



HAL
open science

Algorithmique et optimisation de réseaux de communications optiques

David Coudert

► **To cite this version:**

David Coudert. Algorithmique et optimisation de réseaux de communications optiques. Modélisation et simulation. Université Nice Sophia Antipolis, 2001. Français. NNT : . tel-00008087

HAL Id: tel-00008087

<https://theses.hal.science/tel-00008087>

Submitted on 17 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale STIC
Département d'Informatique

THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : **INFORMATIQUE**

par

David COUDERT

Algorithmique et optimisation de réseaux de communications optiques

Soutenue publiquement le 11 Décembre 2001 devant le jury composé de :

Présidente	Mme. Anne	GERMA
Directeur	M. Afonso	FERREIRA
Rapporteurs	Mme. Anne	GERMA
	M. Jean-Claude	KÖNIG
	M. Jaroslav	OPATRYN
Examineurs	M. Andrea	CLEMENTI
	M. Jean-Marc	FEDOU
	M. François	TILLEROT

ESSI, Amphi Ouest à 16h30

À Philémon ...

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à cette thèse :

- Afonso Ferreira, qui a dirigé cette thèse, pour son soutien, son attention, ses commentaires sur mes travaux et pour la confiance qu'il me fait depuis notre première rencontre sous le soleil de San-Diego. Le sujet de thèse qu'il m'a proposé et les directions que nous lui avons fait prendre ont été passionnants ;
- Jean-Claude Bermond, pour m'avoir accueilli dans son équipe où il a instaurer une ambiance particulièrement amicale. Je lui suis profondément reconnaissant de l'aide et du temps précieux qu'il m'a consacré ;
- Anne Germa, pour l'honneur qu'elle me fait de présider mon jury et pour avoir eu la gentillesse et de rapporter cette thèse. Les différentes remarques très profitables qu'ils ont fait sur ce manuscrit m'ont permis de compléter et de clarifier plusieurs points ;
- Jean-Claude König et Jaroslav Opatrny pour l'honneur qu'ils me font de participer à mon jury, pour avoir eu la gentillesse et le courage de rapporter cette thèse dans des délais aussi courts. Les différentes remarques très profitables qu'ils ont fait sur ce manuscrit m'ont permis de compléter et de clarifier plusieurs points ;
- Andrea Clementi et Jean-Marc Fédou, pour l'honneur qu'ils me font de participer à mon jury ;
- François Tillerot, pour l'honneur qu'il me fait de participer à mon jury et pour m'avoir aidé à comprendre les problématiques liées à la conception de réseaux ;
- Stéphane Pérennes, pour sa collaboration et pour avoir survécu aux « Otisseries » ;
- Philippe Marchand, pour son hospitalité lors de mon séjour à San-Diego et pour le temps qu'il a consacré à m'expliquer les avancées de l'opto-électronique. Il est à l'origine de mon intérêt pour OTIS ;
- Xavier Muñoz, pour son hospitalité lors de mon séjour à Barcelone et pour nos échanges enrichissants ;
- Joseph Yu, pour ses conseils avisés et pour sa légendaire gentillesse ;
- Hervé Rivano, pour avoir le courage de me supporter au quotidien, pour sa gentillesse et son amitié ;
- Pascal Berthomé, pour m'avoir permis de partir à San Diego ;

- tous les membres du projet Mascotte : Bruno Beauquier, Bruno Bongiovanni, Sébastien Choplin, Olivier Dalle, Jérôme Galtier, Frédéric Havet, Aubin Jarry, Jean-François Lalande, Alexandre Laugier, Philippe Mussi, David Sagnol, Michel Syska, Corinne Touati et les ex-membres : Guillaume Conjat, Eric Darrot, Nathalie Furmento, Tania Jimenez, Nausica Marlin et Jean-Noël Petit ;
- Ephie Deriche et Patricia Lachaume pour leur gentillesse et leur efficacité à résoudre les embarras administratifs ;
- toutes les personnes rencontrées sur Nice et qui m'ont permis de passer de très bons moments : Blaise, Isabelle, Jérôme, Caroline, Pascal, Raphaëlle, Sandrine, Bruno et j'en oublie ;
- tous les ex-lyonnais, mes précieux amis : Costia, Claire, Stéphane, Hélène, Benoit, Hélène, Denis, Julien, Elsa, Nedjma, Grégoire, Anne, Stéphane et bien sur Quentin, Grégory, Sébastien, James ...
- et bien sûr ma mère et ma sœur, pour l'aide et l'affection qu'elles n'ont jamais cessé de m'apporter.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Graphes classiques et réseaux de communications	7
2.1	Quelques graphes classiques	8
2.1.1	Graphe de de Bruijn	8
2.1.2	Graphes de Reddy-Pradhan-Kuhl	8
2.1.3	Graphe de Kautz	10
2.1.4	Graphes de Imase et Itoh	12
2.1.5	Réseau papillon	13
2.1.6	Réseau papillon cyclique	16
2.1.7	Cube de de Bruijn	17
2.2	Modèles de communications structurées	17
2.2.1	Contraintes de communications	17
2.2.2	Modèles de commutation	18
2.2.3	Schémas de communications	18
2.3	Plongements	19
2.4	Notions de connexité	19
2.4.1	Notations	20
2.4.2	Connexité et routage	20
2.4.3	Complexité du routage disjoint	22
2.4.4	Connexité et circuits	23
3	Les technologies optiques pour les télécommunications	25
3.1	Description d'une liaison de communication optique	26
3.1.1	Description d'une liaison électronique	26
3.1.2	Description d'une liaison opto-électronique	27
3.1.3	Optique en l'espace libre	28
3.2	Composants optiques	28
3.2.1	Émetteurs	28
3.2.2	Récepteurs	29
3.2.3	Lentilles	30
3.2.4	Miroir Semi-réfléchissant	30
3.2.5	Étoile passive optique (OPS)	31
3.2.6	Fibre optique	33

3.2.7	Amplificateurs optiques	33
3.2.8	Convertisseurs optiques	34
3.2.9	Mécanismes microscopiques (MEMS)	34
3.3	Multiplexage optique	35
3.3.1	Multiplexage temporel (TDM)	35
3.3.2	Multiplexage en longueur d'onde (WDM)	35
3.3.3	SONET/SDH	38
3.3.4	Multiplexeur à insertion/extraction optique	38
3.3.5	Multiplexeur à insertion/extraction électronique	39
4	Réseaux de communications de l'espace libre optique	41
4.1	Optical Transpose Interconnection System, OTIS	42
4.1.1	La technologie OTIS – Topologie de base	42
4.1.2	Modélisation	44
4.2	Réseaux simples construits avec OTIS	49
4.2.1	Graphes bipartis	49
4.2.2	Graphe complets	49
4.2.3	Graphes orientés symétriques	51
4.2.4	Graphes de Imase et Itoh, de de Bruijn et de Kautz	54
4.2.5	Problème (Δ, D) sur OTIS	56
4.3	Réseaux composés construits avec OTIS	57
4.3.1	Réseau papillon	57
4.3.2	OTIS-Mesh	58
4.3.3	OTIS-G	61
4.4	Propriétés hamiltoniennes	62
5	Étude d'une famille de graphes à alphabet	67
5.1	Graphes de de Bruijn comme graphes à alphabet	67
5.1.1	Permutation sur l'alphabet, graphes $B_\pi(d, D)$	68
5.1.2	Permutation sur les indices, graphes $A(f, \pi, j)$	69
5.1.3	Complément d'étude	72
5.1.4	Exemples	74
5.2	Graphes de Kautz comme graphes à alphabet	76
5.2.1	Permutation sur l'alphabet	77
5.2.2	Permutation sur les indices	77
5.3	Application : implantation optimisée du de Bruijn avec OTIS	79
5.3.1	Isomorphismes entre $H(p, q, d)$ et $B(d, D)$	79
5.3.2	Exemple	83
5.4	Conjectures	83
5.4.1	Étude de la permutation f	83
5.4.2	Isomorphismes entre $B(d, D)$ et $H(p, q, d)$	84

6 Modèles avancés		85
6.1	Stack-graphes et hypergraphes	87
6.1.1	Hypergraphes	87
6.1.2	Stack-graphes	87
6.2	Modélisation d'une OPS	88
6.3	POPS	89
6.3.1	Définition et modélisation	89
6.3.2	Plongements	90
6.4	Stack-Kautz	91
6.4.1	Définition	91
6.4.2	Excentricité	93
6.4.3	Caractéristiques	94
6.4.4	Scalabilité	95
6.4.5	Protocoles de contrôle	97
6.4.6	Routage	99
6.4.7	Diffusion	103
6.4.8	Comparaisons entre le POPS et le stack-Kautz	103
6.4.9	Simulations	105
6.4.10	Plongements	108
6.5	Implantation du POPS et du stack-Kautz avec OTIS	111
6.5.1	Groupes de sommets	111
6.5.2	POPS	113
6.5.3	Stack-Kautz	113
6.6	Hypergraphes de de Bruijn et de Kautz	114
6.6.1	Hypergraphes de de Bruijn généralisés	114
6.6.2	Hypergraphes de Kautz généralisés	119
6.6.3	Réalisation avec OTIS	119
6.6.4	Protocoles de contrôle	121
7 Protection dans les réseaux WDM		125
7.1	Réseaux WDM	126
7.1.1	Modélisation d'un réseau WDM	126
7.1.2	Optimisation et approximation	126
7.1.3	Routage et coloration dans les réseaux WDM	127
7.1.4	Fonctions de coûts	130
7.2	Protection de l'instance	133
7.2.1	Protection 1 + 1 et 1 : 1	134
7.2.2	Paire de chemins disjoints de poids minimum	135
7.2.3	Protection $M : N$	135
7.2.4	Par sous-réseaux, par cycles	137
7.3	Protection du réseau	138
7.3.1	Re-routage global	139
7.3.2	Re-routage de bout-en-bout	139
7.3.3	Re-routage autour de la panne	140

7.3.4	Protection par faces	142
7.4	Instance all-to-all sur le cycle	143
7.4.1	Résultats connexes	146
7.4.2	Nouveaux résultats	147
7.4.3	Bornes inférieures	148
7.4.4	Construction de la DRC-couverture	149
7.4.5	Cas orienté	154
7.4.6	Conclusion	156
8	Conclusions et Perspectives	157
	Bibliographie	159
A	Quelques notions de la théorie des graphes	175
A.1	Notations mathématiques	175
A.2	Notations – définitions – graphes élémentaires	175
A.3	Quelques opérateurs sur les graphes	178
A.3.1	Graphes itérés	180
A.3.2	Somme cartésienne	180
A.3.3	Produit de convolution	181
A.3.4	Produit de composition	184
B	Géométrie d’OTIS	187
C	Un algorithme de recherche exhaustive	191
C.1	Algorithme	191
C.2	Résultats	192

Chapitre 1

Introduction

Les réseaux de communications optiques sont passés de l'état de curiosité intellectuelle à un marché de plusieurs milliards de dollars. En effet, l'utilisation de communications optiques est intéressante en termes de vitesse et de dissipation d'énergie dès que la distance à parcourir est supérieure à 1 cm [FEGGL88]. Aussi, elles sont maintenant utilisées à la fois pour les réseaux d'interconnexions des systèmes de petites tailles nécessitant des communications rapides (ordinateurs parallèles, routeurs) et dans les grands réseaux de transport massif de données (réseaux nationaux et internationaux).

Nous distinguons aujourd'hui deux familles principales de réseaux de communications optiques : les réseaux dits en « espace optique libre » et les réseaux utilisant des fibres optiques. D'une part, les réseaux de communications optiques en espace libre sont utilisés lorsque la distance entre l'émission et la réception du signal optique est faible (quelques centimètres). Ils utilisent des lentilles et des miroirs pour guider les faisceaux lumineux et permettent un grand nombre d'interconnexions de hauts débits dans un espace réduit [FGDE89, KMK⁺91]. Par exemple, la construction du réseau d'interconnexion d'un graphe complet à 64 nœuds (où chaque nœud dispose d'un lien de communication direct vers chacun des autres nœuds du réseau) est aujourd'hui réalisable dans un cube de 20 cm de côté. De même, les développements récents de mécanismes microscopiques (*Micro Electro Mechanical Systems*, MEMS) permettent la construction de crossbars tout-optique à 256 entrées, remettant ainsi au goût du jour ce type de réseaux.

D'autre part, les réseaux utilisant des fibres optiques sont adaptés aux communications longue distance (plusieurs kilomètres). Les fibres optiques alliées à la technologie WDM (wavelength division multiplexing) permettent le transport rapide de gros volumes de données (plusieurs terabits par seconde et par fibre). Des dizaines de milliers de kilomètres de fibres optiques sont actuellement utilisés dans le monde et supportent la majorité des échanges de données.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à une famille de réseaux d'interconnexions optiques en espace libre utilisant l'architecture OTIS (*Optical Transpose Interconnection System*) [MMHE93]. Ce système optique se compose de deux plans de lentilles permettant de relier une matrice d'émetteurs à une matrice de récepteurs, selon un motif fixé par le nombre et la taille des lentilles de chacun des plans. Brièvement, $OTIS(p, q)$ consiste en un premier plan de p lentilles et un deuxième de q lentilles, permettant de relier p groupes de q émetteurs

à q groupes de p récepteurs, l'émetteur (i, j) , $0 \leq i < p$, $0 \leq j < q$, étant relié au récepteur $(q - j - 1, p - i - 1)$.

L'architecture OTIS permet une implantation optique simple de réseaux d'interconnexions qui étaient difficiles à réaliser auparavant, ayant par exemple la topologie du graphe complet orienté symétrique K_n^+ (il faut alors utiliser $OTIS(n, n)$). Dès lors, tout réseau d'interconnexions peut être implanté avec $OTIS(n, n)$. En effet, un réseau de communications est généralement modélisé par un graphe dont les sommets correspondent aux nœuds du réseau, et les arcs aux liens de communications, et tout graphe d'ordre n est un sous graphe de K_n^+ . Toutefois, cette implantation n'est pas efficace dans le sens où tous les liens de communications optiques ne sont pas utilisés. Par exemple, un graphe d'ordre n et de degré 2 n'utilisera que $2n$ liens de communications sur les n^2 disponibles. Nous cherchons donc les réseaux pour lesquels tous les liens de communications optiques sont utilisés.

Pour ce faire, nous définissons une famille de réseaux d'interconnexions construits sur $OTIS(p, q)$, que nous modélisons par les graphes $H(p, q, d)$, où d émetteurs et d récepteurs consécutifs sont rassemblés pour former un même sommet du graphe. Ensuite, nous cherchons parmi les graphes connus, ceux qui sont isomorphes à $H(p, q, d)$. Nous observons expérimentalement que plusieurs graphes $H(p, q, d)$ sont isomorphes à un même graphe de de Bruijn, $B(d, D)$. Ceci nous conduit à développer la famille de graphes à alphabet $A(f, \pi, j)$ où les sommets sont des mots de longueur D sur un alphabet à d lettres : le voisinage d'un sommet est obtenu en appliquant une permutation f sur l'ordre des lettres dans le mot, puis une permutation π sur la valeur des lettres du mot dans l'alphabet et enfin en remplaçant la j^e lettre du mot obtenu par tous les symboles de l'alphabet. Cette famille de graphes contient d'une part de nombreux graphes isomorphes aux graphes de de Bruijn et d'autre part des graphes isomorphes à $H(p, q, d)$. Aussi, les graphes $A(f, \pi, j)$ nous permettent d'obtenir les valeurs de p et q pour lesquelles les graphes $H(p, q, d)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes.

Nous étudions également des réseaux de communications optiques utilisant des étoiles passives optiques (OPS). Une OPS est une forme de bus optique permettant la diffusion [BF97]. Elle permet de relier un groupe d'émetteurs à un groupe de récepteurs de telle sorte que si l'un des émetteurs envoie un message au travers de l'OPS sous forme de signaux lumineux, tous les récepteurs reçoivent ce message. La taille d'une OPS est limitée par des contraintes technologiques, limitant ainsi celle des réseaux de communications construits à partir d'une unique OPS. Afin d'augmenter le nombre de nœuds de ces réseaux, un réseau multi-OPS en un seul saut, Le *Partitionned Optical Passive Star network* (POPS) a été proposé dans [CLM⁺96]. Ce réseau consiste en un ensemble de groupes de nœuds, chacun relié par une OPS à tous les autres groupes. Le POPS permet d'augmenter le nombre de nœuds dans le réseau, ainsi que le nombre de messages émis à chaque étape de communication, mais là encore, la taille du réseau est limitée par la technologie.

Nous apportons une solution à cette limitation en proposant les stack-Kautz, réseaux multi-OPS en plusieurs sauts, construits à partir des graphes de Kautz et des stack-graphes (famille d'hypergraphes orientés obtenue en empilant des copies d'un même graphe et en remplaçant chaque pile d'arcs par un hyperarc). Dans un tel réseau, il est nécessaire de faire des compromis entre le nombre de sommets intermédiaires que doit traverser un message avant d'atteindre sa destination et la taille ainsi que le nombre des OPS. Afin de choisir

la meilleure configuration possible, nous avons étudié les caractéristiques et les ressources des stack-Kautz et conduit une étude de scalabilité. Nous avons proposé des protocoles de contrôle efficaces que nous avons validé par la construction d'un simulateur. Ensuite, nous avons étudié l'excentricité des stack-Kautz et étudié le temps d'acheminement d'un message de sa source à sa destination en fonction de la charge. Nous donnons également des résultats de plongements sur cette topologie. Enfin, nous avons proposé une implantation de ces réseaux à l'aide d'OTIS.

Enfin, nous apportons une contribution à l'étude de la sécurisation des réseaux de communications optiques utilisant la technologie WDM. De milliers de kilomètres de fibres optiques ayant d'ores et déjà été mis en place dans le monde, il est aujourd'hui essentiel de développer des stratégies efficaces pour garantir la continuité des communications dans le réseau, face à la défaillance (rupture) d'un faisceau de fibres.

Dans les réseaux WDM, un lien de communication correspond à une fibre optique ou à un faisceau de fibres, et chaque fibre permet le transport simultané de plusieurs signaux optiques, chacun utilisant une longueur d'onde différente. Les réseaux WDM sont modélisés par des (multi)graphes dont les sommets correspondent aux liens du réseau, et les arcs aux liens de communications. Pour ces réseaux, une requête de communication entre deux nœuds correspond à l'établissement et à la réservation d'un chemin et d'une longueur d'onde entre les sommets correspondant à la requête. Aussi, la rupture d'un lien de communication s'accompagne de l'interruption des communications pour les requêtes l'utilisant. Une méthode pour rétablir les communications consiste à utiliser des ressources prédéterminées et dédiées pour rerouter le trafic interrompu. C'est le principe de la *sécurisation par protection* des réseaux. Cette méthode est à opposer à la *sécurisation par restauration*, où de nouvelles routes sont calculées, au moment de la panne, en fonction des ressources disponibles.

De nombreuses stratégies permettent la mise en place de la protection dans les réseaux WDM. Certaines, comme la protection 1 : 1, réserve un chemin de protection pour chaque chemin de travail utilisé dans le réseau. D'autres, comme la protection par sous-réseaux, autorise un partage des ressources de protection par un ensemble de requêtes. Dans chaque cas les objectifs sont tout d'abord de garantir la protection de toutes les requêtes au regard de toute panne de lien et ensuite de minimiser le coût global du réseaux, comprenant le coût du routage des requêtes et le surcoût induit par les ressources réservées à la protection.

Les problèmes d'optimisation associés à ces problèmes de dimensionnement sont généralement très difficiles à résoudre. Il est donc intéressant d'étudier des cas simples pour lesquels nous pouvons fournir un dimensionnement optimal. En particulier nous étudions en détail le problème de la protection par sous réseaux dans le cas où le réseau physique est un cycle et les requêtes l'instance de communication *all-to-all*. D'autre part, nous discutons de la difficulté de chacun des problèmes, et nous étudions l'influence de chacune des composantes de la fonction de coût du réseau sur la complexité de leur résolution.

Dans la suite, nous détaillons le plan de cette thèse et l'organisation précise des différents chapitres.

Dans le **chapitre 2**, nous commençons par rappeler les définitions et les propriétés principales des graphes utilisés par la suite, dans les chapitres 4 à 6. En particulier nous présentons

les graphes de de Bruijn, de Kautz et leurs généralisations, ainsi que les réseaux papillons.

Nous poursuivons ce chapitre en abordant la notion de routage dans les réseaux de communications. Le routage d'une instance I de requêtes (couples de sommets du réseau) consiste à établir pour chaque requête un chemin dans le réseau. Nous rappelons les différents modèles permettant de définir les nœuds du réseau, ses liens de communications et les modes de commutations employés pour l'acheminement des messages au travers du réseau. Puis nous décrivons le principe du plongement d'une topologie sur une autre qui permet d'émuler une topologie logique sur un réseau de communications donné.

Enfin, nous rappelons des résultats sur la connexité des graphes. Cette notion étant un indicateur de la complexité du calcul d'un routage disjoint, elle nous sera utile dans les problèmes abordés dans le chapitre 7. Nous précisons également les relations entre la connexité des graphes et la présence de circuits particuliers.

Le **chapitre 3** présente les technologies de l'optique utilisées dans la mise en œuvre des réseaux de télécommunications. Dans de tels réseaux les informations numériques sont transmises sous forme d'impulsions lumineuses qui sont guidées depuis leur source jusqu'à leur destination au travers d'un système optique. Ce système est soit une fibre optique, soit un espace libre optique constitué, entre autre, d'une succession de lentilles et de miroirs.

Nous commençons par décrire le domaine de l'espace libre optique en faisant un parallèle entre un modèle de liaison électronique et un modèle opto-électronique. Puis nous présentons des composants intervenant dans les communications optiques : émetteur (*laser*), récepteur (*diode photosensible*), fibre optique, lentille, miroir semi-réfléchissant, étoile passive, amplificateur et convertisseur, ainsi que les systèmes mécaniques microscopiques montrant à eux seuls l'état de l'art de la technologie.

Par la suite, nous présentons les techniques de multiplexage qui permettent d'exploiter la bande passante de la fibre optique : le multiplexage temporel (*time division multiplexing*, TDM) et le multiplexage en longueur d'onde (*wavelength division multiplexing*, WDM). Nous présentons également la hiérarchie numérique synchrone (*synchronous digital hierarchy*, SDH) qui est une façon de réaliser le multiplexage temporel souvent utilisée au dessus de WDM. Enfin, nous décrivons les multiplexeurs à insertion/extraction électronique (MIE) et optique (MIEO) qui sont utilisés dans les réseaux WDM pour accéder aux informations transportées dans les fibres optiques.

Dans le **chapitre 4**, nous présentons une famille de réseaux d'interconnexions optiques en espace libre basée sur l'architecture *Optical Transpose Interconnection System* (OTIS) [MMHE93].

Nous décrivons ce système optique, puis nous proposons une famille de réseaux d'interconnexions construits sur $OTIS(p, q)$, en définissant la famille de graphes $H(p, q, d)$, où d émetteurs et d récepteurs consécutifs sont rassemblés pour former un même sommet du graphe. Ensuite, nous apportons des éléments de réponse à la question « quels sont les graphes connus appartenant à la famille $H(p, q, d)$? ».

Au cours de notre étude, nous montrons que cette famille contient les graphes de Imase et Itoh, souvent appelés graphes de Kautz généralisés. Ce résultat implique que la famille $H(p, q, d)$ inclu les graphes de Kautz et de de Bruijn, ainsi que les graphes complets. Ensuite,

nous montrons que les graphes complets sont les seuls graphes orientés symétriques de la famille $H(p, q, d)$, excluant ainsi de nombreux graphes tels que les hypercubes et les grilles.

Ensuite, nous nous intéressons à des réseaux hybrides utilisant à la fois des communications optiques, au travers d'OTIS, et des communications électroniques. Brièvement, ces réseaux sont des graphes composés construit à partir de $H(p, q, d)$ en remplaçant chaque sommet par une copie d'un graphe G d'ordre d . Ceci nous permet de proposer une modélisation à des réseaux déjà étudiés sur OTIS tels que OTIS-*Mesh* [ZMPE00, WS98b] et OTIS- G [DAAar].

Une partie de ces résultats a fait l'objet des publications [CFP99, CFM00a].

Le **chapitre 5** est consacré à l'étude de la famille de graphes à alphabet $A(f, \pi, j)$, de degré d , dimension D et ordre d^D . Dans ces graphes, les sommets sont des mots de longueur D sur un alphabet à d lettres, et le voisinage d'un sommet est obtenu en appliquant une permutation f sur l'ordre des lettres dans le mot, puis une permutation π sur la valeur des lettres du mot dans l'alphabet et enfin en remplaçant la j^e lettre du mot obtenu par tous les symboles de l'alphabet.

Nous montrons en particulier que pour d et D fixé, la famille $A(f, \pi, j)$ contient $d!D!$ graphes isomorphes au graphe de de Bruijn $B(d, D)$ et $(d-1)!D!$ graphes isomorphes au réseau papillon cyclique $\overrightarrow{WB\hat{F}}(d, D-1)$.

Ensuite, nous appliquons ces résultats à la caractérisation des graphes $H(p, q, d)$, construit sur OTIS, qui sont isomorphes aux graphes de de Bruijn. Nous en déduisons plusieurs façons de construire les interconnexions optiques d'un même graphe de de Bruijn avec OTIS, et nous utilisons ce fait pour minimiser le nombre de lentilles du système optique.

L'étude des relations entre la famille de graphes $A(f, \pi, j)$ et les graphes $B(d, D)$ et $H(p, q, d)$ à fait l'objet de la publication [CFP00].

Dans le **chapitre 6**, nous étudions des réseaux de communications optiques en plusieurs sauts multi-OPS. Dans les réseaux en plusieurs sauts, les messages doivent traverser plusieurs nœuds avant d'atteindre leurs destinations. D'autre part, les réseaux multi-OPS sont des réseaux utilisant plusieurs étoiles passives optiques (OPS).

Une OPS est une forme de bus optique permettant la diffusion [BF97]. Elle permet de relier un groupe d'émetteurs à un groupe de récepteurs de telle sorte que si l'un des émetteurs envoie un message au travers de l'OPS sous forme de signaux lumineux, tous les récepteurs reçoivent ce message. Nous ne considérons ici que des OPS mono-longueur d'onde. Ainsi, un seul message peut être émis au travers de l'OPS par étape de communication.

Un réseau multi-OPS en un seul saut a été proposé dans [CLM⁺96]. Le *Partitionned Optical Passive Star network* (POPS) est un réseau de communication en une seule étape, utilisant plusieurs OPS. Ce réseau consiste en un ensemble de g groupes de t processeurs, chacun relié par une OPS à tous les autres groupes. Le POPS permet d'augmenter le nombre de processeurs dans le réseau, ainsi que le nombre de messages émis à chaque étape de communication.

Le POPS a été modélisé dans [BF96] par un stack-graphe [BFM98] construit à partir d'un graphe complet. Intuitivement, le stack-graphe $\zeta(s, G)$ est construit à partir du graphe G en substituant chaque sommet du graphe G par un groupe de s sommets, et en remplaçant

chaque arc du graphe G par un hyperarc reliant les deux groupes de s sommets correspondants. Cette modélisation a permis d'effectuer simplement des plongements de graphes sur le POPS.

Nous avons poursuivi ces travaux en proposant la famille des stack-Kautz, famille de réseaux de communication multi-OPS en plusieurs sauts, construits à partir du graphe de Kautz. Cette famille inclut le POPS et représente donc une généralisation de ce réseau. Nous avons étudié les caractéristiques et les ressources des stack-Kautz et conduit une étude de scalabilité. Nous avons proposé des protocoles de contrôle efficaces que nous avons validé par la construction d'un simulateur. Ensuite, nous avons étudié l'excentricité des stack-Kautz et le temps d'acheminement d'un message de sa source à sa destination en fonction de la charge. Nous donnons également des résultats de plongements sur cette topologie et nous proposons une implantation avec OTIS. Enfin, nous étendons ces travaux aux hypergraphes de de Bruijn et de Kautz [BDE97]

L'ensemble de ces travaux a fait l'objet des publications [CFM98, CFM99, CFM00b, CFM00a].

Le **chapitre 7** est consacré à l'étude des méthodes de sécurisation par protection des réseaux WDM (*Wavelength Division Multiplexing*). Cette méthode de sécurisation consiste à utiliser des ressources prédéterminées et dédiées pour rétablir un chemin affecté par une panne. Elle est à opposer à la sécurisation par *restauration* qui consiste à calculer puis à établir de nouvelles routes pour le trafic interrompu par une panne, en fonction des ressources disponibles dans le réseau au moment de la panne.

Notre objectif, dans ce chapitre, est de décrire les différentes stratégies pouvant être utilisées pour la sécurisation par protection du réseau. Nous montrons que ces techniques n'engendrent pas le même dimensionnement du réseau, et nous mettons l'accent sur le rapport entre le dimensionnement du réseau et la complexité de calcul et de mise en œuvre de ces techniques.

Nous étudions avec attention le cas particulier de la *protection par cycles* de l'instance de communication all-to-all dans le cas où la topologie du réseau est celle d'un cycle. Nous fournissons une solution optimale à ce problème de dimensionnement.

Les publications [BCCT00, BCCT01b, Cou01] sont issues de ces travaux.

La conclusion présente une discussion des objectifs atteints au cours de cette thèse et des perspectives de recherches qu'il semble d'ores et déjà important d'aborder.

Cette thèse a été effectuée au sein du projet MASCOTTE¹². Une partie des travaux a été effectuée en collaboration avec des collègues étrangers : Xavier Muñoz³ et Joseph Yu⁴, et également en relation avec France Télécom et Alcatel.

¹Méthodes Algorithmiques, Simulation, Combinatoire et OpTimisation pour les Télécommunications

²Projet commun CNRS / INRIA / Université de Nice - Sophia Antipolis.

³DMAT – Université Polytechnique de Catalogne – Barcelone – Espagne.

⁴DMS – University College of the Fraser Valley – Abbotsford, British Columbia – Canada.

Chapitre 2

Graphes classiques et réseaux de communications

Le lecteur peu familier avec la théorie des graphes est invité à consulter les ouvrages [Ber73, BM76, Lei92, dR94, GGL95] dont les notions et notations utiles pour cette thèse sont reportées dans l'annexe A.

Les réseaux de communications sont généralement modélisés par des (multi)graphes $G = (V, E)$, où l'ensemble V des sommets représente les nœuds du réseau et les arêtes représentent les liens de communication entre les nœuds. Le (multi)graphe pourra être non-orienté, orienté ou orienté symétrique, selon le cas.

Une instance I de requêtes sur G est un ensemble de couples de sommets de G . Lorsque le graphe G est orienté alors le couple $\langle u, v \rangle$ de sommets de G dénote une requête du sommet u vers le sommet v , et lorsque le graphe n'est pas orienté, alors le couple $\langle u, v \rangle$ dénote une requête entre le sommet u et le sommet v . Le **routage** de I sur G consiste à associer à chaque requête de I (couple de sommets) un chemin entre les sommets correspondant de G .

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter dans la section 2.1 les familles de graphes dont nous nous servons dans cette thèse, comme modèles de réseaux de communications. Ensuite, nous décrivons dans la section 2.2 les modèles de communications fréquemment utilisés dans les réseaux. En particulier, nous donnerons la table de classification, proposée dans [FL94], permettant une notation concise des modèles et de leurs contraintes. Puis, dans la section 2.3, nous décrirons le principe des plongements de topologies, qui permettent d'une part d'émuler une topologie de réseau sur une autre, et d'autre part d'effectuer le routage d'une instance de requêtes. Par la suite, nous abordons dans la section 2.4 la notion de connexité dans les graphes. Nous donnons les relations entre la connexité des graphes et le problème de l'établissement d'un ensemble de chemins disjoints dans un réseau (routage d'une instance de requêtes), et nous donnons la complexité de ces problèmes. Enfin, nous discutons de la puissance d'expression de la connexité sur la présence de circuits particuliers dans un graphe.

2.1 Quelques graphes classiques

Nous présentons maintenant les familles de graphes dont nous nous servirons dans cette thèse.

2.1.1 Graphe de de Bruijn

Le graphe de *de Bruijn* est usuellement défini comme un graphe construit sur un alphabet. Ses sommets sont des mots de longueur D sur l'alphabet à d lettres, Z_d :

Définition 2.1.1 *Le graphe de de Bruijn, $B(d, D)$, de degré d et de diamètre D , est le graphe orienté tel que :*

- $V = \{x = x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 \mid x_i \in Z_d\} = Z_d^D$;
- $\Gamma^+(x) = \{x_{D-2} \dots x_1x_0\beta \mid \beta \in Z_d\}$.

Le voisinage d'un sommet s'obtient donc par un décalage à gauche de son étiquette avec suppression de la lettre la plus à gauche et adjonction d'une lettre à droite. L'arc reliant le sommet $x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0$ au sommet $x_{D-2} \dots x_1x_0\beta$ sera noté $x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0\beta$.

Propriétés :

- Dans le graphe de de Bruijn, il existe un chemin de longueur exactement D entre toute paire de sommets. Un chemin d'un sommet x à un sommet y s'écrit comme la concaténation des étiquettes de ces sommets. Si $x = x_{D-1} \dots x_1x_0$ et $y = y_{D-1} \dots y_1y_0$, alors, le chemin s'écrit $x_{D-1} \dots x_1x_0y_{D-1} \dots y_1y_0$.
- $\Gamma_{B(d,D)}^+(u) = V(B(d, D))$; cette propriété découle de la précédente.
- Un plus court chemin d'un sommet $x = x_{D-1} \dots x_1x_0$ vers un sommet $y = y_{D-1} \dots y_1y_0$ s'obtient en trouvant le plus grand indice i tel que $x_i \dots x_1x_0 = y_{D-1} \dots y_{D-1-i}$. Le plus court chemin s'écrit alors $x_{D-1} \dots x_1x_0y_{D-i-2} \dots y_1y_0$.
- Le graphe de de Bruijn vérifie $B(d, D) = L^{D-1}(K_d^+)$, [FYA84]. Cette caractérisation est à la base de nombreuses démonstrations de propriétés de ces graphes. La figure 2.1 illustre cette propriété.
- $B(d_1, D) \otimes B(d_2, D) = B(d_1d_2, D)$, [Sys92, BHLP97].

Il n'existe pas, à ce jours, de formule close donnant l'excentricité des graphes de de Bruijn. Un bon encadrement est le suivant :

Proposition 2.1.2 ([BLS97])

$$D - \frac{d}{(d-1)^2} + \frac{\frac{D}{d} + \frac{1}{d-1}}{d^{D-1}(d-1)} \leq \frac{d^D - 1}{d^D} e_{B(d,D)} \leq D - \frac{1}{d-1} + \frac{1}{d^D(d-1)}$$

2.1.2 Graphes de Reddy-Pradhan-Kuhl

Le graphe de Reddy, Pradhan et Kuhl [RPK80] est aussi connu comme le *graphe de de Bruijn généralisé*.

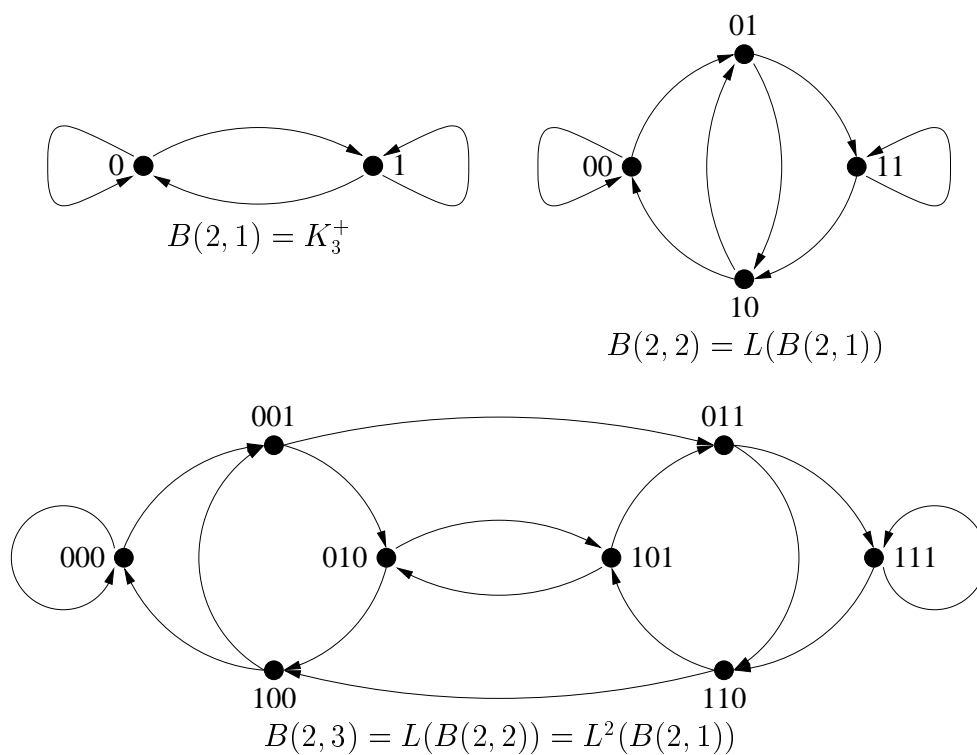


FIG. 2.1 – Trois graphes de de Bruijn : $B(2, 1) = K_2^+$ et les deux graphes itérés $B(2, 2) = L(B(2, 1))$ et $B(2, 3) = L(B(2, 2)) = L^2(B(2, 1))$.

Définition 2.1.3 [RPK80] *Le graphe de Reddy-Pradhan-Kuhl, $RPK(d, n)$, de degré d et à n sommets, est le graphe orienté tel que :*

- $V = Z_n$;
- $\Gamma^+(u) = \{v \mid v \equiv (du + \alpha) \pmod{n}, \alpha \in Z_d\}$.

Propriétés :

- Le graphe $RPK(d, d^D)$ est isomorphe au graphe $B(d, D)$. Pour le voir, il suffit d'associer au sommet $x = x_{D-1} \cdots x_1 x_0$ de $B(d, D)$ le nombre $u \in Z_n$ tel que $u = \sum_{i=0}^{D-1} x_i d^i$; alors, les successeurs de x dans $B(d, D)$ sont associés aux nombres de la forme $(du + \alpha) \pmod{n}, 0 \leq \alpha < d$.
- Le diamètre du graphe $RPK(d, n)$ est connu pour être $\lceil \log_d n \rceil$.
- $L(RPK(d, n)) = RPK(d, dn)$.

Le lecteur pourra consulter [RPK80, RRK83] pour plus de détails sur les nombreuses propriétés de ce graphe. La figure 2.4 donne une représentation des adjacences de $RPK(2, 10)$.

2.1.3 Graphe de Kautz

Le *graphe de Kautz* orienté, noté $K(d, D)$, est le graphe dont les sommets sont tous les mots de longueur D sur un alphabet de $d + 1$ lettres, tels que deux lettres consécutives sont différentes. Pour tout sommet $x = x_{D-1} x_{D-2} \cdots x_1 x_0$, il existe un arc de x vers chaque sommet $y = x_{D-2} \cdots x_1 x_0 \beta$, où β est une lettre quelconque de l'alphabet, différente de x_0 .

Définition 2.1.4 [Kau68] *Le graphe de Kautz, $K(d, D)$, de degré d et de diamètre D , est le graphe orienté tel que :*

- $V = \{x = x_{D-1} x_{D-2} \cdots x_1 x_0 \mid x_i \in Z_{d+1}, i \in Z_D, x_j \neq x_{j+1}, j \in Z_{D-1}\}$;
- $|V| = d^D + d^{D-1}$;
- $\Gamma^+(x) = \{y = x_{D-2} \cdots x_1 x_0 \beta \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_0\}\}$;
- $|A| = d^{D+1} + d^D$.

Les graphes de Kautz et de de Bruijn ont de nombreuses propriétés communes.

Propriétés :

- $|\Gamma_{K(d,D)}^+(u)| = d^D$. En effet, soit $x = x_{D-1} \cdots x_1 x_0$, nous avons

$$\Gamma_{K(d,D)}^+(x) = \{y = y_{D-1} \cdots y_1 y_0 \mid y \in V(K(d, D)) \text{ et } y_{D-1} \in Z_{d+1} \setminus \{x_0\}\}$$

- Dans le graphe de Kautz, il existe un chemin de longueur exactement $D + 1$ entre toute paire de sommets ; $\Gamma_{K(d,D)}^{D+1}(u) = V(K(d, D))$.
- Il existe un algorithme simple pour générer, entre deux sommets, un chemin de longueur au plus $D + 2$, tolérant jusqu'à $d - 1$ sommets ou liens défectueux [ISO86], et deux chemins nœuds disjoints [SHP91].
- Un plus court chemin est construit de la même façon que pour le graphe de de Bruijn.
- De même que le graphe de de Bruijn, le graphe de Kautz vérifie $K(d, D) = L^{D-1}(K_{d+1}^*)$ [FYA84]. La figure 2.2 illustre cette propriété.
- Les graphes de Kautz sont eulériens et hamiltoniens.

- Le graphe de Kautz $K(d, D)$ est un sous-graphe du graphe de de Bruijn $B(d + 1, D)$ (figure 2.3).

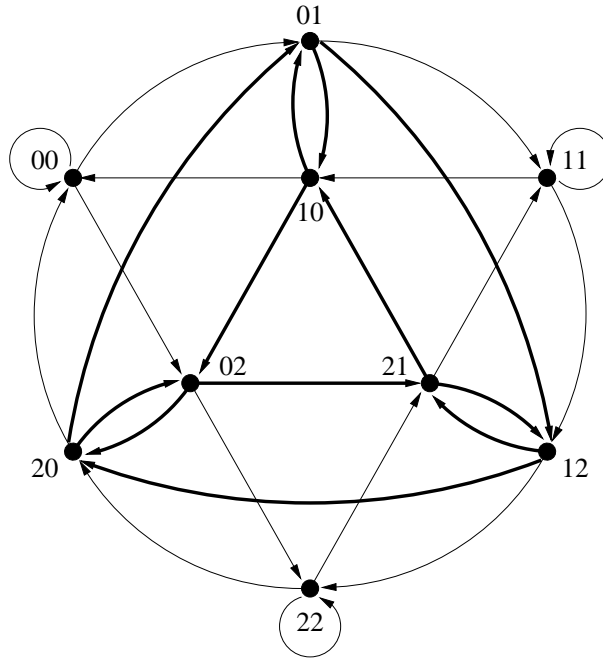


FIG. 2.3 – Graphe de de Bruijn $B(3, 2)$ incluant le graphe de Kautz $K(2, 2)$ (noirci).

De même que pour le graphe de de Bruijn, il n'existe pas, à ce jours, de formule close donnant l'excentricité des graphes de Kautz. Par contre, cette excentricité a été encadrée en utilisant la distance moyenne $\bar{\delta}_{K(d,D)}$ et la relation $\bar{\delta}_G = \frac{n-1}{n}e_G$, [ST98, ST01].

Proposition 2.1.5 ([ST01])

$$D - \frac{1}{(d-1)\left(1 - \frac{1}{d^2}\right)} + \frac{\frac{D}{d} + \frac{1}{d-1}}{d^{D-2}(d^2-1)} \leq \bar{\delta}_{K(d,D)} \leq D - \frac{1}{d-1} + \frac{2}{d^{D-1}(d^2-1)}$$

$$D - \frac{1}{(d-1)\left(1 - \frac{1}{d^2}\right)} + \frac{\frac{D}{d} + \frac{1}{d-1}}{d^{D-2}(d^2-1)} \leq \left(1 - \frac{1}{d^{D-1}(d+1)}\right) e_{K(d,D)} \leq D - \frac{1}{d-1} + \frac{2}{d^{D-1}(d^2-1)}$$

2.1.4 Graphes de Imase et Itoh

Les graphes de Kautz sont très intéressants quant au nombre de sommets qu'ils connectent, pour un degré et un diamètre fixé. Toutefois, ils ne permettent pas d'atteindre toutes les tailles de graphes. Les graphes de Imase et Itoh [II81, II83], aussi appelés *Graphes de Kautz généralisés*, sont une solution à ce problème.

Définition 2.1.6 [II81] *Le graphe de Imase et Itoh, $II(d, n)$, de degré d et à n sommets, est le graphe orienté tel que :*

- $V = Z_n$;
- $\Gamma^+(u) = \{v \mid v = (-du - \alpha - 1) \bmod n, \alpha \in Z_d\}$.

Propriétés :

- Le graphe de Imase-Itoh $II(d, d^{k-1}(d+1))$ est le graphe de Kautz $K(d, D)$ [II83].
- Il a été montré dans [II81] que le diamètre D d'un graphe de Imase et Itoh est $\lfloor \log_d n \rfloor \leq D \leq \lceil \log_d n \rceil$.
- Si $D_{RPK(d,n)}$ est le diamètre du graphe $RPK(d, n)$ et si $D_{II(d,n)}$ est le diamètre du graphe $II(d, n)$, alors $D_{II(d,n)} \leq D_{RPK(d,n)}$.

Des informations complémentaires sur cette famille de graphes se trouvent dans [HP88, BHP89]. La figure 2.4 représente les adjacences du graphe de Imase et Itoh d'ordre 10 et de degré 2, $II(2, 10)$, comparées à celles de $RPK(2, 10)$.

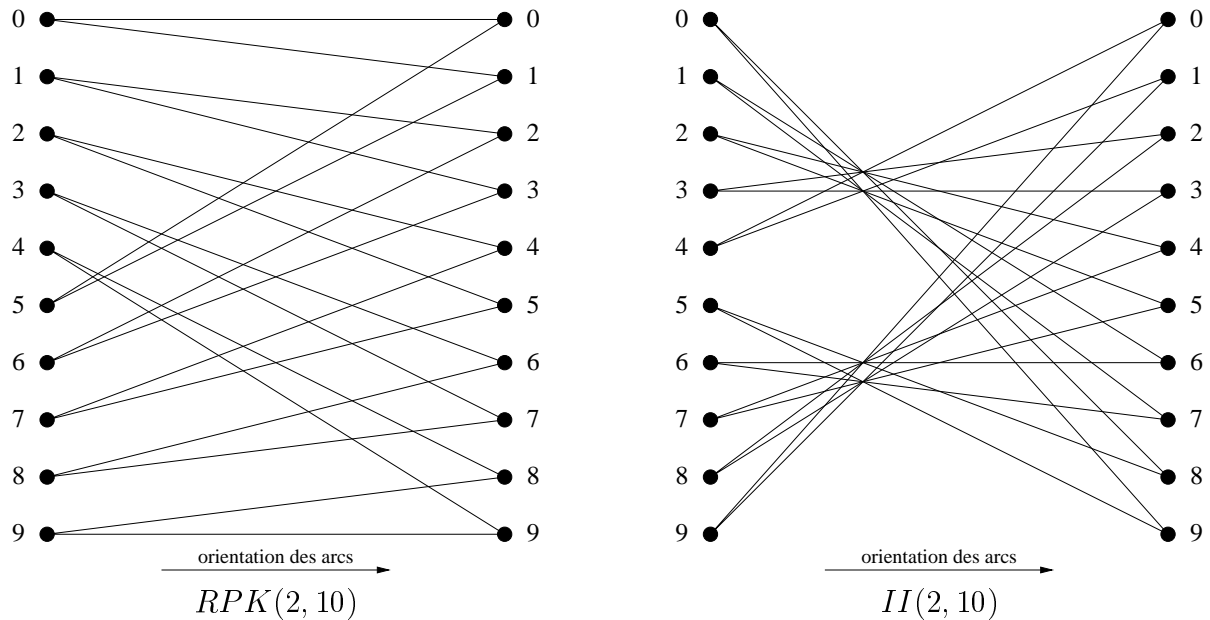


FIG. 2.4 – Graphes bipartis représentatifs des arcs des graphes $RPK(2, 10)$ et $II(2, 10)$.

2.1.5 Réseau papillon

La littérature contient plusieurs définitions équivalente du réseau papillon, plus connu sous le nom anglais de *butterfly*. La figure 2.5 représente le réseau papillon $\overrightarrow{BF}(2, 3)$.

Définition 2.1.7 (à partir d'un alphabet) *Le réseau papillon $\overrightarrow{BF}(d, D)$ est le graphe orienté à $n = (D+1)d^D$ sommets, tel que*

- $V(\overrightarrow{BF}) = \{\langle x, l \rangle \mid x \in Z_d^D, l \in Z_{D+1}\}$;
- $A(\overrightarrow{BF}) = \{(\langle x, l \rangle, \langle y, l+1 \rangle) \mid l \leq D-1, x = x_{D-1} \dots x_1 x_0, y = x_{D-2} \dots x_1 x_0 \beta, \beta \in Z_d\}$

La définition 2.1.7 est aussi connue comme la définition des réseaux *oméga*, équivalants aux réseaux papillons [dR94], et comme la définition des graphes *Fast-Fourier-Transform FFT*(d, D), introduits pour l'algorithme du même nom [dR94]. Comme cette définition utilise les adjacences du graphe de de Bruijn, une autre définition est la suivante.

Définition 2.1.8 ([dR94]) $\overrightarrow{BF}(d, D) = B(d, D) \otimes \vec{\mu}_{D+1} = L^{D-1}(K_d^+) \otimes \mu_{D+1}$.

Comme $\mu_{D+1} = L(\mu_{D+2}) = L^{D-1}(\mu_{2D})$, nous avons également $\overrightarrow{BF}(d, D) = L^{D-1}(K_d^+ \otimes \mu_{2D})$. De plus, en remarquant que K_d^+ est le graphe représentatif des arcs d'une multi-boucle (un sommet à d boucles), et que le produit de convolution d'un chemin par une multi-boucle est un multi-chemin, alors $\overrightarrow{BF}(d, D)$ est aussi le graphe D -itéré d'un multi-chemin de longueur $2D + 1$.

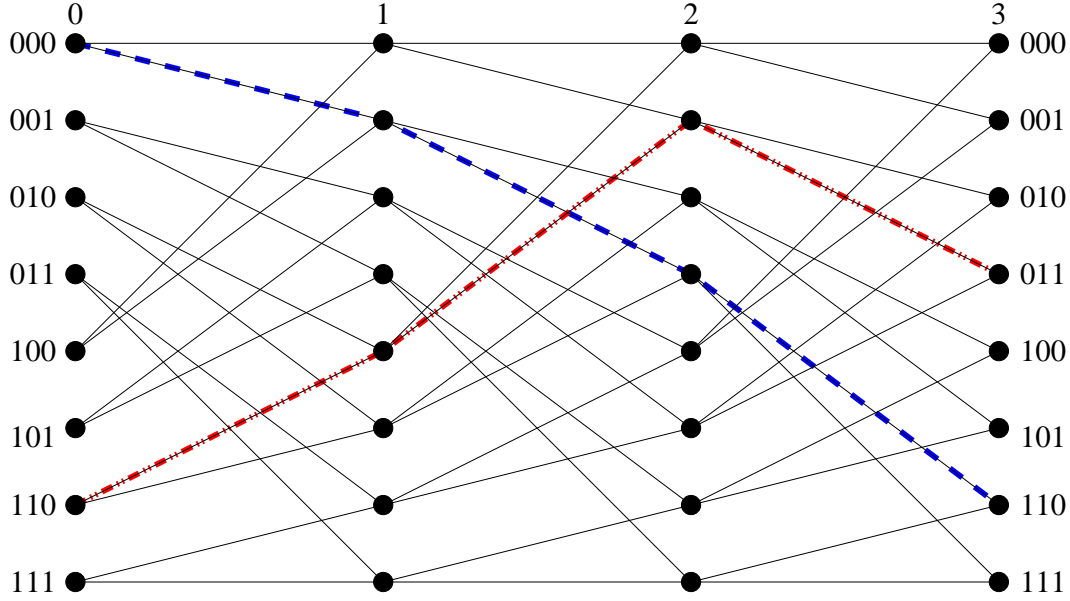


FIG. 2.5 – Butterfly $\overrightarrow{BF}(2, 3)$, défini sur un alphabet.

Enfin, une définition en termes de graphe composé, lorsque D est impair, est la suivante :

Définition 2.1.9 Si D est impair, alors

$$\overrightarrow{BF}(d, D) \equiv \vec{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \left[\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right]$$

avec

$$\begin{aligned}
 - V \left(\overrightarrow{BF}(d, D) \right) &= \left\{ \langle u, x \rangle \mid u \in V \left(\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right), x \in V \left(\vec{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \right) \right\}; \\
 - V \left(\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right) &= \left\{ \langle v, l \rangle \mid v \in Z_d^{\frac{D-1}{2}}, l \in Z_{\frac{D+1}{2}} \right\}; \\
 - V \left(\vec{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \right) &= \left\{ \langle y, i \rangle \mid y \in Z_{d^{\frac{D+1}{2}}}, i \in Z_2 \right\}; \\
 - A \left(\overrightarrow{BF}(d, D) \right) &= \left\{ (\langle u, x \rangle, \langle v, x \rangle) \mid u \in V \left(\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right), x \in V \left(\vec{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \right) \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (\langle u, x \rangle, \langle v, y \rangle) \mid (x, y) \in A \left(\vec{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \right), g(x, y) = \langle u, v \rangle \right\}
 \end{aligned}$$

où g est la fonction définie par

$$\begin{aligned}
 g : A \left(\vec{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \right) &\longrightarrow V \left(\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right) \times V \left(\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right) \\
 (x, y) = (\langle z_1, 0 \rangle, \langle z_2, 1 \rangle) &\longmapsto \left\langle \left\langle \left[\frac{z_2}{d} \right], \frac{D+1}{2} \right\rangle, \left\langle \left[\frac{z_1}{d} \right], 0 \right\rangle \right\rangle = \langle u, v \rangle
 \end{aligned}$$

Lemme 2.1.10 Dans la définition 2.1.9, la fonction g peut également être définie par :

$$g : A\left(\overrightarrow{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}}\right) \longrightarrow V\left(\overrightarrow{BF}\left(d, \frac{D-1}{2}\right)\right) \times V\left(\overrightarrow{BF}\left(d, \frac{D-1}{2}\right)\right)$$

$$(x, y) = (\langle z_1, 0 \rangle, \langle z_2, 1 \rangle) \longmapsto \left\langle \left\langle d^{\frac{D-1}{2}} - \lfloor \frac{z_2}{d} \rfloor - 1, \frac{D+1}{2} \right\rangle, \left\langle d^{\frac{D-1}{2}} - \lfloor \frac{z_1}{d} \rfloor - 1, 0 \right\rangle \right\rangle$$

$$= \langle u, v \rangle$$

Preuve : Cette autre définition de la fonction g est due au fait que dans le graphe biparti complet $\overrightarrow{K}_{n,n}$, les deux relations d'adjacences suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma_{\overrightarrow{K}_{n,n}}^+(\langle a, 0 \rangle) = \{\langle b, 1 \rangle \mid b \in Z_n\}$;
2. $\Gamma_{\overrightarrow{K}_{n,n}}^+(\langle a, 0 \rangle) = \{\langle n - b - 1, 1 \rangle \mid b \in Z_n\}$.

De plus, les chemins sont modifiés. En effet, soient $u = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1} \dots x_1 x_0, 0 \right\rangle, \langle g_1, 0 \rangle \right\rangle$ et $v = \left\langle \left\langle y_{\frac{D-1}{2}-1} \dots y_1 y_0, \frac{D-1}{2} \right\rangle, \langle g_2, 1 \rangle \right\rangle$, deux sommets.

En utilisant la première définition de la relation d'adjacence de $\overrightarrow{K}_{n,n}$, un chemin du sommet u au sommet v s'écrit :

$$u = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1} \dots x_1 x_0, 0 \right\rangle, \langle g_1, 0 \rangle \right\rangle$$

$$\rightarrow u^1 = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1}^1 \dots x_1^1 x_0^1, \frac{D-1}{2} \right\rangle, \langle g_1, 0 \rangle \right\rangle \text{ avec } \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^1 = \left\lfloor \frac{g_2}{d} \right\rfloor$$

$$\rightarrow u^2 = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1}^2 \dots x_1^2 x_0^2, 0 \right\rangle, \langle g_2, 1 \rangle \right\rangle \text{ avec } \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^2 = \left\lfloor \frac{g_1}{d} \right\rfloor$$

$$\rightarrow v = \left\langle \left\langle y_{\frac{D-1}{2}-1} \dots y_1 y_0, \frac{D-1}{2} \right\rangle, \langle g_2, 1 \rangle \right\rangle$$

où \rightarrow dénote un chemin dans le graphe $\overrightarrow{BF}\left(d, \frac{D-1}{2}\right)$, entre un sommet $\langle a, 0 \rangle$ et un sommet $\langle b, \frac{D-1}{2} \rangle$, avec $a, b \in Z_{d^{\frac{D-1}{2}}}$, et \rightarrow dénote un arc.

De même, en utilisant la deuxième définition de la relation d'adjacence de $\overrightarrow{K}_{n,n}$, un chemin du sommet u au sommet v s'écrit :

$$u = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1} \dots x_1 x_0, 0 \right\rangle, \langle g_1, 0 \rangle \right\rangle$$

$$\rightarrow u^3 = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1}^3 \dots x_1^3 x_0^3, \frac{D-1}{2} \right\rangle, \langle g_1, 0 \rangle \right\rangle \text{ avec } \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^3 = d^{\frac{D-1}{2}} - \left\lfloor \frac{g_2}{d} \right\rfloor - 1$$

$$\rightarrow u^4 = \left\langle \left\langle x_{\frac{D-1}{2}-1}^4 \dots x_1^4 x_0^4, 0 \right\rangle, \langle g_2, 1 \rangle \right\rangle \text{ avec } \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^4 = d^{\frac{D-1}{2}} - \left\lfloor \frac{g_1}{d} \right\rfloor - 1$$

$$\rightarrow v = \left\langle \left\langle y_{\frac{D-1}{2}-1} \dots y_1 y_0, \frac{D-1}{2} \right\rangle, \langle g_2, 1 \rangle \right\rangle$$

Alors, nous avons $\sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^1 = \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^3 = \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} \overline{x_i^3}$ et $\sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} x_i^2 = \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} \overline{x_i^4}$.
Ainsi, les deux définitions de la fonction g permettent de définir le réseau papillon. □

La figure 2.6 représente le réseau papillon $\overrightarrow{BF}(2, 3)$, comme défini dans la définition 2.1.9.

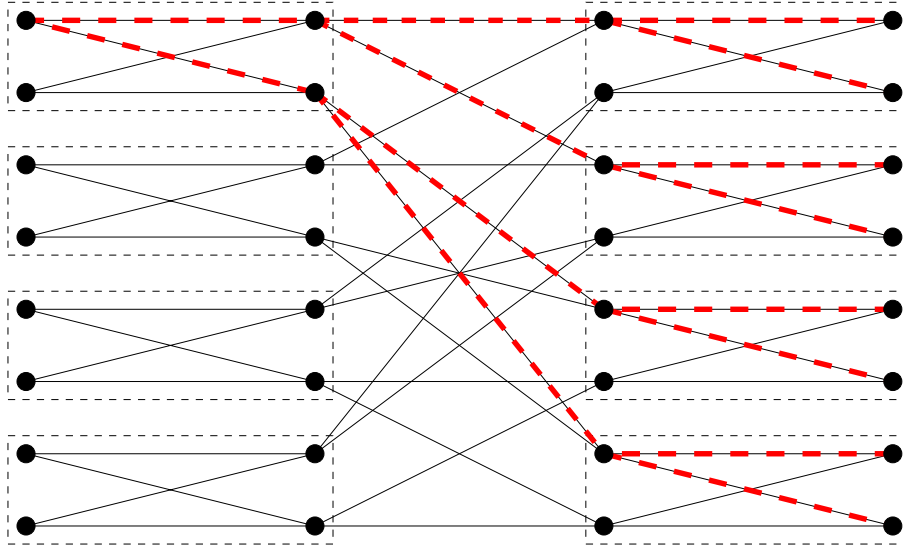


FIG. 2.6 – Réseau papillon $\overrightarrow{BF}(2, 3)$, construit comme $\overrightarrow{K}_{4,4} [\overrightarrow{BF}(2, 1)]$.

2.1.6 Réseau papillon cyclique

Les réseaux papillons cycliques sont une extension des réseaux que nous venons de définir. Ils sont plus connus sous le nom anglais de *wrapped butterfly*.

Définition 2.1.11 *Le réseau papillon cyclique $\overrightarrow{WBF}(d, D)$ est le graphe orienté à $n = Dd^D$ sommets, construit à partir de $\overrightarrow{BF}(d, D)$, tel que les sommets $\langle x, 0 \rangle$ et $\langle x, D + 1 \rangle$ sont égaux, pour tout $x \in Z_d^D$.*

En utilisant la définition 2.1.8, nous obtenons une autre formulation du réseau papillon cyclique :

Définition 2.1.12 $\overrightarrow{WBF}(d, D) = B(d, D) \otimes \overrightarrow{C}_D$

Remarquons que certains auteurs notent le réseau papillon cyclique comme le réseau papillon.

2.1.7 Cube de de Bruijn

Le *cube de de Bruijn* a été proposé dans [CAB93] comme un réseau d'interconnexion hiérarchique pour machine multi-processeurs. La définition de ce réseau utilisant des graphes composés, nous la donnons à titre informatif.

Définition 2.1.13 ([CAB93]) *Un cube de de Bruijn ou dBCube, noté $dBC(d, D)$, est le graphe composé construit à partir d'un graphe de de Bruijn $B(d, D)$ et d'un hypercube à d sommets $\mathcal{H}_{\log_2 d}$, tel que :*

- $dBC(d, D) = B(d, D) [\mathcal{H}_{\log_2 d}]$;
- $V(dBC(d, D)) = \{\langle u, x \rangle \mid u \in V(B(d, D)) = Z_{d^D}, x \in V(\mathcal{H}_{\log_2 d}) = Z_d\}$;
- $A(dBC(d, D)) = \{\langle \langle u, x \rangle, \langle u, y \rangle \rangle \mid u \in V(B(d, D)), (x, y) \in A(\mathcal{H}_{\log_2 d})\} \cup \{\langle \langle u, x \rangle, \langle v, y \rangle \rangle \mid (u, v) \in A(B(d, D)), g(u, v) = \langle x, y \rangle\}$.

où g est la fonction définie par

$$\begin{aligned} g & : A(B(d, D)) \longrightarrow V(\mathcal{H}_{\log_2 d}) \times V(\mathcal{H}_{\log_2 d}) \\ (u, v) & \longmapsto \langle v \bmod d, \lfloor \frac{u}{d^{D-1}} \rfloor \rangle \end{aligned}$$

Remarquons que dans la fonction g , nous utilisons le fait que les sommets du graphe de de Bruijn peuvent être définis tant sur un alphabet que sur les entiers. Nous avons $u = u_{D-1} \dots u_1 u_0 = \sum_{i=0}^{D-1} x_i d^i$ et $v = u_{D-2} \dots u_1 u_0 \alpha = \sum_{i=1}^{D-2} x_i d^{i+1} + \alpha$, d'où $v \bmod d \equiv \alpha$ et $\lfloor \frac{u}{d^{D-1}} \rfloor = x_{D-1}$.

2.2 Modèles de communications structurées

Nous présentons ici des modèles de communications fréquemment utilisés dans les réseaux de communications.

2.2.1 Contraintes de communications

Si un lien est monodirectionnel, il sera modélisé par un arc ; si un lien est bidirectionnel, il sera modélisé soit par une arête, soit par une paire d'arcs symétriques. Plaçons nous dans le cas où deux nœuds p_1 et p_2 sont directement reliés par un lien de communication bidirectionnel :

- Si un seul message à la fois peut circuler entre p_1 et p_2 , soit de p_1 vers p_2 , soit de p_2 vers p_1 , le lien est dit **half-duplex** ; on parle également de lien de communication en mode *télégraphique*. Le réseau est alors modélisé par un graphe non orienté.
- Si deux messages peuvent circuler simultanément sur le même lien, l'un de p_1 vers p_2 et l'autre de p_2 vers p_1 , le lien est dit **full-duplex** ; on parle également de lien de communication sur un modèle *téléphonique*.

De plus, il faut caractériser les possibilités de communication à partir d'un nœud du réseau.

- Si, lors d'une communication, chaque nœud ne peut envoyer ou recevoir un message que sur un seul lien à la fois, les communications sont dites **1-port**.

- Si chaque nœud peut utiliser simultanément tous ses liens, alors les communications sont dites **Δ -port**, où Δ fait référence au degré maximum des nœuds du réseau.
- Si seulement k liens peuvent être utilisés simultanément par un même nœud, alors les communications sont dites **k -port**.

Des notations abrégées ont été introduite pour se référer à ces contraintes de communication. Elles ont été standardisées dans [FL94]. Nous les résumons dans la table 2.1.

	1-port	k -port	Δ -port
Half-duplex	H_1	H_k	H_Δ ou H_*
Full-duplex	F_1	F_k	F_Δ ou F_*

TAB. 2.1 – Notations standardisées des contraintes de communications.

2.2.2 Modèles de commutation

De nombreux modèles de commutations dans les réseaux de communication ont été longuement étudiés dans la littérature. Nous rappelons ici les deux modèles principaux : *commutation de circuits* et *commutation de paquets*. Le lecteur trouvera dans [dR94] la description de nombreux autres modèles de commutation.

- Le mode **commutation de circuits** correspond au principe du téléphone : on établit d’abord la liaison, puis la communication commence. D’autres communications qui voudraient emprunter tout ou partie d’un circuit déjà établi sont bloquées jusqu’à la libération de la totalité de la liaison.
- Le mode **commutation de messages** consiste à faire avancer les messages vers leur destination en transitant dans des nœuds intermédiaires du réseau. A chaque étape, le canal emprunté est aussitôt libéré. Un message est stocké puis réémis par chacun des nœuds intermédiaire. Ce mode de communication nécessite la présence de mémoire tampon de taille suffisante dans chacun des nœuds du réseau.

2.2.3 Schémas de communications

Lorsqu’un mouvement de données doit être réalisé sur un réseau, il peut être plus ou moins aléatoire (comme dans certains grands réseaux distribués), ou posséder une structure prédéterminée. Dans le cas de communications prévisibles à l’avance, on utilise des algorithmes pré-calculés que l’on cherche à optimiser. Les communications structurées les plus fréquentes sont :

- La **diffusion** consiste à envoyer un message à tous les nœuds du réseau à partir d’un initiateur unique.
- L’**échange total** (*All-to-All*) consiste à effectuer une diffusion à partir de tous les nœuds du réseaux simultanément.
- La **distribution** ou diffusion personnalisée consiste, pour un initiateur unique, à envoyer un message différent à chacun des autres nœuds du réseau.

- Si \mathcal{M} dénote une des contraintes de communication de la table 2.1, alors $b_{\mathcal{M}}(G, x)$ dénote le nombre d'étapes de communications nécessaire à l'achèvement d'une opération de diffusion depuis le nœud x dans le graphe G sous la contrainte de communication \mathcal{M} ; $b_{\mathcal{M}}(G)$ dénote le temps maximal d'une opération de diffusion sur le graphe G sous la contrainte \mathcal{M} ; $b_{\mathcal{M}}(G) = \max_{x \in V} b_{\mathcal{M}}(G, x)$.
- $g_{\mathcal{M}}(G)$ dénote le nombre d'étapes de communications nécessaire à l'achèvement d'un échange total sur le graphe G , sous la contrainte de communication \mathcal{M} .

2.3 Plongements

De nombreux algorithmes parallèles utilisent des plongements de topologies, c'est-à-dire la simulation des communications d'une topologie logique sur une topologie cible (de la machine parallèle par exemple).

Supposons que nous disposons d'un algorithme parallèle dans lequel les mouvements de données sont prévus pour fonctionner sur une topologie A , et d'une machine parallèle dont le réseau d'interconnexions a la topologie B (différente de A), avec $\text{ordre}(A) \leq \text{ordre}(B)$. Afin d'exécuter l'algorithme sur la machine parallèle, nous allons chercher à placer chaque sommet de la topologie A sur un sommet de la topologie B , et à associer à chaque arc ou arête de la topologie A une chaîne ou un chemin sur la topologie B , de façon à réduire le sur-coût induit par cette opération.

Formellement, un plongement se définit de la façon suivante :

Définition 2.3.1 ([HOS94]) Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, deux graphes (orientés ou non). Un plongement de G_1 sur G_2 est une fonction injective f de V_1 sur V_2 combinée à une relation P_f associant à chaque arête $\{a, b\} \in E_1$, un chemin entre $f(a)$ et $f(b)$ dans G_2 .

La qualité d'un plongement est souvent mesurée par la minimisation de l'un des paramètres suivants :

Définition 2.3.2 Étant donné deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, et un plongement f , de G_1 dans G_2 , nous avons

- La **dilatation** de f : $dil(f) = \max \{|P_f(e)| \mid e \in E_1\}$;
- La **congestion des sommets** : $vcong(f) = \max \{|f^{-1}(u)| \mid u \in V_2\}$;
- La **congestion des arêtes** : $econg(f) = \max_{e_2 \in E_2} |\{e_1 \in E_1 \mid e_2 \in P_f(e_1)\}|$.

Un plongement peut également exprimer le routage d'une instance de requêtes. En effet, étant donné un graphe $G = (V, E)$ et une instance de requêtes sur G modélisé par un graphe I , un routage consiste à établir un chemin dans G pour chaque requête de I . En d'autres termes, un routage consiste à plonger chaque sommet de I sur un sommet de G et chaque arc ou arête de I sur un chemin dans le graphe G . La qualité d'un routage pourra être définie de la même façon que la qualité d'un plongement.

2.4 Notions de connexité

La connexité d'un graphe est un indicateur fort ayant des implications sur le routage et sur la tolérance aux pannes. Nous rappelons ici les notions principales de connexité. Ces

2.4.1 Notations

- Un graphe est **connexe** si il existe une chaîne entre toute paire de sommets.
- Un graphe est **fortement-connexe** si il existe un chemin de tout sommet vers tout autre.
- La **sommet-connexité** d'un graphe G , notée $\kappa(G)$, est le nombre minimum de sommets du graphe G qu'il faut supprimer pour qu'il ne soit plus connexe, ou réduit à un sommet.
- L'**arête-connexité** d'un graphe G , notée $\lambda(G)$, est le nombre minimum d'arêtes du graphe G qu'il faut supprimer pour qu'il ne soit plus connexe, ou réduit à un sommet.
- Un graphe $G = (V, E)$ est **k-connexe** si $\kappa(G) \geq k$; c'est-à-dire que G est connexe et que pour tout ensemble de $S \subset V$, $|S| \leq k - 1$, le graphe $G - S$ est connexe.
- Un graphe $G = (V, E)$ est **k-arête-connexe** si $\lambda(G) \geq k$; c'est-à-dire G est connexe et que pour tout ensemble d'arête $R \subset E$, $|R| \leq k - 1$, le graphe $G - R$ est connexe.
- un graphe orienté $G = (V, A)$ est **fortement connexe** si il existe un chemin entre toute paire de sommets.
- $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq d(G)$.

La connexité d'un graphe orienté est relié à la connexité du graphe non-orienté sous-jacent.

Théorème 2.4.1 ([NW60]) *Un graphe G non-orienté est $2k$ -connexe si et seulement si il existe une orientation de ses arêtes telle que \vec{G} est k -arc-connexe.*

2.4.2 Connexité et routage

La connexité d'un graphe est un indicateur sur le nombre maximum de chemins sommets ou arêtes disjoints entre deux sommets. Menger [Men27] a montré que la connexité d'un graphe est une borne supérieure sur le nombre de chemins disjoints entre deux sommets d'un graphe.

Théorème 2.4.2 (Menger, [Men27]) *Soient s et t , deux sommets d'un graphe orienté G .*

1. *Le nombre minimum d'arcs à supprimer pour détruire tous les chemins de s à t est égal au nombre maximum de chemins deux à deux arcs disjoints de s à t .*
2. *Le nombre minimum de sommets à supprimer pour détruire tous les chemins de s à t est égal au nombre maximum de chemins deux à deux sommets disjoints de s à t .*

Edmonds [Edm73] a étendu ce résultat à la connexité d'un sommet dans un graphe orienté, c'est-à-dire au nombre de chemins disjoints d'un sommet vers chacun des autres.

Théorème 2.4.3 ([Edm73]) *Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, et soit $s \in V(G)$. G contient k arbres couvrants enracinés en s , deux à deux arc-disjoints si et seulement si pour toute partie $X \subseteq V(G) \setminus \{s\}$, $d^-(X) \geq k$.*

La connexité d'un graphe est aussi un indicateur sur l'existence de chemins disjoints entre plusieurs paires de sommets. Pour préciser cette relation, nous avons besoin de définir la notion de graphe k -lié.

Définition 2.4.4 *Un graphe est dit k -arête-lié si pour tout k couples de sommets $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$, il existe k chaînes μ_i , $1 \leq i \leq k$, deux à deux arêtes disjointes, telles que μ_i relie s_i à t_i .*

Un graphe est dit k -arc-lié si pour tout k couples de sommets $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$, il existe k chemins $\vec{\mu}_i$, $1 \leq i \leq k$, deux à deux arcs disjointes, tels que $\vec{\mu}_i$ relie s_i à t_i .

Définition 2.4.5 *Un graphe est dit k -lié si pour tout k couples de sommets $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$, il existe k chaînes μ_i (resp chemins $\vec{\mu}_i$), $1 \leq i \leq k$, deux à deux sommets disjoints, tels que μ_i (resp $\vec{\mu}_i$) relie s_i à t_i .*

Pour illustrer cette définition, la figure 2.7 nous montre un cycle non orienté sur lequel il n'existe pas de chemins disjoints pour relier le sommet A au sommet B, et le sommet C au sommet D. Le cycle non orienté est donc 1-arête-lié. Le cycle orienté symétrique quant à lui, est 2-arc-lié. En effet, étant donné deux couples de sommets, il suffit d'utiliser les arcs dans le sens des aiguilles d'une montre pour relier le premier couple, et le sens inverse pour relier le deuxième couple, comme le montre la figure 2.7.

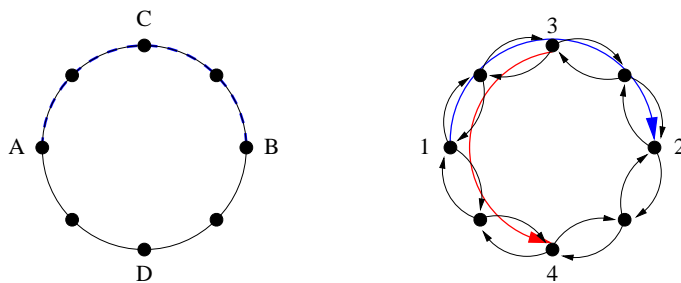


FIG. 2.7 – Routage disjoint et connexité

Conjecture 2.4.6 (Thomassen, [Tho80]) *Un graphe k -arête-connexe est k -arête-lié si k est impair, et $(k - 1)$ -arête-lié si k est pair.*

Théorème 2.4.7 (Huck, [Huc91]) *Un graphe k -arête-connexe est $(k - 1)$ -arête-lié si k est impair et $(k - 2)$ -arête-lié si k est pair.*

La conjecture 2.4.6 est toujours ouverte pour $k = 5$. La notion de graphe k -arête-lié donne une borne inférieure sur le nombre de chemins arêtes disjointes. De plus, cette notion est indépendante des couples de sommets considérés, il est donc possible de trouver des ensembles de couples de sommets plus grands et admettant un routage arête disjoint. Par exemple, le cycle C_n est 2-arête-connexe et 1-arête-lié, mais ses arêtes nous donnent un ensemble de n couples de sommets admettant un routage arête disjoint.

Dans le cas des graphes orientés, Shiloach [Shi79] a montré, via le théorème 2.4.8, que les graphes k -arc-connexes sont k -arc-liés. Ce résultat a des implications fortes, comme nous le verrons dans le chapitre 7, sur le problème du routage optique dans les réseaux WDM.

22 CHAPITRE 2. GRAPHES CLASSIQUES ET RESEARCH DE COMMUNICATIONS

Théorème 2.4.8 (Shiloach, [Shi79]) *Si un graphe G est k -arc-connexe, alors pour tout k couples de sommets $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$, il existe k chemins $\vec{\mu}_i$, $1 \leq i \leq k$, deux à deux arcs disjoints, tels que $\vec{\mu}_i$ relie s_i à t_i .*

2.4.3 Complexité du routage disjoint

Décider si un graphe k -arête-connexe (k -arc-connexe) est k -arête-lié (resp k -arc-lié) est équivalent à résoudre le problème suivant, dont nous donnons la formulation orientée :

Problème 2.4.9 (Routage disjoint)

Entrée : Un graphe G et k couples de sommets $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$

Sortie : Un routage R

Objectif : Trouver k chemins disjoints $\vec{\mu}_i$, $1 \leq i \leq k$, tels que $\vec{\mu}_i$ relie s_i à t_i .

Karp [Kar75] a montré que ce problème est en général NP-complet lorsque la taille k de l'instance n'est pas connue.

Théorème 2.4.10 (Karp, [Kar75]) *Le problème du routage (arête)-disjoint dans un graphe non-orienté, lorsque k fait partie de l'instance, est NP-complet.*

Ce problème devient polynomial si $s_i = s_1$ pour $2 \leq i \leq k$, ou si $t_i = t_1$ pour $2 \leq i \leq k$. Dans ce cas, nous avons une source ou un puits unique, et le problème peut être résolu par un algorithme de flot [FF62]. De même, ce problème devient polynomial si le nombre de requêtes (k) est fixé [RS95].

Théorème 2.4.11 ([RS95]) *Pour un k fixé, le problème du routage (arête)-disjoint dans un graphe non-orienté est polynomial.*

Dans le cas des graphes orientés, le problème du routage arc-disjoint a été montré NP-complet même pour $k = 2$ [FHW80]. Toutefois, il a depuis été montré que dans le cas des graphes orientés symétrique et pour k fixé, ce problème est polynomial [Jar99].

Théorème 2.4.12 ([FHW80]) *Le problème du routage (arc)-disjoint dans un graphe orienté est NP-complet pour $k = 2$.*

Théorème 2.4.13 ([Jar99]) *Pour un k fixé, le problème du routage (arc)-disjoint dans un graphe orienté symétrique est polynomial.*

Ainsi, trouver un routage disjoint pour k requêtes est un problème difficile dans les graphes orientés et « facile » dans les graphes non-orientés ou orientés symétriques. Il en est de même pour décider si un graphe k -arc-connexe (resp. arête-connexe) est k -arc-lié (resp. k -arête-lié).

Par contre, garantir l'existence de k chemins disjoints dans un graphe est un problème simple. En effet, en utilisant le théorème 2.4.7, il suffit que le graphe soit $k + 1$ ou $k + 2$ -arête-connexe (arc-connexe), et ceci se vérifie en temps polynomial. Ainsi, la notion de graphe k -lié à des implications sur le routage.

2.4.4 Connexité et circuits

Il est naturel qu'un graphe ayant une grande connexité contienne un circuit. De nombreux travaux ont été effectués sur la présence de circuits particuliers, contenant un ensemble donné d'arêtes ou de sommets, éventuellement ordonnés.

Théorème 2.4.14 (Dirac, [Dir60]) *Dans un graphe k -connexe, un sous-ensemble de k sommets est toujours inclus dans un circuit.*

Théorème 2.4.15 ([HT82]) *Dans un graphe k -connexe, un sous-ensemble de $k - 1$ arêtes indépendantes est toujours inclus dans un circuit.*

Conjecture 2.4.16 (Lovász, [Lov76]) *Dans un graphe k -connexe, un sous-ensemble de k arêtes indépendantes est toujours inclus dans un circuit, sauf si k est impair et que les k arêtes déconnectent le graphe.*

Ces résultats ne donnent que des bornes inférieures. De plus, il n'est pas fait mention de l'ordre dans lequel les sommets (ou les arêtes) sont visités. Le problème 2.4.17 nous donne l'exemple d'un graphe 4-connexe, la grille torique, où nous conjecturons que tout ensemble ordonné de 11 sommets est inclus dans un circuit (arête disjoint), si la grille torique est suffisamment grande. Cette valeur provient des nombreuses configurations que nous avons testées, sur des grilles toriques supposées infinies.

Problème 2.4.17 (Circuit sur le tore)

Entrée : Une grille torique, $TM(n_1, n_2)$

Sortie : Un entier k

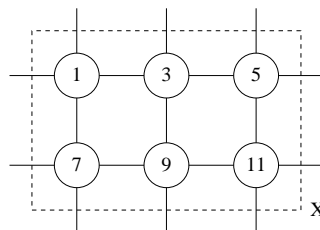
Objectif : Trouver k tel que tout sous-ensemble de $j \leq k$ sommets ordonnés soit inclus dans un circuit

Conjecture 2.4.18 ([BCH⁺]) *Si $n_1 \geq n_0$ et $n_2 \geq n_0$, alors $k = 11$.*

Le nombre n_0 est arbitrairement grand, par exemple $n_0 = 15$. Nous pourrions chercher à le minimiser lorsque la conjecture sera résolue.

Théorème 2.4.19 ([BCH⁺]) $k < 12$.

Preuve : Pour prouver ce théorème, nous exhibons un contre exemple pour $k = 12$. Soient 12 sommets de $TM(n_1, n_2)$, avec $n_1 n_2 \geq 12$, $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 2$, que nous numérotions de 1 à 12, et tels que les sommets 1, 3, 5, 7, 9 et 11 soient disposés de la façon suivante :



24 CHAPITRE 2. GRAPHES CLASSIQUES ET RESEAUX DE COMMUNICATIONS

Soit X l'ensemble de ces points. Les voisins dans le circuit de chaque sommet de X appartiennent à $TM(n_1, n_2) \setminus X$. Ainsi, pour connecter les sommets de X à leurs voisins, 12 arêtes sont nécessaires, or X n'est relié que par 10 arêtes à $TM(n_1, n_2) \setminus X$. Donc, il existe au moins un ensemble ordonné de 12 sommets de $TM(n_1, n_2)$ qui ne sont pas inclus dans un circuit.

□

Chapitre 3

Les technologies optiques pour les télécommunications

L'utilisation de l'optique pour la transmission de l'information remonte à l'antiquité où le reflet des rayons du soleil sur un miroir permettait de transmettre de très courts messages. Aujourd'hui, les technologies de l'optique permettent le transport rapide d'un très grand nombre d'informations. Par exemple, une seule paire de fibres optique, qui propage l'information sous forme d'impulsions de lumière, permet la transmission simultanée de près d'un demi-million de communications téléphoniques d'un continent à l'autre.

Les transmissions optiques sont particulièrement bien adaptées au transport de données numériques, où l'information est codée sous la forme d'une succession de *bits* (*binary digits*, pour désigner 0 ou 1). Ces bits sont acheminés sous forme d'onde lumineuse dont on module l'intensité : le temps est divisé en créneaux de même durée, pendant lesquels le bit 1 est codé par une impulsion lumineuse et le bit 0 par une absence de lumière.

Dans les communications numériques à hauts débits, nous comptons maintenant en gigabits par seconde (Gbits/s) et même en térabits par secondes (Tbits/s). Ces ordres de grandeurs sont à comparer au téléphone standard qui fonctionne à 64 kbits/s par seconde. Ainsi, 1 Gbits/s représente environ quinze mille conversations téléphonique simultanées.

La célérité de la lumière dans le vide est de l'ordre de 300 000 kilomètres par seconde¹. Ainsi, dans une communication numérique à 1 Gbits/s, un bit correspond à une section du signal optique de 30 centimètres de long. De plus, l'émergence actuelle de système optique opérant à 40 Gbits/s réduit cette longueur à 7.5 millimètres.

Il a été montré dans [FEG88] que l'utilisation de communication optique est intéressante, en termes de débit et de consommation d'énergie, dès que la distance à parcourir est supérieure à un centimètre. Par ailleurs, d'autres facteurs (faible atténuation du milieu, insensibilité au bruit électro-magnétique,...) ont fait de l'optique un symbole de qualité de transmission. Ainsi, l'optique peut être utilisée pour le transport d'information sur de longues distances, d'un continent à l'autre, de même que pour de courtes distances, entre les éléments d'une machine multiprocesseurs par exemple [SALR⁺98].

Dans ce chapitre, nous allons donc décrire des éléments de la technologie de l'optique

¹Lorsque des fibres optiques sont utilisées, l'indice du milieu doit introduit une réduction de la célérité de la lumière.

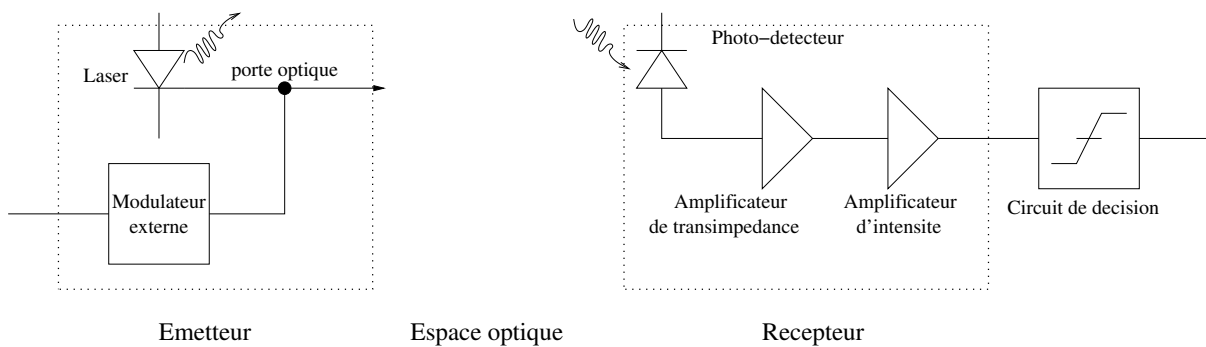


FIG. 3.1 – Schéma d'une liaison opto-électronique.

permettant de réaliser des communications à courtes et à longues distances. Nous commencerons par présenter, dans la section 3.1, un modèle général de liaison de communication optique. Nous présenterons également, à titre de comparaison, un modèle de liaison de communication électronique. Puis nous présenterons le domaine général de l'optique en l'espace libre. Ensuite, dans la section 3.2, nous détaillerons les principaux composants optiques qui sont utilisés pour la réalisation des communications optiques. Enfin, nous présenterons dans la section 3.3 les deux techniques de multiplexage optique les plus couramment utilisées : le multiplexage temporel et le multiplexage en longueur d'onde, qui permettent d'accroître la bande passante du système et l'utilisation efficace des ressources.

3.1 Description d'une liaison de communication optique

Une liaison de communication optique se compose de trois parties distinctes : une source lumineuse permettant l'émission de bits sous forme de signaux lumineux, un système optique permettant de guider la lumière entre sa source et sa destination, et un récepteur optique permettant de traduire le signal lumineux en un signal électrique approprié, comme le montre la figure 3.1.

Nous faisons ici le parallèle entre un modèle de liaison de communication électronique et un modèle de communication opto-électronique. Ensuite, nous présenterons le domaine de l'espace libre optique.

3.1.1 Description d'une liaison électronique

Dans les ordinateurs actuels, les communications entre les différents éléments situés sur la carte mère (processeur, mémoire, ...) se font au travers de fils métalliques déposés sur cette carte. De même, une méthode de construction de systèmes multiprocesseurs consiste à utiliser des MCM (*Multi-Chips Module*). Un MCM est une carte sur laquelle sont disposés plusieurs processeurs, et qui autorise plusieurs niveaux d'interconnexions (couches). Les MCM supportent un très grand nombre de liens de communications, disposés sur plusieurs couches. Les processeurs sont reliés aux liens de communications par l'intermédiaire de leurs broches. La figure 3.2 représente un MCM sur lequel sont disposés 9 processeurs.

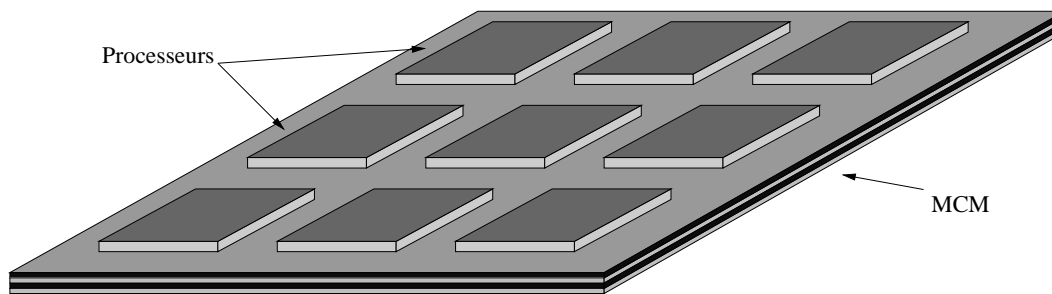


FIG. 3.2 – Schéma d'un MCM supportant 9 processeurs.

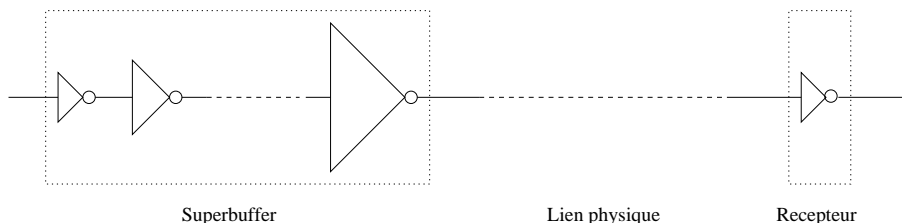


FIG. 3.3 – Schéma d'une liaison électronique.

Les liens de communications sur les MCMs peuvent être longs (parfois plusieurs dizaines de centimètres), d'où un besoin d'amplification du signal à émettre. Généralement, un lien ne permet d'acheminer qu'un seul bit à la fois. Un lien de communication se décompose en trois parties, comme le montre la figure 3.3 : l'émetteur (ici un *superbuffer* [KBFE99]), la ligne reliant les processeurs (fil métallique déposé sur une couche du MCM) et un récepteur (un simple inverseur CMOS). Le lecteur intéressé pourra se reporter à [YME97, KBHL⁺] pour plus de détails.

3.1.2 Description d'une liaison opto-électronique

L'utilisation de communications optiques est intéressante en termes de débit et de dissipation d'énergie, dès que la distance à parcourir est supérieure à un centimètre, et ce à la fois pour des communications entre composants (processeurs, mémoires, ...) comme pour des communications à l'intérieur d'un même composant [FEGL88, FGDE89, KMK⁺91, YME97].

Un lien de communication opto-électronique se décompose en trois parties, comme le montre la figure 3.1 : l'émetteur, le récepteur et, entre les deux, l'espace optique. L'émetteur est principalement constitué d'une diode laser telle qu'une *VCSEL* (Vertical Cavity Surface Emitting Laser) [DMYC96]. Le récepteur est constitué d'un photo-détecteur suivi d'un amplificateur de signal et d'un circuit de décision [BFBE98, FBE96, CMP⁺01]. L'espace optique est soit une fibre optique, soit un espace optique libre consistant en une succession de lentilles et de miroirs permettant de guider le faisceau de sa source à sa destination. Une étude d'un lien de communication opto-électronique en espace optique libre se retrouve dans [KBFE99]. Enfin, un état de l'art des circuits électroniques permettant la construction de

liens de communications opto-électronique à haut débit est disponible dans [San01].

3.1.3 Optique en l'espace libre

L'optique en l'espace libre comme nous venons de le citer, consiste à guider un faisceau optique à l'aide de lentilles et de miroirs, de sa source à sa destination, sans utiliser de système de guidage (fibre optique par exemple). Cette technique est principalement employée pour des communications à courtes distances.

Un des atouts majeurs de l'optique en l'espace libre est de permettre la réalisation d'un grand nombre d'interconnexions optiques dans un espace réduit, là où l'utilisation de liaisons électroniques n'est plus envisageable. Par exemple, comme nous le verrons dans le chapitre 4, il est maintenant possible de construire le réseau d'interconnexion d'un graphe complet à 64 processeurs, K_{64}^+ , où chaque processeur possède un lien de communication optique direct vers chacun des 63 autres. Qui plus est, l'optique de l'espace libre permet la fabrication de routeurs tout-optique reconfigurables de grande taille [HMB⁺00]. Par exemple, la figure 3.12 page 37 représente une matrice de miroirs articulés permettant la fabrication d'un *cross-bar* à 256 entrées et sorties.

Un exemple original d'utilisation de l'optique en l'espace libre pour la mise en œuvre d'un réseau de communication est donné par l'entreprise *TeraBeam* (<http://www.terabeam.com>). Cette entreprise propose d'établir des connexions optiques directes entre les bâtiments d'une ville. Cette idée permet de réduire les coûts de mise en place de l'infrastructure, car il n'est plus nécessaire de creuser des tranchées entre les bâtiments pour installer une fibre optique, évitant au passage les incidents que peuvent occasionner des travaux. Toutefois, la mise en œuvre de ce type de réseau est très discutable. En effet, les bâtiments ont un certain mouvement, dû à la chaleur et au vent, ce qui introduit des erreurs d'alignements. De plus, la communication optique peut être perturbée par le passage d'un oiseau et par les conditions atmosphériques entraînant ainsi la perte d'informations.

3.2 Composants optiques

Nous présentons maintenant les principaux composants optiques qui interviennent dans la mise en œuvre des réseaux de communications optiques.

3.2.1 Émetteurs

Les émetteurs utilisés pour l'émission de signaux lumineux sont généralement des diodes *laser* qui produisent des faisceaux intenses de lumière cohérente monochromatique. Le signal lumineux généré par une diode laser est constitué de paquets de photons libéré à une fréquence fixe, déterminée par les spécifications de la diode employée. Les spécifications de cette diodes déterminent également la *longueur d'onde* du signal lumineux (sa « couleur »). Le principe de fonctionnement d'un laser pourra être trouvé dans de nombreux ouvrages, tels que [Muk97, NPF00].

En micro-électronique, les diodes lasers actuelles sont des VCSELs [DMYC96]. Ces diodes peuvent être directement fabriquées sur le silicium des processeurs. Le signal optique est alors

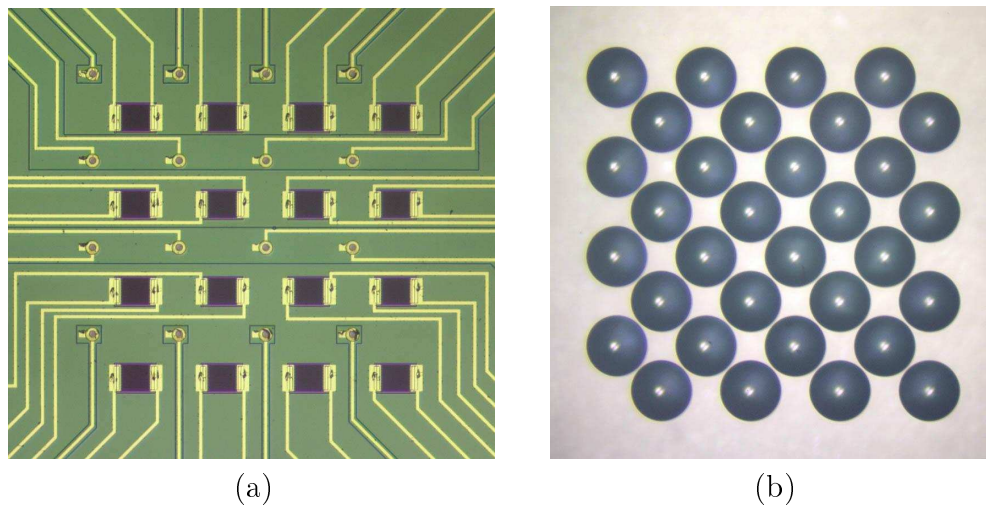


FIG. 3.4 – (a) Matrice de 4×4 émetteurs et récepteurs; (b) Matrice de lentilles.

émis perpendiculairement au plan du processeur. Plusieurs VCSELs peuvent être déposées sur un processeur, comme le montre la figure 3.4 où l'on trouve 16 VCSELs. Des matrices de 8×8 VCSELs ont d'ores et déjà été fabriquées [EGB⁺99], et de plus grandes le seront bientôt. Le nombre de VCSELs par centimètre carré est aujourd'hui limité par la surface nécessaire à une VCSEL pour dissiper la chaleur qu'elle dégage.

Un des enjeux majeur de la recherche actuelle, est la fabrication de diodes lasers permettant l'émission de 40 Gbits/s. Ce cap est en cours de franchissement. La prochaine génération d'émetteurs pourrait être de taille nanoscopique. En effet, les *nanotubes* connaissent actuellement un développement formidable et font l'objet de nombreuses recherches [CLC⁺99]. Une propriété intéressante des nanotubes est qu'ils permettent l'émission d'exactly un photon.

3.2.2 Récepteurs

La fonction d'un récepteur dans un système de transmission optique est de détecter un signal lumineux, c'est-à-dire de convertir un signal optique en signal électrique.

Deux techniques de détection sont utilisées. La détection *directe* est réalisée par une diode photosensible qui convertit un flot de photons en un flot d'électrons. Le courant électrique résultant est ensuite amplifié puis soumis à un test de seuil pour déterminer si l'information logique est un bit 1 ou un bit 0.

Une alternative est la détection *cohérente* qui utilise un laser auxiliaire comme oscillateur local. Une photo-diode reçoit alors un signal issu de la combinaison des deux signaux laser, qui est plus facile à détecter. Ce système est certes plus complexe et plus coûteux, mais présente l'avantage de permettre la détection de signaux faibles.

La figure 3.4 nous montre une matrice de 16 photo-diodes, et la figure 3.1 nous donne le schéma d'un circuit de décision. Le lecteur est renvoyé à [Bra90, BFBE98, FBE96] pour de plus amples informations.

3.2.3 Lentilles

Les lentilles sont des composants essentiels dans les systèmes de communications optiques. Elles sont utilisées par exemple pour garantir la cohérence du signal optique émis par une VCSEL ou sortant d'une fibre optique.

Les formes des lentilles sont multiples : bi-concave(convexe), plan-concave(convexe), cylindrique, sphérique, de Fresnel, et leur diamètre est très variable, allant de plusieurs centimètres à quelques microns [HKE00]. La figure 3.5 illustre cette remarque en comparant deux lentilles de Fresnel, l'une utilisée dans le bloc optique des phares et l'autre utilisée dans les systèmes opto-électroniques actuels.

Les lentilles sont classées selon leur f_L -nombre, c'est-à-dire le rapport entre la distance focale \overline{OF} (ou O est le centre de la lentille et F son foyer image) et le diamètre D_L , $f_L = \frac{\overline{OF}}{D_L}$. Une lentille est convexe si $f_L > 0$, et concave sinon. La qualité d'une lentille est mesurée par la perte d'énergie que subit un faisceau optique la traversant. Il est admis [BMME97] qu'il est facile de fabriquer une lentille de qualité avec un f_L -nombre ≥ 2 , alors qu'il est très difficile de fabriquer une lentille de f_L -nombre < 2 . Aussi, lors de la conception d'un système de communications optiques, le choix se portera sur l'utilisation de lentilles de f_L -nombre ≥ 2 .

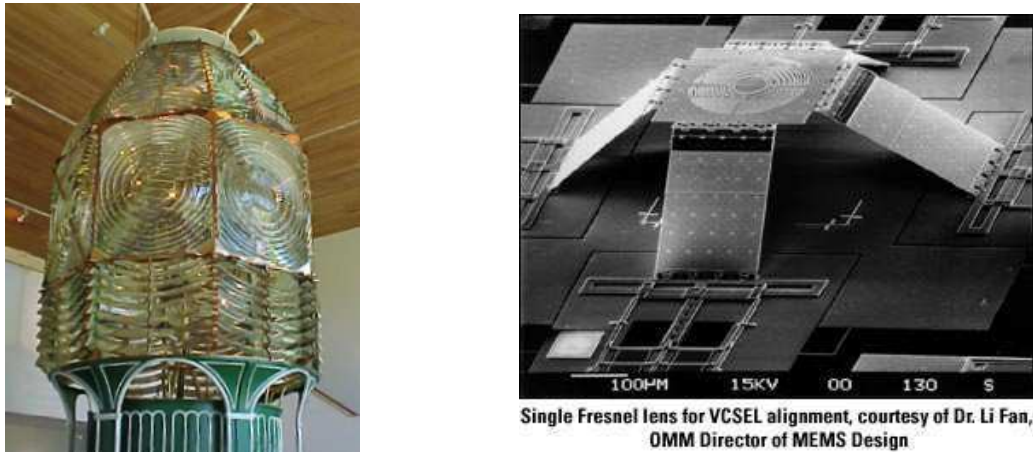


FIG. 3.5 – Lentilles de Fresnel pour un phare, et lentille de Fresnel pour l'optoélectronique.

3.2.4 Miroir Semi-réfléchissant

Un miroir semi-réfléchissant est un composant à deux faces : l'une est équivalente à un miroir et réfléchit la lumière, l'autre laisse passer la lumière. Il ne faut pas le confondre avec la « glace sans tain » qui absorbe la lumière sur l'une de ses faces, et sur l'autre, laisse une partie de la lumière la traverser et réfléchit l'autre partie.

La figure 3.6 nous montre le principe d'un miroir semi-réfléchissant et celui d'une glace sans tain. Pour le miroir semi-réfléchissant, le rayon R est réfléchi alors que le rayon R' traverse le miroir ; pour la glace sans tain, le rayon T est absorbé, alors qu'une partie du rayon R est réfléchi (R') et l'autre traverse le miroir (R'').

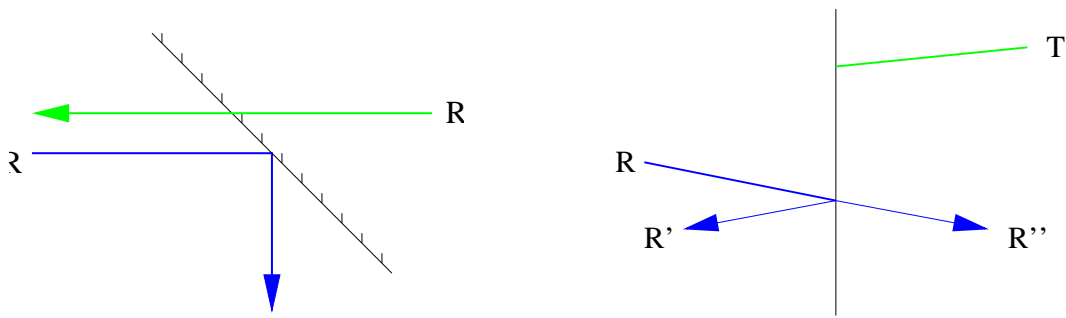


FIG. 3.6 – Miroir semi-réfléchissant et glace sans tain.

3.2.5 Étoile passive optique (OPS)

Une **étoile passive optique**, notée OPS, est un dispositif de transmission optique, qui divise chaque signal optique entrant en plusieurs signaux optiques, chacun contenant une partie du signal entrant. Une OPS(s, z) possède s entrées et z sorties. Généralement, les entrées et les sorties sont considérées de même cardinalité s , et l'OPS est dite de degré s (voir figures 3.7 et 3.8). Lorsqu'un signal optique entre dans l'OPS, il ressort par toutes les sorties.

Une OPS est un système optique passif, ne disposant pas de source d'énergie. Elle est composée d'un multiplexeur optique suivi d'une fibre optique ou d'un espace libre optique, puis d'un diffuseur optique [GMH⁺98] qui divise le signal optique en s signaux, chacun contenant $\frac{1}{s}$ de l'énergie contenu dans le signal optique entrant. Nous nous intéressons ici aux OPS travaillant avec une seule longueur d'onde, impliquant qu'un seul signal peut traverser l'OPS à un instant donné. Le détail du fonctionnement d'une OPS acceptant plusieurs longueurs d'onde pourra être trouvé dans [CZA93].

Le lecteur pourra se reporter à [BMME95] pour une réalisation pratique d'une OPS, utilisant un hologramme comme diffuseur, à [LWF97] pour une réalisation où le multiplexeur et le diffuseur sont réalisés uniquement à partir de fibres optiques, ou encore à [Dra89]. Enfin, la figure 3.9 nous montre la construction d'une OPS comme une succession d'OPS de degré 2, [Muk97].

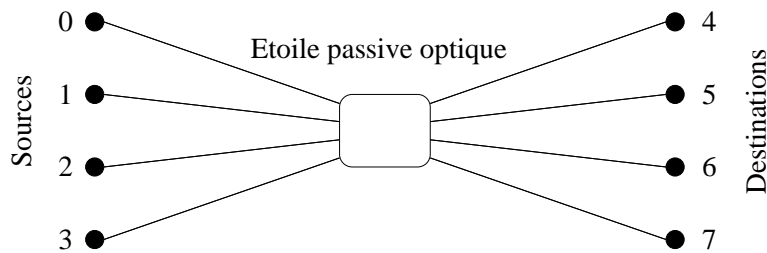


FIG. 3.7 – Représentation usuelle d'une étoile passive optique de degré 4.

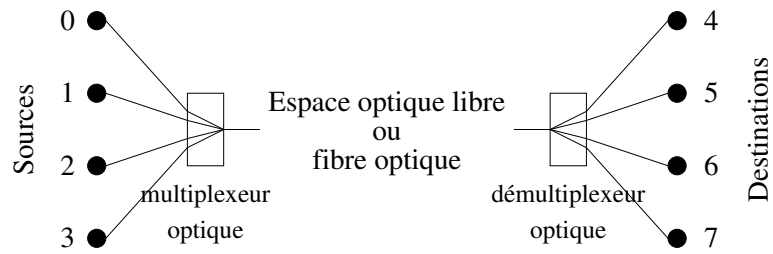


FIG. 3.8 – Autre représentation d’une étoile passive optique de degré 4.

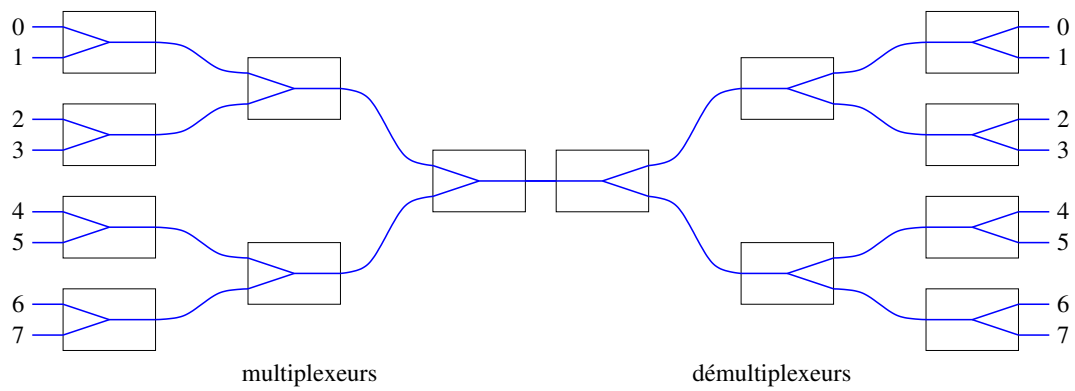


FIG. 3.9 – OPS de degré 8 construite à partir de 7 multiplexeurs à 2 entrées et de 7 démultiplexeurs à 2 sorties.

3.2.6 Fibre optique

Les fibres optiques sont principalement utilisées pour le transport de signaux lumineux sur de grandes distances : entre villes, départements, régions, pays et continents. Des faisceaux de fibres optiques parcourent les océans du monde, de la France vers les États-Unis, du nord de l'Europe jusqu'en Australie. Un signe tangible de l'intérêt de l'utilisation de fibres optiques pour le transport d'information entre continents, a été, en 1988, la disparition dans les communications téléphoniques entre la France et les États-Unis, du « temps mort » de 0.4 seconde dû à la liaison vers le satellite relais.

L'ouvrage de Hecht [Hec99] retrace l'histoire complète des fibres optiques. Les premières fibres en verre de silice suffisamment pur pour transporter de la lumière sur de grandes distances sont apparues dans les années 60. Depuis, leur qualité a été grandement améliorée et, en 1996, Fujitsu, NTT Labs et Bell Labs ont obtenu des fibres permettant de transporter 1 Tbits/s sur de longues distances, par des méthodes différentes.

D'autre part, les fibres optiques permettent le transport de signaux optiques de longueurs d'ondes différentes sur une seule fibre, augmentant ainsi leur potentialité et leur souplesse d'utilisation.

Enfin, nous savons maintenant connecter directement une fibre optique à une puce électronique, comme le montre le commutateur de la figure 3.10 [LHKW99].

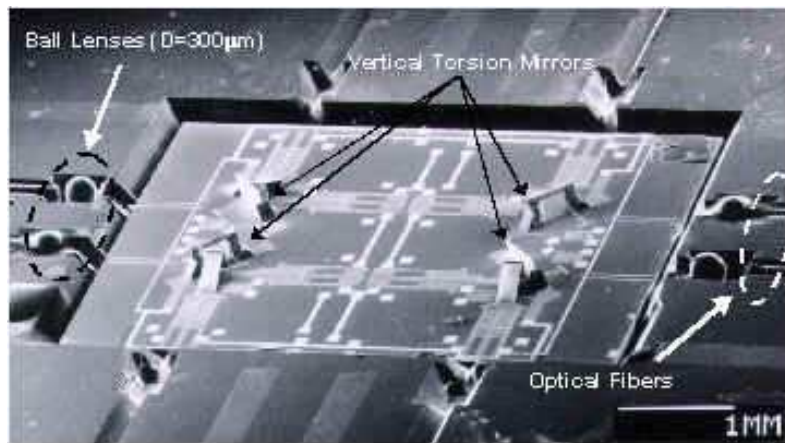


FIG. 3.10 – Commutateur 2×2 pour fibre optique

3.2.7 Amplificateurs optiques

Lorsqu'un signal optique parcourt une longue distance dans une fibre optique, il connaît une certaine atténuation. Si la distance parcourue est importante, le signal peut devenir bruité ou trop faible pour être détecté. Des amplificateurs sont disposés à intervalles réguliers, actuellement tous les 50-100 km.

Deux grandes familles d'amplificateurs existent : les *amplificateurs à semi-conducteur* et les *amplificateurs à fibre dopée*. Une présentation générale des amplificateurs optiques se trouve dans [O'M93].

Notons qu'un signal optique ne peut être amplifié autant de fois que l'on veut. En effet, l'amplification introduit un léger bruit dans le signal, et ce bruit est amplifié par chacun des amplificateurs rencontrés. Ainsi, le signal optique doit être régénéré après la traversée de plusieurs amplificateurs, c'est-à-dire si la distance parcourue est grande, afin d'en éliminer le bruit. Actuellement les signaux optiques sont régénérés tous les 500 km. Récemment, l'utilisation de l'amplification Raman, qui utilise la fibre de ligne comme milieu amplificateur, a conduit à des portées de plus de 3000 km.

3.2.8 Convertisseurs optiques

Un convertisseur optique permet de modifier la longueur d'onde d'un signal optique. Ce composant est donc très utile pour les réseaux utilisant de nombreuses longueurs d'ondes. De nombreux travaux traitent des différentes techniques de conversion en longueur d'onde, dont [Yoo96, DMJ⁺96, LBG⁺99, YZP⁺00].

Deux grands types de technologies se distinguent. Tout d'abord, la *conversion optoélectronique* consiste à traduire le signal optique en signal électrique, puis à émettre un nouveau signal optique avec une longueur d'onde différente. Cette technique est équivalente à la régénération de signal, c'est pourquoi on pourra profiter de la régénération de signal pour modifier la longueur d'onde d'un signal optique. Toutefois, cette technique de conversion est actuellement limitée au potentiel de l'électronique. Des expérimentations pour des débits de 10 Gbits/s ont été réalisées [Yoo96].

Une autre technique de conversion en longueur d'onde, tout-optique, permet d'atteindre de plus hauts débits. Des expérimentations ont démontré la faisabilité de convertisseurs tout-optiques opérant à 40 Gbits/s [YZP⁺00].

3.2.9 Mécanismes microscopiques (MEMS)

La miniaturisation des composants est depuis longtemps un moteur de la recherche dans les domaines de l'électronique et de l'optique, et donc de l'optoélectronique [NR01]. Les mécanismes microscopiques, MEMS (*Micro Electro Mechanical Systems*), permettent aujourd'hui la fabrication de systèmes mécaniques de taille microscopique. Par exemple, des miroirs articulés de 100 μm de diamètre (figure 3.12) sont aujourd'hui fabriqués, et plusieurs centaines de ces miroirs peuvent être assemblés sur une puce d'un centimètre de côté. Ces systèmes permettent d'orienter dynamiquement, et dans une multitude de directions, des faisceaux optiques.

La figure 3.11 nous montre ² des composants fabriqués par l'entreprise *OMM Incorporated* (<http://www.omminc.com>), dont un *crossbar* 8×8 tout optique. La figure 3.12 montre un miroir articulé³ fabriqué par *Lucent Technologies* (<http://www.lucent.com>) dont la taille est comparée à celle du chât d'une aiguille. 256 de ces miroirs sont assemblés sur une même puce d'environ un centimètre de côté, permettant la fabrication d'un *crossbar* tout-optique en 3 dimensions, à 256 entrées et 256 sorties. Ce *crossbar* pourra ensuite être utilisé comme

²Images provenant de <http://www.omminc.com>, rubrique news/media room

³Images provenant de <http://www.lucent.com/pressroom/lambda.html>

« brique de base » dans la construction de gros routeurs, par exemple en construisant un butterfly de degré 256.

3.3 Multiplexage optique

Le **multiplexage** consiste à transporter sur un même support physique plusieurs signaux. La division de la bande passante en canaux peut être réalisée, comme en électronique, dans la dimension temporelle ou dans la dimension des longueurs d'ondes. Dans le premier cas, nous parlerons de **multiplexage temporel** et dans le second cas de **multiplexage en longueur d'onde**.

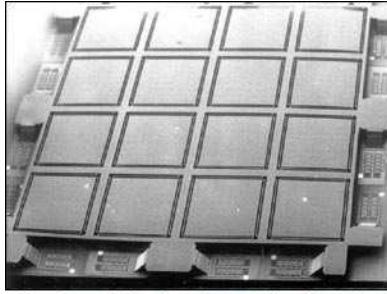
3.3.1 Multiplexage temporel (TDM)

Le multiplexage temporel, noté TDM, consiste à imbriquer temporellement différents canaux de communication en trames successives. Si le flot d'information est représenté par les dents d'un peigne, le multiplexage temporel revient à superposer les peignes des différents canaux en les décalant les uns par rapport aux autres, comme le montre la figure 3.13. Cela nécessite une synchronisation précise. À la réception, chaque canal temporel est démultiplexé puis acheminé vers sa destination. Les fonctions de multiplexage/démultiplexage temporels peuvent être réalisées avec des circuits intégrés ultra-rapides (40 Gbits/s en laboratoire). Toutefois, le coût prohibitif de ces circuits pour les très hauts débits suggère d'effectuer le multiplexage temporel par des moyens purement optiques, une voie actuellement explorée [UGP⁺00, CMP⁺01].

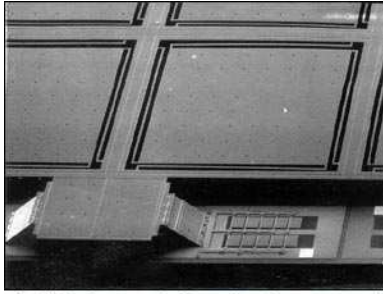
3.3.2 Multiplexage en longueur d'onde (WDM)

Le multiplexage en longueur d'onde, noté WDM, est une technique de multiplexage qui peut se superposer à la précédente. Cette technique consiste à utiliser une longueur d'onde (ou fréquence optique) différente pour chaque canal de communication. Les signaux optiques sont ensuite multiplexés en un unique faisceau optique pour être transportés au travers d'une même fibre optique. Enfin, un démultiplexage en longueur d'onde permet de séparer les différentes longueurs d'ondes et donc de dissocier les canaux de communications. La figure 3.14 nous montre le principe d'une liaison WDM. Le multiplexage comme le démultiplexage pourront être réalisés par des éléments optiques passifs, de façon similaire à la décomposition et recombinaison des couleurs de l'arc-en-ciel par un prisme.

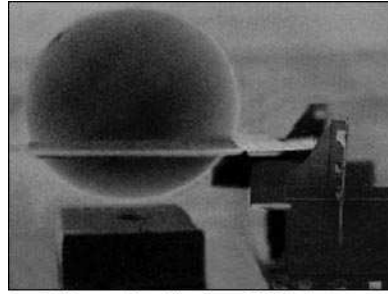
Le multiplexage WDM permet la coexistence de plusieurs canaux de communications, éventuellement opérant à des débits différents, au travers d'une même fibre. Plusieurs centaines de longueurs d'ondes différentes peuvent aujourd'hui être utilisées simultanément sur une même fibre offrant ainsi une bande passante de l'ordre de 1 Tbits/s sur une seule fibre. Du fait de l'augmentation du nombre de longueurs d'ondes utilisables sur une même fibre, on parle aujourd'hui de DWDM et UDWDM pour *dense* et *ultra dense* WDM [Bra90, YST99, TFK⁺01].



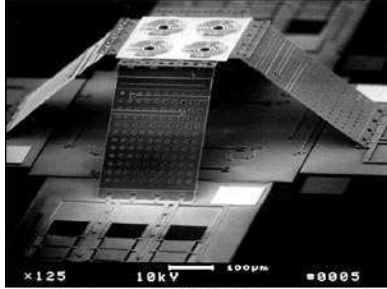
Photomicrograph showing early concept for a 3D scanning mirror, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



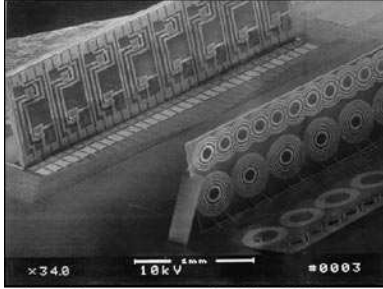
Detail of early concept for 3D scanning mirrors, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



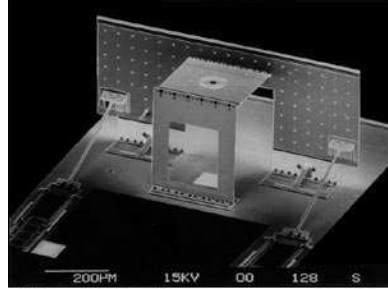
Ball lens used for collimation and VCSEL alignment, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



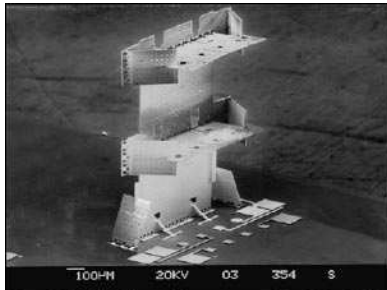
Multiple Fresnel lens for VCSEL alignment, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



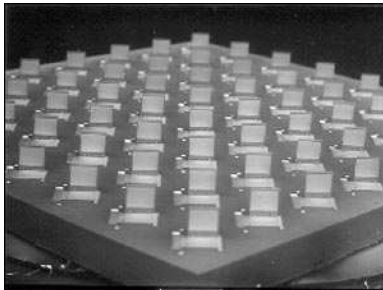
Fresnel lens array, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



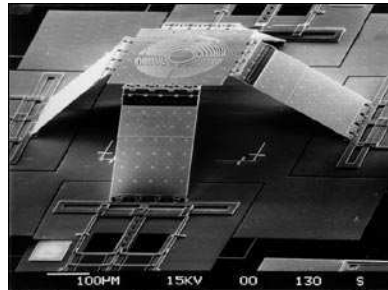
Self-assembled Fresnel lens structure, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



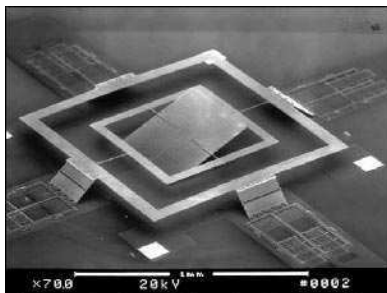
Cascaded multiple Fresnel lens, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



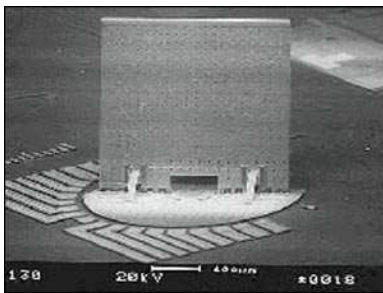
2D 8x8 optical crossconnect MEMS mirror array, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



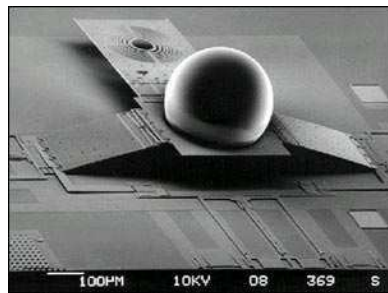
Single Fresnel lens for VCSEL alignment, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



Early example of a MEMS 3D scanning mirror from a UCLA graduate project by Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



Rotating mirror, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design



Ball lens, courtesy of Dr. Li Fan, OMM Director of MEMS Design

FIG. 3.11 – MEMS fabriqués par OMM Inc.

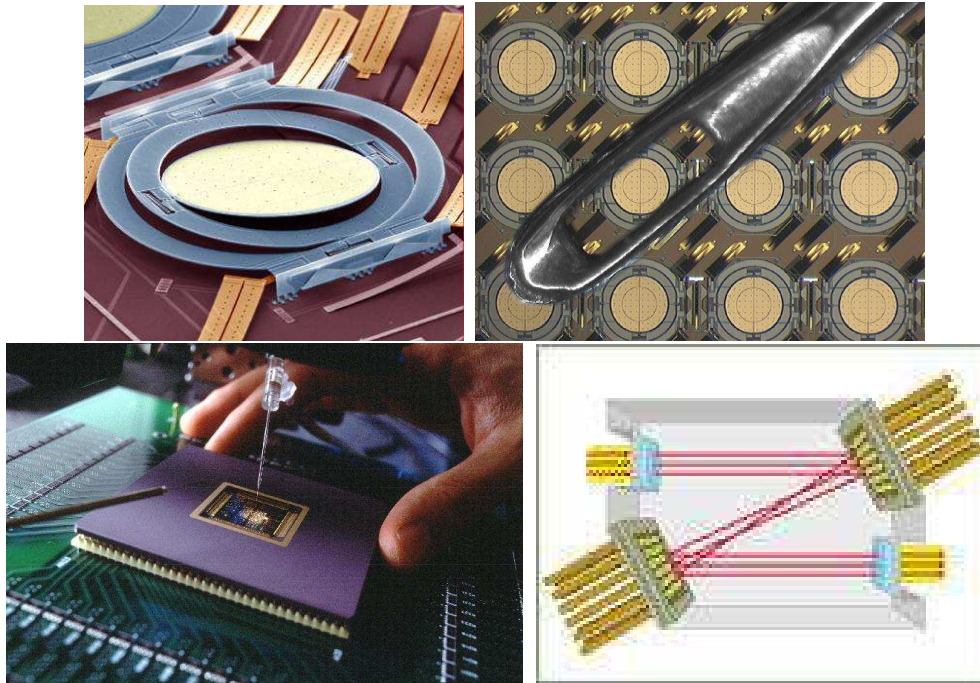


FIG. 3.12 – Lucent's WaveStar[tm] LambdaRouter.

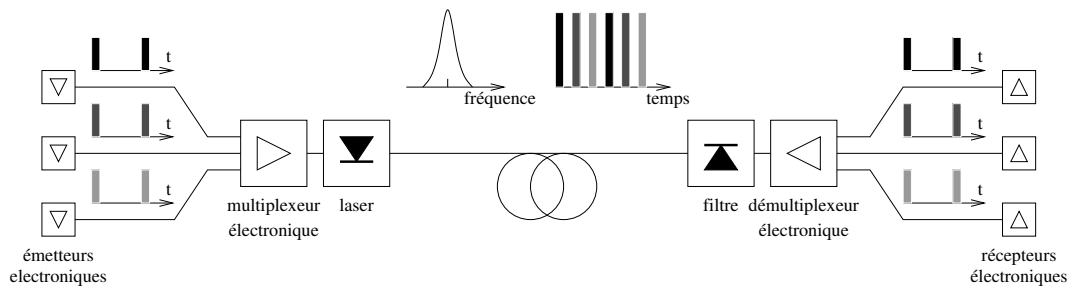


FIG. 3.13 – Multiplexage temporel (TDM).

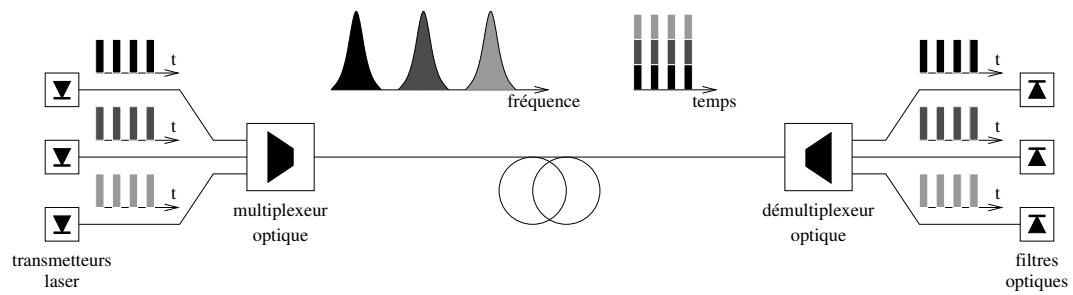


FIG. 3.14 – Multiplexage en longueur d'onde (WDM).

3.3.3 SONET/SDH

Les réseaux de types SONET (*Synchronous Optical NETwork*) et SDH (*Synchronous Digital Hierarchy*) [Kar99] sont une alternative au multiplexage temporel. SONET et SDH sont des standards pour la transmission synchrone de données dans les réseaux à fibres optiques. SONET est le standard américain, défini par le *American National Standards Institute* (ANSI) et SDH est le standard international établi en 1988 par le *Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique* (CCITT) (devenu depuis 1994 *International Telecommunications Union* (ITU)). La SDH est une forme de multiplexage temporel qui est actuellement utilisée au dessus de WDM.

La SDH utilise une structure hiérarchique pour regrouper des données suivant tout ou partie d'un même chemin. Les données sont assemblées en STM (*Synchronous Transfer Module*), dont il existe plusieurs types (table 3.1), chacun correspondant à un débit. Le principe hiérarchique consiste à assembler 4 STM- i en un seul STM- $4i$, alors considéré comme un unique « train » de données (figure 3.15).

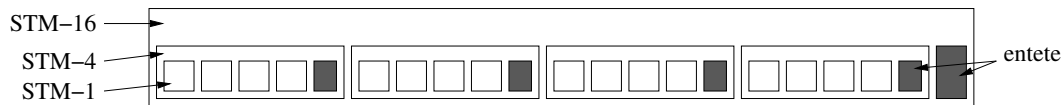


FIG. 3.15 – Principe hiérarchique des STM.

SONET	OC-1	OC-2	OC-12	OC-24	OC-48	OC-192	OC-768
SDH		STM-1	STM-4		STM-16	STM-64	STM-256
Débit (bits/s)	52 M	155 M	625 M	1.25 G	2.5 G	10 G	40 G

TAB. 3.1 – Correspondance entre SONET et SDH.

3.3.4 Multiplexeur à insertion/extraction optique

Un multiplexeur à insertions/extractions optiques (MIEO) (*optical add/drop multiplexeur* (OADM)) [KM01] est un composant tout-optique, placé sur une fibre optique au niveau d'un nœud d'un réseau WDM. Il permet d'extraire certains signaux optiques en transit dans une fibre, c'est-à-dire quelques longueurs d'ondes, puis d'insérer dans cette même fibre de nouveaux signaux optiques, utilisant les longueurs d'ondes disponibles. Les signaux optiques n'intervenant pas dans cette manipulation ne font que traverser le MIEO, sans être modifiés. La figure 3.16 en résume le principe.

Plusieurs méthodes de constructions sont envisagées pour les MIEO. L'une d'elles consiste à utiliser un démultiplexeur, un multiplexeur optique, et entre les deux, un système permettant d'orienter différemment les signaux à extraire, les signaux à insérer et les signaux qui ne font que traverser le réseau. Ceci pourra par exemple être réalisé à l'aide des crossbars tout-optique que nous avons présenté dans la section 3.2.9. Une autre construction est reportée dans [MGB01].

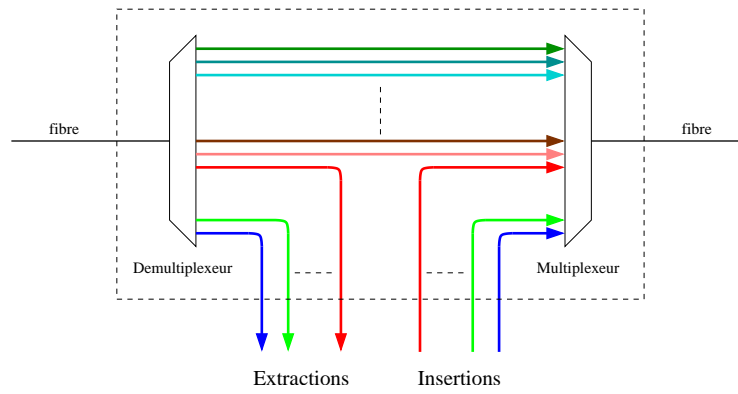


FIG. 3.16 – Multiplexeur à insertions/extractions optiques.

Les signaux optiques extraits d'une fibre optique pourront être soit injectés dans un autre fibre optique, éventuellement avec conversion de la longueur d'onde, soit dirigés vers des récepteurs et convertis sous forme électronique.

3.3.5 Multiplexeur à insertion/extraction électronique

Un multiplexeur à insertions/extractions électronique (MIE) (*add/drop multiplexeur* (ADM)) est un composant réalisant l'interface entre la couche optique et la couche électronique d'un réseau de communications. Ils sont en particulier utilisés pour permettre l'accès aux STM dans les réseaux SONET/SDH (section 3.3.3 page 38).

Un MIE est constitué d'un récepteur [CMP⁺01] et d'un émetteur optique, et d'un circuit électronique permettant d'agir sur les données reçues.

Chapitre 4

Réseaux de communications de l'espace libre optique

Les réseaux de communication en espace optique libre sont utilisés lorsque la distance entre l'émission et la réception du signal optique est faible (quelques centimètres) et que la densité des interconnexions est importante [MKY⁺97, LPZ98]. Ils utilisent des lentilles et des miroirs pour guider les faisceaux lumineux et permettent ainsi un grand nombre d'interconnexions dans un espace réduit. Les technologies de l'optique, comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 3, permettent aujourd'hui la construction de systèmes microscopiques utilisant des lentilles de diamètre inférieur à $50 \mu\text{m}$ [HKE00] et des mécanismes microscopiques (section 3.2.9).

Dans ce chapitre, nous présentons une famille de réseaux d'interconnexions optiques en espace libre basée sur l'architecture *Optical Transpose Interconnection System* (OTIS) [MMHE93]. Ce système se compose de deux plans de lentilles permettant de relier une matrice d'émetteurs à une matrice de récepteurs, selon un motif fixé par le nombre et la taille des lentilles. Ainsi, $OTIS(p, q)$ relie p groupes de q émetteurs à q groupes de p récepteurs, et l'émetteur (i, j) , $0 \leq i < p$, $0 \leq j < q$, est relié au récepteur $(q - j - 1, p - i - 1)$.

Ce système optique a entre autre été développé afin de réaliser les interconnexions optiques du graphe complet orienté symétrique K_n^+ . Dès lors, toute topologie de réseau d'interconnexion peut être implantée avec $OTIS(n, n)$, comme sous graphe de K_n^+ . Toutefois, cette implantation n'est pas optimale dans le sens où tous les liens de communications optiques ne sont pas utilisés. Par exemple, un graphe d'ordre n et de degré 2 n'utilisera que $2n$ liens de communications sur les n^2 disponibles. Quel gâchis! Nous cherchons donc les réseaux pour lesquels tous les liens de communications optiques sont utilisés.

Nous proposons, dans la section 4.1, une famille de réseaux d'interconnexions construits sur $OTIS(p, q)$, en définissant la famille de graphes $H(p, q, d)$, où d émetteurs et d récepteurs consécutifs sont rassemblés pour former un même sommet du graphe. Nous montrons, dans la section 4.2, que cette famille contient les graphes de Imase et Itoh, souvent appelés graphes de Kautz généralisés. Ce résultat implique que la famille $H(p, q, d)$ inclut les graphes de Kautz et de de Bruijn, ainsi que les graphes complets. Ensuite, nous montrons que les graphes complets sont les seuls graphes orientés symétriques réguliers de la famille $H(p, q, d)$, excluant ainsi de nombreux graphes tels que les hypercubes et les grilles.

Ensuite, nous nous intéressons dans la section 4.3 à des réseaux hybrides, utilisant à la fois des communications optiques, au travers d'OTIS, et des communications électroniques. Un exemple de réseau hybride, développé pour le calcul intensif de la FFT, est détaillé dans [BEW⁺00]. Brièvement, ces réseaux sont des graphes composés construits à partir de $H(p, q, d)$ en remplaçant chaque sommet par une copie d'un graphe G d'ordre d . Ceci nous permet de proposer une modélisation à des réseaux déjà étudiés sur OTIS tels que OTIS-*Mesh* [ZMPE00, WS98b] et OTIS-*G* [DAAar].

4.1 Optical Transpose Interconnection System, OTIS

Dans cette section, nous présentons OTIS comme un composant optique, puis nous proposons une modélisation des réseaux de communication pouvant être construits avec ce système de communications optiques.

4.1.1 La technologie OTIS – Topologie de base

L'architecture *OTIS Optical Transpose Interconnection System* a été proposée dans [MMHE93] comme un composant optique permettant de guider un grand nombre de faisceaux optiques de leur source à leur destination, dans un espace réduit et selon un motif géométrique fixé. Une définition formelle en est la suivante :

Définition 4.1.1 ([MMHE93]) *L'architecture $OTIS(p, q)$, est un système optique en 2 dimensions, qui permet de réaliser des communications point-à-point (ou 1-à-1) en reliant un vecteur de p groupes de q émetteurs à un vecteur de q groupes de p récepteurs, de telle sorte que l'élément (i, j) , $0 \leq i \leq p-1$, $0 \leq j \leq q-1$, soit relié à l'élément $(q-j-1, p-i-1)$.*

Les connexions optiques de l'architecture $OTIS(p, q)$, se font, comme le montre l'exemple de la figure 4.1, grâce à deux plans de lentilles séparés par un espace optique libre. Les lentilles d'un plan de lentilles sont identiques, alors que les lentilles de deux plans distincts peuvent être différentes (distances focales différentes).

Notons que dans l'exemple de la figure 4.1, les rayons traversent le centre des lentilles qu'ils rencontrent. Chaque émetteur doit être exactement orienté vers son récepteur. Un tel système est alors très difficile à construire, et de fabrication coûteuse. Pour remédier à cette contrainte, il a été proposé dans [BMME97] une amélioration du système de lentilles pour des émetteurs « verticaux » (perpendiculaires aux vecteurs d'émetteurs et de récepteurs). Cette amélioration se fait en utilisant des portions de lentille semi-convexe (une face plane et une face convexe), comme le montre la figure 4.2.

L'architecture *OTIS* s'applique naturellement à une matrice d'émetteurs et de récepteurs. Il faut alors utiliser des matrices de lentilles et construire un système en trois dimensions.

Définition 4.1.2 ([MMHE93]) *L'architecture $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$, est un système optique en 3 dimensions qui permet de réaliser des communications point-à-point (ou 1-à-1) en reliant une matrice de $p_1 \times p_2$ groupes de $q_1 \times q_2$ émetteurs à une matrice de $q_1 \times q_2$ groupes de $p_1 \times p_2$ récepteurs, de telle sorte que l'élément (i_1, i_2, j_1, j_2) , $0 \leq i_k \leq p_k - 1$, $0 \leq j_k \leq q_k - 1$, $k = 1, 2$, soit relié à l'élément $(q_1 - j_1 - 1, q_2 - j_2 - 1, p_1 - i_1 - 1, p_2 - i_2 - 1)$.*

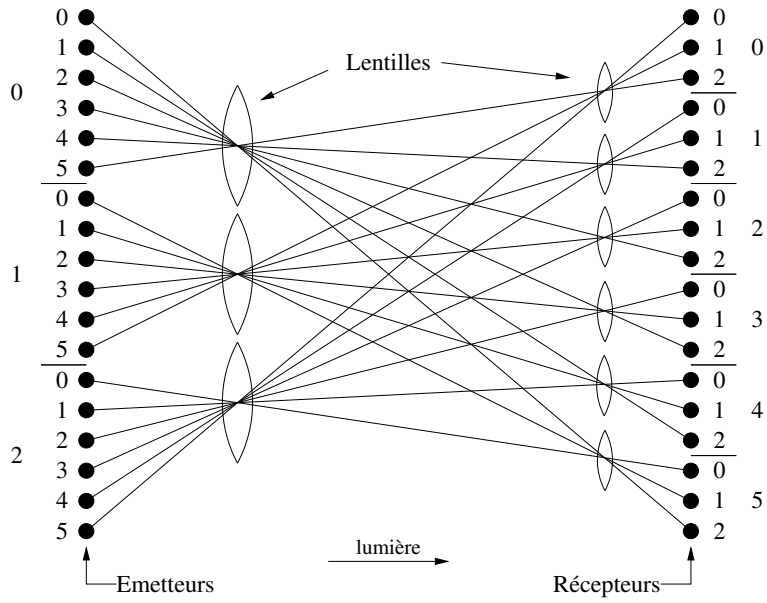


FIG. 4.1 - *OTIS(3,6)*.

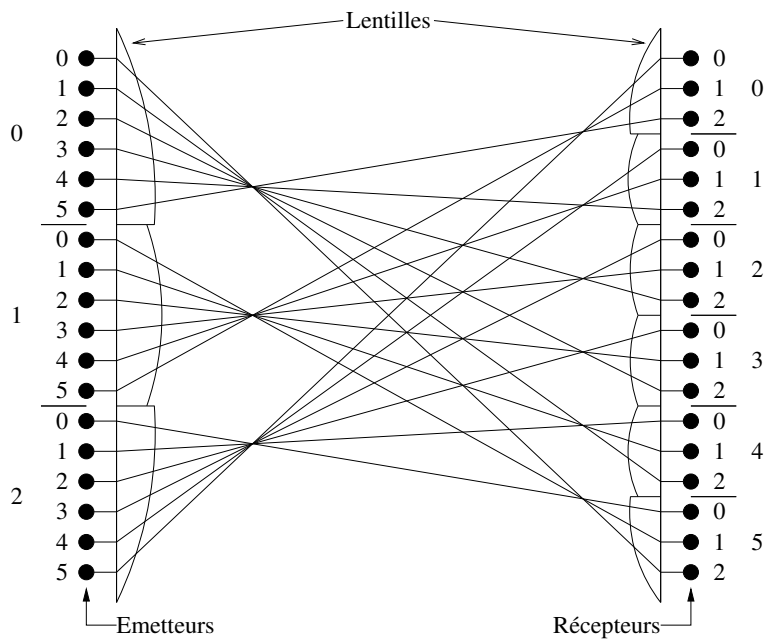


FIG. 4.2 - *OTIS(3,6)* pour émetteurs verticaux.

ÉTANT DONNÉ une matrice de taille $p_1 p_2 \times q_1 q_2$, cette définition revient à permuter les lignes de la matrice, selon la fonction de permutation donnée par $OTIS(p_1, q_1)$, puis à permuter les colonnes de la matrice obtenue, selon la fonction de permutation donnée par $OTIS(p_2, q_2)$. La figure 4.3 illustre ce mécanisme.

Il est important de remarquer que d'un point de vue théorique, toute taille d'architecture $OTIS$, en deux et trois dimensions, est concevable. Toutefois, des contraintes technologiques existent.

Tout d'abord, nous avons rappelé dans la section 3.2.3 page 30 que le choix des lentilles utilisées dans la conception d'un système optique se fait selon leur f_L -nombre.

D'autre part, une analyse géométrique simple d' $OTIS(p, q)$ nous permet de montrer que le rapport des distances focales des lentilles utilisées dans chacun des plans vaut $\frac{q+1}{p+1}$ (voir l'annexe B). Or, si ce rapport est très grand (ou très petit), le système optique est sujet à des problèmes d'alignement. En effet, un faisceau optique est composé d'un ensemble de rayons parallèles et d'un point de vue théorique, des rayons parallèles incidents à une lentille convexe émergent en traversant un même point du plan focal image. Or, en pratique, les lentilles ne sont pas parfaites et de ce fait, les faisceaux émergent de la lentille en traversant le « voisinage » d'un même point du plan focal image. La figure 4.4 illustre cette remarque. Dès lors, un faisceau lumineux traversant $OTIS$ émerge dans le voisinage d'un récepteur. Ceci entraîne des difficultés de dimensionnement des émetteurs (puissance lumineuse à émettre) et des récepteurs (sensibilité, surface). Afin d'étudier précisément la faisabilité d'un système optique du type d' $OTIS$, un simulateur, nommé *Chatoyant* a été développé [LKM⁺98]. Ce simulateur permet d'agir sur un grand nombre de paramètres, dont les distances focales, et de valider la faisabilité d'un $OTIS(p, q)$. Une étude préliminaire visant à déterminer la bande passante du système est donnée dans [Cou96].

Finalement, nous chercherons à utiliser des $OTIS(p, q)$ tels que $\frac{q+1}{p+1}$ est proche de 1.

4.1.2 Modélisation

Nous proposons ici une modélisation qui nous permettra d'exprimer simplement la topologie des réseaux construits avec l'architecture $OTIS$. Notons que nous ne considérons que les réseaux de degré constant.

Numérotions les émetteurs et les récepteurs comme des entiers sur $Z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, avec $m = pq$. Alors, l'émetteur $t = (i, j)$, $0 \leq i < p$, $0 \leq j < q$, devient $t = qi + j$, avec $t \in Z_m$, et le récepteur $r = (i', j')$, $0 \leq i' < q$, $0 \leq j' < p$, devient $r = pj' + i' \in Z_m$.

Définition 4.1.3 *Le graphe $H(p, q, d)$ est le graphe orienté d'ordre n et degré d construit à partir de l'architecture $OTIS(p, q)$, tel que :*

- d divise pq , $n = \frac{pq}{d}$ et $m = pq = dn$;
- $V(H) = \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- $\Gamma_H^+(u) = \left\{ \left\lfloor \frac{(pq-1)\left(\lfloor \frac{du+\alpha}{q} \rfloor + 1\right) - p(du+\alpha)}{d} \right\rfloor, 0 \leq \alpha < d \right\}$.

Un sommet $u \in V(H)$ du graphe $H(p, q, d)$ correspond aux d émetteurs consécutifs

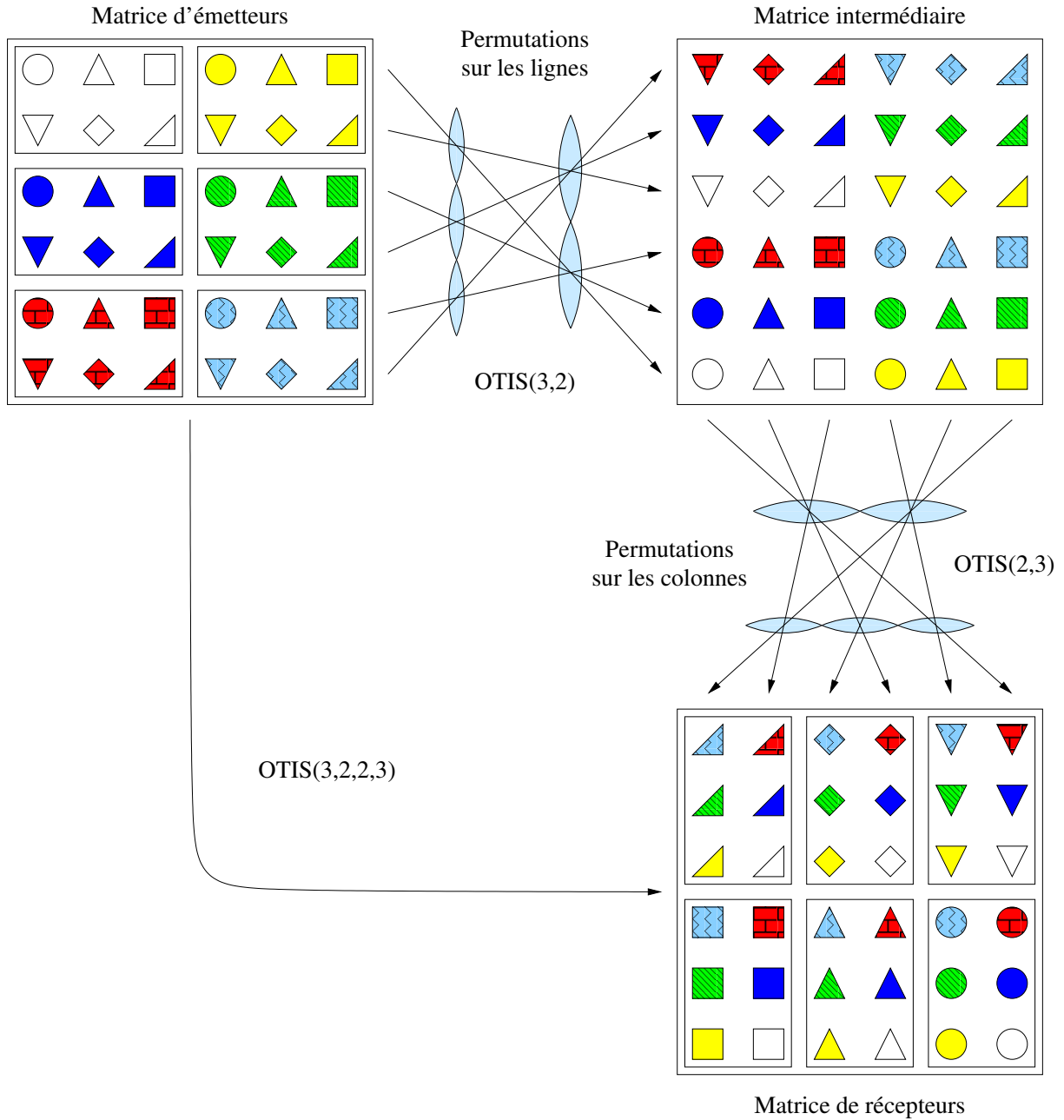


FIG. 4.3 – Permutations effectuées par l'architecture $OTIS(3, 2, 2, 3)$ d'une matrice de 3×2 groupes de 2×3 émetteurs vers un matrice de 2×3 groupes de 3×2 récepteurs.

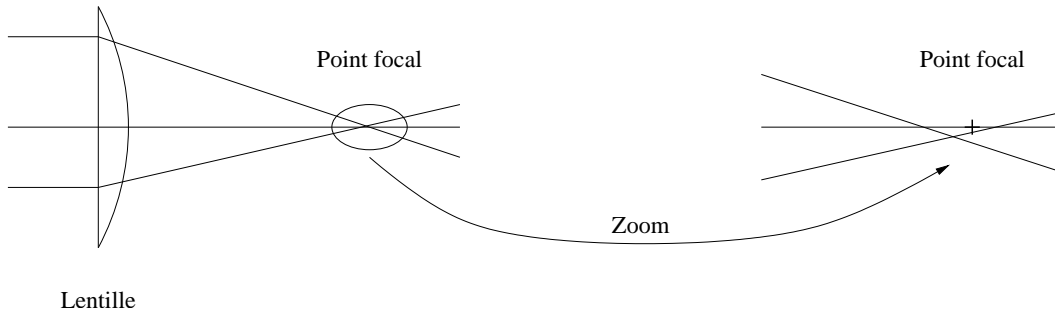


FIG. 4.4 – Approximation au point focal.

$\{t = du + \alpha \mid 0 \leq \alpha < d\}$ et aux d récepteurs consécutifs $\{r = du + \alpha \mid 0 \leq \alpha < d\}$, c'est-à-dire

$$\left\{ t = \left(\left\lfloor \frac{du + \alpha}{q} \right\rfloor, du + \alpha \bmod q \right) \mid 0 \leq \alpha < d \right\}$$

et

$$\left\{ r = \left(\left\lfloor \frac{du + \alpha}{p} \right\rfloor, du + \alpha \bmod p \right) \mid 0 \leq \alpha < d \right\}$$

Cette modélisation suppose que, sur un processeur, les émetteurs et les récepteurs sont confondus. La figure 3.4 nous montre que les émetteurs et les récepteurs peuvent être placés côte à côte. La figure 4.5 page 47 nous montre comment guider les faisceaux optiques, de leur source à leur destination, après avoir traversé le système optique OTIS.

La définition des graphes $H(p, q, d)$ s'étend naturellement à l'architecture $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$. De plus, nous avons vu que les interconnexions de $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$ sont équivalentes à effectuer une permutation sur les lignes, via $OTIS(p_1, q_1)$, puis une permutation sur les colonnes via $OTIS(p_2, q_2)$ c'est-à-dire que l'élément (i_1, i_2, j_1, j_2) , $0 \leq i_k < p_k$, $0 \leq j_k < q_k$, $k = 1, 2$, est relié par $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$ à l'élément $(q_1 - j_1 - 1, q_2 - j_2 - 1, p_1 - i_1 - 1, p_2 - i_2 - 1)$ si et seulement si l'élément (i_1, i_2, j_1, j_2) est relié par $OTIS(p_1, q_1)$ à l'élément $(q_1 - j_1 - 1, i_2, p_1 - i_1 - 1, j_2)$ qui est lui même relié par $OTIS(p_2, q_2)$ à l'élément $(q_1 - j_1 - 1, q_2 - j_2 - 1, p_1 - i_1 - 1, p_2 - i_2 - 1)$. Aussi, nous modélisons les graphes construits sur $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$ par les graphes $H(p_1, q_1, d_1) \otimes H(p_2, q_2, d_2)$.

Définition 4.1.4 Les graphes $H(p_1, q_1, d_1) \otimes H(p_2, q_2, d_2)$ sont les graphes de degré $d = d_1 d_2$ et d'ordre $\frac{p_1 q_1 p_2 q_2}{d_1 d_2}$ construits à partir de l'architecture $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$.

Définition 4.1.5 Un graphe $G = (V, A)$, à n sommets de degré d , admet une **implantation** avec OTIS si et seulement si il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1. Il existe p et q tels que G est isomorphe à $H(p, q, d)$;
2. Il existe p_1, p_2, q_1, q_2, d_1 et d_2 tels que G est isomorphe à $H(p_1, q_1, d_1) \otimes H(p_2, q_2, d_2)$.

Lemme 4.1.6 Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, et soit G^- , le graphe orienté construit à partir de G en renversant tout ses arcs. Si le graphe G est isomorphe au graphe $H(p, q, d)$, alors le graphe G^- est isomorphe au graphe $H(q, p, d)$.

Preuve : Si G est isomorphe au graphe $H(p, q, d)$, alors G admet une implantation avec $OTIS(p, q)$. En inversant le sens des arcs, nous obtenons une implantation du graphe G^- avec $OTIS(q, p)$, c'est-à-dire que les graphes G^- et $H(q, p, d)$ sont isomorphes. \square

Nous venons de modéliser, au travers des définitions 4.1.3 et 4.1.4 et du lemme 4.1.6, une famille de réseaux d'interconnexions admettant une implantation avec *OTIS*. Ces réseaux sont tels que tous les liens de communications sont optiques.

Une autre utilisation de l'architecture *OTIS* consiste à ne réaliser qu'une partie des communications avec *OTIS*, et de réaliser les autres liens de communications à l'aide de liens électronique. En effet, nous avons rappelé précédemment que l'utilisation de liens de communications optiques est intéressante dès que la distance à parcourir est supérieure à un centimètre. Nous définissons alors une famille de réseaux de communications construite par composition de graphes (voir la définition A.3.8 page 184), de la forme $H(p, q, d)[G]$.

Définition 4.1.7 Soit le graphe $G = (V(G), A(G))$ tel que $|V(G)| = d$. Le graphe $H(p, q, d)[G]$ est le graphe composé où chaque sommet u du graphe $H(p, q, d)$ est remplacé par une copie du graphe G de telle façon que le sommet $x \in V(G)$ est associé à l'émetteur $e = x$ et au récepteur $r = x$ du sommet u , et tel que

- $V(H(p, q, d)[G]) = \{\langle u, x \rangle \mid u \in V(H), x \in V(G)\}$;
- $|V(H(p, q, d)[G])| = |V(G)| \cdot |V(H)|$;
- $A(H(p, q, d)[G]) = \{(\langle u, x \rangle, \langle u, y \rangle) \mid (x, y) \in A(G), u \in V(H)\}$
 $\cup \{(\langle u, x \rangle, \langle v, y \rangle) \mid (u, v) \in A(H), \varpi(u, v) = \langle x, y \rangle\}$

où ϖ est la fonction définie par

$$\begin{aligned} \varpi & : A(H) \longrightarrow \{0, 1, \dots, d-1\} \times \{0, 1, \dots, d-1\} = V(G) \times V(G) \\ (u, v) & \longmapsto \langle e, r \rangle = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire que ϖ associe aux extrémités d'un arc (u, v) de $H(p, q, d)$ les indices de l'émetteur e de u et du récepteur r de v correspondant.

Dans cette définition, nous avons imposé $|V(G)| = d$. Cette définition s'étend également aux cas où $|V(G)| < d$ et où $|V(G)| > d$. Dans le premier cas, un même sommet de G peut être associé à plusieurs émetteurs et récepteurs d'un sommet de $H(p, q, d)$, et dans le deuxième cas, des sommets de G ne seront associés à aucun émetteur ou récepteur de $H(p, q, d)$.

D'autre part, cette définition s'applique s'étend à $OTIS(p_1, p_2, q_1, q_2)$, avec soit $(H(p_1, q_1, d_1) \otimes H(p_2, q_2, d_2))[G]$, soit $H(p_1, q_1, d_1)[G_1] \otimes H(p_2, q_2, d_2)[G_2]$.

Enfin, une dernière utilisation consiste, dans un réseau de communication multi-étages tel qu'un réseau papillon, à remplacer un étage de liens électroniques par des liens optiques.

Définition 4.1.8 Le graphe $H^B(p, q, d)$ est le graphe biparti orienté à $2n$ sommets, construit à partir de l'architecture $OTIS(p, q)$, tel que :

- d divise pq , $n = \frac{pq}{d}$ et $m = pq = dn$;
- $V(H) = \{\langle x, i \rangle \mid 0 \leq x < n, i \in \mathbb{Z}_2\}$;
- Si $u = \langle x, 0 \rangle$, $d^-(u) = 0$ et $d^+(u) = d$; si $u = \langle x, 1 \rangle$, $d^-(u) = d$ et $d^+(u) = 0$;
- $\Gamma_{H^B}^+(u = \langle x, 0 \rangle) = \left\{ \left\langle \left\lfloor \frac{(pq-1)(\lfloor \frac{dx+\alpha}{q} \rfloor + 1) - p(dx+\alpha)}{d} \right\rfloor, 1 \right\rangle \mid 0 \leq \alpha < d \right\}$;
- $\Gamma_{H^B}^+(v = \langle x, 1 \rangle) = \emptyset$.

Nous pouvons remarquer que le graphe $H^B(p_1, q_1, d_1) \otimes H^B(p_2, q_2, d_2)$ est biparti. Ceci se déduit des propriétés du produit de convolution. D'autre part, le graphe $H^B(p, q, d)[G]$ est défini simplement à l'aide des définitions 4.1.8 et 4.1.7.

4.2 Réseaux simples construits avec OTIS

Dans cette section, nous nous intéressons aux réseaux pour lesquels une implantation avec OTIS permet de réaliser toutes les interconnexions via le système optique. En d'autres termes, nous étudions les graphes isomorphes à $H(p, q, d)$. Nous montrerons que les graphes complets, de Imase et Itoh, de de Bruijn et de Kautz sont isomorphes à $H(p, q, d)$. De plus, en étudiant les graphes orientés symétriques isomorphes à $H(p, q, d)$, nous montrerons que les grilles, les tores et les hypercubes, entre autres, ne vérifient pas l'isomorphisme.

4.2.1 Graphes bipartis

De la définition de l'architecture $OTIS(p, q)$, nous déduisons immédiatement qu'il permet de connecter un graphe biparti complet orienté de p sommets vers q sommets. Par exemple, $OTIS(4, 4)$ (figure 4.6) connecte un graphe biparti complet de 4 sommets vers 4 sommets.

4.2.2 Graphe complets

Une utilisation attractive de l'architecture $OTIS$ est la réalisation des interconnexions optiques d'un réseau de communication point-à-point ayant la topologie du graphe complet orienté symétrique avec boucles K_n^+ ou sans boucle K_n^* .

Proposition 4.2.1 *Le graphe complet orienté symétrique avec boucles K_n^+ est isomorphe au graphe $H(n, n, n)$.*

Preuve : Soit u , un sommet de $H(n, n, n)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma_H^+(u) &= \left\{ \left\lfloor \frac{(n^2-1)(\lfloor \frac{nu+\alpha}{n} \rfloor + 1) - n(nu+\alpha)}{n} \right\rfloor \mid 0 \leq \alpha < n \right\} \\ &= \left\{ \left\lfloor \frac{(n^2-1)(u+1) - n(nu+\alpha)}{n} \right\rfloor \mid 0 \leq \alpha < n \right\} \\ &= \left\{ \left\lfloor n - \alpha - \frac{u+1}{n} \right\rfloor \mid 0 \leq \alpha < n \right\} \end{aligned}$$

Or, $1 \leq u+1 \leq n$, donc $\Gamma_H^+(u) = \{n - \alpha - 1 \mid 0 \leq \alpha < n\} = \Gamma_{K_n^+}^+(u)$

□

La figure 4.6 représente les interconnexions de K_4^+ . Les émetteurs de chaque sommet sont représentés à gauche, et les récepteurs à droite. Une autre représentation est donnée dans la figure 4.7, où l'utilisation d'un simple miroir permet de supprimer le deuxième plan de lentilles. Dans ce cas, les émetteurs et les récepteurs sont confondus.

Proposition 4.2.2 *Le graphe orienté symétrique sans boucle K_n^* est isomorphe au graphe $H(n, n-1, n-1)$.*

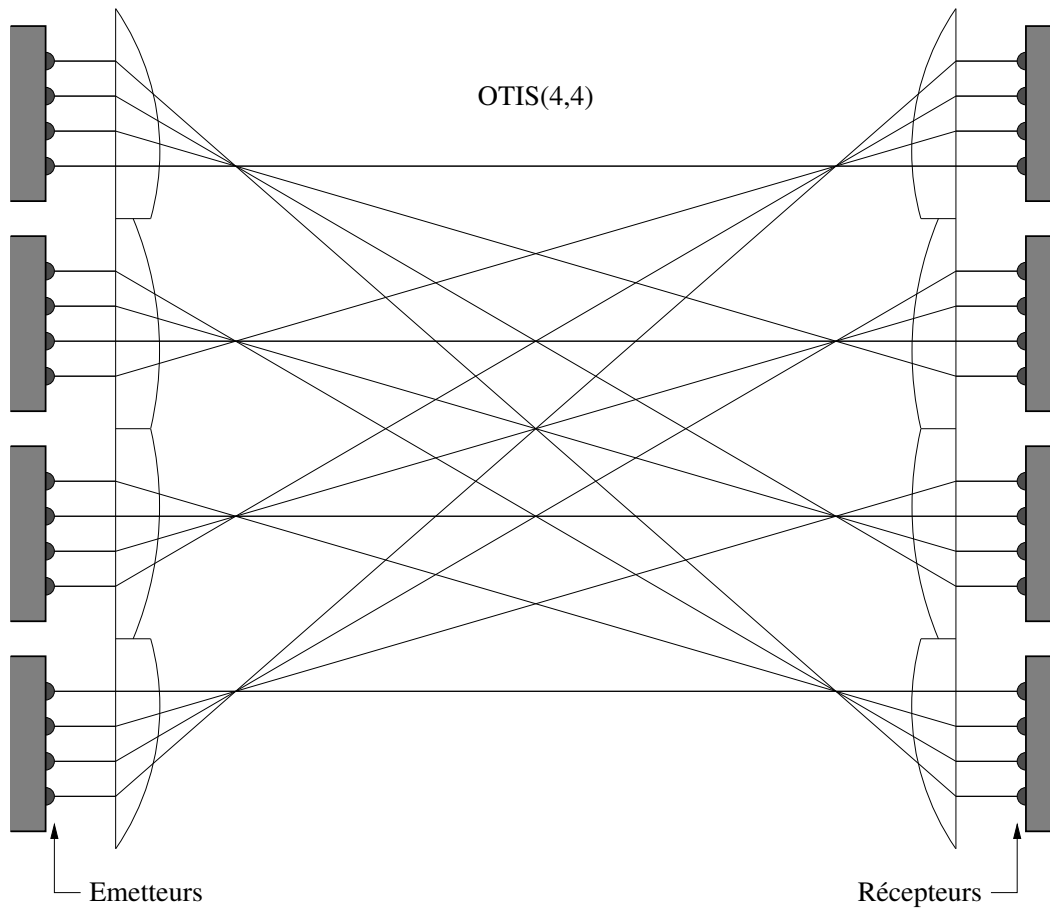


FIG. 4.6 – Interconnexions optiques de K_4^+ réalisées avec $OTIS(4,4)$.

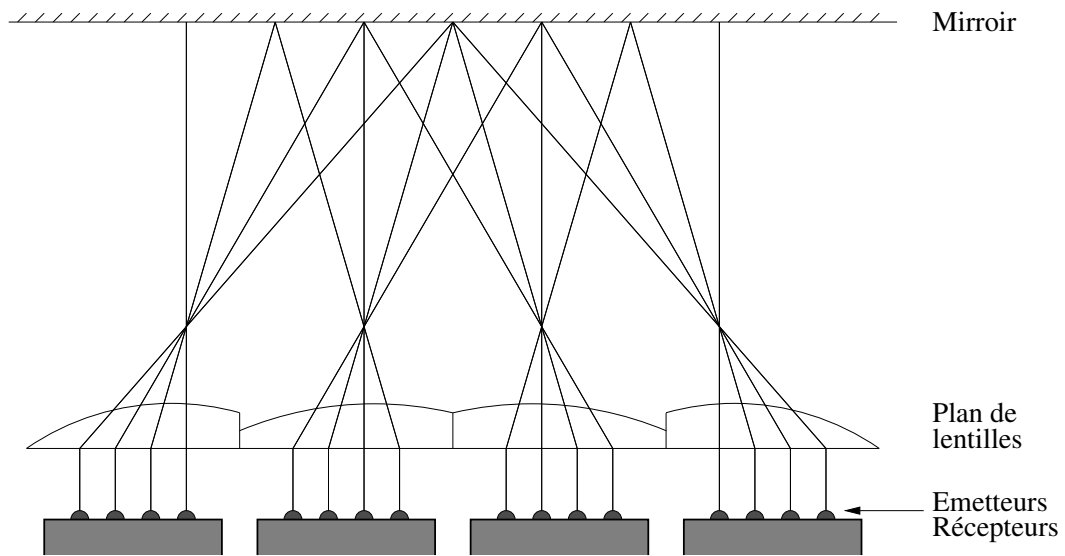


FIG. 4.7 – Interconnexions optiques de K_4^+ réalisées avec un plan de lentilles et un miroir.

Preuve : Soit u , un sommet de $H(n, n-1, n-1)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\Gamma_H^+(u) &= \left\{ \left\lfloor \frac{(n(n-1)-1)(\lfloor \frac{(n-1)u+\alpha}{n-1} \rfloor + 1) - n((n-1)u+\alpha)}{n-1} \right\rfloor \mid 0 \leq \alpha < n-1 \right\} \\ &= \left\{ \left\lfloor n - \alpha - \frac{u+\alpha+1}{n-1} \right\rfloor \mid 0 \leq \alpha < n-1 \right\}\end{aligned}$$

Nous pouvons distinguer plusieurs cas :

1. Si $u = 0$, alors $1 \leq \lfloor n - \alpha - \frac{\alpha+1}{n-1} \rfloor \leq n-1$;
2. Si $u = n-1$, alors $0 \leq \lfloor n - \alpha - \frac{\alpha+1}{n-1} \rfloor \leq n-2$;
3. Si $u \neq 0, n-1$, alors
 - (a) Si $\frac{u+\alpha+1}{n-1} \leq 1$, alors $0 \leq \alpha \leq n-u-2$ et $u+1 \leq \lfloor n - \alpha - \frac{u+\alpha+1}{n-1} \rfloor \leq n-1$;
 - (b) Si $\frac{u+\alpha+1}{n-1} > 1$, alors $n-2 \geq \alpha > n-u-2$ et $0 \leq \lfloor n - \alpha - \frac{u+\alpha+1}{n-1} \rfloor \leq u-1$.

Finalement, pour tout $u \in V(H)$, $u \notin \Gamma_H^+(u)$ et $|\Gamma_H^+(u)| = n-1$, ce qui caractérise bien $H(n, n-1, n-1) \equiv K_n^*$. \square

Corollaire 4.2.3 $K_n^* \equiv H(n-1, n, n-1)$.

Preuve : Le lemme 4.1.6 nous apprend que si G est isomorphe au graphe $H(n, n-1, n-1)$, alors le graphe G^- est isomorphe au graphe $H(n-1, n, n-1)$. Or, si $G = K_n^*$, alors les graphes G et G^- sont isomorphes. Donc $K_n^* \equiv H(n-1, n, n-1)$. \square

Nous savons maintenant implanter les graphes K_n^+ et K_n^* avec OTIS. Alors, tout graphe simple admet une implantation avec OTIS. En effet, tout graphe simple à n sommets est un sous graphe de K_n^+ . Il suffit de ne pas utiliser tous les liens de communications. Cette remarque est également vraie pour les graphes qui ne sont pas de degré constant. Toutefois, nous nous intéressons aux graphes de degré constant dont l'implantation avec OTIS utilise tous les liens de communication, c'est-à-dire les graphes isomorphes à $H(p, q, d)$. Alors, nous allons montrer dans la suite qu'il existe des graphes de degré constant qui n'admettent pas d'implantation avec OTIS.

4.2.3 Graphes orientés symétriques

Nous montrons maintenant que les seuls graphes simples orientés symétriques admettant une implantation avec OTIS sont K_n^* et K_n^+ . Pour cela, nous commençons par montrer que tous les graphes $H(p, q, d)$ contiennent un cycle de longueur 2, \vec{C}_2 . Ensuite, nous montrons que si $H(p, q, d)$ est un graphe simple orienté symétrique, alors $p-1 \leq q \leq p+1$. Enfin, nous montrons le résultat attendu.

Lemme 4.2.4 *Tout graphe $H(p, q, d)$ contient un \vec{C}_2 .*

Preuve : Nous avons $V(H) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\Gamma_H^+(0) \ni n-1$ et $\Gamma_H^+(n-1) \ni 0$, ce qui forme le \vec{C}_2 . \square

Lemme 4.2.5 *Si $d > p$ ou $d > q$, alors $H(p, q, d)$ est un multigraphe.*

Preuve : Si $d > q$, alors le sommet 0 contient les émetteurs $0, 1, \dots, q-1, q, \dots, d-1$. Par $OTIS(p, q)$, l'émetteur 0 est relié au récepteur $m-1$, et l'émetteur q est relié au récepteur $m-2$. Or les récepteurs $m-1$ et $m-2$ appartiennent tout deux au sommet $n-1$. Alors, $H(p, q, d)$ est un multigraphe si $d > q$.

Si $d > p$, alors le sommet 0 contient les émetteurs $0, 1, \dots, d-1$. Par $OTIS(p, q)$, l'émetteur 0 est relié au récepteur $m-1$, et l'émetteur 1 est relié au récepteur $m-p-1$. Or les émetteurs $m-1$ et $m-p-1$ appartiennent tout deux au sommet $n-1$. Alors, $H(p, q, d)$ est un multigraphe si $d > p$.

□

Lemme 4.2.6 *Si le graphe $H(p, q, d)$ est un graphe simple orienté symétrique fortement connexe alors $p-1 \leq q \leq p+1$.*

Preuve : Comme le graphe est simple, nous savons, d'après le lemme 4.2.5, que $d \leq q$ et $d \leq p$.

Nous avons $\forall u \in V(H), \forall v \in \Gamma_H^+(u), u \in \Gamma_H^+(v)$. Donc tout sommet appartient soit à un \vec{C}_2 , soit à une boucle.

Si $d = 1$, alors comme le graphe $H(p, q, d)$ est fortement connexe, soit le graphe a un unique sommet et une boucle, soit le graphe a exactement 2 sommets formant un \vec{C}_2 .

Si $d \geq 2$. Soit u_0 , le sommet contenant les émetteurs $0, 1, \dots, d-1$. Par $OTIS(p, q)$, l'émetteur $i, 0 \leq i \leq d-1$ est relié au récepteur $m-ip-1$. Soit v_i le sommet contenant le récepteur $m-ip-1$. Comme le graphe est symétrique, $u_0 \in \Gamma_H^+(v_i)$, et donc, le sommet v_i contient également l'émetteur $m-jq-1, 0 \leq j < d$. En effet, cet émetteur est relié par $OTIS(p, q)$ au récepteur $j, 0 \leq j < d$, qui appartient à u_0 . Ainsi, nous avons

$$m-jq-1-(d-1) \leq m-ip-1 \tag{4.1}$$

$$m-ip-1 \leq m-jq-1+(d-1) \tag{4.2}$$

Nous remarquons que si $i = 0$, alors $v_0 = n-1$ et donc $j = 0$. Ceci nous invite à penser que $i = j$. Montrons alors que i ne peut pas être différent de j .

1. Si $i < j$, posons $j = i + x, x > 0$. D'après la relation 4.1, nous avons $i \leq \frac{d-1-xq}{q-p}$. Alors, i est négatif si $p < q$. De plus, si $i = d-1$, alors j n'est pas un récepteur de u_0 .
2. Si $i > j$, posons $j = i - x, x > 0$. D'après la relation 4.1. Alors i est négatif si $p > q$. De plus, si $i = 0$, le récepteur j n'existe pas.

Donc $i = j$, et il reste à montrer que $q-1 \leq p \leq q+1$. Pour cela, il suffit de poser $i = d-1$ dans les relations 4.1 et 4.2.

□

Proposition 4.2.7 *Si le graphe $H(p, q, d)$ est un graphe simple orienté symétrique fortement connexe, alors,*

1. *Si $H(p, q, d)$ ne contient pas de boucle, alors $H(p, q, d) \equiv K_n^*$;*
2. *Si tous les sommets de $H(p, q, d)$ ont une unique boucle, alors $H(p, q, d) \equiv K_n^+$.*

Preuve :

1. $H(p, q, d)$ sans boucle :

(a) Si $p = q$, alors l'émetteur $p - 1$ est relié au récepteur $p - 1$. Il y a une boucle ;

(b) Si $q = p - 1$,

i. Si $d \geq p$, $H(p, q, d)$ est un multigraphe (lemme 4.2.5) ;

ii. Si $d = p - 1$, $H(p, p - 1, p - 1) \equiv K_p^*$ (proposition 4.2.2) ;

iii. Si $d < p - 1$,

A. Si d ne divise pas q , $1 < d < p - 1$, alors un sommet contient les émetteurs et les récepteurs $p - 1 = q$ et $p - 2 = q - 1$. Or le récepteurs $p - 2$ est reliée à l'émetteur $p - 1$. Il y a une boucle ;

B. Si d divise q , $1 < d < q$. Soit u le sommet contenant les émetteurs $\{q - i - 1 \mid 0 \leq i < d\}$ et soit v le sommet contenant les récepteurs $\{q + i \mid 0 \leq i < d\}$. L'émetteur $q - 1$ est relié au récepteur q , donc $v \in \Gamma_H^+(u)$. De plus, les émetteurs $\{q + i \mid 0 \leq i < d\}$, sont reliés aux récepteurs $\{ip + 1 \mid 0 \leq i < d\}$. Or $\{q - i - 1 \mid 0 \leq i < d\} \cap \{ip + 1 \mid 0 \leq i < d\} = \emptyset$. Le graphe $H(p, q, d)$ n'est donc pas symétrique ;

(c) Si $q = p + 1$, comme le graphe $H(p, q, d)$ est orienté symétrique en utilisant le lemme 4.1.6, il suffit d'examiner le graphe $H(q, p, d)$;

2. G avec boucles :

(a) Si $p = q$,

i. Si $d > p$, $H(p, p, d)$ est un multigraphe (lemme 4.2.5) ;

ii. Si $d = p$, $H(p, p, p) \equiv K_p^+$ (proposition 4.2.2) ;

iii. Si $d < p$, aucun des émetteurs $\{i \mid 0 \leq i < d\}$ n'est relié à l'un des récepteurs $\{i \mid 0 \leq i < d\}$. Il y a au moins un sommet sans boucle ;

(b) Si $q = p - 1$,

i. Si $d \geq p$, alors $d > q$ et $H(p, q, d)$ est un multigraphe (lemme 4.2.5) ;

ii. Si $d \leq p - 1$, aucun des émetteurs $\{i \mid 0 \leq i < d\}$ n'est relié à l'un des récepteurs $\{i \mid 0 \leq i < d\}$. Il y a au moins un sommet sans boucle ;

(c) Si $q = p + 1$, il suffit d'examiner le graphe $H(q, p, d)$ (lemme 4.1.6).

Finalement, si le graphe $H(p, q, d)$ est un graphe simple orienté symétrique fortement connexe, alors il est isomorphe soit à K_n^* , soit à K_n^+ . \square

Corollaire 4.2.8 *La famille des graphes $H(p, q, d)$ ne contient pas les grilles, les tores et les hypercubes.*

Preuve : Ces graphes sont orientés symétriques sans boucle et ne sont pas isomorphes à K_n^* . Donc, il ne vérifient pas les conditions de la proposition 4.2.7. \square

Ce dernier résultat est « négatif » car il supprime bon nombre de familles de graphes de notre étude. Toutefois, notre objectif étant d'exhiber les familles de graphes ayant une implantation avec OTIS, ce résultat nous permet de mieux cibler notre étude.

4.2.4 Graphes de Imase et Itoh, de de Bruijn et de Kautz

Nous montrons maintenant que le graphe de Imase et Itoh, $II(d, n)$, est isomorphe au graphe $H(p, q, d)$. Ce résultat a de nombreuses implications. En effet, les graphes de de Bruijn et de Kautz appartenant à la famille des graphes de Imase et Itoh, ils sont également isomorphes au graphe $H(p, q, d)$, pour des valeurs de p et q appropriées.

Proposition 4.2.9 ([CFM00b]) *Le graphe de Imase et Itoh $II(d, n)$ de degré d et d'ordre n vérifie l'isomorphisme $II(d, n) \equiv H(d, n, d)$.*

Preuve : Comme $p = d$ et $q = n$, nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma_{H(d,n,d)}^+(u) &= \left\{ v_\alpha = \left\lfloor \frac{(du-1)(\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \rfloor + 1) - d(du+\alpha)}{d} \right\rfloor, 0 \leq \alpha < d \right\} \\ &= \left\{ v_\alpha = \left\lfloor n \left(\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \rfloor + 1 \right) - \frac{\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \rfloor + 1}{d} - du - \alpha \right\rfloor, 0 \leq \alpha < d \right\} \\ &= \left\{ v_\alpha \equiv -du - \alpha + \left\lfloor -\frac{\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \rfloor + 1}{d} \right\rfloor \pmod{n}, 0 \leq \alpha < d \right\} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 &\leq du + \alpha \leq d(n-1) + d - 1 = dn - 1 \\ 0 &\leq \left\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{dn-1}{n} \right\rfloor = d - 1 \\ \frac{1}{d} &\leq \frac{\left\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \right\rfloor + 1}{d} \leq \frac{d-1+1}{d} = 1 \\ -\frac{1}{d} &\geq -\frac{\left\lfloor \frac{du+\alpha}{n} \right\rfloor + 1}{d} \geq -1 \end{aligned}$$

et de plus, $\lfloor -\frac{1}{d} \rfloor = -1$, donc

$$\begin{aligned} \Gamma_{H(d,n,d)}^+(u) &= \{v_\alpha \equiv (-du - \alpha - 1) \pmod{n}, 0 \leq \alpha < d\} \\ &= \Gamma_{II(d,n)}^+(u) \end{aligned}$$

□

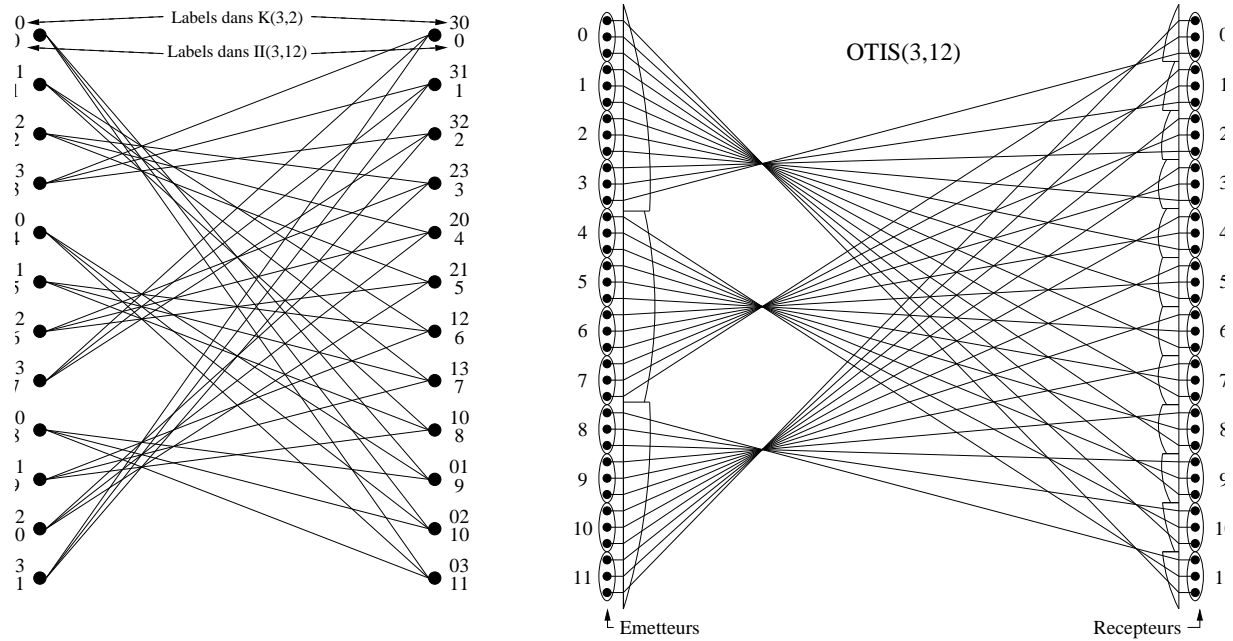
Corollaire 4.2.10 *Le graphe de Imase-Itoh $II(d, n)$ de degré d à n sommets admet une implantation avec $OTIS(d, n)$.*

La figure 4.8 représente, à gauche, le graphe biparti représentatif des adjacences du graphe de Imase et Itoh $II(3, 12)$. Ce graphe est également le graphe de Kautz $K(3, 2)$. La figure 4.8 représente également, à droite, le graphe $H(3, 12, 3)$ avec $OTIS(3, 12)$.

Corollaire 4.2.11 *Les graphes de Kautz et de de Bruijn ont une implantation avec $OTIS$; $B(d, D) \equiv H(d, d^D, d)$ et $K(d, D) \equiv H(d, d^{D-1}(d+1))$.*

Preuve : Le graphe de Kautz $K(d, D)$ est le graphe de Imase-Itoh $II(d, d^{D-1}(d+1))$ (voir les propriétés données dans le paragraphe 2.1.4 page 13), et le graphe de de Bruijn $B(d, D)$ est le graphe de Imase-Itoh $II(d, d^D)$ d'après la proposition 5.1.3 page 68.

□

FIG. 4.8 – $II(3, 12)$ et $H(3, 12, 3)$.

Corollaire 4.2.12 *Le graphe composé $dBC(d, D)$ a une implantation avec OTIS.*

Preuve : Dans la définition 2.1.13 page 17, nous avons vu que $dBC(d, D) = B(d, D) [\mathcal{H}_{\log_2 d}]$. Comme $B(d, D) \equiv H(d, d^D, d)$, nous avons $dBC(d, D) \equiv H(d, d^D, d) [\mathcal{H}_{\log_2 d}]$. \square

Graphes de Reddy-Pradhan-Kuhl

Les graphes de Reddy-Pradhan-Kuhl (définition 2.1.3 page 10) ne sont pas, en général, isomorphes aux graphes de Imase et Itoh. Or, ces derniers sont isomorphes aux graphes $H(p, q, d)$. Donc, $H(p, q, d) \not\equiv RPK(d, n)$. Toutefois, nous pouvons proposer une implantation de $RPK(d, n)$ en utilisant le fait que $\Gamma_{RPK(d, n)}^+(u) = \Gamma_{II(d, n)}^+(\bar{u})$.

Lemme 4.2.13 $\Gamma_{RPK(d, n)}^+(u) = \Gamma_{II(d, n)}^+(\bar{u})$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{II(d, n)}^+(\bar{u}) &= \{v \mid v = (-d\bar{u} - \alpha - 1) \pmod n, 0 \leq \alpha < d\} \\
 &= \{v \mid v = (-d(n - u - 1) - \alpha - 1) \pmod n, 0 \leq \alpha < d\} \\
 &= \{v \mid v = (du + (d - \alpha - 1)) \pmod n, 0 \leq \alpha < d\} \\
 &= \{v \mid v = (du + \beta) \pmod n, 0 \leq \beta < d\} \\
 &= \Gamma_{RPK(d, n)}^+(u)
 \end{aligned}$$

\square

Une implantation de $RPK(d, n)$ peut être réalisée avec OTIS suivit de deux lentilles, lesquelles permettent d'obtenir le complément ; c'est-à-dire que OTIS connecte le sommet u

aux « sommets logiques » $\Gamma_{II(d,n)}^+(u)$, puis les deux lentilles relient ces sommets logiques aux voisins de u : $\Gamma_{RPK(d,n)}^+(u) = \Gamma_{II(d,n)}^+(\bar{u})$. La figure 4.9 représente la réalisation optique du graphe $RPK(3,6)$, qui est tel que :

- $V = Z_6$;
- $A = \{v \equiv 3u + \alpha \pmod{6} \mid 0 \leq \alpha < 3\}$.

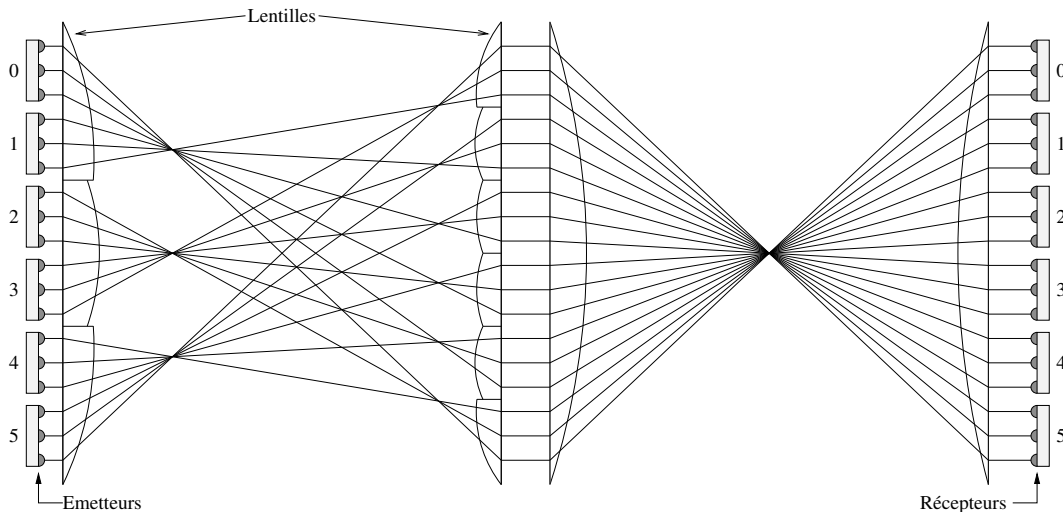


FIG. 4.9 – $RPK(3,6)$ construit à partir de $OTIS(3,6)$ suivi de 2 lentilles permettant d’inverser l’ordre des faisceaux.

4.2.5 Problème (Δ, D) sur OTIS

Pour un degré Δ et un diamètre D fixé, nous étudions le nombre maximum de sommets des graphes de la famille $H(p, q, \Delta)$, [CFP99]. Nous conduisons notre étude à l’aide d’un programme informatique simple qui, étant donné un graphe $H(p, q, d)$, retourne son diamètre (si le graphe est connexe). Nous exécutons ce programme sur tous les couples (p, q) tels que $\frac{pq}{d} \leq \sum_{i=0}^{D_m} d^i = \frac{d^{D_m+1}-1}{d-1}$, la borne de Moore [BT80], pour un diamètre maximal D_m donné, puis nous rassemblons les résultats par diamètre. Nous obtenons ainsi, par recherche exhaustive, pour le degré 2 et les diamètres 8, 9, et 10, les résultats rassemblés dans la table 4.1. Cette table ne contient que les plus grands graphes obtenus pour chaque diamètre.

Le graphe de Kautz semble être le plus grand graphe de degré d et de diamètre D , de la famille $H(p, q, d)$. Ce résultat n’a rien de surprenant. En effet, le graphe de Kautz est connu comme une bonne construction pour le problème (Δ, D) [BT80]. De plus, nous avons montré dans la proposition 4.2.9 page 54 que $H(d, n, d) \equiv II(d, n)$, et le plus grand $II(d, n)$ est le graphe de Kautz.

Pour chaque valeur de D , il existe plusieurs couples (p, q) , avec $pq = d^{D+1}$, tels que le graphe $H(p, q, d)$ d’ordre $n = d^D$ est connexe. De plus, les paramètres p et q sont des puissances de d et le graphe $H(p, q, d)$ est isomorphe au graphe de de Bruijn $B(d, D)$. Par exemple, $H(2, 256, 2)$, $H(4, 128, 2)$ et $H(16, 32, 2)$ sont isomorphes à $B(2, 8)$. Cette propriété est à la base des travaux qui font l’objet du chapitre 5.

n	p	q		n	p	q		n	p	q	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	
253	2	253		509	2	509		1022	2	1022	
254	2	254		510	2	510		1023	2	1023	
255	2	255		511	2	511		1024	2	1024	de Bruijn
256	2	256	de Bruijn	512	2	512	de Bruijn		4	512	de Bruijn
	4	128	de Bruijn		8	128	de Bruijn		8	256	de Bruijn
	16	32	de Bruijn		16	128	de Bruijn		16	128	de Bruijn
258	2	258		513	2	513			32	64	de Bruijn
264	2	264		516	2	516		1026	2	1026	
288	2	288		528	2	528		1032	2	1032	
384	2	384	Kautz	576	2	576		1056	2	1056	
				768	2	768	Kautz	1152	2	1152	
								1536	2	1536	Kautz

$D = 8$
 $D = 9$
 $D = 10$

TAB. 4.1 – $H(p, q, 2)$ pour les diamètres 8, 9 et 10.

4.3 Réseaux composés construits avec OTIS

Nous venons de décrire des familles de graphes pour lesquelles une implantation avec OTIS permet de réaliser toutes les connexions optiquement. Nous allons maintenant examiner des réseaux mixtes, où seulement une partie des connexions sont optiques, les autres étant électroniques.

4.3.1 Réseau papillon

Nous montrons maintenant dans la réalisation d'un réseau multi-étages tel que le réseau papillon, qu'il est possible de remplacer un étage d'interconnexion électronique par un étage d'interconnexion optique, à l'aide d'OTIS, comme représenté sur la figure 4.10.

Proposition 4.3.1 *Si D est impair, alors le réseau papillon $\overrightarrow{BF}(d, D)$ de degré d et d'ordre $(D + 1)d^D$ vérifie l'isomorphisme $\overrightarrow{BF}(d, D) \equiv H^B \left(d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}} \right) \left[\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right]$.*

Preuve : Nous avons vu dans la définition 2.1.9 page 14, que lorsque D est impair, le réseau papillon $\overrightarrow{BF}(d, D)$ peut se définir par $\overrightarrow{BF}(d, D) \equiv \overrightarrow{K}_{d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}} \left[\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right]$. Or, le graphe biparti complet $\overrightarrow{K}_{n,n}$ est isomorphe au graphe $H^B(n, n, n)$. Ainsi, en utilisant la définition 2.1.9 complétée par le lemme 2.1.10, nous obtenons

$$\overrightarrow{BF}(d, D) \equiv H^B \left(d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}} \right) \left[\overrightarrow{BF} \left(d, \frac{D-1}{2} \right) \right]$$

□

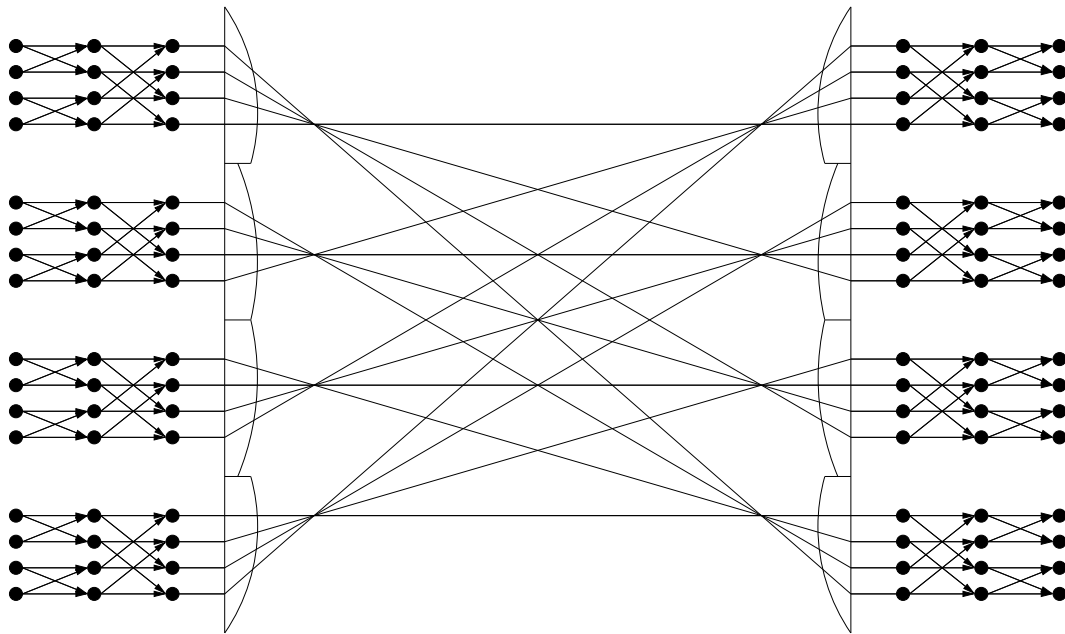


FIG. 4.10 – Butterfly $\overrightarrow{BF}(2,5)$ où un étage d'interconnexions est réalisé avec $OTIS(4,4)$.

Dans cette construction, les interconnexions les plus longues sont réalisées par le biais de l'architecture optique $OTIS$, les autres restant électroniques. Cette construction étant récursive, il est possible, selon la valeur de D , de remplacer d'autres étages d'interconnexions par des $OTIS$ appropriés.

D'autre part, lorsque le D est pair, il est également possible de remplacer un étage de communication par $OTIS$. Dans ce cas, nous utilisons le graphe biparti $\overrightarrow{K}_{d^{\frac{D}{2}+1}, d^{\frac{D}{2}}}$ que nous composons à gauche par $\overrightarrow{BF}(d, \frac{D}{2})$ et à droite par $\overrightarrow{BF}(d, \frac{D}{2} + 1)$.

Enfin, il est également possible de remplacer tous les étages de communication par $OTIS$. En effet, nous avons $\overrightarrow{BF}(d, D) \equiv B(d, D) \otimes \overrightarrow{\mu}_{D+1}$, et nous avons montré dans le corollaire 4.2.11 que $B(d, D) \equiv H(d, d^D, d)$.

4.3.2 OTIS-Mesh

Le réseau appelé $OTIS-Mesh$ est le réseau de communication construit avec l'architecture $OTIS$ qui a été le plus étudié. En particulier, de nombreux algorithmes dont des algorithmes de routage [WS98a, WS98b], de permutations [SW97], de somme préfixe [WS98a], de multiplication de matrices [WS01], de traitements d'images [WS00] et de tris [RS98a, Ost00].

La définition d'un $OTIS-Mesh$ est la suivante :

Définition 4.3.2 ([ZMPE96, ZMPE00]) *Un $OTIS-Mesh$ est la topologie d'un réseau d'interconnexions à n^4 sommets de degré au plus 5, répartis dans n^2 groupes de n^2 sommets chacun, tels que :*

$$- V = \{ \langle g, p \rangle = \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \mid g_x, g_y, p_x, p_y \in Z_n \};$$

$$\begin{aligned}
- A = & \{(\langle g, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle g, \langle p_x, q_y \rangle \rangle) \mid g \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n, p_x \in \mathbb{Z}_n, 0 \leq q_y = p_y \pm 1 \leq n-1\} \\
& \cup \{(\langle g, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle g, \langle q_x, p_y \rangle \rangle) \mid g \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n, 0 \leq q_x = p_x \pm 1 \leq n-1, p_y \in \mathbb{Z}_n\} \\
& \cup \{(\langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle \langle p_x, p_y \rangle, \langle g_x, g_y \rangle \rangle) \mid p_x, p_y, g_x, g_y \in \mathbb{Z}_n\}
\end{aligned}$$

Ainsi, chaque groupe de n^2 sommets, dans un *OTIS-Mesh*, est une copie de la grille orientée symétrique $M(n, n)$, comme illustré sur la figure 4.11. De plus, les communications entre groupes se font par la relation d'adjacence $\langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \rightarrow \langle \langle p_x, p_y \rangle, \langle g_x, g_y \rangle \rangle$, où $\langle g_x, g_y \rangle$ est le numéro d'un groupe, et $\langle p_x, p_y \rangle$ est le numéro d'un sommet dans ce groupe. Cette relation d'adjacence correspond à celle de $K_{n^2}^+$. Nous pouvons en déduire qu'un *OTIS-Mesh* est isomorphe au graphe composé $K_{n^2}^+[M(n, n)]$, ce que nous montrons dans le lemme suivant.

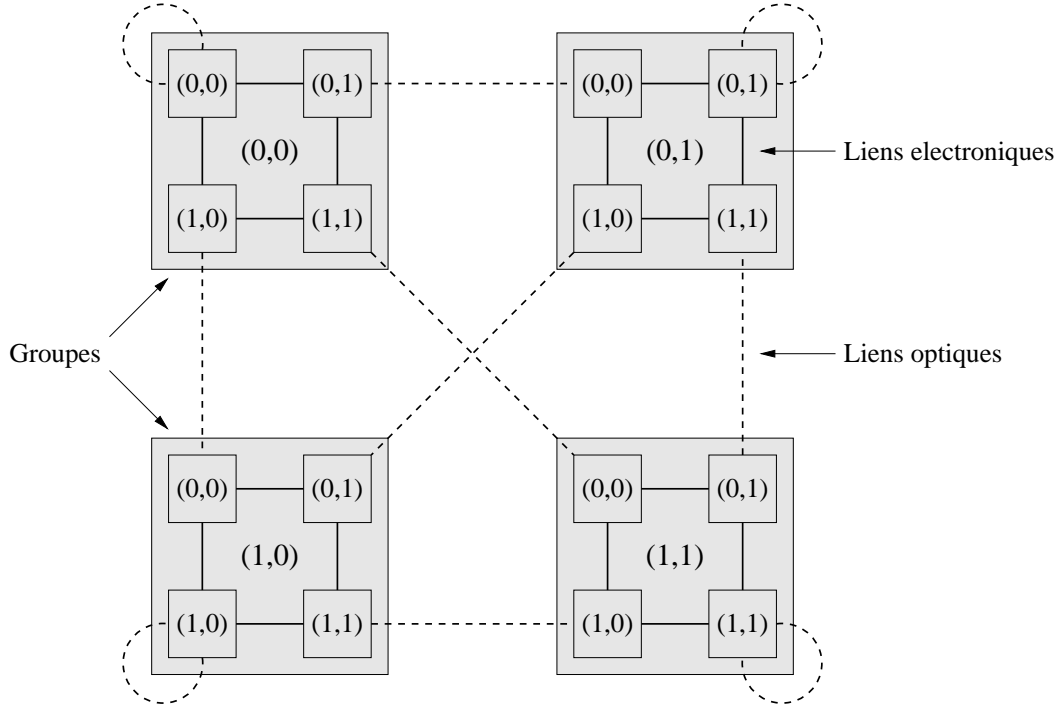


FIG. 4.11 – *OTIS-Mesh* à 4 groupes de 4 sommets. Les liens sont orientés symétriques.

Lemme 4.3.3 *OTIS – Mesh* $\equiv K_{n^2}^+[M(n, n)]$.

Preuve : La grille $M(n, n)$ peut se définir comme le graphe à n^2 sommets, tel que :

$$\begin{aligned}
- V(M(n, n)) &= \{p = \langle p_x, p_y \rangle \mid p_x, p_y \in \mathbb{Z}_n, p = p_x n + p_y\}; \\
- A(M(n, n)) &= \{(\langle p_x^1, p_y^1 \rangle, \langle p_x^2, p_y^2 \rangle) \mid p_x^1 = p_x^2 \in \mathbb{Z}_n, 0 \leq p_y^2 = p_y^1 \pm 1 \leq n-1\} \\
&\quad \cup \{(\langle p_x^1, p_y^1 \rangle, \langle p_x^2, p_y^2 \rangle) \mid 0 \leq p_x^2 = p_x^1 \pm 1 \leq n-1, p_y^1 = p_y^2 \in \mathbb{Z}_n\}
\end{aligned}$$

De plus, le graphe $K_{n^2}^+$ est le graphe à n^2 sommets, tel que :

$$\begin{aligned}
- V(K_{n^2}^+) &= \{g \mid g \in \mathbb{Z}_{n^2}\} = \{g = \langle g_x, g_y \rangle \mid 0 \leq g_x, g_y < n, g = g_x n + g_y\}; \\
- A(K_{n^2}^+) &= \{(g^1, g^2) \mid g^1, g^2 \in V(K_{n^2}^+)\} \\
&= \{(\langle g_x^1, g_y^1 \rangle, \langle g_x^2, g_y^2 \rangle) \mid \langle g_x^1, g_y^1 \rangle, \langle g_x^2, g_y^2 \rangle \in V(K_{n^2}^+)\};
\end{aligned}$$

Ainsi, le graphe composé $K_{n^2}^+[M(n, n)]$ est le graphe à n^4 sommets, défini par :

$$\begin{aligned}
 - V(K_{n^2}^+[M(n, n)]) &= \{ \langle g, p \rangle = \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \mid \langle g_x, g_y \rangle \in V(K_{n^2}^+), \\
 &\quad \langle p_x, p_y \rangle \in V(M(n, n)) \} \\
 &= \{ \langle g, p \rangle = \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \mid g_x, g_y, p_x, p_y \in Z_n \}; \\
 - A(K_{n^2}^+[M(n, n)]) &= \{ (\langle g, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle g, \langle p_x, q_y \rangle \rangle) \mid g \in Z_n \times Z_n, p_x \in Z_n, \\
 &\quad 0 \leq q_y = p_y \pm 1 \leq n - 1 \} \\
 &\quad \cup \{ (\langle g, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle g, \langle q_x, p_y \rangle \rangle) \mid g \in Z_n \times Z_n, p_y \in Z_n, \\
 &\quad 0 \leq q_x = p_x \pm 1 \leq n - 1 \} \\
 &\quad \cup \{ (\langle g, p \rangle, \langle p, g \rangle) \mid (g, p) \in A(K_{n^2}^+), \varpi(g, p) = \langle p, g \rangle \}
 \end{aligned}$$

où ϖ est la fonction définie par

$$\begin{aligned}
 \varpi &: A(K_{n^2}^+) &\longrightarrow V(M(n, n)) \times V(M(n, n)) \\
 (g^1, g^2) = (\langle g_x^1, g_y^1 \rangle, \langle g_x^2, g_y^2 \rangle) &\longmapsto \langle \langle g_x^1, g_y^1 \rangle, \langle g_x^2, g_y^2 \rangle \rangle
 \end{aligned}$$

Ceci correspond bien à la définition d'un *OTIS-Mesh*. □

Nous avons rappelé, avec le fait A.3.6 page 183, que $K_n^+ \otimes K_n^+ \equiv K_{n^2}^+$, et nous avons montré dans la proposition 4.2.1 que $K_n^+ \equiv H(n, n, n)$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
 OTIS - Mesh &\equiv K_{n^2}^+[M(n, n)] \\
 &\equiv (K_n^+ \otimes K_n^+)[M(n, n)] \\
 &\equiv (H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[M(n, n)]
 \end{aligned}$$

Toutefois, la relation d'adjacence entre groupes dans un *OTIS - Mesh* ne correspond pas à la relation d'adjacence entre groupes que nous obtenons pour le graphe $H(p_1, q_1, d_1) \otimes H(p_2, q_2, d_2)$ avec les définitions 4.1.3 et 4.1.4. En effet, un arc dans $H \otimes H$, va du sommet $\langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle$ au sommet $\langle \langle p_1 - p_x - 1, p_2 - p_y - 1 \rangle, \langle q_1 - g_x - 1, q_2 - g_y - 1 \rangle \rangle$. Nous donnerons dans la suite une transformation simple pour fixer ce problème dans un cas plus général.

Remarque : Il est intéressant de comprendre l'origine de cette différence de définition entre *OTIS - Mesh* et $(H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[M(n, n)]$. En effet, les graphes de la famille *OTIS - Mesh* n'admettent pas d'implantation immédiate avec l'architecture *OTIS*.

Tout d'abord, dans [MMHE93] les interconnexions optiques de l'architecture *OTIS* sont définies comme reliant l'émetteur $\langle i, j \rangle$ au récepteur $\langle j, i \rangle$, ceci en numérotant les émetteurs de *haut en bas* et les récepteurs de *bas en haut*. Cette définition est équivalente à celle des graphes $H(p, q, d)$, où l'émetteur $\langle i, j \rangle$ est relié au récepteur $\langle q - j - 1, p - i - 1 \rangle$, et où les émetteurs comme les récepteurs sont numérotés de haut en bas. Par la suite, dans les publications [ZMPE96, ZMPE00], [SW97, WS98a, WS00, WS01, WS98b], [Ost00], et plus récemment dans [DAAar], la relation $\langle i, j \rangle$ vers $\langle j, i \rangle$, en numérotant de haut en bas les émetteurs comme les récepteurs, a été utilisée pour définir les interconnexions optiques de l'architecture *OTIS*. La proposition 4.3.6 permettra de relier ces définitions.

Dans le cas plus général des graphes construits sur $OTIS(p, q)$, avec $p \neq q$, la proposition 4.3.6 ne s'applique pas. Ainsi, les graphes construits en utilisant la relation d'adjacence $\langle i, j \rangle$ vers $\langle j, i \rangle$ ne sont pas (en général) isomorphes au graphe $H(p, q, d)$ (ou $H(p, q, d)[G]$). Toutefois, ces graphes admettent une implantation utilisant l'architecture $OTIS$, agrémentée d'un système optique permettant d'opérer une rotation du vecteur (ou de la matrice) de faisceau optiques, avant que ceux-ci n'arrivent aux récepteurs. Cette technique est la même que celle que nous avons utilisé pour implanter $RPK(d, n)$ dans la section 4.2.4.

4.3.3 OTIS-G

Nous donnons ici la définition des $OTIS - G$ proposée dans [DAAar] et qui englobe celle des $OTIS - Mesh$. Ensuite, nous donnerons la transformation permettant de relier simplement cette définition à $(H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[G]$.

Définition 4.3.4 ([DAAar]) *Étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$ à n^2 sommets, nous définissons le graphe $OTIS - G$ à n^4 sommets, par :*

- $V(OTIS - G) = \{ \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \mid g_x, g_y, p_x, p_y \in Z_n \}$;
- $A(OTIS - G) = \{ \langle \langle g, p^1 \rangle, \langle g, p^2 \rangle \rangle \mid g, p^1, p^2 \in Z_n \times Z_n, (p^1, p^2) \in A(G) \}$
 $\cup \{ \langle \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle \langle p_x, p_y \rangle, \langle g_x, g_y \rangle \rangle \rangle \mid p_x, p_y, g_x, g_y \in Z_n \}$

Pour la définition du graphe $(H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[G]$, nous plaçons les sommets du graphe G sur une grille $n \times n$.

Définition 4.3.5 *Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté $G = (V, A)$ à n^2 sommets, dont les sommets sont disposés sur une grille $n \times n$. Le graphe $(H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[G]$ à n^4 sommets, est le graphe défini par :*

- $V((H \otimes H)[G]) = \{ \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \mid \langle g_x, g_y \rangle \in V(H \otimes H); \langle \overline{p_x}, \overline{p_y} \rangle \in V(G) \}$
 $= \{ \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle \mid g_x, g_y, p_x, p_y \in Z_n \}$
- $A((H \otimes H)[G]) = \{ \langle \langle g, p^1 \rangle, \langle g, p^2 \rangle \rangle \mid g, p^1, p^2 \in Z_n \times Z_n, (\overline{p^1}, \overline{p^2}) \in A(G) \}$
 $\cup \{ \langle \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle, \langle \langle p_x, p_y \rangle, \langle g_x, g_y \rangle \rangle \rangle \mid p_x, p_y, g_x, g_y \in Z_n \}$.

Dans cette définition, nous avons opéré une symétrie centrale du placement des sommets de G sur la grille. Ainsi, le sommet $\langle p_x, p_y \rangle$ est disposé à la place $\langle \overline{p_x}, \overline{p_y} \rangle$ sur la grille.

Proposition 4.3.6 *Étant donné un graphe G d'ordre n , nous avons $OTIS - G \equiv (H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[G]$.*

Preuve : Soit F la fonction bijective définie par :

$$F : \begin{array}{ccc} V(OTIS - G) & \longrightarrow & V((H(n, n, n) \otimes H(n, n, n))[G]) \\ \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle & \longmapsto & \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle \overline{p_x}, \overline{p_y} \rangle \rangle \end{array}$$

Soit $u = \langle \langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle \rangle$ un sommet de $OTIS - G$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 & F^{-1}\Gamma_{(H(n,n,n)\otimes H(n,n,n))[G]}^+ (F(\langle\langle g_x, g_y \rangle, \langle p_x, p_y \rangle\rangle)) \\
 &= F^{-1}\Gamma_{(H(n,n,n)\otimes H(n,n,n))[G]}^+ (\langle\langle g_x, g_y \rangle, \langle \overline{p_x}, \overline{p_y} \rangle\rangle) \\
 &= F^{-1}(\{\langle\langle g_x, g_y \rangle, \langle q_x, q_y \rangle\rangle \mid \langle \overline{q_x}, \overline{q_y} \rangle \in \Gamma_G^+(\langle p_x, p_y \rangle)\} \cup \{\langle\langle \overline{p_x}, \overline{p_y} \rangle, \langle \overline{g_x}, \overline{g_y} \rangle\rangle\}) \\
 &= F^{-1}(\{\langle\langle g_x, g_y \rangle, \langle q_x, q_y \rangle\rangle \mid \langle \overline{q_x}, \overline{q_y} \rangle \in \Gamma_G^+(\langle p_x, p_y \rangle)\} \cup \{\langle\langle p_x, p_y \rangle, \langle \overline{g_x}, \overline{g_y} \rangle\rangle\}) \\
 &= \{\langle\langle g_x, g_y \rangle, \langle \overline{q_x}, \overline{q_y} \rangle\rangle \mid \langle \overline{q_x}, \overline{q_y} \rangle \in \Gamma_G^+(\langle p_x, p_y \rangle)\} \cup \{\langle\langle p_x, p_y \rangle, \langle g_x, g_y \rangle\rangle\} \\
 &= \Gamma_{OTIS-G}^+(u)
 \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la fonction F , nous vérifions bien l'isomorphisme. □

La figure 4.12 illustre, au travers d'un $OTIS-Mesh$, le besoin d'utilisation d'une rotation des sommets dans chaque groupes, pour les interconnexions optiques.

4.4 Propriétés hamiltoniennes

Dans cette section, nous montrons que $OTIS-Mesh$ est un graphe hamiltonien. Ce résultat était déjà connu [WS98a]. Toutefois notre démonstration utilise les graphes composés.

Nous commençons par présenter des résultats généraux sur la présence de circuits hamiltoniens dans des graphes composés, puis nous appliquons ces résultats à $OTIS-Mesh$, lors que n est pair. Enfin, nous montrons comment construire un circuit de longueur $n^4 - n^2 + 1$ dans $OTIS-Mesh$ lorsque n est impair.

Théorème 4.4.1 *Soit G , un graphe simple non orienté à n sommets de degré d , contenant le cycle hamiltonien $C_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$. Soit H , un graphe non orienté à d sommets tel qu'il existe une chaîne hamiltonienne entre toute paire de ses sommets.*

Soit $G[H]$, le graphe composé tel que chaque sommet d'une copie du graphe H reçoit l'extrémité d'une seule arête incidente au sommet correspondant de G . Alors, le graphe $G[H]$ contient un cycle hamiltonien.

Preuve : Il suffit de remplacer chaque sommet u du cycle C_n par la chaîne hamiltonienne du sommet $\langle u, x \rangle$ au sommet $\langle u, y \rangle$, où $\langle u, x \rangle$ est le sommet incident à l'arête reliant le groupe $u-1$ au groupe u (arête $\{u-1, u\}$ de $E(G)$) et $\langle u, y \rangle$ est le sommet incident à l'arête reliant le groupe u au groupe $u+1$ (arête $\{u, u+1\}$ de $E(G)$). □

Lemme 4.4.2 *Soit G , un graphe simple non orienté à n sommets de degré d , contenant le cycle hamiltonien $C_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$. Soit H , un graphe biparti non orienté à d sommets tel que pour tout sommet d'une partie, il existe une chaîne hamiltonienne vers tout sommet choisi dans l'autre partie.*

Soit $G[H]$, le graphe composé tel que chaque sommet d'un copie du graphe H reçoit l'extrémité d'une seule arête incidente au sommet correspondant de G .

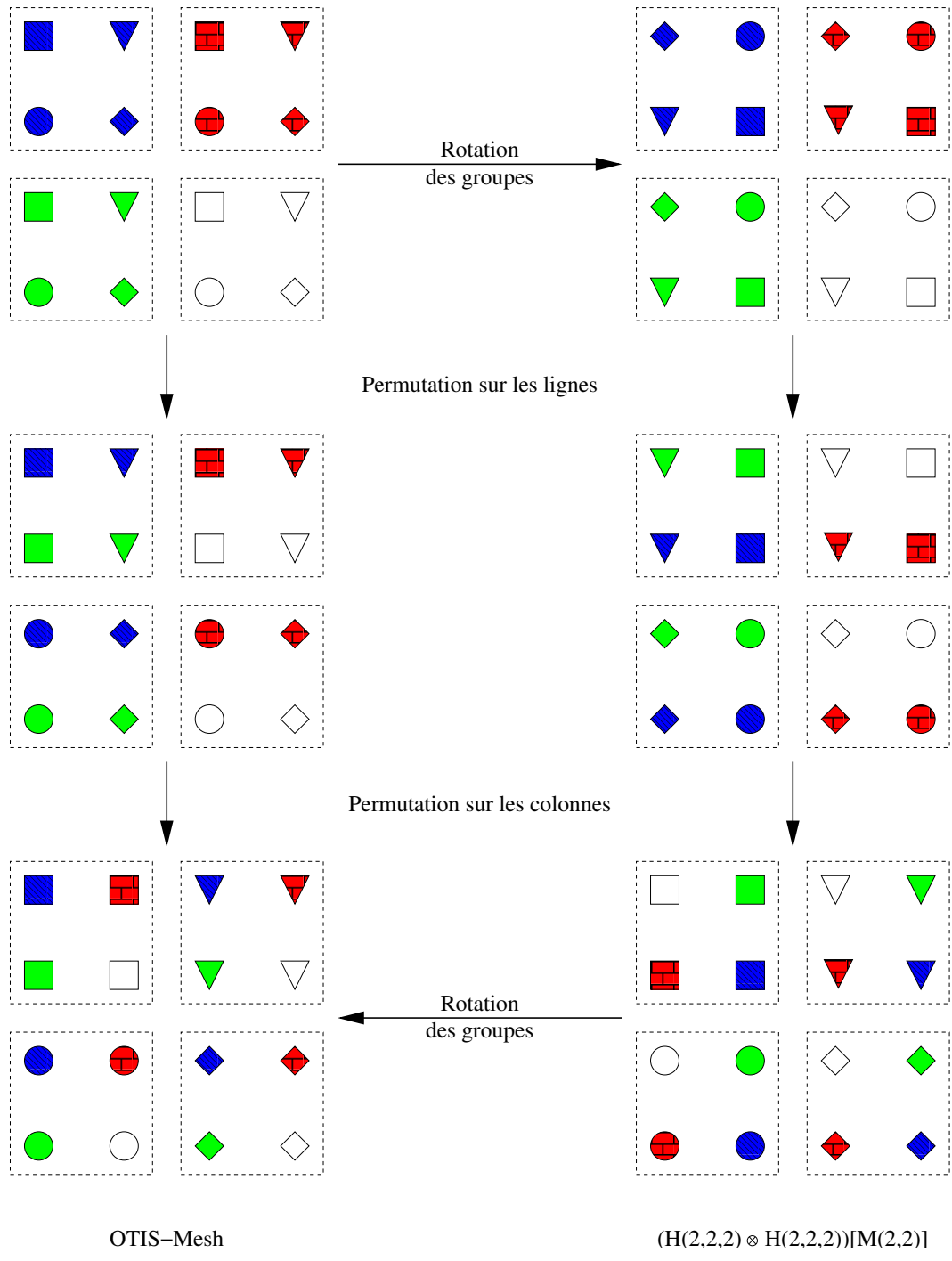


FIG. 4.12 – Permutations effectuées sur un OTIS-Mesh à 4 groupes de 4 sommets.

Alors, le graphe $G[H]$ contient un cycle hamiltonien si pour tout $u \in V(G)$, les arêtes $\{\langle u-1, x \rangle, \langle u, y \rangle\}$ et $\{\langle u, z \rangle, \langle u+1, t \rangle\}$ vérifient que y et z sont pris dans 2 parties différentes du graphe H .

Preuve : Supposons que y et z soient pris dans la même partie de H . Par hypothèse, toute chaîne hamiltonienne ayant son origine dans la partie contenant y , a son extrémité dans la partie ne contenant pas y . Donc, il n'existe pas de chaîne hamiltonienne de y à z dans H .

Lorsque y et z sont pris dans des parties distinctes de H , alors, en remplaçant chaque sommet de C_n par la chaîne hamiltonienne correspondante, nous obtenons bien un cycle hamiltonien dans $G[H]$. □

Corollaire 4.4.3 *Si n est pair, alors $OTIS - Mesh$ contient un circuit hamiltonien de longueur n^4 .*

Preuve : Nous avons vu dans la section 4.3.2 que, $OTIS - Mesh \equiv K_{n^2}^+[M(n, n)]$. De plus, un $OTIS - Mesh$ est un graphe orienté symétrique. Dans cette preuve, nous allons travailler sur le graphe non orienté associé : $K_{n^2}[M(n, n)]$, en utilisant les relation d'adjacence d'un $OTIS - Mesh$.

Nous savons que le graphe K_{n^2} contient un cycle hamiltonien de longueur n^2 . De plus, dans la grille $M(n, n)$, avec n pair, en colorant en noir les sommets $\langle p_x, p_y \rangle$ tel que $p_x + p_y \pmod 2 \equiv 0$, et en blanc les autres, nous obtenons un graphe biparti tel qu'il existe un chemin hamiltonien de tout sommet noir vers tout sommet blanc, et inversement.

Maintenant, pour conclure cette preuve, il suffit de choisir un cycle hamiltonien de K_{n^2} permettant de remplir les conditions du lemme 4.4.2. Pour cela, colorions en noir les sommets de K_{n^2} tels que $g_x + g_y \pmod 2 \equiv 0$, et en blanc les autres, puis choisissons dans K_{n^2} le cycle hamiltonien $C_{n^2} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n^2-1}, u_0)$ tel que le sommet u_i est noir si $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pmod 2 \equiv 0$, et blanc sinon. Le cycle C_{n^2} est une alternance de 2 sommets noirs suivi de 2 sommets blancs. Comme n est pair, n^2 est divisible par 4, un tel cycle existe et les sommets u_{n^2-2} et u_{n^2-1} sont blancs.

Notons $\mu_H(\langle u_i, x \rangle, \langle u_i, y \rangle)$ la chaîne de $K_{n^2}[M(n, n)]$ telle que la chaîne $\mu(x, y)$ est une chaîne hamiltonienne de H , puis remplaçons dans le cycle C_{n^2} , le sommet u_i par la chaîne $\mu_H(\langle u_i, u_{i-1} \rangle, \langle u_i, u_{i+1} \rangle)$, et l'arête $\{u_i, u_{i+1}\}$ par l'arête $\{\langle u_i, u_{i+1} \rangle, \langle u_{i+1}, u_i \rangle\}$.

Il reste à vérifier que ce cycle est valide. Pour cela, il suffit de vérifier que dans la chaîne $\mu_H(\langle u_i, u_{i-1} \rangle, \langle u_i, u_{i+1} \rangle)$, les sommets $\langle u_i, u_{i-1} \rangle$ et $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ sont bien de couleurs différentes.

Supposons que la grille u_{i-1} soit blanche et que la grille u_i soit noire. Alors, nous avons :

- La grille u_{i-1} est blanche, donc le sommet $\langle u_i, u_{i-1} \rangle$ est blanc. De même, la grille u_{i+1} est noire, donc le sommet $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$ est noir, et la chaîne $\mu_H(\langle u_i, u_{i-1} \rangle, \langle u_i, u_{i+1} \rangle)$ est valide ;
- Le sommet $\langle u_{i+1}, u_i \rangle$ est noir, et la grille u_{i+2} est blanche, donc le sommet $\langle u_{i+1}, u_{i+2} \rangle$ est blanc, et la chaîne $\mu_H(\langle u_{i+1}, u_i \rangle, \langle u_{i+1}, u_{i+2} \rangle)$ est valide ;
- Le sommet $\langle u_{i+2}, u_{i+1} \rangle$ est noir et la grille u_{i+3} est blanche, donc le sommet $\langle u_{i+2}, u_{i+3} \rangle$ est blanc et la chaîne $\mu_H(\langle u_{i+2}, u_{i+1} \rangle, \langle u_{i+2}, u_{i+3} \rangle)$ est valide ;
- Le sommet $\langle u_{i+3}, u_{i+2} \rangle$ est blanc et la grille u_{i+4} est noire, donc le sommet $\langle u_{i+3}, u_{i+4} \rangle$ est noir et la chaîne $\mu_H(\langle u_{i+3}, u_{i+2} \rangle, \langle u_{i+3}, u_{i+4} \rangle)$ est valide ;

Finalement, le cycle C_{n^4} de $K_{n^2}[M(n, n)]$ ainsi construit est hamiltonien. Comme $OTIS - Mesh$ est orienté symétrique, il suffit d'orienter ce cycle pour obtenir un circuit hamiltonien. \square

Bien d'autres démonstrations étaient envisageables pour le le corollaire 4.4.3. Toutefois, celle que nous avons choisie nous donne un algorithme simple pour construire un circuit hamiltonien dans un $OTIS - Mesh$ avec n pair. En effet, il suffit de choisir une permutation des sommets de $K_{n^2}^+$ qui soit une alternance de deux sommets noirs suivis de deux sommets blancs, pour obtenir ce circuit. La figure 4.13 donne un exemple de circuit hamiltonien construit sur $OTIS - Mesh$.

Regardons maintenant le cas où n est impair. Nous savons qu'une grille de côté impair n'est pas hamiltonienne. De la même façon, $OTIS - Mesh$ n'est pas hamiltonien lorsque n est impair.

Corollaire 4.4.4 *Si n est impair, $OTIS - Mesh$ contient un circuit de longueur $n^4 - n^2 + 1$.*

Preuve : Nous utilisons la même coloration des sommets de la grille et des grilles que dans la preuve du 4.4.3.

Comme n est impair, il existe un chemin hamiltonien entre toute paire de sommets noirs de la grille. De plus, si le sommet $\langle u, x \rangle$ est noir et que la grille u est noire, alors le sommet $\langle x, u \rangle$ est noir, et la grille x est noire. Ainsi, si $C_{G,N}$ est un circuit contenant uniquement les $\frac{n^2+1}{2}$ sommets noirs de $K_{n^2}^+$, en remplaçant chaque sommet de $C_{G,N}$ par le chemin hamiltonien dans une grille correspondante, nous construisons le cycle C_N de longueur $n^2 \frac{n^2+1}{2}$.

De la même façon, si le sommet $\langle u, x \rangle$ est blanc et que la grille u est blanche, alors le sommet $\langle x, u \rangle$ est blanc, et la grille x est blanche. De plus, si n est impair, il existe un chemin de longueur $n^2 - 2$ entre toute paire de sommets blancs de la grille (obtenu en supprimant les deux extrémités, noires, d'un chemin hamiltonien pris entre deux sommets noirs de la grille). Ainsi, si $C_{G,B}$ est un circuit contenant uniquement les $\frac{n^2-1}{2}$ sommets blancs de $K_{n^2}^+$, en remplaçant chaque sommet de $C_{G,B}$ par le chemin de longueur $n^2 - 2$ dans une grille correspondante, nous construisons le cycle C_B de longueur $(n^2 - 2) \frac{n^2-1}{2}$. De plus, nous remarquons que les cycles C_B et C_N sont disjoints.

Soit u_i et u_{i+1} , deux grilles consécutives de $C_{G,N}$. Remplaçons le chemin $\mu(u_{i-1}, u_{i+1})$ de longueur $n^2 - 2$ de u_i par le chemin $\mu(u_{i-1}, x)$ de longueur $n^2 - 1$ terminant sur une case noire, et remplaçons le chemin $\mu(u_i, u_{i+2})$ de longueur $n^2 - 2$ de u_{i+1} par le chemin $\mu(y, u_{i+2})$ de longueur $n^2 - 1$ commençant sur une cas noire. Soient $\langle u_i, x \rangle$ et $\langle u_{i+1}, y \rangle$ ces deux cases noires. Choisissons le cycle $C_{G,N}$ de $K_{n^2}^+$ tel que les grilles y et x soient consécutives, et remplaçant dans la grille x le chemin hamiltonien $\mu(y, z)$ par le chemin $\mu(u_i, z)$ de longueur $n^2 - 1$, commençant sur une case blanche, et remplaçant dans la grille y le chemin hamiltonien $\mu(t, u_{i+1})$, terminant sur une case blanche.

Ainsi, nous avons construit un circuit de longueur $n^2 \frac{n^2+1}{2} - 2 + (n^2 - 2) \frac{n^2-1}{2} + 2 = n^4 - n^2 + 1$. \square



FIG. 4.13 – Un circuit hamiltonien dans $OTIS - Mesh \equiv (H(4, 4, 4) \otimes H(4, 4, 4)) [M(4, 4)]$.

Chapitre 5

Étude d'une famille de graphes à alphabet

Dans ce chapitre, nous étudions la famille de graphes à alphabet $A(f, \pi, j)$, qui généralise le graphe de de Bruijn. Cette famille de graphes nous permet de répondre à un problème soulevé dans la section 4.2.5 page 56. En effet, nous avons observé que plusieurs graphes de la famille $H(p, q, d)$ pouvaient être isomorphes à un même graphe de de Bruijn. La famille de graphes $A(f, \pi, j)$ nous donne les informations nécessaires à la compréhension de cette observation.

La famille de graphes à alphabet $A(f, \pi, j)$ est définie de la façon suivante :

Définition 5.0.5 Soient $d, D \in \mathbb{N}$. Étant donné une permutation f sur Z_D , une permutation π sur Z_d et un indice $j \in Z_D$, le graphe orienté $G = A(f, \pi, j)$, d'ensemble de sommet $V(A(f, \pi, j)) = Z_d^D$, est tel que :

$$\Gamma_{A(f, \pi, j)}^+(x = x_{D-1} \dots x_1 x_0) = \{y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_1 y_0 \mid y_i = \pi(x_{f(i)}), \beta \in Z_d\}$$

Le graphe $A(f, \pi, j)$ a un degré d et nous dirons qu'il est de dimension D .

Nous montrerons dans la section 5.1 que cette famille contient au moins

- $d!D!$ graphes isomorphes au graphe de de Bruijn $B(d, D)$;
- $(d-1)!D!$ graphes isomorphes au réseau papillon cyclique $\overrightarrow{WBF}(d, D-1)$;

Ensuite, nous montrerons dans la section 5.2 que si nous ajoutons à une telle famille de graphes les contraintes liées aux graphes de Kautz, nous n'obtenons que 2 définitions du graphe de Kautz. Enfin, nous utiliserons, dans la section 5.3, la famille de graphe $A(f, \pi, j)$ pour caractériser l'ensemble des graphes $H(p, q, d)$ isomorphes à $B(d, D)$. Ceci nous permettra de donner une implantation optimale, au sens de la minimisation du nombre de lentilles, des graphes de de Bruijn avec OTIS.

5.1 Graphes de de Bruijn comme graphes à alphabet

Le graphe de de Bruijn est généralement défini sur un alphabet. Nous avons rappelé sa définition dans la section 2.1.1 page 8. Nous allons maintenant montrer qu'il existe de nombreuses façons de le définir sur un alphabet.

5.1.1 Permutation sur l'alphabet, graphes $B_\pi(d, D)$

Nous définissons ici le graphe $B_\pi(d, D)$, dont la définition est proche de celle du graphe de de Bruijn $B(d, D)$, et nous montrons que ces deux graphes sont isomorphes. Nous en déduisons une démonstration simple de l'appartenance du graphe de Bruijn à la famille des graphes de Imase et Itoh.

Définition 5.1.1 *Soit π une fonction de permutation sur Z_d . Le graphe $B_\pi(d, D)$, de degré d et de diamètre D , est le graphe orienté tel que :*

- $V = \{x = x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 \mid x_i \in Z_d\}$;
- $\Gamma_{B_\pi(d, D)}^+(x) = \{y = \pi(x_{D-2}) \dots \pi(x_1)\pi(x_0)\pi(\beta) \mid \beta \in Z_d\}$.

Proposition 5.1.2 *Les graphes $B(d, D)$ et $B_\pi(d, D)$ sont isomorphes.*

Preuve : Il suffit de définir un isomorphisme W de $B_\pi(d, D)$ vers $B(d, D)$. Nous pouvons choisir pour W la bijection suivante :

$$W : \begin{array}{ccc} Z_d^D & \longrightarrow & Z_d^D \\ x = x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 & \longmapsto & \pi^0(x_{D-1})\pi^1(x_{D-2}) \dots \pi^{D-2}(x_1)\pi^{D-1}(x_0) \end{array}$$

Soit x , un sommet de $B_\pi(d, D)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} W^{-1}\Gamma_{B(d, D)}^+(W(x_{D-1}x_{D-2} \dots x_0)) &= W^{-1}\Gamma_{B_\pi(d, D)}^+(\pi^0(x_{D-1})\pi^1(x_{D-2}) \dots \pi^{D-1}(x_0)) \\ &= W^{-1}(\{\pi^1(x_{D-2}) \dots \pi^{D-2}(x_1)\pi^{D-1}(x_0)\beta \mid \beta \in Z_d\}) \\ &= \{\pi(x_{D-2}) \dots \pi(x_0)\pi(\beta) \mid \beta \in Z_d\} \\ &= \{\pi(x_{D-2}) \dots \pi(x_0)\alpha \mid \alpha \in Z_d\} . \end{aligned}$$

La dernière ligne correspondant à la relation d'adjacence du graphe $B_\pi(d, D)$, nous avons bien défini l'isomorphisme requis. □

Plus généralement, le graphe orienté de degré d , diamètre D , d'ordre $n = d^D$ et tel que $\Gamma^+(x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0) = \{\pi_0(x_{D-2}) \dots \pi_{D-2}(x_0)\pi_{D-1}(\beta) \mid \beta \in Z_d\}$, où $\pi_i, i \in Z_D$, est une permutation de Z_d , est isomorphe à $B(d, D)$.

Proposition 5.1.3 *Les graphes $B(d, D)$ et $II(d, d^D)$ sont isomorphes.*

Preuve : Soit \mathcal{C} la permutation de Z_d qui à $i \in Z_d$ associe $\mathcal{C}(i) = \bar{i} = d - i - 1$, le complément de i en base d . D'après la proposition 5.1.2, les graphes $B_{\mathcal{C}}(d, D)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes.

Soit t , la bijection de Z_d^D dans $Z_n, n = d^D$, qui associe à chaque mot de Z_d^D sa valeur en base n .

$$t : \begin{array}{ccc} Z_d^D & \longrightarrow & Z_n \\ x = x_{D-1} \dots x_1x_0 & \longmapsto & \sum_{i=0}^{D-1} x_i d^i \end{array}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
t\left(\Gamma_{B_C(d,D)}^+(x_{D-1}\dots x_1x_0)\right) &= t\left(\{\bar{x}_{D-2}\dots\bar{x}_1\bar{x}_0\bar{\beta} \mid 0 \leq \beta < d\}\right) \\
&= \left\{\sum_{i=0}^{D-2} d^{i+1}\bar{x}_i + \bar{\beta} \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=0}^{D-2} d^{i+1}(d - x_i - 1) + d - \beta - 1 \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
&= \left\{d^D - \sum_{i=1}^{D-1} d^i x_{i-1} - \beta - 1 \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
&= \left\{-\sum_{i=1}^{D-1} d^i x_{i-1} - \beta - 1 \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
\Gamma_{II(d,d^D)}^+(t(x_{D-1}\dots x_1x_0)) &= \Gamma_{II(d,d^D)}^+\left(\sum_{i=0}^{D-1} x_i d^i\right) \\
&= \left\{-d \sum_{i=0}^{D-1} x_i d^i - \alpha - 1 \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
&= \left\{-d^D x_{D-1} - \sum_{i=1}^{D-1} d^i x_{i-1} - \alpha - 1 \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
&= \left\{-\sum_{i=1}^{D-1} d^i x_{i-1} - \alpha - 1 \mid 0 \leq \beta < d\right\} \\
&= t\left(\Gamma_{B_C(d,D)}^+(x_{D-1}\dots x_1x_0)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, les graphes $B_C(d, D)$, $B(d, D)$ et $II(d, d^D)$ sont isomorphes. \square

Corollaire 5.1.4 *Les graphes de de Bruijn, $B(d, D)$, de Reddy Pradhan et Kuhl, $RPK(d, d^D)$ et de Imase et Itoh, $II(d, d^D)$, sont isomorphes.*

5.1.2 Permutation sur les indices, graphes $A(f, \pi, j)$

Nous étudions maintenant une famille de graphes plus générale que $B_\pi(d, D)$, dans laquelle le décalage à gauche est remplacé par une permutation f de Z_D .

Définition 5.1.5 *Nous associons à chaque permutation f de Z_D l'application linéaire \vec{f} de Z_d^D , définie sur la base vectorielle par $\vec{f}(e_i) = e_{f(i)}$. Cette application linéaire est associée à une matrice de permutation. Remarquons que $\vec{f}g = \vec{f}\vec{g}$.*

Définition 5.1.6 *Toute permutation π de Z_d s'étend naturellement à Z_d^D (par abus de notation, nous noterons également π cette extension) en posant :*

$$\begin{aligned}
\pi &: Z_d^D &\longrightarrow & Z_d^D \\
x = x_{D-1}x_{D-2}\dots x_1x_0 &\longmapsto & \pi(x_{D-1})\pi(x_{D-2})\dots\pi(x_1)\pi(x_0)
\end{aligned}$$

Nous donnons maintenant une seconde définition du graphe $A(f, \pi, j)$, utilisant la permutation π de Z_d^D , qui nous permettra d'utiliser des notations algébriques.

Définition 5.1.7 *Soient $d, D \in \mathbb{N}$. Étant donné une permutation f sur Z_D , une permutation π sur Z_d et un indice $j \in Z_D$, le graphe orienté $G = A(f, \pi, j)$ est tel que :*

$$- V(A(f, \pi, j)) = Z_d^D ;$$

$$- \Gamma_{A(f,\pi,j)}^+(x) = \pi(f(x)) + Z_d.e_j .$$

Le graphe $A(f, \pi, j)$ a un degré d et nous dirons qu'il est de dimension D .

Remarque 5.1.8 Les sommets du graphe $B(d, D)$ sont les éléments de Z_d^D . Nous pouvons alors associer $x_{D-1}x_{D-2} \cdots x_1x_0$ à $\sum_{i=0}^{D-1} x_i.e_i$.

Soient σ , la permutation de Z_D définie par $\sigma : i \mapsto i + 1$ et \mathcal{I}_d l'identité de Z_d . Alors, le graphe $B(d, D)$ est exactement le graphe $A(\sigma, \mathcal{I}_d, 0)$. En effet, pour $x = x_{D-1}x_{D-2} \cdots x_1x_0$, $\Gamma_{A(\sigma, \mathcal{I}_d, 0)}^+(X) = \{x_{D-2} \cdots x_1x_0(x_{D-1} + \gamma) \mid \gamma \in Z_d\} = \{x_{D-2} \cdots x_1x_0\beta \mid \beta \in Z_d\} = \Gamma_{B(d,D)}^+(x)$.

De même, $B_\pi(d, D)$ est exactement $A(\sigma, \pi, 0)$.

Théorème 5.1.9 Le graphe $A(f, \pi, j)$ de degré d et de dimension D est isomorphe au graphe $B(d, D)$ si et seulement si f est une permutation cyclique de Z_D .

Pour plus de clarté, la preuve de ce théorème a été découpée en plusieurs lemmes. Nous commençons par donner l'énoncé de ces lemmes, puis nous donnerons la preuve du théorème 5.1.9, et enfin nous donnerons la preuve des lemmes.

Lemme 5.1.10 Si la permutation f de Z_D est cyclique, alors les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes.

Lemme 5.1.11 Soit $\text{orb}(j)$ l'ensemble des indices qui partagent l'orbite de j . Si la permutation f de Z_D n'est pas cyclique et que $|\text{orb}(j)| \leq D - 2$, alors le graphe $A(f, \pi, j)$ n'est pas connexe.

Lemme 5.1.12 Si $|\text{orb}(j)| = D - 1$ et la permutation π de Z_d est cyclique, alors le graphe $A(f, \pi, j)$ est connexe.

Lemme 5.1.13 Si $|\text{orb}(j)| = D - 1$ et la permutation π de Z_d est cyclique, alors les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ ne sont pas isomorphes.

Preuve du théorème 5.1.9 :

1. Lorsque la permutation f est cyclique, les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes (lemme 5.1.10);
2. Lorsque $|\text{orb}(j)| \leq D - 2$, le graphe $A(f, \pi, j)$ n'est pas connexe et donc n'est pas isomorphe au graphe $B(d, D)$ (lemme 5.1.11);
3. Lorsque $|\text{orb}(j)| = D - 1$, le graphe $A(f, \pi, j)$ est connexe si et seulement si la permutation π est cyclique (lemme 5.1.12). Il n'est cependant pas isomorphe au graphe $B(d, D)$ (lemme 5.1.13).

Ainsi, $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes si et seulement si la permutation f est cyclique.

□

Lemme 5.1.10 Si la permutation f de Z_D est cyclique, alors les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes.

Preuve : Supposons que f est une permutation cyclique sur Z_D et montrons que les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ sont alors isomorphes.

La permutation f étant cyclique, elle induit une orbite unique sur Z_D . Associons à f l'unique permutation g de Z_D telle que $\forall i \in Z_D, g(i) = f^i(j)$. De cette définition, nous obtenons :

$$g^{-1}fg(i) = g^{-1}ff^i(j) = g^{-1}f^{i+1}(j) = g^{-1}g(i+1) = i+1 \quad (5.1)$$

$$g^{-1}(j) = 0 \quad (\text{d'où } \overrightarrow{g^{-1}}(e_j) = e_0) \quad (5.2)$$

Considérons l'isomorphisme de graphe induit par \overrightarrow{g} . Pour $x \in Z_d^D$, nous calculons $\overrightarrow{g^{-1}}\Gamma_G^+(\overrightarrow{g}(x))$. Par définition de G , nous avons $\Gamma_G^+(x) = \pi(\overrightarrow{f}(x)) + Z_d \cdot e_j$, et par linéarité $\overrightarrow{g^{-1}}\Gamma_G^+(\overrightarrow{g}(x)) = \pi\left(\overrightarrow{g^{-1}}\left(\overrightarrow{f}\overrightarrow{g}(x)\right)\right) + Z_d \cdot \overrightarrow{g^{-1}}(e_j)$. Mais, par (5.1), $\overrightarrow{g^{-1}}\overrightarrow{f}\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\sigma}$ et par (5.2), $\overrightarrow{g^{-1}}(e_j) = e_0$. Finalement, $\overrightarrow{g^{-1}}\Gamma_G^+(\overrightarrow{g}(x)) = \pi(\overrightarrow{\sigma}(x)) + Z_d \cdot e_0$, et cette relation d'adjacence est celle du graphe $B_\pi(d, D)$, lui-même isomorphe au graphe $B(d, D)$ (par la proposition 5.1.2). \square

Lemme 5.1.11 *Soit $orb(j)$ l'ensemble des indices qui partagent l'orbite de j . Si la permutation f de Z_D n'est pas cyclique et que $|orb(j)| \leq D - 2$, alors le graphe $A(f, \pi, j)$ n'est pas connexe.*

Preuve : Supposons maintenant que f n'est pas une permutation cyclique sur Z_D . Alors, f induit au moins 2 orbites sur Z_D . Soit $orb(j)$ l'ensemble des indices qui partagent l'orbite de j ; $orb(j) = \{i \in Z_D \mid \exists k < D, f^k(j) = i\}$. Notons $f_{orb(j)}$ la permutation de Z_D telle que $f_{orb(j)}$ soit cyclique sur $orb(j)$ et soit égale à l'identité sur $r(j) = Z_D \setminus orb(j)$. Notons de même $f_{r(j)}$ la permutation de Z_D telle que $f_{r(j)}$ soit une permutation de $r(j)$ et soit égale à l'identité sur $orb(j)$. La permutation f peut alors s'écrire $f = f_{orb(j)} \circ f_{r(j)}$.

Nous avons :

$$f^{|orb(j)|}(j) = (f_{orb(j)} \circ f_{r(j)})^{|orb(j)|}(j) = f_{orb(j)}^{|orb(j)|} \circ f_{r(j)}^{|orb(j)|}(j) = f_{orb(j)}^{|orb(j)|}(j) = j$$

Soit x un sommet de $A(f, \pi, j)$, $x = x_{D-1}x_{D-2} \cdots x_1x_0 = \sum_{i \in orb(j)} x_i \cdot e_i + \sum_{k \in r(j)} x_k \cdot e_k$, et soit $X = \left\{ \sum_{i \in orb(j)} Z_d \cdot e_i + \sum_{k \in r(j)} y \cdot e_k, y \in Z_d \right\} = \left\{ \sum_{i \in orb(j)} Z_d \cdot e_i + Z_d \cdot \sum_{k \in r(j)} e_k \right\}$. Nous remarquons que $|X| = d^{|orb(j)|}$ d'où $X \subsetneq Z_d^D$ lorsque $|orb(j)| \leq D - 2$.

Calculons le voisinage de l'ensemble de sommets X :

$$\begin{aligned} \Gamma_G^+(X) &= \pi(\overrightarrow{f}(X)) + Z_d \cdot e_j \\ &= \pi\left(\overrightarrow{f}\left(\sum_{i \in orb(j)} Z_d \cdot e_i + Z_d \cdot \sum_{k \in r(j)} e_k\right)\right) + Z_d \cdot e_j \\ &= \sum_{i \in orb(j)} \pi(Z_d) \cdot \overrightarrow{f_{orb(j)}}(e_i) + \pi(Z_d) \cdot \sum_{k \in r(j)} \overrightarrow{f_{r(j)}}(e_k) + Z_d \cdot e_j \\ &= \sum_{i \in orb(j)} \pi(Z_d) \cdot e_i + Z_d \cdot e_j + Z_d \cdot \sum_{k \in r(j)} e_k \\ &= \sum_{i \in orb(j)} Z_d \cdot e_i + Z_d \cdot \sum_{k \in r(j)} e_k \\ &= X \end{aligned}$$

Donc X et $Z_d^D \setminus X$ ne sont pas connectés, ce qui implique que le graphe $A(f, \pi, j)$ n'est pas connexe lorsque $|orb(j)| \leq D - 2$. □

Lemme 5.1.12 *Si $|orb(j)| = D - 1$ et la permutation π de Z_d est cyclique, alors le graphe $A(f, \pi, j)$ est connexe.*

Preuve : Posons $Y_l = \left\{ \sum_{i \in orb(j)} Z_d \cdot e_i + l \cdot e_k \mid k = Z_d \setminus orb(j) \right\}$, $l \in Z_d$.

Nous avons, $\bigcup_{1 \leq s \leq d} \Gamma_G^+(Y_l) = \bigcup_{1 \leq s \leq d} Y_{\pi^s(l)}$. Comme π n'est pas une permutation cyclique de Z_d , nous avons $\bigcup_{1 \leq s \leq d} \pi^s(l) \subsetneq Z_d$. Donc $\bigcup_{1 \leq s \leq d} Y_{\pi^s(l)} \subsetneq Z_d^D$, ce qui implique que le graphe $A(f, \pi, j)$ n'est pas connexe. □

Lemme 5.1.13 *Si $|orb(j)| = D - 1$ et la permutation π de Z_d est cyclique, alors les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ ne sont pas isomorphes.*

Preuve : Nous utilisons l'ensemble Y_l , $l \in Z_d$, défini dans la preuve du lemme 5.1.12.

Nous avons $\Gamma_G^+(Y_l) = Y_{\pi(l)}$. Comme π est cyclique, nous avons $l \neq \pi(l)$. Donc, $Y_l \cap Y_{\pi(l)} = \emptyset$. Or, le graphe de de Bruijn $B(d, D)$ contient des sommets avec boucle $(x \in \Gamma_{B(d,D)}^+(x))$. Donc les graphes $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ ne sont pas isomorphes. □

Corollaire 5.1.14 *La famille des graphes $A(f, \pi, j)$ conduit à $d!D!$ définitions équivalentes du graphe de de Bruijn.*

Preuve : Comme il existe $(D-1)!$ permutations cycliques sur Z_D , le théorème 5.1.9 conduit à $(D-1)!$ définitions équivalentes de $B(d, D)$, en agissant uniquement sur f . De plus, la proposition 5.1.2 conduit à $d!$ autres définitions de $B(d, D)$, en agissant uniquement sur π . Enfin, l'indice j peut prendre D valeurs distinctes. □

5.1.3 Complément d'étude

Nous complétons ici l'étude de la famille $A(f, \pi, j)$, dans les cas où la permutation f n'est pas cyclique.

Lemme 5.1.15 *Le graphe induit par l'orbite de j est isomorphe à $B(d, |orb(j)|)$.*

Preuve : De même que pour la démonstration du lemme 5.1.10, associons à $f_{orb(j)}$ l'unique permutation $g_{orb(j)}$ telle que $\forall a_i \in orb(j)$, $i \in Z_{|orb(j)|}$, $g_{orb(j)}(i) = f_{orb(j)}^i(j)$. De cette définition, nous obtenons :

$$g_{orb(j)}^{-1} f_{orb(j)} g_{orb(j)}(i) = i + 1 \tag{5.3}$$

$$g_{orb(j)}^{-1}(j) = 0 \quad (\text{d'où } \overrightarrow{g_{orb(j)}^{-1}}(e_j) = e_0) \tag{5.4}$$

Ensuite, en considérant l'isomorphisme de graphe induit par $\overrightarrow{g_{orb(j)}}$, nous calculons $\overrightarrow{g_{orb(j)}^{-1}} \Gamma_G^+(\overrightarrow{g_{orb(j)}}(x))$ pour $x \in Z_d^{|orb(j)|}$, et nous obtenons $\overrightarrow{g_{orb(j)}^{-1}} \Gamma_G^+(\overrightarrow{g_{orb(j)}}(x)) = \pi(\overrightarrow{\sigma}(x)) +$

$Z_d.e_0$, et cette relation d'adjacence est celle du graphe $B_\pi(d, |orb(j)|)$, lui même isomorphe au graphe $B(d, |orb(j)|)$ (par la proposition 5.1.2). □

Lemme 5.1.16 *Si $r(j)$ dénote l'ensemble des indices qui ne sont pas dans l'orbite de j , $r(j) = Z_D \setminus orb(j)$, alors le graphe induit par $r(j)$ est un ensemble de cycles disjoints.*

Preuve : Associons à $f_{r(j)}$ l'unique permutation $g_{r(j)}$ telle que $\forall a_i \in r(j), i \in Z_{|r(j)|}, g_{r(j)}(a_i) = i$ (a_i est un indice).

Soit $G_{r(j)}$, le graphe induit par la permutation $f_{r(j)}$ et tel que :

- $V(G_{r(j)}) = Z_d^{|r(j)|}$;
- $\Gamma_{G_{r(j)}}^+(x) = \pi \left(\overrightarrow{g_{r(j)} f_{r(j)}} \overrightarrow{g_{r(j)}^{-1}}(x) \right)$.

Remarquons que $|\Gamma_{G_{r(j)}}^+(x)| = 1$. Ceci suggère que $G_{r(j)}$ est une union de cycles. Or, les permutations $f_{r(j)}$ et π ont chacune au moins une orbite, et chaque orbite décrit un cycle. De plus, d'après la proposition A.3.7, la convolution de 2 cycles est un ensemble de cycles. Donc, la convolution de 2 ensemble de cycles est un ensemble de cycles. Dans $\Gamma_{G_{r(j)}}^+(x)$, l'application successive de $f_{r(j)}$ et de π traduit la convolution de ces applications. Si $\mathcal{O}_{f_{r(j)}}$ est l'ensemble des orbites de $f_{r(j)}$ et \mathcal{O}_π l'ensemble des orbites de π , le graphe $G_{r(j)}$ contient $\sum_{o \in \mathcal{O}_{f_{r(j)}}} \sum_{o' \in \mathcal{O}_\pi} \text{pgcd}(o, o')$ cycles. □

Lemme 5.1.17 *Chaque composante connexe de $A(f, \pi, j)$ est la convolution d'un cycle par un de Bruijn isomorphe à $B(d, |orb(j)|)$.*

Preuve : D'après le lemme 5.1.15, le graphe induit par l'orbite de j est isomorphe à $B(d, |orb(j)|)$, et d'après le lemme 5.1.16, le graphe induit par $r(j)$ est un ensemble de cycles disjoints. De plus, tout sommet $x = x_{D-1}x_{D-2} \cdots x_1x_0$ peut s'écrire $x = \sum_{i \in orb(j)} x_i.e_i + \sum_{k \in r(j)} x_k.e_k$. Donc, il existe un arc entre deux sommets x et $y = \sum_{i \in orb(j)} y_i.e_i + \sum_{k \in r(j)} y_k.e_k$ si et seulement si $\sum_{i \in orb(j)} y_i.e_i = \sum_{i \in orb(j)} \pi(x_i). \overrightarrow{f_{orb(j)}}(e_i) + \beta.e_j$, pour un certain $\beta \in Z_d$, et $\sum_{k \in r(j)} y_k.e_k = \sum_{k \in r(j)} \pi(x_k). \overrightarrow{f_{r(j)}}(e_k)$. Ceci caractérise bien les interconnexions de la convolution de deux graphes, un de Bruijn et un ensemble de cycles. □

Remarque 5.1.18 *Si la permutation $f_{r(j)}$ est l'identité de $r(j)$ et la permutation π est l'identité de Z_d , $\pi = \mathcal{I}_d$, alors le graphe $A(f, \mathcal{I}_d, j)$ est l'union de $d^{|r(j)|}$ copies disjointes du graphe $B(d, |orb(j)|)$.*

Lemme 5.1.19 *Si $|orb(j)| = D - 1$, la permutation π de Z_d est cyclique, et $d = D - 1$, alors le graphe $A(f, \pi, j)$ est isomorphe à $\overrightarrow{WB\hat{F}}(d, D - 1)$.*

Preuve : Le lemme 5.1.12, nous dit que le graphe $A(f, \pi, j)$ est connexe et le lemme 5.1.15 nous apprend que le graphe induit par l'orbite de j est isomorphe à $B(d, D - 1)$. Comme π est cyclique, le graphe induit par $r(j)$ est un cycle de longueur d , C_d . Donc, d'après le lemme 5.1.17, le graphe $A(f, \pi, j)$ est isomorphe au graphe résultant de la convolution $B(d, D - 1) \otimes C_d$ qui n'est autre que $\overrightarrow{WB\hat{F}}(d, D - 1)$. □

Corollaire 5.1.20 *La famille des graphes $A(f, \pi, j)$ conduit à $(d-1)!D!$ définitions équivalentes du réseau papillon cyclique $\overrightarrow{WB\hat{F}}(d, D-1)$.*

Preuve : Ce résultat résulte d'un simple argument de comptage. En effet, il existe :

- $(d-1)!$ permutations cycliques π sur Z_d ;
- $D(D-2)!$ permutations f telles que l'une des orbites est de taille $D-1$. Il y a D choix possibles pour la lettre qui n'est pas dans l'orbite de taille $D-1$, et il existe $(D-2)!$ permutations cycliques sur $D-1$ lettres;
- $D-1$ valeurs possibles pour la lettre j .

Finalement, $(d-1)!D(D-2)!(D-1) = (d-1)!D!$.

□

Lemme 5.1.21 *Si $|orb(j)| = D-1$ et la permutation π de Z_d est cyclique, alors le graphe $A(f, \pi, j)$ est de diamètre $D+d-2$.*

Preuve : Le graphe induit par l'orbite de j est isomorphe à $B(d, D-1)$ (lemme 5.1.15), et comme la permutation π est cyclique, nous savons que $A(f, \pi, j)$ est isomorphe à $B(d, D-1) \otimes C_d$ (lemme 5.1.17).

Le graphe $H = B(d, D-1) \otimes C_d$ est le graphe à d étages tel que :

- $V(H) = \{\langle x, l \rangle \mid x \in Z_d^{D-1}, l \in Z_d\} = Z_d^D$;
- $\Gamma_H^+(\langle x, l \rangle) = \{\langle y, l+1 \rangle \mid y \in \Gamma_{B(d, D-1)}^+(x), l \in Z_d\}$.

Comme le graphe de de Bruijn a la propriété que $\Gamma_{B(d, D-1)}^{+D-2}(x) \subsetneq \Gamma_{B(d, D-1)}^{+D-1}(x) = Z_d^{D-1}$ et que $\Gamma_{B(d, D-1)}^+(Z_d^{D-1}) = Z_d^{D-1}$, nous avons

$$\Gamma_H^{+D-2}(\langle x, l \rangle) \subsetneq \Gamma_H^{+D-1}(\langle x, l \rangle) = \{\langle y, \pi^{D-1}(l) \rangle \mid y \in Z_d^{D-1}\}.$$

Alors, le diamètre du graphe H correspond à la distance $dist(\langle x, l \rangle, \langle y, l+D-2 \rangle)$, où $y \in Z_d^{D-1} \setminus \Gamma_{B(d, D-1)}^{+D-2}(x)$. Soit $\langle z, l+D-1 \rangle \in \Gamma_H^{+D-1}(\langle x, l \rangle)$. Comme H est un graphe à étages, il faut $d-1$ étapes pour aller du niveau l au niveau $l-1$ (un tour du réseau). Donc, $dist(\langle x, l \rangle, \langle y, l+D-2 \rangle) = dist(\langle x, l \rangle, \langle z, l+D-1 \rangle) + dist(\langle z, l+D-1 \rangle, \langle y, l+D-2 \rangle) = D-1 + d-1 = D+d-2$.

Aussi, le diamètre du graphe $A(f, \pi, j)$ est $D+d-2$ lorsque $|orb(j)| = D-1$ et que π est cyclique.

□

Remarque : La famille de graphes $B(d, D) \otimes C_k$ a été étudiée dans [BDDP98].

Corollaire 5.1.22 *Si $A(f, \pi, j) \equiv B(d, D)$, alors $A(f, \pi, j) \otimes \mu_{D+1} \equiv \overrightarrow{B\hat{F}}(d, D)$ et $A(f, \pi, j) \otimes \overrightarrow{C}_D \equiv \overrightarrow{WB\hat{F}}(d, D)$.*

5.1.4 Exemples

Afin d'illustrer le théorème 5.1.9, nous montrons les exemples suivants : tout d'abord le graphe $G_1 = A(f_1, Id, 2)$ qui est isomorphe à $B(d, 6)$, puis le graphe $G_2 = A(f_2, Id, 1)$ où la permutation f n'est pas cyclique sur Z_3 , l'orbite de 1 est de taille $D-2$ et donc le graphe n'est pas connexe, et enfin le graphe $G_3 = A(f_3, \sigma, 1)$ qui est isomorphe à $\overrightarrow{WB\hat{F}}(d, d)$.

$G_1 = A(f_1, Id, 2)$

Soit G_1 , le graphe orienté de degré d , dimension 6 et d'ensemble de sommets Z_d^6 , défini comme suit :

$$\Gamma_{G_1}^+(x_5x_4x_3x_2x_1x_0) = x_2x_1x_0\beta x_5x_4, \text{ avec } \beta \in Z_d.$$

G_1 est en fait le graphe $A(f_1, Id, 2)$, où f_1 est la permutation de Z_6 suivante :

$$f_1(i) = \begin{cases} i + 3 & \text{si } i < 3; \\ 2 & \text{si } i = 3; \\ i + 2 \pmod 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, \vec{f}_1 est définie sur Z_d^6 par :

$$\vec{f}_1(x_5x_4x_3x_2x_1x_0) = x_2x_1x_0x_3x_5x_4$$

La permutation g_1 associée à f_1 , utilisée dans la preuve du lemme 5.1.10 (c'est-à-dire $g_1(i) = f_1^i(2)$), est telle que $g(0) = 2$, $g(1) = 5$, $g(2) = 1$, $g(3) = 4$, $g(4) = 0$, $g(5) = 3$, $\vec{g}(x_5x_4x_3x_2x_1x_0) = x_1x_3x_5x_0x_2x_4$, et donc $\vec{g}^{-1}(x_5x_4x_3x_2x_1x_0) = x_3x_0x_4x_1x_5x_2$. La figure 5.1 donne une illustration de cette permutation.

$$\begin{array}{ccccc} g_1(0) = 2 & \xrightarrow{f_1} & g_1(1) = 5 & \xrightarrow{f_1} & g_1(2) = 1 \\ f_1 \uparrow & & & & \downarrow f_1 \\ g_1(5) = 3 & \xleftarrow{f_1} & g_1(4) = 0 & \xleftarrow{f_1} & g_1(3) = 4 \end{array}$$

FIG. 5.1 – Illustration de la permutation g_1 définie par $g_1(i) = f_1^i(2)$.

Alors,

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^{-1} \Gamma_{G_1}^+ \vec{g}_1(x_5x_4x_3x_2x_1x_0) &= \vec{g}_1^{-1} \Gamma_{G_1}^+(x_1x_3x_5x_0x_2x_4) \\ &= \vec{g}_1^{-1}(x_0x_2x_4\beta x_1x_3), \beta \in Z_d \\ &= x_4x_3x_2x_1x_0\beta \\ &= \Gamma_{B(d,6)}^+(x_5x_4x_3x_2x_1x_0). \end{aligned}$$

Finalement, G_1 est isomorphe à $B(d, 6)$.

$G_2 = A(f_2, Id, 1)$

Soit G_2 le graphe orienté de degré d , dimension 3 et d'ensemble de sommets Z_d^3 , défini comme suit :

$$\Gamma_{G_2}^+(x_2x_1x_0) = x_0\beta x_2, \text{ avec } \beta \in Z_d.$$

G_2 est en fait $A(f_2, Id, 1)$, où f_2 est la permutation de Z_3 telle que $f_2(i) = \bar{i} = 2 - i$. Alors, \vec{f}_2 est définie sur Z_d^3 par $\vec{f}_2(x_2x_1x_0) = x_0x_1x_2$.

Si nous définissons la fonction g associée à f_2 par $g_2(i) = f_2^i(1)$, nous obtenons $g_2(0) = g_2(1) = g_2(2) = 1$, et g_2 n'est pas une permutation cyclique de Z_3 . De plus, l'orbite induite

par $j = 1$ est $orb(j) = \{1\}$ avec $|orb(j)| = 1 \leq D - 2 = 1$. Ainsi, d'après le lemme 5.1.11, G_2 n'est pas connexe. Notons que le graphe G_2 peut également être défini par :

$$\Gamma_{G_2}^+([x_2x_0], [x_1]) = \{[x_0x_2], [\beta]\}$$

Ce graphe est composé de $\frac{d^2-d}{2}$ graphes de la forme $C_2 \otimes B(d, 1)$, plus d graphes de la forme $C_1 \otimes B(d, 1)$, comme illustré sur la figure 5.2 pour $d = 2$.

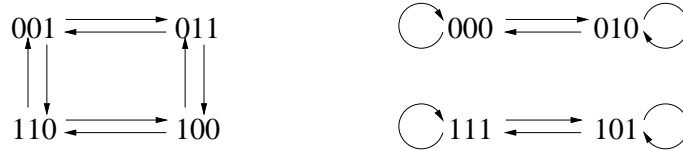


FIG. 5.2 – Le graphe G_2 de l'exemple 5.1.4, lorsque $d = 2$

$$G_3 = A(f_3, \sigma, 1)$$

Soit G_3 le graphe orienté de degré d , dimension $d + 1$ et d'ensemble de sommets Z_d^{d+1} , défini comme suit :

$$\Gamma_{G_3}^+(x_d \dots x_1 x_0) = \sigma(x_{d-1}) \dots \sigma(x_1) \beta \sigma(x_0), \text{ avec } \beta \in Z_d.$$

G_3 est en fait le graphe $A(f_3, \sigma, 1)$, où f_3 est la permutation de Z_d telle que $f_3^d(1) = f_3^{d-1}(2) = \dots = f_3^1(d) = 1$ et $f_3(0) = 0$, et où σ est la permutation cyclique de Z_d définie par $\sigma : i \mapsto i + 1$.

Comme l'orbite induite par $j = 1$ est $orb(1) = \{1, 2, \dots, d\}$, de taille d et que σ est cyclique, le lemme 5.1.17 nous indique que $A(f_3, \sigma, 1)$ est isomorphe au graphe $\overrightarrow{WB\hat{F}}(d, d)$. Nous pouvons alors définir G_3 par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{G_3}^+([x_d \dots x_2 x_1], [x_0]) &= \{[\sigma(x_{d-1}) \dots \sigma(x_1) \beta], [\sigma(x_0)]\} \\ &= \Gamma_{B_\sigma(d, d)}^+(x_d \dots x_2 x_1) \otimes \Gamma_{C_d}^+(x_0) \end{aligned}$$

Lorsque $d = 2$, le graphe $G_3 = A(f_3, \sigma, 1)$ est le graphe de degré 2, diamètre 3 et à 8 sommets, représenté sur la figure 5.3. Il est isomorphe à $\overrightarrow{WB\hat{F}}(2, 2)$. Lorsque $d = 3$, le graphe G_3 a degré 3, diamètre 5 et 81 sommets.

5.2 Graphes de Kautz comme graphes à alphabet

De même que pour le graphe de de Bruijn, nous allons étudier la famille des graphes à alphabet isomorphes aux graphes de Kautz. Nous montrerons finalement que le graphe de Kautz n'admet que 2 représentations comme généralisation par permutation de sa formulation en graphe à alphabet.

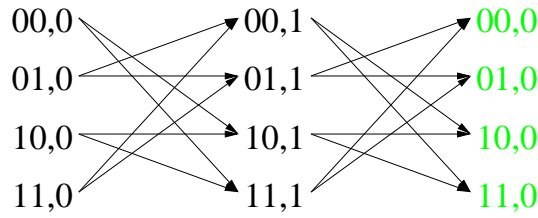


FIG. 5.3 – Le graphe G_3 de l'exemple 5.1.4, lorsque $d = 2$. Les sommets du niveau 0 sont répétés après le niveau 1 pour plus de clarté.

5.2.1 Permutation sur l'alphabet

Définition 5.2.1 Soit π une fonction de permutation sur Z_{d+1} . Le graphe $K_\pi(d, D)$, de degré d et de dimension D à $n = d^D + d^{D-1}$ sommets, est le graphe orienté tel que :

- $V = \{x = x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 \mid x_i \in Z_{d+1}, i \in Z_D, x_i \neq x_{i+1}\}$;
- $\Gamma_{K_\pi(d,D)}^+(x) = \{y = \pi(x_{D-2}) \dots \pi(x_1)\pi(x_0)\pi(\beta) \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_0\}\}$.

Proposition 5.2.2 Les graphes $K(d, D)$ et $K_\pi(d, D)$ sont isomorphes si et seulement si π est la permutation identité \mathcal{I}_{d+1} de Z_{d+1} .

Preuve : Pour cette preuve, nous utilisons le fait que le graphe de Kautz ne possède pas de boucles.

Supposons que $\pi \neq \mathcal{I}_{d+1}$ et remarquons que si $a \neq b$, avec $a, b \in Z_{d+1}$, alors $\pi(a) \neq \pi(b)$. Comme $\pi \neq \mathcal{I}_{d+1}$, il existe $a \in Z_{d+1}$ tel que $a \neq \pi(a)$. Soit $x = x_{D-1} \dots x_1x_0 = \pi^D(a) \dots \pi^2(a)\pi(a)$. Le sommet x appartient bien à $V(K_\pi(d, D))$ car pour tout k , $\pi^k(a) \neq \pi^{k-1}(a)$, et donc deux lettres consécutives sont bien différentes. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{K_\pi(d,D)}^+(x) &= \{\pi(\pi^{D-1}(a)) \dots \pi(\pi^2(a))\pi(\pi(a))\pi(\beta) \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{\pi(a)\}\} \\ &= \{\pi^D(a) \dots \pi^3(a)\pi^2(a)\pi(\beta) \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{\pi(a)\}\} \end{aligned}$$

Or $a \in Z_{d+1} \setminus \{\pi(a)\}$, donc $x \in \Gamma_{K_\pi(d,D)}^+(x)$ et le graphe $K_\pi(d, D)$ contient des boucles. Il n'est pas isomorphe à $K(d, D)$.

Lorsque $\pi = \mathcal{I}_{d+1}$, $K_{\mathcal{I}_{d+1}}(d, D)$ est le graphe de Kautz $K(d, D)$. □

Ainsi, nous ne pouvons pas appliquer une permutation π sur l'alphabet. Qu'en est-il d'une permutation sur les indices ?

5.2.2 Permutation sur les indices

Définition 5.2.3 Soit f une fonction de permutation sur Z_D et $j \in Z_D$. Le graphe $\kappa(f, j)$, de degré d et de dimension D à $n = d^D + d^{D-1}$ sommets, est le graphe orienté tel que :

- $V(\kappa(f, j)) = \{x = x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 = \sum_{i=0}^{D-1} x_i.e_i \mid x_i \in Z_{d+1}, i \in Z_D, x_i \neq x_{i+1}\}$;
- $\Gamma_{\kappa(f,0)}^+(x) = \left\{ \sum_{i \in Z_D \setminus \{f^{-1}(0)\}} x_i.e_{f(i)} + \beta.e_0 \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(1)}\} \right\}$;
- $\Gamma_{\kappa(f,D-1)}^+(x) = \left\{ \sum_{i \in Z_D \setminus \{f^{-1}(D-1)\}} x_i.e_{f(i)} + \beta.e_{D-1} \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(D-2)}\} \right\}$;

$$- \Gamma_{\kappa(f,j)}^+(x) = \left\{ \sum_{i \in Z_D \setminus \{f^{-1}(j)\}} x_i \cdot e_{f(i)} + \beta \cdot e_{D-1} \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(j-1)}, x_{f^{-1}(j+1)}\} \right\}.$$

Proposition 5.2.4 *Les graphes $K(d, D)$ et $\kappa(f, j)$ sont isomorphes si et seulement si nous sommes dans l'un des cas suivants :*

1. $f_1(i) = i + 1 \pmod{D}$ et $j = 0$;
2. $f_2(i) = i - 1 \pmod{D}$ et $j = D - 1$.

Preuve : Soit $x = x_{D-1} \dots x_1 x_0 = \sum_{i=0}^{D-1} x_i \cdot e_i$, un sommet de $\kappa(f, j)$.

Cas 1 : Supposons que la permutation f ne soit pas cyclique et montrons que les graphes $K(d, D)$ et $\kappa(f, j)$ ne sont pas isomorphes.

Comme f n'est pas cyclique, l'orbite de j est de taille $|orb(j)| < D$. Soit $x = \sum_{i \in orb(j)} x_i \cdot e_i + \sum_{i \notin orb(j)} y_i \cdot e_i$, où $x_i \in Z_{d+1}$, $y_i \in Z_2$ et où $\lfloor \frac{D-|orb(j)|}{2} \rfloor$ y_i sont égaux à 0. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa(f,0)}^+(x) &= \left\{ \sum_{i \in orb(j) \setminus \{f^{-1}(0)\}} x_i \cdot e_{f(i)} + \beta \cdot e_0 + \sum_{i \notin orb(j)} y_i \cdot e_{f(i)} \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(1)}\} \right\} \\ \Gamma_{\kappa(f,0)}^+{}^2(x) &= \left\{ \sum_{i \in orb(j) \setminus \{f^{-2}(0)\}} x_i \cdot e_{f^2(i)} + \beta \cdot e_0 + \sum_{i \notin orb(j)} y_i \cdot e_{f^2(i)} \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-2}(1)}\} \right\} \\ &\vdots \\ \Gamma_{\kappa(f,0)}^+{}^k(x) &= \left\{ \sum_{i \in orb(j) \setminus \{f^{-k}(0)\}} x_i \cdot e_{f^k(i)} + \beta \cdot e_0 + \sum_{i \notin orb(j)} y_i \cdot e_{f^k(i)} \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-k}(1)}\} \right\} \end{aligned}$$

Alors, $\left| \bigcup_{i=0}^D \Gamma_{\kappa(f,0)}^+{}^i(x) \right| \leq d^{|orb(j)|-1} (d+1) \zeta(D - |orb(j)|)$, où

- $d^{|orb(j)|-1} (d+1)$ est le nombre de mots de longueur $|orb(j)|$ formés sur $Z_{d+1}^{|orb(j)|}$ tels que deux lettres consécutives soient différentes ;
- $\zeta(D - |orb(j)|)$ est le nombre de mots de $D - |orb(j)|$ lettres obtenus au cours des D applications successives de f sur un mot fixé contenant $\lfloor \frac{D-|orb(j)|}{2} \rfloor$ lettres égales à 0, les autres étant égales à 1. Remarquons que $\zeta(D - |orb(j)|) \leq \binom{D-|orb(j)|}{\lfloor \frac{D-|orb(j)|}{2} \rfloor} < 2^{\lfloor \frac{D-|orb(j)|}{2} \rfloor}$.

Ainsi, $\left| \bigcup_{i=0}^D \Gamma_{\kappa(f,0)}^+{}^i(x) \right| < d^{|orb(j)|-1} (d+1) 2^{D-|orb(j)|} \leq d^{D-1} (d+1)$ car $2 \leq d$, et les graphes $K(d, D)$ et $\kappa(f, 0)$ ne sont pas isomorphes.

Le même raisonnement permet de montrer que les graphes $\kappa(f, j)$, $j \in Z_D$, ne sont pas isomorphes à $K(d, D)$ si la permutation f n'est pas cyclique.

Cas 2 : Supposons que la permutation f est cyclique et que $1 \leq j \leq D - 2$. Nous avons $\Gamma_{\kappa(f,j)}^+(x) = \left\{ \sum_{i \in Z_D \setminus \{f^{-1}(j)\}} x_i \cdot e_{f(i)} + \beta \cdot e_j \mid \beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(j-1)}, x_{f^{-1}(j+1)}\} \right\}$.

Si $x_{f^{-1}(j-1)} \neq x_{f^{-1}(j+1)}$, alors $|Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(j-1)}, x_{f^{-1}(j+1)}\}| = d - 1 < d$, et donc $\kappa(f, j)$ n'est pas isomorphe à $K(d, D)$. De plus, si $x_{f^{-1}(j-1)} = x_{f^{-1}(j+1)}$, alors $\left| \bigcup_{i=0}^D \Gamma_{\kappa(f,j)}^+{}^i(x) \right| \leq d^{(D-2)} (d+1)$, et les graphes $\kappa(f, j)$ et $K(d, D)$ ne sont pas isomorphes.

Cas 3 : Supposons que $j = 0$, que la permutation f est cyclique et que $f \neq f_1$. Alors, il existe k , $1 \leq k \leq D - 2$ tel que $f^{-k}(f^k(0) + 1) \neq 1$. Ainsi $\beta \in Z_{d+1} \setminus \{x_{f^{-1}(1)}, x_{f^{-k}(f^k(0)+1)}\}$ et $|\Gamma_{\kappa(f,0)}^+(x)| < d$. Donc, les graphes $K(d, D)$ et $\kappa(f, 0)$ ne sont pas isomorphes.

Cas 4 : Supposons que $j = D - 1$, que la permutation f est cyclique et que $f \neq f_2$. Alors, par le même argument que précédemment, les graphes $K(d, D)$ et $\kappa(f, D - 1)$ ne sont pas isomorphes.

Finalement, les graphes $K(d, D)$ et $\kappa(f, j)$ sont isomorphes si et seulement si $f = f_1$ et $j = 0$, ou $f = f_2$ et $j = D - 1$. \square

Nous remarquons que le graphe $\kappa(f_1, 0)$ est exactement le graphe de Kautz de la définition 2.1.4 page 10, et que le graphe $\kappa(f_2, D - 1)$ est le graphe obtenu en inversant le sens des arcs du graphe $\kappa(f_1, 0)$. Ces deux graphes correspondent aux deux définitions usuelles des graphes de Kautz sur un alphabet.

5.3 Application : implantation optimisée du de Bruijn avec OTIS

Nous avons montré, à l'aide de la proposition 4.2.9 et du corollaire 4.2.11 page 54, que le graphe de de Bruijn $B(d, D)$ admet une implantation avec $OTIS(d, d^D)$. De plus, nous avons observé dans la table 4.1 page 57 qu'il existe plusieurs valeurs de p et q pour lesquelles le graphe $H(p, q, d)$ à d^D nœuds est un de Bruijn. Nous allons donc étudier précisément ce fait, en nous aidant des graphes $A(f, \pi, j)$.

En corollaire de notre étude nous obtiendrons une implantation du de Bruijn $B(d, D)$ avec OTIS utilisant $\Theta(\sqrt{m})$ lentilles. Ceci signifie que cette étude nous permet de minimiser le nombre de lentilles utilisées dans OTIS.

5.3.1 Isomorphismes entre $H(p, q, d)$ et $B(d, D)$

Nous étudions l'ensemble des graphes de la famille $H(p, q, d)$ qui sont isomorphes au graphe de de Bruijn $B(d, D)$.

Proposition 5.3.1 *Les graphes $H(p, q, d)$ et $A(f, \mathcal{C}, p' - 1)$, tels que :*

- \mathcal{C} est la permutation définie sur Z_d par $\mathcal{C}(i) = \bar{i} = d - i - 1$;
- $p = d^{p'}$, $q = d^{q'}$ et $D = p' + q' - 1$;
- f est la permutation définie sur Z_D par :

$$f : i \longmapsto \begin{cases} i + p' & \text{si } i < q' - 1; \\ p' - 1 & \text{si } i = q' - 1; \\ i + p' - 1 \pmod{D} & \text{sinon.} \end{cases}$$

sont isomorphes.

Preuve : Dans cette preuve, nous associons au nombre $x \in Z_{d^k}$, sa représentation en base d , notée $\omega(x)$, telle que $\omega(x) = x_{k-1} \dots x_1 x_0$, $x_i \in Z_d$, et $x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i d^i$. k est la longueur de la chaîne $\omega(x)$ (nombre de lettres).

L'architecture $OTIS(p, q)$ connecte p groupes de q émetteurs à q groupes de p récepteurs, en reliant l'émetteur (i, j) , $i \in Z_p$, $j \in Z_q$, au récepteur $(q - j - 1, p - i - 1)$.

Remarquons que la chaîne $\omega(i)$ est de longueur p' et la chaîne $\omega(j)$ de longueur q' . Alors, nous pouvons représenter l'émetteur (i, j) par la chaîne $\omega(i)\omega(j)$ de longueur $p' + q'$. Comme $\omega(q - j - 1) = \overline{\omega(j)}$ et $\omega(p - i - 1) = \overline{\omega(i)}$, l'émetteur $\omega(i)\omega(j)$ est relié au récepteur $\overline{\omega(j)\omega(i)}$.

Le graphe $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ a un degré constant d et n sommets. De plus d divise p et q . Donc, chaque groupe de $q = d^{q'}$ émetteurs contient $d^{q'-1}$ sommets.

Associions au k^e sommet ($k \in Z_{d^{q'-1}}$) du i^e groupe d'émetteurs ($i \in Z_p$), la représentation $\omega(i)\omega(k)$ de longueur $p' + q' - 1$. Ce sommet a les émetteurs $\{(i, dk + \beta), \beta \in Z_d\}$ représentés par l'ensemble de chaînes $\{\omega(i)\omega(k)\omega(\beta), \beta \in Z_d\}$. Les émetteurs du sommet $\omega(i)\omega(k)$ sont reliés aux récepteurs $\{\overline{\omega(k)\omega(\beta)\omega(i)}, \beta \in Z_d\}$.

Soit $\omega(l)$, la chaîne de longueur l telle que $\omega(i) = \omega(l)\omega(\alpha)$, avec $\alpha \in Z_d$. Nous avons $\{\overline{\omega(k)\omega(\beta)\omega(i)}, \beta \in Z_d\} = \{\overline{\omega(k)\omega(\beta)\omega(l)\omega(\alpha)}, \beta \in Z_d\}$ et ces récepteurs appartiennent aux sommets $\{\overline{\omega(k)\omega(\beta)\omega(l)}, \beta \in Z_d\}$.

Finalement, le sommet x , représenté par la chaîne $\omega(x) = \omega(l)\omega(\alpha)\omega(k)$, avec $\omega(l) \in Z_d^{p'-1}$, $\omega(\alpha) \in Z_d$ et $\omega(k) \in Z_d^{q'-1}$, est connecté par l'architecture $OTIS(p, q)$ aux sommets représentés par les chaînes $\{\overline{\omega(k)\omega(\beta)\omega(l)}, \beta \in Z_d\}$. Comme $\omega(x) = x_{D-1} \dots x_1 x_0$, $x_i \in Z_d$, nous avons $\omega(l) = x_{D-1} x_{D-2} \dots x_{q'}$, $\omega(\alpha) = x_{q'-1}$, et $\omega(k) = x_{q'-2} \dots x_1 x_0$. Donc, le graphe $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ peut être définie sur l'ensemble de sommets Z_d^D par

$$\Gamma_H^+(x_{D-1} \dots x_1 x_0) = \{\overline{x_{q'-2} \dots x_0 \beta x_{D-1} \dots x_{q'}}\}.$$

D'après la définition de f , c'est exactement $A(f, \mathcal{C}, p' - 1)$.

□

Nous allons maintenant caractériser l'ensemble des $OTIS(p, q)$ permettant une implantation des graphes de de Bruijn, $B(d, D)$, c'est-à-dire l'ensemble des graphes $H(p, q, d)$ isomorphes à $B(d, D)$.

Lemme 5.3.2 *Soient p' et q' tels que $p' + q' - 1 = D$. Pour tout degrés d , les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ sont isomorphes si et seulement si la permutation f définie sur Z_D par :*

$$f : i \longmapsto \begin{cases} i + p' & \text{si } i < q' - 1; \\ p' - 1 & \text{si } i = q' - 1; \\ i + p' - 1 \pmod{D} & \text{sinon.} \end{cases}$$

est cyclique.

Preuve : Nous venons de montrer dans la proposition 5.3.1 que les graphes $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ et $A(f, \mathcal{C}, p' - 1)$ sont isomorphes. De plus, nous avons montré dans le théorème 5.1.9 que le graphe $A(f, \mathcal{C}, j)$ de degré d et de dimension D est isomorphe au graphe de de Bruijn $B(d, D)$ si et seulement si la permutation f est cyclique sur Z_D . La preuve du lemme suit.

□

Nous avons obtenu une caractérisation des graphes $H(p, q, d)$ isomorphes à $B(d, D)$, pour les cas où p et q sont des puissances de d . Nous conjecturons que seul ces valeurs de p et q donnent l'isomorphisme. Nous argumenterons nos propos dans la section 5.4.

Maintenant, nous allons montrer qu'il existe p' et q' tels que les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ sont isomorphes et que $d^{p'} + d^{q'} = \Theta(\sqrt{d^{D+1}})$ (c'est-à-dire $p + q = \Theta(\sqrt{m})$).

Proposition 5.3.3 *Posons $p' = q' = \frac{D+1}{2}$. Alors, les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}, d)$ sont isomorphes si et seulement si $D = 1$.*

Preuve : Si $p' = q' > 1$, alors $f(p' - 1) = q' - 1 = p' - 1$ et donc f n'est pas cyclique sur Z_D . Si $p' = q' = 1$, alors $D = 1$ et donc $B(d, 1)$ est isomorphe à $H(d, d, d)$. \square

Corollaire 5.3.4 *Toute implantation du de Bruijn, $B(d, D)$, avec $OTIS(p, q)$ a au moins $\Omega(\sqrt{m})$ lentilles.*

Preuve : Nous avons $pq = d^{D+1} = m$, alors $p + q \geq 2\sqrt{d^{D+1}} = 2\sqrt{m} = \Omega(\sqrt{m})$. \square

Remarquons que lorsque $D = 1$, nous avons $p = q = d = n$ et $\sqrt{m} = n$, d'où $p + q = 2n = \Theta(n)$.

Proposition 5.3.5 *Si D est pair, $p' = \frac{D}{2}$ et $q' = \frac{D}{2} + 1$, alors les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{\frac{D}{2}}, d^{\frac{D}{2}+1}, d)$ sont isomorphes, et de plus, $B(d, D)$ a une implantation avec un $OTIS(p, q)$ ayant $p + q = \Theta(\sqrt{m})$ lentilles.*

Preuve : La permutation f est définie sur Z_D par :

$$f : i \mapsto \begin{cases} i + \frac{D}{2} & \text{si } i < \frac{D}{2}; \\ \frac{D}{2} - 1 & \text{si } i = \frac{D}{2}; \\ i + \frac{D}{2} - 1 \pmod{D} & \text{sinon.} \end{cases}$$

et il est facile de vérifier que f est cyclique. Ainsi, en utilisant le lemme 5.3.2, l'isomorphisme est vérifié.

De plus, l'implantation avec $OTIS(p, q)$ a $d^{\frac{D}{2}} + d^{\frac{D}{2}+1} = O(\sqrt{m})$ lentilles. Donc, en utilisant le corollaire 5.3.4, l'implantation a $\Theta(\sqrt{m})$ lentilles. \square

La caractérisation des graphes $H(p, q, d)$ isomorphes à $B(d, D)$ a donc permis de minimiser le nombre de lentilles du système optique.

Corollaire 5.3.6 *Étant donnés les graphes $B(d, D)$ et $H(p, q, d)$, leur isomorphisme se vérifie en temps $O(D)$.*

Preuve : D'après le lemme 5.3.2, il suffit de vérifier que f est une permutation cyclique de Z_D , ce qui prend un temps $O(D)$. \square

Corollaire 5.3.7 *Minimiser $d^{p'} + d^{q'}$, telle que les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ soient isomorphes, prend un temps $O(D^2)$.*

Preuve : Si D est pair, d'après la proposition 5.3.5, le minimum est obtenu pour $p' = \frac{D}{2}$ et $q' = \frac{D}{2} + 1$. Sinon, il y a $\frac{D}{2}$ couples (p', q') , tels que $p' < q'$ et $D = p' + q' - 1$, et en utilisant le corollaire 5.3.6, le minimum est obtenu en temps $O(D^2)$. \square

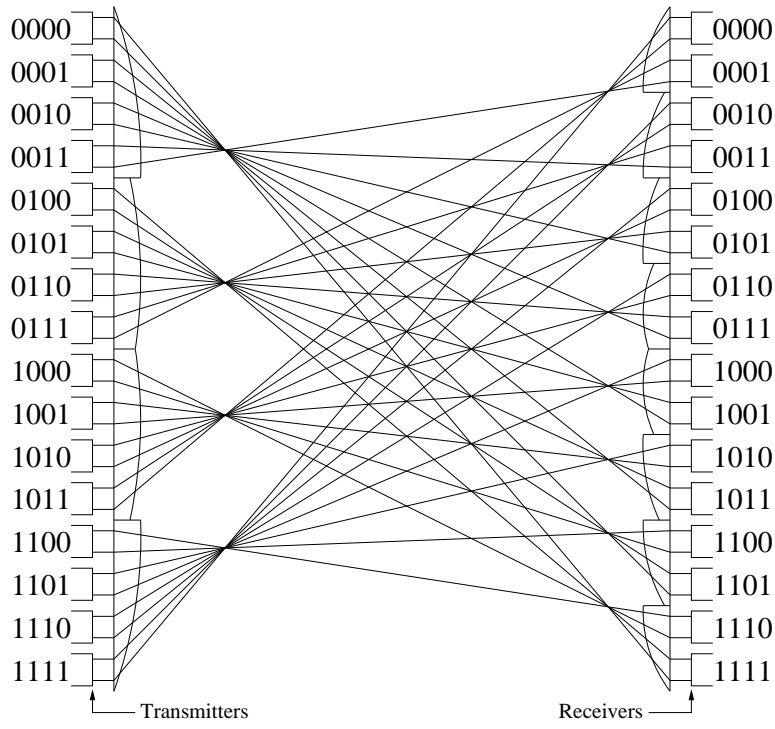


FIG. 5.4 – $H(4, 8, 2)$.

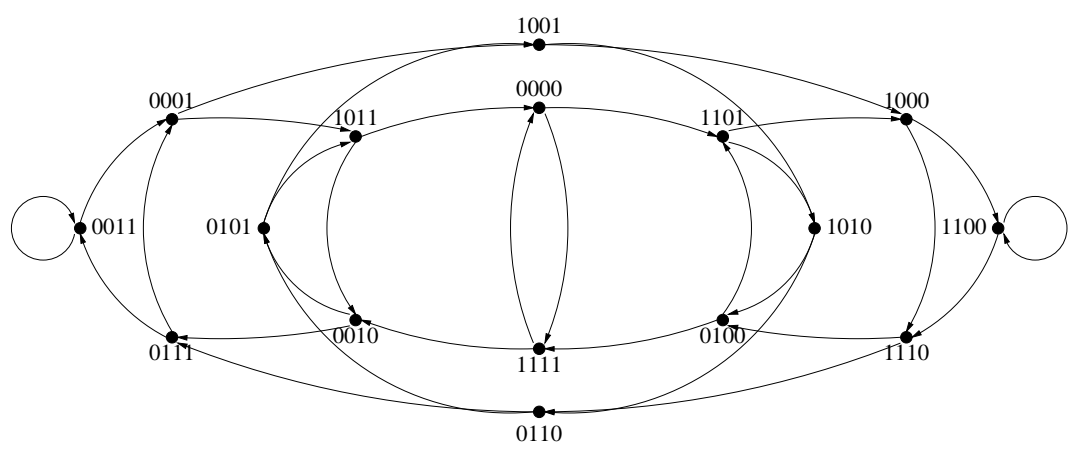


FIG. 5.5 – $B(2, 4)$ avec la relation d'adjacence de $H(4, 8, 2)$, c'est-à-dire $\Gamma_H^+(x_3x_2x_1x_0) = \overline{\{x_1x_0\beta x_3\}}$.

5.3.2 Exemple

La figure 5.4 représente le graphe orienté $H(4, 8, 2)$, construit sur $OTIS(4, 8)$, d'ensemble de sommets Z_2^4 et tel que $\Gamma_H^+(x_3x_2x_1x_0) = \{\overline{x_1x_0\beta x_3}\}$; la figure 5.5 représente le graphe orienté $B(2, 4)$ où les sommets ont les mêmes étiquettes que sur $H(4, 8, 2)$.

Lorsque le diamètre $D > 1$ est impair, et d'après la proposition 5.3.3, il n'y a pas d'isomorphisme entre les graphes $B(d, D)$ et $H(p, q, d)$ avec $p = q$. Le cas où p est le plus proche de q est alors $p' = \frac{D-1}{2}$ et $q' = \frac{D-1}{2} + 2$. Toutefois, les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{\frac{D-1}{2}}, d^{\frac{D-1}{2}+2}, d)$ ne sont pas toujours isomorphes. Par exemples, $H(2^5, 2^7, 2)$ et $B(2, 11)$ sont isomorphes, alors que $H(d^6, d^8, d)$ et $B(d, 13)$ ne le sont pas.

5.4 Conjectures

Dans cette section, nous donnons deux conjectures dont les démonstrations permettraient de clore l'ensemble des graphes $H(p, q, d)$ isomorphes à $B(d, D)$.

5.4.1 Étude de la permutation f

Nous cherchons à exhiber les valeurs de p' et q' telles que la permutation f de Z_D définie dans la proposition 5.3.1 est cyclique.

Conjecture 5.4.1 *Soit $D \in \mathbf{N}$ et soient p' et q' , $0 < p' < q'$, tels que $p' + q' = D + 1$. La permutation f définie sur Z_D par*

$$f : i \mapsto \begin{cases} i + p' & \text{si } i < q' - 1; \\ p' - 1 & \text{si } i = q' - 1; \\ i + p' - 1 \pmod{D} & \text{sinon.} \end{cases}$$

est cyclique si et seulement si p' et q' sont premier entre eux.

Nous ne possédons à ce jour que de quelques éléments permettant de prouver cette conjecture, dont le lemme suivant :

Lemme 5.4.2 *Si $q' = kp'$, $p' > 1$ et $k > 1$, alors la permutation f n'est pas cyclique.*

Preuve : Nous avons $f(0) = p'$, $f^1(0) = 2p'$, \dots , $f^{k-1}(0) = (k-1)p' = q' - p'$, $f^k(0) = q'$ et $f^{k+1}(0) = q' + p' - 1 \pmod{D} = D \pmod{D} \equiv 0$. De plus, $D + 1 = p' + q' = (k+1)p'$, et comme $p' > 1$, nous avons $k+1 = \frac{D+1}{p'} < D+1$. Donc, la permutation f n'est pas cyclique si $q' = kp'$, $p' > 1$ et $k > 1$. \square

Nous remarquons que dans le cas où $k = 1$, nous avons $p' = q'$. Or, la proposition 5.3.3 précise que si $p' = q' = \frac{D+1}{2}$, alors, les graphes $B(d, D)$ et $H(d^{\frac{D+1}{2}}, d^{\frac{D+1}{2}}, d)$ sont isomorphes si et seulement si $D = 1$.

5.4.2 Isomorphismes entre $B(d, D)$ et $H(p, q, d)$

Conjecture 5.4.3 *Pour que les graphes $B(d, D)$ et $H(p, q, d)$, où $pq = d^{D+1}$, soient isomorphes, il est nécessaire que $p = d^{p'}$ et $q = d^{q'}$.*

Le lemme 4.2.5 page 51 et la proposition 5.4.4 apportent des éléments de réponse à cette conjecture. En effet, avec la proposition 5.4.4 nous montrons que le graphe $H(p, q, d)$ est un graphe itéré si et seulement si d divise p et q . Or, le graphe de de Bruijn $B(d, D)$ est un graphe itéré.

Proposition 5.4.4 *Le graphe $H(p, q, d)$ tel que $pq = d^{D+1}$ est un graphe itéré si et seulement si d divise p et q .*

Preuve : Dans un premier temps, montrons que si d ne divise pas q , alors $H(p, q, d)$ n'est pas un graphe itéré.

Par définition, $q \neq d$. Si $q > d$, le lemme 4.2.5 nous indique que $H(p, q, d)$ est un multigraphe. Or, le graphe itéré d'un multigraphe est un graphe (voir propriétés données dans le paragraphe A.3.1 page 180). De même si $p > d$.

Supposons que $d < q$. Soit u le sommet contenant les émetteurs $(0, 0), \dots, (0, d-1)$ et soit v , le sommet contenant les émetteurs $\dots, (0, q-1), (1, 0), \dots$

Nous avons $\Gamma_H^+(u) = \left\{ v_\alpha = \frac{p(q-\alpha-1)+p-1}{d}, \alpha \in Z_d \right\}$. De plus, le sommet v est relié par l'émetteur $(1, 0)$ au sommet $\frac{p(q-1)+p-1-1}{d} = \frac{pq-2}{d} = n-1$, et l'émetteur $(0, q-1)$ au sommet $\frac{p(q-(q-1)-1)+p-1}{d} = \frac{p-1}{d}$. Or, $\left\{ \frac{p-1}{d} \right\} \cap \Gamma_H^+(u) = \emptyset$, $\Gamma_H^+(u) \cap \Gamma_H^+(v) \neq \emptyset$ et $\Gamma_H^+(u) \neq \Gamma_H^+(v)$. Donc $H(p, q, d)$ n'est pas un graphe itéré si d ne divise pas q . De même si d ne divise pas p .

Montrons maintenant que le graphe $H(p, q, d)$ est un graphe itéré lorsque d divise p et q .

Posons $p = dA$ et $q = dB$ et notons le sommet $u \in Z_n = V(H)$ comme le triplet xyz , $x \in Z_A$, $y \in Z_d$, $z \in Z_B$, avec $u = (dx + y)B + z$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Gamma_H^+(xyz) &= \{\overline{z\alpha x}, \alpha \in Z_d\} \\ \Gamma_H^-(\{\overline{z\alpha x}, \alpha \in Z_d\}) &= \{xtz, t \in Z_d\} \\ \Gamma_H^+(\{xtz, t \in Z_d\}) &= \{\overline{z\alpha x}, \alpha \in Z_d\} \end{aligned}$$

Ainsi, si deux sommets distincts u_0 et u_1 de $H(p, q, d)$ sont tels que $\Gamma_H^+(u_0) \cap \Gamma_H^+(u_1) \neq \emptyset$, alors $\Gamma_H^+(u_0) = \Gamma_H^+(u_1)$, ce qui caractérise un graphe itéré. □

La proposition 5.4.4 nous permet d'affirmer qu'il n'existe pas avec $OTIS(p, q)$ d'implantation des de Bruijn $B(d, D)$ lorsque d ne divise pas p ou q . Il reste à montrer que seul les $OTIS(p, q)$ tels que p et q sont des puissances de d permettent une implantation des graphes de de Bruijn. Nous ne l'avons pas fait, mais nous donnons dans l'annexe C page 191 l'algorithme que nous avons utilisé pour vérifier la conjecture 5.4.3, ainsi que des tableaux de résultats.

Chapitre 6

Modèles avancés

Les réseaux de communications optiques peuvent se diviser en deux classes, selon le nombre de nœuds intermédiaires traversés par un message entre sa source et sa destination. Dans les réseaux en *un saut*, les nœuds communiquent les uns avec les autres en une seule étape. Toutefois, de telles topologies nécessitent un grand nombre d'émetteurs et de récepteurs par sommet. La taille de ces réseaux est alors limitée par le nombre de couples émetteur/récepteur dont dispose chaque nœud. D'un autre côté, dans les réseaux en *plusieurs sauts*, les messages doivent traverser des sommets intermédiaires pour atteindre leurs destinations. Le nombre de couples émetteurs/récepteurs par nœud est alors réduit au prix de l'allongement du délai de transmission.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux réseaux de communications optiques basés sur des étoiles passives optiques (OPS) [GMH⁺98, LWF97]. Une OPS permet de relier un groupe d'émetteurs à un groupe de récepteurs de telle sorte que si l'un des émetteurs envoie un message au travers de l'OPS sous forme de signaux lumineux, tous les récepteurs reçoivent ce message. Nous ne considérons ici que des OPS mono-longueur d'onde, comme nous l'avons précisé dans la section 3.2.5 page 31. Ainsi, un seul message peut être émis au travers de l'OPS par étape de communication. Une OPS peut être considérée comme l'implantation optique d'un bus.

Les réseaux utilisant des OPS peuvent être divisés en deux groupes, selon le nombre d'OPS utilisées [BF97], c'est-à-dire à *une OPS* ou *multi-OPS*. De nombreux travaux portent sur l'étude des réseaux construits autour d'une unique OPS [ZA94, HKR⁺96, Muk97, BF97]. Toutefois, la taille d'une OPS est limitée par sa capacité à diviser un signal optique entrant en plusieurs signaux optiques sortant, sans amplification du signal [GME⁺97]. Ainsi, la taille des réseaux construits autour d'une unique OPS est limitée par la technologie.

Les réseaux multi-OPS permettent de contourner cette difficulté et de construire des réseaux de tailles plus importantes. Un exemple remarquable de tel réseau a été proposé dans [CLM⁺96]. Le *Partitionned Optical Passive Star network* (POPS) est un réseau de communication en une seule étape multi-OPS. Ce réseau consiste en un ensemble de g groupes de t processeurs, chacun relié par une OPS à tous les autres groupes. Le POPS permet d'augmenter le nombre de processeurs dans le réseau, ainsi que le nombre de messages émis à chaque étape de communication. Ce réseau a été modélisé dans [BF96] par un stack-graphe [BFM98] construit à partir d'un graphe complet. Intuitivement, le stack-graphe $\zeta(s, G)$ est

construit à partir du graphe G en substituant chaque sommet du graphe G par un groupe de s sommets, et en remplaçant chaque arc du graphe G par un hyperarc reliant les deux groupes de s sommets correspondants. Cette modélisation a permis d'effectuer simplement des plongements de graphes sur le POPS.

Là encore, la taille du réseau est limitée par des contraintes technologiques. Tout d'abord, le nombre de processeurs de chaque groupe du POPS est limité par la taille des OPS. Ensuite, le nombre de groupes de processeurs est donné par le nombre de couples émetteur/récepteur que peut recevoir chacun des processeurs. Enfin, il n'est pas opportun de construire un POPS disposant de plus d'OPS que de processeurs [GM98, MGCL98]. Dès lors, il faut envisager la construction de réseaux en plusieurs sauts multi-OPS.

Dans ce chapitre, nous présentons deux familles de réseaux de communications optiques en plusieurs sauts multi-OPS, avec d'une part le stack-Kautz [CFM00b, CFM00a] et d'autre part les hypergraphes de de Bruijn et de Kautz [BE96]. La famille des stack-Kautz est construite à partir des stack-graphes et du graphe de Kautz. Cette famille inclut le POPS et représente donc une généralisation de ce réseau. Nous avons étudié les caractéristiques et les ressources des stack-Kautz et conduit une étude de scalabilité. Nous avons proposé des protocoles de contrôle efficaces que nous avons validé par la construction d'un simulateur. Ensuite, nous avons étudié l'excentricité des stack-Kautz et le temps d'acheminement d'un message de sa source à sa destination en fonction de la charge. Nous fournissons également des résultats de plongements sur cette topologie, et nous proposons une implantation de ces réseaux avec OTIS [CFM00b].

Les hypergraphes de de Bruijn et de Kautz ont été proposé dans [BE96] comme des réseaux à base de bus permettant d'assembler un grand nombre de processeurs dans un réseau de faible diamètre. Nous montrons les similitudes entre ces réseaux et les stack-Kautz, puis nous proposons une implantation de ces réseaux avec OTIS.

Nous commençons, dans la section 6.1, par présenter les hypergraphes et les stack-graphes que nous utiliserons pour modéliser les réseaux de communications à base d'OPS. En particulier, nous montrons dans la section 6.2 comment modéliser une OPS par un hyperarc. Ensuite, dans la section 6.3, nous rappelons la définition du POPS et sa modélisation par un stack-graphe. Nous rappelons également des résultats de plongement sur cette topologie. Puis, dans la section 6.4, nous étudions les stack-Kautz. Nous présentons leur définition et leur modélisation, nous étudions leur excentricité et donnons leurs principales caractéristiques sur lesquelles nous conduisons une étude de scalabilité. Par la suite, dans la section 6.4.5, nous proposons des protocoles de contrôle pour cette topologie, et nous analysons le temps d'acheminement d'un message de sa source à sa destination en fonction de la charge. Nous validons notre analyse dans la section 6.4.8 en effectuant des simulations et des comparaisons avec le POPS. Nous fournissons aussi des résultats de plongement dans la section 6.4.10. Nous concluons notre étude des stack-Kautz dans la section 6.5, en proposant une implantation de ces réseaux avec OTIS. Enfin, dans la section 6.6, nous présentons les hypergraphes de de Bruijn et de Kautz et nous proposons une implantation de ces réseaux avec OTIS. Nous discutons aussi la possibilité d'utiliser sur ces topologies les protocoles de contrôle développés pour le stack-Kautz.

6.1 Stack-graphes et hypergraphes

Les hypergraphes sont une généralisation des graphes permettant la modélisation de concepts plus généraux. En effet, tout graphe est un hypergraphe. Nous donnons ici la définition des hypergraphes et des hypergraphes orientés, puis la définition d'une famille particulière d'hypergraphes orientés, appelés stack-graphes.

6.1.1 Hypergraphes

Nous donnons ici une définition des hypergraphes issue de l'ouvrage de Berge [Ber87].

Définition 6.1.1 *Un hypergraphe \mathcal{H} est une paire $(\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$, où $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ est un ensemble non vide de sommets et $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ est une famille de parties non vides de $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, appelées hyperarêtes, telle que $\bigcup_{i=1}^m e_i = \mathcal{V}(\mathcal{H})$.*

La notion d'hypergraphe est généralement perçue comme non-orientée, une hyperarête représentant un ensemble de sommets, sans autres précisions. La notion d'hypergraphe orienté a été récemment abordée dans la littérature [BE96, BDE97, Fer99a, Fer99b, FPara, FParb].

Définition 6.1.2 *Un hypergraphe orienté \mathcal{H} est une paire $(\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{A}(\mathcal{H}))$, où $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ est un ensemble non vide de sommets et $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ est un ensemble de paire de parties non vides de $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, appelées hyperarcs. Si $a = (a^-, a^+)$ est un hyperarc de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, alors l'ensemble a^- est appelé ensemble initial et a^+ ensemble final de l'hyperarc a .*

Remarquons que dans un hyperarc a , les ensembles a^- et a^+ ne sont pas nécessairement disjoints.

- Le degré d'un sommet dans un hypergraphe est le nombre d'hyperarêtes auxquelles il appartient.
- Le degré entrant d'un sommet u dans un hypergraphe orienté est le nombre d'hyperarcs $a = (a^-, a^+)$ tels que $u \in a^+$; le degré sortant est le nombre d'hyperarcs $a = (a^-, a^+)$ tels que $u \in a^-$.
- Le degré d'une hyperarête est le nombre de sommets qu'elle contient.
- Le degré entrant d'un hyperarc $a = (a^-, a^+)$ est le nombre de sommets de l'ensemble a^- et le degré sortant est le nombre de sommets de l'ensemble a^+ ; Si $|a^-| = |a^+|$, l'hyperarc est dit de degré $|a^-|$.
- Le **multigraphe sous-jacent** à un hypergraphe est le multigraphe obtenu en remplaçant chaque hyperarête par une clique.
- Le **multigraphe orienté sous-jacent** à un hypergraphe orienté est le multigraphe orienté obtenu en remplaçant chaque hyperarc $a = (a^-, a^+)$ par le graphe biparti dont les arcs sont $\{(x, y) \mid x \in a^- \text{ et } y \in a^+\}$.

6.1.2 Stack-graphes

Les *stack-graphes* ont été définis dans [BFM98] comme des hypergraphes construits à partir de graphes. Intuitivement les stack-graphes sont obtenus en superposant des copies d'un graphe original, puis en remplaçant chaque pile d'arêtes par une hyperarête. Une définition formelle est la suivante.

Définition 6.1.3 ([BFM98]) Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Le **stack-graphe** $\varsigma(s, G) = (V_\varsigma, E_\varsigma)$, où s est appelé le **facteur d'empilement** du stack-graphe, est l'hypergraphe tel que :

- $V_\varsigma = \{0, 1, \dots, s-1\} \times V(G)$;
- $p_\varsigma(u) = \{\langle i, u \rangle \mid i \in \{0, 1, \dots, s-1\}\}$, $u \in V(G)$;
- $E_\varsigma = \{e_\varsigma = p_\varsigma(u) \cup p_\varsigma(v) \mid \{u, v\} \in V(G)\}$.

Cette première définition s'appuyant sur des graphes non orientés, nous devons la spécifier pour les graphes orientés.

Définition 6.1.4 Soit $G = (V(G), A(G))$ un graphe orienté. Le **stack-graphe orienté** $\varsigma(s, G) = (V_\varsigma, A_\varsigma)$, où s est appelé le **facteur d'empilement** du stack-graphe, est l'hypergraphe orienté tel que :

- $V_\varsigma = Z_s \times V(G) = \{\langle i, u \rangle \mid i \in Z_s, u \in V(G)\}$;
- $p_\varsigma(u) = \{\langle i, u \rangle \mid i \in Z_s\}$, $u \in V(G)$;
- $A_\varsigma = \{a_\varsigma = (p_\varsigma(u), p_\varsigma(v)) \mid (u, v) \in A(G)\}$.

La notation $(p_\varsigma(u), p_\varsigma(v))$ désigne un hyperarc d'un ensemble de sommets $p_\varsigma(u)$ vers un ensemble de sommets $p_\varsigma(v)$.

Dans la suite, nous parlerons de stack-graphe pour désigner indifféremment un stack-graphe orienté ou non. Cette précision sera apportée par le graphe utilisé.

6.2 Modélisation d'une OPS

Nous avons présenté, dans la section 3.2.5 page 31, l'étoile passive optique comme un dispositif de transmission optique orienté, en une seule étape, de un vers plusieurs, pour les processeurs qu'elle connecte. Une OPS peut être vue comme un bus optique permettant de diffuser une information depuis un élément d'un groupe vers tous les éléments d'un autre groupe.

Une OPS de degré s peut être modélisée par un hyperarc $(p_\varsigma(u), p_\varsigma(v))$, comme le montre la figure 6.1 [Fer97].

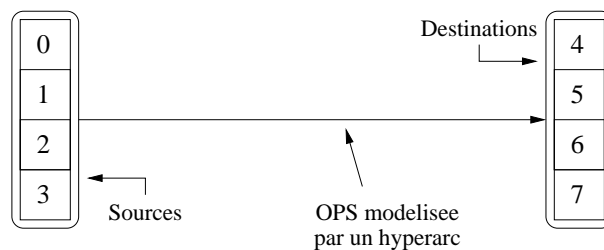


FIG. 6.1 – Modélisation d'une OPS par un hyperarc.

Du point de vue topologique, une OPS autorise les communications de un-vers-plusieurs en une seule étape. Elle peut être utilisée pour la conception de réseaux opérant en mode

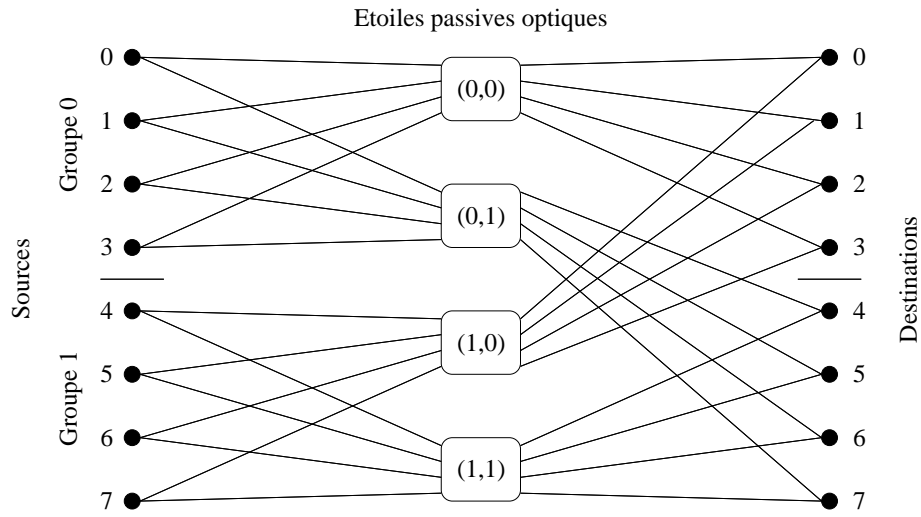


FIG. 6.2 – « Partitioned Optical Passive Star » POPS(4,2) à 8 nœuds.

« diffusion-sélection » (*broadcast-and-select*) [BFM98, Lab98, Fer97]. De nombreux travaux se sont portés sur des réseaux formés par une unique OPS [CF94, HKR⁺96, SM94, ZA94, BF95, DFT94, Muk97, CZA93]. Toutefois la taille des réseaux à une seule OPS est limitée par la technologie. Pour contourner cette difficulté et construire des réseaux de grande taille bénéficiant des propriétés des OPS, des réseaux multi-OPS (en une ou plusieurs étapes) ont été proposés. Dans la suite de ce chapitre, nous examinerons trois familles de réseaux multi-OPS : le POPS (section 6.3), le stack-Kautz (section 6.4) et les hypergraphes de de Bruijn et de Kautz (section 6.6).

6.3 POPS

6.3.1 Définition et modélisation

Le « **Partitioned Optical Passive Star network** » $POPS(s, g)$, introduit dans [CLM⁺94] et aussi étudié dans [CLM⁺96, GMC⁺95, TCL⁺95], est composé de $N = sg$ processeurs et g^2 OPS de degré s . Les processeurs sont divisés en g groupes de taille s (voir figure 6.2). Chaque OPS est étiquetée par un couple d'entiers $\langle i, j \rangle$, $i, j \in Z_g$. L'OPS $\langle i, j \rangle$ est connectée au i^{e} groupe de processeurs en entrée et au j^{e} groupe de processeurs en sortie.

De nombreux algorithmes de communication, de mouvements de données et de calcul (somme préfixe, multiplication de matrices, ...) sur le POPS ont été proposé [Sah00a, Sah00b].

$POPS(s, g)$ se modélise par un stack-graphe construit à partir de s copies du graphe complet K_n^+ [BF96], une OPS étant modélisée par un hyperarc. Nous avons alors $POPS(s, g) \equiv \varsigma(s, K_g^+)$, où le degré s d'une OPS est égal au facteur d'empilement du stack-graphe. La figure 6.3 nous montre la modélisation du POPS de la figure 6.2.

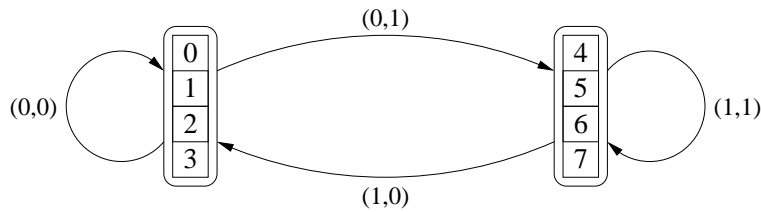


FIG. 6.3 – $POPS(4, 2)$ modélisé par $\zeta(4, K_2^+)$.

6.3.2 Plongements

La modélisation du POPS par un stack-graphe a été utilisée dans [BF96, BCF97] pour y réaliser des plongements de graphes. Ces plongements sont nettement plus simples que ceux obtenus sans cette modélisation dans [GMH⁺98]. Nous rappelons ici les principaux résultats.

Proposition 6.3.1 ([BF96]) *Soit $G = (V, A)$, un graphe orienté à n sommets. Trouver un plongement des communications de G sur $POPS(s, g)$ qui minimise le temps d’achèvement, est équivalent à trouver un plongement de G sur K_n^+ qui minimise la congestion des arcs.*

La preuve consiste à rappeler que le temps d’achèvement des communications correspond au nombre maximum de communications point-à-point utilisant une même OPS, ce qui est équivalent à la mesure de la congestion des arcs de K_g^+ .

Théorème 6.3.2 ([BF96]) *Soient n, s et g , trois entiers, tels que $s \geq \sqrt{n}$. Il existe un plongement optimal du cycle C_n sur $POPS(s, g)$.*

La construction consiste à fixer le sommet 0 du cycle sur un sommet de $POPS(s, g)$, puis à suivre un circuit eulérien sur $POPS(s, g)$, en associant le i^e sommet de C_n au i^e sommet traversé par le circuit eulérien. Si $n > sg$, il suffit de suivre autant de fois que nécessaire le circuit eulérien, tout en associant les sommets de C_n aux sommets de $POPS(s, g)$.

Par exemple, le plongement d’un cycle de longueur 8 sur le $POPS(4, 2)$ de la figure 6.3 nécessite 2 parcours d’un circuit eulérien de K_2^+ .

Théorème 6.3.3 ([BF96]) *Il existe un plongement optimal des communications du graphe de de Bruijn $B(d, D)$ sur $POPS(d^{D-1}, d)$.*

Corollaire 6.3.4 ([BF96]) *Il existe un plongement optimal des communications de $B(d, D)$ sur $POPS(s, g)$, où $d = \alpha g$, pour un entier α , et $s = \frac{d^D}{g}$.*

Ces deux derniers résultats utilisent des automorphismes du graphe de de Bruijn [THH98] permettant de réaliser un plongement optimal de $B(d, D)$ sur $B(d, D - k)$, $1 \leq k < D$ et un autre permettant de plonger $B(d, 1)$ sur $B(d', 1)$, avec $d = \alpha d'$. Remarquons que ce deuxième automorphisme correspond au plongement de K_d^+ sur $K_{d'}^+$.

Enfin, le plongement de grilles toriques sur le POPS a été revisité dans [BCF97]. Un plongement de la grille torique sur le POPS avait préalablement été obtenu dans [MGCL98], mais uniquement pour des grilles toriques dont la taille est une puissance de 2.

Théorème 6.3.5 ([BCF97]) *Si n est pair, il existe un plongement optimal des communications de la grille torique $TM(n, n)$ dans $POPS(s, g)$, $g \leq n$. Si n est impair, il existe un plongement optimal des communications de la grille torique $TM(n, n)$ dans $POPS(s, n)$.*

6.4 Stack-Kautz

Nous allons maintenant définir et étudier une généralisation du POPS, appelée stack-Kautz. Ce réseau d'interconnexion est un stack-graphe construit à partir du graphe de Kautz. Nous montrerons en particulier que le POPS est un stack-Kautz.

Le choix du graphe de Kautz dans la construction du stack-Kautz a été fait au vu des nombreuses qualités de ce graphe, dont :

- Grand nombre de sommets pour un faible degré constant et un faible diamètre ;
- Simplicité du routage des plus courts chemins et existence d'algorithmes de routage tolérant aux pannes ;
- Graphe préalablement utilisé pour la construction du commutateur optique d'un réseaux ATM : *Rattlesnake* [SH92, SH93, SHJ92, HS95, SH95].

6.4.1 Définition

Afin de définir le stack-Kautz, nous devons préalablement définir le graphe $K_l(d, D)$, extension du graphe de Kautz $K(d, D)$.

Définition 6.4.1 $K_l(d, D)$ est le graphe construit à partir du graphe de Kautz $K(d, D)$ en ajoutant des boucles sur chaque sommet.

Ce graphe a un degré $d + 1$, un diamètre D , $n = d^{D-1}(d + 1)$ sommets et $d^{D-1}(d + 1)^2$ arcs. Le routage sur ce graphe reste identique au routage sur le graphe de Kautz, et ce graphe demeure hamiltonien et eulérien.

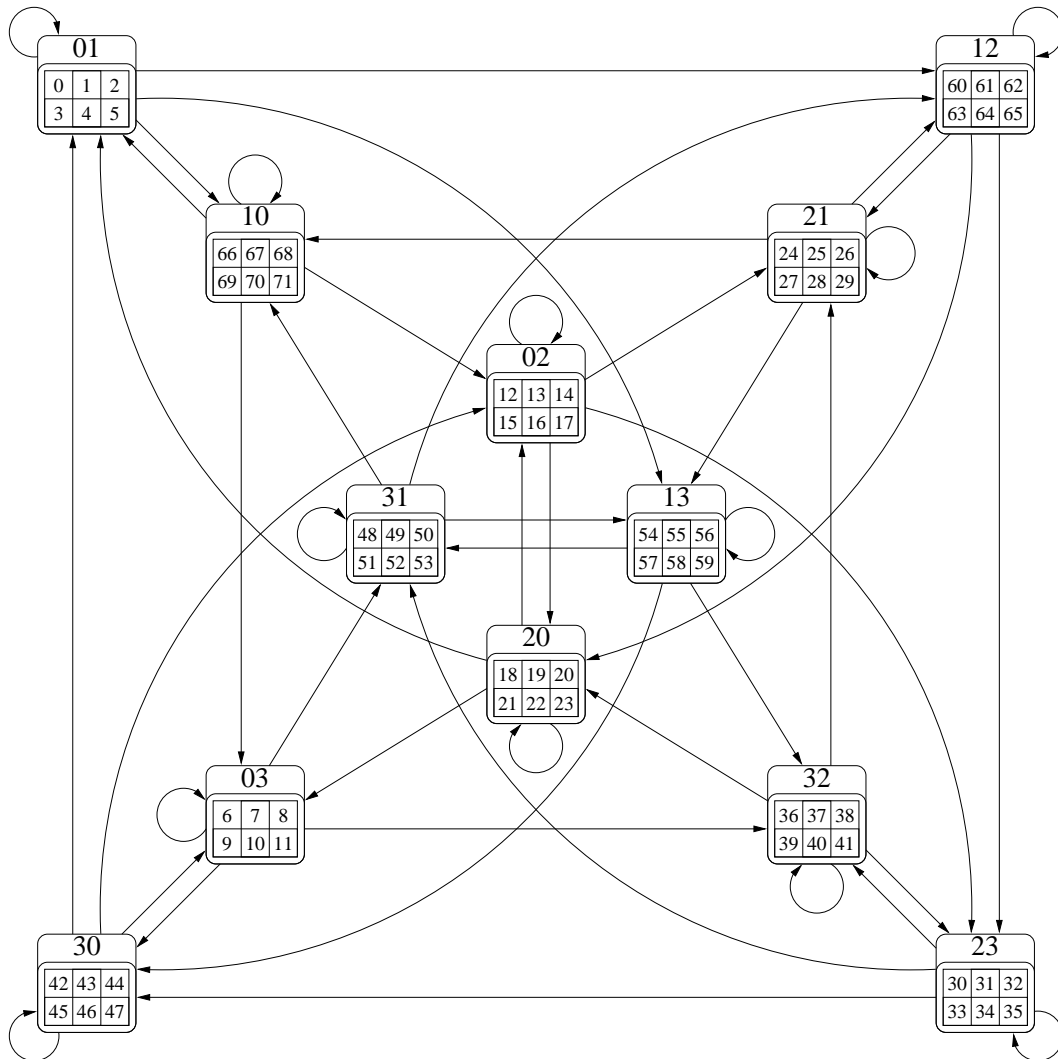
Définition 6.4.2 le stack-Kautz $SK(s, d, D)$ est le stack-graphe $\zeta(s, K_l(d, D))$ de facteur d'empilement s , degré $d + 1$ et diamètre D .

Le stack-Kautz $SK(s, d, D)$ a $n = sd^{D-1}(d + 1)$ sommets. Chaque sommet est étiqueté par un couple $\langle x, i \rangle$, où x est l'étiquette du groupe dans le graphe de Kautz $K(d, D)$, et i est le numéro du sommet dans le groupe x ; $i \in Z_s$. La figure 6.4 nous en donne un exemple.

Nous pouvons montrer que le stack-Kautz représente une généralisation du POPS, en montrant dans la proposition suivante que le POPS est un stack-Kautz.

Proposition 6.4.3 $SK(s, d, 1) = POPS(s, d + 1)$

Preuve : Nous avons $K(d, 1) = K_{d+1}^*$, d'où $K_l(d, 1) = K_{d+1}^+$. Ainsi, $SK(s, d, 1) = \zeta(s, K_l(d, D)) = \zeta(s, K_{d+1}^+) = POPS(s, d + 1)$. \square

FIG. 6.4 – Stack-Kautz $SK(6, 3, 2)$

6.4.2 Excentricité

Nous avons rappelé avec la proposition 2.1.5 page 12 un encadrement de l'excentricité des graphes de Kautz [ST98, ST01]. Nous nous en servons ici pour encadrer la distance moyenne et l'excentricité du stack-Kautz $SK(s, d, D)$.

Proposition 6.4.4 *L'excentricité du stack-Kautz $SK(s, d, D)$ de facteur d'empilement s , degré d et diamètre D , s'exprime en fonction de celle du graphe de Kautz $K(d, D)$ de degré d et de diamètre D comme suit :*

$$e_{SK(s,d,D)} = \left(1 - \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1}\right) e_{K(d,D)} + \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1}$$

Preuve : Dans $SK(s, d, D)$, chaque nœud de $K(d, D)$ a été remplacé par un groupe de s nœuds. Donc, pour chaque chemin de longueur l dans $K(d, D)$, il y a s^l chemins de longueur l dans $SK(s, d, D)$. La somme des longueurs de ces chemins est alors $s^2 g(g-1) e_{K(d,D)}$, où $g = d^{D-1}(d+1)$ est le nombre de nœuds de $K(d, D)$ et le nombre de groupes de $SK(s, d, D)$. De plus, depuis chaque sommet u de $SK(s, d, D)$, il existe un chemin de longueur 1 vers les $s-1$ autres sommets du groupe de u .

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} e_{SK(s,d,D)} &= \frac{s^2 g(g-1) e_{K(d,D)} + sd^{D-1}(d+1)(s-1)}{sd^{D-1}(d+1)(sd^{D-1}(d+1)-1)} \\ &= \left(1 - \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1}\right) e_{K(d,D)} + \frac{(s-1)}{sd^{D-1}(d+1)-1} \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.4.5 *L'excentricité du stack-Kautz $SK(s, d, D)$ de facteur d'empilement s , degré d et diamètre D est encadrée par :*

$$\begin{aligned} e_{SK(s,d,D)} &\geq \left(1 + \frac{1}{sd^{D-1}(d+1)-1}\right) \left(D - \frac{1}{(d-1)\left(1-\frac{1}{d^2}\right)} + \frac{\frac{D}{d} + \frac{1}{d-1}}{d^{D-2}(d^2-1)}\right) + \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1} \\ e_{SK(s,d,D)} &\leq \left(1 + \frac{1}{sd^{D-1}(d+1)-1}\right) \left(D - \frac{1}{d-1} + \frac{2}{d^{D-1}(d^2-1)}\right) + \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1} \end{aligned}$$

Preuve : Si g est le nombre de nœuds de $K(d, D)$ et le nombre de groupes de $SK(s, d, D)$, alors, nous avons

$$\begin{aligned} e_{SK(s,d,D)} &= \left(1 - \frac{s-1}{n-1}\right) e_{K(d,D)} + \frac{s-1}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{s-1}{n-1}\right) \left(1 + \frac{1}{g-1}\right) \bar{\delta}_{K(d,D)} + \frac{s-1}{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \bar{\delta}_{K(d,D)} + \frac{s-1}{n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} e_{SK(s,d,D)} &\geq \left(1 + \frac{1}{sd^{D-1}(d+1)-1}\right) \left(D - \frac{1}{(d-1)\left(1-\frac{1}{d^2}\right)} + \frac{\frac{D}{d} + \frac{1}{d-1}}{d^{D-2}(d^2-1)}\right) + \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1} \\ e_{SK(s,d,D)} &\leq \left(1 + \frac{1}{sd^{D-1}(d+1)-1}\right) \left(D - \frac{1}{d-1} + \frac{2}{d^{D-1}(d^2-1)}\right) + \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)-1} \end{aligned}$$

□

Nous pouvons utiliser ce résultat pour calculer la distance moyenne dans le stack-Kautz.

Proposition 6.4.6 *La distance moyenne du stack-Kautz $SK(s, d, D)$ de facteur d'empilement s , degré d et diamètre D s'exprime en fonction de la distance moyenne du graphe de Kautz $K(d, D)$ de degré d et de diamètre D de la façon suivante :*

$$\bar{\delta}_{SK(s,d,D)} = \bar{\delta}_{K(d,D)} + \frac{s-1}{sd^{D-1}(d+1)}$$

Preuve : Au cours de la preuve du corollaire 6.4.5, nous avons montré que

$$e_{SK(s,d,D)} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \bar{\delta}_{K(d,D)} + \frac{s-1}{n-1}$$

Or, nous avons $\bar{\delta}_{SK(s,d,D)} = \frac{n-1}{n} e_{SK(s,d,D)}$, donc

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{SK(s,d,D)} &= \frac{n-1}{n} e_{SK(s,d,D)} \\ &= \frac{n-1}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \bar{\delta}_{K(d,D)} + \frac{s-1}{n-1} \right) \\ &= \bar{\delta}_{K(d,D)} + \frac{s-1}{n} \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.4.7 *La distance moyenne du stack-Kautz $SK(s, d, D)$ de facteur d'empilement s , degré d et diamètre D est encadrée par*

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{SK(s,d,D)} &\geq D - \frac{1}{(d-1)\left(1 - \frac{1}{d^2}\right)} + \frac{\frac{D}{d} + \frac{1}{d-1}}{d^{D-2}(d^2-1)} + \frac{s-1}{d^{D-1}(d+1)} \\ \bar{\delta}_{SK(s,d,D)} &\leq D - \frac{1}{d-1} + \frac{2}{d^{D-1}(d^2-1)} + \frac{s-1}{d^{D-1}(d+1)} \end{aligned}$$

6.4.3 Caractéristiques

Un réseau d'interconnexions optiques possédant la topologie d'un réseau de stack-Kautz, $SK(s, d, D)$, a $N = sd^{D-1}(d+1)$ processeurs répartis en $g = d^{D-1}(d+1)$ groupes de taille s . De ce fait, il est possible de préserver un faible diamètre D pour avoir un grand nombre de nœuds. Par exemple, $SK(12, 5, 5)$ a $N = 45000$ processeurs pour un diamètre de 5.

Chaque groupe de s processeurs a un degré sortant de $d+1$. Il est donc relié aux entrées de $d+1$ OPS de degré s . Le réseau de stack-Kautz $SK(s, d, D)$ requiert $d^{D-1}(d+1)^2$ OPS de degré s , et nous remarquons que le nombre d'OPS est indépendant du facteur d'empilement.

Nous considérerons que chaque processeur possède un émetteur et un récepteur par OPS. Il y a donc $d+1$ émetteurs et récepteurs par processeurs, soit un total de $sd^{D-1}(d+1)^2$ émetteurs et récepteurs dans le réseau.

Le réseau $POPS(t, g)$ à g groupes de taille t , aura g^2 OPS pour $N = tg$ processeurs. Chaque processeur possède g émetteurs et récepteurs. Il est donc clair que le nombre d'OPS dans $SK(s, d, D)$ est inférieur à celui de $POPS(t, g)$ et il en est de même pour le nombre d'émetteurs et de récepteurs par processeurs et au total dans le réseau.

6.4.4 Scalabilité

L'analyse de scalabilité d'un réseau permet de trouver le meilleur compromis pour le construire, en termes de nœuds/ diamètre / facteur d'empilement / degré / technologie / coût énergétique / prix. Dans un réseau tel que le stack-Kautz, cela correspond au choix des trois paramètres s , d et D .

Le coût énergétique correspond à l'énergie nécessaire à l'émission d'un message d'un nœud du réseau vers un autre, au travers d'une OPS. Nous avons vu dans la section 6.2 qu'un signal optique entrant dans une OPS de degré s est « divisé » en s signaux optiques équivalents, chacun contenant une portion $\frac{1}{s}$ de l'énergie contenue dans le signal émis. Ainsi, lorsqu'un nœud émet un message au travers d'une OPS, s nœuds le reçoivent. De plus, si la quantité d'énergie nécessaire à un récepteur pour détecter un message est normalisée à 1 (en supposant qu'il n'y a pas de perte d'énergie au travers du système optique), alors le coût énergétique de l'émission d'un message au travers d'une OPS est s , le facteur d'empilement.

Il en résulte que la valeur maximum de l'énergie que peut fournir un émetteur divisée par l'énergie minimum que requiert un récepteur pour détecter un message donne la valeur maximum que peut prendre le facteur d'empilement s . Par exemple, l'utilisation d'une VCSEL comme émetteur et d'éléments d'optique diffractive permettent de construire une OPS de degré 16 [GME⁺97], soit un facteur d'empilement de 16.

Le stack-Kautz $SK(s, d, D)$ a $n = sd^{D-1}(d+1)$ nœuds répartis en $g = d^{D-1}(d+1)$ groupes de taille s , et $(d+1)g$ OPS de degré s . Chaque nœud a un degré $d+1$, soit $d+1$ émetteurs et $d+1$ récepteurs. Le nombre total d'émetteurs et de récepteurs dans le réseau est donc $2(d+1)n$. Le diamètre D du réseau correspond au nombre maximum de nœuds qu'un message doit traverser avant d'être délivré.

Lorsque le facteur d'empilement s augmente de s_1 à s_2 , alors :

- Le degré des OPS augmente de s_1 à s_2 ;
- Le nombre de nœuds dans le réseau augmente de $2s_1d^{D-1}(d+1)$ à $2s_2d^{D-1}(d+1)$ (voir les figures 6.5.(a), 6.5.(b) et 6.5.(c)) ;
- Le nombre total d'émetteurs et de récepteurs dans le réseau augmente de $2s_1d^{D-1}(d+1)^2$ à $2s_2d^{D-1}(d+1)^2$.

Ainsi, ces trois ressources augmentent d'un facteur $\frac{s_2}{s_1}$; les autres restant inchangées.

Lorsque le degré d augmente de d_1 à d_2 , alors :

- Le nombre d'émetteurs et de récepteurs par nœuds augmente de $2(d_1+1)$ à $2(d_2+1)$;
- Le nombre de groupes augmente de $d_1^{D-1}(d_1+1)$ à $d_2^{D-1}(d_2+1)$;
- Le nombre d'OPS augmente de $d_1^{D-1}(d_1+1)^2$ à $d_2^{D-1}(d_2+1)^2$;
- Le nombre total d'émetteurs et de récepteurs dans le réseau augmente de $2sd_1^{D-1}(d_1+1)^2$ à $2sd_2^{D-1}(d_2+1)^2$;
- Le nombre de nœuds du réseau augmente de $sd_1^{D-1}(d_1+1)$ à $sd_2^{D-1}(d_2+1)$ (voir les figures 6.5.(a), 6.5.(b), 6.5.(c) et 6.5.(d)).

Ceci signifie que ces quatre ressources augmentent d'un facteur $\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{D-1} \left(\frac{d_2+1}{d_1+1}\right)$; le nombre des autres ressources restant inchangés.

Finalement, lorsque le diamètre D du réseau augmente de D_1 à D_2 , alors :

- Le nombre de groupes augmente de $d^{D_1-1}(d+1)$ à $d^{D_2-1}(d+1)$;
- Le nombre d'OPS augmente de $d^{D_1-1}(d+1)^2$ à $d^{D_2-1}(d+1)^2$;

- Le nombre total d'émetteurs et de récepteurs dans le réseau augmente de $2sd^{D_1-1}(d+1)^2$ à $2sd^{D_2-1}(d+1)^2$;
- Le nombre de nœuds du réseau augmente de $sd^{D_1-1}(d+1)$ à $sd^{D_2-1}(d+1)$ (voir la figure 6.5.(d)).

Donc, ces quatre ressources augmentent d'un facteur $d^{D_2-D_1}$; les autres paramètres restent inchangés.

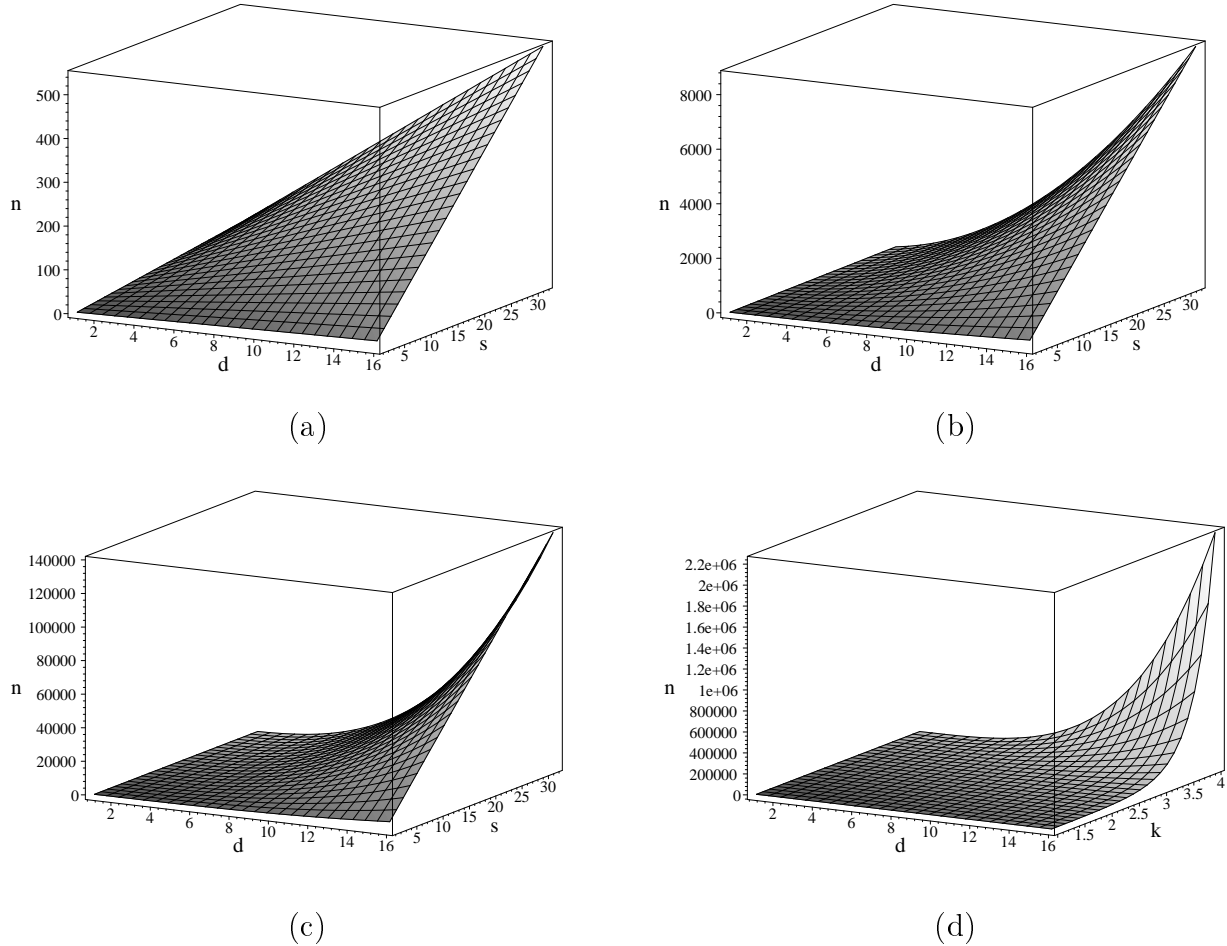


FIG. 6.5 – Les courbes (a), (b) et (c) représentent l'évolution du nombre n de nœuds du POPS (a), et des stack-Kautz de diamètre 2 (b) et de diamètre 3 (c), en fonction du degré d et du facteur d'empilement s . La courbe (d) montre l'évolution du nombre n de nœuds du stack-Kautz de facteur d'empilement $s = 32$, en fonction du degré et du diamètre.

Nous déduisons de cette étude que pour réduire le coût énergétique pour un nombre fixé de nœuds, le nombre de groupes doit être grand comparé à la taille d'un groupe. De plus, il est préférable d'accroître le diamètre du réseau afin de minimiser le nombre d'émetteurs et de récepteurs par nœud. Ainsi, un accroissement du diamètre du réseau permet de diminuer proportionnellement le coût énergétique et les ressources du réseau. Il est nécessaire toutefois de préserver $s \geq d$ pour que le réseau dispose de plus de sommets que d'OPS.

Nous trouverons dans la table 6.2 page 104 des exemples numériques permettant d'illustrer cette étude. En particulier, $SK(20, 9, 2)$ a $n = 1800$ nœuds répartis en 90 groupes de taille 20, et 900 OPS, pour un diamètre 2. Chaque nœud a 10 émetteurs et 10 récepteurs, et le coût énergétique est égal à 20. Si nous augmentons le diamètre de 1, en préservant le même nombre de nœuds et d'OPS dans le réseau, nous obtenons $SK(12, 5, 3)$, qui est formé de 150 groupes de taille 12, et le nombre d'émetteurs et de récepteurs par nœud est 6.

6.4.5 Protocoles de contrôle

Une OPS mono-longueur d'onde peut transmettre seulement un message par étape de communication. Puisque s processeurs partagent $d + 1$ OPS, un protocole de contrôle est nécessaire.

Nous pouvons supposer que $s \geq d$. En effet, si tel n'était pas le cas, alors le réseau disposerait de plus d'OPS que de nœuds, ce qui irait à l'encontre des objectifs de ce réseau.

Un protocole de contrôle pour le réseau $POPS(t, g)$ a été proposé dans [CLM⁺96], sous les hypothèses qu'un processeur peut recevoir un message sur tous ses liens à la même étape de communication, mais qu'il ne peut émettre que sur un lien. Chaque groupe de s processeurs possède un nœud responsable du contrôle, sorte de « leader ». Le déroulement du protocole s'effectue en deux phases. Lors de la première phase, chaque processeur envoie au processeur en charge (du contrôle) de son groupe un mot de $\log g$ bits, encodant l'indice du lien qu'il veut utiliser. Le processeur chargé du contrôle décide qui va réellement pouvoir émettre et renvoie un mot de t bits encodant pour chaque processeur un accord ou un refus. Ensuite, dans une deuxième phase l'algorithme réalise un *rendez-vous* entre les émetteurs et les récepteurs avec acquiescement ou refus. Cette phase nécessite deux échanges totaux d'informations, le premier pour envoyer aux groupes concernés le numéro du processeur qui devra recevoir le message, de taille $g \log t$ bits, et le second pour les accords ou refus (un processeur peut ne pas pouvoir recevoir un message), de taille g bits. La complexité en bits de cette séquence est donc $t \log g + t$ pour la première phase et $g \log t + g$ pour la deuxième, soit au total $t \log g + g \log t + t + g$ bits.

Cette séquence de contrôle est complexe, mais bien qu'elle n'ait pas été développée dans ce but, elle est applicable au cas où plusieurs longueurs d'ondes sont utilisées.

Nous supposons, comme dans [CLM⁺96] qu'un processeur peut recevoir des messages sur tous ses liens en même temps. L'information contenue dans l'entête d'un message permet à un processeur de savoir si il doit le traiter ou non. Il est bon de remarquer qu'un protocole de contrôle doit juste éliminer les conflits locaux, au sein d'un groupe de processeurs.

Hypothèse 6.4.8 *Un processeur possède une file d'attente des messages qu'il doit émettre. Seul le message en tête de file peut-être proposé par un processeur lors d'une étape de communication.*

Le processeur chargé du contrôle du groupe possède s compteurs, un par processeur, qu'il incrémente (de 1) chaque fois qu'un processeur ayant proposé un message reçoit un refus. Un compteur est remis à zéro lorsque le processeur correspondant reçoit un accord.

Un **protocole simple de contrôle** d'un groupe de processeurs, sous les hypothèses 6.4.8, est le suivant. Soit p_0 le processeur chargé du contrôle d'un groupe de s processeurs.

1. Tous les processeurs p_i , $0 < i < s$, du groupe, envoient successivement à p_0 l'indice de l'OPS que chacun d'eux désire utiliser. Cet indice est un mot de $\log(d + 1)$ bits.
2. Le processeur p_0 attribue une OPS à un processeur si il est le seul à vouloir l'utiliser, ou si la valeur de son compteur est la plus forte. En cas de conflit (deux compteurs égaux), un des processeurs est choisi au hasard.
3. Le processeur p_0 envoie un mot de s bits encodant l'acceptation ou le refus (un bit par processeur), à tous les processeurs du groupe. De plus, il augmente de 1 les compteurs des processeurs recevant un refus et remet à zéro ceux recevant une acceptation.

La complexité en bits de ce protocole est clairement $s \log(d + 1) + s$ bits. Quant à la complexité temporelle, nous la calculons dans la proposition suivante.

Proposition 6.4.9 *La complexité temporelle du protocole simple de contrôle pour un groupe de taille s et de degré $d + 1$ est en $O(s)$.*

Preuve : Lors de la réception, par p_0 , des souhaits des s processeurs du groupe, p_0 range dans une table à $d + 1$ entrées les indices des processeurs. Chaque entrée de cette table contient x_i indices, tels que $\sum_{i=0}^d x_i = s$.

p_0 choisit un élément parmi x_i pour chaque entrée de la table, soit au plus x_i comparaisons. Nous avons $\sum_{i=0}^d x_i = s$, donc la complexité temporelle de cet algorithme est en $O(s)$. \square

Un autre protocole de contrôle peut être envisagé, sous les hypothèses suivantes.

Hypothèse 6.4.10 *Un processeur possède $d + 1$ files d'attente de messages à émettre, une pour chaque OPS. $d + 1$ messages peuvent être proposés par un processeur à chaque étape de communication, ceux qui sont en têtes de file d'attente.*

Le processeur chargé du contrôle du groupe, possède $s(d + 1)$ compteurs ($d + 1$ par processeur), soit un par OPS pour chaque processeur, qu'il incrémente (de 1) chaque fois qu'un processeur ayant proposé un message reçoit un refus. Un compteur est remis à zéro lorsque le processeur correspondant reçoit un accord.

Un **protocole avancé de contrôle** d'un groupe de processeurs, sous les hypothèses 6.4.10, est le suivant, si p_0 est le processeur chargé du contrôle d'un groupe de s processeurs.

1. Tous les processeurs p_i , $0 < i < s$, du groupe, envoient successivement à p_0 un mot de $d + 1$ bits encodant la présence ou non d'un message à émettre dans chacune de leurs files d'attente.
2. Le processeur p_0 réalise un couplage de poids maximal entre les processeurs et les OPS en utilisant une pondération induite par les compteurs.
3. Le processeur p_0 envoie un mot de $s \log(d + 2)$ bits encodant l'acceptation (indice de l'OPS accordée) ou le refus (mot réservé), à chacun des processeurs du groupe.

Ce protocole de contrôle est certes plus complexe, mais il permet de maximiser le nombre de liens de communications utilisés à chaque étape.

La complexité en bits de ce protocole est de $s(d + 1) + s \log(d + 2)$ bits.

Proposition 6.4.11 *La complexité en temps du protocole avancé de contrôle est en $O(\sqrt{s+d+1}s(d+1)\log(s+d+1))$.*

Preuve : La complexité de ce protocole est dominée par le couplage, et nous trouvons dans [GT89] un algorithme de couplage de poids maximal dans un graphe biparti orienté en $O(\sqrt{nm}\log(nw))$, où n est le nombre de sommets du graphe biparti, m est le nombre d'arcs du graphe biparti et w est le poids maximal d'un arc.

Ici, le graphe biparti contient $n = s + d + 1$ sommets, s correspondant aux processeurs, et $d + 1$ correspondant aux OPSs, et au plus $m = s(d + 1)$ arcs allant des processeurs vers les OPSs. Il reste à borner le poids maximal d'un arc.

Le pire cas est celui où au temps t_0 , chaque processeur a un nouveau message à émettre sur chacune des OPS. Tous les compteurs associés sont à 0.

- Si $s = \alpha(d + 1)$, alors, à chaque étape de communication, $d + 1$ messages sont émis et les compteurs associés aux messages restant sont incrémentés de 1. Les $d + 1$ derniers messages sont émis à l'étape t_{s-1} . Le poids maximal d'un arc est alors de $w = s - 1$.
- Si $s = \alpha(d + 1) + \beta$, $\beta < d + 1$, alors à l'étape $t_{\alpha(d+1)-1}$ il reste $\beta(d + 1)$ messages à émettre. Si ces messages sont répartis sur β processeurs, seulement β messages seront transmis à chaque étapes, et $d + 1$ étapes sont nécessaires à l'envoi de ces $\beta(d + 1)$ messages. Le poids maximal d'un arc est alors de $w = s + d$.

Nous pouvons donc borner w par $s + d + 1$, et la complexité de l'algorithme de couplage devient $O(\sqrt{s+d+1}s(d+1)\log(s+d+1))$, car $\log(s+d+1)^2 = 2\log(s+d+1)$.

□

D'autres algorithmes de couplage de poids maximal dans les graphes bipartis existent [FT87, KLST01]. Toutefois, ils n'améliorent pas la complexité en temps du protocole de contrôle du fait de la nature de notre graphe.

Enfin, si nous autorisons un processeur à émettre plusieurs messages à une même étape de communication, chacun au travers d'une OPS différente, alors nous pouvons remplacer l'algorithme de couplage de poids maximal par un algorithme plus simple. En effet, il suffit de choisir pour chaque OPS l'arc entrant de poids maximal. Ainsi, la complexité en temps devient $O(s(d + 1))$, la complexité en bit restant inchangée.

6.4.6 Routage

Le routage sur le graphe de Kautz est simple, comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe 2.1.3 page 10. Nous montrons maintenant comment obtenir un routage simple sur le stack-Kautz, puis nous étudions le nombre d'étapes de communication nécessaires à l'acheminement d'un message.

Définition 6.4.12 *Un algorithme de routage dans le stack-Kautz $SK(s, d, D)$ de facteur d'empilement s , de degré $d + 1$ et de diamètre D , depuis un nœud $\langle g, p \rangle$ vers un nœud $\langle g', p' \rangle$, où g et g' sont des étiquettes de groupes, et p et p' les indices des sommets dans les groupes, est le suivant :*

1. Trouver un chemin μ de g à g' dans le graphe de Kautz $K(d, D)$, tel que $\mu = (g = g_0, \dots, g_l = g')$, $0 \leq l \leq D$.
2. Construire le chemin μ_{SK} de $SK(s, d, D)$, en remplaçant dans μ le groupe g_0 par le nœud $\langle g, p \rangle$ et les groupes g_i , $1 \leq i \leq l$ par les nœuds $\langle g_i, p' \rangle$.
3. Suivre le chemin μ_{SK} , de telle sorte que seuls les nœuds apparaissant dans ce chemin considèrent le message; les autres nœuds ne tiendront pas compte du message s'ils le reçoivent.

Le routage sur le stack-Kautz est donc équivalent au routage sur le graphe de Kautz. Pour utiliser un routage des plus courts chemins sur $SK(s, d, D)$, il suffit d'utiliser un routage des plus courts chemins sur $K(d, D)$. Il en est de même pour obtenir un routage tolérant jusqu'à $d - 1$ pannes [ISO86], ou pour générer deux chemins nœuds disjoints [SHP91].

Nous allons maintenant montrer qu'un protocole simple de contrôle permet à tout message d'être transmis en un temps borné, sous l'hypothèse que les messages suivent tous un chemin de longueur au plus D .

Proposition 6.4.13 *Le nombre d'étapes de communications maximal nécessaire à l'acheminement d'un message, de sa source à sa destination, dans $SK(s, d, D)$, en utilisant le protocole simple de contrôle, sous l'hypothèse que tout message suit un chemin de longueur au plus D , est Dsb , où b est la taille d'une mémoire tampon (en nombre de messages).*

Preuve : Dans le protocole simple de contrôle, chaque nœud du réseau dispose d'une unique file d'attente de message à transmettre (mémoire tampon).

Lorsqu'un message est placé pour la première fois en tête de file d'attente, il sera, au pire, émis au bout de s étapes de communications. En effet, si tous les nœuds du groupe disposent d'un message à émettre au travers de la même OPS, s étapes de communications sont nécessaires pour les émettre.

Lorsqu'un message arrive dans un nœud, il est placé en dernière position de la file d'attente. Si cette file d'attente contient b messages, alors au plus bs étapes de communication sont nécessaires pour retransmettre le message.

Le diamètre du réseau est D , donc un message traverse au plus D files d'attentes.

Finalement, un message mettra au plus Dsb étapes de communications pour être acheminé jusqu'à sa destination. □

De même, montrons que le nombre d'étapes de communications maximal nécessaires à l'acheminement d'un message, de sa source à sa destination, en utilisant le protocole avancé de contrôle, en suivant un plus court chemin, est borné.

Proposition 6.4.14 *Le nombre d'étapes de communications maximal nécessaire à l'acheminement d'un message, de sa source à sa destination, dans $SK(s, d, D)$, en utilisant le protocole avancé de contrôle, sous l'hypothèse que tout message suit un chemin de longueur au plus D , est $(s + d + 1)bD$, où b est la taille d'une file d'attente de messages.*

Preuve : Dans ce modèle, chaque nœud du réseau dispose de $d + 1$ files d'attente.

Lorsqu'un message arrive en tête de file d'attente dans un nœud, au pire, toutes les files d'attentes de tous les nœuds du groupe sont non vides. Alors, le message mettra au plus $s + d + 1$ étapes de communication à être retransmis. En effet, nous avons montré au cours de la preuve de la proposition 6.4.11 que le poids maximal d'un arc est $s + d$, c'est-à-dire $s + d$ étapes de communications passées en attente. Le message est retransmis à l'étape $s + d + 1$, au pire.

Lorsqu'un message arrive dans un nœud il est placé en dernière position de la file d'attente. Si cette file d'attente contient b messages, alors au plus $b(s + d + 1)$ étapes de communication sont nécessaires pour retransmettre le message.

Le diamètre du réseau est D , donc un message traverse au plus D files d'attentes.

Finalement, un message mettra au plus $D(s + d + 1)b$ étapes de communications pour être acheminé jusqu'à sa destination. \square

Maintenant, il est intéressant d'étudier le temps d'acheminement moyen d'un message dans le stack-Kautz.

Soit $\gamma(t)$ la charge du réseau à l'instant t , c'est-à-dire le nombre de messages présents dans le réseau à l'instant t , $M(t)$, divisé par le nombre de nœuds du réseau; $\gamma(t) = \frac{M(t)}{n}$. Lorsque la charge est supposée constante, alors nous noterons la charge γ et le nombre de message M . De plus, lorsque la charge est supposée constante, dès qu'un message atteint sa destination, et donc disparaît du réseau, un nouveau message est généré.

Proposition 6.4.15 *Le temps moyen d'acheminement d'un message, de sa source à sa destination, dans le stack-Kautz $SK(s, d, D)$, sous les hypothèses suivantes :*

1. *Tout message suit un plus court chemin ;*
 2. *Les files d'attentes sont de taille infinie ;*
 3. *La charge γ est telle que, à chaque étape de communication, tous les liens sont utilisés.*
- est $\gamma \frac{s \cdot e_{SK(s, d, D)}}{d+1}$, où $e_{SK(s, d, D)}$ est l'excentricité du réseau.*

Preuve : Un message doit, en moyenne, effectuer $e_{SK(s, d, D)}$ sauts avant d'atteindre sa destination. Comme tous les liens de communications sont utilisés à chaque étape de communication, alors, à chaque étape, $\frac{d^{k-1}(d+1)^2}{e_{SK(s, d, D)}}$ messages atteignent leur destination.

M messages sont présents dans le réseau à chaque étape de communication, le temps moyen, t_m , d'acheminement d'un message de sa source à sa destination, est

$$t_m = \frac{M}{\frac{d^{k-1}(d+1)^2}{e_{SK(s, d, D)}}$$

or, $M = \gamma N = \gamma s d^{k-1} (d + 1)$, donc,

$$t_m = \gamma \frac{s \cdot e_{SK(s, d, D)}}{d + 1}$$

\square

Nous remarquons que le résultat de la proposition 6.4.15 ne tient pas compte du protocole de contrôle utilisé. Ceci est dû à l'hypothèse que la charge γ est suffisante pour garantir que tous les liens sont utilisés à chaque étape de communication. De plus, le temps d'attente dans un nœud est une composante de la charge du réseau.

La preuve de la proposition 6.4.15 nous permet d'exprimer la probabilité maximale de création de messages que puisse admettre un nœud du réseau à chaque étape de communication, pour que le réseau ne soit pas saturé.

Proposition 6.4.16 *La probabilité maximale p_{max} de création de messages par un nœud, à chaque étape de communication, pour que le réseau ne soit pas saturé, lorsqu'une utilisation maximale des liens est garantie et que tout message suit un plus court chemin, est*

$$p_{max} = \frac{d+1}{s \cdot e_{SK(s,d,D)}}$$

Preuve : Utilisons un raisonnement par l'absurde et supposons que tous les nœuds du réseau aient une probabilité de création de messages $p > p_{max}$. Alors, le nombre de messages créés à chaque étape de communication est np . Nous avons alors $np > np_{max} = \frac{d^{k-1}(d+1)^2}{e_{SK(s,d,D)}}$. Donc, à chaque étape de communication, il y a plus de messages créés que de messages arrivant à destination. La charge $\gamma(t)$ du réseau augmente jusqu'à saturation du réseau.

Finalement, si $p_{max} = \frac{d+1}{s \cdot e_{SK(s,d,D)}}$, alors $np_{max} = \frac{d^{k-1}(d+1)^2}{e_{SK(s,d,D)}}$ nouveaux messages apparaissent dans le réseau à chaque étape de communication, ce qui compense les $\frac{d^{k-1}(d+1)^2}{e_{SK(s,d,D)}}$ qui atteignent leurs destinations à chaque étape. \square

Une analyse simple du comportement de la charge d'un réseau $SK(s, d, D)$ utilisant le protocole avancé de contrôle, sous l'hypothèse de routage des plus courts chemins, en fonction de la probabilité p qu'ont les nœuds de ce réseau de générer de nouveaux messages, nous montre les résultats suivants, où $\gamma(p)$ est la charge induite par p :

1. Si p est constante, avec $p \leq p_{max}$, alors la charge $\gamma(p)$ est constante ;
2. Si p augmente jusqu'à $p' \leq p_{max}$, alors la charge augmente linéairement jusqu'à $\gamma(p')$;
3. Si p diminue jusqu'à p'' , alors la charge diminue linéairement vers $\gamma(p'')$.

De ce fait, ce réseau supportera des « pics » de génération de messages, produits par exemple lors d'une diffusion ou d'un échange total, ce qui valide le fait que ce réseau possède de bonnes propriétés pour la réalisation d'un réseau d'interconnexions entre processeurs.

Les simulations de $SK(s, d, D)$, que nous verrons dans le paragraphe 6.4.8 permettront de confirmer les diverses propositions qui ont été faites dans ce paragraphe.

Le lecteur trouvera dans [Ber97], d'autres résultats intéressants. En particulier, ces travaux comportent une étude de la taille des files d'attente en fonction de la charge, ainsi qu'une étude du temps d'acheminement avec « haute probabilité » des messages.

6.4.7 Diffusion

Nous donnons maintenant un algorithme de diffusion sur le stack-Kautz optimal en temps lorsque $s \geq d$, et nous donnons une borne supérieure sur la diffusion lorsque $s < d$.

Théorème 6.4.17 *Si $s \leq d$, alors $b_{H_1}(SK(s, d, D)) = D + 1$.*

Preuve : Lorsqu'un message est émis au travers d'une OPS, il est reçu par les s sommets du groupe récepteur. Ensuite, comme $s \leq d$, les sommets du groupe récepteur peuvent retransmettre le message vers d nouveaux groupes (sans utiliser la boucle). Ainsi, la diffusion dans $SK(s, d, D)$ devient équivalente à la diffusion dans $K(d, D)$ sous la contrainte H_* , au bout de la première étape de communication. De plus, $b_{H_*}(K(d, D)) = D$, donc $b_{H_1}(SK(s, d, D)) = 1 + b_{H_*}(K(d, D)) = D + 1$.

□

Proposition 6.4.18 *Si $s < d$, alors $b_{H_1}(SK(s, d, D)) \leq 1 + b_{H_s}(K(d, D))$.*

Preuve : Après une étape de communication, les s nœuds d'un groupe ont reçu le message et sont en mesure de le retransmettre. Comme $s < d$, la diffusion à partir de ce groupe est équivalente à la diffusion sous la contrainte H_s sur $K(d, D)$.

□

Proposition 6.4.19 *Si $s < d$, alors $b_{H_1}(SK(s, d, D)) \leq D + \log_s(d+1) + (D-1) \left\lceil \log_{s+1} \frac{d}{s} \right\rceil$.*

Preuve : Il a été montré dans [BMMS01] que si une diffusion dans le modèle H_p , $p \leq d$, dans un graphe G de degré constant d s'achève en t étapes, alors une diffusion dans le modèle H_p sur le graphe $L(G)$ en nécessite au plus $t + \left\lceil \log_{p+1} \frac{d}{p} \right\rceil + 1$. Ainsi, si $s \leq d$, nous avons

$$\begin{aligned} b_{H_s}(K(d, D)) &\leq b_{H_s}(K_{d+1}^*) + (D-1) \left(\left\lceil \log_{s+1} \frac{d}{s} \right\rceil + 1 \right) \\ &\leq \log_s(d+1) + (D-1) \left(\left\lceil \log_{s+1} \frac{d}{s} \right\rceil + 1 \right) \end{aligned}$$

Aussi, en utilisant la proposition 6.4.18, nous obtenons

$$b_{H_1}(SK(s, d, D)) \leq D + \log_s(d+1) + (D-1) \left\lceil \log_{s+1} \frac{d}{s} \right\rceil$$

□

6.4.8 Comparaisons entre le POPS et le stack-Kautz

Dans cette partie, nous comparons les deux réseaux d'interconnexions optiques multi-OPS que sont le POPS et le stack-Kautz. Tout d'abord nous regardons les ressources de ces deux réseaux, puis nous donnons des résultats obtenus par simulations.

Ressources

Étant donné un stack-Kautz $SK(s, d, D)$ de facteur d'empilement s , de degré $d + 1$ et de diamètre D , et un réseau $POPS(t, g)$ composé de g groupes de taille t , il est possible de comparer ces deux réseaux en posant $s = c(d + 1)$, $t = cg$ et $g = d^{\frac{D-1}{2}}(d + 1)$, où $c \geq 1$ est le facteur de proportionnalité résultant de l'analyse d'extensibilité [CLM⁺96]. La table 6.1 donne les caractéristiques des réseaux de stack-Kautz et de POPS et la table 6.2 donne des évidences numériques pour les deux réseaux.

	$SK(s, d, D)$	$POPS(t, g)$
Groupes	$d^{D-1}(d + 1)$	$g = d^{\frac{D-1}{2}}(d + 1)$
Nœuds	$cd^{D-1}(d + 1)^2$	$tg = cd^{D-1}(d + 1)^2$
Diamètre	D	1
Degré OPS	$s = c(d + 1)$	$t = c(d + 1)d^{\frac{D-1}{2}}$
OPS	$d^{D-1}(d + 1)^2$	$g^2 = d^{D-1}(d + 1)^2$
E.-Rec. par nœud	$d + 1$	$g = d^{\frac{D-1}{2}}(d + 1)$
E.-Rec. total	$cd^{D-1}(d + 1)^3$	$tg^2 = cd^{\frac{3(D-1)}{2}}(d + 1)^3$
Coût énergétique	$s = c(d + 1)$	$t = c(d + 1)d^{\frac{D-1}{2}}$
Diffusion (étapes)	$D + 1$	2
Contrôle (bits)	$c(d + 1)(\log(d + 2) + d + 1)$	$d^{D-1}(d + 1)^2 \left((c + 1) \left(\frac{D-1}{2} \log d + \log(d + 1) + 1 \right) + \log c \right)$

TAB. 6.1 – Ressources dans $SK(s, d, D)$ et $POPS(t, g)$, avec $c > 0$, $s = c(d + 1)$, $t = cg$ et $g = d^{\frac{D-1}{2}}(d + 1)$.

	$POPS(60, 30)$	$SK(20, 9, 2)$	$SK(12, 5, 3)$	$SK(12, 5, 5)$
Groupes	30	90	150	3750
Nœuds	1800	1800	1800	45000
Diamètre	1	2	3	5
Degré OPS	60	20	12	12
OPS	900	900	900	22500
E.-Rec. par nœud	30	10	6	6
E.-Rec. total	54000	18000	10800	270000
Coût énergétique	60	20	12	12
Diffusion (étapes)	2	3	4	6
Contrôle (bits)	570	280	108	108

TAB. 6.2 – Exemples numérique de ressources dans SK et $POPS$.

6.4.9 Simulations

Nous avons construit un simulateur pour le stack-Kautz, utilisant un routage des plus courts chemins. Ce simulateur peut utiliser les deux protocoles de contrôle que nous avons défini dans la section 6.4.5. La taille des messages est normalisée. Aussi, chaque étape de communication prend un temps unitaire.

Afin de comparer les protocoles de contrôles définis pour le stack-Kautz, nous maintenons une charge constante γ dans le réseau $SK(12, 5, 3)$, par « injection » de messages (dès qu'un message atteint sa destination, un nouveau message est généré dans le réseau), durant 1000 étapes de communications. La figure 6.6 nous donne, pour les deux protocoles, les pourcentages cumulés de messages acheminés à destination en fonction du nombre d'étapes nécessaires à cet acheminement, ainsi que le cumul du nombre correspondant de messages arrivés. Pour la figure 6.6.(a), la charge est maintenue à $\gamma = 0.5$, et pour la figure 6.6.(b), la charge est maintenue à $\gamma = 2(d + 1) = 12$.

Le choix d'une charge $\gamma = 2(d + 1)$ découle de l'étude du temps moyen d'acheminement d'un message, qui nécessite que tous les liens soient utilisés à chaque étape de communication. Comme dans le protocole avancé, chaque nœud dispose de $d + 1$ files d'attente, cette charge nous donne l'espérance que toutes les files d'attente contiennent au moins un message à chaque étape et donc que tous les liens sont utilisés à chaque étape.

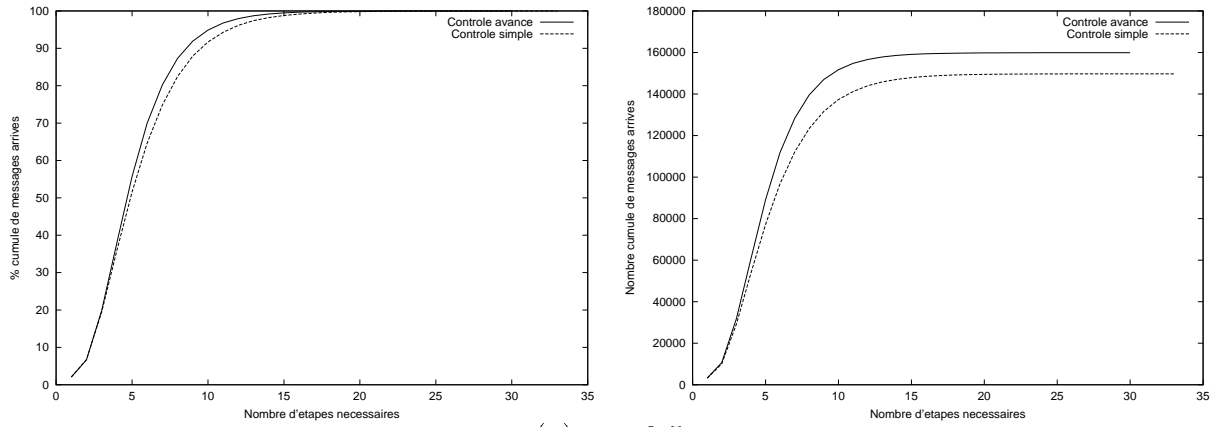
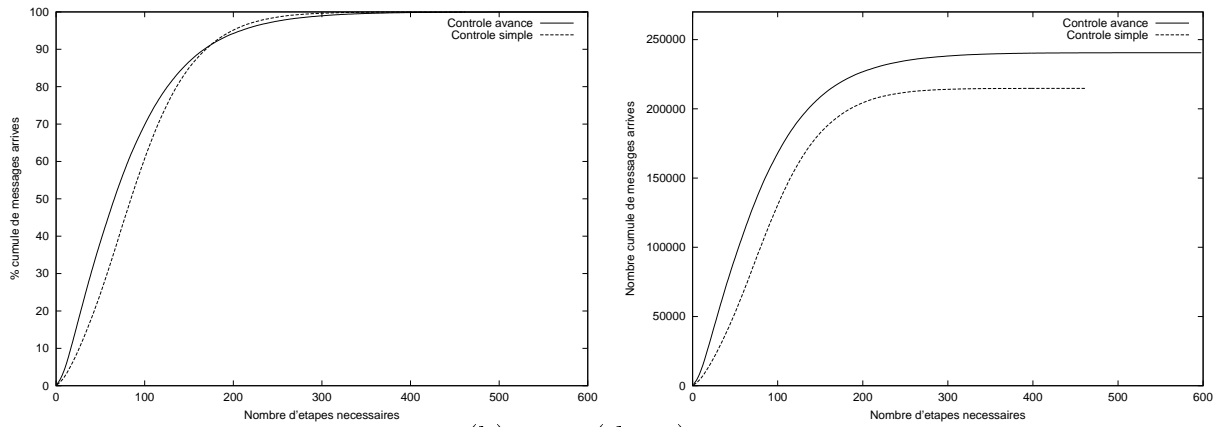
Nous remarquons que les pourcentages cumulés de messages acheminés sont similaires pour les deux protocoles, mais que le nombre total de messages acheminés est différent. En effet, même si la charge γ du réseau est la même pour les deux protocoles, le « délai d'acheminement d'un message » est différente, et donc, le nombre total de messages injectés dans le réseau est également différent. Ceci nous montre que le protocole de contrôle avancé est plus efficace que le protocole simple, et qu'il permet une meilleure utilisation des ressources du réseau.

Vérifions maintenant que le temps moyen d'acheminement d'un message, que nous avons donné dans la proposition 6.4.15, est bien obtenu par simulation sur $SK(12, 5, 3)$. Nous avons évalué le temps moyen d'acheminement d'un message, dans la proposition 6.4.15, à $t_m = \gamma \frac{s \cdot e_{SK(s,d,D)}}{d+1}$, où $e_{SK(s,d,D)}$ est l'excentricité du réseau. En utilisant l'encadrement de l'excentricité du stack-Kautz, donné dans la proposition 6.4.4, nous avons $2.75 \leq e_{SK(12,5,3)} \leq 2.78$. Dans la figure 6.6, la charge est maintenue à $\gamma = 12$, d'où $66 \leq t_m \leq 66.7$. Ce résultat est validé par notre simulation, où, pour le protocole avancé, 50% des messages atteignent leur destination en moins de 66 étapes.

Le protocole simple de contrôle ne vérifie pas le résultat théorique. En effet, le rapport entre s et $d+1$ n'est pas suffisant pour garantir, avec ce protocole, une utilisation permanente de tous les liens de communications.

La figure 6.7 nous donne les pourcentages et pourcentages cumulés de messages acheminés au cours de 1000 étapes de communications sur $SK(12, 5, i)$, $2 \leq i \leq 5$ pour les charges $\gamma = 0.5$, 1 et $2(d + 1) = 12$, en utilisant le protocole de contrôle avancé. Nous observons qu'une faible charge ne permet pas d'atteindre le temps moyen d'acheminement des messages, alors qu'une charge élevée, $\gamma = 12$, le permet.

La figure 6.8 nous montre, au travers des réseaux $SK(12, 5, i)$, $2 \leq i \leq 5$, pour les deux

(a) $\gamma = 0.5$.(b) $\gamma = 2(d + 1) = 12$ FIG. 6.6 – $SK(12, 5, 3)$ pour les charges $\gamma = 0.5$ et $2(d + 1) = 12$.

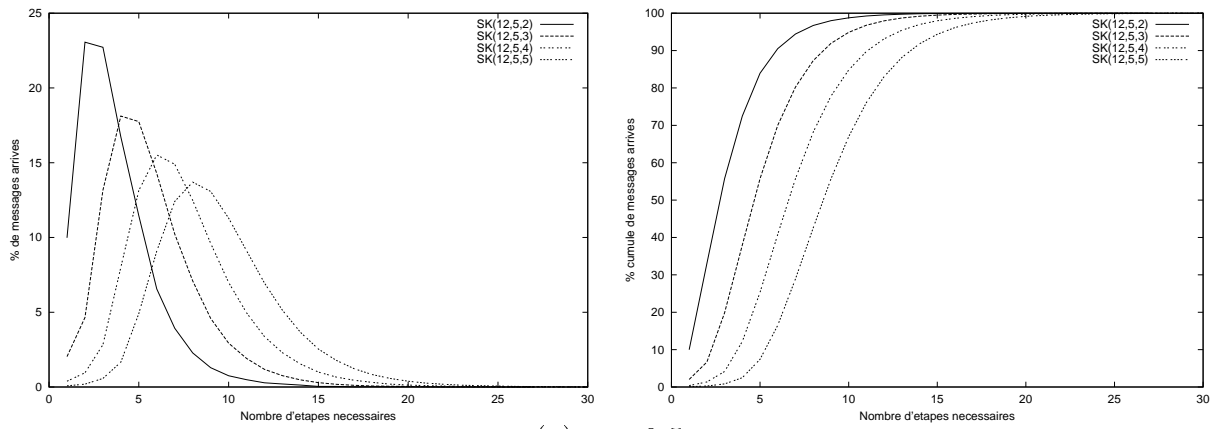
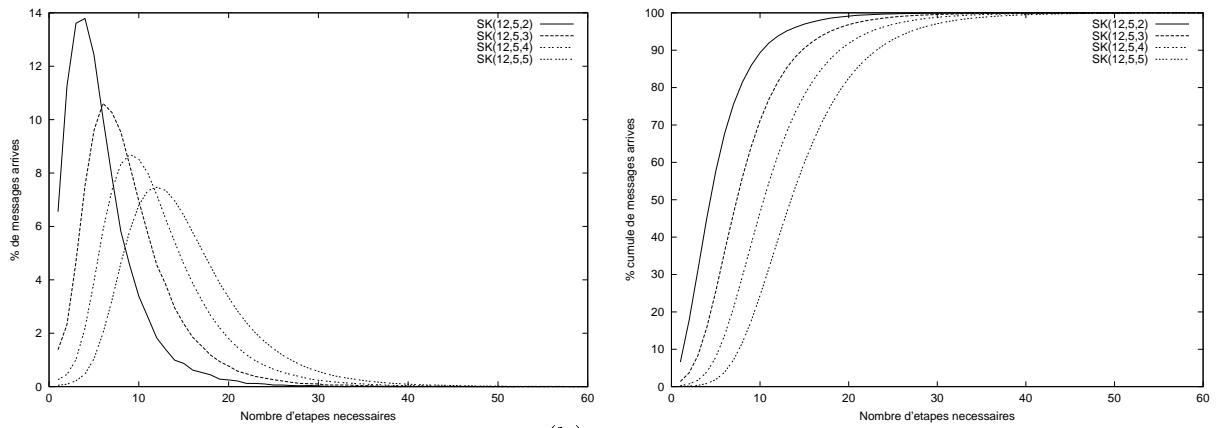
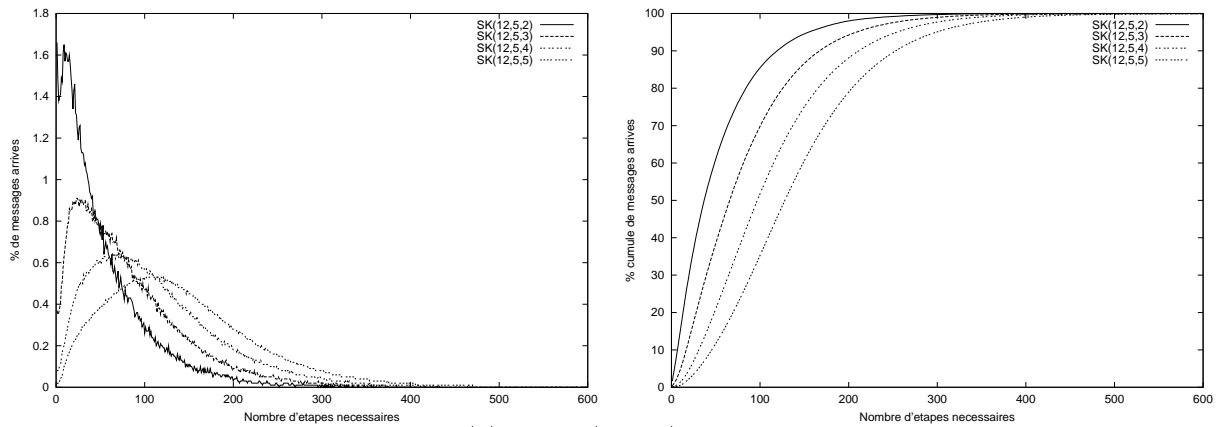
(a) $\gamma = 0.5$.(b) $\gamma = 1$.(c) $\gamma = 2(d+1) = 12$.

FIG. 6.7 – Pourcentages et pourcentages cumulés de messages acheminés au cours de 1000 étapes de communications sur $SK(12, 5, i)$, $2 \leq i \leq 5$ pour les charges $\gamma = 0.5, 1$ et $2(d+1) = 12$.

protocoles de contrôle et pour une charge $\gamma = 2(d + 1) = 12$, l'augmentation exponentielle du nombre de messages acheminés en fonction du diamètre du réseau. La simulation porte sur 1000 étapes de communications. De plus, nous observons encore une fois que le protocole avancé permet d'acheminer davantage de messages que le protocole simple.

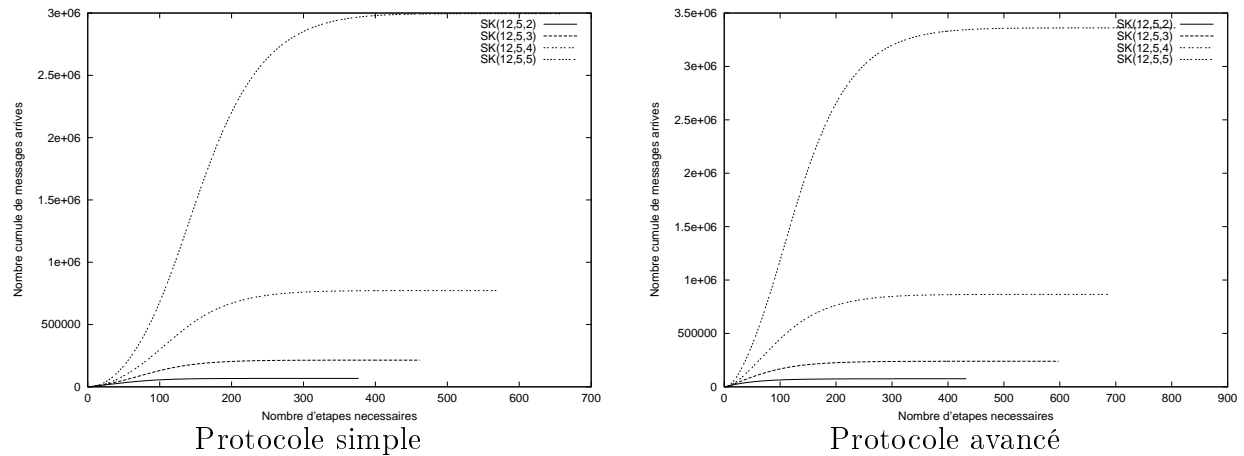


FIG. 6.8 – Nombre cumulé de messages acheminés dans $SK(12, 5, i)$, $2 \leq i \leq 5$ pour une charge $\gamma = 2(d + 1) = 12$ et pour chacun des protocoles.

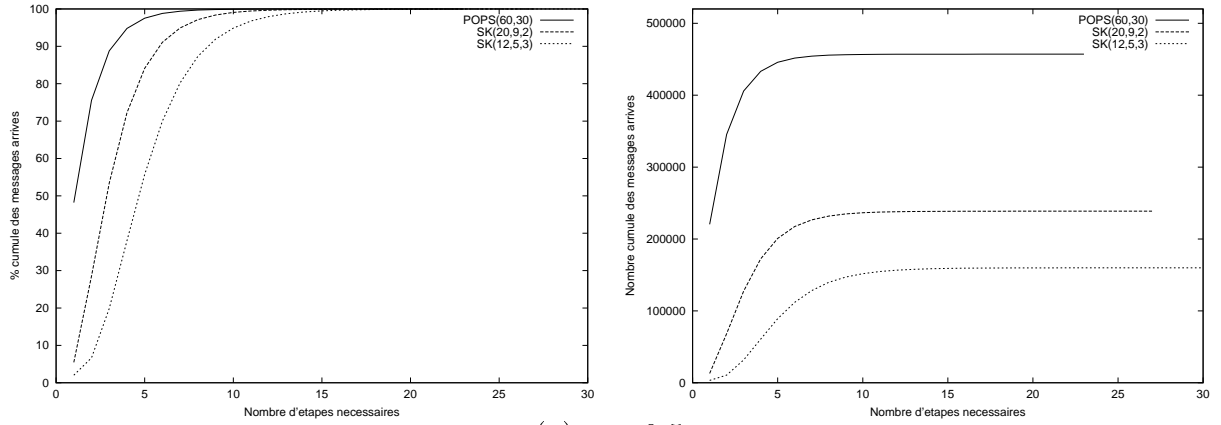
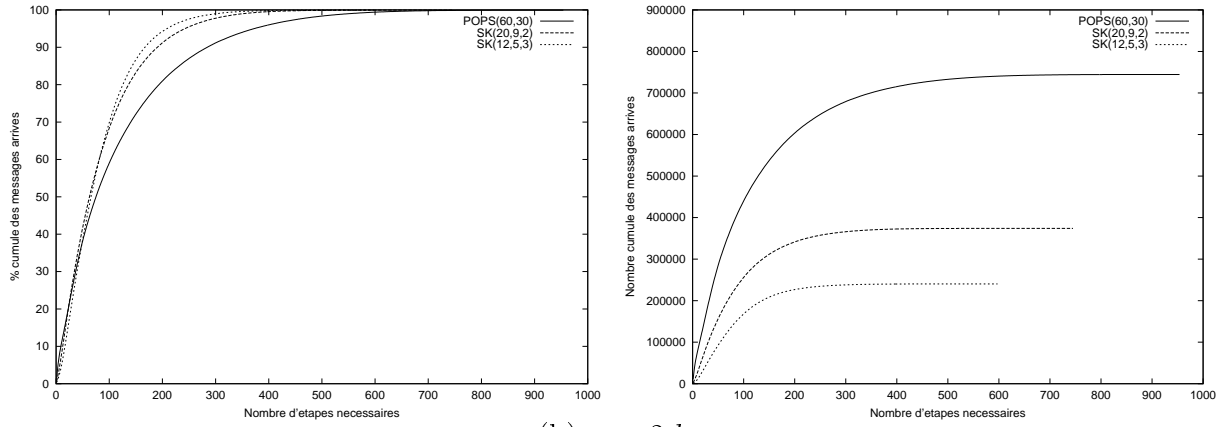
Pour un nombre fixé de sommets, nous pouvons étudier l'influence du diamètre sur le temps d'acheminement des messages, et sur le nombre de messages acheminés au cours de 1000 étapes de communication. La figure 6.9 donne le résultat de la simulation des 3 réseaux à 1800 sommets dont les ressources sont données dans la table 6.1 : $POPS(60, 30)$, $SK(20, 9, 2)$ et $SK(12, 5, 3)$, pour les charges $\gamma = 0.5$ et $2d$. Nous observons que l'augmentation du diamètre augmente linéairement le temps moyen d'acheminement des messages, alors qu'elle diminue exponentiellement le nombre de messages acheminés.

6.4.10 Plongements

Proposition 6.4.20 ([BF96]) *Soit $G = (V, A)$, un graphe orienté à n sommets. Trouver un plongement des communications de G sur $SK(s, d, D)$ qui minimise le temps d'achèvement, est équivalent à trouver un plongement de G sur $K_l(d, D)$ qui minimise la congestion des arcs.*

La preuve consiste à rappeler que le temps d'achèvement des communications correspond au nombre maximum de communications point-à-point utilisant une même OPS, ce qui est équivalent à la mesure de la congestion des arcs de $K_l(d, D)$.

Théorème 6.4.21 *Il existe un plongement optimal des communications du cycle \vec{C}_n sur $SK(s, d, D)$.*

(a) $\gamma = 0.5$.(b) $\gamma = 2d$.FIG. 6.9 – $POPS(60, 30)$, $SK(20, 9, 2)$ et $SK(12, 5, 3)$, pour les charges $\gamma = 0.5$ et $2d$.

Preuve : Le graphe de Kautz est eulérien. Ainsi, de même que pour le plongement de \vec{C}_n sur $POPS(s, g)$ (théorème 6.3.2), il suffit d'associer le sommet 0 du cycle à un sommet de $SK(s, d, D)$, puis de suivre un circuit eulérien sur $K_l(d, D)$ en associant le i^e sommet du cycle à un sommet du i^e groupe de sommets traversé par le circuit eulérien. De plus, plusieurs parcours du circuit eulérien peuvent être utilisés, lorsque $n > sd^{D-1}(d+1)$.

□

Dans ce plongement, la congestion des OPS (ou hyperarcs) est de

$$econg(SK(s, d, D)) = \frac{n}{d^{D-1}(d+1)^2} = \frac{|A(\vec{C}_n)|}{|A(K_l(d, D))|}$$

Théorème 6.4.22 *Il existe un plongement optimal des communications de $K(d, D)$ sur $SK(s, d, D-1)$, lorsque $s = d$ et $D \geq 2$.*

Preuve : La preuve de ce théorème utilise un automorphisme du graphe de Kautz [THH98] permettant de réaliser un plongement optimal de $K(d, D)$ sur $K(d, D-1)$, en plongeant les sommets $\{\alpha x_{D-2} \dots x_1 x_0 \mid \alpha \in Z_{d+1} \setminus \{x_{D-2}\}\}$ de $K(d, D)$, sur le sommet $x_{D-2} \dots x_1 x_0$ de $K(d, D-1)$. Comme $s = d$, chacun des sommets de $K(d, D)$ est associé à un unique sommet de $SK(s, d, D-1)$.

□

Remarquons que dans ce plongement, deux sommets voisins de $K(d, D)$ ne sont jamais associés au même groupe de $SK(s, d, D-1)$, et que nous n'utilisons pas les boucles. La congestion des OPS est de $\frac{d^D(d+1)}{d^{D-2}(d+1)d} = d$.

Corollaire 6.4.23 *Il existe un plongement optimal des communications de $K(d, k)$ sur $SK(s, d, D)$, où $s = d^{k-D}$, $k \geq D$.*

Preuve : De même que pour le théorème 6.4.22, ce résultat utilise un automorphisme du graphe de Kautz [THH98]. Le sommet $x_{k-1} \dots x_{D-1} \dots x_1 x_0$ de $K(d, k)$ est plongé sur le sommet $x_{D-1} \dots x_1 x_0$ de $K(d, D)$, c'est-à-dire sur le groupe de sommets $x_{D-1} \dots x_1 x_0$ de $SK(s, d, D)$. Comme $s = d^{k-D}$, chacun des sommets de $K(d, k)$ est associé à un unique sommet de $SK(s, d, D)$.

□

Remarquons que si deux sommets x et y de $K(d, k)$, tels que $y \in \cup_{i=1}^{k-D} \Gamma_{K(d,k)}^+(x)$, sont plongés sur un même groupe g de $SK(s, d, D)$, alors le chemin de x à y pourra être « raccourci » en utilisant la boucle du groupe g . Ainsi, la congestion du plongement sera diminuée. Toutefois, cette amélioration du plongement ne sera pas asymptotiquement significative sur la congestion.

Corollaire 6.4.24 *Il existe un plongement optimal des communications de $K(d, k)$ sur $SK(s, d, D)$, où $s \in \mathbb{N}$, $k \geq D$.*

Preuve : Il suffit de plonger $K(d, k)$ sur $K(d, D)$, puis de répartir l'ensemble de sommets de $K(d, k)$ plongé sur un même sommet de $K(d, D)$, sur les s sommets du groupe correspondant de $SK(s, d, D)$.

□

6.5. IMPLANTATION DU POPS ET DU STACK-KAUTZ AVEC OTIS 111

La congestion des OPS de ce plongement est la même que la congestion des OPS dans le plongement du corollaire 6.4.23. En effet, la congestion des OPS est indépendante du facteur d'empilement s .

Proposition 6.4.25 *Il existe un plongement optimal des communications de $SK(s_1, d, D)$ sur $SK(s_2, d, D)$.*

Preuve : Il suffit de répartir les s_1 sommets d'un groupe sur les s_2 du groupe cible. Si $s_1 < s_2$, des sommets du groupe cible ne se voient pas attribuer de sommets. □

Corollaire 6.4.26 *Il existe un plongement optimal des communications de $SK(s_1, d, D_1)$ sur $SK(s_2, d, D_2)$, lorsque $D_1 \geq D_2$.*

Preuve : Si $D_1 = D_2$, nous sommes dans le cas de la proposition 6.4.25. Si $D_1 > D_2$, alors il suffit de plonger les groupes de sommets de $SK(s_1, d, D_1)$ sur les groupes de sommets de $SK(s_2, d, D_2)$, en utilisant le plongement de $K(d, D_1)$ sur $K(d, D_2)$, puis de répartir les $s_1 d^{D_1 - D_2}$ sommets de $SK(s_1, d, D_1)$ plongés sur un même groupe de $SK(s_2, d, D_2)$, sur les s_2 sommets formant ce groupe. □

Corollaire 6.4.27 *Il existe un plongement optimal des communications de $SK(s_1, d, D)$ sur $POPS(s_2, d + 1)$.*

Preuve : D'après le corollaire 6.4.26, il existe un plongement optimal des communications de $SK(s_1, d, D)$ sur $SK(s_2, d, 1)$, et d'après la proposition 6.4.3, $SK(s_2, d, 1) = POPS(s_2, d + 1)$. □

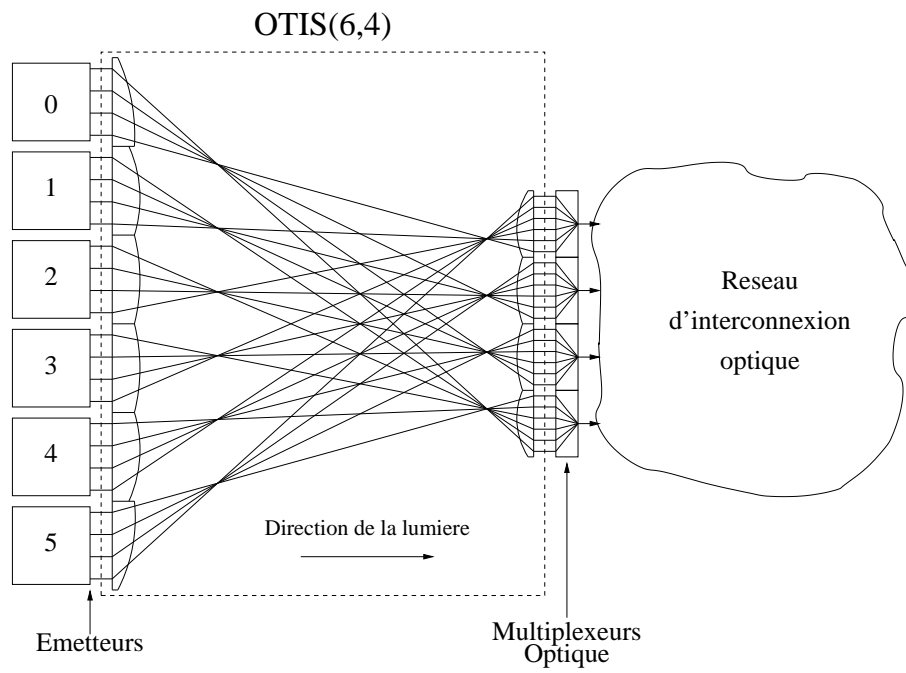
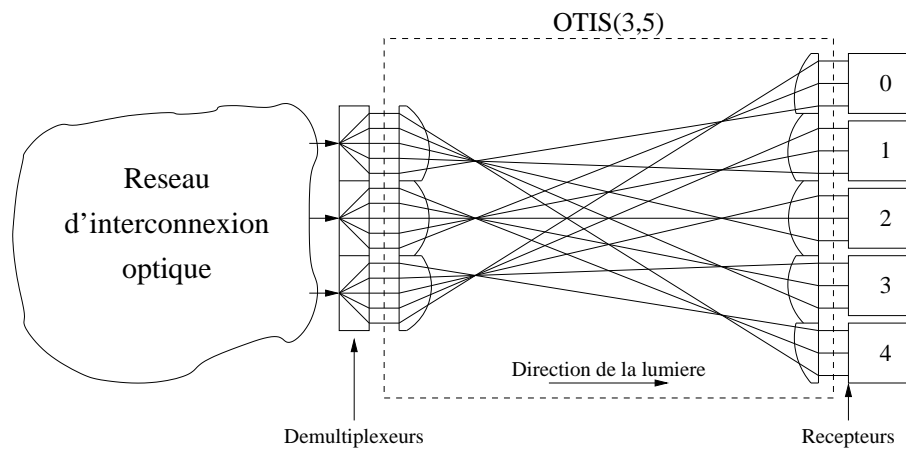
6.5 Implantation du POPS et du stack-Kautz avec OTIS

Nous montrons ici comment utiliser OTIS pour connecter d'une part les sorties des nœuds aux entrées des OPS et d'autre part les sorties des OPS aux entrées des nœuds.

6.5.1 Groupes de sommets

Dans un stack-graphe, les s nœuds d'un groupe sont reliés aux entrées de d OPS, chaque nœud étant relié à toutes les OPS. Nous avons un graphe biparti complet de s vers d nœuds. Nous pouvons réaliser les interconnexions optiques entre les s nœuds d'un groupe et les d OPS en utilisant un $OTIS(s, d)$ plus d multiplexeurs optiques (entrée d'une OPS). La figure 6.10 montre comment connecter les émetteurs d'un groupe de 6 nœuds, aux entrées de 4 OPS, avec $OTIS(6, 4)$.

De façon analogue, nous pouvons réaliser les interconnexions optiques entre les sorties de d OPS et les s nœuds d'un groupe, en utilisant un $OTIS(d, s)$ plus d démultiplexeurs optiques. La figure 6.11 montre comment connecter 3 démultiplexeurs de degré 5 aux récepteurs d'un groupe de 5 nœuds, avec $OTIS(3, 5)$.

FIG. 6.10 – $POPS(4, 2)$.FIG. 6.11 – $POPS(4, 2)$.

6.5.2 POPS

Nous avons vu que le POPS peut être modélisé par un stack-graphe : $POPS(t, g) \equiv \zeta(t, K_g^+)$. De plus, nous savons réaliser les interconnexions optiques de K_g^+ en utilisant $OTIS(g, g)$, du fait de la relation $K_g^+ \equiv H(g, g, g)$. Enfin, nous venons de montrer comment relier les émetteurs aux OPS et les OPS aux récepteurs. Finalement, nous pouvons réaliser les interconnexions optiques de $POPS(t, g)$ en utilisant g $OTIS(t, g)$ plus g $OTIS(g, t)$, plus g^2 multiplexeurs et démultiplexeurs, plus un $OTIS(g, g)$. La figure 6.12 illustre cette remarque avec $POPS(4, 2)$.

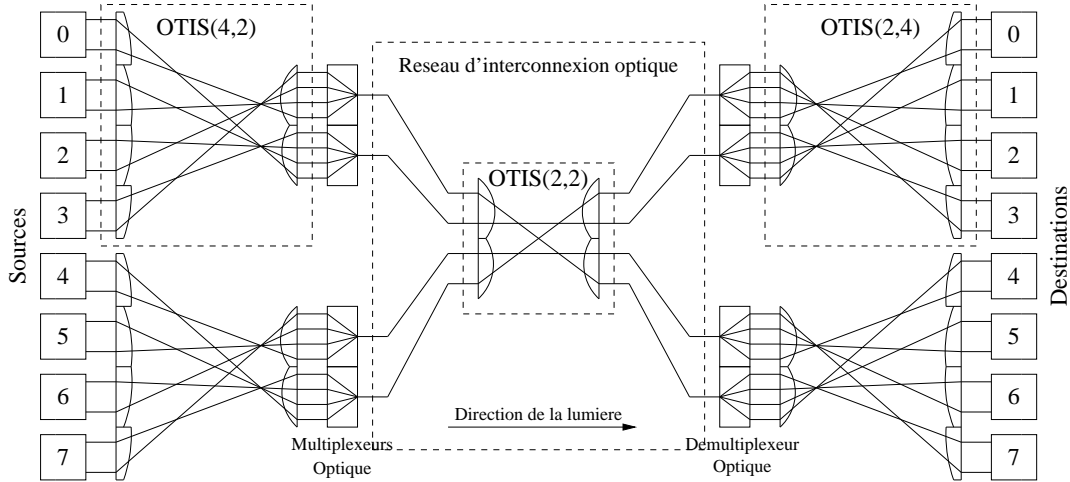


FIG. 6.12 – $POPS(4, 2)$ réalisé avec OTIS.

6.5.3 Stack-Kautz

Le stack-Kautz $SK(s, d, D)$ a $d^{D-1}(d+1)$ groupes de s nœuds et $d^{D-1}(d+1)^2$ OPS de degré s . Chaque nœud a un degré $d+1$.

Nous avons expliqué comment connecter un groupe de s nœuds aux $d+1$ OPS qui lui correspondent. Ainsi, en utilisant $d^{D-1}(d+1)$ $OTIS(s, d+1)$ plus $d^{D-1}(d+1)$ $OTIS(d+1, s)$, nous pouvons connecter tous les groupes de s nœuds aux $d+1$ multiplexeurs et démultiplexeurs appropriés.

Maintenant, il reste à relier chaque multiplexeur au démultiplexeur qui lui correspond, dans le réseau d'interconnexion. Nous avons montré, dans la proposition 4.2.9 page 54, que le graphe de Imase-Itoh $II(d, n)$ est isomorphe au graphe $H(d, n, d)$ construit sur $OTIS(d, n)$. Donc, le graphe de Kautz $K(d, D)$ admet une implantation avec $OTIS(d, d^{D-1}(d+1))$. Le stack-Kautz $SK(s, d, D)$ est construit à partir du graphe de Kautz $K(d, D)$ auquel ont été ajoutés des boucles. Si nous ne considérons pas les boucles, nous pouvons interconnecter les multiplexeurs et les démultiplexeurs en utilisant un $OTIS(d, d^{D-1}(d+1))$.

Une boucle étant un lien local à un groupe, la connexion entre le multiplexeur et le démultiplexeur correspondant pourra se faire localement par une technique appropriée (utilisation de fibre optique par exemple).

Finalement, les interconnexions optiques du stack-Kautz, comme le montre l'exemple de la figure 6.13, peuvent être réalisées avec $d^{D-1}(d+1)$ *OTIS*($s, d+1$) plus $d^{D-1}(d+1)$ *OTIS*($d+1, s$), $d^{D-1}(d+1)^2$ multiplexeurs et $d^{D-1}(d+1)^2$ démultiplexeurs et un *OTIS*($d, d^{D-1}(d+1)$). Le premier multiplexeur et le premier démultiplexeur de chaque groupe correspondent à la boucle. La figure 6.14 donne une autre représentation de l'exemple de la figure 6.13.

6.6 Hypergraphes de de Bruijn et de Kautz

Les hypergraphes de de Bruijn et de Kautz ont été proposés dans [BE96, BDE97] comme des réseaux d'interconnexions à base de bus. Ils ont pour objectif de connecter le plus de processeurs possible dans un réseau où le degré des processeurs, la taille des bus et le diamètre sont bornés.

Ces hypergraphes sont construits à partir des relations d'adjacences des graphes de de Bruijn généralisés (voir la définition des graphes de Reddy, Pradhan et Kuhl 2.1.3 page 10) et des graphes de Kautz généralisés (voir la définition des graphes de Imase et Itoh 2.1.6 page 12).

6.6.1 Hypergraphes de de Bruijn généralisés

Définition 6.6.1 ([BE96]) *L'hypergraphe de de Bruijn généralisé $\mathcal{HdB}(d, n, s, m)$, avec $dn = sm$, est l'hypergraphe orienté à n sommets de degré d et m hyperarcs de degré sortant s , tel que :*

- Les sommets sont numérotés par des entiers modulo n , $\mathcal{V}(\mathcal{HdB}) = \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- Les hyperarcs sont numérotés par des entiers modulo m , $\mathcal{A}(\mathcal{HdB}) = \{0, 1, \dots, m-1\}$;
- Un sommet u est incident aux hyperarcs $\{a \equiv du + \alpha \pmod{m} \mid 0 \leq \alpha < d\}$;
- Un hyperarc a est incident aux sommets $\{v \equiv sa + \beta \pmod{n} \mid 0 \leq \beta < s\}$.

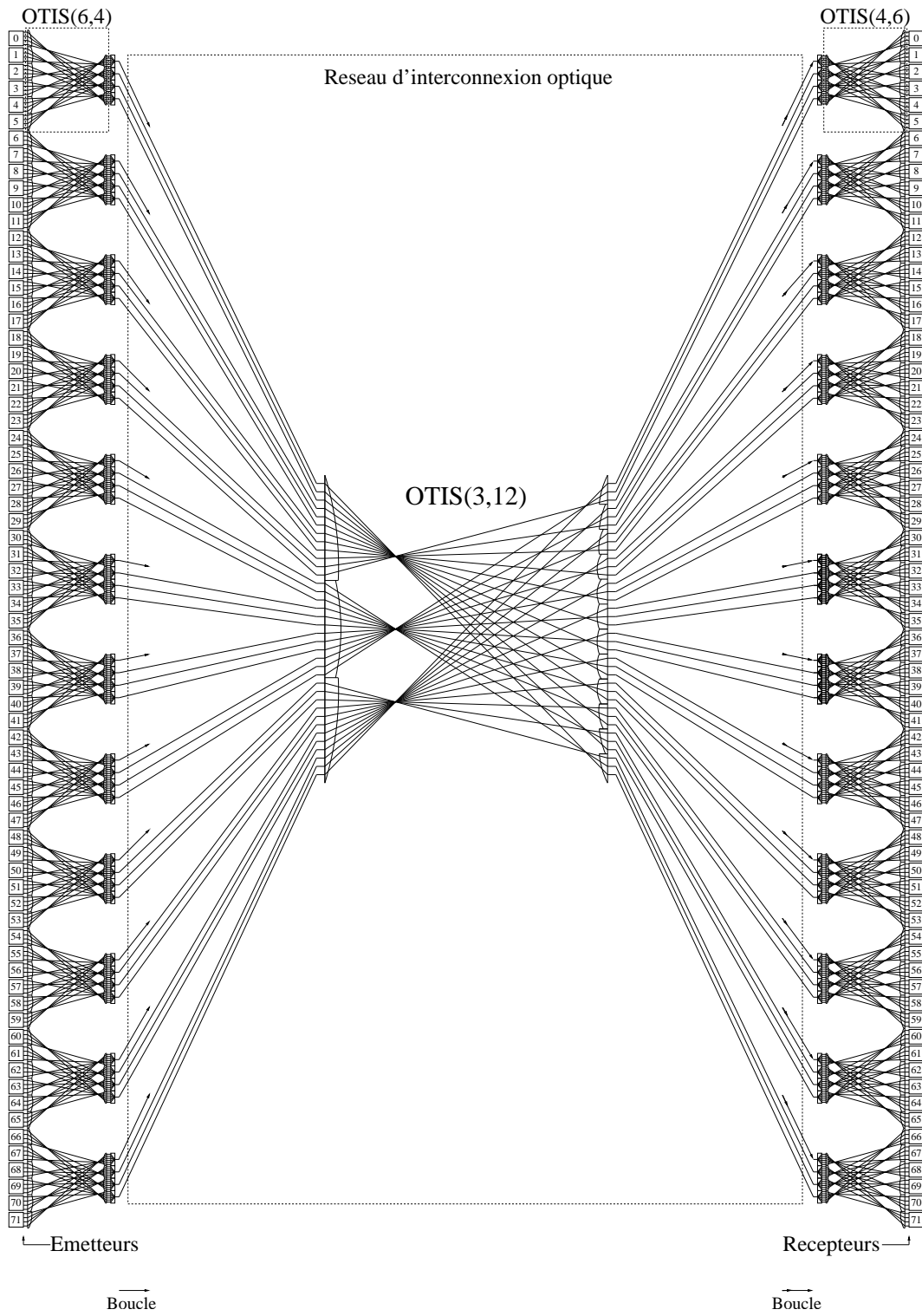
Le multigraphe sous-jacent à l'hypergraphe $\mathcal{HdB}(d, n, s, m)$, est le graphe de de Bruijn généralisé ou graphe de Reddy, Pradhan et Kuhl $RPK(ds, n)$. Il en résulte que le routage dans l'hypergraphe est similaire à celui de $RPK(ds, n)$ et que son diamètre est $D_{\mathcal{HdB}} = \lceil \log_{ds} n \rceil$.

Nous pouvons proposer une définition alternative, utilisant les graphes de Imase et Itoh, qui nous sera utile par la suite.

Définition 6.6.2 (alternative) *Soit $\mathcal{HdB}_2(d, n, s, m)$, l'hypergraphe orienté avec $dn = sm$, à n sommets de degré d et m hyperarcs de degré sortant s , tel que :*

- Les sommets sont numérotés par des entiers modulo n , $\mathcal{V}(\mathcal{HdB}_2) = \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- Les hyperarcs sont numérotés par des entiers modulo m , $\mathcal{A}(\mathcal{HdB}_2) = \{0, 1, \dots, m-1\}$;
- Un sommet u est incident aux hyperarcs $\{a \equiv -du - \alpha - 1 \pmod{m} \mid 0 \leq \alpha < d\}$;
- Un hyperarc a est incident aux sommets $\{v \equiv -sa - \beta - 1 \pmod{n} \mid 0 \leq \beta < s\}$;

Proposition 6.6.3 *Le multigraphe sous-jacent à l'hypergraphe orienté $\mathcal{HdB}_2(d, n, s, m)$ est le graphe $RPK(ds, n)$.*

FIG. 6.13 – $SK(6, 3, 2)$.

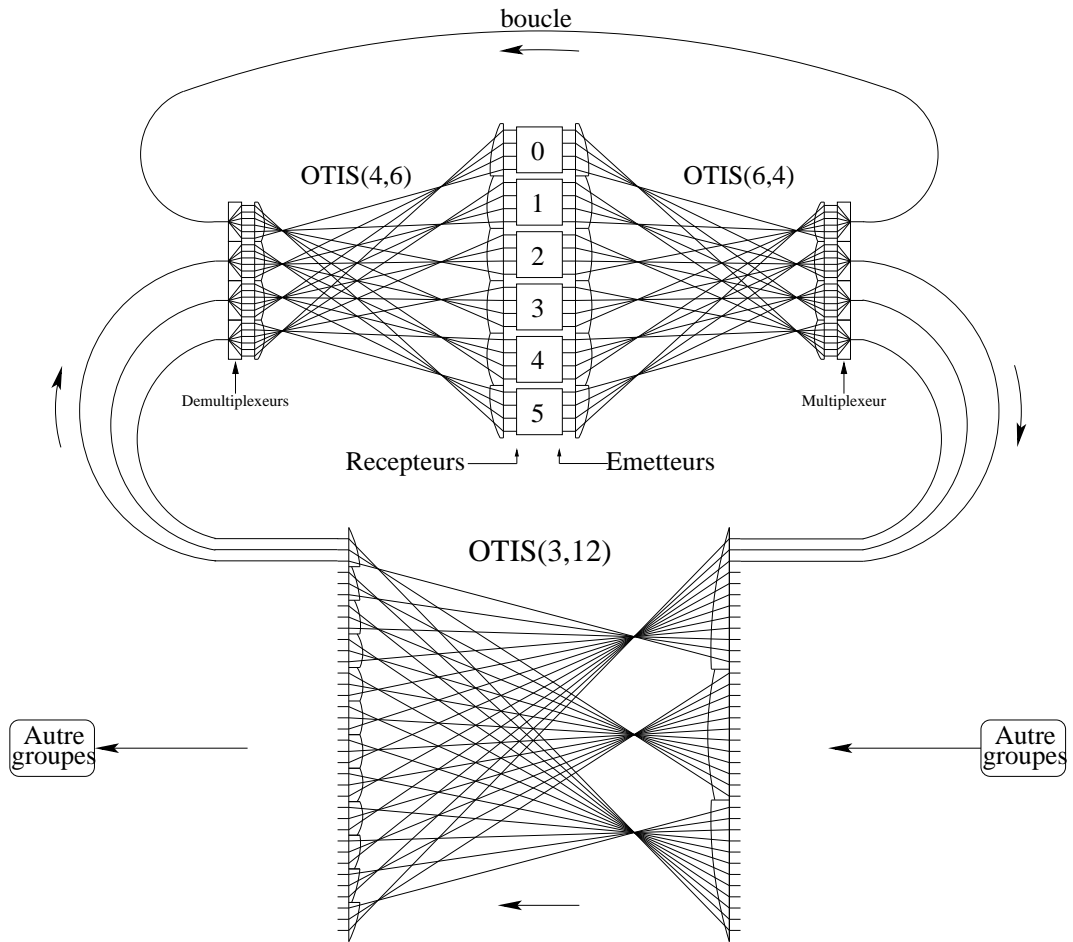


FIG. 6.14 - $SK(6, 3, 2)$.

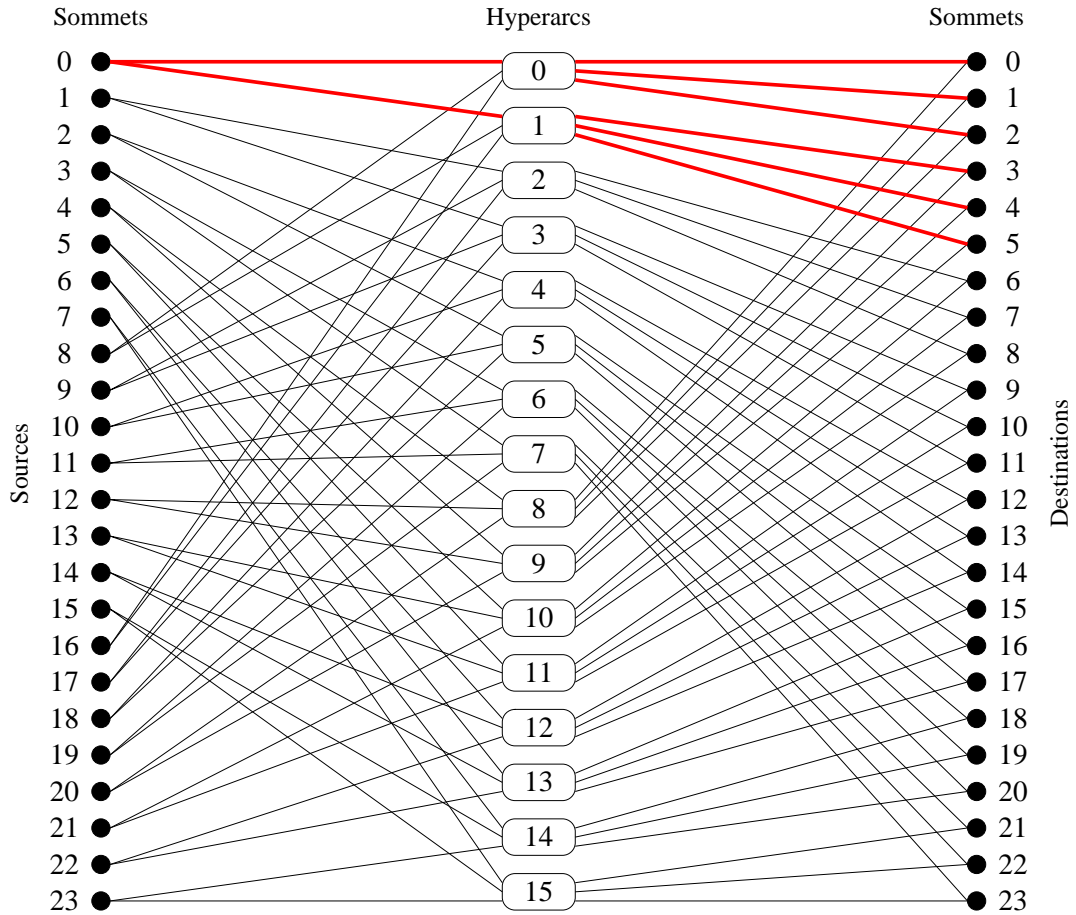


FIG. 6.15 – Hypergraphe de de Bruijn Généralisé construit à partir de la relation d'adjacence du graphe de Reddy Pradhan et Kuhl, $\mathcal{HdB}(2, 24, 3, 16)$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{V}(\mathcal{HdB}_2)$. Le sommet u est incident via les hyperarcs de la forme $a \equiv -du - \alpha - 1 \pmod{m}$, $0 \leq \alpha < d$, aux sommets $\Gamma_{\mathcal{HdB}_2}^+(u) = \{v \equiv -sa - \beta - 1 \pmod{n} \mid 0 \leq \beta < s\}$. Nous avons $a = km - du - \alpha - 1$, pour un certain k . Alors

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{HdB}_2}^+(u) &= \{v \equiv -s(km - du - \alpha - 1) - \beta - 1 \pmod{n} \mid 0 \leq \alpha < d, 0 \leq \beta < s\} \\ &= \{v \equiv -skm + sdu + s\alpha + s - \beta - 1 \pmod{n} \mid 0 \leq \alpha < d, 0 \leq \beta < s\} \end{aligned}$$

Or $0 \leq (s - \beta - 1) < s$, d'où $0 \leq s\alpha + s - \beta - 1 = \gamma < ds$, et de plus $dn = sm$, donc $\Gamma_{\mathcal{HdB}_2}^+(u) = \{v \equiv sdu + s\alpha + \gamma \pmod{n} \mid 0 \leq \gamma < sd\}$. C'est exactement la relation d'adjacence du graphe $RPK(ds, n)$. \square

Ainsi, nous pouvons utiliser indifféremment les définitions 6.6.1 et 6.6.2 pour manipuler les hypergraphes de de Bruijn généralisés. Pour illustrer cette propriété, la figure 6.15 représente le graphe $\mathcal{HdB}(2, 24, 3, 16)$ construit à partir de la définition 6.6.1, et la figure 6.16 représente le même hypergraphe lorsqu'il est construit à partir de la définition 6.6.2. Remarquons que cet hypergraphe a un diamètre 2.

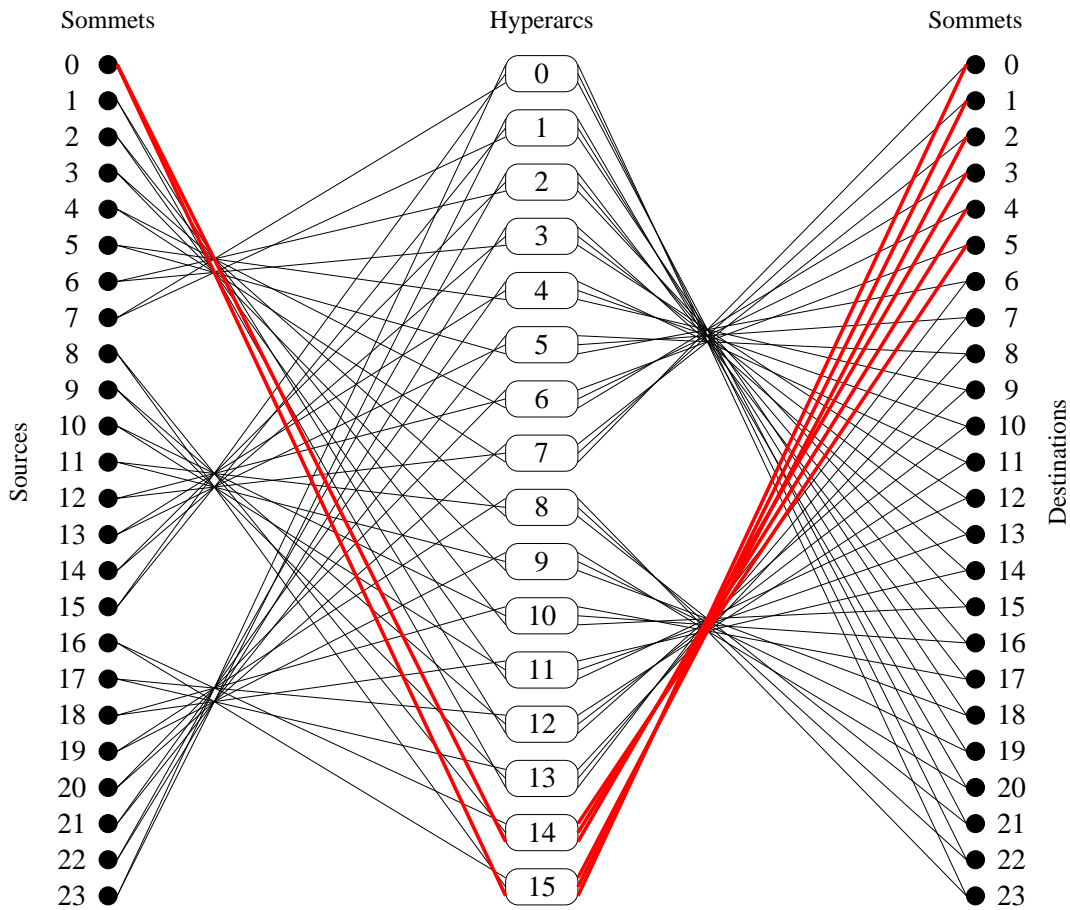


FIG. 6.16 – Hypergraphe de de Bruijn Généralisé construit à partir de la relation d'adjacence du graphe de Imase et Itoh, $\mathcal{HdB}_2(2, 24, 3, 16)$.

Remarque 6.6.4 *Si le multigraphe sous-jacent à l'hypergraphe $u \in \mathcal{V}(\mathcal{HdB}_2)(d, n, s, m)$ est le graphe de de Bruijn $B(ds, D)$, avec $n = (ds)^D$, la relation d'incidence des sommets aux hyperarcs est celle du graphe de de Bruijn $B(d, D_1)$, $n = d^{D_1}$, et la relation d'incidence des hyperarcs aux sommets est celle du de Bruijn $B(s, D_2)$, $n = s^{D_2}$, alors le facteur d'empilement s est une puissance de d .*

Preuve : Nous avons $n = (ds)^D = d^{D_1} = s^{D_2}$ d'où $s = d^{\frac{D_1}{D_2}}$, et s est une puissance de d . \square

Maintenant, dans le cas où $n = (ds)^D = d^{D_1} = s^{D_2}$, pouvons nous remplacer les relations d'adjacences de $B(d, D_1)$ et $B(d, D_2)$ par les relations d'adjacences des graphes $A(f_1, \pi_1, j_1)$ et $A(f_2, \pi_2, j_2)$ définis dans la section 5.1.

6.6.2 Hypergraphes de Kautz généralisés

Définition 6.6.5 ([BE96]) *L'hypergraphe de Kautz généralisé $\mathcal{HK}(d, n, s, m)$, avec $dn = sm$, est l'hypergraphe orienté à n sommets de degré d et m hyperarcs de degré sortant s , tel que :*

- Les sommets sont numérotés par des entiers modulo n , $\mathcal{V}(\mathcal{HK}) = \{0, 1, \dots, n - 1\}$;
- Les hyperarcs sont numérotés par des entiers modulo m , $\mathcal{A}(\mathcal{HK}) = \{0, 1, \dots, m - 1\}$;
- Un sommet u est incident aux hyperarcs $\{a \equiv du + \alpha \pmod{m} \mid 0 \leq \alpha < d\}$;
- Un hyperarc a est incident aux sommets $\{v \equiv -sa - \beta - 1 \pmod{n} \mid 0 \leq \beta < s\}$.

Le multigraphe sous-jacent à l'hypergraphe $\mathcal{HK}(d, n, s, m)$, est le graphe de Kautz généralisé ou graphe de Imase et Itoh $II(ds, n)$. Le routage est donc similaire, et le diamètre de l'hypergraphe \mathcal{HK} est $\lfloor \log_{ds} n \rfloor \leq D(\mathcal{HK}) \leq \lceil \log_{ds} n \rceil$; de plus, le diamètre est D si $n = (ds)^D + (ds)^{D-k}$, où k est un entier impair positif.

La figure 6.17 représente l'hypergraphe de Kautz généralisé $\mathcal{HK}(2, 24, 3, 16)$, de diamètre 2.

6.6.3 Réalisation avec OTIS

Comme les hypergraphes de de Bruijn et de Kautz généralisés sont construits à partir des graphes de de Bruijn et de Kautz généralisés dont nous avons proposé une implantation avec OTIS, il est naturel de proposer une implantation de ces hypergraphes, avec OTIS.

En utilisant la définition de l'hypergraphe de de Bruijn généralisé, donnée dans la définition 6.6.2, nous déduisons une implantation des interconnexions optiques du réseau $\mathcal{HdB}_2(d, n, s, m)$, utilisant :

- Un $OTIS(s, m)$ pour relier les d émetteurs de chacun des n nœuds aux entrées des m OPS de degré s . En effet, cette adjacence utilise le graphe de Imase et Itoh $II(s, m)$;
- m multiplexeurs et m diviseurs de degré s , formant m OPS de degré s ;
- Un $OTIS(d, n)$ pour relier les s sorties de chacune des m OPS, aux récepteurs des n sommets. En effet, cette adjacence utilise le graphe de Imase et Itoh $II(d, n)$.

De façon similaire, et en utilisant « l'astuce » décrite dans la section 4.2.4 page 55 permettant l'implantation des graphes de de Bruijn généralisés avec OTIS, en utilisant deux lentilles pour inverser le vecteur de faisceaux optique, nous obtenons une implantation des interconnexions optique du réseau $\mathcal{HK}(d, n, s, m)$, utilisant :

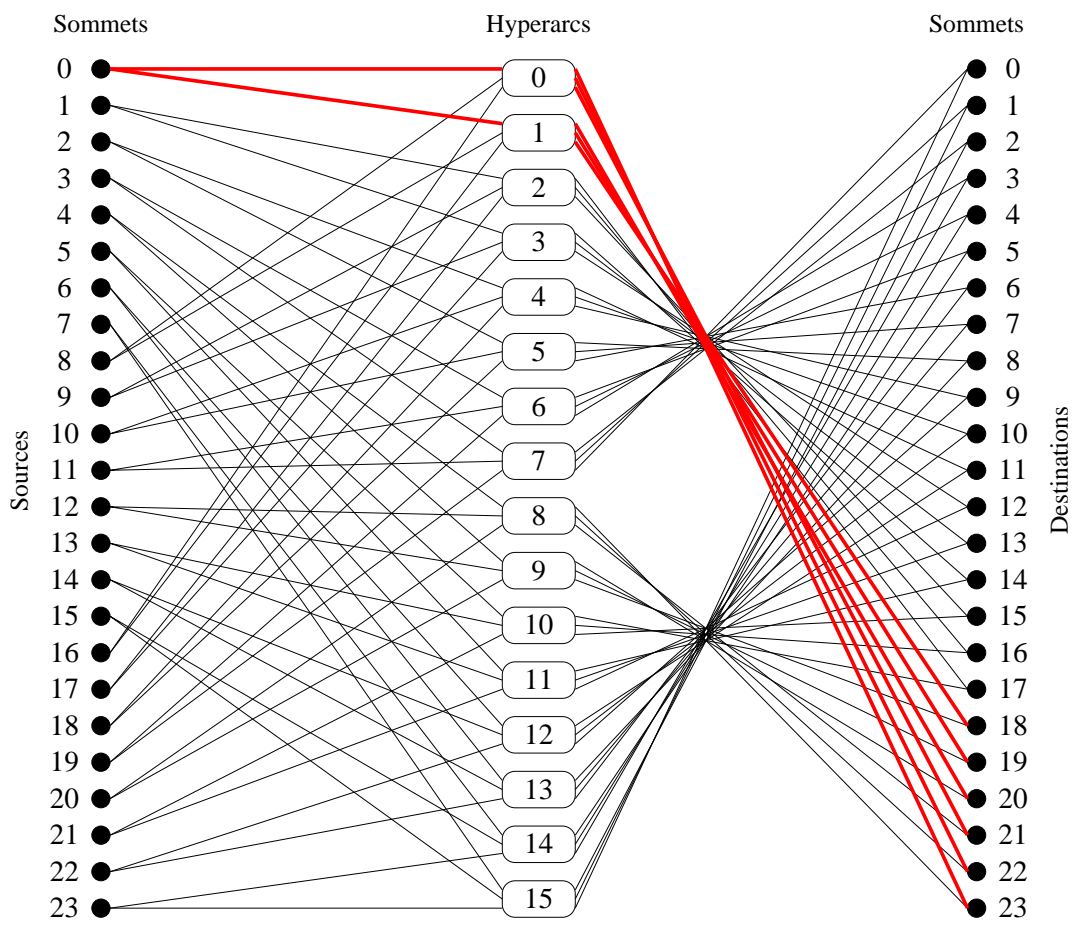


FIG. 6.17 – Hypergraphe de Kautz généralisé $\mathcal{HK}(2, 24, 3, 16)$.

- Un $OTIS(s, m)$, suivi de deux lentilles, pour relier les d émetteurs de chacun des n nœuds aux entrées des m OPS de degré s . En effet, cette adjacence utilise le graphe de Reddy Pradhan et Kuhl $RPK(s, m)$, dont nous donnons une implantation avec OTIS utilisant deux lentilles supplémentaires ;
- m multiplexeurs et m diviseurs de degré s , formant m OPS de degré s ;
- Un $OTIS(d, n)$ pour relier les s sorties de chacune des m OPS, aux récepteurs des n sommets. En effet, cette adjacence utilise le graphe de Imase et Itoh $II(d, n)$.

La figure 6.18 représente l'implantation de l'hypergraphe de de Bruijn généralisé $\mathcal{HdB}_2(2, 72, 4, 36)$, et la figure 6.19 l'hypergraphe de Kautz généralisé $\mathcal{HK}(2, 72, 4, 36)$.

6.6.4 Protocoles de contrôle

Il est difficile d'appliquer les protocoles de contrôle que nous avons développés pour le stack-Kautz, aux hypergraphes de de Bruijn et de Kautz. En effet, ces protocoles supposent la présence d'un moyen de communication entre les nœuds d'un même *groupe émetteur* (ensemble des sommets incidents à un hyperarc). Dans le cas du stack-Kautz, la boucle permet aux nœuds d'un même groupe de communiquer entre eux. Toutefois, une des caractéristiques des hypergraphes de de Bruijn et de Kautz, est que les groupes émetteurs sont distincts des *groupes récepteurs* (ensemble de sommets auxquels un hyperarc est incident). La figure 6.20 illustre cette propriété en représentant les groupes émetteurs et récepteurs de $\mathcal{HK}(2, 20, 4, 10)$. Ainsi, en ajoutant un hyperarc d'un groupe émetteur sur lui-même, il est possible d'utiliser les protocoles de contrôle développés pour le stack-Kautz, sur ces hypergraphes.

Définissons et nommons *hyperKautz*, l'hypergraphe de Kautz modifié admettant les mêmes protocoles de contrôle que le stack-Kautz :

Définition 6.6.6 *L'hyperKautz $\mathcal{HK}^+(d, n, s, m)$, tel que $dn = sm$ et $\frac{n}{s}$ est un entier, est l'hypergraphe à n sommets de degré sortant $d + 1$ et $m + \frac{n}{s}$ hyperarcs de degré s , construit à partir de l'hypergraphe de Kautz $\mathcal{HK}^+(d, n, s, m)$ auquel sont ajoutés un hyperarc de chaque groupe émetteur vers lui-même.*

Nous remarquons que les ressources de $\mathcal{HK}^+(d, sd^{D-1}(d + 1), s, d^{D-1}(d + 1))$ sont les mêmes que celles de $SK(s, d, D)$, en termes de nombre de nœuds, nombre et degré des OPS et nombre d'émetteurs et de récepteurs. Toutefois, le diamètre de ces deux réseaux est différent. Par exemple, le diamètre de $\mathcal{HK}^+(5, 45000, 12, 3750)$ est au plus 3, alors que le diamètre de $SK(12, 5, 5)$ est 5.

Nous laisserons l'étude approfondie de ces réseaux ouverte.

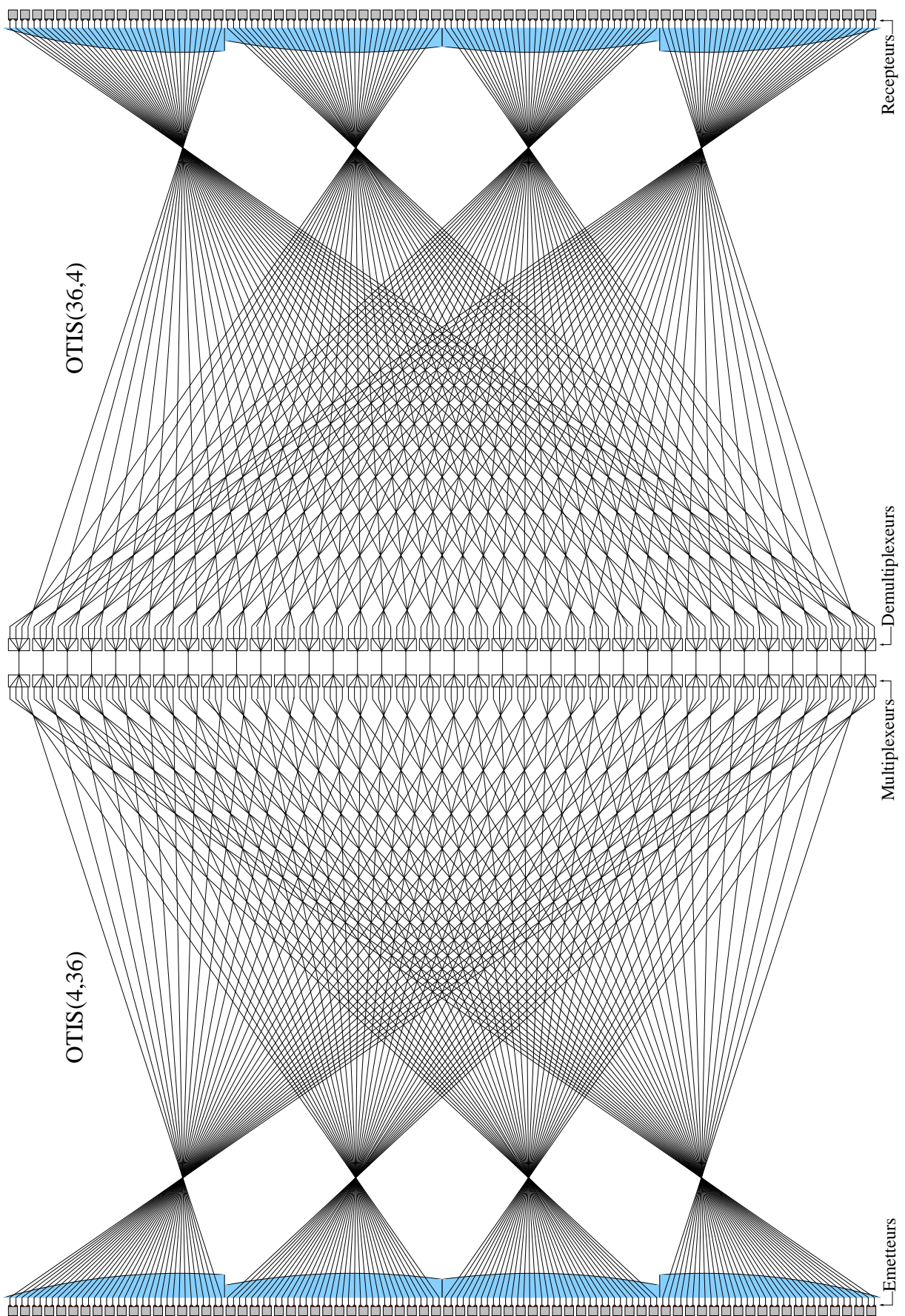


FIG. 6.18 – Hypergraphe de de Bruijn généralisé $\mathcal{HdB}_2(2, 72, 4, 36)$, avec OTIS.

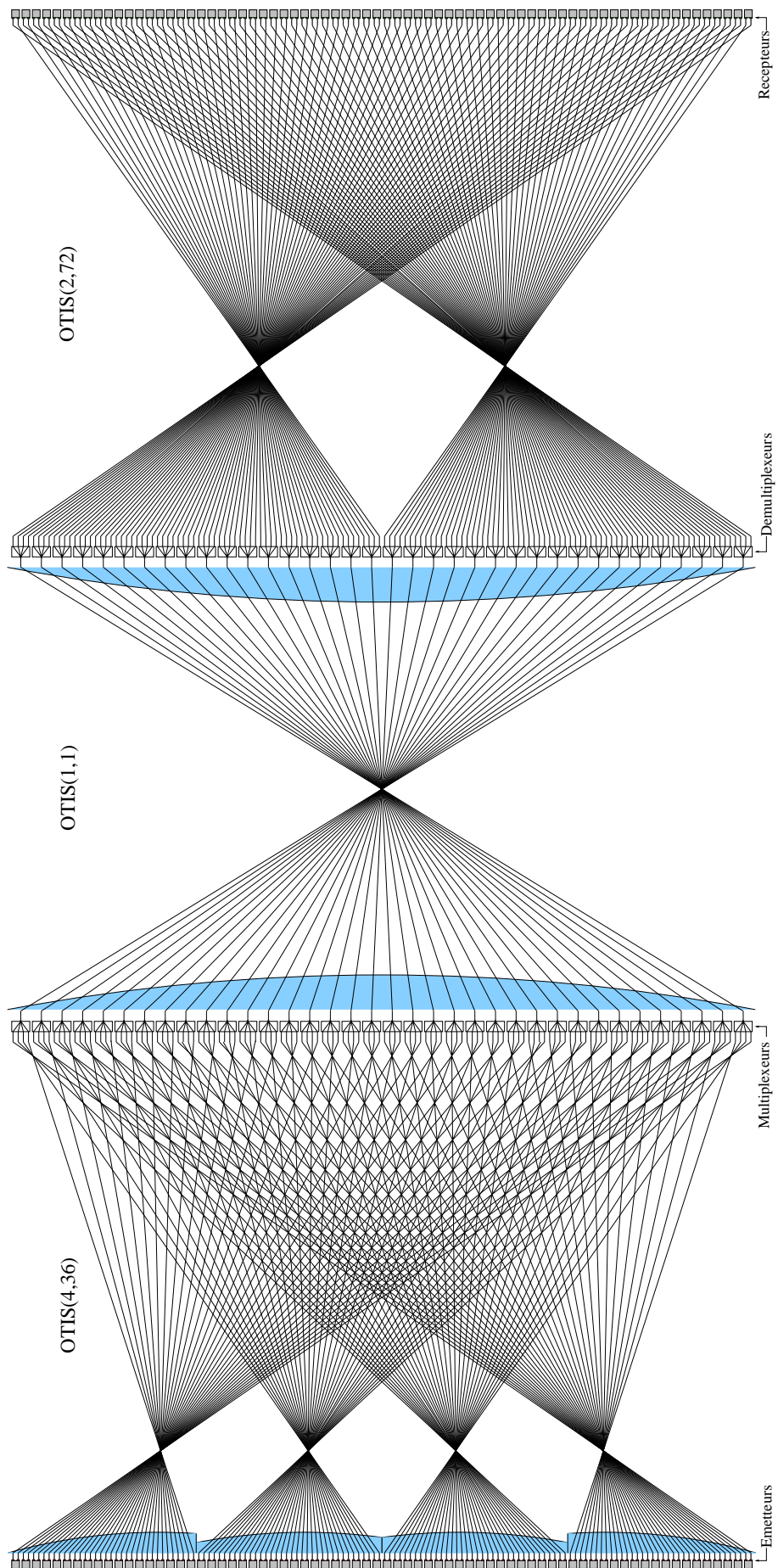


FIG. 6.19 – Hypergraphe de Kautz généralisé $\mathcal{HK}(2, 72, 4, 36)$, avec OTIS.

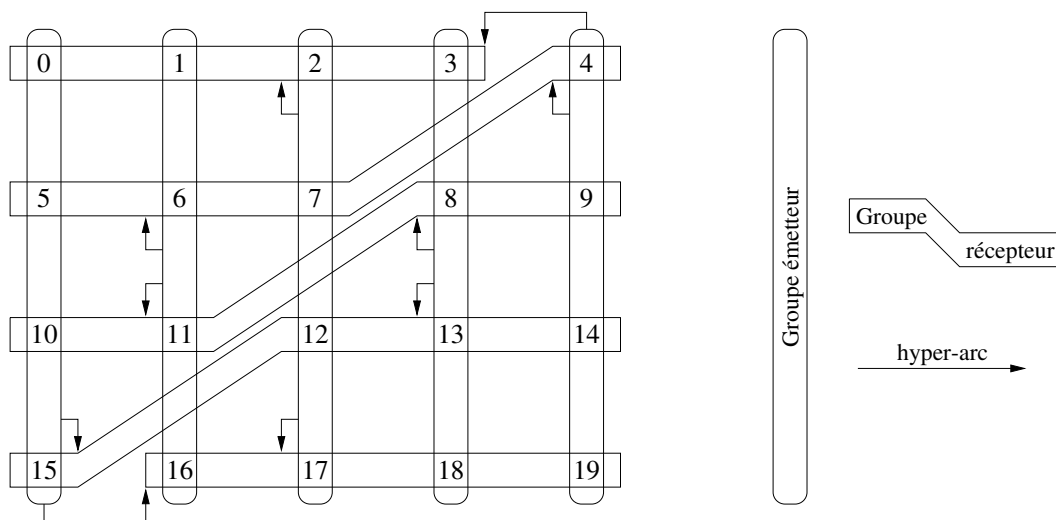


FIG. 6.20 – Représentation des groupes émetteurs et récepteurs de $\mathcal{HK}(2, 20, 4, 10)$.

Chapitre 7

Protection dans les réseaux WDM

Les réseaux de communications optiques utilisant la technologie WDM connaissent aujourd'hui un engouement très important. Les réseaux futurs et bon nombre de réseaux de communications optiques déjà mis en place par les opérateurs utilisent cette technologie. La bande passante offerte par une seule fibre en WDM, bien supérieure à 1 Tbits/s (voir section 3.3.2 page 35) et des systèmes commerciaux à 1 Tbits/s/fibre sont annoncés. Ceci permet de se rapprocher des besoins et des désirs toujours grandissants des utilisateurs. Devant le volume de données traversant les réseaux, il est aujourd'hui indispensable d'assurer la continuité face aux pannes, une interruption du trafic n'étant acceptable ni par l'opérateur ni par l'utilisateur.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la *sécurisation* des réseaux WDM [MM00], et plus particulièrement à la sécurisation par *protection* [ZS00] qui consiste à utiliser des ressources prédéterminées et dédiées pour rétablir un chemin affecté par une panne. Cette méthode de sécurisation est à opposer à la sécurisation par *restauration dynamique* qui consiste à calculer puis à établir de nouvelles routes pour le trafic interrompu par une panne, en fonction des ressources disponibles dans le réseau au moment de la panne. Il existe donc deux méthodes de sécurisation des réseaux WDM, l'une dynamique, la restauration, qui dépend des ressources disponibles au moment de la panne pour assurer la faisabilité du rétablissement du trafic, et l'autre, statique, la protection, qui impose un surdimensionnement du réseau afin de garantir le rétablissement du trafic. De plus, le temps nécessaire au rétablissement du trafic avec la restauration est plus important que celui de la protection, car dans la restauration, une reconfiguration de nœuds intermédiaires est nécessaire, ce qui implique des échanges concertés d'informations.

Remarquons que nous ne considérons que des pannes de liens, les équipements de nœuds (ou brasseurs) étant généralement auto-protégés, c'est-à-dire que chaque brasseur est doublé et que la défaillance de l'un entraîne automatiquement l'utilisation de l'autre. Les pannes de liens correspondent à la rupture d'une ou plusieurs fibres optiques, souvent due à une intervention humaine (utilisation de bulldozer dans des chantiers). Nous considérerons qu'à un instant donné, un seul lien peut être affecté par une panne.

Notre objectif, dans ce chapitre, est de décrire les différentes stratégies pouvant être utilisées pour la sécurisation par protection du réseau. Nous montrerons que ces techniques n'engendrent pas le même dimensionnement du réseau, et nous mettrons l'accent sur le

rapport entre le dimensionnement du réseau et la complexité de calcul et de mise en œuvre de ces techniques.

Nous commençons par présenter, dans la section 7.1, la modélisation des réseaux WDM que nous utiliserons par la suite. Nous rappellerons les grandes problématiques liées à ces réseaux, et nous décrirons différents facteurs intervenants dans leur coût, montrant à eux seuls la difficulté des problèmes d’optimisation étudiés sur les réseaux WDM. En particulier, nous discuterons de la pertinence des fonctions de coût les plus fréquemment employées. Puis, nous présenterons des méthodes de sécurisation par protection, avec tout d’abord, dans la section 7.2, des méthodes de protection de l’instance, et dans la section 7.3, des méthodes de protection du réseau, c’est-à-dire dont le résultat peut être déterminé indépendamment de l’instance. Enfin, dans la section 7.4, nous étudierons le cas particulier de la *protection par cycles* de l’instance de communication all-to-all dans le cas où la topologie du réseau est celle d’un cycle.

7.1 Réseaux WDM

La thèse de Beauquier [Bea00] et l’article [Bea99] représentent un excellent état de l’art de la technologie et de certaines problématiques (routage, allocation de longueurs d’ondes) associées aux réseaux de communications optiques utilisant la technologie WDM. Le lecteur est donc invité à les consulter pour approfondir les notions que nous abordons dans cette section.

7.1.1 Modélisation d’un réseau WDM

Un réseau de communications tout-optique, utilisant le multiplexage en longueurs d’onde, est modélisé par un graphe ou un multigraphe orienté $G = (V, A)$, généralement symétrique. Les sommets correspondent aux nœuds du réseau et les arcs aux liens physiques en fibre optique. Si une fibre reliant deux nœuds x et y du réseau permet la transmission simultanée de l longueurs d’onde, alors l’arc correspondant du graphe G aura soit une capacité l , soit il sera transformé en l arcs parallèles, chacun ayant une capacité unitaire.

Nous ajoutons un élément supplémentaire dans cette modélisation avec le graphe non-orienté UG associé au graphe G . Le graphe UG est le graphe simple tel que $V(UG) = V(G)$ et où il existe une arête entre les sommets u et v de UG si il existe un arc de u à v ou de v à u dans G . De plus, les arêtes multiples sont réduites à une unique arête. Ce graphe permet d’utiliser la notion de routage arête-disjoint dans un réseau.

Remarque Le modèle non-orienté des réseaux de communication tout-optiques correspond au cas où les requêtes de connexion sont symétriques et sous la contrainte d’être routées deux-à-deux par des chemins symétriques et sur la même longueur d’onde.

7.1.2 Optimisation et approximation

Les problématiques liées aux réseaux de communication WDM étant majoritairement des problèmes d’optimisation, il est intéressant de rappeler la définition formelle de ces problèmes

Définition 7.1.1 *Un problème d'optimisation P est donné par un ensemble \mathcal{I} d'instances (entrées), un ensemble \mathcal{S} de solutions (sorties), une fonction $s : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$ des instances vers les parties des solutions acceptables, une fonction $val : \mathcal{I} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ mesurant la qualité $val(I, S)$ de la solution $S \in s(I)$ pour l'instance I , et un objectif min ou max, qui consiste à trouver une solution $S \in s(I)$ qui minimise (min) ou maximise (max) $val(I, S)$.*

Définition 7.1.2 *Un problème de décision D est donné par un ensemble \mathcal{I} d'instances (entrées), un ensemble \mathcal{S} de solutions (sorties), une fonction $s : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$ des instances vers les parties des solutions acceptables, une fonction $val : \mathcal{I} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ mesurant la qualité $val(I, S)$ de la solution $S \in s(I)$ pour l'instance I , un entier k et une question : « existe-t-il une solution $S \in s(I)$ telle que $val(I, S) \leq k$? » dans le cas d'un problème de minimisation, ou « existe-t-il une solution $S \in s(I)$ telle que $val(I, S) \geq k$? » dans le cas d'un problème de maximisation.*

Un problème de décision D est NP-complet s'il est dans la classe de complexité NP et s'il existe une réduction polynômiale de tout autre problème de NP vers le problème D . Un problème d'optimisation est dit « NP-difficile » si sa version décisionnelle est NP-complète [GJ79].

Pour les problèmes d'optimisation NP-difficiles, il est intéressant de trouver des algorithmes d'approximation [Hoc97] produisant en temps polynômial une solution acceptable.

Définition 7.1.3 *Un algorithme d'approximation A pour un problème d'optimisation P est un algorithme déterministe dont le temps d'exécution est polynômial en la taille de l'entrée et qui rend une solution acceptable.*

Notons $OPT(I)$ la valeur d'une solution optimale d'un problème d'optimisation P , et $val(I, A(I))$ la valeur de la solution produite par l'algorithme d'approximation A pour l'entrée I . Un algorithme d'approximation possède un *facteur d'approximation (absolu)* ρ si pour toute instance I , $\frac{OPT(I)}{val(I, A(I))} \leq \rho$ pour un problème de maximisation et $\frac{val(I, A(I))}{OPT(I)} \geq \rho$ pour un problème de minimisation.

7.1.3 Routage et coloration dans les réseaux WDM

Nous citons ici quelques problématiques liées aux routage et à l'allocation de longueurs d'onde dans les réseaux WDM, ainsi que la complexité de ces problèmes.

Problème 7.1.4 (Routage Optique)

Entrée : *Un (multi)graphe G et une instance I de requêtes dans G*

Sortie : *Une allocation de chemins et de couleurs aux requêtes, telle que deux chemins utilisant le même lien ont des couleurs différentes*

Objectif : *Minimiser le nombre de couleurs utilisées*

Notons $\vec{w}(G, I)$ le nombre de couleurs d'une solution optimale si le graphe G est orienté, et $w(G, I)$ si le graphe G est non-orienté.

Problème de décision associé 7.1.5 (Routage Optique)**Données :** *Un graphe G , une instance I et un entier k* **Question :** *Existe-t-il un routage optique pour (G, I) utilisant au plus k couleurs ?*

Le problème de décision 7.1.5 est NP-complet [EJ96]. Aussi, le problème du routage optique est NP-difficile.

La résolution du problème 7.1.4 fournit le routage en sortie. Si le routage est donné comme une partie de l'entrée, le problème devient un problème de *coloration de chemins*, ce qui équivaut à résoudre le problème de la coloration des sommets du *graphe de conflit* associé (défini ci-dessous), de telle sorte que deux sommets adjacents sont colorés différemment. Le nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets du graphe de conflit est appelé **nombre chromatique**. Le problème de la coloration des sommets d'un graphe est connu pour être NP-complet [JT95].

Définition 7.1.6 *Le graphe de conflit associé à un routage R dans un graphe G (orienté ou non) est le graphe non-orienté dont les sommets représentent les chemins de R et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les chemins correspondants partagent un lien de G .*

Notons $\vec{w}(G, I, R)$ le nombre chromatique du graphe des conflits d'un routage R réalisant l'instance I dans un graphe orienté G , et $w(G, I, R)$ si le graphe G est non-orienté. Nous avons $\vec{w}(G, I) = \min_R \vec{w}(G, I, R)$ et $w(G, I) = \min_R w(G, I, R)$.

Problème 7.1.7 (Charge)**Entrée :** *Un (multi)graphe G et une instance I de requêtes dans G* **Sortie :** *Une allocation de chemins aux requêtes (un routage R)***Objectif :** *Minimiser la charge du routage***Problème de décision associé 7.1.8 (Charge)****Données :** *Un graphe G , une instance I et un entier k* **Question :** *Existe-t-il un routage pour (G, I) de charge maximale k ?*

Notons $\vec{\pi}(G, I)$ la charge d'une solution optimale si le graphe G est orienté, et $w(G, I)$ si le graphe G est non-orienté. Si le routage R est donné, alors sa charge est notée $\vec{\pi}(G, I, R)$ ou $\pi(G, I, R)$. Nous avons $\vec{\pi}(G, I) = \min_R \vec{\pi}(G, I, R)$ et $\pi(G, I) = \min_R \pi(G, I, R)$.

Le problème de décision 7.1.8 est NP-complet [EIS76]. Le problème 7.1.7 est donc NP-difficile.

Il a été montré que pour un graphe G et une instance I , il n'existe pas toujours de routage R tel que $\vec{\pi}(G, I, R) = \vec{\pi}(G, I)$ et $\vec{w}(G, I, R) = \vec{w}(G, I)$, [Bea00]. De plus $\vec{\pi}(G, I) \leq \vec{w}(G, I)$. Ces résultats ont motivé la recherche de la caractérisation des graphes et des instances tels que $\vec{\pi}(G, I) = \vec{w}(G, I)$.

Si l'instance de communication est une diffusion ou une distribution, alors le problème du routage optique se résout en temps polynômial et $\vec{\pi}(G, I) = \vec{w}(G, I)$, [BHP98]. Il en est de même pour de nombreux graphes avec l'instance all-to-all, [Bea99, BPT99]. D'autre part, si le graphe G est une étoile ou une pieuvre, alors le routage optique se résout polynômialement, pour toute instance, avec $\vec{\pi}(G, I) = \vec{w}(G, I)$, [Bea99]. Enfin, dans le cas des arbres, ou le routage est unique, un algorithme d'approximation produit une solution avec $\frac{3\vec{\pi}(G, I)}{2}$ couleurs, [EJK⁺99].

La résolution du problème du routage optique peut tirer profit de l'utilisation de convertisseurs optiques. Ici, nous considérons qu'un convertisseur a une entrée et une sortie. Ainsi, un même nœud du réseau peut contenir plusieurs convertisseurs.

Problème 7.1.9 (Placement de convertisseurs)

Entrée : *Un (multi)graphe G et une instance I de requêtes dans G*

Sortie : *Une allocation de chemins et de couleurs aux requêtes (un routage R) et un placement C de convertisseurs, tels que $\vec{\pi}(G, I) = \vec{\pi}(G, I, R) = \vec{w}(G, I, R, C)$*

Objectif : *Minimiser le nombre de convertisseurs*

Problème de décision associé 7.1.10 (Placement de convertisseurs)

Données : *Un graphe G , une instance I et un entier k*

Question : *Existe-t-il un placement de k convertisseurs tel qu'il existe un routage optique pour (G, I) de $\vec{\pi}(G, I)$?*

Dans les problèmes 7.1.9 et 7.1.10, un chemin peut recevoir plusieurs longueurs d'onde, chacune correspondant à une partie de son routage, du fait de l'utilisation de convertisseurs.

Le problème de décision 7.1.10 est NP-difficile, car il inclut le problème du routage optique [Wac00, KK99]. Toutefois, si le nombre de convertisseurs est suffisamment grand, alors le graphe peut être découpé en petits graphes pour lesquels le problème du routage optique se résout polynômialement (étoiles, ...). Le problème consiste alors à minimiser le nombre de convertisseurs nécessaires à l'obtention d'un tel résultat. Ce problème demeure tout de même NP-complet [Wac00, Tog00]. De nombreuses études se sont portées sur la minimisation et le placement de convertisseurs, dont [RS98b, SAS96, SAS99, Gar98, RM88, TS99].

Une formulation mathématique de ces problèmes se fait sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers exprimant un problème de flot ou de multiflot (*multi-commodity flow*) en variables entières. Un problème de flot apparaît lorsque l'instance de communication contient une source et/ou une destination unique, et la résolution d'un tel problème prend un temps polynômial [FF62]. Un problème de multiflot dénote une instance de communication à plusieurs sources et plusieurs destinations. La difficulté de sa résolution dépend bien sûr de la complexité du problème, comme nous l'avons vu dans la section 2.4.3. Il est intéressant de remarquer qu'un multiflot en variables fractionnaires se résout en temps polynômial par rapport à la taille du programme linéaire (nombre de variables et nombre d'équations). De

ce fait, de nombreux algorithmes d'approximation utilisent une relaxation fractionnaire de leurs variables [CFK⁺01b]. Le lecteur pourra se reporter aux ouvrages [FF62, LP86, GGL95, CCPS98] pour de plus amples informations sur la programmation linéaire et les problèmes de (multi)flots.

7.1.4 Fonctions de coûts

Dans cette section, nous décrivons des facteurs intervenant dans le coût d'un réseau de communication tout-optique utilisant la technologie WDM. Nous nous attachons à montrer la difficulté de la prise en compte de chaque élément dans une fonction de coût du réseau. Nous indiquons de plus de quelle façon ces éléments influencent le routage d'une instance de requêtes de communication et donc le dimensionnement du réseau.

Coût des nœuds MIEO

Le coût d'un multiplexeur à insertions/extractions optiques, que nous avons présenté dans la section 3.3.4 page 38, dépend de son nombre de ports d'insertions et d'extractions. Les MIEO ont toujours le même nombre de ports d'insertions et d'extractions. De plus, le coût d'un MIEO varie par paliers, selon une fonction similaire à celle représentée dans la figure 7.1, les paliers correspondant à des nombres de ports (8, 16, 32, 64, ...). En effet, les opérateurs ne disposent pas de MIEO de toutes tailles, pour des raisons évidentes de coûts, de complexité et d'évolutions possibles du réseau.

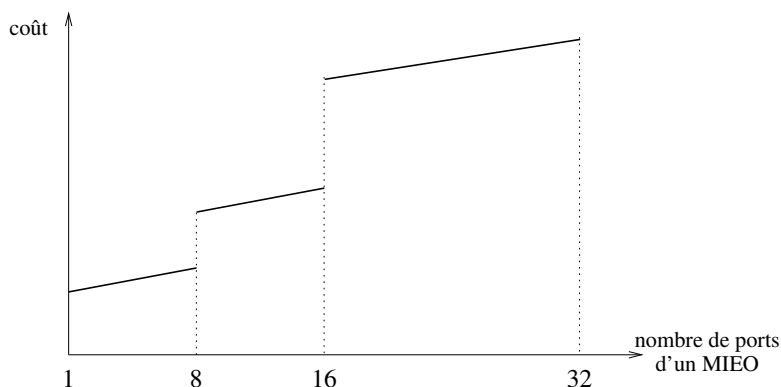


FIG. 7.1 – Coût par palier d'un MIEO en fonction de son nombre de ports

Notons $c_{MIEO}(k)$ le coût d'un MIEO à k ports d'insertions et d'extractions. Ce coût a une partie fixe dépendant du nombre maximum de ports, $f(k)$, telle que $2f(k) > f(2k)$, et une partie variable, linéaire, proportionnelle au nombre de ports effectivement utilisés, bk . De plus, le coût d'un MIEO est borné supérieurement par le coût c_{of} de l'ouverture complète d'une fibre. Généralement, on considère que l'ouverture complète de la fibre est nécessaire dès que le rapport entre le nombre de ports d'un MIEO et le nombre maximum de longueurs d'ondes que peut transporter la fibre optique correspondante est supérieur à $\frac{1}{4}$.

Finalement, nous avons $c_{MIEO}(k) = \min \{f(k) + bk, c_{of}\}$, et de plus $2c_{MIEO}(k) > c_{MIEO}(2k)$.

Un MIEO est placé sur une unique fibre dans un nœud u du réseau. Son nombre de ports est égal au maximum entre le nombre de requêtes se terminant au nœud u en arrivant par cette fibre et le nombre de requêtes commençant au nœud u en empruntant cette fibre. La taille et le coût d'un MIEO dépendent donc fortement de l'instance de communication et de son routage.

Coût de nœud

Dans un réseau de communication WDM, nous plaçons à chaque extrémité d'une requête un multiplexeur à insertion/extraction électronique (MIE), présenté dans la section 3.3.5 page 39. Il fait office de transpondeur (émetteur/récepteur optique) et réalise l'interface entre les signaux optique et les signaux électrique.

Comme une requête n'a qu'une seule de ces extrémités dans un même nœud du réseau, elle n'utilise que la moitié d'un MIE. L'autre moitié pourra être utilisée par une autre requête, si le port requis du MIE est libre, c'est-à-dire si le port de réception est libre alors il pourra être utilisé par une requête ayant son extrémité dans ce nœud, et si son port d'émission est libre, alors il pourra être utilisé par une requête ayant sa source dans ce nœud. De plus, ceci peut être effectué indépendamment de la longueur d'onde attribuée à chacune des requêtes.

Le coût d'un nœud dépend du nombre de MIE qu'il contient, c'est-à-dire du nombre de requêtes ayant une extrémité en ce nœud. Si l'instance de communication est modélisée par un graphe logique I , alors le coût dû aux MIE dans un nœud u est proportionnel à $\max\{d^-(u), d^+(u)\}$. Notons c_{MIE} le coût unitaire d'un MIE. Le coût dû aux MIE dans le réseau G est

$$C_{MIE}(G) = c_{MIE} \sum_{u \in V(I)} \max\{d^-(u), d^+(u)\} \geq |I|c_{MIE}$$

Coût de transmission

Nous avons vu dans la section 3.2.7 page 33, que lorsqu'un signal optique parcourt une longue distance dans une fibre optique, il connaît une certaine atténuation. Si la distance parcourue est importante, le signal peut devenir bruité ou trop faible pour être détecté. Des amplificateurs sont alors disposés à intervalles réguliers¹, actuellement tous les 50-100 km. Appelons L_0 cette distance. Nous avons également précisé dans la section 3.2.7 qu'un signal optique ne peut être amplifié autant de fois que l'on veut, du fait de l'apparition de bruits. Ainsi, le signal optique doit être régénéré après la traversée de plusieurs amplificateurs, c'est-à-dire si la distance parcourue est grande, afin d'éliminer le bruit. Actuellement les signaux optiques sont régénérés tous les 700 km avec les systèmes classiques et tous les 3000 à 5000 km avec l'amplification Raman. Appelons L_1 cette distance.

Notons $L(u, v)$ la longueur total d'un chemin pour une requête du nœud u au nœud v du réseau, C_{Amp} le coût d'un amplificateur (pour un signal optique), et C_{Reg} le coût d'un régénérateur. Nous avons :

¹Dans la pratique, la régularité de l'espacement est souvent compromise par la géographie et la possibilité de placer des bâtiments en « pleine nature »

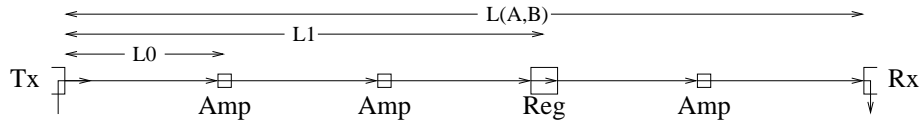


FIG. 7.2 – Ré-amplification et régénération d'un signal optique

- Dans le cadre des réseaux urbains, le coût de transmission ne s'applique pas, ou peut être considéré comme constant. En effet, la distance $L(u, v)$ est suffisamment faible pour que l'amplification des signaux optiques ne soit pas nécessaire.
- Dans les réseaux régionaux ou inter-régionaux, les distances parcourues sont généralement considérées comme inférieures à 500 km. Ainsi, dans ces réseaux, l'utilisation de régénérateurs n'est pas nécessaire et seul le coût d'amplification intervient dans le coût de transmission. Ce coût est alors $C_{Amp} \times \left(\left\lceil \frac{L(u, v)}{L_0} \right\rceil - 1 \right)$.
- Les réseaux longue distance (européen, intercontinentaux, ...), nécessitent l'utilisation de régénérateurs. Nous ajoutons donc au coût de transmission le coût de régénération : $C_{Reg} \times \left(\left\lceil \frac{L(u, v)}{L_1} \right\rceil - 1 \right)$.

Ainsi, le coût de transmission dans un réseau, pour une requête de u vers v , est :

$$C_{Trans}(u, v) = \begin{cases} \text{cte} & \text{si } L(u, v) < L_0 \\ C_{Amp} \times \left(\left\lceil \frac{L(u, v)}{L_0} \right\rceil - 1 \right) & \text{si } L_0 \leq L(u, v) \leq L_1 \\ C_{Amp} \times \left(\left\lceil \frac{L(u, v)}{L_0} \right\rceil - 1 \right) + C_{Reg} \times \left(\left\lceil \frac{L(u, v)}{L_1} \right\rceil - 1 \right) & \text{si } L(u, v) > L_1 \end{cases}$$

Avec une telle formulation, le coût de transmission peut être approximé par une valeur proportionnelle à la distance optique parcourue dans le réseau : $C_{Trans}(u, v) = \alpha L(u, v)$. Aussi, il suffit de choisir pour chaque arc du réseau un poids proportionnel à sa longueur pour inclure simplement le coût de transmission dans le choix du routage.

Récemment, une étude de la perte d'énergie d'un signal optique en fonction du nombre de nœuds de routage tout optique traversés et des composants utilisés dans leur fabrication, a montré qu'au delà de 5 nœuds traversés (où la fibre est ouverte), le signal doit être régénéré, et ce indépendamment de la distance parcourue [Mut01]. Cependant, dans notre modèle, nous ne considérons pas ce facteur.

Coût des convertisseurs optiques

L'utilisation de convertisseurs optiques dans un réseau WDM permet de simplifier le routage optique, comme nous l'avons évoqué dans la section 7.1.3. Le coût des convertisseurs est linéaire par rapport à leur nombre. Ainsi, $C_{CONV}(G) = c_{Conv}r$, où r est le nombre de convertisseurs du réseau. De plus, le coût de conversion est lié au routage optique, qu'il influence.

Nous avons présenté différents éléments intervenant dans le coût des réseaux WDM. Nous allons maintenant discuter de leur participation dans le coût du réseau et de leur influence sur son dimensionnement.

Étant donné un graphe G et une instance de communication I , le coût des nœuds du réseau dû aux MIE est fixé par l'instance. Il pourra donc être considéré comme constant. Toutefois, il peut arriver que la résolution d'un problème requiert l'introduction de requêtes supplémentaires, comme nous le verrons par la suite dans certains problèmes de protection. Dans ce cas, si I' dénote l'ensemble des requêtes ajoutées, alors il faudra chercher à minimiser $|I'|$, pour minimiser le coût des nœuds.

Le coût des MIEO est difficile à exploiter dans les problèmes d'optimisation du fait qu'il n'est pas linéaire et qu'il est supérieurement borné. Ce coût pourra toutefois être considéré dans les problèmes de groupage de trafic [GRS00].

Le coût de transmission peut être approximé par une pondération des arcs du réseau. Ainsi, il est facile de le prendre en compte.

Le coût induit par le nombre de sommets traversés par une requête peut être inclus dans l'approximation du coût de transmission, en ajoutant une même valeur à tous les arcs du réseau.

Dans ces coûts, nous trouvons également le nombre de longueurs d'ondes utilisées dont la minimisation est un des problèmes les plus étudiés. Dans le cadre du dimensionnement d'un réseau, le nombre de longueurs d'ondes sera plutôt considéré comme une contrainte technologique, et une réponse affirmative au problème de décision 7.1.5 pourra être suffisante.

Le problème de la charge est relié au nombre de fibres optiques à placer le long d'un axe du réseau pour garantir la faisabilité du routage de l'instance. Ce coût est généralement considéré comme très important. Nous verrons dans les problèmes de protection qu'un mauvais équilibrage de la charge peut avoir de très graves conséquences sur le coût d'un réseau du fait du sur-dimensionnement requis par la protection. Le problème de la charge est alors relié au coût dû aux MIE.

Nous pourrions également considérer le coût de la mise en place des fibres optiques ou *coût de tranchées*, qui correspond au coût des travaux nécessaires pour poser des centaines voire des milliers de kilomètres de fibres optiques entre des villes. Néanmoins, ce coût peut être considéré comme une constante du réseau.

Finalement, une fonction de coût liée à la charge du réseau semble la plus « simple » à manipuler et la plus pertinente. Le coût de transmission est également simple à manipuler, mais il ne peut être considéré en même temps que la charge, car il représente un critère différent, et les problèmes d'optimisation multi-critères sont très difficiles à résoudre.

7.2 Protection de l'instance

La sécurisation par protection des requêtes d'une instance de communication consiste à préétablir et à réserver, pour chaque requête, des ressources qui seront utilisées pour router des requêtes affectées par une panne [ACB97, TDDC98, CBG00, ZS00]. Ces ressources pourront être exclusives, c'est-à-dire que chaque requête aura ses propres ressources de pro-

tection, ou partagées pour la protection d'un ensemble restreint de requêtes. Le degré de partage des ressources de protection dépend du niveau de protection recherché. D'autre part, nous considérons le cas où une seule panne peut survenir dans le réseau à un instant donné.

Dans cette section, nous présentons la technique de protection 1 + 1 qui permet d'éviter toute interruption de trafic, la protection 1 : 1, autorisant de très faibles temps de sécurisation, la protection $M : N$, opérant un partage de ressources lorsque les requêtes sont nombreuses, et enfin la protection par sous-réseaux qui autorise un important partage des ressources de protections.

7.2.1 Protection 1 + 1 et 1 : 1

Une méthode simple de sécurisation par protection d'un réseau WDM consiste à établir pour chaque requête deux canaux de communications disjoints; c'est-à-dire qu'ils correspondent à deux chemins *arêtes* disjoints dans le graphe simple non-orienté UG associé au réseau (le réseau est modélisé par un (multi)graphe orienté G , et le graphe UG est obtenu en supprimant l'orientation des arcs et les arêtes multiples). L'un des deux chemins est utilisé comme **chemin de travail** et l'autre comme **chemin de protection**.

Cette méthode de protection se décline sous deux formes : La protection 1 : 1 (un pour un) et la protection 1 + 1 (un plus un). Dans la protection 1 : 1, si un canal de communication est interrompu par une panne, alors le trafic est automatiquement basculé sur le canal de protection associé. Comme chaque canal de protection est dédié à un canal de travail, le temps de bascule est faible (50 ms) et donc la durée de l'interruption du trafic est également faible. Toutefois, des pertes de données peuvent survenir lors de la panne.

La protection 1 + 1 est une variante de la protection 1 : 1 permettant d'éliminer toute interruption de trafic. Pour cela, le trafic est dupliqué et envoyé simultanément sur le chemin de travail et le chemin de protection. Le destinataire reçoit donc deux fois les mêmes données, éventuellement avec un faible décalage dû à la différence de longueur entre les deux chemins, et décide quel canal recevoir. Lors d'une panne, le récepteur pourra être amené à changer son canal de réception, introduisant ainsi une petite perte de données (si aucun buffer n'est utilisé), sans perte de communication.

Les problématiques des protections 1 + 1 et 1 : 1 sont identiques, et s'expriment formellement de la façon suivante :

Problème 7.2.1 (Protection 1 + 1, 1 : 1)

Entrée : *Un graphe G , une instance I de requêtes dans G*

Sortie : *Un routage principal R et un routage de protection R' tels que le routage de toute requête $i \in I$ dans R est disjoint de son routage dans R'*

Objectif : *Minimiser la charge du routage $R + R'$*

Ce problème est connu pour être NP-complet, et peut se modéliser comme un multiflot en variables binaires, comme nous le verrons dans la section 7.2.3.

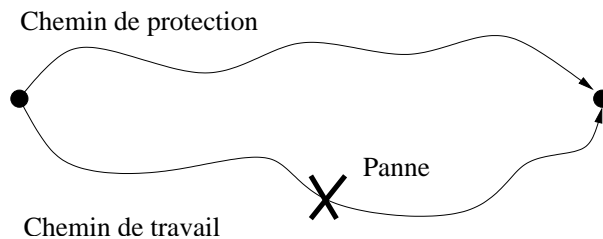


FIG. 7.3 – Protection 1 + 1, 1 : 1.

7.2.2 Paire de chemins disjoints de poids minimum

Dans le cadre de la protection 1 : 1, nous nous sommes intéressés au problème de trouver, entre deux sommets d'un réseau, deux chemins disjoints dont la somme des coûts soit minimale.

Problème 7.2.2 (Paire de chemins disjoints de poids minimum)

Entrée : *Un graphe orienté G , une fonction de poids ω sur les arcs et deux sommets s et t*

Sortie : *Deux chemins disjoints de s à t*

Objectif : *Minimiser la somme des poids des deux chemins disjoints de s à t*

Ce problème est polynômial et pourra être résolu par un algorithme de *flot de poids minimum* [GT88, Or188, CCPS98]. Toutefois, la résolution de ce problème par cette méthode a une complexité que nous jugeons trop grande : $O(n^2(m+n \log n) \log n)$ [GT88] et $O(m(m+n \log n) \log n)$ [Or188], le calcul de cette complexité ne prenant pas en considération la taille de l'instance, qui est ici de 2. Par contre, Suurballe et Tarjan [ST84] ont proposé un algorithme pour résoudre le problème 7.2.2 en temps $O(m+n \log n)$.

Nous avons proposé un algorithme incrémental pour le problème 7.2.2 en $O(L(m+n \log n))$, où L est le nombre d'arcs d'un plus court chemin (au sens des poids) dans le graphe G . Le détails de cet algorithme se trouve dans [Cou01]. Cet algorithme n'améliore pas l'algorithme de Suurballe et Tarjan. Toutefois, nous avons choisi de construire un algorithme incrémental afin de fournir, depuis une source unique et vers chacun des autres sommets du graphe, deux chemins disjoints dont la somme des poids est minimum. Pour ce deuxième problème, notre algorithme a une complexité en $O(n(m+n \log n))$, ce qui est équivalent à la complexité d'un algorithme utilisant l'algorithme de Suurballe et Tarjan pour résoudre le même problème.

7.2.3 Protection $M : N$

Une requête unitaire d'un nœud x vers un nœud y d'un réseau correspond à l'établissement d'un chemin de x à y et à la réservation d'une longueur d'onde sur chacun des arcs empruntés. Représentons l'instance I de requêtes par une matrice de taille $n \times n$ notée N où $N(x, y)$ dénote le nombre de requêtes unitaires à établir de x vers y .

Nous avons vu que la protection 1 : 1 est une méthode simple et automatique pour la protection d'une requête. Toutefois, lorsque $N(x, y) > 1$, il faudra trouver $N(x, y)$ chemins

de travaux et leurs $N(x, y)$ chemins de protections (un pour chaque requête unitaire). Les ressources utilisées sont alors très importantes. La protection $M : N$, où M est une matrice de taille $n \times n$ telle que pour tout couple (x, y) $M(x, y) \leq N(x, y)$, permet de réduire les ressources utilisées par la protection en autorisant le partage de $M(x, y)$ chemins de protection par $N(x, y)$ chemins de travail.

Si le volume de la requête entre deux sommets x et y est $N(x, y)$ et que $M(x, y)$ chemins de protection peuvent être utilisés, alors il suffit de trouver un routage pour $N(x, y) + M(x, y)$ requêtes unitaires, sous la contrainte que sur chaque arc du réseau il n'y a pas plus de $M(x, y)$ unités de trafic.

La matrice de requêtes de protection M peut être construite de plusieurs façons. Tout d'abord nous pouvons imposer la présence de d'un nombre constant M_p chemins de protection pour chaque requête $I(x, y)$, au risque de disposer pour certaine requêtes de plus de chemins de protection que de chemins de travail ($I(x, y) \leq M_p$). Ensuite, nous pouvons imposer l'utilisation de k chemins disjoints, chacun correspondant à $\frac{N(x, y)}{k-1}$ requêtes unitaires. Le réseau doit alors être au moins k -connexe. Enfin, nous pouvons choisir d'utiliser le plus de chemins possibles, correspondant alors à la coupe minimale du graphe entre les sommets x et y (arête-connexité entre x et y). Dans tout ces cas, construire le matrice M prend un temps polynômial.

Modèle mathématique

Étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$ muni d'une fonction c de capacité des arcs, une instance I de requêtes sur G représentée par la matrice N et une instance I' de requêtes de protection représentées par la matrice M , le problème de la protection $M : N$ se modélise de la façon suivante :

- **Variabes**
 - $f(x, y, i, j)$ fraction entière du flot $N(x, y) + M(x, y)$ sur l'arc (i, j)
- **Contraintes**
 - Distribution du flot sur les arcs : $\forall (i, j) \in A, \forall x, y \in V, f(x, y, i, j) \leq M(x, y)$
 - Initialisation du flot : $\begin{cases} \sum_{i \in \Gamma^+(x)} f(x, y, x, i) = N(x, y) + M(x, y) \\ \sum_{i \in \Gamma^-(x)} f(x, y, i, x) = 0 \end{cases}$
 - Absorption du flot : $\begin{cases} \sum_{i \in \Gamma^+(y)} f(x, y, y, i) = 0 \\ \sum_{i \in \Gamma^-(y)} f(x, y, i, y) = N(x, y) + M(x, y) \end{cases}$
 - Conservation du flot : $\forall i \in V - \{x, y\}, \sum_{j \in \Gamma^-(i)} f(x, y, j, i) = \sum_{j \in \Gamma^+(i)} f(x, y, i, j)$
 - Capacité de l'arc (i, j) : $\sum_{(x, y) \in I} f(x, y, i, j) \leq c(i, j)$
- **Objectif**
 - Minimiser la charge du réseau

Il est possible de forcer le routage à suivre exactement $\frac{N(x, y) + M(x, y)}{M(x, y)}$ chemins disjoints, chacun correspondant à $M(x, y)$ requêtes de travail ou de protection. Pour cela, nous utilisons la variable binaire $b(x, y, i, j)$, indiquant l'utilisation ou non de l'arc (i, j) pour le flot $N(x, y) + M(x, y)$. Les contraintes deviennent :

- Distribution du flot sur les arcs : $\forall (i, j) \in A, \forall x, y \in V, b(x, y, i, j) \leq 1$

- Initialisation du flot : $\begin{cases} \sum_{i \in \Gamma^+(x)} M(x, y) b(x, y, x, i) = N(x, y) + M(x, y) \\ \sum_{i \in \Gamma^-(x)} b(x, y, i, x) = 0 \end{cases}$
- Absorption du flot : $\begin{cases} \sum_{i \in \Gamma^+(y)} b(x, y, y, i) = 0 \\ \sum_{i \in \Gamma^-(y)} M(x, y) b(x, y, i, y) = N(x, y) + M(x, y) \end{cases}$
- Conservation du flot : $\forall i \in V - \{x, y\}, \sum_{j \in \Gamma^-(i)} b(x, y, j, i) = \sum_{j \in \Gamma^+(i)} b(x, y, i, j)$
- Capacité de l'arc (i, j) : $\sum_{(x, y) \in I} M(x, y) b(x, y, i, j) \leq c(i, j)$

Le problème de la protection 1+1 ou 1 : 1 se résout à partir de cette deuxième formulation de la protection $M : N$, en posant $N = M$ et $N(x, y) = 1$ pour tout couple (x, y) .

Dans les problèmes de la protection 1 + 1, 1 : 1 et $M : N$, il est possible de résoudre le problème de l'allocation de longueurs d'onde en même temps que le problème de la charge. Toutefois cela rendra la résolution du problème encore plus difficile.

7.2.4 Par sous-réseaux, par cycles

Nous avons vu avec la protection $M : N$ une méthode de protection permettant à un ensemble de requêtes de partager leurs ressources de protection. La protection par sous-réseaux est une autre façon de réaliser un partage des ressources de protection.

Étant donné un graphe G et une instance I de requêtes sur G (modélisée par un (multi)graphe également noté I), la protection par sous-réseaux consiste à partitionner les requêtes en sous-graphes I_k (K_k, C_k, \dots), chacun admettant un routage disjoint dans G , qui sont ensuite protégés indépendamment les uns des autres.

Dans la pratique, la protection par sous-réseaux se résume à la *protection par cycles*, en référence aux *Self Healing Ring* (SHR) des boucles SONET/SDH [GLS98]. Dans l'exemple de la figure 7.4, les requêtes (A, C) , (C, E) , (E, H) et (H, A) forment un cycle. Ce cycle est protégé par un deuxième cycle, circulant dans le sens contraire. Si un lien de communication du réseau est défaillant, par exemple le lien (F, G) , alors soit l'arc (F, G) est remplacé par le chemin de F à G sur le circuit de protection, soit le chemin de E à H est basculé et remplacé par le chemin de E à H sur le circuit de protection.

Il est parfois impossible de former un cycle à partir d'un ensemble de requêtes. Dans ce cas, on peut être amené à ajouter des « requêtes virtuelles ». Par exemple, supposons que la requête (H, A) n'existe pas. Alors, nous ajouterons une requête virtuelle pour compléter le cycle.

Le problème de la protection par cycles se formalise alors de la façon suivante :

Problème 7.2.3 (protection par cycles)

Entrée : *Un graphe G , une instance de requêtes I sur G*

Sortie : *Un routage de I , un recouvrement des arêtes de I par des cycles et une instance I' de requêtes « virtuelles » ajoutées pour compléter les cycles*

Objectif : *Minimiser la charge*

Ce problème est connu pour être en général NP-difficile, en particulier si l'objectif est de minimiser $|I| + |I'|$ [EMZ00]. Le problème 7.2.3 utilise un routage symétrique de requêtes orientées symétriques. En effet, la protection d'un cycle orienté se fait à l'aide d'un deuxième

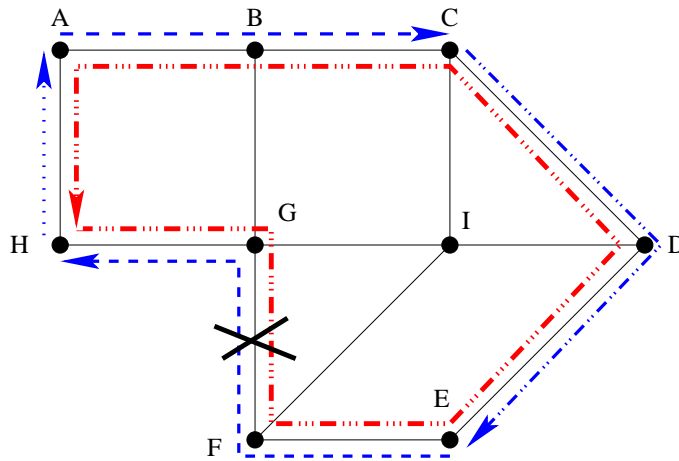


FIG. 7.4 – Exemple de protection par sous-réseaux

cycle, orienté en sens inverse. Ainsi, en routant symétriquement des requêtes orientées symétriques, nous réservons les ressources de protection. Nous pourrions par exemple ajouter pour chaque requête $I(x, y)$, la requête symétrique $I(y, x)$.

Nous utiliserons cette remarque dans la section 7.4, où nous donnerons une solution optimale pour le problème de la protection par cycles dans le cas où le graphe G est un cycle (non-orienté ou orienté symétrique), les requêtes l'instance all-to-all (K_n ou K_n^+) et où l'on cherche à minimiser le nombre de cycles [BCCT01b]. Notons que lorsque G est un cycle, minimiser le nombre de cycles de protection revient à minimiser la charge.

La résolution du problème 7.2.3 étant très difficile, des heuristiques ont été proposées [EMZ00, EHS00, HO01]. Elles consistent à choisir un routage R de I , puis à partitionner les requêtes en cycles, en minimisant, par exemple, le nombre de requêtes « virtuelles » nécessaires à la complétion des cycles. Le problème du partitionnement des requêtes en cycles est en général NP-difficile, même si la taille des cycles est bornée [Tho97]. Pour contourner cette difficulté, le choix est fait d'énumérer tous les cycles de longueur inférieure à k , puis de choisir un ensemble de cycles de coût minimum (par exemple minimisant le nombre de requêtes virtuelles), couvrant l'ensemble des requêtes. Un algorithme d'approximation de facteur d'approximation inférieur à 2 (et $\frac{4}{3}$ si $k = 3$) se déduit d'un résultat de couverture partielle proposé dans [GKS01].

7.3 Protection du réseau

Dans les réseaux de communication optique utilisant la technologie WDM, la défaillance d'une fibre optique s'accompagne généralement de la défaillance de l'ensemble du faisceau de fibres empruntant la même arête du réseau (bulldozer). Dans une telle situation, il est intéressant de chercher une méthode de protection globale pour l'ensemble des chemins empruntant cette arête.

Nous présentons ici plusieurs stratégies permettant la mise en œuvre de la protection du

réseau, dont certaines permettent de protéger le réseau indépendamment de l'instance de communication. Nous supposons toujours que le routage de l'instance de communication est une donnée des problèmes.

7.3.1 Re-routage global

Le re-routage global consiste à établir une table de routage de l'instance I spécifique à chacune des pannes possibles du réseau.

Re-routage global($G, \mathcal{UG}, I, R(I)$)
pour tout $e = \{x, y\} \in E(\mathcal{UG})$ **faire**
 | $G' \leftarrow G \setminus \{(x, y), (y, x)\}$
 | Router I dans G' , en minimisant la charge

Le problème du routage étant NP-complet, ce problème est NP-complet.

Cette technique de protection permet de minimiser la capacité des arcs du réseau. Toutefois, elle présente de sérieux inconvénients. Tout d'abord, les nœuds du réseaux doivent contenir de nombreuses tables de routages (une par arête du réseau). De plus, les nœuds doivent être entièrement reconfigurable car le nouveau routage peut être très différent du routage initial. Enfin, toutes les communications du réseau sont interrompues pendant la phase de reconfiguration ce qui peut entraîner d'une part des pertes de données, et d'autre part une insatisfaction des utilisateurs.

7.3.2 Re-routage de bout-en-bout

Le re-routage de bout-en-bout consiste à prédéterminer, pour chaque arête e de \mathcal{UG} , un nouveau routage pour toutes les requêtes affectées par la défaillance de cette arête. L'algorithme suivant décrit cette méthode :

Protection de bout-en-bout($G, \mathcal{UG}, I, R(I)$)
pour tout $e = \{x, y\} \in E(\mathcal{UG})$ **faire**
 | $X \leftarrow \{i \in I \mid (x, y) \in R(i)\} \cup \{i \in I \mid (y, x) \in R(i)\}$
 | Libérer les ressources utilisées par le routage des requêtes de X dans G
 | $G' \leftarrow G \setminus \{(x, y), (y, x)\}$
 | Router X dans G' en minimisant la charge

La charge d'une arête étant une entrée du problème, le théorème 2.4.12 page 22 nous dit que ce problème est NP-complet. Toutefois, en pratique, la taille de l'instance X peut être considérée comme bornée par la capacité de l'arête. Alors, comme le graphe G est orienté symétrique, le théorème 2.4.13 s'applique. Le problème du re-routage de bout-en-bout est donc polynômial si la taille de l'instance X est bornée.

Cette technique de protection permet de n'interrompre qu'une partie du trafic présent dans le réseau durant la phase de reconfiguration. Toutefois, de même que le re-routage global, cette stratégie impose l'utilisation de routeurs complexes, utilisant de nombreuses tables de routages. De ce fait, la protection par re-routage de bout-en-bout est souvent considérée comme une technique de restauration de trafic où le re-routage est calculé dynamiquement, en fonction des ressources disponibles dans le réseau au moment de la panne.

7.3.3 Re-routage autour de la panne

Cette stratégie consiste à préétablir, pour chaque arc du réseau, un ensemble de chemin de remplacements qui seront substitués à l'arc défaillant, dans chacun des chemins l'empruntant. Ainsi, lorsqu'une arête $\{x, y\}$ du réseau est défaillante, les routeurs situés aux nœuds x et y basculeront le trafic, en transit sur l'arête $\{x, y\}$, sur les chemins de substitution préétablis. De plus, les ressources allouées à la protection d'un arc sont partagées avec les ressources allouées à la protection des autres arcs.

Problème 7.3.1 (Re-routage autour de la panne)

Entrée : *Un graphe orienté G , une instance I de requêtes sur G et un routage R des requêtes de I sur G*

Sortie : *$\forall a \in A(G), \forall i \in I, a \in R(i)$, un routage de substitution $RS(a, i)$*

Objectif : *Minimiser :*
 (1) *la capacité maximale allouée sur chaque arc à la protection*
 ou (2) *la somme des capacités allouées à la protection*

Dans ce problème, minimiser la capacité maximale allouée sur chaque arc à la protection revient à répartir quasi-uniformément sur le réseau, la capacité utilisée sur chaque arc pour la protection. A l'inverse, minimiser la somme des capacités aura tendance à maximiser le partage des ressources de protection, c'est-à-dire la réutilisation de mêmes ressources.

Exemple

Soit $G = K_6^+$, et soient une instance I de requêtes sur G et son routage R sur G tel que $\forall a \in A(G), \vec{\pi}(G, I, R, a) = 4$.

Pour tout couple de sommets x et y de K_6^+ , il existe exactement 4 chemins disjoints de longueur 2 de x à y , $\{(x, i, y) \mid i \in A(K_6^+) \setminus \{x, y\}\}$. Donc, pour toute arc (x, y) , il existe un routage de substitution de x à y de charge 1, obtenu en acheminant une unité de flot sur chacun des chemins de longueur 2. La somme des capacités allouées à la protection sera alors de 30. En effet, depuis un sommet x , trouver 4 chemins disjoints de longueur 2 vers chacun des 5 autres sommets force à utiliser tous les arcs du réseau, sauf les arcs de la forme (i, x) , et nous devons faire de même depuis chacun des sommets.

Si nous cherchons maintenant à minimiser la somme des capacités, alors il existe au moins une solution dont la somme est égale à 24. Pour l'obtenir, il suffit d'utiliser uniquement les arcs des circuits $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 0)$ et $(0, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$ pour construire le routage de substitution. Dans ce cas, la capacité maximale d'un arc sera de 4.

Cette exemple nous montre bien la différence entre les deux fonctions de coûts proposées dans le problème 7.3.1.

Modèle mathématique

- **Variables**
 - $f(x, y, i, j)$ fraction entière du flot $\vec{\pi}(G, I, R, (x, y))$ sur l'arc (i, j)
- **Contraintes**

- Initialisation des flots :

$$\forall (x, y) \in A(G), \begin{cases} \sum_{i \in \Gamma_G^+(x) \setminus \{y\}} f(x, y, x, i) = \vec{\pi}(G, I, R, a) \\ \sum_{i \in \Gamma_G^-(x)} f(x, y, i, x) = 0 \end{cases}$$
- Absorption des flots :

$$\forall (x, y) \in A(G), \begin{cases} \sum_{i \in \Gamma_G^-(y) \setminus \{x\}} f(x, y, i, y) = \vec{\pi}(G, I, R, a) \\ \sum_{i \in \Gamma_G^+(y)} f(x, y, y, i) = 0 \end{cases}$$
- Conservation du flot :

$$\forall (x, y) \in A(G), \forall i \in VG \setminus \{x, y\}, \sum_{j \in \Gamma_G^-(i)} f(x, y, j, i) = \sum_{j \in \Gamma_G^+(i)} f(x, y, i, j)$$
- Distribution des flots sur les arcs :

$$\forall (x, y) \in A(G), \forall (i, j) \in A(G) \setminus \{(x, y), (y, x)\}, f(x, y, i, j) \leq t(i, j)$$
- **Objectif**
 - Minimiser (1) la capacité maximale : $\forall (i, j), t(i, j) \leq c$; Minimiser c
ou (2) la somme des capacités : Minimiser $\sum_{(i,j) \in A(G)} t(i, j)$

Complexité

Proposition 7.3.2 *Minimiser la capacité maximale allouée sur chaque arc du réseau à la protection, dans le problème 7.3.1, prend un temps polynômial.*

Preuve : Lorsque l'on cherche à minimiser la capacité maximale, le problème de décision associé au problème 7.3.1 est : étant donné une capacité c , existe-t-il une solution au problème 7.3.1, telle que $\forall (i, j), t(i, j) \leq c$?

Lorsque la capacité maximale d'un arc du réseau est uniforme et fixée à c , le problème 7.3.1 revient à résoudre m problèmes de flots indépendants dans le graphe G . Or, un problème de flot entier se résout en temps polynômial [FF62], donc résoudre le problème de décision associé au problème 7.3.1 se fait en temps polynômial.

Aussi, minimiser la capacité maximale allouée à la protection sur chaque arc du réseau prend un temps polynômial, dans le problème 7.3.1. □

La complexité du problème 7.3.1 lorsque l'objectif est de minimiser la somme des capacités allouées à la protection n'a pas encore été déterminée.

Proposition 7.3.3 *Soit S , la somme des capacités allouées à la protection dans le problème 7.3.1. Si le graphe UG contient un circuit hamiltonien, alors*

$$2n \min_{a \in A(G)} \vec{\pi}(G, I, R, a) \leq S \leq 2n \max_{a \in A(G)} \vec{\pi}(G, I, R, a)$$

Preuve : Soit C_n un circuit orienté symétrique hamiltonien. Alors, toute paire d'arcs symétriques peut être substituée par une portion de C_n n'empruntant pas ces deux arcs. De plus, la capacité du circuit doit être égale à la charge maximale d'un arc, $\max_{a \in A(G)} \vec{\pi}(G, I, R, a)$. Comme C_n contient $2n$ arcs, nous avons $S \leq 2n \max_{a \in A(G)} \vec{\pi}(G, I, R, a)$. De la même façon nous obtenons la borne inférieure. □

7.3.4 Protection par faces

La protection par faces est une solution intermédiaire entre la protection par re-routage autour de la panne et la protection par sous-réseaux. Elle permet de limiter le partage des ressources de protection.

Cette méthode consiste à partitionner les arcs du graphe G , en « petits » circuits orientés \vec{C}_i , chacun correspondant à une face du graphe. Ensuite, la protection des arcs formant ce circuit sera assurée par un circuit symétrique (circulant en sens inverse dans le graphe), dont la capacité est donnée par la charge maximum des arcs de \vec{C}_i . Lorsqu'un arc est sujet à une panne il est substitué par la portion correspondante du circuit de protection.

Il peut arriver que la partition en circuit des arcs de G soit redondante, c'est-à-dire qu'un même arc appartienne à plusieurs circuits. Dans ce cas, il est possible de partager les ressources de protection communes à plusieurs faces. Toutefois, il faudra garantir que deux arcs symétriques appartiennent toujours à deux circuits disjoints.

Problème 7.3.4 (Protection par faces)

Entrée : *Un graphe G , une instance I de requêtes sur G et un routage R de I*

Sortie : *Une partition des arcs de G en circuits orientés*

Objectif : *Minimiser la longueur maximale de chaque circuit de protection*

En limitant la longueur de chaque circuits de protections, l'allongement du chemin optique en cas de panne est limité.

Ce problème est en général NP-complet [SG76]. Toutefois, la protection par faces s'applique généralement aux réseaux planaires tels que les arbres d'anneaux, sur lesquels les circuits de protection sont induits.

Les arbres d'anneaux [BPT99] représentent une topologie appréciée de réseaux de communications. En effet, un arbre d'anneaux est une structure récursive simple, comme le montre la figure 7.5. Sur un tel réseau, chaque cycle le composant représente 2 faces dont la capacité est donnée par le routage.

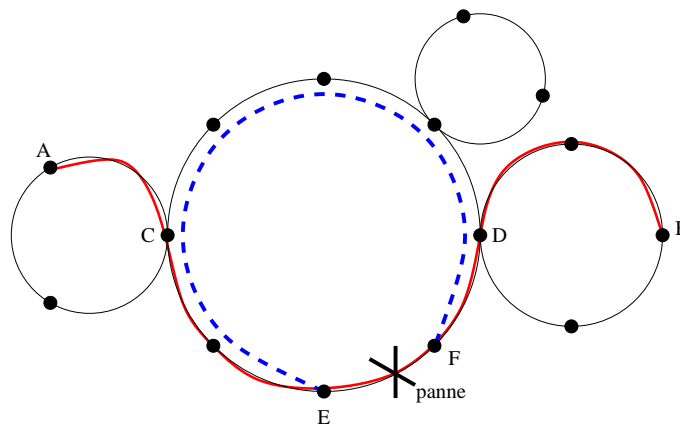


FIG. 7.5 – Arbre d'anneaux avec une panne.

Les protections par face et par re-routage autour de la panne peuvent être utilisées pour protéger un réseau indépendamment de l'instance de communication. En effet, supposons que la charge maximale d'un arc du réseau soit bornée par c , alors une solution à chacun de ces problèmes, pour une charge donnée des arcs, sera valable pour toute instance I de requêtes sur G dont le routage sur G est de charge $\vec{\pi}(G, I, R) \leq c$. Ces méthodes de protection pourront donc être utilisées lorsque l'instance de communication est variable. Par exemple, les besoins des utilisateurs variant au cours d'une même journée et selon le jour de la semaine, l'instance de communication et son routage pourront être modifiés afin de garantir une meilleure utilisation des ressources du réseau. D'autre part, les opérateurs choisissent généralement de surdimensionner un réseau par rapport aux besoins présents, afin d'anticiper les besoins futurs. Dans ces deux cas, un réseau auto-protégé pourra être apprécié.

7.4 Instance all-to-all sur le cycle

Nous considérons ici le cas particulier de la protection par sous-réseaux, où le réseau physique G est un cycle, l'ensemble de requêtes I est l'instance de communication all-to-all et les sous-réseaux I_k sont des cycles. Les requêtes partageant un même sous-réseau utilisent les mêmes ressources de protection.

Modélisation

L'instance de communication all-to-all est modélisée par le graphe complet K_n (ou K_n^*) et le réseau physique par le graphe $G = C_n$ (ou le cycle orienté symétrique). Un nœud du graphe physique correspond à un sommet du graphe logique, et une arête (arc) du graphe logique correspond à un chemin du graphe physique.

Nous allons chercher à répartir les arêtes de $I = K_n$ dans des sous-graphes $I_k = C_k$, de telle façon que les sous graphes I_k admettent un routage disjoint dans le graphe $G = C_n$.

L'un des objectifs de la protection par sous-réseaux étant de réduire le coût du réseau, nous allons chercher à minimiser le nombre des I_k .

Nous illustrons notre problème avec l'exemple de la figure 7.6, où $G = C_4$ et $I = K_4$. Une première solution consiste à utiliser les deux C_4 $(1, 2, 3, 4, 1)$ et $(1, 3, 4, 2, 1)$, comme illustré par la figure 7.6.(c), mais il n'existe pas de routage arête disjoint pour le cycle $(1, 3, 4, 2, 1)$. Une deuxième solution, représentée sur la figure 7.6.(d), consiste à utiliser le C_4 $(1, 2, 3, 4, 1)$ et les deux C_3 $(1, 2, 4, 1)$ et $(1, 3, 4, 1)$. Cette solution satisfait la contrainte de routage disjoint sur G .

DRC-couverture

Le recouvrement des arêtes d'un graphe I par des sous-graphes I_k , d'un certain type (K_i, C_i, \dots) consiste à répartir les arêtes de I dans des sous graphes I_k de telle façon que chaque arête de I appartienne à au moins un I_k . Cette notion est différente de celle de la partition des arêtes où chaque arête de I doit appartenir à exactement un I_k . L'objectif d'un recouvrement des arêtes est bien sûr de minimiser le nombre de sous-graphes.

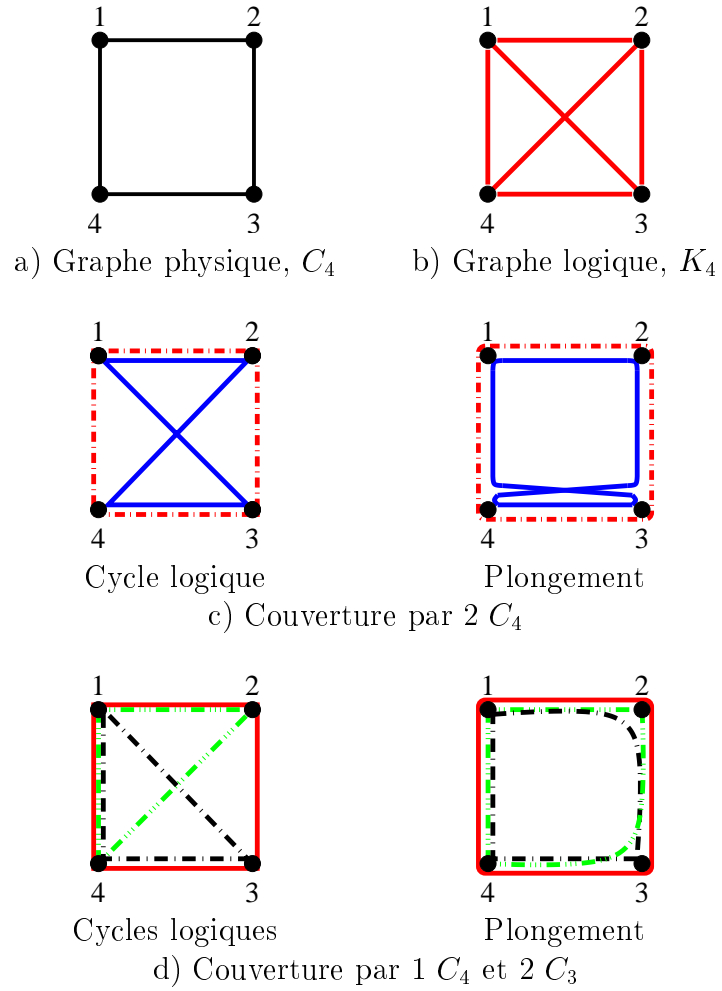


FIG. 7.6 – Exemple de couverture par des cycles.

Nous ajoutons une contrainte au problème de recouvrement des arêtes, en imposant que chaque arête de I soit associée à un chemin dans un graphe G , avec $V(I) \subseteq V(G)$, tel que les chemins associés aux arêtes constituant un I_k soient sommets disjoints (excepté à leurs extrémités). La contrainte ajoutée est appelée **contrainte de routage disjoint** et notée DRC, et nous parlerons de **DRC-couverture** d'un graphe I par rapport à un graphe G pour exprimer le recouvrement des arêtes de I par des sous-graphes I_k satisfaisant la contrainte de routage disjoint sur G . Ce problème se formalise de la façon suivante :

Problème 7.4.1 (DRC-couverture)

Entrée : *Un graphe cible G et un graphe logique I , tels que $V(I) \subseteq V(G)$*

Sortie : *Un recouvrement des arêtes de I par des sous-graphes I_k , d'un certain type, telle que chaque arête de I soit associée à un chemin dans G et tel que les arêtes de chacun des I_k aient un routage sommets disjoint dans G*

Objectif : *Minimiser le nombre des I_k*

Problème de décision associé 7.4.2 (DRCcouverture)

Données : *Un graphe cible G , un graphe logique I et un entier l*

Question : *Existe-t-il une DRC-couverture de I par rapport à G utilisant moins de l sous-graphes I_k ?*

Remarquons que la DRC-couverture n'existe pas toujours. En effet, supposons que le graphe G soit le cycle $C_3 = (0, 1, 2, 0)$ et que $E(I) = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$. Si les I_k sont des C_3 , alors la couverture ne peut être construite. Dans ce cas, nous pourrions ajouter au graphe I les arêtes d'un graphe I' permettant l'existence de la couverture. Alors, il faudra minimiser non seulement le nombre des sous-graphes I_k , mais aussi le nombre d'arêtes contenues dans le graphe I' . Cette remarque motive l'utilisation d'un recouvrement et non d'une partition. En effet, dans le recouvrement, des arêtes du graphe I peuvent être couvertes plusieurs fois, ce qui est bien équivalent à ajouter des arêtes au graphe I pour en construire une partition.

Dans la suite, sauf indication explicite, nous considérerons que le graphe I est tel qu'il existe une DRC-couverture.

Le problème de la DRC-couverture est NP-difficile, même si le graphe G est un cycle. En effet, si le graphe G est un cycle et si de plus les sous-graphes I_k sont des cycles, alors nous pouvons faire une analogie avec le problème du routage optique en associant une couleur à chaque cycle et, inversement, en construisant un cycle à partir des requêtes ayant la même couleur. Or, le problème du routage optique est NP-difficile sur le cycle [EJ96].

De nombreuses études traitent du problème de la couverture des arêtes de K_n par des graphes complets K_k , $k \leq n$. Ce problème est connu sous le nom de *covering design problem* [MM92, DS92, Sti96]. De plus, le problème de trouver une *couverture parfaite* des arêtes de K_n (chaque arête est couverte exactement une fois) est équivalent au problème de partitionnement des arêtes qui est ainsi relié à l'existence d'une $(n, k, 1)G$ -configuration [Hei96, LR92].

G -configuration

Notons λK_n (λK_n^*) le multigraphe complet à n sommets où deux sommets quelconques sont joints par λ arêtes (arcs).

Définition 7.4.3 Soit G un graphe simple à k sommets. Une (n, k, λ) G -configuration consiste en une partition des arêtes (arcs) de λK_n (λK_n^*) en sous graphes partiels isomorphes à G . Une (n, k, λ) G -configuration est **équilibrée** si chaque sommet appartient au même nombre de sous graphes partiels.

Cette définition a été introduite pour les graphes G simples [HR72] sous le nom de *balanced G -configuration*. Le lecteur est invité à consulter la thèse de Bermond [Ber75] ainsi que [BS75, CD96, Hei96, LR92] pour obtenir de plus amples informations sur les G -configurations.

7.4.1 Résultats connexes

Du fait de la contrainte de routage disjoint, notre problème de couverture n'a pas d'équivalent sous cette forme dans la littérature. En revanche, si nous ne considérons pas cette contrainte, des résultats existent pour la couverture par des cycles des arêtes de K_n , et des arcs de K_n^* [MM92, SR82, Hei96, LR92, BS77, BHS78, Ber75]. Les quatre résultats suivants déterminent le nombre de cycles nécessaires à cette couverture, pour des cycles de longueur 3 et pour des cycles de longueur 4.

Théorème 7.4.4 ([MM92, SR82]) *Le nombre minimum de cycles de longueur 3 nécessaires à la couverture des arêtes de K_n est*

$$\left\lceil \frac{n}{3} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right\rceil$$

Théorème 7.4.5 ([Ber75]) *Le nombre minimum de cycles de longueur 4 nécessaire à la couverture des arêtes de K_n est*

$$\left\lceil \frac{n}{4} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right\rceil + \epsilon(n) \quad \text{avec } \epsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{8} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 7.4.6 ([Ber75]) *Le nombre minimum de \vec{C}_3 nécessaire à la couverture des arcs de K_n^* est*

$$\begin{cases} 12 & \text{si } n = 6; \\ \frac{n(n-1)}{3} & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{3}; \\ \frac{n(n-1)+4}{3} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Théorème 7.4.7 ([Ber75]) *Le nombre minimum de \vec{C}_4 nécessaire à la couverture des arcs de K_n^* est, pour $n > 4$,*

$$\left\lceil \frac{n(n-1)}{4} \right\rceil$$

Le problème du routage optique (problème 7.1.4 page 127) est très proche de notre problème.

Proposition 7.4.8 *Si $G = \vec{C}_n$ et $I = K_n^*$, alors résoudre le problème du routage optique est équivalent à résoudre le problème de la DRC-couverture.*

Preuve : Nous pouvons associer une couleur à chaque cycle de la couverture et, inversement, nous pouvons construire un cycle de la DRC-couverture à partir des requêtes ayant la même couleur. De plus, deux requêtes empruntant un même lien du réseau auront des longueurs d'ondes différentes du fait de la contrainte de routage disjoint sur les cycles de la couverture. Alors, minimiser le nombre de cycles de la couverture revient à minimiser le nombre de longueurs d'ondes du routage optique. □

Dans le cas orienté, une coloration minimum a été donnée dans [Wil96], avec $\vec{w}(\vec{C}_n, K_n^*) = \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \right\rceil$. Toutefois, les chemins ayant la même couleur ne sont pas sommets disjoints, et de plus, les cycles engendrés par la coloration de Wilfong peuvent être grands (contenant jusqu'à n requêtes). Un de nos résultats implique une coloration minimum, en imposant de plus l'utilisation de petits cycles.

Dans le cas non-orienté, $G = C_n$, le problème de la DRC-couverture de K_n est également similaire au problème du routage optique ; en effet, comme dans C_n un chemin arête disjoint est également sommet disjoint, nous pouvons associer une couleur à chaque cycle de la couverture et, inversement, nous pouvons construire un cycle de la DRC-couverture à partir des requêtes ayant la même couleur. Une solution au problème du routage optique est donnée dans [BGP⁺00]. Toutefois, cette solution n'est pas correcte pour n pair et, à nouveau, les sous-réseaux correspondant à une couleur donnée ne sont pas de petits cycles.

7.4.2 Nouveaux résultats

Nous résumons ici les résultats que nous avons obtenus [BCCT00, BCCT01a, BCCT01b, BCY] sur ce problème, avant d'en donner les preuves. Remarquons que nous cherchons à utiliser de petits cycles.

Notons $\rho(n)$ le nombre minimum de cycles nécessaires à la DRC-couverture de K_n et notons $\rho_k(n)$ le nombre minimum de cycles de longueur k nécessaires à la DRC-couverture de K_n . Nous démontrons les résultats suivants, où $\#C_k$ désigne le nombre de C_k utilisés dans la DRC-couverture, avec $\rho(n) = \#C_3 + \#C_4$:

n	$\rho(n) = \#C_3 + \#C_4$	$\rho_4(n)$
$2p + 1$	$\frac{p(p+1)}{2} = p + \frac{p(p-1)}{2}$	$\frac{p(p+1)}{2} + 1$
$4q \quad q \geq 2$	$2q^2 + 1 = 4 + 2q^2 - 3$	$2q^2 + 1$
$4q + 2 \quad q \geq 1$	$2q^2 + 2q + 1 = 2 + 2q^2 + 2q - 1$	$2q^2 + 2q + 2$

Notons maintenant $\rho^*(n)$ le nombre minimum de cycles orientés (sans distinction d'orientation) nécessaires à la DRC-couverture de K_n^* et notons $\rho_k^*(n)$ le nombre minimum de

cycles orientés de longueur k nécessaires à la DRC-couverture de K_n^* . Nous démontrons les résultats suivants, où $\#\vec{C}_k$ dénote le nombre de \vec{C}_k utilisés dans la DRC-couverture, avec $\rho^*(n) = \#\vec{C}_3 + \#\vec{C}_4$:

n	$\rho^*(n) = \#\vec{C}_3 + \#\vec{C}_4$	$\rho_4^*(n)$
$2p + 1$	$p^2 + p = 2p + p^2 - p$	$p^2 + p + 2 \quad p \geq 3$
$2p$	$p^2 = 2p + p^2 - 2p$	$p^2 + 2 \quad p \geq 4$

Nous allons donner la preuve de ces résultats, en commençant par montrer les bornes inférieures de $\rho(n)$ et $\rho_4(n)$. Ensuite, nous donnerons les constructions qui atteignent ces bornes. Enfin, nous étendrons ces résultats au cas orienté.

7.4.3 Bornes inférieures

Proposition 7.4.9 ([BCCT01b]) $\rho(2p + 1) \geq \frac{p(p+1)}{2}$ avec $p \geq 1$, et $\rho(2p) \geq \frac{p^2+1}{2}$, $p \geq 2$.

Preuve : Soit C^j , $1 \leq j \leq \rho(n)$, un cycle de la DRC-couverture de K_n (remarquons que les cycles ne doivent pas nécessairement avoir la même longueur). La contrainte de routage disjoint implique que ses sommets sont ordonnés cycliquement modulo n . Alors, C^j peut s'écrire $(a_1^j, a_2^j, \dots, a_{k_j}^j, a_1^j)$, avec $0 \leq a_1^j \leq a_2^j \leq \dots \leq a_{k_j}^j \leq n - 1$.

Soient $\delta_i^j = a_{i+1}^j - a_i^j$, $1 \leq i \leq k_j - 1$, et $\delta_{k_j}^j = n + a_1^j - a_{k_j}^j$. La contrainte de routage disjoint implique $\sum_i \delta_i^j = n$.

Étant donné une arête $\{x, y\}$ de K_n , $x < y$, nous appelons *différence de l'arête* $\{x, y\}$ la valeur $y - x$, si $y - x \leq n/2$, et $x + n - y$ sinon (ceci correspond à la longueur du chemin de x à y dans C_n).

Cas impair, $n = 2p + 1$

La couverture doit contenir n arêtes de différence d pour tout d , $1 \leq d \leq p$. Chaque différence correspond à un δ_i^j , avec $\delta_i^j = d$ ou $n - d$. Nous avons alors, $\sum_{i,j} \delta_i^j \geq \sum_{d=1}^p nd = n \frac{p(p+1)}{2}$. Or, $\sum_i \delta_i^j = n$. Donc, si la couverture contient $\rho(n)$ cycles, nous avons $n\rho(n) \geq n \frac{p(p+1)}{2}$ et finalement, $\rho(n) \geq \frac{p(p+1)}{2}$.

Cas pair, $n = 2p$

La couverture doit contenir n arêtes de différence d , $1 \leq d \leq p - 1$, et $\frac{n}{2} = p$ arêtes de différence p (sommets opposés dans C_n). De plus, comme le degré des sommets de K_n est impair (égal à $n - 1$) et que le degré des sommets du cycle C_n est pair (égal à 2), la couverture de K_n doit contenir des arêtes supplémentaires (une arête adjacente à chacun des sommets est couverture au moins deux fois). Alors, nous avons au moins $\frac{n}{2}$ arêtes supplémentaires, de différence au moins 1, dans la couverture. Ainsi, $\sum_{i,j} \delta_i^j \geq (\sum_{d=1}^{p-1} nd) + pp + p = p(p^2 + 1)$ et si la couverture contient $\rho(n)$ cycles, nous obtenons $n\rho(n) = 2p\rho(n) \geq p(p^2 + 1)$ et finalement, $\rho(n) \geq \frac{p^2+1}{2}$.

□

La proposition 7.4.9 nous montre que, dans le cas pair comme dans le cas impair, la longueur des cycles utilisés pour construire la DRC-couverture de K_n ne change pas la borne inférieure de $\rho(n)$. Toutefois, le théorème 7.4.4 nous dit que la seule utilisation de cycles de longueur 3 ne permet pas d'atteindre l'optimal. Nous allons montrer par la suite qu'une solution optimale peut-être obtenue en utilisant simultanément des cycles de longueurs 3 et 4.

Proposition 7.4.10 $\rho_4(2p+1) \geq \frac{p(p+1)}{2} + 1$ avec $p \geq 2$, et $\rho_4(4q) \geq 2q^2 + 1$ et $\rho_4(4q+2) \geq 2q^2 + 2q + 2$, avec $q \geq 1$.

Preuve : Cette preuve est similaire à celle de la proposition 7.4.9.

Cas impair, $n = 2p + 1$

Nous savons par la proposition 7.4.9 que $\rho_4(2p+1) \geq \rho(2p+1) = \frac{p(p+1)}{2}$. Si il y avait égalité, alors, comme $4\frac{p(p+1)}{2} = \frac{2p(2p+1)}{2} + p$, p arêtes supplémentaires seraient utilisées (la couverture n'est pas une décomposition). Alors, $\sum_{i,j} \delta_i^j \geq (2p+1)\frac{p(p+1)}{2} + p$, car la somme des différence des p arêtes supplémentaires est au moins p . Ainsi, $(2p+1)\rho_4(2p+1) \geq (2p+1)\frac{p(p+1)}{2} + p$ ce qui implique que $\rho_4(2p+1) \geq \frac{p(p+1)}{2} + 1$.

Cas pair, $n = 4q$

La borne est celle de la proposition 7.4.9.

Cas pair, $n = 4q + 2$

La proposition 7.4.9 nous donne $\rho_4(4q+2) \geq \rho(4q+2) = 2q^2 + 2q + 1$. Si $\rho_4(4q+2) = 2q^2 + 2q + 1$, alors, comme $4(2q^2 + 2q + 1) = \frac{(4q+2)(4q+1)}{2} + 2q + 3$, $2q + 3$ arêtes supplémentaires sont utilisées, et donc $\sum_{i,j} \delta_i^j \geq (2q+1)^3 + 2q + 3$, et $(4q+2)\rho_4(4q+2) \geq (2q+1)^3 + 2q + 3$, ce qui implique que $\rho_4(4q+2) \geq 2q^2 + 2q + 1 + \frac{2}{4q+2} > 2q^2 + 2q + 1$.

□

7.4.4 Construction de la DRC-couverture

Théorème 7.4.11 ([BCCT01b]) Si $n = 2p + 1$, alors $\rho(n) = \frac{n^2-1}{8} = \frac{p(p+1)}{2}$. De plus, la DRC-couverture de K_{2p+1} est constituée de p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .

Preuve : (par induction sur p)

K_3 est couvert par un C_3 , donc le théorème est vrai pour $p = 1$.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour K_{2p+1} et montrons qu'il est vrai pour $n = 2p + 3$. Pour cela, notons et rangeons les sommets de K_{2p+3} de la façon suivante : $A, 0, 1, \dots, p-1, B, p, \dots, 2p$, où les sommets $0, 1, \dots, 2p$ sont ceux de K_{2p+1} .

Une DRC-couverture de K_{2p+3} se construit à partir d'une DRC-couverture de K_{2p+1} en choisissant les cycles suivant :

- Les $p(p+1)/2$ cycles de la DRC-couverture de K_{2p+1} , sur les sommets $0, 1, \dots, p-1, p, \dots, 2p$,
- Les p C_4 de la DRC-décomposition de $K_{2p,2}$ construit entre les sommets $0, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p$ d'une part, et les sommets A et B d'autre part, c'est-à-dire $(A, p-1-i, B, p+1+i, A)$, $0 \leq i \leq p-1$.

– Le $C_3 (A, B, p, A)$.

Il est facile de vérifier que toutes les arêtes de K_{2p+3} sont couvertes par exactement un de ces cycles et que nous avons au total $p(p+1)/2 + p + 1 = (p+1)(p+2)/2$ cycles. De plus, il y a exactement $p+1$ C_3 et $p(p+1)/2$ C_4 .

□

La figure 7.7 montre la couverture de K_5 obtenue par la construction donnée dans le théorème 7.4.11. Soient $A, 0, B, 1, 2$, les sommets de K_5 . La DRC-couverture de K_5 comprend l'unique cycle $(0, 1, 2, 0)$ de la couverture de K_3 , plus le $C_4 (A, 0, B, 2, A)$ de la DRC-décomposition du $K_{2,2}$ construit entre les sommets A et B , et les sommets 0 et 2 , plus le $C_3 (A, B, 1, A)$.

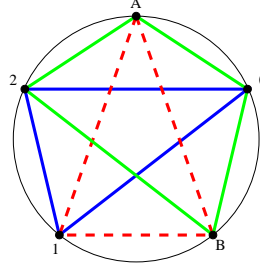


FIG. 7.7 – Couverture de K_5 obtenu à partir de celle de K_3 .

Théorème 7.4.12 ([BCCT01b]) *Si $n = 2p$ et $p \geq 2$, alors $\rho(n) = \left\lceil \frac{n^2+4}{8} \right\rceil = \left\lceil \frac{p^2+1}{2} \right\rceil$. De plus, lorsque $n = 4q + 4$ et $q \geq 2$, alors la DRC-couverture de K_{4q} est constituée de 4 C_3 et $2q^2 - 3$ C_4 , et lorsque $n = 4q + 2$ et $q \geq 1$, alors la DRC-couverture de K_{4q+2} est constituée de 2 C_3 et $2q^2 + 2q - 1$ C_4 .*

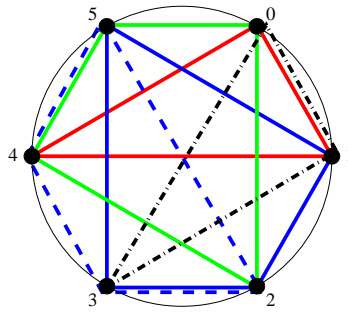
La couverture de K_4 par un C_3 et 2 C_4 est donnée dans la figure 7.6. Afin de montrer le théorème 7.4.12, nous devons montrer quelques lemmes.

Lemme 7.4.13 *K_6 peut être couvert par 2 C_3 et 3 C_4 .*

Preuve : La couverture est donnée par les deux $C_3 : (0, 1, 3, 0)$ et $(0, 1, 4, 0)$, plus les trois $C_4 : (0, 2, 4, 5, 0)$, $(1, 2, 3, 5, 1)$ et $(2, 3, 4, 5, 2)$, comme montré dans la figure 7.8. De plus, les trois arêtes $\{0, 1\}$, $\{2, 3\}$ et $\{4, 5\}$, sont couvertes exactement deux fois (elles forment un couplage parfait).

□

Lemme 7.4.14 *Si il existe un DRC-couverture de K_{4q+2} par $\rho(4q+2) = 2q^2 + 2q + 1$ cycles, alors il existe une DRC-couverture de K_{4q+4} par $\rho(4q+4) = 2q^2 + 4q + 3$ cycles.*

FIG. 7.8 – Couverture de K_6

Preuve : Soient $A, 0, 1, \dots, 2q, B, 2q+1, \dots, 4q+1$, les sommets de K_{4q+4} , ainsi ordonnés.

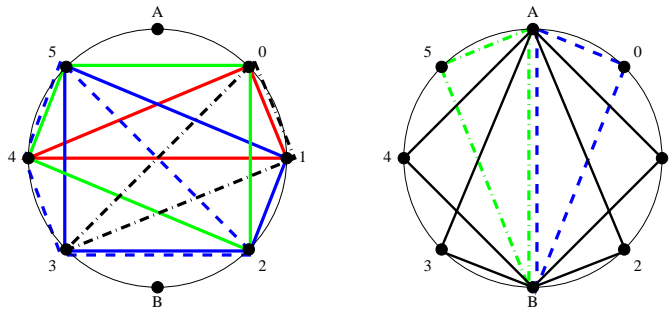
Une DRC-couverture de K_{4q+4} se construit à partir d'une DRC-couverture de K_{4q+2} en choisissant les cycles suivant :

- Les $2q^2 + 2q + 1$ cycles de la DRC-couverture de K_{4q+2} , sur les sommets $0, 1, \dots, 2q, 2q+1, \dots, 4q+1$,
- Les $2q$ C_4 de la DRC-décomposition de $K_{4q,2}$ construit entre les sommets $1, \dots, 2q, 2q+1, \dots, 4q$ d'une part, A et B d'autre part, c'est-à-dire $(A, i, B, 2q+i, A)$, $1 \leq i \leq 2q$,
- Les 2 C_3 $(A, 0, B, A)$ et $(A, B, 4q+1, A)$.

Il est facile de vérifier que toutes les arêtes de K_{4q+4} sont couvertes par un de ces cycles et que nous avons au total $2q^2 + 2q + 1 + 2q + 2 = 2q^2 + 4q + 3 = \left\lceil \frac{(2q+2)^2 + 1}{2} \right\rceil$ cycles. De plus, la couverture compte exactement 4 C_3 (2 provenant de la DRC-couverture de K_{4q+2} et 2 C_3 supplémentaires).

□

Nous illustrons cette preuve dans la figure 7.9 en donnant les cycles de la couverture de K_8 .

FIG. 7.9 – Cycles de la couverture de K_8 .

Lemme 7.4.15 *Si il existe une DRC-couverture de K_{4q+2} par $\rho(4q+2) = 2q^2 + 2q + 1$ cycles, alors il existe une DRC-couverture de K_{4q+6} par $\rho(4q+6) = 2q^2 + 6q + 5$ cycles.*

Preuve : Nous allons prouver un lemme « plus fort », en imposant des propriétés supplémentaires sur la décomposition qui devront être préservées dans la construction.

Supposons qu'il existe une DRC-couverture de K_{4q+2} , où les sommets $0, 1, \dots, 4q+1$ sont ordonnés cycliquement, avec les propriétés suivantes :

- Les arêtes (du couplage parfait) $(0, 1), (2, 3), \dots, (4q, 4q+1)$ sont couvertes exactement deux fois, et les autres une seule fois.
- L'arête $\{0, 1\}$ appartient au C_3 $(0, 1, x, 0)$, pour un certain x différent de 0 ou 1.

Nous allons montrer qu'il existe une DRC-couverture de K_{4q+6} avec les mêmes propriétés. Remarquons que ces propriétés sont satisfaites par la couverture de K_6 données dans le lemme 7.4.13 (avec $x = 3$ ou 4).

Soient $0, A, B, 1, \dots, 2q+1, C, D, 2q+2, \dots, 4q+1$, les sommets de K_{4q+6} ainsi ordonnés. La DRC-couverture de K_{4q+6} sera

- Les $2q^2 + 2q$ cycles de la DRC-couverture de K_{4q+2} privé du C_3 $(0, 1, x, 0)$,
- Les $2q$ C_4 $(A, i, C, f(i), A)$, avec $2 \leq i \leq 2q+1$ et où f est une bijection de $\{2, 3, \dots, 2q+1\}$ dans $\{2q+2, \dots, 4q+1\}$,
- Les $2q+1$ C_4 $(B, j, D, g(j), B)$, $1 \leq j \leq 2q+1$, où g est une bijection de $\{1, 2, \dots, 2q+1\}$ dans $\{2q+2, \dots, 4q+1, 0\}$.
- Les 3 C_4 (A, B, C, D, A) , $(0, A, 1, x, 0)$, $(B, 1, C, D, B)$ et le C_3 $(0, A, C, 0)$.

Il est facile de vérifier que toutes les arêtes de K_{4q+6} sont couvertes par au moins un de ces cycles, et que nous avons au total $2q^2 + 2q + 2q + 2q + 1 + 3 + 1 = 2q^2 + 6q + 5 = \left\lceil \frac{(2q+2)^2 + 1}{2} \right\rceil$ cycles. De plus, la couverture compte exactement 2 C_3 , les arêtes $\{0, A\}, \{B, 1\}, \{2, 3\}, \dots, \{2q, 2q+1\}, \dots, \{C, D\}, \{2q+2, 2q+3\}, \dots, \{4q, 4q+1\}$ (correspondant au couplage parfait) sont couvertes deux fois et les autres seulement une fois. Enfin, l'arête $\{0, A\}$, qui est couverte deux fois, apparaît dans le C_3 $(0, A, C, 0)$. Nous pouvons renuméroter les sommets de K_{4q+6} comme suit : A (resp. B) devient 1 (resp. 2), i , pour $1 \leq i \leq 2q+1$, devient $i+2$, C (resp. D) devient $2q+4$ (resp. $2q+5$), et j , $2q+2 \leq j \leq 4q+1$ devient $j+4$. Ainsi, K_{4q+6} satisfait l'hypothèse d'induction. □

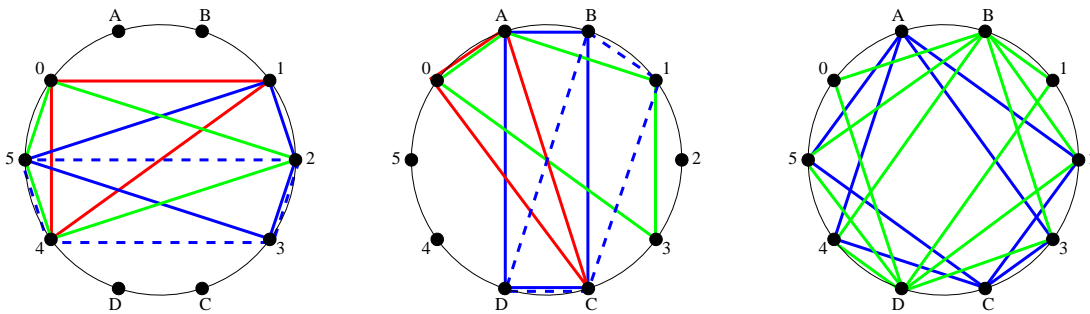


FIG. 7.10 – Cycles de la couverture de K_{10} .

Remarque Pour la preuve du théorème 7.4.16, remarquons que les deux C_3 de la décomposition de K_6 sont $(0, 1, 3, 0)$ et $(0, 1, 4, 0)$. Posons $x = 3$. Après $q - 1$ étapes d'induction, les deux C_3 de K_{4q+2} , si $q \geq 2$, deviennent $(0, 1, 2q + 2, 0)$ et $(0, 2q - 1, 4q, 0)$. De plus, nous avons le cycle $(1, i_0, 2q + 2, 4q, 1)$ (correspondant au $C_4 (A, i, C, f(i), A)$ avec $f(i_0) = 4q$ dans la construction ci-dessus).

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver le théorème 7.4.12.

Preuve du Théorème 7.4.12 : (par induction)

Le théorème est vrai pour $n = 6$, d'après le lemme 7.4.13. Notons que la couverture de K_6 satisfait les propriétés supplémentaires de la preuve du lemme 7.4.15. Alors, en utilisant le lemme 7.4.15, nous pouvons construire la DRC-couverture de K_{4q+2} , $q \geq 1$, par $\rho(4q + 2) = 2q^2 + 2q + 1$ cycles. Enfin, en utilisant le lemme 7.4.14, nous pouvons construire le DRC-couverture de K_{4q+4} , $q \geq 1$, avec $\rho(4q + 4) = 2q^2 + 4q + 3$ cycles.

Ceci conclut la preuve du théorème 7.4.12. \square

Théorème 7.4.16 $\rho_4(2p + 1) = \frac{p(p+1)}{2} + 1$, pour $p \geq 3$; $\rho_4(4q) = 2q^2 + 1$, pour $q \geq 2$, et $\rho_4(4q + 2) = 2q^2 + 2q + 2$, pour $q \geq 1$.

Preuve :

Cas 1 : $n = 2p + 1$

La preuve est similaire à celle du théorème 7.4.11, et par induction nous allons montrer qu'il existe une C_4 -DRC-couverture de K_{2p+1} où les sommets sont numérotés $0, 1, \dots, 2p$, contenant un C_4 de la forme $(0, p - 1, p, p + 1, 0)$, l'arête $\{p - 1, p\}$ étant couverte deux fois.

Le théorème est vrai pour $p = 3$. En effet, une couverture de K_7 est donnée par les 7 $C_4 (i, i + 1, i + 2, i + 5, i)$, $0 \leq i \leq 6$, contenant en particulier le $C_4 (2, 3, 4, 0, 2)$ avec l'arête $\{2, 3\}$ couverte deux fois.

Supposons que l'hypothèse d'induction est vraie pour K_{2p+1} et montrons qu'elle est vraie pour K_{2p+3} . Soient $A, 0, 1, \dots, p - 1, B, p, \dots, 2p$ les sommets de K_{2p+3} ainsi ordonnés. Les C_4 de la DRC-couverture de K_{2p+3} sont :

- Les $\frac{p(p+1)}{2}$ C_4 de la couverture de K_{2p+1} , privé du $C_4 (0, p - 1, p, p + 1, 0)$,
- Les $p - 1$ C_4 de la DRC-décomposition de $K_{2p-2,2}$, construit entre les sommets $0, 1, \dots, p - 2, p + 2, \dots, 2p$ d'une part, et les sommets A et B d'autre part, c'est-à-dire les $C_4 (A, p - 1 - i, B, p + 1 + i, A)$, $1 \leq i \leq p - 1$,
- Les 3 $C_4 (0, p - 1, B, p + 1, 0)$, $(A, p - 1, B, p, A)$ et $(A, B, p, p + 1, A)$.

Il est facile de vérifier que toutes les arêtes de K_{2p+3} sont couvertes et que nous avons au total $\frac{p(p+1)}{2} + p - 1 + 3 = \frac{(p+1)(p+2)}{2} + 1$ C_4 . La couverture comprend le cycle $(A, p - 1, B, p, A)$ qui devient, si nous renumérotions les sommets de K_{2p+3} de 0 à $2p + 2$, le cycle $(0, p, p + 1, p + 2, 0)$; De plus, l'arête $\{p - 1, B\}$ qui devient $\{p, p + 1\}$ après renumérotation, est couverte deux fois.

Cas 2 : $n = 4q + 2$, $q \geq 1$

Dans la preuve du lemme 7.4.15, nous avons obtenu une couverture de K_{4q+2} par $2q^2 + 2q - 1$ C_4 et les deux C_3 (voir remarque) $(0, 1, 2q + 2, 0)$ et $(0, 2q - 1, 4q, 0)$. Supprimons ces C_3 et considérons les 3 $C_4 (0, 1, 2q + 2, 4q, 0)$, $(0, 2q - 1, 4q, 4q + 1, 0)$ et $(0, \alpha, \beta, 2q + 2, 0)$, avec

$0 < \alpha < \beta < 2q + 2$. Ils contiennent toutes les arêtes des C_3 que nous avons supprimés. Alors nous avons une couverture de K_{4q+2} par $2q^2 + 2q - 1 + 3 = 2q^2 + 2q + 2$ C_4 's.

Cas 3 : $n = 4q + 4 = 9$, $q = 1$

Une couverture de K_8 est donnée par les C_4 suivants : $(i, i + 1, i + 4, i + 5, i)$, $0 \leq i \leq 3$, $(0, 1, 2, 6, 0)$, $(1, 2, 4, 5, 1)$, $(0, 2, 3, 4, 0)$, $(3, 4, 6, 7, 3)$ et $(1, 3, 5, 7, 1)$. Remarquons que les arêtes $\{0, 1\}$ et $\{4, 5\}$ sont couvertes deux fois.

Cas 4 : $n = 4q + 4$, $q > 1$

Montrons que $\rho_4(4q + 4) = 2q^2 + 4q + 3$. Comme dans la preuve du lemme 7.4.14, nommons les sommets $A, 0, 1, \dots, 2q, B, 2q + 1, \dots, 4q + 1$. La preuve du lemme 7.4.14 donne une décomposition de K_{4q+4} en $2q^2 + 2q - 1$ C_4 et 2 C_3 de la couverture de K_{4q+2} , plus $2q + 1$ C_4 de la décomposition de $K_{4q+2,2}$ (sur les sommets $0, 1, \dots, 4q + 1$ d'une part, et A, B d'autre part), et plus l'arête $\{A, B\}$. En utilisant la remarque de la preuve du lemme 7.4.15, nous obtenons une décomposition avec $2q^2 + 4q$ C_4 plus l'arête $\{A, B\}$, plus les C_3 $(0, 1, 2q + 2, 0)$ et $(0, 2q - 1, 4q, 0)$, et nous savons que l'un des C_4 est de la forme $(1, i_0, 2q + 2, 4q, 1)$. Remplaçons l'arête $\{A, B\}$, les 2 C_3 et ce C_4 par les 4 C_4 suivants qui couvrent toutes ces arêtes : $(A, 0, 2q - 1, B, A)$, $(0, 1, 2q + 2, 4q, 0)$, $(0, 1, i_0, 2q + 2, 0)$ et $(1, \alpha, 2q - 1, 4q, 1)$, pour un certain $1 < \alpha < 2q - 1$, par exemple $\alpha = 2$ (ce qui suppose que $q > 1$). Donc, si $q \geq 2$, nous avons une DRC-couverture avec $2q^2 + 4q + 3$ cycles. □

Remarque Pour $n = 5$, $\rho_4(5) = 5$, et chaque C_4 contenant exactement une arête $\{i, j\}$ de différence $\delta_i^j = 2$, la seule façon d'obtenir $\sum_i \delta_i^j = 5$ est d'avoir 3 arêtes telles que $\delta_i^j = 1$ et une avec $\delta_i^j = 2$. Aussi $\rho_4(5) \geq 5$. Finalement, une couverture de K_5 est donnée par les 5 C_4 : $(i, i + 1, i + 2, i + 4, i)$, $0 \leq i \leq 4$.

7.4.5 Cas orienté

Notons maintenant $\rho^*(n)$ le nombre minimum de cycles orientés nécessaires à la DRC-couverture de K_n^* et notons $\rho_k^*(n)$ le nombre minimum de cycles orientés de longueur k nécessaires à la DRC-couverture de K_n^* .

Théorème 7.4.17 *Si $n = 2p$, alors $\rho^*(n) = p^2$. De plus, nous avons une DRC-couverture de K_{2p}^* constituée de p \vec{C}_2 et $p^2 - p$ \vec{C}_4 , et une autre couverture composée de $2p$ \vec{C}_3 et $p^2 - 2p$ \vec{C}_4 .*

Preuve : En utilisant une preuve similaire à celle de la proposition 7.4.9, il est facile de vérifier que la borne inférieure est $\rho^*(2p) \geq p^2$ (nous n'avons plus de condition sur le degré).

Montrons le théorème 7.4.17 par induction sur p .

Le théorème est vrai pour $p = 2$. En effet, une DRC-couverture de K_4^* est donnée par les 4 \vec{C}_3 $(0, 1, 2, 0)$, $(0, 2, 3, 0)$, $(0, 3, 1, 0)$ et $(1, 3, 2, 1)$, et une autre est donnée par les 2 \vec{C}_4 $(0, 1, 2, 3, 0)$ et $(0, 3, 2, 1, 0)$ plus les 2 \vec{C}_2 $(0, 2, 0)$ et $(1, 3, 1)$.

Supposons que le théorème est vrai pour p , $\rho^*(2p) = p^2$, et montrons qu'il est vrai pour $p + 1$, $\rho^*(2p + 2) = (p + 1)^2$. Soient $A, 0, 1, \dots, p - 1, B, p, \dots, 2p - 1$ les sommets de K_{2p+2}^*

ainsi ordonnés. Une DRC-couverture orientée est donnée par les p^2 cycles de la couverture de K_{2p}^* , plus les $2p$ $\vec{C}_4(A, i, B, p+i, A)$ et $(A, p+i, B, i, A)$, $0 \leq i \leq p-1$, et plus les $\vec{C}_2(A, B, A)$. Ainsi, nous avons une couverture de K_{2p+2}^* par $p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ cycles. Si les p^2 cycles de la couverture de K_{2p}^* sont p \vec{C}_2 et $p^2 - p$ \vec{C}_4 , nous obtenons une couverture de K_{2q+2}^* avec $p+1$ \vec{C}_2 et $p^2 + p$ \vec{C}_4 .

De plus, si nous remplaçons le $\vec{C}_4(A, 0, B, p, A)$ et le $\vec{C}_2(A, B, A)$ par les 2 $\vec{C}_3(A, 0, B, A)$ et (B, p, A, B) et si nous démarrons d'une couverture de K_{2p}^* sans \vec{C}_2 , nous obtenons une couverture sans \vec{C}_2 .

□

Théorème 7.4.18 *Si $n = 2p+1$, alors $\rho^*(n) = p^2 + p$. De plus, la DRC-couverture de K_{2p+1} est constituée de $2p$ \vec{C}_3 et $p^2 - p$ \vec{C}_4 .*

Preuve : Une preuve similaire à celle du théorème 7.4.11 donne $\rho^*(n) \geq p^2 + p$. Étant donné une DRC-couverture de K_{2p+1} , obtenue au théorème 7.4.11, utilisant p C_3 et $\frac{p^2-p}{2}$ C_4 , remplaçons chaque C_4 par deux \vec{C}_4 opposés et chaque C_3 par deux \vec{C}_3 opposés. Alors, nous obtenons une DRC-couverture utilisant exactement $p^2 + p$ cycles orientés, dont $2p$ \vec{C}_3 et $p^2 - p$ \vec{C}_4 .

□

Théorème 7.4.19 *$\rho^*_4(2p+1) = p^2 + p + 2$ lorsque $p \geq 3$, et $\rho^*_4(2p) = p^2 + 2$ avec $p \geq 4$.*

Preuve :

Cas 1 : $n = 2p + 1$

Supposons que $\rho^*_4(n) = p^2 + p + 1$. Comme $4(p^2 + p + 1) = 2p(2p + 1) + 2p + 4$, $2p + 4$ arcs supplémentaires sont utilisés et donc $\sum_{i,j} \delta_i^j \geq (2p + 1)p(p + 1) + 2p + 4$, ce qui implique $\rho^*_4(n) \geq p(p + 1) + \frac{2p+4}{2p+1} > p^2 + p + 1$ (la somme des différence sur chaque cycle étant égal à $2p + 1$).

Une couverture par $p^2 + p + 2$ \vec{C}_4 se déduit de celle du théorème 7.4.16 en remplaçant chaque C_4 par deux \vec{C}_4 opposés.

Cas 2 : $n = 2p$

Supposons que $\rho^*_4(n) = p^2 + 1$. Comme $4(p^2 + 1) = 2p(2p - 1) + 2p + 4$, $2p + 4$ arcs supplémentaires sont utilisés et donc $\sum_{i,j} \delta_i^j \geq 2p(p - 1)p + 2p^2 + 2p + 4$, ce qui implique $\rho^*_4(n) \geq p^2 + \frac{2p+4}{2p} > p^2 + 1$.

Une couverture de K_8^* par 18 \vec{C}_4 se déduit de celle de K_8 par 9 C_4 (théorème 7.4.16) en remplaçant chaque C_4 de la couverture par deux \vec{C}_4 opposés. Remarquons que cette couverture contient le $\vec{C}_4(0, 1, 4, 5, 0)$, qui est de la forme $(0, 1, p, p + 1, 0)$, et que les arcs $(0, 1)$ et $(4, 5)$ sont couverts deux fois.

Montrons par induction qu'il existe une couverture de K_{2p}^* par $p^2 + 2$ cycles orientés, contenant le $\vec{C}_4(0, 1, p, p + 1, 0)$ et telle que les arcs $(0, 1)$ et $(p, p + 1)$ sont couverts deux fois. L'hypothèse d'induction est vraie pour $2p = 8$ comme nous l'avons vu avant. Supposons

que l'hypothèse est vraie pour K_{2p}^* et nommons les sommets de K_{2p+2}^* $0, A, 1, \dots, p, B, p + 1, \dots, 2p - 1$ dans cet ordre. Une \vec{C}_4 -DRC-couverture de K_{2p+2}^* est donnée par les $p^2 + 1$ cycles de la couverture de K_{2p}^* privé du $\vec{C}_4(0, 1, p, p + 1, 0)$, plus les $2p$ $\vec{C}_4(A, i, B, p + i, A)$ et $(A, p + i, B, i, A)$, $1 \leq i \leq p$, et plus les 2 $\vec{C}_4(A, 1, p, B, A)$ et $(B, p + 1, 0, A, B)$. Ainsi, nous avons une couverture de K_{2p+2}^* par $p^2 + 1 + 2p + 2 = p^2 + 2p + 3 = (p + 1)^2 + 2$ cycles. De plus, cette couverture contient le cycle $(0, A, B, p + 1, 0)$ qui devient, après renumérotation $(0, 1, p + 1, p + 2, 0)$; enfin, les arcs $(0, A)$ et (B, p) sont couverts deux fois.

□

Cette couverture de K_n^* nous donne également une couverture de $2K_n$ (deux fois K_n), du fait que la borne inférieure est dérivée de $2K_n$.

7.4.6 Conclusion

Nous avons étudié le problème du dimensionnement d'un réseau WDM protégé comme une extension du problème classique de la couverture des arêtes d'un graphe, en ajoutant la contrainte de routage disjoint. Nous avons étudié le cas où le réseau physique est un cycle avec l'instance de communication *all-to-all* (K_n). Pour ce problème de dimensionnement, nous avons donné le nombre optimal de cycles comme sous-réseaux.

Récemment, ces résultats ont été étendus aux grilles toriques [BY]. Il sera intéressant de poursuivre ce travail pour d'autres topologies et pour des instances de communications telles que λK_n et $\lambda K_{m,n}$.

Chapitre 8

Conclusions et Perspectives

Durant la préparation de cette thèse, une attention toute particulière a été portée sur les relations entre le monde de la recherche en informatique théorique et celui de l'ingénierie des télécommunications optiques. Ceci a par exemple donné lieu à des publications dans les revues internationales *OSA Applied Optics* [CFM00b] et *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology* [CFM00a], et à une communication invitée intitulée « How Graph Theory can help Communications Engineering » dans la conférence internationale *Broad Band Optical Fiber Communication Technology* [CM01].

OTIS : de l'observation à des résultats théoriques

Le point de départ de notre étude de l'architecture OTIS est la question « Quels sont les graphes que nous pouvons construire sur OTIS ? ». Pour y répondre, nous avons proposé un modèle de réseaux d'interconnexions construits sur OTIS, définissant ainsi la famille de graphes $H(p, q, d)$ (chapitre 4). Puis, nous avons montré que cette famille contenait les graphes de Imase et Itoh et par conséquent les graphes complets, de Kautz et de de Bruijn. Ensuite, à l'aide d'une recherche exhaustive, nous avons observé qu'il existait plusieurs façons de construire le graphe de de Bruijn avec OTIS, c'est-à-dire que plusieurs graphes de la famille $H(p, q, d)$ étaient isomorphes à un même graphe de de Bruijn. De ce constat, nous avons développé la famille de graphes à alphabets étudiée dans le chapitre 5. Ainsi, la famille de graphe $A(f, \pi, j)$ est le fruit d'observations empiriques d'un système de communications optiques. Enfin, nous avons obtenu une implantation optimisée des graphes de de Bruijn sur OTIS, en donnant les isomorphismes entre les graphes de de Bruijn et la famille de graphes $A(f, \pi, j)$.

Aussi, l'étude que nous avons conduit sur OTIS montre comment la théorie des graphes peut aider l'ingénierie des télécommunications.

Perspectives

Tout d'abord, durant la préparation de cette thèse, l'évolution des technologies de l'opto-électronique et en particulier l'apparition des MEMS a considérablement accru l'intérêt des communications en espace libre optique. En effet, les MEMS rendent possible la construction de systèmes d'interconnexions optiques denses reconfigurables. Dès lors, il sera intéressant

d'étudier l'influence de ces technologies sur la topologie des réseaux. Par exemple, ces technologies permettent la conception de réseaux de communications dynamiques, dont la topologie peut évoluer au cours du temps. Sur de tels réseaux, quels seront les algorithmes de routage ? Quel sera leur résistance face aux pannes de nœuds et de liens ?

Ensuite, dans le chapitre 7, nous avons abordé les problématiques liées à la sécurisation par protection des réseaux WDM. Nous avons détaillé les principaux modèles de protection envisageables, ainsi que les difficultés engendrées par la prise en compte du coût des divers éléments intervenant dans les réseaux (transmissions, MIE, MIEO). D'autre part, nous avons apporté une solution optimale au problème de la protection par sous réseaux de l'instance all-to-all sur le cycle.

Ces travaux représentent une « étude préliminaire » qui nous a permis d'acquérir les compétences nécessaires à ce domaine de recherche. Au vue du nombre et de la diversité des problèmes restants, nous allons maintenant poursuivre ces travaux, en commençant par comparer la qualité des modèles de protection en fonction de leur coût, puis nous chercherons des approximations et des heuristiques pour les modèles les plus attractifs.

Enfin, des études récentes [CFK⁺01b, CFK⁺01a] traitent des relations entre le nombre de fibres optiques utilisables sur chaque lien du réseau et le nombre de longueurs d'ondes nécessaires au routage optique d'une instance de requêtes. Il est important d'étudier l'influence du nombre de fibres optiques sur le coût des réseaux et en particulier sur le coûts des MIEO, ainsi que sur les méthodes de protection.

Bibliographie

- [ACB97] J. Armitage, O. Crochat, and J-Y. Le Boudec. Design of a Survivable WDM Photonic Network. In *IEEE INFOCOM*, volume 1, pages 244–252, 1997.
- [ACG⁺99] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, and M. Protasi. *Complexity and Approximation : Combinatorial optimization problems and their approximability properties*. Springer Verlag, 1999.
- [BCCT00] J-C. Bermond, L. Chacon, D. Coudert, and F. Tillerot. Conception d'un réseau WDM protégé par sous-réseaux. In *Deuxième Rencontres Francophones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications – AlgoTel*, pages 83–88, La Rochelle, France, Mai 2000.
- [BCCT01a] J-C. Bermond, L. Chacon, D. Coudert, and F. Tillerot. A Note on Cycle Covering. In *ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures – SPAA*, pages 310–311, Crete Island, Greece, 3-6 July 2001.
- [BCCT01b] J-C. Bermond, L. Chacon, D. Coudert, and F. Tillerot. Cycle Covering. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity – SIROCCO*, pages 21–34. Carleton Scientific, June 2001.
- [BCF97] P. Berthomé, J. Cohen, and A. Ferreira. Embedding tori in Partitioned Optical Passive Star networks. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity - SIROCCO*, pages 40–52. Carleton Scientific, July 1997.
- [BCH⁺] J-C. Bermond, D. Coudert, F. Havet, H. Rivano, and M-L. Yu. Travail commun.
- [BCY] J-C. Bermond, D. Coudert, and M-L. Yu. On DRC-Covering of K_n by Cycles. Submitted to Journal of Combinatorial Designs.
- [BDDP98] J-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmas, and S. Perennes. Hamiltonian circuits in the directed wrapped Butterfly network. *Discrete Applied Mathematics*, 84 :21–42, 1998.
- [BDE97] J-C. Bermond, R. Dawes, and F. Ergincan. De Bruijn and Kautz bus networks. *Networks*, 30 :205–218, 1997.
- [BDQ92] J-C. Bermond, C. Delorme, and J-J. Quisquater. Table of large (Δ, D) graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 37/38 :575–577, 1992.
- [BE96] J-C. Bermond and F. Ergincan. Bus Interconnection networks. *Discrete Applied Mathematics*, 68 :1–15, 1996.

- [Bea99] B. Beauquier. All-to-all communication for some wavelength-routed all-optical networks. *Networks*, 33(3) :179–187, Mai 1999.
- [Bea00] B. Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Janvier 2000.
- [Ber73] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [Ber75] J-C. Bermond. *Cycles dans les graphes et G-configurations*. Thèse d'Etat, Université de Paris Sud, Orsay, 1975.
- [Ber87] C. Berge. *Hypergraphes : Combinatoire des ensembles finis*. Bordas, gauthier-villars edition, 1987.
- [Ber97] P. Berger. Etude stochastique des réseaux à interconnexions optiques pour les systèmes multiprocesseurs. Rapport de stage, LIP ENS-Lyon, Juin-Août 1997.
- [BEW⁺00] C. Berger, J. Ekman, X. Wang, P. Marchand, H. Spaanenburg, F. Kiamilev, and S. Esener. Parallel distributed free-space optoelectronic compute engine using flat *plug-on-top* optics package. In R. Lessard and T. Galstian, editors, *Optics in Computing*, volume 4089, pages 1037–1045. SPIE, 2000.
- [BF95] P. Berthomé and A. Ferreira. On Broadcasting Schemes in Restricted Optical Passive Star Systems. *DIMACS series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 21 :19–29, 1995.
- [BF96] P. Berthomé and A. Ferreira. Improved embeddings in POPS networks through stack-graph models. In *Massively Parallel Processing using Optical Interconnections – MPPOI*, pages 130–135. IEEE Press, July 1996.
- [BF97] P. Berthomé and A. Ferreira, editors. *Optical Interconnections and Parallel Processing : Trends at the Interface*. Kluwer Academic, 1997.
- [BFBE98] D. Van Blerkom, C. Fan, M. Blume, and S. Esener. Transimpedance receiver design optimization for smart pixel arrays. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 16(1) :119–126, January 1998.
- [BFM98] H. Bourdin, A. Ferreira, and K. Marcus. A performance comparison between graph and hypergraph topologies for passive star WDM lightwave networks. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30 :805–819, 1998.
- [BGP⁺00] J-C. Bermond, L. Gargano, S. Perennes, A. Rescigno, and U. Vaccaro. Efficient collective communication in optical networks. *Theoretical Computer Science*, 233(1-2) :165–189, 2000.
- [BHLP92] J-C. Bermond, P. Hell, A. Liestman, and J. Peters. Broadcasting in bounded degree graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(1) :10–24, 1992.
- [BHLP97] J-C. Bermond, H.A Harutyunyan, A. Liestman, and S. Perennes. A note on the dimensionality of modified Knödel graphs. *International Journal on Foundations of Computer Science, Special Issue on Interconnection Networks*, 8(2) :109–116, 1997.
- [BHP89] J-C. Bermond, N. Homobono, and C. Peyrat. Large Fault-Tolerant Interconnection Networks. *GAC : Graphs and Combinatorics*, 5, 1989.

- [BHP98] B. Beauquier, P. Hell, and S. Perennes. Optimal wavelength-routed multicasting. *Discrete Applied Mathematics*, 84 :15–20, 1998.
- [BHS78] J-C. Bermond, C. Huang, and D. Sotteau. Balanced Cycle and Circuit Designs : even cases. *Ars Combinatoria*, 5 :293–318, 1978.
- [BLS97] J-C. Bermond, Z. Liu, and M. Syska. Mean eccentricities of de Bruijn networks. *Networks*, 30 :187–203, 1997.
- [BM76] J. Bondy and U. Murty. *Graph Theory with Applications*. MacMillan, London, 1976.
- [BMME95] M. Blume, F. McCormick, P. Marchand, and S. Esener. Array interconnect systems based on lenslets and CGH. Technical Report 2537-22, SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation, San Diego (USA), 1995.
- [BMME97] M. Blume, G. Marsden, P. Marchand, and S. Esener. Optical Transpose Interconnection System for Vertical Emitters. In *OSA Topical Meeting on Optics in Computing*, pages 233–235, Lake Tahoe, NV, March 1997.
- [BMMS01] J-C. Bermond, X. Muñoz, and A. Marchetti-Spaccamela. A Broadcasting Protocol in Line Digraphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 61(8) :1013–1032, August 2001.
- [BPT99] B. Beauquier, S. Pérennes, and D. Toth. All-to-all routing and coloring in weighted trees of rings. In *ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA '99)*, pages 185–190, Saint-Malo, France, June 1999.
- [Bra90] C. Brackett. Dense Wavelength Division Multiplexing Networks : Principles and Applications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 8 :947–964, 1990.
- [BRP00] V. Boros, A. Rakic, and S. Parameswaran. High-Level Model of a WDMA Passive Optical Bus for a Reconfigurable Multiprocessor System. In *37th Design Automation Conference*, page 221, Los Angeles, CA, June 2000.
- [BS75] J-C. Bermond and D. Sotteau. Graph decomposition and G-designs. In *5th British Combinatorial Conference, Congressus Numerantium 15*, pages 53–72, Aberdeen, 1975. Utilitas Math. Pub.
- [BS77] J-C. Bermond and D. Sotteau. Cycles and circuit designs, odd case. In *Beitrage zur Graphentheorie und deren Anwendungen*, pages 11–32, Ilimenau, 1977.
- [BT80] W. Bridges and S. Toueg. On the impossibility of directed Moore graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, B(29) :339–341, 1980.
- [BY] J-C. Bermond and M-L. Yu. Vertex Disjoint routing of request cycles over a Tori. In preparation.
- [CAB93] C. Chen, D. Agrawal, and J. Burke. dBCube : A new Class of Hierarchical Multiprocessor Interconnection Networks with Area Efficient Layout. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 4(12) :1332–1344, December 1993.

- 162 BIBLIOGRAPHIE
- [CBG00] O. Crochat, J-Y. Le Boudec, and O. Gerstel. Protection interoperability for WDM optical networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 8(3) :384–395, 2000.
 - [CCPS98] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Discrete Mathematics and Optimization. Wiley Interscience, 1998.
 - [CD96] C. Colbourn and J. Dinitz, editors. *The CRC handbook of Combinatorial designs*. CRC Press, 1996.
 - [CF94] I. Chlamtac and A. Fumagalli. Quadro-star : A high performance optical WDM star network. *IEEE Transactions on Communications*, 42(8) :2582–2591, August 1994.
 - [CFK⁺01a] I. Caragiannis, A. Ferreira, C. Kaklamanis, S. Pérennes, P. Persiano, and H. Rivano. Approximate Constrained Bipartite Edge Coloring. In *27th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'01)*, Lecture Notes in Computer Science, Boltenhagen, Germany, June 2001. Springer-Verlag. To be published.
 - [CFK⁺01b] I. Caragiannis, A. Ferreira, C. Kaklamanis, S. Pérennes, and H. Rivano. Fractional Path Coloring with Applications to WDM Networks. In *28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'01)*, Lecture Notes in Computer Science, pages 732–743, Crete, Greece, July 2001. Springer-Verlag.
 - [CFM98] D. Coudert, A. Ferreira, and X. Muñoz. Multiprocessor Architectures Using Multi-hops Multi-OPS Lightwave Networks and Distributed Control. In *IEEE International Parallel Processing Symposium*, pages 151–155. IEEE Press, 1998.
 - [CFM99] D. Coudert, A. Ferreira, and X. Muñoz. OTIS-Based Multi-Hop Multi-OPS Lightwave Networks. In J. Rolim et al., editor, *Proceedings of the Workshop on Optics and Computer Science 1999*, volume 1586 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 897–910. Springer Verlag, April 1999.
 - [CFM00a] D. Coudert, A. Ferreira, and X. Muñoz. A Multihop-Multi-OPS Optical Interconnection Network. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 18(12) :2076–2085, 2000.
 - [CFM00b] D. Coudert, A. Ferreira, and X. Muñoz. Topologies for Optical Interconnection Networks Based on the Optical Transpose Interconnection System. *OSA Applied Optics – Information Processing*, 39(17) :2965–2974, June 2000.
 - [CFP99] D. Coudert, A. Ferreira, and S. Perennes. Theoretical Aspects of the Optical Transpose Interconnecting System Architecture. In *Première Rencontres Franco-phones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications – AlgoTel*, pages 101–106, Roscoff, France, 5-7 Mai 1999.
 - [CFP00] D. Coudert, A. Ferreira, and S. Perennes. De Bruijn Isomorphisms and Free Space Optical Networks. In *IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium*, pages 769–774. IEEE Press, 2000.

- [CLC⁺99] W. Choi, Y. Lee, D. Chung, N. Lee, and J. Kim. Fabrication of Full-Color Carbon-Nanotubes Field-Emission Displays : Large Area, High Brightness, and High Stability. In David Tománek and Richard Enbody, editors, *International Workshop on the Science and Application of Nanotubes – NANOTUBES’99*, Science and Application of Nanotubes, pages 355–364, East Lansing, Michigan, USA, 1999. Kluwer Academic.
- [CLM⁺94] D. Chiarulli, S. Levitan, R. Melhem, J. Teza, and G. Gravenstreter. Multiprocessor Interconnection Networks Using Partitioned Optical Passive Star (POPS) Topologies and Distributed Control. In *Massively Parallel Processing using Optical Interconnections – MPPOI*, pages 70–80. IEEE Press, April 1994.
- [CLM⁺96] D. Chiarulli, S. Levitan, R. Melhem, J. Teza, and G. Gravenstreter. Partitioned Optical Passive Star (POPS) Topologies for Multiprocessor Interconnection Networks with Distributed Control. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 14(7) :1601–1612, 1996.
- [CM01] D. Coudert and X. Muñoz. How Graph Theory can help Communications Engineering. In *International Conference on Broad Band Optical Fiber Communication Technology – BBOFCT*, Jalgaon, India, December 2001. Invited Paper.
- [CMP⁺01] F. Centurelli, M. Magliocco, A. Pallotta, P. Tommasino, and A. Trifiletti. A compact 3R-receiver module for short-haul SDH STM-16 systems. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 18(9) :1307–1315, September 2001.
- [Cou96] D. Coudert. Simulation de systèmes multi-processeurs à communications électroniques et optiques. UCSD, San Diego (USA), with P. Marchand, 1996.
- [Cou01] D. Coudert. Chemins disjoints de poids minimum pour la sécurisation de réseaux de télécommunications. In *Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (AlgoTel’01)*, pages 47–53, St-Jean de Luz, France, 28-30 Mai 2001.
- [CZA93] R. Chipalkatti, Z. Zhang, and A. Acampora. Protocols for optical star-coupler network using WDM : Performance and complexity study. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 11(4) :579–589, 1993.
- [DAAar] K. Day and A-E. Al-Ayyoub. Topological Properties of OTIS-Networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, to appear.
- [DFT94] F. Desprez, A. Ferreira, and B. Tourancheau. Efficient communication operations on passive optical star networks. In *IEEE International Workshop on Massively Parallel Processing Using Optical Interconnections – MPPOI*, pages 52–58. IEEE Press, 1994.
- [Dir60] G. Dirac. In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.*, 22 :61–85, 1960.
- [DMJ⁺96] T. Durhuus, B. Mikkelsen, C. Joergensen, S. Lykke Danielsen, and K. Stubkjaer. All-optical wavelength conversion by semiconductor optical amplifiers. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 14(6) :942–954, June 1996.

- [DMYC96] P. Dapkus, M. MacDougal, G. Yang, and Y. Cheng. Ultralow threshold VCSELs for application to smart pixels. In *Smart Pixels Technical Digest*, page 5, Keystone, Colorado, August 5-9 1996. IEEE/LEOS Summer Topical Meetings.
- [dR94] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs*. Masson, Paris, 1994.
- [Dra89] C. Dragone. Efficient $N \times N$ Star Couplers using Fourier Optics. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 7(3) :479–489, March 1989.
- [DS92] J. Dinitz and D. Stinson, editors. *Contemporary design theory : A collection of Surveys*. Discrete Mathematics and Optimizarion. Wiley-Interscience, 1992.
- [Edm73] J. Edmonds. Edge-disjoint branchings. In R. Rustin, editor, *Combinatorial Algorithms*, pages 91–96. Academic Press, New York, 1973.
- [EGB⁺99] S. Eitel, H-P. Gauggel, M. Brunner, R. Hovel, M. Moser, and K. Gulden. High uniformity 8×8 VCSEL arrays for optical interconnects. In *European Conference on Optical Communication*, pages II 302–303, Nice, France, September 1999. SEE.
- [EHS00] G. Ellinas, A. Hailemariam, and T. Stern. Protection cycles in mesh WDM networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 18(10) :1924–1937, 2000.
- [EIS76] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computing*, 5(4) :691–703, December 1976.
- [EJ96] T. Erlebach and K. Jansen. Scheduling of virtual connections in fast networks. In *Proceedings of 4th Workshop on Parallel Systems and Algorithms (PASA '96)*, pages 13–32. World Scientific, 1996.
- [EJK⁺99] T. Erlebach, K. Jansen, C. Kaklamanis, M. Mihail, and P. Persiano. Optimal wavelength routing on directed fiber trees. *Theoretical Computer Science*, 221(1-2) :119–137, 1999.
- [EMZ00] T. Eilam, S. Moran, and S. Zaks. Approximation Algorithms for Survivable Optical Networks. In *The 14th international Symposium on Distributed Computing (DISC)*, pages 104–118, 2000.
- [FBE96] C. Fan, D. Van Blerkom, and S. Esener. Optimisation of transmitter and receiver design for optoelectronic computing. In *Smart Pixels Technical Digest*, page 72, Keystone, Colorado, August 5-9 1996. IEEE/LEOS Summer Topical Meetings.
- [FEGL88] M. Feldman, S. Esener, C. Guest, and S. Lee. Comparison between electrical and free-space optical interconnects based on power and speed considerations. *OSA Applied Optics*, 27(9) :1742–1751, May 1988.
- [Fer97] A. Ferreira. Towards effective models for Optical Passive Star based lightwave networks. In P. Berthomé and A. Ferreira, editors, *Optical Interconnections and Parallel Processing : Trends at the Interface*, pages 209–233. Kluwer Academic, 1997.

- [Fer99a] D. Ferrero. Connectivity of directed hypergraphs. In *4th International Symposium on Economic Informatics*, Bucharest, Romania, 1999.
- [Fer99b] D. Ferrero. Maximally connected Hyperdigraphs. In *Conference in Honor to Paul Erdos and his Mathematics*, Budapest, Hungary, 1999.
- [FF62] L. Ford and D. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [FGDE89] M. Feldman, C. Guest, T. Drabik, and S. Esener. Comparison between electrical and free space optical interconnects for fine-grain processor arrays based on interconnect density capabilities. *OSA Applied Optics*, 28 :3820–3829, September 1989.
- [FHW80] S. Fortune, J. Hopcroft, and J. Wyllie. The directed subgraph homeomorphism problem. *Theoretical Computer Science*, 10 :111–121, 1980.
- [FL94] P. Fraigniaud and E. Lazard. Methods and problems of communication in usual networks. *Discrete Applied Mathematics*, 53 :79–133, 1994.
- [FPara] D. Ferrero and C. Padró. Connectivity and fault-tolerance of hyperdigraphs. *Discrete Applied Mathematics*, To appear.
- [FParb] D. Ferrero and C. Padró. Partial line directed hypergraphs. *Networks*, To appear.
- [FT87] M. Fredman and R. Tarjan. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Journal of the ACM*, 34(3) :596–615, July 1987.
- [FYA84] M. Fiol, J. Yebra, and I. Alegre. Line digraphs iterations and the (d,k) digraph problem. *IEEE Transactions on Computers*, 33 :400–403, 1984.
- [Gar98] L. Gargano. Limited Wavelength Conversion in All-Optical Tree Networks. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP)*, LNCS 1443, 1998.
- [GGL95] R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors. *Handbook of Combinatorics*, volume 1 & 2. The MIT Press, 1995.
- [GJ79] M. Garey and D. Johnson. *Computers and Intractability : a guide to the Theory of NP-Completeness*. W. Freeman and compagny, New York, 1979.
- [GKS01] R. Gandhi, S. Khuller, and A. Srinivassan. Approximation Algorithms for Partial Covering Problems. In *International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, pages 225–236, Crete, Greece, July 2001.
- [GLS98] O. Gerstel, P. Lin, and G. Sasaki. Wavelength assignment in WDM ring to minimize cost of embedded SONET rings. In *IEEE INFOCOM*, pages 94–101, 1998.
- [GM98] G. Gravenstreter and R. Melhem. Realizing Common Communication Patterns in Partitioned Optical Passive Stars (POPS) Networks. *IEEE Transactions on Computers*, 47(9) :998–1013, 1998.
- [GMC⁺95] G. Gravenstreter, R. Melhem, D. Chiarulli, S. Levitan, and J. Teza. The Partitioned Optical Passives Stars (POPS) Topology. In *IEEE International Parallel Processing Symposium*, pages 4–10, Santa Barbara, USA, 1995.

- [GME⁺97] M. Ghisoni, H. Martinsson, N. Eriksson, M. Li, A. Larsson, J. Bengtsson, A. Khan, and G. Parry. 4x4 Fan-out Spot Generator Using GaAs Based VCSELs and Diffractive Optical Element. *IEEE Photonics Technology Letters*, 9 :508, 1997.
- [GMH⁺98] D. Gardner, P. Marchand, P. Harvey, L. Hendrick, and S. Esener. Photorefractive Beamsplitter For Free Space Optical Interconnection Systems. *OSA Applied Optics*, 37(26) :6178–6181, September 1998.
- [GRS00] O. Gerstel, R. Ramaswani, and G. Sasaki. Cost-effective traffic grooming in WDM rings. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 8(5) :618–630, October 2000.
- [GT88] Z. Galil and E. Tardos. An $O(n^2(m + n \log n) \log n)$ Min-Cost Flow Algorithm. *Journal of the ACM*, 35(2) :374–386, April 1988.
- [GT89] H. Gabow and R. Tarjan. Faster scaling algorithms for network problems. *SIAM Journal on Computing*, 18(5) :1013–103, October 1989.
- [Hec99] J. Hecht. *City of Light : The Story of Fiber Optics*. A book in the Sloan Foundation Technology series. Oxford University Press, New York, 1999.
- [Hei96] K. Heinrich. Graph decompositions and designs. In C. Colbourn and J. Dinitz, editors, *The CRC handbook of Combinatorial designs*. CRC Press, 1996.
- [HJ91] R. Horn and Johnson J. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1991.
- [HKE00] D. Hartmann, O. Kibar, and S. Esener. Characterization of a polymer microlens fabricated by use of the hydrophobic effect. *OSA Optics Letters*, 25(13), 2000.
- [HKR⁺96] E. Hall, J. Kravitz, R. Ramaswani, M. Halvorson, S. Tenbrink, and R. Thomsen. The Rainbow-II gigabit optical network. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 14(5) :814–823, June 1996.
- [HMB⁺00] P. Helin, M. Mita, T. Bourouina, G. Reyne, and H. Fujita. Self-aligned micro-machining process for large-scale, free-space optical cross-connects. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 18(12) :1785–1791, December 2000. Special issue on Optical Networks.
- [HO01] D. Hochbaum and E. Olinick. The Bounded Cycle Cover Problem. *INFORMS Journal on Computing*, 13(2) :104–119, 2001.
- [Hoc97] D. Hochbaum, editor. *Approximation Algorithms for NP-Hard Problems*. PWS Publishing Company, 1997.
- [HOS94] M.-C. Heydemann, J. Opatrny, and D. Sotteau. Embeddings of hypercubes and grids in de Bruijn graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 23 :104–111, 1994.
- [HP88] N. Homobono and C. Peyrat. Connectivity of Imase and Itoh Digraphs. *IEEE Transactions on Computers*, 37(11) :1459–1461, November 1988.
- [HR72] P. Hell and A. Rosa. Graph decompositions, handcuffed prisoners and balanced p -designs. *Discrete Mathematics*, 2 :229–252, 1972.

- [HS95] P. Havinga and G. Smit. Rattlesnake – a Single Chip High-Performance ATM switch. In *Proceedings of the International Conference on Multimedia and Networking (MmNet)*, pages 208–217, Japan, 1995. IEEE Press.
- [HT82] R. Häggkvist and R. Thomassen. Circuits through specified edges. *Discrete Mathematics*, 41 :29–34, 1982.
- [Huc91] A. Huck. A sufficient condition for a graph to be weakly k -linked. *Graph Combinatorics*, 7 :323–351, 1991.
- [II81] M. Imase and M. Itoh. Design to Minimize Diameter on Building-Block Network. *IEEE Transactions on Computers*, 30(6) :439–442, June 1981.
- [II83] M. Imase and M. Itoh. A Design for Directed Graphs with Minimum Diameter. *IEEE Transactions on Computers*, 32(8) :782–784, August 1983.
- [ISO86] M. Imase, T. Soneoka, and K. Okada. A fault-tolerant processor interconnection network. *Systems and Computers in Japan*, 17(8) :21–30, 1986.
- [Jar99] A. Jarry. Chemins disjoints. rapport de stage, projet SLOOP CNRS/INRIA/UNSA Sophia-Antipolis, 1999.
- [JS84] M-R. Jerrum and S. Skyum. Families of fixed degree graphs for processor interconnection. *IEEE Transactions on Computers*, C-33(2) :190–194, 1984.
- [JT95] T. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, 1995.
- [Kar75] R. Karp. On the computational complexity of combinatorial problems. *Networks*, 5 :45–68, 1975.
- [Kar99] S. Kartalopoulos. *Understanding Sonet/Sdh and Atm : Communications Networks for the Next Millennium*. Science and Technology. Wiley, 1999.
- [Kau68] W.H. Kautz. Bounds on directed (d,k) graphs. Theory of cellular logic networks and machines. *AFCRL-68-0668, SRI Project 7258, Final report*, pages 20–28, 1968.
- [KBFE99] O. Kibar, D. Van Blerkom, C. Fan, and S. Esener. Power Minimization and Technology Comparisons for Digital Free-Space Optoelectronic Interconnections. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 17(4) :546–555, April 1999.
- [KBHL⁺] E. Kyriakis-Bitzaros, N. Haralabidis, M. Lagadas, A. Georgakilas, Y. Moisiadis, and G. Halkias. Realistic end-to-end simulation of the optoelectronic links and comparison with the electrical interconnections for system-on-chip applications. to appear in *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*.
- [KK99] J. Kleinberg and A. Kumar. Wavelength Conversion in Optical Networks. In *10th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 1999.
- [KLST01] M-Y. Kao, T-W. Lam, W-K. Sung, and H-F. Ting. A decomposition theorem for maximum weight bipartite matchings. *SIAM Journal on Computing*, 31(1) :18–26, 2001.
- [KM01] K-I. Kitayama and M. Murata. Photonic Access Node Using Optical Code-Based Label Processing and its Applications to Optical Data Networking. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 19(10) :1401–1415, October 2001.

- [KMK⁺91] F. Kiamilev, P. Marchand, A. Krishnamoorthy, S. Esener, and S. Lee. Performance comparison between optoelectronic and VLSI multistage interconnection networks. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 9(12) :1674–1692, 1991.
- [KMK⁺92] A. Krishnamoorthy, P. Marchand, F. Kiamilev, K. Urquhart, and S. Esener. Grain-size consideration for optoelectronic multistage interconnection network. *OSA Applied Optics*, 31(26) :5480–5507, 1992.
- [Lab98] J-F. Labourdette. Traffic optimization and reconfiguration management of multiwavelength multihop broadcast lightwave networks. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30 :981–998, 1998.
- [LBG⁺99] J. Leuthold, P. Besse, E. Gamper, M. Dulk, S. Fischer, G. Guekos, and H. Melchior. All-optical Mach-Zehnder interferometer wavelength converters and switches with integrated data- and control-signal separation scheme. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 17(6) :1056–1066, June 1999.
- [Lei92] F. T. Leighton. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Trees and Hypercubes*. Morgan Kaufman, 1992.
- [LHKW99] S. Lee, L. Huang, C. Kim, and M. Wu. Free-Space Fiber-Optic Switches Based on MEMS Vertical Torsion Mirrors. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 17(1) :7–13, January 1999.
- [LKM⁺98] S. Levitan, T. Kurzweg, P. Marchand, M. Rempel, D. Chiarulli, J. Martinez, J. Bridgen, C. Fan, and F. McCormic. Chatoyant : a computer-aided design tool for free-space optoelectronic systems. *OSA Applied Optics*, 37(26) :6078–6092, September 1998.
- [Loa92] C. Van Loan. *Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*. SIAM Publications, 1992. ISBN 0-89871-285-8.
- [Lov76] L. Lovász. On some connectivity properties of Eulerian graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 28 :129–138, 1976.
- [LP86] L. Lovász and M. Plummer. *Matching Theory*. Elsevier Science, p. hammer edition, 1986.
- [LPZ98] K. Li, Y. Pan, and S. Zheng, editors. *Parallel Computing Using Optical Interconnections*. Kluwer Academic, 1998.
- [LR92] C.C. Lindner and C.A. Rodger. Decomposition into Cycles II : cycle systems. In J.H. Dinitz and D.R. Stinson, editors, *Contemporary designs a collection of surveys*, pages 325–369. Wiley, 1992.
- [LWF97] Y. Li, T. Wang, and K. Fasanella. Inexpensive Local Interconnect Solutions Using Side-coupling Polymer Optical Fibers. In *Massively Parallel Processing using Optical Interconnections – MPPOI*, pages 45–51, Los Alamitos, California, June 1997. IEEE Press.
- [Men27] K. Menger. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.*, 10 :96–115, 1927.
- [MGB01] D. Mechin, P. Grosso, and D. Bosc. Add-Drod Multiplexer with UV-Written Bragg Gratings and Directional Coupler in $SiO_2 - Si$ Integrated Waveguides. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 18(9) :1282–1286, September 2001.

- [MGCL98] R. Melhem, G. Gravenstrater, D. Chiarulli, and S. Levitan. The Communication Capabilities of Partitioned Optical Passive Stars Networks. In K. Li, Y. Pan, and S.Q. Zheng, editors, *Parallel Computation Using Optical Interconnections*, pages 77–98. Kluwer Academic, 1998.
- [MKY⁺97] P. Marchand, A. Krishnamoorthy, G. Yayla, S. Esener, and U. Efron. Optically Augmented 3-D Computer : System Technology and Architecture. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 41(1) :20–35, February 1997.
- [MM92] W.H. Mills and R.C. Mullin. Coverings and Packings. In J.H. Dinitz and D.R. Stinson, editors, *Contemporary designs a collection of surveys*. Wiley, 1992.
- [MM00] G. Mohan and C. Siva Ram Murthy. Lightpath Restoration in WDM Optical Networks. *IEEE Network*, 14(6) :24–32, 2000.
- [MMHE93] G. Marsden, P. Marchand, P. Harvey, and S. Esener. Optical transpose interconnection system architectures. *OSA Optics Letters*, 18(13) :1083–1085, July 1993.
- [Muk92a] B. Mukherjee. WDM-based local lightwave networks part I : Single-hop systems. *IEEE Networks*, 6(3) :12–27, May 1992.
- [Muk92b] B. Mukherjee. WDM-based local lightwave networks part II : Multi-hop systems. *IEEE Networks*, 6(4) :20–32, July 1992.
- [Muk97] B. Mukherjee. *Optical Communication Networks*. Series on Computer Communications. McGraw-Hill, 1997.
- [Mut01] E. Mutafungwa. Optical hop number limits imposed by various 2x2 cross-connect node designs. *OSA Optics Express*, 9(8) :400–410, October 2001.
- [MZPE97] P. Marchand, F. Zane, R. Paturi, and S. Esener. Parallel Optoelectronic FFT Engine : Comparison to Electronic Implementations. *submitted to Applied Optics*, April 1997.
- [NPF00] S. Nakamura, S. Pearton, and G. Fasol. *The Blue Laser Diode : The Complete Story*. Springer-Verlag, 2000. ISBN 3-540-66505-6.
- [NR01] A. Neukermans and R. Ramaswani. MEMS Technology for Optical Networking Applications. *IEEE Communications Magazine*, 39(1) :62–69, January 2001.
- [NW60] C. Nash-Williams. On orientations, connectivity and odd vertex pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.*, 12 :555–567, 1960.
- [O’M93] M. O’Mahony. Optical amplifiers. In J. Mindwinter, editor, *Photonics in switching*, volume I : Background and components, pages 147–167. Academic Press, San Diego, CA, 1993.
- [Orl88] J. Orlin. A Faster Strongly Polynomial Minimum Cost Flow Algorithm. In *Proceedings of the 20th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 377–387. ACM Press, 1988.
- [Ost00] A. Osterloh. Sorting on the OTIS-Mesh. In *IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium*, pages 269–274, Cancun, Mexico, 1- 5 May 2000. IEEE Computer Society.

- [Per98] S. Perennes. Broadcasting and Gossiping on de Bruijn, Shuffle-Exchange and Similar Networks. *DAMATH : Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, 83, 1998.
- [Pit97] N. Pitsianis. *The Kronecker Product in Approximation and Fast Transform Generation*. PhD thesis, Department of Computer Science, Cornell University, Jan. 1997.
- [RM88] B. Ramamurty and B. Mukherjee. Wavelength conversion in WDM networking. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(7) :1061–1073, September 1988.
- [RPK80] S. Reddy, D. Pradhan, and J. Kuhl. Directed graphs with minimal diameter and maximal connectivity. Technical report, Oakland University, School of Engineering, 1980.
- [RRK83] S. Reddy, P. Raghavan, and J. Kuhl. A Class of Graphs for Processor Interconnection. In *International Conference on Parallel Processing*, pages 154–157, Los Alamitos, Ca., USA, August 1983. IEEE Computer Society Press.
- [RS95] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors XIII : The disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory B*, 1995.
- [RS98a] S. Rajasekaran and S. Sahni. Randomized Routing, Selection, and Sorting on the OTIS-Mesh. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 9(9) :833–840, September 1998.
- [RS98b] R. Ramaswami and G. Sasaki. Multiwavelength optical networks with limited wavelength conversion. In *IEEE INFOCOM*, pages 744–754, 1998.
- [Sah00a] S. Sahni. Matrix multiplication and data routing using a partitioned optical passive stars network. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 11(7) :720–728, 2000.
- [Sah00b] S. Sahni. The partitioned optical passive stars network : Simulations and fundamental operations. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 11(7) :739–748, 2000.
- [SALR⁺98] T. Szymanski, A. Au, M. Lafrenière-Roula, V. Tyan, B. Supmonchai, J. Wong, B. Zerrouck, and S. Obenaus. Terabit optical local area networks for multiprocessor systems. *OSA Applied Optics*, 37(2) :264–275, January 1998.
- [San01] E. Sano. High-Speed Lightwave Communications ICs Based on III-V Compound Semiconductors. *IEEE Communications Magazine*, 39(1) :154–158, January 2001.
- [SAS96] S. Subramaniam, M. Azizoglu, and A. K. Somani. All-optical networks with sparse wavelength conversion. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 4(4) :544–557, Août 1996.
- [SAS99] S. Subramaniam, M. Azizoglu, and A. K. Somani. On the optimal placement of wavelength converters in wavelength-routed networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 7(5) :754–766, October 1999.

- [SG76] S. Sahni and T. Gonzales. P-complete approximation problems. *Journal of the ACM*, 23 :555–565, 1976.
- [SH92] G. Smit and P. Havinga. The Architecture of Rattlesnake : a Real-Time Multimedia Network. In *NOSSDAV*, pages 15–24, 1992.
- [SH93] G. Smit and P. Havinga. The Architecture of Rattlesnake : a Real-Time Multimedia Network. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 712, pages 15–24, 1993.
- [SH95] G. Smit and P. Havinga. Multicast and Broadcast in the Rattlesnake ATM switch. In *Proceedings of the International Conference on Multimedia and Networking (MmNet)*, pages 218–226, Japan, 1995. IEEE Press.
- [Shi79] Y. Shiloach. Edge-disjoint branchings in directed multigraphs. *Information Processing Letters*, 8 :24–27, 1979.
- [SHJ92] G. Smit, P. Havinga, and P. Jansen. A Programmable Communication Architecture Base on Kautz Networks. In *Proceedings of the IFIP 12th World Computer Congress. Volume 1 : Algorithms and Software Architecture*, pages 578–584. Elsevier Science, 1992.
- [SHP91] G. Smit, P. Havinga, and P. Jansen. An Algorithm for Generating Node Disjoint Routes in Kautz Digraphs. In *IEEE International Parallel Processing Symposium*, pages 102–107. IEEE Press, 1991.
- [SM94] A. Sen and P. Maitra. A comparative study of Shuffle-Exchange, Manhattan Street and Supercube network for lightwave applications. *Computer Networks and ISDN Systems*, 26 :1007–1022, 1994.
- [SR82] R.G. Stanton and M.J. Rogers. Packings and Covering by triples. *Ars combinatoria*, 13 :61–69, 1982.
- [ST84] J. Suurballe and R. Tarjan. A quick Method for Finding Shortest Pairs of Disjoint Paths. *Networks*, 14 :325–336, 1984.
- [ST98] P. Salinger and P. Tvrdik. All-to-all Scatter in Kautz Networks. In *European Conference on Parallel Computing (Euro-Par’98)*, pages 1057–1061. Springer, 1998.
- [ST01] P. Salinger and P. Tvrdik. All-to-all Scatter in de Bruijn and Kautz Network. Technical report, Czech Technical University, March 2001. DC-2001-03.
- [Sti96] D. Stinson. Coverings. In C. Colbourn and J. Dinitz, editors, *The CRC handbook of Combinatorial designs*, chapter IV-8, pages 260–266. CRC Press, 1996.
- [SW97] S. Sahni and C. Wang. BPC permutations On The OTIS-Mesh Optoelectronic Computer. In *Massively Parallel Processing using Optical Interconnections – MPPOI*, pages 130–135, Canada, June 1997. IEEE Press.
- [SW98] S. Sahni and C. Wang. BPC permutations on the OTIS-hypercube optoelectronic computer. *Informatica*, 22 :263–269, 1998.
- [Sys92] M. Syska. *Communications dans les architectures à mémoire distribuée*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 1992.

- [TCL⁺95] J. Teza, D. Chiarulli, S. Levitan, R. Melhem, and G. Gavenstreter. Multi-processor Architectures Using Partitioned Optical Passive Star Interconnection Networks. In *OSA Topical Meeting on Optical Computing*, Salt Lake City, UT., 1995.
- [TDDC98] F. Tillerot, E. Didelet, A. Daviaud, and G. Claveau. Efficient network upgrade based on a WDM optical layer with automatic protection switching. In *OSA Optical Fiber Communications Conference (OFC)*, San Jose (CA), USA, Feb. 22-27 1998.
- [TFK⁺01] M. Teshima, M. Fujiwara, J. Kani, H. Suzuki, M. Amemiya, N. Takachio, and K. Iwatsuki. Optical carrier supply module applicable to over 100 super-dense WDM systems of 1000 channels. In *European Conference on Optical Communication – ECOC*, Amsterdam, The Netherlands, 2001.
- [THH98] P. Tvrdik, R. Harbane, and M.-C. Heydemann. Uniform homomorphisms of de Bruijn and Kautz networks. *Discrete Applied Mathematics*, 83(1-3) :279–301, 1998.
- [Tho80] C. Thomassen. 2-linked graphs. *European Journal of Combinatorics*, 10 :79–86, 1980.
- [Tho97] C. Thomassen. On the complexity of finding a minimum cycle covers of graphs. *SIAM Journal on Computing*, 26(3) :675–677, 1997.
- [Tog00] O. Togni. Placement de convertisseurs de longueur d’onde dans les réseaux optiques. In *Rencontres Francophones sur les aspects Algorithmiques des Télécommunications – AlgoTel*, pages 35–40, 2000.
- [TS99] S. Thiagarajan and A. K. Somani. An efficient algorithm for optimal wavelength converter placement on wavelength-routed networks with arbitrary topologies. In *IEEE INFOCOM*, Mars 1999.
- [UGP⁺00] T. Ulmer, M. Gross, K. Patel, J. Simmons, P. Juodawlkis, B. Washburn, W. Astar, A. SpringThorpe, R. Kenan, C. Verber, and S. Ralph. 160 Gb/s Optically Time-Division Multiplexed Link with All-Optical Demultiplexing. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 18(12) :1964–1977, December 2000. Special issue on Optical Networks.
- [Wac00] B. Wack. Réseaux optiques à multiplexage en longueur d’onde : une étude sur le placement des convertisseurs. Technical report, INRIA Sophia-Antipolis, 2000.
- [Wil96] G. Wilfong. Minimizing wavelengths in all-optical ring network. In *the 7th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC’96)*, volume 1178 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 346–355. Springer-Verlag, 1996.
- [WS98a] C. Wang and S. Sahni. Basic Operations on the OTIS-Mesh Optoelectronic Computer. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 9(12) :1226–1236, 1998.
- [WS98b] C. Wang and S. Sahni. *Parallel Computing Using Optical Interconnections*, chapter OTIS optoelectronic computers, pages 99–116. Kluwer Academic, k. li and y. pan and s. zheng edition, 1998.

- [WS00] C. Wang and S. Sahni. Image processing on the OTIS-Mesh Optoelectronic Computer. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 11(2) :97–109, 2000.
- [WS01] C. Wang and S. Sahni. Matrix multiplication on the OTIS-Mesh Optoelectronic Computer. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 50(7) :635–646, 2001.
- [YME97] G. Yayla, P. Marchand, and S. Esener. Energy Requirement and Speed Analysis of Electrical and Free-Space Optical Digital Interconnections. In P. Berthomé and A. Ferreira, editors, *Optical Interconnections and Parallel Processing : Trends at the Interface*, pages 49–128. Kluwer Academic, 1997.
- [Yoo96] S. Yoo. Wavelength conversion technologies for WDM network applications. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 14(6) :955–966, June 1996.
- [YST99] H. Yoshimura, K. Sato, and N. Takachio. Future Photonic transport networks based on WDM. *IEEE Communication Magazine*, 37 :74–81, 1999.
- [YZP⁺00] J. Yu, X. Zheng, C. Peucheret, A. T. Clausen, H. N. Poulsen, and P. Jeppesen. 40-Gbit/s all-optical wavelength conversion based on a nonlinear optical loop mirror. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 18(7) :1001–1006, July 2000.
- [ZA94] Z. Zhang and A.S. Acampora. Performance analysis of multihop lightwave networks with hot potato routing and distance-age-priorities. *IEEE Transactions on Communications*, 42(8) :2571–2581, August 1994.
- [ZMPE96] F. Zane, P. Marchand, R. Paturi, and S. Esener. Scalable Network Architectures Using The Optical Transpose Interconnection System. In *Massively Parallel Processing using Optical Interconnections – MPPOI*, pages 114–121, Maui, Hawaii, October 1996. IEEE Computer Society.
- [ZMPE00] F. Zane, P. Marchand, R. Paturi, and S. Esener. Scalable Network Architectures Using The Optical Transpose Interconnection System (OTIS). *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 60(5) :521–538, 2000.
- [ZS00] D. Zhou and S. Subramaniam. Survivability in Optical Networks. *IEEE Network*, 14(6) :16–23, 2000.

Annexe A

Quelques notions de la théorie des graphes

Les notions de la théorie des graphes abordées dans cette annexe sont pour la plupart extraites des ouvrages [Ber73, BM76, Lei92, dR94, GGL95].

A.1 Notations mathématiques

- Z_n est l'anneau des entiers modulo n , $Z_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$.
- Z_n^k est l'espace vectoriel de dimension k sur Z_n , de vecteurs de base e_0, e_1, \dots, e_{k-1} .
- $\text{ppcm}(a, b)$ est le plus petit multiple commun de a et b ; $\text{pgcd}(a, b)$ est le plus grand diviseur commun de a et b . Rappelons que a et b sont premiers entre eux si $\text{pgcd}(a, b) = 1$. De plus $\text{pgcd}(a, b) \text{ppcm}(a, b) = ab$.
- La permutation σ définie par

$$\begin{array}{ccc} \sigma & : & Z_n \longrightarrow Z_n \\ & & i \longmapsto i + k \end{array}$$

est cyclique si et seulement si $\text{pgcd}(k, n) = 1$.

A.2 Notations – définitions – graphes élémentaires

- Un **graphe non orienté** $G = (V(G), E(G))$ est constitué d'un ensemble fini $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ d'éléments, appelés **sommets**, et d'une famille finie $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de représentants de paires de sommets, appelés **arêtes**.
- L'arête e reliant les sommets u et v est notée $e = \{u, v\}$; de plus, $\{u, v\} = \{v, u\}$.
- Un **graphe orienté** $G = (V(G), A(G))$ est constitué d'un ensemble fini $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ d'éléments, appelés **sommets**, et d'une famille finie $A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ de représentants du produit cartésien $V(G) \times V(G)$, appelés **arcs**.
- L'arc a du sommet u vers le sommet v est noté $a = (u, v)$; de plus $(u, v) \neq (v, u)$.
- Notons qu'une paire de sommets $\langle x, y \rangle \in V(G) \times V(G)$ peut apparaître plusieurs fois dans la famille $E(G)$; on parle alors d'**arêtes multiples** $\{x, y\}$ et de **multigraphe** G .

- De même, un couple de sommets (x, y) peut apparaître plusieurs fois dans la famille $A(G)$ et l'on parle également de multigraphe.
- Un graphe orienté est **symétrique** si l'existence d'un arc $a = (u, v)$ implique l'existence de l'arc $a' = (v, u)$.
 - Un arc de la forme (u, u) ou une arête de la forme $\{u, u\}$ est appelé(e) **boucle**.
 - Un graphe **simple** est un graphe ne contenant ni boucle ni arc ou arête multiple.
 - Si $a = (x, y)$ est un arc, le sommet y est un **successeur** du sommet x et x est un **prédécesseur** de y .
 - $\Gamma_G^+(u)$ est l'ensemble des successeurs du sommet u dans le graphe orienté G ; $\Gamma_G^-(u)$ est l'ensemble des prédécesseurs de u .
 - $|\Gamma_G^+(u)| = d^+(u)$ est le **degré sortant** de u ; $|\Gamma_G^-(u)| = d^-(u)$ est le **degré entrant** de u .
 - Si $e = \{u, v\}$ est une arête, les sommets u et v sont dits **adjacents** l'un à l'autre et l'arête e est dite **incidente** à u et v .
 - $\Gamma_G(u)$ est le **voisinage** du sommet u dans le graphe G ; le sommet u est de **degré** $d(u) = |\Gamma_G(u)|$.
 - Un graphe non orienté est dit de degré d si tout ses sommets ont un degré d ; un graphe orienté est de degré d si tout ses sommets vérifient $d^+(u) = d^-(u) = d$.
 - $\Gamma_G^{+k}(u)$ est le voisinage à **distance** k du sommet u dans le graphe G

$$\Gamma_G^{+k}(u) = \Gamma_G^+(\Gamma_G^{+(k-1)}(u)) = \Gamma_G^{+(k-1)}(\Gamma_G^+(u))$$

- Deux graphes $G_1 = (V_1, A_1)$ et $G_2 = (V_2, A_2)$ sont dits **isomorphes** si et seulement si il existe une bijection f de V_1 sur V_2 , telle que, pour tout sommets u et v de V_1 , $(u, v) \in A_1$ si et seulement si $(f(u), f(v)) \in A_2$. On note $G_1 \equiv G_2$.
- Une **chaîne**, notée $\mu(x, y)$, entre deux sommets x et y d'un graphe G , est une suite de sommets $x = x_1, x_2, \dots, x_k = y$ dont deux sommets consécutifs sont adjacents; une chaîne est *simple* si elle ne contient pas plusieurs fois un même arc ou une même arête; elle est *élémentaire* si elle ne contient pas plusieurs fois un même sommet.
- Un **chemin** dans un graphe orienté, noté $\vec{\mu}(x, y)$ est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.
- Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident; un cycle est *élémentaire* s'il ne contient strictement aucun autre cycle.
- Un **circuit** est un chemin dont les extrémités coïncident; un circuit est *élémentaire* s'il ne contient strictement aucun autre circuit.
- Un cycle élémentaire contenant k sommets est noté C_k ; un circuit contenant k sommets est noté \vec{C}_k .
- Une chaîne est hamiltonienne si elle contient une et une seule fois tous les sommets du graphe; une chaîne est **eulérienne** si elle contient une et une seule fois toutes les arêtes du graphe;
- Un chemin est hamiltonien si il contient une et une seule fois tous les sommets du graphe; un chemin est **eulérien** si il contient une et une seule fois tous les arcs du graphe;

- Un **cycle hamiltonien** est une chaîne hamiltonienne dont les extrémités coïncident ; un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un **circuit hamiltonien** est un chemin hamiltonien dont les extrémités coïncident ; un **circuit eulérien** est un chemin eulérien dont les extrémités coïncident.
- Un graphe est hamiltonien si il possède un cycle ou un circuit hamiltonien ; un graphe est eulérien si il possède un cycle ou un circuit eulérien.

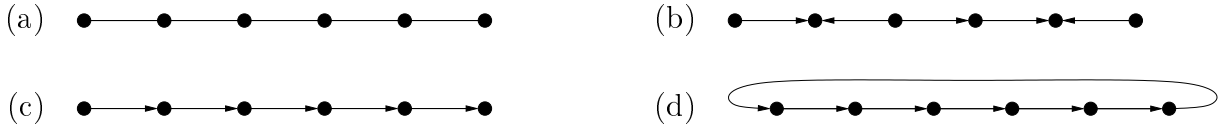


FIG. A.1 – (a) une chaîne non orientée, (b) une chaîne orientée, (c) un chemin et (d) un circuit.

- La **distance** entre deux sommets x et y dans un graphe G (orienté ou non), notée $\delta(x, y)$, est la longueur du plus court chemin entre x et y ; une autre définition est $\delta(x, y) = \min_{k \geq 1} \left\{ k \mid y \in \Gamma_G^{+k}(x) \right\}$.
- Le **diamètre** d'un graphe G , noté D ou D_G selon le cas, est le maximum des distances entre les sommets ; $D = \max_{x, y \in V(G)} \delta(x, y)$.
- L'**excentricité d'un sommet** u dans un graphe G , notée $e_G(u)$, est la moyenne des distances entre le sommet u et les autres sommets du graphe :

$$e_G(u) = \frac{1}{n-1} \sum_{v \in V(G) \setminus \{u\}} \delta(u, v)$$

- L'**excentricité d'un graphe** G , noté e_G , est la moyenne des distances entre les sommets :

$$e_G = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G) \setminus \{u\}} \delta(u, v)$$

- Nous avons $e_G \leq D$.
- La **distance moyenne d'un sommet** u dans un graphe G , notée $\bar{\delta}_G(u)$, est la moyenne des distances entre le sommet u et les autres sommets du graphe, y compris lui même, avec $\delta(u, u) = 0$

$$\bar{\delta}_G(u) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \delta(u, v) = \frac{n-1}{n} e_G(u)$$

- La **distance moyenne d'un graphe** G , notée $\bar{\delta}_G$, est la moyenne des distances moyennes des sommets de ce graphe

$$\bar{\delta}_G = \frac{1}{n^2} \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} \delta(u, v) = \frac{n-1}{n} e_G$$

- Une chaîne non-orientée de longueur n est de diamètre $n-1$; le cycle C_n est de diamètre $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; le circuit \vec{C}_k est de diamètre $k-1$.
- Une **boucle** est un cycle de longueur 1.

- Un graphe non-orienté est **complet** si toute paire de ses sommets $\langle x, y \rangle$ est reliée par une arête $\{x, y\}$; un graphe orienté est complet si toute paire de ses sommets est reliée par l'arc (x, y) ou (y, x) .
 - K_n est le graphe complet non-orienté à n sommets et $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes (figure A.2);
 - K_n^* est le graphe complet orienté symétrique à n sommets et $n(n-1)$ arcs;
 - K_n^+ est le graphe complet orienté symétrique avec boucles, à n sommets et n^2 arcs (figure A.2).

- Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti**, s'il existe une partition de V en deux classes V_1 et V_2 telle que tout élément de E a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 (figure A.3); si de plus toute paire de sommets $\langle x, y \rangle$, telle que $x \in V_1$ et $y \in V_2$, est reliée par une arête $\{x, y\}$, alors le graphe est **biparti complet**; de plus, $\forall x \in V_1, d(x) = |V_2|$ et $\forall y \in V_2, d(y) = |V_1|$.
 - K_{n_1, n_2} est le graphe biparti complet ayant une partie de cardinal $n_1 = |V_1|$ et l'autre de cardinal $n_2 = |V_2|$;
 - K_{n_1, n_2}^* est le graphe orienté symétrique associé à K_{n_1, n_2} .

- Un graphe orienté $G = (V, A)$ est **biparti complet orienté** s'il existe une partition de V en deux classes V_1 et V_2 telle que $A = \{(x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$, c'est-à-dire que toute paire de sommets $\langle x, y \rangle$, telle que $x \in V_1$ et $y \in V_2$, est reliée par un arc et tout arc a son origine dans V_1 et son extrémité dans V_2 ; de plus $\forall x \in V_1, d^+(x) = |V_2|, d^-(x) = 0$ et $\forall y \in V_2, d^+(y) = 0, d^-(y) = |V_1|$.
 - \vec{K}_{n_1, n_2} est le graphe biparti complet orienté ayant une partie de cardinal $n_1 = |V_1|$, l'autre de cardinal $n_2 = |V_2|$ et tout arc a son origine dans V_1 (figure A.3).

Lorsque le graphe G est un multigraphe, nous pouvons spécifier quelques définitions.

- Une **multi-boucle** est un sommet possédant plusieurs boucles.
- Une **multi-chaîne** est une chaîne contenant plusieurs copies d'un ou plusieurs de ses arcs (ou arêtes); par abus de langage, nous dirons qu'une multi-chaîne contient exactement k copies de chacun de ses arcs (ou arêtes).
- Un **multi-chemin** est une multi-chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.
- Un **multi-cycle** est une multi-chaîne dont les extrémités coïncident; un **multi-circuit** est un multi-chemin dont les extrémités coïncident.

A.3 Quelques opérateurs sur les graphes

Les opérateurs sur les graphes que nous rappelons ici, permettent de décrire et de construire des structures de graphes évoluées, comme l'hypercube, à partir de graphes simples.

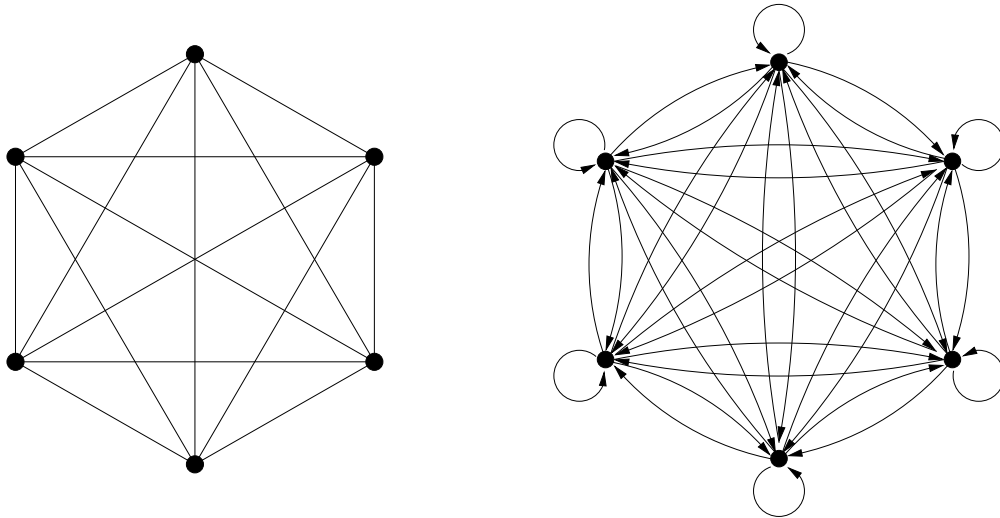


FIG. A.2 – Graphe complet non-orienté K_6 et graphe complet orienté symétrique avec boucles K_6^+ .

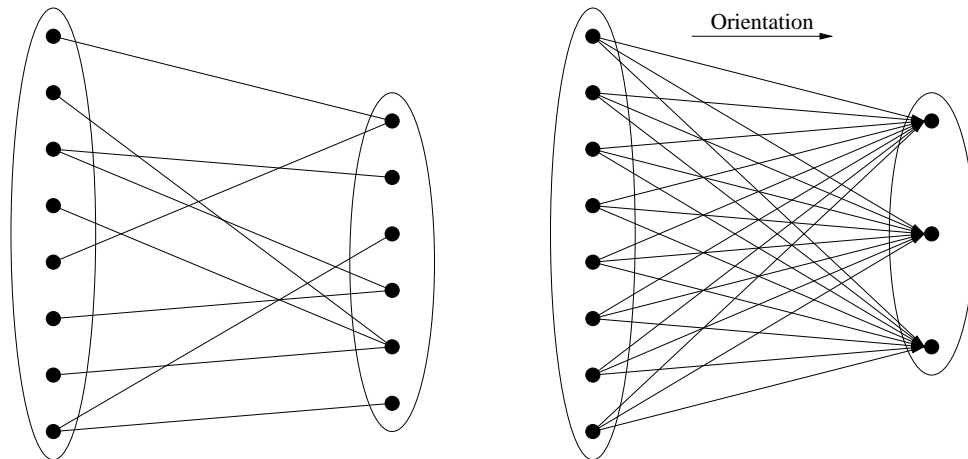


FIG. A.3 – Graphe biparti non orienté et graphe biparti complet orienté $K_{8,3}$.

A.3.1 Graphes itérés

Définition A.3.1 Le graphe représentatif des arcs du graphe $G = (V(G), A(G))$ est le graphe $L(G) = H = (V(H), A(H))$ tel que :

- $V(H) = \{e = (u, v) \mid (u, v) \in A(G)\}$;
- $A(H) = \{(e, f) \mid e, f \in V(H), e = (u, v) \in A(G), f = (v, w) \in A(G)\}$.

Le graphe $L(G)$ est aussi appelé graphe itéré de G , ou (line-graph).

Définition A.3.2 Le graphe représentatif des arcs k -itéré est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L^0(G) &= G \\ L^k(G) &= L(L^{k-1}(G)) \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

Propriétés :

- Si $\Gamma_{L(G)}^+(u) \cup \Gamma_{L(G)}^+(v) \neq \emptyset$ alors $\Gamma_{L(G)}^+(u) = \Gamma_{L(G)}^+(v)$.
- Le graphe itéré d'un multigraphe G est un graphe simple.
- Si le graphe G est un chemin de longueur k , alors le graphe $L(G)$ est un chemin de longueur $k - 1$.
- Si le graphe G est un cycle non-orienté de longueur k , alors le graphe $L(G)$ est également un cycle non-orienté de longueur k ; si G est un circuit de longueur k , alors $L(G)$ l'est également.
- Si le graphe G est une multi-boucle orientée à n arcs, alors le graphe $L(G)$ est le graphe complet à n sommets et n^2 arcs, K_n^+ .
- Si le graphe G est eulérien, alors le graphe $L(G)$ est hamiltonien.

A.3.2 Somme cartésienne

Définition A.3.3 La somme cartésienne $G_1 \square G_2$ de deux graphes $G_1 = (V_1, A_1)$ et $G_2 = (V_2, A_2)$, est le graphe $G = (V, A)$ tel que :

- $V = \{\langle u_1, u_2 \rangle \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$;
- $A = \{(\langle u_1, u_2 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle) \mid u_1 = v_1 \in V_1 \text{ et } \langle u_2, v_2 \rangle \in A_2, \text{ ou } u_2 = v_2 \text{ et } \langle u_1, v_1 \rangle \in A_1\}$.

Le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes est la somme des diamètres de ces graphes [dR94].

Parmi les graphes construits comme la somme cartésienne de graphes élémentaires, nous trouvons principalement la grille, la grille torique et l'hypercube [Lei92].

- La **grille de dimension 2**, $M(n_1, n_2)$, à $n_1 n_2$ sommets est la somme cartésienne de deux chaînes μ_1 et μ_2 , de longueurs n_1 et n_2 . $M(n_1, n_2) = \mu_1 \square \mu_2$; plus généralement, la **grille de dimension k** , $M(n_1, n_2, \dots, n_k)$, est la somme cartésienne de k chaînes μ_i , $1 \leq i \leq k$, de longueurs n_i .

$$M(n_1, n_2, \dots, n_k) = \mu_1 \square \mu_2 \square \dots \square \mu_k = \square_{i=1}^k \mu_{n_i}$$

La grille de dimension k a $\prod_{i=1}^k n_i$ sommets et un diamètre $\sum_{i=1}^k n_i - k$.

- La **grille torique de dimension** k , ou **tore**, $TM(n_1, n_2, \dots, n_k)$, à $n = \prod_{i=1}^k n_i$ sommets et de diamètre $\sum_{i=1}^k \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$, est la somme cartésienne des k cycles C_{n_i} de longueur n_i , $1 \leq i \leq k$.

$$TM(n_1, n_2, \dots, n_k) = \square_{i=1}^k C_{n_i}$$

- Lorsque les longueurs des cotés d'un tore sont tous égaux à une valeur l , nous emploierons le terme de **tore de côté l et dimension k** , noté $TM(l)^k$.
- L'**hypercube** de dimension k , noté \mathcal{H}_k , a 2^k sommets, de degré k et diamètre k , se définit récursivement à partir de K_2 :

$$\mathcal{H}_k = K_2 \square \mathcal{H}_{k-1} = \square_{i=1}^k K_2$$

- L'**hypercube généralisé** de dimension k , noté $\mathcal{H}_{d,k}$, a d^k sommets, de degré $(d-1)k$ et de diamètre k , est construit récursivement à partir de K_d :

$$\mathcal{H}_{d,k} = K_d \square \mathcal{H}_{d,k-1} = \square_{i=1}^k K_d$$

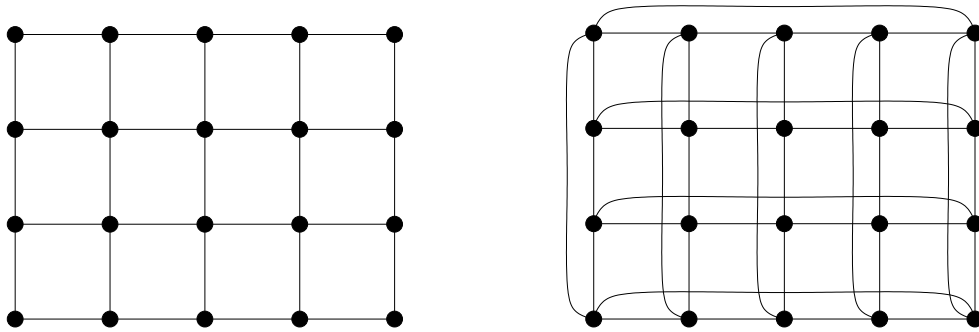


FIG. A.4 – Grille $M(5,4)$ et grille torique $TM(5,4) = C_5 \square C_4$.

A.3.3 Produit de convolution

Le produit de convolution est également connu sous les noms de : produit de tension, produit de Kronecker, produit direct ou encore produit externe. Nous emploierons le terme de produit de convolution (ou simplement le mot convolution) pour désigner l'opérateur sur les graphes et, par usage, le terme de produit de Kronecker pour désigner l'opérateur matriciel.

Définition A.3.4 *Le produit de Kronecker de deux matrices B et C , de taille $m_B \times n_B$ et $m_C \times n_C$, est une matrice de taille $(m_B m_C) \times (n_B n_C)$ définie, par blocs de taille $m_C \times n_C$, par :*

$$A = B \otimes C = \begin{bmatrix} b_{1,1}C & b_{1,2}C & \cdots & b_{1,n_B}C \\ b_{2,1}C & b_{2,2}C & \cdots & b_{2,n_B}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m_B,1}C & b_{m_B,2}C & \cdots & b_{m_B,n_B}C \end{bmatrix}$$

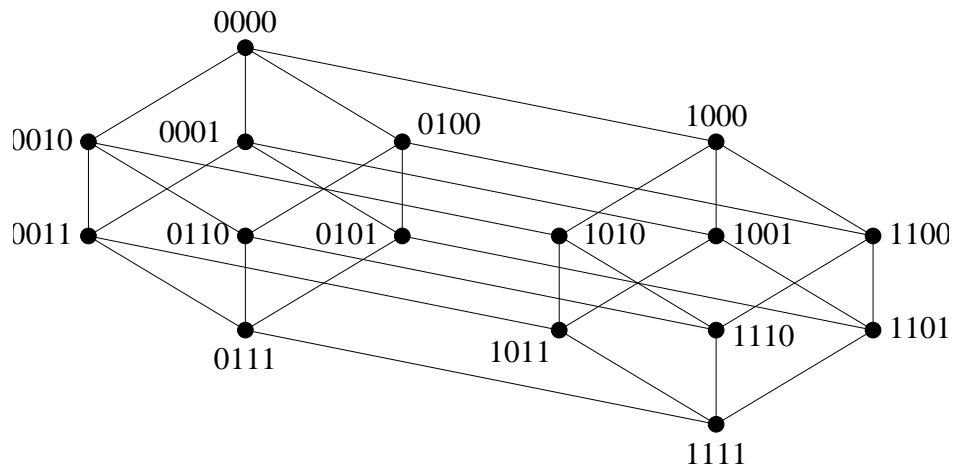


FIG. A.5 – Hypercube de dimension 4, \mathcal{H}_4 .

Le produit de Kronecker est associatif, $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$, et distributif par rapport à l'addition, $(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D$. De plus, si A , B , C et D sont des matrices telles que les produits AC et BD sont définis, alors $(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$. D'autre part, la transposée, le conjugué ou l'inverse d'un produit de Kronecker est le produit de Kronecker des transposés, conjugués et inverses de ses facteurs. Il en résulte que le produit de Kronecker préserve les propriétés de ses facteurs. En particulier, le produit de deux matrices orthogonales, symétriques, triangulaires ou même définies positives, est orthogonal, symétrique, triangulaire ou défini positif.

Le produit de Kronecker est souvent employé pour simplifier l'expression d'algorithmes rapides de transformations tel que la transformée de Fourier discrète [Loa92].

Un exemple simple, pour mieux comprendre le gain en termes de performance apporté par le produit de Kronecker, est le produit de matrices. Supposons que nous voulions calculer le produit de matrice $(A \otimes B)(C \otimes D)$, où A , B , C et D sont des matrices de taille $n \times n$, en utilisant l'algorithme naïf. Si nous n'utilisons pas le fait que les matrices $A \otimes B$ et $C \otimes D$ sont des produits de Kronecker, alors nous effectuons le produit de deux matrices de tailles $n^2 \times n^2$, ce qui prend $O(n^6)$ opérations. Par contre, si nous utilisons le fait que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, alors, nous effectuons 2 produits de matrices $n \times n$, ce qui prend un temps $O(n^3)$, puis nous composons deux matrices de taille $n \times n$, soit $O(n^4)$ opérations. Finalement, l'utilisation du produit de Kronecker permet de réduire d'un facteur n^2 le nombre d'opérations.

Le lecteur est encouragé à se reporter à la thèse [Pit97] et aux ouvrages [Loa92, HJ91] pour de plus amples informations sur cet opérateur.

En termes de graphes, la définition de cet opérateur est la suivante :

Définition A.3.5 *La convolution $G_1 \otimes G_2$ de deux graphes orientés, $G_1 = (V_1, A_1)$ et $G_2 = (V_2, A_2)$, est le graphe orienté $G = (V, A)$ tel que :*

- $V = \{\langle u_1, u_2 \rangle \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$;
- $A = \{(\langle u_1, u_2 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle) \mid \langle u_1, v_1 \rangle \in A_1 \text{ et } \langle u_2, v_2 \rangle \in A_2\}$.

Un graphe pouvant être représenté par sa matrice d'adjacence, les propriétés de cet opérateur sont nombreuses. Par exemple, la convolution de deux graphes orientés symétriques est un graphe orienté symétrique.

Fait A.3.6 *La composition de deux graphes complets orientés symétriques avec boucles est un graphe complet orienté symétrique avec boucles : $K_{n_1}^+ \otimes K_{n_2}^+ \equiv K_{n_1 n_2}^+$.*

Proposition A.3.7 *Soient C_1 et C_2 , deux cycles orientés de longueurs respectives n_1 et n_2 . Le graphe $G = C_1 \otimes C_2$ est l'union de $\text{pgcd}(n_1, n_2)$ cycles disjoints de longueurs $\text{ppcm}(n_1, n_2)$.*

Preuve : C_i est le cycle orienté $(x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n_i-1}^i, x_0^i)$ de longueur n_i , $i \in \{1, 2\}$.

Dans $G = C_1 \otimes C_2$, il y a k cycles de longueur l et $kl = n_1 n_2$. Intéressons-nous au cycle C_l de G passant par le sommet $\langle x_0^1, x_0^2 \rangle$. Nous avons

$$C_l = (\langle x_0^1, x_0^2 \rangle, \langle x_1^1, x_1^2 \rangle, \dots, \langle x_{i \bmod n_1}^1, x_{i \bmod n_2}^2 \rangle, \dots, \langle x_{n_1-1}^1, x_{n_2-1}^2 \rangle, \langle x_0^1, x_0^2 \rangle)$$

Le cycle C_l est de longueur l , et $l = l_1 n_1 = l_2 n_2$. Nous en déduisons que $l_2 n_2 \equiv 0 \pmod{n_1}$, c'est-à-dire que $l_2 n_2$ est le plus petit multiple de n_1 qui soit multiple de n_2 . Donc $l = l_2 n_2 = \text{ppcm}(n_1, n_2)$. De plus, $\text{ppcm}(n_1, n_2) \text{pgcd}(n_1, n_2) = n_1 n_2 = kl$, donc $k = \text{pgcd}(n_1, n_2)$. □

Nous illustrons la proposition A.3.7 à l'aide des figures A.6 et A.7. La figure A.6 représente le graphe $C_4 \otimes C_3$, où $\text{ppcm}(4, 3) = 12$ et $\text{pgcd}(4, 3) = 1$. Le graphe $C_4 \otimes C_3$ est un cycle de longueur 12. La figure A.7 représente le graphe $C_4 \otimes C_4$, où $\text{ppcm}(4, 4) = \text{pgcd}(4, 4) = 4$. Le graphe $C_4 \otimes C_4$ est l'union de 4 cycles de longueur 4.

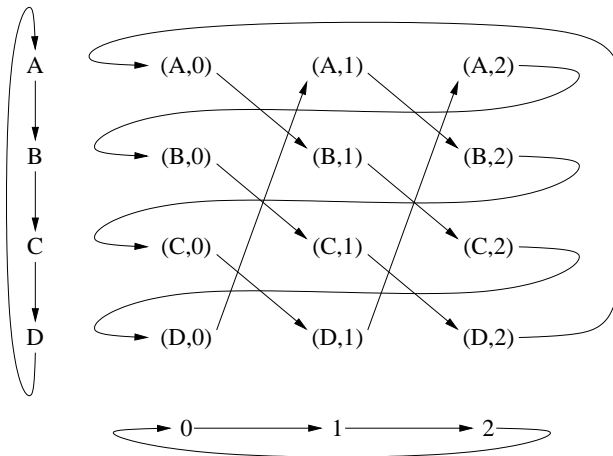


FIG. A.6 – Convolution d'un cycle de longueur 4 par un cycle de longueur 3. Le graphe $C_4 \otimes C_3$ est un cycle de longueur 12.

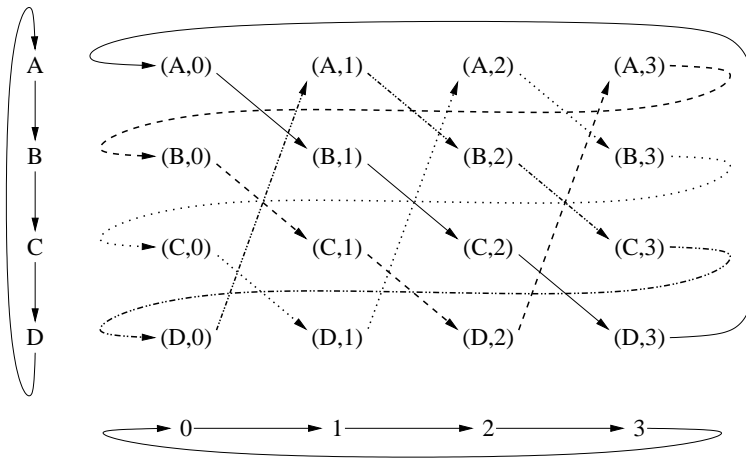


FIG. A.7 – Convolution de 2 cycles de longueur 4. Le graphe $C_4 \otimes C_4$ est l'union de 4 cycles de longueur 4.

A.3.4 Produit de composition

Le produit de composition, ou composition, de graphes est une opération très générale sur les graphes. En effet, tant le produit cartésien comme le produit de convolution sont des cas particuliers de la composition de deux graphes. Le lecteur pourra se reporter à [dR94, BDQ92, BHLP92, JS84] pour plus de détails.

Définition A.3.8 *Le graphe composé d'un graphe G par un graphe H , noté $G[H]$, est le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet de G par une copie du graphe H , et en reliant deux sommets de deux de ces copies si les sommets correspondants de G sont adjacents.*

Cette définition étant très générale, nous avons, [Per98] :

- $V(G[H]) = \{\langle x, u \rangle \mid x \in V(G), u \in V(H)\}$;
- $|V(G[H])| = |V(G)| \cdot |V(H)|$;
- $A(G[H]) \subseteq \{(\langle x, u \rangle, \langle x, v \rangle) \mid x \in V(G), (u, v) \in A(H)\} \cup \{(\langle x, u \rangle, \langle y, v \rangle) \mid (x, y) \in V(G), u, v \in V(H)\}$;
- $|A(G[H])| \leq |V(G)| \cdot |A(H)| + |A(G)| \cdot |V(H)|^2$;
- $D(G[H]) \leq (D(G) + 1) \cdot D(H) + D(G)$;

Un exemple de graphe ayant une définition simple en termes de graphe composé, est le *cube-connected-cycles*, dont une définition plus classique se trouvera dans [dR94]. La figure A.8 représente le cube-connected-cycle de dimension 3.

Définition A.3.9 *Le cube-connected-cycles de dimension D , noté $CCC(D)$, est le graphe composé construit à partir de l'hypercube \mathcal{H}_D à 2^D sommets, et du cycle C_D , tel que :*

- $CCC(D) = \mathcal{H}_D [C_D]$;
- $V(\mathcal{H}_D) = \{u = u_{D-1} \dots u_1 u_0 \mid u_i \in \mathbb{Z}_2\}$;
- $E(\mathcal{H}_D) = \{\{u, v\} \mid u = u_{D-1} \dots u_1 u_0, v = u_{D-1} \dots \bar{u}_i \dots u_1 u_0, i \in \mathbb{Z}_D\}$;
- $V(CCC(D)) = \{\langle u, x \rangle \mid u \in V(\mathcal{H}_D), x \in V(C_D) = \mathbb{Z}_D\}$;

$$- E(CCC(D)) = \{ \{ \langle u, x \rangle, \langle u, y \rangle \} \mid u \in V(\mathcal{H}_D), \{x, y\} \in E(C_D) \} \\ \cup \{ \{ \langle u, x \rangle, \langle v, y \rangle \} \mid \{u, v\} \in E(\mathcal{H}_D), g(u, v) = \langle x, y \rangle \}.$$

où g est la fonction définie par

$$g : E(\mathcal{H}_D) \longrightarrow V(C_D) \times V(C_D) \\ \{u, v\} = \{u_{D-1} \dots u_1 u_0, u_{D-1} \dots \bar{u}_i \dots u_1 u_0\} \longmapsto \langle i, i \rangle = \langle x, y \rangle$$

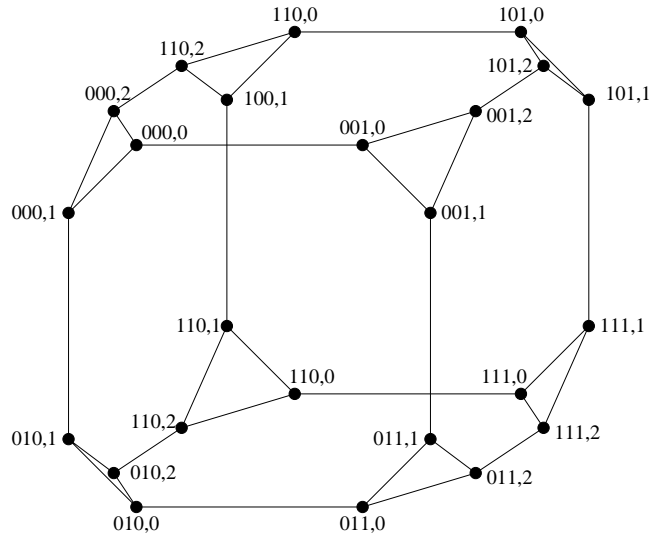


FIG. A.8 – Cube-connected-cycle de dimension 3, $CCC(3)$.

Rappelons que si $\langle x_1, y_1 \rangle$ et $\langle x_2, y_2 \rangle$ sont deux points distincts du plan orthonormé, alors l'équation de la droite passant par ces deux points est la suivante :

$$y = x \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Fixons le centre $\langle 0, 0 \rangle$ du plan orthonormé au point où le faisceau optique émis par l'émetteur $(0, 0)$ rencontre le premier plan de lentille, comme reporté sur la figure B.1. Le faisceau optique émis par l'émetteur (i, j) rencontre le premier plan de lentilles au point de coordonnées $\langle (iq + j)d_x, 0 \rangle$. Ensuite, il sort du deuxième plan de lentille au point de coordonnées $\langle (pq - pj - i - 1)d_x, Y \rangle$, avant de rejoindre le récepteur $(q - j - 1, p - i - 1)$.

Notons $d_{(i,j)}$ la droite reliant le point de coordonnées $\langle (iq + j)d_x, 0 \rangle$ au point de coordonnées $\langle (pq - pj - i - 1)d_x, Y \rangle$. Cette droite est définie par la relation :

$$y = x \frac{Y}{(pq - iq - pj - i - j - 1)d_x} - Y \frac{iq + j}{pq - iq - pj - i - j - 1}$$

D'où nous déduisons la relation

$$x = y \frac{(pq - iq - pj - i - j - 1)d_x}{Y} + (iq + j)d_x$$

Calculons maintenant les coordonnées du point d'intersection des droites $d_{(0,0)}$ et $d_{(0,1)}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} x \frac{Y}{d_x(pq - 1)} &= x \frac{Y}{d_x(pq - p - 2)} - \frac{Y}{pq - p - 2} \\ x \frac{pq - p - 2 - pq + 1}{d_x(pq - 1)(pq - p - 2)} &= -\frac{1}{pq - p - 2} \\ x &= \frac{pq - 1}{p + 1} d_x \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} y \frac{(pq - 1)d_x}{Y} &= y \frac{(pq - p - 2)d_x}{Y} + d_x \\ y &= \frac{Y}{p + 1} \end{aligned}$$

Ainsi, le point focal de la lentille située devant les émetteurs $(0, 0)$ et $(0, 1)$ a pour coordonnées dans le plan $\left\langle \frac{pq-1}{p+1}d_x, \frac{Y}{p+1} \right\rangle$, ce qui dénote une distance focale de $\frac{Y}{p+1}$.

De plus, le diamètre D_L^1 de cette lentille est tel que $D_L^1 \geq 2\frac{pq-1}{p+1}d_x$. Nous pouvons le fixer à $D_L^1 = 2\frac{pq-1}{p+1}d_x(1 + \epsilon)$, avec $\epsilon > 0$.

Nous obtenons également le f_L^1 -nombre de cette lentille : $f_L^1 = \frac{Y}{p+1} \frac{p+1}{2d_x(pq-1)(1+\epsilon)} = \frac{Y}{2d_x(pq-1)(1+\epsilon)}$.

De la même façon et en utilisant les récepteurs $(0, 0)$ et $(0, 1)$, c'est-à-dire les points de coordonnées $\langle 0, Y \rangle$ et $\langle d_x, Y \rangle$, nous déterminons les caractéristiques des lentilles situées dans le deuxième plan de lentille. Les coordonnées du point focale sont $\left\langle \frac{pq-1}{q+1}d_x, Y \left(1 - \frac{1}{q+1}\right)\right\rangle$, d'où une distance focale de $\frac{Y}{q+1}$, et un diamètre $D_L^2 = 2\frac{pq-1}{q+1}d_x(1 + \epsilon)$, avec $\epsilon > 0$. Cette deuxième lentille sera également de f_L^2 -nombre $f_L^2 = \frac{Y}{2d_x(pq-1)(1+\epsilon)} = f_L^1$.

Nous pouvons finalement déduire de ces résultats

$$\frac{F^1}{F^2} = \frac{q+1}{p+1} = \frac{D_L^1}{D_L^2}$$

Remarquons que si la distance Y séparant les deux plans de lentilles est $Y < \frac{2d_x(pq-1)(1+\epsilon)}{2}$, alors le f_L -nombre f_L des lentilles sera $f_L < 2$.

Annexe C

Un algorithme de recherche exhaustive

Nous donnons ici l'algorithme utilisé pour la recherche exhaustive des graphes de la forme $H(p, q, d)$ isomorphes au graphe de de Bruijn $B(d, D)$.

C.1 Algorithme

Il faut tester pour tous les couples (p, q) tels que $pq = d^{D+1}$, $p < q$, d divise p et d divise q (proposition 5.4.4), si les sommets du graphe $H(p, q, d)$ peuvent être étiquetés comme les sommets du graphe de de Bruijn $B(d, D)$.

- **Cyclique** (p, q, d, D) retourne *vrai* si la permutation f est cyclique, *faux* sinon. N'est utilisable que si $p = d^{p'}$, $q = d^{q'}$ et $p' + q' = D + 1$.
- **EtiquetageValide** (p, q, d, D) retourne *vrai* si les sommets du graphe $H(p, q, d)$ peuvent être étiquetés comme les sommets du graphe de de Bruijn $B(d, D)$, et *faux* sinon.
- **HisomorpheB** (p, q, d, D) retourne *vrai* si les graphes sont isomorphes et *faux* sinon.

HisomorpheB (p, q, d, D)

si $(p \bmod d \equiv 0)$ et $(q \bmod d \equiv 0)$

alors

 si p est une puissance de d

 alors Retourner Cyclique (p, q, d, D)

 sinon Retourner EtiquetageValide (p, q, d, D)

sinon

 Retourner *faux*

EtiquetageValide(p, q, d, D)

// $\omega(x)$ est l'étiquette de $x = x_{D-1} \dots x_1 x_0$, et $\omega(x, i) = x_i$

Initialisation des étiquettes des sommets $x \in V(H)$ au mot $\omega(x) = *^D = \overbrace{*** \dots ***}^D$

Les k sommets avec boucles reçoivent chacun une étiquette différente de la forme c^D , $c \in Z_k$

$F \leftarrow \{x \mid x \in \Gamma_H^+(x)\}$

// diffusion de lettres depuis tous les sommets avec boucle

tant que nonvide(F) **faire**

$u \leftarrow \text{Tête}(F)$

pour tout $v \in \Gamma_H^+(u) \setminus \{u\}$ **faire**

pour i allant de 0 à $D - 1$ **faire**

si $\omega(v, i) = *$

alors si $\omega(u, f^{-1}(i)) \neq *$ **alors** $\omega(v, i) \leftarrow \overline{\omega(u, f^{-1}(i))}$

sinon si $\omega(v, i) \neq \overline{\omega(u, f^{-1}(i))}$ **alors** Retourne *faux*

si $\omega(v)$ a été modifié **alors** $F \leftarrow F \cup \{v\}$

pour tout $v \in \Gamma_H^-(u) \setminus \{u\}$ **faire**

pour i allant de 0 à $D - 1$ **faire**

si $\omega(v, i) = *$

alors si $\omega(u, f(i)) \neq *$ **alors** $\omega(v, i) \leftarrow \overline{\omega(u, f(i))}$

sinon si $\omega(v, i) \neq \overline{\omega(u, f(i))}$ **alors** Retourne *faux*

si $\omega(v)$ a été modifié **alors** $F \leftarrow F \cup \{v\}$

// vérification de la présence de toutes les étiquettes

Initialisation du tableau t de taille n à 0

pour tout $x \in V(H)$ **faire**

$t \left[\sum_{i=0}^{D-1} \omega(x, i) d^i \right] \leftarrow 1$

pour i allant de 0 à $n - 1$ **faire**

si $tab[i] = 0$ **alors** Retourne *faux*

Retourne *vrai*

C.2 Résultats

Les tables C.1 à C.4 nous confortent dans l'idée que la conjecture 5.4.3 page 84 est vraie.

$B(2, D)$	n	Couples (p, q)
$B(2, 2)$	4	(2,4)
$B(2, 3)$	8	(2,8)
$B(2, 4)$	16	(2,16) (4,8)
$B(2, 5)$	32	(2,32)
$B(2, 6)$	64	(2,64) (4,32) (8,16)
$B(2, 7)$	128	(2,128) (8,32)
$B(2, 8)$	256	(2,256) (4,128) (16,32)
$B(2, 9)$	512	(2,512) (8,128)
$B(2, 10)$	1024	(2,1024) (4,512) (8,256) (16,128) (32,64)
$B(2, 11)$	2048	(2,2048) (32,128)
$B(2, 12)$	4096	(2,4096) (4,2048) (8,1024) (16,512) (32,256) (64,128)
$B(2, 13)$	8192	(2,8192) (8,2048) (32,512)
$B(2, 14)$	16384	(2,16384) (4,8192) (16,2048) (128,256)
$B(2, 15)$	32768	(2,32768) (8,8192) (32,2048) (128,512)
$B(2, 16)$	65536	(2,65536) (4,32768) (8,16384) (16,8192) (32,4096) (64,2048) (128,1024) (256,512)
$B(2, 17)$	131072	(2,131072) (32,8192) (128,2048)
$B(2, 18)$	262144	(2,262144) (4,131072) (8,65536) (16,32768) (32,16384) (64,8192) (128,4096) (256,2048) (512,1024)
$B(2, 19)$	524288	(2,524288) (8,131072) (128,8192) (512,2048)
$B(2, 20)$	1048576	(2,1048576) (4,524288) (16,131072) (32,65536) (256,8192) (1024,2048)

TAB. C.1 – $B(2, D)$.

$B(3, D)$	n	Couples (p, q)
$B(3, 2)$	9	(3,9)
$B(3, 3)$	27	(3,27)
$B(3, 4)$	81	(3,81) (9,27)
$B(3, 5)$	243	(3,243)
$B(3, 6)$	729	(3,729) (9,243) (27,81)
$B(3, 7)$	2187	(3,2187) (27,243)
$B(3, 8)$	6561	(3,6561) (9,2187) (81,243)
$B(3, 9)$	19683	(3,19683) (27,2187)
$B(3, 10)$	59049	(3,59049) (9,19683) (27,6561) (81,2187) (243,729)
$B(3, 11)$	177147	(3,177147) (243,2187)
$B(3, 12)$	531441	(3,531441) (9,177147) (27,59049) (81,19683) (243,6561) (729,2187)
$B(3, 13)$	1594323	(3,1594323) (27,177147) (243,19683)
$B(3, 14)$	4782969	(3,4782969) (9,1594323) (81,177147) (2187,6561)

TAB. C.2 – $B(3, D)$.

$B(4, D)$	n	Couples (p, q)
$B(4, 2)$	16	(4,16)
$B(4, 3)$	64	(4,64)
$B(4, 4)$	256	(4,256) (16,64)
$B(4, 5)$	1024	(4,1024)
$B(4, 6)$	4096	(4,4096) (16,1024) (64,256)
$B(4, 7)$	16384	(4,16384) (64,1024)
$B(4, 8)$	65536	(4,65536) (16,16384) (256,1024)
$B(4, 9)$	262144	(4,262144) (64,16384)
$B(4, 10)$	1048576	(4,1048576) (16,262144) (64,65536) (256,16384) (1024,4096)
$B(4, 11)$	4194304	(4,4194304) (1024,16384)

TAB. C.3 – $B(4, D)$.

$B(3, D)$	n	Couples (p, q)
$B(2, 7)$	128	(2,128) (8,32)
$B(3, 7)$	2187	(3,2187) (27,243)
$B(4, 7)$	16384	(4,16384) (64,1024)
$B(5, 7)$	78125	(5,78125) (125,3125)
$B(6, 7)$	279936	(6,279936) (216,7776)
$B(7, 7)$	823543	(7,823543) (343,16807)
$B(8, 7)$	2097152	(8,2097152) (512,32768)
$B(9, 7)$	4782969	(9,4782969) (729,59049)

$B(2, 8)$	256	(2,256) (4,128) (16,32)
$B(3, 8)$	6561	(3,6561) (9,2187) (81,243)
$B(4, 8)$	65536	(4,65536) (16,16384) (256,1024)
$B(5, 8)$	390625	(5,390625) (25,78125) (625,3125)
$B(6, 8)$	1679616	(6,1679616) (36,279936) (1296,7776)

$B(2, 9)$	512	(2,512) (8,128)
$B(3, 9)$	19683	(3,19683) (27,2187)
$B(4, 9)$	262144	(4,262144) (64,16384)
$B(5, 9)$	1953125	(5,1953125) (125,78125)

$B(2, 10)$	1024	(2,1024) (4,512) (8,256) (16,128) (32,64)
$B(3, 10)$	59049	(3,59049) (9,19683) (27,6561) (81,2187) (243,729)
$B(4, 10)$	1048576	(4,1048576) (16,262144) (64,65536) (256,16384) (1024,4096)

$B(2, 11)$	2048	(2,2048) (32,128)
$B(3, 11)$	177147	(3,177147) (243,2187)
$B(4, 11)$	4194304	(4,4194304) (1024,16384)

$B(2, 12)$	4096	(2,4096) (4,2048) (8,1024) (16,512) (32,256) (64,128)
$B(3, 12)$	531441	(3,531441) (9,177147) (27,59049) (81,19683) (243,6561) (729,2187)

TAB. C.4 – $B(d, D)$, $7 \leq D \leq 12$.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux réseaux de communications optiques avec d'une part des réseaux en « espace libre optique » et d'autre part des réseaux à fibres optiques.

Dans un premier temps, nous étudions l'implantation en espace libre optique de réseaux de communications à l'aide de l'architecture OTIS (Optical Transpose Interconnection System), proposé dans [MMHE93]. Nous proposons une modélisation de ces réseaux par les graphes $H(p, q, d)$ que nous cherchons ensuite à caractériser. Nous étudions en particulier les isomorphismes entre ces graphes et des graphes connus (de Bruijn, Kautz et autres graphes à alphabet). Nous développons une famille de graphes à alphabet contenant de nombreux graphes isomorphes au de Bruijn, que nous utilisons pour obtenir une implantation optimale, au sens de la minimisation du nombre de lentilles, du de Bruijn avec OTIS. Nous étudions aussi une famille de réseaux modélisés par des hypergraphes orientés, appelées stack-Kautz, pour laquelle nous donnons un algorithme de routage et des protocoles de contrôles.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au problème de la sécurisation par protection dans les réseaux WDM, qui consiste à utiliser des ressources prédéterminées et dédiées pour assurer la continuité du trafic lors de la rupture d'un faisceau de fibres dans le réseau. Nous décrivons de nombreuses stratégies de protection de l'instance et du réseau. Nous étudions plus particulièrement la protection par sous-réseaux qui consiste au partage de ressources de protection par un ensemble de requêtes formant un sous-réseau particulier (circuit). Nous donnons une solution optimale au problème de la protection par sous-réseaux dans le cas où le réseau est un cycle et les requêtes représentent un échange total.

Mots clés : Réseaux optiques, Communications, Théorie des graphes, Espace libre optique, OTIS, De Bruijn, Kautz, WDM, Robustesse, Protection, Couverture par des cycles, Design.

Abstract

This thesis deals with optical communication networks, especially free space optical networks and optical fiber networks.

First we address the design of free space optical networks using the Optical Transpose Interconnection System (OTIS) architecture defined in [MMHE93]. We give a model of these networks with $H(p, q, d)$ digraphs which we characterize. We take a specific interest in isomorphisms between these digraphs and well known digraphs (de Bruijn, Kautz and other alphabet graphs). We develop a family of alphabet digraphs which includes a large number of digraphs isomorphic to the de Bruijn and use it to obtain an optimal design of the de Bruijn with OTIS, in terms of minimizing the number of lenses. Then, we study a family of networks modeled by directed hypergraphs and called stack-Kautz, for which we provide routing algorithms and control protocols.

In a second part we address the problem of WDM network survivability using protection. This problem consists in using precomputed and dedicated resources in order to ensure traffic continuity if a bundle of fibers breaks down. We describe numerous strategies for protecting the instance and the network. We go more deeply into subnetwork protection where protection resources are shared by sets of request describing a specific subnetwork (circuit). We give an optimal solution to this problem when the network is a cycle and the requests realize the All-to-All pattern.

Keywords : Optical networks, Communications, Graph theory, Free space optics, OTIS, De Bruijn, Kautz, WDM, Survivability, Protection, Cycle covering, Design.