HAL
open science

Dynamique des anneaux et des satellites planétaires : application aux arcs de Neptune et au système Prométhée-Pandore

Stéfan Renner

▶ **To cite this version:**

Stéfan Renner. Dynamique des anneaux et des satellites planétaires : application aux arcs de Neptune et au système Prométhée-Pandore. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2004. Français. NNT : . tel-00008103

HAL Id: tel-00008103

https://theses.hal.science/tel-00008103v1

Submitted on 17 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile-de-France

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

Spécialité : DYNAMIQUE DES SYSTÈMES GRAVITATIONNELS

par

STÉFAN RENNER

Dynamique des anneaux et des satellites planétaires :

application aux arcs de Neptune et au système Prométhée - Pandore

soutenue le 18 novembre 2004 devant le jury composé de :

Président :	J. Laskar	IMCCE/Observatoire de Paris
Rapporteurs :	J. Henrard	Université de Namur, Belgique
	C.D. Murray	Queen Mary and Westfield College, GB
Examinateurs :	F. Mignard	Observatoire de la Côte d'Azur
	A. Vienne	IMCCE/Université de Lille
Membre invité :	R.G. French	Wellesley College, USA
Directeur de thèse :	B. Sicardy	Observatoire de Paris/Université Paris VI

à mon fils Pablo

C'est déja vendre son âme que de ne pas savoir la réjouir.
Albert Camus

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment Bruno Sicardy, pour m'avoir pris sous son aile en stage de DEA, puis en thèse. C'est une chance à mes yeux et un véritable plaisir de travailler avec quelqu'un d'une telle envergure. Scientifiquement doué, humainement énorme. J'ai ainsi pu étudié avec lui des problèmes dynamiques passionnants. Il m'a fait rencontrer plein de gens, et de plus, afin de ne pas rester coincé sur une résonance 121 : 118, il m'a intégré dans le gang des chasseurs d'occultations stellaires, et permis de parcourir un peu le monde à ses cotés pour aller traquer ces événements. Merci encore Bruno !

Je remercie beaucoup tous les membres de mon jury, tout d'abord pour avoir examiné mon travail, puis pour s'être déplacé malgré des plannings apparemment très chargés pour la plupart d'entre eux. Merci donc à mes rapporteurs Jacques Henrard et Carl Murray. Merci à François Mignard et à Alain Vienne (merci aussi pour les explications concernant *TASS*). Merci mille fois à Dick French, non seulement pour avoir accepté l'invitation, mais aussi pour m'avoir fourni ses données *HST*, et pour ses commentaires précieux durant la réalisation d'une partie de ce travail. Ce fut un plaisir d'interagir avec lui, j'ai apprécié ses compétences, sa rigueur, sa disponibilité et sa gentillesse. Merci beaucoup à Jacques Laskar d'avoir accepté de présider le jury, et merci aussi pour les bons conseils donnés à plusieurs occasions.

Je remercie le LESIA, en particulier Jean-Louis Bougeret et Jacqueline Thouvay, pour m'avoir accueilli, et puis pour le soutien matériel et les missions. Je remercie beaucoup Ana Gomez de m'avoir permis d'entrer en DEA et donc dans le monde de la recherche en astronomie. Je remercie Philippe Robutel, et Alain Albouy pour son aide, véritable conseiller technique des configurations centrales du problème à N corps. Merci aussi à Peter Goldreich pour l'entrevue très enrichissante à la fin de la rédaction de ce manuscrit. Je remercie toute l'équipe du pôle planéto du LESIA et les habitants du télescope de 1 mètre, en particulier Antonella Barucci, Marcello Fulchignoni et Françoise Roques. Merci à Audrey pour BibTeX et les questions de mise en page. Merci au GRAAL à Montpellier, à Jean-Louis Vidal, Bertrand Plez, Jean-Pierre Cordoni, Marie-Odile Mennessier et surtout Henri Reboul, pédagogue hors pair avec qui j'ai appris plein de choses en astronomie, et pu mieux comprendre certains mystères de l'Univers et la signification d'un Ω_Λ.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes impliquées dans les expéditions en Amérique et Afrique du Sud, plus particulièrement au Brésil et en Namibie. Bises donc à Régina Machado, Sylvia et Robson, merci à Rodrigo Campos pour son aide à Itajubà, et à Carlos Veiga pour la prise en charge à Rio. Salut au Pluto flying circus, Thomas Widemann, François Colas, ... Un grand merci à Sonja Enke pour l'accueil et la logistique millimétrée en Namibie. Merci aussi aux partenaires allemands de l'association IOTA, Wolfgang Beisker, Hans Bode, Mike Kretlow, Jens Lüdemann, ...

Au-delà du cadre professionnel, je salue les bûcherons Jules et Steph, mes mercenaires scientifiques préférés. Merci pour le soutien, les conseils, le feu et le reste. Une pensée pour

Ovide Arino, qui a compté dans mon parcours. Je le remercie pour son aide en début de thèse, et pour les discussions enthousiastes durant lesquelles j'ai pu apprécié pleinement son humour et ses talents mathématiques.

Salutations à mes enzymes, Jérénimo "le courrier j'y pense toujours", Dadan "le plus dur c'était de sortir de la cave", Seb "sec, SEC !", et à mes autres amis prolétaires de la recherche, David, Esther, Gavazz, Gégé, Manu, ... Salut aussi aux thésards (ou anciens) croisés ici et là, Cédric, Baptiste, Elisabeth, Vincent, Patrick, Philippe, Estelle, Pierre, Frédéric, ...

Merci à ma tornade extra-terrestre favorite, Rona "kettő sör !", et tous mes voeux de réussite artistique et autres ! Salut aux agités de Pau, qui y résident encore ou non, Simon "comparse !" (never forget Budapest 2001), Milou et Julie, Arno, Fabrice, Jipé "nous sommes les Canuts !", Régis, ... Des bises à maman Christel. Et aussi Hej Anneli, Tack ! "Skulle... ?" Merci mais surtout pardon aux oubliés. Que nos délires demeurent enfin gravés dans nos mémoires : violons caliuesques, Petar Popara Blacky, Unza Unza, couloirs et gouttières, break ? brake ?, ... Merci à Alphonse Tram, aux paillettes de Dour, à tous les Aldo Vegas de la planète, et à la Zcar.

Un immense merci à ma mère, à mon père et à Manine pour leur soutien constant. Rien de tout ça n'aurait pu arriver sans vous. Merci pour m'avoir appris la curiosité, merci pour les encouragements et surtout pour le respect de mes choix. Une pensée affectueuse (et merci aussi !) à l'ensemble de ma famille, en particulier à Tati Luce qui vient de nous quitter. Merci à Jean pour la relecture du manuscrit. Salut aussi aux couz.

Enfin, un grand bravo à toi Pablo, ton père est vraiment très fier de toi. Quel chemin déja parcouru, et quel bonheur gigantesque de t'avoir vu faire tes premiers pas le mois dernier !

Résumé

Cette thèse porte tout d'abord sur la dynamique des satellites co-orbitaux. En généralisant le problème des points de Lagrange, des résultats sur l'existence de configurations stationnaires ont été obtenus. Pour N co-orbitaux de masses arbitraires et négligeables devant celle du corps central, l'existence de points d'équilibre dépend de la parité de N. Si N est impair, alors quelles que soient les séparations angulaires entre les satellites, il existe toujours un ensemble de masses qui réalise un équilibre. L'ensemble des solutions physiquement réalistes (masses positives) se restreint à un sous-domaine de séparations angulaires. Pour N pair, des conditions supplémentaires sont à vérifier. Le cas $N = 3$ est traité globalement, en donnant l'ensemble des solutions d'équilibre et leur stabilité. Pour $N > 3$, des méthodes numériques sont présentées.

Ces résultats ont permis d'élaborer un modèle de confinement des arcs de Neptune compatible avec les dernières observations (Dumas et al., 1999; Sicardy et al., 1999b; de Pater et al., 2004) : les arcs sont piégés entre des petits satellites co-orbitaux (de rayons $r \leq 5$ km) en équilibre stable dans l'anneau Adams. La stabilité du système, soumis aux perturbations du satellite Galatéa, a été testée numériquement avec succès. Un scénario de l'origine et de l'évolution d'un tel système est proposé.

Dans un deuxième volet, la dynamique de Prométhée et Pandore est examinée. Des observations *HST* récentes (French et al., 2003) ont révélé des variations brutales et anti-corrélées en moyen mouvement, qui proviennent d'une interaction chaotique entre les deux satellites (Goldreich et Rappaport, 2003a), et qui sont causées par la superposition de 4 résonances de moyen mouvement 121 :118 (Goldreich et Rappaport, 2003b). Nous confirmons ici numériquement le mouvement chaotique en incluant les perturbations des satellites principaux de Saturne. Les masses de Prométhée et Pandore ont été déterminées par ajustement des simulations numériques aux données *HST*, et correspondent à des masses volumiques moyennes de l'ordre de 0.5 g cm^{-3}. Des éphémérides pour Prométhée et Pandore, durant la mission *Cassini* autour de Saturne, sont déduites de ces ajustements. Finalement, des simulations à long terme semblent indiquer que Prométhée et Pandore transfèrent du moment cinétique aux satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée, augmentant ainsi le temps de vie du système Prométhée-Pandore.

Mots clés : Résonances ; Mécanique céleste ; Anneaux planétaires, Neptune ; Satellites de Saturne ; Orbites ; Anneaux planétaires, Saturne ; Occultations

Abstract

First, this thesis considers the dynamics of co-orbital satellites. The problem of the Lagrangian points is extended to derive general results on the existence of stationary configurations. For N co-orbital satelllites with small but otherwise arbitrary masses, the existence of equilibrium points depends on the parity of N. If N is odd, then for any arbitrary angular separation between the satellites, there always exists a set of masses which achieves stationarity. Physically acceptable solutions (positive masses) restrict this existence to sub-domains of angular separations. If N is even, additional conditions must be verified. The case $N = 3$ is treated completely, giving all the possible solutions and their stability. For $N > 3$, numerical methods are given.

These results are applied to explain the confinement of Neptune's ring arcs, with a model compatible with the latest observations (Dumas et al., 1999; Sicardy et al., 1999b; de Pater et al., 2004) : the arcs are trapped between small co-orbital satellites (with radii $r \leq 5$ km), which are in a stable stationary configuration. The system is numerically stable under the effects of the perturbations due to the satellite Galatea. The origin and the evolution of such a system are discussed.

Then the dynamics of Prometheus and Pandora is studied. Recent *HST* observations (French et al., 2003) show anticorrelated sudden changes in the mean motions, which arise from chaotic interactions between the two satellites (Goldreich et Rappaport, 2003a). Chaos is due to the overlap of four 121 :118 apse-type mean motion resonances (Goldreich et Rappaport, 2003b). Taking into account the perturbations by the major saturnian satellites, the chaotic motions are numerically confirmed. By fitting the numerical integrations to the *HST* data, Prometheus and Pandora's masses are derived. They are equivalent to mean densities of about 0.5 g cm^{-3}. The fits allow to produce an ephemeris of the two satellites during the *Cassini* tour. Finally, performing long term integrations, a transfer of angular momentum from Prometheus and Pandora to the co-orbital satellites Janus and Epimetheus is detected, which could increase the lifetime of the Prometheus-Pandora system.

Key words : Resonances ; Celestial mechanics ; Planetary rings, Neptune ; Satellites of Saturn ; Orbits ; Planetary rings, Saturn ; Occultations

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Anneaux et satellites planétaires . . . 1
1.1.1 Dynamique . . . 3
1.1.2 Composition . . . 8
1.1.3 Observations *Cassini* . . . 8
1.2 Objectifs et plan de la thèse . . . 9

2 Résonances **13**
2.1 Introduction . . . 13
2.2 Les points de Lagrange . . . 14
2.2.1 Recherche des solutions d'équilibre . . . 14
2.2.2 Mouvements près de la configuration co-orbitale . . . 16
2.3 Résonances . . . 20
2.3.1 Résonances de corotation . . . 20
2.3.2 Résonances de Lindblad . . . 22
2.3.3 Résonances verticales . . . 25

I Les arcs de Neptune **27**

3 Etat de l'art **29**
3.1 Introduction . . . 29
3.2 Données observationnelles . . . 30
3.2.1 Structure des anneaux . . . 30
3.2.2 Satellites . . . 34
3.3 Modèles dynamiques des arcs de Neptune . . . 34
3.3.1 Généralités . . . 34
3.3.2 Le modèle de Lissauer (1985) . . . 36
3.3.3 Le modèle de Sicardy et Lissauer (1992) . . . 36
3.3.4 Le modèle de Goldreich et al. (1986) . . . 39
3.3.5 Le modèle de Porco (1991) . . . 40
3.3.6 Simulations de Foryta et Sicardy (1996) . . . 45
3.3.7 Auto-gravité de particules macroscopiques en corotation (Salo et Hänninen, 1998) . . . 46
3.4 Origine et évolution des anneaux de Neptune . . . 47

4 Dynamique des satellites co-orbitaux **49**
4.1 Equations du mouvement . . . 51

4.2 Points d'équilibre . . . 54
4.2.1 Résultats généraux . . . 54
4.2.2 Application . . . 55
4.3 Stabilité linéaire des configurations d'équilibre . . . 59
4.3.1 Résultats généraux . . . 59
4.3.2 Application au cas de 3 satellites co-orbitaux . . . 61
4.4 Recherche numérique des solutions d'équilibre linéairement stables . . . 62
4.5 Etude de la stabilité non linéaire . . . 64
4.5.1 Cas des points de Lagrange L_4 et L_5 . . . 66
4.5.2 Cas de 3 satellites co-orbitaux de masses égales . . . 67

5 Modèles alternatifs de confinement des arcs 69
5.1 Observations récentes . . . 69
5.1.1 Les observations de Sicardy et al. (1999b) . . . 69
5.1.2 Les observations de Dumas et al. (1999) et Dumas et al. (2002) . . . 71
5.1.3 Les observations de de Pater et al. (2004) . . . 71
5.2 Le modèle de Namouni et Porco (2002) . . . 74
5.3 Confinement des arcs par des satellites co-orbitaux . . . 75
5.3.1 Test du modèle . . . 75
5.3.2 Discussion . . . 79

II Prométhée et Pandore 85

6 Un système chaotique 87
6.1 Introduction . . . 87
6.2 Modèle numérique . . . 89
6.3 Confirmation du chaos . . . 91

7 Ajustement des masses 99
7.1 Méthode . . . 99
7.2 Résultats . . . 101
7.3 Positions orbitales durant la mission *Cassini* autour de Saturne . . . 105
7.4 Conclusion . . . 107

8 Evolution dynamique à long terme du système 109
8.1 Introduction . . . 109
8.2 Effet des configurations résonantes entre Prométhée et Pandore . . . 110
8.3 Effets de Mimas ou des co-orbitaux Janus et Epiméthée . . . 113
8.3.1 Simulation du couple des anneaux . . . 113
8.3.2 Cas des résonances 3 : 2 avec Mimas . . . 115
8.3.3 Cas des résonances du second ordre avec Janus et Epiméthée . . . 118

III Occultations stellaires 123

9 Occultations par Pluton (juillet 2002) et par Titan (Novembre 2003) 125
9.1 L'occultation de P126 A par Pluton du 20 juillet 2002 . . . 126
9.2 L'occultation de TYC 1343-1615-1 par Titan du 14 novembre 2003 . . . 129

Conclusion et perspectives **133**

Annexes **139**

A Mouvement d'une particule test autour d'une planète aplatie (partie numérique) **139**
A-1 Introduction 139
A-2 Des éléments géométriques au vecteur position-vitesse 141
A-2.1 Orbites équatoriales 141
A-2.2 Orbites inclinées 143
A-3 Du vecteur position-vitesse aux éléments géométriques 143
A-3.1 Orbites équatoriales 143
A-3.2 Orbites inclinées 145
A-4 Application 147

B Repérage des anneaux et des satellites de Saturne. **151**
B-1 Calcul de U,B,P à partir des coordonnées équatoriales de Saturne et du pôle nord de la planète 152
B-2 Relations entre les écarts en ascension droite et déclinaison ($\Delta\alpha \cos\delta$,$\Delta\delta$) par rapport au centre de Saturne et la position en coordonnées cartésiennes 153

Publications **157**

C Stationary configurations for co-orbital satellites with small arbitrary masses. Article paru dans *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **88, 397-414, 2004.** **159**

D Prometheus and Pandora : masses and orbital positions during the *Cassini* **tour. Article accepté et à paraître dans** *Icarus*. **179**

E Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations. Article paru dans *Nature*, **424, 168–170, 2003.** **193**

F Test particle motion around an oblate planet : transformations between state vectors and geometric elements. Preprint. **199**

Bibliographie **215**

Table des figures **227**

Liste des tableaux **229**

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Anneaux et satellites planétaires **1**
1.1.1 Dynamique 3
1.1.2 Composition 8
1.1.3 Observations *Cassini* 8
1.2 Objectifs et plan de la thèse **9**

1.1 Anneaux et satellites planétaires

Les anneaux planétaires sont des disques extrêmement fins composés d'un nombre incalculable de particules en collision et en orbite autour d'une planète centrale. Les quatre planètes géantes du système solaire, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, possèdent des anneaux. Les anneaux planétaires sont très variés, à la fois par leur masse, leur taille, et également par les processus physiques qu'ils font intervenir. Par exemple, on observe dans les anneaux de Saturne des ondes spirales (qui s'apparentent à celles des galaxies spirales) de plusieurs dizaines de kilomètres. D'un autre côté, dans certaines régions des anneaux, des grains de poussière sont soumis à des forces électromagnétiques ou à des forces de radiation. De manière générale, comprendre la physique des anneaux peut apporter des réponses sur les mécanismes d'accrétion, de fragmentation, qui peuvent conduire à la formation de satellites et de planètes, dans la nébuleuse solaire primitive ou dans d'autres disques proto-planétaires.

Les masses des anneaux planétaires sont différentes. Seuls les anneaux de Saturne ont une masse comparable à celle d'un satellite comme Mimas, qui a un diamètre de l'ordre de 500 km. La taille des satellites de Saturne montre que plus on se rapproche de la planète, plus les satellites sont petits (*cf.* figure 1.1). C'est une conséquence naturelle des forces de marée. De même ces satellites ont tendance à être de moins en moins denses (Rosen et al., 1991; Nicholson et al., 1992) lorsque on s'approche de la planète, avec des densités moyennes de l'ordre de 0.4-0.6 g cm^{-3}. Cela indique que ces corps sont plutôt des agrégats de glace, qui se seraient accrétés dans les régions externes des anneaux. Les forces de marée causées par ces derniers auraient ensuite fait migrer les satellites vers l'extérieur. Lorsque l'on se rapproche de la limite de Roche de la planète, satellites et anneaux co-existent, puis finalement on ne trouve plus

que des anneaux, car alors les forces de marée deviennent prédominantes par rapport à l'autogravité des satellites.

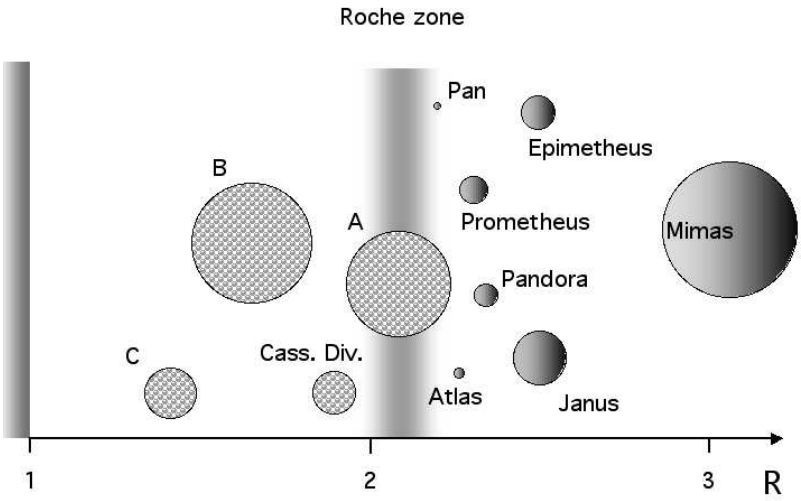

FIG. 1.1: Masses relatives des satellites internes de Saturne en fonction de la distance au corps central. L'unité de distance est le rayon R de la planète. Les "tailles" des anneaux ont été calculées en rassemblant en un seul corps tout le matériau présent dans les anneaux A, B, C et la division de Cassini. Pour comparaison, le satellite Mimas a un diamètre de l'ordre de 500 km. On peut noter la diminution de la taille des satellites à mesure que l'on s'approche de la limite de Roche.

Les autres anneaux planétaires ont les mêmes caractéristiques que celles illustrées par la figure 1.1, à savoir des satellites de plus en plus petits au voisinage de la limite de Roche, puis un mélange d'anneaux et de satellites, puis seulement des anneaux. Cependant, les anneaux de Jupiter, Uranus et Neptune sont bien moins massifs que ceux de Saturne. La masse des anneaux d'Uranus est équivalente à celle d'un corps de quelques dizaines de kilomètres, quelques kilomètres pour les anneaux de Neptune, et seulement quelques dizaines de mètres pour les anneaux de Jupiter.

Quelques spécificités sont associées à chaque système d'anneaux :

- les anneaux de Jupiter sont extrêmement ténus. La poussière observée a une faible durée de vie, et provient probablement de petits satellites (Burns et al., 2004).
- les anneaux d'Uranus sont au contraire très denses pour 9 d'entre eux (épaisseur optique jusqu'à $\tau > 1$), mais très étroits (1 à 100 km selon les anneaux), et avec des bords très nets nécessitant des mécanismes de confinement efficaces.
- Neptune possède des anneaux ténus, mais aussi des arcs de matière qui s'étendent sur 40° en longitude. Ces derniers sont observés depuis 20 ans, alors qu'ils devraient a priori être détruits en quelques mois sans là aussi un mécanisme de confinement actif.

La figure 1.2 permet de comparer les différents systèmes d'anneaux planétaires. Les positions radiales des satellites en orbite proche des anneaux y sont représentées. L'orbite synchrone de chaque planète est indiquée en pointillés. Elle est importante dynamiquement puisque sous l'effet des forces de marée, les satellites en orbite prograde au-delà de cette limite ont tendance à s'éloigner de la planète, et ceux à l'intérieur ont tendance à se rapprocher

et éventuellement à se briser. Pour une densité de 1 g cm^{-3}, la limite de Roche sur la figure 1.2 est un peu à l'extérieur de Larissa dans le cas de Neptune, environ au niveau de Rosalinde dans le cas d'Uranus, au milieu de l'anneau A dans le cas de Saturne (*cf.* figure 1.1), et un peu à l'intérieur de l'orbite de Thébé dans le cas de Jupiter. Cette limite reste cependant assez floue dans la mesure où elle suppose les satellites fluides, et où elle dépend de la masse volumique supposée pour ces satellites.

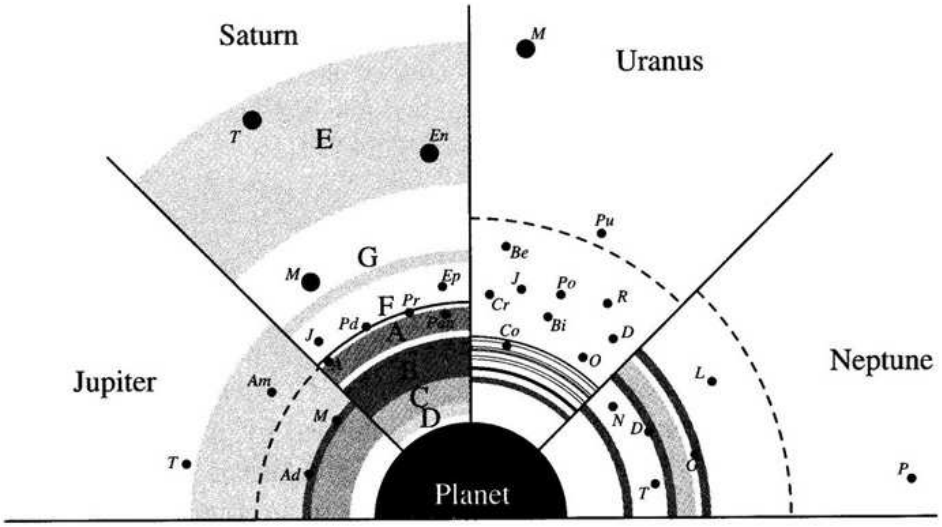

FIG. 1.2: Systèmes d'anneaux des quatre planètes géantes et satellites associés, avec une échelle normalisée au rayon équatorial de la planète. Plus l'anneau représenté est sombre, plus l'épaisseur optique y est importante. L'orbite synchrone pour chaque planète est indiquée par un arc de cercle en pointillés. Les noms des satellites, indiqués ici par des abréviations, sont donnés dans la table 1.1. (D'après Nicholson et Dones (1991)).

1.1.1 Dynamique

On peut diviser les processus physiques des anneaux planétaires en deux catégories. La première concerne les grosses particules (de taille supérieure au centimètre) pour lesquelles les collisions sont importantes, conduisant ainsi à des phénomènes d'accrétion et de fragmentation, et à des effets collectifs associés à la gravitation ou aux collisions. Ces processus sont la cause de l'étalement visqueux des anneaux ou des échanges de moment cinétique avec des satellites proches. Les échelles de temps associés à ces phénomènes sont relativement longs, typiquement jusqu'à quelques centaines de millions d'années, mais restent courts par rapport à l'âge du système solaire. La seconde catégorie concerne les particules microscopiques (entre quelques μm et quelques mm) pour lesquelles les forces de radiation et les forces électromagnétiques sont plus importantes. Le temps de vie de ces particules est très court (de quelques heures à quelques milliers d'années au maximum), si bien que des sources de création de ces particules doivent être invoquées pour expliquer leur présence. Bien évidemment, les deux catégories de processus physiques introduites ici sont liées, puisque par exemple la poussière peut en permanence s'accréter pour former des grosses particules, et inversement ces dernières

Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Satellites			
Métis (M)	Pan	Cordélia (Co)	Naïade (N)
Adrastée (Ad)	Atlas (A)	Ophélia (O)	Thalassa (T)
Amalthée (Am)	Prométhée (Pr)	Bianca (Bi)	Despina (D)
Thébé (T)	Pandore (Pd)	Cressida (Cr)	Galatéa (G)
	Epiméthée (Ep)	Desdémone (D)	Larissa (L)
	Janus (J)	Juliette (J)	
	Mimas (M)	Portia (Po)	
	Encelade (En)	Rosalinde (R)	
	Téthys (T)	Bélinda (Be)	
		Puck (Pu)	
		Miranda (M)	
Anneaux			
Halo	D	1986U2R	Galle
Anneau principal	C	6	Le Verrier
Anneaux de Gossamer	B	5	Lassel
	A	4	Adams
	F	α	
	G	β	
	E	η	
		γ	
		δ	
		λ	
		ϵ	

TAB. 1.1: Noms des satellites et des anneaux planétaires de la figure 1.2, par ordre croissant de distance à la planète. Les abréviations utilisées sur cette dernière pour les satellites sont indiquées entre parenthèses.

peuvent être détruites à tout moment par collision pour donner des grains de poussière. Nous introduisons ici quelques notions importantes de la dynamique des anneaux planétaires.

Limite de Roche

Les anneaux planétaires sont en gros à l'intérieur de la limite de Roche de la planète centrale (*cf.* figures 1.1 et 1.2). En effet, les forces de marée deviennent très importantes près du corps central. Cependant la réalité est plus complexe, car un satellite peut très bien survivre à l'intérieur de cette limite en raison des forces de cohésion. De même, un satellite à l'extérieur de la limite de Roche peut donner naissance à un anneau suite à une collision. La limite entre un anneau et un satellite est donc un compromis entre différents facteurs : auto-gravité, forces de surface, dispersion de vitesses, taille des particules, etc... Il arrive ainsi, comme on peut le constater dans tous les sytèmes d'anneaux planétaires, que satellites et anneaux co-existent dans la même région.

Stabilité des disques

Une dicussion détaillée de la stabilité des disques, provenant de la dynamique galactique, est Binney et Tremaine (1988). De manière générale, un disque circum-planétaire tend à s'effondrer dans la direction verticale (*i.e.* à devenir infiniment fin) sous l'effet des collisions qui dissipent l'énergie tout en conservant le moment cinétique : un disque est en fait une configuration où l'énergie est minimale pour un moment cinétique donné. L'effondrement finit par cesser lorsque des instabilités commencent à se produire. La masse et la taille des particules les plus grosses font qu'une dispersion de vitesse ou une pression se maintient dans le disque, empéchant l'effondrement gravitationnel.

Résonances

Les résonances sont nombreuses dans les anneaux planétaires. Elles correspondent à des commensurabilités entre les fréquences orbitales des particules des anneaux et celle de satellites. Elles sont essentielles en dynamique pour expliquer certaines structures des anneaux (*cf.* chapitre 2). Des résonances de Lorentz, correspondant à des commensurabilités entre la rotation du champ magnétique de la planète et le mouvement orbital de particules chargées, interviennent particulièrement dans les anneaux de Jupiter.

Ondes spirales

Les résonances amplifient l'effet perturbateur des satellites sur les anneaux. Ces effets deviennent macroscopiques et observables dans les anneaux. En particulier, les phénomènes collectifs entre les particules (dus à l'auto-gravité ou aux collisions) vont exciter certains modes d'onde spirale qui sétendent radialement sur plusieurs dizaines de kilomètres. Une telle échelle spatiale est facilement résolue par une sonde spatiale comme *Voyager* hier ou *Cassini* aujourd'hui. Ces ondes spirales sont précieuses car elles permettent de déterminer certaines propriétés microscopiques des anneaux comme la densité de surface locale ou la viscosité cinématique (Shu, 1984). Par exemple, l'espacement entre des crêtes consécutives dans les ondes de densité peut donner la densité de surface du disque, qui s'élève à environ 70 g cm^{-3} dans l'anneau

A de Saturne (Esposito et al., 1983, 1984). De manière similaire, la distance d'amortissement des ondes de courbure (ou ondes inclinées) donne la viscosité cinématique, qui est reliée à la dispersion de vitesse et finalement, à l'épaisseur verticale des anneaux (Esposito et al., 1983, 1984).

Une autre conséquence importante des résonances est l'échange séculaire de moment cinétique et d'énergie entre les anneaux et les satellites perturbateurs (Goldreich et Tremaine, 1982). Dans le détail, c'est un problème compliqué. Cependant, on peut montrer que la valeur du couple résonant exercé est indépendant (au moins dans le cas linéaire) de la viscosité, de la pression ou des densités de surface de l'anneau considéré (Meyer-Vernet et Sicardy, 1987). Ainsi l'estimation de l'échange de moment cinétique entre anneaux et satellites est robuste. Par exemple, on peut calculer qu'en raison des résonances avec Mimas, l'anneau A de Saturne est repoussé vers l'anneau B en environ 10^8 ans, ce qui est court par rapport à l'âge du système solaire.

Bords nets

Un autre effet des résonances est parfois de tronquer les anneaux, en maintenant des bords très nets dans la direction radiale, sur des distances de moins de 100 m. Par étalement visqueux, de telles structures devraient normalement être rapidement détruites. On en trouve dans les parties externes des anneaux A et B de Saturne, et dans les anneaux d'Uranus. C'est un exemple de mécanisme de confinement particulièrement efficace. Les disques proto-planétaires perturbés par une planète préalablement formée pourraient être soumis à un tel mécanisme. Une autre conséquence de ce mécanisme est de pouvoir assurer une précession rigide des anneaux étroits et excentriques comme ceux d'Uranus (Chiang et Goldreich, 2000). Cependant, la plupart des structures fines dans les anneaux, en particulier ceux de Saturne, ne sont pas associés avec des résonances. L'abondance de ces structures fines n'est pas expliquée. Il est possible que certaines d'entre elles soient causées par des transitions de phase fluide - solide (Tremaine, 2003).

Confinement radial et azimutal

L'échange de moment cinétique entre les anneaux et les satellites en résonance est tel que le satellite a toujours tendance à repousser l'anneau de sa position orbitale. Ainsi deux satellites situés de part et d'autre d'un anneau sont en principe capables de le confiner radialement : c'est le mécanisme des satellites gardiens (Borderies et al., 1984). Par exemple, l'anneau ϵ d'Uranus est maintenu par deux satellites, Cordélia et Ophélia. Beaucoup d'anneaux étroits, cependant, ne répondent pas à ce principe, soit parce que les satellites sont trops petits pour être détectés, soit parce que la physique en jeu n'est pas bien comprise. Dans certains cas par exemple, un seul satellite peut suffire pour confiner radialement un anneau étroit (Goldreich et al., 1995). D'autre part, deux satellites de Saturne, Prométhée et Pandore, sont situés de part et d'autre de l'anneau F et pourrait confiner ce dernier, mais le mécanisme détaillé n'est pas compris car la dynamique de cet anneau est très complexe (superposition de résonances, collisions éventuelles avec Prométhée, etc...).

On observe dans les anneaux planétaires des structures en arc, mais qui ont généralement des temps de vie courts. Par exemple, les arcs détectés durant le passage de la Terre dans le plan des anneaux de Saturne en 1995 ne survivent guère plus que quelques mois (Showalter,

2004), et sont probablement le résultat de collisions entre plusieurs corps parents non visibles (Cuzzi et al., 1984; Poulet et al., 2000). Une exception notable à cette règle concerne le système d'anneaux de Neptune. Des arcs de matière ont été découverts en 1984 (Hubbard et al., 1986), puis observés à nouveau dans les années qui suivirent, depuis le sol (Sicardy et al., 1991; Nicholson et al., 1995) et avec la sonde *Voyager* (Smith et al., 1989). Plus de dix ans plus tard, ils ont conservé leur structure de base (Dumas et al., 1999; Sicardy et al., 1999b), avec de légères modifications cependant. Ces échelles de temps sont bien plus longues que le temps nécessaire pour détruire les arcs, en l'absence de tout mécanisme de confinement azimutal, par simple rotation keplerienne différentielle. L'explication la plus prometteuse pour ce type de confinement fait intervenir des résonances dites de corotation, qui s'apparentent aux points de Lagrange d'un satellite, mais qui ne partagent pas forcément l'orbite de ce satellite (Goldreich et al., 1986). Une telle résonance a été identifiée dans les arcs de Neptune (Porco, 1991). Néanmoins, des effets plus subtils doivent être considérés afin d'obtenir un modèle satisfaisant compatible avec les observations, comme par exemple la masse des arcs (Namouni et Porco, 2002). La partie I de cette thèse fait l'objet d'une autre alternative pour expliquer le confinement azimutal de ces structures.

Forces non gravitationnelles

Les petites particules des anneaux sont soumises à des forces non gravitationnelles qui peuvent modifier sensiblement leur dynamique. Alors que dans le cas des grosses particules, les collisions et l'auto-gravité ont un rôle essentiel, dans le cas des petites particules les processus importants sont entre autres :

- les forces électromagnétiques qui agissent sur des particules chargées. Ainsi le champ magnétique de la planète, les résonances de Lorentz, peuvent avoir des effets importants sur la poussière (Grun et al., 1984; Hamilton et Burns, 1993).
- les forces de radiation et l'effet Poynting-Robertson (Burns et al., 1979)
- l'éjection et l'adhésion d'une couche appelée régolithe sur des particules plus grosses (Poulet et al., 2000)

Les échelles de temps associées à ces processus sont en général bien plus courtes que celles des grosses particules, par exemple quelques jours seulement pour l'évolution de la poussière de l'anneau F (Showalter, 2004). Des sources permanentes doivent donc être invoquées pour expliquer l'abondance de poussière dans les anneaux. Ces sources sont des petits satellites (ou des grosses particules), trop faibles pour avoir déja été détectés par imagerie. En fait, un état stationnaire peut être atteint dans certains cas, où la poussière libérée par les collisions entre les particules ou par le bombardement météoritique, est ré-accrétée par des grosses particules, formant ainsi une couche de régolithe sur ces derniers (Cuzzi et Burns, 1988; Poulet et al., 2000).

Dans d'autres cas, la poussière est associée à des satellites connus, comme par exemple l'anneau E avec Encelade (Hamilton et Burns, 1994), ou les anneaux de Jupiter avec Thébé, Amalthée, Adrastée et Métis (de Pater et al., 1999; Burns et al., 2004). La poussière des anneaux atteint alors un état stationnaire où la poussière rejetée par les forces électromagnétiques et les forces de radiation est remplacée par celle qui est produite par le bombardement météoritique des corps parents ou par les collisions entre les particules. Dans une telle configuration, les satellites sources doivent être assez gros pour produire suffisamment de poussière suite au bombardement, mais pas trop pour laisser la poussière s'échapper après un impact. Ce com-

promis permet d'expliquer pourquoi tous les satellites ne sont pas capables de maintenir un anneau de poussière ténu.

1.1.2 Composition

En raison de leur brillance, les anneaux de Saturne sont les seuls pour lesquels des spectres à relativement haute résolution sont disponibles. Pour les autres anneaux, seule la photométrie à large bande est possible, rendant la connaissance de la composition problématique.

Concernant les anneaux de Saturne, la présence de glace d'eau a été détectée il y a plusieurs décennies (Pilcher et al., 1970). En fait, il est même difficile de détecter autre chose que de la glace d'eau dans ces anneaux. Des travaux récents (Poulet et Cuzzi, 2002; Poulet et al., 2003) soulignent l'importance de la texture de surface et d'une petite quantité de matériau organique pour interpréter correctement les spectres, particulièrement dans l'ultra-violet.

1.1.3 Observations *Cassini*

La sonde spatiale *Cassini* est à présent en orbite autour de Saturne depuis le 1er juillet 2004. Elle a des avantages conséquents par rapport à la mission *Voyager* précédente : de meilleurs instruments, et une durée nominale de quatre ans. Entre autres, les observations *Cassini* vont permettre de :

- mieux contraindre la distribution en taille des particules à l'aide par exemple de mesures photométriques à toutes les longueurs d'onde (de l'ultra-violet au domaine radio) et à tous les angles de phase.
- obtenir la composition globale (et les variations) des anneaux par des spectres allant de l'ultra-violet à l'infrarouge, sachant que la glace d'eau domine largement ces spectres.
- suivre en temps réel l'évolution de structures ayant des durées de vie courtes (grumeaux de l'anneau F, arcs, spokes,...) ou de satellites (comportement chaotique de Prométhée et Pandore). Cela aidera considérablement à mieux comprendre l'évolution à long terme des anneaux.
- obtenir les tailles et les densités des petits satellites, en particulier ceux qui sont peu denses (Prométhée, Pandore, Janus, Epiméthée,...), et découvrir une nouvelle population de très petits satellites proches des anneaux, puisque la limite actuelle ($\sim$ 5 km) résulte des anciennes capacités des caméras de *Voyager*.

Des revues détaillées sur les propriétés physiques et dynamiques des anneaux planétaires sont disponibles. On peut citer : Borderies et al. (1984), Harris (1984), Ward (1984), Nicholson et Dones (1991), Goldreich (1992), Esposito (1993), Cuzzi (1995). Des revues plus spécifiques sont également à disposition pour chaque système d'anneaux, par exemple Cuzzi et al. (1984) et Esposito et al. (1984) pour les anneaux de Saturne, Burns et al. (2004) pour les anneaux de Jupiter, Smith et al. (1986), Esposito et al. (1991) et French et al. (1991) pour les anneaux d'Uranus, et enfin Smith et al. (1989) et Porco et al. (1995) pour les anneaux de Neptune.

Concernant la dynamique du système solaire en général et les problèmes de mécanique céleste, des ouvrages récents excellents sont Murray et Dermott (2001) et Morbidelli (2002). Enfin, de Pater et Lissauer (2001) exposent les connaissances actuelles des sciences planétaires.

1.2 Objectifs et plan de la thèse

De manière générale, cette thèse porte sur la dynamique des anneaux et des satellites planétaires. Plus précisément, elle vise à mieux comprendre la dynamique des petits satellites autour des planètes géantes, et leurs interactions avec les anneaux. Notre étude est basée d'une part sur les observations les plus récentes, et d'autre part sur des modèles analytiques et numériques. Notre travail comporte essentiellement deux champs d'application : (1) la dynamique des arcs de Neptune, (2) la dynamique des satellites gardiens de l'anneau F de Saturne, Prométhée et Pandore. Cette thèse s'inscrit enfin dans le cadre de la mission spatiale *Cassini*. La sonde, en orbite autour de Saturne depuis le 1er juillet 2004, va étudier l'environnement de la planète, et en particulier les satellites internes comme Prométhée et Pandore, pendant une durée nominale de quatre ans.

Découverts au milieu des années 80 par occultation stellaire, puis observés par la sonde *Voyager* en 1989 (*cf.* figure 1.3), les arcs de Neptune sont des anneaux étroits incomplets. Plus précisément, la région des arcs est limitée en longitude ($\sim 40°$), et s'insère dans un anneau complet plus diffus, l'anneau Adams (avec un contraste de densité de l'ordre de 30). On dénombre quatre arcs : Courage, Liberté, Egalité et Fraternité. Ils ont tous des longueurs azimutales inférieures à $10°$ et ont une largeur radiale de l'ordre de 15 km. Ils sont particulièrement intéressants d'un point de vue dynamique : en effet un arc isolé se détruit en quelques mois seulement par rotation keplerienne différentielle. Il existe donc un mécanisme de confinement actif capable de forcer les particules à occuper des intervalles de longitude spécifiques. Depuis quelques années, il était admis qu'un petit satellite de Neptune, Galatéa, assurait seul le confinement des arcs. Ce satellite a un diamètre de l'ordre de 150 km, et se trouve à seulement 980 km à l'intérieur de l'anneau, sur une orbite légèrement inclinée ($\sim 0.05°$). Le mécanisme alors invoqué était le suivant (Goldreich et al., 1986; Porco, 1991) : les arcs sont stabilisés par une résonance dite de corotation inclinée 42 : 43 avec Galatéa. Cela signifie que le moyen mouvement des arcs n_{arc} est égal à la fréquence excitatrice suivante provenant du satellite : $n_{cor} = (42n_G + \dot{\Omega}_G)/43$, où n_G et $\dot{\Omega}_G$ sont respectivement le moyen mouvement et le taux de précession du noeud de Galatéa. Cette résonance permet de piéger les particules dans des sites de corotation, *i.e.* des régions bornées en longitude dans lesquelles les particules effectuent un lent mouvement pendulaire. Le moyen mouvement des arcs et les paramètres orbitaux de Galatéa, déterminés grâce aux données *Voyager*, étaient en effet compatibles avec ce modèle.

Cependant, les dernières observations des arcs de Neptune, au sol avec le télescope Canada-France-Hawaii (Sicardy et al., 1999b), avec le télescope spatial Hubble (Dumas et al., 1999, 2002), ou encore avec un des télescopes *Keck* (de Pater et al., 2004), ont permis une détermination précise du moyen mouvement des arcs et de Galatéa, et ont révélé que les arcs sont certes proches mais en-dehors de la résonance de corotation. Suite à ces observations, le confinement des arcs de Neptune reste donc toujours inexpliqué. Un autre moyen est de considérer un satellite de Lagrange, non détecté jusqu'à présent, qui peut piéger du matériau au point L_4 ou L_5, à $\pm 60°$ sur son orbite. Dans cette thèse, nous avons examiné cette hypothèse. Le **chapitre 2** présente quelques rappels théoriques nécessaires concernant le problème des points de Lagrange et les résonances. Dans le **chapitre 3**, les données observationnelles de l'environnement de Neptune et les modèles dynamiques des arcs, antérieurs aux observations récentes, sont présentés. Puis, dans le **chapitre 4**, nous généralisons, sous certaines hypothèses, le problème des points de Lagrange au cas de N satellites co-orbitaux, de masses arbitraires et négligeables devant celle du corps central. Des résultats généraux sur l'existence de configurations stationnaires (et leur stabilité) sont obtenus. Enfin, dans le **chapitre 5**, après avoir présenté les observations

récentes des arcs de Neptune, nous expliquons les nouvelles alternatives pour la stabilité des arcs : la première (Namouni et Porco, 2002) est à nouveau basée sur des résonances possibles avec Galatéa. La seconde est celle envisagée dans cette thèse : les résultats théoriques du chapitre 4 peuvent être appliqués, tout en prenant en compte les perturbations de Galatéa, pour rendre compte de l'ensemble des observations.

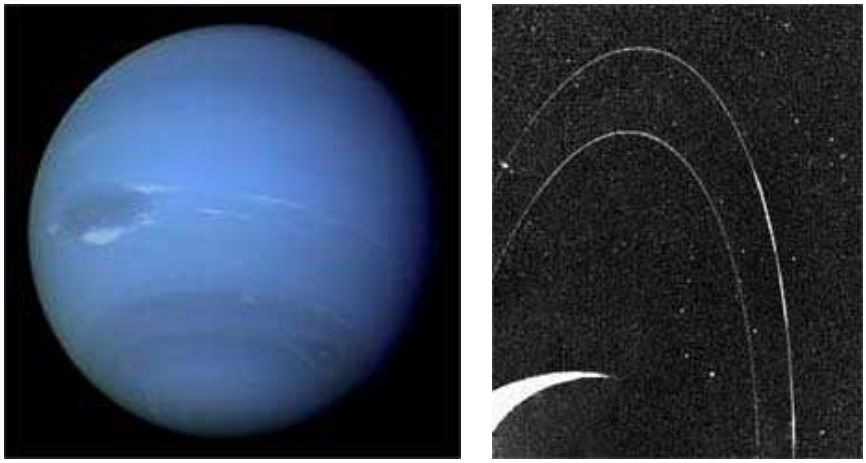

FIG. 1.3: A gauche, Neptune et ses nuages de méthane. A droite, une image *Voyager 2* (FDS 11412.51) des arcs de Neptune prise lors d'une rencontre avec Neptune en août 1989. Deux anneaux étroits sont visibles, Le Verrier (à l'intérieur), et Adams (à l'extérieur) qui contient les arcs. Trois des quatre arcs sont visibles (de bas en haut) sur cette image : Liberté, Egalité et Fraternité. Notons que FDS signifie "Flight Data System". C'est le nom de l'horloge interne des sondes *Voyager* 1 et 2. La plupart des observations *Voyager*, dont les images, sont identifiées par FDS suivi d'un numéro correspondant à l'heure de l'observation.

Le second volet de la thèse concerne la dynamique de Prométhée et Pandore. Ces deux petits satellites de Saturne, d'une taille de l'ordre de 100 km, ont été découverts au tout début des années 80 par la sonde *Voyager*. Ils se trouvent juste à l'extérieur des anneaux principaux de Saturne (*cf.* figure 1.4). Cette zone est très active et complexe d'un point de vue dynamique. Prométhée et Pandore sont considérés comme les satellites gardiens de l'anneau F, car ils pourraient confiner, au moins de manière partielle, cet anneau. Cependant, le mécanisme précis de confinement n'est pas connu, car la dynamique de l'anneau F est très complexe (zones chaotiques, superposition de résonances, interactions ou collisions avec Prométhée, ...). Contrairement à l'anneau ϵ d'Uranus, dont les bords sont nets et en résonance avec deux satellites gardiens Cordélia et Ophélia, l'anneau F ne présente pas de bords nets ni de résonances de bas ordre avec Prométhée et Pandore. L'origine et l'évolution de ces petits satellites ne sont pas non plus bien contraintes.

Des observations *HST* récentes (French et al., 2003) ont révélé des variations brutales et anti-corrélées en moyen mouvement, qui proviennent d'une interaction chaotique entre les deux satellites (Goldreich et Rappaport, 2003a). Le chaos est causé par la superposition de 4 résonances de moyen mouvement 121 :118 (Goldreich et Rappaport, 2003b), et a lieu environ tous les 6 ans lorsque les périapses des deux satellites sont anti-alignés. C'est la première fois que l'on peut assister, quasiment en direct, à de tels mouvements chaotiques dans le système solaire (dans le cas du problème à trois corps). Dans le **chapitre 6**, nous étudions numériquement le système Prométhée-Pandore en incluant les perturbations des satellites principaux de Saturne, et confirmons le caractère chaotique de leur mouvement. Le **chapitre 7** explique com-

ment nous pouvons déterminer les masses de Prométhée et Pandore, par ajustement des simulations numériques aux données *HST*, et déduire des éphémérides pour les deux satellites durant la mission *Cassini* autour de Saturne. Finalement, le **chapitre 8** est dédié à l'étude de l'évolution dynamique à long terme du système Prométhée-Pandore. Nous modélisons pour cela les interactions avec les anneaux et des satellites importants dynamiquement (Mimas, Janus et Epiméthée), pour tenter de contraindre les temps d'évolution de Prométhée et Pandore, et donc celui des anneaux.

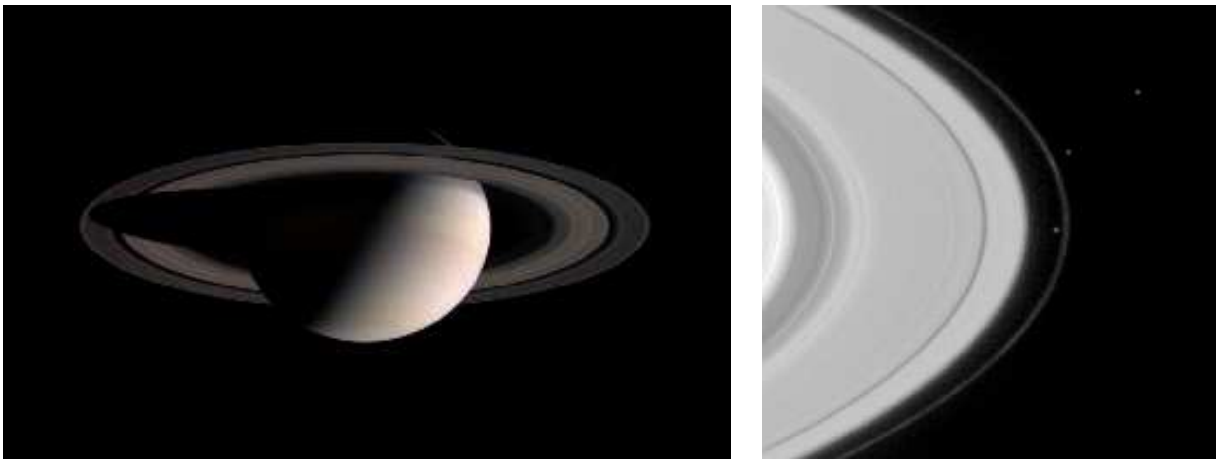

FIG. 1.4: A gauche, la planète Saturne prise par la sonde *Cassini* le 17 juillet 2004. L'image est en couleur naturelle, et a été obtenue à partir d'images prises par la caméra à grand angle de la sonde avec des filtres bleu, vert et rouge, à une distance de 5.8 millions de km de Saturne et un angle de phase de 93°. L'échelle de l'image est 346 km pixel^{-1}. A droite, une image *Cassini* montrant les satellites Prométhée et Pandore, de part et d'autre de l'anneau F, et Epiméthée, un peu plus à l'extérieur et en haut à droite sur l'image. Cette dernière date du 1er mai 2004, et a été prise à une distance de 31.4 millions de km de Saturne. La résolution est de 187 km pixel^{-1}.

Enfin, parallèlement à ces travaux théoriques, j'ai participé à deux missions d'observation d'occultations stellaires, qui ont conduit à de nouveaux résultats scientifiques. C'est l'objet du **chapitre 9**. Les occultations sont des phénomènes rares qui permettent de sonder l'atmosphère du corps occultant, et d'en déterminer les propriétés physiques. Une première occultation par Pluton, observable en Amérique du Sud, a eu lieu en juilet 2002. La seconde occultation, par Titan cette fois, a été observée en Afrique du Sud en novembre 2003, soit un an environ avant l'entrée de la sonde européenne *Huyghens* dans l'atmosphère de ce satellite.

Notons que le chapitre 4 sur la dynamique des satellites co-orbitaux a fait l'objet d'une publication, qui est reproduite dans l'**annexe C**. Il en est de même pour les chapitres 6 et 7 sur la dynamique de Prométhée et Pandore (*cf.* **annexe D**). D'autre part, l'**annexe A** est une partie technique utile pour les simulations numériques. Pour suivre l'évolution des particules des anneaux ou des satellites planétaires, nous utilisons les éléments orbitaux *géométriques*, des quantités mieux adaptées que par exemple les éléments osculateurs classiques, dès que l'on considère des orbites autour d'une planète aplatie. Puisque le mouvement est intégré numériquement en coordonnées cartésiennes dans un repère centré sur la planète, nous avons besoin de définir des transformations qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux éléments géométriques, et vice-versa. L'annexe A décrit donc ces transformations. L'**annexe B** concerne le repérage dans le ciel des anneaux de Saturne. Cela a été utilisé dans le chapitre 7

sur la détermination des masses de Prométhée et Pandore. Enfin, les occultations stellaires par Pluton de 2002 ont fait aussi l'objet d'une publication, reproduite dans l'**annexe E**.

Chapitre 2

Résonances

Sommaire

2.1 Introduction **13**
2.2 Les points de Lagrange **14**
2.2.1 Recherche des solutions d'équilibre 14
2.2.2 Mouvements près de la configuration co-orbitale 16
2.3 Résonances **20**
2.3.1 Résonances de corotation 20
2.3.2 Résonances de Lindblad 22
2.3.3 Résonances verticales 25

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques aspects théoriques concernant les résonances (en particulier dans les anneaux planétaires) et le problème des points de Lagrange, qui constituent l'objet majeur de cette thèse. Nous tenons néanmoins à souligner le caractère non exhaustif de l'exposé qui suit.

Le terme de résonance traduit l'idée d'égalité entre une fréquence naturelle d'un système (par exemple une particule) et une fréquence excitatrice extérieure au système (celle par exemple d'un satellite).

Une particule en orbite autour d'un corps central sphérique (problème de Kepler) a un mouvement elliptique parfait. Si l'excentricité de la particule est faible, le mouvement se décompose en un petit mouvement (ellipse de rapport 2 : 1, ou *épicycle*) autour d'un *épicentre*, lui-même tournant autour du corps central avec une vitesse constante égale au moyen mouvement n. Lorsque la planète est aplatie, le particule est soumise, en plus du potentiel standard en $1/r$, aux perturbations dues aux coefficients zonaux J_2, J_4, etc... Dans ce cas, l'orbite précesse dans l'espace, donnant lieu à trois fréquences différentes n, $\kappa = n - \dot{\varpi}$ et $\nu = n - \dot{\Omega}$, où $\dot{\varpi}$ est le taux de précession du périapse et $\dot{\Omega}$ le taux de précession du noeud. Ces fréquences sont respectivement le moyen mouvement de la particule, la fréquence épicyclique (caractéristique des oscillations horizontales dues à l'excentricité) et la fréquence verticale (associée au mouvement vertical).

Considérons maintenant les perturbations gravitationnelles d'un satellite sur une particule. Le satellite aura ses propres fréquences n', κ' et ν'. D'autre part, le potentiel perturbateur de ce dernier est développable en série de Fourier. Pour chaque argument de la série obtenue, on peut trouver un repère de référence, tournant à une certaine vitesse angulaire, dans lequel cet argument est stationnaire. La vitesse angulaire de ce repère est appelé le *pattern speed* (ce qui pourrait donc se traduire par vitesse du motif). On le note Ω_P, et il peut s'écrire de manière générale :

$$\Omega_P = n' + \frac{k}{m}\kappa' + \frac{p}{m}\nu', \tag{2.1}$$

où m, k et p sont des entiers avec $m > 0$. Comme $\kappa' = n' - \dot{\varpi}'$ et $\nu' = n' - \dot{\Omega}'$, on a aussi :

$$m\Omega_P = (m + k + p)n' - k\dot{\varpi}' - p\dot{\Omega}', \tag{2.2}$$

Les résonances entre une particule et un satellite ont alors lieu lorsque un multiple entier de la différence entre n et Ω_P est égal à zéro (résonances de *corotation*) ou à l'une des fréquences radiale ou verticale (résonances de *Lindblad* ou résonances *verticales*) de la particule. Ces résonances sont des résonances de moyen mouvement car il y a commensurabilité entre les moyens mouvements de la particule et du satellite.

L'exemple le plus simple de résonance de corotation est lorsque $n = \Omega_P = n'$, *i.e.* lorsque la particule et le satellite sont sur la même orbite. On parle alors de résonance 1 : 1 (les moyens mouvements respectifs de la particule et du satellite sont dans le rapport 1/1), qui donne lieu à des configurations d'équilibre bien connues entre la particule et le satellite : les points de Lagrange.

2.2 Les points de Lagrange

2.2.1 Recherche des solutions d'équilibre

On se place dans le cadre du problème à trois corps restreint, plan et circulaire. Considérons donc un satellite de masse m_S sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'une planète de masse M, perturbant un second satellite de masse $\mu = 0$. Le satellite m_S n'est donc pas perturbé par μ et reste ainsi sur une orbite circulaire. On note n_0 le moyen mouvement du satellite. On suppose le problème plan et que μ a un rayon orbital r proche de r_0 :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}| \ll r_0$$

Les termes en caractères gras désignent ici, ainsi que par la suite, des vecteurs. On cherche à déterminer les trajectoires possibles de la particule.

Une approche commode est de se placer dans un repère R' fixé sur M et tournant de manière uniforme avec m_S, c'est-à dire à la vitesse n_0. Dans ce repère, la particule μ est soumise à l'accélération suivante :

$$\mathbf{\Gamma}' = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} - \frac{Gm_S}{\Delta^3}\mathbf{\Delta} - \frac{Gm_S}{r_0^3}\mathbf{r_0} + n_0^2\mathbf{r} + 2\mathbf{v}' \wedge \mathbf{n_0} \tag{2.3}$$

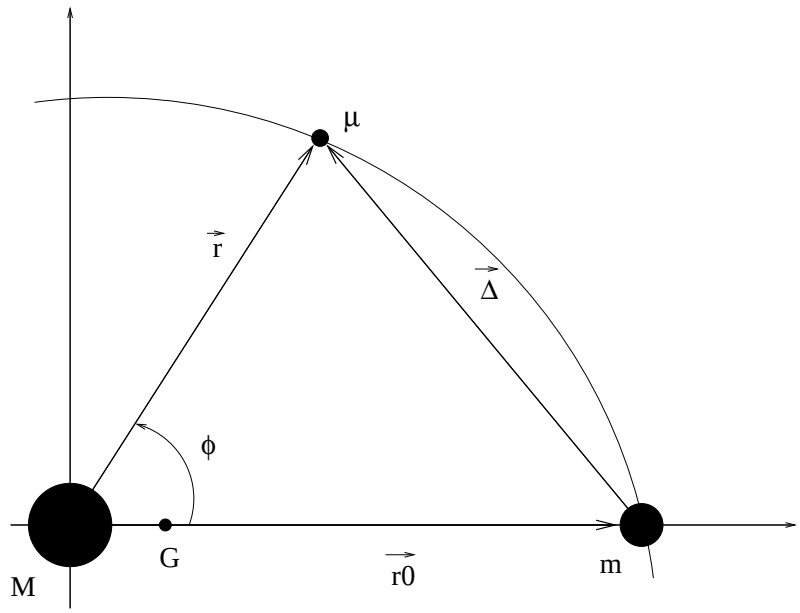

FIG. 2.1: Le problème à trois corps, restreint, plan et circulaire. Un satellite de masse m_S et une particule test μ sont en orbite autour d'une planète de masse M. L'orbite du satellite est circulaire, de rayon r_0 et de moyen mouvement n_0. Le problème est supposé plan, et la particule a un rayon orbital proche de celui du satellite. Le centre de masse du système est noté G.

Les deux premiers termes sont respectivement les accélérations directes dues à la planète et au satellite m_S. Comme le repère R' est fixé sur le corps central et que ce dernier bouge autour du centre de masse G, R' n'est pas inertiel et il apparaît donc une accélération d'entraînement (troisième terme), qui n'est rien d'autre que l'opposée de l'accélération gravitationnelle entre m_S et M. D'autre part, la particule μ est soumise à une accélération centrifuge (quatrième terme) car le repère R' tourne avec m_S à la vitesse angulaire n_0. Enfin le dernier terme est l'accélération de Coriolis, $\mathbf{v}'$ désignant la vitesse de μ dans R'.

D'après la troisième loi de Kepler, $r_0^3 n_0^2 = G(M + m_S)$, donc l'accélération de μ dans R' s'écrit aussi :

$$\mathbf{\Gamma}' = GM\Big(-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_0^3}\Big)\mathbf{r} + Gm_S\Big(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_0^3}\Big)\mathbf{\Delta} + 2\mathbf{v}' \wedge \mathbf{n_0} \tag{2.4}$$

Lagrange a recherché les points d'équilibre de μ dans R', c'est-à-dire $\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{v}' = 0$. Ces points sont donc solutions de :

$$M\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\Big)\mathbf{r} = m_S\Big(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_0^3}\Big)\mathbf{\Delta} \tag{2.5}$$

On constate qu'il y a deux possibilités :

– soit $\mathbf{r}$ et $\mathbf{\Delta}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire les masses M, m_S et μ ne sont pas alignées. Alors le seul moyen de satisfaire l'équation (2.5) est d'avoir $r = r_0 = \Delta$. Dans ce cas la particule μ est sur l'un des deux points équilatéraux L_4 ou L_5 de coordonnées :

$$L_4 : \Big(r_0 \cos\frac{\pi}{3}, r_0 \sin\frac{\pi}{3}\Big)$$

$$L_5 : \Big(r_0 \cos\frac{\pi}{3}, -r_0 \sin\frac{\pi}{3}\Big)$$

– soit $\mathbf{r}$ et $\boldsymbol{\Delta}$ sont colinéaires, *i.e.* les corps sont alignés. En projetant les vecteurs sur l'axe des x, $\mathbf{r} \to x$, $\boldsymbol{\Delta} \to x - r_0$ et l'équation (2.5) devient :

$$M\Big(\frac{1}{|x|^3} - \frac{1}{r_0^3}\Big)x = m_S\Big(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{|x-r_0|^3}\Big)(x - r_0) \tag{2.6}$$

Il existe alors trois points d'équilibre notés L_1, L_2 et L_3. Si on suppose que la masse m_S est négligeable devant celle du corps central, alors L_1, L_2 sont très proches de r_0 et L_3 est très proche $-r_0$. En posant $x = r_0 + \epsilon$ si $x > 0$ et $x = -r_0 + \epsilon$ si $x < 0$, et en résolvant à l'ordre le plus bas en m_S/M, on montre facilement que L_1, L_2 et L_3 ont pour coordonnées :

$$L_1 : \Big(r_0\big(1 - \Big(\frac{m_S}{3M}\Big)^{1/3}\big), 0\Big)$$

$$L_2 : \Big(r_0\big(1 + \Big(\frac{m_S}{3M}\Big)^{1/3}\big), 0\Big)$$

$$L_3 : \Big(-r_0\big(1 - \frac{7}{12}\frac{m_S}{M}\big), 0\Big)$$

2.2.2 Mouvements près de la configuration co-orbitale

Le mouvement général de μ peut être très compliqué. C'est le cas en particulier si μ s'approche trop près de m_S, et plus précisément passe près des points L_1 et L_2 : des mouvements chaotiques peuvent alors se produire.

Remarquons tout d'abord que l'accélération de μ dans le repère tournant R' est composée de termes qui dérivent tous d'un potentiel, sauf le terme de Coriolis $2\mathbf{v}' \wedge \mathbf{n_0}$. Cependant ce dernier est toujours perpendiculaire à $\mathbf{v}'$. Par conséquent, il conserve l'énergie, son travail est nul. Nous pouvons donc définir dans le repère tournant l'énergie potentielle suivante :

$$U(r,\theta) = -\frac{GM}{r} - \frac{Gm_S}{\Delta} - \frac{Gm_S}{r_0^3}\mathbf{r}.\mathbf{r_0} - \frac{1}{2}n_0^2 r^2 \tag{2.7}$$

Alors :

$$J = \frac{1}{2}v'^2 + U(r,\theta) = \frac{1}{2}v'^2 - \frac{GM}{r} - \frac{Gm_S}{\Delta} - \frac{Gm_S}{r_0^3}\mathbf{r}.\mathbf{r_0} - \frac{1}{2}n_0^2 r^2 = cste \tag{2.8}$$

Cette constante est la *constante de Jacobi*. Elle exprime la conservation de l'énergie dans un repère tournant. Notons que J est conservée quelque soit le mouvement de la particule, la seule restriction étant que le satellite de masse m_S soit sur orbite circulaire, et que $\mu = 0$.

Les courbes $U(r,\theta) = C = cste$ définissent des équipotentielles dans le repère tournant R'. Certaines sont illustrées par la figure 2.2, où a été considéré un satellite de masse $m_S = 10^{-2}M$.

On reconnaît les points de Lagrange, qui sont des extréma de potentiel. Les points L_1 et L_2 sont quasiment équidistants du satellite, et le point L_3 à l'opposé est très proche du cercle unité. On peut montrer que L_1, L_2, L_3 sont instables (points hyperboliques), et que

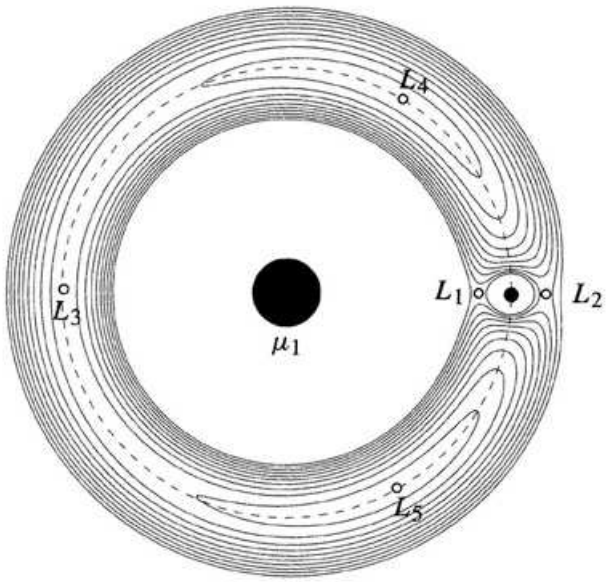

FIG. 2.2: Points de Lagrange et équipotentielles $U = cste$, pour un satellite de masse m_S telle que $Gm_S = 0.01$, une valeur comparable au système Terre-Lune. L'unité de masse est ici choisie telle que $G(M + m_S) = 1$. Le corps central est de masse $\mu_1 = GM = M/(M + m_S)$. Le cercle en pointillés désigne le cercle unité centré sur μ_1. Les équipotentielles sont en fait équivalentes, à une homothétie près, à la trajectoire suivie par la particule (*cf.* texte). Cette figure est tirée de Murray et Dermott (2001).

L_4, L_5 sont linéairement stables, bien que ce soient des maxima de potentiel. Ce résultat paradoxal est en fait dû à l'accélération de Coriolis : une particule lachée en L_4 ou L_5 avec une petite vitesse initiale y reviendra, car sa trajectoire sera courbée par l'accélération de Coriolis (Greenberg et Davis, 1978). Il faut cependant que la masse du satellite ne soit pas trop grande ($m_S/M < 0.0385$). La stabilité non linéaire peut aussi être démontrée pour ces points à l'aide de la théorie KAM.

On se place maintenant dans le cas où μ a un rayon orbital r proche de r_0 (configuration co-orbitale) avec une orbite faiblement excentrique ou circulaire. On suppose également que la particule ne s'approche jamais trop de L_1 ou L_2.

Soient $\xi = (r - r_0)/r_0$ la distance relative de μ à l'orbite du satellite m_S et ϕ l'angle entre μ et m_S. On suppose aussi sans perte de généralité que $M = 1$. Alors les équipotentielles peuvent s'écrire dans ces variables :

$$U(\xi, \phi) = -\frac{3}{2}\xi^2 + m_S\big[\cos\phi - \frac{1}{2|\sin\phi/2|}\big] \equiv -\frac{3}{2}\xi^2 + m_S f(\phi) = cste \tag{2.9}$$

D'autre part, l'orbite suivie par la particule μ dans le repère tournant R' obéit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}v'^2 + U = J = cste \tag{2.10}$$

Compte tenu des hypothèses, la vitesse v' de μ dans R', qui n'est rien d'autre que la vitesse keplerienne différentielle de la particule par rapport à l'orbite de référence de rayon r_0, peut s'écrire :

$$v' \sim -\frac{3}{2} n_0 r_0 \xi \tag{2.11}$$

On obtient donc :

$$\frac{J}{r_0^2 n_0^2} = -\frac{3}{8}\xi^2 + m_S f(\phi) = cste \tag{2.12}$$

La comparaison des équations (2.9) et (2.12) montre immédiatement que l'orbite suivie par μ est identique, à une homothétie radiale de rapport 2, aux courbes équipotentielles définies par $U(\xi, \phi) = J$.

Le mouvement global de la particule (loin de m_S) dans le repère tournant R' n'est pas seulement le mouvement de libration autour des points d'équilibre, soit en *banane* autour de L_4 et L_5, soit en *fer en cheval*, illustré par la figure 2.2. Il s'y ajoute dans le cas général un mouvement rapide *épicyclique* à la vitesse n_0, qui peut être vu comme le mouvement keplerien régulier de la particule qui s'étend radialement du périapse à l'apoapse. Ce mouvement épicyclique est en première approximation (lorsque les perturbations du satellite ne sont pas prises en compte) une ellipse de demi axes $2e$ et e, respectivement, où e est l'excentricité de la particule. Par un choix judicieux de conditions initiales, il est néanmoins possible de trouver des solutions orbitales qui suppriment le mouvement épicyclique (*cf.* par exemple Taylor, 1981).

Supposons de plus sans perte de généralité que $n_0 = 1$. En variables (ξ, ϕ), les équations du mouvement de la particule sont d'après (2.11) et (2.12) :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = v'/r_0 = -\dfrac{3}{2}\xi \\ \\ \dot{\xi} = -2 m_S f'(\phi) \end{cases} \tag{2.13}$$

avec

$$f'(\phi) = \sin\phi \left[-1 + \frac{1}{8|\sin\phi/2|^3} \right] \tag{2.14}$$

La figure 2.3 rassemble quelques trajectoires possibles de la particule solutions des équations (2.13), dans le repère R' tournant avec le satellite, en variables (ξ, ϕ). Les petites courbes autour des points $(\xi, \phi) = (0, \pi/3)$ et $(\xi, \phi) = (0, 5\pi/3)$ sont les librations autour des points L_4 et L_5, respectivement. Au delà de la séparatrice (courbe la plus épaisse) passant par L_3 $(\xi = 0, \phi = \pi)$, ce sont les orbites en fer à cheval. Au delà des points L_1 et L_2, de coordonnées $(\pm(m_S/3M)^{1/3}, 0)$, la particule n'est plus coorbitale avec m_S. La largeur maximale relative des zones d'orbites en fer à cheval est donc :

$$\xi_{cheval} = \left(\frac{m_S}{3M}\right)^{1/3} \tag{2.15}$$

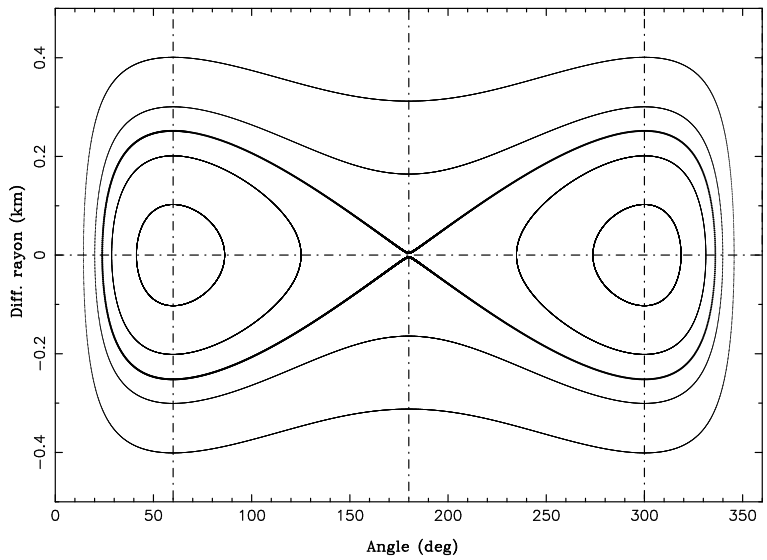

FIG. 2.3: Trajectoires d'une particule test dans un repère tournant avec un satellite de Lagrange de masse $m_S = 6 \times 10^{-12} M$ placé en (0,0). L'abscisse ϕ est l'angle par rapport au satellite de Lagrange, et l'ordonnée est l'écart radial $r - r_0$ par rapport à l'orbite circulaire de référence du satellite de Lagrange.

Celle des zones de libration autour des points L_4 et L_5 est d'après l'équation (2.12) :

$$\xi_{banane} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{m_S}{M}} \tag{2.16}$$

La comparaison des équations (2.15) et (2.16) montre que ξ_{banane} décroit plus rapidement que ξ_{cheval}. Par conséquent, plus la masse du satellite est faible, plus la zone des orbites en banane disparaît rapidement par rapport à celle des orbites en fer à cheval. On peut aussi calculer la période de libration autour des points L_4 ou L_5. En effet, près de ces points :

$$f'(\phi) \sim -\frac{9}{4}\Delta\phi \tag{2.17}$$

Donc d'après (2.13) :

$$\Delta\ddot{\phi} \sim -\frac{27}{4}\frac{m_S}{M}\Delta\phi \tag{2.18}$$

Les oscillations de la particule autour de L_4 ou L_5 sont harmoniques, de période :

$$T_L = T\sqrt{\frac{4}{27}\frac{M}{m_S}} \tag{2.19}$$

où T est la période orbitale du satellite.

2.3 Résonances

Cette introduction aux résonances provient essentiellement de Murray et Dermott (2001).

2.3.1 Résonances de corotation

Une résonance de corotation a lieu quand le *pattern speed* du potentiel perturbateur est égal à la fréquence orbitale de la particule. Dans ce cas :

$$m(n - \Omega_P) = 0. \tag{2.20}$$

D'après la définition de Ω_P, cela implique :

$$(m + k + p)n' - mn - k\dot{\varpi}' - p\dot{\Omega}' = 0. \tag{2.21}$$

Si l'on néglige la variation de la longitude à l'époque, la relation précédente peut s'écrire $\dot{\Psi}_{CR} = 0$, où Ψ_{CR} est l'angle critique de la résonance de corotation donné par :

$$\Psi_{CR} = (m + k + p)\lambda' - m\lambda - k\varpi' - p\Omega' \tag{2.22}$$

L'angle critique vérifie la relation d'Alembert, et p est toujours pair (car les puissances des inclinaisons sont toujours paires dans le développement du potentiel perturbateur). L'angle critique général ci-dessus est d'ordre $|k| + |p|$. Le terme d'ordre le plus bas associé à cette résonance est proportionnel à $e'^{|k|} I'^{|p|}$. La résonance 1 : 1 ($p = k = 0$) est donc un cas particulier de résonance de corotation. L'angle critique de résonance ne fait intervenir ni la longitude du périapse ni la longitude du noeud ascendant. Cela signifie, d'après les équations de Lagrange, que seul le demi grand-axe de la particule est modifié par une résonance de corotation.

On peut montrer que, dans le cadre du problème à trois corps restreint, plan et circulaire, la fonction perturbatrice R se réduit à l'expression suivante (on ne conserve que le terme contenant l'angle critique de corotation) :

$$R = \frac{Gm'}{a'} f_d(\alpha) e'^{|k|} s'^{|p|} \cos \Psi_{CR} \tag{2.23}$$

où m', a', et e' sont respectivement la masse, le demi grand-axe et l'excentricité du satellite. D'autre part, $s' = \sin(I'/2)$, où I' est l'inclinaison du satellite, et $\alpha = a/a'$, où a est le demi grand-axe de la particule. Enfin, $f_d(\alpha)$ est une fonction de α faisant intervenir des coefficients de Laplace et ses dérivées. Son expression exacte dépend de la résonance considérée. Elle résulte du développement de la partie directe de la fonction perturbatrice ($a'/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$).

L'angle critique de corotation peut s'écrire :

$$\Psi_{CR} = -m(\lambda - \Omega_P t) + cte, \tag{2.24}$$

La fonction R possède donc m maxima et m minima, qui sont autant de points d'équilibre dans le repère tournant avec le *pattern speed* Ω_P.

Interprétons géométriquement une résonance de corotation d'angle critique $\Psi_{CR} = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi'$ (*i.e.* $k = 1$ et $p = 0$). Cette résonance est dite de corotation *excentrique* car le terme de la fonction perturbatrice (*cf.* Eq.(2.23)) est proportionnel à l'excentricité e' du satellite. Dans un repère tournant avec le moyen mouvement de la particule, l'orbite du satellite est fermée. D'après l'expression de l'angle critique, on remarque qu'au moment d'une rencontre entre la particule et le satellite ($\lambda = \lambda'$), on a $\Psi_{CR} = \lambda - \varpi'$. L'angle critique est donc directement lié à l'orientation de la particule par rapport au périapse du satellite. Les résonances de corotation peuvent expliquer théoriquement la stabilité d'arcs de matière, car la modulation du potentiel permet d'enfermer des particules dans des intervalles limités en longitude, les sites de corotation.

Un exemple de résonance de corotation est donné figure 2.4. La résonance considérée est une résonance 3 : 2 ($m = 2$) telle que $k = 1$, $p = 0$ et $e' = 0.25$. L'angle critique de cette résonance est donc $\Psi_{CR} = 3\lambda' - 2\lambda - \varpi'$. Puisque $m = 2$, on a quatre points d'équilibre dont deux points de libration (stables) possibles, dans le repère tournant avec le *pattern speed* Ω_P du satellite perturbateur. Dans ce repère, l'orbite du satellite (courbe externe de la figure 2.4) est fermée. Puisque la particule est proche mais pas exactement en résonance (elle n'est pas exactement sur l'un des deux équilibres), elle a un mouvement de libration autour de la solution d'équilibre.

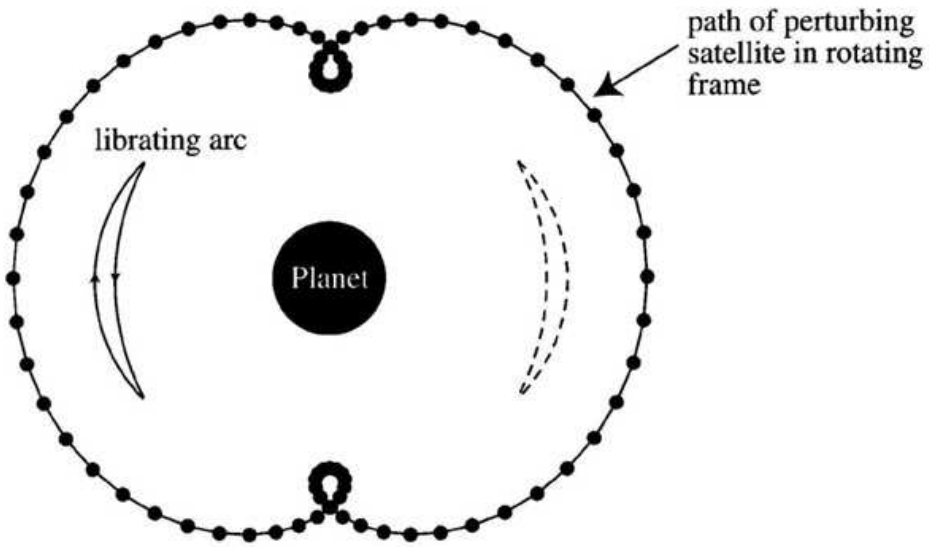

FIG. 2.4: Géométrie d'une résonance de corotation 3 : 2 ($m = 2$, $k = 1$, $p = 0$) dans le cas où l'excentricité du satellite $e' = 0.25$. L'angle critique de la résonance est $\Psi_{CR} = 3\lambda' - 2\lambda - \varpi'$. Dans un repère tournant avec le *pattern speed* du satellite perturbateur, $\Omega_P = n' + \kappa'/2$, il y a deux points d'équilibre stables. Une particule proche de l'un de ces deux points a un mouvement de libration, autour d'une longitude stationnaire dans le repère tournant, illustré par la courbe en trait plein ou en pointillés. Cette figure est tirée de Murray et Dermott (2001).

Le mouvement d'une particule proche d'une résonance, au moins dans le cas du problème à trois corps restreint, plan, circulaire, est similaire à celui d'un pendule simple. Cela permet de calculer facilement la largeur maximale de de libration W_{CR} pour une résonance de corotation. L'expression générale est donnée par :

$$W_{CR} = 2a\sqrt{\frac{16}{3}\frac{a|R|}{GM}} \tag{2.25}$$

Les effets des résonances de corotation sont observées dans le système solaire. Par exemple, certaines structures des anneaux de Saturne sont dues à une résonance de corotation 2 : 1 avec le satellite Mimas (Molnar et Dunn, 1995). Les résonances de corotation pourraient aussi expliquer l'amortissement de l'excentricité dans les anneaux étroits (Goldreich et Tremaine, 1981), la répulsion mutuelle entre anneaux et satellites (Goldreich et Tremaine, 1980), ainsi que la stabilité des arcs de Neptune (Goldreich et al., 1986; Porco, 1991; Namouni et Porco, 2002).

2.3.2 Résonances de Lindblad

Une résonance de Lindblad se produit lorsque le *pattern speed* du potentiel perturbateur est égal à la fréquence radiale de la particule. Dans ce cas :

$$m(n - \Omega_P) = \pm\kappa \tag{2.26}$$

où les signes positif et négatif correspondent respectivement à une résonance interne (LI) et à une résonance externe (LE). Dans le cas d'une résonance interne, la particule est à l'intérieur de l'orbite du satellite ($n > n'$), et dans le cas d'une résonance externe, elle se trouve à l'extérieur ($n < n'$). D'après la définition de κ, on a :

$$(m \mp 1)n \pm \dot{\varpi} - m\Omega_P = 0 \tag{2.27}$$

ou encore,

$$(m + k + p)n' - (m \mp 1)n - k\dot{\varpi}' \mp \dot{\varpi} - p\dot{\Omega}' = 0 \tag{2.28}$$

L'angle critique de la résonance de Lindblad, Ψ_L, s'écrit :

$$\Psi_L = (m + k + p)\lambda' - (m \mp 1)\lambda - k\varpi' \mp \varpi - p\Omega' \tag{2.29}$$

L'ordre de cette résonance générale est donc $|k| + |p| + 1$. Pour toutes les résonances de Lindblad, p est toujours pair. Le terme d'ordre le plus bas associé à cette résonance est proportionnel à $ee'^{|k|}I'^{|p|}$.

Pour comprendre l'effet d'une résonance de Lindblad, on introduit le concept de ligne de courant, qui consiste à considérer le mouvement d'un ensemble de particules ayant le même demi grand-axe et la même excentricité. A l'ordre le plus bas en excentricité, l'équation d'une ellipse peut s'écrire :

$$r = a[1 - e\cos(L - \varpi)], \tag{2.30}$$

où L désigne la longitude vraie. Puisque $\dot{L} = n$ et $\dot{\varpi} = n - \kappa$, la condition (2.26) s'écrit :

$$m\frac{d}{dt}(L - \Omega_P t) = \pm\frac{d}{dt}(L - \varpi) \tag{2.31}$$

L'intégration de cette équation montre que pour un demi grand-axe et une excentricité donnés, la longitude des particules, $L_C = L - \Omega_P t$, dans un repère tournant avec le *pattern speed* Ω_P est donnée par :

$$mL_C = L - \varpi + cte \tag{2.32}$$

Ainsi, les lignes de courant sont définies par l'équation suivante :

$$r = a[1 - e\cos(mL_C - cte)] \tag{2.33}$$

Supposons que la phase constante est nulle. Alors, pour $m = 0$, les lignes de courant sont des cercles ; pour $m = 1$, ce sont des ellipses kepleriennes ; pour $m = 2$, ce sont des ellipses centrées. De manière générale, les lignes de courant sont des courbes à m lobes (*cf.* figure 2.5).

L'effet d'une résonance de Lindblad est d'induire une excentricité forcée aux particules des anneaux, de telle manière que, à un demi grand-axe donné, les particules suivent une ligne de courant. L'excentricité forcée décroit lorsque la distance à la résonance augmente, avec un changement de phase de 180° de part et d'autre de la résonance exacte. La largeur de la résonance est déterminée par la distance à la résonance exacte telle que la valeur de l'excentricité forcée est juste suffisante pour que les lignes de courant situés de part et d'autre de la résonance s'intersectent. Ce mécanisme est décrit par Porco et Nicholson (1987). Ces lignes de courant sont illustrées par la figure 2.5, dans le cas d'une résonance de Lindblad 7 : 6 avec $m = 7$, $k = p = 0$ (et donc $\Omega_P = n'$). L'angle critique de résonance est donc $\Psi_{LI} = 7\lambda' - 6\lambda - \varpi$. C'est une résonance interne, où la particule est à l'intérieur de l'orbite du satellite.

Interprétons géométriquement une résonance de Lindblad simple d'angle critique $\Psi_L = (m+1)\lambda' - m\lambda - \varpi$ (*i.e.* $k = p = 0$). Une telle résonance est souvent appelée résonance de Lindblad *excentrique*, ou résonance de Lindblad *horizontale*. Dans un repère tournant avec le moyen mouvement du satellite, l'orbite de la particule est fermée. D'après l'expression de l'angle critique, on remarque que lorsque la particule atteint son périapse ($\lambda = \varpi$), l'angle critique se réduit à $(m+1)(\lambda' - \varpi)$. Il est donc directement lié à l'orientation de l'orbite de la particule dans un repère lié au satellite. En fait, l'angle entre le rayon vecteur du satellite et le périapse de l'orbite de la particule est stationnaire ou varie très lentement.

Pour une résonance de Lindblad d'ordre 1 ($k = p = 0$), d'angle critique $\Psi_{LI} = m\lambda' - (m-1)\lambda - \varpi$, la fonction perturbatrice s'écrit :

$$R = \frac{Gm'}{a'} f_d(\alpha) e \cos \Psi_{LI}, \tag{2.34}$$

avec $fd = (1/2)[-2m - \alpha D] b_{1/2}^{(m)}$, où $b_{1/2}^{(m)}$ est un coefficient de Laplace et où D désigne la dérivée première. L'expression de l'excentricité forcée e_f d'une particule en résonance est donnée par la formule suivante, dans l'approximation linéaire :

$$e_f = \left| \frac{n\alpha(m'/M) f_d}{mn' - (m-1)n} \right| \tag{2.35}$$

Soit $a = a_{res} + \Delta a$ le demi grand-axe de la particule, avec $\Delta a << a_{res}$. D'après la troisième loi de Kepler et en développant la quantité $\Delta a / a_{res}$, on en déduit l'amplitude de l'onde forcée par la résonance (toujours dans le cas $k = p = 0$) :

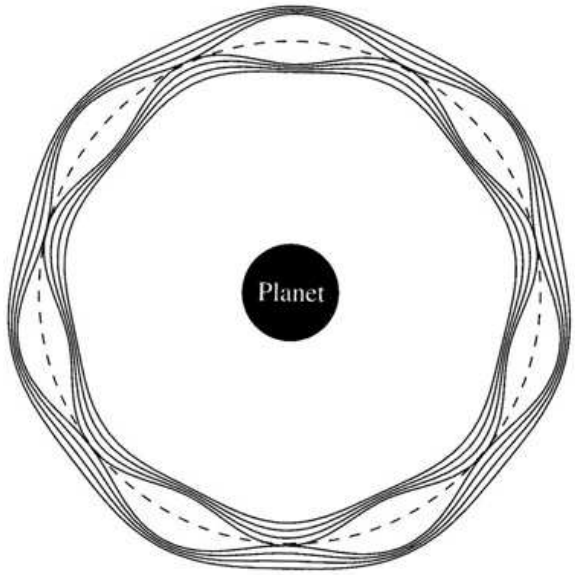

FIG. 2.5: Lignes de courant de la résonance de Lindblad 7 : 6, avec $m = 7$, $k = p = 0$ et donc $\Omega_P = n'$. L'angle critique de la résonance (interne) est $\Psi_{LI} = 7\lambda' - 6\lambda - \varpi$. Les courbes sont les lignes de courant des orbites des particules de part et d'autre de la résonance exacte, indiquée par un cercle en pointillés. L'amplitude de chaque ligne de courant est une fonction linéaire de l'excentricité forcée, et la largeur de la résonance est déterminée par la distance entre la résonance exacte et le rayon où les lignes de courant de cotés opposés s'intersectent. Cette figure est tirée de Murray et Dermott (2001).

$$ae_f = \frac{2\alpha a^2 (m'/M)|f_d|}{3(m-1)|a - a_{res}|} \tag{2.36}$$

Pour une certaine valeur critique du demi grand-axe, l'amplitude de l'onde est égale à la séparation en demi grand-axe de la résonance exacte. Pour cette valeur, la largeur totale de la résonance de Lindblad ($k = p = 0$) est alors :

$$W_L = 4a\sqrt{\frac{2\alpha(m'/M)|f_d|}{3(m-1)}} \tag{2.37}$$

On peut montrer que lorsque m est suffisamment grand, $2\alpha f_d/(m-1) \sim 1.6$, et on obtient ainsi une expression simplifiée pour la largeur d'une résonance de Lindblad interne d'ordre 1 :

$$W_L \sim 2.9a\sqrt{\frac{m'}{M}} \tag{2.38}$$

Les résonances de Lindblad jouent un rôle clé dans le confinement des anneaux étroits. Par exemple, les observations ont montré que le bord externe de l'anneau ϵ d'Uranus est en résonance de Lindblad (interne) 14 : 13 avec le satellite Ophelia, et le bord interne en résonance en résonance de Lindblad (externe) 24 : 25 avec le satellite Cordelia. On sait également que des résonances de Lindblad avec des satellites comme Mimas, Janus, Pandore, Prométhée créent des ondes de densité au voisinage de la résonance dans les anneaux de Saturne.

2.3.3 Résonances verticales

Une résonance verticale se produit lorsque le *pattern speed* du potentiel perturbateur est égal à la fréquence verticale de la particule. Dans ce cas :

$$m(n - \Omega_P) = \pm\nu \tag{2.39}$$

où les signes positif et négatif correspondent respectivement à une résonance interne (VI) et à une résonance externe (VE). D'après la définition de ν, on a :

$$(m \mp 1)n \pm \dot{\Omega} - m\Omega_P = 0 \tag{2.40}$$

ou encore,

$$(m + k + p)n' - (m \mp 1)n - k\dot{\varpi}' \mp \dot{\Omega} - p\dot{\Omega}' = 0 \tag{2.41}$$

L'angle critique de la résonance verticale, Ψ_V, s'écrit :

$$\Psi_V = (m + k + p)\lambda' - (m \mp 1)\lambda - k\varpi' \mp \Omega - p\Omega' \tag{2.42}$$

L'ordre de cette résonance générale est donc $|k| + |p| + 1$. Pour toutes les résonances verticales, la somme des coefficients de Ω et Ω' doit être paire, donc p est toujours impair. Le terme d'ordre le plus bas associé à cette résonance est proportionnel à $e'^{|k|} I I'^{|p|}$.

Comme pour l'excentricité dans le cas des résonances de Lindblad, une résonance verticale force une inclinaison aux particules. Il se produit aussi un déphasage de 180° dans la longitude du noeud ascendant de part et d'autre de la résonance. Ces résonances créent des ondes verticales dont l'amplitude peut être facilement estimée. Cela n'a pas de sens, cependant, de calculer la largeur d'une résonance verticale car les lignes de courant adjacentes ne se coupent jamais.

Une résonance verticale (externe) 42 : 43 avec le satellite Galatéa pourrait jouer un rôle dans le confinement des arcs de Neptune. On sait aussi que des résonances verticales internes des anneaux de Saturne avec le satellite Mimas ($I' \sim 1.5°$) donnent lieu à des ondes inclinées au voisinage des résonances.

Première partie

Les arcs de Neptune

Chapitre 3

Etat de l'art

Sommaire

3.1 Introduction **29**
3.2 Données observationnelles **30**
3.2.1 Structure des anneaux 30
3.2.2 Satellites 34
3.3 Modèles dynamiques des arcs de Neptune **34**
3.3.1 Généralités 34
3.3.2 Le modèle de Lissauer (1985) 36
3.3.3 Le modèle de Sicardy et Lissauer (1992) 36
3.3.4 Le modèle de Goldreich et al. (1986) 39
3.3.5 Le modèle de Porco (1991) 40
3.3.6 Simulations de Foryta et Sicardy (1996) 45
3.3.7 Auto-gravité de particules macroscopiques en corotation (Salo et Hänninen, 1998) 46
3.4 Origine et évolution des anneaux de Neptune **47**

3.1 Introduction

La détection d'un système d'anneaux autour d'Uranus en 1977, par la technique des occultations stellaires (French et al., 1991), a motivé la mise en place d'une grande campagne d'observations depuis le sol afin de trouver d'éventuels anneaux autour de Neptune. Dans les années 80, la planète, vue depuis la Terre, se trouvait en effet à proximité du plan galactique, ce qui augmenta le nombre d'occultations susceptibles d'être observées. Plusieurs tentatives échouées de détection eurent lieu en 1980, 1981 et 1983. Par contre, en juillet 1984 au Chili, un anneau de matière a été observé (Hubbard et al., 1986), par deux télescopes de La Silla (observant dans l'infrarouge à 2.2 μm et 0.9 μm) et un télescope du Cerro Tololo (à 0.9 μm). Situé à environ 2.5 rayons du centre de Neptune, l'anneau présentait selon ces observations une largeur physique radiale $W = 15$ km et une épaisseur optique moyenne $\tau \simeq 0.13$, rendant ainsi l'objet tout à fait comparable aux anneaux d'Uranus. Cependant, fait remarquable, aucune chute de signal n'avait été observée lorsque l'étoile était passée de l'autre coté de la planète, ce qui faisait de l'objet une anneau incomplet (Hubbard et al., 1986; Manfroid et al., 1986; Sicardy et al., 1991) : les arcs de Neptune étaient découverts.

L'étude des anneaux de Saturne et d'Uranus par occultation stellaire a fait l'objet de plusieurs publications : Cuzzi et al. (1984), Esposito et al. (1984), Esposito et al. (1991) et French et al. (1991). Les occultations permettent de sonder les anneaux pour des épaisseurs optiques moyennes ou hautes, approximativement dans l'intervalle $0.01 < \tau < 5$. Les anneaux d'épaisseur optique plus faible, comme par exemple ceux de Jupiter ou les anneaux E et G de Saturne, sont généralement indétectables par cette technique. L'analyse des données d'occultation des années 80 a montré que 3 ou 4 détections des arcs de Neptune ont eu lieu (Nicholson et al., 1990; Sicardy et al., 1991), ainsi qu'une détection de l'anneau Le Verrier. Les expériences PPS (Photopolarimeter) et UVS (Ultraviolet Spectrometer) de la sonde *Voyager* ont aussi permis de détecter l'arc Liberté par occultation et très probablement l'anneau Le Verrier. Les données d'occultation ont conduit à une estimation précise de la largeur radiale et de l'épaisseur optique des arcs, de la limite supérieure de l'épaisseur optique des anneaux continus (intégrée radialement). Elles permettent aussi d'estimer la distribution en taille des particules (dans le cas en particulier des occultations radio effectuées par les sondes spatiales), et de déterminer précisément le moyen mouvement des arcs. La rencontre de la sonde *Voyager 2* avec Neptune en août 1989 a permis de considérablement mieux connaître l'environnement de la planète, en particulier les arcs, et de découvrir plusieurs anneaux et satellites (Smith et al., 1989). Environ 800 clichés des anneaux de Neptune ont pu ainsi être collectées. Les éphémérides décrivant le passage de *Voyager 2* dans le système neptunien sont données par Jacobson et al. (1991).

Nous résumons ici les résultats observationnels concernant les satellites de Neptune et la structure des anneaux. Nous présentons ensuite différents modèles dynamiques pouvant expliquer le confinement des arcs, puis nous abordons finalement la question de l'origine et de l'évolution des anneaux de Neptune. Une revue récente des connaissances actuelles sur le système d'anneaux de Neptune, dont est principalement tiré l'exposé qui suit, est Porco et al. (1995).

3.2 Données observationnelles

3.2.1 Structure des anneaux

Résumé

Le système d'anneaux de Neptune est composé de cinq anneaux continus, dont deux larges (Galle et Lassel) et trois étroits (Adams, Le Verrier et Arago), ainsi que probablement d'un anneau étroit discontinu qui partage l'orbite du satellite Galatéa. On dénombre quatre ou cinq arcs (selon la nomenclature utilisée), qui sont plongés dans un anneau plus diffus, l'anneau Adams, de largeur $\simeq 50$ km. Le demi grand-axe de cet anneau est $a = 62932.57 \pm 0.02$ km, et l'excentricité et l'inclinaison sont très faibles. Les arcs ont des longueurs angulaires variables de 1° à 10° environ, et présentent des structures azimutales internes d'échelle spatiale typique de $\simeq 0.5^\circ$. Les arcs ont une largeur physique radiale d'environ 15 km et sont globalement concentrés sur $\simeq 40^\circ$ en longitude. L'analyse combinée des données des occultations stellaires et des données photométriques de la sonde *Voyager 2* conduisent à des épaisseurs optiques typiques $\tau_{arcs} \simeq 0.1$ pour les arcs et $\tau \simeq 0.003$ pour les deux anneaux étroits Adams et Le Verrier. L'anneau Adams, les arcs et l'anneau Le Verrier ont une fraction significative de poussière, comparable à celle observée dans l'anneau F de Saturne. Les particules de l'anneau Lassel semblent par contre avoir des tailles différentes par rapport à celles de Le verrier ou Adams. Les particules des

anneaux de Neptune pourraient être majoritairement composées de glace, à laquelle pourrait s'ajouter des silicates et/ou du matériau carboné. Porco et al. (1995) ont décrit les propriétés des particules (distribution de taille, albédo, composition). Les propriétés photométriques ont été étudiées par Showalter et Cuzzi (1992) et Ferrari et Brahic (1991, 1994).

Structure radiale

Un profil radial de luminosité des anneaux de Neptune est donné figure 3.1, obtenu en moyennant en azimut la brillance le long des anneaux d'une image Voyager 2 (FDS 11412.51) (Smith et al., 1989, fig.14), et après avoir supprimé la lumière diffusée par Neptune. Les anneaux Adams et Le Verrier sont respectivement très proches des satellites Galatéa et Despina. On peut donc s'attendre à ce que l'évolution dynamique de ces anneaux soit régie par les interactions avec ces satellites.

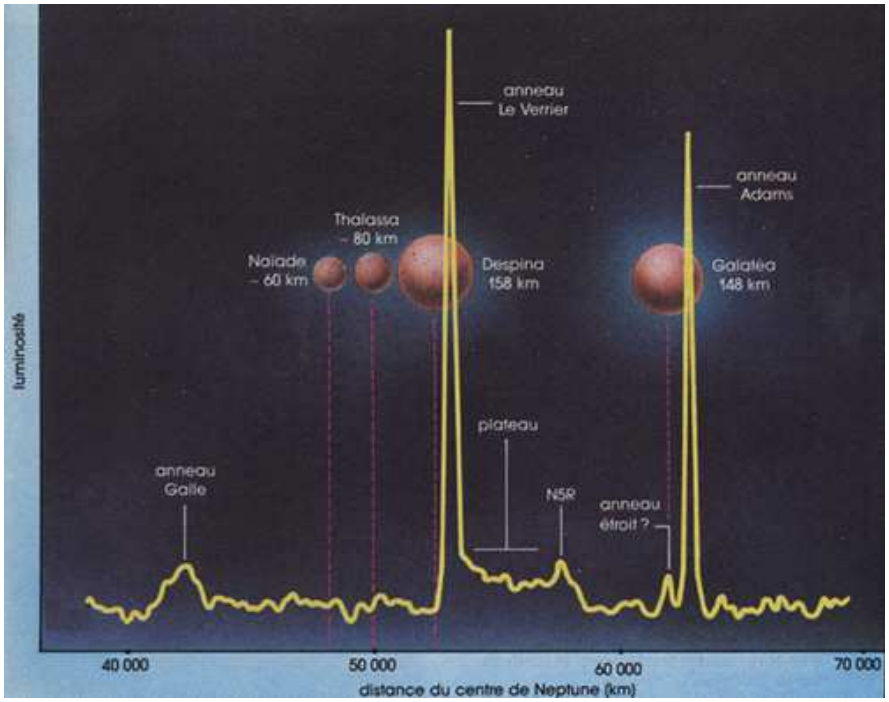

FIG. 3.1: Profil radial de luminosité des anneaux de Neptune (d'après Porco et al., 1995). Il a été obtenu en moyennant en azimut la brillance le long des anneaux d'une image Voyager 2 (FDS 11412.51), après avoir supprimé la lumière diffusée par Neptune. Nous avons superposé la position radiale de quatre des six satellites détectés par la sonde, avec leur diamètre respectif (en km) relatif. L'image est tirée de Sicardy (1994).

L'anneau Adams a pour rayon 62932.57 $\pm$ 0.02 km (Porco, 1991; Horanyi et Porco, 1993). L'anneau Le Verrier est à 53200 $\pm$ 20 km du centre de Neptune (Porco et al., 1992; Showalter et Cuzzi, 1992; Porco et al., 1995). Il est possible qu'un troisième anneau étroit (Showalter et Cuzzi, 1992) partage l'orbite de Galatéa, à environ 980 km à l'intérieur de l'anneau Adams. Cette structure est si ténue dans les images *Voyager* qu'on ne sait pas si c'est un anneau continu ou non. Les largeurs radiales des anneaux étroits ne sont pas connues de manière très précise

à partir des données Voyager. Les données des occultations stellaires sont pour cela souvent préférables. Une exception concerne l'anneau Le Verrier, pour lequel une détection possible par occultation avec le photo-polarimètre PPS de la sonde *Voyager* a conduit à une largeur radiale $\simeq$ 110 km (Horn et al., 1990).

On distingue également des anneaux continus larges autour de Neptune. A l'extérieur de Le Verrier, l'anneau Lassel (plateau sur la figure 3.1) a une largeur de l'ordre de 4000 km, et s'étend jusqu'au quatrième anneau étroit, Arago (N5R sur la figure 3.1). L'anneau le plus interne connu est Galle : il a un rayon orbital de 42000 km et une largeur d'environ 2000 km. Notons que pour distinguer les anneaux avec *Voyager 2*, il a fallu effectuer de longs temps de pose car le flux solaire d'une part et le pouvoir réflecteur des anneaux d'autre part sont faibles au niveau de Neptune. Par conséquent, la lumière diffusée par le disque de la planète a empéché la détection d'anneaux plus proche de Neptune que l'anneau Galle. Mais l'existence d'un large disque de poussières s'étendant vers l'intérieur à partir de cet anneau est donc possible.

Les structures les plus étroites résolues radialement par les instruments de la sonde *Voyager* sont les arcs. Les résultats les plus précis proviennent cependant du sol, avec les occultations stellaires, qui conduisent à une largeur $W \simeq 15$ km, ainsi qu'à une épaisseur optique $\tau_{arc} \simeq 0.1$. L'épaisseur optique moyenne de l'anneau Le Verrier obtenue par occultation est $\simeq 0.005$.

Structure longitudinale et verticale

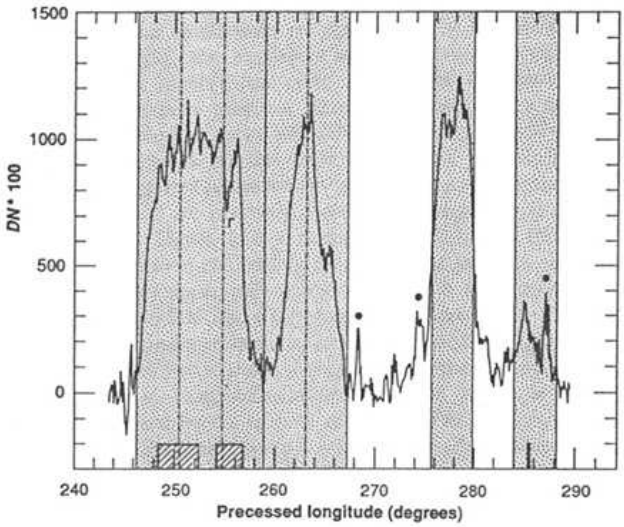

FIG. 3.2: Profil de brillance longitudinal des arcs de Neptune (d'après Porco, 1991). Il a été obtenu à partir d'une image Voyager 2 (FDS 11415.45) moyennée radialement. Les longitudes en abscisse ont été ramenées à la même époque (DJ 2447757.0), en prenant pour moyen mouvement des arcs la valeur de 820.1185°/j. L'intensité en ordonnée représente la valeur des pixels dans l'image, multiplié par 100. FDS 11415.45 est une image grand-angle de la sonde, avec un temps de pose de 255.4 s et prise 20.5 heures après la rencontre la plus proche avec Neptune, à une distance de 1.3 millions de km de la planète et avec un angle de phase de 135° (Porco, 1991). L'origine des longitudes est définie par le noeud ascendant de l'équateur de Neptune sur l'équateur moyen de la Terre de 1950. Les bandes grises sont des sites de corotation de la résonance 42 : 43 avec Galatéa (voir section 3.3).

Nom	Centre (°)	FLHM (°)	Séparation (°)
Courage (A1)	285.03 ± 0.05	1.0 ± 0.1	
			7.3
Liberté (A2)	277.73 ± 0.05	4.1 ± 0.1	
			12.4
Egalité 1 (A3)	265.4 ± 0.5	1.0 ± 0.5	
			3.
Egalité 2 (A4)	262.6 ± 0.5	3.0 ± 0.5	
			10.7
Fraternité (A5)	251.88 ± 0.05	9.6 ± 0.1	

TAB. 3.1: Caractéristiques des arcs de Neptune, d'après Porco et al. (1995). Les noms donnés aux arcs sont ceux recommandés par l'Union Astronomique Internationale. Une nomenclature non officielle est donnée entre parenthèses (Porco, 1991). Pour chaque arc de l'anneau Adams, on donne le centre longitunal, la longueur à mi-hauteur du maximum de brillance (FLHM), et la séparation angulaire centre à centre. Ces données ont été obtenues à partir du profil de brillance longitudinal des arcs (figure 3.2).

Les arcs sont les structures les plus denses optiquement des anneaux de Neptune, concentrés sur $\simeq 40°$ en longitude. Ils sont illustrés par un profil de brillance longitudinal obtenue à partir d'une image *Voyager* (figure 3.2). Les caractéristiques de ce profil sont donnés table 3.1.

Des structures azimutales d'échelles plus petites que les longueurs des arcs (1° à 10°) ont aussi été détectées dans Liberté et Fraternité. Par exemple dans Fraternité (l'arc le plus long), on peut constater sur une image *Voyager* (FDS 11412.46) la présence de deux groupes de grumeaux (Porco, 1991; Smith et al., 1989; Ferrari et Brahic, 1991). Le premier groupe, de longueur longitudinale d'environ 3.2°, contient des grumeaux séparés typiquement de 0.5 à 0.8°. Le second groupe fait au moins 2.6° de long (il est en effet tronqué sur l'image) et contient au moins deux grumeaux séparés de 1.8°. D'autre part, des variations d'éclat significatives ($\simeq$ 30 %) le long de l'arc Liberté sont visibles, avec des séparations typiques de 0.4 à 0.6°. Un grumeau a également été détecté sur une image à haute résolution de l'arc Courage (Porco et al., 1995). La nature exacte de ces sous-structures n'est pas définie : ils pourraient représenter une accumulation de poussière autour de particules plus grosses que la moyenne dans les arcs. Ces dernières fourniraient par collisions la poussière observée (Smith et al., 1989).

Enfin, la brillance de l'anneau Adams intégrée radialement montre qu'elle varie d'un facteur 3, avec un maximum au niveau des arcs et un minimum loin de ces derniers (Porco et al., 1995). L'anneau Le Verrier, par contre, ne présente pas de variations de brillance en longitude, à petite échelle tout comme à grande échelle.

Le passage de la sonde *Voyager 2* dans le plan des anneaux de Neptune a permis de contraindre leur épaisseur verticale. Porco et al. (1995) ont calculé une limite supérieure de 30 km pour l'épaisseur verticale de l'anneau Le Verrier et l'anneau Adams (sans les arcs), et de 110 km pour l'arc Liberté. Des informations sur l'épaisseur verticale des anneaux ont aussi pu être déduites à partir de mesures *in situ* de la distribution de la poussière dans l'environnement de la planète (Porco et al., 1995).

3.2.2 Satellites

Six petits satellites internes ont été détectés dans les images de la sonde *Voyager 2* : Proteus, Larissa, Galatéa, Despina, Thalassa et Naïade (par ordre décroissant de distance à la planète). En raison d'un grand nombre d'images disponible, sur une période de presque trois mois, les orbites de ces satellites ont pu être déterminées avec précision, la plupart étant très peu excentriques et peu inclinées (Owen et al., 1991). Il convient de noter que pour les quatre satellites les plus internes (Galatéa, Despina, Thalassa et Naïade, *cf.* figure 3.1), la barre d'erreur sur l'exentricité observée est plus grande que sa valeur nominale. Cinq satellites ont des orbites à l'intérieur de l'orbite synchrone, et quatre sont situés à l'intérieur du système d'anneaux (Smith et al., 1989).

Le satellite Galatéa est proche de l'anneau Adams (séparation $\simeq$ 980 km) et Despina est proche de Le Verrier (séparation $\simeq$ 674 km). Dans chaque cas, le satellite est à l'intérieur de l'anneau. Thalassa et Naïade se trouvent entre les anneaux Le Verrier et Galle, mais en sont assez éloignés. Pour des valeurs raisonnables de la densité moyenne , ces quatre satellites évoluent à l'intérieur de la limite de Roche. Les orbites des six satellites sont caractérisés par des faibles excentricités ($\leq\simeq 10^{-3}$), et cinq d'entre eux ont des inclinaisons (0.04 - 0.2°) comparables à celles des satellites internes (Owen et Synnot, 1987) et des anneaux d'Uranus (French et al., 1988). Une exception intéressante est l'inclinaison de 4.7° de Naïade, qui pourrait résulter d'un ancien passage en résonance de moyen mouvement avec Despina (Banfield et Murray, 1992).

3.3 Modèles dynamiques des arcs de Neptune

3.3.1 Généralités

Dynamiquement, le plus grand défi à relever suite à l'exploration du système d'anneaux de Neptune est l'explication de la présence des arcs dans l'anneau Adams. En effet ces derniers s'étalent longitudinalement en quelques mois s'ils ne sont pas confinés. La grande majorité des modèles proposés expliquent le confinement des arcs par l'interaction gravitationnelle, plus précisément par des résonances, avec des satellites proches. De telles relations dynamiques nécessitent la connaissance précise des moyens mouvements et des éléments orbitaux des anneaux et des satellites. Ce n'est qu'après le passage de la sonde *Voyager 2* que ces informations ont pu être recueillies.

Rappelons tout d'abord qu'un arc en orbite keplerienne non perturbée autour d'une planète s'étale longitudinalement, par rotation différentielle, à la vitesse suivante :

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} = \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{a}n, \tag{3.1}$$

où $\Delta\theta$ est la longueur angulaire (azimutale) des arcs (en radians), Δa la dispersion en demi grand-axe des particules, n le moyen mouvement des particules, et a le demi grand-axe moyen de l'anneau. Par exemple, en supposant que la largeur radiale physique W de l'arc ($\simeq$ 15 km) est égale à la dispersion en demi grand-axe Δa, on montre que les arcs sont complètement détruits en environ 3.4 ans. En fait, le cisaillement keplerien dans un anneau de 15 km implique un allongement des arcs d'environ 0.3°/j. Avec une telle valeur, ce taux aurait dû être observé par *Voyager*. Puisque les observations suggèrent que les arcs sont stables depuis 15 ans, il existe

donc un mécanisme actif capable de confiner les particules de l'anneau Adams sur des échelles de temps supérieures à une dizaine d'années.

De manière générale, les mécanismes susceptibles de stabiliser des arcs de matière peuvent être classés en deux catégories : les mécanismes internes, qui ne font intervenir que les propriétés physiques intrinsèques de l'anneau, et les mécanismes externes, dynamiques, comme les perturbations gravitationnelles (résonances,...) d'un ou plusieurs satellites sur les particules de l'anneau.

Les mécanismes internes, qui reposent sur les instabilités dans un anneau pour produire des structures stables en azimuth, peuvent facilement être écartés dans le cas des arcs de Neptune. De telles instabilités ont été proposées pour expliquer la présence de structures particulières dans les anneaux de Saturne (Franklin et Colombo, 1978; Ward, 1981; Stewart et al., 1984). Ces instabilités peuvent être soit d'origine gravitationnelle (auto-gravité des particules), soit d'origine visqueuse (dépendantes des propriétés collisionnelles des particules). Les instabilités gravitationnelles sont probablement peu importantes dans les anneaux de Neptune, car ces derniers sont à l'intérieur de la limite de Roche et possèdent une faible profondeur optique (cela peut être démontré en examinant le paramètre de Toomre, *cf.* Julian et Toomre (1966)). Les instabilités collisionnelles sont plus difficiles à quantifier dans les anneaux de Neptune car les propriétés physiques et collisionnelles des particules ne sont pas bien connues. Cependant, la plupart des modèles de production de variations radiales dans les anneaux planétaires dues aux effets collisionnels nécessitent des épaisseurs optiques bien supérieures à celles observées autour de Neptune (Ward, 1981; Stewart et al., 1984; Salo, 1991). Les instabilités collisionnelles sont donc sûrement faibles dans les anneaux de Neptune. Enfin, une autre explication pour les arcs est que toutes les particules ont exactement le même demi grand-axe, éliminant ainsi tout mécanisme nécessaire de confinement (Michel, 1981; Gorkavyi, 1991; Gorkavyi et al., 1991; Gorkavyi et Taidakova, 1991). Cependant, de telles configurations sont à priori instables vis-à-vis des collisions et sensibles aux conditions initiales.

Un mécanisme externe de confinement actif, forçant les particules à occuper des intervalles de longitude spécifiques, est donc probablement à l'origine des arcs autour de Neptune. Lin et al. (1987) ont proposé que les oscillations acoustiques de Neptune provoquent des variations azimutales dans l'anneau. Ce mécanisme a été rejeté après la rencontre avec *Voyager*, lorsqu'on s'est aperçu que la fréquence angulaire des arcs différait de celle requise (Marley et al., 1989; Marley et Porco, 1993). Les résonances avec le champ magnétique de Neptune ont aussi été invoquées. Cependant, l'anneau Adams est trop étroit et pas assez proche d'une résonance de Lorentz pour que cet effet soit important pour confiner radialement les arcs. Il n'y a d'autre part pas de résonances de Lorentz analogues aux résonances de corotation. Les autres mécanismes externes de confinement font intervenir les perturbations gravitationnelles provenant de résonances de corotation et de Lindblad avec des satellites proches. Nous présentons ici les principaux modèles conçus depuis la découverte des arcs, qui obéissent tous au schéma suivant : le confinement des particules sur certaines régions azimutales est assuré par une résonance de corotation avec un satellite (corotation 1 : 1 autour des points de Lagrange avec un satellite co-orbital, ou $m : m+1$ avec un satellite incliné ou excentrique), et l'énergie dissipée par les collisions est compensée par une résonance de Lindblad horizontale (avec un satellite différent ou non).

3.3.2 Le modèle de Lissauer (1985)

Lissauer (1985) a montré que deux satellites peuvent confiner des particules en un arc étroit par une combinaison des résonances de corotation et de Lindblad. Dans ce modèle, un premier satellite partage l'orbite des particules de l'anneau. Ces dernières ont ainsi un mouvement de libration autour des points de Lagrange L_4 ou L_5. La dispersion maximale Δa_{max} en demi grand-axe des particules en libration dans une telle configuration est reliée à la séparation angulaire minimale θ_{min} entre le satellite et les particules par la relation :

$$\Delta a_{max} = 4a\sqrt{\frac{2}{3}\frac{M_L}{M_P}\left[f(60^o) - f(\theta_{min})\right]} = 4a\sqrt{\frac{2}{3}\frac{M_L}{M_P}|f(\theta_{min}) + 0.5|} \tag{3.2}$$

où M_L et M_P sont respectivement les masses du satellite de Lagrange et du corps central, et où $f(\theta)$ est la fonction définie par l'équation (4.2) décrivant le potentiel créé par un satellite sur une particule co-orbitale. La longueur angulaire de l'arc est donnée par $\Delta\theta = \theta_{max} - \theta_{min}$, où la séparation angulaire maximale θ_{max} entre la particule et le satellite est solution de $f(\theta_{max}) = f(\theta_{min})$.

Pour contrebalancer les effets dissipatifs dus aux collisions inélastiques des particules, un second satellite fournit l'énergie nécessaire et exerce un couple répulsif dans l'anneau (grâce aux résonances de Lindblad, *cf.* Eq. (3.3)), qui assure la stabilité du système. La largeur des résonances de Lindblad, dans le cas où l'auto-gravité dans l'anneau est négligeable (hypothèse probablement valide pour les arcs), est donnée par $W_L \simeq a_S\sqrt{M_S/M_P}$, où M_S est la masse du satellite gardien et a_S son demi grand-axe.

Ce modèle prévoit un arc stable par satellite de Lagrange. La masse du satellite de Lagrange est mieux contrainte dans ce modèle que celle du satellite gardien. En effet, ce dernier constitue une source d'énergie à long terme, alors que le satellite de Lagrange contraint la forme de l'arc. Lissauer (1985) a donné les contraintes suivantes sur les masses ou les tailles des satellites :

- pour le satellite de Lagrange, un rayon d'environ 100 km, en supposant une densité de l'ordre de 1 g cm^{-3}, et que la dispersion en demi grand-axe des particules est égale à la largeur radiale observée des arcs ($\simeq$ 15 km)
- pour le satellite gardien, un rayon d'environ 60 km, en supposant une distance radiale de l'ordre de 1000 km entre les arcs et le satellite

La résolution maximale d'environ 12 km de la mission *Voyager 2* (Smith et al., 1989), et l'absence d'images montrant la présence d'un satellite co-orbital à l'anneau Adams, ont entrainé le rejet du modèle, malgré la découverte de Galatéa, pourtant suffisamment massif et proche de l'anneau Adams pour constituer le satellite gardien.

3.3.3 Le modèle de Sicardy et Lissauer (1992)

Sicardy et Lissauer (1992) ont modifié le modèle précédent en considérant non pas un mais deux satellites co-orbitaux situés aux points de Lagrange l'un de l'autre, distants de 60°.

Dans ce modèle, les particules sont confinés entre les deux satellites. Galatéa exerce un couple dans l'anneau qui assure la stabilité des arcs vis-à-vis des collisions inélastiques entre les particules. La présence d'un second satellite de Lagrange modifie la relation (3.2) donnant la dispersion maximale en demi grand-axe des particules. C'est en fait la même expression, sauf que l'on remplace $[f(60^o) - f(\theta_{min})]$ par $[g(30^o) - g(\theta_{min})]$, où $g(\theta) = f(\theta) + f(60^\circ -$

θ). Ce modèle a l'avantage de permettre l'existence de satellites plus petits, non détectables dans les images *Voyager*. Deux satellites de rayon $\simeq$ 5 km peuvent ainsi confiner des particules en un arc de largeur $\simeq$ 15 km. En supposant que les deux satellites ont pour rayon 5 km environ et pour densité 1 g cm^{-3}, Sicardy et Lissauer (1992) ont trouvé une largeur de libration $\Delta a \simeq 0.5$ km et une période de libration associée $T_{lib} \simeq 55$ ans. Le forçage de l'excentricité des particules, due à la résonance de Lindblad avec Galatéa, implique des excursions radiales $2ae$ de l'ordre de 30 km. Cependant, pour respecter la géométrie des arcs, un ou deux petits satellites supplémentaires sont nécessaires, ce qui augmente les hypothèses du modèle.

Sicardy et Lissauer (1992) se sont également intéressés aux échanges éventuels de moment cinétique entre Galatéa et l'anneau Adams. Un satellite est en effet capable d'échanger séculairement du moment cinétique avec un disque de particules (ou un disque gazeux) soit en orbite proche du satellite (principe des satellites gardiens, *cf.* Goldreich et Tremaine, 1979), soit en résonance avec le satellite (Goldreich et Tremaine, 1978b). Sous certaines circonstances, le couple est alors tel que la séparation entre les orbites du satellite et des particules augmente séculairement avec le temps. La valeur du couple est proportionnelle au carré de la masse du satellite, et est identique pour une grande variété de phénomènes dissipatifs agissant dans un disque fluide en résonance avec le satellite (Goldreich et Tremaine, 1980; Meyer-Vernet et Sicardy, 1987). C'est la formule du couple standard, qui s'écrit (Goldreich et Tremaine, 1979) :

$$\Gamma = 0.4 a^2 n^2 \left(\frac{M_S}{M_P}\right)^2 \left(\frac{a}{a - a_S}\right)^4 M_r, \tag{3.3}$$

où M_r, a et n sont respectivement la masse, le rayon et le moyen mouvement de l'anneau, M_S et a_S sont respectivement la masse et le demi grand-axe du satellite, et M_P est la masse du corps central. Si un état stationnaire est atteint, la migration correspondante en demi grand-axe est :

$$\frac{\dot{a}}{a} \simeq n \left(\frac{M_S}{M_P}\right)^2 \left(\frac{a}{a - a_S}\right)^4 \tag{3.4}$$

Comme l'a montré Poisson en 1809, les perturbations de type planétaire ne peuvent produire de modifications séculaires des éléments orbitaux au second ordre des paramètres perturbateurs (par exemple la masse du satellite) ; c'est pourquoi une forme d'interaction entre les particules du disque est requise pour qu'un échange séculaire de moment cinétique ait lieu.

Si la formule du couple standard (3.3) est valide, alors le taux de transfert de moment cinétique correspond à une migration orbitale de l'anneau Adams de l'ordre de 3 km an^{-1}, d'après l'équation (3.4). Cette migration est trop importante pour que l'anneau soit stable sur des temps géologiques. Cependant, le moment cinétique transféré à l'anneau est donné aux satellites de Lagrange, qui ne sont pas directement soumis au couple séculaire exercé par Galatéa. Dans ce cas, la migration orbitale donnée par l'équation (3.4) se réduit d'un facteur égal au rapport $M_R/2M_L$, où M_R est la masse totale de l'anneau et M_L celle d'un satellite de Lagrange. En estimant la densité surfacique de l'anneau Adams, Sicardy et Lissauer (1992) en ont déduit $\dot{a} \simeq 2$ m an^{-1}, pour un anneau composé de particules centimétriques. Avec une telle valeur, l'anneau Adams doublerait sa distance par rapport à Galatéa en quelques millions d'années. Si les particules sont plus petites, elles sont soumises à des forces dissipatives comme l'effet Poynting-Robertson, qui pourraient contre-balancer le couple répulsif.

Faisons un petit détour pour définir deux effets dissipatifs importants, la pression de radiation solaire et l'effet Poynting-Robertson. La pression de radiation a tendance à repousser les particules, essentiellement celles de taille de l'ordre du micromètre, vers l'extérieur par rapport au Soleil. Elle s'exprime sous la forme d'une force, $\mathbf{F}_{rad}$, donnée par :

$$\mathbf{F}_{rad} \simeq \frac{L_\odot Q_{pr} A}{4\pi c r_\odot^2} \bar{\mathbf{r}}. \tag{3.5}$$

Dans cette formule, $L_\odot$ est la luminosité solaire, et Q_{pr} est le coefficient de pression de radiation. Ce dernier rend compte de l'absorption et de la diffusion de la particule, et est égal à 1 pour une particule parfaitement absorbante. Le terme A est la section efficace de la particule, c est la vitesse de la lumière, $r_\odot$ est la distance héliocentrique de la particule, et $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$ est le vecteur unitaire pointant vers la particule. On définit aussi le paramètre β comme le rapport entre les forces de radiation et la gravité solaire :

$$\beta \equiv \frac{F_{rad}}{F_g} = 5.7 \times 10^{-5} \frac{Q_{pr}}{\rho R}, \tag{3.6}$$

où R est le rayon de la particule (en cm), et ρ sa densité (en g cm^{-3}). Notons que ce paramètre est indépendant de la distance héliocentrique.

D'autre part, l'effet Poynting-Robertson est un effet relativiste résultant d'un décalage Doppler entre le référentiel solaire et celui d'une particule. Une particule en orbite autour du Soleil absorbe la radiation solaire, et réémet l'énergie reçue de manière isotrope dans son propre référentiel. Dans le repère inertiel lié au Soleil, la particule émet donc préférentiellement dans la direction de son mouvement. Cela conduit à une diminution de l'énergie et du moment cinétique de la particule. Ce phénomène est l'effet Poynting-Robertson. Il affecte essentiellement les particules de taille de l'ordre du centimètre, qui ont ainsi tendance à spiraler vers le Soleil. La force de radiation agissant sur une particule est alors :

$$\mathbf{F}_{rad} \simeq -\frac{L_\odot Q_{pr} A}{4\pi c r_\odot^2} \Big[(1 - \frac{2v_r}{c}) \bar{\mathbf{r}} + \frac{v_\theta}{c} \bar{\theta} \Big], \tag{3.7}$$

où $v_r = \mathbf{v}.\bar{\mathbf{r}}$ est la composante radiale de la vitesse de la particule (parallèle au rayon incident de lumière), et v_θ la composante tangentielle. Le premier terme de l'équation (3.7) est celui dû à la pression de radiation, et les deux autres termes, qui font intervenir la vitesse de la particule, représentent l'effet Poynting-Robertson.

Il est fort probable cependant que la formule du couple standard (3.3) n'est pas valide dans le cas de l'anneau Adams. En effet, elle suppose que les phases orbitales des particules redeviennent suffisamment aléatoires entre deux rencontres avec le satellite. La formule du couple standard suppose aussi que les résonances de Lindblad $m : m \pm 1$ se superposent, alors que la séparation radiale entre deux résonances est $\sim$ 25 km, c'est-à-dire plus grande que la largeur physique de l'anneau Adams.

D'autre part, dans un repère tournant avec l'anneau, l'énergie mécanique des arcs est :

$$\mathcal{E} = E - nH, \tag{3.8}$$

où E et H sont l'énergie et le moment cinétique des arcs dans un repère inertiel. D'après la conservation de la constante de Jacobi, l'apport d'énergie de Galatéa est :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (n_S - n)\frac{dH}{dt} = \frac{3}{2}n\frac{a - a_S}{a}\Gamma, \tag{3.9}$$

où Γ est le couple dû à Galatéa. Pour atteindre un état stationnaire, ce gain d'énergie doit éventuellement être dissipé par les collisions. Le taux de dissipation d'énergie due aux collisions par unité de masse est :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \simeq c^2(1 - \epsilon^2)\tau n, \tag{3.10}$$

où c est la dispersion de vitesse dans les arcs, ϵ le coefficient de restitution des collisions inélastiques et τ l'épaisseur optique. En égalant les deux relations précédentes et en utilisant la formule du couple standard (Eq. 3.3), on trouve une vitesse typique de collisions $c \simeq 1$ m s^{-1}. Cette valeur est égale à la vitesse radiale $e_f an$ résultant du forçage de l'excentricité des particules par Galatéa. Ainsi, en supposant que la dispersion de vitesse dans les arcs est causée par cette excentricité forcée, l'énergie fournie par Galatéa (via le couple standard) est dissipée par des collisions à haute vitesse induites par le même satellite. Cependant, Sicardy et Lissauer (1992) ont remarqué que la plupart de l'énergie reçue par les arcs va exciter l'excentricité des particules, plutôt que favoriser leur confinement. En effet d'après Sicardy (1991), l'énergie utilisée pour confiner les centres des épicycles des particules dépend du gradient du couple Γ, et est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{3}{16}na\left(\frac{\Delta a_{max}}{a}\right)^2\frac{d\Gamma}{da} \simeq 0.3a^2n^3\left(\frac{M_S}{M_N}\right)^2\left(\frac{a}{d}^5\right)\left(\frac{\Delta a_{max}}{a}\right)^2 \tag{3.11}$$

La seconde égalité est obtenue en supposant que le couple Γ obéit à la forme standard. Le rapport des équations (3.11) et (3.9) conduit à une valeur très faible de l'ordre de 10^{-7}.

3.3.4 Le modèle de Goldreich et al. (1986)

Goldreich et al. (1986) ont développé un modèle original reposant sur les résonances de corotation et de Lindblad provenant d'un seul satellite en orbite proche de l'anneau. Ce satellite est soit intérieur soit extérieur aux arcs, et a une orbite inclinée et/ou excentrique. Les résonances de corotation considérées dans ce modèle sont des résonances telles que $m >> 1$, car alors chaque résonance de corotation est proche d'une résonance de Lindblad avec le même satellite. Goldreich et al. (1986) ont favorisé un satellite en orbite inclinée plutôt qu'un satellite excentrique, car l'excentricité d'un satellite s'amortit par effet de marée plus rapidement que son inclinaison.

Le potentiel perturbateur lié à la résonance de corotation est :

$$\Phi_C = -i_m^2 A_C \cos\Psi_C \tag{3.12}$$

avec, pour $m_C > 0$,

$$A_C = \frac{M_S}{M_P} n_S^2 a_S^2 V, \tag{3.13}$$

$$V = \frac{\beta^2}{8} b_{3/2}^{(2m_C+1)}(\beta), \tag{3.14}$$

et où i_m est l'inclinaison relative des orbites du satellite et de l'anneau, Ψ_C est l'angle critique de résonance de corotation verticale, $b_{3/2}^{(2m_C+1)}$ est un coefficient de Laplace (Murray et Dermott, 2001), et $\beta = a/a_S$.

Pour $m_C >> 1$, chaque résonance de corotation verticale (ou inclinée, car elle fait intervenir l'inlinaison, *cf.* Eq. (3.12)) est située très proche d'une résonance de Lindblad horizontale (ou excentrique, car elle agit sur l'excentricité de la particule) avec le même satellite (avec $m_L = m_C \pm 1$). La résonance de Lindblad perturbe le mouvement de libration des particules piégés dans les sites de corotation en imposant un petit mouvement elliptique aux centres des sites de libration. Elle donne d'autre part le couple et l'énergie nécessaire pour compenser celle qui est dissipée par les collisions.

3.3.5 Le modèle de Porco (1991)

Bien que les observations au sol dans les années 80 ont permis de découvrir les arcs, l'incertitude trop importante sur la position du centre de Neptune et la direction du pôle a rendu inadéquate ces détections pour la détermination précise de la position radiale des arcs. Il a fallu attendre les images *Voyager* à haute résolution pour affiner la cinématique des arcs et des anneaux de Neptune.

Galatéa évolue à environ 980 km de l'anneau Adams et présente une orbite inclinée (Owen et al., 1991). Les éléments orbitaux de ce satellite sont reproduits dans la table 3.2. En utilisant le moyen mouvement des arcs donné par Nicholson et al. (1990), qui diffère de seulement $0.0009°/\mathrm{j}$ de l'une des solutions de Nicholson et al. (1995) (*cf.* table 3.3), Porco (1991) a montré que les arcs étaient en résonance de corotation inclinée (ou verticale) 42 : 43 avec Galatéa. Cette résonance a pour angle critique $\Psi_{CIR} = 2[43\lambda - 42\lambda_G - \Omega_G]$, où λ est la longitude moyenne de la particule, et λ_G et Ω_G sont respectivement la longitude moyenne et le noeud ascendant de Galatéa. Le terme de la fonction perturbatrice contenant cet argument est proportionnel à l'inclinaison (au carré) de Galatéa, d'où le nom de corotation inclinée (*cf.* Eq. (3.12)). D'autre part, l'analyse des données *Voyager* a permis à Porco (1991) de montrer que les arcs présentaient un distortion radiale d'amplitude $\simeq$ 30 km, compatible avec le forçage de l'excentricité des particules due à la résonance de Lindblad 42 : 43 avec le même satellite. Les données *Voyager* semblaient donc confirmer le modèle de Goldreich et al. (1986).

Le tableau 3.4, basé sur les éléments orbitaux de Galatéa (Owen et al., 1991), donne le rayon et la largeur des résonances de corotation verticale (CIR) et de Lindblad horizontale (LER) du satellite qui sont le plus près de l'anneau Adams (Porco, 1991). Il indique que les arcs sont à 110 m à l'intérieur de la résonance de corotation (cette valeur est inférieure à l'incertitude sur la position de la résonance et inférieure à sa largeur), et que $a_{arc} - a_{LER} \simeq 1.5$ km, d'après la valeur du demi grand-axe des arcs obtenue à partir du moyen mouvement donné par Nicholson et al. (1990).

Epoque (DJ)	2447757.0
a (km)	61952.67 ± 0.13
n (°/j)	839.6598 ± 0.0025
e	(0.120 ± 0.149)
i (°)	0.0544 ± 0.0132
Ω (°)	112.2 ± 15.8
ϖ (°)	$220. \pm 64.$
λ (°)	46.6443 ± 0.0111
$\dot{\Omega}$ (°/j)	-0.714836
$\dot{\varpi}$ (°/j)	0.715961
P (s)	37043.58 ± 0.11

TAB. 3.2: Eléments orbitaux de Galatéa et données associées, à l'époque DJ 2447757.0 (18 août 1989, 12h TE), d'après Owen et al. (1991).

Arcs	Galatéa	Source
	839.6598 ± 0.0025	Owen et al. (1991)
820.1185 ± 0.0004		Nicholson et al. (1990)
820.1194 ± 0.0006 (1)		Nicholson et al. (1995)
820.1118 ± 0.0006 (2)		

TAB. 3.3: Moyen mouvement moyen (°/j) des arcs et de Galatéa

Type	| m |	Rayon (km)	Largeur (km)
42 : 43 CIR	43	62932.48 ± 0.13	0.6
42 : 43 LER	42	62930.83 ± 0.13	9

TAB. 3.4: Résonances du premier ordre de Galatéa avec les arcs, d'après Porco (1991). Les rayons ont été déterminés en utilisant les éléments orbitaux de Galatéa donnés par Owen et al. (1991). Les largeurs ont été calculées en utilisant une inclinaison mutuelle $i_m = 0.03°$ entre l'orbite de Galatéa et celle des arcs, un grand-axe de libration de 4° pour la résonance de corotation, et une masse de Galatéa $M_G = 2.12 \times 10^{18}$ kg.

Notons que deux résonances d'un même type sont isolées, elles ne peuvent donc pas perturber les arcs simultanément. En effet, la séparation entre deux résonances consécutives du même type, c'est-à-dire dont l'entier m diffère de 1, est (Porco et Goldreich, 1987) :

$$3\frac{(a-a_S)^2}{2a_S} = 23km, \tag{3.15}$$

qui est une valeur supérieure à la largeur d'une résonance de corotation ou de Lindblad, et supérieure à la largeur des arcs. Par contre la proximité de la résonance de Lindblad et de celle de corotation entraine un couplage, qui est d'ailleurs difficile à étudier analytiquement.

Excursion radiale des arcs

Porco (1991) a ajusté un modèle aux mesures *Voyager* décrivant la perturbation radiale due à une résonance de Lindblad avec $m = 42$. Ce modèle prend en compte les effets de l'inclinaison : il est en effet possible que l'anneau Adams soit incliné par rapport à l'équateur de Neptune. Il est illustré par la figure 3.3, qui donne l'excursion radiale (observée et ajustée) en fonction de la longitude dans le repère tournant avec le moyen mouvement de Galatéa $n_G = 839.6598°/\mathrm{j}$ (Owen et al., 1991). Le modèle prédit ainsi une excursion radiale d'amplitude $ae = 29.6 \pm 1.5$ km (équivalente à une excentricité forcée $e = (4.7 \pm 0.2) \times 10^{-4}$ en fixant le demi grand-axe à 62932.37 km), et de longueur d'onde azimutale de $360^o/m \simeq 8.57143^o$.

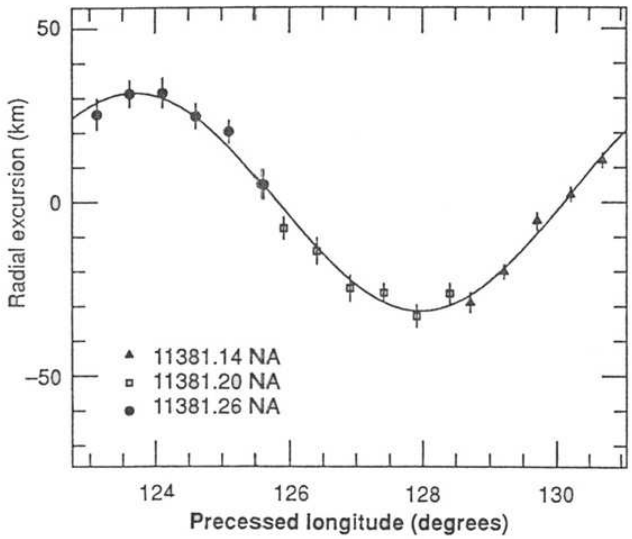

FIG. 3.3: Excursion radiale (km) en fonction de la longitude (°) de l'arc Fraternité, obtenue à partir de trois images *Voyager* prises 7.2 heures avant la rencontre la plus proche entre Neptune et la sonde. L'échelle verticale est relative au rayon moyen des images utilisées. Tous les points ont été ramenés à la même époque en utilisant le moyen mouvement de Galatéa, $n_G = 839.6598°/\mathrm{j}$ (Owen et al., 1991). La courbe en trait plein représente la perturbation théorique due à la résonance de Lindblad 42 : 43.

Toutes les images à haute résolution des arcs montrent cette distortion radiale. On ne peut prouver pour le moment que cette dernière est présente dans tout l'anneau Adams. Cepen-

dant, on peut montrer que la distortion radiale n'est pas un sillage (*wake* en anglais) créé par Galatéa sur les arcs. Ces sillages sont des perturbations locales d'un anneau dues à une rencontre avec un satellite. Ces perturbations peuvent créer des motifs sinusoidaux analogues à ceux créés par les résonances de Lindblad. La longueur d'onde d'un sillage est quasiment identique à celle d'une onde produite par une résonance, mais la phase du motif est décalé de 90° (*cf.* Eq. (63) de Goldreich et Tremaine (1982)). Par ailleurs, les sillages sont par définition limités en longitude, en raison de l'amortissement de l'excentricité des particules entre deux rencontres successives avec le satellite. L'amplitude de l'excentricité forcée d'un sillage est donné par (Julian et Toomre, 1966) :

$$ae \simeq 2.24 \frac{M_S}{M_P} \left(\frac{a}{a - a_S} \right)^2 a \tag{3.16}$$

En supposant donc que Galatéa crée des sillages et avec $ae = 29.6$ km, la masse de Galatéa est, d'après l'équation (3.16), $M_G = (5.17 \pm 0.2) \times 10^{18}$ kg. Cette valeur implique une densité très importante, à moins que le volume du satellite soit proche de la limite supérieure déduite des images *Voyager* (Thomas et Veverka, 1991). De plus, le critère d'amortissement de l'excentricité des particules entre les rencontres successives, $m^{-4}(M_N/M_G) <\simeq 1$, n'est plus vérifié avec une telle valeur pour la masse.

L'excursion radiale observée est donc très probablement une perturbation résonante. Porco (1991) a d'ailleurs montré que l'orientation du motif sinusoidal (figure 3.3) par rapport à la position angulaire de Galatéa est celle qui résulte d'une perturbation radiale causée par la résonance de Lindblad externe 42 : 43, si on suppose que les orbites des particules des arcs sont toutes à l'extérieur de cette résonance. L'amplitude de l'excursion radiale due à une résonance de Lindblad permet d'estimer la masse du satellite. Avec $ae = 29.6$ km, on a d'après l'expression (2.36) de l'excentricité forcée, une masse M_G du satellite Galatéa $M_G = 2.12 \pm 0.21 \times 10^{18}$ kg. Avec les mesures de la taille du satellite (Thomas et Veverka, 1991), on en déduit une densité raisonnable $\rho_G = 1.0 \pm 0.5$ g.cm^{-3}.

Longueurs azimutales des arcs et sites de corotation

Le modèle de Goldreich et al. (1986) et Porco (1991) prédit l'espacement et la longueur azimutale des sites de corotation : si les arcs sont en résonance de corotation inclinée 42 : 43 avec Galatéa, alors leurs longueurs angulaires ne doivent pas être supérieures à $360/2m = 4.1860°$, et les espacements doivent être des multiples entiers de cette valeur. Les arcs Courage, Liberté, Egalité 1 et Egalité 2 vérifient plus ou moins le premier critère, mais pas Fraternité, dont l'étendue angulaire est de 9.6^o (*cf.* table 3.1). Les séparations angulaires ne sont pas non plus exactement des multiples entiers de 4.186^o. Smith et al. (1989) et Porco (1991) ont envisagé l'existence de grosses particules (les sources de la poussière que l'on observe) en libration à l'intérieur des sites de corotation, avec des périodes de libration d'environ 10 ans, qui pourraient altérer la position des arcs observée.

Dispersion en demi grand-axe des particules

Une estimation de la largeur de la résonance de corotation (la dispersion maximale en demi grand-axe des particules en libration) est donnée par (Sicardy, 1991) :

$$\Delta a \simeq \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{i_m}{n} \sqrt{A_c} \tag{3.17}$$

où, pour la résonance de corotation inclinée 42 : 43,

$$A_c \simeq 0.085 m^2 \frac{M_S}{M_P} (na)^2 \tag{3.18}$$

En utilisant la limite supérieure de l'inclinaison relative ($i_m = 0.03°$) et une masse de Galatéa $M_G = (2.12 \pm 0.21) \times 10^{18}$ kg, les équations précédentes donnent une largeur de résonance $\Delta a \simeq 0.4$ km. Horanyi et Porco (1993) ont d'autre part montré numériquement que les particules des arcs ne sont plus confinées dans un site de corotation dès que la dispersion en demi grand-axe est $>\simeq 0.4$ km. La dispersion en demi grand-axe des particules des arcs est donc très probablement beaucoup plus faible que la largeur radiale observée (15 km). Une dispersion faible en demi grand-axe est compatible avec la distortion radiale cohérente observée dans les arcs (figure 3.3). En effet, dans le cas contraire et avec $\Delta a >\simeq 2$ km, les particules se répartiraient de part et d'autre de la résonance de Lindblad. Les orbites telles que $a > a_{LER}$ et $a < a_{LER}$ seraient alors déphasées de 180° et donc l'excursion radiale observée serait forcément incohérente. D'autre part, si on suppose que la dispersion en demi grand-axe des particules est égale à la largeur de la corotation ($\Delta a = W_C$), alors toutes les particules ont un demi grand-axe $a > a_{LER}$, et la largeur de l'anneau varie de W_C à la quadrature (où les orbites des particules se coupent) à $W_R = a\Delta e_f \leq 12$ km, où Δe_f est la dispersion en excentricité forcée (les particules sont à des distances différentes de la résonance de Lindblad). Cette valeur est compatible avec la largeur observée des arcs. Les arcs ont donc sûrement une largeur radiale qui résulte de la dispersion en excentricité forcée et non en demi grand-axe (Porco, 1991; Sicardy et Lissauer, 1992).

Problèmes et modifications envisagées au modèle de Porco (1991)

Même si les arcs sont confinés par la corotation inclinée avec Galatéa, cela pose plusieurs problèmes. Tout d'abord, l'inclinaison entre les orbites des arcs et de Galatéa doit être non-nulle. Or l'inclinaison mutuelle déduite de la modélisation des orbites, $i_m = 0.02° \pm 0.01°$, est statistiquement compatible avec une inclinaison nulle. D'autre part, le gradient négatif d'excentricité dans les arcs a pour conséquence des collisions à haute vitesse entre les particules de l'anneau, de l'ordre de quelques km s^{-1}. De telles collisions ne sont pas suffisamment énergétiques pour détruire complètement les particules de l'anneau (Davis et Ryan, 1990), et elles sont même nécessaires pour expliquer la présence importante de poussière. Cependant, elles peuvent modifier considérablement les éléments orbitaux des particules et les repousser en dehors de la résonance. Un autre problème est que l'arc Fraternité s'étend sur deux ou trois sites de corotation. Le modèle de Porco (1991) n'explique pas non plus pourquoi les sites de corotation occupés sont rassemblés les uns à coté des autres. Porco (1991) a suggéré et Esposito et Colwell (1992) ont montré numériquement que la destruction d'un petit satellite puis la capture des débris dans quelques sites de corotation peuvent expliquer la configuration présente. Enfin, le problème du temps de migration orbitale rapide de l'anneau, en raison des échanges de moment cinétique avec Galatéa, n'est pas résolu avec ce modèle.

La dispersion très faible en demi grand-axe des particules des arcs ouvre à nouveau la possibilité qu'un satellite de Lagrange moins massif que celui prédit originalement par Lissauer (1985) puisse confiner, au moins partiellement, les arcs. En comparant le potentiel perturbateur dû à la résonance de corotation inclinée avec Galatéa (équation (3.12)) avec celui dû à un satellite de Lagrange ($\Phi_L = f(\theta) a_L^2 n_L^2 M_L / M_P$, où $f(\theta)$ est définie par l'équation (4.2)), on constate qu'un satellite en orbite inclinée est équivalent à un satellite de Lagrange de masse $M_L \simeq i_m^2 V M_S$, où $V \simeq 0.085 m^2$ pour m grand. Ainsi, un satellite de Lagrange de masse $M_L \simeq 9.1 \times 10^{13}$ kg (*i.e.* $r \simeq 3$ km) crée un potentiel perturbateur comparable à celui de Galatéa. Un satellite d'une telle taille a très bien pu échapper à une détection par la sonde *Voyager*. Il pourrait confiner un arc dont la dispersion en demi grand-axe est $\Delta a \simeq 1$ km (Sicardy et Lissauer, 1992). L'effet combiné d'un satellite de Lagrange et de Galatéa pourrait expliquer la morphologie des arcs : le potentiel dû au satellite de Lagrange expliquerait de manière naturelle la concentration en azimut des arcs, ainsi que l'existence d'un arc qui s'étend sur au moins 3 sites de corotation. La résonance de corotation 42 : 43 expliquerait pourquoi la région des arcs est discontinue. De plus, la présence d'un satellite de Lagrange ralentirait la migration orbitale rapide vers l'extérieur de l'anneau due au couple exercé par Galatéa, d'un facteur égal au rapport $(M_r + M_L)/M_r$, où M_r est la masse de l'anneau (Sicardy et Lissauer, 1992).

Si on imagine que la concentration des arcs sur environ 40° en longitude est le résultat de la destruction d'un satellite et de la capture des débris en résonance de corotation avec Galatéa, alors les arcs peuvent contenir des petits satellites. En alimentant l'anneau en poussière, ces derniers permettraient d'expliquer pourquoi l'arc Fraternité s'étend sur 2 ou 3 sites de corotation. Ces petits satellites ralentiraient aussi naturellement la migration orbitale de l'anneau. En fait, la plupart de la masse de l'anneau proviendrait d'un petit nombre de grosses particules essentiellement non-collisionnelles, et par conséquent non soumises au couple de Galatéa.

3.3.6 Simulations de Foryta et Sicardy (1996)

Foryta et Sicardy (1996) ont examiné la dynamique d'un anneau étroit en résonance avec un satellite (Galatéa) en orbite circulaire et inclinée. Ils ont entre autres montré que même en l'absence de dissipation, le couplage entre les mouvements verticaux et horizontaux des particules de l'anneau peut entraîner une migration stochastique des particules entre les sites de corotation inclinée 42 : 43. Cette migration a lieu principalement lorsque l'inclinaison relative des arcs et du satellite est la plus faible. Sous l'effet de la pression de radiation solaire, les particules sont balayés de ces sites en quelques années, si le rapport $\beta_\odot$ (*cf.* Eq. (3.6)) entre la pression de radiation et la gravitation solaire est supérieur à environ 0.01. Ce rapport dépend de la taille et de la densité des particules, et des propriétés optiques des grains et de la source de rayonnement (*cf.* section 3.3.3). La valeur de 0.01 correspond à des particules de glace d'environ 50 μm. L'effet Poynting-Robertson n'a qu'un faible effet sur les particules de poussière déja piégées en résonance de corotation. Par contre, cet effet place rapidement sur des orbites instables les particules en dehors de la résonance.

Le problème le plus sérieux pour la stabilité des arcs est celui des collisions inélastiques entre les particules. Le gradient d'excentricité forcée par la résonance de Lindblad entraîne des collisions potentielles à des vitesses relatives typiques d'environ 1 m s^{-1}, ce qui peut impliquer des changements de demi grand-axe de l'ordre de 10 km. Des simulations de collisions des arcs de Neptune (Hanninen et Porco, 1997) ont néanmoins montré que des particules de taille de l'ordre de 10 m ou plus peuvent, malgré les collisions, rester confinés en corotation quelques

centaines d'années. Une résonance verticale externe 84 : 86, à environ 20 m de la position moyenne des arcs, réduit la fréquence de collisions et les vitesses relatives des particules.

Le modèle de Foryta et Sicardy (1996) indique que quelques grosses particules fournissent de manière continue la poussière et les petites particules nécessaires à former des anneaux. En dehors des sites de corotation, ces particules sont rapidement balayés par l'effet Poynting-Robertson. A l'intérieur, un état quasi-stationnaire peut être atteint où les particules ont une excentricité forcée par la résonance de Lindblad. En fait, les sites de corotation protègent en quelque sorte les particules d'une augmentation séculaire de l'excentricité due à cette résonance de Lindblad. Les sites de corotation pourraient correspondre à des lieux où les particules s'accumulent statistiquement. La migration stochastique de quelques fragments entre des sites de corotation peut expliquer la distribution du matériau des arcs de Neptune. Pour que ce modèle soit valide, il faut que les collisions entre les grosses particules ne soient pas trop fréquentes, ce qui est le cas si elles ne sont pas trop nombreuses. L'échelle de temps d'observation de telles structures correspond alors au temps nécessaire à une diffusion stochastique globale, *i.e.* quelques milliers d'années.

3.3.7 Auto-gravité de particules macroscopiques en corotation (Salo et Hänninen, 1998)

Les simulations numériques de Salo et Hänninen (1998) ont montré que l'auto-gravité de particules macroscopiques dans les arcs peut réduire sensiblement les collisions et donc stabiliser le confinement résonant par Galatéa. Des particules sub-kilométriques peuvent alimenter les arcs en poussière et expliquer leur structure en grumeaux. Les largeurs des arcs, qui occupent plusieurs sites de corotation, résulteraient de la présence de quelques grosses particules d'une taille de l'ordre du kilomètre.

Le scénario de Foryta et Sicardy (1996) n'est pas totalement satisfaisant puisque les impacts entre des particules macroscopiques, nécessaires pour reproduire les fractions de poussière observées, détruisent le piégeage en résonance avec Galatéa. L'échelle de temps de ce phénomène est au maximum de quelques années (Hanninen et Porco, 1997). Salo et Hänninen (1998) ont donc considéré la dynamique de particules macroscopiques (de rayons compris entre 100 m et 1 km environ) co-orbitales, non soumises aux forces de radiation. Les interactions gravitationnelles entre de telles particules n'avaient en effet jamais été prises en compte dans les travaux précédents. Le mouvement de ces particules est décrit par le formalisme du chapitre 4. Les équations du mouvement des particules co-orbitales ont été couplées avec celles décrivant la dynamique au voisinage de la résonance de corotation inclinée avec Galatéa pour déterminer le comportement de particules auto-gravitantes piégées en résonance de corotation. Salo et Hänninen (1998) ont ainsi trouvé que des particules de rayon de l'ordre de 1 ou 2 km restent piégées en résonance sans rentrer en collision.

Selon Salo et Hänninen (1998), la région des arcs contient donc des particules macroscopiques de rayons compris entre 100 m et 1 km (un site donné contenant soit une seule particule de rayon $\simeq$ 1 km, soit plusieurs particules plus petites et non collisionnelles). Tout le long de l'anneau Adams, de la poussière est produite lors d'impacts entre des particules de taille de l'ordre du mètre, avec des vitesses typiques de 1 m s^{-1}. Les sources primaires de la poussière des arcs sont les particules sub-kilométriques à l'intérieur des arcs. Lors d'impacts avec des particules kilométriques, la plupart des débris retourne sur la surface (car la vitesse d'évasion est plus grande). Le rôle principal des particules kilométriques est de séparer la région des

arcs en différents segments, expliquant ainsi les largeurs azimutales observées. La structure en grumeaux des arcs résulte de l'évasion de poussière des particules sub-kilométriques occupant le même site. Sur une échelle de temps supérieure à environ 10^3 ans, une particule de poussière s'échappe des arcs à cause des rencontres répétées avec les particules kilométriques. Cette échelle est suffisamment longue pour expliquer le contraste de densité entre les arcs et l'anneau diffus. L'origine des particules macroscopiques peut être la destruction d'un satellite ou l'accrétion de matériau au voisinage de la limite de Roche.

3.4 Origine et évolution des anneaux de Neptune

Les anneaux planétaires sont apparemment jeunes. Par exemple, L'étalement des anneaux ou le transfert de moment cinétique à des petits satellites gardiens impliquent des temps de vie courts pour les anneaux d'Uranus (Esposito et al., 1991). Dans le cas des anneaux de Saturne, les couples dus aux satellites (Goldreich et Tremaine, 1982; Borderies et al., 1989; Lissauer et al., 1984, 1985), l'érosion micrométéoritique (Northrop et Connerney, 1987), ou l'assombrissement des anneaux par incorporation de matériau météoritique (Doyle et al., 1989) donnent également des temps de vie courts. Cuzzi et Durisen (1990) ont montré que l'évolution orbitale des particules macroscopiques des anneaux due aux impacts météoritiques implique une échelle de temps plus courte que 200 millions d'années pour l'anneau C de Saturne et les anneaux α et β d'Uranus. Colwell et Esposito (1990b) ont estimé un temps de vie pour l'anneau ϵ d'Uranus inférieur à 100 millions d'années, en considérant l'érosion micrométéoritique et la perte des grains électriquement chargés.

De tels processus sont aussi à l'oeuvre dans les anneaux de Neptune mais les échelles de temps sont incertaines. La distance entre Galatéa et l'anneau Adams pourrait doubler en à priori quelques centaines d'années en raison des échanges de moment cinétique. L'érosion micrométéoritique des particules de l'anneau fournit sans aucun doute une partie de la poussière visible dans le système d'anneaux de Neptune (Smith et al., 1989), et cette poussière est éventuellement perdue par effet Poynting-Robertson. Concernant les satellites, Smith et al. (1989) ont conclu que la plupart des petits satellites de Neptune découverts par la sonde *Voyager* n'étaient pas primordiaux, mais plutôt des fragments de plus gros corps. Colwell et Esposito (1992) ont estimé à typiquement 500 millions d'années ou moins les temps de vie de ces satellites. Ces échelles de temps courtes amènent à penser que les anneaux se créent et s'érodent continuellement. En particulier, la découverte par *Voyager* d'anneaux très divers et de petits satellites proches de ces derniers suggère que les anneaux de Neptune proviennent de la destruction de petits satellites (Smith et al., 1982, 1986; Esposito, 1986; Cuzzi et Espositio, 1987; Esposito et Colwell, 1989).

Des simulations stochastiques de la fragmentation par collision de satellites Colwell et Esposito (1992, 1993) indiquent qu'il est probable que l'environnement actuel de Neptune résulte de la fragmentation successive d'un ou plusieurs gros satellites primordiaux. Ces simulations négligent tout processus de ré-accrétion, qui est pourtant une question importante. Les échelles de temps de ré-accrétion ont déja été estimées (Burns et al., 1984; Stevenson et al., 1986) à partir de de calculs encore antérieurs (Soter, 1971). Canup et Esposito (1995) ont calculé la probabilité de ré-accrétion en fonction du temps pour les satellites de Neptune. Ces probabilités indiquent qu'en dehors de la limite de Roche, la ré-accrétion est probable en quelques années. Par contre, près et à l'intérieur de la limite de Roche, les forces de marée

planétaires compliquent ce processus. L'existence des anneaux planétaires montre d'ailleurs que l'accrétion n'est pas le processus dominant proche de la planète.

Les anneaux de Neptune sont optiquement fins. Ils contiennent beaucoup de poussière, davantage que dans les anneaux de Saturne ou d'Uranus, et en quantité comparable à l'anneau F de Saturne ou aux anneaux de Jupiter. Colwell et Esposito (1990a) ont modélisé la création de poussière à partir de particules macroscopiques soumises aux collisions et au bombardement météoritique. Des études similaires concernent les anneaux de Jupiter (Burns et al., 1980, 1984) et d'Uranus (Colwell et Esposito, 1990b). La quantité de poussière contenue dans les anneaux résulte de manière générale de l'équilibre entre la poussière produite par le bombardement météoritique et les collisions, et la perte de poussière due aux effets dissipatifs ou aux interactions avec des grosses particules (rencontres, résonances). L'effet Poynting-Robertson et le frottement dû à l'exosphère de Neptune sont les processus les plus rapides pour transporter radialement des grains de poussières non chargés (Colwell et Esposito, 1990a). S'ils ne sont pas stoppés, les grains micrométriques au voisinage de l'anneau Adams tombent dans l'atmosphère de la planète en raison de ces deux effets en environ 4×10^5 ans. La situation est plus complexe pour les particules chargés (Northrop et Connerney, 1987). Puisque la densité ionique est faible dans l'environnement de Neptune (Richardson et al., 1991), le frottement dû à ce plasma est beaucoup plus faible que celui de l'exosphère, avec des échelles de temps de l'ordre de 10^7 ans. Cependant, les anneaux recapturent la majorité de la poussière libérée de la surface des particules, si bien que peu de poussière s'échappe des anneaux sur ces échelles de temps par les processus décrits ci-dessus.

Smith et al. (1989) ont montré que la poussière contenue dans les anneaux diffus Galle et Lassel peut s'expliquer par le bombardement météoritique sur des corps parents non découverts, comme l'on croit que c'est le cas dans les anneaux de Jupiter (Burns et al., 1980, 1984). Par contre, l'abondance de poussière dans les anneaux Le Verrier et Adams (ainsi que les arcs) ne peut s'expliquer par ce mécanisme. Elle résulte plutôt des collisions entre les particules (Colwell et Esposito, 1990b,a). Des vitesses de collision de l'ordre de 1 m s^{-1} sont nécessaires pour reproduire les fractions de poussière observées.

Chapitre 4

Dynamique des satellites co-orbitaux

Sommaire

4.1 Equations du mouvement **51**
4.2 Points d'équilibre **54**
4.2.1 Résultats généraux 54
4.2.2 Application 55
4.3 Stabilité linéaire des configurations d'équilibre **59**
4.3.1 Résultats généraux 59
4.3.2 Application au cas de 3 satellites co-orbitaux 61
4.4 Recherche numérique des solutions d'équilibre linéairement stables **62**
4.5 Etude de la stabilité non linéaire **64**
4.5.1 Cas des points de Lagrange L_4 et L_5 66
4.5.2 Cas de 3 satellites co-orbitaux de masses égales 67

Dans le système solaire, on trouve plusieurs exemples de configurations où des petits satellites co-orbitaux sont en orbite autour d'un corps central (planète) beaucoup plus massif. Dans le système de Saturne, un satellite (Hélène) est en libration autour du point L_4 de Dioné, et deux satellites, Télesto et Calypso, sont respectivement au point L_4 et L_5 de Téthys. D'autre part, les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée ont des orbites en fer à cheval autour de leur point L_3 mutuel.

Dans un autre contexte, la présence de quatre arcs autour de Neptune pourrait s'expliquer par l'existence de plusieurs satellites co-orbitaux (non découverts) qui confineraient la poussière observée de l'anneau formant les arcs. C'est l'objet du prochain chapitre. De manière plus générale, un anneau proche de la limite de Roche de sa planète pourrait évoluer, par accrétion, pour former une collection de petits satellites co-orbitaux qui rassembleraient ainsi la plupart de la masse de l'anneau.

Dans ce chapitre, le but est de déterminer des résultats généraux sur les *configurations stationnaires (planes) de N satellites co-orbitaux*, en orbite autour d'une planète beaucoup plus massive (problème à $N+1$ corps, plan). Ces configurations stationnaires sont souvent appelées *équilibres relatifs* : en effet lorsque les équations sont écrites dans un repère tournant (à vitesse angulaire constante), ces configurations sont des points fixes. Les équilibres relatifs sont des solutions particulières du problème à N corps qui résultent d'un choix approprié des vitesses

initiales d'une *configuration centrale*. Les configurations centrales sont les configurations du problème à N corps telles que l'accélération totale de chaque corps est égale à une constante multiplicative près au vecteur position de ce corps, l'origine étant le centre de masse du système. Elles donnent lieu à des solutions simples et explicites du problème à N corps (équilibres relatifs, *collapse* homothétique si les satellites ont des vitesses initiales nulles, ...).

Nous allons ici généraliser le travail de Salo et Yoder en 1988 (SY88) au cas de satellites co-orbitaux de masses petites et arbitraires (non nécessairement égales). En effet, dans SY88, seules sont décrites les configurations stationnaires de N ($N \leq 9$) satellites co-orbitaux *identiques*. Notre travail généralise également l'étude de Maxwell (1859) sur la stabilité des anneaux de Saturne, qui se limitait au cas de nombreuses particules identiques symétriquement réparties sur un cercle.

Plusieurs travaux sur les équilibres relatifs sont restés longtemps inconnus de l'étude de Salo et Yoder, et réciproquement, en raison de l'utilisation d'une terminologie différente mentionnée ci-dessus : Hall (1987) a étudié les équilibres relatifs plans du problème à $N+1$ corps où une masse est importante et les N autres sont petites et égales. Les principaux résultats sont les suivants : si N est suffisamment grand, le seul équilibre relatif possible est l'*anneau de Maxwell*, c'est-à-dire un polygone régulier à N cotés avec le corps central au centre. Si N est petit, d'autres configurations sont possibles. En particulier le cas $N = 3$ est entièrement résolu dans la présente étude. Moeckel (1994) a trouvé une condition nécessaire et suffisante de stabilité linéaire pour les équilibres relatifs du problème à $N+1$ corps avec N petites masses non nécessairement égales. Il est également démontré que l'anneau de Maxwell est linéairement stable si et seulement si $N \geq 7$, pour une masse centrale M suffisamment grande, plus précisément pour $M > M_{bif}$, où M_{bif} est une valeur de bifurcation (Roberts, 2000).

Récemment, les équilibres relatifs pour 4 masses égales ont été classifiés (Albouy, 1996). Il existe seulement 4 configurations : une solution colinéaire, un carré, un triangle équilatéral avec un corps au centre, et un triangle isocèle avec un corps sur l'axe de symétrie. Par contre, il n'existe pas de classification complète pour 4 masses inégales ou plus généralement pour le problème à N corps avec $N \geq 5$. Dans le problème à 5 corps, Roberts (1999) a trouvé une famille à un paramètre d'équilibres relatifs dégénérés incluant une masse négative. Par conséquent, une condition nécessaire pour que l'ensemble des classes d'équivalence des équilibres relatifs soit fini est que les masses soient positives. Le problème des configurations 3D dans le cas de 4 petites masses identiques plus 1 masse importante a aussi été abordé (Albouy et Llibre, 2002) : il n'existe pas de points d'équilibre. Cependant des configurations centrales homothétiques sont possibles. Nous nous limitons ici au cas plan.

Nous montrons dans ce chapitre que l'existence de solutions stationnaires planes pour le problème à $N+1$ corps dépend de la parité de N. Plus précisément, si N est impair, et pour une configuration angulaire donnée, il existe toujours un ensemble de masses (positives ou négatives) qui réalise un équilibre. Pour N pair au contraire, il n'y a à priori pas de combinaison de masses qui réalise un équilibre, pour des séparations angulaires données entre les satellites. Nous donnons également des résultats généraux sur la stabilité linéaire des configurations stationnaires, et traitons globalement les cas de $N = 3$ satellites avec des masses arbitraires. Nous présentons ensuite des méthodes numériques qui permettent de trouver les solutions d'équilibre, les masses des satellites étant données, ou réciproquement, de déterminer les masses, pour une configuration stationnaire donnée. Finalement, nous abordons la question de la stabilité non linéaire des solutions d'équilibre.

4.1 Equations du mouvement

Considérons N satellites co-orbitaux en orbite autour d'un corps central supposé ponctuel de masse M. On note respectivement n_0 et r_0 le moyen mouvement moyen et le rayon orbital moyen des satellites.

Nous supposons le problème plan, et que chaque satellite a une masse négligeable devant celle du corps central : quelque soit $i = 1, ..., N$, $0 \leq m_i/M << 1$, où m_i est la masse du i^{eme} satellite. Une manière plus rigoureuse de définir ces N masses infinitésimales est la suivante : quelque soit $i = 1, ..., N$, $m_i = \epsilon\mu_i$, où $\mu_i \in \mathbb{R}^+$ et $\epsilon > 0$ est un petit paramètre qui tend vers zéro.

On se place dans un repère centré sur M et tournant à la vitesse angulaire n_0. L'excentricité des satellites est supposée nulle. On suppose également que les satellites ne s'approchent pas trop de leurs rayons de Hill mutuels $r_H = r_0 \cdot \left[\left(m_i + m_j\right)/M\right]^{1/3}$. Ainsi on évite tout mouvement chaotique, et les satellites restent co-orbitaux. On ne considère pas en particulier les points stationnaires alignés avec le satellite et la planète (comme les points de Lagrange L_1 et L_2 dans le cas $N = 2$).

Le mouvement de chaque satellite est décrit par les coordonnées (ϕ_i, ξ_i), $i = 1, ..., N$, où ϕ_i est la longitude du satellite i par rapport à une longitude de référence arbitraire, et $\xi_i = \Delta r_i/r_0$ l'excursion radiale relative du satellite par rapport au rayon moyen r_0 (*cf.* figure 4.1).

Pour simplifier et sans perte de généralité, on choisit $n_0 = 1$, $r_0 = 1$ et $M = 1$. Avec ces hypothèses, on peut montrer que la dynamique de chaque satellite est régie par le système d'équations différentielles suivant (*cf.* SY88 et section 2.2) :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = -\dfrac{3}{2}\xi_i \\ \dot{\xi}_i = -2\displaystyle\sum_{j\neq i} m_j f'(\phi_i - \phi_j) \end{cases} \tag{4.1}$$

avec

$$f(\phi) = \cos\phi - \frac{1}{2|\sin\phi/2|}, \tag{4.2}$$

et

$$f'(\phi) = \sin\phi\left[-1 + \frac{1}{8|\sin\phi/2|^3}\right] \tag{4.3}$$

$$f''(\phi) = -\cos\phi - \frac{3+\cos\phi}{16|\sin\phi/2|^3}. \tag{4.4}$$

La première équation (4.1) n'est rien d'autre que la vitesse keplerienne différentielle de chaque satellite par rapport à l'orbite de référence de rayon r_0. La seconde équation contient, sous forme dérivée, tous les termes résultant des interactions gravitationnelles mutuelles entre les satellites. La fonction $f(\phi)$ (équation (4.2)) est la somme des potentiels direct et indirect exercé par un satellite donné sur les autres co-orbitaux. C'est une fontion paire, et son graphe est tracé figure 4.2, avec également ses dérivées première et seconde $f'(\phi)$ et $f''(\phi)$.

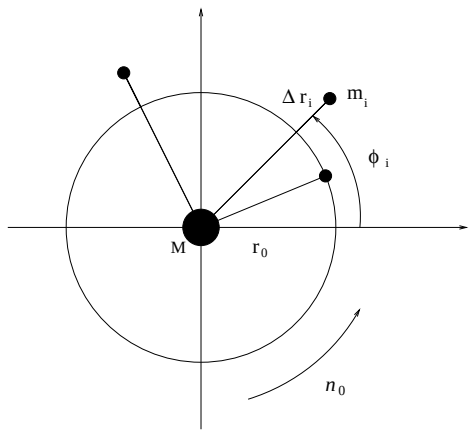

FIG. 4.1: Notations pour la dynamique des satellites co-orbitaux. Les satellites sont en orbite autour de la masse centrale M avec le même moyen mouvement moyen n_0 et le même rayon orbital moyen r_0. Les équations du mouvement (équations (4.1)) sont écrites dans un système de coordonnées centré sur M et tournant avec la vitesse angulaire n_0. Le mouvement est décrit par les coordonnées (ϕ_i, ξ_i), $i = 1, ..., N$, où ϕ_i est la longitude du satellite i par rapport à une longitude de référence arbitraire, et $\xi_i = \Delta r_i / r_0$ l'excursion radiale relative du satellite par rapport au rayon orbital moyen r_0.

Puisque f' est impaire, il est facile de montrer d'après (4.1) que $\sum_i m_i \xi_i =$ constant. Le rayon de référence r_0 étant arbitraire, il peut être choisi de telle manière que $\sum_i m_i \xi_i = 0$, sans perte de généralité. Ainsi le système (4.1) a les intégrales premières suivantes :

$$\begin{cases} \sum_i m_i \xi_i = 0 \\ \\ \sum_i m_i \phi_i = \text{constante}, \end{cases} \tag{4.5}$$

qui résultent de la conservation du moment cinétique total. Cette conservation résulte elle-même de l'invariance par rotation du problème.

Il existe une autre intégrale première du système différentiel (4.1) :

$$J = \sum_i m_i \left[-\frac{3}{4}\xi_i^2 + \sum_{j \neq i} m_j f(\phi_i - \phi_j) \right] = \text{constante} \tag{4.6}$$

Elle exprime la conservation de l'énergie dans le repère tournant, et est appelée *constante de Jacobi* (*cf.* section 2.2).

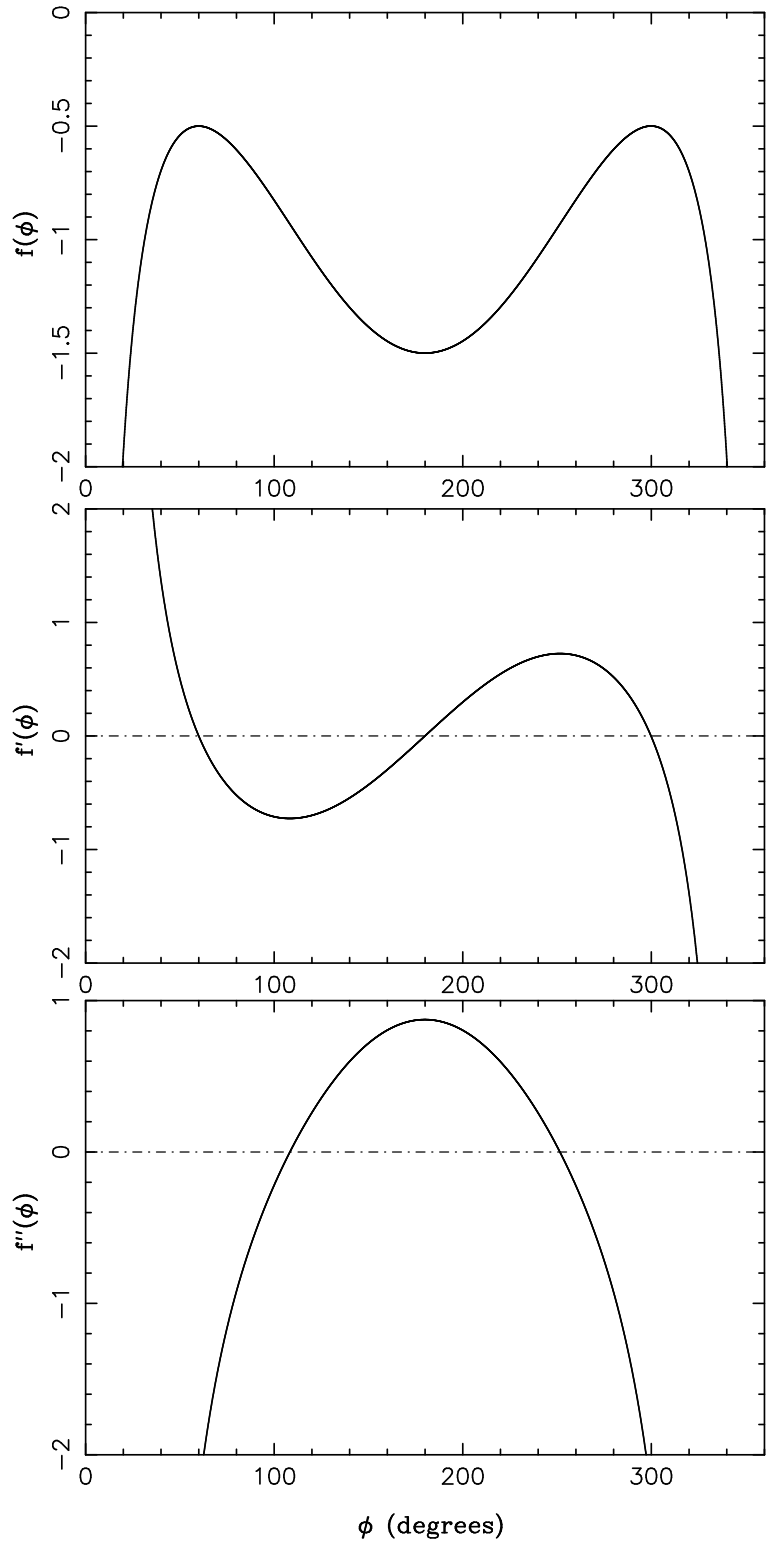

FIG. 4.2: La fonction $f(\phi)$ (Eq. (4.2)), décrivant le potentiel créé par un satellite sur une particule co-orbitale, avec ses dérivées première et seconde $f'(\phi)$ et $f''(\phi)$ (équations (4.3) et (4.4)).

4.2 Points d'équilibre

4.2.1 Résultats généraux

Les points fixes du système (4.1) sont donnés par :

$$\xi_i = 0 \tag{4.7}$$

et

$$\sum_{j \neq i} m_j f'(\phi_i - \phi_j) = 0 \tag{4.8}$$

pour tout $i = 1, ..., N$.

L'équation (4.7) signifie qu'en configuration stationnaire les N satellites co-orbitaux ont le même rayon orbital. [1] L'équation (4.8) fait intervenir les séparations angulaires entre les satellites et peut s'écrire sous forme matricielle. On définit $f'_{ij} \equiv f'(\phi_i - \phi_j)$. La fonction f' étant impaire, on obtient d'après l'équation (4.8) :

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_{12} & \cdots & \cdots & f'_{1N} \\ -f'_{12} & 0 & f'_{23} & \cdots & f'_{2N} \\ \vdots & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -f'_{1N} & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \equiv M_N \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^N} \tag{4.9}$$

La matrice $N \times N$ définie ci-dessus est anti-symétrique et ne dépend que des longitudes ϕ_i, via les coefficients f'_{ij}.

Le but ici est de trouver tous les angles ϕ_1,...,ϕ_N tels que $(m_1, ..., m_N)$ soit solution de l'équation (4.9), avec $m_1, ..., m_N \geq 0$. Il est évidemment impossible ce résoudre cette équation analytiquement pour N quelconque. Cependant, M_N étant anti-symétrique, on peut déduire des propriétés générales sur les solutions. On suppose que pour tout $i \neq j$, $\phi_i \neq \phi_j$ (f' n'est pas définie en 0).

proposition *Soit $(\phi_1, ..., \phi_N) \in [0, 360°[^N$ tel que $\phi_i \neq \phi_j$ pour tout $i \neq j$. Si N est impair, alors le rang de M_N est $rk(M_N) = N - k$, où k est un entier impair, et il existe une famille à k paramètres de vecteurs $(m_1, ..., m_N) \in \mathbb{R}^N$ pour laquelle $(\phi_1, ..., \phi_N)$ est une configuration stationnaire. Si N est pair, alors $rk(M_N)$ est généralement N, et il n'existe pas de famille de vecteurs qui réalise un équilibre.*

Preuve. Cela résulte d'un théorème classique d'algèbre linéaire : puisque M_N est anti-symétrique, son rang est pair. Par conséquent, pour des angles ϕ_i donnés, l'existence de solutions non-triviales (positives ou négatives) du système linéaire (4.9) dépend de la parité du nombre N de satellites.

[1] Dans le problème exact, cela est seulement vrai à l'ordre 0 en m_i. Les petites corrections d'ordre m_i sont ici négligées.

Remarques. Si N est impair, $rk(M_N) = N - k$ avec k impair, mais $k = 1$ presque partout (dans l'espace des ϕ_i, l'ensemble pour lequel le rang de M_N est $N - 3$, $N - 5$,..., est de mesure nulle). Ainsi, étant données des séparations angulaires *arbitraires* et non-nulles entre les satellites, il existe une famille *à un paramètre* de vecteurs pour laquelle la configuration est stationnaire : étant donnée par exemple m_1, il y a une et une seule solution $(m_1, m_2, ..., m_N)$ du système (4.9). Notons cependant que les masses doivent être positives pour que la solution correspondante ait un sens physique. Cela réduit les configurations angulaires possibles ϕ_1,...,ϕ_N à un sous-ensemble de $[0, 360°[^N$ (voir par exemple figure 4.3 pour le cas $N = 3$).

Si N est pair, le rang de M_N est généralement N : étant donnée une configuration angulaire *arbitraire* ϕ_1,...,ϕ_N, il n'existe pas en général de solutions non-triviales $(m_1, ..., m_N)$ pour lesquelles (ϕ_1,...,ϕ_N) est un équilibre. Cela est déja bien connu dans le cas $N = 2$: seuls les points de Lagrange L_3, L_4 et L_5 sont des points d'equilibre. Ainsi, on doit tout d'abord annuler le déterminant de la matrice, $\det(M_N)$, afin de trouver des solutions non-triviales du système (4.9).
Soit $D = \{(\phi_1, ..., \phi_N) \in [0, 360°[^N \mid \det(M_N) = 0\}$. Sur ce sous-espace, le rang de M_N est $N - 2$, presque partout, et cette fois il existe une famille à *deux paramètres* de vecteurs pour lesquels la configuration est stationnaire. On peut le vérifier facilement dans le cas $N = 2$. Par exemple, deux satellites à 60° l'un de l'autre sont stationnaires quelque soit le choix arbitraire des masses m_1 et m_2.

4.2.2 Application

Nous examinons ici quelques cas ($N \leq 4$) et cherchons l'ensemble des configurations stationnaires avec des masses positives. Pour simplifier, on peut supposer sans perte de généralité que l'un des satellites, par exemple m_1, est le plus massif. De plus, le problème étant invariant par une rotation globale du système, on peut mesurer toutes les longitudes par rapport à m_1. Plus précisément, nous supposons maintenant que $\phi_1 = 0$, si bien que ϕ_i ($i \neq 1$) désigne la séparation angulaire entre le satellite i et m_1.

Le cas classique de 2 satellites co-orbitaux

Avec $N = 2$, la condition d'équilibre entraîne $\xi_1 = \xi_2 = f'(\phi_2) = 0$, c'est-à-dire :

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad \phi_2 = 60°, 180° \text{ ou } 300°$$

Les points stationnaires sont donc les points de Lagrange classiques L_4, L_3 et L_5, respectivement. Notons que les points L_1 et L_2 n'apparaissent pas ici, car nous avons supposé que les satellites restent éloignés de leurs sphères de Hill mutuelles.

Le cas de 3 satellites co-orbitaux

La condition d'équilibre entraîne

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \tag{4.10}$$

qui signifie que les 3 co-orbitaux ont le même rayon orbital, et

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_{12} & f'_{13} \\ -f'_{12} & 0 & f'_{23} \\ -f'_{13} & -f'_{23} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = M_3 \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

D'après le résultat général précédent, le rang de M_3 est 2 (il est facile de vérifier que ce rang ne peut pas être nul). Donc, étant données les séparations angulaires entre les satellites, il existe une famille à un paramètre de vecteurs qui réalise une configuration stationnaire : étant donnée par exemple m_1, il existe une et une seule solution (m_1, m_2, m_3) vérifiant l'équation (4.11).

Notons qu'avec l'hypothèse $\phi_1 = 0$, il y a seulement deux variables angulaires indépendantes, ϕ_2 et ϕ_3.

On ne recherche cependant que les solutions m_1, m_2 et m_3 strictement positives. En résolvant le système linéaire (4.11), on a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{m_2}{m_1} = -\dfrac{f'_{13}}{f'_{23}} > 0 \\[2ex] \dfrac{m_3}{m_1} = \dfrac{f'_{12}}{f'_{23}} > 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

D'après ces inégalités, on peut déduire immédiatement que si (ϕ_2, ϕ_3) est solution, (ϕ_3, ϕ_2), $(360^\circ - \phi_2, 360^\circ - \phi_3)$ et $(360^\circ - \phi_3, 360^\circ - \phi_2)$ le sont aussi. Cela permet de restreindre, sans perte de généralité, la recherche des points d'équilibre au sous-ensemble suivant :

$$0 < \phi_2 < \phi_3 < 360^\circ - \phi_2.$$

On limite donc la recherche des points stationnaires, dans l'espace des $(\phi_2, \phi_3) \in [0, 360^\circ[^2$, au cadran gauche de la figure 4.3. Géométriquement, cela signifie que les trois satellites m_1, m_2 et m_3 sont ordonnés dans le sens trigonométrique direct, que ϕ_2 est compris entre 0 et 180°, et que le satellite le plus proche de m_1 est toujours m_2.

Sur ce sous-ensemble, les inégalités (4.12) permettent de trouver analytiquement toutes les séparations angulaires entre les satellites qui réalisent un équilibre, avec des masses positives (régions grises de la figure 4.3). On distingue clairement trois régions contenant chacune une infinité de positions d'équilibre, chaque solution étant associé à un rapport de masse m_3/m_1 et m_2/m_1 donné par les relations (4.12). Ces trois régions sont :

$S_1 : 0 < \phi_2 < 60^\circ, 60^\circ < \phi_3 < \phi_2 + 60^\circ$

$S_2 : 0 < \phi_2 < 60^\circ, 300^\circ < \phi_3 < \min(\phi_2 + 300^\circ, 360^\circ - \phi_2)$

$S_3 : 60^\circ < \phi_2 < 150^\circ,$
$\max(180^\circ, \phi_2 + 60^\circ) < \phi_3 < \min(\phi_2 + 180^\circ, 360^\circ - \phi_2)$

On peut de plus supposer que m_1 est le satellite le plus massif. Cela restreint les points d'équilibre (ϕ_2, ϕ_3) à appartenir à l'une des régions noires de la figure 4.3. Tous les rapports de masse m_2/m_1 et m_3/m_1 dans l'intervalle $]0, 1]$ y sont représentés.

Puisque l'hypothèse du satellite m_1 le plus massif est faite sans aucune perte de généralité, on en déduit que les régions grises de la figure 4.3 se réduisent aux régions noires par une permutation appropriée des indices $i = 1, 2, 3$. Ainsi les régions noires contiennent toutes les configurations stationnaires possibles pour $N = 3$ satellites co-orbitaux, avec l'hypothèse $m_i \ll 1$ pour tout $i = 1, ..., N$.

Les frontières entre les régions grises et noires sont des droites ou des courbes de forme ovale telles que m_2 ou m_3 est égale à m_1. La droite $\phi_3 = \phi_2$ n'a aucun sens physique puisqu'elle correspond à deux masses nulles m_2 et m_3 au même point. Idem pour les trois droites $\phi_3 = \phi_2 + 60°$, $\phi_3 = \phi_2 + 180°$ et $\phi_3 = \phi_2 + 300°$ (non représentées sur la figure 4.3) car elles correspondent à des rapports de masse infinis m_2/m_1 ou m_3/m_1, avec m_2 et m_3 séparées angulairement de 60°, 180° ou 300°, indiquant que l'on revient ainsi au problème de $N = 2$ co-orbitaux. La même chose est vraie aussi pour $\phi_2 = 60°$ (correspondant à $m_3 = 0$), et pour $\phi_3 = 60°$ ou 180° ou 300° (correspondant à $m_2 = 0$).

Les équations des courbes ovales de la figure 4.3 ont été obtenues numériquement à partir des relations (4.12). Les courbes $m_2 = m_1$, $m_2 = m_3$ et $m_3 = m_1$ sont données par $f'(\phi_3) + f'(\phi_3 - \phi_2) = 0$, $f'(\phi_2) + f'(\phi_3) = 0$ et $f'(\phi_2) + f'(\phi_3 - \phi_2) = 0$, respectivement. Sur toutes les droites ou courbes de la figure 4.3 nous avons indiqué à quelle égalité entre les masses elles correspondaient.

Il existe trois configurations stationnaires pour des masses égales. Ces solutions sont déja décrites dans SY88 et sont notées Ia, II et IIIa. Elles apparaissent sur la figure 4.3 avec la même notation. L'une d'elles est quand les trois satellites sont identiquement répartis avec des séparations angulaires de 120° (notée II sur la figure). La seconde configuration est telle que la séparation angulaire entre deux satellites adjacents est 47°.361. Elle apparaît deux fois sur la figure (notée Ia). La troisième solution possible est telle que deux des satellites sont à 138°.765 du troisième (et ainsi à 82°.470 l'un de l'autre). Cette configuration apparaît également deux fois sur la figure 4.3 (notée IIIa).

Cas de 4 satellites co-orbitaux

D'après (4.1), la condition d'équilibre s'écrit maintenant :

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \tag{4.13}$$

signifiant que les satellites ont le même rayon orbital, et

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_{12} & f'_{13} & f'_{14} \\ -f'_{12} & 0 & f'_{23} & f'_{24} \\ -f'_{13} & -f'_{23} & 0 & f'_{34} \\ -f'_{14} & -f'_{24} & -f'_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

La matrice 4×4 ci-dessus est anti-symétrique, son rang est pair. Afin d'obtenir des solutions non-triviales, il faut donc tout d'abord annuler son déterminant, c'est-à-dire :

$$f'_{14}f'_{23} + f'_{12}f'_{34} - f'_{13}f'_{24} = 0 \tag{4.15}$$

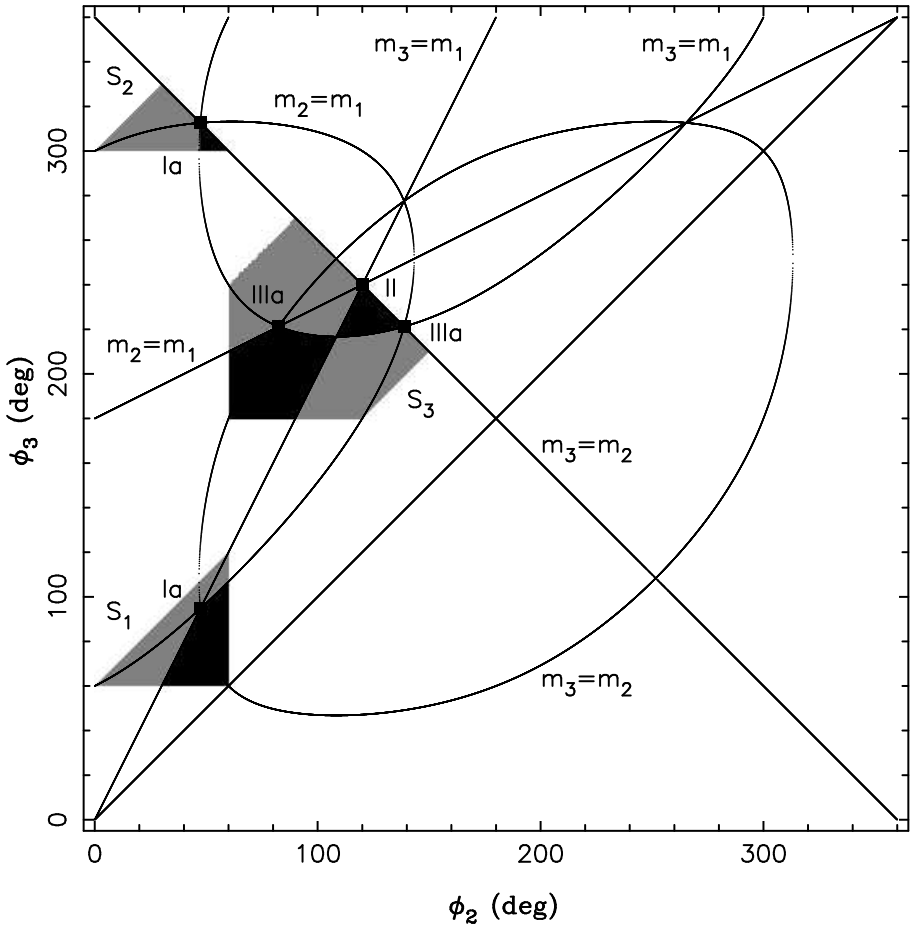

FIG. 4.3: Ensemble des configurations d'équilibre pour 3 satellites co-orbitaux de masses non-nulles et positives m_1, m_2 et m_3. Les angles ϕ_2 et ϕ_3 sont les séparations angulaires entre m_2 et m_1 et m_3 et m_1, respectivement. Le satellite m_1 est supposé sans perte de généralité à l'origine des longitudes $\phi_1 = 0$. Il est suffisant de restreindre l'étude au cadran gauche $0 < \phi_2 \leq 180°$ et $\phi_2 < \phi_3 \leq 360° - \phi_2$ (voir texte). Toutes les solutions possibles sont ensuite obtenues par symétrie par rapport aux deux diagonales. Les régions grises S_1, S_2 et S_3 correspondent aux solutions où les trois masses m_1, m_2 et m_3 sont positives, les régions noires où de plus le satellite m_1 est supposé être le plus massif. Chaque point de ces régions est une solution d'équilibre qui fixe le rapport de masse entre les satellites. Il y a une infinité de solutions qui remplissent les 3 régions. Les courbes ovales et les droites définissent des frontières où deux masses sont égales. Les points Ia, II et IIIa sont les configurations stationnaires pour 3 co-orbitaux identiques, décrites dans SY88. Notons que la droite $\phi_3 = \phi_2$ n'a aucun sens physique car elle correspond à deux masses nulles placées au même point.

En fait le vrai déterminant de la matrice est le carré du membre de gauche de l'équation ci-dessus, appelé le *Pfaffien* de la matrice anti-symétrique. Si l'équation (4.15) est vérifiée, alors la matrice est de rang 2 (encore une fois, il est facile de vérifier que ce rang ne peut être nul). Il y a donc une famille à deux paramètres de vecteurs pour laquelle la configuration est stationnaire : étant donnée par exemple m_1 et m_2, on en déduit m_3 et m_4 en résolvant l'équation (4.14). En fait, afin d'avoir des solutions non-nulles et positives, la résolution du système linéaire implique :

$$\begin{cases} sgn(f'_{34}) \times \left[f'_{14} + f'_{24} \dfrac{m_2}{m_1} \right] < 0 \\ \\ sgn(f'_{34}) \times \left[f'_{13} + f'_{23} \dfrac{m_2}{m_1} \right] > 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

où sgn désigne le signe.

Ainsi, étant donnés m_1 et des angles solutions de (4.15), il y une infinité de solutions qui dépendent du choix de m_2 vérifiant les relations (4.16). Les mêmes arguments de symétrie que ceux donnés précédemment dans le cas de $N = 3$ satellites permettent de réduire la recherche des solutions d'équilibre au sous-ensemble suivant : $\{ (\phi_2,\phi_3) \mid 0 < \phi_2 < \phi_3 \leq 180^\circ, \phi_3 < \phi_4 < 360^\circ \}$.

On ne peut pas résoudre analytiquement les équations (4.16) quelque soit le rapport m_2/m_1. Par conséquent, pour $N \geq 4$, les configurations stationnaires doivent être calculées par des méthodes numériques (voir section 5).

4.3 Stabilité linéaire des configurations d'équilibre

4.3.1 Résultats généraux

Etant donnée une configuration stationnaire $\phi_s = (\phi_{1s}, \phi_{2s}, ..., \phi_{Ns})$ et $\xi_s = (\xi_{1s}, \xi_{2s}, ..., \xi_{Ns})$ solution de (4.7) et (4.8), on développe les équations du mouvement (4.1) au permier ordre en $\Delta\phi$ et $\Delta\xi$, où :

$$\Delta\phi \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_{1s} \\ \phi_2 - \phi_{2s} \\ \vdots \\ \phi_N - \phi_{Ns} \end{bmatrix} \text{ et } \Delta\xi \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 - \xi_{1s} \\ \xi_2 - \xi_{2s} \\ \vdots \\ \xi_N - \xi_{Ns} \end{bmatrix}.$$

Cela entraîne :

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \\ \Delta\dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{3}{2} I_N \\ \\ -2A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \\ \Delta\xi \end{bmatrix} \equiv L_N \cdot \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \\ \Delta\xi \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j\neq 1} m_j f''_{1j} & -m_2 f''_{12} & \cdots & -m_N f''_{1N} \\ -m_1 f''_{12} & \sum_{j\neq 2} m_j f''_{2j} & \cdots & -m_N f''_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_1 f''_{1N} & -m_2 f''_{2N} & & \sum_{j\neq N} m_j f''_{Nj} \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

I_N est la matrice identité de $\mathbb{R}^N$, et $f''_{ij} \equiv f''(\phi_i - \phi_j)$. Remarquons que dans l'expression de A on a utilisé le fait que f' est paire, c'est-à-dire $f''_{ij} = f''_{ji}$.

Les valeurs propres de la matrice L_N (4.17) sont les fréquences propres du système autour de la configuration stationnaire (ξ_s, ϕ_s).

proposition *Supposons que $m_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., N$. Alors les $2N$ valeurs propres λ_1, λ_1,... λ_{2N} de la matrice L_N sont soit réelles soit imaginaires pures. Ainsi, une configuration stationnaire est linéairement stable si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures.*

Preuve. On considère le vecteur propre $(\Delta\phi_\lambda, \Delta\xi_\lambda)$ associé à une valeur propre λ de la matrice L_N. D'après la forme de l'équation (4.17), on constate que $(\Delta\phi_\lambda, -\Delta\xi_\lambda)$ est aussi un vecteur propre de L_N associé à la valeur propre $-\lambda$. De plus, il est facile de montrer que

$$A \cdot \Delta\phi_\lambda = (\lambda^2/3)\Delta\phi_\lambda.$$

Réciproquement, si $A \cdot \Delta\phi = \alpha\Delta\phi$ (α complexe), alors on remarque que $(\Delta\phi, \Delta\xi = \mp\sqrt{4\alpha/3}\Delta\phi)$ sont les vecteurs propres de L_N associés aux valeurs propres $\pm\sqrt{3\alpha}$.

Ainsi, trouver les $2N$ valeurs propres λ de L_N revient à trouver les N valeurs propres α de A, en prenant

$$\lambda = \pm\sqrt{3\alpha}. \tag{4.19}$$

Bien que A n'est pas symétrique, ses valeurs propres sont réelles. On peut le montrer en considérant la matrice symétrique S construite à partir de A en multipliant la première ligne par m_1, la seconde par m_2, etc... :

$$S = \begin{bmatrix} \sum_{j\neq 1} m_1 m_j f''_{1j} & -m_1 m_2 f''_{12} & \cdots & -m_1 m_N f''_{1N} \\ -m_1 m_2 f''_{12} & \sum_{j\neq 2} m_2 m_j f''_{2j} & \cdots & -m_2 m_N f''_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_1 m_N f''_{1N} & -m_2 m_N f''_{2N} & \cdots & \sum_{j\neq N} m_j m_N f''_{1N} \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

Soit $X_\alpha = (X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, ..., X_{N\alpha})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre α. Alors

$$S \cdot X_\alpha = \alpha Y_\alpha,$$

où $Y_\alpha = (m_1 X_{1\alpha}, m_2 X_{2\alpha}, ..., m_N X_{N\alpha})$. Puisque S est réelle et symétrique, on $S = \bar{S} = S^T$, où $\bar{S}$ est la matrice conjuguée de S, et S^T la matrice transposée. A partir de $S \cdot X_\alpha = \alpha Y_\alpha$, on obtient successivement :

$$X_\alpha^T S^T = \alpha Y_\alpha^T$$

$$\bar{S} \cdot \bar{X}_\alpha = S \cdot \bar{X}_\alpha = S^T \cdot \bar{X}_\alpha = \bar{\alpha} \bar{Y}_\alpha$$

En multipliant les deux membres de la dernière équation par X_α^T, on a :

$$\alpha Y_\alpha^T \bar{X}_\alpha = \bar{\alpha} X_\alpha^T \bar{Y}_\alpha.$$

Puisque les m_i sont positives, $X_\alpha^T \bar{Y}_\alpha = Y_\alpha^T \bar{X}_\alpha = m_1 |X_{1\alpha}|^2 + m_2 |X_{2\alpha}|^2 + ... + m_N |X_{N\alpha}|^2 \neq 0$, si bien que $\bar{\alpha} = \alpha$, ce qui prouve que α est réel. Donc la valeur propre $\lambda = \pm\sqrt{3\alpha}$ est soit purement réelle soit purement imaginaire (*fin de la preuve*).

Remarque. On constate que $\det(A) = 0$ car les colonnes de la matrice ne sont pas linéairement indépendantes : en additionnant toutes les colonnes on obtient le vecteur nul de $\mathbb{R}^N$. Ainsi, au moins une des valeurs propres de A (et au moins deux valeurs propres de L_N) est zéro. C'est pour cette raison que l'on a $\sum_i m_i \xi_i = 0$, exprimant la conservation du moment cinétique, commentée après l'équation (4.5). Cette conservation provient de l'invariance du système par une rotation globale, déja constatée par SY88. La valeur propre nulle de L_N (double) disparait si on abaisse la dimension du système par un changement de variables qui place un des satellites, par exemple m_1 à l'origine du système de coordonnées ($u_i = \xi_i - \xi_1$, $v_i = \phi_i - \phi_1$).

En résumé, le polynôme caractéristique $P(x)$ de la matrice L_N de taille $2N \times 2N$ est un polynôme pair de la forme $P(x) = x^2 Q(x^2)$, où $Q(y)$ est un polynôme de degré $N-1$. Comme vu précédemment, $yQ(y)$ est proportionnel au polynôme caractéristique de A, et toutes les racines α de Q sont réelles. Par conséquent, d'après (4.19), les valeurs propres λ de L_N sont soit purement réelles soit purement imaginaires (ou zéro).

La condition de stabilité linéaire est donc que toutes les valeurs propres non-triviales λ (les racines de $Q(x^2) = 0$) soient purement imaginaires, c'est-à-dire que toutes les racines de $Q(y) = 0$ soient négatives. Cette propriété est facilement vérifiée dans le cas des points de Lagrange avec $N = 2$ satellites, pour lesquels les fréquences propres associées à L_4 et L_5 sont imaginaires pures, $\lambda = \pm j\sqrt{-3(m_1+m_2)f''(\phi_s)} = \pm j\sqrt{27(m_1+m_2)/4}$, où $j = \sqrt{-1}$ et $\phi_s = 60°$ ou $300°$.

Notons enfin que pour quelques configurations stationnaires spécifiques, certaines racines de $Q(y) = 0$ peuvent aussi être nulles, indépendamment de la valeur propre nulle associée à l'invariance par rotation du système (voir l'exemple ci-dessous dans le cas de $N = 3$ satellites).

4.3.2 Application au cas de 3 satellites co-orbitaux

A part la valeur propre nulle $\lambda = 0$ (double), les quatre autres fréquences propres non-triviales sont données par :

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= x^4 - \left[(m_1+m_2)f''_{12} + (m_2+m_3)f''_{23} + (m_3+m_1)f''_{31}\right] x^2 \\ &+ (m_1+m_2+m_3)\left[m_1 f''_{12} f''_{31} + m_2 f''_{23} f''_{12} + m_3 f''_{31} f''_{23}\right] = 0. \end{aligned}$$

Les deux racines réelles de $Q(y) = 0$ ont respectivement pour somme et produit :

$$\begin{aligned} s &= (m_1+m_2)f''_{12} + (m_2+m_3)f''_{23} + (m_3+m_1)f''_{31} \\ p &= (m_1+m_2+m_3)\left[m_1 f''_{12} f''_{31} + m_2 f''_{23} f''_{12} + m_3 f''_{31} f''_{23}\right], \end{aligned} \tag{4.21}$$

si bien qu'une solution d'équilibre est linéairement stable (racines de $Q(x^2) = 0$ purement imaginaires) si :

$$\begin{aligned} s &< 0 \\ p &> 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Les régions dans l'espace des (ϕ_2, ϕ_3) pour lesquelles ces deux conditions sont vérifiées sont représentées sur la figure 4.4 par des surfaces en gris clair. Pratiquement, les seules configurations stationnaires linéairement stables pour $N = 3$ satellites sont celles délimitées par les régions triangulaires S_1 et S_2 définies précédemment, et représentées sur les figures 4.3 et 4.4. Elles correspondent à des configurations où les deux satellites les moins massifs m_2 et m_3 sont soit de chaque coté de m_1, proches des points L_4 et L_5 de ce satellite, soit regroupés ensemble près de l'un de ces points (voir exemples figure 4.5).

Les quatre courbes fermées de la figure 4.4 indiquent les points pour lesquels l'une des racines de $Q(x^2) = 0$ est zéro, c'est-à-dire

$$p = (m_1+m_2+m_3)\left[m_1 f''_{12} f''_{31} + m_2 f''_{23} f''_{12} + m_3 f''_{31} f''_{23}\right] = 0.$$

En ces points, l'une des fréquences propres non-triviales de L_N est zéro, indiquant que l'un des satellites est en équilibre en un point singulier à la limite entre des topologies elliptique et hyperbolique. En de tels points, l'équilibre est neutre, d'où la valeur propre nulle.

4.4 Recherche numérique des solutions d'équilibre linéairement stables

La résolution analytique de l'équation (4.9) étant impossible pour $N \geq 4$, on peut par contre trouver numériquement l'ensemble des solutions d'équilibre linéairement stables, une fois fixée la valeur des masses m_1, m_2,..., m_N.

L'idée est de rajouter dans les équations du mouvement un terme non-conservatif qui fait converger les satellites vers les équilibres linéairement stables. On perturbe les équations du mouvement de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = -\dfrac{3}{2}\xi_i \\ \dot{\xi}_i = -2\displaystyle\sum_{j\neq i} m_j f'(\phi_i - \phi_j) - \nu\xi_i, \end{cases} \tag{4.23}$$

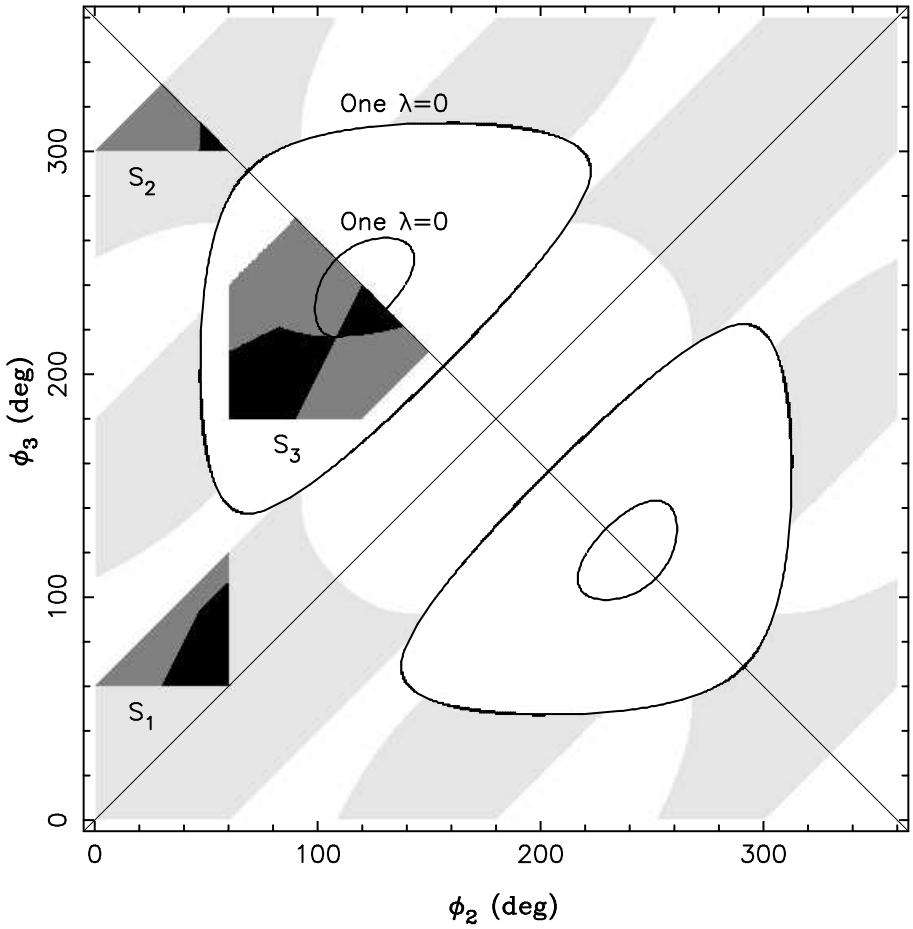

FIG. 4.4: Stabilité des configurations d'équilibre pour $N = 3$ satellites. Les régions noires et grises sombres ont la même signification que dans la figure 4.3, ce sont les seules configurations stationnaires avec les trois masses positives, limitées au cadran gauche pour plus de clarté. Les surfaces grises claires sont les régions de stabilité linéaire, où les valeurs propres de la matrice L_N sont imaginaires pures. Ainsi, seules les solutions d'équilibre des surfaces triangulaires S_1 et S_2 sont linéairement stables. Les quatre courbes fermées désignent les ensembles de points pour lesquels le produit p de l'équation (4.21) est nul, i.e. pour lesquels une des fréquences propres non-triviales λ est nulle (voir texte).

où ν est un réel strictement positif. On remarque directement que près d'un point stationnaire (conservatif), les équations linéarisées du mouvement sont :

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2}I_N \\ -2A & -\nu I_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{bmatrix} \equiv L_{N,\nu} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

avec pour valeurs propres λ de la nouvelle matrice $L_{N,\nu}$:

$$\lambda^2 + \nu\lambda = 3\alpha, \tag{4.25}$$

où les α sont les valeurs propres réelles de A. Si α est positif, alors les deux solutions de (4.25) sont réelles, avec l'une d'elles positive. Cela implique qu'une configuration linéairement instable dans le cas conservatif reste instable en introduisant le terme non-conservatif $-\nu\xi$ dans l'équation (4.23).

Réciproquement, si α est négatif, alors les solutions de (4.25) sont réelles ou complexes, mais les parties réelles de ces solutions sont négatives, puisque $\nu > 0$. Ainsi une configuration stable dans le cas conservatif est localement un point attracteur pour les solutions des équations (4.23).

Physiquement, l'introduction du terme $-\nu\xi$ dans (4.23) apporte de l'énergie au système dans le repère tournant des co-orbitaux. Plus précisément, ce terme augmente la constante de Jacobi (4.6) puisque :

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{3}{2}\sum_i m_i\xi_i\dot{\xi}_i ... = \frac{3}{2}\nu\sum_i m_i\xi_i^2 ... > 0. \tag{4.26}$$

Cela force les solutions à converger vers un maximum local de J. Ces maxima locaux correspondent en fait aux configurations stationnaires linéairement stables, une propriété démontrée par Moeckel (1994).

En intégrant numériquement les équations (4.23) avec une valeur appropriée pour le coefficient ν, avec des coordonnées initiales aléatoires et des rapports de masse $0 < m_i/m_1 \leq 1$ ($i \neq 1$) donnés, on peut trouver l'ensemble des configurations d'équilibre linéairement stables.

Nous avons vérifié qu'avec cette méthode, dans le cas de $N = 3$ satellites, on retrouve les régions trouvées analytiquement (figure 4.3). Nous avons constaté aussi que pour N petit mais $N \geq 4$, les points d'équilibre linéairement stables sont des configurations pour lesquelles les co-orbitaux sont soit proches des points L_4 et L_5 du satellite le plus massif, soit regroupés près de l'un de ces deux points.

Nous donnons ici quelques exemples de configurations stables. Dans toutes les figures (4.5, 4.6, 4.7), le satellite m_1, à l'origine $\phi_1 = 0$, est le plus massif.

4.5 Etude de la stabilité non linéaire

Remarquons tout d'abord que tous les résultats obtenus jusqu'ici ne s'appliquent qu'au cas limite où $m_i = \epsilon\mu_i$, $i = 1, ..., N$, avec $\mu_i \in \mathbb{R}^+$ et $\epsilon \longrightarrow 0$. Les configurations stationnaires

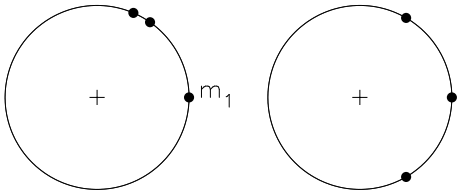

FIG. 4.5: Configurations d'équilibre linéairement stables pour $N = 3$ satellites co-orbitaux avec $m_2 = m_3 = 10^{-2}m_1$. Le satellite m_1 est à $\phi_1 = 0$. Il y exactement deux solutions linéairement stables, aux symétries près mentionnées dans le texte. De gauche à droite, les séparations angulaires des satellites 2 et 3 par rapport au satellite 1 sont : $(\phi_2, \phi_3) = (54°.84, 66°.75), (59°.82, 300°.18)$.

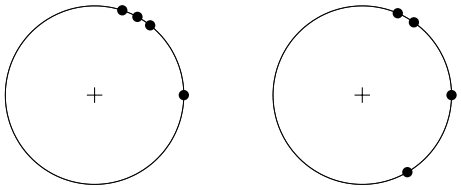

FIG. 4.6: Même chose que la figure précédente, mais pour $N = 4$ satellites co-orbitaux avec $m_2 = m_3 = m_4 = 10^{-2}m_1$. Il y exactement deux solutions linéairement stables, aux symétries près mentionnées dans le texte. De gauche à droite, les séparations angulaires des satellites 2, 3 et 4 par rapport au satellite 1 sont : $(\phi_2, \phi_3, \phi_4) = (51°.46, 61°.29, 71°.91), (54°.67, 66°.56, 300°.35)$.

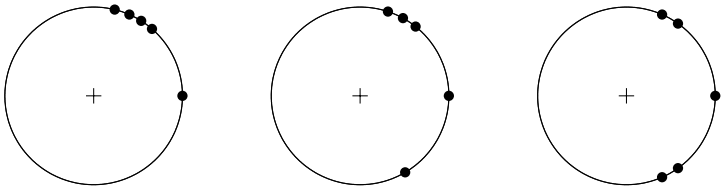

FIG. 4.7: Même chose que la figure précédente, mais pour $N = 5$ satellites co-orbitaux avec $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 10^{-2}m_1$. Il y exactement trois solutions linéairement stables, aux symétries près mentionnées dans le texte. De gauche à droite, les séparations angulaires des satellites 2, 3, 4 et 5 par rapport au satellite 1 sont : $(\phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5) = (48°.92, 57°.64, 66°.29, 76°.29), (51°.31, 61°.11, 71°.71, 300°.52), (54°.52, 66°.37, 293°.63, 305°.48)$.

avec $\epsilon \longrightarrow 0$ ne sont en effet pas forcément des limites d'équilibres avec ϵ ne tendant pas vers zéro. Une famille d'équilibres relatifs x^ϵ, convergeant lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$ vers une configuration stationnaire x du problème à $N+1$ corps, existe seulement si x est un minimum local *non-dégénéré* du potentiel $V = \sum_{i<j} \mu_i \mu_j [1 - f(\phi_i - \phi_j)]$ (cela signifie que la hessienne de V est semi-définie positive avec dim(Ker V)= 1). De plus, x^ϵ est linéairement stable pour ϵ suffisamment petit si et seulement si x est un maximum local de f. Ces questions sont traitées par Hall (1987) et Moeckel (1994).

Nous n'avons pas traité la stabilité globale non-linéaire des solutions d'équilibre. C'est un problème compliqué. Cependant, dans le cadre du problème à 3 corps restreint et circulaire, le stabilité a été démontrée dans le cas plan, à l'aide essentiellement de la théorie KAM. Des progrès ont aussi été réalisés dans le cas 3D : il a été prouvé par exemple que les points L_4 et L_5 sont stables au sens *Nekhoroshev*, c'est-à-dire stables sur des temps exponentiellement longs, pour presque tous les rapports de masse entre le satellite et le corps central, en-dessous de la valeur critique de *Routh* $\mu \sim 0.0385209$ (Benettin et al., 1998). Nous examinons ici le cas $N = 2$, puis $N = 3$ avec des masses identiques.

4.5.1 Cas des points de Lagrange L_4 et L_5

Avec toujours les mêmes hypothèses (*cf.* section 4.1), nous montrons ici que les points de Lagrange L_4 et L_5 sont stables non-linéairement, quelles que soient les masses considérées. Soit donc $N = 2$. Nous abaissons la dimension du système différentiel (4.1) par un changement de variables qui place m_1 à l'origine du système de coordonnées : $x = \phi_2 - \phi_1$, $u = (\xi_2 - \xi_1)/2$. Alors le système (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -3u \\ \dot{u} = -(m_1 + m_2) f'(x) \end{cases} \tag{4.27}$$

On s'intéresse au point critique $(x_0, u_0) = (\pi/3, 0)$, c'est-à-dire au point de Lagrange L_4. Le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -3X_2 \\ \dot{X}_2 = -(m_1 + m_2) f''(\pi/3) X_1 = \alpha X_1, \end{cases} \tag{4.28}$$

où on a posé $X_1 = x - x_0$, $X_2 = u - u_0$, et $\alpha = -(m_1 + m_2) f''(\pi/3) > 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3\alpha}$. Les valeurs propres étant imaginaires pures, le point L_4 est linéairement stable.

D'autre part, on peut écrire d'après (4.27) :

$$\frac{3}{2}u^2 - (m_1 + m_2) f(x) = K, \tag{4.29}$$

où K est une constante réelle. Développons la fonction f à l'ordre 2 autour du point critique. Sachant que $f'(\pi/3) = 0$, on a :

$$f(x) = f(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})^2 f''(\frac{\pi}{3}) + O(x^3) \tag{4.30}$$

Par conséquent, l'équation (4.29) s'écrit à l'ordre 2 :

$$\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|f''(\frac{\pi}{3})|(x - \frac{\pi}{3})^2 = K', \tag{4.31}$$

où K' est une autre constante réelle. D'après cette relation, $|u(t)|$ et $|x(t) - \pi/3|$ restent bornés, et donc le point L_4 est stable.

4.5.2 Cas de 3 satellites co-orbitaux de masses égales

Considérons maintenant le cas de $N = 3$ satellites co-orbitaux de masses identiques. On abaisse la dimension du système différentiel (4.1) par le changement de variables suivant, qui place m_1 à l'origine du système de coordonnées : $x = \phi_2 - \phi_1$, $y = \phi_3 - \phi_1$, $u = (\xi_2 - \xi_1)/2$, $v = (\xi_3 - \xi_1)/2$. Alors le système (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -3u \\ \dot{y} = -3v \\ \dot{u} = -m(2f'(x) + f'(y) + f'(x - y)) \\ \dot{v} = -m(2f'(y) + f'(x) + f'(y - x)) \end{cases} \tag{4.32}$$

D'après (4.32), $w_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ est un point critique si et seulement si :

$$f'(x_0) + f'(y_0) = 0 \quad u_0 = v_0 = 0 \quad f'(y_0 - x_0) = 0$$

On s'intéresse au point critique suivant : $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (47.36086°, 94.72172°, 0, 0)$. Soit $w = (x, y, u, v)$. On place à l'origine le point critique w_0 par la translation $w - w_0$. Posons $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) = w - w_0 = (x - x_0, y - y_0, u - u_0, v - v_0)$. Alors le système (4.32) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -3(X_3 + u_0) \\ \dot{X}_2 = -3(X_4 + v_0) \\ \dot{X}_3 = -m(2f'(X_1 + x_0) + f'(X_2 + y_0) + f'(X_1 - X_2 + x_0 - y_0)) \\ \dot{X}_4 = -m(2f'(X_2 + y_0) + f'(X_1 + x_0) + f'(X_2 - X_1 + y_0 - x_0)) \end{cases} \tag{4.33}$$

ou encore : $\dot{X} = H(X)$ avec

$$H(X) = \begin{bmatrix} H_1(X) \\ H_2(X) \\ H_3(X) \\ H_4(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(X_3 + u_0) \\ -3(X_4 + v_0) \\ -m(2f'(X_1 + x_0) + f'(X_2 + y_0) + f'(X_1 - X_2 + x_0 - y_0)) \\ -m(2f'(X_2 + y_0) + f'(X_1 + x_0) + f'(X_2 - X_1 + y_0 - x_0)) \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

On a ainsi $H(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4}$. On sépare ensuite les parties linéaire et non linéaire du champ de vecteurs :

$$\dot{X} = DH(0)X + \tilde{H}(X) \tag{4.35}$$

où $\tilde{H}(X) = O(||X||^2)$ contient tous les termes non linéaires d'ordre ≥ 2. L'équation linéarisée autour du point critique w_0 est donc :

$$\dot{X} = DH(0)X, \tag{4.36}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

avec $\alpha = -3mf''(x_0) > 0$, $\beta = -m(f''(y_0) - f''(x_0)) < 0$ et $\gamma = -m(2f''(y_0) + f''(x_0)) > 0$ ($f''(x_0) \sim -4.22$ et $f''(y_0) \sim -0.38$). Le polynôme caractéristique s'écrit : $|DH(0) - \lambda Id_{\mathbb{R}^4}| = \lambda^4 + \frac{3}{2}(\alpha+\gamma)\lambda^2 + \frac{9}{4}\alpha\gamma$. Les 4 valeurs propres du système sont : $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3\gamma/2}$ et $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{3\alpha/2}$. Elles sont imaginaires pures donc le point critique w_0 est linéairement stable.

D'autre part, pour tout $k = 1, ..., 4$, H_k est 2 fois différentiable sur tout ouvert U de $[0, 2\pi]^4$, et on a donc d'après la formule de Taylor :

$$H_k(X) = H_k(0_{\mathbb{R}^4}) + \sum_{1\leq j\leq 4} X_j \frac{\partial H_k}{\partial X_j}(0_{\mathbb{R}^4}) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq 4} X_i X_j \frac{\partial^2 H_k}{\partial X_i \partial X_j}(0_{\mathbb{R}^4}) + O(||X||^3),$$

ce qui permet de développer à l'ordre 2 $\tilde{H}(X)$. On obtient :

$$\tilde{H}(X) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1(X) \\ \tilde{H}_2(X) \\ \tilde{H}_3(X) \\ \tilde{H}_4(X) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m(\alpha_1 X_1^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)X_2^2 + 2\alpha_1 X_1 X_2) \\ -m(2\alpha_1 X_1^2 + (2\alpha_2 + \alpha_1)X_2^2 - 2\alpha_1 X_1 X_2) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

avec $\alpha_1 = f^{(3)}(x_0) \sim 13.58$ et $\alpha_2 \sim f^{(3)}(y_0) = 1.79$. A ce stade, nous ne savons pas analytiquement quelle technique utiliser pour avancer dans le problème de la stabilité non linéaire. On pourrait néanmoins avoir recours à des méthodes numériques.

Chapitre 5

Modèles alternatifs de confinement des arcs

Sommaire

5.1 Observations récentes **69**
5.1.1 Les observations de Sicardy et al. (1999b) 69
5.1.2 Les observations de Dumas et al. (1999) et Dumas et al. (2002) 71
5.1.3 Les observations de de Pater et al. (2004) 71
5.2 Le modèle de Namouni et Porco (2002) **74**
5.3 Confinement des arcs par des satellites co-orbitaux **75**
5.3.1 Test du modèle 75
5.3.2 Discussion 79

5.1 Observations récentes

Les dernières observations des arcs de Neptune ont montré d'une part que ces derniers ont globalement été peu modifiés depuis l'époque des observations *Voyager*, d'autre part qu'ils sont en fait un peu en dehors de la résonance 42 : 43 de corotation inclinée avec Galatéa. Même si cette résonance peut tout de même influencer la dynamique de ces structures, le modèle de Porco (1991) n'est pas valide, et la stabilité des arcs reste toujours inexpliquée.

5.1.1 Les observations de Sicardy et al. (1999b)

Le 6 juillet 1998, les arcs de Neptune ont été observés en optique adaptative avec le télescope Canada-France-Hawaii (*CFHT*) (Sicardy et al., 1999b). Ces observations sont présentées dans les figures 5.1 et 5.2. La figure 5.2 donne en particulier l'intensité des arcs en fonction de la longitude. Cette intensité est exprimée par la largeur équivalente, c'est-à-dire par la largeur d'un diffuseur de Lambert parfait qui réfléchirait la lumière solaire à la distance de Neptune.

La position des arcs a été comparée aux deux solutions possibles du moyen mouvement des arcs de Nicholson et al. (1995) (*cf.* table 3.3). Ces deux solutions conduisent à une différence de 24.7° en longitude à l'instant d'observation des arcs par le *CFHT*. Sicardy et al. (1999b) ont

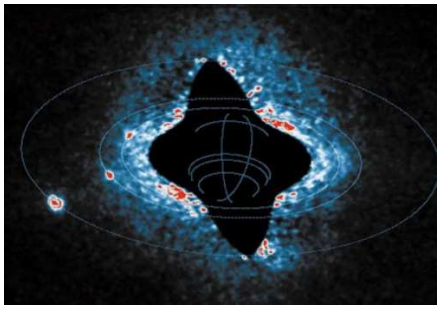

FIG. 5.1: Image des arcs de Neptune (d'après Sicardy et al., 1999b). Les ellipses représentent les orbites des trois satellites Proteus, Larissa et Galatéa, par ordre décroissant de distance à la planète. Cette image a été obtenue en additionnant neuf clichés de 600 s pris avec le télecope Canada-France-Hawaii (*CFHT*) le 6 juillet 1998 entre 11h44 et 13h15 TU. Un filtre centré sur la bande d'absorption du méthane à 1.72 μm a été utilisé pour réduire la lumière diffusée par Neptune. L'image fait 12" avec une taille de pixel de 0.03425". Le nord est en haut de l'image et l'est est à gauche, ces directions étant déterminées à 0.05° près en ayant suivi le mouvement connu d'un astéroide (554 Peraga) par rapport aux étoiles durant la même nuit. Le télescope a été équipé d'un système d'optique adaptative compensant la dégradation des images produite par l'atmosphère de la Terre. Avant d'additionner les images, une rotation a été appliquée sur chacune telle pour ramener le système à une heure commune (12h29m39s TU). Les trois satellites apparaissent en rouge à gauche de Neptune, avec une petite élongation due au mouvement orbital durant les 10 minutes d'exposition. Les arcs sont à l'élongation ouest (à droite de Neptune), juste à l'extérieur de l'orbite de Galatéa.

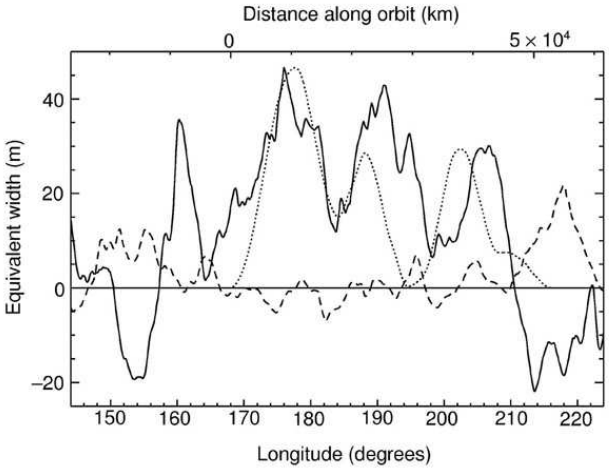

FIG. 5.2: Profil des arcs de Neptune (d'après Sicardy et al., 1999b). La largeur équivalente des arcs, obtenue à partir de l'image 5.1, est indiquée en trait plein en fonction de la longitude. Cette dernière est comptée à partir du noeud ascendant de l'équateur de Neptune sur l'équateur de la Terre (1950) à l'époque du 8 août 1989, 12h TE (temps des éphémérides sur Neptune), en utilisant le pôle de Neptune déterminé par Jacobson et al. (1991). Le mouvement orbital des arcs est de gauche à droite, *i.e.* dans le sens des longitudes croissantes. Les pics à 160° et 155° sont causés par le bruit. La courbe en pointillés longs montre le niveau de bruit dans les région des arcs. Ce dernier augmente de chaque coté des arcs à cause de la lumière diffusée par Neptune. L'autre courbe en pointillés est le profil *Voyager* convolué par le mouvement orbital des arcs pendant les 600 s de temps de pose des images du *CFHT*. Les trois arcs principaux sont Liberté (à droite), Egalité (au milieu) et Fraternité (à gauche). L'arc Courage, plus faible, apparait sous forme d'un coude juste devant Liberté dans le profil *Voyager*. Le profil *Voyager* a été arbitrairement ajusté à la position de l'arc Fraternité.

ainsi trouvé que les arcs sont plus proches de la position prédite par la solution 2 de Nicholson et al. (1995). Sur la figure 5.2, le profil *Voyager* a été deplacé arbitrairement de $+4°$ par rapport à la position prédite par cette solution, afin d'ajuster la position de l'arc Fraternité avec celle du profil *CFHT*. On note alors un décalage de 4°, entre le profil du *CFHT* et celui de *Voyager*, dans la position de Liberté et d'Egalité. Ce décalage est confirmé par les observations *HST* (Dumas et al., 1999, 2002), et pourrait résulter d'un petit mouvement de libration des arcs. Globalement, le système des arcs est $5.5° \pm 3°$ en avance par rapport à la solution 2 de Nicholson et al. (1995), ce qui correspond à un moyen mouvement moyen des arcs de $n_{arc} = 820.1135 \pm 0.0009°/\mathrm{j}$ entre août 1989 et juillet 1998 (table 5.1). La différence entre ces deux solutions est négligeable en tenant compte des barres d'erreur.

Les données du *CFHT* ont aussi permis de déterminer le moyen mouvement de Galatéa, $n_G = 839.66126 \pm 0.00052°/\mathrm{j}$ (table 5.1), et le taux de précession du noeud à partir des paramètres dynamiques de Neptune (Owen et al., 1991), $\dot{\Omega}_G = -0.714 \pm 0.02°/\mathrm{j}$. On peut ainsi en déduire le moyen mouvement de la résonance 42 : 43 de corotation inclinée (m=-43) : $n_{cor} = [(m-1)n_G + \dot{\Omega}_G]/m = 820.11765 \pm 0.00052°/\mathrm{j}$.

Sicardy et al. (1999b) détectent ainsi un décalage significatif entre le moyen mouvement des arcs et le *pattern speed* de la résonance de corotation, $n_{arc} - n_{cor} = -(4.2 \pm 1.0) \times 10^{-3}°/\mathrm{j}$. Entre août 1989 et juillet 1998, ce décalage est équivalent à une différence en longitude des arcs de $14° \pm 3°$. Cela représente plus de trois fois la longueur azimutale d'un site de corotation (4.186°), mettant ainsi en cause la validité du modèle de Porco (1991). Notons en effet qu'aucune simulation numérique n'a mis en évidence jusqu'à présent l'existence d'un tel décalage lorsqu'une particule est piégée initialement en corotation. Remarquons aussi qu'il faudrait modifier le taux de précession du noeud de Galatéa de $0.2°/\mathrm{j}$ pour rendre compte du décalage en moyen mouvement, ce qui nécessite une masse du satellite trop importante et par conséquent non réaliste.

5.1.2 Les observations de Dumas et al. (1999) et Dumas et al. (2002)

Deux autres observations des arcs de Neptune ont eu lieu en juin et octobre 1998 avec le télescope spatial Hubble (*HST*) (Dumas et al., 1999, 2002), avec la caméra proche infrarouge *NICMOS* (Near Infrared Camera Multi-Object Spectrometer). Un filtre centré à 1.87 μm de longueur d'onde a été utilisé pour absorber le méthane. Les résultats sur le moyen mouvement des arcs et du satellite Galatéa sont quasiment identiques à ceux obtenus par Sicardy et al. (1999b). Une image en fausses couleurs des arcs est donnée figure 5.3. Les moyens mouvements moyens obtenus sont donnés dans la table 5.1. Enfin la figure 5.4 est le profil de brillance longitudinal des arcs obtenu. Malgré une augmentation de la largeur de l'arc Egalité et un petit décalage par rapport à la position *Voyager* de Liberté, les arcs ont globalement peu changés entre 1989 et 1998.

5.1.3 Les observations de de Pater et al. (2004)

Plus récemment, en juillet 2002 et en octobre 2003, des observations des arcs ont eu lieu avec un télescope *Keck* de 10 m équipé d'un système d'optique adaptative, à des longueurs d'onde de 1.6 et 2.2 μm (de Pater et al., 2004). Pour la première fois depuis les observations *Voyager* de 1989, les anneaux Le Verrier et Adams ont été complètement résolus avec ces nouvelles

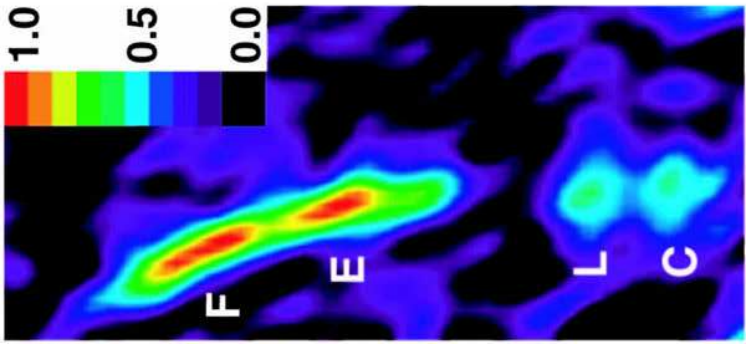

FIG. 5.3: Image en fausses couleurs des quatres arcs de Neptune (d'après Dumas et al., 1999, 2002), à une longueur d'onde de 1.87μm. Le mouvement orbital des arcs est de gauche vers la droite. L'image a été obtenue à partir de plusieurs clichés de 208 s d'exposition pris avec *NICMOS* (caméra proche infrarouge du télescope spatial Hubble) les 20 et 22 octobre 1998. Les arcs ont été reprojetés et sont ici vus perpendiculairement au plan des anneaux. Les lettres C, L, E, F correspondent respectivement aux arcs Courage, Liberté, Egalité et Fraternité. L'échelle de couleur est telle que l'arc le plus brillant a une valeur de 1.

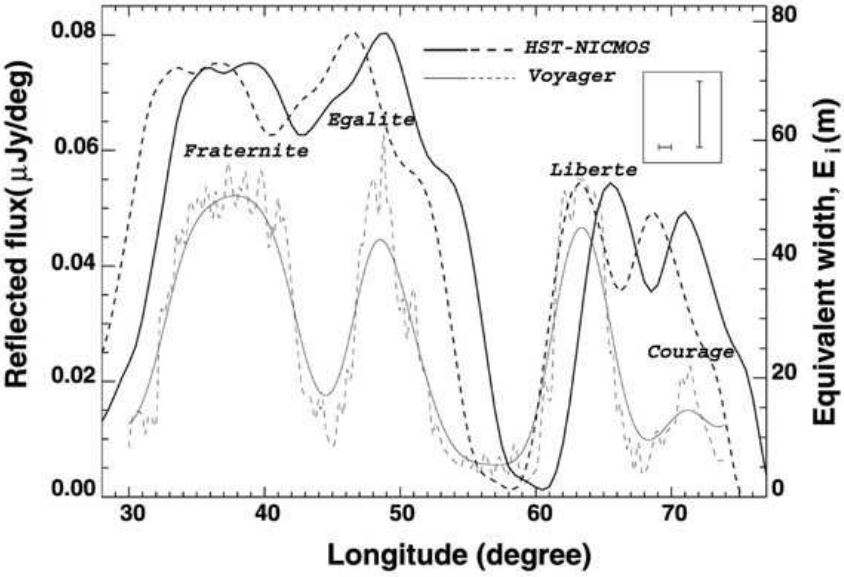

FIG. 5.4: Profil de brillance des arcs de Neptune (trait plein épais) en fonction de la longitude orbitale (croissante dans la direction du mouvement), d'après Dumas et al. (1999, 2002). Le profil est donné à la fois en flux intégré radialement et en largeur équivalente. Les arcs ont été ramenés à la même époque DJ 2451545.0 (1er janvier 2000 à 12h TE sur Neptune), en utilisant le moyen mouvement moyen des arcs révisé, $n_{arc} = 820.1122°/\mathrm{j}$ (table 5.1). Les longitudes sont comptées à partir du noeud ascendant de l'équateur de Neptune sur l'équateur de la Terre (2000). Le profil *Voyager* est indiqué en traits fins et pointillés, et la convolution de ce profil avec la PSF de *NICMOS* en trait plein et fin. Ces deux profils ont aussi été ramenés à l'époque DJ 2451545.0, en utilisant le même moyen mouvement révisé des arcs. Les arcs ont peu changés depuis 1989, mais néanmoins on note quelques différences, particulièrement pour les arcs Liberté et Egalité. Liberté s'est apparemment décalé d'environ $+2°$, et la largeur d'Egalité a augmenté. Le trait en pointillé épais correspond à une solution possible qui maximise la corrélation entre les profils *Voyager* et *NICMOS*.

observations. L'apparence de ces deux anneaux a très peu changé. Par contre, la figure 5.5 montre que les arcs se sont un peu modifiés depuis les précédentes détections.

Tout d'abord, Egalité a changé en brillance relative par rapport à Fraternité. Les données indiquent qu'en 2002, Egalité était environ 17% plus brillant que Fraternité, alors qu'en 2003 environ 7% moins intense, soit une différence relative totale de l'ordre de 25%. Tout comme en 1998, les observations *Keck* montrent que l'extension longitudinale de cet arc est un peu plus importante qu'en 1989. La longueur azimutale de Fraternité est par contre 75% de celle du profil *Voyager*. D'autre part, l'intensité de l'arc Liberté a diminué depuis 1998. Dans le profil de 2002, il apparaît difficile de distinguer cet arc du bruit, mais en 2003, la brillance relative de Liberté par rapport à Fraternité est d'environ 30%. En 2003, l'arc Courage a enfin diminué en intensité par rapport à 1998 pour atteindre une valeur comparable à celle des observations *Voyager*. Apparemment, cet arc s'est déplacé d'environ 8° dans le sens du mouvement orbital par rapport à 1989. Les observations de 2002 ne permettent pas de confirmer ce résultat, car Galatéa se trouvait alors à proximité de l'arc.

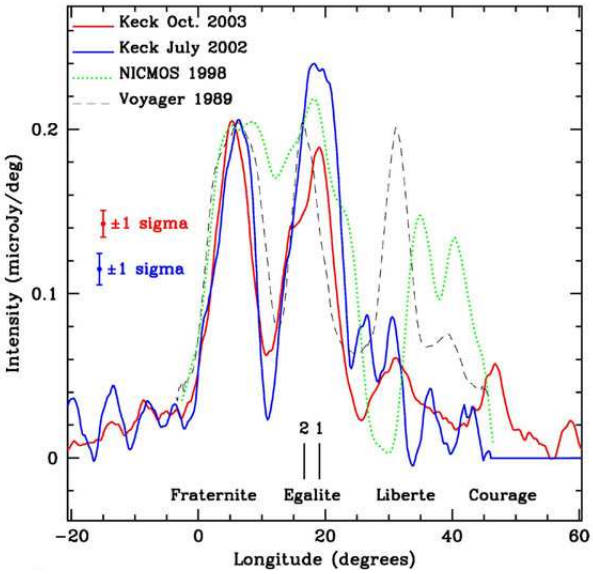

FIG. 5.5: Profil des arcs de Neptune (d'après de Pater et al., 2004), obtenu par les observations *Keck* de juillet 2002 et octobre 2003. Le profil est comparé à ceux des observations *Voyager* (1989) et *NICMOS* (1998). Les profils *Keck* et *Voyager* ont été lissés à une résolution de 3°. Toutes les intensités données ont été mises à l'échelle de l'intensité de l'arc Fraternité en octobre 2003.

Arcs	Galatéa	Source
820.1120 ± 0.0004	839.6617 ± 0.0004	Dumas et al. (1999)
820.1135 ± 0.0009	839.66126 ± 0.00052	Sicardy et al. (1999b)
820.1122 ± 0.0003	839.6615 ± 0.0004	Dumas et al. (2002)
820.1118 ± 0.0001	839.66136 ± 0.00007	de Pater et al. (2004)
	839.66130 ± 0.00003	Jacobson et Owen (2004)

TAB. 5.1: Moyen mouvement moyen et révisé (°/j) des arcs et de Galatéa

Concernant les moyens mouvements, les résultats de de Pater et al. (2004) sont résumés dans la table 5.1, et confirment à nouveau ceux de Sicardy et al. (1999b) et Dumas et al. (1999, 2002). La position de l'arc Fraternité coincide en fait exactement avec celle prédite par la solution 2 de Nicholson et al. (1995), ce qui donne un moyen mouvement moyen des arcs $n_{arc} = 820.1118 \pm 0.0001°/\text{j}$. Le moyen mouvement moyen de Galatéa, $n_G = 839.66136 \pm 0.00007°/\text{j}$, est en parfait accord avec les déterminations de Sicardy et al. (1999b) et Dumas et al. (1999, 2002). Marchis et al. (2004) ont de manière indépendante mesuré les positions précises des satellites de Neptune Proteus, Larissa, Galatéa et Despina. Ces données ont ensuite été utilisées dans une étude plus globale pour déduire aussi le moyen mouvement moyen de Galatéa (Jacobson et Owen, 2004). La détermination précise de l'orbite de ce satellite permettra de trouver d'éventuelles déviations dans les éphémérides causées par les interactions gravitationnelles avec les arcs.

5.2 Le modèle de Namouni et Porco (2002)

Les dernières observations des arcs de Neptune laisse la stabilité des arcs de Neptune inexpliquée. Namouni et Porco (2002) ont proposé qu'une autre résonance, la résonance 42 : 43 de corotation excentrique avec Galatéa, pouvait expliquer le confinement des arcs si ces derniers sont suffisamment massifs.

La résonance de corotation excentrique est située à environ 2 km à l'intérieur de l'orbite des arcs (*cf.* table 5.2). Cette résonance crée 43 maxima de potentiel pouvant piéger les particules. Les sites de corotation ont une longueur angulaire de 8.37°, et le pattern speed de cette résonance est $n_{CER} = n_G - \kappa_G/43 = 820.1481°/\text{j}$, où n_G et κ_G sont respectivement le moyen mouvement et la fréquence épicyclique de Galatéa. L'intensité de la résonance, proportionnelle à l'excentricité du satellite, peut être supérieure à celle de la corotation inclinée, qui elle est proportionnelle au carré de l'inclinaison de Galatéa.

Type	Angle critique	Δa (km)
Corotation excentrique	$43\lambda - 42\lambda_G - \varpi_G$	-1.982
Corotation inclinée	$86\lambda - 84\lambda_G - 2\Omega_G$	-0.282
Lindblad	$43\lambda - 42\lambda_G - \varpi$	- 1.936
Lindblad 2	$86\lambda - 84\lambda_G - \varpi_G - \varpi$	-1.959

TAB. 5.2: Résonances entre les arcs et Galatéa. Les variables λ, ϖ, Ω, λ_G,ϖ_G, Ω_G sont respectivement la longitude moyenne, la longitude du périapse et la longitude du noeud ascendant de la particule et de Galatéa. La distance à la résonance, Δa, est donnée relativement au demi grand-axe des arcs (62932.7 km) déterminé par Dumas et al. (2002). Pour calculer les rayons des résonances, nous avons utilisé le moyen mouvement de Galatéa de Jacobson et Owen (2004) et les paramètres physiques de Neptune de Owen et al. (1991), ces derniers ayant aussi servi à calculer les taux de précession de Galatéa, à partir du demi grand-axe de Dumas et al. (2002). Deux autres résonances moins importantes dynamiquement, qui font intervenir le noeud de l'anneau, d'angles critiques respectifs $86\lambda - 84\lambda_G - \Omega_G - \Omega$ et $86\lambda - 84\lambda_G - 2\Omega$, sont à environ -0.3 km des arcs.

Si par contre les arcs sont massifs, ils modifient le taux de précession de Galatéa et il est alors possible de déplacer la résonance de corotation excentrique exactement au demi grand-axe de l'anneau.

Pour déterminer la masse nécessaire, on annule la variation temporelle de l'angle critique de corotation excentrique, c'est-à-dire $\dot{\varpi}_G = 43(n_{arc} - n_{CER})$. Trois principaux effets vont modifier le taux de précession de Galatéa $\dot{\varpi}_G$: la résonance de corotation excentrique, la résonance de Lindblad 2 et la perturbation séculaire. En quantifiant ces effets, Namouni et Porco (2002) ont trouvé analytiquement la masse nécessaire pour que la résonance coincide avec les arcs. L'expression obtenue dépend de l'excentricité de Galatéa. La valeur de l'excentricité est incertaine et compatible avec une valeur nulle, puisque d'après Owen et al. (1991), $e_G = 0.120 \pm 0.149 \times 10^{-3}$. Un grand intervalle de masses est donc possible : de $0.23M_G$ (où $M_G = 2.12 \times 10^{18}$ kg désigne la masse de Galatéa) pour $e_G = 10^{-4}$ à $0.002M_G$ pour $e_G = 10^{-6}$. Cependant, la largeur de la résonance de corotation excentrique étant reliée à l'excentricité de Galatéa par $W_{CER} \simeq 250\sqrt{e_G}$, on obtient $e_G = 2.5 \times 10^{-6}$ si on suppose que cette largeur est égale à 0.4 km (*i.e.* la valeur correspondante à la largeur de la résonance de corotation inclinée) et une masse des arcs de $0.006M_G$. Notons qu'il est assez facile de déplacer la résonance au niveau des arcs, même si ces derniers ont une masse faible, car la résonance de corotation excentrique force un taux de précession du périapse inversement proportionnel à l'excentricité de Galatéa. En comparaison, la résonance de corotation inclinée induit un taux de précession du noeud proportionnel à $II_G^{-1} \simeq 1$, ce qui conduit à un décalage négligeable de la résonance.

Le confinement des arcs par la résonance de corotation excentrique permet d'expliquer la longueur angulaire de l'arc Fraternité, de l'ordre de 10°, qui occuperait ainsi un seul site de corotation. Selon Namouni et Porco (2002), le couplage entre les résonances de corotation excentrique et inclinée modifie la forme du potentiel de corotation excentrique et crée des points d'équilibre supplémentaires, ayant des séparations angulaires plus petites, qui expliqueraient la présence d'arcs plus petits que Fraternité. En supposant que l'excentricité de Galatéa est $e_G = 10^{-6}$, la masse de l'anneau est alors $0.002M_G$, et correspond à un satellite de l'ordre de 10 km de rayon avec une densité comparable à celle de Galatéa. Cependant, tout satellite de rayon supérieur à ~ 6 km aurait à priori dû être détecté dans les données *Voyager* (Smith et al., 1989), ce qui implique qu'avec ce modèle la masse n'est probablement pas contenue dans un seul corps. D'autre part, l'origine d'une éventuelle faible excentricité de Galatéa doit être déterminée, car en raison des forces de marée causées par Neptune, l'excentricité de Galatéa s'amortit en seulement 100 millions d'années environ (Goldreich et al., 1986).

5.3 Confinement des arcs par des satellites co-orbitaux

5.3.1 Test du modèle

L'alternative envisagée dans cette thèse pour expliquer le confinement des arcs de Neptune est la suivante : les arcs sont essentiellement de la poussière piégée entre des petits satellites co-orbitaux. Ces derniers sont en configuration d'équilibre (*cf.* chapitre 4), ou bien en libration autour d'une telle solution. Quatre ou cinq corps suffisent pour rendre compte de la morphologie des arcs. En fait, la région des arcs se trouverait au point de Lagrange (L_4 ou L_5) d'un petit satellite, d'un rayon de l'ordre de 5 km et donc indétectable dans les données *Voyager*. Les arcs contiendraient trois ou quatre petits satellites co-orbitaux (ou grosses particules co-orbitales), de l'ordre de 1 km, qui seraient en configuration stationnaire avec le satellite de Lagrange. La taille du satellite de Lagrange est arbitraire dans le modèle que nous proposons, elle correspond en gros à la limite de détection des observations *Voyager*. Il existe néanmoins une limite inférieure pour la taille des satellites co-orbitaux : en effet s'ils sont trop petits, alors les arcs

ne ressentent plus que le potentiel perturbateur dû à Galatéa (*cf.* fin de la section 3.3.5). En revanche, la masse relative des satellites co-orbitaux est imposée par une condition d'équilibre qui dépend des séparations angulaires entre les satellites, ces dernières devant correspondre approximativement aux longueurs azimutales observées des arcs (*cf.* chapitre 4). Le satellite Galatéa perturbe, sans le détruire, l'ensemble de ce système, en particulier par la résonance de Lindblad 42 : 43. Nous montrons ici que ce modèle est compatible avec les observations les plus récentes et que le système est stable numériquement, au moins sur des échelles de temps courtes (quelques dizaines ou centaines d'années). Nous discuterons ensuite brièvement de l'origine et de l'évolution possibles d'un tel système, et des améliorations à apporter au modèle.

Nous avons utilisé un intégrateur Burlish-Stoer, plus particulièrement celui du code *mercury6* développé par John Chambers (Chambers, 1999), qui a l'avantage d'être très précis pour des intégrations à court terme. On intègre les équations du mouvement dans un repère cartésien centré sur Neptune. Les éléments orbitaux (géométriques) sont calculés selon la méthode donnée en annexe A. Les paramètres de Neptune utilisés dans les simulations (masse, rayon et coefficients zonaux) sont ceux de la table 5.3.

R_N (km)	25225
GM_N (km^3.s^{-2})	6835107.0 ± 15
J_2	$(341.05 \pm 0.9) \times 10^{-5}$
J_4	$(-3.47 \pm 0.1) \times 10^{-5}$

TAB. 5.3: Paramètres physiques de Neptune, d'après Owen et al. (1991).

On intègre tout d'abord le mouvement de satellites co-orbitaux et de particules test (arcs) en orbite autour de Neptune, en l'absence du satellite Galatéa. Les conditions initiales sont données dans la table 5.4. La figure 5.6 montre, dans un repère tournant avec le satellite le plus massif, le rayon en fonction de la longitude. Nous avons considéré le cas de quatre satellites co-orbitaux, de masses relatives $m_2/m_1 = m_3/m_1 = m_4/m_1 = 10^{-2}$. Le satellite le plus massif a pour masse $m_1 = 6 \times 10^{14}$ kg. Pour une densité moyenne $\rho = 1$ g cm^{-3}, cela correspond à un rayon $R = 5.2$ km. Pour les autres satellites, le rayon est alors de l'ordre de 1 km. Les quatre satellites sont initialement en configuration stationnaire stable (l'une des deux solutions possibles de la figure 4.6, *cf.* chapitre 4). Ils restent en équilibre durant toute l'intégration (150 ans). Les particules test ont un mouvement lent de libration entre les satellites. Le système est en gros au point de Lagrange L_4 du satellite le plus massif (S_1). Les séparations angulaires des satellites ($\sim 10°$ par exemple entre S_3 et S_2 ou S_4 et S_3) ne correspondent pas ici exactement aux extensions longitudinales observées des arcs (*cf.* par exemple table 3.1 ou les profils des arcs dans les figures 5.2, 5.4 et 5.5). Cependant, les résultats du chapitre 4 ont montré qu'il y a une infinité de solutions stables : en modifiant les masses relatives des satellites, il est facile d'obtenir des séparations angulaires égales aux longueurs azimutales observées des arcs. Rappelons qu'en configuration stationnaire stable, le système de co-orbitaux est toujours au point de Lagrange (L_4, L_5 ou les deux) du satellite le plus massif. Les rayons des satellites sont donc toujours de l'ordre de 1 ou 2 km pour un satellite de Lagrange de rayon ~ 5 km. La formation d'un tel système est par contre à expliquer (section 5.3.2).

Le système précédent est ensuite soumis aux perturbations du satellite Galatéa. Les simulations numériques montrent qu'il reste stable, au moins sur de courtes échelles de temps de l'ordre de quelques dizaines ou centaines d'années. Les conditions initiales d'une intégration

		satellites		
M (6×10^{14} kg)	1	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}
a (km)	62932.698	62932.698	62932.698	62932.698
e	0.	0.	0.	0.
i (°)	0.	0.	0.	0.
Ω (°)	–	–	–	–
ϖ (°)	0.	51.46	61.29	71.91
λ (°)	0.	51.46	61.29	71.91
		particules test		
a (km)	62932.698	62932.698	62932.698	62932.698
e	0.	0.	0.	0.
i (°)	0.	0.	0.	0.
Ω (°)	–	–	–	–
ϖ (°)	48.	58.	68.	75.
λ (°)	48.	58.	68.	75.

TAB. 5.4: Masses des satellites et conditions initiales pour la simulation de la figure 5.6. Les satellites sont ainsi en configuration stationnaire (*cf.* chapitre 4 et figure 4.6). En utilisant les paramètres de Neptune de la table 5.3, le demi grand-axe choisi pour les satellites et les particules correspond à un moyen mouvement $n = 820.1122°/\mathrm{j}$, c'est-à-dire au moyen mouvement moyen des arcs (*cf.* table 5.1).

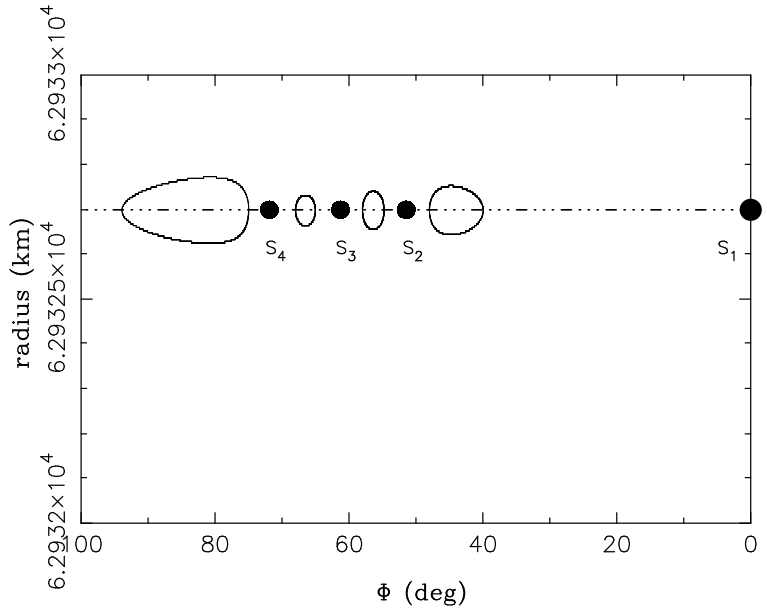

FIG. 5.6: Mouvement de quatre satellites co-orbitaux et de quatre particules test autour de Neptune. La figure donne le rayon (km) en fonction de la longitude (°) dans un repère tournant avec le satellite le plus massif (S_1). Les masses des satellites et les conditions initiales sont donnés dans la table 5.4. Les paramètres de Neptune (masse, rayon et coefficients zonaux) utilisés sont résumés dans la table 5.3. Le temps d'intégration est de 150 ans, soit de l'ordre de la période de libration des particules test entre les satellites.

typique sont résumées dans la table 5.5. Galatéa est placée initialement sur une orbite circulaire. Le demi grand-axe donné a_G correspond à un moyen mouvement $n_G = 839.6613°/\mathrm{j}$ (table 5.1), en utilisant les paramètres de Neptune de la table 5.3. Nous avons choisi arbitrairement une inclinaison $i_G = 0.0544°$, et Galatéa est initialement placé à son noeud ascendant. Notons que les résultats obtenus sur la stabilité des arcs sont identiques si on supprime cette inclinaison. Elle a néanmoins pour effet de moduler éventuellement la forme des arcs, car le système est proche de la résonance de corotation inclinée 42 : 43. La masse de Galatéa, $M_G = 1.94 \times 10^{18}$ kg est choisie comme suit : d'après Porco (1991), l'amplitude de l'excursion radiale des arcs est $ae_f = 29.6$ km, où e_f est l'excentricité forcée par la résonance de Lindblad et a le demi grand-axe des arcs. Avec $a \simeq 62932$ km, on a $e_f = 4.7 \times 10^{-4}$. D'autre part, d'après Foryta et Sicardy (1996), l'excentricité forcée par la résonance de Linblad est donnée par :

$$e_f = -\frac{a}{a_G} A \frac{M_G}{M_N} \left| \frac{3}{2} m \frac{a - a_{CIR}}{a_{CIR}} + \frac{\dot{\Omega}_G - \dot{\varpi}}{n} \right|^{-1} \simeq 2.487 \times 10^{-4} \frac{M_G}{M_N}, \tag{5.1}$$

où $m = -43$, $A \simeq 0.802m$, M_N ($\sim 10^{26}$ kg) est la masse de Neptune, a_{CIR} est le demi grand-axe de la résonance de corotation inclinée, $\dot{\Omega}_G$ est le taux de précession du noeud de Galatéa, et où $\dot{\varpi}$ et n sont respectivement le taux de précession du périapse et le moyen mouvement des arcs. Evaluons donc ces paramètres. Le moyen mouvement n des arcs est donné dans la table 5.1. Le taux de précession du noeud de Galatéa est $\dot{\Omega}_G = -0.71422°/\mathrm{j}$, et est calculé à partir du demi grand-axe de Galatéa donné dans la table 5.5 et des paramètres de Neptune de la table 5.3. Le rayon de la corotation est calculé par itération sur le moyen mouvement à partir des fréquences de Galatéa : on obtient $a_{CIR} = 62932.418$ (et aussi $a_{LER} = 62930.764$ pour la résonance de Lindblad). Enfin, le taux de précession du périapse des arcs est calculé à partir des mêmes paramètres de Neptune et des éléments orbitaux des arcs (*cf.* ci-après). On en déduit ainsi $M_G = 1.94 \times 10^{18}$ kg.

Pour les satellites co-orbitaux et les particules test, on modifie les conditions initiales de la simulation précédente sans Galatéa. L'inclinaison est tout d'abord supposée initialement nulle. Il faut ensuite placer le système en résonance de Lindblad 42 : 43 avec Galatéa. On donne donc à tous les objets l'excentricité forcée donné ci-dessus, $e_f = 4.7 \times 10^{-4}$. D'autre part, pour un satellite en résonance de Lindblad, l'angle critique de résonance Ψ_{LER} vérifie $\Psi_{LER} = \pi$, ce qui entraîne $\varpi = 43\lambda - \pi$. On en déduit ainsi ϖ pour chaque satellite ou particule, en conservant les mêmes longitudes initiales moyennes que précédemment. Enfin, on ajuste initialement les demi grands-axes pour que l'écart en moyen mouvement moyen par rapport à la résonance de corotation soit compatible avec les observations. Le pattern speed de la résonance de corotation inclinée est donné par $n_{CIR} = (42n_G + \dot{\Omega}_G)/43 = 820.11768°/\mathrm{j}$, en supposant $n_G = 839.6613°/\mathrm{j}$ (table 5.1) et $\dot{\Omega}_G = -0.71422°/\mathrm{j}$ (*cf.* ci-dessus). L'écart observé est donc $n - n_{CIR} = -5.48 \times 10^{-3}\ °/\mathrm{j}$, équivalent à une derive en longitude moyenne correspondante de $-5.5°$ environ tous les 1000 jours. On procède alors à des intégrations Neptune + Galatéa + particule en ajustant le demi grand-axe pour retrouver cette valeur.

La figure 5.7 représente, dans un repère tournant avec le satellite co-orbital le plus massif (S_1), les rayons orbitaux des satellites (en rouge) et des particules test en fonction de la longitude. On constate que les perturbations dues à Galatéa ne détruisent pas la configuration d'équilibre des co-orbitaux. Ces derniers ont alors un mouvement de libration autour de leur configuration d'équilibre. D'autre part, les particules sont piégés entre les satellites, au moins sur quelques dizaines d'années. En rencontrant un satellite, une particule peut rejoindre la partie diffuse de l'anneau Adams. Après 1000 ans d'intégration, l'une des quatre particules test

est toujours piégée entre deux co-orbitaux. Les autres ont rejoint l'anneau diffus. L'excursion radiale de l'ordre de 60 km résulte du forçage de l'excentricité par la résonance de Lindblad 42 : 43. Elle est identique à la distortion radiale des arcs observée (*cf.* figure 3.3). Les figures 5.8 et 5.9 donnent en fonction du temps les angles critiques des résonances de Lindblad et de corotation inclinée, pour le satellite co-orbital le plus massif. La figure 5.10 représente la dérive en longitude moyenne du système par rapport à la longitude moyenne qu'aurait une particule en résonance de corotation inclinée 42 : 43 avec Galatéa. Le système est en-dehors de cette résonance, et dérive avec le taux prévu théoriquement, $\Delta n_{CIR} = -5.48 \times 10^{-3}\ ^\circ/\mathrm{j}$. D'autre part, Galatéa force dans les simulations une inclinaison aux satellites et aux particules de l'ordre de 0.035°. En fait, l'inclinaison varie de 0 à 0.035° avec une période de l'ordre de 30 ans, une remarque déja mentionnée par Foryta et Sicardy (1996). Cette période résulte de la précession différentielle des noeuds des particules et de Galatéa. Notons enfin que la masse totale du système, de l'ordre de $3 \times 10^{-4} M_G$, est ici insuffisante pour déplacer la résonance de corotation excentrique 42 : 43 au niveau des arcs, selon le modèle de Namouni et Porco (2002).

	Galatéa	co-orbitaux			
M (kg)	1.94×10^{18}	6×10^{14}	6×10^{12}	6×10^{12}	6×10^{12}
a (km)	61952.606	62932.99	62933.08	62933.1	62933.08
e	0.	4.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}
i (°)	0.0544	0.	0.	0.	0.
Ω (°)	180.	–	–	–	–
ϖ (°)	180.	180.	232.91	295.37	31.99
λ (°)	180.	0.	51.46	61.29	71.91
		particules test			
a (km)	62933.1	62933.045	62933.09	62933.055	
e	4.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}	4.7×10^{-4}	
i (°)	0.	0.	0.	0.	
Ω (°)	–	–	–	–	
ϖ (°)	84.	154.	224.	165.	
λ (°)	48.	58.	68.	75.	

TAB. 5.5: Masses des satellites et conditions initiales pour la simulation de la figure 5.7. Par rapport à la simulation précédente sans Galatéa (table 5.4), les conditions initiales des satellites co-orbitaux et des particules test ont été modifiées, d'une part pour placer correctement le système en résonance de Lindblad 42 : 43 avec Galatéa, d'autre part pour que l'écart par rapport à la corotation inclinée soit compatible avec les dernières observations (*cf.* texte).

5.3.2 Discussion

Le modèle développé ici est le seul à ce jour qui explique de manière naturelle les longueurs azimutales observées des arcs de Neptune. La poussière des arcs est piégée entre des grosses particules co-orbitales, d'une taille de l'ordre de 1 ou 2 km, elles-mêmes au point de Lagrange d'un satellite plus massif. La théorie développé au chapitre 4 permet de trouver l'ensemble des configurations d'équilibre. La question de l'origine d'un tel système est par contre ouverte. La destruction d'un satellite plus ancien ou l'accrétion de matériau au voisinage de la limite de Roche de la planète peuvent créer des petits satellites co-orbitaux. La formation par accrétion d'un système de grosses particules co-orbitales (figure 5.6) pourrait se faire de manière

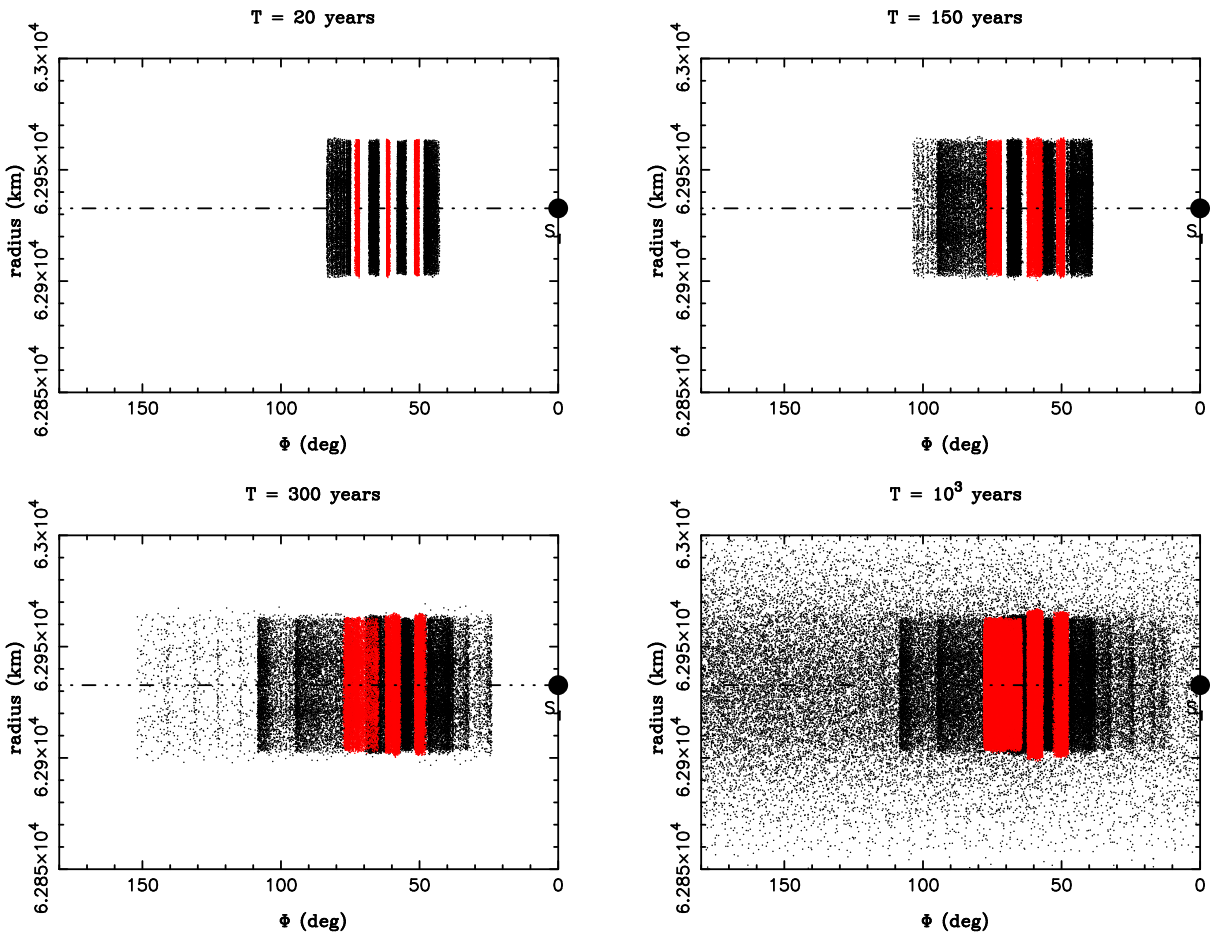

FIG. 5.7: Rayon orbital (km) des satellites co-orbitaux (en rouge) et des particules test (en noir) en fonction de la longitude (deg), dans un repère tournant avec le satellite co-orbital le plus massif (S_1). Les conditions initiales sont données dans la table 5.5. Ces orbites sont représentées respectivement après 20, 150, 300 et 1000 ans d'intégration.

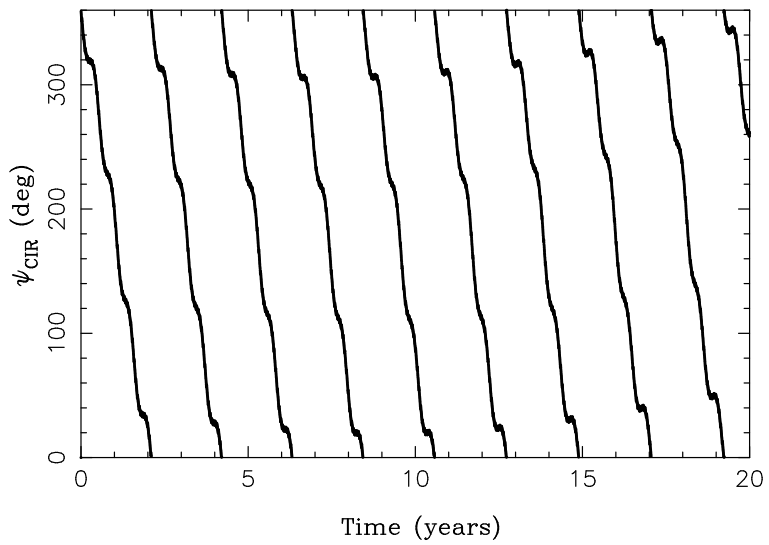

FIG. 5.8: Angle critique (°) de la résonance de corotation inclinée 42 : 43 avec Galatéa en fonction du temps (années), pour l'un des satellites co-orbitaux (S_1). Les conditions initiales sont données dans la table 5.5. L'expression de l'angle est : $\Psi_{CIR} = 86\lambda - 84\lambda_G - 2\Omega_G$, où λ est la longitude moyenne et λ_G et Ω_G la longitude moyenne et la longitude du noeud ascendant de Galatéa, respectivement. Il y a résonance lorsque l'angle critique est en libration autour de 180°.

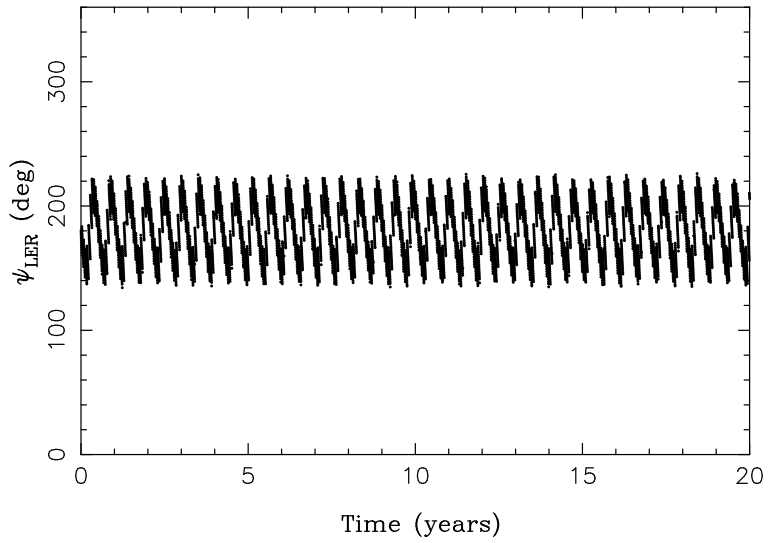

FIG. 5.9: Angle critique (°) de la résonance de Lindblad 42 : 43 horizontale avec Galatéa en fonction du temps (années), pour l'un des satellites co-orbitaux (S_1). Les conditions initiales sont données dans la table 5.5. L'expression de l'angle est : $\Psi_{LER} = 43\lambda - 42\lambda_G - \varpi$, où λ et ϖ sont respectivement la longitude moyenne et la longitude du périapse, et λ_G la longitude moyenne de Galatéa. Le satellite est piégé en résonance car l'angle critique est en libration autour de 180°.

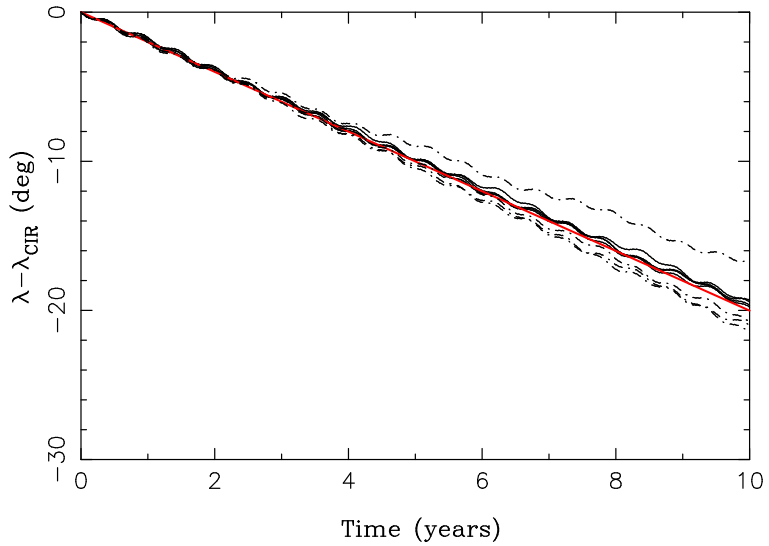

FIG. 5.10: Dérive en longitude moyenne (°) du système par rapport à la corotation en fonction du temps en années. En rouge est indiquée la dérive théorique qui résulte de l'écart observé en moyen mouvement des arcs par rapport à la résonance de corotation, $n - n_{CIR} = -5.48 \times 10^{-3}$ °/j (*cf.* texte). Les satellites co-orbitaux sont en trait plein, et les particules test en pointillés.

hiérarchique : une premier corps pourrait se former, puis du matériau s'accrèterait au point de Lagrange (L_4 et L_5) de ce satellite, pour ensuite former de nouvelles grosses particules de façon à ce que l'ensemble soit en configuration stationnaire. Les arcs seraient ainsi la poussière résiduelle piégée entre ces satellites. Dans la continuité de cette thèse, il faudrait donc simuler comment une collection de particules auto-gravitantes et en collision peut former des petits satellites au voisinage de la limite de Roche de la planète. Des études récentes, qui simulent en particulier la formation des familles d'astéroides, pourraient probablement s'appliquer à ce problème (Michel et al., 2001, 2002, 2003, 2004). Puisque l'anneau Adams est en résonance de Lindblad 42 : 43 avec Galatéa, le couple séculaire échangé (*cf.*Eq.(3.3)) pourrait permettre de faire converger des particules en phase d'accrétion vers une configuration stationnaire. Une fois que le système est en configuration d'équilibre, le couple est réduit car il n'y a plus d'échange avec les satellites (Sicardy et Lissauer, 1992), et donc la migration orbitale de l'anneau ralentit. D'autre part, en rencontrant les co-orbitaux, les particules test migrent de la région des arcs vers l'anneau diffus. Cela n'est cependant pas suffisant pour expliquer le contraste de densité entre ces deux zones de l'anneau. Des particules de taille de l'ordre de 100 m sont sans doute nécessaires pour reproduire les fractions de poussière observées et la structure en grumeaux des arcs. Des impacts avec les co-orbitaux peuvent aussi réalimenter les arcs en poussière. Les variations d'intensité et les déplacements en longitude des arcs observés depuis 1989 (Sicardy et al., 1999b; Dumas et al., 1999, 2002; de Pater et al., 2004) pourraient s'expliquer en partie par le mouvement de libration des satellites co-orbitaux autour de leur position d'équilibre. Des effets dissipatifs pourraient aussi être inclus dans le modèle (collisions, effet Poynting-Robertson, pression de radiation solaire). En particulier, le problème des collisions reste majeur, car avec des vitesses relatives typiques de 1 m s^{-1}, les éléments orbitaux des particules peuvent être énormément modifiés. Un couplage avec le modèle de Namouni et Porco (2002) pourrait être aussi envisagé : la stabilité du système pourrait être assurée sur des échelles de temps plus longues, si les arcs étaient piégés entre des petits satellites co-orbitaux, suffisamment massifs

pour activer la résonance de corotation excentrique avec Galatéa. La question de l'évolution d'un tel système est également ouverte. Il se peut que l'existence d'un système de petits satellites co-orbitaux fasse partie d'un processus préalable à la formation d'un satellite. Il se peut aussi que le phénomène soit plus transitoire, et redonne par exemple un anneau, si la configuration d'équilibre est rompue (par collision, augmentation séculaire de l'excentricité, ...). Enfin, il faudrait pouvoir détecter les éventuels satellites co-orbitaux. Les télescopes les plus puissants à l'heure actuelle, couplés à un système d'optique adaptative, pourraient peut-être permettre de déceler au moins un satellite de Lagrange, à environ $\pm 60^\circ$ de la région des arcs.

Deuxième partie

Prométhée et Pandore

Chapitre 6

Un système chaotique

Sommaire

6.1 Introduction **87**
6.2 Modèle numérique **89**
6.3 Confirmation du chaos **91**

6.1 Introduction

Prométhée et Pandore sont deux petits satellites, de diamètre de l'ordre de 100 km, découverts sur des images *Voyager* prises en 1980 et 1981. Ils se trouvent juste à l'extérieur des anneaux principaux de Saturne, de part et d'autre de l'anneau F, à environ 140000 km de la planète. Ce sont des exemples de satellites "gardiens", selon la théorie développée par Goldreich et Tremaine (1979) pour expliquer le confinement des anneaux d'Uranus, car ils pourraient stabiliser, au moins partiellement, l'anneau F. Cependant, le mécanisme précis de confinement est en fait peu compris, car la dynamique de l'anneau F est bien plus complexe que celle des anneaux d'Uranus (superposition de résonances, interactions ou collisions avec Prométhée, ...). La dynamique du système et les interactions avec l'anneau F ont toutefois été largement étudiées théoriquement (Dermott, 1981; Showalter et Burns, 1982; Lissauer et Peale, 1986; Kolvoord et al., 1990; Murray et Giuliatti Winter, 1996; Murray et al., 1997; Namouni, 1998; Showalter et al., 1999b,a; Giuliatti Winter et al., 2000; Poulet et Sicardy, 2001; Showalter, 2004).

Après leur découverte, les orbites des deux satellites ont été ajustées aux données *Voyager* sous forme d'ellipses précessantes (Synnott et al., 1981, 1983). Les moyens mouvements ont été déterminés à partir des images *Voyager* et les taux de précession calculés à partir des données sur le champ de gravité du système de Saturne (Nicholson et Porco, 1988; Campell et Anderson, 1989).

Les observations du télescope spatial Hubble (*HST*) lors du passage de la Terre et du Soleil dans le plan des anneaux de Saturne en 1995 et 1996 ont conduit à une découverte surprenante : la longitude de Prométhée retarde d'environ vingt degrés par rapport à celle des éphémérides déduites des observations *Voyager* (Bosh et Rivkin, 1996; Nicholson et al., 1996). Puis on a découvert que la longitude de Pandore est par contre en avance d'une quantité similaire par rapport aux éphémérides *Voyager* (McGhee, 2000). Plusieurs auteurs ont ensuite confirmé ces

anomalies de moyen mouvement (Murray et al., 2000; McGhee et al., 2001; Evans, 2001; French et al., 2003; French et McGhee, 2003). En particulier, à partir d'archives *HST* de 1994, d'images durant le passage de la Terre dans le plan des anneaux, et d'une importante série d'observations *HST* entre 1996 et 2004 avec la caméra grand champ WFPC2, French et al. (2003) ont déterminé les positions de Prométhée et Pandore et les ont comparées aux prédictions données par les éphémerides (révisées) basées sur les images *Voyager* (Evans, 2001). Entre décembre 1994 et décembre 2000, les écarts en longitude orbitale de Prométhée et Pandore relatifs aux éphémérides *Voyager* ont augmenté ou diminué respectivement de -0.71°/an et +0.44°/an. De plus, à la fin de l'année 2000, les moyens mouvements de Prométhée et Pandore ont brutalement changé de -0.77°/an et +0.92°/an, respectivement. D'autre part ces observations ont permis de détecter dans la longitude de Pandore l'effet d'une résonance de corotation 3 : 2 avec le satellite Mimas. Cette résonance se trouve à environ cinquante kilomètres de l'orbite de Pandore. Enfin, par des ajustements aux observations *HST* entre 1994 et 2000, sous forme d'orbites équatoriales précessantes, French et al. (2003) ont déterminé les éléments orbitaux des deux satellites.

Les anomalies en moyen mouvement de Prométhée et Pandore sont anti-corrélées et proviennent d'une interaction chaotique entre les deux satellites (Goldreich et Rappaport, 2003a). Les simulations numériques de Goldreich et Rappaport (2003a) incluant Prométhée, Pandore et Saturne (avec les termes dus à l'aplatissement) ont conduit à un exposant de Lyapunov de l'ordre de 0.3 an^{-1}, pour des masses des deux satellites équivalentes à des densités moyennes égales à 0.63 g cm^{-3}, qui est la densité du satellite Epiméthée (Nicholson et al., 1992).

Définissons respectivement l'exposant et le temps de Lyapunov. Les orbites chaotiques ont la caractéristique d'être extrêmement sensibles aux conditions initiales. L'exposant de Lyapunov (ou plus exactement l'exposant caractéristique de Lyapunov maximal) permet de mesurer le taux de divergence de deux trajectoires proches d'un système dynamique. Considérons deux orbites séparées dans l'espace des phases d'une distance d_0 à l'instant t_0. Soit d la distance entre les deux trajectoires à l'instant t. Alors l'orbite est chaotique si d et d_0 sont reliés par : $d = d_0 \exp \gamma(t - t_0)$, où $\gamma > 0$ est l'exposant caractéristique de Lyapunov maximal. Le temps de Lyapunov est défini par $1/\gamma$. C'est donc le temps nécessaire pour que la séparation entre deux trajectoires augmente d'un facteur e.

Les interactions chaotiques ont lieu tous les 6.2 ans quand les périapses de Prométhée et Pandore sont anti-alignés. A chaque anti-alignement, les simulations montrent que des changements brutaux de moyen mouvement peuvent alors se produire, suggérant ainsi que les modifications de moyen mouvement de Prométhée et Pandore observées à la fin de l'année 2000 ont eu lieu au moment où les périapses des deux satellites étaient anti-alignés. Goldreich et Rappaport (2003b) ont ensuite prouvé que la cause du chaos est la superposition de quatre résonances de moyen mouvement 121 : 118, et montré que l'exposant de Lyapunov de 0.3 an^{-1} provenait du fait que l'angle critique dominant des quatre résonances traversait environ deux fois la séparatrice entre deux anti-alignements consécutifs des périapses.

Des simulations numériques incluant les perturbations des huit satellites principaux de Saturne ont confirmé le caractère chaotique des interactions entre Prométhée et Pandore (Renner et Sicardy, 2003; Cooper et Murray, 2004). Les effets dus à deux résonances 3 : 2 avec Mimas (corotation et Lindblad) sont clairement visibles dans ces simulations. Cooper et Murray (2004) ont aussi montré que les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée jouent un rôle dans l'évolution dynamique de Prométhée et Pandore : ces derniers sont respectivement en résonance 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée, et ces résonances contribuent au mouvement chaotique de Prométhée et Pandore sur de longues échelles de temps. En comparant leurs intégrations avec

les éphémérides disponibles pour les deux satellites, Cooper et Murray (2004) ont déduit des incertitudes de l'ordre de 4° en longitude moyenne durant l'orbite de la sonde *Cassini* autour de Saturne.

Dans ce chapitre, nous confirmons les mouvements chaotiques de Prométhée et Pandore, avec un modèle numérique qui prend en compte l'aplatissement de Saturne (jusqu'au terme J_6) et les perturbations gravitationnelles des satellites principaux, dont les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée. Dans le chapitre suivant (chapitre 7), nous montrerons comment déterminer les masses de Prométhée et Pandore, en ajustant les simulations numériques aux données *HST*. Ces ajustements seront utilisés pour fournir les positions orbitales des deux satellites, ainsi que les incertitudes résultant des interactions chaotiques, durant la mission *Cassini* autour de Saturne.

6.2 Modèle numérique

Afin d'étudier la dynamique de Prométhée et Pandore, nous avons utilisé un intégrateur de type *Radau* (Everhart, 1985), plus particulièrement celui du code *mercury6* développé par John Chambers (Chambers, 1999). Le paramètre de précision de l'algorithme, *i.e.* l'erreur maximale autorisée par l'intégrateur à chaque pas d'intégration, a été fixé à 10^{-12}. Le modèle inclut les satellites suivants (par ordre croissant de distance à la planète) : Prométhée, Pandore, Epiméthée, Janus, Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan et Japet. L'aplatissement de Saturne est pris en compte jusqu'au terme J_6. On intègre les équations du mouvement dans un repère cartésien $(O\mathbf{XYZ})$ centré sur Saturne, où $(O\mathbf{XY})$ est le plan équatorial de Saturne, $\mathbf{X}$ le vecteur unitaire ayant pour direction le noeud ascendant de l'équateur de Saturne sur l'équateur de la Terre $J2000$, $\mathbf{Z}$ le pôle de Saturne $J2000$, et $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \times \mathbf{X}$. La notation $J2000$ est une dâte correspondant au 1er janvier 2000 à 12h TDB (temps dynamique barycentrique), *i.e.* à DJ 2451545.0, où DJ signifie la dâte julienne. Il existe un repère de référence $J2000$, qui a pour axe $\mathbf{x}$ le vecteur unitaire d'origine le centre de la Terre pointant dans la direction de l'intersection du noeud ascendant de l'équateur moyen de la Terre sur l'écliptique $J2000$, et pour axe $\mathbf{z}$ le vecteur unitaire parallèle au pôle nord de la Terre $J2000$.

Pour toutes les simulations, l'instant initial d'intégration est DJ 2449940.0 = 10 août 1995 à 12h UTC (sur Saturne), car les éléments orbitaux de Prométhée, Pandore, Janus et Epiméthée sont connus à cette dâte (voir ci-dessous). Nous avons utilisé les paramètres de Saturne (masse, rayon et aplatissement) donnés dans la table 6.1. Ces derniers résultent de l'analyse des données *Pioneer* et *Voyager* (Campell et Anderson, 1989).

R_S (km)	60330
GM_S (km^3.s^{-2})	37931272
J_2	16298×10^{-6}
J_4	-915×10^{-6}
J_6	103×10^{-6}

TAB. 6.1: Paramètres physiques de Saturne, d'après Campell et Anderson (1989).

Les éléments orbitaux de Prométhée et Pandore à l'époque DJ 2449940.0, reproduits dans la table 6.2, sont tirés de French et al. (2003). Ils résultent de l'ajustement aux données *HST*,

	Prométhée	Pandore	Janus	Epiméthée
Epoque (DJ)	2449940.0	2449940.0	2449940.0	2449940.0
a (km)	139377.624	141713.1075	151461.99	151414.61
n (°/j)	587.28747	572.78560	518.2383	518.4822
e	$(1.92 \pm 0.21) \times 10^{-3}$	$(4.5 \pm 0.3) \times 10^{-3}$	0.0066	0.0126
i (°)	0.	0.	0.	0.
Ω (°)	–	–	–	–
ϖ (°)	257 ± 10	359 ± 6	107.95	222.95
λ (°)	339.155	96.023	35.33	175.33

TAB. 6.2: Eléments orbitaux des satellites internes, à l'époque DJ 2449940.0. Les éléments orbitaux de Prométhée et Pandore résultent des ajustements aux données *HST* pour la période du 1er décembre 1994 au 6 décembre 2000 (French et al., 2003). Les incertitudes (en excentricité et en longitude du périapse) sont données à 3-σ. Les longitudes sont comptées à partir du noeud ascendant de l'équateur de Saturne à l'époque considérée sur l'équateur de la Terre $J2000$. Le plan équatorial de Saturne à l'époque est définie par rapport à la direction du pôle de Saturne $J2000$ ($\alpha_P = 40.5955°$ et $\delta_P = 83.53812°$ d'après French et al., 1993). Les demi grands-axes sont calculés à partir des moyens mouvements en utilisant les valeurs pour GM_S, J_2 et J_4 donnés par Nicholson et Porco (1988). Pour les ajustements les orbites sont supposées équatoriales. Les éléments orbitaux de Janus et Epiméthée résultent des ajustements aux données *HST*, lors du passage de la Terre dans le plan des anneaux de Saturne en 1995, sous forme d'ellipses précessantes équatoriales (McGhee et al., 2001). Les longitudes sont aussi comptées à partir du noeud ascendant de l'équateur de Saturne à l'époque sur l'équateur de la Terre $J2000$, et les demi grands-axes calculés à partir des moyens mouvements en utilisant les valeurs pour GM_S, J_2 et J_4 donnés par Nicholson et Porco (1988). Les excentricités et les longitudes du périapse sont calculées à l'époque considérée en utilisant des éphémérides existantes (Nicholson et al., 1992; Yoder et al., 1989).

Satellite	GM (km^3.s^{-2})
Epiméthée	0.0357
Janus	0.1284
Mimas	2.4048
Encelade	4.0586
Téthys	40.2071
Dioné	74.4591
Rhéa	163.8631
Titan	8927.5042
Japet	117.587

TAB. 6.3: Masses des satellites de Saturne. Les valeurs pour Janus et Epiméthée sont tirées de McGhee et al. (2001). Celles des autres satellites proviennent de la théorie semi-analytique $TASS1.6$ (Table 10 de Vienne et Duriez, 1995), où on a utilisé la valeur de GM_S de Campell et Anderson (1989). La masse d'Encelade n'étant pas bien déterminée avec $TASS1.6$, nous avons arbitrairement choisi la valeur de la théorie précédente, $TASS1.5$, qui est voisine de celle provenant de travaux antérieurs (Harper et Taylor, 1993; Dourneau, 1987).

sous forme d'ellipses précessantes équatoriales, pour la période du 1er décembre 1994 au 6 décembre 2000. Dans nos simulations, seules l'excentricité et la longitude moyenne sont fixées aux valeurs nominales données par French et al. (2003). En effet, on verra dans le prochain chapitre qu'un grand ensemble de conditions initiales a été utilisé pour les autres éléments orbitaux (demi grands-axes et longitudes du périapse, en supposant les orbites équatoriales) afin de trouver les masses de Prométhée et Pandore par ajustement aux observations *HST*. Pour Janus et Epiméthée, les éléments orbitaux proviennent de McGhee et al. (2001) et sont donnés dans la table 6.2, à l'époque DJ 2449940.0. Ils résultent également de l'ajustement aux données *HST*, sous forme d'ellipses précessantes équatoriales, lors du passage de la Terre dans le plan des anneaux de Saturne en 1995.

Les longitudes de Prométhée, Pandore, Epiméthée et Janus sont mesurées dans le plan équatorial $(O\mathbf{XY})$ de Saturne et comptées à partir du noeud ascendant de l'équateur de Saturne à l'époque considérée sur l'équateur de la Terre $J2000$, c'est-à-dire à partir du vecteur $\mathbf{X}$ défini ci-dessus. Avant chaque intégration numérique, on transforme ces éléments orbitaux (*géométriques*) en vecteurs position-vitesse dans le repère cartésien $(O\mathbf{XYZ})$ centré sur Saturne. Les transformations utilisées sont détaillées dans l'annexe A. Elles proviennent de la théorie épicyclique de Borderies et Longaretti (1987), Longaretti et Borderies (1991), Borderies-Rappaport et Longaretti (1994) et sont du second ordre en excentricité. Elles sont également utilisées pour calculer réciproquement les éléments orbitaux géométriques des satellites à partir des vecteurs position-vitesse fournis par l'intégration. De telles transformations nécessitent de calculer, par itération, des fréquences telles que le moyen mouvement n, le taux de précession du périapse $\dot{\varpi}$ et, lorsque l'on considère des orbites non-équatoriales, le taux de précession du noeud $\dot{\Omega}$. Les expressions de ces fréquences sont aussi données dans l'annexe A.

Pour les autres satellites, nous avons utilisé la théorie semi-analytique $TASS1.6$ (Vienne et Duriez, 1995) pour avoir les conditions initiales à l'epoque DJ 2449940.0. Pour chaque satellite, $TASS$ donne la position et la vitesse dans un repère cartésien $(O\mathbf{X'Y'Z'})$ centré sur Saturne, où $\mathbf{X'}$ est l'équinoxe moyenne $J2000$ et $\mathbf{Z'}$ le pôle de l'écliptique $J2000$. Pour placer initialement tous les satellites dans le même repère $(O\mathbf{XYZ})$ défini précédemment, on applique donc les trois rotations suivantes aux vecteurs donnés par $TASS$:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\Omega(\pi/2 - \delta_P) \times R_{P_T}(\pi/2 + \alpha_P) \times R_\gamma(-\epsilon) \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

où $R_V(\beta)$ désigne une rotation autour de l'axe V d'un angle positif β, ϵ l'obliquité $J2000$ de la Terre ($\epsilon = 23°26'21.411''$, valeur de l'IERS), α_P et δ_P les coordonnées équatoriales du pôle de Saturne $J2000$ ($\alpha_P = 40.5955°$ et $\delta_P = 83.53812°$, d'après French et al., 1993), γ l'équinoxe moyenne $J2000$, P_T le pôle de la Terre $J2000$ et Ω le noeud ascendant de l'équateur de Saturne à l'époque considérée sur l'équateur de la Terre $J2000$.

Enfin, Les masses des satellites choisies sont données table 6.3.

6.3 Confirmation du chaos

Les interactions chaotiques entre Prométhée et Pandore sont dues à la superposition de quatre résonances de moyen mouvement 121 : 118. Cela a été récemment démontré avec un

modèle prenant en compte uniquement Prométhée, Pandore et Saturne, avec les perturbations dues à l'aplatissement de la planète (Goldreich et Rappaport, 2003a,b). Cependant, Prométhée et Pandore sont en résonance avec d'autres satellites : d'une part Pandore est proche d'une résonance de corotation 3 : 2 et d'une résonance de Lindblad 3 : 2 avec Mimas, et d'autre part Prométhée et Pandore sont périodiquement perturbés par des résonances du second ordre 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée, respectivement. On montre ici que le comportement chaotique de Prométhée et Pandore se maintient lorsque l'on ajoute au modèle les satellites principaux de Saturne (voir également Cooper et Murray, 2004).

Les résultats typiques de nos simulations numériques sont illustrés par les figures 6.1, 6.2 et 6.3. Le temps d'intégration est de 20 ans, débutant à l'époque DJ 2449940.0. Le modèle numérique et les conditions initiales ont été décrits dans la section précédente. En particulier, Prométhée et Pandore sont initialement sur une orbite équatoriale avec pour excentricité et longitude moyenne les valeurs nominales donnés table 6.2. Pour cette simulation, les conditions initiales restantes pour Prométhée et Pandore sont données table 6.4. Elles correspondent en fait à la solution qui s'ajuste le mieux aux données *HST* (*cf.* prochain chapitre).

	Prométhée	Pandore
GM ($10^{-2} \times$ km^3 s^{-2})	1.41	1.03
M ($10^{17} \times$ kg)	2.11	1.54
a (km)	139377.43875	141714.28
ϖ (°)	249.0	359.0

TAB. 6.4: Conditions initiales de Prométhée et Pandore, pour la solution qui s'ajuste le mieux aux données *HST* (*cf.* figure 6.1).

La figure 6.1 donne en fonction du temps (en jours) les écarts en longitude moyenne (en degrés) pour Prométhée et Pandore par rapport aux prédictions des éphémérides *Voyager*. On remarque des changements brutaux et anti-corrélés de moyen mouvement autour de l'instant d'anti-alignement des apses (indiqué sur la figure par des droites verticales en tirets et en pointillés). Nous avons également ajouté sur la figure deux solutions supplémentaires correspondant à des densités de 0 et 1.2 g cm^{-3}. Cela montre clairement l'effet des masses sur les variations en longitude des satellites. La quantité $\Delta\lambda$ est la différence entre la longitude moyenne λ donnée par l'intégration numérique et la longitude moyenne λ_{VGR} prédite par les éphémérides basées sur les images *Voyager* (Evans, 2001). Remarquons que l'éphéméride *Voyager* de Pandore inclut les perturbations dues au satellite Mimas. On remarque aussi sur la figure des modulations dans la longitude moyenne de Pandore qui sont dues aux effets de la résonance de corotation 3 : 2 avec Mimas. Pandore est environ à 50 km de cette résonance (*cf.* table 6.5), et environ à 180 km à l'intérieur de la résonance de Lindblad 3 : 2 avec le même satellite. Les effets de ces deux résonances 3 : 2 ont été analysés théoriquement par French et al. (2003). La théorie prévoit que la résonance de corotation 3 : 2 crée une oscillation de la longitude moyenne de Pandore ayant une période comprise entre 560 et 663 jours et une amplitude moyenne de 0.81°, la variation de la période d'oscillation étant causée par une modulation due à une résonance d'inclinaison 4 : 2 entre Mimas et Téthys. L'angle critique de cette résonance est donné par : $4\lambda_T - 2\lambda_M - \Omega_T - \Omega_M$, qui a pour période 70.56 ans (French et al., 2003). La résonance de Lindblad 3 : 2 produit aussi une oscillation de l'excentricité de Pandore avec une période comprise entre 161 et 165 jours et une amplitude de 2.64×10^{-5} (French et al., 2003).

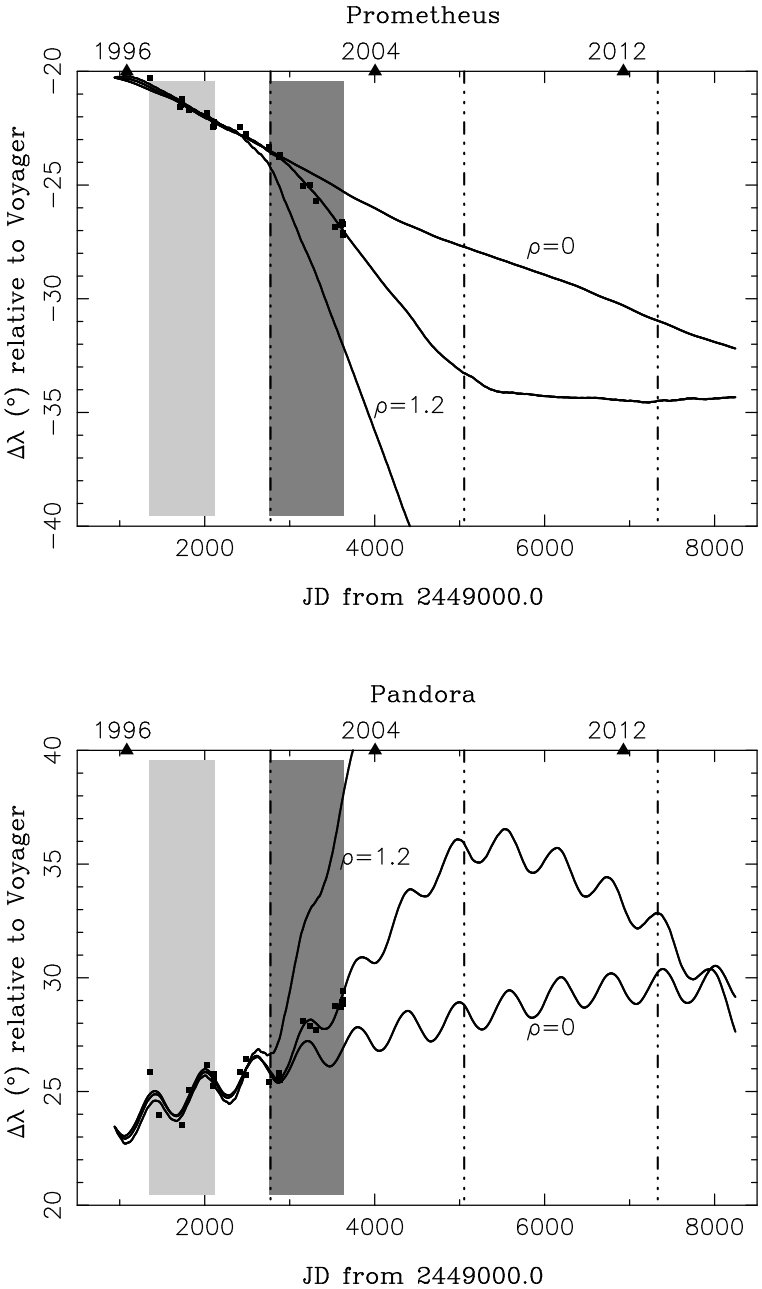

FIG. 6.1: Ecarts en longitude (degrés) par rapport aux prédictions *Voyager* pour Prométhée (en haut) et Pandore (en bas). Les droites verticales en tirets et pointillés désignent les instants d'anti-alignement des périapses, calculés en utilisant les taux de précession des deux satellites donnés par French et al. (2003). L'intégration débute le 10 août 1995 à 12h TU (époque DJ 2449940.0). Les courbes (au milieu) correspondent à la solution qui s'ajuste le mieux aux données *HST*, pour laquelle les masses de Prométhée et Pandore sont celles de la table 6.4. Deux solutions supplémentaires, correspondant respectivement à des densités $\rho = 0$ et 1.2 g cm^{-3}, ont été ajoutées à la figure. La quantité $\Delta\lambda$ est la différence entre la longitude moyenne λ donnée par la simulation et la longitude moyenne λ_{VGR} prédite par les éphémérides basées sur les images de la sonde *Voyager* (Evans, 2001). Pour Prométhée, $\lambda_{VGR}(^\circ) = \lambda^0_{VGR} + n_{VGR}(t - t_0) = 188.526 + 587.28942(t - 2444839.6682)$ et pour Pandore, $\lambda_{VGR} = 82.13 + 572.78439(t - 2444839.6682)$ (French et al., 2003; Evans, 2001). Chaque point carré correspond à un ensemble d'observations pour lesquelles un unique $\Delta\lambda_{obs}$ a été calculé, à partir des coordonnées dans le plan du ciel observées. Ces points sont un peu affectés par l'excentricité des deux satellites, car on calcule une longitude vraie et non pas une longitude moyenne, pour déterminer $\Delta\lambda_{obs}$ (voir chapitre 7). Les surfaces en gris clair et gris foncé désigne deux sous-ensembles de données *HST* pour lesquels nous avons procédé à différents ajustements : avec le premier nous avons ajusté les demi grands-axes initiaux de Prométhée et Pandore, et avec le second les masses ainsi que les longitudes du périapse initiales (voir chapitre 7).

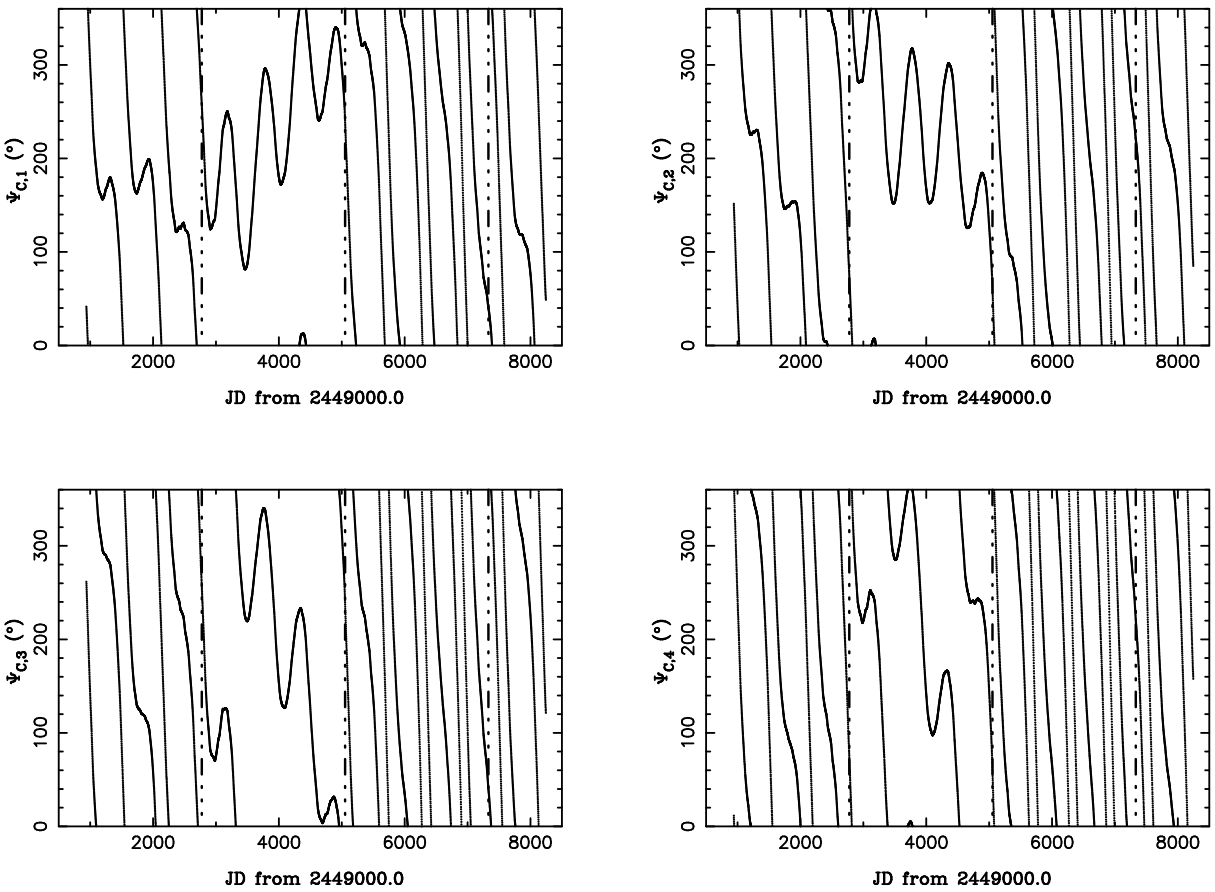

FIG. 6.2: Angles critiques de résonance 121 : 118 (degrés) entre Prométhée et Pandore en fonction du temps (jours), pour la solution qui s'ajuste le mieux aux données *HST* donnée figure 6.1. Les quatre angles critiques sont : $\Psi_{C,1} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PA}$, $\Psi_{C,2} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 2\varpi_{PA} - \varpi_{PR}$, $\Psi_{C,3} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - \varpi_{PA} - 2\varpi_{PR}$, and $\Psi_{C,4} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PR}$. Les droites verticales en tirets et pointillés désignent les instants d'anti-alignement des apses. L'instant initial d'intégration est le 10 août 1995 à 12h TU (époque DJ 2449940.0).

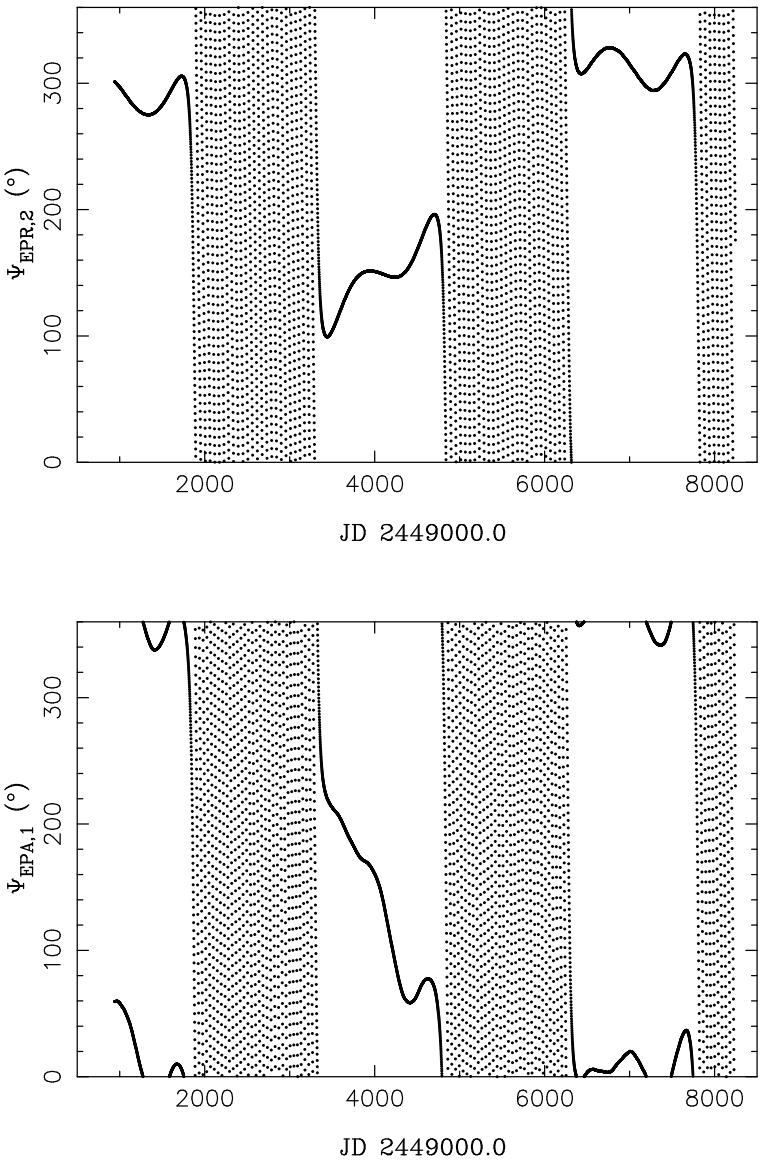

FIG. 6.3: Angles critiques de résonance $\Psi_{EPR,2} = 17\lambda_{EP} - 15\lambda_{PR} - \varpi_{EP} - \varpi_{PR}$ et $\Psi_{EPA,1} = 21\lambda_{EP} - 19\lambda_{PA} - 2\varpi_{PA}$ (en degrés) en fonction du temps (en jours), pour la solution qui s'ajuste le mieux aux données *HST* donnée figure 6.1. Le premier angle est l'un des angles critiques de la résonance 17 : 15 entre Epiméthée et Prométhée, le second l'un des angles critiques de la résonance 21 : 19 entre Epiméthée et Pandore. Ces deux angles sont respectivement ceux qui ont le mouvement de libration le plus prononcé. L'instant initial d'intégration est le 10 août 1995 à 12h TU (époque 2449940.0).

La figure 6.2 montre en fonction du temps les quatre angles critiques de résonance 121 : 118, dont la superposition est responsable des interactions chaotiques entre Prométhée et Pandore. Ces angles sont donnés par :

$$\Psi_{C,1} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PA}$$

$$\Psi_{C,2} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 2\varpi_{PA} - \varpi_{PR}$$

$$\Psi_{C,3} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - \varpi_{PA} - 2\varpi_{PR}$$

$$\Psi_{C,4} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PR}$$

On constate clairement que les quatre angles se superposent. On remarque aussi que les angles critiques traversent la séparatrice autour des instants d'anti-alignement des apses, lorsqu'ils passent d'un mouvement de libration à un mouvement de circulation, et inversement. Cela confirme les résultats de Goldreich et Rappaport (2003a), obtenus avec un modèle simplifié à 2 satellites. Goldreich et Rappaport (2003b) ont remarqué que sur 3000 ans la variation de $\Psi_{C,2}$, pour lequel l'amplitude du coefficient de la fonction perturbatrice est la plus importante, est bien plus faible que celle des autres arguments. En examinant la dynamique de $\Psi_{C,2}$, ils ont montré que deux passages de séparatrice semblent avoir lieu durant la plupart des cycles de 6.2 ans entre deux anti-alignements des apses, ce qui est compatible avec le temps de Lyapunov du système d'environ 3.3 ans mesuré indépendamment (Goldreich et Rappaport, 2003a). La table 6.5 donne le rayon, la période et le coefficient de la fonction perturbatrice correspondants pour les résonances 121 : 118 entre Prométhée et Pandore. Les valeurs nominales des rayons des résonances indiquent que Prométhée et Pandore sont initialement légèrement en dehors de la zone de superposition des résonances, étant données les excentricités de Prométhée et Pandore. Cependant, de faibles variations du demi grand-axe de Pandore, par exemple, sont suffisantes pour placer l'autre satellite à l'intérieur de cette zone. Cela est facile à réaliser puisque, par exemple, le demi grand-axe de Pandore varie d'environ ± 1.37 km, en raison de la résonance de corotation 3 : 2 (French et al., 2003).

Les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée influencent dynamiquement les orbites de Prométhée et Pandore (Cooper et Murray, 2004). Ces satellites ont des orbites en fer à cheval. En conséquence, leurs orbites sont modifiées approximativement tous les quatre ans (Yoder et al., 1989; Nicholson et al., 1992). Au cours de leur mouvement co-orbital, les excursions radiales par rapport à leur demi grand-axe moyen sont environ ± 10 km pour Janus et ± 40 km pour Epiméthée. Prométhée et Pandore sont respectivement en résonance 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée, plus particulièrement lorsque ce dernier est à l'intérieur du rayon moyen de l'orbite en fer à cheval. Lorsque Epiméthée est à l'extérieur, les résonances d'ordre 2 sont déplacées bien en dehors des orbites de Prométhée et Pandore. Parmi les deux triplets d'angles critiques de résonance 17 : 15 et 21 : 19, les plus proches d'une libration sont $17\lambda_{EP} - 15\lambda_{PR} - \varpi_{EP} - \varpi_{PR}$ pour Prométhée, et $21\lambda_{EP} - 19\lambda_{PA} - 2\varpi_{PA}$ pour Pandore (voir figure 6.3). Les caractéristiques des résonances 17 : 15 et 21 : 19 sont résumées table 6.5. Les simulations de Cooper et Murray (2004) indiquent de faibles changements de moyen mouvement pour Prométhée et Pandore, attribués à ces résonances du second ordre avec Epiméthée. Notons qu'étant données les excentricités de Prométhée et Pandore, les résonances 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée ne se superposent pas (Cooper et Murray, 2004).

Nous montrons maintenant dans le prochain chapitre comment l'interaction chaotique entre Prométhée et Pandore permet de déterminer les masses des deux satellites, par ajustement des simulations numériques aux données *HST*.

Prométhée

Argument	Notation	Rayon (km)	Periode (années)	Coefficient
$17\lambda_{EP} - 15\lambda_{PR} - 2\varpi_{PR}$	$\Psi_{EPR,1}$	139384.34	1.566	$e_{PR}^2 f_{45}$ $(\simeq 2.2 \times 10^{-4})$
$17\lambda_{EP} - 15\lambda_{PR} - \varpi_{EP} - \varpi_{PR}$	$\Psi_{EPR,2}$	139376.96	13.542	$e_{EP} e_{PR} f_{49}$ $(\simeq -3.1 \times 10^{-3})$
$17\lambda_{EP} - 15\lambda_{PR} - 2\varpi_{EP}$	$\Psi_{EPR,3}$	139369.58	1.272	$e_{EP}^2 f_{53}$ $(\simeq 1.1 \times 10^{-2})$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PA}$	$\Psi_{C,1}$	139378.61	1.489	$e_{PA}^3 f_{85}$ $(\simeq 7.8 \times 10^{-3})$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 2\varpi_{PA} - \varpi_{PR}$	$\Psi_{C,2}$	139378.82	1.202	$e_{PR} e_{PA}^2 f_{84}$ $(\simeq -1.2 \times 10^{-2})$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - \varpi_{PA} - 2\varpi_{PR}$	$\Psi_{C,3}$	139379.03	1.008	$e_{PR}^2 e_{PA} f_{83}$ $(\simeq 6.3 \times 10^{-3})$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PR}$	$\Psi_{C,4}$	139379.24	0.868	$e_{PR}^3 f_{82}$ $(\simeq -1.1 \times 10^{-3})$

Pandore

Argument	Notation	Rayon (km)	Période (années)	Coefficient
$3\lambda_M - 2\lambda_{PA} - \varpi_M$	Ψ_{CER}	141761.65	1.675	$e_M f_{31}$ $(\simeq 5.2 \times 10^{-2})$
$3\lambda_M - 2\lambda_{PA} - \varpi_{PA}$	Ψ_{ILR}	141892.35	0.451	$e_{PA} f_{27}$ $(\simeq -9.8 \times 10^{-3})$
$21\lambda_{EP} - 19\lambda_{PA} - 2\varpi_{PA}$	$\Psi_{EPA,1}$	141713.19	887.952	$e_{PA}^2 f_{45}$
$21\lambda_{EP} - 19\lambda_{PA} - \varpi_{EP} - \varpi_{PA}$	$\Psi_{EPA,2}$	141708.48	1.808	$e_{EP} e_{PA} f_{49}$
$21\lambda_{EP} - 19\lambda_{PA} - 2\varpi_{EP}$	$\Psi_{EPA,3}$	141703.77	0.905	$e_{EP}^2 f_{53}$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PA}$	$\Psi_{C,1}$	141712.30	1.489	$e_{PA}^3 f_{85}$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 2\varpi_{PA} - \varpi_{PR}$	$\Psi_{C,2}$	141712.09	1.202	$e_{PR} e_{PA}^2 f_{84}$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - \varpi_{PA} - 2\varpi_{PR}$	$\Psi_{C,3}$	141711.87	1.008	$e_{PR}^2 e_{PA} f_{83}$
$121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\varpi_{PR}$	$\Psi_{C,4}$	141711.66	0.868	$e_{PR}^3 f_{82}$

TAB. 6.5: Résonances importantes dans le système Prométhée - Pandore. Les résonances indiquées sont les résonances 17 : 15 entre Epiméthée (indice EP) et Prométhée (indice PR), les résonances 21 : 19 entre Epiméthée et Pandore (indice PA), les résonances de corotation et de Lindblad 3 : 2 entre Pandore et Mimas (indice M), et les résonances 121 : 118 entre Prométhée et Pandore. Pour chaque angle on donne le demi grand-axe associé, la période et le coefficient de la fonction perturbatrice. Pour calculer les rayons des résonances 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée, nous avons supposé les valeurs suivantes pour le moyen mouvement et le taux de précession du périapse d'Epiméthée : $n_{EP} = 518.4822°/\text{j}$, $\dot{\varpi}_{EP} = 2.0552°/\text{j}$, puis nous avons calculé par itération le demi grand-axe de Prométhée et Pandore qui annule la dérivée de l'angle critique de résonance correspondant. La valeur du moyen mouvement est tirée de McGhee et al. (2001) et correspond à la configuration orbitale où Epiméthée est plus près de la planète que Janus ($a_{EP} = 151414.61$ km, $a_{JA} = 151461.99$ km). La valeur du taux de précession du périapse a été calculé en utilisant les paramètres de Saturne donnés table 6.1 et le demi grand-axe précédent $a_{EP} = 151414.61$ km. Pour les résonances 3 : 2 avec Mimas, nous avons supposé que $n_M = 381.9945087°/\text{j}$ et $\dot{\varpi}_M = 1.000772°/\text{j}$ (Harper et Taylor, 1993), puis calculé par itération le demi grand-axe de Pandore. Pour la résonance de Lindblad, nous avons supposé de plus que $\dot{\varpi}_{PA} = 2.599345°/\text{j}$ (French et al., 2003). Pour les résonances 121 : 118, nous avons calculé par itération le demi grand-axe de Prométhée ou Pandore, en prenant les valeurs de n_{PA}, $\dot{\varpi}_{PA}$, $\dot{\varpi}_{PR}$ ou n_{PR}, $\dot{\varpi}_{PR}$, $\dot{\varpi}_{PA}$ donnés par French et al. (2003) ($n_{PR} = 587.28747°/\text{j}$, $n_{PA} = 572.7856°/\text{j}$, $\dot{\varpi}_{PR} = 2.757368°/\text{j}$, $\dot{\varpi}_{PA} = 2.599345°/\text{j}$). Les périodes données sont $2\pi/\dot{\Psi}$, où $\dot{\Psi}$ est la dérivée temporelle de l'angle critique considéré, en utilisant les valeurs pour le moyen mouvement ou le taux de précession donnés ci-dessus. Les coefficients sont les termes de la fonction perturbatrice, au premier ordre en excentricité, associés à l'angle critique de résonance correspondant, où les f_i (i entier) sont des fonctions des coefficients de Laplace, donnés dans l'annexe B de Murray et Dermott (2001). Quelques valeurs numériques ont été ajoutées.

Chapitre 7

Ajustement des masses

Sommaire

7.1 Méthode **99**
7.2 Résultats **101**
7.3 Positions orbitales durant la mission *Cassini* autour de Saturne **105**
7.4 Conclusion **107**

7.1 Méthode

Pour déterminer les masses de Prométhée et Pandore, on ajuste les simulations numériques aux données *HST*. Plus précisément, on veut trouver les éléments orbitaux initiaux de Prométhée et Pandore ainsi que les masses, pour lesquels l'erreur moyenne sur la position des satellites, comparée aux observations, est minimale. C'est un problème non-trivial d'estimation de paramètres : les deux satellites sont à priori définis par sept paramètres (six éléments orbitaux et la masse) et chaque élément initial a sa propre barre d'erreur. De plus, Prométhée et Pandore sont extrèmement sensibles aux conditions initiales en raison du chaos.

Nous avons utilisé les données *HST* (French et al., 2003; French et McGhee, 2003) pour la période du 10 août 1995 à 12h TU (époque DJ 2449940.0) au 17 décembre 2002 à 12h TU (époque DJ 2452626.0). Ces données contiennent les coordonnées de Prométhée et Pandore dans le plan du ciel, plus précisément les écarts en ascension droite $\Delta\alpha \cos\delta$ et en déclinaison $\Delta\delta$ par rapport au centre de Saturne, en coordonnées $J2000$, ainsi que l'instant d'observation (sur Terre) de chaque image, la distance Terre-Saturne, et trois angles U, B, P qui définissent la géométrie des anneaux de Saturne et qui doivent être utilisés pour projeter les positions des satellites dans un repère centré sur la planète en coordonnées sur le plan du ciel (*cf.* annexe B).

Pour comparer les simulations aux données, on corrige tout d'abord les instants d'observation du temps de trajet de la lumière, pour avoir les temps correspondants sur Saturne. On calcule alors à ces instants la position et la vitesse de Prométhée et Pandore par intégration numérique, dans le répère centré sur Saturne décrit dans le chapitre précédent. Les vecteurs position sont ensuite convertis en coordonnées dans le plan du ciel $\Delta\alpha \cos\delta$ et $\Delta\delta$ (*cf.* annexe B). Finalement, on calcule le résidu (rms) entre les coordonnées dans le plan du ciel observées et celles données par l'intégration. En comparant les données astrométriques aux prédictions

orbitales de R. Jacobson (communication personnelle), French et McGhee (2003) ont montré que la précision astrométrique typique des mesures *HST* était de 0.02″ environ, ce qui est équivalent à une erreur moyenne sur la position des satellites d'environ 130km. Pour un modèle numérique parfait, on doit donc obtenir un résidu de l'ordre de 0.02″.

On suppose que Prométhée et Pandore ont des orbites équatoriales. En réanalysant l'ensemble des données *Voyager*, Evans (2001) a trouvé des inclinaisons pour Prométhée et Pandore de 0.03 ± 0.005^o et 0.054 ± 0.007^o, respectivement. Ces inclinaisons correspondent à des déviations maximales par rapport au plan équatorial de la planète de 73 et 134 km, ce qui est comparable à la précision de observations *HST*. On néglige donc ici l'inclinaison des satellites, tout comme French et al. (2003), car elle est n'est quasiment pas détectable dans les données. D'autre part, puisque les longitudes moyennes sont bien contraintes par les observations, elles sont par la suite fixés aux valeurs nominales données dans la table 6.2. L'ajustement de l'excentricité de Prométhée et Pandore à des sous-ensembles des données *HST* conduit par ailleurs à des valeurs similaires à celles de French et al. (2003), avec des residus peu sensibles à la valeur de l'excentricité, du moins si celle-ci est à l'intérieur des barres d'erreur de French et al. (2003) (voir section 7.2). De plus, les variations d'excentricité associées aux interactions entre Prométhée et Pandore sont faibles par rapport aux excentricités moyennes (Goldreich et Rappaport, 2003a). Par conséquent, les excentricités initiales de Prométhée et Pandore sont fixés aux valeurs nominales données table 6.2. Les conséquences d'une telle hypothèse sur la détermination des masses sont discutées dans la section 7.2.

L'ajustement des simulations numériques aux données *HST* ne dépend donc maintenant plus que des demi grands-axes et des longitudes du périapse initiaux. En fait, les paramètres importants sont les demi grands-axes initiaux de Prométhée et Pandore et la différence initiale en longitude du périapse $\Delta\varpi_0 = \varpi_{PR} - \varpi_{PA}\ [2\pi]$, car ce dernier est le seul paramètre qui impose l'instant d'anti-alignement des apses. Le mouvement de Prométhée et Pandore pendant la période considérée peut donc être décomposée en deux parties indépendantes : une période de mouvement régulier, suffisamment éloignée de tout anti-alignement, pour laquelle les orbites de Prométhée et Pandore sont essentiellement des ellipses kepleriennes précessantes, et une période de mouvement chaotique, contenant l'instant d'anti-alignement des apses. En effet dans nos simulations, il n'y a apparemment pas de variations en longitude suffisamment loin de l'instant d'anti-alignement des apses (voir figures 6.1 et 7.2). La partie régulière des données n'est sensible qu'aux demi grands-axes initiaux, et la partie chaotique aux masses de Prométhée et Pandore et à la différence initiale en longitude du périapse, $\Delta\varpi_0$. Pour trouver les masses, on effectue alors des ajustements successifs sur les deux différents ensembles de données : on détermine tout d'abord les demi grands-axes initiaux qui minimisent les résidus durant la période de mouvement régulier, puis on ajuste les masses et la différence initiale en longitude du périapse sur la période chaotique.

L'ajustement des simulations sur la partie régulière des données *HST* (c'est-à-dire l'ajustement des demi grands-axes initiaux) ne contient aucune information sur les masses de Prométhée et Pandore. En effet, étant données les masses de Prométhée et Pandore, on peut toujours trouver des demi grands-axes initiaux pour lesquels l'ajustement aux données est correct. Plus précisément, le demi grand-axe initial de l'un des deux satellites dépend linéairement de la masse de l'autre (au moins à l'ordre le plus bas, *cf.* Eqs. (7.1)) : supposons que Prométhée et Pandore sont sur une orbite donnée, et augmentons la masse de Prométhée. Cela crée une accélération supplémentaire à Pandore qui tend à diminuer son rayon, puisque Prométhée est à l'intérieur de l'orbite de Pandore. Afin que les orbites ne soient pas modifiées, on doit donc augmenter le demi grand-axe de Pandore. De la même manière, puisque Pandore est à l'exté-

rieur de l'orbite de Prométhée, le demi grand-axe initial de Prométhée doit être diminué si on augmente la masse de Pandore, pour ne pas modifier les orbites. Après cette première étape, étant données les masses de Prométhée et Pandore, on peut donc déterminer analytiquement les demi grands-axes initiaux qui permettent d'ajuster correctement les simulations à la partie régulière des données.

Les parties régulière et chaotique de données *HST* utilisées pour ajuster les masses de Prométhée et Pandore et les élements orbitaux restants (demi grands-axes et longitudes du périapse) sont indiquées sur la figure 6.1 par des surfaces en gris clair et gris foncé, respectivement. La première partie est entre le 30 septembre 1996 (époque DJ 2450356.5) et le 24 octobre 1998 (époque DJ 2451110.5), qui est loin de tout anti-alignement, est la seconde est entre le 4 août 2000 (époque DJ 2451760.5) et le 17 décembre 2002 à 12h TU (époque DJ 2452626.0), qui contient les "coudes" anti-corrélés observés dans les profils de longitude de Prométhée et Pandore. Remarquons qu'avec nos simulations, il est inutile de considérer un intervalle beaucoup plus grand pour déterminer les masses de Prométhée et Pandore, car le début d'intégration est en 1995 et le temps de Lyapounov du système n'est que de trois ans environ. Pour information, le nombre de points est 49 et 34 pour Prométhée et Pandore, respectivement, pendant la période régulière, et 97 et 94, respectivement, pendant la zone chaotique.

7.2 Résultats

Pour chaque simulation on calcule un résidu (rms) égal à la moyenne des résidus individuels de Prométhée et Pandore. En ajustant les intégrations numériques à la partie régulière des données (région en gris clair de la figure 6.1), nous avons trouvé de manière empirique les relations suivantes entre les demi grands-axes initiaux (km) et les masses GM (km^3 s^{-2}) des satellites, pour lesquelles le résidu est minimal :

$$\begin{cases} a_{PR} = 139377.5 - 5.96 GM_{PA} = 139377.5 - 0.125\rho_{PA} \\ \\ a_{PA} = 141714.18 + 7.11 GM_{PR} = 141714.18 + 0.25\rho_{PR} \end{cases} \tag{7.1}$$

Ces relations sont linéaires. Avec des ajustements par des ellipsoides, Thomas (1989) a déterminé les rayons suivants des satellites : 74, 50, et 34 km pour Prométhée, et 55, 44, et 31 km pour Pandore. Nous avons utilisé ces valeurs nominales pour écrire les équations (7.1) avec les densités ρ (g cm^{-3}) des satellites. Pour ces ajustements des demi grands-axes, les longitudes du périapse ont été fixées initialement aux valeurs nominales de la table 6.2, ce qui est équivalent à une différence initiale en longitude du périapse $\Delta\varpi_0 = 258^o$. La relation pour a_{PR} (respectivement a_{PA}) a été déterminée en supposant $M_{PR} = 0$ (respectivement $M_{PA} = 0$), et serait quasiment identique pour une masse non nulle. Avec ces relations le résidu est typiquement de l'ordre de 0.03", avec des résidus individuels comparables pour Prométhée et Pandore. Les termes correctifs des équations (7.1) sont petits : 150 m et 300 m au maximum pour Prométhée et Pandore, respectivement, pour une densité $\rho = 1.2$ g cm^{-3}. Cependant, les résidus sont très sensibles aux demi grands-axes initiaux lorsqu'on ajuste les intégrations numériques à la partie régulière des données. Supposons $M_{PR} = 0$. Pour une masse de Pandore fixée, le résidu de Prométhée en fonction de son demi grand-axe initial est une courbe en forme de parabole, qui présente un minimum ($\simeq 0.03''$) pour un demi grand-axe a_{PR}^{min} vérifiant la relation linéaire de l'équation (7.1). Un écart d'environ $\pm 50 - 80$ m seulement par rapport à a_{PR}^{min} (dépendant de

la densité de Pandore) conduit à un résidu d'environ 0.08″, soit quatre fois la précision astrométrique des mesures *HST*. C'est parce qu'une petite modification du demi grand-axe entraîne d'importants écarts en longitude au cours du temps.

Nous avons ensuite ajusté les simulations à la période chaotique des données *HST* (région en gris foncé de la figure 6.1) pour trouver les masses et les longitudes initiales du périapse. Nous avons considéré pour cela toutes les différences initiales en longitude du périapse possibles ($242 \leq \Delta\varpi_0 \leq 274^o$), d'après les barres d'erreur en ϖ données table 6.2. Nous avons utilisé un pas de 1°, ce qui correspond à une différence de l'ordre de 6.33 jours entre les instants d'anti-alignement des apses, en utilisant les valeurs des taux de précession données par French et al. (2003). D'autre part, l'intervalle de masses considéré pour ces simulations est : $0 \leq GM_{PR} \leq 4.22 \times 10^{-2}$ km^3 s^{-2} et $0 \leq GM_{PA} \leq 2.52 \times 10^{-2}$ km^3 s^{-2}, ce qui correspond à des densités ρ_{PR} et ρ_{PA} entre 0 et 1.2 g cm^{-3}, en utilisant les volumes nominaux de Thomas (1989).

Le premier résultat est que toutes les solutions pour lesquelles le résidu est typiquement $<\sim 0.1''$ sont telles que $242 \leq \Delta\varpi_0 \leq 251^o$. Nos ajustements nous permettent donc de mieux contraindre l'instant du dernier anti-alignement, qui a donc eu lieu approximativement entre le 11 août 2000 (DJ 2451767.5) et le 8 octobre 2000 (DJ 2451825.5), en utilisant les taux de précession de French et al. (2003).

La solution qui s'ajuste le mieux aux données *HST* est celle de la table 6.4, où les demi grands-axes sont donnés par les équations (7.1) et où la différence initiale en longitude du périapse est $\Delta\varpi_0 = 250°$. Le résidu obtenu est $\mathrm{rms}_{min} = 0.030''$, avec des résidus individuels comparables pour Prométhée et Pandore. Ce résidu est équivalent à une erreur moyenne sur la position des satellites d'environ 190 km. Les masses de Prométhée et Pandore sont aussi données dans la table 7.1 avec des barres d'erreur à 3-σ. Nous avons utilisé un simple test du χ^2 pour définir un niveau de confiance à 3-σ autour de la meilleure solution. Cette région est définie par $\mathrm{rms}^2 \leq \mathrm{rms}^2_{min}(1 + \Delta\chi^2/N)$, où N est le nombre de points des données *HST* (partie chaotique), à l'intérieur de laquelle le résidu n'augmente pas davantage qu'une certaine quantité constante $\Delta\chi^2$. Pour un niveau de confiance à 3-σ, $\Delta\chi^2 = 14.2$ et donc $\mathrm{rms} \leq 0.033''$, ce problème ayant trois degrés de liberté M_{PR}, M_{PA} et $\Delta\varpi_0$ (Press et al., 1986).

Les densités de Prométhée et Pandore données dans la table 7.1 ont été calculées en utilisant les volumes nominaux de Thomas (1989). Nos résultats sont compatibles avec les densités obtenues à partir de l'analyse des ondes de densité créées par les deux satellites dans les anneaux : $\rho_{PR} = 0.27^{+0.16}_{-0.14}$, $\rho_{PA} = 0.42^{+0.28}_{-0.24}$ (Rosen et al., 1991). On donne aussi (figure 7.1) une carte des résidus obtenus avec nos simulations pour des densités de Prométhée et Pandore données. Le mouvement de chaque couple de masses a été intégré avec des conditions initiales différentes (longitude du périapse), mais on ne représente que le point pour lequel le résidu est minimal. Nous avons utilisé les volumes nominaux de Thomas (1989) pour reproduire cette carte avec les densités. On constate qu'il y a une corrélation claire entre les masses (ou les densités) : la masse de Pandore dépend linéairement de la masse de Prométhée. C'est une conséquence de la conservation du moment cinétique entre Prométhée et Pandore durant l'interaction chaotique (*cf.* (15), (22), (23) de Goldreich et Rappaport, 2003b). La conservation du moment cinétique entraîne :

$$\frac{\Delta a_{PR}}{\Delta a_{PA}} = -\frac{M_{PA}}{M_{PR}}\frac{a_{PR}^2}{a_{PA}^2} \tag{7.2}$$

D'après French et al. (2003), $\Delta a_{PR} = +0.33$ km et $\Delta a_{PA} = -0.42$ km entre 2000 et 2002, impliquant un rapport de masse $M_{PR}/M_{PA} = 1.23$. Nos ajustements entrainent un rapport comparable $M_{PR}/M_{PA} = 1.37$. Il est compatible avec la valeur précédente, étant données les incertitudes sur le rapprt de masse. En utilisant les volumes de Thomas (1989), le rapport de densité est $\rho_{PA}/\rho_{PR} = 1.22$, qui est indiqué par une droite en pointillés sur la figure 7.1. Remarquons qu'en utilisant les masses données dans la table 7.1 et les volumes nominaux de Prométhée et Pandore déterminés par Stooke (1993) ou Gozdziewski et Maciejewski (1995), la densité de Prométhée est un peu modifiée : $\rho_{PR} = 0.54^{+0.04}_{-0.09}$. La densité de Pandore semble donc mieux contrainte, car les volumes déterminés par Thomas (1989), Stooke (1993) et Gozdziewski et Maciejewski (1995) pour ce satellite sont quasiment les mêmes. Les images fournies par la sonde *Cassini* permettront de mieux contraindre la forme de ces satellites. Les masses de Prométhée et Pandore seront probablement aussi améliorées, car le prochain anti-alignement des apses ($\sim$ 2006) sera vu par *Cassini*.

	Prométhée	Pandore
M ($10^{17}\times$ kg)	$2.11^{+0.16}_{-0.37}$ $\left[^{+0.79}_{-0.53}\right]$	$1.54^{+0.16}_{-0.28}$ $\left[^{+0.50}_{-0.36}\right]$
GM ($10^{-2}\times$ km^{3}s^{-2})	$1.41^{+0.10}_{-0.25}$	$1.03^{+0.10}_{-0.19}$
ρ (g cm^{-3})	$0.40^{+0.03}_{-0.07}$ $\left[^{+0.15}_{-0.10}\right]$	$0.49^{+0.05}_{-0.09}$ $\left[^{+0.16}_{-0.12}\right]$

TAB. 7.1: Masses, GM et densités de Prométhée et Pandore. Les barres d'erreur sont données à 3-σ. Des petits effets systématiques dus à l'excentricité des satellites augmente ces barres d'erreur aux valeurs données entre crochets (*cf.* texte). Les densités sont calculées en utilisant les volumes nominaux de Thomas (1989), et apparaissent en noir sur la carte des résidus (figure 7.1). Les barres d'erreur des densités proviennent uniquement de celles de la masse, car les incertitudes sur les volumes ne sont pas prises en compte.

Les profils de longitude pour la meilleure solution sont représentés sur la figure 6.1. On y indique aussi deux solutions supplémentaires correspondant à des densités $\rho = 0$ et 1.2 g cm^{-3}, pour lesquelles les demi grands-axes initiaux vérifient les équations (7.1) et les autres éléments orbitaux sont les valeurs nominales de la table 6.2. Afin de comparer cette solution aux données sur la figure 6.1, nous avons aussi reproduit les écarts en longitude par rapport aux prédictions *Voyager* pour les données *HST*. Ils sont représentés par des points carrés. Ces points sont un peu affectés par l'excentricité des satellites, car on calcule une longitude vraie et non une longitude moyenne pour ces points. Pour cela on calcule tout d'abord les coordonnées cartésiennes X, Y du satellite dans le repère centré sur Saturne, dans lequel le plan $(O\mathbf{XY})$ est le plan équatorial de Saturne et $\mathbf{X}$ le noeud ascendant de l'équateur de Saturne sur l'équateur moyen de la Terre $J2000$ (*cf.* annexe B). Puis on convertit X, Y en rayon r et longitude vraie L, on soustrait à cette longitude la longitude moyenne fournie par les éphémérides *Voyager* (Evans, 2001), et on prend la valeur moyenne des écarts en longitude obtenus qui correspondent à un même jour d'observation, chaque ensemble d'observations *HST* incluant typiquement cinq mesures rapprochées effectuées à la même dâte.

Le résidu de la meilleure solution (0.030″) est légèrement supérieur à la précision astrométrique typique des observations *HST* (0.02″). Par conséquent, soit l'erreur typique des données est sous-estimée, soit le modèle présente des petites erreurs systématiques. S'il y a des

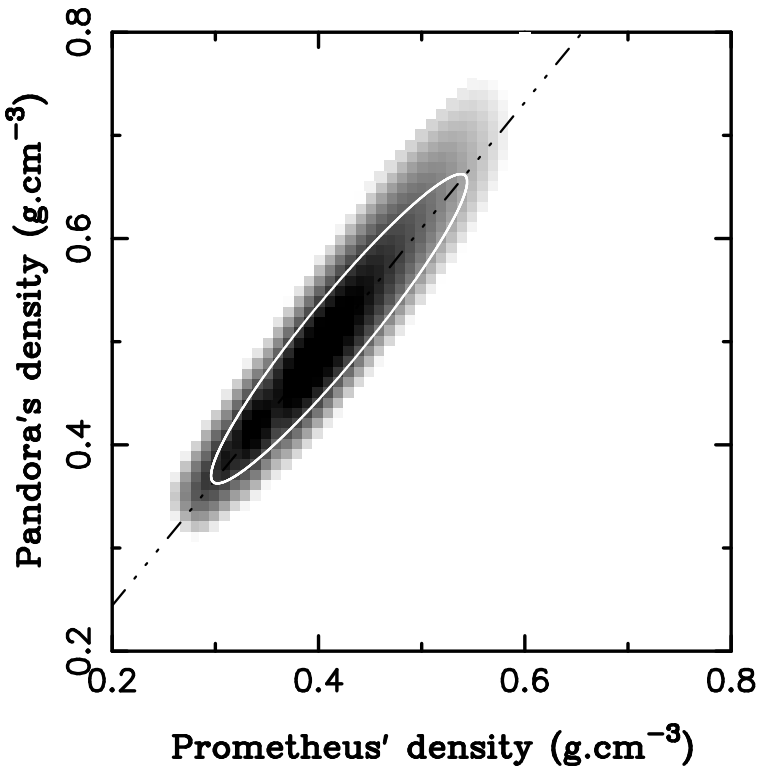

FIG. 7.1: Carte des résidus entre les observations et les simulations numériques, pour des densités données de Prométhée et Pandore (*cf.* texte). Les niveaux de gris sont tels que les rms $\geq 0.05''$ sont en blanc et les rms $\leq 0.033''$ en noir, avec une échelle linéaire entre les deux. L'ellipse noire correspond à un niveau de confiance de 3-σ. Si on prend en compte les petits effets systématiques dus à l'excentricité de Prométhée et Pandore, les barres d'erreurs à 3-σ s'étendent à l'ellipse blanche (*cf.* texte). Nous avons ajusté les masses des satellites (avec pour excentricités initiales les valeurs nominales de la table 6.2) et utilisé les volumes nominaux de Thomas (1989) pour les convertir en densité. Chaque point a ses propres éléments orbitaux initiaux (demi grand-axe et longitude du périapse) tel que le rms est minimal. Les résultats sont résumés dans la table 7.1. Les meilleures solutions (ellipse noire) sont parallèles à la droite $\rho_{PA}/\rho_{PR} = 1.22$, indiquée par une droite en pointillés. C'est une conséquence de la conservation du moment cinétique entre les deux satellites durant les interactions chaotiques (*cf.* texte).

erreurs systématiques, elles peuvent résulter de différentes causes comme : inclinaisons de Prométhée et Pandore non prises en compte, excentricités initiales différentes de celles supposées, masse de l'anneau F, effets de résonances non correctement pris en compte dans les conditions initiales, en particulier dans celles de Janus et Epiméthée. Cependant, nous avons effectué des ajustements en considérant des petites inclinaisons pour Prométhée et Pandore, avec différentes longitudes du noeud initiales, et cela n'a pas amélioré sensiblement les résidus. D'autre part, Nous avons ajusté l'excentricité de Prométhée et Pandore sur la partie non chaotique des données, avec des demi grands-axes initiaux vérifiant (7.1) et pour différentes longitudes du périapse compatibles avec les incertitudes données dans la table 6.2. Nous avons obtenu des valeurs similaires pour l'excentricité aux solutions de French et al. (2003), et les résidus sont peu sensibles à ce paramètre, du moins pour des valeurs compatibles avec les barres d'erreur de la table 6.2. L'ajustement des demi grands-axes initiaux sur la partie régulière des données, avec des excentricités initiales différentes des valeurs nominales, donne aussi des relations similaires aux équations (7.1) et avec des résidus toujours de l'ordre de 0.03″. Enfin, nous avons aussi essayé d'ajuster les masses et les périapses initiaux de Prométhée et Pandore sur la partie chaotique des données, en utilisant des excentricités initiales différentes des valeurs nominales. Nous avons considéré seulement quelques cas, correspondant aux valeurs extrèmes de l'excentricité compatibles avec les barres d'erreur de la table 6.2 : $(e_{PR}, e_{PA}) = (0.00171, 0.0042)$, $(0.00171, 0.0048)$, $(0.00213, 0.0042)$ et $(0.00213, 0.0048)$. Les masses de Prométhée et Pandore ne sont pas modifiées et les résidus ne sont pas meilleurs avec ces excentricités initiales. Néanmoins, modifier l'excentricité initiale constitue un petit effet systématique qui augmente l'incertitude sur les masses que l'on a déterminées. Ces incertitudes sont données entre crochets dans la table 7.1, et cela correspond à l'ellipse blanche de la figure 7.1. Notons que les observations de la sonde *Cassini* permettront de mieux contraindre les excentricités des satellites, et donc de réduire les barres d'erreur sur les masses de Prométhée et Pandore.

7.3 Positions orbitales durant la mission *Cassini* autour de Saturne

On peut utiliser nos ajustements pour prédire les positions orbitales des satellites Prométhée et Pandore pendant l'orbite de la sonde *Cassini*. Nous avons effectué une quarantaine de simulations avec des conditions initiales différentes, mais qui s'ajustent bien aux données *HST*. Les conditions initiales utilisées sont en fait les solutions de l'ellipse noire de la figure 7.1, pour lesquels le résidu est inférieur à 0.033″. Les résultats sont illustrés sur la figure 7.2. Nous avons aussi intégré le mouvement dans le passé, à partir de l'époque DJ 2449940.0, pour montrer que les profils de longitude sont extrèmement sensibles aux conditions initiales, et pour montrer comment les solutions sont réparties autour de l'origine *Voyager*. Les masses des satellites ne peuvent être contraintes par ce point. En effet environ cinq temps de Lyapounov séparent l'origine *Voyager* de l'instant initial d'intégration. Ces simulations permettent de déduire une limite inférieure des incertitudes, dues au chaos, sur les positions des satellites. En longitude moyenne, elles s'élèvent à environ 0.2° à l'arrivée de la sonde *Cassini* en juillet 2004, et à environ 3° en 2008 (*cf.* table 7.2).

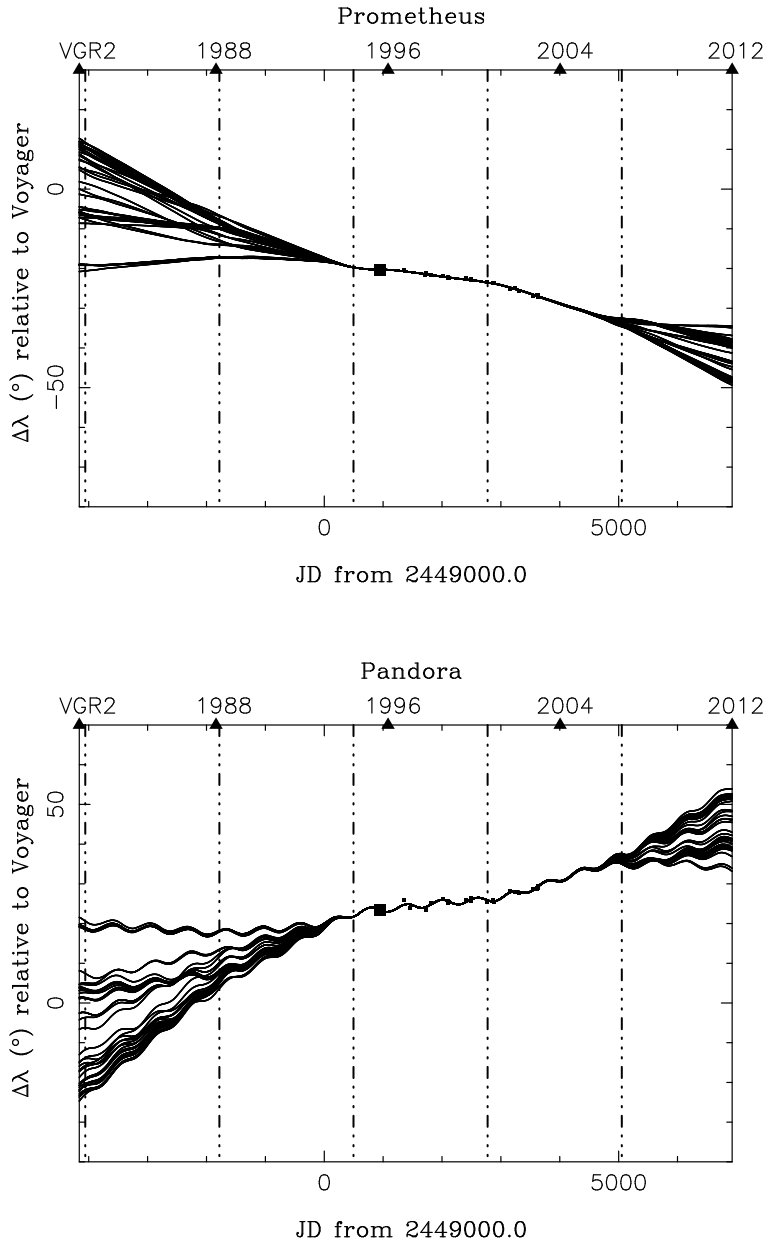

FIG. 7.2: Ecarts en longitude (en degrés) par rapport aux prédictions *Voyager*. Nous avons effectué environ 40 simulations avec les solutions représentées figure 7.1, pour lesquelles rms $\leq$ 0.033″. L'instant initial d'intégration est le 10 août 1995 à 12h TU (DJ 2449940.0), indiqué par un grand point carré. Les droites verticales en tirets et pointillés désignent les instants d'anti-alignement des apses, calculés en utilisant les taux de précession de French et al. (2003). Le point *Voyager 2* (VGR2) correspond à l'époque DJ 2444839.6682 $\sim$ 23 août 1981. Les intégrations dans le passé montrent l'aspect chaotique et la répartition des solutions autour de l'origine *Voyager*. Chaque petit point carré est un ensemble d'observations *HST* pour lequel un unique $\Delta\lambda$ a été calculé, à partir des coordonnées dans le plan du ciel observées (*cf.* figure 6.1). Les solutions s'ajustent correctement aux données *HST*, mais les incertitudes sur la position des satellites augmente avec le temps, à cause du chaos. Ces incertitudes sont résumées table 7.2.

Date (0h TU)	$\Delta\lambda_{PR}(^o)$	$\Delta\lambda_{PA}(^o)$
1er Juillet 2004	$-29.74 \pm {}^{0.16}_{0.14}$	$31.97 \pm {}^{0.16}_{0.19}$
1er Juillet 2008	$-36.27 \pm {}^{2.36}_{2.77}$	$38.79 \pm {}^{3.92}_{3.02}$

TAB. 7.2: Prédictions et incertitudes, pendant l'orbite de la sonde *Cassini* autour de Saturne, sur les écarts en longitude par rapport aux éphémérides *Voyager*. La quantité $\Delta\lambda$ est la différence entre la longitude moyenne λ de l'intégration numérique et la longitude moyenne λ_{VGR} donnée par les éphémérides *Voyager* (Evans, 2001). Aux instants considérés, on calcule la valeur moyenne et les incertitudes en $\Delta\lambda$ pour les solutions de la figure 7.2.

7.4 Conclusion

Les observations *HST* récentes nous ont permis de contraindre les masses volumiques de Prométhée et Pandore, et de quantifier les incertitudes sur la position des satellites entre 2004 et 2008, ce qui est utile pour les observations *Cassini*. Prométhée et Pandore sont donc peu denses. Les résidus obtenus sont légèrement supérieurs à la précision astrométrique des mesures *HST*. Des petites erreurs systématiques sont donc encore présentes dans le modèle. On pourrait probablement améliorer les résidus en prenant en compte les effets de l'anneau F, bien que ce ne soit pas évident puisque sa masse n'est pas connue. Il faudrait aussi ajuster les simulations aux données *HST* disponibles pour les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée. Les faibles densités de Prométhée et Pandore permettent néanmoins d'envisager la question de leur origine. Il se pourrait que Prométhée et Pandore résultent de l'accrétion lâche de matériau des anneaux dans la zone de Roche de la planète. Ils auraient aussi pu se former à l'intérieur de cette limite, puis migrer vers l'extérieur sous l'effet des interactions de marée avec les anneaux principaux. Il semble en revanche moins probable que Prométhée et Pandore soient le résultat de la destruction d'un satellite dense plus ancien (de type Mimas) au voisinage de la limite de Roche de Saturne. Les observations *Cassini* des quatre années à venir vont permettre de contraindre plus finement la forme et la densité des satellites internes de Saturne. Un autre problème intéressant est l'évolution dynamique à long terme du système, qui est liée à l'âge des anneaux. C'est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 8

Evolution dynamique à long terme du système

Sommaire

8.1 Introduction 109
8.2 Effet des configurations résonantes entre Prométhée et Pandore 110
8.3 Effets de Mimas ou des co-orbitaux Janus et Epiméthée 113
8.3.1 Simulation du couple des anneaux 113
8.3.2 Cas des résonances 3 : 2 avec Mimas 115
8.3.3 Cas des résonances du second ordre avec Janus et Epiméthée 118

8.1 Introduction

L'évolution orbitale à long terme des satellites planétaires est gouvernée principalement par les interactions de marée avec le corps central, et par les interactions gravitationnelles mutuelles entre les satellites. La dynamique est relativement bien connue pour le sytème d'Uranus (Dermott et al., 1988; Tittemore et Wisdom, 1988, 1989; Duncan et Lissauer, 1997) et celui de Neptune (Banfield et Murray, 1992). Pour le système de Saturne, un effet supplémentaire (les résonances entre les satellites et les anneaux principaux) conduit à des problèmes théoriques intéressants. La dynamique à long terme des satellites internes de Saturne est en effet liée à l'évolution et à l'âge des anneaux, et les échelles de temps apparaissent remarquablement courtes (Borderies et al., 1984) : lorsque des satellites reçoivent du moment cinétique des anneaux, leurs demi grands-axes augmentent. La formule du couple standard (linéaire) prédit une migration orbitale très rapide des satellites proches des anneaux de Saturne (Goldreich et Tremaine, 1982; Lissauer et al., 1984, 1985). Prendre en compte les effets non-linéaires peut accroître les échelles de temps (Brophy et al., 1992), mais non de manière drastique. La formation de lacunes aux positions des résonances peut aussi réduire la valeur du couple, mais ces dernières n'ont pas été détectées dans les anneaux de Saturne.

Puisque le moment cinétique est transféré vers l'extérieur lors des interactions résonantes entre les satellites (Goldreich, 1965; Peale, 1976), il est nécessaire de vérifier si les satellites internes de Saturne, comme par exemple Prométhée, Pandore ou les satellites co-orbitaux Janus

et Epiméthée, sont en résonance avec des satellites externes plus massifs. Si c'est le cas, alors les temps d'évolution sont considérablement plus grands, car le moment cinétique reçu des anneaux est redonné à ces satellites massifs, qui eux migrent alors plus lentement. Or les satellites internes mentionnés ici ne sont pas aujourd'hui en résonance avec des satellites plus gros.

Concernant Prométhée et Pandore, on peut calculer que ces satellites ont pu migrer individuellement du bord externe de l'anneau A à leur position actuelle en environ 10 ou 20 millions d'années. La réalité est en fait plus complexe : Prométhée se trouve entre l'anneau A et l'anneau F, donc une partie du moment cinétique reçu de l'anneau A est probablement transférée à l'anneau F. Pandore reçoit du moment cinétique à la fois de l'anneau A et de l'anneau F. De plus, Prométhée est plus proche de l'anneau A et plus massif que Pandore, donc migre plus vite que ce dernier. La migration vers l'extérieur du système pourrait être ralentie si Pandore était en résonance avec un satellite externe massif. Comme nous l'avons vu au chapitre 6, Pandore est en fait proche de deux résonances avec Mimas : d'une part à environ 50 km à l'intérieur de la résonance 3 : 2 de corotation excentrique, et d'autre part à 180 km à l'intérieur de la résonance 3 : 2 de Lindblad. Donc, soit le système constitué de l'anneau F, Prométhée et Pandore est jeune, soit Pandore transfère tout de même du moment cinétique à Mimas par un mécanisme à expliquer. Borderies et al. (1984) ont émis l'hypothèse que ce transfert pouvait avoir lieu si le mouvement de Pandore était chaotique, c'est-à dire si le moyen mouvement était soumis à une petite marche aléatoire. Une autre possibilité à étudier est que l'interaction avec Janus et Epiméthée, périodiquement en résonance d'ordre 2 avec Prométhée et Pandore en raison de leur mouvement co-orbital, ralentisse l'évolution du système.

8.2 Effet des configurations résonantes entre Prométhée et Pandore

Poulet et Sicardy (2001) ont étudié la dynamique du couple Prométhée-Pandore soumis uniquement à leurs interactions mutuelles et aux effets de marée dus à la planète et aux anneaux. Ils ont testé si les configurations résonantes (résonances de Lindblad excentriques du premier ordre) rencontrées par les deux satellites au cours de leur évolution orbitale pouvait augmenter le temps de vie du système. Goldreich (1965) a en effet montré que les résonances observées dans le système solaire sont très souvent la conséquence de l'évolution par effet de marée des orbites des satellites. Lorsqu'au cours de leur évolution, deux satellites entrent en résonance de moyen mouvement isolée, le résultat dépend de leur configuration orbitale : si les orbites des deux corps sont divergentes, alors les effets de marée et les effets de la résonance s'ajoutent et les satellites ne restent pas piégés en résonance. Par contre, si les orbites sont convergentes, alors la capture peut être maintenue.

Rappelons comment les satellites évoluent sous l'effet des couples dus aux anneaux et marées du corps central. Tout d'abord, la migration orbitale d'un satellite de masse M_S soumis au couple d'un anneau de rayon r, de largeur Δr et de densité de surface Σ est donnée par (Goldreich et Tremaine, 1982) :

$$\frac{\dot{a}}{a} \simeq 0.8n\frac{2\pi r\Delta r\Sigma M_S}{M_P^2}\left(\frac{a}{a-r}\right)^4 \tag{8.1}$$

L'équation (8.1) suppose $(a-r)/a \ll 1$ et $(a-r)^2/a^2 \ll \Delta r/a \ll (a-r)/a$. La condition $\Delta r \ll (a-r)$ signifie que l'anneau est étroit, et $(a-r)^2/a \ll \Delta r$ assure que de nombreuses résonances sont présentes dans l'anneau, ce qui simplifie le calcul du couple en lissant sur

l'ensemble des résonances isolées. Enfin, la condition $(a-r)/a \ll 1$ signifie que le satellite est proche de l'anneau. D'autre part, l'attraction du bulbe de marée créé par un satellite sur une planète à l'extérieur de l'orbite synchrone entraîne un gain de moment cinétique du satellite. Le demi grand-axe augmente alors avec le taux suivant :

$$\frac{\dot{a}}{a} = 3\Big(\frac{G}{M_P}\Big)^{1/2} k_{2P} \frac{R_P^5}{Q_P} \frac{M_S}{a^{13/2}}, \tag{8.2}$$

où M_P, R_P, Q_P and k_{2P} sont la masse, le rayon, le coefficient de dissipation et le nombre de Love de la planète (Burns, 1977). Ce dernier paramètre peut être relié au coefficient J_2 de la planète : $k_{2P} = 4\pi G \rho_P J_2 \Omega_P^{-2}$, où ρ_P et Ω_P désignent la densité et la vitesse de rotation de la planète. Très souvent, l'évolution orbitale due à cette effet de marée est difficile à estimer car le coefficient de dissipation Q_P est mal connu.

La plupart des résonances entre les satellites internes de Saturne et les anneaux sont situés dans l'anneau A. Les ondes de densité créées par ces satellites ont permis de déduire une densité de surface de l'anneau $\Sigma \simeq 40$ g cm^{-2} (Rosen et al., 1991). La comparaison des taux d'expansion en demi grand-axe (Eqs. (8.1) et (8.2)) montre que l'effet de l'anneau A est considérablement plus important que l'effet de marée de la planète pour tous les satellites à l'intérieur de l'orbite de Mimas (de l'ordre de 1000 fois plus grand pour Prométhée, par exemple). L'équation (8.1) donne une limite supérieure pour l'âge de Prométhée et Pandore : ces derniers ont ainsi migré respectivement du bord externe des anneaux à leur position actuelle en 10 et 70 millions d'années, pour une densité de 1.2 g cm^{-3}. D'autre part, puisque le taux d'expansion du demi grand-axe est proportionnel à la masse et à $a^5/(a-r)^4$, l'évolution de Prométhée est plus rapide que celle de Pandore, si bien que les orbites de ces deux satellites convergent en l'absence d'autres interactions. La figure 8.1, tirée de Poulet et Sicardy (2001), montre l'évolution orbitale de Prométhée et Pandore sous l'effet des forces de marée dues à la planète et du couple exercé par les anneaux. Elle indique (par des droites verticales) les résonances du permier ordre rencontrées par les satellites. On constate que les orbites de Prométhée et Pandore convergent rapidement, et que les deux satellites entrent très fréquemment en résonance. Poulet et Sicardy (2001) négligent les interactions de Prométhée et Pandore avec les autres satellites (Mimas, Janus ou Epiméthée), car la probabilité de capture en résonance du premier ordre est faible (quelques %). De plus, Prométhée et Pandore rencontrent peu de résonances du premier ordre avec ces satellites au cours de leur évolution.

Le résultats de cette étude sont les suivants : en l'absence d'interactions avec d'autres satellites, le système Prométhée-Pandore a un temps de vie court (inférieur à 20 millions d'années) si les orbites convergent sans qu'il y ait capture en résonance. Le piégeage de Pandore en résonance avec Prométhée augmente le temps de vie du sytème de quelques dizaines de millions d'années. Cependant, les résonances ne sont pas bien séparées, et une capture en résonance crée des mouvements chaotiques. Les résonances secondaires ont aussi pour effet de détruire les configurations résonantes de premier ordre. Dans tous les cas, une rencontre proche ou une collision catastrophique entre les deux satellites se produit.

Ce problème d'évolution des satellites internes de Saturne est directement lié à l'âge des anneaux. Deux scénarios de formation des anneaux de Saturne sont généralement avancés pour rendre compte des échelles de temps courtes (inférieures à quelques dizaines de millions d'années) de leur évolution. Le premier est la destruction d'un satellite interne par un impact cométaire (Esposito, 1986), le second la destruction d'une comète lors d'une rencontre proche avec la planète (Dones, 1991). Cependant, de tels événements sont probablement rares sur les cent der-

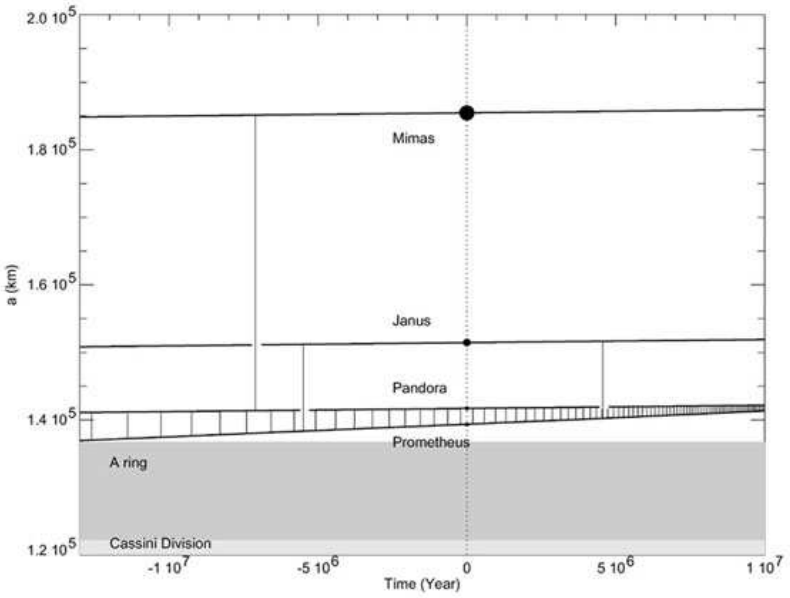

FIG. 8.1: Variation du rayon de Prométhée et Pandore en fonction du temps, sous l'effet du couple des anneaux et des forces de marée de Saturne (d'après Poulet et Sicardy, 2001). Les résonances du premier ordre rencontrées par les deux satellites sont indiquées par des droites verticales. L'origine temporelle correspond à la configuration actuelle.

niers millions d'années (Lissauer et al., 1988; Dones, 1991; Colwell, 1994; Colwell et al., 2000). Poulet et Sicardy (2001) ont donc proposé un nouveau scénario : des collisions récurrentes entre des satellites internes (suite à la convergence d'orbites du même type que celle entre Prométhée et Pandore) alimentent les anneaux. Chaque collision peut ensuite briser un satellite en plusieurs gros fragments et de nombreuses particules. Les fragments les plus gros migrent vers l'extérieur, en raison du transfert de moment cinétique avec les anneaux, jusqu'à ce qu'une nouvelle collision entre deux corps se produise. Cela crée ensuite soit un anneau, soit un satellite plus gros s'il y a accrétion. L'âge des anneaux correspond alors au temps d'évolution des petits satellites depuis la dernière collision. L'exemple de Prométhée et Pandore donne ainsi un âge de quelques dizaines de millions d'années. Si une évolution de ce type est récurrente, l'âge des anneaux est alors supérieur à 100 millions d'années, validant ainsi le scénario de formation par destruction d'une comète ou d'un satellite.

Ce modèle comporte tout de même quelques problèmes. Si initialement les anneaux proviennent de la destruction d'un satellite, ce dernier a une taille au moins comparable à celle de Mimas. La faible masse des satellites internes (environ la moitié de la masse de l'anneau A) indique alors que l'on observe aujourd'hui les dernières phases de ce processus de régénération. Pas assez de matériau contenu dans les satellites semble disponible pour réalimenter les anneaux. La question du résultat des collisions est aussi problématique : l'énergie produite par une collision est-elle suffisante pour empêcher la réaccrétion des fragments ? Comment d'autre part créer des particules centimétriques à partir d'objets de plusieurs dizaines de kilomètres ?

Nous avons envisagé dans cette thèse les autres alternatives pouvant résoudre le problème du temps d'évolution de Prométhée et Pandore : d'une part les interactions résonantes avec Mimas et Téthys, d'autre part celles avec les co-orbitaux Janus et Epiméthée. La comparai-

son des coefficients de la fonction perturbatrice (*cf.* table 6.5) montre d'ailleurs que ces résonances peuvent avoir un effet non négligeable pour l'évolution dynamique de Prométhée et Pandore.

8.3 Effets de Mimas ou des co-orbitaux Janus et Epiméthée

Nous présentons ici quelques résultats typiques de simulations de l'évolution à long terme des orbites de Prométhée et Pandore, perturbées d'une part par Mimas et Téthys, d'autre part par les co-orbitaux Janus et Epiméthée. Nous avertissons le lecteur que ces résultats sont préliminaires et se placent davantage dans le cadre d'une perspective de recherche future.

Nous avons utilisé un intégrateur symplectique du second ordre (MVS, pour *mixed-variable symplectic*) incluant des correcteurs symplectiques (Wisdom et al., 1996), plus particulièrement celui du code *mercury6* développé par John Chambers (Chambers, 1999). Ces intégrateurs ont l'avantage d'être plus stables et plus rapides que des intégrateurs plus classiques, ils conservent très bien l'énergie et le moment cinétique. Néanmoins l'intégrateur MVS ne peut calculer avec précision les rencontres proches entre des objets. Il peut aussi donner des résultats erronés dans le cas d'orbites très excentriques.

Parmi les articles concernant les intégrateurs symplectiques (et leurs améliorations), on peut citer : Yoshida (1990), Wisdom et Holman (1991), Saha et Tremaine (1992), Yoshida (1993), Levison et Duncan (1994), Malhotra (1994), Saha et Tremaine (1994), Wisdom et al. (1996), Cordeiro et al. (1997), Mikkola (1997), Duncan et al. (1998), Mikkola (1998) et Laskar et Robutel (2001).

Les paramètres de Saturne utilisés (masse, rayon et coefficients zonaux) sont ceux de la table 6.1. Il a fallu déterminer un pas de temps qui permettait de préserver le caractère chaotique du mouvement de Prométhée et Pandore. Après plusieurs tentatives, une valeur faible, $\tau = 10^{-2}$ jours, a été adoptée. Dans toutes les simulations nous négligeons l'inclinaison des satellites.

8.3.1 Simulation du couple des anneaux

Détaillons comment introduire dans les intégrations numériques le couple dû aux anneaux principaux appliqué à Prométhée et Pandore.

Considérons un satellite de masse M_S en orbite non inclinée autour d'un corps central de massse M. Notons respectivement $\mathbf{r_S}$, $\mathbf{v_S}$, $\mathbf{a_S}$ et n_S le rayon vecteur, le vecteur vitesse, le vecteur accélération et le moyen mouvement du satellite. Soit $\mathbf{J_S}$ le moment cinétique spécifique du satellite : $\mathbf{J_S} = \mathbf{r_S} \times \mathbf{v_S}$. La variation éventuelle de moment cinétique (couple) est donnée par : $\dot{\mathbf{J}}_\mathbf{S} = \mathbf{r_S} \times \mathbf{a_S}$. Un moyen simple de créer un couple, qui n'induit pas de variations en excentricité, est donc de donner au satellite une accélération $\mathbf{a}$ orthogonale au rayon vecteur, de la forme :

$$\mathbf{a} = \begin{cases} a_x = -\epsilon \dfrac{GM}{r_S^2} \dfrac{y}{r} \\ \\ a_y = \epsilon \dfrac{GM}{r_S^2} \dfrac{x}{r}, \end{cases} \tag{8.3}$$

où ϵ est une fonction sans dimension. Cette dernière caractérise complètement le couple puisqu'on vérifie facilement que $\epsilon = \dot{J}_S/(n_S J_S) = \dot{a}_S/(2n_S a_S)$.

On peut relier ϵ au couple standard théorique. La densité de couple (*i.e.*le couple par unité de rayon) exercé sur un anneau de largeur unité par un satellite est (Goldreich et Tremaine, 1982) :

$$\frac{d\Gamma}{dr} = sgn(r - a_S)0.4r^2n^2 2\pi r\Sigma\left(\frac{M_S}{M_P}\right)^2\left(\frac{r}{a_S - r}\right)^4, \tag{8.4}$$

où a_S est le demi grand-axe du satellite, r est le rayon de l'anneau et n son moyen mouvement. En supposant que la densité surfacique Σ des anneaux est constante et en intégrant l'équation précédente, on obtient le couple total de l'anneau :

$$\Gamma = sgn(r - a_S)0.84r^4n^2\Sigma\left(\frac{M_S}{M_P}\right)^2\left(\frac{r}{a_S - r}\right)^3, \tag{8.5}$$

Comme $\Gamma = M_S\dot{J}_S = M_S a_S^2 n_S^2\epsilon$, on obtient d'après (8.5), en supposant $a_S \simeq r$ et $n_S \simeq n$:

$$\epsilon \simeq 0.84\Sigma\frac{r^5}{(a_S - r)^3}\frac{M_S}{M_P^2} \tag{8.6}$$

Notons que ϵ est bien positif puisque Prométhée et Pandore sont à l'extérieur des anneaux principaux. La détermination des masses de Prométhée et Pandore (chapitre 7) permet de réévaluer la valeur du couple dû aux anneaux. Supposons pour fixer les idées que $\Sigma = 100$ g cm^{-2}, et $r = 137000$ km (bord externe de l'anneau A). D'après la table 7.1, les masses respectives de Prométhée et Pandore sont $M_{PR} = 2.11 \times 10^{17}$ kg et $M_{PA} = 1.54 \times 10^{17}$ kg. On obtient ainsi respectivement pour Prométhée et Pandore :

$$\begin{cases} \epsilon_{PR} \simeq \dfrac{0.0265}{(a_{PR} - r)^3} \\ \\ \epsilon_{PA} \simeq \dfrac{0.01925}{(a_{PA} - r)^3}, \end{cases} \tag{8.7}$$

où les distances $a_{PR} - r$ et $a_{PA} - r$ sont exprimées en km. Les équations (8.3) et (8.7) ont été incorporées dans le code *mercury6* pour suivre l'évolution orbitale de Prométhée et Pandore. Les distances entre les satellites et les anneaux, $a_{PR} - r \simeq 2600$ km et $a_{PA} - r \simeq 4900$ km, donnent respectivement $\epsilon_{PR} \simeq 1.5 \times 10^{-12}$ et $\epsilon_{PA} \simeq 1.6 \times 10^{-13}$.

Ces valeurs ne sont bien sûr qu'indicatives. On néglige par exemple l'effet de l'anneau F. Si ce dernier est massif, un échange de moment cinétique est possible avec Prométhée et Pandore. A ce sujet, Porco et al. (*cf.* circulaire de l'UAI 8389) ont découvert lors de deux observations *Cassini* du 21 juin 2004 deux objets, S/2004 S3 et S/2004 S4, en orbite à l'intérieur de l'anneau F, et de l'ordre de 4 ou 5 kilomètres de diamètre. Il est cependant possible dynamiquement que ces deux corps soient en fait un seul et même objet, ou que ce soient des grumeaux de poussière (clumps) plutôt que des satellites. Murray et Giuliatti Winter (1996) ont d'autre part suggéré que des collisions entre l'anneau F et Prométhée étaient possibles. L'anneau est néanmoins situé dans une zone chaotique, si bien que les particules ont des temps de vie courts de l'ordre

de quelques dizaines de milliers d'années, révélant ainsi un caractère assez transitoire de l'anneau F (Cuzzi et Burns, 1988; Poulet et al., 2000). L'influence de l'anneau F sur Prométhée et Pandore semble en fait non-négligeable seulement à court terme.

Les échanges éventuels de moment cinétique ne doivent pas dépendre de la valeur du couple choisie. Néanmoins, un critère d'adiabaticité doit être vérifié : les effets du couple ne doivent pas altérer ceux des résonances. Une condition minimale est donc que la variation $\dot{a}$ en demi grand-axe due au couple durant une période de libration T_{lib} de la résonance est bien plus faible que l'amplitude W_{lib} des variations en demi grand-axe due à la résonance : $\dot{a}T_{lib} \ll W_{lib}$, c'est-à-dire :

$$\epsilon \ll \frac{W_{lib}}{2n_S a_S T_{lib}} \tag{8.8}$$

Cette condition est largement vérifiée : les résonances considérées imposent environ $\epsilon \ll 10^{-10}$.

On suppose donc que Prométhée et Pandore sont soumis à la forme standard du couple échangé avec les anneaux. On peut imaginer qu'aucun transfert n'ait lieu si les anneaux n'ont pas le temps de répondre à l'excitation des satellites à cause de leur mouvement chaotique (tous les 6.2 ans). Le cas déja étudié de Janus et Epiméthée tend à montrer en fait le contraire. Ces satellites co-orbitaux maintiennent le bord externe de l'anneau A par une résonance 7 : 6. Il faut que le temps nécessaire à une onde de densité pour se propager sur une longueur d'onde soit court par rapport à la demi-période de libration du mouvement co-orbital ($\sim$ 4 ans). La vitesse de groupe c_g des ondes de densité spirales crées par les co-orbitaux aux résonances 7 : 6 est donnée par : $c_g = \pi G\Sigma/n \simeq 54\Sigma$ km an^{-1}, et la première longueur d'onde (en théorie linéaire) par $\lambda \simeq 164\Sigma^{1/2}$ km. Ainsi, $\lambda/c_g \simeq 30\Sigma^{-1/2} < 4$ ans. (Goldreich et Tremaine, 1978a; Lissauer et al., 1985).

8.3.2 Cas des résonances 3 : 2 avec Mimas

Nous avons simulé l'évolution orbitale de Prométhée et Pandore soumis aux perturbations de Mimas et Téthys. Les résultats obtenus sont résumés dans les figures 8.2 et 8.3. Les conditions initiales utilisées sont données dans la table 8.1. Nos intégrations numériques ne corroborent pas l'hypothèse de Borderies et al. (1984), selon laquelle un mouvement chaotique de Pandore assurerait un transfert de moment cinétique, bien que n'étant pas exactement en résonance avec Mimas. Aucun transfert systématique de moment cinétique de Pandore vers Mimas n'est en effet détectable dans ces intégrations.

Dans la figure 8.2, aucun couple n'a été appliqué a Prométhée et Pandore. Prométhée et Pandore échangent leur moment cinétique en raison des interactions chaotiques, mais aucun transfert systématique ne se produit avec Mimas. Dans la figure 8.3, Prométhée et Pandore sont cette fois-ci soumis au couple des anneaux donné par les équations (8.3) et (8.7)). De même, aucun transfert n'a lieu vers Mimas, sauf évidemment lorsque Pandore entre en résonance de corotation 3 : 2 (à $t \sim 3.6 \times 10^5$ ans). L'issue des simulations avec couple est toujours la même : soit une rencontre proche ou une collision a lieu, soit l'intégrateur ne parvient plus à calculer les éléments orbitaux, en particulier lorsque Pandore traverse la résonance 3 : 2 de Lindblad avec Mimas. L'échelle de temps est toujours courte, inférieure à environ 1 million d'années, pour la valeur du couple considérée (*cf.* section 8.3.1).

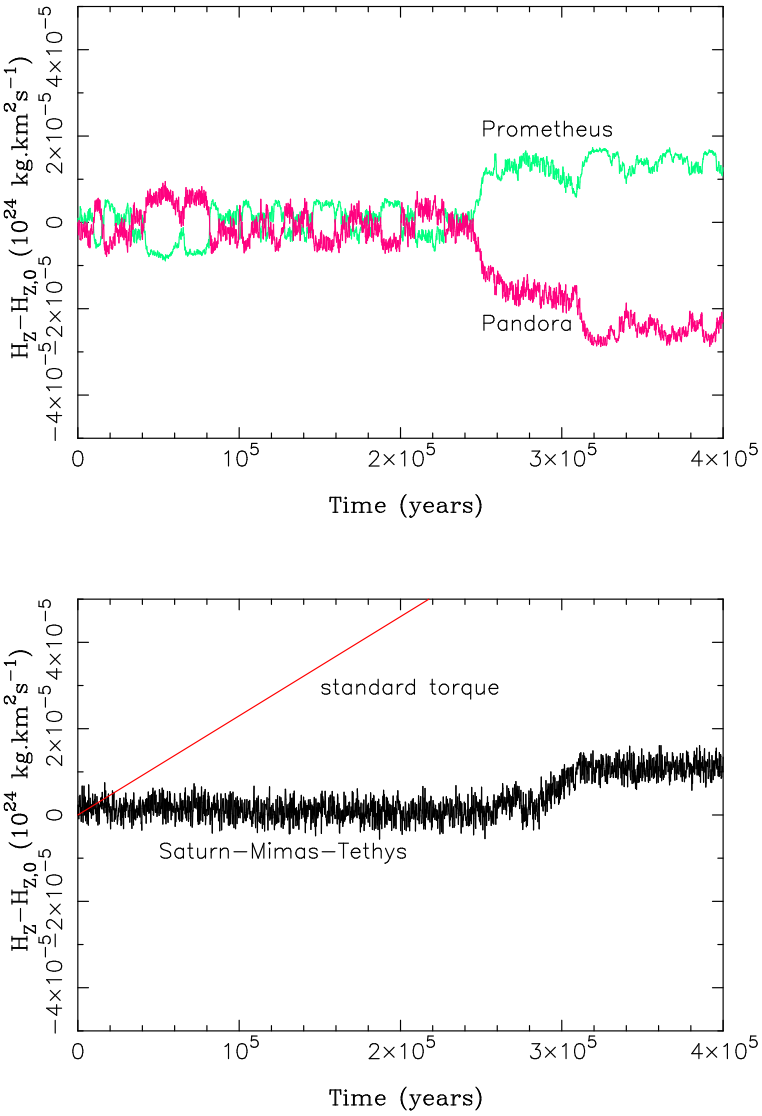

FIG. 8.2: Composante verticale du moment cinétique (10^{24} kg km^2 s^{-1}) en fonction du temps (en années) et par rapport à la valeur initiale, pour Prométhée et Pandore (en haut) et pour le centre de masse du système Saturne-Mimas-Téthys (en bas). Les conditions initiales sont données dans la table 8.1. Aucun couple n'a été appliqué à Prométhée et Pandore. La variation temporelle du moment cinétique de Mimas, due au couple que ce dernier exercerait selon la forme standard (*cf.* Eq.(3.3)) sur un anneau ayant l'orbite de Pandore, est indiquée en rouge.

	Téthys	Mimas	Prométhée	Pandore
GM (km^3 s^{-2})	40.2071	2.4048	0.0141	0.0103
a (km)	294673.753	185536.097	139377.5	141714.35
e	0.0001	0.0201	1.92×10^{-3}	4.5×10^{-3}
i (°)	0.	0.	0.	0.
Ω (°)	–	–	–	–
ϖ (°)	203.46	335.73	257.0	359.0
λ (°)	116.34	177.58	339.155	96.023

TAB. 8.1: Masses et éléments orbitaux initiaux de Téthys, Mimas, Prométhée et Pandore. Les masses de Téthys et Mimas proviennent de la théorie semi-analytique *TASS*1.6 (Table 10 de Vienne et Duriez, 1995), où on a utilisé la valeur de GM_S de Campell et Anderson (1989). Celles de Prométhée et Pandore ont été déterminées par ajustement aux données *HST* (*cf.* chapitre 7). Les éléments orbitaux initiaux de Téthys et Mimas proviennent de Harper et Taylor (1993). Les conditions initiales de Prométhée et Pandore sont les valeurs nominales de French et al. (2003), sauf le demi grand-axe. Ce dernier paramètre a été ajusté pour les deux satellites afin de conserver le caractère chaotique de leur mouvement, dû à la superposition des résonances 121 : 118 (*cf.* chapitres 6 et 7).

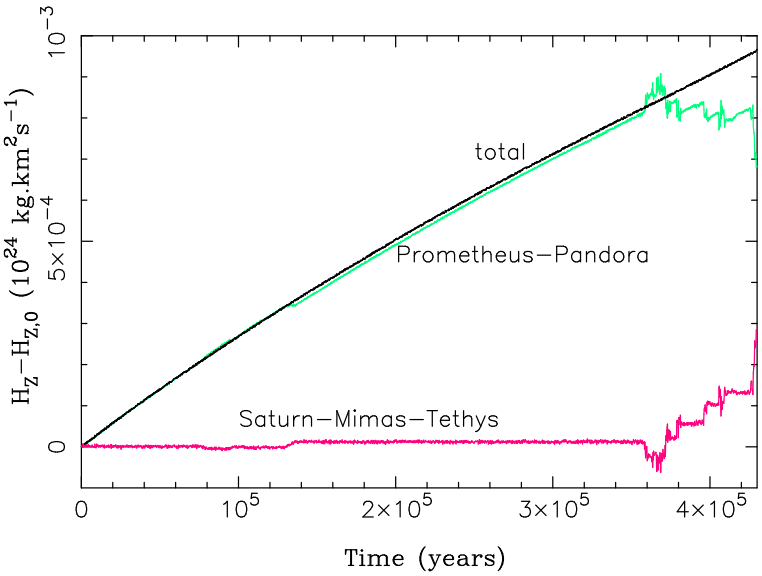

FIG. 8.3: Composante verticale du moment cinétique (10^{24} kg km^2 s^{-1}) en fonction du temps (en années) et par rapport à la valeur initiale, pour Prométhée et Pandore (en vert), pour le centre de masse du système Saturne-Mimas-Téthys (en rose), et pour l'ensemble du système (en noir). Les conditions initiales sont données dans la table 8.1. Prométhée et Pandore sont soumis au couple des anneaux, selon les équations (8.3) et (8.7). A $t \sim 3.6 \times 10^5$ ans, Pandore entre en résonance de corotation 3 : 2 avec Mimas.

8.3.3 Cas des résonances du second ordre avec Janus et Epiméthée

L'évolution orbitale de Prométhée et Pandore, soumis cette fois aux interactions avec les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée, est illustrée par les figures 8.4 et 8.5. Au cours de leur évolution orbitale, Prométhée et Pandore rencontrent de nombreuses résonances, du premier et du second ordre, avec ces satellites (*cf.* table 8.2). Actuellement, Prométhée et Pandore sont respectivement en résonance 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée, tous les quatre ans environ en raison de la libration de ce dernier.

Les probabilités de capture pour ces résonances ne sont pas calculées ici. Cette notion a déja fait l'objet de plusieurs publications : Henrard et Lemaitre (1983), Borderies et Goldreich (1984), Peale (1986), Dermott et al. (1988) et Poulet et Sicardy (2001). Lorsque les orbites de deux objets sont divergentes, les effets de marée et les effets de la résonance s'additionnent et aucune capture en résonance ne se produit. Dans ce cas, la traversée d'une résonance a pour conséquence un saut en excentricité. Pour des orbites convergentes, une configuration résonante est maintenue sous la condition suivante : la capture a pour probabilité 1 si la résonance est rencontrée avec une excentricité inférieure à une valeur critique e_c (par exemple $e_c \simeq 0.5 \times 10^{-3}$ dans le cas des résonances du premier ordre entre Prométhée et Pandore, *cf.* Poulet et Sicardy, 2001). Si l'excentricité est supérieure à e_c, on a une certaine probabilité. Par exemple, la probabilité pour que Pandore soit capturée en résonance du premier ordre avec Prométhée est de l'ordre de 0.8 %, et quelques pourcent avec Janus ou Mimas.

Les conditions initiales des simulations sont données dans la table 8.3. La figure 8.4 donne la variation temporelle de moment cinétique de Prométhée+Pandore et de Janus+Epiméthée. Aucun couple n'a été appliqué à Prométhée et Pandore, et on remarque des échanges aléatoires de moment cinétique. Cependant, le transfert n'est pas sytématique et se moyenne à zéro.

La figure 8.5 donne en plus du moment cinétique en fonction du temps, la variation en demi grand-axe et en excentricité de Pandore. Cette fois-ci, nous avons appliqué le couple des anneaux (Eqs. (8.3) et (8.7)), et on constate un transfert non négligeable et séculaire de moment cinétique. Cependant, à cause des résonances rencontrées par Prométhée et Pandore (*cf.* par exemple Peale, 1986; Dermott et al., 1988), l'excentricité augmente jusqu'à ce qu'une rencontre proche ou une collision se produise. Ce scénario se reproduit chaque fois qu'un couple est appliqué à Prométhée et Pandore. En particulier lorsque l'un des satellites traverse une résonance de Lindblad, l'intégrateur ne parvient plus à calculer les éléments orbitaux. L'échelle de temps est d'ailleurs courte, inférieure au million d'années, pour la valeur du couple considérée (*cf.* section 8.3.1). Dans la réalité, l'excentricité de Prométhée et Pandore pourrait être amortie sur des échelles de temps bien plus courtes que celles prévues par les effets de marée dus à la planète. Pour un satellite en rotation synchrone (couplage spin-orbite), le temps d'amortissement τ_e de l'excentricité dû au couple de marée de la planète est donné par (Yoder et Peale, 1981; Murray et Dermott, 2001) :

$$\tau_e = -\frac{e}{\dot{e}} = \frac{4}{63}\frac{M_S}{M_P}\left(\frac{a}{R_S}\right)^5 \frac{\mu_S Q_S}{n} \tag{8.9}$$

où $Q_S = 2\pi E/\delta E$ est la fonction spécifique de dissipation (paramètre sans dimension mesurant le taux de dissipation) et μ_S le rapport entre les forces élastiques et gravitationnelles pour le satellite. Bien que le paramètre Q_S soit très mal contraint, une estimation typique du temps d'amortissement est $\tau_e \simeq 10^8$ ans. Comme le mouvement de Pandore par exemple est chaotique, le satellite avance de 20° environ par rapport à la longitude prédite par les éphé-

mérides *Voyager*. Par conséquent, la déformation de marée pourrait être beaucoup plus forte, et le temps d'amortissement de e bien plus faible. Un état d'équilibre pourrait même être atteint entre l'amortissement de e par effet de marée et l'excitation de l'excentricité à cause des résonances et des rencontres entre les satellites.

Le transfert séculaire de moment cinétique vers les co-orbitaux (figure 8.5), s'il est confirmé, est un résultat important, car il permettrait d'expliquer comment le moment cinétique transmis des anneaux vers des satellites comme Prométhée et Pandore peut être évacué vers des satellites plus massifs, ce qui ralentirait l'évolution du système. Cependant, nous n'expliquons pas encore ce transfert, et des développements théoriques sont à entreprendre. Prométhée et Pandore entrent périodiquement en résonance avec les co-orbitaux, et de plus leurs phases par rapport à Janus et Epiméthée sont rendues aléatoires à cause des mouvements chaotiques. Il faudrait voir analytiquement si et comment ces deux processus (individuellement ou non) peuvent favoriser l'apparition d'un couple séculaire, évacuant le moment cinétique de Prométhée et Pandore vers les satellites co-orbitaux.

Angle critique	Janus	Epiméthée
$17\lambda' - 15\lambda - 2\varpi'$	139413.13 (139394.42)	**139369.58** (139437.85)
$17\lambda' - 15\lambda - \varpi' - \varpi$	139420.51 (139401.81)	**139376.96** (139445.23)
$17\lambda' - 15\lambda - 2\varpi$	139427.88 (139409.18)	**139384.33** (139452.60)
$9\lambda' - 8\lambda - \varpi'$	140096.20 (140077.40)	140052.43 (140121.05)
$9\lambda' - 8\lambda - \varpi$	140109.26 (140090.46)	140065.49 (140134.10)
$19\lambda' - 17\lambda - 2\varpi'$	140705.93 (140687.05)	140661.97 (140730.88)
$19\lambda' - 17\lambda - \varpi' - \varpi$	140711.75 (140692.87)	140667.79 (140736.70)
$19\lambda' - 17\lambda - 2\varpi$	140717.56 (140698.69)	140673.60 (140742.51)
$10\lambda' - 9\lambda - \varpi'$	141253.54 (141234.59)	141209.41 (141278.60)
$10\lambda' - 9\lambda - \varpi$	141263.98 (141245.03)	141219.84 (141289.03)
$21\lambda' - 19\lambda - 2\varpi'$	141748.06 (141729.04)	**141703.77** (141773.21)
$21\lambda' - 19\lambda - \varpi' - \varpi$	141752.77 (141733.76)	**141708.48** (141777.91)
$21\lambda' - 19\lambda - 2\varpi$	141757.48 (141738.46)	**141713.19** (141782.62)
$11\lambda' - 10\lambda - \varpi'$	142196.88 (142177.80)	142152.44 (142222.10)
$11\lambda' - 10\lambda - \varpi$	142205.41 (142186.34)	142160.97 (142230.63)

TAB. 8.2: Position des résonances du premier et second ordre avec Janus et Epiméthée au voisinage de Prométhée et Pandore. La longitude moyenne de Janus ou Epiméthée est notée λ', la longitude du périapse ϖ'. Pour chaque angle critique, on donne la position (en km) de la résonance avec Janus et Epiméthée, pour les deux configurations orbitales possibles des co-orbitaux (les rayons entre parenthèses correspondent à la configuration où l'orbite d'Epiméthée est extérieure à celle de Janus). Pour calculer les rayons des résonances, on procède par itération en annulant la dérivée temporelle de l'angle critique. Nous avons utilisé les paramètres de Saturne donnés dans la table 6.1, et les valeurs suivantes pour le moyen mouvement de Janus et Epiméthée (McGhee et al., 2001) : $n_{JA} = 518.2383°/\text{j}$, $n_{EP} = 518.4822°/\text{j}$. Les taux de précession du périase ($\dot{\varpi}_{EP} = 2.0552°/\text{j}$, $\dot{\varpi}_{JA} = 2.0524°/\text{j}$) ont été calculés en utilisant les paramètres de Saturne de la table 6.1 et les demi grands-axes suivants : $a_{EP} = 151414.61$ km et $a_{JA} = 151461.99$ km (McGhee et al., 2001). Ces valeurs correspondent à la configuration orbitale où Epiméthée est à l'intérieur de Janus. Pour l'autre configuration, les valeurs suivantes ont été choisies : $n_{JA} = 518.343°/\text{j}$, $n_{EP} = 518.1°/\text{j}$, $\dot{\varpi}_{JA} = 2.0534°/\text{j}$ et $\dot{\varpi}_{EP} = 2.0515°/\text{j}$, où les moyens mouvements ont été déterminés par intégration numérique. Actuellement, Prométhée et Pandore sont respectivement en résonance 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée, tous les quatre ans. Les rayons correspondants sont indiqués en gras.

	Janus	Epiméthée	Prométhée	Pandore
GM (km^3 s^{-2})	0.1284	0.0357	0.0141	0.0103
a (km)	151461.99	151414.61	139374.0	141709.5
e	0.0066	0.0126	1.92×10^{-3}	4.5×10^{-3}
i (°)	0.	0.	0.	0.
Ω (°)	–	–	–	–
ϖ (°)	107.95	222.95	0.	0.
λ (°)	35.33	175.33	0.	180.0

TAB. 8.3: Masses et éléments orbitaux initiaux de Janus, Epiméthée, Prométhée et Pandore. Les valeurs pour Janus et Epiméthée sont tirées de McGhee et al. (2001). Les masses de Prométhée et Pandore ont été déterminées par ajustement aux données *HST* (*cf.* chapitre 7). Les éléments orbitaux initiaux de Janus et Epiméthée (*cf.* chapitre 6) sont tirés de McGhee et al. (2001). Pour Prométhée et Pandore, on a supposé les orbites équatoriales et choisi pour excentricité les valeurs nominales de French et al. (2003). Nous avons arbitrairement aligné les apses des satellites, et placé Prométhée à son périapse et Pandore à son apoapse. Les demi grands-axes ont finalement été ajustés pour préserver le mouvement chaotique, dû à la superposition des résonances 121 : 118 (*cf.* chapitre 6 et 7).

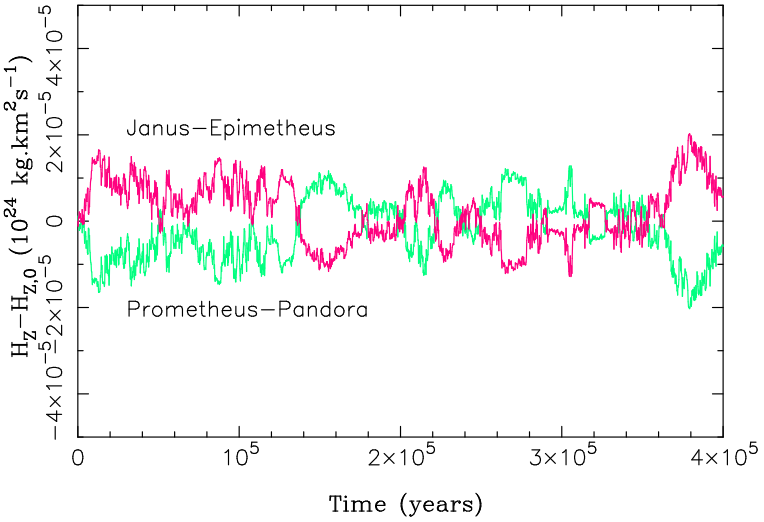

FIG. 8.4: Composante verticale du moment cinétique (10^{24} kg km^2 s^{-1}) en fonction du temps (en années) et par rapport à la valeur initiale, pour Prométhée et Pandore (en vert) et pour Janus et Epiméthée (en rose). Les conditions initiales sont données dans la table 8.3. Aucun couple n'a été appliqué à Prométhée et Pandore.

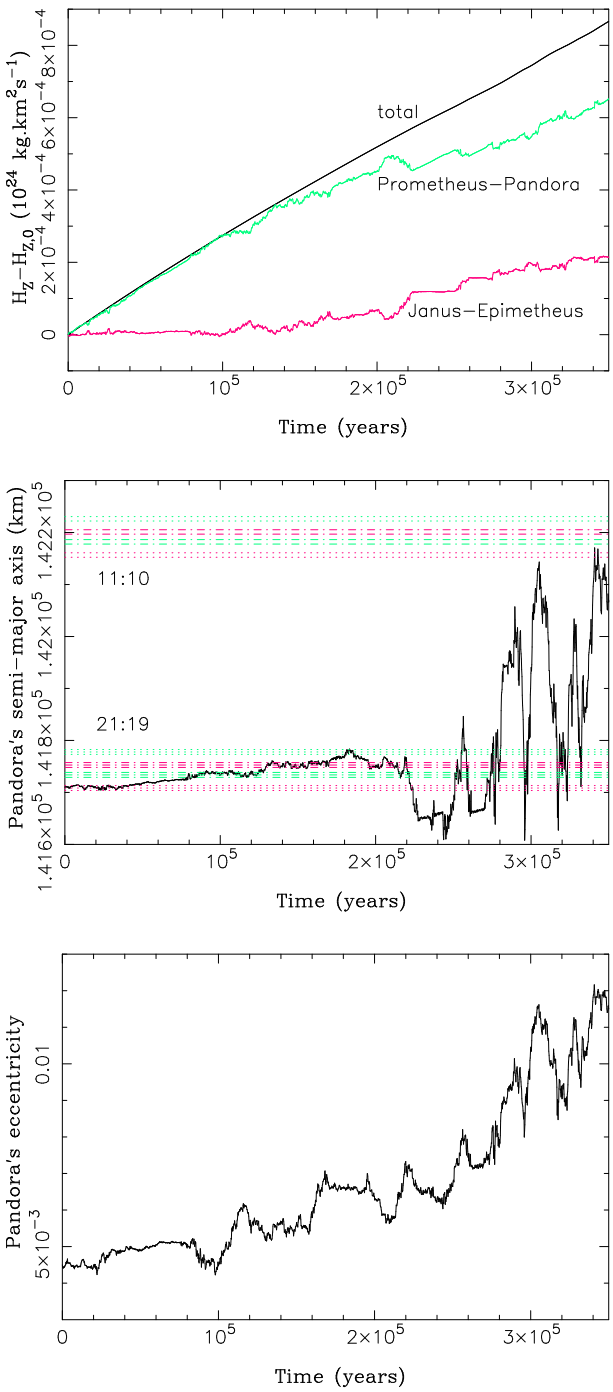

FIG. 8.5: Evolution dynamique à long terme de Prométhée, Pandore, Janus et Epiméthée. Prométhée et Pandore sont soumis au couple des anneaux, selon les équations (8.3) et (8.7). Les conditions initiales sont données dans la table 8.3. En haut est représentée la composante verticale du moment cinétique (10^{24} kg km^2 s^{-1}) en fonction du temps (en années) et par rapport à la valeur initiale, pour Prométhée et Pandore (en vert) et pour Janus et Epiméthée (en rose). Le demi grand-axe (km) et l'excentricité de Pandore en fonction du temps sont donnés respectivement au milieu et en bas. Nous avons indiqué les positions des résonances avec les co-orbitaux (*cf.* table 8.2) : celles avec Epiméthée sont notées en pointillés et celles avec Janus en tirets et pointillés. Tous les quatre ans, les positions des résonances sont modifiées (couleur verte ou rose) à cause du mouvement co-orbital.

Troisième partie

Occultations stellaires

Chapitre 9

Occultations par Pluton (juillet 2002) et par Titan (Novembre 2003)

Sommaire

9.1 L'occultation de P126 A par Pluton du 20 juillet 2002 126
9.2 L'occultation de TYC 1343-1615-1 par Titan du 14 novembre 2003 129

Je décris ici brièvement ma participation à deux missions d'observation d'occultations stellaires : une occultation par Pluton ayant eu lieu en juillet 2002, et une occultation par Titan en novembre 2003.

Le terme d'occultation désigne de manière générale le fait qu'un corps céleste cache un autre corps céleste à l'observateur. Une éclipse de Soleil est par exemple une occultation du Soleil par la Lune. Si le corps occulté est une étoile, on parle alors d'occultation stellaire. Les occultations permettent de sonder l'atmosphère du corps occultant. Si ce dernier ne possède pas d'atmosphère, le flux lumineux normalisé provenant de l'étoile passe soudainement de 1 à 0 lorsque l'objet occultant coupe la ligne de visée. L'observation de ce phénomène de plusieurs endroits de la Terre permet de reconstituer de façon très précise la forme de l'objet. Si par contre le corps occultant possède une atmosphère, le flux de l'étoile va diminuer progressivement en raison de la réfraction des rayons lumineux à travers l'atmosphère. Au fur et à mesure que l'étoile plonge dans l'atmosphère, les couches atmosphériques traversées par les rayons lumineux deviennent plus denses, et les rayons sont davantage réfractés. Pour chaque rayon lumineux observé, le flux est de plus en plus étalé dans l'espace, conduisant ainsi à une diminution de flux à un moment donné. On appelle courbe de lumière la variation temporelle du flux de l'étoile occultée. L'analyse d'une courbe de lumière permet d'obtenir des informations sur l'atmosphère de l'objet occultant, comme la pression, la densité, la température (soit par ajustement de courbes de lumière synthétiques aux courbes observées, soit par inversion de la courbe pour obtenir un profil vertical de température).

Les résultats scientifiques obtenus grâce à de tels événements sont nombreux : taille des petits corps (Bus et al., 1996), détection des objets de Kuiper (Roques et Moncuquet, 2000; Roques et al., 2003), structure thermique des atmosphères planétaires (Hubbard et al., 1993), détection d'atmosphères ou d'ondes atmosphériques de gravité (Elliot et al., 1989; Brosch, 1995; Sicardy, 2002; Sicardy et al., 2003; French et Gierasch, 1974; Roques et al., 1994; Sicardy et al., 1999a),

découverte des anneaux d'Uranus (Elliot et al., 1977) et des arcs de Neptune (Hubbard et al., 1986; Sicardy, 1988; Sicardy et al., 1991).

J'ai eu la chance durant cette thèse de participer à deux missions d'observation : une occultation par Pluton observable en Amérique du Sud en juillet 2002, et une occultation par Titan ayant eu lieu cette fois-ci en Afrique du Sud et en Namibie au mois de novembre 2003. Ce type de mission est très enrichissant, pas seulement sur le plan scientifique : mettre en station dans l'hémisphère sud un vieux C8, bricolé sur place, après avoir traversé la Namibie en voiture, sur des pistes poussiéreuses et glissantes, en faisant attention de ne pas trop percuter de kudus, on peut parler de véritables expéditions...

9.1 L'occultation de P126 A par Pluton du 20 juillet 2002

Pluton a un très faible diamètre angulaire (0.12"). Les occultations par cette planète sont donc rares : seules deux occultations ont eu lieu ces vingt dernières années, en 1985 (Brosch, 1995) et en 1988 (Hubbard et al., 1988; Elliot et al., 1989; Millis et al., 1993). En 2002, deux étoiles ont été occultées par Pluton, P126 A le 20 juillet 2002 et P131.1 le 21 août.

Pour la première, une zone d'ombre située en Amérique du Sud, centrée en latitude sur le VLT et allant du Chili au Brésil était prédite par l'astrométrie. Bruno Sicardy a donc organisé une campagne d'observations en Amérique du Sud à laquelle j'ai participé. En ce qui me concerne, je me suis rendu à Itajubà à l'observatoire Pico dos Dias (Brésil), équipé d'une caméra *IOTA* (International Occultation Timing Association). Ces caméras sont des CCD permettant une acquisition rapide des images. La campagne d'observation comprenait plusieurs télescopes fixes ou portables (20 ou 30 cm), en Argentine, en Equateur, au Vénézuela, au Brésil, au Pérou et au Chili, dont le VLT, le télescope de 3.6m et le NTT à La Silla, et le 1.6m d'Itajuba. Quelques mois avant l'événement, l'étoile occultée s'est en fait révélée être une étoile double (P126A et P126B), ce qui a fortement compliqué les prévisions astrométriques et l'organisation des sites d'observation. La position de la zone d'ombre est restée incertaine à cause du manque de précision sur la position réelle de P126 A. C'est ainsi qu'à Itajubà, je me trouvais en fait en dehors de l'ombre (figure 9.2). De plus, le temps fut couvert ce 20 juillet 2002 et la caméra souffrait d'un problème technique ! En raison de circonstances similaires, une seule équipe, installée près d'Arica à la frontière nord du Chili, a pu être en mesure de ramener une courbe de lumière, avec un télescope mobile de 30 cm (et une caméra CCD sans filtre en mode scan). Le rapprochement Pluton/P126 A a d'autre part été mesuré en optique adaptative par la caméra VLT/NACO.

L'analyse de cette courbe de lumière, couplée a celle de l'occultation de P131.1 le 21 août observée à Hawaii au CFHT, a montré que l'atmosphère de Pluton avait évolué depuis 1988, avec notamment une augmentation de la pression de surface d'un facteur 2. L'interprétation physique la plus plausible pour une telle augmentation de pression est que le pôle sud de Pluton, qui est resté plus de 120 ans dans l'obscurité et qui a commencé par être éclairé par le Soleil dans les années 1990, est en train de se sublimer. Les glaces d'azote se sublimeraient et alimenteraient l'augmentation de la pression atmosphérique. L'azote va alors se condenser vers le pôle nord, qui rentre actuellement dans l'ombre permanente. Les modèles actuels d'interaction glace/atmosphère prévoient que cette augmentation pourrait continuer jusque vers 2015, avant que la condensation de l'atmosphère ne recommence. Plusieurs fluctuations rapides (*spikes*) dans la courbe d'occultation d'août 2002 montrent de plus la présence d'une

activité dynamique dans cette atmosphère, due soit à des instabilités de cisaillement associées à des vents violents côté sombre/côté éclairé, soit à des ondes de gravité générées par une troposphère hypothétique près de la surface de la planète.

Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'article reproduit en annexe (Sicardy et al., 2003).

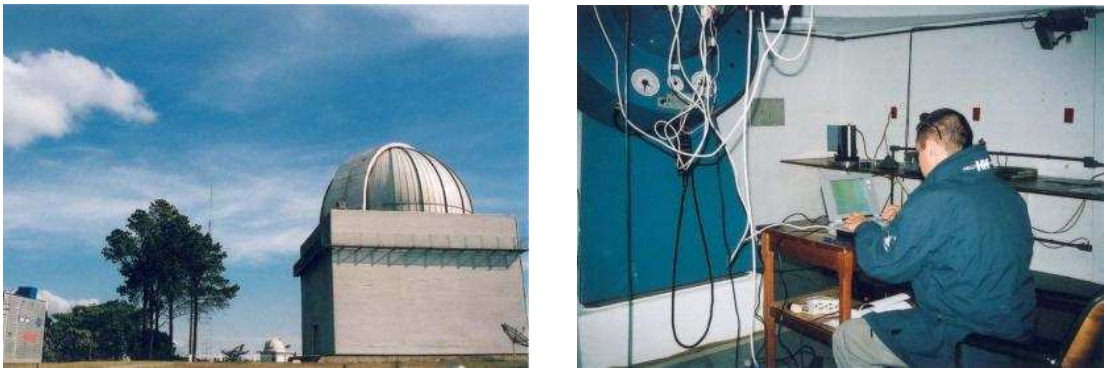

FIG. 9.1: Observation de Pluton à l'observatoire d'Itajuba au Brésil au mois de juillet 2002

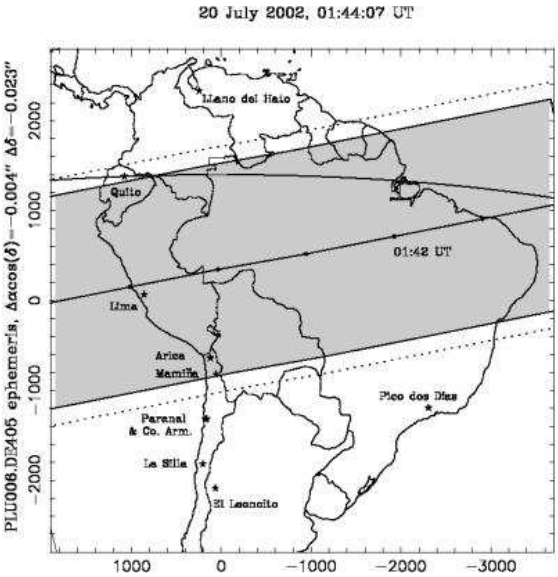

FIG. 9.2: Trajectoire projetée sur la Terre de l'ombre de Pluton (en gris) pour l'occultation de P126 A. Le mouvement de l'ombre est de droite à gauche et les points sur le centre de l'ombre sont portés avec une minute d'intervalle. La largeur de la région grise correspond à une région où plus de 50 % du flux stellaire est atténué par l'atmosphère de Pluton, et en pointillés là où la diminution est supérieure à 10 %. Les étoiles portées sur la carte représentent les différents sites d'observation.

FOLHA DE S.PAULO

São Paulo, sábado, 20 de julho de 2002

DIRETOR DE REDAÇÃO: OTAVIO FRIAS FILHO ★ ★ ★ UM JORNAL A SERVIÇO DO BRASIL ★ ALAMEDA BARÃO DE LIMEIRA, 425 ★ ANO 82 ★ Nº 26.771 ★ R$ 1,90

A 12 sábado, 20 de julho de 2002 · CIÊNCIA · FOLHA DE S.PAULO

ASTRONOMIA *Oportunidade rara aconteceu ontem, quando o planeta passou na frente de uma estrela, ocultando a sua luz*

Sul-americanos estudam o ar de Plutão

SALVADOR NOGUEIRA
DA REPORTAGEM LOCAL

A noite de ontem guardou uma oportunidade única para astrônomos espalhados por observatórios na América do Sul: eles tentaram, pela segunda vez na história, detectar a atmosfera do planeta Plutão e seus componentes.

Normalmente, dada a distância enorme e o tamanho diminuto do planeta (que é o menor, nono e último do Sistema Solar), é impossível obter qualquer informações sobre o tipo de ar que poderia existir sobre sua superfície.

Apenas em circunstâncias muito especiais, quando Plutão passa na frente de uma estrela mais distante, é possível observar a atmosfera do planeta. Foi assim que os astrônomos descobriram que ele de fato tinha uma, em 1998, e foi o que aconteceu às 23h20 de ontem (hora de Brasília).

Nessa hora, Plutão passou na frente da estrela P126, ocultando sua luz. Parte dos raios da estrela, então, entrou na atmosfera, passando de raspão pelo planeta, mas ainda assim conseguindo sair e seguir seu curso rumo à Terra.

Essa luz que chegou trouxe consigo uma marca de onde ela passou, uma espécie de "autógrafo" da atmosfera plutoniana, que os astrônomos podem decifrar.

"Em 1998, as observações foram prejudicadas pelo tempo e os dados obtidos foram muito pobres", diz Stefane Renner, astrônomo do Observatório de Paris que esteve no Observatório do Pico dos Dias, do Laboratório Nacional de Astrofísica (em Itajubá, MG), justamente para ver o fenômeno.

Para driblar o mau tempo, uma rede de observatórios foi montada. Além do observatório brasileiro, participaram dois outros na Argentina, três no Chile e mais uma série de telescópios portáteis instalados no deserto chileno de Atacama, o melhor ponto para a observação do fenômeno (que não é visível a olho nu).

A época da observação, pelo menos, foi "pé quente": hoje faz 33 anos que o astronauta Neil Armstrong tornou-se o primeiro homem a pisar na Lua.

O esforço pode enriquecer o conhecimento acerca do mais misterioso planeta do Sistema Solar, mas ainda não dispensa a visita de uma sonda, que está atualmente sendo criada nos EUA. Um painel de cientistas recentemente recomendou à Nasa (agência espacial americana) que colocasse a missão a Plutão no topo de suas prioridades. Atualmente, o projeto ocupa o último lugar da lista.

Os primeiros resultados das observações feitas ontem só serão divulgados pelos pesquisadores no mês que vem.

FIG. 9.3: Article de presse brésilienne du 20 juillet 2002 sur l'occultation de l'étoile P126 A par Pluton

9.2 L'occultation de TYC 1343-1615-1 par Titan du 14 novembre 2003

Titan, le plus gros des satellites de Saturne (diamètre 5150 km), possède une atmosphère dense essentiellement composée d'azote moléculaire, avec quelques pourcent de méthane et de nombreuses autres espèces organiques. La pression atteint environ 1.5 bar à la surface, et cette dernière nous est cachée par des couches épaisses d'aérosols et par des nuages. L'atmosphère a été observée par les sondes *Voyager* 1 et 2 en 1979 et 1980, puis par le satellite ISO et par de nombreux instruments au sol, ce qui a donné des renseignements sur sa composition chimique, sur la distribution des aérosols, le profil de température et de pression entre 0 et 200 km d'altitude (1.5 bar-1 mbar). Les occultations UV de Voyager ont aussi fourni quelques informations sur la composition et l'échelle de hauteur au-dessus de 800 km.

Titan est petit sur le ciel ($\simeq 1''$) et son éclat reste cependant élevé ($I \sim 7.8$, $K \sim 8.1$), limitant ainsi considérablement le nombre de candidats stellaires pour des occultations qui ont un contraste étoile/Titan (et donc un signal/bruit) suffisant. Ce satellite a pourtant occulté deux étoiles brillantes Tycho ($V = 8.4$ et $V = 10.3$) le 14 novembre 2003 à moins de 7 heures d'intervalle. La première occultation (étoile TYC 1343-1615-1) a été observée dans l'Océan Indien et au sud de l'Afrique, la seconde (étoile TYC 1343-1865-1) en Europe occidentale, en Amérique du nord et en Amérique centrale. Les données ont été recueillies à la fois par des astronomes professionnels et amateurs, en utilisant des télescopes fixes ou mobiles, à des longueurs d'onde allant du visible au proche infrarouge (bande K). Pour ma part, je me suis rendu à Sandfontein, dans le sud de la Namibie (figure 9.5), avec entre autres Bruno Sicardy et Françoise Roques, où nous avons installé deux télescopes mobiles équipés de caméras *IOTA*. Cette fois-ci, l'observation fut réussie.

Le but de cette campagne d'observation était notamment de détecter le flash central, qui correspond à une forte remontée de signal dans les courbes d'occultation, et qui est dû à la focalisation des rayons lumineux par la réfraction atmosphérique. Ce flash central est l'occasion de mesurer très précisément la forme de l'isobare de Titan à environ 0.25μbar (250 km d'altitude), donnant ainsi une contrainte très forte sur le système des vents zonaux du satellite. La zone des flashs centraux a une largeur de l'ordre de 300 km projetée sur le sol (figure 9.5). Le précédent et seul événement central à ce jour est l'occultation de l'étoile 28 Sgr (V=5.5) par Titan le 3 juillet 1989. Cette observation a permis l'obtention de nombreux résultats scientifiques (Hubbard et al., 1990; Sicardy et al., 1990; Hubbard et al., 1993; Sicardy et al., 1999a).

Les occultations de novembre 2003 conduisent aux résultats suivants : tout d'abord, les profils de température et de densité de la stratosphère supérieure (correspondant à une altitude comprise entre environ 250 et 550 km, et à une pression comprise entre environ 1 et 250 μbar) ont été déterminés par inversion des courbes de lumière, avec une résolution inférieure au kilomètre. Les données ont révélé la présence d'une couche d'inversion à environ 510 km d'altitude (1 μbar), où la température de l'atmosphère augmente de plus de 15K sur environ 6 km en altitude. Cette couche d'inversion est due soit à un mécanisme local de chauffage, soit à un processus dynamique à déterminer. D'autre part, le flash central est visible dans plusieurs courbes de lumière. La forme et l'intensité du flash ont été modélisées, pour une opacité et une forme du limbe de Titan données. La forme de ce limbe est liée à un régime donné de vents zonaux. Les observations sont compatibles avec des vents forts aux latitudes nord (de l'ordre de 200 m s^{-1} à 55°N), qui diminuent à l'équateur ($\sim$ 140 m s^{-1}) et s'annulent dans l'hémisphère sud. Ces résultats sont utiles pour la modélisation de l'entrée de la sonde *Huygens* dans l'atmosphère du satellite en janvier 2005.

FIG. 9.4: Observation de Titan à Sandfontein, au sud de la Namibie, au mois de novembre 2003

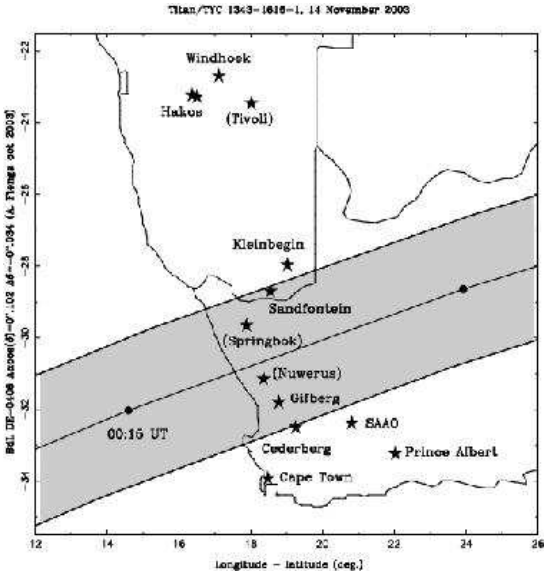

FIG. 9.5: Trajectoire sur la Terre du flash central de Titan (en gris) pour la première occultation du 14 novembre 2003. Le centre de l'ombre est indiqué par des points avec une minute d'intervalle. Les étoiles portées sur la carte sont les lieux où l'évènement a été observé (avec ou sans succès !).

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse nous a permis de mieux comprendre certains aspects de la dynamique des anneaux et satellites planétaires. Nous avons plus particulièrement apporté des nouveaux résultats concernant la dynamique (1) des petits satellites co-orbitaux, (2) des arcs de Neptune, et enfin (3) des satellites internes de Saturne Prométhée et Pandore. Le but ultime de cette recherche est de connaître l'origine et l'évolution des multiples objets se trouvant dans l'environnement immédiat des planètes géantes.

Motivés par l'ambition d'expliquer la stabililité des arcs de Neptune, nous avons tout d'abord généralisé, sous certaines hypothèses, le problème des points de Lagrange. Nous avons ainsi obtenu des résultats généraux sur l'existence de configurations stationnaires pour des petits satellites co-orbitaux, de masses arbitraires et négligeables devant celle du corps central. L'un des résultats, assez surprenant a priori, est que l'existence de points d'équilibre dépend de la parité du nombre N de satellites considérés. Si N est impair, alors quelles que soient les séparations angulaires entre les satellites, il existe toujours un ensemble de masses qui réalise un équilibre. Néanmoins, l'ensemble des solutions physiquement réalistes (masses positives) se restreint à un sous-domaine de séparations angulaires. Pour N pair, il faut vérifier des conditions supplémentaires. Nous avons traité globalement le cas $N = 3$, en donnant l'ensemble des solutions d'équilibre et leur stabilité (linéaire). Pour $N > 3$, nous avons envisagé des méthodes numériques. La question de la stabilité non linéaire dépasse par contre le cadre de notre étude. C'est un problème complexe qui peut intéresser les experts en systèmes dynamiques. On pourrait aussi recourir à des méthodes numériques pour ce type de problèmes.

Ces résultats ont donc ensuite été appliqués pour expliquer le confinement des arcs de Neptune. Nous avons posé les bases d'un modèle compatible avec les observations les plus récentes et qui, à ce jour, est le seul qui explique naturellement les longueurs azimutales observées de ces structures. La région des arcs se trouverait au point de Lagrange (L_4 ou L_5) d'un petit satellite (de rayon $R \simeq 5$ km), et contiendrait trois ou quatre petits satellites co-orbitaux ($R \simeq 1$ km) en configuration stationnaire avec le satellite de Lagrange. La poussière observée des arcs serait ainsi piégée entre ces grosses particules co-orbitales. Nous avons montré numériquement qu'un tel système, soumis aux perturbations gravitationnelles du satellite Galatéa, est stable. Dans la continuité de ce travail, il faudrait inclure dans le modèle les processus dissipatifs qui agissent sur les anneaux : l'effet Poynting-Robertson, la pression de radiation solaire, et surtout les collisions. Ces dernières, avec des vitesses typiques de quelques m s^{-1} (en raison du gradient d'excentricité forcée dans les arcs dû à la résonance de Lindblad 42 : 43 avec Galatéa), peuvent perturber considérablement le système. Concernant l'origine et l'évolution des arcs de Neptune, les petits satellites co-orbitaux ont pu se former suite à la destruction d'un satellite plus ancien, ou bien par l'accrétion de matériau au voisinage de la limite de Roche de la planète. L'anneau Adams étant en résonance de Lindblad 42 : 43 avec Galatéa, le couple

séculaire éventuellement échangé devrait permettre de faire converger des grosses particules co-orbitales vers une configuration stationnaire. La présence d'un système de petits satellites co-orbitaux fait peut-être partie d'un processus intermédiaire précédant la formation d'un satellite. Cependant, il se peut aussi que le phénomène soit plus transitoire et redonne un anneau si les processus d'accrétion ne sont pas assez efficaces. Il est donc à présent nécessaire de simuler de façon précise comment une collection de particules, auto-gravitantes et soumises aux collisions, peut former des petits satellites co-orbitaux au voisinage de la limite de Roche du corps central. Enfin, un défi essentiel à relever serait de tenter de détecter les éventuels satellites co-orbitaux, au moins un satellite de Lagrange (à environ $\pm 60^\circ$ de la région des arcs), même si la technologie actuelle (optique adaptative, ...) est probablement en-deçà d'une telle possibilité.

Nous avons ensuite étudié la dynamique des satellites gardiens de l'anneau F de Saturne, Prométhée et Pandore. Cela s'inscrit dans le cadre de la mission *Cassini*, actuellement en phase active, qui va recueillir des données sur l'environnement de Saturne pendant au moins quatre ans. Avec un modèle numérique prenant en compte l'aplatissement de la planète et les perturbations gravitationnelles des satellites principaux, nous avons confirmé le caractère chaotique du mouvement de Prométhée et Pandore, dû à la superposition de quatre résonances de moyen mouvement 121 : 118. En ajustant les simulations aux données *HST*, nous avons déterminé les masses des deux satellites. Les masses de Prométhée et Pandore sont respectivement $GM_{PR} = 1.41^{+0.10}_{-0.25} \times 10^{-2}$ km^{3}s^{-2} et $GM_{PA} = 1.03^{+0.10}_{-0.19} \times 10^{-2}$ km^{3}s^{-2}. Ces valeurs correspondent à des masses volumiques de l'ordre de 0.5 g cm^{-3} seulement, pour les deux satellites. Ils semblent donc même un peu moins denses que les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée. Des contraintes fines sur les densités dépendent maintenant d'une détermination précise des volumes. Les images obtenues par la sonde *Cassini* vont permettre de mieux contraindre la forme des satellites internes de Saturne. D'autre part, les masses de Prométhée et Pandore seront aussi probablement améliorées, car les prochaines variations brutales en moyen mouvement, qui permettent d'estimer les masses, auront lieu en 2006 et seront en principe observées par *Cassini*. Notre modèle nous a d'ailleurs permis de produire des éphémérides pour Prométhée et Pandore, qui peuvent être utiles pour la mission spatiale. Les faibles densités des satellites laissent supposer qu'ils pourraient résulter de l'accrétion lâche de matériau de l'anneau dans la zone de Roche de la planète. Ils auraient pu aussi se former à l'intérieur de cette région, puis migrer ensuite vers l'extérieur sous l'effet des interactions de marée avec les anneaux principaux. En revanche, il semble moins probable qu'ils résultent de la destruction d'un satellite dense plus ancien (de type Mimas) au voisinage de la limite de Roche.

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'évolution dynamique à long terme du système Prométhée-Pandore. Nous avons vu qu'elle est directement liée à celle des anneaux : les échanges de moment cinétique suggèrent un âge pour les anneaux d'environ 10^8 ans, ce qui est court par rapport à l'âge du système solaire. Nous avons donc modélisé les interactions de marée dues aux anneaux principaux, et effectué des intégrations symplectiques de l'évolution orbitale de Prométhée et Pandore, soumis aux perturbations de Mimas et Téthys d'une part, et à celles des co-orbitaux Janus et Epiméthée d'autre part. Ces satellites sont en effet importants dynamiquement : Pandore est proche de résonances 3 : 2 avec Mimas, et Prométhée et Pandore croisent de nombreuses résonances avec les co-orbitaux au cours de leur évolution. Actuellement, Prométhée et Pandore sont respectivement en résonance 17 : 15 et 21 : 19 avec Epiméthée (tous les quatre ans en raison de la libration co-orbitale de ce dernier). Nous n'avons détecté aucun transfert systématique de moment cinétique de Pandore vers Mimas. Le mouvement chaotique de Pandore n'est donc apparemment pas assimilable à un processus dissipatif classique, qui pourrait favoriser des échanges de moment cinétique entre des satellites proches

de résonances. En revanche, nous avons constaté un transfert non négligeable de moment cinétique vers les satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée. Ce résultat est à confirmer, et les conséquences sur le temps d'évolution du système sont à évaluer. Néanmoins, l'évolution de Prométhée et Pandore se termine toujours par une rencontre proche entre ces deux corps dans les simulations. L'issue la plus probable est une collision physique entre les deux satellites. Celle-ci peut engendrer leur destruction et donc éventuellement la formation d'anneaux. Il faudrait donc modéliser numériquement les rencontres proches entre des satellites, ce problème pouvant d'ailleurs être lié au processus de formation de satellites co-orbitaux. On note aussi dans les simulations une augmentation séculaire de l'excentricité de Prométhée et Pandore, en raison des nombreuses résonances rencontrées par les satellites. Dans la réalité, le mouvement chaotique de Prométhée et Pandore pourrait entraîner une forte déformation de marée due à la planète, et par conséquent un amortissement rapide de l'excentricité ($\ll 10^8$ ans). Un état d'équilibre pourrait même être atteint entre l'amortissement de l'excentricité par effet de marée et son augmentation à cause des résonances et des rencontres entre les satellites. D'autre part, il serait intéressant d'étudier la dynamique des corps de l'anneau F sous l'effet des perturbations gravitationnelles de Prométhée et Pandore. Finalement, les questions d'échange de moment cinétique entre anneaux et satellites doivent être approfondies théoriquement. Prométhée et Pandore entrent périodiquement en résonance avec les co-orbitaux, et de plus leurs phases par rapport à Janus et Epiméthée sont rendues aléatoires à cause des mouvements chaotiques. Il faudrait voir analytiquement si et comment ces deux processus (individuellement ou non) peuvent faciliter l'apparition d'un couple séculaire, évacuant le moment cinétique apporté à Prométhée et Pandore par les anneaux vers des satellites extérieurs plus massifs.

Annexes

Annexe A

Mouvement d'une particule test autour d'une planète aplatie (partie numérique)

Sommaire

A-1 Introduction **139**
A-2 Des éléments géométriques au vecteur position-vitesse **141**
A-2.1 Orbites équatoriales 141
A-2.2 Orbites inclinées 143
A-3 Du vecteur position-vitesse aux éléments géométriques **143**
A-3.1 Orbites équatoriales 143
A-3.2 Orbites inclinées 145
A-4 Application **147**

Dans la perspective d'une éventuelle publication, cette annexe a également été rédigée sous la forme d'un article, reproduit dans l'annexe F.

A-1 Introduction

Certaines caractéristiques dynamiques des anneaux planétaires (forme des anneaux d'Uranus, ondes de densité dans les anneaux de Saturne) sont décrites par des *lignes de courant*. Ces dernières consistent à considérer le mouvement d'un ensemble de particules de même demi grand-axe et même excentricité. Par exemple dans le cas d'un anneau équatorial, la forme de telles lignes de courant est donnée par :

$$r = a(1 - e\cos(m\Phi + m\Delta)) \tag{A.1}$$

ou par une superposition de termes sinusoidaux similaires, où r est le rayon des particules, m un nombre d'onde azimuthal (entier), Δ un angle de phase et Φ la longitude dans un repère tournant à une vitesse Ω_p ($\Phi = L - \Omega_p t$, où L est la longitude orbitale dans un repère inertiel). Par exemple, un anneau elliptique est décrit par l'équation (A.1) avec $m = 1$ et $\Omega_p = \dot{\varpi}$, où $\dot{\varpi}$ désigne le taux de précession du périapse.

Les éléments orbitaux (demi grand-axe a, excentricité e ...) obtenus par l'ajustement de l'équation A.1 aux données observationnelles sont les éléments orbitaux *géométriques*. Ils diffèrent des éléments orbitaux *osculateurs* (ou *elliptiques*) classiques, en particulier lorsque l'aplatissement de la planète est pris en compte. Les éléments osculateurs sont ceux qu'auraient les particules si on supprimait l'aplatissement. Lorsque le corps central est aplati, ils présentent des variations à haute fréquence, alors que les éléments géométriques sont indépendants du temps, ou plutôt ils varient sur des échelles de temps beaucoup plus longues que la période orbitale. Ces oscillations à haute fréquence peuvent entrainer de grandes différences entre les éléments osculateurs et les éléments géométriques.

D'autre part, une particule en orbite circulaire autour d'une planète aplatie a une excentricité osculatrice e_0 non-nulle $e_0 \sim \frac{3}{2}J_2(R_p/r)^2$, où R_p est le rayon équatorial de la planète. En effet, si une particule a une orbite circulaire autour d'une planète aplatie, et si on supprime soudainement cet aplatissement, alors la particule se retrouve sur une orbite excentrique. Le même problème se pose avec le demi grand-axe : si une particule a une orbite circulaire autour d'une planète aplatie et que l'on supprime l'aplatissement, alors le demi grand-axe va prendre sa valeur osculatrice $a_0 \sim r[1 + \frac{3}{2}J_2(R_p/r)^2]$, qui peut différer du rayon géométrique de l'orbite de manière significative. Ainsi, les éléments orbitaux géométriques sont les éléménts à utiliser pour décrire les orbites de satellites ou de particules d'un anneau (avec de faibles excentricités et de faibles inclinaisons) autour d'une planète aplatie.

Théoriquement, comment les éléments géométriques sont-ils définis ? Il existe une théorie, la théorie épicyclique, initialement introduite en dynamique stellaire par Chandrasekar en 1942, qui décrit le mouvement orbital quasi-circulaire et quasi-équatorial dans un potentiel axisymétrique. Cette théorie est applicable aux anneaux planétaires car tous les anneaux connus ont de faibles excentricités et de faibles inclinaisons. Les solutions exactes des équations du mouvement sont des développements en séries autour d'une orbite équatoriale et circulaire de référence. Il apparaît dans ces développements des constantes, les éléments épicycliques. Ces derniers contiennent aussi des fréquences fondamentales Ω, κ, ν (Ω est la vitesse angulaire de rotation d'une orbite circulaire, κ la fréquence épicyclique horizontale, caractéristique des oscillations radiales par rapport au mouvement circulaire, et ν la fréquence épicyclique verticale, caractéristique des oscillations verticales). A partir des éléments épicycliques on peut définir un nouvel ensemble d'éléments qui rend formellement similaires les solutions des équations du mouvement dans les théories elliptique et épicyclique. Ces nouveaux éléments sont les éléments orbitaux géométriques. Pour plus de détails se référer à Borderies et Longaretti (1987), Longaretti et Borderies (1991) et Borderies-Rappaport et Longaretti (1994).

D'un point de vue numérique, on intègre souvent le mouvement d'une particule autour d'un corps central en coordonnées cartésiennes, avec le corps central placé à l'origine du repère. Pour suivre l'évolution de la particule à l'aide de grandeurs plus physiques, à savoir dans le cas des anneaux ou des satellites planétaires avec les éléments orbitaux géométriques, il faut pouvoir transformer ces éléments orbitaux en position x, y, z et vitesse $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ dans un repère cartésien centré sur le corps central (par exemple en début d'intégration numérique, lorsqu'on ne dispose à une époque donnée que des éléments orbitaux), et inversement passer du vecteur position-vitesse de la particule aux éléments orbitaux géométriques (par exemple en sortie d'intégration numérique).

Nous décrivons en section A-2 et A-3 ces transformations. Pour une raison qui sera donnée plus bas, deux des éléments orbitaux que nous calculons, l'inclinaison et la longitude du

noeud ascendant, ne sont pas géométriques mais osculateurs. Les transformations sont déduites de la théorie épicyclique de Borderies et Longaretti (1987), Longaretti et Borderies (1991) et Borderies-Rappaport et Longaretti (1994), sont du second ordre en excentricité, et ont l'avantage d'être directement implémentables dans un code numérique. Nous considérons une application pratique en section A-4 qui valide la méthode utilisée, et qui permet de quantifier la précision obtenue des éléments orbitaux.

A-2 Des éléments géométriques au vecteur position-vitesse

On considère une particule test, en orbite autour d'une planète de masse M_p, de rayon R_p et de coefficients zonaux J_2, J_4, J_6, définie à un instant donné par ses éléments orbitaux géométriques a, e, I, Ω, ϖ, et λ, où a est le demi grand-axe, e l'excentricité, I l'inclinaison, Ω la longitude du noeud ascendant, ϖ la longitude du péripase et λ la longitude moyenne (figure A.1). La longitude moyenne λ n'est pas représentée sur la figure, contrairement aux autres angles, car elle n'a pas d'interprétation géométrique. C'est une fonction linéaire du temps définie par : $\lambda = M + \varpi = n(t - \tau) + \varpi = \dfrac{2\pi}{T}(t - \tau) + \varpi$, où M, n, τ et T sont respectivement l'anomalie moyenne, le moyen mouvement, l'instant de passage au périapse et la période orbitale de la particule. La longitude vraie L de la particule est définie par $L = f + \varpi$.

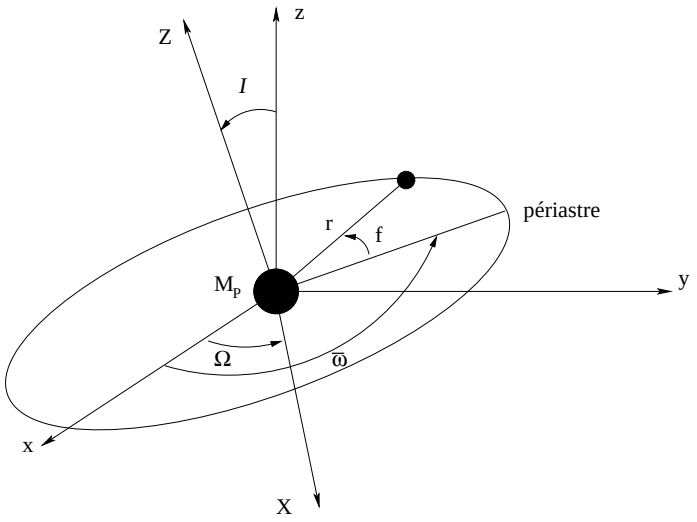

FIG. A.1: Orbite d'une particule test autour d'un corps central (planète) de masse M_p. Dans le repère inertiel $(O\mathbf{xyz})$, centré sur la planète, sont représentés le rayon vecteur r de la particule, l'inclinaison I de l'orbite, la longitude du noeud ascendant Ω, la longitude du périapse ϖ et l'anomalie vraie f.

A-2.1 Orbites équatoriales

Dans ce cas la particule test est définie à un instant donné par les quatre éléments géométriques a, e, ϖ, et λ. Alors, d'après (Borderies-Rappaport et Longaretti, 1994), la position et la vitesse de la particule en coordonnées polaires sont données par :

$$\begin{cases} r = a\Big[1 - e\cos M + \Big(\dfrac{3}{2}\dfrac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta^2}{\kappa^2}\cos 2M\Big)e^2\Big] \\ L = \lambda + 2\dfrac{n}{\kappa}e\sin M + \Big(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\eta^2}{2\kappa^2}\Big)\dfrac{n}{\kappa}e^2\sin 2M \\ \dot{r} = a\kappa\Big[e\sin M + \dfrac{\eta^2}{\kappa^2}e^2\sin 2M\Big] \\ \dot{L} = n\Big[1 + 2e\cos M\Big(\dfrac{7}{2} - 3\dfrac{\eta^2}{\kappa^2} - \dfrac{\kappa^2}{2n^2} + (\dfrac{3}{2} + \dfrac{\eta^2}{\kappa^2})\cos 2M\Big)e^2\Big] \end{cases} \tag{A.2}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\begin{cases} x = r\cos L \\ y = r\sin L \\ \dot{x} = \dot{r}\cos L - r\dot{L}\sin L \\ \dot{y} = \dot{r}\sin L + r\dot{L}\cos L \\ z = \dot{z} = 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

Les formules (A.2) sont les relations (62), (64), (65), (67) de Borderies-Rappaport et Longaretti (1994) avec $I \equiv 0$, et sont du second ordre en excentricité.

Les termes η^2 et κ contiennent des dérivées du potentiel gravitationnel du corps central et sont homogènes à des fréquences. En particulier, κ est la fréquence épicyclique horizontale qui caractérise les oscillations radiales de la particule par rapport au mouvement circulaire ($\kappa = n - \dot{\varpi}$ où $\dot{\varpi}$ est le taux de précession du périapse de la particule). Ces fréquences se réduisent au moyen mouvement $n_0 = \sqrt{GM_p/a^3}$ si le corps central est sphérique. Au second ordre en excentricité, on a d'après Borderies-Rappaport et Longaretti (1994) (formules (A10), (A12) et (A4) avec $I \equiv 0$) :

$$n = \Big(\frac{GM_p}{a^3}\Big)^{1/2}\Big[1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 - \frac{15}{16}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_4 + \frac{35}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_6 - \frac{9}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_2^2 + \frac{45}{64}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2 J_4 + \frac{27}{128}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2^3 + 3\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 e^2\Big] \tag{A.4}$$

$$\kappa = n - \dot{\varpi} = \Big(\frac{GM_p}{a^3}\Big)^{1/2}\Big[1 - \frac{3}{4}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 + \frac{45}{16}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_4 - \frac{175}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_6 - \frac{9}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_2^2 + \frac{135}{64}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2 J_4 - \frac{27}{128}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2^3\Big] \tag{A.5}$$

$$\eta^2 = \frac{GM_p}{a^3}\Big[1 - 2\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 + \frac{75}{8}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_4 - \frac{175}{8}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_6\Big] \tag{A.6}$$

A-2.2 Orbites inclinées

Supposons maintenant que l'orbite de la particule test est inclinée. Pour convertir les éléments orbitaux en vecteurs position - vitesse, on imagine une particule test fictive en orbite dans le plan équatorial ($I = 0$) de la planète avec les mêmes éléments orbitaux a, e, ϖ et λ. Pour cette particule, on calcule sa position et sa vitesse au second ordre en excentricité, en utilisant les transformations précédentes (section A-2.1). Puis on fait tourner ce vecteur position - vitesse d'un angle I autour du noeud ascendant pour avoir le vecteur position - vitesse réel de la particule test.

Notons $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ la position et la vitesse de la particule test, et $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ et $\mathbf{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', 0)$ la position et la vitesse de la particule test fictive en orbite dans le plan équatorial de la planète. On calcule $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ et $\mathbf{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', 0)$ à partir des formules (A.2) et (A.3). Puis on fait tourner ces vecteurs d'un angle I autour de Ω pour obtenir $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$.

Soit $(O\mathbf{XYZ})$ le repère instantané lié au plan orbital de la particule (*cf.* figure A.1), où $\mathbf{X}$ est le vecteur unitaire de direction le noeud ascendant, $\mathbf{Z}$ le vecteur unitaire normal à l'orbite tel que $\mathbf{Z}.\mathbf{z} = \cos I$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \times \mathbf{X}$. Alors dans le repère inertiel $(O\mathbf{xyz})$:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = (\cos\Omega, \sin\Omega, 0) \\ \mathbf{Y} = (-\cos I \sin\Omega, \cos I \cos\Omega, \sin I) \\ \mathbf{Z} = (\sin I \sin\Omega, -\sin I \cos\Omega, \cos I) \end{cases} \tag{A.7}$$

Avec nos notations on peut écrire :

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'.\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{r}'_\perp,$$

où $\mathbf{r}'_\perp$ est la partie de $\mathbf{r}'$ orthogonale à $\mathbf{X}$. La valeur algébrique de $\mathbf{r}'_\perp$ est $\bar{\mathbf{r}}'_\perp = (\mathbf{X} \times \mathbf{r}').\mathbf{z}$. En appliquant une rotation autour de $\mathbf{X}$ d'un angle I, seul $\mathbf{r}'_\perp$ est modifié et on obtient ainsi :

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}'.\mathbf{X})\mathbf{X} + [(\mathbf{X} \times \mathbf{r}').\mathbf{z}].\mathbf{Y}.$$

En coordonnées cartésiennes ce vecteur position est donné par (idem pour la vitesse en dérivant une fois toutes les coordonnées) :

$$\begin{cases} x = x'[\cos^2(I/2) + \sin^2(I/2)\cos(2\Omega)] + y'\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) \\ y = x'\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) + y'[\cos^2(I/2) - \sin^2(I/2)\cos(2\Omega)] \\ z = \sin I[-x'\sin\Omega + y'\cos\Omega] \end{cases} \tag{A.8}$$

A-3 Du vecteur position-vitesse aux éléments géométriques

A-3.1 Orbites équatoriales

Soit $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ le vecteur position - vitesse de la particule test dans le repère cartésien $(O\mathbf{xyz})$ centré sur la planète. Le rayon et la longitude vraie de la particule sont respectivement $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $L = \arctan(y/x)$. Dans certains cas, la valeur numérique de la longitude vraie doit être modifiée, car elle est définie sur $[0, 2\pi]$ alors que $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{cases} L = \arctan(y/x) + \pi & x < 0 \\ L = \arctan(y/x) + 2\pi & \arctan(y/x) < 0 \\ L = \pi/2 & x = 0 \quad y > 0 \\ L = 3\pi/2 & x = 0 \quad y < 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

Les transformations (A.2) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} r = a\Big[1 - e\cos M\Big] + r_C \\ L = \lambda + 2\dfrac{n}{\kappa}e\sin M + L_C \\ \dot{r} = ae\kappa\sin M + \dot{r}_C \\ \dot{L} = n\Big[1 + 2e\cos M\Big] + \dot{L}_C \end{cases} \tag{A.10}$$

où :

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{x}\cos L + \dot{y}\sin L \\ \dot{L} = (-\dot{x}\sin L + \dot{y}\cos L)/r \end{cases} \tag{A.11}$$

et r_C, L_C, $\dot{r}_C$, $\dot{L}_C$ contiennent tous les termes du second ordre en excentricité. Plus précisément :

$$\begin{cases} r_C = ae^2\Big[\dfrac{3}{2}\dfrac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta^2}{\kappa^2}\cos(2M)\Big] \\ L_C = \dfrac{n}{\kappa}e^2\big[\dfrac{3}{4} + \dfrac{\eta^2}{2\kappa^2}\big]\sin(2M) \\ \dot{r}_C = ae^2\dfrac{\eta^2}{\kappa}\sin(2M) \\ \dot{L}_C = ne^2\Big[\dfrac{7}{2} - 3\dfrac{\eta^2}{\kappa^2} - \dfrac{\kappa^2}{2n^2} + (\dfrac{3}{2} + \dfrac{\eta^2}{\kappa^2})\cos(2M)\Big] \end{cases} \tag{A.12}$$

On doit alors calculer les éléments orbitaux géométriques a, e, ϖ et λ, connaissant r, L, $\dot{r}$ et $\dot{L}$. D'après (A.10) on a :

$$\begin{cases} a = \dfrac{r - r_C}{1 - \dfrac{\dot{L} - n - \dot{L}_C}{2n}} \\ \\ e = \sqrt{\left(\dfrac{\dot{L} - n - \dot{L}_C}{2n}\right)^2 + \left(\dfrac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa}\right)^2} \\ \\ \lambda = L - L_C - 2\dfrac{n}{\kappa}\dfrac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa} \\ \\ \tan M = \tan(\lambda - \varpi) = \dfrac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa\left(1 - \dfrac{r - r_C}{a}\right)} \end{cases} \tag{A.13}$$

On déduit a, e, λ et ϖ des relations (A.13) par une méthode itérative. L'itération s'effectue sur les fréquences n, κ et η^2 : on suppose d'abord $a = r$, $e = 0$ et $r_C = L_C = \dot{r}_C = \dot{L}_C = 0$, puis on calcule n, κ et η^2 d'après (A.4), (A.5) et (A.6), respectivement. On obtient ainsi des nouvelles valeurs pour les éléments géométriques a, e, λ, ϖ (relations (A.13)) et pour $r_C, L_C, \dot{r}_C, \dot{L}_C$ (relations (A.12)). Enfin, on calcule à nouveau n, κ, η^2, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'itération converge.

Pour arrêter l'itération et donner les éléments orbitaux lorsque la précision désirée est atteinte, on introduit le test simple suivant sur le demi grand-axe : $|a_{i+1} - a_i| < \epsilon$, où ϵ est un petit paramètre strictement positif et a_i le i^e demi grand-axe calculé dans l'itération.

A-3.2 Orbites inclinées

Si l'orbite est inclinée, on calcule d'abord instantanément l'inclinaison de l'orbite et la longitude du noeud ascendant. On applique ensuite une rotation d'un angle I autour du noeud ascendant pour obtenir le vecteur position - vitesse d'une particule test fictive sur une orbite équatoriale, puis on applique à ce dernier les formules données en A-3.1 pour calculer, de manière itérative, les éléments restants a, e, ϖ et λ.

Soit $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ le vecteur position - vitesse de la particule test dans le repère cartésien $(O\mathbf{xyz})$ centré sur la planète. L'inclinaison I de l'orbite et la longitude du noeud ascendant Ω sont données instantanément par le moment cinétique de la particule. Soit H_x, H_y et H_z les trois composantes du moment cinétique. Alors :

$$\begin{cases} I = \arctan \dfrac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{H_z} & H_z > 0 \\ \\ I = \arctan \dfrac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{H_z} + \pi & H_z < 0 \end{cases} \tag{A.14}$$

Le cas $H_z < 0$ ne se produit jamais car l'inclinaison des anneaux et des satellites planétaires est toujours faible.

La longitude du noeud ascendant est donnée par :

$$\Omega = sign(H_x) \arccos \frac{-H_y}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} \tag{A.15}$$

où $sign(H_x) = +1$ si $H_x \geq 0$ et $sign(H_x) = -1$ si $H_x < 0$.

L'inclinaison I et la longitude du noeud Ω sont ici des éléments osculateurs et non géométriques, car le moment cinétique de la particule test n'est pas conservé et présente des variations à haute fréquence dues à l'aplatissement de la planète. Nous avons choisi de calculer séparément I et Ω pour une raison donnée ci-dessous. L'exemple donné en A-4 montre que même en utilisant ces éléments osculateurs, les éléments orbitaux sont suffisamment précis et les orbites sont de manière générale correctement décrites.

Soit $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ la position et la vitesse de la particule test dans le repère inertiel $(O\mathbf{xyz})$. On applique à ces vecteurs une rotation d'angle I autour du noeud pour avoir la position $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ et la vitesse $\mathbf{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', 0)$ de la particule test fictive en orbite équatoriale autour de la planète. On peut décomposer le vecteur position :

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}.\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{r}_\perp,$$

où $\mathbf{r}_\perp$ est la partie de $\mathbf{r}$ orthogonale à $\mathbf{X}$. La valeur algébrique de $\mathbf{r}_\perp$ est $\bar{\mathbf{r}}_\perp = (\mathbf{X} \times \mathbf{r}).\mathbf{Z}$. En appliquant une rotation autour de $\mathbf{X}$ d'un angle I, seul $\mathbf{r}_\perp$ est modifié et le vecteur position de la particule test fictive est donné par :

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r}.\mathbf{X})\mathbf{X} + [(\mathbf{X} \times \mathbf{r}).\mathbf{Z}].(\cos\Omega\mathbf{y} - \sin\Omega\mathbf{x}).$$

En coordonnées cartésiennes on a (idem pour la vitesse en dérivant les coordonnées) :

$$\begin{cases} x' = x[\cos^2\Omega + \sin^2\Omega\cos I] + y\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -z\sin\Omega\sin I \\ y' = x\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) + y[\sin^2\Omega + \cos^2\Omega\cos I] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +z\cos\Omega\sin I \end{cases} \tag{A.16}$$

Finalement, on calcule les éléments orbitaux restants, au second ordre en excentricité, à partir de x',y',$\dot{x}'$,$\dot{y}'$ (section A-3.1).

Remarquons que numériquement, une orbite équatoriale sera définie non seulement par $I = 0$, mais aussi par $I < \delta$, où δ est un petit paramètre strictement positif qui dépend de l'intégrateur utilisé. En effet, pour une orbite équatoriale, la variable z oscille légèrement autour de zéro dans les simulations. Ainsi l'inclinaison donnée par (A.3) est faible mais non-nulle, même pour une orbite équatoriale.

Avec la méthode que nous avons utilisée, la convergence de (A.13) est très rapide. (nombre d'itérations ≤ 50). En utilisant les formules épicycliques plus générales, *i.e.* celles qui prennent en compte l'inclinaison géométrique au second ordre (formules (62) - (67) de (Borderies-Rappaport et Longaretti, 1994)), la convergence est numériquement impossible, du moins dans nos simulations. C'est la raison pour laquelle nous calculons séparément l'inclinaison et la longitude du noeud osculatrices.

A-4 Application

Nous testons ici la méthode utilisée à l'aide d'un exemple concret, afin de s'assurer que les éléments orbitaux calculés permettent de décrire correctement l'orbite suivie par une particule dans les simulations numériques. Nous voulons également quantifier la précision obtenue pour ces éléments pour différentes configurations orbitales (excentrique et/ou inclinée).

Le code utilisé est *mercury6* développé par J.Chambers (Chambers, 1999). On intègre le mouvement dans un repère centré sur le corps central en coordonnées cartésiennes. L'algorithme utilisé est radau (Everhart, 1985), avec un paramètre de précision $\delta = 10^{-12}$ (erreur maximale autorisée à chaque pas d'intégration).

On considère arbitrairement le cas d'une particule test en orbite autour de Saturne et au voisinage de l'orbite du satellite Pandore. Les paramètres physiques de Saturne utilisés (masse, rayon et aplatissement) sont donnés dans la table A.1 (Campell et Anderson, 1989).

GM_p (km^3 s^{-2})	3.7931272×10^7
R_p (km)	60330.
J_2	16298×10^{-6}
J_4	-915×10^{-6}
J_6	103×10^{-6}

TAB. A.1: Paramètres physiques de Saturne

Le demi grand-axe initial de la particule est $a = 141713.0$ km. Nous avons effectué plusieurs intégrations numériques correspondant à différentes configurations initiales : une orbite équatoriale circulaire, une orbite équatoriale excentrique (avec $e = 4.5 \times 10^{-3}$), une orbite inclinée circulaire (avec $I = 0.5^o$) et une orbite inclinée excentrique ($e = 4.5 \times 10^{-3}$ et $I = 0.5^o$). Notons que dans notre exemple l'excentricité osculatrice de la particule est $e_0 \sim \frac{3}{2} J_2 (R_p/r)^2 \sim 4.43 \times 10^{-3}$. Pour chaque intégration, la particule est initialement à son périapse avec $\varpi = \lambda = 0^o$, et lorsque l'inclinaison est non nulle, la longitude du noeud initiale est $\Omega = 45^o$. Les résultats sont résumés table A.2, pour des simulations de 10 ans. Nous avons listé les valeurs moyennes ainsi que les erreurs relatives obtenues pour le demi grand-axe, l'excentricité et l'inclinaison. On donne aussi l'excursion radiale de la particule. La précision obtenue est tout à fait satisfaisante quelque soit l'orbite considérée. L'erreur relative la plus importante concerne l'inclinaison ; cependant elle demeure faible pour des orbites faiblement inclinées.

Pour les orbites inclinée et/ou excentrique, nous avons également verifié que les angles étaient bien définis. Par exemple, lorsque $\lambda - \varpi = 0$ (passage de la particule au périapse), le rayon r est bien minimal. Lorsque $\lambda - \Omega = 0$ (passage au noeud), on a bien $z = 0$. D'autre part, l'excursion radiale du satellite lorsque l'orbite est excentrique est $2ae = 2 \times 141713. \times (4.5 \times 10^{-3}) \sim 1275.42$ km, ce qui est compatible avec les Δr de la table A.2.

Finalement, nous donnons sur une période orbitale $T = 0.6285$ jours de la particule, le demi grand-axe et l'excentricité géométriques pour les orbites excentriques inclinées ou non (figure A.2), ainsi que l'inclinaison et la longitude du noeud ascendant pour l'orbite excentrique et inclinée (figure A.3). Les variations à haute fréquence sont faibles, et même négligeables

pour le demi grand-axe et l'excentricité. La longitude du périapse ou la longitude moyenne ne présentent pas de telles variations.

	$e = 0$ $I = 0^o$	$e = 4.5 \times 10^{-3}$ $I = 0^o$	$e = 0$ $I = 0.5^o$	$e = 4.5 \times 10^{-3}$ $I = 0.5^o$
$< a >$ (km)	141713.0	141712.92	141713.0	141712.92
$\Delta a/a$	7.7×10^{-9}	1.1×10^{-6}	7.0×10^{-7}	1.8×10^{-6}
$< e >$	4.3×10^{-9}	4.5×10^{-3}	7.2×10^{-7}	4.5×10^{-3}
$\Delta e/e$	1.7	3.1×10^{-4}	1.9	6.1×10^{-4}
$< I >$ (°)	5.0×10^{-15}	5.0×10^{-15}	0.5	0.5
$\Delta I/I$	5×10^{-9}	4.5×10^{-3}	4.5×10^{-3}	4.5×10^{-3}
Δr (km)	1.4×10^{-3}	1275.37	0.18	1275.53

TAB. A.2: Précision des éléments orbitaux obtenue après une intégration numérique de 10 ans, pour des configurations initiales différentes (a et e sont géométriques, l'inclinaison I est osculatrice). La quantité $< a >$ est la valeur moyenne du demi grand-axe et $\Delta a/a$ l'erreur relative. Idem pour l'excentricité e et l'inclinaison I. Enfin, Δr est l'excursion radiale de la particule.

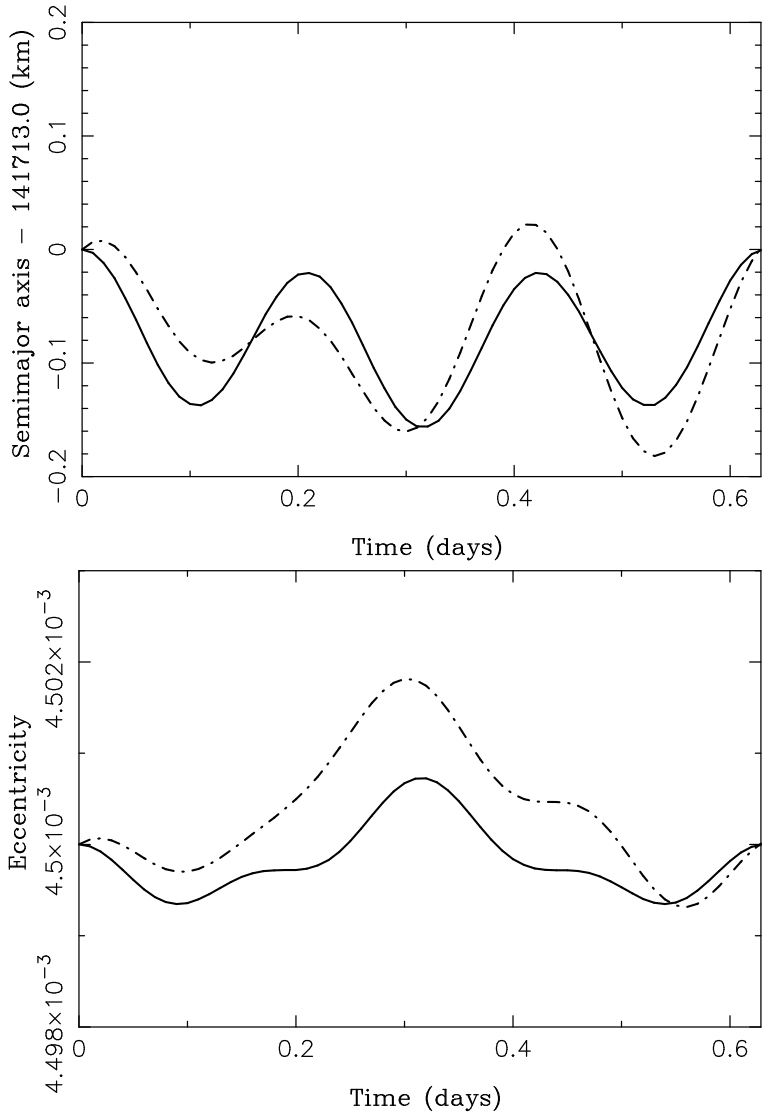

FIG. A.2: Demi grand-axe et excentricité géométriques sur une période orbitale, pour l'orbite excentrique et équatoriale (trait plein) et pour l'orbite excentrique et inclinée (pointillés). Les variations à haute fréquence sont plus importantes pour l'orbite inclinée mais demeurent faibles.

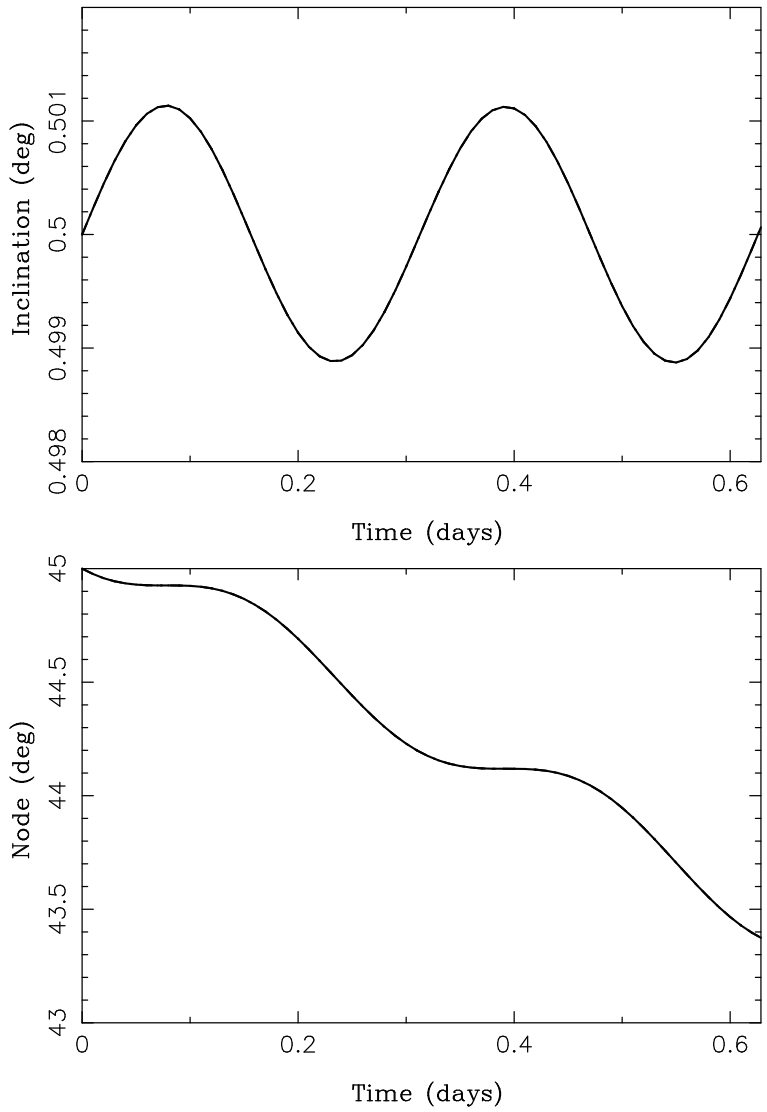

FIG. A.3: Inclinaison et longitude du noeud osculatrices sur une période orbitale, pour l'orbite excentrique et inclinée. La planète exerce un couple sur la particule, dû à l'aplatissement, qui entrainent des variations à haute fréquence.

Annexe B

Repérage des anneaux et des satellites de Saturne.

Sommaire

B-1 Calcul de U,B,P à partir des coordonnées équatoriales de Saturne et du pôle nord de la planète 152

B-2 Relations entre les écarts en ascension droite et déclinaison ($\Delta\alpha \cos\delta$,$\Delta\delta$) par rapport au centre de Saturne et la position en coordonnées cartésiennes . . . 153

L'apparence des anneaux de Saturne dans le ciel dépend de la position saturnicentrique de la Terre et du Soleil. Pour les éphémérides des anneaux de Saturne on donne donc 3 angles U, B, P et 3 angles U', B', P' qui définissent respectivement la position des anneaux par rapport à la Terre et au Soleil, ainsi que le grand axe et le petit axe apparents de l'anneau extérieur. Les angles U, B, P sont définis comme suit :

- U est la la longitude géocentrique de Saturne, mesurée dans le plan des anneaux et comptée positivement vers l'est à partir de son noeud ascendant sur l'équateur moyen de la Terre $J2000$. La longitude saturnicentrique de la Terre, mesurée de la même manière, est alors $U + 180°$.
- B est l'inclinaison du plan des anneaux, plus précisément la latitude saturnicentrique de la Terre par rapport au plan des anneaux, positive vers le nord (lorsque B est positif la surface visible des anneaux est la partie dirigée vers le nord)
- P est l'angle géocentrique du demi petit-axe dirigé vers le nord de l'ellipse apparente des anneaux, compté positivement vers l'est et à partir du nord.

Nous montrons dans cette annexe comment déduire U, B, P à partir des coordonnées équatoriales de Saturne et du pôle nord de la planète. Puis nous donnons les relations qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes d'un objet en orbite équatoriale autour de Saturne, aux coordonnées dans le plan du ciel par rapport au centre de la planète (écarts en ascension droite et en déclinaison). Ces relations font intervenir les angles U, B, P.

B-1 Calcul de U,B,P à partir des coordonnées équatoriales de Saturne et du pôle nord de la planète

On se place dans le repère $J2000$, où $\mathbf{x}$ est le vecteur unitaire d'origine le centre de la Terre et de direction le noeud ascendant de l'équateur moyen de la Terre (point vernal) sur l'écliptique $J2000$ (1er janvier 2000, 12h TDB), $\mathbf{z}$ est unitaire et parallèle au pôle de la Terre $J2000$, et $\mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{x}$. L'origine de ce repère peut être translaté sans changer l'orientation des axes ; par exemple, on peut centrer le repère $J2000$ sur l'observateur.

Soient (α, δ) les coordonnées équatoriales de Saturne dans le repère $J2000$ et (α_P, δ_P) celles du pôle nord de la planète. Soient $\mathbf{P}$ le vecteur unitaire de direction le pôle nord de Saturne, $\mathbf{\Omega}$ le vecteur unitaire de direction le noeud ascendant de l'équateur de Saturne sur l'équateur de la Terre $J2000$, et $\mathbf{r}$ le vecteur unitaire de direction observateur - planète (*cf.* figure **??**). Alors, dans le repère $J2000$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\delta_P \cos\alpha_P \\ \cos\delta_P \sin\alpha_P \\ \sin\delta_P \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_P \\ \cos\alpha_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Soient $\mathbf{e}$ le vecteur unitaire dans le plan du ciel, orthogonal à $\mathbf{r}$, dirigé vers l'est, et $\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{e}$. On a dans le repère $J2000$:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin\delta\cos\alpha \\ -\sin\delta\sin\alpha \\ \cos\delta \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

Avec ces définitions, l'angle P est donc l'angle de position de la projection du pôle nord de Saturne dans le plan du ciel, compté à partir de l'axe $\mathbf{n}$, positivement vers l'axe $\mathbf{e}$. Le vecteur $\mathbf{P}$ de direction le pôle de Saturne peut s'écrire :

$$\mathbf{P} = -\sin B\mathbf{r} + \cos B \sin P\mathbf{e} + \cos B \cos P\mathbf{n} \tag{B.3}$$

En prenant donc les produits scalaires $\mathbf{P}.\mathbf{r}$, $\mathbf{P}.\mathbf{e}$ et $\mathbf{P}.\mathbf{n}$, on en déduit facilement les angles B et P, en fonction de (α, δ) et (α_P, δ_P).

D'autre part, soit $\mathbf{a}$ le vecteur unitaire dans le plan du ciel de direction l'anse est des anneaux (il est donc défini par l'intersection des anneaux avec le plan du ciel côté est). On a :

$$\mathbf{a} = \cos P\mathbf{e} - \sin P\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\cos P + \sin\delta\cos\alpha\sin P \\ \cos\alpha\cos P + \sin\delta\sin\alpha\sin P \\ -\cos\delta\sin P \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

Complétons le repère par $\mathbf{b} = \mathbf{P} \times \mathbf{a} = -\cos B\mathbf{r} - \sin B \sin P\mathbf{e} - \sin B \cos P\mathbf{n}$. Le vecteur $\mathbf{\Omega}$ s'écrit :

$$\mathbf{\Omega} = -\sin U\mathbf{a} - \cos U\mathbf{b} \tag{B.5}$$

En considérant les produits scalaires $\mathbf{\Omega}.\mathbf{a}$ et $\mathbf{\Omega}.\mathbf{b}$, on en déduit l'expression de U, en fonction de (α, δ) et (α_P, δ_P).

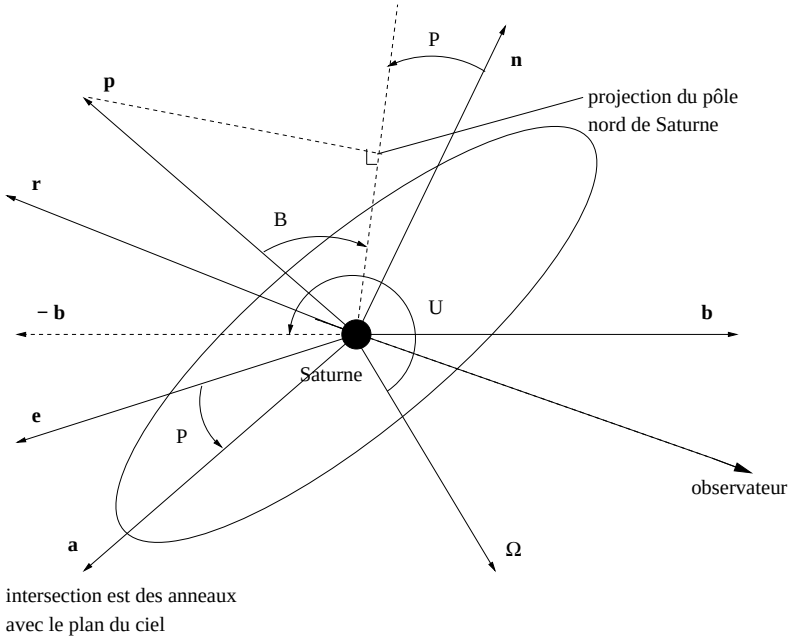

FIG. B.1: Angles pour définir la position des anneaux de Saturne par rapport à la Terre

B-2 Relations entre les écarts en ascension droite et déclinaison ($\Delta\alpha \cos\delta$,$\Delta\delta$) par rapport au centre de Saturne et la position en coordonnées cartésiennes

Considérons un satellite en orbite autour de Saturne, de coordonnées (X, Y, Z) dans un repère cartésien centré sur la planète. Soient ($\Delta\alpha \cos\delta$,$\Delta\delta$) les écarts en ascension droite et déclinaison du satellite par rapport à Saturne. On suppose que les longitudes sont mesurées dans le plan des anneaux à partir du noeud ascendant de l'équateur de Saturne sur l'équateur de la Terre $J2000$, *i.e.* à partir du vecteur $\mathbf{\Omega}$ défini précédemment (*cf.* figure B.1). On complète le repère par $\mathbf{Y} = \mathbf{P} \times \mathbf{\Omega}$. Alors le rayon vecteur $\mathbf{R}$ du satellite, dans le repère centré sur Saturne, est :

$$\mathbf{R} = X\mathbf{\Omega} + Y\mathbf{Y} + Z\mathbf{P} = X(-\sin U\mathbf{a} - \cos U\mathbf{b}) + Y(\cos U\mathbf{a} - \sin U\mathbf{b}) + Z\mathbf{P} \tag{B.6}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \cos P\mathbf{e} - \sin P\mathbf{n} \\ \mathbf{b} = -\cos B\mathbf{r} - \sin B \sin P\mathbf{e} - \sin B \cos P\mathbf{n} \\ \mathbf{P} = -\sin B\mathbf{r} + \cos B \sin P\mathbf{e} + \cos B \cos P\mathbf{n} \end{cases} \tag{B.7}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} = &\Big[(X\cos U + Y\sin U)\cos B - Z\sin B\Big]\mathbf{r}\\ &+\Big[-\alpha_1\cos P + \alpha_2\sin B sin P + Z\cos B\sin P\Big]\mathbf{e}\\ &+\Big[\alpha_1\sin P + \alpha_2\sin B\cos P + Z\cos B\cos P\Big]\mathbf{n},\end{aligned} \tag{B.8}$$

où $\alpha_1 = X\sin U - Y\cos U$ et $\alpha_2 = X\cos U + Y\sin U$.

Le terme en **e** du rayon vecteur du satellite n'est rien d'autre que $D \times \Delta\alpha\cos\delta$, où D est la distance entre l'observateur et Saturne, et le terme en **n** est $D \times \Delta\delta$. On obtient donc, pour des orbites équatoriales ($Z = 0$) :

$$\begin{cases}\Delta\alpha\cos\delta = \Big[-\cos P(X\sin U - Y\cos U) + \sin B\sin P(X\cos U + Y\sin U)\Big]/D\\ \Delta\delta = \Big[\sin P(X\sin U - Y\cos U) + \sin B\cos P(X\cos U + Y\sin U)\Big]/D\end{cases} \tag{B.9}$$

Si on considère des orbites inclinées, alors les termes $Z\cos B\sin P$ et $Z\cos B\cos P$ doivent respectivement être ajoutés dans l'expression de $\Delta\alpha\cos\delta$ et de $\Delta\delta$, à l'intérieur des crochets. Réciproquement, calculons les coordonnées cartésiennes (X, Y) du satellite (supposé en orbite équatoriale) en fonction des écarts $(\Delta\alpha\cos\delta, \Delta\delta)$ par rapport au centre de Saturne. D'après (B.8), on a avec $Z = 0$:

$$\mathbf{R} = \Big[(X\cos U + Y\sin U)\cos B\Big]\mathbf{r} + D \times \Delta\alpha\cos\delta\mathbf{e} + D \times \Delta\delta\mathbf{n} \tag{B.10}$$

En écrivant **r**, **e**, **n** en fonction de **a**, **b**, **p**, puis ces derniers en fonction de $\mathbf{\Omega}$ et **Y**, on obtient la position du satellite en coordonnées cartésiennes, en fonction des écarts en ascension droite et déclinaison :

$$\begin{cases}X = D\Big[-(\Delta\alpha\cos\delta\cos P - \Delta\delta\sin P)\sin U +\\ (\Delta\alpha\cos\delta\sin P + \Delta\delta\cos P)\cos U/\sin B\Big]\\ Y = D\Big[(\Delta\alpha\cos\delta\cos P - \Delta\delta\sin P)\cos U +\\ (\Delta\alpha\cos\delta\sin P + \Delta\delta\cos P)\sin U/\sin B\Big]\end{cases} \tag{B.11}$$

Publications

Publications dans des revues à comité de lecture

1. **Renner, S.** & Sicardy, B. Stationary configurations for co-orbital satellites with small arbitrary masses. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **88**, 397-414, 2004.

2. **Renner, S.**, Sicardy, B. & French, R.G. Prometheus and Pandora : masses and orbital positions during the *Cassini* tour. Article accepté et à paraître dans *Icarus*.

3. Sicardy, B., Widemann, T., Lellouch, E., Veillet, C., Cuillandre, J.C., Colas, F., Roques, F., Beisker, W., Kretlow, M., Lagrange, A.M., Gendron, E., Lacombe, F., Lecacheux, J., Birnbaum, C., Fienga, A., Leyrat, C., Maury, A., Raynaud, E., **Renner, S.**, Schulteis, M., Brooks, K., Delsanti, A., Hainaut, O., Gilmozzi, R., Lidman, C., Spiromilio, J., Rapaport, M., Rosensweig, P., Diaz, F., Naranjo, F., Porras, O., Carrillo, S., Carvajal, A., Recalde, E., Gaviria Cavero, L., Montalve, C., Barria, D., Campos, R., Duffard, R., Levato, H. Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations. *Nature*, **424**, 168-170, 2003.

Ces trois articles sont reproduits en annexe de cette thèse.

Autres publications

1. **Renner, S.** & Sicardy, B. Test particle motion around an oblate planet : transformations between state vectors and geometric elements. Preprint.

Cette article est également reproduit en annexe de cette thèse.

Communications dans des colloques internationaux

1. Sicardy, B., Colas, F., Widemann, T., Fienga, A., Lacour, S., Lecacheux, J., Lellouch, E., Pau, S., **Renner, S.**, Roques, F., Glass, I., Baba, D., Nagata, T., Ferri, F., Martinez, C., Beisker, W., Enke, S., Bath, K.-L., Bode, F., Bode, H.-J., Fiel, D., Kretlow, M., Hernandez, M., Horns, D., Luedemann, J., Luedemann, H., Tegtmeier, A., deWitt, C., Fraser, B., Jones, T., Shonau, P., Turk, C., Meintjies, P., Howell, R.R., Kidger, M., Ortiz, J.L., Rosenzweig, P., Naranjo, O., Rapaport, M. The two stellar occultations of November 14, 2003 : revealing Titan's stratosphere at sub-km resolution. *Bull. Am. Astron. Soc.*, **36**, No. 22.06, DPS meeting, 2004.

2. **Renner, S.** & Sicardy, B. Prometheus and Pandora : masses and orbital positions during the *Cassini* tour. *Bull. Am. Astron. Soc.*, **35**, No. 09.02, DDA meeting, 2004.

3. **Renner, S.** & Sicardy, B. Consequences of the chaotic motions of Prometheus and Pandora *Bull. Am. Astron. Soc.*, **35**, No. 04.06, DPS meeting, 2003.

4. Sicardy, B., & **Renner, S.** On the confinement of Neptune's ring arcs by co-orbital moonlets. *Bull. Am. Astron. Soc.*, **35**, No. 11.03, DPS meeting, 2003.

5. **Renner, S.** & Sicardy, B. Consequences of the chaotic motions of Prometheus and Pandora *Bull. Am. Astron. Soc.*, **34**, No. 10.02, DDA meeting, 2003.

6. Sicardy, B., & **Renner, S.** Effect of slow variations of parameters for 2 co-orbital satellites and stationary configurations for N co-orbital satellites. *Bull. Am. Astron. Soc.*, **34**, No. 10.05, DDA meeting, 2003.

7. Sicardy, B., Colas, F., Widemann, T., Beisker, W., Birnbaum, C., Brooks, K., Delsanti, A., Fienga, A., Gendron, E., Hainaut, O., Kretlow, M., Lagrange, A.M., Lecacheux, J., Leyrat, C., Maury, A., Raynaud, E., Rappaport, M., **Renner, S.**, Roques, F., Schulteis, M. The 20 july 2002 occultation of P126 by Pluto. *Bull. Am. Astron. Soc.*, **34**, No. 21.01, DPS meeting, 2002.

Autres communications

1. **Renner, S.**. Mouvement chaotique de Prométhée - Pandore. Confinement des arcs de Neptune. Journée des thèses du LESIA 2004.

2. **Renner, S.**. Dynamique des anneaux et des satellites planétaires : arcs de Neptune, Prométhée - Pandore. Journée des thèses du LESIA 2003.

3. **Renner, S.**. Dynamique des arcs de Neptune. Journée des thèses du LESIA 2002.

4. **Renner, S.**. Dynamique des satellites co-orbitaux : stabilité des configurations d'équilibre. Séminaire de l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques (ASD) de l'IMCCE, 2002.

Annexe C

Stationary configurations for co-orbital satellites with small arbitrary masses. Article paru dans *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 88, 397-414, 2004.

STATIONARY CONFIGURATIONS FOR CO-ORBITAL SATELLITES WITH SMALL ARBITRARY MASSES

STÉFAN RENNER and BRUNO SICARDY
LESIA, Observatoire de Paris, 92195 Meudon Cédex, France, e-mail: stefan.renner@obspm.fr

(Received: 10 July 2003; revised: 28 October 2003; accepted: 22 December 2003)

Abstract. We derive general results on the existence of stationary configurations for N co-orbital satellites with small but otherwise arbitrary masses m_i, revolving on circular and planar orbits around a massive primary. The existence of stationary configurations depends on the parity of N. If N is odd, then for any arbitrary angular separation between the satellites, there always exists a set of masses (positive or negative) which achieves stationarity. However, physically acceptable solutions ($m_i > 0$ for all i) restrict this existence to sub-domains of angular separations. If N is even, then for given angular separations of the satellites, there is in general *no* set of masses which achieves stationarity. The case $N = 3$ is treated completely for small arbitrary satellite masses, giving all the possible solutions and their stability, to within our approximations.

Key words: central configurations, co-orbital satellites, N body problem, relative equilibria

1. Introduction

Configurations with a massive central body surrounded by small co-orbital satellites are found in several instances in the Solar System. Examples are found in the Saturnian system: a satellite (Helene) librates near the L_4 point of Dione, and two satellites, Telesto and Calypso, librate near the L_4 and L_5 of Tethys, respectively, while the co-orbital satellites Janus and Epimetheus oscillate in horseshoe orbits around their mutual L_3 point.

In another context, the four co-orbital Neptune ring arcs might be explained, at least partly, by the presence of several hypothetical co-orbital satellites which would confine the observed dusty ring material (Renner and Sicardy, in preparation). More generally, a ring close to the Roche zone of its planet might evolve, through accretion, into a collection of N co-orbital satellites which gather most of the mass of the ring material.

Our aim in this paper is to derive some general results on *stationary planar configurations for N co-orbital satellites* orbiting a much more massive central planet (planar $1+N$ body problem). These stationary configurations are sometimes called *relative equilibria*, that is, special configurations of masses of the N body problem which rotate rigidly, with a constant angular velocity about their center of mass, if given the correct initial momenta. In rotating coordinates these special solutions become fixed points, hence the name relative equilibria. The

Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **88:** 397–414, 2004.
© 2004 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

relative equilibria are solutions of the planar N body problem resulting from an appropriate choice of initial velocities of a *central configuration*. Central configurations are the configurations of the N body problem such that the total newtonian acceleration on every body is equal to a constant multiplied by the position vector of this body, the center of mass of the configuration being taken as the origin. Such configurations give rise to simple, explicit solutions of the N body problem (homothetic collapse if the bodies are released with zero initial velocity, relative equilibria, ...).

To within our approximations, detailed herein, we generalize the work by Salo and Yoder in 1988 (hereafter referred to as SY88) to the case of satellites with small but arbitrary (not necessarily equal) masses. Indeed, in SY88, only the stationary configurations of N ($N \leqslant 9$) *identical* co-orbital satellites are mapped out. This work was itself an extension of Maxwell's study (1859) on the stability of Saturn's rings in his Adams prize essay of 1856. This latter work was restricted to symmetrically spaced identical many particles.

However, other papers concerning relative equilibria with a dominant mass, stayed fairly independent from SY88 because of the use of the different terminology mentioned above. Hall (1987) also studied the planar relative equilibria of the $1 + N$ body problem where one mass is large and the other N masses are small and equal. He found that, when N is sufficiently large, the only possible relative equilibrium is *Maxwell's ring*, that is, a regular N-gon with a central mass, and that other configurations are possible for small N. In particular, he solved the problem of 1 large $+3$ small identical bodies. Moeckel (1994) found a necessary and sufficient condition for the linear stability of relative equilibria of the $1+N$ body problem with N small but not necessarily equal masses. He showed that Maxwell's ring is linearly stable if and only if $N \geqslant 7$. A bifurcation value M_{bif} was found such that this configuration is linearly stable if and only if the central mass $M > M_{\text{bif}}$ (Roberts, 2000).

In a related but different vein, Albouy (1996) recently classified all the relative equilibria for four equal masses. There are essentially only four configurations: a collinear solution, a square, an equilateral triangle with a body at the center and an isosceles triangle with a body on the axis of symmetry. No complete classification exists for four unequal masses or for the N body problem with $N \geqslant 5$. In the 5-body problem, Roberts (1999) found a one-parameter family of degenerate relative equilibria which includes a negative mass, and thus concluded that the masses being positive is a necessary condition for the set of relative equilibria equivalence classes to be finite. Albouy and Llibre (2002) investigated the 3-D configurations for 1 large $+4$ small identical bodies. No stationary configurations are possible in the non-planar case, but homothetic central configurations are possible. This 3-D situation will not be considered here.

What we show in this paper is that the existence of possible planar stationary solutions of the $1+N$ body problem depends on whether N is odd or even. Namely, if N is odd, and for a given angular configuration, there is always a set

of satellite masses (although not always physically meaningful, as some of them may be negative) which achieves stationarity. For N even on the contrary, there is in general *no* combination of masses which ensures stationarity for a given angular configuration.

We give some general results on the linear stability of the stationary configurations, and we treat completely the case of $N = 3$ satellites with arbitrary masses.

We finally present numerical methods to derive the possible stationary configurations for given satellite masses, or conversely, to derive the satellites masses, given a stationary configuration.

2. Equations of Motion

Consider the $1 + N$ body problem with N co-orbital satellites moving with the same average mean motion n_0 and the same average orbital radius r_0 around a point mass M.

We assume that all the satellites lie on the same plane (planar problem), and that the satellite masses are small with respect to the central mass M: for all $i = 1, \ldots, N$, $0 \leqslant m_i/M \ll 1$, where m_i is the mass of the i-th satellite. A more rigorous way to define the N infinitesimal masses is the following: for all $i = 1, \ldots, N$, $m_i = \epsilon\mu_i$, where $\mu_i \in \mathbb{R}^+$ and $\epsilon > 0$ is a small parameter that tends to zero.

We write the equations of motion in a coordinate system with origin at M and rotating with the angular velocity n_0. We assume that the orbital eccentricity of each satellite is zero and that any two satellites i and j never get closer than a few mutual Hill sphere radii $r_{\mathrm{H}} = r_0[(m_i + m_j)/M]^{1/3}$. This avoids chaotic motion and ensures that the satellites remain co-orbital. In particular, we will not consider here the stationary points aligned with the satellite and the planet (like the L_1 or L_2 Lagrange points of the $N = 2$ problem).

The motion is described by the coordinates (ϕ_i, ξ_i), $i = 1, \ldots, N$, where ϕ_i is the longitude of satellite i with respect to an arbitrary origin, and $\xi_i = \Delta r_i/r_0$ is the relative radial excursion of that satellite with respect to the average radius r_0 (see Figure 1).

For convenience and with no loss of generality, we assume that $n_0 = 1$, $r_0 = 1$ and $M = 1$. Classical derivations based on the above assumptions then show (see e.g. SY88) that the equations of motion are:

$$\dot{\phi}_i = -\frac{3}{2}\xi_i, \qquad \dot{\xi}_i = -2\sum_{j\neq i} m_j f'(\phi_i - \phi_j), \tag{1}$$

where

$$f(\phi) = \cos\phi - \frac{1}{2|\sin\phi/2|}, \tag{2}$$

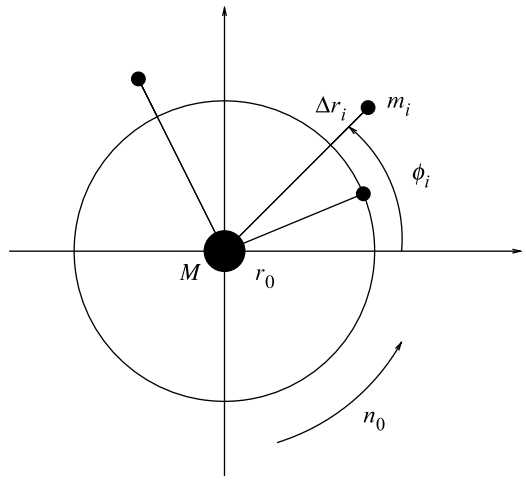

Figure 1. Notations for the dynamics of co-orbital satellites. The satellites move around a central point mass M with the same average mean motion n_0 and the same average orbital radius r_0. The equations of motion (Eqs. (1)) are written in a coordinate system with origin at M and rotating with the angular velocity n_0. The motion is described by the coordinates (ϕ_i, ξ_i), $i = 1, \ldots, N$, where ϕ_i is the longitude of satellite i with respect to an arbitrary origin, and $\xi_i = \Delta r_i / r_0$ is the relative radial excursion of that satellite with respect to the average radius r_0.

from which we derive:

$$f'(\phi) = \sin\phi \left[-1 + \frac{1}{8|\sin\phi/2|^3} \right], \tag{3}$$

$$f''(\phi) = -\cos\phi - \frac{3 + \cos\phi}{16|\sin\phi/2|^3}. \tag{4}$$

The first equation in (1) represents the differential keplerian velocity of each satellite with respect to the mean orbital radius r_0. The second equation contains, in a derivative form, all the terms arising from the mutual interactions between the satellites. The function $f(\phi)$ in Equation (2) is the sum of the indirect and direct potentials exerted by a given satellite on the other co-orbital bodies. It is an even function of ϕ and its graph is plotted in Figure 2, together with the first and second derivatives $f'(\phi)$ and $f''(\phi)$.

Since f' is odd, it is easy to show from (1) that $\sum_i m_i \xi_i =$ constant. Because the reference radius r_0 is arbitrary, it can be chosen so that $\sum_i m_i \xi_i = 0$, with no loss of generality. Thus the system (1) has the following integrals of motion:

$$\sum_i m_i \xi_i = 0, \qquad \sum_i m_i \phi_i = \text{constant}, \tag{5}$$

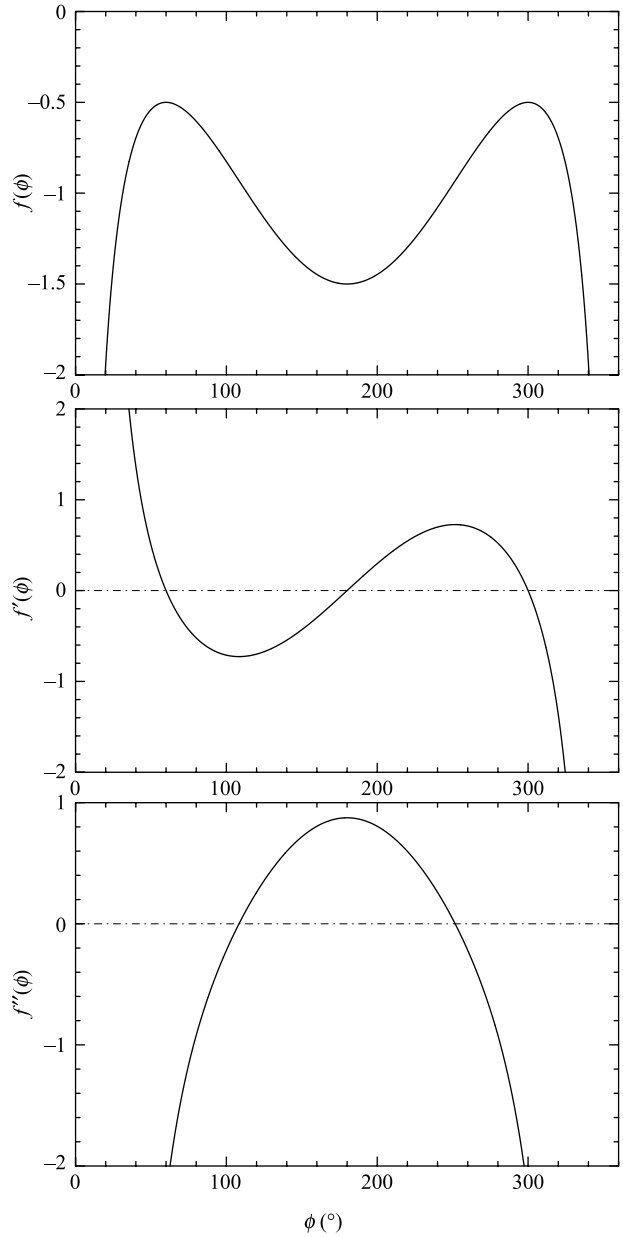

Figure 2. The function $f(\phi)$ (Eq. (2)), describing the potential created by a satellite on a co-orbital particle, together with its first and second derivatives $f'(\phi)$ and $f''(\phi)$ (Eqs. (3) and (4)).

which stem from the conservation of the total angular momentum. This conservation results itself from the global invariance by rotation of the whole problem considered here.

There is another integral of the system (1):

$$J = \sum_i m_i \left[-\frac{3}{4}\xi_i^2 + \sum_{j \neq i} m_j f(\phi_i - \phi_j) \right] = \text{constant}. \tag{6}$$

This is an energy integral, called the Jacobi constant.

3. Equilibrium Points

3.1. GENERAL RESULTS

The fixed points of system (1) are given by:

$$\xi_i = 0 \tag{7}$$

and

$$\sum_{j \neq i} m_j f'(\phi_i - \phi_j) = 0 \tag{8}$$

for all $i = 1, \ldots, N$.

Equation (7) means that in a stationary configuration the N co-orbital satellites have the same orbital radius.[1] Equation (8) involves the angular separations between the satellites and can be written in a matrix form. Defining $f'_{ij} \equiv f'(\phi_i - \phi_j)$ and noting that the function f' is odd, we obtain from Equation (8):

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_{12} & \cdots & \cdots & f'_{1N} \\ -f'_{12} & 0 & f'_{23} & \cdots & f'_{2N} \\ \vdots & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -f'_{1N} & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \equiv M_N \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^N}. \tag{9}$$

The $N \times N$ matrix M_N defined above is antisymmetric and depends only on the longitudes ϕ_i's, through the coefficients f'_{ij}.

Our aim here is to find all the angles $\phi_1, \ldots, \phi_N$ such that there are physically meaningful (i.e. positive definite) solutions $(m_1, \ldots, m_N)$ of Equation (9). It is impossible to do this analytically for an arbitrary number N of satellites. However, some general properties of the solutions can be derived from the fact that M_N

[1] In the exact problem, this is true to zeroth order in the m_i's only. Small corrections of order m_i are not considered here.

is antisymmetric. We assume that for all $i \neq j$, $\phi_i \neq \phi_j$ (f' is not defined on zero).

PROPOSITION 1. *Let* $(\phi_1, \ldots, \phi_N) \in [0, 360^\circ[^N$ *be such that* $\phi_i \neq \phi_j$ *for all* $i \neq j$. *If* N *is odd, then the rank of* M_N *is* $\mathrm{rk}(M_N) = N - k$ *where* k *is an odd integer. Therefore there exists a* k*-parameter family of mass vectors* $(m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{R}^N$ *for which* $(\phi_1, \ldots, \phi_N)$ *is a stationary configuration. If* N *is even, then* $\mathrm{rk}(M_N)$ *is generally* N, *and there is in general no family of mass vectors that leads to a stationary configuration.*

Proof. This results from a classical theorem of linear algebra: since M_N is antisymmetric, its rank is even. Consequently, for given arbitrary angles ϕ_i's, the existence of non-trivial solutions (positive or not) of the linear system (9) depends on the parity of the number N of satellites. □

Remarks. If N is odd, $\mathrm{rk}(M_N) = N - k$ with k odd, but $k = 1$ almost everywhere (in the space of the ϕ_i's, the set for which the rank of M_N is $N-3, N-5, \ldots$, has measure zero). Thus, given *arbitrary* non-zero angular separations between all the satellites, there is a *one-parameter* family of mass vectors for which the configuration is stationary: given for example m_1, there is a single non-trivial solution $(m_1, m_2, \ldots, m_N)$ of (9). Note, however, that all the masses must be positive for the solution to be physically meaningful. This will reduce the possible angular configurations $\phi_1, \ldots, \phi_N$ to a subspace of $[0, 360^\circ[^N$, as illustrated for instance in Figure 3 for the case $N = 3$.

If N is even, the rank of M_N is generally N: given an *arbitrary* angular configuration $\phi_1, \ldots, \phi_N$, there are in general *no* non-trivial solutions $(m_1, \ldots, m_N)$ which achieve the equilibrium. This is well known for the case $N = 2$, where only the triangular points L_4 and L_5 and the diametral point L_3 allow the satellites to be stationary with respect to each other. Thus, one must first cancel the determinant of the matrix, $\det(M_N)$, in order to obtain non-trivial solutions of (9).

Let $\mathrm{D} = \{(\phi_1, \ldots, \phi_N) \in [0, 360^\circ[^N \mid \det(M_N) = 0\}$. On this subspace, the rank of M_N is $N - 2$, almost everywhere, and this time there is a *two-parameter* family of mass vectors for which the configuration is stationary. This is easily verified for $N = 2$. For instance, two satellites at 60° from each other are stationary with arbitrary choices on both m_1 and m_2.

3.2. APPLICATION

Let us examine some practical cases ($N \leqslant 4$), and let us search for stationary configurations with definite positive masses. For convenience, we can assume with no loss of generality that one of the satellites, for example m_1, is the most massive of all. In addition, the problem is invariant by rotation of the system as a whole, so we can measure all the longitudes with respect to m_1. More precisely, we henceforth assume that $\phi_1 = 0$, so that ϕ_i ($i \neq 1$) will now denote the angular separation of the i-th satellite with respect to m_1.

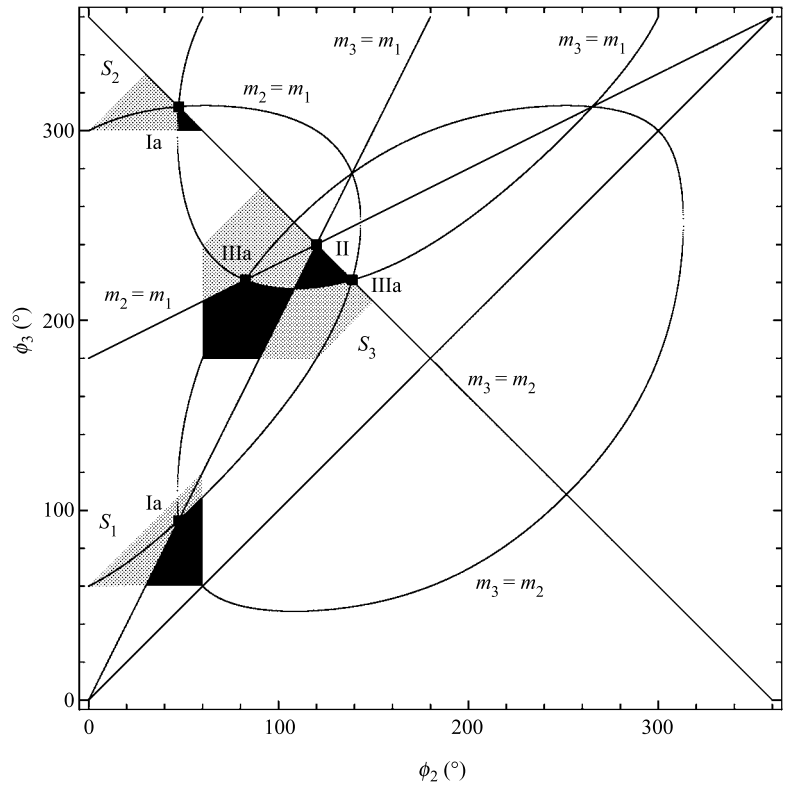

Figure 3. Domains of stationary configurations for three co-orbital satellites with non-zero positive masses m_1, m_2 and m_3. The angles ϕ_2 and ϕ_3 are the angular separations of m_2 and m_3 with respect to m_1, respectively, assumed to be at longitude $\phi_1 = 0$ with no loss of generality. As discussed in the text, it is sufficient to restrict the study to the left quadrant $0 < \phi_2 \leqslant 180°$ and $\phi_2 < \phi_3 \leqslant 360° - \phi_2$. All the possible solutions are then obtained by symmetries with respect to the two diagonals. The grey areas S_1, S_2 and S_3 corresponds to solutions with all three masses m_1, m_2 and m_3 positive, while the black areas are restricted (with no loss of generality) to cases where m_1 is the largest of the three masses. Each point of these areas is an equilibrium point that fixes the mass ratio between the satellites. There is an infinity of solutions that fill the three areas. The various curves and straight lines are boundaries where two masses are equal. The points Ia, II and IIIa are the stationary configurations for three identical co-orbitals, already described in SY88. Note that the particular line $\phi_3 = \phi_2$ has no physical meaning since it corresponds to two zero masses at the same point.

3.2.1. *The classical case of two co-orbital satellites*

With $N = 2$, the equilibrium condition yields $\xi_1 = \xi_2 = f'(\phi_2) = 0$, so that:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \qquad \phi_2 = 60°, 180° \text{ or } 300°.$$

So the stationary points are the classical Lagrangian equilibrium points L_4, L_3 and L_5, respectively. Note that the Lagrange points L_1 and L_2 do not appear here, because we have assumed that the satellites remain far from their mutual Hill sphere.

3.2.2. *The case of three co-orbital satellites*
The equilibrium condition yields:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \tag{10}$$

meaning that the three co-orbitals have the same orbital radius, and

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_{12} & f'_{13} \\ -f'_{12} & 0 & f'_{23} \\ -f'_{13} & -f'_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

From the previous general result, the rank of M_3 is 2 (it is easy to verify that the rank cannot be zero). So, given the angular separations between the satellites, there is a one-parameter family of mass vectors that leads to a stationary configuration: given for example m_1, there is a single solution (m_1, m_2, m_3) that satisfies Eq. (11).

Note that there are now only two independent angular variables, ϕ_2 and ϕ_3, from the choice $\phi_1 = 0$.

We only search the non-zero positive solutions for m_1, m_2 and m_3. Solving the linear system (11) then yields:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{f'_{13}}{f'_{23}} > 0, \qquad \frac{m_3}{m_1} = \frac{f'_{12}}{f'_{23}} > 0. \tag{12}$$

From this system, one can deduce immediately that if (ϕ_2, ϕ_3) is solution, then (ϕ_3, ϕ_2), $(360° - \phi_2, 360° - \phi_3)$ and $(360° - \phi_3, 360° - \phi_2)$ are solutions too. Thus, without loss of generality, we can restrict the search for the stationary configurations to the following subspace:

$$0 < \phi_2 < \phi_3 < 360° - \phi_2.$$

This restricts our search to the left quadrant of the total space $[0, 360°[^2$ available to (ϕ_2, ϕ_3), see Figure 3. Geometrically, this means that the three satellites m_1, m_2 and m_3 are always ordered in the direct trigonometric sense, that ϕ_2 is always between 0° and 180°, and that the satellite closest to m_1 is always m_2.

In this subspace, one can find analytically from the relations (12) all the angular separations between the satellites that correspond to a stationary configuration with all masses definite positive, see the grey shaded regions in Figure 3. There are three areas that contain an infinity of equilibrium points, each associated with a mass ratio m_3/m_1 and m_2/m_1 given by (12). These three areas are:

$$\begin{aligned} &S_1\colon\ 0 < \phi_2 < 60°, \quad 60° < \phi_3 < \phi_2 + 60°, \\ &S_2\colon\ 0 < \phi_2 < 60°, \quad 300° < \phi_3 < \min(\phi_2 + 300°, 360° - \phi_2), \\ &S_3\colon\ 60° < \phi_2 < 150°, \\ &\quad \max(180°, \phi_2 + 60°) < \phi_3 < \min(\phi_2 + 180°, 360° - \phi_2). \end{aligned}$$

As stated above, m_1 can moreover be assumed to be the most massive satellite. This restricts the equilibrium point (ϕ_2, ϕ_3) to be in one of the black regions of Figure 3, where all the mass ratios m_2/m_1 and m_3/m_1 in the]0, 1] interval are represented.

Since the assumption that m_1 is the most massive satellite can be made without loss of generality, it follows that the grey regions in Figure 3 can be reduced to the black regions, through an appropriate permutation in the indexes $i = 1, 2, 3$. The black regions thus concentrate all the possible co-orbital stationary configurations for $N = 3$ satellites, to within the approximation $m_i \ll 1$ for all $i = 1, \ldots, N$.

The boundaries between the grey and black regions are straight lines or oval-shaped curves where m_2 or m_3 is equal to m_1. The line $\phi_3 = \phi_2$ must be excluded because it corresponds to two zero masses m_2 and m_3 at the same point. The three lines $\phi_3 = \phi_2 + 60°$, $\phi_3 = \phi_2 + 180°$ and $\phi_3 = \phi_2 + 300°$ (not plotted in Figure 3) must be excluded as well because they correspond to ratios m_2/m_1 or m_3/m_1 going to infinity, with m_2 and m_3 separated by 60°, 180° or 300°, thus meaning that we are back to the problem of $N = 2$ co-orbital satellites only. The same is true for $\phi_2 = 60°$ (corresponding to $m_3 = 0$) and for $\phi_3 = 60°$ or 180° or 300° (corresponding to $m_2 = 0$).

The equations of the oval-shaped curves of Figure 3 are obtained numerically from Equation (12). The oval-shaped curves $m_2 = m_1$, $m_2 = m_3$ and $m_3 = m_1$ are given by $f'(\phi_3) + f'(\phi_3 - \phi_2) = 0$, $f'(\phi_2) + f'(\phi_3) = 0$ and $f'(\phi_2) + f'(\phi_3 - \phi_2) = 0$, respectively. All the lines or curves where any two of the masses are equal have been labeled accordingly in Figure 3.

There are three stationary configurations with equal masses. These configurations are already described in SY88 and referred to as types Ia, II and IIIa. They appear in Figure 3 with the same notation. One is when all three satellites are equally spaced by 120°, see label II in Figure 3. A second configuration is when the angular separation between two adjacent satellites is 47°.361. This configuration appears twice in the quadrant considered in Figure 3 (labels Ia). The third possible stationary configuration with equal masses occurs when two satellites are 138°.765 away from the third one (and thus at 82°.470 from each other). This configuration also appears twice in Figure 3, see labels IIIa.

3.2.3. *The case of four co-orbital satellites*

The stationarity now requires:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \tag{13}$$

meaning that the satellites have the same orbital radius, and

$$\begin{bmatrix} 0 & f'_{12} & f'_{13} & f'_{14} \\ -f'_{12} & 0 & f'_{23} & f'_{24} \\ -f'_{13} & -f'_{23} & 0 & f'_{34} \\ -f'_{14} & -f'_{24} & -f'_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

The 4×4 matrix is antisymmetric, the rank is even. Therefore, in order to have non-trivial solutions, one must first cancel the matrix determinant, that is:

$$f'_{14}f'_{23} + f'_{12}f'_{34} - f'_{13}f'_{24} = 0. \tag{15}$$

The actual determinant of the matrix is the square of the left-hand side of the equation above, commonly called the Pfaffian of the antisymmetric matrix. If (15) is satisfied, then the matrix rank is 2 (again, it is easy to verify that it cannot be zero). Therefore there is a two-parameter family of mass vectors for which the configuration is stationary: given for example m_1 and m_2, one deduce m_3 and m_4, solving Equation (14). In fact, in order to have non-zero positive solutions, the resolution of the linear system yields:

$$\operatorname{sgn}(f'_{34}) \times \left[f'_{14} + f'_{24}\frac{m_2}{m_1} \right] < 0, \qquad \operatorname{sgn}(f'_{34}) \times \left[f'_{13} + f'_{23}\frac{m_2}{m_1} \right] > 0, \tag{16}$$

where sgn denotes the sign.

Thus, for angles which are solutions of (15), and for a given m_1, there is an infinity of solutions that depend on the choice of m_2 that satisfies the relations (16). The same symmetry arguments as those quoted previously for three satellites enable us to search the stationary configurations in the following subspace: $\{(\phi_2, \phi_3) \mid 0 < \phi_2 < \phi_3 \leqslant 180°, \phi_3 < \phi_4 < 360°\}$.

The Equations (16) cannot be solved analytically for any arbitrary ratio m_2/m_1. Therefore, for $N \geqslant 4$, the possible stationary configurations can only be derived using numerical schemes, see Section 5.

4. Linear Stability of the Stationary Configurations

4.1. GENERAL RESULTS

Given a stationary configuration $\phi_s = (\phi_{1s}, \phi_{2s}, \ldots, \phi_{Ns})$ and $\xi_s = (\xi_{1s}, \xi_{2s}, \ldots, \xi_{Ns})$ which is a solution of (7) and (8), we classically expand the equations of motions (1) to first order in $\Delta\phi$ and $\Delta\xi$, where:

$$\Delta\phi \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_{1s} \\ \phi_2 - \phi_{2s} \\ \vdots \\ \phi_N - \phi_{Ns} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Delta\xi \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 - \xi_{1s} \\ \xi_2 - \xi_{2s} \\ \vdots \\ \xi_N - \xi_{Ns} \end{bmatrix}.$$

This yields:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2}I_N \\ -2A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{bmatrix} \equiv L_N \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{bmatrix}, \tag{17}$$

where:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j\neq 1} m_j f''_{1j} & -m_2 f''_{12} & \cdots & -m_N f''_{1N} \\ -m_1 f''_{12} & \sum_{j\neq 2} m_j f''_{2j} & \cdots & -m_N f''_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_1 f''_{1N} & -m_2 f''_{2N} & & \sum_{j\neq N} m_j f''_{Nj} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

I_N is the $N \times N$ identity matrix, and $f''_{ij} \equiv f''(\phi_i - \phi_j)$. Note that when writing the expression of A, we have used the fact that f'' is an even function of ϕ, that is, $f''_{ij} = f''_{ji}$.

The eigenvalues of the matrix L_N defined in (17) are the eigenfrequencies of the system near the stationary configuration (ξ_s, ϕ_s).

PROPOSITION 2. *Within the assumption that $m_i \geqslant 0$ for all $i = 1, \ldots, N$, the $2N$ eigenvalues $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2N}$ of the $2N \times 2N$ matrix L_N are either purely real or purely imaginary. Thus, a stationary configuration is linearly stable if all the eigenvalues are purely imaginary.*

Proof. Consider the eigenvector $(\Delta\phi_\lambda, \Delta\xi_\lambda)$ associated with an eigenvalue λ of L_N. From the structure of Equation (17), it is easy to see that $(\Delta\phi_\lambda, -\Delta\xi_\lambda)$ is also an eigenvector of L_N with eigenvalue $-\lambda$. Furthermore, it is easy to show that

$$A \cdot \Delta\phi_\lambda = \tfrac{1}{3}\lambda^2 \Delta\phi_\lambda.$$

Conversely, if $A \cdot \Delta\phi = \alpha\Delta\phi$ (α complex), then one can see that $(\Delta\phi, \Delta\xi = \mp\sqrt{4\alpha/3}\Delta\phi)$ are eigenvectors of L_N associated with the eigenvalues $\pm\sqrt{3\alpha}$.

Thus, searching for the $2N$ eigenvalues λ's of L_N is equivalent to searching for the N eigenvalues α's of A and then taking

$$\lambda = \pm\sqrt{3\alpha}. \tag{19}$$

Although A is *not* symmetric, its eigenvalues are real. This can be shown by considering the symmetric matrix S constructed by multiplying the first row of A by m_1, the second row by m_2, etc.:

$$S = \begin{bmatrix} \sum_{j\neq 1} m_1 m_j f''_{1j} & -m_1 m_2 f''_{12} & \cdots & -m_1 m_N f''_{1N} \\ -m_1 m_2 f''_{12} & \sum_{j\neq 2} m_2 m_j f''_{2j} & \cdots & -m_2 m_N f''_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -m_1 m_N f''_{1N} & -m_2 m_N f''_{2N} & \cdots & \sum_{j\neq N} m_j m_N f''_{1N} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

If $X_\alpha = (X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \ldots, X_{N\alpha})$ is an eigenvector of A with eigenvalue α, then

$$S \cdot X_\alpha = \alpha Y_\alpha,$$

where $Y_\alpha = (m_1 X_{1\alpha}, m_2 X_{2\alpha}, \ldots, m_N X_{N\alpha})$. Since S is real and symmetric, we have $S = \bar{S} = S^{\mathrm{T}}$, where the bar denotes the complex conjugate, and the superscript T denotes the transpose operator. From $S \cdot X_\alpha = \alpha Y_\alpha$, we get successively:

$$X_\alpha^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} = \alpha Y_\alpha^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{S} \cdot \bar{X}_\alpha = S \cdot \bar{X}_\alpha = S^{\mathrm{T}} \cdot \bar{X}_\alpha = \bar{\alpha} \bar{Y}_\alpha.$$

Multiplying both sides of the last equation by X_α^{T}, we obtain:

$$\alpha Y_\alpha^{\mathrm{T}} \bar{X}_\alpha = \bar{\alpha} X_\alpha^{\mathrm{T}} \bar{Y}_\alpha.$$

Since the m_i are non-negative, $X_\alpha^{\mathrm{T}} \bar{Y}_\alpha = Y_\alpha^{\mathrm{T}} \bar{X}_\alpha = m_1 |X_{1\alpha}|^2 + m_2 |X_{2\alpha}|^2 + \cdots + m_N |X_{N\alpha}|^2 \neq 0$, so that $\bar{\alpha} = \alpha$, showing that α is real. Therefore, $\lambda = \pm\sqrt{3\alpha}$ is either purely real or purely imaginary. □

Finally, we note that $\det(A) = 0$ since the columns of the matrix are not linearly independent: adding all the columns yields the N-dimensional zero vector. Thus, at least one of the eigenvalues of A (and at least two eigenvalues of L_N) is zero. Note that this is for the same reason that we have $\sum_i m_i \xi_i = 0$. This expresses the conservation of angular momentum commented after Equation (5). This conservation eventually stems from the invariance by rotation of the problem, as already noted by SY88. This double zero eigenvalue of L_N actually disappears if one lowers the dimension of the system by the change of variables where one of the satellites, for example, m_1, is considered as the origin of coordinates ($u_i = \xi_i - \xi_1$, $v_i = \phi_i - \phi_1$).

In summary, the characteristic polynomial $P(x)$ of the $2N \times 2N$ matrix L_N is an even polynomial of the form $P(x) = x^2 Q(x^2)$, where $Q(y)$ is a polynomial of degree $N-1$. As seen above, $yQ(y)$ is proportional to the characteristic polynomial of A, and all the roots α of Q are real. Consequently, from (19), the eigenvalues λ of L_N are either purely real or purely imaginary (or zero).

The condition of linear stability is thus that all the non-trivial eigenvalues λ's [that is, the roots of $Q(x^2) = 0$] are purely imaginary, that is, that all the roots of $Q(y) = 0$ are negative. This can easily be verified in the case of the lagrangian stationary points with $N = 2$ satellites, for which the eigenfrequencies associated with L_4 or L_5 are purely imaginary, $\lambda = \pm \mathrm{j}\sqrt{-3(m_1 + m_2) f''(\phi_s)} = \pm \mathrm{j}\sqrt{27(m_1 + m_2)/4}$, where $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ and $\phi_s = 60°$ or $300°$.

Notice in passing that for some specific stationary configurations, some of the roots of $Q(y) = 0$ may *also* be zero, independently of the zero values associated with the rotational invariance discussed above, see an example below for $N = 3$ satellites.

4.2. APPLICATION TO THE CASE OF THREE CO-ORBITAL SATELLITES

Besides the double eigenfrequency $\lambda = 0$, the other four non-trivial eigenfrequencies are given by:

$$\begin{aligned} Q(x^2) \;=\; & x^4 - [(m_1 + m_2) f''_{12} + (m_2 + m_3) f''_{23} + (m_3 + m_1) f''_{31}] x^2 + \\ & (m_1 + m_2 + m_3)[m_1 f''_{12} f''_{31} + m_2 f''_{23} f''_{12} + m_3 f''_{31} f''_{23}] = 0, \end{aligned}$$

where we can use $f''_{ij} = f''_{ji}$. The two real roots of $Q(y) = 0$ have the following sum and product:

$$s = (m_1 + m_2) f''_{12} + (m_2 + m_3) f''_{23} + (m_3 + m_1) f''_{31},$$
$$p = (m_1 + m_2 + m_3)[m_1 f''_{12} f''_{31} + m_2 f''_{23} f''_{12} + m_3 f''_{31} f''_{23}], \tag{21}$$

so that the linear stability (roots of $Q(x^2) = 0$ purely imaginary) of a given stationary configuration requires:

$$s < 0, \qquad p > 0. \tag{22}$$

The domains in the (ϕ_2, ϕ_3) plane where both conditions are fulfilled are plotted in Figure 4 as light grey areas. Practically, the only linearly stable stationary configurations with $N = 3$ satellites are those enclosed in the two triangular areas S_1 and

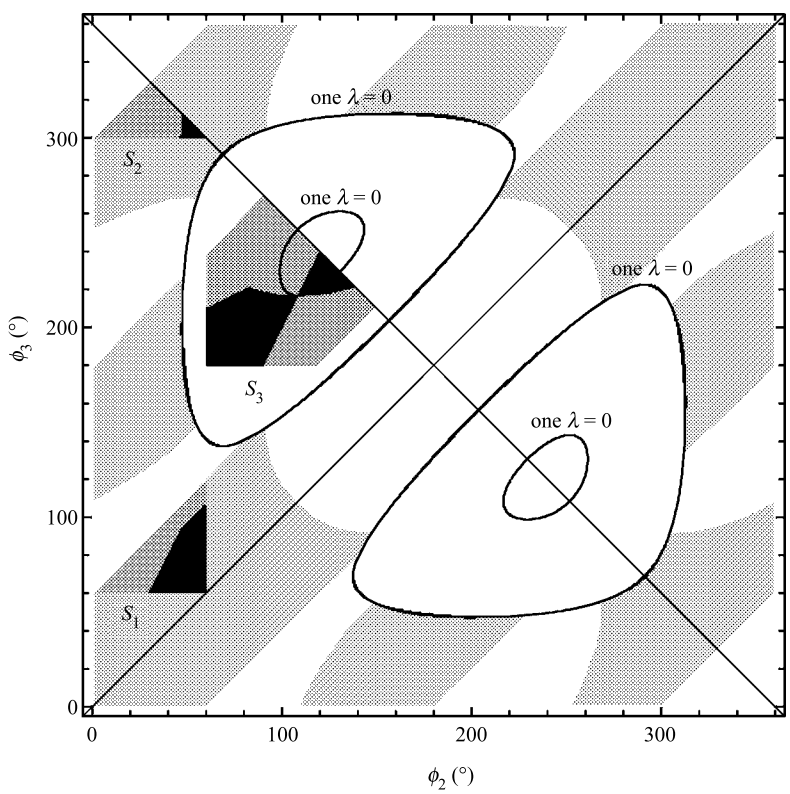

Figure 4. Stability of the stationary configurations for $N = 3$ satellites. The black and dark grey areas have the same meaning as in Figure 3, namely the only physically meaningful stationary configurations (all three masses positive), restricted to the left quadrant for clarity. The light grey areas correspond to the domains of linear stability, that is, where the eigenvalues of L_N are all purely imaginary. Thus only the stationary configurations in the two triangular areas S_1 and S_2 are linearly stable. The four closed curves are the sets of points where the product p (Eq. (21)) is zero, that is, where one of the non-trivial eigenfrequencies λ is zero, see text for details.

S_2 defined before and shown in Figures 3 and 4. They correspond to configurations where the less two massive satellites m_2 and m_3 are either positioned on each side of m_1, near the L_4 and L_5 points of m_1, or are grouped together near one of these two points, see examples in Figure 5.

The four closed curves in Figure 4 indicate the points where one of the roots of $Q(x^2) = 0$ is zero, that is, where

$$p = (m_1 + m_2 + m_3)[m_1 f''_{12} f''_{31} + m_2 f''_{23} f''_{12} + m_3 f''_{31} f''_{23}] = 0.$$

At those points, one of the non-trivial eigenfrequencies of L_N is zero, indicating that one of the satellites is at equilibrium at a singular point which suffers a transition between elliptic and hyperbolic topologies. At that point, the equilibrium is neutral, hence the zero eigenfrequency.

5. Numerical Search for Stable Stationary Configurations

Because the analytical resolution of Equation (9) is untractable for $N \geqslant 4$, a simple numerical scheme is useful for finding the possible linearly stable stationary configurations, given the masses $m_1, m_2, \ldots, m_N$.

The idea is to add in the equations of motion a non-conservative term so that the satellites will converge towards the linearly stable stationary configurations. Specifically, let us consider the perturbed equations of motions:

$$\dot{\phi}_i = -\frac{3}{2}\xi_i, \qquad \dot{\xi}_i = -2\sum_{j \neq i} m_j f'(\phi_i - \phi_j) - \nu \xi_i, \tag{23}$$

where ν is a positive real number. It is straightforward to see that near a (conservative) stationary point, the linearized equations of motions are:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\phi} \\ \Delta\dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} I_N \\ -2A & -\nu I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{bmatrix} \equiv L_{N,\nu} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\xi \end{bmatrix}, \tag{24}$$

and that the eigenvalues λ's of the new matrix $L_{N,\nu}$ are given by:

$$\lambda^2 + \nu\lambda = 3\alpha, \tag{25}$$

where the α's are the real eigenvalues of A. If α is positive, then the two solutions of (25) are real, with one of them positive. This shows that a linearly unstable configuration in the conservative case remains linearly unstable when introducing the non-conservative term $-\nu\xi$ in Equation (23).

Conversely, if α is negative, then the solutions of (25) are real or complex, but the real parts of these solutions are negative anyway, because $\nu > 0$. Thus a linearly stable configuration in the conservative case will locally be an attractor for the solutions of Equation (23).

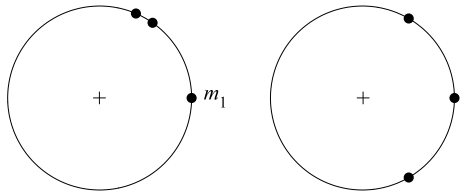

Figure 5. Stable stationary configurations for $N = 3$ co-orbital satellites with $m_2 = m_3 = 10^{-2}m_1$. The satellite m_1 is at $\phi_1 = 0$. To within the possible symmetries discussed in the text, there are exactly two linearly stable solutions in this case. From left to right, the angular separations of satellites 2 and 3 with respect to satellite 1 are: $(\phi_2, \phi_3) = (54°.84, 66°.75), (59°.82, 300°.18)$.

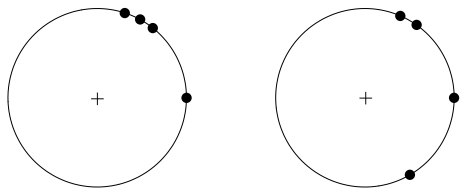

Figure 6. The same as for the previous figure, but with $N = 4$ co-orbital satellites with $m_2 = m_3 = m_4 = 10^{-2}m_1$. To within the possible symmetries, there are two linearly stable solutions in this case. From left to right, the angular separations of satellites 2–4 with respect to satellite 1 are: $(\phi_2, \phi_3, \phi_4) = (51°.46, 61°.29, 71°.91), (54°.67, 66°.56, 300°.35)$.

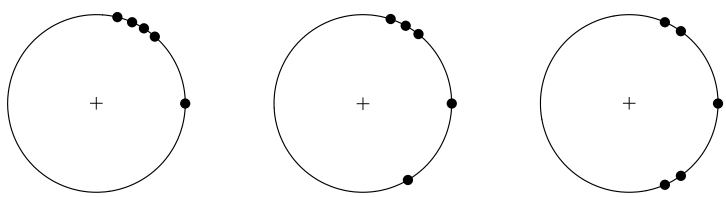

Figure 7. The same as for the previous figure, but with $N = 5$ co-orbital satellites with $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 10^{-2}m_1$. To within the possible symmetries, there are three linearly stable solutions in this case. From left to right, the angular separations of satellites 2–5 with respect to satellite 1 are: $(\phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5) = (48°.92, 57°.64, 66°.29, 76°.29)$, $(51°.31, 61°.11, 71°.71, 300°.52)$, $(54°.52, 66°.37, 293°.63, 305°.48)$.

Physically, the introduction of the term $-\nu\xi$ in Equation (23) brings energy to the system in the rotating frame of the co-orbital satellites. More precisely, this term increases the Jacobi constant (6) since:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2}\sum_i m_i \xi_i \dot{\xi}_i \ldots = \frac{3}{2}\nu \sum_i m_i \xi_i^2 \ldots > 0. \tag{26}$$

This forces the solution to converge towards a local maximum of J (with respect to small variations of ξ_i and ϕ_i). These local maxima actually correspond to the linearly stable configurations, a property demonstrated by Moeckel (1994).

Integrating numerically Equation (23) with a suitable value of ν, and using random initial coordinates with given mass ratios $0 < m_i/m_1 \leqslant 1$ ($i \neq 1$), we can find the stable stationary configurations.

Exploring various positive values of $m_1, m_2, \ldots, m_N$ then provides the domains of stable stationary points. We have checked that for the case of $N = 3$ satellites, we retrieve the areas found analytically and shown in Figure 3. We have also noticed that for N small but $N \geqslant 4$, the linearly stable stationary points correspond to configurations where the co-orbitals are either positioned near the L_4 and L_5 points of the most massive satellite, or are grouped near one of these two points.

For sake of illustration, we give here some typical cases of stable stationary configurations. In all Figures 5–7, the satellite m_1 is the most massive and is located at $\phi_1 = 0$ (the right-most position).

6. Conclusions

We have derived general results concerning the existence of stationary configurations for N co-orbital satellites with non-zero and small (but otherwise arbitrary) masses revolving around a massive primary.

The existence of stationary configurations depends on the parity of N. If N is odd, then for any arbitrary choice of longitudes for each satellite, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$, with $\phi_i \neq \phi_j$ when $i \neq j$, there always exists a set of masses (positive or negative) $m_1, m_2, \ldots, m_N$ for which the stationarity is achieved. However, because we require that $m_i > 0$ for all i, the physically acceptable solutions actually correspond to sub-domains of $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$. Example of such domains are given in the case of $N = 3$ satellites, see Figure 3. In general the solution $m_1, m_2, \ldots, m_N$ is a one-parameter family scaled, for instance, by m_1. It can be a three-parameter, five-parameter family, but only on a space of measure zero.

If N is even, then for a given angular configuration $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$, there is in general *no* non-trivial solution $m_1, m_2, \ldots, m_N$ for which the stationarity is achieved. When the $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ configuration permits the existence of a non-trivial solution (which happens when $\det(M_N) = 0$), then there is in general a two-parameter family of masses $m_1, m_2, \ldots, m_N$ which achieves the stationarity.

The linear stability of the stationary configurations has been investigated. The eigenfrequencies of the system near stationarity are either purely real or purely imaginary, or zero. These eigenfrequencies are the square roots of all the eigenvalues (which are real) of the matrix A defined in (18).

Our results apply to the limiting case where $m_i = \epsilon\mu_i$, $i = 1, \ldots, N$, where $\mu_i \in I\!R^+$ and $\epsilon \longrightarrow 0$. The more general problem where ϵ does not tend to zero is non-trivial and beyond the scope of this paper. Indeed, not all of the stationary configurations with $\epsilon \longrightarrow 0$ are limits of equilibria with ϵ not tending to zero. A family of relative equilibria x^ϵ converging, as $\epsilon \longrightarrow 0$, to a stationary configuration x of the $(1 + N)$ body problem exists only if x is a *non-degenerate* local minimum

of the potential $V = \sum_{i<j} \mu_i \mu_j [1 - f(\phi_i - \phi_j)]$ (Hessian of V positive semi-definite with nullity equal to one). Moreover, x^ϵ is linearly stable for ϵ sufficiently small if and only if x is a local maximum of f. These questions are discussed in Hall (1987) and Moeckel (1994).

We have not treated the global (non-linear) stability of the stationary configurations. This is well outside the scope of this paper. Note however that, within the frame of the restricted circular 3-body problem, the problem has been completely answered in the planar case, with the essential aid of KAM theory. Some progress has also been made in the spatial case: it has been shown for instance that L_4 and L_5 are *Nekhoroshev-stable* (namely stable over exponentially long times) for all but a few values of the reduced mass up to the Routh critical value $\mu \sim 0.0385209$ (Benettin et al., 1998).

The case $N = 3$ is treated completely in the frame of our approximations. Figures 3 and 4 give all the possible solutions with positive masses, and their linear stability.

Finally, we propose a numerical scheme (the integration of Eq. (23)) to find rapidly the possible linearly stable stationary configurations for a given set of masses $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Conversely, if an angular configuration $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ is given, the inversion of Equation (9) provides the corresponding solution $m_1, m_2, \ldots, m_N$. This is an easy task for modest values of N, using classical numerical schemes to search for the eigenvectors of the matrix M_N.

References

Albouy, A.: 1996, 'The symmetric central configurations of four equal masses', *Hamiltonian Dyn. Celest. Mech. Contemp. Math.* **198**, 131–135.

Albouy, A. and Llibre, J.: 2002, 'Spatial central configurations for the $1+4$ body problem'. In: *Celestial Mechanics* Evanston, IL, 1999. Contemporary Mathematics, Vol. 292, American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 1–16.

Benettin, G., Fassò, F. and Guzzo, M.: 1998, 'Nekhoroshev-stability of L_4 and L_5 in the spatial restricted 3-body problem', *Reg. Chaot. Dyn.* **3**, 56–72.

Hall, G. R.: 1987, 'Central configurations in the planar $1 + n$ body problem', Boston University preprint.

Maxwell, J. C.: 1859, 'On the stability of the motion of Saturn's rings'. In: S. G. Brush, C. W. F. Everitt and E. Garber (eds), *Maxwell on Saturn's Rings*, The MIT Press, pp. 69–158.

Moeckel, R.: 1994, 'Linear stability of relative equilibria with a dominant mass', *J. Dyn. Diff. Eq.* **6**(1), 35–51.

Roberts, G. E.: 1999, 'A continuum of relative equilibria in the 5-body problem', *Physica D* **127**(3–4), 141–145.

Roberts, G. E.: 2000, 'Linear stability in the $1+n$-gon relative equilibrium', *Hamiltonian Syst. Celest. Mech. World Scient. Monogr. Ser. Math.* **6**, 303–330.

Salo, H. and Yoder, C.F.: 1988, 'The dynamics of coorbital satellite systems', *Astron. Astrophys.* **205**, 309–327 (SY88).

Annexe D

Prometheus and Pandora : masses and orbital positions during the *Cassini* tour. Article accepté et à paraître dans *Icarus*.

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09
yicar7486
[DTD5] P.1 (1-11)
by:Jolanta p. 1

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
Icarus ●●● (●●●●) ●●● –●●●
ICARUS
www.elsevier.com/locate/icarus

Prometheus and Pandora: masses and orbital positions during the *Cassini* tour

Stéfan Renner [a,*], Bruno Sicardy [a], Richard G. French [b]

[a] *LESIA, Observatoire de Paris, Bâtiment 10, 5, place Jules Janssen, FR-92195 Meudon cedex, France*
[b] *Astronomy Department, Wellesley College, Wellesley, MA 02481, USA*

Received 7 June 2004; revised 30 August 2004

Abstract

Hubble Space Telescope (*HST*) images of Prometheus and Pandora show longitude discrepancies of about 20° with respect to the *Voyager* ephemerides, with an abrupt change in mean motion at the end of 2000 (French et al., 2003, Icarus 162, 143–170; French and McGhee, 2003, Bull. Am. Astron. Soc. 34, 06.07). These discrepancies are anti-correlated and arise from chaotic interactions between the two moons, occurring at interval of 6.2 yr, when their apses are anti-aligned (Goldreich and Rappaport, 2003a, Icarus 162, 391–399). This behavior is attributed to the overlap of four 121:118 apse-type mean motion resonances (Goldreich and Rappaport, 2003b, Icarus 166, 320–327). We study the Prometheus–Pandora system using a Radau-type integrator taking into account Saturn's oblateness up to and including terms in J_6, plus the effects of the major satellites. We first confirm the chaotic behavior of Prometheus and Pandora. By fitting the numerical integrations to the *HST* data (French et al., 2003, Icarus 162, 143–170; French and McGhee, 2003, Bull. Am. Astron. Soc. 34, 06.07), we derive the satellite masses. The resulting *GM* values (with their standard 3-σ errors) for Prometheus and Pandora are respectively $GM_{\mathrm{PR}} = (1.41^{+0.10}_{-0.25}) \times 10^{-2}$ and $GM_{\mathrm{PA}} = (1.03^{+0.10}_{-0.19}) \times 10^{-2}\ \mathrm{km}^3\,\mathrm{s}^{-2}$. Using the nominal shape of the two moons (Thomas, 1989, Icarus 77, 248–274), we derive Prometheus and Pandora's densities, $0.40^{+0.03}_{-0.07}$ and $0.49^{+0.05}_{-0.09}\ \mathrm{g\,cm}^{-3}$, respectively. Our numerical fits also enable us to constrain the time of the latest apse anti-alignment in 2000. Finally, using our fit, we predict the orbital positions of the two satellites during the *Cassini* tour, and provide a lower limit of the uncertainties due to chaos. These uncertainties amount to about 0.2° in mean longitude at the arrival of the *Cassini* spacecraft in July 2004, and to about 3° in 2008, at the end of the nominal tour.
© 2004 Published by Elsevier Inc.

Keywords: Satellites of Saturn; Celestial mechanics; Orbits; Chaos; Resonances

1. Introduction

Saturn's narrow F ring is flanked by two small moons, Prometheus and Pandora, discovered in *Voyager* images taken in 1980 and 1981. They were originally hailed as examples of shepherd satellites, according to the theory developed to account for the confinement of Uranus' rings (Goldreich and Tremaine, 1979). However, the details of the mechanism by which Prometheus and Pandora could confine the ring are poorly understood, because the dynamics of the F ring is much more complex (overlapping resonances, interactions or collisions with Prometheus, etc.) than its uranian counterparts. Nevertheless, the dynamical behavior of Prometheus and Pandora and their interactions with the F ring have been extensively investigated theoretically (Dermott, 1981; Showalter and Burns, 1982; Lissauer and Peale, 1986; Kolvoord et al., 1990; Murray and Giuliatti Winter, 1996; Murray et al., 1997; Namouni, 1998; Showalter et al., 1999a, 1999b; Giuliatti Winter et al., 2000; Poulet and Sicardy, 2001; Showalter, 2004).

Orbits for Prometheus and Pandora were fitted to *Voyager* data (Synnott et al., 1981, 1983) in the form of precessing ellipses. Mean motions were determined from images and precession rates were calculated to be consistent with the

* Corresponding author. Fax: +33-1-4507-7110.
E-mail address: stefan.renner@obspm.fr (S. Renner).

0019-1035/$ – see front matter © 2004 Published by Elsevier Inc.
doi:10.1016/j.icarus.2004.09.005

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.2 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 2

gravity field of the saturnian system (Nicholson and Porco, 1988; Campbell and Anderson, 1989).

Observations with the Hubble Space Telescope (*HST*) made during the 1995–1996 Sun and Earth ring plane crossings led to the discovery that Prometheus was lagging its predicted longitude based on the *Voyager* ephemeris by about 20° (Bosh and Rivkin, 1996; Nicholson et al., 1996). Subsequently, Pandora was found to lead the *Voyager* ephemeris prediction by a similar amount (McGhee, 2000). These discrepancies were confirmed by several authors (Murray et al., 2000; McGhee et al., 2001; French et al., 2003). In particular, French et al. (2003) derived sky-plane positions using archival *HST* data from 1994, together with unexamined ring plane crossing images, and a large series of targeted WFPC2 observations between 1996 and 2002. These positions were then compared to the predictions of revised and improved ephemerides for the two satellites based on an analysis of the full set of *Voyager* images (Evans, 2001). From December 1994 to December 2000, Prometheus and Pandora orbital longitude offsets were changing at rates of $-0.71°$ and $+0.44°\ \mathrm{yr}^{-1}$, respectively, relative to the new *Voyager* ephemerides. An additional oscillatory component due to the nearby 3:2 co-rotation resonance with Mimas was evident in the longitude of Pandora. Orbital elements for freely precessing equatorial orbits were determined from fits to the 1994–2000 observations. Moreover, a new twist in the meanderings of the two moons occurred around the end of 2000: the mean motions of Prometheus and Pandora changed suddenly by an additional $-0.77°$ and $+0.92°\ \mathrm{yr}^{-1}$, respectively (French et al., 2003).

The longitude discrepancies have comparable magnitude and opposite signs, suggesting direct gravitational interactions between the two satellites. Goldreich and Rappaport (2003a) confirmed that expectation and showed that the orbits were chaotic. Numerical integrations including Prometheus, Pandora and Saturn's gravitational oblateness yield a Lyapunov exponent of order $0.3\ \mathrm{yr}^{-1}$, for satellite masses based on a nominal density of $0.63\ \mathrm{g\,cm}^{-3}$, the value of Epimetheus' density (Nicholson et al., 1992). Chaotic interactions occur when the orbits come closest together, which happens at intervals of 6.2 yr when their apses are anti-aligned. At these times, sudden changes in mean motions appear in numerical integrations, showing that the changes in the mean motions of Prometheus and Pandora observed at the end of 2000 occurred around the time their apsidal lines were anti-aligned. The chaotic orbits of Prometheus and Pandora were subsequently shown to be due to the overlap of four apse-type 121:118 mean motion resonances (Goldreich and Rappaport, 2003b). A model with 1.5° of freedom was used to show that the Lyapunov exponent of $0.3\ \mathrm{yr}^{-1}$ arises because the critical argument of the dominant member of the resonant quartet makes approximately two separatrix crossings every 6.2 yr precessional cycle.

Numerical integrations including the effects of the eight major satellites of Saturn confirmed the chaotic orbits and the anti-correlation in the temporal variation of the mean longitudes of Prometheus and Pandora (Renner and Sicardy, 2003; Cooper and Murray, 2004). The effects of the nearby Mimas 3:2 resonances were clearly detectable. Cooper and Murray (2004) also showed that there was an evidence in the simulations that the co-orbitals Janus and Epimetheus have a role in the dynamical evolution of Prometheus and Pandora, via two independent sets of second-order resonances (17:15 and 21:19) due to Epimetheus, which contribute to the chaotic motions on a longer timescale. French et al. (2003) reached a similar conclusion about the possible role of the 17:15 and 21:19 resonances with the co-orbitals. Comparison of the results of Cooper and Murray (2004) with extrapolations of current published ephemerides suggested uncertainties on the order of 4° in the mean longitudes of Prometheus and Pandora during the *Cassini* tour.

In the present work, we first confirm the chaotic motions of Prometheus and Pandora (Section 3) using a numerical model that takes into account the effects of Saturn's oblateness (up to J_6) and the perturbations by the major satellites, including the co-orbital moons Janus and Epimetheus. This numerical model and the full initial conditions used are presented in Section 2. Then, by fitting the numerical integrations to the *HST* data, we derive the satellite masses (Section 4). Finally, in Section 5, we use our fit to provide the orbital positions of Prometheus and Pandora, together with the uncertainties due to chaos, during the *Cassini* tour.

2. Numerical model

2.1. Overview

To study the dynamical behavior of Prometheus and Pandora, we use the *Mercury* 6 integrator package (Chambers, 1999), with Everhart's *Radau* algorithm (Everhart, 1985), and an accuracy parameter $\delta = 10^{-12}$, the error per step the algorithm tolerates. Our model includes the following satellites (in increasing order of distance from the planet): Prometheus, Pandora, Epimetheus, Janus, Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea, Titan, and Iapetus. The effects of the planet's oblateness are taken into account up to and including terms in J_6. The full equations of motion are integrated in a Saturn-centered cartesian reference frame ($O\mathbf{XYZ}$), where ($O\mathbf{XY}$) is the equatorial plane of Saturn, $\mathbf{X}$ the ascending node of Saturn's equator on the mean Earth equator at $J2000$ (epoch JED 2451545.0 = 2000 January 1.5), $\mathbf{Z}$ the Saturn's pole direction at $J2000$, defined by the equatorial coordinates $\alpha_P = 40.5955°$ and $\delta_P = 83.53812°$ (French et al., 1993), and $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \times \mathbf{X}$.

2.2. Initial conditions

All integrations start at epoch JED 2449940.0 = 1995 August 10.5 (at Saturn), because the orbital elements of

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.3 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 3

Prometheus, Pandora, and the co-orbitals Janus and Epimetheus are given at this epoch (see below). We use the physical parameters of Saturn (mass, radius and oblateness up to and including J_6) given in Table 1, derived by Campbell and Anderson (1989) from the analysis of *Pioneer* and *Voyager* data.

The orbital elements of Prometheus and Pandora are derived by French et al. (2003), at epoch JED 2449940.0, and are reproduced in Table 2. These elements hold for freely precessing equatorial orbits from fits to *HST* observations for the period December 1, 1994 through December 6, 2000. In our simulations, the eccentricity and the mean longitude of Prometheus and Pandora are fixed at the nominal values given by French et al. (2003). As explained in Section 4, a wide range of initial values are used for the other elements (semi-major axis and longitude of periapsis, assuming equatorial orbits) to fit the satellite masses to the *HST* observations. In the case of Janus and Epimetheus, we use the orbital elements given in Table 2, derived by McGhee et al. (2001) at epoch JED 2449940.0. They also result from fits to *HST* observations for freely precessing equatorial orbits, during the 1995 ring plane crossings.

The longitudes of Prometheus, Pandora, Epimetheus and Janus are measured in the equatorial plane ($O\mathbf{XY}$) of Saturn, from the ascending node of Saturn's equator at epoch on the mean Earth equator at $J2000$; that is, from the unit $\mathbf{X}$ vector defined above. Before each numerical simulation, we perform transformations that convert the *geometric* orbital elements of these satellites into state vectors in the ($O\mathbf{XYZ}$) Saturn-centered reference frame. These transformations, not detailed here, arise from the epicyclic theory (Borderies and Longaretti, 1987; Longaretti and Borderies, 1991; Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994) and are accurate to second order in eccentricity. They are also used to compute, conversely, the geometric orbital elements of the satellites from the state vectors given by the numerical integrations. Such computations require the iterative calculation of some basic frequencies such as the mean motion n, the apsidal precession rate of the satellite $\dot{\tilde{\omega}}$ and, if we consider non-equatorial orbits, the precession rate of the ascending node $\dot{\Omega}$. Expressions for n and $\dot{\tilde{\omega}}$ are reproduced in Appendix A.

For the other satellites, we use the semi-analytic theory *TASS*1.6 (Vienne and Duriez, 1995) to derive the initial conditions at epoch JED 2449940.0. With *TASS* the output data is the position and the velocity of the body in a Saturn-centered cartesian reference frame ($O\mathbf{X'Y'Z'}$), where $\mathbf{X'}$ is the $J2000$ mean equinox and $\mathbf{Z'}$ the $J2000$ ecliptic pole. Therefore, to set all the satellites in the same reference frame ($O\mathbf{XYZ}$) described in the previous section, we apply the following three rotations:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_\Omega(\pi/2 - \delta_P) \times R_{P_T}(\pi/2 + \alpha_P) \times R_\gamma(-\epsilon) \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $R_V(\beta)$ denotes a rotation through a positive angle β about the V axis, ϵ is the Earth obliquity at $J2000$ ($\epsilon = 23°26'21.411''$, *IERS* value), α_P and δ_P are the equatorial coordinates of Saturn's $J2000$ pole direction (French et al., 1993), γ is the mean equinox at $J2000$, P_T is the Earth's pole at $J2000$, and Ω is the ascending node of Saturn's equator at epoch on the mean Earth equator at $J2000$.

Table 1
Physical parameters of Saturn, from Campbell and Anderson (1989)

R_S (km)	60330
GM_S (km^3 s^{-2})	37931272
J_2	16298×10^{-6}
J_4	-915×10^{-6}
J_6	103×10^{-6}

Table 2
Orbital elements for the inner satellites, at epoch JED 2449940.0

	Prometheus	Pandora	Janus	Epimetheus
Epoch (JED)	2449940.0	2449940.0	2449940.0	2449940.0
a (km)	139377.624	141713.1075	151461.99	151414.61
n (° day^{-1})	587.28747	572.78560	518.2383	518.4822
e	$(1.92 \pm 0.21) \times 10^{-3}$	$(4.5 \pm 0.3) \times 10^{-3}$	0.0066	0.0126
i (°)	0.0	0.0	0.0	0.0
Ω (°)	–	–	–	–
$\tilde{\omega}$ (°)	257 ± 10	359 ± 6	107.95	222.95
λ (°)	339.155	96.023	35.33	175.33

Prometheus and Pandora orbital elements result from fits to *HST* observations for the period December 1, 1994 through December 6, 2000 (French et al., 2003). Quoted errors (in periapsis and eccentricity) are three times the formal σ of the fit. The longitudes are measured from the ascending node of Saturn's equator at epoch on the mean Earth equator at $J2000$. Saturn's equatorial plane at epoch is defined relative to Saturn's $J2000$ pole direction $\alpha_P = 40.5955°$, $\delta_P = 83.53812°$ (French et al., 1993). The semi-major axis and mean motion are calculated self-consistently, using GM_S, J_2, and J_4 as given by Nicholson and Porco (1988). Orbits were assumed to be equatorial in the fits. Janus and Epimetheus orbital elements result from fits to *HST* observations, during the 1995 ring plane crossings, for freely precessing equatorial orbits (McGhee et al., 2001). The longitudes are also measured from the ascending node of Saturn's equator at epoch on the mean Earth equator at $J2000$, and the semi-major axis and mean motion are calculated self-consistently, using GM_S, J_2, and J_4 as given by Nicholson and Porco (1988). The eccentricity and the longitude of periapsis at epoch are computed using analytical ephemerides (Nicholson et al., 1992; Yoder et al., 1989).

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.4 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 4

Table 3
Satellite *GM* values. Values for the co-orbitals Janus and Epimetheus are from McGhee et al. (2001)

Satellite	GM (km^3 s^{-2})
Epimetheus	0.0357
Janus	0.1284
Mimas	2.4048
Enceladus	4.0586
Tethys	40.2071
Dione	74.4591
Rhea	163.8631
Titan	8927.5042
Iapetus	117.587

For the other satellites they are derived from the results of *TASS*1.6 (Vienne and Duriez, 1995, Table 10), using the GM_S value of Saturn from Campbell and Anderson (1989). Because the mass of Enceladus is not well determined with *TASS*1.6, we arbitrarily adopt the value from *TASS*1.5, which is closer to previous determinations (Harper and Taylor, 1993; Dourneau, 1987).

Finally, the adopted values for the masses of the satellites are summarized in Table 3.

3. Confirmation of chaos

The chaotic behavior of Prometheus and Pandora, due to the overlap of four 121:118 apse-type mean motion resonances, has been demonstrated in a model consisting of the two satellites orbiting Saturn, including the effects of the planet's oblateness (Goldreich and Rappaport, 2003a, 2003b). The interactions of Prometheus and Pandora with the other satellites of Saturn were neglected. However, Prometheus and Pandora are involved in resonances with Mimas and with the co-orbitals Janus and Epimetheus: Pandora is close to a 3:2 co-rotation resonance and a 3:2 Lindblad resonance with Mimas, and Prometheus and Pandora are periodically perturbed (about every four years) by the second-order resonances 17:15 and 21:19 with Epimetheus, respectively. Here we show, in parallel to a recent numerical study (Cooper and Murray, 2004), that the chaotic interactions between the two moons survive the addition of the major satellites of Saturn to the model.

We present a typical result of numerical integrations in Figs. 1 and 2. The integration time is 20 yr, starting at epoch JED 2449940.0. The numerical model is described in Section 2, with all the initial conditions given in Section 2.2. In particular, Prometheus and Pandora are initially on equatorial orbits with nominal eccentricities and mean longitudes given in Table 2. For this simulation, the remaining initial conditions for Prometheus and Pandora are given in Table 4. These values actually correspond to our best-fit solution (see Section 4.2).

In Fig. 1, we give Prometheus and Pandora's mean longitude offsets (in degrees) from the predictions provided by the *Voyager* ephemerides, versus time (in days), as in French et al. (2003). Sudden and anti-correlated changes in mean motion are clearly apparent around the times of apse anti-

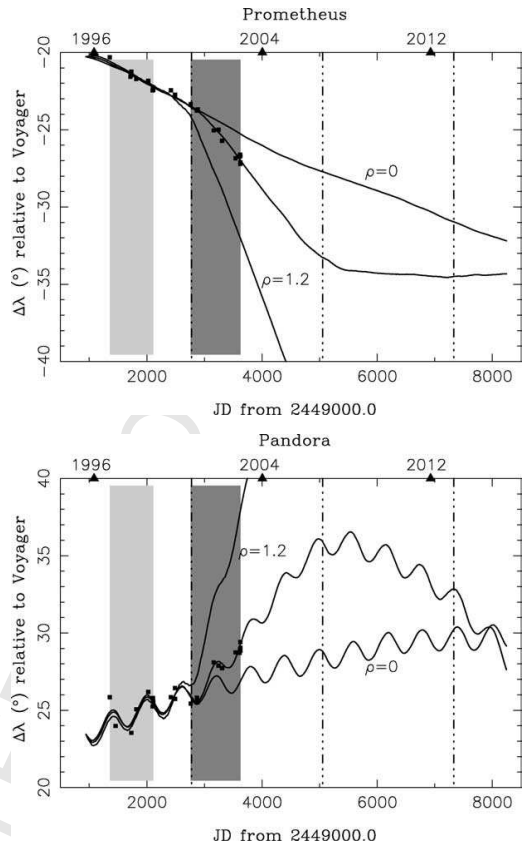

Fig. 1. Longitude offsets (°) from *Voyager* predictions for Prometheus (top) and Pandora (bottom) versus time (days). The vertical dashed-dotted lines denote the times of apse anti-alignment, computed using the apsidal precession rates of the two satellites given in French et al. (2003). The years 1996, 2004, and 2012 are labeled on the top horizontal axis. The integration start time is 1995 August 10.5 (epoch JED 2449940.0). The middle solid curves correspond to the best-fit solution (Table 4). Two additional solutions are indicated, corresponding to satellite densities $\rho = 0$ and 1.2 g cm^{-3}. The $\Delta\lambda$'s are the difference between the mean longitude λ provided by the simulation and the mean longitude λ_{VGR} predicted by the ephemeris based on *Voyager* images (Evans, 2001). For Prometheus, $\lambda_{VGR}(°) = \lambda^0_{VGR} + n_{VGR}(t - t_0) = 188.526 + 587.28942(t - 2444839.6682)$ and for Pandora, $\lambda_{VGR} = 82.13 + 572.78439(t - 2444839.6682)$ (French et al., 2003; Evans, 2001). Each square point represents a separate set of *HST* data for which a single longitude offset $\Delta\lambda$ was computed, from the observed sky-plane coordinates. These points are affected by the satellite eccentricities, because for them we compute a true longitude, not a mean longitude, to derive $\Delta\lambda$ (Section 4.2). The light and dark grey areas denote two separate subsets of data for which we perform fits: with the first one we fit Prometheus and Pandora's semi-major axes, and with the second one the satellite masses and the longitudes of periapsis.

alignment (indicated by the vertical dashed-dotted lines). We also indicate two additional solutions corresponding to satellite densities $\rho = 0$ and 1.2 g cm^{-3}, respectively, clearly showing the effects of masses on the longitudinal variations of the satellites. The $\Delta\lambda$'s are, both for Prometheus and Pandora, the difference between the mean longitude λ provided

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.5 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 5

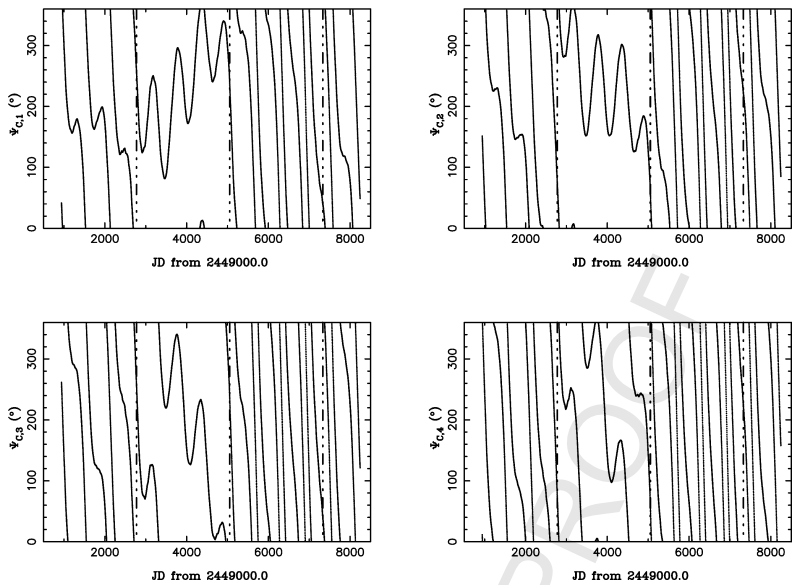

Fig. 2. 121:118 resonance arguments (°) versus time (days), for the best-fit solution given in Fig. 1. The four critical angles are: $\Psi_{C,1} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\bar{\omega}_{PA}$, $\Psi_{C,2} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 2\bar{\omega}_{PA} - \bar{\omega}_{PR}$, $\Psi_{C,3} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - \bar{\omega}_{PA} - 2\bar{\omega}_{PR}$, $\Psi_{C,4} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\bar{\omega}_{PR}$. The vertical dashed–dotted lines denote the times of apse anti-alignment. The integration start time is 1995 August 10.5.

by the simulation and the mean longitude λ_{VGR} predicted by the ephemeris based on *Voyager* images (Evans, 2001). Note that Pandora's *Voyager* ephemeris includes the effects of Mimas. Clearly apparent on the figure are also the wiggles in the mean longitude of Pandora, which are due to the nearby 3:2 co-rotation resonance with Mimas. Pandora's semi-major axis lies approximately 50 km inside this resonance, and also 180 km inside the 3:2 inner Lindblad resonance with Mimas. Some theoretical predictions on the effects of these two 3:2 resonances are given by French et al. (2003).

Note that Janus and Epimetheus have a dynamical influence on the orbits of Prometheus and Pandora (Cooper and Murray, 2004). These satellites move on horseshoe orbits. The consequence is a switch in their orbits every approximately 4 yr (Yoder et al., 1989; Nicholson et al., 1992). During their co-orbital motion, the radial deviations from their mean semi-major axis are ±10 km for Janus and ±40 km for Epimetheus. Prometheus and Pandora are involved in 17:15 and 21:19 second-order resonances with Epimetheus, respectively, especially when Epimetheus is in its inner position of the horseshoe orbit. When it is in its outer position, the 17:15 and 21:19 resonances move well outside the orbits of Prometheus and Pandora. Among the two triplets of critical arguments, the closest to libration are $17\lambda_{EP} - 15\lambda_{PR} - \bar{\omega}_{EP} - \bar{\omega}_{PR}$ for Prometheus, and $21\lambda_{EP} - 19\lambda_{PA} - 2\bar{\omega}_{PA}$ for Pandora, where the subscript EP denotes Epimetheus.

The four 121:118 resonant arguments between Prometheus and Pandora are displayed in Fig. 2. These critical angles are: $\Psi_{C,1} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\bar{\omega}_{PA}$, $\Psi_{C,2} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 2\bar{\omega}_{PA} - \bar{\omega}_{PR}$, $\Psi_{C,3} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - \bar{\omega}_{PA} - 2\bar{\omega}_{PR}$, and $\Psi_{C,4} = 121\lambda_{PA} - 118\lambda_{PR} - 3\bar{\omega}_{PR}$. The four resonances clearly overlap. Also evident are separatrix crossings around the times of the first two apse anti-alignments, where the critical angles go from a circulation motion to libration (or from libration to circulation motion). This confirms in a full integration the results of Goldreich and Rappaport (2003a) obtained in a simplified 2-satellite model.

4. Fits for satellite masses

4.1. Method

In order to derive Prometheus and Pandora's masses, we fit the numerical integrations to the *HST* data. More precisely, we want to find the initial orbital elements and the masses of Prometheus and Pandora, for which the residuals between the observations and the calculated satellite positions are minimal. This is a non-trivial problem of parameter estimation: the two satellites are a priori defined by seven parameters (six orbital elements plus the mass) and each initial orbital element has its own uncertainty. Moreover, Prometheus and Pandora are highly sensitive to initial conditions, because of chaos.

We use the *HST* data (French et al., 2003; French and McGhee, 2003) between 1995 August 10.5 (epoch JED 2449940.0) and 2002 December 17.5 (epoch JED 2452626.0). These data contain the sky-plane coordinates of Prometheus and Pandora (right ascension $\Delta\alpha\cos\delta$ and declination $\Delta\delta$ offsets from Saturn's center in $J2000$ co-

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.6 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 6

ordinates), together with the time (at Earth) of each image, the Earth–Saturn distance D, and 3 angles U, B, P which define the geometry of Saturn's rings and can be used to project the saturnicentric positions of the satellites into the plane of the sky. The angle U is the geocentric longitude of Saturn, measured in the plane of the rings eastward from its $J2000$ ascending node on the mean equator of the Earth (the saturnicentric longitude of the Earth, measured in the same way, is $U + 180°$). The angle B is the inclination of the ring plane, more precisely the saturnicentric latitude of the Earth referred to the plane of the rings, positive toward the north (when B is positive the visible surface of the rings is the northern surface). Finally, the angle P is the $J2000$ position angle of Saturn's pole, or the geocentric position angle of the northern semi-minor axis of the apparent ellipse of the rings, measured eastward from north.

To compare the simulations with the data, we compute a table of times at Saturn for which we have *HST* data, correcting for the light-time travel. Then at these times we store for Prometheus and Pandora the state vectors provided by the numerical integration in the Saturn-centered reference frame described in Section 2, with initial conditions given in Section 2.2. The position vectors are then used to compute our own sky-plane coordinates $\Delta\alpha\cos\delta$ and $\Delta\delta$. Let X, Y, Z be the components of the position vector of Prometheus or Pandora. Then the right ascension and declination offsets from Saturn's center, for equatorial orbits, are given by:

$$\begin{cases} \Delta\alpha\cos\delta = \big[-\cos P(X\sin U - Y\cos U) \\ \qquad\qquad + \sin B\sin P(X\cos U + Y\sin U)\big]/D, \\ \Delta\delta = \big[\sin P(X\sin U - Y\cos U) \\ \qquad\qquad + \sin B\cos P(X\cos U + Y\sin U)\big]/D. \end{cases} \tag{2}$$

If we consider non-equatorial motions, then the terms $Z\cos B\sin P$ and $Z\cos B\cos P$ must be added to $\Delta\alpha\cos\delta$ and $\Delta\delta$, respectively, into the brackets. Finally, we compute the rms residual between the observed sky-plane coordinates and those provided by the simulation. Comparing the astrometric measurements to orbital predictions by R. Jacobson (personal communication), French and McGhee (2003) showed that the typical astrometric accuracy of the *HST* measurements is about $0.02''$, equivalent to errors in the positions of the satellites to about 130 km. Thus, for a "perfect" numerical model, we would expect an rms error of about $0.02''$.

We suppose that Prometheus and Pandora move on equatorial orbits. Based on the reanalysis of the full set of *Voyager* observations, Evans (2001) find inclinations for Prometheus and Pandora of $0.03° \pm 0.005°$ and $0.054° \pm 0.007°$, respectively. These inclinations correspond to maximum excursions from the equatorial plane of 73 and 134 km, comparable to the *HST* measurement accuracy. The small inclinations of the two satellites are thus neglected in this work, and also in French et al. (2003) because they are at the edge of detectability in the data. On the other hand, because the mean longitudes are well constrained by the observations, they are initially fixed at the nominal values given in Table 2. Fits of the satellite eccentricities to subsets of *HST* data yield similar values to the solutions of French et al. (2003), and the residuals are not very sensitive to these eccentricity values (see Section 4.2). Moreover, the changes in eccentricity associated with the interactions of Prometheus and Pandora are very small in comparison to the mean eccentricities (Goldreich and Rappaport, 2003a). Therefore, the eccentricities are also fixed at the nominal values given in Table 2. Consequences of this assumption on our mass determinations are discussed in Section 4.2.

Thus, the adjustment of the numerical integrations to the *HST* data now depends only on the initial semi-major axes and periapsis longitudes. In fact, the key parameters are only the initial semi-major axes and the initial difference in longitude of periapsis $\Delta\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_{PR} - \bar{\omega}_{PA}\ [2\pi]$, the only parameter that provides the time of apse anti-alignment. The motion of Prometheus and Pandora during the period of the *HST* data can be split into two parts: a period of regular motion, far from any apse anti-alignment, for which the orbits are essentially precessing keplerian ellipses, and a period of chaotic motion, around the time of apse anti-alignment. Indeed, we do not detect in our simulations significant variations in longitude far from the times of apse anti-alignments (see Figs. 1 and 4). The regular part of the data is sensitive to the initial semi-major axes, and the chaotic part to the masses and to the initial difference in longitude of periapsis, $\Delta\bar{\omega}_0$. To derive the satellite masses, we therefore perform two consecutive fits on different subsets of data. First we determine the initial semi-major axes that minimize the rms residuals during the period of regular motion, and then we fit the masses and the initial difference in longitude of periapsis on the chaotic part of the *HST* data.

The fit of the simulations to the regular part of the *HST* data (that is, the adjustment of the initial semi-major axes) does not contain any information on the satellite masses. Indeed, given satellite masses, one can always find initial semi-major axes that fit this part of the data quite well. More precisely, the initial semi-major axis of one of the two satellites depends linearly (at least at lowest order, see Eqs. (3)) on the mass of the other satellite: suppose that Prometheus and Pandora move on a given orbit, and let us increase the mass of Prometheus. This creates an additional acceleration to Pandora that tends to decrease its radius, Prometheus being inside the orbit of Pandora. Therefore, the initial semi-major axis of Pandora must be slightly increased in order the orbit of Pandora to remain unchanged. In the same manner, because Pandora evolves outside the orbit of Prometheus, the initial semi-major axis of Prometheus must be decreased if the mass of Pandora is increased. After this first step, we can analytically derive the appropriate initial semi-major axes, given the satellite masses, to fit correctly the regular part of the *HST* data.

The regular and chaotic part of the data used to fit the remaining orbital elements (semi-major axes and periapsis longitudes) and the masses are indicated in Fig. 1 by the light and dark grey areas, respectively. The first period is

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.7 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 7

between 1996 September 30 (epoch JED 2450356.5) and 1998 October 24 (epoch JED 245110.5), which is far from any apse anti-alignment, the second is between 2000 August 4 (epoch JED 2451760.5) and 2002 December 17.5 (epoch JED 2452626.0), which contain the anti-correlated bends observed in the longitude profiles of Prometheus and Pandora. Note that with our simulations, it is useless to consider a much greater time interval to fit the satellite masses, because the integration start time is 1995 August 10.5 and the Lyapunov time of the system is only about three years. For information, the number of data points is 49 and 34 for Prometheus and Pandora, respectively, during the regular motion period, and 97 and 94, respectively, during the chaotic period.

4.2. Results

For each simulation we compute a rms error, which is the average of Prometheus and Pandora's rms residuals. By fitting the numerical integrations to the regular part of the *HST* data (light grey area of Fig. 1), we have derived empirically the following relations between the initial semi-major axes (km) and the satellite GM values ($\mathrm{km^3\,s^{-2}}$), for which the rms error is minimal:

$$\begin{cases} a_{\mathrm{PR}} = 139377.5 - 5.96 GM_{\mathrm{PA}} = 139377.5 - 0.125\rho_{\mathrm{PA}}, \\ a_{\mathrm{PA}} = 141714.18 + 7.11 GM_{\mathrm{PR}} = 141714.18 + 0.25\rho_{\mathrm{PR}}. \end{cases} \tag{3}$$

As noted in the previous section, these relations are linear. Using ellipsoidal models, Thomas (1989) derived the following satellite radii: 74, 50, and 34 km for Prometheus, and 55, 44, and 31 km for Pandora. We have used these nominal shapes to write the relations in Eqs. (3) using the densities ρ ($\mathrm{g\,cm^{-3}}$). The longitudes of periapsis were fixed at the nominal values of Table 2, yielding an initial difference in longitude of periapsis $\Delta\bar{\omega}_0 = 258°$. The relation for a_{PR} (respectively a_{PA}) was derived supposing $M_{\mathrm{PR}} = 0$ (respectively $M_{\mathrm{PA}} = 0$), and would be approximately the same for $M_{\mathrm{PR}} \neq 0$ (respectively $M_{\mathrm{PA}} \neq 0$). Typically, using these relations, the rms error is about 0.030″, with comparable individual residuals for Prometheus and Pandora.

The correction terms in Eqs. (3) are small: 150 and 300 m at most for Prometheus and Pandora, respectively, for a density $\rho = 1.2\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$. However, the rms residuals are very sensitive to the initial semi-major axes when fitting the regular part of the data. Let us suppose that $M_{\mathrm{PR}} = 0$. For a given mass of Pandora M_{PA}, the rms residual for Prometheus, as a function of its initial semi-major axis, is a parabolic-shaped curve, with a minimal value ($\simeq 0.03''$) for a semi-major axis $a_{\mathrm{PR}}^{\min}$ given by the linear relation in Eqs. (3). A difference of only about ±50–80 m from $a_{\mathrm{PR}}^{\min}$, depending on the value of Pandora's density, yields a rms error of about 0.08″, that is 4 times the astrometric accuracy of the *HST* measurements. This is because a small change in semi-major axis translates into large longitude offsets over the years.

Then we performed fits to the chaotic part of the data (dark grey area of Fig. 1), to derive the satellite masses and the longitudes of periapsis. We have considered values of $\Delta\bar{\omega}_0$ in the range $242° \leqslant \Delta\bar{\omega}_0 \leqslant 274°$, to be consistent with the uncertainties of Prometheus and Pandora's periapse longitudes derived in French et al. (2003), see Table 2. We used a step of one degree, which corresponds to a difference of about 6.33 days between the times of two apse anti-alignments, using apsidal precession rates given by French et al. (2003). The interval of masses for these simulations was: $0\ \mathrm{km^3\,s^{-2}} \leqslant GM_{\mathrm{PR}} \leqslant 4.22 \times 10^{-2}\ \mathrm{km^3\,s^{-2}}$ and $0\ \mathrm{km^3\,s^{-2}} \leqslant GM_{\mathrm{PA}} \leqslant 2.52 \times 10^{-2}\ \mathrm{km^3\,s^{-2}}$, which is equivalent to densities ρ_{PR} and ρ_{PA} between 0 and 1.2 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$, using the nominal volumes of Prometheus and Pandora given by Thomas (1989).

The first result is that all the solutions for which the rms error is typically $\lesssim 0.1''$ are such that $242° \leqslant \Delta\bar{\omega}_0 \leqslant 251°$. Our numerical fits thus provide a tighter constraint on the time of the latest apse anti-alignment, which occurred approximately between 2000 August 11 (epoch JED 2451767.5) and 2000 October 8 (epoch JED 2451825.5), using the apsidal precession rates of Prometheus and Pandora given by French et al. (2003).

The satellite masses we derived are given in Table 4. The rms error of this best-fit solution is $\mathrm{rms}_{\min} = 0.030''$, with comparable individual residuals for Prometheus and Pandora. This is equivalent to a mean error in the position of the satellites to about 190 km. Table 4 also contains for the best-fit solution the initial semi-major axes, resulting from Eqs. (3), and the initial periapse longitudes (corresponding to a difference $\Delta\bar{\omega}_0 = 250°$). Uncertainties in the satellite masses in Table 4 are the standard 3-σ errors. We have used constant χ^2 boundaries to define a 3-σ confidence level around the best-fit solution. This region is defined by $\mathrm{rms}^2 \leqslant \mathrm{rms}_{\min}^2(1 + \Delta\chi^2/N)$, where N is the number of data points, within which the rms increases by no more than a set amount $\Delta\chi^2$. For a 3-σ error, $\Delta\chi^2 = 14.2$ and $\mathrm{rms} \leqslant 0.033''$, this problem having three degrees of freedom M_{PR}, M_{PA}, and $\Delta\bar{\omega}_0$ (Press et al., 1986). Prometheus

Table 4
Prometheus and Pandora masses, together with the corresponding GM values and densities

	Prometheus	Pandora
M ($10^{17} \times$ kg)	$2.11^{+0.16}_{-0.37}\,[^{+0.79}_{-0.53}]$	$1.54^{+0.16}_{-0.28}\,[^{+0.50}_{-0.36}]$
GM ($10^{-2} \times \mathrm{km^3\,s^{-2}}$)	$1.41^{+0.10}_{-0.25}$	$1.03^{+0.10}_{-0.19}$
ρ ($\mathrm{g\,cm^{-3}}$)	$0.40^{+0.03}_{-0.07}\,[^{+0.15}_{-0.10}]$	$0.49^{+0.05}_{-0.09}\,[^{+0.16}_{-0.12}]$
a (km)	139377.43875	141714.28
$\bar{\omega}$ (°)	249.0	359.0

The quoted uncertainties are the standard 3-σ errors. Small systematic effects due to the satellite eccentricities increase these 3-σ uncertainties to values given in the brackets (see text). The densities are derived using the nominal volumes given by Thomas (1989), and appear as black points in the map of rms residuals between the observations and the simulations (Fig. 3). Uncertainties in density arise only from those in M, because errors associated with the satellite volumes are not included. Also indicated are the initial semi-major axes and periapse longitudes for the best-fit solution (the eccentricities and the mean longitudes are the nominal values of Table 2).

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.8 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 8

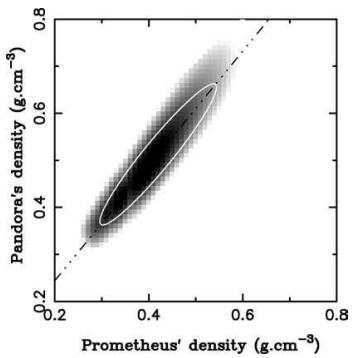

Fig. 3. Map of rms residuals between the observations and the numerical integrations, for given satellite densities (see text). The grey scale is such that white regions are for rms $\geqslant 0.05''$ and black regions are for rms $\leqslant 0.033''$, with a linear grey scale in between. The black area is almost an ellipse and corresponds to a 3-σ confidence level. The 3-σ errors extend to the white ellipse if we take into account small systematic effects due to the satellite eccentricities (see text). We have fitted the satellite masses (with eccentricities fixed at the nominal values of Table 2) and used the nominal volumes of Thomas (1989) to convert them into densities. Each point has its own initial orbital elements such that the rms error is minimal, given values of (ρ_{PR}, ρ_{PA}). Results are summarized in Table 4. The best fitting region is close to and parallel to the line $\rho_{PA}/\rho_{PR} = 1.22$, indicated by the dashed-dotted line, as a consequence of the conservation of angular momentum between the two satellites during the chaotic interactions (see text).

and Pandora densities given in Table 4 are computed using the nominal shape of the satellites (Thomas, 1989). Our results are compatible with the densities derived from the density waves excited in Saturn's rings by the two satellites: $\rho_{PR} = 0.27^{+0.16}_{-0.14}$, $\rho_{PA} = 0.42^{+0.28}_{-0.24}$ (Rosen et al., 1991). A map of the rms residuals for given satellite densities is also given in Fig. 3. The motion of each pair of masses was integrated several times, depending on the initial difference in longitude of periapsis, but we plot only the point for which the rms is minimal, using the nominal shape of the two moons (Thomas, 1989). There is a clear correlation in the masses (or the densities) we derive. Pandora's mass depends linearly on Prometheus' mass. This is a consequence of the conservation of angular momentum between Prometheus and Pandora during the chaotic interactions (see (15), (22), (23) of Goldreich and Rappaport, 2003b). The conservation of the angular momentum yields:

$$\frac{\Delta a_{PR}}{\Delta a_{PA}} = -\frac{M_{PA}}{M_{PR}}\frac{a_{PR}^2}{a_{PA}^2}. \tag{4}$$

From French et al. (2003), $\Delta a_{PR} = +0.33$ km and $\Delta a_{PA} = -0.42$ km between 2000 and 2002, implying a mass ratio $M_{PR}/M_{PA} = 1.23$. The satellite masses we derived yield a comparable value $M_{PR}/M_{PA} = 1.37$, consistent with the previous value to within the uncertainties in the mass ratio. Using the nominal volumes of Thomas (1989), the density ratio is $\rho_{PA}/\rho_{PR} = 1.22$, indicated by the dashed-dotted line in Fig. 3. Note that using the satellite masses in Table 4 and the nominal volumes determined by Stooke (1993) or by Gozdziewski and Maciejewski (1995), Prometheus' density is modified: $\rho_{PR} = 0.54^{+0.04}_{-0.09}$. The density of Pandora seems to be better constrained than that of Prometheus, because the volumes determined by Thomas (1989), Stooke (1993), and Gozdziewski and Maciejewski (1995) for this satellite are quite the same. Future images provided by the *Cassini* spacecraft will help to constrain the shapes of Saturn's satellites. The masses of Prometheus and Pandora will also be improved, because the next apse anti-alignment between the two satellites ($\sim$ 2006) will be seen by *Cassini*.

The longitude profiles of the best-fit solution (Table 4) are displayed in Fig. 1. Also indicated on the figure are two other solutions corresponding to satellite densities $\rho = 0$ and 1.2 g cm^{-3}, respectively, for which the semi-major axes satisfy Eqs. (3) and the other initial orbital elements are the nominal values of Table 2. For illustration, we display the longitude offsets from the *Voyager* predictions, computed from the *HST* data sky-plane coordinates. They appear as small square points on the figure. However, these points are affected by the eccentricity of the two satellites, because we compute a true longitude, not a mean longitude, to derive the observed longitude lags. Indeed, we first compute the cartesian coordinates of the satellite in the saturnicentric reference frame (O**XYZ**) described in Section 2. Because we consider equatorial orbits, we have:

$$\begin{cases} X = D\big[-(\Delta\alpha\cos\delta\cos P - \Delta\delta\sin P)\sin U \\ \qquad + (\Delta\alpha\cos\delta\sin P + \Delta\delta\cos P)\cos U/\sin B\big], \\ Y = D\big[(\Delta\alpha\cos\delta\cos P - \Delta\delta\sin P)\cos U \\ \qquad + (\Delta\alpha\cos\delta\sin P + \Delta\delta\cos P)\sin U/\sin B\big]. \end{cases} \tag{5}$$

Then we convert X, Y into the radius r and the true longitude L of the satellite, we subtract from this longitude the mean longitude provided by the *Voyager* ephemeris (Evans, 2001) and we plot the mean value of the longitude offsets that correspond to the same *HST* visit, each set of observations typically including 5 closely-spaced measurements all taken at a single *HST* visit.

The rms error of the best-fit solution (0.030″) is slightly larger than the astrometric accuracy of the *HST* measurements ($\simeq 0.02''$). Therefore, either some systematic errors persist in the model, or the astrometric accuracy of the *HST* data is underestimated. Systematic errors could arise from various causes: inclinations of Prometheus and Pandora, different eccentricities from the assumed initial values, mass of the F ring, or highly sensitive effects of resonances with satellites, in particular Janus and Epimetheus, not properly taken into account in the initial conditions. However, we ran integrations applying small inclinations to Prometheus and Pandora, for various longitudes of ascending node, and this did not improve the rms residuals. On the other hand, we have fitted the eccentricities of Prometheus and Pandora to the non-chaotic region of data, with initial semi-major axes satisfying Eqs. (3) and for various initial longitudes of periapsis (consistent with the uncertainties given in Table 2). We obtained similar eccentricity values to the solutions of French et al. (2003). The residuals are not very sensitive to

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.9 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 9

Table 5
Predictions and uncertainties, during the *Cassini* tour, in the longitude offsets from the *Voyager* ephemeris

Date (0h UT)	$\Delta\lambda_{PR}$ (°)	$\Delta\lambda_{PA}$ (°)
2004 July 1	$-29.74^{+0.16}_{-0.14}$	$31.97^{+0.16}_{-0.19}$
2008 July 1	$-36.27^{+2.36}_{-2.77}$	$38.79^{+3.92}_{-3.04}$

The $\Delta\lambda$'s are the difference between the mean longitude λ provided by the simulation and the mean longitude λ_{VGR} predicted by the ephemeris based on *Voyager* images (French et al., 2003; Evans, 2001). At the times considered, we compute the mean value of the longitude offsets and the uncertainties for the solutions given in Fig. 4.

this parameter, at least for values consistent with the uncertainties given in Table 2. Fits of the initial semi-major axes to the regular part of data with different initial eccentricity values yield also similar relations to Eqs. (3), with comparable residuals of about 0.03″. Finally, we have also fitted the satellite masses and the initial longitudes of periapsis to the chaotic part of data using different initial eccentricity values. We have considered four extreme values of (e_{PR}, e_{PA}), consistent with the uncertainties given in Table 2: $(e_{PR}, e_{PA}) = (0.00171, 0.0042)$, $(0.00171, 0.0048)$, $(0.00213, 0.0042)$, and $(0.00213, 0.0048)$. The satellite masses are not significantly modified and the rms residuals are not improved. However, taking into account this small systematic effect enables us to estimate the increase of the uncertainties on the satellite masses we have determined. They are given into brackets in Table 4, and this corresponds to density values within the white ellipse in Fig. 3. Note that the forthcoming *Cassini* observations will help to constrain better the eccentricities of Prometheus and Pandora, and thus to reduce the uncertainties on the derived masses.

5. Orbital positions during the *Cassini* tour

Using our fit, we predict the orbital positions of the two satellites during the *Cassini* tour. We ran about 40 simulations with various initial conditions that fit the *HST* data quite well. The initial conditions used are in fact the best-fit solutions indicated by the black ellipse in Fig. 3, with rms errors $\leqslant 0.033''$. The results are displayed in Fig. 4. We also performed backward integrations, from the integration start time JED 2449940.0, to show that the longitude profiles are highly sensitive to initial conditions, and how the different solutions are distributed around the *Voyager* origin. The satellite masses cannot be constrained by the *Voyager* measurements. This results from the value of the Lyapunov time of about 3 yr. There are about 5 Lyapunov times between the integration start time and the *Voyager* origin. These simulations allow us to provide a lower limit of the uncertainties, due to chaos, in the positions of the satellites. Both for Prometheus and Pandora, these uncertainties amount to about 0.2° in mean longitude at the arrival of *Cassini* in July 2004, and to about 3° in 2008 (Table 5).

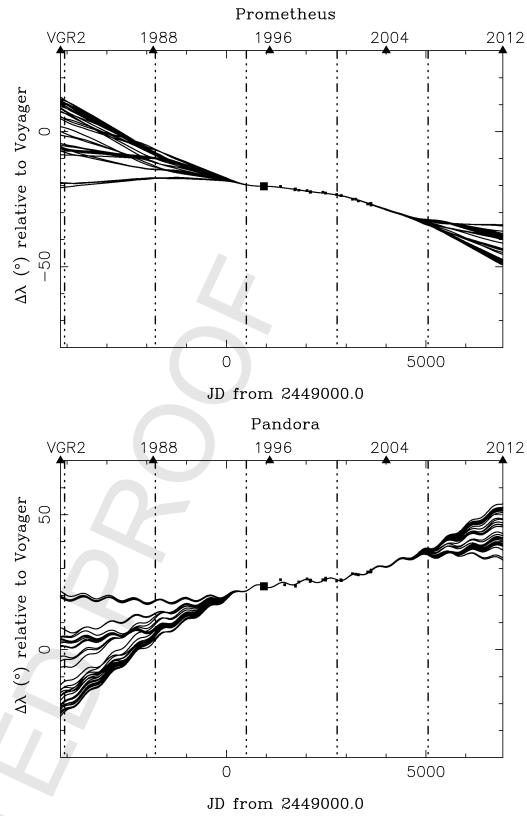

Fig. 4. Longitude offsets (degrees) from *Voyager* predictions for Prometheus (top) and Pandora (bottom) versus time (days). We ran about 40 simulations corresponding to the best-fit solutions (with rms $\leqslant 0.033''$) given in Fig. 3. The integration start time is 1995 August 10.5, indicated by the large square point. The vertical dashed-dotted lines denote the times of apse anti-alignment, computed using the apsidal precession rates of the two satellites given in French et al. (2003). The years 1988, 1996, 2004, 2012, and the *Voyager 2* origin (epoch JED 2444839.6682 ≃ 1981 August 23) are labeled on the top horizontal axis. Backward integrations show how the solutions are distributed around the *Voyager* origin, as a consequence of chaos. Each small square point represents a separate set of *HST* data for which a single longitude offset $\Delta\lambda$ was computed from the observed sky-plane coordinates (see Fig. 1).

6. Conclusions

The recent *HST* observations enable us to constrain Prometheus and Pandora's densities, and also to give uncertainties on the positions of the satellites between 2004 and 2008. This is useful for future *Cassini* observations. Our results suggest that these moons are underdense. The residuals are slightly larger than the astrometric accuracy, suggesting that small systematic errors are still present in the model. Perhaps taking into account the effects of the F ring could improve the residuals, but this is difficult because we know little about the F ring mass. A more general study that includes fits to available *HST* observations of the co-orbitals Janus and Epimetheus should also be investigated.

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.10 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 10

Nevertheless, these low values for the densities raises the intriguing question of the origin of Prometheus and Pandora. Are Prometheus and Pandora the result of the accretion of ring material just outside the Roche zone of the planet? Did they form inside this region and migrate outward? Or do they result from the destruction of a former satellite that got close to the Roche zone? Given the satellite density values, the latter hypothesis seems to be less likely. Another interesting problem is the long-term dynamical evolution of the system. The new values for the masses and the improved orbits should allow a reexamination of the effect of the torques exerted on Prometheus and Pandora by Saturn's main rings, and help to constrain the lifetime of the system. *Cassini* observations during the upcoming four years will surely help to answer some of these questions.

Acknowledgments

This work was supported in part by the NASA Planetary Geology and Geophysics Program (RGF). We are grateful to Luke Dones and Nicole J. Rappaport for a careful reading of the manuscript, and for making valuable suggestions.

Appendix A. Expressions for n and $\dot{\bar{\omega}}$

Here we give expressions for the apsidal precession rate and the mean motion up to and including terms in J_6. The orbital elements are *geometric* elements rather than classical osculating elements. These expressions are accurate to second order in eccentricity, and apply only for a test particle around an oblate planet (Borderies and Longaretti, 1987; Longaretti and Borderies, 1991; Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994). Secular precession terms due to the major satellites are not included, because we are dealing with the short-term dynamical behavior of Prometheus and Pandora. These expressions are used to compute, iteratively, the geometric elements of Prometheus or Pandora from the state vectors in the numerical integrations.

$$n = \left(\frac{GM_S}{a^3}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R_S}{a}\right)^2 - \frac{15}{16}J_4\left(\frac{R_S}{a}\right)^4 + \frac{35}{32}J_6\left(\frac{R_S}{a}\right)^6 - \frac{9}{32}J_2^2\left(\frac{R_S}{a}\right)^4 + \frac{45}{64}J_2J_4\left(\frac{R_S}{a}\right)^6 + \frac{27}{128}J_2^3\left(\frac{R_S}{a}\right)^6 + 3J_2e^2\left(\frac{R_S}{a}\right)^2\right], \tag{A.1}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \left(\frac{GM_S}{a^3}\right)^{1/2}\left[\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_S}{a}\right)^2 - \frac{15}{4}J_4\left(\frac{R_S}{a}\right)^4 + \frac{105}{16}J_6\left(\frac{R_S}{a}\right)^6 - \frac{45}{32}J_2J_4\left(\frac{R_S}{a}\right)^6 + \frac{27}{64}J_2^3\left(\frac{R_S}{a}\right)^6 + 3J_2e^2\left(\frac{R_S}{a}\right)^2\right]. \tag{A.2}$$

References

Bosh, A.S., Rivkin, A.S., 1996. Observations of Saturn's inner satellites during the May 1995 ring-plane crossing. Science 272, 518–521.
Borderies, N., Longaretti, P.-Y., 1987. Description and behavior of streamlines in planetary rings. Icarus 72, 593–603.
Borderies-Rappaport, N., Longaretti, P.-Y., 1994. Test particle motion around an oblate planet. Icarus 107, 129–141.
Campbell, J.K., Anderson, J.D., 1989. Gravity field of the saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data. Astron. J. 97, 1485–1495.
Chambers, J.E., 1999. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. Mon. Not. R. Astron. Soc. 304, 793–799.
Cooper, N.J., Murray, C.D., 2004. Dynamical influences on the orbits of Prometheus and Pandora. Astron. J. 127, 1204–1217.
Dermott, S.F., 1981. The braided F-ring of Saturn. Nature 290, 454–457.
Dourneau, G., 1987. Observations et étude du mouvement des huit premiers satellites de Saturne. Thèse. Bordeaux, France.
Evans, M., 2001. The determination of orbits from spacecraft imaging. PhD thesis. Queen Mary College, University of London, UK.
Everhart, E., 1985. An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings. In: Carusi, A., Valsecchi, G.B. (Eds.), Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Reidel, Dordrecht, pp. 185–202.
French, R.G., McGhee, C.A., 2003. HST astrometry of Saturn's small satellites. Bull. Am. Astron. Soc. 34, 06.07. DDA meeting abstract.
French, R.G., 17 colleagues, 1993. Geometry of the Saturn system from the 3 July 1989 occultation of 28 Sgr and Voyager observations. Icarus 103, 163–214.
French, R.G., McGhee, C.A., Dones, L., Lissauer, J.J., 2003. Saturn's wayward shepherds: the peregrinations of Prometheus and Pandora. Icarus 162, 143–170.
Giuliatti Winter, S.M., Murray, C.D., Gordon, M., 2000. Perturbations to Saturn's F-ring strands at their closest approach to Prometheus. Planet. Space Sci. 48, 817–827.
Goldreich, P., Rappaport, N., 2003a. Chaotic motions of Prometheus and Pandora. Icarus 162, 391–399.
Goldreich, P., Rappaport, N., 2003b. Origin of chaos in the Prometheus–Pandora system. Icarus 166, 320–327.
Goldreich, P., Tremaine, S., 1979. Towards a theory for the uranian rings. Nature 277, 97–99.
Gozdziewski, K., Maciejewski, A.J., 1995. On the gravitational fields of Pandora and Prometheus. Earth Moon Planets 69, 25–50.
Harper, D., Taylor, D.B., 1993. The orbits of the major satellites of Saturn. Astron. Astrophys. 268, 326–349.
Kolvoord, R.A., Burns, J.A., Showalter, M.R., 1990. Periodic features in Saturn's F ring: evidence for nearby moonlets. Nature 345, 695–697.
Lissauer, J.J., Peale, S.J., 1986. The production of 'braids' in Saturn's F ring. Icarus 67, 358–374.
Longaretti, P.Y., Borderies, N., 1991. Streamline formalism and ring orbit determination. Icarus 94, 165–170.
McGhee, C.A., 2000. Comet Shoemaker–Levy's 1994 with Jupiter and Saturn's 1995 ring plane crossing. PhD thesis. Cornell University, Ithaca, NY.
McGhee, C.A., Nicholson, P.D., French, R.G., Hall, K.J., 2001. HST observations of saturnian satellites during the 1995 ring plane crossings. Icarus 152, 282–315.
Murray, C.D., Giuliatti Winter, S.M., 1996. Periodic collisions between the moon Prometheus and Saturn's F ring. Nature 380, 139–141.
Murray, C.D., Gordon, M.K., Giuliatti Winter, S.M., 1997. Unraveling the strands of Saturn's F ring. Icarus 129, 304–316.
Murray, C.D., Evans, M.W., Porco, C.C., Showalter, M.R., 2000. The orbits of Prometheus, Pandora and Atlas in 1980 and 1981. Bull. Am. Astron. Soc. 32, 1090. DPS meeting abstract.
Namouni, F., 1998. Ringlet–satellite interactions. Mon. Not. R. Astron. Soc. 300, 915–930.

UNCORRECTED PROOF

ARTICLE IN PRESS
S0019-1035(04)00313-6/FLA AID:7486 Vol.●●● (●●●) yicar7486 [DTD5] P.11 (1-11)
YICAR:m5 v 1.28 Prn:20/10/2004; 11:09 by:Jolanta p. 11

Nicholson, P.D., Porco, C.C., 1988. A new constraint on Saturn's zonal gravity harmonics from Voyager observations of an eccentric ringlet. J. Geophys. Res. 93, 10209–10224.

Nicholson, P.D., Hamilton, D.P., Matthews, K., Yoder, C.F., 1992. New observations of Saturn's coorbital satellites. Icarus 100, 464–484.

Nicholson, P.D., Showalter, M.R., Dones, L., French, R.G., Larson, S.M., Lissauer, J.J., McGhee, C.A., Sicardy, B., Seitzer, P., Danielson, G.E., 1996. Observations of Saturn's ring-plane crossings in August and November 1995. Science 272, 509–515.

Poulet, F., Sicardy, B., 2001. Dynamical evolution of the Prometheus–Pandora system. Mon. Not. R. Astron. Soc. 322, 343–355.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1986. Numerical Recipes. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

Renner, S., Sicardy, B., 2003. Consequences of the chaotic motions of Prometheus and Pandora. Bull. Am. Astron. Soc. 35, 04.06. DPS meeting abstract.

Rosen, P.A., Tyler, G.L., Marouf, E.A., Lissauer, J.J., 1991. Resonance structure in Saturn's rings probed by radio occultation. II. Icarus 93, 25–44.

Showalter, M.R., 2004. Disentangling Saturn's F ring. I. Clump orbits and lifetimes. Icarus. In press.

Showalter, M.R., Burns, J.A., 1982. A numerical study of Saturn's F ring. Icarus 52, 526–544.

Showalter, M.R., Dones, L., Lissauer, J.J., 1999a. Revenge of the sheep: effects of Saturn's F ring on the orbit of Prometheus. Bull. Am. Astron. Soc. 31, 1441. DPS meeting abstract.

Showalter, M.R., Dones, L., Lissauer, J.J., 1999b. Interactions between Prometheus and the F ring. Bull. Am. Astron. Soc. 31, 1228. DPS meeting abstract.

Stooke, P.J., 1993. The shapes and surfaces of Prometheus and Pandora. Earth Moon Planets 62, 199–221.

Synnott, S.P., Peters, C.F., Smith, B.A., Morabito, L.A., 1981. Orbits of the small satellites of Saturn. Science 212, 191–192.

Synnott, S.P., Terrile, R.J., Jacobson, R.A., Smith, B.A., 1983. Orbits of Saturn's F ring and its shepherding satellites. Icarus 53, 156–158.

Thomas, P.C., 1989. The shapes of small satellites. Icarus 77, 248–274.

Vienne, A., Duriez, L., 1995. TASS1.6: Ephemerides of the major saturnian satellites. Astron. Astrophys. 297, 588–605.

Yoder, C.F., Synnott, S.P., Salo, H., 1989. Orbits and masses of Saturn's co-orbiting satellites, Janus and Epimetheus. Astron. J. 98, 1875–1889.

UNCORRECTED PROOF

Annexe E

Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations. Article paru dans *Nature*, 424, 168–170, 2003.

has been darkening[11] since 1954, and certain thermal models predict a large pressure increase at the present epoch[22]. Although these are plausible explanations, additional data and more modelling will be needed to fully explain our results. □

Received 28 February; accepted 27 May 2003; doi:10.1038/nature01762.

1. Elliot, J. L. & Olkin, C. B. Probing planetary atmospheres with stellar occultations. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **24**, 89–123 (1996).
2. Elliot, J. L. & Young, L. A. Analysis of stellar occultation data for planetary atmospheres. I. Model fitting, with application to Pluto. *Astron. J.* **103**, 991–1015 (1992).
3. Brown, G. N. Jr & Ziegler, W. T. Vapor pressure and heats of vaporization and sublimation of liquids and solids of interest in cryogenics below 1-atm pressure. *Adv. Cryog. Eng.* **25**, 662–670 (1980).
4. Hubbard, W. B., Hunten, D. M., Dieters, S. W., Hill, K. M. & Watson, R. D. Occultation evidence for an atmosphere on Pluto. *Nature* **336**, 452–454 (1988).
5. Elliot, J. L. *et al.* Pluto's atmosphere. *Icarus* **77**, 148–170 (1989).
6. Millis, R. L. *et al.* Pluto's radius and atmosphere: Results from the entire 9 June 1988 occultation data set. *Icarus* **105**, 282–297 (1993).
7. Eshleman, V. R. Pluto's atmosphere: Models based on refraction, inversion, and vapor-pressure equilibrium. *Icarus* **80**, 439–443 (1989).
8. Hubbard, W. B., Yelle, R. V. & Lunine, J. I. Nonisothermal Pluto atmosphere models. *Icarus* **84**, 1–11 (1990).
9. McDonald, S. W. & Elliot, J. L. Pluto-Charon stellar occultation candidates: 1996-1999. *Astron. J.* **112**, 788–796 (1996).
10. McDonald, S. W. & Elliot, J. L. Pluto-Charon stellar occultation candidates: 2000-2009 *Astron. J.* **119**, 1999 (2000). Erratum **120**, 1599–1602 (2000).
11. Buie, M. W. *et al.* Changes in Pluto's atmosphere revealed by the P126A occultation. *Bull. Am. Astron. Soc.* **34**, 877 (2002).
12. Sicardy, B. *et al.* Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations. *Nature* **424**, 168–170 (2003).
13. Rayner, J. T. *et al.* SpeX: A medium-resolution 0.8-5.4 micron spectrograph and imager for the NASA Infrared Telescope Facility. *Publ. Astron. Soc. Pacif.* **115**, 362–382 (2003).
14. Vacca, W. D., Cushing, M. C. & Rayner, J. T. A method for correcting near-infrared spectra for telluric absorption. *Publ. Astron. Soc. Pacif.* **115**, 389–409 (2003).
15. van de Hulst, H. C. *Light Scattering by Small Particles* (Dover, New York, 1981).
16. Summers, M. E., Strobel, D. F. & Gladstone, G. R. in *Pluto and Charon* (eds Stern, S. A. & Tholen, D. J.) 391–434 (Univ. Arizona Press, Tucson, 1997).
17. Elliot, J. L., Person, M. J. & Qu, S. Analysis of stellar occultation data. II. Inversion, with application to Pluto and Triton. *Astron. J.* (in the press).
18. Olkin, C. B., Wasserman, L. H. & Franz, O. G. The mass ratio of Charon to Pluto from Hubble Space Telescope astrometry with Fine Guidance Sensors. *Icarus* (in the press).
19. Elliot, J. L. *et al.* Global warming on Triton. *Nature* **393**, 765–767 (1998).
20. Elliot, J. L. *et al.* The prediction and observation of the 1997 July 18 stellar occultation by Triton: More evidence for distortion and increasing pressure in Triton's atmosphere. *Icarus* **148**, 347–369 (2000).
21. Fröhlich, C. Total solar irradiance variations since 1978. *Adv. Space Res.* **29**, 1409–1416 (2002).
22. Hansen, C. J. & Paige, D. A. Seasonal nitrogen cycles on Pluto. *Icarus* **120**, 247–265 (1996).
23. Buie, M. W. *et al.* CCD camera occultation system. *Bull. Am. Astron. Soc.* **25**, 1115 (1993).
24. Dunham, E. W. in *Proc. Airborne Astronomy Symp. on the Galactic Ecosystem: From Gas to Stars to Dust* (eds Haas, M. R., Davidson, J. A. & Erickson, E. F.) 517–522 (Astronomical Society of the Pacific, San Francisco, 1995).
25. Puxley, P. J. *et al.* Performance of an SBRC 256 × 256 array with ALICE/IRCAM3. *Proc. SPIE* **2198**, 350–358 (1994).
26. Khare, B. N. *et al.* Optical constants of organic tholins produced in a simulated Titanian atmosphere: From soft X-ray to microwave frequencies. *Icarus* **60**, 127–137 (1984).
27. Thomas-Osip, J. E., Elliot, J. L. & Clancy, K. B. Re-examination of the possibility of haze in Pluto's atmosphere based on multi-wavelength observations of the Pluto occultation of P131.1. *Bull. Am. Astron. Soc.* **34**, 1212 (2002).
28. Stansberry, J. A., Lunine, J. I. & Tomasko, M. G. Upper limits on possible photochemical hazes on Pluto. *Geophys. Res. Lett.* **16**, 1221–1224 (1989).
29. Rannou, P., McKay, C. P., Botet, R. & Cabane, M. Semi-empirical model of absorption and scattering by isotropic fractal aggregates of spheres. *Planet. Space Sci.* **47**, 385–396 (1999).
30. Rannou, P. *et al.* Titan's geometric albedo: Role of the fractal structure of the aerosols. *Icarus* **118**, 355–372 (1995).

Supplementary Information accompanies the paper on **www.nature.com/nature**.

Acknowledgements Setting up the equipment and recording the occultation data proved to be a challenge, and we appreciate the assistance of G. Koenig, L. Berkgnut, T. Denault, P. Sears, R. Stone, D. Severinsen, A. Pickles and T. Carroll. We thank the staff of the Maui Space Surveillance System for their assistance in taking the Haleakala data, and we thank B. Sicardy *et al.* for communication of results before publication. The United Kingdom Infrared Telescope is operated by the Joint Astronomy Centre on behalf of the UK Particle Physics and Astronomy Research Council. This work was supported, in part, by Research Corporation, the Southwest Research Institute, NSF and NASA. L.C.R. and D.T.H. were supported by Air Force Research Laboratory/Directed Energy.

Competing interests statement The authors declare that they have no competing financial interests.

Correspondence and requests for materials should be addressed to J.L.E. (jle@mit.edu).

Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations

B. Sicardy[1,2], T. Widemann[1], E. Lellouch[1], C. Veillet[3], J.-C. Cuillandre[3], F. Colas[4], F. Roques[1], W. Beisker[5], M. Kretlow[5], A.-M. Lagrange[6], E. Gendron[1], F. Lacombe[1], J. Lecacheux[1], C. Birnbaum[7], A. Fienga[4], C. Leyrat[1], A. Maury[8], E. Raynaud[1], S. Renner[1], M. Schultheis[9], K. Brooks[10], A. Delsanti[10], O. R. Hainaut[10], R. Gilmozzi[10], C. Lidman[10], J. Spyromilio[10], M. Rapaport[11], P. Rosenzweig[12], O. Naranjo[12], L. Porras[12], F. Díaz[12], H. Calderón[12], S. Carrillo[13], A. Carvajal[13], E. Recalde[13], L. Gaviria Cavero[14], C. Montalvo[14], D. Barría[15], R. Campos[16], R. Duffard[17] & H. Levato[18]

Pluto's tenuous nitrogen atmosphere was first detected by the imprint left on the light curve of a star that was occulted by the planet in 1985 (ref. 1), and studied more extensively during a second occultation event in 1988 (refs 2–6). These events are, however, quite rare and Pluto's atmosphere remains poorly understood, as in particular the planet has not yet been visited by a spacecraft. Here we report data from the first occultations by Pluto since 1988. We find that, during the intervening 14 years, there seems to have been a doubling of the atmospheric pressure, a probable seasonal effect on Pluto.

The stars occulted by Pluto on 20 July 2002 and 21 August 2002 are referred to as P126 and P131.1; respectively, in the candidate list of refs 7 and 8. We organized a campaign for the P126 event, using fixed and portable telescopes in Argentina, Brazil, Chile, Ecuador, Peru and Venezuela, while the P131.1 occultation was observed at the Canada–France–Hawaii Telescope (CFHT) in Hawaii. Independent results obtained from sites in Chile, western continental USA and Hawaii are presented in a companion paper[9]. Owing to weather conditions and astrometric uncertainty before the event, we obtained only one positive detection of the P126 event in northern Chile near Arica, using a portable telescope and a broad-band CCD camera peaking in sensitivity near 0.6 μm (Fig. 1a). In contrast, the P131.1 event was observed with high signal-to-noise ratio in a narrow-band filter at 0.83 μm using the CFHT (Fig. 1b, c).

Our light curves are significantly different from those obtained in 1988. In particular, the Kuiper Airborne Observatory (KAO) data exhibited an abrupt change of slope in their lower part; this change of slope is absent in our data (Fig. 1a, b). This sudden drop was interpreted as being due to either absorbing hazes, or a sharp inversion layer in the lowest 20–50 km above Pluto's surface, connecting the isothermal upper atmosphere at temperature $T \approx 95$–110 K to the ground temperature at $T \approx 40$–60 K. Thus, our observations show that large changes in temperature or pressure, or both, occurred in Pluto's lower atmosphere between 1988 and 2002. However, no obvious differences in the shape of the upper part of the light curves are visible, suggesting that the thermal structure of Pluto's upper atmosphere has remained largely unchanged since 1988.

[1]Observatoire de Paris, LESIA, 92195 Meudon, France; [2]Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75005 Paris, France; [3]Canada-France-Hawaii Telescope, Waimea, Hawaii 96743, USA; [4]Observatoire de Paris, IMCCE, 75014 Paris, France; [5]International Occultation Timing Association, European Section, 30459 Hanover, Germany; [6]Observatoire de Grenoble, 38041 Grenoble, France; [7]Cité des Sciences et de l'Industrie, 75930 Paris, France; [8]Gene Shoemaker Observatory, Casilla 21, San Pedro de Atacama, Chile; [9]Institut d'Astrophysique de Paris, 75014 Paris, France; [10]European Southern Observatory, Alonso de Córdova 3107, Casilla 19001, Santiago 19 Chile; [11]Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers, 33270 Floirac, France; [12]Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, 5101, Mérida, Venezuela; [13]Cumbaya, 1722 Quito, Ecuador; [14]Asociación Eta Carinae, Lima 1, Perú; [15]Observatório Cerro Armazones, Universidad Católica del Norte, 1280 Antofagasta, Chile; [16]Laboratório Nacional de Astrofísica, 37504-364, Itajubà, Brazil; [17]Observatório Nacional, 20921-400, Rio de Janeiro, Brazil; [18]Complejo Astronómico, El Leoncito, CP J5402DSP, San Juan, Argentina.

 © 2003 Nature Publishing Group

Inversions of the light curves in terms of the atmospheric temperature T (Fig. 2a) and pressure p (Fig. 2c) as a function of the distance r to the planet's centre require, for each time step, the distance ρ of the observer to the centre of Pluto's shadow projected on Earth. This distance was retrieved with high accuracy (~15 km) for the 1988 event because several occultation chords were available. This, combined with KAO data error bars, provides the 1988 pressure profile shown in Fig. 2c (refs 4, 6). Conversely, with one chord at hand for the P126 and P131.1 events, the typical uncertainty on ρ is 250 km for both events, as derived from astrometric measurements available for each star and Pluto (see, for example, http://occult.mit.edu). From these measurements, the expected closest approaches ρ_{min} of the Arica and Hawaii stations to the shadow centre were $\rho_{min} = 975 \pm 250$ km and $\rho_{min} = 610 \pm 250$ km, respectively.

Only the higher-quality P131.1 light curve has been inverted, and to within the astrometric uncertainties described above, all our inversions show that the temperature or pressure profiles (or both) have drastically changed since 1988. In particular, taking the nominal astrometric solution corresponding to $\rho_{min} = 610$ km,

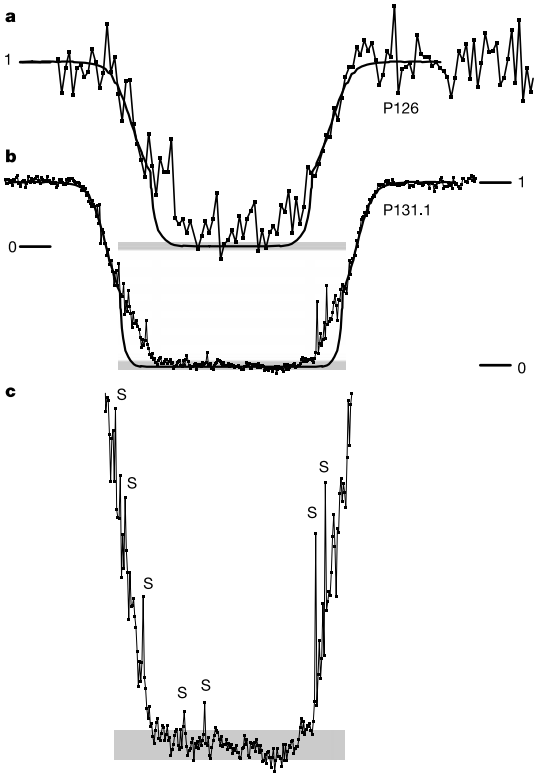

Figure 1 Dimming of the stars P126 (20 July 2002) and P131.1 (21 August 2002) during their occultations by Pluto's atmosphere. **a**, The P126 light curve, binned in 2-s time intervals, was obtained from northern Chile (longitude = 69° 45′ 51.5″ W, latitude = 18° 26′ 53.8″ S, altitude 2,500 m) with a 30-cm Schmidt–Cassegrain portable telescope and Kodak-401E CCD camera without filter, sensitive between 0.4 and 0.9 μm, with a peak near 0.6 μm. The horizontal length of the shaded rectangle represents a duration of 2 min centred at 01:44:03 UT. The total unocculted flux (P126 + Pluto + Charon) is normalized to unity (label "1"). The expected level corresponding to the complete extinction of the star (label "0") is indicated by the position of the shaded rectangle, whose vertical extension represents the uncertainty of photometric calibration. **b**, The P131.1 light curve, obtained at the Canada–France–Hawaii 3.55-m f/8 telescope (CFHT) equipped with a MIT/LL CCID20 in the I band (0.83 ± 0.1 μm) with a exposure time of 1 s and cycle time of 1.583 s. The length of the shaded rectangle now corresponds to a duration of 5 min, centred at 06:50:35 UT. Graphs **a** and **b** are plotted with the same vertical scale from "0" to "1". The two horizontal scales are such that equal horizontal lengths represent equal distances traveled by Pluto in the plane of the sky. Both light curves have absolute timing accuracy of ~0.3 s. The solid curve in **a** and **b** is a smoothed version of the data obtained from Kuiper Airborne Observatory (KAO) during the 9 June 1988 Pluto occultation[3–6]. **c**, A vertically stretched version of **b**, enhancing the spikes ("S") and the steady decrease of signal in the bottom part of the light curve.

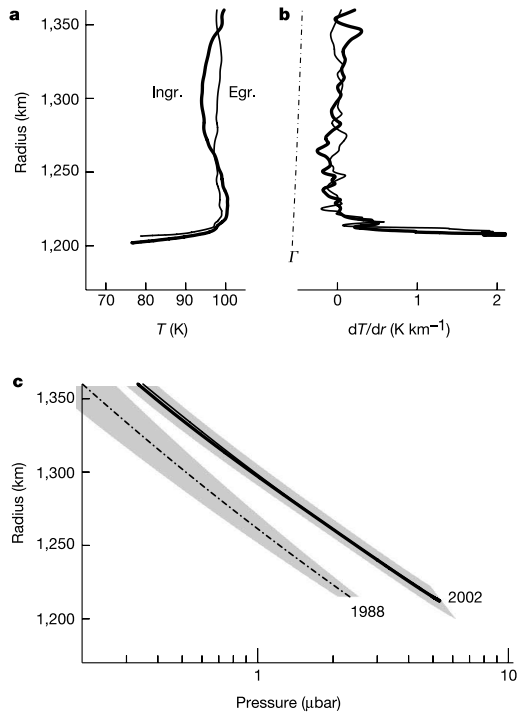

Figure 2 Temperature and pressure profiles of Pluto's atmosphere derived from the inversion of the P131.1 light curve. This inversion[17] assumes a spherically symmetric and transparent atmosphere. It first provides the atmospheric refractivity profile, then the density profile for a given gas composition, and finally the temperature profile, assuming an ideal gas in hydrostatic equilibrium. We assume for Pluto a pure molecular nitrogen[6] atmosphere, and we take into account the curvature of Pluto's limb as well as the variation of the acceleration of gravity g with radius, assuming a mass of 1.31×10^{22} kg for Pluto[18]. **a**, Pluto's atmospheric temperature profiles $T(r)$ at ingress (thick curve) and egress (thin curve). The radius is the distance to the planet centre, for the nominal astrometric solution discussed in the text. **b**, The corresponding temperature gradient profiles dT/dr. The dash-dotted line provides the adiabatic lapse rate profile $\Gamma = -g/c_p$, to the left of which the atmosphere would become convectively unstable, where $c_p = 1.04 \times 10^3$ J K^{-1} kg^{-3} is the specific heat at constant pressure for N_2. **c**, The corresponding pressure profiles. The dash-dotted line is the pressure profile derived from the KAO lightcurve of 9 June 1988 (ref. 6), with the associated error domain[6], shown as the shaded region. The ingress and egress profiles derived from the CFHT light curve of 2002 are the nearly coincident thick and thin solid lines, respectively. The error domain for the 2002 profiles only takes into account the photometric uncertainties in the levels "0" and "1" shown in Fig. 1b. The effects of the astrometric uncertainty are discussed in the text.

© 2003 Nature Publishing Group

we obtain essentially the same temperature profile $T(r)$ as in 1988, including a strong inversion layer below $r = 1{,}215$ km, but with a systematic and significant increase of pressure at all radii (Fig. 2c). This pressure increase reaches a factor of 2.1 at $r = 1{,}215$ km, where $p = 5.0 \pm 0.6\,\mu$bar in 2002, while $p = 2.33 \pm 0.24\,\mu$bar in 1988 (ref. 6).

Figure 1c shows that the bottom of the P131.1 light curve is generally flat for about 200 s, with a small but significant decrease of signal over this time interval. Taking again $\rho_{min} = 610$ km, we find that during this 200-s interval the image of P131.1 scanned Pluto's limb at a constant radius of 1,205 km, with latitudes ranging from 61° S (for the onset of occultation, or 'ingress', also known as 'immersion') to 8° S (for the termination of occultation, 'egress' or 'emersion'). This steady decrease of signal could conceivably be due to the presence of morning hazes above the egress point. Perhaps more probably, it indicates an egress temperature about 10 K smaller than the ingress temperature at $r = 1{,}205$ km. The P131.1 star ingress probed the south pole region now constantly in sunlight, while the egress probed the morning limb of the equatorial region, which emerged after 3.2 days in darkness. (Note that we adopt the International Astronomical Union convention, in which Pluto's south pole is currently tilted toward Earth). Taking a thermal inertia of $15\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1/2}\,K^{-1}}$, derived from Pluto's thermal light curve[10], and using a subsolar latitude of 29.7°S at Pluto in August 2002, we estimate that the dawn equatorial ground temperature is ~25% lower, that is, 12–15 K cooler, than the polar temperature for a uniform surface albedo. However, according to a recent surface model[11], Pluto's south pole is covered by methane-rich areas while the equator is predominantly covered by darker tholins. For this case, we estimate a ground polar temperature of ~53 K and a dawn equatorial temperature of 45 K. These numbers compare well with the difference between the ingress and egress temperatures near $r = 1{,}205$ km, suggesting that the lower 10–40 km (0.25–1 scale height) of the atmosphere are affected by surface boundary layer effects.

Conversely, our observations do not reveal a significant temperature difference between egress and ingress (and also with 1988) in the isothermal region above $r = 1{,}220$ km. This can be understood in the methane-thermostat model of ref. 12, which demonstrates that the upper-atmosphere temperature is robustly controlled at ~100 K by the radiative properties of atmospheric CH_4, almost independently of its abundance. Accounting for the diurnally averaged insolation at the south pole and the equator, we find that the upper-atmosphere temperatures at ingress and egress should only differ by 3 K at radiative equilibrium, well within the uncertainties of our measurements.

The P131.1 light curve exhibits spikes (Fig. 1c) which correspond to local temperature gradients of up to $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r \approx \pm 0.05\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ over vertical scales of 5–15 km in the retrieved temperature profiles (Fig. 2b), yielding temperature fluctuations of $\Delta T \approx \pm 0.5$–0.8 K over these scales. The spikes are more conspicuous than in 1988 (refs 4, 6), and reveal a dynamical activity in Pluto's atmosphere. Its origin could be gravity waves launched by convection in a putative lower troposphere, and/or turbulence triggered by shears driven by strong winds between Pluto's lit and dark hemispheres. The observed values of $|\mathrm{d}T/\mathrm{d}r|$ remain well below the adiabatic temperature lapse rate Γ (Fig. 2b), indicating that either convective instability is not reached, or that stronger local gradients exist but are smoothed out over the ~500 km that a stellar ray travels in the atmosphere before being significantly refracted towards Earth.

We have tested the robustness of our results to changes in the P131.1 astrometric solution. We find that varying ρ_{min}, everything else been equal, mainly displaces vertically the temperature profile $T(r)$, while multiplying the pressure at all levels by a roughly constant factor with respect to the nominal solution with $\rho_{min} = 610$ km. In particular, a solution that leaves the pressure unchanged at all levels (to within 10%) since 1988 can be found with $\rho_{min} = 550$ km. However, the whole temperature profile $T(r)$, including the inversion layer, would then be shifted downward by about 30 km. Such a large variation of Pluto's thermal structure in the lower atmosphere since 1988 seems unlikely. The inversion layer is best physically explained through the absorption by atmospheric methane, and its existence does not depend sensitively on the CH_4 abundance (although the precise value of the temperature gradient does[13]). Moving the inversion layer downward by 30 km from its $r = 1{,}200$–$1{,}220$ km nominal level would imply a dramatic shrinking of the 40-km-deep troposphere advocated in ref. 14 on the basis of the 1988 occultation. Such a troposphere would presumably be maintained by convection, perhaps driven by the large temperature gradients across Pluto's surface[10]. It should be fairly stable over a 14-year timescale, and it is supported by the presence of spikes in the CFHT light curve, as discussed above.

In contrast, a twofold increase in pressure in the 14 years since 1988 is not at odds with expectations of nitrogen cycle models[15,16], despite Pluto's increasing heliocentric distance. The best-fitting models[15], in which N_2 frost distribution and associated atmospheric pressure are calculated as a function of season, do predict an increase of pressure by a factor of about 2 between 1990 and 2000; this increase follows equinox on Pluto in 1987, leading to the current sublimation of the south polar cap as it goes into sunlight. Thus, although the seasonal models are only partly successful in reproducing the observed albedo patterns-particularly the currently large north polar cap and the relative darkness of the south polar regions, they must adequately capture the physics of hemispheric volatile exchange. □

Received 4 March; accepted 27 May 2003; doi:10.1038/nature01766.

1. Brosch, N. The 1985 stellar occultation by Pluto. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **276**, 571–578 (1995).
2. Hubbard, W. B., Hunten, D. M., Dieters, S. W., Hill, K. M. & Watson, R. D. Occultation evidence for an atmosphere on Pluto. *Nature* **336**, 452–454 (1988).
3. Elliot, J. L. *et al.* Pluto's atmosphere. *Icarus* **77**, 148–170 (1989).
4. Elliot, J. L. & Young, L. A. Analysis of stellar occultation data for planetary atmospheres. I. Model fitting, with application to Pluto. *Astron. J.* **103**, 991–1051 (1992).
5. Millis, R. L. *et al.* Pluto's radius and atmosphere—Results from the entire 9 June 1998 occultation data set. *Icarus* **105**, 282–297 (1993).
6. Yelle, R. V. & Elliot, J. L. in *Pluto and Charon* (eds Stern, S. A. & Tholen, D. J.) 347–390 (Univ. Arizona Press, Tucson, 1997).
7. McDonald, S. W. & Elliot, J. L. Pluto-Charon stellar occultation candidates: 2000-2009. *Astron. J.* **119**, 1999–2007 (2000).
8. McDonald, S. W. & Elliot, J. L. Erratum: "Pluto-Charon stellar occultation candidates: 2000-2009". *Astron. J.* **120**, 1599–1602 (2000).
9. Elliot, J. L. *et al.* The recent expansion of Pluto's atmosphere. *Nature* **424**, 165–168 (2003).
10. Lellouch, E. *et al.* Pluto's non-isothermal surface. *Icarus* **147**, 220–250 (2000).
11. Grundy, W. M. & Buie, M. W. Distribution and evolution of CH_4, N_2 and CO ices on Pluto's surface: 1995 to 1998. *Icarus* **153**, 248–263 (2001).
12. Yelle, R. V. & Lunine, J. I. Evidence for a molecule heavier than methane in the atmosphere of Pluto. *Nature* **339**, 288–290 (1989).
13. Strobel, D. F., Zhu, X., Summers, M. E. & Stevens, M. H. On the vertical thermal structure of Pluto's atmosphere. *Icarus* **120**, 266–289 (1996).
14. Stanberry, J. A., Lunine, J. I., Hubbard, W. B., Yelle, R. V. & Hunten, D. M. Mirages and the nature of Pluto's atmosphere. *Icarus* **111**, 503–513 (1994).
15. Hansen, C. J. & Paige, D. A. Seasonal nitrogen cycles on Pluto. *Icarus* **120**, 247–265 (1996).
16. Spencer, J. R., *et al.* in *Pluto and Charon* (eds Stern, S. A. & Tholen, D. J.) 435–475 (Univ. Arizona Press, Tucson, 1997).
17. Sicardy, B. *et al.* The structure of Titan's atmosphere from the 28 Sgr occultation. *Icarus* **142**, 357–390 (1999).
18. Null, G. W. & Owen, W. M. Jr Charon/Pluto mass ratio obtained with *HST* CCD observations in 1991 and 1993. *Astron. J.* **111**, 1368–1381 (1996).

Acknowledgements We thank the Conseil Scientifique of Paris Observatory and the Programme National de Planétologie for supporting part of the observations of the P126 event in South America. We are grateful to C. Angeli, A. Bruch and D. Lazzaro, who made possible the observational campaign in Brazil, and to W. B. Hubbard for constructive comments.

Competing interests statement The authors declare that they have no competing financial interests.

Correspondence and requests for materials should be addressed to B.S (bruno.sicardy@obspm.fr).

 © 2003 Nature Publishing Group

Annexe F

Test particle motion around an oblate planet : transformations between state vectors and geometric elements. Preprint.

Test Particle Motion Around an Oblate Planet : Transformations between State Vectors and Geometric Elements

Stéfan Renner and Bruno Sicardy
Observatoire de Paris, LESIA, 92195 Meudon Cédex, France, e-mail : Stefan.Renner@obspm.fr

November 1, 2004

Abstract. We derive the transformations to convert the state vectors in cartesian coordinates into geometric orbital elements (and conversely the geometric elements into state vectors) for a test particle moving in the equatorial plane around an oblate planet. These transformations arise from the epicyclic theory (Borderies and Longaretti, 1987; Longaretti and Borderies, 1991; Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994) and are accurate to second order in eccentricity. Similar transformations are derived for general inclined orbits, the inclination and the longitude of ascending node being classical osculating elements. The formulaes derived are useful to study the dynamics of planetary rings. This paper is written in such a manner that it can be directly used to implement routines for computational purposes.

Keywords: geometric elements, rings, dynamics, numerical simulations.

1. Introduction

The concept of ring streamlines is both powerful and convenient for discussion of a large spectrum of dynamical effects commonly found on ring systems. These streamlines are the lines of the velocity field of the rings considered as a fluid. They are used for example to describe the shape of the narrow rings of Uranus or the density waves of Saturn's rings. For an equatorial ring, the shape of the streamlines is given by :

$$r = a(1 - e\cos(m\Phi + m\Delta)) \tag{1}$$

or by a superposition of sinusoidal terms of the same form, where r is the ring radius, m the azimuthal wave number (integer), Δ a phase angle, and Φ the longitude in a frame rotating with pattern speed Ω_p, related to the orbital longitude L relative to an inertial reference frame by $\Phi = L - \Omega_p t$. The case of an elliptic ring is included in this description by taking $m = 1$ and $\Omega_p = \dot{\tilde{\omega}}$, where $\dot{\tilde{\omega}}$ is the apsidal precession rate.

The orbital elements (semimajor axis a, eccentricity e, ...) resulting from the fits of equation (1) to observational data are referred to as the *geometric* elements. They differ from the more familiar *osculating* (or *elliptic*) ones, especially when the planet's oblateness is taken into

© 2004 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

account. The osculating elements are the elements that particles would have if the oblateness was suppressed. When the central body is oblate, the osculating elements exhibit short-period variations, whereas the geometric elements are supposed to be time independent or, at least, to vary on time scales much longer than the orbital period. These short-period oscillations can induce large differences between the osculating and the geometric elements.

On the other hand, a particle on a circular orbit around an oblate planet has a nonzero osculating eccentricity $e_0 \sim \frac{3}{2}J_2(R_p/r)^2$. Indeed, the particle's eccentricity would be the osculating eccentricity if the oblateness was suddenly suppressed. The same problem arises with the semimajor axis : the semimajor axis of a particle on a circular orbit around an oblate planet would take the osculating value $a_0 \sim r[1 + \frac{3}{2}J_2(R_p/r)^2]$ if the oblateness was cancelled. This osculating value can be substantially different from the geometric radius of the orbit. Thus the geometric elements are the suitable elements to use when considering orbits of satellites (with small eccentricities and inclinations) or ring particles around an oblate planet.

Theoretically, how these geometric elements are defined? The answer is in the *epicyclic* theory. This theory was initially introduced by Chandrasekar in 1942 in stellar dynamics and concern the almost circular and almost equatorial motions in an oblate (or prolate) potential. It can be applied to planetary rings because all known rings have small inclinations and small eccentricities. The exact solutions of the equations of motions are series expansion around circular equatorial orbits. The constants arising from these series expansions are the epicyclic elements. The theory also involves three basic frequencies which are the angular velocity of rotation on circular orbits Ω, the horizontal epicyclic frequency κ, which characterizes radial oscillations around the circular motion, and the vertical epicyclic frequency ν, which characterizes vertical oscillations. From the epicyclic elements one can introduce a new set of elements which makes the epicyclic solution analogous to the more familiar elliptic one. These new elements are the geometric elements. The reader will refer to (Borderies and Longaretti, 1987), (Longaretti and Borderies, 1991) and (Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994) for a complete resolution of this problem.

In numerical simulations, the motion of a particle is often integrated in a planet-centered and cartesian reference frame. To follow the evolution of the particle with the geometric elements, one must convert these elements into position-velocity vectors (state vectors) in a planet-centered cartesian reference frame (for example at the start time of an integration when only the orbital elements are know at a

given epoch), and conversely convert the state vectors of the particle at a given time into geometric elements (in output of a program). The aim of this paper is to give these transformations at a high level of accuracy. We derive these formulaes in section 2 and 3. For a reason that will appear later, two orbital elements that we compute, the inclination and the longitude of the ascending node, are not geometric but rather osculating orbital elements. Our transformations result from the epicyclic theory (Borderies and Longaretti, 1987; Longaretti and Borderies, 1991; Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994), are accurate to second order in eccentricity and can be directly used for computational purposes. In section 4 we consider an example to test the numerical accuracy of our formulaes.

2. From geometric elements to state vectors

Consider a test particle moving around an oblate planet of mass M_p, radius R_p, and zonal harmonic coefficients J_2, J_4 and J_6. At a given time, let $a, e, I, \Omega, \bar{\omega}$, and λ be the geometric orbital elements of the particle, where a denotes the semimajor axis, e the eccentricity, I the inclination, Ω the longitude of the ascending node, $\bar{\omega}$ the longitude of periapsis and λ the mean longitude (figure 1). The mean longitude doesn't appear on figure 1 because it has no simple geometrical interpretation. It is defined by $\lambda = M + \bar{\omega} = n(t-\tau) + \bar{\omega} = \dfrac{2\pi}{T}(t-\tau) + \bar{\omega}$, where M, n, τ and T are the mean anomaly, the mean motion, the time of passage at the periapsis and the orbital period of the particle, respectively. The true longitude L is defined by $L = f + \bar{\omega}$, where f is the true anomaly.

2.1. The case of equatorial orbits

In this case the test particle is defined at a given time by the four geometric elements $a, e, \bar{\omega}$, and λ. Then, the position and the velocity in polar coordinates are given by (Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994) :

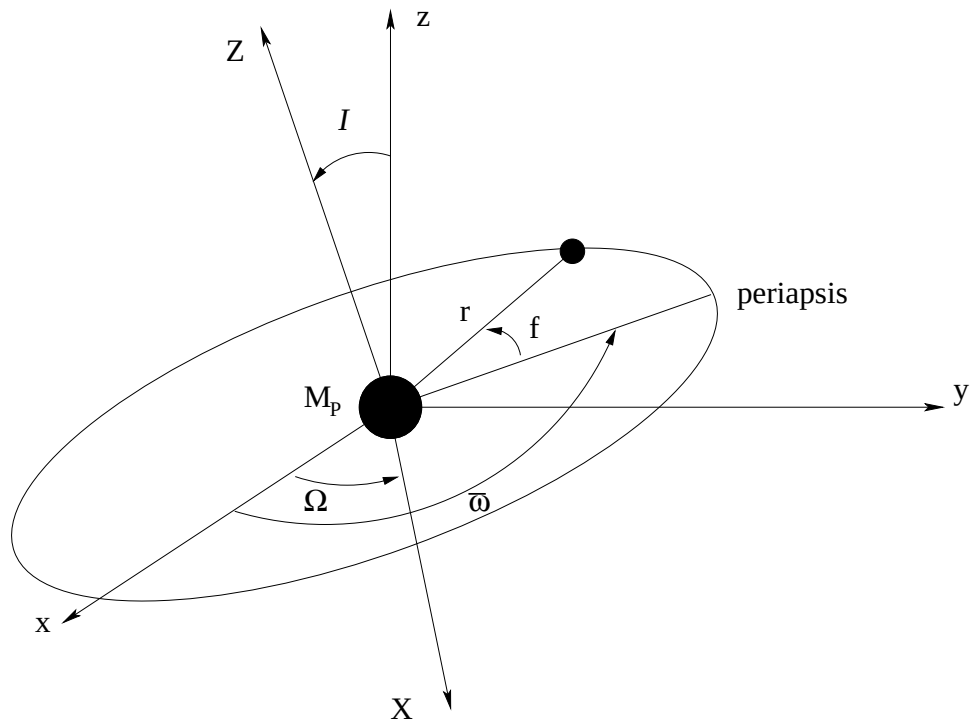

Figure 1. Orbit of a test particle around a central body (planet) of mass M_p. In the inertial reference ($O\mathbf{xyz}$), centered on the planet, r is the radius of the particle, I the inclination of the orbit, Ω the longitude of the ascending node, $\bar{\omega}$ the longitude of periapsis and f the true anomaly.

$$\begin{cases} r = a\Big[1 - e\cos M + \Big(\dfrac{3}{2}\dfrac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta^2}{\kappa^2}\cos 2M\Big)e^2\Big] \\ L = \lambda + 2\dfrac{n}{\kappa}e\sin M + \Big(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\eta^2}{2\kappa^2}\Big)\dfrac{n}{\kappa}e^2\sin 2M \\ \dot{r} = a\kappa\Big[e\sin M + \dfrac{\eta^2}{\kappa^2}e^2\sin 2M\Big] \\ \dot{L} = n\Big[1 + 2e\cos M + \Big(\dfrac{7}{2} - 3\dfrac{\eta^2}{\kappa^2} - \dfrac{\kappa^2}{2n^2} + (\dfrac{3}{2} + \dfrac{\eta^2}{\kappa^2})\cos 2M\Big)e^2\Big] \end{cases} \tag{2}$$

In cartesian coordinates, we have :

$$\begin{cases} x = r\cos L \\ y = r\sin L \\ \dot{x} = \dot{r}\cos L - r\dot{L}\sin L \\ \dot{y} = \dot{r}\sin L + r\dot{L}\cos L \\ z = \dot{z} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

The formulaes (2), accurate to second order in eccentricity, are the relations 62, 64, 65, 67 of (Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994) with $I \equiv 0$.

η^2 and κ are terms containing some derivatives of the planetary potential and are homogeneous to frequencies. In particular, κ is the horizontal epicyclic frequency which characterizes radial oscillations around the circular motion ($\kappa = n - \dot{\bar{\omega}}$ where $\dot{\bar{\omega}}$ is the apsidal precession rate of the test particle). These frequencies reduce to the particle mean motion $n_0 = \sqrt{GM_p/a^3}$ for a spherical planet. To second order in eccentricity, the three frequencies are :

$$n = \Big(\frac{GM_p}{a^3}\Big)^{1/2}\Big[1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 - \frac{15}{16}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_4 + \frac{35}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_6 - \frac{9}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_2^2 + \frac{45}{64}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2 J_4 + \frac{27}{128}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2^3 + 3\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 e^2\Big] \tag{4}$$

$$\kappa = n - \dot{\bar{\omega}} = \Big(\frac{GM_p}{a^3}\Big)^{1/2}\Big[1 - \frac{3}{4}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 + \frac{45}{16}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_4 - \frac{175}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_6 - \frac{9}{32}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_2^2 + \frac{135}{64}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2 J_4 - \frac{27}{128}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_2^3\Big] \tag{5}$$

$$\eta^2 = \frac{GM_p}{a^3}\Big[1 - 2\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^2 J_2 + \frac{75}{8}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^4 J_4 - \frac{175}{8}\Big(\frac{R_p}{a}\Big)^6 J_6\Big] \tag{6}$$

The relations (4), (5), (6) are repectively the formulaes A10, A12 and A4 of (Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994) with $I \equiv 0$.

2.2. The case of inclined orbits

Let us suppose now that the orbit of the test particle is inclined. To convert the orbital elements into state vectors, we consider a fictitious

test particle orbiting the central planet in the equatorial plane ($I = 0$) with the same other orbital elements $a, e, \bar{\omega}$ and λ, and compute the state vector for this particle to second order in eccentricity (section 2.1). Then we carry out a rotation about the ascending node through an angle I to transform this vector into a state vector for the real test particle.

We note $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ the position and the velocity of the test particle, and $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$, $\mathbf{v}' = (\dot{x'}, \dot{y'}, 0)$ the position and the velocity of the fictitious one in the equatorial plane. $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ and $\mathbf{v}' = (\dot{x'}, \dot{y'}, 0)$ are computed from (2) and (3). Then we need to carry out a rotation about the ascending node through an angle I to transform $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{v}'$ into $\mathbf{r} = (x, y, z)$ and $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

Let $(O\mathbf{XYZ})$ be the reference frame related to the orbital plane of the test particle (see figure 1), where $\mathbf{X}$ is the unit vector parallel to the ascending node, $\mathbf{Z}$ the unit vector orthogonal to the orbital plane such that $\mathbf{Z}.\mathbf{z} = \cos I$ and $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \times \mathbf{X}$. Then, in the inertial reference frame $(O\mathbf{xyz})$:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = (\cos\Omega, \sin\Omega, 0) \\ \mathbf{Y} = (-\cos I \sin\Omega, \cos I \cos\Omega, \sin I) \\ \mathbf{Z} = (\sin I \sin\Omega, -\sin I \cos\Omega, \cos I) \end{cases} \tag{7}$$

With these notations we can write :

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'.\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{r}'_{\perp},$$

where $\mathbf{r}'_{\perp}$ is the part of $\mathbf{r}'$ orthogonal to $\mathbf{X}$. The algebraic value of $\mathbf{r}'_{\perp}$ is $\bar{\mathbf{r}}'_{\perp} = (\mathbf{X} \times \mathbf{r}').\mathbf{z}$. By applying a rotation about $\mathbf{X}$ through an angle I, only $\mathbf{r}'_{\perp}$ is modified and then the position vector of the test particle is given by :

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}'.\mathbf{X})\mathbf{X} + [(\mathbf{X} \times \mathbf{r}').\mathbf{z}].\mathbf{Y}.$$

Thus, in cartesian coordinates, this position vector is (same thing for the velocities, replacing all the coordinates by their first derivatives) :

$$\begin{cases} x = x'[\cos^2(I/2) + \sin^2(I/2)\cos(2\Omega)] + y'\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) \\ y = x'\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) + y'[\cos^2(I/2) - \sin^2(I/2)\cos(2\Omega)] \\ z = \sin I[-x'\sin\Omega + y'\cos\Omega] \end{cases} \tag{8}$$

3. From state vectors to geometric elements

3.1. The case of equatorial orbits

Let $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ be the state vector of the test particle in the planet-centered cartesian reference frame $(O\mathbf{xyz})$. Then the radius r and the true longitude L are : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $L = \arctan(y/x)$. The value of the longitude must be modified in some cases because it is defined on $[0, 2\pi]$ whereas $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{cases} L = \arctan(y/x) + \pi & x < 0 \\ L = \arctan(y/x) + 2\pi & \arctan(y/x) < 0 \\ L = \pi/2 & x = 0 \quad y > 0 \\ L = 3\pi/2 & x = 0 \quad y < 0 \end{cases} \tag{9}$$

The transformations (2) can be written :

$$\begin{cases} r = a\Big[1 - e\cos M\Big] + r_C \\ L = \lambda + 2\dfrac{n}{\kappa} e \sin M + L_C \\ \dot{r} = ae\kappa \sin M + \dot{r}_C \\ \dot{L} = n\Big[1 + 2e\cos M\Big] + \dot{L}_C \end{cases} \tag{10}$$

where :

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{x}\cos L + \dot{y}\sin L \\ \dot{L} = (-\dot{x}\sin L + \dot{y}\cos L)/r \end{cases} \tag{11}$$

and r_C, L_C, $\dot{r}_C$, $\dot{L}_C$ contain all the terms of second order in eccentricity. More precisely :

$$\begin{cases} r_C = ae^2\Big[\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{\kappa^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\kappa^2}\cos(2M)\Big] \\ L_C = \frac{n}{\kappa}e^2[\frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{2\kappa^2}]\sin(2M) \\ \dot{r}_C = ae^2\frac{\eta^2}{\kappa}\sin(2M) \\ \dot{L}_C = ne^2\Big[\frac{7}{2} - 3\frac{\eta^2}{\kappa^2} - \frac{\kappa^2}{2n^2} + (\frac{3}{2} + \frac{\eta^2}{\kappa^2})\cos(2M)\Big] \end{cases} \tag{12}$$

We must derive the geometric orbital elements a, e, $\bar{\omega}$ and λ of the test particle, knowing r, L, $\dot{r}$ and $\dot{L}$. From (10) we have :

$$\begin{cases} a = \dfrac{r - r_C}{1 - \dfrac{\dot{L} - n - \dot{L}_C}{2n}} \\ e = \sqrt{\Big(\dfrac{\dot{L} - n - \dot{L}_C}{2n}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa}\Big)^2} \\ \lambda = L - L_C - 2\dfrac{n}{\kappa}\dfrac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa} \\ \tan M = \tan(\lambda - \bar{\omega}) = \dfrac{\dot{r} - \dot{r}_C}{a\kappa\Big(1 - \dfrac{r - r_C}{a}\Big)} \end{cases} \tag{13}$$

We compute a, e, λ and $\bar{\omega}$ from the relations (13) by an iterative method on the frequencies n, κ and η^2 : first we assume that $a = r$, $e = 0$ and that $r_C = L_C = \dot{r}_C = \dot{L}_C = 0$. Then we compute n, κ and η^2 from (4), (5) and (6), respectively, which yield new values for the geometric elements a, e, λ, $\bar{\omega}$ (13) and $r_C, L_C, \dot{r}_C, \dot{L}_C$ (12). Finally, we compute again n, κ, η^2, and so on until the iteration converges.

To stop the iteration and store the orbital elements when a required accuracy is reached, we introduce the following simple test on the semimajor axis : $|a_{i+1} - a_i| < \epsilon$, where ϵ is a small strictly positive parameter and a_i the ith semimajor axis computed in the iteration.

3.2. The case of inclined orbits

If the orbit is inclined, we first compute directly the inclination of the orbit and the longitude of the ascending node. Then we apply to the test particle a rotation about the ascending node through an angle I to

get the state vector for a fictitious test particle on an equatorial orbit. Finally, we apply to this latter the formulaes derived in section 3.1 to compute, iteratively, the remaining orbital elements $a, e, \bar{\omega}$ et λ.

Let $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ be the state vector of the test particle in the planet-centered inertial reference frame. The inclination I of the orbit and the longitude of the ascending node Ω, at a given time, can be derived from the angular momentum of the test particle. Let H_x, H_y and H_z be the three components of the angular momentum. Then :

$$\begin{cases} I = \arctan \dfrac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{H_z} & H_z > 0 \\ \\ I = \arctan \dfrac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{H_z} + \pi & H_z < 0 \end{cases} \tag{14}$$

The case $H_z < 0$ never occurs because the inclination of planetary rings or satellites is always small.

The longitude of the ascending node is given by :

$$\Omega = sign(H_x) \arccos \frac{-H_y}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}} \tag{15}$$

where $sign(H_x) = +1$ if $H_x \geq 0$ and $sign(H_x) = -1$ if $H_x < 0$.

The inclination I and the longitude of the ascending node Ω are here not geometric but osculating orbital elements, because the angular momentum of the test particle is not conserved and exhibit short-period variations due to the planet's oblateness. We choose to compute separately I and Ω for a reason given below. The example given in section 4 will also show that the orbits are correctly described and that the orbital elements derived are sufficiently accurate, even if we use the osculating inclination and ascending node.

Let $\mathbf{r} = (x, y, z)$ and $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ be the position and the velocity of the test particle in the inertial reference frame $(O\mathbf{xyz})$. We apply to these vectors a rotation about the ascending node through an angle I to get the position $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ and the velocity $\mathbf{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', 0)$ of the fictitious particle on an equatorial orbit around the planet. Let us split the position vector :

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}.\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{r}_\perp,$$

where $\mathbf{r}_\perp$ is the part of $\mathbf{r}$ orthogonal to $\mathbf{X}$. The algebraic value of $\mathbf{r}_\perp$ is $\bar{\mathbf{r}}_\perp = (\mathbf{X} \times \mathbf{r}).\mathbf{Z}$. By applying a rotation about the $\mathbf{X}$ vector through an angle I, only $\mathbf{r}_\perp$ is modified and then the position vector of the fictitious test particle is given by :

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r}.\mathbf{X})\mathbf{X} + [(\mathbf{X} \times \mathbf{r}).\mathbf{Z}].(\cos \Omega \mathbf{y} - \sin \Omega \mathbf{x}).$$

Thus, in cartesian coordinates (same thing for the velocities, replacing all the coordinates by their first derivatives) we have :

$$\begin{cases} x' = x[\cos^2\Omega + \sin^2\Omega\cos I] + y\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -z\sin\Omega\sin I \\ y' = x\sin^2(I/2)\sin(2\Omega) + y[\sin^2\Omega + \cos^2\Omega\cos I] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +z\cos\Omega\sin I \end{cases} \tag{16}$$

Finally, we derive from x',y',$\dot{x'}$,$\dot{y'}$ the remaining orbital elements to second order in eccentricity (section 3.1).

As a remark, an equatorial orbit will numerically be defined not only for $I = 0$, but also for $I < \delta$, where δ is a small strictly positive parameter that depends on the integrator. Indeed, for an equatorial orbit, the variable z oscillates weakly around zero in simulations. Therefore the inclination given by (3) is very small but non-zero, even if the orbit is equatorial.

With the method described above, the convergence of (13) is very fast (number of iterations ≤ 50). Using more general epicyclic formulaes that take into account the inclination on second order (formulaes 62 - 67 of (Borderies-Rappaport and Longaretti, 1994)) the convergence is numerically impossible. This is the reason why we compute separately the osculating inclination and the osculating longitude of the ascending node.

4. Application

Let us consider an example to check if the orbital elements previously derived describe correctly in numerical simulations the orbit followed by a test particle. We also want to quantify the accuracy of the orbital elements for different kind of orbits (eccentric and/or inclined).

We use the *mercury6* integrator package (Chambers, 1999). The motion is integrated in cartesian coordinates in a reference frame centered on the central body. The algorithm used is Everhart's radau (Everhart, 1985), with an accuracy parameter $\delta = 10^{-12}$ (maximal error allowed at each timestep).

We assume that the test particle is moving around Saturn in the vicinity of the orbit of Pandora. The physical parameters of Saturn (mass, radius and oblateness) are given in table I (Campbell and Anderson, 1989).

Table I. Saturn's physical parameters

GM_p $(km^3.s^{-2})$	3.7931272×10^7
R_p (km)	60330.
J_2	16298×10^{-6}
J_4	-915×10^{-6}
J_6	103×10^{-6}

The initial semimajor axis is $a = 141713.0$ km. We consider several initial configurations : a circular equatorial orbit, an eccentric equatorial orbit ($e = 4.5 \times 10^{-3}$), a circular inclined orbit ($I = 0.5^o$), and an eccentric inclined orbit ($e = 4.5 \times 10^{-3}$ and $I = 0.5^o$). Note that in our example the osculating eccentricity of the test particle is $e_0 \sim \frac{3}{2} J_2 (R_p/r)^2 \sim 4.43 \times 10^{-3}$. Initially the test particle is at its periapsis with $\bar{\omega} = \lambda = 0^o$, and if $I \neq 0$, the longitude of the ascending node is $\Omega = 45^o$. We made runs of 10 years. The results are summarized in table II, where are listed the mean values and the relative errors for the geometric semimajor axis and eccentricity and for the osculating inclination. Also given is the radial excursion of the test particle. For each orbit the accuracy obtained is quite good. The biggest relative error is for the inclination; however it remains small for slightly inclined orbits.

For the inclined and/or eccentric orbit, we have also verified that the angles were correctly defined. For instance, when $\lambda - \bar{\omega} = 0$ (passage at the periapsis), the radius r is minimal. When $\lambda - \Omega = 0$ (passage at the node), $z = 0$. Finally, The radial excursion of the particle for an eccentric orbit is $2ae = 2 \times 141713. \times (4.5 \times 10^{-3}) \sim 1275.42$ km, which is quite compatible with the Δr values of table II.

Finally, we plot over one orbital period $T = 0.6285$ days of the test particle, the geometric semimajor axis and the eccentricity for the eccentric equatorial and inclined orbits (figure 2), and the osculating inclination and longitude of ascending node for the eccentric inclined orbit (figure 3). The short-period variations are weak, and even negligible for the geometric semimajor axis and eccentricity. There are also no short-period variations in the longitude of periapsis or in the mean longitude of the particle.

References

Borderies, N. & Longaretti, P.-Y. : 1987 Description and behavior of streamlines in planetary rings. *Icarus* **72**, 593-603.

Table II. Accuracy of the geometric semimajor axis, the geometric eccentricity and the osculating inclination for a run of 10 years and for different initial configurations. $< a >$ is the mean value of the semimajor axis and $\Delta a/a$ the relative error. Same thing for the eccentricity e and the inclination I. Δr is the radial excursion of the test particle.

	$e = 0$ $I = 0^o$	$e = 4.5 \times 10^{-3}$ $I = 0^o$	$e = 0$ $I = 0.5^o$	$e = 4.5 \times 10^{-3}$ $I = 0.5^o$
$< a >$ (km)	141713.0	141712.92	141713.0	141712.92
$\Delta a/a$	7.7×10^{-9}	1.1×10^{-6}	7.0×10^{-7}	1.8×10^{-6}
$< e >$	4.3×10^{-9}	4.5×10^{-3}	7.2×10^{-7}	4.5×10^{-3}
$\Delta e/e$	1.7	3.1×10^{-4}	1.9	6.1×10^{-4}
$< I >$ (°)	5.0×10^{-15}	5.0×10^{-15}	0.5	0.5
$\Delta I/I$	5×10^{-9}	4.5×10^{-3}	4.5×10^{-3}	4.5×10^{-3}
Δr (km)	1.4×10^{-3}	1275.37	0.18	1275.53

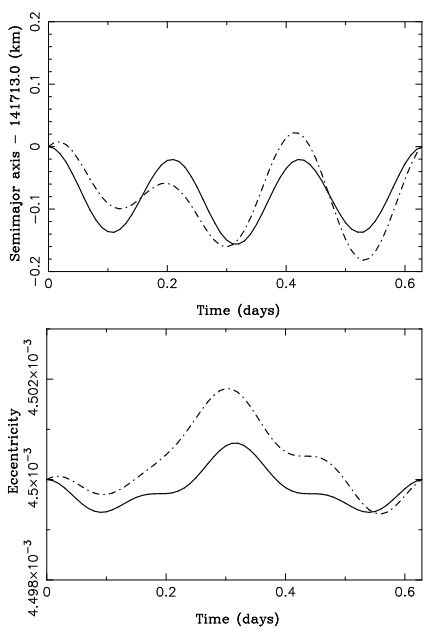

Figure 2. Geometric semimajor axis and eccentricity over an orbital period, for the eccentric and equatorial orbit (solid line) and for the eccentric and inclined orbit (dashed-dotted line). The short-period variations are bigger for the inclined orbit, but remain very small.

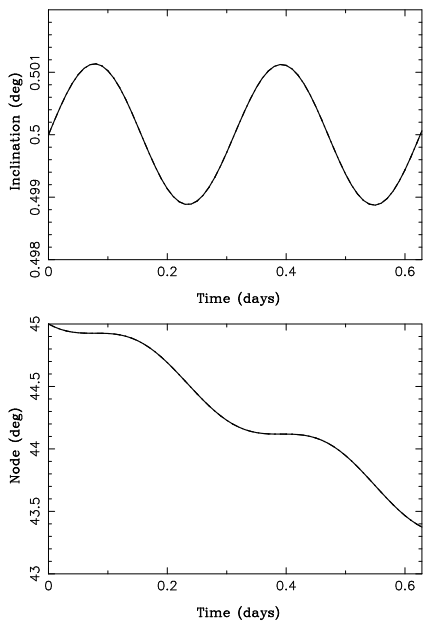

Figure 3. Osculating inclination and longitude of ascending node over an orbital period, for the eccentric and inclined orbit. The planet exerts a torque, due to the oblateness, on the test particle, which causes double-period variations in the inclination and node along the orbit.

Borderies-Rappaport, N. & Longaretti, P.-Y. : 1994 Test particle motion around an oblate planet. *Icarus* **107**, 129-141.

Campbell, J.K. & Anderson, J.D. : 1989 Gravity field of the saturnian system from *Pioneer* and *Voyager* tracking data. *AJ* **97**, 1485-1495.

Chambers, J.E. : 1999 A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, **304**, 793-799.

Everhart, E. : 1985 An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. *In Carusi, A., Valsecchi, G.B., eds., Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution*, Reidel, 185-202.

Longaretti, P.-Y. & Borderies, N. : 1991 Streamline formalism and ring orbit determination. *Icarus* **94**, 165-170.

Bibliographie

Albouy A., *The symmetric central configurations of four equal masses*, Hamiltonian dynamics and Celestial Mechanics, Contemporary Mathematics, 1996, **198**, 131–135.

Albouy A., Llibre J., *Spatial central configurations for the 1 + 4 body problem*, in : *Celestial Mechanics, Dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday*, 2002 p. 1.

Banfield D., Murray N., *A dynamical history of the inner Neptunian satellites*, Icarus, 1992, **99**, 390–401.

Benettin G., Fassò F., Guzzo M., *Nekhoroshev-stability of L_4 and L_5 in the spatial restricted 3-body problem*, Regular and Chaotic Dynamics, 1998, **3**, 56–72.

Binney J., Tremaine S., *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press, 1988.

Borderies N., Goldreich P., *A simple derivation of capture probabilities for the J + 1 : J and J + 2 : J orbit-orbit resonance problems*, Celest. Mech., 1984, **32**, 127–136.

Borderies N., Goldreich P., Tremaine S., *Unsolved problems in planetary ring dynamics*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 713–734.

Borderies N., Goldreich P., Tremaine S., *The formation of sharp edges in planetary rings by nearby satellites*, Icarus, 1989, **80**, 344–360.

Borderies N., Longaretti P.Y., *Description and behavior of streamlines in planetary rings*, Icarus, 1987, **72**, 593–603.

Borderies-Rappaport N., Longaretti P., *Test particle motion around an oblate planet*, Icarus, 1994, **107**, 129.

Bosh A.S., Rivkin A.S., *Observations of Saturn's inner satellites during the May 1995 ring-plane crossing*, Science, 1996, **272**, 518–521.

Brophy T.G., Esposito L.W., Stewart G.R., Rosen P.A., *Numerical simulation of satellite-ring interactions - Resonances and satellite-ring torques*, Icarus, 1992, **100**, 412–433.

Brosch N., *The 1985 stellar occultation by Pluto*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 1995, **276**, 571–578.

Burns J.A., *Orbital evolution*, IAU Colloq. 28 : Planetary Satellites, 1977 pp. 113–156, pp. 113–156.

Burns J.A., Lamy P.L., Soter S., *Radiation forces on small particles in the solar system*, Icarus, 1979, **40**, 1–48.

Burns J.A., Showalter M.R., Cuzzi J.N., Pollack J.B., *Physical processes in Jupiter's ring - Clues to its origin by Jove*, Icarus, 1980, **44**, 339–360.

Burns J.A., Showalter M.R., Morfill G.E., *The ethereal rings of Jupiter and Saturn*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 200–272.

Burns J.A., Simonelli D. P. Showalter M.R., Hamilton D.P., Porco C.C., Esposito L.W., et al., *Jupiter's Ring-Moon System. In Jupiter : Planet, Satellites and Magnetosphere*, Cambridge Univ. Press, Bagenal, F., Dowling, T. and McKinnon, W. (Eds.), 2004.

Bus S.J., Buie M.W., Schleicher D.G., Hubbard W.B., Marcialis R.L., et al., *Stellar Occultation by 2060 Chiron*, Icarus, 1996, **123**, 478–490.

Campell J.K., Anderson J.D., *Gravity field of the Saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data*, Astron. J., 1989, **97**, 1485–1495.

Canup R.M., Esposito L.W., *Accretion in the Roche zone : Coexistence of rings and ring moons.*, Icarus, 1995, **113**, 331–352.

Chambers J.E., *A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 1999, **304**, 793–799.

Chiang E.I., Goldreich P., *Apse Alignment of Narrow Eccentric Planetary Rings*, Astrophys. J., 2000, **540**, 1084–1090.

Colwell J.E., *The disruption of planetary satellites and the creation of planetary rings*, Planet. Space Sci., 1994, **42**, 1139–1149.

Colwell J.E., Esposito L.W., *A model of dust production in the Neptune ring system*, Geophys. Res. Lett., 1990a, **17**, 1741–1744.

Colwell J.E., Esposito L.W., *A numerical model of the Uranian dust rings*, Icarus, 1990b, **86**, 530–560.

Colwell J.E., Esposito L.W., *Origins of the rings of Uranus and Neptune. I - Statistics of satellite disruptions*, J. Geophys. Res., 1992, **97**, 10227.

Colwell J.E., Esposito L.W., *Origins of the rings of Uranus and Neptune. II - Initial conditions and ring moon populations*, J. Geophys. Res., 1993, **98**, 7387–7401.

Colwell J.E., Esposito L.W., Bundy D., *Fragmentation rates of small satellites in the outer solar system*, J. Geophys. Res., 2000, 17589–17600.

Cooper N.J., Murray C.D., *Dynamical Influences on the Orbits of Prometheus and Pandora*, Astron. J., 2004, **127**, 1204–1217.

Cordeiro R.R., Gomes R.S., Vieira Martins R., *A Mapping for Nonconservative Systems*, Celest. Mech., 1997, **65**, 407–419.

Cuzzi J.N., *Evolution of Planetary Ringmoon Systems*, Earth Moon and Planets, 1995, **67**, 179–208.

Cuzzi J.N., Burns J.A., *Charged particle depletion surrounding Saturn's F ring - Evidence for a moonlet belt ?*, Icarus, 1988, **74**, 284–324.

Cuzzi J.N., Durisen R.H., *Bombardment of planetary rings by meteoroids - General formulation and effects of Oort Cloud projectiles*, Icarus, 1990, **84**, 467–501.

Cuzzi J.N., Espositio L.W., *The rings of Uranus*, Sci. Am., 1987, **257**, 52–66.

Cuzzi J.N., Lissauer J.J., Esposito L.W., Holberg J.B., Marouf E.A., et al., *Saturn's rings - Properties and processes*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 73–199.

Davis D.R., Ryan E.V., *On collisional disruption - Experimental results and scaling laws*, Icarus, 1990, **83**, 156–182.

de Pater I., Gibbard S., Chiang E., Hammel H., Macintosh B., et al., *The dynamic Neptunian ring arcs : gradual disappearance of Liberté and a resonant jump of Courage*, Icarus, 2004, submitted.

de Pater I., Lissauer J., *Planetary Sciences*, Cambridge Univ. Press, 2001.

de Pater I., Showalter M.R., Burns J.A., Nicholson P.D., Liu M.C., et al., *Keck Infrared Observations of Jupiter's Ring System near Earth's 1997 Ring Plane Crossing*, Icarus, 1999, **138**, 214–223.

Dermott S.F., *The 'braided' F-ring of Saturn*, Nature, 1981, **290**, 454–457.

Dermott S.F., Malhotra R., Murray C.D., *Dynamics of the Uranian and Saturnian satellite systems - A chaotic route to melting Miranda ?*, Icarus, 1988, **76**, 295–334.

Dones L., *A recent cometary origin for Saturn's rings ?*, Icarus, 1991, **92**, 194–203.

Dourneau G., *Observations et étude du mouvement des huit premiers satellites de Saturne*, Thèse, Bordeaux, 1987.

Doyle L.R., Dones L., Cuzzi J.N., *Radiative transfer modeling of Saturn's outer B ring*, Icarus, 1989, **80**, 104–135.

Dumas C., Terrile R.J., Smith B.A., Schneider G., *Astrometry and near-infrared photometry of Neptune's inner satellites and ring arcs*, Astron. J., 2002, **123**, 1776–1783.

Dumas C., Terrile R.J., Smith B.A., Schneider G., Becklin E.E., *Stability of Neptune's ring arcs in question*, Nature, 1999, **400**, 733–735.

Duncan M.J., Levison H.F., Lee M.H., *A Multiple Time Step Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters*, Astron. J., 1998, **116**, 2067–2077.

Duncan M.J., Lissauer J.J., *Orbital Stability of the Uranian Satellite System*, Icarus, 1997, **125**, 1–12.

Elliot J.L., Dunham E., Mink D., *The rings of Uranus*, Nature, 1977, **267**, 328–330.

Elliot J.L., Dunham E.W., Bosh A.S., Slivan S.M., Young L.A., et al., *Pluto's atmosphere*, Icarus, 1989, **77**, 148–170.

Esposito L.W., *Structure and evolution of Saturn's rings*, Icarus, 1986, **67**, 345–357.

Esposito L.W., *Understanding planetary rings*, Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 1993, **21**, 487–523.

Esposito L.W., Brahic A., Burns J.A., Marouf E.A., *Particle properties and processes in Uranus' rings*, Uranus, 1991 pp. 410–465, pp. 410–465.

Esposito L.W., Colwell J.E., *Creation of the Uranus rings and dust bands*, Nature, 1989, **339**, 605–607.

Esposito L.W., Colwell J.E., *Neptune's rings and satellite system : Collisional origin and evolution*, Eos : Trans. AGU (abstract), 1992, **73**, 177.

Esposito L.W., Cuzzi J.N., Holberg J.B., Marouf E.A., Tyler G.L., et al., *Saturn's rings - Structure, dynamics, and particle properties*, Saturn, 1984 pp. 463–545, pp. 463–545.

Esposito L.W., Ocallaghan M., West R.A., *The structure of Saturn's rings - Implications from the Voyager stellar occultation*, Icarus, 1983, **56**, 439–452.

Evans M., *The Determination of Orbits from Spacecraft Imaging*, Ph.D. Thesis, Queen Mary College, University of London, 2001.

Everhart E., *An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings*, in : *ASSL Vol. 115 : IAU Colloq. 83 : Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution*, 1985 p. 185.

Ferrari C., Brahic A., *Neptune's Arcs and Narrow Rings : Morphology and Nature*, Bull. Am. Astron. Soc., 1991, **23**, 1178.

Ferrari C., Brahic A., *Azimuthal brightness asymmetries in planetary rings. 1 : Neptune's arcs and narrow rings*, Icarus, 1994, **111**, 193–210.

Foryta D.W., Sicardy B., *The Dynamics of the Neptunian ADAMS Ring's Arcs*, Icarus, 1996, **123**, 129–167.

Franklin F.A., Colombo G., *On the azimuthal brightness variations of Saturn's rings*, Icarus, 1978, **33**, 279–287.

French R.G., Elliot J.L., French L.M., Kangas J.A., Meech K.J., et al., *Uranian ring orbits from earth-based and Voyager occultation observations*, Icarus, 1988, **73**, 349–378.

French R.G., Gierasch P.J., *Waves in the jovian upper atmosphere*, J. Atmos. Sci., 1974, **31**, 1707–1712.

French R.G., McGhee C.A., *HST Astrometry of Saturn's Small Satellites*, Bull. Am. Astron. Soc., 2003, **34**.

French R.G., McGhee C.A., Dones L., Lissauer J.J., *Saturn's wayward shepherds : the peregrinations of Prometheus and Pandora*, Icarus, 2003, **162**, 143–170.

French R.G., Nicholson P.D., Cooke M.L., Elliot J.L., Matthews K., et al., *Geometry of the Saturn system from the 3 July 1989 occultation of 28 SGR and Voyager observations*, Icarus, 1993, **103**, 163–214.

French R.G., Nicholson P.D., Porco C.C., Marouf E.A., *Dynamics and structure of the Uranian rings*, Uranus, 1991 pp. 327–409, pp. 327–409.

Giuliatti Winter S.M., Murray C.D., Gordon M., *Perturbations to Saturn's F-ring strands at their closest approach to Prometheus*, Planet. Space Sci., 2000, **48**, 817–827.

Goldreich P., *An explanation of the frequent occurrence of commensurable mean motions in the solar system*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 1965, **130**, 159.

Goldreich P., *Puzzles and Prospects in Planetary Ring Dynamics (lecture)*, in : *IAU Symp. 152 : Chaos, Resonance, and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System*, 1992 p. 65.

Goldreich P., Rappaport N., *Chaotic motions of prometheus and pandora*, Icarus, 2003a, **162**, 391–399.

Goldreich P., Rappaport N., *Origin of chaos in the Prometheus-Pandora system*, Icarus, 2003b, **166**, 320–327.

Goldreich P., Rappaport N., Sicardy B., *Single sided shepherding.*, Icarus, 1995, **118**, 414–417.

Goldreich P., Tremaine S., *The excitation and evolution of density waves*, Astrophys. J., 1978a, **222**, 850–858.

Goldreich P., Tremaine S., *Towards a theory for the Uranian rings*, Nature, 1979, **277**, 97–99.

Goldreich P., Tremaine S., *Disk-satellite interactions*, Astrophys. J., 1980, **241**, 425–441.

Goldreich P., Tremaine S., *The origin of the eccentricities of the rings of Uranus*, Astrophys. J., 1981, **243**, 1062–1075.

Goldreich P., Tremaine S., *The dynamics of planetary rings*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 1982, **20**, 249–283.

Goldreich P., Tremaine S., Borderies N., *Towards a theory for Neptune's arc rings*, Astron. J., 1986, **92**, 490–494.

Goldreich P., Tremaine S.D., *The formation of the Cassini division in Saturn's rings*, Icarus, 1978b, **34**, 240–253.

Gorkavyi N.N., *The Arcs Near Neptune as Chains of Epitons in a Continuous Transparent Ring*, Sov. Astron. Lett., 1991, **17**, 428.

Gorkavyi N.N., Taidakova T.A., *Theory of the Neptunian Arcs - Part Two - Dynamics of Epitons in the Ring*, Sov. Astron. Lett., 1991, **17**, 462.

Gorkavyi N.N., Taidakova T.A., Gaftonyuk N.M., *Theory of the Neptunian Arcs - Part One - Stability of an Individual Epiton*, Sov. Astron. Lett., 1991, **17**, 457.

Gozdziewski K., Maciejewski A.J., *On the Gravitational Fields of Pandora and Prometheus*, Earth, Moon, Planets, 1995, **69**, 25–50.

Greenberg R., Davis D., *Stability at potentiel maxima : The L_4 and L_5 points of the restricted three-body problem*, Am. J. Phys., 1978, **46**, 1068.

Grun E., Morfill G.E., Mendis D.A., *Dust-magnetosphere interactions*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 275–332.

Hall G., *Central configurations in the planar 1+n body problem*, Boston University preprint, 1987.

Hamilton D.P., Burns J.A., *Lorentz and gravitational resonances on circumplanetary particles*, Adv. Space Res., 1993, **13**, 241–248.

Hamilton D.P., Burns J.A., *Origin of Saturn's E Ring : Self-Sustained, Naturally*, Science, 1994, **264**, 550–553.

Hanninen J., Porco C., *Collisional Simulations of Neptune's Ring Arcs*, Icarus, 1997, **126**, 1–27.

Harper D., Taylor D.B., *The orbits of the major satellites of Saturn*, Astron. Astrophys., 1993, **268**, 326–349.

Harris A.W., *The origin and evolution of planetary rings*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 641–659.

Henrard J., Lemaitre A., *A second fundamental model for resonance*, Celest. Mech., 1983, **30**, 197–218.

Horanyi M., Porco C.C., *Where exactly are the arcs of Neptune ?*, Icarus, 1993, **106**, 525.

Horn L.J., Hui J., Lane A.L., Colwell J.E., *Observations of Neptunian rings by Voyager Photopolarimeter Experiment*, Geophys. Res. Lett., 1990, **17**, 1745–1748.

Hubbard W.B., Brahic A., Sicardy B., Elicer L.R., Roques F., et al., *Occultation detection of a Neptunian ring-like arc*, Nature, 1986, **319**, 636–640.

Hubbard W.B., Hunten D.M., Dieters S.W., Hill K.M., Watson R.D., *Occultation evidence for an atmosphere on Pluto*, Nature, 1988, **336**, 452–454.

Hubbard W.B., Hunten D.M., Reitsema H.J., Brosch N., Nevo Y., et al., *Results for Titan's atmosphere from its occultation of 28 Sagittarii*, Nature, 1990, **343**, 353–355.

Hubbard W.B., Sicardy B., Miles R., Hollis A.J., Forrest R.W., et al., *The occultation of 28 SGR by Titan*, Astron. Astrophys., 1993, **269**, 541–563.

Jacobson R.A., Owen W.M., *The orbits of the inner Neptunian satellites from Voyager, Earth-based and Hubble Space Telescope observations*, Astron. J., 2004, submitted.

Jacobson R.A., Riedel J.E., Taylor A.H., *The orbits of Triton and Nereid from spacecraft and Earth-based observations*, Astron. Astrophys., 1991, **247**, 565–575.

Julian W.H., Toomre A., *Non-Axisymmetric Responses of Differentially Rotating Disks of Stars*, Astrophys. J., 1966, **146**, 810.

Kolvoord R.A., Burns J.A., Showalter M.R., *Periodic features in Saturn's F ring - Evidence for nearby moonlets*, Nature, 1990, **345**, 695–697.

Laskar J., Robutel P., *High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems*, Celest. Mech., 2001, **80**, 39–62.

Levison H.F., Duncan M.J., *The long-term dynamical behavior of short-period comets*, Icarus, 1994, **108**, 18–36.

Lin D.N.C., Papaloizou J.C.B., Ruden S.P., *On the confinement of planetary arcs*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 1987, **227**, 75–95.

Lissauer J.J., *Shepherding model for Neptune's arc ring*, Nature, 1985, **318**, 544.

Lissauer J.J., Goldreich P., Tremaine S., *Evolution of the Janus-Epimetheus coorbital resonance due to torques from Saturn's rings*, Icarus, 1985, **64**, 425–434.

Lissauer J.J., Peale S.J., *The production of 'braids' in Saturn's F ring*, Icarus, 1986, **67**, 358–374.

Lissauer J.J., Peale S.J., Cuzzi J.N., *Ring torque on Janus and the melting of Enceladus*, Icarus, 1984, **58**, 159–168.

Lissauer J.J., Squyres S.W., Hartmann W.K., *Bombardment history of the Saturn system*, J. Geophys. Res., 1988, **93**, 13776–13804.

Longaretti P., Borderies N., *Streamline formalism and ring orbit determination*, Icarus, 1991, **94**, 165–170.

Malhotra R., *A mapping method for the gravitational few-body problem with dissipation*, Celest. Mech., 1994, **60**, 373–385.

Manfroid J., Haefner R., Bouchet P., *New evidence for a ring around Neptune*, Astron. Astrophys., 1986, **157**, L3–L5.

Marchis F., Urata R., de Pater I., Gibbard S., Hammel H.B., et al., *Neptunian Satellites observed with Keck AO system*, AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting, 2004, **35**.

Marley M.S., Hubbard W.B., Porco C.C., *Neptune Ring Arc Confinement and Planetary Oscillation Modes*, Bull. Am. Astron. Soc., 1989, **21**, 913.

Marley M.S., Porco C.C., *Planetary acoustic mode seismology - Saturn's rings*, Icarus, 1993, **106**, 508.

McGhee C.A., *Comet Shoemaker-Levy's 1994 collision with Jupiter and Saturn's 1995 ring plane crossings*, Ph.D. Thesis, 2000.

McGhee C.A., Nicholson P.D., French R.G., Hall K.J., *HST Observations of Saturnian Satellites during the 1995 Ring Plane Crossings*, Icarus, 2001, **152**, 282–315.

Meyer-Vernet N., Sicardy B., *On the physics of resonant disk-satellite interaction*, Icarus, 1987, **69**, 157–175.

Michel F.C., *Collisionless Saturnian rings*, Planet. Space Sci., 1981, **29**, 1137–1142.

Michel P., Benz W., Richardson D.C., *Disruption of fragmented parent bodies as the origin of asteroid families*, Nature, 2003, **421**, 608–611.

Michel P., Benz W., Richardson D.C., *Catastrophic disruption of pre-shattered parent bodies*, Icarus, 2004, **168**, 420–432.

Michel P., Benz W., Tanga P., Richardson D.C., *Collisions and Gravitational Reaccumulation : Forming Asteroid Families and Satellites*, Science, 2001, **294**, 1696–1700.

Michel P., Tanga P., Benz W., Richardson D.C., *Formation of Asteroid Families by Catastrophic Disruption : Simulations with Fragmentation and Gravitational Reaccumulation*, Icarus, 2002, **160**, 10–23.

Mikkola S., *Practical Symplectic Methods with Time Transformation for the Few-Body Problem*, Celest. Mech., 1997, **67**, 145–165.

Mikkola S., *Non-canonical perturbations in symplectic integration*, Celest. Mech., 1998, **68**, 249–255.

Millis R.L., Wasserman L.H., Franz O.G., Nye R.A., Elliot J.L., et al., *Pluto's radius and atmosphere - Results from the entire 9 June 1988 occultation data set*, Icarus, 1993, **105**, 282.

Moeckel R., *Linear stability of relative equilibria with a dominant mass*, Journal of Dynamics and Differential Equations, 1994, **6**, 35–51.

Molnar L.A., Dunn D.E., *The Mimas 2 :1 Eccentric Corotational Resonance in Saturn's Outer B Ring*, Icarus, 1995, **116**, 397–408.

Morbidelli A., *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*, Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics, by Alessandro Morbidelli. London : Taylor & Francis, 2002, ISBN 0415279399, 2002.

Murray C.D., Dermott S.F., *Solar System Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 2001.

Murray C.D., Evans M.W., Porco C.C., Showalter M.R., *The Orbits of Prometheus, Pandora and Atlas in 1980 and 1981.*, Bull. Am. Astron. Soc., 2000, **32**, 1090.

Murray C.D., Giuliatti Winter S.M., *Periodic collisions between the moon Prometheus and Saturn's F ring*, Nature, 1996, **380**, 139–141.

Murray C.D., Gordon M.K., Giuliatti Winter S.M., *Unraveling the Strands of Saturn's F Ring*, Icarus, 1997, **129**, 304–316.

Namouni F., *Ringlet-satellite interactions*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 1998, **300**, 915–930.

Namouni F., Porco C., *The confinement of Neptune's ring arcs by the moon Galatea*, Nature, 2002, **417**, 45–47.

Nicholson P.D., Cooke M.L., Matthews K., Elias J.H., Gilmore G., *Five stellar occultations by Neptune - Further observations of ring arcs*, Icarus, 1990, **87**, 1–39.

Nicholson P.D., Dones L., *Planetary rings*, Rev. Geophys., 1991, **29**, 313–327.

Nicholson P.D., Hamilton D.P., Matthews K., Yoder C.F., *New observations of Saturn's coorbital satellites*, Icarus, 1992, **100**, 464–484.

Nicholson P.D., Mosqueira I., Matthews K., *Stellar occultation observations of Neptune's rings : 1984-1988.*, Icarus, 1995, **113**, 295–330.

Nicholson P.D., Porco C.C., *A new constraint on Saturn's zonal gravity harmonics from Voyager observations of an eccentric ringlet*, J. Geophys. Res., 1988, **93**, 10209–10224.

Nicholson P.D., Showalter M.R., Dones L., French R.G., Larson S.M., et al., *Observations of Saturn's ring-plane crossing in August and November*, Science, 1996, **272**, 509–516.

Northrop T.G., Connerney J.E.P., *A micrometeorite erosion model and the age of Saturn's rings*, Icarus, 1987, **70**, 124–137.

Owen W.M., Synnot S.P., *Orbits of the ten small satellites of Uranus*, Astron. J., 1987, **93**, 1268–1271.

Owen W.M., Vaughan R.M., Synnott S.P., *Orbits of the six new satellites of Neptune*, Astron. J., 1991, **101**, 1511–1515.

Peale S.J., *Orbital resonances in the solar system*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 1976, **14**, 215–246.

Peale S.J., *Orbital resonances, unusual configurations and exotic rotation states among planetary satellites*, IAU Colloq. 77 : Some Background about Satellites, 1986 pp. 159–223, pp. 159–223.

Pilcher C.B., Chapman C.R., Lebofsky L.A., Kieffer H.H., *Saturu's Rings : Identification of Water Frost*, Science, 1970, **167**, 1372–1373.

Porco C.C., *An explanation for Neptune's ring arcs*, Science, 1991, **253**, 995–1001.

Porco C.C., Cuzzi J.N., Esposito L.W., Lissauer J.J., Nicholson P.D., *The Neptune ring system. Neptune and Triton*, Jan. 6-10, Tucson, Ariz., Abstract book, 1992, 67.

Porco C.C., Goldreich P., *Shepherding of the Uranian rings. I - Kinematics. II - Dynamics*, Astron. J., 1987, **93**, 724–737.

Porco C.C., Nicholson P. D. Cuzzi J.N., Lissauer J.J., Esposito L.W., *Neptune's ring system. In Neptune and Triton*, University of Arizona Press (Cruikshank, D.P. editor), 1995.

Porco C.C., Nicholson P.D., *Eccentric features in Saturn's outer C ring*, Icarus, 1987, **72**, 437–467.

Poulet F., Cruikshank D.P., Cuzzi J.N., Roush T.L., French R.G., *Compositions of Saturn's rings A, B, and C from high resolution near-infrared spectroscopic observations*, Astron. Astrophys., 2003, **412**, 305–316.

Poulet F., Cuzzi J.N., *The Composition of Saturn's Rings*, Icarus, 2002, **160**, 350–358.

Poulet F., Sicardy B., *Dynamical evolution of the Prometheus-Pandora system*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 2001, **322**, 343–355.

Poulet F., Sicardy B., Nicholson P.D., Karkoschka E., Caldwell J., *Saturn's Ring-Plane Crossings of August and November 1995 : A Model for the New F-Ring Objects*, Icarus, 2000, **144**, 135–148.

Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B., *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press, 1986.

Renner S., Sicardy B., *Consequences of the Chaotic Motions of Prometheus and Pandora*, Bull. Am. Astron. Soc., 2003, **34**.

Richardson J.D., Belcher J.W., Zhang M., McNutt R.L., *Low-energy ions near Neptune*, J. Geophys. Res., 1991, **96**, 18993.

Roberts G., *A continuum of relative equilibria in the 5-body problem*, Physica D, 1999, **127**, 141–145.

Roberts G., *Linear stability in the* $1 + n$*-gon relative equilibrium*, Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics, World Scientific Monograph Series in Mathematics, 2000, **6**, 303–330.

Roques F., Moncuquet M., *A Detection Method for Small Kuiper Belt Objects : The Search for Stellar Occultations*, Icarus, 2000, **147**, 530–544.

Roques F., Moncuquet M., Lavillonière N., Auvergne M., Chevreton M., et al., *A Search for Small Kuiper Belt Objects by Stellar Occultations*, Astrophys. J., 2003, **594**, L63–L66.

Roques F., Sicardy B., French R.G., Hubbard W.B., Barucci A., et al., *Neptune's upper stratosphere, 1983-1990 : ground-based stellar occultation observations III. Temperature profiles*, Astron. Astrophys., 1994, **288**, 985–1011.

Rosen P.A., Tyler G.L., Marouf E.A., Lissauer J.J., *Resonance structures in Saturn's rings probed by radio occultation. II - Results and interpretation*, Icarus, 1991, **93**, 25–44.

Saha P., Tremaine S., *Symplectic integrators for solar system dynamics*, Astron. J., 1992, **104**, 1633–1640.

Saha P., Tremaine S., *Long-term planetary integration with individual time steps*, Astron. J., 1994, **108**, 1962–1969.

Salo H., *Numerical simulations of dense collisional systems*, Icarus, 1991, **92**, 367–368.

Salo H., Hänninen J., *Neptune's Partial Rings : Action of Galatea on Self-Gravitating Arc Particles*, Science, 1998, **282**, 1102–1104.

Showalter M.R., *Disentangling Saturn's F Ring. I. Clump orbits and lifetimes*, Icarus, 2004, **171**, 356–371.

Showalter M.R., Burns J.A., *A numerical study of Saturn's F-ring*, Icarus, 1982, **52**, 526–544.

Showalter M.R., Cuzzi J.N., *Physical Properties of Neptune's Ring System*, Bull. Am. Astron. Soc., 1992, **24**, 1029.

Showalter M.R., Dones L., Lissauer J.J., *Interactions between Prometheus and the F Ring*, Bull. Am. Astron. Soc., 1999a, **31**.

Showalter M.R., Dones L., Lissauer J.J., *Revenge of the Sheep : Effects of Saturn's F Ring on the Orbit of Prometheus*, Bull. Am. Astron. Soc., 1999b, **31**.

Shu F.H., *Waves in planetary rings*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 513–561.

Sicardy B., *Etude observationnelle, analytique et numérique des environnements planétaires. Application aux anneaux de Saturne et d'Uranus et aux arcs de Neptune*, Thèse, Université de Paris VII, 1988.

Sicardy B., *Numerical exploration of planetary arc dynamics*, Icarus, 1991, **89**, 197–219.

Sicardy B., *Les anneaux de Neptune*, La recherche, 1994, **25**.

Sicardy B., *Box : What We Learned About Titania*, Sky Telesc., 2002, **104**, 94.

Sicardy B., Brahic A., Ferrari C., Gautier D., Lecacheux J., et al., *Probing Titan's atmosphere by stellar occultation*, Nature, 1990, **343**, 350–353.

Sicardy B., Ferri F., Roques F., Lecacheux J., Pau S., et al., *The Structure of Titan's Stratosphere from the 28 Sgr Occultation*, Icarus, 1999a, **142**, 357–390.

Sicardy B., Lissauer J.J., *Dynamical models of the arcs in Neptune's 63K ring (1989N1R)*, Adv. Space Res., 1992, **12**, 81–95.

Sicardy B., Roddier F., Roddier C., Perozzi E., Graves J.E., et al., *Images of Neptune's ring arcs obtained by a ground-based telescope*, Nature, 1999b, **400**, 731–733.

Sicardy B., Roques F., Brahic A., *Neptune's rings, 1983-1989 : Ground-based stellar occultation observations.I. Ring-like arc detection*, Icarus, 1991, **89**, 220–243.

Sicardy B., Widemann T., Lellouch E., Veillet C., Cuillandre J.C., et al., *Large changes in Pluto's atmosphere as revealed by recent stellar occultations*, Nature, 2003, **424**, 168–170.

Smith B.A., Soderblom L., Batson R.M., Bridges P.M., Inge J.L., et al., *A new look at the Saturn system - The Voyager 2 images*, Science, 1982, **215**, 504–537.

Smith B.A., Soderblom L.A., Banfield D., Barnet C., Beebe R.F., et al., *Voyager 2 at Neptune - Imaging science results*, Science, 1989, **246**, 1422–1449.

Smith B.A., Soderblom L.A., Beebe R., Bliss D., Brown R.H., et al., *Voyager 2 in the Uranian system - Imaging science results*, Science, 1986, **233**, 43–64.

Soter S., *The dust belt of Mars*, CRSR report no.462 (Ithaca, N.Y., Cornell Univ.), 1971.

Stevenson D.J., Harris A.W., Lunine J.I., *Origins of satellites*, IAU Colloq. 77 : Some Background about Satellites, 1986 pp. 39–88, pp. 39–88.

Stewart G.R., Lin D.N.C., Bodenheimer P., *Collision-induced transport processes in planetary rings*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 447–512.

Stooke P.J., *The shapes and surfaces of Prometheus and Pandora*, Earth, Moon, Planets, 1993, **62**, 199–221.

Synnott S.P., Peters C.F., Smith B.A., Morabito L.A., *Orbits of the small satellites of Saturn*, Science, 1981, **212**, 191.

Synnott S.P., Terrile R.J., Jacobson R.A., Smith B.A., *Orbits of Saturn's F ring and its shepherding satellites*, Icarus, 1983, **53**, 156–158.

Taylor D.B., *Horseshoe periodic orbits in the restricted problem of three bodies for a sun-Jupiter mass ratio*, Astron. Astrophys., 1981, **103**, 288–294.

Thomas P., Veverka J., *Neptune's small inner satellites*, J. Geophys. Res., 1991, **96**, 19261.

Thomas P.C., *The shapes of small satellites*, Icarus, 1989, **77**, 248–274.

Tittemore W.C., Wisdom J., *Tidal evolution of the Uranian satellites. I - Passage of Ariel and Umbriel through the 5 :3 mean-motion commensurability*, Icarus, 1988, **74**, 172–230.

Tittemore W.C., Wisdom J., *Tidal evolution of the Uranian satellites. II - an explanation of the anomalously high orbital inclination of Miranda*, Icarus, 1989, **78**, 63–89.

Tremaine S., *On the Origin of Irregular Structure in Saturn's Rings*, Astron. J., 2003, **125**, 894–901.

Vienne A., Duriez L., *TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites.*, Astron. Astrophys., 1995, **297**, 588.

Ward W.R., *On the radial structure of Saturn's rings*, Geophys. Res. Lett., 1981, **8**, 641–643.

Ward W.R., *The solar nebula and the planetesimal disk*, in : *IAU Colloq. 75 : Planetary Rings*, 1984 pp. 660–684.

Wisdom J., Holman M., *Symplectic maps for the n-body problem*, Astron. J., 1991, **102**, 1528–1538.

Wisdom J., Holman M., Touma J., *Symplectic Correctors*, Fields Institute Communications, Vol. 10, p. 217, 1996, **10**, 217.

Yoder C.F., Peale S.J., *The tides of Io*, Icarus, 1981, **47**, 1–35.

Yoder C.F., Synnott S.P., Salo H., *Orbits and masses of Saturn's co-orbiting satellites, Janus and Epimetheus*, Astron. J., 1989, **98**, 1875–1889.

Yoshida H., *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Lett. A, 1990, **150**, 262–268.

Yoshida H., *Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators*, Celest. Mech., 1993, **56**, 27.

Table des figures

1.1 Masses relatives des satellites internes de Saturne 2
1.2 Comparaison des systèmes d'anneaux des quatre planètes géantes 3
1.3 Image des arcs de Neptune prise par la sonde *Voyager 2* 10
1.4 Images *Cassini* de Saturne, Prométhée, Pandore et Epiméthée. 11

2.1 Le problème à trois corps, restreint, plan et circulaire. 15
2.2 Points de Lagrange et équipotentielles 17
2.3 Trajectoires d'une particule test dans un repère tournant avec un satellite de Lagrange 19
2.4 Géométrie d'une résonance de corotation 3 : 2 21
2.5 Lignes de courant de la résonance de Lindblad 7 : 6 24

3.1 Profil radial de luminosité des anneaux de Neptune 31
3.2 Profil de brillance longitudinal des arcs de Neptune 32
3.3 Excursion radiale des arcs observée en fonction de la longitude 42

4.1 Notations pour la dynamique des satellites co-orbitaux 52
4.2 Graphe du potentiel exercé par un satellite sur une particule co-orbitale 53
4.3 Ensemble des configurations d'équilibre pour 3 satellites co-orbitaux 58
4.4 Stabilité des configurations d'équilibre pour 3 satellites co-orbitaux 63
4.5 Configurations d'équilibre linéairement stables pour 3 co-orbitaux avec $m_2 = m_3 = 10^{-2} m_1$ 65
4.6 Configurations d'équilibre linéairement stables pour 4 co-orbitaux avec $m_2 = m_3 = m_4 = 10^{-2} m_1$ 65
4.7 Configurations d'équilibre linéairement stables pour 5 co-orbitaux avec $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 10^{-2} m_1$ 65

5.1 Image des arcs de Neptune (Sicardy et al., 1999b) 70
5.2 Profil des arcs de Neptune (Sicardy et al., 1999b) 70
5.3 Image des arcs de Neptune (Dumas et al., 1999, 2002) 72
5.4 Profil des arcs de Neptune (Dumas et al., 1999, 2002) 72
5.5 Profil des arcs de Neptune (de Pater et al., 2004) 73
5.6 Mouvement de satellites co-orbitaux et de particules test autour de Neptune . . . 77
5.7 Rayons orbitaux des arcs dans le repère tournant avec le satellite co-orbital le plus massif 80
5.8 Angle critique de la résonance de corotation inclinée 42 : 43 avec Galatéa 81
5.9 Angle critique de la résonance de Lindblad 42 : 43 horizontale avec Galatéa . . . 81
5.10 Dérive en longitude moyenne par rapport à la corotation en fonction du temps . 82

6.1 Ecarts en longitude par rapport aux prédictions *Voyager* pour Prométhée et Pandore . . . 93
6.2 Angles critiques de résonance 121 :118 entre Prométhée et Pandore . . . 94
6.3 Angles critiques de résonance entre Prométhée et Epiméthée et entre Pandore et Epiméthée . . . 95

7.1 Densités de Prométhéeet Pandore . . . 104
7.2 Ecarts en longitude par rapport aux prédictions *Voyager* pour les meilleurs ajustements des masses de Prométhée et Pandore . . . 106

8.1 Evolution orbitale de Prométhée et Pandore sous l'effet du couple des anneaux et des forces de marée . . . 112
8.2 Evolution à long terme du moment cinétique de Prométhée, Pandore, Mimas et Téthys sans couple dû aux anneaux . . . 116
8.3 Evolution à long terme du moment cinétique de Prométhée, Pandore, Mimas et Téthys avec couple dû aux anneaux . . . 117
8.4 Evolution à long terme du moment cinétique de Prométhée, Pandore, Janus et Epiméthée sans couple dû aux anneaux . . . 120
8.5 Evolution à long terme du moment cinétique de Prométhée, Pandore, Janus et Epiméthée avec couple dû aux anneaux . . . 121

9.1 Observation de Pluton à l'observatoire d'Itajuba (Brésil) . . . 127
9.2 Trajectoire projetée sur la Terre de l'ombre de Pluton pour l'occultation de P126 A 127
9.3 Article de presse brésilienne du 20 juillet 2002 sur l'occultation par Pluton . . . 128
9.4 Observation de Titan à Sandfontein (Namibie) . . . 130
9.5 Trajectoire sur la Terre du flash central de Titan lors de l'occultation du 14 novembre 2003 . . . 130

A.1 Orbite d'une particule test autour d'un corps central (planète) de masse M_p. . . . 141
A.2 Demi grand-axe et excentricité géométriques d'une particule test sur une période orbitale . . . 149
A.3 Inclinaison et longitude du noeud osculatrices d'une particule test sur une période orbitale . . . 150

B.1 Angles pour définir la position des anneaux de Saturne par rapport à la Terre . . 153

Liste des tableaux

1.1 Liste des anneaux et des satellites planétaires 4

3.1 Caractéristiques des arcs de Neptune 33
3.2 Eléments orbitaux de Galatéa 41
3.3 Moyens mouvements des arcs de Neptune et de Galatéa 41
3.4 Résonances du premier ordre de Galatéa avec les arcs 41

5.1 Moyens mouvements révisés des arcs de Neptune et de Galatéa 73
5.2 Résonances entre les arcs et Galatéa 74
5.3 Paramètres physiques de Neptune 76
5.4 Masses des satellites et conditions initiales pour la simulation de la figure 5.6 . . 77
5.5 Masses des satellites et conditions initiales pour la simulation de la figure 5.7 . . 79

6.1 Paramètres physiques de Saturne 89
6.2 Eléments orbitaux des satellites internes de Saturne 90
6.3 Masses des satellites de Saturne 90
6.4 Conditions initiales de Prométhée et Pandore 92
6.5 Résonances dans le système Prométhée -Pandore 97

7.1 Masses de Prométhée et Pandore 103
7.2 Positions orbitales de Prométhée et Pandore durant l'orbite de la sonde *Cassini* autour de Saturne 107

8.1 Masses et conditions initiales de Téthys, Mimas, Prométhée et Pandore 117
8.2 Résonances avec Janus et Epiméthée au voisinage de Prométhée et Pandore . . . 119
8.3 Masses et conditions initiales de Janus, Epiméthée, Prométhée et Pandore 120

A.1 Paramètres physiques de Saturne 147
A.2 Précision des éléments orbitaux 148

Résumé :

Cette thèse porte tout d'abord sur la dynamique des satellites co-orbitaux. En généralisant le problème des points de Lagrange, des résultats sur l'existence de configurations stationnaires ont été obtenus. Pour N co-orbitaux de masses arbitraires et négligeables devant celle du corps central, l'existence de points d'équilibre dépend de la parité de N. Si N est impair, alors quelles que soient les séparations angulaires entre les satellites, il existe toujours un ensemble de masses qui réalise un équilibre. L'ensemble des solutions physiquement réalistes (masses positives) se restreint à un sous-domaine de séparations angulaires. Pour N pair, des conditions supplémentaires sont à vérifier. Le cas $N = 3$ est traité globalement, en donnant l'ensemble des solutions d'équilibre et leur stabilité. Pour $N > 3$, des méthodes numériques sont présentées.

Ces résultats ont permis d'élaborer un modèle de confinement des arcs de Neptune compatible avec les dernières observations (Dumas et al., 1999; Sicardy et al., 1999b; de Pater et al., 2004) : les arcs sont piégés entre des petits satellites co-orbitaux (de rayons $r \leq 5$ km) en équilibre stable dans l'anneau Adams. La stabilité du système, soumis aux perturbations du satellite Galatéa, a été testée numériquement avec succès. Un scénario de l'origine et de l'évolution d'un tel système est proposé.

Dans un deuxième volet, la dynamique de Prométhée et Pandore est examinée. Des observations *HST* récentes (French et al., 2003) ont révélé des variations brutales et anti-corrélées en moyen mouvement, qui proviennent d'une interaction chaotique entre les deux satellites (Goldreich et Rappaport, 2003a), et qui sont causées par la superposition de 4 résonances de moyen mouvement 121 :118 (Goldreich et Rappaport, 2003b). Nous confirmons ici numériquement le mouvement chaotique en incluant les perturbations des satellites principaux de Saturne. Les masses de Prométhée et Pandore ont été déterminées par ajustement des simulations numériques aux données *HST*, et correspondent à des masses volumiques moyennes de l'ordre de 0.5 g cm^{-3}. Des éphémérides pour Prométhée et Pandore, durant la mission *Cassini* autour de Saturne, sont déduites de ces ajustements. Finalement, des simulations à long terme semblent indiquer que Prométhée et Pandore transfèrent du moment cinétique aux satellites co-orbitaux Janus et Epiméthée, augmentant ainsi le temps de vie du système Prométhée-Pandore.

Discipline :

Astronomie, mention "Dynamique des Systèmes Gravitationnels"

Mots clés :

Résonances ; Mécanique céleste ; Anneaux planétaires, Neptune ; Satellites de Saturne ; Orbites ; Anneaux planétaires, Saturne ; Occultations

Laboratoire :

LESIA (Laboratoire d'Etudes Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique)
Observatoire de Meudon 5, place Jules Janssen 92195 Meudon Cedex
http ://www.lesia.obspm.fr