



HAL
open science

DESHYDRATATION D'ARGILES PAR COMPRESSION ET SECHAGE. ASPECTS DE MODELISATION ET DE SIMULATION

Daoued Mihoubi

► **To cite this version:**

Daoued Mihoubi. DESHYDRATATION D'ARGILES PAR COMPRESSION ET SECHAGE. ASPECTS DE MODELISATION ET DE SIMULATION. Energie électrique. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2004. Français. NNT : . tel-00007972

HAL Id: tel-00007972

<https://theses.hal.science/tel-00007972>

Submitted on 9 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE LEURS APPLICATIONS

par

Daoued MIHOUBI

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

Spécialité :

ÉNERGÉTIQUE, TRANSFERT et SYSTÈMES DISPERSÉS

**DESHYDRATATION D'ARGILES PAR COMPRESSION ET
SECHAGE. ASPECTS DE MODELISATION ET DE SIMULATION**

Soutenu le 21 octobre 2004

Devant la Commission d'examen formée de :

M. BENZINA
P. PERRE

Professeur, ENI de Sfax, Tunisie
Professeur, ENGREF, Nancy, France

Rapporteur
Rapporteur

A. BELLAGI
M. ROQUES
J. VAXELAIRE
F. ZAGROUBA

Professeur, ENI de Monastir, Tunisie
Professeur émérite, ENSGTI-UPPA, Pau, France
Maître de Conférences (HDR), ENSGTI-UPPA, Pau, France
Maître de Conférences (HDR), INRST, Hammam Lif, Tunisie

Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

A la mémoire de mon père,

à ma mère,

à mes frères,

à tous mes ami(e)s,

à tous ceux qui me sont chers.

je dédie ce travail

DAOUED MIHOUBI

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés de l'Ecole Nationale Supérieure en Génie des Technologies Industrielles de Pau (ENSGTI, France) et le Laboratoire d'Energétique et Procédés Thermiques de l'Institut National de Recherche Scientifique et Technique de Borj-Cedria (INRST, Tunisie). Durant cette période j'ai côtoyé plusieurs personnes qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail et j'aimerais bien les remercier à ma façon.

J'exprime toute ma reconnaissance et ma gratitude au Professeur **Ahmed BELLAGI** de l'Ecole Nationale des Ingénieurs de Monastir (ENIM, Tunisie) qui m'a guidé tout le long de ma carrière universitaire depuis les mini projets de la formation d'ingénieur, en passant par le projet de fin d'études, le DEA et pour finir la thèse de doctorat. Merci mon professeur pour la confiance et l'aide que j'ai trouvées auprès de vous.

Je remercie ensuite **Michel ROQUES** professeur à l'ENSGTI, qui a accepté de diriger ma thèse du coté français et d'être le président jury.

Je remercie également :

- Messieurs les professeurs **Mourad BEN ZINA** de l'Ecole Nationale des Ingénieurs de Sfax (ENIS, Tunisie) et **Patrick PERRE** Professeur de l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts de Nancy (ENGREF, France) qui m'ont fait honneur en acceptant d'être rapporteurs de ce travail et pour avoir su enrichir de leur expérience la réflexion scientifique de ce travail.
- Monsieur **Jean VAXELAIRE** maître de conférences à l'ENSGTI qui a co-encadré ce travail du coté français pour son aide, sa disponibilité et ses directives pour accomplir un travail cohérent et valeureux. Qu'il trouve ici le témoignage de mon respect et ma grande affection.

- Monsieur **Fethi ZAGROUBA** maître assistant à l'INRST qui a co-encadré ce travail du côté tunisien pour ses conseils qui m'ont servi de guide tout au long de ce travail ainsi que pour son caractère amical.

Je tiens à remercier :

Le service culturel de l'ambassade de France en Tunisie de nous avoir accordés les fonds nécessaires pour le bon déroulement de ce travail, de telle façon que j'ai pu achever ma thèse dans les meilleures conditions.

Mes amis tunisiens, à l'ancien département des procédés chimiques et plus particulièrement les chercheurs de notre équipe « technologie de séchage » :

- **Saber CHEMKHI** pour son caractère ainsi que son aide. Je lui souhaite bonne chance pour sa thèse.
- **Souad TIMOUMI** pour son aide dans l'édition du manuscrit ainsi que pour ses qualités humaines. Je lui souhaite bonne chance pour sa thèse.
- **Besma KHIARI** (je ne trouve pas les mots pour la remercier) pour son grand cœur, son amitié, son humour, sa sympathie ainsi que son aide précieuse tout le long de cette thèse depuis la correction jusqu'au choix du gâteau du pot de la soutenance. J'espère pouvoir préparer le pot de soutenance de sa thèse dans le même lieu.
- **Abdelwaheb RABHI** le technicien de l'unité pour sa disponibilité à préparer certaines manip ; ainsi que pour la bonne ambiance qu'il apporte dans le labo.

J'adresse également mes remerciements à tous les amis (chercheurs et doctorants) et le personnel du LaTEP (ex LGPP) qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail. En particulier :

- **Marie-Hélène CHALVET** secrétaire de direction de l'ENSGTI, que je remercie profondément pour ses qualités, pour son aide, son amitié et surtout sa gentillesse que je n'oublierais jamais.
- **Martine ARROYO**, coordinateur de PCP, pour sa disponibilité, son aide et ses interventions aux moments difficiles.
- **Cédric ARABIE**, assistant ingénieur système de l'ENSGTI qui a toujours essayé d'être disponible pour m'aider et me résoudre les problèmes informatiques.
- **Jean-Marc LEGROS-ADRIAN**, adjoint technique, pour ses bricolages et ses interventions pour résoudre certains problèmes techniques.

- **Cécile BOESINGER**, d'avoir partagé avec moi le bureau du quatrième étage de l'ENSGTI ainsi que pour ses efforts et ses conseils pour m'intégrer dans les traditions françaises.

Enfin, qu'il me soit permis de remercier toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DE MATIERE

NOMENCLATURE.....	12
INTRODUCTION GENERALE	18
CARACTERISATION EXPERIMENTALE POUR LE SECHAGE DES PRODUITS ETUDIES.....	22
I-1-1 Isothermes de sorption	24
I-1-1-1 Modèles de sorption.....	24
I-1-1-2 Protocole expérimental.....	26
I-1-1-3 Résultats et interprétation des isothermes	27
I-1-2 Masse volumique et retrait	30
I-1-2-1 Mécanisme de retrait.....	30
I-1-2-2. Protocole expérimental	31
I-1-2-3. Résultats obtenus sur le Kaolin et la Bentonite.....	33
I-1-2-3-1. Evolution de la masse volumique du kaolin	33
I-1-2-3-2. Masse volumique et volume spécifique de la bentonite	36
I-1-3 Cinétique de séchage.....	37
I-1-3-1 Les différentes phases d'un séchage convectif	38
I-1-3-1-1 Phase d'initiation	38
I-1-3-1-2 Phase à vitesse constante	38
I-1-3-1-3 Phase de ralentissement de la vitesse de séchage.....	39
I-1-3-2 Appareillage et protocole expérimental	39
I-1-3-2-1. Dispositif expérimental.....	39
I-1-3-2-2. Protocole expérimental	40
I-1-3-3 Résultats obtenus sur le kaolin et la bentonite	42
I-1-3-3-1. Reproductibilité des essais.....	42
I-1-3-3-2. Influence de la température de l'air	43
I-1-3-3-3. Influence de la vitesse de l'air	43
I-1-3-3-4. Influence de l'humidité de l'air	44
I-1-3-4 Approche globale du comportement du produit au cours du séchage.....	46
I-1-3-4-1. Recherche d'une courbe caractéristique pour la bentonite et le kaolin.	46
I-1-4. Identification du coefficient de diffusion.....	52
I-1-4-1 Les différentes méthodes proposées dans la littérature.....	52
I-1-4-2 Résultats obtenus sur le kaolin	54
I-1-5. Conclusion.....	58
I-1-6. Références.....	58
MODELISATION DU SECHAGE	62

DES MILIEUX DEFORMABLES62

I-2-1	Les différentes approches proposées de la littérature	64
I-2-1-1	Modèle de SHERWOOD.....	64
I-2-1-2	Couplage des transferts.....	65
I-2-1-2-1.	Théorie de Krisher (1963).....	65
I-2-1-2-2.	Modèle de Luikov (1961).....	65
I-2-1-2-3.	Modèle de Phlip et De Vries (1957).....	66
I-2-1-3	Evolutions récentes	67
I-2-1-3-1.	Méthodes déterministes	67
I-2-1-3-2.	Thermodynamique des processus irréversibles.....	68
I-2-1-4	Modélisation des milieux déformables.	69
I-2-2	Les équations de la conservations	70
I-2-2-1	Bilans massiques.....	70
I-2-2-2	Bilan d'énergie.....	71
I-2-2-3	Expressions des conditions initiale et aux limites.....	71
I-2-2-4	Déplacement du solide.....	73
I-2-3.	Equations de la mécanique des milieux continus.....	74
I-2-3-1.	Gradient de transformation	74
I-2-3-2.	Tenseur linéaire de déformation.....	75
I-2-3-2-1.	Champs de déplacement	75
I-2-3-2-2.	Hypothèse des petites perturbations (hpp)	75
I-2-3-3.	Etude des contraintes	76
I-2-3-3-1.	Tenseur des contraintes.....	76
I-2-3-3-2.	Vecteurs contraintes.....	76
I-2-3-4.	Comportement rhéologique	77
I-2-3-4-1.	Cas élastique	77
I-2-3-4-2.	Cas viscoélastique.....	77
I-2-3-5.	Transformations des équations de bilans dans un repère Lagrangien	79
I-2-4.	Conclusion	83
I-2-5.	Références.....	83

SIMULATION DU SECHAGE POUR DEUX COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES DIFFERENTS.....86

I-3-1	Application du modèle à un matériau élastique :	88
I-3-1-1	Configuration physique du problème.....	88
I-3-1-2	Les équations de transferts.....	88
I-3-1-3	Conditions aux limites et initiale.....	89
I-3-1-4	Déformations et contraintes.....	91
I-3-1-5	Résolution numérique.....	92
I-3-1-5-1	Système à résoudre	92
I-3-1-5-2.	Méthode de résolution	93
I-3-1-6	Simulation du séchage de gâteaux de kaolin.....	96
I-3-1-6-1.	Validation du modèle.....	96
I-3-1-6-2.	Distribution de l'humidité.....	96
I-3-1-6-3.	Distribution de la Température.....	97

I-3-2	Application du modèle pour traité un cas bidirectionnel.....	98
I-3-2-1	Configuration physique du problème.....	98
I-3-2-2	Les équations de transferts.....	98
I-3-2-3	Conditions aux limites et initiale.....	101
I-3-2-4	Résolution numérique.....	103
I-3-2-4-1.	Système à résoudre.....	103
I-3-2-4-2.	Méthode de résolution numérique.....	104
I-3-2-5	Simulations dans le cas de la bentonite.....	108
I-3-2-5-1.	Distribution de l'humidité.....	108
I-3-2-5-2.	Distribution de la température.....	110
I-3-3	Conclusion	112
	Références.....	112
 ANALYSE DE LA DESHYDRATATION MECANIQUE.....		114
II-1-1	Description générale.....	116
II-1-2	Mise en équation du problème de filtration/compression.....	116
II-1-2-1.	Théorie de Ruth.....	117
II-1-2-2.	Equations de bilan.....	119
II-1-2-2-1.	Equation de continuité.....	120
II-1-2-2-2.	Equation de quantité de mouvement.....	121
II-1-2-2-3.	Loi de Darcy.....	128
II-1-2-2-4.	Comportement mécanique du milieu.....	128
II-1-2-3	Conditions aux limites et initiales.....	133
II-1-2-3-1	Phase de la filtration.....	133
II-1-2-3-2.	Phase de la compression.....	134
II-1-3.	Conclusion	135
II-1-4.	Références.....	136
 MODELISATION ET SIMULATION		142
II-2-1	Mises en équation.....	144
II-2-1-1	Conservation de masse.....	144
II-2-1-2	Conservation de quantité de mouvement.....	145
II-2-1-3	Conditions aux limites et initiales.....	147
II-2-1-3-1	Conditions initiales.....	147
II-2-1-3-2.	Conditions aux limites.....	149
II-2-2	Résolution numérique	150
II-2-2-1	Organigramme de résolution.....	152
II-2-2-2	Résultats et discussion.....	154
II-2-2-2-1	Phase de filtration.....	154
II-2-2-2-2	Compression.....	155
II-2-3	Conclusions.....	160
II-2-4	Références.....	161

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	162
<i>A N N E X E S</i>	165
DEMONSTRATION DE L'EQUATION (I- 48)	166
DEMONSTRATION DE L'EQUATION (I- 60)	169
DETERMINATION DE L'EQUATION (II-94) (COMBINAISON DE L'EQUATION DE CONTINUTE ET DE QUANTITE DE MOUVEMENT).....	171
DESCRITISATION DE L'EQUATION (II-105) PAR TETA METHODES.....	173

LISTE DES FIGURES& TABLEAUX

Nombre	Page
Figure I. 1: forme générale des isothermes	25
Figure I. 2: Isotherme désorption (modèle de GAB) a- bentonite ; b-Kaolin	27
Figure I. 3 : Isotherme désorption (modèle de Henderson) a- bentonite ; b- kaolin	28
Figure I. 4 : isotherme d'adsorption désorption de la bentonite pour $T=30^{\circ}\text{C}$	28
Figure I. 5: retrait latéral	32
Figure I. 6: retrait longitudinal	32
Figure I. 7 : Evolution de la masse volumique du gâteau du Kaolin en fonction de la teneur en eau	33
Figure I. 8 : Evolution du volume spécifique du kaolin en fonction de la teneur en eau	35
Figure I. 9 : Evolution de la masse volumique du gâteau de la bentonite en fonction de la teneur en eau	36
Figure I. 10 : Evolution du volume spécifique du kaolin en fonction de la teneur en eau	37
Figure I. 11: courbes typiques de séchage convectif	38
Figure I. 12 : Boucle de séchage convectif utilisée au LaTEP	40
Figure I. 13 : Evolution de la teneur en eau réduite d'un échantillon de kaolin en fonction du temps ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	41
Figure I. 14 : Cinétique de séchage d'un échantillon de kaolin ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=2\text{m/s}$)	42
Figure I. 15 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps. Essais de reproductibilité.	42
Figure I. 16 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps. Influence de la température de l'air	43
Figure I. 17 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps. Influence de la vitesse de l'air	44
Figure I. 18 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps. Influence de l'humidité de l'air	44
Figure I. 19: Evolution de la teneur en eau réduite d'un échantillon de la bentonite en fonction du temps ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	45
Figure I. 20: Cinétique de séchage d'un échantillon de la bentonite ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	45
Figure I. 21: courbe caractéristique de séchage de kaolin	47
Figure I. 22: courbe caractéristique de séchage de la bentonite	49
Figure I. 23: courbe caractéristique de séchage de la bentonite	50
Figure I. 24 : courbe caractéristique de séchage de la bentonite	50
Figure I. 25: Organigramme utilisé pour la détermination de la courbe caractéristique	51
Figure I. 26: Organigramme de détermination du coefficient de diffusion	56
Figure I. 27: représentation de $\bar{w}(t)$ calculée et $\bar{w}(t)$ expérimentale	57
Figure I. 28: évolution du coefficient de diffusion avec la teneur en eau	57
Figure I. 29: Transformation de l'élément de volume sous l'effet de contraintes	74
Figure I. 30: Etat de contrainte autour d'un point	76
Figure I. 31: essai de relaxation.	78
Figure I. 32: illustration du principe de superposition de Boltzmann.	78
Figure I. 33: Transformation du matériel	80
Figure I. 34: configuration physique	88
Figure I. 35: Représentation du maillage du domaine physique	93
Figure I. 36: Organigramme de la résolution pour le cas unidirectionnel.	95
Figure I. 37: Evolution de $W_{\text{moy}}(t)$ théorique est $W_{\text{moy}}(t)$ expérimental ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	96
Figure I. 38: Champ d'humidité ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	97
Figure I. 39: Champ de température ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	97
Figure I. 40: configuration physique	98
Figure I. 41: Représentation du maillage du domaine physique à un instant t	105
Figure I. 42: Organigramme de la résolution dans le cas bidirectionnel.	107
Figure I. 43: Champ d'humidité à différents instants ($T_a=40^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	109
Figure I. 44: Champ de température ($T_a=40^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	111

<i>Figure II- 1: Etapes successives de la déshydratation mécanique</i>	116
<i>Figure II- 2: courbe caractéristique de la filtration ($b_2 = \frac{\mu_v \alpha_m W_g}{2A_f^2 \Delta P}$, $b_1 = \frac{\mu_v R_m}{A_f \Delta P}$)</i>	119
<i>Figure II- 3: Phase filtration</i>	120
<i>Figure II- 4: Modèle rhéologique de Terzaghi -Voight</i>	131
<i>Figure II- 5: Modèle rhéologique incluant une consolidation tertiaire (Chang et Lee, 1998)</i>	132
<i>Figure II- 6: Modèle rhéologique utilisé par La Heij (1994)</i>	133
<i>Figure II- 7: Phase filtration (Lee et Wang, 2000)</i>	134
<i>Figure II- 8: Phase de Compression (Lee et Wang, 2000)</i>	135
<i>Figure II- 9: représentation du processus de compression</i>	146
<i>Figure II- 10: Evolution de la hauteur du piston et du gâteau</i>	149
<i>Figure II- 11: Schéma de discrétisation</i>	150
<i>Figure II- 12: Organigramme de résolution</i>	153
<i>Figure II- 13: Evolution du hauteur de piston et du gâteau</i>	155
<i>Figure II- 14: Champs de porosité (phase filtration)</i>	155
<i>Figure II- 15: courbe caractéristique de la filtration-compression</i>	156
<i>Figure II- 16: courbe caractéristique de la filtration expérimentale</i>	156
<i>Figure II- 17: taux de consolidation</i>	157
<i>Figure II- 18: porosité moyenne (phase de compression)</i>	158
<i>Figure II- 19: Champ de porosité (phase de compression)</i>	158
<i>Figure II- 20: Champ de porosité (phase de compression) expérimentale</i>	159
<i>Figure II- 21: hauteur de piston (phase de compression)</i>	160
<i>Figure II- 22: volume de filtrat (phase de compression)</i>	160
	26
<i>Tableau I- 1 : Modèles des isothermes</i>	29
<i>Tableau I- 2 : Modèle de GAB</i>	29
<i>Tableau I- 3: Modèle de Henderson</i>	29
<i>Tableau I- 4: Modèle de Chung et Pfost</i>	30
<i>Tableau I- 5: Modèle de Hasley</i>	56
<i>Tableau I- 6 : paramètres de coefficient de diffusion</i>	82
<i>Tableau I- 7: Formulation du problème en coordonnées Euleuriennes et Lagrangiennes</i>	93
<i>Tableau I- 8: Propriétés physiques et mécaniques du processus</i>	104
<i>Tableau II- 1: classification de compressibilité des gâteaux (Tiller et Li, 2003)</i>	129
<i>Tableau II- 2 discrétisation de l'Eq II-105</i>	151
<i>Tableau II- 3: Paramètre de filtration (kaolin)</i>	154

NOMENCLATURE

\bar{V}	Volume spécifique apparent d'un gramme d'argile hydraté de taux d'humidité w	$m^3.kg^{-1}$
\bar{V}_s	Volume spécifique partiel du solide seul	$m^3.kg^{-1}$
\bar{V}_e	Volume spécifique partiel du liquide seul	$m^3.kg^{-1}$
\dot{m}	Taux de changement de phase	$kg.s^{-1}$
\bar{w}_0	Teneur en eau moyenne initiale	-
a	Constante de lissage	$m^3.kg^{-1}$
A_f	Surface du média filtrant	m^2
A	Surface normale à l'écoulement	m^2
a_4	Coefficient de l'équation II-52	-
a_c	Constante de lissage	-
A_c	Surface de contact entre particules	m^2
a_E	Coefficient de l'équation II-50	-
$A_{L,S}$	Surface de l'interface L-S contenue dans le volume de prise de moyenne	m^2
a_w	Activité de l'eau	-
b	Constante de lissage	$m^3.kg^{-1}$
b_1	Ordonnées à l'origine des courbes $t/V=f(V)$	$s.m^{-3}$
b_2	Pente des courbes $t/V=f(V)$	$s.m^{-6}$
b_4	Coefficient de l'équation II-52	-
b_c	Constante de lissage	-
c	Mass du solide sec par unité de volume de filtrat	$kg.m^{-3}$
C	Excès d'énergie avec laquelle la première couche d'eau interagit avec la surface d'adsorption primaire.	$J.mol^{-1}$
c_4	Coefficient de l'équation II-52	-
C_e	Coefficient de compressibilité	$m^{-2}.s^{-1}$
C_{ph}	Capacité calorifique du produit	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
C_{pl}	Capacité calorifique de la phase liquide	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
C_{ps}	Capacité calorifique de la phase solide	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
CR	Constante de Ruth Eq (II-1)	$m^6.s$
c_s	Constante de lissage	-
D	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
D_i	Flux dû à la gravité	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
Dl	Coefficient de diffusion au sens de Landman et col.	$m^2.s^{-1}$

D_L	Coefficient de diffusion du liquide	$m^2.s^{-1}$
D_{IT}	Coefficient de thermo-migration du liquide	$m^2.s^{-1}$
D_o	Constante de lissage	$m^2.s^{-1}$
d_s	Constante de lissage	-
D_v	Coefficient de diffusion de la vapeur	$m^2.s^{-1}$
D_{vT}	Coefficient de thermo-migration de vapeur	$m^2.s^{-1}$
E	Module de YOUNG du matériau	Pa
E_1	Rigidité du module de Terzaghi	Pa
E_2	Rigidité du module de Kelvin-Voight	Pa
E_a	Energie d'activation	$J.mol^{-1}.K^{-1}$
e_v	Taux de vide	-
e_{v0}	Taux de vide à une pression solide nulle	-
f	Vitesse de séchage réduit	-
G	Viscosité du module de Terzaghi-Voight	Pa.s
G_2	Viscosité du module de Kelvin-Voight (compression secondaire)	Pa.s
G_3	Viscosité du module de Kelvin-Voight (compression tertiaire)	Pa.s
h	Coefficient d'échange thermique par convection	$J.m^{-2}.K^{-1}$
H_c	Chaleur de condensation des multicouches	$J.mol^{-1}$
H_m	Chaleur de sorption de la monocouche	$J.mol^{-1}$
H_n	Chaleur de sorption des multicouches	$J.mol^{-1}$
HR	Humidité relative de l'air	-
h_{vap}	Enthalpie de vaporisation	$J.kg^{-1}$
$J_{D,k}$	Flux de diffusion de composante k	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
J_l	Flux de liquide	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
J_v	Flux de vapeur	$kg.m^{-2}.s^{-1}$
k	Perméabilité du gâteau	m^2
K	Différence d'énergie d'activation entre de l'eau pure et l'eau adsorbée en multicouche	$J.mol^{-1}$
K_1, K_2	Constantes d'équilibre	-
K_L	Module de compression	-
k_m	Coefficient de transfert de masse idéal normalisé	-
L	Epaisseur du gâteau de filtration, épaisseur du milieu dans le cas générale	m
L_1	Epaisseur initiale du gâteau de filtration	m
L_f	Epaisseur finale du gâteau de filtration	m
L_v	Chaleur latente de vaporisation	$J.kg^{-1}$
m	Coefficient de l'équation II-54	-

m_s	Masse de solide sec	kg
M_v	Masse molaire de la vapeur	kg.mol ⁻¹
n	Coefficient de compressibilité	-
p	Pression	Pa
P_a	Pression de vapeur d'eau dans l'air séchant	Pa
P_{app}	Pression appliquée	Pa
P_{atm}	Pression atmosphérique	Pa
P_{fls}	Pression exercée par le fluide sur le solide	Pa
p_i	Pression liquide à l'interface gâteau – média filtrant	Pa
P_l	Pression liquide	Pa
P_{pl}	Pression exercée par les parois sur la liquide	Pa
P_s	Pression solide	Pa
$P_{s,ref}$	Pression de référence	Pa
$P_{v,surf}$	Pression de vapeur d'eau pure à la surface du produit	Pa
P_y	Pression compressive seuil	Pa
Q_{abs}	Flux absorbé par rayonnement	J.s ⁻¹
q_L	Débit du fluide au niveau du média filtrant	kg.m ⁻²
q_l	Débit spécifique de liquide	m.s ⁻¹
Q_{parois}	Flux échangé par rayonnement avec la paroi	J.s ⁻¹
q_s	Débit spécifique de solide	m.s ⁻¹
R	Constante des gaz parfaits	Pa.m ³ .K ⁻¹
R_f	Résistance à la filtration	m ⁻¹
R_g	Résistance hydraulique du gâteau de filtration	m ⁻¹
R_m	Résistance hydraulique du media filtrant	m ⁻¹
R_v	Retrait volumique	-
t	Temps	s
T	Température	°C, K
T_0	Température initiale	°C, K
t_0	Paramètre de l'équation (II-1)	s
T_a	Température de l'air	°C, K
t_{ref}	Temps de référence	s
T_{surf}	Température de surface	°C, K
u	Vitesse	m.s ⁻¹
U_c	Taux moyen de consolidation	-
u_l	Vitesse de la phase liquide	ms ⁻¹
u_s	Vitesse de la phase solide	m.s ⁻¹

V	Volume de filtrat	m^3
V_0	Paramètre de l'équation (II-1)	m^3
v_a	Vitesse de l'air	$m.s^{-1}$
V_p	Volume de particule d'un agrégat	m^3
V_s	Volume du solide	m^3
w	Teneur en eau base sèche	$kg.kg^{-1}$
Wad(-)	Teneur en eau (t)/teneur en eau initiale	-
w_{cr}	Teneur en eau critique	-
w_{eq}	Teneur en eau adsorbée à l'équilibre	$kg.kg^{-1}$
w_g	Masse du gâteau sec déposé par unité de volume de filtrat	$kg.m^{-3}$
w_M	Teneur en eau de la première couche	-
w_m	Coordonnée matérielle	$kg.m^{-2}$
w_{m0}, C_0, K_0	Constante pré exponentiel	-
Wmoy(t)	Teneur en eau moyenne base sèche	$kg.kg^{-1}$

Lettres grecques

α	Résistance spécifique du gâteau	$m.kg^{-1}$
α_m	Résistance spécifique moyenne du gâteau	$m.kg^{-1}$
α_0	Résistance spécifique du gâteau à pression solide nulle	$m.kg^{-1}$
α_T	Coefficients d'expansion thermique	-
β	Paramètre de lissage	-
β_c	Coefficient de compressibilité	-
β_h	Coefficient d'expansion hydrique	-
δ_s	Coefficient de thermo-migration	-
δ	Paramètre de lissage	-
ϵ_l	Porosité	-
ϵ_l^0	Porosité liquide à pression solide nulle	-
ϵ_s	Fraction volumique en solide	-
ϵ_s^0	Fraction volumique en solide à pression solide nulle	-
ϵ_{sm0}	Coefficient de l'équation II-54	-
ϵ_{sm}	Fraction volumique en solide moyenne	-
$\epsilon_{s\infty}$	Fraction volumique en solide la fin de compression	-
ϵ_{s0}	Fraction volumique en solide à t=0	-
Φ	Teneur en eau réduite	-

φ	Taux adimensionnel de changement de phase	-
γ	Facteur de retrait	-
η_c	Coefficient de compressibilité	-
η	Paramètre de lissage	-
τ	Temps de relaxation du modèle de La Heij	s
$\tilde{\lambda}$	Conductivité thermique	-
λ_s	Coefficient de frottement de Stokes	-
λ et μ	Coefficients de LAME	-
μ_v	Viscosité dynamique	Pa.s
ρ	Masse volumique humide	kg.m ⁻³
ρ_l	Masse volumique du liquide	kg.m ⁻³
ρ_l^l	Masse volumique réelle de la phase fluide	kg.m ⁻³
ρ_s	Masse volumique du solide sec	kg.m ⁻³
ρ_s^o	Masse volumique sèche	kg.m ⁻³
ρ_s^s	Masse volumique réelle de la phase solide	kg.m ⁻³
ϵ	Taux de déformation	-
ξ, η, ζ	Coordonnées Lagrangiennes	-
X, Y, Z	Coordonnées de référence	
x,y,z	Coordonnées Eulériennes	

Tenseurs et vecteurs

F	Tenseur gradient de vitesse
R	Tenseur de rotation symétrique
G	Tenseur gradient de déplacement
W	Tenseur de rotation (<i>antisymétrique</i>).
Σ	Tenseur des déformations
π, σ	Tenseurs des contraintes surfaciques
π_l	Tenseurs des contraintes surfaciques liquide
τ_l	Contrainte visqueuse
π_s	Tenseurs des contraintes surfaciques solide
τ_s	Contrainte entre particules
1	Tenseur unitaire
\vec{f}	Forces volumiques
\vec{F}_b	Force de traînée

\vec{F}_d	Force visqueuse
\vec{F}_s	Force entre particules solides
\vec{g}	Gravité
\vec{J}	Vecteur flux de matière
\vec{n}	Normale à la surface

INTRODUCTION GENERALE

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'*Ecole Nationale des Ingénieurs de Monastir* (**ENIM, Tunisie**) et l'*Ecole Nationale Supérieure en Génie des Technologies Industrielles de Pau* (**ENSGTI, France**). C'est la première thèse menée conjointement entre ces deux écoles. Le travail a été effectué au **Laboratoire d'Energétique des Procédés (LEP, ENIM)** et au **Laboratoire d'Energétique et Procédés Thermique (LEPT, INRST)** pour la partie théorique et la modélisation. Le **Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés (LaTEP, ENSGTI)** a quant à lui plutôt impliqué sur l'aspect expérimental relatif au travail. Ces trois laboratoires comportent des axes d'études assez proches concernant les procédés de séparation solide-liquide, notamment en filtration/compression et en séchage. Ces deux opérations, souvent complémentaires, sont très répandues dans l'industrie et trouvent leur application dans les domaines de la pharmacie, de l'agro-alimentaire, du traitement des eaux usées, etc. Leur complémentarité repose généralement sur des exigences énergétiques et économiques. En effet la voie mécanique permet d'extraire la phase liquide avec une demande énergétique beaucoup moins forte que le séchage thermique (un rapport de 25 est souvent annoncé). En revanche ses performances, en terme d'humidité finale, sont souvent une limite et l'étape de séchage reste couramment nécessaire

Par ailleurs la description mathématique de ces deux procédés repose sur des concepts relativement proches dans lesquels le comportement rhéologique du produit semble jouer un rôle important. Ce dernier point reste un problème non totalement résolu dans la littérature et constitue l'idée motrice de ce travail. La prise en compte du comportement mécanique des produits dans les modèles mathématiques devrait permettre de mieux caractériser la compression de gâteaux de filtration, de mieux aborder les problèmes de la qualité finale des produits séchés (fissures, déformations indésirables ...).

Les produits utilisés pour cette étude sont des suspensions réalisées à partir de matériaux classiquement considérés dans la littérature à savoir, la bentonite et le kaolin. Outre le caractère un peu "modèle" de ces produits, ce choix a été fait dans l'idée de s'approcher du cas des boues résiduaires, qui est un aspect de recherche qui intéresse largement le **LaTEP**.

Pour atteindre ces objectifs, notre travail est articulé autour de deux grandes parties, respectivement, l'étude de séchage des milieux déformables et l'étude de la filtration compression, découpées en cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la détermination de l'évolution des propriétés caractéristiques des matériaux en fonction de leur humidité. Ainsi, dans un premier temps, on présentera les isothermes de sorption des produits étudiés. Ensuite, le phénomène de retrait observé sur ces matériaux sera caractérisé et une étude expérimentale de la cinétique de séchage basée sur la théorie des courbes caractéristiques de séchage sera proposée. Enfin, les coefficients de diffusion seront déterminés pour chacun des deux produits.

Le deuxième chapitre est réservé à une formulation mathématique générale du problème de transferts couplés de chaleur et de masse appliqué au cas des matériaux déformables. Deux configurations sont alors étudiées : un cas unidirectionnel et un bidirectionnel.

Le troisième chapitre permet de valider les modèles développés précédemment en présentant un certain nombre de simulation et des confrontations avec l'expérience.

Le quatrième chapitre débute la deuxième partie de cette étude et présente une revue bibliographique des travaux engagés dans le domaine de la modélisation du processus de filtration-compression.

Le dernier chapitre propose une nouvelle formulation mathématique de la compression mécanique des gâteaux. Les performances de ce modèle sont ensuite évaluées grâce à des résultats de simulations numériques.

Partie I : séchage des milieux déformables

Dans les procédés de traitement des solides, l'opération de séchage est d'une grande importance, relativement à toutes les opérations unitaires mises en jeux. Bien que le séchage soit généralement la dernière étape du processus industriel, il est souvent appliqué à un grand nombre de matériaux solides : minerais, produits pharmaceutiques, boues résiduaires, etc. Il est couramment reconnu que dans un procédé industriel, l'étape de séchage est la plus consommatrice d'énergie. Pendant ces dernières années, malgré l'augmentation du prix de l'énergie, des contraintes plus strictes sur la qualité, la pollution et la sécurité ont été imposées. Pour satisfaire à ces exigences et optimiser les dépenses liées à l'énergie, des actions de recherche doivent être menées afin de mieux gérer les procédés industriels.

Sur le plan scientifique, le séchage est une opération caractérisée par des transferts couplés de chaleur, de masse et de quantité de mouvement. L'évacuation de l'eau de façonnage introduit généralement une variation des dimensions des pièces à sécher (*retrait, déformation, gonflement,...*). Si cette variation n'est pas homogène dans toute la masse du matériau, il s'en suit des déformations pouvant rendre, à partir d'un seuil, les produits impropres à la distribution. Il est donc intéressant et utile d'approfondir l'étude des différents phénomènes physiques rencontrés au cours du séchage, ainsi que des éventuelles déformations provoquées. Ceci doit, au final, permettre de mieux maîtriser cette opération. Le problème complexe de déformation survenant lors d'un transfert d'humidité fait appel à deux domaines scientifiques différents : la thermique et la mécanique.

La modélisation du processus de séchage industriel nécessite essentiellement la connaissance des données de base, en l'occurrence les isothermes de sorption, les courbes de cinétique et l'évolution des dimensions du matériau au cours du séchage (quand il s'agit d'un milieu déformable).

Chapitre I-1

CARACTERISATION EXPERIMENTALE POUR LE SECHAGE DES PRODUITS ETUDIES

La modélisation du séchage d'un matériau quelconque nécessite, pour la description des différentes modes de transferts, la détermination de l'évolution des propriétés caractéristiques du matériau en fonction de la quantité d'eau contenue dans celui-ci. L'étude de ces propriétés se base habituellement sur des expériences de caractérisation annexes aux expériences de séchage.

Ainsi, dans ce chapitre, les isothermes de sorption des produits étudiés seront tout d'abord présentées. Le phénomène de retrait observé sur nos matériaux sera ensuite abordé. Une étude expérimentale de la cinétique de séchage sera présentée.

I-1-1	ISOTHERMES DE SORPTION	24
I-1-1-1	Modèles de sorption.....	24
I-1-1-2	Protocole expérimental.....	26
I-1-1-3	Résultats et interprétation des isothermes.....	27
I-1-2	MASSE VOLUMIQUE ET RETRAIT	30
I-1-2-1	Mécanisme de retrait.....	30
I-1-2-2.	Protocole expérimental.....	31
I-1-2-3.	Résultats obtenus sur le Kaolin et la Bentonite.....	33
I-1-2-3-1.	Evolution de la masse volumique du kaolin	33
I-1-2-3-2.	Masse volumique et volume spécifique de la bentonite	36
I-1-3	CINETIQUE DE SECHAGE.....	37
I-1-3-1	Les différentes phases d'un séchage convectif.....	38
I-1-3-1-1	Phase d'initiation	38
I-1-3-1-2	Phase à vitesse constante	38
I-1-3-1-3	Phase de ralentissement de la vitesse de séchage.....	39
I-1-3-2	Appareillage et protocole expérimental	39
I-1-3-2-1.	Dispositif expérimental.....	39
I-1-3-2-2.	Protocole expérimental	40
I-1-3-3	Résultats obtenus sur le kaolin.....	42
I-1-3-3-1.	Reproductibilité des essais.....	42
I-1-3-3-2.	Influence de la température de l'air.....	43
I-1-3-3-3.	Influence de la vitesse de l'air	43
I-1-3-3-4.	Influence de l'humidité de l'air.....	44
I-1-3-4	Approche globale du comportement du produit au cours du séchage.....	46
I-1-3-4-1.	Recherche d'une courbe caractéristique pour la bentonite et le kaolin.	46
I-1-4.	IDENTIFICATION DU COEFFICIENT DE DIFFUSION	52
I-1-4-1	Les différentes méthodes proposées dans la littérature	52
I-1-4-2	Résultats obtenus sur le kaolin et la bentonite	54
I-1-5.	CONCLUSION	58
I-1-6.	REFERENCES.....	58

I-1-1 Isothermes de sorption

Le transport de la vapeur est un phénomène qui se produit lors de tout procédé de séchage. Le mouvement de la vapeur se fait soit par diffusion au sein du matériau même soit par échange au niveau de la surface entre le matériau et son environnement. Si un produit peu humide de nature hygroscopique se trouve en contact avec de la vapeur d'eau, il fixe celle-ci jusqu'à atteindre un état d'équilibre ; ce phénomène est connu sous le nom d'**adsorption**. Par contre lorsque le même produit est placé dans une atmosphère plus sèche, l'état d'équilibre s'établit par transfert d'humidité du produit vers l'extérieur ; ce phénomène est couramment appelé **désorption**. Les isothermes de sorption représentent la relation entre la teneur en liquide du produit et celle de la vapeur à la pression d'équilibre pour des températures données.

I-1-1-1 Modèles de sorption

L'intérêt des représentations de ces modèles réside, outre la facilité de lissage qu'elles offrent, dans le fait qu'elles permettent une interprétation physique du phénomène de sorption dans la limite des hypothèses employées. Cependant, quelques critiques pourraient être soulignées.

En effet, d'une part ces modèles supposent que tous les sites de sorption sont homogènes (d'affinité identique) et indépendants. Autrement dit, la probabilité d'occupation d'un site n'est pas influencée par les interactions latérales avec les autres sites (Guggenheim, 1966). D'autre part, sur un site donné, seule l'adsorption de la première molécule d'eau se distingue de l'adsorption des autres molécules par une interaction plus forte eau-sorbant.

Forme générale des isothermes

Les isothermes d'adsorption/désorption présentent en général trois zones, chacune correspondant à un mode de fixation particulier de l'eau sur le produit (fig I-1) :

- **Zone 1** : Constitution d'une monocouche moléculaire à la surface du produit. Elle est caractéristique de l'action des forces de Van Der Waals entre les groupements hydrophiles et les molécules d'eau. L'adsorption des molécules d'eau se fait progressivement jusqu'à constituer une monocouche recouvrant toute la surface externe et une partie des pores du produit. L'eau est dans un état rigide en raison de l'importance des forces de liaisons entre les molécules d'eau et la surface. Le passage à la zone suivante s'effectue quand toute la surface est saturée.
- **Zone 2** : Adsorption des molécules sur la monocouche initiale. L'isotherme est linéaire dans cette zone et l'eau est dans un état intermédiaire entre solide et liquide.

- **Zone 3** : L'épaisseur de la pellicule est suffisante pour que l'eau soit présente à l'état liquide dans les pores du matériau. L'eau microcapillaire constitue une phase continue.

De nombreux modèles ont été développés pour la prédiction de la dépendance entre l'humidité d'équilibre, l'activité de l'eau (a_w) et la température (Bizot, 1983 ; Andrieu et col., 1985 ; Chen et Morey, 1989). Ces modèles d'isothermes peuvent être théoriques (Langmuir, 1918 ; Brunauer et col., 1938, 1940 ; Bradeley, 1936 ; Kühn, 1964 ; Zsigmondy, 1911), semi théoriques (Henderson, 1952 ; Iglesias et Chirife, 1976) ou empiriques (Lykov, 1955 ; Iglesias et Chirife, 1978). Le choix du modèle convenable dépend d'un certain nombre de facteurs tels que la zone à étudié (Roques, 1988) car pour décrire la zone 1 il est mieux décrit par l'équation de Langmuir, la zone 2 et mieux décrit par l'équation de B.E.T., ainsi que le type de matériau à étudiée et la nature du solvant. Nous nous intéressons à ceux qui décrivent mathématiquement au mieux les courbes expérimentales en vue des applications pratiques de séchage.

D'après la littérature (Maroulis et col., 1988 ; Tsami et Marinos-Kouris., 1990 ; Mok et Hettiarrachy., 1990 ; Mihoubi et col., 2002a, 2002b) les modèles de GAB, Henderson, Chung, et Pfost et Halsey semblent les mieux adaptés à notre type de matériau.

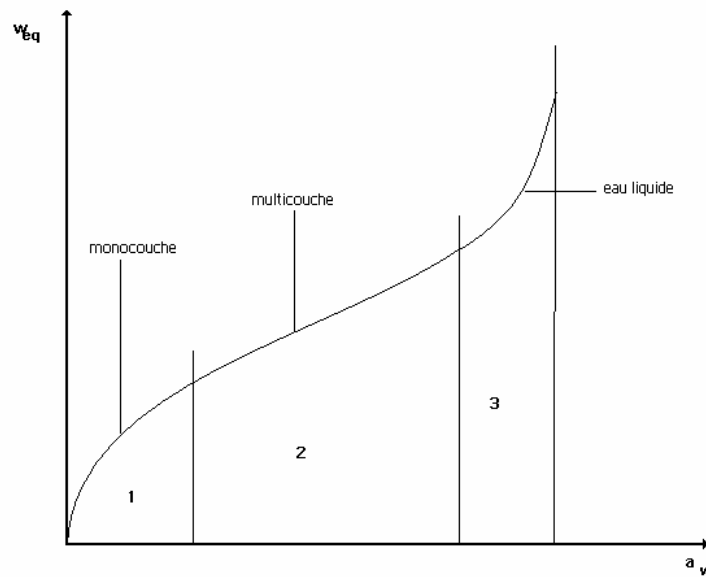


Figure I. 1: forme générale des isothermes

Tableau I- 1 : Modèles des isothermes

Auteurs	Modèle	Paramètres	Domaine
Langmuir (Langmuir, 1918)	$\frac{w}{w_M} = \frac{KP}{1 + KP}$	K W _M	Zone 1
Brunauer, Emmet et Teller (BET) (Brunauer et col., 1938)	$w = \frac{w_M C a_w}{(1 - a_w)} \frac{1 - (n + 1)a_w^n + n a_w^{n+1}}{1 + (C - 1)a_w - C a_w^{n+1}}$	C W _M n nombre de couches	Zone 2
Guggenheim Anderson Boer (GAB) (Anderson, 1946)	$w = \frac{w_M C K a_w}{(1 - K a_w)(1 - K a_w + C K a_w)}$	$w_M = w_{mo} \exp\left(\frac{w_{m1}}{RT}\right)$ $K = K_o \exp\left(\frac{[H_c - H_n]}{RT}\right)$	Courbe complète
Henderson (Henderson, 1952)	$1 - a_w = \exp[-(K_1 T w)^{K_2}]$	K ₁ K ₂	Courbe complète
Halsey (Halsey, 1948)	$a_w = \exp\left[-\frac{K_1}{RT} \left(\frac{w}{K_2}\right)^{K_2}\right]$	K ₁ K ₂	Courbe complète
Chung et Pfof (Chung et Pfof, 1967)	$\ln(a_w) = -\frac{K_1}{RT} \exp(-K_2 w)$	K ₁ K ₂	Courbe complète

I-1-1-2 Protocole expérimental

Les isothermes de sorption sont obtenues en maintenant l'échantillon sous une pression partielle de vapeur d'eau constante à une température donnée jusqu'à l'équilibre thermodynamique. Ce dernier est atteint lorsque la masse de l'échantillon ne varie plus de façon significative.

Pratiquement, les échantillons (bentonite et kaolin dans cette étude) sont placés dans une enceinte thermostatée et hermétique dont l'humidité relative est maintenue constante au moyen d'une solution d'acide sulfurique diluée. Les pressions partielles de vapeur sont connues avec une bonne précision en fonction de la température et de la concentration en acide. Les expériences ont été réalisées pour différentes températures (30, 50, 70°C).

I-1-1-3 Résultats et interprétation des isothermes

Sur les figures (I.2, I.3) sont reportées les isothermes expérimentales d'adsorption et de désorption ainsi que celles calculées par les modèles de GAB et Henderson.

L'analyse de ces courbes, permet de formuler plusieurs remarques :

- ↪ Les isothermes sont de type II ;
- ↪ Pour les humidités relatives situées en dessous de 70%, la variation de la quantité d'eau retenue par les deux produits est faible ;
- ↪ Quand l'humidité tend vers 100 %, la courbe d'équilibre prend l'allure d'une droite verticale ;
- ↪ Un écart entre l'adsorption et la désorption est observé (figure I. 4). Il est important de signaler que cet écart n'est pas encore expliqué de façon définitive. Certains auteurs l'attribuent au phénomène d' " hystérésis " dû au changement physique du matériau causé par le départ de l'eau ;
- ↪ La teneur en eau du produit diminue avec la température ;
- ↪ Les isothermes de sorption sont bien décrites par les modèles de GAB et d'Henderson avec un coefficient de corrélation proche de l'unité.

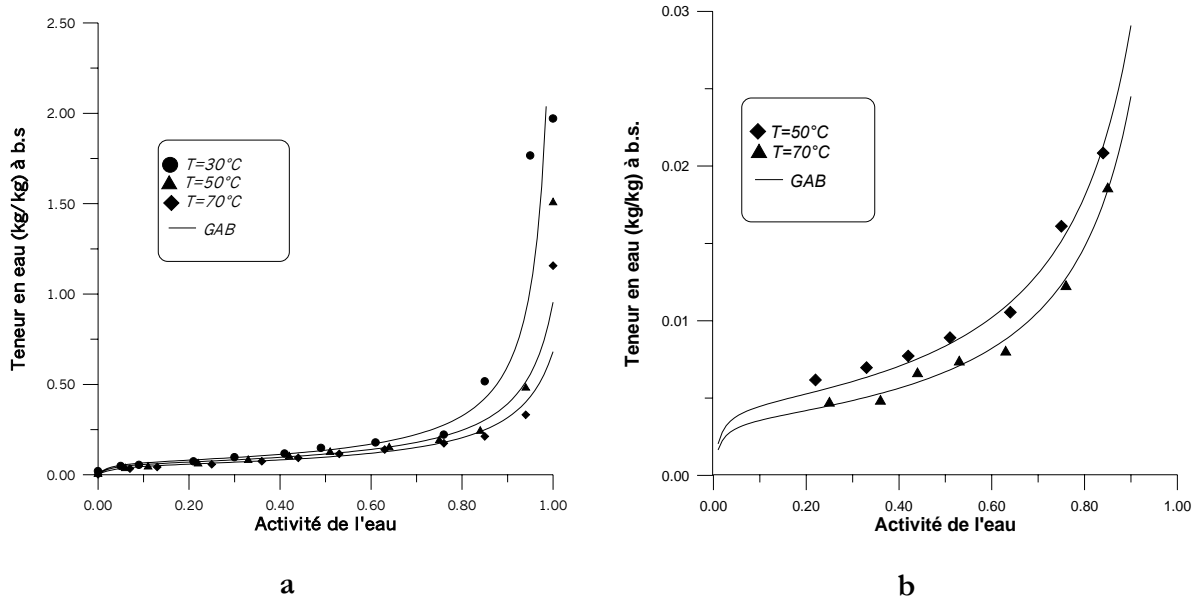


Figure I. 2: Isotherme désorption (modèle de GAB) a- bentonite ; b- Kaolin

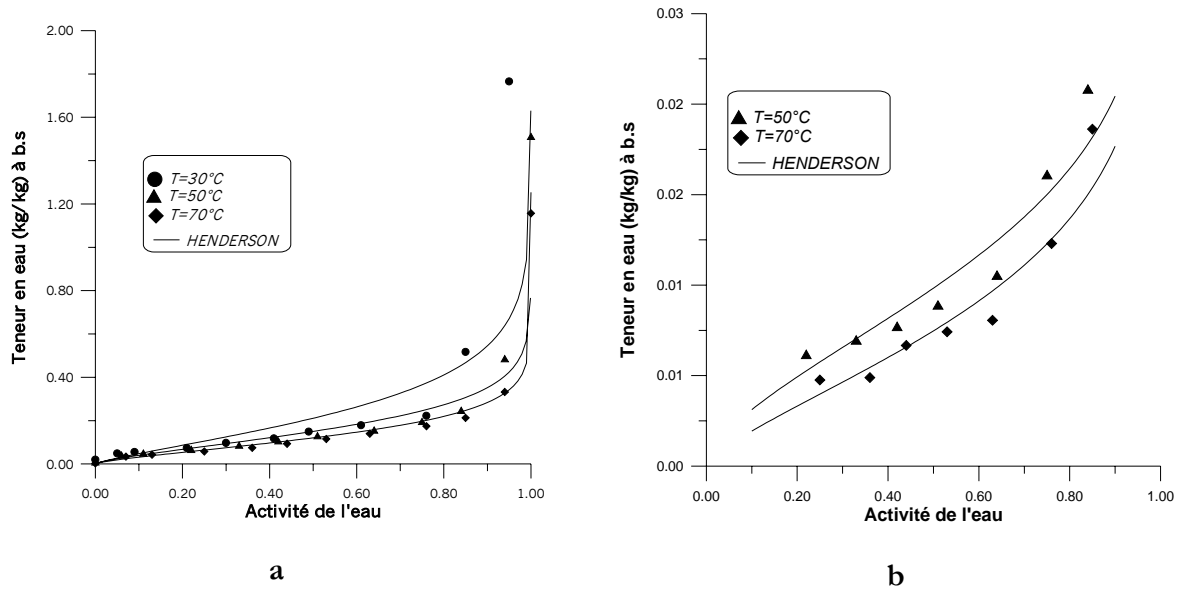


Figure I. 3 : Isotherme désorption (modèle de Henderson) a- bentonite ; b- kaolin

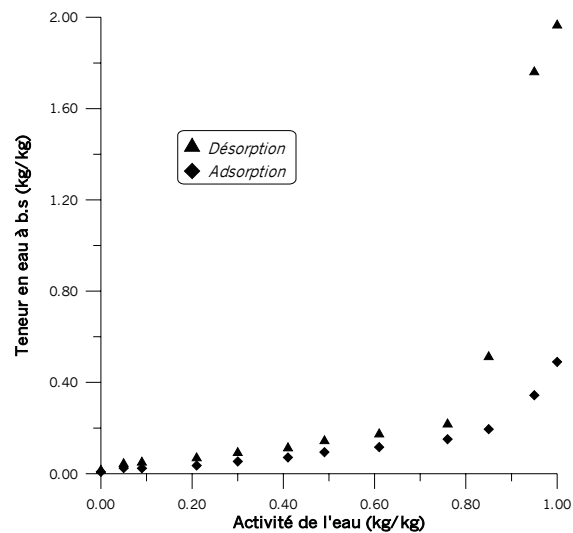


Figure I. 4 : isotherme d'adsorption désorption de la bentonite pour $T=30^{\circ}\text{C}$

Lissage

Les résultats de lissage des données expérimentales par les quatre relations décrites auparavant sont reportés dans les tableaux (I. 2, I. 3, I.4 et I.5) et les figures (I. 2, I. 3). Ils montrent que les modèles de GAB et Henderson sont bien adaptés à nos produits, avec une erreur relative, entre les valeurs théoriques et expérimentales, inférieure respectivement à 7 % et 3,5 %. Les modèles de Chung-Pfost et Halsey, sont quant à eux non adaptés à nos résultats expérimentaux, avec une erreur relative proche de 50 %.

Tableau I- 2 : Modèle de GAB

T (°C)	Désorption (kaolin)					Désorption (bentonite)				
	Coefficients			Critères de comparaison		Coefficients			Critères de comparaison	
	K	C	W_M	R^2	ETE %	K	C	W_M	R^2	DS % ¹
30	-	-	-	-	-	0,98	45,981	0,070	0,969	0,685
50	0,94	86,307	0,00449	0,982	$8,69 \cdot 10^{-2}$	0,93	42,628	0,062	0,974	0,161
70	0,95	87,985	0,00356	0,989	$6,23 \cdot 10^{-2}$	0,92	30,695	0,054	0,956	0,139

Tableau I- 3: Modèle de Henderson

T (°C)	Désorption (kaolin)				Désorption (bentonite)			
	Coefficients		Critères de comparaison		Coefficients		Critères de comparaison	
	$K_1 (10^{-2})$	K_2	R^2	ETE %	$K_1 (10^{-2})$	K_2	R^2	DS %
30	-	-	-	-	1,17	1,265	0,899	0,3509
50	25,18	1,640	0,9625	0,155	1,59	1,411	0,981	0,1768
70	30	1,394	0,961	0,144	1,868	1,398	0,983	0,1196

Tableau I- 4: Modèle de Chung et Pfost

T (°C)	Désorption (Kaolin)				Désorption (bentonite)			
	Coefficients		Critères de comparaison		Coefficients		Critères de comparaison	
	$K_1 (10^3)$	$K_2 (10^{-2})$	R^2	ETE %	$K_1 (10^3)$	$K_2 (10^{-2})$	R^2	DS %
30	-	-	-	-	-5,676	-3,465	0,742	5,692
50	-7,563	-0,284	0,824	0,285	-6,2404	-1,516	0,4612	36,17
70	-8,664	-0,280	0,816	0,264	-6,996	-1,772	0,4728	27,08

¹ DS : déviation standard

Tableau I- 5: Modèle de Hasley

T (°C)	Désorption (Kaolin)				Désorption (bentonite)			
	Coefficients		Critères de comparaison		Coefficients		Critères de comparaison	
	$K_1 (10^3)$	K_2	R^2	ETE %	$K_1 (10^3)$	K_2	R^2	DS %
30	-	-	-	-	-1,334	0,446	0,851	5,030
50	-6,380	0,317	0,897	0,245	-2,0626	0,3619	0,605	37,02
70	-7,993	0,255	0,896	0,225	-2,6824	0,3328	0,6174	27,42

I-1-2 Masse volumique et retrait

La masse volumique intervient dans le calcul de différentes caractéristiques du produit, ainsi la connaissance de son évolution en fonction de la teneur en eau peut aider à caractériser le comportement du milieu étudié lors du séchage. La détermination de son évolution est donc une donnée essentielle.

I-1-2-1 Mécanisme de retrait

Au cours du séchage certains matériaux subissent un retrait non négligeable. Les éléments constitutifs de la structure se resserrent les uns contre les autres sous l'effet de forces internes. Ce phénomène peut avoir une grande influence sur les propriétés du matériau séché : altération du comportement mécanique, fragilisation, déformation, gauchissement... Krause (1977) évoque les fissurations dans les céramiques dues à un séchage agressif produisant un retrait maximal en surface alors que le cœur du produit, encore humide, garde ses dimensions. Scherer (1990) attribue à des anisotropies du retrait le gauchissement d'une pièce de bois.

Léonard (2003) montre, grâce à des mesures par tomographie aux rayons X, la formation de fissures au cours du séchage de boues biologiques issues de station d'épuration.

On pourrait ainsi multiplier les exemples montrant l'importance du retrait subi par des matériaux. Kneule (1964) fut le premier à tenter la caractérisation de ce phénomène. Il distingue le *retrait libre*, durant lequel le matériau peut se contracter librement, du *retrait contrarié* durant lequel cette contraction est entravée par des forces extérieures. Il fait également mention de l'anisotropie du retrait propre aux matériaux à fibres ou à directions privilégiées. Il qualifie enfin le *retrait d'idéal* lorsque la diminution du volume subie par le produit humide correspond exactement au volume de liquide extrait. Dans certains cas, en revanche, la concentration du matériau ne compense pas la

diminution de volume en liquide : il y a alors création de cavités internes. Cela peut être à l'origine de formation d'un réseau poreux.

Plusieurs auteurs ont tenté de comprendre les mécanismes de retrait et plusieurs approches ont été proposées :

↳ **Approche macroscopique** : Kneule (1964) assimile le corps à sécher à des éléments solides séparés par des couches d'eau d'épaisseur variable. La cohésion de la structure solide sous l'effet des forces inter-moléculaires est d'autant plus grande que les éléments sont plus proches. Au cours du séchage, les couches qui séparent les éléments deviennent plus fines, entraînant la diminution du volume.

↳ **Approche capillaire** : Scherer (1990) attribue aux forces capillaires le retrait des matériaux déformables poreux. Selon lui, ce retrait s'effectue en trois temps :

- au début du séchage, une pellicule de liquide se forme à la surface du corps. Elle est évacuée par l'agent de transport après évaporation. A ce stade, le départ de l'eau occasionne seulement une diminution du volume du produit si bien que l'interface liquide-gaz (ménisque) reste plate.

- la rigidification du système augmentant, le front liquide pénètre à l'intérieur du pore. La minimisation de l'énergie interne du système pore-liquide se traduit par la formation de ménisques, afin de limiter la surface solide en contact avec l'air. Ceci entraîne l'apparition d'une tension dans le liquide par l'intermédiaire des forces capillaires.

- le séchage progressant, la structure finie par s'opposer à cette compression. Le retrait cesse et les ménisques progressent dans les pores. Il se crée alors localement des contraintes susceptibles d'endommager le matériau. Cela correspond au début de la première phase de ralentissement.

↳ **Approche colloïdale** : Il s'agit d'une approche développée par Pierre (1990) pour prendre en compte les particularités des gels colloïdaux sur les bases de la théorie DLVO (DERJAGUIN, LANDAU, VERWEY, OVERBEEK). Cette approche repose sur les forces électrostatiques mises en jeu, le liquide étant alors "tiré" par électrosuction.

I-1-2-2. Protocole expérimental

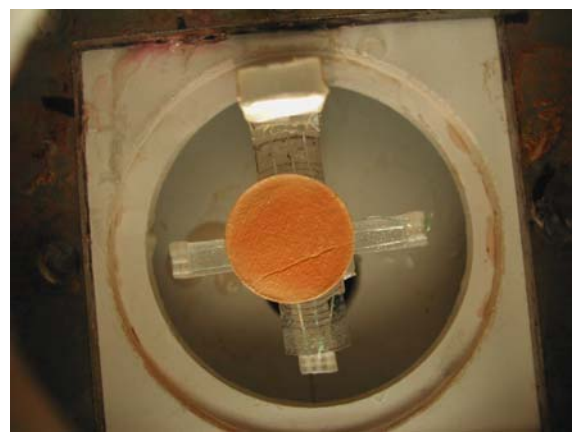
L'évolution de la masse volumique de nos produits a été mesurée pour différents teneurs en eau. Les expériences, consistent en des mesures de volume couplées à des pesées tout au long du séchage. Elles ont été effectuées sur des cylindres de gâteaux de kaolin et de bentonite, réalisés par des expériences de filtration menées en cellule de filtration-compression (Cf. partie II).

La procédure mise en place pour effectuer ces mesures consiste à réaliser une expérience de séchage, sous conditions de température, humidité relative et vitesse de l'air fixées, et de suivre à l'aide d'un appareil photo numérique l'évolution de la taille de l'échantillon à des instants différents. La masse du produit séché est enregistrée en continu par l'intermédiaire d'une balance reliée à un micro-ordinateur. En utilisant le logiciel photoshop on peut déterminer les dimensions de l'échantillon pour ensuite calculer son volume et sa surface extérieure.

Les essais de séchage ont été réalisés sur des suspensions préalablement filtrées (sous 5 bar) en cellule de filtration-compression. Les échantillons à sécher sont ensuite prélevés dans le gâteau de filtration grâce à un emporte pièce.



t=0s

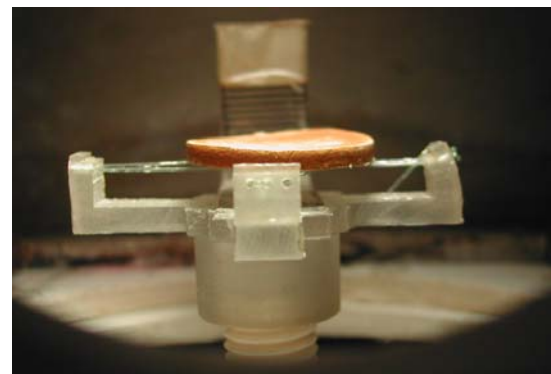


t=3651s

Figure I. 5: retrait latéral



t=0s



t= 3880s

Figure I. 6: retrait longitudinal

I-1-2-3. Résultats obtenus sur le Kaolin et la Bentonite

I-1-2-3-1. Evolution de la masse volumique du kaolin

Plusieurs travaux ont montré que la masse volumique ne dépendait pas des conditions de séchage, son évolution étant seulement liée à la quantité d'eau dans le produit (Zagrouba, 1993 ; Kechou, 1989). Sur la figure (I.7) la courbe en trait continu représente une corrélation permettant de relier la masse volumique à la teneur en eau. Cette corrélation a pour expression mathématique :

$$\rho(w) = 1345,217 \exp\left(-\frac{(w - 0,262387)^2}{2 * (0,3735)^2}\right) \quad \text{Eq.I. 1}$$

Il est intéressant de remarquer que la masse volumique présente un maximum pour les faibles teneurs en eau. En effet dans le cas d'argile déformable les éléments de la matrice solide sont séparés par des couches d'eau qui sont piégées dans les interstices de la matrice solide (soit par capillarité, soit adsorbé sur le squelette). Ainsi lors de la migration de l'eau, liée au processus de séchage, il y a un resserrement des éléments de la matrice solide qui provoque une diminution du volume et une augmentation de la masse volumique. Pour les faibles teneurs en eau le déplacement des éléments de la matrice devient plus difficile, est le retrait volumique s'arrête, dès lors seul l'effet de la diminution de la masse provoque une diminution de la masse volumique. Ces résultats sont en cohérence avec d'autres travaux proposées dans la littérature (Collard, 1989 ; Ketelaars, 1992 ; Mihoubi et col., 2002a) .

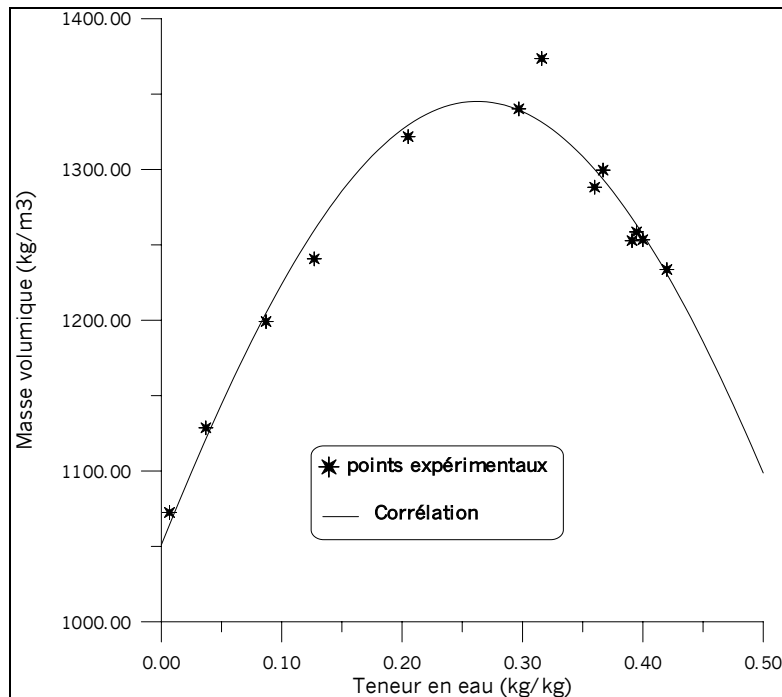


Figure I. 7 : Evolution de la masse volumique du gâteau du Kaolin en fonction de la teneur en eau

Le volume total ramené à l'unité de masse du produit sec est exprimé par la relation suivante qui permet de définir le volume spécifique partiel :

$$\bar{V} = \frac{V}{m_s} = \frac{1+w}{\rho} \quad \text{Eq.I. 2}$$

Plusieurs travaux réalisés sur différents produits (Collard, 1989 ; Kechaou, 1989 ; Zagrouba, 1993) vérifient l'additivité des volumes et montrent que le volume spécifique suit une loi linéaire de type :

$$\bar{V} = \bar{V}_s + \bar{V}_e w = a + bw \quad \text{Eq.I. 3}$$

Avec :

\bar{V} : le volume spécifique apparent d'un gramme d'argile hydraté de taux d'humidité w ,

\bar{V}_s : le volume spécifique partiel du solide seul,

\bar{V}_e : le volume spécifique partiel du liquide seul.

D'une autre manière \bar{V} peut s'écrire d'après (Eq.I. 3)

$$\bar{V} = a \left(1 + \frac{b}{a} w \right);$$

soit avec $\gamma = \frac{b}{a}$
$$\bar{V} = a(1 + \gamma w) \quad \text{Eq.I. 4}$$

A l'aide des équations (Eq.I. 2) et (Eq.I. 4) la masse volumique de l'argile sec prend la forme suivante :

$$\rho(w) = \frac{1}{a} \frac{1+w}{1+\gamma w} \quad \text{Eq.I. 5}$$

Les deux conditions aux limites de la relation (Eq.I. 5) sont les suivantes :

$$w \rightarrow 0 \quad \rho = \rho_s^0 = \frac{1}{a} \text{ masse volumique du solide sec}$$

$$w \rightarrow \infty \quad \rho = \frac{1}{\gamma a} \text{ masse volumique de l'eau pure}$$

Si R_v est le retrait volumique de l'argile, à la teneur en eau w , définie par $R_v = \frac{V - V_s}{V_s}$ (où V_s est le volume de solide sec) la masse volumique à la teneur en eau w s'écrit comme suit :

$$\rho(w) = \rho_s^0 \frac{1+w}{1+R_v} \quad \text{Eq.I. 6}$$

avec ρ_s^0 la masse volumique intrinsèque du solide sec.

En comparant les équations (Eq.I. 5) et (Eq.I. 6) on peut vérifier que le volume de l'échantillon augmente linéairement avec la teneur en eau :

$$V = V_s(1 + \gamma w) \quad \text{Eq.I. 7}$$

Dans le cas du kaolin le volume spécifique pour des teneurs en eau ($>0,28$) s'écrit :

$$\bar{V} = \bar{V}_s + \bar{V}_e w = 10^{-3}(0,66672 + 1,064 * w) \quad \text{Eq.I. 8}$$

L'évolution de la masse volumique du kaolin en fonction de la teneur en eau ($>0,28$) s'écrit alors sous la forme :

$$\rho(w) = 1499,8 \frac{1+w}{1+1,596w} \quad \text{Eq.I 9}$$

Cette équation est d'une grande importance pour l'étape suivante de modélisation. Elle est comparée aux résultats expérimentaux sur la figure I-8

L'équation (I-9) permet de décrire le retrait volumique grâce à l'expression :

$$R_v = 1,596w \quad \text{pour } w > 0,28 \quad \text{Eq.I. 10}$$

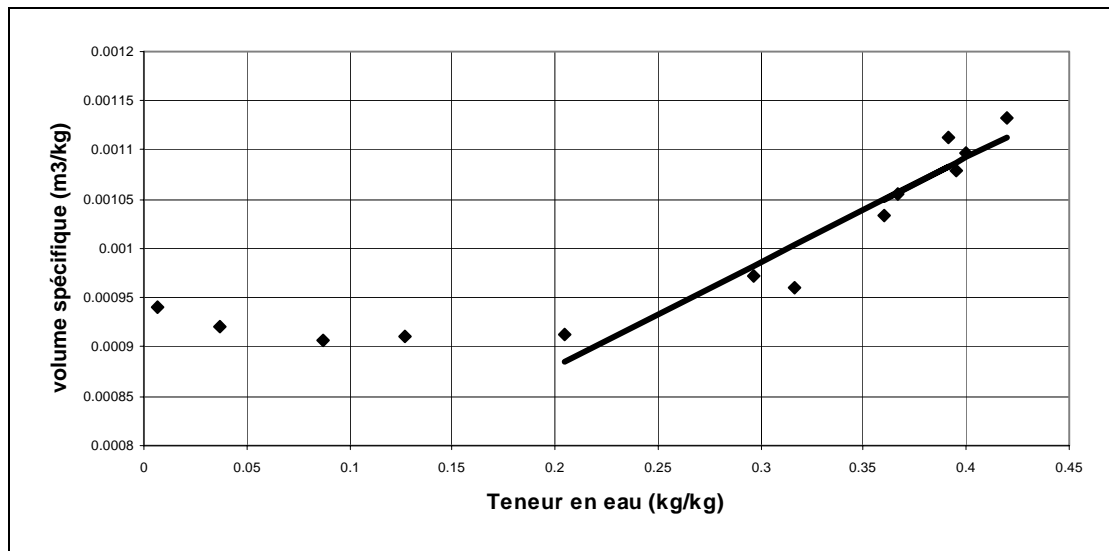


Figure I. 8 : Evolution du volume spécifique du kaolin en fonction de la teneur en eau

I-1-2-3-2. Masse volumique et volume spécifique de la bentonite

L'évolution globale de la masse volumique de la bentonite a une allure similaire à celle du kaolin avec toutefois une tendance à la déformation plus importante.

Sur la figure (I. 9), la courbe en trait plein représente une corrélation entre la masse volumique et la teneur en eau. Elle est établie à partir des points expérimentaux et a pour expression mathématique :

$$\rho(w) = 1918,3442 \exp\left(-\frac{(w - 0,3823)^2}{2 * (0,6030)^2}\right) \quad \text{Eq.I. 11}$$

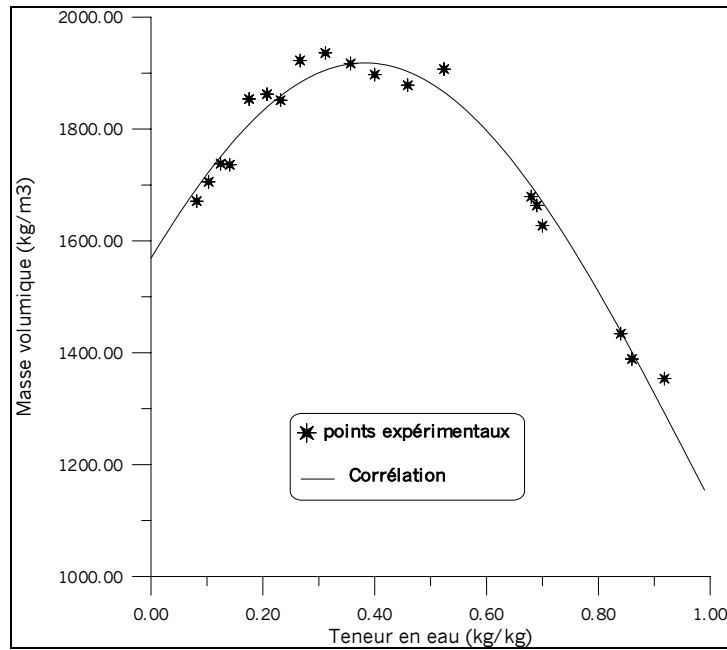


Figure I. 9 : Evolution de la masse volumique du gâteau de la bentonite en fonction de la teneur en eau

La figure (I. 10) montre quant à elle que le volume spécifique en fonction de la teneur en eau suit une loi additive pour les teneurs supérieures à 0,3. La loi est représentée par une fonction linéaire d'équation :

$$\bar{V} = \bar{V}_s + \bar{V}_e w = 10^{-3}(0,40025 + 0,93593w) \quad \text{Eq.I. 12}$$

L'évolution de la masse volumique de la bentonite pour des teneurs en eau supérieures à 0,3 peut s'écrire sous la forme :

$$\rho(w) = 2,498 \frac{1 + w}{1 + 2,338w} \quad \text{Eq.I. 13}$$

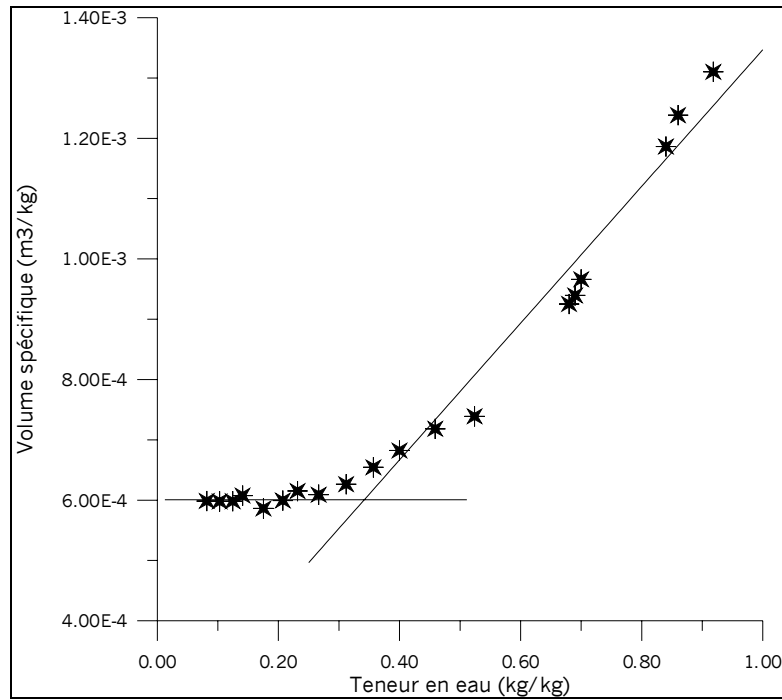


Figure I. 10 : Evolution du volume spécifique du kaolin en fonction de la teneur en eau

L'équation (I.-13) permet de décrire le retrait volumique grâce à l'expression :

$$R_v = 2,338w \text{ pour } w > 0,3 \quad \text{Eq.I. 14}$$

I-1-3 Cinétique de séchage

Les mécanismes de séchage sont complexes à décrire du fait que les transferts de chaleur et de masse sont étroitement imbriqués. L'apport d'énergie va servir à augmenter la température du produit et à évaporer l'eau. Il peut être généré par léchage avec un gaz chaud, par contact avec une surface chauffée ou par rayonnement. L'eau migre de l'intérieur vers l'extérieur du produit où elle est évacuée par convection naturelle ou forcée vers le milieu ambiant. Plusieurs théories et modèles ont été élaborés pour rendre compte de la cinétique de séchage et appréhender les lois physiques qui contrôlent les transferts. La complexité des mécanismes mis en jeu et le caractère variable des produits (*nature, forme, propriétés physiques*) empêchent de trouver un modèle unique susceptible de représenter toutes les situations. Il n'est pas étonnant dans ces conditions que les courbes caractéristiques de la cinétique de séchage présentent plusieurs étapes qui, individuellement et au cours d'une même opération, sont contrôlées par différents phénomènes de transfert.

I-1-3-1 Les différentes phases d'un séchage convectif

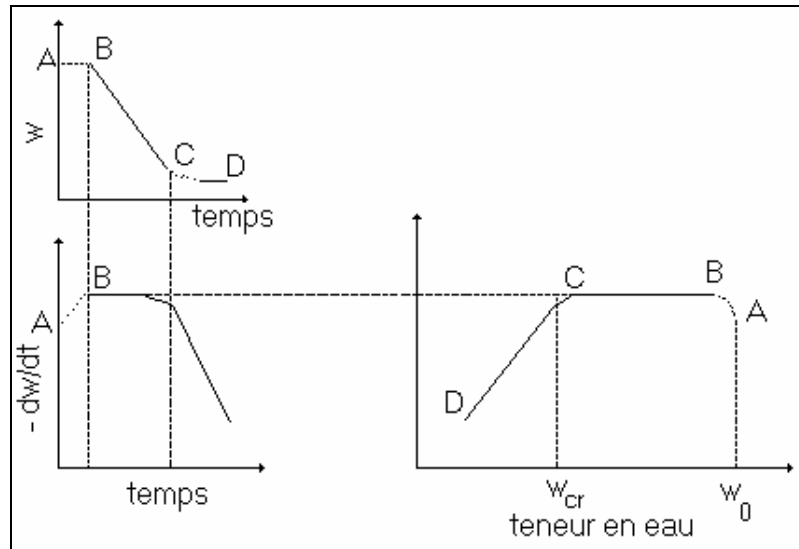


Figure I. 11: courbes typiques de séchage convectif

Le suivi de la teneur en eau w du produit exprimée en fonction du temps permet d'obtenir la vitesse de séchage (dw/dt) en fonction du temps ou de la teneur en eau, et d'établir les courbes classiques de séchage. Il est habituel de considérer l'existence d'une succession d'étapes au cours de l'opération de séchage. Après une période de mise en régime dite période d'initiation (*période AB*) on observe souvent une période de séchage à vitesse constante (*période BC*) puis une ou deux périodes à allure décroissante figure (I. 11).

I-1-3-1-1 Phase d'initiation

Cette phase est définie comme étant une phase de mise en régime des transferts de chaleur et de matière à la surface saturée du produit. La quantité de chaleur apportée durant cette période contribue à élever la température du produit tout en vaporisant une certaine quantité de soluté. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que le transfert de chaleur compense exactement le transfert de matière. Cette période est généralement courte par rapport au temps global du séchage.

I-1-3-1-2 Phase à vitesse constante

Pendant cette phase, l'humidité est acheminée en flux continu vers la surface du produit. Le liquide se déplace par capillarité ; de cette manière le fluide séchant en contact avec la surface du produit est à sa température humide. Les caractéristiques de l'ambient étant fixées le flux massique à la paroi est, par conséquent, constant. Pendant cette phase, la vitesse dépend uniquement des paramètres externes. Cette phase s'achève lorsque le matériau atteint une humidité moyenne w_{cr} appelée humidité critique. Cette valeur correspond à la limite supérieure du domaine hygroscopique.

I-1-3-1-3 Phase de ralentissement de la vitesse de séchage

En deçà de w_{cc} , les forces capillaires ne sont plus suffisantes pour acheminer l'eau vers la surface du produit. C'est le début de la 1^{ère} phase de ralentissement. La vitesse de séchage ne peut plus être maintenue constante et elle commence à décroître. Les propriétés physiques du corps à sécher influent de plus en plus le déroulement du séchage. Les mécanismes de déplacement mis en œuvre pendant cette phase, sous l'effet de la capillarité tout au long des parois des pores, sont l'évaporation et la condensation. Ces mécanismes reposent sur l'idée d'une diffusion de l'eau sous forme gazeuse à travers les pores du solide et d'une immobilisation partielle par adsorption (mécanismes de condensation).

I-1-3-2 Appareillage et protocole expérimental

I-1-3-2-1. Dispositif expérimental

Les essais de séchage ont été effectués dans une boucle de séchage convectif disponible au Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés de Pau (LaTEP). L'installation est représentée sur la figure I. 12 et les principaux éléments la composant sont :

- une veine d'essai en écoulement horizontal, de 1m de long et de section droite ($10 \times 7 \text{ cm}^2$) ;
- un ventilateur, assure dans la veine d'essais une vitesse d'air maximale de 5 m.s^{-1} . Un anémomètre permet via un micro-ordinateur l'acquisition et la régulation de cette vitesse ;
- une batterie de chauffage comportant des résistances de puissance totale égale à 3kW permet de chauffer l'air dans la veine d'essais ;
- un humidificateur à vapeur de capacité maximale de 13 kg.h^{-1} permet d'assurer, dans la veine d'essais, une humidité de l'air fixée. La régulation et le suivi de l'humidité relative sont réalisés par l'intermédiaire d'un thermo-hygromètre relié au micro-ordinateur.

L'échantillon à sécher est disposé sur un support et le tout est placé sur une balance de précision Mettler AE 160 (porté maximale 160g, précision 10^{-4} g). Cette balance est équipée d'une sortie de données de type 011 permettant, par l'intermédiaire d'un convertisseur digital analogique et d'un logiciel adapté (développé au LaTEP) l'acquisition de la masse pendant toute l'opération de séchage.

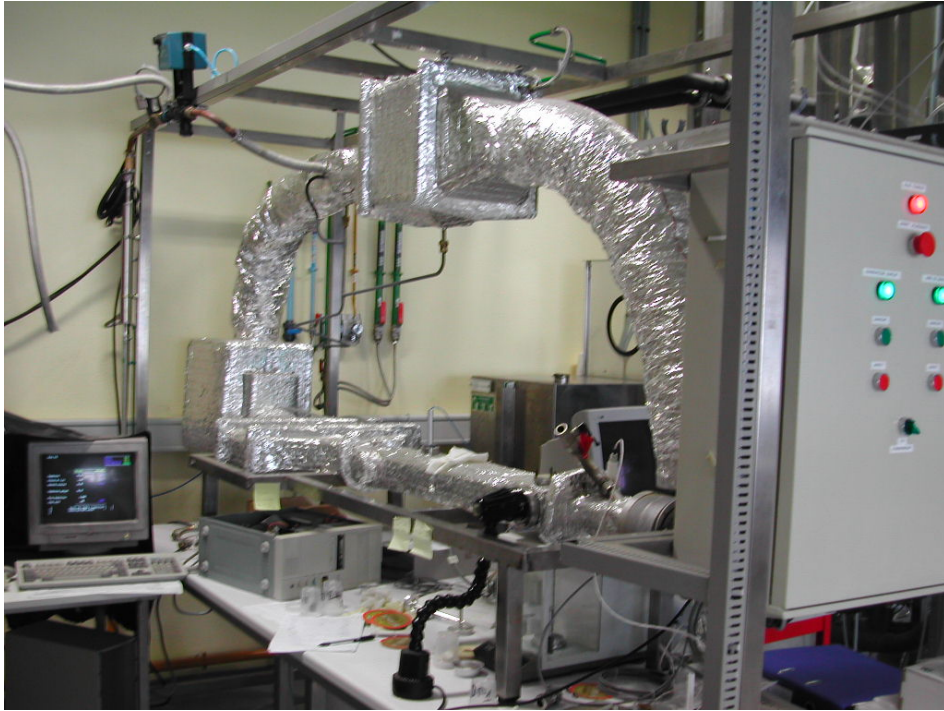


Figure I. 12 : Boucle de séchage convectif utilisée au LaTEP

I-1-3-2-2. *Protocole expérimental*

La procédure expérimentale adoptée pour la mesure des cinétiques de séchage est la suivante :

Dans un premier temps, les conditions de séchage souhaitées, à savoir la température T_a , l'humidité relative HR et la vitesse de l'air v_a sont fixées. Ainsi le ventilateur fait circuler de l'air qui passe au niveau des résistances électriques où il est chauffé. Si nécessaire, cet air peut être humidifié avec de la vapeur surchauffée. Une fois les conditions expérimentales stabilisées, l'échantillon à sécher est placé sur son support et l'expérience de séchage peut commencer.

Les résultats expérimentaux bruts sont ensuite traités de la façon suivante :

- ↪ tracé de l'évolution de la teneur en eau du produit en fonction du temps ;
- ↪ calcul de la vitesse de séchage (dw/dt) par dérivation numérique,
- ↪ calcul d'un polynôme d'ordre deux par la méthode de moindres carrés sur cinq vitesses successives,
- ↪ calcul de la valeur des cinq points à partir du polynôme trouvé puis élimination du premier point (de ces cinq) et ajout du point suivant. Le calcul se répète jusqu'à la fin de la série.

Cette méthode présente l'avantage d'atténuer le " bruit de fond " observé sur la mesure de la masse de l'échantillon et donc sur sa teneur en eau.

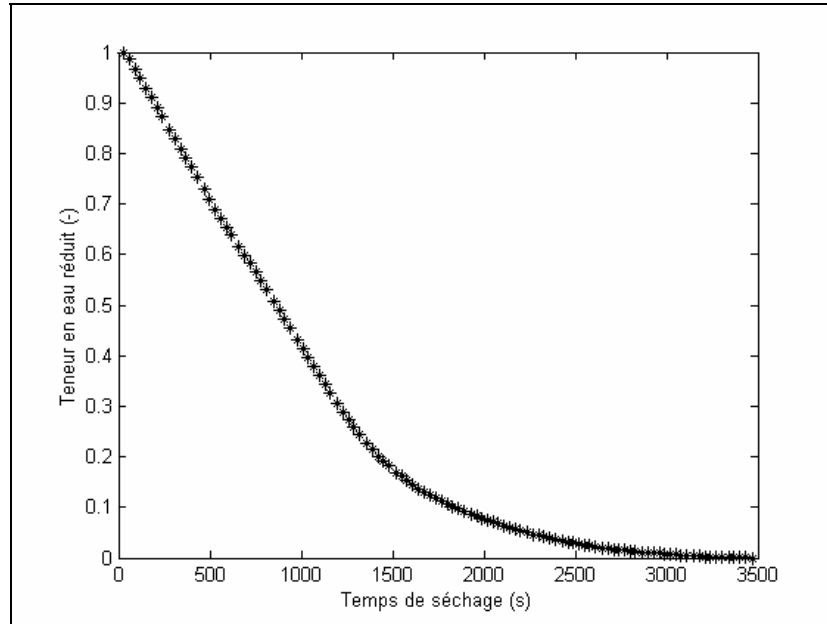


Figure I. 13 : Evolution de la teneur en eau réduite d'un échantillon de kaolin en fonction du temps ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=2\text{m.s}^{-1}$)

Pour comparer les différentes cinétiques de séchage il est souvent préférable d'utiliser des grandeurs réduites. On peut ainsi, pour chaque série de conditions opératoires fixées (T_a , HR , v_a) représenter le transfert d'humidité entre l'air et le produit à sécher par la courbe décrivant l'évolution de la teneur en eau réduite $\frac{\bar{w} - \bar{w}_{eq}}{\bar{w}_0 - \bar{w}_{eq}}$ en fonction du temps (figure I. 13), ou encore par la courbe de

vitesse de séchage $\left[-\frac{d\bar{w}}{dt} \right]$ en fonction de la teneur en eau (figure I.14).

où :

\bar{w} est la teneur moyenne en eau de l'échantillon au temps t ,

\bar{w}_0 la teneur en eau moyenne initiale de l'échantillon ,

\bar{w}_{eq} la teneur moyenne en eau à l'équilibre de désorption dans les conditions de température et d'humidité relative fixées pour l'essai de séchage.

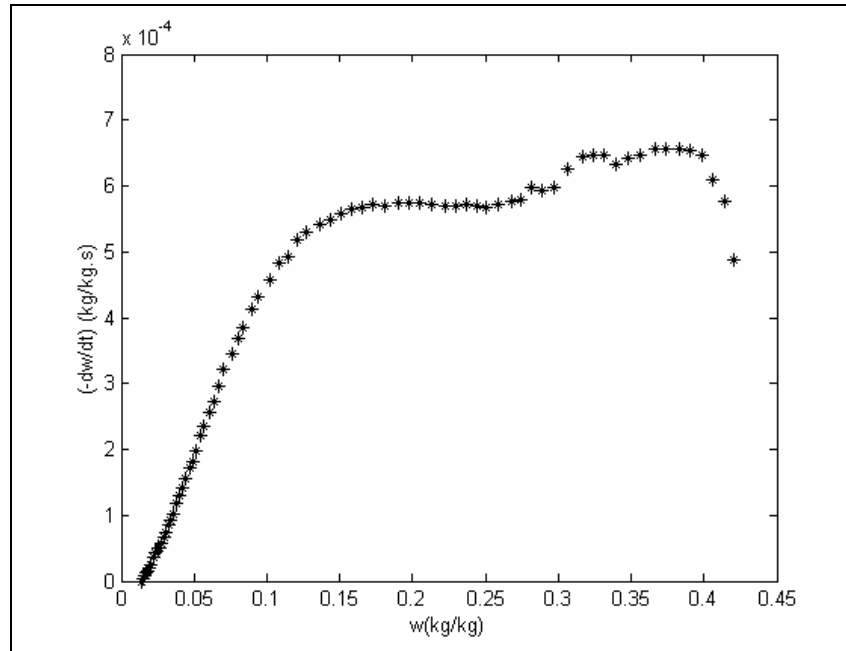


Figure I. 14 : Cinétique de séchage d'un échantillon de kaolin ($T_a=70^\circ\text{C}$,
HR=20%, $v_a=2\text{m/s}$)

I-1-3-3 Résultats obtenus sur le kaolin et la bentonite

I-1-3-3-1. *Reproductibilité des essais*

Deux essais similaires de séchage ($v_a=2\text{m.s}^{-1}$, $T_a=70^\circ\text{C}$, HR=20%), ont été effectués sur deux gâteaux identiques de kaolin, obtenus après une heure de filtration sous 5 bar. La comparaison de ces deux expériences témoigne de la bonne reproductibilité des mesures réalisées (Figure I. 15).

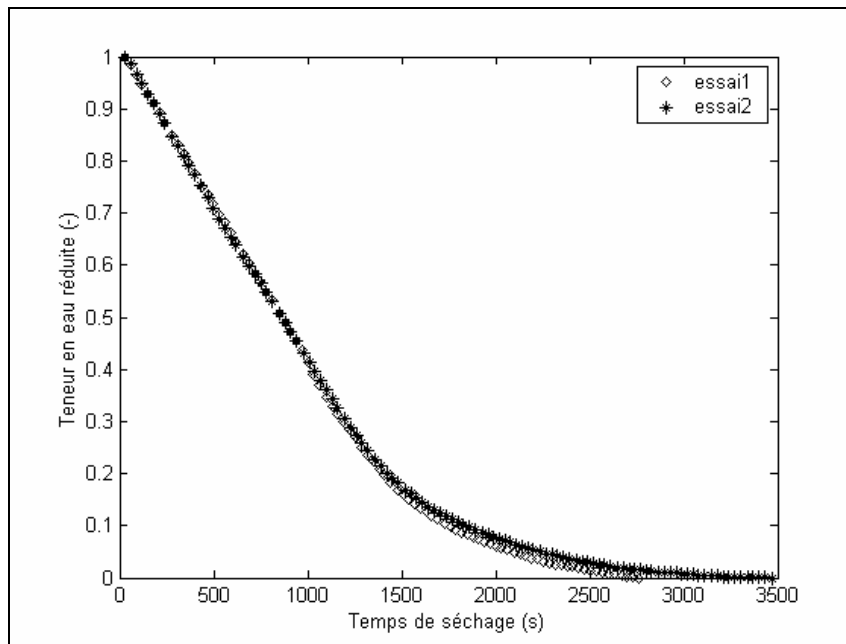


Figure I. 15 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps. Essais de reproductibilité.

I-1-3-3-2. *Influence de la température de l'air*

La figure (I. 16) montre l'influence de la température de l'air sur la cinétique de séchage. Plus la température de l'air augmente, plus la vitesse de séchage croît et plus la durée de l'opération est faible. Ainsi dans le cas du kaolin la durée de séchage passe de 2500 s à $T=50^{\circ}\text{C}$ à 2000 s à $T=70^{\circ}\text{C}$, pour atteindre dans les deux cas une teneur en eau réduite égale à 0,2. Ceci résulte d'une part de l'augmentation du flux de chaleur apporté par l'air au produit et d'autre part de l'accélération de la migration interne de l'eau. L'accroissement de la température du produit modifie non seulement l'activité de l'eau mais exerce aussi une influence sur le coefficient de diffusion de l'humidité et dans une moindre mesure sur l'enthalpie de vaporisation.

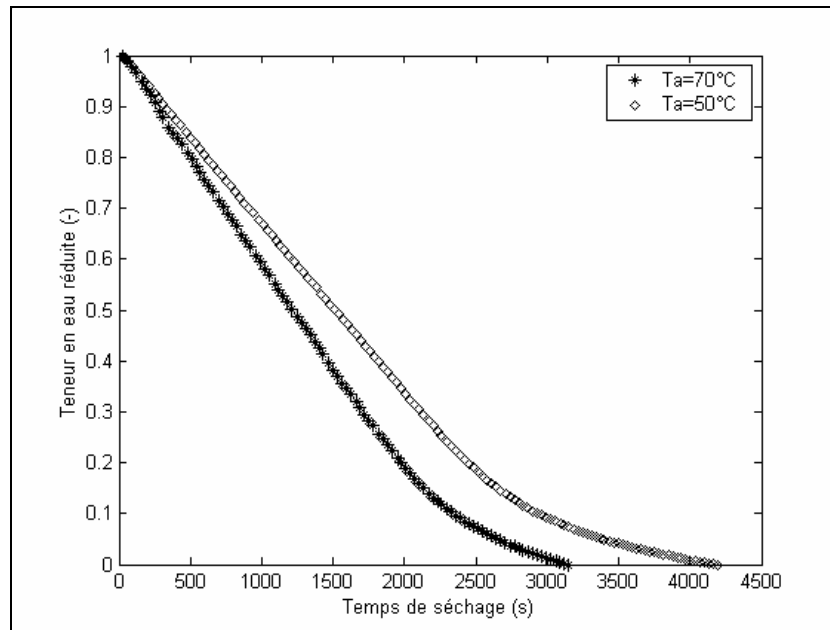


Figure I. 16 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps.
Influence de la température de l'air

I-1-3-3-3. *Influence de la vitesse de l'air*

La figure I. 17 montre l'influence de la vitesse de l'air sur la cinétique de séchage du kaolin : la rapidité du séchage augmente quand la vitesse passe de $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ceci est essentiellement dû à une augmentation de la convection à la surface du produit avec la vitesse de l'air.

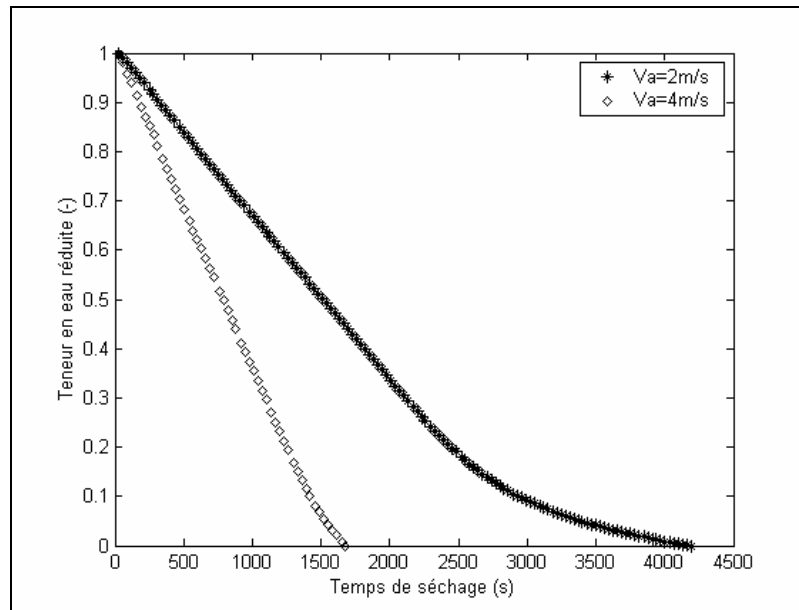


Figure I. 17 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps.

Influence de la vitesse de l'air

I-1-3-3-4. *Influence de l'humidité de l'air*

Une augmentation de l'humidité relative de l'air séchant induit une diminution du flux isenthalpe. En effet le pouvoir évaporateur de l'air évolue dans le sens contraire de l'humidité : ainsi pour un air saturé (HR =100%) la vitesse de séchage est nulle. La teneur en eau critique évolue dans le même sens que le flux isenthalpe alors que la teneur en eau d'équilibre augmente avec l'humidité relative (Figure I. 18).

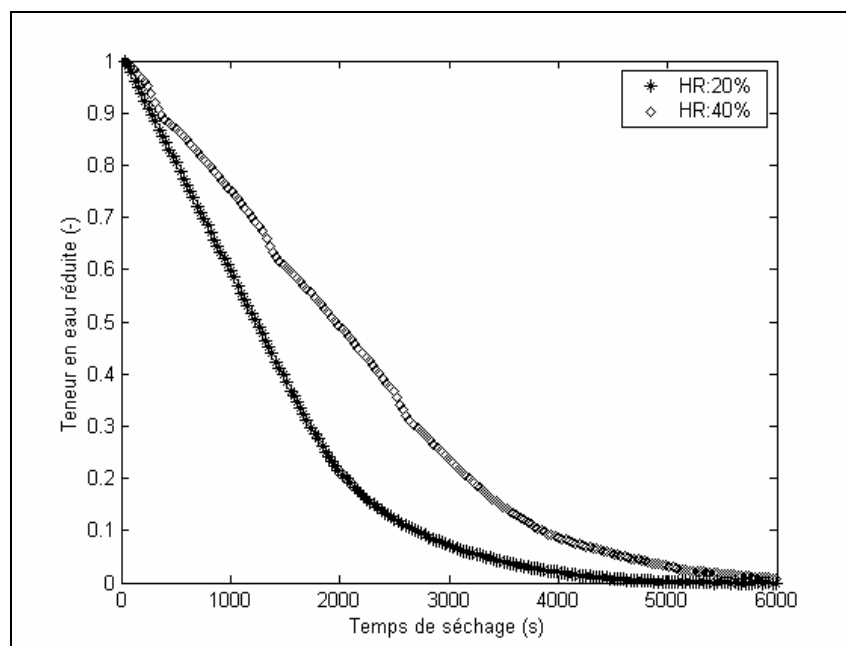


Figure I. 18 : Evolution de la teneur en eau en fonction du temps.

Influence de l'humidité de l'air

Les essais réalisés sur les gâteaux de bentonite, obtenus après 1h de filtration sous 5 bar, sont reportés sur les figures (I. 19) et (I. 20). L'impact des conditions opératoires sur la cinétique de séchage est le même que celui observé précédemment sur le kaolin

L'ensemble des résultats expérimentaux recueillis doit nous permettre de constituer une base de données, pour chaque produit étudié, qui servira de support pour la modélisation d'un séchage d'un produit élastique (le kaolin) et d'un produit viscoélastique (la bentonite).

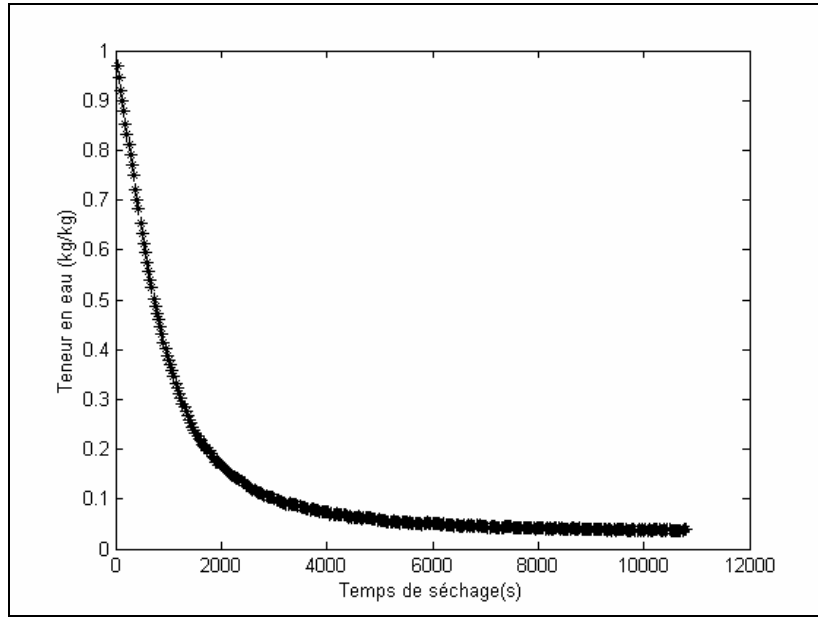


Figure I. 19: Evolution de la teneur en eau réduite d'un échantillon de la bentonite en fonction du temps ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

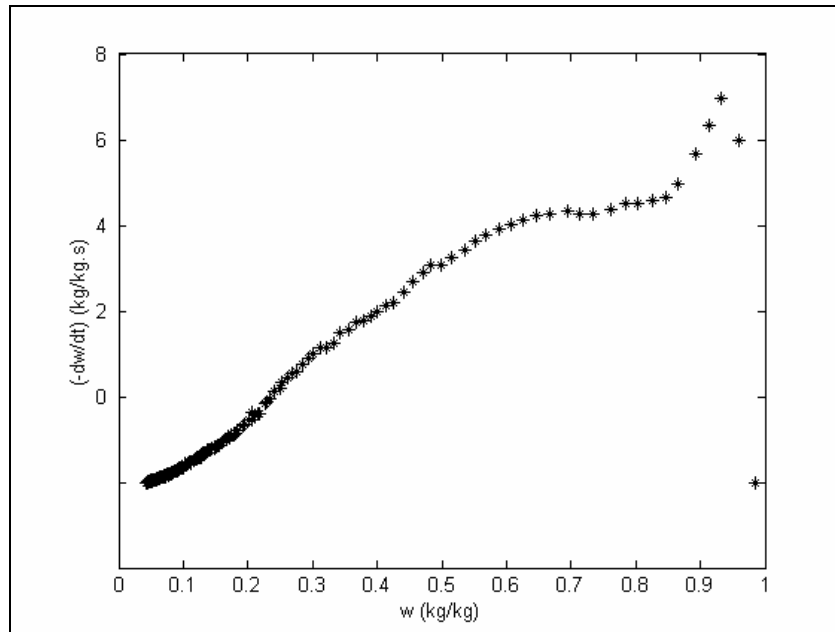


Figure I. 20: Cinétique de séchage d'un échantillon de la bentonite ($T_a=70^{\circ}\text{C}$, $\text{HR}=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

I-1-3-4 Approche globale du comportement du produit au cours du séchage

Le développement d'un modèle complet du type de celui développé dans la suite de cette étude réside dans la description fine des mécanismes élémentaires. Cependant, son exploitation n'est pas toujours immédiate, notamment dans le cas de la conception et de la gestion d'un séchoir industriel.

Il s'agit, dans cette partie, d'illustrer une réflexion à une échelle plus macroscopique en proposant une approche du séchage à partir de la compréhension du comportement d'un produit, soumis à des contraintes de séchage dans un procédé particulier (convectif, infrarouge...). Ceci conduit au développement d'approches basées sur les cinétiques de séchage et centrées autour de modèles de comportement.

L'approche globale de type " génie des procédés " classiquement utilisée lors de la conception des séchoirs industriels induit une simplification de la description du transport de l'eau. Elle repose sur des mesures de cinétique de séchage réalisées en laboratoire (ou sur site industriel) et peut se présenter sous deux formes différentes :

- une courbe caractéristique de séchage
- équation empirique caractéristique de la cinétique de séchage

En fait cette approche globale ne permet pas de prendre en compte de manière explicite les transferts internes, mais l'analyse que nous développons autour de ces modèles de comportement doit aider lors de la simulation des codes de calcul "microscopique". Elle est basée sur l'élaboration de fonctions caractéristiques des interactions *processus- produit- procédé*. Le volume de contrôle inclut le produit ou une tranche de produit et son environnement immédiat.

I-1-3-4-1. Recherche d'une courbe caractéristique pour la bentonite et le kaolin.

La méthode pour déterminer les courbes caractéristiques de séchage (CCS) est proche de celle préconisée par Van Meel (1958) et Schlunder (1976) pour des produits présentant une période à vitesse constante.

Cette démarche qui consiste à établir une loi de séchage à partir d'expérimentations n'a pas de justification théorique. En conséquence, c'est son aptitude à prévoir les courbes de séchage qui atteste de sa validité.

Van Meel (1958) moyennant quelques approximations, propose de transformer les abscisses et les ordonnées pour rassembler toutes les courbes expérimentales sur une courbe de séchage unique.

$$w \rightarrow \Phi = \frac{\bar{w} - \bar{w}_{eq}}{w_{cr} - \bar{w}_{eq}} \quad \text{Eq.I. 15}$$

$$\left(-\frac{d\bar{w}}{dt}\right) \rightarrow f = \frac{-\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)}{-\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_I} \quad \text{Eq.I. 16}$$

Courbe caractéristique de séchage de kaolin

La détermination d'une courbe en variables réduites, basée sur la transformation de Van Meel apparaît ici très délicate du fait de la grande difficulté à estimer les valeurs de \bar{w}_{cr} et de $\left(-\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_I$.

Ceci nous a conduit à formuler une autre transformation (inspirée de la précédente) ;

$$w \rightarrow \Phi = \frac{\bar{w} - \bar{w}_{eq}}{\bar{w}_0 - \bar{w}_{eq}} \quad 0 \leq \Phi \leq 1 \quad \text{Eq.I. 17}$$

$$\left(-\frac{d\bar{w}}{dt}\right) \rightarrow f = \frac{-\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)}{-\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_0} \quad 0 \leq f \leq 1 \quad \text{Eq.I. 18}$$

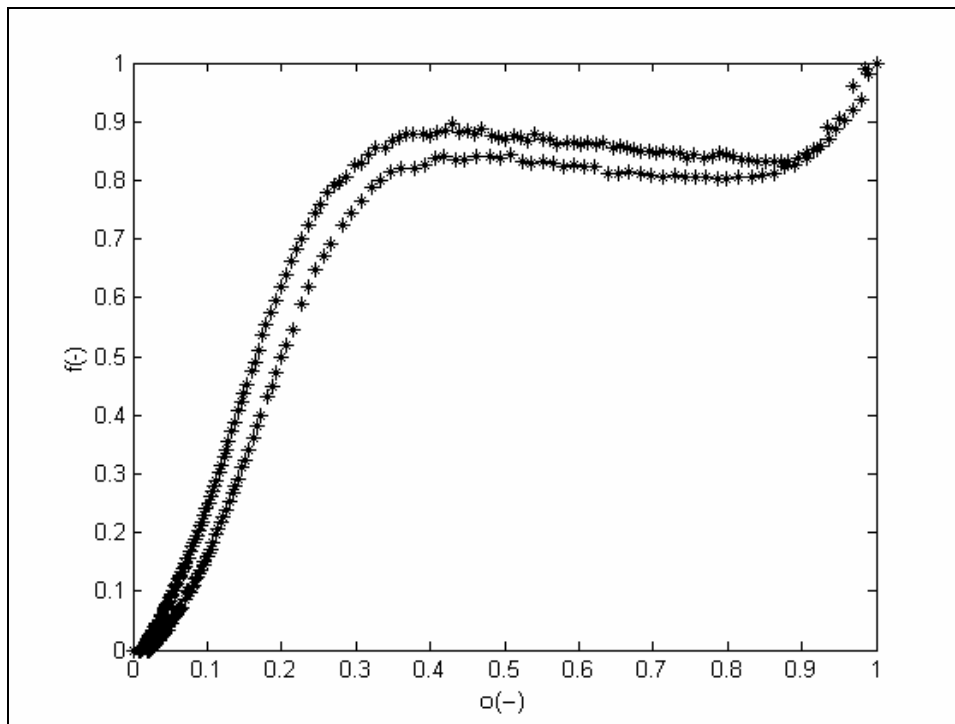


Figure I. 21: courbe caractéristique de séchage de kaolin

La figure (I. 21) représente des courbes expérimentales de séchage après application de la transformation décrite ci-dessus. Celle-ci montre un assez bon regroupement des courbes (après transformation) en dépit des variations des propriétés de l'air et du produit.

Une interpolation polynomiale des points expérimentaux a permis de déterminer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 f &= a_s + b_s \varphi + c_s \varphi^2 + d_s \varphi^3 \\
 a_s &= -0,18019 \\
 b_s &= 4,7046 \\
 c_s &= -7,17756 \\
 d_s &= 3,59165
 \end{aligned}
 \tag{Eq.I. 19}$$

Malgré la complexité des phénomènes au niveau microscopique, une courbe caractéristique pour le kaolin peut être proposée au moyen d'une normation convenable des résultats, dans la plage de conditions expérimentales suivantes :

$$\begin{aligned}
 30^\circ\text{C} &\leq Ta \leq 70^\circ\text{C} \\
 1.\text{m.s}^{-1} &\leq va \leq 3.\text{m.s}^{-1} \\
 10\% &\leq HR \leq 70\%
 \end{aligned}$$

Courbe caractéristique de séchage de la bentonite

De même que pour le kaolin, la détermination d'une courbe en variables réduites, moyennant la transformation de Van Meel, apparaît ici très délicate du fait des difficultés liées à l'estimation des valeurs de \bar{W}_{cr} et de $\left(-\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_1$. La figure (I-22) représente des courbes expérimentales de séchage des gâteaux de bentonite déterminées suivant l'application d'une transformation similaire à celle utilisée pour le kaolin. Nous constatons que les cinétiques de séchage expérimentales sont resserrées avec une certaine dispersion aux fortes humidités.

Une description mathématique de la CCS est effectuée par la méthode des moindres carrés. Le meilleur lissage est obtenu en choisissant comme équation une fonction polynomiale de degré 3

$$\begin{aligned}
 f &= a_s + b_s \varphi + c_s \varphi^2 + d_s \varphi^3 \\
 a_s &= -0,0062005 \\
 b_s &= 1,3791 \\
 c_s &= -0,37702 \\
 d_s &= -0,11004
 \end{aligned}
 \tag{Eq.I. 20}$$

La courbe caractéristique pour la bentonite peut être proposée après normation dans la plage de conditions expérimentales suivantes :

$$30^{\circ}\text{C} \leq T_a \leq 70^{\circ}\text{C}$$

$$1.\text{m.s}^{-1} \leq v_a \leq 3\text{m.s}^{-1}$$

$$10\% \leq \text{HR} \leq 70\%$$

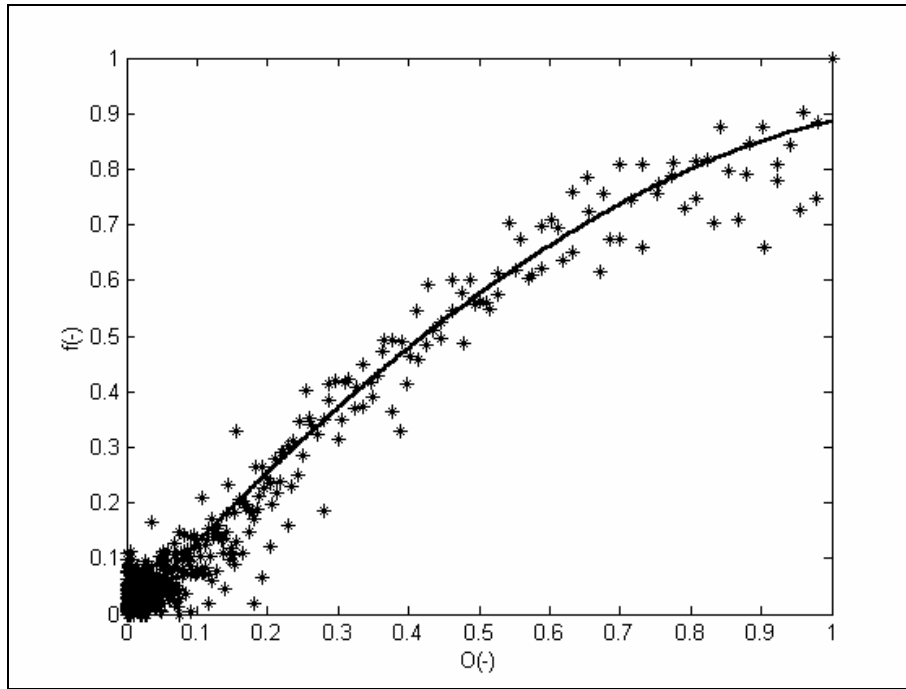


Figure I. 22: courbe caractéristique de séchage de la bentonite

Afin de tester la précision des calculs, et la possibilité d'utilisation pratique de la courbe caractéristique de séchage, nous avons procédé à partir de l'équation (I-20), au calcul de courbes de séchage pour d'autres conditions expérimentales.

Outre la courbe caractéristique, le calcul d'une cinétique de séchage nécessite l'évaluation de la vitesse initiale de séchage $\left[-\frac{d\bar{w}}{dt} \right]_0$ ainsi que la valeur de la teneur en eau à l'équilibre w_{eq} . Cette dernière est facilement calculée grâce aux isothermes de désorption. La vitesse initiale est quant à elle évaluée de la manière suivante :

Lorsque la période à vitesse constante existe, la valeur de la vitesse de séchage (à ce palier) peut être évaluée à partir des conditions aérothermiques, moyennant l'équation suivante :

$$\dot{m} = \left[-\frac{d\bar{w}}{dt} \right]_0 = A \frac{h}{\Delta h_{vap}} (T_a - T) \quad \text{Eq.I. 21}$$

Pour le calcul global de la cinétique de séchage un programme a été élaboré selon l'organigramme présenté sur la figure I. 25.

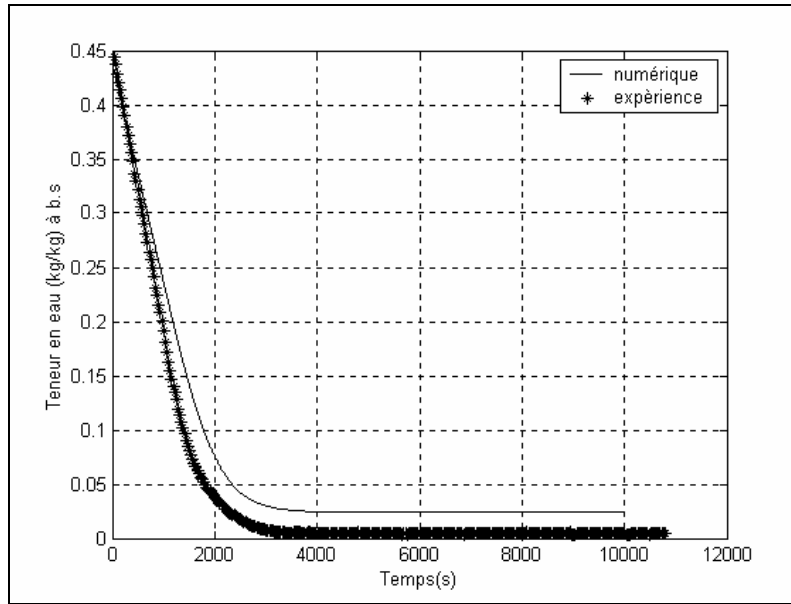


Figure I. 23: courbe caractéristique de séchage de la bentonite

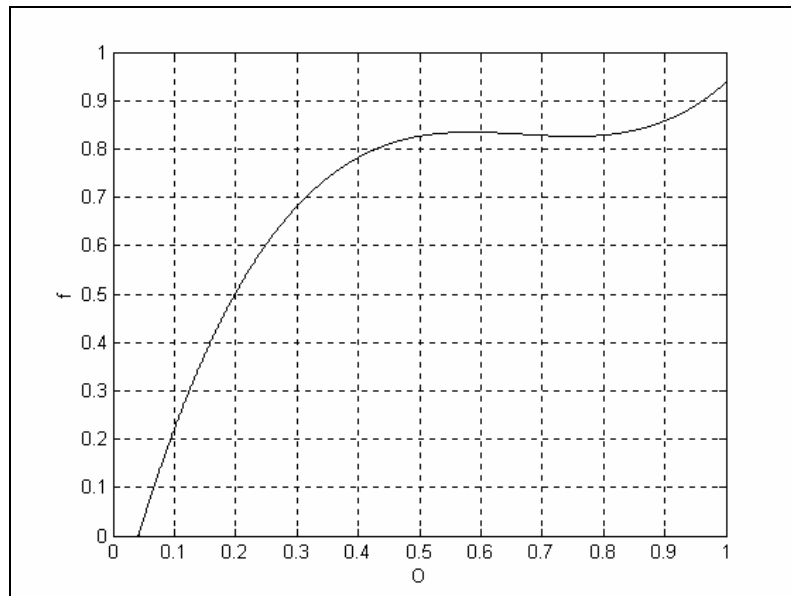


Figure I. 24 : courbe caractéristique de séchage de la bentonite

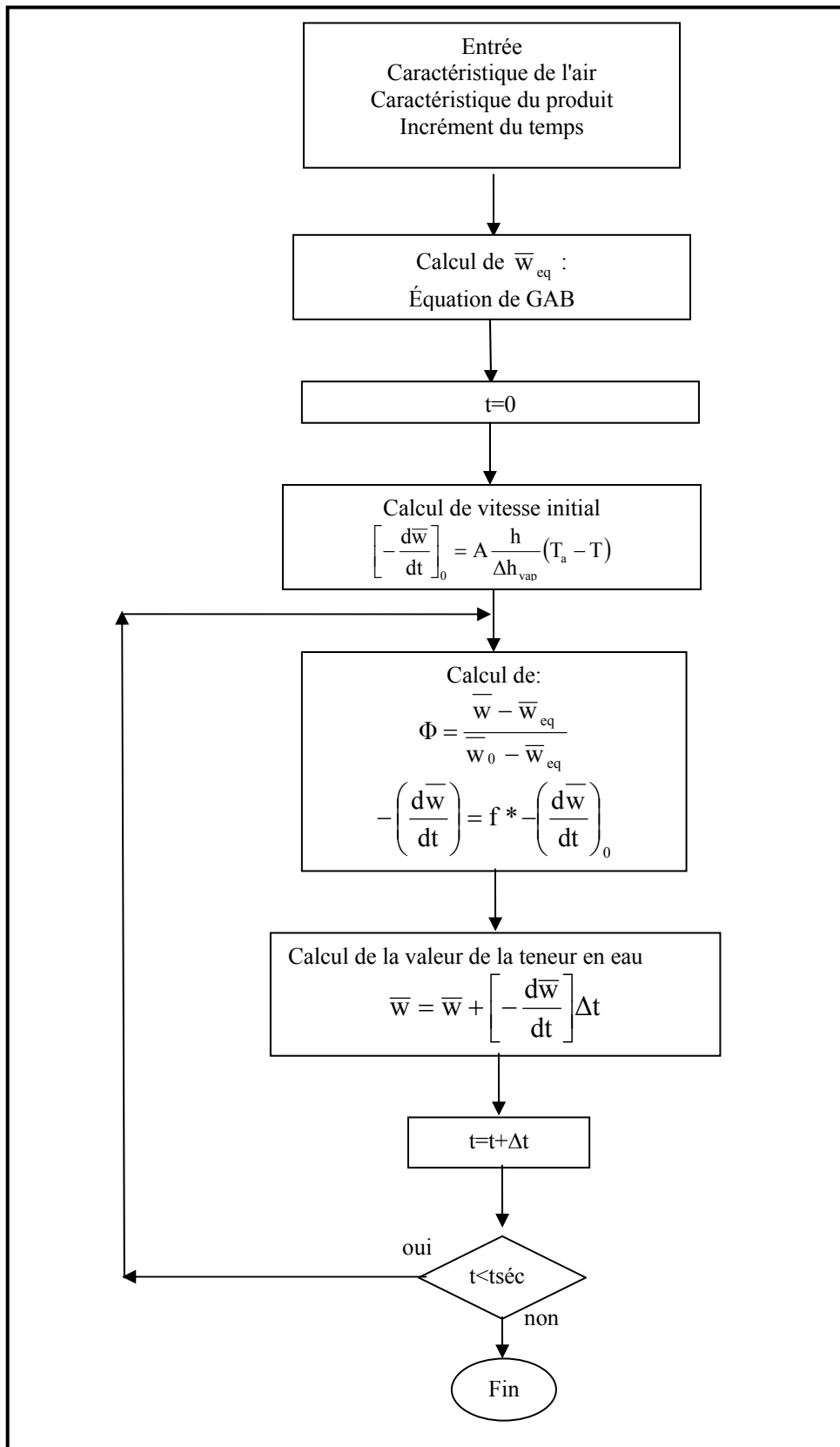


Figure I. 25: Organigramme utilisé pour la détermination de la courbe caractéristique

La comparaison entre l'évolution au cours du temps des teneurs en eau calculée et mesurée (figure I. 23) montre une relativement bonne adéquation entre les deux résultats. Le décalage constaté est dû principalement à l'évaluation de la surface d'échange (problème des milieux poreux et déformables).

I-1-4. Identification du coefficient de diffusion

I-1-4-1 Les différentes méthodes proposées dans la littérature

Le coefficient de diffusion D intervient dans l'expression de l'évolution spatio-temporelle de l'humidité et de la température. Dans le champ d'humidité il intervient dans les équations :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial w}{\partial x} \right) \text{ si le produit n'est pas déformable} \quad \text{Eq.I. 22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D}{(1 + \gamma w)^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \text{ si le produit subit un retrait unidirectionnel} \quad \text{Eq.I. 23}$$

Dans de nombreux travaux (Collard, 1989), et dans le souci d'obtenir une solution analytique, la diffusivité de l'eau a souvent été supposée constante et le produit traité considéré comme indéformable. Ainsi en partant d'une humidité initiale uniforme égale à \bar{w}_0 et en supposant que la surface du produit reste à tout instant à son humidité d'équilibre \bar{w}_{eq} , l'équation (I. 22) admet pour solution, dans le cas d'une géométrie plane, la série suivante (Crank, 1975) :

$$\frac{\bar{w} - \bar{w}_{eq}}{\bar{w}_0 - \bar{w}_{eq}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 Dt}{4e^2}\right) \quad \text{Eq.I. 24}$$

Avec e la dimension caractéristique de l'échantillon (épaisseur pour une plaque séchée par sa face supérieure).

Cependant la relation I. 24 n'est applicable que pour une épaisseur (e) constante tout au long du processus de séchage. De plus, cette résolution est obtenue dans le cas d'un séchage isotherme. Compte tenu de la décroissance rapide de la série (eq I. 24), la somme des termes d'ordre supérieur à 1 peut souvent être négligée devant le premier terme, et il en résulte alors, pour des temps suffisamment longs, l'équation suivante :

$$\frac{\bar{w} - \bar{w}_{eq}}{\bar{w}_0 - \bar{w}_{eq}} = \frac{8}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 Dt}{4e^2}\right) \quad \text{Eq.I. 25}$$

D'après cette dernière équation le coefficient D peut être obtenu en représentant l'humidité moyenne réduite en fonction du temps. Une meilleure estimation de la diffusivité est obtenue en

considérant les termes d'ordre supérieur à 1 de l'équation (I. 25). La relation n'est donc plus linéarisable et le coefficient de diffusion est alors obtenu par une méthode itérative.

Vergnaud (1991) propose une autre méthode, dite des "essais courts" pour déterminer D. Cette approche suppose que pendant un temps de séchage assez court, l'humidité et l'épaisseur de l'échantillon varient peu et peuvent donc être supposées constantes. Le coefficient de diffusion est alors déterminé à partir de la vitesse initiale de séchage par la relation suivante :

$$\frac{\bar{w}_0 - \bar{w}}{\bar{w}_0 - \bar{w}_{eq}} = \frac{2}{e} \left(\frac{Dt}{\pi} \right)^{1/2} \quad \text{Eq.I. 26}$$

L'influence de la température sur la valeur du coefficient de diffusion peut ensuite être obtenue à partir d'expériences de séchage réalisées à différentes températures. Elle est souvent caractérisée par une loi de type Arrhenius :

$$D(T) = D_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad \text{Eq.I. 27}$$

où D_0 est une constante et E_a l'énergie d'activation.

L'impact de l'humidité sur D est souvent moins étudié expérimentalement. Il peut être caractérisé par une "fonction en escalier" obtenue en linéarisant l'équation I. 26 sur différents domaines.

Une autre méthode, couramment utilisée, pour évaluer l'impact de l'humidité consiste à comparer à tout instant la relation (I. 24) aux données expérimentales (Jaros et col., 1992). D est alors obtenu par optimisation. On notera la contradiction de cette méthode qui recherche l'influence de l'humidité du produit en utilisant une relation analytique basée sur l'hypothèse d'une valeur constante de D.

Grâce aux développements des outils informatiques et notamment des algorithmes d'optimisation, il est désormais possible de prendre en compte des évolutions plus au moins complexes de D avec la température (T) et l'humidité (w). Andrieu et col. (1988) ont ainsi déterminé la diffusivité de l'eau dans les pâtes alimentaires en comparant des profils d'humidité expérimentaux calculés en supposant que la surface de l'échantillon restait à son humidité d'équilibre tout au long du séchage. Ils ont ensuite proposé pour D une évolution quadratique avec l'humidité et exponentielle avec la température.

$$D(w,T) = (a_s w^2 + b_s w + c_s) \exp\left(-\frac{d_s}{T}\right) \quad \text{Eq.I. 28}$$

Cependant, les méthodes exposées ci-dessus s'appliquent difficilement aux matériaux déformables puisque les dimensions caractéristiques évoluent au cours du séchage.

Ainsi pour des produits fortement déformables à base de polymère Aregba (1989) et Jomaa (1991) ont proposé de déterminer un coefficient de diffusion moyen D_m à partir de la résolution de l'équation du mouvement du réseau du polymère. Cette approche est à rapprocher des travaux de Tanaka et Fillmon (1979), qui ont montré que le changement de dimension de l'échantillon au cours du séchage suivait la même loi d'évolution que l'humidité moyenne. Ainsi pour une plaque plane il vient :

$$\frac{\bar{w} - \bar{w}_{eq}}{\bar{w}_0 - \bar{w}_{eq}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 D_m t}{e(t)^2}\right) \quad \text{Eq.I. 29}$$

où \bar{w} la valeur moyenne de l'humidité ou de la dimension caractéristique du produit.

Cependant les travaux d'Aregba (1989) et de Jomaa (1991) ne prennent pas en compte l'influence de l'humidité et estiment l'influence de la température à partir des expériences de séchage.

D'autres travaux menés par Kechaou (1989) et Zagrouba (1993) permettent d'identifier le coefficient de diffusion dans des gels de gélatine très hydratés (qui présente une période à vitesse de séchage constante marquée) en comparant la résolution numérique de l'équation I. 29 à des courbes expérimentales de séchage. Ces auteurs ont proposé une nouvelle expression du coefficient de diffusion pour laquelle ils ont identifié les coefficients a_s , b_s et c_s :

$$D(w,T) = D_0 \left(a_s - b_s \exp(-c_s x) \right) \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad \text{Eq.I. 30}$$

Les valeurs D_0 et E_a ont été obtenues à partir des données de la littérature et la méthode de détermination n'a pas été développée. L'identification des cinq paramètres (a_s , b_s , c_s , D_0 , et E_a) pourrait permettre de définir une expression générale de la diffusivité de l'eau dans les produits fortement déformables.

I-1-4-2 Résultats obtenus sur le kaolin

La méthode de détermination du coefficient de diffusion à partir des profils expérimentaux d'humidité nous semble l'une des plus rigoureuses. Malheureusement, elle paraît difficile à mettre en œuvre pour des produits déformables.

Une loi de diffusion liant la diffusivité à la température et à l'humidité a donc été choisie en fonction des références bibliographiques et de la qualité des optimisations réalisées (précision des ajustements, cohérence des résultats avec les données de la littérature, validité des paramètres donnés pour d'autres conditions de séchage).

Ainsi L'influence de la température (T) est représentée par une loi de type Arrhenius où l'énergie d'activation est un paramètre à ajuster. Bien que certains auteurs la considèrent variable avec l'humidité (par exemple Kechaou (1989) et Zagrouba (1993) pour la gélatine) nous l'avons supposée constante comme c'est souvent le cas dans de très nombreux travaux. L'influence de la teneur en eau (\bar{w}) est décrite par une loi exponentielle déjà mise en œuvre par de nombreux auteurs (Ketelaars (1992) pour le cas de l'argile).

Finalement, la loi de variation du coefficient de diffusion, avec la température et l'humidité, retenue est de la forme :

$$D(w,T) = D_o \left(a_s + \exp\left(\frac{b_s w}{c_s + w}\right) \exp\left(-\frac{d_s}{T}\right) \right) \quad \text{Eq.I. 31}$$

Les expériences réalisées dans la boucle de séchage convectif ont été utilisées pour la détermination du coefficient de diffusion D comme l'indique l'organigramme suivant

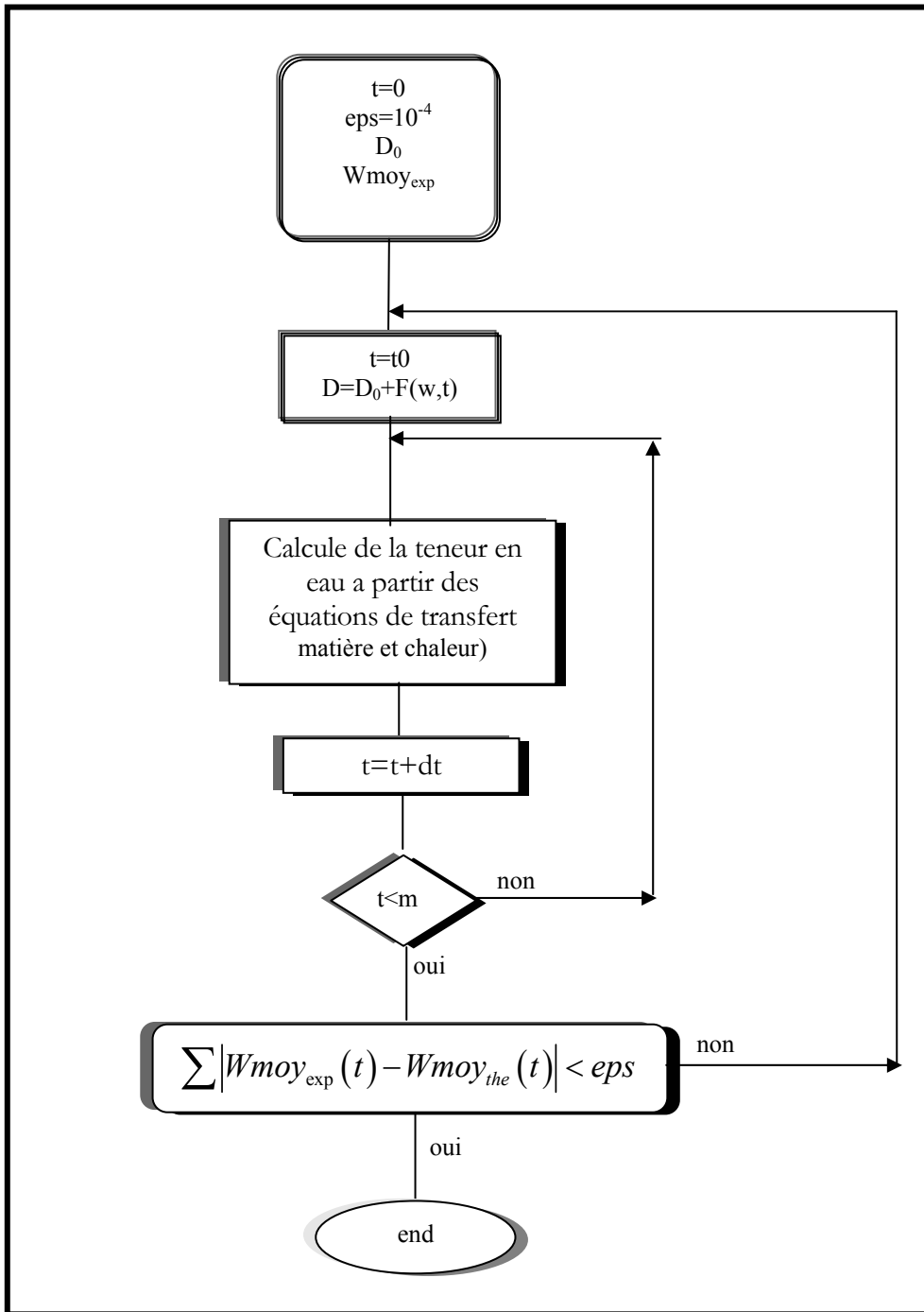


Figure I. 26: Organigramme de détermination du coefficient de diffusion

Les valeurs ajustées des paramètres D_o , a_s , b_s , c_s et d_s sont reportées dans le tableau ci-dessous :

Tableau I- 6 : paramètres de coefficient de diffusion

$D_o * 10^{-10} (m^2 s^{-1})$	a_s	b_s	c_s	d_s
5,61	7,5	44	1,6	510

Cette loi de variation de D, présente une bonne adéquation entre le calcul et l'expérience. Le seul critère de validation de cette loi que nous avons ici est la courbe $\bar{w}(t)$ (humidité moyenne en fonction du temps) (voir figure I. 27).

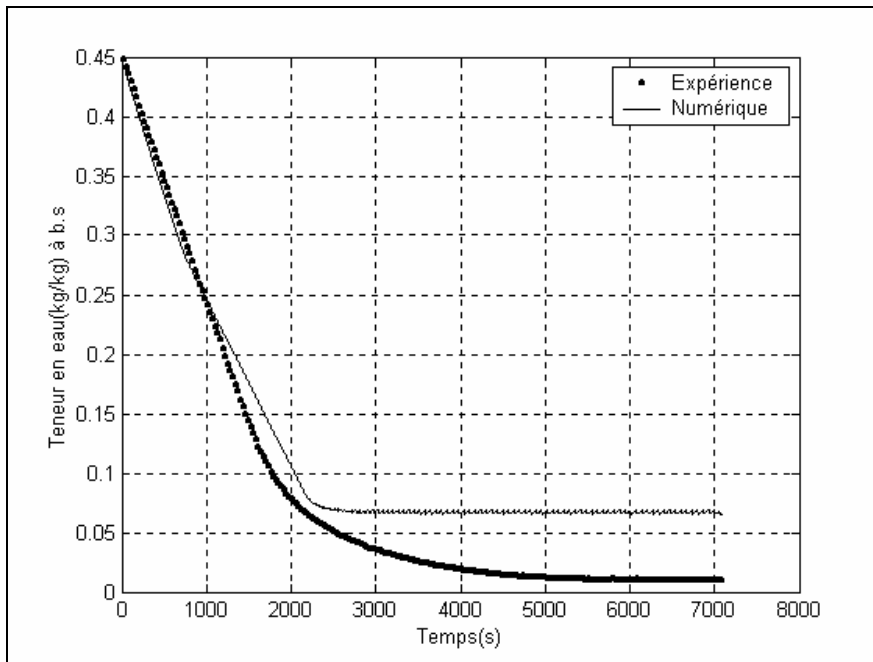


Figure I. 27: représentation de $\bar{W}(t)$ calculée et $\bar{W}(t)$ expérimentale

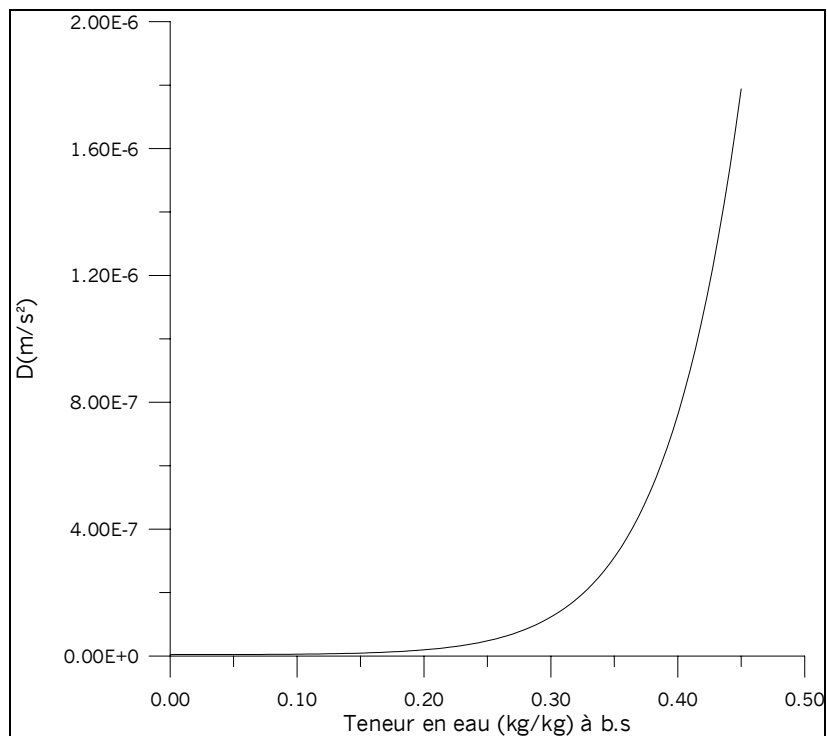


Figure I. 28: évolution du coefficient de diffusion avec la teneur en eau

Remarque : Le coefficient de diffusion pour la bentonite n'a pas pu être déterminé durant cette étude. Une valeur issue de la bibliographie sera utilisée pour la partie simulation qui constitue la suite de ce travail.

I-1-5. Conclusion

Ce chapitre présente une caractérisation physique expérimentale matériaux sur lesquels la modélisation présentée dans la suite de ce document sera basée. Ainsi on a déterminé les isothermes de sorption de la vapeur d'eau sur deux types d'argile. Elles peuvent être partagées en deux régions :

- une humidité relative située en dessous de 70 %, pour laquelle la variation de la quantité d'eau retenue par l'argile est faible ;
- une humidité relative située au dessus de 70 %, pour laquelle la variation de la quantité d'eau retenue devient plus importante (et cela pour les deux argiles).

Les modèles de GAB et d'Henderson sont retenus pour la description des données expérimentales de sorption avec une erreur relative ne dépassant pas 3,5 %.

Ensuite l'étude expérimentale de la cinétique de séchage a permis de montrer que :

- l'augmentation de l'humidité relative induit une diminution de la vitesse de séchage durant le séchage convectif ;
- l'augmentation de la température de l'air a pour effet d'augmenter la vitesse de séchage notablement pendant la première phase.

La courbe caractéristique de séchage pour les deux argiles a également pu être déterminée.

Enfin le coefficient de diffusion dans le cas du kaolin a été caractérisé.

I-1-6. Références

- Anderson R. B., Modifications of the Brunauer, Emmet and Teller equations, *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 68, p.686-691, (1946).
- Andrieu J., Jallut C., Stamatopoulos A. et Zafiroopoulos M., Identification of water apparent diffusivities for drying of corn based extruded pasta. *Sixth international drying symposium, IDS'88 Versailles*, 5-8 September, (1988).
- Andrieu J., Stamatopoulos A. et Zafiroopoulos M., Equation for fitting Desorption Isotherm of Drum Wheat Pasta, *Journal of Food technology*, Vol. 20, p. 651-658, (1985).
- Aregba W., Séchage d'un gel et d'une pâte. Processus internes et procédés adaptés. Thèse de doctorat, *Université Bordeaux I*, (1989).

- Bizot H., Using the G.A.B. model to construct sorption isotherms, in physical properties of foods, *Applied Sciences Publisher*, London, p.43, (1983).
- Bradley R. S., Polymer adsorbed films. Part I. The adsorption of argon on salt crystals at low temperatures and the determination of surface fields, *Journal of Chemical Society*, Vol. 58, p. 1467-1474, (1936).
- Brunauer R. S., Deming L. S., Deming W. E. et Teller E., On a theory of the Van Der Waals adsorption of gases, *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 62, p.1723-1732, (1940).
- Brunauer R. S., Emmet P. H. et Teller E., Adsorption of gases in multimolecular layers, *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 60, p.309-319, (1938).
- Chen, C.C. et Morey, R.V., Comparison of Four EMC/ERH Equations, *Transaction of the American Society for Agricultural*, Vol.32, p. 983-1006, (1989).
- Chung D. S. et Pfost H. B., Adsorption and desorption of water vapor by cereal grains and their products, *Transaction of the American Society for Agricultural*, Vol. 10, p. 549-551, (1967).
- Collard J. M., Etude des transferts d'humidité et des déformations pendant le séchage d'une plaque d'argile, thèse de doctorat, *Thèse de l'université de Poitiers*, (1989).
- Crank J., The mathematics of diffusion, 2nd Edition, *Clarendon Press*, OXFORD, (1975).
- Guggenheim E. A., Applications of statistical mechanics, *Clarendon Press*, Oxford, p.186, (1966).
- Halsey G. D., Physical adsorption on non uniform surface, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 16, p. 931-937, (1948).
- Henderson S. M., A basic concept of equilibrium moisture, *Agriculture Engineering*, Vol. 33, p. 29-32, (1952).
- Iglesias H. A. et Chirife J., An empirical equation for fitting water sorption isotherms of fruits and related products, *Canadian Institute of Food Science and Technology Journal*, Vol. 11, p. 12-15, (1978).
- Iglesias H. A. et Chirife J., Prediction of the effect of temperature on water sorption isotherms of food material, *Journal of food Technology*, Vol. 11, p. 109-116, (1976).
- Jaros M., Cenkowski S., Jayas D. S. et Pabis D., A method of determination of the diffusion coefficient based on kernel moisture content and temperature, *Drying Technology*, Vol.10, p. 213-222, (1992).
- Jomaa W., Séchage de matériaux fortement déformables, Thèse de doctorat, *Université Bordeaux I*, (1991).

- Kechaou N., Séchage de gels fortement déformables : étude de la diffusion interne de l'eau et Modélisation, thèse de doctorat, *Institut National Polytechnique de Lorraine*, (1989).
- Ketelaars A.A.J., Drying deformable media. Kinetics, shrinkage and stress, thèse de doctorat, *University of Technology, Eindhoven*. Netherlands (1992).
- Kneule F., séchage, *Ed. Eyrolles Paris*, (1964).
- Krause E., Le séchage en céramique: principe et technique. Traduit de la deuxième édition allemande et adapté par le service de documentation de la sociétés française de céramique, *Editions Septima*, Paris, (1977).
- Kühn I., A new theoretical analysis of sorption phenomena. Introductory part: the characteristic expression of the main equation, *Journal of Colloid Science*, Vol. 19, p. 685-698, (1964).
- Langmuir I., The adsorption of gases on plane surfaces of glasses, mica et platinum, *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 40, p.1361-1401, (1918).
- Léonard A., Etude du séchage convectif de boues de station d'épuration. Suivi de la texture par microtomographie à rayons X, Thèse de doctorat, *Université de Liège*, (2003).
- Lykov A. V., Experimentelle und theoretische grundlagen der trocknung, V. E. B. Verlag, Berlin, 1955, (In German).
- Maroulis Z. B., Tsami E. et Saravacos G. D., Application of the GAB Model to the moisture sorption isotherm for dried fruit, *Journal of Food Engineering*, Vol.7, p. 63-78, (1988).
- Mihoubi D., Zagrouba F., Ben Amor M. et Bellagi A., Study of Process of Clay Drying. I. Material characteristics, *Drying Technology*, Vol. 20, p.465-486, (2002a).
- Mihoubi D., Zagrouba F., Vaxelaire J. et Bellagi A., Thermodynamic analysis of sorption isotherms of visco-elastic cake, *15th International Congress of Chemical and Process Engineering*, Pragh-Tchek, 25-29 aout, (2002b).
- Mok C. et Hettiarrachy, moisture sorption characterises of ground Sulfower Nutmeat and its Products, *Journal of Food Science*, Vol. 55, p. 756-789, (1990).
- Pierre A. C., The drying of gels – a model, *Journal of the Canadian Ceramic Society* , Vol. 59, p. 52-59, (1990).
- Roques M., Equilibre entre un solvant et un solide, stage de perfectionnement de séchage, *Centre de Perfectionnement des Industries Chimiques de Nancy*, (1988).
- Scherer G. W., Theory of drying, *Journal of the American Ceramic Society* , Vol. 73, p. 3-14, (1990).

- Schlunder E. U., Le séchage, *cours présenter au CPCLA, paris. Cité par Fornell 1979.* (1976)
- Tanaka T. et Fillmon D.J., Kinetics of swelling of Gells, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 70, p.1214-1218, (1979).
- Tsami E. et Marinos-Kouris D., Water sorption isotherm of Raisins, Currants, Figs, Prunes and Apricots, *Journal of Food Science*, Vol. 55, p.1594-1597, (1990).
- Van Meel D.A., Adiabatic convection batch drying with recirculation of air, *Chemistry Engineering Science*, Vol. 9, p. 36-44, (1958).
- Vergnaud J.M., Liquid transport process in polymeric materials. Modelling and industrial applications, *Prentice Hall, Englewood cliffs*, New Jersey, (1991).
- Zagrouba F., Séchage par convection et un apport rayonnant micro-ondes des milieux déformables. Modélisation des phénomènes de transferts de chaleur et de matière, these de doctorat, *Institut National Polytechnique de Lorraine*, (1993).
- Zsigmondy R., Über die struktur des gels der kieselsaure. Theorie der entwässerung, *Zeitschrift für Anorganische und Allgemeine Chemie*, Vol. 71, p. 356-377, (1911), (in German)

Chapitre I-2

MODELISATION DU SECHAGE

DES MILIEUX DEFORMABLES

Nous avons caractérisé le produit sur le plan physico-chimique et étudié sa réponse au séchage. Notre objectif suivant consiste à modéliser le produit et à simuler son comportement au cours de séchage.

On va présenter une formulation mathématique générale des transferts couplés de chaleur et de masse pour les milieux déformables ou non déformables et dans le cas déformable pour deux comportements différents élastique et viscoélastique seront envisagés.

I-2-1.	LES DIFFERENTES APPROCHES PROPOSEES DE LA LITTERATURE	64
I-2-1-1	Modèle de SHERWOOD.....	64
I-2-1-2	Couplage des transferts.....	65
I-2-1-2-1.	Théorie de Krisher (1963).....	65
I-2-1-2-2.	Modèle de Luikov (1961).....	65
I-2-1-2-3.	Modèle de Phlip et De Vries (1957).....	66
I-2-1-3	Evolutions récentes	67
I-2-1-3-1.	Méthodes déterministes	67
I-2-1-3-2.	Thermodynamique des processus irréversibles.....	68
I-2-1-4	Modélisation des milieux déformables	69
I-2-2.	LES EQUATIONS DE LA CONSERVATIONS	70
I-2-2-1	Bilans massiques	70
I-2-2-2	Bilan d'énergie	71
I-2-2-3	Expressions des conditions aux limites et initiale.....	71
I-2-2-4	Déplacement du solide.....	73
I-2-3.	EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS	74
I-2-3-1.	Gradient de transformation.....	74
I-2-3-2.	Tenseur linéaire de déformation.....	75
I-2-3-2-1.	Champs de déplacement	75
I-2-3-2-2.	Hypothèse des petites perturbations (hpp)	75
I-2-3-3.	Etude des contraintes	76
I-2-3-3-1.	Tenseur des contraintes.....	76
I-2-3-3-2.	Vecteurs contraintes.....	76
I-2-3-4.	Comportement rhéologique.....	77
I-2-3-4-1.	Cas élastique	77
I-2-3-4-2.	Cas viscoélastique.....	77
I-2-3-5.	Transformations des équations de bilans dans un repère Lagrangien	79
I-2-4.	CONCLUSION	83
I-2-5.	REFERENCES.....	83

I-2-1 Les différentes approches proposées de la littérature

Différentes approches ont été utilisées sur une grande variété de produits pour décrire les mécanismes de séchage. Ces approches théoriques permettant la prédiction des transferts internes de la matière et de la chaleur dans un produit en cours du séchage supposent généralement la prédominance d'un ou de plusieurs mécanismes de transfert. On peut proposer la classification suivante :

1- les modèles cinétiques qui supposent que l'étape limitante est le transfert de l'eau liquide du cœur du produit vers la surface sans tenir compte de l'apport énergétique. Parmi ces modèles, nous pouvons citer le cas de la diffusion liquide isotherme et celui de la migration de l'eau par capillarité.

2- les modèles cinétiques où interviennent simultanément les transferts de matière et de chaleur. L'humidité est transférée essentiellement par les mécanismes diffusionnels :

- diffusion limitée à la phase gazeuse ;
- diffusion simultanée au sein de plusieurs phases.

3- les modèles prenant en compte les transferts de matière et de chaleur avec incidence réciproque de l'un sur l'autre selon le principe de thermodynamique des processus irréversibles.

I-2-1-1 Modèle de SHERWOOD

Cette approche assimile le mécanisme de transfert interne à une diffusion moléculaire décrite par la loi de Fick :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad \text{Eq.I. 32}$$

où D est le coefficient de diffusion.

Sans donner plus de détails sur le mécanisme physique de la migration de l'eau cette approche utilise la concentration en eau comme force motrice du processus.

Ce modèle appliqué au séchage du bois et de l'argile donne des résultats plus ou moins satisfaisants. Les différences constatées pour certains matériaux sont attribuées à l'obligation de mener les calculs avec un coefficient de diffusion constant. De plus, Sherwood (1929) reconnaît que dans les milieux poreux non saturés, les forces capillaires peuvent jouer un rôle important. En 1940, Hougen (1940) délimite le domaine d'application de l'équation de la diffusion en étudiant le séchage de solide granulaire. Il utilise la relation entre section capillaire et teneur en eau pour calculer les profils

d'humidité. En 1940 (Hougen et col., 1940), il montre que la théorie capillaire est plus adaptée que l'équation de la diffusion pour certains matériaux poreux possédant un réseau interconnecté de capillaires et de pores .

I-2-1-2 Couplage des transferts

La mise en place des équations de couplage des différents transferts est essentiellement le fruit du travail de quatre chercheurs : Krisher et Kröll (1963), Luikov (1961) et Philip et De Vries (1957). Les formulations exprimant les différents bilans, proposées par ces équipes, présentent de nombreuses analogies. Ces trois théories supposent que le milieu poreux est continu et localement en équilibre thermodynamique.

I-2-1-2-1. Théorie de Krisher (1963)

Cette théorie est basée sur l'analyse des transferts de chaleur et de masse d'une grande variété de milieux poreux. Elle suppose que, pendant le séchage, l'humidité peut se déplacer sous forme liquide par capillarité, et sous forme vapeur sous l'action d'un gradient de concentration en vapeur. Les flux de vapeur et de liquide ont pour expression :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_l = -D_L \rho_l \overrightarrow{\text{grad}}(w) \\ \mathbf{J}_v = -D_v \rho_v \overrightarrow{\text{grad}}(P_v) \end{cases} \quad \text{Eq.I. 33}$$

Avec D_v et D_L respectivement les valeurs des coefficients de diffusion de la vapeur et du liquide. La valeur de P_v peut être déterminée à l'aide d'isothermes de sorption.

Cette approche fut le point de départ de plusieurs théories, en particulier, celle de Berger (Berger et Pei, 1973). Ces derniers acceptent les hypothèses émises par Krisher en ce qui concerne le transport de l'humidité en considérant également que le liquide peut se déplacer par diffusion.

I-2-1-2-2. Modèle de Luikov (1961)

Luikov a met en évidence le phénomène de thermodiffusion et établit qu'un thermogradient provoque le déplacement de l'humidité à l'intérieur du matériau.

Pour modéliser les transferts de chaleur et de masse dans les corps poreux, il propose la division des flux de liquide et de vapeur en deux parties, l'une induite par un gradient de concentration, et l'autre par un gradient thermique ; ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} J_l = -D_L \rho_s \overline{\text{grad}}(w) - D_{LT} \rho_s \overline{\text{grad}}(T) \\ J_v = -D_v \rho_s \overline{\text{grad}}(w) - D_{vT} \rho_s \overline{\text{grad}}(T) \end{cases} \quad \text{Eq.I. 34}$$

Ce système d'équations est ensuite associé aux bilans d'énergie et de matière. Cependant il ne donne pas accès au taux de changement de phase \dot{m} . C'est pourquoi Luikov fait intervenir un paramètre supplémentaire, le taux adimensionnel de changement de phase φ qu'il définit par :

$$\dot{m} = -\varphi \rho_s \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{Eq.I. 35}$$

La valeur de ce paramètre varie au cours du séchage. Au début, la migration de l'humidité est essentiellement liquide, ε à une valeur proche de zéro. Vers la fin du séchage, l'humidité se déplace à l'état de vapeur et ε tend vers l'unité.

Le système équations différentielles suivant peut alors être formulé :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} \left[D_m \left(\overline{\text{grad}}(w) + \delta_s \overline{\text{grad}}(T) \right) \right] \\ C_b \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left[D_T \left(\overline{\text{grad}}(w) \right) \right] - L_v \varphi \rho_s \frac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \quad \text{Eq.I. 36}$$

Avec L_v , la chaleur latente de vaporisation ; $D_m = D_v + D_L$, le coefficient de diffusion total et

$$\delta_s = \frac{D_{vT} + D_{LT}}{D_v + D_L}, \text{ le coefficient de thermo-migration.}$$

La limitation du système d'équations différentielles proposé par Luikov réside dans le fait que la fonction $\varepsilon(w)$ doit être déterminée expérimentalement.

I-2-1-2-3. *Modèle de Philip et De Vries (1957)*

Ce modèle propose une description des transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux non saturés. Cette approche est basée sur l'étude des comportements thermique et hydrique des sols pour lesquels le mouvement de l'humidité est supposé s'effectuer par capillarité et diffusion ou sous l'action des gradients d'humidité et de température et également de gravité. Les flux de liquide et de vapeur sont calculés individuellement, ce qui permet d'obtenir le taux de changement de phase.

Les flux de liquide et de vapeur, en fonction des gradients d'humidité et de température ont pour expression :

$$\begin{cases} J_l = -D_L \overrightarrow{\text{grad}}(w) - D_{LT} \rho_s \overrightarrow{\text{grad}}(T) - D_i \\ J_v = -D_v \overrightarrow{\text{grad}}(w) - D_{vT} \rho_s \overrightarrow{\text{grad}}(T) \end{cases} \quad \text{Eq.I. 37}$$

Les coefficients D_L et D_{LT} de migration de la phase liquide sont déterminés à partir de la courbe de succion capillaire.

Le système d'équations gouvernant la migration de l'humidité et de chaleur est tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} \left[D_m \left(\overrightarrow{\text{grad}}(w) + D_{mT} \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) \right] \\ C_b \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left[D_T \left(\overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) \right] + L_v \text{div} \left[D_m \overrightarrow{\text{grad}}(w) \right] \end{cases} \quad \text{Eq.I. 38}$$

I-2-1-3 Evolutions récentes

Comme les milieux poreux se présentent généralement comme des matrices solides comportant un réseau de pores pouvant contenir plusieurs phases fluides, les écoulements et les transferts qui prennent place dans de tels milieux sont d'une approche difficile. En effet, la modélisation des transferts en milieu poreux à l'échelle du pore (*microscopique*) est pratiquement irréalisable : elle nécessite la connaissance exacte de la distribution des phases et des conditions aux limites. Par conséquent, un changement d'échelle s'avère inévitable. La taille des particules étant généralement grande devant celle des pores et faible devant celle du corps poreux le passage à l'échelle macroscopique permet de construire à partir du milieu réel discontinu un milieu continu fictif, dans lequel les équations de la mécanique classique sont applicables.

Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique s'effectue selon plusieurs méthodes pouvant se classer en deux grands groupes : les méthodes déterministes et les méthodes probabilistes.

I-2-1-3-1. Méthodes déterministes

A l'échelle des pores, les grandeurs microscopiques varient dans de grandes proportions, de part la nature même du milieu poreux. Les méthodes d'analyse préconisées par Whitaker (1977), Gray (1975) et Marle (1967) sont toutes des méthodes de prise de la moyenne. Le changement d'échelle s'effectue en attribuant à chaque point du milieu les valeurs moyennes des grandeurs physiques prises sur un volume élémentaire représentatif (V.E.R).

Pour mettre en relief le concept de (V.E.R), imaginons une grandeur physique G_i associée à la phase i présente dans le milieu poreux. On définit $\langle G_i \rangle$ qui varie en fonction de Ω centré autour d'un point P :

$$\langle G_i \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} G_i dv$$

Eq.I. 39

Lorsque Ω est proche de zéro, $\langle G_i \rangle$ prend la valeur locale de G_i (0 ou G_i) selon la position de P (dans la phase i ou non).

En élargissant le domaine d'intégration Ω , $\langle G_i \rangle$ subit des fluctuations résultant de la distribution de la phase i à l'échelle du pore. Plus le volume Ω croît, plus l'atténuation des fluctuations est effective. Il apparaît alors une valeur Ω_0 de Ω telle que $\langle G_i \rangle$ soit une fonction continue de Ω_0 . Cette valeur limite du volume Ω_0 est appelée volume élémentaire représentatif. La longueur caractéristique de l'échelle macroscopique ainsi définie est grande devant le diamètre des pores et petite devant les dimensions du corps poreux tout entier. L'existence de ce V.E.R est admise lorsque la taille des pores est très petite devant les longueurs caractéristiques du solide poreux.

L'utilisation d'une telle démarche a permis, en particulier à Whitaker (1980), de mettre en place un modèle de transfert couplé de chaleur, de masse et de quantité de mouvement applicable au processus de séchage. Whitaker a émis des hypothèses et procédé à des simplifications conduisant à un système complet d'équations pouvant modéliser le déroulement du séchage des corps poreux. Le passage à la moyenne fait apparaître de nombreux termes supplémentaires qui, pour la majorité, sont uniquement accessibles du point de vue macroscopique.

I-2-1-3-2. Thermodynamique des processus irréversibles

Une autre méthode de détermination des équations de transfert de chaleur et de masse est fondée sur l'utilisation de la thermodynamique des processus irréversibles (T.P.I). La T.P.I permet de mettre en évidence les divers phénomènes élémentaires à partir de l'étude de la source interne de l'entropie. Cette méthode d'investigation repose sur le fait que dans un système thermique, un certain nombre de forces X_i peuvent se développer simultanément pour produire des flux J_i qui s'influencent mutuellement.

En appliquant cette théorie aux milieux poreux, moyennant certaines hypothèses, on obtient les équations interdépendantes des flux de chaleur, de liquide et de vapeur :

$$\begin{cases} J_q = L_{qq}X_q + L_{ql}X_l + L_{qv}X_v \\ J_l = L_{lq}X_q + L_{ll}X_l + L_{lv}X_v \\ J_v = L_{vq}X_q + L_{vl}X_l + L_{vv}X_v \end{cases} \quad \text{Eq.I. 40}$$

$$X_q = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}T}; \quad X_l = \frac{1}{T} \left(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}(T)}\mu_l \right); \quad X_v = \frac{1}{T} \left(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}(T)}\mu_v \right)$$

Dans le système d'équations les termes indexés q, l, v représentent respectivement les grandeurs liées à la chaleur, à l'eau liquide et à la vapeur d'eau. Les coefficients X_i sont décrits par les lois de la conduction, de la diffusion et de la migration capillaire. Les flux de chaleur relatifs aux effets de SORLET et DUFFOUR sont exprimés par L_{lq} et L_{vq} d'une part et L_{ql} et L_{qv} d'autre part. Le terme L_{qq} est relié à la conductivité par l'égalité $L_{qq} = \lambda T^2$. Le système d'équations précédant peut être simplifié en émettant des hypothèses supplémentaires.

I-2-1-4 Modélisation des milieux déformables.

L'hypothèse matrice rigide n'est pas toujours fiable. Le séchage est généralement accompagné d'un phénomène de retrait. Des simulations ont été proposées pour différents types de retrait.

Initialement, la théorie de la déformation des milieux poreux (déformables) a été développée par les géologues et les spécialistes de la mécanique des sols. Fondé sur les aspects modernes du transfert de matière et de chaleur, des approches de modélisation ont commencé à être développées au début des années 1990. Kechaou (1989) et Zagrouba (1993) ont étudié, pour le cas unidirectionnel et isotherme, le séchage de gélatine (polyamides) non poreuses. Dans l'élaboration de leurs modèles ils n'ont pas cherché à déterminer les champs des contraintes au sein du matériau et ont donc fait l'hypothèse que le retrait n'était dû qu'à la perte de l'eau. Une écriture de leurs équations dans un repère Lagrangien a été utilisée pour résoudre facilement leurs modèles. Collard (1989), Jomaa (Jomaa, 1991 ; Jomaa et col., 1991) et Ketelaars (1992) ont quant à eux combiné les deux aspects : transport et de déformations (à travers la vitesse de retrait) et a résolu ainsi le problème complet. La prise en compte du comportement rhéologique, qui explicite le couplage réel entre le séchage et la déformation, a été développé pour le cas élastique avec des coefficients phénoménologique qui varient avec la teneur en eau. Ainsi, avec des méthodologies de modélisation différentes Katelaars (Ketelaars, 1992), Jomaa (Jomaa, 1991) et Mrani (Mrani, 1993) ont décrit, en unidirectionnel et bidirectionnel, des situations avec un retrait isotrope. Mercier (1996) a complété ces travaux en étudiant d'autres cas :

- le séchage d'un milieu tri-phasique (solide, liquide, vapeur) pour un matériau déformable ;

- un modèle bi-phasique (solide, liquide) appliqué aux milieux déformables qui constitue, du fait d'une rhéologie différente (viscoélastique) et de la présence d'une source thermique interne (micro-onde), une extension du modèle développé par Jomaa (1991).

Bogdanis (1999) a poursuivi ce travail en reformulant, par le biais de la vitesse du solide, le couplage entre les phénomènes de transport et la rhéologie (étude d'un produit viscoélastique).

Ces différents travaux ont adopté plusieurs techniques de mise en équations qu'on peut classer en deux catégories :

La technique d'homogénéisation qui aboutit à des lois macroscopiques par une transformation mathématique des bilans microscopiques. Parmi les auteurs qui ont utilisé cette approche on peut citer, par exemple Jomaa, Bogdanis, Mercier (Mercier, 1996)...

La méthode macroscopique qui se divise en deux approches. La première, consiste à introduire les lois physiques expérimentales des processus élémentaires (loi de Darcy, loi de Fourier, loi de Fick) dans les relations de conservation de chaleur et de masse. Cette approche est utilisée par Zagrouba, Kechaou, Ketelaars et Collard (Zagrouba, 1993 ; Kechaou, 1989, Ketelaars, 1992 ; Collard, 1989). La seconde, basée sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles T.P.I., est utilisée par Mrani (Mrani, 1993 ; Mrani et col., 1995).

I-2-2 Les équations de la conservations

I-2-2-1 Bilans massiques

Les équations de bilans de matière sur le solide et le liquide s'écrivent de façon classique :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \bar{u}_s) = 0 \quad \text{Eq.I. 41}$$

et

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \text{div}(\rho_l \bar{u}_l) = 0 \quad \text{Eq.I. 42}$$

On a par ailleurs :

$$\rho \bar{u} = \rho_s \bar{u}_s + \rho_l \bar{u}_l \quad \text{Eq.I. 43}$$

et

$$\rho = \rho_s + \rho_l \quad \text{Eq.I. 44}$$

Le flux de transport de matière est habituellement décomposé en un terme de diffusion et un terme de convection,

$$\rho_k \bar{u}_k = \bar{J}_{D,k} + \rho_k \bar{u} \quad \text{avec } k=1, s \quad \text{Eq.I. 45}$$

En introduisant la teneur en eau, w , définie comme étant le rapport de deux densités :

$$w = \frac{\rho_l}{\rho_s} \quad \text{Eq.I. 46}$$

et en faisant l'hypothèse que l'écoulement liquide peut être décrit comme un phénomène diffusif (pas d'effet de gravité) de la phase liquide par rapport à la phase solide, on peut exprimer le flux liquide en utilisant des équations (Eq.I. 43), (Eq.I. 45) et (Eq.I. 46) par (Annexe AI-1) :

$$\rho_l (\bar{u}_l - \bar{u}_s) = - \frac{\rho}{1+w} D \overrightarrow{\text{grad}}(w) \quad \text{Eq.I. 47}$$

En combinant cette dernière relation avec les deux équations de bilan de matière (Eq.I. 41) et (Eq.I. 42), le transport liquide peut s'écrire sous la forme (Annexe AI-1) :

$$\rho_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \bar{u}_s \overrightarrow{\text{grad}}(w) \right) = \text{div} \left(\frac{\rho}{1+w} D \overrightarrow{\text{grad}}(w) \right) \quad \text{Eq.I. 48}$$

Cette équation montre que le terme convectif est directement lié au mouvement du solide et illustre ainsi l'effet du rétrécissement de matériau lié au transport de matière.

I-2-2-2 Bilan d'énergie

En utilisant l'hypothèse que l'évaporation se produit seulement au niveau de la surface, le transfert interne de chaleur obéit à la loi de Fourier avec une conductivité apparente variable en fonction de la teneur en eau.

$$\rho C_{Ph} \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)) \quad \text{Eq.I. 49}$$

I-2-2-3 Expressions des conditions initiale et aux limites

- à $t=0$ les champs de température et d'humidité sont uniformes :

$$\begin{aligned} w &= \bar{w}_0 \\ T &= T_0 \end{aligned} \quad \text{Eq.I. 50}$$

- pour les surfaces adiabatiques ou imperméables et les plans de symétrie les gradients de température et matière sont nuls

$$\overrightarrow{\text{grad}}(w) = 0 \quad \text{Eq.I. 51}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = 0 \quad \text{Eq.I. 52}$$

- à la surface de l'échantillon exposée au flux de chaleur et/ou l'air chauffé, le flux de matière s'exprime :

$$\dot{m} = -\rho_s D(\overrightarrow{\text{grad}}(w)) \quad \text{Eq.I. 53}$$

Sachant que le produit peut échanger de la chaleur avec l'extérieur par convection et/ou par radiation, l'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire :

$$\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) \cdot \vec{n} = \left(\dot{m} L_v(T_{\text{surf}}) \right) \cdot \vec{n} + \lambda_h \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad \text{Eq.I. 54}$$

avec :

$h(T_a - T_{\text{surf}})$ la densité de flux transféré par convection ;

$Q_{\text{abs}} = \alpha Q_{\text{ray}}$: la densité de flux effectivement absorbée à la surface de l'échantillon (cas d'une source radiative par exemple I.R.) ;

Q_{parois} la densité de flux échangée par rayonnement avec la paroi du banc d'essai ;

$\dot{m} L_v$ la densité de flux de chaleur liée à l'évaporation ;

$\lambda_h \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ la densité de flux de chaleur transmise par conduction vers le cœur du produit ;

\vec{n} la normale sortant à la surface.

En assimilant les parois du séchoir et la surface du produit à des surfaces grises, la densité de flux (Q_{parois}) peut être évaluée par la relation suivante :

$$Q_{\text{parois}} = \frac{\sigma(T_{\text{produit}}^4 - T_{\text{surf}}^4)}{\frac{1}{\epsilon_{\text{produit}}} + \frac{A_{\text{produit}}}{A_{\text{parois}}} \left(\frac{1}{\epsilon_{\text{parois}}} - 1 \right)} \quad \text{Eq.I. 55}$$

où $\varepsilon_{\text{parois}}$ et $\varepsilon_{\text{produit}}$ sont respectivement les émissivités des parois et du produit.

La vitesse d'évaporation à la surface, \dot{m} , est donnée par la relation

$$\dot{m} = \beta_m (P_{V,\text{surf}} - P_{V,a}) \quad \text{Eq.I. 56}$$

avec :

$$\beta_m = \frac{K_m M_v}{RT_a} \quad \text{la conductance de transfert de matière entre l'air ambiant et le produit à sécher}$$

correspondant au potentiel de pression,

Ces termes dépendent pour la plupart de l'état du produit et aussi des propriétés de l'air.

I-2-2-4 Déplacement du solide

La densité de la phase solide est directement liée à la teneur en eau par la relation suivante :

$$\rho_s = \rho_s^0 \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_l^0} \right) \quad \text{Eq.I. 57}$$

où ρ_s^0 et ρ_l^0 représentent les masses volumiques intrinsèques des phases solide et liquide et sont supposées constantes. Les particules solides et l'eau sont supposées incompressibles. Il vient alors :

$$\frac{d\rho_s}{d\rho_l} = -\frac{\rho_s^0}{\rho_l^0} = \chi = c^{te} \quad \text{Eq.I. 58}$$

En utilisant les deux équations de bilan de matière, et introduisant cette dernière relation, on peut écrire après quelques manipulations mathématiques (Annexe AI-2)

$$\frac{d\rho_s}{d\rho_l} \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \vec{u}_s \overrightarrow{\text{grad}} \rho_l \right) + \rho_s \text{div}(\vec{u}_s) = 0 \quad \text{Eq.I. 59}$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) + \rho_l \text{div}(\vec{u}_s) + \vec{u}_s \overrightarrow{\text{grad}}(\rho_l) = 0 \quad \text{Eq.I. 60}$$

Donc :

$$\frac{d\rho_s}{d\rho_l} \text{div}(\vec{J}) + \left(\frac{d\rho_s}{d\rho_l} \rho_l + \rho_s \right) \text{div}(\vec{u}_s) = 0 \quad \text{Eq.I. 61}$$

Et finalement :

$$\frac{d\rho_s}{d\rho_1} \operatorname{div} \left(-\frac{\rho_s^0 D}{1 + \chi w} \overrightarrow{\operatorname{grad}(w)} \right) = -\rho_s^0 \operatorname{div}(\vec{u}_s) \quad \text{Eq.I. 62}$$

$$\frac{d\rho_s}{d\rho_1} \operatorname{div} \left(\frac{D}{1 + \chi w} \overrightarrow{\operatorname{grad}(w)} \right) = \operatorname{div}(\vec{u}_s) \quad \text{Eq.I. 63}$$

I-2-3. Equations de la mécanique des milieux continus

I-2-3-1. Gradient de transformation

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'étude de la transformation subie par l'élément de volume au voisinage d'un point matériel d'une configuration initiale C_0 à une configuration C_t (figure I. 29).

Il existe une fonction f telle que $x = f(X,t)$. Cette application linéaire définit un tenseur de second ordre \mathbf{F} appelé tenseur gradient de vitesse tel que $d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X}$ avec $F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$. Les trois lois

de transport du vecteur matériel de l'élément de volume et de l'élément de surface sont :

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X} \quad F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \rightarrow \text{transport du vecteur matériel,}$$

La transformation est dite homogène si \mathbf{F} est indépendant des coordonnées X ; ce qui revient à une dépendance linéaire des coordonnées x par rapport à X (*coordonnées cartésiennes*); $\vec{x} = \vec{u}(t) - \mathbf{F}(t)\vec{x}$.

Le tenseur \mathbf{F} est inversible, il se décompose d'une manière unique en un tenseur orthogonal \mathbf{R} (*rotation*) et en tenseurs symétriques \mathbf{V} ou \mathbf{U} tel que $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.

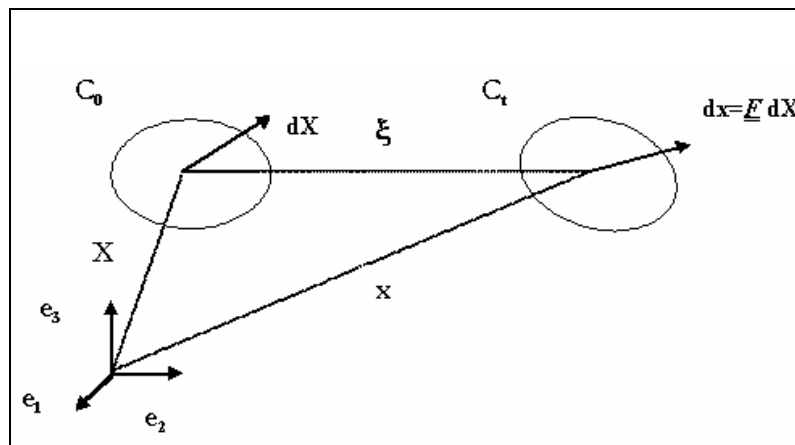


Figure I. 29: Transformation de l'élément de volume sous l'effet de contraintes

I-2-3-2. Tenseur linéaire de déformation

I-2-3-2-1. Champs de déplacement

Le vecteur champs de déplacement $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$ relatif à un point matériel dont les positions initiales (dans C_0) et à l'instant t (dans C_t) sont respectivement définies (relativement au même repère) par les vecteurs positions \vec{X} et $\vec{x}(x, t)$, s'obtient par : $\vec{u}(x, t) = \vec{x}(x, t) - \vec{X}$.

Le tenseur gradient de déplacement \mathbf{G} est relié au gradient des transformations \mathbf{F} par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{G} ; \quad \text{Eq.I. 64}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} ; \quad \text{Eq.I. 65}$$

Le tenseur \mathbf{E} s'obtient à partir de \mathbf{G} par :

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\Sigma} + \frac{1}{2} \mathbf{G}^t \mathbf{G}$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{G}^s = \frac{1}{2} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \text{Eq.I. 66}$$

Le tenseur \mathbf{E} est donc la somme d'une partie linéaire par rapport à \mathbf{G} définissant le tenseur $\boldsymbol{\Sigma}$ et d'une partie quadratique.

I-2-3-2-2. Hypothèse des petites perturbations (hpp)

Les déformations subies par des matériaux solides sont généralement très faibles dans le cas du séchage. Cette constatation a permis de développer, pour la mécanique des solides classiques, une approche linéarisée des déformations basée sur l'hypothèse des petites perturbations (hpp). Cette hypothèse suppose d'une part que les composantes du gradient de déplacement sont infiniment petites ($|G_{ij}| \ll 1$), et d'autre part que les configurations déformées s'éloignent très peu de la configuration initiale. De cette hypothèse découlent deux conséquences :

La configuration initiale (C_0) et celle à l'instant t (C_t) étant infiniment proches, on peut confondre les coordonnées x_i avec X_i ($x_i \cong X_i$) et les déformations sont alors définies par le tenseur linéarisé des déformations $\boldsymbol{\Sigma}$ (partie symétrique de \mathbf{G}).

Ainsi par l'hypothèse des petites perturbations il vient :

$$\mathbf{E} \cong \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \text{Eq.I. 67}$$

$$\mathbf{G} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{W} \quad \text{Eq.I. 68}$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{Eq.I. 69}$$

I-2-3-3. Etude des contraintes

I-2-3-3-1. Tenseur des contraintes

On peut définir pour chaque point du milieu et chaque instant t , un tenseur de contraintes symétrique $\boldsymbol{\sigma}(x,t)$. Ce tenseur caractérise les efforts intérieurs. Il associe à chaque direction de normale \vec{n} , un vecteur contrainte $\vec{\sigma}(x,t,\vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(x,t)\vec{n}$.

Le vecteur $\vec{\sigma}$ représente la densité surfacique de force appliquée sur une surface de la normale entière \vec{n} .

Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ étant symétrique, il possède trois valeurs propres réelles ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) appelées contraintes principales, les directions principales (orthogonales) de $\boldsymbol{\sigma}$ sont les directions principales des contraintes.

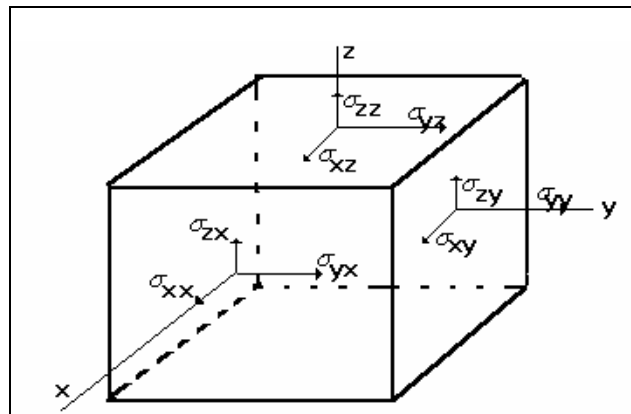


Figure I. 30: Etat de contrainte autour d'un point

I-2-3-3-2. Vecteurs contraintes

Les vecteurs contraintes sont désignés par $\vec{\sigma} = \sigma_n \vec{n} + \vec{\sigma}_t$ avec $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$

La contrainte normale a un effet de traction si elle est positive et de compression si elle est négative.

Les contraintes tangentielles provoquent un cisaillement.

I-2-3-4. Comportement rhéologique

Suivant la loi de comportement adoptée le tenseur des déformations peut se décomposer en une contribution directement liée au comportement du matériau (Σ^M) qui peut être élastique ou viscoélastique, et une contribution imputable aux expansions hydrique et thermique (Σ^r) :

$$\Sigma = \Sigma^M + \Sigma^r \quad \text{Eq.I. 70}$$

Le terme Σ^r s'exprime comme la somme du terme hydrique Σ_H du terme thermique Σ_T :

$$\Sigma^r = \Sigma_T + \Sigma_H \quad \text{Eq.I. 71}$$

En s'appuyant sur des considérations relatives à la thermodynamique des processus irréversibles (Mihoubi, 2000 ; Zagrouba et col., 2002) les deux termes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Sigma_T = \alpha_T \Delta T \mathbf{1} \\ \Sigma_H = \beta \Delta w \mathbf{1} \end{cases} \quad \text{Eq.I. 72}$$

Le tenseur des déformations alors établi dépend de plus de la loi de comportement du matériau. Deux cas classiques sont étudiés dans la suite de ce travail : le cas élastique et le cas viscoélastique. .

I-2-3-4-1. Cas élastique

En élasticité classique, les tenseurs des contraintes et des déformations infinitésimales sont reliés par la loi de Hooke généralisée en trois dimensions :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\Sigma^M) \mathbf{1} + 2\mu \Sigma^M \quad \text{Eq.I. 73}$$

I-2-3-4-2. Cas viscoélastique

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, la contrainte uniaxiale $\sigma(t)$ normale à une section droite est reliée à la déformation longitudinale $\Sigma(t)$ à l'instant t par la relation :

$$\sigma(t) = E \Sigma(t) \quad \text{Eq.I. 74}$$

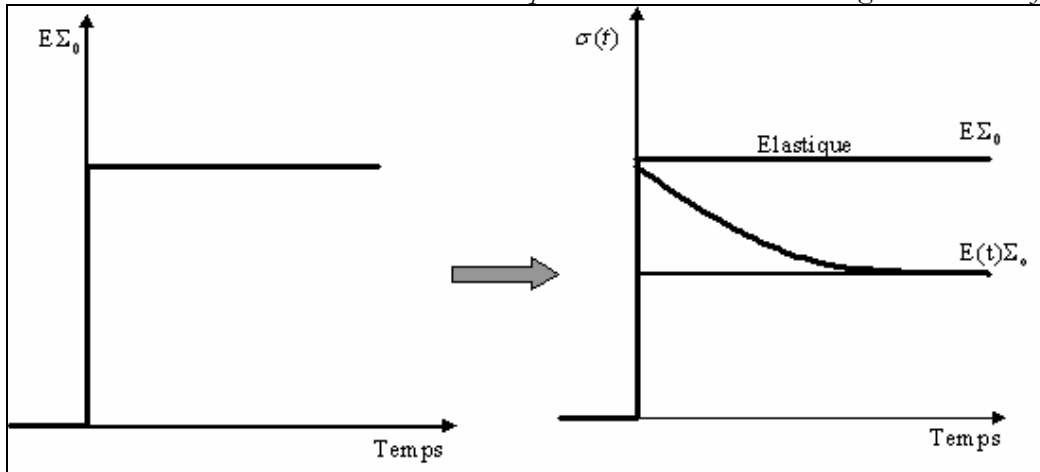


Figure I. 31: essai de relaxation.

Le module de Young est une constante intrinsèque du matériau. Il ne dépend pas du type de sollicitation. Prenons par exemple le cas d'un essai de relaxation. Si nous imposons une déformation longitudinale constante ε_0 , cela engendrera pour un matériau élastique linéaire une contrainte donnée par la relation $\sigma(t) = E\Sigma$. Dans le cas d'un matériau viscoélastique, l'historique du chargement a une influence sur la valeur de la contrainte à un instant donné (il existe un retard entre la cause et l'effet). Bien que la déformation longitudinale reste constante, on constate une évolution de la contrainte (figure I.32)

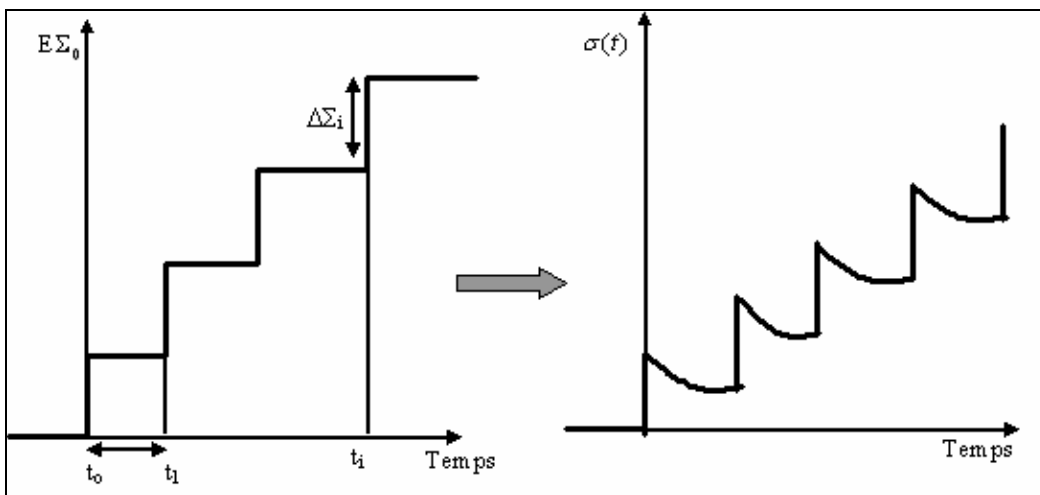


Figure I. 32: illustration du principe de superposition de Boltzmann.

La contrainte longitudinale s'écrit donc :

$$\sigma(t) = E(t)\Sigma_0 \quad \text{Eq.I. 75}$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, l'équation constitutive est basée sur le fait que les effets des variations séquentielles de la déformation sont additifs (principe de superposition de

Boltzmann). Si l'on effectue une succession de sauts de déformation longitudinale (superposition d'essais de relaxation définis plus haut), la contrainte engendrée sera égale à la somme des contraintes résultantes de chaque essai de relaxation pris séparément (figure I. 32).

Mathématiquement, nous pouvons écrire la déformation sous la forme :

$$\Sigma(t) = \sum_0^t \Delta\Sigma_i H(t - t_i) \quad \text{Eq.I. 76}$$

La contrainte s'écrit alors :

$$\sigma(t) = \sum_0^t \Delta\Sigma_i E(t - t_i) = \sum_0^t \frac{\Delta\Sigma_i}{\Delta t} E(t - t_i) \Delta t \quad \text{Eq.I. 77}$$

Cette équation permet la détermination de l'équation constitutive d'un matériau viscoélastique lorsque Δt tend vers une quantité infinitésimale.

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial \Sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{Eq.I. 78}$$

La fonction $E(t)$ est souvent appelée fonction de relaxation (pour un état de contrainte uniaxial). Il est donc possible à partir d'un essai de relaxation de prédire la contrainte engendrée par n'importe quelle variation de déformation longitudinale.

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \left(K(t - \tau) - \frac{2}{3} G(t - \tau) \right) \frac{\partial \Sigma_{kk}^M(\tau)}{\partial \tau} \delta_{ij} d\tau + 2 \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial \Sigma_{ij}^M(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{Eq.I. 79}$$

soit encore, sous forme matricielle :

$$\sigma(t) = \int_0^t \left(K(t - \tau) - \frac{2}{3} G(t - \tau) \right) \frac{\partial \Sigma^M(\tau) : 1}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial \Sigma^M(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{Eq.I. 80}$$

I-2-3-5. Transformations des équations de bilans dans un repère Lagrangien

Puisque notre produit est déformable lors du séchage, il est donc nécessaire de prendre en compte l'effet de la déformation du matériau sur le transport de masse et d'énergie. Du point de vue numérique les variations de dimensions du produit imposent une modification à chaque instant du maillage nécessaire à la discrétisation du produit. L'introduction d'une surface mobile alourdit donc considérablement la résolution numérique. Pour cette raison les équations de conservation sont généralement écrites dans un repère Lagrangien (Figure I.33).

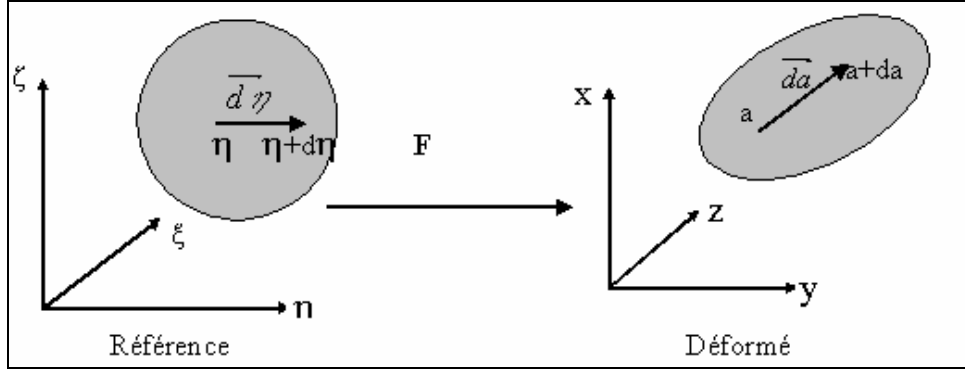


Figure I. 33: Transformation du matériel

Soit Y une quantité massique au sein d'un écoulement à la vitesse v . Comme Y est une fonction du temps t et des coordonnées spatiales x, y, z , sa dérivée totale par rapport au temps s'exprime :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{Eq.I. 81}$$

Où $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ sont les trois composantes spatiales u_x, u_y, u_z , de la vitesse u .

Cette dérivée de Y peut être donc s'écrire :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \vec{u}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(Y) \quad \text{Eq.I. 82}$$

Ainsi dans un référentiel lié au corps en mouvement, la quantité Y ne dépend que du temps ($v=0$).

Le premier terme de l'équation de conservation (Eq.I. 48) sera donc :

$$\rho_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(w) \right) = \rho_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{\xi} \quad \text{Eq.I. 83}$$

De plus dans un repère cartésien et en coordonnées eulériennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}(Y) = \frac{\partial Y}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial Y}{\partial z} \vec{k} \quad \text{Eq.I. 84}$$

en coordonnées lagrangiennes ce même gradient s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(Y) &= \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \vec{j} \\ &+ \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad \text{Eq.I. 85}$$

Soit encore

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}}(\mathbf{Y}) \quad \text{Eq.I. 86}$$

de même

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\mathbf{Y}}) &= \frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq.I. 87}$$

Soit encore

$$\text{div}(\vec{\mathbf{Y}}) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial \zeta} & \frac{\partial \mathbf{Y}_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial \zeta} & \frac{\partial \mathbf{Y}_y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial \zeta} & \frac{\partial \mathbf{Y}_z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{pmatrix}^t \right) = (\text{Grad}(\vec{\mathbf{Y}})) \cdot \mathbf{A} = \text{Div}(\vec{\mathbf{Y}}) \quad \text{Eq.I. 88}$$

Les expressions des différents bilans dans les deux repères Eulérien et Lagrangien sont reportées dans le tableau (I. 7).

Tableau I- 7: Formulation du problème en coordonnées Euleuriennes et Lagrangiennes

	Formulation Euleurienne	Formulation Lagrangienne
Bilan de matière	$\rho_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(w) \right) = \text{div} \left(\frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{D \text{grad}}(w) \right)$	$\rho_s \frac{dw}{dt} = \text{Div} \left(\frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{DA \text{Grad}}(w) \right)$
Bilan d'énergie	$\rho C_{Ph} \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T))$	$\rho \frac{C_{Ps} + w C_{Pl}}{1+w} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\xi} + C_{Pl} \left(-\frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{DA \text{Grad}}(w) \right) \cdot \overrightarrow{A \text{Grad}}(T) = \text{Div}(\lambda \overrightarrow{A \text{Grad}}(T))$
Condition initiale	$w = \bar{w}_0$ $T = T_0$	$w = \bar{w}_0$ $T = T_0$
Conditions aux limites	Surface isolée du flux de chaleur $\overrightarrow{\text{grad}}(w) = \vec{0}$ $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{0}$ A la surface de l'échantillon exposé au flux de chaleur ou air chauffé : $\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) \vec{n} = \left(\dot{m} L_v(T_{\text{surf}}) \right) \cdot \vec{n} + \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$	Surface isolée du flux de chaleur $\overrightarrow{A \text{Grad}}(w) = \vec{0}$ $\overrightarrow{A \text{Grad}}(T) = \vec{0}$ A la surface de l'échantillon exposé au flux de chaleur ou air chauffé : $\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) \vec{n} = \left(\dot{m} L_v(T_{\text{surf}}) \right) \cdot \vec{n} + \lambda \overrightarrow{A \text{Grad}}(T)$ $\dot{m} = -\rho_s \overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{\text{Grad}}(w) \right)$
Déplacement	$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\chi D}{1 + \chi w} \overrightarrow{\text{grad}}(w)$	$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\chi D}{1 + \chi w} \overrightarrow{A \text{Grad}}(w)$

I-2-4. Conclusion

Dans ce chapitre on a essayé de développer une formulation générale des transferts de Chaleur et de matière pour les milieux déformables et non déformables ; et ceci par le biais de matrice de transformation \mathbf{A} qui nous permet de traiter les deux cas. Ensuite on a enchaîné par la présentation des lois fondamentales de comportements mécaniques des solides. Enfin, on a présenté la technique de transformation des équations de conservation d'un repère eulérien vers un repère lagrangien lorsqu'il s'agit d'un milieu déformable. Les différentes équations écrites dans les deux repères sont présentées dans le tableau (I-7). Le chapitre suivant va faire l'objet d'application de cette formulation

I-2-5. Références

- Berger D. et Pei D. C. T., Drying of hygroscopic capillary porous solid. A theoretical approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 16, p. 293-302, (1973).
- Bogdanis E., Modélisation des transports de chaleur et de matière lors du séchage d'un milieu élastique ou viscoélastique. Résolution par des méthodes aux éléments finis, *Université de Pau et des Pays de l'Adour*, (2001).
- Collard J. M., Etude des transferts d'humidité et des déformations pendant le séchage d'une plaque d'argile, thèse de doctorat, *Thèse de l'université de Poitiers*, (1989).
- Gray W. G., A derivations of the equations for multiphase transport, *Chemical Engineering Science*, Vol. 30, p. 229-233, (1975).
- Hougen O. A., Mac Cauley H. J. et Marshall J. R., Limitations of diffusion equation in drying, *Transactions of the American Institute of Chemical Engineering*, Vol. 36, p. 183-206, (1940).
- Jomaa W. et Puiggali J. R., Drying of shrinkage materials: modelling with shrinkage velocity, *Drying Technology*, Vol. 9, (1991)
- Jomaa W., Séchage de matériaux fortement déformables, Thèse de doctorat, *Université Bordeaux I*, (1991).
- Kechaou N., Séchage de gels fortement déformables : étude de la diffusion interne de l'eau et Modélisation, thèse de doctorat, *Institut National Polytechnique de Lorraine*, (1989).

Chapitre I-2. Modélisation du séchage des milieux déformables

- Ketelaars A.A.J., Drying deformable media. Kinetics, shrinkage and stress, thèse de doctorat, *University of Technology, Eindhoven*. Netherlands (1992).
- Krisher O. et Kroll K., Technique de séchage, 2^{ème} édition de (Die Wissenschaftlichen Grundlagen der trocknungstechnik, Springer Verlag), traduite par le C.E.T.I.A.T., Orsay, (1963).
- Luikov A. W., Mikkailov Y. A., Theory of energy and mass transfers, *Prentice Hall, Englewood Cliffs*, (1961).
- Marle C., Application de la méthode de la thermodynamique des processus irréversible à l'écoulement d'un fluide a travers un milieux poreux, *Bulletin RILEM*, Vol. 29, p. 1066-1071, (1967)
- Mercier F., Séchage de gel d'alumine : maîtrise de la texture de supports de catalyseurs, thèse de doctorat, *Université de Pau et des Pays de l'Adour*, (1996).
- Mihoubi D., Séchage des milieux déformables par l'utilisation de l'énergie rayonnante, DEA, *Université de Centre*, p. 132, (2000).
- Mrani I., Fras G. et Benet J., Numerical study of drying stresses in agar gel, *Drying Technology*, Vol. 13, p. 551-570, (1995).
- Mrani I., Transport de matière en milieu bi-constituant élastique, thèse de doctorat, *Université Montpellier II*, p. 150, (1993).
- Philip J. R. et De Vries D. A., Moisture movement in porous materials under temperature gradients, *Transactions of the American Geophysics union*, Vol. 2, p. 222-232, (1957).
- Sherwood T. K., The drying of solids, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 1, p. 12-16, (1929).
- Whitaker S., Heat and mass transfer in granular porous media, advance in drying, Hemisphere publishing corporation, Vol. 1, p. 23-61, (1980).
- Whitaker S., Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media a theory of drying, *advance in Heat Transfer*, Vol. 13, p. 119-203, (1977).
- Zagrouba F., Mihoubi D. et Bellagi A., Study of Process of Clay Drying. II. Material characteristics, *Drying Technology*, Vol. 20, p.1895-1917, (2002).

- Zagrouba F., Séchage par convection et un apport rayonnant micro-ondes des milieux déformables. Modélisation des phénomènes de transferts de chaleur et de matière, thèse de doctorat, *Institut National Polytechnique de Lorraine*, (1993).

Chapitre I-3

SIMULATION DU SECHAGE POUR DEUX COMPORTEMENTS RHEOLOGIQUES DIFFERENTS

Dans le chapitre précédant, une modélisation couplant les transferts de matière et de chaleur avec les équations de la mécanique des milieux continus a été développée pour décrire le séchage des milieux déformables. Il est donc nécessaire de tester ce modèle pour différentes configurations. Dans un premier temps, le cas d'un produit élastique est analysé de façon unidirectionnelle. En second lieu, un cas bidirectionnel sera traité. Pour les deux situations, des résultats de simulation seront présentés.

I-3-1	APPLICATION DU MODELE A UN MATERIAU ELASTIQUE :	88
I-3-1-1	Configuration physique du problème.....	88
I-3-1-2	Les équations de transferts.....	88
I-3-1-3	Conditions aux limites et initiale.....	89
I-3-1-4	Déformations et contraintes.....	91
I-3-1-5	Résolution numérique	92
I-3-1-5-1	Système à résoudre	92
I-3-1-5-2	Méthode de résolution	93
I-3-1-6	Simulation du séchage de gâteaux de kaolin	95
I-3-1-6-1	Validation du modèle.....	96
I-3-1-6-2	Distribution de l'humidité.....	96
I-3-1-6-3	Distribution de la Température.....	97
I-3-2	APPLICATION DU MODELE POUR TRAITE UN CAS BIDIRECTIONNEL 98	
I-3-2-1	Configuration physique du problème.....	98
I-3-2-2	Les équations de transferts.....	98
I-3-2-3	Conditions aux limites et initiale.....	101
I-3-2-4	Résolution numérique	103
I-3-2-4-1	Système à résoudre	103
I-3-2-4-2	Méthode de résolution numérique.....	104
I-3-2-5	Simulations dans le cas de la bentonite	108
I-3-2-5-1	Distribution de l'humidité.....	108
I-3-2-5-2	Distribution de la température.....	110
I-3-3	CONCLUSION	112
I-3-4	REFERENCE	112

I-3-1 Application du modèle à un matériau élastique :

I-3-1-1 Configuration physique du problème

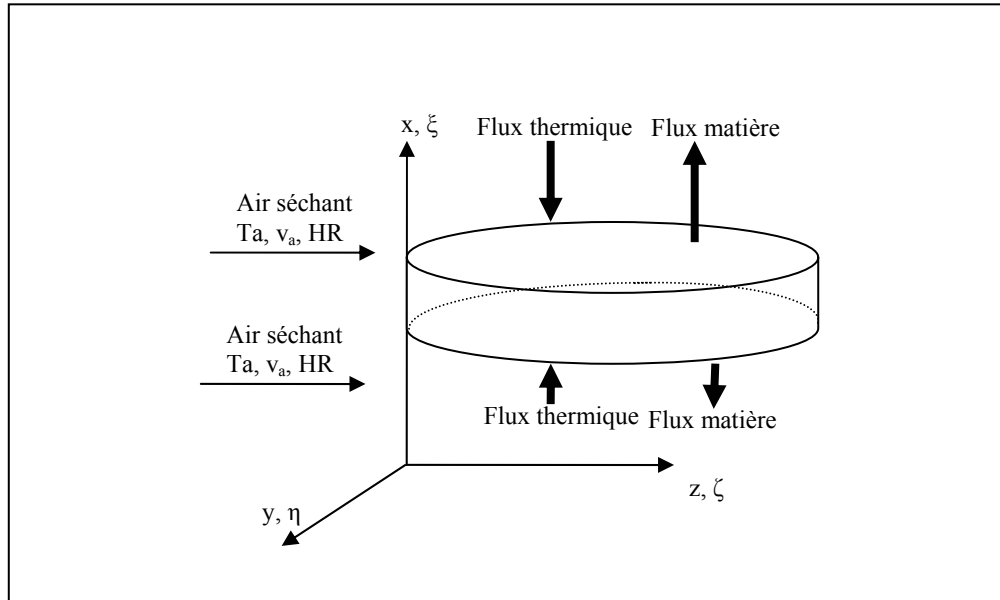


Figure I. 34: configuration physique

Cette configuration correspond au séchage d'un cylindre prélevé dans un gâteau de filtration de kaolin. D'un point de vue expérimental l'échantillon étant disposé sur un support constitué de quelques fils de nylon très fins il est tout à fait raisonnable de considérer que les deux faces du produit se trouvent totalement exposées au fluide séchant et que les transferts de chaleur et de matière s'effectuent entre l'air de séchage et les surfaces supérieure et inférieure de l'échantillon (Figure I. 34). Par ailleurs l'épaisseur de l'échantillon étant 10 fois inférieure à son diamètre il semble acceptable de décrire les transferts de façon unidirectionnelle et de négliger ainsi l'échange de chaleur et de matière au niveau de la surface latérale de l'échantillon. Cette hypothèse est en partie validée par des photos qui montrent, à différents temps de séchage, que le retrait est essentiellement longitudinal.

I-3-1-2 Les équations de transferts.

La conservation de la masse solide peut s'écrire :

$$dm_s = \rho_s^0 d\xi = \rho_s dx \quad \text{Eq.I. 89}$$

Par conséquent la matrice des déformations (A) prend la forme suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.I. 90}$$

Comme nous l'avons discuté au chapitre (I) l'évolution du volume en fonction de la teneur en eau suit dans le cas du kaolin une variation linéaire

Ainsi l'équation de conservation de la matière dans un repère Lagrangien s'écrit d'après le (Tableau I. 7):

$$\rho_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho}{1+w} D \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \right) \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \quad \text{Eq.I. 91}$$

soit encore

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho}{1+w} D \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \right) \frac{1}{\rho_s^0} \quad \text{Eq.I. 92}$$

$$\text{Or : } \rho(w) = \rho_s^0 \frac{1+w}{1+\gamma w}$$

D'où finalement

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D}{(1+\gamma w)^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad \text{Eq.I. 93}$$

De même l'équation de conservation de l'énergie s'écrit (d'après le Tableau I. 7) :

$$\rho_s^0 (C_{Ps} + w C_{Pl}) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\xi} - C_{Pl} \frac{\rho_s^0 D}{(1+\gamma w)^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{1+\gamma w} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \quad \text{Eq.I. 94}$$

I-3-1-3 Conditions aux limites et initiale.

La condition initiale exprime l'uniformité de la température et de la teneur en eau de l'échantillon

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ à } t=0 \quad & w = \bar{w}_0 \\ & T = T_0 \end{aligned} \quad \text{Eq.I. 95}$$

les conditions au niveau du plan de symétrie et à la surface supérieure du produit sont respectivement :

➤ pour $\xi=0$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad \text{Eq.I. 96}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{Eq.I. 97}$$

➤ pour $\xi=e$

$$h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} = \dot{m} L_v (T_{\text{surf}}) + \frac{\tilde{\lambda}}{1 + \gamma w} \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad \text{Eq.I. 98}$$

$$\dot{m} = - \frac{\rho_s^0 D}{(1 + \gamma w)^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{x=e} \quad \text{Eq.I. 99}$$

Cette dernière condition à la limite nécessite la détermination du coefficient de transfert de chaleur par convection h .

Ce coefficient est déterminé par la nature de l'écoulement de l'air au voisinage de la surface d'échange. Sa valeur moyenne peut être calculée en fonction de la configuration physique du produit.

Dans notre cas l'échantillon est complètement immergé dans l'air de séchage, la corrélation que nous avons choisie pour estimer la valeur de nombre du Nusselt est celle d'un écoulement parallèle à une plaque :

$$\text{Nu} = 0,664 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{si } \text{Re} \leq 2 \cdot 10^5 \quad \text{Eq.I. 100}$$

$$\text{Nu} = 0,664 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,43} \quad \text{si } \text{Re} > 2 \cdot 10^5 \quad \text{Eq.I. 101}$$

L'analogie de Chilton-Colburn est largement utilisée dans les études théoriques du séchage. En effet si l'on admet que les profils de température et de concentration en vapeur d'eau ont la même forme dans la couche limite, les coefficients de transferts convectifs de chaleur h et de matière k_m sont liés par la relation de Lewis :

$$\frac{h}{k_m \rho C_{ph}} = f(Le) = \left(\frac{Sc}{Pr} \right)^{2/3} \quad \text{Eq.I. 102}$$

Le coefficient de transfert k_m est alors relié simplement au coefficient de convection h qui peut être calculé à partir des relations classiques d'aérothermie.

Dans le cas de l'air humide il est habituel de considérer $\left(\frac{Pr}{Sc} \right)^{2/3} \cong 1$

Le coefficient de transfert de matière s'écrit alors simplement :

$$k_m = \frac{h}{\rho C_{ph}} \quad \text{Eq.I. 103}$$

I-3-1-4 Déformations et contraintes

En couplant l'expression de la matrice A dans le cas unidirectionnel à celle du déplacement (Tableau I. 7) il vient :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\gamma D}{(1 + \gamma w)^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \text{Eq.I. 104}$$

et la déformation :

$$\Sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial \xi}; \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} = \Sigma_{xy} = \Sigma_{xz} = \Sigma_{yz} = 0 \quad \text{Eq.I. 105}$$

Les contraintes qui naissent dans le produit au cours du séchage sont quant à elles calculées à partir de la relation (Eq.I. 73) qui dans notre cas s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\Sigma} - 3K_L [\alpha_T \Delta T + \beta_h \Delta w] \mathbf{1}$$

avec :

$$3K_L = (3\lambda + 2\mu) \quad \text{Eq.I. 106}$$

et

$$\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \text{Eq.I. 107}$$

soit encore

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} \mathbf{1} + 2\mu_1 \boldsymbol{\Sigma} - 3K_L [\alpha_T \Delta T + \beta_h \Delta w] \mathbf{1} \quad \text{Eq.I. 108}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu_1) \frac{\partial u}{\partial \xi} - 3K_h [\alpha_T \Delta T + \beta_h \Delta w] \\ \sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} - 3K_h [\alpha_T \Delta T + \beta_h \Delta w] \\ \sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} - 3K_h [\alpha_T \Delta T + \beta_h \Delta w] \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq.I. 109}$$

La résolution du problème ainsi posé ne permet pas de simuler une évolution des contraintes physiquement acceptable (équilibre mécanique non respecté). Ceci est dû au fait que le déplacement local est directement estimé à partir de données globales. La méthode selon laquelle la vitesse du solide, déduite de la résolution de l'équation de la conservation de quantité de mouvement du milieu, est introduite dans les équations de transport de chaleur et de masse (Jomaa, 1991 ; Mercier, 1996 ; Bogdanis, 2001) semble donc devoir être considérée pour aborder ce problème de la détermination des contraintes au cours du séchage.

I-3-1-5 Résolution numérique

I-3-1-5-1 Système à résoudre

Le problème se résume donc, dans ce cas, à résoudre le système constitué des équations suivantes :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D}{(1 + \gamma w)^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)$$

$$\rho_S^0 (C_{Ps} + w C_{Pl}) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\xi} - C_{Pl} \frac{\rho_S^0 D}{(1 + \gamma w)^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{1 + \gamma w} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)$$

En utilisant le jeu de paramètres reporté dans le tableau (I- 8) et en appliquant les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\text{pour } \xi = e : \quad h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{parois}} = \dot{m} L_v (T_{\text{surf}}) + \frac{\lambda}{1 + \gamma w} \frac{\partial T}{\partial \xi}$$

$$\text{pour } \xi = 0 : \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad \text{et} \quad U = 0$$

$$\text{avec : } w(\xi, 0) = w_0 \quad \text{et} \quad T(\xi, 0) = T_0$$

Tableau I- 8: Propriétés physiques et mécaniques du processus

Propriété	Expression théorique	Unité
Coefficient de transfert de chaleur : h_c	$Nu = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$ si $Re \leq 2 \cdot 10^5$ $Nu = 0,664 Re^{0.8} Pr^{0.43}$ si $Re > 2 \cdot 10^5$	$W.m^{-2} K^{-1}$
Coefficient de transfert de matière : k_m	$\frac{h_c}{\rho C_{ph}}$	$m.s^{-1}$
Chaleur spécifique	$\frac{1,1 + 4,2w}{1 + w}$	$kJ.kg^{-1}$
Coefficient de diffusion	$5,61 \cdot 10^{-10} \left(7,5 + \exp\left(\frac{44 w}{1,6 + w}\right) \exp\left(-\frac{510}{T}\right) \right)$	$m^2.s^{-1}$
Conductivité thermique	1,5	$W.m^{-1}K^{-1}$

I-3-1-5-2. Méthode de résolution

Compte tenu de la complexité du modèle, une résolution numérique s'impose et porte sur les équations de bilan de masse, de transport et de déformation. La méthode utilisée est celle des différences finies implicite.

L'espace et le temps sont discrétisés successivement en $\Delta\xi$ et Δt intervalles, ce qui donne une grille de rectangles de côtés $\Delta\xi$ et Δt .

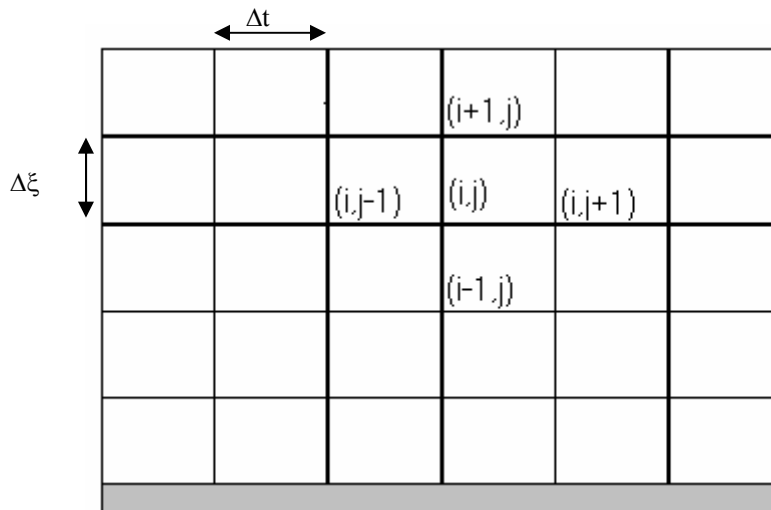


Figure I. 35: Représentation du maillage du domaine physique

Dans ce qui suit on notera :

Φ_i^{j+1} la grandeur physique à déterminer au point $M(i\Delta\xi)$, à l'instant $t+\Delta t=(j+1)\Delta t$.

Φ_i^j la grandeur physique à déterminer au point $M(i\Delta\xi)$, à l'instant $t=j\Delta t$.

La méthode des différences finies consiste à définir sur un domaine physique fixé un réseau de points M_j . Les équations sont intégrées sur un volume de contrôle et sur le pas de temps $[t, t+\Delta t]$. Le système d'équations algébriques obtenu est résolu par une méthode numérique appropriée (Paragraphe I-5-4).

Pour la discrétisation du système d'équations on a utilisé les hypothèses suivantes :

- la discrétisation temporelle adopte un schéma implicite qui permet d'assurer la stabilité du modèle numérique ;
- la dérivée spatiale en un nœud suppose des variations linéaires entre deux nœuds voisins :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_i^{j+1} = \frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - \Phi_{i-1}^{j+1}}{2\Delta\xi} \quad \text{Eq.I. 110}$$

En tenant compte de ces hypothèses, le système d'équations algébriques discrétisées s'écrit sous la forme :

$$C_i^j = A(i, i-1)\Phi_{i-1}^{j+1} + A(i, i)\Phi_i^{j+1} + A(i, i+1)\Phi_{i+1}^{j+1} \quad \text{Eq.I. 111}$$

La résolution numérique du système d'équations algébriques est effectuée à l'aide de la méthode itérative de balayage ligne par ligne : on commence par choisir des champs de solutions arbitraires (*conditions initiales*) puis les valeurs des coefficients sont calculées à l'aide de ces champs arbitraires. On résout ensuite le système d'équations discrétisées puis on utilise cette nouvelle solution pour calculer les coefficients de la matrice jusqu'à ce que la solution converge. On passe alors à la ligne suivante. L'organigramme de la résolution du système est donné par figure (I.36)

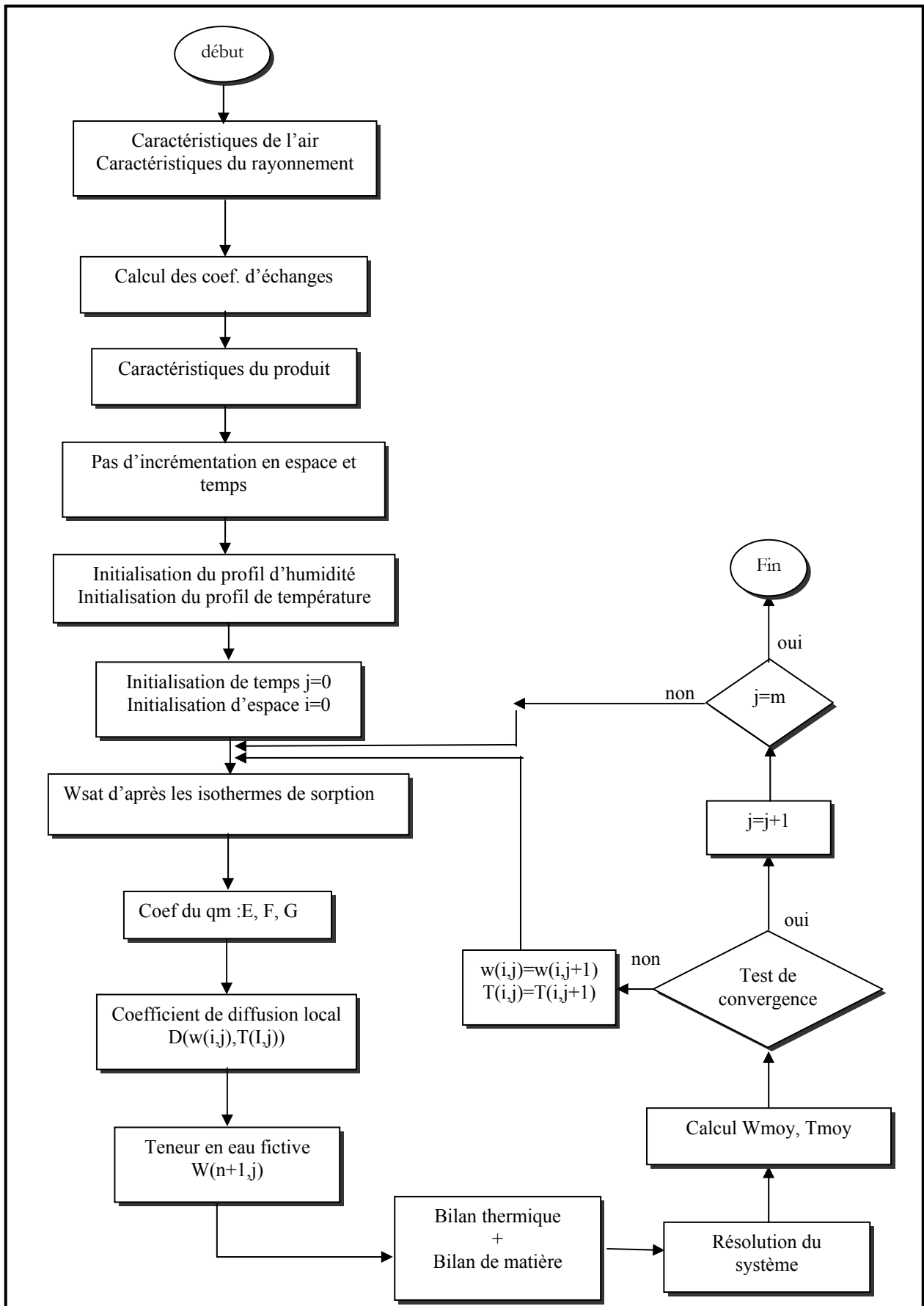


Figure I. 36: Organigramme de la résolution pour le cas unidirectionnel.

I-3-1-6 Simulation du séchage de gâteaux de kaolin

I-3-1-6-1. Validation du modèle

La validation du code est réalisée à travers une confrontation des cinétiques de séchage calculées avec le modèle avec celles obtenues par l'expérience. Les légers décalages constatés dans le bon sens (*la théorie est plus rapide que l'expérience*) sur la figure (I. 37) peuvent être attribués en grande partie au cumul des erreurs de mesure (spécialement à la fin du séchage où les vibrations du support induites par le courant d'air se confondent à la variation de masse). Les hypothèses simplificatrices formulées dans le modèle ainsi que certaines approximations numériques peuvent également expliquer ces divergences cependant nous pouvons considérer que la modélisation mathématique proposée donne satisfaction pour ce qui est mesurable expérimentalement. Le code de calcul mis en place est donc validé et fournit un outil prospectif intéressant pour passer à l'analyse des différents phénomènes physiques mis en jeu lors du séchage.

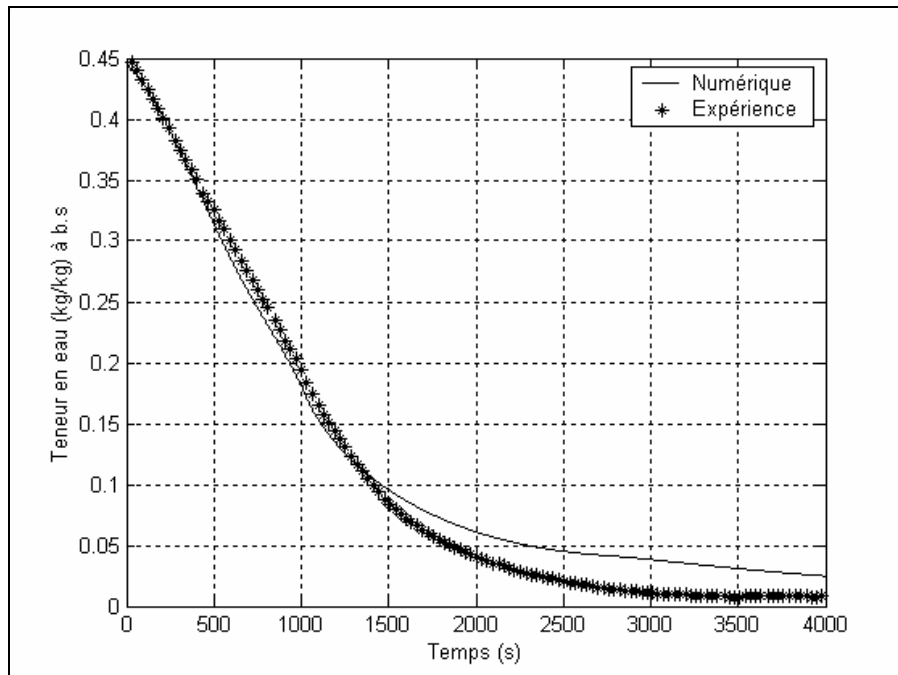


Figure I. 37: Evolution de $W_{moy}(t)$ théorique et expérimental
($T_a=70^\circ\text{C}$, $HR=20\%$, $v_a=3\text{m.s}^{-1}$)

I-3-1-6-2. Distribution de l'humidité

La figure (I. 38) présente la distribution spatio-temporelle de l'humidité au sein de la pastille d'argile. On y remarque bien que la surface supérieure sèche plus vite que celle du plan de symétrie à l'intérieur du produit. Au cours du temps, l'humidité marque une courte phase constante de préchauffage avant de passer par une phase descendante pour tendre, à la fin, vers l'humidité d'équilibre. La surface exposée directement à l'air de séchage atteint ce quasi-équilibre plus rapidement que l'intérieur de l'échantillon de kaolin.

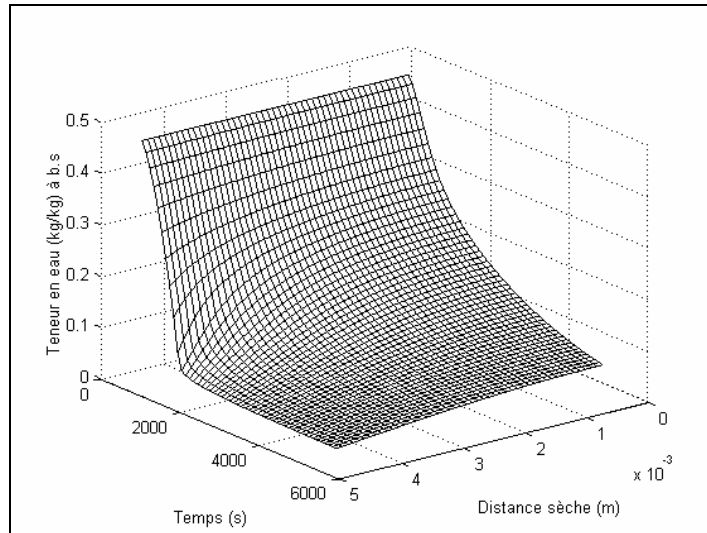


Figure I. 38: Champ d'humidité ($T_a=70\text{ }^\circ\text{C}$, $HR=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

I-3-1-6-3. *Distribution de la Température*

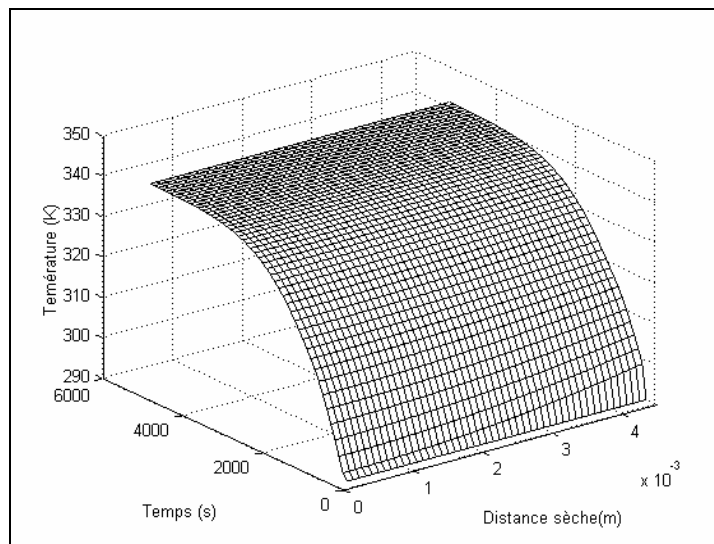


Figure I. 39: Champ de température ($T_a=70\text{ }^\circ\text{C}$, $HR=20\%$, $v_a=3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

La figure (I. 39) présente la distribution de la température selon l'épaisseur de la pastille en fonction du temps de séchage. On constate que le gradient de température est très faible, ce qui traduit le fait que le transfert de matière interne est limitant. La température du matériau augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur constante qui correspond, dans le cas de séchage convectif, à la température de l'air séchant. Comme pour l'humidité, en raison de l'hypothèse de symétrie on remarque que la distribution de la température est symétrique par rapport au plan médian de l'échantillon.

I-3-2 Application du modèle pour traité un cas bidirectionnel

Ce deuxième volet du chapitre simulation, s'attache à étudier en deux dimensions le cas d'un matériau viscoélastique.

I-3-2-1 Configuration physique du problème

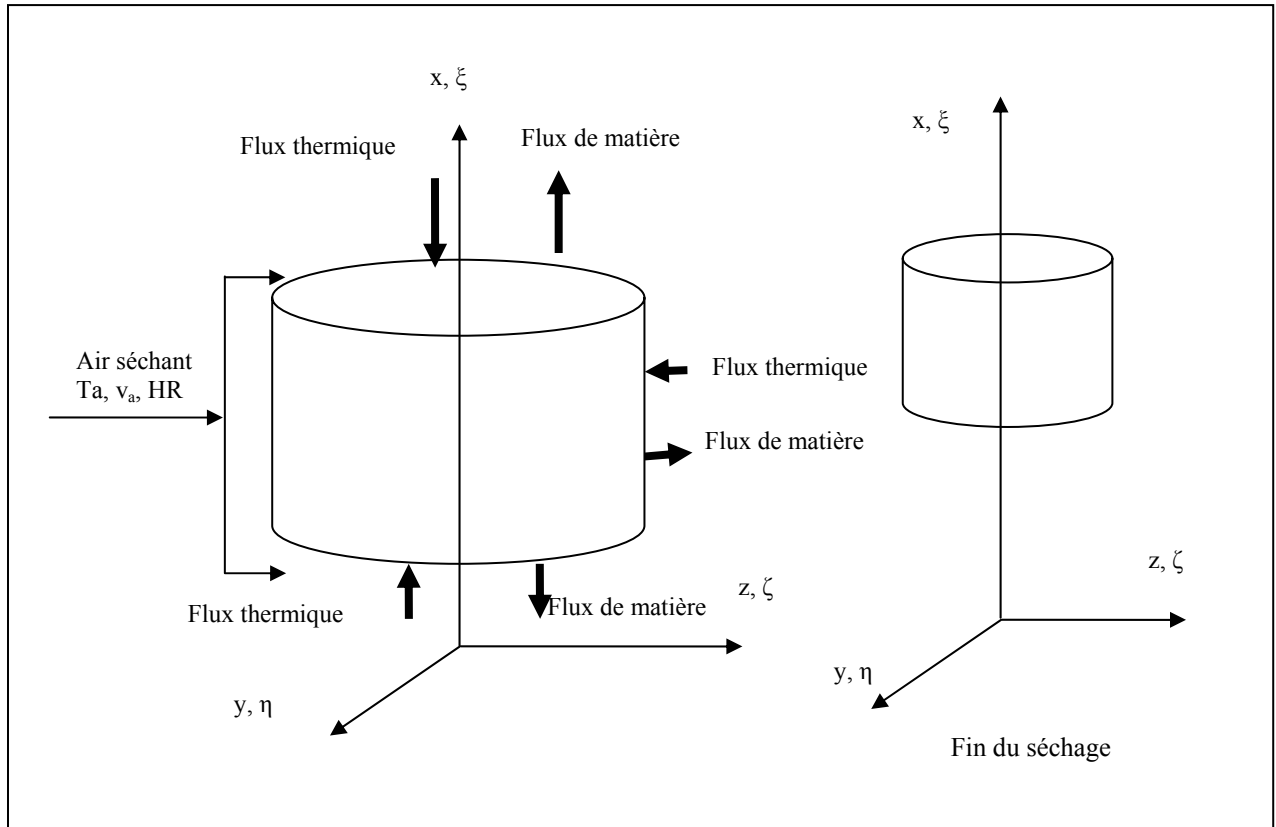


Figure I. 40: configuration physique

Cette configuration correspond au séchage d'un cylindre prélevé dans un gâteau de filtration bentonite. De même que pour le kaolin l'échantillon se trouve totalement exposé au fluide séchant. Ainsi les transferts de chaleur et de matière entre l'air de séchage et le produit s'effectuent sur toutes les surfaces. Cependant contrairement au cas du kaolin l'épaisseur de l'échantillon varie durant tout le séchage, ce qui ne permet pas de traiter raisonnablement le problème de façon unidirectionnelle. Ainsi dans le cas présent les échanges de chaleur et de matière à travers la surface latérale de l'échantillon sont pris compte et les équations sont résolues en deux dimensions dans un repère de coordonnées cylindriques (figure I. 40).

I-3-2-2 Les équations de transferts

Comme pour le cas du kaolin l'évolution du volume de l'échantillon de bentonite suit en fonction de la teneur en eau une variation linéaire (figure I. 8 et I. 10)

Ainsi l'équation de conservation de la matière dans un repère Lagrangien s'écrit (d'après Tableau I. 7)

$$\rho_s \frac{dw}{dt} = \text{Div} \left(\frac{\rho}{1+w} \text{DA} \overrightarrow{\text{Grad}}(w) \right) \quad \text{Eq.I. 112}$$

D'après le principe de conservation de la masse solide il vient :

$$dm_s = \rho_s^0 2\pi\xi d\xi d\eta = \rho_s 2\pi r dr dz \quad \text{Eq.I. 113}$$

ce qui permet d'écrire la matrice des déformations :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.I. 114}$$

dès lors l'équation de conservation de la matière peut se mettre sous la forme ;

$$\text{Div}(\mathbf{Y}) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial Y_r}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\xi} Y_r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right) = \quad \text{Eq.I. 115}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial Y_r}{\partial \xi} + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} Y_r$$

soit encore

$$\text{Div}(\mathbf{Y}) = \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial Y_r}{\partial \xi} + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} Y_r = \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r Y_r}{\partial \xi} + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} \quad \text{Eq.I. 116}$$

avec

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{\rho}{1+w} \text{DA} \overrightarrow{\text{Grad}}(w) \right) = \frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.I. 117}$$

soit encore

$$Y = \left(\frac{\rho}{1+w} \mathbf{DA} \overrightarrow{\text{Grad}}(w) \right) = \frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \bar{\mathbf{u}}_\xi + 0 \bar{\mathbf{u}}_c + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \bar{\mathbf{u}}_k \right) \quad \text{Eq.I. 118}$$

En couplant les équations I. 116 et I. 117 avec l'équation de bilan de matière du tableau récapitulatif (Tableau I. 7), l'équation du transport de matière dans le cas bidimensionnel peut se mettre sous la forme :

$$\rho_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_\xi = \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left[\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left[\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right) \quad \text{Eq.I. 119}$$

ou en divisant par ρ_s :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_\xi = \frac{1}{\rho_s^0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left[\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) + \frac{1}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left[\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right) \quad \text{Eq.I. 120}$$

Sachant, par ailleurs, que : $\rho(w) = \rho_s^0 \frac{1+w}{1+\gamma w}$

L'équation de conservation de la matière peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_\xi = \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\mathbf{D}}{(1+\gamma w)^2} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) + \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mathbf{D}}{(1+\gamma w)^2} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right) \quad \text{Eq.I. 121}$$

De même l'équation de conservation de l'énergie définie dans le tableau I. 7, peut, en incluant la matrice des déformations (A), s'écrire :

$$\rho \frac{C_{Ps} + w C_{Pl}}{1+w} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_\xi + C_{Pl} \left(- \frac{\rho}{1+w} \mathbf{DA} \overrightarrow{\text{Grad}}(w) \right) \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}}(T) = \text{Div} \left(\lambda \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}}(T) \right) \quad \text{Eq.I. 122}$$

soit encore

$$\rho \frac{C_{Ps} + w C_{Pl}}{1+w} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_\xi + C_{Pl} \left(- \frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left[\left(\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_{Pl} \left(- \frac{\rho}{1+w} \mathbf{D} \left[\left(\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} = \text{Div} \left(\lambda \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \bar{\mathbf{u}}_\xi + 0 \bar{\mathbf{u}}_c + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \bar{\mathbf{u}} \right) \quad \text{Eq.I. 123}$$

on aura:

$$\begin{aligned} & \rho_0^s \frac{C_{Ps} + w C_{Pl}}{1 + \gamma w} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\xi} + C_{Pl} \left(- \frac{\rho_0^s D}{(1 + \gamma w)^3} \left[\left(\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} + \\ & C_{Pl} \left(- \frac{\rho_0^s D}{(1 + \gamma w)^3} \left[\left(\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{(1 + \gamma w)} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] \right) \frac{1}{(1 + \gamma w)} \quad \text{Eq.I. 124} \\ & + \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda}{(1 + \gamma w)} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right) \frac{1}{(1 + \gamma w)} \end{aligned}$$

en multipliant l'équation précédente par $(1 + \gamma w)$ il vient :

$$\begin{aligned} & \rho_0^s (C_{Ps} + w C_{Pl}) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\xi} - \frac{\rho_0^s D C_{Pl}}{(1 + \gamma w)^2} \left(\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\rho_0^s D C_{Pl}}{(1 + \gamma w)^2} \left(\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ & = \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda_h}{(1 + \gamma w)} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] \right) + \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda}{(1 + \gamma w)} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right) \quad \text{Eq.I. 125} \end{aligned}$$

I-3-2-3 Conditions aux limites et initiale.

La condition initiale exprime l'uniformité de la température et de la teneur en eau de l'échantillon

➤ à $t=0$

$$\begin{aligned} w &= \bar{w}_0 \\ T &= T_0 \end{aligned} \quad \text{Eq.I. 126}$$

Les conditions aux limites au niveau du plan de symétrie et à la surface supérieure du produit sont les suivantes :

➤ pour $\xi=0$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad \text{Eq.I. 127}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{Eq.I. 128}$$

➤ pour $\eta=0$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad \text{Eq.I. 129}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{Eq.I. 130}$$

➤ pour $\xi=r$

$$\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) \vec{n} = \left(\dot{m} L_V(T_{\text{surf}}) \right) \vec{n} + \lambda \mathbf{A} \overrightarrow{\text{Grad}}(T) \quad \text{Eq.I. 131}$$

En incluant l'expression du tenseur des transformations (A) dans l'équation ci-dessus il vient :

$$\begin{aligned} \left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) \vec{n} &= \left(\dot{m} L_V(T_{\text{surf}}) \right) \vec{n} \\ &+ \lambda \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \vec{u}_\xi + 0 \vec{u}_\zeta + \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \vec{u}_k \right) \end{aligned} \quad \text{Eq.I. 132}$$

ce qui permet finalement d'écrire :

$$\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) = \left(\dot{m} L_V(T_{\text{surf}}) \right) + \lambda \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \quad \text{Eq.I. 133}$$

avec :

$$\dot{m} = - \frac{\rho_s^0 D}{(1 + \gamma_w)^2} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} \quad \text{Eq.I. 134}$$

➤ pour $\eta=e$

$$\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) = \left(\dot{m} L_V(T_{\text{surf}}) \right) + \lambda \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^0} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \vec{u}_k \right) \quad \text{Eq.I. 135}$$

avec :

$$\dot{m} = - \frac{\rho_s^0 D}{(1 + \gamma_w)^2} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\eta=e} \quad \text{Eq.I. 136}$$

Ces deux dernières conditions aux limites (Eq.I. 133 et Eq.I. 135) nécessitent la détermination du coefficient de transfert de chaleur par convection h.

Or dans notre cas, l'échantillon est complètement immergé dans l'air de séchage ainsi deux corrélations ont été choisies pour estimer la valeur du nombre de Nusselt. Le cas d'une plaque avec écoulement parallèle (similaire au cas unidirectionnel) est retenu pour l'écoulement perpendiculaire à l'axe du cylindre :

$$\text{Nu} = 0,664 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{si } \text{Re} \leq 2 \cdot 10^5 \quad \text{Eq.I. 137}$$

$$\text{Nu} = 0,664 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.43} \quad \text{si } \text{Re} > 2 \cdot 10^5 \quad \text{Eq.I. 138}$$

Pour l'écoulement autour de latéral (perpendiculaire au vecteur radial) la valeur moyenne est calculée par un écoulement établi autour d'un cylindre avec la corrélation classique suivante :

$$\text{Nu} = (0,4 \text{Re}^{1/2} + 0,06 \text{Re}^{2/3}) \text{Pr}^{0.4} \quad \text{pour } \text{Re} < 10^5 \quad \text{Eq.I. 139}$$

le coefficient de transfert de matière peut être ensuite obtenu en appliquant, comme pour le kaolin, le principe de l'analogie des transferts.

$$k_m = \frac{h}{\rho C_p} \quad \text{Eq.I. 140}$$

I-3-2-4 Résolution numérique

I-3-2-4-1. Système à résoudre

Le problème se résume donc, dans ce cas, à résoudre le système constitué des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_\xi &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{D}{(1+\gamma w)^2} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) + \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{D}{(1+\gamma w)^2} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \right) \\ \rho_0^s (C_{Ps} + w C_{Pl}) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_\xi &- \frac{\rho_0^s D C_{Pl}}{(1+\varepsilon w)^2} \left(\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\rho_0^s D C_{Pl}}{(1+\varepsilon w)^2} \left(\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda}{(1+\varepsilon w)} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] \right) + \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda}{(1+\varepsilon w)} \left[\frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right) \end{aligned}$$

En utilisant le jeu de paramètres reporté dans le tableau (I- 9) et en appliquant les conditions aux limites et initiales suivantes :

➤ à $t=0$

$$w = \bar{w}_0$$

$$T = T_0$$

➤ pour $\xi=0$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

➤ pour $\eta=0$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$$

➤ pour $\xi=r$

$$\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) = \left(\dot{m} L_v (T_{\text{surf}}) \right) + \lambda \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^o} \frac{r}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)$$

➤ pour $\eta = e$

$$\left(h(T_a - T_{\text{surf}}) + Q_{\text{abs}} + Q_{\text{parois}} \right) = \left(\dot{m} L_v (T_{\text{surf}}) \right) + \lambda \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^o} \frac{r}{\xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \eta} \vec{u}_k \right)$$

Tableau I- 9: Propriétés physiques et mécaniques du processus

Propriété	Expression théorique	Unité
Coefficient de transfert de chaleur : h_c	Ecoulement perpendiculaire à l'axe du cylindre : $Nu = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{si } Re \leq 2 \cdot 10^5$ $Nu = 0,664 Re^{0,8} Pr^{0,43} \quad \text{si } Re > 2 \cdot 10^5$ Ecoulement perpendiculaire au vecteur radial : $Nu = (0,4 Re^{1/2} + 0,06 Re^{2/3}) Pr^{0,4}$	$W.m^{-2} K^{-1}$
Coefficient de transfert de matière : k_m	$\frac{h_c}{\rho C_{ph}}$	$m.s^{-1}$
Chaleur spécifique	$\frac{1,1 + 4,2w}{1 + w}$	$kJ.kg^{-1}$
Coefficient de diffusion	$4,81 \cdot 10^{-10} \exp\left(\frac{1,8019 w}{0,031 + w}\right)$	$m^2.s^{-1}$
Conductivité thermique	1,5	$W.m^{-1}K^{-1}$

I-3-2-4-2. Méthode de résolution numérique

Comme précédemment la méthode utilisée est celle des différences finies implicite.

Nous disposons d'une plaque d'argile. L'espace et le temps sont discrétisés successivement en Δz , Δr et Δt intervalles, ce qui donne une grille de rectangles de côtés Δz et Δr pour un temps t .

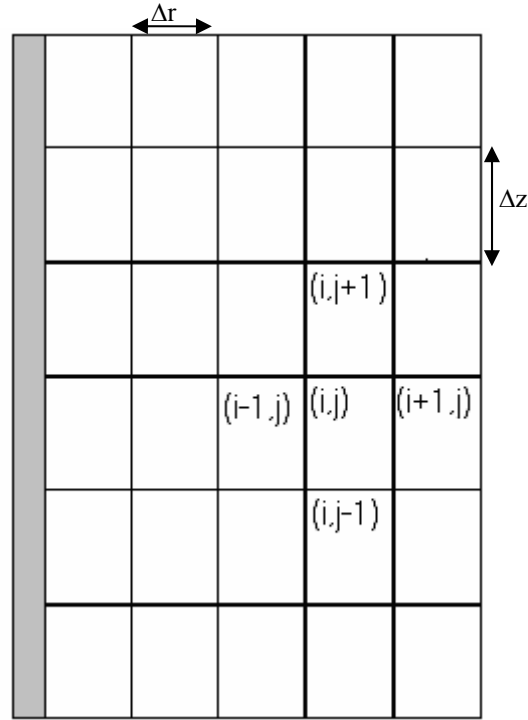


Figure I. 41: Représentation du maillage du domaine physique à un instant t

Dans ce qui suit on notera :

$\Phi_{i,j}^{t+\Delta t}$ est la grandeur physique à déterminer au point $M(i\Delta x, j\Delta y)$, à l'instant $t+\Delta t$.

$\Phi'_{i,j}$ est la grandeur physique à déterminer au point $M(i\Delta x, j\Delta y)$, à l'instant t .

La méthode des différences finies consiste à définir sur un domaine physique fixé un réseau de points M_{ij} . Les équations sont intégrées sur un volume de contrôle et sur le pas de temps $[t, t+\Delta t]$.

Pour la discrétisation du système d'équations (paragraphe **I-3-2-4-1**) on a utilisé les hypothèses suivantes :

- la discrétisation temporelle on adopte un schéma implicite qui permet d'assurer la stabilité du modèle numérique.

- la dérivée spatiale en un nœud suppose des variations linéaires entre deux nœuds voisins :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Phi_{i+1,j}^{t+\Delta t} - \Phi_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{2\Delta r} \quad \text{Eq.I. 141}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Phi_{i,j+1}^{t+\Delta t} - \Phi_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{2\Delta z} \quad \text{Eq.I. 142}$$

En tenant compte de ces hypothèses, le système d'équations algébriques discrétisées s'écrit sous la forme :

$$C_{i,j}^t = +A(i, j)\Phi_{i,j}^{t+1} + B(i, j)\Phi_{i+1,j}^{t+1} + C(i, j)\Phi_{i-1,j}^{t+1} + D(i, j)\Phi_{i,j+1}^{t+1} + F(i, j)\Phi_{i,j-1}^{t+1} \quad \text{Eq.I. 143}$$

La résolution numérique du système d'équations algébriques est effectuée à l'aide de la méthode itérative de balayage ligne par ligne : on commence par choisir des champs des solutions arbitraires (*conditions initiales*). Les valeurs des coefficients sont calculées à l'aide de ces champs arbitraires. On résout ensuite le système d'équations discrétisées puis on utilise cette nouvelle solution pour calculer les coefficients de la matrice jusqu'à ce que la solution converge. On passe alors à la ligne suivante. (figure I.41) l'organigramme de résolution est présente sur la figure (I. 42)

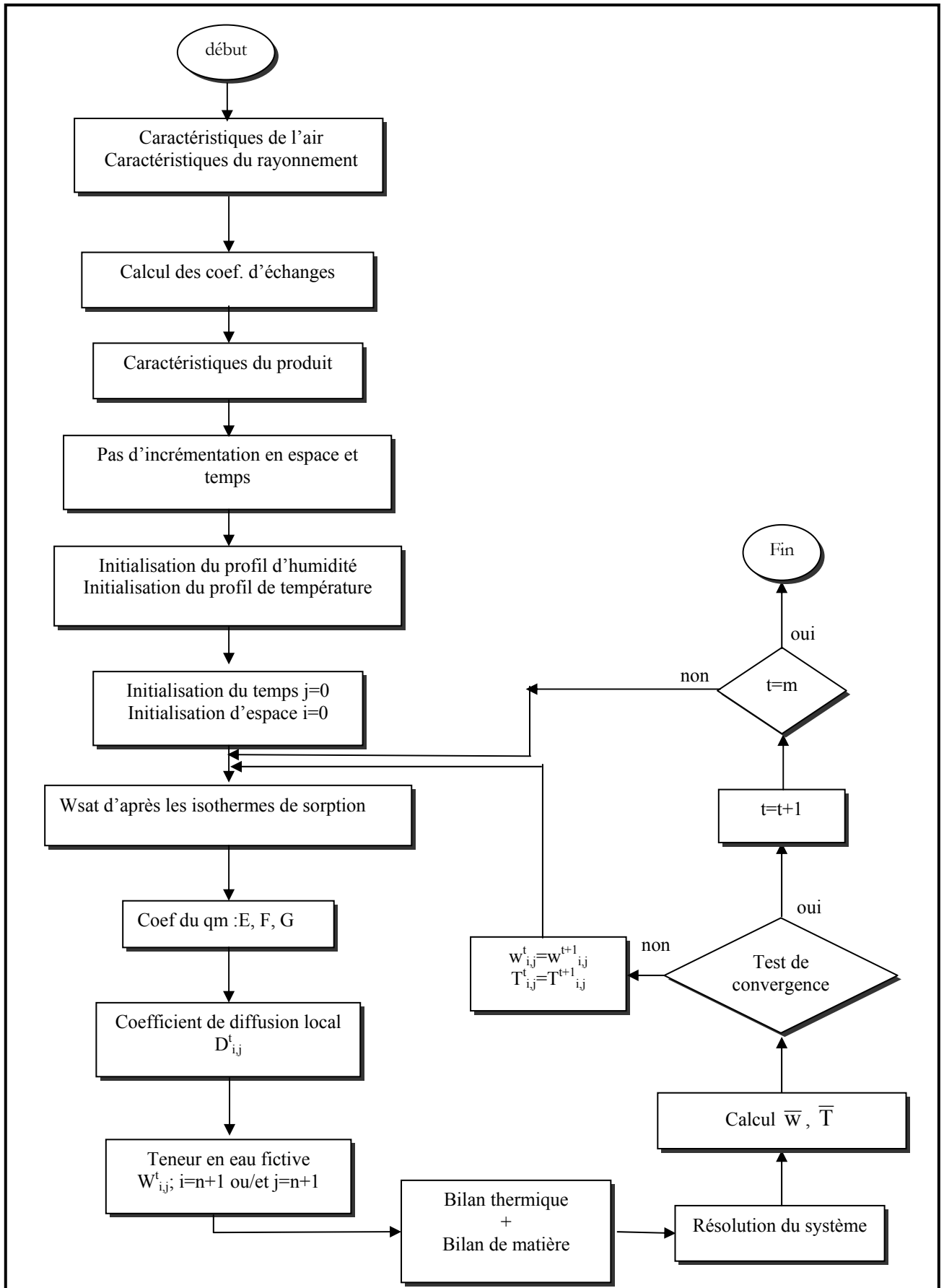
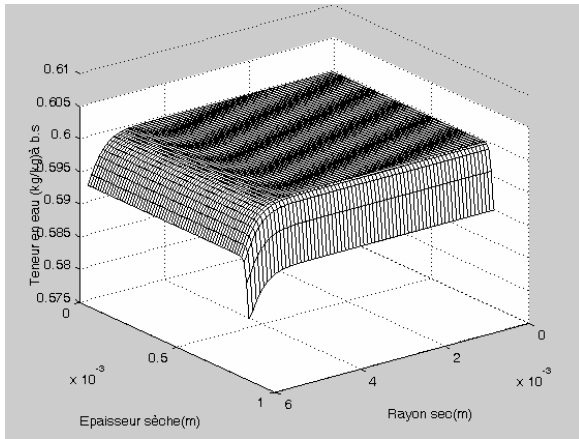


Figure I. 42: Organigramme de la résolution dans le cas bidirectionnel.

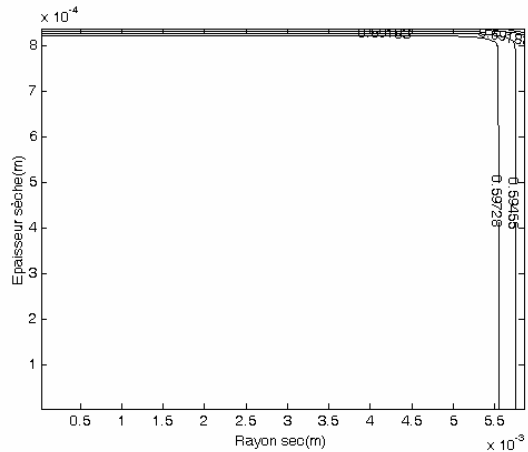
I-3-2-5 Simulations dans le cas de la bentonite

I-3-2-5-1. Distribution de l'humidité

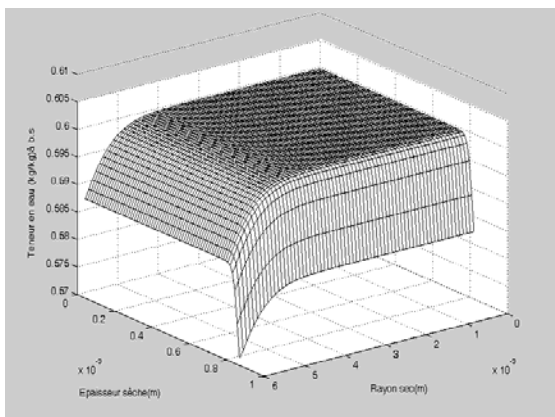
La figure (I. 43) présente la distribution spatio-temporelle de l'humidité au sein de la pastille d'argile. On remarque que le gradient d'humidité reste toujours orienté dans le même sens de l'extérieur vers l'intérieur (radialement et longitudinalement). Cependant il n'a pas la même intensité en fonction du côté considéré. Ceci est lié au transfert de matière et aux surfaces d'échange ; la surface radiale est plus grande que la surface longitudinale et les coefficients de convection calculés avec le nombre de Nusselt (Eq I-137 ou Eq I-138 et Eq. I-139) sont également différents ($h_{\text{radial}}=23,7 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$, $h_{\text{longitudinal}}=18 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$). Au départ le champ d'humidité est plat est égal à l'humidité initiale du produit. Au cours du temps ce champs prend la forme d'un "nid" centré sur l'axe de la pastille d'argile. Vers la fin il s'aplatit de nouveau et tend vers une humidité inférieure de sorte à avoir l'humidité d'équilibre (donnée par les isothermes) sur tout le produit.



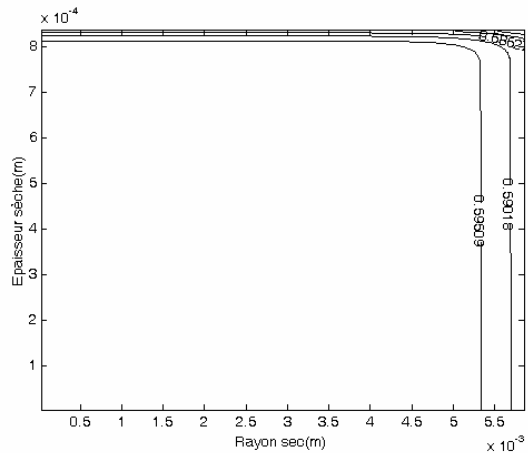
20s



20s



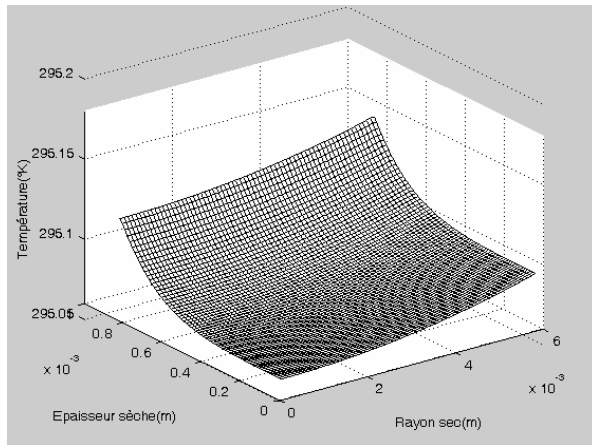
60s



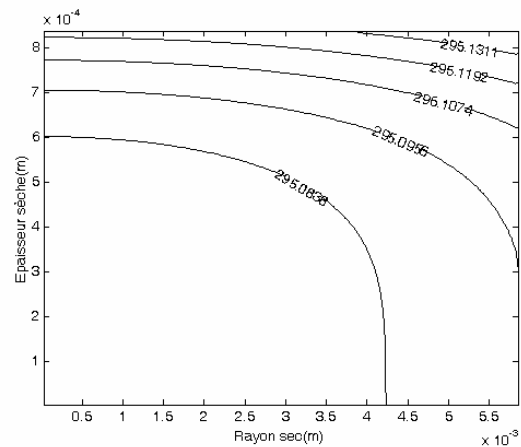
60s

I-3-2-5-2. Distribution de la température

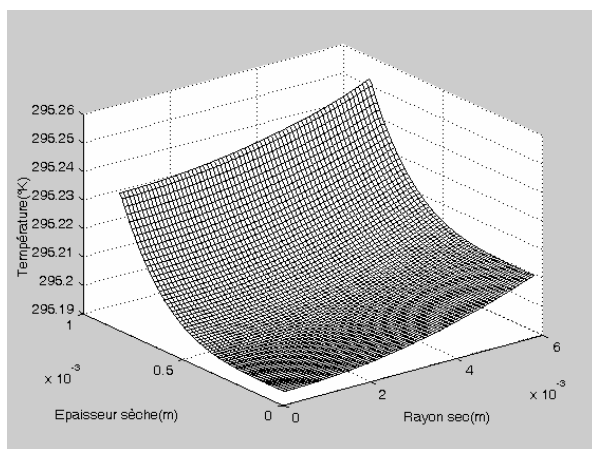
La figure (I. 44) présente la distribution de la température dans l'échantillon en fonction du temps de séchage. On constate que le gradient de température est très faible, ce qui traduit le fait que le transfert de matière interne est limitant. La température du matériau augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur constante qui correspond, dans le cas de séchage convectif, à la température de l'air séchant.



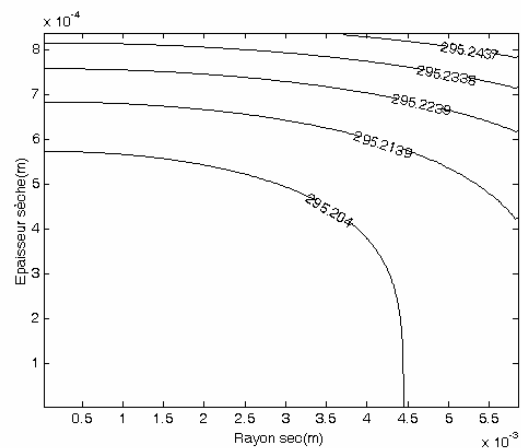
20s



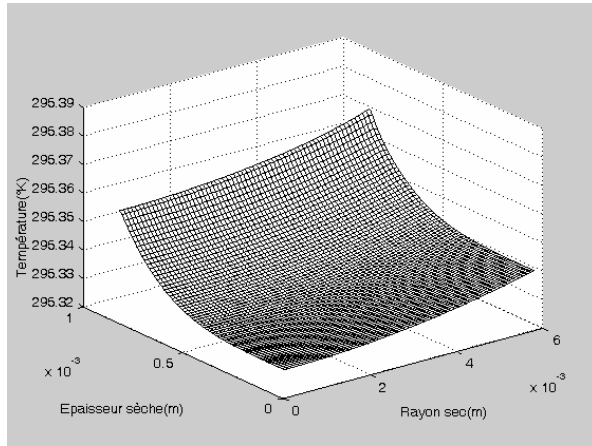
20s



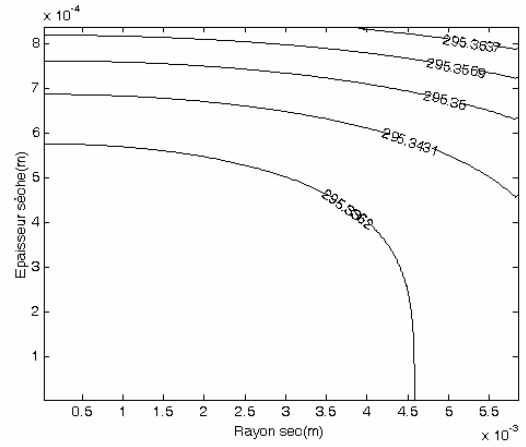
60s



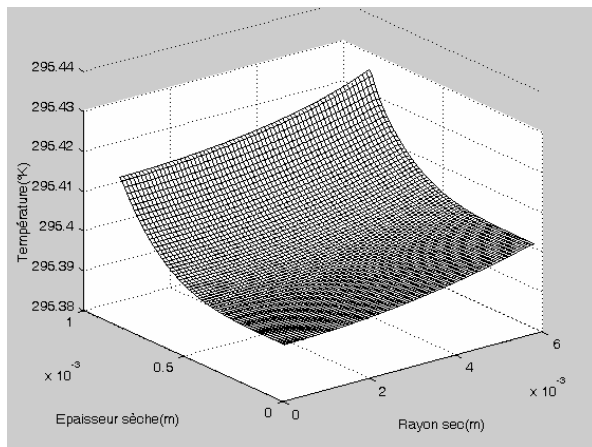
60s



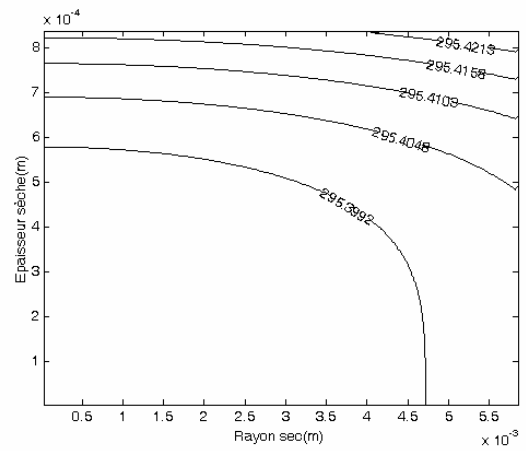
120s



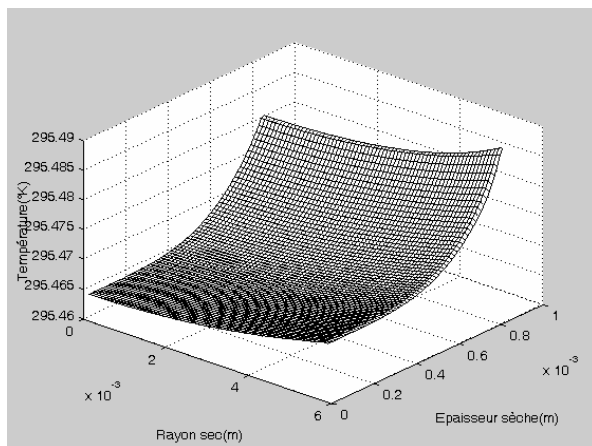
120s



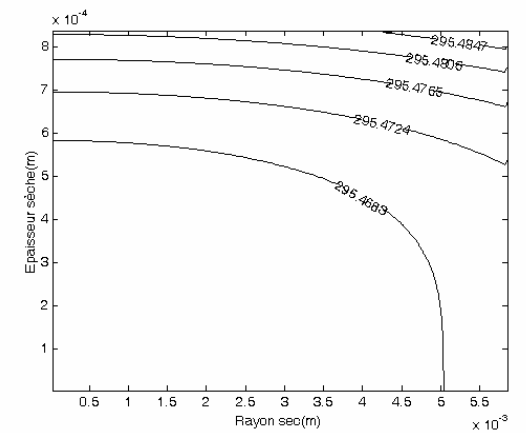
160s



160s



220s



220s

Figure I. 44: Champ de température ($T_a=40^\circ\text{C}$, $HR=20\%$, $v_a=2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

I-3-3 Conclusion

Cette partie du travail permet d'évaluer le modèle développé précédemment pour deux configurations : unidirectionnelle et bidirectionnelle.

Ce modèle permet de calculer l'évolution de la température et de la teneur en eau locale ou moyenne, tout en tenant compte du déplacement du milieu.

La validité du code a été testée pour le cas du kaolin par confrontation de certaines données issues du calcul avec des résultats expérimentaux. Le travail effectué fournit par conséquent un outil prospectif qui peut s'avérer intéressant pour l'analyse locale du comportement des matériaux au cours du séchage.

Références

- Bogdanis E., Modélisation des transports de chaleur et de matière lors du séchage d'un milieu élastique ou viscoélastique. Résolution par des méthodes aux éléments finis, *Université de Pau et des Pays de l'Adour*, (2001).
- Jomaa W. et Puiggali J. R., Drying of shrinkage materials: modelling with shrinkage velocity, *Drying Technology*, Vol. 9, (1991).
- Mercier F., Séchage de gel d'alumine : maîtrise de la texture de supports de catalyseurs, thèse de doctorat, *Université de Pau et des Pays de l'Adour*, (1996).

Partie II : filtration-compression

Chapitre II-1

ANALYSE DE LA DESHYDRATATION MECANIQUE

La déshydratation mécanique par filtration-compression représente souvent un moyen plus économique que le séchage pour extraire la phase liquide dans un produit. Cette opération, bien que largement utilisée dans l'industrie, est du fait de la complexité assez difficile à caractériser et l'approche expérimentale reste souvent privilégiée. Plusieurs études de modélisation sont proposées dans la littérature mais certains points restent encore mal solutionnés notamment dans le cas des matériaux fortement compressibles. L'idée de notre étude est d'utiliser certaines approches développées pour la modélisation du séchage et essayer de faire évoluer les modèles dédiés à la filtration-compression. Ce chapitre présente une revue bibliographique largement orientée sur les aspects de modélisation afin de mettre en avant les équations et les conditions aux limites classiquement utilisées, ainsi que les aspects sujets à discussion.

II-1-1	DESCRIPTION GENERALE.....	116
II-1-2	MISE EN EQUATION DU PROBLEME DE FILTRATION/COMPRESSION	116
	116	
II-1-2-1.	Théorie de Ruth	117
II-1-2-2.	Equations de bilan	119
II-1-2-2-1.	Equation de continuité	120
II-1-2-2-2.	Equation de quantité de mouvement	121
II-1-2-2-2-1.	Approches microscopiques	121
II-1-2-2-2-2.	Approches prise de moyenne	123
II-1-2-2-2-3.	Approche diffusive	126
II-1-2-2-3.	Loi de Darcy.....	128
II-1-2-2-4.	Comportement mécanique du milieu	128
II-1-2-2-4-1.	Approche empirique / Equations constitutives	129
II-1-2-2-4-2.	Analogies rhéologiques	130
II-1-2-3	Conditions aux limites et initiales	133
II-1-2-3-1	Phase de la filtration.....	133
II-1-2-3-2.	Phase de la compression	134
II-1-3.	CONCLUSION	135
II-1-4.	REFERENCES.....	136

II-1-1 Description générale

La déshydratation mécanique par pressage associe généralement deux étapes : la filtration et la compression. Durant la première phase (filtration) les particules solides se déposent et sont stoppées par le media filtrant (Figure II-1). Leur accumulation se traduit par la formation d'un gâteau (F1). Ce gâteau, constitué de matières solides agglomérées et d'eau, forme un milieu poreux non consolidé ayant une concentration élevée en matière sèche par rapport à la suspension initiale.

Le piston, quant à lui, descend progressivement, et le gâteau augmente de volume jusqu'à remplir totalement la chambre de la cellule (C1). Du filtrat peut ensuite être extrait par compression du gâteau formé. Cette étape dite de "compression" peut évoluer jusqu'à un état d'équilibre (C₂) pour lequel il n'y a plus d'écoulement de filtrat, le gâteau atteint à ce stade sa concentration maximale (siccité limite).

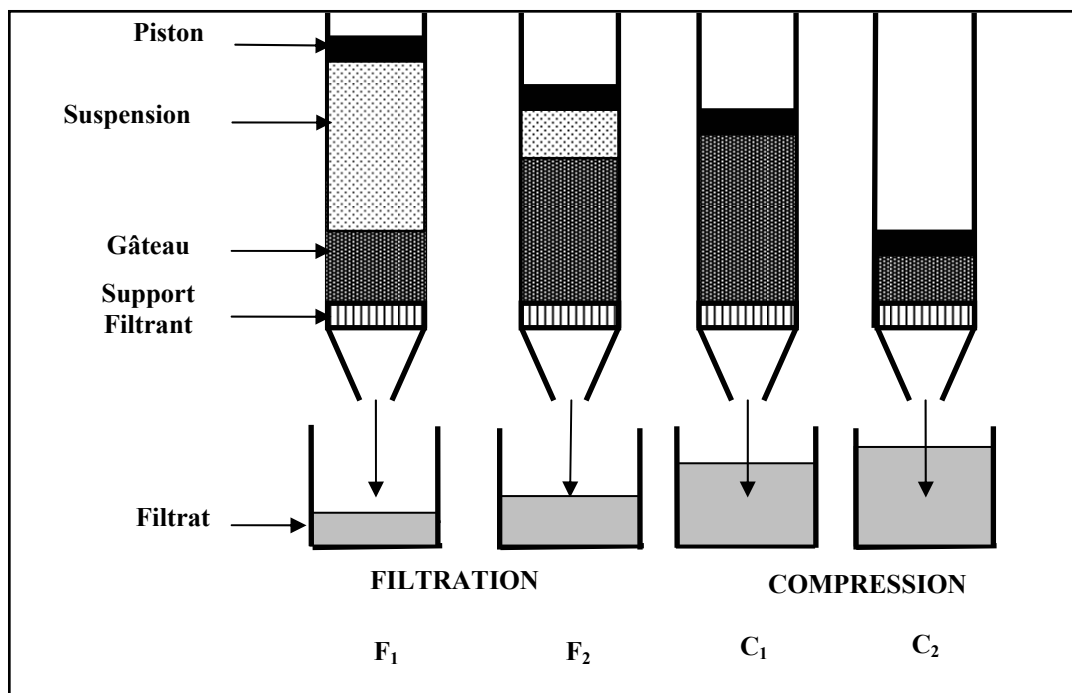


Figure II- 1: Etapes successives de la déshydratation mécanique

II-1-2 Mise en équation du problème de filtration/compression

Plusieurs chercheurs, à travers leurs publications, ont essayé de décrire mathématiquement les procédés de filtration et de compression. Les travaux de Ruth et col. (1933a, b), sont classiquement considérés comme les premières études de référence dans ce domaine. Ils servent de base à l'élaboration de modèles globaux établis à partir de mesures expérimentales. Depuis les années 70 et notamment avec les travaux de Tiller (1975) et Wakeman (1978) des modèles basés sur des

équations de bilan locales permettent de décrire le processus en s'appuyant sur une approche plus physique des phénomènes. Cette approche permet de mieux décrire le comportement et la structure des gâteaux. De plus elle a permis de proposer une modélisation de la phase de compression (non caractérisée par l'équation de Ruth) notamment avec le modèle de référence de Shirato et col. (1986). De façon générale les modèles dits de Ruth et de Shirato permettent une caractérisation globale respectivement des phases de filtration et de compression et leur intérêt à l'échelle industrielle, par exemple pour des dimensionnements, est largement admis. En revanche dans certaines conditions particulières (par exemple le cas de matériaux fortement compressibles) ils ne sont plus vraiment adaptés. La mise en place de modèles plus "locaux" doit permettre de mieux décrire ces cas spécifiques. L'intérêt d'une telle approche est également de lever une partie de l'empirisme qui s'applique pour la description de ces procédés de séparation.

II-1-2-1. Théorie de Ruth

Les premiers travaux d'analyse de l'opération de filtration à pression constante ont débuté par une constatation expérimentale : le volume de filtrat recueilli et le temps sont liés par une relation parabolique. En effectuant un grand nombre d'essais expérimentaux Ruth et col. (1933a, b) corrèlent leurs résultats avec la relation :

$$(V + V_0)^2 = CR(t + t_0) \quad \text{Eq II- 1}$$

Ruth (1935) a montré que cette équation est capable de décrire le comportement en filtration pour divers matériaux, indépendamment de leur degré de compressibilité. Cette équation a servi de base pour de nombreuses études de filtration.

L'approche de Ruth se base sur la loi de Darcy, qui relie le débit du liquide à travers un milieu poreux à la chute de pression qui est la cause principale de l'écoulement :

$$u_1 = \frac{k\Delta P}{\mu_v L} \quad \text{Eq II- 2}$$

ΔP = la chute de pression à travers un milieu de hauteur L

La vitesse du liquide s'écrit alors :

$$u_1 = \frac{1}{A_f} \frac{dV}{dt} \quad \text{Eq II- 3}$$

Le rapport (L/k) est couramment appelé résistance à la filtration et noté R_f ; d'où $R_f = \frac{L}{k}$

De façon globale la résistance à la filtration représente la résistance due au media filtrant (noté R_m) et celle induite par l'accumulation des couches de gâteau à la surface de ce dernier (R_g).

D'où :

$$R_f = \frac{L}{k} = R_m + R_g \quad \text{Eq II- 4}$$

En combinant les équations (II-2), (II-3) et (II-4) on obtient :

$$\frac{1}{A_f} \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{\mu_v (R_m + R_g)} \quad \text{Eq II- 5}$$

Si le gâteau est incompressible, la résistance hydraulique du gâteau (R_g) est directement proportionnelle à la masse totale de solide dans le gâteau (m_s) et inversement proportionnelle à l'aire du filtre (A_f).

$$R_g = \alpha \frac{m_s}{A_f} \quad \text{Eq II- 6}$$

Cette résistance peut être aussi exprimée sous la forme :

$$R_g = \alpha w_g \frac{V}{A_f} \quad \text{Eq II- 7}$$

où α et w_g représentent respectivement la résistance spécifique du gâteau et la masse du gâteau sec déposé par unité de volume de filtrat.

Ainsi en substituant l'équation (II-6) dans (II-5) il vient :

$$\frac{1}{A_f} \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{\mu_v \left(\alpha w_g \frac{V}{A_f} + R_m \right)} \quad \text{Eq II- 8}$$

Sachant qu'au départ de la filtration ($t = 0$), le volume de filtrat est nul ($V = 0$), l'équation II-8 s'écrit après intégration (à pression constante) sous la forme :

$$\frac{t}{V} = \frac{\mu_v \alpha w_g}{2 A_f^2 \Delta P} V + \frac{\mu_v R_m}{A_f \Delta P} \quad \text{Eq II- 9}$$

L'utilisation de cette équation avec des données de filtrations (figure II-2) permet d'évaluer durant la phase de filtration la résistance spécifique à la filtration (α_m) et la résistance du support (R_m) en fonction de la pression imposée.

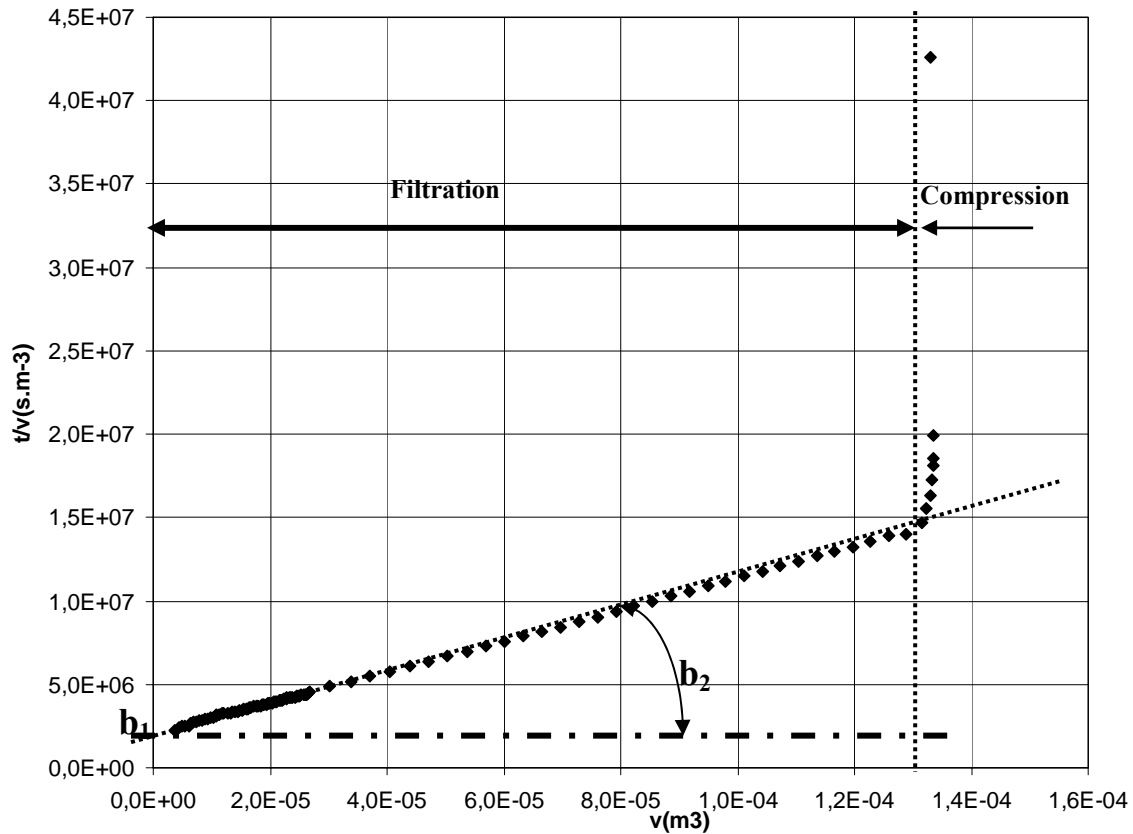


Figure II- 2: courbe caractéristique de la filtration

$$(b_2 = \frac{\mu_v \alpha_m W_g}{2A_f^2 \Delta P}, \quad b_1 = \frac{\mu_v R_m}{A_f \Delta P})$$

Cette relation est normalement valable que pour des gâteaux incompressibles et une résistance de media filtrant constante (Tiller, 1975 ; Akers et Ward, 1977). Meeten (2000) a noté que la validité de l'équation de Ruth pour les matériaux compressibles et incompressibles n'est pas rigoureuse. D'autres chercheurs (Tiller et Leu, 1983 ; Hosten et San, 1999) ont également montré que la résistance du média filtrant évolue au cours de la filtration à cause du phénomène de colmatage, ce qui contre dit l'hypothèse de Ruth, 1933 (a, b). Cependant, malgré les critiques, cette équation reste la plus utilisée à l'échelle industrielle pour la caractérisation de la filtrabilité des suspensions ainsi que pour le dimensionnement de certains filtres.

II-1-2-2. Equations de bilan

L'approche de Ruth reste une approche globale essentiellement dédiée à la phase de filtration. Elle ne décrit pas la phase de compression et ne permet pas de décrire réellement l'évolution du gâteau. Pour remédier à cela, plusieurs équipes ont proposé des modèles basés sur une écriture plus locale des équations de bilan.

II-1-2-2-1. Equation de continuité

L'équation de continuité ou de conservation de masse est généralement déterminée par un bilan microscopique ou par la technique de prise de moyenne. Dans le cadre de notre travail l'approche par bilan microscopique sera privilégiée.

Ainsi dans le cas unidirectionnel les équations de continuité peuvent s'écrire :

$$\left(\frac{\partial q_l}{\partial z}\right)_t = \left(\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}\right)_z \text{ phase liquide} \quad \text{Eq II- 10}$$

$$\left(\frac{\partial q_s}{\partial z}\right)_t = \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t}\right)_z \text{ phase solide} \quad \text{Eq II- 11}$$

où ε_s est la fraction volumique solide ($=1-\varepsilon_l$).

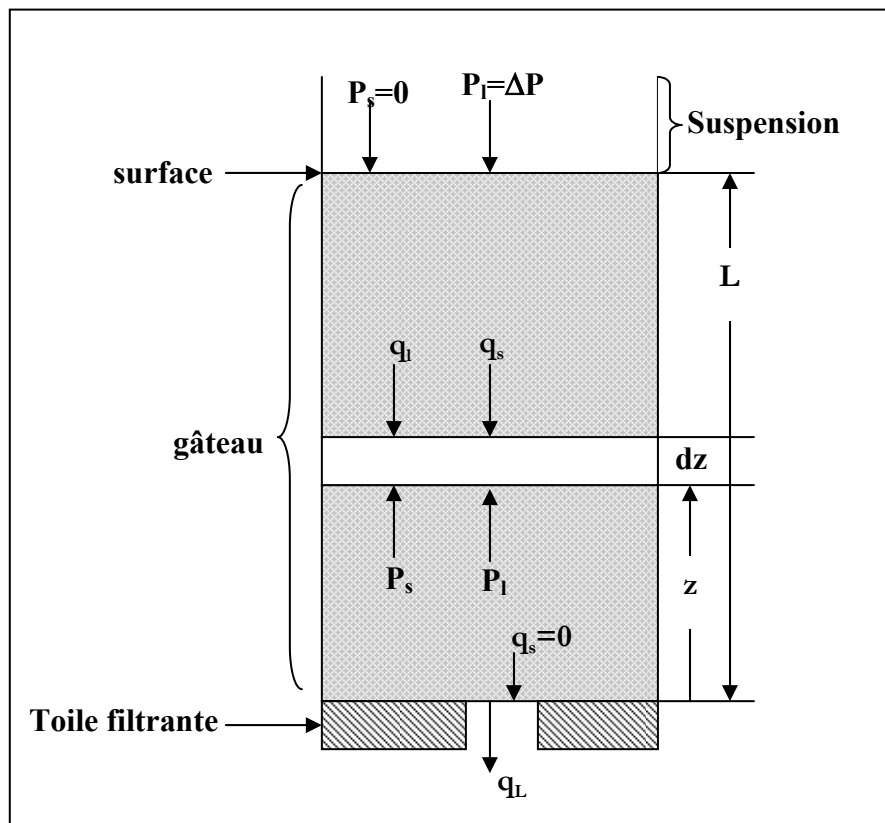


Figure II- 3: Phase filtration

Le domaine global pris en considération inclue tout le gâteau. $z=0$ indique la surface filtrante et $z=L$ représente la surface du gâteau. Par ailleurs $\varepsilon_l + \varepsilon_s = 1$ (par définition), d'où les équations (II-10) et (II-11) peuvent se résumer en une seule équation sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial q_l}{\partial z} + \frac{\partial q_s}{\partial z} = 0 \quad \text{Eq II- 12}$$

Sous forme intégrale, cette équation devient :

$$q_l(z, t) + q_s(z, t) = q_L(t) \quad \text{Eq II- 13}$$

Par l'approche de prise de moyenne, Willis et Tosun (1980) arrivent à un résultat similaire en considérant : $\langle u_l \rangle = q_l(z, t)$ et $\langle u_s \rangle = q_s(z, t)$

II-1-2-2-2. Equation de quantité de mouvement

Dans la littérature plusieurs approches ont été utilisées pour appréhender le problème de la conservation de la quantité de mouvement. Les trois principales démarches semblent être l'approche microscopique, la prise de moyenne et l'approche rhéologique.

II-1-2-2-2-1. Approches microscopiques

Tiller et ses collaborateurs (Tiller et Crump, 1977 ; Tiller et Horng, 1983, Tiller et Leu, 1980) supposent, dans la formulation des bilans de forces, que le liquide enrobe chaque particule et que toutes les particules sont reliées par des points de contact formant alors une sorte de squelette solide. Ainsi la pression liquide est uniforme le long d'une section normale à l'écoulement. L'intégration de cette pression sur toute la surface donne la force de traînée alors que les contraintes tangentielles donne naissance aux forces de frottement. Grâce à cette hypothèse de contact ponctuel des particules et en définissant une membrane fictive qui ne traverse aucune particule ces chercheurs peuvent écrire un bilan de force sur les deux phase en présence. En supposant que les irrégularités des membranes sont négligeable par rapport à l'échelle du gâteau (et en négligeant l'effet de la pesanteur) ils écrivent que :

$$F_s + AP_1 = AP_{app} \quad \text{Eq II- 14}$$

avec P_{app} la pression appliquée (qui ne varie qu'en fonction du temps), F_s la force transférée entre les particules (hypothèse du point de contact) et P_1 la pression hydraulique sur la section A.

En divisant l'équation (II-14) part A, une "pression solide" $P_s = F_s/A$ est définie, il vient alors :

$$P_s + P_1 = P_{app} \quad \text{Eq II- 15}$$

Mais la surface A et la surface de passage elle n'est pas égale à la surface de contact entre particule qui est généralement négligeable dans la théorie de filtration. Donc P_s est une « pression fictives » mais la valeur réel de la pression $P_s = F_s/A_c$ avec A_c et la surface de contact entre particules solides la dérivé de l'équation (II-15) nous mène à :

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\partial P_s}{\partial z} = 0 \quad \text{Eq II- 16}$$

Cette équation est la plus utilisée, en filtration et compression, pour la formulation du bilan de forces. Cependant l'hypothèse des points de contact reste discutée par certains nombres de

chercheurs, ainsi d'autres études proposent d'aborder le problème à partir de l'équation de quantité de mouvement écrite à l'échelle microscopique pour chaque phase :

De façon générale la conservation de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\underbrace{\rho \frac{d}{dt}(\vec{u})}_{\text{Terme d'inertie}} = \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{Forces volumiques}} + \underbrace{\vec{\text{div}}(\boldsymbol{\pi})}_{\text{Forces surfaciques}} \quad \text{Eq II- 17}$$

Dans la plupart des études sur la filtration-compression l'effet d'inertie et l'accélération pour la phase liquide sont négligés (La Heij, 1994). Ceci a été confirmé par une étude adimensionnelle réalisées par Willis et col. (1983). Ainsi l'équation (II-16) peut simplement s'écrire pour la phase liquide :

$$\rho_l \vec{g} + \vec{\text{div}}(\boldsymbol{\pi}_l) = \vec{0} \quad \text{Eq II- 18}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\pi}_l$ englobe alors les contraintes exercées par la phase solide sur le liquide (P_{fs}), les contraintes visqueuses ($\boldsymbol{\tau}_l$), la pression exercée par les parois du dispositif (cellule de filtration compression) sur le liquide (P_{pl}) et la pression liquide P_l . Il s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\pi}_l = \varepsilon_l P_l \mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}_l + (P_{pl} + P_{fs}) \mathbf{1} \quad \text{Eq II- 19}$$

De même l'équation (II-17) appliquée à la phase solide avec les mêmes hypothèses

$$\rho_s \vec{g} + \vec{\text{div}}(\boldsymbol{\pi}_s) = \vec{0} \quad \text{Eq II- 20}$$

avec :

$$\boldsymbol{\pi}_s = (P_s + \varepsilon_s P_l + P_{fsl} + P_{ps}) \mathbf{1} \quad \text{Eq II- 21}$$

P_s représente les forces exercées par unité de surface par les particules solides entre elles, P_l la pression exercée par le liquide, P_{fsl} les forces de frottement exercées par unité de surface par le fluide sur le solide et P_{ps} les forces par unité de surface entre le solide et les parois du dispositif.

En tenant compte des hypothèses suivantes :

- ✓ forces de frottement avec les parois du dispositif négligeables. Koenders et Wakeman (1996) montrent en effet que si le rapport de la hauteur de la cellule sur son diamètre est supérieur à l'unité l'effet de paroi est négligeable pendant la phase de filtration. Pour la phase de compression l'effet de paroi peut être négligé pour un rapport hauteur de cellule sur diamètre inférieur à 0,6 (Tiller et col., 1972, Tiller et Lu, 1972, Teoh et col, 2002.
- ✓ Les forces visqueuses au sein du fluide sont négligeables.

En additionnant l'équation (II-18) et l'équation (II-20) pour obtenir la quantité de mouvement totale au sein du gâteau il vient :

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} + \frac{\partial P_l}{\partial z} + (\rho_l \varepsilon_l + \rho_s \varepsilon_s) g = 0 \quad \text{Eq II- 22}$$

avec pour forme intégrée :

$$P_s(z, t) + P_l(z, t) + (\rho_l \varepsilon_l + \rho_s \varepsilon_s) g L(t) = P_{app}(t) \quad \text{Eq II- 23}$$

Il est également , dans les problèmes de filtration, habituel de négliger les forces de gravité (Lee et Wang, 2000), dès lors l'équation de quantité de mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} + \frac{\partial P_l}{\partial z} = 0 \quad \text{Eq II- 24}$$

où P_l et P_s représentent des pressions moyennes pour une section donnée.

II-1-2-2-2-2. Approches prise de moyenne

L'approche de Tiller et l'équation (II-24) ont largement été critiquées par Willis et son équipe qui proposent à travers une série de publications une formulation, à leurs yeux plus rigoureuse, basée sur la prise de moyenne (Willis et col.1974, 1983, 1985, 1991 ; Willis et Tosun, 1980 ; Tosun et Willis, 1981, 1982, 1983; Willis, 1986 ; Tosun, 1986a, b ; Chase et Willis, 1992 ; Tosun et col., 1993, 1995). Le modèle général utilisé par ces chercheurs est essentiellement détaillé dans l'article de Willis et Tosun (1980). Willis et Tosun (1980) expriment sous la forme d'une quantité de mouvement transférée de la phase liquide vers la phase solide (le frottement entre ces deux phases). Cette quantité est donnée par l'intégration sur l'interface liquide-solide du tenseur de contrainte liquide.

$$F_l = \underbrace{\frac{1}{V} \int_{A_{ls}} (P_l \mathbf{1}) \cdot \vec{n}_{ls} dA}_{\text{Force de traînée}} + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{A_{ls}} (\boldsymbol{\tau}_l) \cdot \vec{n}_{ls} dA}_{\text{Force visqueuse}} \quad \text{Eq II- 25}$$

Par ailleurs ils supposent que la pression moyenne le long de la surface liquide-solide est constante et que la force de traînée peut être exprimée sous la forme :

$$F_b = \frac{1}{V} \int_{A_{ls}} (P_l \mathbf{1}) \cdot \vec{n}_{ls} dA = \bar{P}_l^{ls} \int_{A_{ls}} \vec{n}_{ls} dA \quad \text{Eq II- 26}$$

ils montrent également que :

$$\frac{1}{V} \int_{A_{ls}} \vec{n}_{ls} dA = -\overrightarrow{\text{grad}}(\varepsilon_l) \quad \text{Eq II- 27}$$

Par ailleurs, Whitaker (1969) a montré, sous certaines hypothèses, que la surface moyenne peut être considérée par le volume moyen, d'où $\bar{P}_1^{ls} = \langle P_1 \rangle^l$

La force de frottement peut alors s'écrire :

$$F_1 = F_d - \langle P_1 \rangle^l \overrightarrow{\text{grad}}(\varepsilon_1) \quad \text{Eq II- 28}$$

L'analyse adimensionnelle réalisée par Willis et col. (1983) montre que les forces qui caractérisent la phase liquide en écoulement dans le gâteau, se résument aux pressions et aux forces de traînée.

L'équation de quantité de mouvement peut alors s'exprimer sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\langle \boldsymbol{\pi}_1 \rangle) + \bar{F}_1 - \langle \rho_1 \rangle \bar{g} = \bar{0} \quad \text{Eq II- 29}$$

En utilisant l'hypothèse que g dérive d'un potentiel ($\bar{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$) et que les forces de surface entre fluide-fluide sont négligeables, il vient d'après l'étude de Willis et col. (1983) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\langle P_1 \rangle^l) + \frac{1}{\varepsilon_1} \bar{F}_d = \bar{0} \quad \text{Eq II- 30}$$

Avec $\langle P_1 \rangle^l$: la pression piezométrique

L'équation (II-30) est en fait similaire à l'équation locale de Darcy, qui indique que le gradient de pression est égal aux forces de frottement par unité de volume.

Pour la phase solide le terme de contrainte est explicité de la façon suivante :

$$\langle \boldsymbol{\pi}_s \rangle = \underbrace{\varepsilon_s \langle P_1 \rangle^l}_{\text{Force de réaction à la déformation de la phase solide}} \mathbf{1} + \underbrace{\langle \boldsymbol{\tau}_s \rangle}_{\text{Force de contact dans la phase solide}} \quad \text{Eq II- 31}$$

A l'échelle du volume élémentaire Tosun et col. (1995) considèrent la continuité entre les phases liquide et solide. L'ensemble peut avoir un comportement élastique ou viscoélastique ou celui d'un fluide visqueux (si les particules solide sont indéformables) c'est à dire sous forme d'une boue très diluée.

En utilisant des hypothèses et des mêmes similaires à celles utilisées pour le fluide, la quantité de mouvement de la phase solide s'écrit :

$$\underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(\langle P_1 \rangle^l)}_1 + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_s} \overrightarrow{\text{div}}(\langle \boldsymbol{\tau}_s \rangle)}_2 - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_s} \bar{F}_d}_3 - \underbrace{(\rho_s - \rho_l) \bar{g}}_4 = \bar{0} \quad \text{Eq II- 32}$$

1 : force de pression

2 : force inter-solide

3 : force de frottement visqueux

4 : forces liées à la pesanteur

On remarque que les forces de frottement visqueux sont de signes opposés, par conséquent la quantité de mouvement perdue par l'une des phases est récupérée par l'autre. La quantité de mouvement totale du gâteau est obtenue par l'addition des quantités de mouvement de chacune des phases.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\langle P_1 \rangle^1) + \overrightarrow{\text{div}}(\langle \tau_s \rangle) - (\varepsilon_s \rho_s + \varepsilon_1 \rho_1) \vec{g} = \vec{0} \quad \text{Eq II- 33}$$

En tenant compte de la continuité de la pression $\langle P_1 \rangle$ à l'interface gâteau/suspension, et du fait que les particules solides dans la suspension ne sont pas en contact et donc qu'il n'y a pas des forces surfaciques (contrainte inter-particule nulle) par conséquent la limite de τ_s quant z tend vers L est nul. L'intégration de l'équation (II-33) sur le gâteau s'écrit :

$$\langle \tau_s \rangle_{zz}(z, t) = P_{\text{app}}(t) - \langle P_1 \rangle^1(z, t) \quad \text{Eq II- 34}$$

Ceci indique que la majeure partie des forces inter-particule est due à la chute de pression (en négligeant l'impact de la pesanteur) à travers le gâteau.

Dans les travaux de Ruth (1946) les contraintes inter-particule $\langle \tau_s \rangle_{zz}$ sont appelées contrainte ou force de frottement-entraînement et correspondent aux contraintes de compressions couramment définies en mécanique des sols. La dérivation de l'équation précédente donne l'équation (II-24) qui est généralement utilisée dans la littérature (Tiller, 1953, 1966 ; Tiller et Huang, 1961 ; Tiller et col., 1972, Tiller et Yeh, 1987) en assimilant $\langle \tau_s \rangle_{zz}$ à P_s .

En négligeant la gravité dans le cas unidirectionnel l'équation (II-30) donne :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} F_d = \frac{\partial \langle P_1 \rangle^1}{\partial z} \quad \text{Eq II- 35}$$

Willis et Tosun (1980) ont défini un potentiel scalaire $\langle \sigma_s \rangle^s$ tel que:

$$\vec{F}_d = \overrightarrow{\text{grad}}(\langle \sigma_s \rangle^s) \quad \text{Eq II- 36}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\langle \sigma_s \rangle^s) = \varepsilon_1 \overrightarrow{\text{grad}}(\langle P_1 \rangle^1) \quad \text{EqII- 37}$$

Sous sa forme unidirectionnelle cette équation rejoint l'équation (II-37) dans le cas où $\varepsilon_1=1$. Ainsi Willis et Tosun (1980) considèrent que les travaux reposant sur l'équation (II-24) (c'est à dire une

grande partie des recherches menées en filtration–compression) traitent d'un cas particulier et peuvent conduire à des résultats erronés. Récemment Tien et col. (2001, 2004) ont repris ce débat et indiquent, en se basant sur les travaux de Rietma (1982) que les divergences viennent de la façon dont est réalisée la prise de moyenne. Ainsi l'équation (II-35) peut être écrite sous différentes formes :

$$\frac{\partial P_l}{\partial P_s} = -f' \quad \text{Eq II- 38}$$

avec :

$$f' = 1 \quad \text{cas de l'équation (II-24)}$$

$$f' = \frac{1}{(1 - \varepsilon_s)} \quad \text{cas de l'équation (II-37)}$$

$$f' = \frac{\varepsilon_s}{(1 - \varepsilon_s)} \quad \text{équation démontrée par Lee et Wang. (2000) avec l'hypothèse de porosité uniforme}$$

$$f' = -\frac{\varepsilon_s}{(1 - \varepsilon_s)} - \frac{(1 - \varepsilon_s^0) P_{app} - P_s}{(1 - \varepsilon_s)^2} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial P_s} \quad \text{cas d'une porosité variable}$$

avec P_{app} la pression appliquée et ε_s^0 la valeur de ε_s à $P_s=0$.

II-1-2-2-2-3. Approche diffusive

Une troisième approche est proposée dans la littérature pour traiter la conservation de la quantité de mouvement. Elle considère le gâteau comme un réseau (interconnecté) possédant une "pression compressive seuil ".

Dans ce cas, après avoir négliger les forces de gravité, le terme d'inertie, les forces de cisaillement et les forces exercées par la paroi, le bilan de forces s'écrit (Landman et col., 1991 ; Landman et White, 1992 ; Landman et col., 1995) pour la phase solide :

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \frac{dP_y(\varepsilon_s)}{d\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = -\frac{\lambda_s \varepsilon_s r(\varepsilon_s)}{V_p (1 - \varepsilon_s)} (u_s - u_l) \quad \text{Eq II- 39}$$

et pour la phase liquide :

$$\frac{\partial P_l}{\partial z} = \frac{\lambda_s \varepsilon_s r(\varepsilon_s)}{V_p (1 - \varepsilon_s)} (u_s - u_l) \quad \text{Eq II- 40}$$

avec λ_s un coefficient de frottement de Stokes et V_p le volume des particules d'un agrégat. Ici, $r(\varepsilon_s)$ est utilisé pour évaluer la perméabilité en tenant compte des interactions hydrodynamiques qui augmentent avec la concentration du solide (Landman et col., 1995). Ces interactions limitent le

transport du solide et de liquide et $r(\varepsilon_s)$ tend vers l'infini quand la ε_s tend vers 1. Au début ce concept de $r(\varepsilon_s)$ a été utilisé pour la sédimentation mais plus tard il a été transposé à la filtration où il quantifie le frottement généré par un fluide qui passe au sein d'un milieu poreux (gâteau).

Le comportement mécanique du gâteau est décrit en se basant sur les travaux de Buscall et White (1987) qui considèrent l'équation constitutive suivante (parfois appelée équation cinétique) :

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt} = \begin{cases} 0 & P_s \leq P_y(\varepsilon_s) \\ K(\varepsilon_s)(P_s - P_y(\varepsilon_s)) & P_s > P_y(\varepsilon_s) \end{cases} \quad \text{Eq II- 41}$$

Le problème est ici caractérisé par la contrainte seuil de compression ($P_y(\varepsilon_s)$), et une fonction $Dl(\varepsilon_s)$.

La contrainte $P_y(\varepsilon_s)$, définie comme étant une fonction implicite des forces inter-particulaires et de l'historique du cisaillement est une fonction explicite de la porosité. Lorsque la contrainte exercée sur le solide (P_s) dépasse la contrainte seuil $P_y(\varepsilon_s)$ le réseau (gâteau) se réorganise instantanément pour former une structure dont la porosité permet d'avoir $P_y(\varepsilon_s) = P_s$. Ceci revient à négliger l'aspect dynamique et donc à considérer le problème de façon élastique. Le comportement mécanique est alors couramment caractérisé grâce à une grandeur appelée module de compression qui relie P_y et ε_s :

$$K(\varepsilon_s) = \frac{dP_y(\varepsilon_s)}{d \ln(\varepsilon_s)}$$

Enfin la notion de perméabilité du milieu est, dans cette approche, généralement décrite par une diffusivité $Dl(\varepsilon_s)$, cette grandeur est reliée à $r(\varepsilon_s)$ et $K(\varepsilon_s)$

$$Rl(\varepsilon_s) = \frac{\lambda_s}{V_p} r(\varepsilon_s) = \frac{2}{d\beta^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_{s0}} - \frac{1}{\varepsilon_{s\infty}} \right) (1 - \varepsilon_{s\infty})^2 \quad \text{Eq II- 42}$$

La valeur exact du rapport λ_s / V_p est généralement inconnue, tout comme la taille des floccs.

Ainsi le terme $Rl(\varepsilon_s)$ dans l'équation précédente est généralement traduit en terme de diffusivité $Dl(\varepsilon_s)$. Cette dernière pouvant être obtenue, d'après Landman et col. (1999) par :

$$Dl(\varepsilon_{s\infty}) = \frac{dP_y(1 - \varepsilon_{s\infty})^2}{d\varepsilon_s R(\varepsilon_{s\infty})} \quad \text{Eq II- 43}$$

ou

$$Dl(\varepsilon_{s\infty}) = \frac{1}{2} \frac{d\beta^2}{d\varepsilon_{s\infty}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{s0}} - \frac{1}{\varepsilon_{s\infty}} \right)^{-1} \quad \text{Eq II- 44}$$

II-1-2-2-3. *Loi de Darcy*

Une donnée essentielle pour la résolution des problèmes de filtration-compression est la perméabilité du gâteau. Cette grandeur est largement liée à la loi de Darcy qui est souvent utilisée pour caractériser les écoulements laminaires dans les milieux poreux (Jonsson et Jonssen, 1992a, b).

$$q_1 = \varepsilon_1 u_1 = \frac{k}{\mu_v} \frac{dP_1}{dz} \quad \text{Eq II- 45}$$

Dans le cas de la filtration sur support il est fréquent d'utiliser la résistance spécifique (définie précédemment) et de se placer en coordonnées matérielles (car la hauteur du gâteau varie au cours du temps) $dw_m = \rho_s (1 - \varepsilon_1) dz$, ainsi la loi de Darcy s'écrit :

$$\varepsilon_1 u_1 = \frac{1}{\mu_v \alpha} \frac{dP_1}{dw_m} \quad \text{Eq II- 46}$$

Pour le cas particulier des gâteaux en consolidation (ou en compression), Shirato et col. (1969, 1970) et Shirato et Arakagi (1972) ont modifié la loi originale de Darcy (pour laquelle le solide est immobile) en introduisant une vitesse relative :

$$\frac{dP_1}{dw_m} = \mu_v \alpha \varepsilon_1 (u_1 - u_s) \quad \text{Eq II- 47}$$

Le problème physique essentiel est maintenant de savoir comment évolue la résistance spécifique (ou la perméabilité) et la porosité dont elle dépend, avec la "structuration" du gâteau ; ces trois variables étant reliées par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{1}{\rho_s k \varepsilon_s} \quad \text{Eq II- 48}$$

II-1-2-2-4. *Comportement mécanique du milieu*

L'étude du comportement mécanique du gâteau a pour but principal de relier la porosité avec les contraintes appliquées. Ceci permet de solutionner une partie de la question précédente ; la relation entre la porosité du milieu et la perméabilité étant l'autre aspect du problème. Dans de nombreux travaux, notamment ceux de Tiller (1953, 1955, 1958), Tiller et Cooper (1960, 1962) Tiller et Shirato (1964), Tiller et Lu (1972), Tiller et col. (1972, 1995), Tiller et Green (1973), Tiller et Yeh (1985, 1987) et Wakeman et col. (1991) la perméabilité, la résistance spécifique et la porosité sont estimées empiriquement, en fonction de P_s , à partir d'expériences menées en

cellule de filtration perméabilité (Tiller et Horng, 1983 ; Willis et col., 1985). Cette méthode reste cependant critiquable sur certains aspects (Stamatakis et Tien, 1991)

II-1-2-2-4-1. *Approche empirique / Equations constitutives*

Les formulations les plus couramment utilisées pour relier ces paramètres restent les relations empiriques suivantes (Lee et Wang, 2000)

$$\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}\right)^{1/\beta} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{1/\eta} = \left(\frac{k}{k_0}\right)^{-1/\delta} = a + \frac{P_s}{P_a} \quad \text{Eq II- 49}$$

Où β , η , δ , P_a , ε_s^0 , k_0 et α_0 des constantes empiriques.

Les valeurs η et δ donnent une idée sur la compressibilité du gâteau (tableau (II-1)). Si η et δ sont toutes les deux supérieures à 1 la résistance du gâteau devient proportionnelle à la pression appliquée au gâteau (Tiller et Kwon, 1998)

Tableau II- 1: classification de compressibilité des gâteaux (Tiller et Li, 2003)

Incompressible	$\eta = 0$	$\delta = 0$
Légèrement compressible	$\eta \cong 0,4-0,7$	$\delta \cong 0,5-0,9$
Très compressible	$\eta \cong 0,7-0,8$	$\delta \cong 0,9-1$
Extrêmement compressible	$\eta > 1$	$\delta > 1$

Pour l'analyse de la phase de consolidation, Shirato et col., 1970 proposent d'autres équations constitutives en prenant $\eta=0$ dans l'équation (II-49) (pour la résistance spécifique) et la relation de Terzaghi pour la porosité :

$$\alpha = \alpha_m \quad \text{Eq II- 50}$$

$$e_v = e_{v0} - a_E P_s \quad (\text{analogie du ressort de Terzaghi}) \quad \text{Eq II- 51}$$

Les équations constitutives décrites ci-dessus supposent que le gâteau a un comportement élastique dans le sens où la porosité locale est une fonction uniquement de la contrainte de compression. Cependant, de nombreux matériaux ne réagissent pas de façon instantanée à la contrainte, et le temps doit être pris en compte, le comportement est alors considéré comme viscoélastique.

Dans cet esprit Shirato et col. (1974) ont utilisé, en supposant la résistance spécifique (α) homogène dans le gâteau, le modèle viscoélastique suivant, au lieu de l'équation (II-49) pour caractériser l'évolution de la porosité :

$$(1 - \varepsilon_1) = (1 - \varepsilon_1^0) \left[1 - a_E (1 - \varepsilon_1^0) P_s + a_c (1 - \varepsilon_1^0) \int_0^t \{1 - \exp[-\eta(t - \tau)]\} \frac{\partial P_s}{\partial \tau} d\tau \right]^{-1} \quad \text{Eq II- 52}$$

où a_c et η sont des constantes représentant le déplacement lent des particules dans le gâteau.

Kamst et col. (1997a, b) sont les premiers à avoir proposé une étude du comportement viscoélastique non linéaire. Ils ont montré que la variation de la porosité n'est pas à chaque instant proportionnelle à la variation de la pression solide. L'évolution du rapport (ε_1/P_s) est variable en fonction du temps pour un gâteau produit, dans leur cas, à partir d'une pulpe de palme. Ils ont adopté une fonction empirique pour exprimer la porosité d'un gâteau formé en fonction de la pression de compression et du temps :

$$\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{1 - \varepsilon_1^0}{\varepsilon_1^0} \exp \left(a_4 \left(\frac{P_s}{P_{s,\text{ref}}} \right)^{b_4} \left(\frac{t}{t_{\text{ref}}} \right)^{c_4} \right) \quad \text{Eq II- 53}$$

et la corrélation suivante pour la résistance spécifique locale :

$$\alpha = \alpha_0 \exp(a_4 (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0))$$

Toutes les équations présentées ci-dessus sont habituellement utilisées pour une caractérisation à l'échelle locale. Une caractérisation à une échelle plus globale est cependant utilisée dans les travaux de Holdich (Holdich, 1996 ; Holdich et col. (1996)).

La résistance spécifique moyenne est décrite par une fonction puissance de la pression de formation du gâteau (ΔP_g):

$$\alpha_m = \alpha_0 (1 - n) \Delta P_g^n \quad \text{Eq II- 54}$$

de même la concentration moyenne est donnée par :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sm0} (1 - m) \Delta P_g^m \quad \text{Eq II- 55}$$

où α_0 , n , ε_{sm0} , et m sont des constantes empiriques.

II-1-2-2-4-2. Analogies rhéologiques

L'Analogie rhéologique a principalement été utilisée pour la modélisation de la phase de compression. La première caractérisation du processus de compression a été proposée par Terzaghi et Peck (1948). Cette approche illustre de façon simple le phénomène de compression, en assimilant le gâteau à un ressort soumis à une pression P_s .

En utilisant l'équation de quantité de mouvement (II-28) et la loi de Darcy il est possible après quelques manipulations mathématiques d'établir une équation pour décrire l'évolution de la pression solide :

$$\frac{\partial P_s}{\partial t} = C_e \frac{\partial^2 P_s}{\partial w_m^2} \quad \text{Eq II- 56}$$

D'après Shirato et col., 1986 la compression doit souvent être divisée en deux étapes. Dans la première étape (consolidation primaire) l'évolution de la porosité du gâteau (ou fraction de vide), dépend seulement de la pression solide locale (P_s) ; une augmentation de P_s induit instantanément une diminution de la porosité du gâteau. Dans la deuxième phase (consolidation secondaire) un effet visqueux est considéré et la variation de la porosité du gâteau (ou fraction du vide) dépend de la pression locale du solide et du temps

$$\frac{\partial e_v}{\partial t_c} = \left(\frac{\partial e_v}{\partial t_c} \right)_{P_s}^1 + \left(\frac{\partial e_v}{\partial P_s} \right) \left(\frac{\partial P_s}{\partial t_c} \right)_{w_m}^2 = \frac{\partial u_1}{\partial w_m} \quad \text{Eq II- 57}$$

$$e_v = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \quad \text{Eq II- 58}$$

Ce modèle peut être représenté par le schéma rhéologique suivant :

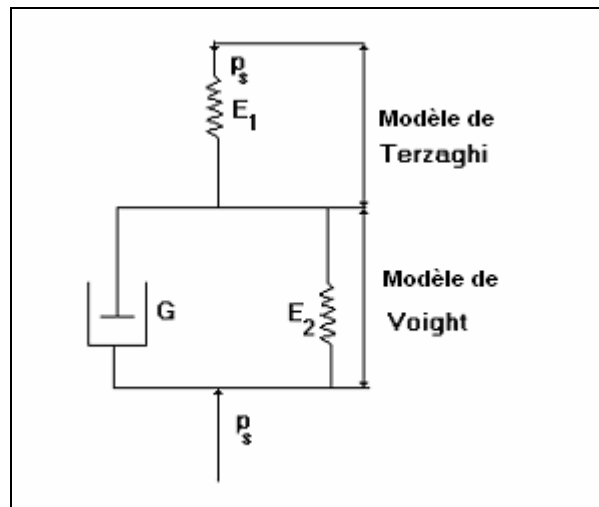


Figure II- 4: Modèle rhéologique de Terzaghi -Voight

L'équation qui relie, durant la consolidation secondaire, la fraction de vide à la pression solide et au temps s'écrit d'après Shirato et col. (1974) :

$$\frac{\partial e_v}{\partial t_c} = \frac{1 + e_v}{E_2} \frac{\partial}{\partial t_c} \int_0^{t_c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1}{G} (t_c - \tau) \right) \right] (P_s - P_s(0)) d\tau \quad \text{Eq II- 59}$$

où $P_s(0)$ est la pression solide locale à $t_c=0$.

En substituant l'équation (II-59) dans l'équation (II-57) et en appliquant l'équation de Darcy

($u_1 = \frac{1}{\mu_v \alpha \rho_s} \frac{\partial P_s}{\partial w_m}$) Shirato et col. (1986) aboutissent à :

$$\frac{\partial P_s}{\partial t} + \beta_c \eta_c \frac{\partial}{\partial t_c} \int_0^{t_c} [P_s - P_s(0)] \exp[-\eta_c (t_c - \tau)] d\tau = C_e \frac{\partial^2 P_s}{\partial w_m^2} \quad \text{Eq II- 60}$$

Avec $\beta_c = E_1/E_2$, $\eta_c = E_2/G$, $C_e = \rho_s E_1 / \mu_v \alpha (1 + e_v)$ et $1/E_1$ des paramètres rhéologiques semi empiriques du modèle. E_2 et G sont respectivement la rigidité et la viscosité du module de Voight. Dans le cas d'une compression ultérieure à une phase de filtration Shirato et col. (1985 ; 1986) considèrent que le profil de P_s est sinusoïdal à travers le gâteau au début de la compression ($t_c = 0$, fin de la filtration). Ainsi avec cette condition initiale et en appliquant les conditions aux limites appropriées, Shirato et col. (1986) proposent une solution analytique classiquement formulée en terme de taux de compression. Cette expression permet de décrire l'évolution de l'épaisseur du gâteau avec le temps de pressage :

$$U_c = \frac{L_1 - L}{L_1 - L_f} = B(1 - \exp(-\eta_c t_c)) + (1 - B) \left(1 - \exp\left(-\frac{i^2 \pi^2 C_e t_c}{4w_0^2}\right) \right) \quad \text{Eq II- 61}$$

Cette analyse a été récemment complétée par Chang et Lee (1998) et Chu et Lee (1999) qui ont ajouté un second élément visqueux dans le schéma rhéologique afin de mieux décrire la fin de la compression (consolidation tertiaire) pour des matériaux extrêmement compressibles tels que les boues résiduaires biologiques.

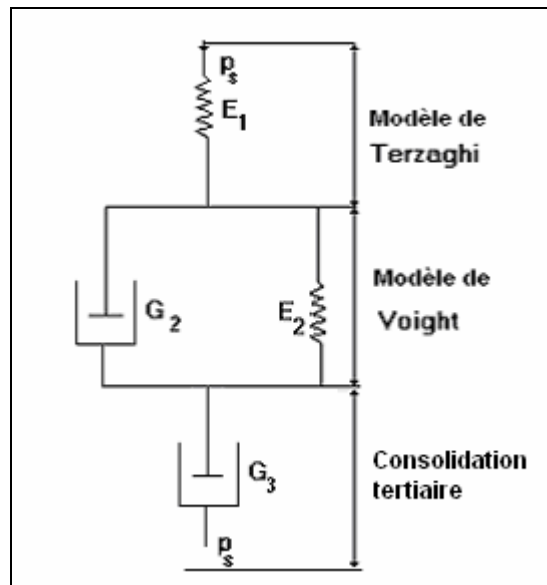


Figure II- 5: Modèle rhéologique incluant une consolidation tertiaire (Chang et Lee, 1998)

Avec une approche un peu similaire La Heij (1994) et La Heij et col. (1996) utilisent un modèle rhéologique standard pour décrire la compression (Figure II-4). L'expression de la déformation est alors la suivante :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\sigma_s}{\tau(E_1 + E_2)} + \frac{1}{E_1 + E_2} \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} - \frac{E_2 \epsilon}{\tau(E_1 + E_2)} \quad \text{Eq II- 62}$$

et la porosité s'exprime :

$$\frac{(1 - \epsilon_1^0)}{(1 - \epsilon_1)^2} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = \frac{-P_s - E_2 \epsilon - \tau \frac{\partial P_s}{\partial t}}{\left(\tau(E_1 + E_2) + \tau \epsilon \frac{\partial E_2}{\partial \epsilon} \right)} \quad \text{Eq II- 63}$$

L'intérêt de ce travail repose essentiellement sur le fait que contrairement au modèle de "Shirato" les paramètres rhéologiques E_1 et $\eta_s (= \tau E_1)$ ne sont pas forcément constants ils varient selon une fonction puissance en fonction de taux de vide (La Heij, 1994)

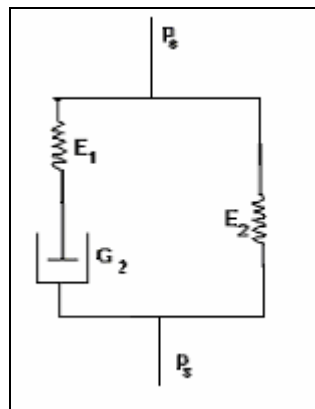


Figure II- 6: Modèle rhéologique utilisé par La Heij (1994)

II-1-2-3 Conditions aux limites et initiales

La résolution du problème de filtration et de compression et notamment des équations de bilan nécessite la mise en équations des conditions aux limites et initiales.

II-1-2-3-1 Phase de la filtration

Pendant la phase de filtration la porosité initiale est constante à n'importe quelle position (La Heij, 1994 ; La Heij et col., 1996) au cours de la filtration on forme un gâteau qui d'après La Heij et col.(1996) est supposé avoir une structure qui n'évolue pas au cours de la phase de filtration.

La pression hydraulique à la surface du gâteau est égale à la pression appliquée, et la porosité est égale à la porosité extrapolée à une pression solide nulle. D'après plusieurs chercheurs cette porosité correspond à la valeur $1 - \epsilon_s^0$ dans l'équation constitutive (II-49) (La Heij ,1994 ; Stamatakis et Tien, 1991 ; Tien et col., 2001, Tiller et Yeh, 1987).

Stamatakis et Tien (1991) ont discuté, de façon différente, le problème des conditions à l'interface gâteau/suspension. Ils se basent sur la conservation de masse solide et liquide pour déterminer l'expression suivante de la hauteur du gâteau (position de l'interface) :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s0}} \int_0^L \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} dz + \left(\frac{\varepsilon_{s0}}{\varepsilon_s^0 - \varepsilon_{s0}} \right) q_{lm} \quad \text{Eq II- 64}$$

avec :

$$L(0)=0 \quad \text{Eq II- 65}$$

Ainsi Pour $z=L(t)$

$$\begin{cases} P_s = 0 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \end{cases} \quad \text{Eq II- 66}$$

Au niveau du média filtrat, la vitesse du solide est nulle, par contre la vitesse du liquide est liée au flux de filtrat. Celui-ci peut être évalué pour un media incompressible par la loi de Darcy. Ainsi pour $z=0$

$$\begin{cases} u_s = 0 \\ q_{lm} = \frac{\Delta P_{lm}}{\Delta R_m \eta} \end{cases} \quad \text{Eq II- 67}$$

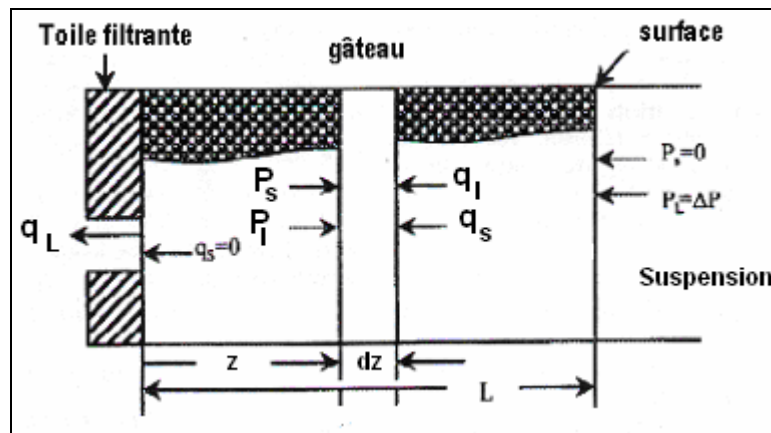


Figure II- 7: Phase filtration (Lee et Wang, 2000)

II-1-2-3-2. Phase de la compression

A la surface supérieure du gâteau, la vitesse du liquide est égale à la vitesse du solide :

$$z = L(t) : \begin{cases} u_s = u_l \\ \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq II- 68}$$

Au niveau du média filtrant la porosité est couramment supposée constante et la résistance spécifique du média négligée :

$$z = 0 : \begin{cases} u_s = 0 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(P_{s,z=0}) \end{cases} \quad \text{Eq II- 69}$$

Pour la résolution du modèle de "Terzaghi", Kamst (1995) propose les conditions initiale et aux limites suivantes :

$$t=0 : P_s = P_{s,0} \quad \text{Eq II- 70}$$

$$z=0 : P_s = P_{app} \quad \text{Eq II- 71}$$

$$z = L : \frac{\partial P_s}{\partial w_m} = 0 \quad \text{Eq II- 72}$$

La résolution du problème de compression nécessite également une condition initiale représentative de la situation du gâteau à la fin de la phase de filtration. Cette condition est généralement considérée sur la pression solide P_s . D'après Shirato et col. (1986) le profil de P_s à travers le gâteau a une forme sinusoïdale caractérisée par :

$$\frac{1 - P_s}{P} = \sin\left(\frac{\pi w}{2 w_0}\right) \quad \text{Eq II- 73}$$

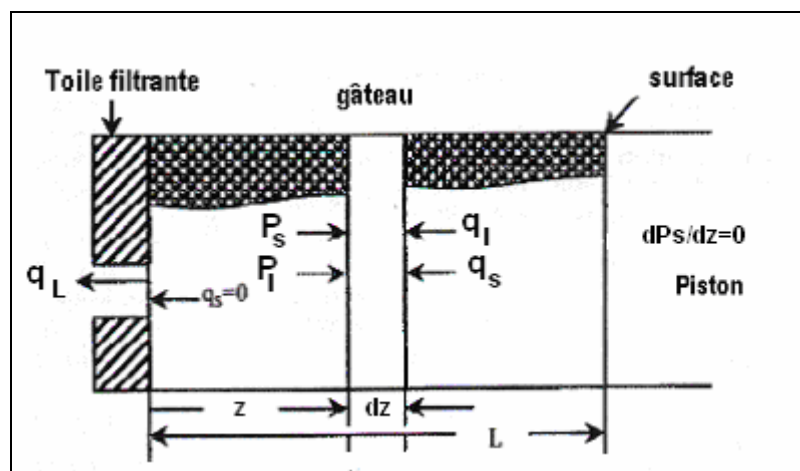


Figure II- 8: Phase de Compression (Lee et Wang, 2000)

II-1-3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'approche classique de l'étude de la filtration basée sur la théorie de Ruth. Nous avons mis l'accent sur les limites de validités de cette approche et discuté les différents paramètres de la relation proposée par Ruth.

Nous avons ensuite rappelé les principales modélisations, disponibles dans la littérature pour décrire, les processus de filtration et de compression. La majorité des travaux combine les équations

de conservation de masse pour les phases liquide et solide avec une équation de quantité de mouvement simplifiée et la loi de Darcy modifiée. Des équations constitutives (empiriques) sont introduites pour caractériser le comportement mécanique du gâteau. Elles décrivent généralement une évolution élastique, peu d'étude abordent le cas de rhéologies plus complexes.

La suite de notre travail s'attachera, pour lever une part de l'empirisme induit par les équations constitutives, à proposer une voie de modélisation un peu différente, basée sur le calcul de la vitesse de déformation du gâteau. Seul le cas de la compression sera modélisé dans cette étude.

II-1-4. Références

- Akers R.J. et Ward, A.S., Liquid filtration theory and filtration pre-treatment. In C. Orr, *Filtration principles and practices*, part I. New York: Dekker. (1977).
- Buscall R. et White L.R., The consolidation of concentrated suspensions, *J. Chem. Soc. Faraday Trans.*, Vol. 83, p. 873-891, (1987).
- Chang C.H. et Lee D.J., Ternary expression stage in biological sludge dewatering, *Water Research*, Vol. 32, p. 905-914, (1998)
- Chase G.G. et Willis M.S., Compressive cake filtration, *Chemical Engineering Science*, Vol. 47, p. 1373-1381, (1992).
- Chu C.P. et Lee D. J., Three stages consolidation dewatering of sludges, *Journal of Environmental Engineering*, Vol. 125, p. 959-965, (1999).
- Holdich R. G., constant pressure filtration of clay effluents under non-parabolic rate law conditions, *Environmental Technology*, (1996).
- Holdich R. G., Ruston A. et Wards A. S., Solid-liquid filtration and separation technology, *Edition VCH*, (1996).
- Hosten C. et San, O., Role of clogging phenomena in erroneous implications of conventional data analysis of constant pressure cake filtration, *Separation Science Technology*, Vol.34, p.1759-1772, ((1999).
- Jonsson K. A. et Jonssen B. T. L., Fluid flow in compressible porous media: I: steady-state conditions., *AIChE Journal*, Vol. 38, p.1340-1348, (1992a)
- Jonsson K. A. et Jonssen B. T. L., Fluid flow in compressible porous media: II: dynamic behavior, *AIChE Journal*, Vol. 38, p.1349-1356, (1992b).

- Kamst G.F., Filtration and expression of palm oil slurries as a part of the dry fractionation process, PhD thesis, Technische Universiteit Delft, (1995)
- Kamst G.F., Bruinsma O. S. L. et de Graauw J., Permeability of filter cakes of palm-oil in relation to mechanical expression , *AIChE Journal*, Vol. 43, p.673-680, (1997a).
- Kamst G.F., Bruinsma O. S. L. et de Graauw J., solid-phase creeping during the expression of palm-oil filter cakes., *AIChE Journal*, Vol. 43, p.665-672, (1997b).
- Koenders M. A. et Wakeman R. J., The initial stages of compact formation from suspensions by filtration, *Chemical Engineering. Science*, Vol 51, p. 3897-3908, (1996).
- La Heij E.J., An analysis of sludge filtration and expression, PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, (1994)
- La Heij E.J., Kerkhof P.J., Kopinga K et Pel L., Determining porosity profiles during filtration and expression of sewage sludge by NMR imaging, *AIChE Journal*, Vol. 42, N°4, p 953-959, (1996)
- Landman K.A., Sirakoff C. et White L.R., Dewatering of flocculated suspensions by pressure filtration, *Phys. Fluids A*, Vol. 3, N°6, p. 1495-1509, (1991)
- Landman K.A. et White L.R., Determination of the hindered settling factor for flocculated suspensions, *AIChE Journal*, Vol. 38, p. 184-192, (1992)
- Landman K.A., White L.R. et Eberl M., Pressure filtration of flocculated suspensions, *AIChEJ*, Vol. 41, N°7, p. 1687-1700, (1995)
- Landman K.A., Stankovich K. A. et White L.R., measurement of the filtration diffusivity $D(\phi)$ of a flocculated suspension, *AIChEJ*, Vol. 45, p. 1875, (1999)
- Lee D. J. et Wang C. H., Theories of cake filtration and consolidation and implications to sludge dewatering, *Water Research*, Vol. 34, p. 1-20, (2000).
- Meeten G. H., Septum and filtration properties of rigid and deformable particle suspensions, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 55, p. 1755-1767, (2000).
- Rietma K., Science and technology of dispersed two-phase systems I et II, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 37, p. 1125-1150, (1982).
- Ruth B. F., Montillon G. H. et Motonna R. E. Studies in filtration: I. Critical analysis of filtration theory , *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 25, p. 76-82, (1933a).

- Ruth B. F., Montillon G. H. et Motonna R. E. Studies in filtration: II. Fundamentals of constant pressure filtration, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 25, p. 153-161, (1933b).
- Ruth B. F., Studies in filtration: III. Derivation of general filtration equation, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 27, p. 708-723, (1935).
- Ruth B. F., Correlating filtration theory with industrial practice, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 38, p. 564-571, (1946).
- Shirato M., Sambuichi M., Kato H., et Aragaki T., Internal flow mechanism in filter cakes, *AIChE Journal*, Vol. 15, p. 405-409, (1969).
- Shirato M., Murase T., Kato H. et Fukaya S., Fundamental analysis for expression under constant pressure, *Filtration et Separation*, may/june, p. 277-282, (1970)
- Shirato M. et Aragaki T., Verification of internal flow mechanism theory of cake filtration, *Filtration et Separation*, Vol. 9, p. 290-297, (1972).
- Shirato M., Murase T., Tokunaga A. et Yamada O., Calculations of consolidation period in expression operations, *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 7, p. 229-231, (1974).
- Shirato M., Murase T., Iratani E., Iwata M. et Cho J. H., Deliquoring by expression due to changing filtrate pattern, *Filtration and separation*, Vol. 22, p. 250-254, (1985).
- Shirato M., Aragaki T., Ichimura K. et Ootsuti N., Principles of expression and design of membrane compression-type filter press operation, *In ed. N. P. Cheremisinoff, Encyclopedia of fluid Mechanics*, Vol. 5, Gulf Pub., Houston, (1986).
- Stamatakis, K. et Tien, C., Cake Formation and Growth in Cake Filtration, *Chemical Engineering Science*, Vol. 46, N°8, p.1917-1933, (1991).
- Teoh, S. K., Reginald B. H. et Tien C., Correlation of C-P cell and filtration test data using a new test cell, *Separation and Purification Technology*, vol.39, p. 131-139 (2002).
- Terzaghi K., et Peck R. B., soils mechanics in engineering practice, wiley, 1948.
- Tien, C., Teoh S., K., et Tan R. B., H., Cake Filtration analysis-the effect of the relationship between the pore liquid pressure and the cake compressive stress, *Chemical Engineering Science*, Vol. 56, p.5361-5369, (2001).
- Tien C. et Bai R., Numerical analysis of cake filtration, *Proceeding World Filtration Congress 9*, New Orleans, paper 214-5 (2004).

- Tiller F.M., The role of porosity in filtration. I : Numerical methods for constant rate and constant pressure filtration based on Kozeny's law, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 49, p. 467-479, (1953).
- Tiller F.M., The role of porosity in filtration. II : Analytical equations for constant rate filtration, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 51, p. 282-290, (1955).
- Tiller F.M., The role of porosity in filtration. III: Variable pressure-variable rate filtration, *AIChE Journal*, Vol. 4, p 170-175, (1958).
- Tiller F.M. et Cooper H. R., The role of porosity in filtration. IV: Constant pressure filtration, *AIChE Journal*, Vol. 6, p. 595-601, (1960).
- Tiller F.M. et Huang C J., Theory, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 53, p.529-537, (1961).
- Tiller F.M. et Cooper H. R., The role of porosity in filtration. V: Porosity variation in filtration cake, *AIChE Journal*, Vol. 8, p. 445-449, (1962).
- Tiller F.M. et Shirato M., The role of porosity in filtration. VI: New definition of filtration resistance, *AIChE Journal*, Vol. 10, p. 61-67, (1964).
- Tiller F.M., Present status of filtration theory, solid-liquid separation : A review and bibliography, J. B. Poole and D. Doyle. Eds., Her Majesty's stationery office. London. P. 13 (1966).
- Tiller F.M. et Lu W. M., The role of porosity in filtration. VIII: Cake non informality in compression-permeability cell, *AIChE Journal*, Vol. 18, p. 569-572, (1972).
- Tiller F.M., Haynes S., et Lu W. M., The role of porosity in filtration. VII: Effect of side wall friction in compression-permeability cell, *AIChE Journal*, Vol. 18, p. 13-20, (1972).
- Tiller F.M., et Green T. C., The role of porosity in filtration. IX: Skin effect with highly compressible materials, *AIChE Journal*, Vol. 19, p. 1966-1969, (1973).
- Tiller F.M., Compressible cake filtration, *In the scientific basis of filtration* (Edited by K. J. Ives). Noordhoof, lyden, (1975).
- Tiller F.M. et Crump J. R., solid-liquid separation: an overview, *Chemical Engineering Progress*, p.66-75, (1977).
- Tiller F. M., et Leu W., Basic data fitting in filtration, *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, Vol. 11, p. 61-70, (1980).
- Tiller F. M., et Horng L. L., Hydraulic deliquoring of compressible filter cakes, Part1: Reverse flow in filter presses, *AIChE Journal*, Vol. 29, p. 297-305, (1983).

- Tiller F. M., et Leu W., Experimental study of the mechanism of constant pressure cake filtration: Clogging of filter media, *Separation Science Technology*, Vol. 18, p. 1351-1369, (1983).
- Tiller F.M. et Yeh C.S., Role of porosity in filtration. X: Deposit of compressible cake on external radial surface, *AIChEJ*, Vol. 31, p. 1241-1248, (1985).
- Tiller F.M. et Yeh C.S., Role of porosity in filtration. XI: Filtration followed by expression, *AIChEJ*, Vol. 33, N°8, p. 1241-1256, (1987).
- Tiller F.M., Hsyung N. B., et Cong D.Z., The role of porosity in filtration. XII : Filtration with sedimentation, *AIChE Journal*, Vol. 41 , p. 1153-1164, (1995).
- Tiller F.M. et Kwon J.H., Role of porosity in filtration. XIII: Behavior of highly compactible cakes, *AIChEJ*, Vol. 44, N°10, p. 2159-2167, (1998).
- Tiller F.M. et Li W., Radial flow filtration for super-compactible cakes, *Separation Science Technology*, Vol.38, p. 733-744, (2003).
- Tosun I., et Willis M.S., deviation representations for the volume averaging technique, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 36, p. 781-782, (1981).
- Tosun I., et Willis M.S., On the validity of the “power law” approximation in filtration theory, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 37, p. 1421-1422, (1982).
- Tosun I., et Willis M.S., Drag stress pressure drop relationship in filtration, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 38, p. 485-487, (1983).
- Tosun I., Formation of cake filtration, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 41, p. 2563-2568, (1986a).
- Tosun I., Drag-stress/pressure-drop relationship in filtration, In ed N. P. Cheremisinof, *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, Vol. 5, Gulf Pub. Houston, (1986b).
- Tosun I., Yetis U., Willis M.S. et Chase G.G., Specific cake resistance : myth or reality, *Water Sci. Tech.*, Vol. 28, N° 1, p. 91-101, (1993)
- Tosun I., Willis M.S., Desai F. et Chase G.G., Analysis of drag and particulate stress in porous media flows, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 50, p. 1961-1969, (1995).
- Wakeman R. J., Numerical integration of the differential equation describing the formation of and flow in compressible filter cake, *Transactions of Institution of Chemical Engineers*, Vol. 56, p. 256-265, (1978).
- Wakeman R. J., Sabri M. N. et Tareleton E. S., Factors affecting the formation and properties of wet compacts, *Powder Technology*, Vol. 65, p.283-292, (1991).

- Whitaker S., Advance in theory of fluid motion in porous media, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 61, p. 14-28, (1969).
- Willis M.S., Shen M. et Gray K.J., Investigation of the fundamental assumptions relating Compression-permeability data with filtration, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 52, p. 331-337, (1974).
- Willis M.S. et Tosun I., A rigorous cake filtration theory, *Chemical Engineering. Science*, Vol. 35, p. 2427-2438, (1980)
- Willis M.S., Collins R. M. et Bridges W. G., complete analysis of non-parabolic behavior, *Chemical Engineering Research Design*, Vol. 61, p. 96-109 (1983).
- Willis M.S., Tosun I. et Collins R. M., Filtration mechanisms, *Chemical Engineering Research Design*, Vol. 63, p. 175-183 (1985).
- Willis M.S., The interpretation of non parabolic filtration data, *In ed N. P. Cheremisinoff, Encyclopdia of Fluid Mechanics*, Vol. 5, Gulf Pub. Houston (1986).
- Willis M.S., Tosun I., Choo I., Chase G. G. and Desai F., A dispersed multiphase theory and its application to filtration, *in ed. Corapcioglu. Advance in Porous media I*. Elsevier. Amsterdam (1991).

Chapitre II-2

MODELISATION ET SIMULATION

L'idée de cette modélisation est d'essayer d'appliquer les concepts utilisés en séchage (couplage des équations fondamentales de transfert et de mécanique des milieux continus) pour la description des procédés de filtration- compression. Seule la compression, qui décrit l'évolution d'un milieu poreux (gâteau) initialement formé, sera traitée dans ce travail. Le cas de la filtration semble plus complexe à formuler (avec notre approche) car le gâteau se construit et se consolide durant l'opération de déshydratation.

Le modèle proposé doit permettre de mieux caractériser l'évolution du gâteau (en terme de porosité locale) et de lever une partie de l'empirisme qui réside encore au niveau du modèle de "Shirato" (modèle classique de la compression)

II-2-1	MISES EN EQUATION	144
II-2-1-1	Conservation de masse	144
II-2-1-2	Conservation de quantité de mouvement.....	145
II-2-1-3	Conditions aux limites et initiales	147
II-2-1-3-1.	Conditions initiales	147
II-2-1-3-2.	Conditions aux limites	149
II-2-2	RESOLUTION NUMERIQUE	150
II-2-2-1	Organigramme de résolution	152
II-2-2-2	Résultats et discussion	154
II-2-2-2-1	Phase de filtration	154
II-2-2-2-2	Compression	155
II-2-3	CONCLUSIONS	160
II-2-4	REFERENCES	161

II-2-1 Mises en équation

Pour la modélisation de la phase de compression, le gâteau est considéré comme un milieu déformable à deux phases. Le problème est ensuite traité en appliquant la mécanique des milieux continus. Nous pouvons écrire les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement pour chacune des deux phases (liquide et solide) dont aucune n'est le siège de réactions chimiques.

II-2-1-1 Conservation de masse

La formulation générale de l'équation de conservation de masse s'écrit sous sa forme locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{Eq II- 74}$$

Ainsi pour chacune des phases il vient :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = 0 \quad \text{Eq II- 75}$$

avec :

i=s pour la phase solide

i=l pour la phase liquide

Les fractions volumiques sont définies comme suit :

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_t} \quad \text{Eq II- 76}$$

où V_t est le volume total de l'entité de gâteau considérée.

La masse volumique intrinsèque s'écrit alors :

$$\rho_i^i = \frac{M_i}{V_i} \quad \text{Eq II- 77}$$

D'où les masses volumiques par rapport au milieu poreux (solide+liquide) :

$$\rho_i = \rho_i^i \varepsilon_i \quad \text{Eq II- 78}$$

hyp1 : Chacune des deux phases, solide et liquide, est supposée incompressible d'où l'équation (II-75) s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \text{div}(\varepsilon_i \vec{u}_i) = 0 \quad \text{Eq II- 79}$$

II-2-1-2 Conservation de quantité de mouvement

La formulation locale de la conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{u}}{dt}}_1 = \underbrace{\rho \vec{f}}_2 + \underbrace{\text{div}(\vec{\pi})}_3 \quad \text{Eq II- 80}$$

avec : 1, un terme d'inertie ; 2, les forces volumiques et 3, les forces surfaciques.

Ainsi pour chacune des deux phases il vient :

$$\rho_i^i \varepsilon_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \rho_i^i \varepsilon_i \vec{f}_i + \text{div}(\vec{\pi}_i) \quad \text{Eq II- 81}$$

Ces différentes équations sont ensuite considérées pour modéliser de façon unidirectionnelle, une compression réalisée à pression constante.

Dans ce cas la conservation de la masse s'écrit sur chacune des phases :

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_s u_s) = 0 \quad \text{Eq II- 82}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_l u_l) = 0 \quad \text{Eq II- 83}$$

En égalisant ces deux équations il vient :

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_l u_l) = -\frac{\partial}{\partial z}((1 - \varepsilon_l) u_s) \quad \text{Eq II- 84}$$

En intégrant entre $z=0$ (surface filtrante où $\varepsilon_l u_l = \varepsilon_l^0 u_l^0$) et une position z quelconque il vient :

$$\int_{\varepsilon_l^0 u_l^0}^{\varepsilon_l u_l} \partial(\varepsilon_l u_l) = - \int_0^{(1-\varepsilon_l)u_s} \partial((1 - \varepsilon_l) u_s) \quad \text{Eq II- 85}$$

Soit après simplification :

$$u_l = \frac{\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1 - \varepsilon_l) u_s}{\varepsilon_l} \quad \text{Eq II- 86}$$

avec ε_l^0 et u_l^0 respectivement la porosité et la vitesse du liquide à $z=0$.

Le développement des équations de conservation de la quantité de mouvement nécessite de faire un inventaire des forces en présence. Ainsi en admettant que les forces volumiques se résument aux forces de pesanteur, il vient :

$$\vec{f}_i = \vec{g} \quad \text{Eq II- 87}$$

Les forces surfaciques agissant sur le liquide sont supposées être la somme des forces de la phase solide sur le liquide et des forces visqueuses (Tosun et col., 1995) :

$$\boldsymbol{\pi}_l = -P_l \mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}_l \quad \text{Eq II- 88}$$

Pour la phase solide les forces surfaciques considérées sont la force de traînée et la force inter-particulaire.

$$\boldsymbol{\pi}_s = -P_s \mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}_s \quad \text{Eq II- 89}$$

Par ailleurs, pour un milieu saturé on a par définition :

$$\varepsilon_l + \varepsilon_s = 1 \quad \text{Eq II- 90}$$

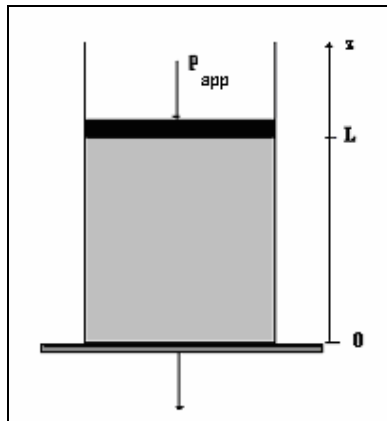


Figure II- 9: représentation du processus de compression

Au final les équations de quantité de mouvement s'écrivent alors :

Pour la phase liquide

$$\underbrace{\varepsilon_l \rho_l^l \frac{\partial u_l}{\partial t} + \varepsilon_l \rho_l^l u_l \frac{\partial u_l}{\partial z}}_{\text{Terme d'inertie}} = - \underbrace{\varepsilon_l \rho_l^l g}_{\text{Force volumique}} - \underbrace{\varepsilon_l F(u_l - u_s)}_{\text{Force d'interaction liquide-solide}} - \underbrace{\varepsilon_l \frac{\partial P_l}{\partial z}}_{\text{pression du liquide}} - \underbrace{\frac{\partial(\sigma_l)_{zz}}{\partial z}}_{\text{force visqueux}}$$

$$\text{Eq II- 91}$$

Pour la phase solide

$$\underbrace{(1-\varepsilon_1)\rho_s^s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (1-\varepsilon_1)\rho_s^s \mathbf{u}_s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial z}}_{\text{Terme d'inertie}} = \underbrace{-(1-\varepsilon_1)\rho_s^s \mathbf{g}}_{\text{Force volumique}} + \underbrace{\varepsilon_1 F(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_s)}_{\text{Force d'interaction liquide-solide}} - \underbrace{(1-\varepsilon_1) \frac{\partial P_l}{\partial z}}_{\text{pression du liquide}} - \underbrace{\frac{\partial(\sigma_s)_{zz}}{\partial z}}_{\text{force entre particule}}$$

Eq II- 92

Par addition des deux équations de quantité de mouvement on aura :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \rho_l^l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \varepsilon_1 \rho_l^l \mathbf{u}_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} + (1-\varepsilon_1)\rho_s^s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (1-\varepsilon_1)\rho_s^s \mathbf{u}_s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial z} = \\ - [\varepsilon_1 \rho_l^l + (1-\varepsilon_1)\rho_s^s] \mathbf{g} - \frac{\partial P_l}{\partial z} - \frac{\partial[(\sigma_l)_{zz} + (\sigma_s)_{zz}]}{\partial z} \end{aligned}$$

Eq II- 93

En égalisant dP_l/dz de l'équation de quantité de mouvement de la phase solide (Eq II-92) et la quantité de mouvement totale (Eq II-93), puis en substituant u_l (Eq II-86) il vient :

$$\begin{aligned} [(1-\varepsilon_1)\rho_l^l + \varepsilon_1 \rho_s^s] \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \left[\rho_l^l (\varepsilon_1^0 \mathbf{u}_l^0 - (1-\varepsilon_1)\mathbf{u}_s) \frac{(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \rho_s^s \mathbf{u}_s \right] \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial z} + \left[-\rho_l^l \frac{\mathbf{u}_s - \varepsilon_1^0 \mathbf{u}_l^0}{\varepsilon_1} \right] \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ + \left[\rho_l^l (\varepsilon_1^0 \mathbf{u}_l^0 - (1-\varepsilon_1)\mathbf{u}_s) \frac{\varepsilon_1^0 \mathbf{u}_l^0 - \mathbf{u}_s}{\varepsilon_1^2} \right] \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} - \rho_l^l \frac{\partial \varepsilon_1^0 \mathbf{u}_l^0}{\partial t} = \varepsilon_1 (\rho_l^l - \rho_s^s) \mathbf{g} + \frac{F}{1-\varepsilon_1} (\varepsilon_1^0 \mathbf{u}_l^0 - \mathbf{u}_s) + \frac{(\sigma)_{zz}}{(1-\varepsilon_1)} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Eq II- 94

$$\text{avec } (\sigma)_{zz} + (\sigma_s)_{zz} = (\sigma_l)_{zz} + (\sigma_s)_{zz}$$

et

$$\begin{aligned} (\sigma_l)_{zz} &= \varepsilon_1 (\sigma)_{zz} \\ (\sigma_s)_{zz} &= (1-\varepsilon_1) (\sigma)_{zz} \end{aligned}$$

Les détails de la détermination de l'équation (Eq II-94) sont rapportés dans l'annexe II-1 :

Le problème se résume maintenant à résoudre les équations (II-82) et (II-94) pour déterminer les deux inconnues u_s et ε_1 . Pour cela il est nécessaire de préciser la perméabilité et les contraintes dans le gâteau ainsi que les conditions aux limites et initiales du système.

II-2-1-3 Conditions aux limites et initiales

II-2-1-3-1 Conditions initiales

Lorsque la compression suit une phase de filtration les conditions initiales (de la compression) sont fixées par la situation du gâteau en fin de filtration. Dans le cadre de notre travail la détermination

de la distribution de porosité à cet instant est déterminée grâce au modèle de filtration proposé par Holdich et col. (1996).

Ce modèle considère que la résistance spécifique moyenne est décrite par une fonction puissance de la pression de formation du gâteau (ΔP_g):

$$\alpha_m(t) = \alpha_o (1-n) [\Delta P_g(t)]^n \quad \text{Eq II- 95}$$

De même la fraction volumique en solide moyenne est donnée par :

$$\varepsilon_{sm}(t) = \varepsilon_{smo} (1-m) [\Delta P_g(t)]^m \quad \text{Eq II- 96}$$

Où α_o , n , ε_{smo} , et m sont des constantes empiriques.

La masse moyenne du gâteau sec par unité de volume de filtrat est obtenue à partir de ε_{sm} et de la fraction massique du solide dans la suspension :

$$\bar{c}(t) = \frac{1}{\frac{1-s}{s\rho_l'} - \frac{1-\varepsilon_{sm}(t)}{\varepsilon_{sm}(t)\rho_s}} \quad \text{Eq II- 97}$$

Par ailleurs la dérivée de l'équation de Ruth (II-9) donne le débit du filtrat :

$$Q(t) = \left[\frac{dV}{dt} = \frac{\mu_v \alpha_m(t) \bar{c}(t)}{A^2 P_{app}} V(t) + \frac{\mu R_m}{A} \right]^{-1} \quad \text{Eq II- 98}$$

Cette dernière équation est utilisée ensuite pour calculer la chute de pression dans le gâteau filtré et en déduire la chute de pression dans le filtre pour une pression totale appliquée fixée.

$$\Delta P_g(t) = P_{app} - \frac{\mu R_m}{A} Q(t) \quad \text{Eq II- 99}$$

A chaque instant la hauteur du gâteau est calculée à partir de la relation suivante :

$$L(t) = \frac{[\Delta P_g(t)]^{1-m-n}}{\mu \alpha_o \varepsilon_{smo} \rho_s^s (1-m-n)} \frac{A}{Q(t)} \quad \text{Eq II- 100}$$

La fraction volumique en solide en fonction d'une hauteur quelconque (z) dans le gâteau est alors calculée selon l'équation :

$$\varepsilon_s(z, t) = \varepsilon_{smo} [\Delta P_g(t)]^m \left(\frac{z}{L}\right)^{m/(1-m-n)} \quad \text{Eq II- 101}$$

Au début de la compression :

- la distribution de porosité est donnée par l'équation (II-101) (fin de la phase de filtration c'est à dire lorsque la hauteur du piston est égale à la hauteur du gâteau).
- l'estimation de la vitesse initiale de la phase solide est faite à partir de la porosité initiale (déterminée suite au calcul précédent) et de l'équation de continuité de la phase solide (Eq II-82).

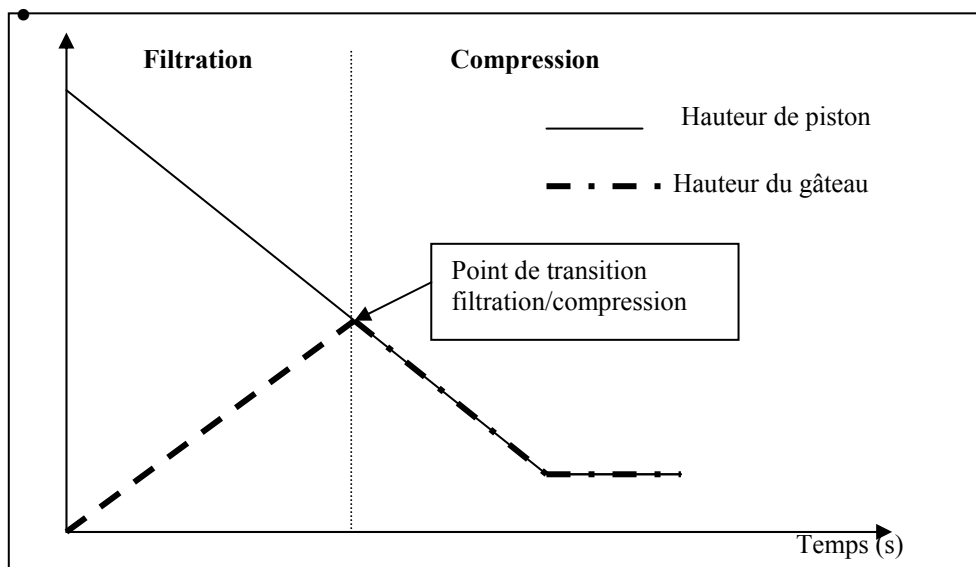


Figure II- 10: Evolution de la hauteur du piston et du gâteau

II-2-1-3-2. Conditions aux limites

Au niveau de la surface filtrante ($z=0$) :

- $\varepsilon_l^0 u_l^0$ est donné par le déplacement du piston en supposant que le milieu est saturé et incompressible : le déplacement du piston n'est alors dû qu'à la quantité d'eau expulsée. D'après l'équation de continuité

$$\varepsilon_l u_l + (1 - \varepsilon_l) u_s = \varepsilon_l^0 u_l^0 = -\frac{1}{A} \frac{dV}{dt}$$

Initialement on considère que le flux de matière est nul, on prend comme hypothèse que l'opération de filtration compression est une superposition de deux phases distinctes : une phase filtration et une phase de compression

- $u_s=0$.

Au contact piston/gâteau ($z=L$)

Il n'y a pas de perte de matière à travers le piston d'où :

- $\frac{\partial u_s}{\partial z} = 0$ Eq II- 102

- $\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial z} = 0$ Eq II- 103

II-2-2 Résolution numérique

Les équations finales du problème sont résolues par une méthode implicite aux différences finies. La méthode est inspirée des travaux de Karl et Wells (1999) appliqués à la sédimentation.

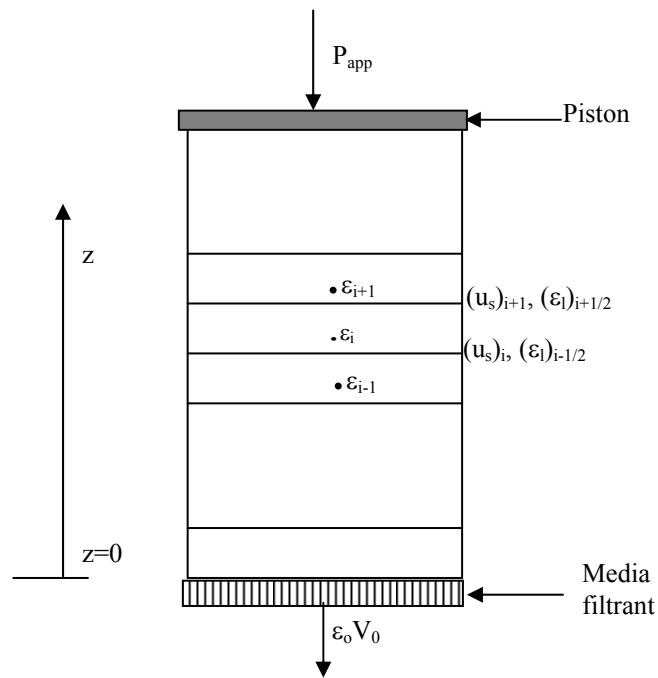


Figure II- 11: Schéma de discrétisation

La différence finie implicite de l'équation (II-82) nous donne :

$$\frac{(\varepsilon_l)_i^{t+1} - (\varepsilon_l)_i^t}{\Delta t} = \frac{[(1 - \varepsilon_l)u_s]_{i+1}^t - [(1 - \varepsilon_l)u_s]_i^t}{\Delta z} \quad \text{Eq II- 104}$$

Pour la conservation de quantité de mouvement l'équation II-94 peut être mise sous la forme suivante, avant discrétisation, afin d'alléger la formulation :

$$A \frac{\partial u_s}{\partial t} + [B_1 + B_2 u_s] \frac{\partial u_s}{\partial z} + [C u_s + D] + [E + (F + G_1) u_s + G_2 u_s^2] + H = I + (J + K u_s) + L \quad \text{Eq II- 105}$$

Les différents termes de cette expression et leur forme discrétisée sont reportés dans le tableau (II-2) et des détails du calcul sont présentés dans l'annexe II-2.

Tableau II- 2 discrétisation de l'Eq II-105

Coefficient	Terme en vitesse	Discrétisation implicite	Expression du coefficient
A	$\frac{\partial u_s}{\partial t}$	$\frac{(u_s)_i^{t+1} - (u_s)_i^t}{\Delta t}$	$(1 - \varepsilon_i) \rho_i^l + \varepsilon_i \rho_i^s$
B1	$\frac{\partial u_s}{\partial z}$	$\frac{(u_s)_{i+1}^{t+1} - (u_s)_{i-1}^{t+1}}{2 \Delta z}$	$\rho_i^l \varepsilon_i^0 u_i^0 \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i}$
B2	$u_s \frac{\partial u_s}{\partial z} = 2 \frac{\partial \left(\frac{u_s^2}{2} \right)}{\partial z}$	$\frac{\left[u_s^t u_s^{t+1} - \left(\frac{u_s^2}{2} \right)_{i+1}^t \right] - \left[u_s^t u_s^{t+1} - \left(\frac{u_s^2}{2} \right)_{i-1}^t \right]}{2 \Delta z}$	$\varepsilon_i \rho_i^s - \rho_i^l \frac{(1 - \varepsilon_i)^2}{\varepsilon_i}$
C	u_s	$(u_s)_i^{t+1}$	$-\frac{\rho_i^l}{\varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}$
D	u_s	$(u_s)_i^{t+1}$	$\rho_i^l \frac{\varepsilon_i^0 u_i^0}{\varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}$
E			$\rho_i^l \frac{(\varepsilon_i^0 u_i^0)^2}{\varepsilon_i^2} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z}$
F	u_s	$(u_s)_i^{t+1}$	$\frac{\rho_i^l (\varepsilon_i^0 u_i^0)}{\varepsilon_i^2} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z}$
G1	u_s	$(u_s)_i^{t+1}$	$-\rho_i (1 - \varepsilon) \frac{\varepsilon_i^0 v_o}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$
G2	$(u_s)^2$	$2 u_s^t u_s^{t+1} - (u_s^2)_i^t$	$\frac{\rho_i^l (1 - \varepsilon_i)}{\varepsilon_i^2} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z}$
H			$-\rho_i^l \frac{\partial \varepsilon_i^0 u_i^0}{\partial t}$
I			$\varepsilon_i (\rho_i^l - \rho_i^s) g$
J			$\frac{F \varepsilon_i^0 u_i^0}{1 - \varepsilon_i}$
K	u_s	$(u_s)_i^{t+1}$	$-\frac{F}{1 - \varepsilon_i}$
L			$\frac{(\sigma)_{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon_i)} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z}$

II-2-2-1 Organigramme de résolution

La résolution numérique du problème mentionné ci-dessus est réalisée suivant l'organigramme présenté sur la figure (II- 12). A partir du profil de porosité obtenu à la fin de la filtration, on détermine le profil initial de la vitesse du solide. Puis à partir de l'hypothèse de saturation du gâteau on détermine la hauteur du piston.

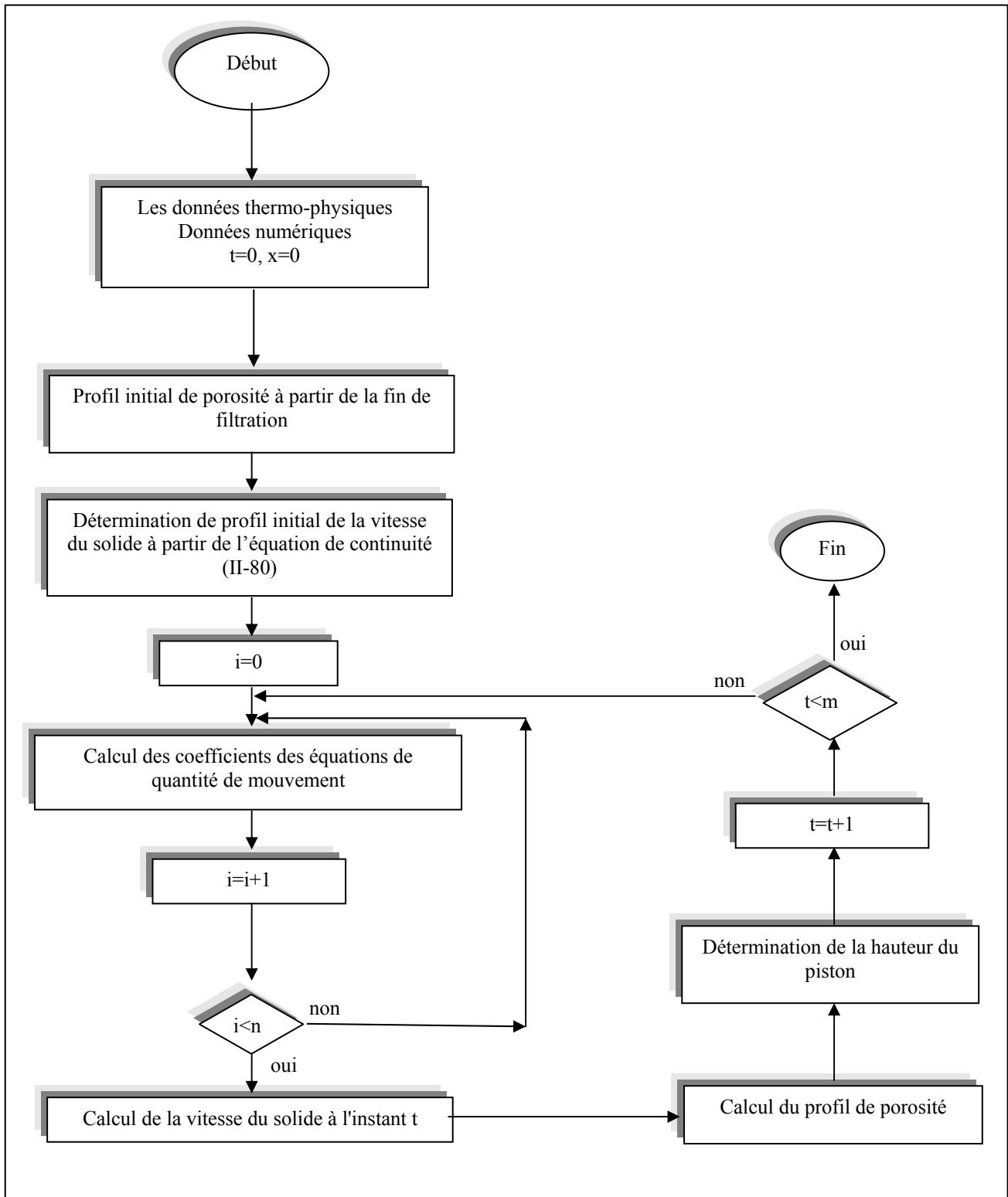


Figure II- 12: Organigramme de résolution

II-2-2-2 Résultats et discussion

II-2-2-2-1 Phase de filtration

Les conditions initiales ont été fixées suite à une série d'essais réalisés avec une suspension de Kaolin dans une cellule de filtration compression. Ainsi les courbes t/V versus V ont pu être établies. L'application de l'équation de Ruth (II-9) pour la phase de filtration permet de déterminer les paramètres caractéristiques tels que la résistance spécifique (Tableau (II-3)).

Tableau II- 3: Paramètre de filtration (kaolin)

Pression appliquée (bar)	Pression du gâteau formé (Pa)	Résistance spécifique ($m.kg^{-1}$)
5	466866	4,436E+12
4	338874,75	3,734E+12
3	263798,85	3,181E+12
2	190538,43	2,554E+12
1	91569,369	2,357E+12
0,5	47250,392	1,777E+12

A partir des résultats rapportés dans le tableau II-3 et en utilisant les équations (II-95) et (II-96) les coefficients empiriques du modèle de Holdich (1996) ont pu être calculés.

Les coefficients des équations empiriques sont les suivants :

Co	0,173	α_0	4,919E+10
m	0,085	n	0,375

La fin de la filtration à l'égalité de la hauteur du gâteau et de la hauteur du piston (figure II-13)

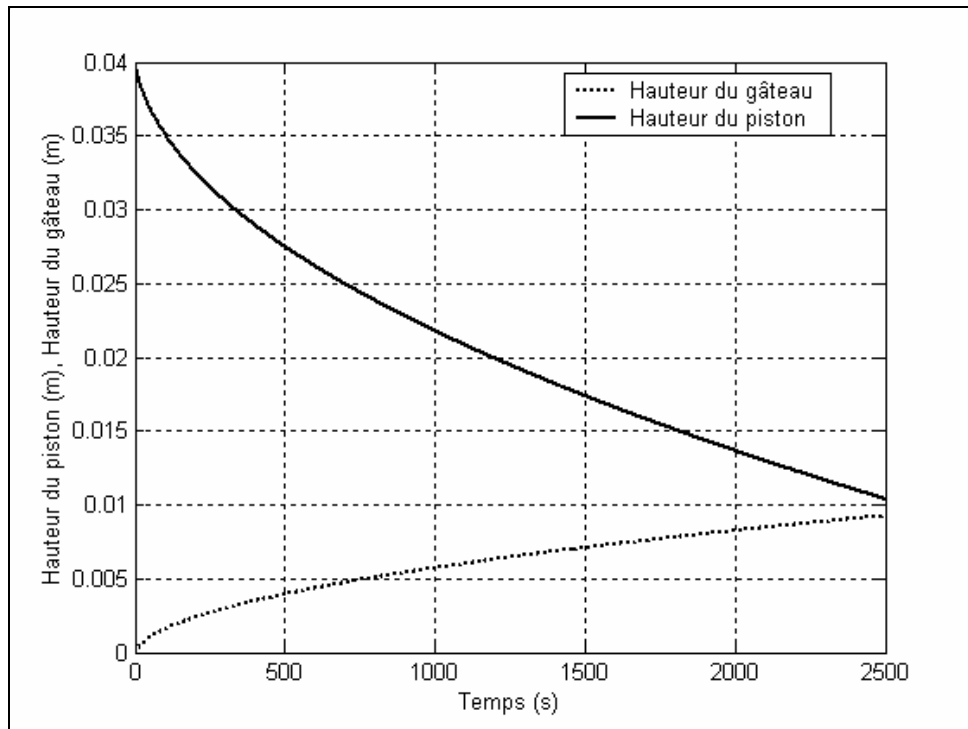


Figure II- 13: Evolution du hauteur de piston et du gâteau

A cet instant la porosité initiale de la phase de compression est obtenue à partir de la distribution présentée sur la figure (II-14)

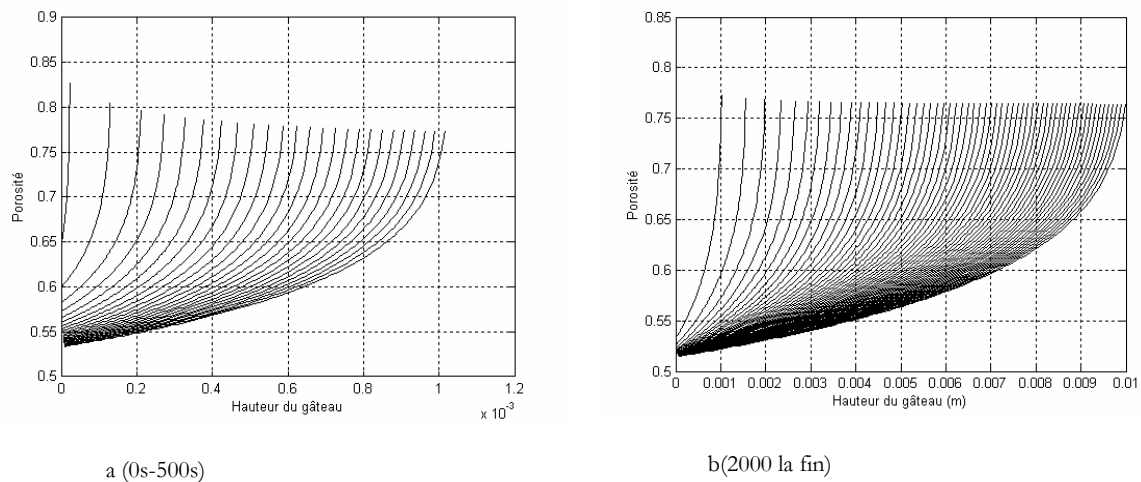


Figure II- 14: Champs de porosité (phase filtration)

II-2-2-2-2 Compression

La figure II-15 présente la courbe caractéristique de le filtration (courbe d'évolution de t/V en fonction de V) produite par la simulation numérique. On remarque une relative concordance entre la courbe théorique et la courbe expérimentale (fig. II-16) au moins de point de vue de l'allure générale. On ne peut pas ici complètement juger la validité car les propriétés physiques utilisées

pour la simulation sont issues de la bibliographie et correspondent certainement à une argile un peu différente.

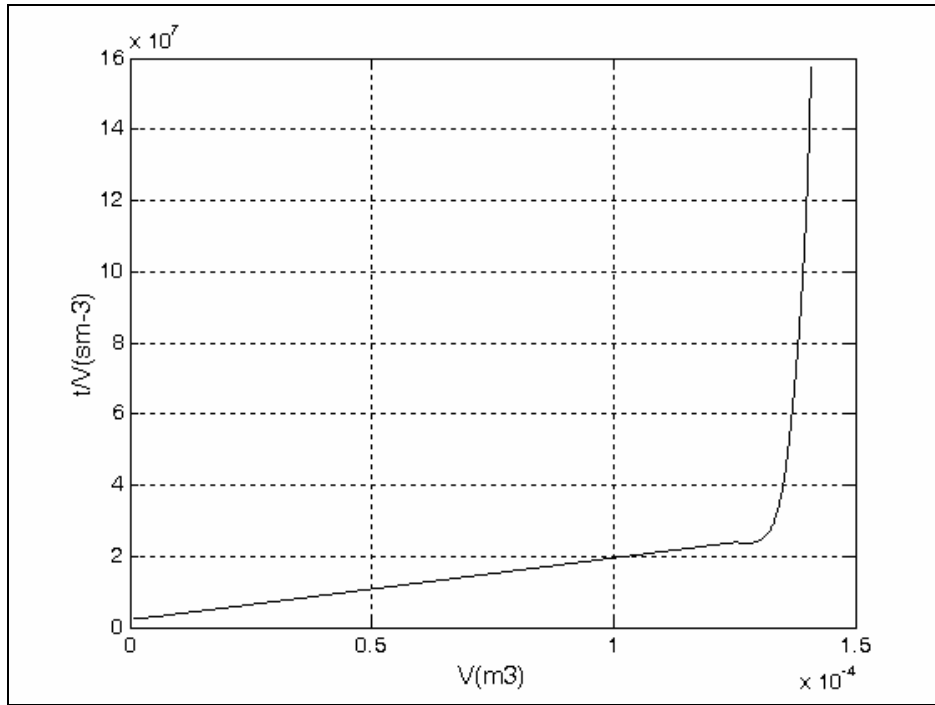


Figure II- 15: courbe caractéristique de la filtration-compression

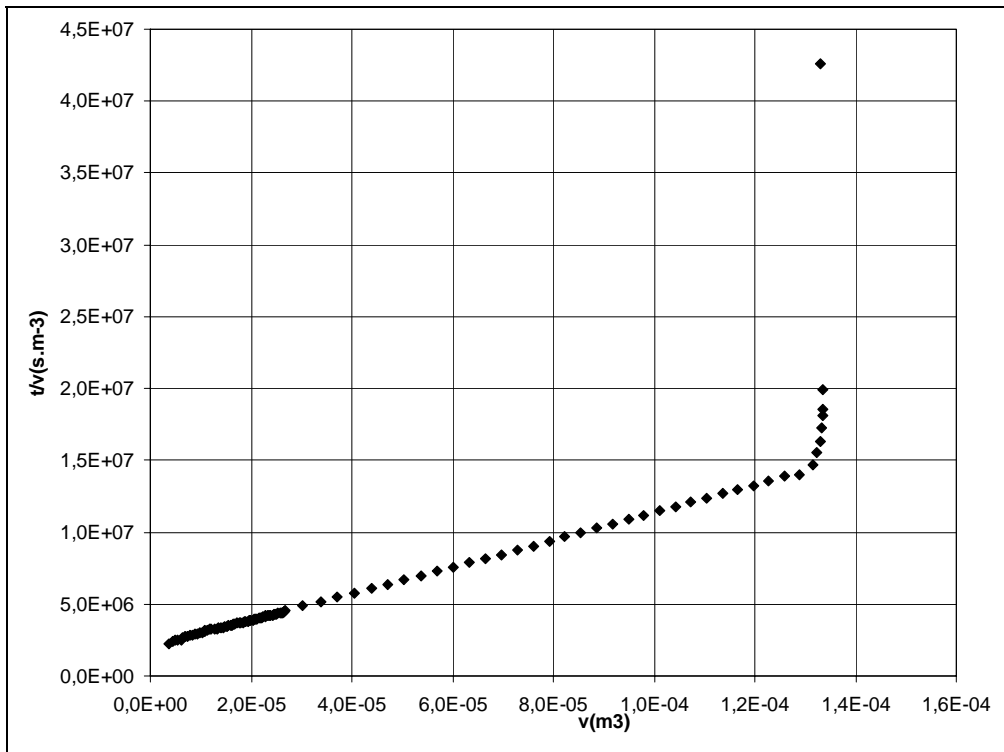


Figure II- 16: courbe caractéristique de la filtration expérimentale

La figure II-17 présente la courbe de consolidation calculée à partir de notre code ainsi que celles obtenues avec d'autres modèles rhéologiques tels que celui de Terzaghi, Terzaghi-Voigt. Une courbe de consolidation établie à partir d'expériences réalisées, en cellule de filtration-compression, sur cet argile est également présentée sur la figure. Les différentes courbes ont globalement la même allure avec des écarts qui restent relativement acceptables. Ceci semble pouvoir soutenir notre approche de modélisation, il reste cependant à valider ce modèle dans de meilleures conditions c'est à dire en réalisant une étude expérimentale complète associant les mesures en cellule de filtration compression et la caractérisation mécanique nécessaire à la simulation.

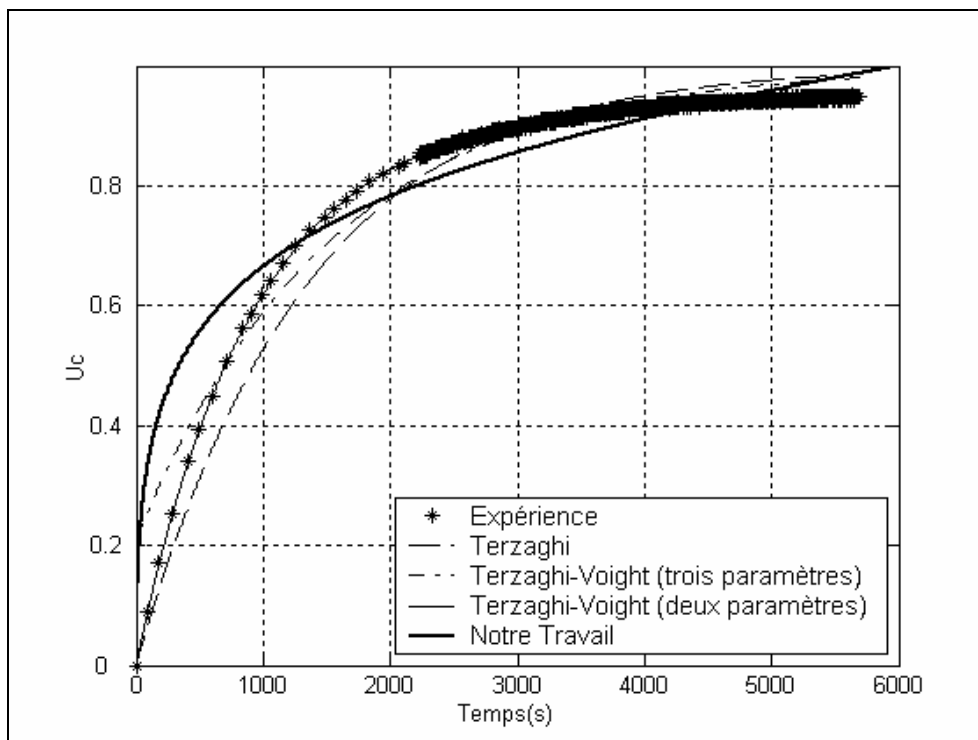


Figure II- 17: taux de consolidation

L'évolution de la porosité moyenne au cours de la phase de compression (fig II-18) varie lentement, en comparaison avec l'évolution observée durant la phase de filtration. A la fin de la compression la porosité tend vers un état d'équilibre (asymptote horizontale) qui dépend de la pression appliquée et de la compressibilité du produit L'existence d'une "courbe d'équilibre" (pression /porosité) semble être une caractéristique physique importante du gâteau qui renseigne sur la déshydratation (mécanique) maximale envisageable avec un procédé donné de compression.

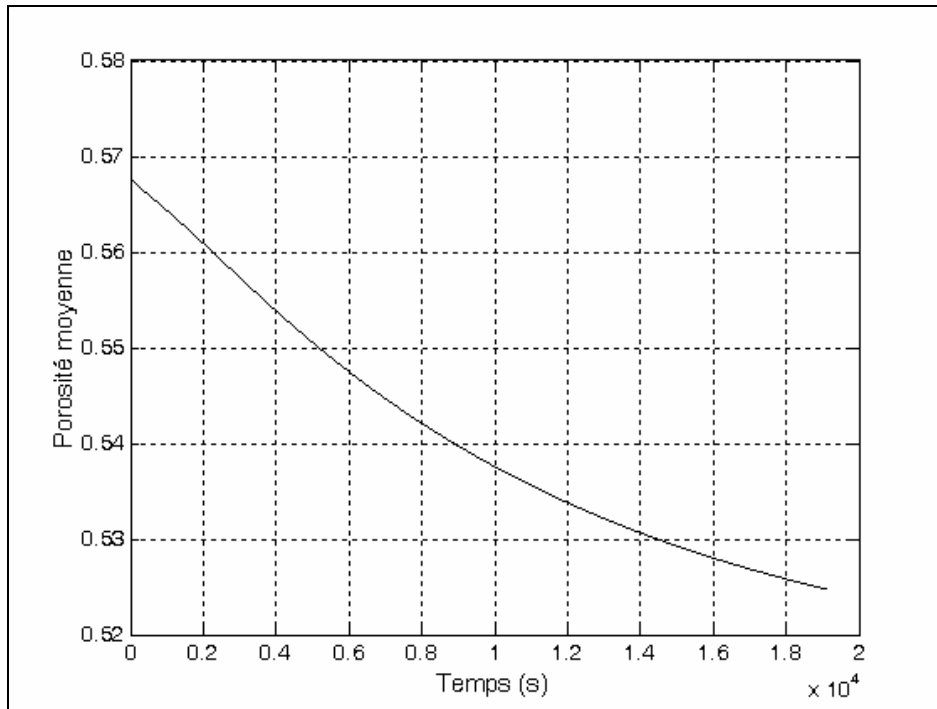


Figure II- 18: porosité moyenne (phase de compression)

La distribution spatio-temporelle de la porosité locale (fig II-19) révèle un gradient au début de la phase de compression (fin de la phase de filtration). Celui-ci diminue au cours du temps jusqu'à la disparition (équilibre final).

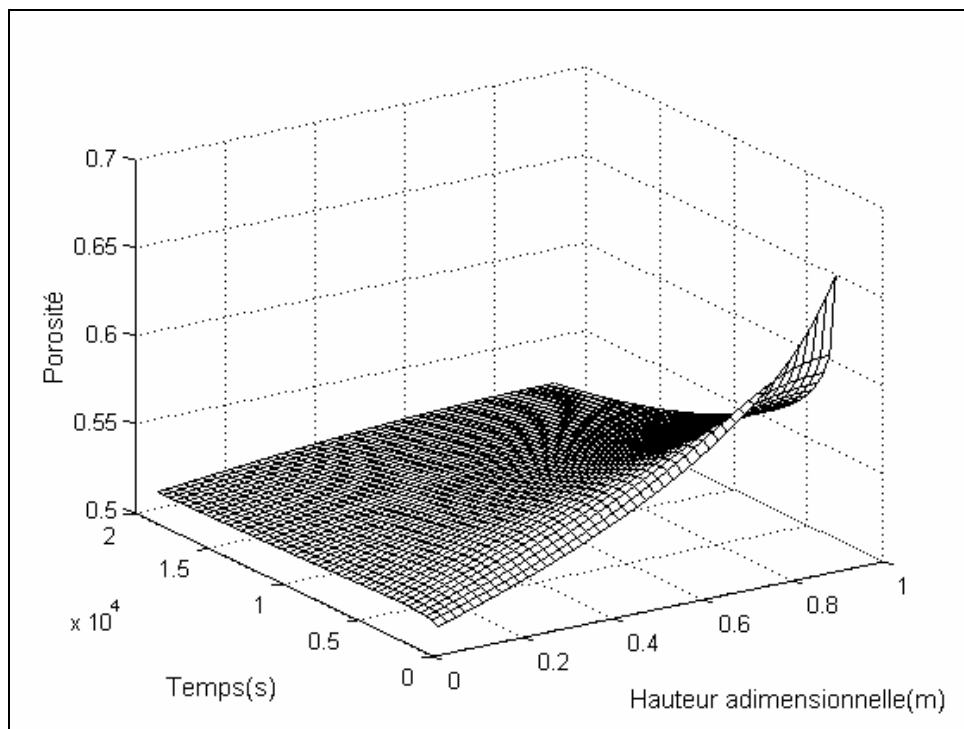


Figure II- 19: Champ de porosité (phase de compression)

Ce résultat est validé par l'expérience (fig II-20). En effet à un instant donné de la compression, par exemple 2991 secondes, la porosité locale évolue entre 0,63 au niveau du média filtrant et 0,83 à la surface supérieure du gâteau. Après 7042 secondes cette porosité tend vers une valeur de 0,6 pratiquement uniforme à travers tout le gâteau. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus par Tiller et Yeh (1987) avec un modèle dit classique et par La Heij (1994) avec son modèle rhéologique.

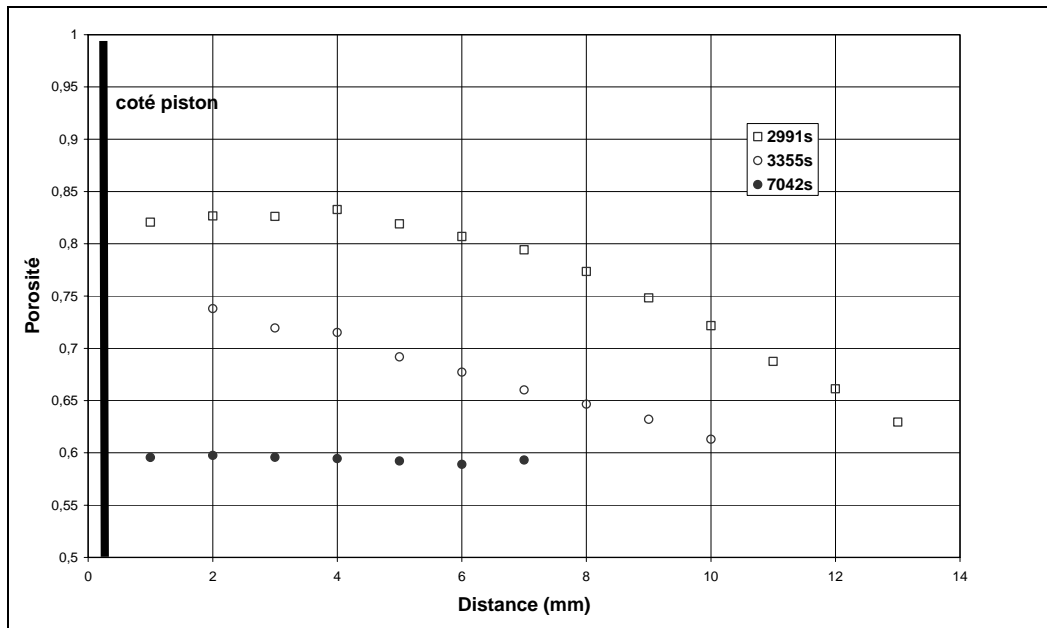


Figure II- 20: Champ de porosité (phase de compression) expérimentale

L'évolution de l'épaisseur du gâteau est présentée suivant l'évolution de la hauteur du piston (fig. II-21). Dans notre cas cette évolution n'est due qu'à la variation de la teneur en eau dans le gâteau (suite à l'hypothèse d'un solide incompressible) et elle est proportionnelle au volume de filtrat récupéré (fig. II-22).

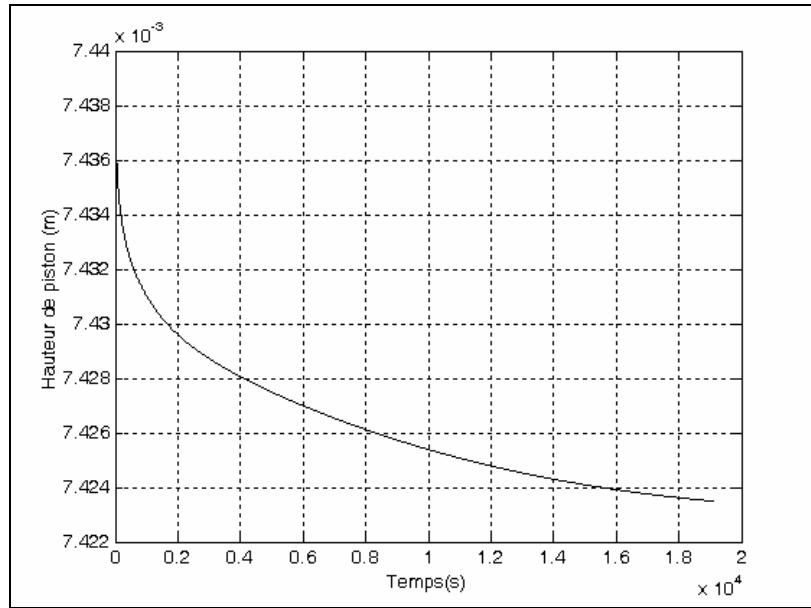


Figure II- 21: hauteur de piston (phase de compression)

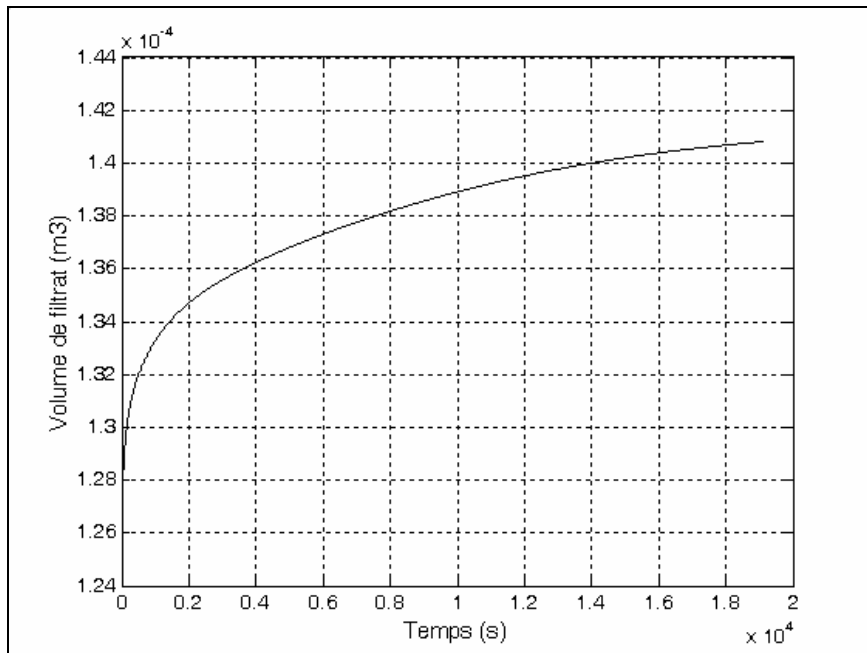


Figure II- 22: volume de filtrat (phase de compression)

II-2-3 Conclusions

D'après notre recherche bibliographique sur la filtration/compression (Chapitre II-1) la littérature ne propose pas de travaux de modélisation du processus de filtration-compression couplant les équations de transfert de base et les équations de la mécanique des milieux continus. Ce chapitre propose donc de remédier en partie à cela, en développant une formulation mathématique, pour décrire la phase de compression, basée sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement associées avec le comportement mécanique des matériaux. Cette formulation aboutit au final à la résolution de deux équations à deux inconnues ; la porosité et la

vitesse du solide. Pour les résoudre on a besoin des conditions aux limites et initiale. Cette dernière est obtenue dans notre cas par la formulation de Holdich qui permet d'estimer le profil de porosité à la fin de la filtration (soit, au début de compression). La résolution du problème se fait ensuite de façon numérique grâce à une méthode aux différences finies. Etant donné que la caractérisation mécanique du matériau n'a pas pu être réellement réalisée dans ce travail il est difficile de valider totalement notre modèle (par une confrontation des résultats expérimentaux et théoriques). Une validation "qualitative" utilisant des données de la littérature et des points expérimentaux a cependant été proposée. Elle montre que notre code de calcul donne des résultats acceptables au sens physique. Sur cette base des simulations ont été réalisées notamment pour déterminer l'évolution de la porosité sur l'épaisseur du gâteau en fonction du temps. Un gradient de porosité apparaît au début de la compression et tend à disparaître au cours du temps pour atteindre un état d'équilibre. Cet équilibre permet de caractériser l'aptitude d'un produit à la compression en traçant notamment les "courbes d'équilibre" porosité/pression. L'évolution d'autres paramètres tels que volume de filtrat ou la position du piston en fonction du temps a également été simulée.

Au final, cette formulation peut être considérée comme un premier pas vers une modélisation plus rigoureuse de la filtration /compression permettant d'appréhender le cas des matériaux très compressibles affichant une rhéologie complexe.

II-2-4 Références

- Holdich R. G., Ruston A. et Wards A. S., Solid-liquid filtration and separation technology, *Edition VCH*, (1996).
- Karl J. R. et Wells S. A., Numerical model of sidimentation/thickening with inertial effects, *Journal of Environmental Engineering*, Vol. 10, (1999).
- La Heij E.J., An analysis of sludge filtration and expression, PhD thesis, *Technische Universiteit Eindhoven*, (1994).
- Tiller F.M. et Yeh C.S., Role of porosity in filtration. XI: Filtration followed by expression, *AICHEJ*, Vol. 33, p. 1241-1256, (1987).
- Tosun I., et Willis M.S., Desai F. et Chase G.G., Analysis of drag and particulate stress in porous media flows, *Chemical Engineering Science*, Vol. 50, p. 1961-1969, (1995).

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Au terme de cette étude consacrée aux déshydratations thermique et mécanique de suspensions d'argile, ses points saillants peuvent être récapitulés, avant de tenter de donner en guise de conclusion, une prospective qui se veut utile et réaliste, plutôt que lyrique et triomphante.

Notre but principal était de proposer un modèle avancé de séchage et de s'en inspirer pour développer une approche un peu nouvelle de la modélisation de la filtration-compression, ainsi le rapport se découpe en deux parties respectivement dédiées à ces deux procédés.

Le premier chapitre de la première partie a fait l'objet d'une caractérisation physique des argiles utilisées pour cette étude (kaolin et bentonite). Des isothermes de sorption, qui constituent une donnée essentielle pour la compréhension du processus de séchage, ont été déterminées expérimentalement. Une méthode statique a été utilisée à différentes températures pour cette caractérisation. L'allure générale des isothermes des deux produits est de type II selon le classement B.E.T. L'augmentation de la température induit une diminution de la teneur en eau d'équilibre. Pour la modélisation de ces isothermes, il s'est avéré que les modèles de Guggenheim, Anderson et de Boer (GAB) et d'Henderson sont suffisants pour décrire ces isothermes de sorption. La masse volumique ainsi que le retrait en fonction de la teneur en eau ont également été étudiés expérimentalement. Cette caractérisation permet, pour notre approche de modélisation ultérieure, de faire le lien entre le transfert de matière et le comportement mécanique. Cette étude expérimentale a montré que le volume spécifique varie linéairement avec la teneur en eau jusqu'à une limite dépende du type d'argile. Au dessous de cette valeur le volume spécifique reste constant. Un autre point de caractérisation abordé dans cette partie expérimentale est la détermination du coefficient de diffusion matériel. Après une revue bibliographique concernant les différentes approches pour la détermination du coefficient de diffusion, une expression présentant une relation entre le coefficient de diffusion et les propriétés de matériau (comme la taille des particules et la distribution de taille des pores) a été retenue. Un ajustement des paramètres de cette expression a été réalisé dans le cas du kaolin. Le dernier volet de ce travail expérimental présente une étude de la cinétique de séchage incluant l'influence des différents paramètres de séchage tels que la vitesse, la température et la teneur en eau de l'air séchant. Une modélisation basée sur le concept de courbe caractéristique de séchage de cette cinétique a permis d'établir une expression polynomiale pour les deux argiles.

Le second chapitre de cette partie a été consacré au développement d'une formulation hydro thermo mécanique du processus de séchage, pouvant englober le cas des milieux non déformables ainsi que celui des milieux déformables. Ce développement c'est basé sur la prise en compte des lois fondamentales de comportement mécanique des solides et sur la transformation des équations d'un repère Eulérien vers un repère Lagrangien. La technique utilisée s'avère très intéressante et fiable pour l'étude du séchage des milieux déformables.

L'application de cette formulation a fait l'objet du troisième chapitre. En premier lieu, un cas unidirectionnel a été simulé. La méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre ce problème. La confrontation des résultats simulés avec ceux issus d'expériences a permis de valider notre code de calcul sur ce genre de problème. Une étude numérique de l'évolution de différents paramètres tels que l'humidité et la température dans le produit a ensuite pu être réalisée. En second lieu, le cas d'une configuration bidirectionnelle, a été abordé en utilisant la même méthode de résolution que précédemment. Nous avons pu aussi mettre en évidence la non validité de l'approche qui consiste à utiliser des mesures de retrait global pour relier l'équilibre mécanique au transfert de chaleur et de masse.

Dans le premier chapitre de la seconde partie, l'approche classique pour l'étude de la filtration, basée sur la théorie de Ruth, a été présentée en mettant l'accent sur les limites de validité de cette approche et des différents utilisés. Les principaux modèles, disponibles dans la littérature pour décrire les processus de filtration et de compression, ont ensuite été discutés. La majorité des travaux combine les équations de conservation de masse pour les phases liquide et solide avec une équation de quantité de mouvement simplifiée et la loi de Darcy modifiée. Des équations constitutives (empiriques) sont introduites pour caractériser le comportement mécanique du gâteau. Pour lever une part de l'empirisme induit par les équations constitutives notre idée a été d'élaborer un modèle un peu différent basé sur le calcul de la vitesse de déformation du gâteau.

Dans le second chapitre de cette partie on a développé une formulation mathématique de ce modèle est proposée pour, uniquement, le cas de la compression mécanique. La résolution des équations a été réalisée par une approche numérique utilisant une méthode aux différences finies. Une validation "qualitative" du modèle proposée a été tentée en comparant nos résultats simulés avec des données expérimentales. Les résultats obtenus sont satisfaisants et valide en partie notre approche. Diverses simulations ont ensuite été réalisées notamment pour déterminer l'évolution de la porosité moyenne en fonction du temps et de la position dans le gâteau. Un gradient de porosité apparaît au début de la compression et tend à disparaître au cours du temps pour atteindre un état

d'équilibre. Cet équilibre permet de caractériser l'aptitude d'un produit à la compression en traçant notamment les "courbes d'équilibre" porosité/pression.

Au delà des résultats obtenus lors de cette étude quels prolongements peut-on proposer ?

Ce travail peut poursuivre selon plusieurs voies : expérimentale, modélisation et résolution numérique :

- ✓ D'un point de vue expérimental ; il serait intéressant mettre en place des mesures mécaniques et rhéologiques appropriées à ce type de matériaux et d'essayer de les appliquer ensuite à des matériaux encore plus complexes comme par exemple les boues issues de stations d'épurations.
- ✓ D'un point de vue modélisation ; concernant le séchage il est important de développer la partie mécanique et spécialement sa validation avec l'expérience. Pour la filtration-compression, notre travail marque le point de départ d'une modélisation rigoureuse de cette opération unitaire. Cependant, il reste encore beaucoup de travail à faire dans cette partie.

D'un point de vue résolution numérique (ou méthodes numériques) ; la méthode des différences finies a été utilisée dans ce travail, tout en sachant qu'il existe d'autres méthodes qui peuvent être plus appropriées telles que la méthode des éléments finis pour la mécanique et la méthode des volumes finis pour le transfert de chaleur et de masse dans le cas bidirectionnel. Une perspective serait de reprendre ce travail avec ces différentes méthodes afin de pouvoir les comparer.

ANNEXES

DEMONSTRATION DE L'EQUATION (I- 48).....	166
DEMONSTRATION DE L'EQUATION (I- 60).....	169
DETERMINATION DE L'EQUATION (II-94) (COMBINAISON DE L'EQUATION DE CONTINUITE ET DE QUANTITE DE MOUVEMENT).....	171
DESCRITISATION DE L'EQUATION (II-105) PAR TETA METHODES.....	173

DEMONSTRATION DE L'EQUATION (I- 48)

L'équation de continuité pour chaque phase s'écrit :

Solide :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \vec{u}_s) = 0 \quad (\text{A I-1})$$

Liquide :

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \text{div}(\rho_l \vec{u}_l) = 0 \quad (\text{A I-2})$$

On a par ailleurs :

$$\rho \vec{u} = \rho_s \vec{u}_s + \rho_l \vec{u}_l \quad (\text{A I-3})$$

et

$$\rho = \rho_s + \rho_l \quad (\text{A I-4})$$

Comme le flux de transport de masse peut être décomposé en un terme de diffusion et un terme de convection,

$$\rho_k \vec{u}_k = \vec{J}_{D,k} + \rho_k \vec{u} \quad \text{avec } k=l, s \quad (\text{A I-5})$$

L'équation (A I-3) devient :

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} (\rho_s \vec{u}_s + \rho_l \vec{u}_l) \quad (\text{A I-6})$$

En appliquant cette relation au liquide, on obtient :

$$\rho_l \vec{u}_l = \vec{J}_{D,l} + \frac{\rho_l}{\rho} (\rho_s \vec{u}_s + \rho_l \vec{u}_l) \quad (\text{A I-7})$$

Soit

$$X_1 = \frac{\rho_1}{\rho} \quad (\text{A I-8})$$

on a :

$$\bar{J}_{D,1} = -\rho D\overrightarrow{\text{grad}}(X_1) \quad (\text{A I-9})$$

Les relations (A I-6) et (A I-7) donnent :

$$\rho_1 \bar{u}_1 = -\rho D\overrightarrow{\text{grad}}(X_1) + X_1(\rho_s \bar{u}_s + \rho_1 \bar{u}_1) \quad (\text{A I-10})$$

On en déduit:

$$\rho_1 \bar{u}_1 (1 - X_1) = -\rho D\overrightarrow{\text{grad}}(X_1) + X_1 \rho_s \bar{u}_s \quad (\text{A I-11})$$

$$\text{or on a : } X_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_s} \Rightarrow X_1(\rho_1 + \rho_s) = \rho_1 \Rightarrow \rho_1(1 - X_1) = X_1 \rho_s$$

Remplaçons dans l'équation (A I-8) $X_1 \rho_s$ par sa valeur on aura :

$$\rho_1 \bar{u}_1 (1 - X_1) = -\rho D\overrightarrow{\text{grad}}(X_1) + (1 - X_1) \rho_1 \bar{u}_s \quad (\text{A I-12})$$

ce qui donne au final :

$$\rho_1 (\bar{u}_1 - \bar{u}_s) (1 - X_1) = -\rho D\overrightarrow{\text{grad}}(X_1) \quad (\text{A I-13})$$

soit :

$$w = \frac{m_1}{m_s} = \frac{\rho_1}{\rho_s} \quad (\text{A I-14})$$

d'où

$$X_1 = \frac{w}{1+w} \Rightarrow dX_1 = \frac{dw}{(1+w)^2} \quad (\text{A I-15})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(X_1) = \frac{1}{(1+w)^2} \overrightarrow{\text{grad}}(w) \quad (\text{A I-16})$$

En utilisant (A I-10) dans (A I-9) on aura finalement :

$$\rho_1(\bar{u}_1 - \bar{u}_s) = -\frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{Dgrad}(w) \quad (A I-17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \bar{u}_s) &= \frac{\partial \left(\rho_s \frac{\rho_1}{\rho_s} \right)}{\partial t} + \text{div}(\rho_s w \bar{u}_s) \\ &= \frac{\partial(\rho_s w)}{\partial t} + \text{div}(\rho_s w \bar{u}_s) \\ &= w \frac{\partial(\rho_s)}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial(w)}{\partial t} + w \cdot \text{div}(\rho_s \bar{u}_s) + \rho_s \bar{u}_s \overrightarrow{grad}(w) \\ &= w \left(\frac{\partial(\rho_s)}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \bar{u}_s) \right) + \rho_s \left(\frac{\partial(w)}{\partial t} \bar{u}_s \overrightarrow{grad}(w) \right) \end{aligned} \quad (A I-18)$$

Or on a

$$\frac{\partial(\rho_s)}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \bar{u}_s) = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \bar{u}_s) = \rho_s \left(\frac{\partial(w)}{\partial t} + \bar{u}_s \overrightarrow{grad}(w) \right) \quad (A I-19)$$

L'équation (A I-17) et le premier terme de l'équation (A I-19) donnent :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \bar{u}_s) = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 + \frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{Dgrad}(w) \right) \quad (A I-20)$$

Or d'après (A I-2) on a :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \bar{u}_s) = \text{div} \left(\frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{Dgrad}(w) \right) \quad (A I-21)$$

(A I- 19)=(A I- 21) ce qui donne en définitif :

$$\rho_s \left(\frac{\partial(w)}{\partial t} + \bar{u}_s \overrightarrow{grad}(w) \right) = \text{div} \left(\frac{\rho}{1+w} \overrightarrow{Dgrad}(w) \right) \quad (A I-22)$$

DÉMONSTRATION DE L'ÉQUATION (I- 60)

Rappelons que l'équation de conservation de la masse du constituant solide s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \vec{u}_s) = 0 \quad (\text{A I-23})$$

On a

$$\rho_s = \frac{\rho_s^0}{1 + \gamma w} \quad \text{et} \quad \rho_l = \frac{w \rho_s^0}{1 + \gamma w}$$

$$\rho_s = \frac{\rho_s^0}{1 + \gamma w} = \frac{\rho_s^0 (1 + \gamma w) - \rho_s^0 \gamma w}{1 + \gamma w} = \rho_s^0 - \gamma \frac{\rho_s^0 w}{1 + \gamma w}$$

D'où :

$$\rho_s = \rho_s^0 - \gamma \rho_l \quad (\text{A I-24})$$

Les équations (A I-24) et (A I-23) $\Rightarrow \gamma \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_s \vec{u}_s)$

$$\Rightarrow \gamma \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \text{div}(\vec{u}_s) + \vec{u}_s \overrightarrow{\text{grad}}(\rho_s) = 0$$

$$\Rightarrow -\gamma \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \rho_s \text{div}(\vec{u}_s) - \gamma \vec{u}_s \overrightarrow{\text{grad}}(\rho_l) = 0$$

$$\Rightarrow -\gamma \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \vec{u}_s \overrightarrow{\text{grad}}(\rho_l) \right) + \rho_s \text{div}(\vec{u}_s) = 0 \quad (\text{A I-25})$$

L'équation de conservation de la phase liquide est :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_1) = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_1 \bar{u}_s) + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_s) = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{J}) + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_s) = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{J}) + \rho_1 \operatorname{div}(\bar{u}_s) + \bar{u}_s \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho_1) = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \bar{u}_s \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho_1) = -\operatorname{div}(\bar{J}) - \rho_1 \operatorname{div}(\bar{u}_s) \tag{A I-26}
 \end{aligned}$$

DETERMINATION DE L'EQUATION (II-94) (COMBINAISON DE L'EQUATION DE CONTINUITÉ ET DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT)

En écrivant les équations de $-dP_l/dz$ pour l'équation de quantité de mouvement de la phase solide (II-92) et la quantité de mouvement totale :

Quantité de mouvement de la phase solide :

$$-\frac{\partial P_l}{\partial z} = \rho_s^s \frac{\partial u_s}{\partial t} + \rho_s^s u_s \frac{\partial u_s}{\partial z} + \rho_s^s g - \frac{\varepsilon_l F(u_l - u_s)}{(1 - \varepsilon_l)} + \frac{1}{(1 - \varepsilon_l)} \frac{\partial (\sigma_s)_{zz}}{\partial z} \quad \text{A II- 1}$$

Quantité de mouvement totale

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_l}{\partial z} &= \varepsilon_l \rho_l^l \frac{\partial u_l}{\partial t} + \varepsilon_l \rho_l^l u_l \frac{\partial u_l}{\partial z} + (1 - \varepsilon_l) \rho_s^s \frac{\partial u_s}{\partial t} + (1 - \varepsilon_l) \rho_s^s u_s \frac{\partial u_s}{\partial z} \\ &+ \left[(1 - \varepsilon_l) \rho_s^s + \varepsilon_l \rho_l^l \right] g + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{A II- 2}$$

$$\text{où } \sigma = (\sigma_s)_{zz} + (\sigma_l)_{zz} = \varepsilon_l \sigma + \varepsilon_s \sigma$$

L'égalisation entre l'équation de quantité de mouvement solide et totale (A II-1 et A II-2) donne :

$$\begin{aligned} \rho_s^s \frac{\partial u_s}{\partial t} + \rho_s^s u_s \frac{\partial u_s}{\partial z} + \rho_s^s g - \frac{\varepsilon_l F(u_l - u_s)}{(1 - \varepsilon_l)} + \frac{1}{(1 - \varepsilon_l)} \frac{\partial (\sigma_s)_{zz}}{\partial z} = \\ \varepsilon_l \rho_l^l \frac{\partial u_l}{\partial t} + \varepsilon_l \rho_l^l u_l \frac{\partial u_l}{\partial z} + (1 - \varepsilon_l) \rho_s^s \frac{\partial u_s}{\partial t} + (1 - \varepsilon_l) \rho_s^s u_s \frac{\partial u_s}{\partial z} \\ + \left[(1 - \varepsilon_l) \rho_s^s + \varepsilon_l \rho_l^l \right] g + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{A II- 3}$$

En introduisant l'expression de la vitesse de liquide dans la partie droite de l'équation (A II-3), on obtient :

$$\rho_l^l \varepsilon_l \frac{\partial u_l}{\partial t} = \rho_l^l \varepsilon_l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1 - \varepsilon_l) u_s}{\varepsilon_l} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho_l^l \varepsilon_l \left(\varepsilon_l^0 u_l^0 \frac{\partial \left(\frac{1}{\varepsilon_l} \right)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_l} \frac{\partial (\varepsilon_l^0 u_l^0)}{\partial t} - \left(\frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \right) \frac{\partial (u_s)}{\partial t} - u_s \frac{\partial \left(\frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \right)}{\partial t} \right) \\
 &= \rho_l^l \varepsilon_l \left(\frac{\varepsilon_l^0 u_l^0}{\varepsilon_l^2} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_l} \frac{\partial (\varepsilon_l^0 u_l^0)}{\partial t} - \left(\frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \right) \frac{\partial (u_s)}{\partial t} + \frac{u_s}{\varepsilon_l^2} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} \right) = \tag{A II- 4} \\
 &\rho_l^l \varepsilon_l \left(- \left(\frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \right) \frac{\partial (u_s)}{\partial t} + \frac{(u_s - \varepsilon_l^0 u_l^0)}{\varepsilon_l^2} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_l} \frac{\partial (\varepsilon_l^0 u_l^0)}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_l^l \varepsilon_l u_l \frac{\partial u_l}{\partial z} &= \rho_l^l \varepsilon_l \left(\frac{\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1-\varepsilon_l) u_s}{\varepsilon_l} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1-\varepsilon_l) u_s}{\varepsilon_l} \right) \\
 &= \rho_l^l (\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1-\varepsilon_l) u_s) \left(\frac{1}{\varepsilon_l} \frac{\partial (\varepsilon_l^0 u_l^0)}{\partial z} + \varepsilon_l^0 u_l^0 \frac{\partial \left(\frac{1}{\varepsilon_l} \right)}{\partial z} - u_s \frac{\partial \left(\frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \right)}{\partial z} - \frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \tag{A II- 5} \\
 &= \rho_l^l (\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1-\varepsilon_l) u_s) \left(\frac{u_s - \varepsilon_l^0 u_l^0}{\varepsilon_l^2} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial z} - \frac{1-\varepsilon_l}{\varepsilon_l} \frac{\partial u_s}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

En substituant les équations (A II-5 et A II-4) dans l'équation (A II-3) on aura :

$$\begin{aligned}
 &\left[(1-\varepsilon_l) \rho_l^l + \varepsilon_l \rho_s^s \right] \frac{\partial u_s}{\partial t} + \left[\rho_l^l (\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1-\varepsilon_l) u_s) \frac{(1-\varepsilon_l)}{\varepsilon_l} + \varepsilon_l \rho_s^s u_s \right] \frac{\partial u_s}{\partial z} + \left[-\rho_l^l \frac{u_s - \varepsilon_l^0 u_l^0}{\varepsilon_l} \right] \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} \\
 &+ \left[\rho_l^l (\varepsilon_l^0 u_l^0 - (1-\varepsilon_l) u_s) \frac{\varepsilon_l^0 u_l^0 - u_s}{\varepsilon_l^2} \right] \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial z} - \rho_l^l \frac{\partial \varepsilon_l^0 u_l^0}{\partial t} = \varepsilon_l (\rho_l^l - \rho_s^s) \mathbf{g} + \frac{F}{1-\varepsilon_l} (\varepsilon_l^0 u_l^0 - u_s) + \frac{(\sigma)_{zz}}{(1-\varepsilon_l)} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial z} \tag{A}
 \end{aligned}$$

II- 6

DESCRITISATION DE L'EQUATION (II-105) PAR TETA METHODES

La discrétisation de l'équation (II-105) par la méthode des différences finies avec u_s (inconnue) à déterminer par l'utilisation de la "téta méthode" (téta=0 implicite, téta=1 explicite) :

$$\begin{aligned}
 & A \left(\frac{(u_s)_{i+1}^{t+1} - (u_s)_i^t}{\Delta t} \right) + B_1 \left[\theta \left(\frac{(u_s)_{i+1}^t - (u_s)_{i-1}^t}{2\Delta z} \right) + (1-\theta) \left(\frac{(u_s)_{i+1}^{t+1} - (u_s)_{i-1}^{t+1}}{2\Delta z} \right) \right] + \\
 & B_2 \left[\theta \left(\frac{\left(\frac{u_s^2}{2} \right)_{i+1}^t - \left(\frac{u_s^2}{2} \right)_{i-1}^t}{2\Delta z} \right) + (1-\theta) \left(\frac{\left[u_s^t u_s^{t+1} - \left(\frac{u_s^2}{2} \right)_{i+1}^t \right] - \left[u_s^t u_s^{t+1} - \left(\frac{u_s^2}{2} \right)_{i-1}^t \right]}{2\Delta z} \right) \right] \\
 & + C \left[\theta (u_s)_i^t + (1-\theta) (u_s)_i^{t+1} \right] + D + E + F \left[\theta (u_s)_i^t + (1-\theta) (u_s)_i^{t+1} \right] \quad \text{A II-7} \\
 & + G_1 \left[\theta (u_s)_i^t + (1-\theta) (u_s)_i^{t+1} \right] \\
 & + G_2 \left[\theta (u_s^2)_i^t + (1-\theta) \left(2u_s^t u_s^{t+1} - (u_s^2)_i^t \right) \right] + H = I + J + K \left[\theta (u_s)_i^t + (1-\theta) (u_s)_i^{t+1} \right] + L
 \end{aligned}$$

En groupant les termes qui se rassemblent

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{-(1-\theta)(B_1 + B_2(u_s)_{i-1}^t)}{2\Delta z} \right] (u_s)_{i-1}^{t+1} + \left[\frac{A}{\Delta t} + (1-\theta)(C + F + G_1 + 2G_2(u_s)_i^t - K) \right] (u_s)_i^{t+1} \\
 & + \left[\frac{(1-\theta)(B_1 + B_2(u_s)_{i+1}^t)}{2\Delta z} \right] (u_s)_{i+1}^{t+1} = \left[\frac{\theta B_1}{2\Delta z} - \frac{(1-2\theta)(B_2(u_s)_{i-1}^t)}{4\Delta z} \right] (u_s)_{i-1}^t + \\
 & \left[\frac{A}{\Delta t} + \theta(-C - F - G_1 + K) + (1-2\theta)G_2(u_s)_i^t \right] (u_s)_i^t \tag{A II- 8} \\
 & + \left[-\frac{\theta B_1}{2\Delta z} + \frac{(1-2\theta)(B_2(u_s)_{i+1}^t)}{4\Delta z} \right] (u_s)_{i+1}^t \\
 & + (-D - E - H + I + J + L)
 \end{aligned}$$

On peut le récrire sous la forme suivante :

$$X_2(u_s)_{i-1}^{t+1} + Y_2(u_s)_i^{t+1} + Z_2(u_s)_{i+1}^{t+1} = X_1(u_s)_{i-1}^t + Y_1(u_s)_i^t + Z_1(u_s)_{i+1}^t + X_0 \tag{A II- 9}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \left[\frac{-(1-\theta)(B_1 + B_2(u_s)_{i-1}^t)}{2\Delta z} \right]; Y_2 = \left[\frac{A}{\Delta t} + (1-\theta)(C + F + G_1 + 2G_2(u_s)_i^t - K) \right] \\
 Z_2 &= \left[\frac{(1-\theta)(B_1 + B_2(u_s)_{i+1}^t)}{2\Delta z} \right]; X_1 = \left[\frac{\theta B_1}{2\Delta z} - \frac{(1-2\theta)(B_2(u_s)_{i-1}^t)}{4\Delta z} \right] \\
 Y_1 &= \left[\frac{A}{\Delta t} + \theta(-C - F - G_1 + K) + (1-2\theta)G_2(u_s)_i^t \right]; Z_1 = \left[-\frac{\theta B_1}{2\Delta z} + \frac{(1-2\theta)(B_2(u_s)_{i+1}^t)}{4\Delta z} \right] \\
 X_0 &= (-D - E - H + I + J + L)
 \end{aligned}$$