée ("holonomy" en anglais), permet d'imposer à un système quantique donné n'importe quelle porte quantique unitaire en réalisant une succession de "boucles" fermées dans l'espace des paramètres de contrôle du Hamiltonien. Mathématiquement sophistiquée et séduisante, cette méthode requiert néanmoins des conditions d'application particulières (notamment une grande dégénérescence du Hamiltonien du système considéré) qui la rendent peu pratique en comparaison des méthodes "conventionnelles".

Contrôle optimal

S'appuyant sur la théorie mathématique très développée du contrôle optimal, de nombreux auteurs ont choisi d'aborder le contrôle quantique par une approche variationnelle. Qu'il s'agisse de contrôle d'état pur [OKF98], de matrice densité [SGL00], de valeur moyenne d'observable ou d'évolution [PK02a], l'esprit de la méthode reste le même : on cherche les contrôles admissibles $\{f_m \in \mathcal{U}\}$ qui optimisent, à une certaine date T , une fonctionnelle $J[\{f_m\}]$. Cette fonctionnelle comporte généralement deux termes : une fonctionnelle d'erreur $\epsilon[\{f_m\}]$ qui caractérise la distance qui sépare le système de son objectif de contrôle, et une fonctionnelle de coût $C[\{f_m\}]$. Ainsi, par exemple, dans le cas du contrôle d'évolution, on peut prendre pour fonctionnelle d'erreur (d'autres choix sont possibles, voir [PK02b])

$$\epsilon[\{f_m\}](T) = \text{Tr} \left[\widehat{U}_{arb} \cdot \widehat{U}(T) \right],$$

où \widehat{U}_{arb} est l'évolution arbitraire désirée, et pour fonctionnelle de coût

$$C[\{f_m\}](T) = - \sum \lambda_m \int_0^T |f_m|^2 dt$$

caractérisant l'énergie totale du champ de contrôle (le choix des coefficients λ_m est arbitraire et permet de fixer le poids que l'on souhaite donner à la

fonctionnelle de coût). Ainsi, en maximisant $J[\{f_m\}] = \epsilon[\{f_m\}] + C[\{f_m\}]$ en fonction des $\{f_m\}$, on réalise un compromis entre l'énergie dépensée et l'objectif de contrôle désiré.

L'optimisation de la fonctionnelle J a toujours lieu sous contrainte : par exemple, sur le cas du contrôle d'évolution évoqué ci-dessus, on doit tenir compte de la contrainte (cinématique) imposée à \hat{U} d'obéir à l'équation de SCHRODINGER, et sa condition initiale

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\hat{U}(t) &= \hat{H}(t)\hat{U}(t) \\ \hat{U}(0) &= \hat{Id}. \end{aligned}$$

Des théorèmes généraux d'existence des contrôles $\{f_m\}$ peuvent être établis dans un cadre mathématique rigoureux [PDR98, BS90]. On peut, de plus, construire des méthodes numériques de détermination des contrôles. Elles prennent généralement pour point de départ une fonctionnelle \tilde{J} se composant de J et d'une partie additionnelle correspondant à la contrainte cinématique (de type équation de SCHRODINGER) prise en compte par le biais de multiplicateurs de LAGRANGE. Pour reprendre notre exemple de contrôle d'évolution, le terme qu'il convient d'ajouter à J pour obtenir \tilde{J} est

$$- \int_0^T \text{Tr} \left[\left(\partial_t \hat{U}(t) + \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t) \hat{U}(t) \right) \hat{B}(t) \right] dt$$

où $\hat{B}(t)$ désigne un multiplicateur de LAGRANGE opératoirel [PK02a]. En dérivant la fonctionnelle \tilde{J} par rapport aux contrôles $\{f_m\}$, aux multiplicateurs de LAGRANGE, ainsi que par rapport à la grandeur contrôlée (\hat{U} pour un contrôle d'évolution, par exemple), et en annulant chacune des dérivées obtenues, on aboutit à un ensemble d'équations différentielles couplées assorties de leurs conditions initiales (certaines à $t = 0$, d'autres à $t = T$). On les résout itérativement en faisant appel à des méthodes numériques [SR90, PK02a, PDR98] : partant de contrôles arbitrairement choisis $\vec{f}^{(0)} = \{f_m^{(0)}\}$, on calcule numériquement le gradient $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \vec{f}} \left[\vec{f}^{(0)} \right]$, qui donne la direction dans laquelle chercher le vecteur de contrôle $\vec{f}^{(1)}$ de l'étape suivante. En répétant cette opération (algorithme du gradient) on détermine l'optimum recherché. Nous n'entrerons pas ici dans le détail du travail numérique qu'il est nécessaire de fournir pour calculer, à chaque étape, le gradient $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \vec{f}}$, mais signalerons seulement que ce calcul est loin d'être trivial.

1.3 Cas des systèmes ouverts

Nous terminons ce chapitre par quelques mots sur les systèmes ouverts et le contrôle en "boucle fermée" ou "contrôle en retour". Ce paragraphe ne vise ni à l'exhaustivité ni à la rigueur, mais a simplement pour but de conclure le chapitre en élargissant la notion de contrôle quantique au-delà des hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés jusqu'à présent.

Dans les sections précédentes, nous n'avons en effet envisagé que des systèmes *fermés*, qui interagissaient avec leur environnement par le biais de champs classiques (macroscopiques) d'amplitudes $f_m(t)$ contrôlables, et de Hamiltoniens \hat{H}_m . La situation est très différente lorsque l'on a affaire à des systèmes *ouverts*. De tels systèmes sont régis par l'équation de LIOUVILLE

$$i\hbar\partial_t\hat{\rho} = \left[\hat{H},\hat{\rho}\right] + i\hbar\mathcal{L}_D[\hat{\rho}]$$

qui contient, outre la partie Hamiltonienne $\left[\hat{H},\hat{\rho}\right]$, une composante dissipative $i\hbar\mathcal{L}_D[\hat{\rho}]$ non nulle. La dynamique du système n'est ainsi plus purement Hamiltonienne et son évolution n'est plus unitaire.

On peut voir la composante dissipative sous deux angles. D'une part, elle peut apparaître comme une *richesse*, car elle lève les contraintes cinématiques, imposées aux systèmes fermés par l'unitarité de l'évolution. Elle tend ainsi à élargir le groupe et l'algèbre de LIE dynamiques du système, et permet, associée au contrôle cohérent, d'atteindre certains états qui étaient inaccessibles dans le cas purement Hamiltonien. Il a ainsi été récemment démontré par S. LLOYD et L. VIOLA [LV01] qu'on pouvait imposer n'importe quelle évolution, unitaire ou non, à un système à condition que ce dernier soit complètement contrôlable au sens des systèmes fermés et en interaction avec un appareil de mesure, lui-même contrôlé par l'expérimentateur. L'idée est schématiquement la suivante: si l'on est capable d'effectuer sur le système une mesure "généralisée" à la carte, du type

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}[\hat{\rho}] &= \sum_k \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k, \\ \text{avec } \sum_k \hat{M}_k \hat{M}_k &= \hat{I}d, \end{aligned}$$

suivie d'une transformation unitaire arbitraire, choisie en fonction du résultat obtenu - \hat{U}_k pour le résultat k (on parle de *contrôle en retour* ou *en boucle fermée* [Wis94, ADL02, WW01]), on voit qu'il est alors possible d'imposer

au système n'importe quelle évolution générale du type

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho} = \sum_k \hat{A}_k \hat{\rho} \hat{A}_k^\dagger,$$

où $\hat{A}_k = \hat{U}_k \hat{M}_k$.

Dans le même article, les auteurs montrent en outre qu'il suffit en fait de pouvoir réaliser sur le système une mesure élémentaire de type "oui-non" pour être capable d'effectuer une mesure généralisée quelconque à la carte. Ces résultats intéressants nous montrent à quel point l'action de l'environnement sur un système peut s'avérer utile.

Néanmoins, il faut aussi noter que la partie dissipative de l'équation de LIOUVILLE, lorsqu'elle échappe au contrôle de l'expérimentateur, et c'est généralement le cas, constitue plutôt une "entrave" au bon contrôle du système considéré¹. Les articles traitant de la suppression de l'influence de l'environnement sur la dynamique des systèmes quantiques sont très nombreux. La réduction ou la suppression de la décohérence a en effet toujours été un sujet important, et il est devenu un enjeu primordial aujourd'hui dans le contexte de l'informatique quantique, où l'interaction de l'ordinateur avec l'extérieur est synonyme d'erreurs. Nous ne nous étendons pas ici sur le sujet, car il sera abordé un peu plus loin, dans la partie traitant de la protection de l'information.

1. On pourra trouver une discussion de ces différents aspects sur l'exemple d'un système dissipatif particulier dans [SS03].

Chapitre 2

La technique de contrôle non holonôme

”Il faut se méfier des ingénieurs. Ça commence avec la machine à coudre et ça finit par la bombe atomique.”

Marcel Pagnol.

Dans ce chapitre, nous présentons la technique de contrôle d'évolution mise au point et développée par notre équipe, le *contrôle non holonôme* [AGH01]. Le terme *holonôme*, emprunté à la mécanique analytique classique, désigne généralement des contraintes de la forme

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots) = 0$$

imposées au système. Nous qualifions, par extension, notre technique de *non holonôme* car elle vise à contrôler le système en le libérant de toutes ses contraintes *dynamiques*.

Dans le premier paragraphe, nous posons, en termes physiques, le problème que nous souhaitons résoudre : il s'agit de contrôler l'opérateur d'évolution d'un système en lui appliquant alternativement deux perturbations bien choisies \widehat{V}_a et \widehat{V}_b , pendant des temps à déterminer. Dans le deuxième paragraphe, nous faisons le lien avec la théorie du contrôle quantique exposée au chapitre précédent et insistons sur les conditions de faisabilité du contrôle. Enfin, dans les deux derniers paragraphes, nous présentons les aspects algorithmiques de notre méthode, et montrons notamment comment calculer les temps d'interaction relatifs à un opérateur unitaire arbitraire donné.

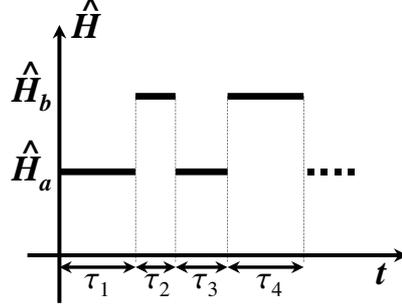


FIG. 2.1 – Forme pulsée du Hamiltonien de contrôle.

2.1 Présentation du problème

Considérons un système quantique d'espace de HILBERT \mathcal{H} , de dimension N et de Hamiltonien propre \hat{H}_0 . Notre but est de contrôler son évolution \hat{U} , c'est-à-dire d'être capable de réaliser n'importe quelle évolution arbitraire $\hat{U}_{arbitraire} \in U(N)$.

Pour cela, nous lui appliquons alternativement deux perturbations physiques, de Hamiltoniens respectifs \hat{V}_a et \hat{V}_b , pendant N^2 pulses de durées respectives $\{\tau_k \equiv t_k - t_{k-1}\}_{k=1, \dots, N^2}$ (on pose $t_0 = 0$ et $t_{N^2} = T$ correspondant respectivement aux dates de début et de fin de l'opération de contrôle) : le Hamiltonien total prend ainsi la forme "pulsée" suivante (voir figure 2.1)

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} \hat{H}_a = \hat{H}_0 + \hat{V}_a & \text{pour } t \in [t_{2k}, t_{2k+1}] \text{ (créneaux "impairs")} \\ \hat{H}_b = \hat{H}_0 + \hat{V}_b & \text{pour } t \in [t_{2k-1}, t_{2k}] \text{ (créneaux "pairs")} \end{cases} \quad (2.1)$$

pour $k = 1, \dots, N^2$,

et l'opérateur d'évolution total s'écrit

$$\hat{U}(\{\tau_1, \dots, \tau_{N^2-1}, \tau_{N^2}\}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_b \tau_{N^2}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_a \tau_{N^2-1}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_a \tau_1}. \quad (2.2)$$

si N est pair, et

$$\hat{U}(\{\tau_1, \dots, \tau_{N^2-1}, \tau_{N^2}\}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_a \tau_{N^2}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_b \tau_{N^2-1}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_a \tau_1}. \quad (2.3)$$

si N est impair.

Le problème de contrôle peut alors se formuler de la manière suivante : un opérateur unitaire $\hat{U}_{arbitraire} \in U(N)$ étant donné, existe-t-il un vecteur

temps $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_{N^2-1} \\ \tau_{N^2} \end{pmatrix}$ tel que

$$\hat{U}(\vec{\tau}) = \hat{U}_{\text{arbitraire}}, \quad (2.4)$$

et si oui, comment le trouver ?

Avant d'exposer l'algorithme qui nous permet de calculer explicitement $\vec{\tau}$, replaçons notre problème dans le cadre général de la théorie du contrôle quantique exposée au chapitre précédent, et précisons les conditions de faisabilité de l'objectif que nous nous fixons.

2.2 Lien avec la théorie du contrôle quantique, faisabilité du contrôle

On peut facilement ramener le Hamiltonien (2.1) à la forme générale (1.1) : en effet, en posant $\hat{h}_0 \equiv \frac{\hat{H}_a + \hat{H}_b}{2}$, $\hat{h}_1 \equiv \frac{\hat{H}_b - \hat{H}_a}{2}$, et en considérant la fonction $f_1(t)$ égale à -1 pendant les créneaux "impairs" $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ et $+1$ pendant les créneaux "pairs" $[t_{2k-1}, t_{2k}]$, on peut réécrire (2.1) sous la forme

$$\hat{H}(t) = \hat{h}_0 + f_1(t)\hat{h}_1.$$

Autrement dit, puisque la fonction $f_1(t)$ appartient à la classe des contrôles admissibles \mathcal{U}_3 , dite classe "bang-bang" (voir première partie), l'opérateur d'évolution (2.2) satisfait à un système invariant droit, comme défini dans la première partie. Ce travail d'écriture un peu formel n'est pas vain, puisqu'il nous permet dès lors d'appliquer au problème de contrôle initial le théorème général exposé dans la première partie : si les commutateurs de tous ordres des opérateurs $\{i\hat{h}_0, i\hat{h}_1\}$ engendrent l'espace vectoriel réel des opérateurs anti-hermitiens sur l'espace de HILBERT du système, alors il existe une solution $f_1(t) \in \mathcal{U}_3$ au problème de contrôle envisagé ; autrement dit, si le critère de contrôlabilité complète est vérifié, il sera possible de trouver un vecteur temps $\vec{\tau}$ remplissant l'objectif de contrôle. Remarquons néanmoins que le théorème général ne spécifie rien sur le nombre de créneaux nécessaires à l'opération de contrôle : nous nous limitons d'autorité à N^2 créneaux, en arguant du fait que le nombre de degrés de liberté d'une matrice unitaire est précisément N^2 . On peut également motiver ce choix par une raison plus technique, qui apparaîtra clairement lors de l'exposé des détails algorithmiques de notre méthode (voir paragraphe suivant).

Intéressons-nous maintenant à la vérification *pratique* du critère de contrôlabilité complète. Lorsque la dimension de l'espace de HILBERT du système reste faible, le critère peut être vérifié explicitement en calculant, par exemple au moyen d'un programme Mathematica, les commutateurs itérés jusqu'à trouver une base complète de l'espace des matrices anti-hermitiennes sur \mathcal{H} . En revanche, lorsque cette dimension augmente, la tâche devient très lourde, car le nombre de commutateurs à calculer augmente (au moins) comme N^2 . On peut alors utiliser la condition *suffisante* suivante, qui nous a été indiquée par V. KAC [Kac94]: si la matrice représentant \widehat{H}_b dans la base où \widehat{H}_a est diagonale ne possède pas d'élément hors diagonal nul, alors le système est contrôlable. Ce critère est relativement intuitif: en effet, deux opérateurs qui commutent possèdent une même base propre; on peut donc *raisonnablement espérer* que deux opérateurs ayant des bases propres très différentes engendreront par commutation (produit de LIE) des opérateurs linéairement indépendants.

2.3 Calcul des temps d'interaction

Une fois le critère de contrôlabilité complète rempli, il nous reste à calculer explicitement le vecteur temps $\vec{\tau}$, solution de (2.4). La méthode que nous utiliserons peut se décomposer en deux étapes: en premier lieu, nous calculerons le vecteur $\vec{\tau}^{(0)}$, qui permet de réaliser une évolution identité; puis, à partir de $\vec{\tau}^{(0)}$, nous nous approcherons itérativement du vecteur $\vec{\tau}$.

2.3.1 Evolution identité

Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer le vecteur temps $\vec{\tau}^{(0)}$ tel que

$$\widehat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) = \widehat{I}. \quad (2.5)$$

Une méthode possible consisterait à minimiser à 0 la fonction

$$F(\vec{\tau}) = \|\widehat{U}(\vec{\tau}) - \widehat{I}\|^2.$$

Malheureusement, cette fonction présente de nombreux minima locaux qui rendent sa minimisation malaisée. Dans la suite, nous suggérons une méthode pratique de détermination de $\vec{\tau}^{(0)}$, fondée sur les propriétés algébriques des racines *Nièmes* de l'identité.

Cas d'une dimension paire

Dans le cas où N est pair¹, nous appliquons la méthode suivante. Nous cherchons un nombre réduit N de paramètres $\{T_k\}_{k=1\dots N}$ tels que

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_b T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_{N-1}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_1} = \hat{I}^{\frac{1}{N}}, \quad (2.6)$$

où $\hat{I}^{\frac{1}{N}}$ est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'identité, *i.e.* une matrice dont les valeurs propres coïncident avec les racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité $\left\{e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right\}_{k=0,\dots,(N-1)}$; en d'autres termes, $\hat{I}^{\frac{1}{N}}$ est une matrice de la forme

$$\hat{I}^{\frac{1}{N}} = \hat{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{N}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i(N-1)\frac{2\pi}{N}} \end{bmatrix} \cdot \hat{M},$$

où \hat{M} est une matrice unitaire de changement de base.

Pour calculer les T_k , nous utiliserons la propriété algébrique suivante (voir démonstration ci-après): si $P_{\hat{U}}(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^N a_j \lambda^j$ désigne le polynôme caractéristique d'une matrice unitaire \hat{U} , alors $\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \geq 2$ et l'égalité est réalisée si et seulement si \hat{U} est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'identité, à un facteur de phase global près.

Ainsi, en calculant le polynôme caractéristique du produit

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_b T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_{N-1}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_1},$$

on trouve $P(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^N a_j (\{T_k\}_{k=1\dots N}) \lambda^j$, puis en minimisant

$$\sum_{j=0}^N |a_j (\{T_k\}_{k=1\dots N})|^2$$

à 2 par rapport aux T_k (ce qui peut être facilement programmé sous Mathematica par exemple), on obtient des temps $\{T_k\}_{k=1\dots N}$ tels que²

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_b T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_{N-1}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_1} = \hat{I}^{\frac{1}{N}},$$

1. C'est le cas qui nous intéressera le plus, physiquement, puisque nous serons généralement amenés à considérer des systèmes de n qubits, dont la dimension $N = 2^n$ est évidemment paire.

2. Remarquons que nous avons implicitement utilisé la parité de N dans l'écriture des différents produits matriciels.

à un facteur de phase global $e^{-i\alpha}$ près. L'intérêt de cette méthode tient au fait que la fonction $\sum |a_j|_{j=0}^{2^N}$ est relativement lisse et aisément minimisable.

Remarque : Démonstration de la propriété algébrique utilisée

Le polynôme caractéristique $P_{\widehat{U}}(\lambda)$ étant indépendant de la base dans laquelle on le calcule, on choisit de l'exprimer dans la base propre de \widehat{U} , dont les valeurs propres seront notées $\{e^{i\varphi_k}\}_{k=0,\dots,(N-1)}$:

$$P_{\widehat{U}}(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^N a_j \lambda^j = \prod_{k=0}^{N-1} (e^{i\varphi_k} - \lambda).$$

On calcule alors aisément

$$\begin{aligned} a_0 &= \prod_{k=0}^{N-1} e^{i\varphi_k} = e^{i\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k} \equiv e^{iN\beta} \\ a_N &= (-1)^N \end{aligned}$$

d'où $\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \geq |a_0|^2 + |a_N|^2 = 2$.

De plus, si $\sum_{j=0}^N |a_j|^2 = 2$, on a alors forcément

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad a_j = 0,$$

soit

$$P_{\widehat{U}}(\lambda) = (-1)^N \lambda^N + e^{iN\beta}.$$

Les valeurs propres de \widehat{U} sont donc $\left\{ \lambda_k = e^{i(\beta + \pi + \frac{\pi}{N})} e^{ik\frac{2\pi}{N}} \right\}_{k=0,\dots,(N-1)}$,

soit, en posant $\alpha \equiv (\beta + \pi + \frac{\pi}{N})$

$$\left\{ \lambda_k = e^{i\alpha} e^{ik\frac{2\pi}{N}} \right\}_{k=0,\dots,(N-1)}.$$

La matrice \widehat{U} est ainsi bien une racine $N^{\text{ième}}$ de l'identité, à un facteur de phase global près. Réciproquement, si \widehat{U} est une racine $N^{\text{ième}}$ de l'identité, à un facteur de phase global $e^{i\alpha}$ près, le polynôme caractéristique s'écrit

$$P_{\widehat{U}}(\lambda) = e^{iN\alpha} - \lambda^N$$

qui vérifie bien $\sum_{j=0}^N |a_j|^2 = 2$.

Enfin, on met les $\{T_k\}_{k=1\dots N}$ "bout à bout" pour former le vecteur $\vec{\tau}^{(0)}$,

défini par

$$\tau_{i+(j-1)N}^{(0)} = T_i \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

et qui vérifie bien

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) &= \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T_N} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T_N}}_{\widehat{I}^{\frac{1}{N}}} \dots \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T_N} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T_N}}_{\widehat{I}^{\frac{1}{N}}} \\ &= e^{i\alpha} \widehat{M}^{-1} \cdot \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{N}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i(N-1)\frac{2\pi}{N}} \end{array} \right] \cdot \widehat{M} \cdot \widehat{M}^{-1} \dots \\ &= e^{i\alpha} \widehat{M}^{-1} \cdot \widehat{I} \cdot \widehat{M} \\ &= e^{i\alpha} \widehat{I}. \end{aligned}$$

Par commodité, nous supposons implicitement dans la suite de nos calculs que le facteur de phase global de $\widehat{U}(\vec{\tau}^{(0)})$ est égal à 1, *i.e.* $\widehat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) = \widehat{I}$ exactement. On peut toujours se ramener à ce cas en substituant à la "vraie" matrice d'évolution $\widehat{U}(\vec{\tau})$ la matrice $\left[e^{-i\alpha} \widehat{U}(\vec{\tau}) \right]$, où $e^{i\alpha}$ est le facteur de phase global de $\widehat{U}(\vec{\tau}^{(0)})$. Il faut néanmoins remarquer qu'à la fin de l'algorithme, on obtient alors $\widehat{U}(\vec{\tau}) = e^{i\alpha} \widehat{U}_{arbitraire}$ et non $\widehat{U}(\vec{\tau}) = \widehat{U}_{arbitraire}$. Généralement, ce facteur de phase n'a aucune importance. Néanmoins, si l'on désire obtenir rigoureusement $\widehat{U}_{arbitraire}$, il suffit, une fois le facteur $e^{i\alpha}$ déterminé, de substituer, dans nos calculs, $e^{-i\alpha} \widehat{U}_{arbitraire}$ à $\widehat{U}_{arbitraire}$, de manière à obtenir, à la fin des calculs, $\widehat{U}(\vec{\tau}) = e^{i\alpha} \left(e^{-i\alpha} \widehat{U}_{arbitraire} \right) = \widehat{U}_{arbitraire}$.

cas d'une dimension impaire

Lorsque N est impair, l'application directe de la méthode décrite ci-dessus est impossible. En effet, si nous décomposons la matrice d'évolution 2.3 en un produit de N sous-opérateurs, nous trouvons, au contraire du cas pair, 2 types de produits matriciels différents

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b T_N} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T_N}$$

et

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b T'_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a T'_N} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b T'_N}.$$

Pour suivre la même idée que précédemment, nous devons rechercher les temps $\{T_1, \dots, T_N\}$ et $\{T'_1, \dots, T'_N\}$ tels que ces deux produits soient égaux à la même racine $N^{ième}$ de l'identité $\hat{I}^{\frac{1}{N}}$. Cet objectif est malheureusement difficile à réaliser. Nous pouvons en effet utiliser la propriété algébrique considérée au-dessus pour déterminer, par exemple, les temps $\{T_1, \dots, T_N\}$ tels que

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_b T_N} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T_N} = \hat{I}^{\frac{1}{N}}.$$

Mais, pour les temps $\{T'_1, \dots, T'_N\}$, nous ne pouvons employer la même technique, car elle amènerait, a priori, à une racine $N^{ième}$ différente de $\hat{I}^{\frac{1}{N}}$. Nous en sommes donc réduits à rechercher les temps $\{T'_1, \dots, T'_N\}$ par minimisation à 0 de la fonction

$$f(\vec{T}') = \left\| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_b T'_N} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a T'_N} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_b T'_N} - \hat{I}^{\frac{1}{N}} \right\|^2.$$

Cette tâche est malheureusement très ardue car la fonction f présente de nombreux minima locaux.

Ainsi, le calcul de $\vec{\tau}^{(0)}$ pour un système de dimension impaire demeure délicat. En revanche, la deuxième partie de notre algorithme, *i.e.* la détermination de $\vec{\tau}$ à partir de $\vec{\tau}^{(0)}$, est la même, quelle que soit la parité de N .

2.3.2 Evolution arbitraire quelconque

Au paragraphe précédent, nous avons présenté une méthode permettant de calculer le vecteur $\vec{\tau}^{(0)}$ tel que $\hat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) = \hat{I}$. Nous allons maintenant montrer comment, à partir de $\vec{\tau}^{(0)}$, déterminer le vecteur $\vec{\tau}$ solution de (2.4).

Pour une évolution $\hat{U}_{arbitraire}$ proche de l'identité, nous utiliserons une méthode itérative d'approximations successives, de type "méthode de NEWTON" : nous construirons ainsi une suite de vecteurs temps $\{\vec{\tau}^{(n)}\}$ qui tend asymptotiquement vers le vecteur $\vec{\tau}^{(\infty)} = \vec{\tau}$ recherché.

Pour une évolution $\hat{U}_{arbitraire}$ finie, éloignée de l'identité, nous ne pourrions appliquer directement la même méthode mais devons morceler le travail. Plus précisément, nous diviserons la séquence totale de contrôle en n^* sous-séquences identiques qui réalisent chacune l'évolution $\left(\hat{U}_{arbitraire}\right)^{\frac{1}{n^*}}$, n^* étant supposé assez grand pour que $\left(\hat{U}_{arbitraire}\right)^{\frac{1}{n^*}}$ soit accessible depuis l'identité par la méthode itérative précédente. En mettant bout à bout ces n^* séquences, nous obtiendrons

$$\left(\hat{U}_{arbitraire}^{\frac{1}{n^*}}\right)^{n^*} = \hat{U}_{arbitraire}.$$

Des remarques et comparaisons avec d'autres paramétrisations du groupe $U(N)$ nous permettront de souligner les difficultés numériques auxquelles notre méthode doit faire face.

Evolution arbitraire proche de l'identité

Si l'évolution $\hat{U}_{arbitraire}$ est proche de l'identité, on peut employer un algorithme itératif de type méthode de NEWTON que nous décrivons maintenant.

Première étape

A la première étape, nous cherchons un accroissement $\delta \vec{\tau}^{(1)}$, qui nous rapproche de $\hat{U}_{arbitraire}$. Pour ce faire, nous utilisons une linéarisation de

$$\hat{U}(\vec{\tau}^{(0)} + \delta \vec{\tau}^{(1)}) = \hat{U}_{arbitraire}. \quad (2.8)$$

$\hat{U}_{arbitraire}$ étant proche de l'identité, on peut la mettre sous la forme

$$\hat{U}_{arbitraire} = e^{-i \frac{\varepsilon^{(1)}}{\hbar} \hat{K}(\vec{\tau}^{(0)})} = \hat{I} - i \frac{\varepsilon^{(1)}}{\hbar} \hat{K}(\vec{\tau}^{(0)}) + o(|\varepsilon^{(1)}|^2)$$

où $\hat{K}(\vec{\tau}^{(0)})$ est une matrice hermitique et $\varepsilon^{(1)}$ un petit paramètre réel. De plus,

$$\begin{aligned} \hat{U}(\vec{\tau}^{(0)} + \delta \vec{\tau}^{(1)}) &= \hat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) + \overrightarrow{grad}_{\vec{\tau}} \left(\hat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) \right) \cdot \delta \vec{\tau}^{(1)} + o(\|\delta \vec{\tau}^{(1)}\|^2) \\ &= \hat{I} + \sum_{k=1}^{N^2} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_k}(\vec{\tau}^{(0)}) \delta \tau_k^{(1)} + o(\|\delta \vec{\tau}^{(1)}\|^2) \\ &= \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N^2} \hat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)}) \delta \tau_k^{(1)} + o(\|\delta \vec{\tau}^{(1)}\|^2), \end{aligned}$$

où $\hat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)}) \equiv i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_k}(\vec{\tau}^{(0)})$. La version linéarisée de (2.8) prend ainsi la forme suivante

$$\varepsilon^{(1)} \hat{K}(\vec{\tau}^{(0)}) = \sum_{k=1}^{N^2} \hat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)}) \delta \tau_k^{(1)}. \quad (2.9)$$

L'expression des $\hat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)})$ est simple et peut être calculée analytiquement. Ainsi, comme $\frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_1}(\vec{\tau}^{(0)}) = -\frac{i}{\hbar} \hat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) \hat{H}_a = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_a$, on a

$$\hat{h}_1(\vec{\tau}^{(0)}) = \hat{H}_a,$$

de même comme $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \tau_2}(\vec{\tau}^{(0)}) = -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_b \tau_{N^2}^{(0)}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_b \tau_2^{(0)}} \cdot \widehat{H}_b \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}}$, et $(e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_b \tau_{N^2}^{(0)}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_b \tau_2^{(0)}}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}} = \widehat{I}$,

$$\widehat{h}_2(\vec{\tau}^{(0)}) = e^{\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}} \cdot \widehat{H}_b \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}}.$$

Une généralisation simple permet d'écrire :

$$\widehat{h}_{2l}(\vec{\tau}^{(0)}) = e^{\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}} \dots e^{\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_{2l-1}^{(0)}} \cdot \widehat{H}_b \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_{2l-1}^{(0)}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}} \quad (2.10)$$

$$\widehat{h}_{2l-1}(\vec{\tau}^{(0)}) = e^{\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}} \dots e^{\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_b \tau_{2l}^{(0)}} \cdot \widehat{H}_a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_b \tau_{2l}^{(0)}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{H}_a \tau_1^{(0)}} \quad (2.11)$$

$$\text{pour } l = 1, \dots, \frac{N^2}{2}.$$

Pour finir, en nous plaçant dans le sous-espace réel de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, N^2 -dimensionnel, formé des matrices complexes $N \times N$ hermitiques, on peut voir chaque $\widehat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)})$ comme un vecteur et construire la matrice $\widetilde{h}(\vec{\tau}^{(0)})$, de dimensions $N^2 \times N^2$, dont les colonnes sont les vecteurs $\widehat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)})$, ainsi que le vecteur $\vec{v}(\vec{\tau}^{(0)})$ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ représentant l'opérateur (hermitique) $\varepsilon^{(1)} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(0)})$. L'équation (2.9) peut alors s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\widetilde{h}(\vec{\tau}^{(0)}) \cdot \delta \vec{\tau}^{(1)} = \vec{v}(\vec{\tau}^{(0)}). \quad (2.12)$$

Remarque : numériquement, le vecteur $\vec{v}(\vec{\tau}^{(0)})$ sera calculé rapidement comme le vecteur associé à la partie hermitique de la matrice $i\hbar (\widehat{U}_{\text{arbitraire}} - \widehat{I})$, confondue, au premier ordre en $\varepsilon^{(1)}$ avec $\varepsilon^{(1)} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(0)})$.

En résolvant (2.12), on obtient $\delta \vec{\tau}^{(1)}$, et l'on pose alors $\vec{\tau}^{(1)} \equiv \vec{\tau}^{(0)} + \delta \vec{\tau}^{(1)}$.

Étape j

On réitère le processus, de sorte qu'à l'étape (j), on cherche l'accroissement $\delta \vec{\tau}^{(j)}$ en résolvant la version linéarisée de

$$\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)} + \delta \vec{\tau}^{(j)}) = \widehat{U}_{\text{arbitraire}}. \quad (2.13)$$

La matrice $\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)})$ étant très proche de $\widehat{U}_{\text{arbitraire}}$ (à chaque itération, $\widehat{U}(\vec{\tau})$ se rapproche de $\widehat{U}_{\text{arbitraire}}$), on peut écrire $\widehat{U}_{\text{arbitraire}}$ comme le produit de $\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)})$ par une matrice unitaire infinitésimale, de la forme

$$e^{-i \frac{\varepsilon^{(j)}}{\hbar} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(j-1)})} = \widehat{I} - i \frac{\varepsilon^{(j)}}{\hbar} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(j-1)}) + o(|\varepsilon^{(j)}|^2)$$

où $\widehat{K}(\vec{\tau}^{(j-1)})$ est une matrice hermitique et $\varepsilon^{(j)}$ un petit paramètre réel. Ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)})^{-1} \widehat{U}_{\text{arbitraire}} &= \widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)})^{-1} \widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)}) e^{-i\frac{\varepsilon^{(j)}}{\hbar} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(j-1)})} \\ &= \widehat{I} - i\frac{\varepsilon^{(j)}}{\hbar} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(j-1)}) + o(|\varepsilon^{(j)}|^2).\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le développement

$$\begin{aligned}\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)} + \delta\vec{\tau}^{(j)}) &= \widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)}) + \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{\tau}} \left(\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)}) \right) \cdot \delta\vec{\tau}^{(j)} + o(\|\delta\vec{\tau}^{(j)}\|^2) \\ &= \widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)}) + \sum_{k=1}^{N^2} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \tau_k}(\vec{\tau}^{(j-1)}) \delta\tau_k^{(j)} + o(\|\delta\vec{\tau}^{(j)}\|^2),\end{aligned}$$

on obtient facilement

$$\widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)})^{-1} \widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)} + \delta\vec{\tau}^{(j)}) = \widehat{I} - \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N^2} \widehat{h}_k(\vec{\tau}^{(j-1)}) \delta\tau_k^{(j)} + o(\|\delta\vec{\tau}^{(j)}\|^2),$$

où $\widehat{h}_k(\vec{\tau}^{(0)}) \equiv i\hbar \widehat{U}(\vec{\tau}^{(j-1)})^{-1} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \tau_k}(\vec{\tau}^{(j-1)})$. On peut alors écrire la version linéarisée de (2.13)

$$\varepsilon^{(j)} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(j-1)}) = \sum_{k=1}^{N^2} \widehat{h}_k(\vec{\tau}^{(j-1)}) \delta\tau_k^{(j)}. \quad (2.14)$$

Les $\widehat{h}_k(\vec{\tau}^{(j-1)})$ peuvent être calculés comme précédemment, et prennent les mêmes formes analytiques.

Il ne reste alors plus qu'à résoudre (2.14) en nous plaçant dans l'espace réel des matrices hermitiques $N \times N$ et en inversant le système linéaire

$$\tilde{h}(\vec{\tau}^{(j-1)}) \cdot \delta\vec{\tau}^{(j)} = \vec{v}(\vec{\tau}^{(j-1)}), \quad (2.15)$$

les différents termes $\tilde{h}, \delta\vec{\tau}, \vec{v}$ ayant la même signification que précédemment.

Le vecteur $\vec{\tau}$ est donné à la toute fin de l'algorithme par $\vec{\tau}^{(\infty)}$.

On peut programmer l'algorithme sous la forme de la boucle suivante :

1. à partir du vecteur $\vec{\tau}$ dont on dispose ($\vec{\tau} = \vec{\tau}^{(0)}$ au début de l'algorithme), on calcule $\tilde{h}(\vec{\tau})$ et $\vec{v}(\vec{\tau})$,
2. on résout ensuite le système $\tilde{h}(\vec{\tau}) \cdot \delta\vec{\tau} = \vec{v}(\vec{\tau})$, qui nous donne $\delta\vec{\tau}$,

3. on effectue enfin la substitution $\vec{\tau} \rightarrow \vec{\tau} + \delta \vec{\tau}$ avant de reprendre l'étape 1.

En introduisant en début de boucle un test³ sur $\vec{v}(\vec{\tau})$, on peut calculer une solution $\vec{\tau}_{approchée}$ arbitrairement proche de la solution "idéale" $\vec{\tau}^{(\infty)}$.

Remarques

L'algorithme que nous venons de présenter adopte une approche de type "méthode de NEWTON", qui suppose que nous partions d'une valeur initiale $\vec{\tau}^{(0)}$ assez proche de la solution $\vec{\tau}^{(\infty)}$; en d'autres termes, notre algorithme ne permet d'atteindre que des évolutions proches de l'identité.

D'autre part, la réussite de l'algorithme repose sur notre capacité à décomposer, à chaque étape, l'opérateur $\varepsilon \hat{K}$ sur les Hamiltoniens \hat{h}_k . Il est donc crucial que les \hat{h}_k forment, à chaque étape, une base de l'espace des matrices hermitiques $N \times N$. Ceci impose évidemment leur nombre, N^2 , égal à la dimension de l'espace qu'ils sont censés engendrer (*i.e.* le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices complexes hermitiques $N \times N$): nous voyons ici apparaître la raison "technique" qui nous a fait choisir le nombre de paramètres de contrôle égal à N^2 . Ceci impose également que les vecteurs \hat{h}_k soient linéairement indépendants: en d'autres termes, le déterminant de la matrice $\hat{h}(\vec{\tau})$ doit, à chaque étape, être différent de 0.

On peut se donner une image simple de la manière dont fonctionne l'algorithme que nous venons de présenter (voir figure 2.2). L'opérateur d'évolution $\hat{U}(\vec{\tau})$ se déplace sur la "sphère" $U(N)$. Lorsque l'algorithme se déroule correctement, partant de $\hat{U}(\vec{\tau}^{(0)}) = \hat{I}$, $\hat{U}(\vec{\tau})$ se rapproche à chaque étape de l'évolution cible $\hat{U}_{arbitraire}$: à chaque étape du calcul, les Hamiltoniens \hat{h}_k engendrent un "plan" (plan tangent à la sphère) de sorte que le système peut se déplacer dans la direction de la cible (figure 2.2a). En revanche, dans certains cas, l'algorithme s'arrête avant d'avoir atteint $\vec{\tau}^{(\infty)}$ car le déterminant de $\hat{h}(\vec{\tau})$ s'annule: l'espace engendré par les \hat{h}_k n'est alors pas assez grand, et le système ne peut se déplacer vers $\hat{U}_{arbitraire}$ (figure 2.2b). Dans ce cas, on doit prendre pour l'algorithme un nouveau point de départ $\vec{\tau}^{(0)}$.

Il faut noter que cette situation est propre à notre choix de paramétrisation du groupe $U(N)$, physiquement motivé mais mathématiquement très inconfortable. Prenons, par exemple, la paramétrisation, plus agréable, de LIE

$$\hat{U}(\vec{x}) = e^{-i\vec{x} \cdot \vec{\hat{g}}},$$

où les $\{\hat{g}_k\}_{k=1, N^2}$ sont les générateurs infinitésimaux de $U(N)$. Partant de $\hat{U}(\vec{0}) = \hat{I}$, on peut atteindre, au moyen d'un algorithme itératif semblable

3. Il suffit de remarquer que pour $\vec{\tau} = \vec{\tau}^{(\infty)}$, $\vec{v}(\vec{\tau}) = 0$: on peut donc introduire la fonction $test(\vec{\tau}) = \|\vec{v}(\vec{\tau})\|$, dont on vérifiera qu'elle est "assez" proche de 0.

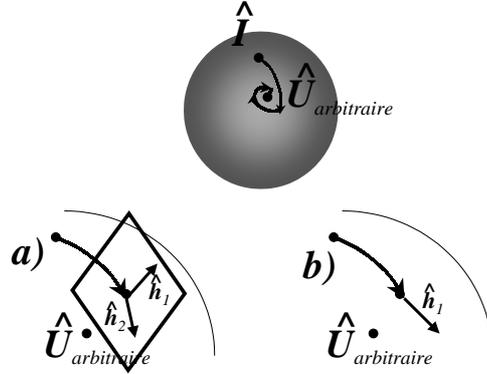


FIG. 2.2 – Image simple de l’algorithme de recherche des temps d’interaction. L’opérateur \hat{U} évolue sur la sphère $U(N)$: (a) les Hamiltoniens \hat{h}_k engendrent le plan tangent à la sphère et le système peut se déplacer vers l’évolution cible ; (b) les Hamiltoniens \hat{h}_k sont linéairement dépendants, et ne permettent pas au système de se rapprocher de l’évolution cible.

au précédent, toute évolution cible $\hat{U}_{arbitraire}$ proche de l’identité, sans jamais rencontrer le problème représenté sur la figure 2.2b : en effet, à chaque étape, les opérateurs $\left\{ \hat{U}(\vec{x})^{-1} \hat{g}_k \hat{U}(\vec{x}) \right\}_{k=1, \dots, N^2}$ engendrent *tout* le plan tangent à la sphère $U(N)$ au point $\hat{U}(\vec{x})$, qui n’est autre que l’algèbre de LIE $u(N)$ à laquelle on a fait subir la rotation $\hat{U}(\vec{x})$; ainsi, à chaque étape, le système est libre de se déplacer dans toutes les directions, et en particulier vers l’évolution cible $\hat{U}_{arbitraire}$.

Evolution arbitraire quelconque

L’évolution $\hat{U}_{arbitraire}$ que l’on cherche à réaliser n’est généralement pas très proche de l’identité : il s’agit souvent de transformations finies, comme les ”portes quantiques” (par exemple, la porte *CNOT*), analogues des portes logiques classiques. L’algorithme précédent ne peut être directement employé pour atteindre de telles évolutions, il doit être légèrement modifié.

L’idée est la suivante : puisqu’on ne peut directement passer de l’identité à l’évolution cible $\hat{U}_{arbitraire}$, nous allons ”morceler” le travail. Nous considérerons ainsi un entier $n \geq 2$ tel que $\left(\hat{U}_{arbitraire} \right)^{\frac{1}{n}}$ soit accessible depuis \hat{I} et appliquerons notre algorithme itératif pour trouver le vecteur temps

$\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n}\right)}$ qui vérifie

$$\widehat{U}\left(\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \left(\widehat{U}_{\text{arbitraire}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Relançant notre algorithme en prenant $\left(\widehat{U}_{\text{arbitraire}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ pour nouvelle évolution cible, nous passerons ensuite de $\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n}\right)}$ à $\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n-1}\right)}$ tel que

$$\widehat{U}\left(\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right) = \left(\widehat{U}_{\text{arbitraire}}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

et ainsi de suite. De cette façon, nous déterminerons $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\left(\frac{1}{1}\right)}$ de proche en proche.

Comme nous l'avons signalé précédemment, l'algorithme peut malheureusement "bloquer", lors d'une étape de calcul, sur l'annulation du déterminant de $\tilde{h}(\vec{\tau})$.

Dans ce cas, plusieurs solutions sont envisageables. On peut chercher un nouveau point de départ $\vec{\tau}^{(0)'}$, en "espérant" que le chemin de $\vec{\tau}^{(0)'}$ à $\vec{\tau}$ ne comportera pas de point singulier. Cette éventualité est malheureusement d'autant moins probable que l'évolution cible est éloignée de l'identité.

On peut également "garder" le vecteur $\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n^*}\right)}$, $n^* \in \mathbb{N}^*$, le plus proche du point d'arrêt, et le dupliquer n^* fois pour former le super-vecteur de contrôle $\vec{\Gamma}$ tel que $\Gamma_{i+(j-1)N^2} = \left[\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n^*}\right)}\right]_i$ pour $i = 1, \dots, N^2$ et $j = 1, \dots, n^*$. Ainsi, en appliquant au système la nouvelle séquence de contrôle, formée de n^*N^2 pulses dont les durées sont données par le vecteur $\vec{\Gamma}$, on obtient l'évolution globale recherchée

$$\underbrace{\widehat{U}\left(\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n^*}\right)}\right) \cdot \widehat{U}\left(\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n^*}\right)}\right) \dots \widehat{U}\left(\vec{\tau}_{\left(\frac{1}{n^*}\right)}\right)}_{n^* \text{ fois}} = \widehat{U}_{\text{arbitraire}}.$$

Notons que nous choisissons n^* le plus petit possible pour avoir la séquence de contrôle minimale, *i.e.* celle qui requerra le moins d'étapes possible et donc le moins de temps possible.

2.4 Contrôle par l'amplitude des perturbations

Nous concluons ce chapitre en donnant une autre version de l'algorithme précédent. En effet, plutôt que d'appliquer successivement deux Hamiltoniens $\widehat{H}_a = \widehat{H}_0 + \widehat{V}_a$ et $\widehat{H}_b = \widehat{H}_0 + \widehat{V}_b$ pendant N^2 pulses de durées $\{\tau_k\}_{k=1, \dots, N^2}$

différentes, nous aurions pu choisir d'imposer, pendant N^2 pulses de même durée $\tau = \frac{T}{N^2}$, N^2 Hamiltoniens différents

$$\widehat{H}(t) = \begin{cases} \widehat{H}_{2k+1} = \widehat{H}_0 + \lambda_{2k+1} \widehat{V}_a & (\text{créneaux "impairs"}) \\ \widehat{H}_{2k} = \widehat{H}_0 + \lambda_{2k} \widehat{V}_b & (\text{créneaux "pairs"}) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

où les $\{\lambda_k\}_{k=1, \dots, N^2}$ jouent le rôle des paramètres de contrôle libres, à la place des temps d'interaction. L'opérateur d'évolution total s'écrit alors

$$\widehat{U}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N^2-1}, \lambda_{N^2}\}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + \lambda_{N^2} \widehat{V}_b)\tau} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + \lambda_{N^2-1} \widehat{V}_a)\tau} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + \lambda_1 \widehat{V}_a)\tau}, \quad (2.18)$$

et le problème de contrôle complet se ramène ainsi à trouver le vecteur $\vec{\lambda} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N^2-1} \\ \lambda_{N^2} \end{pmatrix} \text{ tel que } \widehat{U}(\vec{\lambda}) = \widehat{U}_{\text{arbitraire}}.$$

La méthode reste en tout point semblable à celle que nous avons exposée plus haut. On détermine d'abord les paramètres $\{L_k\}_{k=1, \dots, N}$ tels que

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + L_N \widehat{V}_b)\tau} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + L_{N-1} \widehat{V}_a)\tau} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + L_1 \widehat{V}_a)\tau} = \widehat{I}^{\frac{1}{N}},$$

en minimisant à 2 la somme $\sum_{j=0}^N |a_j(\{L_k\}_{k=1 \dots N})|^2$ des normes au carré des coefficients du polynôme caractéristique du produit matriciel

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + L_N \widehat{V}_b)\tau} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + L_{N-1} \widehat{V}_a)\tau} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{H}_0 + L_1 \widehat{V}_a)\tau}.$$

On approche ensuite itérativement le vecteur recherché $\vec{\lambda}$ en utilisant la même méthode que précédemment : pour une évolution arbitraire proche de l'identité

$$\widehat{U}_{\text{arbitraire}} = e^{-i\frac{\varepsilon^{(1)}}{\hbar} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(0)})} = \widehat{I} - i\frac{\varepsilon^{(1)}}{\hbar} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(0)}) + o(|\varepsilon^{(1)}|^2),$$

on linéarise

$$\widehat{U}(\vec{\lambda}^{(0)} + \delta \vec{\lambda}^{(1)}) = \widehat{U}_{\text{arbitraire}}$$

en

$$\frac{\varepsilon^{(1)}}{\tau} \widehat{K}(\vec{\tau}^{(0)}) = \sum_{k=1}^{N^2} \widehat{h}_k(\vec{\lambda}^{(0)}) \delta \lambda_k^{(1)}$$

où

$$\begin{aligned}\widehat{h}_{2l}(\vec{\lambda}) &= e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a\lambda_1} \dots e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a\lambda_{2l-1}} \cdot \widehat{V}_b \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a\lambda_{2l-1}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a\lambda_1}, \\ \widehat{h}_{2l+1}(\vec{\lambda}) &= e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a\lambda_1} \dots e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b\lambda_{2l}} \cdot \widehat{V}_a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_b\lambda_{2l}} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_a\lambda_1}, \\ \text{pour } l &= 1, \dots, \frac{N^2}{2},\end{aligned}$$

et on résout le système linéaire associé dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$

$$\widetilde{h}(\vec{\lambda}^{(0)}) \cdot \delta \vec{\lambda}^{(1)} = \vec{v}(\vec{\lambda}^{(0)}), \quad (2.19)$$

où $\widetilde{h}(\vec{\lambda}^{(0)})$ est la matrice $N^2 \times N^2$ dont les colonnes sont les $\widehat{h}_k(\vec{\lambda}^{(0)})$ et où $\vec{v}(\vec{\lambda}^{(0)})$ est le vecteur de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ correspondant à la matrice $N \times N$ $\frac{\varepsilon^{(1)}}{\tau} \widehat{K}(\vec{\lambda}^{(0)})$. La répétition de ce processus amène au vecteur recherché.

Pour une évolution éloignée de l'identité, on procède de la même manière qu'indiqué plus haut : on "morçèle" le travail, en passant de $\vec{\lambda}^{(0)}$ à $\vec{\lambda}^{(\frac{1}{n})}$ tel que

$$\widehat{U}(\vec{\lambda}^{(\frac{1}{n})}) = \left(\widehat{U}_{arbitraire}\right)^{\frac{1}{n}},$$

où n est un entier, le plus petit possible mais suffisamment grand pour que notre algorithme itératif converge ; on passe ensuite à $\vec{\lambda}^{(\frac{1}{n-1})}$ tel que

$$\widehat{U}(\vec{\lambda}^{(\frac{1}{n-1})}) = \left(\widehat{U}_{arbitraire}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

et ainsi de suite jusqu'à $\vec{\lambda}^{(\frac{1}{n^*})}$ tel que

$$\widehat{U}(\vec{\lambda}^{(\frac{1}{n^*})}) = \left(\widehat{U}_{arbitraire}\right)^{\frac{1}{n^*}}$$

(dans l'idéal, $n^* = 1$).

On voit ainsi que notre méthode est tout à fait applicable à un contrôle par l'amplitude des perturbations. Dans certaines situations physiques, il pourra être préférable d'utiliser cette version. Néanmoins dans la suite nous ferons exclusivement usage de la variante "contrôle par les temps d'interaction".

Chapitre 3

Contrôle d'un système réel

"Nous sommes tous obligés, pour rendre la réalité supportable, d'entretenir en nous quelques petites folies."

Marcel Proust, *A l'ombre des jeunes filles en fleurs*.

Pour terminer cette première partie, nous nous proposons d'appliquer notre technique de contrôle à un système réel, formé de deux atomes de césium froids placés dans des états excités de RYDBERG. Le spectre du système considéré sera restreint à 4 états, de sorte que nous aurons affaire, formellement, au contrôle d'un système de 2 qubits. S'il peut paraître trivial et/ou peu intéressant, le contrôle de deux qubits est en réalité très important : toute transformation d'un ensemble de N qubits peut en effet se décomposer en un produit d'opérations unitaires à 1 et 2 qubits [DiV95b]. L'étude du contrôle total d'un ensemble de 2 qubits est donc un passage obligé dans le processus de construction d'un ordinateur quantique.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons quelques informations utiles concernant l'atome de césium et ses états de RYDBERG. Nous passons ensuite au contrôle pratique d'un système de deux atomes de césium froids en interaction dipôle-dipôle et placés dans un champ STARK contrôlé : après une présentation du système étudié et des hypothèses qui mènent à la forme du Hamiltonien de contrôle, nous décrivons rapidement le calcul des temps d'interaction et terminons par une discussion critique des résultats obtenus.

3.1 L'atome de césium

Le but de ce chapitre est d'appliquer la technique de contrôle non holonôme à un système physique réel. Notre choix s'est porté naturellement sur l'atome de césium, bien connu du groupe expérimental "Atomes froids" du laboratoire Aimé COTTON. Dans ce paragraphe, nous donnons un bref

aperçu des principales caractéristiques de l'atome de césium, de ses états de RYDBERG et de l'effet STARK. Cette présentation rapide s'inspire largement des thèses de D.COMPARAT et P.NOSBAUM [Com99, Nos96], ainsi que de l'ouvrage de référence de T.F. GALLAGHER [Gal94], auquel nous renvoyons le lecteur pour une étude très complète.

3.1.1 Spectre du césium, états de Rydberg

Dans le cadre de l'approximation de champ central (cf [BJ03] chap.8), l'étude d'un atome alcalin tel que le césium ($^{55}_{133}\text{Cs}$) peut se ramener à celle de son électron périphérique placé dans un potentiel effectif. La taille finie de son coeur ionique implique néanmoins un léger décalage de ses niveaux d'énergie par rapport au cas hydrogénoïde (levant partiellement la dégénérescence en énergie) : l'énergie de la couche monoélectronique (n,l) est ainsi donnée par la formule

$$E_{nl} = \frac{-e^2}{a_{\mu_e}} \frac{1}{2(n - \delta_{nl})^2}, \quad (3.1)$$

où δ_{nl} est appelé *défait quantique* (ou correction de RYDBERG), et où $a_{\mu_e} = a_0 \frac{m_e}{\mu_e}$, μ_e étant la masse réduite du système électron-coeur.

En toute rigueur, on doit tenir compte à la fois des structures fine et hyperfine de l'atome. Néanmoins, nous laisserons de côté la structure hyperfine pour nous placer dans la base $|nljM_j\rangle$, où $j = |l \pm \frac{1}{2}|$ (moment cinétique total de l'électron périphérique).

Le traitement monoélectronique précédent est valable, à condition de modifier légèrement les valeurs des opérateurs à un électron, comme le moment dipolaire par exemple, par rapport au cas hydrogénoïde : dans nos calculs, nous utiliserons les valeurs numériques des éléments de matrice réduits du dipôle pour l'atome de césium, obtenues par A. BLETON durant sa thèse au laboratoire Aimé COTTON [Ble96].

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement à des atomes de césium placés dans des états très excités, de nombre principal n élevé (nous prendrons typiquement $n \sim 20$), appelés "états de RYDBERG". Pour de tels états, la formule (3.1) reste valable ; pour $n \geq 10$, l'expérience fournit, dans le cas du césium, les valeurs suivantes des défauts quantiques (voir [Gal94], p.353) :

$$\delta_{ns} \approx 4,05, \delta_{np} \approx 3,57, \delta_{nd} \approx 2,47, \delta_{nf} \approx 0,03.$$

Les atomes de RYDBERG possèdent de nombreuses propriétés exotiques, comme leur grande durée de vie (variant comme n^3) et leur grand rayon (va-

riant comme n^2) donnant lieu à des moments dipolaires "anormalement" importants. Ces caractéristiques étonnantes permettent de simuler, en laboratoire et pour des atomes "ordinaires", des conditions expérimentales extrêmes (notamment des champs très intenses).

3.1.2 Atomes de césium en champ électrique statique : effet Stark

La première mise en évidence expérimentale de l'influence d'un champ électrique statique sur le spectre de l'atome d'hydrogène est due à J. STARK (1913), qui donna son nom au phénomène observé. L'effet STARK des atomes complexes est très semblable à celui de l'hydrogène mais montre toutefois quelques différences notables. Nous nous proposons ici de décrire simplement le cas de l'atome d'hydrogène et d'indiquer les modifications qui s'opèrent lors du passage à l'atome de césium.

Considérons tout d'abord l'atome d'hydrogène.

En appliquant les règles de sélection dipolaires électriques (cf [BJ03] chap. 4), on se convainc aisément qu'un champ dirigé selon l'axe de quantification ne couple que les états de même nombre magnétique m_l : des multiplicités de nombres magnétiques différents demeurent ainsi indépendantes et ne se "mélangent pas" ; en d'autres termes, les états propres en champ non nul sont obtenus par combinaison linéaire d'états non perturbés de même m_l . En outre, la forme de l'équation de SCHRODINGER écrite en coordonnées paraboliques et projetée sur la base des fonctions d'ondes hydrogénoïdes (cf [Gal94] chap. 6, [BJ03] chap. 5) montre clairement que le signe de m_l n'influe pas sur la valeur de l'énergie : autrement dit, les multiplicités de nombres quantiques magnétiques m_l et $-m_l$ présentent, pour une même valeur du champ appliqué, les mêmes niveaux d'énergie. Pratiquement, on représentera généralement sur des graphes séparés les niveaux d'énergie correspondant à des états de $|m_l|$ différents, les niveaux d'énergie des multiplicités m_l et $-m_l$ se recouvrant parfaitement.

Enfin, un calcul perturbatif, prenant pour états de départ les fonctions d'ondes hydrogénoïdes en coordonnées paraboliques montre une levée de dégénérescence dans chaque multiplicité définie par les nombres quantiques n et m_l : les $n - |m_l|$ états qu'elle contient se trouvent en effet "dispersés" en énergie par l'application du champ STARK. Rappelons néanmoins que, comme indiqué plus haut, la dégénérescence sur le signe de m_l demeure. Signalons également que la dégénérescence en $|m_l|n$ n'est levée qu'au deuxième ordre de la théorie des perturbations, ce qui signifie que, pour des champs faibles, des états de $|m_l|$ différents peuvent avoir même énergie. La levée de dégénérescence due à l'effet STARK est donc *partielle*.

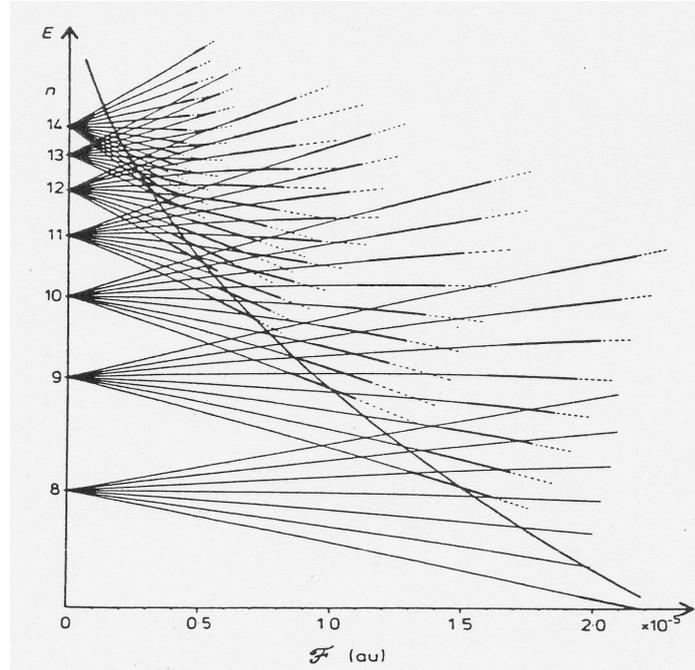


FIG. 3.1 – Structure STARK de l'atome d'hydrogène autour des multiplicités $n = 8, \dots, 14$ pour $|m_l| = 1$. Cette figure est empruntée à [LKB80].

La figure 3.1, empruntée à [LKB80], représente "l'éclatement" STARK des multiplicités ($n = 8, \dots, 14; |m_l| = 1$). On remarque qu'outre les dégénérescences évoquées plus haut, des dégénérescences accidentelles, appelées "croisements", ont lieu, pour certaines valeurs du champ appliqué, entre états de même nombre magnétique et de nombres quantiques principaux différents : il est important de noter que les états propres du Hamiltonien total se croisent "sans se voir" puisqu'aucune perturbation ne les couple les uns aux autres¹.

L'atome de césium ressemble fortement à l'atome d'hydrogène, a fortiori lorsqu'il est placé dans un état de RYDBERG : on peut donc légitimement s'attendre à un comportement en champ électrique très voisin [ZLKK79]. Des différences importantes apparaissent néanmoins.

D'une part, $|m_l|$ cesse d'être un bon nombre quantique, en raison de la structure fine, qu'il n'est plus possible d'ignorer pour un alcalin aussi lourd que le césium ; on doit donc désormais utiliser $|m_j|$. Comme dans le cas de l'atome d'hydrogène, les règles de sélection (cf [BJ03] chap. 9) assurent l'indépendance de multiplicités de nombres quantiques magnétiques différents

1. En réalité, la faible structure fine de l'hydrogène engendre des croisements évités, qui sont néanmoins si étroits qu'ils demeurent quasiment indécélabes.

(les états propres en champ non nul sont ainsi des combinaisons linéaires d'états non perturbés de même m_j).

D'autre part, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1.1, la rupture de la symétrie coulombienne du potentiel entraîne une levée de dégénérescence en champ nul surtout sensible pour des niveaux de faible moment cinétique orbital l (seuls ces niveaux présentent un défaut quantique appréciable). Lorsque l'on applique un champ, on observe alors d'une part des multiplicités $(n; |m_j|)$, constituées d'états de moment cinétique orbital élevé et initialement dégénérées, qui se trouvent dispersées par effet STARK ; et, d'autre part, des états "solitaires" de faible l , qui ne sont substantiellement modifiés qu'à l'approche d'une multiplicité. En outre, le caractère non coulombien du potentiel est aussi (partiellement) responsable d'une levée des dégénérescences accidentelles, ou croisements, rencontrées dans le cas de l'atome d'hydrogène : les niveaux ne se croisent plus, mais se repoussent au contraire, on parle "d'anticroisements" ou de "croisements évités" (cf [CDL98], chap. *IV*, paragraphe *C*). La figure 3.2, empruntée à [Com99], représente la carte STARK du césium autour des multiplicités $(n = 19, 20; |m_j| = \frac{1}{2})$.

Pour conclure ce paragraphe, abordons rapidement les aspects dynamiques liés à la modification du champ électrique appliqué (cf [Ble96], chapitre *II*). Supposons que l'atome soit initialement dans un état propre du Hamiltonien total, correspondant à une valeur donnée du champ électrique appliqué. Si l'on change très lentement, adiabatiquement, l'amplitude de \vec{E} , l'atome va "suivre" continûment le champ et rester dans un état propre du Hamiltonien total ; son énergie évolue, elle aussi, continûment et demeure sur la même courbe de la carte STARK (théorème adiabatique, cf [Mes95], chap. *XVII*). En particulier, lors d'un croisement évité décrit adiabatiquement, l'atome "ne saute" pas d'une courbe à l'autre. Les choses sont différentes lorsque le champ est modifié brutalement ("diabatement") : dans ce cas, l'atome a une probabilité non nulle (et d'autant plus forte que la modification de \vec{E} est rapide) de franchir le croisement : c'est une manifestation de l'effet LANDAU-ZENER [Lan32, Zen32]. Pour le césium, on peut montrer que la frontière entre les régimes diabatique et adiabatique correspond à un temps de montée du champ de l'ordre de la microseconde.

3.2 Contrôle d'un système de deux atomes de césium froids

Dans ce paragraphe, nous présentons l'application de notre méthode de contrôle d'évolution à un système de deux atomes de Cs froids placés dans

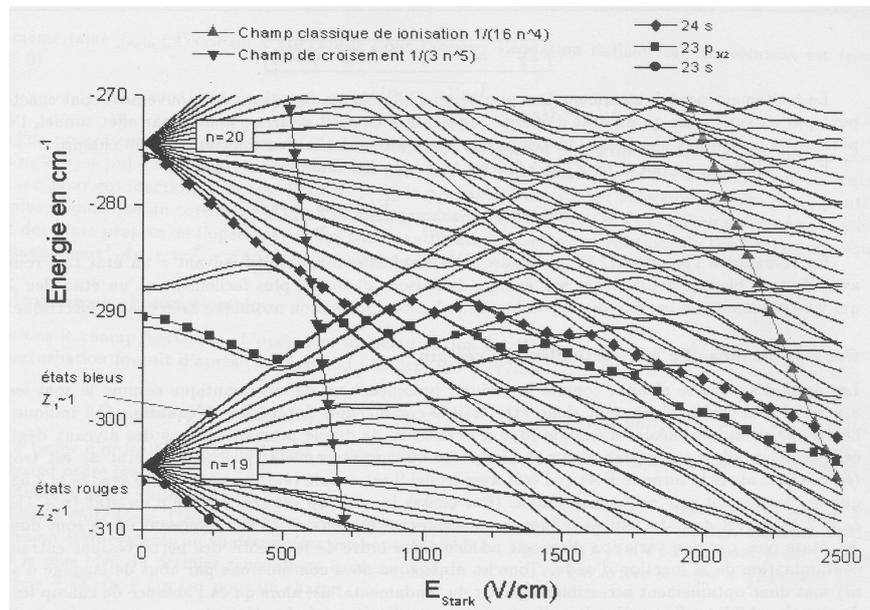


FIG. 3.2 - Carte STARK du césium autour des multiplicités ($n = 19, 20; |m_j| = \frac{1}{2}$). On observe l'éclatement des multiplicités STARK, dégénérées en champ nul (et constituées des états de grand moment cinétique orbital), tandis que les états "solitaires" comme 23s, 23p_{3/2} et 24s ne sont substantiellement modifiés qu'à l'approche d'une multiplicité. On remarque en outre que tous les croisements sont évités. Cette figure est empruntée à [Com99].

des états de RYDBERG, en interaction dipôle-dipôle et soumis à un champ STARK contrôlé. Nous restreindrons l'espace de HILBERT de ce système à quatre états, de sorte que nous aurons affaire, formellement à un ensemble de deux qubits en interaction.

Notre but sera d'imposer à ce système l'évolution *CNOT* suivante

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'importance de cette porte quantique tient au résultat théorique fondamental, dû à D.P. DIVINCENZO [DiV95b], selon lequel l'ensemble formé par les portes à un qubit et la porte *CNOT* est *universel* : en d'autres termes, n'importe quelle porte (à N qubits, N quelconque) peut être construite comme produit de portes à un qubit et de portes *CNOT*.

Après avoir décrit le système étudié et précisé la forme du Hamiltonien de contrôle, nous donnerons rapidement la structure du calcul des temps d'interaction. Enfin, nous analyserons les résultats obtenus et discuterons notamment du réalisme des valeurs numériques trouvées pour les différents paramètres de contrôle.

3.2.1 Présentation du système étudié

Les interactions entre atomes de césium froids placés dans des états de RYDBERG ont fait l'objet d'études menées, au laboratoire Aimé COTTON, par l'équipe "Atomes froids" [Com99]. Ces travaux ont permis de mettre en évidence des phénomènes nouveaux (comme la modification des profils de résonance), spécifiques des basses températures, et qui s'expliquent dans le cadre d'une théorie à N corps, tenant compte de tous les atomes qui composent l'échantillon (modèle de gaz de RYDBERG gelé, cf [MCTF98]).

Nous nous proposons d'appliquer la méthode de contrôle non holonôme à un système inspiré de la situation expérimentale envisagée dans [MCTF98].

Nous considérons deux atomes de césium, désignés par (A) et (B), de dipôles respectifs \vec{d}_A et \vec{d}_B , reliés par le vecteur $\vec{R} = R\vec{n}$, de norme $R = 2000.10^{-10}m$ et de vecteur unitaire \vec{n} , défini par les angles polaires θ, φ (cf figure 3.5). Ces deux atomes sont couplés par interaction dipôle-dipôle (voir annexe B)

$$\widehat{V}_{dd} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\widehat{d}_A \cdot \widehat{d}_B - 3(\widehat{d}_A \cdot \vec{n})(\widehat{d}_B \cdot \vec{n}) \right)$$

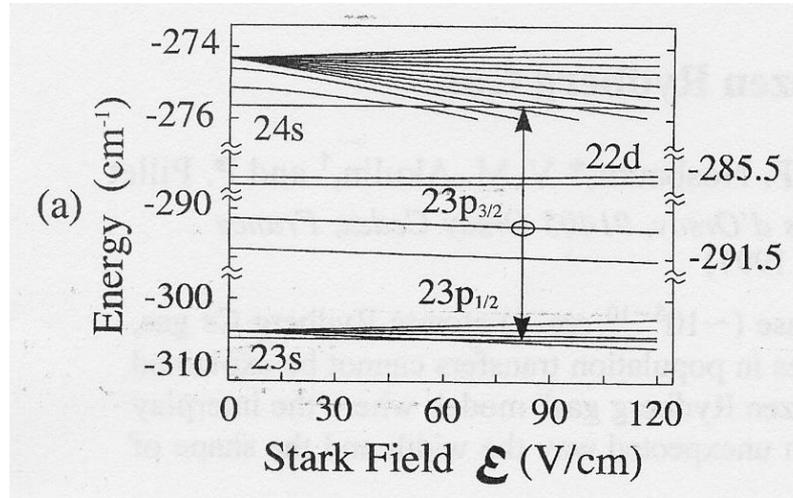


FIG. 3.3 – Carte STARK du césium autour des multiplicités ($n = 19, 20; |m_j| = \frac{1}{2}$) ("zoom" de la figure 3.2 sur la gamme de champs qui nous intéresse). Cette figure est empruntée à [Com99].

et placés dans un champ STARK $\vec{E}_S = E_S \vec{e}_z$, l'axe (Oz) étant pris comme axe de quantification du moment cinétique total.

Remarques

Notons que, pour que l'approximation "dipôle-dipôle" de l'énergie d'interaction soit valable, *i.e.* pour que les termes d'ordres supérieurs (dipôle-quadrupôle, quadrupôle-quadrupôle, etc.) soient effectivement négligeables, la distance interatomique R doit être bien supérieure à la somme des rayons des atomes mis en jeu (cf [CDL98], C_{XI}): or, pour le système que nous considérons ici, les deux atomes ont même rayon, dont l'ordre de grandeur est $300 \cdot 10^{-10} m$. On voit donc que la condition $R \gg r_A + r_B$ n'est pas rigoureusement remplie. Nous nous placerons néanmoins dans ce régime, qui donne à l'interaction dipôle-dipôle une valeur comparable à celle de l'effet STARK (ce qui est nécessaire au bon contrôle de notre système), sans oublier toutefois qu'un calcul rigoureux devrait assurément tenir compte d'effets d'ordres supérieurs.

Notons également que, dans le montage expérimental décrit dans [MCTF98], on a toujours affaire à un échantillon de N atomes de césium en interaction et que le système à deux atomes envisagé ici est clairement une idéalisation.

Nous décrivons maintenant notre proposition expérimentale et précisons les hypothèses (très simplificatrices) dans lesquelles nous nous plaçons.

Initialement en champ nul, le système est préparé dans une superposition

2. Dans [Gal94, Com99], on trouve la valeur typique de $1000a_0 \simeq 500 \cdot 10^{-10} m$ pour le rayon d'un atome de césium placé dans un état de RYDBERG de nombre principal $n = 30$. En outre, le rayon variant quadratiquement avec le nombre quantique principal n (cf les mêmes références), il est aisé de calculer l'ordre de grandeur du rayon pour $n = 23, 24$.

arbitraire des quatre états suivants

$$|0\rangle = |24s_{1/2}, m_j = 1/2; 23s_{1/2}, m_j = 1/2\rangle \quad (3.2)$$

$$|1\rangle = |23p_{3/2}, m_j = 3/2; 23p_{3/2}, m_j = 3/2\rangle \quad (3.3)$$

$$|2\rangle = |23p_{3/2}, m_j = 3/2; 23p_{3/2}, m_j = 1/2\rangle \quad (3.4)$$

$$|3\rangle = |23p_{3/2}, m_j = 1/2; 23p_{3/2}, m_j = 1/2\rangle. \quad (3.5)$$

Un champ d'amplitude $E_a = 87,42V/cm$ est ensuite appliqué brutalement (diabatement). Nous faisons alors les hypothèses suivantes :

- les états $|23s_{1/2}, m_j = 1/2\rangle$ et $|24s_{1/2}, m_j = 1/2\rangle$ traversent les croisements évités (cf figure 3.3) en gardant la même énergie et sans se mélanger aux multiplicités STARK $n = 19, 20$ (cette hypothèse sévère est néanmoins motivée par la position des croisements évités, qui se trouvent "assez" éloignés de la valeur E_a du champ appliqué) ;
- les états $|23p_{3/2}, m_j = 1/2\rangle$ et $|23p_{3/2}, m_j = 3/2\rangle$ restent inchangés (nous négligeons leur mélange avec les états $22d$, ce qui est valable à 10%), leur énergie décroissant linéairement avec l'amplitude du champ appliqué.

Nous passons ensuite alternativement du champ $E_a = 87,42V/cm$ au champ $E_b = 84,85V/cm$: nous faisons sur les passages diabatiques $E_a \rightarrow E_b$ et $E_b \rightarrow E_a$ les mêmes hypothèses que précédemment.

Nous ajoutons une dernière hypothèse, elle aussi très simplificatrice : nous négligeons les couplages de $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ avec les états

$$\begin{aligned} & |24s_{1/2}, m_j = \pm 1/2; 23s_{1/2}, m_j = \pm 1/2\rangle, \\ & |23s_{3/2}, m_j = \pm 3/2, \pm 1/2; 23p_{3/2}, m_j = \pm 3/2, \pm 1/2\rangle, \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

En définitive, nous avons affaire à un système très simplifié, dont le spectre en champ électrique statique est représenté sur la figure 3.4 : les énergies des états $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ varient linéairement en fonction du champ appliqué (avec la même pente γ), tandis que celle de l'état $|0\rangle$ reste constante ; pour les champs de résonance E_1, E_2, E_3 on a, respectivement, $E(|1\rangle) = E(|0\rangle)$, $E(|2\rangle) = E(|0\rangle)$ et $E(|3\rangle) = E(|0\rangle)$.

Remarquons que le système étudié n'est pas, à proprement parler, un système de deux qubits en interaction, dans la mesure où chaque atome visite plus de deux états de son spectre ; mais il s'agit bien d'un système à quatre niveaux couplés entre eux, qui peut donc formellement être assimilé à un système de deux qubits.

Dans la suite, nous cherchons, quel que soit l'état de départ du système

$$|\varphi(0)\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + c_3 |3\rangle,$$

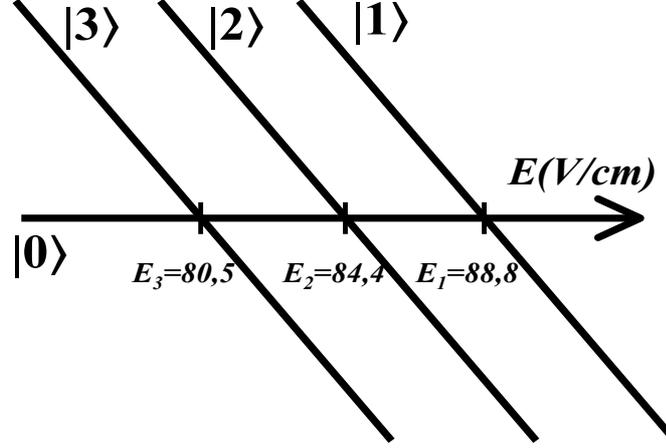


FIG. 3.4 – Diagramme STARK simplifié du système considéré.

à imposer l'évolution particulière *CNOT*

$$|\varphi(0)\rangle \rightarrow |\varphi(T)\rangle = \text{CNOT} |\varphi(0)\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_3 |2\rangle + c_2 |3\rangle.$$

3.2.2 Hamiltoniens de contrôle

D'après les hypothèses précédentes, le Hamiltonien total du système prend, dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, la forme suivante

$$\hat{H} = \hat{V}_{dd} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(E - E_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(E - E_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(E - E_3) \end{pmatrix},$$

où γ désigne la pente STARK des états $\{|i\rangle, i = 1, 2, 3\}$ et \hat{V}_{dd} le Hamiltonien d'interaction dipôle-dipôle.

Les valeurs de la pente γ et des champs STARK de résonance E_i sont données dans [Com99], chap.11 :

$$\begin{aligned} \gamma &= -283.044 \text{ unités atomiques} \\ E_1 &= 1,726885 \cdot 10^{-8} \text{ unités atomiques} \\ E_2 &= 1,641318 \cdot 10^{-8} \text{ unités atomiques} \\ E_3 &= 1,565475 \cdot 10^{-8} \text{ unités atomiques} \end{aligned}$$

De plus, nous utilisons l'expression exacte de l'interaction dipôle-dipôle (voir annexe B), calculée au moyen d'un programme Mathematica écrit par D.

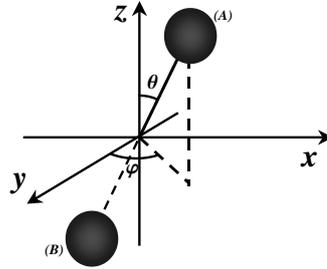


FIG. 3.5 – Définition des angles θ et φ .

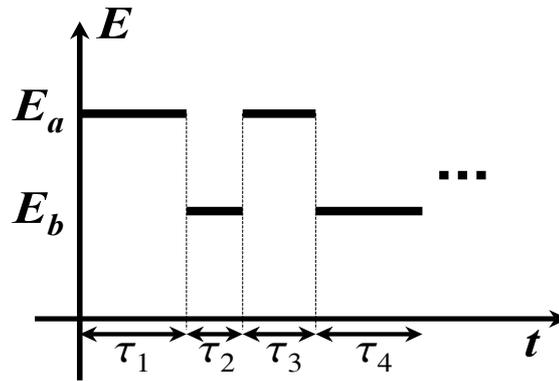


FIG. 3.6 – Forme pulsée du champ STARK appliqué.

COMPARAT [Com99] : pour notre application numérique, nous choisirons (arbitrairement) les valeurs particulières $\theta = \pi/15$ et $\varphi = \pi/6$ des angles polaires du vecteur \vec{R} reliant les deux atomes (voir figure 3.5). Les valeurs utilisées pour les moments dipolaires sont tirées de la table établie par A. BLETON [Ble96].

Notre méthode de contrôle suppose l'application alternée de deux Hamiltoniens \hat{H}_a et \hat{H}_b pendant (au moins) $N^2 = 16$ pulses de durées respectives $\{\tau_k\}$, à déterminer. Nous choisissons ici, arbitrairement, pour \hat{H}_a et \hat{H}_b les valeurs prises par le Hamiltonien total pour les deux champs STARK particuliers $E_a \simeq 87,42V.cm^{-1}$ et $E_b \simeq 84,85V.cm^{-1}$: le champ électrique appliqué présente ainsi la forme pulsée représentée sur la figure 3.6.

3.2.3 Calcul des temps d'interaction

Dans ce paragraphe, nous décrivons brièvement la mise en oeuvre pratique, sur le système particulier envisagé dans ce chapitre, de l'algorithme présenté au chapitre 2.

Après avoir fourni au logiciel utilisé (Mathematica) toutes les grandeurs physiques utiles (pente et champs STARK, angles (θ, φ) , dipôles, distance interatomique), nous calculons le Hamiltonien d'interaction dipôle-dipôle \widehat{V}_{dd} , ainsi que les deux Hamiltoniens de contrôle \widehat{H}_a et \widehat{H}_b correspondant aux valeurs E_a et E_b du champ STARK. Nous passons ensuite au test de contrôlabilité du système : pour cela, nous calculons les seize premiers commutateurs des deux Hamiltoniens \widehat{H}_a et \widehat{H}_b et vérifions leur indépendance linéaire.

Nous entamons ensuite le calcul proprement dit en recherchant le vecteur $\vec{\tau}^{(0)}$ relatif à une évolution identité, comme indiqué dans le chapitre précédent : pour cela, nous minimisons à 2 la fonction $\sum_{j=0}^4 |a_j(\{\vec{\tau}\})|^2$ où $P(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^4 a_j(\{\vec{\tau}\}) \lambda^j$ est le polynôme caractéristique du produit matriciel

$$\exp\left(-\frac{i\tau_4}{\hbar}\widehat{H}_b\right) \cdot \exp\left(-\frac{i\tau_3}{\hbar}\widehat{H}_a\right) \cdot \exp\left(-\frac{i\tau_2}{\hbar}\widehat{H}_b\right) \cdot \exp\left(-\frac{i\tau_1}{\hbar}\widehat{H}_a\right).$$

Une fois $\vec{\tau}^{(0)}$ déterminé, nous passons au calcul des temps d'interaction pour l'évolution arbitraire désirée, ici la porte *CNOT*. Nous commençons par construire la matrice

$$\widehat{U}(\vec{\tau}) = \exp\left(-\frac{i\tau_{16}}{\hbar}\widehat{H}_b\right) \cdot \exp\left(-\frac{i\tau_{15}}{\hbar}\widehat{H}_a\right) \dots \exp\left(-\frac{i\tau_1}{\hbar}\widehat{H}_a\right),$$

dont nous calculons numériquement le facteur de phase $e^{i\alpha}$ en $\vec{\tau} = \vec{\tau}^{(0)}$ (souvenons-nous que l'étape précédente ne fournit l'évolution identité qu'à un facteur de phase global près). La matrice *CNOT* désirée étant très éloignée de l'identité, nous devons, comme signalé au chapitre précédent, "morceler" le chemin en plusieurs étapes. Pour ce faire, nous introduisons le "Hamiltonien désiré"

$$\widehat{H}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tel que $e^{-i\xi\widehat{H}_d} = \text{CNOT}$ pour $\xi = \frac{\pi}{2}$, et prenons tout d'abord pour opérateur cible la matrice $(\text{CNOT})^{\frac{1}{n}} = e^{-i\frac{\xi}{n}\widehat{H}_d}$, où n est un entier aussi petit que possible, mais tel que $(\text{CNOT})^{\frac{1}{n}}$ soit accessible depuis l'identité (*i.e.* tel

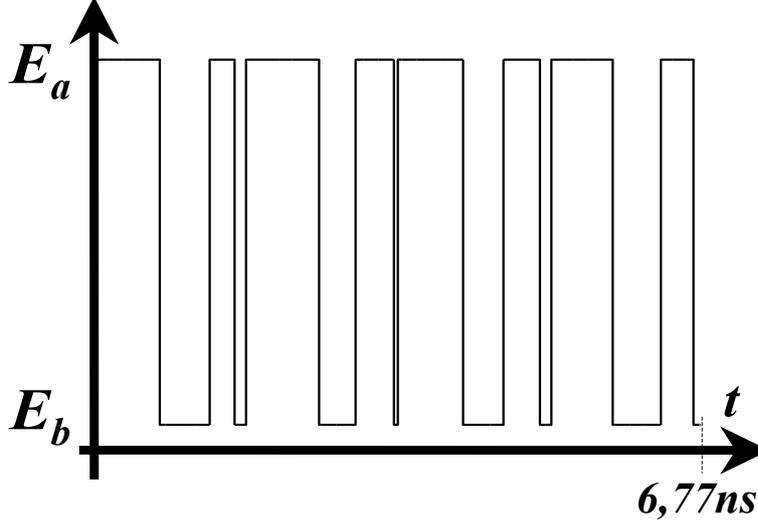


FIG. 3.7 – Sous-séquence de contrôle composée de 16 impulsions. La durée totale indiquée est de 6,77 ns, l'amplitude du champ prenant alternativement les deux valeurs $E_a = 87,42 \text{ V/cm}$ et $E_b = 84,85 \text{ V/cm}$. Les valeurs des temps d'interaction exprimés en ns sont les suivantes : $t_i(\text{ns}) = \{0.743378, 0.553823, 0.277301, 0.133699, 0.800748, 0.423586, 0.427981, 0.0427037, 0.71635, 0.458626, 0.403841, 0.13241, 0.682599, 0.54579, 0.349389, 0.0809227\}$.

que notre algorithme converge). Nous calculons alors le vecteur temps d'interaction $\vec{\tau}_{(\frac{1}{n})}$ réalisant $e^{-i\frac{\xi}{n}\hat{H}_d}$ en répétant la boucle (décrite au chapitre précédent) consistant à calculer le super Hamiltonien $\tilde{h}(\vec{\tau})$ construit à partir des Hamiltoniens $\hat{h}_k(\vec{\tau})$ définis en (2.10) et (2.11) ainsi que le supervecteur $\vec{v}(\vec{\tau})$, puis à résoudre le système linéaire (2.12). On cherche ensuite le vecteur $\vec{\tau}_{(\frac{1}{n-1})}$ tel que $\hat{U}(\vec{\tau}_{(\frac{1}{n-1})}) = e^{-i\frac{\xi}{n-1}\hat{H}_d}$. En répétant cette opération, on trouve une valeur minimale n^* en-deçà de laquelle l'algorithme ne converge plus. On garde alors le vecteur $\vec{\tau}_{(\frac{1}{n^*})}$ correspondant. Il suffit alors de mettre bout à bout n^* fois la même séquence de contrôle pour obtenir la porte *CNOT* désirée.

3.2.4 Résultats et conclusions

Les temps d'interaction calculés comme indiqué précédemment nous permettent d'imposer au système considéré une porte *CNOT*, en $n^* = 8$ "sous-

séquences" identiques de 16 pulses chacune. Les résultats sont présentés sous la forme d'un graphe (figure 3.7) représentant l'évolution du champ STARK E sur une sous-séquence de contrôle, de durée totale égale à $6,77ns$.

Nous avons eu à coeur de trouver un régime de fonctionnement réaliste pour notre système. Ainsi, par exemple, la durée totale du contrôle, de l'ordre de $0,06\mu s$ ($\simeq 8 \times 6,77ns$), est bien inférieure à la durée de vie des états de RYDBERG considérés (de l'ordre de $10\mu s$).

Néanmoins, de sérieux problèmes subsistent.

En premier lieu, la difficulté expérimentale de faire basculer le champ électrique statique en un temps inférieur à $1ns$ posera de sérieux problèmes de précision du contrôle, car les temps d'interaction n'excèdent pas quelques centaines de ps . Pour remédier à ce problème, il serait envisageable d'augmenter la valeur du nombre principal n des états considérés, ce qui aurait pour effet d'accroître la "période propre" du système et donc les temps d'interaction. Toutefois, l'augmentation du nombre quantique principal s'accompagne d'une modification de la configuration de la carte STARK, qui exige une analyse complètement nouvelle du problème.

D'autre part, comme nous l'avons signalé plus haut, le système à 4 états considéré ici est une idéalisation sévère : en réalité, les couplages entre les différents états

$$\begin{aligned} &|24s_{1/2}, m_j = \pm 1/2; 23s_{1/2}, m_j = \pm 1/2\rangle \\ &|23p_{3/2}, m_j = \pm 3/2; 23p_{3/2}, m_j = \pm 3/2\rangle \\ &|23p_{3/2}, m_j = \pm 3/2; 23p_{3/2}, m_j = \pm 1/2\rangle \\ &|23p_{3/2}, m_j = \pm 1/2; 23p_{3/2}, m_j = \pm 1/2\rangle \end{aligned}$$

ne peuvent être ignorés. En outre, l'influence sur les états $23s$ et $24s$ des multiplicités STARK $n = 19, 20$ a été complètement ignorée, ainsi que le mélange des états $23p_{3/2}$ avec les états $22d$. On peut répondre à ces critiques en augmentant l'espace des états considérés, *i.e.* en tenant compte de tous les états effectivement couplés par le champ STARK et l'interaction dipôle-dipôle : le calcul des temps de contrôle risque d'être plus lourd, car le système envisagé est beaucoup plus riche, mais, fondamentalement, la structure du problème reste la même.

Enfin, les conditions imposées sur R, θ, φ sont très restrictives : un couple d'atomes dont la distance interatomique ou les angles polaires diffèrent des valeurs que nous avons (arbitrairement) choisies ne pourra être correctement traité par notre séquence de contrôle ; autrement dit, un contrôle précis des paramètres du système est préalablement nécessaire. Pour ce faire, on peut songer aux réseaux optiques, sortes de boîtes à oeufs qui permettraient de

disposer les atomes régulièrement dans l'espace. Une autre solution serait d'appliquer une première séquence de contrôle non holonôme dont le but serait de séparer les "bons" des "mauvais" systèmes, *i.e.* ceux qui présentent ou non les "bonnes" caractéristiques... Toutes ces idées restent bien entendu à préciser.

Pour conclure ce chapitre, signalons que l'on peut trouver, dans la littérature, des propositions théoriques de construction de diverses portes quantiques sur des systèmes physiques réels. Dans [PRSG02] par exemple, les auteurs montrent comment imposer une porte quantique de phase ("phase gate") à un système de deux atomes de rubidium ^{87}Rb , placés dans deux pièges dipolaires microscopiques indépendants. Tout d'abord dans des états de faible énergie, les atomes sont excités vers des niveaux de RYDBERG où ils interagissent fortement, puis ramenés vers les niveaux de départ. En choisissant judicieusement les paramètres du système (désaccords des champs d'excitation, durée d'interaction,...), il est alors possible d'imposer au système une porte de phase arbitraire. Les auteurs expriment néanmoins des réserves quant à la faisabilité d'une séquence de contrôle précise, essentiellement liées aux fluctuations de la distance interatomique $Rb - Rb$.

Conclusion

Cette première partie nous a permis d'effectuer un bref tour d'horizon du contrôle quantique.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit, tout d'abord sur des exemples puis dans un cadre plus général, les différentes notions de contrôlabilités ainsi qu'un théorème de faisabilité relatif au contrôle d'évolution. Nous avons ensuite présenté quelques unes des méthodes "pratiques" de détermination des paramètres de contrôle, correspondant à un problème donné. Nous avons enfin évoqué brièvement la délicate question du contrôle des systèmes ouverts et noté sa grande proximité avec un autre thème très actuel de la physique moderne, à savoir la lutte contre le phénomène de décohérence.

Dans le deuxième chapitre, nous avons proposé une méthode de contrôle d'évolution, permettant, par l'application alternée de deux perturbations bien choisies, pendant des temps convenablement déterminés, d'imposer à un système quantique quelconque une évolution arbitraire. Après avoir replacé notre méthode dans le cadre général de la théorie présentée au premier chapitre, nous en avons traité les aspects algorithmiques, montrant notamment comment calculer pratiquement les temps d'interaction relatifs à une évolution quelconque $\hat{U}_{arbitraire}$. Nous avons enfin signalé une variante de notre méthode dans laquelle le rôle des paramètres de contrôle est joué par l'amplitude des perturbations appliquées, plutôt que par les temps d'interaction.

Pour finir, dans le troisième chapitre, nous avons proposé l'application de notre méthode à un système de deux atomes de césium en interaction dipôle-dipôle et soumis à l'action d'un champ STARK contrôlé. Bien qu'encore assez simpliste et reposant sur des hypothèses très sévères, cette première application montre néanmoins que notre méthode constitue une solution expérimentale envisageable aux problèmes de contrôle réels.

Deuxième partie

Protection de l'Information par effet Zénon et contrôle non holonôme

Introduction

L'interaction incontrôlable d'un système quantique ouvert et de son environnement conduit à une perte complète de l'information initialement contenue dans son état quantique. La suppression de ce phénomène, communément appelé "perte de cohérence", constitue l'un des défis les plus passionnants et les plus délicats de la physique moderne, et intéresse de nombreux domaines.

Dans le contexte de l'informatique quantique, l'interaction du système "ordinateur" avec son environnement est à l'origine des *erreurs quantiques* qui sont susceptibles de compromettre le bon stockage et le bon traitement de l'information [NC00, Pre98]. La publication, en 1995 par P. SHOR, du premier code quantique [Sho95] a ouvert la voie de la correction d'erreurs quantiques, dont une théorie générale a peu à peu émergé utilisant le cadre formel des opérations quantiques. L'idée essentielle des méthodes de correction est d'utiliser la redondance pour coder l'information dans un sous-espace (code) tel que les erreurs puissent être détectées par une mesure appropriée, puis corrigées [KL97]. Les *codes stabilisateurs* (*stabilizer codes*) sont une classe importante de codes quantiques, qui peuvent être construits explicitement en utilisant des propriétés de groupe des erreurs considérées [Got96, Got97]. Les *sous-espaces sans décohérence*, plus connus sous leur nom anglais "Decoherence Free Subspaces", sont un autre type de codes très particuliers : le principe est ici de stocker l'information dans un sous-espace qui n'est pas affecté par les erreurs [ZR98, KLV00, VKL00, LCW98, LBW99, KBLW01, WL02]. Comme les codes stabilisateurs, les "Decoherence Free Subspaces" requièrent de la part des erreurs considérées des propriétés de symétrie assez fortes.

Dans cette deuxième partie de notre travail, nous présentons une méthode de protection différente des précédentes, qui tire son inspiration à la fois des idées de la correction d'erreur classique et de l'effet ZENON Quantique, et qui n'exige a priori aucune symétrie spécifique des erreurs. En outre, nous montrons qu'elle peut être appliquée de manière universelle à un système quantique arbitraire quelconque, grâce à la technique de contrôle non holonôme, et en proposons une application à un isotope du rubidium.

L'effet ZENON Quantique standard apparaît dans un système lorsque celui-ci est soumis à des mesures fréquentes, qui le projettent dans son état initial (nécessairement connu) : si l'intervalle de temps entre deux mesures consécutives est suffisamment court, l'évolution du système est presque "gelée". Cet effet et son inverse (l'anti-effet ZENON quantique) ont été largement étudiés tant théoriquement [MS77, Win61, Kha57, FGR78, Sch02, KK96, KK00, KK01, LR00] qu'expérimentalement [Coo88, IHBW90, WBFM97, FGMR01]. Des généralisations ont été proposées qui emploient des mesures incomplètes [FP02] : l'espace de HILBERT du système est alors partagé en "sous-espaces ZENON" (sous-espaces propres multidimensionnels de l'observable mesurée), et le vecteur d'état du système est contraint, par des mesures fréquentes de l'observable physique considérée, de rester dans son sous-espace ZENON initial. La dynamique du système dans ces sous-espaces ZENON a également été étudiée dans différentes situations particulières [FPSS01].

Utilisant ces idées, enrichies des techniques standard de la théorie classique du codage [Gal68], nous proposons une méthode de protection de l'information [BHKAD04], dans l'esprit des articles de P. ZANARDI [Zan99], sans toutefois faire aucune hypothèse a priori sur d'éventuelles propriétés de symétrie des erreurs que nous considérons. Nous formons un système composé \mathcal{S} , qui comprend un sous-système \mathcal{J} , contenant initialement l'information à protéger, et un sous-système auxiliaire \mathcal{A} (appelé *ancilla*, du mot latin qui signifie servante). Nous appliquons ensuite une opération unitaire \hat{C} , appelée *matrice de codage*, qui transfère l'information, initialement contenue dans \mathcal{J} , vers un état intriqué de \mathcal{J} et \mathcal{A} . Après un bref laps de temps, pendant lequel des erreurs infinitésimales sont susceptibles d'intervenir, nous appliquons la transformation unitaire inverse \hat{C}^{-1} , qui décode l'information. Finalement, nous mesurons l'ancilla pour laver l'état quantique du système des changements infinitésimaux causés par les erreurs.

Tandis qu'en correction d'erreur classique, la mesure de l'ancilla permet de diagnostiquer quelle erreur s'est produite, pour la corriger ensuite, dans notre approche quantique fondée sur l'effet ZENON, l'état de l'ancilla obtenu après une séquence codage-erreurs-décodage est très proche de son état initial (à des termes du second ordre près), de sorte que la mesure de l'ancilla la ramène vers son état initial avec une probabilité très proche de 1. La clé de notre méthode est d'intriquer convenablement l'ancilla et le système \mathcal{J} de manière à ce que la mesure de \mathcal{A} dans son état initial entraîne que \mathcal{J} soit lui-même dans son état initial. Cette intrication est réalisée par l'étape de codage de telle sorte que, même après exposition du système à l'action des erreurs, l'état initial de l'ancilla reste intriqué uniquement avec l'état initial du sous-système \mathcal{J} , tandis que les autres intrications restent faibles durant

l'intervalle de temps qui sépare deux mesures successives.

La procédure de codage met en jeu une matrice unitaire de l'espace de HILBERT du système composé, généralement très complexe : imposer une telle transformation est déjà, en soi, une opération de contrôle non triviale. Néanmoins, nous verrons qu'il est possible de résoudre ce problème en utilisant la méthode de contrôle non holonôme exposée dans la partie précédente.

Notre méthode de protection peut être appliquée à des systèmes physiques variés. Dans cette thèse, nous montrons en particulier que notre schéma permet de protéger un qubit d'information stocké dans la composante de spin de l'état quantique d'un atome de rubidium, la partie orbitale jouant le rôle de l'ancilla. Nous décrivons de plus une réalisation expérimentale possible qui utilise une séquence de pulses LASER pour l'étape de codage et un processus d'émission spontanée pour l'étape de mesure.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous introduisons les idées principales de la correction d'erreurs quantiques, et présentons la théorie, déjà bien développée, des codes correcteurs.

Le deuxième chapitre est consacré à l'effet ZENON Quantique, dont nous présentons les principales caractéristiques et indiquons les généralisations possibles.

Dans le troisième chapitre, nous abordons notre méthode de protection, fondée sur une généralisation multidimensionnelle de l'effet ZENON et suggérons en outre un moyen physique universel de réaliser l'étape de codage.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'application de notre méthode à un isotope du rubidium.

Chapitre 1

Correction d'erreurs quantiques

”On n’est jamais arrivé à aucune vérité sans s’être trompé au moins quatorze fois ou peut-être même cent quatorze et c’est peut-être un honneur en son genre. Mais nous ne savons même pas nous tromper de façon personnelle. Une erreur originale vaut peut-être mieux qu’une vérité banale.”

Fédor Dostoïevski, *Crime et châtiment*.

Le bruit n’est évidemment pas une caractéristique de l’information quantique, mais touche également les appareils classiques. En effet, si, d’une part, les composants électroniques des ordinateurs classiques sont extrêmement fiables et peuvent être considérés comme quasiment indemnes d’erreurs, des systèmes tels les modems et les lecteurs de CD sont en revanche très sensibles au bruit. Pour remédier à ces processus parasites, des codes correcteurs d’erreurs ont été développés et sont actuellement largement utilisés dans ce type d’appareils.

Inspiré par les techniques de la correction d’erreurs classiques, P. SHOR construisit en 1995 le premier code quantique capable de protéger un qubit d’information contre les erreurs touchant individuellement chacun des 9 qubits physiques utilisés pour son codage [Sho95]. Après cette étape décisive, une théorie générale de la correction d’erreurs quantiques a peu à peu émergé, dans le cadre formel des opérations quantiques [KL97].

Dans ce chapitre, nous proposons un bref tour d’horizon de la correction d’erreurs quantiques. Nous introduisons tout d’abord les concepts de base des codes correcteurs dans les cas classique puis quantique. Nous traitons ensuite de la théorie générale de la correction d’erreurs quantiques : en particulier, nous présentons les conditions mathématiques de correction, ainsi que les principales méthodes de construction explicite de codes quantiques. Cette présentation s’inspire très largement de l’excellent ouvrage de M.A. NIELSEN

et I.L. CHUANG [NC00] ainsi que du cours de J. PRESKILL [Pre98] auxquels nous ferons souvent référence et qui offrent un exposé à la fois clair et détaillé de l'état actuel du domaine.

1.1 Introduction

Dans cette introduction, nous présentons les idées de base de la correction d'erreur classique et montrons comment ces concepts peuvent s'adapter au cas quantique. Nous nous concentrons ici sur des exemples et laissons le formalisme général pour le paragraphe suivant.

Considérons pour commencer le problème classique suivant : nous voulons transmettre un bit d'information à travers un canal bruité, dont l'effet est de renverser le bit avec une probabilité p (modèle dit "*binary symmetric channel*"). Un moyen de protéger l'information initiale est de faire trois copies du bit que nous possédons : ainsi, si le bit initial était dans l'état 0, nous obtenons le "bit logique" $0_L = 000$; de même, si le bit initial était dans l'état 1 nous obtenons $1_L = 111$. Après transmission de la chaîne de bits ainsi obtenue à travers le canal bruité, nous décidons quelle était l'information originelle en appliquant la procédure de "*vote à la majorité*" : par exemple, si nous obtenons 001 à la sortie du canal, nous affirmons que l'information initiale était 000, soit 0_L , etc. On peut montrer aisément [NC00, Pre98] que cette opération conduit à une nouvelle probabilité d'erreur

$$p_C = 3p^2 - 2p^3$$

qui est inférieure à p , si $p < \frac{1}{2}$: ainsi, à condition que $p < \frac{1}{2}$, cette technique, appelée *repetition code*, rend la transmission via le canal sensiblement plus fiable.

Cet exemple simple est très instructif et fait ressortir les aspects essentiels de la correction d'erreur classique. Un *modèle d'erreurs* particulier et *physiquement motivé* étant donné (on ne peut combattre un ennemi complètement inconnu !), on applique toujours la méthode générale suivante. On code tout d'abord l'information initiale sur des états *bien choisis* d'un système de bits étendu et *redondant* : par exemple, dans le *repetition code*, le bit d'information originel est codé sur deux états particuliers d'un système de trois bits. Après transmission via le canal bruité, on décode l'information par une procédure appropriée, comme le vote à la majorité pour le *repetition code*, qui recouvre l'information initiale avec une grande probabilité.

Notons l'importance de la notion de redondance. L'idée est claire et intuitive : la redondance protège l'information de dommages sérieux dus aux erreurs en augmentant la probabilité de recouvrer l'information originelle.

Soulignons que l'on utilise exactement le même type de technique dans la vie courante lorsque l'on fait répéter une phrase à un interlocuteur pour être sûr de chacun de ses mots.

Comme nous allons le voir, les mêmes idées s'appliquent dans le domaine *quantique*. Néanmoins, on doit alors faire face à quelques *particularismes* (!) comme le théorème de non-clonage [Die82, WZ82], qui rendent impossible la transposition directe des méthodes de correction du classique au quantique. Heureusement, ces difficultés peuvent être surmontées, comme le montrent les paragraphes suivants.

Considérons l'exemple simple suivant, connu sous le nom de *bit flip code* : nous voulons envoyer un qubit d'information à travers un canal bruité qui renverse le qubit transmis avec une probabilité p ; en d'autres termes, si l'état initial de notre qubit est $a|0\rangle + b|1\rangle$, nous obtenons, à la sortie du canal, $a|1\rangle + b|0\rangle$ avec la probabilité p , et $a|0\rangle + b|1\rangle$ avec la probabilité $(1 - p)$. La situation est très semblable au cas classique que nous avons considéré plus haut, de sorte que nous pourrions être tentés d'appliquer la même méthode. Mais si nous nous y essayons, nous rencontrons rapidement des problèmes quantiques majeurs ! Tout d'abord, le théorème de non-clonage nous interdit de copier un état quantique arbitraire. En outre, même si le clonage quantique était possible, la mesure des qubits détruirait complètement l'information stockée dans le système. Le *repetition code* classique n'est donc pas directement transposable au cas quantique, il nous faut trouver une autre méthode de protection adaptée.

La technique appropriée est la suivante. En premier lieu, on code l'information initiale $a|0\rangle + b|1\rangle$ sur les deux états logiques

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &= |000\rangle \\ |1_L\rangle &= |111\rangle \end{aligned}$$

d'un système à trois qubits. Ceci est simplement réalisé en ajoutant deux qubits physiques, initialement préparés dans l'état $|0\rangle$, et en appliquant au système de trois qubits une transformation unitaire \hat{C} bien choisie : cette opération produit l'état

$$a|0_L\rangle + b|1_L\rangle$$

qui est ensuite envoyé dans le canal bruité. Chacun des trois qubits physiques du système est alors susceptible de subir, indépendamment des autres, un renversement (avec la probabilité p). A la sortie du canal, on réalise la mesure

associée aux quatre projecteurs

$$\begin{aligned}\widehat{P}_0 &= |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111| \quad (\text{pas d'erreur}) \\ \widehat{P}_1 &= |100\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 011| \quad (\text{erreur sur le premier qubit}) \\ \widehat{P}_2 &= |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101| \quad (\text{erreur sur le deuxième qubit}) \\ \widehat{P}_3 &= |001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110| \quad (\text{erreur sur le troisième qubit})\end{aligned}$$

dont le résultat, appelé *syndrome*, nous indique si un qubit a été renversé et, si oui, lequel. Connaissant le syndrome, on peut alors recouvrer l'information initiale en renversant de nouveau le qubit erroné. Par exemple, si un renversement est intervenu sur le second qubit, l'état corrompu obtenu à la fin du canal est $a|010\rangle + b|101\rangle$: la mesure du syndrome donne le résultat 2, et laisse la superposition cohérente intacte. Pour recouvrer l'information initiale il ne nous reste plus qu'à renverser le deuxième qubit. Soulignons que la mesure du syndrome ne nous donne aucune information sur les amplitudes a et b , mais nous renseigne seulement sur l'erreur intervenue lors de la transmission: ce point est primordial, car une mesure visant à déterminer l'état du système détruirait l'information qu'il contient.

Cette procédure fonctionne parfaitement si le renversement intervient sur au plus un qubit: la probabilité que plus d'un renversement intervienne est $3p^2 - 2p^3$, qui est inférieure à p , à condition que $p < \frac{1}{2}$. En d'autres termes, quand $p < \frac{1}{2}$, le *bit flip code* abaisse substantiellement la probabilité d'erreur et rend ainsi la transmission à travers le canal sensiblement plus fiable.

D'autres codes simples existent comme le *phase flip code*, qui protège l'information contre les erreurs de phase (qui seront définies dans le paragraphe suivant) et qui peut être simplement dérivé du *bit flip code*. Mariant ces deux codes, P. SHOR a proposé un nouveau code, capable de protéger un qubit d'information contre l'action de toutes les erreurs à un qubit (renversement et erreur de phase): ce code utilise en tout neuf qubits physiques et présente la même structure que l'exemple précédent. Sa publication en 1995 renouvela l'intérêt des physiciens pour le domaine et fit la démonstration éclatante que, contrairement à l'idée couramment répandue alors, les erreurs quantiques ne sont pas une fatalité.

Au terme de cette brève introduction, les codes quantiques paraissent très semblables à leurs analogues classiques. Ils se fondent en effet sur la même idée de redondance, résultant de l'addition de qubits physiques supplémentaires. En outre, les méthodes de correction d'erreurs quantiques ont la même structure que les codes classiques: après codage de l'information sur des "mots de code" (*codewords*) bien choisis, on envoie le système à travers un canal bruité; on mesure ensuite le syndrome, qui nous indique quelle erreur

est intervenue nous permettant ainsi de la corriger et de recouvrer l'information initiale avec une grande probabilité.

Dans le paragraphe suivant, nous replaçons ces caractéristiques dans le cadre plus large de la théorie générale des codes correcteurs quantiques.

1.2 Erreurs quantiques et codes correcteurs

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement le cadre théorique général de la correction d'erreurs quantiques. En premier lieu, nous introduisons les *erreurs quantiques* comme les éléments de l'opération quantique décrivant l'interaction de l'ordinateur avec son environnement. Nous passons ensuite en revue les principaux concepts et résultats de la théorie, déjà bien développée, des codes correcteurs quantiques. Finalement nous présentons rapidement quelques-unes des méthodes les plus importantes de construction explicite de codes quantiques.

1.2.1 Erreurs quantiques

Un ordinateur quantique ne peut jamais être considéré comme *parfaitement isolé* : dans tous les dispositifs expérimentaux considérés jusqu'alors, l'environnement possède une influence qui ne peut être omise. Ainsi, rigoureusement, un ordinateur quantique doit être traité comme un système *ouvert*.

De ce fait, on doit le décrire par sa matrice densité $\hat{\rho}$, trace partielle sur les degrés de liberté de l'environnement de la matrice densité totale $\hat{\rho}_{tot}$ du système composé *fermé* {ordinateur quantique + environnement}:

$$\hat{\rho} = Tr_{env} [\hat{\rho}_{tot}].$$

Généralement $\hat{\rho}$ évolue "non-unitairement" : en utilisant la représentation "opérateur-somme", la matrice densité $\hat{\rho}'$ obtenue après interaction de l'ordinateur avec son environnement peut s'écrire sous la forme

$$\hat{\rho}' = \mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_k \hat{\mathbf{E}}_k \hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}_k^\dagger,$$

où les opérateurs $\{\hat{\mathbf{E}}_k\}$, agissant sur l'espace de HILBERT de l'ordinateur, sont appelés les *éléments* de l'opération \mathcal{E} , et vérifient la condition¹

$$\sum_k \hat{\mathbf{E}}_k \hat{\mathbf{E}}_k^\dagger \leq \hat{I}.$$

1. L'égalité est vérifiée lorsque la dynamique du système total est unitaire; l'inégalité est stricte si une mesure est effectuée sur le système à une date quelconque lors de la période d'interaction.

La forme de ces opérateurs est évidemment étroitement liée à la dynamique du système composé {ordinateur quantique + environnement}, *i.e.* à la forme de l'interaction entre l'ordinateur et son environnement. Nous serons amenés à détailler un peu ce point dans le chapitre 3, lorsque nous replacerons notre méthode de protection dans le cadre général de la théorie des codes correcteurs. En outre, on pourra trouver une discussion complète de ce formalisme, sa démonstration et son interprétation physique dans [NC00], Chap. 8.

Dans le contexte de l'informatique quantique, les opérateurs $\hat{\mathbf{E}}_k$ sont dangereux, car ils sont susceptibles d'endommager l'information stockée dans l'ordinateur : c'est pourquoi on les appelle "*erreurs quantiques*". Les principaux exemples d'erreurs quantiques à *un qubit* sont le renversement (traduction libre de *bit-flip*)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_x,$$

que nous avons déjà rencontré dans l'introduction, l'erreur de phase (*phase flip*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_z,$$

et l'erreur combinée, "renversement-phase" (*bit phase flip*)

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_y,$$

qui correspondent respectivement aux trois matrices de PAULI. Il existe bien sûr d'autres erreurs particulières à un qubit, obtenues par combinaison linéaire des précédentes, comme par exemple le "*phase damping*" dont on pourra trouver la forme dans [NC00].

1.2.2 La théorie des codes quantiques

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'il est possible d'employer le même type de méthode que le *bit flip code* pour corriger les effets d'un bruit générique, défini par les erreurs quantiques $\{\hat{\mathbf{E}}_k\}$. Plus précisément, nous généralisons ici l'exemple présenté en introduction en donnant le cadre formel, à ce jour bien établi, de la correction d'erreurs quantiques.

L'idée fondamentale de la correction d'erreurs quantiques, dont nous avons déjà fait usage dans le *bit flip code*, est de "donner de l'espace" au système en ajoutant des qubits physiques supplémentaires, qui jouent le rôle d'*ancilla* (cette procédure "d'extension" est, du reste, très liée à la notion de redondance en correction d'erreur classique). On code alors l'information sur un sous-espace \mathcal{C} bien choisi, appelé *espace de code*, de l'espace

de HILBERT du système comprenant les qubits initiaux et les qubits auxiliaires. En d'autres termes, on applique une transformation unitaire \widehat{C} bien choisie, appelée *matrice de codage*, qui "délocalise" l'information sur tous les qubits du système. C'est exactement ce que nous avons fait dans le *bit flip code*, lorsque, après avoir ajouté deux qubits d'ancilla préparés dans l'état $|0\rangle$, nous avons codé l'information sur le sous-espace engendré par $\{|0_L\rangle = |000\rangle, |1_L\rangle = |111\rangle\}$.

Précisons maintenant ce que nous entendons par le terme "bien choisi". Si \mathcal{C}_k désigne le sous-espace $\widehat{\mathbf{E}}_k\mathcal{C}$, alors nous choisissons \mathcal{C} tel que les différents \mathcal{C}_k soient orthogonaux entre eux et à \mathcal{C} ; en outre, nous souhaitons que les vecteurs de base de \mathcal{C} soient transformés par $\widehat{\mathbf{E}}_k$ en vecteurs mutuellement orthogonaux de \mathcal{C}_k . Pour être plus concret, on peut se donner l'image géométrique suivante, empruntée à [NC00] : si l'on voit \mathcal{C} comme un cube de l'espace de HILBERT du système total, alors les différentes erreurs $\widehat{\mathbf{E}}_k$ doivent transformer \mathcal{C} en de nouveaux cubes \mathcal{C}_k , disjoints les uns des autres. On peut aussi traduire ces prescriptions en les conditions mathématiques suivantes : pour tout couple $(\widehat{\mathbf{E}}_k, \widehat{\mathbf{E}}_l)$ d'erreurs quantiques,

$$\widehat{P}\widehat{\mathbf{E}}_k\widehat{\mathbf{E}}_l^\dagger\widehat{P} = \alpha_k\delta_{kl}\widehat{P}, \quad (1.1)$$

où \widehat{P} est le projecteur orthogonal sur \mathcal{C} . Ces conditions peuvent être aisément vérifiées sur l'exemple du *bit flip code* : l'espace de code $\mathcal{C} = \text{Vect}\{|0_L\rangle, |1_L\rangle\}$ est en effet transformé en sous-espaces $\{\mathcal{C}_k, k = 1, 2, 3\}$, "non déformés" et orthogonaux entre eux, par les trois erreurs

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_1 &= \widehat{I} \otimes \widehat{I} \otimes \widehat{\sigma}_x \\ \widehat{\mathbf{E}}_2 &= \widehat{I} \otimes \widehat{\sigma}_x \otimes \widehat{I} \\ \widehat{\mathbf{E}}_3 &= \widehat{\sigma}_x \otimes \widehat{I} \otimes \widehat{I}. \end{aligned}$$

Montrons rapidement comment fonctionne la correction d'erreurs lorsque les conditions (1.1) sont vérifiées. Après transmission à travers le canal bruité, modélisé par les erreurs $\{\widehat{\mathbf{E}}_k\}$, on "diagnostique" quelle erreur s'est produite en identifiant simplement dans quel sous-espace \mathcal{C}_k se trouve l'état du système : pour ce faire, il suffit de mesurer une observable physique adéquate, dont les sous-espaces propres correspondent aux \mathcal{C}_k . Après cette opération, et conformément aux propriétés de l'espace de code (et par conséquent des sous-espaces \mathcal{C}_k associés), l'information se trouve, intacte, dans l'un des \mathcal{C}_k . Finalement, on recouvre la matrice densité initiale $\widehat{\rho}$ (à un facteur de proportionnalité près) en appliquant la transformation unitaire \widehat{U}_k qui ramène l'information vers l'espace de code initial \mathcal{C} .

Formellement, la procédure de correction complète peut être représentée par une opération quantique de "rétablissement" \mathcal{R} , qui, agissant sur la matrice de densité erronée $\hat{\rho}' = \mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_k \hat{\mathbf{E}}_k \hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}_k^\dagger$, donne

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\hat{\rho}') &= \mathcal{R}(\mathcal{E}(\hat{\rho})) \\ &= \sum_k \hat{U}_k \hat{P}_k \hat{\mathbf{E}}_k \hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}_k^\dagger \hat{P}_k \hat{U}_k^\dagger \\ &\propto \hat{\rho}. \end{aligned}$$

En fait, il est possible d'étendre les conditions de correction (1.1), et de montrer que, pour qu'un sous-espace \mathcal{C} soit un code quantique capable de corriger les erreurs $\{\hat{\mathbf{E}}_k\}$, il faut et il suffit qu'il existe une matrice $[\alpha_{kl}]$ complexe hermitique telle que, pour tout couple $(\hat{\mathbf{E}}_k, \hat{\mathbf{E}}_l)$ d'erreurs quantiques,

$$\hat{P} \hat{\mathbf{E}}_k \hat{\mathbf{E}}_l^\dagger \hat{P} = \alpha_{kl} \hat{P}, \quad (1.2)$$

où \hat{P} est le projecteur orthogonal sur \mathcal{C} . En d'autres termes, quand les relations (1.2) sont vérifiées, il existe une opération quantique de rétablissement \mathcal{R} , essentiellement composée d'une mesure de syndrome et d'une transformation unitaire, très semblables à celles que nous avons considérées plus haut (mais légèrement plus compliquées) telles que

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}(\hat{\rho})) \propto \hat{\rho}.$$

Nous ne nous étendrons pas ici sur les détails techniques de la démonstration de ces conditions générales, que l'on pourra trouver dans [NC00].

1.3 Construction explicite de codes quantiques

Jusqu'à présent, nous n'avons traité que de généralités concernant les codes quantiques, en particulier nous avons présenté les conditions mathématiques générales (1.2) qu'ils devaient vérifier, sans pour autant prêter attention à leur construction explicite.

La plupart des techniques utilisées pour construire des codes quantiques tirent leur inspiration des codes correcteurs classiques. En particulier, la classe des *codes linéaires classiques* donne lieu à une généralisation quantique intéressante connue sous le nom de *CSS codes*, d'après les initiales de leurs inventeurs CALDERBANK, SHOR et STEANE [CS96, Ste96]. Nous savons déjà que coder k bits (classiques) d'information dans n bits ($n > k$)

physiques consiste à faire correspondre à chacune des 2^k chaînes de k bits possibles une chaîne de n bits : dans le cas particulier des codes linéaires, cette opération de codage est simplement effectuée en appliquant à la chaîne de k bits initiale, contenant l'information à protéger, une matrice G , appelée *matrice génératrice* (*generator matrix*), caractéristique du code considéré. On peut définir de manière équivalente un code linéaire comme le noyau d'une matrice H , appelée *matrice de test de parité* (*parity check matrix*), reliée à la matrice génératrice par une condition de dualité simple. Deux codes linéaires (classiques) C_1 et C_2 étant donnés, codant respectivement k_1 et k_2 bits d'information dans n bits physiques, et tels que $C_2 \subset C_1$, on peut construire un code correcteur quantique \mathcal{C} codant $(k_1 - k_2)$ qubits d'information dans n qubits physiques. La construction explicite de \mathcal{C} à partir de C_1 et C_2 fait intervenir des notions simples de théorie des groupes et peut être trouvée dans [NC00, Pre98]. En outre, si les codes C_1 et C_2^\perp corrigent jusqu'à t erreurs (classiques), on démontre que \mathcal{C} peut lui-même corriger jusqu'à t erreurs quantiques.

Les codes CSS sont inclus dans une classe plus générale de codes quantiques appelés *codes stabilisateurs* (*stabilizer codes*), inventés par D. GOTTESMAN [Got96, Got97]. Grossièrement, le formalisme stabilisateur consiste à caractériser les vecteurs d'états du système par l'ensemble des opérateurs de PAULI qui les laissent invariants, c'est-à-dire par les produits tensoriels de matrices de PAULI et d'identité qui les "stabilisent". Un code quantique, c'est-à-dire l'espace vectoriel engendré par des vecteurs particuliers appelés "mots de code", peut également être défini par son "stabilisateur", c'est-à-dire par le sous-groupe S contenant les opérateurs de PAULI qui laissent les mots de code invariants. On peut alors montrer qu'un code $C(S)$, de stabilisateur S , est capable de corriger les erreurs $\widehat{\mathbf{E}}_k$ du groupe de PAULI sur n qubits qui vérifient

$$\forall (j,k), \quad \widehat{\mathbf{E}}_j \widehat{\mathbf{E}}_k^\dagger \notin N(S) \setminus S.$$

$N(S)$ désigne le *normalisateur* de S , défini comme l'ensemble des opérateurs de PAULI $\widehat{\mathbf{E}}$ tels que, pour tout élément \widehat{g} de S , $\widehat{\mathbf{E}} \widehat{g} \widehat{\mathbf{E}}^\dagger$ appartient à S . Pour un tel code, la procédure de correction consiste tout d'abord à identifier quelle erreur $\widehat{\mathbf{E}}_j$ s'est produite, en mesurant tous les générateurs $\{\widehat{g}_k\}$ du stabilisateur S , puis à recouvrer l'information initiale en appliquant simplement $\widehat{\mathbf{E}}_j^\dagger$.

Les techniques pratiques que nous venons de présenter pour générer des codes quantiques sont fondées sur l'hypothèse assez sévère que les erreurs considérées $\{\widehat{\mathbf{E}}_k\}$ forment un sous-groupe du groupe de PAULI sur n qubits. Une autre classe de codes existe, connue sous le nom de *Decoherence Free Subspaces* (voir [LW03] pour une revue complète). Formellement, ils peuvent être considérés comme des codes quantiques car ils vérifient les conditions de cor-

rection générales (1.2). Néanmoins, ils sont si particuliers qu'ils constituent plutôt une manière différente et originale de protéger l'information contre les erreurs. L'idée de base de ces codes est de stocker l'information dans un sous-espace \mathcal{C} de l'espace de HILBERT total \mathcal{H} , qui n'est pas affecté par les erreurs. Dans ce cas, les erreurs ne sont a priori plus restreintes à un sous-groupe spécial du groupe de PAULI, contrairement aux exemples précédents ; mais, manifestement, l'existence d'un Decoherence Free Subspace n'est pas chose triviale, et requerra assurément de l'interaction système-environnement des propriétés de symétrie fortes.

Comme nous pouvons le constater au terme de ce bref tour d'horizon, les principales méthodes pratiques de construction explicite de codes quantiques s'appuient sur des propriétés particulières des erreurs qu'elles sont censées combattre. Dans les chapitres 3 et 4 de cette partie, nous nous intéresserons à des erreurs quantiques *unitaires*, sur lesquelles nous ne ferons aucune hypothèse de symétrie particulière, et montrerons que l'information peut être protégée de leur action grâce à une généralisation de l'effet ZENON Quantique, dont les principales caractéristiques seront présentées au chapitre suivant.

Chapitre 2

L'effet Zénon en Mécanique Quantique

"Et c'est aussi loin qu'on peut aller dans la fin de Zénon."
Marguerite Yourcenar, *L'Oeuvre au noir*

Parce qu'il renvoie aux fondements de la théorie quantique, notamment à la théorie de la mesure, parce que son existence même a longtemps été mise en doute, l'effet ZENON quantique est l'un des sujets les plus polémiques de ces trente dernières années. La profusion d'articles qui lui sont consacrés rend une synthèse du sujet délicate. Pour l'aborder, il nous a semblé plus naturel de nous détacher de l'ordre chronologique strict, pour aller plutôt du simple au complexe, du particulier au général.

Dans la première partie, nous aborderons l'effet ZENON quantique sous un angle purement théorique. Nous évoquerons tout d'abord l'idée originale de John VON NEUMANN, qui, le premier, s'est intéressé à l'effet produit sur un système quantique par une suite quasi-continue de mesures. Nous passerons ensuite à l'étude de l'influence de mesures répétées sur la dynamique d'un système quantique et montrerons qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de ralentir, voire de geler l'évolution d'un tel système (effet ou paradoxe ZENON quantique).

Dans la deuxième partie, nous nous efforcerons de rendre compte des expériences les plus marquantes dans le domaine : d'une part l'expérience, très controversée, de R.J. COOK et W. ITANO [Coo88, IHBW90], qui visait à mettre en évidence l'effet ZENON quantique dans un système à deux niveaux en oscillations de RABI ; d'autre part, celle, plus récente, de l'équipe de M.C. FISCHER [FGR01] qui a réussi à exhiber l'effet ZENON dans un système instable. Nous relaterons également le vif débat qu'ont suscité les travaux de COOK-ITANO, et qui a amené les scientifiques à repenser en profondeur la

physique de l'effet ZENON.

Ainsi, dans la dernière partie, nous montrerons que, contrairement à ce qui était communément admis, l'effet ZENON n'est relié d'aucune façon au postulat de réduction du paquet d'onde, mais peut apparaître avec des processus de mesure moins "idéalisés". Enfin, nous signalerons l'anti-effet ZENON ou effet HERACLITE, qui peut se manifester lorsque la fréquence des mesures appliquées est trop faible.

2.1 L'émergence de l'Effet Zénon Quantique

Dans cette partie, nous proposons une approche simple de l'effet ZENON. Nous commençons par rappeler, dans le premier paragraphe, l'idée de J. VON NEUMANN qui, le premier, pensa à utiliser une série de mesures répétées pour manipuler un système quantique. Dans le deuxième paragraphe, nous abordons l'effet ZENON sur le cas simple d'un système quantique soumis à des mesures répétées, destinées à tester s'il est toujours dans son état initial. Dans les deux paragraphes qui suivent, nous étendons les résultats obtenus à d'autres types de mesures, moins spécifiques, et énonçons des théorèmes généraux qui montrent la grande portée de l'effet ZENON.

2.1.1 L'idée de John von Neumann

Dans son ouvrage sur les fondements mathématiques de la Mécanique Quantique [VNeu55], J. VON NEUMANN dresse le cadre axiomatique de la théorie quantique, et jette notamment les bases de la théorie de la mesure en introduisant le processus projectif "acausal", connu aujourd'hui sous le nom de réduction du paquet d'onde. Dans son chapitre V, il s'attache à faire le lien entre la thermodynamique et la Mécanique Quantique et introduit, au cours d'une démonstration, un processus, purement théorique, qui peut être considéré comme précurseur de l'effet ZENON.

A partir de deux états orthogonaux $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$, supposés états propres du Hamiltonien \hat{H}_0 du système considéré, il construit un ensemble de $(N + 1)$ vecteurs $\{|\psi_n\rangle = \cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)|\varphi\rangle + \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)|\psi\rangle, \quad n = 0, \dots, N\}$ qui forment une sorte d' "escalier" entre les états extrêmes $|\psi_0\rangle = |\varphi\rangle$ et $|\psi_N\rangle = |\psi\rangle$. Il suppose de plus qu'il existe (N) grandeurs physiques $\{\mathcal{R}_n\}_{n=1, \dots, N}$, associées aux observables $\{\hat{R}_n\}_{n=1, \dots, N}$ agissant sur l'espace de HILBERT du système, qui jouissent des propriétés suivantes :

- \hat{R}_n possède un spectre discret,

- $|\psi_n\rangle$ est vecteur propre de \widehat{R}_n , associé à la valeur propre *non dégénérée* λ_n ($\widehat{R}_n |\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle$).

Partant de l'état initial $|\psi_0\rangle = |\varphi\rangle$, VON NEUMANN réalise successivement la mesure des N observables $\widehat{R}_1, \widehat{R}_2, \dots, \widehat{R}_N$: la probabilité d'obtenir la suite

de résultats $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, c'est-à-dire la probabilité que le système passe successivement par les états $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$, est

$$\begin{aligned}
 p^{(N)} &= |\langle\varphi|\psi_1\rangle|^2 |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \dots |\langle\psi_{N-1}|\psi\rangle|^2 \\
 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right]^{2N} \\
 &= \exp\left\{ 2N \ln \left[\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right] \right\} \\
 &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left\{ 2N \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2N}\right)^2 \right] \right\} = \exp\left\{ -\frac{\pi^2}{4N} \right\} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1,
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété, aisément vérifiable, $\langle\psi_{n-1}|\psi_n\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)$. Ainsi, dans la limite *mathématique* d'une infinité continue de mesures, le système passe de l'état $|\varphi\rangle$ à l'état orthogonal $|\psi\rangle$, ce qui était absolument impossible par l'évolution unitaire naturelle $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_0 t\right)$, puisque

$$\begin{aligned}
 \left[\langle\phi| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_0 t\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_0 t\right) |\psi\rangle \right] &= \langle\phi|\psi\rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

VON NEUMANN fut ainsi, à notre connaissance, le premier à découvrir qu'une série de mesures répétées pouvait accomplir des miracles ! Ici, il s'est agi d'effectuer une transition, pourtant interdite par les règles de sélection. Dans les paragraphes qui suivent, nous "retournons" le problème et montrons que, sous certaines hypothèses, des mesures fréquemment répétées sont également capables de ralentir, voire de "geler" l'évolution d'un système quantique : ce phénomène, abordé pour la première fois par L.A. KHALFIN en 1968 [Kha68], a été baptisé "effet ZENON" par B. MISRA et C.G. SUDARSHAN en 1977 [MS77] qui furent les premiers à lui donner un cadre formel mathématique rigoureux.

2.1.2 Probabilité de survie d'un système quantique soumis à des mesures répétées, effet Zénon

Dans ce paragraphe, nous nous inspirons de l'idée originale de VON NEUMANN et montrons que la fréquente répétition de mesures destinées à tester si un système quantique se trouve toujours dans son état initial peut freiner, voire *geler* son évolution naturelle (effet ou paradoxe ZENON). Nous nous intéressons tout d'abord à deux modèles particuliers (système à deux niveaux en oscillations de RABI et état discret couplé à une bande d'états), avant d'aborder, en fin de paragraphe, le cas général d'un système quantique quelconque.

Inhibition des oscillations de Rabi dans un système à deux niveaux

Considérons, pour commencer, un système à deux niveaux¹ $\{|f\rangle, |e\rangle\}$ d'énergies respectives 0 et $\hbar\omega_0$, soumis à la perturbation

$$\begin{aligned}\widehat{V}(t) &= \widehat{V} \cos(\omega_0 t) \\ \text{où } \widehat{V} &= \hbar\Omega_R \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

en résonance avec la transition $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ (Ω_R est la pulsation de RABI, supposée réelle). La probabilité $p_f(t)$ de mesurer le système dans l'état $|f\rangle$ à l'instant t (voir calcul ci-dessous)

$$p_f(t) = |\langle f|\varphi(t)\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

présente un comportement oscillatoire de fréquence $\frac{2\pi}{\Omega_R}$ (oscillations de RABI) représenté sur la figure 2.1.

Calcul de la probabilité p_f

En posant (représentation d'interaction)

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|f\rangle + \beta(t)e^{-i\omega_0 t}|f\rangle,$$

l'équation de SCHRODINGER $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \widehat{H}|\psi\rangle$ conduit au système différentiel suivant

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}(t) &= -i\Omega_R\beta e^{-i\omega_0 t} \cos(\omega_0 t) \\ \frac{d\beta}{dt}(t) &= -i\Omega_R\alpha e^{i\omega_0 t} \cos(\omega_0 t),\end{aligned}$$

1. Typiquement, ce modèle décrit l'interaction d'un atome à deux niveaux avec un champ électrique classique sinusoïdal $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t)$. Dans ce cas, on a $\hbar\Omega_R = -\vec{d} \cdot \vec{E}_0$, où \vec{d} représente le dipôle de la transition.

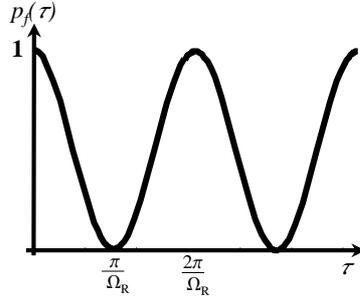


FIG. 2.1 – Oscillations de RABI dans un système à deux niveaux.

et, en négligeant les termes rapidement oscillants (approximation de l'onde tournante), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}(t) &= -i\frac{\Omega_R}{2}\beta \\ \frac{d\beta}{dt}(t) &= -i\frac{\Omega_R}{2}\alpha,\end{aligned}$$

soit, sous forme matricielle, en posant $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} 0 & -i\frac{\Omega_R}{2} \\ -i\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = M \cdot \vec{u}. \quad (2.1)$$

En exprimant le système différentiel (2.1) dans la base des états propres de la matrice M

$$\left\{ \vec{u}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_+ = i\frac{\Omega_R}{2}, \vec{u}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_- = -i\frac{\Omega_R}{2} \right\}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{dc_+}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2}c_+(t) \\ \frac{dc_-}{dt} = -i\frac{\Omega_R}{2}c_-(t). \end{cases}$$

On calcule alors facilement $c_+(t) = A_+e^{i\frac{\Omega_R}{2}t}$ et $c_-(t) = A_-e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$. En revenant à la base initiale, on aboutit à

$$\vec{u} = c_+(t)\vec{u}_+ + c_-(t)\vec{u}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_+e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + A_-e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ -A_+e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + A_-e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

En utilisant les conditions initiales $\alpha(0) = 1$ et $\beta(0) = 0$, on obtient $A_+ = A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où

$$\begin{cases} \alpha(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ \beta(t) = -i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{cases}$$

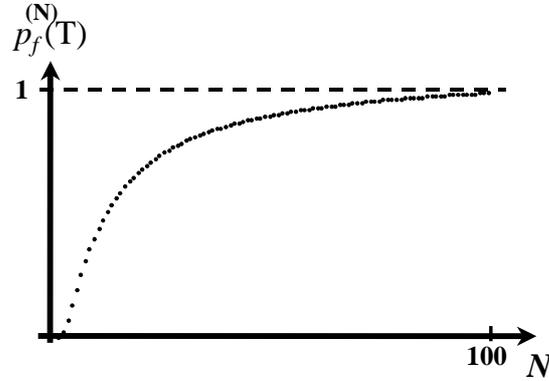


FIG. 2.2 – Probabilité $p_f^{(N)}(T)$ d'observer N fois l'état $|f\rangle$ lors de la série de mesures en fonction de N . On a pris $\Omega_R T = \pi$ (pulse π) pour la représentation.

soit $|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)|f\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)e^{-i\omega_0 t}|e\rangle$. A partir de cette expression, on calcule la probabilité $p_f(t)$ de mesurer le système dans l'état $|f\rangle$ à l'instant t

$$p_f(t) = |\langle f|\varphi(t)\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right).$$

Si, en s'inspirant de l'idée de VON NEUMANN, on réalise, entre les dates $t = 0$ et T une série de N mesures, associées au projecteur $|f\rangle\langle f|$ et destinées à tester si le système se trouve dans son état initial $|f\rangle$, la probabilité d'obtenir N fois un résultat positif, et donc d'observer N fois l'état $|f\rangle$, est égale à

$$\begin{aligned} p_f^{(N)}(T) &= p_f\left(\frac{T}{N}\right) \times p_f\left(\frac{T}{N}\right) \times \dots \times p_f\left(\frac{T}{N}\right) \\ &= \left[p_f\left(\frac{T}{N}\right)\right]^N \\ p_f^{(N)}(T) &= \left[\cos\left(\frac{\Omega_R T}{2N}\right)\right]^{2N}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cette probabilité est représentée sur la figure 2.2 en fonction de N : on constate qu'elle croît avec N , et tend vers 1 quand N tend vers l'infini. Ainsi, on observe une inhibition des oscillations de RABI, *partielle* pour des valeurs

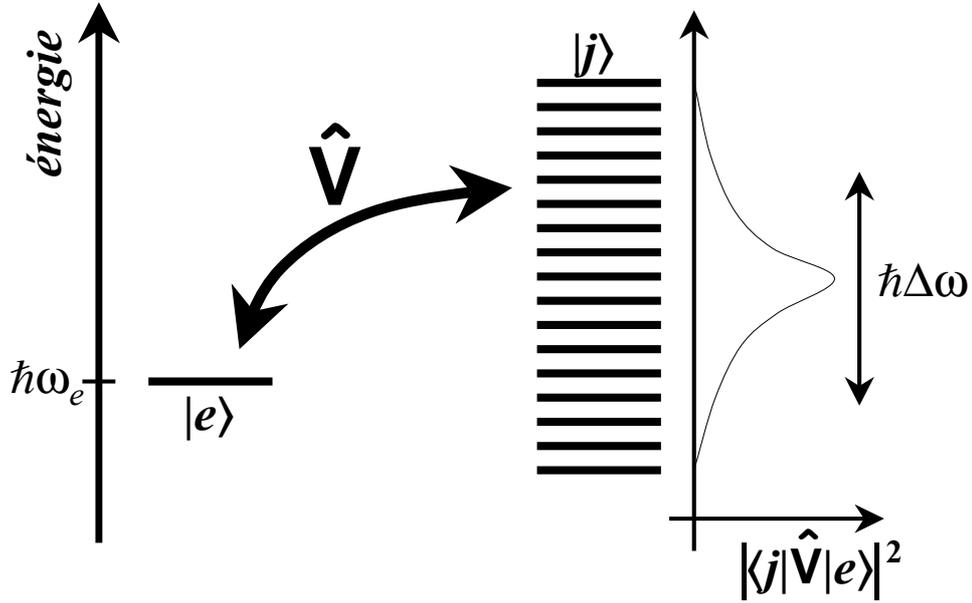


FIG. 2.3 – Diagramme énergétique du système instable considéré. Un état discret $|e\rangle$, d'énergie $\hbar\omega_e$ est couplé par l'opérateur \hat{V} à la bande d'états $\{|j\rangle\}$, d'énergies respectives $\hbar\omega_j$. Le facteur de forme $|\langle j|\hat{V}|e\rangle|^2$ est représenté à droite de la figure ; sa largeur est notée $\hbar\Delta\omega$.

finies du nombre de mesures, *totale* dans la limite où le système est mesuré en continu, l'atome étant alors gelé dans son état initial.

L'effet dont nous venons d'établir l'existence (théorique) est, a priori, étonnant (du reste, de nombreux auteurs ont cru y déceler un paradoxe, voir la "Remarque sémantique", à la fin de ce paragraphe). Dans la suite, nous montrons qu'il se manifeste également dans des systèmes instables (tels qu'un atome à deux niveaux couplé avec le champ électromagnétique quantique).

Influence de mesures répétées sur un système instable

Considérons un système de Hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, initialement dans l'état $|e\rangle$, état propre de \hat{H}_0 ($\hat{H}_0 |e\rangle = \hbar\omega_e |e\rangle$). Le Hamiltonien \hat{V} couple $|e\rangle$ à un ensemble (discret) d'états propres de \hat{H}_0 , notés $|j\rangle$ ($\hat{H}_0 |j\rangle = \hbar\omega_j |j\rangle$) : on note $v_j \equiv \langle e|\hat{V}|j\rangle$, et l'on suppose que $\langle j|\hat{V}|j'\rangle = \langle e|\hat{V}|e\rangle = 0$ (voir figure 2.3).

En représentation d'interaction

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) e^{-i\omega_e t} |e\rangle + \sum_j \beta_j(t) e^{-i\omega_j t} |j\rangle,$$

l'équation de SCHRODINGER $i\hbar\partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ conduit au système différentiel suivant

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_j v_j e^{i(\omega_e - \omega_j)t} \beta_j \\ \frac{d\beta_j}{dt}(t) &= -\frac{i}{\hbar} v_j^* e^{-i(\omega_e - \omega_j)t} \alpha. \end{aligned}$$

Aux temps τ très courts, *i.e.* tels que, pour tout j , $(\omega_e - \omega_j)\tau \ll 1$, autrement dit, tels que $\tau\Delta\omega \ll 1$, où $\hbar\Delta\omega$ désigne la largeur en énergie de la bande $\{|j\rangle\}$, on peut remplacer les exponentielles par 1 dans les équations précédentes. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_j v_j \beta_j \\ \frac{d\beta_j}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} v_j^* \alpha. \end{aligned}$$

qui conduisent à

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Omega_1^2 \left(\frac{1}{\hbar^2} \sum_j |v_j|^2 \right) \alpha &= 0, \\ \text{où } \Omega_1^2 &\equiv \left(\frac{1}{\hbar^2} \sum_j |v_j|^2 \right), \end{aligned}$$

dont la solution s'écrit, compte tenu de la condition initiale $\alpha(0) = 1$,

$$\alpha(\tau) \simeq \cos(\Omega_1\tau).$$

De plus, si la condition $\Omega_1\tau \ll 1$ est remplie, le cosinus peut s'écrire approximativement $1 - \frac{\Omega_1^2}{2}\tau^2$. A partir de l'expression de $\alpha(\tau)$ on calcule la probabilité $p_e(\tau)$ de mesurer le système dans son état initial $|e\rangle$ à la date $\tau \ll \min\left\{\frac{1}{\Omega_1}, \frac{1}{\Delta\omega}\right\}$:

$$p_e(\tau) \simeq 1 - \left(\frac{\tau}{\tau_Z}\right)^2,$$

où $\tau_Z \equiv \frac{1}{\Omega_1}$.

Comportement de la probabilité aux temps courts

En revanche, si nous nous plaçons dans la gamme des temps courts ($\frac{1}{\Delta\omega} \ll t \ll \frac{1}{\Gamma}$), la règle d'or de FERMI s'applique et la décroissance est non plus quadratique mais linéaire (départ d'une exponentielle)

$$p_e(t) \simeq 1 - \Gamma t,$$

où $\Gamma \equiv \frac{2\pi}{\hbar} \sum_j |v_j|^2 \delta(\omega_j - \omega_e)$ (voir par exemple [CTDRG96], compléments *CI* et *CIII*).

Si nous réalisons N mesures entre les dates 0 et T , la probabilité $p_e^{(N)}$ d'observer N fois le système dans son état initial est

$$\begin{aligned} p_e^{(N)}(T) &= p_e\left(\frac{T}{N}\right)^N \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \left[1 - \left(\frac{T}{N\tau_Z}\right)^2\right]^N \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{T^2}{N\tau_Z^2}} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

La figure 2.4 représente la probabilité $p_e^{(N)}(T)$ en fonction du nombre de mesures imposées au système, pour une même durée totale T . Comme précédemment, on observe une inhibition de la dynamique naturelle du système, *partielle* pour des valeurs de N finies (néanmoins cette valeur doit être "suffisamment" grande pour que la formule de $p_e^{(N)}(T)$ soit utilisable), totale dans la limite où l'atome est observé en continu.

Les deux modèles que nous venons d'examiner amènent aux mêmes résultats: la mesure fréquente du système inhibe sa dynamique naturelle. Dans la suite, nous montrons qu'il en est de même pour une grande variété de systèmes.

Influence de mesures répétées sur la probabilité de survie d'un système quantique quelconque, effet et paradoxe Zénon

Considérons un système quantique quelconque, d'espace de HILBERT \mathcal{H} , de Hamiltonien \hat{H} , initialement dans l'état (normalisable) $|a\rangle$. L'état du

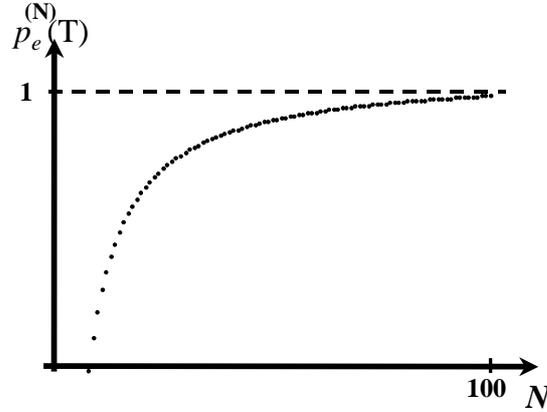


FIG. 2.4 – Probabilité $p_e^{(N)}(T)$ d'observer N fois l'état $|e\rangle$ lors de la série de mesures en fonction de N (on a pris $\Omega_1 T^2 = 1$ pour la représentation).

système à la date t s'écrit simplement

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |a\rangle$$

et la probabilité de mesurer le système dans son état initial à la date t est simplement donnée par

$$p_a(t) = \left| \langle a | e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |a\rangle \right|^2.$$

Si nous supposons que, pour tout entier k , le moment d'ordre k du Hamiltonien est fini, soit

$$\forall k, \quad \langle a | \hat{H}^k |a\rangle < \infty,$$

nous pouvons, aux temps courts τ , développer l'exponentielle $e^{-i\frac{\hat{H}\tau}{\hbar}}$ en puissances de τ

$$\begin{aligned} p_a(\tau) &= \left| 1 - \frac{i\tau}{\hbar} \langle a | \hat{H} |a\rangle - \frac{\tau^2}{2\hbar^2} \langle a | \hat{H}^2 |a\rangle + \dots \right|^2 \\ &= 1 - \frac{\tau^2}{\hbar^2} \left[\langle a | \hat{H}^2 |a\rangle - \langle a | \hat{H} |a\rangle^2 \right] + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{\tau}{\tau_Z} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

où $\tau_Z \equiv \frac{\hbar}{\Delta H} = \frac{\hbar}{\sqrt{\langle a | \hat{H}^2 |a\rangle - \langle a | \hat{H} |a\rangle^2}}$ est appelé "temps ZENON".

La notion de "temps court" est difficile à préciser ici, sans référence à aucun modèle particulier. Dans le cas d'un système instable à facteur de forme lorentzien $g(\omega) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Lambda}{\omega^2 + \Lambda^2}}$, P. FACCHI et al [FNP01] ont montré que la limite des temps courts est donnée par $\frac{1}{\Lambda}$. Plus généralement, pour des systèmes instables (de durée de vie τ_L), L.S. SCHULMAN [Sch97] a suggéré de prendre le temps $\tau_J \equiv \frac{\tau_Z^2}{\tau_L}$, appelé "*temps de saut*" (en référence aux sauts quantiques, prévus par la théorie quantique de BOHR) comme limite du régime quadratique de la probabilité de survie. Néanmoins, il n'est pas certain que cette propriété puisse se généraliser aisément au cas d'un système quantique quelconque. En tout état de cause, le temps ZENON τ_Z ne doit pas être confondu avec la limite du régime quadratique pour la probabilité de survie.

Remarque sémantique : effet ou paradoxe ZENON ?

Le choix même des termes "paradoxe" et "effet ZENON quantique" est sujet à débat : il semble que chaque auteur ait un point de vue différent sur la question. Ainsi pour certains, comme E. Block et P.R. Berman [BB91], le terme "paradoxe" ne doit être employé que pour désigner l'inhibition d'une transition irréversible telle qu'une décroissance radioactive ou une émission spontanée, les autres phénomènes d'inhibition relevant d'un simple "effet ZENON quantique" ; pour d'autres au contraire, toute inhibition d'évolution quantique, irréversible ou non (comme les oscillations de Rabi d'un système à deux niveaux), relève du paradoxe ZENON quantique. Certains, comme S.Pascasio et M.Namiki [PN94], désignent par "effet ZENON" l'inhibition partielle d'une transition, irréversible ou non, par un nombre fini de mesures répétées, et réservent le terme de "paradoxe" à l'inhibition totale de cette transition dans la limite des mesures continues (c'est ce point de vue que nous avons adopté ci-dessus). Pour d'autres enfin, comme D. Home et M.A.B. Whitaker [HW93], le paradoxe réside dans le fait que la seule présence d'un appareil de mesure macroscopique suffit à modifier la dynamique d'un système quantique ; toute modification d'origine "microscopique" (interaction avec un champ quantique par exemple) de l'évolution d'un système quantique se trouve alors rangée sous l'appellation "d'effet ZENON". Devant de telles batailles sémantiques, nous choisirons, dans la suite, la solution de facilité : nous oublierons le paradoxe pour ne parler que d'effet ZENON quantique !

Si nous réalisons N mesures du système entre les dates 0 et T , on retrouve, comme dans les exemples précédents

$$p_a^{(N)}(T) = p_a \left(\frac{T}{N} \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{T^2}{N\tau_Z^2}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

De ce comportement asymptotique, nous tirons deux conclusions :

- par définition de la limite, nous pouvons affirmer qu'il existe un entier

N^* tel que, pour tout $N > N^*$, $p_a^{(N)}(T) > p_a(T)$: en d'autres termes, il existe une fréquence de mesure au delà de laquelle l'évolution du système est effectivement ralentie (effet ZENON);

- dans la limite (*mathématique*) de mesures infiniment fréquentes, le système est gelé dans son état initial (paradoxe ZENON).

Nous nous proposons maintenant de revenir plus en détail sur les conditions d'apparition de l'effet ZENON. En début de paragraphe, nous avons supposé que tous les moments du Hamiltonien étaient finis². Cette hypothèse forte nous a permis de développer l'opérateur d'évolution en puissances de t et d'établir l'existence d'un comportement quadratique pour la probabilité de survie p_a aux temps courts. De ce comportement a découlé l'effet ZENON. On peut néanmoins se demander si la condition *suffisante* que nous avons utilisée est également *nécessaire*: hélas, une réponse simple à cette question est impossible.

En effet, il semble qu'il n'existe pas réellement de consensus sur les conditions minimales à imposer à un système pour qu'il manifeste un effet ZENON. Pour certains auteurs [NNP95], la finitude de tous les moments $\langle a | \hat{H}^k | a \rangle$ est nécessaire; pour d'autres [Kha68, MS77], seul le premier moment doit être fini, et le Hamiltonien (semi-)borné; pour d'autres enfin [HW86], il suffit que les deux premiers moments $\langle a | \hat{H} | a \rangle$ et $\langle a | \hat{H}^2 | a \rangle$ soient finis (voir remarque ci-dessous)...

Une partie de la confusion vient peut-être du fait que l'on a souvent tendance à penser, à tort, que l'existence d'un effet ZENON est conditionnée par le départ quadratique de la probabilité de survie. En réalité, l'effet ZENON peut apparaître dans des systèmes dont le comportement est plus "exotique". Dans un article datant de 1996 [MWS96], MUGA et al. traitent du comportement aux temps courts de systèmes dont les premiers moments divergent: en particulier, ils donnent un exemple de système modèle, pour lequel $\langle a | \hat{H} | a \rangle$ est fini et $\langle a | \hat{H}^2 | a \rangle$ infini, et dont la probabilité de survie varie en $1 - k\tau^{3/2}$ ($k > 0$) aux temps courts. Il est facile de montrer que ce type de système peut exhiber un effet ZENON: en effet, la probabilité de mesurer le système N fois

2. Du reste, c'est bien dans ce cas de figure que nous nous trouvons, tant dans l'exemple du système à deux niveaux en oscillations de RABI, que dans celui du système instable (en supposant la largeur $\Delta\omega$ finie).

dans son état initial entre les dates 0 et T s'écrit comme précédemment³

$$\begin{aligned}
 p_a^{(N)}(T) &= p_a \left(\frac{T}{N} \right)^N \\
 &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \left[1 - k \left(\frac{T}{N} \right)^{3/2} \right]^N \\
 &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k \frac{T^{3/2}}{N^{1/2}}} \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.
 \end{aligned}$$

Cet exemple nous montre que la finitude de $\langle a | \hat{H}^2 | a \rangle$ n'est pas nécessaire à l'observation d'un effet ZENON.

Néanmoins, il semble qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'effet ZENON soit très délicate à établir dans le cas général : les mathématiques de l'effet ZENON [Sch02, Sch03a, Sch03b] se révèlent en effet très techniques et non triviales !

Remarque : effet ZENON et principe d'incertitude généralisé

Certains auteurs [HW86] dérivent les conditions d'existence de l'effet ZENON par des arguments fondés sur le principe d'incertitude "généralisé". Ce principe stipule que, pour deux observables \hat{A} et \hat{B} ,

$$\Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|,$$

où $\Delta \hat{A} = \left(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \right)^{1/2}$. En choisissant $\hat{B} = \hat{H}$, le Hamiltonien du système,

et en utilisant le théorème d'Ehrenfest $\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle$, on obtient

$$\Delta \hat{A} \geq \frac{1}{2\Delta \hat{H}} \left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|.$$

En posant alors $\hat{A} = \hat{E}_a = |a\rangle \langle a|$, où $|a\rangle$ désigne l'état initial du système, on trouve $\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle = p_a(\tau) = \left| \langle a | e^{-i\hat{H}\tau} | a \rangle \right|^2$ où $p_a(\tau)$ désigne la probabilité de trouver le système dans l'état initial $|a\rangle$ à la date τ . Finalement, on obtient

$$p_a [1 - p_a]^{1/2} \geq \frac{1}{2\Delta \hat{H}} \left| \frac{dp_a}{d\tau} \right|. \quad (2.3)$$

3. Plus généralement, pour un système dont la probabilité de survie évolue comme $1 - k\tau^m$ aux temps courts, il sera possible d'obtenir un effet ZENON si $m > 1$.

En notant que $p_a(\tau = 0) = 1$, on a, d'après l'inégalité précédente $\frac{dp_a}{d\tau}(\tau = 0) = 0$, à la condition que $\Delta\widehat{H}$ soit fini et non nul (ce qui suppose $\langle a | \widehat{H} | a \rangle, \langle a | \widehat{H}^2 | a \rangle < \infty$). Ainsi, au voisinage de 0, la probabilité $p_a(\tau)$ peut se développer sous la forme

$$p_a(\tau) = 1 - \frac{t^2}{\tau_Z^2} + o(t^2),$$

où $\tau_Z = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 p_a}{d\tau^2}(\tau = 0)\right)^{-2}$ est le temps ZENON (ce point nous paraît douteux : si l'un des moments d'ordre supérieur est infini, le développement de la probabilité reste-t-il valable?). Si, comme précédemment, on impose au système N mesures pulsées entre les dates 0 et $T = N\tau$, la probabilité de trouver le système dans son état initial $|a\rangle$ lors de chaque mesure est donnée par

$$\begin{aligned} p_a^{(N)}(T) &= p_a \left(\frac{T}{N} \right)^N \\ &\simeq \left[1 - \frac{T^2}{N^2 \tau_Z^2} + o\left(\frac{T}{N}\right) \right]^N. \end{aligned}$$

Dans la limite des mesures infiniment fréquentes $N \rightarrow +\infty$, on trouve, comme précédemment, $\mathcal{P}_a(T) = \lim_{N \rightarrow +\infty} p_a^{(N)}(T) = 1$ pour tout $T > 0$.

On peut encore donner un autre point de vue en dérivant la règle de FLEMING de l'équation (2.3) :

$$\begin{aligned} p_a [1 - p_a]^{1/2} &\geq \frac{1}{2\Delta H} \left| \frac{dp_a}{d\tau} \right| \\ 2\Delta H &\geq \frac{1}{[p_a (1 - p_a)]^{1/2}} \left| \frac{dp_a}{d\tau} \right| = \left| \frac{1}{[p_a (1 - p_a)]^{1/2}} \cdot \frac{dp_a}{d\tau} \right| \\ 2\Delta H t &\geq \int_0^t \left| \frac{1}{[p_a (1 - p_a)]^{1/2}} \cdot \frac{dp_a}{d\tau} \right| d\tau \geq \left| \int_0^t \frac{1}{[p_a (1 - p_a)]^{1/2}} \cdot \frac{dp_a}{d\tau} d\tau \right| \\ 2\Delta H t &\geq \left| \int_1^{p_a(t)} \frac{dP}{[P(1-P)]^{1/2}} \right|. \end{aligned}$$

Or $\int_1^{p_a(t)} \frac{dP}{[P(1-P)]^{1/2}} = \int_1^{p_a(t)} \frac{2dP}{[1-(2P-1)^2]^{1/2}} = \int_1^{2p_a(t)-1} \frac{dp}{[1-p^2]^{1/2}}$ où l'on a réalisé le changement de variable $p = 2P-1$; de plus $\int_1^{2p_a(t)-1} \frac{dp}{[1-p^2]^{1/2}} = [\text{Arc sin } p]_1^{2p_a(t)-1} = \text{Arc sin}(2p_a(t) - 1) - \frac{\pi}{2}$. On obtient donc l'inégalité

$$2\Delta H t \geq \left| \text{Arc sin}(2p_a(t) - 1) - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin}(2p_a(t) - 1),$$

soit

$$\text{Arc sin} (2p_a(t) - 1) \geq \frac{\pi}{2} - 2\Delta H t,$$

et, en supposant que $t \leq \frac{\pi}{4\Delta H}$, on peut appliquer le sinus aux deux membres de l'inégalité sans en changer le sens (cf croissance de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), ce qui amène $2p_a(t) - 1 \geq \cos(2\Delta H t)$, soit

$$p_a(t) \geq \cos^2(t\Delta H).$$

Ceci constitue la règle de FLEMING, valable aux temps courts ($t \leq \frac{\pi}{4\Delta H}$). De nouveau, on retrouve l'effet ZENON en appliquant une séquence de N mesures pulsées entre les dates 0 et T : la probabilité d'observer le système dans son état initial lors de chacune des mesures est donnée par $p_a^{(N)}(T) = p_a\left(\frac{T}{N}\right)^N$ et la règle de FLEMING permet alors d'écrire

$$1 \geq p_a^{(N)}(T) \geq \cos^{2N}\left(\frac{T}{N}\Delta H\right) \geq 0,$$

ce qui implique à nouveau $p_a^{(N)}(T) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

Au terme de ce paragraphe, plusieurs remarques s'imposent.

Notons tout d'abord les caractéristiques très particulières du modèle de mesure employé tout au long de ce paragraphe. D'une part, nous ne "sélectionnons", *i.e.* nous ne conservons, notre système que si le résultat de la mesure est *positif*, c'est-à-dire, ici, si l'état observé est l'état initial $|a\rangle$ (le calcul de la probabilité $p_a^{(N)}(T)$ suppose qu'après chaque mesure le système "repart" effectivement de $|a\rangle$): on dit que la mesure est *sélective*. En outre, le sous-espace propre associé au résultat désiré étant *unidimensionnel* (engendré par $|a\rangle$), l'état obtenu après une mesure "positive" ne présente aucune ambiguïté: on dit alors que la mesure est *complète*.

Nous avons ainsi, dans ce paragraphe, établi l'existence d'un phénomène étonnant, appelé effet ZENON, selon lequel l'évolution naturelle d'un système soumis à des mesures répétées, complètes et sélectives, se trouve inhibée. Les résultats obtenus restent-ils valables pour des mesures plus "réalistes"? C'est ce que nous nous proposons de voir dans les deux paragraphes suivants.

2.1.3 Effet Zénon et mesures incomplètes

Les résultats établis précédemment concernaient des mesures *complètes*, représentées par un projecteur unidimensionnel de la forme $\hat{E}_a = |a\rangle\langle a|$: en appliquant fréquemment de telles mesures, nous avons montré qu'il est possible de geler un système quantique dans son état initial $|a\rangle$. On peut

généraliser les résultats précédents, au prix d'une étude mathématique rigoureuse, au cas de mesures *incomplètes*, *i.e.* représentées par un projecteur multidimensionnel \hat{E} . Cette généralisation est due à B. MISRA et E.C.G. SUDARSHAN qui furent les premiers à trouver un cadre mathématique performant pour traiter de l'effet ZENON [MS77]. Nous nous bornerons ici à énoncer leur théorème, sans omettre d'en préciser les hypothèses.

Considérons un système quantique \mathcal{S} , d'espace de HILBERT \mathcal{H} et de Hamiltonien \hat{H} indépendant du temps. Nous noterons \mathcal{H}_E le sous-espace associé au projecteur orthogonal multidimensionnel \hat{E} dont nous supposons qu'il ne commute pas avec \hat{H} . Le système est initialement préparé dans un état⁴ $\hat{\rho}_0$ appartenant à \mathcal{H}_E (on a évidemment $\hat{E}\hat{\rho}_0\hat{E} = \hat{\rho}_0$). Si on laisse évoluer le système librement entre les dates 0 et τ , son état à la date τ s'écrit

$$\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{\rho}_0\hat{U}(\tau).$$

On réalise alors une mesure sélective destinée à déterminer si le système a "survécu", c'est-à-dire si son état se trouve toujours dans \mathcal{H}_E ; juste après la mesure, on obtient alors l'état

$$\hat{\rho}(\tau) = \hat{E}\hat{\rho}(\tau)\hat{E} = \frac{\hat{E}\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{\rho}_0\hat{U}(\tau)\hat{E}}{\text{Tr} \left[\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{\rho}_0\hat{U}(\tau)\hat{E} \right]}$$

avec la probabilité (de survie) $\text{Tr} \left[\hat{U}^\dagger(\tau)\hat{\rho}_0\hat{U}(\tau)\hat{E} \right]$. Si l'on réalise N séquences de ce type, de même durée $\tau = \frac{T}{N}$, entre les dates 0 et T , on observe le système dans \mathcal{H}_E lors de chacune des N mesures du cycle avec la probabilité

$$p^{(N)}(T) = \text{Tr} \left[\hat{V}_N(T)\hat{\rho}_0\hat{V}_N^\dagger(T) \right],$$

$$\text{où } \hat{V}_N(T) = \left[\hat{E}\hat{U} \left(\frac{T}{N} \right) \hat{E} \right]^N$$

et l'état du système à la date T est alors

$$\hat{\rho}_N(T) = \frac{\hat{V}_N(T)\hat{\rho}_0\hat{V}_N^\dagger(T)}{\text{Tr} \left[\hat{V}_N^\dagger(T)\hat{\rho}_0\hat{V}_N(T) \right]}.$$

D'ores et déjà, on voit que les tests réguliers imposés au système modifient sa dynamique. De plus, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- le Hamiltonien \hat{H} est borné inférieurement,

4. Nous utilisons ici le formalisme de la matrice densité: ceci nous permet de prendre en compte les états généraux du système, *i.e.* non forcément purs. Notons que cette précaution était inutile au paragraphe précédent: en effet, le sous-espace $\mathcal{H}_E = \text{Vect}(|a\rangle)$ considéré était alors unidimensionnel, de sorte qu'un état $\hat{\rho}_0$ de \mathcal{H}_E était forcément un état pur.

- la limite $\widehat{\mathcal{V}}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{\mathcal{V}}_N(t)$ existe pour $t > 0$,
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \widehat{\mathcal{V}}(t) = \widehat{E}$,

alors la probabilité d'observer continûment le système dans \mathcal{H}_E (limite $N \rightarrow +\infty$) est

$$\mathcal{P}(T) = \lim_{N \rightarrow +\infty} p^{(N)}(T) = Tr \left[\widehat{\mathcal{V}}(T) \widehat{\rho}_0 \widehat{\mathcal{V}}^\dagger(T) \right]$$

et l'état du système à la date T est $\widehat{\rho}(T) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{\rho}_N(T) = \frac{\widehat{\mathcal{V}}(T) \widehat{\rho}_0 \widehat{\mathcal{V}}^\dagger(T)}{Tr[\widehat{\mathcal{V}}(T) \widehat{\rho}_0 \widehat{\mathcal{V}}^\dagger(T)]}$.

De plus, les opérateurs $\widehat{\mathcal{V}}(t)$ existent pour tout réel t et forment un semi-groupe. Enfin, l'invariance par renversement du temps, $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger(t) = \widehat{\mathcal{V}}(-t)$, implique $\widehat{\mathcal{V}}^\dagger(t) \widehat{\mathcal{V}}(t) = \widehat{E}$ et, par conséquent

$$\mathcal{P}(T) = Tr \left[\widehat{\mathcal{V}}^\dagger(T) \widehat{\mathcal{V}}(T) \widehat{\rho}_0 \right] = Tr \left[\widehat{\rho}_0 \widehat{E} \right] = 1.$$

Ainsi, toute transition hors de \mathcal{H}_E se trouve inhibée.

Ce résultat a été nommé par ses inventeurs le "*paradoxe ZENON quantique*", en référence au philosophe grec ZENON D'ELEE qui prétendait (entre autres!) qu'aucune flèche ne pourrait jamais atteindre le talon d'ACHILLE puisque, pour ce faire, il lui faudrait tout d'abord parcourir la moitié de la distance qui l'en sépare, ce qui suppose au préalable d'avoir franchi la moitié de cette moitié, et ainsi de suite; à l'aide de ce genre de paradoxes, ZENON D'ELEE prétendait démontrer l'impossibilité du mouvement. Ce qui est évidemment faux en physique classique (et facilement testable, j'en parlais récemment à ACHILLE), se révèle exact en physique quantique: à condition de faire des mesures infiniment fréquentes, la flèche (l'état quantique) ne peut atteindre le talon (\mathcal{H}_E^\perp).

Notons qu'on retrouve évidemment les résultats de la section précédente en prenant $\widehat{E} = \widehat{E}_a$: dans ce cas, $\mathcal{H}_E = Vect[|a\rangle]$ et la probabilité $\mathcal{P}_a(T)$ d'observer en continu le système dans son état initial est égale à 1. En revanche, pour un projecteur \widehat{E} multidimensionnel, *i.e.* pour une mesure incomplète, à la différence de la section précédente, l'état du système n'est pas "gelé" dans son état initial, mais seulement astreint à évoluer dans le sous-espace (multidimensionnel) $\mathcal{H}_E = \widehat{E}\mathcal{H}$. Signalons que l'équipe de P. FACCHI a étudié la dynamique d'un tel système dans \mathcal{H}_E ("dynamique ZENON") sur divers exemples impliquant des mesures de position [FGMPS00, FMPSS03, FPSS01]: il a notamment été montré que, sous certaines conditions, l'évolution du système dans \mathcal{H}_E était régie par un opérateur unitaire $\widehat{U}(T) = e^{-i\widehat{H}_Z T}$ où \widehat{H}_Z est le "Hamiltonien ZENON", pour lequel des expressions explicites ont été proposées.

2.1.4 Effet Zénon et mesures non sélectives

On peut aller plus loin dans la généralisation de l'effet ZENON en considérant des mesures à la fois incomplètes et non sélectives, *i.e.* décrites par un superopérateur du type

$$\widehat{\mathcal{M}}\widehat{\rho} = \sum_n \widehat{M}_n \widehat{\rho} \widehat{M}_n, \quad (2.4)$$

où $\{\widehat{M}_n\}$ est une famille de projecteurs satisfaisant

$$\begin{aligned} \widehat{M}_n \widehat{M}_p &= \delta_{np} \widehat{M}_n \\ \sum_n \widehat{M}_n &= \widehat{1}. \end{aligned}$$

et associée à la partition

$$\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$$

de l'espace de HILBERT⁵. L'extension du théorème de MISRA et SUDARSHAN à de tels processus de mesure a été proposée par l'équipe de P. FACCHI [FP03a]. Comme dans la section précédente, nous nous contenterons ici de donner les hypothèses employées ainsi que les principaux résultats.

Si l'on applique, entre les dates 0 et T , N mesures du type (2.4) à un système de Hamiltonien \widehat{H} , l'évolution est déterminée par le superopérateur

$$\widehat{V}^{(N)}(T) = \widehat{\mathcal{M}} \left[\exp \left(-i\widehat{H} \frac{T}{N} \right) \widehat{\mathcal{M}} \right]^{N-1}.$$

Plus explicitement, si $\widehat{\rho}_0$ est l'état du système à la date $t = 0$, l'état du système à la date T est donné par

$$\widehat{\rho}(T) = \widehat{V}^{(N)}(T) \widehat{\rho}_0 = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} \widehat{V}_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{(N)}(T) \widehat{\rho}_0 \widehat{V}_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{(N)\dagger}(T)$$

où

$$\widehat{V}_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{(N)}(T) = \widehat{M}_{n_N} \exp \left(-i\widehat{H} \frac{T}{N} \right) \widehat{M}_{n_{N-1}} \dots \widehat{M}_{n_2} \exp \left(-i\widehat{H} \frac{T}{N} \right) \widehat{M}_{n_1}.$$

5. On peut voir la mesure non sélective comme une mesure dont on ne lirait pas le résultat, cf [Har03]. On voit qu'ici l'utilisation du formalisme "matrice densité" est requis par la forme même de la mesure employée.

En supposant, comme dans le théorème précédent, l'existence, pour tout entier n et tout $T > 0$, des limites

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_n(T) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{\mathcal{V}}_{n, \dots, n}^{(N)}(T) \\ \widehat{M}_n &= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \widehat{\mathcal{V}}_n(\tau),\end{aligned}$$

il est possible de montrer que $\widehat{\mathcal{V}}_n(t)$ existe pour tout réel t , forme un semi-groupe et vérifie

$$\widehat{\mathcal{V}}_n^\dagger(t) \widehat{\mathcal{V}}_n(t) = \widehat{M}_n.$$

De plus, on peut montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{\mathcal{V}}_{n, \dots, n', \dots, n}^{(N)}(t) = 0 \text{ pour } n \neq n'.$$

Le superopérateur limite $\widehat{\mathcal{V}}(T)$ fournit l'état du système à la date T

$$\widehat{\rho}(T) = \widehat{\mathcal{V}}(T) \widehat{\rho}_0 = \sum_n \widehat{\mathcal{V}}_n(T) \widehat{\rho}_0 \widehat{\mathcal{V}}_n^\dagger(T),$$

avec $\sum_n \widehat{\mathcal{V}}_n(T) \widehat{\mathcal{V}}_n^\dagger(T) = \sum_n \widehat{M}_n = \widehat{1}$. Quel que soit l'état initial $\widehat{\rho}_0$, la matrice densité $\widehat{\rho}(T)$ résultante est bloc-diagonale, les sous-espaces stables correspondant aux \mathcal{H}_n ; ainsi, toute interférence entre les différents sous-espaces \mathcal{H}_n est supprimée, et la probabilité $p_n(T)$ de trouver le système dans le sous-espace \mathcal{H}_n est

$$\begin{aligned}p_n(T) &= \text{Tr} \left[\widehat{\rho}(T) \widehat{M}_n \right] \\ &= \text{Tr} \left[\widehat{\rho}_0 \widehat{M}_n \right] \\ &= p_n(0).\end{aligned}$$

En d'autres termes, la probabilité de présence se conserve dans chaque sous-espace et aucune "fuite" de probabilité entre les \mathcal{H}_n n'est possible. De plus, dans le cas où le Hamiltonien est borné, les opérateurs $\widehat{\mathcal{V}}_n(t)$ sont unitaires dans chacun des sous-espaces \mathcal{H}_n et prennent la forme

$$\widehat{\mathcal{V}}_n(T) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\widehat{M}_n \widehat{U} \left(\frac{T}{N} \right) \widehat{M}_n \right]^N = \widehat{M}_n \exp \left[-i \widehat{M}_n \widehat{H} \widehat{M}_n T \right].$$

On retrouve le résultat de MISRA et SUDARSHAN comme cas particulier du théorème que nous venons d'énoncer : il suffit pour cela de prendre $p_{n^*}(0) = 1$ pour une certaine valeur n^* de n . Le rôle de \mathcal{H}_E est alors joué

par \mathcal{H}_{n^*} et l'état quantique du système est contraint d'évoluer dans ce sous-espace, sans pouvoir en sortir. Dans le cas général ($\forall n, p_n(0) < 1$), on voit que l'effet de mesures non sélectives répétées est de partager l'espace de HILBERT en sous-espaces invariants, les \mathcal{H}_n , appelés "sous-espaces ZENON" ; les composantes de la matrice densité évoluent indépendamment les uns des autres dans chacun de ces secteurs.

2.2 Les tests expérimentaux de l'effet Zénon

L'effet ZENON a intrigué de nombreux scientifiques, tant théoriciens qu'expérimentateurs, qui, comme nous le verrons plus loin, ont crié à l'imposture, tenté de résoudre le paradoxe, ou encore ont essayé de s'en servir pour démontrer l'inanité de la théorie quantique "orthodoxe". D'autres enfin, plus pragmatiques, ont cherché à établir expérimentalement l'existence du phénomène.

L'attention s'est tout d'abord portée sur des systèmes oscillants, tels qu'un atome à deux niveaux soumis à des oscillations de RABI⁶ : R.J. COOK et W. ITANO furent les premiers, respectivement, à proposer et à réaliser une expérience visant à tester l'existence de l'effet ZENON Quantique dans un tel système. Leurs articles [Coo88] et [IHBW90], restés célèbres, ont suscité au sein de la communauté scientifique un débat acharné dont ont émergé bon nombre d'idées nouvelles.

Bien plus tard, M.C. FISCHER et al. [FGR01] parvinrent à mettre en évidence l'effet ZENON sur un système instable particulier, prouvant notamment l'existence d'un régime quadratique pour la probabilité de survie. L'ensemble de ces résultats sont rapportés et discutés dans ce paragraphe.

2.2.1 Effet Zénon dans un système oscillant

Dans ce paragraphe, nous rapportons la première mise en évidence expérimentale de l'effet ZENON dans un système à deux niveaux en oscillations de RABI : l'idée, due à R.J. COOK [Coo88] a été concrétisée par W. ITANO et son équipe [IHBW90]. Leurs résultats ont suscité de vives critiques, qui sont présentées et discutées en fin de paragraphe.

6. La raison en est pratique : pour des systèmes instables courants, comme un atome excité couplé à un champ électromagnétique quantifié, les paramètres caractéristiques, tels que la fréquence des mesures à imposer, prennent des valeurs peu "réalistes".

L'idée de Cook

Le but de l'article de R.J. COOK [Coo88] est de "dépoussiérer" la notion de *saut quantique*, issue de la vieille théorie quantique de BOHR, selon laquelle un atome occupe en permanence un état propre de l'énergie et "saute" d'une orbite à une autre lors d'un échange énergétique avec l'extérieur. Cette vision, évidemment fautive en Mécanique Quantique moderne, peut néanmoins se révéler pertinente pour décrire la dynamique de systèmes fréquemment mesurés. En effet, l'état d'un tel système à toute date t diffère très peu de celui dans lequel il se trouvait immédiatement après la dernière observation ; lorsqu'une transition a lieu, elle est si brutale et rapide (la durée de transition est inférieure ou égale à τ , l'intervalle entre deux mesures, supposé très court) qu'elle s'apparente à un "saut" comme l'entendait BOHR.

Pour illustrer son propos, COOK considère l'exemple d'un atome à deux niveaux, notés $\{|f\rangle, |e\rangle\}$, soumis à l'action d'un champ électrique classique $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t)$, en résonance avec la transition $|f\rangle \leftrightarrow |e\rangle$.

Ce système a déjà été étudié au le paragraphe 2.1.2 : néanmoins, contrairement à nous, et pour des raisons qui apparaîtront clairement un peu plus loin (voir le paragraphe "les critiques", ci-dessous), COOK n'utilise pas le formalisme "vecteur d'état" mais introduit la matrice densité $\hat{\rho}$ du système.

En premier lieu, il établit les équations dynamiques auxquelles obéit $\hat{\rho}$ en l'absence d'intervention extérieure (autre que le champ). Les résolvant pour les conditions initiales

$$(\hat{\rho}_{ff}(0) = 1, \hat{\rho}_{ef}(0) = \hat{\rho}_{fe}(0) = \hat{\rho}_{ee}(0) = 0),$$

il établit l'expression de la probabilité de trouver le système dans son état initial $|f\rangle$ (qui, bien sûr, coïncide avec celle que nous avons obtenue précédemment)

$$p_f(t) \equiv \hat{\rho}_{ff}(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)^2,$$

où $\Omega_R \equiv -\frac{\vec{d} \cdot \vec{E}_0}{\hbar}$ est la pulsation de RABI du système (\vec{d} est le dipôle de la transition, supposé réel). En particulier, au bout du temps $T_\pi = \frac{\pi}{\Omega_R}$ (pulse π), $p_f(T_\pi) = 0$, ce qui signifie que le système se trouve dans l'état $|e\rangle$ avec *certitude*.

Considérant ensuite le cas où l'atome est soumis à des mesures fréquentes (on suppose que deux mesures consécutives sont séparées du temps $\tau \ll 1$, ou, de manière équivalente, que les mesures sont réalisées à la fréquence $\frac{1}{\tau} \gg 1$),

COOK affirme que les cohérences $\hat{\rho}_{ef}$ et $\hat{\rho}_{fe}$ sont négligeables à toute date t : dans son modèle, l'acte de mesure remet à zéro les cohérences, qui n'ont pas le temps de se développer substantiellement durant les périodes d'évolution libre τ . Ainsi, la matrice densité $\hat{\rho}$ est approximativement diagonale à toute date t , ses seuls éléments non-nuls étant les populations notées

$$\begin{aligned} p_f(t) &= \hat{\rho}_{ff}(t) \\ p_e(t) &= \hat{\rho}_{ee}(t). \end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse de grande fréquence des mesures ($\frac{1}{\tau} \gg 1$), COOK établit les équations de taux suivantes pour les probabilités $p_f(t)$ et $p_e(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_f &= R(p_e - p_f) \\ \frac{d}{dt}p_e &= R(p_f - p_e) \\ \text{où } R &\equiv \frac{\Omega_R^2}{2}\tau, \end{aligned}$$

qu'il résout, en prenant pour conditions initiales ($p_f(0) = 1$, $p_e(0) = 0$) :

$$\begin{aligned} p_f(t) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2Rt}) \\ p_e(t) &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2Rt}). \end{aligned}$$

Pour retrouver les mêmes notations qu'au paragraphe 2.1.2, nous introduisons le nombre N de mesures réalisées entre les dates 0 et T , de sorte que $\tau = \frac{T}{N}$, $R \equiv \frac{\Omega_R^2}{2}\frac{T}{N}$ et

$$\begin{aligned} p_f^{(N)}(T) &= \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{\Omega_R^2 T^2}{N}} \right) \\ p_e^{(N)}(T) &= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\Omega_R^2 T^2}{N}} \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

En particulier, pour $t = T_\pi = \frac{\pi}{\Omega_R}$ (pulse π),

$$p_f^{(N)}(T_\pi) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{\pi^2}{2N}} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

COOK prouve ainsi que la répétition fréquente de mesures du système inhibe, partiellement ou totalement, son évolution naturelle : il interprète ce résultat comme une manifestation de l'effet ZENON.

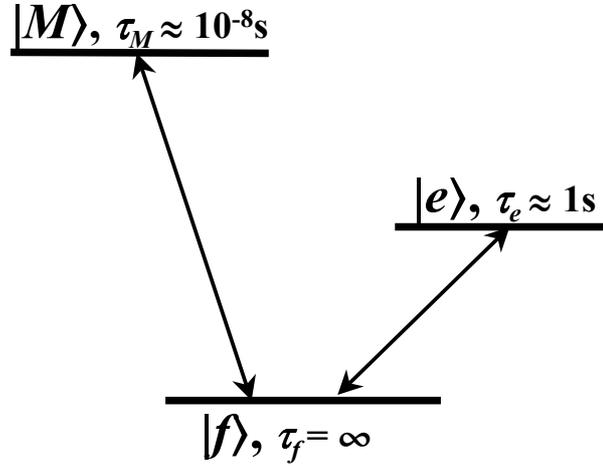


FIG. 2.5 – *Système envisagé par COOK. Les transitions $|f\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, et $|f\rangle \leftrightarrow |M\rangle$ sont permises, la transition $|e\rangle \leftrightarrow |M\rangle$ est interdite.*

Notons que l'expression de $p_f^{(N)}(T)$ obtenue par COOK ne coïncide pas avec celle que nous avons calculée au paragraphe 2.1.2 (*i.e.* $p_f^{(N)}(T) = \cos\left(\frac{\Omega_R T}{2N}\right)^{2N}$): la raison de ce désaccord apparaîtra clairement par la suite (voir le paragraphe "les critiques" ci-dessous).

COOK suggère enfin une réalisation expérimentale de son idée. Il considère un ion, maintenu au repos dans un piège (l'émission spontanée étant négligée), dont le spectre présente trois états : un état fondamental (stable) noté $|f\rangle$, un premier niveau excité, noté $|e\rangle$, supposé métastable (de durée de vie supérieure ou égale à $1s$), et un troisième niveau $|M\rangle$ de faible durée de vie ($10^{-8}s$), couplé *uniquement* au niveau $|f\rangle$ (voir figure 2.5). Les deux premiers niveaux jouent le rôle du système à deux états, envisagé précédemment, le troisième niveau n'étant qu'un "niveau relais", utilisé pour effectuer la mesure. Plus précisément, on mesure l'état du système en imposant un pulse court et intense accordé sur la transition $|f\rangle \leftrightarrow |M\rangle$: si le système est dans l'état $|f\rangle$, ce pulse va induire des cycles $|f\rangle \rightarrow |M\rangle \rightarrow |f\rangle$, chacun de ces cycles s'accompagnant de l'émission d'un photon ; en revanche, si le système est dans l'état $|e\rangle$, il n'en "bouge" pas. Ainsi, si le pulse de mesure est "assez" long pour induire ne serait-ce qu'un cycle $|f\rangle \rightarrow |M\rangle \rightarrow |f\rangle$, le système se trouvera projeté dans l'état $|f\rangle$ ou $|e\rangle$, avec une probabilité en accord avec le postulat de la mesure. COOK considère sa mesure comme idéale, et propose donc de lui appliquer le postulat de réduction du paquet d'onde, "à la VON NEUMANN".

L'expérience de Itano et al

L'expérience imaginée par COOK en 1988 est réalisée deux ans plus tard par l'équipe de W. ITANO [IHBW90].

Dans leur montage, les auteurs utilisent non pas un atome unique, mais un ensemble d'atomes de Béryllium (dont le spectre a la forme requise par l'expérience), placés dans un piège de PENNING. Le refroidissement des atomes, le couplage des états $|f\rangle$ et $|e\rangle$ (pulse π), ainsi que la mesure de l'état du système via le niveau $|M\rangle$ sont assurés par des faisceaux LASER. Le nombre de photons de fluorescence, émis lors des cycles $|f\rangle \rightarrow |M\rangle \rightarrow |f\rangle$, est mesuré par un photodétecteur et permet, via une relation de calibrage initial, de remonter à la population du niveau $|f\rangle$ (probabilité p_f).

Nous n'entrerons pas dans les détails techniques de l'installation. Il nous suffira d'indiquer que, comme le montre la figure 2.6, empruntée à [IHBW90], les résultats obtenus sont en très bon accord avec la théorie⁷. En particulier, en augmentant le nombre de pulses de mesures, les auteurs notent que la probabilité d'observer le système dans l'état initial à la fin du pulse π augmente. A nouveau, les auteurs concluent à une manifestation de l'effet ZENON Quantique.

Les critiques

Après la publication de [Coo88, IHBW90], les critiques pleuvent et un débat passionné fait rage!

Le point principalement débattu dans la littérature est la pertinence du processus de mesure proposé par COOK. Plus précisément, de nombreux auteurs remettent en cause l'emploi par COOK et ITANO du postulat de réduction du paquet d'onde pour interpréter leur expérience et s'appliquent à montrer que les phénomènes sont tout à fait explicables dans le cadre de la Mécanique Quantique "conventionnelle", sans recours au postulat de la mesure de VON NEUMANN, soit par une approche semi-classique [BB91, FS91], soit dans le cadre de l'Optique Quantique [VG95, PTP90, PTP91, Bal91]. D'autres auteurs [IHBW91, BH96, BHS96], considèrent au contraire qu'il est tout à fait loisible d'employer le postulat de réduction du paquet d'onde, car il conduit à un résultat correct et constitue un "outil" agréable permettant de simplifier le problème.

Une autre critique, moins dirigée contre le travail de COOK et ITANO que contre l'existence même de l'effet ZENON, porte sur la réalité des me-

7. Notons que les auteurs ont préféré représenter les probabilités des transitions respectives $|f\rangle \rightarrow |e\rangle$ et $|e\rangle \rightarrow |f\rangle$ plutôt que la probabilité $p_f^{(N)}$.

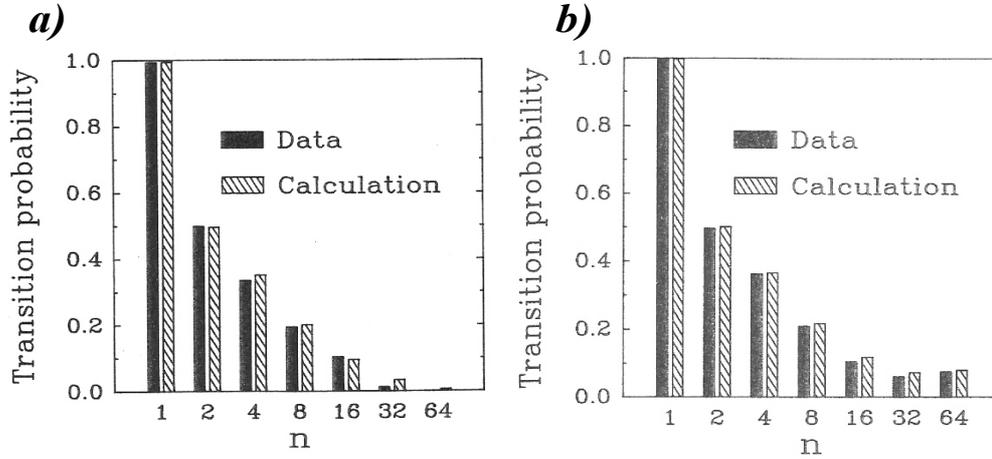


FIG. 2.6 – Probabilités de transition $P_{|f\rangle \rightarrow |e\rangle}$ (courbe a) et $P_{|e\rangle \rightarrow |f\rangle}$ (courbe b) en fonction du nombre de mesures imposées pendant $T = 256ms$. Les valeurs expérimentales correspondent aux zones pleines, les valeurs théoriques aux zones hachurées. Le léger désaccord observé est dû à des effets liés au LASER de pompage. La figure est empruntée à [IHBW90].

sures *instantanées*. Au-delà de l'incapacité "pratique", "technologique", à réaliser une infinité de mesures dans un laps de temps fini, certains auteurs ont en effet montré, sur différents exemples (émission spontanée, spin) [HNNPR98, NNPR95, VG95], ou dans un cadre plus général [Pat96] (voir remarque ci-dessous), que les inégalités de HEISENBERG posent une borne inférieure à la fréquence des mesures qu'il est possible d'imposer à un système. La limite, considérée jusqu'à présent, des mesures continues est donc sans intérêt physique, puisqu'elle est fondamentalement inaccessible. Il importe en revanche d'étudier le comportement des systèmes soumis à un nombre fini de mesures. Ce point sera abordé dans la partie suivante.

Enfin, dans un article datant de 1996 [NNPR96], NAKAZATO et son équipe affirment que l'expérience imaginée dans [Coo88] et réalisée dans [IHBW90] *ne teste pas* l'effet ZENON Quantique "authentique". Comme nous allons le voir, leur critique naît d'une restriction abusive de l'effet ZENON au cas de mesures sélectives ; néanmoins, elle va nous permettre d'analyser plus en détail l'expérience de COOK-ITANO et de répondre à quelques questions laissées en suspens.

Remarque : inégalités de Heisenberg et mesures continues

Dans son article [Pat96], A.K. Pati utilise le principe d'incertitude généralisé pour établir une borne supérieure à la fréquence des mesures qu'il est possible d'imposer à un système quantique. Rappelons que, pour un système occupant l'état $|\varphi\rangle$, et deux de ses observables \hat{A} et \hat{B} , on a l'inégalité $\Delta A^2 \cdot \Delta B^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle \varphi | [\hat{A}, \hat{B}] | \varphi \rangle \right|^2$ où $\Delta A^2 = \langle \varphi | \hat{A}^2 | \varphi \rangle - \langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle^2$. En prenant pour \hat{B} le Hamiltonien \hat{H} du système et pour \hat{A} l'opérateur associé à la grandeur physique mesurée, dont on suppose qu'il ne commute pas avec \hat{H} , on obtient

$$\Delta A^2 \cdot \Delta H^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle \varphi | [\hat{A}, \hat{H}] | \varphi \rangle \right|^2.$$

De plus, en utilisant le théorème d'Ehrenfest $i\hbar \partial_t \langle \hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle$, on obtient aisément $\Delta A^2 \cdot \Delta H^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \partial_t \langle \hat{A} \rangle \right|^2$, soit, en posant $\Delta t \equiv \left| \frac{\Delta A}{\partial_t \langle \hat{A} \rangle} \right|$,

$$\Delta t^2 \Delta H^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

A.K. Pati interprète alors la quantité Δt comme l'intervalle de temps durant lequel aucune mesure précise et instantanée n'est réalisée (puisque dans le cas contraire, la dispersion ΔA serait nulle) : cette quantité peut donc être prise comme le temps τ qui sépare deux mesures Zénon. Ainsi, on obtient

$$\tau \geq \frac{\hbar}{2\Delta H}.$$

En étudiant précisément les travaux de COOK, NAKAZATO et son équipe démontrent que la quantité $p_f^{(N)}(T)$, donnée en (2.5), est la probabilité d'observer le système dans son état initial à la date T , quels qu'aient été les résultats obtenus lors des $(N - 1)$ mesures précédentes ; en d'autres termes, la probabilité (2.5) est égale au module carré de la somme des amplitudes complexes associées à tous les chemins du type

$$|f\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |e\rangle \rightarrow |f\rangle$$

qui partent de l'état initial pour y revenir, en passant par des états intermédiaires quelconques. Cette quantité est ainsi essentiellement différente de la grandeur $p_f^{(N)}(T)$ calculée au paragraphe 2.1.2 et donnée en (2.2), probabilité d'observer le système dans son état initial lors de chacune des N mesures qui lui sont imposées (et pas seulement la dernière!).

C'est là la raison fondamentale qui explique la différence, remarquée plus haut, entre les expressions (2.2) et (2.5).

Une manière équivalente de présenter les choses consiste à dire que les mesures réalisées par COOK sont *non* sélectives, contrairement à celles que nous avons considérées au paragraphe 2.1.2. En effet, dans son article, COOK considère que les mesures remettent simplement à zéro les cohérences du système⁸ $\hat{\rho}_{ef}$ et $\hat{\rho}_{fe}$, en laissant intactes les populations $\hat{\rho}_{ff}$ et $\hat{\rho}_{ee}$, transformant ainsi un état quelconque $\hat{\rho}$ en un mélange statistique des états purs $|f\rangle$ et $|e\rangle$, de poids respectifs $\hat{\rho}_{ff}$ et $\hat{\rho}_{ee}$. Ce modèle décrit une mesure dont on ne connaît pas le résultat, autrement dit une mesure non sélective, représentée par un superopérateur $\hat{\mathcal{M}}$, agissant sur l'état $\hat{\rho}$ du système selon

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}\hat{\rho} &= \hat{P}_e\hat{\rho}\hat{P}_e + \hat{P}_f\hat{\rho}\hat{P}_f \\ \text{où } \hat{P}_f &\equiv |f\rangle\langle f| \\ \text{où } \hat{P}_e &\equiv |e\rangle\langle e|.\end{aligned}$$

Par définition, N applications successives de mesures de ce type interdit de suivre l'état du système : on peut seulement calculer la probabilité (2.5) qu'à l'atome de se trouver à la date T dans son état initial, indépendamment des états visités précédemment.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1.2, la répétition fréquente de ce type de mesures "non lues" peut donner lieu à un effet ZENON.

Néanmoins, dans leur article [NNPR96] NAKAZATO et al réservent (de manière abusive), le nom "d'effet ZENON" au phénomène engendré par la répétition fréquente de mesures sélectives, comme dans l'article fondateur de MISRA et SUDARSHAN (cf paragraphe 2.1.3), et refusent donc de voir dans l'expérience de COOK et ITANO une manifestation de l'effet ZENON "authentique".

Pour être plus précis, et rendre justice à NAKAZATO et son équipe, signalons qu'à l'époque de la publication de [Coo88, IHBW90, NNPR96], l'extension de l'effet ZENON au cas de mesures non sélectives (présentée au paragraphe 2.1.4) n'avait pas encore été proposée. Il paraît donc probable que COOK et ITANO aient effectivement commis une certaine confusion, heureusement gommée, a posteriori, par la découverte (d'ailleurs due à NAKAZATO et al.!) de la généralisation de l'effet ZENON aux mesures non sélectives.

2.2.2 Effet Zénon dans un système instable

L'équipe de M.C. FISCHER a réalisé récemment une expérience qui met en évidence l'effet ZENON dans un système instable particulier [FGR01]. Des

8. Le modèle de mesure choisi par COOK nécessite l'emploi du formalisme "matrice densité", comme nous l'avons noté plus haut.

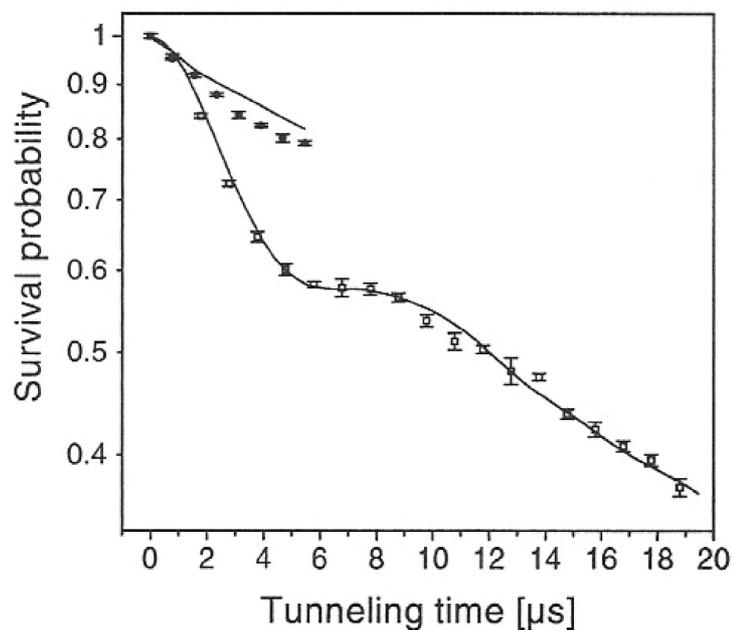


FIG. 2.7 – Probabilité de survie dans le piège d'un atome, en fonction du temps "tunnel" (i.e. du temps pendant lequel le potentiel est fortement accéléré, et l'atome susceptible de quitter le piège par effet tunnel). Les résultats expérimentaux sont représentés par des cercles: les cercles pleins correspondent à une décroissance pure, les cercles creux à une phase de décroissance interrompue, toutes les μs d'une mesure (de durée $50\mu\text{s}$). Les lignes pleines correspondent à des simulations numériques. Cette figure est empruntée à [FGR01].

atomes de Sodium ultra-froids sont placés dans le niveau fondamental d'un potentiel optique périodique, créé par deux ondes électromagnétiques contre-propageantes, polarisées rectilignement. En jouant sur les fréquences relatives des deux ondes, il est possible de "mettre en mouvement" le potentiel, et d'en maîtriser l'accélération.

A l'aide de leur montage, M.C. FISCHER et ses collaborateurs imposent aux atomes piégés des séquences alternées de "décroissance" et de "mesure" :

- durant les phases de *décroissance*, le potentiel est fortement accéléré et induit une fuite des atomes du niveau fondamental (lié) vers les états libres par effet tunnel ;
- la *mesure* est effectuée en séparant spatialement les atomes ayant subi un effet tunnel des atomes encore piégés dans le niveau fondamental du potentiel. Pour ce faire, l'accélération du potentiel est abaissée à une valeur pour laquelle l'effet tunnel du niveau fondamental (lié) vers les niveaux libres est négligeable : les atomes libres gardent ainsi la vitesse qu'ils avaient juste après avoir subi leur effet tunnel, alors que les atomes encore piégés continuent d'accélérer ; les deux groupes d'atomes sont ainsi séparés en vitesse et forment rapidement deux ensembles spatialement distincts. Ils sont ensuite soumis à un refroidissement brutal qui "bloque" leur mouvement : la mesure de la fluorescence permet de connaître la population de chacun des deux "pics" relevés, avant de reprendre un nouveau cycle avec les seuls atomes encore piégés.

En imposant des mesures au système, FISCHER et son équipe mettent en évidence un ralentissement de la décroissance (comme le montre la figure 2.7, empruntée à leur article), caractéristique de l'effet ZENON. Notons qu'ici, au contraire de l'expérience de COOK et ITANO, on repart de l'état initial à chaque nouveau cycle (ou plus exactement, on ne continue l'expérience qu'avec les sous-systèmes qui se trouvent dans l'état fondamental du piège). En d'autres termes, les mesures employées ici sont bien sélectives.

2.3 L'effet Zénon remodelé

La confrontation de l'effet ZENON quantique théorique à la réalité expérimentale a soulevé de nombreuses questions : quel est le rôle de la mesure ? la mesure projective "à la VON NEUMANN" est-elle nécessaire à l'apparition de l'effet ZENON ? Quel est le comportement d'un système soumis à un nombre *fini* de mesures ? Ces interrogations fondamentales ont amené à remodeler la physique de l'effet ZENON.

Il est apparu d'une part que la mesure projective *n'est pas* un ingrédient essentiel de l'effet ZENON ; des processus de mesures divers ont été étudiés dans la littérature qui mènent à l'effet ZENON tout autant que les mesures pulsées "à la VON NEUMANN". Dans le premier paragraphe de cette partie, nous rapportons les travaux de l'équipe de P. FACCHI qui généralisent le théorème de MISRA et SUDARSHAN de manière élégante à des mesures pulsées unitaires et continues.

D'autre part, il a été démontré que l'observation répétée d'un système instable, loin de freiner sa décroissance, peut au contraire l'accélérer, si la fréquence des mesures imposées (ou la "force de couplage" dans le cas de mesures continues) est trop faible. Cet "anti-effet ZENON", parfois appelé "effet HERACLITE", est présenté dans le second paragraphe.

2.3.1 Le problème de la mesure

Le débat très vif, suscité par l'expérience de COOK et ITANO, a permis à de nombreuses idées nouvelles de voir le jour. La nécessité des mesures projectives et instantanées "à la VON NEUMANN" a ainsi été profondément remise en cause par de nombreux auteurs.

Des modèles de mesure plus réalistes ont été considérés dans la littérature [FP02, FP03c, PN94, Sch98, Fac03, FP03a], comme des pulses unitaires \hat{U}_p , ou encore des mesures continues, représentées par un terme de couplage additionnel $K\hat{H}_c$ au Hamiltonien du système. Dans tous les cas, un effet ZENON se manifeste.

Plus précisément, on peut établir un théorème adiabatique analogue à celui de MISRA et SUDARSHAN⁹. Considérons le cas de mesures continues : le Hamiltonien total du système prend alors la forme

$$\hat{H}_K = \hat{H} + K\hat{H}_c,$$

où \hat{H} représente le Hamiltonien du système mesuré, \hat{H}_c représente l'interaction avec l'appareil de mesure (supposé classique), et K est une constante de couplage. L'opérateur d'évolution du système s'écrit simplement

$$\hat{U}_K(t) = \exp \left[-i\hat{H}_K t \right].$$

Dans la limite de couplage infini ($K \rightarrow +\infty$), on peut montrer que l'opérateur limite $\hat{U}(t) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \hat{U}_K(t)$ prend une forme "bloc diagonale" : en effet, en notant $\hat{H}_c = \sum_n \eta_n \hat{M}_n$ la décomposition spectrale du Hamiltonien de

9. La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [Fac03].

couplage \widehat{H}_c , $\widehat{U}(t)$ vérifie

$$\left[\widehat{U}(t), \widehat{M}_n \right] = 0, \quad (2.6)$$

ce qui signifie que $\widehat{U}(t)$ ne couple pas deux sous-espaces propres de \widehat{H}_c , ou, de manière équivalente, que les sous-espaces propres de \widehat{H}_c sont invariants par $\widehat{U}(t)$: ce sont les "sous-espaces ZENON" du système. Les conditions (2.6) constituent des règles de "supersélection dynamiques" (appellation due à P. FACCHI). On peut, de plus, établir l'expression de l'opérateur limite quand $K \rightarrow +\infty$

$$\widehat{U}(t) = \exp \left[-i \left(\sum_n \widehat{M}_n \widehat{H} \widehat{M}_n + K \widehat{H}_c \right) t \right].$$

A la limite du couplage fort, on voit ainsi apparaître l'effet ZENON. En effet, si l'état du système appartient initialement au sous-espace ZENON \mathcal{H}_n , associé au projecteur \widehat{M}_n , il y restera tout au long du processus, et son évolution sera essentiellement déterminée par le Hamiltonien $\widehat{M}_n \widehat{H} \widehat{M}_n$, à un facteur de phase près. Si le système se trouve initialement dans un *mélange statistique* représenté par une matrice densité bloc-diagonale de la forme $\widehat{\rho}_0 = \widehat{\mathcal{M}} \widehat{\rho}_0 = \sum_n \widehat{M}_n \widehat{\rho}_0 \widehat{M}_n$, la probabilité $p_n(t) = \text{Tr} \left[\widehat{\rho}(t) \widehat{M}_n \right]$ de trouver le système dans le sous-espace \mathcal{H}_n reste constante ($\forall n, p_n(t) = p_n(0)$), et chaque composante $\widehat{\rho}_n = \widehat{M}_n \widehat{\rho}(t) \widehat{M}_n$ évolue indépendamment dans son sous-espace ZENON.

Un théorème tout à fait semblable peut être énoncé dans le cas de mesures unitaires pulsées. En introduisant la décomposition spectrale

$$\widehat{U}_p = \sum_n e^{-i\lambda_n} \widehat{M}_n$$

de l'opérateur de "pulse unitaire", on peut montrer que l'opérateur limite quand $N \rightarrow +\infty$

$$\widehat{U}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{U}_N(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\widehat{U}_p \exp \left(-i \widehat{H} \frac{t}{N} \right) \right]^N$$

satisfait aux mêmes relations (2.6) et que son expression est très semblable au cas des mesures continues

$$\widehat{U}(t) = \exp \left[-i \sum_n \left(\widehat{M}_n \widehat{H} \widehat{M}_n t + N \lambda_n \widehat{M}_n \right) \right].$$

A nouveau, un effet ZENON se manifeste.

Pour illustrer notre propos, traitons rapidement l'exemple suivant, emprunté à [FP03c]. Considérons un système à trois niveaux $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, dont le Hamiltonien s'écrit

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & \Omega_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dans la base $(|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle)$. Ce Hamiltonien représente, par exemple, l'action sur un atome à trois niveaux de deux champs électriques résonnants, respectivement avec les transitions $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ et $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$.

Réalisons, pour commencer, une série de N mesures projectives "à la VON NEUMANN", identiques, incomplètes et non sélectives, associées aux opérateurs

$$\widehat{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

\widehat{M}_2 est associé à l'événement "l'atome occupe l'état $|a\rangle$ ", \widehat{M}_1 est associé à l'événement complémentaire. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 2.1.4, les sous-espaces ZENON seront simplement $\mathcal{H}_1 = \widehat{M}_1\mathcal{H} = Vect\{|a\rangle, |b\rangle\}$ et $\mathcal{H}_2 = \widehat{M}_2\mathcal{H} = Vect\{|c\rangle\}$, et le superopérateur d'évolution limite (lorsque le nombre N de mesures pulsées tend vers l'infini) s'écrira simplement

$$\widehat{\mathcal{V}}(T)\widehat{\rho}_0 = \widehat{\mathcal{V}}_1(T)\widehat{\rho}_0\widehat{\mathcal{V}}_1^\dagger(T) + \widehat{\mathcal{V}}_2(T)\widehat{\rho}_0\widehat{\mathcal{V}}_2^\dagger(T)$$

où $\widehat{\mathcal{V}}_1(T) = \widehat{M}_1 \exp[-i\widehat{M}_1\widehat{H}\widehat{M}_1T]$ et $\widehat{\mathcal{V}}_2(T) = \widehat{M}_2 \exp[-i\widehat{M}_2\widehat{H}\widehat{M}_2T] = \widehat{M}_2$, soit

$$\widehat{\mathcal{V}}_1(T) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_1T) & -i\sin(\Omega_1T) & 0 \\ -i\sin(\Omega_1T) & \cos(\Omega_1T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathcal{V}}_2(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les sous-espaces ZENON sont bien laissés invariants par le superopérateur $\widehat{\mathcal{V}}(T)$: si l'état du système se trouve initialement dans l'un de ces sous-espaces, il y reste; si le système est initialement dans un état mélangé du type

$$\widehat{\rho}_0 = \widehat{\mathcal{M}}\widehat{\rho}_0 = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{bmatrix},$$

les composantes évoluent indépendamment l'une de l'autre, et la probabilité de présence du système dans chaque sous-espace reste constante.

Si, au lieu de mesures projectives, nous appliquons N pulses unitaires identiques $\widehat{U}_p = \sum_{n=1,2} e^{-i\lambda_n \widehat{M}_n}$, où $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et

$$\widehat{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nous obtiendrons les mêmes sous-espaces ZENON \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 que précédemment et l'opérateur d'évolution limite lorsque le nombre N de pulses unitaires appliqués tend vers l'infini

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{U}}(T) &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \exp -i \left[\left(\widehat{M}_1 \widehat{H} \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 \widehat{H} \widehat{M}_2 \right) T + N \left(\lambda_1 \widehat{M}_1 + \lambda_2 \widehat{M}_2 \right) \right] \\ &= \exp -i \begin{bmatrix} N\lambda_1 & \Omega_1 T & 0 \\ \Omega_1 T & N\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & N\lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donne lieu au même effet ZENON.

Enfin, si nous observons continûment le système par le biais d'un Hamiltonien de couplage $K\widehat{H}_c$ avec

$$\begin{aligned} \widehat{H}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{n=1,2} \eta_n \widehat{M}_n \\ \eta_1 &= 0, \\ \eta_2 &= 1, \end{aligned}$$

nous retrouvons à nouveau les mêmes sous-espaces ZENON, et le même opérateur d'évolution limite $\widehat{\mathcal{U}}(t)$ lorsque le couplage K tend l'infini.

Considérant l'exemple d'un atome excité susceptible de retomber vers son état fondamental en émettant un photon, L.S. SCHULMAN proposa un lien quantitatif entre les situations physiques envisagées ci-dessus [Sch98]. Plus précisément, il montra que, pour obtenir un ralentissement identique de l'émission spontanée avec des mesures pulsées, espacées du laps de temps τ , et des mesures continues, de "temps de réponse" τ_0 , la relation $\tau = 4\tau_0$ devait être vérifiée. Sur le même genre de modèle (systèmes instables), P. FACCHI et S. PASCAZIO [FP01] proposèrent également une comparaison entre différents types de processus de mesures, employant des détecteurs variés. En particulier, considérant une interaction de type "oscillations de RABI" entre le système et le détecteur, ils établirent que

l'irréversibilité du phénomène d'observation n'est pas nécessaire à l'apparition de l'effet ZENON.

Les résultats rapportés dans ce paragraphe montrent la grande généralité de l'effet ZENON quantique : il a été clairement établi que l'effet ZENON quantique n'est en rien un artefact lié à tel ou tel modèle de mesure (en particulier, il ne nécessite pas des mesures projectives "à la VON NEUMANN"), mais naît de l'application au système de certaines perturbations aux propriétés spécifiques (grande fréquence, forte amplitude,...). Il ne peut donc plus servir d'argument aux défenseurs ou aux détracteurs de telle ou telle théorie de la mesure. Au delà, il semble que l'effet ZENON échappe même aux problèmes d'interprétation de la théorie quantique [Hom97] et persiste, quel que soit le cadre théorique choisi.

Pour être complets, signalons que des auteurs [Per80, GL89] avaient, bien avant les travaux mentionnés précédemment, envisagé d'employer des mesures non projectives pour obtenir un effet ZENON. Néanmoins, leurs idées ne furent reprises que bien plus tard, et dans un cadre formel plus satisfaisant ; c'est pourquoi nous avons choisi de ne pas détailler leurs travaux ici.

2.3.2 Zénon et son contraire

Face à l'impossibilité fondamentale de réaliser des mesures infiniment fréquentes (liée aux inégalités de HEISENBERG, cf [HNNPR98, NNPR95, VG95]), de nombreux auteurs [KK99, KK00, FNP01, FP01, FP03b, LR00, RK01a] ont étudié le comportement de systèmes instables (semblables à celui que nous avons considéré au paragraphe 2.1.2) soumis à des mesures pulsées répétées, en fonction de la fréquence d'observation. Il leur est apparu qu'un "anti-effet ZENON"¹⁰, *i.e.* une accélération de la décroissance, peut se manifester si l'intervalle de temps τ séparant deux mesures est supérieur à une certaine valeur limite τ^* .

On peut se donner une image géométrique simple de ce phénomène (représentée sur la figure 2.8). Si on laisse évoluer librement un système depuis son état initial $|\psi_0\rangle$ sous l'action de son Hamiltonien, au bout du temps $t < \tau^*$, il ne se sera pas "trop éloigné" de $|\psi_0\rangle$ et la mesure projective de son état le ramèra vers son état initial avec une grande

10. Ce phénomène a été baptisé "effet HERACLITE" par certains auteurs [FP03b], en raison de l'opposition du philosophe à ses pairs ZENON et PARMENIDE. Presqu'arrivé au terme de ce long chapitre, le lecteur endurant pardonnera au rédacteur fatigué un accès de mauvais goût, mais enfin, face à tous ces atermoiements, on est en droit de se poser la question suivante : alors, cet effet, Zéoui ou Zénon ? (oui, je sais...)

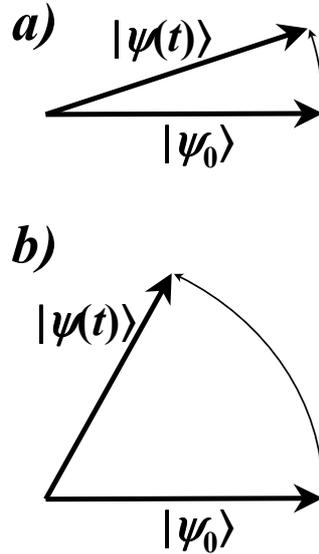


FIG. 2.8 – Image géométrique simple de l'effet ZENON (figure a) et de l'anti-effet ZENON (figure b).

probabilité, freinant ainsi son évolution naturelle. En revanche, si la période d'évolution libre est plus longue $t > \tau^*$, le système se sera trop écarté de son état initial et la mesure risque, avec une grande probabilité, d'accélérer son évolution naturelle.

L'existence de la limite τ^* n'est pas assurée pour tous les systèmes et sa valeur dépend, en tout état de cause, des caractéristiques du modèle considéré, notamment du Hamiltonien d'interaction du système avec l'environnement, responsable de sa décroissance. En particulier, pour un système instable à facteur de forme $|\langle j | \hat{V} | e \rangle|$ symétrique, comme celui de la figure 2.3, P. FACCHI et al [FNP01, FP01, FP03b] ont montré qu'il suffisait que le niveau discret $|e\rangle$ soit décalé par rapport au centre de la bande $\{|j\rangle\}$ pour que le temps τ^* (et donc l'anti-effet ZENON lui-même) existe. L'étude générale de systèmes instables à facteur de forme quelconque a été réalisée par G. KURIZKI et A. KOFMAN [KK00], qui ont prouvé la grande généralité de l'anti-effet ZENON. Dans le même article, ces deux auteurs ont également souligné que, dans de nombreux systèmes, les contraintes liées aux inégalités de HEISENBERG rendent inaccessible la "zone ZENON", tandis qu'elles autorisent l'anti-effet ZENON : ce dernier semble donc bien plus "générique" ou "normal" que son

inverse.

L'extension de l'anti-effet ZENON à des processus de mesure variées, notamment des mesures continues, a été étudiée dans de nombreux articles [KK96, KK99, FNP01, FP01, FP03b]. Dans ce cas, le temps de réponse τ du détecteur "remplace", dans la discussion, l'intervalle de temps entre deux mesures pulsées, mais la physique du phénomène n'est pas fondamentalement modifiée, et l'on aboutit au même type de résultats.

Dans [KKO01], G. KURIZKI et al. proposent un montage "concret", impliquant un photon dont les états de polarisation jouent le rôle d'un système à deux niveaux : ce photon se réfléchit entre deux miroirs, et expérimente à chaque aller-retour à la fois une rotation de sa polarisation, par passage par une cellule POCKELS, et une "mesure" de polarisation, par passage par une lame séparatrice de polarisation, un absorbeur étant placé sur le trajet de la polarisation à éliminer. Les auteurs discutent des différents régimes de fonctionnement du système et établissent les conditions d'apparition des effets ZENON et HERACLITE. D'autres auteurs ont étudié l'effet HERACLITE sur des situations physiques particulières comme le photodétachement [LR00].

Pour finir, signalons que, tout comme l'effet ZENON, l'effet HERACLITE a été expérimentalement observé par l'équipe de FISCHER et al [FGR01] dans un ensemble d'atomes de Sodium ultrafroids.

Dans ce chapitre, nous avons tenté d'introduire les idées fondamentales de l'effet ZENON quantique et de montrer la grande diversité d'un phénomène dont l'existence expérimentale n'a été démontrée que récemment. Dans la suite, nous conjuguerons le principe de l'effet ZENON à quelques concepts de base de théorie de la correction d'erreurs pour mettre au point une méthode de protection de l'information quantique contre l'action d'erreurs unitaires arbitraires. La réalisation physique de cette méthode utilisera en outre la technique de contrôle non holonôme exposée au premier chapitre.

Chapitre 3

Protection de l'information par effet Zénon quantique

"Aime la vérité, mais pardonne à l'erreur."

Voltaire.

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre de cette partie, les erreurs quantiques compromettent le bon fonctionnement du futur ordinateur quantique. Pour remédier à ce problème, des techniques de correction d'erreurs ont été développées qui se fondent sur la notion de code quantique : un cadre formel et des conditions mathématiques d'existence de tels codes correcteurs ont même été établis. En outre, il existe déjà des méthodes variées de construction explicite de codes quantiques, tirant leur inspiration de la correction d'erreur classique : comme nous l'avons déjà vu, ces approches requièrent généralement des propriétés de symétrie assez fortes des erreurs qu'elles sont censées corriger.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de protection de l'information contre l'action d'erreurs *unitaires*, sur lesquelles nous ne faisons, a priori, aucune hypothèse de symétrie particulière. Notre technique tire son inspiration à la fois de la correction d'erreur classique, notamment de la théorie du codage, et de l'effet ZENON quantique dont nous avons présenté les principales caractéristiques dans le chapitre précédent.

Dans le premier paragraphe, nous montrons que l'effet ZENON standard ne peut être utilisé que pour protéger *un* vecteur d'état *connu*. Nous proposons ensuite, dans le deuxième paragraphe, de généraliser l'effet ZENON, dans le cas des systèmes composés, de manière à protéger tout un sous-espace de l'espace de HILBERT total. Dans le troisième paragraphe nous replaçons les résultats précédents dans le cadre général de la protection de l'information contre les erreurs quantiques. Enfin, dans les deux derniers paragraphes, nous

traitons d'aspects plus techniques, et présentons notamment les différents algorithmes nécessaires à la mise en oeuvre pratique de notre méthode.

3.1 Effet Zénon et protection de l'information

Considérons un système quantique \mathcal{J} , d'espace de HILBERT \mathcal{H}_I de dimension I , et dont le Hamiltonien s'écrit

$$\widehat{H}(\tau) = \sum_{m=1}^M f_m(\tau) \widehat{E}_m, \quad (3.1)$$

où les $\{\widehat{E}_m\}_{m=1,\dots,M}$ et les $\{f_m(\tau)\}_{m=1,\dots,M}$ sont respectivement M matrices hermitiques linéairement indépendantes agissant sur \mathcal{H}_I , et M fonctions du temps (inconnues). Ce type de Hamiltonien modélise, par exemple, l'interaction non contrôlée du système \mathcal{J} avec M champs extérieurs classiques, de Hamiltoniens respectifs \widehat{E}_m et d'amplitudes $f_m(\tau)$. Dans la suite, nous considérerons que (3.1) est un Hamiltonien *parasite* dont il faut protéger le système, et nous appellerons "Hamiltoniens d'erreurs" les opérateurs \widehat{E}_m .

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, en mesurant fréquemment le système \mathcal{J} dans son état initial $|\varphi_I\rangle$, nous pouvons geler son évolution, et, ce faisant, inhiber l'action des Hamiltoniens d'erreurs \widehat{E}_m . En d'autres termes, l'effet ZENON quantique standard nous permet de protéger l'information quantique contenue dans l'état initial du système \mathcal{J} . En effet, après un instant τ , suffisamment bref pour que l'on puisse se limiter au premier ordre du développement perturbatif de l'opérateur d'évolution¹, le nouvel état du système est

$$\begin{aligned} |\varphi_I(\tau)\rangle &= |\varphi_I\rangle + |\delta\varphi_I\rangle \\ \text{où } |\delta\varphi_I\rangle &\simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_m \varepsilon_m \widehat{E}_m |\varphi_I\rangle, \\ \text{et } \varepsilon_m &\equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_m(t) dt. \end{aligned}$$

1. L'approximation au premier ordre de la théorie des perturbations sera valable pour τ tel que $\tau \text{Max} \left[\left| \frac{\varepsilon_m \widehat{E}_m}{\hbar} \right| \right] \ll 1$, soit

$$\tau \ll \xi_Z \equiv \text{Min} \left[\left| \frac{\hbar}{\varepsilon_m \widehat{E}_m} \right| \right]. \quad (3.2)$$

On peut se donner l'image géométrique suivante, représentée sur la figure 3.1. Sous l'effet des Hamiltoniens d'erreurs, l'état initial $|\varphi_I\rangle$ subit une rotation infinitésimale dans l'espace de HILBERT, de sorte qu'il est augmenté d'un petit accroissement $|\delta\varphi_I\rangle$, qui peut être décomposé en deux contributions

$$\begin{aligned} |\delta\varphi_I^{\parallel}\rangle &= \langle\varphi_I|\delta\varphi_I\rangle|\varphi_I\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \langle\varphi_I|\hat{E}_m|\varphi_I\rangle \right] |\varphi_I\rangle \\ |\delta\varphi_I^{\perp}\rangle &= |\delta\varphi_I\rangle - \langle\varphi_I|\delta\varphi_I\rangle|\varphi_I\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \left(\hat{E}_m - \langle\varphi_I|\hat{E}_m|\varphi_I\rangle \hat{I} \right) \right] |\varphi_I\rangle \end{aligned}$$

respectivement parallèle et orthogonale au vecteur d'état initial $|\varphi_I\rangle$. Si, comme au chapitre précédent, on mesure alors le système pour déterminer s'il est toujours dans son état initial, on obtient un résultat positif avec la probabilité

$$\begin{aligned} &1 - \langle\delta\varphi_I^{\perp}|\delta\varphi_I^{\perp}\rangle \\ &\simeq 1 - \left(\frac{\tau}{\hbar}\right)^2 \sum_{m,n} \varepsilon_m^* \varepsilon_n \left\{ \langle\varphi_I|\hat{E}_m\hat{E}_n|\varphi_I\rangle - \langle\varphi_I|\hat{E}_m|\varphi_I\rangle \langle\varphi_I|\hat{E}_n|\varphi_I\rangle \right\}, \end{aligned}$$

très proche de 1, à des termes du second ordre en τ près. Pour reprendre l'image géométrique précédente, la mesure a pour effet de projeter, avec une grande probabilité, le vecteur $|\varphi_I(\tau)\rangle$ sur l'état initial $|\varphi_I\rangle$, "lavant" ainsi le système de la contribution orthogonale $|\delta\varphi_I^{\perp}\rangle$; la normalisation du vecteur résultant permet alors de retrouver $|\varphi_I\rangle$ à un facteur de phase près. En répétant fréquemment la même opération, on contraint le système à rester dans son état initial (avec une grande probabilité).

Quoiqu'intellectuellement intéressante, cette méthode de protection de l'information, fondée sur l'effet ZENON quantique standard, n'est d'aucune utilité pratique, car elle suppose implicitement que l'état à protéger, sur lequel on doit fréquemment projeter le vecteur d'état du système, est *connu* : elle souffre ainsi d'un grave manque d'universalité qui la rend tout à fait inapplicable en situation réelle où nous souhaitons généralement protéger une information arbitraire, a priori inconnue. Dans la suite, nous allons voir néanmoins qu'il est possible de généraliser l'effet ZENON au cas de systèmes composés, d'une manière tout à fait pertinente dans le contexte de la protection de l'information. Nous montrerons notamment comment préserver l'information contenue dans un sous-système ou, plus généralement, dans un sous-espace de l'espace de HILBERT du système total, en répétant fréquemment un cycle d'opérations qui comprend, outre l'étape de "mesure-projection", une séquence de codage/décodage de l'information à protéger.

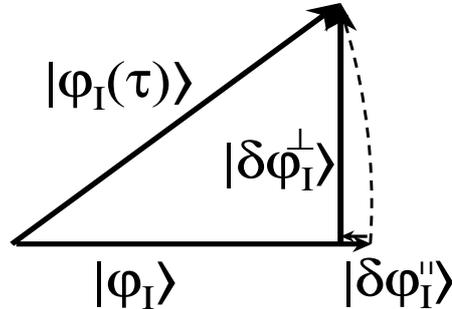


FIG. 3.1 – *Effet ZENON quantique standard. Image géométrique simple.*

3.2 Effet Zénon dans un système composé

Ajoutons au système \mathcal{J} précédent un système auxiliaire \mathcal{A} , appelé *ancilla*, d'espace de HILBERT \mathcal{H}_A et de dimension A . Le système composé $\mathcal{S} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{A}$ ainsi formé a pour espace de HILBERT $\mathcal{H} = \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_A$ et pour dimension $N = I \times A$.

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment généraliser l'effet ZENON quantique standard pour protéger l'information, a priori *inconnue* et initialement contenue dans le sous-système \mathcal{J} , des effets du Hamiltonien (3.1). Pour ce faire, nous considérerons successivement trois cas, croissant dans la généralité. Dans un premier temps nous nous intéresserons au cas trivial où l'information est stockée dans un état factorisé du sous-système \mathcal{J} et de l'ancilla \mathcal{A} , et où les erreurs n'affectent que \mathcal{A} . Nous traiterons ensuite le cas, plus général, où les erreurs affectent à la fois l'ancilla et le sous-système \mathcal{J} , l'information à protéger étant toujours stockée dans un état produit tensoriel de \mathcal{J} et \mathcal{A} . Nous passerons enfin au cas où l'information est initialement codée sur un sous-espace quelconque (a priori intriqué) de l'espace de HILBERT du système composé \mathcal{S} , les erreurs étant toujours sous leur forme la plus générale.

3.2.1 Cas trivial

Supposons que l'ancilla soit initialement préparée dans l'état $|\varphi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$. L'état initial du système composé \mathcal{S} , formé par "ajout" de \mathcal{A} au système \mathcal{J} , est alors simplement $|\varphi\rangle = |\varphi_I\rangle \otimes |\varphi_A\rangle$, contenu dans le plan vectoriel $\mathcal{C} = \mathcal{H}_I \otimes \text{Vect}(|\varphi_A\rangle)$, où $\text{Vect}(|\varphi_A\rangle)$ est la droite vectorielle engendrée par l'état $|\varphi_A\rangle$. En d'autres termes, l'information initialement contenue dans le vecteur d'état $|\varphi_I\rangle$ du système \mathcal{J} se trouve maintenant transférée dans l'état

produit tensoriel $|\varphi\rangle = |\varphi_I\rangle \otimes |\varphi_A\rangle$ appartenant au sous-espace factorisé $\mathcal{C} = \mathcal{H}_I \otimes Vect(|\varphi_A\rangle)$ de l'espace de HILBERT \mathcal{H} du système composé \mathcal{S} . Nous supposons en outre dans ce paragraphe que les Hamiltoniens d'erreurs \widehat{E}_m n'affectent que l'ancilla.

Après un bref instant τ , satisfaisant la condition (3.2), l'état du sous-système \mathcal{J} restera, d'après nos hypothèses, inchangé, tandis que l'état de l'ancilla se verra augmenté de la quantité

$$|\delta\varphi_A\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_m \varepsilon_m \widehat{E}_m |\varphi_A\rangle,$$

de sorte que l'accroissement du vecteur d'état du système composé sera simplement

$$|\delta\varphi\rangle \simeq |\varphi_I\rangle \otimes |\delta\varphi_A\rangle.$$

Comme au paragraphe précédent, on peut décomposer l'accroissement $|\delta\varphi_A\rangle$ en deux contributions

$$|\delta\varphi_A^{\parallel}\rangle = \langle\varphi_A|\delta\varphi_A\rangle|\varphi_A\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \langle\varphi_A|\widehat{E}_m|\varphi_A\rangle \right] |\varphi_A\rangle,$$

$$|\delta\varphi_A^{\perp}\rangle = |\delta\varphi_A\rangle - \langle\varphi_A|\delta\varphi_A\rangle|\varphi_A\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \left(\widehat{E}_m - \langle\varphi_A|\widehat{E}_m|\varphi_A\rangle \widehat{I} \right) \right] |\varphi_A\rangle$$

respectivement parallèle et orthogonale à $|\varphi_A\rangle$. On peut en faire de même avec l'accroissement du vecteur d'état du système composé $|\delta\varphi\rangle = |\delta\varphi^{\parallel}\rangle + |\delta\varphi^{\perp}\rangle$, où

$$\begin{aligned} |\delta\varphi^{\parallel}\rangle &= |\varphi_I\rangle \otimes |\delta\varphi_A^{\parallel}\rangle \\ |\delta\varphi^{\perp}\rangle &= |\varphi_I\rangle \otimes |\delta\varphi_A^{\perp}\rangle \end{aligned}$$

sont respectivement parallèle et orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{C} = \mathcal{H}_I \otimes Vect(|\varphi_A\rangle)$: en effet, en notant $\{|\nu_i\rangle, i = 1, \dots, I\}$ une base orthonormée de \mathcal{H}_I , $\{|\gamma_i\rangle = |\nu_i\rangle \otimes |\varphi_A\rangle, i = 1, \dots, I\}$ une base orthonormée de \mathcal{C} , et $\widehat{\Pi} = \sum_{i=1}^I |\gamma_i\rangle\langle\gamma_i|$ le projecteur orthogonal sur \mathcal{C} , on vérifie aisément

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi} |\delta\varphi^{\parallel}\rangle &= |\delta\varphi^{\parallel}\rangle, \\ \widehat{\Pi} |\delta\varphi^{\perp}\rangle &= |\varphi_I\rangle \otimes \langle\varphi_A|\delta\varphi_A^{\perp}\rangle|\varphi_A\rangle = 0. \end{aligned}$$

Notons en outre que, dans le cas considéré ici, la composante $|\delta\varphi^{\parallel}\rangle$ est non seulement parallèle à \mathcal{C} (par construction), mais au surplus *colinéaire* à $|\varphi\rangle$:

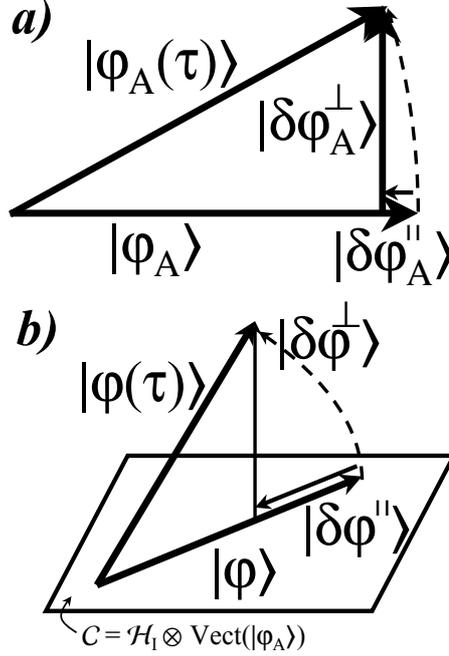


FIG. 3.2 – *Effet ZENON dans un système composé, cas trivial. Les Hamiltoniens d'erreur n'affectent que l'ancilla: par simple mesure de l'ancilla dans son état initial (a), on lave le système composé des erreurs infinitésimales (b).*

en effet

$$\begin{aligned}
 |\delta\varphi^{\parallel}\rangle &= |\varphi_I\rangle \otimes |\delta\varphi_A^{\parallel}\rangle \\
 &\simeq |\varphi_I\rangle \otimes \left(-\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \langle \varphi_A | \hat{E}_m | \varphi_A \rangle \right] |\varphi_A\rangle \right) \\
 &= -\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \langle \varphi_A | \hat{E}_m | \varphi_A \rangle \right] |\varphi_I\rangle \otimes |\varphi_A\rangle \\
 &= -\frac{i\tau}{\hbar} \left[\sum_m \varepsilon_m \langle \varphi_A | \hat{E}_m | \varphi_A \rangle \right] |\varphi\rangle. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Cette propriété importante (nous le verrons un peu plus loin) n'est, en fait, que la traduction géométrique de l'hypothèse selon laquelle les erreurs n'affectent que l'ancilla.

On peut maintenant recouvrer l'état initial de l'ancilla en mesurant simplement \mathcal{A} : la probabilité d'obtenir $|\varphi_A\rangle$ est $1 - \langle \delta\varphi_A^{\perp} | \delta\varphi_A^{\perp} \rangle$, très proche de

1 à des termes du second ordre en τ près. De plus, comme, d'après nos hypothèses, seule \mathcal{A} est affectée par les erreurs, la mesure de l'ancilla dans son état initial permet également de recouvrer l'état initial $|\varphi\rangle$ du système \mathcal{S} tout entier, avec la même probabilité $1 - \langle \delta\varphi^\perp | \delta\varphi^\perp \rangle = 1 - \langle \delta\varphi_A^\perp | \delta\varphi_A^\perp \rangle$. On voit ainsi qu'en mesurant fréquemment l'ancilla dans son état initial, on peut protéger l'information contenue dans $|\varphi\rangle$.

La figure (3.2) donne une vision géométrique simple des phénomènes. Dans l'espace \mathcal{H}_A des états de l'ancilla, la mesure de \mathcal{A} dans son état initial a pour effet de projeter $|\varphi_A(\tau)\rangle$ sur $|\varphi_A\rangle$, ce qui permet de "laver" \mathcal{A} de la composante orthogonale $|\delta\varphi_A^\perp\rangle$ (voir figure 3.2a); la normalisation du vecteur ainsi obtenu permet alors de recouvrer $|\varphi_A\rangle$ à un facteur de phase près. Dans l'espace \mathcal{H} des états du système composé \mathcal{S} , la mesure de \mathcal{A} dans son état initial se traduit par la projection de $|\varphi(\tau)\rangle$ sur le plan \mathcal{C} , suivie de la normalisation du vecteur ainsi obtenu (voir figure 3.2b): la projection sur \mathcal{C} lave le système \mathcal{S} de la composante $|\delta\varphi^\perp\rangle$; de plus, comme $|\delta\varphi^\parallel\rangle$ est colinéaire à $|\varphi\rangle$, la normalisation du vecteur résultant de la projection permet de recouvrer $|\varphi\rangle$ à un facteur de phase près.

Il apparaît ainsi clairement que la condition de colinéarité de $|\delta\varphi^\parallel\rangle$ et $|\varphi\rangle$, établie précédemment, est primordiale: si cette condition n'était pas vérifiée, la répétition de mesures projectives ne protégerait pas le vecteur $|\varphi\rangle$ mais le ferait simplement tourner, de manière incontrôlée, dans le plan vectoriel \mathcal{C} . En d'autres termes, si les erreurs touchaient à la fois l'ancilla et le système \mathcal{J} lui-même, la méthode que nous venons de présenter ne s'appliquerait plus.

Le cas considéré dans ce paragraphe est trivial: nous avons en effet supposé que le sous-système porteur d'information \mathcal{J} était indemne d'erreurs, de sorte qu'il nous a suffi de geler l'ancilla dans son état initial (connu) par effet ZENON quantique pour protéger l'état du système composé tout entier. Dans le paragraphe suivant, nous abordons le cas où les erreurs affectent à la fois \mathcal{A} et \mathcal{J} : le vecteur $|\delta\varphi^\parallel\rangle$ n'est alors plus colinéaire à $|\varphi\rangle$ et de simples projections sur \mathcal{C} ne permettent plus de restaurer le vecteur initial $|\varphi\rangle$; en d'autres termes, des mesures répétées de l'ancilla ne suffisent plus à protéger l'information contenue dans \mathcal{S} . Nous allons voir qu'il est néanmoins possible de nous ramener à la situation simple envisagée dans ce paragraphe en utilisant une séquence de codage-décodage de l'information à protéger.

3.2.2 Cas général

Dans ce paragraphe, nous supposons que les Hamiltoniens d'erreurs \hat{E}_m touchent à la fois l'ancilla \mathcal{A} et le système \mathcal{J} , l'information initiale à protéger étant toujours contenue dans le vecteur factorisé $|\varphi\rangle = |\varphi_I\rangle \otimes$

$|\varphi_A\rangle = \sum_k x_k |\gamma_k\rangle$ appartenant au plan vectoriel $\mathcal{C} = \mathcal{H}_I \otimes \text{Vect}(|\varphi_A\rangle) = \text{Vect}\{|\gamma_k\rangle = |\nu_k\rangle \otimes |\varphi_A\rangle, k = 1, \dots, I\}$.

Après un bref instant τ , satisfaisant la condition (3.2), l'état du système composé \mathcal{S} est augmenté de la quantité

$$|\delta\varphi\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_m \varepsilon_m \hat{E}_m |\varphi\rangle = |\delta\varphi^{\parallel}\rangle + |\delta\varphi^{\perp}\rangle,$$

où

$$\begin{aligned} |\delta\varphi^{\parallel}\rangle &= \hat{\Pi} |\delta\varphi\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{m,j,k} \varepsilon_m x_j \langle \gamma_k | \hat{E}_m | \gamma_j \rangle |\gamma_k\rangle \\ |\delta\varphi^{\perp}\rangle &= |\delta\varphi\rangle - \hat{\Pi} |\delta\varphi\rangle = -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{m,j,k} \varepsilon_m x_j \left(\hat{E}_m - \langle \gamma_k | \hat{E}_m | \gamma_j \rangle \hat{I} \right) |\gamma_k\rangle \end{aligned}$$

sont deux composantes, respectivement parallèle et orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{C} = \mathcal{H}_I \otimes \text{Vect}(|\varphi_A\rangle)$.

Contrairement au cas trivial précédent, la composante $|\delta\varphi^{\parallel}\rangle$ n'est a priori pas colinéaire au vecteur initial $|\varphi\rangle$ (voir figure 3.3a). Ainsi, si l'on projette le vecteur $|\varphi(\tau)\rangle$ sur le plan \mathcal{C} , *i.e.* si l'on mesure l'ancilla dans son état initial $|\varphi_A\rangle$, on lavera effectivement le système de la composante orthogonale $|\delta\varphi^{\perp}\rangle$ mais pas de la composante parallèle $|\delta\varphi^{\parallel}\rangle$. Sous l'effet de simples mesures répétées, l'état du système composé ne fera alors que tourner dans le plan \mathcal{C} , de manière incontrôlée, et l'information initiale sera perdue. La méthode simple employée précédemment ne permet donc plus, dans le cas général, de protéger l'information contenue dans le système : elle doit être adaptée, comme nous allons le voir maintenant.

L'idée consiste à se ramener au cas trivial du paragraphe précédent, en forçant les erreurs à n'agir que sur l'ancilla \mathcal{A} . Pour ce faire, on encadre chacune des périodes d'exposition aux erreurs par une opération de codage et une opération de décodage de l'information, avant de mesurer \mathcal{A} . Plus précisément, avant l'intervention des erreurs infinitésimales, on impose au système une matrice unitaire \hat{C} , appelée *matrice de codage*, qui "prépare" (ou "code") l'information à protéger ; au terme de la période d'évolution libre de durée τ , après que les erreurs infinitésimales sont intervenues, on applique la matrice de décodage \hat{C}^{-1} . La matrice \hat{C} est choisie de telle sorte que les erreurs n'affectent que l'ancilla, *i.e.* de telle sorte que la composante $|\delta\varphi^{\parallel}\rangle$, obtenue après une séquence codage-erreurs-décodage, soit *colinéaire* à $|\varphi\rangle$. Ainsi, en mesurant l'ancilla dans son état initial, on recouvre alors l'état initial $|\varphi\rangle$ du système composé, comme dans le cas trivial précédent (voir figure 3.3b). La répétition fréquente du cycle codage - décodage - mesure

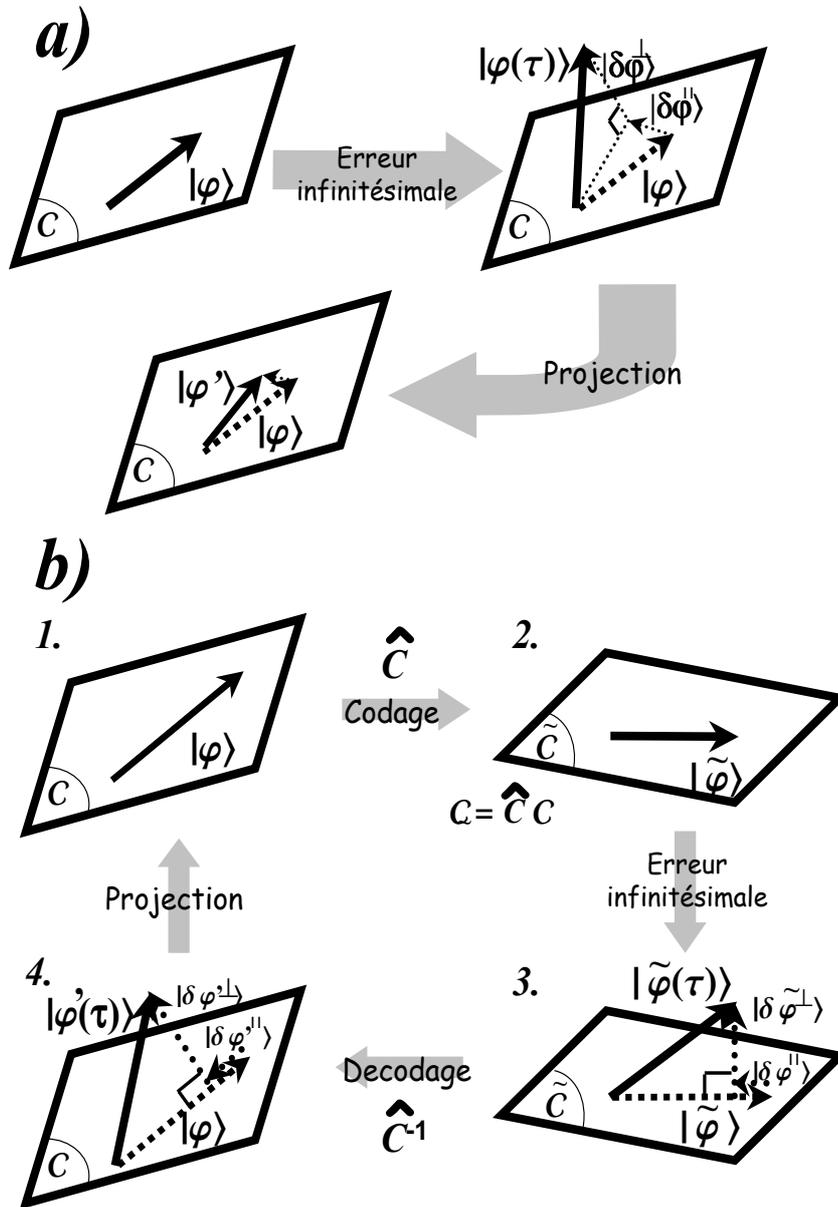


FIG. 3.3 – Effet ZENON dans un système composé, cas général : a) une simple projection orthogonale ne permet pas de protéger l'information contenue dans le plan \mathcal{C} ; b) en revanche, en ajoutant codage et décodage, la projection sur \mathcal{C} efface l'effet des erreurs infinitésimales.

(projection) permet alors de protéger l'information initiale aussi longtemps que nécessaire².

Voyons maintenant comment traduire mathématiquement la propriété requise de la matrice \widehat{C} . L'accroissement $|\delta\varphi'\rangle$ du vecteur d'état du système composé, obtenu après une séquence codage - erreurs - décodage, s'écrit

$$|\delta\varphi'\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_m \varepsilon_m \widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C} |\varphi\rangle,$$

et sa composante parallèle est simplement

$$|\delta\varphi'^{\parallel}\rangle = \widehat{\Pi} |\delta\varphi'\rangle \simeq -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{m,j,k} \varepsilon_m x_j \langle\gamma_k|\widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C}|\gamma_j\rangle |\gamma_k\rangle.$$

Pour que les erreurs n'affectent que l'ancilla, il faut que $|\delta\varphi'^{\parallel}\rangle$ soit colinéaire à $|\varphi\rangle$, *i.e.* $|\delta\varphi'^{\parallel}\rangle = \lambda |\varphi\rangle$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, et ce, quel que soit le vecteur $|\varphi\rangle$ de \mathcal{C} . En projetant sur la base orthonormée $\{|\gamma_k\rangle = |\nu_k\rangle \otimes |\varphi_A\rangle, k = 1, \dots, I\}$ de \mathcal{C} , on peut écrire la relation de colinéarité précédente sous la forme

$$-\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{m,j} \varepsilon_m x_j \langle\gamma_k|\widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C}|\gamma_j\rangle = \lambda x_k,$$

soit, matriciellement

$$\widehat{M} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

où

$$\widehat{M}_{kj} \equiv -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{m,j} \varepsilon_m \langle\gamma_k|\widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C}|\gamma_j\rangle, \quad k, j = 1, \dots, I,$$

et

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_I \end{pmatrix}.$$

Ainsi, tout vecteur complexe normé \vec{x} , doit être vecteur propre de la matrice \widehat{M} : cela n'est possible que s'il existe un nombre complexe c tel que

$$\widehat{M} = c\widehat{I},$$

2. Notons dès à présent que le cycle entier codage-erreurs-décodage doit être suffisamment court pour que nous restions dans le régime ZENON: en d'autres termes, si nous notons τ_C et τ_D les durées respectives des étapes de codage et de décodage, nous devons avoir $\tau_C + \tau + \tau_D \ll \xi_Z$.

soit

$$\forall (k,j), -\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{m,j} \varepsilon_m \langle \gamma_k | \widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C} | \gamma_j \rangle = c\delta_{kj}.$$

Enfin, en stipulant que la relation précédente doit être vérifiée indépendamment de la forme temporelle du bruit considéré, *i.e.* quels que soient les ε_m , on obtient

$$\forall (k,j), \langle \gamma_k | \widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C} | \gamma_j \rangle = \xi_m \delta_{kj}, \quad (3.4)$$

où ξ_m est un nombre complexe. Dans la suite, pour des raisons pratiques, nous serons amenés à particulariser ces relations en imposant $\forall m, \xi_m = 0$, soit

$$\forall (i,j), \langle \gamma_i | \widehat{C}^{-1} \cdot \widehat{E}_m \cdot \widehat{C} | \gamma_j \rangle = 0 \quad (3.5)$$

ce qui revient à

$$|\delta\varphi^{\parallel}\rangle = 0.$$

Dans ce cas, l'accroissement $|\delta\varphi\rangle$ du vecteur d'état du système composé est purement orthogonal au plan \mathcal{C} .

La matrice unitaire \widehat{C} dont nous venons de donner les relations de définition (3.4), réalise un changement de base dans l'espace de HILBERT du système composé $\mathcal{S} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{A}$. En particulier, le plan

$$\mathcal{C} = Vect \{ |\gamma_i\rangle = |\nu_i\rangle \otimes |\varphi_A\rangle, i = 1, \dots, I \}$$

est transformé en le plan $\widetilde{\mathcal{C}} = Vect \{ |\widetilde{\gamma}_i\rangle = \widehat{C} |\gamma_i\rangle, i = 1, \dots, I \}$ appelé "espace de code" (voir Figure 3.3b). Les relations (3.4) et (3.5) peuvent ainsi également être traduites en conditions portant sur les vecteurs de base $|\widetilde{\gamma}_i\rangle$ du sous-espace de code $\widetilde{\mathcal{C}}$

$$\langle \widetilde{\gamma}_i | \widehat{E}_m | \widetilde{\gamma}_j \rangle = \xi_m \delta_{ij} \quad (3.6)$$

qui satisfont en outre les conditions d'orthonormalité suivantes

$$\langle \widetilde{\gamma}_i | \widetilde{\gamma}_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

On peut ainsi considérer les $|\widetilde{\gamma}_i\rangle$ comme un ensemble de $2I \times N = 2I^2 A$ nombres réels auxquels sont imposées $2I^2 + 2MI^2 = 2I^2 (1 + M)$ contraintes ($2MI^2$ contraintes correspondant aux relations 3.6, $2I^2$ aux relations 3.7) où I désigne la dimension du système \mathcal{J} (et donc des sous-espaces \mathcal{C} et $\widetilde{\mathcal{C}}$), A la dimension de l'ancilla, $N = I \times A$ la dimension du système composé et M le nombre d'erreurs considérées. En stipulant que le nombre de paramètres libres doit être supérieur ou égal aux nombres de contraintes on aboutit à la relation suivante

$$A - 1 \geq M \quad (3.8)$$

qui fixe une borne supérieure au nombre d'erreurs qu'il est possible de corriger par notre méthode à l'aide d'une ancilla de dimension A .

3.2.3 Cas encore plus (!) général

Jusqu'à présent nous avons considéré que l'information, initialement contenue dans l'état $|\varphi_I\rangle$ du sous-système \mathcal{J} , est transférée vers un état factorisé $|\varphi_I\rangle \otimes |\varphi_A\rangle$ du système composé $\mathcal{S} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{A}$, appartenant au produit tensoriel d'espaces $\mathcal{H}_I \otimes Vect(|\varphi_A\rangle)$. En combinant codage, décodage et mesure de l'ancilla, nous avons pu protéger cet état par un effet ZENON généralisé.

Toutefois, il n'est pas toujours physiquement possible de mesurer directement l'ancilla \mathcal{A} , indépendamment du sous-système \mathcal{J} . Parfois, seule la projection sur un sous-espace général "intriqué" $\mathcal{C} = Vect\{|\gamma_i\rangle, i = 1, \dots, I\}$ (*i.e.* non factorisable sous la forme $\mathcal{H}_I \otimes Vect(|\varphi_A\rangle)$) est réalisable. Dans ce cas, l'information doit être transférée de \mathcal{H}_I vers ce plan \mathcal{C} , et codée sur un vecteur "intriqué" $|\varphi\rangle$.

Le protocole de protection ne diffère alors en rien de celui que nous avons proposé au paragraphe précédent : on applique la matrice de codage qui satisfait aux mêmes relations (3.4), on laisse les erreurs agir pendant un temps infinitésimal, on décode l'information, puis on réalise la mesure projective sur le plan \mathcal{C} , et ainsi de suite.

3.3 Méthode de protection de l'information

Faisons un petit bilan des résultats du paragraphe précédent.

L'information quantique contenue dans un système \mathcal{J} (de dimension I) peut être protégée contre l'action de M erreurs unitaires de Hamiltoniens \hat{E}_m . Pour cela, on adjoint à \mathcal{J} un système auxiliaire \mathcal{A} , appelé *ancilla*, dont la dimension A est supérieure à $(M + 1)$. On transfère ensuite l'information initiale vers un sous-espace \mathcal{C} (de dimension I) de l'espace de HILBERT du système composé, sur lequel il est physiquement possible (par une mesure adéquate) de projeter orthogonalement l'état du système. Il suffit enfin de répéter aussi fréquemment que possible la séquence d'opérations suivante (représentée sur la figure 3.3b) : codage de l'information par application de la matrice de codage \hat{C} définie par les relations 3.4 (ou 3.5), période d'évolution libre, décodage par application de la matrice \hat{C}^{-1} , mesure projective sur \mathcal{C} .

La faisabilité de notre méthode repose ainsi sur deux points essentiels.

D'une part, l'existence d'une mesure *physique* permettant de projeter l'état du système composé sur un sous-espace \mathcal{C} de même dimension I que le sous-système \mathcal{J} . Cette mesure peut consister, comme on l'a vu précédemment en une simple mesure de l'ancilla dans son état initial $|\varphi_A\rangle$, le sous-espace \mathcal{C} correspondant alors au produit tensoriel d'espaces $\mathcal{H}_I \otimes Vect(|\varphi_A\rangle)$. Mais elle peut également être plus complexe, associée à un sous-espace "générique" \mathcal{C} ,

non factorisé. Ce problème ne peut malheureusement pas être traité généralement, mais doit être résolu sur chaque configuration physique particulière envisagée.

La deuxième condition à remplir est l'existence de la matrice de codage \widehat{C} , ou de manière équivalente, de l'espace de code $\widetilde{\mathcal{C}} = \widehat{C}\mathcal{C}$: la condition nécessaire (3.8) nous place dans de "bonnes conditions", mais ne nous assure pas de l'existence de \widehat{C} . Dans la suite nous présentons un algorithme qui nous permet de calculer explicitement la matrice de codage, et par là-même de prouver son existence, sur chaque cas particulier. Nous montrons en outre que la technique de contrôle non holonôme, exposée dans la partie précédente, offre un moyen universel de réaliser physiquement la matrice \widehat{C} , et fournissons l'algorithme permettant de calculer les temps d'interaction associés.

Pour conclure ce paragraphe, nous allons tenter de faire le lien entre notre méthode et la théorie générale de la correction d'erreurs quantiques présentée dans le premier chapitre de cette partie. En fait, le rapprochement n'est pas si simple qu'il y paraît, car, comme nous allons le voir, la situation traitée par la théorie des codes correcteurs est fort différente de celle que nous avons envisagée dans ce chapitre.

Revenons tout d'abord plus en détail sur la théorie standard de la correction d'erreurs quantiques que nous l'avons fait dans notre chapitre introductif. Considérons pour cela le système *fermé*, constitué par l'ordinateur et son environnement: la dynamique de ce système est régie par un Hamiltonien $\widehat{H}(t)$ à partir duquel on peut, du moins en théorie, déterminer l'opérateur d'évolution $\widehat{U}(t)$ à toute date t . La matrice densité du système complet à la date t s'écrit alors

$$\widehat{\rho}(t) = \widehat{U}(t)\widehat{\rho}(0)\widehat{U}(t)^\dagger.$$

En supposant que la matrice densité initiale est sous la forme factorisée suivante

$$\widehat{\rho}(0) = \widehat{\rho}_{ordi}(0) \otimes \widehat{\rho}_{env}(0),$$

on obtient la matrice densité $\widehat{\rho}_{ordi}(t)$ de l'ordinateur à la date t en effectuant la trace partielle sur les états de l'environnement, et on aboutit à la forme "opérateur somme" suivante

$$\widehat{\rho}_{ordi}(t) = \mathcal{E}(\widehat{\rho}_{ordi}(0)) = \sum \widehat{\mathbf{E}}_k \widehat{\rho}_{ordi}(0) \widehat{\mathbf{E}}_k^\dagger$$

où les $\widehat{\mathbf{E}}_k$ s'expriment simplement en fonction de $\widehat{U}(t)$ et d'états de base de l'espace de HILBERT de l'environnement (les $\widehat{\mathbf{E}}_k$ sont ainsi intimement liés à l'interaction entre ordinateur et environnement). Notons d'une part que l'interaction ordinateur-environnement n'est pas complètement déterminée

par la donnée des $\widehat{\mathbf{E}}_k$: ainsi des Hamiltoniens $\widehat{H}(t)$ différents pourront donner lieu, via l'opération de trace partielle, à une même opération quantique, d'éléments $\widehat{\mathbf{E}}_k$. En outre la représentation de l'opération quantique \mathcal{E} par ses éléments $\{\widehat{\mathbf{E}}_k\}$ n'est pas unique, puisqu'elle dépend en grande partie des états de l'environnement choisis pour l'exprimer : par combinaison linéaire des $\widehat{\mathbf{E}}_k$ on peut ainsi former d'autres éléments $\widehat{\mathbf{F}}_k$ qui décrivent la même opération quantique \mathcal{E} .

Un sous-espace $\widetilde{\mathcal{C}}$ est un code capable de corriger les erreurs $\widehat{\mathbf{E}}_k$, si et seulement s'il existe une matrice hermitique $[\alpha_{kl}]_{kl}$ telle que, pour tout couple d'opérateurs $(\widehat{\mathbf{E}}_k, \widehat{\mathbf{E}}_l)$,

$$\widehat{P}\widehat{\mathbf{E}}_k^\dagger\widehat{\mathbf{E}}_l\widehat{P} = \alpha_{kl}\widehat{P}$$

où \widehat{P} est le projecteur orthogonal sur $\widetilde{\mathcal{C}}$. Il est alors facile de montrer que $\widetilde{\mathcal{C}}$ peut également corriger toute combinaison linéaire des $\widehat{\mathbf{E}}_k$: ainsi, un code donné est capable de corriger une opération quantique \mathcal{E} , quels que soient les éléments $\{\widehat{\mathbf{E}}_k\}$ choisis pour l'exprimer.

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas particulier où le Hamiltonien a la forme suivante

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_{ordi}(t) \otimes \widehat{I}_{env} + \widehat{I}_{ordi} \otimes \widehat{H}_{env}(t),$$

l'évolution est alors factorisée, *i.e.* de la forme $\widehat{U}(t) = \widehat{U}_{env}(t) \otimes \widehat{U}_{ordi}(t)$, et l'opération quantique d'erreur s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\widehat{\rho}_{ordi}(0)) &= \widehat{\mathbf{E}}\widehat{\rho}_{ordi}(0)\widehat{\mathbf{E}}^\dagger, \\ \text{où } \widehat{\mathbf{E}} &= \widehat{U}_{ordi}(t). \end{aligned}$$

Les conditions de correction sont alors trivialement remplies puisque, pour n'importe quel sous-espace $\widetilde{\mathcal{C}}$,

$$\begin{aligned} \widehat{P}\widehat{\mathbf{E}}^\dagger\widehat{\mathbf{E}}\widehat{P} &= \widehat{P}\widehat{U}_{ordi}^\dagger(t)\widehat{U}_{ordi}(t)\widehat{P} \\ &= \widehat{P}. \end{aligned}$$

Notons que, dans le formalisme standard de la théorie des codes correcteurs d'erreurs, seule *une* erreur unitaire $\widehat{U}_{ordi}(t)$, définie par son Hamiltonien $\widehat{H}_{ordi}(t)$, peut être considérée.

Le problème que nous nous sommes posé dans ce chapitre est tout à fait différent : nous cherchons à protéger l'information quantique contre l'effet d'un Hamiltonien de forme *générique* (3.1)

$$\widehat{H}(\tau) = \sum_{m=1}^M f_m(\tau)\widehat{E}_m,$$

où les $f_m(\tau)$ sont des fonctions du temps a priori inconnues. En d'autres termes, notre méthode vise à protéger le système contre toutes les évolutions unitaires induites par le Hamiltonien générique (3.1) : on peut montrer que ces évolutions forment un groupe, qui n'est autre que le groupe de LIE \mathcal{G} associé à l'algèbre de LIE engendrée par les opérateurs \hat{E}_m (voir [JS72]). Ce problème ne peut être exprimé dans le formalisme de l'opérateur somme puisque, comme nous l'avons vu, cette approche ne permet de traiter que d'une évolution $\hat{U}_{ordi}(t)$ déterminée par un Hamiltonien $\hat{H}_{ordi}(t)$ précis : la théorie standard et les conditions de correction précédentes sont donc inutilisables ici.

On peut néanmoins essayer d' "adapter" la théorie standard des codes correcteurs au problème que nous avons traité, en respectant "l'esprit", pour la comparer à notre approche. Nous reprenons donc les choses "à la base", et donnons la définition suivante d'un code correcteur : un sous-espace $\tilde{\mathcal{C}}$ sera un code capable de corriger n'importe quelle erreur unitaire \hat{U} du groupe \mathcal{G} , si et seulement s'il existe un opérateur linéaire $\hat{\mathcal{R}}$ tel que, pour tout vecteur $|\varphi\rangle$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ on peut trouver un nombre complexe α tel que

$$\hat{\mathcal{R}}\hat{U}|\varphi\rangle = \alpha|\varphi\rangle,$$

soit, en utilisant \hat{P} , le projecteur orthogonal sur $\tilde{\mathcal{C}}$,

$$\hat{\mathcal{R}}\hat{U}\hat{P} = \alpha\hat{P}.$$

Notons que nous travaillons ici naturellement avec le vecteur d'onde, et non la matrice densité, puisque l'ordinateur est considéré comme un système *fermé*, sur lequel l'extérieur n'intervient que par le biais de champs classiques, associés aux Hamiltoniens \hat{E}_m . Soulignons en outre que nous n'avons pas imposé l'égalité des vecteurs $\hat{\mathcal{R}}\hat{U}|\varphi\rangle$ et $|\varphi\rangle$, mais seulement la proportionnalité, pour ne pas exclure l'éventualité d'opérations $\hat{\mathcal{R}}$ non unitaires (de type mesure).

Essayons de préciser quelque peu la forme que doit prendre la matrice $\hat{\mathcal{R}}$. Supposons qu'il existe un code $\tilde{\mathcal{C}}$ permettant de corriger les erreurs unitaires du groupe \mathcal{G} : la matrice $\hat{\mathcal{R}}$ doit alors vérifier, pour tout $\hat{U} \in \mathcal{G}$

$$\hat{\mathcal{R}}\hat{U}\hat{P} = \alpha\hat{P}.$$

En particulier, $\hat{U} = \widehat{Id}$ (l'identité appartient forcément au groupe \mathcal{G}) implique

$$\hat{\mathcal{R}}\hat{P} = \alpha\hat{P},$$

et la matrice $\hat{\mathcal{R}}$ prend obligatoirement la forme (par blocs)

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \alpha\hat{I}_{\tilde{\mathcal{C}}} & \hat{A} \\ 0 & \hat{B} \end{bmatrix}$$

où $\widehat{I}_{\mathcal{C}}$ est la matrice identité sur $\widetilde{\mathcal{C}}$, et $(\widehat{A}, \widehat{B})$ sont deux matrices rectangulaires.

Allons un peu plus loin : généralement, des opérateurs hermitiens \widehat{E}_m *génériques* engendrent, par produit de LIE (commutateur), l'algèbre $u(N)$ toute entière. En d'autres termes, le groupe \mathcal{G} engendré par les $\{\widehat{E}_m\}$ est généralement le groupe $U(N)$ lui-même. Considérons alors, par exemple, la matrice de $U(N)$

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} \widehat{x} & 0 \\ 0 & \widehat{y} \end{bmatrix},$$

où \widehat{x} et \widehat{y} sont deux matrices unitaires, agissant respectivement sur $\widetilde{\mathcal{C}}$ et sur $\mathcal{H} \setminus \widetilde{\mathcal{C}}$. En lui appliquant $\widehat{\mathcal{R}}$, on trouve

$$\widehat{\mathcal{R}}\widehat{U} = \begin{bmatrix} \alpha\widehat{x} & \widehat{A}\widehat{y} \\ 0 & \widehat{B}\widehat{y} \end{bmatrix}$$

qui satisfait aux conditions de correction seulement s'il existe un réel φ tel que $\widehat{x} = e^{i\varphi}\widehat{I}_{\mathcal{C}}$. Nous voyons ainsi que la méthode des codes correcteurs ne permet pas de corriger le groupe $U(N)$ tout entier. Seuls des sous-groupes de $U(N)$ correspondant à des formes de \widehat{E}_m très particulières pourront être traités. Nous retrouvons ici encore, cette exigence forte de symétrie que nous avons déjà notée à la fin du premier chapitre de cette partie.

Notre méthode apparaît ainsi plus performante que les méthodes de correction d'erreurs standard. Néanmoins, il ne faut pas oublier qu'elle n'est capable de traiter que des erreurs unitaires, et qu'à ce titre elle possède malheureusement une portée plus limitée.

3.4 Calcul de la base de code

Dans ce paragraphe, nous présentons l'algorithme qui permet de construire explicitement une base de code $\{|\widetilde{\gamma}_i\rangle, i = 1, \dots, I\}$, satisfaisant aux relations (3.6, 3.7) : en premier lieu, nous tirons au hasard un ensemble de I vecteurs d'états orthonormés que nous prenons comme point de départ de notre calcul ; nous nous approchons ensuite itérativement de la solution recherchée en optimisant une fonctionnelle bien choisie, qui nous "montre", à chaque pas, la direction à suivre dans l'espace $I \times N$ -dimensionnel des paramètres (coordonnées des I vecteurs orthonormés).

Ce paragraphe est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, nous présentons un algorithme itératif destiné à résoudre un problème apparemment simple mais qui ne possède, à notre connaissance, aucune solution

algébrique explicite. Nous montrons ensuite que le problème multivectoriel de recherche de la base de code, défini par les relations (3.6, 3.7), se ramène aisément à un problème formellement plus simple qui peut être résolu par une généralisation de l'algorithme itératif précédent. Enfin, nous passons en revue les différents aspects techniques de notre algorithme en détail.

3.4.1 Algorithme itératif

Considérons le problème simple suivant : une matrice \widehat{E} étant donnée, agissant sur un espace de HILBERT \mathcal{H} , nous cherchons un vecteur $|\widetilde{C}\rangle$, tel que $\langle \widetilde{C} | \widehat{E} | \widetilde{C} \rangle = 0$.

Pour résoudre ce problème, apparemment simple, les techniques algébriques classiques, de type "diagonalisation de matrice", ne nous sont d'aucun secours, hormis dans le cas trivial où la matrice \widehat{E} possède un noyau non dégénéré³.

En revanche, nous pouvons utiliser l'algorithme itératif suivant. Pour commencer, nous tirons "au hasard" un vecteur normé $|C\rangle$. Si $\langle C | \widehat{E} | C \rangle = 0$, alors le travail est terminé : $|C\rangle = |\widetilde{C}\rangle$ et la fonction

$$f_{\widetilde{C}}(\lambda) = \left\| |\widetilde{C}\rangle + \lambda \widehat{E} |\widetilde{C}\rangle \right\|^2,$$

est minimale pour $\lambda = 0$. En effet, on a alors

$$\begin{aligned} \left\| |\widetilde{C}\rangle + \lambda \widehat{E} |\widetilde{C}\rangle \right\|^2 &= \langle \widetilde{C} | \widetilde{C} \rangle + \lambda \langle \widetilde{C} | \widehat{E} | \widetilde{C} \rangle + \lambda^* \langle \widetilde{C} | \widehat{E}^\dagger | \widetilde{C} \rangle + |\lambda|^2 \langle \widetilde{C} | \widehat{E}^\dagger \widehat{E} | \widetilde{C} \rangle \\ &= 1 + |\lambda|^2 \langle \widetilde{C} | \widehat{E}^\dagger \widehat{E} | \widetilde{C} \rangle, \end{aligned}$$

et, comme $\langle \widetilde{C} | \widehat{E}^\dagger \widehat{E} | \widetilde{C} \rangle \geq 0$, $f_{\widetilde{C}}(\lambda)$ est bien minimale pour $|\lambda| = 0$, soit $\lambda = 0$.

En revanche, si $\langle C | \widehat{E} | C \rangle \neq 0$, nous appliquons la procédure suivante, que nous appellerons "procédure de la médiane" : nous minimisons $f_C(\lambda)$ par rapport λ , et prenons $\frac{|C\rangle + \frac{\lambda}{2} \widehat{E} |C\rangle}{\left\| |C\rangle + \frac{\lambda}{2} \widehat{E} |C\rangle \right\|}$ pour "nouveau point de départ". La répétition de cette séquence d'opérations nous permet de nous approcher arbitrairement près de la solution $|\widetilde{C}\rangle$ recherchée.

3. Dans la suite, nous serons amenés à considérer simultanément plusieurs matrices \widehat{E}_k : la probabilité que ces matrices possèdent toutes un noyau non dégénéré et que l'intersection de ces noyaux soit elle-même non dégénérée étant, a priori, faible, nous avons préféré ne pas explorer plus avant l'approche purement algébrique et nous sommes concentrés sur une résolution algorithmique de notre problème.

Nous ne disposons pas, à ce jour, d'une preuve rigoureuse de la convergence de l'algorithme que nous venons de présenter. Nous pouvons néanmoins le motiver par un argument géométrique simple dans le cas bidimensionnel réel ($\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$), représenté sur la figure 3.4. Plus précisément, nous allons montrer que notre algorithme "stabilise" la solution $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$; en d'autres termes, si nous nous écartons de $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$ d'une faible quantité $|\delta\mathcal{C}\rangle$, notre algorithme nous ramène vers $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$.

Supposons que nous connaissons $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$, vecteur de \mathbb{R}^2 , tel que

$$\langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{\mathbf{E}} | \tilde{\mathcal{C}} \rangle = 0,$$

et construisons alors le vecteur normé $|\mathcal{C}\rangle$, proche de $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$, tel que $|\mathcal{C}\rangle = |\tilde{\mathcal{C}}\rangle + |\delta\mathcal{C}\rangle$, où

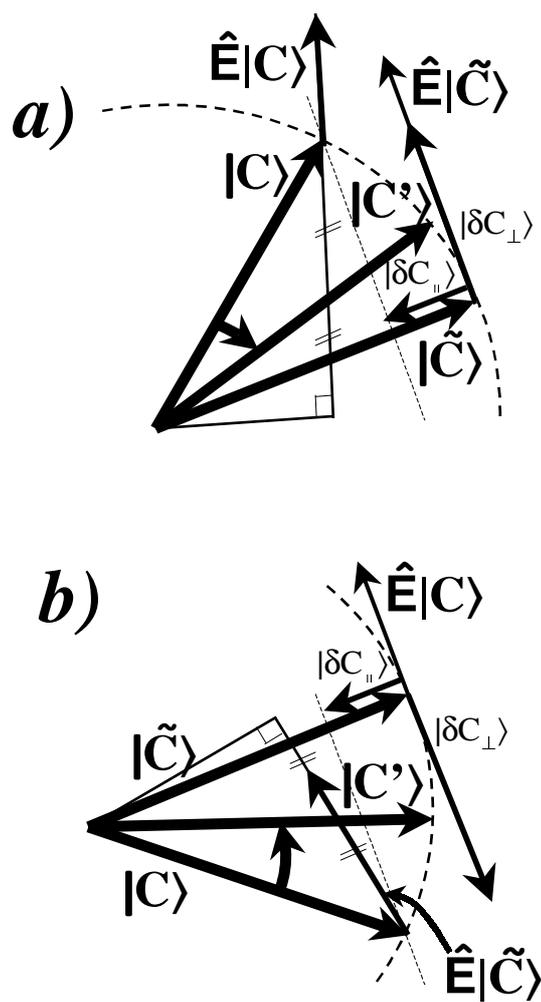
$$\begin{aligned} |\delta\mathcal{C}\rangle &= |\delta\mathcal{C}_{\parallel}\rangle + |\delta\mathcal{C}_{\perp}\rangle, \\ |\delta\mathcal{C}_{\parallel}\rangle &= \delta\alpha |\tilde{\mathcal{C}}\rangle, \\ |\delta\mathcal{C}_{\perp}\rangle &= \delta\beta \hat{\mathbf{E}} |\tilde{\mathcal{C}}\rangle, \end{aligned}$$

$\delta\alpha$ et $\delta\beta$ étant deux petits nombres réels.

Considérons tout d'abord le cas de la figure 3.4a, pour lequel $|\delta\mathcal{C}\rangle$ est orienté dans le même sens que $\hat{\mathbf{E}} |\tilde{\mathcal{C}}\rangle$, soit $\delta\beta > 0$; alors la quantité

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{\mathbf{E}} | \mathcal{C} \rangle &= \langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{\mathbf{E}} | \tilde{\mathcal{C}} + \delta\mathcal{C} \rangle \\ &= \langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{\mathbf{E}} | \delta\mathcal{C} \rangle \\ &= \delta\beta \|\hat{\mathbf{E}} |\tilde{\mathcal{C}}\rangle\|^2 \end{aligned}$$

est (faiblement) positive. En d'autres termes, la projection du vecteur $\hat{\mathbf{E}} |\mathcal{C}\rangle$ sur $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$ est dirigée selon $\hat{\mathbf{E}} |\tilde{\mathcal{C}}\rangle$, ce qui implique que l'angle défini par $|\mathcal{C}\rangle$ et $\hat{\mathbf{E}} |\tilde{\mathcal{C}}\rangle$ est (légèrement) supérieur à $\frac{\pi}{2}$ (voir figure 3.4a). Il nous reste maintenant à appliquer la "procédure de la médiane". Nous devons rechercher la valeur de λ pour laquelle la quantité $\| |\mathcal{C}\rangle + \lambda \hat{\mathbf{E}} |\mathcal{C}\rangle \|^2$, qui n'est autre que le carré de la longueur du vecteur $(|\mathcal{C}\rangle + \lambda \hat{\mathbf{E}} |\mathcal{C}\rangle)$, est minimale : géométriquement, on

FIG. 3.4 – *Algorithme itératif, image géométrique simple.*

voit facilement que ce minimum est réalisé pour λ_{\min} tel que $|C\rangle + \lambda_{\min}\hat{E}|C\rangle$ est orthogonal à $\hat{E}|C\rangle$. Le nouveau vecteur $|C'\rangle$, de norme unité, est ainsi porté par la médiane du "segment" $\lambda_{\min}\hat{E}|C\rangle$: la construction géométrique de la figure 3.4a montre alors clairement que le nouveau vecteur $|C'\rangle$ ainsi construit "se rapproche" de $|\tilde{C}\rangle$.

De la même manière, si $\delta\beta < 0$ comme sur la figure 3.4b, la projection de $\hat{E}|C\rangle$ sur $|\tilde{C}\rangle$ sera (faiblement) négative, et l'angle défini par $|C\rangle$ et $\hat{E}|C\rangle$ sera à nouveau légèrement supérieur à $\frac{\pi}{2}$. Notre procédure médiane, représentée sur la figure 3.4b, ramène, comme au cas précédent, le nouveau vecteur $|C'\rangle$ vers le "point stable" $|\tilde{C}\rangle$.

Notons qu'il est important que l'angle défini par $|C\rangle$ et $\hat{E}|C\rangle$ reste proche de $\frac{\pi}{2}$ (ou, en d'autres termes, que la projection de $\hat{E}|C\rangle$ sur $|\tilde{C}\rangle$ reste faible), afin que le nouveau vecteur $|C'\rangle$, construit au cours de la procédure de la médiane, ne passe pas "de l'autre côté" de $|\tilde{C}\rangle$. En effet, par continuité de l'application linéaire représentée matriciellement par \hat{E} , on a, pour tout vecteur normé $|C\rangle$,

$$\|\hat{E}|\tilde{C}\rangle\| \leq N[\hat{E}]$$

où $N[\hat{E}]$ est la norme de la matrice \hat{E} (en dimension finie, toutes les normes étant équivalentes, on peut, par exemple choisir $N[\hat{E}] = \text{Max}_{ij}(|\hat{E}_{ij}|)$), de sorte que $|\langle\tilde{C}|\hat{E}|C\rangle| = |\delta\beta| \|\hat{E}|\tilde{C}\rangle\|^2 \leq |\delta\beta| N[\hat{E}]$ reste bien un terme du premier ordre en $\|\delta C\|$.

Quoique qualitatif, l'argument que nous venons de présenter donne une bonne image de la manière dont fonctionne notre algorithme qui s'est révélé efficace dans tous les cas pratiques envisagés.

3.4.2 Application au calcul de l'espace de code

Voyons maintenant comment l'algorithme précédent peut être utilisé pour calculer explicitement la base de code.

Notre but est de trouver I vecteurs $|\tilde{\gamma}_i\rangle$ qui vérifient simultanément les conditions (3.6, 3.7). Ce problème peut être reformulé de la manière suivante. Tout d'abord, on combine les vecteurs $|\tilde{\gamma}_i\rangle$ en un "supervecteur" $|\tilde{C}\rangle$ de

dimension $(N \times I)$

$$|\tilde{\mathcal{C}}\rangle = \begin{pmatrix} |\tilde{\gamma}_1\rangle \\ \vdots \\ |\tilde{\gamma}_I\rangle \end{pmatrix}.$$

On construit ensuite $E = \frac{I(I-1)}{2} + M \frac{I(I+1)}{2}$ "supermatrices" \hat{E}_k , de dimensions $(N \times I) \times (N \times I)$, comme suit : en les considérant comme des tableaux de I^2 blocs $N \times N$, on obtient les $\frac{I(I-1)}{2}$ premières matrices en plaçant la matrice identité $N \times N$ successivement dans chacun des $\frac{I(I-1)}{2}$ blocs situés au-dessus de la diagonale, les autres blocs étant pris nuls ; pour former les $\frac{MI(I+1)}{2}$ dernières, on place chacun des M opérateurs \hat{E}_m successivement dans chacun des $\frac{I(I+1)}{2}$ blocs situés sur et au-dessus de la diagonale, les autres blocs étant laissés nuls. Après ce petit travail de réécriture, on peut donner aux conditions (3.6) la forme équivalente suivante : pour $1 \leq k \leq \frac{I(I-1)}{2}$

$$\langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{E}_k | \tilde{\mathcal{C}} \rangle = 0$$

(notons que cette forme ne tient pas compte des conditions de normalisation, qui seront imposées d'une autre façon). De même, on peut réécrire les conditions (3.7) de la manière suivante : pour $\frac{I(I-1)}{2} + 1 \leq k \leq \frac{I(I-1)}{2} + \frac{MI(I+1)}{2}$,

$$\langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{E}_k | \tilde{\mathcal{C}} \rangle = 0.$$

Notre problème initial, "multivectoriel", défini par les équations (3.6,3.7), est ainsi transformé en un problème équivalent, formellement plus simple, qui peut être traité par le même genre d'algorithme itératif que celui du paragraphe précédent : en effet, notre but est maintenant de déterminer un supervecteur $|\tilde{\mathcal{C}}\rangle$ de dimension $(N \times I)$ tel que, pour $1 \leq k \leq \frac{I(I-1)}{2} + \frac{MI(I+1)}{2}$,

$$\langle \tilde{\mathcal{C}} | \hat{E}_k | \tilde{\mathcal{C}} \rangle = 0.$$

Entrons maintenant dans les détails plus techniques de notre calcul de la base de code. Nous choisissons tout d'abord un supervecteur $|\mathcal{C}_0\rangle$ au hasard que nous prenons comme point de départ : nous normalisons ce vecteur en imposant à chacune de ses I composantes de posséder une norme égale à $\frac{1}{I}$. Si l'une de ces composantes n'est pas normalisable, *i.e.* est égale à zero, nous choisissons au hasard un nouveau point de départ $|\mathcal{C}_0\rangle$.

Ensuite, comme dans l'algorithme itératif du paragraphe précédent, nous minimisons la fonction

$$F_{\mathcal{C}_0}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_E^{(0)}) = \sum_{k=1}^E \left\| |\mathcal{C}_0\rangle + \lambda_k^{(0)} \hat{E}_k |\mathcal{C}_0\rangle \right\|^2$$

par rapport aux E nombres complexes $\lambda_k^{(0)}$: plus précisément, nous séparons les parties réelle et imaginaire des $\lambda_k^{(0)} = \alpha_k^{(0)} + i\beta_k^{(0)}$ et calculons les $\alpha_k^{(0)}$ et $\beta_k^{(0)}$ appropriés en résolvant l'ensemble des $2E$ équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{C_0}}{\partial \alpha_k^{(0)}} &= 0 \\ \frac{\partial F_{C_0}}{\partial \beta_k^{(0)}} &= 0,\end{aligned}$$

formellement équivalentes au système linéaire suivant

$$\widehat{K}(|C_0\rangle) \cdot \vec{\Lambda}^{(0)} = \vec{D}(|C_0\rangle)$$

où $\widehat{K}(|C_0\rangle)$ est une matrice réelle de dimensions $2E \times 2E$ définie par

$$\widehat{K}_{ij}(|C_0\rangle) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\langle C_0 | \widehat{E}_i^\dagger \widehat{E}_j | C_0 \rangle \right) & \text{pour } 1 \leq i \leq E \text{ et } 1 \leq j \leq E \\ -\operatorname{Im} \left(\langle C_0 | \widehat{E}_i^\dagger \widehat{E}_{j-E} | C_0 \rangle \right) & \text{pour } 1 \leq i \leq E \text{ et } 1+E \leq j \leq 2E \\ \operatorname{Im} \left(\langle C_0 | \widehat{E}_{i-E}^\dagger \widehat{E}_j | C_0 \rangle \right) & \text{pour } 1+E \leq i \leq 2E \text{ et } 1 \leq j \leq E \\ \operatorname{Re} \left(\langle C_0 | \widehat{E}_{i-E}^\dagger \widehat{E}_{j-E} | C_0 \rangle \right) & \text{pour } 1+E \leq i \leq 2E \text{ et } 1+E \leq j \leq 2E \end{cases},$$

$\vec{D}(|C_0\rangle)$ est un vecteur réel de dimension $2E$ défini par

$$\vec{D}(|C_0\rangle) = \begin{cases} -\operatorname{Re} \left(\langle C_0 | \widehat{E}_i | C_0 \rangle \right) & \text{for } 1 \leq i \leq E \\ \operatorname{Im} \left(\langle C_0 | \widehat{E}_{i-E} | C_0 \rangle \right) & \text{for } E+1 \leq i \leq 2E \end{cases}$$

et $\vec{\Lambda}^{(0)}$ est un vecteur réel de dimension $2E$ constitué des paramètres $\alpha_k^{(0)}$ et $\beta_k^{(0)}$

$$\vec{\Lambda}^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_E^{(0)} \\ \beta_1^{(0)} \\ \vdots \\ \beta_E^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Une fois les $\lambda_k^{(0)} = \left(\alpha_k^{(0)} + i\beta_k^{(0)} \right)$ trouvés, nous calculons

$$|\Delta C_0\rangle = \sum_k \lambda_k^{(0)} \widehat{E}_k |C_0\rangle$$

et

$$|C'_0\rangle = |C_0\rangle + \frac{1}{2} |\Delta C_0\rangle$$

(procédure de la médiane). Nous normalisons $|C'_0\rangle$ en imposant à chacune de ses I composantes d'avoir une norme égale à $\frac{1}{I}$, et prenons le vecteur résultant pour nouveau point de départ $|C_1\rangle$. Si l'une des composantes de $|C'_0\rangle$ n'est pas normalisable, *i.e.* est égale à zéro, nous prenons pour nouveau point de départ un supervecteur $|C_0\rangle$ au hasard.

Nous répétons cette séquence d'opérations aussi longtemps que nécessaire. Ainsi, à l'étape m , nous minimisons la fonction

$$F_{C_{m-1}} \left(\lambda_1^{(m-1)}, \lambda_2^{(m-1)}, \dots, \lambda_E^{(m-1)} \right) = \sum_{k=1}^E \left\| |C_{m-1}\rangle + \lambda_k^{(m-1)} \widehat{E}_k |C_{m-1}\rangle \right\|^2$$

en résolvant le système linéaire associé

$$\widehat{K} (|C_{m-1}\rangle) \cdot \vec{\Lambda}^{(m-1)} = \vec{D} (|C_{m-1}\rangle).$$

Nous obtenons ainsi les $\lambda_k^{(m-1)}$ et $|\Delta C_{m-1}\rangle$ à partir duquel nous calculons $|C'_{m-1}\rangle = |C_{m-1}\rangle + \frac{1}{2} |\Delta C_{m-1}\rangle$. Si cela est possible, nous normalisons $|C'_{m-1}\rangle$ et prenons le vecteur résultant comme point de départ $|C_m\rangle$ de l'étape $(m+1)$; si $|C'_{m-1}\rangle$ n'est pas normalisable, nous prenons pour nouveau point de départ un vecteur $|C_0\rangle$ choisi au hasard. Finalement $|C_m\rangle$ tend vers $|\widetilde{C}\rangle$ tel que $\forall k \in \left[1, \frac{I(I-1)}{2}\right], \langle \widetilde{C} | \widehat{E}_k | \widetilde{C} \rangle = 0$. Les vecteurs $|\widetilde{\gamma}_i\rangle$ qui forment la base de code peuvent être facilement extraits de $|\widetilde{C}\rangle$ dont ils constituent les I sous-composantes de dimension N .

L'algorithme présenté ici a été programmé en Mathematica et en C, et numériquement testé sur de nombreux exemples. Nous avons pu calculer, entre autres, un espace de code permettant de protéger 2 qubits parmi 7 (2 qubits d'information + 5 qubits d'ancilla) contre 31 Hamiltoniens d'erreurs (21 erreurs touchant chaque qubit individuellement et 10 erreurs collectives). Ces résultats ont été présentés dans [BHKAD04] et sont disponibles sur le web à l'adresse <http://www.quacs.u-psud.fr/quacs/codes.htm>. Nous ne les reproduisons pas ici pour éviter d'alourdir l'exposé inutilement.

3.5 Réalisation physique de la matrice de codage par contrôle non-holonôme

La matrice de codage \widehat{C} qui transfère l'information de l'espace \mathcal{C} vers l'espace de code $\widetilde{\mathcal{C}}$, est un opérateur unitaire de l'espace de HILBERT du système

composé $\mathcal{S} = \mathcal{J} \otimes \mathcal{A}$, généralement très compliqué. Nous venons de montrer comment calculer explicitement les vecteurs de base $\{|\tilde{\gamma}_i\rangle\}$ qui en constituent les I premières colonnes ; on peut maintenant se demander comment réaliser l'étape de codage, *i.e.* comment imposer *physiquement* la matrice de codage \hat{C} au système considéré. Nous allons voir qu'une version légèrement modifiée de la technique de contrôle non holonôme exposée dans la première partie permet de répondre à cette question.

Rappelons que la technique de contrôle non holonôme consiste à imposer une évolution arbitraire "à la carte" à un système quantique \mathcal{S} , par applications alternées de deux perturbations "bien choisies", notées \hat{V}_a and \hat{V}_b , pendant N^2 pulses (N est la dimension de l'espace de HILBERT), dont les durées t_i sont déterminées par un algorithme approprié, présenté en détail dans la première partie.

On pourrait être tenté d'utiliser directement cette technique ici : il suffirait en effet de calculer l'espace de code $Vect \{|\tilde{\gamma}_i\rangle, i = 1, \dots, I\}$ par la méthode itérative présentée au paragraphe précédent, puis de former une matrice unitaire \hat{C} de dimensions $N \times N$ dont les I premières colonnes sont les vecteurs orthonormés $|\tilde{\gamma}_i\rangle$, et enfin de rechercher, au moyen de l'algorithme de contrôle total, les N^2 temps d'interaction t_i tels que

$$\hat{U}(t_1, t_2, \dots, t_{N^2}) = \exp(-i\hat{H}_a t_{N^2}) \exp(-i\hat{H}_b t_{N^2-1}) \cdots \exp(-i\hat{H}_b t_1) = \hat{C}.$$

Néanmoins, cette procédure, simple en théorie, s'avère en pratique très gourmande en temps et implique beaucoup de travail inutile. En effet, une grande partie de l'information contenue dans la matrice de codage est sans intérêt, et les N^2 paramètres réels de \hat{C} n'ont pas tous à être contrôlés précisément, de sorte que le nombre n_C de paramètres de contrôle réellement nécessaires à l'étape de codage est inférieur à N^2 . Examinons ce point plus en détail.

La matrice de codage est caractérisée par les relations (3.5) : notre problème de contrôle peut donc se réduire à trouver n_C temps d'interaction t_i ,

que nous compacterons formellement en un vecteur-temps $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n_C} \end{pmatrix}$,

tels que la matrice d'évolution totale

$$\hat{U}(\vec{t}) = \exp(-i\hat{H}_b t_{n_C}) \exp(-i\hat{H}_a t_{n_C-1}) \cdots \exp(-i\hat{H}_a t_1)$$

satisfasse les conditions (3.5), soit pour tout couple $(|\gamma_s\rangle, |\gamma_t\rangle)_{1 \leq s, t \leq I}$ de vec-

teurs de base de \mathcal{C} et tout opérateur d'erreur \hat{E}_m

$$\langle \gamma_t | \hat{U}^\dagger(\vec{t}) \hat{E}_m \hat{U}(\vec{t}) | \gamma_s \rangle = 0. \quad (3.9)$$

Le nombre n_C de paramètres de contrôle doit être supérieur au nombre de contraintes indépendantes imposées à la matrice de codage, qui est de l'ordre de $\sim MI^2$; en d'autres termes $n_C \gtrsim MI^2$. En nous souvenant que $A \gtrsim M$ et que $N = IA$ nous voyons que le nombre $n_C \sim MI^2$ de paramètres de contrôle véritablement nécessaires est environ M fois plus petit que $N^2 \sim (MI)^2$.

Le type de contrôle dont nous avons besoin ici est ainsi d'une nature toute différente de celui que nous avons considéré dans la première partie de cette thèse: il s'agit d'un contrôle *partiel*, pour lequel il nous faut construire un nouvel algorithme, différent de celui que nous utilisons pour le contrôle total de l'opérateur d'évolution.

Commençons par reformuler notre problème de contrôle, en utilisant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent: en introduisant la matrice de dimensions $(N \times I) \times (N \times I)$, diagonale par blocs

$$\hat{U}(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \hat{U}(\vec{t}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{U}(\vec{t}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{U}(\vec{t}) \end{pmatrix}$$

et le supervecteur de dimension $(N \times I)$

$$|\mathbf{C}\rangle = \begin{pmatrix} |\gamma_1\rangle \\ \vdots \\ |\gamma_I\rangle \end{pmatrix}$$

constitué des coordonnées des I vecteurs de base de \mathcal{C} , nous pouvons poser le problème de contrôle (3.9) de la manière suivante: nous cherchons un vecteur temps \vec{t} tel que

$$\forall k, \quad \langle \mathbf{C} | \hat{U}^\dagger(\vec{t}) \hat{E}_k \hat{U}(\vec{t}) | \mathbf{C} \rangle = 0, \quad (3.10)$$

où les matrices $\{\hat{E}_k\}_{k=1, \dots, E}$ désignent les E matrices de dimensions $(N \times I) \times (N \times I)$ introduites au paragraphe précédent. En d'autres termes, nous cherchons le vecteur temps \vec{t} qui annule la "fonction test"

$$G(\vec{t}) \equiv \sum_{k=1}^E \left| \langle \mathbf{C} | \hat{U}^\dagger(\vec{t}) \hat{E}_k \hat{U}(\vec{t}) | \mathbf{C} \rangle \right|^2.$$

L'idée de notre algorithme consiste à prendre le supervecteur $|C_0\rangle = \hat{U}(\vec{t}_0)|C\rangle$, où \vec{t}_0 est un vecteur temps choisi au hasard, comme point de départ d'une étape élémentaire de l'algorithme itératif de calcul de la base de code, et à chercher le petit accroissement \vec{dt}_0 tel que $\hat{U}(\vec{t}_0 + \vec{dt}_0)|C\rangle$ suit, dans le "super-espace" de HILBERT $\mathcal{H}^{\otimes I}$, la direction fournie par le résultat $|C_0\rangle + \frac{1}{2}|\Delta C_0\rangle$ de l'algorithme itératif. La répétition de cette séquence fournit finalement le vecteur $\vec{t} = \vec{t}_0 + \vec{dt}_0 + \vec{dt}_1 + \dots$ qui satisfait (3.10).

Décrivons maintenant notre algorithme plus en détail. Tout d'abord, nous tirons au hasard un ensemble de paramètres $\{t_{0,i}\}$, choisis dans une gamme de temps "réaliste", dictée par le système considéré : en particulier, la durée des pulses de contrôle doit rester bien plus courte que la durée de vie typique du système et bien plus grande que le temps de réponse typique des appareils utilisés au cours de l'expérience. Ensuite, nous minimisons la fonction

$$F_{C_0}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_E^{(0)}) = \sum_{k=1}^E \left\| |C_0\rangle + \lambda_k^{(0)} \hat{E}_k |C_0\rangle \right\|^2$$

comme nous le faisons au cours de l'algorithme itératif du paragraphe précédent : nous obtenons alors les $\lambda_k^{(0)}$ ainsi que $|\Delta C_0\rangle = \sum_k \lambda_k^{(0)} \hat{E}_k |C_0\rangle$. A ce point, nous cherchons le petit accroissement \vec{dt}_0 du vecteur temps d'interaction \vec{t}_0 tel que

$$\begin{aligned} \forall k, \left\langle C \left| \left(\frac{\partial \hat{U}^\dagger}{\partial \vec{t}}(\vec{t}_0) \cdot d\vec{t}_0 \right) \hat{E}_k \hat{U}(\vec{t}_0) + \hat{U}^\dagger(\vec{t}_0) \hat{E}_k \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \vec{t}}(\vec{t}_0) \cdot d\vec{t}_0 \right) \right| C \right\rangle \\ = \frac{\langle C_0 + \frac{1}{2}\Delta C_0 | \hat{E}_k | C_0 + \frac{1}{2}\Delta C_0 \rangle - \langle C_0 | \hat{E}_k | C_0 \rangle}{\langle C_0 + \frac{1}{2}\Delta C_0 | C_0 + \frac{1}{2}\Delta C_0 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Notons que les supermatrices d'erreurs \hat{E}_k correspondant aux conditions d'orthonormalité ne sont pas considérées ici : en d'autres termes, nous ne prenons en compte que les supermatrices $\left\{ \hat{E}_k \right\}_{k \in \left[\frac{I(I-1)}{2} + 1, \frac{I(I-1)}{2} + \frac{MI(I+1)}{2} \right]}$. Nous avons ainsi affaire à $\frac{MI(I+1)}{2}$ équations complexes qui peuvent être réduites en le système linéaire suivant

$$\hat{S}(\vec{t}_0) \cdot \vec{dt}_0 = \vec{W}(|\Delta C_0\rangle), \quad (3.12)$$

où $\hat{S}(\vec{t}_0)$ et $\vec{W}(|\Delta C_0\rangle)$ sont respectivement une matrice réelle de dimensions $MI^2 \times n_C$ et un vecteur réel de dimension MI^2 . L'idée est de séparer l'ensemble des $\frac{MI(I+1)}{2}$ équations complexes (3.11) en deux sous-ensembles de $\frac{MI(I+1)}{2}$ équations réelles, puis de rejeter celles qui sont triviales ($0 = 0$) ou

redondantes pour finalement obtenir la forme (3.12). Même si la procédure de calcul explicite est très simple, les expressions des éléments de \widehat{S} et \overrightarrow{W} sont si désagréables que nous ne les reproduirons pas ici.

Le système linéaire que nous venons d'obtenir a pour dimensions $(MI^2 \times n_C)$, où $n_C \geq MI^2$: nous pourrions alors être tentés de poser $n_C = MI^2$ de manière à obtenir un système carré facilement soluble par des techniques standard d'algèbre linéaire. Néanmoins, nous procédons légèrement différemment : nous posons en effet $n_C > MI^2$, soit $n_C = MI^2 + \delta n$ où δn est un entier de l'ordre de 1, puis choisissons au hasard MI^2 temps t_i qui seront considérés comme paramètres libres, tandis que les δn autres seront comme "gelés". En d'autres termes, nous choisissons au hasard une permutation $\sigma_0 \in \mathcal{S}_{n_C}$ (groupe symétrique d'ordre n_C) et prenons les temps d'interaction $\{t'_i = t_{\sigma_0(i)}\}_{i=1, \dots, MI^2}$ comme paramètres libres tandis que les temps $\{t'_i = t_{\sigma_0(i)}\}_{i=1+MI^2, n_C}$ sont gelés. Cela nous amène à une nouvelle version des équations (3.11,3.12):

$$\begin{aligned} \forall k, \left\langle \mathcal{C} \left| \left(\frac{\partial \widehat{U}^\dagger}{\partial t'_i} \left(\overrightarrow{t}_0 \right) \cdot d\overrightarrow{t}'_0 \right) \widehat{E}_k \widehat{U} \left(\overrightarrow{t}_0 \right) + \widehat{U}^\dagger \left(\overrightarrow{t}_0 \right) \widehat{E}_k \left(\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t'_i} \left(\overrightarrow{t}_0 \right) \cdot d\overrightarrow{t}'_0 \right) \right| \mathcal{C} \right\rangle \\ = \frac{\langle \mathcal{C}_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathcal{C}_0 | \widehat{E}_k | \mathcal{C}_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathcal{C}_0 \rangle - \langle \mathcal{C}_0 | \widehat{E}_k | \mathcal{C}_0 \rangle}{\langle \mathcal{C}_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathcal{C}_0 | \mathcal{C}_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathcal{C}_0 \rangle}. \\ \widehat{S} \left(\overrightarrow{t}_0 \right) \cdot d\overrightarrow{t}'_0 = \overrightarrow{W} \left(|\Delta \mathcal{C}_0 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le système (3.13) est maintenant clairement un système carré, réduit aux paramètres libres. La résolution de ce système fournit l'accroissement MI^2 -dimensionnel $d\overrightarrow{t}'_0$ que nous complétons par δn zéros pour former un vecteur de dimension n_C ; en réordonnant les temps, nous obtenons finalement l'accroissement $d\overrightarrow{t}_0$ du vecteur temps total. Plus explicitement, pour $i \in [1, MI^2]$, nous avons $dt_{0, \sigma_0(i)} \neq 0$ (paramètres libres), tandis que pour $i \in [1 + MI^2, n_C]$, $dt_{0, \sigma_0(i)} = 0$ (paramètres "gelés"). Nous posons ensuite $\overrightarrow{t}_1^\alpha = \overrightarrow{t}_0 + \alpha d\overrightarrow{t}_0$, où α est un facteur de convergence et calculons la fonction test $G \left(\overrightarrow{t} \right) = \sum_k \left| \left\langle \mathcal{C} \left| \widehat{U}^\dagger \left(\overrightarrow{t} \right) \widehat{E}_k \widehat{U} \left(\overrightarrow{t} \right) \right| \mathcal{C} \right\rangle \right|^2$ en $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t}_1^\alpha$ pour différentes valeurs de $\alpha \in [0, 1]$. Si nous trouvons un α_1 tel que $G \left(\overrightarrow{t}_1^\alpha \right) < G \left(\overrightarrow{t}_0 \right)$, nous prenons $\overrightarrow{t}_1 \equiv \overrightarrow{t}_1^{\alpha_1}$ pour nouveau vecteur temps, et gardons les mêmes paramètres de contrôle pour l'étape suivante : autrement dit, la permutation σ_1 qui détermine les temps d'interaction libres pour la seconde étape sera la même que pour la première étape, *i.e.* $\sigma_1 = \sigma_0$. En revanche, si aucune valeur de α ne convient, nous nous trouvons alors dans un minimum local de G dont nous ne pouvons sortir qu'en changeant d'espace de paramètres libres ; nous posons donc $\overrightarrow{t}_1 \equiv \overrightarrow{t}_0$ et prenons un nouvel ensemble de paramètres libres

en choisissant une nouvelle permutation $\sigma_1 \neq \sigma_0$ au hasard dans \mathfrak{S}_{n_C} . Cette procédure de "rotation" des variables d'optimisation nous permet d'éviter de rester bloqués dans un minimum local de la fonction G .

Nous répétons cette séquence d'opérations aussi longtemps que nécessaire. Ainsi à l'étape m , nous prenons le supervecteur $|\mathbf{C}_{m-1}\rangle = \hat{U}(\vec{t}_{m-1})|\mathbf{C}\rangle$ pour point de départ d'une étape élémentaire de l'algorithme itératif du paragraphe précédent. Nous calculons $|\Delta\mathbf{C}_{m-1}\rangle = \sum \lambda_k^{(m-1)} \hat{E}_k |\mathbf{C}_{m-1}\rangle$ et trouvons le vecteur \vec{dt}'_{m-1} , de dimension MI^2 , contenant les variations des MI^2 paramètres libres (caractérisés par la permutation σ_{m-1}) et vérifiant

$$\begin{aligned} \forall k, \left\langle \mathbf{C} \left| \left(\frac{\partial \hat{U}^\dagger}{\partial \vec{t}'}(\vec{t}_m) \cdot d\vec{t}'_m \right) \hat{E}_k \hat{U}(\vec{t}_m) + \hat{U}^\dagger(\vec{t}_m) \hat{E}_k \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \vec{t}'}(\vec{t}_m) \cdot d\vec{t}'_m \right) \right| \mathbf{C} \right\rangle \\ = \frac{\langle \mathbf{C}_{m-1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C}_{m-1} | \hat{E}_k | \mathbf{C}_{m-1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C}_{m-1} \rangle - \langle \mathbf{C}_{m-1} | \hat{E}_k | \mathbf{C}_{m-1} \rangle}{\langle \mathbf{C}_{m-1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C}_{m-1} | \mathbf{C}_{m-1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C}_{m-1} \rangle}. \end{aligned}$$

en résolvant le système linéaire carré associé

$$\hat{S}(\vec{t}_{m-1}) \cdot \vec{dt}'_{m-1} = \vec{W}(|\Delta\mathbf{C}_{m-1}\rangle).$$

Nous complétons alors \vec{dt}'_{m-1} avec δn zéros et réordonnons les temps d'interaction pour obtenir \vec{dt}_{m-1} . Nous posons ensuite $\vec{t}'_m = \vec{t}_{m-1} + \alpha \vec{dt}_{m-1}$. S'il existe un α_m tel que $G(\vec{t}'_m) < G(\vec{t}_{m-1})$ nous prenons $\vec{t}_m = \vec{t}'_m$ pour nouveau vecteur temps, et gardons les mêmes paramètres libres pour l'étape $(m+1)$: autrement dit, la permutation caractérisant les paramètres libres pour l'étape $(m+1)$ sera la même que celle de l'étape m , *i.e.* $\sigma_m = \sigma_{m-1}$. Dans le cas contraire, nous prenons $\vec{t}_m = \vec{t}_{m-1}$ pour vecteur temps et tirons au hasard MI^2 nouveaux paramètres libres parmi les n_C temps d'interaction, en choisissant une nouvelle permutation σ_m pour l'étape $(m+1)$.

A la fin de l'algorithme, nous obtenons le vecteur temps \vec{t}_∞ recherché tel que pour tout couple $(|\gamma_s\rangle, |\gamma_t\rangle)_{1 \leq s, t \leq I}$ de vecteurs de base de \mathcal{C} et tout opérateur d'erreur \hat{E}_m

$$\left\langle \gamma_t \left| \hat{U}^\dagger(\vec{t}_\infty) \hat{E}_m \hat{U}(\vec{t}_\infty) \right| \gamma_s \right\rangle = 0.$$

Jusqu'à présent, nous n'avons rien dit de la matrice de décodage, ni de la manière physique de la réaliser. Si les Hamiltoniens de contrôle \hat{H}_a et \hat{H}_b peuvent être renversés, *i.e.* si les signes de \hat{H}_a et \hat{H}_b peuvent être retournés par une modification des paramètres des champs de contrôle, il suffit alors, pour

imposer la matrice de décodage au système, d'appliquer la même séquence de contrôle que pour le codage, mais à l'envers. Plus explicitement, on commence par appliquer $-\hat{H}_b$ pendant le temps t_{n_C} , puis $-\hat{H}_a$ pendant t_{n_C-1}, \dots , et finalement $-\hat{H}_a$ pendant t_1 , de sorte que l'on obtient

$$\exp\left(+i\hat{H}_a t_1\right) \cdots \exp\left(+i\hat{H}_a t_{n_C-1}\right) \exp\left(+i\hat{H}_b t_{n_C}\right) = \hat{C}^{-1}.$$

En revanche, si \hat{H}_a et \hat{H}_b ne peuvent être renversés, on ne peut appliquer cette technique et l'on doit alors employer la méthode de contrôle complet, impliquant N^2 paramètres de contrôle, pour trouver les temps qui réalisent \hat{C}^{-1} .

Comme l'algorithme de recherche de l'espace de code, l'algorithme que nous venons de présenter a été programmé sous Mathematica et C, et numériquement testé sur un système physique moléculaire réaliste à 7 qubits, emprunté à la littérature. Les résultats sont présentés dans [BHKAD04] et sont disponibles sur le web à l'adresse <http://www.quacs.u-psud.fr/quacs/codes.htm>. Pour ne pas surcharger inutilement l'exposé, nous ne présenterons pas en détail cet exemple numérique, d'autant qu'un cas physique complet sera étudié au chapitre suivant.

Au terme de ce chapitre, nous disposons d'une méthode théorique de protection de l'information : en répétant fréquemment le cycle d'opérations codage - décodage - mesure projective on peut, par un effet ZENON généralisé, protéger l'information contenue dans un sous-espace de l'espace de HILBERT du système contre l'action d'erreurs unitaires. Un algorithme a été proposé qui permet de trouver la base de code en fonction des erreurs considérées. En outre, une réalisation physique de l'étape de codage, utilisant la technique de contrôle non holonôme, a été suggérée.

Il ne nous reste plus qu'à appliquer cette méthode à une situation physique réelle. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le chapitre suivant, sur l'exemple de l'atome de rubidium ^{78}Rb .

Chapitre 4

Protection d'un système réel

"Je hais la réalité mais c'est quand même le seul endroit où se faire servir un bon steak."

Woody Allen.

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une méthode de protection de l'information, fondée sur une généralisation multidimensionnelle de l'effet ZENON quantique. Nous avons en outre suggéré d'utiliser le contrôle non holonôme pour réaliser physiquement l'étape de codage. Enfin, nous avons fourni tous les outils algorithmiques nécessaires à la mise en oeuvre pratique de notre technique.

Le but de ce dernier chapitre est de montrer comment fonctionne notre méthode dans une situation physique réaliste, et ainsi de mieux appréhender les difficultés expérimentales qu'elle soulève : plus précisément, nous nous proposons ici de protéger un qubit d'information, porté par le spin de l'électron périphérique d'un isotope de l'atome de rubidium (^{78}Rb), contre l'action de champs électrique et magnétique parasites [BACD04]. Le dispositif expérimental que nous suggérons fait intervenir à la fois un champ magnétique statique et des champs LASER contrôlés qui seront utilisés tant pour l'étape de codage/décodage que lors de la mesure projective.

Dans le premier paragraphe, nous posons le problème que nous souhaitons résoudre et motivons le choix de l'atome de rubidium ^{78}Rb comme système modèle. Dans le deuxième paragraphe, nous détaillons la réalisation expérimentale de notre méthode en passant en revue chacune de ses étapes : ajout de l'ancilla par pompage, codage, puis décodage par contrôle non holonôme, et enfin mesure projective. Nous discutons en outre la faisabilité et l'efficacité de notre technique dans ce cadre réaliste : en particulier, nous soulignons les simplifications et les hypothèses réalisées sur le système employé et signalons les effets négligés dans cette première approche, effets qu'il se-

rait nécessaire de prendre en compte en vue d'une application expérimentale effective.

4.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, nous nous proposons de protéger un qubit d'information, initialement codé sur les deux états de spin du niveau fondamental $5s$ d'un isotope de l'atome de rubidium, ^{78}Rb , contre l'action de champs électrique $\vec{\mathcal{E}}(t)$ et magnétique $\vec{\mathcal{B}}(t)$ quasistatiques parasites. On peut montrer (voir annexe C) que l'effet de tels champs sur une couche de moment cinétique orbital l fixé est caractérisé par les 8 Hamiltoniens suivants : 3 Hamiltoniens magnétiques

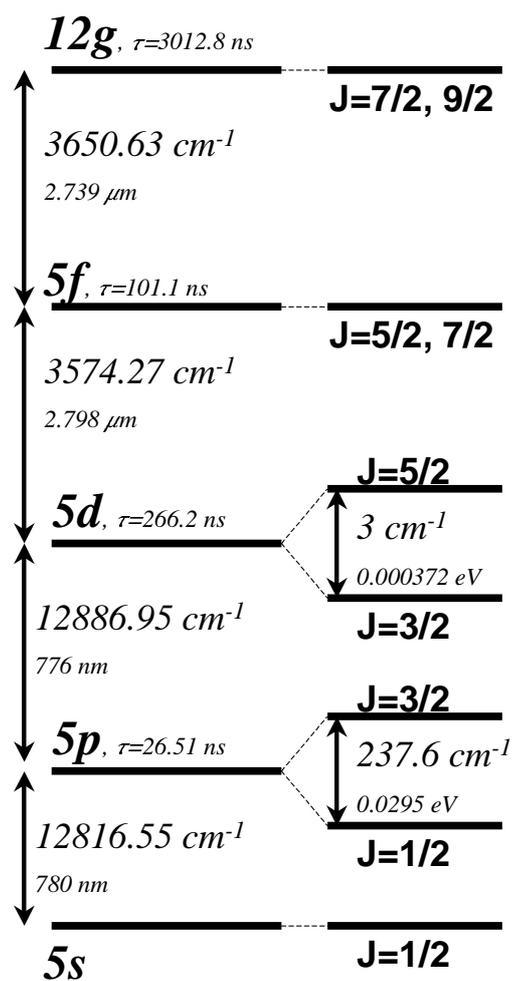
$$\left\{ \widehat{L}_k + 2\widehat{S}_k, k = x, y, z \right\},$$

et 5 Hamiltoniens électriques du second ordre¹

$$\left\{ \widehat{x}\widehat{y}, \widehat{x}\widehat{z}, \widehat{y}\widehat{z}, 2\widehat{z}^2 - \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2, \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2 \right\}.$$

Le choix de l'atome de rubidium est motivé par des raisons "pédagogiques". De manière générale, les alcalins sont de bons candidats à l'application de notre méthode en raison de leur structure hydrogénoïde, car ils sont naturellement constitués de deux "sous-systèmes" clairement identifiables : un sous-système porteur d'information, le spin de l'électron périphérique, et une *ancilla*, le moment cinétique orbital. Comme nous le verrons par la suite, il est aisé, dans un tel système, de manipuler la dimension de l'ancilla en jouant simplement sur le moment cinétique orbital via des transitions contrôlées de l'atome. Le choix, parmi tous les alcalins, de l'atome de rubidium, et plus particulièrement de l'isotope ^{78}Rb , est dicté par des raisons spectrales qui apparaîtront plus clairement par la suite : d'une part, les niveaux du rubidium mis en jeu peuvent être adressés par des LASER dont les fréquences demeurent "réalistes" (Fig.4.1) [Gal94, BG77]; d'autre part, l'isotope ^{78}Rb ne possède pas de structure hyperfine (son spin nucléaire I est nul), ce qui assure que son niveau fondamental $5s$ est dégénéré (comme nous le verrons plus loin, cette caractéristique est primordiale dans l'étape de projection). Notons enfin que le temps de vie ($\simeq 17.66$ min) de l'isotope ^{78}Rb est suffisamment long pour le type d'expérience que nous souhaitons réaliser.

1. L'action, au premier ordre, d'un champ électrique sur une couche de moment cinétique orbital fixé est en effet nulle pour des raisons de parité.

FIG. 4.1 – *Partie utile du spectre du rubidium.*

4.2 Les différentes étapes de la méthode

Dans ce deuxième paragraphe, nous passons en revue chacune des étapes de notre méthode et en proposons une réalisation physique possible sur le système réel considéré.

4.2.1 Ajout de l'ancilla

Comme nous l'avons indiqué plus haut, le rôle du système \mathcal{J} est joué par le spin électronique, tandis que celui de l'ancilla \mathcal{A} est tenu par le moment cinétique orbital. Initialement, l'information à protéger est codée sur les deux états du niveau fondamental

$$|\nu_1\rangle = \left| 5s, j = \frac{1}{2}, m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle \text{ et } |\nu_2\rangle = \left| 5s, j = \frac{1}{2}, m_j = \frac{1}{2} \right\rangle,$$

sous la forme d'une superposition cohérente

$$\alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle.$$

Dans ce niveau, la dimension de l'ancilla est $A = 2l + 1 = 1$ ($l = 0$) : on peut ainsi grossièrement considérer "qu'il n'y a pas d'ancilla", puisque sa présence (discrète!) n'augmente pas la dimension de l'espace de HILBERT du système et on assimile alors \mathcal{H}_I à l'espace engendré par les deux vecteurs $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$.

La première étape de notre méthode consiste à "ajouter" l'ancilla \mathcal{A} au système porteur d'information \mathcal{J} . Pour être très exact, il s'agit plutôt ici d'augmenter la dimension de l'ancilla, en pompant l'atome du niveau fondamental pour lequel $l = 0$, vers un niveau de moment cinétique orbital supérieur. Nous pouvons préciser la valeur de ce moment cinétique en notant que le nombre de Hamiltoniens d'erreurs considérés étant $M = 8$, nous aurons besoin d'une ancilla de dimension supérieure ou égale à $M + 1 = 9$ (cf relation 3.8), soit un moment cinétique orbital supérieur ou égal à 4. L'ajout de l'ancilla peut donc être effectué par pompage vers une couche ng .

Nous choisissons l'état de RYDBERG $12g$ dont nous négligeons la structure fine, de sorte que les $N = I \times A = 2 \times 9 = 18$ vecteurs de base de l'espace de HILBERT total $\mathcal{H} = \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_A$ sont dégénérés.

Pour être plus précis, nous ajoutons formellement l'ancilla en réalisant le schéma de pompage suivant

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &\longrightarrow |\gamma_1\rangle = \left| 12g, j = \frac{7}{2}, m_j = -\frac{5}{2} \right\rangle \\ |\nu_2\rangle &\longrightarrow |\gamma_2\rangle = \left| 12g, j = \frac{7}{2}, m_j = -\frac{3}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

L'information initialement codée dans l'espace \mathcal{H}_I est ainsi transférée vers

$$\mathcal{C} = \text{Span} \left[|\gamma_1\rangle = \left| 12g, j = \frac{7}{2}, m_j = -\frac{5}{2} \right\rangle, |\gamma_2\rangle = \left| 12g, j = \frac{7}{2}, m_j = -\frac{3}{2} \right\rangle \right]$$

Le choix du sous-espace \mathcal{C} peut paraître arbitraire à ce stade : il sera justifié plus loin par l'existence d'un processus physique réalisant une projection sur \mathcal{C} .

Notons que \mathcal{C} est un sous-espace "quelconque" dont les vecteurs de base $\{|\gamma_i\rangle\}_{i=1,2}$ sont des états intriqués du spin et du moment cinétique orbital. Le processus de mesure projective sur \mathcal{C} , que nous considérerons plus loin, ne consistera donc pas en une simple mesure de l'ancilla (ici du moment cinétique orbital), mais en un processus plus complexe.

Pratiquement, le pompage peut être effectué de la manière suivante. Quatre LASER sont appliqués simultanément à l'atome : ces LASER sont polarisés circulairement respectivement gauche pour le premier, droit pour les trois autres, et légèrement désaccordés respectivement des transitions $(5s_{\frac{1}{2}} \leftrightarrow 5p_{\frac{3}{2}})$, $(5p_{\frac{3}{2}} \leftrightarrow 5d_{\frac{3}{2}})$, $(5d_{\frac{3}{2}} \leftrightarrow 5f)$ et $(5f \leftrightarrow 12g)$. Les désaccords interdisent les transitions réelles à un photon, tandis que la transition à quatre photons est résonnante : l'atome est ainsi contraint d'absorber quatre photons simultanément, passant du niveau fondamental vers le niveau de RYDBERG $12g$. En utilisant les règles de sélection, on peut construire les chemins "autorisés" représentés sur la figure 4.2 : ces chemins couplent uniquement $|\nu_1\rangle$ à $|\gamma_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ à $|\gamma_2\rangle$.

Sous l'action des LASER appliqués, des oscillations de RABI ont lieu entre les états $|\nu_1\rangle$ et $|\gamma_1\rangle$ d'une part et $|\nu_2\rangle$ et $|\gamma_2\rangle$ d'autre part, de pulsations respectives Ω_1 et Ω_2 . Ainsi, en partant de la condition initiale

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle,$$

on aboutit, à la date t , à

$$|\psi(t)\rangle = \alpha \cos \left[\frac{\Omega_1 t}{2} \right] |\nu_1\rangle - i\alpha \sin \left[\frac{\Omega_1 t}{2} \right] |\gamma_1\rangle + \beta \cos \left[\frac{\Omega_2 t}{2} \right] |\nu_2\rangle - i\beta \sin \left[\frac{\Omega_2 t}{2} \right] |\gamma_2\rangle.$$

En particulier, pour $t = \frac{\pi}{\Omega_1}$,

$$|\psi(t)\rangle = -i\alpha |\gamma_1\rangle + \beta \cos \left[\frac{\Omega_2 \pi}{\Omega_1 2} \right] |\nu_2\rangle - i\beta \sin \left[\frac{\Omega_2 \pi}{\Omega_1 2} \right] |\gamma_2\rangle.$$

Pour que l'étape de pompage soit correctement effectuée, il faut que les cohérences soient transférées, intactes (ou presque), de la couche $5s$ à la couche $12g$: en d'autres termes, il faut que le terme $\sin \left[\frac{\Omega_2 \pi}{\Omega_1 2} \right]$ soit aussi proche que possible de 1.

On peut calculer le rapport $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ en écrivant explicitement l'expression des pulsations de RABI

$$\left\{ \Omega_i = \frac{d_{\gamma_i \theta_i}^{(q=-1)} d_{\theta_i \mu_i}^{(q=-1)} d_{\mu_i \lambda_i}^{(q=-1)} d_{\lambda_i \nu_i}^{(q=1)} E_1 E_2 E_3 E_4}{\hbar^4 \Delta_1 (\Delta_1 + \Delta_2) (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)}, \quad i = 1, 2 \right\}$$

où $d_{ab}^{(q)}$ représente la composante standard q de l'opérateur vectoriel dipôle électrique, prise entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. On rappelle que

$$\begin{aligned} d^{(-1)} &= -\frac{d_x + id_y}{\sqrt{2}} \\ d^{(+1)} &= \frac{d_x - id_y}{\sqrt{2}} \\ d^{(0)} &= d_z. \end{aligned}$$

En outre, on a noté $|\lambda_i\rangle, |\mu_i\rangle, |\theta_i\rangle$ les états couplés à $|\nu_i\rangle$ et $|\gamma_i\rangle$ durant le processus de pompage

$$\begin{aligned} \left\{ |\lambda_1\rangle = \left| 5p_{\frac{3}{2}}, m_j = \frac{1}{2} \right\rangle, |\lambda_2\rangle = \left| 5p_{\frac{3}{2}}, m_j = \frac{3}{2} \right\rangle \right\} \\ \left\{ |\mu_1\rangle = \left| 5d_{\frac{3}{2}}, m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle, |\mu_2\rangle = \left| 5d_{\frac{3}{2}}, m_j = \frac{1}{2} \right\rangle \right\} \\ \left\{ |\theta_1\rangle = \left| 5f_{\frac{5}{2}}, m_j = -\frac{3}{2} \right\rangle, |\theta_2\rangle = \left| 5f_{\frac{5}{2}}, m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, les E_k et les Δ_k représentent respectivement les champs de pompage appliqués à l'atome et les désaccords de ces champs par rapport aux différentes transitions.

Le théorème de WIGNER-ECKART nous permet d'écrire

$$\langle n' j' m'_j | \hat{d}^{(q)} | n j m_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j'+1}} \langle j 1 m_j q | j' m'_j \rangle \langle n' j' || d || n j \rangle$$

où $\langle n' j' || d || n j \rangle$ est l'élément de matrice réduit du dipôle. Ainsi, le rapport des pulsations $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ recherché est simplement le rapport de deux produits de coefficients de CLEBSCH-GORDAN

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} &= \frac{\langle \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} 1 | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 \frac{3}{2} - 1 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 \frac{1}{2} - 1 | \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{5}{2} 1 - \frac{1}{2} - 1 | \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \rangle}{\langle \frac{1}{2} 1 - \frac{1}{2} 1 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 \frac{1}{2} - 1 | \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 - \frac{1}{2} - 1 | \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \rangle \langle \frac{5}{2} 1 - \frac{3}{2} - 1 | \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \rangle} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

et le terme $\sin \left[\frac{\Omega_2 \pi}{\Omega_1 2} \right]$ est égal à 0.98. L'information initialement contenue dans la superposition $\alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle$ des états de base de \mathcal{H}_I est donc transférée de manière (presque) parfaitement cohérente vers l'état $\alpha |\gamma_1\rangle + \beta |\gamma_2\rangle \in \mathcal{C}^2$.

En outre, en prenant

$$\begin{aligned} d_{\lambda\nu} &\simeq 10^{-29} C.m, \\ d_{\mu\lambda} &\simeq 10^{-30} C.m, \\ d_{\theta\mu} &\simeq 10^{-30} C.m, \\ d_{\gamma\theta} &\simeq 10^{-31} C.m, \\ E &\simeq 10^4 V/cm \quad (I \simeq 10^5 W/cm^2), \\ \hbar\Delta &\simeq 10^{-5} eV, \end{aligned}$$

pour ordre de grandeur des différents termes, on obtient $\Omega \simeq 2,3.10^9 rad.s^{-1}$ soit une durée de pompage $\tau_p = \frac{2\pi}{\Omega} \simeq 0.4 ns$ qui est largement inférieure aux durées de vie des différents états considérés.

4.2.2 Codage

La deuxième étape de notre méthode consiste à coder l'information par la technique de contrôle non holonôme. Pour ce faire, nous imposons à l'atome $n_C = 42$ pulses de contrôle, de durées respectives $\{t_i\}_{i=1,\dots,42}$, pendant lesquels sont alternativement appliquées deux perturbations \widehat{V}_a et \widehat{V}_b (voir Fig.4.3), correspondant à deux combinaisons linéaires particulières d'un Hamiltonien magnétique (ZEEMAN) et d'un Hamiltonien électrique (RAMAN). Plus explicitement, pendant les pulses de numéro pair (pulses de type "A"), nous appliquons le champ magnétique constant

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x = 1,3.10^{-2} T \\ B_y = 1,3.10^{-2} T \\ B_z = 1,3.10^{-2} T \end{pmatrix}$$

associé au Hamiltonien ZEEMAN

$$\widehat{W}_Z = \frac{\mu_B}{\hbar} B_k \left(\widehat{L}_k + 2\widehat{S}_k \right),$$

2. Notons que la composante de l'état quantique qui demeure dans la couche 5s sera elle-même "effacée" par l'étape de projection (voir 4.2.5). Dans la suite, nous ne tiendrons pas compte de cette composante.

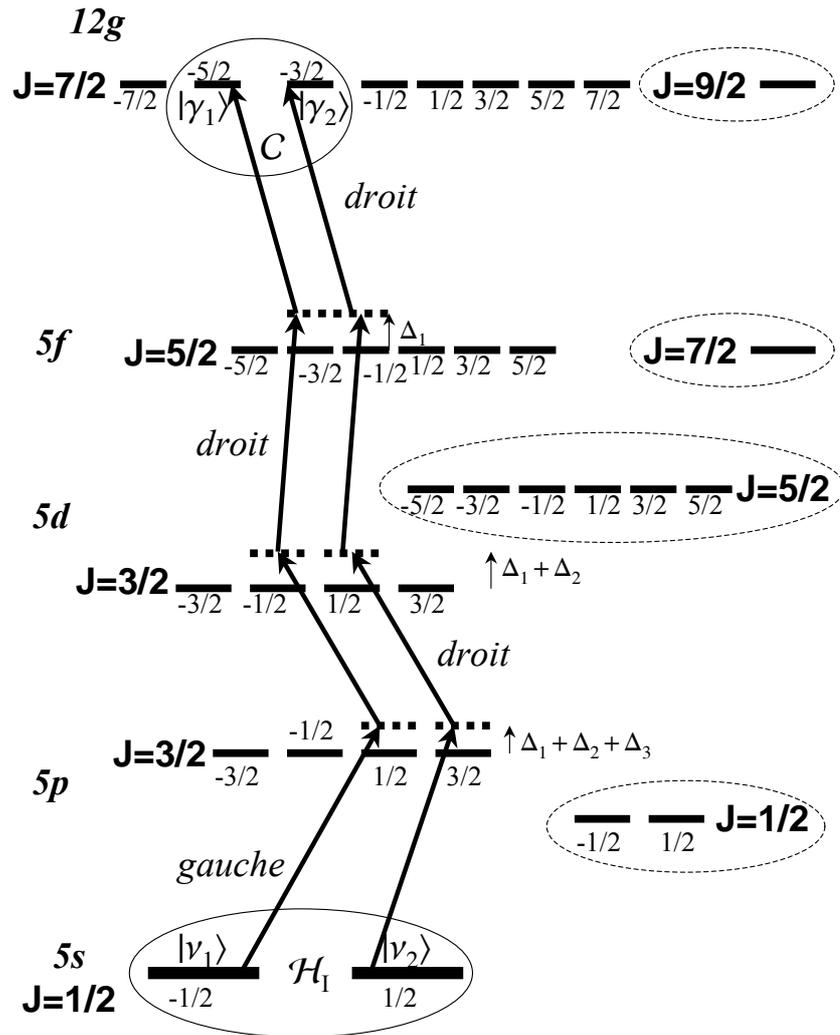


FIG. 4.2 – Ajout de l'ancilla par pompage. La polarisation des photons ainsi que les sous-niveaux Zeeman impliqués sont représentés.

et le champ électrique sinusoïdal

$$\vec{E}_a(t) = \text{Re} \left[\underline{\vec{E}}_a e^{-i\omega_R t} \right],$$

$$\underline{\vec{E}}_a = \begin{pmatrix} E_{x,a} \\ 0 \\ E_{z,a} e^{-i\varphi_{z,a}} \end{pmatrix},$$

dont la pulsation ω_R est légèrement désaccordée de la transition ($12g \leftrightarrow 5f$) (désaccord δ , les structures fines des niveaux $12g$ et $5f$ étant négligées). Les valeurs choisies pour les différentes caractéristiques de ce champ sont les suivantes

$$\begin{aligned} E_{x,a} &= 1,3 \cdot 10^5 \text{V.m}^{-1} \\ E_{z,a} &= 1,3 \cdot 10^5 \text{V.m}^{-1} \\ \varphi_{z,a} &= 1,7 \\ \hbar\omega_R &= 3650,53 \text{cm}^{-1} = 0.45261 \text{eV} \\ \delta &= -0.1 \text{cm}^{-1} = -1.23984 \cdot 10^{-5} \text{eV}. \end{aligned}$$

L'intensité du faisceau LASER est de l'ordre de 10^8W/m^2 . Le Hamiltonien RAMAN associé à ce champ est (cf Annexe D)

$$\widehat{W}_{R,a} = \frac{1}{4\hbar\delta} \sum_{(i,j) \in 12g, k \in 5f} \left(\vec{d}_{ik} \cdot \vec{E}_a \right) \left(\vec{d}_{kj} \cdot \vec{E}_a \right) |i\rangle \langle j|, \quad (4.1)$$

où \vec{d}_{ik} désigne l'élément dipolaire $\langle i | \widehat{\vec{d}} | k \rangle$. La perturbation totale appliquée durant les pulses "A" est donc $\widehat{V}_a = \widehat{W}_Z + \widehat{W}_{R,a}$.

Pendant les pulses de numéro impair (pulses de type "B"), nous appliquons le même champ magnétique que pour les pulses de type A (ce qui est expérimentalement appréciable!) et le champ LASER

$$\vec{E}_b(t) = \text{Re} \left[\underline{\vec{E}}_b e^{-i\omega_R t} \right],$$

$$\text{où } \underline{\vec{E}}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{y,b} e^{-i\varphi_{y,b}} \\ E_{z,b} e^{-i\varphi_{z,b}} \end{pmatrix},$$

dont la pulsation est la même que précédemment et dont les valeurs caractéristiques sont

$$\begin{aligned} E_{y,b} &= 3,3 \cdot 10^5 \text{V.m}^{-1} \\ E_{z,b} &= -0,24 \cdot 10^5 \text{V.m}^{-1} \\ \varphi_{y,b} &= 2,3 \\ \varphi_{z,b} &= 1,7. \end{aligned}$$

Le Hamiltonien RAMAN associé à ce champ est noté $\widehat{W}_{R,b}$ (on obtient aisément son expression en remplaçant les a par des b dans la formule 4.1). La perturbation totale correspondante est notée $\widehat{V}_b = \widehat{W}_Z + \widehat{W}_{R,b}$.

En définitive, comme la structure fine du niveau $12g$ est négligée, le Hamiltonien propre \widehat{H}_0 est dégénéré et peut être pris égal à 0, de sorte que le Hamiltonien total prend la forme pulsée suivante: $\widehat{H}_a = \widehat{V}_a$ pendant les pulses de type "A", $\widehat{H}_b = \widehat{V}_b$ pendant les pulses de type "B". Les 42 temps $\{t_i\}_{i=1,\dots,42}$, calculés à l'aide de l'algorithme exposé au chapitre précédent, sont tels que la matrice

$$\widehat{U}(t_1, \dots, t_{42}) = e^{-i\widehat{H}_b t_{42}} e^{-i\widehat{H}_a t_{41}} \dots e^{-i\widehat{H}_a t_1} = \widehat{C}$$

vérifie les conditions (3.5). A la fin de l'étape de codage, l'information est transférée vers la superposition cohérente $\alpha |\tilde{\gamma}_1\rangle + \beta |\tilde{\gamma}_2\rangle$ des vecteurs de base $\{|\tilde{\gamma}_i\rangle = \widehat{C} |\gamma_i\rangle\}_{i=1,2}$ de l'espace de code $\tilde{\mathcal{C}} = \widehat{C}\mathcal{C}$.

Comme indiqué sur la figure 4.3, la durée totale d'une période de contrôle ($\tau_c \simeq 212ns$) est plus de 10 fois plus courte que la durée de vie de l'état de RYDBERG $12g$, qui est de l'ordre de $3\mu s$. De plus, les durées des différents pulses, qui vont de $4,6ns$ à $9,5ns$, bien que courtes, sont expérimentalement réalisables.

4.2.3 Action des erreurs infinitésimales

Après un bref instant τ , l'information portée par le système subit un léger accroissement, dû aux Hamiltoniens d'erreurs: par construction, cet accroissement est orthogonal à l'espace de code $\tilde{\mathcal{C}}$.

Notons qu'en prenant pour ordres de grandeurs $E \sim 0,1V/m$, $B \sim 10^{-6}T$ et $d \sim 10^{-28}C.m$ respectivement pour les champs électrique et magnétique parasites et le dipôle électrique, la séquence codage-erreurs-décodage doit s'effectuer en un temps très inférieur à $\xi_Z \sim 10\mu s$ (cf formule 3.2). Cette prescription ne pose en réalité aucune contrainte supplémentaire sur les durées τ_C , τ et τ_d , respectivement de codage, d'évolution libre et de décodage, puisque ces trois étapes doivent avoir lieu en un temps inférieur à la durée de vie de l'état de RYDBERG $12g$ qui est de l'ordre de la μs . Nous pouvons ainsi choisir (arbitrairement) $\tau \simeq \tau_C \simeq 100ns$.

4.2.4 Décodage

Après la période d'évolution libre, nous imposons au système la matrice de décodage \widehat{C}^{-1} : pour cela, nous renversons brutalement le champ magnétique

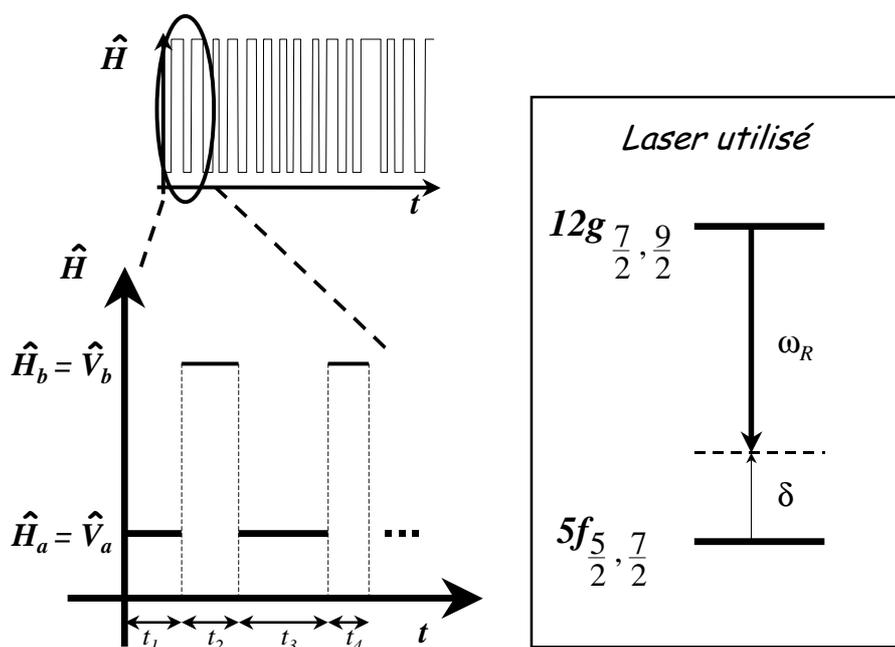


FIG. 4.3 – Etape de codage par contrôle non holonôme. Les deux Hamiltoniens de contrôle \hat{H}_a et \hat{H}_b sont appliqués alternativement au système pendant des pulses de durées $\{t_i(ns)\} = \{6.12, 9.50, 6.16, 9.16, 7.67, 5.07, 6.32, 8.07, 7.33, 7.50, 5.56, 6.56, 6.10, 5.61, 5.29, 5.68, 8.87, 5.34, 5.81, 8.91, 6.84, 4.79, 6.44, 5.70, 5.15, 4.65, 5.13, 5.60, 6.89, 8.90, 8.35, 6.83, 8.94, 6.25, 6.65, 5.37, 7.37, 5.89, 6.05, 9.00, 8.01, 5.10\}$. Les pulsations des champs LASER utilisés sont représentées sur le spectre du rubidium.

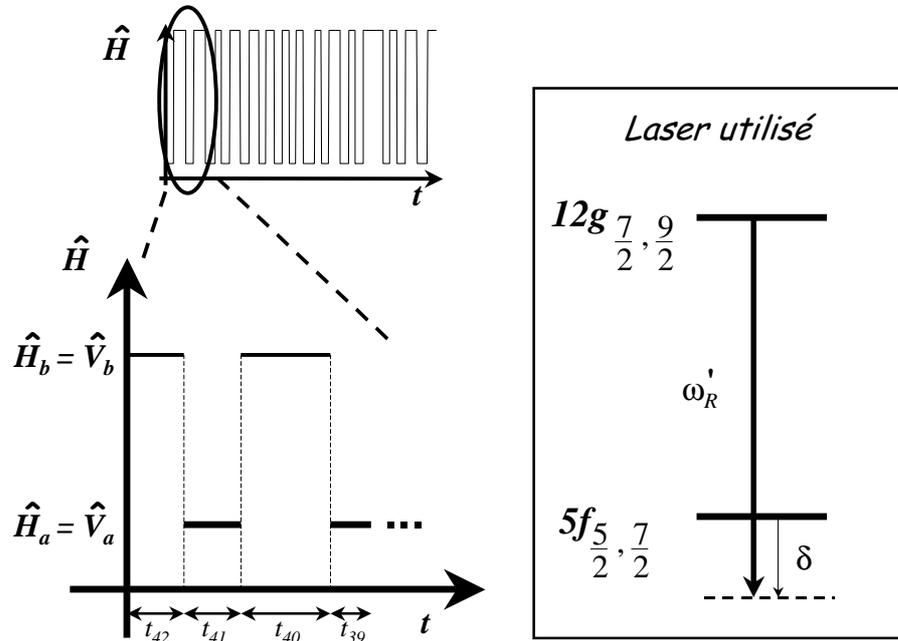


FIG. 4.4 – *Décodage par contrôle non holonôme. Nous renversons le champ magnétique et le désaccord des champs électriques, et appliquons la même séquence de contrôle que pour le codage, à l'envers.*

\vec{B} et le désaccord δ , laissons inchangées toutes les autres valeurs (ceci revient à renverser les Hamiltoniens \hat{H}_a et \hat{H}_b), et appliquons la même séquence de pulses de contrôle que pour le codage, mais en sens inverse : plus précisément, nous commençons par appliquer un pulse "A" de durée t_{n_C} , puis un pulse de type "B" pendant t_{n_C-1} , etc. (voir Fig.4.4). L'étape de décodage produit un état, dont la projection orthogonale sur \mathcal{C} est l'état initial.

4.2.5 Projection

Dans la dernière étape, le vecteur erroné doit être projeté sur le sous-espace \mathcal{C} de manière à recouvrer l'information initiale.

La projection est un processus non-unitaire et irréversible, qui ne peut être accompli par une évolution Hamiltonienne. Pour réaliser cette étape, nous employons donc un chemin, symétrique de l'étape de pompage, et qui comprend trois émissions stimulées et une émission spontanée. Plus explicite-

ment, nous appliquons trois LASER polarisés circulairement droit, légèrement désaccordés par rapport aux transitions

$$(12g \longleftrightarrow 5f), \left(5f \longleftrightarrow 5d_{\frac{3}{2}}\right) \text{ et } \left(5d_{\frac{3}{2}} \longleftrightarrow 5p_{\frac{3}{2}}\right).$$

Sous l'action de ces champs, l'atome retombe, avec une grande probabilité, vers le niveau fondamental en émettant trois photons stimulés et un photon spontané.

En utilisant les règles de sélection, on se convainc que si un photon spontané circulaire gauche est émis, les seuls états couplés avec le niveau fondamental sont $|\gamma_1\rangle$ et $|\gamma_2\rangle$, respectivement à $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ (voir figure 4.5). En d'autres termes, l'émission d'un photon spontané polarisé circulairement droit ramène la partie non corrompue du vecteur d'état vers l'espace $\mathcal{H}_I = \text{Span}[|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle]$. Au contraire, les autres cas possibles - "photon polarisé circulairement gauche", "photon polarisé linéairement", "pas de photon émis" - ne mènent pas au processus de projection correct.

Les cas "photon polarisé gauche" et "pas de photon émis" sont très improbables : leur probabilité est en effet proportionnelle au carré de l'amplitude des erreurs, *i.e.* au carré du rapport de la durée d'évolution libre τ sur le temps ZENON τ_Z (voir chapitre précédent), qui est très petit devant 1.

En revanche, le cas "photon spontané linéairement polarisé" est très ennuyeux car il mélange les deux chemins $|\gamma_1\rangle \rightarrow |\nu_1\rangle$ et $|\gamma_2\rangle \rightarrow |\nu_2\rangle$. Ce processus parasite doit être "éliminé" ou, du moins, sa probabilité doit être bien plus faible que celle du cas "photon spontané gauche". Ceci peut être réalisé en plaçant l'atome ^{87}Rb dans une cavité FABRY-PEROT (voir [Har92]).

Le taux de la transition $|\gamma_i\rangle \rightarrow |\nu_i\rangle$ à 4 photons est

$$\Gamma_{\gamma_i\nu_i} = 2\pi \left| \frac{d_{\gamma_i\lambda_i}^{(1)} E_1}{\hbar\Delta_1} \right|^2 \left| \frac{d_{\lambda_i\mu_i}^{(1)} E_2}{\hbar(\Delta_1 + \Delta_2)} \right|^2 \left| \frac{d_{\mu_i\theta_i}^{(1)} E_3}{\hbar(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)} \right|^2 \frac{1}{2\pi\hbar C k_s \left| \vec{d}_{\mu_i\nu_i} \vec{e}_G^* \right|^2} \varrho(\vec{k}_s),$$

où \vec{k}_s est le vecteur d'onde du photon spontané émis, \vec{e}_G est le vecteur (unitaire) direction de polarisation du photon gauche, $\varrho(\vec{k}_s)$ est la densité d'états (normalisée au volume de la cavité) pour le champ intra cavité à \vec{k}_s , et où le trait désigne la moyenne sur les directions de \vec{k}_s . Les composantes standard du moment dipolaire sont notées comme précédemment $d_{ab}^{(q)}$. L'élévation, sous l'effet de la cavité, de la densité d'états pour les modes se propageant selon l'axe des z assure que

$$\Gamma_{\gamma_1\nu_1}, \Gamma_{\gamma_2\nu_2} \gg \left| \frac{d_{\gamma_i\lambda_i} E_1}{\hbar\Delta_1} \right|^2 \left| \frac{d_{\lambda_i\mu_i} E_2}{\hbar(\Delta_1 + \Delta_2)} \right|^2 \left| \frac{d_{\mu_i\theta_i} E_3}{\hbar(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)} \right|^2 \gamma,$$

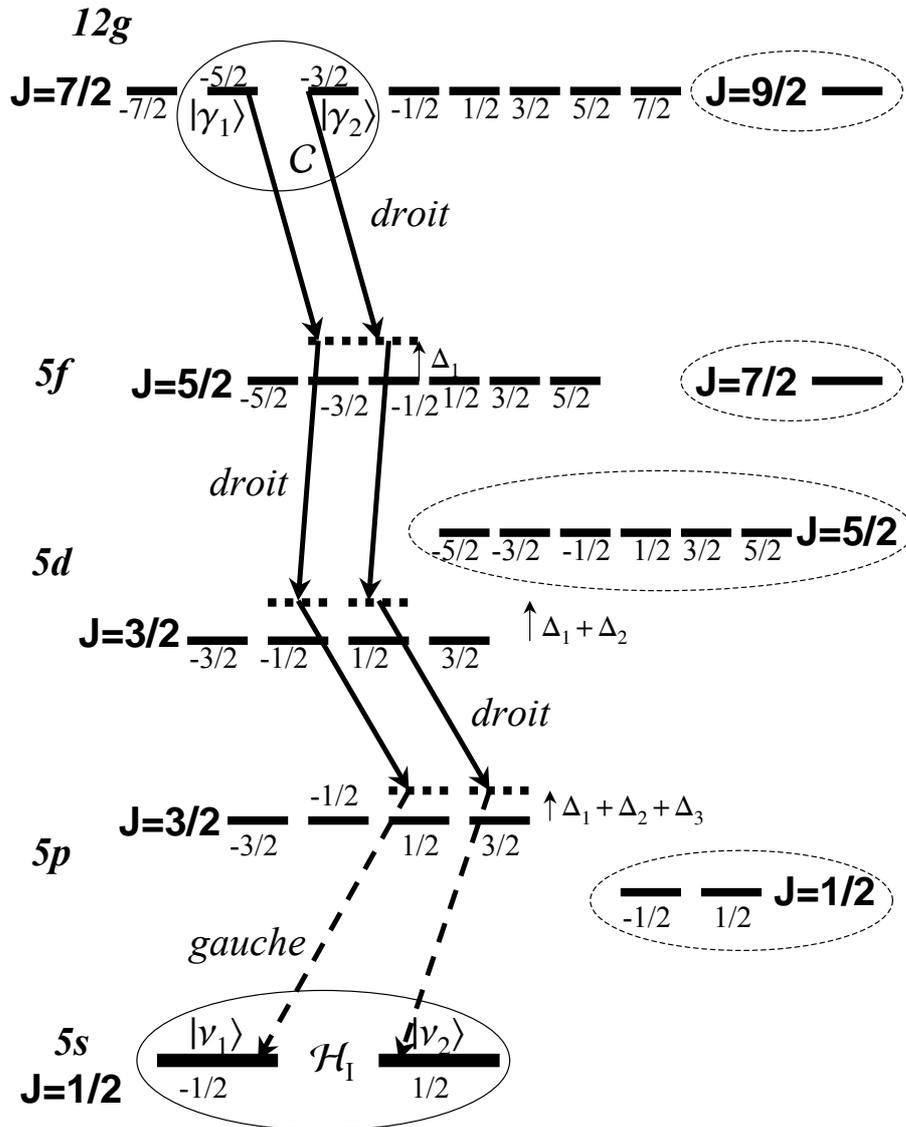


FIG. 4.5 – Etape de projection. Les lasers impliqués sont indiqués par des flèches pleines, le photon spontané est représenté en tirets. Les différentes polarisations sont spécifiées.

où γ est le taux de transition de $\left|5p_{\frac{3}{2}}, m_j = +\frac{1}{2}\right\rangle$ vers $\left|5s_{\frac{1}{2}}, m_j = +\frac{1}{2}\right\rangle$, de sorte que le processus indésirable suivi par le photon π est bien plus faible que dans le vide.

Les équations dynamiques pour les éléments ρ_{ab} de la matrice densité du système prennent la forme suivante (pour $i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{\gamma_i \gamma_i} &= -\Gamma_{\gamma_i \nu_i} \rho_{\gamma_i \gamma_i}, \\ \dot{\rho}_{\nu_i \nu_i} &= \Gamma_{\gamma_i \nu_i} \rho_{\gamma_i \gamma_i}, \\ \dot{\rho}_{\gamma_1 \gamma_2} &= -\frac{1}{2}(\Gamma_{\gamma_1 \nu_1} + \Gamma_{\gamma_2 \nu_2}) \rho_{\gamma_1 \gamma_2}, \\ \dot{\rho}_{\nu_1 \nu_2} &= \sqrt{\Gamma_{\gamma_1 \nu_1} \Gamma_{\gamma_2 \nu_2}} \rho_{\gamma_1 \gamma_2}.\end{aligned}$$

Pour éviter tout déphasage, qui risquerait de corrompre l'information, la cohérence $\rho_{\gamma_1 \gamma_2}$ doit être transférée avec une efficacité maximale vers $\rho_{\nu_1 \nu_2}$: l'efficacité

$$\eta = \frac{2\sqrt{\Gamma_{\gamma_1 \nu_1} \Gamma_{\gamma_2 \nu_2}}}{\Gamma_{\gamma_1 \nu_1} + \Gamma_{\gamma_2 \nu_2}} \quad (4.2)$$

est donc une quantité cruciale. En appliquant à nouveau le théorème de WIGNER-ECKART, on établit

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{\gamma_2 \nu_2}}{\Gamma_{\gamma_1 \nu_1}} &= \left(\frac{\langle \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} 1 | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 \frac{3}{2} - 1 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 \frac{1}{2} - 1 | \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{5}{2} 1 - \frac{1}{2} - 1 | \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \rangle}{\langle \frac{1}{2} 1 - \frac{1}{2} 1 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 \frac{1}{2} - 1 | \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \rangle \langle \frac{3}{2} 1 - \frac{1}{2} - 1 | \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \rangle \langle \frac{5}{2} 1 - \frac{3}{2} - 1 | \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \rangle} \right)^2 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

d'où $\eta \approx 0.9897$. En d'autres termes, la probabilité qu'une erreur survienne pendant l'étape de projection, en raison de la (petite) différence entre les produits de coefficients de CLEBSCH-GORDAN pour les deux chemins, est inférieure ou égale à $1 - \eta \approx 0.010$.

Pour achever l'étape de projection, il ne nous reste plus qu'à transférer à nouveau l'atome vers le niveau $12g$ en appliquant la même séquence de pompage que dans la première étape (ajout de l'ancilla).

A la fin de notre cycle, l'information est restaurée, avec une grande probabilité, et le système est prêt à subir un nouveau cycle de protection.

En conclusion de ce chapitre, et pour être complets, signalons que l'atome de rubidium, placé dans des états de RYDBERG, est très sensible aux processus collisionnels ainsi qu'à l'effet DOPPLER, qui constituent en réalité des sources d'erreur bien plus importantes que les champs que nous avons considérés ici [Gal94]. Pour cette raison, il peut sembler étrange de "monter"

dans des états de RYDBERG pour protéger une information codée sur les deux états fondamentaux : le processus de protection risque en effet de se révéler plus pernicieux que véritablement efficace. Une application expérimentalement envisageable devrait bien entendu prendre en compte tous ces effets.

Néanmoins, le but de ce chapitre était plus 'pédagogique' qu'expérimentalement motivé : il s'agissait ici de montrer le fonctionnement de notre méthode sur un système physique réel. La valeur démonstrative de l'exemple choisi ne pâtit donc pas des réserves que nous avons exprimées ci-dessus : au contraire, notre étude prouve que la technique théorique exposée au chapitre précédent peut tout à fait être expérimentalement mise en oeuvre. Il reste, pour que la démonstration soit complète, à trouver des systèmes réels pour lesquels elle se révèle efficace.

Conclusion

Dans cette deuxième partie, consacrée à la protection de l'information contre les effets de l'environnement, nous avons tenté de donner une vue d'ensemble de la correction d'erreurs quantiques (chapitre 1) et avons, d'autre part, proposé une méthode de protection de la cohérence (chapitre 3) fondée sur l'effet ZENON quantique (chapitre 2). Nous avons en outre appliqué notre méthode à un système physique réel, *i.e.* un isotope du rubidium (chapitre 4).

L'application envisagée ici avait essentiellement un but "pédagogique" et permettait de mettre clairement en évidence chacune des étapes de notre technique. Néanmoins, le caractère "exotique" du système utilisé peut faire douter de sa faisabilité. D'autres systèmes pourront être considérés dans l'avenir relevant tant de la physique atomique (atome de Calcium par exemple) que de la physique du solide.

Enfin, une généralisation de notre méthode au cas d'erreurs non unitaires ajouterait à sa valeur. Néanmoins cette extension nécessite préalablement de mieux comprendre les algorithmes utilisés et de les adapter au cas de matrices d'erreurs non hermitiques.

Conclusion générale

Le contrôle quantique connaît aujourd'hui un fort regain d'intérêt, car il est l'un des prérequis essentiels à la construction du futur ordinateur quantique. Plus généralement, il constitue l'un des défis majeurs de la physique moderne, et intéresse de nombreux domaines, de la Chimie Quantique à la Physique des LASER. La grande diversité des besoins expérimentaux a exigé, exige encore, la mise au point de méthodes théoriques nouvelles.

L'idée fondamentale du contrôle quantique consiste à perturber le système au moyen de champs extérieurs maîtrisés par l'expérimentateur. Des théorèmes très généraux, établis dans le cadre formel de la théorie des groupes de LIE, permettent de décider, sur chaque cas particulier, de la faisabilité d'une grande variété d'objectifs de contrôle (contrôle d'évolution, de matrice densité, d'état pur, etc.). En outre, des méthodes pratiques (tant algébriques que numériques) ont été proposées pour déterminer, si elle existe, la solution explicite de divers types de problèmes de contrôle.

En particulier, nous avons présenté ici une technique, appelée "contrôle non holonôme", qui permet d'imposer à un système quelconque une évolution arbitraire, par application alternée de deux perturbations bien choisies, pendant des temps convenablement déterminés (au moyen d'un algorithme que nous avons détaillé). L'application, encore naïve, présentée dans le dernier chapitre de la première partie, nous laisse toutefois à penser que le contrôle non holonôme constitue une réponse envisageable aux problèmes de contrôle d'évolution des systèmes quantiques.

L'un des problèmes majeurs de l'informatique quantique, et, plus généralement, de toute opération de contrôle d'un système quantique, réside dans l'influence de son environnement. Les *erreurs quantiques*, qui naissent de l'interaction du système "ordinateur" avec l'extérieur, compromettent en effet la fiabilité du stockage et du traitement de l'information. Longtemps considérée comme une chimère, la correction d'erreurs quantiques s'est néanmoins trouvée brillamment démontrée en 1995 par P. SHOR [Sho95], et a connu par

la suite un développement rapide. Le formalisme des opérations quantiques offre un cadre théorique performant dans lequel de nombreuses méthodes de correction ont déjà été construites (codes quantiques).

Utilisant les techniques usuelles de la correction d'erreurs (codage) alliées aux concepts de l'effet ZENON quantique, nous avons proposé une méthode (théorique et pratique) de protection de l'information quantique contre un ensemble d'erreurs unitaires, représentant par exemple l'interaction du système avec des champs extérieurs classiques non contrôlés. L'idée est d'empêcher les erreurs de se développer dans le système en "lavant" fréquemment son état quantique de la composante infinitésimale introduite par les Hamiltoniens d'erreurs. Concrètement, notre méthode consiste à répéter un cycle de trois opérations: une étape de codage, par application d'une matrice unitaire \hat{C} , déterminée (partiellement) par les erreurs unitaires considérées; une étape de décodage, inverse de la précédente; enfin, une étape de "mesure-projection". La réalisation pratique de l'étape de codage (et de décodage) utilise la technique de contrôle non holonôme. Toutefois, les conditions imposées à \hat{C} ne contraignent qu'un nombre restreint de ses éléments: nous avons alors affaire à un problème de contrôle non plus total, dans lequel tous les éléments de la matrice d'évolution sont fixés, mais *partiel*, pour lequel nous avons dû développer un algorithme spécifique, différent de celui que nous avons présenté dans la première partie. Cette utilisation du contrôle non holonôme, dans la résolution d'un problème de contrôle partiel, laisse augurer de sa grande adaptabilité.

Enfin, nous avons proposé une application au rubidium (^{78}Rb), plus pédagogique qu'expérimentalement envisageable, sur laquelle nous avons néanmoins eu à coeur de démontrer la faisabilité de notre méthode.

Les perspectives du contrôle non holonôme sont larges.

Comme nous l'avons signalé plus haut, il semble d'une part qu'il puisse s'adapter à des situations très variées, sortant du cadre strict du contrôle d'évolution traité dans la première partie. Nous pensons ainsi que de nouveaux algorithmes peuvent être construits qui permettront, par notre méthode, de réaliser d'autres types de contrôles.

D'autre part, comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, le mariage de la mesure et du contrôle d'évolution permet de lutter contre les erreurs quantiques. Plus généralement, le contrôle total allié à des mesures élémentaires de type "oui-non" permet de simuler n'importe quelle évolution, unitaire ou non [LV01]. Le champ d'application théorique du contrôle non holonôme semble donc très vaste.

Enfin, d'un point de vue plus pratique, des systèmes réels doivent être recherchés sur lesquels tester expérimentalement nos méthodes (contrôle, pro-

tection) : les applications envisagées dans cette thèse donnent des "idées" qui méritent toutefois d'être précisées.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Matrice densité d'un système à deux niveaux, sphère de Bloch

Dans cette annexe, on rappelle brièvement les propriétés de la matrice densité d'un système à deux niveaux, qui sont utilisées dans le chapitre 1 de la première partie.

A.1 Hypothèses et notations

On considère un système à deux niveaux dont l'espace de HILBERT est $\mathcal{H} = \text{Vect} \{|0\rangle, |1\rangle\}$. L'ensemble des opérateurs linéaires hermitiques est un sous-espace vectoriel réel de l'espace total des opérateurs linéaires sur \mathcal{H} , dont une base particulière est donnée par l'ensemble $(\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$, composé de l'opérateur identité et des trois matrices de PAULI. En tant qu'opérateur hermitique, la matrice densité peut se décomposer sur cette base sous la forme $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(eI + x\hat{\sigma}_x + y\hat{\sigma}_y + z\hat{\sigma}_z)$ où e, x, y et z sont quatre nombres réels.

En notant $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, la matrice densité peut s'écrire sous la forme plus compacte

$$\hat{\rho} = \frac{(e\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\hat{\sigma}})}{2}.$$

On peut également l'écrire sous forme matricielle $\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e+z & x+iy \\ x-iy & e-z \end{bmatrix}$.

A.2 Cas général

Les propriétés générales d'une matrice densité permettent de préciser un peu les écritures précédentes.

Ainsi, on doit avoir $Tr\hat{\rho} = 1$, soit $e = 1$.

De plus, une matrice densité étant positive, elle doit posséder des valeurs propres (réelles) positives. Ceci impose que son déterminant, dont la valeur ne dépend pas de la base choisie pour le calculer, doit être positif: autrement dit, $e^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0$, soit¹

$$\|\vec{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

On peut ainsi caractériser un état quelconque du système par un ensemble de trois réels (x, y, z) qui satisfont la condition précédente. On a pour habitude d'utiliser la représentation appelée "sphère de BLOCH" (voir Figure A.1a): l'état du système est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ de coordonnées x, y, z dans l'espace réel à trois dimensions muni du repère cartésien $(Oxyz)$; le point M est contenu dans la boule de rayon unité.

A.3 Cas d'un état pur

Lorsque le système se trouve dans un état pur, on a $\|\vec{r}\| = 1$, autrement dit le point représentatif M se trouve *sur* la sphère de BLOCH. On peut même démontrer qu'il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante.

Supposons en effet que le système soit dans un état pur: dans ce cas la matrice densité se met sous la forme $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ où $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ satisfait $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Dans ce cas, $\hat{\rho}$ prend la forme $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}$; son déterminant est donc nul. Or $det\hat{\rho} = 1 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1 - \|\vec{r}\|^2$, d'où $\|\vec{r}\| = 1$.

Supposons maintenant que $\|\vec{r}\| = 1$: on peut alors introduire deux réels (θ, φ) (voir Figure A.1b) tels que

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{bmatrix}.$$

1. On peut retrouver ce résultat en imposant aux valeurs propres de $\hat{\rho}$, $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \|\vec{r}\|}{2}$, d'être positives.

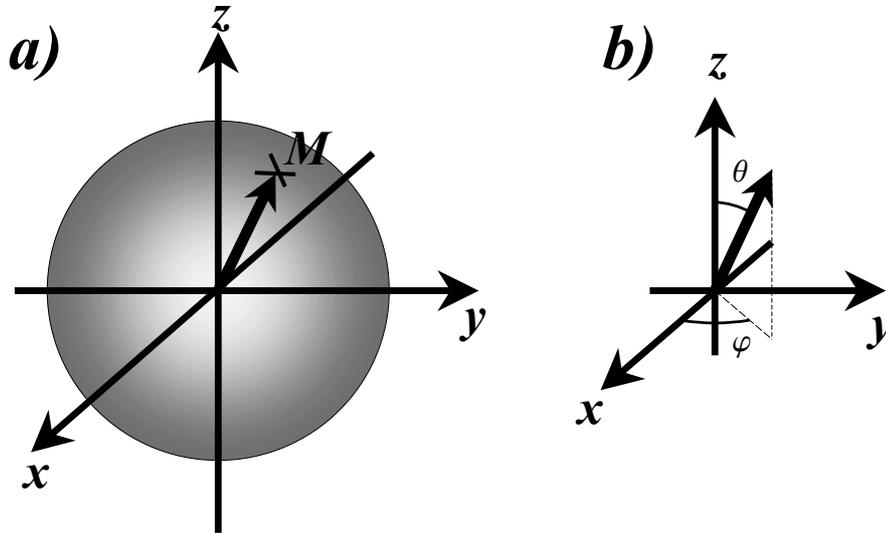


FIG. A.1 – Sphère de BLOCH.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi+i\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi-i\sin\varphi) & 1-\cos\theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \end{bmatrix}}_{|\psi\rangle} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{bmatrix}}_{\langle\psi|} \\
 &= |\psi\rangle\langle\psi|,
 \end{aligned}$$

ce qui implique que le système est dans l'état pur $|\psi\rangle$.

186 Matrice densité d'un système à deux niveaux, sphère de Bloch

Annexe B

Interaction dipôle-dipôle

Dans cette annexe, nous calculons explicitement les éléments de matrice de l'interaction dipôle-dipôle \hat{V}_{dd} utilisée au chapitre 3 de la première partie.

B.1 Hypothèses et notations

Considérons deux atomes hydrogénoïdes neutres (A) et (B)¹, joints par le rayon vecteur $\vec{r} = R\vec{n}$, défini par les angles θ et ϕ (coordonnées sphériques dans le repère cartésien $(Oxyz)$, cf figure B.1).

Les moments dipolaires électriques des atomes (A) et (B) sont confondus avec ceux de leurs électrons périphériques respectifs, et sont respectivement notés $\vec{d}_A = -e\vec{r}^{(A)}$ et $\vec{d}_B = -e\vec{r}^{(B)}$, où $\vec{r}^{(A,B)}$ désigne le vecteur reliant le coeur atomique de A (resp. B), supposé ponctuel, à son électron périphérique.

1. Nous avons supposé au chapitre 3 que l'atome de césium placé dans des états de RYDBERG pouvait être correctement décrit par cette approximation hydrogénoïde.

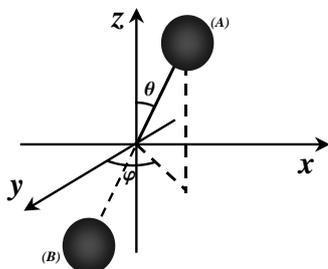


FIG. B.1 – Définition des angles θ et ϕ .

Nous posons de plus

$$\begin{cases} d_+ &= -\frac{d_x + id_y}{\sqrt{2}} \\ d_0 &= d_z \\ d_- &= \frac{d_x - id_y}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r_+ &= -\frac{x + iy}{\sqrt{2}} \\ r_0 &= z \\ r_- &= \frac{x - iy}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Dans toute cette annexe, la distance R séparant les deux atomes est supposée grande par rapport à leur rayon de BOHR, de sorte que les deux électrons périphériques de (A) et (B) évoluent dans des domaines de l'espace bien distincts : il est alors loisible d'ignorer le postulat de symétrisation (cf [CDL98], chap. XIV, paragraphe D2b) et de les traiter comme des particules discernables.

B.2 Interaction dipôle-dipôle

L'atome (A) crée au niveau de (B) un potentiel électrostatique U avec lequel les charges de (B) interagissent, donnant lieu à une énergie d'interaction $V(\vec{R})$. Le développement multipolaire de U (cf [CDL98], complément E_X) comporte une infinité de termes dont nous ne conserverons que le premier, qui est le plus important à grande distance. Il s'agit de l'interaction dipôle-dipôle²

$$V_{dd} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\vec{d}_A \cdot \vec{d}_B - 3(\vec{d}_A \cdot \vec{n})(\vec{d}_B \cdot \vec{n}) \right),$$

expression classique, que l'on peut quantifier simplement en remplaçant les grandeurs classiques par des opérateurs. En effectuant le développement, laborieux mais direct, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{V}_{dd} &= \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(c[0]Y_2^0(\hat{r}_0^{(A)}\hat{r}_0^{(B)}) + \frac{c[0]}{2}Y_2^0(\hat{r}_+^{(A)}\hat{r}_-^{(B)} + \hat{r}_-^{(A)}\hat{r}_+^{(B)}) \right. \\ &+ c[1]Y_2^{-1}(\hat{r}_0^{(A)}\hat{r}_+^{(B)} + \hat{r}_+^{(A)}\hat{r}_0^{(B)}) \\ &+ c[-1]Y_2^1(\hat{r}_0^{(A)}\hat{r}_-^{(B)} + \hat{r}_-^{(A)}\hat{r}_0^{(B)}) \\ &+ c[-2]Y_2^2(\hat{r}_+^{(A)}\hat{r}_+^{(B)}) \\ &\left. + c[2]Y_2^{-2}(\hat{r}_-^{(A)}\hat{r}_-^{(B)}) \right), \end{aligned}$$

2. Voir [CDL98], C_{XI}.

où l'on a posé

$$\begin{aligned} c[0] &\equiv 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} \\ c[1] &\equiv -2\sqrt{\frac{3\pi}{5}} = c[-1] \\ c[2] &\equiv 2\sqrt{\frac{6\pi}{5}} = c[-2], \end{aligned}$$

et utilisé l'expression des harmoniques sphériques

$$\begin{aligned} Y_2^0(\Omega) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2(\theta) - 1) \\ Y_2^{\pm 1}(\Omega) &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin(\theta)\cos(\theta)e^{\pm i\phi} \\ Y_2^{\pm 2}(\Omega) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2(\theta)e^{\pm 2i\phi}. \end{aligned}$$

On applique alors le théorème de WIGNER-ECKART relatif aux opérateurs tensoriels irréductibles (cf [Mes95] C-15 formule (89) avec $U = 1$ et $T = r$) pour déterminer l'élément de matrice (Oz est pris comme axe de quantification des moments cinétiques)

$$\langle n_1, l_1, j_1, M_{j_1}; n_2, l_2, j_2, M_{j_2} | \widehat{V}_{dd} | n_3, l_3, j_3, M_{j_3}; n_4, l_4, j_4, M_{j_4} \rangle .$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\begin{aligned} &\langle n_1, l_1, j_1, M_{j_1}; n_2, l_2, j_2, M_{j_2} | \widehat{V}_{dd} | n_3, l_3, j_3, M_{j_3}; n_4, l_4, j_4, M_{j_4} \rangle \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{dip}(j_1, j_3, l_1, l_3) \text{dip}(j_2, j_4, l_2, l_4) \\ &\times \sum_{q=-2}^2 \sum_{k=-1}^1 T^{q,k} (-1)^{j_1 - M_{j_1}} \begin{pmatrix} j_1 & 1 & j_3 \\ -M_{j_1} & k & M_{j_2} \end{pmatrix} \\ &\times (-1)^{j_2 - M_{j_2}} \begin{pmatrix} j_2 & 1 & j_4 \\ -M_{j_2} & k - q & M_{j_4} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \text{dip}(j_1, j_3, l_1, l_3) &= \langle n_1, l_1, s_1 = 1/2, j_1 || r_+^{(1)} || n_3, l_3, s_3 = 1/2, j_3 \rangle \\ &= \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_3 + 1)} (-1)^{j_3 + l_1 + 3/2} \begin{Bmatrix} l_1 & 1 & l_3 \\ j_3 & 1/2 & j_1 \end{Bmatrix} \\ &\times \underbrace{\sqrt{2l_3 + 1} C_{l_3, 0; 1, 0}^{l_1, 0}(n_1, l_1 | r | n_3, l_3)}_{\langle n_1, l_1 || r || n_3, l_3 \rangle}, \end{aligned}$$

et

$$T^{q,k} = \begin{cases} c[q]Y_2^{-q} & \text{si } q \neq 0 \\ c[0]Y_2^0(\delta_{k,0} + 1/2\delta_{k,1} + 1/2\delta_{k,-1}) & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

Ce calcul a été programmé sous Mathematica par Daniel COMPARAT. D'autre part, les éléments de matrice réduits du dipôle pour l'atome de Cesium ont été calculés par A. BLETON (voir [Ble96]).

Annexe C

Hamiltoniens d'erreurs électriques et magnétiques

Dans cette annexe, nous calculons l'effet de champs magnétique et électrique quasistatiques sur un atome hydrogénoïde placé sur une couche de moment cinétique l fixé. Nous admettrons que les expressions établies pour les Hamiltoniens d'erreurs restent valables pour l'atome de rubidium considéré dans le chapitre 4 de la deuxième partie.

C.1 Effet d'un champ magnétique quasistatique

Le Hamiltonien ZEEMAN qui décrit l'interaction de l'atome avec un champ magnétique $\vec{\mathcal{B}}$ est simplement

$$\widehat{W}_Z = \frac{\mu_B}{\hbar} \left(\widehat{\vec{L}} + 2\widehat{\vec{S}} \right) \cdot \vec{\mathcal{B}}.$$

C.1.1 Calcul dans la base découplée

On calcule les éléments de matrice de \widehat{W}_Z dans la base découplée $\{|nlsm_l m_s\rangle\}$

$$\langle nls m_l m_s | \widehat{W}_Z | n'l' s' m'_l m'_s \rangle = \frac{\mu_B}{\hbar} \langle nls m_l m_s | \frac{\mu_B}{\hbar} \left(\widehat{\vec{L}} + 2\widehat{\vec{S}} \right) \cdot \vec{\mathcal{B}} | n'l' s' m'_l m'_s \rangle.$$

en introduisant les composantes standard de \vec{L} et \vec{S}

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ &= \frac{\hat{L}_x + i\hat{L}_y}{\sqrt{2}} \\ \hat{L}_- &= \frac{\hat{L}_x - i\hat{L}_y}{\sqrt{2}} \\ \hat{L}_0 &= \hat{L}_z \\ \hat{S}_+ &= \frac{\hat{S}_x + i\hat{S}_y}{\sqrt{2}} \\ \hat{S}_- &= \frac{\hat{S}_x - i\hat{S}_y}{\sqrt{2}} \\ \hat{S}_0 &= \hat{S}_z,\end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned}\hat{L}_\pm |lm_l\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m_l(m_l \pm 1)} |l(m_l \pm 1)\rangle \\ \hat{L}_0 |lm_l\rangle &= m_l\hbar |lm_l\rangle \\ \hat{S}_\pm |sm_s\rangle &= \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s(m_s \pm 1)\rangle \\ \hat{S}_0 |sm_s\rangle &= m_s\hbar |sm_s\rangle.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{\sqrt{2}} \\ \hat{L}_y &= i\frac{\hat{L}_- - \hat{L}_+}{\sqrt{2}} \\ \hat{S}_x &= \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{\sqrt{2}} \\ \hat{S}_y &= i\frac{\hat{S}_- - \hat{S}_+}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\widehat{\vec{L}} + 2\widehat{\vec{S}}\right) \cdot \vec{\mathcal{B}} = \left(\hat{L}_+ + 2\hat{S}_+\right) \mathcal{B}_+ + \left(\hat{L}_- + 2\hat{S}_-\right) \mathcal{B}_- + \left(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z\right) \mathcal{B}_z$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_+ &= \frac{\mathcal{B}_x - i\mathcal{B}_y}{\sqrt{2}} \\ \mathcal{B}_- &= \frac{\mathcal{B}_x + i\mathcal{B}_y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle n l s m_l m_s | \widehat{W}_Z | n' l' s' m'_l m'_s \rangle &= \frac{\mu_B}{\hbar} \langle n l s m_l m_s | \left[(\widehat{L}_+ + 2\widehat{S}_+) \mathcal{B}_+ \right. \\ &\quad \left. + (\widehat{L}_- + 2\widehat{S}_-) \mathcal{B}_- + (\widehat{L}_z + 2\widehat{S}_z) \mathcal{B}_z \right] | n' l' s' m'_l m'_s \rangle. \end{aligned}$$

On obtient facilement

$$\begin{aligned} \langle n l s m_l m_s | \widehat{L}_\pm + 2\widehat{S}_\pm | n' l' s' m'_l m'_s \rangle &= \delta_{n,n'} \left(\langle l m_l | \widehat{L}_\pm | l' m'_l \rangle + 2 \langle s m_s | \widehat{S}_\pm | s' m'_s \rangle \right) \\ &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m_l(m_l \mp 1)} \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{s,s'} \delta_{m_l, m'_l \pm 1} \delta_{m_s, m'_s} \\ &\quad + 2\hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \mp 1)} \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{s,s'} \delta_{m_l, m'_l} \delta_{m_s, m'_s \pm 1} \\ \langle n l s m_l m_s | \widehat{L}_z + 2\widehat{S}_z | n' l' s' m'_l m'_s \rangle &= \hbar (m_l + 2m_s) \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{s,s'} \delta_{m_l, m'_l} \delta_{m_s, m'_s}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la valeur de $\langle n l s m_l m_s | \widehat{W}_Z | n' l' s' m'_l m'_s \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n l s m_l m_s | \widehat{W}_Z | n' l' s' m'_l m'_s \rangle &= \mu_B \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{s,s'} \left\{ \mathcal{B}_+ \left[\sqrt{l(l+1) - m_l(m_l - 1)} \delta_{m_l, m'_l + 1} \delta_{m_s, m'_s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s - 1)} \delta_{m_l, m'_l} \delta_{m_s, m'_s + 1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{B}_- \left[\sqrt{l(l+1) - m_l(m_l + 1)} \delta_{m_l, m'_l - 1} \delta_{m_s, m'_s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s + 1)} \delta_{m_l, m'_l} \delta_{m_s, m'_s - 1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{B}_z (m_l + 2m_s) \delta_{m_l, m'_l} \delta_{m_s, m'_s} \right\}. \end{aligned}$$

C.1.2 Calcul dans la base couplée

A partir de la matrice $W_Z^{(D)}$ représentant l'opérateur \widehat{W}_Z dans la base découplée $\{|n l s m_l m_s\rangle\}$, on calcule aisément la matrice $W_Z^{(C)}$ associée à l'opérateur \widehat{W}_Z dans la base couplée $\{|n l j m_j\rangle\}$ par la formule de changement de base

$$W_Z^{(C)} = U^\dagger W_Z^{(D)} U,$$

où

$$U_{n l s m_l m_s, n' l' s' j' m'} = \delta_{n n'} \delta_{l l'} \delta_{s s'} \langle l s m_l m_s | j', m' \rangle.$$

C.2 Effet d'un champ électrique quasistatique

Dans ce paragraphe, on néglige la structure fine des différents niveaux impliqués.

C.2.1 Hamiltonien et tenseur d'erreur électrique

Le Hamiltonien électrique agissant sur la couche $12g$ prend la forme suivante (il s'agit d'un Hamiltonien du deuxième ordre, le premier ordre étant nul pour des raisons de parité) :

$$\begin{aligned}\widehat{W}_E &= \vec{\mathcal{E}}(t) \cdot \overline{\overline{T}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t) = \sum_{\alpha\beta=x,y,z} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \overline{\overline{T}}_{\alpha\beta} \\ &= \mathcal{E}_x^2 \overline{\overline{T}}_{xx} + \mathcal{E}_y^2 \overline{\overline{T}}_{yy} + \mathcal{E}_z^2 \overline{\overline{T}}_{zz} \\ &\quad + \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \left(\overline{\overline{T}}_{xy} + \overline{\overline{T}}_{yx} \right) + \mathcal{E}_x \mathcal{E}_z \left(\overline{\overline{T}}_{xz} + \overline{\overline{T}}_{zx} \right) + \mathcal{E}_y \mathcal{E}_z \left(\overline{\overline{T}}_{yz} + \overline{\overline{T}}_{zy} \right)\end{aligned}$$

où $\overline{\overline{T}}$ est le tenseur de rang 2 défini par ses éléments en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}\overline{\overline{T}}_{\alpha\beta} &= \sum_{\substack{(n,l,m_l,m_s) \\ (n,l) \neq 12g \\ M_l M_s, M'_l M'_s}} \frac{\widehat{d}_\alpha(12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \rightarrow nl \frac{1}{2} m_l m_s) \widehat{d}_\beta(nl \frac{1}{2} m_l m_s \rightarrow 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s)}{E_{nl} - E_{12g}} \\ &\times |12g, \frac{1}{2}, M_l M_s\rangle \langle 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s| \\ &= \sum |12g, \frac{1}{2}, M_l M_s\rangle \frac{\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{d}_\alpha | nl \frac{1}{2} m_l m_s \rangle \langle nl \frac{1}{2} m_l m_s | \widehat{d}_\beta | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle}{E_{nl} - E_{12g}} \langle 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s | \\ &= \left(\sum_{M_l M_s} |12g, \frac{1}{2}, M_l M_s\rangle \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s| \right) \cdot \widehat{d}_\alpha \cdot \left(\sum_{\substack{(n,l,m_l,m_s) \\ (n,l) \neq 12g}} \frac{|nl \frac{1}{2} m_l m_s\rangle \langle nl \frac{1}{2} m_l m_s|}{E_{nl} - E_{12g}} \right) \\ &\cdot \widehat{d}_\beta \cdot \left(\sum_{M'_l M'_s} |12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s\rangle \langle 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s| \right),\end{aligned}$$

soit

$$\overline{\overline{T}}_{\alpha\beta} = \widehat{P}_{12g} \cdot \widehat{d}_\alpha \cdot \widehat{\pi} \cdot \widehat{d}_\beta \cdot \widehat{P}_{12g},$$

et où l'on a posé

$$\widehat{P}_{12g} \equiv \sum_{M_l M_s} \left| 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \right\rangle \left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \right|$$

est le projecteur orthogonal sur la sous-couche $12g$, supposée dégénérée (*i.e.* sans structure fine), et

$$\widehat{\pi} \equiv \sum_{\substack{(n,l,m_l,m_s) \\ (n,l) \neq 12g}} \frac{|nl \frac{1}{2} m_l m_s\rangle \langle nl \frac{1}{2} m_l m_s|}{E_{nl} - E_{12g}}.$$

Comme les éléments dipolaires $\widehat{d}_\alpha (12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \rightarrow 12g, \frac{1}{2}, m_l m_s)$ entre états de la couche $12g$ sont nuls, on peut étendre la somme précédente à tous les couples (n, l) et se débarrasser de la divergence en ajoutant un petit terme complexe au dénominateur qu'on fera tendre vers 0 à la toute fin des calculs : en d'autres termes on remplace formellement l'opérateur $\widehat{\pi}$ par

$$\widehat{G}(E_{12g} - i\eta) = \frac{1}{\widehat{H} - E_{12g} + i\eta}.$$

Calculons maintenant les termes

$$\begin{aligned} \left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \overline{\overline{T}}_{\alpha\beta} \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle &= e^2 \left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \widehat{x}_\alpha \cdot \widehat{G}(E_{12g} - i\eta) \cdot \widehat{x}_\beta \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle \\ &= e^2 \int d\vec{x} d\vec{x}' \left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| (|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|) \widehat{x}_\alpha \cdot \widehat{G}(E_{12g} - i\eta) \cdot \widehat{x}_\beta (|\vec{x}'\rangle \langle \vec{x}'|) \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle \\ &= e^2 \int x_\alpha x_\beta \varphi_{12g, \frac{1}{2}, M_l M_s}^*(\vec{x}) \varphi_{12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s}(\vec{x}') \langle \vec{x} | \widehat{G}(E_{12g} - i\eta) | \vec{x}' \rangle d\vec{x} d\vec{x}'. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\langle \vec{x} | \widehat{G}(E_{12g} - i\eta) | \vec{x}' \rangle = \langle \vec{x} | \frac{1}{\widehat{H} - E_{12g} + i\eta} | \vec{x}' \rangle$$

En représentation X , l'opérateur $\widehat{H} - E_{12g} + i\eta$ a pour expression¹

$$\langle \vec{x} | \widehat{H} - E_{12g} + i\eta | \varphi \rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right) \varphi(\vec{x}).$$

L'opérateur de l'espace des fonctions d'ondes associé à $(\widehat{H} - E_{12g} + i\eta)^{-1}$ étant simplement $(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta)^{-1}$, on peut alors montrer que, puisque $(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta)$ n'agit que sur la variable d'espace r , $(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta)^{-1}$ laisse lui-même invariante toute fonction ne dépendant que des angles polaires (θ, ϕ) .

Pour reprendre notre problème (on sous-entend la limite $\eta \rightarrow 0$), en

1. On néglige ici l'influence de la structure fine $\widehat{\xi} \widehat{L} \cdot \widehat{S}$.

posant $|\varphi\rangle = |\vec{x}'\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} | \widehat{G}_+(E_{12g}) | \vec{x}' \rangle &= \langle \vec{x} | \frac{1}{\widehat{H} - E_{12g} + i\eta} | \vec{x}' \rangle \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta](\vec{x}' - \vec{x}) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta_r \delta_\Omega](r' - r, \Omega' - \Omega) \\
&= \delta_\Omega(\Omega' - \Omega) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta_r](r' - r).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les coordonnées polaires pour \vec{x} ($x_\alpha = r f_\alpha(\Omega)$) et

en posant $\varphi_{nl\frac{1}{2}m_l m_s}(r, \Omega) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\Omega)\chi_{\frac{1}{2}m_s}$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \overline{\overline{T}}_{\alpha\beta} \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle \\
&= e^2 \int x_\alpha x'_\beta \varphi_{12g, \frac{1}{2}, M_l M_s}^*(\vec{x}) \varphi_{12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s}(\vec{x}') \langle \vec{x} | \widehat{G}_+(E_{12g}) | \vec{x}' \rangle d\vec{x} d\vec{x}' \\
&= e^2 \delta_{M_s M'_s} \int r r' f_\alpha(\Omega) f_\beta(\Omega') R_{12g}^*(r) Y_{3M_l}^*(\Omega) R_{12g}(r') Y_{3M'_l}(\Omega') \delta(\Omega' - \Omega) \\
&\times \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta_r](r' - r) \right] \times r^2 r'^2 dr dr' d\Omega' d\Omega \\
&= e^2 \delta_{M_s M'_s} \left(\int r^3 r'^3 R_{12g}^*(r) R_{12g}(r') \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta_r](r' - r) \right] dr dr' \right) \\
&\times \left(\int f_\alpha(\Omega) f_\beta(\Omega') Y_{3M_l}^*(\Omega) Y_{3M'_l}(\Omega') \delta(\Omega' - \Omega) d\Omega' d\Omega \right) \\
&= e^2 \delta_{M_s M'_s} \left(\int r^3 r'^3 R_{12g}^*(r) R_{12g}(r') \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta_r](r' - r) \right] dr dr' \right) \\
&\times \left(\int f_\alpha(\Omega) f_\beta(\Omega) Y_{3M_l}^*(\Omega) Y_{3M'_l}(\Omega) d\Omega \right) \\
&= e^2 \delta_{M_s M'_s} A_{12g} \times \left(\int \left(\frac{x_\alpha}{r} \right) \left(\frac{x_\beta}{r} \right) Y_{3M_l}^*(\Omega) Y_{3M'_l}(\Omega) d\Omega \right) \\
&= e^2 \delta_{M_s M'_s} \frac{A_{12g}}{\left(\int r^4 dr R_{12g}^*(r) R_{12g}(r) \right)} \\
&\times \left(\int \left(\frac{x_\alpha}{r} \right) \left(\frac{x_\beta}{r} \right) Y_{3M_l}^*(\Omega) Y_{3M'_l}(\Omega) d\Omega \right) \\
&\times \left(\int r^4 dr R_{12g}^*(r) R_{12g}(r) \right) \\
&= e^2 B_{12g} \left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \widehat{x}_\alpha \widehat{x}_\beta \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
A_{12g} &= \left(\int r^3 r'^3 R_{12g}^*(r) R_{12g}(r') \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{x}} \cdot + V(r) - E_{12g} + i\eta \right)^{-1} [\delta_r](r' - r) \right] dr dr' \right) \\
B_{12g} &= \frac{A_{12g}}{\left(\int r^4 dr R_{12g}^*(r) R_{12g}(r) \right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le tenseur du deuxième ordre $\overline{\overline{T}}_{\alpha\beta}$ s'écrit simplement

$$\overline{\overline{T}}_{\alpha\beta} = e^2 B_{12g} \left(\left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \widehat{x}_\alpha \widehat{y}_\beta \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle \right).$$

C.2.2 Calcul des différents termes

Les termes

$$\begin{aligned} & \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{x}\widehat{y} | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle \text{ et } \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{y}\widehat{x} | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle, \\ & \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{x}\widehat{z} | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle \text{ et } \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{z}\widehat{x} | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle, \\ & \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{y}\widehat{z} | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle \text{ et } \langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s | \widehat{z}\widehat{y} | 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \rangle \end{aligned}$$

sont égaux deux à deux. Les trois termes $\langle 12gM | \widehat{x}^2 | 12gM' \rangle$, $\langle 12gM | \widehat{y}^2 | 12gM' \rangle$ et $\langle 12gM | \widehat{z}^2 | 12gM' \rangle$ ne sont pas indépendants car

$$\langle 12gM | \widehat{x}^2 + \widehat{y}^2 + \widehat{z}^2 | 12gM' \rangle = C_{12g} \delta_{MM'}.$$

En définitive, on doit tenir compte de cinq Hamiltoniens indépendants, comme par exemple (le choix n'est pas unique)

$$2\widehat{z}^2 - \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2, \widehat{y}^2 - \widehat{x}^2, \widehat{x}\widehat{y}, \widehat{x}\widehat{z}, \widehat{y}\widehat{z}.$$

Pour calculer les différents termes on utilise les composantes standard de \vec{r}

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{x + iy}{\sqrt{2}} = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{1,1}(\theta, \phi) \\ r_{-1} &= \frac{x - iy}{\sqrt{2}} = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{1,-1}(\theta, \phi) \\ r_0 &= z = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{1,0}(\theta, \phi), \end{aligned}$$

soit $r_q = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{1,q}(\theta, \phi)$ pour $q = -1, 0, +1$, d'où

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_1 - r_{-1}}{\sqrt{2}} = r \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (Y_{1,-1}(\theta, \phi) - Y_{1,1}(\theta, \phi)) \\ y &= i \frac{r_1 + r_{-1}}{\sqrt{2}} = ir \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (Y_{1,-1}(\theta, \phi) + Y_{1,1}(\theta, \phi)) \\ z &= r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{1,0}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
xz &= r^2 \frac{2\pi}{3} \sqrt{2} (Y_{1,0}(\theta, \phi) Y_{1,-1}(\theta, \phi) - Y_{1,0}(\theta, \phi) Y_{1,1}(\theta, \phi)) \\
yz &= ir^2 \frac{2\pi}{3} \sqrt{2} (Y_{1,0}(\theta, \phi) Y_{1,-1}(\theta, \phi) + Y_{1,0}(\theta, \phi) Y_{1,1}(\theta, \phi)) \\
xy &= ir^2 \frac{2\pi}{3} (Y_{1,-1}(\theta, \phi)^2 - Y_{1,1}(\theta, \phi)^2) \\
2\hat{z}^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2 &= r^2 \frac{8\pi}{3} (Y_{1,0}(\theta, \phi)^2 + Y_{1,-1}(\theta, \phi) Y_{1,1}(\theta, \phi)) \\
\hat{x}^2 - \hat{y}^2 &= r^2 \frac{4\pi}{3} (Y_{1,-1}(\theta, \phi)^2 + Y_{1,1}(\theta, \phi)^2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \hat{x}\hat{z} \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle &= \frac{2\pi}{3} \sqrt{2} C_{12g} \delta_{M_s M'_s} [J_{0,-1}(M_l, M'_l) - J_{0,1}(M_l, M'_l)] \\
\left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \hat{y}\hat{z} \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle &= i \frac{2\pi}{3} \sqrt{2} C_{12g} \delta_{M_s M'_s} [J_{0,-1}(M_l, M'_l) + J_{0,1}(M_l, M'_l)] \\
\left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \hat{x}\hat{y} \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle &= i \frac{2\pi}{3} C_{12g} \delta_{M_s M'_s} [K_{-1}(M_l, M'_l) + K_1(M_l, M'_l)] \\
\left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| 2\hat{z}^2 - \hat{x}^2 - \hat{y}^2 \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle &= \frac{8\pi}{3} C_{12g} \delta_{M_s M'_s} [K_0(M_l, M'_l) + J_{-1,1}(M_l, M'_l)] \\
\left\langle 12g, \frac{1}{2}, M_l M_s \left| \hat{x}^2 - \hat{y}^2 \right| 12g, \frac{1}{2}, M'_l M'_s \right\rangle &= \frac{4\pi}{3} C_{12g} \delta_{M_s M'_s} [K_{-1}(M_l, M'_l) + K_1(M_l, M'_l)]
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C_{12g} &= \int r^4 |R_{12g}(r)|^2 dr = a^2 \int \rho^4 (g_{12,4}(\rho))^2 d\rho \\
J_{p,q}(M_l, M'_l) &= \int \sin \theta Y_{4,M_l}^* Y_{4,M'_l} Y_{1,p} Y_{1,q} d\theta d\phi \\
K_q(M_l, M'_l) &= \int \sin \theta Y_{4,M_l}^* Y_{4,M'_l} (Y_{1,q})^2 d\theta d\phi
\end{aligned}$$

pour $p, q = -1, 0, 1$. Le calcul des $J_{p,q}(M_l, M'_l)$ et $K_q(M_l, M'_l)$ dans la base découplée peut être réalisé sous Mathematica. Pour passer à la base couplée, on applique le changement de base habituel (matrice \hat{U}).

Annexe D

Hamiltonien effectif Raman

Dans cette annexe, on se propose d'établir l'expression du Hamiltonien effectif RAMAN utilisée dans le chapitre 4 de la deuxième partie. Pour ce faire, on considère tout d'abord le cas simple d'un atome à trois niveaux $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, supposés états propres du Hamiltonien non perturbé \hat{H}_0 , et disposés comme indiqué sur la figure D.1. On soumet cet atome à deux champs électriques de pulsations ω et ω' , légèrement désaccordées respectivement des transitions $|a\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ et $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$: le désaccord Δ est algébrique (négatif sur la figure), de sorte que $E_c - E_a = \hbar(\omega - \Delta)$ et $E_c - E_b = \hbar(\omega' - \Delta)$. La pulsation de la transition $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ est notée $\omega_0 = \omega - \omega'$, de sorte que $E_b - E_a = \hbar\omega_0$.

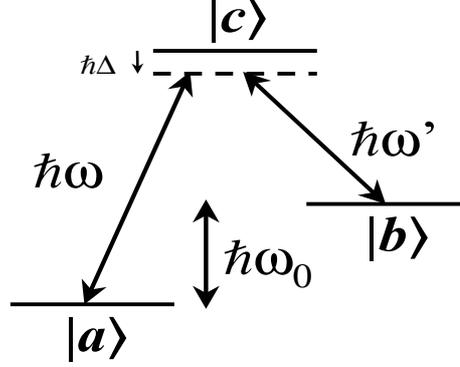
On suppose que le système se trouve initialement dans une superposition des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et l'on se propose d'établir, par une approche semi-classique, l'expression du Hamiltonien effectif qui décrit le couplage au deuxième ordre des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ via le niveau $|c\rangle$ (effet RAMAN induit).

Dans une deuxième partie, on généralise les résultats obtenus.

D.1 Effet Raman dans un système à trois niveaux

Les champs électriques (classiques) appliqués s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \right] = \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right] \\ \vec{E}'(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\vec{E}'(\vec{r}, t) \right] = \text{Re} \left[\vec{E}'_0 e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \right].\end{aligned}$$

FIG. D.1 – *Effet RAMAN stimulé.*

Dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes, le Hamiltonien total de l'atome s'écrit (dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$)

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_0 + \widehat{W}(t)$$

où

$$\widehat{H}_0 = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega - \Delta \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{W}(t) &= -\widehat{d} \cdot [\vec{E}(\vec{0}, t) + \vec{E}'(\vec{0}, t)] \\ &= -\frac{1}{2}\widehat{d} \cdot [\vec{E}_0 e^{i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{-i\omega t} + \vec{E}'_0 e^{i\omega' t} + \vec{E}'_0^* e^{-i\omega' t}] \\ &= \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{ab} e^{i\omega t} + \Omega'_{ab} e^{i\omega' t} + c.c. & \Omega_{ac} e^{i\omega t} + \Omega'_{ac} e^{i\omega' t} + c.c. \\ \Omega_{ba} e^{i\omega t} + \Omega'_{ba} e^{i\omega' t} + c.c. & 0 & \Omega_{bc} e^{i\omega t} + \Omega'_{bc} e^{i\omega' t} + c.c. \\ \Omega_{ca} e^{i\omega t} + \Omega'_{ca} e^{i\omega' t} + c.c. & \Omega_{cb} e^{i\omega t} + \Omega'_{cb} e^{i\omega' t} + c.c. & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et où l'on a posé, comme d'habitude,

$$\begin{aligned} \hbar\Omega_{ij} &\equiv -\left\langle i \left| \widehat{d} \right| j \right\rangle \cdot \vec{E}_0 \\ \hbar\Omega'_{ij} &\equiv -\left\langle i \left| \widehat{d} \right| j \right\rangle \cdot \vec{E}'_0. \end{aligned}$$

On opère alors le changement de représentation suivant

$$|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle = e^{i\widehat{\xi}(t)} |\psi\rangle$$

où

$$\widehat{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}.$$

L'équation de SCHRODINGER

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = \widehat{H}(t) |\psi\rangle$$

s'écrit alors, dans la nouvelle représentation, sous la forme

$$i\hbar \left(-i\partial_t \widehat{\xi}(t) e^{-i\widehat{\xi}(t)} |\varphi\rangle + e^{-i\widehat{\xi}(t)} \partial_t |\varphi\rangle \right) = \left(\widehat{H}_0 + \widehat{W}(t) \right) e^{-i\widehat{\xi}(t)} |\varphi\rangle$$

soit

$$i\hbar\partial_t |\varphi\rangle = \mathcal{H} |\varphi\rangle = \left(\underbrace{\widehat{H}_0 - \hbar\partial_t \widehat{\xi}(t)}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{e^{i\widehat{\xi}(t)} \widehat{W}(t) e^{-i\widehat{\xi}(t)}}_{\mathcal{W}} \right) |\varphi\rangle.$$

On calcule aisément \mathcal{H}_0

$$\mathcal{H}_0 = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta \end{bmatrix},$$

et, en négligeant dans \mathcal{W} les termes rapidement oscillants $e^{i(\pm\omega\pm\omega_0)t}$, $e^{i(\pm\omega'\pm\omega_0)t}$, $e^{\pm 2i\omega t}$, $e^{i(\pm\omega\pm\omega')t}$ (approximation de l'onde tournante), on obtient

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_{ac} \\ 0 & 0 & \Omega'_{bc} \\ \Omega_{ca}^* & \Omega'_{cb}^* & 0 \end{bmatrix}.$$

En définitive, le Hamiltonien total du système s'écrit, dans la nouvelle représentation

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{W} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Omega_{ac}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\Omega'_{bc}}{2} \\ \frac{\Omega_{ca}^*}{2} & \frac{\Omega'_{cb}^*}{2} & -\Delta \end{bmatrix}.$$

On peut alors utiliser la formule (26) du complément BI de [CTDRG96] donnant le développement à l'ordre 2 du Hamiltonien \widehat{H}_{eff} effectif associé à \mathcal{H} , restreint au sous-espace $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

$$\langle i | \widehat{H}_{eff} | j \rangle = E_i \delta_{ij} + \langle i | \mathcal{W} | j \rangle + \frac{1}{2} \langle i | \mathcal{W} | c \rangle \langle c | \mathcal{W} | j \rangle \left[\frac{1}{E_i - E_c} + \frac{1}{E_j - E_c} \right] + \dots,$$

où l'on a noté $E_i \equiv \langle i | \mathcal{H} | i \rangle$, et qui donne ici

$$\widehat{H}_{eff} = \frac{\hbar}{4\Delta} \begin{bmatrix} \Omega_{ac}\Omega_{ca}^* & \Omega_{ac}\Omega_{cb}^* \\ \Omega_{bc}'\Omega_{ca}^* & \Omega_{bc}'\Omega_{cb}^* \end{bmatrix}.$$

On peut également expliciter l'équation de SCHRODINGER $i\hbar\partial_t |\varphi\rangle = \mathcal{H} |\varphi\rangle$ dans la nouvelle représentation : on pose

$$|\varphi\rangle = \gamma_a |a\rangle + \gamma_b |b\rangle + \gamma_c |c\rangle$$

d'où

$$i\hbar\partial_t\gamma_a = \frac{\hbar\Omega_{ac}}{2}\gamma_c \quad (D.1)$$

$$i\hbar\partial_t\gamma_b = \frac{\hbar\Omega_{bc}'}{2}\gamma_c \quad (D.2)$$

$$i\hbar\partial_t\gamma_c = \frac{\hbar\Omega_{ca}^*}{2}\gamma_a + \frac{\hbar\Omega_{cb}^*}{2}\gamma_b - \hbar\Delta\gamma_c. \quad (D.3)$$

On résout formellement l'équation D.3 par la méthode de variation de la constante : on pose $\gamma_c(t) = \lambda(t) e^{i\Delta t}$ (solution de l'équation homogène), ce qui amène

$$i\partial_t\lambda = \left(\frac{\Omega_{ca}^*}{2}\gamma_a + \frac{\Omega_{cb}^*}{2}\gamma_b \right) e^{-i\Delta t}$$

puis en prenant pour condition initiale $\gamma_c(0) = 0$ (*i.e.* $\lambda(0) = 0$) on obtient

$$\lambda(t) = -i \int_0^t \left(\frac{\Omega_{ca}^*}{2}\gamma_a(\tau) + \frac{\Omega_{cb}^*}{2}\gamma_b(\tau) \right) e^{-i\Delta\tau} d\tau$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma_c(t) &= -i \int_0^t \left(\frac{\Omega_{ca}^*}{2}\gamma_a(\tau) + \frac{\Omega_{cb}^*}{2}\gamma_b(\tau) \right) e^{i\Delta(t-\tau)} d\tau \\ &\simeq \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Omega_{ca}^*}{2}\gamma_a(t) + \frac{\Omega_{cb}^*}{2}\gamma_b(t) \right) \end{aligned}$$

(Le passage de la première à la deuxième ligne utilise l'approximation de MARKOV, voir [Lev69], p.310). On réinjecte ensuite dans les deux équations (D.1), (D.2)

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\gamma_a &= \hbar\frac{\Omega_{ac}\Omega_{ca}^*}{4\Delta}\gamma_a(t) + \hbar\frac{\Omega_{ac}\Omega_{cb}^*}{4\Delta}\gamma_b(t) \\ i\hbar\partial_t\gamma_b &= \hbar\frac{\Omega_{bc}'\Omega_{ca}^*}{4\Delta}\gamma_a(t) + \hbar\frac{\Omega_{bc}'\Omega_{cb}^*}{4\Delta}\gamma_b(t) \end{aligned} \quad (D.4)$$

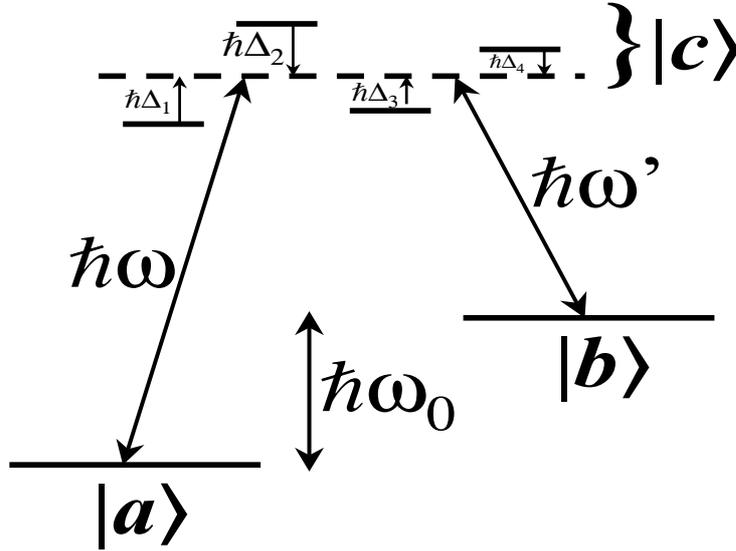


FIG. D.2 – *Effet RAMAN stimulé : passage par plusieurs niveaux relais.*

qui ne sont autres que les équations dynamiques d'un système à deux niveaux soumis au Hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{eff} = \frac{\hbar}{4\Delta} \begin{bmatrix} \Omega_{ac}\Omega_{ca}^* & \Omega_{ac}\Omega_{cb}^* \\ \Omega'_{bc}\Omega_{ca}^* & \Omega'_{bc}\Omega_{cb}^* \end{bmatrix},$$

comme établi précédemment.

D.2 Généralisations

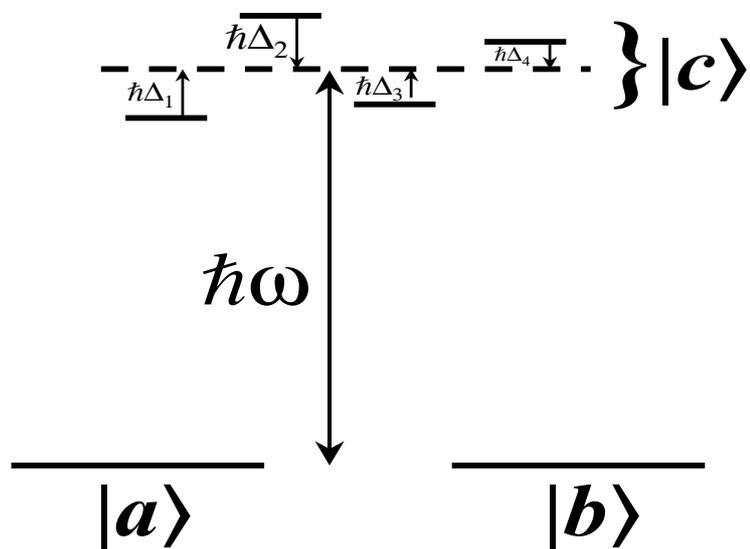
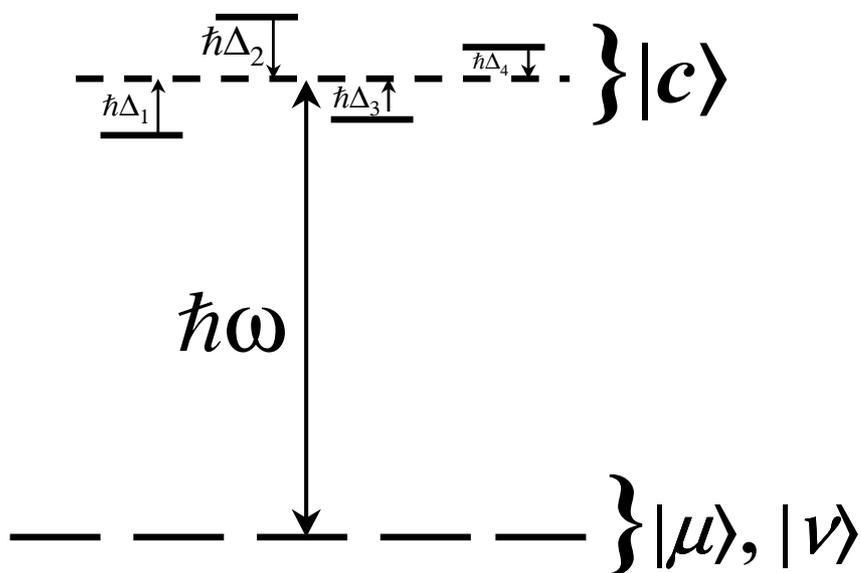
On peut bien entendu généraliser l'expression précédente à des cas plus complexes.

Ainsi, s'il existe non pas *un* mais *plusieurs* niveaux-relais $|c\rangle$ (cf figure D.2), l'expression de \hat{H}_{eff} sera simplement la somme suivante

$$\hat{H}_{eff} = \sum_c \frac{\hbar}{4\Delta_c} \begin{bmatrix} \Omega_{ac}\Omega_{ca}^* & \Omega_{ac}\Omega_{cb}^* \\ \Omega'_{bc}\Omega_{ca}^* & \Omega'_{bc}\Omega_{cb}^* \end{bmatrix}.$$

En outre, si les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ ont même énergie, $\omega_0 = 0$ et un seul LASER excitateur suffit, ce qui implique $\Omega_{ij} = \Omega'_{ij}$ (cf figure D.3) : le Hamiltonien effectif s'écrit donc

$$\hat{H}_{eff} = \sum_c \frac{\hbar}{4\Delta_c} \begin{bmatrix} \Omega_{ac}\Omega_{ca}^* & \Omega_{ac}\Omega_{cb}^* \\ \Omega_{bc}\Omega_{ca}^* & \Omega_{bc}\Omega_{cb}^* \end{bmatrix}.$$

FIG. D.3 – *Effet RAMAN stimulé : niveaux dégénérés.*FIG. D.4 – *Effet RAMAN stimulé : cas général.*

Plus généralement, si l'on a affaire non pas à deux mais à un ensemble \mathcal{E} d'états de même énergie (et distincts des niveaux relais $|c\rangle$!), comme c'est le cas dans le chapitre 4 (cf figure D.4), l'expression de \hat{H}_{eff} est alors

$$\hat{H}_{eff} = \sum_{\mu, \nu \in \mathcal{E}} \left(\sum_c \frac{\hbar}{4\Delta_c} \Omega_{\mu c} \Omega_{c\nu}^* \right) |\mu\rangle \langle \nu|.$$

Bibliographie

- [Aha98] D. Aharonov, quant-ph/9812037.
- [ADL02] C. Ahn, A.C. Doherty et A.J. Landahl, Phys. Rev. A **65**, 042301 (2002).
- [AGH01] V. Akulin, V. Gershkovich et G. Harel, Phys. Rev. A **64**, 012308 (2001).
- [Alt02] C. Altafini, J. Math. Phys. **43**(5), 2051-62 (2002).
- [BACD04] E. Brion, D. Comparat, I. Dumer, G. Harel, N. Kébaïli, G. Kurizki, I. Mazets et P. Pillet, quant-ph/0403227, soumis à Phys. Rev. A.
- [Bal91] L.E. Ballentine, Phys. Rev. A **43**, 5165 (1991).
- [BB91] E. Block et P.R. Berman, Phys. Rev. A **44**, 1466 (1991).
- [BBCD95] A. Barenco, C.H. Bennett, R. Cleve, D.P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J.A. Smolin, et H. Weinfurter, Phys. Rev. A **52**, 3457 (1995).
- [BD96] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, "Mécanique Quantique", cours de l'Ecole Polytechnique (Palaiseau), 1996.
- [BG77] R.F. Bacher et S. Goudsmit, "Atomic energy states", Mc Graw-Hill, New York (1932); A. Lindgard et S.E. Nielsen, At. Data Nucl. Data Tables **19** (6), 533 (1977).
- [BH96] A. Beige et G.C. Hegerfeldt, Phys. Rev. A **53**, 53 (1996).
- [BHS96] A. Beige, G.C. Hegerfeldt et D.G. Sondermann, Quantum Semi-class. Opt. **8**, 999-1015 (1996).
- [BHKAD04] E. Brion, G. Harel, N. Kébaïli, V.M. Akulin, et I. Dumer, Europhys. Lett. **66** (2), 157-163 (2004).
- [BJ03] B.H. Bransden, C.J. Joachain, "Physics of Atoms et Molecules" (2nd Ed.), Harlow, London, New York et al. : Prentice Hall (2003).
- [Ble96] A. Bleton, "Contribution expérimentale et théorique à l'étude de la photoassociation d'atomes de césium refroidis dans un piège magnéto-optique", thèse, Université de Paris-Sud - Orsay, Paris XI, 1996.

- [BS90] A.G. Butkovskiy et Yu.I. Samoilenko, "Control of Quantum-Mechanical Processes and Systems", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Netherlands), 1990.
- [CDL98] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Lalo, "Mécanique Quantique" I et II, Hermann, Paris, 1998.
- [CS96] A.R. Calderbank et P.W. Shor, Phys.Rev. A **54**, 1098 (1996).
- [CSM77] C.B. Chiu, E.C.G. Sudarshan et B. Misra, Phys. Rev. D **16**, 520 (1977).
- [CTDRG96] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, "Processus d'interaction entre photons et atomes", InterEditions - Editions du CNRS (Paris), 1996.
- [CZ95] J.I. Cirac et P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [Com99] "Molécules froides: Formation de molécules froides par photoassociation d'atomes froids de césium. Mise en évidence de forces à longue portée entre atomes froids excités de césium", D. Comparat, thèse, Université de Paris-Sud (1999).
- [Coo88] R.J. Cook, Phys. Scr., **T21**, 49 (1988).
- [CFH97] D.G. Cory, A.F. Fahmy, et T.F. Havel, Proc. Nat. Sci. USA **94**, 1634-39 (1997).
- [Deu85] D. Deutsch, Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- [Die82] D. Dieks, Phys. Lett. A **92**(6), 271-272 (1982).
- [DiV95a] D.P. Di Vincenzo, Science **270**, 255 (1995).
- [DiV95b] D.P. Di Vincenzo, Phys. Rev. A **51**(2), 1015-22 (1995).
- [DRBH95] P. Domokos, J.M. Raimond, M. Brune et S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **52**, 3554 (1995).
- [Fac03] P. Facchi, dans "Fundamental Aspects of Quantum Physics", L. Accardi and S. Tasaki eds., Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol. **17**, p. 197 (2003).
- [FCCDMSP98] A. Fioretti, D. Comparat, A. Crubellier, O. Dulieu, F. Masnou-Seeuws, et P. Pillet, Phys. Rev. Lett. **80**, 4402-05 (1998).
- [FGMR01] M.C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, et M.G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **87**, 040402 (2001).
- [FGMPS00] P. Facchi, V. Gorini, G. Marmo, S. Pascazio et E.C.G. Sudarshan, Phys. Lett. A **275**, 12-19 (2000).
- [FMPSS03] P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A. Scardicchio et E.C.G. Sudarshan, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S492 (2003).
- [FGR78] L. Fonda, G.C. Ghirardi, et A. Rimini, Rep. Prog. Phys. **41**, 587 (1978).

- [FGR01] M.C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, M.G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 040402 (2001).
- [FNP01] P. Facchi, H. Nakazato et S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3b699 (2001).
- [FP01] P. Facchi et S. Pascazio, *Fortschr. Phys.* **49**, 941 (2001).
- [FP02] P. Facchi et S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 080401 (2002).
- [FP03a] P. Facchi et S. Pascazio, dans "Proceedings of the XXII Solvay Conference on Physics", I. Antoniou, V.A. Sadovnichy and H. Walther eds., p. 251, World Scientific, Singapore (2003).
- [FP03b] P. Facchi et S. Pascazio, dans "Fundamental Aspects of Quantum Physics", L. Accardi and S. Tasaki eds., *Quantum Probability and White Noise Analysis*, Vol. **17**, p. 222 (2003).
- [FP03c] P. Facchi et S. Pascazio, dans "Irreversible Quantum Dynamics", F. Benatti and R. Floreanini eds., *Lecture Notes in Physics*, Vol. **622**, p. 141, Springer, Berlin (2003).
- [FPSS01] P. Facchi, S. Pascazio, A. Scardicchio et L.S. Schulman, *Phys. Rev. A* **65**, 012108 (2001).
- [FS91] V. Freerichs et A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **44**, 1962 (1991).
- [Gal68] R.G. Gallager, "Information Theory et Reliable Communication", John Wiley & Sons, New York (1968).
- [Gal94] T.F. Gallagher, "Rydberg Atoms", Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [GC97] N. Gershenfeld et I.L. Chuang, *Science* **275**, 350 (1997).
- [GL89] P.T. Greenland et A.M. Lane, *Phys. Lett. A* **134**, 429-34 (1989).
- [Got96] D. Gottesman, *Phys. Rev. A* **54**, 1862 (1996).
- [Got97] D. Gottesman, "Stabilizer Codes et Quantum Error Correction", Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1997.
- [GSLK98] M.D. Girardeau, S.G. Schirmer, J.V. Leahy, R.M. Koch, *Phys. Rev. A* **58** (4), 2684 (1998).
- [HA99] G. Harel et V.M. Akulin, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1-5 (1999).
- [Har92] S. Haroche, "Cavity Quantum Electrodynamics", dans "Fundamental systems in quantum optics", Les Houches, Session LIII 1990, J. Dalibard, J.-M. Raimond et J. Zinn-Justin ed., Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [Har03] S. Haroche, Cours du Collège de France, année 2003-2004, <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/college/college.html>.
- [HNNPR98] Z. Hradil, H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio, H. Rauch, *Phys. Lett. A* **239**, 333 (1998).

- [Hom97] D. Home, *Ann. Phys.* **258**, 237-285 (1997).
- [HW86] D. Home et M.A.B. Whitaker, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 1847-1854 (1986).
- [HW93] D. Home et M.A.B. Whitaker, *Phys. Lett. A* **173**, 327 (1993).
- [HW97] D. Home, M.A.B. Whitaker, *Ann. Phys.* **258**, 237-85 (1997).
- [IHBW90] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, et D.J. Wineland, *Phys. Rev. A* **41**, 2295 (1990).
- [IHBW91] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, et D.J. Wineland, *Phys. Rev. A* **43**, 5168 (1991).
- [INT92] S Inagaki, M. Namiki et T. Tajiri, *Phys. Lett. A* **166**, 5 (1992).
- [JFC84] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, London (1984).
- [JR01a] J. Ruseckas, *Phys. Lett. A* **291**, 185 (2001).
- [JR01b] J. Ruseckas, *Phys. Rev. A* **63**, 052107 (2001).
- [JS72] V. Jurdjevic et H.J.Sussman, *J. Differential Equations* **12** (1972), 313-329.
- [Kac94] Victor Kaç, "Lie Theory and Geometry", Ed., Birkhuser, Boston (1994).
- [KBLW01] J. Kempe, D. Bacon, D.A. Lidar, et K.B. Whaley, *Phys. Rev. A* **63**, 042307 (2001).
- [Kha57] L.A. Khalfin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 1371 (1957) [*Sov. Phys. JETP* **6**, 1053 (1958)].
- [Kha68] L.A. Khalfin, *Sov. Phys. JETP* **8**, 65-68 (1968).
- [KK96] A.G. Kofman et G. Kurizki, *Phys. Rev. A* **54** (5), R3750 (1996).
- [KK99] A.G. Kofman et G. Kurizki, *Acta Phys. Slov.* **49**, 541 (1999).
- [KK00] A.G. Kofman et G. Kurizki, *Nature (London)* **405**, 546 (2000).
- [KK01] A.G. Kofman et G. Kurizki, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 270405 (2001).
- [KKO01] A.G. Kofman, G. Kurizki et T. Opatrny, *Phys. Rev. A* **63**, 042108 (2001).
- [KL97] E.Knill et R. Laflamme, *Phys. Rev. A* **55**, 900 (1997).
- [KLV00] E. Knill, R. Laflamme, et L. Viola, *Phys. Rev. Lett.* **84** (11), 2525 (2000).
- [Lan32] L.D. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion* **2**, 46 (1932).
- [LBW99] D.A. Lidar, D. Bacon, et K.B. Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **82** (22), 4556 (1999).
- [LCW98] D.A. Lidar, I.L. Chuang, et K.B. Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **81** (12), 2594 (1998).

- [Lev69] R.D. Levine, "Quantum Mechanics of Molecular Rate Processes", Oxford at the Clarendon Press, 1969.
- [LKB80] E. Luc-Koenig et A. Bachelier, *J. Phys. B* **13**, 1743-67 (1980).
- [LR00] M. Lewenstein et K. Rzazewski, *Phys. Rev. A* **61**, 022105 (2000).
- [LV01] S. Lloyd et L. Viola, *Phys. Rev. A* **65**, 010101 (2001).
- [LW03] D. A. Lidar et K. B. Whaley, "Decoherence Free Subspaces and Subsystems", in "Irreversible Quantum Dynamics", F Benatti et R. Floreani (Eds), pp. 83-120 (Springer Lecture Notes in Physics vol 622, Berlin, 2003).
- [MCTF98] I. Mourachko, D. Comparat, F. de Tomasi, A. Fioretti, P. Nosbaum, V. M. Akulin et P. Pillet, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 253-56 (1998).
- [Mes95] A. Messiah, "Mécanique quantique" I et II, Dunod, Paris, 1995.
- [MS77] B. Misra et E.C.G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **18**, 756 (1977).
- [MWS96] J.G. Muga, G.W. Wei, R.F. Snider, *Europhys. Lett.* **35**, 247-52 (1996).
- [NC00] M.A. Nielsen et I.L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Cambridge University Press, 2001.
- [NNP95] H. Nakazato, M. Namiki et S. Pascazio, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 247 (1996).
- [NNPR95] H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio et H. Rauch, *Phys. Lett. A* **199**, 27 (1995).
- [NNPR96] H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio et H. Rauch, *Phys. Lett. A* **217**, 203-208 (1996).
- [Nos96] "Contributions à l'étude des collisions et des interactions dans un gaz froid d'atomes de Rydberg de césium : entonnoir à atomes, spectroscopie de croisements évités, des collisions résonnantes au gaz de Rydberg gelé", P. Nosbaum, thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud (1996).
- [OKF98] Y. Ohtsuki, H. Kono et Y. Fujimura, *J. Chem. Phys.* **109** (21), 9318-31 (1998).
- [Pat96] A.K. Pati, *Phys. Lett. A* **215**, 7-13 (1996).
- [PDR98] A.P. Peirce, M.A. Dahleh et H. Rabitz, *Phys. Rev. A* **37** (12), 4950-64 (1998).
- [Per80] A. Peres, *Am. J. Phys.* **48**, 931 (1980)
- [PK02a] J.P. Palao et R. Kosloff, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 188301 (2002).
- [PK02b] J.P. Palao et R. Kosloff, [quant-ph/0208147](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0208147) (2002).
- [PN94] S. Pascazio et M. Namiki, *Phys. Rev. A* **50**, 4582 (1994).
- [Pre98] John Preskill, "Quantum Information et Computation", <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.

- [PRSG02] I.E. Protsenko, G. Reymond, N. Schlosser, et P. Grangier, Phys. Rev. A **65**, 052301 (2002).
- [PTP90] T. Petrosky, S. Tasaki et I. Prigogine, Phys. Lett. A **151**, 109 (1990).
- [PTP91] T. Petrosky, S. Tasaki et I. Prigogine, Physica A **170**, 306 (1991).
- [RFRO00] V. Ramakrishna, K.L. Flores, H. Rabitz et R.J. Ober, Phys. Rev. A **62**, 053409 (2000).
- [RK01a] J. Ruseckas et B. Kaulakys, Phys. Rev. A **63**, 062103 (2001).
- [RK01b] J. Ruseckas, B. Kaulakys, Phys. Lett. A **287**, 297 (2001).
- [RL91] R. Landauer, Phys. Today **44**, pp. 22-29 (1991).
- [RSDRP95] V. Ramakrishna, M.V. Salapaka, M. Dahleh, H. Rabitz et A. Peirce, Phys. Rev. A **51**, 960 (1995).
- [Sch97] L.S. Schulman, J. Phys. A **30**, L293-299 (1997)
- [Sch98] L.S. Schulman, Phys. Rev. A **57**, 1509 (1998)
- [Sch02] A.U. Schmidt, J. Phys. A **35**, 7817-25 (2002).
- [Sch03a] A.U. Schmidt, J. Phys. A **36**, 1135-48 (2003).
- [Sch03b] A.U. Schmidt, math-ph/0307044 (2003), à paraître dans Prog. Math. Phys. Res., Nova Science Publ., New York, N.Y.
- [SFS01] S.G. Schirmer, H. Fu et A.I. Solomon, Phys. Rev. A **63**, 63410 (2001).
- [SGL00] S.G. Schirmer, M.D. Girardeau et J.V. Leahy, Phys.Rev. A **61**, 012101 (2000).
- [SGRR01] S.G. Schirmer, A.D. Greentree, V. Ramakrishna et H. Rabitz, quant-ph/0105155 (2001)
- [SGRR02] S.G. Schirmer, A.D. Greentree, V. Ramakrishna et H. Rabitz, J. Phys. A **35**, 8315-39 (2002).
- [Sho95] P.W. Shor, Phys. Rev. A **52**, 2493 (1995).
- [Sho97] P.W. Shor, SIAM J. Comp. **26** (5), 1484-1509 (1997).
- [SPS03] S.G. Schirmer, I.C.H. Pullen et A.I. Solomon, Hamiltonian and Lagrangian Methods in Nonlinear Control (Elsevier Science Ltd, 2003), quant-ph/0302121 (2003).
- [SR90] S. Shi et H. Rabitz, J. Chem. Phys. **92** (1), 364-76 (1990).
- [SSL02a] S.G. Schirmer, A.I. Solomon et J.V. Leahy, J. Phys. A **35**, 4125-4141 (2002).
- [SSL02b] S.G. Schirmer, A.I. Solomon et J.V. Leahy, J. Phys. A **35**, 8551-8562 (2002).
- [SS03] A.I. Solomon et S.G. Schirmer, dans "Proceedings ICCSUR 8: 8th Int'l Conference on Squeezed States and Uncertainty relations", ISBN 1-58949-040-1, 393-399, Rinton Press, NJ, USA, (2003).

- [Ste96] A.M. Steane, Proc. R. Soc. London A **452**, 2551-76 (1996).
- [Ste97] A. Steane, Appl. Phys. B - Lasers et Optics **64** (6), 623-42 (1997).
- [SW40] C.E. Shannon et W. Weaver, "The mathematical theory of information", University of Illinois Press, Urbana (1940).
- [THL95] Q.A. Turchette, C.J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi et H.J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **75**, 4710 (1995).
- [VG95] A. Venugopalan et R. Ghosh, Phys. Lett. A **204**, 11-15 (1995).
- [VKL99] L. Viola, E. Knill et S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **82** (12), 2417-21 (1999).
- [VKL00] L. Viola, E. Knill, et S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **85** (16), 3520 (2000).
- [VLK99] L. Viola, S. Lloyd et E. Knill, Phys. Rev. Lett. **83** (23), 4888-91 (1999).
- [VMK88] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, V.K. Khersonsky, "Quantum Theory of Angular Momentum", World Scientific, Singapore (1988).
- [VNeu55] J. von Neumann, "Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik", Springer, Berlin (1932). [traduction anglaise par E.T. Beyer: "Mathematical Foundation of Quantum Mechanics" (Princeton University Press, Princeton, 1955)].]
- [WBFM97] S.R. Wilkinson, C.F. Bharucha, M.C. Fischer, K.W. Madison, P.R. Morrow, Q. Niu, B. Sundaram, et M.G. Raizen, Nature (London) **387**, 575 (1997).
- [Win61] R.G. Winter, Phys. Rev. **123**, 1503 (1961).
- [Wis94] H.M. Wiseman, Phys. Rev. A **49** (3), 2133-50 (1994).
- [WL02] L.-A. Wu et D.A. Lidar, Phys. Rev. Lett. **88** (20), 207902 (2002).
- [WMI98] D.J. Wineland, C. Monroe, W.M. Itano, D. Leibfried, B.E. King et D.M. Meekhof, J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech. **103**, 259 (1998).
- [WW01] J. Wang et H.M. Wiseman, Phys. Rev. A **64**, 063810 (2001).
- [WZ82] W.K. Wootters et W.H. Zurek, Nature **299**, 802-803 (1982).
- [Zan99] P. Zanardi, Phys. Lett. A **258**, 77 (1999).
- [Zen32] C. Zener, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **137**, 696 (1932).
- [ZLKK79] M.L. Zimmerman, M.G. Littman, M.M. Kash et D. Kleppner, Phys. Rev. A **20**, 2251-75 (1979).
- [ZR98] P. Zanardi et M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. **79** (17), 3306 (1998).
- [ZR99] P. Zanardi et M. Rasetti, Phys. Lett. A **264**, 94-99 (1999).

Contrôle Quantique et Protection de la Cohérence par effet Zénon, Applications à l'Informatique Quantique.

Résumé

Le contrôle quantique constitue un enjeu majeur de la Physique contemporaine. Après un bref tour d'horizon du domaine, nous présentons une méthode, appelée contrôle non holonôme, qui permet d'imposer à système quantique quelconque une évolution unitaire arbitrairement choisie. Dans le contexte de l'Informatique Quantique, cette technique peut être utilisée pour réaliser n'importe quelle porte quantique : à titre d'exemple, nous montrons comment appliquer une porte CNOT à un système de deux atomes de Césium froids en interaction.

L'interaction de l'ordinateur avec son environnement risque de compromettre sa fiabilité. Le développement récent de la correction d'erreurs quantiques, inspirée des techniques classiques, suggère néanmoins que ce danger peut être évité. Après une présentation succincte du cadre général de la correction d'erreurs, nous proposons une méthode de protection de l'information fondée sur l'effet Zénon. Cette méthode est ensuite appliquée à un atome de Rubidium.

Mots-Clés

- contrôle quantique d'évolution
- correction d'erreurs
- effet ZENON quantique
- atomes froids
- portes quantiques
- protection de l'information quantique
- informatique quantique