



HAL
open science

Aspects de la quantification des théories de champs scalaires sur le cône de lumière

Stéphane Salmons

► **To cite this version:**

Stéphane Salmons. Aspects de la quantification des théories de champs scalaires sur le cône de lumière. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2000. Français. NNT : . tel-00007971

HAL Id: tel-00007971

<https://theses.hal.science/tel-00007971>

Submitted on 9 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ PARIS 7 JUSSIEU

– Denis Diderot –

THÈSE

présentée à l'Université Paris 7 Jussieu
en cotutelle avec l'Université de Regensburg
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

SPECIALITÉ : **Physique Théorique.**
Formation Doctorale : **Champs, Particules, Matière**

Aspects de la quantification des théories de champs scalaires sur le cône de lumière

par

Stéphane SALMONS

Soutenue le 8 DECEMBRE 2000 à Montpellier devant le jury composé de :

M. Pierre Grangé	D.R. CNRS	Directeur de thèse
M. Ernst Werner	Professeur Emérite	Co-directeur de thèse
M. Thomas Heinzl	Professeur Assistant	Rapporteur
M. Jean-François Mathiot	D.R. CNRS	Rapporteur
M. Vladimir Braun	Professeur	Examineur
M. Bertrand Delamotte	C.R. CNRS	Examineur

*"Ce qui est simple est toujours faux.
Ce qui ne l'est pas est inutilisable."*

Paul Valéry

Table des matières

I	Fondements de la physique sur le cône de lumière	9
1	Les formes de la dynamique relativiste	11
1.1	Dynamique relativiste du point	11
1.2	Les formes de Dirac	14
1.3	La Front Form	18
2	La théorie quantique des champs sur le cône de lumière	25
2.1	L'algèbre de Poincaré pour les champs	25
2.2	Une théorie singulière	26
2.3	Quantification du champ libre	28
3	Le problème du vide	33
3.1	La nature du problème	33
3.2	Secteur du vide, secteur des particules	34
3.3	Résolution des équations aux modes zéros : exemple de la théorie ϕ_{1+1}^4	38
II	L'approche continue de la quantification sur le cône de lumière	41
7	Les bases de la formulation continue	43
7.1	Quantification et régularisation du champ libre	43
7.2	Développement du champ en interaction en série de Haag	47
8	Le commutateur de Pauli-Jordan	51
8.1	Evaluation à $x^+ = 0$	51
8.2	Evaluation pour x^+ quelconque	53

9	Calculs à l'ordre 1	63
9.1	Contraintes et régularisation des divergences	63
9.2	Caractéristiques de la transition de phase	65
10	Calculs à l'ordre 2	69
10.1	Contraintes et équation du mouvement	69
10.1.1	L'équation du mouvement	69
10.1.2	La contrainte	72
10.2	Résolution approchée des équations du mouvement et des contraintes	73
10.3	Calcul de la constante de couplage	76
10.4	Fonction $\beta_1(g)$ et comparaison avec les théories critiques	77
10.5	Comparaison avec les résultats des théories critiques	78
10.6	Conclusion	78
III	La théorie des champs $\phi^4 O(N)$ sur le cône de lumière.	81
18	Développement de la théorie $\phi^4 O(N)$ quantifiée par intégrales de chemin	83
18.1	Mise en forme de la fonctionnelle génératrice	83
18.2	Algorithme pour la détermination des diagrammes contribuant aux fonctions de corrélation	86
18.3	Développement diagrammatique de la fonction à un point	89
18.4	Développement diagrammatique de la fonction à deux points	91
19	Vers la quantification de la théorie $\phi^4 O(N)$ sur le cône de lumière	97
19.1	Contrainte et équations du mouvement	97
19.2	Résolution de l'équation du mouvement libre et quantification	99
19.3	Calculs des champs d'ordre supérieur	101
19.3.1	Champs à l'ordre 2	101
19.3.2	Champs à l'ordre 3	103
19.4	Fonctions de corrélation à l'ordre $\frac{1}{N^2}$	105
19.4.1	Fonctions à un point	105
19.4.2	Fonction à deux points	105
19.5	Indications sur la phase brisée	108

A	L' algorithme de Dirac-Bergmann	111
A.1	Théories régulières et singulières	111
A.2	La procédure de Dirac-Bergmann	115
A.3	La classification des contraintes selon Dirac	117
A.4	Formulation pour une théorie de champ	119
B	Evaluation des éléments de matrice	121
B.1	Calcul de l'élément de matrice $\langle q_1^+ \varphi_1^2 \varphi_2 q_2^+ \rangle$	121
B.2	Approche formelle systématique	122
C	Calculs numériques	133
C.1	Optimisation du couplage effectif	133
C.2	Calcul du couplage réduit de Parisi pour l'ordre 2	136
D	Application pour le calcul des fonctions de corrélation	139
E	Publications	167

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à adresser mes plus vifs remerciements à Pierre Grangé, Directeur de Recherche CNRS, pour m'avoir proposé de collaborer avec lui sur ce sujet de recherche passionnant et original. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour son soutien et ses conseils avisés, et aussi pour m'avoir montré le long chemin de la persévérance.

Je voudrais exprimer également ma très grande gratitude à Ernst Werner, Professeur à l'Université de Ratisbonne, pour m'avoir encadré en faisant preuve d'une disponibilité de chaque instant. Pendant mes fructueux séjours à Ratisbonne, j'ai pu apprécier sa compétence ainsi que son sens de l'hospitalité.

Je voudrais remercier André Neveu, Directeur de Recherche CNRS et directeur du Laboratoire de Physique Mathématique et Théorique, ainsi que l'ensemble des chercheurs et du personnel de cette unité, pour m'avoir accueilli et avoir fait le nécessaire pour que je puisse y travailler dans des conditions idéales.

Ma gratitude va également à Thomas Heinzl, Professeur Assistant à l'université d'Iéna, pour l'intérêt qu'il a porté à mes recherches et pour m'avoir fait profiter de son expertise.

Je tiens à remercier aussi les étudiants en thèse du laboratoire pour les longues et enrichissantes discussions de physique que nous avons partagées dans la complicité : Pascal Basheilac, Malik Bezouh, Tarek Nassar, Yan Mambrini, Marius Iacomi et Damien Reynaud.

Merci également à Dominique Caron, Ingénieur, qui a réussi l'exploit de me réconcilier avec les arcanes de l'informatique en faisant toujours preuve d'une bonne humeur revigorante.

Je voudrais aussi dire l'extrême importance des personnes qui m'ont formé tout au long de mon apprentissage. Merci à René Boulangeon et à Noël Chornet pour m'avoir donné le goût de la science et de la rigueur. Merci aussi à mes maîtres d'université : Frédéric Géniet, Louis Cecchi, respectivement Maître de Conférences et Professeur à l'Université de Montpellier II, Alain Laverne, Maître de Conférences à l'Université de Paris 7, Bernard Diu, Françoise Balibar et Luc Valentin, Professeurs à l'Université Paris 7, ainsi que Bertrand Delamotte, Chargé de Recherches au CNRS et Pierre Binétruy, Professeur à l'Université Paris XI. Tous à un niveau ou à un autre ont contribué au plaisir intense de la découverte et de la pratique de la physique.

J'adresse une pensée pleine de tendresse et d'émotion à Anne pour m'avoir accompagné et supporté pendant ces années. Son soutien dans les moments difficiles a été capital.

Enfin et surtout, je voudrais exprimer ma gratitude infinie aux personnes sans lesquelles pas un mot de cette thèse n'aurait vu le jour. Aux personnes qui m'ont ébloui par la perfection de leur présence tout au long de ma vie. Pour leur sensibilité, leur délicatesse et leur intelligence, pour leur présence irremplaçable, que ce travail leur soit dédié.

à mes parents.

Notations et conventions

\equiv égal par définition

$g_{\mu\nu}$ métrique minkowskienne

$\eta_{\mu\nu}$ métrique du cône de lumière

ω_p $\equiv \sqrt{(p^o)^2 - (p^i)^2}$ énergie sur couche de masse dans le cas minkowskien

ξ^- $\equiv \frac{(p^\perp)^2 + m^2}{p^+}$ énergie sur couche de masse sur le cône de lumière

p^{off} $\equiv (p^-, p^+, p^\perp)$ [ou (p^o, p^i)], impulsion hors couche de masse (“off-shell”)

p^{on} $\equiv (\xi^-, p^+, p^\perp)$ [ou (ω_p, p^i)], impulsion sur couche de masse (“on-shell”)

$\langle x, y \rangle_M$ $\equiv x^o y^o - x^i y^i$ produit scalaire minkowskien

$\langle x, y \rangle_{CL}$ $\equiv \frac{1}{2}x^+ y^- + \frac{1}{2}x^- y^+ - x^\perp y^\perp$ produit scalaire du cône de lumière (dans la convention de Brodsky-Lepage)

$sgn(x)$ fonction signe de x, $= \begin{cases} 1 & si \ x > 0 \\ -1 & si \ x < 0 \\ 0 & si \ x = 0 \end{cases}$

$\theta(x)$ fonction échelon de x, $= \begin{cases} 1 & si \ x > 0 \\ 0 & si \ x < 0 \\ \frac{1}{2} & si \ x = 0 \end{cases}$

CLP(AP) Conditions aux Limites Périodiques (Anti-Périodiques)

La lettre x représentera indifféremment la variable x unidimensionnelle, le quadruplet de coordonnées (x^o, x^1, x^2, x^3) , ou (x^+, x^-, x^\perp) , selon le contexte. On utilisera le mot *classique* pour signifier *non quantique* et *conventionnelle* pour qualifier la quantification dans l’Instant Form. Enfin toutes les sommations seront effectuées dans la convention d’Einstein.

Introduction

"Pour l'essentiel, ce point de vue subsiste encore aujourd'hui et forme le dogme central de la théorie quantique des champs : la réalité essentielle est un ensemble de champs soumis aux lois de la relativité restreinte et de la mécanique quantique ; tout le reste n'est qu'une conséquence de la dynamique quantique de ces champs."

Steven Weinberg

Une des tâches essentielles de la physique théorique du vingtième siècle a été d'élaborer une théorie rassemblant le principe de relativité d'Einstein avec ceux de la mécanique quantique. Le résultat, la Théorie Quantique des Champs, est le fondement actuel du Modèle Standard de la physique des particules. De façon plus inattendue, elle permet aussi de grands progrès dans la compréhension de la physique statistique, notamment pour les phénomènes critiques. Son élément central, le champ quantique, est en effet un objet qui permet de décrire des interactions à nombre infini de degrés de liberté, ce qui est nécessaire dans la théorie relativiste, où l'équivalence masse-énergie implique un nombre de particules indéterminé, mais aussi dans les modèles décrivant les phénomènes critiques.

Le processus de quantification, dans sa version canonique par principe de correspondance, s'effectue à partir de la formulation hamiltonienne, en faisant correspondre aux crochets de Poisson, les commutateurs des variables canoniques, considérées comme des q-nombres. Dans cette optique, l'élaboration d'une théorie quantique ET relativiste demande donc comme préalable une formulation hamiltonienne de la dynamique relativiste. En 1945 Dirac [12] montre que, contrairement au cas classique, une telle formulation n'est pas unique. A côté de la formulation conventionnelle, qu'il nomme Instant Form, coexistent deux autres formulations (on montrera plus tard [38] qu'il en existe en fait cinq) : la Front Form et la Point Form. Dans l'Instant Form, la surface des conditions initiales est l'hyperplan $t=cte$, dans la Point Form c'est un hyperboloïde de révolution, et dans la Front Form il s'agit d'un hyperplan tangent au cône de lumière. Ces formulations sont équivalentes mais elles présentent des particularités très différentes.

Bien que l'essentiel de la Théorie Quantique des Champs se soit développé dans le cadre de l'Instant Form, des recherches sont poursuivies depuis Dirac pour bâtir une TQC quantifiée sur le cône de lumière (LCQ) (c'est-à-dire dans la Front Form). La question de savoir si l'équivalence de ces formulations survit au processus de quantification est une question encore ouverte. L'enjeu est de taille car l'une des propriétés essentielles de la LCQ est la trivialité de l'état fondamental de l'hamiltonien en interaction, c'est-à-dire l'état du vide, ce qui simplifie considérablement les calculs. Mais cette médaille semble avoir un bien sombre revers puisque alors, dira-t-on, la LCQ ne pouvant pas décrire un autre vide que le vide trivial, restera cantonnée au domaine perturbatif. En fait la LCQ semble bien capable de décrire un vide non trivial, du moins dans les théories de champs scalaires, où le phénomène de brisure spontanée de symétrie a été décrit avec succès [26] [1] [48]. La structure du vide ne pouvant se trouver dans le ket

fondamental, elle apparaît en fait dans les opérateurs de mode zéro du champ, qui dépendent des autres modes par une ou des relations aussi complexes que l'hamiltonien en interaction. Cette situation est caractéristique de la LCQ : elle semble bien décrire la même physique que la TQC conventionnelle mais par des concepts, des méthodes et des calculs très différents. L'objectif ultime affiché de ces recherches est une formulation consistante de QCD sur le cône de lumière, avec l'espoir que les simplifications apportées sur l'état fondamental de l'hamiltonien permettent de décrire des domaines non perturbatifs, impossibles à atteindre en quantification conventionnelle. Beaucoup de progrès ont été réalisés [60] [33] [19] [47] [7] mais le but n'est pas encore atteint.

Notre travail se situe dans le cadre plus restreint de la théorie scalaire ϕ^4 , qui est bien connue dans l'Instant Form et qui permet donc des comparaisons entre les deux formulations. La détermination des modes zéros des champs est une étape essentielle. Des tentatives ont été effectuées, en utilisant une approximation de champ moyen. Cette thèse s'inscrit dans la continuité de recherches qui visent à obtenir une expression des modes zéros par d'autres moyens dans le but d'obtenir des résultats non perturbatifs. La première méthode étudiée utilise un développement en série de Haag associé à un traitement des champs au sens des distributions. Cette méthode permet en outre un traitement satisfaisant des divergences infrarouges et ultraviolettes et nous a permis d'éclaircir la nature de la limite entre la description discrète et la description continue sur l'exemple de la fonction de Pauli-Jordan. Nous avons également obtenu des résultats dans l'étude de la transition de phase qui se comparent avantageusement avec ceux des méthodes conventionnelles. Le deuxième procédé étudié consiste à rajouter à la théorie ϕ^4 une symétrie interne $O(N)$ pour permettre un développement des modes zéros en série de $1/N$. Nos travaux complètent et précisent ceux déjà effectués dans ce domaine, notamment en ce qui concerne les champs et les propagateurs. Néanmoins l'étude de la transition de phase dans ce formalisme reste à mener.

Première partie

Fondements de la physique sur le cône
de lumière

Chapitre 1

Les formes de la dynamique relativiste

"Working with a front is a process that is unfamiliar to physicists. But still I feel that the mathematical simplification that it introduces is all-important. I consider the method to be promising and have recently been making an extensive study of it. It offers new opportunities, while the familiar instant form seems to be played out."
P.A.M. Dirac (1977)

1.1 Dynamique relativiste du point

En guise d'introduction à la Front Form nous allons examiner le cas de la dynamique relativiste d'une particule ponctuelle libre.

Son action a une origine géométrique, c'est la longueur de son histoire, prise entre deux événements fixes A et B :

$$S = -m \int_{A \rightarrow B} ds$$

où ds est l'abscisse curviligne : $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu} = \sqrt{(x^o)^2 - (x^i)^2}$

Pour faire apparaître un lagrangien, il faut introduire un paramètre d'évolution τ , généralement interprété comme étant le temps :

$$S = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{\left(\frac{dx^o}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2}$$

Il paramétrise l'histoire de la particule $x^o = x^o(\tau)$ et $x^i = x^i(\tau)$. Le lagrangien associé à ce choix de paramètre s'écrit donc :

$$L_\tau(x^o, x^i) = -m\sqrt{(\dot{x}^o)^2 - (\dot{x}^i)^2}$$

où le point désigne la dérivation par rapport à τ .

La propriété essentielle pour la suite est que cette action est invariante sous changement de τ (on dit qu'elle est invariante sous reparamétrisation) :

$$\tau' = f(\tau) \Rightarrow S' = S$$

avec $\tau'_A = \tau_A$ et $\tau'_B = \tau_B$

Un choix habituel consiste à dire que τ est le temps propre de la particule, soit :

$$d\tau = ds$$

ce qui permet de définir une 4-vitesse (puisque ds est un scalaire de Lorentz alors $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ est bien un 4-vecteur). Ce choix n'est cependant pas adapté à une formulation lagrangienne de la dynamique puisqu'il définit comme "lagrangien" $L_\tau = -m$.

Un autre choix possible est le temps de l'observateur $\tau = x^0$ pour lequel le lagrangien s'écrit :

$$L_{x^0} = -m\sqrt{1 - \frac{dx^i}{dx^0}}$$

Dans le cas général les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^i)^2}} = 0$$

soit

$$\ddot{x}^\mu (\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu) - \dot{x}^\mu (\ddot{x}^\nu \dot{x}_\nu) = 0$$

Sur ces quatre équations seules trois sont indépendantes.

On constate en outre que la hessienne

$$W_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = -\frac{m^2}{(\dot{x}^\sigma \dot{x}_\sigma)} [g_{\mu\nu} (\dot{x}^\sigma \dot{x}_\sigma) - \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu] \varpi$$

est de rang 3. Il y a une valeur propre nulle $\dot{x}^\mu W_{\mu\nu} = 0$

Le lagrangien est donc singulier. Le passage à la formulation hamiltonienne nécessite l'utilisation de l'Algorithme de Dirac-Bergmann (DBA).¹

Les moments conjugués de x^μ sont :

$$-p^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial (\dot{x}^\mu)} = m \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \quad (1.1)$$

¹Cf. appendice A. On peut aussi utiliser tout autre méthode adaptée comme, par exemple, celle de Fadeev-Jackiw [16] qui présente l'avantage de traiter directement les contraintes secondaires.

(où le signe moins est conventionnel et $\dot{x}^2 \equiv \dot{x}^\nu \cdot \dot{x}_\nu$)

Ces quatre moments sont liés par une contrainte (comme l'indique le rang trois de la hessienne) qui n'est autre que la relation de couche de masse :

$$p^\mu \cdot p_\mu = 0$$

L'inversion des relations (1.1) donne

$$\dot{x}^i(\tau) = \frac{p^i}{p^o} \dot{x}^o(\tau)$$

qui ne dit rien sur \dot{x}^o .

Comme dans la formulation lagrangienne il y a une indétermination.

L'hamiltonien canonique est même nul :

$$H_c \equiv -p^\mu \dot{x}^\mu - L = 0$$

Tout ceci est caractéristique des actions invariantes sous reparamétrisation. Utilisons DBA :

La relation de couche de masse définit une contrainte primaire :

$$\theta(\tau) \equiv p^2 - m^2 \tag{1.2}$$

et l'hamiltonien primaire s'écrit :

$$H_1 = u(\tau) \cdot \theta(\tau)$$

où $u(\tau)$ est un multiplicateur de Lagrange. On constate immédiatement que $\theta(\tau)$ est une contrainte de première classe :

$$\{\theta(\tau), \theta(\tau)\} = 0$$

et donc la condition de consistance $\dot{\theta}(\tau) = 0$ ne permet pas la détermination de $u(\tau)$. Les équations d'Hamilton, encore indéterminées à ce stade, s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}^\mu = \{x^\mu, H_1\} = -2u(\tau)p^\mu \\ \dot{p}^\mu = \{p^\mu, H_1\} = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer $u(\tau)$ et fixer la dynamique il faut imposer une condition subsidiaire (ou de jauge) sur les variables dynamiques et sur τ :

$$\Omega(x^\mu, \tau) = 0$$

Sa relation de consistance s'écrit :

$$\dot{\Omega}(\tau) \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \{\Omega, H_1\} = 0$$

et on en tire :

$$u(\tau) = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \frac{1}{2 \frac{\partial \Omega}{\partial x^\sigma} p^\sigma}$$

On voit qu'il est crucial que Ω dépende à la fois de τ et au moins de l'un des x^σ .

Cette condition subsidiaire exprime donc le paramètre d'évolution en fonction des coordonnées et correspond à un choix de paramétrisation. On peut l'écrire sous la forme :

$$\Omega(x^\mu, \tau) = \tau - F(x^\mu) \tag{1.3}$$

Dans le cas conventionnel elle s'écrit simplement :

$$\Omega(x^\mu, \tau) = \tau - x^o$$

qui donne $u(\tau) = -\frac{1}{2p^o}$

L'hamiltonien primaire est alors ² $H_1 = -\frac{p^2 - m^2}{2p^o}$

et les équations d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x}^i = \{x^i, H_1\} = \frac{p^i}{p^o} \\ \dot{p}^i = \{p^i, H_1\} = 0 \end{cases}$$

1.2 Les formes de Dirac

La dynamique relativiste d'une particule est donc engendrée pour partie par la contrainte primaire (1.2) et pour partie par la condition subsidiaire (1.3). La première contient l'information dynamique et la seconde fixe le paramètre d'évolution. Dirac s'est demandé combien de choix possibles il y avait pour cette condition Ω . Choisir un paramètre de temps revient à fixer la surface sur laquelle on exprime les conditions initiales. De fait, à chaque Ω correspond une foliation de l'espace de Minkowski paramétrée par $\tau = F(x^\mu) = cte$. A une surface donnée correspond un temps unique fixé (dans le cas habituel $\tau = x^o$, il s'agit bien sûr des hyperplans de genre espace orthogonaux à l'axe x^o), une métrique et un système de coordonnées naturel.

Appelons $\xi^i(x^\mu)$ les trois coordonnées qui paramétrisent notre surface et $\xi^o(x^\mu) \equiv \tau$ le temps. Alors

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}$$

²Cet hamiltonien est équivalent à l'hamiltonien habituel $H_p = \sqrt{(p^i)^2 + m^2}$ (on vérifie qu'il engendre les mêmes équations d'Hamilton). Pour l'obtenir, il suffit de considérer la contrainte sous la forme (équivalente) $\theta = p^o - \sqrt{(p^i)^2 + m^2} \approx 0$. Alors $u(\tau) = -1$ et $H_1 \equiv u\theta = -p^o + \sqrt{(p^i)^2 + m^2}$. Comme $x^o = \tau$ n'est plus une variable dynamique, sa variable conjuguée p^o se comporte comme une constante et n'est plus une variable dynamique (la dérivation par rapport à p^o disparaît des crochets de Poisson). L'écriture la plus simple de l'hamiltonien est bien $H_1 = \sqrt{(p^i)^2 + m^2}$.

où

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} \quad (1.4)$$

est la métrique naturelle pour ces coordonnées (η_{ij} est la métrique de la surface $\tau = F(x^\mu) = cte$).

Pour être acceptables les surfaces initiales doivent respecter la condition de causalité suivante : couper toutes les lignes d'univers, une seule et unique fois. En outre toute formulation de la dynamique relativiste doit engendrer une représentation du groupe de Poincaré en termes de ses variables dynamiques. Ces conditions sont très restrictives et Dirac a montré [12] qu'il n'existe que trois sortes de surfaces qui la respectent³ : l'Instant Form, la Point Form et la Front Form. La question se pose de savoir quelle est la meilleure surface initiale, donc la meilleure formulation de la dynamique relativiste. Il n'y a pas de réponse absolue à cette question et chaque formulation semble jouir d'avantages et d'inconvénients selon les situations auxquelles on l'applique.

Cependant on s'attend à ce que la dynamique d'un système relativiste soit la plus simple possible si le nombre de générateurs du groupe de Poincaré qui font évoluer le système hors de la surface initiale est minimum. On appelle ces générateurs les générateurs dynamiques, puisqu'ils contiennent les informations sur l'interaction. Les autres, qui forment un groupe, dit de stabilité, laissent invariante la surface initiale et sont appelés générateurs cinématiques.

Une transformation de Poincaré s'écrit :

$$U(\omega_{\mu\nu}, a_\mu) = e^{-\frac{1}{2}M^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + P^\mu a_\mu}$$

où $M^{\mu\nu}$ et P^μ sont les générateurs :

$$\begin{aligned} M^{0i} = K^i & \text{ génèrent les boosts,} \\ M^{ij} = \epsilon^{ijk} J^k & \text{ génèrent les rotations, et} \\ P^\mu & \text{ génèrent les translations d'espace-temps} \end{aligned}$$

et $\omega_{\mu\nu}$ et a_μ sont les paramètres. Les tenseurs $M^{\mu\nu}$ et $\omega_{\mu\nu}$ étant antisymétriques et de même structure.

Ces générateurs obéissent à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré :

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, P^\rho] &= g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Une réalisation simple de cette algèbre à l'aide des variables dynamiques est :

$$P^\mu \equiv p^\mu, \quad \text{et} \quad M^{\mu\nu} \equiv x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad (1.6)$$

avec

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Cette réalisation est triviale dans le sens où elle ne décrit aucune interaction et ne représente aucun choix de paramétrisation.

³En fait Leutwyler et Stern [38] ont montré plus tard qu'il en existait 2 de plus. Il y a donc 5 formes pour la dynamique relativiste mais, à notre connaissance, ces deux dernières formes n'ont pas (encore?) trouvé d'utilisation pratique.

Une transformation infinitésimale s'écrit :

$$\delta U(\omega_{\mu\nu}, a_\mu) = -\frac{1}{2}M^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu} + P^\mu\delta a_\mu$$

et l'action de δU sur une fonction scalaire $F(x^\mu)$ est :

$$\begin{aligned} \delta F = \{F, \delta U\} &= \partial^\nu F \frac{\partial(\delta U)}{\partial p^\nu} = -x^\mu \partial^\nu F \delta\omega_{\mu\nu} + \partial^\nu F a_\nu \\ &= -\frac{1}{2}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)F \delta\omega_{\mu\nu} + \partial^\mu F a_\mu \end{aligned} \quad (1.8)$$

Examinons à présent les 3 formes de Dirac.

■ L'INSTANT FORM

C'est la formulation conventionnelle de la dynamique relativiste.

Paramètre d'évolution : $\tau \equiv x^o$

Surface initiale : $\Sigma : x^o = 0$

Coordonnées naturelles : x^μ (coordonnées lorentziennes)

La métrique naturelle est bien sûr la métrique minkowskienne :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Représentation du groupe de Poincaré

Pour bâtir la représentation du groupe de Poincaré engendrée par l'Instant Form nous devons ajouter dans (1.6) l'information sur la dynamique (1.2) et sur le choix de l'Instant Form (1.3). Cela revient à éliminer la variable p^o dans (1.6) et à prendre $x^o = 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} P^i &= p^i & M^{ij} &= x^i p^j - x^j p^i \\ P^o &= \omega_p & M^{io} &= x^i \omega_p \\ && \text{avec } \omega_p &\equiv \sqrt{(p^i)^2 + m^2} \end{aligned}$$

Groupe de stabilité :

L'action d'une transformation de Poincaré (1.8) sur la surface initiale $F(x^\mu) \equiv x^o$ donne :

$$\delta F = \{F, \delta U\} = -x^i \delta\omega_{io} + \delta a_o$$

On lit sur cette relation les générateurs dynamiques :

- l'hamiltonien : P^o
- les 3 boosts : K^1, K^2, K^3

et les générateurs cinématiques :

- les 3 translations d'espace : P^1, P^2, P^3

– les 3 rotations : J^1, J^2, J^3

Le groupe de stabilité est donc de dimension 6.

■ LA POINT FORM

Paramètre d'évolution : $\tau = \sqrt{x^\sigma x_\sigma}$

Surface initiale : $\Sigma : (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = cte$. Il s'agit des hyperboloïdes de révolution centrés autour du point 0^4 . Ils sont entièrement contenus à l'intérieur du cône de lumière et respectent la condition de causalité, excepté pour le cas $\tau = 0$, où l'hyperboloïde se réduit au cône de lumière qui n'est pas une surface acceptable. Pour éviter cela on choisit $\tau > 0$.

Coordonnées naturelles :

Les coordonnées naturelles sont les coordonnées hyperboliques :

$$\begin{aligned} x^0 &= \tau ch\omega \\ x^1 &= \tau sh\omega \sin\theta \cos\varphi \\ x^2 &= \tau sh\omega \sin\theta \sin\varphi \\ x^3 &= \tau sh\omega \cos\theta \end{aligned}$$

De (1.4) et (1.9) on tire la métrique locale de l'hyperboloïde :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau^2 sh^2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^2 \sin^2\theta sh^2\omega \end{pmatrix}$$

Représentation du groupe de Poincaré : On pourrait, de la même façon que précédemment, éliminer dans (1.6) la variable dynamique associée à τ , mais les coordonnées hyperboliques compliquent un peu l'opération. Il est plus simple de suivre la méthode Dirac qui consiste à introduire dans (1.6) la contrainte (1.2) avec des multiplicateurs de Lagrange λ^μ et $\lambda^{\mu\nu}$ qui seront déterminés en demandant que les crochets de Poisson de P^μ et $M^{\mu\nu}$ avec $x^\sigma x_\sigma$ soient nuls :

$$\begin{aligned} P^\mu &= p^\mu + \lambda^\mu (p^\sigma p_\sigma - m^2) \\ M^{\mu\nu} &= x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \lambda^{\mu\nu} (p^\sigma p_\sigma - m^2) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\lambda^\mu = -\frac{x^\mu}{2(p_\sigma x^\sigma)} \text{ et } \lambda^{\mu\nu} = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} P^\mu &= p^\mu - \frac{x^\mu}{2(p_\sigma x^\sigma)} (p^\sigma p_\sigma - m^2) \\ M^{\mu\nu} &= x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \end{aligned}$$

⁴On pourrait, en définissant $\tau = \sqrt{x^2 - a^2}$, centrer ces hyperboloïdes autour de tout autre point.

Générateurs et groupe de stabilité : On lit directement sur la représentation précédente que les rotations et les boosts sont cinématiques dans la Point Form, ce qui n'est pas surprenant puisque les surfaces initiales $\Sigma : \tau = \sqrt{x_\sigma x^\sigma} = cte$ sont des scalaires sous le groupe de Lorentz. C'est d'ailleurs là le principal avantage de la Point Form. Les 4 moments P^μ sont dynamiques, le groupe de stabilité est donc de dimension 6, comme dans l'Instant Form. L'autre avantage de la Point Form est que la séparation entre générateurs cinématiques et dynamiques respecte le caractère tensoriel de ces quantités rendant les équations transparentes à ce point de vue. Cependant les coordonnées hyperboliques rendent la quantification particulièrement difficile et peu de travaux ont été effectués [17] [56] dans cette forme de la dynamique relativiste.

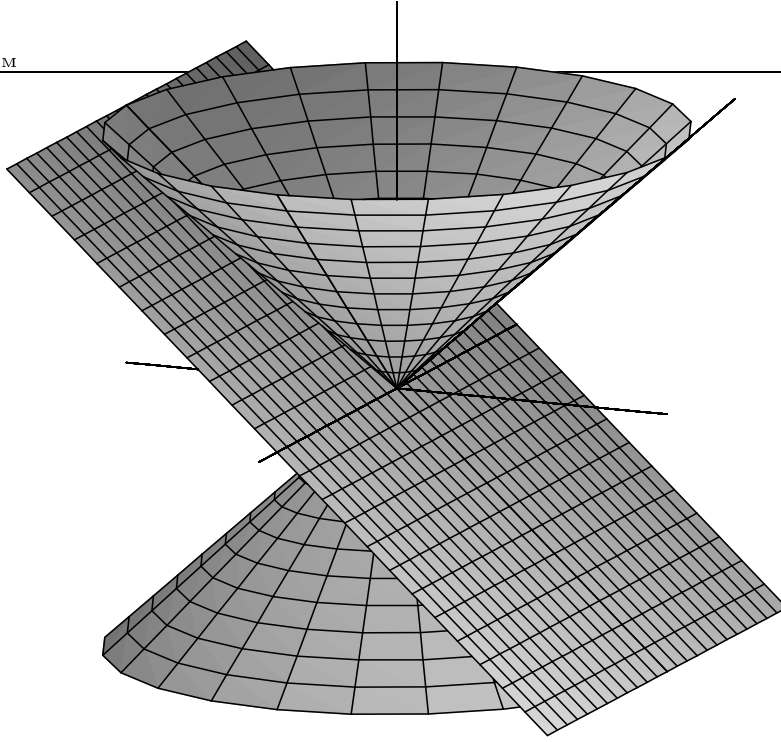
1.3 La Front Form

C'est la formulation dans laquelle on va se placer dans toute la suite de ce travail.

Paramètre d'évolution : On choisit comme axe temps l'axe $\tau \equiv x^o + x^3$. C'est l'une des génératrices du cône de lumière.

Surface initiale : La surface correspondante a pour équation : $\Sigma : x^o - x^3 = 0$. C'est l'hyperplan tangent au cône de lumière et orthogonal (au sens minkowskien) à l'axe $x^o + x^3 = 0$. On l'appelle parfois le "front de lumière"⁵. La condition de causalité n'est pas pleinement satisfaite pour les particules de masse nulle, puisque leurs histoires sont contenues dans le front de lumière. On peut donc s'attendre (et c'est ce qui arrive) à avoir des problèmes pour formuler sur le cône de lumière les théories à masses nulles. Dans la suite on s'intéressera seulement aux théories massives.

⁵Le choix de $\tau \equiv x^o + x^3$ comme paramètre d'évolution est purement conventionnel. On pourrait pareillement choisir $\tau \equiv x^o - x^3$ et $\Sigma : x^o + x^3 = 0$. Notre choix est cependant le plus répandu dans la littérature.



Cône et front de lumière

Coordonnées naturelles :

Les coordonnées naturelles de la Front Form sont celles du cône de lumière :

$$x_{CL}^{\mu} = C^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{avec} \quad C^{\mu}_{\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On notera

$$C_{\mu}^{\nu} \equiv [C^{-1}]^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En pratique⁶ :

$$\begin{aligned} x_{CL}^0 &= x^0 + x^3 \equiv x^+ \\ x_{CL}^1 &= x^1 \\ x_{CL}^2 &= x^2 \\ x_{CL}^3 &= x^0 - x^3 \equiv x^- \end{aligned}$$

Les composantes inchangées x^1 , x^2 , notées collectivement x^i ou x^{\perp} , sont dites transverses, tandis que la composante x^- est dite longitudinale⁷.

La métrique induite s'obtient à partir de (1.4) et de (1.9) :

⁶L'indice CL sera sous-entendu partout où on utilisera les indices +, \perp , et -. Ainsi par exemple $x_{CL}^0 = x^+$. Par ailleurs on notera que ce système de coordonnées n'est plus lorentzien puisque le déterminant de C est -2.

⁷Ces appellations proviennent du « référentiel de moment infini » (« infinite momentum frame »). Voir plus loin.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

et conduit au produit scalaire

$$x.y = \frac{1}{2}x^+y^- + \frac{1}{2}x^-y^+ - x^\perp y^\perp$$

Le caractère antidiagonal de (1.10) dans les indices + et - a pour effet, lors du passage des coordonnées contravariantes aux coordonnées covariantes, de changer aussi la nature de la composante :

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{1}{2}x_- \\ x^- &= \frac{1}{2}x_+ \end{aligned}$$

Ceci est particulièrement important pour les opérateurs différentiels, puisque :

$$\begin{aligned} \partial^- &= \frac{\partial}{\partial x_-} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^+} = \frac{1}{2} \partial_+ \\ \partial_- &= \frac{\partial}{\partial x^+} = 2 \frac{\partial}{\partial x_-} = 2 \partial^+ \end{aligned}$$

ne dérivent pas par rapport à la même variable. C'est pour cela que les équations dynamiques sur le cône de lumière ont une structure différente de celles de l'Instant Form. D'autre part le développement du produit scalaire :

$$p.x = \frac{1}{2}p^+x^- + \frac{1}{2}p^-x^+ - p^\perp x^\perp$$

montre que si x^+ est la coordonnée de temps alors c'est p^- , c'est-à-dire la *quatrième* composante du 4-vecteur p , qui est l'énergie du système.

Représentation du groupe de Poincaré

Dans les coordonnées du cône de lumière la contrainte (1.2) s'écrit :

$$p^- = \frac{(p^\perp)^2 + m^2}{p^+} \quad (1.11)$$

Cette relation se différencie de son analogue dans l'Instant Form sur plusieurs points :

- absence de racine carrée
- p^+ et p^- sont de même signe
- discontinuité en $p^+ = 0$

qui suggèrent que la physique sur le cône de lumière doit s'exprimer de façon radicalement différente. Nous reviendrons sur ces points dans la suite. On peut aussi remarquer que la limite des grandes énergies p^- peut s'obtenir avec de grands p^\perp , mais aussi avec de petits p^+ , ce qui a des conséquences majeures sur la renormalisation et constitue la base des travaux de Wilson sur l'application du groupe de renormalisation aux théories sur le cône de lumière [63]

De (1.11) et de (1.6), et en prenant $x^+ = 0$, on tire la représentation du groupe de Poincaré :

$$\begin{aligned}
P^+ &= p^+ & M^{-+} &= x^- p^+ \\
P^\perp &= p^\perp & M^{\perp+} &= x^\perp p^+ \\
P^- &= \xi_p^- & M^{\perp-} &= x^\perp \xi_p^- - x^- p^\perp \\
&& et & M^{12} &= x^1 p^2 - x^2 p^1 \\
&& avec & \xi_p^- &\equiv \frac{(p^\perp)^2 + m^2}{p^+}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Générateurs et groupe de stabilité :

Ecrivons les générateurs dans les coordonnées du cône de lumière :

$$P_{CL}^\mu = C^\mu{}_\nu P^\nu, \quad M_{CL}^{\mu\nu} = C^\mu{}_\alpha M^{\alpha\beta} C^\nu{}_\beta$$

donne :

$$\begin{aligned}
P^+ &= P^0 + P^3 \\
P^- &= P^0 - P^3 \\
P^\perp &= P^1, P^2 \\
M^{+1} &= J^2 + K^1 \equiv E^1 \\
M^{+2} &= -J^1 + K^2 \equiv E^2 \\
M^{+-} &= -2K^3 \\
M^{-1} &= -J^2 + K^1 \equiv F^1 \\
M^{-2} &= J^1 + K^2 \equiv F^2 \\
M^{12} &= J^3
\end{aligned}$$

L'action de ces générateurs sur la surface initiale $\Sigma : x^+ = 0$ est, d'après (1.8) :

$$\delta F = \{F, \delta U\} = -2x^\perp \delta \omega_{\perp-} + 2\delta a_-$$

où on lit les générateurs dynamiques :

- l'hamiltonien P^-
- les $M^{\perp-}$, c'est-à-dire F^1 et F^2 qui génèrent les rotations autour des directions transverses

et les générateurs cinématiques⁸ :

- Les 3 translations d'espace P^+ , P^1 , P^2
- les $M^{\perp+}$, c'est-à-dire E^1 et E^2 qui génèrent les boosts dans les directions transverses
- M^{12} , c'est-à-dire J^3 le générateur des rotations autour de l'axe longitudinal
- M^{+-} , c'est-à-dire $-2K^3$ le générateur des boosts dans la direction longitudinale.

C'est donc dans la Front Form que le groupe de stabilité, de dimension 7, est maximal.

Quelques propriétés du groupe de Poincaré sur le cône de lumière :

Un boost longitudinal est un simple changement d'échelle. La représentation matricielle de K^3 dans une base lorentzienne étant

⁸Le générateur K^3 n'est cinématique que si l'on choisit explicitement $x^+ = 0$, à l'exclusion de tout autre constante, contrairement aux autres générateurs cinématiques qui le restent pour toute surface du type $x^+ = cte$.

$$[K_{Lz}^3]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on en déduit sa représentation sur le cône de lumière :

$$[K_{CL}^3]^\mu{}_\nu = C_\alpha{}^\nu [K_{Lz}^3] C^\beta{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si on considère deux systèmes de coordonnées reliés par un boost longitudinal de rapidité ω , soit $x'^\mu = e^{-\frac{1}{2}\omega(-2[K_{CL}^3]^\mu{}_\nu)}x^\nu$, on obtient :

$$\begin{aligned} x'^+ &= e^\omega x^+ \\ x'^- &= e^{-\omega} x^- \end{aligned}$$

Ainsi le comportement du système dans un tel boost est particulièrement simple. On peut à nouveau remarquer que seule la surface $x^+ = 0$ est invariante.

A l'aide de (1.12) et de (1.7) on peut calculer sans difficulté les relations de commutation (cf. tableau ci-après). On voit apparaître plusieurs structures :

– J^3, F^1 et F^2 forment un sous-groupe :

$$\begin{aligned} \{F^1, F^2\} &= 0 \\ \{J^3, F^i\} &= \epsilon^{ij} F^j \end{aligned}$$

– K^3, E^1 , et E^2 forment un sous-groupe du groupe de stabilité :

$$\begin{aligned} \{E^1, E^2\} &= 0 \\ \{K^3, E^i\} &= E^i \end{aligned}$$

– P^i, P^-, P^+, E^i , et J^3 constituent un sous-groupe isomorphe au groupe de Galilée à 1+1 dimensions :

$$\begin{aligned} \{J^3, E^i\} &= \epsilon^{ij} E^j \\ \{J^3, P^i\} &= \epsilon^{ij} P^j \\ \{E^i, P^-\} &= -2P^i \\ \{E^i, P^j\} &= -\delta^{ij} P^+ \end{aligned}$$

avec tous les autres crochets de Poisson qui sont nuls. On peut vérifier l'isomorphisme en identifiant P^- à l'hamiltonien, P^i aux deux générateurs des translations d'espace, J^3 à la rotation, E^i aux deux boosts galiléens et P^+ à la masse qui est l'opérateur de Casimir. L'existence de ce sous-groupe galiléen laisse supposer qu'on va retrouver dans la dynamique sur le cône de lumière certains aspects de la dynamique galiléenne. Et c'est effectivement ce qui se passe. On peut montrer [58] [32] que dans un système de particules en interaction sur le cône de lumière, le mouvement relatif découple du mouvement global du centre de masse, exactement comme dans le cas non relativiste.

	P^-	P^+	P^1	P^2	E^1	E^2	J^3	K^3	F^1	F^2
P^-	0	0	0	0	$2P^1$	$2P^2$	0	P^-	0	0
P^+	0	0	0	0	0	0	0	$-P^+$	$2P^1$	$2P^2$
P^1	0	0	0	0	P^+	0	$-P^2$	0	P^-	0
P^2	0	0	0	0	0	P^+	P^1	0	0	P^-
E^1	$-2P^1$	0	$-P^+$	0	0	0	$-E^2$	$-E^1$	$2K^3$	$-2J^3$
E^2	$-2P^2$	0	0	$-P^+$	0	0	E^1	$-E^2$	$2J^3$	$2K^3$
J^3	0	0	P^2	$-P^1$	E^2	$-E^1$	0	0	F^2	$-F^1$
K^3	$-P^-$	P^+	0	0	E^1	E^2	0	0	$-F^1$	$-F^2$
F^1	0	$-2P^1$	$-P^-$	0	$2K^3$	$-2J^3$	$-F^2$	F^1	0	0
F^2	0	$-2P^2$	0	$-P^-$	$2J^3$	$-2K^3$	$-F^1$	F^2	0	0

Groupe de Poincaré sur le cône de lumière : le rectangle gris foncé est le groupe de stabilité, le rectangle en gris clair (chevauchant le précédent) est le sous-groupe galiléen.

Chapitre 2

La théorie quantique des champs sur le cône de lumière

"Qu'exige la lumière ? Que tu t'y perdes."
Vilhelm Ekelund

2.1 L'algèbre de Poincaré pour les champs

Dans la suite on va considérer une théorie d'un champ scalaire $\phi(x)$ dotée d'une interaction $V(\phi)$ sans terme dérivatif :

$$L \equiv \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (2.1)$$

Suite à l'invariance de Poincaré de ce lagrangien on sait, par application du théorème de Noether, qu'il existe 2 "courants conservés" :

square le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} L = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} L$
square et le tenseur boost-angulaire $J^{\rho\mu\nu} \equiv T^{\rho\nu} x^\mu - T^{\rho\mu} x^\nu$

dont les intégrales à travers une surface initiale $\Sigma : \tau = F(x)$ sont les "charges conservées" :

$$P^\mu \equiv \int_\Sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu$$
$$M^{\mu\nu} \equiv \int_\Sigma J^{\rho\mu\nu} d\sigma_\rho$$

qui obéissent à l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré.

Plaçons-nous sur le cône de lumière :

$$L \equiv \frac{1}{2} \partial^+ \phi \partial_- \phi - \frac{1}{2} (\partial^\perp \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (2.2)$$

donne l'équation du mouvement :

$$(\partial^+ \partial^- + m^2)\phi = -\frac{\delta V(\phi)}{\delta \phi} \quad (2.3)$$

L'élément de surface de la surface $\Sigma : \tau = x^+ = 0$ s'écrit :

$$d\sigma_\mu = \frac{1}{2} dx^- d^2 x^\perp n_\mu$$

avec $n_\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur normal à Σ . On obtient pour les générateurs :

$$\begin{aligned} P^\mu &= \frac{1}{2} \int T^{\mu+} dx^- d^2 x^\perp \\ M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int (T^{+\nu} x^\mu - T^{+\mu} x^\nu) dx^- d^2 x^\perp \end{aligned}$$

Dans le cas du champ libre ($V = 0$) on obtient explicitement :

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp (\partial^+ \phi)^2 \\ P^\perp &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp [\partial^+ \phi \partial^\perp \phi] \\ P^- &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp [(\partial^\perp \phi)^2 + m^2 \phi^2] \\ J^3 &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp \partial^+ [x^1 \partial^2 \phi - x^2 \partial^1 \phi] \\ K^3 &= \frac{1}{4} \int dx^- d^2 x^\perp x^- (\partial^+ \phi)^2 \\ E^i &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp x^i (\partial^+ \phi)^2 \\ F^i &= \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp [x^i [(\partial^\perp \phi)^2 + m^2 \phi^2] - x^- \partial^+ \phi \partial^i \phi] \end{aligned}$$

2.2 Une théorie singulière

A partir de maintenant, on va se placer à 1+1 dimensions. Le terme cinétique du lagrangien (2.2) est linéaire dans les vitesses $\frac{\partial \phi}{\partial x^+} = \frac{1}{2} \partial^- \phi$ et cela signifie que le lagrangien est singulier¹. Le référentiel du cône de lumière ne peut donc pas être approché par une suite de référentiels de Lorentz dont on ferait tendre l'impulsion p^3 vers l'infini². Une telle limite est discontinue puisque dans tout référentiel lorentzien le lagrangien (2.1) demeure régulier : les structures symplectiques sont différentes. Historiquement

¹La hessienne est identiquement nulle : $W(x, y) = \frac{\delta^2 L}{\delta[\partial^- \phi(x)] \delta[\partial^- \phi(y)]} = 0$

²On considère un référentiel lorentzien, qu'on appelle référentiel de moment infini, se déplaçant selon l'axe x^3 à vitesse v par rapport à celui du laboratoire. On a $p_{IMF}^3 = \frac{p^3 + v p^0}{\sqrt{1-v^2}}$. Dans la limite $v \rightarrow 1$ l'impulsion longitudinale p_{IMF}^3 devient infinie et la description du mouvement s'effectue en unité de $\alpha \equiv p^3 + v p^0$ qui reste fini. Dans cette limite du "moment infini", α s'identifie à l'énergie p^- sur le cône de lumière.

c'est cependant par ce biais que de nombreuses recherches ont commencé, notamment avec Weinberg [62] et Susskind [58].

Il faut donc utiliser l'algorithme de Dirac-Bergmann pour construire la dynamique. Le moment conjugué du champ est :

$$\Pi \equiv \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x^+})} = \partial^+ \phi$$

qui est indépendant de $\partial^- \phi$ et engendre la contrainte primaire :

$$\theta(x) = \Pi(x) - \partial^+ \phi(x) \approx 0 \quad (2.4)$$

L'hamiltonien primaire s'écrit :

$$H_1(x^+) = H_C(x^+) + \int dy \mu(y) \theta(y)$$

où H_c est l'hamiltonien canonique

$$H_C = \int dx^- \left[\frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + V(\phi(x)) \right]$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \frac{\delta\theta(x)}{\delta\phi(z)} &= -\frac{\delta(\partial^+ \phi(x))}{\delta\phi(z)} = -\frac{\partial^+(\delta\phi(x))}{\delta\phi(z)} = -\partial_x^+ \delta(x-z) \\ \frac{\delta\theta(x)}{\delta\Pi(z)} &= \delta(x-z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

on obtient pour la matrice des contraintes primaires :

$$C(x, y) = \partial_y^- \delta(y-x) - \partial_x^- \delta(x-y)$$

C'est un opérateur différentiel dont l'action sur une fonction f quelconque est :

$$\int dy C(x, y) f(y) = -4 \frac{\partial f(x)}{\partial x^-}$$

La condition de consistance s'écrit :

$$\dot{\theta}(X) = \{\theta(x), H_1\} = \{\theta(x), H_C(x^+)\} + \int dy C(x, y) \mu(y)$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x^-} \mu(x) = \frac{1}{4} B(x) \quad (2.6)$$

avec $B(x) \equiv -\{\theta(x), H_C(x^+)\}$. La forme de $C(x, y)$ montre que l'unique contrainte $\theta(x)$ est de deuxième classe. L'équation (2.6) est effectivement soluble³ et $C(x, y)$ admet pour inverse :

³La solution la plus générale est en fait : $C^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \text{sgn}(x^- - y^-) + g(x^+)$, où $g(x^+)$ est une fonction arbitraire que nous prenons ici nulle. Elle peut être déterminée par un choix de conditions aux limites.

$$C^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x^- - y^-)$$

d'où

$$\mu(x) = -\frac{1}{4} \int dy^- \operatorname{sgn}(x^- - y^-) B(x^+, y^-)$$

La dynamique est alors entièrement déterminée par les crochets de Dirac :

$$\begin{aligned} \{A(x), B(y)\}_{x^+=y^+}^* &= \{A(x), B(y)\}_{x^+=y^+} \\ &+ \frac{1}{4} \int dz dw \{A(x), \theta(z)\}_{x^+=z^+} \operatorname{sgn}(z^- - w^-) \{\theta(w), B(y)\}_{w^+=y^+} \end{aligned} \quad (2.7)$$

En utilisant (2.5) et (2.7) on trouve les crochets fondamentaux :

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi(y)\}_{x^+=y^+}^* &= -\frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x^- - y^-) \\ \{\Pi(x), \Pi(y)\}_{x^+=y^+}^* &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^-} \delta(x^- - y^-) \\ \{\phi(x), \Pi(y)\}_{x^+=y^+}^* &= \frac{1}{2} \delta(x^- - y^-) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les deux premiers crochets, non nuls, indiquent qu'il existe une relation causale entre deux champs pris à temps égaux. Cette situation contraste avec la dynamique conventionnelle dans les référentiels de Lorentz, mais n'est pas étonnante puisque la surface des temps égaux est ici justement de genre lumière. Ces résultats ont été obtenus par d'autres auteurs, avec d'autres méthodes, dans des contextes différents. Notamment, en étudiant l'invariance par translation le long du plan $x^0 + x^3 = 0$, Neville et Rohrlich [43] trouvent aussi un facteur $\frac{1}{2}$ dans le commutateur $[\phi(x), \Pi(y)] = \frac{1}{2} \delta(x^- - y^-)$.

Signalons un autre aspect du caractère singulier de la théorie : le problème de Cauchy est mal posé. A priori la connaissance des conditions initiales sur les surfaces caractéristiques de l'équation hyperbolique (2.3), par exemple $x^+ = 0$ et $x^- = 0$, est nécessaire pour en déterminer complètement les solutions. Or dans la Front Form la quantification est réalisée sur l'hyperplan $x^+ = 0$, en faisant correspondre les crochets (2.8) à des commutateurs. Pour satisfaire aux critères du problème de Cauchy il faudrait aussi quantifier le champ sur la surface $x^- = 0$, comme l'ont noté plusieurs auteurs [43] [55] [31], ce qui a pour inconvénient d'introduire un deuxième temps et d'obscurcir ainsi l'élaboration d'une formulation hamiltonienne.

Néanmoins, Heinzl et Werner [31] ont montré que la valeur du champ sur la surface $x^- = 0$ pouvait s'exprimer entièrement en fonction de celle sur $x^+ = 0$, pourvu que l'on introduise des conditions aux limites périodiques, levant ainsi l'apparente ambiguïté dans la formulation du problème de Cauchy.

2.3 Quantification du champ libre

La contrainte (2.4) étant de seconde classe, la quantification est réalisée en remplaçant les crochets de Dirac dans (2.8) par les commutateurs et en élevant les champs fondamentaux ϕ et Π au rang

d'opérateurs⁴. Dans le cas du champ libre $V \equiv 0$, l'équation du mouvement est l'équation de Klein-Gordon sur le cône de lumière :

$$(\partial^+ \partial^- + m^2)\phi(x) = 0$$

soit dans l'espace de Fourier⁵ :

$$(-4k^+k^- + m^2)\tilde{\phi}(k) = 0$$

avec

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^+ dk^-}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(k) e^{-i(k^+ x^- + k^- x^+)}$$

Il existe donc une distribution $\phi(k)$ telle que

$$\tilde{\phi}(k) = \delta(4k^+k^- - m^2)\phi(k)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dk^+}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{\theta(k^-)}{|k^+|} \delta(k^- - \xi_k^-) \phi(k^+, k^-) e^{-\frac{i}{2}(k^+ x^- + k^- x^+)} \\ &+ \int_{-\infty}^0 \frac{dk^+}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{\theta(-k^-)}{|k^+|} \delta(k^- - \xi_k^-) \phi(k^+, k^-) e^{-\frac{i}{2}(k^+ x^- + k^- x^+)} \end{aligned}$$

La différence avec la résolution en coordonnées de Minkowski est, qu'ici, l'énergie on-shell $\xi_k^- \equiv \frac{m^2}{k^+}$ dépend du signe de k^+ , d'où la séparation en deux intégrales ci-dessus.

On obtient :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dk^+}{2\pi} \frac{1}{k^+} \phi(k^+, \xi_k^-) e^{-\frac{i}{2}(\xi_k^- x^+ + k^+ x^-)} \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{dk^+}{2\pi} \frac{1}{k^+} \phi(-k^+, -\xi_k^-) e^{\frac{i}{2}(\xi_k^- x^+ + k^+ x^-)} \end{aligned}$$

après avoir changé k^+ en $-k^+$ dans la deuxième intégrale.

En posant comme prescription de quantification, pour $k^+ > 0$:

$$\frac{\phi(k^+, \xi_k^-)}{\sqrt{2(2\pi)k^+}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi(k^+, \xi_k^-)}{\sqrt{2\pi k^+}} &\rightarrow a_k \\ \frac{\phi(-k^+, -\xi_k^-)}{\sqrt{2\pi k^+}} &\rightarrow a_k^\dagger \end{aligned}$$

$$\text{avec } [a_k, a_q^\dagger] = \delta(k^+ - q^+)$$

⁴L'autre approche possible, la quantification par intégrale de chemin des systèmes singuliers, a été étudiée par Senjanovic [54].

⁵Le facteur 4 vient des facteurs $\frac{1}{2}$ dans la métrique.

on vérifie les commutateurs fondamentaux (2.8) et on obtient :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dk^+ \frac{1}{\sqrt{k^+}} \left\{ a_k^\dagger e^{\frac{i}{2}k^{on} \cdot x} + a_k e^{-\frac{i}{2}k^{on} \cdot x} \right\} \quad (2.9)$$

On voit apparaître, outre la divergence ultraviolette déjà présente en quantification conventionnelle, une divergence infrarouge en $k^+ \rightarrow 0$. Schleider et Seiler [51], ainsi que Maskawa et Yamawaki [40] [42], ont montré qu'il était impossible de définir de façon consistante les opérateurs a_k et a_k^\dagger en y incluant le point $k^+ = 0^6$. Longtemps on a considéré cette divergence comme une singularité supplémentaire qui venait s'ajouter à la divergence ultraviolette. Nous montrerons dans la deuxième partie qu'il n'en est rien.

Il est instructif de construire un propagateur de Feynman à partir de l'expression (2.9). Pour cela on utilise le produit chronologique T^+ qui ordonne les opérateurs selon les x^+ croissants .

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0|T^+\phi(x)\phi(y)|0 \rangle = \theta(x^+ - y^+) \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0 \rangle + \theta(y^+ - x^+) \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0 \rangle \quad (2.10)$$

A l'aide de la représentation intégrale de la fonction θ :

$$\theta(x^+ - y^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dw \frac{e^{-iw(x^+ - y^+)}}{w + i\epsilon} \quad (2.11)$$

et après avoir fait le changement de variable : $w = k^- - \xi_k^-$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dk^+}{2\pi} \frac{e^{-i[k^-(x^+ - y^+) + k^+(x^- - y^-)]}}{k^+[k^- - \xi_k^- + i\epsilon]} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dk^+}{2\pi} \frac{e^{-i[k^-(y^+ - x^+) + k^+(y^- - x^-)]}}{k^+[k^- - \xi_k^- + i\epsilon]} \end{aligned} \quad (2.12)$$

En faisant le changement $k^- \rightarrow -k^-$ et $k^+ \rightarrow -k^+$ dans la seconde intégrale on obtient finalement :

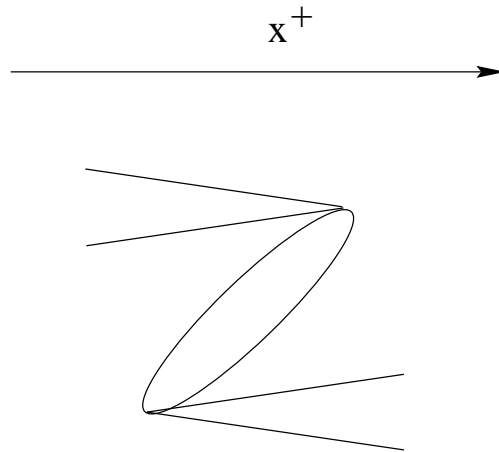
$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^-}{2\pi} e^{-ik^{off}(x-y)} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{dk^+}{2\pi} \frac{1}{k^+[k^- - \xi_k^- + i\epsilon]} + \int_{-\infty}^0 \frac{dk^+}{2\pi} \frac{1}{-k^+[-k^- + \xi_k^- + i\epsilon]} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-k^{off}(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

qui est bien l'expression manifestement covariante du propagateur de Feynman. Cependant le calcul pour en arriver là est différent du calcul habituel du propagateur de Feynman. Cette situation est typique de la physique sur le cône de lumière : il semble toujours possible de construire les mêmes quantités physiques qu'en quantification conventionnelle mais au prix de manipulations mathématiques différentes. Ici on peut noter que dans (2.12) il n'y a qu'un seul pôle en $k^- = \xi_k^-$, identique dans les deux intégrales. Cela est à rapprocher des résultats obtenus par Weinberg [62] dans le contexte du référentiel de moment infini : dans l'Ancienne Théorie des Perturbations⁷, les graphes associés à la création et à l'annihilation de particules à partir du vide (les graphes en "Z" voir figure ci-après) ont une contribution nulle⁸.

⁶ L'exclusion de la valeur $k^+ = 0$ dans la définition des opérateurs ne modifie cependant pas l'intégrale puisque c'est un point de mesure nulle.

⁷ Littéralement : Old-Fashioned Perturbation Theory. Développement non covariant où les propagateurs ont un dénominateur d'énergie : $\frac{1}{E_1 - E_2 + i\epsilon}$ et les graphes sont orientés dans le temps.

⁸ Posons $y^+ = 0$ pour simplifier. Alors (2.10) contient une fonction $\theta(x^+)\theta(k^+) = \theta(x^+k^+)$, très différente de son analogue conventionnelle $\theta(x^0k^0)$. Chaque ligne porte donc $x^+ > 0, k^+ > 0$ ou bien $x^+ < 0, k^+ < 0$ (antiparticule) et avec la conservation de k^+ aux vertex, les graphes en Z sont impossibles.



Tout ceci suggère que la théorie covariante des perturbations sur le cône de lumière ne semble pas différente de son analogue conventionnelle et, effectivement, cette équivalence a été établie depuis longtemps [8] et plus récemment [52]. La situation est légèrement différente dans le cas des fermions où il apparaît des termes instantanés supplémentaires [52]. La question se pose maintenant : comment apparaît la physique non-perturbative sur le cône de lumière ?

Chapitre 3

Le problème du vide

"Aucune affirmation ne me semble plus capitale que celle-ci : le vide n'est pas vide. Le vide est le siège de manifestations physiques des plus violentes."

John A. Wheeler

3.1 La nature du problème

La formulation axiomatique de la théorie quantique des champs [2] suppose les propriétés suivantes sur le spectre des générateurs de Poincaré :

$$P^2 \geq 0 \text{ et } P^0 \geq 0 \tag{3.1}$$

La première inégalité exclut les solutions à masse imaginaire de type tachyon et la seconde indique que le spectre de l'opérateur d'énergie, générant l'évolution dans le futur, doit se trouver dans le demi-cône de lumière positif. Ces propriétés, naturelles en quantification conventionnelle, ont ici des conséquences majeures. De (3.1) on tire :

$$(P^0)^2 - (P^3)^2 \geq (P^\perp)^2 \geq 0 \text{ soit } P^0 \geq |P^3|$$

Pour l'impulsion longitudinale sur le cône de lumière

$$P^+ \equiv P^0 + P^3 \geq |P^3| + P^3$$

soit

$$P^+ \geq 0$$

La composante P^+ est bornée inférieurement. Aucune supposition n'est faite sur la dynamique pour arriver à ce résultat. Ainsi, sur le cône de lumière, un état physique quelconque $|\Psi\rangle$ a donc un moment longitudinal positif ou nul :

$$\langle \Psi | P^+ | \Psi \rangle \geq 0$$

Considérons le champ scalaire Φ *en interaction*, pris au temps $x^+ = 0$ pour simplifier. Il peut se développer en termes d'opérateurs de créations et d'annihilations généralisés dits de "quasi-particule" $A^\dagger(k^+, k^\perp)$ et $A(k^+, k^\perp)$ tels que :

$$A(k^+, k^\perp) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx^- dx^\perp \Phi(x^-, x^\perp) e^{i(\frac{1}{2}k^+ x^- - k^\perp x^\perp)}$$

P^+ gènèrent les translations longitudinales :

$$[P^+, \Phi(x^+, x^\perp)] = -\partial^+ \Phi \text{ soit } [P^+, A(k^+, k^\perp)] = -k^+ A(k^+, k^\perp)$$

Pour un état quelconque $|q^+, q^\perp\rangle$ on en déduit :

$$P^+ A(k^+, k^\perp) |q^+, q^\perp\rangle = (q^+ - k^+) A(k^+, k^\perp) |q^+, q^\perp\rangle$$

D'où $A(k^+, k^\perp) |q^+, q^\perp\rangle$ est état propre de P^+ avec la valeur propre $q^+ - k^+$, on peut l'écrire $|(q^+ - k^+), (q^\perp - k^\perp)\rangle$. Appliquons ceci au vide $|\omega\rangle$ de la théorie en interaction qui, pour satisfaire à l'invariance de Poincaré, doit s'écrire $|q^+ = 0, q^\perp = 0\rangle$:

$$A(k^+, k^\perp) |\omega\rangle = | -k^+, -k^\perp \rangle = 0$$

puisque que le spectre de P^+ est borné inférieurement par 0. Ainsi sur le cône de lumière l'état fondamental de l'hamiltonien en interaction n'a pas de structure et s'identifie avec l'état fondamental de l'hamiltonien libre^{1,2} :

$$|\omega\rangle = |0\rangle$$

Cet état de fait a longtemps fait croire que la quantification sur le cône de lumière n'était pas capable de décrire les phénomènes physiques liés à un vide complexe tels que la brisure spontanée de symétrie, les solutions solitoniques, le confinement des quarks dans QCD, et plus généralement l'ensemble des effets non perturbatifs liés au vide. Cela semblait notamment remettre en cause le théorème de Coleman qui affirme que les symétries du vide sont les symétries de l'hamiltonien en interaction (puisque sur le cône de lumière le ket fondamental *est le même pour tous les hamiltoniens*!). Cette question a été résolue par Heinzl *et al.* [25] à la fin des années 80. Pour cela il faut revenir à l'algorithme de Dirac-Bergmann et au traitement de la divergence infrarouge.

3.2 Secteur du vide, secteur des particules

Dans le milieu des années 80 Brodski et Pauli [44] ont proposé une version discrétisée de la quantification sur le cône de lumière appelée DLCQ³, généralisant ainsi les idées de Maskawa et Yamawaki [40], qui a été appliquée à l'étude des états liés en QED et QCD avec un certain succès [46]. L'idée de départ

¹Voir [37] pour une discussion complète.

²On peut aussi s'en convaincre par l'argument heuristique suivant : pour un système de particules (de masse non nulle) en interaction, les impulsions s'ajoutent ; or, on sait que pour chacune d'elles $k^+ \geq 0$ et $k^- = \frac{m^2 + (k^\perp)^2}{k^+}$. Il est donc impossible de construire pour ce système un état qui ait à la fois une énergie non nulle et un k^+ total nul, c'est-à-dire un vide non trivial (à l'exception du cas non physique d'une énergie infinie).

³Discretized Light Cone quantization

consistait à se placer dans une boîte $[-L, +L]$, avec les conditions aux limites périodiques (CLP), pour obtenir une discrétisation des impulsions

$$k_n^+ = \frac{2n\pi}{L} \quad n \in Z$$

$$\xi_n^- \equiv \frac{m^2}{k_n^+} = \frac{m^2 L}{2n\pi}$$

et à traiter la divergence infrarouge de (2.9) par soustraction du “mode zéro” $n = 0$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ a_n^\dagger e^{i\left(\frac{n\pi x^-}{L} + \frac{m^2 L x^+}{4n\pi}\right)} + a_n e^{-i\left(\frac{n\pi x^-}{L} + \frac{m^2 L x^+}{4n\pi}\right)} \right\}$$

Les résultats physiques finals étant obtenus par passage à la limite $L \rightarrow \infty$ à la fin des calculs.⁴

Mais l’utilisation des conditions aux limites périodiques modifie les conditions d’inversion de la relation (2.6). En effet le spectre de $\frac{d}{dx}$ devient discret et le noyau de l’application C n’est pas vide : il contient les fonctions constantes. On peut choisir comme base de l’espace fonctionnel les fonctions propres de $\frac{d}{dx^-}$, soit $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{i\pi n x^-}{L}}, n \in Z \right\}$, et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{Ker} \frac{d}{dx^-} &= \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \right\} \\ \text{Im} \frac{d}{dx^-} &= \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{i\pi n x^-}{L}}, n \in Z^* \right\} \end{aligned}$$

où $\text{Vect}E$ désigne l’espace vectoriel engendré par E ⁵. Il est utile de représenter les projecteurs P et Q définis à l’appendice A à l’aide de la base précédente⁶ :

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2L} \text{projette sur Ker} \frac{d}{dx^-} \\ Q_L(x, y) &= \frac{1}{2L} \sum_{n \neq 0} e^{\frac{i\pi n(x-y)}{L}} \text{projette sur Im} \frac{d}{dx^-} \end{aligned}$$

qui vérifient bien les propriétés (A.8), notamment :

$$P_L + Q_L(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\pi n(x-y)}{L}} = \delta(x - y) \quad (3.2)$$

⁴Nous montrerons dans la suite que cette limite est hautement non triviale.

⁵En effet $\frac{d\mu(x)}{dx^-} = 0$ donne $\mu(x) = \mu_o$ constante, telle que $\mu(-L) = \mu(L)$.

⁶La discrétisation des impulsions n’est pas obligatoire pour représenter les opérateurs P et Q. Toute suite de fonctions δ_ϵ dont la limite $\epsilon \rightarrow 0$ tend vers la distribution de Dirac δ peut être utilisée pour définir le projecteur P. Par exemple :

$$P(k^+) = \lim_{\frac{1}{L} \rightarrow 0} P_L(k^+) = \begin{cases} 1 \text{ pour } k^+ = 0 \\ 0 \text{ pour } k^+ \neq 0 \end{cases}$$

$$P_L(k^+) \equiv \frac{\sin(k^+ L)}{k^+ L}$$

Voir [27] pour plus de détails.

L'équation de consistance $\dot{\theta} \approx 0$ (2.6) mène donc à la contrainte⁷

$$\theta_3 \equiv P_L * B(x) \approx 0 \quad (3.3)$$

et à l'équation dynamique

$$\frac{d}{dx} \mu_Q(x) = -\frac{1}{4} Q_L(x, y) * B(y) \quad (3.4)$$

en notant $*$ la multiplication pour les opérateurs (pour une fonction f quelconque, $f_P(x) \equiv P * f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx^- f(x)$ et $f_Q(x) \equiv (1 - P) * f(x)$). On résout cette dernière équation en calculant sa fonction de Green. En projetant

$$\frac{d}{dx} G(x - y) = \delta(x - y) \quad (3.5)$$

sur $Im \frac{d}{dx}$ on obtient

$$\frac{d}{dx} G_Q(x - y) = Q_L(x, y) * [P_L + Q_L(x, y)] = Q_L(x, y)$$

De (3.5) et (3.2) on tire

$$G(x - y) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{i\pi n(x-y)}{L}}}{in\pi} = sgn(x - y)$$

d'où

$$G_Q(x - y) = (1 - P_L)G(x - y) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{\frac{i\pi n(x-y)}{L}}}{in\pi}$$

soit

$$G_Q(x - y) = sgn(x - y) - \frac{1}{2L}(x - y)$$

et donc

$$\mu_Q(x) = -\frac{1}{4} \int dy \left\{ sgn(x - y) - \frac{1}{2L}(x - y) \right\} B(y)$$

où on lit l'inverse de la matrice des contraintes

$$C^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \left[sgn(x - y) - \frac{1}{2L}(x - y) \right]$$

⁷La projection de la contrainte primaire θ donnant lieu à :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= P * \theta = P * \Pi \approx 0 \\ \theta_1 &= Q * \theta = Q * (\Pi - \partial^+ \phi) \approx 0 \end{aligned}$$

qui n'ont pas d'intérêt dans la suite.

et on trouve

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^+=y^+} = -\frac{1}{4} \left[\text{sgn}(x-y) - \frac{1}{2L}(x-y) \right]$$

Il est intéressant de noter que ce qui différencie ce commutateur de (2.8) est simplement la soustraction du point $k^+ = 0$ dans le discret, mais qu'à la limite du continu $L \rightarrow \infty$ elle devient localement nulle. Dans cette limite la fonction $G(x-y)$ est localement égale à $G_Q(x-y)$ mais globalement elle en diffère radicalement. Il faut donc être prudent en effectuant $L \rightarrow \infty$: si des objets apparaissent dans la théorie qui s'annulent localement, mais pas globalement, le passage à cette limite doit être réalisé comme toute dernière opération.

Il est judicieux de traduire au niveau du champ l'action des opérateurs P et Q. On définit :

$$\begin{aligned} Q * \phi(x) &\equiv \varphi(x) \quad (\text{les modes normaux}) \\ P * \phi(x) &\equiv \Omega \quad (\text{le mode zéro}) \end{aligned}$$

L'application du projecteur P sur le champ total ϕ isole la (ou les) contribution(s) associée(s) à un moment longitudinal k^+ nul, caractéristique du vide. A l'inverse le projecteur Q sélectionne toutes les contributions telles que $k^+ \neq 0$ et φ représente l'ensemble des excitations à l'exception de celles associées au vide. On est donc amené à définir deux secteurs orthogonaux et complémentaires dans toute théorie exprimée sur le cône de lumière : le secteur du vide (obtenu par projection P) et le secteur des particules (obtenu par projection Q). La contrainte (3.3), dans le secteur du vide, est d'une importance capitale : elle exprime le lien entre des quantités P (Ω ou μ_P) et des quantités Q (φ ou μ_Q), par l'intermédiaire de $B(x)$ qui est associé au terme d'interaction du lagrangien. Le mode zéro Ω dépend, à travers la contrainte θ_3 , de tous les autres modes du champ φ et ce, avec la complexité de l'hamiltonien en interaction⁸. Grâce à ce schéma, la valeur moyenne du champ total dans le vide est susceptible d'avoir des valeurs tout à fait non triviales malgré la simplicité de l'état fondamental de l'hamiltonien en interaction $|\omega \rangle = |0 \rangle$ ⁹ :

$$\langle \omega | \phi | \omega \rangle = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \langle 0 | \Omega + \varphi | 0 \rangle = \langle 0 | \Omega | 0 \rangle \neq 0$$

Ainsi l'expression célèbre "sur le cône de lumière le vide est trivial" est vraie seulement si on comprend "le vide" comme étant l'état fondamental de l'hamiltonien. Elle est fautive si on se réfère aux propriétés physiques du vide, représentées par les valeurs moyennes des champs dans l'état fondamental, qui possèdent, comme on vient de le voir, toute la complexité de la théorie en interaction. Il est maintenant admis que les propriétés non perturbatives des théories quantifiées sur le cône de lumière s'expriment par la prise en compte des modes zéros des champs et leur interaction avec tous les autres modes. Divers auteurs [26], [1], [48] ont décrit avec succès la brisure spontanée de symétrie d'un champ scalaire sur le cône de lumière. D'autres [28] [41] [36] ont montré que les vides θ du modèle de Schwinger (QED_{1+1}) admettent aussi une formulation consistante. Cependant, malgré de nombreux travaux [60][33][19][47][7], la question essentielle du traitement du vide de QCD sur le cône de lumière n'a pas encore trouvé de réponse satisfaisante, notamment à cause des nombreuses contraintes de jauge qui s'ajoutent à celles spécifiques au cône de lumière.

⁸Pour s'en convaincre on peut calculer le crochet de Dirac $\{\omega, \varphi(x)\}^*$, à partir des crochets des contraintes θ_1, θ_2 et θ_3 , et constater non seulement qu'il n'est pas nul, mais qu'il est très complexe. Dans le cas d'une interaction $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$:

$$\{\omega, \varphi(x)\}^* = -\frac{1}{2} \frac{1}{2L} \frac{\lambda}{2} \left\{ m^2 + \frac{\lambda}{2} \Omega^2 + \frac{1}{2L} \frac{\lambda}{2} \int_{-L}^{+L} dy \varphi(y)^2 \right\}^{-1} \int_{-L}^{+L} dy G_Q(x-y) [2\Omega \varphi(y) + \varphi^2(y)]$$

⁹En fait, le choix de porter une information au niveau des opérateurs au lieu des états n'est pas exceptionnelle : l'équivalence des points de vue de Heisenberg et de Schrödinger en mécanique quantique en est un exemple. Ici cependant la trivialité de l'état fondamental impose de rechercher les propriétés du vide au niveau des opérateurs de champ.

3.3 Résolution des équations aux modes zéros : exemple de la théorie ϕ_{1+1}^4

Pour rendre ceci plus explicite considérons l'interaction $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$. En poussant DBA à son terme, on obtient, à partir de (3.4), les équations d'Hamilton qui fixent la dynamique dans le secteur Q . Il est cependant plus simple, et tout à fait équivalent, de projeter directement l'équation du mouvement sur le secteur des particules¹⁰ :

$$(\partial^+\partial^- - m^2)\varphi = m^2\Omega + \frac{\lambda}{3!}Q * (\Omega + \varphi)^3$$

et de la même façon on obtient la contrainte θ_3 par projection sur le secteur du vide¹¹ :

$$m^2\Omega + \frac{\lambda}{3!}P * (\Omega + \varphi)^3 = m^2\Omega + \frac{\lambda}{3!}\Omega^3 + \frac{\lambda}{3!}\frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} dx^- [3\Omega\varphi^2 + \varphi^3] \approx 0$$

La dynamique de la théorie est entièrement déterminée par la donnée de ces deux relations. Cependant si les crochets de Dirac permettent de déterminer les commutateurs fondamentaux, il n'en reste pas moins une ambiguïté sur l'ordre des champs φ et Ω au moment de la quantification des deux équations ci-dessus¹². Cette situation est bien connue en quantification conventionnelle. Nous choisissons ici la prescription de Weyl qui ordonne les produits de façon symétrique :

$$\begin{aligned} (\partial^+\partial^- - m^2)\varphi &= m^2\Omega + \frac{\lambda}{3!}Q * [\Omega^3 + \Omega^2\varphi + \varphi\Omega^2 + \Omega\varphi\Omega \\ &\quad + \Omega\varphi^2 + \varphi^2\Omega + \varphi\Omega\varphi + \varphi^3] \\ m^2\Omega + \frac{\lambda}{3!}\Omega^3 + \frac{\lambda}{3!}\frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} dx^- &[\Omega^2\varphi + \varphi\Omega^2 + \Omega\varphi\Omega \\ &\quad + \Omega\varphi^2 + \varphi^2\Omega + \varphi\Omega\varphi + \varphi^3] \approx 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ces équations fournissent une relation fonctionnelle opératorielle non linéaire entre le mode zéro Ω et les autres modes φ . Leur résolution est le point-clef pour accéder aux propriétés non perturbatives de la théorie. Plusieurs méthodes ont été employées à ce jour¹³ :

■ DEVELOPPEMENT PERTURBATIF : On suppose pour Ω un développement perturbatif :

$$\Omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \omega_n$$

que l'on insère dans les équations (3.6) et, en prenant pour φ la solution libre, on détermine les coefficients ω_n . Comme on pouvait s'y attendre, cette méthode, la première, ne donne pas de résultats différents des résultats perturbatifs.

¹⁰On constate, comme on pouvait s'y attendre, que l'équation du mouvement n'est inversible que dans le secteur Q .

¹¹Là aussi on aurait pu obtenir cette équation en développant $P * B(x) \approx 0$.

¹²Ce problème n'apparaît que maintenant puisque nous n'avons considéré jusqu'ici que des commutateurs qui se révélaient n'être que des c -nombres. A l'exception notable du crochet entre φ et ω qui est équivalent à la contrainte θ_3 en question.

¹³On pourra consulter [30] pour plus de précisions.

- ANSATZ DE CHAMP MOYEN : On choisit pour Ω un ansatz de champ moyen qui ne transfère aucune impulsion :

$$\Omega = \phi_o + \sum_{n>0} \omega_n a_n^\dagger a_n$$

où ϕ_o est un c-nombre constant, et on prend pour φ la solution libre. C'est avec cette méthode que Heinzl et al. [29] ont étudié la transition de phase de φ_{1+1}^4 . Nous généraliserons cette méthode en proposant une version continue et en développant le champ φ en série de Haag.

- TRONCATION A LA TAMM-DANCOFF : Introduite après la guerre par I. Tamm et S.M. Dancoff en quantification conventionnelle [59] [11], cette méthode fut rapidement abandonnée à cause de la complexité de l'état du vide. Wilson et al. [46] l'utilisèrent en 1990 dans le contexte du cône de lumière (Light-Front Tamm-Dancoff). Radicalement différente des autres méthodes, elle consiste à limiter la dimension de l'espace de Fock en fixant un nombre limite de particules définissant un état. Plus précisément à l'aide des projecteurs à zéro, une, ... N particules :

$$\begin{aligned} P_o &\equiv |0\rangle\langle 0| \\ P_1 &\equiv \sum_{n>0} |n\rangle\langle n| \\ P_N &\equiv \frac{1}{N!} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N > 0} |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle\langle n_1, n_2, \dots, n_N| \end{aligned}$$

on définit le projecteur de Tamm-Dancoff qui projette sur la somme directe de tous les secteurs qui contiennent N particules ou moins :

$$\wp_N \equiv \sum_{\alpha=1}^N P_\alpha$$

La troncation de Tamm-Dancoff consiste alors à opérer le changement :

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow \wp_N a_n \wp_N \\ a^\dagger &\rightarrow \wp_N a_n^\dagger \wp_N \end{aligned}$$

Dans les deuxième et troisième parties de cette thèse nous proposons deux autres méthodes de résolution approchée des équations du mouvement et des contraintes (3.6).

Deuxième partie

L'approche continue de la quantification sur le cône de lumière

Chapitre 7

Les bases de la formulation continue

7.1 Quantification et régularisation du champ libre

Considérons l'équation de Klein - Gordon :

$$(\square + m^2)\varphi = 0$$

soit en variables de Fourier :

$$(-p^2 + m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0$$

qui admet comme solution la distribution :

$$\tilde{\varphi}(p) = \delta(p^2 - m^2)\varphi(p) \quad \text{avec } \varphi(p) \text{ fonction quelconque} \quad (7.1)$$

et on a¹

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int d^2p \delta(p^2 - m^2)\varphi(p)e^{-i\langle p, x \rangle}$$

Considérons à présent la distribution Φ telle que

$$\Phi[u] \equiv \langle \Phi, u \rangle = \int d^2y \varphi(y)u(y)$$

où $u(y)$ est une fonction de deux variables², indéfiniment dérivable à support borné et centrée autour de 0. La translatée $T_x\Phi$ de cette distribution selon un paramètre x est telle que :

$$T_x\Phi[u] = \langle T_x\Phi, u \rangle = \langle \Phi, T_xu \rangle = \int d^2y \varphi(y)u(x - y)$$

¹Où l'on note $\langle p, x \rangle$ le produit scalaire minkowskien ou sur le cône de lumière des variables off-shell : $p^0x^0 - p^1x^1$ ou $p^+x^- - p^-x^+$.

²On aura $y = (y^0, y^1)$ où $y = (y^+, y^-)$ selon que l'on se place en coordonnées minkowskiennes ou du cône de lumière.

En développant u dans l'espace de Fourier :

$$u(x-y) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{-i\langle q, x-y \rangle} f(q)$$

et en utilisant (7.1) on obtient :

$$T_x \Phi[u] = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{-i\langle p, x \rangle} \delta(p^2 - m^2) \varphi(p) f(p)$$

Il faut noter que la fonction $u(x)$, à support compact, est une fonction à décroissance rapide au sens de Schwartz [53] et que c'est donc aussi le cas pour $f(p)$. Ainsi la distribution précédente est parfaitement définie dans l'espace des x comme dans celui des p . Dans toute la suite nous postulons que cette distribution représente le champ libre de Klein-Gordon et on notera simplement $\varphi_1(x)$ en lieu et place de $T_x \Phi[u]$. Dans le cas minkowskien l'intégration sur p^0 fournit après quantification canonique :

$$\varphi_1(x) = \int \frac{dp}{(2\pi)} \frac{1}{2\sqrt{\omega_p}} \left\{ a_p^\dagger e^{i\langle p, x \rangle_M} + a_p e^{-i\langle p, x \rangle_M} \right\} f(p, \omega_p) \quad (7.2)$$

où $\langle p, x \rangle_M \equiv \omega_p x^0 - p x^1$ est le produit scalaire minkowskien, $\omega_p \equiv \sqrt{m^2 + p^2}$, et où l'on a explicitement indiqué les deux variables de f .

En imposant à la fonction f les conditions :

$$\int dp \frac{1}{2\sqrt{\omega_p}} |\langle s | a_p^\dagger | s' \rangle| |f(p, \omega_p)| < \infty$$

$$\int d^3p \frac{1}{2\sqrt{\omega_p}} |\langle r | a_p | r' \rangle| |f(p, \omega_p)| < \infty$$

où $|s\rangle$, $|s'\rangle$ et $|r\rangle$, $|r'\rangle$ sont des couples d'états arbitraires entre lesquels a_p et a_p^\dagger ont des éléments de matrice non nuls, alors l'intégrale (7.2) est exempte de toute divergence. La fonction test f va jouer le rôle d'un régulateur.

De façon analogue, on obtient sur le cône de lumière :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{p^+}} \left\{ \tilde{a}_p^\dagger e^{i\langle p, x \rangle_{CL}} + \tilde{a}_p e^{-i\langle p, x \rangle_{CL}} \right\} \tilde{f}(p^+, \xi_p^-) \equiv \varphi_1^+(x) + \varphi_1^-(x) \quad (7.3)$$

avec $\langle p, x \rangle_{CL} \equiv \frac{1}{2} p^+ x^- + \frac{1}{2} \xi_p^- x^+$ et $\xi_p^- \equiv \frac{m^2}{p^+}$

Les deux intégrales (7.2) et (7.3) sont égales : on peut les voir comme une intégrale de surface sur la variété définie par $p^2 = m^2$, calculée dans deux systèmes de coordonnées différents. La fonction test sur le cône de lumière $\tilde{f}(p^+, \xi_p^-)$ s'exprime à partir de celle en coordonnées minkowskiennes :

$$\tilde{f}(p^+, \xi_p^-) = f(p^0, p) = f\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(p^+ + \frac{m^2}{p^+}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p^+ - \frac{m^2}{p^+}\right)\right]$$

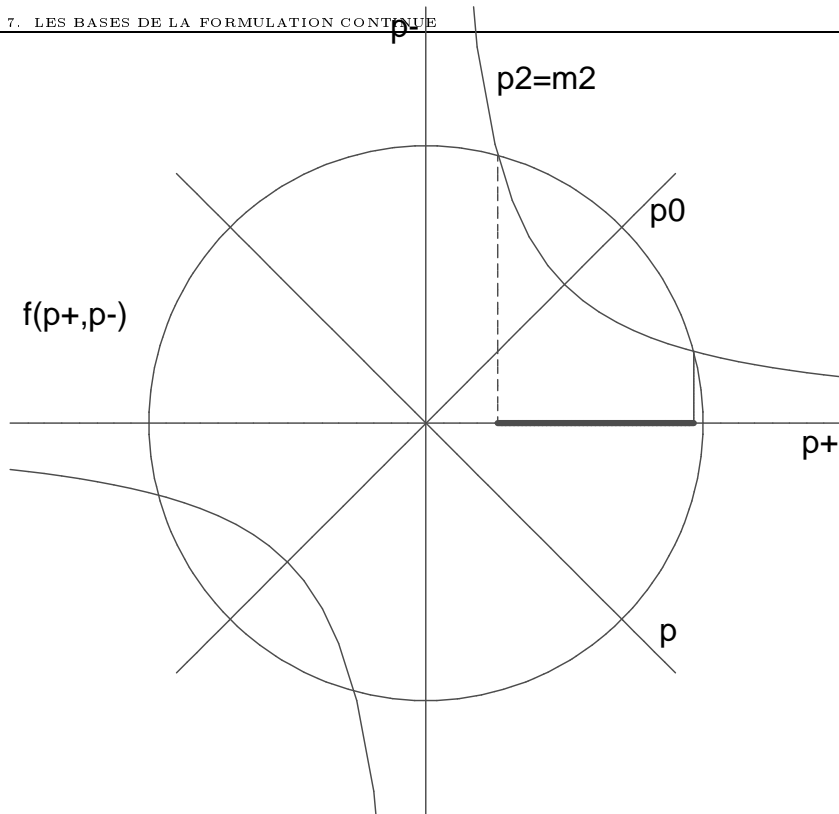
où l'on voit qu'il n'y a pas de singularité infrarouge dans (7.3) s'il n'y en a pas dans (7.2), étant donné que la divergence en $\frac{1}{\sqrt{p^+}}$ est complètement couverte par le comportement de la fonction test pour $p^+ \rightarrow 0$ (on pourra consulter la référence [21] pour une démonstration rigoureuse dans le cadre de la théorie des distributions). C'est la condition de couche de masse du cône de lumière qui est responsable de l'arrivée de cette divergence IR apparente (terme³ en $\frac{1}{\sqrt{p^+}}$ dans (7.3) qui vient de $\delta(m^2 - p^2)$), ainsi que de son effective disparition (comportement de la fonction test en 0).

Prenons par exemple la fonction test [53] indéfiniment dérivable partout et à support compact :

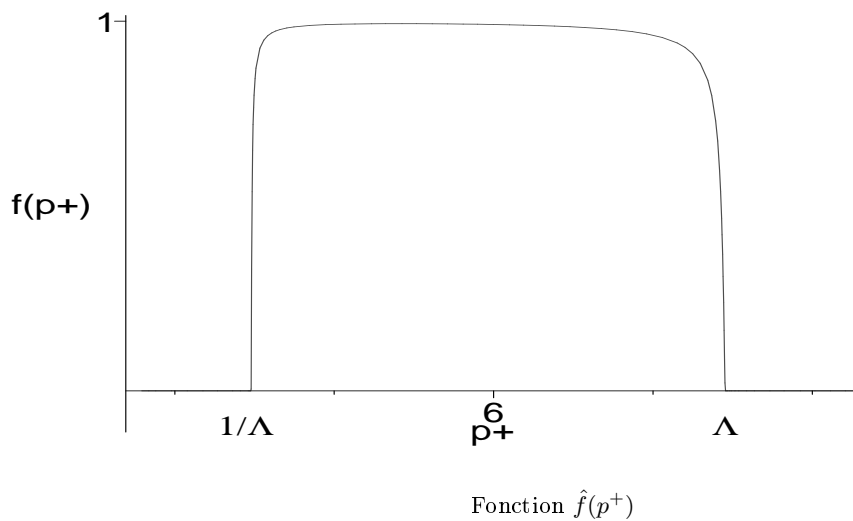
$$\begin{aligned} f(p^+, p^-) &= e^{\frac{1}{\Lambda}} e^{\left[-\frac{1}{\Lambda^2 - (p^{+2} + p^{-2})}\right]} && \text{pour } p^{+2} + p^{-2} \leq \Lambda^2 \\ &= 0 && \text{pour } p^{+2} + p^{-2} > \Lambda^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Au besoin on peut, à partir de cette fonction, en construire une autre qui est égale à 1 dans la sphère de rayon $\Lambda - \epsilon$, va vers 0 dans la couronne $[\Lambda - \epsilon, \Lambda]$ et s'annule partout ailleurs. Cette fonction reste indéfiniment dérivable (et peut donc jouer son rôle de fonction test) pour tout ϵ arbitrairement petit. Le support de (7.4) étant le cercle de rayon Λ , elle régularise dans l'UV les deux coordonnées du cône de lumière p^+ et p^- . De la même façon $f(p^0, p^1)$ régularise dans l'UV les deux coordonnées minkowskiennes p^0 et p^1 . En imposant à cette fonction de deux variables la condition de couche de masse, on obtient la fonction d'une variable $f(\xi_p^-, p^+)$. Mais dans le cas du cône de lumière, *et seulement dans ce cas*, la condition de couche de masse induit automatiquement une régularisation dans l'IR : la coupure pour les p^+ grands se transmet aux p^+ petits : cf. figures suivantes. Dans la suite on notera simplement $\hat{f}(p) \equiv f(p^+, \xi_p^-)$.

³La racine dans les facteurs $\frac{1}{\sqrt{\omega_p}}$ et $\frac{1}{\sqrt{p^+}}$ a la même origine : une simple normalisation permettant au commutateur $[a_p, a_q^\dagger] = \delta(p - q)$ d'avoir une forme simple. Il ne faut pas la confondre avec la racine entrant dans la définition de ω_p qui a une origine fondamentale : le développement minkowskien de $p^2 - m^2$.



La fonction $f(p^+, p^-)$, qui est égale à 1 dans le disque de rayon $\Lambda - \epsilon$, et nulle en dehors. L'intersection avec l'hyperbole représentant la condition de couche de masse $p^+ = \frac{m^2}{p^-}$ détermine le support, compact, de la fonction $\hat{f}(p^+)$ indiqué par la ligne épaisse.



Le traitement du champ libre en tant que distribution agissant explicitement sur une fonction test fournit une méthode de régularisation consistante, à la fois en coordonnées minkowskiennes et sur le

cône de lumière. La régularisation de la divergence ultraviolette minkowskienne entraîne automatiquement celle des divergences ultraviolettes *et* infrarouges sur le cône de lumière sans qu'il soit nécessaire d'introduire un deuxième cut-off. Contrairement à une opinion répandue dans la littérature, il n'y a donc pas de divergence supplémentaire qui apparaisse lorsqu'on se place sur le cône de lumière. En outre la régularisation par fonctions tests évite de discrétiser les intégrales (comme dans DLCQ), ce qui est vital pour l'étude des phénomènes critiques dans le cadre de théories effectives, où la dépendance de la masse critique en fonction du cut-off doit être connue complètement (ce qui n'est possible qu'avec une formulation continue de la théorie).

Par ailleurs, l'utilisation des fonctions tests trouve une justification supplémentaire dans le cadre du problème de Cauchy (cf. chapitre 2). Heinzl et Werner [31] ont montré que la valeur du champ sur la surface caractéristique $x^- = 0$ pouvait s'exprimer entièrement en fonction de celles sur l'autre caractéristique $x^+ = 0$, si l'on impose à l'amplitude $\varphi(p)$ la condition :

$$\lim_{p^+ \rightarrow 0} \frac{1}{p^+} \varphi(p^+, \frac{m^2}{p^+}) = 0$$

En considérant le champ comme une distribution agissant sur des fonctions tests, cette condition s'applique à celles-ci :

$$\lim_{p^+ \rightarrow 0} \frac{1}{p^+} f(p^+, \frac{m^2}{p^+}) = 0$$

et se trouve automatiquement satisfaite par les fonctions tests que nous avons définies (par exemple (7.4)). Le problème de Cauchy est alors bien posé et la donnée du champ et de sa vitesse en tout point de la surface $x^+ = 0$ suffit pour déterminer une solution unique à l'équation de Klein-Gordon sur le cône de lumière. On pourra consulter [31] pour une étude approfondie.

Dans la suite la méthode de traitement des champs en tant que distributions et d'utilisation des fonctions tests comme régulateurs sera appelée Continuum Light Cone Quantisation (CLCQ), par opposition à la méthode de discrétisation DLCQ.

7.2 Développement du champ en interaction en série de Haag

Pour construire la solution en interaction nous allons utiliser un développement en série de Haag [23] [22], dont les termes $\phi_n(x)$ sont les puissances successives du champ libre prises dans l'ordre normal. Cette méthode est connue, dans la théorie conventionnelle, pour être équivalente à un développement perturbatif. Dans notre problème cependant, le développement conjoint du champ *et* du mode zéro permet d'atteindre les domaines non perturbatifs.

Le champ total en interaction s'écrit :

$$\phi(x) = \phi_o + \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x)$$

avec (on se limitera à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned}
 \phi_o &= \text{terme } c - \text{nombre, constant} \\
 \phi_1(x) &= \varphi_1(x), \text{ champ libre} \\
 \phi_2(x) &= \int dy_1^- dy_2^- : \left\{ g_2^{++}(x^- - y_1^-, x^- - y_2^-) \varphi_1^+(y_1) \varphi_1^+(y_2) \right. \\
 &\quad + g_2^{+-}(x^- - y_1^-, x^- - y_2^-) \varphi_1^+(y_1) \varphi_1^-(y_2) \\
 &\quad + g_2^{-+}(x^- - y_1^-, x^- - y_2^-) \varphi_1^-(y_1) \varphi_1^+(y_2) \\
 &\quad \left. + g_2^{--}(x^- - y_1^-, x^- - y_2^-) \varphi_1^-(y_1) \varphi_1^-(y_2) \right\} :
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

où tous les champs φ_1 sont pris à temps égaux⁴ et les fonctions g_2 sont des amplitudes inconnues à déterminer. En insérant (7.3) dans (7.5) et en développant les fonctions g_2 dans l'espace de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dk_1^+ dk_2^+}{\sqrt{k_1^+ k_2^+}} \hat{f}(k_1^+) \hat{f}(k_2^+) \left\{ g_2^{++}(k_1^+, k_2^+) \left[a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger e^{\frac{i}{2}(k_1^+ + k_2^+)x^-} + a_{k_1} a_{k_2} e^{\frac{i}{2}(k_1^+ + k_2^+)x^-} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[g_2^{+-}(k_1^+, -k_2^+) + g_2^{-+}(-k_2^+, k_1^+) \right] a_{k_1}^\dagger a_{k_2} e^{\frac{i}{2}(k_1^+ - k_2^+)x^-} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

en utilisant les identités :

$$\begin{cases} g_2^{++}(k_1^+, k_2^+) &= g_2^{--}(k_1^+, k_2^+) \\ g_2^{-+}(-k_1^+, k_2^+) &= g_2^{+-}(k_1^+, -k_2^+) \end{cases}$$

qui assurent l'hermiticité de ϕ_2 .

La constante ϕ_o est bien sûr dans le secteur P, tandis que le champ libre φ_1 est entièrement dans le secteur Q. Le terme d'ordre 2 a des composantes dans les deux secteurs :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Omega} &\equiv P * \phi_2(x) \\
 \varphi_2(x) &\equiv Q * \phi_2(x) = \phi_2(x) - P * \phi_2(x)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Omega} &= \int_0^{+\infty} dp \hat{f}^2(p) C(p) a_p^\dagger a_p \\
 C(p) &\equiv \frac{4\pi}{p} [g_2^{+-}(p, -p) + g_2^{-+}(-p, p)]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dk_1^+ dk_2^+}{\sqrt{k_1^+ k_2^+}} \hat{f}(k_1^+) \hat{f}(k_2^+) \left\{ g_2^{++}(k_1^+, k_2^+) [a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger e^{\frac{i}{2}(k_1^+ + k_2^+)x^-} + a_{k_1} a_{k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1^+ + k_2^+)x^-}] \right. \\
 &\quad \left. + G_2(k_1^+, -k_2^+) a_{k_1}^\dagger a_{k_2} e^{\frac{i}{2}(k_1^+ - k_2^+)x^-} \right\}
 \end{aligned}$$

⁴Bien que, pour des raisons de simplicité, ce ne soit pas notre choix ici, il est possible d'écrire les intégrales de Haag de manière explicitement covariante, en rajoutant des intégrations sur les y^+ et en comprenant les moments off-shell.

où⁵

$$G_2(k_1^+, -k_2^+) \equiv \begin{cases} g_2^{+-}(k_1^+, -k_2^+) + g_2^{-+}(-k_2^+, k_1^+) & \text{si } k_1^+ \neq k_2^+ \\ 0 & \text{si } k_1^+ = k_2^+ \end{cases}$$

Dans la suite nous allons utiliser la formulation continue à l'aide des distributions pour étudier le commutateur de Pauli-Jordan, et expliquer notamment que ce commutateur a un comportement causal qualitativement différent en quantification discrète et continue. Le traitement des champs en tant que distributions permet d'élucider le couplage entre la limite sur le cut-off et celle sur la taille de la boîte ayant servi à la discrétisation, et d'exhiber le terme responsable de la brisure de causalité.

Puis nous étudierons les propriétés de la transition de phase de la théorie ϕ_{1+1}^4 , caractérisée par l'apparition d'une valeur moyenne du champ total dans le vide non nulle :

$$\langle 0|\phi|0 \rangle = \langle 0|\Omega|0 \rangle = \phi_0 \neq 0$$

C'est ϕ_0 qui sera le paramètre d'ordre de cette transition.

La méthode générale consiste à injecter les développements de Haag de φ et Ω (à l'ordre 1 puis à l'ordre 2) dans l'équation du mouvement et dans les contraintes, puis, par projection sur les états de Fock, de déterminer les amplitudes inconnues g_2 , G_2 et C . La projection de la contrainte sur les états du vide fournissant une équation déterminant le couplage critique en fonction de toutes les autres quantités.

⁵Le cas $G_2(p, -p) = 0$ exclut ainsi le mode zéro dans $\varphi_2(x)$.

Chapitre 8

Le commutateur de Pauli-Jordan

Nous allons appliquer le traitement des champs en tant que distributions au commutateur de Pauli-Jordan (ou fonction de Schwinger). La comparaison avec l'approche DLCQ est particulièrement enrichissante. Avec DLCQ les passages aux limites $L \rightarrow \infty$ (taille de la boîte) et $N \rightarrow \infty$ (borne supérieure des sommes discrètes, c'est-à-dire le cut-off ultraviolet) ne peuvent être effectués de façon directe. Or, si on se limite à des N finies, les expressions de DLCQ présentent des contributions non causales. La quantification effectuée directement dans le continu, CLCQ, va nous permettre d'éclaircir ces points.

Le commutateur de Pauli-Jordan est la fonction :

$$\Delta_{DLCQ}(x^+, x^-) \equiv [\phi(x^+, x^-), \phi(0, 0)]$$

Cette quantité relie des champs définis à des instants différents et contient donc des informations sur la dynamique de la théorie. Nous allons l'évaluer pour commencer en $x^+ = 0$ puis pour un x^+ quelconque, et comparer avec le résultat fourni par la formulation discrétisée.

8.1 Evaluation à $x^+ = 0$

Avec DLCQ, on place le système dans une boîte $[-L, +L]$

On sait que¹ :

¹On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{DLCQ}(0, x^-) &= \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\sqrt{nm}} \left\{ [a_n, a_m^\dagger] e^{-i\frac{n\pi x^-}{L}} - [a_m, a_n^\dagger] e^{i\frac{n\pi x^-}{L}} \right\} \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{4\pi n} e^{-i\frac{n\pi x^-}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi n} e^{-i\frac{n\pi x^-}{L}} - \frac{(-i)x^-}{4L} \end{aligned}$$

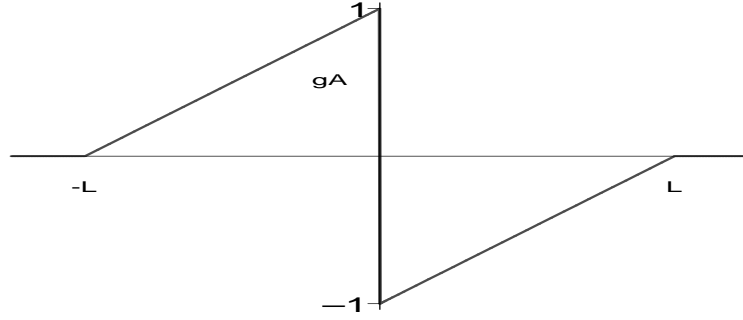
Le développement de Fourier de δ dans $[-L, L]$ avec CLP s'écrit [53] :

$$\delta(x^-) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{n\pi x^-}{L}}$$

Sachant que $\frac{d \operatorname{sgn}(x^-)}{dx^-} = \delta(x^-)$ on tire $\Delta_{DLCQ}(0, x^-) = \frac{-i}{4} \left[\operatorname{sgn}(x^-) - \frac{x^-}{L} \right]$

$$\Delta_{DLCQ}(x^+ = 0, x^-) = -\frac{i}{4} \left[\text{sgn}(x^-) - \frac{x^-}{L} \right]$$

où le terme en $\frac{x^-}{L}$ correspond à la soustraction directe du mode zéro dans la somme.



$$\text{Fonction } gA(x^-, L) \equiv 4i\Delta_{DLCQ}(0, x^-, L)$$

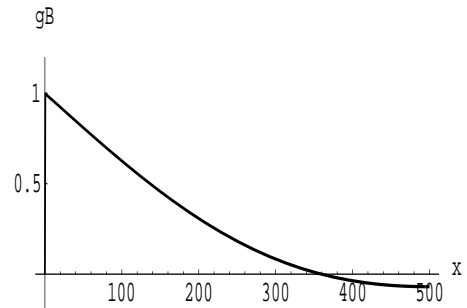
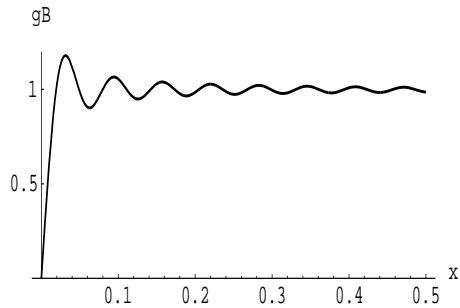
D'autre part, avec CLCQ on obtient, par un calcul analogue :

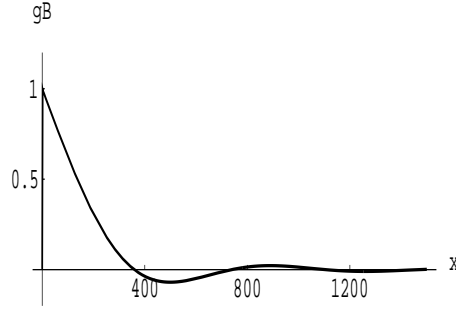
$$\Delta_{CLCQ}(x^+ = 0, x^-) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^2(2p^+) \sin(p^+ x^-) \quad (8.1)$$

En prenant, par exemple, pour \hat{f} la forme :

$$\hat{f}(p) = \begin{cases} 1 - e^{[\frac{1}{\Lambda^2 p^2 - 1} + 1]} & 0 \leq p < \frac{1}{\Lambda} \\ 1 & \frac{1}{\Lambda} \leq p \leq \Lambda - \frac{1}{\Lambda} \\ 1 - e^{[\frac{1}{\Lambda^2 (p - \Lambda)^2 - 1} + 1]} & \Lambda - \frac{1}{\Lambda} < p \leq \Lambda \\ 0 & \Lambda < p \end{cases}$$

où Λ est le cut-off, on peut évaluer numériquement le comportement de l'intégrale :



Fonction $gB(x^-, \Lambda) \equiv 4i\Delta_{CLCQ}(0, x^-, \Lambda)$

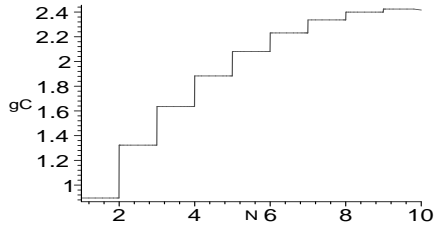
Le comportement global de Δ_{CLCQ} est proche de celui de Δ_{DLCQ} : une décroissance oscillant autour d'une pente moyenne $\frac{1}{\Lambda}$ dans la région d'ordre de grandeur Λ qui correspond à la décroissance linéaire de Δ_{DLCQ} . Pour les grands $x^- (\geq 10\Lambda)$, de lentes oscillations autour de 0 correspondent à la région dans laquelle Δ_{DLCQ} est nulle. Ces comportements reflètent dans les deux cas l'élimination du mode zéro, $n = 0$ pour Δ_{DLCQ} , le halo de points autour de $p^+ = 0$ pour Δ_{CLCQ} . Néanmoins Δ_{CLCQ} croît jusqu'à 1 dans la région des petits x^- sur une distance d'autant plus courte que Λ est grand alors que Δ_{DLCQ} décroît immédiatement à partir de 1. Cela est dû à la régularisation ultraviolette venant de la fonction test, et qui est absente dans Δ_{DLCQ} . Il est bien entendu possible d'opérer cette régularisation dans Δ_{DLCQ} en sommant jusqu'à un entier N . Mais le passage au continu devient alors hasardeux : on ne connaît pas de procédure permettant d'effectuer à la fois $L \rightarrow \infty$ et $N \rightarrow \infty$ et qui reste compatible avec la causalité. Pour examiner cette question on considère maintenant un intervalle d'espace-temps quelconque.

8.2 Evaluation pour x^+ quelconque

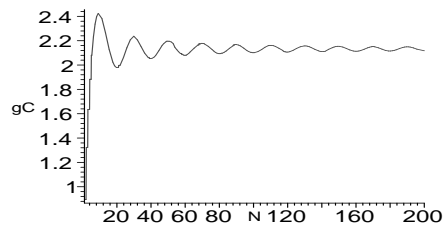
Avec DCLQ on a :

$$\Delta_{DLCQ}(x^+, x^-) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x^-}{L} + \frac{m^2 L x^+}{4\pi n}\right) \quad (8.2)$$

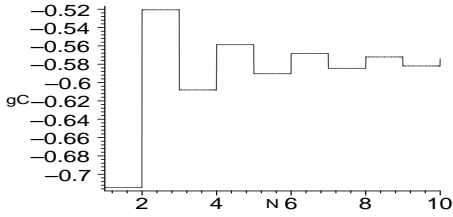
Habituellement on utilise la somme coupée dans les calculs en DLCQ avec l'idée que la limite $L \rightarrow \infty$ peut être réalisée au besoin en fin de calcul. Mais ceci pose un problème de causalité. En effet, il ne peut exister de corrélation entre des champs qui sont séparés par des intervalles de genre espace, c'est-à-dire tels que $x^+ x^- < 0$. Or la somme ci-dessus, pour L et N finis, montre de telles contributions non causales :



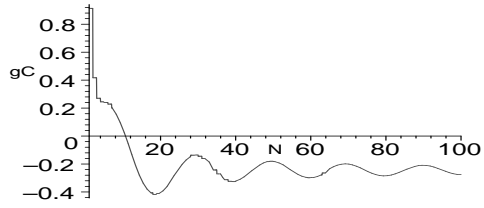
$x^+ = 1, x^- = 1, L = 10, N = 10$



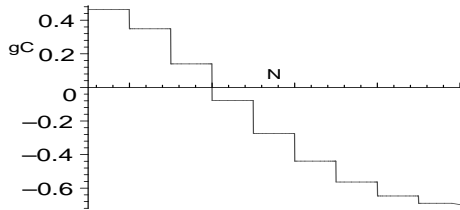
$x^+ = 1, x^- = 1, L = 10, N = 200$



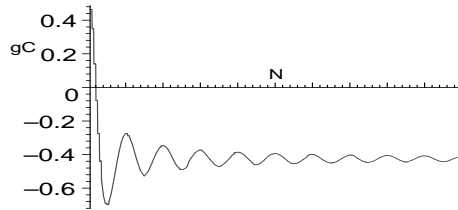
$x^+ = 1, x^- = 10, L = 10, N = 10$



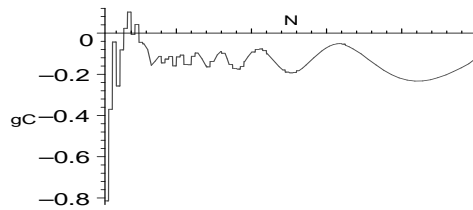
$x^+ = 1, x^- = 10, L = 100, N = 100$



$x^+ = 1, x^- = -1, L = 10, N = 10$



$x^+ = 1, x^- = -1, L = 10, N = 200$



$x^+ = 1, x^- = -1, L = 10000, N = 100$

Fonction $gC(x^+, x^-, L, N) \equiv \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x^-}{L} - \frac{m^2 L x^+}{4\pi n}\right)$

Heinzl, Kröger et Scheu [24] [50] ont étudié de façon détaillée la perte de causalité dans Δ_{DLCQ} et ont montré que celle-ci pouvait être rétablie si, au lieu d'utiliser un échantillonnage équidistant des moments ($k^+ = \frac{2\pi n}{L}$), on augmente leur densité autour de 0 avec une fréquence $\frac{1}{n}$. Le point $k^+ = 0$ devient un point d'accumulation pour le spectre de Fourier, et la densité croissante de points vers 0 permet de mieux rendre compte des oscillations du sinus. En choisissant par exemple² la discrétisation anharmonique :

$$k_n^\pm = \frac{1}{L} \sqrt{n^2 \pi^2 + m^2 L^2} \pm n\pi$$

ils ont obtenu une version causale du commutateur de Pauli-Jordan discrétisé sur le cône de lumière :

$$\Delta_{DLCQ}^c(x^+, x^-) = -\frac{1}{L} \sum_n \frac{k_n^+}{(k_n^+)^2 + m^2} \sin\left(\frac{1}{2}k_n^- x^+ + \frac{1}{2}k_n^+ x^-\right)$$

Cependant, comme l'ont noté les auteurs, ce moyen de rendre causales les expressions de DLCQ semble limité puisque chaque expression nécessite sa propre discrétisation, ce qui n'est évidemment pas acceptable.

L'expression du commutateur de Pauli-Jordan en CLCQ est :

$$\Delta_{CLCQ}(x^+, x^-) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^2(2p^+) \sin\left[p^+ x^- + \frac{m^2 x^+}{4p^+}\right]$$

Cette intégrale étant convergente ne nécessite pas de régularisation. A la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ on peut remplacer \hat{f} par 1, et le changement de variable $p^+ \rightarrow \pm \frac{p^+}{x^+}$ montre qu'elle ne dépend que du produit $x^+ x^-$. Elle admet une expression analytique [20] :

$$= -\frac{i}{4} [\text{sgn}(x^+) + \text{sgn}(x^-)] J_0(m\sqrt{x^+ x^-})$$

qui respecte bien, elle, la causalité.

Le passage au continu à partir de la formulation discrétisée n'est pas réalisable directement. La limite $L \rightarrow \infty$ dans la somme ne peut pas être prise avant d'avoir effectué la sommation sur N , car le sinus oscille fortement et le résultat est indéfini. On peut se demander à partir de quel moment la causalité est perdue et essayer de comprendre comment se réalise le passage du discret au continu.

A cette fin on considère le peigne de Dirac :

$$\begin{aligned} T_p(x) &= \sum_{p=-P}^{+P} c(x) \delta(x-p) \\ c(p) &= \frac{e^{i(ax+b/x)}}{x} \left(1 - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) \end{aligned}$$

Cette distribution agit sur la fonction test

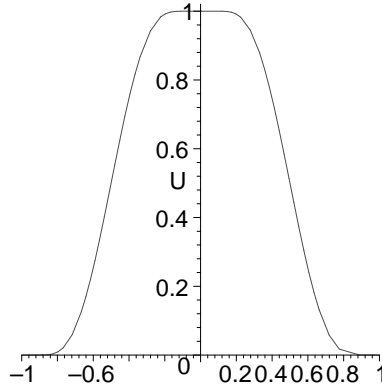
$$\begin{cases} \Omega_M(x) = \sum_{m=-M}^{+M} U(x-m) & \text{pour } |x| \leq M+1 \\ \Omega_M(x) = 0 & \text{pour } |x| \geq M+1 \end{cases}$$

²Pour $k_n^+ \sim 0$, c'est-à-dire $n \rightarrow -\infty$, on obtient bien $\Delta k_n^+ \sim \frac{1}{n}$.

définie à partir de fonctions $U(x)$ ³ indéfiniment dérivables, décomposant l'unité sur l'intervalle $] -1, 1[$, et nulles ailleurs :

$$\forall x \in] -1, 1[\quad U(x) + U(x - 1) = 1 \tag{8.3}$$

De cette façon $\Omega_M(x)$ décompose l'unité⁴ sur l'intervalle $[-M, M]$.



Fonction $U(x)$

³Un exemple de fonction U est :

$$\begin{cases} U(x) &= \frac{1}{U(0)} \int_{|x|}^1 e^{-\frac{1}{t(1-t)}} dt & \text{pour } |x| < 1 \\ U(x) &= 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

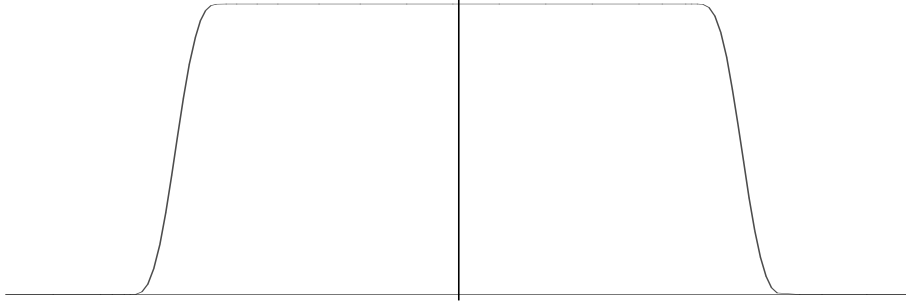
⁴De (8.3) il vient la propriété suivante sur la transformée de Fourier $V(k)$ de $U(x)$

$$V(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 2n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier non nul} \end{cases}$$

qui est nécessaire pour l'inversion des coefficients de la série de Fourier d'une distribution agissant sur $U(x)$: pour $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\frac{in\pi x}{L}}$ on obtient

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) U\left(\frac{x}{L}\right) e^{-\frac{2in\pi x}{L}} dx$$

Si f est une fonction L -périodique intégrable, les c_n sont les coefficients de Fourier standards puisque $U\left(\frac{x}{L}\right) + U\left(\frac{x}{L} - 1\right) = 1$.


 Fonction $\Omega_M(x)$ décomposant l'unité sur $[-M, M]$

L'action de $T_p(x)$ sur $\Omega_M(x)$ est :

$$\langle T_p(x), \Omega_M(x) \rangle = \sum_{p=-P}^{+P} \sum_{m=-M}^{+M} \int_{-\infty}^{+\infty} c(x) U(x-m) \delta(x-p) dx \quad (8.4)$$

soit

$$\sum_{p=-P}^{+P} c(p) \sum_{m=-M}^{+M} U(p-m)$$

A la limite $M \rightarrow \infty$ la deuxième somme devient 1 en tout point et on trouve

$$\sum_{p=-P}^{+P} c(p) = \sum_{p=1}^{+P} \frac{\sin(ap + b/p)}{p}$$

En posant $a \equiv \frac{\pi x^-}{L}$ et $b \equiv \frac{m^2 L x^+}{4\pi}$ on retrouve, à la limite $P \rightarrow \infty$, le commutateur de Pauli-Jordan en DLCQ :

$$T_{ab}(x)[\Omega] \equiv \lim_{P \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \langle T_p(x), \Omega_M(x) \rangle = 2i\pi \Delta_{DLCQ}(x)$$

Par ailleurs, sachant le développement en série de Fourier [53] :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(x-p) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{2ip\pi x}$$

(8.4) s'écrit à la limite $P \rightarrow \infty$:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int c(x) e^{2ip\pi x} \sum_{m=-M}^{+M} U(x-m)$$

La deuxième somme devient 1 là aussi avec $M \rightarrow \infty$ et on obtient :

$$T_{ab}(x)[\Omega] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I(p)$$

avec

$$\begin{aligned} I(p) &\equiv \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Omega(x) \frac{e^{i[(a+2p\pi)x+b/x]}}{x} \left(1 - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} dx \sin[(a+2p\pi)x+b/x] \left(1 - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) \end{aligned}$$

La première intégrale

$$I_1(p) \equiv \int_0^{+\infty} dx \sin[(a+2p\pi)x+b/x]$$

est connue [20]

$$I_1(p) = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}(a+2p\pi) + \operatorname{sgn}(b)] J_0(2\sqrt{(a+2p\pi)b})$$

La deuxième

$$I_2(p) \equiv \int_0^{+\infty} dx \sin[(a+2p\pi)x+b/x] \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

s'exprime facilement à partir de la première :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{db} \int_0^{+\infty} dx \sin[(a+(2p+1)\pi)x+b/x] - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{db} \int_0^{+\infty} dx \sin[(a+(2p-1)\pi)x+b/x] \\ &= \frac{1}{2\pi b} \left\{ [\operatorname{sgn}(a+(2p+1)\pi) + \operatorname{sgn}(b)] J_1(2\sqrt{(a+(2p+1)\pi)b}) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi b} \left\{ \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}(a+(2p-1)\pi) + \operatorname{sgn}(b)] J_1(2\sqrt{(a+(2p-1)\pi)b}) \right\} \end{aligned}$$

où J_0 (resp. J_1) est la fonction de Bessel d'ordre 0 (resp. 1).

On obtient⁵ :

$$T_{ab}(x)[\Omega] = \frac{\pi}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\operatorname{sgn}(x^- + 2pL) + \operatorname{sgn}(x^+)) J_0(m\sqrt{x^+x^- + 2pLx^+})$$

⁵On peut se convaincre de la validité de cette expression en l'évaluant pour $x^\pm = 0$. Sachant que $\forall N > 0$

$$\sum_{p=-N}^{+N} \operatorname{sgn}(x^- + 2pL) = \operatorname{sgn}(x^-)$$

$$\frac{1}{2L} \sum_{p=-N}^{+N} \{ \operatorname{sgn}[x^- + (2p+1)L][x^- + (2p+1)L] - \operatorname{sgn}[x^- + (2p-1)L][x^- + (2p-1)L] \} = \frac{x^-}{L}$$

et que

$$J_0(0) = 1 \text{ et } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} J_1(m\sqrt{a}) = \frac{m}{2}$$

on voit que l'on retrouve bien l'expression de $\Delta_{DLCQ}(0, x^-)$

$$-\frac{\pi}{2} \frac{1}{mLx^+} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ (sgn(x^- + (2p+1)L) + sgn(x^+)) \sqrt{x^2 + (2p+1)Lx^+} J_1(m\sqrt{x^2 + (2p+1)Lx^+}) \right. \\ \left. - (sgn(x^- + (2p-1)L) + sgn(x^+)) \sqrt{x^2 + (2p-1)Lx^+} J_1(m\sqrt{x^2 + (2p-1)Lx^+}) \right\}$$

il est important de noter que ce dernier terme est l'analogie du terme en $\frac{x^-}{L}$ apparaissant dans l'expression en $x^+ = 0$ de $\Delta_{DLCQ}(0, x^-)$ qui correspond à la soustraction du mode zéro. En décomposant selon le signe de p la première somme devient :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ [sgn(x^-) + sgn(x^+)] J_0(m\sqrt{x^+x^-}) + \sum_{p=1}^N \left[[1 + sgn(x^+)] J_0(m\sqrt{x^+x^- + pLx^+}) + [-1 + sgn(x^+)] J_0(m\sqrt{x^+x^- - 2pLx^+}) \right] \right\}$$

car

$$\forall p > 0 \quad sgn(x^- \pm 2pL) = \pm 1$$

On peut le réécrire :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ [sgn(x^-) + sgn(x^+)] J_0(m\sqrt{x^+x^-}) + 2sgn(x^+) \sum_{p=1}^N J_0(m\sqrt{x^+x^- + 2pLx^+sgn(x^+)}) \right\}$$

Par un calcul similaire, on obtient pour la seconde somme :

$$2\sqrt{x^+x^- + (2N+1)Lx^+sgn(x^+)} J_1(m\sqrt{x^+x^- + (2N+1)Lx^+sgn(x^+)})$$

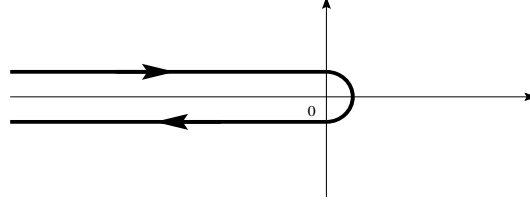
Rassemblant tout cela, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{ab}(x)[\Omega] &= 2i\pi \Delta_{DLCQ} \\ &= 2i\pi \Delta_{CLCQ} \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \pi \sum_{p=1}^N sgn(x^+) J_0(m\sqrt{x^+x^- + 2pLsgn(x^+)x^+}) \\ &\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{mLx^+} \sqrt{x^2 + (2N+1)Lsgn(x^+)x^+} J_1(m\sqrt{x^2 + (2N+1)Lsgn(x^+)x^+}) \end{aligned}$$

On a ainsi fait apparaître les termes qui différencient Δ_{DLCQ} de Δ_{CLCQ} . Il reste à étudier leur comportement dans la limite $L \rightarrow \infty$. Auparavant, il faut effectuer la limite $N \rightarrow \infty$ qui n'apparaît pas encore clairement. Pour cela on va utiliser une des nombreuses représentations intégrales des fonctions de Bessel :

$$J_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dz}{z} e^{(z - \frac{x^2}{4z})}$$

où C est le contour entourant le demi-axe réel négatif :



Il devient alors possible d'effectuer la sommation sur p :

$$\sum_{p=1}^N J_o(m\sqrt{x^+x^- + 2pL\text{sgn}(x^+)x^+}) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dz}{z} e^{(z - \frac{\alpha+\beta}{z})} \frac{1 - e^{-\frac{N\beta}{z}}}{1 - e^{-\frac{\beta}{z}}}$$

avec $\alpha \equiv \frac{m^2 x^+ x^-}{4}$ et $\beta \equiv \frac{m^2 L x^+ \text{sign}(x^+)}{2}$.

Il vient :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dz}{z} e^{\left[z - \frac{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{z}}{z}\right]} \frac{\text{sh}\left(\frac{\beta N}{2z}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\beta}{2z}\right)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dz}{z} e^{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}(N+1)} \left[z - \frac{1}{z}\right]} \frac{\text{sh}\left(\frac{N\beta z}{2\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}(N+1)}}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\beta z}{2\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}(N+1)}}\right)} \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable : $z \rightarrow -\frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}(N+1)}}{z}$. Pour $N \rightarrow \infty$ on a l'équivalent :

$$\frac{1}{\text{sh}\left(\frac{\beta z}{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}\right)} \sim \frac{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}{\beta z} \quad (8.5)$$

d'où :

$$\sum_{p=1}^N J_o(m\sqrt{x^+x^- + 2pL\text{sgn}(x^+)x^+}) \approx \frac{1}{2i\pi} \frac{\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}{\beta} \int_C \frac{dz}{z^2} e^{\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}} \left(z - \frac{1}{z}\right)} \left[\frac{e^{\frac{N\beta z}{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}}}{e^{\frac{\beta z}{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}}} - e^{-\frac{N\beta z}{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}} \right] \quad (8.6)$$

En opérant les changements de variables :

$$z \rightarrow z \frac{\sqrt{\alpha + \beta/2(N+1)}}{\alpha + \beta(N + \frac{1}{2})}$$

$$z \rightarrow z \frac{\sqrt{\alpha + \beta/2(N+1)}}{\alpha + \frac{\beta}{2}}$$

dans la première et la seconde exponentielle, on obtient :

$$\approx \frac{1}{2i\pi\beta}(\alpha + \beta(N + \frac{1}{2})) \int_C \frac{dz}{z^2} e^{(z - \frac{\alpha + \beta(N + \frac{1}{2})}{z})} - \frac{1}{2i\pi\beta}(\alpha + \beta/2) \int_C \frac{dz}{z^2} e^{(z - \frac{\alpha + \beta/2}{z})}$$

où l'on reconnaît l'intégrale de contour de la fonction J_1 :

$$\approx \frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha + \beta(N + \frac{1}{2})} J_1(2\sqrt{\alpha + \beta(N + \frac{1}{2})}) - \frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}} J_1(\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}})$$

Pour se convaincre que nous avons isolé la partie divergente, il faut maintenant montrer que le reste de notre développement (8.5) disparaît à la limite $N \rightarrow \infty$. A l'ordre suivant on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{sh\left(\frac{\beta z}{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}\right)} &\sim \frac{2}{\frac{\beta z}{\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}} + \frac{1}{24}\left(\frac{\beta z}{\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}\right)^3} \\ &\sim \frac{2}{\beta z} - \frac{2\beta z}{24(\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}})^3 + (\beta z)^2} \sim \frac{2}{\beta z} \end{aligned}$$

ce qui donne pour (8.6) :

$$\frac{1}{2i\pi\beta} \int_C \frac{dz}{z^2} e^{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{2}(N+1)}[z - \frac{1}{z}]} sh\left(\frac{N\beta z}{2\sqrt{\alpha + (N+1)\frac{\beta}{2}}}\right)$$

qui se comporte comme une fonction de Bessel d'ordre 1 : elle disparaît en $N^{-\frac{1}{4}}$ à l'infini.

On obtient donc :

$$\pi sgn(x^+) \sum_{p=1}^{+\infty} J_o(m\sqrt{x^+x^- + 2pLsgn(x^+)x^+}) =$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{mLx^+} \left\{ \sqrt{x^+x^- + (2N+1)Lx^+sgn(x^+)} J_1(m\sqrt{x^+x^- + (2N+1)Lx^+sgn(x^+)}) \right. \\ \left. - \sqrt{x^+x^- + Lx^+sgn(x^+)} J_1(m\sqrt{x^+x^- + Lx^+sgn(x^+)}) \right\}$$

On voit apparaître un terme qui compense exactement le dernier terme de $T_{ab}(x)[\Omega]$. On peut effectuer maintenant le passage à la limite $N \rightarrow +\infty$ et finalement :

$$\Delta_{DLCQ}(x^+, x^-, L) = \Delta_{CLCQ}(x^+, x^-) - \frac{1}{2mLx^+} \sqrt{x^+x^- + 2Lx^+sgn(x^+)} J_1(m\sqrt{x^+x^- + 2Lx^+sgn(x^+)}) + O(L^{-\frac{5}{4}})$$

Ainsi on a bien

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \Delta_{DCLQ}(x^+, x^-, L) = \Delta_{CLCQ}(x^+, x^-) \quad (8.7)$$

Le terme en J_1 qui se comporte en $L^{-\frac{3}{4}}$ est le premier terme à l'origine de la violation de la causalité. Il est issu de l'élimination du mode zéro dans la somme (8.2). Ainsi le fait de se placer dans une boîte de longueur L finie et d'utiliser la soustraction du mode zéro comme une régulation infrarouge se fait au prix de l'apparition de termes brisant la causalité. L'existence de la limite (8.7) n'indique donc pas une équivalence entre les méthodes DCLQ et CLCQ. L'élimination du terme non causal, disparaissant dans cette limite, montre que les problèmes infrarouges subsisteront dans le passage au continu de DLCQ car ce terme est justement celui qui tient compte des effets des modes zéros.

La situation de la CLCQ nous semble donc beaucoup plus satisfaisante : elle permet à la fois une régularisation consistante de la divergence infrarouge grâce aux fonctions tests et la prise en compte des effets du vide, tout en satisfaisant à l'exigence de causalité. Dans les chapitres suivants nous allons montrer que CLCQ fournit aussi des résultats plus satisfaisants que DLCQ dans l'étude de la transition de phase définie au chapitre précédent.

Chapitre 9

Calculs à l'ordre 1

On consultera la référence [21] pour un traitement détaillé.

9.1 Contraintes et régularisation des divergences

On considère le développement à l'ordre 1 du champ et à l'ordre 2 du mode zéro :

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 \\ \Omega &= \phi_o + \widehat{\Omega}\end{aligned}$$

(où l'on note $\widehat{\Omega}$ pour $\widehat{\Omega}_{11}$)

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{\sqrt{p^+}} \widehat{f}(p) \{a_p^\dagger e^{-ip^o x} + a_p e^{ip^o x}\} \\ \Omega &= \phi_o + \int_0^{+\infty} f^2(p) C(p) a_p^\dagger a_p \equiv \phi_o + \widehat{\Omega}\end{aligned}$$

Les méthodes présentées ici sont générales et seront utilisées, mutatis mutandis, pour l'ordre suivant. La contrainte s'écrit :

$$\theta_3 = m^2(\phi_o + \widehat{\Omega}) + \frac{\lambda}{3!}(\phi_o + \widehat{\Omega})^3 + \frac{\lambda}{3!} \frac{1}{V} \int dx^- \left\{ 3\phi_o \varphi_1^2 + \widehat{\Omega} \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \widehat{\Omega} + \varphi_1 \widehat{\Omega} \varphi_1 + \varphi^3 \right\} = 0$$

On obtient une équation opératorielle que l'on va projeter sur les secteurs à zéro et à une particule de l'espace de Fock. Avec les éléments de matrice ¹ non nuls :

¹Cf. appendice B pour des exemples de calculs d'éléments de matrice.

$$\begin{aligned}
 \langle 0|\varphi_1^2|0 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^2(p^+) \\
 \langle 0|\varphi_1 \hat{\Omega} \varphi_1|0 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^4(p^+) C(p^+) \\
 \langle k^+|\hat{\Omega}^n|k^+ \rangle &= \hat{f}^{2n}(k^+) C^n(k^+) \quad n = 1, 2, 3 \\
 \langle k^+|\varphi_1^2|k^+ \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}^2(k^+)}{k^+} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^2(p^+) \\
 \langle k^+|\varphi_1^2 \hat{\Omega}|k^+ \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}^4(k^+)}{k^+} C(k^+) + \frac{1}{4\pi} \hat{f}^2(k^+) C(k^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^2(p^+) \\
 &= \langle k^+|\hat{\Omega} \varphi_1^2|k^+ \rangle \\
 \langle k^+|\varphi_1 \hat{\Omega} \varphi_1|k^+ \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}^4(k^+)}{k^+} C(k^+) + \frac{1}{4\pi} \hat{f}^2(k^+) C(k^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^2(p^+) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp^+}{p^+} \hat{f}^4(p^+) C(p^+)
 \end{aligned}$$

Il vient les deux équations :

$$\begin{aligned}
 \langle 0|\theta_3|0 \rangle &= \mu^2 \phi_o + \frac{\lambda}{3!} \phi_o^3 + \frac{\lambda}{24\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) C(p) = 0 \\
 \langle k^+|\theta_3|k^+ \rangle &= \frac{\lambda}{3!} \hat{f}^6(k^+) C^3(k^+) + \frac{\lambda}{2} \phi_o \hat{f}^4(k^+) C^2(k^+) + \hat{f}^2(k^+) C(k^+) \left\{ \mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_o^2 + \frac{\lambda}{4\pi k^+} \hat{f}^2(k^+) \right\} + \frac{\lambda}{4\pi k^+} \phi_o \hat{f}^2(k^+) = 0
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

où on a utilisé la première pour simplifier la seconde, et on pose :

$$\mu^2 \equiv m^2 + \frac{\lambda}{8\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p)$$

Les intégrales sont régularisées par les fonctions f qui dépendent du cut-off Λ . Pour les évaluer, on va compter les moments en unités de μ (les moments sont à présent à comprendre comme des quantités sans dimension) et utiliser $\hat{f}(p, \frac{\Lambda}{\mu}) = \theta(p - \frac{\mu}{\Lambda}) - \theta(\frac{\mu}{\Lambda} - p)$, ce qui revient à choisir μ comme échelle de régularisation. Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) = \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} \frac{dp}{p} = 2 \ln \frac{\Lambda}{\mu}$$

et

$$\mu^2 = m^2 + \frac{\lambda}{4\pi} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)$$

qui définit la renormalisation de la masse à l'ordre le plus bas. On constate la présence d'une divergence logarithmique, qui n'est autre que la divergence perturbative correspondant au tadpole, bien connue en quantification conventionnelle. Il reste à examiner maintenant l'intégrale de (9.1a) contenant $C(p)$:

$$I_\Lambda \equiv \frac{\lambda}{24\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^4(p) C(p)$$

Dans le domaine des petits p^+ (tout en restant dans celui où $\hat{f}(p^+) = 1$) on tire de (9.1b) :

$$C(p^+) \sim -\frac{\lambda\phi_o}{4\pi p^+} \frac{\hat{f}^2(p^+)}{\hat{f}^4(p^+) \frac{\lambda}{4\pi p^+}} = -\phi_o \quad (9.2)$$

Le paramètre d'ordre ϕ_o détermine le comportement du mode zéro dans le domaine infrarouge.

Pour les grands p^+ :

$$C(p^+) \sim \frac{1}{p^+} \quad (9.3)$$

L'intégrale contenant $C(p^+)$ converge donc en $+\infty$ et diverge logarithmiquement en 0. Les effets non perturbatifs induits par la prise en compte des modes zéros n'introduisent donc pas de divergences d'une structure différente de celle déjà rencontrée, et ces divergences peuvent être absorbées dans un contre-terme de masse identique au contre-terme perturbatif. La procédure de renormalisation est donc cohérente. Avec (9.2) et (9.3) on obtient facilement :

$$I_\Lambda \equiv \frac{g}{6} \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} \frac{dp}{p} C(p) = \frac{g}{6} \phi_o \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{g}{6} \frac{\mu}{\Lambda} + o\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) + \text{fini}$$

avec

$$g \equiv \frac{\lambda}{4\pi\mu^2}$$

9.2 Caractéristiques de la transition de phase

Le paramètre ϕ_o représente les propriétés du système dans le vide. C'est la contrainte (9.1a) qui, connaissant $C(k)$, permet d'accéder au couplage critique. Dans la phase où il est non nul, le paramètre d'ordre ϕ_o devient très petit lorsqu'on approche le point critique (et de même pour $C(k)$ qui est une correction de ϕ_o). On peut donc poser $\phi_o, C(p^+) \ll 1$ et linéariser les équations (9.1). On obtient de (9.1b) :

$$C(p^+) = -g_c \phi_o \frac{1}{(g_c + p^+)}$$

que l'on reporte dans (9.1a) :

$$\frac{g_c^2}{6} \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} dp \frac{1}{p^+(g_c + p^+)} = 1$$

qui donne, après calcul direct :

$$m^2 + \frac{\lambda_c}{4\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\lambda_c}{24\pi} \left[2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} + g_c \right) \right] - \frac{\lambda_c}{24\pi} \ln g_c = 0 \quad (9.4)$$

où tous les termes divergents sont de nature logarithmique et peuvent donc être absorbés par des contre-termes de masse appropriés. On obtient :

$$\frac{g_c}{6} \ln(g_c) = 1$$

d'où on tire la valeur :

$$g_c = \frac{6}{W(6)} \simeq 4.19...$$

où W est la fonction W de Lambert (solution de $f(z)e^{f(z)} = z$). Cette valeur de g_c est 30% plus grande que la valeur correspondante obtenue avec DLCQ [29] qui est $g_{c_{DLCQ}} = 3.18$

Pour calculer la fonction $\beta_o(g)$ et comparer avec les résultats obtenus par la méthode du groupe de renormalisation, on va se placer dans le point de vue des phénomènes critiques : on conserve explicitement Λ (qui est maintenant l'échelle de validité de la théorie) dans la contrainte et dans la masse critique $M(\Lambda, g)$ qui est définie par le premier membre de la contrainte (9.1a) :

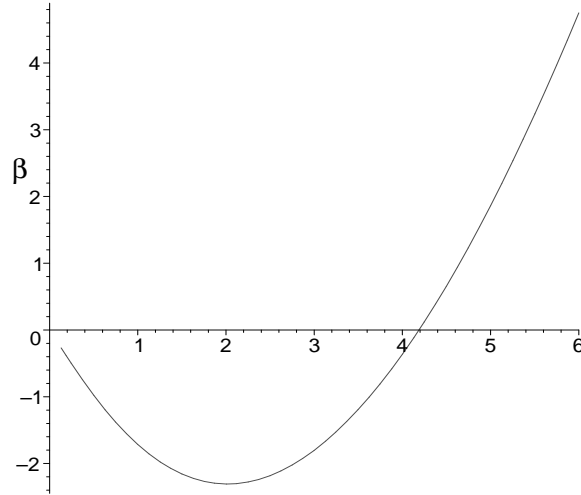
$$M^2(\lambda, \mu, g) \equiv \langle 0 | \theta_3 | 0 \rangle = \mu^2 + \frac{\lambda}{24\pi} \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} dp^+ \frac{C(p^+)}{p^+}$$

Elle s'annule à la transition de phase. De là, on peut tirer la fonction $\beta_o(g)$ en mettant M^2 sous la forme :

$$M^2(\lambda, g) = \frac{\lambda}{24\pi} \left(\frac{6}{g} - \ln g \right)$$

$$\beta_o(g) \equiv 2M^2 \left[\frac{\partial M^2}{\partial g} \Big|_{\lambda} \right]^{-1} = -2g \frac{6 - g \ln g}{6 + g} \quad (9.5)$$

et l'exposant critique $\omega \equiv \frac{d\beta_o}{dg} \Big|_{g_c} = 2$.

Fonction $\beta_o(g)$

Il est connu, par l'étude standard du groupe de renormalisation, que la fonction $\beta(g)$ doit se comporter pour les faibles couplages comme :

$$\beta(g) \underset{g \rightarrow 0}{\sim} -(4-D)g + o(g^2) \quad (9.6)$$

où D est la dimension de l'espace, et c'est bien le cas de la fonction (9.5).

Comparons ces résultats avec ceux obtenus par Parisi [45]. Pour cela il faut utiliser le couplage réduit :

$$r \equiv \frac{3\mu^2}{2\Lambda^2}g \quad (9.7)$$

qui est normalisé de façon que la constante de couplage perturbative au premier ordre soit égale à 1 ($r_1 = 1.0$). Alors, pour les grands Λ , l'équation (9.4) se ramène à :

$$ye^y = \frac{9}{r}, \quad \text{avec } y \equiv \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}$$

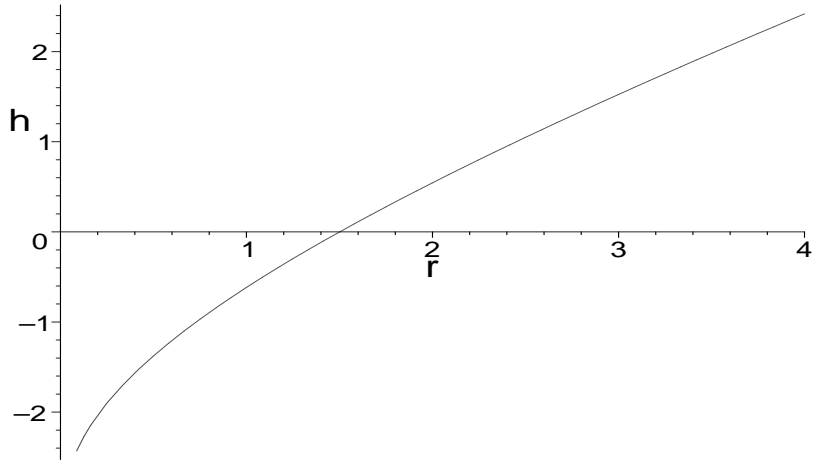
qui admet pour solution :

$$y(r) = W\left(\frac{9}{r}\right)$$

De (9.7) on tire donc :

$$g = \frac{2}{3}re^{W(\frac{9}{r})}$$

que l'on peut résoudre graphiquement :



La fonction $h(r) \equiv \frac{2}{3}re^{W(\frac{g}{r})} - 4.19$ s'annule pour $r=1.50$

Le tableau suivant compare nos résultats à ceux du 4^e ordre du groupe de renormalisation (r_4) et à ceux des théories sur réseaux (r_{lat}).

$r_1^{a,b}$	$r_4^{a,b}$	r_{lat}^c	r_{LC}
1	1.85	$1.80 \pm .05$	1.5

a) Ref. [45] b)Ref. [64] c) Ref. [10]

Bien que nous ayons considéré l'ordre 1 du développement du champ (ce qui correspond en ce sens au r_1 de Parisi), le couplage du champ au mode zéro à travers les contraintes est tout à fait non perturbatif et explique l'amélioration considérable que nous obtenons par rapport à r_1 .

Chapitre 10

Calculs à l'ordre 2

10.1 Contraintes et équation du mouvement

10.1.1 L'équation du mouvement

A l'ordre suivant, la présence du terme d'interaction φ_2 nécessite la résolution de l'équation du mouvement.

$$(4\partial^+\partial^- + m^2)\varphi_2 = -\frac{\lambda}{3!}Q * (\phi_o + \hat{\Omega} + \varphi_1 + \varphi_2)^3$$

Le terme de droite (rhs) est plutôt complexe, mais s'agissant d'étudier la théorie au voisinage de la transition de phase, on ne conservera que les termes linéaires en ϕ_o , $C(p^+)$ et g_2 :

$$(4\partial^+\partial^- + m^2)\varphi_2 = -\frac{\lambda}{3!}Q * \left[3\phi_o\varphi_1^2 + \varphi_1\hat{\Omega}\varphi_1 + \varphi_1^2\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2\varphi_1 \right]$$

La projection de cette équation sur les états de Fock à deux et zéro particules (resp. à une et une particule) va isoler dans le membre de gauche la fonction g_2^{++} (resp. G_2) :

$$\begin{aligned} \langle q_1^+ q_2^+ | (4\partial^+\partial^- + m^2)\varphi_2 | 0 \rangle &= 2 [m^2 - K(1+2)] \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} g_2^{++}(q_1^+, q_2^+) e^{\frac{i}{2}(q_1^+ + q_2^+)x^-} \\ &\quad + \delta(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) G_2(p, p) \\ \langle q_1^+ | (4\partial^+\partial^- + m^2)\varphi_2 | q_2^+ \rangle &= [m^2 - K(1-2)] \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} G_2(q_1^+, -q_2^+) e^{\frac{i}{2}(q_1^+ - q_2^+)x^-} \end{aligned}$$

avec les notations :

$$K(1 \pm 2) \equiv (q_1^+ \pm q_2^+) \left(\frac{m^2}{q_1^+} \pm \frac{m^2}{q_2^+} \right)$$

$$\begin{aligned} \delta(q_1^+, q_2^+) &= 0 \text{ si } q_1^+ \neq q_2^+ \\ &= 1 \text{ si } q_1^+ = q_2^+ \end{aligned}$$

Pareillement on projette les termes du membre de droite¹ .Sur le secteur deux particules-vide :

$$\begin{aligned} \langle q_1^+ q_2^+ | \varphi_1^2 \varphi_2 | 0 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ + q_2^+)x^-} \left\{ g_2^{++}(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} [g_2^{++}(p, q_1^+) + g_2^{++}(p, q_2^+)] \right\} \\ \langle q_1^+ q_2^+ | \varphi_2 \varphi_1^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ + q_2^+)x^-} \left\{ g_2^{++}(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} [G_2(q_1^+, -p) + G_2(q_2^+, -p)] \right\} \\ \langle q_1^+ q_2^+ | \varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 | 0 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ + q_2^+)x^-} \left\{ 2g_2^{++}(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} [2g_2^{++}(p, q_1^+) + 2g_2^{++}(p, q_2^+) + G_2(q_1^+, -p) + G_2(q_2^+, -p)] \right\} \\ \langle q_1^+ q_2^+ | \hat{\Omega} \varphi_1^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} [C(q_1^+) \hat{f}(q_1^+) + C(q_2^+) \hat{f}(q_2^+)] \\ \langle q_1^+ q_2^+ | \varphi_1 \hat{\Omega} \varphi_1 | 0 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} [C(q_1^+) \hat{f}(q_1^+) + C(q_2^+) \hat{f}(q_2^+)] \end{aligned}$$

et sur le secteur une particule-une particule :

¹Cf. appendice B pour des exemples de calculs détaillés.

$$\begin{aligned}
 \langle q_1^+ | \varphi_1^2 | q_2^+ \rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ - q_2^+)x^-} + \delta(q_1^+, q_2^+) \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \\
 \langle q_1^+ | \varphi_1^2 \varphi_2 | q_2^+ \rangle &= \langle q_2^+ | \varphi_2 \varphi_1^2 | q_1^+ \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ - q_2^+)x^-} \left\{ G_2(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) [4g_2^{++}(p, q_1^+) + 2G_2(p, q_2^+)] \right\} \\
 &\quad + \delta(q_1^+, q_2^+) \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp_1 dp_2}{p_1 p_2} \hat{f}^2(p_1) \hat{f}^2(p_2) g_2^{++}(p_1, p_2) \\
 \langle q_1^+ | \varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 | q_2^+ \rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ - q_2^+)x^-} \left\{ G_2(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) [2g_2^{++}(p, q_1^+) + 2g_2^{++}(p, q_2^+) + G_2(q_1^+, p) + G_2(p, q_2^+)] \right\} \\
 &\quad + \delta(q_1^+, q_2^+) \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp_1 dp_2}{p_1 p_2} \hat{f}^2(p_1) \hat{f}^2(p_2) G_2(p_1, p_2) \\
 \langle q_1^+ | \varphi_1^2 \hat{\Omega} | q_2^+ \rangle &= \langle q_2^+ | \hat{\Omega} \varphi_1^2 | q_1^+ \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ - q_2^+)x^-} C(q_2^+) \hat{f}^2(q_2^+) + \delta(q_1^+, q_2^+) \frac{1}{4\pi} C(q_1^+) \hat{f}^2(q_1^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \\
 \langle q_1^+ | \varphi_1 \hat{\Omega} \varphi_1 | q_2^+ \rangle &= \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{f}(q_1^+) \hat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2}(q_1^+ - q_2^+)x^-} \left[C(q_2^+) \hat{f}^2(q_2^+) + C(q_1^+) \hat{f}^2(q_1^+) \right] \\
 &\quad + \delta(q_1^+, q_2^+) \frac{1}{4\pi} C(q_1^+) \hat{f}^2(q_1^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) + \frac{1}{4\pi} \delta(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^4(p) C(p)
 \end{aligned}$$

L'application de l'opérateur Q au second membre de l'équation du mouvement correspond à la soustraction du mode zéro $q_1 = q_2$: tous les termes en $\delta(q_1, q_2)$ doivent être éliminés. En outre la fonction $\theta(q_2 - q_1)$ assure que l'on se trouve bien dans le secteur des particules où le transfert de moment est positif.

En rassemblant tout ceci on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
 \left[m^2 + \frac{\lambda}{8\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) - K(1+2) \right] g_2^{++}(q_1^+, q_2^+) &= -\frac{\lambda}{8\pi} \phi_o - \frac{\lambda}{16\pi} [C(q_1^+) \hat{f}(q_1^+) + C(q_2^+) \hat{f}(q_2^+)] \\
 &\quad - \frac{\lambda}{16} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \{ 2 g_2^{++}(p, q_1^+) + 2g_2^{++}(p, q_2^+) + G_2(q_1^+, -p) + G_2(q_2^+, -p) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[m^2 + \frac{\lambda}{8\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) - K(1-2) \right] G_2(q_1^+, -q_2^+) &= -\frac{\lambda}{4\pi} \phi_o - \frac{\lambda}{8\pi} [C(q_1^+) \hat{f}(q_1^+) + C(q_2^+) \hat{f}(q_2^+)] - \\
 &\quad - \frac{\lambda}{8} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \{ 2 g_2^{++}(p, q_1^+) + 2g_2^{++}(p, q_2^+) + G_2(q_1^+, -p) + G_2(p, -q_2^+) \}
 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$K(1 \pm 2) \equiv (q_1^+ \pm q_2^+) \left(\frac{m^2}{q_1^+} \pm \frac{m^2}{q_2^+} \right)$$

On écrira dorénavant q_1 pour q_1^+ pour alléger les écritures. On obtient le système d'équations couplées déterminant φ_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2^{++}(q_1, q_2) = g_{20}(g, \phi_o, q_1, q_2) + \frac{g}{4} \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) [2g_2^{++}(p, q_1) + 2g_2^{++}(p, q_2) \\ \quad + G_2(q_1, -p) + G_2(q_2, -p)] \\ G_2(q_1, -q_2) = 2g_{20}(g, \phi_o, q_1, -q_2) - \frac{g}{2} \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) [2g_2^{++}(p, q_1) + 2g_2^{++}(p, q_2) \\ \quad + G_2(q_1, -p) + G_2(p, -q_2)] \end{array} \right. \quad (10.1)$$

avec :

$$g \equiv \frac{\lambda}{4\pi\mu^2}$$

$$g_{20}(g, \phi_o, q_1, -q_2) \equiv -\frac{g}{4} \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2} [C(q_1) \hat{f}^2(q_1) + C(q_2) \hat{f}^2(q_2) + 2\phi_o]$$

et la même définition de μ^2 qu'à l'ordre précédent.

10.1.2 La contrainte

Après linéarisation et élimination des termes ne conservant pas le nombre de particules, elle s'écrit :

$$\theta_3 = m^2 \phi_o + m^2 \hat{\Omega} + \frac{\lambda}{3!} \frac{1}{V} \int dx^- \left\{ \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 + 3\phi_o \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \varphi_1^2 + \varphi_1 \hat{\Omega} \varphi_1 \right\}$$

avec

$$\langle q_1^+ | \hat{\Omega} | q_2^+ \rangle = \delta(q_1 - q_2) \hat{f}^2(q_1^+) C(q_1^+)$$

et les éléments de matrices déjà calculés, il vient² :

$$\left[2g_2^{++}(p, q_1^+) + \frac{1}{2} [G_2(p, -q_1^+) + G_2(q_1^+, -p)] \right]$$

$$\langle q_1^+ | \theta_3 | q_1^+ \rangle = \frac{g\phi_o}{q_1^+} C(q_1^+) [1 + g \frac{\hat{f}^2(q_1^+)}{q_1^+}] + \frac{g}{q_1^+} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \quad (10.2)$$

$$\left[2g_2^{++}(p, q_1^+) + \frac{1}{2} [G_2(p, -q_1^+) + G_2(q_1^+, -p)] \right] \quad (10.3)$$

qui relie C à g_2^{++} et G_2 et

$$\langle 0 | \theta_3 | 0 \rangle = \phi_o + \frac{2}{3} g \int_0^{+\infty} \frac{dp_1 dp_2}{p_1 p_2} \hat{f}^2(p_1) \hat{f}^2(p_2) \left[g_2^{++}(p_1, p_2) + \frac{1}{4} G_2(p_1, p_2) \right] + \frac{g}{6} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^4(p) C(p) \quad (10.4)$$

²En notant que le terme $\frac{g}{2q_1^+} G_2(q_1^+ - q_1^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p)$ s'annule car $G_2(q_1^+, -q_1^+) = 0$, le mode zéro étant explicitement pris en compte par Ω .

La donnée des équations du mouvement (10.1) et des contraintes (10.4) détermine toute la dynamique. Il s'agit d'un système d'équations intégrales couplant g_2^{++} et G_2 (le champ) et C (le mode zéro). Les équations du mouvement permettent de déterminer G_2 et g_2 en fonction de C , qui est lui-même fixé par la contrainte (10.4). Enfin la contrainte (10.4) fixe le couplage critique g_c en fonction de toutes les autres quantités.

10.2 Résolution approchée des équations du mouvement et des contraintes

Nous allons étudier la solution de (10.1) par itérations, en prenant comme termes initiaux les termes sources non intégraux³ :

$$\begin{aligned} g_2^{++(o)}(g, \phi_o, q_1, q_2) &\equiv g_{2o}(g, \phi_o, q_1, q_2) \\ G_2^{(o)}(g, \phi_o, q_1, -q_2) &\equiv 2\theta(q_1 - q_2)g_2(g, \phi_o, q_1, -q_2) \end{aligned}$$

et le terme obtenu à l'ordre précédent de la série de Haag pour C :

$$C^{(o)}(q_1) \equiv -\frac{g\phi_o}{(q_1 + g)} \quad (10.5)$$

En notant que

$$g_{2o}(q_1, q_2) + g_{2o}(q_1, -q_2) = -\frac{2q_1q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_1q_2}g_{2o}(q_1, q_2)$$

la première itération conduit aux équations :

$$\begin{aligned} g_2^{++(1)}(q_1, q_2) &= g_{2o}(q_1, q_2) - g\frac{q_1q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_1q_2} \left\{ q_1 \int_0^{q_1} dp \hat{f}^2(p) \frac{g_2(p, q_1)}{p^2 + q_1^2 - pq_1} + q_2 \int_0^{q_2} dp \hat{f}^2(p) \frac{g_{2o}(p, q_2)}{p^2 + q_2^2 - pq_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{q_1}^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) g_{2o}(p, q_1) - \frac{1}{2} \int_{q_2}^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) g_{2o}(p, q_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2^{(1)}(q_1, -q_2) &= 2g_{2o}(q_1, -q_2) + g\frac{q_1q_2}{q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2} \left\{ q_1 \int_0^{q_1} dp \hat{f}^2(p) \frac{g_{2o}(p, q_1)}{p^2 + q_1^2 - pq_1} + q_2 \int_{q_2}^{+\infty} dp \hat{f}^2(p) \frac{g_{2o}(p, q_2)}{p^2 + q_2^2 - pq_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{q_1}^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) g_{2o}(p, q_1) - \frac{1}{2} \int_0^{q_2} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) g_{2o}(p, q_2) \right\} \end{aligned}$$

Les intégrales des membres de droite peuvent être évaluées avec Maple et fournissent un résultat assez lourd. A la limite des grands q_1 on a :

$$g_2^{++(1)}(q_1, q_1) \sim \frac{1}{6}g\phi_o - \frac{g^2\phi_o}{6} \frac{1}{q_1} \left[1 - g\frac{\pi\sqrt{3}}{9} \right] + o\left(\frac{1}{q_1^2}\right) \quad (10.6)$$

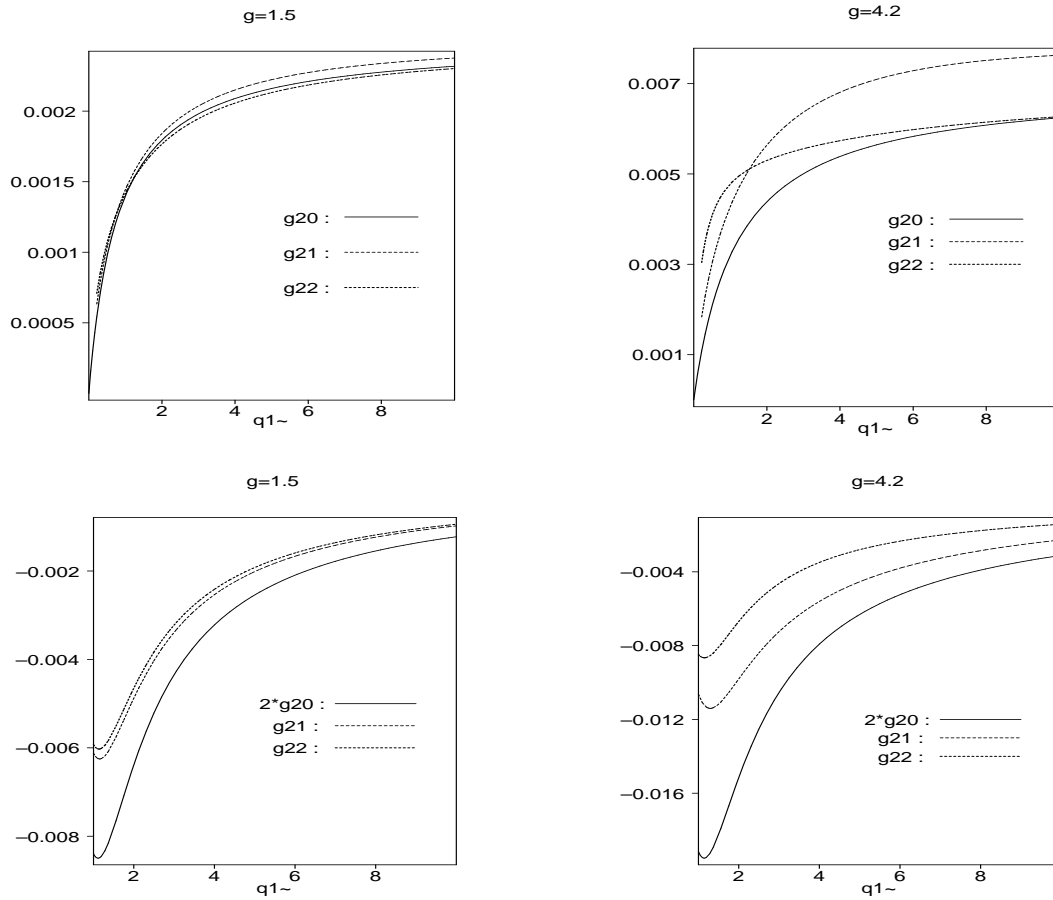
et on constate que l'on retrouve cette même limite pour $g_2^{++(o)}(q_1, q_1)$ si l'on substitue dans $C(g, \phi_o, q_1)$ un couplage effectif $g_{eff} \equiv g\left(1 - \frac{g\pi\sqrt{3}}{9}\right)$ à la place de g . De manière analogue on bâtit la solution au 2^e ordre des itérations $g_2^{++(2)}$ et $G_2^{(2)}$ où les intégrales peuvent aussi être évaluées. On peut

³Pour alléger les notations on omettra dans la suite les variables g et ϕ_o pour les rétablir lorsque ce sera nécessaire.

alors faire la constatation suivante : $g_2^{++(2)}(g, \phi_o, q_1, q_2)$ et $G_2^{(2)}(g, \phi_o, q_1, -q_2)$ restent très proches de $g_2^{++(o)}(g_{eff}, \phi_o, q_1, q_2)$ et $G^{(o)}(g_{eff}, \phi_o, q_1, q_2)$ où

$$g_{eff} \equiv \frac{g}{1 + g \frac{\pi\sqrt{3}}{9}} \quad (10.7)$$

On s'attend à ce que les itérations suivantes ne modifient pas drastiquement la forme de $g_2^{++(i)}$ et $G_2^{(i)}$. Par ailleurs les corrections apportées par les itérations suivantes fournissent des termes plus que linéaires en ϕ_o qui sont négligeables près de la transition. En outre elles font apparaître une alternance de signes + et - dans la limite (10.6) pour $g_2^{++(i)}$ qui permet d'envisager une série infinie convergeant vers un couplage effectif de la forme (10.7).



Il reste à montrer qu'il est justifié d'utiliser l'expression à l'ordre 1 pour C (10.5). Examinons la solution d'ordre 1 :

$$C^{(1)}(q_1)[q_1 + g\hat{f}^2(q_1)] + g\phi_o + 2g \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) \left\{ g_{2o}(p, q_1) + \frac{1}{2}\theta(p - q_1)g_{2o}(p, -q_1) + \frac{1}{2}\theta(q_1 - p)g_{2o}(q_1, -p) \right\} = 0$$

qui donne

$$C^{(1)}(q_1) = -\frac{g\phi_o}{q_1+g} - \frac{g^2}{2(q_1+g)} \int_0^{+\infty} dp \hat{f}^2(p) C^{(o)}(p) \left\{ \frac{1}{p^2+q_1^2+pq_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+q_1^2-pq_1} \right\} \\ - [C(q_1)\hat{f}^2(q_1) + 2\phi_o] \frac{g^2 q_1}{2(q_1+g)} \int_0^{+\infty} dp \left\{ \frac{1}{p^2+q_1^2+pq_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+q_1^2-pq_1} \right\}$$

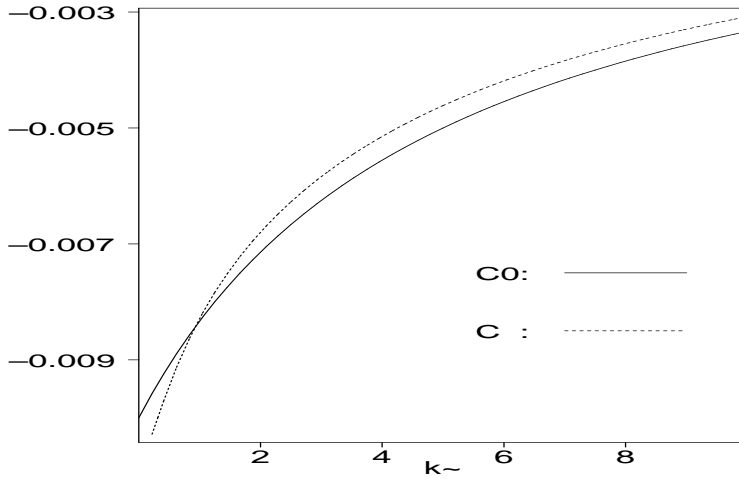
Sachant que

$$\int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p^2 + q_1^2 \pm pq_1} = \begin{cases} \frac{2\pi\sqrt{3}}{9q_1} & (+) \\ \frac{4\pi\sqrt{3}}{9q_1} & (-) \end{cases}$$

on en déduit que la 2^e intégrale est nulle. Quant à la première, elle est dominée par sa valeur au pôle et, à une bonne approximation, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} dp \frac{C^{(o)}(p)}{p^2 + q_1^2 \pm pq_1} \simeq C^{(o)}(q_1) \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p^2 + q_1^2 \pm pq_1}$$

ce qui annule aussi le premier terme intégral. Ainsi $C^{(1)}$ est très peu différent de $C^{(o)}$.



Nous avons montré que la solution à l'ordre 1 garde la même forme générale que celle à l'ordre 0. Pour affiner notre approximation, on introduit dans le couplage effectif une fonction inconnue $x(g)$ (que l'on attend proche de 1) :

$$g_{eff} \equiv \frac{g}{1 + gx(g) \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$$

et on va déterminer sa valeur optimale par une méthode de moindres carrés (cf. appendice C).

Pour des $g \leq 7$ on trouve comme attendu que $x(g)$ est proche de 1 :

$$x(g) = 1 + \frac{g}{12}$$

Finalement une solution satisfaisante pour C est donc

$$C(g, \phi_o, q_1) = C^{(o)}(g_{eff}, \phi_o, q_1) = -\frac{9g\phi_o}{9g + q_1[9 + g\pi\sqrt{3}(1 + g/12)]} \quad (10.8)$$

10.3 Calcul de la constante de couplage

Injectons dans (10.4) la solution (10.8) :

$$\begin{aligned} \phi_o + \frac{2g}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dp_1 dp_2}{p_1 p_2} \hat{f}^2(p_1) \hat{f}^2(p_2) \left[g_{2o}(g_{eff}, \phi_o, p_1, p_2) + \frac{1}{2} \theta(p_1 - p_2) g_{2o}(g_{eff}, \phi_o, p_1, -p_2) \right] \\ + \frac{g}{6} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^4(p) C(p) = 0 \end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$\phi_o + I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2g^2 \phi_o \pi \sqrt{3}}{27} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) + \frac{2g^2 \pi \sqrt{3}}{27} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) C(g_{eff}, \phi_o, p) \\ I_2 &= -\frac{g^2 \phi_o \pi \sqrt{3}}{27} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) - \frac{g^2 \pi \sqrt{3}}{27} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) C(g_{eff}, \phi_o, p) \\ I_3 &= \frac{g}{6} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^4(p) C(p) \end{aligned}$$

qui se simplifie en :

$$\phi_o + \frac{g}{6} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^4(p) C(g, \phi_o p) + \frac{g^2 \pi \sqrt{3}}{27} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) C(g_{eff}, \phi_o, p) + \frac{g^2 \phi_o \pi \sqrt{3}}{27} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \hat{f}^2(p) = 0 \quad (10.9)$$

En utilisant $\hat{f}(p) = \theta(p - \frac{\mu}{\Lambda}) + \theta(\frac{\Lambda}{\mu} - p)$ on peut constater que les seules divergences dans les intégrales ci-dessus sont logarithmiques et peuvent être absorbées dans la masse renormalisée μ par des contre-terme du même type que ceux de l'ordre précédent :

$$1 - \frac{g}{6} \left\{ \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} \frac{dp}{p} - \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} \frac{dp}{p+g} \right\} - \frac{g^2 \pi \sqrt{3}}{27} \left\{ 2 \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} \frac{dp}{p} - \int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\Lambda}{\mu}} \frac{dp}{p+g_{eff}} \right\} = 0$$

On obtient, pour les grands Λ :

$$1 - \frac{g}{6}(1 + 2g\frac{\pi\sqrt{3}}{9})\ln g + g^2\frac{\pi\sqrt{3}}{27}\ln[1 + g(1 + \frac{g}{12})\frac{\pi\sqrt{3}}{9}] = 0$$

d'où l'on tire la solution numérique :

$$g_c = 4,78$$

Le terme d'ordre 2 apporte une contribution positive au résultat d'ordre 1.

10.4 Fonction $\beta_1(g)$ et comparaison avec les théories critiques

La masse critique $M(g, \Lambda)$ du système est définie à partir de la contrainte (10.4) :

$$M^2(g, \Lambda) \equiv \mu^2 \left\{ 1 - \frac{g}{6}(1 + \frac{2g\pi\sqrt{3}}{9})\ln g + \frac{g^2\pi\sqrt{3}}{27}\ln[1 + g(1 + \frac{g}{12})\frac{\pi\sqrt{3}}{9}] \right\}$$

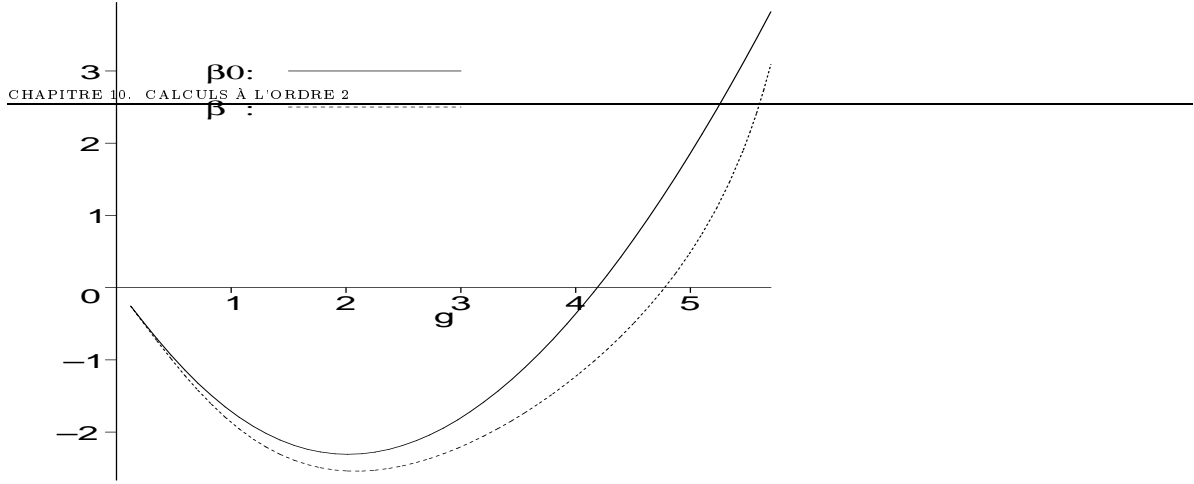
De là on tire la fonction $\beta_1(g)$ du système

$$\beta_1(g) \equiv M^2 \left[\frac{\partial M^2}{\partial g} \Big|_{\lambda, \Lambda} \right]^{-1} = -2g \frac{N(g)}{D(g)}$$

avec

$$\begin{aligned} N(g) &= [1 - \frac{g}{6}(1 + g\frac{2\pi\sqrt{3}}{9})\ln g + g^2\frac{\pi\sqrt{3}}{27}\ln(1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}(1 + \frac{g}{12}))][1 + g\frac{\pi\sqrt{3}}{9}(1 + \frac{g}{12})] \\ D(g) &= (1 + \frac{g}{6})[1 + g\frac{\pi\sqrt{3}}{9}(1 + \frac{g}{12})] + \frac{g\pi\sqrt{3}}{108}(1 - \frac{2g^2\pi\sqrt{3}}{9}) \\ &\quad + \frac{g^2\pi\sqrt{3}}{27}(1 + \frac{g\pi\sqrt{3}}{9}(1 + \frac{g}{12}))\ln[\frac{g}{(1+g\frac{\pi\sqrt{3}}{9}(1+\frac{g}{12}))}] \end{aligned}$$

Comme à l'ordre précédent, on vérifie qu'elle remplit bien la condition (9.6) et que l'exposant critique ω reste égal à 2.



10.5 Comparaison avec les résultats des théories critiques

A partir de (10.9) il faut conserver les divergences en Λ :

$$1 = g\left(\frac{1}{6} + g\frac{\pi\sqrt{3}}{27}\right)\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{g}{6}\ln\left(\frac{\frac{\Lambda}{\mu} + g}{\frac{\mu}{\Lambda} + g}\right) - g^2\frac{\pi\sqrt{3}}{27}\ln\left(\frac{\frac{\Lambda}{\mu} + g_{eff}}{\frac{\mu}{\Lambda} + g_{eff}}\right)$$

et passer au couplage réduit r tel que $g \equiv \frac{2}{3}\frac{\Lambda^2}{\mu^2}r$:

$$1 = -\frac{1}{9}re^y\ln\left(\frac{1+\frac{2}{3}re^{\frac{y}{2}}}{1+\frac{2}{3}re^{\frac{3y}{2}}}\right) - \frac{4\pi}{81\sqrt{3}}r^2e^{2y}\left\{\frac{y}{2} + \ln\left(\frac{1+g_{eff}(y,r,x)e^{-\frac{y}{2}}}{1+g_{eff}(y,r,x)e^{\frac{y}{2}}}\right)\right\}$$

en notant $y \equiv \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$. La résolution numérique de cette équation est traitée à l'appendice C. On obtient $r_{LC2} = 1.71$

$r_1^{a,b}$	$r_4^{a,b}$	r_{lat}^c	r_{LC1}	r_{LC2}
1	1.85	1.80±.05	1.5	1.71

a) Ref. [45] b)Ref. [64] c) Ref. [10]

10.6 Conclusion

La version continue de la quantification sur le cône de lumière se présente comme une méthode puissante et relativement économe en calculs pour l'étude des propriétés critiques des théories de champs scalaires. Le couplage des modes zéros avec les modes normaux, associé à la régularisation des divergences par des fonctions tests, permet d'accéder aux domaines non perturbatifs de la théorie de façon tout à fait satisfaisante, du moins pour ce qui concerne le couplage critique, la fonction $\beta(g)$ et l'exposant critique ω . Des améliorations sont envisageables. Il est possible de prendre en compte dans les contraintes et les

équations du mouvement les termes plus que linéaires en ϕ_o mais cela alourdirait considérablement les calculs. En outre, la transition de phase étant définie pour les ϕ_o petits, nous pensons que cela n'apporterait pas de corrections significatives à nos résultats. On pourrait aussi pousser le développement de Haag du champ φ jusqu'à l'ordre 3. Pareillement on peut considérer le terme suivant du développement de Haag du mode zéro, mais là aussi, le nombre d'éléments de matrices à calculer devient très important. Un autre axe de recherche consiste à calculer d'autres exposants critiques, notamment le coefficient η associé aux fonctions de corrélation. A cette fin nous avons considéré une généralisation du mode zéro, en lui permettant de varier dans l'espace. Le champ total Φ s'écrivant alors :

$$\Phi(x^+, x^-) = \phi_c(x^+, x^-) + \phi_o + \Omega_{11} + \dots + \varphi_1(x^+, x^-) + \varphi_2(x^+, x^-) + \dots$$

où $\phi_c(x^-)$ est un c-nombre (c'est en fait la partie classique du champ Φ), qui est lui aussi couplé avec les modes normaux φ_1 et φ_2 . La dépendance spatiale de ϕ_c lui permet de transférer de l'impulsion (en ce sens ce n'est plus *stricto sensu* un mode zéro), ce qui nous a permis d'obtenir la relation de dispersion et l'exposant critique η . Ces travaux sont toujours en cours.

Troisième partie

La théorie des champs $\varphi^4 O(N)$ sur le
cône de lumière.

Chapitre 18

Développement de la théorie $\phi^4 O(N)$ quantifiée par intégrales de chemin

"More variables usually means greater complexity, but not always ..."
Sidney Coleman

18.1 Mise en forme de la fonctionnelle génératrice

Dans cette troisième partie nous allons préciser et compléter les travaux présentés dans la thèse [3]. On considère N champs scalaires ϕ^a soumis à la symétrie $O(N)$, en interaction ϕ^4 . Cette symétrie est connue [9] pour permettre des développements non perturbatifs en série de $\frac{1}{N}$. L'existence d'un paramètre permettant un développement non perturbatif suggère une possibilité nouvelle de résolution des contraintes et des équations du mouvement de la théorie sur le cône de lumière, ordre par ordre en $\frac{1}{N}$. Comme préalable à cette étude, dans un but de comparaison, nous allons examiner en détail les fonctions de corrélation de la théorie euclidienne dans l'Instant Form en utilisant les intégrales de chemin. Des travaux sur ces fonctions de corrélation ont été menés [35], mais une approche systématisée nous a semblé nécessaire pour réduire au minimum le risque d'erreur qui, comme on le confirmera en fin de chapitre, est important.

Le lagrangien de la théorie $\phi^4 O(N)$ s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a + \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{\lambda}{4!} (\phi^a \phi^a)^2$$

Les fonctions de corrélation s'obtiennent à partir de la fonctionnelle génératrice

$$Z[J] = \int D[\phi^a] e^{-S[\phi^a] + \int d^4x J^a(x) \phi^a(x)} \quad (18.1)$$

où S est l'action

$$S = \int d^4x L(\phi^a(x))$$

et $J^a(x)$ le terme de courant, source des champs $\phi^a(x)$. En multipliant la fonctionnelle (18.1) par la constante

$$K = \int D[\sigma] e^{-\frac{N}{2g} \int d^4x (\sigma + \frac{i}{2} \frac{g}{N} \phi^a \phi^a)^2}$$

où l'on a posé $\lambda \equiv \frac{3g}{N}$, on fait apparaître des termes gaussiens

$$Z[J] = \int D[\phi^a] D[\sigma] e^{-\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a + \frac{1}{2} (m^2 + \frac{i}{2} \sigma) \phi^a \phi^a + \frac{N}{2} \frac{\sigma^2}{g} - J^a \phi^a \right\}}$$

qui rendent possible le calcul de l'intégrale fonctionnelle sur ϕ^a :

$$Z[J] = cte \int D[\sigma] e^{-\frac{N}{2} tr. \ln[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma] - \frac{N}{2g} \int d^4x \sigma^2 - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \{ J^a(x) [-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma]^{-1} J^a(y) \}} \quad (18.2)$$

où l'on a intégré par partie le terme cinétique et où tr signifie "trace". La multiplication par la constante K , qui ne modifie en rien la dynamique¹, permet l'introduction du champ auxiliaire $\sigma(x)$ ce qui autorise l'intégration sur les champs ϕ^a qui disparaissent dès lors de la fonctionnelle génératrice. De fait, l'ensemble de la théorie se trouve maintenant exprimé à l'aide de ce champ auxiliaire σ pour lequel il faut introduire un terme de courant source. Pareillement le terme source pour les champs ϕ^a , devenu inutile, est supprimé² :

$$Z[j] = cte \int D[\sigma] e^{-\frac{N}{2} S_{eff}[\sigma] + \int d^4x j(x) \sigma(x)}$$

où

$$S_{eff}[\sigma] = tr. \ln[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma] + \frac{1}{g} \int d^4x \sigma^2(x)$$

est une action effective non locale que l'on peut développer autour de la solution σ_o qui la minimise (méthode du point de selle). Posons :

$$\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) + \sigma_o$$

En utilisant l'ensemble complet d'états :

$$\int d^4x |x \rangle \langle x| = 1$$

¹ Puisque la fonctionnelle génératrice est simplement multipliée par une constante. On peut le vérifier également en écrivant l'équation d'Euler-Lagrange pour σ :

$$\sigma = -\frac{1}{2} \frac{g}{N} \phi^a \phi^a$$

qui n'est pas dynamique.

² La suppression du terme source pour ϕ^a est en fait une affaire de goût. Il est tout à fait possible de le conserver, au prix d'expressions plus lourdes, comme l'ont fait Kristjansen et Flyvbjerg [35]. Les fonctions de corrélation que l'on obtient sont alors modifiées simplement par leurs pattes externes, qui deviennent des propagateurs de champs ϕ^a . Alors que tous les autres, et notamment les boucles internes, demeurent identiques.

on développe le terme en $tr.ln^3$:

$$S_{eff}[\sigma] = \frac{N}{2} \left\{ \int d^4x \frac{1}{g} \sigma^2 + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \sigma(x) \Delta(x-y) \sigma(y) \Delta(x-y) - \frac{i}{3} \int d^4x d^4y d^4z \sigma(x) \Delta(x-y) \sigma(y) \Delta(y-z) \sigma(z) \Delta(z-x) + \dots \right\} \quad (18.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle x | \tilde{\sigma} | y \rangle &= \tilde{\sigma}(x) \delta(x-y) \\ \langle x | [-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma_o]^{-1} | y \rangle &\equiv \Delta(x-y) \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration gaussienne sur les termes quadratiques de S_{eff} et en effectuant le changement

$$\tilde{\sigma}(x) - \frac{1}{N} \int d^4y \left[\frac{1}{g} \delta(x-y) + \frac{1}{2} \Delta(x,y) \Delta(y,x) \right]^{-1} j(y) \rightarrow \tilde{\sigma}(x)$$

la fonctionnelle génératrice s'écrit :

$$Z[j] = e^{\frac{N}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-i)^k}{k}} \int d^4x_1 \dots d^4x_k \delta_1 \dots \delta_k \quad (18.4)$$

$$e^{\frac{1}{2N} \int d^4x d^4y j(x) \left[\frac{1}{g} \delta(x-y) + \frac{1}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} \right]^{-1} j(y)} \quad (18.5)$$

où l'on note $\frac{\delta}{\delta j(x_i)} = \delta_i$, et en utilisant les représentations suivantes :

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \left[\frac{1}{g} \delta(x-y) + \frac{1}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} \right]^{-1} \\ &= \text{~~~~~} \\ \Delta(x,y) &= \text{-----} \end{aligned}$$

Ces quantités s'interprètent aisément :

■ $D(x-y)$, issue de l'inversion de la partie quadratique de l'action effective, est le propagateur libre pour le champ $\tilde{\sigma}$.

³On a :

$$tr.ln[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma] = \int \langle x | \ln[(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma_o)(1 + \tilde{\sigma}(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2 + i\sigma_o))] | x \rangle$$

En développant le $\ln(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \dots$ et en utilisant la stationnarité de l'action en σ_o :

$$\frac{\delta S_{eff}[\sigma]}{\delta \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_o} = 0$$

qui donne l'équation du "gap" :

$$\frac{1}{g} \sigma_o + \Delta(x,x) = 0$$

on aboutit à l'expression (18.3).

- $\Delta(x, y)$ est un propagateur “effectif”, relié aux champs éliminés ϕ^a . Ces propagateurs interviennent toujours en produits représentés par des cercles qui jouent le rôle de vertex effectifs non locaux pour les propagateurs $D(x - y)$. De fait tout se passe comme si le champ $\tilde{\sigma}$ se propageait dans un milieu polarisable.

L’expression (18.5) permet d’obtenir les fonctions de corrélation en $\tilde{\sigma}(x)$. Ces fonctions se représentent sous forme de diagrammes composés de propagateurs $D(x - y)$ et $\Delta(x - y)$. Chaque diagramme porte un facteur N^{L-P} où L est le nombre de cercles fermés et P le nombre de propagateurs D . Puisqu’un cercle fermé est accompagné d’au moins trois dérivées fonctionnelles δ_i et que deux sources sont attachées à un propagateur D , la relation $3L \leq 2P$ doit être satisfaite (si P est nul, L l’est aussi). Donc $Z[j]$ peut se développer en puissance de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et seul un nombre fini de diagrammes contribue à chaque ordre. En effet, à un ordre donné k, on doit avoir $P - L \leq k$, mais $L \leq \frac{2P}{3}$ implique que $P \leq 3k$ et $L \leq 2k$. Bien sûr, avec un nombre fini de cercles et de propagateurs, on ne peut construire qu’un nombre fini de diagrammes.

18.2 Algorithme pour la détermination des diagrammes contribuant aux fonctions de corrélation

Dans la relation donnant $Z[j]$ on effectue le changement $\sqrt{N}\tilde{\sigma}(x) \rightarrow \tilde{\sigma}(x)$ de façon à obtenir un développement en puissance de $\frac{1}{\sqrt{N}}$, plus facilement utilisable par la suite. En effet le facteur en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ est alors simplement déterminé par le nombre k de vertex présents sur le cercle et vaut $\frac{1}{N^{\frac{k}{2}-1}}$.

On utilise les notations suivantes :

$$A(n) \equiv \delta_{j_1} \dots \delta_{j_n} \text{ (cercle avec } n \text{ points } 1, 2, 3 \text{ sur le bord)}$$

$$A^2(n) = \delta_{j_1} \dots \delta_{j_n} \delta_{j_{1_1}} \dots \delta_{j_{n_1}} \text{ (deux cercles avec } n \text{ et } n_1 \text{ points respectifs)}$$

etc

$$\text{avec } Z_D \equiv e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x) D(x-y) j(y)}$$

$$A(3)Z_D = \left\{ \text{cercle avec } 3 \text{ points } + \text{cercle avec } 3 \text{ points et } 2 \text{ wavy lines} \right\} \cdot Z_D$$

$$A(4)Z_D = \left\{ \text{cercle avec } 4 \text{ points et } 2 \text{ wavy lines} + 2 \cdot \text{cercle avec } 4 \text{ points et } 1 \text{ wavy line} + \text{cercle avec } 4 \text{ points et } 2 \text{ wavy lines} \right\} \cdot Z_D$$

$$\begin{aligned}
 A(5)Z_D = & \{ 5 \text{ (diagram 1)} + 5 \text{ (diagram 2)} + 5 \text{ (diagram 3)} + 5 \text{ (diagram 4)} + 5 \text{ (diagram 5)} \\
 & + \text{ (diagram 6)} \}.Z_D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(6)Z_D = & \{ 6 \text{ (diagram 1)} + 12 \text{ (diagram 2)} + 6 \text{ (diagram 3)} + 6 \text{ (diagram 4)} + 3 \text{ (diagram 5)} \\
 & + 3 \text{ (diagram 6)} + 6 \text{ (diagram 7)} + 3 \text{ (diagram 8)} + 6 \text{ (diagram 9)} \\
 & + 3 \text{ (diagram 10)} + 6 \text{ (diagram 11)} + \text{ (diagram 12)} \}.Z_D
 \end{aligned}$$

La fonctionnelle génératrice s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 Z[j] = & \left\{ 1 + \frac{1}{6\sqrt{N}}A(3) + \frac{1}{8N}A(4) - \frac{1}{72N}A^2(3) - \frac{i}{10N\sqrt{N}}A(5) - \frac{i}{1296N\sqrt{N}}A^3(3) \right. \\
 & + \frac{i}{48N\sqrt{N}}A(3)A(4) + \frac{1}{31104N^2}A^4(3) - \frac{1}{576N^2}A^2(3)A(4) + \frac{1}{128N^2}A^2(4) \\
 & \left. + \frac{1}{60N^2}A(3)A(5) - \frac{1}{12N^2}A(6) + O\left(\frac{1}{N^2\sqrt{N}}\right) \right\}.Z_D
 \end{aligned}$$

Dans la suite on notera

$$\begin{aligned}
 CZ_D(2) &= \frac{1}{Z_D} (A(3)Z_D) \\
 CZ_D(3) &= \frac{1}{Z_D} (A(4)Z_D) \\
 CZ_D(5) &= \frac{1}{Z_D} (A(5)Z_D) \\
 CZ_D(6) &= \frac{1}{Z_D} (A(6)Z_D)
 \end{aligned}$$

Les fonctions de corrélation connectées s'obtiennent à partir du développement de $W[j] \equiv \ln Z[j]$ qui peut s'écrire :

$$W[j] = \sum_{n=1}^5 CW(n).W(n) + O\left(\frac{1}{N^2\sqrt{N}}\right)$$

avec

$$CW(1..5) = \left\{ 1, \frac{i}{6\sqrt{N}}, \frac{1}{72N}, \frac{i}{6480N\sqrt{N}}, \frac{1}{155520N^2} \right\}$$

et

$$W(1) = \int d^4x d^4y j(x) D(x, y) j(y)$$

$$W(2) = CZ_D(2)$$

$$W(3) = CZ_D^2(2) + 9CZ_D(3) - CZ_D(4)$$

$$W(4) = -10CZ_D^3(2) - 135CZ_D(2)CZ_D(3) + 15CZ_D(2)CZ_D(4) \\ - 648CZ_D(5) - 5CZ_D(6) + 135CZ_D(7)$$

$$W(5) = -30CZ_D^4(2) - 540CZ_D^2(2)CZ_D(3) - 1215CZ_D^2(2) + 60CZ_D^2(2)CZ_D(4) \\ + 270CZ_D(3)CZ_D(4) - 15CZ_D^2(4) - 2592CZ_D(2)CZ_D(5) - 20CZ_D(2)CZ_D(6) \\ + 540CZ_D(2)CZ_D(7) + 5CZ_D(8) - 270CZ_D(9) + 1215CZ_D(10) + 2592CZ_D(11) \\ + 12960CZ_D(12)$$

etc

En notant F_{2n} les parties connectées des différentes contributions on a :

$$CZ_D(4) = \frac{1}{Z_D} (A^2(3)Z_D) = CZ_D^2(2) + F_{24}$$

$$CZ_D(6) = \frac{1}{Z_D} A(3)[CZ_D^2(2).Z_D + F_{24}.Z_D] \\ = CZ_D^3(2) + 3CZ_D(2).F_{24} + F_{26}$$

$$CZ_D(7) = \frac{1}{Z_D} A(3)[CZ_D(3).Z_D] \\ = CZ_D(2)CZ_D(3) + F_{27}$$

$$CZ_D(8) = \frac{1}{Z_D} A(3)[CZ_D^3(2).Z_D + 3CZ_D(2).F_{24}.Z_D + F_{26}.Z_D] \\ = CZ_D^4(2) + 6CZ_D^2(2)F_{24} + 4CZ_D(2)F_{26} + 3F_{24}^3 + F_{28}$$

$$CZ_D(9) = \frac{1}{Z_D} A(3)[CZ_D(7).Z_D] \\ = CZ_D^2(2)CZ_D(3) + CZ_D(3)F_{24} + 2CZ_D(2)F_{27} + F_{29}$$

$$CZ_D(10) = \frac{1}{Z_D} A(4)[CZ_D(3).Z_D] \\ = CZ_D^2(3) + F_{210}$$

$$CZ_D(11) = \frac{1}{Z_D} A(3)[CZ_D(5).Z_D] \\ = CZ_D(2)CZ_D(5) + F_{211}$$

En reportant dans les expressions de $W(n)$, les parties déconnectées disparaissent comme il se doit. Il reste :

$$W(3) = -F_{24} + 9CZ_D(3)$$

$$W(4) = -5F_{26} + 135F_{27} - 648CZ_D(5)$$

$$W(5) = 1215F_{210} + 2592F_{211} + 5F_{28} - 270F_{29} - 12960CZ_D(12)$$

Les quantités connectées F_{2n} se calculent simplement en effectuant les dérivées fonctionnelles indiquées dans les définitions de $CZ_D(n)$, $n = (4, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$ et en soustrayant les différents termes déconnectés, puissances de $CZ_D(2)$, produits $CZ_D(i)CZ_D(j)$ et $CZ_D(i)F_{2n}$. On peut constater alors que F_{210} et F_{211} regroupent toutes les contributions à 2 boucles, F_{29} les contributions à trois boucles, F_{28} celles à quatre boucles et $CZ_D(12)$ celles à une boucle. On aura donc :

$$\langle \tilde{\sigma}(x) \rangle = \sum_{n=1}^5 CW(n) \frac{\delta W(n)}{\delta j(x)} \Big|_{j(x)=0} + O\left(\frac{1}{N^2\sqrt{N}}\right)$$

et

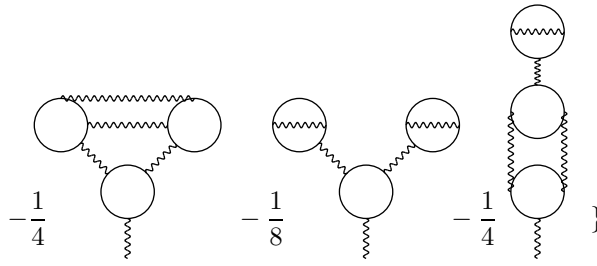
$$\langle \tilde{\sigma}(x)\tilde{\sigma}(y) \rangle = \sum_{n=1}^5 CW(n) \frac{\delta^2 W(n)}{\delta j(x)\delta j(y)} \Big|_{j(x)=j(y)=0} + O\left(\frac{1}{N^2\sqrt{N}}\right)$$

Seuls les termes $n = 2$ et 4 contribuent à $\langle \tilde{\sigma}(x) \rangle$, et $n = 1, 3$ et 5 à $\langle \tilde{\sigma}(x)\tilde{\sigma}(y) \rangle$. Le calcul formel est entièrement effectué par l'application que nous avons développée sous Mathematica détaillée dans l'appendice D. Le calcul normal "à la main" devient vite fastidieux et inextricable, avec de multiples possibilités d'erreurs et d'omissions de contributions comme on le verra plus loin.

18.3 Développement diagrammatique de la fonction à un point

Dans un but de comparaison avec les résultats de la littérature et avec ceux du chapitre suivant, on rétablit la dépendance habituelle en $\frac{1}{N}(\tilde{\sigma}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{\sigma}(x))$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}(x) \rangle = & \frac{i}{2N} \text{diagram}_1 + \frac{i}{N^2} \left\{ -\frac{1}{2} \text{diagram}_2 - \frac{1}{2} \text{diagram}_3 - \frac{1}{2} \text{diagram}_4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{diagram}_5 + \frac{1}{4} \text{diagram}_6 + \frac{1}{2} \text{diagram}_7 + \frac{1}{4} \text{diagram}_8 + \frac{1}{2} \text{diagram}_9 \right. \end{aligned}$$

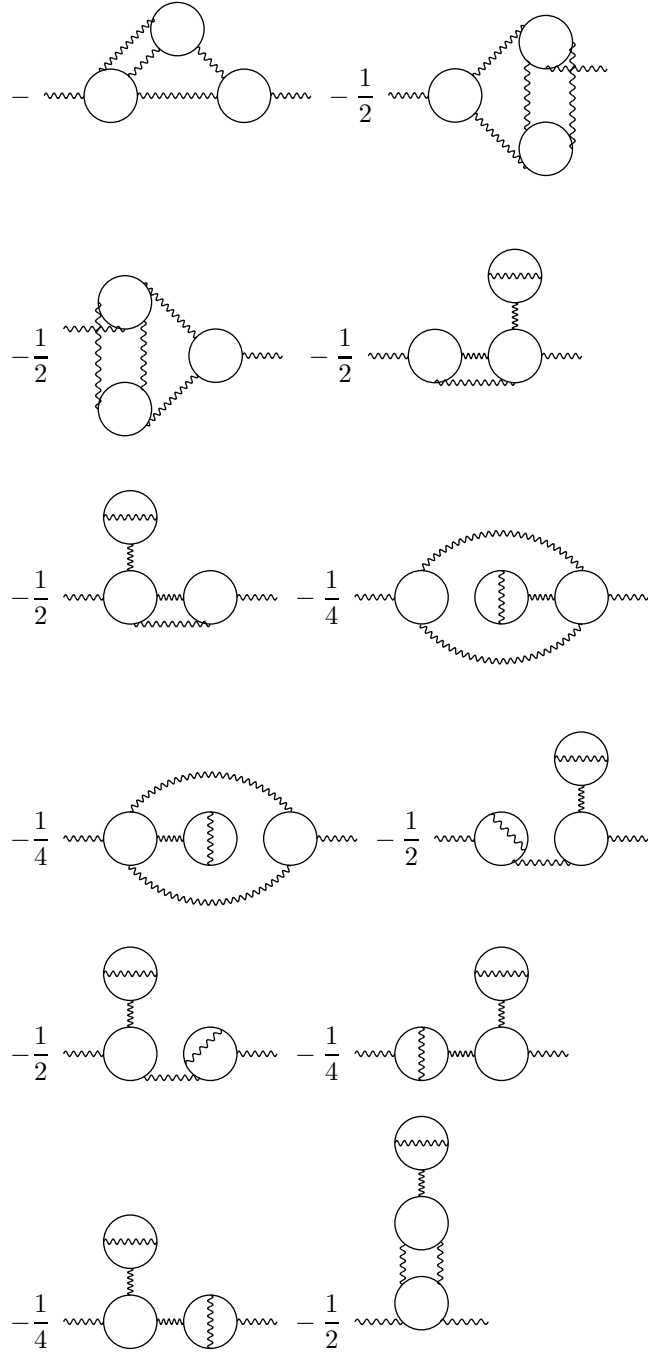


$$+o\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

18.4 Développement diagrammatique de la fonction à deux points

Pour la fonction de corrélation à deux points on obtient :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\sigma}(x)\tilde{\sigma}(y) \rangle = & \frac{1}{N} \text{diagram} + \frac{1}{N^2} \{ \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} \\
 & - \frac{1}{2} \text{diagram} - \frac{1}{2} \text{diagram} \} + \frac{1}{N^3} \{ - \text{diagram} \\
 & - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} \\
 & - \text{diagram} - \frac{1}{2} \text{diagram} - \frac{1}{2} \text{diagram} - \frac{1}{2} \text{diagram} \\
 & + \frac{1}{2} \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} \\
 & + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} \\
 & + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} \\
 & + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} \\
 & + \frac{1}{4} \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} \\
 & + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} - \text{diagram}
 \end{aligned}$$



$$-\frac{1}{2} \text{ (diagram)} - \frac{1}{4} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)}$$

$$+\frac{1}{2} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)}$$

$$+\frac{1}{2} \text{ (diagram)} + \frac{1}{4} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)}$$

$$+ \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)}$$

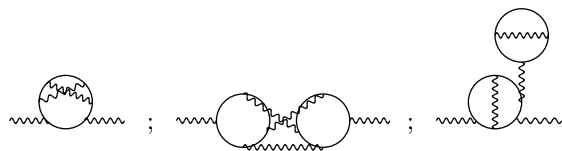
$$+ \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ (diagram)} - \frac{1}{4} \text{ (diagram)}$$

$$\begin{aligned}
 & - \text{Diagram 1} - \frac{1}{2} \text{Diagram 2} \\
 & - \frac{1}{2} \text{Diagram 3} - \frac{1}{2} \text{Diagram 4} \\
 & - \frac{1}{4} \text{Diagram 5} - \frac{1}{4} \text{Diagram 6} \\
 & - \frac{1}{2} \text{Diagram 7} - \frac{1}{2} \text{Diagram 8} - \frac{1}{4} \text{Diagram 9} \\
 & - \frac{1}{4} \text{Diagram 10} - \frac{1}{4} \text{Diagram 11} \\
 & - \frac{1}{2} \text{Diagram 12} - \frac{1}{4} \text{Diagram 13} - \frac{1}{8} \text{Diagram 14} \\
 & + \frac{1}{4} \text{Diagram 15} + \frac{1}{2} \text{Diagram 16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{2} \text{ [Diagram: 3 circles in a triangle with wavy lines between them and a fourth circle above the top vertex connected by wavy lines]} + \frac{1}{4} \text{ [Diagram: 2 circles side-by-side with wavy lines between them and a third circle above the left one connected by wavy lines]} \\
 & +\frac{1}{2} \text{ [Diagram: 3 circles in a triangle with wavy lines between them and a fourth circle above the top vertex connected by wavy lines]} + \frac{1}{4} \text{ [Diagram: 3 circles in a horizontal line with wavy lines between them and a fourth circle above the left one connected by wavy lines]} \\
 & +\frac{1}{4} \text{ [Diagram: 3 circles in a horizontal line with wavy lines between them and a fourth circle above the middle one connected by wavy lines]} + \frac{1}{4} \text{ [Diagram: 3 circles in a vertical line with wavy lines between them and a fourth circle above the top one connected by wavy lines]} \\
 & +\frac{1}{8} \text{ [Diagram: 3 circles in a vertical line with wavy lines between them and two fourth circles above the top one connected by wavy lines]} + \frac{1}{4} \text{ [Diagram: 3 circles in a triangle with wavy lines between them and a fourth circle above the top vertex connected by wavy lines]} \} \\
 & +o\left(\frac{1}{N^4}\right)
 \end{aligned}$$

C. Kristjansen et H. Flyvbjerg [35] font état d'un calcul identique où les diagrammes suivants sont absents :



Pour tous les autres cas, les diagrammes et les poids trouvés ici sont en accord avec ceux rapportés par ces auteurs.

Chapitre 19

Vers la quantification de la théorie $\phi^4 O(N)$ sur le cône de lumière

Si vous fermez la porte à toutes les erreurs, la vérité restera dehors."
Rabindranâth Tagore

19.1 Contrainte et équations du mouvement

L'écriture de la fonctionnelle génératrice suggère d'utiliser comme lagrangien :

$$L = -\frac{1}{2} \frac{N}{g} \sigma^2(x) - \frac{N}{2} \langle x | \ln[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma] | x \rangle$$

où l'on est passé de l'écriture euclidienne à l'écriture minkowskienne¹. Il faut remarquer que ce lagrangien est invariant de forme si l'on passe en coordonnées du cône de lumière : la variable x peut donc représenter indifféremment les coordonnées minkowskiennes ou celles du cône de lumière. Cependant l'unique présence du champ auxiliaire non dynamique $\sigma(x)$ rend ce lagrangien maximalelement singulier. Le moment conjugué de $\sigma(x)$ est nul² :

$$\pi_\sigma \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\sigma}} = 0$$

¹C'est-à-dire que l'on a effectué :

$$-(\partial_\mu \partial_\mu)_{eucl} = \partial_\mu \partial^\mu$$

$$\int D[\sigma] e^{-\int d^4 x_{eucl} L_{eucl}(x_{eucl})} = \int D[\sigma] e^{i \int d^4 x L(x)}$$

avec

$$d^4 x_{eucl} = i d^4 x$$

²Que $\dot{\sigma}(x)$ représente $\frac{\partial \sigma}{\partial x^0}$ ou bien $\frac{\partial \sigma}{\partial x^+}$.

Il en découle la contrainte primaire (qui n'a aucun rapport avec la singularité des systèmes sur cône de lumière) :

$$\theta_1(x) = \pi_\sigma(x) \approx 0$$

qui engendre elle-même une contrainte secondaire³ :

$$\theta_2(x) = \frac{1}{g}\sigma(x) + i\frac{N}{2} \langle x | [\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma]^{-1} | x \rangle \approx 0 \quad (19.1)$$

Il est facile de se convaincre (cf. la thèse [3]) que cette contrainte est de seconde classe, tout comme θ_1 , et que la matrice des contraintes $C(x, y) = \{\theta_i(x), \theta_j(y)\}$ est inversible. La contrainte $\theta_2(x) \approx 0$ est donc l'équation dynamique de la théorie. Notre objectif étant de la résoudre ordre par ordre, on développe pour ce faire le champ $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) - \sigma_o$ en puissances de $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$\tilde{\sigma}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n(x)}{[\sqrt{N}]^n}$$

qui induit un développement analogue de $\theta(x) \equiv \frac{\theta_2(x)}{N}$ pouvant s'écrire⁴ :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{1}{g}\sigma_o + \frac{i}{2}\Delta(x, x) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \frac{1}{g}\sigma_1(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, x) \right\} \\ &+ \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{g}\sigma_2(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \Delta(x, y) \sigma_2 \Delta(y, x) - \frac{i}{2} \int d^4y d^4z \Delta(x, y) \sigma_2(y) \Delta(y, z) \sigma_2(z) \Delta(z, x) \right\} \\ &+ \frac{1}{N\sqrt{N}} \left\{ \frac{1}{g}\sigma_3(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \Delta(x, y) \sigma_3(y) \Delta(y, x) - \frac{i}{2} \int d^4y d^4z \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, z) \sigma_2(z) \Delta(z, x) \right. \\ &- \frac{i}{2} \int d^4y d^4z \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, z) \sigma_2(z) \Delta(z, x) - \frac{i}{2} \int d^4y d^4z \Delta(x, y) \sigma_2(y) \Delta(y, z) \sigma_1(z) \Delta(z, x) \\ &- \left. \frac{1}{2} \int d^4y d^4z d^4t \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, z) \sigma_1(z) \Delta(z, t) \sigma_1(t) \Delta(t, x) \right\} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (19.2)$$

Chaque terme de ce développement doit s'annuler pour que (19.1) soit vérifiée. La première équation obtenue est simplement l'équation du gap :

³L'hamiltonien primaire s'écrit :

$$H_1(x^o) = \int d^3x \left\{ \frac{N}{2g}\sigma^2(x) + \frac{N}{2} \langle x | \ln[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma] | x \rangle + \mu_1(x) \theta_1(x) \right\}$$

et la condition de consistance

$$\dot{\theta}_1(x) = \{\theta_1(x), H_1(y)\}_{x^o=y^o}$$

ne permet pas la détermination de la fonction $\mu_1(x)$ et conduit à la contrainte $\theta_2(x)$.

⁴Cette expression s'obtient en développant l'opérateur $[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma]^{-1}$ de la même façon que l'on a développé $\ln[-\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma]$ au chapitre précédent.

$$\frac{1}{g}\sigma_o + \frac{i}{2}\Delta(x, x) = 0$$

Comme on pouvait s'y attendre, on constate que :

$$\theta_2(x) = \frac{\delta S_{eff}[\sigma]}{\delta \sigma(x)}$$

ce qui montre que la deuxième équation, obtenue à l'ordre $\frac{1}{\sqrt{N}}$, est reliée au propagateur $D(x, y)$; c'est en fait l'équation du mouvement libre pour $\sigma_1(x)$:

$$\frac{1}{g}\sigma_1(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \Delta(x, y)\sigma_1(y)\Delta(y, x) \approx 0 \quad (19.3)$$

Les équations d'ordre supérieur apparaissent alors comme des équations du mouvement, dont le terme d'interaction est bâti à partir des champs déterminés aux ordres précédents.

19.2 Résolution de l'équation du mouvement libre et quantification

Dans l'espace de Fourier l'équation (19.3) s'écrit :

$$D^{-1}(p^2) \cdot \hat{\sigma}_1(p) \approx 0$$

avec

$$\sigma_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \hat{\sigma}_1(p)$$

et⁵

$$D^{-1}(p^2) \equiv \frac{1}{g} + \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m^2)[(q+p)^2 + m^2]} \quad (19.4)$$

où l'on a fait le changement de notation : $m^2 + i\sigma_o \rightarrow m^2$. Après régularisation à l'échelle μ ce propagateur s'écrit (cf. [3]) :

$$D_r^{-1}(p^2) = \frac{1}{g_r} - \frac{1}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)$$

On obtient donc l'équation du mouvement :

⁵Dans la suite on notera pour simplifier $D(p)$, mais il faut se souvenir que D ne dépend que de p^2 .

$$\left[\frac{1}{g_r} - \frac{1}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right) \right] \hat{\sigma}_1(p) \approx 0$$

qui admet pour solution la distribution :

$$\hat{\sigma}_1(p) = \delta\left[\frac{1}{g_r} - \frac{1}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right) \right] \cdot \sigma_1(p)$$

soit⁶ :

$$\hat{\sigma}_1(p) = \frac{(4\pi)^2 M^2}{2\omega_p} [\delta(p^o - \omega_p) + \delta(p^o + \omega_p)] \cdot \sigma_1(p)$$

et donc

$$\sigma_1(x) = \frac{(4\pi)^2 M^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \left\{ \sigma_1(-\omega_p, -p^i) e^{-i(\omega_p x^o - p^i x^i)} + \sigma_1(\omega_p, p^i) e^{i(\omega_p x^o - p^i x^i)} \right\}$$

La question qui se pose alors est de choisir une quantification consistante avec la définition du propagateur libre (19.4) de $\sigma_1(x)$ lequel correspond à l'inversion de la partie quadratique de l'action effective (cf. chapitre précédent). On doit avoir :

$$\langle 0 | T \sigma_1(x) \sigma_1(y) | 0 \rangle = iD(x - y) \quad (19.5)$$

où T est le produit chronologique.

La prescription classique

$$\begin{aligned} \sigma_1(\omega_p, p^i) \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} &\rightarrow a_p^\dagger \\ \sigma_1(-\omega_p, -p^i) \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} &\rightarrow a_p \end{aligned} \quad (19.6)$$

ne convient pas puisque (19.6) donne simplement un propagateur de Klein-Gordon de masse M. On utilise la prescription :

⁶ D'après la théorie des distributions on sait que $\delta[f(x)] = \sum_{\{x_o\}} \frac{1}{|f'(x)|} \delta(x - x_o)$ où les x_o sont les zéros de $f(x)$. On a ici :

$$f(p^o) \equiv \frac{1}{g_r} - \frac{1}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{(p^o)^2 - (p^i)^2}{\mu^2}\right)$$

dont les deux zéros sont :

$$p_\pm^o = \pm \sqrt{\mu^2 e^{\frac{(4\pi)^2}{g_r}} + (p^i)^2}$$

et

$$f'(\pm\omega_p) = -\frac{2}{(4\pi)^2} \frac{\pm\omega_p}{\mu^2 e^{\frac{(4\pi)^2}{g_r}}}$$

Ceci suggère que la masse du champ σ_1 est $M^2 \equiv \mu^2 e^{\frac{(4\pi)^2}{g_r}}$.

$$\begin{aligned}\sigma_1(\omega_p, p^i) \frac{(4\pi)^2 M^2}{\sqrt{2\omega_p}} &\rightarrow a_p^\dagger g(\omega_p, p^i) \\ \sigma_1(-\omega_p, -p^i) \frac{(4\pi)^2 M^2}{\sqrt{2\omega_p}} &\rightarrow a_p g(-\omega_p, -p^i)\end{aligned}\quad (19.7)$$

où g est une fonction telle que⁷ :

$$\frac{g(p_{on}^2)g(-p_{on}^2)}{p_{off}^2 - M^2 + i\epsilon} = D(p_{off}^2) \quad (19.8)$$

ce qui assure l'égalité (19.5). En fait la fonction g , nécessaire pour réaliser une quantification consistante, indique que le champ σ_1 a un caractère non local :

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{ a_p^\dagger g(p^{on}) e^{ip^{on}x} + a_p g(-p) e^{-ip^{on}x} \} \\ &= \int \frac{d^3 x'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2}{\sqrt{2\omega_p}} \{ a_p^\dagger g(x+x') e^{ip^{on}x} + a_p g(-x-x') e^{-ip^{on}x} \}\end{aligned}\quad (19.9)$$

avec

$$g(p) = \int \frac{d^3 x'}{(2\pi)^3} e^{-ipx'} g(x')$$

Avec la prescription (19.7)(19.8) un calcul direct⁸ montre que l'égalité (19.5) est satisfaite. Dans la suite nous utiliserons pour $\sigma_1(x)$ le développement (19.9), ce qui contraste avec la démarche⁹ suivie dans [3].

19.3 Calculs des champs d'ordre supérieur

19.3.1 Champs à l'ordre 2

Le champ $\sigma_2(x)$ est solution de l'équation :

$$\frac{1}{g}\sigma_2(x) + \frac{1}{2} \int d^4 y \Delta(x, y) \sigma_2(y) \Delta(y, x) = \frac{i}{2} I(x) \quad (19.10)$$

en notant

$$I(x) \equiv \int d^4 y d^4 z \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, z) \sigma_1(z) \Delta(z, x)$$

On a

⁷La fonction g ne peut pas être spécifiée au-delà du produit $g(p)g(-p)$, mais ceci n'est pas gênant puisque c'est toujours ce produit qui intervient dans la suite.

⁸Il suffit d'écrire

$$\langle 0 | T \sigma_1(x) \sigma_1(y) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \sigma_1(x) \sigma_1(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \sigma_1(y) \sigma_1(x) | 0 \rangle$$

et d'utiliser la représentation intégrale de la fonction θ (cf. page 30)

⁹Le choix de cet auteur était de considérer pour σ_1 un champ de Klein-Gordon. Les pôles des propagateurs sont identiques aux nôtres, mais le comportement de la fonction d'onde est tout à fait différent. Cet aspect est capital pour la structure des divergences dans les intégrales.

$$\begin{aligned}\sigma_1(y)\sigma_1(z) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} \{ a_p^\dagger a_q^\dagger g(p)g(q)e^{i(py+qz)} + a_p a_q g(-p)g(-q)e^{-i(py+qz)} \\ &\quad + a_p^\dagger a_q g(p)g(-q)[e^{i(py-qz)} + e^{i(pz-xy)}] \} \\ &\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_p} g(p)g(-p)e^{ip(z-y)}\end{aligned}$$

en utilisant $[a_p, a_q^\dagger] = \delta(p - q)$ et en écrivant le développement de Fourier de $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2}$$

On trouve, après un calcul direct :

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} \{ [a_p^\dagger a_q^\dagger g(p)g(q)e^{i(p+q)x} + a_p a_q g(-p)g(-q)e^{-i(p+q)x}] A(p, q) \\ &\quad + 2a_p^\dagger a_q A(p, -q)g(p)g(-q)e^{i(p-q)x} \} \\ &\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} A(p, -p)g(p)g(-p)\end{aligned}$$

avec

$$A(p, q) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)[(k-p)^2 + m^2][(k+q)^2 + m^2]}$$

Pour résoudre (19.10) on suppose pour $\sigma_2(x)$ un développement de structure identique au second membre $I(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma_2(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \{ \alpha(p, q)[a_p^\dagger a_q^\dagger g(p)g(q)e^{i(p+q)x} + a_p a_q g(-p)g(-q)e^{-i(p+q)x}] \\ &\quad + \beta(p, q)a_p^\dagger a_q g(p)g(-q)e^{i(p-q)x} \} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \gamma(p)g(p)g(-p)\end{aligned}$$

où α, β et γ sont des coefficients inconnus que l'on détermine¹⁰ par projection sur les états de Fock de l'équation (19.10). La projection sur les états $\langle p, q |$ et $|0\rangle$, $\langle p |$ et $|q\rangle$, et $\langle 0 |$ et $|0\rangle$ donne¹¹ :

$$D^{-1}(p+q)\alpha(p, q) = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} A(p, q)$$

$$D^{-1}(p-q)\beta(p, q) = i \frac{1}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} A(p, -q)$$

$$D^{-1}(0)\gamma(p) = \frac{i}{2} \frac{1}{2\omega_p} A(p, -p)$$

¹⁰Cette méthode permet de déterminer seulement la partie inhomogène σ_2^I de la solution de l'équation (19.10). Elle s'ajoute clairement à une solution homogène σ_2^H . Celle-ci est identique à σ_1 puisque les noyaux des termes intégraux sont les mêmes. Ceci est vérifié à tous les ordres du développement (19.2) : on peut donc redéfinir σ_1 comme la somme des solutions homogènes à tous les ordres et de cette façon σ_1 représente alors la totalité de la partie libre du champ $\tilde{\sigma}$ (cf. [3] pour plus de précisions). Dans la suite on se placera dans cette optique, en ne considérant que les solutions inhomogènes des équations.

¹¹On peut noter que $\beta(p, q) = 2\alpha(p, -q)$.

et finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) = & \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p \omega_q}} \{ A(p, q) D(p+q) [a_p^\dagger a_q^\dagger g(p) g(q) e^{i(p+q)x} + a_p a_q g(-p) g(-q) e^{-i(p+q)x}] \\ & + 2A(p, -q) D(p-q) a_p^\dagger a_q g(p) g(-q) e^{i(p-q)x} \} + \frac{i}{2} D(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} A(p, -p) D(p) \end{aligned}$$

Dans le dernier terme nous avons utilisé la relation :

$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{g(p)g(-p)}{2\omega_p} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{g(p)g(-p)}{p_{off}^2 - M^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} D(p)$$

qui nous permet de reconstruire les propagateurs D à l'aide de la prescription (19.8).

19.3.2 Champs à l'ordre 3

Les calculs sont plus lourds pour la détermination du champ $\sigma_3(x)$ mais la méthode utilisée est identique à la précédente. Le champ $\sigma_3(x)$ est solution de l'équation :

$$\frac{1}{g} \sigma_3(x) + \frac{1}{2} \int d^4 y \Delta(x, y) \sigma_3(y) \Delta(y, x) = \frac{1}{2} J(x) + \frac{i}{2} K(x) + \frac{i}{2} L(x) \quad (19.11)$$

avec

$$\begin{aligned} J(x) & \equiv \int d^4 y d^4 z d^4 t \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, z) \sigma_1(z) \Delta(z, t) \sigma_1(t) \Delta(t, x) \\ K(x) & \equiv \int d^4 y d^4 z \Delta(x, y) \sigma_1(y) \Delta(y, z) \sigma_2(z) \Delta(z, x) \\ L(x) & \equiv \int d^4 y d^4 z \Delta(x, y) \sigma_2(y) \Delta(y, z) \sigma_1(z) \Delta(z, x) \end{aligned}$$

En utilisant la relation de commutation canonique et les symétries sur les variables de Fourier, on peut mettre ces intégrales sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} J(x) = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{8\omega_p \omega_q \omega_r}} \{ \\ & a_p^\dagger a_q^\dagger a_r^\dagger B(p, q, r) g(p) g(q) g(r) e^{i(p+q+r)x} + \\ & a_p a_q a_r B(p, q, r) g(-p) g(-q) g(-r) e^{-i(p+q+r)x} + \\ & a_p^\dagger a_q^\dagger a_r [E(p, q, -r) + E(p, -r, q) + E(-r, p, q)] g(p) g(q) g(-r) e^{i(p+q+r)x} + \\ & a_p^\dagger a_q a_r [E(p, -q, -r) + E(-q, p, -r) + E(-q, -r, p)] g(p) g(-q) g(-r) e^{i(p-q-r)x} \} \\ & + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{8\omega_p^2 \omega_q}} \{ \\ & a_q^\dagger [F(p, q) + 2G(p, q)] g(q) g(p) g(-p) e^{iqx} + \\ & a_q [F(p, q) + 2G(p, q)] g(-q) g(p) g(-p) e^{-iqx} \} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E(p, q, r) & \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+m^2)[(k+r)^2+m^2][(k-q)^2+m^2][(k-q-p)^2+m^2]} \\ F(p, q) & \equiv E(p, q, p) \\ G(p, q) & \equiv E(p, q, 0) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 L(x) = K(x) = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{ \\
 & a_p^\dagger a_q^\dagger a_r^\dagger H(p, q, r) g(p) g(q) g(r) e^{i(p+q+r)x} + \\
 & a_p a_q a_r H(p, q, r) g(-p) g(-q) g(-r) e^{-i(p+q+r)x} + \\
 & a_p^\dagger a_q^\dagger a_r [2H(p, q, -r) + H(-r, q, p)] g(p) g(q) g(-r) e^{i(p+q+r)x} + \\
 & a_p^\dagger a_q a_r [H(p, -q, -r) + 2H(-q, p, -r)] g(p) g(-q) g(-r) e^{i(p-q-r)x} \} \\
 & + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{ \\
 & a_p^\dagger [M(p, q) + 2N(p, q)] g(p) g(q) g(-q) e^{ipx} + \\
 & a_p [M(-p, q) + 2N(-p, q)] g(-p) g(q) g(-q) e^{-ipx} \}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 B(p, q, r) & \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+m^2)[(k-p)^2+m^2][(k+q+r)^2+m^2]} \\
 H(p, q, r) & \equiv \alpha(q, r) B(p, q, r) = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{4\omega_q \omega_r}} D(q+r) A(q, r) B(p, q, r) \\
 M(p, q) & \equiv M(-p, q) = \gamma(q) A(p, -p) = \frac{i}{2} \frac{1}{2\omega_q} D(0) A(q, -q) A(p, -p) \\
 N(p, q) & \equiv \alpha(p, q) A(p, q) = \frac{i}{2} D(p+q) \frac{1}{\sqrt{4\omega_p \omega_q}} A(p, q)^2
 \end{aligned}$$

Les coefficients A et B représentent les cercles à 3 points ; E,F,G, les cercles à 4 points et H, M et N l'association de deux cercles à trois points.

En choisissant pour le champ $\sigma_3(x)$ un développement de structure identique à celle de J , K , et L , et en projetant l'équation du mouvement (19.11) sur les états de Fock comme pour σ_2 , mutatis mutandis, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 \sigma_3(x) = & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{8\omega_p \omega_q \omega_r}} \{ \\
 & a_p^\dagger a_q^\dagger a_r^\dagger g(p) g(q) g(r) e^{i(p+q+r)x} D(p+q+r) [\frac{1}{2} B(p, q, r) - \frac{1}{2} D(q+r) A(q, r) B(p, q, r)] + \\
 & a_p a_q a_r g(-p) g(-q) g(-r) e^{-i(p+q+r)x} D(p+q+r) [\frac{1}{2} B(p, q, r) - \frac{1}{2} D(q+r) A(q, r) B(p, q, r)] + \\
 & a_p^\dagger a_q^\dagger a_r g(p) g(q) g(-r) e^{i(p+q-r)x} D(p+q-r) [\frac{1}{2} (E(p, q, -r) + E(p, -r, q) + E(-r, p, q)) \\
 & \quad - D(q-r) A(q, -r) B(p, q, -r) - \frac{1}{2} D(p+q) A(p, q) B(-r, q, p)] + \\
 & a_p^\dagger a_q a_r g(p) g(-q) g(-r) e^{i(p-q-r)x} D(p-q-r) [\frac{1}{2} (E(p, -q, -r) + E(-q, p, -r) + E(-q, -r, p)) \\
 & \quad - \frac{1}{2} D(q+r) A(q, r) B(p, -q, -r) - D(p-r) A(p, -r) B(-q, p, -r)] \} \\
 & + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{ \\
 & a_p^\dagger g(p) e^{ipx} D(p) D(q) [\frac{1}{2} F(p, q) + G(q, p) \\
 & \quad - \frac{1}{2} D(0) A(q, -q) A(p, -p) - D(p+q) A(p, q)^2] + \\
 & a_p g(-p) e^{-ipx} D(p) D(q) [\frac{1}{2} F(p, q) + G(q, p) \\
 & \quad - \frac{1}{2} D(0) A(q, -q) A(p, -p) - D(p-q) A(p, -q)^2] \}
 \end{aligned}$$

où nous avons fait apparaître les propagateurs D dans les termes avec un seul opérateur a_p ou a_p^\dagger comme nous l'avons fait pour σ_2 .

19.4 Fonctions de corrélation à l'ordre $\frac{1}{N^2}$

19.4.1 Fonctions à un point

Les calculs que nous avons effectués permettent de connaître la valeur moyenne du champ dans le vide à l'ordre $\frac{1}{N}$ seulement¹². Les projections sur les états du vide de σ_1 et σ_3 étant nulles, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle 0|\tilde{\sigma}(x)|0 \rangle &= \frac{1}{N} \langle 0|\sigma_2(x)|0 \rangle + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{i}{2N} D(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D(p) A(p, -p) \\ &= \frac{i}{N^2} \text{ (diagramme : un cercle avec une onde sinusoïdale à l'intérieur, relié à un point par une ligne ondulée)} \end{aligned}$$

19.4.2 Fonction à deux points

Le développement de la fonction à deux points s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle 0|T\tilde{\sigma}(x)\tilde{\sigma}(y)|0 \rangle &= \frac{1}{N} \langle 0|T\sigma_1(x)\sigma_1(y)|0 \rangle \\ &+ \frac{1}{N^2} \langle 0|T\sigma_2(x)\sigma_2(y)|0 \rangle \\ &+ \frac{1}{N^2} \frac{1}{2} [\langle 0|T\sigma_1(x)\sigma_3(y)|0 \rangle + \langle 0|T\sigma_3(x)\sigma_1(y)|0 \rangle] \\ &+ O\left(\frac{1}{N^3}\right) \end{aligned}$$

où T représente le produit chronologique habituel. Nous avons introduit un facteur $\frac{1}{2}$ dans la dernière expression afin d'éliminer les doublons dus aux termes croisés symétrisés.

Le premier terme est le propagateur du champ libre $\sigma_1(x)$:

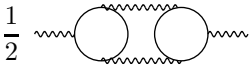
$$\langle 0|T\sigma_1(x)\sigma_1(y)|0 \rangle = \text{ (diagramme : une ligne ondulée)}$$

Dans l'élément de matrice $\langle 0|\sigma_2(x)\sigma_2(y)|0 \rangle$, seul le terme en $a_{p'} a_{q'} a_p^\dagger a_q^\dagger$ subsiste à la contraction et donne $\delta(p' - p)\delta(q' - q) + \delta(p' - q)\delta(q' - p)$, d'où l'on tire :

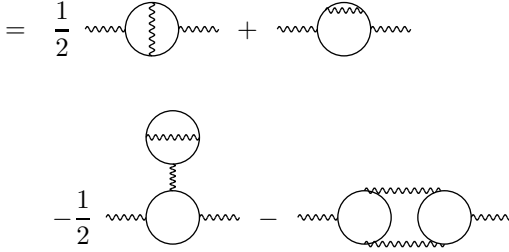
¹²Il faudrait calculer $\sigma_4(x)$ pour obtenir le terme en $\frac{1}{N^2}$.

$$\langle 0|\sigma_2(x)\sigma_2(y)|0 \rangle = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_p\omega_q} D(p+q)^2 A(p,q)^2 e^{i(p+q)(x-y)}$$

L'application du produit chronologique conduit¹³ à

$$\begin{aligned} \langle 0|T\sigma_2(x)\sigma_2(y)|0 \rangle &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(p)D(q)D(p+q)^2 A(p,q)^2 e^{i(p+q)(x-y)} \\ &= \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \end{aligned}$$


De la même façon dans $\langle 0|\sigma_1(x)\sigma_3(y)|0 \rangle$ seul le terme en $a_p a_p^\dagger$ contribue et on aboutit à :

$$\begin{aligned} \langle 0|T\sigma_1(x)\sigma_3(y)|0 \rangle &= \langle 0|T\sigma_3(x)\sigma_1(y)|0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(p)^2 D(q) [\frac{1}{2}F(p,q) \\ &\quad - \frac{1}{2}D(0)A(p,-p)A(q,-q) - D(p+q)A(p,q)^2] \\ &= \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \end{aligned}$$


¹³ Il faut noter que :

$$\begin{aligned} \theta(x^o - y^o) &= \theta(x^o - y^o)^2 \\ \theta(x^o - y^o)\theta(y^o - x^o) &= 0 \end{aligned}$$

et écrire

$$\begin{aligned} \langle 0|T\sigma_2(x)\sigma_2(y)|0 \rangle &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(x^o - y^o) X(p) e^{ip(x-y)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(x^o - y^o) X(q) e^{iq(x-y)} Y(p,q) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(y^o - x^o) X(p) e^{ip(y-x)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(y^o - x^o) X(q) e^{iq(y-x)} Y(p,q) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(x^o - y^o) X(p) e^{ip(x-y)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(y^o - x^o) X(q) e^{ip(y-x)} Y(p,q) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(y^o - x^o) X(p) e^{ip(y-x)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \theta(x^o - y^o) X(q) e^{ip(x-y)} Y(p,q) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} X(p) &\equiv \frac{1}{2\omega_p} g(p)g(-p) \\ Y(p,q) &\equiv A(p,q)^2 D(p+q)^2 \end{aligned}$$

La reconstruction des propagateurs explicitement covariants se fait alors directement.

Le dernier graphe est identique à celui qui apparaît dans $\langle 0|T\sigma_2(x)\sigma_2(y)|0 \rangle$ et doit donc être éliminé de notre comptage. Ceci provient de la structure de nos équations du mouvement dont les termes d'interaction sont bâtis, à un ordre donné, en fonction des champs déterminés aux ordres précédents. Il apparaît de ce fait des contributions spurieuses dans les fonctions de corrélation. Elles s'identifient aisément : si deux graphes sont identiques mais proviennent de produits de champs d'ordre différent, seul celui venant du champ à l'ordre le plus bas doit être considéré. Ce phénomène est identique à celui que l'on retrouve dans le développement de l'équation de Dyson.

Finalement on obtient des résultats identiques à ceux du chapitre précédent, ce qui valide notre méthode :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\sigma}(x)\tilde{\sigma}(y) \rangle &= \frac{1}{N} \text{~~~~~} \\
 &+ \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{1}{2} \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \right. \\
 &\left. - \frac{1}{2} \text{~~~~~} - \frac{1}{2} \text{~~~~~} \right\} + o\left(\frac{1}{N^3}\right)
 \end{aligned}$$

19.5 Indications sur la phase brisée

L'ensemble des considérations précédentes peut sembler n'avoir qu'un intérêt limité pour la physique sur le cône de lumière puisque le lagrangien considéré est invariant de forme. Cependant elles constituent une étape qu'il était indispensable d'éclaircir avant d'aborder le cas de la théorie à phase brisée. Il nous semble en effet très intéressant d'étudier la transition de phase de la théorie $\phi^4 O(N)$ constituée par l'apparition d'une valeur moyenne dans le vide non nulle pour l'une des composantes du champ. Ce phénomène brise clairement la symétrie $O(N)$ en la symétrie plus faible $O(N-1)$. L'intégration gaussienne dans la fonctionnelle génératrice, permise par l'introduction du champ effectif σ , ne concerne plus dès lors que les $N-1$ composantes symétriques du champ ϕ^i , $1 \leq i \leq N-1$. Le lagrangien de la composante ϕ^N (que l'on notera simplement ϕ) restant identique à ce qu'il était, le lagrangien total dans la phase brisée s'écrit :

$$L = \frac{N-1}{2} \left[-\frac{1}{g} \sigma^2(x) - \langle x | \ln[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma] | x \rangle + \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 - i\sigma \phi^2 \right]$$

Ce lagrangien voit sa structure modifiée, à travers le terme cinétique de ϕ , lorsqu'on se place sur le cône de lumière :

$$L = \frac{N-1}{2} \left[-\frac{1}{g} \sigma^2(x) - \langle x | \ln[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + i\sigma] | x \rangle + \partial^+ \phi \partial^- \phi - (\partial^\perp \phi)^2 - m^2 \phi^2 - i\sigma \phi^2 \right]$$

Des contraintes spécifiques au cône de lumière s'ajoutent à celles que nous avons déjà observées. Il est alors indispensable d'effectuer une projection des équations du mouvement sur les secteurs P et Q afin de prendre en compte les effets du mode zéro de ϕ . L'objectif est d'étudier les divergences et leur renormalisation dans les contraintes, de façon à accéder aux propriétés de la transition de phase de la même façon que dans les travaux de la deuxième partie, à l'exception notable du développement des champs et modes zéros qui ne sera plus du type série de Haag mais du type série en $\frac{1}{N}$. Cette étude est toujours en cours.

Conclusion

*Démons et merveilles
Vents et marées
Au loin déjà la mer s'est retirée
Jacques Prévert*

Inspirée des observations de Dirac sur la dynamique relativiste, la quantification sur le cône de lumière fait partie des méthodes permettant d'accéder aux domaines non perturbatifs des théories quantiques de champs. L'étape essentielle pour l'obtention de résultats non perturbatifs est la prise en compte du mode zéro du champ, étroitement associé aux propriétés du vide, ainsi que la résolution des équations couplant ce mode zéro au reste du champ. Nous avons utilisé deux approches distinctes, l'une mettant en oeuvre un développement en série de Haag dans la théorie ϕ^4 , et l'autre un développement en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ dans la théorie $\phi^4 O(N)$.

Un autre aspect important de cette méthode est le traitement de la divergence infrarouge. L'utilisation de fonctions tests, qui est naturelle lorsqu'on considère les champs quantiques comme des distributions à valeur d'opérateur, nous a permis de montrer que celle-ci n'était qu'une conséquence directe de la divergence ultraviolette minkowskienne. En évitant ainsi une régularisation brutale par soustraction du mode zéro après discrétisation, nous pensons être parvenu à une bien meilleure description du domaine infrarouge de la théorie. Effectivement nos résultats concernant la constante de couplage de la transition de phase de la théorie ϕ^4 se comparent avantageusement à ceux de la quantification conventionnelle, ainsi qu'à ceux des versions discrétisées de la quantification sur le cône de lumière. L'utilisation des distributions nous a permis d'autre part d'éclairer le "problème de causalité" apparaissant dans la forme discrète du commutateur de Pauli-Jordan. L'étude détaillée de la limite du continu a montré que les termes qui rétablissent la causalité sont précisément ceux qui, au moins à l'ordre dominant, disparaissent lors de la soustraction du mode zéro dans les sommes discrètes.

L'étude de la phase symétrique de la théorie $\phi^4 O(N)$, bien que non directement reliée au cône de lumière, est une étape indispensable avant celle de la phase à symétrie brisée. Nous avons validé nos méthodes de résolution en contruisant des fonctions de corrélation identiques à celles obtenues en quantification par intégrales de chemin.

Les étapes suivantes naturelles de ce travail sont d'affiner l'étude de la transition de phase de la théorie ϕ^4 afin d'obtenir d'autres exposants critiques, ce qui semble nécessiter l'introduction d'un mode zéro dynamique, et d'étudier la phase brisée de la théorie $\phi^4 O(N)$ sur le cône de lumière en utilisant les fonctions tests comme nous l'avons fait pour la théorie ϕ^4 . Une bonne connaissance du traitement des effets non perturbatifs des modes zéros et de la renormalisation dans ces théories simples est un préalable à l'extension de ces méthodes aux théories de jauges, qui présentent de nombreux facteurs de complexité supplémentaires. Enfin, la formulation continue de la quantification sur le cône de lumière permet d'envisager sous un angle nouveau la prise en compte des solutions topologiques du type solitons

qui étaient exclues dans la formulation discrétisée par la nécessité d'utilisation des conditions aux limites périodiques.

Appendice A

L' algorithme de Dirac-Bergmann

*"Le simple écolier sait maintenant des vérités
pour lesquelles Archimède eût sacrifié sa vie."*

Ernest Renan

On donne ici quelques indications sur l'algorithme de traitement des contraintes de Dirac-Bergmann. Pour une présentation plus poussée on se référera à [13] [14] [57] [18]. On se place dans un contexte classique.

A.1 Théories régulières et singulières

Considérons un système défini par le lagrangien $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ ¹ possédant les $2N$ degrés de liberté : et q_i et \dot{q}_i , $1 \leq i \leq N$. Les équations du mouvement découlent des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (\text{A.1})$$

soit, explicitement :

$$W_{ik} \ddot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{A.2})$$

où $W_{ik} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}$ est appelée la matrice hessienne.

Si le déterminant W de la matrice hessienne (le "hessien") est nul, le système d'équations (A.2) n'est pas inversible, et il est impossible d'exprimer toutes les accélérations \ddot{q}_i en fonction des \dot{q}_i et des q_i : on ne peut pas exprimer la dynamique du système de façon complète. De même, si on essaie de bâtir une description hamiltonienne, on se heurte à la même condition sur le hessien. Le passage de la description

¹Pour simplifier on ne considère que les lagrangiens ne dépendant pas explicitement du temps. En outre, on exclut tout lagrangien trop exotique qui amène à des équations inconsistantes, que ce soit au niveau des équations du mouvement ou des contraintes.

lagrangienne $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ à la description hamiltonienne $H = H(q_i, p_i, t)$ repose sur le changement de variable $\dot{q}_i \rightarrow p^i$. Ces moments canoniques conjugués sont définis par

$$p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{A.3})$$

ce qui doit fournir une relation entre les p^i et les \dot{q}_i qui conserve le nombre de degrés de liberté. Il doit y avoir une bijection entre l'ensemble des (q_i, \dot{q}_i) et celui des (q_i, p_i) . Cette condition s'écrit en demandant que le jacobien du changement de variable soit non nul :

$$J \equiv \det\left(\frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}\right) = W \neq 0$$

Dans la description hamiltonienne comme dans la description lagrangienne, il faut donc un hessien non nul pour obtenir des équations du mouvement solubles par les méthodes classiques. Dans le cas contraire, si on appelle R le rang de la hessienne, les N équations (A.2) se décomposent en : un sous-système de R relations (correspondant à la sous-matrice inversible de W_{ik}) permettant de résoudre R accélérations \ddot{q}_i en fonction des \dot{q}_i et des q_i et d'obtenir ainsi R équations du mouvement, et un sous-système non inversible de $M \equiv N - R$ relations entre les \dot{q}_i et les q_i que l'on appelle des contraintes.

On distingue donc² :

- Les lagrangiens réguliers dont le hessien est non nul. La dynamique est bien déterminée et les équations du mouvement sont toutes solubles.
- Les lagrangiens singuliers (ou "contraints") dont le hessien est nul. La dynamique est incomplète et seules R équations du mouvement sont solubles.

Examinons le cas des théories singulières. Les R équations du mouvement vont s'écrire³ :

$$\ddot{q}_a = q_a(q_i, \dot{q}_i) \text{ avec } 1 \leq a \leq R$$

et les M contraintes :

$$\Phi_b(q_i, \dot{q}_i) = 0 \text{ avec } R < b \leq M$$

Remarque : Stricto sensu, ces M relations ne sont pas toutes forcément des contraintes indépendantes. Certaines peuvent donner des inconsistances, d'autres peuvent engendrer des contraintes identiques. Dans ces cas il y aura seulement $M' < M$ véritables contraintes. Pour simplifier, dans la suite on considérera $M' = M$.

Dans le formalisme hamiltonien on va avoir R moments conjugués constituant R degrés de liberté :

$$p^a = p^a(q_i, \dot{q}_i) \text{ avec } 1 \leq a \leq R \quad (\text{A.4})$$

et M moments conjugués :

²Remarque : Le caractère régulier ou singulier est un attribut du lagrangien et non pas du système physique qu'il décrit.

³Sans perte de généralité on a renuméroté les indices, ici et dans la suite, pour simplifier les écritures.

$$p^b = P^b(q_i, p^a) \text{ avec } R < b \leq N \text{ et } 1 \leq a \leq R$$

constituant M contraintes :

$$\theta^b \equiv p^b - P^b(q_i, p^a) \quad (\text{A.5})$$

que l'on qualifie de "primaires" car découlant directement du lagrangien. L'inversion des relations (A.4) permet de déterminer R vitesses :

$$\dot{q}_a = \dot{q}_a(q_i, p_a, \dot{q}_b)$$

et il en reste M indéterminées. Si l'on tente d'écrire l'hamiltonien canonique on obtient :

$$H_C(q_i, p^a, \dot{q}_b) = p^i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) = p^a \dot{q}_a + P^b(q_i, p_a) \dot{q}_b - L(q_i, \dot{q}_i)$$

d'où l'on tire les équations d'Hamilton suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial H_C}{\partial p^a} = \dot{q}_a + \frac{\partial P^b}{\partial p^a} \dot{q}_b \\ \frac{\partial H_C}{\partial q_i} = \frac{\partial P^b}{\partial q_i} \dot{q}_b - \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H_C}{\partial \dot{q}_b} = P^b(q_i, p^a) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = 0 \end{cases}$$

Avec (A.5), (A.1) et (A.3), ceci s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{q}_a = \frac{\partial H_C}{\partial p^a} + \frac{\partial \theta^b}{\partial p^a} \dot{q}_b \\ -\dot{p}_i = \frac{\partial H_C}{\partial q_i} + \frac{\partial \theta^b}{\partial q_i} \dot{q}_b \end{cases}$$

On a là seulement N+R équations du mouvement (comme dans le cas lagrangien) et il subsiste en outre M vitesses \dot{q}_b indéterminées. L'espace des phases que nous avons obtenu s'est réduit à N+R dimensions. Cette formulation n'est pas satisfaisante.

L'algorithme de Dirac-Bergmann est une procédure qui permet de construire une formulation hamiltonienne consistante à partir d'un lagrangien singulier. Notons Γ l'espace des phases initial et Γ' le sous-espace que nous avons obtenu. L'idée de Dirac est de construire un nouvel hamiltonien, dit "primaire", défini sur Γ (ou du moins dans un voisinage de Γ') et permettant de retrouver toute la dynamique.

Le système d'équations définissant Γ' en tant que sous-espace de Γ est simplement l'ensemble des contraintes $\theta^b = 0$, $R < b \leq N$. Ces contraintes qui s'annulent donc sur Γ' influencent néanmoins la dynamique du système car leurs dérivées dans un voisinage de Γ' sont a priori non nulles. En pratique ceci signifie que l'on doit annuler les contraintes seulement après avoir calculé toutes les dérivées dans les crochets de Poisson. Dirac a proposé la notation suivante :

Soit une fonction $F(q_i, p^i)$ définie sur Γ :

□ on appelle égalité faible sur Γ' (et on note avec \approx) une équation qui annule la restriction de $F(q_i, p^i)$ sur Γ' sans rien supposer sur ses dérivées :

$$F(q_i, p^i)|_{\Gamma'} = 0$$

□ on appelle égalité forte sur Γ' (et on note avec $=$) une équation qui annule la restriction sur Γ' de $F(q_i, p^i)$ ainsi que son gradient :

$$\begin{aligned} F(q_i, p^i)|_{\Gamma'} &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}; \frac{\partial F}{\partial p^i} \right)|_{\Gamma'} &= 0 \end{aligned}$$

Les contraintes sont donc toutes des égalités faibles⁴, tandis que les équations du mouvement sont des

⁴Le sous-espace Γ' est donc défini lui-même par des égalités faibles.

égalités fortes. On va montrer que toute fonction s'annulant faiblement sur Γ' peut s'écrire comme une combinaison linéaire des contraintes qui définissent Γ' . La restriction à Γ' de F s'obtient en remplaçant les p^b ($R < b \leq N$) par leurs valeurs $P^b(q_i, p^a)$:

$$F(q_i, p^i)|_{\Gamma'} \approx F[q_i, p^a, P^b(q_i, p^a)]$$

Alors une variation totale de F sur Γ' s'écrit :

$$\delta F|_{\Gamma'} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p^a} \delta p^a + \frac{\partial F}{\partial p^b} \delta p^b \quad \text{avec} \quad \delta p^b = \frac{\partial P^b}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial P^b}{\partial p^a} \delta p^a$$

soit :

$$\delta F|_{\Gamma'} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial p^b} \frac{\partial P^b}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial F}{\partial p^a} + \frac{\partial F}{\partial p^b} \frac{\partial P^b}{\partial p^a} \right) \delta p^a$$

Alors $F \approx 0$ implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial p^b} \frac{\partial \theta^b}{\partial q_i} &\approx 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^b} \frac{\partial \theta^b}{\partial p^i} &\approx 0 \end{aligned}$$

où l'on a remplacé P^b par $-\theta^b$, et étendu la sommation pour $1 \leq i \leq N$ dans la dernière équation. Ceci étant possible puisque pour $R < b, c \leq N$ on a :

$$\frac{\partial \theta^b}{\partial p^c} = \delta_c^b$$

et la dernière équation est alors automatiquement satisfaite. En négligeant les termes différentiels d'ordre supérieur on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} (F - \frac{\partial F}{\partial p^b} \theta^b) &\approx 0 \\ \frac{\partial}{\partial p^i} (F - \frac{\partial F}{\partial p^b} \theta^b) &\approx 0 \end{aligned}$$

On tire donc

$$F = \mu_b \theta^b \quad \text{avec} \quad \mu_b \equiv \frac{\partial F}{\partial p^b}$$

Ainsi toute fonction F s'annulant faiblement sur Γ' peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de ces contraintes ⁵.

On va définir sur Γ l'hamiltonien primaire H_1 en demandant qu'il se réduise à l'hamiltonien canonique sur Γ' :

$$H_1 - H_C \approx 0$$

Ainsi on a :

$$H_1 = H_C + \mu_b \theta^b$$

⁵ En d'autres termes les contraintes sont les seules quantités indépendantes qui génèrent l'espace Γ'

Cet hamiltonien primaire engendre les équations du mouvement sur Γ :

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = \{q_i, H_1\} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} = \{p_i, H_1\}\end{aligned}$$

où $\{, \}$ sont les crochets de Poisson habituels :

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \text{ avec } 1 \leq i \leq N$$

où toutes les coordonnées q_i et p^i sont considérées comme indépendantes (puisque H_1 est défini sur Γ).

A.2 La procédure de Dirac-Bergmann

Jusque là, nous n'avons fait que donner une forme adaptée à notre problème. Il y subsiste toujours M quantités indéterminées, les multiplicateurs de Lagrange μ_b (qui correspondent aux M vitesses non résolues). Pour les déterminer, Dirac impose une hypothèse très raisonnable sur les contraintes : celles-ci doivent rester immuables dans l'évolution temporelle du système. Cela revient à poser l'invariance de l'espace Γ' dans le temps. Ces conditions, appelées conditions de consistance, s'écrivent :

$$\dot{\theta}^b \approx 0 \text{ pour } R < b \leq N$$

soit

$$\dot{\theta}^b = \{\theta^b, H_1\} = \{\theta^b, H_C\} + \mu_c \{\theta^b, \theta^c\} \approx 0$$

On notera $B^b \equiv \{\theta^b, H_C\}$ (que l'on supposera non nul) et $C^{bc} \equiv \{\theta^b, \theta^c\}$ la "matrice des contraintes primaires"⁶. Les conditions de consistance s'écrivent donc

$$C^{bc} \mu_c \approx B^b \text{ pour } R < b \leq N \tag{A.6}$$

La détermination des μ_c passe donc par l'inversion de la matrice des contraintes. Notons r son rang. Deux cas peuvent se présenter :

■ Premier cas : $r = M$

La matrice est maximale inversible, le système (A.6) est soluble pour tous les μ_c :

$$\mu_c = -[C^{-1}]_{cb} B^b$$

L'hamiltonien primaire est alors complètement déterminé :

$$H_1 = H_C - \theta^c [C^{-1}]_{cb} \{\theta^b, H_C\}$$

ce qui fixe la dynamique. L'évolution d'une grandeur physique quelconque A s'écrit :

$$\dot{A} = \{A, H_1\} = \{A, H_C\} - \{A, \theta^c\} [C^{-1}]_{cb} \{\theta^b, H_C\}$$

⁶ C^{bc} est antisymétrique et de dimension $M \times M$

Introduisons les crochets de Dirac $\{, \}^*$:

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, \theta^c\} [C^{-1}]_{cb} \{\theta^b, B\}$$

En remplaçant les crochets de Poisson par ceux de Dirac, toutes les équations dynamiques retrouvent alors leur forme canonique. (ref de Hansen et al.) (werner p40). Ainsi les équations de Hamilton s'écriront⁷ :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H_C\}^* \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H_C\}^* \end{aligned}$$

Remarque : l'étape essentielle est l'inversion de la matrice des contraintes C, ce qui en pratique peut se révéler assez ardu.

■ Deuxième cas : $r < M$

C n'est pas inversible mais il existe une sous-matrice de C inversible de dimension r^2 . Le système (A.6) est donc partiellement soluble : on peut déterminer r coefficients μ_c en fonction des $m \equiv M - r$ autres, et il reste m relations entre les q_i et les p_i ne faisant pas intervenir les μ_c .

□ Si ces relations ne reproduisent aucune des contraintes primaires et ne sont pas tautologiques ($0=0$), elles sont alors elles-mêmes de nouvelles contraintes, que l'on qualifie de secondaires. Elles définissent, avec les contraintes primaires, un nouvel hamiltonien, secondaire, (on notera maintenant θ_1 et θ_2 pour distinguer contraintes primaires et secondaires) :

$$H_2 \equiv H_C + \mu_{1c} \theta_1^c + \mu_{2d} \theta_2^d \text{ pour } R < c \leq N \text{ et } r < d \leq M$$

qui fait apparaître m coefficients secondaires μ_2 supplémentaires. On se retrouve donc dans la situation initiale avec $M + m$ contraintes définissant un espace des phases réduit Γ'' (auquel l'égalité faible fait maintenant référence). Il faut alors imposer les conditions de consistance sur les deux types de contraintes :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1^c &= \{\theta_1^c, H_2\} \text{ pour } R < c \leq N \\ \dot{\theta}_2^d &= \{\theta_2^d, H_2\} \text{ pour } r < d \leq M \end{aligned}$$

et la procédure recommence jusqu'à ce que tous les multiplicateurs de Lagrange soient déterminés, ou que l'on se retrouve dans le cas suivant.

□ Si parmi ces relations certaines sont tautologiques ou reproduisent des contraintes primaires (notons $l < m$ le nombre de ces relations), les conditions de consistance n'apporteront aucune information supplémentaire sur la dynamique du système et il restera l coefficients μ définitivement indéterminés. On peut montrer qu'il s'agit là d'une caractéristique propre du lagrangien qui signale

⁷Ces crochets possèdent toutes les propriétés des crochets de Poisson (antisymétrie, Jacobi, etc.) sauf les relations canoniques :

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &\neq 0 \\ \{p^i, p^j\} &\neq 0 \\ \{q_i, p^j\} &\neq \delta_i^j \end{aligned}$$

Les crochets de Dirac sont très utiles si l'on envisage de quantifier le système par quantification canonique. Le principe de correspondance associe habituellement les commutateurs d'opérateurs quantiques aux crochets de Poisson. Dans le cas d'un système contraint, la quantification se fera par association avec les crochets de Dirac :

$$\{A, B\}^* \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]$$

la présence d'une invariance de jauge. Pour fixer la dynamique, il faudra imposer sur les variables dynamiques l conditions supplémentaires appelées conditions subsidiaires :

$$\Omega^a(q_i, p^i) = 0 \text{ pour } 1 \leq a \leq l$$

qui seront en fait autant de choix de jauge.

A.3 La classification des contraintes selon Dirac

Pour préciser et simplifier les considérations précédentes, Dirac a introduit un classement judicieux des contraintes.

Définition : Une variable dynamique A sera dite de *première classe* si elle "poissonne" avec toutes les contraintes :

$$\{A, \theta^a\} \approx 0 \text{ pour toutes contraintes } \theta^a$$

Dans le cas contraire A est dite de *deuxième classe*.

Les contraintes elles-mêmes se divisent en contraintes de première ou de deuxième classe (CPC ou CDC). Dans la suite on classera l'ensemble des contraintes θ (primaires, secondaires, etc.) en :

- contraintes de première classe φ^a , avec des coefficients $\mu_{\varphi a}$, $1 \leq a \leq N_\varphi$
- contraintes de deuxième classe Ψ^α , avec des coefficients $\mu_{\Psi\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq N_\Psi$

La matrice des contraintes (quelle que soit l'étape de la procédure) peut donc se réécrire sous la forme :

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \Psi \end{array} \left(\begin{array}{cc} \overbrace{} & \overbrace{} \\ \varphi & \Psi \\ \hline \varphi & \Psi \end{array} \right)$$

où $\Delta^{\alpha\beta} \equiv \{\Psi^\alpha, \Psi^\beta\}$ est la matrice des contraintes de *deuxième classe*.

Propriété : Δ est toujours inversible.

Si tel n'était pas le cas il existerait en effet un vecteur propre v de Δ tel que :

$$\Delta^{\alpha\beta} v_\beta = \{\Psi^\alpha, \Psi^\beta v_\beta\} = 0$$

D'autre part on a aussi pour chaque CPC φ^a (par définition) :

$$\{\varphi^a, \Psi^\beta v_\beta\} = 0$$

Ainsi le crochet de Poisson de $\Psi^\beta v_\beta$ avec toutes les contraintes s'annule, c'est donc une quantité de première classe, contrairement à ce qu'on a supposé. Donc Δ est inversible. La séparation entre CPC et CDC est donc fructueuse puisqu'elle permet de voir directement quels sont les coefficients solubles (μ_Ψ) et ceux qui ne le sont pas (μ_φ).

Définitions et propriétés :

□ A toute variable dynamique A définie sur Γ' on associe la variable A^* définie sur Γ telle que :

$$A^* \equiv A - \{A, \Psi^\alpha\}(\Delta^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta$$

C'est une variable de première classe (elle "poissonne" par construction avec tous les Ψ^α) et on a :

$$A^* \approx A$$

(parce que Ψ^β s'annule faiblement sur Γ' et qu'elle se trouve en dehors d'un crochet de Poisson)

□ Les crochets de Dirac se définissent à partir de Δ et des CDC :

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, \Psi^\alpha\}[\Delta^{-1}]_{\alpha\beta}\{\Psi^\beta, B\}$$

et on a les égalités suivantes :

$$\{A^*, B\} \approx \{A, B^*\} \approx \{A^*, B^*\} = \{A, B\}^*$$

□ La dernière égalité n'est pas au sens faible car les crochets de Dirac ont été justement construits pour ne plus faire de distinction entre égalité faible et forte. On sait que $\Psi^\alpha \approx 0$ et $\{A, \Psi^\alpha\} \not\approx 0$ mais $\{A, \Psi^\alpha\}^* = 0$.

■ **Premier cas** : la théorie ne contient que des CDC.

Si une théorie ne contient que des CDC, alors $\Delta = C$ et la dynamique est entièrement déterminée par la procédure. On a :

$$H_F = H_C + \mu_{\Psi^\alpha}\Psi^\alpha \text{ avec } 1 \leq \alpha \leq N_\Psi$$

avec

$$\mu_{\Psi^\alpha} = -[\Delta^{-1}]_{\alpha\beta}\{\Psi^\beta, H_C\}$$

et l'évolution de grandeur physique est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{A} &\approx \{A, H_F\} \approx \{A, H_C\} - \{A, \Psi^\alpha\}[\Delta^{-1}]_{\alpha\beta}\{\Psi^\beta, H_C\} \\ &\approx \{A, H_C^*\} = \{A, H_C\}^* \end{aligned}$$

■ **Deuxième cas** : la théorie contient des CPC et des CDC.

Si la théorie contient des CPC et de CDC, l'hamiltonien final s'écrit :

$$H_F = H_C + \mu_{\varphi^a}\varphi^a + \mu_{\Psi^\alpha}\Psi^\alpha \text{ avec } 1 \leq a \leq N_\varphi, 1 \leq \alpha \leq N_\Psi$$

et les conditions de consistance du type :

$$\dot{\Psi}^\alpha \approx 0$$

permettent de déterminer tous les μ_Ψ :

$$\mu_{\Psi\alpha} = -[\Delta^{-1}]_{\alpha\beta}\{\Psi^\beta, H_C\} \quad (\text{A.7})$$

alors que les conditions de consistance du type :

$$\dot{\varphi}^a \approx 0$$

donnent

$$\{\varphi^a, H_C\} \approx 0$$

Les coefficients $\mu_{\varphi a}$ sont déterminés par un choix de jauge

$$\Omega^a(q_i, p^i) = 0$$

L'hamiltonien final peut s'écrire comme :

$$H_F = H_C^* + \mu_{\varphi a} \varphi^a \text{ avec } 1 \leq a \leq N_\varphi$$

et l'évolution d'une grandeur physique A se fait donc par :

$$\begin{aligned} \dot{A} &\approx \{A, H_F\} \approx \{A, H_C^* + \mu_{\varphi a} \varphi^a\} \\ &= \{A, H_C + \mu_{\varphi a} \varphi^a\}^* \end{aligned}$$

A.4 Formulation pour une théorie de champ

On va généraliser les considérations précédentes au cas d'une théorie classique de champ scalaire $\phi(x)$. Les correspondances suivantes sont immédiates (les indices k et l indiquent si la contrainte est primaire, secondaire, etc.) :

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow \phi(x) \\ \dot{q}_i &\rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \\ p_i &\rightarrow \Pi(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta(\frac{\partial \phi}{\partial x^0})} \\ \theta_k &\rightarrow \theta_k(x) \\ C_{kl}(x, y) &= \{\theta_k(x), \theta_l(y)\} \\ H_1 &= H_c + \int dx \mu_k(x) \theta_k(x) \\ \{A(x), B(y)\} &= \int dz^0 \left[\frac{\delta A(x)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \Pi(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \Pi(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \phi(z)} \right] \end{aligned}$$

L'équation de consistance pour les contraintes primaires

$$\int dy C_{11}(x, y) \mu_1(y) = B_1(x)$$

définit une application

$$C_{11} : \mu_1 \rightarrow B_1 = C_{11} \mu_1$$

Pour étudier l'inversibilité de cette application on n'a plus accès à la notion de rang réservée aux dimensions finies. A la place on définit deux projecteurs P et Q projetant respectivement sur le noyau

$KerC_{11}$ et sur l'image ImC_{11} de l'application C_{11} . Ils définissent une décomposition orthogonale de l'espace total⁸. On a immédiatement les propriétés :

$$\begin{aligned} P^2 &= P & Q^2 &= Q & PQ &= QP = 0 \\ CP &= PC & CQ &= QC \\ P + Q &= 1 \end{aligned} \tag{A.8}$$

La projection sur le noyau de l'équation de consistance :

$$PC\mu = CP\mu = 0 = PB$$

définit alors les contraintes secondaires :

$$PB = 0$$

tandis que la projection sur l'image donne :

$$QC_{11}\mu = C_{11}Q\mu = C_{11}Q^2\mu = QC_{11}Q\mu = (QC_{11}Q)(Q\mu) = QB$$

où $QB = B$ puisque B est dans ImC_{11} et où $(QC_{11}Q)$ est la restriction de C_{11} à ImC_{11} et est de ce fait inversible⁹. En notant $\mu_{1Q} \equiv Q\mu_1$ on obtient :

$$\mu_{1Q} = (QC_{11}Q)^{-1}B$$

qui permet la détermination de μ_{1Q} .

L'équation de consistance des contraintes secondaires

$$\{PB, H_C\} \approx 0$$

va définir une application C_{22} pour laquelle on définira des projecteurs P_2 et Q_2 et ainsi de suite en suivant le même algorithme qu'en dimension finie.

⁸Si on note E l'espace fonctionnel dans lequel l'application C_{11} est définie, on sait que $KerC_{11} \oplus ImC_{11} = E$

⁹En général l'inversion de la matrice C_{11} n'est pas unique, contrairement au cas en dimension finie. L'équation $B_1 = C_{11}\mu_1$ est en fait une équation aux dérivées partielles et il existe un arbitraire dans la résolution des μ_1 qui est levé par la fixation de conditions aux limites. Voir [57] à ce sujet.

Appendice B

Evaluation des éléments de matrice

B.1 Calcul de l'élément de matrice $\langle q_1^+ | \varphi_1^2 \varphi_2 | q_2^+ \rangle$

On rappelle que

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dp_1^+}{\sqrt{p_1^+}} \widehat{f}(p_1^+) \left[a_{p_1} e^{-\frac{i}{2} p_1^+ x^-} + a_{p_1}^\dagger e^{\frac{i}{2} p_1^+ x^-} \right] \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1^+ dk_2^+}{\sqrt{k_1^+ k_2^+}} \widehat{f}(k_1^+) \widehat{f}(k_2^+) \left\{ \left[a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger e^{\frac{i}{2} (k_1^+ + k_2^+) x^-} + a_{k_1} a_{k_2} e^{-\frac{i}{2} (k_1^+ + k_2^+) x^-} \right] g_2^{++}(k_1^+, k_2^+) \right. \\ &\quad \left. + G_2(k_1^+, -k_2^+) a_{k_1}^\dagger a_{k_2} e^{\frac{i}{2} (k_1^+ - k_2^+) x^-} \right\}\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\langle q_1^+ | \varphi_1^2(x) \varphi_2(x) | q_2^+ \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dp_1 dp_2 dk_1 dk_2}{\sqrt{p_1 \dots k_2}} \widehat{f}(p_1) \dots \widehat{f}(k_2) \{ \\ &\quad \langle q_1^+ | a_{p_1}^\dagger a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | q_2^+ \rangle G_2(k_1^+, -k_2^+) e^{\frac{i}{2} (p_1^+ - p_2^+ + k_1^+ - k_2^+) x^-} \\ &\quad + \langle q_1^+ | a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | q_2^+ \rangle G_2(k_1^+, -k_2^+) e^{-\frac{i}{2} (p_1^+ - p_2^+ - k_1^+ + k_2^+) x^-} \\ &\quad + \langle q_1^+ | a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | q_2^+ \rangle g_2^{++}(k_1^+, k_2^+) e^{-\frac{i}{2} (p_1^+ + p_2^+ - k_1^+ - k_2^+) x^-} \} \end{aligned}$$

Avec

$$[a_p, a_q] = \delta(p^+ - q^+) \quad (\text{B.1})$$

on a le développement suivant des produits d'opérateurs a et a^\dagger :

$$\begin{aligned}\langle q_1^+ | a_{p_1}^\dagger a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | q_2^+ \rangle &= \theta(q_2 - q_1) \delta(k_2 - q_2) \delta(q_1 - p_1) \delta(p_2 - k_1) \\ \langle q_1^+ | a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | q_2^+ \rangle &= \theta(q_2 - q_1) \delta(k_2 - q_2) [\delta(q_1 - p_2) \delta(p_1 - k_1) + \delta(q_1 - k_1) \delta(p_1 - p_2)] \\ \langle q_1^+ | a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | q_2^+ \rangle &= \theta(q_2 - q_1) \delta(q_1 - k_1) [\delta(p_1 - q_2) \delta(p_2 - k_2) + \delta(p_1 - k_2) \delta(p_2 - q_2)] \\ &\quad + \theta(q_2 - q_1) \delta(q_1 - k_2) [\delta(p_1 - q_2) \delta(p_2 - k_1) + \delta(p_1 - k_1) \delta(p_2 - q_2)] \\ &\quad + \delta(q_1 - q_2) [\delta(p_1 - k_1) \delta(p_2 - k_2) + \delta(p_1 - k_2) \delta(p_2 - k_1)]\end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où ce dernier terme représente l'interaction de mode zéro : $q_1 = q_2$. Après avoir effectué toutes les intégrations on obtient le résultat final :

$$\begin{aligned}\langle q_1^+ | \varphi_1^2 \varphi_2 | q_2^+ \rangle &= \frac{\theta(q_2^+ - q_1^+)}{(2\pi)^2} \frac{\widehat{f}(q_1^+) \widehat{f}(q_2^+)}{\sqrt{q_1^+ q_2^+}} e^{\frac{i}{2} (q_1^+ - q_2^+) x^-} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \widehat{f}^2(p) [2G_2(p_1 - q_2) + 4g_2^{++}(p, q_1)] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \delta(q_1^+, q_2^+) \int_0^{+\infty} \frac{dp_1}{p_1} \frac{dp_2}{p_2} \widehat{f}^2(p_1) \widehat{f}(p_2)^2 g_2^{++}(p_1, p_2)\end{aligned}$$

B.2 Approche formelle systématique

Le calcul des éléments de matrice peut se révéler vite fastidieux, surtout si on s'intéresse aux produits d'ordre plus élevé. Le point important est la détermination et l'évaluation des produits d'opérateurs a et a^\dagger qui subsistent lors de la projection sur les états de Fock. Il est possible de systématiser ces calculs. Nous avons élaboré une application sous Maple V qui reproduit l'algèbre (B.1) et fournit l'ensemble des contractions du type (B.2) (il ne reste plus qu'à effectuer les intégrations pour obtenir le résultat final). La donnée initiale est un élément de matrice de la forme $\langle bra|\varphi_1 \dots \varphi_n|ket \rangle$ où les φ sont des sommes de produits (non commutatifs) d'opérateurs a_p et a_p^\dagger , où les moments p sont traités comme des indices. Ceux-ci doivent impérativement s'écrire comme un couple lettre-chiffre : $p3, k3, l1$ etc. Chaque champ φ doit porter une lettre de moment différent. Enfin le programme suppose qu'il y a une symétrie d'échange entre des moments qui portent la même lettre (ainsi k_1, k_2 et k_3 ont un rôle symétrique) sauf si cette lettre est une lettre capitale (ainsi Q_1 et Q_2 ne sont pas interchangeables).

Le programme se compose de plusieurs modules :

- Com : reproduit l'algèbre (B.1)
- Haff : construit l'ensemble des contractions de Wick en évaluant le haffnien [34]
- Mef : met en forme utilisable le produit de départ
- Elim : élimine les contractions nulles
- Sym : recherche les symétries
- Simp : effectue toutes les simplifications
- Vev : procédure principale

PROGRAMME : aacroix

```

Vev := proc(A)
local i, j, k, Ll, contract, term, Lterm, Res, Com, Haff, Mef,
Elim, Sym, Simp;
global elem, factnum, elemlist, factnumlist, occur, momsymb;
  Com := proc(A, B)
    local C;
    global dt;
    dt := proc(A, B)
      local temp;
      if A = B then temp := 0
      else temp := delta(A*B)
      fi;
      RETURN(temp)
    end;
    if A[1] = B[1] then C := 0
    elif A[1] = ds then C := dt(A[2], B[2])
    else C := -dt(A[2], B[2])
    fi;
  end;

```

```
    RETURN(C)
end;
Haff := proc(A)
    local perm, permlist, p, i, n, np, Q, H, Hf;
    with(combinat);
    printf("Haff running...\n");
    n := nops(A);
    perm := permute(n);
    np := nops(perm);
    permlist := permute(A);
    H := 0;
    for p to np do
        Q := 1;
        for i by 2 to n do
            if perm[p][i + 1] < perm[p][i] and
               permlist[p][i][1] = ds or
               permlist[p][i + 1][1] = ds then Q := 0
            else Q := Q*Com(permlist[p][i],
                           permlist[p][i + 1])
            fi
        od;
        H := H + Q
    od;
    Hf := H/(1/2*n)!;
    RETURN(Hf)
end;
Mef := proc(A)
    local A1, A2, i, j, NL, opera, moment, L, expr;
    global factnum, elem, Nel;
    printf("Mef running ... \n");
    A1 := expand(A);
    A2 := convert(A1, list);
    Nel := nops(A2);
    if whattype(A1) <> '+' then A2 := [A1]; Nel := 1
    fi;
```

```
elem := array(1 .. Nel);
factnum := array(1 .. Nel);
for i to Nel do
  L := convert(A2[i], list);
  if op(0, op(1, L)) <> cr and
  op(0, op(1, L)) <> ds then
    factnum[i] := op(1, L); L := op(2, L)
  else factnum[i] := 1
  fi;
  NL := nops(L);
  expr := [];
  for j to NL do
    opera := op(0, op(j, L));
    moment := op(1, op(j, L));
    expr := [op(expr), [opera, moment]]
  od;
  elem[i] := expr;
  print(factnum[i], elem[i])
od
end;

Elim := proc()
  local i, j, Nelem, Nbop, nul;
  global factnum, elem, factnumlist, elemlist;
  printf("Elim running ...\n");
  for i to Nel do
    nul := non;
    Nelem := nops(elem[i]);
    Nbop := 0;
    for j from Nelem by -1 to 1 do
      if elem[i][j][1] = cr then
        Nbop := Nbop + 1
      else Nbop := Nbop - 1
      fi;
      if Nbop < 0 then nul := oui; break fi
    od;
  od;
```

```
    if Nbop <> 0 then nul := oui fi ;
    if nul = oui then
        elem[i] := 0 ; factnum[i] := 0
    fi
od ;
elemlist :=
    remove(x -> x = 0, convert(elem, list)) ;
factnumlist :=
    remove(x -> x = 0, convert(factnum, list)) ;
printf("Il y a %d terme(s) qui contribue(nt) :\n",
    nops(elemlist)) ;
for i to nops(elemlist) do
    print(factnumlist[i], elemlist[i])
od
end ;
Sym := proc(A)
    local i, j, nA, lettre, operat, sym, indice,
    lettrecourante, operatcourant, ABC, letmomsym, res ;
    printf("Sym running ...\n") ;
    ABC := [A, B, C, D, E, F, G, I, J, K, L, M, N, O,
        P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z] ;
    nA := nops(A) ;
    for i to nA do
        operat[i] := op(1, op(i, A)) ;
        lettre[i] := substring(op(2, op(i, A)), 1) ;
        indice[i] := substring(op(2, op(i, A)), 2)
    od ;
    sym := {} ;
    for i to nA do
        lettrecourante := lettre[i] ;
        operatcourant := operat[i] ;
        if member(lettrecourante, ABC) then next fi ;
        for j from i + 1 to nA do
            if lettre[j] = lettrecourante and
                operat[j] = operatcourant then sym := sym
```

```
        union {cat(lettre[i], indice[i]),
              cat(lettre[j], indice[j])}
      fi
    od
  od;
letmomsym := map(x -> substring(x, 1), sym);
res := NULL;
for i in letmomsym do res := res, sort(convert(
  select(x -> substring(x, 1) = i, sym), list))
od;
res := {res};
printf("Les moments symétriques sont :");
print(res);
RETURN(res)
end;
Simp := proc(A, B)
  local
  i, nA, nB, a, A2, A3, res, sym, temp, X, Y, Xlist;
  if B = {} then RETURN(A) fi;
  nA := nops(A);
  nB := nops(B);
  A2 := NULL;
  for i to nA do
    a := {op(1, op(1, op(i, A))),
          op(2, op(1, op(i, A)))};
    A2 := A2, a
  od;
  A2 := {A2};
  for k to nB do
    X := table();
    for i in op(k, B) do
      temp :=
        op(1, select(x -> member(i, x), A2));
      X[i] := op(1, temp minus {i})
    od;
  od;
```

```
Xlist := convert(X, list);
Y := sort(Xlist);
A3 := remove(x ->
  x intersect convert(op(k, B), set) <> {},
  A2);
for i to nops(op(k, B)) do
  A3 := A3 union {{Y[i], op(i, op(k, B))}}
od;
A2 := A3
od;
res := 1;
for i to nA do res :=
  res*dt(op(1, op(i, A3)), op(2, op(i, A3)))
od;
RETURN(res)
end;
Mef(A);
Elim(elem);
Ll := nops(elemelist);
for i to Ll do
  printf("\n----- TERME N°%d ---\n\n", i);
  momsymb := Sym(op(i, elemelist));
  term := Haff(op(i, elemelist));
  Lterm := nops(term);
  if whattype(term) = '+' then
    Res := 0;
    printf("Simp running ... \n");
    for j to Lterm do
      Res := Res + Simp(op(j, term), momsymb)
    od
  else Res := term
fi;
printf("RESULTAT : terme n° %d \n", i);
print(factnumlist[i]*Res)
```

od
end

INITIALISATION DES DONNEES

```
> bra2 :=&*(ds[Q1],ds[Q2]);
> ket2 :=&*(cr[Q3],cr[Q4]);
> phi11 :=cr[k1]+ds[k1];
> phi12 :=cr[q1]+ds[q1];
> phi2 :=cr[l1]&*cr[l2]+2*(cr[l1]&*ds[l2])+ds[l1]&*ds[l2];
> phi31 :=&*(cr[p1],cr[p2],cr[p3])+3*&*(cr[p1],cr[p2],ds[p3])+3*&*(cr[p1],ds[p2],ds[p3])+&*(ds[p1],ds[p2],ds[p3]);
> phi32 :=&*(cr[q1],cr[q2],cr[q3])+3*&*(cr[q1],cr[q2],ds[q3])+3*&*(cr[q1],ds[q2],ds[q3])+&*(ds[q1],ds[q2],ds[q3]);
> Omega11 :=&*(cr[m1],ds[m1]);
> Mb2k2 :=&*(bra2,ket2);
> Mb211 :=&*(bra2,phi11,phi12);
> M303 :=&*(phi31,Omega11,phi32);
> Mb2123 :=&*(bra2,phi11,phi2,phi31);
```

EXEMPLES D'UTILISATION

> Vev(Mb2k2);

Mef running ...

1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, Q3], [cr, Q4]]

Elim running ...

Il y a 1 terme(s) qui contribue(nt) :

1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, Q3], [cr, Q4]]

————— TERME N°1 —————

Sym running ...

Les moments symétriques sont :

{}

Haff running...

Simp running ...

RESULTAT : terme n° 1

delta(Q1 Q3) delta(Q2 Q4) + delta(Q1 Q4) delta(Q2 Q3)

>

> Vev(Mb211);

Mef running ...

1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, q1]]
 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [ds, q1]]
 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, q1]]
 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [ds, q1]]

Elim running ...

Il y a 1 terme(s) qui contribue(nt) :

1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, q1]]

————— TERME N°1 —————

Sym running ...

Les moments symétriques sont :

{}

Haff running...

Simp running ...

RESULTAT : terme n° 1

delta(Q1 k1) delta(Q2 q1) + delta(Q1 q1) delta(Q2 k1)

> Vev(M101) ;

Mef running ...

1, [[cr, k1], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1]]
 1, [[cr, k1], [cr, m1], [ds, m1], [ds, q1]]
 1, [[ds, k1], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1]]
 1, [[ds, k1], [cr, m1], [ds, m1], [ds, q1]]

Elim running ...

Il y a 1 terme(s) qui contribue(nt) :

1, [[ds, k1], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1]]

————— TERME N°1 —————

Sym running ...

Les moments symétriques sont :

{}

Haff running...

RESULTAT : terme n° 1

delta(k1 m1) delta(m1 q1)

> Vev(M303) ;

Mef running ...

1, [[cr, p1], [cr, p2], [cr, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [cr, q3]]
 3, [[cr, p1], [cr, p2], [cr, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [ds, q3]]
 3, [[cr, p1], [cr, p2], [cr, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 1, [[cr, p1], [cr, p2], [cr, p3], [cr, m1], [ds, m1], [ds, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 3, [[cr, p1], [cr, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [cr, q3]]
 9, [[cr, p1], [cr, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [ds, q3]]
 9, [[cr, p1], [cr, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 3, [[cr, p1], [cr, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [ds, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 3, [[cr, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [cr, q3]]
 9, [[cr, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [ds, q3]]
 9, [[cr, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 3, [[cr, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [ds, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 1, [[ds, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [cr, q3]]
 3, [[ds, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [ds, q3]]
 3, [[ds, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [ds, q2], [ds, q3]]
 1, [[ds, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [ds, q1], [ds, q2], [ds, q3]]

Elim running ...

Il y a 1 terme(s) qui contribue(nt) :

1, [[ds, p1], [ds, p2], [ds, p3], [cr, m1], [ds, m1], [cr, q1], [cr, q2], [cr, q3]]

————— TERME N°1 —————

Sym running ...

Les moments symétriques sont :

$$\{[q1, q2, q3], [p1, p2, p3]\}$$

Haff running...

Simp running ...

RESULTAT : terme n° 1

$$18 \text{ delta}(p1 \ m1) \text{ delta}(p2 \ q2) \text{ delta}(p3 \ q3) \text{ delta}(m1 \ q1)$$

> Vev(Mb2123) ;

Mef running ...

1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [cr, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [cr, l2], [cr, p1], [cr, p2], [ds, p3]]
 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [cr, l2], [cr, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [cr, l2], [ds, p1], [ds, p2], [ds, p3]]

- 2, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
- 6, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [ds, p3]]
- 6, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 2, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [cr, l1], [ds, l2], [ds, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
- 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [ds, p3]]
- 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [ds, l1], [ds, l2], [ds, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [cr, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
- 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [cr, l2], [cr, p1], [cr, p2], [ds, p3]]
- 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [cr, l2], [cr, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [cr, l2], [ds, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 2, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
- 6, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [ds, p3]]
- 6, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 2, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [ds, l2], [ds, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
- 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [ds, p3]]
- 3, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [ds, p2], [ds, p3]]
- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [ds, l1], [ds, l2], [ds, p1], [ds, p2], [ds, p3]]

Elim running ...

Il y a 2 terme(s) qui contribue(nt) :

- 1, [[ds, Q1], [ds, Q2], [cr, k1], [ds, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]
- 2, [[ds, Q1], [ds, Q2], [ds, k1], [cr, l1], [ds, l2], [cr, p1], [cr, p2], [cr, p3]]

————— TERME N°1 —————

Sym running ...

Les moments symétriques sont :

$$\{[p1, p2, p3], [l1, l2]\}$$

Haff running...

Simp running ...

RESULTAT : terme n° 1

$$6 \text{ delta}(Q1 \text{ k1}) \text{ delta}(Q2 \text{ p1}) \text{ delta}(l1 \text{ p2}) \text{ delta}(l2 \text{ p3}) + 6 \text{ delta}(Q1 \text{ p1}) \text{ delta}(Q2 \text{ k1}) \text{ delta}(l1 \text{ p2}) \text{ delta}(l2 \text{ p3})$$

————— TERME N°2 —————

Sym running ...

Les moments symétriques sont :

$$\{[p1, p2, p3]\}$$

Haff running...

Simp running ...

RESULTAT : terme n° 2

12 delta(Q1 l1) delta(Q2 p1) delta(k1 p2) delta(l2 p3) + 12 delta(Q1 p1) delta(Q2 l1) delta(k1 p2)
delta(l2 p3)

+ 12 delta(Q1 p1) delta(Q2 p2) delta(k1 l1) delta(l2 p3)

>

Appendice C

Calculs numériques

C.1 Optimisation du couplage effectif

On va minimiser, au sens des moindres carrés, la différence entre les membres de droite (rhs) et de gauche (lhs) des équations du mouvement, évalués avec notre solution approchée :

$$\begin{aligned}
 g_2^{++(ap)}(g, g_{eff}, \phi_o, q_1, q_2) &\equiv -\frac{g}{4} \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2} [C^{(ap)}(g_{eff}, \phi_o, q_1) + C^{(ap)}(g_{eff}, \phi_o, q_2) + 2\phi_o] \\
 G_2^{(ap)}(g, g_{eff}, q_1, -q_2) &\equiv \frac{g}{2} \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2} [C^{(ap)}(g_{eff}, \phi_o, q_1) + C^{(ap)}(g_{eff}, \phi_o, q_2) + 2\phi_o] \\
 C^{(ap)}(g_{eff}, \phi_o, q_1) &\equiv -\frac{g_{eff} \phi_o}{g_{eff} + q_1} \\
 g_{eff}(x, g) &\equiv \frac{g}{1 + gx \frac{\pi \sqrt{3}}{9}}
 \end{aligned}$$

Avec les notations :

$$\begin{aligned}
 I_g(g, g_{eff}, \phi_o, q_2) &\equiv \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} g_2^{++(ap)}(g, g_{eff}, \phi_o, p, q_2) \\
 I_G(g, g_{eff}, \phi_o, q_2) &\equiv \int_0^{q_2} \frac{dp}{p} G_2^{(ap)}(g, g_{eff}, \phi_o, p, -q_2) \\
 J_G(g, g_{eff}, \phi_o, q_2) &\equiv \int_{q_2}^{+\infty} \frac{dp}{p} G_2^{(ap)}(g, g_{eff}, \phi_o, p, -q_2)
 \end{aligned}$$

les membres de gauche s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 lhs_g &= [1 - (\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2})(q_1 + q_2)] g_2^{++(ap)}(g, g_{eff}, \phi_o, q_1, q_2) \\
 lhs_G &= [1 - (\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2})(q_1 - q_2)] G_2^{(ap)}(g, g_{eff}, \phi_o, q_1, -q_2)
 \end{aligned}$$

et les membres de droite

$$\begin{aligned}
 rhs_g &= -\frac{g\phi_o}{2} - \frac{g}{4} [C(g, \phi_o, q_1) + C(g, \phi_o, q_2)] - \frac{g}{2} [I_g(g, g_{eff}, \phi_o, q_1) + I_g(g, g_{eff}, \phi_o, q_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_G(g, g_{eff}, \phi_o, q_1) + \frac{1}{2} I_G(g, g_{eff}, \phi_o, q_2)] \\
 rhs_G &= -g\phi_o - \frac{g}{2} [C(g, \phi_o, q_1) + C(g, \phi_o, q_2)] - g [I_g(g, g_{eff}, \phi_o, q_1) + I_g(g, g_{eff}, \phi_o, q_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_G(g, g_{eff}, \phi_o, q_1) + \frac{1}{2} J_G(g, g_{eff}, \phi_o, q_2)]
 \end{aligned}$$

Toutes ces intégrales sont convergentes (d'où l'inutilité des fonctions $\hat{f}(p)$) et peuvent être évaluées avec Maple. Pour évaluer le moindre carré nous allons utiliser une grille de 16 points correspondant aux racines $k[i]$ du 16^e polynôme de Legendre ramenées à l'intervalle $[0, +\infty]$ qui nous intéresse par la transformation :

$$q[i] = 3.5 \tan\left[\frac{\pi}{4}(1 + k[i])\right]$$

Les coefficients de pondération sont alors :

$$w_q[i] = 3.5 \frac{\pi}{4} w_k[i] [1 + \tan\left[\frac{\pi}{4}(1 + k[i])\right]^2]$$

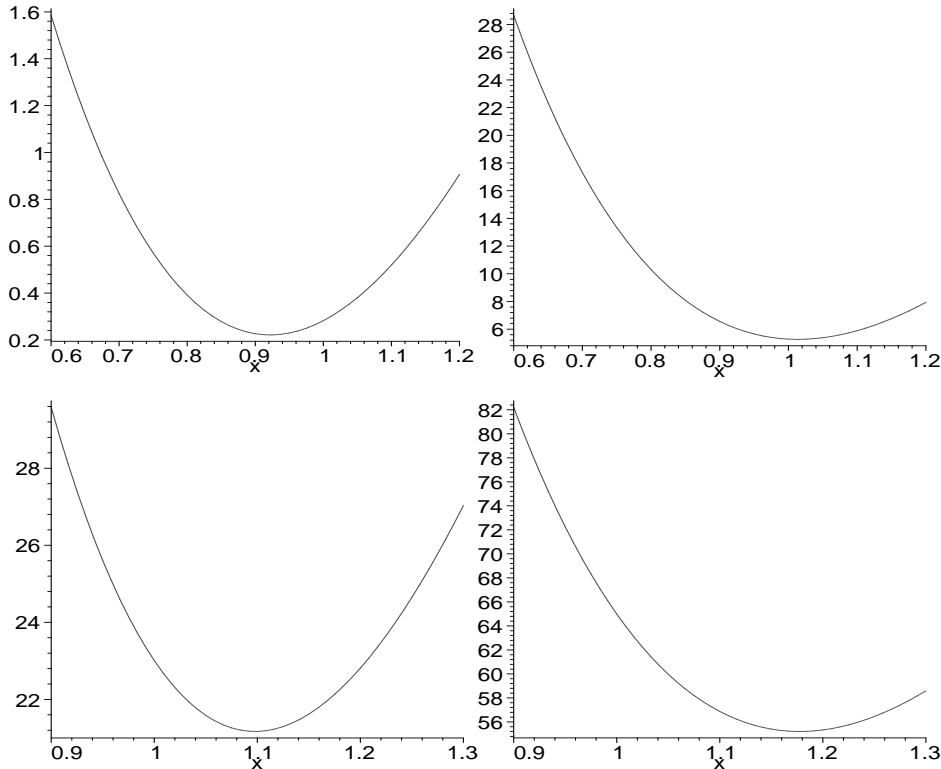
où les $w_k[i]$ sont les poids associés aux racines du polynôme de Legendre :

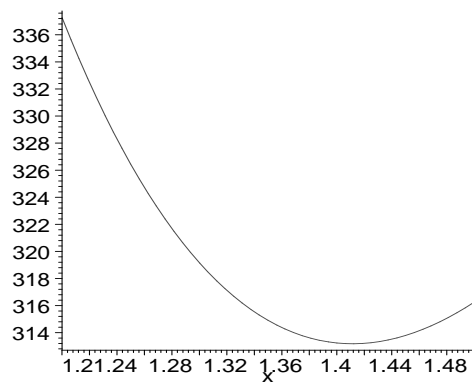
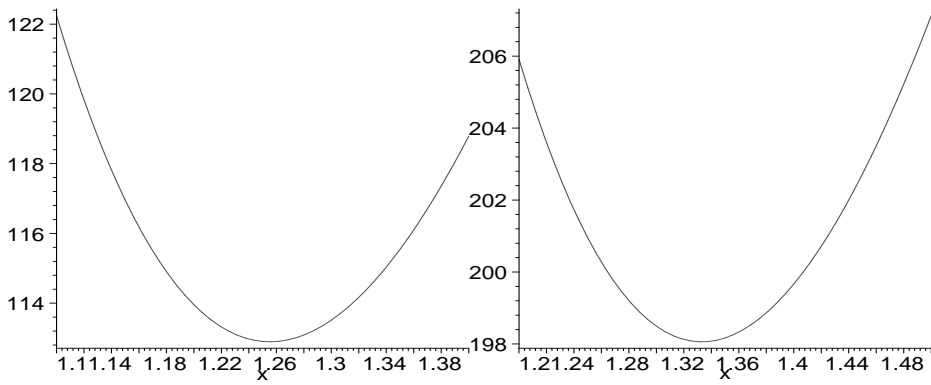
$$w_k[i] = \left[\frac{dP_{16}(x)}{dx} \Big|_{x=k[i]} \right]^{-1} \int_{-1}^{+1} dx \frac{P_{16}(x)}{x - k[i]}$$

La fonction de moindres carrés pondérés (lsq_g et lsq_G) s'écrit :

$$lsq_g(g, x, \phi_o) = \sum_{m=1}^{16} w_q[m] \sum_{n=m}^{16} w_q[n] \left[1 - \frac{rhs_g(g, g_{eff}(g, x), \phi_o, q[m], q[n])}{lhs_g(g, g_{eff}(g, x), \phi_o, q[m], q[n])} \right]^2$$

et il faut trouver le x qui la rend minimale. Il est clair que x doit dépendre de g, mais d'après l'argument analytique du chapitre 4, on s'attend à ce que cette dépendance soit minime.



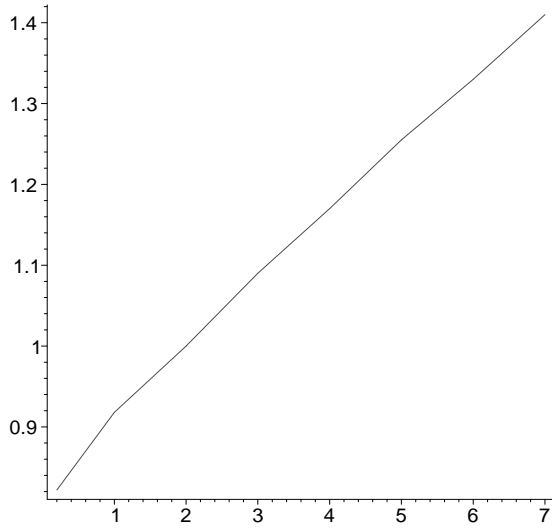


La fonction de moindres carrés $lsq(g, x, \phi)$ pour $g=1,2,\dots,7$

Pour les valeurs de g qui nous intéressent on trouve :

g	0.2	1	2	3	4	5	6	7
$x(g)$	0.82	0.92	1.0	1.09	1.17	1.256	1.33	1.41

On constate que $x(g)$ est bien toujours proche de 1 et que la dépendance en g est pratiquement linéaire.



Un fit linéaire par moindres carrés donne une correction de $0,084g \simeq \frac{g}{12}$:

$$x(g) \simeq 1 + \frac{g}{12}$$

valable pour $g < 7$. Il faut noter que pour les g petits la valeur de x commence à dépendre notablement de la répartition des points dans les moindres carrés. Dans ces cas l'argument analytique du chapitre 4 joue toujours et indique $x \simeq 1$.

C.2 Calcul du couplage réduit de Parisi pour l'ordre 2

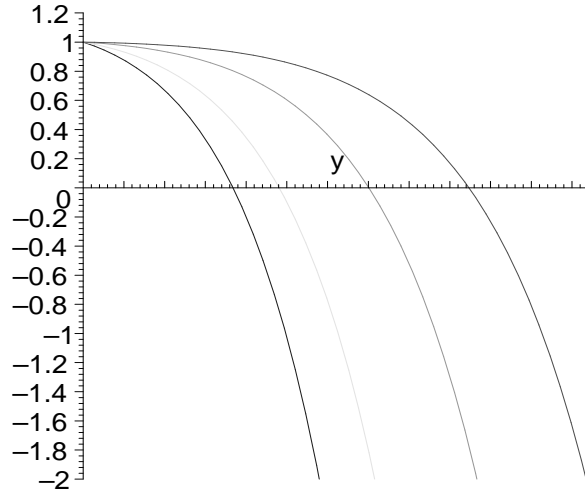
Pour évaluer le couplage réduit critique à partir de l'équation (ref), il faut tout d'abord constater que pour les grands Λ , c'est-à-dire les grands g , le paramètre x tend vers une valeur fixe de 1.4, que nous allons utiliser¹.

Notons $X(y, r, x)$ la quantité :

$$X(y, r, x) \equiv 1 + \frac{1}{9} r e^y \ln \left(\frac{1 + \frac{2}{3} r e^{\frac{y}{2}}}{1 + \frac{2}{3} r e^{\frac{3y}{2}}} \right) + \frac{4\pi}{81\sqrt{3}} r^2 e^{2y} \left\{ \frac{y}{2} + \ln \left(\frac{1 + g_{eff}(y, r, x) e^{-\frac{y}{2}}}{1 + g_{eff}(y, r, x) e^{\frac{y}{2}}} \right) \right\}$$

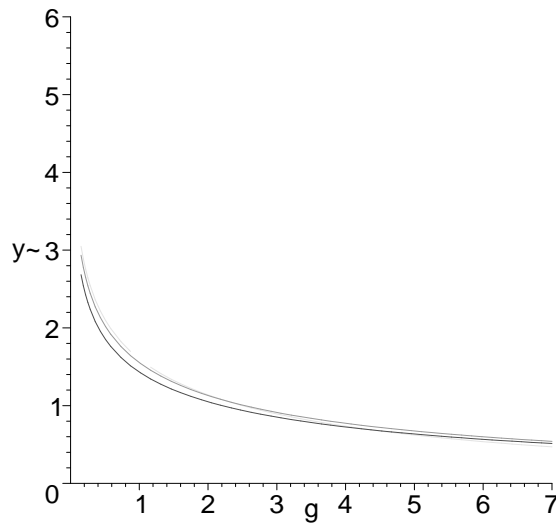
$X(y, r, x = 1.4)$ garde le même comportement et est simplement décalée pour les différentes valeurs de r :

¹Cette valeur de x fournit le même couplage critique $g_c = 4.78$.



La fonction $X(y, r, x = 1.4)$ pour $r=1,2,3$ et 4 (de droite à gauche)

Notons $Y2(r, x)$ l'inversion, réalisée numériquement, de $X(y, r, x) = 0$, $Y1(r, x)$ celle limitée aux deux premiers termes de $X(y, r, x)$ et $Y0(r) = W(\frac{9}{r})$ la valeur de $y(r)$ obtenue à l'ordre précédent. On peut constater que les courbes se chevauchent presque parfaitement :



Les fonctions $Y0(r)$, $Y1(r, x = 1.4)$ et $Y2(r, x = 1.4)$

Cette façon de choisir x n'est pas unique : on pourrait choisir une autre paramétrisation pour x , tout aussi satisfaisante au regard de g_c , qui rendrait l'accord entre $Y1$ et $Y2$ encore meilleur. Il est donc tout à fait suffisant d'opérer une simple règle de trois par rapport à la détermination à l'ordre 1 de r_c :

$$r_c = 1.5 \times \frac{4.78}{4.19} = 1.711$$

Appendice D

Application pour le calcul des fonctions de corrélation

Les pages suivantes présentent le programme, réalisé sous Mathematica, que nous avons mis au point pour calculer de façon systématique le développement des fonctions de corrélation. La première partie définit les expressions fondamentales et les représentations graphiques de base¹. Le module VEVsig calcule toutes les contributions apparaissant dans les fonctions de corrélation, définies à partir des dérivées fonctionnelles formelles sur la fonctionnelle génératrice. Enfin le module Rediag procède à la réduction finale de toutes les contributions identiques en tenant compte des symétries.

¹Nous n'avons pas reproduit les contributions sous forme graphique pour des raisons de place.

Appendice E

Publications

Nous avons regroupé dans les pages suivantes les parties de notre travail qui ont fait, ou vont faire, l'objet de publication :

1 - **Fields Dynamics on the light cone : Compact versus Continuum Quantization**

Stéphane Salmons, Pierre Grangé, Ernst Werner

publié dans *Physical Review D60 (1999) 067701*

2 - **Critical Properties of ϕ_{1+1}^4 theory in Light Cone Quantization**

Stéphane Salmons, Pierre Grangé, Ernst Werner

En préparation.

3 - **Order parameter fluctuations and dynamical zero modes**

Ernst Werner, Pierre Grangé, Stéphane Salmons

Soumis à *Nuclear Physics*.

Bibliographie

- [1] Bender C.M., Pinsky S., Van de Sande B., *Phys.Rev D*48 (1993) 816
- [2] Bogoliubov N. N., Logunov A. A., Todorov I.T., *Axiomatic Quantum Field Theory*, Benjamin Reading (1975)
- [3] Borderies A., *La théorie ϕ^4 à symétrie $O(N)$ quantifiée sur le cône de lumière*, Thèse de Doctorat, CRN 94-43, Strasbourg.
- [4] Borderies A., Grangé P., Werner E., *Phys. Lett. B*319 (1993) 490
- [5] Borderies A., Grangé P., Werner E., *Phys. Lett. B*345 (1995) 458
- [6] Brodsky S. J., Huang T. , Lepage G.P. *Summer Institute on Particle Physics (1981)*
- [7] Brodsky S. J., Pauli H.-C., Pinsky S. S., *Quantum Chromodynamics and Other Field Theories on the Light Cone*, *Phys. Rept.* 301 (1998) 299
- [8] Chang S-J., Root R.G., Yan T-M. *Phys. Rev. D*7 (1973) 1133
- [9] Coleman S., *Aspects of symmetry, (Selected Erice Lectures)*, Cambridge University Press
- [10] Cooper *et al.*, *Nucl. Phys. B*210 [FS6](1982) 210
- [11] Dancoff S. M., *Phys. Rev.* 78 (1950) 382
- [12] Dirac P. A. M., *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949) 392
- [13] Dirac P. A. M., *Can. J. Math* 2 (1950) 1
- [14] Dirac P. A. M., *Lectures on quantum mechanics*, Benjamin, New York (1964)
- [15] Faddeev L., *Theor. Math. Phys* 1 (1970) 1
- [16] Faddeev L., Jackiw R., *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 1692
- [17] Fubini S., Hanson A., Jackiw R., *Phys. Rev. D*7 (1973) 1732
- [18] Gitman D. M., Tyutin I. V., *Quantisation of fields with constraints*
- [19] Glazek, S. D. *Phys. Rev. D*38 (1988) 3277
- [20] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press
- [21] Grangé P., Ullrich P., Werner E., *Phys. Rev. D*57 (1998) 4981
- [22] Greenberg O. W., *hep-ph/9502253*
- [23] Haag, R., *Phys. Rev.* 112 (1958) 669
- [24] Heinzl T., Kröger H., Scheu N., *Loss of Causality in DLCQ*, *hep-th/9908173*
- [25] Heinzl T., Krusche S., Werner E., *Z. Phys. A* 334 (1989) 443, *Phys. Lett. B* 256 (1991) 55
- [26] Heinzl T., Krusche S., Werner E., *Phys. Lett. B* 272 (1991) 54
- [27] Heinzl T., Krusche S., Werner E., *Nuc. Phys. B (proc. suppl.)* 23B (1991) 182

- [28] Heinzl T., Krusche S., Werner E., *Phys. Lett. B* 275 (1992) 410
- [29] Heinzl T., Krusche S., Simbürger S., Werner E., *Z.Phys C56* (1992) 415
- [30] Heinzl T., Stern C., Werner E., Zeller mann B. *Z.Phys C72* (1996) 353
- [31] Heinzl T., Werner E. *Z. Phys C62* (1994) 521
- [32] Heinzl T., *Light-Cone Dynamics of Particules And Fields*, hep-th/9812190
- [33] Hornbostel K., Brodsky S. J., Pauli H.-C., *Phys. Rev. D41* (1990) 3814
- [34] Itzykson C., Drouffe J.-M., *Théorie Statistique des Champs*, Interédition/Édition du CNRS, Tome 1
- [35] Kristjansen C., Flyvbjerg H. *NBI-HE-90-55, Niels Bohr Institute 1990*
- [36] Kalloniatis A. C., Robertson D. G., *Phys. Lett; B381* (1996) 209
- [37] Leutwyler H., Klauder J. R., Streit L., *Nuovo Cimento LXVI* (1970) 536
- [38] Leutwyler H., Stern J., *Ann. Phys.* 112 (1978) 94
- [39] Ligterink N.E., *Light-Front Hamiltonian Field theory, Covariance and renormalization* Vrije Universiteit
- [40] Maskawa T., Yamawaki K., *Prog. Theor. Phys.* 56 (1976) 270
- [41] McCartor G., *Z. Phys C64* (1994) 349
- [42] Nakanishi N., Yamawaki K., *Nuc. Phys. B122* (1977) 15
- [43] Neville R. A., Rohrlich F., *Nuovo Cimento 1A* (1971) 625
- [44] Pauli H.-C., Brodsky S.J. *Phys. Rev. D 32* (1985) 1993,2001
- [45] Parisi G., *J.Stat. Phys.* 23, 49(1980), *Nuovo Cimento A21*, 179 (1974)
- [46] Perry R. J., Harindranath A., Wilson K. G., *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 2959
- [47] Perry R. J., *Hamiltonian Light-Front Field Theory and Quantum Chromodynamics*, hep-th/9407056
- [48] Robertson D.G., *Phys. Rev. D47* (1993) 2549
- [49] Salmons S., Grangé P., Werner E., *Phys. Rev. D60* (1999) 067701
- [50] Scheu N., Ph.D. Thesis, *On the computation of structure functions and mass spectra in a relativistic hamiltonian formalism : a lattice point of view*, hep-th/9804190
- [51] Schlieder S., Seiler E., *Comm. Math. Phys.* 25 (1972) 62
- [52] Schoonderwoerd N. C. J., Bakker B. L. G., hep-ph/9702311
- [53] Schwartz L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann
- [54] Senjanovic P., *Ann. Phys.* 100 (1976) 227
- [55] Steinhardt P. J., *Ann. Phys.* 128 (1980) 425
- [56] Sommerfield, C. *Ann. Phys.* 84 (1974) 285
- [57] Sundermeyer K., *Constrained Dynamics*

Lecture Notes in Physics n°169, Springer-Verlag
- [58] Susskind L., *Phys. Rev.* 165 (1968) 1535
- [59] Tamm I., *J. Phys. (Moscou)* 9 (1945) 449
- [60] Van de Sande B., Burkardt M., *Phys. Rev. D53* (1996) 4628

- [61] Vary J. P., Wölz F., *Light-Front Quantization and Non-Perturbative QCD*, IITAP, Ames, Iowa.
- [62] Weinberg S., *Phys. Rev.* 150 (1966) 1313
- [63] Wilson K. G., Walhout T. S., Harindranath A., Zhang W-M., Perry R. J., Glazek S. D., *Phys. Rev. D* 49 (1994) 6720
- [64] Zinn-Justin J., *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publication

Pour une bibliographie exhaustive des articles consacrés à la physique sur le cône de lumière depuis 1949 on pourra consulter <http://tnp.saha.ernet.in/hari/light/light.html>

⁰Réalisé avec LyX/L^AT_EX sous Linux.

Résumé : La quantification sur le cône de lumière est une méthode de quantification opérant dans la Front Form de Dirac et nécessitant une procédure de traitement des contraintes dynamiques. Elle est abordée dans le cas de deux théories scalaires.

La théorie φ_{1+1}^4 est examinée à l'aide d'une formulation continue du développement de Haag des champs et des modes zéros (CLCQ). Ceci permet une résolution originale des équations du mouvement et des contraintes ainsi qu'une renormalisation consistante des divergences infrarouges et ultraviolettes. L'analyse de la transition de phase fait apparaître au deuxième ordre un couplage critique non perturbatif de valeur analogue aux résultats du quatrième ordre des méthodes conventionnelles.

L'étude comparée du commutateur de Pauli-Jordan dans les formulations discrètes et continues montre que la violation de causalité n'est qu'un pur effet de taille finie associé à la soustraction du mode zéro dans les sommes discrètes.

L'étude de la théorie $\varphi_{3+1}^4 O(N)$ est amorcée par le calcul des champs et des modes zéros à l'ordre 3 du développement en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ qui permet de retrouver jusqu'à l'ordre $\frac{1}{N^3}$ les fonctions de corrélation conventionnelles obtenues par intégrales de chemin.

Mots clés : Quantification - Cône de lumière - Théorie φ^4 - Formulation continue - Pauli-Jordan - Renormalisation - Théorie critique - Développement $\frac{1}{N}$

Abstract : Light-cone quantization proceeds through Dirac's Front Form and needs a procedure for the handling of dynamical constraints. It is treated within the scope of two scalar theories.

The φ_{1+1}^4 theory is examined with the help of a continuum formulation of the fields and zero modes Haag expansion (CLCQ). This allows an original solution of the equations of motion and constraints as well as a consistent infrared and ultraviolet divergences renormalization. Phase transition analysis shows a second order non perturbative critical coupling constant similar to conventional methods fourth order results

Comparative study of discrete and continuum Pauli-Jordan commutator formulations demonstrates that violation of causality is nothing but a finite volume effect linked with zero modes subtraction in discrete sums.

The study of the $\varphi_{3+1}^4 O(N)$ theory is initiated with order 3 fields and zero modes $\frac{1}{\sqrt{N}}$ expansion which enables to get, up to the $\frac{1}{N^3}$ order, the same conventional correlation functions as those obtained by path integration.

Keywords : Quantization - Light-cone - φ^4 theory - Continuum formulation - Pauli-Jordan - Renormalization - Critical theory - $\frac{1}{N}$ expansion