



**HAL**  
open science

# Traitement du signal en interferometrie monomode dans le cadre du projet AMBER. Application a l'observation interferometrique de l'environnement $\gt$ circumstellaire des etoiles jeunes

Eric Tatulli

► **To cite this version:**

Eric Tatulli. Traitement du signal en interferometrie monomode dans le cadre du projet AMBER. Application a l'observation interferometrique de l'environnement  $\gt$  circumstellaire des etoiles jeunes. Astrophysique [astro-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT: . tel-00007927

**HAL Id: tel-00007927**

**<https://theses.hal.science/tel-00007927>**

Submitted on 5 Jan 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE  
présentée par

**Eric TATULLI**

pour obtenir le diplôme de docteur de  
l'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

Spécialité ASTRONOMIE & ASTROPHYSIQUE

---

Traitement du signal en interférométrie  
monomode dans le cadre du projet AMBER.  
Application à l'observation interférométrique  
de l'environnement circumstellaire des étoiles jeunes.

---

Date de soutenance: 1er Octobre 2004

Composition du Jury:

Mme. Isabelle TALLON-BOSC	Rapporteur
M. Rafael MILLAN-GABET	Rapporteur
M. Pierre LÉNA	Examinateur
M. Romain PETROV	Examinateur
M. Alain CHELLI	Directeur de thèse
M. Fabien MALBET	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'AstrOphysique de Grenoble  
UJF/CNRS, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex 9



*"La recherche a besoin d'argent dans deux domaines prioritaires : le cancer et les missiles antimissiles. Pour les missiles antimissiles, il y a les impôts. Pour le cancer, on fait la quête."*

Pierre Desproges.



# Remerciements

Est il bien raisonnable de commencer ce chapitre autrement qu'en remerciant Alain et Fabien de m'avoir proposé ce sujet de thèse et de m'avoir guidé pendant ces trois riches années? Non bien entendu. Alors merci Alain, merci Fabien pour les conseil prodigués et les remarques bienveillantes, pour la grande liberté que vous m'avez laissée dans l'organisation de mes recherches, mais aussi pour nos rapports amicaux qui ont fait de notre collaboration plus qu'une relation contractuelle directeur/thésard (Fabien I know what you did last may in Santiago!). Merci aussi aux rapporteurs Isabelle Tallon-Bosc et Rafael Millan-Gabet, ainsi qu'aux examinateurs Pierre Léna et Romain Petrov d'avoir minutieusement lu et commenté le manuscrit, permettant ainsi d'en améliorer grandement le contenu. Comment ne pas remercier non plus toute l'équipe AMBER de m'avoir fait confiance: Gilles, Karine et Étienne en tête, qui ont eu la patience d'expliquer "en pratique" les rouages d'un bel instrument à un théoricien pur et dur, mais aussi l'inépuisable Gérard qui a réussi à m'inculquer (à coups de marteau!) quelques fondamentaux en informatique (rendons aussi grâce à sa grande technicité au babyfoot...).

J'adresse aussi un très grand merci à toute ma famille – avec une chaleureuse pensée toute particulière pour mon frère – qui lors de mes (trop rares) visites dans mon sud ouest natal m'a soutenu et toujours encouragé avec enthousiasme, inconditionnellement. Chaque retour aux sources était synonyme de fête/repas/retrouvailles. De quoi redonner du courage et revigorer un thésard fatigué en somme!

Je tiens ensuite à souligner la toujours excellente ambiance du labo, lieu de vie passionnant et passionné, incarné par la sacro sainte Kfet qui fut et sera encore longtemps le théâtre de pots gargantuesques et de débats effrénés. Merci donc à tous ses membres dynamiques et souriants. Spéciale dédicace aux inséparables trublions Pop et Jean-Phi ainsi qu'aux troubadours du Laog Big Ban(g)d, Alain, Laurent, Alex, Didier et à tous les choristes déchaînés (Jérôme, Gilles (x2) et leurs lunettes noires n'ont rien à envier à Jake et Elwood!). Merci enfin à Laurence pour toutes les discussions nocturnes à Paranal, j'en garde un tendre et profond souvenir.

Gros gros merci aussi bien sur à tous mes compagnons de galère, amis thésards adeptes du tea time et des barres de chocolats! Un clin d'oeil complice à JB "the brain", à l'indispensable Ludo roi des tartes et autres gâteaux savoureux, à Gaël (accompagné de l'inénarrable Claire Martin) pour les mojitos et le loco mosquito, à Michael et Lucas pour les after, la zik, le foot et le reste, et at last but not least à SAS Vincent "intelligence de jeu" Piétu pour tout et n'importe quoi (surtout n'importe quoi...) et pour avoir assuré de concert la permanence du mythique (osons le mot!) bureau 101 pendant plus de trois ans! J'envoie aussi mes amitiés sincère à Pierre "Voodoo Chile" Mège pour tout ce qu'on a en commun, et sans qui il faut bien le dire cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Sortons du labo maintenant pour remercier tous les potos: Romain l'australien, Thierry la mule, Tatïe Ramu, Yann, Chouchou, Alex, Sandrine, Jérémie et Sandra; mais aussi mes

compagnons de musique – mais pas que – Marmotte, Jipi et les autres zouaves pour la tendance rock, et Denis "solo killer", Jérôme et Olivier pour la version métal; mais encore mes camarades de jeux (de plateau) – mais pas que non plus – j'ai nommé Alban, Audrey, Beushi, Aurel, Ludo, Auriane Fab, et consorts; et pour finir – comment oublier? – toute la "feria connection", Manu, Titoun (prêts à envoyer du gros dans la peuf?), Laun et Julie, Baf, Yo, Sarah, Kepler, Jeff, Domi, Riri, Matthieu, Cricri, Marie-Pierre, Virginie, Laure, j'en passe et des meilleur(e)s, pour leur bonne humeur et leur joie de vivre communicative. Et un gigantesque merci à Seb et Guigui d'une part, et aux toulousaings Beto et Fifi d'autre part, pour leur indéfectible amitié.

Enfin je remercie Carole pour toutes ces belles années ensemble, même si désormais la vie nous mène vers des aventures différentes...

# Résumé

Les récents progrès de l'interférométrie optique, en termes de résolution spatiale, de sensibilité et de précision des mesures, ont rendu cette technique particulièrement bien adaptée à l'étude de l'environnement proche des étoiles jeunes, étoiles qui possèdent en leur sein les clés de la formation stellaire et planétaire. De fait, les premières observations interférométriques ont révélé nombre d'informations essentielles sur la nature de la structure étendue entourant ces objets. L'instrument AMBER, le recombineur proche infra-rouge 3 télescopes du Very Large Telescope Interferometer (VLTI), va, en inaugurant l'ère de l'imagerie interférométrique à très haute résolution spatiale et spectrale, permettre de franchir une nouvelle étape dans la compréhension des processus physiques régissant ces étoiles.

Cette thèse s'articule autour de l'instrument AMBER. Après un résumé des principes généraux de l'interférométrie optique en présence de turbulence atmosphérique, je montre en quoi l'introduction de guides d'ondes dans le schéma de recombinaison permet, en utilisant leurs propriétés de filtrage spatial, d'augmenter la précision et la robustesse des mesures. Partant de ces bases théoriques, je développe ensuite les procédures de réduction de données AMBER, soulignant les points spécifiques et novateurs concernant le traitement du signal interférométrique. Ces algorithmes ont été testés et validés à partir de simulations, puis appliqués aux mesures à moyenne résolution spectrale de l'étoile de Herbig Be MWC 297, qui présente une forte raie d'émission relative à la transition atomique de l'hydrogène  $\text{Br}\gamma$ . Cette étude confirme l'existence d'un disque d'accrétion autour de l'étoile et met en évidence la présence d'une enveloppe atmosphérique deux fois plus étendue correspondant à la raie d'hydrogène. Enfin j'analyse dans un contexte théorique global, les méthodes d'investigation des paramètres astrophysiques d'une source observée avec un interféromètre optique monomode, respectivement par ajustement de modèles et par reconstruction d'images. Je répertorie notamment les difficultés majeures limitant les capacités d'AMBER en tant qu'imageur de l'environnement circumstellaire des étoiles jeunes.

**Mots clés:** Interférométrie optique, Filtrage spatial, Réduction de données, Étoiles jeunes, Disques.



# Abstract

Recent progresses of optical interferometry, in terms of spatial resolution, sensitivity and precision of the measurements, made this technique particularly well suited to study the close environment of young stars which hold the keys of stellar and planet formation. As a matter of fact, the first interferometric observations have unveiled many essential informations on the physical nature of the surrounding structure of these objects. The AMBER instrument, the near infrared three beams recombiner of the Very Large Telescope Interferometer (VLTI), will, by pioneering the era of interferometric imaging with both very high spatial and spectral resolution, allow to move one step forward in the understanding of the physical processes governing these stars.

This work is organized around the AMBER instrument. After summarizing the general principles of optical interferometry in presence of atmospheric turbulence, I show why introducing waveguides in the recombination scheme allows, by taking advantage of their properties of spatial filtering, to increase the precision and the robustness of the measurements. From this theoretical basis, I then develop the AMBER data reduction procedures, with stressing the innovative specificities of the interferometric signal processing. The algorithms have been tested and validated through simulations and then applied to the observation of the Herbig Be star MWC 297 in medium spectral resolution. This young star presents a strong emission line due to the atomic transition of the hydrogen Br $\gamma$ . The study confirms the existence of an accretion disk around the star and reveal the presence of an atmospherical envelope, twice as broad as the disk, where the atomic transitions of the hydrogen occurs. At last, I analyze in a theoretical framework the methods that investigate the astrophysical parameters of a source observed with single mode interferometers, such as model fitting and image reconstruction techniques. I particularly emphasize the issues that restrain the capacity of AMBER to image circumstellar environment of young stars.

**Keywords:** Optical interferometry, Spatial filtering, Data reduction, Young stars, Disks.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	"Et la lumière fut..."	14
1.2	Observations de l'environnement des étoiles jeunes	14
1.2.1	Généralités	14
1.2.2	Étoiles jeunes et haute résolution angulaire	15
1.3	L'interférométrie optique: de nouveaux champs d'investigation	17
1.3.1	Description sommaire	17
1.3.2	Interférométrie optique et étoiles jeunes	19
1.3.3	Et demain?	20
1.4	Enjeux scientifiques et plan de la thèse	20
<b>2</b>	<b>Interférométrie optique longue base</b>	<b>23</b>
2.1	Principes de l'interférométrie stellaire "classique"	24
2.1.1	Formation d'images	24
2.1.2	Équation interférométrique	25
2.1.3	Les modes de recombinaison	26
2.1.4	Gérer la turbulence	30
2.1.5	Interférométrie des tavelures	33
2.2	Interférométrie monomode	41
2.2.1	Le filtrage spatial	42
2.2.2	Équation interférométrique et visibilité modale	43
2.2.3	Biais géométrique: effet de lobe	45
2.2.4	Biais atmosphérique - Robustesse	48
2.2.5	Performances de l'interférométrie monomode	50
2.3	Augmenter le champ de vue	64
2.3.1	Pupille multifibrée	64
2.3.2	Interférométrie monomode et radio-interférométrie	66
2.3.3	Mosaicing et champ de vue	67
<b>3</b>	<b>Traitement du signal AMBER</b>	<b>71</b>
3.1	Présentation de l'instrument	72
3.1.1	Le consortium AMBER	72

3.1.2	Motivations scientifiques et implications instrumentales . . . . .	72
3.1.3	Balade au fil d'AMBER: les différents sous-ensembles . . . . .	76
3.1.4	Logiciel de contrôle AMBER . . . . .	78
3.1.5	Données finales sur le détecteur . . . . .	80
3.2	Réduction de données AMBER . . . . .	83
3.2.1	L'équation interférométrique selon AMBER . . . . .	83
3.2.2	Calibration des ondes porteuses . . . . .	85
3.2.3	La matrice P2VM . . . . .	92
3.2.4	Estimation des observables . . . . .	93
3.2.5	Correction du biais atmosphérique . . . . .	97
3.3	Petit guide pratique illustré . . . . .	107
3.3.1	Cosmétique . . . . .	107
3.3.2	Détection des franges . . . . .	107
3.3.3	Calibrations . . . . .	109
3.3.4	Validation de la procédure de réduction . . . . .	110
3.3.5	Erreurs sur les visibilitées . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Observations interférométriques de MWC 297</b>	<b>115</b>
4.1	Présentation . . . . .	116
4.2	Analyse du calibrateur HD177756 . . . . .	116
4.3	Analyse de MWC 297 . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Remonter à la source</b>	<b>123</b>
5.1	Les observables interférométriques . . . . .	124
5.1.1	Modèles . . . . .	124
5.1.2	Statistiques des observables . . . . .	125
5.2	Ajustement de modèles paramétriques . . . . .	128
5.2.1	Principe . . . . .	128
5.2.2	Erreurs sur les paramètres . . . . .	129
5.2.3	Applications . . . . .	129
5.3	Reconstruction d'images . . . . .	144
5.3.1	Modèles de disques d'étoiles jeunes . . . . .	144
5.3.2	Potentiel imageur de AMBER sur le VLTI . . . . .	146
5.3.3	Perspectives . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>159</b>
6.1	Théorie de l'interférométrie monomode . . . . .	159
6.2	L'instrument AMBER . . . . .	160
6.3	Imagerie interférométrique d'étoiles jeunes . . . . .	161
6.4	Et maintenant? . . . . .	161

<b>A</b>	<b>Statistiques des observables interférométriques</b>	<b>175</b>
A.1	Formalisme de Goodman: Principe . . . . .	175
A.2	Moments de la densité spectrale . . . . .	176
A.2.1	Espérance mathématique . . . . .	176
A.2.2	Variance . . . . .	176
A.2.3	Covariance . . . . .	177
A.3	Application à l'étude statistique de la visibilité . . . . .	177
A.3.1	Interférométrie multispeckle . . . . .	177
A.3.2	Interférométrie monomode . . . . .	178
A.4	Moments du bispectre . . . . .	181
A.4.1	Le cas bruit de photon . . . . .	181
A.4.2	Le cas bruit de détecteur . . . . .	184
A.5	Application à l'étude statistique de la clôture de phase modale . . . . .	184
A.5.1	Bruit de photon + atmosphère . . . . .	185
A.5.2	Bruit de détecteur + atmosphère . . . . .	186
A.5.3	Cas général . . . . .	187
<b>B</b>	<b>Description analytique de la correction partielle en Optique Adaptative</b>	<b>191</b>
B.1	Formalisme . . . . .	191
B.1.1	Résultats connus sans correction par Optique Adaptative . . . . .	191
B.1.2	Correction partielle par Optique Adaptative: principe . . . . .	193
B.1.3	Approximation Gaussienne . . . . .	193
B.2	Applications . . . . .	196
B.2.1	Bruit de speckle . . . . .	196
B.2.2	Variance du Strehl . . . . .	197
B.2.3	Statistiques des coefficients de couplage . . . . .	198



# Table des figures

1.1	Exemples de disques circumstellaires vus par la tranche . . . . .	16
2.1	Schéma de principe de la formation d'image d'une source incohérente . . . . .	24
2.2	Représentation d'un interféromètre Michelson à deux télescopes . . . . .	27
2.3	Schéma de principe des deux modes classiques de recombinaison . . . . .	28
2.4	Effets de la turbulence sur une observation interférométrique . . . . .	30
2.5	Rapport signal à bruit sur le flux cohérent dans le cas purement turbulent et parfaitement corrigé par Optique adaptative . . . . .	37
2.6	Rapport Signal à Bruit sur le flux cohérent dans le régime bruit de speckle, en fonction de la correction par Optique Adaptative . . . . .	39
2.7	Erreur relative sur la visibilité calibrée lorsque la correction par OA change entre la source d'intérêt (avec $\mathcal{S} = 0.7$ , ce qui explique la chute à 0 de la courbe pour ce rapport de Strehl) et l'étoile de calibration . . . . .	39
2.8	Erreur relative sur la diamètre de la source en fonction du diamètre effectif $\sigma_o$ exprimé en unités de disques d'Airy . . . . .	47
2.9	Biais atmosphérique sur la visibilité modale calculée à partir de l'estimateur quadratique . . . . .	48
2.10	Robustesse de l'estimateur quadratique monomode . . . . .	50
2.11	Rapport Signal à Bruit sur la visibilité modale dans le régime de bruit de speckle	51
2.12	Influence d'une composante étendue contenant une fraction $\alpha$ du flux total, sur le Rapport Signal à Bruit speckle modal de la visibilité . . . . .	54
2.13	Évolution du Rapport Signal à Bruit de la visibilité modale en fonction de la fraction de flux contenue dans la structure étendue . . . . .	55
2.14	Principe de la pupille multifibrée . . . . .	65
2.15	Illustration du mosaicing continu . . . . .	68
2.16	Illustration du mosaicing discret . . . . .	69
3.1	Sensibilité des interféromètres en fonction de la longueur d'onde dans le domaine optique . . . . .	73
3.2	Observation du jet de DG Tau avec l'Optique Adaptative PUE'O du CFHT et simulation de l'observation du même objet avec AMBER sur le VLTI . . . . .	74

3.3	Schéma conceptuel de la table optique d'AMBER et réalisation finale de l'instrument . . . . .	77
3.4	Vue de l'injection des faisceaux dans les fibres . . . . .	78
3.5	Configuration du logiciel AMBER . . . . .	79
3.6	Schéma de principe de l'instrument AMBER . . . . .	81
3.7	Image sur le détecteur d'un interférogramme obtenu avec AMBER . . . . .	81
3.8	Schéma de principe de la réduction de données AMBER . . . . .	83
3.9	Principe des lames MCS . . . . .	86
3.10	Schéma descriptif de la procédure de calibration de l'instrument AMBER . . . . .	87
3.11	Ondes porteuses calculées à partir d'un déphasage de la lame MCS erroné . . . . .	88
3.12	Transformée de Fourier des ondes porteuses . . . . .	90
3.13	Auto-calibration des lames MCS . . . . .	91
3.14	RSB sur le contraste instrumental en fonction du temps de pose . . . . .	92
3.15	Représentation du bispectre dans le plan complexe . . . . .	96
3.16	Spectres de puissance du piston et du jitter . . . . .	99
3.17	Spectres de puissance du jitter et de la différence de piston moyen . . . . .	100
3.18	Estimation du jitter et erreur sur l'estimation . . . . .	101
3.19	Biais sur la visibilité due au jitter . . . . .	101
3.20	Biais moyen sur la visibilité en fonction de la ligne de base . . . . .	102
3.21	Variance du jitter en fonction du temps entre deux poses successives . . . . .	103
3.22	Ajustement de la pente de la phase différentielle . . . . .	106
3.23	Mise en pratique du critère de détection . . . . .	108
3.24	Calibration absolue de la table de longueur d'onde . . . . .	109
3.25	Spectre de l'étoile Be MWC297 . . . . .	110
3.26	Exemple d'interférogramme où le continuum n'a pas été bien soustrait . . . . .	111
3.27	Exemple d'interférogramme correctement ajusté par l'onde porteuse . . . . .	112
3.28	Visibilité brute de l'étoile HD152880 en fonction de la longueur d'onde . . . . .	114
4.1	Visibilité du calibrateur . . . . .	117
4.2	Vibrations longitudinales mesurées avec VINCI sur les UTs . . . . .	118
4.3	Visibilité de MWC 297 en fonction de la longueur d'onde . . . . .	119
4.4	Estimation de la taille caractéristique de l'enveloppe de MWC 297 . . . . .	120
4.5	Représentation schématique d'une étoile jeune Be . . . . .	121
5.1	Erreur sur la clôture de phase (en radians) en fonction de la magnitude de la source, pour différents rapport de Strehl . . . . .	127
5.2	Modèle de disques d'étoiles jeunes . . . . .	145
5.3	Image et distribution spectrale d'énergie pour une étoile jeune de type AB Aur . . . . .	145
5.4	Haut: de gauche à droite: (i) Modèle de AB Aur en échelle linéaire; (ii) reconstruction avec l'algorithme MIRA; et (iii) reconstruction avec l'algorithme CLEAN. Bas: Profil horizontal associé à chaque image. . . . .	147

---

5.5	Plan $(u, v)$ obtenu avec 7 nuits d'AMBER sur le VLTI, en utilisant 3 télescopes auxiliaires par nuit. . . . .	147
A.1	Configurations possibles pour le calcul de la covariance sur la visibilité modale	180
A.2	Configurations possibles pour le calcul de la covariance de la clôture de phase	183
B.1	Modélisation de la fonction de transfert longue pose d'un télescope partiellement corrigé par Optique Adaptative . . . . .	193
B.2	Profils de la pupille circulaire et de son approximation par une gaussienne . .	194
B.3	Fonction de transfert speckle basse fréquence . . . . .	195
B.4	Nombre de speckles équivalents dans une image partiellement corrigée par Op- tique Adaptative . . . . .	196
B.5	Rapport Signal à Bruit sur le flux cohérent dans le régime bruit de speckle . .	197
B.6	Rapport Signal à Bruit sur le rapport de Strehl . . . . .	198



# Liste des tableaux

1.1	Description des interféromètres en cours d'utilisation en 2004 . . . . .	18
2.1	Tableau de comparaison entre l'interférométrie optique monomode et la radio-interférométrie . . . . .	66
3.1	Spécifications instrumentales minimales de AMBER en fonction des objectif astrophysiques . . . . .	75
3.2	Caractéristiques du détecteur . . . . .	81
3.3	Séquence d'acquisition des fichiers de calibrations à deux télescopes . . . . .	86
3.4	Séquence d'acquisition des fichiers de calibrations à trois télescopes . . . . .	86
3.5	Moments d'ordre 2, 3 et 4 de l'interférogramme brut . . . . .	92
3.6	paramètres de la turbulence atmosphérique tels que mesurés sur le site du VLTI, Paranal, Chili . . . . .	97
4.1	Table d'observation . . . . .	116
5.1	Variances de la visibilité et de la clôture de phase pour un point source. $N_{pix}$ est le nombre de pixels échantillonnant l'interférogramme. $N_{pix} \geq 2$ est requis afin de respecter le critère de Shannon. $\sigma$ représente le bruit du détecteur par pixel. $\tau$ est la fraction de flux sélectionnée pour la photométrie. . . . .	126
5.2	Coefficient de corrélation pour la visibilité et la clôture de phase . . . . .	128
A.1	Éléments de la matrice de covariance de la visibilité modale . . . . .	182
A.2	Éléments de la matrice de covariance de la clôture de phase, dans le régime "bruit de photon" . . . . .	188
A.3	Éléments de la matrice de covariance de la clôture de phase, dans le régime "bruit de détecteur". . . . .	189
B.1	Moments d'ordre 1 et 2 de la fonction de transfert speckle haute fréquence . .	197
B.2	Moments d'ordre 1 et 2 du rapport de Strehl . . . . .	198
B.3	Moments des coefficients de couplage basse et haute fréquence . . . . .	199



# Acronymes

<b>ALMA</b>	Atacama Large Millimeter Array
<b>AMBER</b>	Astronomical Multi-BEam Recombiner
<b>CFHT</b>	Canada France Hawaii Telescope
<b>CHARA</b>	Center for High Angular Resolution Astronomy Array
<b>COAST</b>	Cambridge Optical Aperture Synthesis Telescope
<b>ESO</b>	European Southern Observatory
<b>FLUOR</b>	Fiber Linked Unit for Optical Recombination
<b>GI2T</b>	Grand Interféromètre à 2 Télescopes
<b>HST</b>	Hubble Space Telescope
<b>IONIC</b>	Integrated Optics Near-infrared Interferometric Camera
<b>IOTA</b>	Infrared-Optical Telescope Array
<b>ISI</b>	Infrared Spatial Interferometer
<b>KeckI</b>	Keck Interferometer
<b>LAOG</b>	Laboratoire d'Astrophysique Observatoire de Grenoble
<b>LBT</b>	Large Binocular Telescope
<b>LUAN</b>	Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice
<b>MCS</b>	
<b>MIDI</b>	MID-infrared Interferometric instrument
<b>MIR</b>	Mid Infra-Red
<b>MIRA</b>	Multi-Aperture Image Reconstruction Algorithm
<b>MIRA-I</b>	Mitaka Infra-Red Array
<b>MPIfR</b>	Max Planck Institut
<b>MRO</b>	Magdalena Ridge Observatory
<b>NGST</b>	Next Generation Space Telescope
<b>NIR</b>	Near Infra-Red
<b>NPOI</b>	Navy Prototype Optical Interferometer
<b>OA</b>	Optique Adaptative
<b>OAA</b>	Observatoire Astrophysique d'Arcetri
<b>OCA</b>	Observatoire de la Côte d'Azur
<b>OWL</b>	Overwhelmingly Large (Telescope)
<b>P2VM</b>	Pixel To Visibility Matrix
<b>PTI</b>	Palomar Testbed Interferometer
<b>SIM</b>	Space Interferometry Mission
<b>SUSI</b>	Sydney University Stellar Interferometer
<b>TPF</b>	Terrestrial Planet Finder
<b>VINCI</b>	VLT INterferometer Commissioning Instrument
<b>VLT</b>	Very Large Telescope
<b>VLTI</b>	Very Large Telescope Interferometer



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>"Et la lumière fut..."</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Observations de l'environnement des étoiles jeunes</b>	<b>14</b>
1.2.1	Généralités	14
1.2.2	Étoiles jeunes et haute résolution angulaire	15
<b>1.3</b>	<b>L'interférométrie optique: de nouveaux champs d'investigation</b>	<b>17</b>
1.3.1	Description sommaire	17
1.3.2	Interférométrie optique et étoiles jeunes	19
1.3.3	Et demain?	20
<b>1.4</b>	<b>Enjeux scientifiques et plan de la thèse</b>	<b>20</b>

---

## 1.1 "Et la lumière fut..."

... dans les télescopes. Que de champs d'investigations multiples et fascinants se sont alors ouverts, que de variétés d'objets cosmiques étonnants se sont offerts à nos yeux ébahis! Un cortège hors du commun, bigarré, défiant l'imagination la plus débridée se dévoila, surgissant tant de notre galaxie que des confins de l'univers.

Or, parmi toutes ces créatures mystérieuses, une catégorie va particulièrement retenir notre attention tout au long de cette thèse: les étoiles jeunes. En effet, pour progresser dans la quête de nos origines (de l'univers, du système solaire, de la vie...) deux méthodes d'investigations se complètent. La première approche consiste, par la découverte et la caractérisation de planètes extra-solaires, à étudier un échantillon de systèmes étoiles/planètes du même âge que le système solaire pour mettre à jour leurs points communs et leurs différences dans la physique qui les anime. Cette méthode revient donc à analyser les propriétés physiques de systèmes en pleine maturité. L'approche que nous allons considérer ici, radicalement différente de la première mais très complémentaire, a pour objectif d'étudier les étoiles de type solaire dans les régions de formation stellaire. Dans ces régions, dont la plus proche se situe à 150pc<sup>1</sup>, les étoiles sont incomparablement plus jeunes que le soleil, âgées d'un million d'années environ. Ramené à l'échelle humaine, notre soleil a sensiblement 40 ans. En comparaison, les étoiles jeunes en sont entre leur troisième jour et leur premier mois d'existence! Les zones de formation stellaire constituent ainsi de véritables pouponnières qui permettent d'explorer les premiers balbutiements d'étoiles possédant en leur sein les clés de la formation stellaire et planétaire. Il est donc naturel que de telles sources fassent depuis plus de trois décennies l'objet d'observations régulières, par des astronomes effeuillant peu à peu les pétales de leurs secrets...

## 1.2 Observations de l'environnement des étoiles jeunes

### 1.2.1 Généralités

Commencée il y a plus de trente ans, l'étude des caractéristiques spectro-photométriques des étoiles jeunes a permis de mettre en évidence la présence d'une structure étendue en rotation autour de l'étoile centrale. Concernant les étoiles jeunes de type solaire (étoiles T Tauri), l'analyse photométrique de l'excès infra-rouge et ultra-violet, ainsi que l'étude spectroscopique de la force de la raie H $\alpha$  et de l'intensité du "veiling"<sup>2</sup> des différentes raies d'émissions, ont autorisé à conclure dans les années 80 quant à l'existence d'un disque circumstellaire en accréation [HARTMANN & KENYON (1987), BERTOUT *et al.* (1988)]. Cette hypothèse, qui fut la majeure partie du temps confirmée sur les objets jeunes de type solaire observés lors de différentes campagnes, fait maintenant figure de consensus au sein de la communauté astro-

---

1. soit près de 500 années lumières

2. Le veiling est la diminution du contraste d'une ou plusieurs raies dans la distribution spectrale d'énergie de l'objet observé, dû à la superposition d'une émission continue [RYDGREN *et al.* (1976)].

physique. De manière plus générale, la nature même des étoiles jeunes est en forte corrélation avec le profil infra-rouge de leur distribution spectrale d'énergie. Ainsi, on a pu regrouper ces objets en différentes classes (de 0 à 3 [ANDRE *et al.* (2000)]), à partir des relevés photométriques de coeurs moléculaires denses [LADA & WILKING (1984)]. Il apparut en fait que cette classification décrivait un schéma évolutif [ADAMS *et al.* (1987)]: des étoiles les plus enfouies (classe 0) aux objets ayant perdus tout ou presque de leur environnement circumstellaire pour éventuellement laisser place à un "système solaire", des planètes orbitant autour de l'étoile centrale (classe 3). Dans cette thèse, je me concentrerai sur les objets de classe 2, dont la structure étendue, gazeuse et poussiéreuse reminescente du nuage moléculaire, se présente sous forme de disque. Ces disques possèdent le réservoir de matière autorisant la formation de planètes et sont appelés disques protoplanétaires. Ces objets jeunes se décomposent en trois grandes "familles", selon leurs propriétés physiques et observationnelles: (i) les étoiles T Tauri [JOY (1945), HERBIG (1962)], de faible masse ( $\simeq 1M_{\odot}$  ou moins) et de type spectral G5 à F, (ii) les étoiles de type FU Orionis [HARTMANN & KENYON (1996)] qui en constituent une sous catégorie et qui présentent des sursauts lumineux de plusieurs magnitudes et des taux d'accrétions élevés (jusqu'à  $10^{-4}M_{\odot}/\text{an}$ ), et (iii) les étoiles Herbig Ae/Be [HERBIG (1960)] qui en sont la contrepartie massive (de 2 à  $5M_{\odot}$ ) et donc plus lumineuse, de type spectral A ou B.

Cette avancée majeure dans la compréhension de la formation et de l'évolution des étoiles est basée sur des méthodes *indirectes*, à partir d'ajustements de la distribution spectrale d'énergie. Encore fallait il définitivement valider l'interprétation en vigueur grâce à l'observation *directe* de tels objets. La réalisation d'instruments à haute résolution angulaire vint ajouter alors une pierre capitale à l'édifice.

### 1.2.2 Étoiles jeunes et haute résolution angulaire

La présence de disques autour des étoiles jeunes est aujourd'hui indubitable. Nombre d'observations directes à haute résolution angulaire ont en effet confirmé ce que les distributions spectrales d'énergie faisaient pressentir, même si les rayons externes mesurés (en fait une limite inférieure de ces rayons, imposée par la sensibilité de l'instrument) sont généralement *plus grands* que prévu. Citons par exemple les images de systèmes vus par la tranche tels HH 30 [BURROWS *et al.* (1996)] et HK Tau [STAPELFELDT *et al.* (1998)] (voir figure 1.1) ou bien encore l'observation du disque circumbinaire autour de GG Tau ([DUTREY *et al.* (1994)]).

La nature et la composition de la structure étendue révélée à l'observateur dépendent fortement du domaine de longueur d'onde considéré. Ainsi, deux sortes d'observations complémentaires sont à prendre en compte pour avoir une analyse globale et cohérente des processus physiques se produisant dans les disques d'accrétion: les observations dans le domaine radio (millimétrique et centimétrique) et dans le domaine optique (visible, proche et moyen infra rouge).

L'interférométrie radio (e.g. l'interféromètre du Plateau de Bure et bientôt ALMA) sonde

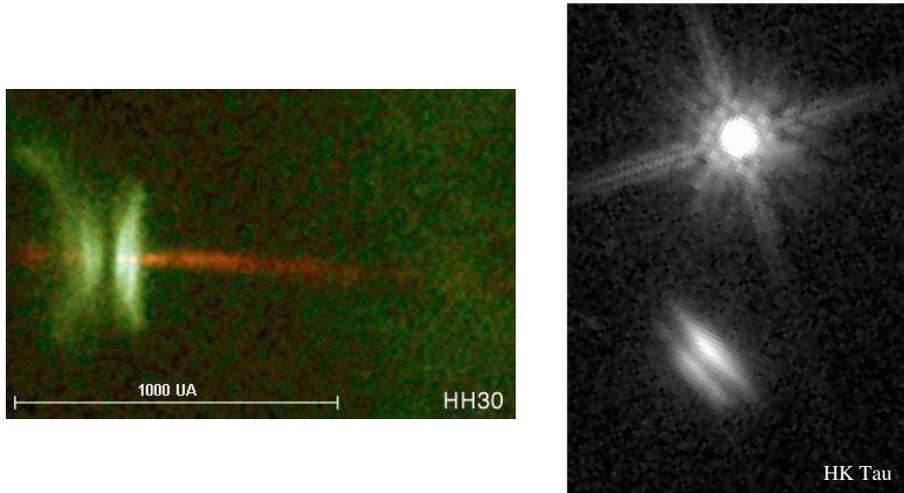


FIG. 1.1: Exemples de disques circumstellaires vus par la tranche. À gauche HH 30 observé avec le Hubble Space Telescope et à droite HK Tau révélé par l'Optique Adaptative NACO sur le VLT.

l'émission thermique de la poussière du disque. Dans le domaine millimétrique, cette émission est considérée optiquement mince. Les grains responsables de l'émission du continuum millimétrique sont assez gros ( $\gg 1\mu\text{m}$ ) en tout cas plus gros que ceux composant les nuages moléculaires [BECKWITH *et al.* (2000)], preuve de leur évolution et de leur agglomération. Le continuum est un bon traceur de la masse totale du disque, même si cette dernière est sujette à nombre d'incertitudes telles que la méconnaissance de la distribution de la taille des grains, les erreurs sur leur opacité  $\kappa$  et les approximations sur le rapport de masse entre le gaz et la poussière, supposé égal à 100 comme dans le milieu interstellaire.

Ensuite, l'analyse des raies de rotation de certaines molécules et notamment des isotopes du monoxyde de carbone CO autorise à remonter à des quantités physiques décrites par des lois de puissance telles la distribution de densité de surface, la distribution radiale et verticale de température [DARTOIS *et al.* (2003)], et la cinématique du disque, ce qui permet de vérifier que la rotation est généralement Képlérienne [GUILLOTEAU & DUTREY (1998)].

Dans le domaine optique, les télescopes spatiaux (e.g. HST et bientôt NGST) et terrestres équipés d'Optique Adaptative (e.g. CFHT/PUE'O et VLT/NACO) sondent la lumière diffusée par la poussière du disque. La taille des grains responsables de ce phénomène est petite, du même ordre de grandeur que la longueur d'onde d'observation ou moins, soit quelques microns tout au plus. Le processus de diffusion se produit à la surface du disque, qui est ici optiquement épais. Il résulte que l'estimation de sa masse par l'intermédiaire de la lumière diffusée s'avère très difficile, sauf quand le disque est vu par la tranche. En ce cas, l'image présente au centre de l'objet une bande noire (l'étoile étant complètement cachée par le disque) dont la taille est directement liée à la masse (de la poussière).

De façon générale, les images d'étoiles jeunes prises par des télescopes optiques présentent toutes certaines caractéristiques communes, notamment la fameuse bande noire plus ou moins large et cachant tout ou partie de l'étoile, ainsi que de part et d'autre de cette bande, deux structures en forme de "trapèzes" plus ou moins réguliers provenant de la lumière diffusée par le disque (voir Figure 1.1). Récemment, des modèles numériques complexes (de type Monte Carlo) autorisent, en essayant d'ajuster certaines informations spatiales de l'image (taille de la bande centrale, taille, forme et asymétrie en intensité des deux structures), de remonter en plus de la masse à l'inclinaison du disque ainsi qu'à la distribution de la taille des grains responsable de la diffusion [PINTE *et al.* (2004)].

En terme de résolution angulaire, les techniques décrites ci-dessus couvrent des domaines allant de quelques  $0.05''$  à quelques  $1''$ . Ces instruments sondent donc les régions médianes et externes des disques protoplanétaires, typiquement de quelques 10UA à quelques 100UA à la distance des régions de formation stellaire. Si ces techniques apportent déjà un nombre substantiel d'informations sur ce type d'objets, elles ne permettent pas de révéler la nature des processus physiques se déroulant dans l'environnement très proche de l'étoile, i.e. à l'échelle de l'unité astronomique ou en deçà. Or, c'est probablement dans cette région critique que certains phénomènes fondamentaux se produisent, tels les interactions entre l'étoile, le disque et éventuellement le jet bipolaire collimaté résultant de l'éjection de matière, ainsi que la formation de planètes. Pour pallier le manque de très haute résolution angulaire alors nécessaire, l'interférométrie optique apparaît depuis quelques années comme une solution des plus prometteuses. Les caractéristiques de cette technique sont décrites dans la section suivante.

## 1.3 L'interférométrie optique: de nouveaux champs d'investigation

### 1.3.1 Description sommaire

Pour un tour d'horizon exhaustif de l'interférométrie optique en astrophysique, je renvoie le lecteur à la revue de [MONNIER (2003)]. Je ne rappelle ici que les principes de base d'une telle technique. L'interférométrie stellaire est calquée sur l'expérience des franges d'interférences d'Young, deux télescopes séparés d'une distance  $B$  faisant office de fentes. La lumière monochromatique émise par une source ponctuelle située à l'infini pénètre dans les fentes. Ensuite, les faisceaux de lumière issus de chaque télescope sont recombinaés et imagés sur un écran (détecteur). De part la nature ondulatoire de la lumière, les champs électriques provenant des différents télescopes interfèrent alternativement de façon constructive (maximum de lumière) et destructive (pas de lumière), selon la différence relative de chemin optique parcouru. La figure d'interférences alors enregistrée à l'écran est une sinusoïde dont l'interfrange  $\Delta_i$  est inversement proportionnelle à la distance entre les fentes (aussi appelée ligne de base),

TAB. 1.1: *Description des interféromètres en cours d'utilisation en 2004. Ne sont donc pas mentionnés dans ce tableau les interféromètres en cours de construction comme le LBT, le MRO qui ambitionne de recombinaison 10 télescopes ou bien encore le Keck et le VLTI équipés de télescopes auxiliaires augmentant leur résolution maximale.*

Nom	Télescopes		Taille (m)	Ligne de base maximale	Couverture spectrale
	Nombre				
	Total	Recombinaison			
CHARA	6	2	1	330	NIR
COAST	6	3	0.4	47	Visible, NIR
GI2T	2	2	1.52	65	Visible, NIR
IOTA	3	3	0.45	38	Visible, NIR
ISI	3	3	1.65	85	MIR
KeckI	2	2	10	85	NIR, MIR
MIRA-I	2	2	0.25	30	Visible
NPOI	6	6	0.12	64	Visible
PTI	3	3	0.40	110	NIR
SUSI	2	2	0.14	64	Visible
VLTI	4	3	8	130	NIR, MIR

soit:

$$\Delta_i = \frac{\lambda}{B} \quad (\text{radians}) \quad (1.1)$$

On peut aussi remarquer que si une seconde source ponctuelle séparée d'une distance angulaire  $\lambda/2B$  de la première émettait aussi de la lumière, la figure d'interférence obtenue serait la somme de deux sinusoides déphasées de  $\pi$ , soit un écran uniformément éclairé! Il apparaît alors qu'un dispositif basé sur ce phénomène peut être utilisée pour mesurer des diamètres d'étoiles. Cette application fut en premier lieu proposée par Fizeau en 1868. L'interférométrie stellaire était née. Michelson l'appliqua avec succès en 1921 avec des miroirs montés sur une armature métallique (la distance inter-miroirs étant alors de  $B = 6.1\text{m}$ ), mais il fallut attendre les années 1970 [LABEYRIE (1975)] pour obtenir des franges à partir de deux télescopes totalement désolidarisés, distants de  $B = 12\text{m}$ . Cette expérience eut un succès retentissant, et eut surtout le mérite d'accréditer la technique de l'interférométrie optique aux yeux de la communauté astrophysique, en témoigne le nombre d'interféromètres aujourd'hui en cours d'utilisation (voir la liste en table 1.1).

La résolution<sup>1</sup> d'un interféromètre est par définition  $R_B \simeq \lambda/B$ , à comparer avec la résolution d'un télescope mono-pupille (limité par la diffraction) de diamètre  $D$ ,  $R_D \simeq \lambda/D$ . *Le pouvoir de résolution d'un interféromètre est donc équivalent à celui d'un télescope mono-pupille dont le diamètre est égal à la ligne de base, soit  $D = B$ .* Pour des raisons technologiques

1. La résolution est la distance minimale entre deux sources à partir de laquelle l'instrument en question va pouvoir les discriminer.

(miroirs gigantesques, stabilité mécanique, etc ...) et instrumentales (performances limitées des systèmes d'Optique Adaptative "grand champ"), les télescopes mono-pupilles ne dépassent pas aujourd'hui les 10m de diamètre<sup>1</sup>. L'interférométrie optique constitue donc une solution élégante permettant de faire un bond significatif en terme de résolution angulaire, ouvrant des champs d'exploration interdits jusqu'à lors. Comme bien d'autres domaines astrophysiques, l'étude des étoiles jeunes et de leur environnement proche est déjà en train de (et va) grandement bénéficier de cette jeune technique encore en pleine croissance, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

### 1.3.2 Interférométrie optique et étoiles jeunes

De part les différentes longueurs de lignes de base accessibles, les interféromètres optiques explorent des échelles spatiales allant de 0.1AU à 10AU à la distance des régions de formation stellaire, complétant avantageusement les lacunes en résolution angulaire des autres techniques. En sondant ainsi l'émission thermique de l'environnement proche des étoiles jeunes, les premières observations interférométriques ont déjà permis d'affiner notre vision de ces objets, même si ces derniers sont souvent à la limite de sensibilité de tels instruments.

Penchons nous sur le cas de FU Ori, composée d'une étoile T Tauri et d'un disque subissant périodiquement des sursauts d'accrétion. Durant ces phases d'activités intenses, FU Ori est beaucoup plus brillante que la majeure partie des T Tauri classiques (CTTS), et sa distribution spectrale d'énergie (SED) est totalement dominée par le disque d'accrétion. Les mesures interférométriques de cet objet sont en excellent accord avec les modèles standards de disques d'accrétion initialement développés pour ajuster la SED [MALBET & BERTOUT (1995)], confirmant ainsi la validité de ces modèles simples pour ce type d'étoiles.

Pour des objets plus complexes, comme les étoiles T Tauri classiques où l'accrétion n'est pas le processus physique dominant mais où d'autres effets tel le chauffage du disque par l'étoile centrale sont à prendre en compte, les mesures interférométriques apportent des contraintes fondamentales sur les modèles théoriques. Ainsi, reprenant le modèle "à deux couches<sup>2</sup>" de [CHIANG & GOLDREICH (1997)] en incluant l'effet de dissipation par viscosité, [LACHAUME *et al.* (2003)] ont réussi à ajuster conjointement les mesures photométriques et interférométriques d'étoiles T Tauri parmi les plus brillantes.

Concernant les étoiles de Herbig Ae/Be, contreparties plus massives des étoiles T Tauri (donc plus brillantes et plus facilement observables avec des interféromètres), l'interférométrie optique a produit des résultats surprenants, en tout cas différents de ceux attendus: *clairement les disques autour de ces étoiles ne sont pas comme prévus par les ajustements de la distribution spectrale d'énergie*. Plus précisément les mesures interférométriques sont incompatibles avec les modèles standards de disques d'accrétion [MILLAN-GABET *et al.* (1999)], mais seraient plus en

---

1. Il faut cependant préciser qu'un travail de recherche considérable est consacré aux projets de télescopes de 30m, et même de 100m de diamètre (OWL)!

2. Ce modèle tient compte d'une couche supérieure qui peut avoir une température plus élevée que la couche de plus basse altitude.

accord avec un anneau dont le rayon interne est déterminé par la température de sublimation des grains de poussières [MONNIER & MILLAN-GABET (2002)]. Le modèle développé par [DULLEMOND *et al.* (2001)], dans lequel l'anneau serait la partie interne d'un disque "gonflé" par la radiation stellaire, permet aujourd'hui de concilier les observations interférométriques avec les mesures de SED.

### 1.3.3 Et demain?

Avec l'utilisation routinière d'interféromètres de nouvelle génération comme le KeckI ou le VLTI, l'interférométrie optique va franchir un nouveau cap. En effet, ces complexes dotés de télescopes de grands diamètres (respectivement 10m et 8m) ont la sensibilité requise pour observer la grande majorité des objets jeunes présents dans la zone de ciel couverte, en tout cas dans le proche infra-rouge. Ainsi, il sera possible de procéder à des études statistiques et d'établir des corrélations solides entre les mesures interférométriques, photométriques (excès infra-rouge) et spectroscopiques ("veiling"). De plus, la maîtrise du signal interférométrique sans cesse accrue, et ce notamment grâce à l'utilisation de guides d'ondes filtrant<sup>1</sup> le signal perturbé par la turbulence atmosphérique, permet de tirer le meilleur profit de tels instruments et d'obtenir des mesures avec des précisions inégalées. Et qui dit meilleure précision dit bien entendu contraintes plus sévères sur les modèles théoriques des sources observées, conduisant à terme à améliorer la compréhension des processus physiques les régissant.

Le VLTI possède cependant un avantage majeur sur son "concurrent" américain: la variété des lignes de base accessibles, ainsi que la possibilité de recombinaison simultanément des faisceaux provenant de trois télescopes grâce au recombineur proche infra-rouge AMBER [PETROV *et al.* (2003)], font de ce complexe un site au potentiel imageur unique au monde, mêlant à la fois sensibilité, précision et très haute résolution angulaire. L'obtention des premières images objectives d'étoiles jeunes avec une résolution inférieure à l'Unité Astronomique sera à n'en pas douter un tournant majeur dans l'histoire de l'interférométrie optique.

Dans une perspective à plus long terme, il ne faut pas oublier la mise en service des interféromètres spatiaux (citons par exemple les missions SIM, DARWIN et TPF). N'étant plus sujet aux limitations drastiques imposées par l'atmosphère terrestre et pouvant configurer de très grandes lignes de base grâce au vol en formation, cette sorte d'interféromètres sera certainement le fer de lance des techniques dédiées à la détection directe de planètes de type terrestres et à la caractérisation de leur atmosphère.

## 1.4 Enjeux scientifiques et plan de la thèse

Cette thèse s'articule autour de l'instrument AMBER. Cet ambitieux recombineur trois télescopes du VLTI conçu et réalisé par un consortium de cinq laboratoires européens, intégré au Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble, et testé sur le ciel de Paranal (Chili) en mai 2004, sera offert à la communauté astrophysique au début de l'année 2005. Et nombre

---

1. Nous aurons l'occasion de développer ce concept tout au long de cette thèse!

d'objectifs astrophysiques et de rêves de nouvelles découvertes accompagnent cet instrument. L'observation interférométrique de l'environnement proche des étoiles jeunes, à l'échelle de de Unité Astronomique et même en deçà, fait évidemment parti des projets majeurs. Or un tel défi ne pourra être relevé qu'en obtenant des mesures interférométriques extrêmement précises. Cette exigence explique pourquoi AMBER est équipé de fibres optiques, dont les remarquables propriétés de filtrage permettent de gagner un facteur 10 ou plus encore sur la précision des mesures. Cependant, si l'apport des guides d'ondes en terme de précision est indéniable et n'est plus à démontrer expérimentalement, la théorie décrivant le signal interférométrique en présence de guides d'ondes reste encore très mal connue. Or, il n'est clairement pas possible de développer un instrument dont le traitement du signal est optimisé sans la maîtrise théorique de ce signal. Et à ce sujet les questions restent nombreuses: quel est l'effet des fibres sur les mesures interférométriques? Quels sont les biais potentiels induits par une telle technique et si besoin est, comment les corriger? Comment définir un estimateur optimal? Répondre à toutes ces questions constitue autant d'enjeux scientifiques importants. D'autant que ces problématiques en appellent d'autres, à plus grande échelle. Ainsi, si la nature de la relation entre la source et les observables a changé (i.e. par rapport à l'interférométrie optique non fibrée), faut-il redéfinir les techniques d'ajustement de modèles et d'imagerie? Et *a fortiori* peut-on faire de l'imagerie grand champ? Peut-on emprunter des solutions à l'interférométrie radio ou faut-il développer des techniques spécifiques?

J'entamais donc mon travail de thèse avec ces problématiques en tête. Pour ma première année AMBER avait pris du retard, je me suis donc attaché dans un premier temps à développer la théorie de l'interférométrie fibrée du point de vue du traitement du signal, me basant pour cela sur le travail pionnier de [MÈGE (2003)]. Cette étape m'a ensuite permis de étudier la statistique des observables interférométriques et de reconsidérer dans ce cadre les techniques d'ajustement de modèles. Ensuite, lorsqu'AMBER est arrivé au laboratoire de Grenoble, je suis rentré de plain pied dans le développement, l'analyse et la validation des procédures de réduction de données. Enfin, une fois l'instrument intégré et envoyé à Paranal, j'ai étudié sa capacité à reconstruire des images d'objets jeunes, anticipant sa mise à disposition routinière. Par souci pédagogique, je ne présenterai pas mon travail de thèse de façon chronologique mais de manière thématique. Ainsi, le chapitre 2 revient sur les principes de l'interférométrie optique "classique", ses limitations dues à la turbulence atmosphérique, et analyse en comparaison les performances des interféromètres monomodes (i.e. utilisant des guides d'ondes). Le chapitre 3 se concentre exclusivement sur l'instrument AMBER. Après un résumé des objectifs scientifiques et des spécifications instrumentales, je développe en profondeur la réduction de données spécifique à ce recombineur qui doit en théorie produire des mesures calibrées avec une précision ultime de 0.01%. À cause du retard pris par AMBER, je n'ai pas eu le temps d'utiliser l'instrument en mode d'observation "classique" et *a fortiori* de me pencher sur l'interprétation astrophysique des résultats. Néanmoins j'analyse dans ce chapitre les données obtenues pendant le "commissioning" de mai. Ces données sont "soumises à l'épreuve" des différentes étapes de la procédure de réduction. En quelque sorte, cet

état des lieux de l'instrument pointe sur ses forces mais aussi sur les faiblesses qui restent à corriger. En guise d'application astrophysique, je présente en chapitre 4 un résultat préliminaire concernant l'observation de l'étoile Be MWC 297 en moyenne résolution spectrale. Enfin, le chapitre 5 approfondit les techniques de traitements de données permettant de remonter aux paramètres physiques de la source observée à partir des mesures interférométriques. À la lumière de l'instrument AMBER sur le VLTI, j'étudie la capacité de tels interféromètres à reconstruire des images d'étoiles jeunes.

## Chapitre 2

# Interférométrie optique longue base

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Principes de l'interférométrie stellaire "classique" . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1.1	Formation d'images . . . . .	24
2.1.2	Équation interférométrique . . . . .	25
2.1.3	Les modes de recombinaison . . . . .	26
2.1.4	Gérer la turbulence . . . . .	30
2.1.5	Interférométrie des tavelures . . . . .	33
<b>2.2</b>	<b>Interférométrie monomode . . . . .</b>	<b>41</b>
2.2.1	Le filtrage spatial . . . . .	42
2.2.2	Équation interférométrique et visibilité modale . . . . .	43
2.2.3	Biais géométrique: effet de lobe . . . . .	45
2.2.4	Biais atmosphérique - Robustesse . . . . .	48
2.2.5	Performances de l'interférométrie monomode . . . . .	50
<b>2.3</b>	<b>Augmenter le champ de vue . . . . .</b>	<b>64</b>
2.3.1	Pupille multifibrée . . . . .	64
2.3.2	Interférométrie monomode et radio-interférométrie . . . . .	66
2.3.3	Mosaicing et champ de vue . . . . .	67

---

*Après un rappel des principes fondamentaux de l'interférométrie optique, je reprends le concept d'interférométrie des tavelures introduit par [LABEYRIE (1970)] pour en étudier les performances et en souligner les limites imposées par la turbulence atmosphérique. L'utilisation de guides d'ondes dans le schéma optique d'un interféromètre pour filtrer et transporter le signal offre une solution technologique déterminante, permettant d'obtenir des mesures avec une précision inégalée. Poursuivant le travail de [MÈGE (2003)], j'explique d'un point de vue théorique pourquoi le filtrage modal permet d'accroître substantiellement les performances de l'interférométrie optique, confirmant ainsi les résultats expérimentaux acquis lors de l'observation de sources compactes. Je pointe les limitations de cette technique dans le cas de l'imagerie grand champ et propose quelques solutions inspirées de l'interférométrie radio.*

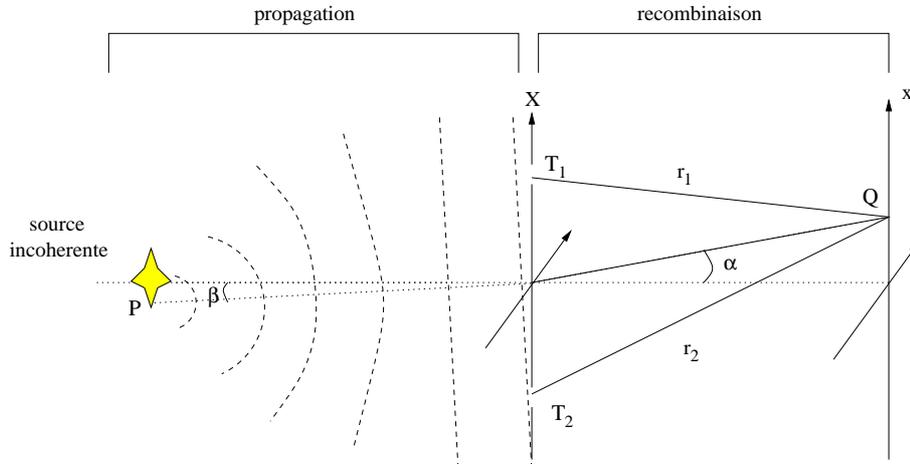


FIG. 2.1: Schéma de principe de la formation d'image d'une source incohérente, au travers d'une pupille de forme quelconque (ici non connexe, formée de deux télescopes). Le front d'onde émanant d'un point  $P$  situé à une distance angulaire  $\beta$  du centre de la source, arrive plan au niveau de la pupille. L'image du point  $P$  se forme au point  $Q$  du détecteur, situé dans un plan conjugué au plan de la source et repéré par la coordonnée angulaire  $\alpha$ . La relation entre  $\beta$  et  $\alpha$  dépend du système optique entre la pupille et le détecteur.

## 2.1 Principes de l'interférométrie stellaire "classique"

### 2.1.1 Formation d'images

Soit  $O(\beta)$  la fonction de brillance d'une étoile située à l'infini,  $\beta$  étant les coordonnées angulaires sur le ciel (cf. Fig. 2.1). Soit  $P(f)$  la fonction pupille (valant 1 ou 0 selon la transmission, mais non nécessairement connexe), où  $f$  est la variable réduite dans le plan pupille ( $u = X/\lambda$  de dimension inversement proportionnelle à  $\beta$ ). Suivant les lois de propagation d'une onde quasi monochromatique émise par un point  $P$  de la source<sup>1</sup>, l'amplitude complexe diaphragmée par la pupille s'écrit:

$$\Psi(f, \beta) = \exp[-2i\pi\beta.f].P(f) \quad (2.1)$$

Suivant le principe de la diffraction à l'infini de Fraunhofer [BORN & WOLF (1980)], l'amplitude complexe dans le plan focal  $\hat{\Psi}(\alpha, \beta)$  est la transformée de Fourier de  $\Psi(u, \beta)$ . La fonction de brillance de l'image (par abus de langage, l'intensité) est donc la transformée de Fourier (TF) de l'autocorrélation de l'amplitude complexe diaphragmée et s'écrit:

$$I_P(\alpha, \beta) = |\hat{\Psi}(\alpha, \beta)|^2 = |\hat{P}(\alpha - \beta)|^2 \quad (2.2)$$

1. L'effet de la turbulence atmosphérique n'est pas pris en cause dans ce chapitre. Celle-ci interviendra à la Section 2.1.4

$|\widehat{P}(\alpha)|^2$  est appelée réponse impulsionnelle du système. *In fine*, l'image sur le détecteur résulte de l'addition incohérente du champ provenant de chaque point de la source:

$$I(\alpha) = \int O(\beta).I_P(\alpha, \beta)d\beta = \int O(\beta).|\widehat{P}(\alpha - \beta)|^2d\beta = (O * |\widehat{P}|^2)(\alpha) \quad (2.3)$$

Pour une source incohérente, l'image formée sur le détecteur est la convolution de la fonction de brillance de la source par la réponse impulsionnelle du système. Dans le plan de Fourier, l'équation précédente prend une forme très simple:

$$\widehat{I}(f) = \widehat{O}(f).[P \star P](f) = \widehat{O}(f).H(f) \quad (2.4)$$

$H(f)$ , l'autocorrélation de la pupille  $P(f)$  est appelée fonction de transfert.

### 2.1.2 Équation interférométrique

Considérons maintenant le cas particulier d'un interféromètre. La fonction pupille se définit comme un réseau de  $N_{tel}$  pupilles monolithiques:

$$P(f) = \sum_{i=1}^{N_{tel}} t_i P_i(f - f_i) \quad (2.5)$$

où  $P_i$  représente la pupille du  $i^{me}$  télescope en considérant de possibles aberrations de phases instrumentales (i.e.  $P_i$  est complexe et  $|P_i| = 1$ ) et où  $t_i$  rend compte du facteur de transmission du télescope  $i$ . La fonction de transfert de la pupille interférométrique s'écrit:

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N_{tel}} t_i H_i(f) + \sum_{i=1}^{N_{tel}} \sum_{j>i}^{N_{tel}} \sqrt{t_i t_j} H_{ij}(f - f_{ij}) + \sum_{i=1}^{N_{tel}} \sum_{j>i}^{N_{tel}} \sqrt{t_i t_j} H_{ij}^*(-f - f_{ij}) \quad (2.6)$$

où  $H_i(f)$  est l'autocorrélation de la pupille  $i$  (aussi appelé pic photométrique) et  $H_{ij}(f - f_{ij})$  est l'intercorrélation des pupilles  $i$  et  $j$  centrée en la fréquence  $f_{ij} = f_j - f_i$  (aussi appelé pic interférométrique). De manière générale, l'équation interférométrique a donc pour forme:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{N_{tel}} t_i \widehat{O}(f).H_i(f) + \sum_{i=1}^{N_{tel}} \sum_{j>i}^{N_{tel}} \sqrt{t_i t_j} \widehat{O}(f)[H_{ij}(f - f_{ij}) + H_{ij}^*(-f - f_{ij})] \quad (2.7)$$

Ainsi, un interféromètre sonde les basses fréquences de l'objet sur le support de la pupille (partie gauche de la somme) ainsi que les hautes fréquences de l'objet, relatives à la distance entre les télescopes  $f_{ij}$  (partie droite de la somme). Communément en interférométrie, on introduit la visibilité  $V(f)$  comme étant la TFF de la fonction de brillance de l'objet normalisée à l'origine:

$$V(u) = \frac{\widehat{O}(f)}{\widehat{O}(0)} \quad (2.8)$$

On dit que l'on *résout* l'objet à la fréquence  $u$  si on mesure une visibilité inférieure à 1 à cette fréquence. Dans le cas contraire l'objet est dit *non-résolu*.

$\widehat{O}(0)$  n'est autre que le nombre total de photons  $N$  émis par la source. L'équation 2.7 peut alors se re-écrire:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{N_{tel}} N t_i V(f) \cdot H_i(f) + \sum_{i=1}^{N_{tel}} \sum_{j>i}^{N_{tel}} N \sqrt{t_i t_j} V(f) \cdot [H_{ij}(f - f_{ij}) + H_{ij}^*(-f - f_{ij})] \quad (2.9)$$

Les flux contenus dans la partie basse fréquence et haute fréquence de l'interférogramme sont appelés respectivement *flux photométrique* ( $F_k$ ) et *flux cohérent* ( $F_c^{kl}$ ). Par définition:

$$F_i = N t_i \quad (2.10)$$

$$F_c^{ij} = 2N \sqrt{t_i t_j} V(f_{ij}) \quad (2.11)$$

À partir de ces quantités, on peut introduire un estimateur générique de la visibilité, soit linéaire:

$$\widetilde{V}(f_{ij}) = \frac{\langle F_c^{ij} \rangle}{2\sqrt{\langle F_i F_j \rangle}} \quad (2.12)$$

soit quadratique:

$$\widetilde{V}^2(f_{ij}) = \frac{\langle |F_c^{ij}|^2 \rangle}{4 \langle F_i F_j \rangle} \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Les modes de recombinaison

L'équation interférométrique 2.7, si elle se veut générique, fait tout de même l'hypothèse importante que la recombinaison des faisceaux se fait dans le *plan image*. Bien que ce soit la méthode la plus couramment employée en interférométrie longue base, la recombinaison peut aussi se faire dans le *plan pupille*. Le paragraphe suivant s'attache à décrire les caractéristiques propres des deux approches.

#### *Recombinaison plan image-plan pupille*

Lors d'une recombinaison plan image, les interférences sont créées dans un plan optiquement conjugué au plan de la source. On distingue deux sortes de recombinaisons plan image. La reconfiguration de type Fizeau respecte au niveau de la pupille de sortie le rapport entre le diamètre des télescopes  $D$  et la ligne de base  $B$  de la pupille d'entrée. Si cette approche présente l'avantage d'un grand champ de vue interférométrique (i.e. la zone du ciel couverte par l'interféromètre), elle devient rapidement inutilisable lorsque le rapport  $B/D$  augmente, notamment à cause du nombre considérable de pixels qu'il faut pour coder les franges en respectant le critère de Shannon. A contrario, le montage de type Michelson ne respecte pas l'homothétie du rapport  $B/D$  au niveau de la pupille de sortie, ce qui permet d'ajuster à loisir la fréquence de codage des franges. En contrepartie cette configuration rompt de fait la relation de convolution décrite par l'équation 2.7 puisque la position du centre de l'image ne coïncide plus avec la position de la différence de marche optique nulle (l'invariance par translation est perdue). La figure 2.2 illustre ce phénomène. Cependant il est aisé de recouvrir la relation de convolution via un petit artifice numérique, par recentrage du pic frange [voir TALLON

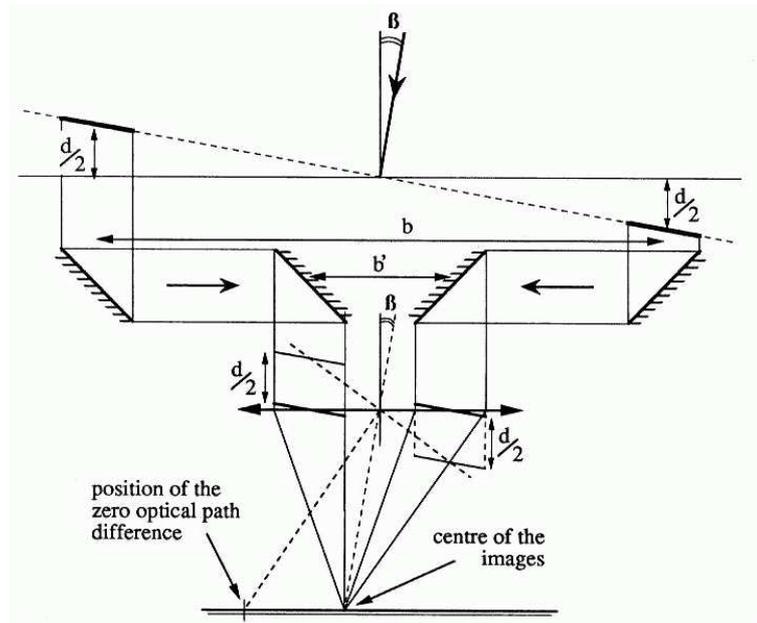


FIG. 2.2: Représentation d'un interféromètre Michelson à deux télescopes.  $\beta$  est la position angulaire de l'objet et  $b$  et  $b'$  sont les lignes de bases respectivement avant et après reconfiguration de la pupille.  $d$  est la différence de marche géométrique entre les deux télescopes. Cette figure est tirée de [TALLON & TALLON-BOSC (1992)].

& TALLON-BOSC (1992) pour plus de détails]. Généralisée à  $N$  mono-pupilles d'entrée, la reconfiguration Michelson donne naissance au concept d'hyper-télescopes [LABEYRIE (1996)].

La recombinaison dans le plan pupille quant à elle consiste à former les franges d'interférences dans un plan conjugué à la pupille d'entrée. Ceci introduit une différence fondamentale avec la méthode précédente: seule la fréquence de l'objet correspondant à la ligne de base est codée. Pour parcourir les fréquences sur le support de la pupille d'un télescope, il faut effectuer des transformations géométriques de la pupille d'entrée (translation + réflexion, translation + rotation de  $\pi$ ). Utilisée avec succès sur des pupilles monolithiques [RODDIER *et al.* (1986)], il est surprenant de remarquer le peu d'intérêt porté à cette technique en ce qui concerne l'interférométrie longue base<sup>1</sup>, alors que la visibilité estimée non seulement présente un meilleur Rapport Signal-à-Bruit (RSB) que dans le cas de la recombinaison plan image, mais aussi et surtout la fonction de transfert associée à ce système n'est pas affectée par les erreurs de pointage ou par les variations de la turbulence atmosphérique [CHELLI & MARIOTTI (1986)].

1. Je parle ici de recombinaison plan-pupille avec modulation *spatiale* des franges. J'exclus ainsi de la remarque les interféromètres à modulation *temporelle* où la recombinaison se fait au niveau de la lame séparatrice. Je qualifierais cette dernière technique de recombinaison plan-pupille à l'ordre zéro. Les exemples d'interféromètres appartenant à cette catégorie sont *a contrario* légion: CHARA, COAST, IOTA, PTI, etc...

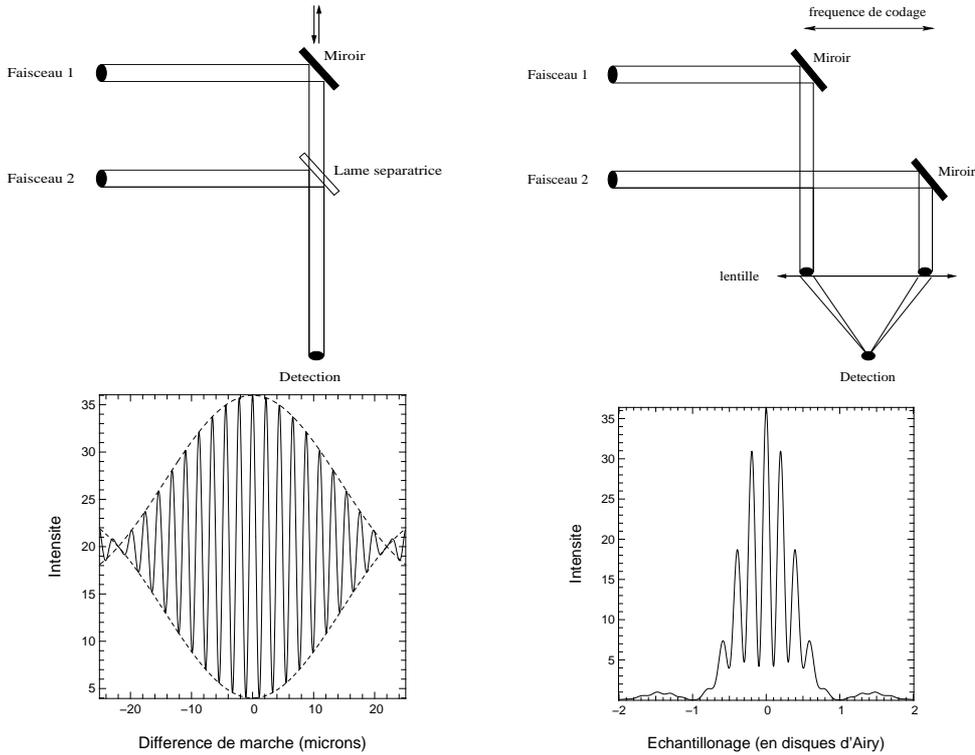


FIG. 2.3: Schéma de principe des deux modes classiques de recombinaison. À gauche: recombinaison coaxiale. Les franges sont enregistrées sur un seul pixel et sont modulées temporellement. Les franges sont multipliées par l'enveloppe de cohérence temporelle de la source. À droite: recombinaison multiaxiale. Les franges sont codées spatialement sur un détecteur. Les franges sont non seulement multipliées par l'enveloppe de cohérence temporelle mais aussi par la tache de diffraction d'un télescope.

### Recombinaison coaxiale-multiaxiale

En pratique, pour remonter à la visibilité, il est nécessaire de moduler les franges d'interférences sur au moins une période. La modulation peut se faire de manière temporelle (cf. l'interféromètre de Michelson) ou spatiale (cf. les fentes d'Young). On parle alors respectivement de recombinaison coaxiale et multiaxiale.

Dans le cas de la recombinaison coaxiale (voir Fig. 2.3, gauche), les faisceaux semblent venir de la même direction. La variable spatiale  $\alpha$  est donc fixe (idéalement à la différence de marche (ddm) nulle). Un miroir piezoélectrique associé à un faisceau permet de parcourir temporellement les franges. Traduit en différence de marche, la course du piezzo s'écrit  $\delta = v\tau$ , où  $v$  est la vitesse du miroir. À une constante près l'amplitude des franges ne dépend pas de l'enveloppe de diffraction des télescopes.

Pour une recombinaison mutiaxiale, les faisceaux semblent provenir de deux directions différentes (voir Fig. 2.3, droite). La modulation des franges se fait spatialement à la fréquence de codage  $f_{ij} = \sigma b_{ij}$ ,  $b_{ij}$  étant la distance entre les pupilles de sortie  $i$  et  $j$ . L'interférogramme

est donc imagé sur une barette de pixels, le nombre de pixels nécessaire pour coder les franges étant imposé par la condition de non repliement de Shannon. Il est clair que dans le cas multiaxial, l'amplitude des franges est pondérée par l'enveloppe de diffraction.

### *Effet d'une bande spectrale*

Les franges d'interférences (monochromatiques) résultant de la combinaison des faisceaux provenant des télescopes  $i$  et  $j$ , qu'elles soient modulées de façon temporelle ou spatiale, peuvent s'exprimer sous la forme générique<sup>1</sup> suivante:

$$m_{ij}(\delta, \sigma) \propto |V_{ij}(\sigma)| \cos[2\pi\sigma(\delta + \delta_p) + \phi_{ij}(\sigma)] \begin{cases} \sigma\delta \equiv \nu\tau_{ij} & \text{modulation temporelle} \\ \sigma\delta \equiv \alpha f_{ij} & \text{modulation spatiale} \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\delta$  est homogène à une différence de marche et  $\sigma$  est le nombre d'onde.  $\delta_p$  est un décalage éventuel par rapport à la frange blanche (i.e. à la ddm nulle, par exemple un piston atmosphérique, voir section suivante).  $|V_{ij}(\sigma)|$  et  $\phi_{ij}(\sigma)$  sont respectivement le module et la phase de la visibilité correspondant à la fréquence spatiale  $f_{ij}$ . Sur la bande spectrale  $\Delta\sigma$ , chaque interférogramme monochromatique va s'ajouter de manière incohérente, l'amplitude de chacun étant pondérée par la transmission du filtre  $\mathcal{F}(\sigma - \sigma_0)^2$ , où  $\sigma_0$  est le nombre d'onde central de la fenêtre spectrale. L'interférogramme "large" bande s'écrit:

$$M_{ij}(\delta) = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} |V_{ij}(\sigma)| \mathcal{F}(\sigma - \sigma_0) \cos[2\pi\sigma(\delta + \delta_p) + \phi_{ij}(\sigma)] d\sigma \quad (2.15)$$

Si le filtre est assez étroit, on peut supposer que la visibilité est indépendante de la longueur d'onde. Moyennant un changement de variable et développant le cosinus, il vient:

$$\begin{aligned} M_{ij}(\delta) &= |V_{ij}| \cos[2\pi\sigma_0(\delta + \delta_p) + \phi_{ij}] \int_{-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\frac{\Delta\sigma}{2}} \mathcal{F}(\sigma) \cos[2\pi\sigma(\delta + \delta_p)] d\sigma \\ &- |V_{ij}| \sin[2\pi\sigma_0(\delta + \delta_p) + \phi_{ij}] \int_{-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\frac{\Delta\sigma}{2}} \mathcal{F}(\sigma) \sin[2\pi\sigma(\delta + \delta_p)] d\sigma \end{aligned} \quad (2.16)$$

qui se re-écrit:

$$M_{ij}(\delta) = \rho(\delta, \delta_p) |V_{ij}| \cos[2\pi\sigma_0(\delta + \delta_p) + \phi_{ij} - \Theta(\delta, \delta_p)] \quad (2.17)$$

avec

$$\rho(\delta, \delta_p) = |\widehat{\mathcal{F}}(\delta + \delta_p)| \quad (2.18)$$

$$\Theta(\delta, \delta_p) = \arg \left\{ \widehat{\mathcal{F}}(\delta + \delta_p) \right\} \quad (2.19)$$

On remarque donc que l'interférogramme "large" bande s'exprime comme un interférogramme monochromatique en la longueur d'onde  $\sigma_0$ , atténué et déphasé. Le coefficient d'atténuation

1. en supposant les pupilles ponctuelles pour ne pas alourdir la démonstration

2.  $\mathcal{F}(\sigma)$  tient compte le cas échéant de la transmission de la source, selon son type spectral.

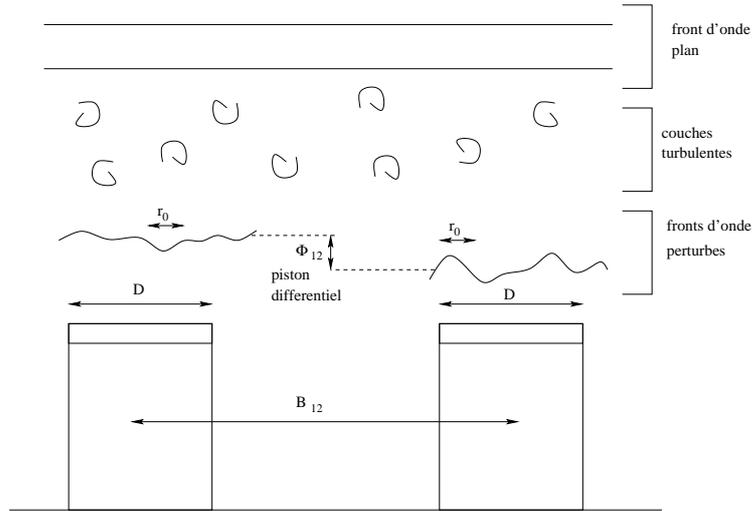


FIG. 2.4: *Effets de la turbulence sur une observation interférométrique. Au niveau d'une pupille, les couches turbulentes perturbent le front d'onde, qui n'est plus plan mais "bosselé" et dont la phase varie aléatoirement. Au niveau de l'interféromètre, la turbulence atmosphérique entraîne un retard de phase différentiel entre deux pupilles, retard qui entraîne à son tour un déplacement aléatoire des franges sur le détecteur.*

est égal au module de la TF du filtre à la différence de marche considérée. Dans le cas d'un filtre "porte" de largeur  $\Delta\sigma$ , on retrouve le classique sinus cardinal:

$$\rho(\delta, \delta_p) = |\text{sinc}[\pi\Delta\sigma(\delta + \delta_p)]| = \left| \text{sinc} \left[ \pi \frac{\delta + \delta_p}{\mathcal{L}_c} \right] \right| \quad (2.20)$$

$\mathcal{L}_c$  définit la longueur de cohérence sur laquelle les interférences auront lieu:

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \lambda_0 \mathcal{R} \quad (2.21)$$

$\mathcal{R} = \lambda_0/\Delta\lambda$  désignant la résolution spectrale de l'interféromètre.

### 2.1.4 Gérer la turbulence

#### *Les effets de la turbulence*

Dans le cadre d'observations d'étoiles avec un interféromètre terrestre, le champ électromagnétique provenant de la source traverse les couches turbulentes de l'atmosphère. La statistique de la turbulence atmosphérique a été caractérisée par [KOLMOGOROV (1941), WEISS (1961)] et son impact sur l'observation de sources astrophysiques est résumé dans l'incontournable [RODDIER (1981)]. Je me contenterai de rappeler dans cette section les conclusions principales de cette analyse ainsi que toutes les notions utilisées dans ce document de thèse.

La turbulence atmosphérique a deux effets sur une observation interférométrique (voir illustration Fig. 2.4):

Au niveau de la pupille d'un télescope, le front d'onde perturbé par l'atmosphère présente des fluctuations de phase<sup>1</sup> aléatoires. Ainsi, il y a une perte de cohérence spatiale<sup>2</sup> du front d'onde au niveau de la pupille du télescope. Typiquement, le paramètre de Fried  $r_0$  [FRIED (1966a), FRIED (1966b)] rend compte de l'aire de cohérence en présence de turbulence atmosphérique, i.e. de la zone dans laquelle le champ électrique reste corrélé spatialement. Il est à noter que  $r_0$  dépend de la longueur d'onde ( $\propto \lambda^{6/5}$ ). Ainsi la zone de cohérence du front d'onde est d'autant plus grande (i.e l'effet de la turbulence est d'autant plus faible) que la longueur d'onde d'observation est élevée. Du point de vue de la réponse impulsionnelle (instantanée) du système télescope+atmosphère, l'image n'est plus la fonction d'Airy résultant de l'autocorrélation de la pupille non perturbée, mais présente des *tavelures* (en anglais *speckles*) de taille caractéristique  $\lambda/D$  répartis aléatoirement dans une zone de diamètre  $\lambda/r_0$ . La force de la turbulence est donc caractérisée par la grandeur  $D/r_0$ , et le nombre moyen de speckles dans une image est  $(D/r_0)^2$ . Le temps de vie d'un speckle  $\tau_0$ , i.e. le temps pour lequel on peut considérer que l'image est figée est appelé temps de cohérence. Si on intègre l'image sur un temps très supérieur à  $\tau_0$  (on parle alors d'image longue pose), les speckles aléatoires vont se moyennner de manière incohérente, laissant place à une tache de largeur typique  $\lambda/r_0$ . On a perdu le pouvoir de résolution d'un télescope de diamètre  $D$  et tout se passe comme si on était en présence d'un télescope de diamètre  $r_0$  sans turbulence. En effet, si  $\phi_i(r)$  décrit la phase turbulente au niveau de la pupille  $P_i(r)$ , la fonction de transfert longue pose  $\langle H_i(f) \rangle$  du télescope (ou encore pic photométrique en interférométrie) s'écrit par définition:

$$\begin{aligned} \langle H_i(f) \rangle &= \int P_i(r)P_i(r + \lambda f) \langle e^{i\phi_i(r)} e^{-i\phi_i(r+\lambda f)} \rangle dr \\ &= \int P_i(r)P_i(r + \lambda u) e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\phi(r,\lambda f)} dr \end{aligned} \quad (2.22)$$

moyennant une statistique Gaussienne pour la phase turbulente et introduisant la fonction de structure [RODDIER (1989)]:

$$\mathcal{D}_\phi(r, \rho) = \langle [\phi_i(r) - \phi_i(r + \rho)]^2 \rangle \quad (2.23)$$

Dans l'hypothèse de stationnarité de la fonction de structure  $\mathcal{D}_\phi(r, \rho) = \mathcal{D}_\phi(\rho)$  [CONAN (1994)], la fonction de transfert longue pose turbulente devient:

$$\langle H_i(f) \rangle = T_i^0(f) \cdot \mathcal{B}(f) \quad (2.24)$$

où  $T_i^0(f)$  et  $\mathcal{B}(f)$  sont les fonctions de transfert respectivement du télescope  $i$  et de l'atmosphère. L'expression théorique de cette dernière est:

$$\mathcal{B}(u) = \exp \left[ -3.44 \left( \frac{\lambda f}{r_0} \right)^2 \right] \quad (2.25)$$

1. Dans le cas de forte turbulence, il peut aussi y avoir des fluctuations d'amplitude du front d'onde. Ce phénomène est appelé scintillation et a été étudié en détail par [MAHÉ (2000)]. Cet effet sera négligé dans le cadre de cette thèse.

2. En d'autres termes, les phases situées à deux endroits distincts  $r$  et  $r + \rho$ , sont partiellement décorrélées, et ce d'autant plus que  $\rho$  augmente

Il est à noter qu'on peut tirer avantageusement parti de la turbulence atmosphérique pour détecter des compagnons faibles (type exoplanètes) autour d'étoiles. En effet, l'addition de phases aléatoires peut provoquer dans l'image des interférences fortement destructrices. On parle alors de speckle noir. Si l'on cartographie la position de ces speckles noirs, en intégrant sur un temps assez long, ceux-ci vont petit à petit couvrir toute l'image, sauf à l'endroit où se trouve la planète et où la formation de speckle noir est donc interdite. On aura alors détecté la présence d'un compagnon [LABEYRIE (1995)].

Au niveau de l'interféromètre, la turbulence introduit un déphasage global (i.e. un piston) entre les fronts d'onde arrivant sur deux télescopes distincts. Il en résulte un décalage aléatoire des franges par rapport à la ddm nulle. Ainsi, si on intègre l'interférogramme sur un temps supérieur au temps de cohérence  $\tau_0$ , il va se produire un brouillage des franges et donc une perte de contraste. Le pic interférométrique longue pose  $\langle H_{ij}(f) \rangle$  des télescopes  $i$  et  $j$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \langle H_{ij}(f) \rangle &= \int P_i(r)P_j(r + \lambda f) \langle e^{i\phi_i(r)}e^{-i\phi_j(r+\lambda f)} \rangle dr \\ &= T_{ij}^0(f). \exp\left(i\overline{\Phi_{ij}^{kl}}\right) e^{-\sigma_\phi^2} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

moyennant l'hypothèse de décorrélation entre les deux phases turbulentes  $\phi_i$  et  $\phi_j$ <sup>1</sup>.  $\overline{\Phi_p^{kl}}$  est le piston différentiel moyen. Le pic interférométrique long temps de pose résulte du pic interférométrique non turbulent pondéré par deux coefficients d'atténuation:

- $E_c = e^{-\sigma_\phi^2}$  est appelée l'énergie cohérente où  $\sigma_\phi^2$  est la variance de la phase turbulente (piston exclu). Sans correction partielle du front d'onde,  $E_c \sim 0$ , ce qui rend la détection des franges impossible.
- $e^{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2}$  où  $\sigma_{ij}^2$  est la variance du piston différentiel, rend compte du brouillage des franges dû à leur déplacement aléatoire. Sans suiveur de frange, instrument qui permet de suivre et de compenser en temps réel le déplacement de l'interférogramme sur le détecteur<sup>2</sup>, ce coefficient tend aussi vers 0, annulant le contraste des franges.

### *Correction partielle par Optique Adaptative*

Pour pallier le problème des fluctuations de phase du front d'onde au niveau de la pupille d'un télescope, une solution consiste à équiper le télescope d'un système d'Optique Adaptative (OA) [ROUSSET *et al.* (1990)]. En quelques mots, ce système est une boucle d'asservissement rétroactif composé d'un analyseur qui permet de mesurer les déformations du front d'onde turbulent et d'un miroir déformable qui compense en temps réel ces fluctuations via une matrice d'actuateurs qui donnent au miroir la forme désirée. Cependant, le nombre d'actuateurs étant fini et la distance inter-actuateurs non nulle, une Optique Adaptative réelle n'arrive à

---

1. Cette condition est strictement vérifiée quand la ligne de base  $B_{ij}$  est supérieur à l'échelle externe  $\mathcal{L}_0$   
2. On parle de cohérence ou de cophasage selon que l'on maintient les franges stables respectivement à quelques  $\lambda$  ou à moins d'une frange

reproduire que les déformations spatiales de bas-ordre de la turbulence. Ainsi le front d'onde corrigé n'est pas parfaitement plan mais il reste des variations hautes fréquences, que l'on peut caractériser par la variance de la phase résiduelle sur le front d'onde  $\sigma_r^2$ . Cette technique permet, bien qu'imparfaitement et de manière atténuée, de recouvrir l'ensemble des fréquences spatiales de l'objet jusqu'à la fréquence de coupure du télescope non turbulent. Ainsi la fonction de transfert longue pose partiellement corrigée par Optique Adaptative peut se décomposer en deux termes [CONAN (1994)]: un terme basse fréquence correspondant aux variations résiduelles du front d'onde  $T^0(u)\mathcal{B}(u)$ <sup>3</sup> et un terme haute fréquence  $T^0(u)$  correspondant à une correction (supposée parfaite) des bas-ordre du front d'onde. La fraction d'énergie contenue dans la partie corrigée est par définition l'énergie cohérente  $E_c = e^{-\sigma_r^2}$  et la fonction de transfert partiellement corrigée s'écrit donc:

$$\langle H(f) \rangle = T^0(f) [(1 - E_c)\mathcal{B}(f) + E_c] \quad (2.27)$$

La réponse impulsionnelle  $\langle h(\alpha) \rangle$  (TF inverse de  $H(f)$ ) est donc constituée d'un halo incohérent  $I_{halo}(\alpha)$  et d'un pic cohérent dont l'énergie est  $E_c$ :

$$\langle h(\alpha) \rangle = I_{halo}(\alpha) + E_c I^0(\alpha) \quad (2.28)$$

Plus la correction de l'OA est importante, plus la variance résiduelle va diminuer et de plus en plus d'énergie sera concentrée dans le pic cohérent. Si on projette la phase turbulente sur la base des polynômes de Zernike et que l'on considère les  $n$  premiers modes parfaitement corrigés par l'OA, l'énergie cohérente s'écrit [NOLL (1976)]:

$$E_c \simeq \exp \left[ -0.458(n+1)^{-\frac{5}{3}} \left( \frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (2.29)$$

L'énergie cohérente est donc une mesure de l'efficacité de l'Optique Adaptative. Un autre critère de qualité consiste à calculer le rapport de Strehl  $\mathcal{S}$  défini comme le rapport de l'intensité au centre du champ sur l'intensité obtenue avec un télescope parfait:

$$\mathcal{S} = \frac{\langle h(0) \rangle}{I^0(0)} = E_c + \frac{I_{halo}(0)}{I^0(0)} \quad (2.30)$$

Ainsi, l'Optique Adaptative permet de corriger les effets de la turbulence au niveau d'un télescope. Cependant, du point de vue de l'interférométriste, elle ne règle en aucun cas le problème du piston différentiel. Il est donc nécessaire de recourir à d'autres méthodes, propres à l'interférométrie.

### 2.1.5 Interférométrie des tavelures

#### *Principe*

Le concept d'interférométrie des tavelures (ou interférométrie speckle) a été introduit par [LABEYRIE (1970)] pour des télescopes mono pupilles. Constatant qu'une analyse *quadratique*

3. Pour être totalement rigoureux, il faut considérer dans l'expression de la fonction de transfert turbulente un  $r_0^{eq}$  équivalent supérieur au  $r_0$  de l'atmosphère [CONAN (1994)].

du signal pouvait pallier (en partie) l'effet désastreux de la phase atmosphérique sur l'image, il proposa de mesurer non plus la fonction de transfert longue pose de l'image  $\langle H(f) \rangle$  mais sa densité spectrale  $\langle |H(f)|^2 \rangle$ . Dans le cas purement turbulent, cette fonction s'écrit [RODDIER (1989), en voir aussi l'illustration en Figure B.3]<sup>1</sup>:

$$\langle |H(f)|^2 \rangle = \overbrace{\mathcal{B}(f)|T^0(f)|^2}^{f \leq r_0/\lambda} + \overbrace{\frac{\sigma}{S}T^0(f)}^{f > r_0/\lambda} = \langle |H(f)| \rangle^2 + \frac{\sigma_c}{S}T^0(f) \quad (2.31)$$

Calculer la densité spectrale de l'image permet d'obtenir des informations jusqu'à la fréquence de coupure du télescope. Les hautes fréquences sont atténuées par le coefficient  $\frac{\sigma_c}{S}$  où

$$\sigma_c = \int \mathcal{B}(f)df \quad (2.32)$$

est l'aire de cohérence du front d'onde perturbé et

$$S = \int |P(r)|^2 dr \quad (2.33)$$

est la surface de la pupille. Ce coefficient d'atténuation est directement relié à la force de la turbulence puisque  $\frac{\sigma_c}{S} \simeq \left(\frac{r_0}{D}\right)^2$ .

Adaptée à l'interférométrie longue base [BERIO *et al.* (1999)], cette technique, dite interférométrie multispeckle, permet de s'affranchir du problème du piston atmosphérique. En effet la densité spectrale longue pose du pic interférométrique s'écrit (cas purement turbulent):

$$\langle |H_{ij}(f)|^2 \rangle = \frac{\sigma_c}{S}T_{ij}^0(f) \quad (2.34)$$

en supposant toujours la décorrélation des fronts d'ondes entre les pupilles des télescopes  $i$  et  $j$ . La densité spectrale longue pose du pic interférométrique est donc la fonction de transfert du pic *non turbulent*, pondéré par le coefficient d'atténuation  $\frac{\sigma_c}{S}$ . De plus elle ne dépend pas du piston différentiel.

La densité spectrale de l'image s'écrit finalement (en supposant qu'aucun des pics – photométrique et interférométriques – ne se recouvrent):

$$\langle |I(f)|^2 \rangle = N^2 \left\langle \left| \sum_{i=1}^{N_{tel}} t_i H_i(f) \right|^2 \right\rangle |V(f)|^2 + \sum_{i=1}^{N_{tel}} \sum_{j>i}^{N_{tel}} \langle |M_{ij}(f)|^2 \rangle \quad (2.35)$$

$\langle |M_{ij}(f)|^2 \rangle$  étant la densité spectrale de l'interférogramme corrigé de la photométrie, et correspondant à la ligne de base  $f_{ij}$ :

$$\langle |M_{ij}(f)|^2 \rangle = N^2 t_i t_j |V(f)|^2 \left[ |H_{ij}(f - f_{ij})|^2 + |H_{ij}^*(-f - f_{ij})|^2 \right] \quad (2.36)$$

---

1. Ceci n'est rigoureusement vrai que si la pupille vérifie  $|P(r)|^2 = P(r)$

*Estimateurs de la visibilité*

Le but de ce paragraphe est de répertorier et de comparer les performances des différents estimateurs permettant de remonter à l'information de visibilité. Plus précisément je concentre mon analyse sur les multiples façons d'estimer le *flux cohérent*. Ainsi je considère dans tous les cas la même calibration photométrique, soit par en calculant l'intégrale du pic basse fréquence de la densité spectrale [RODDIER & LENA (1984)], soit en prélevant une partie du flux en amont de la recombinaison (i.e. en utilisant des voies photométriques). Cette dernière n'a donc pas d'influence dans l'étude comparative des performances des estimateurs de visibilité.

ESTIMATEUR POINT PAR POINT À partir du calcul du pic haute fréquence de la densité spectrale de l'image, il est possible d'estimer le flux cohérent, puisque introduisant l'expression 2.11 dans l'équation précédente, nous avons point par point la relation:

$$\langle |M_{ij}(f)|^2 \rangle = |F_c(f)|^2 \frac{[\langle |H_{ij}(f - f_{ij})|^2 \rangle + \langle |H_{ij}^*(-f - f_{ij})|^2 \rangle]}{4} \quad (2.37)$$

Cet estimateur du flux cohérent est appelé estimateur *point par point*. Une fois la calibration photométrique effectuée, la visibilité estimée doit ensuite être calibrée par un point source pour s'affranchir de la visibilité instrumentale et atmosphérique (notamment due au terme  $\langle |H_{ij}(f)|^2 \rangle$ , cf Eq. 2.34). L'estimateur précédent présente l'avantage de mesurer la visibilité de l'objet point par point, sur tout le support de la fonction de transfert interférométrique, couvrant ainsi une gamme continue de fréquences spatiales de l'objet. Il est donc adapté aux systèmes d'imagerie par interférométrie [THIÉBAUT (1994)].

ESTIMATEUR INTÉGRAL Cependant, il est communément choisi [RODDIER & LENA (1984), MOURARD *et al.* (1994)] de calculer le flux cohérent à partir de l'*intégrale* de la densité spectrale, pour des raisons de rapport signal à bruit [CONAN (1994)] (nous verrons par la suite que le rapport de cause à effet n'est pas si évident que cela). L'estimateur *intégral* devient donc:

$$\int \langle |M_{ij}(f)|^2 \rangle df = \frac{|F_c^{ij}|^2}{4} \int [\langle |H_{ij}(f - f_{ij})|^2 \rangle + \langle |H_{ij}^*(-f - f_{ij})|^2 \rangle] df \quad (2.38)$$

Cette opération a pour effet immédiat de réduire numériquement le champ de vue de l'interféromètre [TALLON & TALLON-BOSC (1992)], puisque l'on considère une visibilité moyennée sur le pic frange. Cela revient dans le plan image à multiplier l'objet par le lobe interférométrique (i.e. la TF inverse de  $H_{ij}$ ). Pour les mêmes raisons que précédemment, la visibilité résultante doit être calibrée par un point source. Il est aussi important de remarquer que l'on introduit implicitement des *a priori* dans l'estimateur: la position et le support en fréquence du pic. Ne pas introduire ces *a priori* implique d'intégrer  $\langle |M(f)|^2 \rangle$  sur tout le spectre.

AJUSTEMENT DE LA DENSITÉ SPECTRALE On peut alors pousser le raisonnement plus loin. Puisque le pic spectral haute fréquence est la fonction de transfert *non turbulente*  $T_{ij}^0(f)$ ,

on doit pouvoir caractériser sa forme, i.e. calibrer la réponse impulsionnelle du télescope en laboratoire. Si tel est le cas, on peut introduire notre connaissance a priori de la forme du pic dans le calcul du flux cohérent. Et l'estimation de  $|F_c^{ij}|^2$  se fait en minimisant le  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \left[ \frac{T_{ij}^0(f)}{4} |F_c^{ij}|^2 - \langle |M(f)|^2 \rangle \right]^T C_{|M|^2}^{-1} \left[ \frac{T_{ij}^0(f)}{4} |F_c^{ij}|^2 - \langle |M(f)|^2 \rangle \right] \quad (2.39)$$

La visibilité calculée doit toujours être calibrée par un point source car l'amplitude du pic fringe n'est pas connue et dépend de la turbulence atmosphérique.

### *Analyse des performances des différents estimateurs*

Pour comparer les performances des différents estimateurs, on associe leur rapport signal à bruit à celui du numérateur puisque la calibration photométrique est la même dans tous les cas.

**ESTIMATEUR POINT PAR POINT** Dans ce cas, le RSB sur le flux cohérent est simplement le RSB sur la densité spectrale de l'interférogramme en la fréquence considérée:

$$\text{RSB} \{|F_c^{ij}(f)|^2\} = \frac{\text{E} \{|M_{ij}(f)|^2\}}{\sigma \{|M_{ij}(f)|^2\}} \quad (2.40)$$

Une manière élégante et efficace de calculer le RSB sur  $|M(f)|^2$ , basée sur un modèle continu du processus de détection, a été introduite par [GOODMAN (1985)]. L'annexe A complète cette approche lorsque l'interférogramme est corrompu par le bruit de détecteur, le bruit de photon et le bruit de speckle résultant des fluctuations aléatoires des tavelures dans l'image.

**ESTIMATEUR INTÉGRAL** Lorsqu'on prend le parti d'intégrer la densité spectrale, le RSB sur l'énergie cohérente devient:

$$\text{RSB} \{|F_c^{ij}|^2\} = \frac{\sum_k \text{E} \{|M_{ij}(f_k)|^2\}}{\sqrt{\sum_k \sigma^2 \{|M(f_k)|^2\} + 2 \sum_{k<l} \text{Cov} \{|M_{ij}(u_k)|^2, |M_{ij}(u_l)|^2\}}} \quad (2.41)$$

En vertu des principes de la Transformée de Fourier numérique, l'échantillonnage en fréquence est inversement proportionnel à la dimension de l'image sur le détecteur. Or le "champ de vue" du détecteur est généralement déterminé par les objectifs astrophysiques (typiquement de l'ordre de quelques disques d'Airy). Le nombre de points échantillonnant le pic haute fréquence reste alors relativement faible (autour de la dizaine). De plus il faut noter que ces points sont en toute rigueur *partiellement corrélés*. Ainsi le précepte selon lequel l'intégration du pic fringe augmente le RSB de la visibilité n'apparaît plus comme une évidence, et au mieux le gain potentiel reste relativement faible. Ce gain dépend du régime de bruit dans lequel on se place, du "champ de vue" du détecteur, ainsi que du domaine (fréquentiel) d'intégration choisi. La figure 2.5 trace les RSB sur le flux cohérent pour les différents estimateurs considérés, dans le cas purement turbulent et dans le cas parfaitement corrigé par Optique Adaptative. Le "champ de vue" du détecteur est fixé à 3 disques d'Airy.

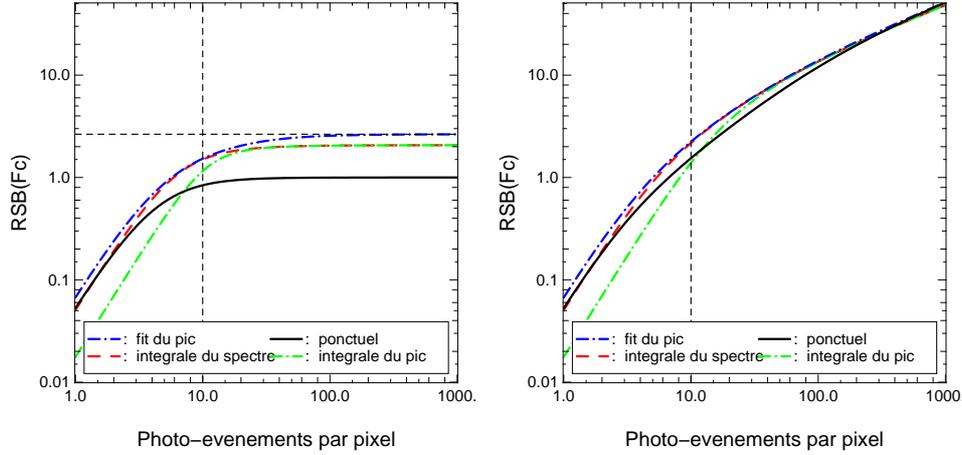


FIG. 2.5: . Rapport signal à bruit sur le flux cohérent dans le cas purement turbulent (gauche) et parfaitement corrigé par Optique adaptative (droite). Les différents estimateurs utilisés sont indiqués sur les figures. Les calculs de RSB se basent respectivement sur les équations 2.40 (point par point), 2.41 (intégral) et 2.42 (ajustement). L'analyse quantitative s'appuie alors sur le formalisme de Goodman développé en annexe A. Lors de l'intégrale du pic, ce dernier est échantillonné sur 7 points, ce qui correspond à un "champ de vue" du détecteur de  $4\lambda/D$ . Le bruit de détecteur est  $\sigma = 10e^-/\text{pix}$ , le nombre de pixels par frange est  $N = 4$ . La visibilité est  $V_{ij} = 0.6$ .  $D/r_0 = 5$ . Dans la figure de gauche, la ligne verticale sépare les régimes "bruit de détecteur" et "bruit de speckle", le régime "bruit de photon" étant quasi-inexistant. Dans la figure de droite elle discrimine les régimes "bruit de détecteur" et "bruit de photon".

Premièrement dans le bruit de détecteur, on remarque que dans le "cas d'école" où l'on ne fait aucune hypothèse sur le pic, le fait d'intégrer sur tout le spectre (i.e. en partie à des endroits où il n'y pas de signal) est rédhibitoire. Dans le cas plus réaliste où l'on intègre sur le support du pic, l'effet sur le RSB est très faible, voire négatif, et ce à cause des corrélations entre les mesures. Le même phénomène se produit dans le bruit de photon, régime dans lequel les points du pic sont corrélés. Il n'y a finalement que dans le régime bruit de speckle, lorsque la turbulence provoque la décorrélation des mesures que le gain est optimal. Cependant le facteur multiplicatif sur le RSB n'atteint pas la racine du nombre de points échantillonnant le pic. Ceci est inhérent à l'intégration, puisqu'on attribue implicitement un poids identique à chaque point du pic alors que l'amplitude du signal varie dans un niveau de bruit constant. Ainsi pour optimiser le RSB, et ce dans n'importe quel régime de bruit, il faut introduire *a priori* la forme du pic dans l'estimateur intégral. On est alors dans la situation suivante.

AJUSTEMENT DE LA DENSITÉ SPECTRALE Lorsque le pic est parfaitement connu (i.e. non bruité), l'erreur sur le flux cohérent s'écrit [VON DER HEIDE & KNOECHEL (1979a)]:

$$\sigma^2 \{|F_c^{ij}|^2\} = \text{Diag} \left\{ [T_{ij}^0]^T C_{|M|^2}^{-1} [T_{ij}^0] \right\} \quad (2.42)$$

Comme la figure 2.5 en témoigne, cette technique permet d'être *toujours* supérieure à l'estimateur point par point, jusqu'à amplifier le RSB d'un facteur égal à la racine du nombre de points échantillonnant le pic dans le cas de mesures non corrélées, i.e. dans le bruit de speckle. On peut tout de même se demander si tous ces efforts d'optimisation de l'estimateur du flux cohérent en valent la peine sachant que le gain récolté se situera autour d'un facteur 3 ou 4 tout au plus. D'autant que ces conclusions sont à reconsidérer si le pic n'est pas parfaitement connu, et donc si les erreurs induites par l'ajustement du pic HF réduisent de façon rédhibitoires la robustesse de cet estimateur. De plus, celui-ci n'est à utiliser que si le RSB sur le pic est bien meilleur (i.e. que sa calibration en laboratoire soit la plus "propre" possible) que celui sur les mesures.

### *Bruit de speckle en correction partielle*

La figure 2.5 nous renseigne aussi sur le fait que la turbulence atmosphérique, via la fluctuation des speckles dans l'image, induit une saturation du RSB sur la visibilité, limitant sévèrement les performances de l'interférométrie speckle (RSB de 1 dans le cas de l'estimateur point par point). On remarque aussi et surtout que le régime de bruit de photon est quasiment inexistant. Cette situation perdure même en correction partielle par Optique Adaptative, jusqu'à des niveaux élevés de rapport de Strehl [TATULLI *et al.* (2004)]. L'évolution du bruit de speckle en fonction de la correction présentée en figure 2.6 en est une illustration. En effet, pour un seeing (taille caractéristique  $\omega$  du halo turbulent) typique allant de  $\omega = 0.7''$  au double en bande  $K$ , ce qui correspond à une turbulence de  $D/r_0 = 5 - 10$  dans le cas de grands télescopes (VLTI, KeckI), il faut une Optique Adaptative corrigeant parfaitement de 20 à 40 polynômes de Zernike pour décupler le RSB maximal sur la visibilité. En terme de Strehl, l'Optique Adaptative doit être capable de fournir un Strehl de  $\mathcal{S} = 0.6 - 0.7$ , soit des performances dignes des meilleurs systèmes actuellement disponibles (comme MACAO sur le VLTI)!

De plus, comme il a été mentionné précédemment, tous ces estimateurs nécessitent d'être calibrés par un point source. Or cette calibration va être très sensible à une variation de seeing et/ou à une variation de Strehl. Même en prenant soin d'alterner rapidement les observations et les poses de calibration il est probable que les performances de l'Optique Adaptative varient, notamment à cause de la différence de magnitude entre l'étoile observée et l'étoile de référence. Si on trace sur la Figure 2.7 l'erreur faite sur la visibilité lorsque le rapport de Strehl change entre les observations et les poses de calibration, on remarque qu'une variation de 10% du Strehl entraîne une erreur relative de 3% à 10% selon la calibration photométrique et cette erreur augmente très rapidement pour des changements de Strehl plus grands. La faible robustesse<sup>1</sup> de ces estimateurs est bien sûr plus que préjudiciable pour une analyse pertinente des données interférométriques. Une solution rudimentaire consisterait à tracer des abaques théoriques sur l'erreur relative en fonction des variations de Strehl (comme la figure 2.7) et

---

1. Il est à noter cependant que la robustesse des estimateurs multispeckle ne dépend pas de la taille de la source observée.

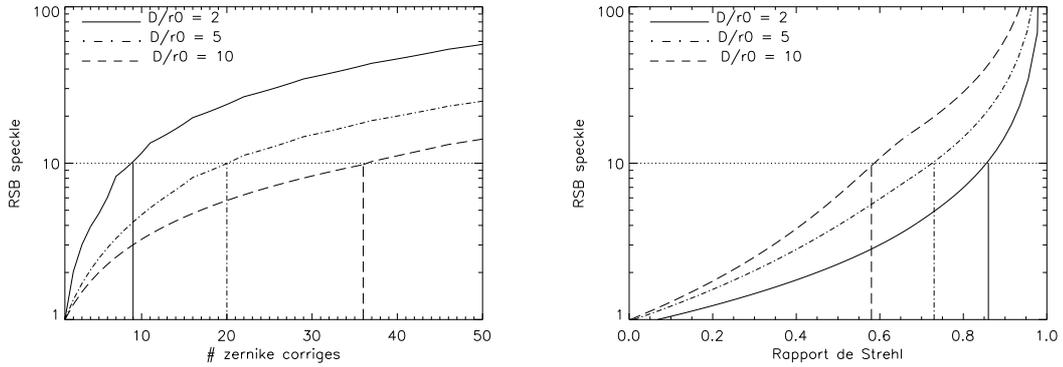


FIG. 2.6: Rapport Signal à Bruit sur le flux cohérent dans le régime bruit de speckle, en fonction de la correction par Optique Adaptative. Cette correction est illustrée pour différents  $D/r_0$ , soit par le nombre de zernike corrigés (gauche), soit par le rapport de Strehl (droite). Les pointillés désignent le niveau de correction requis pour obtenir un RSB de 10.

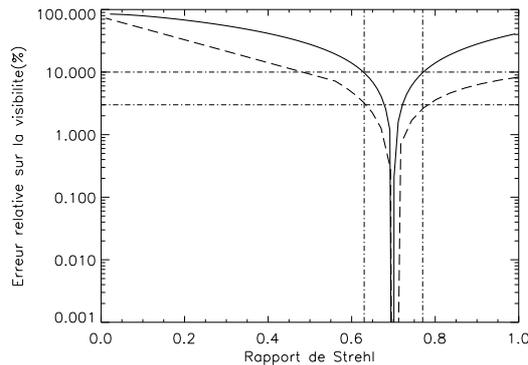


FIG. 2.7: Erreur relative sur la visibilité calibrée lorsque la correction par OA change entre la source d'intérêt (avec  $S = 0.7$ ) et l'étoile de calibration. Les résultats sont donnés pour une calibration photométrique par intégration du pic basse fréquence (ligne brisée) et par estimation indépendante des flux photométriques (ligne pleine).

de les corriger *a posteriori* si des mesures du système d'Optique Adaptative sont disponibles.

Parallèlement, depuis que [CONNES *et al.* (1985)] ont proposé d'équiper les télescopes de guide d'ondes, d'immenses progrès ont été effectués sur le plan des performances de l'interférométrie optique. Ces guides ont en effet pour vocation de filtrer le front d'onde dégradé, transformant ainsi les fluctuations de phase en fluctuations d'intensité plus facilement calibrables [COUDE DU FORESTO *et al.* (1993), COUDÉ DU FORESTO (1997), MALBET *et al.* (1999)]. Ainsi, les remarquables propriétés de filtrage spatial des fibres monomodes, leur faible coût ainsi que la déconcertante facilité d'intégration de l'optique guidée planaire dans un environnement optique complexe (en comparaison avec de l'optique de volume, [KERN *et al.*

(2000)) font qu'aujourd'hui nombre d'interféromètres existants et à venir proposent dans leur conception l'utilisation de fibres et/ou de composants d'optique intégrée (IOTA/FLUOR [COUDÉ DU FORESTO *et al.* (2000)], IOTA/IONIC [BERGER *et al.* (2001)], PTI [COLAVITA *et al.* (1999)], VLT/VINCI [KERVILLA *et al.* (2003)], VLT/AMBER [PETROV *et al.* (2003)], KECK-I [COLAVITA *et al.* (1998)]). Si le bénéfice apporté par les fibres optiques n'est plus à démontrer expérimentalement, peu d'études théoriques sont venues corroborer les résultats des observations. Après un bref historique des travaux relatifs à l'interférométrie monomode, la partie suivante de ce chapitre s'attache à caractériser d'un point de vue théorique le signal effectivement mesuré par un interféromètre fibré, pour ensuite en étudier les performances en présence de correction partielle par Optique Adaptative.

## 2.2 Interférométrie monomode

L'idée d'introduire des guides d'ondes (et plus précisément des fibres monomodes) dans le schéma optique d'un interféromètre longues bases a commencé à faire son chemin dans le début des années 1980. En concevant des interféromètres aux lignes de bases de plus en plus grandes et avec un nombre croissant de télescopes, on prit rapidement conscience de leur caractère "pratique", par opposition aux lourdes contraintes imposées par l'optique de volume pour ce qui concerne le transport et la recombinaison des faisceaux. Ainsi [FROEHLI (1982)], [CONNES *et al.* (1985)] en énonçant les principes essentiels du filtrage modal, puis quelques années plus tard [CONNES *et al.* (1987)] en proposant un concept d'interféromètre appelé FLOAT (Fiber Linked Optical Array Telescope) faisant usage des fibres optiques monomode, se sont radicalement écartés du modèle d'interféromètre "conventionnel". [SHAKLAN & RODDIER (1987)] et [SHAKLAN (1988)] creusèrent cette idée et recensèrent les avantages (alignement, transport, etc...) et les inconvénients (transmission, effets de polarisation, dispersion, etc...) des fibres monomodes en interférométrie. Sur leur lancée [SHAKLAN & RODDIER (1988)] montrèrent que le taux de couplage de la lumière provenant d'un objet *ponctuel* dans une fibre optique monomode est géométriquement limité à 80% à cause de l'inadéquation entre la tache d'Airy du télescope et de la forme (quasi) gaussienne du premier mode de la fibre. De plus, ils établirent à partir de simulations que ce taux de couplage se trouvait fortement atténué en présence de turbulence atmosphérique. Indépendamment, l'équipe optique de l'IRCOM (Institut de Recherche en Communications Optiques et Micro-ondes) s'attacha à démontrer en laboratoire la faisabilité de l'interférométrie monomode. Grâce aux progrès de ses travaux, entre autres au niveau de la stabilisation de la longueur des fibres [REYNAUD *et al.* (1992)] et surtout du contrôle des effets de polarisation par l'utilisation de fibres hautement biréfringentes [DELAGE & REYNAUD (1997)], l'équipe parvint à développer un démonstrateur d'interféromètre monomode complet. En reconstruisant des images à partir de leur instrument, ils validèrent expérimentalement le concept de synthèse d'ouverture à haute résolution faisant usage de fibres optiques [DELAGE *et al.* (1999), DELAGE *et al.* (2000)].

De façon naturelle, on commença parallèlement à s'intéresser d'un point de vue théorique à l'effet des fibres sur les performances d'un interféromètre, i.e. sur la précision des mesures de visibilité. Ainsi [COUDE DU FORESTO *et al.* (1997)] proposèrent, à la lumière de l'expérience FLUOR, un estimateur de visibilité permettant de s'affranchir des effets de la turbulence atmosphérique en effectuant une calibration *simultanée* de la photométrie, les flux photométriques étant mesurés indépendamment via des sorties dédiées à cet effet. Cette étude démontrait que l'interférométrie fibrée pouvait conduire à des mesures de visibilité d'une très grande précision. Cependant, une telle analyse partait du principe que le facteur de cohérence mutuelle  $\mu$  peut s'écrire sous la forme  $\mu = T_i T_a V$ , où  $T_i$  et  $T_a$  sont respectivement la fonction de transfert instrumentale et la fonction de transfert atmosphérique. Or, [MÈGE *et al.* (2003)] remarqua plus tard – et nous en verrons l'illustration tout au long de ce chapitre – que cette hypothèse n'est vérifiée que dans le cas de sources compactes, i.e. non résolues

par les télescopes constituant l'interféromètre. De la même manière, [RUILIER *et al.* (1997)] étudièrent sur simulations les performances de différents estimateurs de la visibilité "fibrée" en correction partielle par Optique Adaptative, mais en considérant un *objet ponctuel*.

Le cas d'un objet de taille quelconque, ou de façon équivalente l'effet de la taille finie de la pupille des télescopes fut caractérisé par [DYER & CHRISTENSEN (1999)], mais d'un point de vue strictement *géométrique*, sans considérer l'effet de la turbulence atmosphérique. Ils montrèrent que la visibilité "fibrée" est affectée d'un biais d'autant plus important que les pupilles sont petites, relativement à la largeur de la fonction de cohérence mutuelle de la source. [LONGUETEAU (2002)] poursuivit cette analyse en établissant que la clôture de phase "fibrée" est elle aussi corrompue par un biais géométrique. De son côté [GUYON (2002)] s'intéressa à l'imagerie grand champ avec un interféromètre monomode en présence de turbulence atmosphérique. Grâce à ses simulations, il montra que les observations d'objets étendus (i.e. résolus par un télescope) ne peuvent être complètement corrigées des perturbations atmosphériques du front d'onde et en conséquence, mit en évidence la difficulté d'obtenir de mesures précises de visibilités sur de tels objets. Cependant, il ne caractérisa pas sur le plan formel, la nature de la relation entre la visibilité "réelle" de l'objet et la visibilité estimée à partir des interférogrammes. [MÈGE (2003)], dans son considérable travail de défrichage théorique permit, en décrivant formellement comment la lumière est transportée et traitée au travers d'un interféromètre utilisant des guides d'ondes, d'unifier les précédentes études, certes toutes indispensables mais par trop éparées pour avoir une vision globale du problème. Ainsi en caractérisant complètement le phénomène de couplage entre le front d'onde d'entrée *partiellement corrigé par Optique Adaptative et provenant d'un objet d'étendue spatiale quelconque*, il généralisa le travail des auteurs précédemment cités en énonçant *l'équation interférométrique fibrée*.

Cette partie poursuit le travail de recherche initié par [MÈGE (2003)] sur l'étude rigoureuse et la compréhension du signal interférométrique fibré, et propose une étude quantitative basée sur une approche analytique du phénomène.

### 2.2.1 Le filtrage spatial

Introduire des fibres monomodes pour transporter la lumière et/ou des composants d'optique intégrée pour recombinaison des faisceaux permet d'effectuer un filtrage spatial du front d'onde perturbé par la turbulence atmosphérique et par les aberrations de phase instrumentale. Cela signifie que seule la partie du champ électrique projeté sur le premier mode de la fibre (d'où le terme de "monomode") peut se propager, les autres modes étant rejetés. Ainsi les fluctuations de phase sont changées en fluctuations d'amplitude que l'on peut calibrer. En d'autres termes, le nombre de photo-événements incohérents (photométriques) et cohérents (interférométriques) à la sortie des fibres dépendent du couplage entre le front d'onde turbulent et la fibre [RUILIER (1998)]. Il en résulte que le filtrage spatial peut être caractérisé par des coefficients de couplage, i.e. par la fraction de flux (photométrique et interférométrique) capturée par les fibres. Les coefficients de couplage instantanés  $\rho_i(V_*)$  (photométrique) et

$\rho_{ij}(V_\star)$  (interférométrique) sont décrits en toute généralité par les équations suivantes [MÈGE *et al.* (2001)]:

$$\rho_i(V_\star) = \rho_0 \frac{(V_\star * T^i)_{f=0}}{\int T_0^i(f)df} \quad (2.43)$$

$$\rho_{ij}(V_\star) = \rho_0 \frac{(V_\star * T^{ij})_{f=f_{ij}}}{\sqrt{\int T_0^i(f)df \int T_0^j(f)df}} \quad (2.44)$$

$V_\star$  est la visibilité de la source.  $T^i$  et  $T^{ij}$  sont les fonctions de transferts *modales* partiellement corrigées par Optique Adaptative résultant respectivement de l'autocorrélation et l'intercorrélation pupilles turbulentes pondérées par la forme du premier mode de la fibre. Le symbole  $*$  représente le produit de convolution.  $T_0^i$  est la fonction de transfert non turbulente et  $\rho_0$  est le couplage optimum fixé par la conception du coeur de la fibre. Pour des raisons purement géométriques,  $\rho_0$  ne peut en aucun cas dépasser 0.8 [SHAKLAN & RODDIER (1987)]. On remarque que les couplages dépendent de la taille (respectivement au niveau d'un télescope et au niveau de l'interféromètre) de la source. Si l'objet n'est pas résolu par un télescope, on a à tout instant la relation [COUDÉ DU FORESTO *et al.* (2000)]:

$$\rho_i(V_\star) = \rho_0 \frac{\int T^i(f)df}{\int T_0^i(f)df} = \rho_0 \mathcal{S}^i \quad (2.45)$$

où  $\mathcal{S}^i$  est le rapport de Strehl instantané relatif au  $i^{me}$  télescope *fibré*. De plus, si la visibilité est constante sur le support du pic interférométrique,  $\rho_{ij}(V_\star)$  vérifie l'équation:

$$|\rho_{ij}(V_\star)|^2 = \rho_0^2 \mathcal{S}^i \mathcal{S}^j |V_\star(f_{ij})|^2 \quad (2.46)$$

### 2.2.2 Équation interférométrique et visibilité modale

L'étude de la recombinaison de fronts d'ondes filtrés par des guides est complètement décrite dans [MÈGE (2003)]. Le résultat majeur est que l'équation interférométrique *fibrée* est légèrement modifiée par rapport à l'Eq. 2.7 puisqu'il faut prendre en compte le filtrage spatial, i.e. les coefficients de couplage atténuant le nombre de photons incohérents et cohérents détectés. Cela se traduit par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_i^{N_{tel}} N t_i \rho_i(V_\star) H_i(f) \\ &+ \sum_i^{N_{tel}} \sum_{j>i}^{N_{tel}} N \sqrt{t_i t_j} \rho_{ij}(V_\star) [H_{ij}(f - f_{ij}) + H_{ij}^*(-f - f_{ij})] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Contrairement à l'équation 2.7,  $H_i(f)$  et  $H_{ij}(f)$  sont les transformées de Fourier des ondes porteuses photométriques et interférométriques. Les ondes porteuses, qui comme leur nom l'indique et par analogie avec les télécommunications transportent le signal (photométrique et interférométrique), sont définies par la géométrie de la fibre et déduites du concept optique de l'instrument. En conséquence, les pics basse et haute fréquence  $H_i(f)$  et  $H_{ij}(f)$  sont

déterministes et ne dépendent pas de l'atmosphère. La contribution de l'atmosphère sur le signal est entièrement caractérisée par les coefficients de couplage. Les expressions du flux photométrique et du flux cohérent deviennent:

$$F_i = N t_i \rho_i(V_\star) \quad (2.48)$$

$$F_c^{ij} = 2N \sqrt{t_i t_j} \rho_{ij}(V_\star) \quad (2.49)$$

Ainsi, les estimateurs linéaire et quadratique de la visibilité *modale*, i.e. de la visibilité mesurée par un interféromètre monomode s'écrivent:

$$\tilde{V}_{ij} = \frac{\langle F_c^{ij} \rangle}{\langle 2\sqrt{F_i F_j} \rangle} = \frac{\langle \rho_{ij}(V_\star) \rangle}{\langle \sqrt{\rho_i(V_\star)\rho_j(V_\star)} \rangle} \quad (2.50)$$

$$\tilde{V}_{ij}^2 = \frac{\langle |F_c^{ij}|^2 \rangle}{4 \langle F_i F_j \rangle} = \frac{\langle |\rho_{ij}(V_\star)|^2 \rangle}{\langle \rho_i(V_\star)\rho_j(V_\star) \rangle} \quad (2.51)$$

Quelques remarques sur les formules précédentes s'imposent:

- La visibilité modale *n'est pas* la visibilité de l'objet, sauf dans le cas d'un objet ponctuel ou, moins restrictivement, vérifiant les conditions: (i) non résolu par un télescope et (ii) de visibilité quasi-constante sur le pic interférométrique
- L'équation 2.44 nous indique que la visibilité modale résulte d'une intégration de la visibilité de l'objet sur la fonction de transfert modale haute fréquence  $T^{ij}$ . Il en découle que le champ de vue d'un interféromètre fibrée est limité. En effet, si on définit le lobe d'antenne interférométrique comme la TF inverse de la fonction de transfert modale:

$$L^{ij}(\alpha) = \int T^{ij}(f) \exp(-2i\pi\alpha.f) df \quad (2.52)$$

le flux cohérent vient à s'écrire comme:

$$F_c^{ij} = \int O_\star(\alpha) L^{ij}(\alpha) \exp(-2i\pi\alpha.f_{ij}) d\alpha \quad (2.53)$$

L'objet est multiplié par le lobe d'antenne interférométrique. Le champ de vue modal se limite donc à  $\sim \lambda/D$ . Une fibre monomode se comporte donc comme une antenne radio à la différence majeure que le lobe est ici *turbulent* puisque sensible aux aberrations atmosphériques différentielles sur les pupilles.

- Si l'on poursuit l'investigation des termes de l'estimateur de visibilité, on remarque que les coefficients de couplage photométriques induisent aussi une multiplication de l'objet par le lobe l'antenne photométrique  $L^i(\alpha)$  défini comme suit:

$$L^i(\alpha) = \int T^i(f) \exp(-2i\pi\alpha.f) df \quad (2.54)$$

Ce lobe, dépendant des perturbations atmosphériques du front d'onde arrivant sur la pupille est aussi *turbulent*.

- Une conséquence directe des points précédents est que la visibilité modale dépend des conditions atmosphériques.

La visibilité modale est donc *biaisée*. La caractérisation de ces biais constitue l'objet du paragraphe suivant.

### 2.2.3 Biais géométrique: effet de lobe

L'estimateur de visibilité peut être re-écrit dans le plan image sous la forme:

$$V_{ij} = \frac{\int O_{\star}(\alpha) L^{ij}(\alpha) \exp(-2i\pi\alpha \cdot f_{ij}) d\alpha}{\sqrt{\int O_{\star}(\alpha) L^i(\alpha) d\alpha \int O_{\star}(\alpha) L^j(\alpha) d\alpha}} \quad (2.55)$$

On voit alors clairement apparaître les effets de lobe (photométrique et interférométrique) affectant la visibilité modale. En toute rigueur donc, cette dernière est différente de la visibilité de l'objet. On peut néanmoins déjà distinguer plusieurs grandes "tendances" selon la taille de l'objet ainsi que selon la dimension des pupilles:

*Objet ponctuel:* Dans ce cas trivial,  $V_{ij} = V_{\star} = 1$ .

*Sources compactes:* L'objet n'est ni résolu par le lobe d'antenne photométrique, ni par le lobe d'antenne interférométrique (en d'autres termes  $V_{\star}$  est localement quasi-constant sur le support de la fonction de transfert interférométrique, ceci étant d'autant plus vérifié que les pupilles sont petites). Dans ce cas, la relation  $V_{ij} = V_{\star}$  est encore vraie en première approximation et la visibilité modale est non biaisée.

*Sources étendues:* L'objet est résolu à la fois par le lobe photométrique et le lobe interférométrique. L'équation générique 2.55 doit être calculée et la visibilité modale est clairement biaisée. Ce biais n'est pas à proprement parler "calibrable", mais il peut être modélisé et compensé. Cette situation est maintenant illustrée dans les cas d'une source gaussienne et d'une binaire.

#### *Application à l'observation d'une source gaussienne*

La distribution de brillance de l'objet est de forme Gaussienne, de taille caractéristique  $\sigma_o$ :

$$O_{\star}(\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\sigma_o^2}\right) \quad (2.56)$$

$$V_{\star}(f) = \exp(-\pi^2 \sigma_o^2 f^2) \quad (2.57)$$

Pour permettre une étude analytique du biais, on supposera que la forme de la pupille est aussi Gaussienne. Cette approximation est en fait assez pertinente puisque la pupille effective d'un interféromètre fibré résulte de la pondération de la pupille circulaire par le premier mode de la fibre, dont la géométrie est très bien représentée par une Gaussienne. On a donc:

$$P(f) = \exp\left(-\frac{f^2}{\sigma_P^2}\right), \sigma_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D}{\lambda} \quad (2.58)$$

$\sigma_p^2$  est défini de telle sorte que la surface de la pupille effective soit identique à celle d'une pupille circulaire de diamètre  $D$ . On peut alors en déduire la fonction de transfert en appliquant l'autocorrélation de la pupille effective. Si on suppose que tous les télescopes sont identiques, ce calcul est valable à la fois pour les lobes d'antenne photométrique et interférométrique:

$$T_0^i(f) = \exp\left(-\frac{f^2}{\sigma_T^2}\right), \sigma_T = \frac{D}{\lambda} \quad (2.59)$$

$$L_0^i(\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\sigma_D^2}\right), \sigma_D = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{D} \quad (2.60)$$

$T_0^i(f)$  étant la fonction de transfert d'un télescope parfait, elle se calcule comme l'autocorrélation de la pupille  $P(f)$ , et son expression se déduit directement de l'équation 2.58.  $L_0^i(\alpha)$  n'est alors autre que la TF inverse de  $T_0^i(f)$ . À partir de l'équation 2.55, la visibilité modale mesurée par l'interféromètre s'écrit:

$$V_{ij} = \exp\left(-\pi^2 \frac{\sigma_o^2 \cdot \sigma_D^2}{\sigma_o^2 + \sigma_D^2} f^2\right) \quad (2.61)$$

On voit bien que la visibilité modale est biaisée puisque la taille caractéristique  $\tilde{\sigma}_o$  qui va être estimée à partir des mesures ne sera pas  $\sigma_o$  mais  $\frac{\sigma_o \cdot \sigma_D}{\sqrt{\sigma_o^2 + \sigma_D^2}}$ . Ceci est la traduction mathématique du phénomène de multiplication par le lobe d'antenne, avec les deux cas extrêmes que l'on pouvait anticiper:

- $\sigma_o \ll \sigma_D$ , qui revient à dire que l'objet est pas ou peu résolu par l'interféromètre et donc l'effet de lobe est négligeable:  $\tilde{\sigma}_o \simeq \sigma_o$
- $\sigma_o \gg \sigma_D$ , la visibilité est lissée par la fonction de transfert interférométrique, jusqu'à ce qu'on ne mesure plus finalement que le lobe d'antenne:  $\tilde{\sigma}_o \simeq \sigma_D$

Si on exprime la taille de l'objet proportionnellement à la taille du lobe,  $\sigma_o = \beta \sigma_D$ , l'erreur relative faite sur l'estimation de  $\sigma_o$  est:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{|\tilde{\sigma}_o - \sigma_o|}{\sigma_o} = \left| \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}} - 1 \right| \quad (2.62)$$

L'erreur relative est tracée en fonction de  $\beta$  sur la figure 2.8. On remarque que pour des sources de taille moyenne  $\beta = 1/2$  de disque d'Airy (ce qui correspond à un objet de 5 Unités Astronomiques situé à 150 parsec, observé en bande  $K$  par un grand Télescope du VLTI), l'erreur faite sur son diamètre est déjà de 10%. Lors de la mesure par interférométrie fibrée de source, il est donc nécessaire de caractériser le lobe d'antenne pour pouvoir corriger la visibilité modale de ce biais instrumental qui devient rapidement non négligeable.

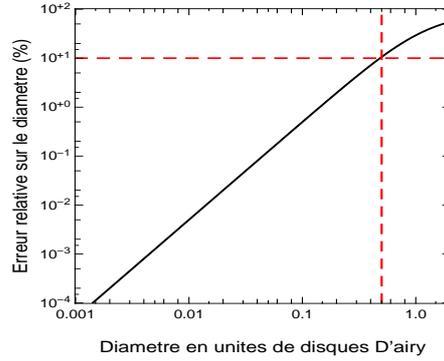


FIG. 2.8: *Erreur relative sur la diamètre de la source en fonction du diamètre effectif  $\sigma_o$  exprimé en unités de disques d'Airy. Pour un taille caractéristique  $\sigma_o = 1/2$  disque d'Airy, l'erreur sur l'ajustement de la gaussienne est déjà de 10%.*

### *Application à l'observation d'une binaire*

Pour le cas d'une source binaire de rapport de flux  $q$  et de séparation  $\Delta\alpha$ , la distribution de brillance s'écrit:

$$O_\star(\alpha) = \frac{1}{1+q}\delta_0 + \frac{q}{1+q}\delta_{\Delta\alpha} \quad (2.63)$$

$$V_\star(f) = \frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q}\exp(-2i\pi\Delta\alpha.f) \quad (2.64)$$

En introduisant l'expression de  $O_\star(\alpha)$  dans l'équation 2.55 et supposant le cas idéal (toujours sans turbulence, cet effet sera traité dans la section suivante) où tous les télescopes sont identiques et donc, où le lobe interférométrique est réel et égal au lobe photométrique, il apparaît rapidement que la visibilité modale a une expression similaire à celle de la visibilité de l'objet:

$$V_{ij} = \frac{1}{1+qL^i(\Delta\alpha)} + \frac{qL^i(\Delta\alpha)}{1+qL^i(\Delta\alpha)}\exp(-2i\pi\Delta\alpha.f_{ij}) \quad (2.65)$$

au détail important près que le rapport de flux apparent  $\tilde{q}$  est:

$$\tilde{q} = qL^i(\Delta\alpha) \quad (2.66)$$

la séparation quant à elle n'étant pas biaisée. Cette dernière équation illustre bien que le champ de vue d'un interféromètre fibré est limité à  $\lambda/D$ . En effet, si la séparation  $\Delta\alpha$  est comprise entre  $-\lambda/2D$  et  $\lambda/2D$ , le flux estimé sera certes atténué par un coefficient  $L^i(\Delta\alpha)$ , mais on pourra toujours conclure de part l'analyse de la courbe de visibilité modale que l'on a détecté une binaire, on pourra même corriger ce biais moyennant une calibration du lobe d'antenne. En revanche, si  $|\Delta\alpha| > \lambda/2D$ , le rapport de flux estimé est quasiment nul, tout se passe comme si on observait un point source, le compagnon étant en dehors du champ de vue.

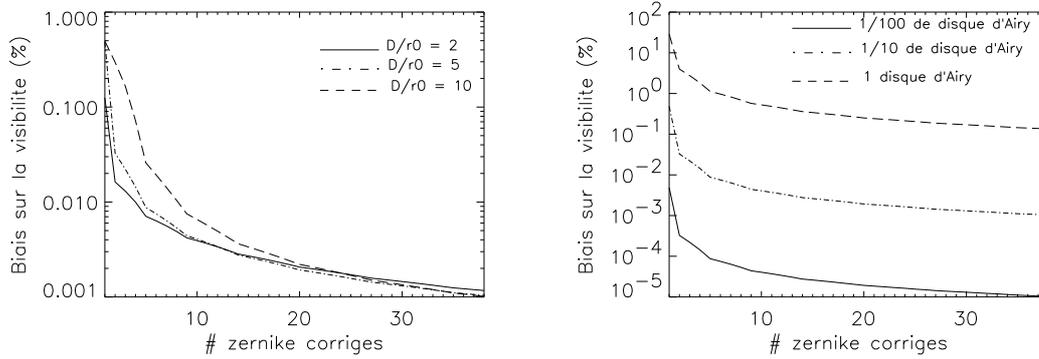


FIG. 2.9: *Biais atmosphérique sur la visibilité modale calculée à partir de l'estimateur quadratique, en fonction du niveau de correction par Optique Adaptative (décrite par le nombre de polynômes de Zernike corrigés). À gauche, le biais est donné pour une taille d'objet de 1/10 de disque d'Airy et pour différent  $D/r_0$ . À droite, le biais est tracé pour différente taille d'objet, avec  $D/r_0 = 5$ .*

#### 2.2.4 Biais atmosphérique - Robustesse

Contrairement au lobe d'antenne des radio-interférométristes (du moins, pour les plus grandes longueurs d'onde),  $L^i$  et  $L^{ij}$  dépendent de la turbulence atmosphérique. Ainsi strictement parlant, la visibilité modale est biaisée par l'atmosphère et, réitérant les raisonnements précédents, on peut déjà subodorer qu'elle sera d'autant plus biaisée que l'objet sera étendu. La valeur de ce biais va néanmoins dépendre de l'estimateur choisi, linéaire ou quadratique. Désormais, je me focaliserai sur l'étude de l'estimateur quadratique car il s'agit de l'estimateur le plus communément utilisé (pour ne pas dire le seul, sachant qu'une estimation linéaire impose une stabilisation draconienne des franges d'interférences). De plus, il permet une analogie immédiate avec l'estimateur intégral de l'interférométrie multispeckle.

##### *Étude du biais atmosphérique*

Le calcul du moment d'ordre deux du coefficient de couplage haute fréquence  $\langle |\rho_{ij}|^2 \rangle$  ne donne pas lieu à une formule théorique simple à analyser. Notamment, il ne fait pas ressortir de manière explicite la contribution du biais atmosphérique. Cependant, il est toujours possible de quantifier ce biais en se donnant un modèle d'objet *a priori*. Dans le cas d'une source Gaussienne, les résultats sont donnés par la figure 2.9. Ainsi, on remarque que pour une source de taille 1/10 de disque d'Airy, le biais sur la visibilité modale quadratique est faible (au maximum de l'ordre du %) et décroît rapidement lorsque le niveau de correction par Optique Adaptative augmente. En revanche, ce biais est très sensible à la taille de la source, ce qui peut être problématique lors de sa calibration par une source de référence. Ce point est abordé dans le paragraphe suivant.

### *Robustesse de l'estimateur quadratique*

L'étude de la robustesse d'un estimateur permet de caractériser le comportement de ce dernier lorsque les conditions atmosphériques ont changé entre l'objet d'intérêt et la source de référence. Ici le problème est légèrement plus compliqué car le biais atmosphérique dépend également de la taille de la source, et ce paramètre peut aussi avoir une influence sur l'efficacité de la calibration. Il en découle que la robustesse de l'estimateur dépend à la fois de la turbulence ainsi que des tailles respectives de la source et de la référence. Sachant qu'il ne faut tenir compte dans le calcul que des termes liés au biais atmosphérique, les visibilités intrinsèques des deux objets (i.e. les visibilités obtenues en l'absence de turbulence atmosphérique, ou de façon équivalente en présence d'une correction par Optique Adaptative parfaite avec  $\mathcal{S} = \infty$ ) doivent être compensées. Cela revient à définir l'erreur<sup>1</sup> relative  $\mathcal{E}$  commise sur la correction du biais (en quelque sorte l'inverse de la robustesse) de la façon suivante:

$$\mathcal{E}(\beta, \mathcal{S}, \beta', \mathcal{S}') = \left| \frac{\widetilde{V}_O^2(\beta, \mathcal{S}) \widetilde{V}_C^2(\beta', \mathcal{S}' = 1)}{\widetilde{V}_C^2(\beta', \mathcal{S}') \widetilde{V}_O^2(\beta, \mathcal{S} = 1)} - 1 \right| \quad (2.67)$$

où  $\widetilde{V}_O^2(\beta, \mathcal{S})$  et  $\widetilde{V}_C^2(\beta', \mathcal{S}')$  sont respectivement la visibilité modale de l'objet et du calibrateur,  $\beta$  et  $\beta'$  étant leur taille respective (exprimée en unité de disque d'Airy) et  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  les rapports de Strehl (i.e le niveau de correction) associé à leur observation. En toute rigueur, la robustesse dépend de quatre paramètres indépendant. Pour des raisons de clarté, deux cas particuliers sont exposés ici:

- $\mathcal{E}(\beta, \mathcal{S}, \beta', \mathcal{S})$ : le rapport de Strehl reste le même mais la taille du calibrateur change. La taille de la source d'intérêt est fixée à 1/10 de disque d'Airy. 4 niveaux de corrections sont considérés:  $\mathcal{S} = 0.1$ ,  $\mathcal{S} = 0.3$ ,  $\mathcal{S} = 0.5$ ,  $\mathcal{S} = 0.9$ .
- $\mathcal{E}(\beta, \mathcal{S}, 0, \mathcal{S}')$ : Le calibrateur est un point source observé avec un Strehl fixe  $\mathcal{S}' = 0.7$ . Par contre le rapport de Strehl lié à l'observation de l'objet varie. Quatre tailles sont étudiées:  $\beta = 1/100$ ,  $\beta = 1/50$ ,  $\beta = 1/20$ ,  $\beta = 1/10$ .

Les résultats sont illustrés sur la figure 2.10. Clairement, même si l'estimateur est sensible à une variation de Strehl et/ou une différence de taille entre l'objet et le calibrateur, l'erreur commise est toujours inférieure ou égale à 0.1% environ. Ces deux exemples ne préjugent pas de la robustesse de l'estimateur dans cas général où à la fois la taille et le rapport de Strehl sont différents. Néanmoins en extrapolant les résultats précédents, on peut raisonnablement deviner (et les calculs non présentés ici le confirment) que l'erreur commise sera au pire de l'ordre du %.

Ainsi, les remarquables propriétés de filtrage des guides d'ondes monomodes permettent d'assurer une grande robustesse de l'estimateur. À comparer avec la figure 2.7, l'estimateur monomode est de deux à trois ordres de grandeur plus robuste que les estimateurs multimodes présentés dans les sections précédentes.

1. À ne pas confondre avec la notion d'erreur lors de étude du rapport signal à bruit d'une mesure!

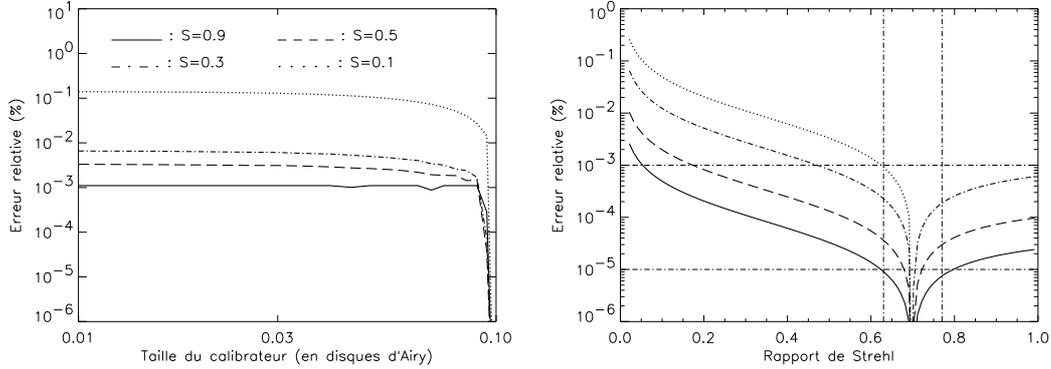


FIG. 2.10: . Gauche: robustesse de l'estimateur quadratique en fonction de la taille du calibrateur. Celle de l'objet est fixée à 1/10 de disque d'Airy. Le rapport de Strehl est le même pour les deux sources. Droite: robustesse de l'estimateur quadratique lorsque le rapport de Strehl varie entre l'observation de l'objet d'intérêt et la calibration sur un point source de référence ( $S = 0.7$ ). Les courbes correspondent à différentes tailles d'objets. De bas en haut: 1/100, 1/50, 1/20 et 1/10 de disque d'Airy. Elles sont à comparer avec celles de la figure 2.7.

### 2.2.5 Performances de l'interférométrie monomode

Cette partie étudie l'influence du filtrage spatial sur les performances (RSB et magnitude limite) d'un interféromètre fibré. L'analyse détaillée du problème est présentée dans l'article [TATULLI *et al.* (2004)] publié dans A&A et fourni dans ce chapitre. Le paragraphe suivant en reprend les grandes lignes et les résultats importants et apporte quelques analyses complémentaires.

D'un point de vue de la mesure, l'estimateur quadratique de l'équation 2.51 peut se récrire à partir de la densité spectrale de l'interférogramme et de l'estimation indépendante des flux photométriques:

$$\widetilde{V}_{ij}^2 = \frac{\langle |I^2(f_{ij})| \rangle}{\langle k_i k_j \rangle} \left( \frac{\tau}{1 - \tau} \right)^2 \quad (2.68)$$

où l'on suppose que chaque lame séparatrice envoie une fraction  $\tau$  de la lumière dans la voie photométrique correspondante, i.e. que le flux photométrique mesuré est:

$$k_i = \tau \rho_i(V_\star) N t_i = \tau \rho_i(V_\star) K_i \quad (2.69)$$

#### *RSB sur la visibilité modale*

S'inspirant du formalisme de Goodman décrit en annexe A et l'appliquant au cas où l'interférogramme est corrompu par (i) un bruit de photon, avec  $(1 - \tau)K$  et  $\tau K$  le nombre total de photo-événements détectés respectivement dans la voie interférométrique et la voie photométrique, (ii) un bruit additif Gaussien de variance  $\sigma^2$  résultant du bruit de détecteur et du bruit thermique, et (iii) un bruit atmosphérique qui se traduit par les fluctuations

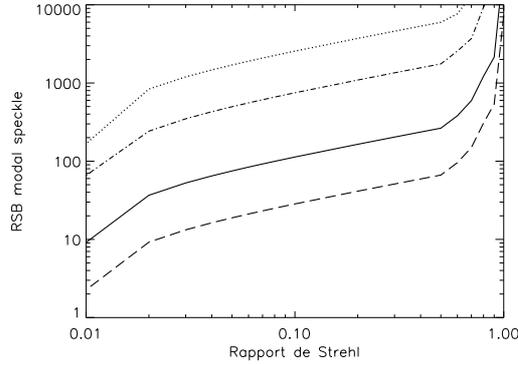


FIG. 2.11: . Rapport Signal à Bruit sur la visibilité modale dans le régime de bruit de speckle modal (i.e. pour les sources brillantes), en fonction du rapport de Strehl. Les courbes correspondent à différentes tailles d'objet. De haut en bas: 1/100, 1/50, 1/20 et 1/10 de disque d'Airy. Les courbes sont tracées à partir de l'équation B.22 développée en Annexe B.

des coefficients de couplage; on montre que l'erreur relative carrée sur la visibilité modale se décompose en une somme de trois termes:

$$\frac{\sigma^2\{V_{ij}^2\}}{\overline{V_{ij}^2}^2} = \mathcal{E}_P^2(K, \rho) + \mathcal{E}_A^2(K, \sigma^2, \rho) + \mathcal{E}_S^2(\rho) \quad (2.70)$$

Chaque terme de l'équation représente la contribution suivante:

- $\mathcal{E}_A^2(K, \sigma^2, \rho)$  est l'erreur relative due au bruit additif. Ce bruit domine à faible flux.
- $\mathcal{E}_P^2(K, \rho)$  représente le régime "bruit de photon". Ce terme prend en compte le nombre *effectif* de photo-événements détectés, dont le facteur d'atténuation dépend non seulement des coefficients de couplage moyen mais aussi aux fluctuations de ces coefficients de couplage autour de leur valeur moyenne.
- $\mathcal{E}_S^2(\rho)$  est le bruit speckle modal. Il s'agit en fait du bruit de speckle *filtré par les fibres*. Comme pour le bruit de speckle, ce bruit est dominant à fort flux induisant une saturation du *RSB*. Cependant si ce bruit ne dépend pas du nombre de photo-événements, il dépend de la taille de la source, en plus de la correction par Optique Adaptative.  $\mathcal{E}_S^2(\rho)$  est strictement nul pour un objet ponctuel, et augmente avec la taille de la source [TATULLI *et al.* (2002)]. La figure 2.11 qui représente le RSB relatif au bruit de speckle modal (et qui donc indique le RSB maximum par interférogramme que l'on peut atteindre avec un interféromètre fibré) en fonction du rapport de Strehl pour différentes tailles d'objets, témoigne de ce comportement. En conséquence, pour un objet compact (i.e. plus petit que le disque d'Airy d'un télescope), le régime de bruit de speckle modal est rejeté dans la gamme des magnitudes négatives dès lors que l'on commence à corriger par Optique Adaptative ( $\mathcal{S} \simeq 0.2$ ). Son influence sur le RSB est donc marginale.

Il résulte qu'en interférométrie monomode, et contrairement à l'interférométrie multi-speckle, le RSB sur la visibilité présente un large domaine où le régime "bruit de photon" domine. Ainsi, si on veut comparer les performances des deux techniques, l'analyse proposée par [MÈGE *et al.* (2000)] dans le seul régime limité par le bruit de photon n'apparaît pas tout à fait adaptée. Une étude menée sur toute la gamme de photo-événements s'avère nécessaire puisqu'à magnitude donnée le régime de bruit ne sera pas forcément le même dans les deux cas. Pour une source compacte, les conclusions majeures résultant de cette analyse, sont:

- Sans Optique Adaptative, l'interférométrie multimode est supérieure en terme de RSB, à l'exception des sources brillantes pour lesquelles le bruit de speckle est rédhibitoire.
- Dès que l'image est corrigée par Optique Adaptative, la visibilité modale présente un meilleur SNR et ce dans tous les régimes de bruit. Ce comportement est dû à deux aspects fondamentaux: (i) les remarquables propriétés de filtrage spatial de la fibre dès qu'il y a assez d'énergie dans le pic cohérent et (ii) la possibilité d'échantillonner le signal sur peu de pixels, par rapport à l'interférométrie multispeckle. En effet dans ce dernier cas – et ceci est d'autant plus critique avec des télescopes de grand diamètre – le nombre de pixels nécessaire dépend de la turbulence ( $N_{pix} \propto D/r_0$ ) alors que dans le premier cas, le nombre de pixels est uniquement fixé par le codage des franges.

### *Magnitude limite*

La magnitude limite est définie comme la magnitude pour laquelle le RSB sur la visibilité modale est de 1. Clairement cette magnitude limite va dépendre de la capacité de la fibre à filtrer le front d'onde turbulent, i.e. du nombre de photo-événements effectifs détectés à la sortie de la fibre. Dans le cas d'un objet partiellement résolu, on peut obtenir une expression simplifiée de la magnitude limite [TATULLI *et al.* (2002)]:

$$10^{-0.4\mathcal{K}_{lim}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{N_{pix}}\sigma N_{tel}}{(1 - \tau)\rho_0 V_{ij} \mathcal{S}} \quad (2.71)$$

On voit que la magnitude limite est inversement proportionnelle à la quantité  $\rho_0 V_{ij} \mathcal{S}$  qui représente bien le couplage de la fibre par des objets partiellement résolus (voir Eq. 2.46). La magnitude limite sans correction par OA est meilleure en interférométrie multispeckle, à cause de la (trop) faible efficacité de couplage des fibres dans le cas purement turbulent. Dès que la correction partielle augmente, les magnitudes limites des deux techniques présentent des comportements similaires: la fibre étant légèrement supérieure pour des objets compacts et légèrement inférieure pour des objets étendus, à cause d'une efficacité de couplage amoindrie.

L'analyse proposée dans ce chapitre met en exergue les remarquables vertus du filtrage modal appliqué à l'interférométrie, tant du point de vue du RSB que de la robustesse. Elle démontre théoriquement un constat expérimental unanimement admis par les observateurs: la capacité des interféromètres fibrés de produire, sur des sources compactes, des visibilités

précises à moins de 1%. Cette conclusion est néanmoins à nuancer dans le cas de sources étendues ou bien présentant une composante étendue autour d'un objet compact. En effet, la (relativement) faible efficacité de couplage des fibres pour de tels objets aura pour effet de dégrader les performances de l'interférométrie monomode. Ce phénomène est étudié dans le paragraphe suivant.

### *Source compacte avec composante étendue*

Si pour des sources compactes, le filtrage modal permet de s'affranchir de la quasi-totalité du bruit de speckle, il n'en est pas de même lorsqu' à la source centrale est associée une structure étendue – matière circumstellaire, enveloppe de poussière – représentant une fraction  $\alpha$  du flux. Le mauvais couplage du flux provenant de la composante étendue va restreindre l'efficacité des fibres monomodes, et ce d'autant plus que sa contribution est grande.

Si on appelle  $V_c$  et  $V_e$  les visibilitées de la source compacte et de la composante étendue, respectivement, la visibilité modale  $V_M^2$  de l'ensemble s'écrit:

$$V_M^2 = \frac{|\rho_{ij}(V_c) + \alpha\rho_{ij}(V_e)|^2}{[\rho_i(V_c) + \alpha\rho_i(V_e)][\rho_j(V_c) + \alpha\rho_j(V_e)]} \quad (2.72)$$

Si on suppose que la contribution en flux de l'étoile centrale domine, i.e.  $\alpha \ll 1$ , et remarquant que l'interféromètre résout beaucoup plus la composant étendue que la composante compacte, i.e.  $\rho_{ij}(V_e)/\rho_{ij}(V_c) \ll 1$ , on montre par un développement limité en  $\alpha$  au premier ordre que le bruit de speckle modal se décompose en la somme quadratique de deux contributions:

$$\sigma^2(V_M^2) = \sigma^2(V_{M_c}^2) + 4\overline{V_{M_c}^2}^2 \alpha^2 \frac{\sigma^2(\rho_e)}{\rho_c^2} \quad (2.73)$$

où le premier terme est le bruit de speckle modal relatif à la source compacte et le deuxième résulte des fluctuations de couplage de la composante étendue. Par soucis de clarté, les notations suivantes ont été introduites pour les coefficients de couplage basse fréquence:  $\rho_e = \rho(V_e)$  et  $\rho_c = \rho(V_c)$ . Et le RSB sur la visibilité modale de s'écrire:

$$\text{SNR}(V_M^2) = \frac{R_C \cdot R_E}{\sqrt{R_C^2 + R_E^2}} \quad (2.74)$$

avec

$$R_C = \text{SNR}(V_{M_c}^2), \quad R_E = \frac{\overline{\rho_c}}{2\alpha\sigma(\rho_e)} \quad (2.75)$$

Deux régimes "extrêmes" apparaissent donc: (i) le bruit de speckle modal de la source compacte domine et tout se passe comme si la composante étendue n'avait aucune influence, soit  $\text{SNR}(V_M) = R_C = \text{SNR}(V_{M_c}^2)$ , et (ii) le bruit induit par le mauvais couplage du flux provenant de la composante étendue domine et les performances de l'interféromètre sont dégradées:  $\text{SNR}(V_M) = R_E$ . La transition entre les deux régimes arrive pour une fraction de flux critique:

$$\alpha_c = \frac{\overline{\rho_c}}{2\text{SNR}(V_{M_c}^2)\sigma(\rho_e)} \quad (2.76)$$

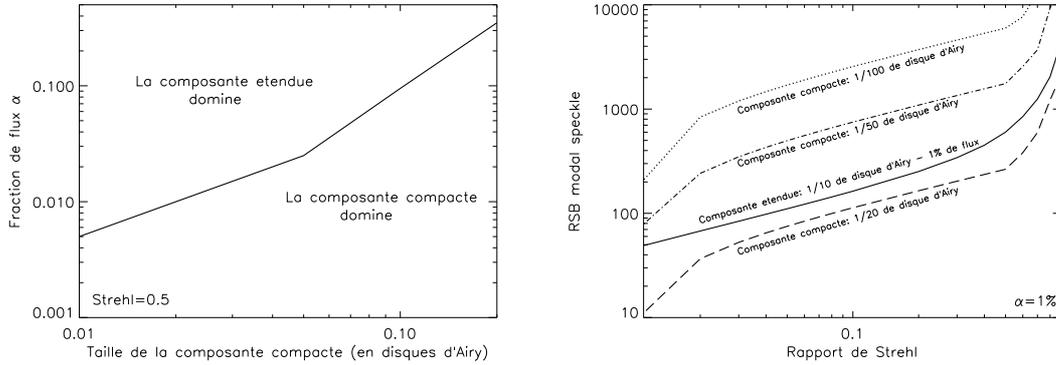


FIG. 2.12: . Influence d'une composante étendue contenant une fraction  $\alpha$  du flux total, sur le Rapport Signal à Bruit speckle modal de la visibilité. Gauche: Fraction de flux critique  $\alpha_c$  nécessaire pour qu'une composante étendue d'1/10 de disque d'Airy fixe le RSB, en fonction de la taille de la source centrale. Droite: RSB speckle modal de sources compactes de différentes tailles (lignes discontinues) et limite fixé par la présence d'une structure étendue d'1/10 de disque d'Airy contenant 1% du flux total (ligne continue).

Le flux critique est tracé sur la figure 2.12 (gauche), dans le cas d'une structure étendue de largeur 1/10 de disque d'Airy, et pour un Strehl de  $\mathcal{S} = 0.5$ . On remarque que plus l'étoile centrale est compacte, plus la fraction de flux nécessaire pour que le bruit du à la composante étendue domine est faible. Ainsi pour une source compacte de taille inférieure à 1/50 de disque d'Airy, il suffit d'une fraction de flux de  $\alpha_c = 1\%$  pour changer de régime et pour diminuer les performances ultimes d'un interféromètre monomode. Cet effet est représenté sur la figure 2.12 (droite): la présence de matière diffuse de taille 1/10 de disque d'Airy et ne représentant que 1% du flux impose une limite supérieure sur le RSB de speckle modal, atténuant sévèrement le RSB théoriquement accessible par des sources compactes. La conséquence générale de la présence d'une structure étendue est donc l'extension de la gamme de magnitude sur laquelle le bruit de speckle modal domine et de fait, la réduction du régime limité par le bruit de photon. La figure 2.13 illustre cet effet lorsque la composante contient une fraction de flux croissante, jusqu'à  $\alpha = 10\%$ . On se retrouve peu à peu avec des performances très comparables à celles obtenues en interférométrie multimode. Il est à noter que ces courbes de Rapports Signal à Bruit sont tracées pour une observation avec deux télescopes de 8m sur le VLTI et utilisant le recombinateur AMBER dans une configuration instrumentale classique [MALBET *et al.* (2000), TATULLI *et al.* (2004)], et notamment en supposant l'absence de suiveur de franges, avec un temps d'intégration figeant la turbulence atmosphérique de  $\tau_{int} \simeq 30\text{ms}$ . Dans ce cas, le problème lié à la présence d'une structure étendue ne concerne que les sources brillantes  $\mathcal{K} \leq 5$ , et cette étude ne s'applique qu'à un ensemble relativement marginal de sources. Cependant, avec l'avènement dans les prochaines années de suiveurs de franges capables de cophaser les front d'ondes à moins d'une longueur d'onde [GAI *et al.*

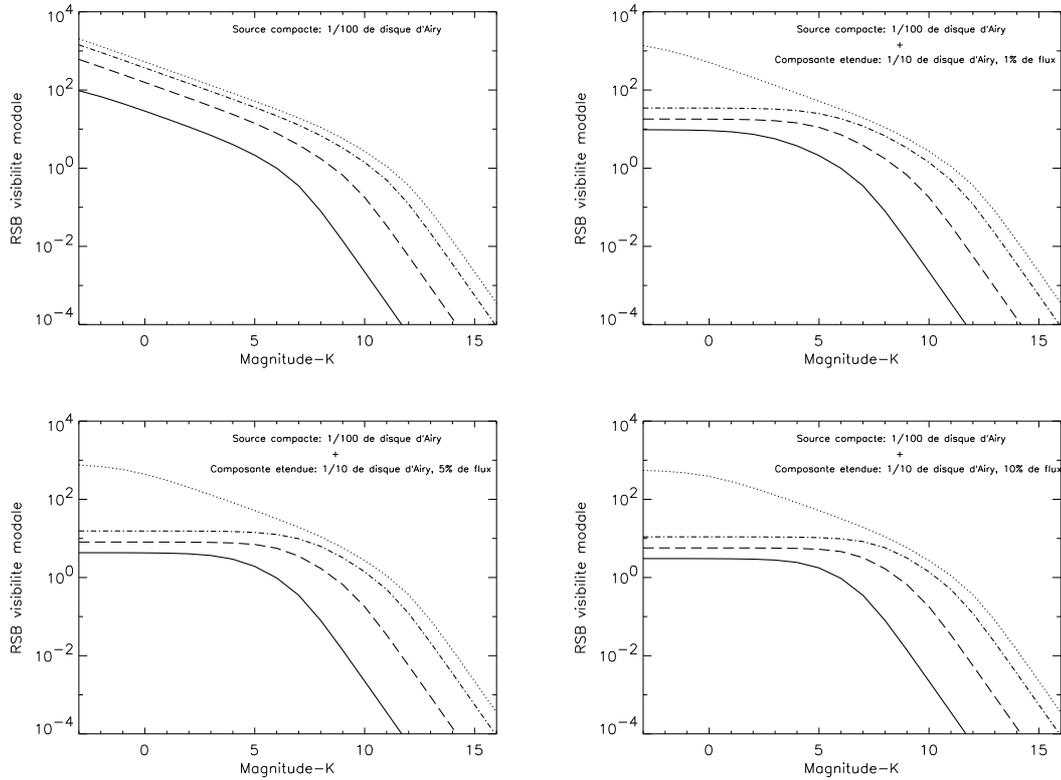


FIG. 2.13: . Évolution du Rapport Signal à Bruit de la visibilité modale lorsque l'objet d'étude est une source compacte d'1/100 de disque d'Airy, respectivement seule ou entourée d'une structure étendue de taille 10 fois plus grande et contenant 1%, 5% ou 10% du flux total. On remarque que la zone de saturation du RSB (i.e. le régime du bruit de speckle modal) augmente de gauche à droite et de haut en bas. Pour toutes les figures, les résultats sont donnés pour 4 différents rapports de Strehl:  $\mathcal{S} = 0.011$  (ligne continue),  $\mathcal{S} = 0.1$  (traits),  $\mathcal{S} = 0.5$  (traits - points), et  $\mathcal{S} = 0.9$  (pointillés).

(2002)], le problème devrait toucher un nombre bien plus conséquent d'étoiles, puisque le fait d'intégrer sur un temps plus important revient à décaler les courbes de la figure 2.13 vers la droite, i.e. vers de plus grandes magnitudes.

Ainsi, de part son champ de vue limité et de part ses performances réduites lorsque la source présente une composante diffuse, l'interférométrie fibrée et les estimateurs communément utilisés n'apparaissent pas du tout adaptés à l'observation et l'imagerie d'objets étendus. La section suivante ouvre des pistes permettant d'élargir le champ d'investigation de l'interférométrie monomode à ce type de sources.

*Astronomy & Astrophysics* manuscript no. aa0090  
(DOI: will be inserted by hand later)

## Single-mode versus multimode interferometry: A performance study<sup>★</sup>

E. Tatulli, P. Mège, and A. Chelli

Laboratoire d'Astrophysique, Observatoire de Grenoble, 38041 Grenoble Cedex, France

Received 17 July 2003 / Accepted 6 December 2003

**Abstract.** We compare performances of ground-based single-mode and multimode (speckle) interferometers in the presence of partial Adaptive Optics correction of atmospheric turbulence. It is first shown that for compact sources (i.e. sources smaller than the Airy disk of a single telescope) not entirely resolved by the interferometer, the remarkable property of spatial filtering of single-mode waveguides coupled with AO correction significantly reduces the speckle noise which arises from residual wavefront corrugations. Focusing on those sources, and in the light of the AMBER experiment (the near infrared instrument of the VLTI), we show that single-mode interferometry produces a better Signal-to-Noise Ratio on the visibility than speckle interferometry. This is true for bright sources ( $K < 5$ ), and in any case as soon as Strehl ratio of 0.2 is achieved. Finally, the fiber estimator is much more robust – by two orders of magnitude – than the speckle estimator with respect to Strehl ratio variations during the calibration procedure. The present analysis theoretically explains why interferometry with fibers can produce visibility measurements with a very high precision, 1% or less.

**Key words.** techniques: interferometric – techniques: adaptive optics – methods: analytical

### 1. Introduction

The great interest of using spatial filtering properties of optical waveguides in astronomical interferometers has been proven in the past years (Coudé du Foresto et al. 1997; Berger et al. 2001). As a consequence, integrated optics and fibers are more and more introduced in the design of present and future interferometers to carry the signal to the detector. Furthermore, practical and theoretical studies (Haguenauer 2001; Guyon 2002; Mège et al. 2003) have been undertaken to investigate the physical and optical properties in waveguided interferometers.

The present work aims at comparing the sensitivity and robustness of single-mode and multimode (speckle) interferometry. In Sect. 2, we recall the basic concepts of the fibered interferometric equation and the modal visibility. We derive, in Sect. 3, the formal expression of the Signal to Noise Ratio (*SNR*) of the modal visibility which takes into account photon, detector and atmospheric noise. In Sect. 4, we propose an analytical approach to estimate the profile of the visibility *SNR* as a function of the magnitude, from partially Adaptive Optics (AO) corrected interferograms. We also derive the performance of single-mode interferometry applied to the AMBER experiment (the near infrared instrument of the VLTI), in the case of single Gaussian sources. Finally,

*Send offprint requests to:* E. Tatulli,  
e-mail: Eric.Tatulli@obs.ujf-grenoble.fr

<sup>★</sup> Appendices are only available in electronic form at <http://www.edpsciences.org>

in Sect. 5, we compute the performances of the multispeckle method (Roddier & Lena 1984; Mourard et al. 1994) currently used to estimate visibility from non-fibered interferometers and we compare the performances and the robustness of single-mode and speckle interferometry.

### 2. The modal visibility

Mège (2002) theoretically described how the light is carried and processed through an interferometer with optical waveguides. Specifically, he highlighted the coupling phenomenon between the incoming wavefront and the fiber, and analyzed the characteristics of the interferogram recorded on the detector. The principal results concerning the interferometric equation of a  $N$  telescopes ( $N_{\text{tel}}$ ) fibered interferometer and the resulting modal visibility can be summarized as following:

$$I(f) = \sum_i^{N_{\text{tel}}} K_i \rho_i(V_\star) H_i(f) + \sum_i^{N_{\text{tel}}} \sum_j^{N_{\text{tel}}} \sqrt{K_i K_j} \rho_{ij}(V_\star) H_{ij}(f - f_{ij}) \quad (1)$$

where  $I(f)$  is the Fourier transform of the interferogram at the spatial frequency  $f$ ,  $V_\star$  is the visibility of the source and  $K_i$  is the number of photoevents from the  $i$ th telescope that would be detected in absence of fibers,  $H_i(f)$  and  $H_{ij}(f - f_{ij})$  are the Fourier transforms of the so-called normalized carrying waves centered at respectively the frequencies  $f = 0$  and  $f = f_{ij}$

(Mège et al. 2001). Their shape, hence the shape of the interferogram, is entirely determined by the geometry of the fibers.  $\rho_i(V_\star)$  and  $\rho_{ij}(V_\star)$  are respectively the low- (*LF*) and high-frequency (*HF*) instantaneous coupling coefficients. They give the fraction of flux entering in the fibers respectively for the photometric and the interferometric channels. Their theoretical expressions are:

$$\rho_i(V_\star) = \rho_0 \frac{(V_\star * T^i)_{f=0}}{\int T_0^i(f) df} \quad (2)$$

$$\rho_{ij}(V_\star) = \rho_0 \frac{(V_\star * T^{ij})_{f=f_{ij}}}{\sqrt{\int T_0^i(f) df \int T_0^j(f) df}} \quad (3)$$

where  $T^i$  and  $T^{ij}$  are the (partially AO corrected) modal transfer functions resulting respectively from the normalized auto-correlation and cross-correlation of the entrance aberration-corrupted pupil weighted by the fiber single mode (Roddier 1988; Mège et al. 2001),  $T_0^i$  is the turbulence-free modal transfer function and  $\rho_0$  is the optimum coupling efficiency fixed by the fiber core design (Shaklan & Roddier 1988). Equations (2) and (3) generalize the turbulent coupling efficiency to any kind of sources, i.e. not only when it is unresolved by a single telescope (as first noticed by Dyer & Christensen (1999) in the non-turbulent case). Note that, for a point source, the low frequency coupling coefficient is proportional to the Strehl ratio  $S$ ,  $\rho = \rho_0 S$  (Coudé du Foresto et al. 2000), and the high-frequency coupling coefficient follows the simple relationship  $|\rho_{ij}|^2 = \rho_i \rho_j$ .

From Eqs. (2) and (3), we can deduce the expression of the instantaneous modal visibility  $V_{ij}^2$  at the spatial frequency  $f_{ij}$ . It is defined as the ratio between the coherent energy (high frequency) and the incoherent one (low frequency):

$$V_{ij}^2 = \frac{|\rho_{ij}(V_\star)|^2}{\rho_i(V_\star)\rho_j(V_\star)}. \quad (4)$$

Perfect equality between the instantaneous modal visibility and the object visibility exists only for point sources ( $V_{ij}^2 = V_*^2 = 1$ ). In the general case, however, the instantaneous modal visibility does not match that of the object, especially if the source is extended.

In terms of measurements, the estimator of the modal visibility  $\widetilde{V}_{ij}^2$  can be computed as the ratio between the interferogram power spectrum at the frequency  $f_{ij}$ :  $|I^2(f_{ij})| = (1 - \tau)^2 |\rho_{ij}(V_\star)|^2 K_i K_j$ , and the photometric fluxes:  $k_i = \tau \rho_i(V_\star) K_i$ , where  $\tau$  is the fraction of light selected for photometry at the output of the beam-splitter. Assuming that the latter are estimated independently through dedicated outputs of the optical waveguide (so-called photometric outputs), it holds:

$$\widetilde{V}_{ij}^2 = \frac{\langle |I^2(f_{ij})| \rangle}{\langle k_i k_j \rangle} \left( \frac{\tau}{1 - \tau} \right)^2. \quad (5)$$

In the next section, we derive a formal expression of the relative error – the inverse of the *SNR* – of the modal visibility.

### 3. Relative error of the modal visibility

The noise calculations are based on the spatially continuous model of photodetection introduced by Goodman 1985, (see also Chelli 1989; Berio et al. 2001). Within this framework, the signal is assumed to be corrupted by three different types of noise: (i) the photon noise, with  $(1 - \tau)K$  and  $\tau K$  the total number of detected photoevents in the interferometric and the photometric channels respectively; (ii) the additive Gaussian noise of global variance  $\sigma^2$  which arises from the detector and from thermal emission; (iii) the atmospheric noise which results from the coupling efficiency variations due to the turbulence.

The noise contributions are derived in Appendices A and B. The square of the relative error of the modal visibility can be described as the sum of three terms:

$$\frac{\sigma^2 \{V_{ij}^2\}}{\widetilde{V}_{ij}^2} = \mathcal{E}_P^2(K, \rho) + \mathcal{E}_A^2(K, \sigma^2, \rho) + \mathcal{E}_S^2(\rho), \quad (6)$$

where  $\mathcal{E}_P(K, \rho)$ ,  $\mathcal{E}_A(K, \sigma^2, \rho)$  and  $\mathcal{E}_S(\rho)$ , are the relative errors due to photon, additive and atmospheric noise, respectively. It holds:

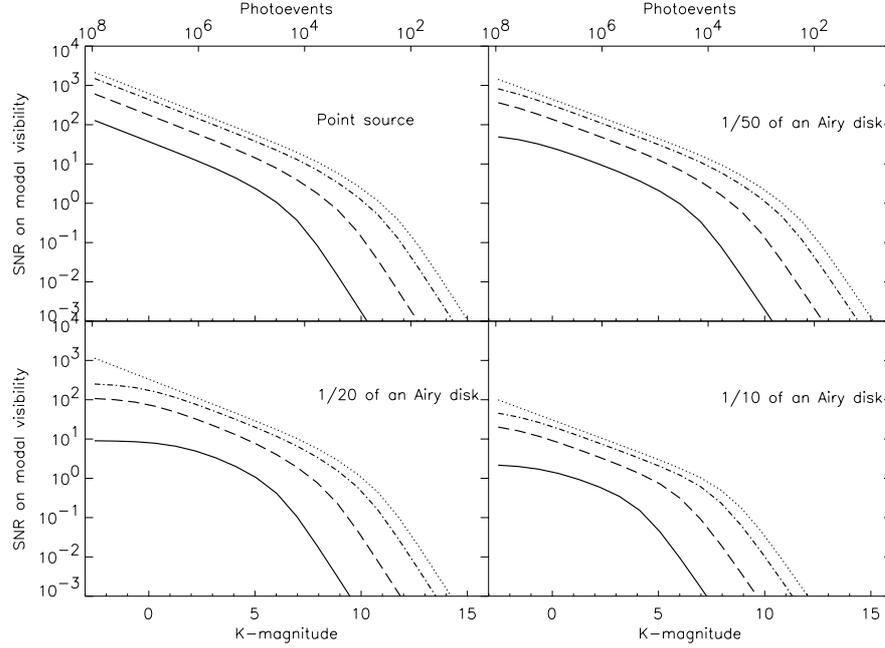
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P^2 &= \left[ \frac{N_{\text{tel}}(4\overline{|\rho_{ij}|^2} - 2\overline{\rho_{ij}|^2})}{(1 - \tau)\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} + \frac{2\overline{\rho^2}}{\tau\overline{\rho^3}} \right] \frac{N_{\text{tel}}}{K} \\ &+ \left[ \frac{N_{\text{tel}}^2(2\overline{\rho_{ij}^2} - \overline{\rho^2})}{(1 - \tau)^2\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} + \frac{4}{(1 - \tau)^2\overline{|\rho_{ij}|^2}} + \frac{1}{\tau^2\overline{\rho^2}} \right] \frac{N_{\text{tel}}^2}{K^2} \\ &+ \frac{\overline{\rho}}{(1 - \tau)^3\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} \frac{N_{\text{tel}}^4}{K^3} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A^2 &= \frac{3N_{\text{pix}}\sigma^4 + N_{\text{pix}}^2\sigma^4}{(1 - \tau)^4\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} \frac{N_{\text{tel}}^4}{K^4} + \frac{2N_{\text{pix}}\sigma^2}{(1 - \tau)^2\overline{|\rho_{ij}|^2}} \frac{N_{\text{tel}}^2}{K^2} \\ &+ \frac{2N\sigma^2\overline{\rho}}{(1 - \tau)^3\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} \frac{N_{\text{tel}}^4}{K^3} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathcal{E}_S^2 = \frac{\sigma_{|\rho_{ij}|^2}^2}{\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} + \frac{\sigma_{\rho_i \rho_j}^2}{\overline{\rho_i \rho_j}} - 2 \frac{\text{Cov}\{|\rho_{ij}|^2, \rho_i \rho_j\}}{\overline{|\rho_{ij}|^2} \overline{\rho_i \rho_j}} \quad (9)$$

where  $\overline{X}$  denotes the expected value of the random quantity  $X$ , and  $\text{Cov}\{X, Y\}$  the covariance between  $X$  and  $Y$ .  $\rho_{lf}$  is the average over all the telescopes of the *LF* coupling coefficient, and  $N_{\text{pix}}$  is the number of pixels per interferogram (see Appendix B for more details).

For bright sources, with the exception of point sources for which  $|\rho_{ij}|^2 = \rho_i \rho_j$  (and hence  $\mathcal{E}_S(\rho) = 0$ ), the dominant noise is the atmospheric noise, which results from the classical speckle noise filtered by the fiber. From now on, we refer to that noise as the modal speckle noise, and the corresponding *SNR*, ( $\mathcal{E}_S(\rho)^{-1}$ ), as the modal speckle *SNR*. This depends on the variation of the *LF* and *HF* coupling coefficients and hence, on the strength of the turbulence. As in the speckle case, it does not depend on the source brightness and corresponds to



**Fig. 1.** Modal  $SNR$  per interferogram as a function of the magnitude of the source in the  $K$  band. From left to right, top to bottom, the object size increases: point source,  $1/50$ ,  $1/20$ ,  $1/10$  of Airy disk. The considered baseline is  $B_x = B_y = 100$  m which mimics an average baseline of the VLTI array. This corresponds to visibility of respectively 1, 0.882, 0.457, 0.04. Results are given for different Strehl ratios:  $S = 0.011$  (solid line, no correction),  $S = 0.1$  (dashed line),  $S = 0.5$  (dash-dotted line) and  $S = 0.9$  (dotted line).

the maximum achievable  $SNR$  per interferogram. Nevertheless, as we will show, it depends on the source size.

#### 4. Performances of single-mode interferometry

In this section, we develop a simple model to estimate the modal speckle noise from partially AO corrected interferograms, and we derive the performances of single-mode interferometry applied to AMBER, the near-infrared instrument of the Very Large Telescope Interferometer (VLTI).

##### 4.1. The modal speckle noise

The derivation of the modal speckle noise is fully detailed in Appendix C: here we recall the outlines of our approach. We assume that: (i) the distance between the telescopes (baseline) is larger than the outer scale of the turbulence, i.e. that the complex amplitudes over pupils  $i$  and  $j$  are uncorrelated; (ii) the atmospheric phase has Gaussian statistics; (iii) the associated structure function is (spatially) stationary.

At this stage, the modal speckle  $SNR$  is described by integrals of dimensions up to sixteen (see Table C.2, from Eqs. (C.11)–(C.15)), which depend on the pupil, the object visibility and the structure functions, respectively. Here we estimate these integrals with a simplified analytical approach dealing with Gaussian functions only. We assume that the object

brightness distribution  $O_s(\alpha)$  and the pupil function have respectively the form:

$$O_s(\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\sigma_o^2}\right) \quad (10)$$

and,

$$P(f) = \exp\left(-\frac{f^2}{\sigma_p^2}\right), \quad \sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D}{\lambda} \quad (11)$$

where  $D$  is the diameter of the telescope and  $\sigma_p$  is defined in such a way that the integral of the Gaussian pupil, i.e. its surface, is equal to the integral of a circular pupil of diameter  $D$ . Furthermore, in order to take into account the partial correction by adaptive optics, we approximate the structure function  $\mathcal{D}(f)$  by:

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\mathcal{D}(f)\right] = h + (1-h)\mathcal{B}_\Phi(f) \quad (12)$$

where  $h \in [0, 1]$  defines the level of correction and  $\mathcal{B}_\Phi(f)$  is the transfer function of the turbulent atmosphere (Conan 1994) that we will assume Gaussian too:

$$\mathcal{B}_\Phi = \exp\left(-\frac{f^2}{\sigma_B^2}\right), \quad \sigma_B = \sqrt{\frac{2}{6.88}} \frac{r_0}{\lambda} \quad (13)$$

$r_0$  being the Fried parameter. Note that, from the previous equations, the Strehl ratio  $S$  is given by:

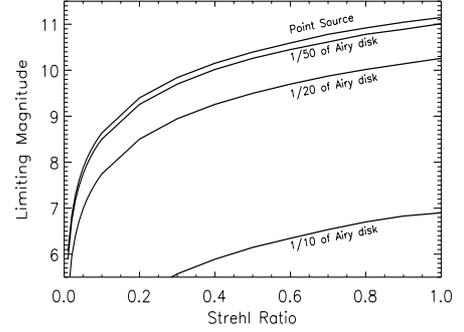
$$S = h + (1-h) \frac{\sigma_B^2}{2\sigma_p^2 + \sigma_B^2}. \quad (14)$$

At this point, the integrals (C.13)–(C.15) cannot be computed formally yet. To do that, we perform a limited expansion of the expressions under the integrals with respect to the variable  $\epsilon = (1 - h)/h$ . We end up with a series development in  $\epsilon^n$  in which the coefficients are integrals of Gaussian functions products only. These coefficients are then computed with the MAPLE software. However, the series development converges only for  $\epsilon \in [0, 1[$  or  $h \in ]0.5, 1]$ , i.e. for good to perfect AO corrections (see Eq. (14)). In order to estimate the modal speckle *SNR* for average to low AO correction, we compute it in the pure turbulent case ( $h = 0$ ) and we extrapolate from  $h = 0$  to  $h = 0.5$ . The case  $h = 0$  is computed separately from standard hypothesis assuming that the complex amplitude of the pure turbulent wavefront follows circular Gaussian statistics (Roddier 1988). We finally obtain an expression of the modal speckle *SNR* as a function of the major parameters of the observation: the source size, the baseline, the turbulence strength  $D/r_0$ , and the level of AO correction, i.e. the Strehl ratio  $S$ . Strictly speaking, the structure function is not stationary as the error of the AO corrected wavefront increases from the center to the edge of the telescope pupil. Also, its shape is not exactly described by the simplified Eq. (12). Nevertheless, we expect the modal speckle *SNR* resulting from our model, dealing with Gaussian functions only, to have the right order of magnitude and the correct functional dependencies.

#### 4.2. Performances

In this section we compute the *SNR* profiles of the modal visibility (per interferogram) for faint to bright compact sources (i.e. smaller than the Airy disk of a single telescope). We consider observations under average seeing conditions ( $r_0 = 1.6$  m) with 2 Unit Telescopes ( $D = 8$  m) at the baselines  $B_x = B_y = 100$  m and the AMBER recombining in the *K* band ( $2.2\mu\text{m}$ ). We assume that the interferogram is dispersed along the columns of a bi-dimensional detector and that each spectral channel is sampled with 6 pixels to ensure low and high frequency peaks separation. For quantitative calculations, we choose the specific instrumental parameters of AMBER (Malbet et al. 2000; Petrov et al. 2000) together with a spectral resolution of 35, an integration time of 30 ms per interferogram, a detector read-out noise of  $15e^-/\text{pixel}$  and a transmission coefficient  $\tau = 0.5$ . Note that, in those conditions, thermal noise is negligible. We also assumed an optimized instrumental coupling efficiency  $\rho_0 = 0.8$  (Shaklan & Roddier 1988). Figure 1 shows for different Strehl ratios, the modal visibility *SNR* as a function of the magnitude for 4 object sizes, point source, 1/50, 1/20 and 1/10 of Airy disk, with respective visibilities 1, 0.882, 0.457 and 0.04 at the baselines  $B_x = B_y = 100$  m.

We can clearly see that the saturation regime, where the modal speckle noise dominates, is significant only in the absence of AO correction. As soon as the image is partially AO corrected, even at small Strehl ratios ( $S > 0.1$ ), the saturation regime is rejected towards negative magnitudes. It is replaced by an extended “photon noise” regime, which depends on the total flux weighted by the statistics of the coupling co-



**Fig. 2.** Instantaneous limiting magnitude of single-mode interferometry technique, defined such that the modal *SNR* per interferogram is equal to unity. From top to bottom we plot limiting magnitudes for object sizes of respectively: point source, 1/50, 1/20, and 1/10 of Airy disk. Note that Eq. (15) reproduces fairly well the curves for object sizes equal or smaller than 1/20 of Airy disk.

efficients, that can be interpreted as transmission coefficients. These transmission coefficients decrease with the Strehl ratio and also when the size of the object increases, therefore lowering the modal visibility *SNR*. At low fluxes, the “detector noise” regime, marked by the break in the *SNR* slope, takes over.

We define the instantaneous limiting magnitude as the magnitude for which the *SNR* per interferogram is equal to unity. It occurs at very low fluxes, where the additive noise is dominant. From Eq. (8), and after some simplifications which are valid for partially resolved objects (typically  $\sigma_o \geq 1/20$  of Airy disk at the considered baseline), the corresponding limiting flux is given by:

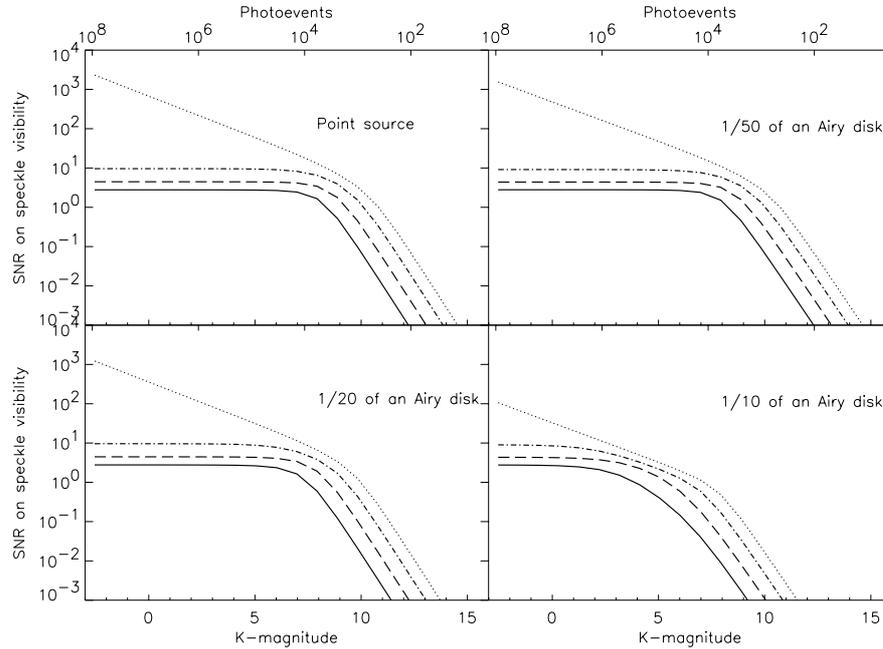
$$K_{\text{lim}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{N_{\text{pix}}} \sigma N_{\text{tel}}}{(1 - \tau) V_{ij} \rho_0 S}. \quad (15)$$

Figure 2 shows the limiting magnitude as a function of the Strehl ratio for four object sizes: point source, 1/50, 1/20 and 1/10. Without AO correction, the limiting magnitude is small, between 5 and 6. As soon as the image is AO corrected and the object partially resolved, the limiting magnitude significantly increases, reaching about 10 for a Strehl ratio of 0.5. However, for largely resolved objects ( $\approx 1/10$  of Airy disk), the coupling efficiency becomes so low that performances of fibered interferometers in terms of *SNR* and limiting magnitude are severely degraded.

Note, however, that calculations (their detailed description is beyond the scope of this paper) show that the saturation regime can span higher ranges of magnitude in cases where the compact Gaussian source is surrounded by an extended diffuse matter such as a disk or a dust shell. Indeed, it can be shown that, depending on the fraction of the flux in the extended structure, the modal speckle *SNR* can decrease by an order of magnitude, or more. This is due to the strong fluctuations of the *LF* coupling coefficient of the extended component. Such behavior is specific to single-mode interferometry, and it demonstrates that fibers are more efficient when they deal with compact sources. On the contrary, we emphasize that in classi-

E. Tatulli et al.: Single-mode interferometry

5



**Fig. 3.** Multispeckle  $SNR$  per interferogram as a function of the magnitude of the source in the  $K$  band. As Fig. 1, which those curves must be compared to, the object size is varying from left to right, top to bottom: point source,  $1/50$ ,  $1/20$ ,  $1/10$  of Airy disk, for a baseline  $B_x = B_y = 100$  m. Results are given for different Strehl ratios:  $S = 0.011$  (solid line, no correction),  $S = 0.1$  (dashed line),  $S = 0.5$  (dash-dotted line) and  $S = 0.9$  (dotted line).

cal (multimode) interferometry, a diffuse extended component has no effect on the  $SNR$ .

## 5. Single-mode versus multimode interferometry

In this section, we compute the performances of speckle interferometry and we compare their performances and their robustness to those with single-mode interferometry.

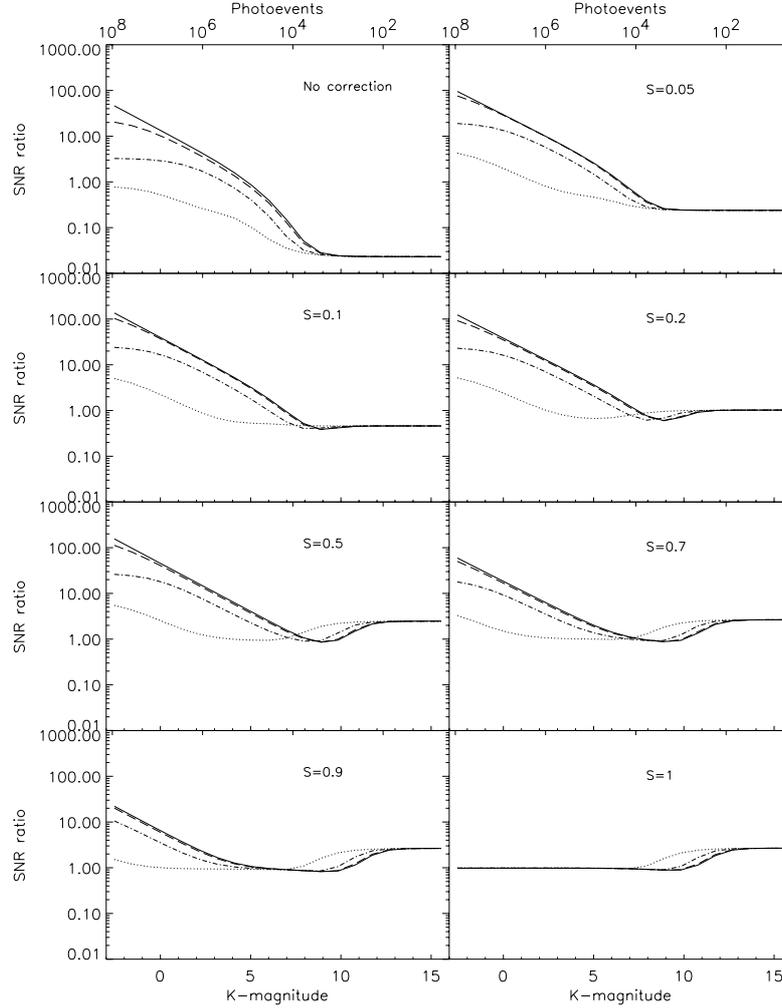
### 5.1. Performances of speckle interferometry

In absence of waveguides, visibility estimators can be defined by using speckle techniques, following Labeyrie's method (Labeyrie 1970; Sibille et al. 1979) for single dish observations (see Appendix D). The classical estimator (Roddier & Lena 1984) consists in taking the ratio of the integral of the high frequency spectral density by the integral of the low frequency one. Taking the integral of the high frequency peak is essential to perform a consistent comparison with the fiber case, since fibered interferometry induces an average (more precisely a convolution) of the visibility over the high frequency (see Eq. (3)). Moreover, to insure a thoroughly consistent comparison, we assume that the photometric fluxes are measured simultaneously with the interferograms (instead of taking the integral of the low frequency spectral density) and we define the estimator of visibility as the ratio between the integrated high fre-

quency peak of the spectral density and the photometric fluxes. It may be written as:

$$\tilde{V}^2(f_{ij}) \propto \frac{\int_{f_{ij}-\frac{B}{\lambda}}^{f_{ij}+\frac{B}{\lambda}} |I(f)|^2 df}{\langle k_i k_j \rangle}. \quad (16)$$

This estimator needs to be calibrated by a point source. It has basically the same performance than the classical speckle estimator, but not the same robustness, as we will see later. In practice, we replace the integral by a discrete sum with a regular spacing  $\Delta f = \frac{B}{\lambda}$ . Since we consider partial correction by Adaptive Optics, the points involved in the discrete sum are not statistically independent. Their correlations are taken into account in the signal to noise ratio calculations, detailed in Appendix D. These calculations require the knowledge of the first and second order statistics of the speckle transfer function. Formal expressions of those moments have been derived following a procedure similar to the one described in Sect. 4.1. For numerical applications, we adopted the same parameters than for single-mode interferometry, with the exception of the number of pixels required to correctly sample the interferograms, which is  $N = 6(D/r_0)$  for 2 telescopes (Chelli & Mariotti 1986). Figure 3 shows, for different Strehl ratios, the speckle visibility  $SNR$  as a function of the magnitude, for the four object sizes previously considered. The striking difference with single-mode interferometry is the almost absence of the "photon noise" regime, even with AO correction.



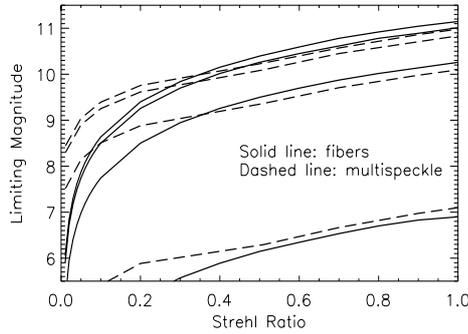
**Fig. 4.** Ratio between fibered and multispeckle visibility  $SNR$  as a function of the magnitude for different AO correction levels, from left to right, top to bottom:  $S = 0.011$  (no correction),  $S = 0.05$ ,  $S = 0.1$ ,  $S = 0.2$ ,  $S = 0.5$ ,  $S = 0.7$ ,  $S = 0.9$  and  $S = 1$ . Ratios are displayed for different source sizes in fraction of Airy disk: point source (solid line),  $1/50$  (dashed line),  $1/20$  (dash-dotted line),  $1/10$  (dotted line).

Instead, the saturation regime is reached in the entire range of magnitudes until the “detector noise” regime takes over. Note, furthermore, that the speckle noise is barely dependent on the source size and does not cancel out for a point source, contrarily to the modal speckle noise.

### 5.2. Comparison of performances and robustness

Figure 4 shows the ratio between single-mode and speckle  $SNR$  as a function of the magnitude, for different compact source sizes and Strehl ratios. Clearly, with the exception of bright sources ( $K < 5$ ), speckle interferometry without AO correction is superior to single-mode interferometry. However, as the degree of AO correction increases, the situation very rapidly

evolves, and, starting from a Strehl ratio of 0.2, single-mode interferometry always reaches higher  $SNR$  than speckle interferometry. Such efficiency of fibered interferometry is due to two major aspects: the remarkable property of spatial filtering of the fiber as soon as enough coherent energy (typically 20%) lies in the Airy disk, together with the possibility of sampling the signal on few pixels. On the contrary, multimode interferometry requires at least good AO correction ( $S > 0.5$ ) to significantly reduce the speckle noise. Moreover, fringe sampling is seeing dependent and requires a much larger number of pixels, specially for telescopes with large apertures such as the VLTI. Figure 5 compares the limiting magnitudes of both methods. Without AO correction, the speckle limiting magnitude is between 8 and 9, well above the single-mode one. With AO cor-

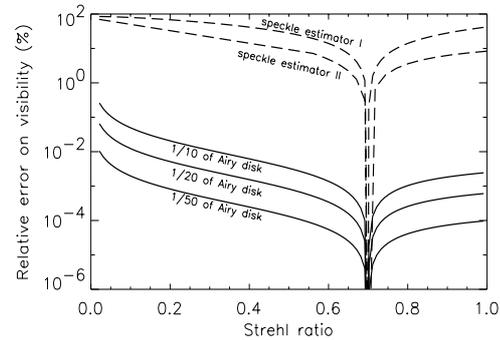


**Fig. 5.** Comparison of fibered and speckle interferometry limiting magnitudes. Limiting magnitude is still defined such that  $SNR = 1$ . Solid lines and dashed lines show fiber and speckle cases respectively. From top to bottom, the object size is: point source,  $1/50$ ,  $1/20$ , and  $1/10$  of Airy disk.

rection and Strehl ratios larger than 0.2, the limiting magnitudes are basically the same.

To evaluate the robustness of each method, we investigate the stability of the measured visibility versus the Strehl ratio. Figure 6 shows the visibility variation as a function of the Strehl ratio, normalized to the visibility at  $S = 0.7$ . The two upper curves correspond to the speckle estimator studied above and to the classical speckle estimator (ratio of the integrated high and low frequency peaks of the spectral density), respectively. The classical speckle estimator is much more robust, but, in both cases, even a small Strehl ratio variation (0.2) can produce visibility variations up to 10%. The 3 lower curves correspond to the modal visibility estimator for source sizes  $1/50$ ,  $1/20$  and  $1/10$  of Airy disk (point source is irrelevant since it is theoretically independent of the turbulence). The robustness of the modal estimator depends on the source size, while the multispeckle estimator does not. In any case, however, the modal estimator is clearly more robust than the speckle one, by more than 2 orders of magnitude. The modal visibility is stable at a level less than 1% over all the range of possible Strehl ratios, from 0 to 1. This last property is interesting, not only to perform high precision measurements, but also for the selection of reference sources. Indeed, it would suggest that the use of a reference source having a large magnitude difference with the studied object, and hence, where the level of AO correction is different, does not affect the precision of the measurement.

Note, however, that this comparison focuses on compact sources. For a central source surrounded by a larger diffuse component, the fluctuations of the  $LF$  coupling coefficient due to the extended structure severely reduces the filtering properties of the single-mode fibers. As a consequence, a situation similar to the multispeckle case occurs with a saturation regime spanning a large range of magnitudes, and where the larger the fraction of flux in the extended component, the larger the range. The presence of an extended structure also causes a decrease of the robustness, which, however, remains better than in the case of speckle estimators, by one order of magnitude.



**Fig. 6.** Robustness of single-mode and multimode estimators as a function of the Strehl ratio. Comparison is given in terms of relative error on the visibility  $\Delta V/V$ . Solid lines deal with fiber estimator for respectively  $1/10$ ,  $1/20$  and  $1/100$  of Airy disk, top to bottom. Dashed lines give the robustness of two speckle estimators. *Top*: so-called estimator I which takes into account the estimator defined in this paper (Eq. (16)). *Bottom*: estimator II describes the “classical” speckle estimator (see text). Note that both speckle estimators are object size independent.

## 6. Summary

In this paper, we have developed a formalism that can predict theoretical  $SNR$  on visibilities, when measurements are partially AO corrected and are corrupted by photon, additive (detector, thermal) and residual atmospheric noise. This formalism has been applied to single-mode and multimode (speckle) interferometers. We have assumed that: (i) the wavefronts over two distinct telescopes are uncorrelated; (ii) the atmospheric phase has Gaussian statistics, and the associated structure function is (spatially) stationary; (iii) the pupil function, the object brightness distribution, and the transfer function of the turbulent atmosphere are Gaussian. In the case of single-mode interferometry and for compact sources (i.e. sources smaller than the Airy disk of a single telescope) not entirely resolved by the interferometer, we show that, in the presence of AO correction, the remarkable filtering properties of fibers reject the  $SNR$  saturation regime due to speckle noise towards negative magnitudes. Instead, the modal visibility  $SNR$  is dominated by the “photon noise” regime followed by a break close to the limiting magnitude due to “detector noise”. For AMBER, the near infrared experiment of the VLTI, we found that the limiting magnitude is about  $K = 10$  for a Strehl ratio of 0.5, with two 8 m Unit Telescopes (typical atmospheric and instrumental parameters of the VLTI/AMBER instrument were discussed in Sect. 4.2). In the case of speckle interferometry, the visibility  $SNR$  is characterized by the almost absence of the “photon noise” regime, replaced by the saturation regime due to speckle noise. With the exception of bright sources ( $K < 5$ ), without AO corrections speckle interferometry reaches higher  $SNR$  than single-mode interferometry, leading to higher limiting magnitudes. However, the situation is different in presence of AO correction, even small ( $S = 0.2$ ): the limiting magnitude of both methods becomes the same, but the single-mode reaches much higher  $SNR$  than speckle interferometry. This last property, together

with the insensitivity of the modal visibility to the Strehl ratio variations, explains why interferometry with fibers can produce visibility measurement with a very high precision of 1% or less, on compact sources.

### References

- Berger, J.-P., Haguenaer, P., Kem, P., et al. 2001, *A&A*, 376, 31
- Berio, P., Mourard, D., Pierron, M., & Chelli, A. 2001, *Journal of the Optical Society of America*, 18, 614
- Chelli, A., & Mariotti, J. M. 1986, *A&A*, 157, 372
- Chelli, A. 1989, *A&A*, 225, 277
- Conan, J.-M. 1994, Ph.D. Thesis, Université Paris XI Orsay
- Coudé du Foresto, V., Perrin, G., Mariotti, J.-M., Lacasse, M., & Traub, W. 1997, in *Integrated Optics for Astronomical Interferometry*, 115
- Coudé du Foresto, V., Faucherre, M., Hubin, N., & Gitton, P. 2000, *A&AS*, 145, 305
- Dyer, S. D., & Christensen, D. A. 1999, *Journal of the Optical Society of America A*, 16, 2275
- Goodman, J. W. 1985, *Statistical Optics* (New York: Wiley)
- Guyon, O. 2002, *A&A*, 387, 366
- Haguenaer, P. 2001, Ph.D. Thesis, Université de Grenoble
- Korff, D. 1973, *Journal of the Optical Society of America*, 63, 971
- Labeyrie, A. 1970, *A&A*, 6, 85
- Malbet, F., et al. 2000, *AMBER Instrument Analysis Report, Technical Report VLT-TRE-AMB-15830-00000-0001, ESO Preliminary Design Review*
- Mège, P., Malbet, F., & Chelli, A. 2001, in *SF2A-2001: Semaine de l'Astrophysique Française*, ed. F. Combes, D. Barret, & F. Thévenin (EDP Sciences), 581
- Mège, P. 2002, Ph.D. Thesis, Université de Grenoble
- Mège, P., Malbet, F., & Chelli, A. 2003, *Proc. SPIE*, 4838, 329
- Mourard, D., Tallon-Bosc, I., Rigal, F., et al. 1994, *A&A*, 288, 675
- Papoulis, A. 1984, *Probability, random variables and stochastic processes* (New York: McGraw-Hill), 2nd ed.
- Petrov, R. G., Malbet, F., Richichi, A., et al. 2000, *Proc. SPIE*, 4006, 68
- Roddier, F., & Lena, P. 1984, *JOpt*, 15, 171
- Roddier, F. 1988, in *Diffraction-limited Imaging with Very Large Telescopes*, ed. D. M. Alloin, & J.-M. Mariotti (Kluwer Academic Publishers), 1989, 33
- Shaklan, S., & Roddier, F. 1988, *ApOpt*, 27, 2334
- Sibille, F., Chelli, A., & Lena, P. 1979, *A&A*, 79, 315
- Tallon, M., & Tallon-Bosc, I. 1992, *A&A*, 253, 641

## 2.3 Augmenter le champ de vue

Concernant l'observation d'objets étendus et à terme la problématique de l'imagerie grand champ par interférométrie monomode, il faut proposer de nouvelles méthodes techniques et/ou d'analyses qui permettent de répondre aux deux difficultés majeures qui se présentent: (i) comment se soustraire à l'effet de lobe, et parallèlement comment étendre le champ de vue? et (ii) comment s'affranchir du biais atmosphérique? Une solution intéressante et prometteuse a été proposée par [GUYON (2002)]. J'en reprends ici les principes en insistant sur les points durs technologiques et les solutions qui peuvent être apportées.

### 2.3.1 Pupille multifibrée

Le principe de la pupille multifibrée (voir figure 2.14) consiste à paver la pupille d'un télescope en sous-pupilles de diamètres  $d$  et d'associer une fibre à chaque sous pupille. Ainsi, le champ de vue de l'interféromètre devient  $FOV = \lambda/d$ , soit un gain d'un facteur  $d/D$ , tout en gardant le pouvoir collecteur d'un télescope de diamètre  $D$  au facteur de remplissage près. Si le principe de cette technique semble d'une simplicité évangélique, le point délicat réside dans la recombinaison des faisceaux. Principalement deux philosophies de recombinaison sont en concurrence:

**reconstruction de la pupille:** il s'agit de reconstruire le front d'onde en sortie de fibre, et ce pour chaque télescope de l'interféromètre. Ensuite on peut appliquer une recombinaison "classique" de type Fizeau en ayant le choix de la reconfiguration de la pupille de sortie, soit identique à celle d'entrée, soit densifiée [LABEYRIE (1996)]. Cette technique implique un très bon cophasage des fronts d'ondes afin d'optimiser l'injection dans toutes les fibres et ainsi de réduire au minimum le pouvoir collecteur du télescope. Il faut de plus faire très attention aux phases différentielles instrumentales qui pourraient apparaître au cours de la propagation dans les fibres.

**codage "par paire":** l'idée est de produire des franges d'interférences pour chaque paire de fibre définissant la même ligne de base. Tous les interférogrammes sont ensuite moyennés. Pour ce faire, il faut non seulement assurer une bonne injection dans les fibres mais aussi compenser le piston différentiel entre chaque interférogramme pour pouvoir en faire une addition cohérente. On pourrait rétorquer que cette opération peut se faire *a posteriori* avec un algorithme de recentrage, mais dans ce cas on perd en quelque sorte l'intérêt d'avoir de grands télescopes puisqu'il faudrait détecter les franges provenant de chaque paire de sous pupilles avant de les moyenner. Ce concept est parfaitement adapté à l'utilisation de l'optique intégrée qui permet une recombinaison simultanée d'un grand nombre de sous pupille dans un espace réduit, tout en évitant la complexité de l'optique de volume, quasi insurmontable lorsque plus de deux télescopes sont en jeu. Enfin, on peut imaginer (selon les progrès de l'optique intégrée dans les années à venir) recombinaison tout ou partie des faisceaux provenant de toutes les combinaisons possibles de paires

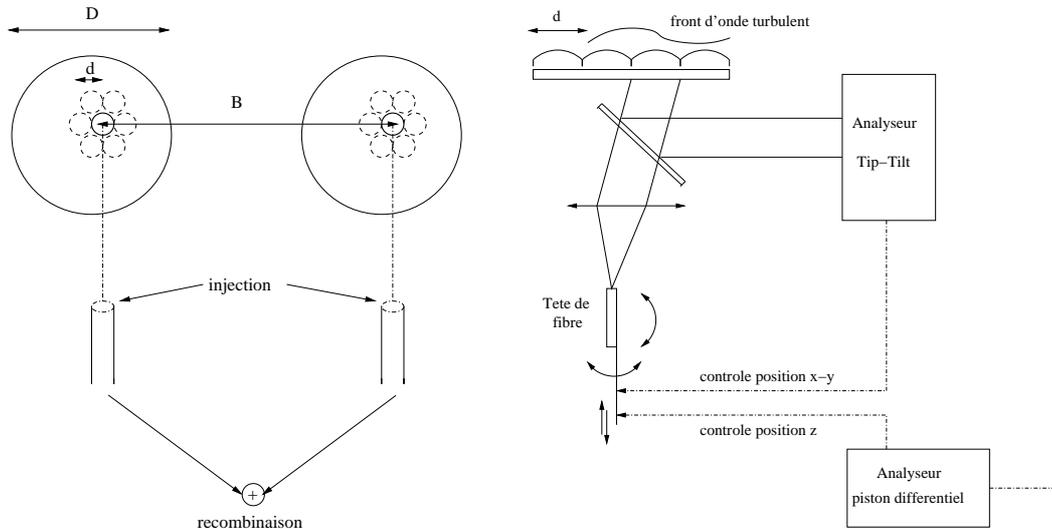


FIG. 2.14: *Gauche: Principe de la pupille multifibrée [GUYON (2002)]. Un télescope de diamètre  $D$  est pavé de sous-pupilles de diamètre  $d$ . À chaque sous-pupille est associée une fibre monomode, permettant ainsi d'augmenter le champ de vue d'un facteur  $d/D$ . Plusieurs choix instrumentaux sont ensuite possibles pour la recombinaison des faisceaux provenant de différents télescopes (voir texte). Droite: solution technique permettant d'optimiser l'injection dans les fibres [PREIS et al. (2004)]. Le tip-tilt turbulent associé à une sous-pupille est mesuré par un analyseur de front d'onde. Ce dernier transmet l'information à une "tige" électro-mécanique assujettie à la tête de fibre. La tige modifie en temps réel la position de la fibre par rapport au faisceau pour maximiser l'injection. Accessoirement, cette tige permet aussi, en bougeant dans la troisième direction, de compenser le piston différentiel.*

de sous pupilles, générant ainsi une mini couverture du plan  $(u, v)$  entre  $[B/\lambda - D/\lambda]$  et  $[B/\lambda + D/\lambda]$ , au détriment bien sûr de la quantité de flux disponible pour chaque interférogramme.

Il est clair qu'un des points durs de cette technique est d'assurer une bonne injection dans toutes les têtes de fibres malgré la turbulence atmosphérique. Une solution classique consiste à utiliser un système d'Optique Adaptative. Cependant ce système devra être capable de fournir une extrêmement bonne correction du front d'onde. Une autre méthode serait d'asservir en temps réel la position de chaque tête de fibre dans le plan focal, à partir des informations transmises par un analyseur tip-tilt relatif à la sous pupille concernée (voir figure 2.14 droite). De plus, si des informations de piston différentiel sont disponibles, ce même instrument pourrait le compenser en se déplaçant dans la troisième direction. Cet appareil est en cours de développement au LAOG [PREIS et al. (2004)], et donne déjà des résultats très prometteurs.

[GUYON (2002)] suggère qu'une méthode *a priori* équivalente serait de paver le plan focal avec des fibres ou bien alternativement de dépointer le télescope, c'est à dire de faire du mosaicing à la manière des radio-interférométristes. L'analogie n'est en fait pas immédiate, car

TAB. 2.1: Tableau de comparaison entre l'interférométrie optique monomode et la radio-interférométrie.

	Interférométrie monomode ( $2\mu\text{m}$ )	Radio interférométrie (1mm)
Mesures	Détection "additive" Modulation - contraste Module de la visibilité (sans dimension)	Détection hétérodyne Corrélateur Visibilité complexe (Flux en Jy)
Seeing	Température - indice de l'air $r_0 < D$ $\tau_0 \sim$ qqes 10ms	Vapeur d'eau $r_0 > D$ $\tau_0 \sim$ qqes 10min
Correction		
Photométrie	en temps réel	<i>a posteriori</i> (sur quasar)
Seeing	Optique Adaptative	—
Calibration de phase	non: clôture de phase	oui: sur source proche
Champ de vue	$\sim \frac{\lambda}{D}$	$\sim \frac{\lambda}{D}$

en l'absence de correction parfaite du front d'onde, la visibilité modale est turbulente avec un biais susceptible de changer lors des différents dépointages, au gré des variations de la turbulence atmosphérique. Il sera alors très difficile de reconstruire une information pertinente sur la source. En conséquence, il faut définir au préalable un nouvel estimateur qui permet de s'affranchir de ce biais atmosphérique.

### 2.3.2 Interférométrie monomode et radio-interférométrie

Pour directement transposer à l'interférométrie monomode les méthodes d'imagerie classiques développées par les radio interférométristes, il faut pouvoir se ramener à une situation où le signal mesuré en sortie de fibre est similaire à celui provenant d'un interféromètre radio. Or, si pour les estimateurs présentés auparavant, la fibre monomode et l'antenne radio présentent des analogies certaines, il n'en reste pas moins que quelques différences fondamentales persistent, différences qu'il faut savoir appréhender et dont il faut avoir conscience pour réussir à les contourner. Ainsi la première étape consiste à faire une liste comparative entre les deux techniques. Celle-ci (qui s'inspire de [MALBET (2001)]) est présentée en table 2.1. Un grand avantage de la radio interférométrie est que le temps de corrélation de l'atmosphère

à ces longueurs d'onde est de l'ordre de  $\tau_0 \sim$  qqes 10min, ce qui permet non seulement de calibrer la phase de la visibilité sur une source de référence proche mais autorise aussi de considérer le flux mesuré comme étant constant pendant le temps d'intégration et de le calibrer *a posteriori*, usuellement en observant un quasar dont on connaît parfaitement les caractéristiques. La visibilité mesurée est donc de la forme [GUILLOTEAU (2001)]:

$$V(f_{ij}) = \int A^{ij}(\alpha)O(\alpha) \exp[-2i\pi\alpha.f_{ij}]d\alpha = \int \widehat{O}(f_{ij} - f)T_A^{ij}(f)df \quad (2.77)$$

où  $A^{ij}(\alpha)$  est le lobe d'antenne interférométrique et  $T_A^{ij}(f)$  sa transformée de Fourier. L'idée est donc de se ramener à un estimateur équivalent pour l'interférométrie monomode. Or l'expression 2.77 n'est pas sans rappeler celle de l'estimateur linéaire de la visibilité modale (voir Eq. 2.50). Cet estimateur en tant que tel n'est cependant pas pertinent à cause de la calibration photométrique choisie, les coefficients de couplage basse fréquence dépendant de la fonction de transfert *turbulente*. Pour pallier le problème, une solution consiste à estimer le flux photométrique en *amont* de l'injection dans les fibres. Dans ce cas, l'estimateur linéaire de visibilité modale devient simplement:

$$\widetilde{V}_{ij} = \rho_{ij}(V_\star) = \frac{\rho_0}{S} \exp(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2)E_c \int V_\star(f_{ij} - f) \exp(i\overline{\Phi}_p^{ij}) T_0^{ij}(f)df \quad (2.78)$$

Cet estimateur exige bien sûr la présence d'un suiveur de frange compensant les variations du piston atmosphérique différentiel ( $\exp(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2)$ ). Si tel est le cas, l'atténuation restante ( $E_c$ ) due à la perturbation des fronts d'onde ne dépend plus que du système d'Optique Adaptative (et de la force de la turbulence) et peut être calibrée sur une source de référence, ou en se servant des données du senseur de front d'onde. On se retrouve donc dans une situation très comparable à l'équation 2.77 au détail près que la visibilité complexe de l'objet est multipliée par une phase (le piston atmosphérique moyen) que l'on ne peut connaître. La phase de la visibilité n'est toujours pas accessible mais si l'on dispose de plus de deux télescopes, on peut toujours calculer la clôture de phase et ainsi recouvrer une information partielle sur la géométrie de l'objet (voir chapitre 5).

### 2.3.3 Mosaicing et champ de vue

Étant maintenant dans une situation analogue à l'interférométrie radio, on peut appliquer les mêmes techniques pour augmenter le champ de vue de l'interféromètre. Une amélioration consiste alors à mesurer des points supplémentaires de visibilité en dépointant le télescope d'un angle  $\alpha_p$ . La relation de multiplication entre le lobe d'antenne et l'objet s'écrit dans ce cas [GUETH (2001)]:

$$V_{ij}(\alpha_p) \propto \int L_0^{ij}(\alpha - \alpha_p)O(\alpha) \exp(-2i\pi\alpha.f_{ij})d\alpha \quad (2.79)$$

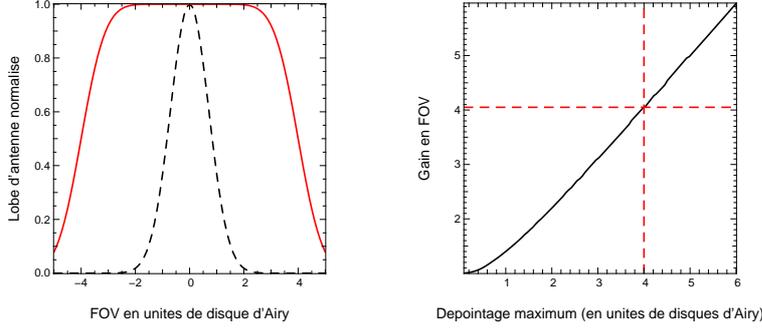


FIG. 2.15: Gauche: Comparaison entre le lobe d'antenne avant (ligne brisée) et après (ligne pleine) mosaicing continu.  $\alpha_M = 4\lambda/D$ . Droite: Facteur multiplicatif gagné sur le champ de vue de l'interféromètre en fonction de la zone de ciel scannée ( $\alpha_M$ ). Ainsi pour  $\alpha_M = 4\lambda/D$ , on vérifie que le lobe est environ 4 fois plus large, comme on pouvait l'estimer sur la figure de gauche.

Dans le cas idéal, si on suppose un mosaicing continu entre  $-\alpha_M$  et  $\alpha_M$ , on montre en intégrant sur tous les points de visibilité que l'on a effectivement agrandi le champ de vue:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ij} &= \int_{-\alpha_M}^{\alpha_M} \left[ \int L_0^{ij}(\alpha - \alpha_p) O(\alpha) \exp(-2i\pi\alpha \cdot f_{ij}) d\alpha \right] d\alpha_p \\ &= \int \left[ L_0^{ij} \otimes \Pi_{[\alpha_M]}(\alpha) \right] O(\alpha) \exp(-2i\pi\alpha \cdot f_{ij}) d\alpha \end{aligned} \quad (2.80)$$

Effectuer un mosaicing entre  $-\alpha_M$  et  $\alpha_M$  revient donc à observer l'objet avec un interféromètre dont le lobe d'antenne est  $\mathcal{L}_0^{ij}(\alpha)$ :

$$\mathcal{L}_0^{ij}(\alpha) = L_0^{ij} * \Pi_{[2\alpha_M]}(\alpha) \quad (2.81)$$

et la fonction de transfert associée est

$$\mathcal{T}_0^{ij}(f) = T_0^{ij}(f) \cdot \text{sinc}(2\pi\alpha_M \cdot f) \quad (2.82)$$

La figure 2.15 illustre l'effet du mosaicing sur le lobe lorsque le dépointage couvre une zone de ciel allant jusqu'à 4 disques d'Airy (gauche), ainsi que le gain en champ de vue lorsqu'on augmente la zone de dépointage. Il est intéressant de noter que la technique du mosaicing est immédiatement généralisable au cas non monochromatique (largeur spectrale  $\Delta\lambda$  non nulle) et qu'elle offre une solution élégante pour s'affranchir du même coup du problème de "bandwidth smearing"<sup>1</sup> [SUBRAHMANYAN (2004)].

Cette étude a été faite dans le cas où on effectue un balayage continu d'une zone de ciel autour de l'étoile. En pratique, il faut bien évidemment échantillonner le dépointage avec un

1. le "bandwidth smearing" est l'effet de moyennage de la visibilité sur les lignes de base effectives, qui varient de  $\frac{B}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}}$  à  $\frac{B}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}}$

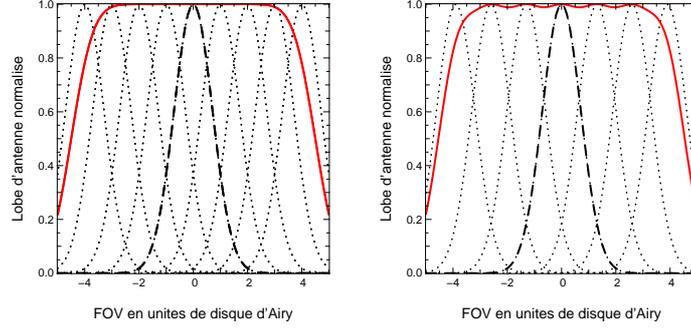


FIG. 2.16: *Comparaison entre le lobe d'antenne avant (ligne brisée) et après (ligne pleine) mosaicing discret. Les pointillés représentent les différentes position du lobe, le long de la couverture de ciel.  $\alpha_M = 4\lambda/D$ . Les deux figures illustrent la condition d'échantillonnage: à gauche, le critère est respecté alors qu'à droite, le mosaicing est légèrement sous-échantillonné. On voit apparaître des "bosses" et des "creux" dans le lobe final, i.e. un début de perte de sensibilité dans certaines directions.*

pas  $\Delta\alpha$  pour parcourir la mosaïque. Dans ce cas réaliste, le lobe après mosaicing s'écrit:

$$\mathcal{L}_0^{ij}(\alpha) = \sum_{k=-k_M}^{k_M} L_0^{ij}(\alpha - k\Delta\alpha) = L_0^{ij} * \Xi_{\Delta\alpha}^{\alpha_M}(\alpha) \quad (2.83)$$

$\Xi_{\Delta\alpha}^{\alpha_M}(\alpha)$  définit l'échantillonnage sur un support fini  $\alpha_M = k_M\Delta\alpha$ , soit:

$$\Xi_{\Delta\alpha}^{\alpha_M} = \sum_{k=-\infty}^{k_\infty} \delta(\alpha - k\Delta\alpha) \cdot \Pi_{[2\alpha_M]} = \Downarrow_{\Delta\alpha} \cdot \Pi_{[2\alpha_M]} \quad (2.84)$$

où  $\Downarrow_{\Delta\alpha}$  représente la fonction "peigne de dirac". La fonction de transfert interférométrique issu de la mosaïque discrétisée devient:

$$\mathcal{T}_0^{ij}(f) = T_0^{ij}(f) \cdot \frac{\sin(2\pi\alpha_M \cdot f + \pi\Delta\alpha \cdot f)}{\sin(\pi\Delta\alpha \cdot f)} \quad (2.85)$$

La question de l'échantillonnage minimum requis trouve facilement sa réponse lorsque l'on considère le mosaicing discret comme une opération de Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur le lobe d'antenne. Il vient alors du critère de Shannon que [CORNWELL (1988)]

$$\Delta\alpha \leq \frac{\lambda}{2D} \quad (2.86)$$

L'effet de l'échantillonnage du dépointage est illustré en figure 2.16.

Ainsi, la technique de mosaicing permet de s'affranchir de l'effet de lobe, effet qui entraîne un biais rédhibitoire lors de l'observation interférométrique d'objets étendus. Franchissant une étape supplémentaire dans cette démarche, cet estimateur permet aussi de faire de l'imagerie grand champ avec un interféromètre monomode, lorsque la couverture fréquentielle est significative (et c'est un des atouts majeurs du VLTI). Il suffit pour cela d'appliquer des méthodes

de type CLEAN [HÖGBOM (1974)] dans le cas où seules les clôtures de phases sont disponibles [READHEAD & WILKINSON (1978), BALDWIN *et al.* (1986)], voire de conjuguer l'apport du mosaicing et des algorithmes de reconstruction d'images [GUETH (2001)].

---

## Chapitre 3

# Traitement du signal AMBER

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation de l'instrument . . . . .</b>	<b>72</b>
3.1.1	Le consortium AMBER . . . . .	72
3.1.2	Motivations scientifiques et implications instrumentales . . . . .	72
3.1.3	Balade au fil d'AMBER: les différents sous-ensembles . . . . .	76
3.1.4	Logiciel de contrôle AMBER . . . . .	78
3.1.5	Données finales sur le détecteur . . . . .	80
<b>3.2</b>	<b>Réduction de données AMBER . . . . .</b>	<b>83</b>
3.2.1	L'équation interférométrique selon AMBER . . . . .	83
3.2.2	Calibration des ondes porteuses . . . . .	85
3.2.3	La matrice P2VM . . . . .	92
3.2.4	Estimation des observables . . . . .	93
3.2.5	Correction du biais atmosphérique . . . . .	97
<b>3.3</b>	<b>Petit guide pratique illustré . . . . .</b>	<b>107</b>
3.3.1	Cosmétique . . . . .	107
3.3.2	Détection des franges . . . . .	107
3.3.3	Calibrations . . . . .	109
3.3.4	Validation de la procédure de réduction . . . . .	110
3.3.5	Erreurs sur les visibilitées . . . . .	112

---

*Après une courte description des objectifs astrophysiques motivant le développement de l'instrument AMBER, j'analyse en détails les procédures de réductions de données spécifiques à ce recombinateur. J'applique ensuite ces algorithmes aux données obtenues pendant le "com-missionning" du mois de mai.*

### 3.1 Présentation de l'instrument

AMBER est un recombineur interférométrique proche infra-rouge très ambitieux puisqu'il est le premier instrument de sa catégorie à concilier très haute résolution angulaire et très haute résolution spectrale. De plus, il offre la possibilité de recombinaison simultanément trois faisceaux et permet ainsi d'accéder à des informations de phases grâce aux relations de clôtures entre les trois télescopes. Installé sur le site du VLT qui met à disposition un potentiel de couverture de fréquences spatiales unique ainsi que des télescopes au pouvoir collecteur fortement accru, cet instrument inaugure l'ère de l'imagerie pour l'interférométrie optique longue base, rejoignant une vingtaine d'années plus tard la voie ouverte par les radio-interférométristes dans le domaine des longueurs d'onde millimétriques.

#### 3.1.1 Le consortium AMBER

AMBER est le fruit d'un travail qui a concerné plus de cinquante personnes réparties sur cinq laboratoires, chaque institut ayant un rôle précis dans la conduite du projet. Le Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice (LUAN) et l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA) ont conjointement travaillé sur la conception et la spécification de l'optique "chaude" de l'instrument et ont participé à la phase d'intégration, d'alignement et de test sur le ciel à Paranal. L'observatoire Astrophysique d'Arcetri (OAA) a conçu et fourni le spectrographe. L'Institut Max Planck (MPIfR) était responsable du détecteur infrarouge et des logiciels d'acquisition et de contrôle y afférant. Enfin, le Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble (LAOG) s'est vu confié le développement des logiciels de contrôle instrumental, d'observation et de traitement des données ainsi que l'intégration des différents sous-ensembles, accompagné des tests de validation de l'instrument avant son expédition au Chili.

#### 3.1.2 Motivations scientifiques et implications instrumentales

Les spécifications techniques de AMBER se basent sur des objectifs scientifiques ambitieux et exigeants, couvrant tous les domaines de l'astrophysique, de l'étude du système solaire jusqu'aux observations extra-galactiques. Le programme scientifique, élaboré par tous les membres du consortium, est décrit dans [MALBET *et al.* (2003)]. Les personnes intéressées peuvent se référer au programme de temps d'observation garanti (GTO) disponible en ligne ([http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/heberges/amber/article.php3?id\\_article=42](http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/heberges/amber/article.php3?id_article=42)) et dans lequel 87 proposals sont référencés. J'en résume ici brièvement les thématiques majeures<sup>1</sup>.

#### *Étoiles jeunes*

Grâce à des lignes de bases pouvant atteindre 200m, ce qui correspond à une résolution d'environ 2mas dans le proche infra-rouge, le VLTI et son recombineur AMBER vont per-

---

1. liste non exhaustive!

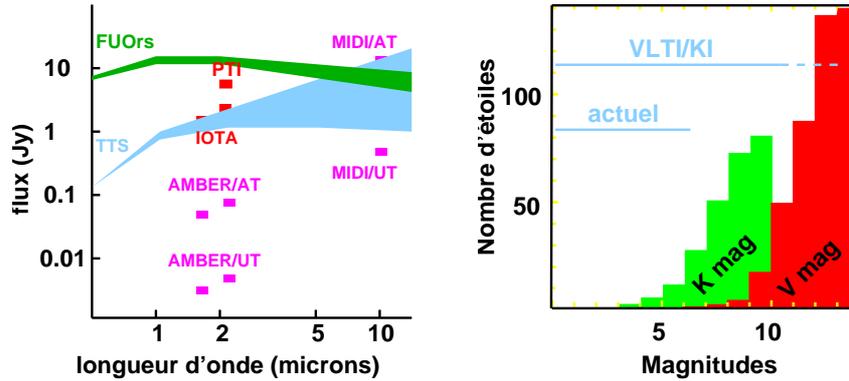


FIG. 3.1: Gauche: diagramme de sensibilité des interféromètres en fonction de la longueur d'onde dans le domaine optique. En comparaison sont représentés les flux typiques d'étoiles *T Tauri* et *Fu Orionis*. Droite: histogramme (pour les magnitudes *V* et *K*) des étoiles jeunes telles que répertoriées dans le catalogue *Herbig & Bell*. Grâce aux grands télescopes du VLTI, le nombre d'étoiles jeunes observables va augmenter de manière significative. Schéma inspiré de [MALBET (2003)].

mettre de franchir un pas décisif dans la compréhension des processus de formation stellaire et planétaire en étudiant l'environnement proche des étoiles jeunes. En effet, avec une telle résolution l'interféromètre sonde leurs parties internes (de l'ordre de l'Unité Astronomique, et moins dans la région du Taureau à 150pc) où les processus physiques fondamentaux (interaction disque-étoile, disque-jet, formation de planètes) se produisent. De plus le bond en sensibilité offert par l'utilisation des ATs (1.8m) et des UTS (8m) va autoriser l'observation à haute résolution angulaire de 80% de l'échantillon d'étoiles jeunes déjà répertoriées, ouvrant ainsi l'ère de l'étude systématique et statistique de tels objets (voir Fig 3.1).

**DISQUES PROTOPLANÉTAIRES** Jusqu'à présent, la couverture réduite du plan  $(u, v)$  n'autorise d'interpréter les observations d'étoiles jeunes qu'à la lumière de modèles paramétriques. Notamment, il est difficile voire impossible de conclure de manière définitive sur la nature de la structure étendue, ainsi que le remarquait déjà [MILLAN-GABET *et al.* (2001a)] lors d'observations de l'environnement circumstellaire d'étoiles *Herbig Ae/Be* avec l'interféromètre IOTA. L'observation de ces disques avec AMBER et une bonne couverture du plan  $(u, v)$  va permettre de (i) obtenir une image objective de l'environnement proche de ces étoiles et de lever les ambiguïtés (ii) conjointement à une analyse spectrale, développer des modèles physiques reproduisant de façon cohérente les mesures de visibilités et les mesures spectrales [LACHAUME *et al.* (2003)].

**JETS PRÉ-SÉQUENCE PRINCIPALE** Clairement, les capacités d'AMBER vont permettre de résoudre et d'imager la base des jets et de contraindre ainsi des paramètres spatiaux critiques tel l'angle d'ouverture [THIÉBAUT *et al.* (2003a)]. Conjugée à une analyse à haute résolu-

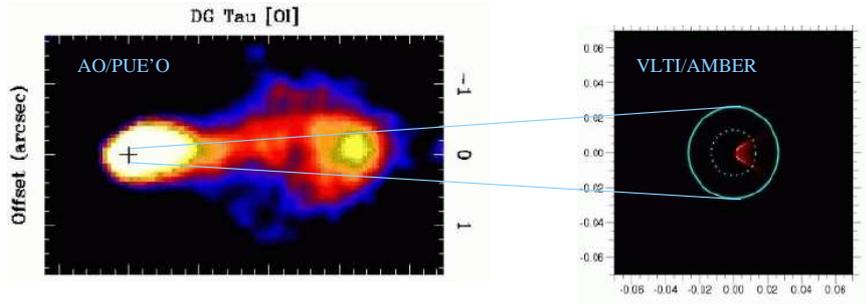


FIG. 3.2: . Observation du jet de DG Tau avec l'Optique Adaptative PUE'O du CFHT (gauche) et simulation de l'observation du même objet avec AMBER sur le VLT (étoile supprimée). Avec la résolution offerte par cet instrument, AMBER va sonder les parties internes de l'étoile et ainsi résoudre la base du jet.

tion spectrale donnant accès à la cinématique de ces structures, une telle étude, complète et quantitative, sera sûrement déterminante dans la discrimination des différents modèles de jets existants, à savoir le modèle "X-wind" [SHU *et al.* (1995)], "disk wind" [FERREIRA (1997)] et "disk wind + corona" [KWAN & TADEMARU (1995)].

**MULTIPLICITÉ** Enfin, grâce à une campagne d'observation complète en terme de gamme de séparation, AMBER pourra explorer de manière exhaustive le taux de binarité dans les régions de formation (en comparaison avec celui de la séquence principale), et ainsi dévoiler certains mécanismes de la formation stellaire et leurs liens avec le nuage moléculaire géniteur.

### *Exo-planètes: détection directe de Jupiters chauds*

Alors que les techniques de vitesses radiales ont dévoilé *indirectement* la présence d'une centaine de planètes autour de leur étoile mère, la méthode de la phase différentielle<sup>1</sup> [CHELLI & PETROV (1995b), LOPEZ *et al.* (2000)], accessible à moyenne résolution spectrale avec AMBER, va permettre une *détection directe* de ces fascinants objets. Non seulement, l'estimation du déplacement du photocentre apporte des contraintes sur les paramètres orbitaux, mais elle offre aussi une mesure directe du spectre de la planète, conduisant *in fine* à la composition de l'atmosphère, premiers pas vers l'exo-biologie...

### *Noyaux actifs de galaxie*

La grande surface collectrice des UTs rend possible l'exploration de sources extra-galactiques, à condition que AMBER soit capable de stabiliser les franges en se servant de l'objet lui-même. Si tel est cas, l'observation de Noyaux actifs de galaxie (NAGs) avec AMBER lèvera les controverses résultant de l'analyse des mesures (spectro-photométriques?), et notamment

1. Des méthodes basées sur l'information de clôture de phase, et de clôture de phase différentielle comptent aussi parmi les solutions les plus prometteuses [SEGRANSAN (2002)].

TAB. 3.1: . *Spécifications instrumentales minimales de AMBER en fonction des objectif astrophysiques. Rien n'empêche bien entendu d'utiliser des configurations plus élaborées que le minimum requis.*

Source	Visibilité (précision)	Clôture de phase	Phase différentielle	Résolution spectrale	Magnitude en $K$
YSOs	$10^{-3}$	Oui	-	1000-10000	4-7
Exoplanètes	$10^{-4}$	-	Oui ( $10^{-4}$ rad)	50	5
NAGs	$10^{-2}$	Oui	-	50	11 (UTs)
Multiplicité	$10^{-3}$	-	-	50	4
Surface stellaire	$10^{-4}$	Oui	Oui	10000	1

devrait conclure sur l'origine de l'émission proche infrarouge, qui provient soit directement du disque d'accrétion ou du jet, soit de la présence de nuages de gaz et/ou de poussières qui "reprocessent" l'énergie. Ce faisant, la validité du modèle réunifié (où la partie centrale de la galaxie serait entourée d'un disque de poussière responsable de tout ou partie de l'émission) sera confirmée ou infirmée. Mentionnons à ce sujet les deux premières observations interférométriques d'AGN: NGC 4151 avec le Keck interféromètre [SWAIN *et al.* (2003)] et NGC 1068 avec MIDI sur le VLTI [JAFFE *et al.* (2004)].

### *Structure stellaire et activité*

Utilisés au maximum de leurs capacités, en couplant haute résolution spatiale, haute résolution spectrale et mesures à grande précision, le VLTI et son instrument AMBER sont à même de "cartographier" la surface des étoiles, ou tout du moins de mettre à jour la variété des structures de surface au delà du fameux assombrissement centre-bord (dont l'analyse s'est affinée récemment grâce aux observations menées avec VINCI sur le VLTI [WITTKOWSKI *et al.* (2004)]). On peut ainsi mentionner par ordre de difficulté la mesure des diamètres stellaires (qui, combinée à des techniques spectroscopiques, peut mener dans le cas des Cepheides à l'estimation de leur distances [KERVELLA *et al.* (2004)]), la détermination des axes de rotations [DOMICIANO DE SOUZA *et al.* (2004)], l'analyse des taches stellaires, l'interférométrie différentielle couplée à de l'imagerie Doppler, la caractérisation de la sismologie stellaire et l'étude de l'interaction entre l'activité magnétique de l'étoile et l'environnement circumstellaire.

La variété des objectifs astrophysiques implique des exigences diverses quant aux performances à atteindre par l'instrument AMBER. Les spécificités instrumentales de chaque projet sont résumées dans le tableau 3.1.

De ces ambitions scientifiques et ces spécifications techniques est né l'instrument AMBER. Les paragraphes suivant en proposent une visite guidée.

### 3.1.3 Balade au fil d'AMBER: les différents sous-ensembles

L'instrument a été conçu en optique de volume, comme une association de sous-ensembles opto-mécaniques dont je vais brièvement décrire les fonctions respectives. Une caractérisation complète de l'instrument peut être trouvée dans [LAGARDE *et al.* (2001)]

Autant que faire se peut, l'énumération suivra le parcours de la lumière, en provenance des télescopes jusqu'à la recombinaison des faisceaux et la formation des franges sur le détecteur, lors des deux modes d'utilisation: observation et calibration. La conception optique initiale ainsi qu'une photo de la réalisation finale sont présentées sur la figure 3.3, les acronymes permettant de référencer les différents sous-ensembles.

#### *En mode d'observation*

Provenant des télescopes du VLTI, la lumière arrive sur la table AMBER et traverse le sélecteur de faisceaux constitué d'obturateurs [OPM-BSL]. Si besoin, les densités neutres [OPM-NDN] permettent d'atténuer le flux d'un facteur 10 ou 100. Les faisceaux ont un diamètre de 18mm (voir [GLINDEMANN *et al.* (2000)] pour plus de détails sur le VLTI).

Ensuite, il est possible d'introduire un inverseur de faisceau [OPM-BCD]. Cette procédure constitue une solution élégante pour obtenir une calibration de la phase différentielle instrumentale. Cet outil est utilisé lorsque une précision extrême ( $10^{-4}$ rad) est requise sur la mesure de la phase différentielle, comme lors de la recherche de planètes extra-solaires.

Une direction de polarisation préférentielle peut être sélectionnée grâce à l'apposition de polariseurs [OPM-POL]

En passant par les dichroïques, les faisceaux sont séparés bande spectrale par bande spectrale puis injectés dans les fibres optiques, et ce pour les trois bandes spectrales  $K$ ,  $H$  et  $J$ , respectivement [OPM-SFK], [OPM-SFH], [OPM-SFJ] (voir Fig. 3.4). Le filtrage modal des fibres permet de transformer les fluctuations de phase du front d'onde turbulent en fluctuations d'intensité. Des miroirs piezoélectriques permettent de régler la différence de marche entre chaque bande spectrale. La forme des faisceaux en sortie de fibres est parfaitement définie et déterministe.

Dans le cas des bandes  $H$  et  $J$ , la dispersion spectrale due à la réfraction atmosphérique doit être compensée pour maximiser l'injection dans les fibres (et ainsi perdre le moins de flux possible). Cette opération est réalisée grâce au compensateur de dispersion atmosphérique [OPM-ADC]. Des dichroïques en sortie reconstituent les faisceaux multi-longueurs d'onde qui vont être recombinaisonnés.

Puis, l'anamorphoseur [OPM-ANS], constitué d'un couple de cylindres optiques, compresse les faisceaux dans une direction parallèle aux sous-pupilles de sortie.

Le périscope [OPM-OSI] assure ensuite l'interface entre l'optique "chaude" et l'optique du spectrographe.

La lumière passe alors par tous les éléments du spectrographe [SPG-xxx]: (i) le masque froid qui empêche les rayonnements parasites de passer (provenant de l'émission infra-rouge

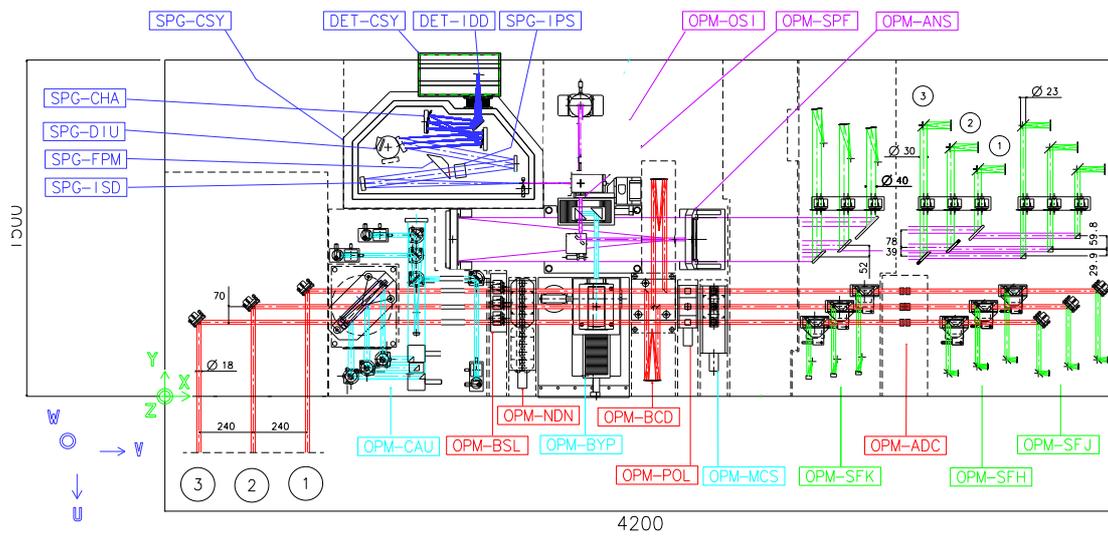


FIG. 3.3: Schéma conceptuel de la table optique d'AMBER et réalisation finale de l'instrument. Les sous-ensembles majeurs sont indiqués sur le schéma et définis par leurs acronymes (voir texte).

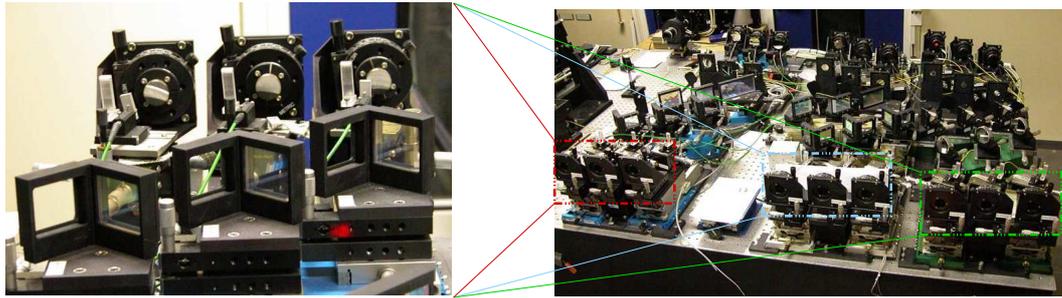


FIG. 3.4: *Vue de l'injection des faisceaux dans les fibres. Cette procédure permet d'effectuer le filtrage modal des fronts d'ondes affectés (partiellement) d'une phase aléatoire atmosphérique. Cette opération est réalisée pour les trois bandes spectrales J (vert), H (bleu) et K (rouge).*

des différents éléments de la table optique), (ii) les pupilles de sortie qui définissent la taille de la tache de diffraction sur le détecteur et dont la disposition fixe les fréquences de codage, (iii) les lames séparatrices pour la calibration photométrique, et enfin les instruments de dispersion spectrale, un prisme pour la basse résolution et un réseau pour la moyenne et la haute résolution.

### *En mode calibration*

Lors des étapes d'alignement et de calibration précédents les observations, la lumière ne provient pas des télescopes mais de l'Unité de Calibration et d'Alignement [OPM-CAU] qui fournit des sources internes, cohérentes et incohérentes.

Sur le parcours de la lumière se trouve alors un système de calibration [OPM-MCS] qui permet, en apposant des lames dites "lames MCS", d'introduire un déphasage supposé connu entre deux faisceaux. Suivant une procédure séquentielle que nous développerons en détails par la suite, ce système permet de calibrer l'instrument, étape nécessaire et primordiale du processus de réduction de données.

Enfin, pour des motifs d'alignement et de contrôle de l'instrument, la lumière peut, à l'aide d'un "court-circuit" [OPM-BYP], être directement détournée vers le spectrographe (cette procédure peut aussi être effectuée en mode observation pour vérifier que du flux arrive à l'entrée d'AMBER), évitant ainsi la séparation des faisceaux en trois bandes spectrales et l'injection dans les fibres.

### 3.1.4 Logiciel de contrôle AMBER

Ce paragraphe résume très succinctement l'environnement du logiciel contrôlant l'instrument AMBER [LE COÄRER & DUVERT (2001)], mettant en exergue la place de la réduction de donnée dans cette architecture. Le logiciel suit la configuration classique des logiciels d'instrumentations du VLT. Celle-ci est schématisée sur la figure 3.5. La première étape, commune à tous les instruments installés sur le VLT, consiste à définir les observations. Cette procédure

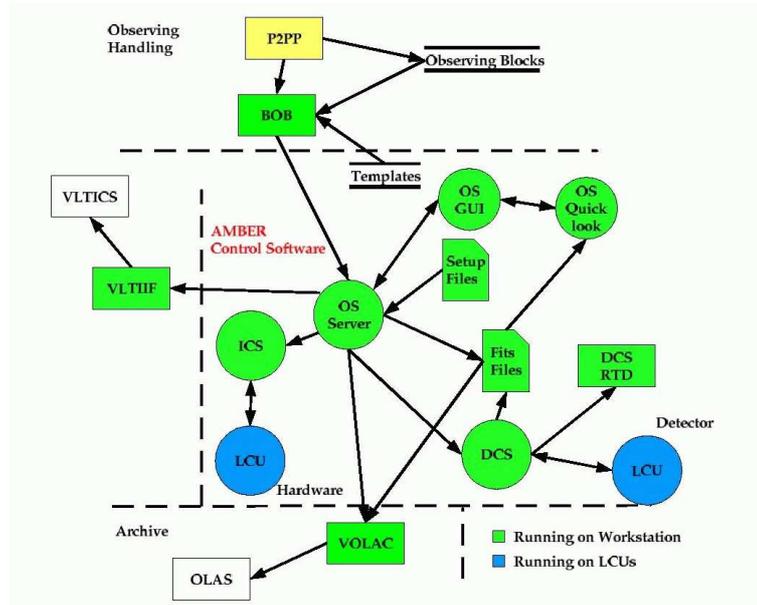


FIG. 3.5: Configuration du logiciel AMBER.

est réalisée grâce au module de préparation des observations (P2PP) et au gestionnaire des blocs d'observations (BOB). Ce dernier permet d'en contrôler et éventuellement d'en modifier les différentes séquences. Ensuite, on rentre spécifiquement dans le logiciel de contrôle AMBER. Suivant les normes ESO/VLT, ce logiciel est constitué de quatre composantes :

- le logiciel de contrôle de l'instrument (ICS) (commandes de bas niveau)
- le logiciel de contrôle du détecteur infra-rouge (DCS)
- Le logiciel d'observation (OS) (commandes de haut niveau)
- le logiciel de maintenance (MS)

La réduction des données interférométriques à proprement parler est réalisée *a posteriori*, une fois toutes les données sauvegardées et n'apparaît pas dans la schéma décrit par la figure 3.5. La procédure est en fait effectuée en sortie du "pipeline", quelques minutes après les observations. Néanmoins, une version "allégée" de l'algorithme de réduction, optimisée pour le temps réel est intégrée au logiciel d'observation dans la partie "Quick Look". Cette dernière offre sous forme d'interface graphique des informations sur les données en train d'être enregistrées (visibilités instantanées, flux photométriques, RSB des franges, ...).

Dans un premier temps, j'ai développé, testé et validé les différents algorithmes de réduction de données. Cette étape de prototypage a été écrite en langage Yorick<sup>1</sup>. Ensuite, ces algorithmes ont été traduits en C sous forme de bibliothèques (la bibliothèque spécifique à la réduction de donnée est appelée "amdlib") par B. Acke, G. Duvert, E. Lecoarer, et G. Zins.

1. <ftp://ftp-icf.llnl.gov/pub/Yorick/doc/index.html>

### 3.1.5 Données finales sur le détecteur

L'interférogramme dispersé issu de la recombinaison des faisceaux, ainsi que la photométrie, sont imagés en deux dimensions (pixels-longueurs d'ondes) sur le détecteur infrarouge dont les caractéristiques sont résumées en table 3.2. Trois modes de résolution spectrale sont possibles: basse résolution ( $\mathcal{R} = 35$ ), moyenne résolution ( $\mathcal{R} = 1500$ ), et haute résolution ( $\mathcal{R} = 10000$ ). Le principe de la recombinaison est illustré sur le schéma 3.6. Un exemple d'image typique enregistrée sur le détecteur d'AMBER est donnée en figure 3.7.

Ainsi l'interférogramme enregistré sur le détecteur est une image dont la dimension verticale représente la dispersion spectrale, et qui se décompose horizontalement en cinq parties:

- La première partie, qui ne reçoit aucune lumière, permet d'avoir une estimation "gros-sière"<sup>1</sup> du courant d'obscurité (i.e. la réponse du détecteur à un éclairage nul) et ainsi de construire des signaux dont le bruit de détecteur est à moyenne nulle.
- Les deux suivantes et la dernière sont les *voies photométriques*: elles enregistrent le signal photométrique provenant des (deux ou) trois télescopes.
- La quatrième est la *voie interférométrique*: elle exhibe les franges d'interférences résultant de la recombinaison des (deux ou) trois faisceaux.

On peut déjà remarquer que la figure d'interférences est composée d'un continuum photométrique auquel s'ajoute les franges. Ces franges d'interférences résultent de la somme de (deux ou trois) sinusoïdes, chacune pondérée par le contraste (instrumental, atmosphérique et de l'objet) relatif à la ligne de base considérée. En d'autres termes, l'information que l'on veut extraire de ces interférogrammes (i.e. le contraste) est portée par des sinusoides pures dont les fréquences sont déterminées par la géométrie des pupilles de sortie. Ces sinusoïdes sont appelées "ondes porteuses" telles que communément définies dans le domaine des télécommunication en modulation d'amplitude.

Dans le cas d'AMBER, deux pupilles de sortie (de diamètre  $d$ ) sont "collées" alors que la troisième est à une distance  $d$  de sa voisine la plus proche. Il en résulte que les franges sont codées aux fréquences  $d/\lambda$ ,  $2d/\lambda$  et  $3d/\lambda$ , comme l'indique le profil de la densité spectrale de l'interférogramme en figure 3.7. En conséquence, lors d'observations à trois télescopes, les pics franges se recouvrent partiellement et il n'est pas possible d'utiliser des procédures classiques de réduction de données dans le plan de Fourier. La procédure AMBER se base donc sur une analyse dans le "plan image", le principe relevant d'une généralisation – ou plus précisément d'une optimisation –, des méthodes de type "ABCD" [COLAVITA (1999a)]. La spécificité des algorithmes de réduction de données AMBER part du constat suivant: il est nécessaire d'établir la relation liant de manière linéaire les pixels (i.e. les interférogrammes enregistrés sur le détecteur) aux observables (i.e. la visibilité complexe) afin de pouvoir définir

---

1. si l'on fait l'hypothèse d'un détecteur "uniforme". En fait la procédure rigoureuse est plus compliquée que cela, prenant en compte les caractéristiques du "dark" pixel à pixel, ainsi que le bruit en  $1/f$  [BECKMANN *et al.* (2003)].

TAB. 3.2: *Caractéristiques du détecteur.*

Spécifications du détecteur	
Société/Nom	Rockwell/HAWAII
Composition	HgCdTe
Nombre de pixels	$512 \times 512$
Taille du pixel	$18.5\mu\text{m} \times 18.5\mu\text{m}$
Étendue spectrale	$0.8\mu\text{m} - 2.5\mu\text{m}$
Bruit de lecture	$10e^-$
Refroidissement	Azote liquide
Température	78K
Autonomie du cryostat	24h

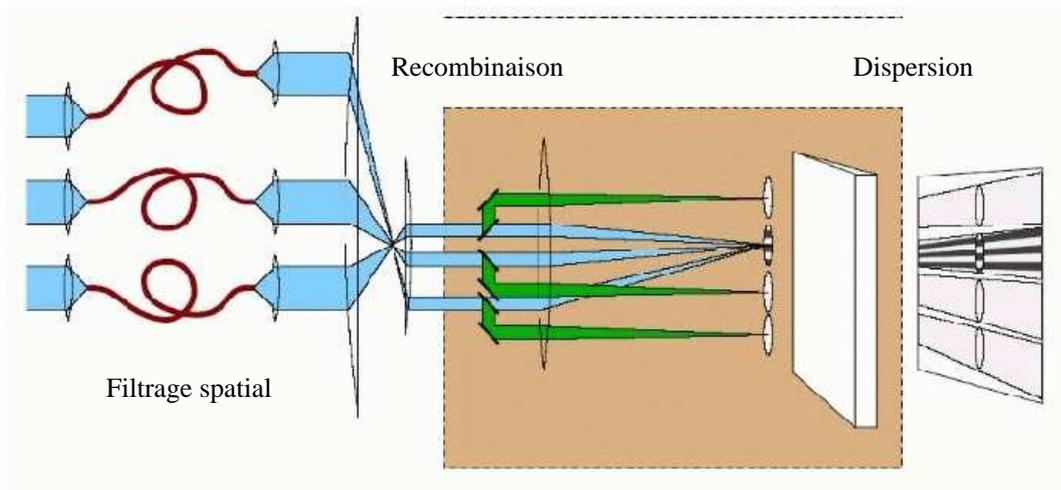


FIG. 3.6: *Schéma de principe de l'instrument AMBER. Après un filtrage spatial effectué par les fibres, les faisceaux "compressés" sur une dimension sont recombinaison selon la technique multiaxiale, la photométrie sur chaque voie étant aussi prélevée grâce à l'apposition de lames séparatrices sur le parcours des faisceaux. Ces derniers sont alors dispersés et l'interférogramme bi-dimensionnel (pixels-longueurs d'onde) est enregistré sur le détecteur infrarouge.*

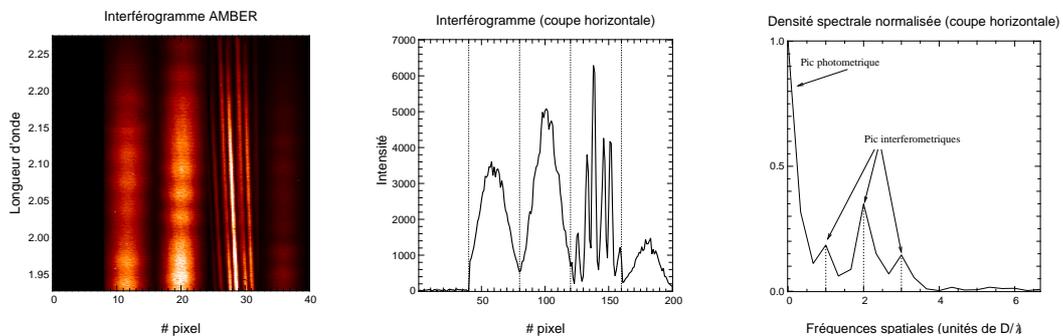


FIG. 3.7: *De gauche à droite: image bi-dimensionnelle obtenue sur le détecteur avec AMBER, coupe horizontale et densité spectrale de l'interférogramme.*

un traitement du signal optimisé. Cette opération revient en fait à caractériser les ondes porteuses introduites précédemment. Pour ce faire, le traitement du signal AMBER commence par une étape de calibration de l'instrument. L'estimation des observables interférométriques à partir des interférogrammes peut ensuite se faire, via des procédures dont le développement a constitué le coeur de mon travail de thèse. Cette partie est décrite en détails dans le chapitre suivant.

## 3.2 Réduction de données AMBER

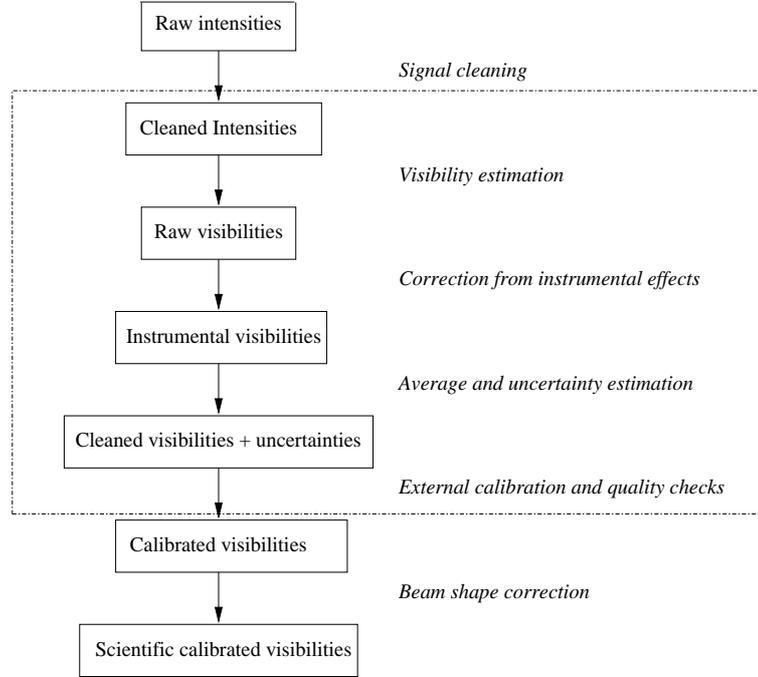


FIG. 3.8: Schéma de principe de la réduction de données AMBER. Le cadre entoure les parties relatives à mon travail de thèse.

La liste complète des étapes de réduction de données est schématisée sur la figure 3.8. Dans cette partie, je m’attacherai à décrire en détails les procédures de calibration de l’instrument ainsi que toutes les étapes de réductions de données allant des interférogrammes bruts (mais nettoyés) aux visibilités débiaisées. Par contre, je ne parlerai pas des problèmes liés à la cosmétique (carte de mauvais pixels, "flat-field", ...), ni de ceux liés à la calibration de la visibilité par une source de référence.

Quoiqu’il en soit, il faut avant toutes choses décrire rigoureusement le signal enregistré sur le détecteur, ce qui revient à établir l’équation interférométrique.

### 3.2.1 L’équation interférométrique selon AMBER

L’interférogramme enregistré sur le détecteur provient d’une recombinaison multiaxiale des faisceaux. Ainsi, pour chaque canal spectral (supposé pour l’instant de largeur spectrale nulle), le signal interférométrique est la directe transposition de l’équation 2.47 dans le plan du détecteur, soit:

$$i_k = \sum_i^{N_{tel}} N t_i a_k^i + 2 \sum_{i < j}^{N_{tel}} N \sqrt{t_i t_j} \sqrt{a_k^i a_k^j} V_{ij} \cos(2\pi \alpha_k f_{ij} + \phi_{ak}^{ij} + \Phi_{ij} + \phi_{ij}^p) \quad (3.1)$$

où l'indice  $k$  représente la position du pixel et l'exposant  $i$  décrit le numéro du télescope. Cette convention sera respectée tout au long de ce chapitre, lorsque ces deux variables sont nécessaires pour caractériser une fonction. Avant d'aller plus loin, il faut analyser les différents termes de cette équation:

- Dans le cas de AMBER,  $N_{tel}$  peut prendre les valeurs 2 ou 3. Cependant, l'équation 3.1 est générale et valable pour un nombre quelconque de télescopes.
- $N$  est le nombre de photons provenant de la source, et  $t_i$  prend en compte pour chaque voie, les différentes transmissions de l'instrument: la transmission du télescope ainsi que l'efficacité de couplage à l'interface front d'onde/fibre qui dépend de l'atmosphère.
- $a_k^i$  décrit le faisceau détecté, issu du  $i^{me}$  télescope. AMBER utilisant les propriétés de filtrage spatial des fibres, la forme de ce faisceau est entièrement déterministe. C'est la figure de diffraction de la pupille de sortie pondéré par le premier mode de la fibre. La forme du faisceau dans la voie interférométrique  $(ij)$  est  $\sqrt{a_k^i a_k^j}$  et comporte une phase instrumentale  $\phi_{ak}^{ij}$  provenant des possibles aberrations de phase différentielles entre les voies  $i$  et  $j$ .
- $f_{ij}$  est la fréquence de codage des franges d'interférences correspondant à la ligne de base formée par les télescopes  $i$  et  $j$ .
- $V_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$  sont respectivement le module et la phase de la visibilité *modale*, relativement à cette ligne de base.
- $\phi_{ij}^p$  est le piston différentiel atmosphérique

Si on développe le cosinus, afin d'isoler la partie instrumentale ( $\phi_{ak}^{ij}$ ), l'équation 3.1 se réécrit sous la forme suivante:

$$i_k = \sum_i^{N_{tel}} N t_i a_{i_k} + \sum_{i < j}^{N_{tel}} 2N \sqrt{t_i t_j} V_{ij} \sqrt{\sum_k a_k^i a_k^j} \left[ c_k^{(i,j)} \cos(\Phi_{ij} + \phi_{ij}^p) - d_k^{(i,j)} \sin(\Phi_{ij} + \phi_{ij}^p) \right] \quad (3.2)$$

avec

$$c_k^{(i,j)} = \sqrt{\frac{a_k^i a_k^j}{\sum_k a_k^i a_k^j}} \cos(2\pi \alpha_k f_{ij} + \phi_{ak}^{ij}), \quad d_k^{(i,j)} = \sqrt{\frac{a_k^i a_k^j}{\sum_k a_k^i a_k^j}} \sin(2\pi \alpha_k f_{ij} + \phi_{ak}^{ij}) \quad (3.3)$$

$c_k^{(i,j)}$  et  $d_k^{(i,j)}$  sont les fameuses *ondes porteuses* du signal interférométrique. Comme mentionné précédemment, elles caractérisent l'instrument du point de vue du traitement du signal, la seule inconnue restant la fraction du flux photométrique se retrouvant dans le continuum de la voie interférométrique. Si  $P_i$  est le flux intégré (sur les pixels) dans la voie photométrique  $i$ , la relation entre  $P_i$  et  $N t_i$  est de la forme:

$$P_i v_k^i = N t_i a_k^i \quad (3.4)$$

Ce sont donc ces grandeurs –  $v_k^i$ ,  $c_k^{(i,j)}$ , et  $d_k^{(i,j)}$  – qu'il va falloir calibrer avant de commencer la séquence d'observation à proprement parler.

### 3.2.2 Calibration des ondes porteuses

La procédure de calibration est donnée en détails dans [CHELLI (2000a)]. Je n'en rappelle ici que les grandes étapes théoriques. En revanche, je m'attarderai sur les points durs.

#### *Procédure*

Les différentes étapes de calibration se font à l'aide d'une source artificielle. La séquence d'acquisition des fichiers de calibration est résumée par la figure 3.9 et les tableaux 3.3 et 3.4. La procédure est la suivante:

1. Il faut tout d'abord mesurer la fraction de flux photométrique allant dans le continuum de la voie interférométrique. Pour cela, il faut enregistrer une image où seul un obturateur est ouvert, et ce successivement pour les (deux ou) trois voies. Cela conduit à une mesure précise des fonctions  $v_k^i$ .
2. En ce qui concerne les ondes porteuses, il faut une procédure mettant en jeu deux mesures indépendantes car il y a deux inconnues (par ligne de base) à estimer  $c_k^{(i,j)}$  et  $d_k^{(i,j)}$ . Le principe est le suivant: pour chaque paire de faisceaux, on enregistre l'interférogramme sur le détecteur. Grâce aux voies photométriques et à la connaissance précise des fonctions  $v_k^i$ , on peut *corriger* l'interférogramme du continuum photométrique (i.e. le centrer autour de 0), de même que l'on peut le *calibrer* par la photométrie. On obtient au final l'onde porteuse  $c_k^{(i,j)}$  pondéré par le contraste instrumental d'AMBER  $V_c^{ij}$  (qui dépend de la visibilité de la source artificielle pour cette base, ainsi que des éventuels défauts d'alignement des faisceaux). Pour obtenir  $d_k^{(i,j)}$ , on réitère l'opération précédente en introduisant un déphasage différentiel ( $\gamma_0$ ), *que l'on suppose parfaitement connu et différent de  $\pi$* , via la disposition de lames MCS le long du trajet optique. On peut ainsi reconstruire  $d_k^{(i,j)}$ , à partir de  $c_k^{(i,j)}$  et de  $\gamma_0$ . La seule inconnue reste  $V_c^{ij}$ . On peut facilement la calculer si on remarque que  $c_k^{(i,j)}$  et  $d_k^{(i,j)}$  sont en quadrature et qu'elle vérifient donc, *avant la normalisation par le contraste instrumental*, la relation suivante:

$$\sum_k^{N_{pix}} c_k^2 + d_k^2 = V_c^2 \quad (3.5)$$

Il faut aussi noter qu'en toute rigueur, les ondes porteuses ne peuvent être connues qu'à une phase système ( $\phi_s^{ij}$ ) près (qui se rajoute donc à la phase des ondes porteuses dans l'équation 3.3).

Ainsi, cette procédure (dont les différentes séquences d'acquisition sont décrites en tables 3.3 et 3.3, et dont l'illustration est donnée en figure 3.10) permet d'effectuer une caractérisation exhaustive de l'instrument AMBER, connaissance qui sera utilisée lors l'estimation des observables. Elle fournit entre autre le contraste instrumental  $V_c$ . Cette information est très intéressante car elle permet lors de l'observation sur le ciel d'une source de référence d'isoler dans le contraste des franges la contribution de l'atmosphère de la contribution du seul instrument et ainsi de remonter aux caractéristiques de la turbulence.

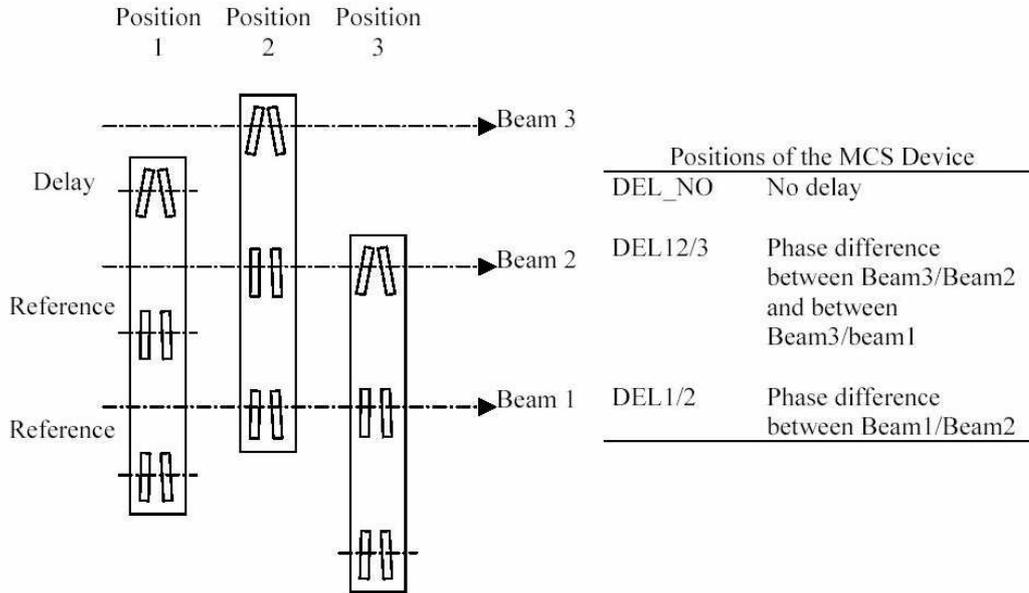


FIG. 3.9: Principe des lames MCS. Selon leur positionnement sur la table AMBER, les lames MCS vont entraîner un déphasage entre les voies 1 et 2, 2 et 3, ou 1 et 3.

TAB. 3.3: Séquence d'acquisition des fichiers de calibrations à deux télescopes.

Fichier	Obturbateur 1	Obturbateur 2	MCS
AMB_2TSTD_CAL_0001	Ouvert	Fermé	DEL_NO
AMB_2TSTD_CAL_0002	Fermé	Ouvert	DEL_NO
AMB_2TSTD_CAL_0003	Ouvert	Ouvert	DEL_NO
AMB_2TSTD_CAL_0004	Ouvert	Ouvert	DEL_1/2

TAB. 3.4: Séquence d'acquisition des fichiers de calibrations à trois télescopes.

Fichier	Obturbateur 1	Obturbateur 2	Obturbateur 3	MCS
AMB_3TSTD_CAL_0001	Ouvert	Fermé	Fermé	DEL_NO
AMB_3TSTD_CAL_0002	Fermé	Ouvert	Fermé	DEL_NO
AMB_3TSTD_CAL_0003	Fermé	Fermé	Ouvert	DEL_NO
AMB_3TSTD_CAL_0004	Ouvert	Ouvert	Fermé	DEL_NO
AMB_3TSTD_CAL_0005	Ouvert	Ouvert	Fermé	DEL_1/2
AMB_3TSTD_CAL_0006	Ouvert	Fermé	Ouvert	DEL_NO
AMB_3TSTD_CAL_0007	Ouvert	Fermé	Ouvert	DEL_12/3
AMB_3TSTD_CAL_0008	Fermé	Ouvert	Ouvert	DEL_NO
AMB_3TSTD_CAL_0009	Fermé	Ouvert	Ouvert	DEL_12/3

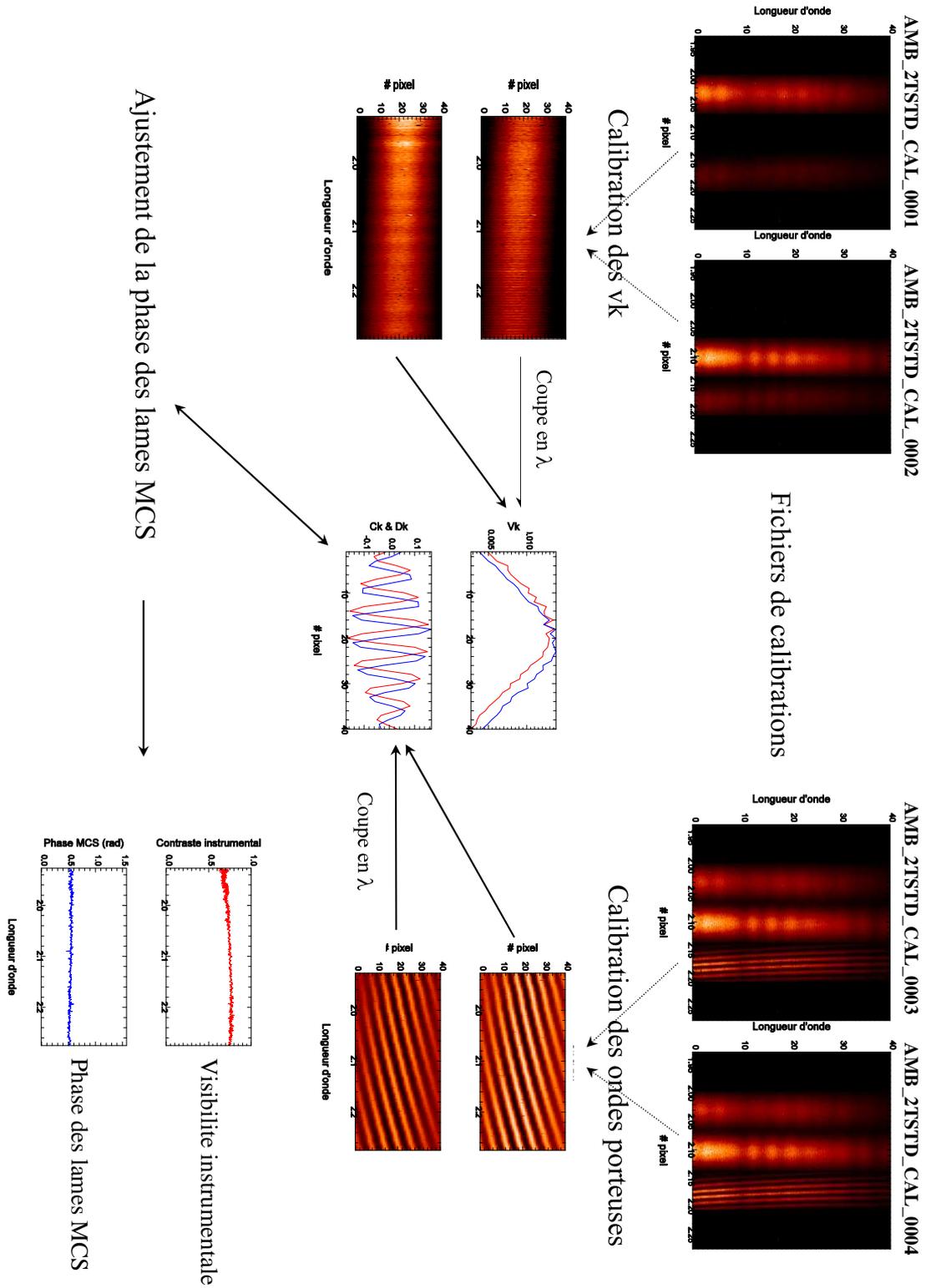


FIG. 3.10: Schéma descriptif de la procédure de calibration de l'instrument AMBER.

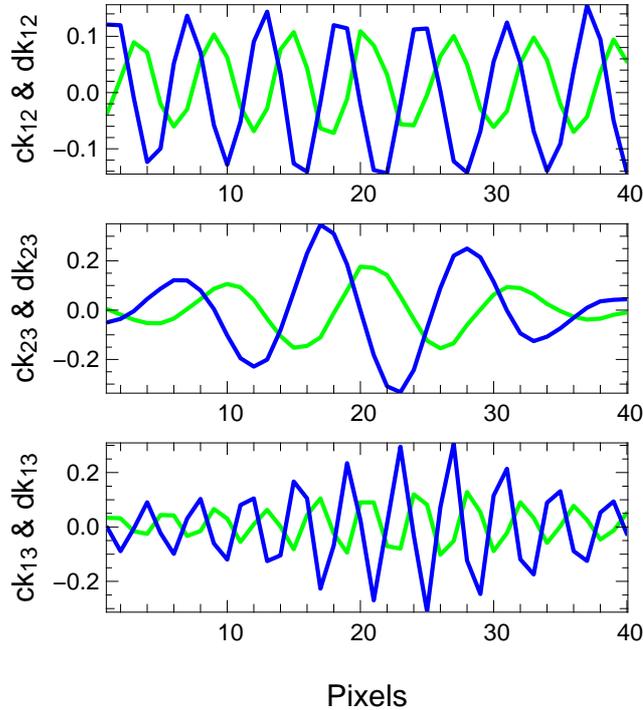


FIG. 3.11: Ondes porteuses ( $c_k$  en vert,  $d_k$  en bleue) calculées à partir d'un déphasage de la lame MCS erroné. Comme prévu,  $d_k$  n'est manifestement pas en quadrature avec  $c_k$  et n'a pas la bonne amplitude.

### *Auto-calibration des lames MCS*

Lors de procédures tests de calibrations successives, il a été remarqué qu'il était très difficile, voire impossible, de mesurer de façon précise et robuste le déphasage introduit par la lame MCS. Or l'utilisation d'un déphasage erroné dans le calcul des ondes porteuses entraîne une fausse estimation de  $d_k^{(i,j)}$ , avec une mauvaise amplitude et n'étant plus en quadrature avec  $c_k^{(i,j)}$ , comme illustré sur la figure 3.11. Il a donc fallu implémenter une méthode permettant de retrouver la phase des lames MCS à partir des mesures. Plusieurs techniques ont été proposées parmi lesquelles une étude de la phase dans le plan de Fourier ou encore un ajustement de l'enveloppe des ondes porteuses en se basant sur la relation 3.5. Ces deux méthodes ont été abandonnées car elles n'étaient pas assez robustes, les premières dépendant trop du support d'intégration du pic haute fréquence, la deuxième étant trop sensible au choix initial du déphasage (le critère de minimisation n'étant pas linéaire) ainsi qu'à l'estimation (laborieuse) du bruit sur les ondes porteuses.

La solution finalement adoptée part du principe que l'interférogramme  $\mu_k^\gamma$  (recentré et calibré), acquis en présence des lames MCS garde quelque part l'information de déphasage. Si  $d_k$  (l'inconnue) est la véritable onde porteuse, qui serait calculée à partir du bon déphasage

$\gamma_0$ , la relation suivante est vérifiée:

$$\mu_k^\gamma = c_k \cos(\gamma_0) - d_k \sin(\gamma_0) \quad (3.6)$$

Le critère que l'on impose est que  $c_k$  et  $d_k$  sont en quadrature, soit par définition du produit scalaire:

$$\langle c_k/d_k \rangle = \sum_{k=1}^{N_{pix}} c_k \cdot d_k = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation assure *de facto* que la condition 3.5 est vérifiée car le théorème de Parseval implique aussi que:

$$\sum_{k=1}^{N_{pix}} c_k^2 = \frac{V_c^2}{2} \quad (3.8)$$

On obtient alors une estimation exacte du cosinus du déphasage:

$$\cos(\gamma_0) = \frac{\sum_{k=1}^{N_{pix}} c_k \cdot \mu_k^\gamma}{\sum_{k=1}^{N_{pix}} c_k^2} \quad (3.9)$$

ce qui permet de reconstruire le  $d_k$  correct:

$$d_k = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \cos^2(\gamma_0)}} (c_k \cos(\gamma_0) - \mu_k^\gamma) \quad (3.10)$$

Le choix du signe se fait ensuite en imposant que  $d_k$  soit en retard de  $\pi/2$  sur  $c_k$  et non pas en avance.

Comme remarqué initialement par [MÈGE (2003)], une façon encore plus simple de recouvrer  $d_k$ , et ne mettant en jeu aucune lame MCS, est de créer *numériquement* le pendant quadratique de  $c_k$ . Puisque les interférences sont créées par paire, on peut calculer la TF de  $c_k$ :

$$\text{TF}\{c_k\} = \frac{H(f + f_{ij}) + H(f - f_{ij})}{2} \quad (3.11)$$

où  $H(f)$  est la TF de l'enveloppe des ondes porteuses. Ensuite, si on calcule l'opposé de la partie des fréquences positives et que l'on multiplie le tout par le complexe  $i = (0, 1)$ , il vient:

$$D(f) = \frac{i}{2} [H(f + f_b) - H(f - f_b)] \quad (3.12)$$

dont la transformée de Fourier inverse n'est autre que  $d_k$  (voir illustration en figure 3.12)! Cette procédure n'a pas été retenue pour le calcul effectif de  $d_k$  car elle nécessite entre autres une étude poussée de la corrélation des bruits entre  $c_k$  et  $d_k$ , ainsi que l'influence des "pixels morts" sur les Transformées de Fourier numériques. Cependant elle permet de valider la méthode précédente, comme indiqué sur la figure 3.13

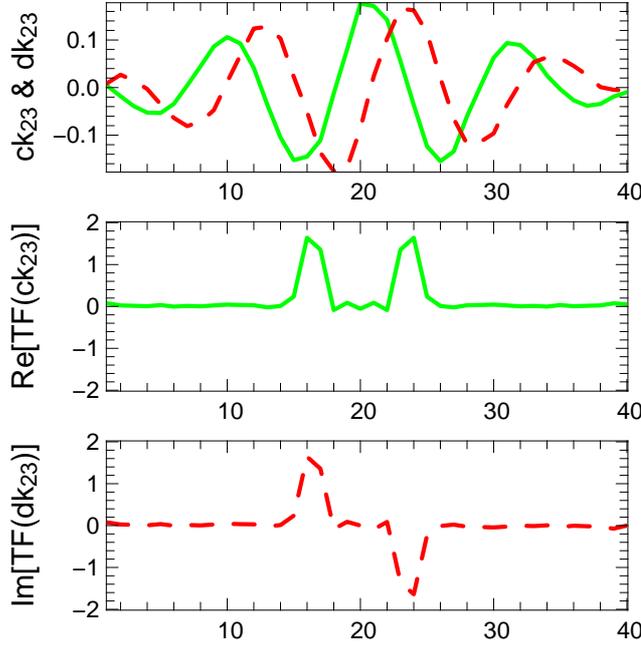


FIG. 3.12: *Illustration de la méthode de la Transformée de Fourier numérique pour calculer les  $d_k$  (en haut, rouge, ligne brisée) à partir des  $c_k$  (en haut, vert, trait plein). Au milieu: partie réelle de la Transformée de Fourier de  $c_k$ . En bas: partie imaginaire de la Transformée de Fourier  $d_k$ . Cette courbe peut être déduite de la précédente par de simples transformations mathématiques.*

### Qualité de la procédure de calibration

Pour que la calibration des ondes porteuses apporte un gain en performances dans la procédure de réduction de données, il faut elle soit de "bonne qualité", c'est à dire avec un très bon rapport signal à bruit, en tout cas très supérieur aux RSB provenant des observations. Un bon traceur de cette qualité est le rapport signal à bruit sur le contraste instrumental. Or, pour s'affranchir de procédures statistiques trop coûteuses en temps, où l'on enregistrerait  $N \gg 1$  fichiers de calibration avant chaque observation, il faut s'appuyer sur une formule théorique pour estimer le bruit sur le contraste instrumental. À partir de l'équation 3.8, l'erreur sur le contraste instrumental s'écrit:

$$\sigma_{V_c^2}^2 = 4 \sum_k^{N_{pix}} \sigma_{c_k^2}^2 \quad (3.13)$$

Et de part la définition des ondes porteuses, on obtient:

$$\sigma_{c_k^2}^2 = \frac{1}{16 \left( \sum_k^{N_{pix}} v_k^i v_k^j \right)^2} \sigma^2 \left( \frac{[\mu_k^{(i,j)}]^2}{P_i P_j} \right) \quad (3.14)$$

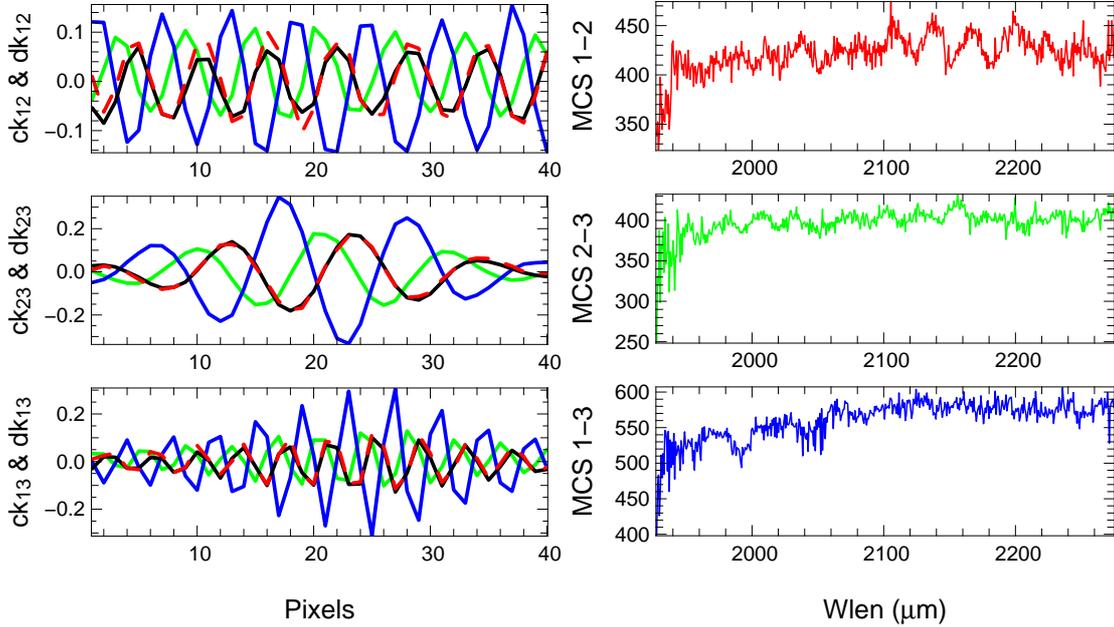


FIG. 3.13: Gauche: Les  $d_k$  calculés à partir de la procédure décrite en Section 3.2.2 (en noir) ainsi qu'à partir de la méthode de la Transformée de Fourier numérique (en rouge, ligne brisée) ont été rajoutés à la figure 3.11. Les deux techniques sont en bon accord et conduisent à des  $d_k$  en quadrature et avec la même amplitude que les  $c_k$ . Droite: valeur du déphasage réel introduit, en fonction de la longueur d'onde.

où  $\mu_k^{(i,j)}$  est l'interférogramme corrigé du continuum photométrique (et  $t_k^{(i,j)}$  l'interférogramme brut, non corrigé):

$$\mu_k^{(i,j)} = t_k^{(i,j)} - P_i v_k^i - P_j v_k^j \quad (3.15)$$

Utilisant un développement au deuxième ordre suivant la méthode de [PAPOULIS (1984)], on peut calculer l'erreur sur l'onde porteuse  $c_k^2$ , en chaque pixel, à partir de:

$$\sigma^2 \left( \frac{[\mu_k^{(i,j)}]^2}{P_i P_j} \right) = \left[ \frac{\sigma^2 \left( [\mu_k^{(i,j)}]^2 \right)}{[\mu_k^{(i,j)}]^2} + \frac{\sigma^2 (P_i)}{P_i^2} + \frac{\sigma^2 (P_j)}{P_j^2} \right] \frac{[\mu_k^{(i,j)}]^2}{P_i^2 P_j^2} \quad (3.16)$$

Pour calculer les erreurs sur les grandeurs utiles, le calcul est un peu compliqué, car il faut revenir aux quantités physiquement corrompues par le bruit de photon et le bruit de détecteur, soit l'interférogramme brut et les voies photométriques dont il faut calculer les moments d'ordre 2, 3 et 4. Les résultats de ce calcul un peu laborieux, sont résumés dans le tableau 3.5

Pour valider, ces expressions théoriques, j'ai simulé grâce au logiciel développé par G. Duvert,  $N = 100$  fichiers de calibrations bruités (bruit de photon + détecteur ( $\sigma_d^2 = 12e^-/\text{pix}$ )) de l'instrument AMBER pour différent temps de poses, à partir desquels j'ai pu calculer le

TAB. 3.5: Moments d'ordre 2, 3 et 4 de l'interférogramme brut  $t_k$  et de la voie photométrique  $P_i$  échantillonnée sur  $N_{pix}$  pixels, lorsque ces quantités sont corrompues par du bruit de photon et du bruit de détecteur de variance  $\sigma_d^2$ . Ces expressions sont formelles et sans approximations.

Moments	$t_k$	$P_i$
ordre2 ( $\overline{X^2}$ )	$\overline{t_k^2} + \overline{t_k} + \sigma_d^2$	$\overline{P_i^2} + \overline{P_i}N_{pix}\sigma_d^2$
ordre3 ( $\overline{X^3}$ )	$\overline{t_k^3} + 3\overline{t_k^2} + \overline{t_k} + 3\overline{t_k}\sigma_d^2$	$\overline{P_i^3} + 3\overline{P_i^2} + \overline{P_i} + 3\overline{P_i}N_{pix}\sigma_d^2$
ordre4 ( $\overline{X^4}$ )	$\overline{t_k^4} + 6\overline{t_k^3} + 7\overline{t_k^2} + \overline{t_k} + 6[\overline{t_k^2} + \overline{t_k}]\sigma_d^2 + 3\sigma_d^4$	$\overline{P_i^4} + 6\overline{P_i^3} + 7\overline{P_i^2} + \overline{P_i} + 6[\overline{P_i^2} + \overline{P_i}]N_{pix}\sigma_d^2 + [3N_{pix} + 2N_{pix}^2]\sigma_d^4$

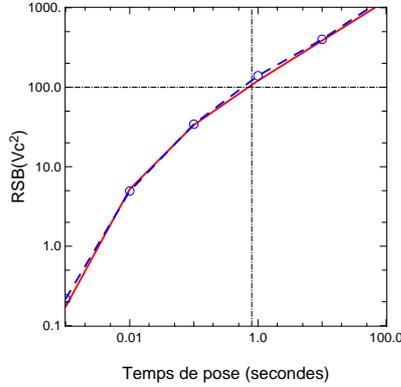
(3.17)


FIG. 3.14: RSB sur le contraste instrumental en fonction du temps de pose. La courbe rouge est calculée théoriquement et les points bleus (ainsi que la ligne brisée) résultent des simulations de fichiers de calibrations bruités.

rapport signal à bruit empirique. Les résultats obtenus à partir du formalisme théorique et des simulations sont en très bon accord, comme indiqué sur la figure 3.14. Cet algorithme a été implémenté dans le logiciel de réduction de données et permet de donner en temps réel la qualité de la calibration, information cruciale pour décider de la stratégie à suivre (effectuer les observations ou refaire une calibration).

De plus ces courbes nous donnent *a priori* le temps de pose nécessaire pour avoir une calibration performante. Clairement, un RSB de 100 ou plus est souhaitable, ce qui implique un temps de pose minimum d'environ une seconde par fichier de calibration.

### 3.2.3 La matrice P2VM

Une fois la calibration effectuée, on peut, à partir interférogrammes enregistrés lors des observations, remonter au flux cohérent  $F_c^{ij}$  et aux flux photométriques  $F_i, F_j$  à partir desquels sont définis les estimateurs de toutes les observables. Il faut pour cela s'appuyer sur l'équation 3.2 qui décrit les interférogrammes en question. La première étape consiste à supprimer la

partie continue du signal grâce aux voies photométriques:

$$m_k = i_k - \sum_{i=1}^{N_{tel}} P_i v_k^i \quad (3.18)$$

Si on introduit alors les quantités  $R_{ij}$  et  $I_{ij}$ , proportionnelle à la partie réelle et la partie imaginaire du flux cohérent complexe  $C_{ij}$ , défini par analogie avec l'équation 2.11 comme:

$$C_{ij} = R_{ij} + iI_{ij} \quad (3.19)$$

$$R_{ij} = 2N \sqrt{t_i t_j} V_{ij} \sqrt{\sum_k a_k^i a_k^j} \cos(\Phi_{ij} + \phi_{ij}^p - \phi_{ij}^s) = \sqrt{\sum_k a_k^i a_k^j} |F_c^{ij}| \cos(\Theta_{ij}) \quad (3.20)$$

$$I_{ij} = 2N \sqrt{t_i t_j} V_{ij} \sqrt{\sum_k a_k^i a_k^j} \sin(\Phi_{ij} + \phi_{ij}^p - \phi_{ij}^s) = \sqrt{\sum_k a_k^i a_k^j} |F_c^{ij}| \sin(\Theta_{ij}) \quad (3.21)$$

l'interférogramme recentré (i.e. dont le continuum photométrique a été soustrait) prend la simple forme:

$$m_k = c_k^{(i,j)} R_{ij} - d_k^{(i,j)} I_{ij} \quad (3.22)$$

Cette dernière expression, valable pour chaque pixel et pour chaque ligne de base définit en fait un système de  $N_{pix}$  équations linéaires avec  $N_{tel}(N_{tel} - 1)$  inconnues ( $R_{ij}$  et  $I_{ij}$ ). Sous forme matricielle, cela s'écrit:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ | \\ m_{N_{pix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\dots c_1^{(i,j)} \dots}^{N_b} & \overbrace{\dots d_1^{(i,j)} \dots}^{N_b} \\ | & | \\ \dots c_{N_{pix}}^{(i,j)} \dots & \dots d_{N_{pix}}^{(i,j)} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} : \\ R_{ij} \\ : \\ I_{ij} \\ : \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

La matrice contenant les  $c_k^{(i,j)}$ , et les  $d_k^{(i,j)}$  donne une information sur les mesures  $m_k$  à partir des flux cohérents  $R_{ij}$  et  $I_{ij}$ . Pour estimer ces inconnues, il faut calculer *l'inverse généralisée* de la matrice. Cette inverse est appelée *Pixel to Visibility Matrix* ou encore P2VM car elle permet de calculer la visibilité complexe (plus précisément le flux cohérent complexe) à partir des mesures sur les pixels du détecteur. Cette matrice, qui caractérise l'instrument AMBER, est un produit direct des étapes de calibration des ondes porteuses.

Les flux photométriques  $F_i$  sont estimés à partir des flux  $P_i$  mesurés dans les voies photométriques et des  $v_k^i$  de telle sorte que:

$$F_i a_k^i = P_i v_k^i \quad (3.24)$$

### 3.2.4 Estimation des observables

AMBER permettant la recombinaison de trois télescopes, et étant doté d'un spectrographe offrant des résolutions spectrale allant de  $R = 35$  à  $R = 10000$ , trois types de mesures interférométriques sont disponibles à la sortie d'un tel recombineur: (le module de) la visibilité, la clôture de phase et la phase différentielle.

### La visibilité carrée

Comme étudié dans le chapitre 2.1.2, la visibilité est estimée à partir du flux cohérent divisée par les flux incohérents (ou photométriques). Utilisant les équations 3.21, 3.21 et 3.24. Il vient:

$$\widetilde{V}_{ij}^2 = \frac{\langle R_{ij}^2 + I_{ij}^2 \rangle}{4 \langle P_i P_j \rangle \sum_k v_k^i v_k^j} \quad (3.25)$$

Il est à noter que la visibilité est estimée de manière quadratique. Ce choix a été fait pour s'affranchir du problème du piston différentiel atmosphérique. Or avec AMBER, il est possible de mesurer ce piston grâce à la phase différentielle (voir paragraphes suivants). Nous sommes donc *a priori* en mesure de corriger chaque interférogramme de ce piston (i.e. de recentrer les interférogrammes) et de moyenner le flux cohérent de façon linéaire. En terme de rapport Signal à Bruit, une estimation du premier ordre (i.e. linéaire) est toujours plus performante qu'une estimation du deuxième ordre (i.e. quadratique). Si un tel algorithme est réalisé, il devrait pouvoir augmenter les performances de l'instrument AMBER. L'étude de faisabilité d'un tel estimateur, et du gain que celui-ci pourrait apporter, fait partie du travail de thèse de Florentin Millour.

**CORRECTION DU BIAIS** En l'état actuel des choses, l'estimation est quadratique. La visibilité est donc entachée d'un biais qu'il faut corriger. Si cette correction se fait aisément lorsque la visibilité est estimée dans le plan de Fourier, soit par simple ajustement du bruit blanc qui "surélève" la densité spectrale ou encore par des méthodes spécifiques se basant sur la nature statistique des différents bruits [PERRIN (2003)], la tâche se révèle ici légèrement plus ardue.

Pour calculer ce biais, il faut revenir à la définition des parties réelle et imaginaire du flux cohérent, qui peuvent être exprimés comme des combinaisons linéaires des mesures. Si on appelle  $\zeta_k^{ij}$  et  $\xi_k^{ij}$  les coefficients de la matrice P2VM,  $R_{ij}$  et  $I_{ij}$  peuvent s'écrire:

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{pix}} \zeta_k^{ij} m_k, \quad I_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{pix}} \xi_k^{ij} m_k \quad (3.26)$$

Il vient alors (après quelques calculs) que l'espérance mathématique du flux cohérent a pour expression:

$$\overline{R_{ij}^2 + I_{ij}^2} = \overline{R_{ij}}^2 + \overline{I_{ij}}^2 + \sum_k \left[ (\zeta_k^{ij})^2 + (\xi_k^{ij})^2 \right] \sigma^2(m_k) \quad (3.27)$$

Le biais sur le flux cohérent est donc:

$$\text{Bias}\{|R_{ij}^2 + I_{ij}^2|\} = \sum_k \left[ (\zeta_k^{ij})^2 + (\xi_k^{ij})^2 \right] \sigma^2(m_k) \quad (3.28)$$

Cette formulation est satisfaisante car assez intuitive: le biais sur le flux cohérent n'est rien d'autre que la somme quadratique de la projection des erreurs de mesures  $\sigma(m_k)$  sur les axes réel et imaginaire du flux cohérent. Cette formule a été validée sur simulation et implémenté dans l'algorithme de réduction de données. L'erreur sur les mesures peut être calculée empiriquement à partir d'une moyenne statistique sur plusieurs interférogrammes, ou bien de façon

semi-théorique en considérant que les interférogrammes et les voies photométriques sont corrompus par du bruit de photon et du bruit de détecteur (de variance  $\sigma^2$ ). Il vient alors une expression applicable à chaque interférogramme:

$$\sigma^2(m_k) = \overline{i_k} + \sigma^2 + \sum_{i=1}^{N_{tel}} [\overline{P_i} + N_{pix}\sigma^2] (v_k^i)^2 \quad (3.29)$$

$\overline{i_k}$ ,  $\overline{P_i}$  étant remplacés par leur valeur instantanée.

### *La clôture de phase*

La clôture de phase est estimée à partir des flux cohérents complexes  $C_{ij}$ , provenant des trois lignes de bases. La première étape consiste à calculer le bispectre:

$$\tilde{B}_{123} = \langle C_{12}C_{23}C_{13}^* \rangle \quad (3.30)$$

et la clôture de phase n'est autre que la phase du bispectre:

$$\phi_{123}^B = \text{atan} \left[ \frac{\text{Im}(\tilde{B}_{123})}{\text{Re}(\tilde{B}_{123})} \right] \quad (3.31)$$

La clôture de phase est indépendante de l'atmosphère [RODDIER (1986)]. Cependant, si la phase système induite lors de la calibration des ondes porteuses est différente pour chaque ligne de base, il faut calibrer la clôture de phase sur une étoile de référence, centro-symétrique, pour s'affranchir de la clôture de phase instrumentale, i.e. pour faire disparaître le terme  $\phi_{12}^s + \phi_{23}^s - \phi_{13}^s$ . La robustesse d'un tel estimateur reste à analyser.

Les équations 3.30 et 3.31 indiquent que l'estimation de la clôture se fait à partir de la moyenne des *phaseurs*, et non à partir de la moyenne des phases calculées individuellement. Cette approche est clairement la bonne [MONNIER (2000)]. En effet, dans des conditions de faibles rapports signal à bruit, la clôture de phase peut varier de  $-\pi$  à  $\pi$  et moyenner les phases est alors complètement inutile. En revanche, en représentation complexe, on peut voir le bruit comme un bruit additif "tournant aléatoirement autour" de la valeur moyenne du bispectre (voir Figure 3.15). Sur un échantillon, la phase mesurée peut être n'importe où sur un cercle de rayon égal à l'écart-type type du bruit. Par contre, si les bispectres (i.e. les phaseurs) sont moyennés, on remarque que pendant que le signal "vrai" augmente proportionnellement au nombre d'échantillons  $N$ , le bruit lui effectue une marche aléatoire et l'amplitude de son écart-type augmente donc en  $\sqrt{N}$ . Il résulte que le rapport signal à bruit sur la clôture de phase augment en  $\sqrt{N}$ .

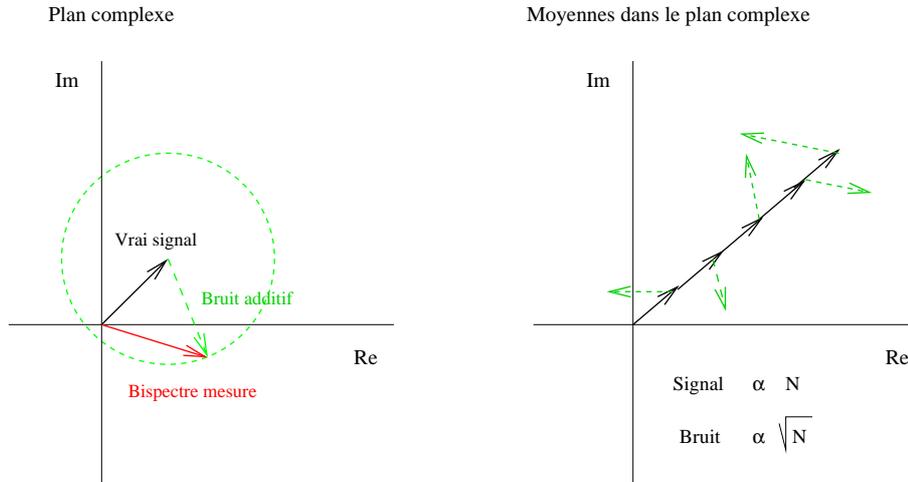


FIG. 3.15: Représentation du bispectre mesuré (en rouge) dans le plan complexe. Celui-ci est constitué du "vrai" signal (en noir) et d'un bruit additif (en vert) qui "tourne" aléatoirement. Les valeurs prises par le bispectre mesuré sont décrites par le cercle en tirets verts. Lorsqu'on moyenne les mesures, le signal augmente en  $N$  ( $N$  étant le nombre d'échantillons) alors que le bruit augmente en  $\sqrt{N}$ .

### La phase différentielle

La phase différentielle entre les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  se calcule pour chaque ligne de base, comme étant la phase de l'interspectre  $W_{12}$

$$\widetilde{W}_{12} = \langle C_{12,\lambda_1} C_{12,\lambda_2}^* \rangle \quad (3.32)$$

$$\phi_{12}^W = \text{atan} \left[ \frac{\text{Im}(\widetilde{W}_{12})}{\text{Re}(\widetilde{W}_{12})} \right] \quad (3.33)$$

Pour les mêmes raisons que celles invoquées pour la clôture de phase, la moyenne est réalisée sur les interspectres et non sur les phases elles-mêmes. Cet estimateur permet en théorie de s'affranchir des problèmes de piston atmosphérique achromatique, en d'autres termes cela signifie qu'il converge vers la "vraie" valeur de la phase différentielle indépendamment du piston [LAGARDE (1994)]. Néanmoins, une étude exhaustive de cet estimateur, de ses performances et de sa robustesse reste à faire. Notamment lorsqu'on voudra atteindre les performances ultimes de AMBER (précision de la phase différentielle à  $10^{-4}$ rad), il faudra analyser en profondeur les performances du mode BCD lors duquel les faisceaux sont "inversés" pour calibrer les effets instrumentaux de phase différentielle pouvant survenir en aval du recombineur. Les effets différentiels en amont de l'instrument, et en particulier dans les lignes en retard, restent à quantifier [VANNIER *et al.* (2004)]. Ceci est au cœur du travail de thèse de Florentin Millour, qui utilisera la phase différentielle pour l'observation de planètes extra-solaires avec AMBER.

TAB. 3.6: *Paramètres de la turbulence atmosphérique tels que mesurés sur le site du VLTI, Paranal, Chili. Les grandeurs sont données pour  $\lambda = 0.5\mu\text{m}$  sauf mention spéciale.*

Seing	paramètre de Fried	Échelle externe	Vent	Temps de cohérence
$w$ (")	$r_0$ (cm)	$\mathcal{L}_0$ (m)	m.s <sup>-1</sup>	$\tau_0$ (ms)
				0.5 $\mu\text{m}$ /2.2 $\mu\text{m}$
0.88	12	22	8	10/50

### 3.2.5 Correction du biais atmosphérique

#### *Correction du "jitter"*

En l'absence de suiveur de frange<sup>1</sup>, la visibilité est estimée à partir d'une moyenne statistique de poses courtes, dont le temps d'intégration est inférieur au temps de cohérence de l'atmosphère. Comme argumenté au chapitre précédent, cette technique empêche un "brouillage" rédhibitoire des franges du au mouvement aléatoire des interférogrammes autour de sa valeur moyenne (la présence d'un piston moyen n'a dans cette partie aucune incidence sur la visibilité puisque cette étude est faite dans le cas monochromatique. Le cas – réaliste – d'une bande spectrale non nulle sera traité dans un paragraphe spécifique de ce chapitre). Néanmoins, cette technique pallie seulement les effets basses fréquences du piston différentiel. Les fluctuations plus rapides que le temps d'intégration, encore appelées "jitter" ne sont pas prises en compte, et celle-ci entraînent une dégradation de la visibilité qu'il faudra (ou non) corriger, selon le niveau de précision que l'on souhaite atteindre. Si  $T$  représente le temps d'intégration, les fluctuations hautes fréquences ( $\epsilon_{hf}$ ) du piston différentiel ( $\epsilon$ ) peuvent s'écrire<sup>2</sup>:

$$\epsilon_{hf}(t) = \epsilon(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(t) dt = \epsilon(t) - \epsilon_{\Delta T} \quad (3.34)$$

où  $\epsilon_{\Delta T}$  est le piston moyen sur le temps d'intégration.

Clairement, l'effet du "jitter" dépend fortement des paramètres atmosphériques, qui vont définir le temps de cohérence de l'atmosphère, et le profil du spectre de puissance du piston différentiel. Ainsi, pour illustrer cette étude à partir de grandeurs quantitatives pertinentes, je baserai mes calculs sur des paramètres atmosphériques "moyens" caractérisant des conditions d'observations classiques à Paranal sur le VLTI. Ces valeurs, provenant de mesures sur site effectués par [MARTIN *et al.* (2000)] avec le "Generalized Seeing Monitor", sont résumées dans la table 3.6, pour  $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ . J' introduis dans ce chapitre une méthode permettant d'estimer l'atténuation sur la visibilité due au "jitter"  $\epsilon_{hf}(t)$ . Le principe est décrit dans l'annexe de [COLAVITA (1999b)], mais par trop brièvement pour en comprendre les fondements physiques. Ainsi, je reprends ici les étapes principales de la méthode qui mène au calcul expérimental de la variance du "jitter". Je pointe alors les domaines de validité de cette approche.

1. En l'occurrence, il est prévu qu'AMBER fonctionne au maximum de ses performances (en termes de sensibilité) en étant associé au suiveur de frange FINITO [GAI *et al.* (2002)].

2. Par soucis de simplicité, l'origine du temps est choisi en  $t = 0$ , un décalage  $t_0$  ne changeant pas les conclusions de l'analyse.

Le spectre de puissance du piston différentiel est lié au spectre de puissance de la phase turbulente par  $W_\phi(f)$  par:

$$W_\epsilon(f) = |2 \sin(\pi B \cdot f)|^2 \left| \frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f} \right|^2 W_\phi(f) \quad (3.35)$$

Moyennant l'hypothèse de turbulence "figée" de Taylor qui assure l'équivalence entre des décalages spatiaux et des retards temporels [CONAN (1994)], le spectre de puissance *temporel*  $w_\epsilon(\nu)$  se déduit aisément du spectre de puissance *spatial* grâce à la relation:

$$w_\epsilon(\nu) = \frac{1}{V} \int W_\epsilon\left(\frac{\nu}{V}, f_y\right) df_y \quad (3.36)$$

où  $V$  est la vitesse du vent le long de l'axe  $Ox$ . Il ne reste plus alors qu'à établir le spectre temporel du jitter  $w_{\epsilon_{hf}}(\nu)$ , en remarquant que la variance du jitter vérifie:

$$\sigma_{\epsilon_{hf}}^2 = \int w_{\epsilon_{hf}}(\nu) d\nu \quad (3.37)$$

et que par définition [COLAVITA (1985)]:

$$\sigma_{\epsilon_{hf}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \langle (\epsilon(t) - \epsilon_{\Delta T})^2 \rangle dt \quad (3.38)$$

Le développement de l'équation 3.38 fait apparaître trois termes:

$$\sigma_{\epsilon_{hf}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_{\epsilon_{\Delta T}}^2 - 2\langle \epsilon(t)\epsilon_{\Delta T} \rangle) dt \quad (3.39)$$

Chaque terme peut s'analyser séparément. Le premier représente la variance du piston:

$$\sigma_\epsilon^2 = \langle \epsilon(t)^2 \rangle = \int w_\epsilon(\nu) d\nu \quad (3.40)$$

Le deuxième la variance du piston moyen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\epsilon_{\Delta T}}^2 &= \frac{1}{T^2} \langle \iint \epsilon(t) \Pi_T(t - T/2) \epsilon(t') \Pi_T(t' - T/2) dt dt' \rangle \\ &= \frac{1}{T^2} (\mathcal{R}_\epsilon * \Lambda_T)[0] \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $\Lambda_T$  est l'autocorrélation de la fonction porte, et  $\mathcal{R}_\epsilon$  est la corrélation temporelle du piston différentiel [CONAN (1994)] dont la transformée de Fourier est par définition le spectre de puissance temporel  $w_\epsilon(\nu)$ . L'équation précédente devient alors

$$\sigma_{\epsilon_{\Delta T}}^2 = \int w_\epsilon(\nu) \text{sinc}^2(\pi \nu T) d\nu \quad (3.42)$$

Il vient tout naturellement que le spectre temporel du piston moyen se déduit du spectre du piston par application d'un filtre passe-bas dont la largeur caractéristique dépend du temps

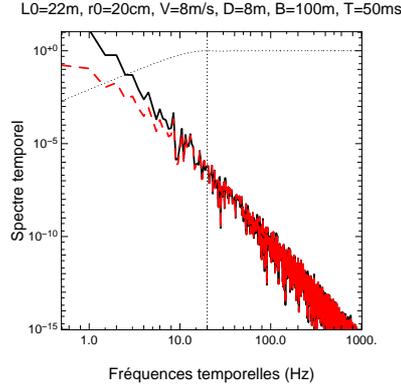


FIG. 3.16: Spectres de puissance du piston (trait plein) et du jitter (ligne brisée). Le deuxième profil se déduit du premier par un filtrage fréquentiel passe-haut. La forme du filtre est donnée en pointillés.

d'intégration. Le troisième terme prend en compte la corrélation entre le piston différentiel et le piston différentiel moyenné:

$$\begin{aligned}
 \langle \epsilon(t)\epsilon_{\Delta T} \rangle &= \frac{1}{T} \int \langle \epsilon(t)\epsilon(t') \rangle \Pi_T(t' - T/2) dt' \\
 &= \frac{1}{T} (\mathcal{R}_\epsilon * \Pi_T)[t - T/2] \\
 &= \int w_\epsilon(\nu) \text{sinc}(\pi\nu T) e^{-2i\pi\nu[t-T/2]} d\nu
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

On en déduit finalement la variance du jitter:

$$\sigma_{\epsilon_{h,f}}^2 = \int_\nu w_\epsilon(\nu) (1 - \text{sinc}^2(\pi\nu T)) d\nu \tag{3.44}$$

Comme attendu, le spectre du jitter résulte d'un filtrage haute fréquence du spectre du piston différentiel:

$$w_{\epsilon_{h,f}}(\nu) = w_\epsilon(\nu) (1 - \text{sinc}^2(\pi\nu T)) \tag{3.45}$$

La figure 3.16 trace le profil du spectre temporel du piston ainsi le spectre du jitter associé pour un temps de pose  $T = 50\text{ms}$ , avec les valeurs des paramètres atmosphériques données dans la table 3.6.

Il faut maintenant relier la variance du jitter à une quantité directement mesurable. La méthode, déjà expérimentée par [MALBET *et al.* (1998)], consiste à estimer la variance de la différence de piston moyen, prise entre deux poses séparées d'un temps  $\tau$ , soit:

$$\sigma_{\Delta\epsilon}^2 = \langle (\epsilon_{\Delta T}(\tau) - (\epsilon_{\Delta T}(0)))^2 \rangle \tag{3.46}$$

En suivant la même démarche que précédemment, on peut établir le spectre temporel de cette quantité:

$$\sigma_{\Delta\epsilon}^2 = \int 4w_\epsilon(\nu) \text{sinc}^2(\pi\nu T) \sin^2(\pi\nu\tau) d\nu \tag{3.47}$$

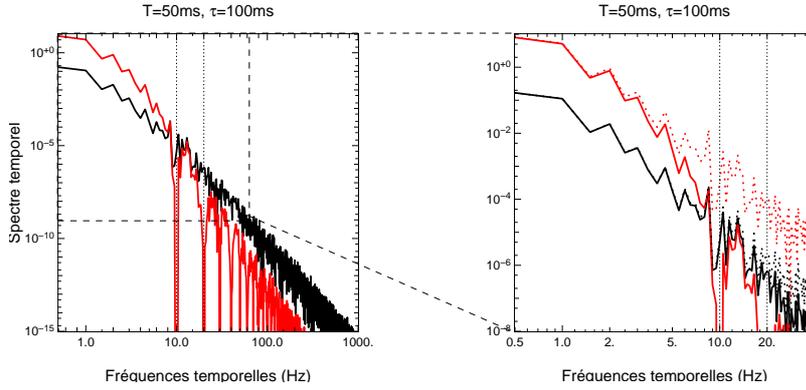


FIG. 3.17: Spectres de puissance du jitter (noir) et de la différence de piston moyen (rouge) pris entre deux poses de longueurs  $T$  et séparées de  $\tau$  secondes. À basse fréquence, les deux spectres ont un comportement similaire, à une constante multiplicative près.

Ainsi, ce spectre résulte aussi d'un filtrage passe haut du spectre du piston. Sur la figure 3.17, on peut noter que les spectres du jitter  $\epsilon_{hf}$  et de la différence de piston  $\Delta\epsilon$  ont le même comportement à basse fréquence, pour  $\nu < 1/\tau$ . En effet, si on effectue un développement limité au deuxième ordre des deux filtres passe haut, on trouve:

$$1 - \text{sinc}^2(\pi\nu T) \simeq \frac{1}{3}\pi^2 T^2 \nu^2 \quad (3.48)$$

$$4\text{sinc}^2(\pi\nu T) \sin^2(\pi\nu\tau) \simeq 4\pi^2 \tau^2 \nu^2 \quad (3.49)$$

Ainsi, à basse fréquence les deux spectres ne diffèrent que d'une constante multiplicative  $C_r$ :

$$C_r(T, \tau) = \frac{1}{12} \left( \frac{T}{\tau} \right)^2 \quad (3.50)$$

Qui plus est, la figure 3.17 montre que la majorité de l'énergie est concentrée dans les basses fréquences des deux spectres. Si on néglige (légitimement) la contribution en énergie des fréquences supérieures, la variance du jitter se déduit directement de la variance de la différence de piston moyen, grandeur mesurable expérimentalement, grâce à la relation:

$$\sigma_{\epsilon_{hf}}^2 = C_r(T, \tau) \cdot \sigma_{\Delta\epsilon}^2 \quad (3.51)$$

Cette relation, résulte néanmoins d'approximations, dont la plus critique reste le développement limité au deuxième ordre des spectres de puissances. Notamment, celui-ci est d'autant plus valide que le temps d'intégration  $T$  et le temps entre deux poses  $\tau$  sont faibles. Il faut donc vérifier que cette analyse reste pertinente dans les conditions d'observations "classiques" avec AMBER sur le VLTI. La figure 3.18 indique en fonction du temps de pose (variant autour d'une valeur typique de 50ms) et pour des poses enregistrées continûment ( $\tau = T$ ), l'erreur théorique (i.e. l'erreur moyenne lorsque l'on considère un nombre infini de réalisations du piston différentiel) faite entre l'estimation du jitter par l'équation 3.51 et sa valeur effective. En pratique cependant, la méthode ne peut s'appliquer que sur le temps pendant lequel

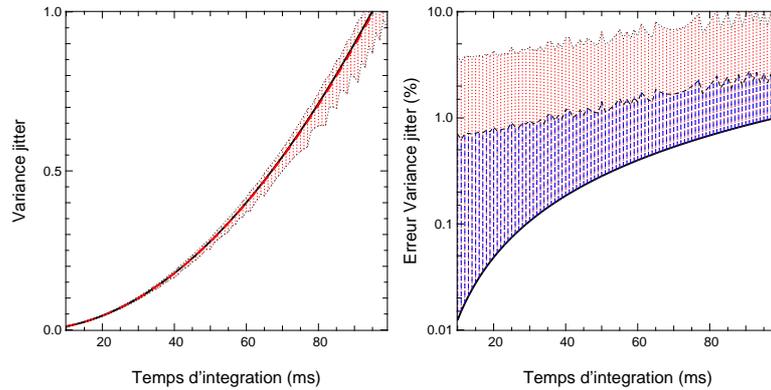


FIG. 3.18: *Gauche: variance théorique du jitter en fonction du temps d'intégration (noir, trait plein), variance calculée à partir de la différence de piston entre deux poses pour un temps d'observation infini, (rouge, tirets) et plage de variance de jitter estimée à partir de la différence de piston entre deux poses, pour un temps d'observation de 10s. Droite: gamme d'erreur relative sur la variance du jitter lorsque cette dernière est estimée à partir de la différence de piston entre deux poses, pour un temps d'observation de 10s (fond rouge) et 5min (fond bleu). Par soucis de clarté, seules sont tracées les valeurs supérieures à l'erreur relative théorique (i.e. pour un temps d'observation infini).*

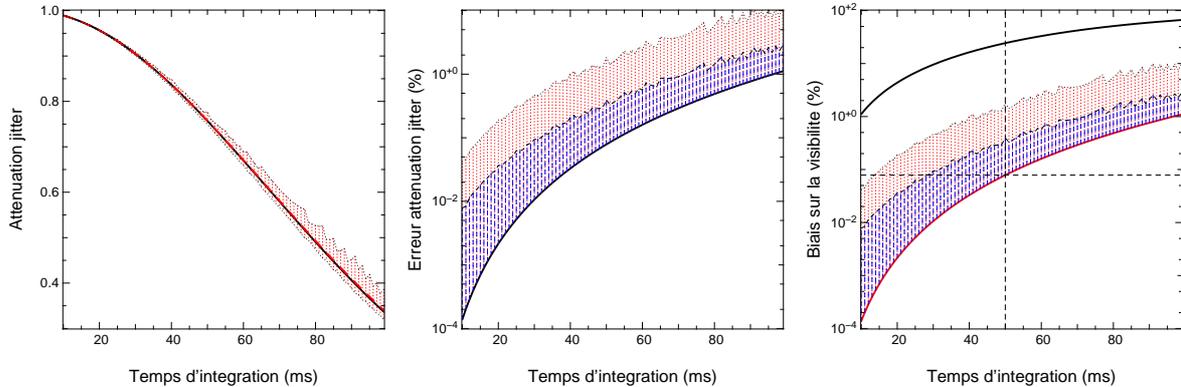


FIG. 3.19: *À partir des courbes précédentes (voir figure 3.18) l'atténuation de la visibilité due au jitter ainsi que l'erreur d'estimation de cette atténuation sont tracées (respectivement à gauche et au milieu). À droite, cette erreur est traduite en terme de biais résiduel sur la visibilité. La courbe en noir donne la valeur de ce biais si la correction de l'atténuation due au jitter n'est pas effectuée. Les codes de couleur de la figure 3.18 sont respectés.*

l'observation est effectuée. Ainsi, les dispersions statistiques autour de cette moyenne sont aussi tracées sur la figure pour une réalisation de piston de 10s (pour de raisons numériques de temps de calcul) et déduites pour une procédure d'observation plus réaliste de 5min. Pour ne pas alourdir le graphique, seules les limites supérieures de ces fluctuations sont données pour les courbes d'erreur, l'erreur pouvant être nulle. En effet, les variations statistiques sont

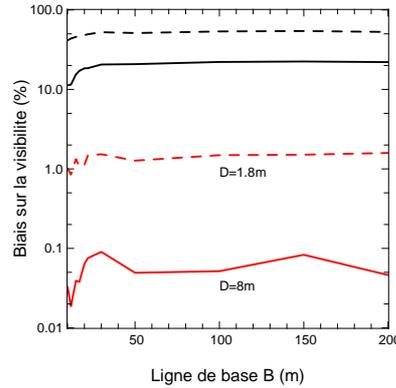


FIG. 3.20: *Biais moyen (i.e. pour un temps d'observation infini) sur la visibilité en fonction de la ligne de base, sans (courbes du haut, noires) et avec (courbes du bas, rouge) estimation de l'atténuation due au jitter. Les résultats sont données pour des télescopes de diamètres  $D = 8\text{m}$  (traits pleins) et  $D = 1.8\text{m}$  (tirets).*

telles que même pour 5min il est possible d'estimer la véritable valeur (par coup de chance!). On remarque qu'en moyenne l'erreur relative faite sur l'estimation de la variance du jitter est de l'ordre de quelques 0.1% et peuvent aller jusqu'au 1% dans le pire des cas (pour 5m d'observations).

Il reste maintenant à traduire cette erreur en terme de biais résiduel sur la visibilité (carrée). Sachant que le biais du au jitter est tout simplement  $V_{jit}^2 = \exp(-\sigma_{\epsilon_{hf}}^2)$ , la figure 3.19 témoigne de l'erreur faite sur l'estimation de l'atténuation. Ainsi l'intérêt de la méthode décrite dans ce chapitre s'avère manifeste puisqu'elle permet de corriger efficacement le biais introduit par le jitter atmosphérique. En effet, sans correction l'erreur sur la visibilité peut atteindre 10% alors qu'un fois la visibilité relevée du facteur d'atténuation estimé, l'erreur est réduite en moyenne à 0.1% (toujours pour un temps de pose typique de 50ms). Cette analyse a été illustrée pour une ligne de base de  $B = 100\text{m}$ , avec des télescopes de 8m. Les résultats obtenus pour d'autres lignes de bases sont très similaires, compte-tenu de la faible valeur de l'échelle externe. En revanche, l'effet du jitter est plus fort lorsqu'on considère les ATs de 1.8m de diamètre, la pupille n'ayant plus cet effet de "lissage" sur le piston. En conséquence, la méthode de correction du biais obtient des performances moindres, l'erreur relative ultime sur l'atténuation étant en moyenne de l'ordre de 1%, pour  $T = 50\text{ms}$ , comme cela est illustré sur la figure 3.20.

Lors de cette étude, j'ai considéré le cas optimal où le temps entre deux poses est nul, soit  $\tau = T$ . Il est clair que la méthode perd de son efficacité quand  $\tau$  augmente. La figure 3.21 atteste de ce comportement. Plus  $\tau$  est grand, plus l'estimation de la variance du jitter s'écarte de la véritable valeur. En terme d'atténuation, l'erreur relative sur la correction du biais devient de plus en plus importante. Cependant, les performances restent satisfaisantes jusqu'à un temps  $\tau \simeq 250\text{ms}$  pour lequel l'erreur relative ne dépasse pas en moyenne le 1%.

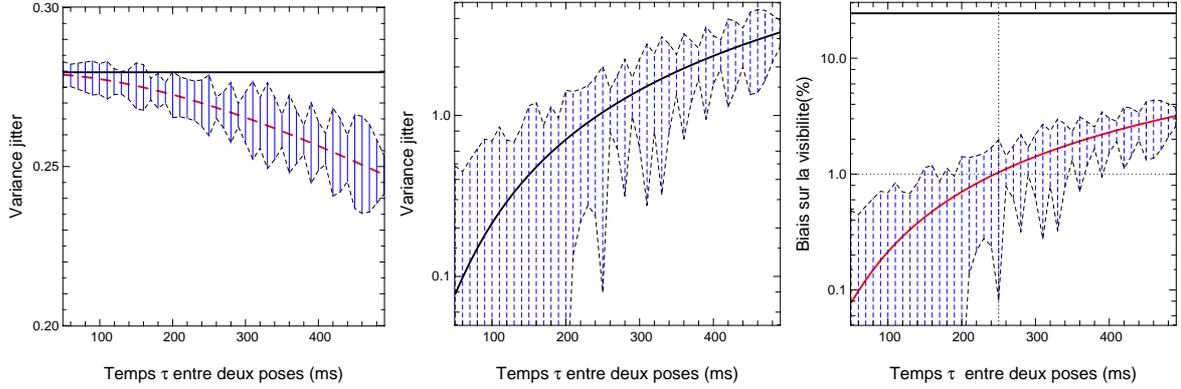


FIG. 3.21: *Gauche: Variance du jitter en fonction du temps  $\tau$  entre deux poses successives. La variance théorique est tracée en trait plein, couleur noire, son estimation à partir du piston moyen différentiel en tirets rouge avec sa gamme de fluctuations due à un temps d'observation fini de 5min. L'erreur relative sur la variance du jitter est alors donnée (au milieu) ainsi que sa traduction en terme de biais résiduel sur la visibilité (à droite).*

### *Piston moyen et largeur spectrale*

Comme il a été montré dans le cas général au chapitre 2.1.3, la présence d'un piston différentiel conjugué à une largeur spectrale non nulle d'un canal se traduit par une atténuation ainsi qu'un décalage de l'interférogramme. Dans le cas spécifique de la réduction de données AMBER, cet effet doit être pris en compte à la fois dans la calibration de la P2VM, pour corriger les ondes porteuses d'un éventuel piston instrumental, et sur les mesures pour s'affranchir de l'effet du piston atmosphérique.

LE PISTON INSTRUMENTAL ET LES ONDES PORTEUSES Corriger la P2VM du piston instrumental est une procédure essentielle à la bonne marche de l'intégralité du processus de réduction de données. Non seulement le piston induit une perte de contraste instrumental ainsi qu'un déphasage des ondes porteuses qu'il faut pouvoir calibrer, mais il peut aussi être à l'origine d'une mauvaise estimation des  $d_k$  (les ondes porteuses déphasées de  $\pi/2$ ) à partir des  $c_k$ .

*Formalisme général* Soit  $\delta_I$  est le piston différentiel instrumental, les ondes porteuses prennent la forme suivante:

$$c_k^{(i,j)} = \rho_k(\delta_I) \sqrt{\frac{a_k^i a_k^j}{\sum_k a_k^i a_k^j}} V_c^{(i,j)} \cos(2\pi(\delta_k + \delta_I)\sigma f_{ij} + \phi_{ak}^{ij} + \Theta_k(\delta_I)) \quad (3.52)$$

où  $\rho_k(\delta_I)$  et  $\Theta_k(\delta_I)$  sont respectivement l'atténuation et le déphasage dus au piston et dont les expressions vérifient les équations 2.18 et 2.19. Dans le cas général  $\rho_k(\delta_I)$  dépend du numéro de pixel et le formalisme utilisé en Section 3.2.2 pour estimer le déphasage introduit par les lames MCS ne tient plus, notamment l'équation 3.5, montrant que la somme quadratique des ondes

porteuses est égale au contraste instrumental, n'est plus vérifiée (nous verrons cependant qu'en moyenne et grande résolution spectrale, les contraintes imposées sont grandement relâchées). La première étape de la calibration des ondes porteuses consiste donc à mesurer ce piston instrumental. La procédure est la suivante: en supposant que les  $d_k$  construits sont corrects (i.e réellement déphasés de  $\pi/2$ ), le phaseur associé aux ondes porteuses s'écrit:

$$C_k = c_k + id_k \propto \exp i \left[ 2\pi(\delta_k + \delta_I)\sigma f_{ij} + \phi_{ak}^{ij} + \Theta_k(\delta_I) \right] \quad (3.53)$$

Le phaseur différentiel, pris entre deux longueurs d'ondes successives a alors pour expression:

$$C_k^{\sigma_{i+1}} C_k^{\sigma_i^*} \propto \exp i [2\pi(\delta_k + \delta_I)\Delta\sigma_i f_{ij}] \quad (3.54)$$

La pente ( $2\pi(\delta_k + \delta_I)$ ) de la phase associée à cette variable peut alors être ajustée via des procédures classiques (voir paragraphe suivant). En effet, sachant que les mesures des ondes porteuses sont faites à bon rapport signal sur bruit et que l'échantillonnage du détecteur ( $\delta_k$ ) est mesurable par ailleurs, l'estimation du piston instrumental devrait se faire sans trop de difficultés. Des tests de la sorte sont au programme du prochain "commissionning" pour tester la méthode. Comme celle-ci part de l'hypothèse que les  $d_k$  construits sont corrects (ce qui n'est pas forcément le cas), l'ensemble de la procédure doit être répété (construction des  $d_k$  et estimation du piston) jusqu'à convergence. Une fois le piston connu, les ondes porteuses peuvent être "redressées" (de  $1/\rho_k(\delta_I)$ ).

*Le cas de la basse résolution* En basse résolution, la longueur de cohérence est telle ( $\mathcal{L}_c \simeq 70\mu\text{m}$  en bande K) que l'atténuation dépend fortement de la position du pixel. Il faut alors la corriger (même à piston instrumental null!) et on ne peut pas se soustraire à la procédure décrite ci-dessus. Qui plus est, lorsque le piston instrumental est plus grand que la moitié de la longueur de cohérence, l'interférogramme est spectralement sous-échantillonné (dans le sens des longueurs d'onde) et on ne peut plus remonter à la véritable valeur du piston, mais seulement à sa valeur modulo  $\mathcal{L}_c/2$ . Il faut donc prendre bien soin de ne pas dépasser cette limite lors du réglage de l'instrument. Qui plus est, il est nécessaire de prendre en compte l'effet de la dispersion spectrale pour améliorer la précision de l'estimation du piston et du contraste instrumental.

*Le cas de la moyenne et haute résolution* En haute et moyenne résolution, l'atténuation peut être considérée indépendante du pixel, moyennant une précision limitée sur la mesure du contraste instrumental. En ce cas, tout ce passe comme dans le cas monochromatique, à la différence près que le contraste instrumental est atténué d'un facteur global  $\rho(\delta_I)$ . Toutes les procédures décrites dans le cas monochromatique sont valides et la prise en compte du piston instrumental se fait alors de manière implicite puisque les ondes porteuses sont *in fine* normalisées (ici par  $\rho(\delta_I)V_c^{(i,j)}$ ). Compte tenu de l'échantillonnage du détecteur d'AMBER, les erreurs relatives commises sur le contraste dues à cette approximation (i.e. le fait de considérer  $\rho(\delta_I)$  indépendant du pixel) sont inférieures à  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$  pour la moyenne et

haute résolution respectivement. Sachant que la précision ultime attendue sur la visibilité est de l'ordre de  $10^{-4}$ , cette approximation n'entame que faiblement les performances spécifiées (et encore, en moyenne résolution seulement).

#### LE PISTON ATMOSPHÉRIQUE ET LES INTERFÉROGRAMMES

*Estimation du piston* L'effet du piston atmosphérique sur les interférogrammes est le même que celui provoqué par le piston instrumental sur les ondes porteuses. La différence majeure est que le piston différentiel atmosphérique est aléatoire et fluctue trame par trame. La phase différentielle (voir aussi Section 3.2.4) à partir de laquelle sera estimé le piston est donc par nature bien plus bruitée. Nous avons implémenté les deux techniques "classiques" suivantes:

- L'estimation du piston à partir de l'ajustement analytique de la pente de la phase différentielle. La difficulté de cette méthode tient dans le fait que la phase différentielle bruitée est enroulé (en français "wrappée") entre  $-\pi$  et  $\pi$ . La procédure de déroulage est une opération difficile à mettre en oeuvre de façon automatique.
- Pour pallier le problème décrit ci-dessus, nous avons aussi programmé la méthode d'ajustement du phaseur différentiel, i.e. de l'interspectre [CHELLI & PETROV (1995a), CHELLI (2000b)]. Dans ce cas, l'ajustement n'est plus analytique mais nécessite un processus itératif de type "gradients conjugués" [PRESS *et al.* (1992)]. Le piston initial est choisi en faisant une moyenne des interspectres calculés entre deux longueurs d'onde successives. À faible rapport signal à bruit, cette méthode a beaucoup de mal à converger vers la bonne valeur, le  $\chi^2$  présentant beaucoup de minima locaux. Qui plus est, il faudrait en toute rigueur ajuster à la fois la pente et l'ordonnée à l'origine du piston car le canal de référence est bruité (voir figure 3.22). Les problèmes de convergence sont alors décuplés.

Ainsi, si les différentes méthodes employées donnent de bons résultats lorsque le rapport signal à bruit sur la phase est élevé, nous n'avons pas encore trouvé de techniques permettant d'estimer le piston de façon robuste (et *a fortiori* automatique) dans des conditions de bruit plus drastiques (qui sont malheureusement les plus fréquentes, surtout à forte résolution spectrale). Un travail de recherche conséquent reste donc à faire dans ce domaine.

*Correction du piston* Il faut se rappeler qu'à basse résolution spectrale, l'atténuation de l'interférogramme dépend du pixel et que la correction ne peut pas se faire à posteriori sur le flux cohérent mais que le redressement doit être effectué directement sur les interférogrammes. Un ajustement itératif peut être alors nécessaire. Le problème de sous-échantillonnage spectral est aussi présent. Si la valeur du piston turbulent dépasse la moitié de la longueur de cohérence (ce qui est tout à fait envisageable avec les paramètres atmosphériques moyens de Paranal),

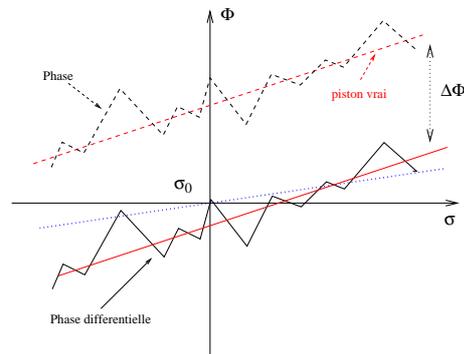


FIG. 3.22: Ce schéma de principe explique pourquoi il faut ajuster à la fois la pente et l'ordonnée à l'origine de la phase différentielle (tracée en noir). Si l'ajustement du  $\chi^2$  n'implique que la pente, cela impose que la phase différentielle prise au canal de référence est nulle. Le piston estimé est alors décrit par la courbe en pointillés (bleus). Si on laisse libre le paramètre ordonnée à l'origine, le piston estimé est donné par la droite (rouge).

ce dernier ne peut être estimé sauf si l'on utilise une méthode itérative et que l'on impose une contrainte de "continuité" du piston entre deux instants successifs.

Dans le cas de la moyenne et haute résolution, l'atténuation peut être directement corrigé sur le flux cohérent, avec les limitations en précision sur la visibilité que cela implique (exactement de la même sorte que pour le contraste instrumental).

### 3.3 Petit guide pratique illustré

Si toutes les couches de la procédure de réduction de données décrites ci-dessus ont été implémentées et validées sur des simulations, encore fallait-il les soumettre à l'épreuve de la dure réalité, en utilisant l'instrument AMBER en mode d'observation sur le VLTI. Il ne s'agit pas ici de remettre en cause le formalisme précédemment développé mais plutôt de mettre en avant les problèmes et petits détails pratiques qui sont implicitement considérés comme réglés dans l'approche théorique. Cette analyse est faite à partir des observations obtenues lors du "commissioning" de l'instrument en mai 2004. Le dépouillement des données est en cours et ce paragraphe ne prétend pas offrir une liste exhaustive de toutes les étapes à prendre en compte en pratique, mais essaie néanmoins de mettre en garde les futurs utilisateurs de l'instrument sur certains points à ne pas négliger.

#### 3.3.1 Cosmétique

Il est apparu crucial de bien respecter les procédures de cosmétique. Dans le cas contraire, il est possible d'obtenir des visibilitées complètement fausses. Notamment, il est indispensable d'utiliser la même carte de mauvais pixels dans la cosmétique des fichiers de calibration et dans la cosmétique des fichiers d'observations.

#### 3.3.2 Détection des franges

Pendant les observations, il ne faut pas manquer le moment où les franges apparaissent sur le détecteur. Or, cette prise de décision ne peut absolument pas se faire "à l'oeil", surtout dans le cas de courts temps de poses et/ou de résolutions spectrales élevées où le nombre de photons *par canal* est faible. En d'autres termes, il faut se référer à un critère objectif, validant la présence de franges sur le détecteur. Cela revient à définir un rapport signal à bruit minimum sur les franges, à partir duquel les données sont considérées comme exploitables.

Le fait de ne pas "voir" les franges peut s'expliquer de deux façons différentes: soit le flux est très petit et les franges sont noyées dans les bruits fondamentaux (et ce malgré un bon contraste des franges), soit le flux est élevé mais le contraste (i.e. la visibilité) est très faible. Ainsi pour témoigner de la présence des franges, il faut considérer conjointement le niveau de la photométrie dans les deux voies et la valeur de la visibilité. En d'autres termes, le critère doit être basé sur le flux cohérent qui prend en compte ces deux effets, parfois antagonistes. Il s'agit donc de calculer le rapport signal à bruit sur les flux cohérents  $R$  et  $I$ , et ce en considérant tous les canaux spectraux et éventuellement plusieurs poses simultanément, ce qui permet de définir un critère de détection par paquet d'images:

$$\text{RSB} = \sum_{l,t} \left[ \frac{R_l^2(t)}{\sigma_R^2} - 1 \right] + \sum_{l,t} \left[ \frac{I_l^2(t)}{\sigma_I^2} - 1 \right] \quad (3.55)$$

Cet estimateur est intéressant à plusieurs niveaux: (i) lorsqu'il n'y a pas de franges sur le détecteur les flux cohérents  $R$  et  $I$  élevés au carré tendent vers leur biais respectifs  $\sigma_R^2$  et

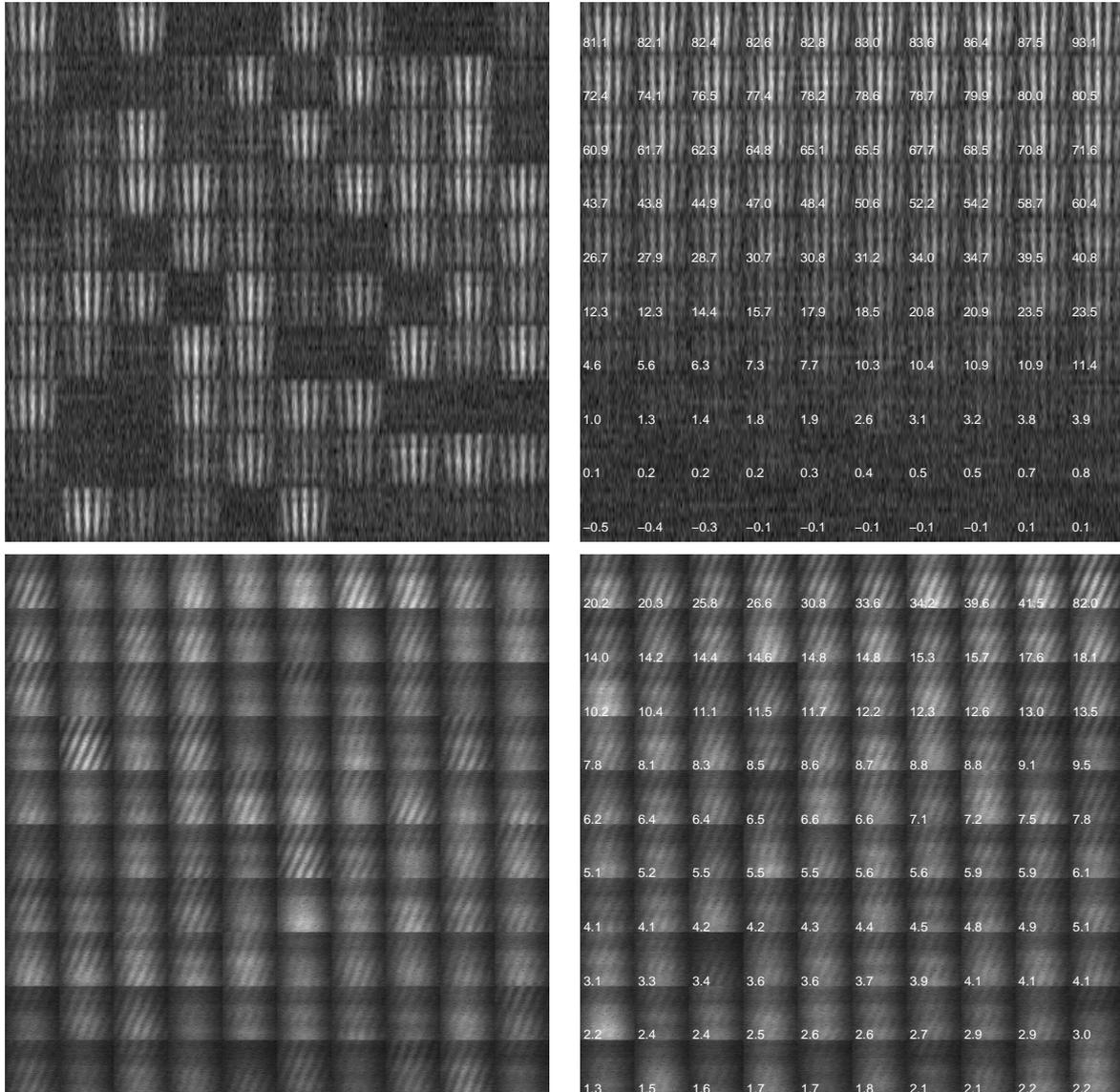


FIG. 3.23: Mise en pratique du critère de détection, sur simulation (en haut) et pendant les observations du calibrateur HD152880 (en bas). À gauche les interférogrammes ne sont pas classés, alors qu'à droite ils sont rangés par rapport signal à bruit croissant. Le chiffre indiqué dans chaque fenêtre donne l'estimation du rapport signal à bruit sur les franges.

$\sigma_I^2$ , et le critère tend vers 0, et (ii) il a une signification physique claire: il est directement lié au rapport signal à bruit sur les franges. Fixer le seuil de détection entre 1 et 5 semble raisonnable selon la qualité des données que l'on veut acquérir. Ce critère a été testé et validé à la fois sur simulations et pendant les observations du "commissioning", comme le montre la figure 3.23.

Il est à noter que la valeur du critère est très sensible à l'estimation du biais. Or à faible flux, ce biais est lui même très sensible à la valeur du bruit de détecteur. Une attention toute

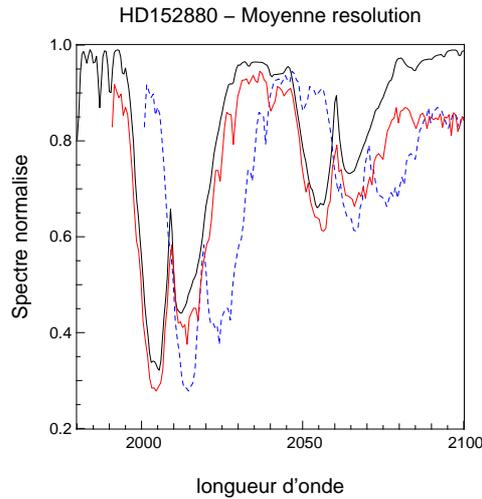


FIG. 3.24: *Calibration absolue de la table de longueur d'onde grâce a spectre de l'atmosphère en bande K (courbe en trait plein, noire). La courbe en tirets (bleus) représente le spectre normalisé du calibrateur HD152880 tel qu'acquis pendant les observations, et la courbe en trait plein (rouge) donne le spectre recalé.*

particulière doit être portée à sa bonne estimation. En effet si le bruit de détecteur est mal calculé, le critère ne tend pas vers 0 quand il n'y a pas de franges, et en conséquence le seuil choisi n'a plus vraiment de signification physique! De façon encore plus importante, il ne faut pas oublier qu'un biais mal estimé conduit aussi à une visibilité mal estimée.

### 3.3.3 Calibrations

#### *Calibrations spectrales*

Avant de commencer tout traitement à proprement parler, il faut bien prendre bien soin de la calibration spectrale. Deux sortes de décalages spectraux peuvent en effets être présents dans les jeux de données:

- un décalage absolu de la table de longueur d'onde à cause d'une mauvaise remise à zéro du spectrographe. Ainsi la calibration de la table de longueur d'onde doit être vérifiée au moins à chaque fois que l'on change de résolution spectrale. Pour ce faire, on peut utiliser des spectres de références, notamment celui de l'atmosphère dont les bandes d'absorptions en proche infra-rouge offrent des repères efficaces, comme en témoigne la figure 3.24.
- un décalage relatif entre chaque voie photométrique et la voie interférométrique. Ce problème est plus retors que le précédent car il peut être à l'origine de biais dans l'estimation des visibilitées. En effet, dans les bandes d'absorption/émission où le gradient de flux peut être conséquent, un léger décalage entre la voie photométrique et la voie interférométrique entraîne une mauvaise soustraction du continu dans l'interférogramme

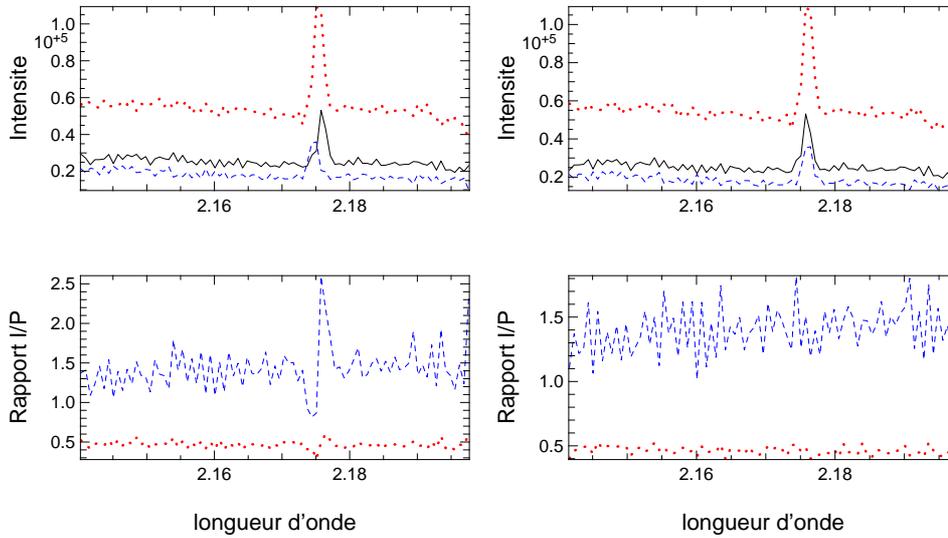


FIG. 3.25: Spectre de l'étoile Be MWC297 dans la voie interférométrique (trait plein) et les deux voies photométriques (tirets bleus et pointillés rouges), et rapports entre voie interférométrique et les voies photométriques. À gauche sont illustrés les spectres tels qu'enregistrés, et à droite les spectres après correction du décalage différentiel. Dans le dernier cas, le rapport  $I/P$  ne présente plus de "pics", témoignant ainsi du bon recentrage.

ainsi qu'une mauvaise calibration photométrique du flux cohérent, et *in fine* un calcul erroné de la visibilité. Le recentrage peut se faire soit en s'aidant des bandes d'absorption de certains composants optiques comme les dichroïques quand il s'agit de calibrer la P2VM, soit de certaines caractéristiques spécifiques à l'objet observé comme par exemple la raie d'émission à 2175nm dans l'étoile Be MWC297 (voir Figure 3.25).

Techniquement, le repositionnement peut se faire par pixel entier avec un simple décalage, ou bien par fraction de pixel en passant dans le domaine de Fourier et en introduisant le déphasage idoïne.

### Calibration spatiale

Il est à noter que lorsque le cryostat se vide, les contraintes sur la table optique changent légèrement et cela se traduit par une dérive du décalage spatial entre les différentes voies du détecteur. Il est donc recommandé d'acquérir assez régulièrement des P2VM pour pouvoir recalculer les fichiers d'observations et les P2VM de façon cohérente.

#### 3.3.4 Validation de la procédure de réduction

Une fois la calibration spectrale effectuée, on peut lancer la procédure de réduction de données telle que décrite dans le chapitre précédent. Néanmoins, plutôt que de considérer l'algorithme comme une boîte noire, on peut s'autoriser quelques étapes supplémentaires per-

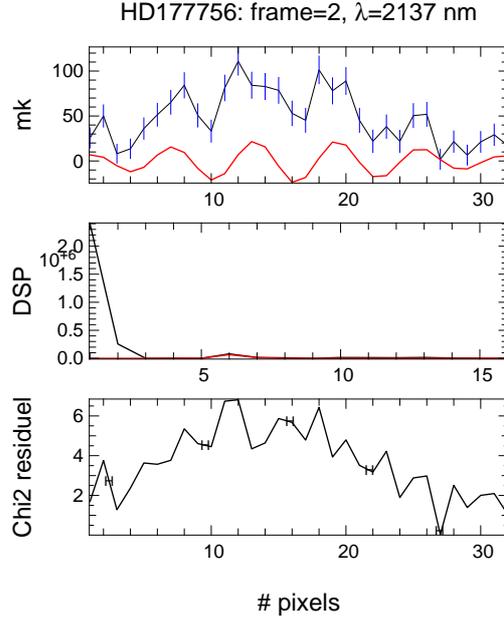


FIG. 3.26: *Exemple d'interférogramme (en noir avec ses barres d'erreurs) où le continuum n'a pas été bien soustrait. On voit clairement le pic basse fréquence dans la DSP. Pour "compenser" la forme parabolique de l'interférogramme, l'onde porteuse ajustée (en rouge) doit avoir un contraste plus faible que le vrai, sous-estimant ainsi le flux cohérent et in fine la visibilité.*

mettant de confirmer (ou non) sa validité. En substance la procédure n'est autre qu'un ajustement par moindres carrés où le flux cohérent est estimé à partir des mesures. Il y a deux raisons majeures pouvant expliquer une mauvaise estimation du flux cohérent:

- le continuum de la voie interférométrique a été mal soustrait, soit parce que la P2VM calculée n'est pas bonne (en ce cas il n'y a malheureusement pas grand chose à faire), soit parce que la fraction de flux photométrique entrant dans la voie interférométrique est mal connue (notamment à cause de cette fameuse dérive différentielle). Il résulte que l'ajustement de l'interférogramme (supposé correctement) recentré conduit généralement à une sous estimation du flux cohérent (voit Figure 3.26). Une méthode pour s'affranchir du problème consiste à ajuster le flux cohérent et le continuum à partir des interférogrammes non recentrés. De manière simple on peut minimiser le  $\chi^2$  suivant:

$$\chi^2 = \frac{\|i_k - c_k R + d_k I - \mathcal{P}_\theta(k)\|}{\sigma_{i_k}^2} \quad (3.56)$$

où  $\mathcal{P}_\theta(k)$  est une fonction paramétrique décrivant le continuum (typiquement une parabole ou une gaussienne). Cette dernière technique ne donne accès qu'à la somme des photométries. Si on suppose le rapport entre les différents flux photométriques correct, on peut remonter au flux sur chaque voie.

- Même si le continuum a été soigneusement soustrait, il faut prendre soin de vérifier que le  $\chi^2$  a été correctement minimisé, i.e. que le  $\chi^2$  résiduel soit aux alentours de 1.

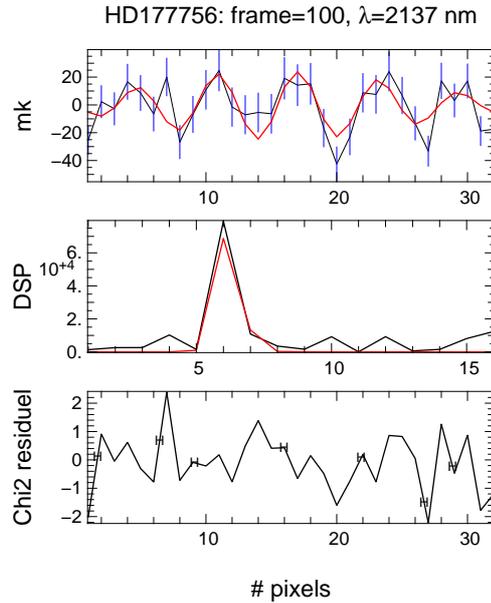


FIG. 3.27: Exemple d'interférogramme (noir avec ses barres d'erreurs) correctement ajusté par l'onde porteuse (en rouge). On remarque que la hauteur du pic haute fréquence (i.e. le bon flux cohérent) est retrouvée. L'ajustement est correct aux barres d'erreurs près comme en témoigne le  $\chi^2$  résiduel qui varie autour de 1.

Cela signifie que les flux cohérents ont été bien estimés aux barres d'erreurs près. Ceci implique bien entendu un contrôle correct du bruit sur l'interférogramme. La figure 3.27 donne un exemple de bon ajustement par moindres carrés sur le calibrateur HD177756.

### 3.3.5 Erreurs sur les visibilitées

L'estimation des barres d'erreurs sur les observables est une étape fondamentale sans laquelle il est impossible d'interpréter les mesures obtenues. Ainsi, il faut toujours garder un regard critique sur la valeur des erreurs calculées, en se donnant les moyens de valider (ou non) le calcul à partir d'une analyse fine des données. Ce paragraphe donne quelques pistes exploitables sur ce sujet.

#### Calcul statistique de l'erreur

À partir de l'estimateur redéfini ci-dessous:

$$\widetilde{V}_{ij}^2 = \frac{\langle |C_{ij}|^2 \rangle_M}{4 \sum_k v_k^i v_k^j \langle P_i P_j \rangle_M} \quad (3.57)$$

l'erreur sur la visibilité peut se calculer grâce à un développement de Taylor à l'ordre 2 [PAPOULIS (1984)]:

$$\sigma^2(V_{ij}^2) = \frac{1}{M} \left[ \frac{\sigma^2(|C_{ij}|^2)}{|C_{ij}|^2} + \frac{\sigma^2(P_i P_j)}{P_i P_j} \right] \widetilde{V}_{ij}^2 \quad (3.58)$$

où  $M$  est le nombre d'échantillons sur lequel est effectué la moyenne d'ensemble. L'expression précédente est totalement théorique. Pour continuer dans cette voie et voir une équation exploitable, il faudrait aussi développer  $\sigma^2(|C_{ij}|^2)$  et  $\sigma^2(P_i P_j)$ . il se trouve que dans le plan image, le calcul formel de l'erreur sur le flux cohérent est lourd et quasi-inextricable. Il était hors de question d'implémenter un tel algorithme, notamment pour les procédures de réduction de données "quick look" qui s'effectuent en temps réel.

La solution consiste alors à faire une estimation statistique de ces erreurs. Ainsi, supposant l'ergodicité des variables aléatoires que sont le flux cohérent et les flux photométriques, il est possible de remonter à leur espérance mathématique et leur variance à partir de moyennes temporelles:

$$\sigma_{stat}^2(\widetilde{V}_{ij}^2) = \frac{1}{M} \left[ \frac{\langle |C_{ij}|^4 \rangle_M - \langle |C_{ij}|^2 \rangle_M^2}{\langle |C_{ij}|^2 \rangle_M} + \frac{\langle P_i^2 P_j^2 \rangle_M - \langle P_i P_j \rangle_M^2}{\langle P_i P_j \rangle_M} \right] \widetilde{V}_{ij}^2 \quad (3.59)$$

Enfin on peut (si besoin est) déduire le rapport signal à bruit sur  $V$  des statistiques de  $V^2$ :

$$\text{RSB}(V_{ij}) = \frac{1}{2} \text{RSB}(V_{ij}^2) \quad (3.60)$$

Ce calcul statistique n'est possible que si le nombre d'échantillons  $M$  est grand, lorsque la moyenne temporelle prend tout son sens. Dans le cas contraire, et *a fortiori* quand on veut connaître le RSB sur la visibilité trame par trame, cette approche est inapplicable. Il faut revenir dans ce cas à des considérations théoriques moyennant quelques approximations et hypothèses supplémentaires.

### Calcul théorique de l'erreur

Si l'on suppose que l'interférogramme est seulement corrompu par les bruits fondamentaux que sont le bruit de photon et le bruit de détecteur, une analyse rapide *dans le plan de Fourier*<sup>1</sup> montre que l'erreur sur la visibilité estimée à partir de  $M$  interférogrammes est [VANNIER (2003)]:

$$\sigma_{theo}^2(V_{ij}) = \frac{1}{M} \left[ \frac{n_i + n_j + N_{pix} \sigma^2}{n_i n_j} \right] \quad (3.61)$$

où  $n_i = \sum_k^{N_{pix}} \sum_t^M v_k^i P_i(t)$  est le flux total dans la voie  $i$  et  $\sigma$  est le bruit de détecteur par pixel. Cette expression présente un double avantage. Premièrement, elle permet d'imposer une *limite inférieure* sur la valeur réelle du bruit sur la visibilité puisque dans cette méthode, seuls les bruits fondamentaux sont pris en compte. Comparé au calcul statistique, cette valeur donne des indications fortes sur la qualité des données. Ainsi, si le bruit statistique calculé est bien plus fort (un ordre de grandeur ou plus) que le bruit théorique, cela signifie que les fluctuations de la visibilité sont plus grandes que les barres d'erreurs résultant des bruits fondamentaux, et

1. Cette approche est tout à fait correcte à deux télescopes. Par contre, ce calcul devient une approximation à trois télescopes car dans le cas d'AMBER, les pics interférométriques se chevauchent.

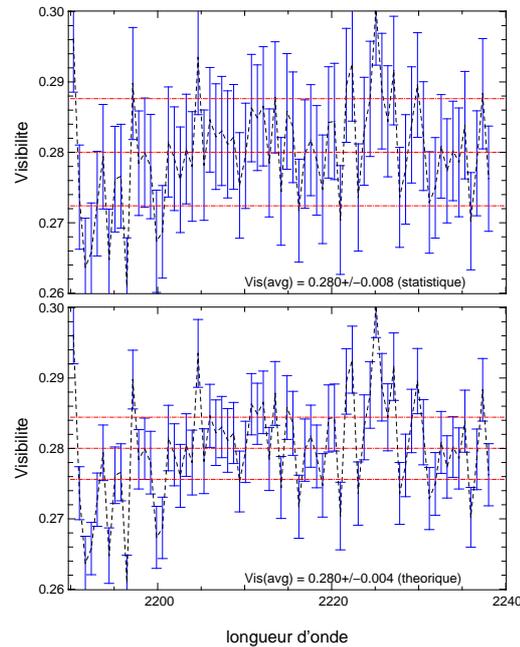


FIG. 3.28: *Visibilité brute de l'étoile HD152880 en fonction de la longueur d'onde. Les barres d'erreurs sont calculées respectivement avec la méthode statistique (en haut) et à partir de l'expression théorique (en bas). L'estimation a été faite avec  $M = 1000$  interférogrammes. Chaque interférogramme a un temps d'exposition de  $T = 100$ ms. Les traits horizontaux (rouges) indiquent la visibilité moyenne ainsi que l'écart-type moyen.*

que d'autres phénomènes faisant varier cette dernière rentrent en jeu. Dans ce cas là il s'agit de comprendre l'origine de ces fluctuations et de corriger leurs effets avant de reprendre le calcul statistique des erreurs. Deuxièmement, l'équation 3.61 est valable pour n'importe quelle valeur de  $M$  et en particulier pour  $M = 1$ . Ainsi, il est possible d'avoir une estimation "avec les mains" de l'erreur sur la visibilité instantanée. Une nouvelle fois, ceci est très intéressant pour analyser le comportement de la visibilité au cours du temps et éventuellement d'y relever certaines anomalies.

La figure 3.28 donne la courbe de visibilité brute en fonction de la longueur d'onde pour le calibrateur HD152880, observé pendant le "commissioning". Les barres d'erreurs sont calculées par les deux méthodes décrites ci-dessus. À un facteur 2 près, les deux résultats sont cohérents, ce qui semble indiquer que les erreurs sont avant tout dominées par les bruits fondamentaux. Sous l'hypothèse raisonnable que la visibilité du calibrateur est constante sur cette plage de longueur d'onde, cette impression est confirmée car les fluctuations de la visibilité restent dans les barres d'erreurs. La présence de "pics" à quelques endroits de la courbe peut s'expliquer par une calibration spectrale imparfaite.

## Chapitre 4

# Observations interférométriques de MWC 297

### Sommaire

---

4.1	Présentation . . . . .	116
4.2	Analyse du calibrateur HD177756 . . . . .	116
4.3	Analyse de MWC 297 . . . . .	119

---

*Je présente dans ce chapitre les résultats astrophysiques préliminaires, obtenus lors de l'observation à haute résolution angulaire et haute résolution spectrale de l'étoile jeune MWC 297.*

TAB. 4.1: *Table d'observation.*

Date	Cible	Bande	Résolution	Temps de pose	Ligne de base projetée
31-05-2004	HD17756	K	1500	30/107ms	47m
31-05-2004	MWC 297	K	1500	30/107ms	45m

## 4.1 Présentation

Les étoiles Be sont des étoiles massives caractérisées par la présence de raies d'émissions dans le domaine optique. Certains modèles prédisent que cette émission prend son origine dans une "enveloppe" atmosphérique étendue et en rotation rapide autour de l'étoile (vent stellaire) [STEE *et al.* (1995)]. La nature géométrique de ces enveloppes (forme, asymétrie) est encore mal connue, bien que les observations tendent à indiquer que ces structures se présentent sous la forme de disques équatoriaux [POECKERT & MARLBOROUGH (1978), QUIRRENBACH *et al.* (1997)].

MWC 297 ( $K = 2.9$ ) est une étoile Be jeune présentant une forte raie en émission à  $2.165\mu\text{m}$  (raie Brackett  $\gamma$ ), caractéristique d'une des transitions atomiques de l'hydrogène dans l'infra-rouge. De plus, cette étoile est entourée (comme les étoiles Herbig Ae/Be de façon générale) d'une structure étendue. La présence de cette structure, interprétée comme un disque d'accrétion, a été mis en évidence par les observations interférométriques en bande H de [MILLAN-GABET *et al.* (2001b)] avec l'interféromètre IOTA, et plus récemment par les observations de [EISNER *et al.* (2004)] sur PTI avec une ligne de base deux fois plus grande, mais sans apporter de nouvelles contraintes significatives sur la nature de cet objet. Dans les deux cas, le manque de résolution *spectrale* de ces interféromètres a empêché d'étudier la structure de MWC 297 *dans la raie d'émission*, seul l'environnement circumstellaire relatif au continuum photométrique étant alors révélé.

Il apparaissait donc tout à fait pertinent d'utiliser le pouvoir de résolution spectrale de l'instrument AMBER pour franchir un nouveau palier dans la caractérisation de la structure étendue entourant cet objet. Ainsi pendant ce "commissionning", nous avons observé l'étoile jeune MWC 297 à moyenne résolution spectrale ( $\mathcal{R} = 1500$ ), avec deux télescopes de 8m (UT2-UT3). les paramètres d'observation pertinents sont résumés dans la table d'observation 4.1. Pour corriger nos mesures des effets de l'atmosphère, nous avons aussi observé le calibrateur HD17756 dans les mêmes conditions instrumentales. La première étape de l'analyse consiste donc à étudier en détail les données du calibrateur avant de se confronter aux mesures "astrophysiquement intéressantes" de MWC 297.

## 4.2 Analyse du calibrateur HD177756

HD177756 est une étoile de type spectral B9 et de diamètre  $\theta = 0.6\text{mas}$ . À la ligne de base de l'interféromètre (47m), cette étoile n'est pas résolue. La figure 4.1 (gauche) présente les mesures obtenues sur HD177756 aux deux temps de poses  $T = 30\text{ms}$  et  $T = 107\text{ms}$ .

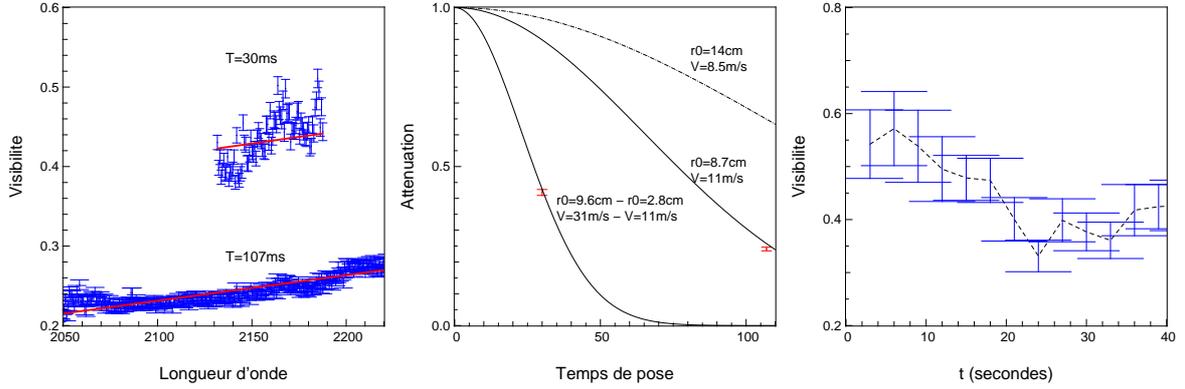


FIG. 4.1: *Gauche: visibilité brute du calibrateur en fonction de la longueur d'onde, pour  $T = 30\text{ms}$  et  $T = 107\text{ms}$ . Chaque droite rouge représente l'atténuation induite par le "jitter" atmosphérique. Centre: visibilité en fonction du temps d'intégration. Les courbes d'atténuation théoriques sont tracées pour différents paramètres de la turbulence.  $\lambda = 2.15\mu\text{m}$ . Droite: Évolution de la visibilité brute du calibrateur en fonction du temps (fichier par fichier, chaque fichier comprenant 100 poses élémentaires).*

Premièrement, les visibilités sont inférieures à 1 et sont d'autant plus faible que le temps d'intégration est long. Ce comportement était attendu, le "jitter" atmosphérique atténuant la visibilité, comme indiqué au chapitre 3.2.5. Sous l'hypothèse très raisonnable que la visibilité de cet objet est indépendante de la longueur d'onde, il n'est alors pas étonnant que l'atténuation diminue en fonction de la longueur d'onde puisque le paramètre de Fried est une fonction croissante de cette variable ( $r_0 \propto \lambda^{6/5}$ ). Ainsi, on peut ajuster les paramètres de la turbulence à partir de la visibilité atmosphérique mesurée. Les paramètres les plus critiques,  $r_0$  et la vitesse du vent  $V$ , ont été laissés libres. L'échelle externe est fixée à sa valeur moyenne  $\mathcal{L}_0 = 22\text{m}$ , telle qu'estimée à Paranal. La procédure d'ajustement utilisée consiste en la minimisation du  $\chi^2$  suivant:

$$\chi^2(r_0(\lambda = 0.5\mu\text{m}), V) = \sum_{\lambda} \frac{\left\| V_{\lambda} - \exp \left[ -\sigma^2(r_0 \cdot (\lambda/0.5)^{6/5}, V, D, B, \mathcal{L}_0)/2 \right] \right\|^2}{\sigma_{V_{\lambda}}^2} \quad (4.1)$$

Cette minimisation offre clairement plusieurs couples de solution. N'ont été retenus que ceux compatibles avec les valeurs moyennes caractéristiques de Paranal décrites dans le tableau 3.6. Les résultats sont reportés sur la Figure 4.1 (centre). Plusieurs conclusions peuvent être tirées de ces courbes:

- Les paramètres de la turbulence estimés ne sont pas compatibles avec ceux mesurés sur le site et indiqués dans l'en-tête des fichiers d'observations ( $r_0 = 14\text{cm}$ ,  $V = 8.5\text{m/s}$ ).
- De façon plus problématique, ces fichiers nous indiquent que les paramètres de la turbulence ont très peu varié tout au long des observations. Or il apparaît clairement que

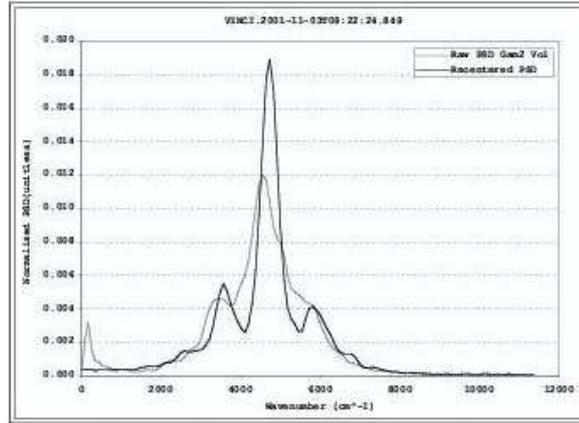


FIG. 4.2: Vibrations longitudinales mesurées avec VINCI sur les UTs (Figure tirée de [KERVELLA (2002)]). La forme de la densité spectrale révèle des fluctuations de la différence de marche, à une fréquence de l'ordre de 100Hz, et ayant une amplitude d'approximativement  $0.5\mu\text{m}$ .

des conditions de turbulence différentes sont nécessaires pour expliquer l'atténuation de la visibilité correspondant à chaque temps d'intégration bien que les deux observations se soient immédiatement succédées dans le temps.

- Les points précédents portent à croire que l'atmosphère n'est pas la seule responsable de la chute de visibilité. Il est très possible que le VLTI (toute l'instrumentation avant AMBER) introduise un contraste instrumental *variable*. Ce phénomène est illustré en figure 4.1 (droite). En effet les variations de visibilité brute du calibrateur sont incompatibles avec des variations des conditions atmosphérique sur la même échelle de temps. Qui plus est, cette conclusion est corroborée par l'analyse des interférogrammes obtenus sur les UTs avec le recombineur VINCI [KERVELLA *et al.* (2003)]. La figure 4.2 tirée de l'étude de [KERVELLA (2002)] met ainsi en exergue les fluctuations de la différence de marche, à une fréquence de l'ordre de 100Hz et ayant une amplitude d'approximativement  $0.5\mu\text{m}$ . Ces vibrations longitudinales peuvent très bien expliquer les chutes de contrastes observées sur les données du calibrateur. Il est à noter que ce problème est indubitablement lié à l'utilisation des UTs car il n'apparaît pas sur les données obtenues avec les sidérostats.

Ainsi à l'heure actuelle, il n'est pas possible de faire confiance aux visibilités obtenues sur des calibrateurs pour calibrer la visibilité de l'objet d'intérêt. Une série de tests doit être effectuée lors du prochain "commissionning" afin d'identifier de façon certaine l'origine de cette perte supplémentaire de contraste (MACAO, ligne à retard, ...).

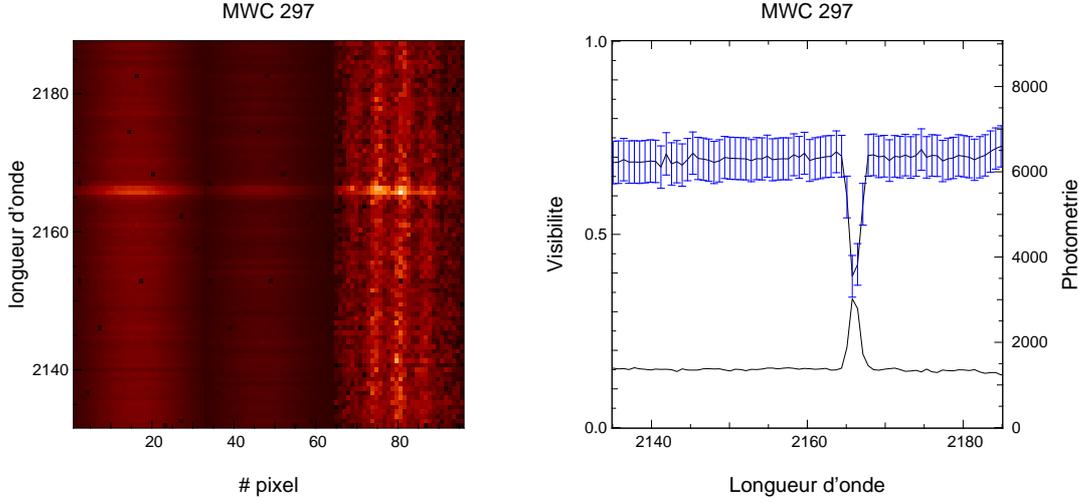


FIG. 4.3: *Gauche: interférogramme obtenu sur MWC 297. On remarque facilement la présence de la raie d'émission Brackett  $\gamma$ . Droite: visibilité calibrée et photométrie de MWC 297 en fonction de la longueur d'onde. L'objet est clairement plus résolu au niveau de la raie d'émission.*

### 4.3 Analyse de MWC 297

Les observations obtenues avec AMBER sur le VLTI mettent en évidence la forte intensité de la raie Brackett  $\gamma$ , transition atomique de l'hydrogène à  $2.165\mu\text{m}$  (voir figure 4.3, gauche). En suivant la procédure de réduction de données, on peut estimer les visibilités brutes à partir des interférogrammes. Mais, d'après les conclusions du paragraphe précédent, il n'est pas possible de les calibrer à partir des observations de HD177756. Cependant, comme noté en introduction de ce chapitre, [MILLAN-GABET *et al.* (2001b)] a résolu le disque d'accrétion autour de MWC 297. La taille caractéristique  $\theta_d$  de la photosphère de brillance uniforme qu'il en a déduit est:

$$\theta_d = 5.8 \pm 0.6\text{mas} \equiv 2.7 \pm 0.2\text{AU} @ 450\text{pc} \quad (4.2)$$

Connaissant le rapport de flux entre l'étoile  $F^*$  (non résolue  $\theta_* = 0.2\text{mas}$ ) et le disque  $F^d$ , et dans le cadre d'un modèle simple de "disque uniforme" on peut remonter à la visibilité absolue du continuum  $V_c$ :

$$\begin{aligned} V_c &= \left| \frac{F^* + F^d V_d}{F^* + F^d} \right| \\ &= \left| \frac{F^* + 2F^d \frac{J_1(\pi\theta_d B/\lambda)}{(\pi\theta_d B/\lambda)}}{F^* + F^d} \right| \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec  $F^d/(F^* + F^d) = 84.1\%$  d'après [MILLAN-GABET *et al.* (2001b)]. On peut donc grossièrement calibrer les visibilités dans le continuum en se basant sur cette mesure. Cette opération suppose que (i) le diamètre du disque soit le même en bande H et en bande K et; (ii) l'objet soit centro-symétrique. Dans le cas contraire, si l'objet présente certaines asymétries, la

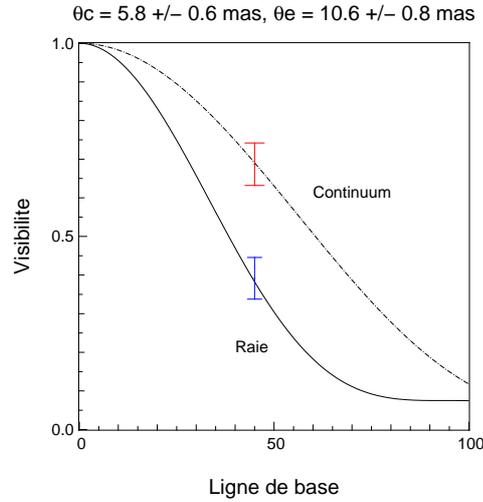


FIG. 4.4: Estimation de la taille caractéristique de l'enveloppe de MWC 297 par ajustement de la visibilité mesurée dans la raie avec la transformée de Fourier d'un disque uniforme de diamètre  $\theta_e$ .

différence d'orientation des lignes de bases entre IOTA et AMBER introduira un biais dans l'estimation de la visibilité dans le continuum.

La courbe de visibilité calibrée en fonction de la longueur d'onde est donnée en figure 4.3 (droite). Sur cette courbe, on peut noter qu'on a **résolu la structure étendue correspondant à la raie d'émission Brackett  $\gamma$** . Dans la raie d'émission, la visibilité est  $V_r = 0.39 \pm 0.05$ . Cette enveloppe apparaît donc plus étendue que le disque. Selon le même schéma, on peut écrire la visibilité estimée dans la raie comme:

$$\begin{aligned}
 V_r &= \left| \frac{F^* + F^d V_d + F^e V_e}{F^* + F^d + F^e} \right| = \left| \frac{F^c V_c + F^e V_e}{F^c + F^e} \right| \\
 &= \left| \frac{F^c V_c + 2F^e \frac{J_1(\pi\theta_e B/\lambda)}{(\pi\theta_e B/\lambda)}}{F^c + F^e} \right|
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où  $V_e$  est la visibilité de l'enveloppe,  $F^c = F^* + F^d$  et  $F^e$  le flux dans la raie. En supposant que la raie est spectralement résolue (dans le cas contraire, il peut y avoir des effets de dilution modifiant ce rapport), on mesure d'après la photométrie  $F^c/(F^c + F^e) = 46.8\%$ , il vient (voir figure 4.4):

$$\theta_e = 10.6 \pm 0.8 \text{ mas} \equiv 4.8 \pm 0.4 \text{ AU} @ 450 \text{ pc} \tag{4.5}$$

Ainsi, l'environnement circumstellaire de MWC 297 peut être interprété comme constitué de deux structures de tailles distinctes: un disque de diamètre  $\theta_d = 2.7 \pm 0.2 \text{ AU}$  et une enveloppe (vent) de taille caractéristique  $\theta_e = 4.8 \pm 0.4 \text{ AU}$ . Se basant sur le schéma classique de la structure des étoiles jeunes (disque + jet), nous proposons de représenter l'environnement des étoiles de Herbig Be par un disque d'accrétion accompagné d'une atmosphère (vent) où se produisent les transitions atomiques de l'hydrogène, tel que décrit schématiquement sur

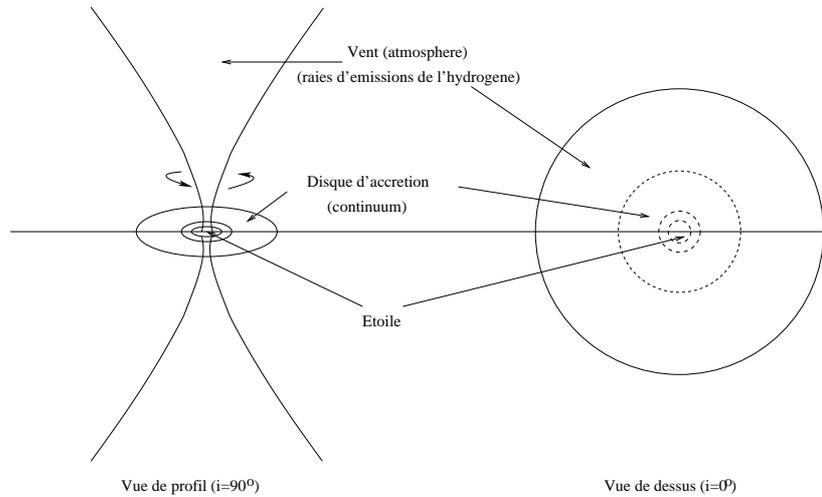


FIG. 4.5: Représentation schématique d'une étoile jeune Be. L'enveloppe est ici choisie symétrique par souci de simplicité. Il est très probable que cette structure présente des asymétries. Néanmoins une telle représentation permet de donner les tailles caractéristiques de l'environnement circumstellaire de ces étoiles, dans le proche infra-rouge.

la figure 4.5. Nos mesures montrent qu'en bande K, le vent est spatialement deux fois plus étendu que le disque de poussière.

Ces résultats préliminaires demandent à être confirmés en se basant sur des mesures de calibrateurs "de confiance" et en estimant de façon plus précise le rapport de flux entre la raie et le continuum. Qui plus est, l'étude de la phase différentielle (en cours d'analyse) permettra de dévoiler encore un peu plus la structure de cet objet. Néanmoins, de part la nature et la taille de son environnement circumstellaire, cet objet apparaît comme un candidat idéal pour l'observation et l'imagerie interférométrique!

La présentation de ce premier résultat doit nous faire prendre conscience que l'instrument AMBER sera incessamment sous peu à la disposition de la communauté astrophysique. Nul doute que les derniers problèmes liés à la réduction de données seront identifiés et résolus lors des prochains "commissioning". La communauté aura alors entre ses mains un instrument dont les performances vont permettre de franchir une étape supplémentaire dans notre compréhension des processus physiques régissant notre univers. AMBER est porteur de belles promesses et de rêves... d'étoiles.



---

## Chapitre 5

# Remonter à la source

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Les observables interférométriques . . . . .</b>	<b>124</b>
5.1.1	Modèles . . . . .	124
5.1.2	Statistiques des observables . . . . .	125
<b>5.2</b>	<b>Ajustement de modèles paramétriques . . . . .</b>	<b>128</b>
5.2.1	Principe . . . . .	128
5.2.2	Erreurs sur les paramètres . . . . .	129
5.2.3	Applications . . . . .	129
<b>5.3</b>	<b>Reconstruction d'images . . . . .</b>	<b>144</b>
5.3.1	Modèles de disques d'étoiles jeunes . . . . .	144
5.3.2	Potentiel imageur de AMBER sur le VLTI . . . . .	146
5.3.3	Perspectives . . . . .	148

---

*Obtenir des mesures interférométriques calibrées n'est qu'une étape dans le processus de réduction des données. Il reste maintenant à définir des procédures permettant de remonter aux informations astrophysiques à partir des observables. M'appuyant sur l'exemple de l'instrument AMBER, j'analyse dans ce chapitre les méthodes d'investigation des caractéristiques de la source observée, respectivement par ajustement de modèles paramétriques et par reconstruction d'images.*

Que faire un fois que l'on dispose de belles données interférométriques, nettoyées, calibrées et validées? Deux choix s'offrent à nous: soit l'on considère que le nombre de mesures est relativement petit, i.e. que les fréquences spatiales observées définissent une grille par trop clairsemée, et l'on doit alors ajuster les mesures à la lumière d'un modèle *paramétrique*, soit au contraire on estime que la couverture du plan  $(u, v)$  est assez dense pour ajuster les données à partir d'un modèle *objectif*, en d'autres termes pour reconstruire l'image de la source.

## 5.1 Les observables interférométriques

### 5.1.1 Modèles

Qu'il s'agisse d'ajustement paramétrique ou bien de reconstruction d'image, les modèles des observables interférométriques se définissent de manière unique. Les mesures à haute résolution spatiale et/ou spectrale provenant d'un interféromètre sont (voir chapitre précédent) le module (carré) de la visibilité, à partir de trois télescopes recombinaés simultanément la clôture de phase et, en présence de dispersion spectrale la phase différentielle.

Soit  $O_\theta$ , le modèle du spectre de l'objet (i.e. la transformée de Fourier de la distribution de brillance), où  $\theta$  représente soit un jeu de paramètres géométriques/physiques, soit les coordonnées des fréquences spatiales définies sur une base de fonctions mathématiques (le plus intuitif étant une base de Dirac, mais des fonctions plus complexes peuvent être prises en compte). À partir de ce spectre, on peut décrire les trois modèles interférométriques mentionnés ci-dessus.

Premièrement, l'étude de la visibilité carrée permet mettre en évidence les caractéristiques spatiales (dimension, inclinaison, etc...) de l'objet:

$$\text{Visibilité carrée: } |\hat{O}_\theta|^2(f_{ij})$$

Ensuite, la présence de clôtures de phase non nulles met en exergue des écarts à la centrosymétrie dans la structure de l'objet [MONNIER (2000)]. En d'autres termes, la clôture de phase permet de sonder la géométrie de la source. La clôture de phase est la phase du bispectre, généralisation dans les longueurs d'ondes optiques de la "triple corrélation" communément utilisée en radio [RODDIER (1986)]:

$$\text{Bispectre: } G_\theta^{klm} = \hat{O}_\theta(f_{kl})\hat{O}_\theta(f_{lm})\hat{O}_\theta^*(f_{km})$$

$$\text{Clôture de phase: } \phi_G = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(G_\theta)}{\text{Re}(G_\theta)} \right\}$$

Enfin, lorsque l'instrument est capable de produire des interférogrammes dispersés comme c'est le cas pour AMBER, la phase différentielle est accessible via le calcul de l'interspectre. La phase différentielle permet d'analyser le déplacement du photocentre de la source en fonction de la longueur d'onde [CHELLI & PETROV (1995a)]. Cette technique est par nature *différentielle* et permet ainsi d'atteindre une résolution supérieure à la résolution ultime de

l'interféromètre [CHELLI & PETROV (1995b)]. La modélisation de la phase différentielle s'écrit simplement:

$$\text{Interspectre:} \quad H_{\theta}^{ij} = \widehat{O}_{\theta}^{\lambda_1}(f_{ij})\widehat{O}_{\theta}^{\lambda_2^*}(f_{ij})$$

$$\text{Phase différentielle:} \quad \phi_H = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(H_{\theta})}{\text{Re}(H_{\theta})} \right\}$$

### 5.1.2 Statistiques des observables

Les mesures interférométriques sont bruitées. Comme décrit dans le chapitre 2.2.5, les trois bruits qui corrompent les observables sont (i) le bruit de photon; (ii) le bruit de détecteur; et (iii) le bruit atmosphérique. Le calcul de la matrice de covariance des différents observables permet de caractériser complètement la nature aléatoire des signaux interférométriques. D'une part les coefficients diagonaux rendent compte des erreurs sur les mesures et d'autre part les termes non diagonaux témoignent des éventuelles corrélations entre des mesures à différentes fréquences spatiales. J'expose dans ce chapitre le calcul théorique des matrices de covariance de la visibilité et de la clôture de phase pour un interféromètre *fibré*.

L'erreur sur la visibilité modale est extensivement étudié au chapitre 2.2.5. Ainsi, je me contenterais d'analyser dans la suite de ce chapitre les résultats obtenus en ce qui concerne les erreurs sur la clôture de phase ainsi que les valeurs des corrélations pour chaque observable, en me basant sur le papier soumis à A&A et inséré ci-après. Les détails des calculs sont explicités en annexe A. Il est à noter que par souci de simplicité j'ai été amené à faire les hypothèses suivantes pour poursuivre les calculs: (i) la source est non résolue par un télescope, ce qui conduit le coefficient de couplage basse fréquence à prendre la forme simplifiée (voir chapitre 2.2):

$$\rho_i(V_{\star}) = \rho_0 \int T^i(f)df = \rho_0 \mathcal{S}^i \quad (5.1)$$

et (ii) la visibilité est supposée constante sur la fonction de transfert interférométrique. Il en résulte que le coefficient de couplage haute fréquence s'écrit:

$$|\rho_{ij}(V_{\star})|^2 = \rho_0^2 \mathcal{S}^i \mathcal{S}^j |V_{\star}(f_{ij})|^2 \quad (5.2)$$

Le bruit atmosphérique est alors totalement pris en compte par les variations du rapport de Strehl. Ces fluctuations ont été calculées via un modèle analytique de la correction par Optique Adaptative, décrit en annexe B. Les courbes de l'espérance et la variance du Strehl en fonction de la correction et de la force de la turbulence atmosphérique sont données dans cette annexe. Dans tous les cas, l'erreur relative sur le Strehl prend les deux valeurs limites suivantes [GOODMAN (1985), RODDIER (1981)]:

$$\text{(Correction parfaite)} \quad 0 \leq \frac{\sigma_{\mathcal{S}}}{\mathcal{S}} \leq 1 \quad \text{(Pas de correction)} \quad (5.3)$$

La table 5.1 résume pour un point source les expressions des variances de la visibilité et de la clôture de phase pour ces deux valeurs limites, dans les régimes de bruit de photon et de bruit de détecteur.

TAB. 5.1: *Variances de la visibilité et de la clôture de phase pour un point source.  $N_{pix}$  est le nombre de pixels échantillonnant l'interférogramme.  $N_{pix} \geq 2$  est requis afin de respecter le critère de Shannon.  $\sigma$  représente le bruit du détecteur par pixel.  $\tau$  est la fraction de flux sélectionnée pour la photométrie.*

Observables	Variance des observables		
	Bruit de photon ( $\bar{K} \gg 1$ )		Bruit de détecteur ( $\bar{K} \ll 1$ )
	$\frac{\sigma_S}{S} = 0$	$\frac{\sigma_S}{S} = 1$	
$\widetilde{V}^2$	$\left[ \frac{2N_{tel}}{(1-\tau)} + \frac{2}{\tau} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0 S K}$	$\left[ \frac{2N_{tel}+4}{(1-\tau)} + \frac{4}{\tau} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0 S K}$	$\left[ \frac{3N_{pix}\sigma^4 + N_{pix}^2\sigma^4}{(1-\tau)^4} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4 S^4 K^4}$
$\widetilde{\phi}_B$	$\left[ \frac{3N_{tel}-6}{2} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0 S K}$	$\left[ \frac{3N_{tel}-3}{2} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0 S K}$	$\left[ \frac{9N_{pix}\sigma^4 + 3N_{pix}^2\sigma^4}{2} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4 S^4 K^4}$

### *Erreur sur la clôture de phase*

Il est difficile d'illustrer de manière globale l'erreur sur la clôture de phase car celle-ci dépend de nombreux paramètres, notamment des visibilités sur les trois lignes de base ainsi que du Strehl et de la force de la turbulence. La figure 5.1 trace néanmoins le profil de l'erreur en fonction de la magnitude de la source, pour différents valeurs "typiques" des paramètres sus-cités. L'observation est supposée faite avec AMBER sur le VLTI, dans une configuration instrumentale classique. Si la magnitude limite est définie comme la magnitude pour laquelle l'erreur sur la clôture de phase est 1 radian, on obtient une gamme de magnitudes limites assez large selon les valeurs des paramètres considérés:  $\mathcal{K} \simeq 5 - 12$  pour un point source, du cas purement turbulent jusqu'à une correction parfaite, et  $\mathcal{K} \simeq 4 - 12$  pour un Strehl de 1, d'un objet totalement résolu sur les trois base au point source (dans tout les cas, la force de la turbulence est  $D/r_0 = 5$ ).

### *Coefficients de corrélation*

Les coefficients de corrélation témoignent du degré d'inter-dépendance des mesures. Le tableau 5.2 résume la valeur de ces coefficients pour la visibilité et la clôture de phase, respectivement. Les informations majeures à retenir de ce tableau sont les suivantes:

- Pour les visibilités, le coefficient de corrélation est nul dans le régime du bruit de photon

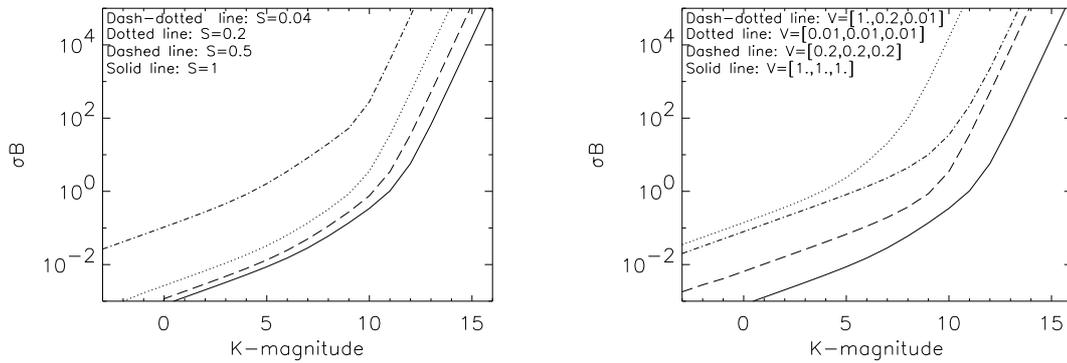


FIG. 5.1: *Gauche: Erreur sur la clôture de phase en fonction de la magnitude de la source, pour différents rapport de Strehl:  $\mathcal{S} = 1$  (ligne continue),  $\mathcal{S} = 0.5$  (ligne brisée),  $\mathcal{S} = 0.2$  (pointillés),  $\mathcal{S} = 0.04$  (pas de correction: point trait). Les visibilités sont toutes à 1.  $D/r_0 = 5$ . Droite: Erreur sur la clôture de phase en fonction de la magnitude de la source, pour différents triplets de visibilités:  $V_\star = [1, 1, 1]$  (ligne continue),  $V_\star = [0.2, 0.2, 0.2]$  (ligne brisée),  $V_\star = [0.01, 0.01, 0.01]$  (pointillés),  $V_\star = [1, 0.2, 0.01]$ , (point trait). Le rapport de Strehl est  $\mathcal{S} = 1$ .*

quand il n'y a pas de télescope en commun, et toujours inférieur à  $1/2$  dans les autres cas

- Pour les clôtures de phase, le coefficient de corrélation est nul quand il n'y a pas de ligne de base en commun, et toujours inférieur à  $1/3$  dans les autres cas
- Le nombre d'éléments nuls dans la matrice de covariance augmente avec le nombre de télescopes, et devient rapidement supérieur au nombre d'éléments non nuls

En conclusion, on peut estimer en première approximation que les mesures de visibilités sont décorréées. Il en va de même pour les clôtures de phase. Cela signifie que si, comme il est communément énoncé (à juste titre d'ailleurs), il y a  $(N - 1)(N - 2)/2$  relations de clôture *linéairement indépendantes* [MONNIER (2000)], la totalité des  $N(N - 1)(N - 2)/6$  clôtures de phase peuvent être considérées comme *statistiquement indépendantes*. Ainsi tenir compte dans la réduction de données de tout le jeu de clôtures de phase plutôt que des seules mesures linéairement indépendantes, entraîne un gain en rapport signal à bruit d'environ  $\sqrt{N/3}$ .

Dans le cadre de l'ajustement de modèle paramétrique par la méthode des moindres carrés (voir Section suivante), on savait déjà que les paramètres estimés n'étaient pas biaisés par le fait de négliger les corrélations entre les mesures. À partir de l'analyse présentée dans ce paragraphe, on peut aussi déduire que le fait de négliger les corrélations n'entraîne pas un biais significatif sur l'estimation de l'erreur sur ces mêmes paramètres.

TAB. 5.2: Coefficient de corrélation pour la visibilité et la clôture de phase, dans le régime de bruit de photon et bruit de détecteur, pour les cas limites de correction par Optique Adaptative. Dans le cas de la visibilité, deux configurations sont à envisager: soit un télescope appartient à deux lignes de base et le triplet de télescopes forme une clôture, soit les deux bases n'ont pas de télescope en commun. En ce qui concerne la clôture de phase, il faut séparer les cas suivants: soit une ligne de base est commune à deux triplets de télescopes, soit non. Dans le régime de bruit de détecteur,  $N_{pix}$  représente le nombre de pixels qui échantillonnent l'interférogramme. Puisqu'il faut considérer au moins deux lignes de bases et que le théorème de Shannon doit être respecté, on a nécessairement  $N_{pix} \geq 3$ .

Observables		Coefficient de corrélation $\rho$		
		Bruit de photon ( $\bar{K} \gg 1$ )		Bruit de détecteur ( $\bar{K} \ll 1$ )
		$\frac{\sigma_S}{S} = 0$	$\frac{\sigma_S}{S} = 1$	
$\widetilde{V}^2$	si télescope en commun	$\leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{4}$	$\frac{3}{3 + N_{pix}}$
	sinon	0	0	
$\widetilde{\phi}_B$	si ligne de base en commun	$\frac{1}{3}$	$\leq \frac{1}{6}$	$\frac{3}{9 + N_{pix}}$
	sinon	0	0	0

## 5.2 Ajustement de modèles paramétriques

### 5.2.1 Principe

Avec la génération actuelle d'interféromètres, le nombre de télescopes recombinaés simultanément reste faible ( $N = 2, 3$ ). Ainsi, à l'exception de longues campagnes d'observations prolongées sur plusieurs nuits, la couverture du plan  $(u, v)$  offerte par ces interféromètres est relativement peu dense. Il en résulte que les données interférométriques doivent être analysées à la lumière d'un modèle paramétrique de la source. En supposant que le bruit a une statistique Gaussienne, l'estimateur optimal est l'estimateur de maximum de vraisemblance qui minimise la distance (quadratique) entre la mesure et le modèle.

Si  $\widetilde{V}^2$ ,  $\widetilde{\phi}_B$  et  $\widetilde{\phi}_W$  sont les mesures de visibilité, de clôture de phase et de phase différentielle respectivement, les contraintes à minimiser pour chaque observable sont données par les  $\chi^2$

suivants:

$$\chi_{V^2}^2 = \left[ \widetilde{V}^2 - |\widehat{O}_\theta|^2 \right] C_{V^2}^{-1} \left[ \widetilde{V}^2 - |\widehat{O}_\theta|^2 \right]^T \quad (5.4)$$

$$\chi_{\phi_B}^2 = \left[ \widetilde{\phi}_B - \phi_G \right] C_{\phi_B}^{-1} \left[ \widetilde{\phi}_B - \phi_G \right]^T \quad (5.5)$$

$$\chi_{\phi_W}^2 = \left[ \widetilde{\phi}_W - \phi_H \right] C_{\phi_W}^{-1} \left[ \widetilde{\phi}_W - \phi_H \right]^T \quad (5.6)$$

Faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de corrélation entre les différents observables, le critère global à minimiser est:

$$\chi_{tot}^2 = \chi_{V^2}^2 + \chi_{\phi_B}^2 + \chi_{\phi_W}^2 \quad (5.7)$$

### 5.2.2 Erreurs sur les paramètres

L'équation 5.7 peut se récrire sous la forme générique suivante:

$$\chi^2(\theta) = \mathcal{M}_\theta \mathcal{C}_\mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}_\theta^T \quad (5.8)$$

En ce cas, l'erreur sur les paramètres qui dépend des dérivées partielles du modèle  $\partial \mathcal{M}_\theta / \partial \theta$  au point de convergence  $\theta = \widetilde{\theta}$  ainsi que des erreurs sur les mesures  $\mathcal{C}_\mathcal{M}$ , s'écrit simplement [VON DER HEIDE & KNOECHEL (1979b)]:

$$\sigma^2(\widetilde{\theta}) = \text{Diag} \left\{ \left[ \mathcal{A}^T \mathcal{C}_\mathcal{M}^{-1} \mathcal{A} \right]^{-1} \right\} \quad (5.9)$$

avec

$$\mathcal{A} = \left. \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\widetilde{\theta}} \quad (5.10)$$

### 5.2.3 Applications

Dans cette partie, j'applique le formalisme développé ci-dessus dans le cas d'observations interférométriques avec AMBER sur le VLTI. Je considère respectivement le cas d'une source Gaussienne et le cas d'une source double, plus précisément d'un système Soleil-Jupiter.

#### *Objet Gaussien*

Le but de cette application est triple: (i) étudier les performances d'AMBER quant à la mesure de diamètres stellaires, (ii) définir la configuration géométrique des lignes de base qui optimise ce genre d'observation et (iii) caractériser l'impact des coefficients de corrélation sur l'estimation de l'erreur sur le diamètre. Cette analyse est entièrement développée dans l'article présenté ci-après. J'en résume ici les conclusions majeures.

Soit une source Gaussienne centro-symétrique de largeur à mi-hauteur  $\sigma_o$ :

$$O_\theta(\alpha) = \exp \left( -4 \ln(2) \frac{\alpha^2}{\sigma_o^2} \right) \quad (5.11)$$

- Dans des conditions atmosphérique et instrumentale "typiques", AMBER est capable de mesurer des diamètres stellaires avec un RSB supérieur à 1 jusqu'à des magnitudes  $\mathcal{K} = 11 - 13$  selon le diamètre de la source.

- L'observation est optimisée (i.e. le RSB sur le diamètre est maximum) quand la résolution de l'interféromètre est égale à deux fois la taille de l'objet, soit quand la ligne de base moyenne vérifie:

$$\langle B \rangle \simeq 0.5 \frac{\lambda}{\sigma_o} \quad (5.12)$$

- Dans le cas d'une observation à trois télescopes, négliger les coefficients de corrélation dans la procédure de minimisation revient à sous-estimer l'erreur sur le diamètre, (ou encore à sur-estimer le RSB) d'un facteur  $\sqrt{2}$ . Sachant que le rapport entre le nombre d'éléments nuls et le nombre d'éléments non nuls dans la matrice de covariance augmente avec le nombre de télescopes, on peut raisonnablement penser que ce facteur est une limite supérieure.

*Astronomy & Astrophysics* manuscript no.  
(will be inserted by hand later)

## Waveguided interferometry: Statistics of visibility and closure phase

E. Tatulli, A. Chelli

Laboratoire d'Astrophysique, Observatoire de Grenoble, 38041 Grenoble cedex France

**Abstract.** Interferometric observations with three telescopes or more provide visibilities together with closure phase information. When using waveguided interferometers, both observables have to be redefined in the light of the coupling phenomenon between the incoming wavefront and the fiber. We introduce in this paper the estimator of both so-called modal visibility and modal closure phase. Then, we compute the statistics of the two observables in presence of partial correction by Adaptive Optics, paying attention on the correlation between the measurements. We find that the correlation coefficients are mostly zero and in any case never overtakes  $1/2$  for the visibilities, and  $1/3$  for the closure phases. From this theoretical analysis, data reduction process using classical least square minimization is investigated. In the framework of the AMBER instrument, the three beams recombiner of the VLTI, we simulate the observation of a single Gaussian source and we study the performances of the interferometer in terms of diameter measurements. We show that the observation is optimized, i.e. that the Signal to Noise Ratio (SNR) of the diameter is maximal, when the full width half maximum (FWHM) of the source is roughly  $1/2$  of the mean resolution of the interferometer. We finally point out that in the case of an observation with 3 telescopes, neglecting the correlation between the measurements leads to overestimate the SNR by a factor of  $\sqrt{2}$ . We infer that in any cases, this value is an upper limit.

**Key words.** Techniques: high angular resolution – Techniques: interferometric – Infrared – Methods: data analysis – Methods: analytical

### 1. Introduction

Thanks to the simultaneous recombination of the light arising from three telescopes, interferometers such as IONIC-3T on IOTA (Berger et al. 2003) or AMBER on the VLTI (Petrov et al. 2000) are providing closure phase measurements together with the modulus of the visibility. Retrieval of phase information allows to scan the geometry of the source, hence opening the era of image reconstruction with infrared interferometric observations. However, with the current number of telescopes available, direct image restoration requires many successive nights of observations (Thiébaud et al. 2003). Thus, in most of the cases where the  $(u, v)$  coverage spans a relatively small number of spatial frequencies, the measurements have still to be analyzed in the light of model-fitting techniques.

Furthermore, together with partial correction by Adaptive Optics (AO), many of the up-to-date interferometers are making use of waveguides that spatially filter the atmospheric corrugated wavefront, changing the turbulent phase fluctuations into random intensity variations (Coudé du Foresto 1997). The estimators that describes the visibility and the closure phase measurements obtained with such interferometers have to account for the coupling between the partially corrected wavefront and the fiber. From these appropriate estimators one can

derive the statistical properties of the observables and properly investigate the performances of waveguided interferometers.

In Section 2 we recall the spatial filtering properties of the waveguides in terms of interferometric signal and we define the estimators of both the modal visibility and the closure phase. We investigate in Section 3 the covariance matrices of the observables with respect to atmospheric, photon and detector noises, paying particular attention to the correlation coefficients. Then, defining in Section 4 a general least square model fitting of the measurements, we analyze in Section 5 the ability of fibered interferometers to measure stellar diameters.

### 2. Principles of fibered interferometry

A full analysis of the signal arising from fibered interferometers has been theoretically described by Mège (2002) and summarized by (Tatulli et al. 2004). We only recall here the important points for this paper, focusing on the coupling phenomenon between the incoming wavefront and the fiber, and on the observables that can be obtained from such interferometers.

#### 2.1. Spatial filtering

Introducing waveguides to carry/recombine the light in an interferometer allows to perform a spatial filtering of the incoming wavefront. It means that the phase corrugation of the wave-

*Send offprint requests to:* <name>

*Correspondence to:* <corresponding author>

2

E. Tatulli, A. Chelli: Statistics of the observables

front are changed into intensity fluctuations. In other words, the number of incoherent (photometric) and coherent (interferometric) photoevents at the output of the fibers depends on atmospheric fluctuations and results in the coupling between the turbulent wavefront and the fibers (Coudé du Foresto 1997, Rulier 1998). Hence, spatial filtering can be seen as coupling coefficients, i.e. the fraction of (respectively photometric and interferometric) light that is captured by the fibers. Such coupling coefficients are mathematically described by the following equations (Dyer & Christensen 1999, Mège et al. 2001):

$$\rho_i(V_\star) = \rho_0(V_\star * T^i)_{f=0} \quad (1)$$

$$\rho_{ij}(V_\star) = \rho_0(V_\star * T^{ij})_{f=f_{ij}} \quad (2)$$

where  $V_\star$  is the visibility of the source and  $T^i$  and  $T^{ij}$  are the normalized Fourier Transform of respectively (as commonly named in radio) the photometric and interferometric lobes. They result in respectively the auto-correlation and cross-correlation of the aberrated pupil weighted by the fiber single mode (Roddiier 1988, Mège et al. 2001).  $\rho_0$  is the optimum coupling efficiency fixed by the fiber core design (Shaklan & Roddiier 1988).

In the case where the source is unresolved by a single telescope (i.e. by the photometric lobe), Eq. 1 can be simplified:

$$\rho_i(V_\star) = \rho_0 \int T^i(f) df = \rho_0 S^i \quad (3)$$

where  $S$  is the instantaneous Strehl ratio (Coudé du Foresto et al. 2000). Moreover, if the visibility is constant over the range of the high frequency peak  $T^{ij}$ , the interferometric coupling coefficient has also a simplified expression:

$$|\rho_{ij}(V_\star)|^2 = \rho_0^2 S^i S^j |V_\star(f_{ij})|^2 \quad (4)$$

Under these conditions, the effect of spatial filtering by the fibers in the interferometric equation and, as a result, in the observables, is entirely characterized by the instantaneous Strehl ratio statistics.

## 2.2. Estimation of the modal visibility

We refer to (Tatulli et al. 2004) for a more complete description of the modal visibility. Note however that the expression of the coherent flux at the spatial frequency  $f_{ij}$  is given by:

$$I(f_{ij}) = \sqrt{K_i K_j} \rho_{ij}(V_\star) \quad (5)$$

where  $K_i$  and  $K_j$  are the number of photoevents of telescopes  $i$  and  $j$  before entering the fiber. An estimator of the modal visibility in the Fourier space is given by the ratio of the coherent energy by the incoherent one, assuming the latter is estimated independently through dedicated photometric outputs:

$$\widetilde{V}_{ij}^2 = \frac{\langle |I(f_{ij})|^2 \rangle}{\langle k_i k_j \rangle} \left( \frac{\tau}{1-\tau} \right)^2 \quad (6)$$

$\tau$  is the fraction of light selected for photometry at the output of the beam-splitter, and  $k_i$ ,  $k_j$  are the photometric outputs (i.e. after the fibers).

## 2.3. Modal bispectrum and closure phase

By definition, the closure phase is the phase of the so called image bispectrum  $\widetilde{B}_{klm}$ . The latter consists in the ensemble average of the triple product  $\langle \widetilde{I}(f_{kl}) \widetilde{I}(f_{lm}) \widetilde{I}^*(f_{km}) \rangle$ . It can be expressed from Eq. 5 as:

$$\widetilde{B}_{klm} = \langle K_k K_l K_m \rho_{kl}(V_\star) \rho_{lm}(V_\star) \rho_{km}^*(V_\star) \rangle \quad (7)$$

$$= K_k K_l K_m \rho_0^3 \iiint V_\star(f) V_\star(f') V_\star^*(f'')$$

$$\langle T^{kl}(f_{kl} - f) T^{lm}(f_{lm} - f') T^{km*}(f_{kl} - f'') \rangle df df' df'' \quad (8)$$

Using Roddiier's formalism (Roddiier 1986) that demonstrated the bispectrum analysis to be a generalization to the optical of the well known phase closure method currently used in radio interferometry, it is straightforward to notice that the quantity  $\langle T^{kl}(f) T^{lm}(f') T^{km*}(f'') \rangle$  is non zero if  $f'' = f + f'$  and that in this case:

$$\langle T^{kl}(f) T^{lm}(f') T^{km*}(f'') \rangle = \frac{N(f, f')}{N^3(0)} \quad (9)$$

$$K_k K_l K_m V_\star(f) V_\star(f') V_\star^*(f'') = B_\star(f, f') \quad (10)$$

where  $N(f, f')$  is proportional to the overlap area of three pupil images shifted apart by the spacings  $f$ ,  $f'$  and  $f'' = f + f'$ , and  $B_\star(f, f')$  is the bispectrum of the source. Hence the modal bispectrum can be rewritten:

$$\widetilde{B}_{klm} = \rho_0^3 \iiint B_\star(f, f') \frac{N(f_{kl} - f, f_{lm} - f')}{N^3(0)} df df' \quad (11)$$

Thus, the modal bispectrum arising from fibered interferometers is the source bispectrum integrated over the overlap area  $N(f_{kl} - f, f_{lm} - f')$ . Hence, as the modal visibility does not equal in general the object visibility, the modal bispectrum does not coincide with the source bispectrum. Nevertheless, if the source spectrum is constant over the overlap area  $N(f_{kl} - f, f_{lm} - f')$ , Eq. 11 takes a simplified form:

$$\widetilde{B}_{klm} = \rho_0^3 B_\star(f_{kl}, f_{lm}) \iint \frac{N(f, f')}{N^3(0)} df df' = \rho_0^3 S^k S^l S^m B_{\star,klm} \quad (12)$$

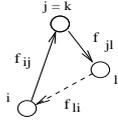
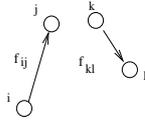
In this case, the modal bispectrum is proportional to that of the source.

## 3. The covariance matrices

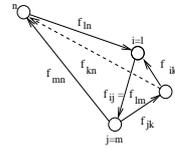
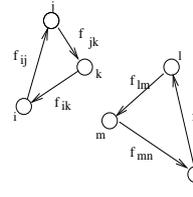
We propose to characterize the statistics of the square visibility and that of the closure phase (i.e. the bispectrum phase) by computing their respective covariance matrix. Our objective is twofold: derive the error associated to each observable and investigate the degree of dependency of each observable through their correlation coefficients. In order to do so, we use the spatially continuous model of photodetection introduced by Goodman (1985, see also Chelli 1989, Tatulli et al. 2004), where the signal is corrupted by three different types of noise: (i) the signal photon noise; (ii) the additive Gaussian noise of global variance  $\sigma^2$  which arises from the detector and from thermal emission; (iii) the atmospheric noise resulting from the

**Table 1.** Correlation coefficients of the visibilities and the closure phases. For the visibility, two cases are considered: one telescope is common to both baselines, hence the triplet of telescopes is forming a triangle (a so-called closure), or not (see Figure 1). For the closure phases, two cases are investigated as well: one baseline belongs to both closure phases or not (see Figure 2).  $N_{pix}$  corresponds to the number of pixels that sample the interferogram. For the computation of the correlation coefficients, at least two different baselines must be taken into account. Hence respecting the Shannon criterion, the number of pixels must verify the condition  $N_{pix} \geq 3$ .

Observables		Correlation coefficient $\rho$		
		Photon noise regime ( $\bar{K} \gg 1$ )		Detector noise regime ( $\bar{K} \ll 1$ )
		$\frac{\sigma_S}{S} = 0$	$\frac{\sigma_S}{S} = 1$	
$\widetilde{V^2}$	if closure	$\leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{4}$	$\frac{3}{3 + N_{pix}}$
	otherwise	0	0	
$\widetilde{\phi_B}$	if baseline in common	$\frac{1}{3}$	$\leq \frac{1}{6}$	$\frac{3}{9 + N_{pix}}$
	otherwise	0	0	0



**Fig. 1.** This figure shows the configurations that have to be considered when computing the covariance of the visibilities. Respectively no telescope in common (left) or one telescope in common, hence forming a closure (right).



**Fig. 2.** This figure shows configurations that have to be considered when computing the covariance of the closure phases. Respectively no baseline (left) or one baseline (right) in common between both triplets of telescopes.

coupling efficiency variations due to the turbulence. To simplify the calculations, we assume that the source is unresolved by a single aperture, such that the low frequency coupling coefficients verify Eq. 3, and that the source visibility is constant over the range of the interferometric peaks, such that the high frequency coupling coefficients verify Eq. 4. These assumptions drive to neglect the modal speckle noise regime – it has been shown that the modal speckle noise is rejected towards negative magnitudes and only affects very bright sources (Tatulli et al. 2004) – and to only focus on “photon noise” and “detector noise” regimes.

The full calculations of the covariance coefficients of the visibilities and of the closure phases are done in Appendix A. They lead to relatively complicated formulae which depend on the Strehl statistics. Using a simple analytical approach, we derive in Appendix B the mean and the variance of the Strehl as a function of the turbulence strength and the level of AO correction. The relative error of the Strehl is bounded between two limit values (see also Goodman 1985, Roddier 1988):

$$\text{(Perfect correction)} \quad 0 \leq \frac{\sigma_S}{S} \leq 1 \quad \text{(No correction)} \quad (13)$$

The error of the visibility will be deeply used in the next section to derive the performances of the Very Large Telescope Interferometer (VLTI) with regards to single sources diameter measurements. Let us concentrate in this part on the correlation coefficients of the visibilities and the closure phases, respectively. Their limiting values are summarized in Table 1. Clearly, for visibilities the correlation coefficients are null in the photon noise regime when no telescope is in common (see Fig. 1) and are always smaller than  $1/2$  otherwise, and for the closure phases they are null when no baseline is in common (see Fig. 2) and are always smaller than  $1/3$  otherwise. Furthermore, the number of null elements in the covariance matrices increases with the number of telescopes and rapidly becomes larger than the number of non zero elements. It implies that if there are  $(N-1)(N-2)/2$  linearly independent closure phase relations (Monnier 2000), the whole set of  $N(N-1)(N-2)/6$  closure phase relations can be considered in first approximation as statistically independent.

#### 4. Model fitting

The present generation of interferometers only provides small number of telescopes (basically 2 or 3). In such a case, it is frequent that the lack of spatial frequencies in the  $(u, v)$  coverage prevents from image reconstruction of the studied object. Hence, the measurements have to be analyzed in the light of a model of the object. We propose here a simple  $\chi^2$  model-fitting of the observables.

Let us define  $\widehat{O}_\theta$  as the normalized spectrum of the object model characterized by a set of parameters  $\theta$ . From this spectrum we derive the model of the observables that have to be fitted according to the measurements:

$$\text{Square visibility} \quad |\widehat{O}_\theta|^2(f_{ij})$$

$$\text{Closure Phase} \quad \phi_G = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(G_\theta)}{\text{Re}(G_\theta)} \right\}$$

where  $G_\theta^{klm} = \widehat{O}_\theta(f_{ki})\widehat{O}_\theta(f_{lm})\widehat{O}_\theta^*(f_{km})$  is the bispectrum model. Then, the estimated parameters  $\theta$  constraining at best the observations are obtained by minimizing the distance between the model and the measurements. Assuming Gaussian statistics for the observables, the distance is given by the well known  $\chi^2$ :

$$\chi_{\text{tot}}^2 = \chi_{V^2}^2 + \chi_{\phi_B}^2 \quad (14)$$

with

$$\chi_{V^2}^2 = [\widetilde{V}^2 - |\widehat{O}_\theta|^2] C_{V^2}^{-1} [\widetilde{V}^2 - |\widehat{O}_\theta|^2]^T \quad (15)$$

$$\chi_{\phi_B}^2 = [\widetilde{\phi}_B - \phi_G] C_{\phi_B}^{-1} [\widetilde{\phi}_B - \phi_G]^T \quad (16)$$

where  $X^T$  denotes the transpose of the vector  $X$ .

It can be argued that, in order to avoid phase discontinuities issues, it might be better to work on the phasors (i.e. bispectrum) than on the phases themselves. In that case the  $\chi^2$  constraint takes the form:

$$\chi_B^2 = [\text{Im}\{\widetilde{BG}_\theta\}] C_{\text{Im}\{\widetilde{BG}_\theta\}}^{-1} [\text{Im}\{\widetilde{BG}_\theta\}]^T \quad (17)$$

Such constraint does not appear to be appropriate for two reasons: (i) constraining the bispectrum or the closure phase is strictly equivalent for phases with good SNR; (ii) the covariance depends on the model which makes the  $\chi^2$  minimization subject to biases due to improper noise estimates. Bispectrum constraint would possibly be relevant when dealing with noisy data, for which the closure phase shows a lot of discontinuities. In such a case however, the probability law of the closure phase wrapped around  $[-\pi, \pi]$  tends towards a uniform law. Therefore, the  $\chi^2$  fitting method is no more optimal, neither for the closure phase nor for the bispectrum.

Putting Equation 14 into the generic form:

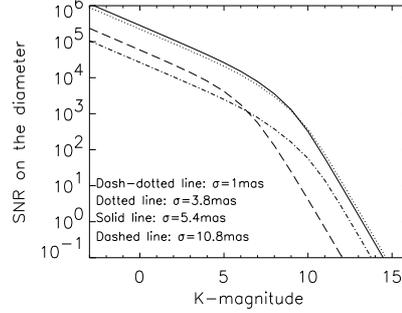
$$\chi^2(\theta) = \mathcal{M}_\theta C_{\mathcal{M}}^{-1} \mathcal{M}_\theta^T \quad (18)$$

the error of the estimated parameters  $\widetilde{\theta}$  writes (von der Heide & Knoechel 1979):

$$\sigma^2(\widetilde{\theta}) = \text{Diag} \left\{ [\mathcal{A}^T C_{\mathcal{M}}^{-1} \mathcal{A}]^{-1} \right\} \quad (19)$$

where

$$\mathcal{A} = \left. \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\widetilde{\theta}} \quad (20)$$



**Fig. 3.** SNR of the diameter  $\sigma_o$  as a function of the magnitude. Different sizes are considered:  $\sigma_o = 1\text{mas}$  (dash-dotted line),  $\sigma_o = 3.8\text{mas}$  (dotted line),  $\sigma_o = 5.4\text{mas}$  (solid line),  $\sigma_o = 10.8\text{mas}$  (dashed line). The resolution is  $\lambda/B = 10\text{mas}$ .  $S = 0.5$ ,  $D/r_0 = 5$ .

#### 5. Applications

##### 5.1. Observing a single Gaussian source

We propose in this section to simulate the observation of a single Gaussian source of FWHM  $\sigma_o$ , with AMBER, the three beam recombiner of the VLTI (Petrov et al. 2000). Since the object is centro-symmetrical, closure phase is not relevant and hence all the information is contained in the visibility alone. For sake of simplicity, we first neglect the contribution of the correlation coefficients. Their effect will be studied in Section 5.3. We adopt the standard instrumental configuration of AMBER (Malbet et al. 2000) in which the signal is sampled over  $N_{\text{pix}} = 16$  pixels. We choose a spectral resolution of 35 in the  $K$  band ( $2.2\mu\text{m}$ ), an integration time of 30ms per interferogram, a transmission coefficient  $\tau = 0.5$ , a readout noise of  $15e^-/\text{pix}$  and an optimized coupling coefficient of  $\rho_0 = 0.8$  (Shaklan & Roddier 1988). We observe an object with 2 Unit Telescopes (UT2 and UT4,  $D = 8\text{m}$ ) during 4H (half of the time on the object, half of the time on the calibrator) with 5min per frequency points which, together with the integration time per interferogram, leads to 5000 samples per frequency point. Note that all along the observation, the length of the baseline is quite constant with  $B = 45\text{m} \pm 2\text{m}$ . Finally, we assume a turbulence strength of  $D/r_0 = 5$  and a typical AO correction of  $S = 0.5$ .

Fig. 3 shows the SNR of the object size as the function of the magnitude. We consider different sizes:  $\sigma_o = 1\text{mas}$ ,  $\sigma_o = 3.8\text{mas}$ ,  $\sigma_o = 5.4\text{mas}$ , and  $\sigma_o = 10.8\text{mas}$ , which are to be compared to  $\lambda/B \sim 10\text{mas}$ , the resolution of the interferometer. As expected, a general profile can be seen with two well known regimes: the ‘‘photon noise’’ regime for bright sources and the ‘‘detector noise’’ regime for faint sources. Defining the limiting magnitude as the magnitude for which the SNR is equal to 1, we find  $\mathcal{K} \sim 11 - 13$  according to the size of the source.

Clearly, the SNR first increases and then decreases with the size of the source, reaching a maximum around  $\sigma_o = 4\text{mas}$ .

This phenomenon can be understood as follows: for marginally resolved sources, the parameters of the fit are barely constrained and the SNR is small. It increases with the size up to a point where the available baseline range does not match anymore the frequency content of the object. From there, the SNR begins to drop. This trend stands for all observing conditions, but as we show in the next section the exact position of the maximum depends on the noise regime.

### 5.2. Optimizing the baseline

We simulate different configurations with two telescopes that span the range of average baseline, respectively: (a)  $B = 45\text{m}$  (+); (b)  $B = 56\text{m}$  (×); (c)  $B = 83\text{m}$  (◊); (d)  $B = 100\text{m}$  (Δ); (e)  $B = 124\text{m}$  (◻). Corresponding  $(u, v)$  plane coverages are shown in Fig. 4 (up).

We compute the SNR of the diameter for all these configurations, in both “detector noise” ( $K = 13$ ) and “photon noise” ( $K = 2$ ) regimes, respectively. In the “detector noise” regime, the error of the visibility is independent on the diameter and the SNR is maximum when the product of the diameter by the derivative of the model is maximum too, namely when:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \theta \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right] \Big|_{\theta=\bar{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \theta \frac{\partial [\widehat{O}_\theta]^2}{\partial \theta} \right] \Big|_{\theta=\bar{\theta}} = 0 \quad (21)$$

This leads to:

$$\bar{\sigma}_o = \frac{2\sqrt{\ln(2)}}{\pi\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\langle B \rangle} \simeq 0.38 \frac{\lambda}{\langle B \rangle} \quad (22)$$

where  $\langle B \rangle$  is the mean baseline.

In the “photon noise” regime, the error of the visibility is strongly dependent on the size. In that case, the maximum of the SNR occurs when the baseline range scanned by the interferometer matches the object frequency content. Considering the frequency for which the visibility is  $1/e$ , it comes:

$$\bar{\sigma}_o = \frac{2\sqrt{\ln(2)}}{\pi} \frac{\lambda}{\langle B \rangle} \simeq 0.54 \frac{\lambda}{\langle B \rangle} \quad (23)$$

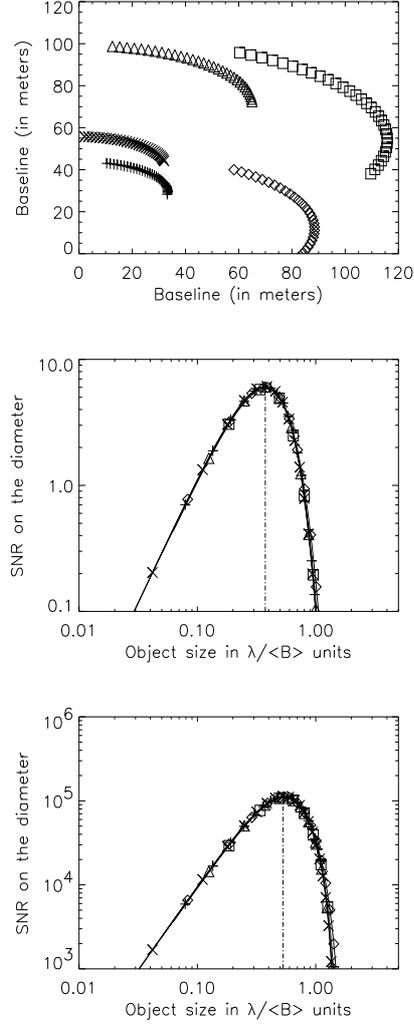
Figures 4 (middle and bottom) illustrate these results. The SNR of the diameter is plotted as a function of the size in  $\lambda/B$  units, for the five geometrical configurations selected above. We can see that the whole curves present the same behavior, and especially the same maximum. This maximum verifies Eq.’s 22 and 23 for the “detector noise” and the “photon noise” regimes, respectively. We conclude that the mean baseline optimizing the observation of an object of diameter  $\sigma_o$  is given by:

$$\langle B \rangle \simeq 0.5 \frac{\lambda}{\sigma_o} \quad (24)$$

Furthermore we stress that the performances degrades rapidly when this criterion is not respected.

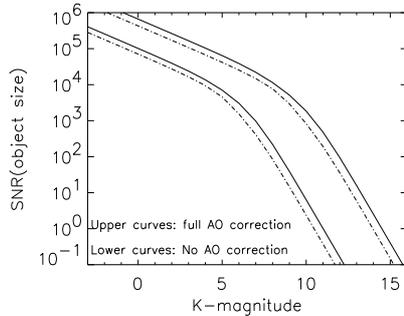
### 5.3. Effect of the correlation coefficients on the error bars

We have shown in Section 3 that the correlations between the visibilities could reach a maximum value of  $\rho = 0.5$ . Since the



**Fig. 4.** Up:  $(u, v)$  coverage for different UTs configurations. The average baseline length is respectively:  $B = 45\text{m}$  (+),  $B = 56\text{m}$  (×),  $B = 83\text{m}$  (◊),  $B = 100\text{m}$  (Δ),  $B = 124\text{m}$  (◻). Middle: SNR of the diameter as a function of the size given in fraction of the interferometer resolution  $\lambda/B$ , in the “detector noise” regime. Vertical line shows the size where the SNR is maximum. Bottom: same as above, but in the “photon noise” regime.

estimator arising from maximum likelihood (i.e. the  $\chi^2$  minimization) is unbiased, the expected value of the fitted parameters does not depend on whether the correlation coefficients are introduced or not. We analyze here the effect of the correlation coefficients on the derived error.



**Fig. 5.** SNR of the diameter as a function of the magnitude, for perfect AO correction (upper curves,  $\sigma_S = 0$ ) and in the pure turbulent case (lower curves,  $\sigma_S = \bar{S}$ ). SNR is computed assuming diagonal covariance of the measurements (no correlation: solid line) or considering correlation coefficients as computed in Section 3 (dashed lines).

We simulate the observation of a Gaussian source with three UTs, together with the instrumental parameters of Section 5 and we choose  $\sigma_o = 0.5\lambda / \langle B \rangle$  for the FWHM of the source. Fig. 5 shows, in both pure turbulent ( $\sigma_S = \bar{S}$ ) and fully AO corrected ( $\sigma_S = 0$ ) cases, the SNR of  $\sigma_o$ , with and without taking into account the correlation coefficients. It results that considering uncorrelated measurements leads to underestimate the error (or overestimate the SNR) by a factor of  $\sqrt{2}$ , roughly. Given that the ratio of the null elements versus the non null elements in the covariance matrix increases with the number of telescopes, we infer that this factor  $\sqrt{2}$  is an upper limit.

## 6. Summary

We have computed the theoretical covariance matrices of the modal visibility and the modal closure phase in the presence of partial AO correction, when the measurements are corrupted by atmospheric, photon and detector noises. In the photon noise regime and for an interferometer with a large number of telescopes, the measurements are most of the time uncorrelated. In any case, the correlation coefficients are always smaller than  $1/2$  for the visibilities and smaller than  $1/3$  for the closure phases.

Then from a classical least square approach, we have investigated the ability of interferometers to measure stellar diameters. In the light of the AMBER experiment we have found a limiting magnitude in the range  $K = 11 - 13$  depending on the size of the source. At last, we have shown that the observation is optimized when the mean resolution of the interferometer is equal to twice the stellar diameter.

## References

- Berger, J.-P., Haguenaer, P., Kern, P., et al. 2003, Proc. SPIE, 4838, 1099  
 Chelli, A. 1989, A&A, 225, 277

- Conan, J.-M. 1994, Ph.D. Thesis, Université Paris XI Orsay  
 Coudé du Foresto, V. 1997, in Integrated Optics for Astronomical Interferometry, eds. P. Kern and F. Malbet, p. 27  
 Coudé du Foresto, V., Faucherre, M., Hubin, N., & Gitton, P. 2000, A&AS, 145, 305  
 Dyer, S. D., & Christensen, D. A. 1999, J. Opt. Soc. Am. A, 16, 2275  
 Goodman J. W. 1985, Statistical Optics, New York: Wiley, 1985  
 von der Heide, K. & Knoechel, G. 1979, A&A, 79, 22  
 Korff, D. 1973, J. Opt. Soc. Am., 63, 971  
 Malbet, F., et al. 2000, AMBER Instrument Analysis Report, Technical Report VLT-TRE-AMB-15830-00000-0001, ESO Preliminary Design Review  
 Mège, P., Malbet, F., & Chelli, A. 2001, in SF2A-2001: Semaine de l'Astrophysique Française, ed. F. Combes, D. Barret, and F. Thévenin, EDP Sciences, p. 581  
 Mège, P. 2002, PhD Thesis, Université de Grenoble  
 Monnier, J. D. 2000, in Principles of Long Baseline Stellar Interferometry, ed P. R. Lawson, National Aeronautics and Space Administration, p. 203  
 Petrov, R. G., Malbet, F., Richichi, A., et al. 2000, Proc. SPIE, 4006, 68  
 Roddier, F. 1986, Optics Communications, 60, 145  
 Roddier, F. 1988, in Diffraction-limited Imaging with Very Large Telescopes, ed. D.M. Alloin, & J.-M. Mariotti, Kluwer Academic Publishers, 1989, 33  
 Ruilier, C. 1998, Proc. SPIE, 3350, 319  
 Shaklan, S., & Roddier, F. 1988, ApOpt, 27, 2334  
 Tatulli, E., Mège, P., & Chelli, A. 2004, A&A, 418, 1179  
 Thiébaud, E., Garcia, P. J. V., & Foy, R. 2003, Ap&SS, 286, 171

*Système Soleil-Jupiter*

Cette étude a fait l'objet d'une présentation sous forme de poster à la conférence SPIE (Glasgow 2004). Elle porte sur la capacité d'AMBER à détecter des Jupiters autour d'étoiles de type solaire. La description complète de cette analyse est livrée dans l'article inséré ci-après. Le système étoile-planète est décrit par le modèle:

$$\hat{O}_\theta(u, v) = \frac{1 + q \exp[-2i\pi(\Delta s_x u + \Delta s_y v)]}{1 + q}$$

où  $q$  est le rapport de flux et  $\Delta s$  la séparation. Considérant une nuit complète d'observation avec trois télescopes auxiliaires du VLTI, les conclusions sont les suivantes:

- De par leur faible rapport de flux  $q = 10^{-5}$ , et de par le champ de vue limité d'AMBER (FOV = 50mas), les planètes situés à 5AU de leur étoile mère sont indétectables
- Les planètes localisées à 1AU sont par contre détectables pour des distances inférieures à  $\sim 400$ pc
- *Sous l'hypothèse forte – et qu'il reste à vérifier expérimentalement – que les erreurs de calibration relatives aux deux observables sont comparables*, il apparaît que du point de vue du rapport signal à bruit sur les paramètres, la clôture de phase n'apporte qu'une quantité négligeable d'informations. Il reste cependant à quantifier la robustesse respective des deux estimateurs, et notamment les valeurs des biais introduits par la calibration par une source de référence.

Cette étude ciblée s'inscrit dans la thématique plus générale de détection de systèmes doubles. Il faut poursuivre cette analyse en parcourant toute la gamme de rapport de flux et de séparations possibles. Il faut aussi continuer d'explorer l'apport de la clôture de phase lorsque le nombre de télescopes (et donc le rapport entre le nombre de clôtures et le nombre de visibilités) augmente.

## Detecting Jupiters with AMBER on the VLTI

E. Tatulli<sup>a</sup>, A. Chelli<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire d'Astrophysique, Observatoire de Grenoble, 38041 Grenoble cedex France

### ABSTRACT

Since several years, long baseline infrared interferometry succeeds in providing handful of astrophysical results from model fitting of the visibility measurements alone. Continuing on these encouraging results, and thanks to the development of elaborated recombination scheme which allow to gather stellar light coming from 3 telescopes or more, recent (IOTA/IONIC, NPOI) and new (VLTI/AMBER) interferometers have also access to closure phase measurements as well as to a better (u,v) coverage. When the (u,v) coverage is still insufficient to perform image reconstruction, a least square fit approach is required, taking benefit of the closure phases together with visibility informations. Within this framework, and in the light of the AMBER experiment, we simulate realistic observations of star-planet systems. Computing the statistics of the observables, and then characterizing the performances of this instrument, we investigate the potential of AMBER to detect Jovian planets around sun-like stars by computing Signal to Noise Ratio on the constrained parameters, i.e. the flux ratio and the separation. We focus here on the specific system sun-planet, knowing that the general case will be treated in a forthcoming paper. We particularly study how important is the contribution of the closure phase in the model-fitting process, relatively to the visibility.

**Keywords:** Infrared interferometry, Signal Processing, High angular resolution, Data reduction, Jupiters

### 1. INTRODUCTION

Detecting and imaging extrasolar planets is one of the main purpose of modern astronomy. Indeed, by gathering observations of many systems with different separation and flux ratio, and by spanning the range of spectral type of the parent star, one can unveil crucial clues of the physics of planet formation. Since the detection of 51Peg by [1], more than hundred Jovian planets have been discovered thanks to radial velocity techniques. Such approach, based on the perturbations of the star radial motion because of the presence of a companion, is however indirect and, in some subtle cases, may be subject to misinterpretations of the results. With the advent of new interferometers which offers both great sensitivity and high angular resolution, we are now beginning to be able to directly detect the presence of a planet by looking for its typical signature in the interferometric observables. Moreover once detected, interferometric observations combined with high resolution spectroscopy will make possible to characterize the atmosphere of the planet through differential phase measurements [2]. Therefore one first step to go through is to investigate the ability of such new generation of interferometers to detect extrasolar planets.

In this paper, we propose to analyze the capacity of AMBER - the three telescopes recombiner of the VLTI - to detect Jovian planets around sun like stars in one night of observation. In section 2, we define the formalism of detection which is based on a simple least square fit of the observables, namely the visibility and the closure phase, using parametrical model of the system. After a careful analysis of the noise arising with such instrument in Section 3, we present in Section 4 its performances in terms of Signal to Noise Ratio (SNR) in the estimated parameters. We finally emphasize the relative contribution of both observables of the model fitting process.

---

Further author information: (Send correspondence to E. Tatulli)  
E-mail: Eric.Tatulli@obs.ujf-grenoble.fr, Telephone: +33 (0)4 76 63 57 75

## 2. FORMALISM OF MODEL FITTING

Let  $\widehat{O}_\theta(u, v)$  be the normalized spectrum of the simple model of binary system where  $\theta = [q, \Delta s_x, \Delta s_y]$  is the set of parameters, and  $(u, v)$  are the coordinates in the spatial frequency plane:

$$\widehat{O}_\theta(u, v) = \frac{1 + q \exp[-2i\pi(\Delta s_x u + \Delta s_y v)]}{1 + q} \quad (1)$$

When observing in the low resolution mode, a 3 telescopes interferometer measure two observables: the visibility and the closure phase computed from the bispectrum [3]:

$$\begin{aligned} \text{Square visibility} & \quad |\widehat{O}_\theta|^2(u_{ij}, v_{ij}) \\ \text{Bispectrum} & \quad G_\theta^{klm} = \widehat{O}_\theta(u_{kl}, v_{kl}) \widehat{O}_\theta(u_{lm}, v_{lm}) \widehat{O}_\theta^*(u_{km}, v_{km}) \\ \text{Closure Phase} & \quad \phi_G = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(G_\theta)}{\text{Re}(G_\theta)} \right\} \end{aligned}$$

The estimated parameters  $\tilde{\theta}$  are derived from classical  $\chi^2$  minimization. The  $\chi^2$  is weighted by the covariance of the measurements, respectively  $C_{V^2}$  and  $C_{\phi_B}$  [4]:

$$\chi^2 = \chi_{V^2}^2 + \chi_{\phi_B}^2 = \left[ \widetilde{V}^2 - |\widehat{O}_\theta|^2 \right] C_{V^2}^{-1} \left[ \widetilde{V}^2 - |\widehat{O}_\theta|^2 \right]^T + \left[ \widetilde{\phi}_B - \phi_G \right] C_{\phi_B}^{-1} \left[ \widetilde{\phi}_B - \phi_G \right]^T \quad (2)$$

The error on the estimated parameters then depends on the derivative of the model  $\mathcal{M}_\theta = [|\widehat{O}_\theta|^2, \phi_G]$  with respect to the parameters together with the error on the measurements  $\mathcal{C}_\mathcal{M} = [C_{V^2}, C_{\phi_B}]$  [5]:

$$C(\tilde{\theta}) = [\mathcal{A}^T \mathcal{C}_\mathcal{M}^{-1} \mathcal{A}]^{-1}, \quad \mathcal{A} = \left. \frac{\partial \mathcal{M}_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\tilde{\theta}} \quad (3)$$

## 3. NOISE ANALYSIS: THE AMBER INSTRUMENT

Noises on the visibility and the closure phase are computed from a theoretical approach taking into account the atmospheric and instrumental specificities of the VLTI and its three beam recombiner AMBER in the detecting mode. Atmospheric parameters defined in Table 1 are based on average Seeing measurements obtained at Paranal (Chile) with the GSM technique [6]. Then error on the observables is investigated with taking into

**Table 1.** Average parameters of the atmosphere in Paranal.

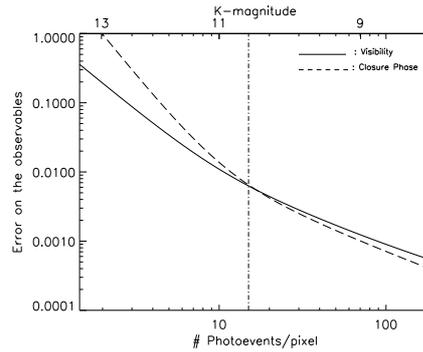
Seeing	Fried parameter	Coherence time
$w$ (")	$r_0$ (cm)	$\tau_0$ (ms)
0.65	16	50

account photon and detector noise, following Goodman's formalism [7] for the visibility and derivations of [8] for the closure phase. The modal speckle noise which remains after spatial filtering by fibers has been neglected since it only affects bright stars (negative magnitudes) as soon as partial Adaptive Optics (AO) correction is applied [9]. Nevertheless, effects of atmospheric turbulence has been considered through the coupling efficiency fluctuations between the incoming wavefront and the fiber. Such effect is highly linked to Strehl ratio statistics [10]. We assume here that the AO systems specially dedicated to interferometry (MACAO [11]) provide very good correction with an average Strehl Ratio of  $\mathcal{S} = 0.8$ .

The instrumental configuration of AMBER in the detecting mode is described in Table 2. As a result, Figure 1 shows the expected error of both observables as a function of the number of photoevents in the interferogram.

**Table 2.** Instrumental configuration of AMBER

Exposure time	Integration time	Spectral Resolution	Detector Noise	Strehl Ratio
$\tau_0$ (ms)	$T$ (min)	$\lambda/\Delta\lambda$	$\sigma(e^-/\text{pixel})$	$\mathcal{S}$
50	5	35 (K band)	15	0.8

**Figure 1.** Error of the visibility (solid line) and closure phase (dashed line) as a function of incoming photoevents on the interferogram, as well as source magnitude (in  $K$  band).

Noises are also given as a function of typical star magnitudes which are considered in this paper (see Section 4.1). The vertical line shows the limit between detector and photon noise. Note that such analysis only takes into account "physical" noises, namely photon and detector noise, and that calibration errors have not been included. It is commonly thought that closure phase can be much more easily calibrated than the visibility, since such observable is atmosphere independent. However, visibility calibration with waveguided interferometers has been proven to be extremely robust to Strehl ratio variations between the science target and the calibrator [9]. Furthermore, since it has not been studied yet how the AMBER instrumental calibration errors of the closure phase behave with regards to the visibility ones, we assumed here that (i) the calibration errors will not be drastic enough to privilege one specific observable and that (ii) they are not the major source of errors.

#### 4. DETECTING JUPITERS AROUND SUN-LIKE STARS

##### 4.1. Description of the observations

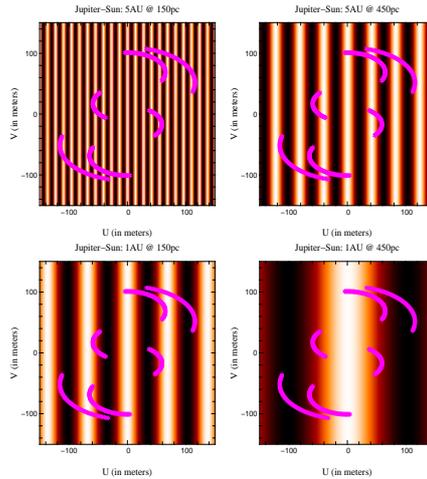
We simulate interferometric observations of Jovian planets around sun-like stars. The star luminosity is based on sun properties (absolute magnitude  $\mathcal{K}_A = 3.41$ ) and the magnitude of the system is then tuned with respect to its distance  $d$  from the observatory (in parsec):

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_A + 5\log(d) - 5 \quad (4)$$

The distance between the Jupiter and its hosting star is then set respectively to 5AU and 1AU, which is consistent with the range of separations unveiled by radial velocity techniques. Neglecting the proper thermal emission of the planet and only considering the reflected light coming from the star, the flux ratio between the star and the planet is set respectively  $q = 10^{-5}$  and 25 times higher, i.e.  $q = 25 \cdot 10^{-3}$ , when assuming same albedo for both cases.

The distance between the system and the observer is regularly increased in order to span various configurations, from very wide (in terms of angular resolution) and bright systems to extremely close and faint systems.

The closest observable system is determined by the field of view (FOV) of AMBER. Because of the fibers, this field of view is limited to one Airy disk, which represents  $\text{FOV} \simeq 50\text{mas}$  for the VLTI Unitary Telescopes of  $D = 8\text{m}$ . The system is assumed to be observed over one full night ( $\sim 8$  hours), with half of the time spent on a calibrator. Realistic simulations of the observations have been made thanks to the ASPRO software [12]. The corresponding  $(u, v)$  plane, as well as some representative examples of the visibility function of different systems are displayed in Figure 2.

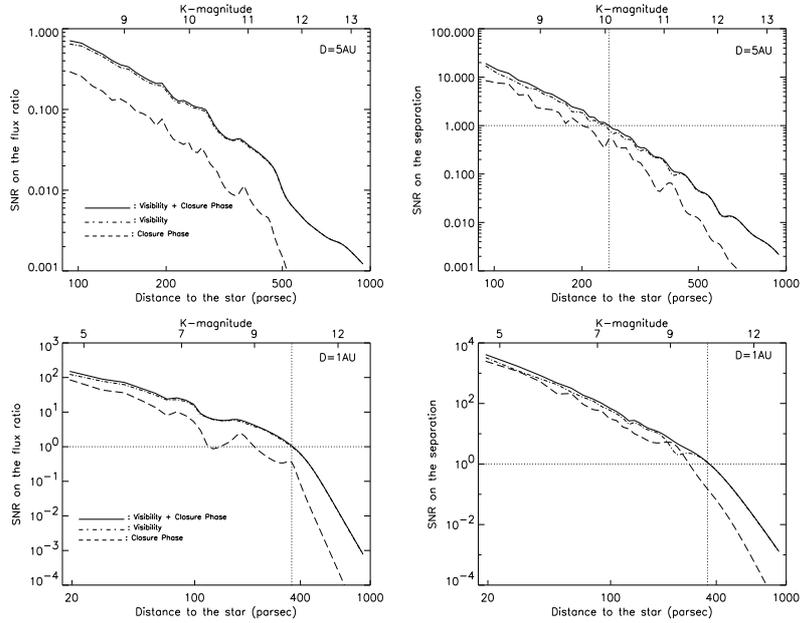


**Figure 2.**  $(u, v)$  plane used during the observation. The visibility of the system is superimposed in four different configurations: from left to right, top to bottom: 5AU @ 150pc; 5AU @ 450pc, 1AU @ 150pc; 1AU @ 450pc.

#### 4.2. Results and analysis

Figure 3 gives the Signal to Noise Ratio on the parameters, respectively the flux ratio  $q$  and the separation  $\Delta s$ , as a function of the distance of the system and its magnitude. For each graphic window, results are shown assuming that model fitting process has been performed by making use of respectively the visibility measurements alone (dash-dotted curves), the closure phases alone (dashed curves) and both observables together (solid lines). Several comments can be drawn from these plots:

- For a given separation (in AU), the SNR of the parameters quickly increases as the system is brought closer to the observer. Such expectable behavior is jointly due to the increasing number of incoming photoevents which drives to more precise measurements, and to the increase of the angular separation which allows the spatial frequency coverage to reach minima and maxima of the visibility function, hence all the more constraining the parametrical model. Small "oscillations" of the curves (which are not as perfectly smooth as one could expect) are explained by the more or less optimized collected visibility samples (see Eq. 3) as long as the frequency of the sine function changes.
- We define the detection threshold as a minimum SNR of 1 to achieve on both parameters. Following this definition, we can conclude that: (i) Jupiters @ 5AU are undetectable. This is mainly caused by the (too) high level of precision that is required on the flux ratio estimation, together with the high distance  $\geq 100\text{pc}$  (and therefore the low magnitude ( $\mathcal{K} > 8$ )) of the system that is needed to enter in the field of view of AMBER; (ii) hot Jupiters @ 1AU are easier to detect, but for systems closer than  $\sim 400\text{pc}$ .



**Figure 3.** Signal to Noise Ratio (SNR) of the parameters respectively the flux ratio  $q$  (left) and the separation  $\Delta s$  (right), as a function of the distance of the system and its magnitude. Are considered planets located at respectively 5AU (top) and 1AU (bottom). Dotted line points the detection threshold, which is defined as a minimum SNR of 1 on the parameters.

- Clearly, from an SNR point of view, making use of closure phase measurements is irrelevant for detecting Jupiters around sun-like stars. Indeed, this observable brings negligible amount of information with regards to the weight of the visibility in the model fitting process. Nevertheless, this conclusion has to be further investigated in the light of the robustness of both estimators. Especially and as mentioned before, calibration errors might be a crucial point which has not been studied in this paper. The hypothesis that both estimators will present equivalent robustness must be confirmed (or not) as soon as the first observation runs of AMBER with three telescopes are available.

## 5. CONCLUSIONS

In this paper we have shown that with AMBER on the VLTI, Jupiters @ 5AU will not be detectable in one night of observation, at the contrary of hot Jupiters located 5 times closer. More generally, we can state that Jupiters are all the more detectable than they are close to their parent star. This stands for two obvious reasons: (i) the planet is brighter and (ii) the system can fill in the field of view of AMBER even for short distances where the sun-like parent star is bright. As an example, very close hot Jupiters @ 0.2AU with  $q = 10^{-3}$ , which are also expected to be found, will be easily detected in less than a full night of observation. Such conclusion seems to be confirmed by other independent work [13].

Finally, the case of planet detection in general needs to be fully analyzed, by spanning the range of flux ratio and separations. Moreover, with the advent of future recombiners which will allow to recombine up to eight telescopes simultaneously [14], the contribution of the closure phase in the model fitting process remains to be explored, as the number of available telescopes for the recombination increases.

## REFERENCES

1. M. Mayor and D. Queloz, "A Jupiter-Mass Companion to a Solar-Type Star," *Nature* **378**, pp. 355–+, Nov. 1995.
2. A. Chelli and R. G. Petrov, "Model fitting and error analysis for differential interferometry. II. Application to rotating stars and binary systems.," *A&AS* **109**, pp. 401–415, Feb. 1995.
3. J. D. Monnier, "Astrophysics with Closure Phases," *EAS Publications Series, Volume 6, 2003, Observing with the VLTI, Proceedings of the conference held 3-8 February, 2002 in Les Houches, France. Edited by G. Perrin and F. Malbet*, pp. 213–+, 2003.
4. E. Tatulli and A. Chelli, "General formalism of model-fitting of interferometric observables," in *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub. Proceedings of the SPIE, Volume 4838*, pp. 515–522 (2003)., pp. 515–522, Feb. 2003.
5. K. von der Heide and G. Knoechel, "Statistically rigorous reduction of stellar polarization measurements," *A&A* **79**, pp. 22–26, Oct. 1979.
6. F. Martin, R. Conan, A. Tokovinin, A. Ziad, H. Trinquet, J. Borgnino, A. Agabi, and M. Sarazin, "Optical parameters relevant for High Angular Resolution at Paranal from GSM instrument and surface layer contribution," *A&AS* **144**, pp. 39–44, May 2000.
7. J. W. Goodman, *Statistical optics*, New York: Wiley, 1985, 1985.
8. A. Chelli, "The phase problem in optical interferometry - Error analysis in the presence of photon noise," *A&A* **225**, pp. 277–290, Nov. 1989.
9. E. Tatulli, P. Mège, and A. Chelli, "Single-mode versus multimode interferometry: A performance study," *A&A* **418**, pp. 1179–1186, May 2004.
10. V. Coudé du Foresto, M. Faucherre, N. Hubin, and P. Gitton, "Using single-mode fibers to monitor fast Strehl ratio fluctuations. Application to a 3.6 m telescope corrected by adaptive optics," *A&AS* **145**, pp. 305–310, Aug. 2000.
11. R. Arsenault, J. Alonso, H. Bonnet, J. Brynnel, B. Delabre, R. Donaldson, C. Dupuy, E. Fedrigo, J. Farinato, N. N. Hubin, L. Ivanescu, M. E. Kasper, J. Paufigue, S. Rossi, S. Tordo, S. Stroebele, J. Lizon, P. Gigan, F. Delplancke, A. Silber, M. Quattri, and R. Reiss, "MACAO-VLTI: An Adaptive Optics system for the ESO VLT interferometer," in *Adaptive Optical System Technologies II. Edited by Wizinowich, Peter L.; Bonaccini, Domenico. Proceedings of the SPIE, Volume 4839*, pp. 174–185 (2003)., pp. 174–185, Feb. 2003.
12. G. Duvert, P. Bériot, and F. Malbet, "ASPRO, a software to prepare observations with optical interferometers," in *Observatory Operations to Optimize Scientific Return III. Edited by Quinn, Peter J. Proceedings of the SPIE, Volume 4844*, pp. 295–299 (2002)., pp. 295–299, Dec. 2002.
13. J. D. Monnier *Private Communication*, 2004.
14. P. Y. Kern, F. Malbet, J. Berger, P. Haguenaier, I. Schanen-Duport, P. Labeye, K. Perraut-Rousselet, B. Arezki, A. Delboulbé, L. Jocou, C. Perrier-Bellet, W. A. Traub, R. Millan-Gabet, J. D. Monnier, E. Pedretti, A. Glindemann, P. Kervella, E. di Folco, and P. B. Gitton, "Increasing the imaging capabilities of the VLTI using integrated optics," in *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub. Proceedings of the SPIE, Volume 4838*, pp. 312–320 (2003)., pp. 312–320, Feb. 2003.

### 5.3 Reconstruction d'images

Si la technique d'ajustement de modèles paramétriques permet déjà d'obtenir nombre d'informations essentielles sur la structure géométrique et la physique de la source, elle n'est pas à même de lever toutes les ambiguïtés. L'observation d'étoiles jeunes Herbig Ae/Be en est un des exemples les plus frappants. L'histoire commence par une controverse. Si l'excès infrarouge de la distribution spectrale d'énergie de ces objets pouvait s'interpréter comme provenant de l'émission d'un disque à faible taux d'accrétion [HILLENBRAND *et al.* (1992)] ou d'une enveloppe sphérique de poussière [BERRILLI *et al.* (1992), HARTMANN *et al.* (1993)], les observations interféromériques ne corroboraient pas ces hypothèses de manière suffisamment convaincante [MILLAN-GABET *et al.* (1998)]. Ces dernières plaidaient plutôt pour la présence d'un anneau dont le rayon interne est égal au rayon de sublimation de la poussière (endroit où la température est  $T \simeq 1100 - 1500K$ ) [MONNIER & MILLAN-GABET (2002)]. Il semble aujourd'hui que la communauté astrophysique a atteint un consensus quant à la modélisation de tels objets, l'anneau de poussière étant la partie interne d'un disque qui a "enflé" sous l'effet de l'irradiation stellaire et de la luminosité d'accrétion [DULLEMOND *et al.* (2001), NATTA *et al.* (2001)]. Mais le doute subsiste...

La seule façon de s'affranchir de telles ambiguïtés est d'effectuer un ajustement des données par un modèle objectif, soit en d'autres termes de faire de la reconstruction d'images. Or, avec l'avènement d'interféromètres optiques tels le VLTI, l'ère de l'imagerie est en train de s'ouvrir. En effet, le VLTI offre à la fois la haute résolution angulaire (avec des lignes de bases allant jusqu'à  $B \sim 200m$ ), la sensibilité (avec de diamètres de  $D = 1.8m$  et  $D = 8m$ ) ainsi qu'une couverture de plan  $(u, v)$  exceptionnelle, l'ensemble donnant à ce site un potentiel imageur unique.

Le but de cette partie est donc d'étudier la capacité de l'instrument AMBER/VLTI à reconstruire des images, et d'en déterminer les limitations rédhibitoires. Cette étude a été présentée oralement à la conférence SPIE (Glasgow 2004). Le manuscrit étant joint à ce chapitre, je décris ici les éléments majeurs de cette analyse, notamment la description du modèle d'étoiles jeunes utilisé et les conclusions concernant la possibilité de reconstruire de tels objets.

#### 5.3.1 Modèles de disques d'étoiles jeunes

Le modèle présenté ici est une version modifiée du modèle de [MALBET & BERTOUT (1995)]. L'environnement circumstellaire de l'étoile est supposé géométriquement fin et centrosymétrique. Il est constitué (voir figure 5.2):

- d'un disque d'accrétion avec une loi de température en  $r^{-q}$  [MALBET & BERTOUT (1995)] auquel a été rajouté
- un anneau à la température de sublimation  $T_s$  et de rayon interne le rayon de sublimation  $R_s$ . En supposant que la section de cet anneau est circulaire, la taille radiale est définie

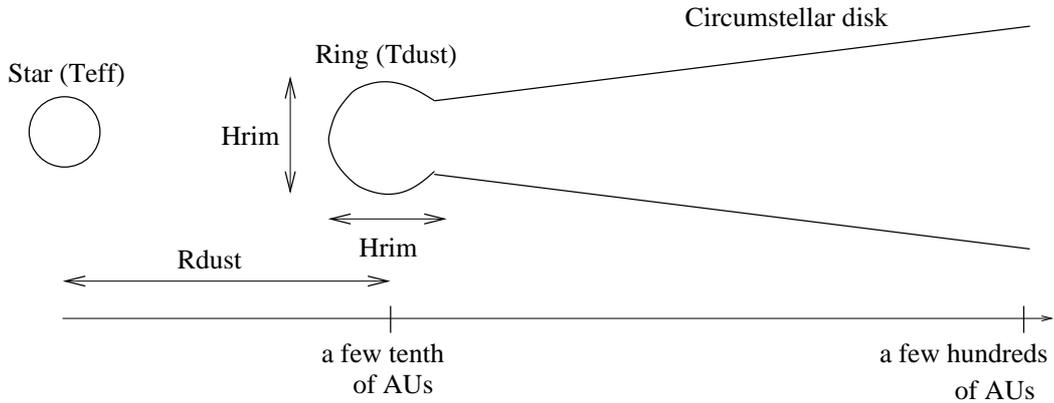


FIG. 5.2: *Modèle simplifié de disques d'étoiles jeunes inspiré de [DULLEMOND et al. (2001)], composé d'un anneau "gonflé" à la température de sublimation de la poussière et d'un disque d'accrétion.*

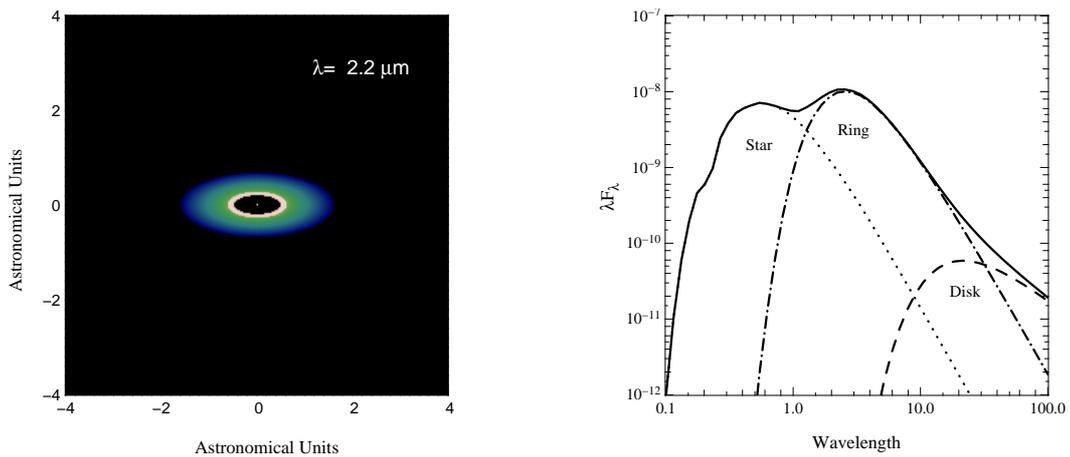


FIG. 5.3: *Image et distribution spectrale d'énergie pour une étoile jeune de type AB Aur. Les paramètres sont:  $M = 2.4M_{\odot}$ ,  $R = 2R_{\odot}$ ,  $T_{eff} = 9520K$ ,  $T_{dust} = 1500K$ ,  $R_{dust} = 0.52AU$ ,  $H_{rim} = 0.19R_{dust}$ ,  $R_{out} = 400AU$ ,  $q = 0.75$ ,  $i = 65^{\circ}$ ,  $d = 150pc$ .*

comme la taille du bord interne  $H_{rim}$  calculée par [DULLEMOND et al. (2001)]

Ce modèle très simplifié ne prend pas en compte ni l'éclairement du disque par l'anneau, ni le fait que le disque soit en partie ombragé à cause de l'anneau. Néanmoins, ce modèle permet déjà d'avoir une bonne indication du genre d'images auquel les interférométristes seront confrontés. La figure 5.3 illustre le résultat de ce modèle pour des étoiles de Herbig Ae/Be de type AB Aur. Les paramètres physiques proviennent de [DULLEMOND et al. (2001)] et sont décrits dans la légende.

### 5.3.2 Potentiel imageur de AMBER sur le VLTI

Le papier SPIE présenté ci-après étudie la capacité d'AMBER d'imager de tels objets. Les angles d'approche sont les suivants: (i) quels sont les limitations intrinsèques dues à une couverture non parfaite des fréquences spatiales ainsi qu'à une résolution limitée? (ii) Quid de la reconstruction d'étoiles jeunes de type Herbig Ae/Be, T Tauri et FU Orionis? (iii) Combien de nuits sont nécessaires pour avoir une reconstruction pertinente? (iv) Quelles sont les perspectives en ce qui concerne la possibilité de réaliser des images "instantanées" (en une nuit ou moins) avec le VLTI?

Ces questions ont leur réponse dans le papier, illustrée par des images de reconstruction des modèles<sup>1</sup> avec les algorithmes CLEAN [HÖGBOM (1974)] et MIRA [THIÉBAUT *et al.* (2003b)], ce dernier, étant spécifiquement dédié à la reconstruction d'images à partir de données interférométriques (i.e. les algorithmes sont définis et optimisés à partir des observables réellement disponibles: le module carré de la visibilité et éventuellement la clôture de phase). La figure 5.4 reproduit le résultat de la reconstruction pour l'étoile AB Aur, observée pendant 7 nuits avec AMBER sur le VLTI, en utilisant 3 télescopes auxiliaires par nuit (le plan  $(u, v)$  résultant est montré en figure 5.5).

Voici un résumé des différentes conclusions:

- La structure clairsemée du plan  $(u, v)$  et présentant une direction préférentielle entraîne inévitablement des biais dans l'orientation de l'objet reconstruit ainsi que des artefacts à partir d'un niveau de dynamique de  $10^3 - 10^4$
- Concernant les étoiles de Herbig Ae/Be, si CLEAN n'est pas adapté à ce genre de reconstruction et n'arrive que modestement à résoudre les différentes structures de ces modèles, l'algorithme MIRA permet de recouvrer quantitativement certaines informations telles que la position de l'anneau, sa taille ainsi que son flux par rapport à l'étoile au centre
- La dynamique entre l'étoile et le disque est bien trop importante pour que ce dernier soit reconstruit, son flux étant bien en deçà du niveau de bruit de la reconstruction
- MIRA ne permet donc pas une reconstruction parfaite de l'objet. Néanmoins, celle-ci fournit des informations fidèles sur la nature de la source. Cette image peut donc être utilisée pour définir un modèle paramétrique affiné, avec des paramètres physiques ciblés
- Concernant les étoiles T Tauri, les bords internes du modèle sont à la limite de la résolution ultime que l'on peut obtenir avec le VLTI et ce genre d'algorithme de reconstruction. De plus, imager les étoiles de type FU Orionis, marginalement résolues par le VLTI, n'apporte pas plus d'informations qu'un simple ajustement de modèle à peu de paramètres [LACHAUME (2003)].

---

1. Il est à noter que seules les visibilitées sont utilisées dans cette étude puisque les modèles sont centrosymétriques

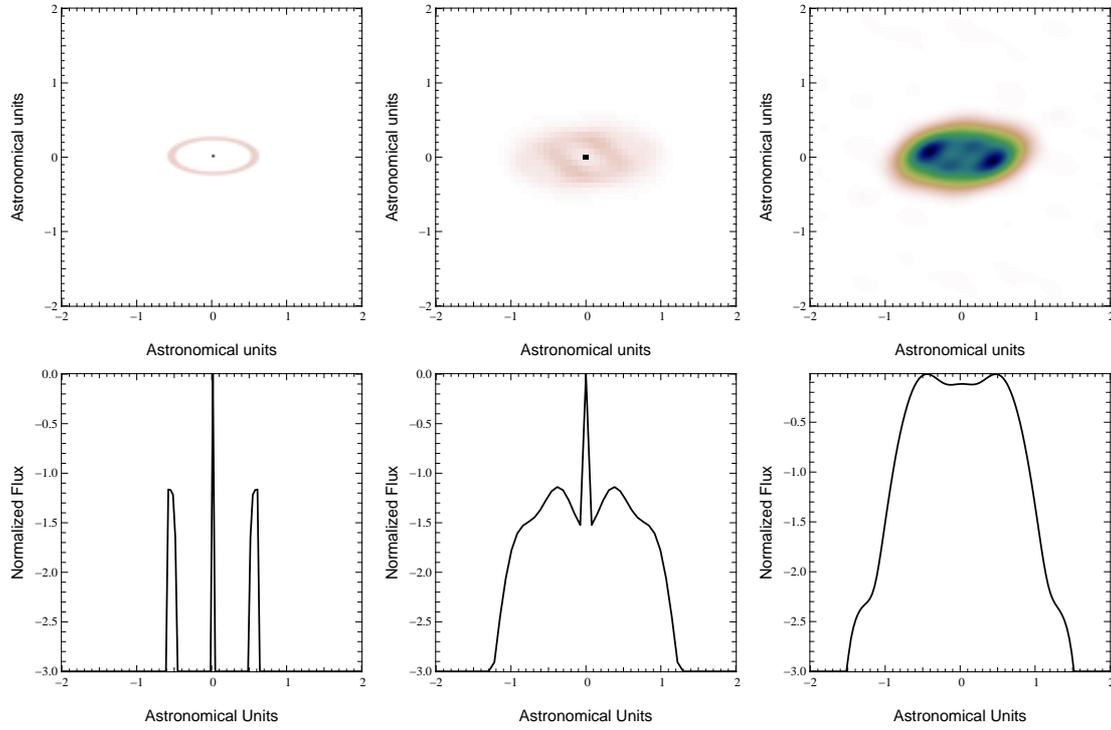


FIG. 5.4: *Haut: de gauche à droite: (i) Modèle de AB Aur en échelle linéaire; (ii) reconstruction avec l'algorithme MIRA; et (iii) reconstruction avec l'algorithme CLEAN. Bas: Profil horizontal associé à chaque image.*

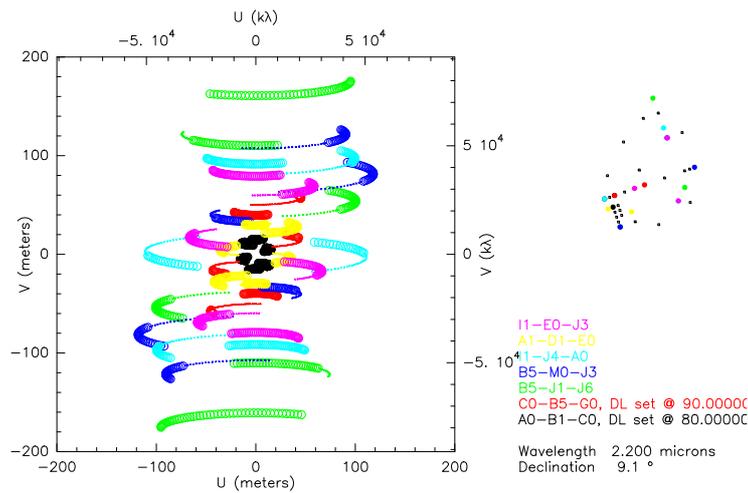


FIG. 5.5: *Plan  $(u, v)$  obtenu avec 7 nuits d'AMBER sur le VLTI, en utilisant 3 télescopes auxiliaires par nuit.*

- Au moins 3 nuits complètes d'observations à trois télescopes utilisant chaque fois des bases différentes sont nécessaires pour obtenir une image ayant "du sens".
- En revanche VITRUV, le recombineur 4 et 8 télescopes de seconde génération du VLTI [KERN *et al.* (2003)], sera à même de fournir des couvertures assez denses pour imager les étoiles jeunes à partir d'une seule nuit d'observation (imagerie "snapshot").

### 5.3.3 Perspectives

Je me suis attaché dans ce travail à étudier la possibilité de reconstruire avec AMBER des modèles *centro-symétriques* d'étoiles jeunes. La suite naturelle est bien entendu de modéliser des objets plus complexes, où la clôture de phase apportera des informations cruciales pour la reconstruction. Qui plus est, compte tenu de la couverture spectrale de AMBER – les bandes  $J$ ,  $H$ , et  $K$  – une étape supplémentaire serait d'intégrer dans l'algorithme des *a priori* physiques permettant de reconstruire conjointement l'objet dans les trois bandes.

## Imaging Young Stellar Objects with AMBER on the VLTI

E. Tatulli<sup>a</sup>, E. Thiébaud<sup>b</sup>, F. Malbet<sup>a</sup>, G. Duvert<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire d'Astrophysique, Observatoire de Grenoble, 38041 Grenoble cedex France

<sup>b</sup>Centre de Recherche Astronomique de Lyon, 69561 Saint Genis Laval cedex France

### ABSTRACT

Young Stellar Objects (YSOs) play a central role in the understanding of stellar and planet formation, and progress in spatial resolution and sensitivity of long infrared interferometers made such instruments particularly well suited to probe the inner part of the disk where essential physical processes and interactions are believed to take place. The first astrophysical results obtained on young stars arising from this technique are already giving a handful of informations about the structure of the extended component. However, model-fitting methods used to reduce the data prevent from definitive and unambiguous interpretations. Interferometric observations of Herbig Ae/Be stars is one of the most striking example. Whereas first results seemed to be in good agreement with accretion disk model, latest observations tend to favor the presence of a uniform ring with a inner radius set by dust sublimation temperature. Direct imaging of close environments around YSOs with infrared (IR) interferometers will allow to disentangle between current suggested models and to improve one step further the scenarios of stellar formation. Within this framework, we anticipate observations of YSOs with the VLTI and we investigate the potential of AMBER to recover images. Modelling their circumstellar environment, we simulate realistic observations of Herbig Ae/Be and T Tauri stars. By using reconstruction technique specially dedicated to infrared interferometry and to sparse  $(u, v)$  data coverage, we analyze the quality of the recovered images, and we emphasize the critical points to take into account in the image reconstruction process. We conclude that it requires at least three nights of observations to perform imaging of YSOs with AMBER on the VLTI.

**Keywords:** Infrared interferometry, Image processing, High angular resolution, Young Stellar Objects, Disks

### 1. INTRODUCTION

Many instrumental facilities are available to image the large (radio interferometers) and medium (Adaptive Optics, HST) scale environment of Young Stellar Objects (YSOs). Observations with such instruments have succeeded to unveil many crucial information on their physics, and have especially allowed to confirm the presence of hundreds of Astronomical Units wide circumstellar disks around young stars as well as collimated jets emerging from a perpendicular direction. However, in order to deeply investigate the stellar and planet formation processes, one need to probe the very inner part of such objects, down to the sub-AU scale where the disk/star and disk/jet interactions are taking place. In other words, one needs instruments that offer very high angular resolution together with great sensitivity and improved accuracy.

Infrared interferometry appears to be one of the major promising solutions. Indeed, with the advent of new facilities such as the Very Large Telescope Interferometer (VLTI), up-to-date interferometers are providing long baselines (up until  $B = 200\text{m}$ ) with large aperture telescope ( $D = 8\text{m}$ ), thus combining the high angular resolution and high sensitivity requirements. Moreover, the great spatial frequency coverage available, together with brand new beam combiners (MIDI, AMBER) that produce highly accurate interferometric measurements, give to the VLTI a unique imaging potential.

In this paper, we investigate the ability of this interferometer to image young stellar objects. After describing in Section 2, our model of YSOs, we analyze the properties of the CLEAN algorithm in Section 3. Then introducing MIRA, a new reconstruction algorithm specially dedicated to interferometry, we investigate in Section 4 the capacity of AMBER to image Herbig Ae/Be, T Tauri and FU Orionis stars respectively. We finish by studying in Section 5 the effects of spatial frequency coverage in the reconstruction process.

---

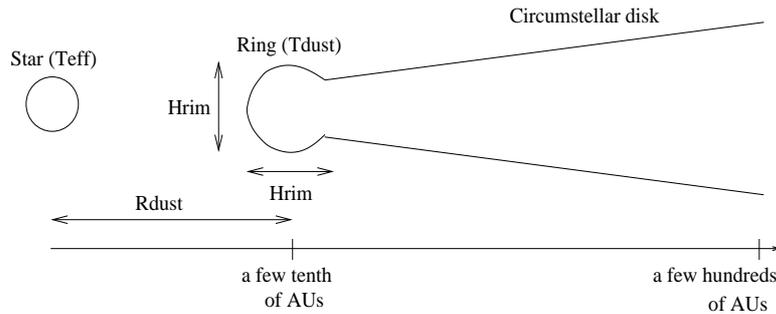
Further author information: (Send correspondence to E. Tatulli)  
E-mail: Eric.Tatulli@obs.ujf-grenoble.fr, Telephone: +33 (0)4 76 63 57 75

## 2. MODELLING OF HERBIG AE/BE STARS

### 2.1. Description of the model

Since the first interferometric observations of Herbig Ae/Be stars [1],[2], many models of their circumstellar environment, such as accretion disks or dusty envelopes, have been suggested in order to fit – more or less successful – the visibility measurements. From past few years, the astrophysical community has reached a consensus by interpreting the infrared emission at the AU scale to arise from a dusty ring which location is imposed by the dust sublimation temperature ( $T_{dust} \simeq 1500K$ ) [3]. From this model, we propose in this paper to derive realistic infrared images of Herbig Ae/Be stars and to use them as input of our simulations of interferometric observations. For sake of simplicity, we use a simplified model of young stars, sketched in Figure 1, and that takes into account:

- a "puffed-up" ring with dust sublimation temperature located at dust sublimation radius. Such ring dominates the emission in the  $K$  Band. The height of the dust rim  $H_{rim}$  is computed from the Herbig Ae/Be model of Dullemond et al. [4]
- an accretion disk with usual temperature law  $\propto r^{-q}$  [5]



**Figure 1.** Modelling of Herbig Ae/Be stars thermal emission with a "puffed-up" ring at dust sublimation radius and an accretion disk.

Note that this geometrically thin model is extremely simplified. First, it is totally symmetrical (hence the closure phases are all zero) and moreover, it does not consider other physical processes that might also occur, such as the backward heating of the disk by the ring emission and the shadowing of one part of the disk by the ring as well. However, we assert that although simplified, this model gives a fair idea of the kind of images interferometrists will have to handle when observing young stars.

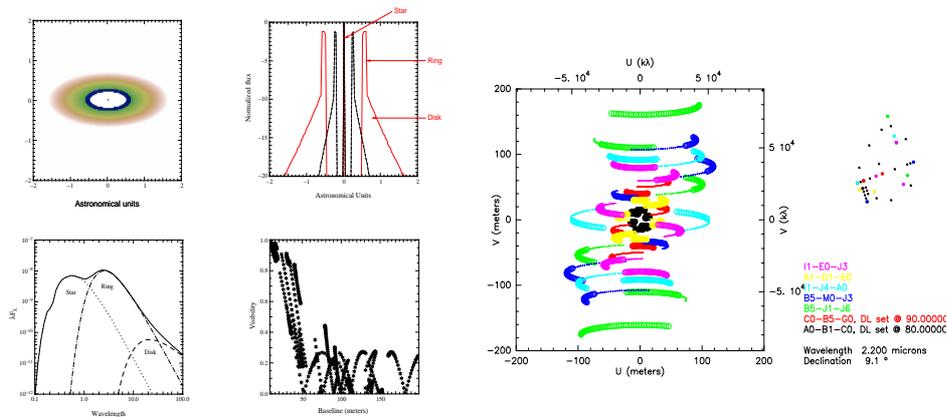
### 2.2. The example of AB Aur

Based on the parameters derived by Dullemond et al. [4] and summarized in Table 1, we computed images and spectral energy distributions (SED) of "AB Aur like" models as well as their interferometric signatures in terms of visibility measurements (See Figure 2, left).

The visibilities are computed from the  $(u, v)$  plane given in Figure 2 (right). Such fairly dense coverage is obtained with seven full nights of observations with AMBER by using a different triplet of Auxiliary Telescopes each night. It represents about 700 visibility measurements. Note that closure phases are irrelevant since the model is symmetrical. The longest baseline is  $B \sim 200m$  which corresponds to a resolution of  $\sim 2mas$  in the  $K$  Band.

**Table 1:** Physical model parameters of AB Aur like model

$M/M_{\odot}$	$R/R_{\odot}$	$T_{eff}$ (K)	$T_{dust}$ (K)	$R_{dust}$ (AU)	$H_{rim}/R_{dust}$	$R_{out}$ (AU)	$q$	$i$	$d$ (pc)
2.4	2	9520	1500	0.52	0.19	400	0.75	$65^{\circ}$	150

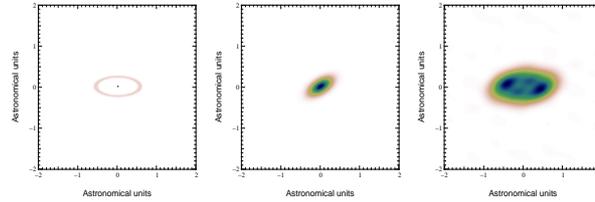


**Figure 2.** Results of AB Aur like model using parameters of Table 1. From left to right top to bottom are displayed (i) the image of AB Aur in  $K$  band (logarithmic color scale); (ii) the horizontal and vertical profiles; (iii) the SED with the contribution of each part of the object (star - ring - disk); and (iv) the visibility points obtained with the  $(u, v)$  plane shown on the right part of the figure.

### 3. THE CLASSICAL CLEAN ALGORITHM

As a preliminary study of the imaging potential of the AMBER/VLTI instrument, we investigate the image reconstruction of YSOs with the classical CLEAN algorithm [6]. Although CLEAN in its simplest form is clearly not optimized for infrared interferometry, such approach gives intuitive hints of the problems interferometrists will encounter with image reconstruction in general, especially in terms of  $(u, v)$  plane limitations: that is the clean beam and the intrinsic limited resolution of the interferometer. Figure 3 shows the clean beam of the  $(u, v)$  plane as well as the resulting deconvolved image. Due to the limited resolution of the interferometer as well as the lack of covered spatial frequencies in some specific directions, the Gaussian shaped clean beam of  $FHWM \sim [3mas \times 1mas]$  induces artificial inclination in the reconstructed object as well as beam dilution of unresolved components, that is the star and the ring. Moreover, since these two components are only  $0.5AU \equiv 3.3mas$  close to each other, the flux contribution of both components are overlapping. As a result, it is very difficult to identify the different structures of the star in the reconstructed object and almost impossible to collect quantitative informations such as physical scales or flux distribution. Note as well that the very low contribution of the disk can not be retrieved since it is well under the noise level of the reconstruction.

This example points out the issue of sparse  $(u, v)$  coverage in the reconstruction process. Even though observers can try to configure their observations such that the resulting  $(u, v)$  plane is as homogeneous as possible, more elaborated algorithms have still to be computed in order to retrieve from the restored object, as much valuable and quantitative informations as possible.



**Figure 3.** From left to right: (i) True image of AB Aur in linear scale. The  $K$  band circumstellar emission is highly dominated by the ring; (ii) clean beam of the  $(u, v)$  coverage of Figure 2; and (iii) reconstructed object with the CLEAN algorithm.

## 4. THE MIRA ALGORITHM

### 4.1. Description

In this section, we propose a reconstruction algorithm specifically dedicated to interferometric observations, namely the Multi-aperture Image Reconstruction Algorithm (MIRA [7]). This algorithm is based on least square minimization of the interferometric observables, that is the square visibility and the closure phase. Since our model is centro-symmetrical, we only focus here on the former with adding a constraint of symmetry. This criterion is not convex and the minimization requires evolved procedures. The algorithm takes into account a classical positivity constraint, as well as a regularization term based on MEM techniques (entropy minimization) in order to increase the achievable resolution. The ultimate resolution is then fixed "by hand" by apodizing the  $(u, v)$  plane (which results in defining a pseudo clean beam in the image plane), typically a few times the resolution of the interferometer alone. Finally, the hyper parameter that tunes the contribution level of the regularization term, i.e. the amount of object *a priori* that are injected in the algorithm, is selected *ad hoc*. An automated selection of the hyper parameter is under realization.

To check and validate the robustness of the method, we have reduced the data by using several starting images: (i) a point source, (ii) a central star and a disk and (iii) uniform random noise. Each time, we have obtained the same reconstructed object, therefore making us confident in the proper convergence of the minimization procedure.

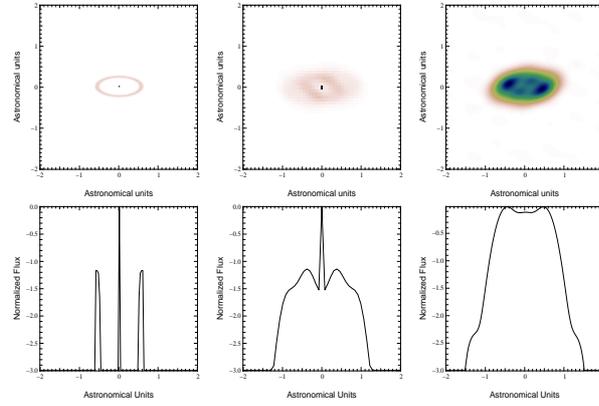
### 4.2. Results

Figure 4 shows a comparison of the images and restored with the MIRA and the CLEAN algorithms, respectively. Clearly, MIRA gives much better results as, at the contrary of CLEAN, the retrieved object offers sensible informations on the nature of the source. Several comments can be made from the MIRA reconstruction:

- the gap between the star and the ring is present, together with the good separation
- the flux ratio between the star and the ring is preserved
- the profiles of the different structures of the object are smoothed by the regularization
- the  $(u, v)$  preferential directions still give raise to biases in the object inclination
- the flux contribution of the disk is too low and cannot be retrieved

Although the dominant features of AB Aur are present in the reconstructed image, the sparse and limited  $(u, v)$  coverage, together with the nature of the object that shows structures with high dynamics, prevents from a thorough reconstruction. However further improvements are expected since the MIRA algorithm is still under development and is not yet in its optimized form.

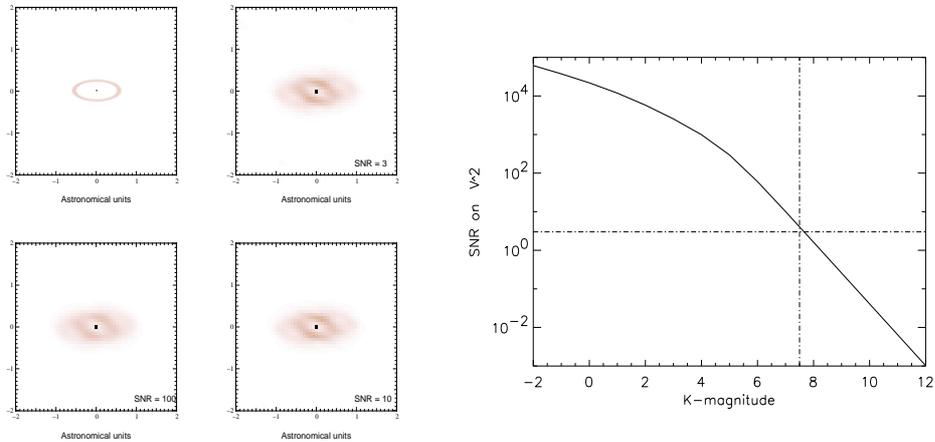
Nevertheless, the important conclusion is that MIRA produces identifiable images. On the basis of such images, model fitting techniques with elaborated and consistent models can be developed to derive the physical parameters of the object that are not directly accessible from the image reconstruction.



**Figure 4.** From left to right: (i) True image of AB Aur in linear scale; (ii) reconstruction with the MIRA algorithm; and (iii) reconstruction with the CLEAN algorithm. The graphs at the bottom show the horizontal profiles of the corresponding above objects.

#### 4.3. SNR issues

The previous analysis was performed to analyze the intrinsic reconstruction abilities of the MIRA algorithm. Another crucial issue lies in its robustness with regards to the level of noise in the measurements. Hence, we have simulated observations of AB Aur with the same coverage, but where the visibilities are noisy. Different cases have been considered from fairly bad to good SNR. Results are show in Figure 5 (left).



**Figure 5.** Left: reconstructed images of AB Aur with the MIRA algorithm, for different values of the SNR of the visibilities. Right: SNR of the visibilities as a function of the magnitude of the source, for the AMBER combiner, with the instrumental parameters of Table 2.

**Table 2:** Instrumental configuration of AMBER

Exposure time	Integration time	Spectral Resolution	Detector Noise	Strehl Ratio
$\tau_0$ (ms)	$T$ (min)	$\lambda/\Delta\lambda$	$\sigma$ (e <sup>-</sup> /pixel)	$\mathcal{S}$
50	5	1000 ( $K$ band)	15	0.5

Clearly, MIRA is very little sensitive to the noise on the measurements, at least from SNR greater than 3. Such trend is a very important conclusion. It indeed means that in most the cases, reconstruction with MIRA algorithm will be reliable, no matter the level of the noise on the visibilities. Considering an observation with AMBER with its typical instrumental parameters in the imaging mode (see table 2), and defining the detection limit such that the SNR of the visibility is greater than 3, Figure 5 (right) shows that the limiting magnitude of AMBER is  $\mathcal{K} = 8$  with that kind of sources and that kind of  $(u, v)$  plane.

#### 4.4. The case of T Tauri stars

TTauri stars are believed to be the less massive counterpart of the Herbig Ae/Be stars. It is likely that they exhibit the same structures, especially the presence of a puffed-up ring at the dust sublimation radius. Since the luminosity of that kind of stars is lower, the inner rim of the disk is supposed to be closer, in the range of 0.07 – 0.54 AU, according to the total luminosity (stellar and accretion) [8]. Interferometric observations of DG Tau have confirmed this model [9]. They are consistent with a rim radius of  $\sim 0.2$  AU.

Gathering in Table 3 the physical parameters of DG Tau derived by different authors [8], [9], [10], we have used our simple model to simulate images of this T Tauri star, and to perform image reconstructions with MIRA and CLEAN algorithms, similarly than in the previous section. Results are displayed in Figure 6.

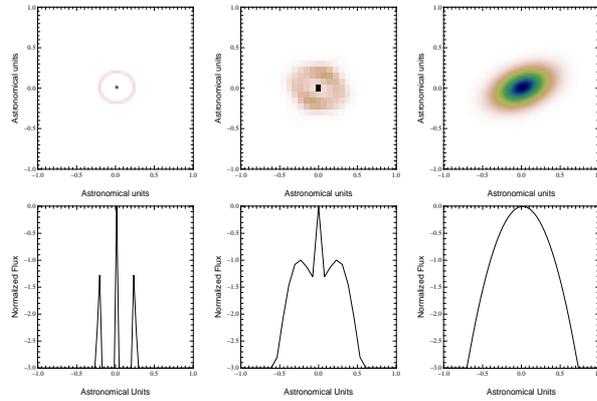
It shows that the CLEAN algorithm does not resolve this object at all and that MIRA, even though the inner rim and the flux ratio between the star and the ring are recovered, seems at the limits of its performances. Moreover, DG Tau may not be a prototypical example of TTauri stars and a majority of that type of young stars may show rim radii smaller than 0.1 AU [4], which correspond to an angular size of 0.7 mas. Hence, we can conclude that the inner structures of that type of sources are at the very limit of the resolution of the VLTI and that it will be very challenging for image processing techniques to provide sensible informations.

#### 4.5. The case of FU Orionis stars

The case of FU Orionis stars is in a sense much "simpler" to handle. The interferometric observations are in very good agreement with a standard model of accretion disk alone (without inner rim). Following models of Malbet & Bertout [5], the dynamics of the disk flux is greater than  $10^4$  in less than 1 AU. At the distance of  $d = 450$  pc, these objects are marginally resolved by the whole current interferometers. As a result, we do not expect that image reconstruction techniques provide more informations than a simple fit of a model with few parameters [11] (e.g. bi-dimensional Gaussian, etc...).

**Table 3:** Physical model parameters of DG Tau

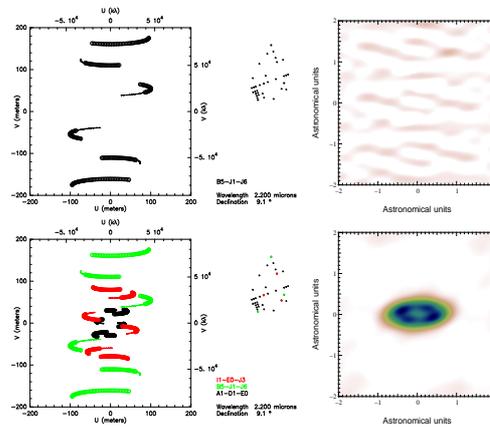
$M/M_\odot$	$R/R_\odot$	$T_{eff}$ (K)	$T_{dust}$ (K)	$R_{dust}$ (AU)	$H_{rim}/R_{dust}$	$R_{out}$ (AU)	$q$	$i$	$d$ (pc)
1	3	5000	1500	0.2	0.14	100	0.5	$30^\circ$	150



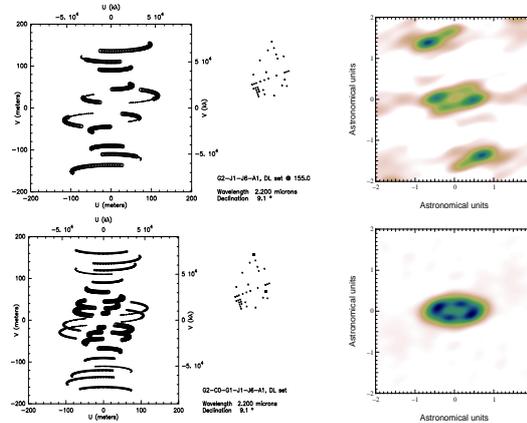
**Figure 6.** From left to right: (i) True image of DG Tau in linear scale; (ii) reconstruction with the MIRA algorithm; and (iii) reconstruction with the CLEAN algorithm. Bottom graphs display the horizontal profiles of the corresponding above objects.

### 5. THE $(u, v)$ COVERAGE ISSUE

Clearly, the  $(u, v)$  coverage considered for the reconstruction arises from an ambitious and long term observation project since it makes use of three telescopes during seven full nights. It is likely that proposals of campaigns that consume a lot of telescope time will only be occasionally accepted. Moreover, the physical processes that are taking place at the very inner part of the environment of the source show probably short time scale variations. For this double reason, it is important to study the ability of the VLTI to restore images in a few nights of observations.



**Figure 7.** Left:  $(u, v)$  coverage obtained in respectively 1 (top) and 3 (bottom) nights. Right: associated reconstructed images of AB Aur with CLEAN.



**Figure 8.** Left:  $(u, v)$  coverage in one night with VITRUV recombining respectively 4 and 6 beams simultaneously. Right: associated reconstructed images of AB Aur with CLEAN.

Figure 7 shows the  $(u, v)$  coverage obtained in respectively 1 and 3 nights, as well as the image reconstruction of AB Aur with the CLEAN algorithm. Obviously, one night of  $(u, v)$  coverage is too sparse, and clearly not appropriate for image reconstruction methods. Within 3 days however, the  $(u, v)$  plane starts to span different scales of spatial frequencies, hence beginning to allow imaging of young stellar objects.

As a result, snapshot imaging (i.e. within 1 night) requires devices that combine more than 4 telescopes simultaneously. The project VITRUV, a second generation of beams combiner for the VLTI, propose to combine 4, and then 8 telescopes by making use of the remarkable properties of integrated optics [12]. An intermediate 6 beam combiner is also planned to be tested on the CHARA interferometer.

We simulate in Figure 8, the spatial frequency coverage collected in one night with such instrument, as well as the reconstructed images of the AB Aur observations. With the 4-beams combiner, the general structures of the object starts to appear although many artifacts remain in the image. A 6-beams combiner offers a fairly good  $(u, v)$  coverage, very similar to the one obtained with seven nights of AMBER. Such kind of recombiner is therefore very suitable for interferometric snapshot imaging.

## 6. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

We have proposed in this paper a simple model of YSOs that takes into account the presence of an inner rim because of dust sublimation. From this model, we have simulated observations with AMBER, the three beams combiner of the VLTI and we have performed images reconstruction with both CLEAN and MIRA algorithms. It results that:

- MIRA is able to reconstruct identifiable images of Herbig Ae/Be stars and that with this technique, the requirements in terms of SNR of the visibilities can be relaxed
- Tauri stars and FU Orionis stars are at the limit of the ultimate resolution of the VLTI, hence making the image reconstruction very difficult, nay irrelevant
- The  $(u, v)$  coverage is a key point. 3 full nights of observations with AMBER appear to be the lower limit. However, the next generation of recombiners of the VLTI, that will offer up to 8 simultaneous beam recombination, will allow to perform one night snapshot imaging

This present analysis of the image reconstruction issue with optical interferometers needs to be carried on with more complex objects presenting closure phase informations. Moreover, one must study how to integrate spectral *a priori* in the reconstruction process in order to fully make use of the spectral coverage of AMBER, in the *J*, *H*, and *K* band at the same time.

#### REFERENCES

1. L. Hartmann, S. J. Kenyon, and N. Calvet, "The excess infrared emission of Herbig Ae/Be stars - Disks or envelopes?," *APJ* **407**, pp. 219–231, Apr. 1993.
2. R. Millan-Gabet, F. P. Schloerb, and W. A. Traub, "Spatially Resolved Circumstellar Structure of Herbig AE/BE Stars in the Near-Infrared," *APJ* **546**, pp. 358–381, Jan. 2001.
3. J. D. Monnier and R. Millan-Gabet, "On the Interferometric Sizes of Young Stellar Objects," *APJ* **579**, pp. 694–698, Nov. 2002.
4. C. P. Dullemond, C. Dominik, and A. Natta, "Passive Irradiated Circumstellar Disks with an Inner Hole," *APJ* **560**, pp. 957–969, Oct. 2001.
5. F. Malbet and C. Bertout, "Detecting T Tauri disks with optical long-baseline interferometry," *A&AS* **113**, pp. 369–+, Oct. 1995.
6. J. A. Högbom, "Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometer Baselines," *A&AS* **15**, pp. 417–+, June 1974.
7. E. Thiébaud, P. J. V. Garcia, and R. Foy, "Imaging with Amber/VLTI: the case of microjets," *APSS* **286**, pp. 171–176, 2003.
8. J. Muzerolle, N. Calvet, L. Hartmann, and P. D'Alessio, "Unveiling the Inner Disk Structure of T Tauri Stars," *APJL* **597**, pp. L149–L152, Nov. 2003.
9. M. Colavita, R. Akeson, P. Wizinowich, M. Shao, S. Acton, J. Beletic, J. Bell, J. Berlin, A. Boden, A. Booth, R. Boutell, F. Chaffee, D. Chan, J. Chock, R. Cohen, S. Crawford, M. Creech-Eakman, G. Eychaner, C. Felizardo, J. Gathright, G. Hardy, H. Henderson, J. Herstein, M. Hess, E. Hovland, M. Hrynevych, R. Johnson, J. Kelley, R. Kendrick, C. Koresko, P. Kurpis, D. Le Mignant, H. Lewis, E. Ligon, W. Lupton, D. McBride, B. Mennesson, R. Millan-Gabet, J. Monnier, J. Moore, C. Nance, C. Neyman, A. Niessner, D. Palmer, L. Reder, A. Rudeen, T. Saloga, A. Sargent, E. Serabyn, R. Smythe, P. Stomski, K. Summers, M. Swain, P. Swanson, R. Thompson, K. Tsubota, A. Tumminello, G. van Belle, G. Vasisht, J. Vause, J. Walker, K. Wallace, and U. Wehmeier, "Observations of DG Tauri with the Keck Interferometer," *APJL* **592**, pp. L83–L86, Aug. 2003.
10. F. C. Adams, F. H. Shu, and C. J. Lada, "The disks of T Tauri stars with flat infrared spectra," *APJ* **326**, pp. 865–883, Mar. 1988.
11. R. Lachaume, "On marginally resolved objects in optical interferometry," *A&A* **400**, pp. 795–803, Mar. 2003.
12. P. Y. Kern, F. Malbet, J. Berger, P. Haguenaer, I. Schanen-Duport, P. Labeye, K. Perraut-Rousselet, B. Arezki, A. Delboulbé, L. Jocou, C. Perrier-Bellet, W. A. Traub, R. Millan-Gabet, J. D. Monnier, E. Pedretti, A. Glindemann, P. Kervella, E. di Folco, and P. B. Gitton, "Increasing the imaging capabilities of the VLTI using integrated optics," in *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub. Proceedings of the SPIE, Volume 4838, pp. 312-320 (2003).*, pp. 312–320, Feb. 2003.



## Chapitre 6

# Conclusion

Le sujet de ma thèse s'inscrit dans le cadre de l'observation interférométrique et de l'imagerie d'objets jeunes. Concrètement, mon travail de recherche s'est organisé autour du recombineur AMBER. La mise en service prochaine de cet instrument permettra à n'en pas douter de franchir un nouveau cap dans les domaines de l'interférométrie optique longue base et de la formation stellaire. En effet, en termes de précision et de sensibilité, de résolution spatiale et spectrale, et de potentiel imageur, la communauté aura bientôt à sa disposition un outil aux performances uniques. Je reprends ici les principaux résultats développés au cours de cette thèse et j'essaie d'identifier les perspectives de ce travail.

### 6.1 Théorie de l'interférométrie monomode

L'enjeu scientifique de départ était simple: comprendre le signal que l'on obtient à partir d'un interféromètre monomode. Ainsi, introduisant l'équation interférométrique *fibrée*, j'ai analysé l'apport du filtrage spatial sur les mesures interférométriques. En me basant sur l'estimateur quadratique de visibilité, j'ai montré qu'en présence de correction par Optique Adaptative, même faible, les fibres permettaient de s'affranchir de la quasi-totalité du bruit de "speckle", responsable de la saturation du rapport signal à bruit à fort flux en interférométrie multimode. J'ai aussi mis en avant le gain en robustesse obtenu avec un tel estimateur. Grâce à ce travail de formalisation, j'ai pu aussi mettre en évidence un point souvent négligé mais qui peut être crucial pour la compréhension et l'analyse astrophysique des données: *la visibilité mesurée à partir d'interféromètres munis de guides d'onde (aussi appelée visibilité modale) n'est pas la visibilité de l'objet*. En d'autres termes la visibilité modale est biaisée, et ce d'autant plus que la source est étendue. Il résulte de cette analyse que l'interférométrie monomode est parfaitement adapté à l'observation d'objets *compacts* mais est en revanche plus problématique lorsque la source est étendue, non seulement à cause du biais introduit mais aussi à cause du champ de vue limité. Ces constatations m'ont fait prendre conscience que l'interférométrie monomode est en de nombreux points (sur le plan formel, et non pas technologique) analogue à l'interférométrie radio. Il est ainsi possible, via une estimation linéaire de la visibilité, de se retrouver dans un cadre théorique identique à celui de l'interférométrie radio. Fort de ce nouvel

estimateur, la technique classique de mosaicing constitue une solution efficace permettant de faire l'imagerie grand champ avec un interféromètre fibré, tel AMBER sur le VLTI.

Cette étude peut être aussi utilisée et poursuivie pour la conception des prochains instruments imageurs du VLTI comme VITRUV, recombineur en optique intégré 4 et 8 télescopes. Elle propose notamment une base théorique sur laquelle on pourra s'appuyer pour développer un concept de recombineur monomode, pour y associer un schéma de réduction de données optimisé et prenant en compte la possibilité d'observer des sources étendues.

## 6.2 L'instrument AMBER

Ma contribution à l'instrument AMBER consistait à développer, analyser et valider les procédures de réduction de données fournissant *in fine* des visibilité débaisées. De par la nature spécifique de ce recombineur, le traitement du signal AMBER n'est pas basé sur les algorithmes classiques utilisés en interférométrie optique. Ainsi, le schéma de réduction de données AMBER nécessite deux étapes:

- La caractérisation complète de l'instrument. Cette étape fait naître le concept de P2VM (Pixel To Visibility Matrix) qui décrit la relation linéaire existant entre les interférogrammes (i.e les mesures) et le flux cohérent (i.e la source d'intérêt)
- La réduction de données basée sur la connaissance de la P2VM, l'estimation de la visibilité étant faite dans le plan image. On peut voir cet algorithme comme un estimateur de type ABCD généralisé ou bien encore comme un opérateur de transformée de Fourier optimisé.

Suivre ces procédures permet ainsi de répondre aux impératifs suivants (i) trouver une alternative à l'estimateur de Fourier, ce dernier étant inutilisable à 3 télescopes, la reconfiguration des pupilles de sortie choisie empêchant de séparer les pics interférométriques et (ii) fournir des algorithmes optimisés basés sur la connaissance de la réponse de l'instrument. En contrepartie, ce parti pris impose des contraintes drastiques sur la qualité de la calibration de l'instrument, ainsi que sur la stabilité de ce dernier.

Cependant, si le formalisme du traitement du signal AMBER semble bien établi en théorie, il reste à fournir un énorme travail en ce qui concerne la compréhension et la maîtrise des données réelles. Le premier "commissioning" a déjà mis en évidence les problèmes de stabilité de l'instrument et ses conséquences sur la validité des visibilité estimées. De plus, si cette procédure permet en théorie de séparer la visibilité instrumentale de la visibilité atmosphérique, il sera impossible de produire des données calibrées fiables tant que toutes les sources potentielles de pertes de contraste (hors recombineur) ne seront pas identifiées. Enfin, si beaucoup d'efforts ont été portés sur l'estimation de la visibilité, il reste à étudier en profondeur les estimateurs de clôture de phase et de phase différentielle, à déterminer leurs biais éventuels et à caractériser leur robustesse.

### 6.3 Imagerie interférométrique d'étoiles jeunes

L'observation de MWC 297 nous a donné un avant-goût du genre de mesures interférométriques auxquelles nous allons être confronté, mais aussi du genre d'image que ce type d'objets pourra nous offrir. Ainsi, anticipant les premières observations avec AMBER, j'ai commencé à étudier sa capacité à imager l'environnement circumstellaire des étoiles jeunes, à partir de modèles simples prenant en compte la présence d'un anneau de poussière et un disque d'accrétion. Il apparaît que la reconstruction d'image de tels objets avec AMBER ne sera pas chose aisée, et ce pour plusieurs raisons: la résolution malgré tout limitée du VLTI qui empêche dans le cas des étoiles T Tauri d'imager le bord interne du disque, la dynamique très importante entre l'anneau et le disque incompatible avec la dynamique limitée des algorithmes de reconstruction existants, et enfin la couverture insuffisante du plan  $(u, v)$  lors de campagnes réduites à un ou deux jours d'observations.

Cette étude n'en est qu'à ses premiers pas et nécessite d'être poursuivie, notamment pour analyser l'apport de la clôture de phase dans le processus de reconstruction de sources asymétriques. Un travail d'analyse considérable reste aussi à effectuer en ce qui concerne l'interprétation des images reconstruites, afin de pouvoir discriminer entre les informations physiques provenant réellement de l'objet et des artefacts et biais introduit par l'algorithme de reconstruction.

### 6.4 Et maintenant?

Ce travail de thèse a contribué à la mise en place effective d'un instrument au potentiel unique. Bien qu'AMBER saura épancher notre soif de connaissance dans de nombreux domaines de l'astronomie, il me semble que cet instrument est particulièrement bien adapté à l'observation des étoiles jeunes et de leur environnement. En effet la sensibilité offerte par les télescopes du VLTI permet d'envisager l'observation d'un nombre considérable de telles sources. La suite naturelle de ce travail consiste donc à observer un échantillon conséquent d'étoiles jeunes, de manière systématique et intensive. En plus d'acquérir une expérience certaine sur la façon de traiter et d'interpréter les mesures interférométriques de tels objets, le fait de pouvoir mener conjointement des observations à très haute résolution spatiale et spectrale va apporter des contraintes essentielles sur la nature de leur environnement proche, permettant de comprendre nombre de processus physiques survenant à l'échelle de l'unité astronomique, telles que les interactions entre le phénomène d'accrétion dans le disque et celui d'éjection dans les jets, ou bien encore les mécanismes de formation stellaire et planétaire. L'obtention des premières images interférométriques grâce à l'information de clôture de phase associée à une utilisation optimale de la couverture  $(u, v)$  du VLTI, constituera alors la cerise sur un gâteau déjà fort appétissant...



# Bibliographie

- ADAMS, F. C. , LADA, C. J. ET SHU, F. H. 1987, Spectral evolution of young stellar objects, *ApJ* **312**, 788.
- ANDRE, P. , WARD-THOMPSON, D. ET BARSONY, M. 2000, From Prestellar Cores to Protostars: the Initial Conditions of Star Formation, *Protostars and Planets IV* pp. 59–+.
- BALDWIN, J. E. , HANIFF, C. A. , MACKAY, C. D. ET WARNER, P. J. 1986, Closure phase in high-resolution optical imaging, *Nature* **320**, 595.
- BECKMANN, U. , ANTONELLI, P. ET PETROV, R. 2003, AMBER Detector Test Report, Vlt-tre-amb-15830-3010, Amber Consortium.
- BECKWITH, S. V. W. , HENNING, T. ET NAKAGAWA, Y. 2000, Dust Properties and Assembly of Large Particles in Protoplanetary Disks, *Protostars and Planets IV* pp. 533–+.
- BERGER, J. P. , HAGUENAUER, P. , KERN, P. , PERRAUT, K. *et al.* 2001, Integrated optics for astronomical interferometry. IV. First measurements of stars, *A&A* **376**, L31.
- BERIO, P. , MOURARD, D. , BONNEAU, D. , CHESNEAU, O. *et al.* 1999, Spectrally resolved Michelson stellar interferometry. I. Exact formalism in the multispeckle mode, *Optical Society of America Journal* **16**, 872.
- BERIO, P. , MOURARD, D. , PIERRON, M. ET CHELLI, A. 2001, Spectrally resolved Michelson interferometry. II. Noise analysis, *Optical Society of America Journal* **18**, 614.
- BERRILLI, F. , CORCIULO, G. , INGROSSO, G. , LORENZETTI, D. *et al.* 1992, Infrared emission from dust structures surrounding Herbig Ae/Be stars, *ApJ* **398**, 254.
- BERTOUT, C. , BASRI, G. ET BOUVIER, J. 1988, Accretion disks around T Tauri stars, *ApJ* **330**, 350.
- BORN, M. ET WOLF, E. 1980, *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, Oxford: Pergamon Press, 1980, 6th corrected ed.
- BURROWS, C. J. , STAPELFELDT, K. R. , WATSON, A. M. , KRIST, J. E. *et al.* 1996, Hubble Space Telescope Observations of the Disk and Jet of HH 30, *ApJ* **473**, 437.

- CAGIGAL, M. P. ET CANALES, V. F. 2000, Generalized Fried parameter after adaptive optics partial wave-front compensation, *Optical Society of America Journal* **17**, 903.
- CHELLI, A. 1989, The phase problem in optical interferometry - Error analysis in the presence of photon noise, *A&A* **225**, 277.
- CHELLI, A. 2000a, AMBER DATA PROCESSING: II. Visibility, Differential Phase and Closure Phase Estimators in the Image Space, Tech. report amber-igr-018, Amber Consortium.
- CHELLI, A. 2000b, Optimizing Doppler estimates for extrasolar planet detection. I. A specific algorithm for shifted spectra, *A&A* **358**, L59.
- CHELLI, A. ET MARIOTTI, J. M. 1986, Visibility and phase analysis for image and pupil plane interferometry at optical wavelengths, *A&A* **157**, 372.
- CHELLI, A. ET PETROV, R. G. 1995a, Model fitting and error analysis for differential interferometry. I. General formalism., *A&AS* **109**, 389.
- CHELLI, A. ET PETROV, R. G. 1995b, Model fitting and error analysis for differential interferometry. II. Application to rotating stars and binary systems., *A&AS* **109**, 401.
- CHIANG, E. I. ET GOLDREICH, P. 1997, Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars with Passive Circumstellar Disks, *ApJ* **490**, 368.
- COLAVITA, M. M. 1985, *Ph.D. Thesis* .
- COLAVITA, M. M. 1999a, Fringe Visibility Estimators for the Palomar Testbed Interferometer, *PASP* **111**, 111.
- COLAVITA, M. M. 1999b, Fringe Visibility Estimators for the Palomar Testbed Interferometer, *PASP* **111**, 111.
- COLAVITA, M. M. , BODEN, A. F. , CRAWFORD, S. L. , MEINEL, A. B. *et al.* 1998, Keck Interferometer, dans *Proc. SPIE Vol. 3350, p. 776-784, Astronomical Interferometry, Robert D. Reasenberg; Ed.*, pp. 776–784.
- COLAVITA, M. M. , WALLACE, J. K. , HINES, B. E. , GURSEL, Y. *et al.* 1999, The Palomar Testbed Interferometer, *ApJ* **510**, 505.
- CONAN, J.-M. 1994, Étude de la correction partielle en optique adaptative, *Ph.D. Thesis* .
- CONNES, P. , FROEHLY, C. ET FACQ, P. 1985, A fiber-linked version of project TRIO, dans *ESA SP-226: Kilometric Optical Arrays in Space*, pp. 49–61.
- CONNES, P. , SHAKLAN, S. ET RODDIER, F. 1987, A Fiber-Linked Groundbased Array, dans *Interferometric Imaging in Astronomy*, pp. 165–+.
- CORNWELL, T. J. 1988, Radio-interferometric imaging of very large objects, *A&A* **202**, 316.

- COUDÉ DU FORESTO, V. 1997, Fringe benefits: the spatial filtering advantages of single-mode fibers, dans *Integrated Optics for Astronomical Interferometry*, pp. 27–+.
- COUDÉ DU FORESTO, V. , FAUCHERRE, M. , HUBIN, N. ET GITTON, P. 2000, Using single-mode fibers to monitor fast Strehl ratio fluctuations. Application to a 3.6 m telescope corrected by adaptive optics, *A&AS* **145**, 305.
- COUDE DU FORESTO, V. , MAZE, G. ET RIDGWAY, S. 1993, Stellar Interferometry with Infrared Single-Mode Fibers, dans *ASP Conf. Ser. 37: Fiber Optics in Astronomy II*, pp. 285–+.
- COUDE DU FORESTO, V. , RIDGWAY, S. ET MARIOTTI, J.-M. 1997, Deriving object visibilities from interferograms obtained with a fiber stellar interferometer, *A&AS* **121**, 379.
- DARTOIS, E. , DUTREY, A. ET GUILLOTEAU, S. 2003, Structure of the DM Tau Outer Disk: Probing the vertical kinetic temperature gradient, *A&A* **399**, 773.
- DELAGE, L. ET REYNAUD, F. 1997, *Analysis of polarisation requirements in a fiber-linked stellar interferometer*, pp. 37–+, *Integrated Optics for Astronomical Interferometry*.
- DELAGE, L. , REYNAUD, F. ET LANNES, A. 2000, Laboratory Imaging Stellar Interferometer with Fiber Links, *Appl. Opt.* **39**, 6406.
- DELAGE, L. , REYNAUD, F. ET THIÉBAUT, E. 1999, Imaging laboratory tests on a fiber linked telescope array, *Optics Communications* **160**, 27.
- DOMICIANO DE SOUZA, A. , ZOREC, J. , JANKOV, S. , VAKILI, F. *et al.* 2004, Stellar differential rotation and inclination angle from spectro-interferometry, *A&A* **418**, 781.
- DULLEMOND, C. P. , DOMINIK, C. ET NATTA, A. 2001, Passive Irradiated Circumstellar Disks with an Inner Hole, *APJ* **560**, 957.
- DUTREY, A. , GUILLOTEAU, S. ET SIMON, M. 1994, Images of the GG Tauri rotating ring, *A&A* **286**, 149.
- DYER, S. D. ET CHRISTENSEN, D. A. 1999, Pupil-size effects in fiber optic stellar interferometry, *Optical Society of America Journal* **16**, 2275.
- EISNER, J. A. , LANE, B. F. , HILLENBRAND, L. A. , AKESON, R. L. *et al.* 2004, Resolved inner disks around Herbig Ae/Be Stars, *ApJ* **613**, 1049.
- FERREIRA, J. 1997, Magnetically-driven jets from Keplerian accretion discs., *A&A* **319**, 340.
- FRIED, D. L. 1966a, Limiting Resolution Looking Down Through the Atmosphere, *Optical Society of America Journal* **56**, 1380.

- FRIED, D. L. 1966b, Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures, *Optical Society of America Journal* **56**, 1372.
- FROEHLI, C. 1982, Coherence and Interferometry Through Optical Fibers, dans *Scientific Importance of High Angular Resolution at Infrared and Optical Wavelengths*, pp. 285–+.
- GAI, M. , CORCIONE, L. , DELATGE, L. , GARDIOL, D. *et al.* 2002, The FINITO Fringe Sensor for VLTI, dans *Beyond conventional adaptive optics: a conference devoted to the development of adaptive optics for extremely large telescopes. Proceedings of the Topical Meeting held May 7-10, 2001, Venice, Italy. Edited by E. Vernet, R. Ragazzoni, S. Esposito, and N. Hubin. Garching, Germany: European Southern Observatory, 2002 ESO Conference and Workshop Proceedings, Vol. 58, ISBN 3923524617, p. 329*, pp. 329–+.
- GLINDEMANN, A. , ABUTER, R. , CARBOGNANI, F. , DELPLANCKE, F. *et al.* 2000, The VLT Interferometer: a unique instrument for high-resolution astronomy, dans *Proc. SPIE Vol. 4006, p. 2-12, Interferometry in Optical Astronomy, Pierre J. Lena; Andreas Quirrenbach; Eds.*, pp. 2–12.
- GOODMAN, J. W. 1985, *Statistical optics*, New York: Wiley, 1985.
- GUETH, F. 2001, Mozaicing, dans *IRAM Millimeter Interferometry Summer School, Volume 2*, pp. 207–218.
- GUILLOTEAU, S. 2001, Millimetre Interferometers, dans *IRAM Millimeter Interferometry Summer School, Volume 2*, pp. 15–24.
- GUILLOTEAU, S. ET DUTREY, A. 1998, Physical parameters of the Keplerian protoplanetary disk of DM Tauri, *A&A* **339**, 467.
- GUYON, O. 2002, Wide field interferometric imaging with single-mode fibers, *A&A* **387**, 366.
- HÖGBOM, J. A. 1974, Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometer Baselines, *A&AS* **15**, 417.
- HARTMANN, L. ET KENYON, S. J. 1987, Further evidence for disk accretion in FU Orionis objects, *ApJ* **312**, 243.
- HARTMANN, L. ET KENYON, S. J. 1996, The FU Orionis Phenomenon, *ARA&A* **34**, 207.
- HARTMANN, L. , KENYON, S. J. ET CALVET, N. 1993, The excess infrared emission of Herbig Ae/Be stars - Disks or envelopes?, *ApJ* **407**, 219.
- HERBIG, G. H. 1960, The Spectra of Be- and Ae-TYPE Stars Associated with Nebulosity, *ApJS* **4**, 337.
- HERBIG, G. H. 1962, The properties and problems of T Tauri stars and related objects., *Advances in Astronomy and Astrophysics* **1**, 47.

- HILLENBRAND, L. A. , STROM, S. E. , VRBA, F. J. ET KEENE, J. 1992, Herbig Ae/Be stars - Intermediate-mass stars surrounded by massive circumstellar accretion disks, *ApJ* **397**, 613.
- JAFFE, W. , MEISENHEIMER, K. , RÖTTGERING, H. J. A. , LEINERT, C. *et al.* 2004, The central dusty torus in the active nucleus of NGC 1068, *Nature* **429**, 47.
- JOY, A. H. 1945, T Tauri Variable Stars., *ApJ* **102**, 168.
- KERN, P. Y. , BERGER, J. , HAGUENAUER, P. , MALBET, F. *et al.* 2000, Planar integrated optics contribution to instrumentation for interferometry, dans *Proc. SPIE Vol. 4006, p. 974-985, Interferometry in Optical Astronomy, Pierre J. Lena; Andreas Quirrenbach; Eds.*, pp. 974–985.
- KERN, P. Y. , MALBET, F. , BERGER, J. , HAGUENAUER, P. *et al.* 2003, Increasing the imaging capabilities of the VLTI using integrated optics, dans *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub. Proceedings of the SPIE, Volume 4838, pp. 312-320 (2003).*, pp. 312–320.
- KERVELLA, P. 2002, Overview of tip-tilt and OPD vibrations observed on UTs with VINCI, Memo, European Southern Observatory.
- KERVELLA, P. , GITTON, P. B. , SEGRANSAN, D. , DI FOLCO, E. *et al.* 2003, VINCI, the VLTI commissioning instrument: status after one year of operations at Paranal, dans *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub . Proceedings of the SPIE, Volume 4838, pp. 858-869 (2003).*, pp. 858–869.
- KERVELLA, P. , NARDETTO, N. , BERSIER, D. , MOURARD, D. *et al.* 2004, Cepheid distances from infrared long-baseline interferometry. I. VINCI/VLTI observations of seven Galactic Cepheids, *A&A* **416**, 941.
- KOLMOGOROV, A. N. 1941, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers, dans *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., Volume 30*, pp. 301–305.
- KORFF, D. 1973, Analysis of a Method for Obtaining Near Diffraction Limited Information in the Presence of Atmospheric Turbulence, *Optical Society of America Journal* **63**, 971.
- KWAN, J. ET TADEMARU, E. 1995, Disk Winds from T Tauri Stars, *ApJ* **454**, 382.
- LABEYRIE, A. 1970, Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images, *A&A* **6**, 85.
- LABEYRIE, A. 1975, Interference fringes obtained on VEGA with two optical telescopes, *ApJ* **196**, L71.

- LABEYRIE, A. 1995, Images of exo-planets obtainable from dark speckles in adaptive telescopes., *A&A* **298**, 544.
- LABEYRIE, A. 1996, Resolved imaging of extra-solar planets with future 10-100km optical interferometric arrays., *A&AS* **118**, 517.
- LACHAUME, R. 2003, On marginally resolved objects in optical interferometry, *A&A* **400**, 795.
- LACHAUME, R. , MALBET, F. ET MONIN, J.-L. 2003, The vertical structure of T Tauri accretion discs. III. Consistent interpretation of spectra and visibilities with a two-layer model, *A&A* **400**, 185.
- LADA, C. J. ET WILKING, B. A. 1984, The nature of the embedded population in the Rho Ophiuchi dark cloud - Mid-infrared observations, *ApJ* **287**, 610.
- LAGARDE, D. 1994, Traitement des données et premiers résultats expérimentaux en Interférométrie Différentielle des Tavelures, *Ph.D. Thesis* .
- LAGARDE, S. , ROBE, S. , PUGET, P. ET PETROV, R. 2001, AMBER Instrumental Final Design, Vlt-tre-amb-15830-0001, Amber Consortium.
- LE COÄRER, E. ET DUVERT, G. 2001, AMBER Software Functional Specification, Vlt-spe-amb-15830-6002, Amber Consortium.
- LONGUETEAU, E. 2002, Synthèse d'ouverture à trois télescopes: Étude et caractérisation des sources d'erreurs sur les données interférométriques, *Ph.D. Thesis* .
- LOPEZ, B. , PETROV, R. G. ET VANNIER, M. 2000, Direct detection of hot extrasolar planets with the VLTI using differential interferometry, dans *Proc. SPIE Vol. 4006, p. 407-411, Interferometry in Optical Astronomy, Pierre J. Lena; Andreas Quirrenbach; Eds.*, pp. 407-411.
- MAHÉ, F. 2000, Application d'un modèle atmosphérique à l'étude des fluctuations d'indice de réfraction dans la couche limite. Influence de la scintillation sur l'analyse de surface d'onde., *Ph.D. Thesis* .
- MALBET, F. 2001, Introduction to Optical/Near-Infrared Interferometry, dans *IRAM Kilometer Interferometry Summer School, Volume 2*, pp. 41-60.
- MALBET, F. 2003, Probing the close environment of young stellar objects with interferometry, *Ap&SS* **286**, 131.
- MALBET, F. , BERGER, J.-P. , COLAVITA, M. M. , KORESKO, C. D. *et al.* 1998, FU Orionis Resolved by Infrared Long-Baseline Interferometry at a 2 AU Scale, *ApJ* **507**, L149.

- MALBET, F. ET BERTOUT, C. 1995, Detecting T Tauri disks with optical long-baseline interferometry., *A&AS* **113**, 369.
- MALBET, F. , BLOECKER, T. , FOY, R. , FRAIX-BURNET, D. *et al.* 2003, Astrophysical potential of the AMBER/VLTI instrument, dans *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub . Proceedings of the SPIE, Volume 4838, pp. 917-923 (2003).*, pp. 917–923.
- MALBET, F. , CHELLI, A. ET PETROV, R. G. 2000, AMBER performances: signal-to-noise ratio analysis, dans *Proc. SPIE Vol. 4006, p. 233-242, Interferometry in Optical Astronomy, Pierre J. Lena; Andreas Quirrenbach; Eds.*, pp. 233–242.
- MALBET, F. , KERN, P. , SCHANEN-DUPOURT, I. , BERGER, J.-P. *et al.* 1999, Integrated optics for astronomical interferometry. I. Concept and astronomical applications, *A&AS* **138**, 135.
- MARTIN, F. , CONAN, R. , TOKOVININ, A. , ZIAD, A. *et al.* 2000, Optical parameters relevant for High Angular Resolution at Paranal from GSM instrument and surface layer contribution, *A&AS* **144**, 39.
- MÈGE, P. 2003, Interférométrie avec des guides d'ondes optiques. Théorie et applications, *Ph.D. Thesis* .
- MÈGE, P. , MALBET, F. ET CHELLI, A. 2000, Spatial filtering in AMBER, dans *Proc. SPIE Vol. 4006, p. 299-307, Interferometry in Optical Astronomy, Pierre J. Lena; Andreas Quirrenbach; Eds.*, pp. 299–307.
- MÈGE, P. , MALBET, F. ET CHELLI, A. 2001, Stellar Interferometry with optical waveguides, dans *SF2A-2001: Semaine de l'Astrophysique Française*, pp. 581–+.
- MÈGE, P. , MALBET, F. ET CHELLI, A. 2003, Interferometry with single mode waveguide, dans *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub. Proceedings of the SPIE, Volume 4838, pp. 329-337 (2003).*, pp. 329–337.
- MILLAN-GABET, R. , SCHLOERB, F. P. ET TRAUB, W. A. 2001a, Spatially Resolved Circumstellar Structure of Herbig AE/BE Stars in the Near-Infrared, *ApJ* **546**, 358.
- MILLAN-GABET, R. , SCHLOERB, F. P. ET TRAUB, W. A. 2001b, Spatially Resolved Circumstellar Structure of Herbig AE/BE Stars in the Near-Infrared, *ApJ* **546**, 358.
- MILLAN-GABET, R. , SCHLOERB, F. P. , TRAUB, W. A. , MALBET, F. *et al.* 1999, Sub-Astronomical Unit Structure of the Near-Infrared Emission from AB Aurigae, *ApJ* **513**, L131.
- MILLAN-GABET, R. S. , SCHLOERB, F. P. ET TRAUB, W. A. 1998, High Angular Resolution Observations of Herbig AeBe Stars with the Infrared Optical Telescope Array, *Bulletin of the American Astronomical Society* **30**, 1361.

- MONNIER, J. D. 2000, An Introduction to Closure Phases, dans *Principles of Long Baseline Stellar Interferometry*, pp. 203–+.
- MONNIER, J. D. 2003, Optical interferometry in astronomy, *Reports of Progress in Physics* **66**, 789.
- MONNIER, J. D. ET MILLAN-GABET, R. 2002, On the Interferometric Sizes of Young Stellar Objects, *ApJ* **579**, 694.
- MOURARD, D. , TALLON-BOSC, I. , RIGAL, F. , VAKILI, F. *et al.* 1994, Estimation of visibility amplitude by optical long-baseline Michelson interferometry with large apertures, *A&A* **288**, 675.
- NATTA, A. , PRUSTI, T. , NERI, R. , WOODEN, D. *et al.* 2001, A reconsideration of disk properties in Herbig Ae stars, *A&A* **371**, 186.
- NOLL, R. J. 1976, Zernike polynomials and atmospheric turbulence, *Optical Society of America Journal* **66**, 207.
- PAPOULIS, A. 1984, *Probability, random variables and stochastic processes*, New York: McGraw-Hill, 1984, 2nd ed.
- PERRIN, G. 2003, Subtracting the photon noise bias from single-mode optical interferometer visibilities, *A&A* **398**, 385.
- PETROV, R. G. , MALBET, F. , WEIGELT, G. , LISI, F. *et al.* 2003, Using the near infrared VLTI instrument AMBER, dans *Interferometry for Optical Astronomy II. Edited by Wesley A. Traub . Proceedings of the SPIE, Volume 4838, pp. 924-933 (2003).*, pp. 924–933.
- PINTE, C. , MENARD, F. , DUCHENE, G. , AUGEREAU, J. C. *et al.* 2004, On the Estimation of Grain Size Distributions in Protoplanetary Disks, dans *SF2A-2004: Semaine de l'Astrophysique Francaise, meeting held in Paris, France, June 14-18, 2004, Eds.: F. Combes, D. Barret, T. Contini, F. Meynadier and L. Paganì EdP-Sciences, Conference Series, p.323.*
- POECKERT, R. ET MARLBOROUGH, J. M. 1978, A model for Gamma Cassiopeiae, *ApJ* **220**, 940.
- PREIS, O. , PICHON, L. , DELBOULBÉ, A. , KERN, P. *et al.* 2004, Three-dimensional micropositioning device for optical fiber guided by a piezoelectric tube, dans *Proc. SPIE, New Frontiers in Stellar Interferometry.*
- PRESS, W. H. , TEUKOLSKY, S. A. , VETTERLING, W. T. ET FLANNERY, B. P. 1992, *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*, Cambridge: University Press, |c1992, 2nd ed.

- QUIRRENBACH, A. , BJORKMAN, K. S. , BJORKMAN, J. E. , HUMMEL, C. A. *et al.* 1997, Constraints on the Geometry of Circumstellar Envelopes: Optical Interferometric and Spectropolarimetric Observations of Seven Be Stars, *ApJ* **479**, 477.
- READHEAD, A. C. S. ET WILKINSON, P. N. 1978, The mapping of compact radio sources from VLBI data, *ApJ* **223**, 25.
- REYNAUD, F. , ALLEMAN, J. J. ET CONNES, P. 1992, Interferometric control of fiber lengths for a coherent telescope array, *Appl. Opt.* **31**, 3736.
- RODDIER, F. 1981, The Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy, *Prog. Optics, Volume 19, p. 281-376* **19**, 281.
- RODDIER, F. 1986, Triple correlation as a phase closure technique, *Optics Communications* **60**, 145.
- RODDIER, F. 1989, Optical Propagation and Image Formation Through the Turbulent Atmosphere, dans *NATO ASIC Proc. 274: Diffraction-Limited Imaging with Very Large Telescopes*, pp. 33–+.
- RODDIER, F. ET LENA, P. 1984, Long-baseline Michelson interferometry with large ground-based telescopes operating at optical wavelengths. I - General formalism: Interferometry at visible wavelengths, *Journal of Optics* **15**, 171.
- RODDIER, F. , RODDIER, C. , PETROV, R. , MARTIN, F. *et al.* 1986, New observations of Alpha Orionis with a rotation shearing interferometer, *ApJ* **305**, L77.
- ROUSSET, G. , FONTANELLA, J. C. , KERN, P. , GIGAN, P. *et al.* 1990, First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics, *A&A* **230**, L29.
- RUILIER, C. 1998, A study of degraded light coupling into single-mode fibers, dans *Proc. SPIE Vol. 3350, p. 319-329, Astronomical Interferometry, Robert D. Reasenberg; Ed.*, pp. 319–329.
- RUILIER, C. , CONAN, J. ET ROUSSET, G. 1997, Visibility SNR for a single-mode fiber stellar interferometer, dans *Integrated Optics for Astronomical Interferometry*, pp. 261–+.
- RYDGREN, A. E. , STROM, S. E. ET STROM, K. M. 1976, The nature of the objects of Joy - A study of the T Tauri phenomenon, *ApJS* **30**, 307.
- SEGRANSAN, D. 2002, Direct detection of hot Jupiters with differential closure phase, dans *SF2A-2002: Semaine de l'Astrophysique Francaise*.
- SHAKLAN, S. 1988, A long-baseline interferometer employing single-mode fiber optics, dans *ASP Conf. Ser. 3: Fiber Optics in Astronomy*, pp. 262–268.

- SHAKLAN, S. ET RODDIER, F. 1988, Coupling starlight into single-mode fiber optics, *Appl. Opt.* **27**, 2334.
- SHAKLAN, S. B. ET RODDIER, F. 1987, Single-mode fiber optics in a long-baseline interferometer, *Appl. Opt.* **26**, 2159.
- SHU, F. H. , NAJITA, J. , OSTRIKER, E. C. ET SHANG, H. 1995, Magnetocentrifugally Driven Flows from Young Stars and Disks. V. Asymptotic Collimation into Jets, *ApJ* **455**, L155+.
- STAPELFELDT, K. R. , KRIST, J. E. , MENARD, F. , BOUVIER, J. *et al.* 1998, An Edge-On Circumstellar Disk in the Young Binary System HK Tauri, *ApJ* **502**, L65+.
- STEE, P. , DE ARAUJO, F. X. , VAKILI, F. , MOURARD, D. *et al.* 1995,  $\gamma$  Cassiopeiae revisited by spectrally resolved interferometry., *A&A* **300**, 219.
- SUBRAHMANYAN, R. 2004, Radio interferometers with wide bandwidths, *MNRAS* **348**, 1208.
- SWAIN, M. , VASISHT, G. , AKESON, R. , MONNIER, J. *et al.* 2003, Interferometer Observations of Subparsec-Scale Infrared Emission in the Nucleus of NGC 4151, *ApJ* **596**, L163.
- TALLON, M. ET TALLON-BOSC, I. 1992, The object-image relationship in Michelson stellar interferometry, *A&A* **253**, 641.
- TATULLI, E. , MÈGE, P. ET CHELLI, A. 2004, Single-mode versus multimode interferometry: A performance study, *A&A* **418**, 1179.
- TATULLI, E. , MÈGE, P. , CHELLI, A. ET MALBET, F. 2002, SNR on visibilities for fibered interferometers, dans *SF2A-2002: Semaine de l'Astrophysique Française*, pp. 233+.
- THIÉBAUT, E. , GARCIA, P. J. V. ET FOY, R. 2003a, Imaging with Amber/VLTI: the case of microjets, *Ap&SS* **286**, 171.
- THIÉBAUT, E. , GARCIA, P. J. V. ET FOY, R. 2003b, Imaging with Amber/VLTI: the case of microjets, *Ap&SS* **286**, 171.
- THIÉBAUT, E. 1994, Imagerie astrophysique à la limite de diffraction des grands télescopes. Application à l'observation des objets froids, *Ph.D. Thesis* .
- VANNIER, M. 2003, Interférométrie et astrométrie différentielles chromatiques et observation de planètes extra-solaires géantes chaudes avec le VLTI et le NGST, *Ph.D. Thesis* .
- VANNIER, M. , PETROV, R. , SCHOELLER, M. , LOPEZ, B. *et al.* 2004, Design and tests for the correction of atmospheric and instrumental effects on color-differential phase with AMBER/VLTI, dans *Proc. SPIE, New Frontiers in Stellar Interferometry*.

- VON DER HEIDE, K. ET KNOECHEL, G. 1979a, Statistically rigorous reduction of stellar polarization measurements, *A&A* **79**, 22.
- VON DER HEIDE, K. ET KNOECHEL, G. 1979b, Statistically rigorous reduction of stellar polarization measurements, *A&A* **79**, 22.
- WEISS, G. 1961, Wave Propagation. (Book Reviews: Wave Propagation in a Turbulent Medium), *Science* **134**, 324.
- WITTKOWSKI, M. , AUFDENBERG, J. P. ET KERVELLA, P. 2004, Tests of stellar model atmospheres by optical interferometry. VLTI/VINCI limb-darkening measurements of the M4 giant  $\psi$  Phe, *A&A* **413**, 711.



## Annexe A

# Statistiques des observables interférométriques

### A.1 Formalisme de Goodman: Principe

L'approche de [GOODMAN (1985)] est basée sur un modèle continu du processus de détection, à partir duquel le signal enregistré sur le détecteur peut être représenté sous la forme:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^K \delta(x - x_n, y - y_n) \quad (\text{A.1})$$

et sa transformée de Fourier:

$$\hat{D}(f_x, f_y) = \sum_{n=1}^K e^{-2i\pi(f_x x_n + f_y y_n)} \quad (\text{A.2})$$

La position  $(x_n, y_n)$  ainsi que le nombre de photoévénements  $K$  sont considérés comme des processus statistiques avec lois de probabilité dépendantes de la distribution d'intensité  $I(x, y)$ . Outre Goodman, plusieurs auteurs se sont intéressés à ce formalisme [CHELLI (1989), BERIO *et al.* (2001)], mais en considérant le seul bruit de photon. L'approche originale présentée ici propose de considérer aussi un bruit additif Gaussien  $\epsilon$  de variance  $\sigma^2$ . Pour alléger ces expressions, mais sans perte de généralité, le signal est dorénavant décrit de façon mono-dimensionnelle. Ainsi, le signal bruité  $\hat{S}(f)$  s'écrit:

$$\hat{S}(f) = \hat{D}(f) + \hat{\epsilon}(f) = \sum_{n=1}^K e^{-2i\pi f x_n} + \hat{\epsilon}(f) \quad (\text{A.3})$$

Le calcul des moments des différents estimateurs impliquant le signal  $\hat{S}(f)$  suivra la démarche générale suivante: étude statistique concernant le bruit de détecteur, puis le bruit de photon et enfin le bruit induit par l'atmosphère.

## A.2 Moments de la densité spectrale

D'après le formalisme ci-dessus, l'estimateur  $Q(f)$  de la densité spectrale de l'interférogramme est:

$$Q(f) = |\widehat{S}(f)|^2 \quad (\text{A.4})$$

### A.2.1 Espérance mathématique

En calculant l'espérance mathématique par rapport au bruit de détecteur, il vient:

$$E_c\{Q(f)\} = |\widehat{D}(f)|^2 + E_c\{|\widehat{\epsilon}|^2\} = |\widehat{D}(f)|^2 + N\sigma^2 \quad (\text{A.5})$$

où  $N$  est le nombre de pixels qui échantillonnent l'interférogramme. Puis à partir de l'équation A.2,  $|\widehat{D}|^2$  devient:

$$|\widehat{D}(f)|^2 = \sum_{n=1}^K \sum_{l=1}^K e^{-2i\pi(f[x_n - x_l])} \quad (\text{A.6})$$

Utilisant les résultats de Goodman pour finaliser le calcul, l'espérance mathématique de la densité spectrale s'écrit:

$$E\{Q(f)\} = \langle \overline{K}^2 |\widehat{i}(f)|^2 \rangle_\phi + \langle \overline{K} \rangle_\phi + N\sigma^2 \quad (\text{A.7})$$

où  $|\widehat{i}(f)|$  est la densité spectrale normalisée, et  $\langle \rangle_\phi$  représente la moyenne liée au processus aléatoire induit par la turbulence atmosphérique.

*N.B.: Il est à noter, que puisque nous considérons un bruit additif sur le signal, il n'est pas possible pour alléger les calculs de débiaiser a priori l'estimateur  $Q(f)$  du biais de photon, comme cela est fait dans l'approche de [CHELLI (1989)]*

### A.2.2 Variance

La variance est définie par:

$$\sigma^2\{Q\} = E\{Q^2\} - E\{Q\}^2 \quad (\text{A.8})$$

Suivant le même procédé de calcul, on obtient:

$$E\{Q^2\} = E\{|\widehat{D}|^4\} + 4N\sigma^2 E\{|\widehat{D}|^2\} + 2N^2\sigma^4 \quad (\text{A.9})$$

qui devient, une fois prises en compte les statistiques liées respectivement au bruit de photon et au bruit atmosphérique :

$$\begin{aligned} \sigma^2\{Q(f)\} &= \langle \overline{K}^4 |\widehat{i}(f)|^4 \rangle_\phi - \langle \overline{K}^2 |\widehat{i}(f)|^2 \rangle_\phi^2 \\ &+ 4 \langle \overline{K}^3 |\widehat{i}(f)|^2 \rangle_\phi - 2 \langle \overline{K} \rangle_\phi \langle \overline{K}^2 |\widehat{i}(f)|^2 \rangle_\phi \\ &+ 4 \langle \overline{K}^2 |\widehat{i}(f)|^2 \rangle_\phi + 2 \langle \overline{K}^2 \rangle_\phi - \langle \overline{K} \rangle_\phi^2 + 2N\sigma^2 \langle \overline{K}^2 |\widehat{i}(f)|^2 \rangle_\phi \\ &+ 2N\sigma^2 \langle \overline{K} \rangle_\phi + 3N\sigma^4 + N^2\sigma^4 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

### A.2.3 Covariance

Procédant de la même façon pour la covariance:

$$\text{Cov}\{Q_1, Q_2\} = E\{Q_1 Q_2\} - E\{Q_1\}E\{Q_2\} \quad (\text{A.11})$$

il vient:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{Q(f_1), Q(f_2)\} &= \langle \bar{K}^4 |\hat{i}(f_1)|^2 |\hat{i}(f_2)|^2 \rangle_\phi - \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_1)|^2 \rangle_\phi \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_2)|^2 \rangle_\phi \\ &+ \langle \bar{K}^3 \hat{i}(f_1) \hat{i}^*(f_2) \hat{i}^*(f_1 - f_2) \rangle_\phi + \langle \bar{K}^3 \hat{i}^*(f_1) \hat{i}(f_2) \hat{i}(f_1 - f_2) \rangle_\phi \\ &+ \langle \bar{K}^3 \hat{i}(f_1) \hat{i}(f_2) \hat{i}^*(f_1 + f_2) \rangle_\phi + \langle \bar{K}^3 \hat{i}^*(f_1) \hat{i}^*(f_2) \hat{i}(f_1 + f_2) \rangle_\phi \\ &+ \langle \bar{K}^3 |\hat{i}(f_1)|^2 \rangle_\phi - \langle \bar{K} \rangle_\phi \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_1)|^2 \rangle_\phi \\ &+ \langle \bar{K}^3 |\hat{i}(f_2)|^2 \rangle_\phi - \langle \bar{K} \rangle_\phi \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_2)|^2 \rangle_\phi \\ &+ 2 \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_1)|^2 \rangle_\phi + 2 \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_2)|^2 \rangle_\phi \\ &+ \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_1 - f_2)|^2 \rangle_\phi + \langle \bar{K}^2 |\hat{i}(f_1 + f_2)|^2 \rangle_\phi \\ &+ \langle \bar{K}^2 \rangle_\phi - \langle \bar{K} \rangle_\phi^2 + \langle \bar{K} \rangle_\phi + 3N\sigma^4 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

## A.3 Application à l'étude statistique de la visibilité

### A.3.1 Interférométrie multispeckle

Suivant l'étude du chapitre 2.1.5, l'estimateur de la visibilité est défini comme le rapport entre le flux cohérent estimé par intégration du pic haute fréquence et les flux photométriques estimés indépendamment via des sorties photométriques dédiées. La fraction de flux sélectionnée pour la voie photométrique est appelée  $\tau$ . Si  $K$  est le nombre de photoévénements total, les flux photométriques et interférométriques s'écrivent  $K^{\mathcal{P}} = \tau K$  et  $K^{\mathcal{I}} = (1 - \tau)K$ . Et l'estimateur de la visibilité multispeckle est:

$$\widetilde{V}^2(f_{ij}) \propto \frac{\sum_{l=f_{ij}-\frac{D}{\lambda}}^{f_{ij}+\frac{D}{\lambda}} |I(l)|^2}{\langle K_i^{\mathcal{P}} K_j^{\mathcal{P}} \rangle} \quad (\text{A.13})$$

Utilisant l'approximation au second ordre de [PAPOULIS (1984)], l'erreur relative carrée sur la visibilité multispeckle s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2\{V_{ij}^2\}}{V_{ij}^2} &= \frac{\sum_l \sigma^2\{|I(l)|^2\} + \sum_{m,n \neq l} \text{Cov}\{|I(m)|^2 |I(n)|^2\}}{\left[ \sum_l E\{|I(l)|^2\} \right]^2} \\ &+ \frac{1}{K_i^{\mathcal{P}}} + \frac{1}{K_j^{\mathcal{P}}} + \frac{1}{K_i^{\mathcal{P}} K_j^{\mathcal{P}}} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Il faut noter que puisqu'on considère une correction par Optique Adaptative, les points échantillonnant le pic sont partiellement corrélés. Il faut donc en prendre compte dans le calcul du

RSB. On suppose pour la suite que tous les télescopes ont une transmission égale. Ainsi au niveau des pics interférométriques, on a la relation suivante:

$$i(f) = V(f) \frac{1}{N_{tel}} \sum_i \sum_j M_{ij}(f) \quad (\text{A.15})$$

où  $i(f)$  est le spectre normalisé de l'interférogramme ( $i(0) = 1$ ). Dans le cas de l'interférométrie multispeckle, les pics hautes fréquences  $M_{ij}(f)$  sont *turbulents*. Puis, appliquant le formalisme de Goodman décrit ci-dessus, on peut expliciter chaque terme de l'équation A.14:

$$E\{|I(l)|^2\} = \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} \langle |M_{ij}(l)|^2 \rangle V_l^2 + \overline{K^{\mathcal{I}}} + N\sigma^2 \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \sigma^2\{|I(l)|^2\} &= \overline{K^{\mathcal{I}}} + \overline{K^{\mathcal{I}^2}} + \left[ 2 \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^3}}}{N_{tel}^2} + 4 \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} \right] \langle |M_{ij}(l)|^2 \rangle_{\phi} V_l^2 \\ &+ \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^4}}}{N_{tel}^4} \left[ \langle |M_{ij}(l)|^4 \rangle_{\phi} - \langle |M_{ij}(l)|^2 \rangle_{\phi}^2 \right] V_l^4 \\ &+ 2N\sigma^2 \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} \langle |M_{ij}(l)|^2 \rangle_{\phi} V_l^2 + 2N\sigma^2 \overline{K^{\mathcal{I}}} \\ &+ 3N\sigma^4 + N^2\sigma^4 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{|I(m)|^2 |I(n)|^2\} &= \overline{K^{\mathcal{I}}} + \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} \left[ 2 \langle |M_{ij}(m)|^2 \rangle_{\phi} V_m^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \langle |M_{ij}(n)|^2 \rangle_{\phi} V_n^2 + \langle |M_{ij}(m-n)|^2 \rangle_{\phi} V_{m-n}^2 \right] \\ &+ 2 \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^3}}}{N_{tel}^2} \langle M_{ij}(m) M_{ij}(n) M_{ij}^*(m-n) \rangle V_m V_n V_{m-n}^* \\ &+ \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^4}}}{N_{tel}^4} \left[ \langle |M_{ij}(m)|^2 |M_{ij}(n)|^2 \rangle_{\phi} \right. \\ &\quad \left. - \langle |M_{ij}(m)|^2 \rangle_{\phi} \langle |M_{ij}(n)|^2 \rangle_{\phi} \right] V_m^2 V_n^2 + 3N\sigma^4 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

### A.3.2 Interférométrie monomode

Dans le cas de l'interférométrie monomode, l'intégration du pic haute fréquence est implicitement effectuée par le filtrage spatial du guide d'onde. De plus, le nombre de photoévénements en sortie de fibre dépend du coefficient de couplage entre le front d'onde et la fibre. A la sortie de la fibre associé au  $i^{eme}$  télescope, le nombre de photoévénements est:  $k_i = \rho_i K_i$ . De plus on introduit ici le concept de coefficient de couplage basse fréquence global  $\rho_{lf}$  tel que  $\rho_{lf} K = \sum_j \rho_j K_j$ . En supposant que tous les coefficients de couplage vérifient la même statistique ( $\overline{\rho_i} = \overline{\rho}$ ), alors il vient aussi  $\overline{\rho_{lf}} = \overline{\rho}$ .

L'estimateur de la visibilité modale a pour expression:

$$\widetilde{V}_{ij}^2 \propto \frac{\langle |I^2(f_{ij})| \rangle}{\langle k_i^{\mathcal{P}} k_j^{\mathcal{P}} \rangle} \quad (\text{A.19})$$

En se servant de l'approximation au second ordre de [PAPOULIS (1984)], l'erreur relative carrée sur la visibilité modale prend la forme:

$$\frac{\sigma^2\{V_{ij}^2\}}{V_{ij}^2} = \frac{\sigma^2\{|I(f_{ij})|^2\}}{E^2\{|I(f_{ij})|^2\}} + \frac{\sigma^2\{k_i^{\mathcal{P}}k_j^{\mathcal{P}}\}}{k_i^{\mathcal{P}2}k_j^{\mathcal{P}2}} - 2\frac{\text{Cov}\{|I(f_{ij})|^2, k_i^{\mathcal{P}}k_j^{\mathcal{P}}\}}{E\{|I(f_{ij})|^2\}k_i^{\mathcal{P}}k_j^{\mathcal{P}}} \quad (\text{A.20})$$

Pour dériver cette équation, on utilise le formalisme de Goodman proposé ci-dessus. En ce qui concerne l'interférométrie monomode, il faut remarquer que la forme des pics est fixe et *indépendante de l'atmosphère*. Seul le nombre de photoévénements détectés en dépend, par l'intermédiaire des coefficients de couplage. Pour alléger les calculs, on supposera que ces coefficients de couplage sont décorrélés d'un télescope à l'autre. On en déduit une expression des différents moments impliqués dans l'équation:

$$E\{|I(f_{ij})|^2\} = \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} + \bar{\rho}\overline{K^{\mathcal{I}}} + N\sigma^2 \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \sigma^2\{|I(f_{ij})|^2\} &= \sigma_{\rho_{ij}^2}^2 \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^4}}}{N_{tel}^4} + [2\overline{\rho_{lf}^2} - \bar{\rho}^2] \overline{K^{\mathcal{I}^2}} + [4\overline{\rho_{lf}}|\rho_{ij}|^2 - 2\bar{\rho}|\rho_{ij}|^2] \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^3}}}{N_{tel}^2} \\ &+ 4\overline{|\rho_{ij}|^2} \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} + 2N\sigma^2\overline{|\rho_{ij}|^2} \frac{\overline{K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^2} + 2N\sigma^2\bar{\rho}\overline{K^{\mathcal{I}}} \\ &+ 3N\sigma^4 + N^2\sigma^4 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma^2\{k_i^{\mathcal{P}}k_j^{\mathcal{P}}\} = \sigma_{\rho_i\rho_j}^2 \frac{\overline{K^{\mathcal{P}^4}}}{N_{tel}^4} + 2\bar{\rho}^2\bar{\rho} \frac{\overline{K^{\mathcal{P}^3}}}{N_{tel}^3} + \bar{\rho}^2 \frac{\overline{K^{\mathcal{P}^2}}}{N_{tel}^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Cov}\{|I(f_{ij})|^2, k_i^{\mathcal{P}}k_j^{\mathcal{P}}\} = \frac{\overline{K^{\mathcal{P}^2}K^{\mathcal{I}^2}}}{N_{tel}^4} [\overline{|\rho_{ij}|^2\rho_i\rho_j} - \overline{|\rho_{ij}|^2}\bar{\rho}^2] + 2\frac{\overline{K^{\mathcal{P}^2}K^{\mathcal{I}}}}{N_{tel}^3} [\bar{\rho}^2\bar{\rho} - \bar{\rho}^3] \quad (\text{A.24})$$

Il en découle que l'erreur relative carrée de la visibilité modale se décompose en trois termes:

$$\frac{\sigma^2\{V_{ij}^2\}}{V_{ij}^2} = \mathcal{E}_P^2(K, \rho) + \mathcal{E}_A^2(K, \sigma^2, \rho) + \mathcal{E}_S^2(\rho) \quad (\text{A.25})$$

avec:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P^2 &= \left[ \frac{N_{tel}(4\overline{\rho_{lf}}|\rho_{ij}|^2 - 2\bar{\rho}|\rho_{ij}|^2)}{(1-\tau)\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} - \frac{4(\bar{\rho}^2 - \bar{\rho}^2)}{(1-\tau)\bar{\rho}|\rho_{ij}|^2} + \frac{2\bar{\rho}^2}{\tau\bar{\rho}^3} \right] \frac{N_{tel}}{\bar{K}} \\ &+ \left[ \frac{N_{tel}^2(2\overline{\rho_{lf}^2} - \bar{\rho}^2)}{(1-\tau)^2\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} + \frac{4}{(1-\tau)^2\overline{|\rho_{ij}|^2}} + \frac{1}{\tau^2\bar{\rho}^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\bar{K}^2} + \frac{N_{tel}\bar{\rho}}{(1-\tau)^3\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} \frac{N_{tel}^3}{\bar{K}^3} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

l'erreur relative liée au bruit de photon,

$$\mathcal{E}_A^2 = \frac{2N\sigma^2}{(1-\tau)^2\overline{|\rho_{ij}|^2}} \frac{N_{tel}^2}{\bar{K}^2} + \frac{2N\sigma^2N_{tel}\bar{\rho}}{(1-\tau)^3\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} \frac{N_{tel}^3}{\bar{K}^3} + \frac{3N\sigma^4 + N^2\sigma^4}{(1-\tau)^4\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} \frac{N_{tel}^4}{\bar{K}^4} \quad (\text{A.27})$$

qui rend compte du bruit de détecteur et finalement,

$$\mathcal{E}_S^2 = \frac{\sigma_{\rho_{ij}^2}^2}{\overline{|\rho_{ij}|^2}^2} + \frac{\sigma_{\rho_i\rho_j}^2}{\bar{\rho}^4} - 2\frac{\text{Cov}\{\rho_{ij}^2, \rho_i\rho_j\}}{\overline{|\rho_{ij}|^2}\bar{\rho}^2} \quad (\text{A.28})$$

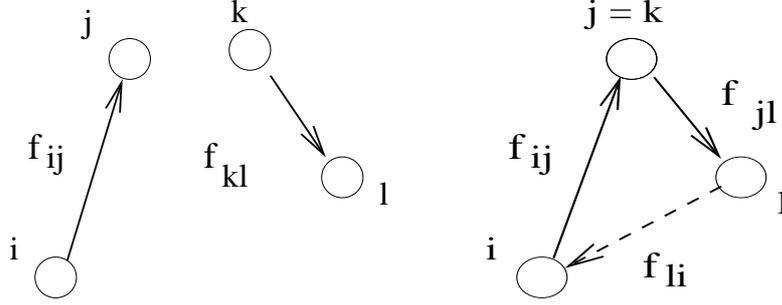


FIG. A.1: Configurations possibles pour le calcul de la covariance sur la visibilité modale. Gauche: Les deux lignes de base n'ont aucun télescope en commun. Droite: Les deux lignes de base ont un télescope en commun  $j = k$ .

qui résulte des fluctuations des coefficients de couplage. Il s'agit de l'erreur relative liée au bruit de speckle filtré par la fibre. Nous appellerons donc le bruit associé *bruit de speckle modal*.

On peut de la même sorte calculer la covariance sur la visibilité modale entre deux bases. Elle s'exprime aussi sous la forme d'une somme de trois termes:

$$\frac{\text{Cov}\{V_{ij}^2, V_{kl}^2\}}{V_{ij}^2 V_{kl}^2} = \mathcal{C}_P(K, \rho) + \mathcal{C}_A(K, \sigma^2, \rho) + \mathcal{C}_S(\rho) \quad (\text{A.29})$$

Il va cependant falloir distinguer deux cas selon que les visibilités proviennent de deux paires de télescopes distinctes ou qu'un télescope est commun aux deux lignes de bases (supposons  $j = k$  comme sur la Figure A.1). Il vient:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_P &= \left[ \frac{N_{tel}(\text{Cov}\{\rho_{lf}, |\rho_{ij}|^2\} + \text{Cov}\{\rho_{lf}, |\rho_{kl}|^2\})}{(1-\tau)^2 |\rho_{ij}|^2 |\rho_{kl}|^2} - \frac{2(\bar{\rho}^2 - \bar{\rho}^2)(|\overline{\rho_{ij}}|^2 + |\overline{\rho_{kl}}|^2)}{(1-\tau)\bar{\rho} |\rho_{ij}|^2 |\rho_{kl}|^2} \right] \frac{N_{tel}}{\bar{K}} \\ &+ \left[ \frac{N_{tel}^2(2\overline{\rho_{lf}^2} - \bar{\rho}^2)}{(1-\tau)^2 |\rho_{ij}|^2 |\rho_{kl}|^2} + \frac{2(|\overline{\rho_{ij}}|^2 + |\overline{\rho_{kl}}|^2)}{(1-\tau)^2 |\rho_{ij}|^2 |\rho_{kl}|^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\bar{K}^2} + \frac{N_{tel}\bar{\rho}}{(1-\tau)^3 |\rho_{ij}|^2 |\rho_{kl}|^2} \frac{N_{tel}^3}{\bar{K}^3} \end{aligned}$$

si  $j = k$

$$+ \left[ \frac{(\overline{\rho_{ij}\rho_{jl}\rho_{il}^*} + \overline{\rho_{ij}^*\rho_{jl}\rho_{il}})}{(1-\tau)|\rho_{ij}|^2 |\rho_{jl}|^2} + \frac{1}{\tau\bar{\rho}} \right] \frac{N_{tel}}{\bar{K}} + \frac{|\overline{\rho_{il}}|^2}{(1-\tau)^2 |\rho_{ij}|^2 |\rho_{jl}|^2} \frac{N_{tel}^2}{\bar{K}^2} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathcal{C}_A = \frac{3N\sigma^4}{(1-\tau)^4 |\rho_{ij}|^2 |\rho_{kl}|^2} \frac{N_{tel}^4}{\bar{K}^4} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{C}_S = 0 \text{ si } j \neq k$$

$$= \frac{\text{Cov}\{|\rho_{ij}|^2, |\rho_{jl}|^2\}}{|\rho_{ij}|^2 |\rho_{jl}|^2} + \frac{\sigma_\rho^2}{\bar{\rho}^2} - \frac{\text{Cov}\{|\rho_{ij}|^2, \rho_j \rho_l\}}{|\rho_{ij}|^2 \bar{\rho}^2} - \frac{\text{Cov}\{|\rho_{jl}|^2, \rho_i \rho_j\}}{|\rho_{jl}|^2 \bar{\rho}^2} \text{ si } j = k \quad (\text{A.32})$$

Dans le cas simplifié où la source n'est pas résolu par un télescope et que la visibilité est constant sur le support du pic haute fréquence, i.e. que les coefficients de couplage vérifient les équations 2.45 et 2.46, les coefficients de la matrice de covariance de la visibilité modale sont données en table A.1.

## A.4 Moments du bispectre

L'estimateur du bispectre entre les télescopes  $i, j, k$  est défini par:

$$Q_{ijk} = \widehat{S}(f_{ij})\widehat{S}(f_{jk})\widehat{S}^*(f_{ik}) \quad (\text{A.33})$$

Le calcul de l'espérance mathématique de cet estimateur est immédiat:

$$E(Q_{ijk}) = \langle \overline{K}^3 \widehat{i}(f_{ij})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik}) \rangle_\phi \quad (\text{A.34})$$

En revanche, considérer conjointement le bruit de photon et de détecteur pour les moments d'ordre 2 entraîne des calculs quasi-inextricables. Pour analyser les moments du bispectre de manière (un peu) plus simple, j'étudierai séparément les cas bruit de photon et bruit de détecteur. Dans chaque cas, l'effet de la turbulence sera considéré.

### A.4.1 Le cas bruit de photon

Reprenant [CHELLI (1989)], les moments du second ordre s'écrivent:

$$\begin{aligned} E_K\{|Q_{ijk}|^2\} &= \overline{K}^3 + \overline{K}^4 \left[ \widehat{i}(f_{ij})|^2 + \widehat{i}(f_{jk})|^2 + \widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ \overline{K}^5 \left[ \widehat{i}(f_{ij})|^2 \widehat{i}(f_{jk})|^2 + \widehat{i}(f_{ij})|^2 \widehat{i}(f_{ik})|^2 + \widehat{i}(f_{jk})|^2 \widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij})|^2 \widehat{i}(f_{jk})|^2 \widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} E_K\{Q_{12}^2\} &= 2\overline{K}^3 \left[ \widehat{i}^*(f_{ij})\widehat{i}^*(f_{jk})\widehat{i}(f_{ik}) \right] \\ &+ \overline{K}^4 \left[ \widehat{i}(f_{ij})|^4 + \widehat{i}(f_{jk})|^4 + \widehat{i}(f_{ik})|^4 \right. \\ &\quad \left. + 2\widehat{i}(f_{ij})|^2 \widehat{i}(f_{jk})|^2 + 2\widehat{i}(f_{ij})|^2 \widehat{i}(f_{ik})|^2 + 2\widehat{i}(f_{jk})|^2 \widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ 2\overline{K}^5 \left[ \widehat{i}(f_{ij})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik})\widehat{i}(f_{ij})|^2 + \widehat{i}(f_{jk})|^2 + \widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik}) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Pour la covariance, il faut distinguer deux cas selon que (i) les triplets de télescopes sont totalement différents ou bien que (ii) une paire de télescopes est commune aux deux triplets. On supposera  $f_{ij} = f_{lm}$  (voir Fig. A.2). Ce dernier cas de figure va engendrer des termes de covariance supplémentaires par rapport à la première situation.

TAB. A.1: *Éléments de la matrice de covariance de la visibilité modale*

Observables	Coefficients de la matrice de covariance	
Visibilité	Termes diagonaux	$\left[ \frac{4\sigma_S^2 + 2N_{tel}\overline{S}^2}{(1-\tau)V_*^2(f_{ij})\overline{S}^3} + \frac{2(\sigma_S^2 + \overline{S}^2)}{\tau\overline{S}^3} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} + \left[ \frac{2N_{tel}\sigma_S^2 + N_{tel}^2\overline{S}^2}{(1-\tau)^2V_*^4(f_{ij})\overline{S}^4} + \frac{4}{3N\sigma^4 + N^2\sigma^4} \frac{(1-\tau)^2V_*^2(f_{ij})\overline{S}^2}{\tau^2\overline{S}^2} + \frac{1}{\rho_0^2\overline{K}^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2} + \frac{1}{(1-\tau)^3V_*^4(f_{ij})\overline{S}^3} \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4\overline{K}^3}$ $+ \left[ \frac{2N\sigma^2}{(1-\tau)^2V_*^2(f_{ij})\overline{S}^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2} + \left[ \frac{N_{tel}^2}{(1-\tau)^3V_*^4(f_{ij})\overline{S}^3} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4\overline{K}^3} + \left[ \frac{N_{tel}^4}{(1-\tau)^4V_*^4(f_{ij})\overline{S}^4} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4\overline{K}^4}$
$\frac{\text{Cov} \{V_{ij}^2, V_{kl}^2\}}{V_{ij}^2 V_{kl}^2}$	Termes non diagonaux	$\left[ \frac{2}{(1-\tau)^2\overline{S}^2} \left[ \frac{1}{V_*^2(f_{ij})} + \frac{1}{V_*^2(f_{kl})} \right] + \frac{N_{tel}\sigma_S^2}{(1-\tau)^2V_*^2(f_{ij})V_*^2(f_{kl})\overline{S}^4} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2}$ $+ \left[ \frac{1}{(1-\tau)^3V_*^3(f_{ij})V_*^2(f_{kl})\overline{S}^3} + \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4\overline{K}^3} + \left[ \frac{(1-\tau)^4V_*^2(f_{ij})V_*^2(f_{kl})\overline{S}^4}{3N\sigma^4} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4\overline{K}^4} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4\overline{K}^4}$ <p>if <math>j = k + \frac{1}{\tau\overline{S}} \frac{1}{\rho_0\overline{K}} + \left[ \frac{2\text{Re}[V_*^*(f_{ij})V_*(f_{kl})V_*^*(f_{il})]}{(1-\tau)V_*^2(f_{ij})V_*^2(f_{kl})\overline{S}} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} + \left[ \frac{N_{tel}^4}{(1-\tau)^2V_*^2(f_{ij})V_*^2(f_{kl})\overline{S}^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2}</math></p>

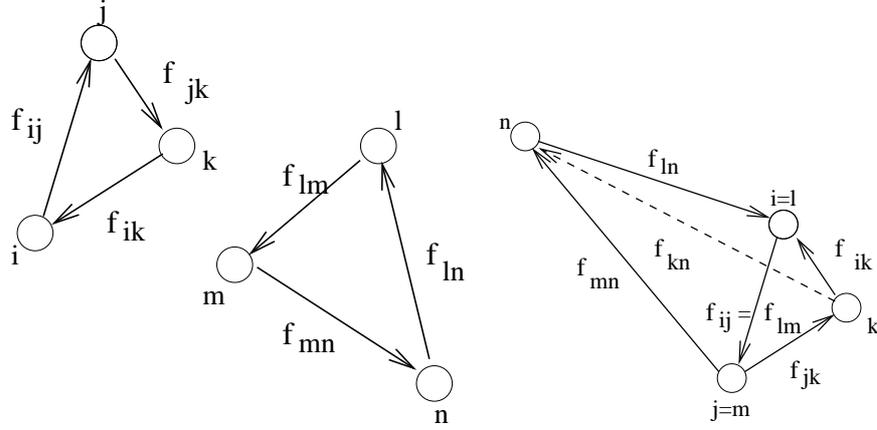


FIG. A.2: Configurations possibles pour le calcul de la covariance de la clôture de phase. Gauche: les deux triplets de télescopes  $i, j, l$  et  $l, m, n$  sont totalement différents. Droite: les deux triplets de télescopes ont une paire de télescopes en commun,  $i = l$  et  $j = m$ .

$$\begin{aligned}
E_K\{Q_{ijk}Q_{lmn}^*\} &= \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik})\widehat{i}^*(f_{lm})\widehat{i}^*(f_{mn})\widehat{i}(f_{ln}) \right] \\
&\quad \text{si } f_{ij} = f_{lm} \\
&+ \overline{K}^3 |\widehat{i}(f_{kn})|^2 + \overline{K}^4 |\widehat{i}(f_{ij})|^2 |\widehat{i}(f_{kn})|^2 \\
&+ \overline{K}^4 \left[ \widehat{i}(f_{kn})\widehat{i}(f_{ik})\widehat{i}^*(f_{ln}) + \widehat{i}(f_{kn})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{mn}) \right] \\
&+ \overline{K}^5 \left[ \widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik})\widehat{i}^*(f_{mn})\widehat{i}(f_{ln}) \right] \\
&+ \overline{K}^5 |\widehat{i}(f_{ij})|^2 \left[ \widehat{i}(f_{kn})\widehat{i}(f_{ik})\widehat{i}^*(f_{ln}) + \widehat{i}(f_{kn})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{mn}) \right] \quad (\text{A.37})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_K\{Q_{ijk}Q_{lmn}\} &= \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik})\widehat{i}(f_{lm})\widehat{i}(f_{mn})\widehat{i}^*(f_{ln}) \right] \\
&\quad \text{si } f_{ij} = f_{lm} \\
&+ \overline{K}^4 \left[ |\widehat{i}(f_{mn})|^2 |\widehat{i}(f_{ik})|^2 + |\widehat{i}(f_{mn})|^2 |\widehat{i}(f_{jk})|^2 \right] \\
&+ \overline{K}^4 \left[ |\widehat{i}(f_{ln})|^2 |\widehat{i}(f_{ik})|^2 + |\widehat{i}(f_{ln})|^2 |\widehat{i}(f_{jk})|^2 \right] \\
&+ \overline{K}^5 \left[ \widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik})\widehat{i}^*(f_{mn})\widehat{i}(f_{ln}) \right] \\
&+ \overline{K}^5 \left[ \widehat{i}(f_{ij})\widehat{i}(f_{jk})\widehat{i}^*(f_{ik})(|\widehat{i}(f_{mn})|^2 + |\widehat{i}(f_{ln})|^2) \right] \\
&+ \overline{K}^5 \left[ \widehat{i}(f_{lm})\widehat{i}(f_{mn})\widehat{i}^*(f_{ln})(|\widehat{i}(f_{jk})|^2 + |\widehat{i}(f_{ik})|^2) \right] \quad (\text{A.38})
\end{aligned}$$

### A.4.2 Le cas bruit de détecteur

Considérant toujours un bruit additif à moyenne nulle et à variance  $\sigma^2$ , il vient:

$$\begin{aligned} E_\epsilon\{|Q_{ijk}|^2\} &= \overline{K}^6 \left[ |\widehat{i}(f_{ij})|^2 |\widehat{i}(f_{jk})|^2 |\widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ N\sigma^2 \overline{K}^4 \left[ |\widehat{i}(f_{ij})|^2 |\widehat{i}(f_{jk})|^2 + |\widehat{i}(f_{ij})|^2 |\widehat{i}(f_{ik})|^2 + |\widehat{i}(f_{jk})|^2 |\widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ (3N\sigma^4 + N^2\sigma^4) \overline{K}^2 \left[ |\widehat{i}(f_{ij})|^2 |\widehat{i}(f_{jk})|^2 |\widehat{i}(f_{ik})|^2 \right] \\ &+ N^3\sigma^6 + 3N^2\sigma^6 + 15N\sigma^6 \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$E_\epsilon\{Q_{ijk}^2\} = \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij}) \widehat{i}(f_{jk}) \widehat{i}^*(f_{ik}) \right]^2 + 15N\sigma^6 \quad (\text{A.40})$$

Pour la covariance on retrouve encore les 2 cas à distinguer selon qu'il y ait une ligne de base commune ou non entre les deux triplets de télescopes.

$$\begin{aligned} E_\epsilon\{Q_{ijk} Q_{lmn}^*\} &= \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij}) \widehat{i}(f_{jk}) \widehat{i}^*(f_{ik}) \widehat{i}^*(f_{lm}) \widehat{i}^*(f_{mn}) \widehat{i}(f_{ln}) \right] + 15N\sigma^6 \\ &\text{si } f_{ij} = f_{lm} \\ &+ N\sigma^2 \overline{K}^4 \left[ \widehat{i}(f_{ij}) \widehat{i}^*(f_{ik}) \widehat{i}^*(f_{mn}) \widehat{i}(f_{ln}) \right] + 3N^2\sigma^6 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$E_\epsilon\{Q_{ijk} Q_{lmn}\} = \overline{K}^6 \left[ \widehat{i}(f_{ij}) \widehat{i}(f_{jk}) \widehat{i}^*(f_{ik}) \widehat{i}(f_{lm}) \widehat{i}(f_{mn}) \widehat{i}^*(f_{ln}) \right] + 15N\sigma^6 \quad (\text{A.42})$$

## A.5 Application à l'étude statistique de la clôture de phase modale

Pour alléger les calculs nous supposons que la source n'est pas résolue par un télescope et que la visibilité est constante sur le support du pic haute fréquence, i.e. que les coefficients de couplage vérifient les équations 2.45 et 2.46.

[CHELLI (1989)] montre que la covariance de la clôture de phase  $\Phi_{ijk}$  dépend seulement du module du bispectre et donc qu'en supposant un objet centro-symétrique on peut écrire:

$$\text{Cov}\{\Phi_{ijk}, \Phi_{lmn}\} = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}[Q_{ijk}(Q_{lmn} - Q_{lmn}^*)]}{E(Q_{ijk})E(Q_{lmn})} \quad (\text{A.43})$$

Appliquant le formalisme de Goodman dans le cas du bruit de photon et du bruit de détecteur séparément et prenant en compte la statistique de l'atmosphère, i.e. du rapport de Strehl (dont la loi de probabilité est supposée Gaussienne), on peut calculer les différents termes de l'équation ci-dessus:

### A.5.1 Bruit de photon + atmosphère

#### Variance

$$\begin{aligned}
E\{|Q_{ijk}|^2\} &= \left[ \overline{\mathcal{S}}^3 + \frac{3}{N_{tel}} \sigma_{\mathcal{S}}^2 \overline{\mathcal{S}} \right] \rho_0^3 \overline{K}^3 \\
&+ [|V_{\star}(f_{ij})|^2 + |V_{\star}(f_{jk})|^2 + |V_{\star}(f_{ik})|^2] \cdot \left[ N_{tel}^2 \overline{\mathcal{S}}^4 + N_{tel} \sigma_{\mathcal{S}}^2 \overline{\mathcal{S}}^2 + 2\sigma_{\mathcal{S}}^4 \right] \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ [|V_{\star}(f_{ij})|^2 |V_{\star}(f_{jk})|^2 + |V_{\star}(f_{ik})|^2 (|V_{\star}(f_{jk})|^2 + |V_{\star}(f_{ij})|^2)] \\
&\cdot \left[ N_{tel} \overline{\mathcal{S}}^5 + (N_{tel} + 4) \sigma_{\mathcal{S}}^2 \overline{\mathcal{S}}^3 + 2\sigma_{\mathcal{S}}^4 \overline{\mathcal{S}} \right] \frac{\rho_0^5 \overline{K}^5}{N_{tel}^5} \\
&+ [|V_{\star}(f_{ij})|^2 |V_{\star}(f_{jk})|^2 |V_{\star}(f_{ik})|^2] \left[ \overline{\mathcal{S}}^2 + \sigma_{\mathcal{S}}^2 \right]^3 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \tag{A.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\{Q_{ijk}^2\} &= 2 [V_{\star}^*(f_{ij}) V_{\star}^*(f_{jk}) V_{\star}(f_{ik})] \overline{\mathcal{S}}^3 \frac{\rho_0^3 \overline{K}^3}{N_{tel}^3} \\
&+ [|V_{\star}(f_{ij})|^4 + |V_{\star}(f_{jk})|^4 + |V_{\star}(f_{ik})|^4] \cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^4 + 2\sigma_{\mathcal{S}}^2 \overline{\mathcal{S}}^2 + \sigma_{\mathcal{S}}^4 \right] \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ 2 [|V_{\star}(f_{ij})|^2 |V_{\star}(f_{jk})|^2 + |V_{\star}(f_{ik})|^2 (|V_{\star}(f_{jk})|^2 + |V_{\star}(f_{ij})|^2)] \cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_{\mathcal{S}}^2 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ 2 [V_{\star}(f_{ij}) V_{\star}(f_{jk}) V_{\star}^*(f_{ik})] \cdot [|V_{\star}(f_{ij})|^2 + |V_{\star}(f_{jk})|^2 + |V_{\star}(f_{ik})|^2] \\
&\cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^5 + 2\sigma_{\mathcal{S}}^2 \overline{\mathcal{S}}^3 + \sigma_{\mathcal{S}}^4 \overline{\mathcal{S}} \right] \frac{\rho_0^5 \overline{K}^5}{N_{tel}^5} \\
&+ [V_{\star}(f_{ij}) V_{\star}(f_{jk}) |V_{\star}^*(f_{ik})|^2] \left[ \overline{\mathcal{S}}^2 + \sigma_{\mathcal{S}}^2 \right]^3 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \tag{A.45}
\end{aligned}$$

#### Covariance

Si  $f_{ij} \neq f_{lm}$ , on obtient:

$$E\{Q_{ijk} Q_{lmn}^*\} = [V_{\star}(f_{ij}) V_{\star}(f_{jk}) V_{\star}^*(f_{ik}) V_{\star}^*(f_{lm}) V_{\star}^*(f_{mn}) V_{\star}(f_{ln})] \overline{\mathcal{S}}^6 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \tag{A.46}$$

$$E\{Q_{ijk} Q_{lmn}\} = [V_{\star}(f_{ij}) V_{\star}(f_{jk}) V_{\star}^*(f_{ik}) V_{\star}^*(f_{lm}) V_{\star}^*(f_{mn}) V_{\star}(f_{ln})] \overline{\mathcal{S}}^6 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \tag{A.47}$$

Si  $f_{ij} = f_{lm}$ , l'expression de la covariance prend une forme plus complexe:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Q_{ijk}Q_{lmn}^*\} &= |V_*(f_{kn})|^2 \left[ N_{tel} \overline{\mathcal{S}}^3 + 2\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}} \right] \frac{\rho_0^3 \overline{K}^3}{N_{tel}^3} \left[ |V_*(f_{ij})|^2 |V_*(f_{kn})|^2 \right] \overline{\mathcal{S}}^4 \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ [V_*(f_{kn})V_*(f_{mn})V_*(f_{mk}) + V_*(f_{kn})V_*(f_{lk})V_*(f_{ln})] \\
&\cdot \left[ N_{tel} \overline{\mathcal{S}}^4 + 3\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ [V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})V_*(f_{jn})V_*(f_{in})] \left[ N_{tel} \overline{\mathcal{S}}^5 + 4\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^3 \right] \frac{\rho_0^5 \overline{K}^5}{N_{tel}^5} \\
&+ [V_*(f_{kn})V_*(f_{in})V_*(f_{ik}) + V_*(f_{kn})V_*(f_{jk})V_*(f_{jn})] \\
&\cdot |V_*(f_{ij})|^2 \left[ \overline{\mathcal{S}}^5 + \sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^3 \right] \frac{\rho_0^5 \overline{K}^5}{N_{tel}^5} \\
&+ [V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})V_*(f_{lm})V_*(f_{mn})V_*(f_{ln})] \\
&\cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^6 + 2\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_S^4 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \tag{A.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{Q_{ijk}Q_{lmn}\} &= \\
&[|V_*(f_{ik})|^2 |V_*(f_{in})|^2 + |V_*(f_{jk})|^2 |V_*(f_{jn})|^2] \left[ \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ [ |V_*(f_{ik})|^2 |V_*(f_{jn})|^2 + |V_*(f_{in})|^2 |V_*(f_{jk})|^2 ] \overline{\mathcal{S}}^4 \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \\
&+ [V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})(|V_*(f_{in})|^2 + |V_*(f_{jn})|^2) \\
&\quad + V_*(f_{ij})V_*(f_{jn})V_*(f_{in})(|V_*(f_{jk})|^2 + |V_*(f_{ik})|^2)] \left[ \overline{\mathcal{S}}^5 + \sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^3 \right] \frac{\rho_0^5 \overline{K}^5}{N_{tel}^5} \\
&+ [V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})V_*(f_{lm})V_*(f_{mn})V_*(f_{ln})] \\
&\cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^6 + 2\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_S^4 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \tag{A.49}
\end{aligned}$$

### A.5.2 Bruit de détecteur + atmosphère

#### Variance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{|Q_{ijk}|^2\} &= [|V_*(f_{ij})|^2 |V_*(f_{jk})|^2 |V_*(f_{ik})|^2] \left[ \overline{\mathcal{S}}^2 + \sigma_S^2 \right]^3 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \\
&+ [|V_*(f_{ij})|^2 + |V_*(f_{jk})|^2 + |V_*(f_{ik})|^2] [3N\sigma^4 + N^2\sigma^4] \overline{\mathcal{S}}^2 \frac{\rho_0^2 \overline{K}^2}{N_{tel}^2} \\
&+ [|V_*(f_{ij})|^2 |V_*(f_{ij})|^2 + |V_*(f_{jk})|^2 |V_*(f_{jk})|^2 + |V_*(f_{ik})|^2 |V_*(f_{ij})|^2] \\
&\cdot N\sigma^2 \left[ \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} + N^3\sigma^6 + 3N^2\sigma^6 + 15N\sigma^6 \tag{A.50}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\{Q_{ijk}^2\} = [V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})]^2 \left[ \overline{\mathcal{S}}^2 + \sigma_S^2 \right]^3 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} + 15N\sigma^6 \tag{A.51}$$

### Covariance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Q_{ijk}Q_{lmn}^*\} &= [V_\star(f_{ij})V_\star(f_{jk})V_\star^*(f_{ik})V_\star^*(f_{lm})V_\star^*(f_{mn})V_\star(f_{ln})] \overline{\mathcal{S}}^6 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \\ &+ 15N\sigma^6 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Q_{ijk}Q_{lmn}\} &= [V_\star(f_{ij})V_\star(f_{jk})V_\star^*(f_{ik})V_\star(f_{lm})V_\star(f_{mn})V_\star^*(f_{ln})] \overline{\mathcal{S}}^6 \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} \\ &+ 15N\sigma^6 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Si  $f_{ij} = f_{lm}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Q_{ijk}Q_{lmn}^*\} &= [V_\star(f_{ij})V_\star(f_{jk})V_\star^*(f_{ik})V_\star^*(f_{lm})V_\star^*(f_{mn})V_\star(f_{ln})] \\ &\cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^6 + 2\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_S^4 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} + 15N\sigma^6 + 3N^2\sigma^6 \\ &+ [V_\star(f_{jk})V_\star^*(f_{ik})V_\star^*(f_{jn})V_\star(f_{in})] N\sigma^2 \overline{\mathcal{S}}^4 \frac{\rho_0^4 \overline{K}^4}{N_{tel}^4} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Q_{ijk}Q_{lmn}^*\} &= [V_\star(f_{ij})V_\star(f_{jk})V_\star^*(f_{ik})V_\star(f_{lm})V_\star(f_{mn})V_\star^*(f_{ln})] \\ &\cdot \left[ \overline{\mathcal{S}}^6 + 2\sigma_S^2 \overline{\mathcal{S}}^4 + \sigma_S^4 \overline{\mathcal{S}}^2 \right] \frac{\rho_0^6 \overline{K}^6}{N_{tel}^6} + 15N\sigma^6 \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

### A.5.3 Cas général

L'expression de la covariance de la clôtura de phase dans le cas général (i.e. bruit de photon + bruit additif + bruit atmosphérique) peut être approximé par la somme des covariances relatives à chaque régime:

$$\text{Cov}\{\Phi_{ijk}, \Phi_{lmn}\} = \text{Cov}_{phot}\{\Phi_{ijk}, \Phi_{lmn}\} + \text{Cov}_{det}\{\Phi_{ijk}, \Phi_{lmn}\} \quad (\text{A.56})$$

Pour chaque régime de bruit, les coefficients de la matrice de covariance de la clôtura de phase modale sont résumés dans les tableaux A.2 et A.3.

TAB. A.2: Éléments de la matrice de covariance de la clôture de phase, dans le régime "bruit de photon".

Observables	Coefficients de la matrice de covariance
Clôture de phase	<p>Ter,es</p> <p>diagonaux</p> $ \begin{aligned} & \left[ \frac{N_{tel}^3 - 2V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})\overline{S}^3 + 3N_{tel}^2\sigma_S^2\overline{S}}{2 V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2\overline{S}^6} + \frac{N_{tel}^3}{\rho_0^3\overline{K}^3} + \left[ \frac{ V_*(f_{ij}) ^2 +  V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ik}) ^2}{N_{tel}^2\overline{S}^4} + N_{tel}\sigma_S^2\overline{S}^2 + 2\sigma_S^4 \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2} \right] \\ & - \left[ \frac{ V_*(f_{ij}) ^4 +  V_*(f_{jk}) ^4 +  V_*(f_{ik}) ^4}{\overline{S}^4} + 2\sigma_S^2\overline{S}^2 + \sigma_S^4 + 2 V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ik}) ^2( V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ij}) ^2)}{\overline{S}^4 + \sigma_S^2\overline{S}^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2} \\ & - \left[ \frac{ V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ik}) ^2( V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ij}) ^2)}{N_{tel}\overline{S}^6} + (N_{tel} + 4)\sigma_S^2\overline{S}^3 + 2\sigma_S^4\overline{S} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} \\ & + \left[ \frac{ V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2\overline{S}^6}{2 V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2\overline{S}^6} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} \\ & - \left[ \frac{2 V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})  V_*(f_{ij}) ^2 +  V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ik}) ^2}{2 V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2\overline{S}^6} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} \end{aligned} $
Cov { $\Phi_{ijk}, \Phi_{lmn}$ }	<p>0 if <math>f_{ij} \neq f_{lm}</math></p> <p>Termes non diagonaux</p> $ \begin{aligned} & \left[ \frac{ V_*(f_{kn}) ^2[N_{tel}\overline{S}^3 + 2\sigma_S^2\overline{S}]}{2V_*(f_{ij})V_*(f_{jk}) V_*(f_{ik})V_*(f_{lm})V_*(f_{mn}) V_*(f_{ln})\overline{S}^6} \right] \frac{N_{tel}^3}{\rho_0^3\overline{K}^3} \\ & + \left[ \frac{ V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{kn}) ^2\overline{S}^4 +  V_*(f_{kn})V_*(f_{mn})V_*(f_{mk}) + V_*(f_{kn})V_*(f_{ik})V_*(f_{ln})  N_{tel}\overline{S}^4 + 3\sigma_S^2\overline{S}^2}{ V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{kn}) ^2\overline{S}^4 +  V_*(f_{kn})V_*(f_{mn})V_*(f_{mk}) + V_*(f_{kn})V_*(f_{ik})V_*(f_{ln})  N_{tel}\overline{S}^4 + 3\sigma_S^2\overline{S}^2} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2} \\ & - \left[ \frac{ V_*(f_{ik}) ^2 V_*(f_{ln}) ^2 +  V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ln}) ^2 +  V_*(f_{kn})V_*(f_{mn})V_*(f_{mk})  V_*(f_{ln})\overline{S}^6}{ V_*(f_{ik}) ^2 V_*(f_{ln}) ^2\overline{S}^4 + \sigma_S^2\overline{S}^2 +   V_*(f_{ik}) ^2 V_*(f_{ln}) ^2 +  V_*(f_{kn})V_*(f_{mn})V_*(f_{mk})  V_*(f_{ln})\overline{S}^6} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2\overline{K}^2} \\ & - \left[ \frac{2V_*(f_{ij})V_*(f_{jk}) V_*(f_{ik})V_*(f_{lm})V_*(f_{mn}) V_*(f_{ln})\overline{S}^6}{ V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})V_*(f_{ln})V_*(f_{mn}) V_*(f_{ln})\overline{S}^6} +  V_*(f_{kn})V_*(f_{ik}) + V_*(f_{kn})V_*(f_{jk})V_*(f_{ln})  V_*(f_{ij}) ^2\overline{S}^5 + \sigma_S^2\overline{S}^3} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} \\ & - \left[ \frac{ V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik}) V_*(f_{ln})\overline{S}^6}{ V_*(f_{ij})V_*(f_{jk})V_*(f_{ik}) V_*(f_{ln})\overline{S}^6} +  V_*(f_{kn})V_*(f_{ik}) + V_*(f_{kn})V_*(f_{jk})V_*(f_{ln})  V_*(f_{ij}) ^2\overline{S}^5 + \sigma_S^2\overline{S}^3} \right] \frac{N_{tel}}{\rho_0\overline{K}} \quad \text{if } f_{ij} = f_{lm} \end{aligned} $

TAB. A.3: *Éléments de la matrice de covariance de la clôture de phase, dans le régime "bruit de détecteur".*

Observables	Coefficients de la matrice de covariance	
Clôture de phase	Termes diagonaux	$\left[ \frac{ V_*(f_{ij}) ^2 +  V_*(f_{jk}) ^2 +  V_*(f_{ik}) ^2}{2 V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2} \right] \frac{N_{tel}^4}{\rho_0^4 K^4} + \left[ \frac{ V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2 +  V_*(f_{ik}) ^2 V_*(f_{ij}) ^2}{2 V_*(f_{ij}) ^2 V_*(f_{jk}) ^2 V_*(f_{ik}) ^2} \right] N\sigma^2 \overline{S^4} + \sigma_S^2 \overline{S^2} \left] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2 K^2} + N^3\sigma^6 + 3N^2\sigma^6 \right.$
Cov $\{\Phi_{ijk}, \Phi_{lmn}\}$	Termes non diagonaux	$0 \quad \text{if } f_{ij} \neq f_{lm}$ $\left[ \frac{ V_*(f_{jk})V_*(f_{ik})V_*(f_{jm})V_*(f_{im}) N\sigma^2 \overline{S^4}}{2V_*(f_{ij})V_*(f_{jk}) V_*(f_{ik})V_*(f_{lm})V_*(f_{mn}) V_*(f_{im})\overline{S^6}} \right] \frac{N_{tel}^2}{\rho_0^2 K^2} + 3N^2\sigma^6 \quad \text{if } f_{ij} = f_{lm}$



## Annexe B

# Description analytique de la correction partielle en Optique Adaptative

### B.1 Formalisme

Le but de cette étude est de donner des clés analytiques permettant de caractériser la correction partielle par Optique Adaptative, s'affranchissant ainsi de simulation lourdes et laborieuses. Ce formalisme se base sur l'étude de la correction partielle en Optique Adaptative développée par [RODDIER (1981)] et [CONAN (1994)]. On trouvera notamment dans ces références toute l'analyse statistique de la turbulence atmosphérique dérivée de [KOLMOGOROV (1941)], qui sont supposées connues dans cette annexe.

#### B.1.1 Résultats connus sans correction par Optique Adaptative

Soit  $P(u)$  la fonction pupille d'un télescope, la fonction de transfert non turbulente s'écrit alors:

$$T^0(f) = \frac{1}{S} \int P(u)P(u+f)du \quad (\text{B.1})$$

avec  $S$  la "surface" de la pupille:

$$S = \int P^2(u)du = T^0(0) \quad (\text{B.2})$$

#### *Fonction de transfert longue pose*

En présence de turbulence atmosphérique, le front d'onde  $\Psi(u)$  est perturbé et aléatoire. La fonction de transfert longue pose s'écrit alors:

$$\langle S(f) \rangle = \frac{1}{S} \int P(u)P(u+f) \langle \Psi(u)\Psi^*(u+f) \rangle du \quad (\text{B.3})$$

i.e.:

$$\langle S(f) \rangle = \mathcal{B}_\Phi(f).T^0(f) \quad (\text{B.4})$$

où  $\mathcal{B}_{\Phi}(f)$  est la fonction de transfert de l'atmosphère, qui suivant la théorie de Kolmogorov s'écrit:

$$\mathcal{B}_{\Phi}(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\Phi}\right) = \exp\left(-\frac{6.88}{2}\left[\frac{\lambda f}{r_0}\right]^{\frac{5}{3}}\right) \quad (\text{B.5})$$

$\mathcal{D}_{\Phi}$  étant la fonction de structure de l'atmosphère.

### *Fonction de transfert speckle*

En faisant l'hypothèse que  $\mathcal{B}_{\Phi}(f)$  s'annule beaucoup plus vite que  $T^0(f)$ , i.e.  $D \gg r_0$ , [RODDIER (1989)] montre que pour  $f > r_0/\lambda$ , la fonction de transfert speckle s'écrit:

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = \frac{\sigma}{S} T^0(f) \quad (\text{B.6})$$

avec  $\sigma$  la cellule de cohérence du front d'onde et  $\sigma/S$  l'inverse du nombre de speckle dans l'image, soit:

$$\sigma = \int \mathcal{B}_{\Phi}^2(u) du = 0.342 \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{1}{\mathcal{N}_s}, \quad \mathcal{N}_s \simeq 2.29 \left(\frac{D}{r_0}\right)^2 \quad (\text{B.8})$$

Une autre façon de procéder est de considérer la statistique du front d'onde complexe comme étant gaussienne circulaire. En ce cas la fonction de transfert speckle basse fréquence se décompose en deux termes, un terme turbulent pour  $f < r_0/\lambda$  où l'on retrouve la fonction de transfert longue pose et des "ailes" cohérentes pour  $f > r_0/\lambda$ :

$$\langle |S(f)|^2 \rangle = \overbrace{\mathcal{B}_{\Phi}(f)|T^0(f)|^2}^{f < r_0/\lambda} + \overbrace{\frac{\sigma}{S}T^0(f)}^{f > r_0/\lambda} \quad (\text{B.9})$$

Ainsi que l'a démontré [LABEYRIE (1970)] pour la première fois, la fonction de transfert speckle permet de recouvrer (partiellement) toutes les informations de fréquences jusqu'à la limite de diffraction du télescope.

### *Fonction de transfert interférométrique longue pose*

Moyennant l'hypothèse que les fronts d'ondes sur les deux télescopes sont statistiquement décorrélés, il vient immédiatement:

$$\langle S^{12}(f) \rangle = T^0(f)e^{-\sigma_{\Phi}^2} \quad (\text{B.10})$$

où  $\sigma_{\Phi}^2$  est la variance de la phase aléatoire  $\Phi$  du front d'onde et  $E_c = e^{-\sigma_{\Phi}^2}$  représente l'énergie cohérente contenue dans l'image.

### *Fonction de transfert interférométrique speckle*

Pour la fonction de transfert speckle haute fréquence, le calcul est très similaire à celui de la fonction de transfert speckle basse fréquence, si on suppose toujours les fronts d'ondes décorrélés:

$$\langle |S^{12}(f)|^2 \rangle = \frac{\sigma}{S} T^0(f) \quad (\text{B.11})$$

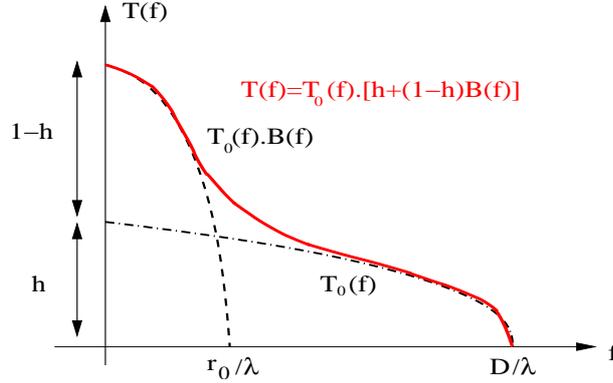


FIG. B.1: Modélisation de la fonction de transfert longue pose d'un télescope partiellement corrigé par Optique Adaptative. La courbe se décompose en une somme pondérée d'une fonction de transfert d'un télescope parfait  $T^0(f)$  et d'une fonction de transfert d'un télescope dans la cas purement turbulent  $T^0(f)\mathcal{B}_\Phi(f)$ . Le poids est donné par la variable  $h$ .

### B.1.2 Correction partielle par Optique Adaptative: principe

Le principe consiste à décomposer la fonction de transfert longue pose partiellement corrigée en une partie non turbulente (de fonction de transfert  $T^0(f)$ ) et une partie purement turbulente ( $T^0(f)\mathcal{B}_\Phi(f)$ ),  $h$  et  $1-h$  étant le poids attribué à chaque partie (voir Fig. B.1):

$$\begin{aligned} \langle S(f) \rangle &= \frac{T_0^i(f)}{S} [h + (1-h)\mathcal{B}_\phi(f)], \quad h \in [0, 1] \\ &= \frac{T_0^i(f)}{S} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathcal{D}_\phi(f) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

où  $\mathcal{D}_\phi(f)$  est la fonction de structure partiellement corrigée. Il est à noter que cette approche s'applique pour  $D \geq r_0$ . Clairement, et comme déjà démontré par [CONAN (1994)],  $h$  décrit l'énergie contenue dans le pic cohérent, soit par définition l'énergie cohérente  $E_c$ . La fonction de structure corrigée partiellement par Optique Adaptative vérifie donc la relation:

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \mathcal{D}_\phi(f) \right] = E_c + (1 - E_c)\mathcal{B}_\phi(f) \quad (\text{B.13})$$

Qui plus est, l'énergie cohérente est directement reliée à la force de la turbulence et au degré de correction par Optique Adaptative, grâce à la formule

$$E_c = \exp \left[ -\Gamma_{Noll}(N_z) \left( \frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (\text{B.14})$$

où  $\Gamma_{Noll}(N_z)$  est la variance résiduelle calculée par [NOLL (1976)].

### B.1.3 Approximation Gaussienne

Pour permettre une dérivation analytique des calculs, on approxime la fonction pupille et la fonction de transfert de la turbulence par des gaussiennes. En ce qui concerne la pupille, cette

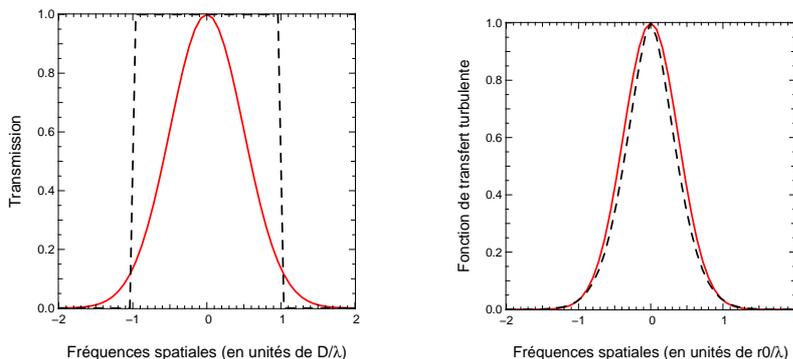


FIG. B.2: *Gauche: Profils de la pupille circulaire (en traits discontinus) et de son approximation par une gaussienne. Droite: Profils de la fonction de transfert turbulente (en traits discontinus) et de son approximation par une gaussienne.*

hypothèse est adaptée aux interféromètres fibrés puisque dans ce cas, la pupille *modale* est la pupille du télescope pondéré par le premier mode de la fibre dont le profil est (quasiment) gaussien. Pour la fonction de transfert de la turbulence, cela revient à approximer  $5/3$  par  $2$ . Il vient les expressions suivantes:

$$P(f) = \exp\left(-\frac{f^2}{\sigma_P^2}\right), \quad \sigma_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D}{\lambda} \quad (\text{B.15})$$

et

$$\mathcal{B}_\Phi = \exp\left(-\frac{f^2}{\sigma_B^2}\right), \quad \sigma_B = \sqrt{\frac{2}{6.88}} \frac{r_0}{\lambda} \quad (\text{B.16})$$

L'écart type de la fonction pupille  $\sigma_P$  est choisi de telle sorte que la surface soit identique à celle d'une pupille circulaire, soit:

$$\int P^2(u) du = S = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{B.17})$$

Dans ces conditions, la cellule de cohérence du front d'onde a une expression légèrement différente:

$$\sigma = \int \mathcal{B}_\Phi^2(u) du = 0.457 \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{1}{\mathcal{N}_s}, \quad \mathcal{N}_s \simeq 1.72 \left(\frac{D}{r_0}\right)^2 \quad (\text{B.19})$$

### *Fonctions de transfert speckle*

Grâce à ce formalisme, on peut caractériser analytiquement les fonctions de transferts speckle (BF et HF) en correction partielle par Optique Adaptative. En ce qui concerne la partie basse fréquence, le calcul ne converge que pour de bonnes corrections  $h > 0.5$  mais peut être extrapoler grâce à la connaissance complète du cas purement turbulent (voir paragraphe suivant pour plus de détails). Les résultats sont présentés sur la figure B.3. Comme dans le

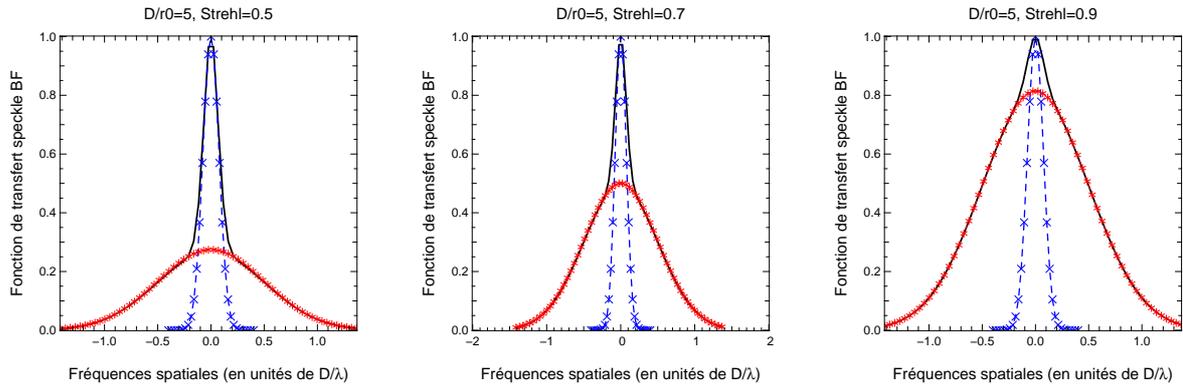


FIG. B.3: *Fonctions de transfert speckle basse fréquence pour différentes valeurs de rapport Strehl. Comme dans le cas purement turbulent, la courbe se décompose en une partie centrale ( $f < r_0$ ) turbulente et des ailes cohérentes ( $f > r_0$ ).*

cas turbulent, la fonction de transfert speckle basse fréquence se décompose en un pic central ( $f < r_0$ ) turbulent (légèrement plus large que la fonction  $\mathcal{B}_\Phi(f)|T^0(f)|^2$  comme remarqué par [RODDIER (1989)] dans ses simulations) et des "ailes" cohérentes ( $f > r_0$ ) dont le poids dépend du niveau de correction. Ce poids est en fait inversement proportionnel au nombre de speckles restant dans l'image. Ainsi, à la manière de [CAGIGAL & CANALES (2000)] qui ont introduit la notion de paramètre de Fried "généralisé" en correction partielle par OA, je fais apparaître ici la notion de nombre de speckles "équivalents" qui caractérise cette même correction. Pour en obtenir une expression analytique approchée, il suffit de suivre la démonstration proposée par [RODDIER (1989)] en supposant que  $\mathcal{B}_\Phi^2(f)$  (mais aussi  $\mathcal{B}_\Phi(f)$ ) s'annule très vite devant  $T^0(f)$ , et de calculer dans ce cas la fonction de transfert speckle BF pour  $f > r_0$  (ou ce qui revient au même de calculer la fonction de transfert speckle HF). Il vient:

$$\frac{1}{\mathcal{N}_s^{eq}} = h^2 + \frac{\sigma}{2S} [1 + 2h - 3h^2] \quad (\text{B.20})$$

Le nombre de speckles équivalents est représenté sur la figure B.4 en fonction du Strehl pour différentes valeurs de turbulence. On remarque que pour des conditions de turbulence identiques ( $D/r_0 = 5$ ), l'inverse du nombre de speckles équivalents donne bien la valeur du maximum (extrapolé) de la partie cohérente de la fonction de transfert speckle BF représentée en figure B.3.

### Limitations

Dans le cas purement turbulent, le calcul formel de la fonction de transfert speckle basse fréquence débouche sur un résultat "dégénéré" car le développement en somme de fonction de structure (voir [RODDIER (1989), p. 46]) fait apparaître une identité remarquable. Le résultat est alors contradictoire avec la physique puisque l'on trouve formellement  $\langle |S(f)|^2 \rangle = |T^0(f)|^2$ ! Cette dégénérescence disparaît cependant dès qu'un soupçon de correction est considéré (i.e.  $h > 0$ ). Pour pallier le problème, il suffit de rajouter *a priori*

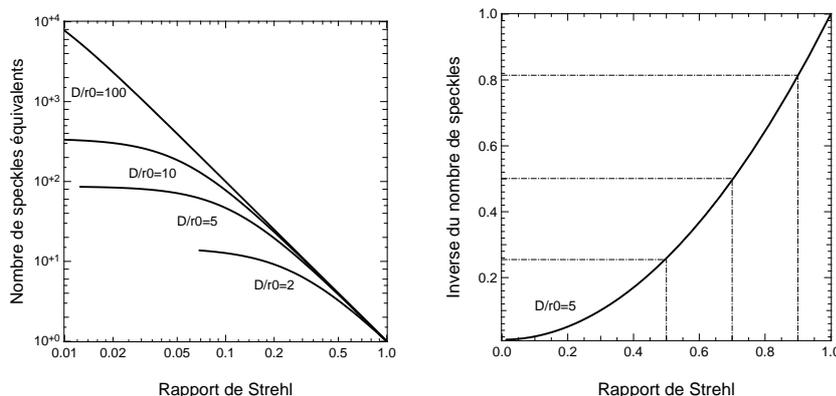


FIG. B.4: *Gauche: Nombre de speckles équivalents dans l'image partiellement corrigée en fonction du rapport de Strehl. Droite: L'inverse du nombre de speckles présenté sur ce graphique pour le cas  $D/r_0 = 5$  donne le poids de la partie cohérente de la fonction de transfert speckle basse fréquence, comme on peut le vérifier sur la figure B.3*

l'hypothèse de statistique circulaire Gaussienne pour le front d'onde complexe, celle-ci étant classiquement utilisé dans la cas purement turbulent.

## B.2 Applications

À partir de la description partielle par Optique Adaptative définie ci-dessus, et dont les hypothèses sont, (i)  $D \geq r_0$ , (ii)  $\mathcal{B}_\Phi$  et  $P(u)$  gaussiennes et (iii) fonction de structure partiellement corrigée stationnaire, il est possible de faire des calculs analytiques conduisant à l'estimation de quantités pertinentes concernant l'Optique Adaptative. J'en décris ici trois exemple, utile pour mon travail de thèse.

### B.2.1 Bruit de speckle

En interférométrie multispeckle, le RSB sur la visibilité sature à cause du bruit de speckle. En l'absence de correction par Optique Adaptative, ce bruit limite les performances de l'interférométrie multispeckle à un rapport signal à bruit de 1 (par interférogramme) [GOODMAN (1985)]. Il est donc crucial d'estimer le gain en RSB apporté par l'Optique Adaptative pour une correction donnée. Le RSB speckle se définit comme:

$$\chi = \frac{\langle |S^{12}(f)|^2 \rangle^2}{\langle |S^{12}(f)|^4 \rangle - \langle |S^{12}(f)|^2 \rangle^2} \quad (\text{B.21})$$

Utilisant le développant de [KORFF (1973)] exprimant les statistiques des fronts d'ondes en fonction des fonction de structure, les moments d'ordre 1 et 2 de la fonction de transfert speckle haute fréquence s'écrivent suivant le tableau B.1. Si le moment d'ordre 1 admet une expression analytique simple, celui d'ordre 2 nécessite un développement en série en  $h$ , qui ne converge que pour  $h \in ]0.5, 1]$ , c'est à dire pour les bonnes corrections. Néanmoins, on sait que

TAB. B.1: Moments d'ordre 1 et 2 de la fonction de transfert speckle haute fréquence.

$$\begin{aligned} \langle |S^{ij}(f)|^2 \rangle &= S^{-2} \int P(a_1)P(a_2)P(a_1+f)P(a_2+f)e^{-\mathcal{D}(a_1-a_2)} da_1 da_2 \\ \langle |S^{ij}(f)|^4 \rangle &= S^{-4} \int P(a_1)P(a_1+f)P(a_2)P(a_2+f)P(a_1+a_3)P(a_1+a_3+f)P(a_2+a_4)P(a_2+a_4+f) \\ &\quad \left[ \frac{e^{-[\mathcal{D}(a_1-a_2)+\mathcal{D}(a_3+a_1-a_2)+\mathcal{D}(a_2+a_4-a_1)+\mathcal{D}(a_4+a_2-a_1-a_3)]}}{e^{-[\mathcal{D}(a_3)+\mathcal{D}(a_4)]}} \right] da_1 da_2 da_3 da_4 \end{aligned}$$

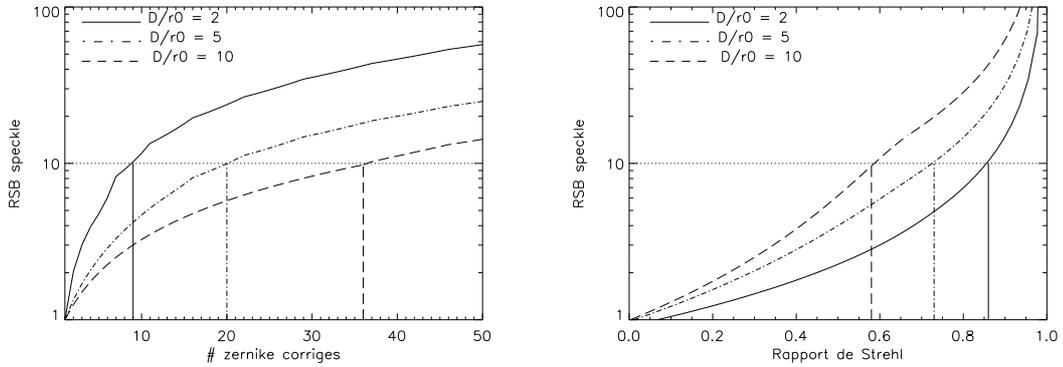


FIG. B.5: Rapport Signal à Bruit sur le flux cohérent dans le régime bruit de speckle, en fonction de la correction par Optique Adaptative. Cette correction est illustrée pour différents  $D/r_0$ , soit par le nombre de zernike corrigés (gauche), soit par le rapport de Strehl (droite). Les pointillés désignent le niveau de correction requis pour obtenir un RSB de 10.

pour le cas purement turbulent (i.e.  $h = 0$ ),  $\chi = 1$  dont on peut extrapoler pour toutes les valeurs de  $h \in ]0, 0.5]$ . Généralement, on calcule le bruit de speckle pour le sommet du pic, soit  $f = 0$ , mais cette analyse peut être menée à bien pour toute fréquence appartenant au pic, notamment pour calculer les corrélations entre les différents points discrétisés du pic lorsqu'on applique l'estimateur intégral à l'interférométrie multispeckle (voir Annexe A). Pour  $f = 0$  on obtient les courbes de la Figure B.5.

### B.2.2 Variance du Strehl

Dans le cas d'objet non résolu par un télescope, les coefficients de couplage basse fréquence de la fibre sont directement reliés au rapport de Strehl  $\mathcal{S}$  [COUDÉ DU FORESTO *et al.* (2000)]. Ainsi il est très intéressant d'étudier les fluctuations de ce rapport, ne serait ce que pour caractériser les performances de l'Optique Adaptative. Par définition, le rapport de Strehl est le rapport entre l'intégrale de la fonction de transfert partiellement corrigée et l'intégrale de la fonction de transfert d'un télescope parfait. Les moments d'ordre 1 et 2 du Strehl sont écrits

TAB. B.2: Moments d'ordre 1 et 2 du rapport de Strehl.

$$\langle S \rangle = S^{-1} \int P(a_1)P(a_1 + u)e^{-\mathcal{D}(f)}da_1du$$

$$\langle S^2 \rangle = S^{-2} \int P(a_1)P(a_1 + u)P(a_2)P(a_2 + v) \left[ \frac{e^{-[\mathcal{D}(u)+\mathcal{D}(a_2-a_1)+\mathcal{D}(a_2+v-a_1-u)+\mathcal{D}(v)]}}{e^{-[\mathcal{D}(a_2+v-a_1)+\mathcal{D}(a_2-a_1-u)]}} \right] da_1da_2dudv$$

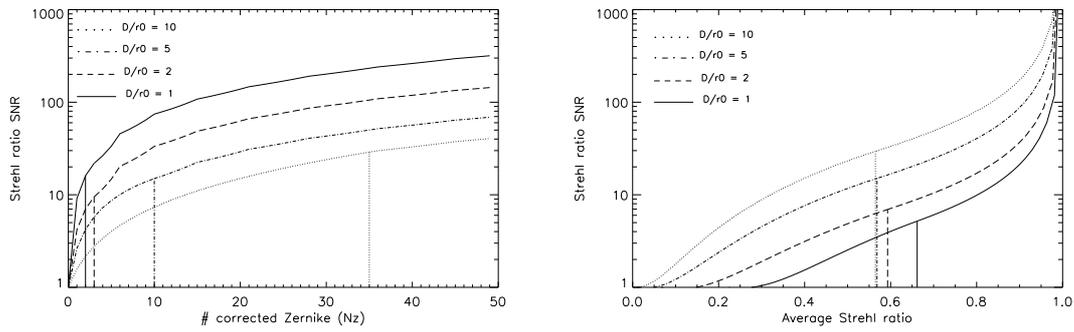


FIG. B.6: RSB sur le rapport de Strehl en fonction du nombre de polynômes de Zernike corrigés (gauche) et en fonction du rapport de Strehl moyen (droite). Les lignes verticales désignent l'endroit à partir duquel, l'interpolation a été effectué.

dans la table B.2.

Une nouvelle fois, le moment d'ordre 2 nécessite un développement en série autour de  $h$ . On peut encore extrapoler entre  $h = 0$  et  $h = 0.5$  en utilisant le résultat classique affirmant que dans le cas purement turbulent, le RSB sur le rapport de Strehl vaut 1. On peut ainsi tracer l'évolution des statistiques du Strehl en fonction du niveau de correction, comme en témoigne la figure B.6.

### B.2.3 Statistiques des coefficients de couplage

Lors du calcul des performances d'un interféromètre fibré, il apparaît qu'à fort flux, le RSB sur la visibilité atteint une saturation due au bruit de speckle modal, qui n'est autre que le bruit de speckle filtré par la fibre. Il est d'un grand intérêt de quantifier la valeur de la saturation pour analyser l'apport des fibres sur la précision des mesures en comparaison de l'interférométrie multimode. L'expression théorique du RSB de speckle modal  $\chi_m$  est:

$$\frac{1}{\chi_m} = \frac{\sigma_{|\rho_{ij}|^2}^2}{|\rho_{ij}|^2} + \frac{\sigma_{\rho_i \rho_j}^2}{\rho_i \bar{\rho}_j} - 2 \frac{\text{Cov}\{|\rho_{ij}|^2, \rho_i \rho_j\}}{|\rho_{ij}|^2 \bar{\rho}_i \bar{\rho}_j} \quad (\text{B.22})$$

TAB. B.3: Moments des coefficients de couplage basse et haute fréquence. Expression formelle.

---


$$\begin{aligned} \overline{\rho_i} &= \frac{\rho_0}{S} \int V_\star^*(u) P(\alpha) P(\alpha + u) e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}(u)} d\alpha du \\ \overline{|\rho_{ij}|^2} &= \frac{\rho_0^2}{S^2} \int V_\star^*(u - f_{ij}) V_\star(v - f_{ij}) P(\alpha) P(\alpha + u) P(\beta) P(\beta + v) e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(\beta - \alpha) - \mathcal{D}(\beta - \alpha + v - u)]} d\alpha du d\beta dv \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned} E\{|\rho_{ij}|^4\} &= \\ \frac{\rho_0^4}{S^4} \int V_\star(f_{ij} + a_1 - a_2) V_\star^*(f_{ij} + a_3 - a_4) V_\star(f_{ij} + a_5 - a_6) V_\star^*(f_{ij} + a_7 - a_8) P(a_1) P(a_2) P(a_3) P(a_4) P(a_5) P(a_6) P(a_7) P(a_8) \\ e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_1 - a_3) + \mathcal{D}(a_5 - a_7) + \mathcal{D}(a_2 - a_4) + \mathcal{D}(a_6 - a_8)]} &\left[ \frac{e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_3 - a_5) + \mathcal{D}(a_4 - a_6) + \mathcal{D}(a_1 - a_7) + \mathcal{D}(a_2 - a_8)]}}{e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_1 - a_5) + \mathcal{D}(a_2 - a_6) + \mathcal{D}(a_3 - a_7) + \mathcal{D}(a_4 - a_8)]}} \right] da_1 \dots da_8 \\ E\{\rho_i^2 \rho_j^2\} &= \\ \frac{\rho_0^4}{S^4} \int V_\star^*(a_2 - a_1) V_\star^*(a_4 - a_3) V_\star^*(a_6 - a_5) V_\star^*(a_8 - a_7) P(a_1) P(a_2) P(a_3) P(a_4) P(a_5) P(a_6) P(a_7) P(a_8) \\ e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_2 - a_1) + \mathcal{D}(a_4 - a_3) + \mathcal{D}(a_6 - a_5) + \mathcal{D}(a_8 - a_7)]} &\left[ \frac{e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_2 - a_3) + \mathcal{D}(a_1 - a_4) + \mathcal{D}(a_6 - a_7) + \mathcal{D}(a_5 - a_8)]}}{e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_3 - a_1) + \mathcal{D}(a_4 - a_2) + \mathcal{D}(a_5 - a_7) + \mathcal{D}(a_8 - a_6)]}} \right] da_1 \dots da_8 \\ E\{|\rho_{ij}|^2 \rho_i \rho_j\} &= \\ \frac{\rho_0^4}{S^4} \int V_\star(f_{ij} + a_1 - a_2) V_\star^*(f_{ij} + a_3 - a_4) V_\star^*(a_6 - a_5) V_\star^*(a_8 - a_7) P(a_1) P(a_2) P(a_3) P(a_4) P(a_5) P(a_6) P(a_7) P(a_8) \\ e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_3 - a_1) + \mathcal{D}(a_2 - a_4) + \mathcal{D}(a_6 - a_5) + \mathcal{D}(a_8 - a_7)]} &\left[ \frac{e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_3 - a_5) + \mathcal{D}(a_6 - a_1) + \mathcal{D}(a_7 - a_2) + \mathcal{D}(a_8 - a_4)]}}{e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{D}(a_5 - a_1) + \mathcal{D}(a_6 - a_3) + \mathcal{D}(a_7 - a_4) + \mathcal{D}(a_8 - a_2)]}} \right] da_1 \dots da_8 \end{aligned}$$


---

L'équation B.22 indique que le bruit de speckle modal dépend des statistiques des coefficients de couplage haute et basse fréquence, ainsi que de leur corrélation. Partant de leur définition:

$$\rho_i(V_\star) = \rho_0 \frac{(V_\star * T^i)_{f=0}}{\int T_0^i(f) df} \quad (\text{B.23})$$

$$\rho_{ij}(V_\star) = \rho_0 \frac{(V_\star * T^{ij})_{f=f_{ij}}}{\sqrt{\int T_0^i(f) df \int T_0^j(f) df}} \quad (\text{B.24})$$

ce formalisme permet d'estimer analytiquement les contributions de chaque terme. Les expressions des différents moments des coefficients de couplage sont décrits en table B.3