



HAL
open science

Modélisation et analyse mathématique de problèmes d'interaction fluide-structure

Muriel Boulakia

► **To cite this version:**

Muriel Boulakia. Modélisation et analyse mathématique de problèmes d'interaction fluide-structure. Mathématiques [math]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004. Français. NNT : . tel-00008138

HAL Id: tel-00008138

<https://theses.hal.science/tel-00008138>

Submitted on 20 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ DE
VERSAILLES SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES**

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR en Sciences de l'Université de
Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Muriel BOULAKIA

Titre :

**MODELISATION ET ANALYSE
MATHEMATIQUE DE PROBLEMES
D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE**

Soutenue le 15 Novembre 2004 devant la Commission d'examen :

Mme. Maria Esteban
M. Eduard Feireisl
M. Otared Kavian
M. Benoît Perthame Président du jury
M. Jean-Pierre Puel Directeur de thèse
M. Marius Tucsnak

Après avis des rapporteurs :

M. Eduard Feireisl
M. Michel Pierre

Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon directeur de thèse, Jean-Pierre Puel qui m'a donné la possibilité de découvrir un domaine des mathématiques appliquées très intéressant. Grâce à sa disponibilité constante, j'ai pu bénéficier de ses connaissances scientifiques et de son expérience. J'ai beaucoup apprécié son enthousiasme communicatif qui m'a aidé à mener ce travail à terme. Je le remercie aussi chaleureusement pour ses encouragements et la confiance qu'il m'a accordée. Ces années auront été pour moi particulièrement enrichissantes.

Je suis extrêmement reconnaissante à Eduard Feireisl et Michel Pierre d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs commentaires et suggestions sur la version préliminaire m'ont été très précieux. Les discussions constructives avec Eduard Feireisl durant mon doctorat m'ont également beaucoup apporté.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Maria Esteban, Otared Kavian, Benoît Perthame et Marius Tucsnak en s'intéressant à mon travail et en acceptant de faire partie de mon jury de thèse. Merci en particulier à Otared Kavian et Benoît Perthame dont j'ai suivi les cours et dont j'ai pu apprécier les qualités d'enseignant.

Je tiens à remercier Carlos Conca, Axel Osses et Jorge San Martin pour les travaux menés en commun durant mon séjour au Chili. Merci aussi à Frédéric Hecht, à Céline Grandmont pour les nombreuses discussions éclairantes et à Takeo Takahashi.

Je remercie le laboratoire de mathématiques appliquées pour m'avoir permis de passer trois années agréables, dans de très bonnes conditions de travail. Je remercie aussi les collègues enseignants avec lesquels j'ai établi des relations très instructives et qui m'ont guidé dans mes débuts d'enseignante. Je n'oublie pas non plus Marie-France Thaï pour les multiples services qu'elle m'a rendus, ni tous les doctorants que j'ai cotoyés : ces années auraient été moins appréciées sans une bonne dose de bonne humeur !!

C'est aussi l'occasion pour moi de remercier du fond du cœur mes parents pour leur soutien et leur affection sans limite. Ils ont constamment été à mes côtés et m'ont toujours encouragée à faire ce qui me plaisait. Merci aussi à Laure pour notre complicité et tous nos souvenirs communs.

Enfin, je remercie Sylvain qui partage ma vie. Sa présence m'est tout simplement indispensable.

à mes parents et Laure.

à Sylvain.

MODELISATION ET ANALYSE MATHÉMATIQUE DE PROBLÈMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Résumé

Cette thèse est composée de deux parties traitant de problèmes d'interaction fluide-structure.

Dans la première partie, nous considérons le mouvement d'un solide élastique immergé dans un fluide visqueux incompressible. L'ensemble évolue à l'intérieur d'une cavité fixe bornée. Le mouvement du solide se compose d'un déplacement rigide (translation et rotation) et de déformations élastiques. Nous ajoutons un terme régularisant dans l'équation du mouvement solide afin de contrôler les déformations élastiques dans une norme assez forte. Nous nous intéressons successivement à deux modèles pour la structure élastique : le premier est un modèle simplifié en dimension deux où les équations du mouvement solide sont découplées entre elles. Le second modèle traite un modèle plus complet en dimension trois avec des termes de couplages non linéaires dans les équations du mouvement solide.

Nous montrons alors pour les deux modèles un résultat d'existence de solutions faibles définies tant qu'il n'y a pas de chocs entre la structure et la paroi de la cavité et tant que des conditions de non-interpénétration et de préservation de l'orientation du solide sont satisfaites.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons au mouvement d'un solide élastique immergé dans un fluide visqueux compressible en dimension trois. Nous choisissons un point de vue eulérien pour modéliser le mouvement de la structure élastique. De même que dans la première partie, nous régularisons fortement l'équation du mouvement solide afin d'avoir des estimations supplémentaires sur la déformation élastique. Nous montrons alors un résultat d'existence avec les mêmes conditions sur le temps d'existence que dans la première partie.

Mots clés : Interaction fluide-structure, équations de Navier-Stokes, fluides incompressibles, fluides compressibles, théorie de l'élasticité, existence de solutions faibles.

AMS Classification : 35Q30, 37N15, 74B05, 74B20, 74F10, 76D03, 76N10.

MODELLING AND MATHEMATICAL ANALYSIS OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS

Abstract

This thesis is composed of two parts which deal with fluid-structure interaction problems.

In the first part, we consider the motion of an elastic structure immersed in a viscous incompressible fluid. The fluid and the structure are contained in a fixed bounded set. The displacement of the structure is composed of a rigid displacement (translation and rotation) combined with an elastic deformation. We add a regularizing term in the equation of the solid motion in order to control elastic deformations in a strong enough norm. We deal successively with two models for the elastic structure : the first one is a simplified model in two space dimensions with decoupled solid equations. The second one is a more complete model in three space dimensions with nonlinear coupling terms in the equations of the solid motion.

We obtain for each model an existence result of weak solutions defined as long as no collisions occur and as long as the conditions of non-interpenetration and of preservation of orientation are satisfied.

In the second part, we are interested by the three dimensional motion of an elastic structure immersed in a viscous compressible fluid. We choose an eulerian point of view to model the elastic structure motion. As in the first part, we strongly regularize the equation of the solid motion in order to get additional estimates on the elastic deformations. Then we show an existence result with the same conditions on the existence time as in the first part.

Key words : Fluid-structure interaction, Navier-Stokes equations, incompressible fluids, compressible fluids, elasticity theory, existence of weak solutions.

AMS Classification : 35Q30, 37N15, 74B05, 74B20, 74F10, 76D03, 76N10.

Table des matières

Introduction	11
I Problème d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique	25
1 Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide incompressible-solide élastique en dimension deux. Un premier modèle.	29
1 Présentation du problème	31
2 Formulation variationnelle	33
3 Résultat principal	34
4 Représentation des vitesses	35
5 Problème en dimension finie	36
6 Preuve du théorème principal	37
2 Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide incompressible-solide élastique en dimension trois	41
1 Introduction et notations	43
1.1 Position du problème	43
1.2 Notations	44
1.3 Le modèle	45
1.4 Résultats annexes	48
2 Formulation variationnelle et résultat principal	57
2.1 Estimation d'énergie	57
2.2 Espace fonctionnel où sera cherchée la solution	57
2.3 Formulation variationnelle	58
2.4 Résultat principal	60
3 Représentation des vitesses	61
4 Problème en dimension finie	66
4.1 Le problème linéarisé en dimension finie	66
4.2 Formulation variationnelle	69
4.3 Résolution	71
4.4 Point fixe	73
5 Résultats de compacité	80

5.1	Compacité de la densité	80
5.2	Compacité des vitesses	81
6	Conclusion	90
6.1	Passage à la limite	90
6.2	Prolongement de la solution	98

II Problème d'interaction entre un fluide compressible et une structure élastique 107

1	Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide visqueux compressible-solide élastique	109
1	Introduction et notations	111
1.1	Notations	111
1.2	Le modèle	113
1.3	Estimation d'énergie	116
1.4	Résultats annexes	118
2	Formulation variationnelle et résultat principal	123
3	Résolution du problème approché en dimension finie	127
3.1	Le problème linéarisé en dimension finie	127
3.2	Résolution du problème linéaire	132
3.3	Passage au problème non linéaire en dimension finie	132
3.4	Prolongement de la solution sur un intervalle indépendant de N	134
4	Passage au problème continu	135
4.1	Convergence forte de $(X^N)_{N \in \mathbb{N}}$	135
4.2	Convergence forte de $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$	137
4.3	Convergence forte de $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$	143
4.4	Passage à la limite dans la formulation variationnelle	145
5	Passage à la limite en ϵ	148
5.1	Estimation sur la densité	148
5.2	Passage à la limite	159
5.3	Identification de la pression	162
6	Passage à la limite en δ le coefficient de pression artificielle	168
6.1	Estimation sur la densité	169
6.2	Passage à la limite	173
6.3	Identification de la pression	174
7	Conclusion	181

Introduction

Présentation générale

L'intérêt porté à l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure s'est accru au cours de ces dernières années. La motivation de ces études est de nature très diverse : modélisation, étude théorique (existence de solution faible, régularité et unicité de la solution), résultats qualitatifs (chocs, comportement asymptotique de la solution), étude numérique.

Ces problèmes interviennent dans quantités de phénomènes physiques où une structure rigide ou élastique interagit avec un fluide. Par exemple, dans le cadre de l'aviation civile et militaire, des études et simulations numériques importantes sont menées pour prévoir les caractéristiques d'un avion : flottement d'une aile d'avion soumise à un écoulement, étude de la portance, résistance à l'air... Grâce à l'augmentation de la vitesse de calcul et de la capacité mémoire des ordinateurs, la conception de nouveaux appareils repose de plus en plus sur ces tests numériques. On évite ainsi d'avoir recours à de coûteux tests expérimentaux (catapultage d'une maquette d'avion dans une soufflerie) qui correspondent alors à la dernière étape de la conception de l'appareil.

Toujours dans le cadre de l'aérodynamique (où le fluide est en phase gazeuse), on peut citer les problèmes de l'instabilité d'un pont suspendu sous l'effet de vents forts ou des réfrigérants dans des centrales nucléaires.

Toutes ces situations correspondent au cas où un solide (avion, pont) est immergé dans un fluide. On peut aussi considérer le cas où un fluide évolue à l'intérieur d'une paroi déformable. Dans le domaine des applications, on peut citer l'hémodynamique (étude des écoulements sanguins) : écoulement du sang dans les veines, écoulement particulaire des globules rouges dans le sang... Certaines simulations peuvent, à partir d'images médicales, juger de la nécessité d'une intervention médicale et mieux cibler la nature de l'intervention (risque de rupture d'anévrisme par exemple).

Dans tous les cas, les modèles mathématiques traitent du cadre le plus général où le mouvement du solide est assez important pour que le domaine fluide ne soit pas considéré comme fixe. Le domaine fluide est alors inconnu puisqu'il dépend du domaine occupé par le solide qui est une inconnue du problème. Le problème couplé est ainsi fortement non linéaire et ne peut pas être résolu directement. En général, les études théoriques (résultats d'existence, de régularité...) passent par un argument de point fixe qui permet, soit de découpler le problème (traiter le

problème fluide et le problème solide séparément), soit de linéariser le problème (on se donne une vitesse qui permet de linéariser le problème couplé et, en particulier, de se placer sur un domaine fluide connu). Dans le cadre du problème numérique, pour traiter le couplage de façon implicite, un algorithme de point fixe est usuellement proposé : à chaque itération en temps, on met en œuvre une boucle itérative qui permet de résoudre à chaque étape un problème linéaire en partant d'une extrapolation de la position du domaine solide. On voit donc que les approches sont assez semblables pour traiter les difficultés de ce type de problèmes.

Dans le paragraphe suivant, on présente brièvement les problèmes auxquels on s'intéresse dans le cadre de cette thèse et les équations modélisant ces problèmes. On travaille ici sur deux types de problèmes d'interaction fluide-structure : l'interaction entre une structure élastique et un fluide incompressible qui fait l'objet de la **première partie**, puis l'interaction entre une structure élastique et un fluide compressible qui fait l'objet de la **seconde partie**. Dans les deux derniers paragraphes de l'introduction, on présentera la démarche suivie dans chacune des deux parties.

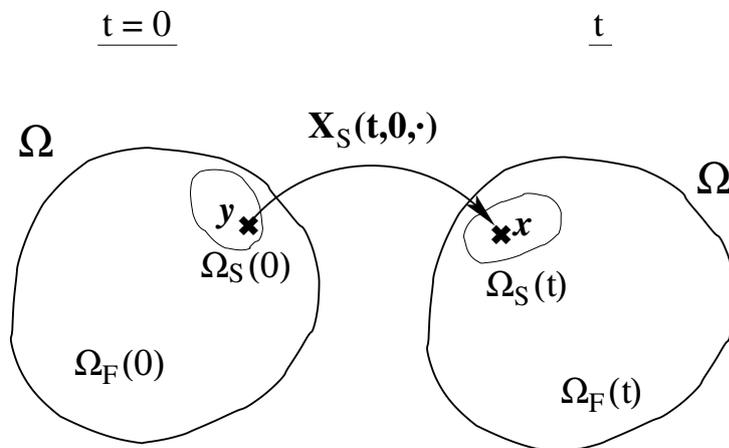
Présentation du problème mathématique

On donne ici une présentation formelle des travaux rassemblés dans ce mémoire. Ainsi, on n'énonce pas de façon précise les résultats obtenus afin d'alléger la présentation. Une formulation rigoureuse est évidemment donnée plus loin dans chaque chapitre.

On considère une structure élastique immergée dans un fluide. La structure élastique est libre de se déplacer (mouvement de translation et de rotation) et se déforme sous l'action du fluide. On ne considère pas ici de force extérieure mais l'ajout de telles forces ne présente pas de difficulté mathématique supplémentaire.

L'ensemble composé du fluide et de la structure évolue dans une cavité fixe bornée assez régulière Ω en dimension deux ou trois.

On note $\Omega_S(0)$ le domaine occupé par le solide à l'instant initial et $\Omega_F(0) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(0)}$ le domaine occupé par le fluide à l'instant initial. On suppose que $\Omega_S(0)$ n'est pas en contact avec la frontière de Ω .



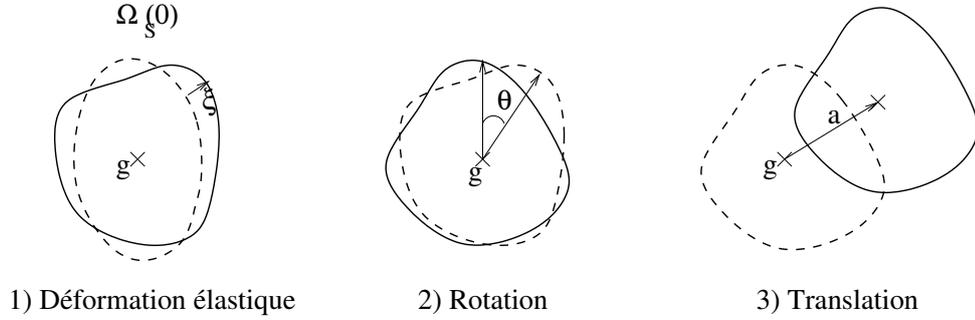
A chaque instant t , on peut déterminer la position x d'une particule solide qui se trouvait en y à l'instant initial. Cette position est déterminée par le flot X_S défini sur $\Omega_S(0)$:

$$x = X_S(t, 0, y).$$

Le flot permet de suivre l'évolution d'une particule au cours du temps à partir de sa position initiale. Le mouvement du solide se décompose en un mouvement rigide et un mouvement élastique :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y), \forall y \in \Omega_S(0), \forall t \in [0, T]$$

où a est le vecteur de translation, Q la matrice de rotation et ξ le vecteur de déplacement élastique. Ici, le point g_0 désigne la position du centre de gravité à l'instant initial.



Pour “séparer” la partie rigide de la partie élastique, on ajoute des conditions d'orthogonalité :

$$\int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0(y) \xi(t, y) dy = 0, \int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0(y) \xi(t, y) \wedge y dy = 0. \quad (1)$$

Ces conditions expriment le fait que le déplacement élastique pur est orthogonal pour la norme L^2 aux translations et aux rotations infinitésimales.

A chaque instant t , le solide occupe le domaine $\Omega_S(t)$ et le fluide occupe le domaine $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$.

Dans la **première partie**, on considère un fluide visqueux incompressible dont le mouvement est régi par les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{cases} \varrho_F(t, x) (\partial_t u_F + (u_F \cdot \nabla) u_F)(t, x) - \operatorname{div} \sigma_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} u_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t) \end{cases} \quad (2)$$

où ϱ_F est la densité volumique du fluide et σ_F le tenseur des contraintes de Cauchy défini par :

$$\sigma_F(t, x) = 2\nu \varepsilon_x(u_F)(t, x) - p(t, x) Id$$

où p est la pression sur la partie fluide, $\nu > 0$ est le coefficient de viscosité et $\varepsilon_x(u_F)$ désigne le gradient symétrisé de u_F :

$$\varepsilon_x(u_F) = \frac{1}{2} (\nabla_x u_F + {}^t \nabla_x u_F)$$

La seconde équation du système (2) exprime l'hypothèse d'incompressibilité du fluide. Elle se traduit par le fait que tout ensemble de particules évoluant suivant la vitesse u garde un volume constant.

Le fluide est supposé inhomogène : la densité volumique du fluide ϱ_F suit la loi de conservation de la masse :

$$\partial_t \varrho_F(t, x) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F)(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t).$$

Si le fluide est incompressible, cette équation est en fait une équation de transport :

$$\partial_t \varrho_F(t, x) + u_F \cdot \nabla \varrho_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t).$$

Afin d'éviter les répétitions, on ne donne pas ici les équations du mouvement solide. On se contente de donner les références des équations dans chacune des parties.

On considère successivement deux modèles pour représenter le mouvement du solide. On s'intéresse tout d'abord à un modèle simplifié en dimension deux où on suppose que les équations portant sur a , Q et ξ sont découplées entre elles. Ce premier chapitre a fait l'objet d'une prépublication [1]. Dans ce mémoire, on ne présente qu'un résumé de la prépublication qui correspond à une note aux comptes rendus [2] : on peut adapter sans grande difficulté les méthodes du second chapitre à ce modèle.

Dans ce premier chapitre, les équations portant sur a et Q ((1.6) et (1.7) dans le chapitre 1 de la première partie) correspondent au principe de la résultante dynamique et au principe du moment dynamique pour un solide rigide (dynamique du point). Ce modèle est adapté au cas où les déplacements élastiques purs sont supposés négligeables devant le déplacement rigide. De plus, on cherche le déplacement élastique ξ satisfaisant les relations d'orthogonalité (1) solution du problème variationnel ((1.9) dans le chapitre 1 de la première partie). Cette équation correspond à la loi d'élasticité linéarisée où on a rajouté un terme de régularisation.

Dans le second chapitre, on s'intéresse au même problème en dimension trois avec un modèle plus complexe pour le mouvement solide. Ce modèle a été introduit par Grandmont, Maday et Métier [9] en dimension deux avec une structure élastique seule. Les équations séparées portant sur a , Q et ξ sont maintenant couplées entre elles et non linéaires. Ce modèle est obtenu en projetant l'équation de la quantité de mouvement du solide sur les composantes rigides (translation et rotation) et les composantes élastiques. On considère alors de façon équivalente les équations portant sur a , Q et ξ ((1.9), (1.10) et (1.11) dans le chapitre 2 de la première partie) ou l'équation portant sur le flot global X_S ((1.7) dans le chapitre 2 de la première partie). Par rapport aux travaux déjà existants portant sur les problèmes d'interaction fluide-structure (dont on donne une liste non exhaustive au début du chapitre), la principale nouveauté réside ici dans le modèle étudié : ce modèle est valide pour un solide ayant de grands déplacements rigides et de petites perturbations élastiques. Ceci correspond donc à un grand nombre de situations physiques où un solide se déplace librement dans un fluide et se déforme légèrement.

Dans tous les cas, ces équations sont complétées par des conditions de couplage. L'interaction entre le fluide et la structure s'exprime à travers deux propriétés : une condition cinématique et une condition dynamique à l'interface entre le fluide et la structure. Comme le domaine global Ω

est fixe, la viscosité du fluide se traduit par la continuité des vitesses à l'interface. La condition dynamique se traduit par le principe d'action-réaction : la différence des tenseurs du fluide et du solide appliquée à la normale est le vecteur nul.

Ici, du fait du caractère incompressible du fluide, le couplage impose une condition de compatibilité sur le mouvement du solide : le volume global du solide doit rester constant puisque l'ensemble fluide-structure occupe un domaine fixe.

Dans tous ces travaux, on rajoute dans l'équation du mouvement solide un terme qui régularise la perturbation élastique. Grâce à ce terme, la perturbation élastique appartient à l'espace $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))$. Ce terme de régularisation est nécessaire car il est important de pouvoir contrôler la norme de ξ dans $W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))$ (l'espace $H^1(0, T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))$ convient aussi). Ceci est lié à trois situations physiques que l'on veut éviter pendant un temps petit :

- les chocs entre le solide et la paroi de Ω . Dans les études théoriques portant sur les problèmes d'interaction fluide-structure, les chocs sont source de problèmes : les résultats d'existence pour des structures élastiques sont, pour le moment, toujours locaux en temps. Pour des résultats d'existence globale avec des structures rigides, on peut citer les articles de Gunzburger, Lee et Seregin [10] (pour un solide seul en dimension trois), de San Martin, Starovoitov et Tucsnak [14] (pour plusieurs solides en dimension deux) et de Feireisl [7] en dimension trois. Si on ne contrôle pas la vitesse du solide dans la norme $L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$, rien n'empêche les chocs instantanés.
- l'interpénétration (lorsque deux parties se confondent). Par rapport à la définition donnée par Ciarlet [3] (chapitre 5, paragraphe 6), on veut garder l'injectivité du flot sur l'adhérence du domaine solide (éviter les chocs entre le solide et lui-même) et pas seulement sur le domaine solide. Il faut ici contrôler le gradient du flot dans $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$.
- la non-préservation de l'orientation qui n'est physiquement pas acceptable.

Dans les deux premières situations, on perd l'inversibilité du flot et on n'est plus capable de revenir à la configuration de référence. Tel que nous procédons, il est important de pouvoir passer d'un point de vue eulérien à un point de vue lagrangien. Pour ces raisons, la solution obtenue est définie tant qu'il n'y a pas de chocs entre le solide et la paroi ou d'interpénétration du solide et tant que l'orientation est préservée.

Ce terme de régularisation est ajouté de façon artificielle pour éviter certaines situations physiques non souhaitables et qui posent des problèmes mathématiques (de bijection entre la configuration de référence et la configuration déformée, de régularité des domaines). Toutefois, la théorie des matériaux multipolaires (voir Ruzicka [13]) introduit avec une justification physique des tenseurs de contrainte comprenant des dérivées en espace de la vitesse d'ordre élevé : notre régularisation correspondrait à un matériau tripolaire.

Dans la **seconde partie**, on s'intéresse à un fluide visqueux compressible. Son mouvement est régi par les équations de Navier-Stokes compressibles :

$$\partial_t(\rho_F u_F)(t, x) + \operatorname{div}(\rho_F u_F \otimes u_F)(t, x) - \operatorname{div} \sigma_F(t, x) = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \quad (3)$$

où σ_F est défini par :

$$\sigma_F(t, x) = \mu_F \nabla u_F(t, x) + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F(t, x) - p(t, x)) \operatorname{Id}. \quad (4)$$

Ici, les coefficients de viscosité λ_F et μ_F vérifient :

$$\mu_F > 0, 3\lambda_F + 2\mu_F > 0$$

et p désigne la pression sur la partie fluide. On se place dans le cadre barotropique : p est uniquement fonction de la densité volumique ϱ_F et la loi d'état donnant la relation entre p et ϱ_F est :

$$p(\varrho_F) = a\varrho_F^\gamma$$

(cadre isentropique) où a est une constante strictement positive et γ est la constante adiabatique qui satisfait :

$$\gamma > \frac{3}{2}.$$

Pour la structure élastique, on choisit de garder le point de vue eulérien qui intervient naturellement sur la partie fluide. Ce point de vue eulérien adopté pour la structure simplifie beaucoup l'écriture du problème et la résolution des problèmes approchés successifs. Ceci permet aussi de définir un espace de fonctions-tests indépendant de la solution cherchée. De même que dans la première partie, on ajoute à l'équation du mouvement solide un terme qui régularise les perturbations élastiques. On considère l'équation de la quantité de mouvement suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_S u_S) + \operatorname{div}(\varrho_S u_S \otimes u_S) + \theta A_3 u_S - \operatorname{div} \sigma_S = 0 \text{ sur } \Omega_S(t) \quad (5)$$

où σ_S est le tenseur de Cauchy qui est défini en fonction du second tenseur de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}_S$ suivant la formule habituelle en théorie de l'élasticité ((1.6) dans la seconde partie) par le biais du flot X_S . La loi considérée ici est la loi de Saint-Venant Kirchhoff qui est une loi non linéaire par rapport au flot X_S (ou par rapport à la déformation élastique) :

$$\hat{\sigma}_S[X_S] = 2\mu_S E(X_S) + \lambda_S \operatorname{tr}(E(X_S)) Id$$

avec :

$$\begin{aligned} E(X_S) &= \frac{1}{2}({}^t\nabla X_S \nabla X_S - Id) \\ &= \frac{1}{2}({}^t(Id + \nabla \xi)(Id + \nabla \xi) - Id) = \frac{1}{2}({}^t\nabla \xi + \nabla \xi + {}^t\nabla \xi \nabla \xi) \end{aligned}$$

et λ_S et μ_S les constantes de Lamé du milieu élastique qui satisfont les inégalités :

$$\mu_S > 0, \lambda_S + 2\mu_S > 0.$$

Pour modéliser le déplacement solide, on ne peut pas considérer la loi d'élasticité linéarisée car, avec cette loi, le système ne satisfait pas d'estimation d'énergie.

Le terme $\theta A_3 u_S$ intervenant dans (5) est un terme de viscosité régularisant du même ordre que dans la première partie : il fournit une régularité $H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0)))$ sur le flot. Même si cette régularisation paraît très forte, l'étude de ce problème nous amène à utiliser des résultats de régularité fins assez récents et non standards. En particulier, on voit qu'à chaque instant, le domaine occupé par le solide $\Omega_S(t)$ est de classe H^3 : l'ouvert n'est donc pas de classe C^2 . A

ce niveau, on a tenu à ne pas ajouter une régularisation plus forte pour des raisons uniquement techniques : comme on l'a détaillé dans le paragraphe précédent, cette régularisation a une justification physique.

Le flot solide X_S est lui-même une inconnue du problème. Pour tout $y \in \Omega_S(0)$, $X_S(\cdot, 0, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, y) = u(t, X_S(t, 0, y)) \\ X_S(0, 0, y) = y. \end{cases}$$

Grâce à la régularisation faite sur la vitesse solide, le flot solide X_S est très régulier et donc les nonlinéarités par rapport au flot du tenseur de Cauchy ne posent pas de problèmes.

Dans ce cadre, on montre aussi un résultat d'existence d'une solution faible définie tant qu'il n'y a pas de chocs ou d'interpénétration du solide et tant que l'orientation est préservée. A notre connaissance, aucun travail n'avait jusqu'à présent traité l'interaction entre un fluide compressible modélisé par l'équation de Navier-Stokes et une structure élastique.

Nous allons maintenant présenter succinctement les méthodes mises en œuvre dans chacune des parties.

Première partie : interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique

Pour obtenir l'existence d'une solution, on procède de la façon suivante : on cherche tout d'abord une solution approchée du problème en dimension finie. Comme on l'a déjà mentionné, on ne peut pas résoudre ce type de problèmes directement. L'espace des fonctions tests dépend de la solution recherchée elle-même, on n'a pas une formulation variationnelle classique. La résolution passe ainsi par une linéarisation du problème puis un argument de point fixe. Pour pouvoir poser le problème linéarisé et définir l'application pour laquelle on cherche un point fixe, on introduit une représentation des vitesses admissibles à partir de vitesses découplées définies sur les configurations de référence $\Omega_S(0)$ et $\Omega_F(0)$. On entend par "vitesse admissible" une vitesse u satisfaisant les propriétés de la solution cherchée :

(i) $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^3 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^3$

(ii) Le flot associé à u satisfait :

$$\begin{aligned} X_S(t, 0, y) &= a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) \text{ sur } \Omega_S(0), \text{ avec } a \in W^{1,\infty}(0, T)^3, \\ Q &\in W^{1,\infty}(0, T; SO_3(\mathbb{R})), \xi \in W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3 \end{aligned}$$

(iii) $\operatorname{div} u = 0$ sur $\Omega_F(t)$.

On reprend à ce niveau la démarche proposée par Desjardins, Esteban, Grandmont et Le Tallec [4]. Pour représenter une telle vitesse, on la décompose en la somme d'une vitesse fluide nulle à l'interface et à divergence nulle et d'une vitesse solide prolongée de façon continue à l'interface par une vitesse à divergence nulle sur $\Omega_F(t)$. On ramène alors ces vitesses aux configurations de référence.

A partir d'une vitesse \tilde{u}^N donnée, on résout ensuite un problème linéarisé et on trouve une vitesse u^N . A l'aide de cette représentation des vitesses, on peut utiliser un argument de point fixe

en appliquant le théorème de Schauder. Le point fixe est alors solution d'un problème non linéaire approché du problème initial. Il satisfait de plus une estimation d'énergie. Le point technique réside dans le passage au problème continu. Il faut montrer des résultats de convergence forte sur la densité (ϱ^N) et la vitesse (u^N). On utilise tout d'abord un résultat de di Perna et Lions [11] qui nous donne la convergence forte de (ϱ^N) dans $\mathcal{C}(0, T; L^p(\Omega))$ pour tout p dans $[1, \infty[$. On montre ensuite une estimation uniforme en N du type :

$$\int_0^{T-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\varrho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\varrho_F^N(t)} u^N(t) \right|^2 dx dt \leq \delta(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$ qui permet d'obtenir un résultat de convergence forte sur $(\sqrt{\varrho^N} u^N)$ dans $L^2((0, T) \times \Omega)$. Pour cela, on prend dans la formulation variationnelle des fonctions tests appropriées. Il faut faire attention à l'écriture complexe de l'espace des fonctions tests en dimension finie qui ne permet pas de prendre directement les termes qu'on veut estimer. Il apparaît des termes de reste qu'on arrive à estimer assez facilement.

Une fois ces résultats de convergence forte obtenus, on passe facilement à la limite dans la formulation variationnelle et dans la loi de conservation de la masse. Ceci permet d'obtenir une solution à notre problème sur un intervalle de temps petit $[0, T_0]$. A cette étape, la restriction à cet intervalle est uniquement liée à la façon dont on procède pour représenter notre vitesse : il faut que le gradient du flot solide reste assez proche de la matrice $Id_{3 \times 3}$. On peut alors réitérer le raisonnement à partir du temps T_0 en repartant d'une nouvelle configuration initiale et finalement obtenir un résultat d'existence tant qu'il n'y a pas de chocs ou d'interpénétration du solide et tant que l'orientation est préservée.

Seconde partie : interaction entre un fluide compressible et une structure élastique

Dans la seconde partie, on montre un résultat d'existence pour une structure élastique immergée dans un fluide compressible. Ce résultat est démontré en adaptant le travail de Feireisl, Novotny et Petzeltova [8] où un fluide compressible seul est étudié. Cette méthode a déjà été adaptée au cas d'une structure rigide par Feireisl [6]. Dans notre travail, des difficultés pour avoir des estimations sur la densité jusqu'au bord du domaine fluide apparaissent venant du fait que l'interface est mobile.

Le schéma d'étude est le suivant : on s'intéresse tout d'abord à un problème régularisé en ajoutant deux termes de régularisation dans les équations du fluide. On considère l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) + \epsilon \nabla u_F \nabla \varrho_F - \operatorname{div} \sigma_F = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \quad (6)$$

où σ_F est toujours défini par (4) mais la pression p est maintenant donnée par :

$$p(\varrho_F) = a \varrho_F^\gamma + \delta \varrho_F^\beta.$$

Ici δ est un coefficient strictement positif et β sera choisi aussi grand que l'on veut. De plus, on rajoute un terme de viscosité dans la loi de conservation de la masse portant sur ϱ_F :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_F}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_F u) = \epsilon \Delta \varrho_F \text{ sur } \Omega_F(t) \\ \frac{\partial \varrho_F}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_F(t) \\ \varrho_F(0, \cdot) = \varrho_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0). \end{cases} \quad (7)$$

Le coefficient ϵ est pris strictement positif. Le terme supplémentaire $\epsilon \nabla u_F \nabla \varrho_F$ qui apparaît dans l'équation (6) permet de garder une estimation d'énergie. Notre système satisfait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho(t) |u(t)|^2 dx + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F(t)^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F(t)^\beta + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla u_F|^2 \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\operatorname{div} u_F|^2 + \theta \int_0^t \|u_S(s)\|_{H^3(\Omega_S(s))}^2 + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X_S(t, 0, y))|^2 dy \\ & + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X_S(t, 0, y))|^2 dy + \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} (a\gamma(\varrho_F)^{\gamma-2} + \delta\beta(\varrho_F)^{\beta-2}) |\nabla \varrho_F|^2 \leq E_0 \end{aligned}$$

où E_0 est l'énergie initiale. On a noté ϱ la densité globale et u la vitesse globale.

On résout tout d'abord ce problème régularisé puis on passe à la limite en ϵ et enfin en δ . Pour la résolution du problème régularisé, comme dans la première partie, on montre tout d'abord l'existence d'une solution approchée en dimension finie en passant par une linéarisation du problème et un argument de point fixe.

Pour les passages à la limite successifs (passage au problème continu, passage à la limite en ϵ puis en δ), les difficultés principales résident dans les estimations sur la densité fluide et l'identification de la pression. Pour le passage à la limite dans les autres termes non linéaires, on raisonne de la façon suivante :

$$\varrho_n \rightharpoonup \varrho \text{ dans } L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)) \text{ et } u_n \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega))^3 \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^3.$$

En utilisant la loi de conservation de la masse, on renforce la première convergence de (ϱ_n) en une convergence forte en temps :

$$\varrho_n \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T; L_w^\gamma(\Omega)).$$

Ceci donne une convergence forte pour (ϱ_n) dans $\mathcal{C}(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Comme (u_n) converge faiblement vers u dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, ceci permet d'identifier la limite de $(\varrho_n u_n)$:

$$\varrho_n u_n \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3.$$

A nouveau, on renforce cette convergence en temps à l'aide, cette fois-ci, de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\varrho_n u_n \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3.$$

A ce niveau-là, on voit que, comme $\gamma > \frac{3}{2}$, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{2\gamma}{\gamma + 1} > \frac{6}{5},$$

et donc par compacité de :

$$\varrho_n u_n \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T; H^{-1}(\Omega))^3.$$

Ceci permet maintenant d'identifier la limite de $\varrho_n u_n \otimes u_n$:

$$\varrho_n u_n \otimes u_n \rightharpoonup \varrho u \otimes u \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)^3.$$

Pour conclure le passage à la limite, il reste donc à identifier la limite en montrant que :

$$\overline{p(\varrho_F)} = p(\varrho_F) \text{ sur } \Omega_F(t)$$

où $\overline{p(\varrho_F)}$ est la limite de $(p(\varrho_{F,n}))$. On procède différemment pour chacun des passages à la limite successifs. Pour passer au problème continu, on montre, grâce au terme de viscosité dans la première équation du système (7), que la suite (ϱ_n) converge fortement dans $L^\beta((0, T) \times \Omega)$ (on utilise une variante du lemme d'Aubin adaptée aux domaines variables). A l'aide de résultats de régularité pour un problème parabolique à coefficients non constants, on montre ensuite que l'équation de conservation de la masse est satisfaite presque partout.

Pour passer à la limite en ϵ , on montre tout d'abord que $(p(\varrho_{F,\epsilon}))$ est bornée dans $L^{\beta+1}((0, T) \times \Omega)$ en utilisant une méthode introduite par Lions [12]. Cette méthode nécessite l'utilisation de résultats de régularité dans L^r sur le problème de Stokes avec un domaine de classe H^3 , ce qui nous amène à affaiblir les hypothèses de résultats déjà existants. On montre ensuite que la limite ϱ vérifie la loi de conservation de la masse au sens des solutions renormalisées :

$$\frac{\partial b(\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div}(b(\varrho)u) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$$

pour toute fonction b dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$b'(z) = 0, \text{ pour tout } z \text{ assez grand.} \quad (8)$$

On fait alors intervenir le flux visqueux effectif défini par :

$$p(\varrho_{F,\epsilon}) - (\lambda_F + 2\mu_F)\operatorname{div} u_{F,\epsilon}$$

et on montre que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_\Omega \varphi^2 (p(\varrho_{F,\epsilon}) - (\lambda_F + 2\mu_F)\operatorname{div} u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} = \int_0^{T_0} \int_\Omega \varphi^2 (\overline{p(\varrho_F)} - (\lambda_F + 2\mu_F)\operatorname{div} u) \varrho_F \quad (9)$$

Ceci permet alors d'identifier $\overline{p(\varrho_F)}$ et $p(\varrho_F)$ à l'aide d'un argument de monotonie.

Pour le passage à la limite en δ , le schéma de démonstration est le même que pour le passage

à la limite en ϵ . Pour obtenir des estimations, des difficultés supplémentaires apparaissent. On introduit une suite de fonctions de troncature T_k et on montre que :

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)\|_{L^{\gamma+1}((0, T_0) \times \Omega)} \leq c$$

à partir d'une estimation du type de (9). Ceci permet d'identifier la limite de la pression et conclut le passage à la limite.

Toutes ces études nécessitent une régularisation forte sur la déformation élastique. Une perspective naturelle serait de passer à une régularisation moins forte en reprenant par exemple, les méthodes développées par Ciarlet (chapitre 6 de [3]) : dans le cadre stationnaire, la solution de l'équation d'élasticité linéarisée avec des conditions de type Dirichlet satisfait pour des données petites la condition de non-interpénétration et de préservation de l'orientation et a une certaine régularité. Il serait intéressant d'adapter ce type de résultats à notre problème, peut-être dans une situation simplifiée.

Bibliographie

- [1] M. BOULAKIA, *Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide visqueux incompressible-solide élastique*, Prépublication 104, UVSQ (2003).
- [2] M. BOULAKIA, *Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **336** No 12 (2003), 985-990.
- [3] P.G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1988).
- [4] B. DESJARDINS, M.J. ESTEBAN, C. GRANDMONT, P. LE TALLEC, *Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model*, Rev. Mat. Complut., **14** (2001), 523-538.
- [5] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511-547.
- [6] E. FEIREISL, *On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal. **167** No 4 (2003), 281-308.
- [7] E. FEIREISL, *On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid*, J. Evol. Equ., **3** No 3 (2003), 419-441.
- [8] E. FEIREISL, A. NOVOTNÝ, H. PETZELTOVÀ, *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech., **3** No 4 (2001), 358-392.
- [9] C. GRANDMONT, Y. MADAY, P. METIER, *Existence of a solution for an unsteady elasticity problem in large displacement and small perturbation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **334** No 6 (2002), 521-526.
- [10] M.D. GUNZBURGER, H.C. LEE, G.A. SEREGIN, *Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions*, J. Math. Fluid Mech., **2** No 3 (2000), 219-266.
- [11] P.L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics*, Oxford Science Publications (1996).
- [12] P.L. LIONS, *Bornes sur la densité pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math., **328** No 8 (1999), 659-662.
- [13] M. RUZICKA, *Multipolar materials*, Workshop on the Mathematical Theory of Nonlinear and Inelastic Material Behaviour, Bonner Math. Schriften, 239, Univ. Bonn, Bonn (1993), 53-64.
- [14] J. SAN MARTIN, V. STAROVOITOV, M. TUCSNAK, *Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid*, Arch. Rational Mech. Anal., **161** No 2 (2002), 93-112.

Première partie

**Problème d'interaction entre un
fluide incompressible et une
structure élastique**

La **première partie** traite des problèmes d'interaction entre une structure élastique et un fluide incompressible qui l'entoure. Comme on l'a mentionné dans l'introduction générale, cette partie s'articule autour de deux chapitres. Les modèles traités dans ces deux chapitres sont différents mais les méthodes mises en œuvre sont similaires. Pour cette raison, on a choisi de présenter rapidement le premier travail en ne donnant ici qu'un résumé et de détailler le second travail. Le premier modèle présenté est un modèle simplifié où les équations du mouvement du solide sont découplées entre elles. Ce modèle n'est pas justifié mais constitue une première approche. Dans le second chapitre, on travaille sur un modèle où les équations du mouvement solide sont non linéaires et couplées entre elles. Ce modèle est obtenu en projetant l'équation de la quantité de mouvement du solide sur les composantes rigides (translation et rotation) et les composantes élastiques.

Chapitre 1

Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide incompressible-solide élastique en dimension deux. Un premier modèle.

Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide incompressible-solide élastique en dimension deux. Un premier modèle.

Ce chapitre a fait l'objet d'une note aux comptes rendus [2] et d'une prépublication [3].

1 Présentation du problème

Sur la partie solide, on cherche le déplacement sous la forme d'un mouvement rigide accompagné de petites perturbations élastiques. Le flot lagrangien X_S s'écrit :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y), \forall y \in \Omega_S(0), \forall t \in [0, T]$$

où $\Omega_S(0)$ est la position du solide à l'instant initial, g_0 représente le centre de gravité du solide à l'instant initial, a la translation, $Q \in SO_2(\mathbb{R})$ la rotation et ξ le déplacement élastique du solide. Ce flot détermine la position du solide et donc aussi du fluide à l'instant t :

$$\Omega_S(t) = X_S(t, 0, \Omega_S(0)) \text{ et } \Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}.$$

Les déplacements élastiques satisfont des relations d'orthogonalité par rapport aux mouvements rigides infinitésimaux :

$$\int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \xi(t, y) dy = 0, \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \xi(t, y) \cdot (y - g_0)^\perp dy = 0. \quad (1.1)$$

On a noté ρ_S^0 la densité volumique initiale du solide et :

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

On suppose ce flot inversible de $\Omega_S(0)$ sur $\Omega_S(t)$ (ce qui sera vérifié par notre solution) et on note $X_S(0, t, \cdot)$ l'inverse. Ceci permet de passer d'un point de vue lagrangien à un point de vue eulérien : la vitesse eulérienne solide est définie :

$$u_S(t, x) = U_S(t, X_S(0, t, x)) = \partial_t X_S(t, 0, X_S(0, t, x)), \forall x \in \Omega_S(t), \forall t \in [0, T] \quad (1.2)$$

avec :

$$X_S(0, t, x) = X_S(t, 0, \cdot)^{-1}(x), \forall x \in \Omega_S(t), \forall t \in [0, T].$$

Enfin, on note :

$$X_S(t, s, x) = X_S(t, 0, X_S(0, s, x)), \forall x \in \Omega_S(s), \forall t, s \in [0, T].$$

D'autre part, sur le domaine fluide, la donnée qui intervient naturellement est u_F , la vitesse eulérienne définie sur $\Omega_F(t)$. On note u la vitesse eulérienne globale et X le flot associé. Les inconnues de notre problème sont a , Q ou ω la vitesse instantanée de rotation associée, ξ , u_F , ρ_F la densité du fluide et p la pression du fluide.

La vitesse fluide u_F satisfait les équations de Navier-Stokes incompressibles et la densité fluide ρ_F la loi de conservation de la masse :

$$\rho_F(t, x) (\partial_t u_F + (u_F \cdot \nabla) u_F)(t, x) - \operatorname{div} \sigma_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t) \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} u_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t) \quad (1.4)$$

$$\partial_t \rho_F(t, x) + \operatorname{div}(\rho_F u)(t, x) = 0, \forall x \in \Omega \quad (1.5)$$

où σ_F désigne le tenseur de Cauchy défini par :

$$\sigma_F(t, x) = 2\nu \varepsilon(u_F)(t, x) - p(t, x) Id.$$

où $\nu > 0$ est le coefficient de viscosité du fluide et $\varepsilon(u_F)$ est le gradient symétrisé de u_F :

$$\varepsilon(u_F) = \frac{1}{2}(\nabla u_F + {}^t \nabla u_F).$$

Sur la partie solide, les équations sont, tout d'abord, les équations du mouvement rigide données par la théorie de la dynamique du point (la loi de conservation de la quantité de mouvement et la loi de conservation du moment cinétique) :

$$m\ddot{a}(t) = \int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_F n_x d\gamma_x \quad (1.6)$$

$$J\dot{\omega}(t) = \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n_x) \cdot (x - a(t))^\perp d\gamma_x \quad (1.7)$$

où m est la masse du solide, J est le moment d'inertie par rapport au centre de masse, n_x la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega_S(t)$. D'autre part, on considère l'équation de l'élasticité linéarisée. Dans notre cas, on a besoin de régulariser cette équation afin d'avoir ξ dans $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^2$. On définit l'espace suivant :

$$\mathcal{E}(\Omega_S(0)) = \left\{ \psi \in H^3(\Omega_S(0))^2 / \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \psi dy = 0, \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \psi \cdot (y - g_0)^\perp dy = 0 \right\} \quad (1.8)$$

et on cherche ξ dans $W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))$ solution du problème variationnel suivant :

$$\forall \eta \in H^2(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0))),$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t \xi \cdot \partial_t^2 \eta - \epsilon \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} (\partial_t \xi, \partial_t^2 \eta)_{H^3(\Omega_S(0))} + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : \nabla \partial_t \eta \\ & = \int_0^T \int_{\partial\Omega_S(0)} (\Sigma_F^1 n_y) \cdot (Q \partial_t \eta) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff Σ_E^2 est défini par :

$$\Sigma_E^2(\xi) = \lambda \text{tr}(\varepsilon(\xi)) Id + 2\mu \varepsilon(\xi)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé du milieu élastique telles que $\lambda + 2\mu > 0$ et $\mu > 0$. De plus, ϵ est un réel strictement positif fixé. Le tenseur Σ_F^1 est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff correspondant à σ_F .

Enfin, on suppose que le fluide est visqueux, celui-ci adhère donc aux parois du domaine Ω et la vitesse est continue à l'interface :

$$u_F(t, x) = \dot{a}(t) + \omega(t)(x - a(t))^\perp + Q(t)\partial_t \xi(t, X(0, t, x)), \forall x \in \partial\Omega_S(t) \quad (1.10)$$

$$u_F(t, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.11)$$

On complète ce système d'équations par la donnée de conditions initiales :

$$a(0) = a^0, \dot{a}(0) = a^1, \omega(0) = \omega^0, Q(0) = Id, \xi(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_S(0), \quad (1.12)$$

$$\partial_t \xi(0, \cdot) = \xi^1 \text{ dans } \Omega_S(0), u_F(0, \cdot) = u_F^0 \text{ dans } \Omega_F(0), \rho_F(0, \cdot) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)} \text{ dans } \Omega \quad (1.13)$$

où $\xi^1 \in H^3(\Omega_S(0))^2$, $u_F^0 \in L^2(\Omega_F(0))^2$, $\rho_F^0 \in L^\infty(\Omega)$ et :

$$\int_{\partial\Omega_S(0)} \xi^1(y) \cdot n_y dy = 0, 0 < M_1 \leq \rho_F^0 \leq M_2 \text{ dans } \Omega_F(0), \text{div } u_F^0 = 0 \text{ dans } \Omega_F(0) \quad (1.14)$$

$$u_F^0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, u_F^0 \cdot n = (a^1 + \omega^0 \wedge (y - g_0) + \xi^1) \cdot n \text{ sur } \partial\Omega_S(0). \quad (1.15)$$

2 Formulation variationnelle

On cherche une solution (ρ_F, u) telle que :

$$(i) \quad u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^2 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2, \rho_F \in L^\infty((0, T) \times \Omega) \quad (2.1)$$

(ii) Le flot associé à u est défini sur Ω et satisfait :

$$X(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) \text{ dans } \Omega_S(0), \text{ avec} \\ a \in W^{1, \infty}(0, T)^2, Q \in W^{1, \infty}(0, T; SO_2(\mathbb{R})), \xi \in W^{1, \infty}(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))^2 \quad (2.2)$$

$$(iii) \quad \text{div } u = 0 \text{ dans } \Omega_F(t) \quad (2.3)$$

$$(iv) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_F + \text{div}(\rho_F u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \rho_F(t = 0) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)} \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

On donne maintenant une expression sous forme variationnelle du problème. On définit tout d'abord l'espace des fonctions tests :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1((0, T) \times \Omega)^2 / v(t, x) = \dot{b}(t) + r(t)(x - a(t))^\perp + Q(t)\partial_t \eta(t, X(0, t, x)) \\ \text{dans } \Omega_S(t), \text{ avec } b \in H^2(0, T)^2, r \in H^1(0, T), \eta \in H^2(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))^2, \\ \text{et } \text{div } v(t, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_F(t), v(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega), \forall t \in [0, T], v(T) = 0\}. \quad (2.5)$$

On remarque que cet espace dépend de la solution elle-même.

Définition 1 :

On dira que (ρ_F, u) est une solution faible du problème défini par les équations (1.6) à (1.13) si les conditions (2.1) à (2.4) sont satisfaites et si la formulation variationnelle suivante est vérifiée : pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
& m \int_0^T \dot{a}(t) \cdot \ddot{b}(t) dt + J \int_0^T \omega(t) \dot{r}(t) dt + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t \xi(t, y) \cdot \partial_t^2 \eta(t, y) dy dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \cdot \partial_t v(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \otimes u(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\
& + \epsilon \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} a_3(\partial_t \xi(t, y), \partial_t^2 \eta(t, y)) dy dt - 2\nu \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx dt \\
& - \lambda \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \text{tr}(\varepsilon(\xi)) \text{tr}(\varepsilon(\partial_t \eta)) dy dt - 2\mu \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \varepsilon(\xi) : \varepsilon(\partial_t \eta) dy dt = -ma^1 \cdot \dot{b}(0) \\
& - J\omega^0 r(0) - \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \xi^1(y) \cdot \partial_t \eta(0, y) dy - \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0(y) u_F^0(y) \cdot v(0, y) dy \\
& - \epsilon \int_{\Omega_S(0)} a_3(\xi_1(y), \partial_t \eta(0, y)) dy. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

3 Résultat principal

Théorème 1 : Soient $\xi^1 \in H^3(\Omega_S(0))^2$, $u_F^0 \in L^2(\Omega_F(0))^2$, $\rho_F^0 \in L^\infty(\Omega)$, $a^0, a^1 \in \mathbb{R}^2$ et $\omega^0 \in \mathbb{R}$ vérifiant les conditions (1.14)-(1.15). On définit :

$$d(t) = d(\partial\Omega_S(t), \partial\Omega) \text{ et } \gamma(t) = \inf_{y \in \Omega_S(0)} |\det \nabla X_S(t, 0, y)|$$

et on suppose que $d(0) > 0$. Alors, il existe au moins un couple (ρ_F, u) solution faible du problème (1.6)-(1.13) définie sur $(0, T)$ où :

$$T = \sup\{t > 0 / d(t) > 0, \gamma(t) > 0 \text{ et } X_S(t, 0, \cdot) \text{ injective}\}$$

(on a une minoration explicite de T par une constante strictement positive dépendant des données et de ϵ).

De plus, cette solution vérifie l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m |\dot{a}(t)|^2 + \frac{1}{2} J |\omega(t)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t \xi(t, y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(t)} \rho_F(t, x) |u_F(t, x)|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \epsilon \|\partial_t \xi(t, \cdot)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\text{tr}(\varepsilon(\xi(t, y)))|^2 dy + \mu \int_{\Omega_S(0)} |\varepsilon(\xi(t, y))|^2 dy \\
& + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\varepsilon(u_F(s, x))|^2 dx ds \leq E_0 \tag{3.1}
\end{aligned}$$

où E_0 est l'énergie à l'instant initial.

A partir de maintenant, on considère un temps $T > 0$ tel que :

$$d(t) > \alpha, \gamma(t) > \beta, \forall t \in [0, T] \text{ avec } \alpha > 0, \beta > 0.$$

Ceci est possible grâce à l'estimation d'énergie (3.1).

4 Représentation des vitesses

On va représenter n'importe quelle vitesse u satisfaisant les propriétés (2.1) à (2.4) par des vitesses définies sur les configurations de référence. On reprend ici la méthode introduite par Desjardins, Esteban, Grandmont et Le Tallec [4].

On se donne des éléments (w_F, a, Q, ξ) tels que :

* $w_F \in Y_0$ où Y_0 est défini par :

$$Y_0 = \{w_F \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_F(0)))^2 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega_F(0)))^2 / \operatorname{div} w_F = 0 \text{ dans } \Omega_F(0)\}$$

* $(a, Q, \xi) \in Y_1$ où Y_1 est défini par :

$$Y_1 = \{(a, Q, \xi) \in W^{1, \infty}(0, T)^2 \times W^{1, \infty}(0, T; SO_2(\mathbb{R})) \times W^{1, \infty}(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))^2 / \|\xi\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^2} \leq \kappa\}$$

où κ sera déterminé plus loin.

A partir de (a, Q, ξ) donné dans Y_1 , on peut définir un flot. Du fait des déformations élastiques, le volume du domaine solide $\Omega_S(t)$ déterminé par ce flot peut varier au cours du temps. Ceci n'est pas compatible avec la présence d'un fluide incompressible sur $\Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$. Ainsi, on ajoute à ce flot un terme de dilatation ou de compression du volume du solide qui va équilibrer les variations de volume dues aux déformations élastiques. Soit $\eta \in H^3(\Omega_S(0))^2$ un relèvement de la normale unitaire extérieure sur $\partial\Omega_S(0)$. On définit ensuite :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)(\xi(t, y) + \lambda(t)\eta(y)), \forall y \in \Omega_S(0)$$

où $\lambda(t)$ est défini par la condition suivante de conservation de volume :

$$|\Omega_S(t)| = |\Omega_S(0)| \iff \int_{\Omega_S(0)} \det \nabla X_S(t, 0, y) dy = |\Omega_S(0)|, \forall t \in [0, T]. \quad (4.1)$$

Ceci est possible à condition de prendre κ assez petit d'après le théorème d'inversion locale. On peut aussi supposer que κ est assez petit pour que $X_S(t, 0, \cdot)$ soit inversible de $\Omega_S(0)$ sur $\Omega_S(t)$. Ceci nous permet de définir u_S la vitesse eulérienne correspondante sur $\Omega_S(t)$. Ensuite, on prolonge u_S par $u_{S,p}$ définie sur Ω par un problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta u_{S,p} + \nabla q & = 0 & \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} u_{S,p} & = 0 & \Omega_F(t) \\ u_{S,p} & = u_S & \partial\Omega_S(t) \\ u_{S,p} & = 0 & \partial\Omega \cap \partial\Omega_F(t) \end{cases}$$

avec $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$. Ceci possible grâce à (4.1) qui assure que :

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} u_s \cdot n d\gamma = 0.$$

De plus, en adaptant les arguments de [1], on obtient un résultat de régularité sur les problèmes de Stokes à frontière peu régulière qui donne $u_{S,p} \in L^\infty(0, T; W^{2,4}(\Omega))^2$. Pour finir, on note $X_{S,p} \in W^{1,\infty}((0, T) \times \Omega)^2$ le flot associé à $u_{S,p}$.

D'autre part, on peut étendre w_F dans Ω par 0 et on note X_F le flot associé à w_F . On définit alors :

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \Omega, X(t, 0, y) = X_{S,p}(t, 0, X_F(t, 0, y))$$

ainsi que u la vitesse eulérienne associée. On vérifie facilement que u satisfait les propriétés (2.1) à (2.3). De cette façon, on a donné une représentation d'une vitesse compatible avec le mouvement solide et le mouvement fluide. De plus, un résultat de di Perna-Lions [5] donne l'existence de ρ_F solution de (2.4). On note Θ l'application qui à (w_F, a, Q, ξ) associe u .

5 Problème en dimension finie

Nous allons montrer l'existence d'une solution approchée pour notre problème. Pour cela, nous résoudrons d'abord un problème linéarisé en dimension finie pour la vitesse. La densité, elle, est déterminée directement comme solution de (2.4). Ensuite, grâce à la représentation des vitesses introduite au paragraphe précédent, on passera au problème non linéaire en dimension finie par un argument de point fixe.

Soient $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ une base de $\{\varphi \in H_0^1(\Omega_F(0))^2 / \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ sur } \Omega_F(0)\}$ et $(\psi_i)_{i \geq 0}$ une base orthonormale de $\mathcal{E}(\Omega_S(0))$. On se donne un élément $(\tilde{w}_F^N, \tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}^N)$ de $Y_0 \times Y_1$ défini par :

$$\tilde{w}_F^N(t, \cdot) = \sum_{i=1}^N \tilde{\gamma}_i(t) \varphi_i, \quad \tilde{\xi}^N(t, \cdot) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i(t) \psi_i \quad \text{avec} \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \kappa.$$

Alors, on peut construire $\tilde{u}^N = \Theta(\tilde{w}_F^N, \tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}^N)$ et $\tilde{\rho}_F^N$ la densité volumique associée à \tilde{u}^N . De cette façon, on linéarise la formulation variationnelle en dimension finie en remplaçant a, Q et X par \tilde{a}^N, \tilde{Q}^N et $\tilde{X}_{S,p}^N$ dans la définition de l'espace des fonctions tests et en remplaçant $\rho_F, \Omega_F(t)$ et $u \otimes u$ par $\tilde{\rho}_F^N, \Omega_F^N(t)$ et $\tilde{u}^N \otimes \tilde{u}^N$ dans la formulation faible (2.6).

Il faut maintenant résoudre un problème classique avec comme inconnues a^N, Q^N, γ_i et α_i pour $1 \leq i \leq N$. On résout alors facilement ce système d'équations différentielles ordinaires. Ensuite, pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder, on a besoin de garder des déplacements élastiques petites i.e. :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \kappa.$$

Grâce à l'estimation d'énergie satisfaite par notre solution approchée, cette condition est vérifiée pendant un intervalle de temps petit $[0, T_0]$ où T_0 est défini par :

$$T = T_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{2E_0}} \kappa.$$

On peut alors appliquer le théorème de Schauder sur $[0, T_0]$, le résultat de compacité résultant immédiatement du système différentiel. Ce point fixe satisfait :

$$u^N = \Theta(w_F^N, a^N, Q^N, \xi^N) \text{ avec } w_F^N(t, \cdot) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) \varphi_i, \xi^N(t, \cdot) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \psi_i$$

et il est solution de l'approximation en dimension finie de notre problème.

6 Preuve du théorème principal

Afin de passer à la limite quand N tend vers l'infini, il faut montrer des résultats de compacité. La convergence forte de $(\rho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est obtenue directement grâce à un résultat de di Perna-Lions [6] qui donne la convergence forte de $(\rho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers une fonction ρ_F dans $\mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega))$ pour tout $1 \leq p < \infty$. Pour la compacité des vitesses, on montre l'estimation suivante sur $\left(\sqrt{\rho_F^N} u^N \right)_{N \in \mathbb{N}}$:

$$\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) \right|^2 dx dt \leq \delta(h) \quad (6.1)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$. Pour montrer cette inégalité, l'idée est d'utiliser des fonctions tests admissibles proches de $u^N(t+h) - u^N(t)$. Nous n'expliquons pas ici les détails de la preuve qui est assez technique. Grâce à l'estimation (6.1), on obtient la convergence forte de $\left(\sqrt{\rho_F^N} u^N \right)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)^2$ vers $\sqrt{\rho_F} u$ où u est la limite faible de $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$. On peut ensuite passer à la limite dans le problème variationnel et on obtient une solution faible du problème défini par les équations (1.6) à (1.13) définie sur $[0, T_0]$ qui satisfait l'estimation d'énergie (E.E.). Pour terminer, il faut prolonger notre solution jusqu'au temps T défini par le **théorème 1**. Transportant la solution sur les nouveaux domaines de référence $\Omega_S(T_0)$ et $\Omega_F(T_0)$, on peut reprendre le même travail et prolonger notre solution à l'intervalle $[0, T_0 + A]$ pour un $A > 0$ fixé. Rétirant le processus, on atteint alors le temps T voulu.

Bibliographie

- [1] J. A. BELLO, *L^r regularity for the Stokes and Navier-Stokes Problems*, Ann. Math. Pura Appl. **170** (1996), 187-206.
- [2] M. BOULAKIA, *Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **336** No 12 (2003), 985-990.
- [3] M. BOULAKIA *Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide visqueux incompressible-solide élastique*, Prépublication 104, UVSQ (2003).
- [4] B. DESJARDINS, M.J. ESTEBAN, C. GRANDMONT, P. LE TALLEC, *Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model*, Rev. Mat. Complut., **14** (2001), 523-538.
- [5] R.J. DI PERNA, P.-L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., **98** (1989), 511-547.
- [6] P.L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics*, Oxford Science Publications (1996).

Chapitre 2

**Existence d'une solution faible pour
un problème d'interaction fluide
incompressible-solide élastique en
dimension trois**

Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide incompressible-solide élastique en dimension trois

Ce chapitre a fait l'objet d'un article [5] qui est actuellement soumis.

1 Introduction et notations

1.1 Position du problème

On s'intéresse au mouvement de solides immergés dans un fluide en dimension trois. L'ensemble solide-fluide évolue dans une cavité fixe bornée Ω .

Le fluide est un fluide visqueux incompressible et son mouvement est régi par les équations de Navier-Stokes. On considère que les solides ont de grands déplacements rigides (i.e. translation et rotation) et de petits déplacements élastiques.

Le but de cette partie est de montrer un résultat d'existence de solutions pour des déformations élastiques régularisées. On obtient l'existence globale sous réserve qu'il n'y ait pas de chocs et que les perturbations élastiques ne soient pas trop grandes.

De nombreux articles traitent de ce type de problèmes. Dans le cas où le domaine fluide est supposé fixe, on fait référence à Lions [20] pour un résultat d'existence de solutions faibles. Avec des domaines fluides dépendant du temps, on peut consulter par exemple Conca, San Martin et Tucsnak [10], Desjardins et Esteban [12], Gunzburger, Lee et Seregin [18], Hoffmann et Starovoitov [19], Serre [26] qui s'intéressent aux problèmes d'interaction entre un fluide et une structure rigide. L'article de San Martin, Starovoitov et Tucsnak [25] montre un résultat d'existence globale en dimension deux pour des solides rigides. Pour obtenir l'existence de solutions au-delà des chocs, ils prouvent qu'il ne peut pas y avoir de chocs entre deux solides ou entre un solide et la frontière au sens classique : deux solides qui s'entrechoquent arrivent avec une vitesse et une accélération relatives nulles (et un solide qui rentre en collision avec la frontière arrive avec une vitesse et une accélération nulles). Les chocs ne provoquent donc pas une variation brusque de la vitesse en temps. Feireisl [16] montre le même résultat mais cette fois-ci en dimension trois. Toujours dans le cas de structures rigides, on peut se référer aux articles de Takahashi [29] et Takahashi et Tucsnak [30] pour des résultats d'existence de solutions fortes et de régularité de la solution.

D'autres articles s'intéressent à l'étude qualitative de problèmes d'interaction fluide-structure pour des modèles simplifiés : l'article [22] de Munnier et Zuazua s'intéresse au comportement asymptotique en dimension quelconque. Des résultats de contrôlabilité en dimension 1 sont montrés par Doubova et Fernandez-Cara [15] et par Zhang et Zuazua [32] (voir aussi les références citées dans ces articles).

L'article de Desjardins, Esteban, Grandmont et Le Tallec [13] donne un résultat d'existence tant qu'il n'y a pas de chocs pour des solides ayant des déplacements qui se décomposent en une somme finie de modes propres. Dans cet article, les équations modélisant l'évolution du solide sont valides pour des déplacements rigides petits.

Dans l'article de Chambolle, Desjardins, Esteban et Grandmont [8], on trouve un résultat d'existence de solution faible pour une plaque en flexion occupant une partie de la frontière fluide. En tirant profit du caractère transverse de la perturbation élastique, ils exigent une régularisation sur la perturbation élastique moins forte que dans le travail qu'on présente ici. L'article de Beirao da Veiga [2] montre un résultat d'existence forte de solutions dans le même cadre.

On suppose que les domaines Ω et $\Omega_S(0)$ sont réguliers, que Ω est connexe et que la distance entre le solide et la frontière de Ω est strictement positive.

On peut déjà remarquer que le volume global des solides doit rester constant étant donné que l'hypothèse d'incompressibilité impose au volume du fluide de rester constant.

1.2 Notations

Pour des raisons de lisibilité, on considère qu'on a un seul solide plutôt que plusieurs, ceci évitera d'avoir des indices sur les inconnues de la partie solide. On conviendra aussi d'utiliser la variable y sur les domaines de référence et la variable x sur les domaines évoluant avec le temps.

Sur la partie solide, on considère le flot X_S . Il s'écrit :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y), \quad \forall y \in \Omega_S(0), \quad \forall t \in [0, T]$$

où $\Omega_S(0)$ est la position du solide à l'instant initial, g_0 représente le centre de gravité du solide à l'instant initial, a la translation, $Q \in SO_3(\mathbb{R})$ la rotation et ξ le déplacement élastique du solide. Le vecteur $X_S(t, 0, y)$ donne la position à l'instant t de la particule qui se trouvait en y à l'instant initial. Le point de vue est lagrangien, on suit l'évolution d'une particule. Ce flot X_S permet de définir :

$$\Omega_S(t) = X_S(t, 0, \Omega_S(0)) \quad \text{et} \quad \Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$$

qui sont respectivement le domaine occupé par la partie solide et par la partie fluide. Pour exprimer le fait que le mouvement élastique ne "contient" pas de mouvement rigide, on suppose que :

$$\int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \xi(t, y) dy = 0, \quad \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \xi(t, y) \wedge y dy = 0 \quad (1.1)$$

où ρ_S^0 est la densité volumique du solide à l'instant initial.

On suppose que le flot X_S est inversible (ceci sera vérifié par la solution que l'on va construire), on note $X_S(0, t, \cdot)$ son inverse défini sur $\Omega_S(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. On définit ainsi à partir de là :

$$X_S(t, s, \cdot) = X_S(t, 0, X_S(0, s, \cdot)) \quad \text{sur} \quad \Omega_S(s), \quad \text{pour tout } t, s \in [0, T].$$

Le vecteur $X_S(t, s, z)$ donne la position à l'instant t de la particule qui se trouvait en z à l'instant s . On note aussi $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur-vitesse instantanée de rotation qui est donné par la formule

suivante :

$$Q'(t)Q(t)^{-1}(x - a(t)) = \omega(t) \wedge (x - a(t)), \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

A partir du flot X_S , on peut définir U_S la vitesse lagrangienne et u_S la vitesse eulérienne donnée par :

$$\begin{aligned} u_S(t, x) &= \partial_t X_S(t, 0, X_S(0, t, x)), \forall x \in \Omega_S(t), \forall t \in [0, T] \\ &= \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t)\partial_t \xi(t, X_S(0, t, x)) \end{aligned}$$

Sur la partie fluide, le point de vue est eulérien : la vitesse eulérienne u_F est la donnée naturelle qui intervient. Pour finir, on définit la vitesse eulérienne globale u sur Ω :

$$u = \begin{cases} u_S \text{ sur } \Omega_S(t) \\ u_F \text{ sur } \Omega_F(t) \end{cases}$$

et X le flot associé à u .

1.3 Le modèle

Le mouvement du fluide est donné par les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\rho_F(t, x) (\partial_t u_F + (u_F \cdot \nabla) u_F)(t, x) - \operatorname{div} \sigma_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t) \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} u_F(t, x) = 0, \forall x \in \Omega_F(t) \quad (1.3)$$

où le tenseur des contraintes de Cauchy σ_F vérifie :

$$\sigma_F(t, x) = 2\nu \varepsilon_x(u_F)(t, x) - p(t, x)Id$$

où p est la pression sur la partie fluide, inconnue du problème, ν est le coefficient de viscosité une constante strictement positive et $\varepsilon_x(u_F)$ est le gradient symétrisé de u_F défini par :

$$\varepsilon_x(u_F) = \frac{1}{2}(\nabla_x u_F + {}^t \nabla_x u_F).$$

Ici, ρ_F désigne la densité volumique du fluide. Son évolution est donnée par la loi de conservation de la masse :

$$\partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u) = 0. \quad (1.4)$$

On considère que la configuration de référence est un état naturel pour la structure ce qui signifie que, à l'instant initial, le tenseur des contraintes est nul sur la partie solide. Ici, parce que la preuve du résultat d'existence l'exige, on aura besoin d'avoir une régularité assez forte sur les déplacements élastiques : on veut que $\partial_t \xi \in L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$. On rajoute donc un terme régularisant dans l'équation de la quantité de mouvement du solide. Cette régularisation permet d'éviter les chocs entre le solide et la paroi ainsi que l'interpénétration (deux points ou deux parties du solide se confondent) pendant un temps petit. En termes plus abstraits, ceci permet de garder l'injectivité du flot et donc de pouvoir passer d'un point de vue eulérien à un point de vue lagrangien. On veut aussi que notre déplacement élastique préserve l'orientation.

Cette dernière condition ainsi que la non-interpénétration sont des conditions qui interviennent de façon classique dans la théorie de l'élasticité. Sous certaines conditions, on peut montrer qu'elles sont automatiquement vérifiées (voir Ciarlet, chapitre 6 dans [9]). On définit l'espace suivant :

$$\mathcal{E}(\Omega_S(0)) = \left\{ \psi \in H^3(\Omega_S(0))^3 / \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \psi \, dy = 0, \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \psi \wedge (y - g_0) \, dy = 0 \right\}. \quad (1.5)$$

On introduit aussi :

$$\mathcal{Y}(\Omega_S(0)) = \left\{ \psi \in \mathcal{E}(\Omega_S(0)) / \forall r \in \mathbb{R}^3, \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (r \wedge (y - g_0)) \cdot (r \wedge (y - g_0 + \psi)) > 0 \right\}. \quad (1.6)$$

On reprend le modèle introduit par Grandmont, Maday et Métier [17] dans le cas d'une structure élastique seule en dimension deux. Pour des explications justifiant ce modèle, on fait référence à cet article. La formulation variationnelle sur la partie solide est alors donnée par :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t^2 X_S(t, 0, y) V(t, y) \, dy \, dt + \epsilon \int_0^T (\partial_t^2 \xi, V_E)_{H^3(\Omega_S(0))} \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : \varepsilon_y(V_E) = \int_0^T \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot V(t, X_S(0, t, x)) \, d\gamma_x \, dt \end{aligned} \quad (1.7)$$

pour toute fonction V s'écrivant : $\forall (t, y) \in [0, T] \times \Omega_S(0)$

$$V(t, y) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t)V_E(t, y) \quad (1.8)$$

avec $b \in W^{1,\infty}(0, T)^3$, $r \in L^\infty(0, T)^3$ et $V_E \in L^\infty(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))$.

Le vecteur n désigne la normale unitaire extérieure du solide. Puisqu'on s'intéresse à des déplacements élastiques suffisamment petits, on peut se contenter de représenter le mouvement élastique avec le tenseur d'élasticité linéarisée : le second tenseur de Piola-Kirchhoff Σ_E^2 est donné par :

$$\Sigma_E^2(\xi) = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon_y(\xi)) Id + 2\mu \varepsilon_y(\xi)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé du milieu élastique satisfaisant :

$$\lambda + 2\mu > 0, \mu > 0$$

et $\varepsilon_y(\xi)$ désigne le gradient symétrisé de ξ .

De plus, dans (1.7), ϵ est un paramètre réel > 0 fixé. D'après la formulation variationnelle (1.7), le tenseur des contraintes agit uniquement sur les déplacements élastiques, ce qui paraît naturel. A partir de cette formulation variationnelle portant sur le mouvement solide global, on peut obtenir les équations séparées portant sur a , ω et ξ . Pour cela, on fait le calcul suivant :

$$\partial_t^2 X_S(t, 0, y) = \ddot{a} + \dot{\omega} \wedge Q(y - g_0 + \xi) + \omega \wedge (\omega \wedge Q(y - g_0 + \xi)) + 2\omega \wedge Q \partial_t \xi + Q \partial_t^2 \xi.$$

Ensuite, dans (1.7), on prend successivement comme fonction-test \dot{b} et $r \wedge Q(y - g_0 + \xi)$ avec $b \in W^{1,\infty}(0, T)^3$ et $r \in L^\infty(0, T)^3$ pour obtenir les équations du mouvement rigide du solide

(translation et rotation). En utilisant les relations d'orthogonalité (1.1) imposées sur ξ , on obtient alors :

$$m\ddot{a}(t) = \int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_F n_x d\gamma_x \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(J\omega) - \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(Q\partial_t\xi \wedge (\omega \wedge Q(y - g_0 + \xi))) + \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 Q(y - g_0 + \xi) \wedge (\omega \wedge Q\partial_t\xi) \\ + \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 Q(\xi \wedge \partial_t^2\xi) = \int_{\partial\Omega_S(t)} (x - a(t)) \wedge (\sigma_F n_x) d\gamma_x \end{aligned} \quad (1.10)$$

où m est la masse du solide et J est le tenseur d'inertie du solide défini pour tout $t \in [0, T]$ par : pour tout $\omega, r \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (J(t)\omega, r) &= \int_{\Omega_S(t)} \rho_S(t, x)(\omega \wedge (x - a(t))) \cdot (r \wedge (x - a(t))) dx \\ &= \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y)(\omega \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi))) \cdot (r \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi))) dy \end{aligned}$$

Ici, ρ_S est la densité du solide à l'instant t et satisfait :

$$\rho_S(t, x) = \rho_S^0(X_S(0, t, x)) \det \nabla X_S(0, t, x), \forall x \in \Omega_S(t)$$

Enfin, si on prend $V = QV_E$ avec $V_E \in L^\infty(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))$ comme fonction-test dans (1.7), toujours grâce aux relations d'orthogonalité (1.1), on obtient l'équation de l'élasticité : pour tout $V_E \in L^\infty(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \partial_t^2 \xi V_E + 2 \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q^{-1}\omega \wedge \partial_t \xi) V_E + \epsilon \int_0^T (\partial_t^2 \xi, V_E)_{H^3(\Omega_S(0))} dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q^{-1}\dot{\omega} \wedge \xi) V_E + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q^{-1}\omega \wedge (Q^{-1}\omega \wedge (y - g_0 + \xi))) V_E \\ + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : \varepsilon_y(V_E) = \int_0^T \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot (Q(t)V_E(t, X_S(0, t, x))) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le système formé par les équations (1.9), (1.10) et (1.11) est équivalent à la formulation variationnelle globale du mouvement solide (1.7). Les équations régissant le mouvement sont donc données par (1.2), (1.3), (1.4), (1.9), (1.10) et (1.11). Ces équations sont complétées par des conditions de continuité au bord des domaines : on suppose qu'il n'y a pas de glissement le long de la paroi et de l'interface. Ainsi :

$$u_F(t, x) = \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t)\partial_t\xi(t, X_S(0, t, x)), \forall x \in \partial\Omega_S(t) \quad (1.12)$$

$$u_F(t, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \quad (1.13)$$

Enfin, ce système d'équations est complété par la donnée de conditions initiales :

$$a(0) = g_0, \dot{a}(0) = a^1, \omega(0) = \omega^0, Q(0) = Id, \quad (1.14)$$

$$\xi(0) = 0 \text{ sur } \Omega_S(0), \partial_t\xi(0, \cdot) = \xi^1 \text{ sur } \Omega_S(0), \quad (1.15)$$

$$u_F(0, \cdot) = u_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0), \rho_F(0, \cdot) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)} \text{ sur } \Omega \quad (1.16)$$

avec $\xi^1 \in \mathcal{E}(\Omega_S(0))$, $u_F^0 \in L^2(\Omega_F(0))^3$, $\rho_F^0 \in L^\infty(\Omega)$.

Ces conditions initiales vérifient les conditions suivantes :

$$\int_{\partial\Omega_S(0)} \xi^1(y) \cdot N_y \, dy = 0 \quad (1.17)$$

$$\operatorname{div} u_F^0 = 0 \text{ sur } \Omega_F(0) \quad (1.18)$$

$$u_F^0 \cdot N = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.19)$$

$$u_F^0 \cdot N = (a^1 + \omega^0 \wedge (y - g_0) + \xi^1) \cdot N \text{ sur } \partial\Omega_S(0) \quad (1.20)$$

$$0 < M_1 \leq \rho_F^0 \leq M_2 \text{ sur } \Omega_F(0) \quad (1.21)$$

Ici, N_y désigne la normale unitaire extérieure à $\Omega_S(0)$ au point y . Dans tout le chapitre, χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^3$.

Remarques 1 :

- On remarque que sur $\partial\Omega_S(t)$,

$$u_F(t, x) = \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t) \partial_t \xi(t, X_S(0, t, x)).$$

Sans la régularisation, $\partial_t \xi$ n'a pas de trace sur $\partial\Omega_S(0)$, alors que u_F a une trace sur $\partial\Omega_S(t)$. Il y a donc dans le problème complet (c'est-à-dire sans régularisation de l'élasticité) une différence de régularité entre la vitesse fluide et la vitesse solide.

- On peut aussi régulariser l'équation du mouvement solide (1.7) avec un terme de viscosité (de type $\epsilon(\partial_t \xi, V_E)_{H^3(\Omega_S(0))}$). Ceci donne une régularité $H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0)))$ pour ξ . La démonstration est alors très proche de ce qu'on a choisi de présenter ici.
- Pour la première équation du mouvement solide (1.9), on retrouve la loi de conservation de la quantité de mouvement (ou principe de la résultante dynamique). Dans les équations (1.10) et (1.11), il apparaît des termes non linéaires de couplage. Pour l'équation de la rotation, si on considère que les déplacements élastiques sont négligeables, on retrouve la loi de conservation du moment cinétique pour un solide rigide (ou principe du moment dynamique). On retrouve donc les équations fondamentales de la dynamique du point. Enfin, la dernière équation (1.11) du mouvement solide correspond à l'équation d'un solide élastique exprimée dans un repère en rotation.

1.4 Résultats annexes

1.4.1 Conservation du volume

Soient v une vitesse eulérienne assez régulière nulle sur le bord de Ω et X le flot associé. On considère une partie A de Ω et on note $A(t) = X(t, 0, A)$. On s'intéresse à l'évolution du volume de $A(t)$:

$$\begin{aligned} |A(t)| &= \int_{\Omega} \chi_{A(t)}(x) \, dx = \int_{\Omega} \chi_A(X(0, t, x)) \, dx = \int_{\Omega} \chi_A(y) \det \nabla X(t, 0, y) \, dy \\ &= \int_A \det \nabla X(t, 0, y) \, dy. \end{aligned}$$

Ainsi, le volume de A est conservé si et seulement si :

$$\forall t \in [0, T], \frac{d}{dt} \int_A \det \nabla X(t, 0, y) dy = 0.$$

Cette hypothèse de conservation du volume se traduit en terme d'incompressibilité pour la vitesse eulérienne :

Lemme 1.1 :

Avec les hypothèses et notations qui précèdent,

$$\frac{d}{dt} \int_A \det \nabla X(t, 0, y) dy = \int_{A(t)} \operatorname{div} v(t, x) dx = \int_{\partial A(t)} v(t, x) \cdot n_x d\gamma_x.$$

Preuve du lemme 1.1 :

$$\begin{aligned} \int_{A(t)} \operatorname{div} v(t, x) dx &= \int_{A(t)} \operatorname{div} (\partial_t X(t, 0, X(0, t, x))) dx \\ &= \int_{A(t)} \operatorname{tr} (\partial_t \nabla X(t, 0, X(0, t, x)) \nabla X(0, t, x)) dx \\ &= \int_A \operatorname{tr} (\partial_t \nabla X(t, 0, y) \nabla X(t, 0, y)^{-1}) \det \nabla X(t, 0, y) dy, \end{aligned}$$

d'une part, et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A \det \nabla X(t, 0, y) dy &= \int_A \partial_t \det \nabla X(t, 0, y) dy \\ &= \int_A \operatorname{tr} (\nabla X(t, 0, y)^{-1} \partial_t \nabla X(t, 0, y)) \det \nabla X(t, 0, y) dy. \end{aligned}$$

De plus, la dernière inégalité est donnée par la formule de Stokes. \square

De la même manière, on montre que :

Lemme 1.2 :

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall A \subset \Omega, \forall t \in [0, T], A(t) := X(t, 0, A)$ est à volume constant
- (ii) $\operatorname{div} v = 0$ sur $[0, T] \times \Omega$
- (iii) $\det \nabla X(t, 0, y) = 1$ sur $[0, T] \times \Omega$.

1.4.2 Inversibilité du flot

On énonce maintenant un lemme qui donne une condition suffisante d'injectivité du flot. La démonstration de ce lemme se trouve dans Ciarlet [9] (théorème 5.5.1, chapitre 5).

Lemme 1.3 :

Il existe un réel $e_0 > 0$ dépendant uniquement de la géométrie du domaine Ω tel que pour tout φ dans $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant :

$$\|\nabla \varphi - Q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e_0, \text{ avec } Q \in SO_3(\mathbb{R}),$$

l'application φ est inversible de Ω sur son image.

1.4.3 Existence et régularité du problème de Stokes

La proposition suivante donne un résultat d'existence avec une régularité assez faible du domaine. On peut trouver une démonstration de cette proposition dans Temam [31], paragraphe 2.4, chapitre 1. On suppose seulement que Ω est un ouvert lipschitzien, la notion de trace n'est donc pas définie. Ainsi l'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini uniquement comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$.

Proposition 1 :

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^n .

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \phi \, dx = \int_{\Omega} g \, dx .$$

Alors il existe une unique solution $(u, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ du problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = g & \text{dans } \Omega \\ u - \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.22)$$

De plus :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{H^1(\Omega)})$$

où C est une constante dépendant uniquement de Ω .

On introduit ensuite la notion de régularité d'un ouvert borné :

Définition 1 :

On dira qu'un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n est un ensemble de classe $W^{m,k}$ si, pour tout point $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage U de x , un voisinage V de 0 et un $W^{m,k}$ -difféomorphisme $\Psi : V \mapsto U$ tels que :

$$\Psi(0) = x, \Psi(\Gamma_0(V)) = \partial\Omega \cap U, \Psi(V^+) = \Omega \cap U$$

où $\Gamma_0(V)$ est défini par :

$$\Gamma_0(V) = V \cap \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} / x_n = 0\}$$

et :

$$V^+ = V \cap \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} / x_n > 0\} .$$

La proposition qui suit traite de la régularité de la solution d'un problème de Stokes. Un résultat de régularité avec un ouvert de classe \mathcal{C}^2 est montré par Cattabriga [7]. Pour un ouvert de classe $W^{2,\infty}$, on fait référence à Bello [3]. Ici, on donne un résultat de régularité dans le cadre qui nous intéresse (uniquement le cas L^2) avec un ouvert de classe seulement H^3 . La démonstration repose sur une adaptation de la méthode présentée dans [3].

Proposition 2 :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de classe H^3 . Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ telle que :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n d\gamma = \int_{\Omega} g dx.$$

Alors le problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = g & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.23)$$

admet une unique solution $(u, p) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. De plus :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)})$$

où C est une constante dépendant uniquement de Ω .

Preuve de la proposition 2 :

La démonstration présentée par Bello [3] repose sur la méthode des translations introduite par Nirenberg. Pour une approche de cette méthode, on peut aussi citer Brézis [6], paragraphe 6, chapitre 9.

On va ici reprendre la méthode des translations en supposant tout d'abord que Ω est de classe $W^{2,\infty}$ afin d'améliorer les estimations montrées dans [3] et on passera ensuite à un ouvert de classe H^3 .

On se ramène au cas $\varphi = 0$ en considérant, pour φ non nulle, la différence $u - \phi$ où ϕ est un relèvement de φ dans $H^2(\Omega)$ et on suppose donc pour commencer que Ω est de classe $W^{2,\infty}$. Par compacité de $\partial\Omega$, on peut considérer un nombre fini d'ouverts U_i introduits dans la **définition 1** tels que :

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i.$$

On considère ensuite une partition de l'unité $(\theta_i)_{0 \leq i \leq k}$ constituée de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ telles que :

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta_i \leq 1, \sum_{i=0}^k \theta_i &= 1 \text{ sur } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{supp} \theta_i &\text{ est compact, } \operatorname{supp} \theta_i \subset U_i, \forall 1 \leq i \leq k \\ \operatorname{supp} \theta_0 &\subset \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \text{ et } \theta_0|_{\Omega} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente, on sait que notre problème admet une unique solution (u, p) dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. On peut écrire cette solution sous la forme :

$$u = \sum_{i=0}^k \theta_i u, \quad p = \sum_{i=0}^k \theta_i p.$$

Tout d'abord $(\theta_0 u, \theta_0 p)$ est solution sur \mathbb{R}^3 du problème :

$$\begin{cases} -\Delta(\theta_0 u) + \nabla(\theta_0 p) = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \cdot \nabla u - \Delta\theta_0 u - p\nabla\theta_0 = F_0 \\ \operatorname{div}(\theta_0 u) = \theta_0 g - \nabla\theta_0 \cdot u = G_0. \end{cases}$$

Dans ce cadre, on a des estimations classiques sur $(\theta_0 u, \theta_0 p)$ dans $H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}$ indépendantes de l'ouvert Ω (voir par exemple Temam [31], paragraphe 2.5, chapitre 1) :

$$\begin{aligned} \|\theta_0 u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\theta_0 p\|_{H^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}} &\leq C_0 (\|F_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|G_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}) \\ &\leq C_1 (\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la **proposition 1**, on a l'estimation suivante :

$$\|\theta_0 u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\theta_0 p\|_{H^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}} \leq C_2 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}).$$

On considère maintenant les estimations au voisinage du bord. De même que précédemment, $(\theta_i u, \theta_i p)$ pour $1 \leq i \leq k$, est solution sur $\Omega \cap U_i$ de :

$$\begin{cases} -\Delta(\theta_i u) + \nabla(\theta_i p) = \theta_i f - 2\nabla\theta_i \cdot \nabla u - \Delta\theta_i u - p\nabla\theta_i = F_i \\ \operatorname{div}(\theta_i u) = \theta_i g - \nabla\theta_i \cdot u = G_i \end{cases}$$

où F_i appartient à $L^2(\Omega \cap U_i)$, G_i appartient à $H^1(\Omega \cap U_i)$ et ces fonctions satisfont :

$$\|F_i\|_{L^2(\Omega \cap U_i)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } \|G_i\|_{H^1(\Omega \cap U_i)} \leq C \|g\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par définition des ouverts U_i , il existe un difféomorphisme $\Psi_i : V_i \mapsto U_i$ de classe $W^{2,\infty}$ vérifiant les propriétés exprimées dans la **définition 1**.

On omet à partir de maintenant l'indice i pour ne pas surcharger les formules. On va se ramener par un changement de variables à une demi-boule de \mathbb{R}^3 . Ainsi, on pose sur V^+ :

$$z = (\theta u) \circ \Psi \text{ et } q = (\theta p) \circ \Psi.$$

Alors $(z, q) \in H_0^1(V^+) \times L^2(V^+)$ est solution du problème variationnel suivant : $\forall v \in H_0^1(V^+)$,

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} \operatorname{Jac} \Psi a_{i,j} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_j} - \sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} \operatorname{Jac} \Psi m_{i,j} q \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = \int_{V^+} \operatorname{Jac} \Psi (F \circ \Psi) v \quad (1.24)$$

et de plus, on a :

$$\sum_{i,j=1}^3 m_{i,j} \frac{\partial z_i}{\partial y_j} = G \circ \Psi \text{ p.p. dans } V^+ \quad (1.25)$$

où, pour tout $1 \leq i, j \leq 3$, $m_{i,j}$ est défini par :

$$m_{i,j} = \frac{\partial \Psi_j^{-1}}{\partial y_i} \circ \Psi \text{ et } a_{i,j} = \sum_{k=1}^3 m_{k,i} m_{k,j}. \quad (1.26)$$

Les coefficients $a_{i,j}$ et $m_{i,j}$ et $\text{Jac}\Psi$ sont des éléments de $W^{1,\infty}(V)$.

D'après [3], (z, q) est un élément de $H^2(V^+) \times H^1(V^+)$. On va reprendre les estimations prouvées dans cet article et montrer que ces estimations ne dépendent que de la norme de Ψ dans $W^{1,6}$. Pour cela, on introduit la notion de quotient différentiel. Soit v une fonction quelconque donnée sur V^+ . Pour tout e_k élément de la bas canonique, on associe à v le quotient différentiel dans la direction e_k : soit $x \in V^+$ et $h > 0$ avec $x + he_k \in V^+$, on note :

$$\delta_k^h v(x) = \frac{v(x + he_k) - v(x)}{h}.$$

En prolongeant les fonctions z et q à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+$ par 0, on peut considérer que le problème variationnel est défini sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+$. On peut donc prendre $\delta_k^{-h} v$ comme fonction-test dans le problème variationnel (1.24) pour $k = 1, 2$ où v est une fonction de $H_0^1(V^+)$. Et on prend comme fonction-test dans la formulation variationnelle associée à (1.25) $\delta_k^{-h} \mu$ où μ est une fonction de $L^2(V^+)$. Alors, en faisant un changement de variables, on obtient que $(\delta_k^h z, \delta_k^h(\text{Jac}\Psi q))$ est solution de :

$$\begin{cases} a(\delta_k^h z, v) + b(v, \delta_k^h(\text{Jac}\Psi q)) & = \langle T, v \rangle, \forall v \in H_0^1(V^+) \\ b(\delta_k^h z, \mu) & = \langle \chi, \mu \rangle, \forall \mu \in L^2(V^+) \end{cases}$$

où a et b sont définis par :

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} \text{Jac}\Psi a_{i,j} \frac{\partial w}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_j} \text{ et } b(w, \mu) = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} m_{i,j} \mu \frac{\partial w_i}{\partial y_j}.$$

Les seconds membres sont donnés par :

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle T_1, v \rangle &= - \sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} \delta_k^h(\text{Jac}\Psi a_{i,j}) \tau_k^h \left(\frac{\partial z}{\partial y_i} \right) \frac{\partial v}{\partial y_j} \\ \langle T_2, v \rangle &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} \tau_k^h(\text{Jac}\Psi q) \delta_k^h m_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \\ \langle T_3, v \rangle &= \int_{V^+} \delta_k^h(\text{Jac}\Psi F \circ \Psi) v \end{aligned}$$

et :

$$\langle \chi, \mu \rangle = - \int_{V^+} \mu \delta_k^h G \circ \Psi + \sum_{i,j=1}^3 \int_{V^+} \mu \delta_k^h m_{i,j} \tau_k^h \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j} \right)$$

où on a noté :

$$\tau_k^h(\varphi)(x) = \varphi(x + he_k).$$

Pour $k = 1, 2$ et $h > 0$, ce problème admet une unique solution $(\delta_k^h z, \delta_k^h(\text{Jac}\Psi q))$ dans $H_0^1(V^+) \times L^2(V^+)/\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\|\delta_k^h z\|_{H_0^1(V^+)} + \|\delta_k^h(\text{Jac}\Psi q)\|_{L^2(V^+)} \leq C(\|T\|_{H^{-1}(V^+)} + \|\chi\|_{L^2(V^+)}). \quad (1.27)$$

D'après [3], (z, q) est un élément de $H^2(V^+) \times H^1(V^+)$. On voit alors que :

$$\begin{aligned} \langle T_1, v \rangle &\leq \|\text{Jac}\Psi a_{i,j}\|_{W^{1,6}(V^+)} \|z\|_{W^{1,3}(V^+)} \|v\|_{H^1(V^+)} \\ \langle T_2, v \rangle &\leq \|\text{Jac}\Psi q\|_{L^3(V^+)} \|m_{i,j}\|_{W^{1,6}(V^+)} \|v\|_{H^1(V^+)} \\ \langle T_3, v \rangle &\leq \|\text{Jac}\Psi\|_{L^\infty(V^+)} \|F \circ \Psi\|_{L^2(V^+)} \|v\|_{H^1(V^+)} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les constantes dépendent uniquement des normes de $\text{Jac}\Psi$, $a_{i,j}$ et $m_{i,j}$ dans $W^{1,6}$. On obtient :

$$\|T\|_{H^{-1}(V^+)} \leq C_0(\|z\|_{W^{1,3}(V^+)} + \|F \circ \Psi\|_{L^2(V^+)} + \|q\|_{L^3(V^+)})$$

Par interpolation entre $L^2(V^+)$ et $L^6(V^+)$, on en déduit que :

$$\|T\|_{H^{-1}(V^+)} \leq C_1(\|z\|_{W^{1,6}(V^+)}^\theta + \|F \circ \Psi\|_{L^2(V^+)} + \|q\|_{L^6(V^+)}^\theta)$$

avec $0 < \theta < 1$. De même,

$$\|\chi\|_{L^2(V^+)} \leq C_2(\|G \circ \Psi\|_{H^1(V^+)} + \|m_{i,j}\|_{W^{1,6}(V^+)} \|z\|_{W^{1,6}(V^+)}^\theta).$$

Ici, les constantes C_1 et C_2 dépendent en plus de $\|F \circ \Psi\|_{L^2(V^+)}$ et $\|G \circ \Psi\|_{H^1(V^+)}$. Ainsi, utilisant toutes ces estimations, on obtient, pour $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \|\delta_k^h z\|_{H_0^1(V^+)} + \|\delta_k^h(\text{Jac}\Psi q)\|_{L^2(V^+)} &\leq C_3(\|F \circ \Psi\|_{L^2(V^+)} + \|G \circ \Psi\|_{H^1(V^+)}) \\ &\quad + C_4(\|z\|_{W^{1,6}(V^+)}^\theta + \|\text{Jac}\Psi q\|_{L^6(V^+)}^\theta). \end{aligned}$$

Comme (z, q) est un élément de $H^2(V^+) \times H^1(V^+)$, on en déduit, en passant à la limite en h que :

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial y_k} \right\|_{H^1(V^+)} + \left\| \frac{\partial(\text{Jac}\Psi q)}{\partial y_k} \right\|_{L^2(V^+)} \leq C_5(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}).$$

Enfin, on remarque que :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial q}{\partial y_k} \right\|_{L^2(V^+)} &\leq C_6 \left\| \frac{\partial(\text{Jac}\Psi q)}{\partial y_k} \right\|_{L^2(V^+)} + C_7 \|\text{Jac}\Psi\|_{W^{1,6}(V^+)} \|q\|_{L^3(V^+)} \\ &\leq C_6 \left\| \frac{\partial(\text{Jac}\Psi q)}{\partial y_k} \right\|_{L^2(V^+)} + C_8 \|\text{Jac}\Psi\|_{W^{1,6}(V^+)} \|q\|_{L^6(V^+)}. \end{aligned}$$

De cette manière, on obtient : pour $k = 1, 2$,

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial y_k} \right\|_{H^1(V^+)} + \left\| \frac{\partial q}{\partial y_k} \right\|_{L^2(V^+)} \leq C_9(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)})$$

où C_9 est une constante dépendant de Ψ et des normes de $\text{Jac}\Psi$ et des coefficients $a_{i,j}$ et $m_{i,j}$ dans $W^{1,6}(V^+)$.

Pour la majoration de $\left(\frac{\partial z}{\partial y_3}, \frac{\partial q}{\partial y_3}\right)$ dans $H^1(V^+) \times L^2(V^+)$, on peut reprendre exactement la démonstration de [3].

En faisant un changement de variables, on déduit de ces estimations que pour $i = 1, \dots, k$, $(\theta_i u, \theta_i p)$ vérifie l'estimation suivante :

$$\|\theta_i u\|_{H^2(U_i^+)} + \|\theta_i p\|_{H^1(U_i^+)} \leq C(\|\Psi_i\|_{W^{2,6}(V_i)})(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}).$$

Et finalement, on obtient l'estimation souhaitée sur (u, p) :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|\Psi_i\|_{W^{2,6}(V_i)})(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}).$$

Cette estimation va nous permettre de montrer la **proposition 2** avec maintenant uniquement une régularité H^3 de l'ouvert Ω . Dans ce cadre, on sait que notre problème (1.22) possède une unique solution (u, p) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. On reprend la même démarche en faisant un changement de variables à l'aide de difféomorphismes Ψ_i de classe $H^3(V_i)$. On se ramène donc aux équations (1.24) et (1.25). Soit maintenant une suite (Ψ_i^n) de difféomorphismes de classe $W^{2,\infty}(V_i)$ telle que :

$$\Psi_i^n \rightarrow \Psi_i \text{ dans } W^{2,6}(V_i) \text{ et } (\Psi_i^n)^{-1} \rightarrow \Psi_i^{-1} \text{ dans } W^{2,6}(U_i).$$

Alors, à Ψ_i^n , on associe une solution de (1.24) et (1.25) où on remplace $\text{Jac}\Psi_i$ par $\text{Jac}\Psi_i^n$ et où les coefficients $a_{i,j}^n$ et $m_{i,j}^n$ sont obtenus à partir de Ψ_i^n grâce à (1.26). On note (z_i^n, q_i^n) cette solution qui est un élément de $H^2(V_i^+) \times H^1(V_i^+)$ et d'après ce qui précède :

$$\|z_i^n\|_{H^2(V_i^+)} + \|q_i^n\|_{H^1(V_i^+)} \leq C_n(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)})$$

où C_n dépend uniquement de la norme de Ψ_i^n dans $W^{2,6}(V_i^+)$. Ainsi puisque (Ψ_i^n) est bornée dans $W^{2,6}(V_i^+)$, les suites (z_i^n) et (q_i^n) convergent faiblement vers z dans $H^2(V_i^+)$ et vers q dans $H^1(V_i^+)$ respectivement. On vérifie alors facilement que (z_i, q_i) est la solution de (1.24) et (1.25) et satisfait :

$$\|z_i\|_{H^2(V_i^+)} + \|q_i\|_{H^1(V_i^+)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)})$$

et donc :

$$\|\theta_i u\|_{H^2(U_i^+)} + \|\theta_i p\|_{H^1(U_i^+)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)})$$

Cette estimation permet de conclure comme précédemment et achève la preuve de la **proposition 2**. \square

1.4.4 Différentiabilité de la solution du problème de Stokes par rapport au domaine

On énonce ici un résultat de différentiation par rapport à un domaine. Pour plus de précisions, on pourra consulter Murat et Simon [23]-[24] qui présentent la méthode générale dans le cadre d'équations elliptiques. Le problème de Stokes est traité par Simon [28] avec un ouvert régulier

et l'article de Bello, Fernandez-Cara, Lemoine et Simon [4] s'intéresse au problème de Navier-Stokes. Ils montrent un résultat de différentiation pour des données petites (du fait du caractère non linéaire de l'équation) avec un ouvert seulement lipschitzien.

Dans les deux articles, un changement de variables permet de se ramener à l'ouvert de référence puis le théorème des fonctions implicites permet de prouver la différentiabilité de la solution par rapport au temps. Cette méthode s'applique directement à notre problème. Une ébauche de la démonstration est donnée dans la **seconde partie** dans la preuve du **lemme 5.1** dans un cadre très proche.

Proposition 3 :

Soit X_D un flot de $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega))$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$, $X_D(t, 0, \cdot)$ soit un difféomorphisme de $H^3(\Omega)$. On note $\Omega_S(t) = X_D(t, 0, \Omega_S(0))$. Soit u_S définie sur $\Omega_S(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. On suppose que pour tout $t \in [0, T]$,

$$u_S(t) = u_S(t, \cdot) \in H^1(\Omega_S(t)) \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega_S(t)} u_S(t, x) \cdot n_x \, d\gamma(x) = 0$$

On définit alors, pour tout $t \in [0, T]$, $u_{S,p}(t)$ le prolongement de $u_S(t)$ à Ω comme la solution sur $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$ du problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta u_{S,p}(t) + \nabla p(t) & = 0 & \text{sur } \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} u_{S,p}(t) & = 0 & \text{sur } \Omega_F(t) \\ u_{S,p}(t) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_F(t) \\ u_{S,p}(t) & = u_S(t) & \text{sur } \partial\Omega_S(t) \cap \partial\Omega_F(t) \end{cases}$$

Alors, l'application :

$$\begin{aligned} (0, T) & \mapsto L^2(\Omega) \\ u_{S,p} : t & \mapsto u_{S,p}(t) \end{aligned}$$

est dérivable et sa dérivée en t notée $U_{S,p}$ est définie par :

$$U_{S,p}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}(u_{S,p}(t, X_D(t, 0, \cdot))) \circ X_D(0, t, x) - (u_D(t, x) \cdot \nabla) u_{S,p}(t, x) \quad (1.28)$$

où u_D est la vitesse eulérienne associée à X_D . De plus, $U_{S,p}$ est solution du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\Delta U_{S,p}(t, x) + \nabla P(t, x) & = 0 & \text{sur } \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} U_{S,p}(t, x) & = 0 & \text{sur } \Omega_F(t) \\ U_{S,p}(t, x) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_F(t) \\ U_{S,p}(t, x) & = U_S(t, x) + v(t, x) & \text{sur } \partial\Omega_S(t) \cap \partial\Omega_F(t) \end{cases}$$

où U_S est défini pour tout $t \in [0, T]$ sur $\Omega_S(t)$ par (1.28) en remplaçant $u_{S,p}$ par u_S et :

$$v = -(u_D \cdot \nabla)(u_{S,p} - u_S) = -(u_D \cdot n) \frac{\partial}{\partial n}(u_{S,p} - u_S).$$

2 Formulation variationnelle et résultat principal

2.1 Estimation d'énergie

Montrons que notre système composé des équations (1.2), (1.3), (1.4) et (1.7) et des conditions de bord (1.12) et (1.13) satisfait une estimation d'énergie a priori. Il est connu que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_F(t)} \rho_F |u_F|^2 dx \right) &= \int_{\Omega_F(t)} \partial_t (\rho_F |u_F|^2) + \operatorname{div}(\rho_F u_F |u_F|^2) dx \\ &= \int_{\Omega_F(t)} (\partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u_F)) |u_F|^2 + 2 \int_{\Omega_F(t)} \rho_F (\partial_t u_F + (u_F \cdot \nabla) u_F) u_F dx \end{aligned}$$

donc, d'après la loi de conservation de la masse (1.4) :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_F(t)} \rho_F |u_F|^2 dx \right) = 2 \int_{\Omega_F(t)} \rho_F (\partial_t u_F + (u_F \cdot \nabla) u_F) u_F dx.$$

A l'aide des conditions de continuité (1.12) et (1.13), on montre que toute solution satisfait de manière formelle l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S(t, 0, y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(t)} \rho_F(t, x) |u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \epsilon \|\partial_t \xi\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi)(t, y) : \varepsilon_y(\xi)(t, y) dy + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\varepsilon_x(u_F(s, x))|^2 dx ds \leq E_0 \end{aligned}$$

où E_0 représente l'énergie à l'instant initial :

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 |a^1 + \omega^0 \wedge (y - g_0) + \xi^1|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0 |u_F^0|^2 dy + \frac{1}{2} \epsilon \|\xi^1\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2.$$

2.2 Espace fonctionnel où sera cherchée la solution

D'après l'estimation d'énergie, X_S est un élément de $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega_S(0)))^3$. Comme ξ est un élément de $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$ et comme on a l'écriture suivante pour $\partial_t X_S$:

$$\partial_t X_S(t, 0, y) = \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (y - g_0 + \xi(t, y)) + Q(t) \partial_t \xi(t, y), \quad \forall y \in \Omega_S(0), \quad \forall t \in [0, T],$$

on en déduit que, si ξ est suffisamment petit pour que :

$$\int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (r \wedge (y - g_0)) \cdot (r \wedge (y - g_0 + \xi(t, y))) > 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in [0, T]$$

(c'est-à-dire si $\xi(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{Y}(\Omega_S(0))$ pour tout t), alors on a des estimations sur a et ω à partir de l'estimation sur le flot : a est un élément de $W^{1,\infty}(0, T)^3$ et ω est un élément de $L^\infty(0, T)^3$.

Ainsi, on cherchera :

$$\begin{aligned} a &\in W^{1,\infty}(0, T)^3, \quad \omega \in L^\infty(0, T)^3, \quad \xi \in W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3, \\ u &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^3 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^3 \end{aligned}$$

où u est la vitesse eulérienne globale définie par :

$$u = \begin{cases} u_F \text{ sur } \Omega_F(t) \\ \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t)\partial_t \xi(t, X_S(0, t, x)) \text{ sur } \Omega_S(t). \end{cases}$$

Finalement, on cherche (ρ_F, u) ayant les propriétés suivantes :

(i) les fonctions (ρ_F, u) sont dans les espaces suivants :

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^3 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^3, \rho_F \in L^\infty((0, T) \times \Omega). \quad (2.1)$$

(ii) Le flot associé à u satisfait :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) \text{ sur } \Omega_S(0), \quad (2.2)$$

avec a dans $W^{1,\infty}(0, T)^3$, Q dans $W^{1,\infty}(0, T; SO_3(\mathbb{R}))$ et ξ dans $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$.

(iii) la vitesse u satisfait l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \quad (2.3)$$

(iv) la densité ρ_F satisfait la loi de conservation de la masse :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \rho_F(t=0) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3 Formulation variationnelle

Soit l'espace des fonctions-tests \mathcal{V} défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \left\{ v \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))^3 / v(T) = 0, \operatorname{div} v(t, \cdot) = 0 \text{ sur } \Omega_F(t), \right. \\ & v(t, x) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t)\partial_t \eta(t, X_S(0, t, x)) \text{ sur } \Omega_S(t), \\ & \left. \text{avec } b \in H^2(0, T)^3, r \in H^1(0, T)^3, \eta \in H^2(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0))) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La formulation variationnelle du problème est la suivante : pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
& m \int_0^T \dot{a} \cdot \ddot{b} dt + \int_0^T (J\omega) \cdot \dot{r} dt + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q \partial_t \xi \wedge (\omega \wedge Q(y - g_0 + \xi))) \cdot r dy dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 Q(y - g_0 + \xi) \wedge (\omega \wedge Q \partial_t \xi) \cdot r dy dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 Q (\xi \wedge \partial_t^2 \xi) \cdot r dy dt + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \partial_t \xi \cdot \partial_t^2 \eta dy dt \\
& - 2 \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q^{-1} \omega \wedge \partial_t \xi) \cdot \partial_t \eta dy dt - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q^{-1} \dot{\omega} \wedge \xi) \cdot \partial_t \eta dy dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (Q^{-1} \omega \wedge (Q^{-1} \omega \wedge (y - g_0 + \xi))) \cdot \partial_t \eta dy dt + \epsilon \int_0^T (\partial_t \xi, \partial_t^2 \eta)_{H^3(\Omega_S(0))} dt \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : \varepsilon_y(\partial_t \eta) dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_F u)(t, x) \cdot \partial_t v(t, x) dx dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_F u \otimes u)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt - 2\nu \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \varepsilon_x(u) : \varepsilon_x(v) dx dt \\
& = -ma^1 \cdot \dot{b}(0) - (J\omega^0) \cdot r(0) - \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \xi^1 \cdot \partial_t \eta(0, \cdot) dy - \epsilon (\xi_1, \partial_t \eta(0, \cdot))_{H^3(\Omega_S(0))} \\
& - \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0 u_F^0 \cdot v(0, \cdot) dy
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarques 2 :

– L'espace des fonctions tests dépend de la solution à travers a , Q et X_S qui définit $\Omega_F(t)$ et $\Omega_S(t)$. C'est une des difficultés des problèmes fluide-structure : les domaines Ω_F et Ω_S sur lesquels on cherche la solution dépendent de la solution elle-même. En règle générale, il faut contourner cette difficulté avec un argument de point fixe.

– Sur $\partial\Omega_S(t)$, la vitesse est continue :

$$u_F(t, x) = \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t) \partial_t \xi(t, X_S(0, t, x)).$$

Or,

$$\operatorname{div} u_F = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_F(t)} u_F \cdot n_x d\gamma_x = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega_S(t)} u_F \cdot n_x d\gamma_x = 0$$

car :

$$u_F = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Ainsi, comme :

$$\operatorname{div} (\dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t))) = 0,$$

la condition de continuité des vitesses impose une condition de compatibilité sur ξ :

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} (Q(t) \partial_t \xi(t, X_S(0, t, x))) \cdot n_x d\gamma_x = 0.$$

C'est une condition de conservation du volume : on exprime le fait que le solide doit garder un volume global constant étant donné que le fluide reste à volume constant.

2.4 Résultat principal

On va démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 :

Soient $\xi^1 \in \mathcal{E}(\Omega_S(0))$, $u_F^0 \in L^2(\Omega_F(0))^3$, $\rho_F^0 \in L^\infty(\Omega)$, $a^1 \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions (1.17) à (1.21). On définit :

$$d(t) = d(\partial\Omega_S(t), \partial\Omega) \text{ et } \gamma(t) = \inf_{y \in \Omega_S(0)} |\det \nabla X_S(t, 0, y)|$$

et on suppose que $d(0) > 0$. Alors, il existe au moins un couple (ρ_F, u) vérifiant (2.1) à (2.4) solution du problème variationnel (2.6) définie sur $(0, T)$ où :

$$T = \sup\{t > 0 / \xi(t) \in \mathcal{Y}(\Omega_S(0)), d(t) > 0, \gamma(t) > 0 \text{ et } X_S(t, 0, \cdot) \text{ injective}\}.$$

De plus, cette solution vérifie l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S(t, 0, y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(t)} \rho_F(t, x) |u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \epsilon \|\partial_t \xi\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi)(t, y) : \varepsilon_y(\xi)(t, y) dy + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\varepsilon_x(u_F(s, x))|^2 dx ds \leq E_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

où E_0 est l'énergie à l'instant initial :

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 |a^1 + \omega^0 \wedge (y - g_0) + \xi^1|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0 |u_F^0|^2 dy + \frac{1}{2} \epsilon \|\xi^1\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2.$$

Remarque 3 :

Le temps T est bien strictement positif. En effet, grâce au terme de régularisation portant sur ξ , on voit que jusqu'à un temps strictement positif,

$$\int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (r \wedge (y - g_0)) \cdot (r \wedge (y - g_0 + \xi)) > \delta \|r\|^2, \forall r \in \mathbb{R}^3$$

pour $\delta > 0$ petit fixé. De plus $\partial_t X_S(t, 0, \cdot)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S(t, 0, y)|^2 dy = \frac{m}{2} |\dot{a}(t)|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\omega(t) \wedge Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y)) + Q(t) \partial_t \xi(t, y)|^2 dy. \end{aligned}$$

De cela, on déduit que a est borné dans $W^{1,\infty}(0, T)^3$ et que ω est borné dans $L^\infty(0, T)^3$ par une borne dépendant de δ . Ainsi, finalement, puisque ξ est borné dans $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$, $X_S(t, 0, \cdot)$ est borné dans $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$. A partir de là, on voit que :

$$\begin{aligned} d(t) & \geq d_0 - \sup_{0 \leq s \leq t, y \in \Omega_S(0)} |\partial_s X_S(s, 0, y)| t \\ & \geq d_0 - C(m, \delta, \Omega_S(0), E_0, \epsilon) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \|\nabla X_S(s, 0, y) - Q(s)\|_{L^\infty((0,t) \times \Omega_S(0))} &\leq \|\nabla \xi(s, y)\|_{L^\infty((0,t) \times \Omega_S(0))} \\
&\leq C(\Omega_S(0), E_0, \epsilon)t
\end{aligned}$$

Ainsi, pendant un temps petit, on évite les chocs et, d'après le **lemme 1.3**, le flot reste injectif. Les conditions du théorème sont donc réalisées jusqu'à un temps $T > 0$ dépendant de ϵ , E_0 , $\Omega_S(0)$, des données m et d_0 et de δ .

La suite de ce travail est consacrée à la démonstration de ce théorème. La démarche est la suivante : dans le **paragraphe 3**, on propose une écriture de la vitesse recherchée à partir de vitesses découplées définies sur les domaines de référence. On résout ensuite dans le **paragraphe 4** par une méthode classique de Galerkin le problème linéarisé en dimension finie. Un argument de point fixe permet de passer facilement au problème non linéaire en dimension finie. Dans le **paragraphe 5**, on montre ensuite des résultats de compacité sur les densités et sur les vitesses. Enfin, pour terminer, grâce à ces résultats, on passe à la limite sur le problème en dimension finie (**paragraphe 6**) et on prolonge la solution sur l'intervalle $[0, T]$ voulu.

3 Représentation des vitesses

L'idée est de représenter une vitesse admissible (c'est-à-dire satisfaisant les conditions (2.1) à (2.4)) par des vitesses découplées définies sur les domaines de référence $\Omega_S(0)$ et $\Omega_F(0)$ en procédant d'une façon similaire à l'article Desjardins, Esteban, Grandmont et Le Tallec [13]. Pour cela, on se donne $(\tilde{w}_F, \tilde{a}, \tilde{Q}, \tilde{\xi})$ tel que :

$\star \tilde{w}_F \in Y_0$ où

$$\begin{aligned}
Y_0 &= L^\infty(0, T; L^2(\Omega_F(0)))^3 \cap L^2(0, T; V(\Omega_F(0))) \\
\text{avec : } V(\Omega_F(0)) &= \{w \in H_0^1(\Omega_F(0))^3 / \operatorname{div} w = 0 \text{ sur } \Omega_F(0)\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$\star (\tilde{a}, \tilde{Q}, \tilde{\xi}) \in Y_1$ où Y_1 est défini par :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \{(a, Q, \xi) \in W^{1,\infty}(0, T)^3 \times W^{1,\infty}(0, T; SO_3(\mathbb{R})) \times W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0))) / \\
&\quad \|a - g_0\|_{L^\infty(0, T)} \leq \kappa_0, \|Q - Id\|_{L^\infty(0, T)} \leq \kappa_1 \text{ et } \|\xi\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3} \leq \kappa_2\}
\end{aligned}$$

où κ_0 , κ_1 et κ_2 sont des constantes déterminées ultérieurement par (3.6) et (3.2).

A partir des données dans Y_1 , on peut définir un flot et une vitesse eulérienne sur la partie solide. Pour que cette vitesse soit compatible avec une vitesse à divergence nulle sur la partie fluide, il faut qu'elle préserve le volume. D'après le **sous-paragraphe 1.4.1**, si le flot est inversible, cette condition est équivalente à :

$$\int_{\Omega_S(0)} \det \nabla \tilde{X}_S(t, 0, y) dy = |\Omega_S(0)|, \forall t \in [0, T]$$

Pour obtenir cela, on va rajouter un terme qui correspond à une dilatation ou à une compression du solide. Il compensera ainsi les variations de volume du solide dues aux perturbations élastiques :

$$\tilde{X}_S(t, 0, y) = \tilde{a}(t) + \tilde{Q}(t)(y - g_0) + \tilde{Q}(t)(\tilde{\xi}(t) + \lambda(t)\eta(y)), \forall y \in \Omega_S(0)$$

où η est un relèvement de la normale unitaire extérieure sur $\Omega_S(0)$ dans $\mathcal{E}(\Omega_S(0))$ et $\lambda(t)$ un scalaire tel que :

$$\int_{\Omega_S(0)} \det \nabla \tilde{X}_S(t, 0, y) dy = |\Omega_S(0)|.$$

D'après le lemme qui suit, ceci est possible pour des perturbations élastiques assez petites :

Lemme 3.1 :

$$\begin{aligned} & \exists \kappa_2 > 0, \forall \tilde{\xi} \in L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3 / \|\tilde{\xi}\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3} \leq \kappa_2, \\ & \exists \lambda(t, \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}, \|\lambda\|_{L^\infty(0, T)} \leq \rho, \\ & \int_{\Omega_S(0)} \det \nabla \tilde{X}_S(t, 0, y) dy = |\Omega_S(0)| \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{où } \tilde{X}_S(t, 0, y) = \tilde{a}(t) + \tilde{Q}(t)(y - g_0) + \tilde{Q}(t) \left(\tilde{\xi}(t, y) + \lambda(t, \tilde{\xi})\eta(y) \right).$$

Preuve du lemme 3.1 :

Pour prouver ce lemme, on utilise le théorème des fonctions implicites. On a : $\nabla \tilde{X}_S(t, 0, y) = \tilde{Q}(t)(Id + \nabla \tilde{\xi}(t, y) + \lambda(t)\nabla \eta(y))$ donc :

$$\int_{\Omega_S(0)} \det \nabla \tilde{X}_S(t, 0, y) dy = \int_{\Omega_S(0)} \det (Id + \nabla \tilde{\xi}(t, y) + \lambda(t)\nabla \eta(y)) dy.$$

Considérons :

$$\begin{aligned} & H^3(\Omega_S(0))^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ f : & (\xi, \lambda) \mapsto \int_{\Omega_S(0)} \det (Id + \nabla \xi(y) + \lambda \nabla \eta(y)) dy. \end{aligned}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de $(0, 0)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\xi, \lambda) = \int_{\Omega_S(0)} \det (Id + \nabla \xi(y) + \lambda \nabla \eta(y)) \text{tr} \left((Id + \nabla \xi(y) + \lambda \nabla \eta(y))^{-1} \nabla \eta(y) \right) dy.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = \int_{\Omega_S(0)} \text{tr}(\nabla \eta(y)) dy = \int_{\Omega_S(0)} \text{div } \eta(y) dy = \int_{\partial \Omega_S(0)} \eta(y) \cdot N_y d\gamma_y.$$

Par définition de η , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = a(\partial \Omega_S(0)) > 0 \text{ où } a(\partial \Omega_S(0)) \text{ désigne l'aire de } \partial \Omega_S(0).$$

Ceci permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites autour de $(0, 0)$ et achève la preuve du lemme. \square

En dérivant par rapport à t l'expression (3.2), on voit que λ est un élément de $W^{1,\infty}(0,T)$ et donc $\tilde{X}_S \in W^{1,\infty}(0,T; H^3(\Omega_S(0)))^3$: on ne perd pas en régularité en faisant cette transformation. On va définir un prolongement du flot X_S défini sur Ω qui est inversible de Ω sur Ω en utilisant le critère d'injectivité donné par le **lemme 1.3**. On définit maintenant \mathcal{P} un opérateur linéaire de prolongement tel que :

$$\mathcal{P} : \begin{array}{l} H^3(\Omega_S(0))^3 \mapsto H^3(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \\ W^{1,\infty}(\Omega_S(0))^3 \mapsto W^{1,\infty}(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3. \end{array} \quad (3.3)$$

puis, à partir de là, on définit sur Ω pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot) = Id + \mathcal{P}(\tilde{X}_S(t, 0, \cdot) - Id). \quad (3.4)$$

La fonction $\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot)$ laisse les points de la frontière $\partial\Omega$ invariante et :

$$\|\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega))^3} \leq C_{\mathcal{P}} \|\tilde{X}_S(t, 0, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3}$$

où $C_{\mathcal{P}} \geq 1$ est la constante de continuité de \mathcal{P} .

On peut toujours supposer que κ_2 est assez petit pour que :

$$\|\tilde{\xi}\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3} + \|\lambda\|_{L^\infty(0,T)} \|\eta\|_{W^{1,\infty}(\Omega_S(0))^3} \leq \frac{e_0}{3C_{\mathcal{P}}}$$

où e_0 est donné par le **lemme 1.3** pour le domaine Ω . Pour cela, il suffit de prendre :

$$C_0 \kappa_2 + \rho \|\eta\|_{W^{1,\infty}(\Omega_S(0))^3} \leq \frac{e_0}{3C_{\mathcal{P}}} \quad (3.5)$$

où C_0 est la constante de continuité de l'injection de $H^3(\Omega_S(0))$ dans $W^{1,\infty}(\Omega_S(0))$. On a alors :

$$\|\tilde{X}_S(t, 0, \cdot) - \tilde{a}(t) - \tilde{Q}(t)(y - g_0)\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3} \leq \frac{e_0}{3C_{\mathcal{P}}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}_S(t, 0, y) - y\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3} &\leq \|\tilde{X}_S(t, 0, \cdot) - \tilde{a}(t) - \tilde{Q}(t)(y - g_0)\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3} \\ &\quad + \|(\tilde{Q}(t) - Id)(y - g_0)\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3} + \|\tilde{a}(t) - g_0\|_{L^\infty(0,T)} \\ &\leq \frac{e_0}{3C_{\mathcal{P}}} + \kappa_0 + \sup_{y \in \Omega_S(0)} \|y - g_0\| \kappa_1 \end{aligned}$$

par définition de l'espace Y_1 . Ainsi, si on prend :

$$\kappa_0 \leq \frac{e_0}{3C_{\mathcal{P}}} \text{ et } \sup_{y \in \Omega_S(0)} \|y - g_0\| \kappa_1 \leq \frac{e_0}{3C_{\mathcal{P}}}, \quad (3.6)$$

on a :

$$\|\tilde{X}_S(t, 0, y) - y\|_{L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega_S(0)))^3} \leq \frac{e_0}{C_{\mathcal{P}}}.$$

De cette façon, on en déduit que :

$$\|\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))^3} \leq \epsilon_0$$

et donc $\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot)$ est injective de Ω sur Ω (de ce fait, on a aussi l'inversibilité de \tilde{X}_S de $\Omega_S(0)$ sur $\tilde{\Omega}_S(t) := \tilde{X}_S(t, 0, \Omega_S(0))$). De plus, par un argument de connexité, comme $\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot)$ laisse invariante la frontière, $\tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \cdot)$ est bijective de Ω sur Ω .

On peut aussi supposer que κ_1 , κ_2 et κ_3 sont assez petits pour que $\Omega_S(t)$ reste à une distance strictement positive de $\partial\Omega$. En effet, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{d}(t) \geq d_0 - \sup_{y \in \Omega_S(0)} \|\tilde{X}_S(t, 0, y) - y\|$$

avec $\tilde{d}(t) = d(\tilde{\Omega}_S(t), \partial\Omega)$ donc, avec κ_1 , κ_2 et κ_3 assez petits,

$$\tilde{d}(t) \geq \alpha > 0. \quad (3.7)$$

Enfin, on choisit κ_2 assez petit pour avoir :

$$\forall r \in \mathbb{R}^3, \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(r \wedge (y - g_0)) \cdot (r \wedge (y - g_0 + \tilde{\xi})) \geq \delta \|r\|^2 \quad (3.8)$$

pour tout $\|\tilde{\xi}\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega_S(0)))^3} \leq \kappa_2$ de telle sorte que $\tilde{\xi}(t)$ soit un élément de $\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$ où $\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$ est défini pour tout $\delta > 0$ par :

$$\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0)) = \left\{ \psi \in \mathcal{E}(\Omega_S(0)) / \forall r \in \mathbb{R}^3, \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(r \wedge (y - g_0)) \cdot (r \wedge (y - g_0 + \psi)) > \delta \|r\|^2 \right\}. \quad (3.9)$$

On définit maintenant pour tout $t \in [0, T]$

$$\tilde{X}_S(0, t, \cdot) = \tilde{X}_S(t, 0, \cdot)^{-1} : \tilde{\Omega}_S(t) \mapsto \Omega_S(0)$$

et

$$\forall t \in [0, T], \forall x \in \tilde{\Omega}_S(t), \tilde{u}_S(t, x) = \partial_t \tilde{X}_S(t, 0, \tilde{X}_S(0, t, x))$$

la vitesse eulérienne associée à \tilde{X}_S . Ainsi, puisque le flot $\tilde{X}_S(t, 0, \cdot)$ est inversible de $\Omega_S(0)$ sur $\tilde{\Omega}_S(t)$, d'après (3.2) et le **lemme 1.1**,

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}_S(t)} \tilde{u}_S \cdot n_x \, d\gamma_x = 0.$$

Grâce à l'hypothèse de garde (3.7), la partie fluide définie par $\tilde{\Omega}_F(t) := \Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}_S(t)}$ est aussi régulière que la partie solide, pour tout t dans $[0, T]$. D'après la **proposition 1**, on peut ainsi prolonger la vitesse \tilde{u}_S en $\tilde{u}_{S,p} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))^3$ définie par le problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_{S,p} + \nabla q & = 0 & \tilde{\Omega}_F(t) \\ \operatorname{div} \tilde{u}_{S,p} & = 0 & \tilde{\Omega}_F(t) \\ \tilde{u}_{S,p} & = \tilde{u}_S & \partial\tilde{\Omega}_S(t) \\ \tilde{u}_{S,p} & = 0 & \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}_F(t) \end{cases}$$

De plus, d'après la **proposition 2**, $\tilde{u}_{S,p}$ est un élément de $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))^3$.

Dans la suite, on notera $(\cdot)_p$ cette opération qui consiste à prolonger une vitesse par le biais du problème de Stokes précédent, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{aligned} H^1(\tilde{\Omega}_S(t))^3 &\mapsto H_0^1(\Omega)^3 \\ (\cdot)_p : \quad \tilde{u}_S(t) &\mapsto \tilde{u}_{S,p}(t) \end{aligned}$$

D'autre part, on prolonge $\tilde{w}_F \in Y_0$ par 0 à Ω ($\tilde{w}_F = 0$ sur $\partial\Omega_F(0)$). Pour terminer, on note \tilde{u} la vitesse eulérienne définie sur $[0, T] \times \Omega$ par :

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}_{S,p}(t, x) + \left[(\tilde{Y}_{S,p}(0, t, \cdot))^* w_F \right] (t, x) \quad (3.10)$$

où $(\tilde{Y}_{S,p}(0, t, \cdot))^* w_F$ est la transformée de Piola-Kirchhoff :

$$\left[(\tilde{Y}_{S,p}(0, t, \cdot))^* w_F \right] (t, x) = \det(\nabla \tilde{Y}_{S,p}(0, t, x)) \nabla \tilde{Y}_{S,p}(t, 0, \tilde{Y}_{S,p}(0, t, x)) w_F(t, \tilde{Y}_{S,p}(0, t, x)).$$

De cette manière, on a composé le mouvement fluide et le mouvement solide, seule \tilde{u}_S "bouge" les solides. On peut remarquer que, sur $\tilde{\Omega}_S(t)$, $\tilde{u} = \tilde{u}_S$. Ainsi, le flot \tilde{X} associé à \tilde{u} satisfait :

$$\tilde{X}(t, 0, \cdot) = \tilde{X}_S(t, 0, \cdot) \text{ sur } \Omega_S(0). \quad (3.11)$$

Comme $\tilde{Y}_{S,p}$ est un élément de $W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega))^3$, \tilde{u} appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^3 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^3$. On peut maintenant associer à \tilde{u} la densité $\tilde{\rho}_F$ d'après le résultat d'existence de di Perna-Lions (voir di Perna et Lions [14]) :

Proposition 4 :

Soit $v \in L^2(0, T; V(\Omega))$ où $V(\Omega)$ est défini par (3.1). Soit $\Psi_0 \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$. Le problème :

$$\begin{cases} \partial_t \Psi + \operatorname{div}(\Psi v) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \Psi(t=0) = \Psi_0 \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

a une unique solution faible Ψ dans $L^\infty((0, T) \times \Omega) \cap \mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$ c'est-à-dire qu'il existe un unique Ψ dans $L^\infty((0, T) \times \Omega) \cap \mathcal{C}((0, T); L^1(\Omega))$ tel que : pour tout $\eta \in \mathcal{C}^1((0, T) \times \Omega)$,

$$\int_0^T \int_\Omega \Psi (\partial_t \eta + (v \cdot \nabla) \eta) dx dt = - \int_\Omega \Psi_0 \eta(t=0) dx.$$

Cette proposition permet de définir $\tilde{\rho}_F$ solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_F + \operatorname{div}(\tilde{\rho}_F \tilde{u}) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \tilde{\rho}_F(t=0) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)}. \end{cases}$$

En effet, sur $\tilde{\Omega}_F(t)$, $\operatorname{div} \tilde{u} = 0$ et on remarque facilement que :

$$\tilde{\rho}_F(t, x) = \tilde{\rho}_F(t, x) \chi_{\tilde{\Omega}_F(t)}(x), \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Ainsi, $\tilde{\rho}_F$ et \tilde{u} vérifient :

(i) $\tilde{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^3 \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^3$, $\tilde{\rho}_F \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$,

(ii) Le flot associé à \tilde{u} est défini et s'écrit :

$$\tilde{X}(t, 0, y) = \tilde{a}_1(t) + \tilde{Q}_1(t)(y - g_0) + \tilde{Q}_1(t)\tilde{\xi}_1(t, y) \text{ sur } \Omega_S(0)$$

avec $\tilde{a}_1 \in W^{1,\infty}(0, T)^3$, $\tilde{Q}_1 \in W^{1,\infty}(0, T; SO_3(\mathbb{R}))$ et $\tilde{\xi}_1 \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{E}(\Omega_S(0)))^3$ d'après (3.11).

(iii) $\operatorname{div} \tilde{u} = 0$ sur $\tilde{\Omega}_F(t)$ d'après (3.10).

Ainsi, à des données $(\tilde{w}_F, (\tilde{a}, \tilde{Q}, \tilde{\xi})) \in Y_0 \times Y_1$ définies sur des domaines fixes, on a associé $(\tilde{\rho}_F, \tilde{u})$ vérifiant les conditions (2.1) à (2.4). On note Θ cette application.

4 Problème en dimension finie

On va résoudre une approximation en dimension finie du problème non linéaire. Pour cela, on commencera par résoudre un problème linéarisé en dimension finie puis on passera au problème non linéaire par un argument de point fixe.

On verra qu'il faut découper l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de manière à garder une perturbation élastique petite par rapport à la configuration de référence.

4.1 Le problème linéarisé en dimension finie

On va utiliser la fonction Θ pour construire une vitesse vérifiant les conditions (2.1) à (2.4) et faire intervenir cette vitesse pour linéariser notre problème.

Soient :

$\star(\varphi_i)_{i \geq 1}$ une base orthonormale de $V(\Omega_F(0))$

$\star(\psi_i)_{i \geq 0}$ une base orthonormale de $\mathcal{E}(\Omega_S(0))$ où $\psi_0 = \eta$ est le relèvement de la normale sur $\Omega_S(0)$ défini au paragraphe précédent.

• Soient $N \in \mathbb{N}^*$ fixé et $(\tilde{w}_F^N, \tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}_1^N) \in Y_0 \times Y_1$ défini par :

$$\tilde{w}_F^N(t, \cdot) = \sum_{i=1}^N \tilde{\gamma}_i(t) \varphi_i, \quad \tilde{\xi}_1^N(t, \cdot) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i(t) \psi_i \quad (4.1)$$

avec $\tilde{a}^N \in \mathcal{C}^1(0, T)^3$, $\tilde{Q}^N \in \mathcal{C}^1(0, T; SO_3(\mathbb{R}))$, $(\tilde{\alpha}_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{C}^1(0, T)^N$, $(\tilde{\gamma}_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{C}^0(0, T)^N$.

On peut alors reprendre la construction du paragraphe précédent et définir :

$$(\tilde{\rho}_F^N, \tilde{u}^N) = \Theta(\tilde{w}_F^N, \tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}_1^N)$$

Sur $\Omega_S(0)$,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_S^N(t, 0, y) &= \tilde{a}^N(t) + \tilde{Q}^N(t)(y - g_0) + \tilde{Q}^N(t)(\tilde{\xi}_1^N(t, y) + \tilde{\alpha}_0(t)\eta(y)) \\ &= \tilde{a}^N(t) + \tilde{Q}^N(t)(y - g_0) + \tilde{Q}^N(t)\tilde{\xi}_1^N(t, y) \end{aligned}$$

où $\tilde{\alpha}_0$ est le terme correcteur de conservation de volume et :

$$\tilde{\xi}^N(t, y) = \tilde{\xi}_1^N(t, y) + \tilde{\alpha}_0(t)\eta(y) = \sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i(t)\psi_i(y).$$

On a ainsi :

$$\|\tilde{X}_S^N(t, 0, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega_S(0)))} \leq \frac{e_0}{C_{\mathcal{P}}} \quad (4.2)$$

où $C_{\mathcal{P}} \geq 1$ est la constante de continuité de \mathcal{P} défini par (3.3). Le flot $\tilde{X}_S^N(t, 0, \cdot)$ est donc inversible de $\Omega_S(0)$ sur son image $\tilde{\Omega}_S^N(t)$ et on définit le prolongement inversible $\tilde{Y}_{S,p}^N(t, 0, \cdot)$ de $\tilde{X}_S^N(t, 0, \cdot)$ dans $W^{1, \infty}(0, T; H^3(\Omega))$ par (3.4). Enfin, on pose :

$$\tilde{U}_E^N(t, y) = \sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}'_i(t)\psi_i(y) = \partial_t \tilde{\xi}^N(t, y)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^N(t, x) &= \dot{\tilde{a}}^N(t)(\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\tilde{\omega}^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \\ &+ \left(\tilde{Q}^N(t) \left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}'_i(t)\psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) \right)_p + \sum_{i=1}^N \tilde{\gamma}_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

On cherche maintenant (ρ_F^N, u^N, ξ^N) solution du problème linéarisé donné plus loin sous forme variationnelle telle que :

- sur $\tilde{\Omega}_S^N(t)$,

$$u^N(t, x) = \dot{\tilde{a}}^N(t) + \omega^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t)) + \tilde{Q}^N(t)U_E^N(t, \tilde{X}_S^N(0, t, x)) \quad (4.4)$$

avec $U_E^N(t, y) = \sum_{i=0}^N \beta_i(t)\psi_i(y)$ où $\beta_0(t)$ est tel que :

$$\int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} u^N(t, x) \cdot n_x \, d\gamma(x) = 0 \quad (4.5)$$

- sur $\tilde{\Omega}_F^N(t)$,

$$\begin{aligned} u^N(t, x) &= \dot{\tilde{a}}^N(t)(\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\omega^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \\ &+ (\tilde{Q}^N(t)U_E^N(t, \tilde{X}_S^N(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(t, 0, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

- $\xi^N(t, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_i(t)\psi_i(y)$ sur $\Omega_S(0)$ (4.7)

- $$\begin{cases} \partial_t \rho_F^N + \operatorname{div}(\rho_F^N u^N) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \rho_F(t=0) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)} \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

Remarque 4 :

Dans la formulation variationnelle, on exprimera que $\partial_t \xi^N = U_E^N$ soit $\beta_i = \alpha'_i, \forall 0 \leq i \leq N$. On introduit les inconnues β_i pour ne pas avoir des dérivées secondes portant sur les α_i ce qui permet de résoudre un système d'équations différentielles d'ordre 1. On procède ainsi par commodité mais il n'y a pas de raison fondamentale.

La condition (4.5) qui correspond à une condition de conservation de volume est maintenant linéaire. En effet, elle s'écrit :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{r}_i^N(t) \beta_i(t) + \tilde{r}_0^N(t) \beta_0(t) = 0$$

où, pour tout $0 \leq i \leq N$, \tilde{r}_i^N satisfait :

$$\tilde{r}_i^N(t) = \int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} [\tilde{Q}^N(t) \psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x))] \cdot n_x d\gamma(x). \quad (4.9)$$

Vérifions que β_0 est bien défini. La normal unitaire extérieure n_x définie sur $\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)$ peut s'exprimer en fonction de la normale unitaire extérieure N_y définie sur $\partial \Omega_S(0)$:

$$n_{\tilde{X}_S^N(t, 0, y)} = \frac{\text{cof} \nabla \tilde{X}_S^N(t, 0, y) N_y}{\|\text{cof} \nabla \tilde{X}_S^N(t, 0, y) N_y\|}, \quad \forall y \in \partial \Omega_S(0). \quad (4.10)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0^N(t) &= \int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} [\tilde{Q}^N(t) \eta(\tilde{X}_S^N(0, t, x))] \cdot n_x d\gamma(x) \\ &= \int_{\partial \Omega_S(0)} [\tilde{Q}^N(t) \eta(y)] \cdot n_{\tilde{X}_S^N(t, 0, y)} \|\text{cof} \nabla \tilde{X}_S^N(t, 0, y) N_y\| d\gamma(y) \\ &= \int_{\partial \Omega_S(0)} [\tilde{Q}^N(t) \eta(y)] \cdot [\text{cof} \nabla \tilde{X}_S^N(t, 0, y) N_y] d\gamma(y). \end{aligned}$$

Comme $\nabla \tilde{X}_S^N(t, 0, y) = \tilde{Q}^N(t)(Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))$,

$$\text{cof} \nabla \tilde{X}_S^N(t, 0, y) = \frac{1}{\det (Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))} \tilde{Q}^N(t)(Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))^{-t}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0^N(t) &= \int_{\partial \Omega_S(0)} \frac{1}{\det (Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))} \eta(y) \cdot [(Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))^{-t} N_y] d\gamma(y) \\ &= \int_{\partial \Omega_S(0)} \frac{1}{\det (Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))} N_y \cdot [(Id + \nabla \tilde{\xi}^N(t, y))^{-t} N_y] d\gamma(y) \end{aligned}$$

par définition de η . En utilisant (4.2), on obtient :

$$\tilde{r}_0^N(t) \geq r > 0. \quad (4.11)$$

Ainsi la condition (4.5) a bien un sens et on peut écrire U_E^N :

$$U_E^N(t, y) = \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \left(\psi_i(y) - \frac{\tilde{r}_i^N(t)}{\tilde{r}_0^N(t)} \eta(y) \right).$$

On peut de cette façon décomposer U_E^N sur une nouvelle base $\tilde{\psi}_i^1$ dépendant du temps :

$$U_E^N(t, y) = \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \tilde{\psi}_i^1(t, y)$$

avec :

$$\tilde{\psi}_i^1(t, y) = \psi_i(y) - \frac{\tilde{r}_i^N(t)}{\tilde{r}_0^N(t)} \eta(y).$$

Les fonctions $\tilde{\psi}_i^1$ vérifient alors la condition linéaire suivante :

$$\int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} [\tilde{Q}^N(t) \tilde{\psi}_i^1(t, \tilde{X}_S^N(0, t, x))] \cdot n_x d\gamma(x) = 0.$$

Ainsi, on peut prolonger $\tilde{Q}^N(t) \tilde{\psi}_i^1(t, \tilde{X}_S^N(0, t, x))$ en une fonction à divergence nulle sur $\tilde{\Omega}_F^N(t)$. On la note $\tilde{\Psi}_i$:

$$\tilde{\Psi}_i = (\tilde{Q}^N(t) \tilde{\psi}_i^1(t, \tilde{X}_S^N(0, t, \cdot)))_p.$$

4.2 Formulation variationnelle

On cherche u^N , U_E^N et ξ^N sous la forme :

$$\begin{aligned} u^N(t, x) &= \dot{a}^N(t) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\omega^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \\ &+ \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \tilde{\Psi}_i(t, x) + \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$U_E^N(t, y) = \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \tilde{\psi}_i^1(t, y), \quad \xi^N(t, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_i(t) \psi_i(y) \quad (4.13)$$

solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned}
& m \int_0^T \ddot{a}^N \cdot \dot{b}^N dt + \int_0^T \frac{d}{dt} (\tilde{J}^N \omega^N) \cdot r^N dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (\tilde{\omega}^N \wedge \tilde{Q}^N (y - g_0 + \tilde{\xi}^N)) \wedge (\omega^N \wedge \tilde{Q}^N (y - g_0 + \tilde{\xi}^N)) \cdot r^N dy dt \\
& \quad - \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 (\tilde{Q}^N \partial_t \tilde{\xi}^N \wedge (\omega^N \wedge \tilde{Q}^N (y - g_0 + \tilde{\xi}^N))) \cdot r^N dy dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \tilde{Q}^N (y - g_0 + \tilde{\xi}^N) \wedge (\tilde{\omega}^N \wedge \tilde{Q}^N \partial_t \xi^N) \cdot r^N dy dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \tilde{Q}^N (\tilde{\xi}^N \wedge \partial_t U_E^N) \cdot r^N dy dt + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 \partial_t U_E^N \cdot V_E^N dy dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 ((\tilde{Q}^N)^{-1} \tilde{\omega}^N \wedge \partial_t \xi^N) \cdot V_E^N dy dt + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 ((\tilde{Q}^N)^{-1} \omega^N \wedge \partial_t \tilde{\xi}^N) \cdot V_E^N dy dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 ((\tilde{Q}^N)^{-1} \dot{\omega}^N \wedge \tilde{\xi}^N) \cdot V_E^N dy dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 ((\tilde{Q}^N)^{-1} \omega^N \wedge ((\tilde{Q}^N)^{-1} \tilde{\omega}^N \wedge (y - g_0 + \tilde{\xi}^N))) \cdot V_E^N dy dt \\
& + \epsilon \int_0^T (\partial_t U_E^N, V_E^N)_{H^3(\Omega_S(0))} dt + \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N) : \varepsilon_y(V_E^N) dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N \partial_t u^N \cdot v^N dx dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N ((\tilde{u}^N \cdot \nabla) u^N) \cdot v^N dx dt + 2\nu \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} \varepsilon_x(u^N) : \varepsilon_x(v^N) dx dt \\
& \quad + \int_0^T (\partial_t \xi^N, \eta^N)_{H^3(\Omega_S(0))} dt - \int_0^T (U_E^N, \eta^N)_{H^3(\Omega_S(0))} dt = 0
\end{aligned}$$

pour tout

$$\begin{aligned}
v^N(t, x) &= \dot{b}^N(t) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (r^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \\
& \quad + \sum_{i=1}^N B_i(t) \tilde{\Psi}_i(t, x) + \sum_{i=1}^N C_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x)
\end{aligned}$$

et

$$V_E^N(t, y) = \sum_{i=1}^N B_i(t) \tilde{\psi}_i^1(t, y) \quad , \quad \eta^N(t, y) = \sum_{i=0}^N A_i(t) \psi_i(y)$$

avec $b^N \in H^1(0, T)^3$, $r^N \in L^2(0, T)^3$, A_i , B_i et $C_i \in L^2(0, T)$.

Les inconnues du problème sont maintenant les coefficients a^N , ω^N , α_i pour $0 \leq i \leq N$ et β_i , γ_i pour $1 \leq i \leq N$. On cherche a^N dans $H^2(0, T)^3$ et ω^N dans $H^1(0, T)^3$, α_i , β_i , γ_i dans $H^1(0, T)$. Ce problème est complété par les conditions initiales obtenues à partir des données g_0 , a^1 , ω^0 , ξ^1 , u_F^0 , ρ_F^0 .

Remarque 5 :

La densité ρ_F^N est solution exacte de l'équation de conservation de la masse associée à u^N (d'après la **proposition 4**, ρ_F^N est bien défini). On ne fait donc aucune approximation en dimension finie de l'équation portant sur la densité : ceci permet de garder une estimation d'énergie sur le problème en dimension finie.

4.3 Résolution

On prend successivement pour v^N les fonctions-tests suivantes : pour tout $1 \leq i_0 \leq N$

$$\begin{aligned} & \dot{b}^N(t)(\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p; \\ & (r^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p; \\ & B_{i_0}(t)\tilde{\Psi}_{i_0}(t, x); \\ & C_{i_0}(t)[(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_{i_0}](t, x) \end{aligned}$$

et pour tout $0 \leq i_0 \leq N$ on prend :

$$\eta^N(t, y) = A_{i_0}(t)\psi_{i_0}(y).$$

On obtient de cette manière un système d'équations différentielles d'ordre $3N + 7$ de type :

$$A^N(t) \frac{dY^N}{dt}(t) = M^N(t)Y^N(t) \text{ avec } A^N, M^N \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{M}_{3N+7}(\mathbb{R})). \quad (4.14)$$

Le vecteur Y^N s'écrit :

$$Y^N(t) = {}^t(\dot{a}^N(t), \omega^N(t), \alpha_0(t), \dots, \alpha_N(t), \beta_1(t) \dots \beta_N(t), \gamma_1(t) \dots \gamma_N(t))$$

(ici $\dot{a}^N(t)$ et $\omega^N(t)$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^3).

Les décompositions des conditions initiales sur les bases donnent $Y^N(0)$:

$$\begin{aligned} \xi^1 \in \mathcal{E}(\Omega_S(0)) & \Rightarrow \xi^1 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^0 \psi_i \\ u_F^0 - (a^1(\chi_{\Omega_S(0)})_p + (\omega^0 \wedge (x - g_0)\chi_{\Omega_S(0)})_p + (\xi^1)_p) & \in V(\Omega_F(0)) \Rightarrow \\ u_F^0 - (a^1(\chi_{\Omega_S(0)})_p + (\omega^0 \wedge (x - g_0)\chi_{\Omega_S(0)})_p + (\xi^1)_p) & = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^0 \varphi_i. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la condition initiale pour Y^N :

$$Y^N(0) = {}^t(a^1, \omega^0, 0, \dots, 0, \beta_1^0 \dots \beta_N^0, \gamma_1^0 \dots \gamma_N^0).$$

Il faut maintenant vérifier que A^N est inversible. La matrice A^N est donnée par :

$$A^N(t) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_1 & a_2 & 0 & A_1 & A_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & A_3 & A_4 \\ \hline 0 & 0 & Id & 0 & 0 \\ \hline {}^t A_1 & {}^t A_3 & 0 & A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline {}^t A_2 & A_4 & 0 & {}^t A_{1,2} & A_{2,2} \end{array} \right)$$

où :

$$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \quad A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{M}_{3,N}(\mathbb{R}), \\ Id \in \mathbb{M}_{N+1,N+1}(\mathbb{R}), A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,2} \in \mathbb{M}_{N,N}(\mathbb{R})$$

avec :

$$a_1 = \left(m + \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) \left| (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \right|^2 dx \right) Id_{3,3}.$$

La matrice a_2 est définie par :

$$(a_2 \omega, r) = \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \omega \wedge \left(((x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \right) \cdot r dx, \quad \forall \omega, r \in \mathbb{R}^3.$$

De plus, les autres matrices sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_3 &= \tilde{J}^N + J_1(t) \\ (A_1)_i &= \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \tilde{\Psi}_i(t, x) dx \\ (A_2)_i &= \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) dx \\ (A_3)_i &= \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) \tilde{\Psi}_i(t, x) \wedge ((x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p dx + \\ &\quad \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \tilde{Q}^N(t) \left(\tilde{\xi}^N \wedge \tilde{\psi}_i^1(t, y) \right) dy \\ (A_4)_i &= \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \wedge ((x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p dx \\ (A_{1,1})_{i,j} &= \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \tilde{\psi}_i^1(t, y) \tilde{\psi}_j^1(t, y) dy + \epsilon(\tilde{\psi}_i^1(t, \cdot), \tilde{\psi}_j^1(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S(0))} \\ &\quad + \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) \tilde{\Psi}_i(t, x) \cdot \tilde{\Psi}_j(t, x) dx \\ (A_{1,2})_{i,j} &= \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_j](t, x) \cdot \tilde{\Psi}_i(t, x) dx \\ (A_{2,2})_{i,j} &= \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \cdot [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_j](t, x) dx. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on a noté $J_1(t)$ la matrice d'inertie telle que : pour tout $\omega, r \in \mathbb{R}^3$,

$$(J_1(t)\omega, r) = \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) \left(\omega \wedge ((x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)}) \right)_p \cdot \left(r \wedge ((x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)}) \right)_p dx.$$

On voit ainsi que A^N est symétrique. Cette matrice est aussi définie positive puisque, en posant :

$$Y = {}^t(a, \omega, \alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_1 \dots \beta_N, \gamma_1 \dots \gamma_N)$$

on a :

$$\begin{aligned} {}^tY A^N(t)Y &= \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \left| a + \omega \wedge \tilde{Q}^N(y - g_0 + \tilde{\xi}^N(t, y)) + \tilde{Q}^N(t) \sum_{i=1}^N \beta_i \tilde{\psi}_i^1(t, y) \right|^2 dy \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) |w^N(t, x)|^2 dx + \epsilon \left\| \sum_{i=1}^N \beta_i \tilde{\psi}_i^1(t, y) \right\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 + \sum_{i=0}^N \alpha_i^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec :

$$w^N(t, x) = a(\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\omega \wedge (x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + \sum_{i=1}^N \beta_i \tilde{\Psi}_i(t, x) + \sum_{i=1}^N \gamma_i [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x).$$

Donc

$${}^tY A^N(t)Y \geq 0, \forall Y \in \mathbb{R}^{3N+7}$$

et, puisque $\tilde{\xi}^N$ est un élément de $\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$,

$${}^tY A^N(t)Y = 0 \Rightarrow Y = 0.$$

Le système admet donc une solution unique Y dans $\mathcal{C}^1(0, T)^{3N+7}$. On vérifie que les coefficients solutions du système d'équations différentielles donnent bien la solution (u^N, U_E^N, ξ^N) du problème linéaire en dimension finie.

Enfin, l'existence et l'unicité de ρ^N solution de (4.8) est assurée par la **proposition 4**.

4.4 Point fixe

D'après la formulation variationnelle satisfaite par la solution, si on prend $b^N = a^N$, $r^N = \omega^N$, $V_E^N = U_E^N$ et $v^N = u^N$, on voit que notre solution satisfait une estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \left| \dot{a}^N(t) + \omega^N(t) \wedge \tilde{Q}^N(t)(y - g_0 + \tilde{\xi}^N(t)) + \tilde{Q}^N(t) \partial_t \xi^N(t) \right|^2 dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) |u_F^N(t, x)|^2 dx + 2\nu \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}_F^N(s)} |\varepsilon_x(u_F^N(s, x))|^2 dx ds + \frac{1}{2} \epsilon \left\| \partial_t \xi^N(t, \cdot) \right\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N)(t, y) : \varepsilon_y(\xi^N)(t, y) dy \leq E_0^N \leq 2E_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec :

$$\begin{aligned}
E_0^N &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \left| a^1 + \omega^0 \wedge (y - g_0) + \sum_{i=1}^N \beta_i^0 \tilde{\psi}_i^1(0, y) \right|^2 dy \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_F^0 \left| a^1 (\chi_{\Omega_S(0)})_p + \omega^0 \wedge ((x - g_0) \chi_{\Omega_S(0)})_p + \left(\sum_{i=1}^N \beta_i^0 \tilde{\psi}_i^1(0, y) \right)_p + \sum_{i=1}^N \gamma_i^0 \varphi_i(y) \right|^2 dy \\
&+ \frac{\epsilon}{2} \left\| \sum_{i=1}^N \beta_i^0 \tilde{\psi}_i^1(0, y) \right\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2.
\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \beta_i^0 \tilde{\psi}_i^1(0, \cdot) = \xi^1 \text{ dans } H^3(\Omega_S(0)).$$

Ainsi, d'après la **proposition 1**,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N \beta_i^0 \tilde{\psi}_i^1(0, \cdot) \right)_p = (\xi^1)_p \text{ dans } H^1(\Omega).$$

De plus :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \gamma_i^0 \varphi_i = u_F^0 - \left(a^1 (\chi_{\Omega_S(0)})_p + \omega^0 \wedge ((x - g_0) \chi_{\Omega_S(0)})_p + (\xi^1)_p \right) \text{ dans } H_0^1(\Omega_F(0)).$$

On a donc :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_0^N = E_0 \tag{4.17}$$

où :

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0 |a^1 + \omega^0 \wedge (y - g_0) + \xi^1|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0 |u_F^0|^2 dy + \frac{1}{2} \epsilon \|\xi^1\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2.$$

Ainsi, pour $N \geq N_0$, où N_0 est un entier fixé,

$$E_0^N \leq 2E_0. \tag{4.18}$$

On a donc une majoration uniforme de E_0^N . Montrons que Y^N est borné dans $L^\infty(0, T)$. Pour N assez grand, comme $\tilde{\xi}^N(t)$ est un élément de $\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$ pour tout $t \in [0, T]$, on déduit de l'estimation d'énergie qu'il existe une constante C_0 dépendant uniquement de ϵ , E_0 , $\Omega_S(0)$, ρ_S^0 et δ telle que :

$$|\dot{a}^N(t)|^2 + |\omega^N(t)|^2 + \sum_{i=0}^N \alpha_i'(t)^2 \leq C_0. \tag{4.19}$$

D'autre part, l'estimation d'énergie donne aussi que :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) |u_F^N(t, x)|^2 dx \leq 2E_0. \tag{4.20}$$

D'après (4.19) et (4.2),

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) \left| \dot{a}^N(t) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\omega^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + \sum_{i=1}^N \alpha'_i(t) \tilde{\Psi}_i(t, x) \right|^2 dx \leq C_1.$$

Donc (4.20) nous permet de dire que :

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_F^N(t, x) \left| \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \right|^2 dx \leq C_2$$

soit, toujours en utilisant (4.2) et le fait que $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega_F(0))$,

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i(t)^2 \leq C_3. \quad (4.21)$$

D'où en combinant (4.19) et (4.21), on obtient :

$$|\dot{a}^N(t)|^2 + |\omega^N(t)|^2 + \sum_{i=0}^N \alpha'_i(t)^2 + \sum_{i=1}^N \gamma_i(t)^2 \leq M \quad (4.22)$$

où M est une constante dépendant de ϵ , E_0 , m , ρ_S^0 et de δ . Il faut maintenant utiliser une méthode de point fixe pour passer au problème non linéaire en dimension finie. On définit tout d'abord l'ensemble \mathcal{A} par :

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}^1(0, T)^3 \times \mathcal{C}^1(0, T; SO_3(\mathbb{R})) \times \mathcal{C}^1(0, T)^N \times \mathcal{C}(0, T)^N$$

et on le munit de la norme de continuité uniforme, puis on note \mathcal{C} l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{ Z = (a^N, Q^N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathcal{A} / \|Z\|_{\mathcal{A}} \leq M \text{ et} \right. \\ \left. \|a^N - g_0\|_{L^\infty(0, T)} \leq \kappa_0, \|Q^N - Id\|_{L^\infty(0, T)} \leq \kappa_1, \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)^2 \leq \kappa_2^2 \right\}.$$

L'ensemble \mathcal{C} est un convexe fermé de \mathcal{A} . On considère l'opérateur :

$$\begin{aligned} K : \mathcal{C} &\mapsto \mathcal{A} \\ \tilde{Z}^N &\mapsto Z^N \\ (\tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_N, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_N) &\mapsto (a^N, Q^N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N) \end{aligned}$$

où Z^N est obtenu à partir des coefficients de la solution de (4.14). K est un opérateur continu. De plus, d'après (4.22) :

$$|\dot{a}^N(t)|^2 + |\dot{Q}^N(t)|^2 + \sum_{i=0}^N \alpha'_i(t)^2 \leq M, \forall t \in [0, T].$$

Donc, si on prend,

$$T = T_0 = \inf \left(\frac{\kappa_0}{\sqrt{M}}, \frac{\kappa_1}{\sqrt{M}}, \frac{\kappa_2}{\sqrt{M}} \right), \quad (4.23)$$

alors :

$$\|a^N - g_0\|_{L^\infty(0, T_0)} \leq \kappa_0, \|Q^N - Id\|_{L^\infty(0, T_0)} \leq \kappa_1 \text{ et } \sup_{0 \leq t \leq T_0} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)^2 \leq \kappa_2^2$$

et dans ce cas, $Z^N \in \mathcal{C}$ et donc $K(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Jusqu'au **paragraphe 6**, on va se placer sur l'intervalle $[0, T_0]$, on prolongera dans le **sous-paragraphe 6.2** la solution à l'intervalle $[0, T]$, où T est un temps indépendant de κ_0 , κ_1 et κ_2 comme il est annoncé dans le **théorème 1**.

Montrons que $K(\mathcal{C})$ est relativement compact dans \mathcal{A} . D'après (4.14),

$$\frac{dY^N}{dt}(t) = A^N(t)^{-1}M^N(t)Y^N(t).$$

On n'exprime pas entièrement la matrice $M^N(t)$ mais, on voit que pour avoir une majoration de M^N dans $L^\infty(0, T_0)$, il faut avoir des estimations sur $(\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p$, $((x - \tilde{a}^N(t))\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p$ et $[(\tilde{Q}^N(t)\tilde{\psi}_i^1(\tilde{X}_S^N(0, t, x)))]_p$ dans $W^{1, \infty}(0, T_0; L^2(\Omega))$ et dans $L^\infty(0, T_0; H^1(\Omega))$. Pour la régularité $W^{1, \infty}(0, T_0; L^2(\Omega))$, on utilise la **proposition 3** et la **proposition 1** donne la régularité recherchée dans $L^\infty(0, T_0; H^1(\Omega))$. Il faut être attentif au fait que les constantes C dépendent du flot $\tilde{Y}_{S,p}^N$. Comme celui-ci est borné dans $W^{1, \infty}(0, T_0; H^3(\Omega))$, on a une majoration uniforme de ces constantes. De plus, comme \mathcal{C} est un sous ensemble borné de \mathcal{A} , on obtient une majoration de M^N dans $L^\infty(0, T_0)$ uniformément en \tilde{Z}^N dans \mathcal{C} .

La matrice A^N dépend du vecteur \tilde{Z}^N . Pour souligner cette dépendance, on note temporairement $A_{\tilde{Z}^N}^N$. Montrons que $(A_{\tilde{Z}^N}^N)^{-1}$ est borné dans $L^\infty(0, T_0)$ uniformément en \tilde{Z}^N dans \mathcal{C} . Pour cela, supposons que c'est faux. Ceci revient à dire qu'il existe une suite (y_k) d'éléments de \mathbb{R}^{3N+7} , une suite de réels (t_k) et une suite (\tilde{Z}_k^N) d'éléments de \mathcal{C} tels que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}^t y_k A_{\tilde{Z}_k^N}^N(t_k) y_k = 0, \|y_k\| = 1$$

avec

$$y_k = {}^t(a_k, \omega_k, \alpha_{0,k}, \dots, \alpha_{N,k}, \beta_{1,k} \dots \beta_{N,k}, \gamma_{1,k} \dots \gamma_{N,k}).$$

Le calcul (4.15) donne immédiatement que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{i,k} = 0, \forall 0 \leq i \leq N, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{i,k} = 0, \forall 1 \leq i \leq N.$$

Ainsi, en utilisant l'estimation (4.2), on obtient que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{F,k}^N(t_k, x) \left| \sum_{i=1}^N \gamma_{i,k} [(\tilde{Y}_{S,p,k}^N(0, t_k, \cdot))^* \varphi_i](t_k, x) \right|^2 dx = 0$$

où $\tilde{\rho}_{F,k}^N$ et $\tilde{Y}_{S,p,k}^N$ sont définis à partir de \tilde{Z}_k^N . D'où, finalement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{i,k} = 0, \forall 1 \leq i \leq N.$$

Ceci est en contradiction avec le fait que $\|y_k\| = 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi $(A_{\tilde{Z}^N}^N)^{-1}$ est borné dans $L^\infty(0, T_0)$ uniformément en \tilde{Z}^N dans \mathcal{C} et donc :

$$\left\| \frac{dZ^N}{dt} \right\|_{\mathcal{A}} \leq \left\| \frac{dY^N}{dt} \right\|_{L^\infty(0, T_0)^{3N+7}} \leq C$$

donc, d'après le théorème d'Ascoli, $K(\mathcal{C})$ est relativement compact dans \mathcal{A} : on peut ainsi appliquer le théorème de Schauder qui nous donne l'existence d'un point fixe pour l'application K .

Il faut maintenant montrer que ce point fixe correspond à une solution du problème non linéaire : soit $(a^N, \omega^N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N)$ le point fixe obtenu. A-t-on bien $u^N = \tilde{u}^N$?

$$\begin{aligned} u^N(t, x) &= \dot{a}^N(t) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\omega^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \\ &+ \sum_{i=1}^N \alpha'_i(t) \left((\tilde{Q}^N(t) \tilde{\psi}_i^1(\tilde{X}_S^N(0, t, x))) \right)_p + \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{u}^N(t, x) &= \dot{\tilde{a}}^N(t) (\chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p + (\tilde{\omega}^N(t) \wedge (x - \tilde{a}^N(t)) \chi_{\tilde{\Omega}_S^N(t)})_p \\ &+ \left(\tilde{Q}^N(t) \left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}'_i(t) \psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) \right) \right)_p + \sum_{i=1}^N \tilde{\gamma}_i(t) [(\tilde{Y}_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{Q}^N(t) \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}'_i(t) \psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) + \tilde{\alpha}'_0(t) \psi_0(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) \right) \right]_p = \\ &\left[\sum_{i=0}^N \alpha'_i(t) (\tilde{Q}^N(t) \psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x))) \right]_p. \end{aligned}$$

Or, par définition de $\tilde{\alpha}_0$ et α_0 ,

$$\int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} \left[\tilde{Q}^N(t) \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}'_i(t) \psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) + \tilde{\alpha}'_0(t) \psi_0(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) \right) \right] \cdot n_x d\gamma(x) = 0$$

et

$$\int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} \left[\tilde{Q}^N(t) \left(\sum_{i=1}^N \alpha'_i(t) \psi_i(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) + \alpha'_0(t) \psi_0(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) \right) \right] \cdot n_x d\gamma(x) = 0.$$

Comme $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i, \forall 1 \leq i \leq N$, cela implique :

$$(\tilde{\alpha}'_0(t) - \alpha'_0(t)) \int_{\partial \tilde{\Omega}_S^N(t)} \left[\tilde{Q}^N(t) \psi_0(\tilde{X}_S^N(0, t, x)) \right] \cdot n_x d\gamma(x) = 0$$

soit

$$(\tilde{\alpha}'_0(t) - \alpha'_0(t))\tilde{r}_0^N(t) = 0$$

d'après (4.11),

$$\tilde{\alpha}'_0 = \alpha'_0 \Rightarrow \tilde{u}^N = u^N \text{ et donc aussi } \tilde{\rho}_F^N = \rho_F^N.$$

On obtient donc une solution du problème non linéaire en dimension finie. On exprime maintenant l'équation du mouvement solide de façon globale : comme dans le **paragraphe 1.3**, on peut écrire de façon équivalente le problème discret satisfait par u^N en choisissant une formulation globale sur le solide qui fait intervenir le flot X_S^N (voir (1.7)) ou en exprimant les équations de la translation, de la rotation et des déplacements élastiques (voir (1.9), (1.10) et (1.11)). Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u^N(t, x) &= \dot{a}^N(t)(\chi_{\Omega_S^N(t)})_p + (\omega^N(t) \wedge (x - a^N(t))\chi_{\Omega_S^N(t)})_p \\ &+ (Q^N(t) \sum_{i=0}^N \alpha'_i(t)\psi_i(X_S^N(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^N \gamma_i(t)[(Y_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

et

$$\xi^N(t, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_i(t)\psi_i(y) \quad (4.25)$$

solution de :

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t^2 X_S^N(t, 0, y) V^N(t, y) dy dt + \epsilon \int_0^{T_0} (\partial_t^2 \xi^N, V_E^N)_{H^3(\Omega_S(0))} dt \\ &\quad + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N) : \varepsilon_y(V_E^N) dy dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N \partial_t u^N \cdot v^N dx dt \\ &+ \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N ((u^N \cdot \nabla) u^N) \cdot v^N dx dt + 2\nu \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} \varepsilon_x(u^N) : \varepsilon_x(v^N) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

pour tous V^N et v^N tels que : pour tout $(t, y) \in [0, T_0] \times \Omega_S(0)$,

$$V^N(t, y) = \dot{b}^N(t) + r^N(t) \wedge (Q^N(t)(y - g_0 + \xi^N(t, y))) + Q^N(t)V_E^N(t, y)$$

avec :

$$V_E^N(t, y) = \sum_{i=1}^N B_i(t)\psi_i^1(t, y) \text{ où } \psi_i^1(t, y) = \psi_i(y) - \frac{r_i^N(t)}{r_0^N(t)}\eta(y)$$

et, pour tout $(t, x) \in [0, T_0] \times \Omega$,

$$v^N(t, x) = (V^N(t, X_S^N(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^N C_i(t)[(Y_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x). \quad (4.27)$$

Les coefficients $b^N \in H^2(0, T_0)^3$, $r^N \in H^1(0, T_0)^3$ et $B_i, C_i \in H^1(0, T_0)^3$ sont pris nuls en $t = T_0$. Dans l'expression de ψ_i^1 , pour tout $i = 0, \dots, N$, r_i^N est défini par (4.9) en remplaçant \tilde{Q}^N par Q^N et \tilde{X}_S^N par X_S^N . De plus, ρ_F^N est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_F^N + \operatorname{div}(\rho_F^N u^N) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \rho_F^N(t=0) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)}. \end{cases}$$

On vérifie facilement, en utilisant la régularité en dimension finie du flot X^N , que :

$$\rho_F^N(t, x) = \rho_F^0(X^N(0, t, x)), \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T_0]. \quad (4.28)$$

L'estimation d'énergie et (4.18) donnent :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\dot{a}^N(t) + \omega^N(t) \wedge Q^N(t)(y - g_0 + \xi^N(t)) + Q^N(t) \partial_t \xi^N(t)|^2 dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_F^N(t, x) |u_F^N(t, x)|^2 dx + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} |\varepsilon_x(u_F^N(s, x))|^2 dx ds + \frac{1}{2} \epsilon \|\partial_t \xi^N(t, \cdot)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N)(t, y) : \varepsilon_y(\xi^N)(t, y) dy \leq E_0^N \leq 2E_0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Proposition 5 :

On peut extraire de (a^N) , (ω^N) , (u^N) , (ξ^N) et (X_S^N) des sous-suites (qu'on note encore (a^N) , (ω^N) , (u^N) , (ξ^N) et (X_S^N)) telles que :

$$\begin{array}{llll} a^N & \rightharpoonup & a & \text{dans } W^{1,\infty}(0, T_0)^3 w^* \\ \omega^N & \rightharpoonup & \omega & \text{dans } L^\infty(0, T_0)^3 w^* \\ u^N & \rightharpoonup & u & \text{dans } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))^3 w^* \text{ et} \\ & & & \text{dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3 w \\ \xi^N & \rightharpoonup & \xi & \text{dans } L^2(0, T_0; H^1(\Omega_S(0)))^3 w \\ \partial_t \xi^N & \rightharpoonup & \partial_t \xi & \text{dans } L^\infty(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^3 w^* \\ X_S^N & \rightharpoonup & X_S & \text{dans } W^{1,\infty}(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^3 w^* \end{array}$$

où X_S , le flot associé à u , est défini sur $\Omega_S(0)$ par :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y), \forall t \in [0, T_0], \forall y \in \Omega_S(0).$$

Preuve de la proposition 5 :

Tous ces résultats viennent de l'estimation d'énergie (4.29) et du fait que ξ^N est un élément de $\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$. Pour le résultat de convergence faible de (u^N) , on remarque que, sur la partie solide $\Omega_S^N(t)$,

$$u^N(t, x) = \dot{a}^N(t) + \omega^N(t) \wedge (x - a^N(t)) + Q^N(t) \partial_t \xi^N(t, X_S^N(0, t, x)).$$

Ainsi (u^N) est bornée dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3$. Le caractère borné de (u^N) dans $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))^3$ vient de (4.29) et du fait que, d'après (4.28), (ρ_F^N) est borné inférieurement par une constante

strictement positive sur $\Omega_F^N(t)$.

De plus, si on note Y la limite faible de (X_S^N) définie sur $\Omega_S(0)$, on voit facilement que :

$$\begin{aligned} Y(t, 0, y) &= a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y), \quad \forall (t, y) \in [0, T_0] \times \Omega_S(0) \text{ et} \\ u^N(t, X_S^N(t, 0, y)) &\rightarrow u(t, Y(t, 0, y)) \quad p.p. (t, y) \in [0, T_0] \times \Omega_S(0). \end{aligned}$$

Comme

$$X_S^N \rightharpoonup Y \text{ dans } W^{1,\infty}(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^{3w*},$$

ceci implique que :

$$\partial_t Y(t, y) = u(t, Y(t, 0, y)) \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \Omega_S(0)).$$

Ainsi Y est le flot associé à u sur $\Omega_S(0)$. \square

5 Résultats de compacité

5.1 Compacité de la densité

On va utiliser le théorème suivant dû à di Perna et Lions (voir Lions [21], chapitre 2, théorème 2.4) :

Théorème 2 :

Soit (v_n) une suite de $L^2(0, T_0; V(\Omega))$ qui converge faiblement vers v dans $L^2(0, T_0; V(\Omega))$. On considère la suite (ψ_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme l'unique solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_n + \operatorname{div}(\psi_n v_n) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \psi_n(0) = \psi_0 \end{cases}$$

où $\psi_0 \in L^\infty(\Omega)$ est tel que $0 \leq \psi_0 \leq C$. On suppose que (ψ_n) appartient à $\mathcal{C}(0, T_0; L^1(\Omega))$ et que

$$0 \leq \psi_n \leq C.$$

Alors (ψ_n) converge fortement dans $\mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega))$ pour tout $1 \leq p < +\infty$ vers l'unique solution $\psi \in L^\infty((0, T_0) \times \Omega) \cap \mathcal{C}(0, T_0; L^1(\Omega))$ de :

$$\begin{cases} \partial_t \psi + \operatorname{div}(\psi v) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

On en déduit que la suite (ρ_F^N) converge fortement dans $\mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega))$ pour tout $1 \leq p < +\infty$ vers $\rho_F \in L^\infty((0, T_0) \times \Omega) \cap \mathcal{C}(0, T_0; L^1(\Omega))$ solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \rho_F(0) = \rho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)}. \end{cases}$$

Remarque 6 :

Dans Lions [21], la preuve du théorème donne comme résultat supplémentaire que $\left(\sqrt{\rho_F^N}\right)$ converge fortement dans $\mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega))$ pour tout $1 \leq p < +\infty$ vers $\sqrt{\rho_F}$.

5.2 Compacité des vitesses

5.2.1 Démarche de la démonstration

La démarche utilisée ici est une démarche relativement classique qu'on retrouve, par exemple, dans Antontsev, Kazhikhov et Monakhov [1], Lions [21] et Desjardins [11]. Pour passer à la limite dans la formulation variationnelle, il faut un résultat de compacité sur les vitesses. Ce résultat va être établi en utilisant le lemme suivant démontré par Simon [27] qui caractérise les sous-ensembles compacts :

Lemme 5.1 :

Soient B un espace de Banach et $F \hookrightarrow L^p(0, T; B)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors F est relativement compact dans $L^p(0, T; B)$ si et seulement si :

$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt, f \in F \right\}$ est relativement compact dans B , pour tout t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2 < T$ et

$\|f(t+h) - f(t)\|_{L^p(0, T-h; B)} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, uniformément pour $f \in F$.

On va montrer que $\left(\sqrt{\rho_F^N} u^N\right)$ converge fortement dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)^3$ vers $\sqrt{\rho_F} u$. Il est clair que $\left(\sqrt{\rho_F^N} u^N\right)$ converge faiblement dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)^3$. D'après la **remarque 6** et la convergence faible de (u^N) vers u dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3$, $\left(\sqrt{\rho_F^N} u^N\right)$ converge faiblement dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)^3$ vers $\sqrt{\rho_F} u$. Pour avoir un résultat de convergence forte, d'après le lemme, il faudra d'une part une estimation uniforme en N du type :

$$\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) \right|^2 dx dt \leq \delta(h) \quad (5.1)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$.

D'autre part, comme pour tout t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2 < T_0$, $\left(\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) dt\right)$ est bornée dans $L^2(\Omega)^3$, il faut aussi montrer que $\left(\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) dt\right)$ converge fortement vers $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F(t)} u(t) dt$ dans $L^2(\Omega)^3$. Or :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) - \sqrt{\rho_F(t)} u(t) \right) dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F(t)} (u^N(t) - u(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F(t)} \right) u^N(t) dt. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Etudions tout d'abord la convergence du premier terme de droite. Si on choisit une subdivision $(a_i)_{1 \leq i \leq P+1}$ de l'intervalle $[t_1, t_2]$, en notant $a_{i+\frac{1}{2}}$ le milieu de l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F(t)}(u^N(t) - u(t)) dt &= \sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} (u^N(t) - u(t)) dt \\ &+ \sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right) (u^N(t) - u(t)) dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Comme (u^N) est bornée dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3 \cap L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))^3$, (u^N) est bornée dans $L^4(0, T_0; L^3(\Omega))^3$ (voir Lions [20]) et donc dans $L^3((0, T_0) \times \Omega)^3$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right) (u^N(t) - u(t)) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| \sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right|^2 |u^N(t) - u(t)|^2 dt \right) dx \\ &\leq C \left(\int_0^{T_0} \int_{\Omega} |u^N(t) - u(t)|^3 dx dt \right)^{\frac{2}{3}} \left(\sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right|^6 dx dt \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right|^6 dx dt \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

De plus, pour $\epsilon > 0$ fixé, comme $\sqrt{\rho_F}$ appartient à $\mathcal{C}(0, T_0; L^6(\Omega))$, on peut trouver une subdivision assez fine de $[t_1, t_2]$ telle que :

$$\sup_{1 \leq i \leq P, a_i \leq t \leq a_{i+1}} \left\| \sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right\|_{L^6(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Donc :

$$\left\| \sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sqrt{\rho_F(t)} - \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \right) (u^N(t) - u(t)) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\epsilon$$

où C est une constante indépendante de N . La subdivision étant maintenant fixée, on étudie le premier terme de (5.3) :

$$\sum_{i=1}^P \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} (u^N(t) - u(t)) dt = \sum_{i=1}^P \sqrt{\rho_F(a_{i+\frac{1}{2}})} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (u^N(t) - u(t)) dt.$$

Comme (u^N) est bornée dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3$, $\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} u^N(t) dt \right)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)^3$ et donc on voit facilement que $\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} u^N(t) dt \right)$ converge vers $\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} u(t) dt \right)$ dans $L^2(\Omega)^3$. De

cela, on en déduit que, à ϵ fixé, pour N assez grand,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F(t)} (u^N(t) - u(t)) dt \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Ceci montre la convergence vers 0 du premier terme de (5.2). D'autre part,

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F(t)} \right) u^N(t) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\| \sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F(t)} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}((0, T_0) \times \Omega)}^2 \|u^N\|_{L^3((0, T_0) \times \Omega)}^2$$

et comme, d'après la **remarque 6**,

$$\sqrt{\rho_F^N} \rightarrow \sqrt{\rho_F} \text{ } \mathcal{C}(0, T_0; L^{\frac{3}{2}}(\Omega)),$$

$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F(t)} \right) u^N(t) dt$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^3$. Ceci prouve donc que pour tout t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2 < T_0$, $\left(\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) dt \right)$ converge fortement vers $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho_F(t)} u(t) dt$ dans $L^2(\Omega)^3$. Ainsi, si on montre l'estimation (5.1), on aura le résultat de compacité recherché pour $\left(\sqrt{\rho_F^N} u^N \right)$.

Pour cela, il suffit de montrer :

Lemme 5.2 : $\exists \alpha > 0, \forall N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} (\rho_F^N(t+h) u^N(t+h) - \rho_F^N(t) u^N(t)) (u^N(t+h) - u^N(t)) dx dt \leq h^\alpha.$$

En effet, supposons le **lemme 5.2** démontré. Alors,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t) \right|^2 dx dt = \\ & = \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} (\rho_F^N(t+h) u^N(t+h) - \rho_F^N(t) u^N(t)) (u^N(t+h) - u^N(t)) dx dt \\ & + \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F^N(t+h)} \right) \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t+h) u^N(t) dx dt \\ & + \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left(\sqrt{\rho_F^N(t+h)} - \sqrt{\rho_F^N(t)} \right) \sqrt{\rho_F^N(t+h)} u^N(t+h) u^N(t) dx dt. \end{aligned}$$

Majorons l'un des deux termes supplémentaires (on procède de même avec l'autre) :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F^N(t+h)} \right) \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t+h) u^N(t) dx dt \right| \leq \\ & C \left(\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F^N(t+h)} \right|^3 dx dt \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^{T_0} \int_{\Omega} |u^N(t)|^3 dx dt \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Or, (u^N) est bornée dans $L^3((0, T_0) \times \Omega)$ et, d'après la **remarque 6**, $(\sqrt{\rho_F^N})$ tend vers $\sqrt{\rho_F}$ dans $\mathcal{C}(0, T_0; L^3(\Omega))$, donc on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left(\sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F^N(t+h)} \right) \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t+h) u^N(t) dx dt \right| \leq \\ & CT_0 \sup_{0 \leq t \leq T_0-h} \left(\int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho_F^N(t)} - \sqrt{\rho_F^N(t+h)} \right|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \leq \epsilon(h) \end{aligned}$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. On obtient donc dans ce cas l'estimation (5.1).

5.2.2 Démonstration

Montrons le **lemme 5.2**. On peut réécrire le terme qu'on veut estimer sous la forme :

$$A^N = \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left(\int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial s} (\rho_F^N u^N)(s, x) ds \right) (u^N(t+h, x) - u^N(t, x)) dx dt.$$

La formulation variationnelle (4.26) donne une estimation de termes du type

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_F^N u^N)(t, x) v^N(t, x) dx dt.$$

En prenant des fonctions-tests v^N de la forme (4.27) à support sur $[t, t+h]$, on estime :

$$\int_t^{t+h} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} (\rho_F^N u^N)(s, x) v^N(s, x) dx ds.$$

On voudrait donc prendre " $v^N(s, x) = u^N(t+h, x) - u^N(t, x)$ ". Ce n'est pas tout à fait possible car cette fonction n'est pas une fonction test admissible mais on va écrire la différence $u^N(t+h, x) - u^N(t, x)$ sous la forme d'une somme d'une fonction test admissible et de termes résiduels qui pourront être estimés.

Pour la partie solide, on définit :

$$\begin{aligned} w_1^N(t, s, x) &= \dot{a}^N(t) (\chi_{\Omega_S^N(s)})_p + (\omega^N(t) \wedge (x - a^N(s)) \chi_{\Omega_S^N(s)})_p \\ &+ \left(Q^N(s) \left[\sum_{i=1}^N \alpha'_i(t) \psi_i(X_S^N(0, s, x)) + \beta_0(t, s) \psi_0(X_S^N(0, s, x)) \right] \right)_p \end{aligned}$$

où $\beta_0(\cdot, \cdot)$ est défini par la condition linéaire suivante :

$$\sum_{i=1}^N r_i^N(s) \alpha'_i(t) + r_0^N(s) \beta_0(t, s) = 0, \forall (t, s) \in [0, T_0]^2 \quad (5.4)$$

où r_i^N est défini par (4.9) pour tout $0 \leq i \leq N$ en remplaçant \tilde{Q}^N par Q^N et \tilde{X}_S^N par X_S^N . Cette équation permet bien de définir $\beta_0(.,.)$ d'après l'inégalité (4.11).

Pour la partie fluide, on définit :

$$w_2^N(t, s, x) = \sum_{i=1}^N (\gamma_i(t+h) - \gamma_i(t)) [(Y_{S,p}^N(0, s, .))^* \varphi_i](s, x).$$

Pour $i = 1, 2$, A^N s'écrit :

$$A^N = A_1^N + A_2^N$$

avec :

$$A_i^N = \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \left(\int_t^{t+h} \partial_s(\rho_F^N u^N)(s, x) ds \right) (w_i^N(t+h, t+h, x) - w_i^N(t, t, x)) dx dt$$

Alors, pour $i = 1, 2$, on décompose A_i^N en la somme de trois termes :

$$A_i^N = F_i^N + R_{1,i}^N - R_{2,i}^N$$

avec :

$$\begin{aligned} F_i^N &= \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} \partial_s(\rho_F^N u^N)(s, x) (w_i^N(t+h, s, x) - w_i^N(t, s, x)) ds dx dt \\ R_{1,i}^N &= \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} \partial_s(\rho_F^N u^N)(s, x) (w_i^N(t+h, t+h, x) - w_i^N(t+h, s, x)) ds dx dt \\ R_{2,i}^N &= \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} \partial_s(\rho_F^N u^N)(s, x) (w_i^N(t, t, x) - w_i^N(t, s, x)) ds dx dt. \end{aligned}$$

Les termes F_i^N sont estimés directement grâce à la formulation variationnelle puisque les fonctions $w_i^N(t+h, s, x) - w_i^N(t, s, x)$ sont des fonctions tests admissibles. Pour les termes de reste $R_{1,i}^N$ et $R_{2,i}^N$, on montrera que :

$$|R_{1,i}^N| \leq C_{1,i}h, \quad |R_{2,i}^N| \leq C_{2,i}h \quad \text{uniformément en } N.$$

On va tout d'abord prouver le lemme suivant qui donne des estimations sur les w_i^N :

Lemme 5.3 :

pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall 1 \leq i \leq 2, \quad \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} |\partial_s w_i^N(t, s, x)|^2 ds dx dt \leq Ch \quad (5.5)$$

$$\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} |\nabla w_1^N(t, s, x)|^3 ds dx dt \leq Ch \quad (5.6)$$

$$\int_0^{T_0-h} \left(\int_t^{t+h} \left(\int_{\Omega} |\nabla w_2^N(t, s, x)|^2 dx \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq C. \quad (5.7)$$

Preuve du lemme 5.3 :

La première estimation résulte directement de l'estimation d'énergie (4.29) et de la **proposition 3**. Pour l'estimation avec $i = 2$, comme (u^N) est bornée dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3$,

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i(t) \varphi_i(Y_{S,p}^N(0, t, \cdot))$$

est borné dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3 \hookrightarrow L^2(0, T_0; L^4(\Omega))^3$ et

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i(t) \nabla \varphi_i(Y_{S,p}^N(0, t, \cdot))$$

est borné dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)^3$. Ainsi comme $(Y_{S,p}^N)$ est borné dans $W^{1,\infty}(0, T_0; H^3(\Omega))^3$, on obtient la première estimation avec $i = 2$.

Pour la seconde estimation, on utilise la **proposition 2** et on montre ainsi que (w_1^N) est bornée uniformément en N dans $L^\infty(0, T_0; L^\infty(0, T_0; H^2(\Omega)))^3$ grâce à (4.29) et au fait que β_0 est un élément de $L^\infty((0, T_0) \times (0, T_0))$ d'après (5.4).

Enfin, pour la dernière estimation, on remarque que $\sum_{i=1}^N \gamma_i \varphi_i$ est borné dans $L^2(0, T_0; H^1(\Omega))^3$. \square

Pour majorer les termes $R_{2,i}^N$ (on procède de façon similaire pour $R_{1,i}^N$), on fait une intégration par parties par rapport à la variable s :

$$\begin{aligned} R_{2,i}^N &= \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} (\rho_F^N u^N)(s, x) \partial_s w_i^N(t, s, x) ds dx dt \\ &\quad - \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} (\rho_F^N u^N)(t+h, x) \left(\int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \partial_s w_i^N(t, s, x) ds \right) dx dt. \end{aligned}$$

Et donc :

$$|R_{2,i}^N| \leq C\sqrt{h} \left(\int_0^{T_0} \int_{\Omega} |(\rho_F^N u^N)(t, x)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \int_t^{t+h} |\partial_s w_i^N(t, s, x)|^2 ds dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, d'après (5.5), on a :

$$|R_{2,i}^N| \leq C_{2,i} h \text{ uniformément en } N.$$

On a donc obtenu l'estimation voulue sur les termes de reste.

Majorons maintenant F_1^N :

$$F_1^N = \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} \partial_s (\rho_F^N u^N)(s, x) (w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x)) ds dx dt.$$

On peut réécrire la fonction-test :

$$w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x) = (V^N(t, s, X_S^N(0, t, x)))_p$$

avec :

$$V^N(t, s, y) = (\dot{a}^N(t+h) - \dot{a}^N(t)) + (\omega^N(t+h) - \omega^N(t)) \wedge (Q^N(s)(y - g_0 + \xi^N(s, y))) + Q^N(s)V_E^N(t, s, y) \quad (5.8)$$

et :

$$V_E^N(t, s, y) = \sum_{i=1}^N (\alpha'_i(t+h) - \alpha'_i(t)) \psi_i(y) + (\beta_0(t+h, s) - \beta_0(t, s)) \psi_0(y).$$

La formulation variationnelle donne :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_s^2 X_S^N(s, 0, y) V^N(t, s, y) dy ds + \epsilon \int_t^{t+h} (\partial_s^2 \xi^N, V_E^N)_{H^3(\Omega_S(0))} ds \\ & + \int_t^{t+h} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N) : \varepsilon_y(V_E^N) dy ds + \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \partial_s(\rho_F^N u^N) \cdot (w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x)) dx ds \\ & + \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_F^N(u^N \otimes u^N)) \cdot (w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x)) dx ds \\ & + 2\nu \int_t^{t+h} \int_{\Omega_F^N(s)} \varepsilon_x(u^N) : \varepsilon_x(w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x)) dx ds = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

On remarque que, d'après l'expression (5.4) de β_0 , β_0 est borné dans $L_t^\infty(0, T_0; W_s^{1,\infty}(0, T_0))$ et donc :

$$V_E^N(t, s, y) = (\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)) + W_E^N(t, s, y)$$

où (W_E^N) est borné dans $L_t^\infty(0, T_0; W_s^{1,\infty}(0, T_0; H^3(\Omega_S(0))))^3$ et on a aussi :

$$V^N(t, s, y) = (\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)) + W^N(t, s, y)$$

où W^N est défini par :

$$\begin{aligned} W^N(t, s, y) &= \omega^N(t+h) \wedge (Q^N(s)(y - g_0 + \xi^N(s, y)) - Q^N(t+h)(y - g_0 + \xi^N(t+h, y))) \\ &\quad - \omega^N(t) \wedge (Q^N(s)(y - g_0 + \xi^N(s, y)) - Q^N(t)(y - g_0 + \xi^N(t, y))) \\ &\quad + Q^N(s)V_E^N(t, s, y) - Q^N(t+h)\partial_t \xi^N(t+h, y) + Q^N(t)\partial_t \xi^N(t, y). \end{aligned}$$

Grâce au fait que (V_E^N) est borné dans $L_t^\infty(0, T_0; W_s^{1,\infty}(0, T_0; L^2(\Omega_S(0))))^3$ et à l'estimation d'énergie, W^N est aussi borné dans $L_t^\infty(0, T_0; W_s^{1,\infty}(0, T_0; L^2(\Omega_S(0))))^3$. Ainsi, pour le premier terme de la formulation variationnelle (5.9), on a :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_s^2 X_S^N(s, 0, y) V^N(t, s, y) dy ds \\ &= \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)|^2 dy \\ &\quad + \int_t^{t+h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_s^2 X_S^N(s, 0, y) W^N(t, s, y) dy ds. \end{aligned}$$

D'où, en faisant une intégration par parties par rapport à la variable s :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_s^2 X_S^N(s, 0, y) V^N(t, s, y) dy ds dt \right. \\ & \left. - \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)|^2 dy dt \right| \\ & \leq Ch \|W^N\|_{L_t^\infty(0, T_0; W_s^{1, \infty}(0, T_0; L^2(\Omega_S(0))))^3} \leq Ch \end{aligned}$$

où C dépend de E_0 , ϵ et des données. Avec les mêmes arguments, on montre que :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} (\partial_s^2 \xi^N, V_E^N)_{H^3(\Omega_S(0))} ds dt \right. \\ & \left. - \int_0^{T_0-h} \|\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 dt \right| \leq Ch \|W_E^N\|_{L_t^\infty(0, T_0; W_s^{1, \infty}(0, T_0; L^2(\Omega_S(0))))^3} \\ & \leq Ch \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & |F_1^N| + \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)|^2 dy dt \\ & + \epsilon \int_0^{T_0-h} \|\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 dt \leq Ch \\ & + \left| \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N) : \varepsilon_y(V_E^N) dy ds dt \right| \\ & + \left| \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_F^N u^N \otimes u^N)(s, x) (w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x)) dx ds dt \right| \\ & + \left| 2\nu \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega_F^N(s)} \varepsilon_x(u^N(s, x)) : \varepsilon_x(w_1^N(t+h, s, x) - w_1^N(t, s, x)) dx ds dt \right| \\ & \leq Ch + Ch^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} \int_t^{t+h} |\nabla w_1^N(t, s, x)|^3 ds dx dt \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

puisque (ξ^N) est borné dans $W^{1, \infty}(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^3$ et (u^N) est borné dans $L^3((0, T_0) \times \Omega)^3$. De cette façon, grâce à (5.6), on déduit l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & |F_1^N| + \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)|^2 dy dt \\ & + \epsilon \int_0^{T_0-h} \|\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 dt \leq Ch \end{aligned}$$

et donc, on obtient :

$$|A_1^N| + \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)|^2 dy dt \\ + \epsilon \int_0^{T_0-h} \|\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 dt \leq Ch.$$

Il reste à estimer F_2^N . D'après la formulation variationnelle (4.26),

$$F_2^N = \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega} (\rho_F^N u^N \otimes u^N)(s, x) : \nabla(w_2^N(t+h, s, x) - w_2^N(t, s, x)) dx ds dt \\ - 2\nu \int_0^{T_0-h} \int_t^{t+h} \int_{\Omega_F^N(s)} \varepsilon_x(u^N(s, x)) : \varepsilon_x(w_2^N(t+h, s, x) - w_2^N(t, s, x)) dx ds dt.$$

Comme (u^N) est bornée dans $L^2(0, T_0; L^6(\Omega))^3$ et dans $L^4(0, T_0; L^3(\Omega))^3$, on a :

$$|F_2^N| \leq Ch^{\frac{3}{4}} \int_0^{T_0-h} \left(\int_t^{t+h} \left(\int_{\Omega} |\nabla w_2^N(t, s, x)|^2 dx \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq Ch^{\frac{3}{4}}$$

d'après (5.7). Et donc,

$$|A_2^N| \leq Ch^{\frac{3}{4}}.$$

Regroupant toutes ces estimations, on a ainsi montré le **lemme 5.2** pour $\alpha = \frac{3}{4}$ et l'inégalité suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega} |\sqrt{\rho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\rho_F^N(t)} u^N(t)|^2 dx dt \\ + \int_0^{T_0-h} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S^N(t+h, 0, y) - \partial_t X_S^N(t, 0, y)|^2 dx dt \\ + \epsilon \int_0^{T_0-h} \|\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 dt \leq g(h) \quad (5.10)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0.$$

On a, en particulier, montré l'inégalité (5.1).

On peut maintenant énoncer notre résultat de convergence forte suivant :

Théorème 3 :

On a les résultats suivants de convergence forte :

$$\begin{array}{lll} \sqrt{\rho_F^N} u^N & \rightarrow & \sqrt{\rho_F} u \quad \text{dans } L^2((0, T_0) \times \Omega)^3 \\ \xi^N & \rightarrow & \xi \quad \text{dans } H^1(0, T_0; H^s(\Omega_S(0)))^3, \forall s < 3 \\ \omega^N & \rightarrow & \omega \quad \text{dans } L^2(0, T_0)^3 \\ a^N & \rightarrow & a \quad \text{dans } H^2(0, T_0)^3 \\ X_S^N & \rightarrow & X_S \quad \text{dans } H^1(0, T_0; H^s(\Omega_S(0)))^3, \forall s < 3 \end{array}$$

où $X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y)$ pour tout $(t, y) \in [0, T_0] \times \Omega_S(0)$.

Preuve du théorème 3 :

D'après (5.10), on a :

$$\int_0^{T_0-h} \int_{\Omega_S(0)} \left| \dot{a}^N(t+h) - \dot{a}^N(t) + (\omega^N(t+h) - \omega^N(t)) \wedge (Q^N(t+h)(y - g_0 + \xi^N(t+h))) \right. \\ \left. + Q^N(t+h)(\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)) \right|^2 dy dt \leq Ch.$$

Ainsi, puisque $\xi^N(t)$ appartient à $\mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$, pour tout $t \in [0, T_0]$, on obtient séparément les estimations suivantes :

$$\int_0^{T_0-h} |\dot{a}^N(t+h) - \dot{a}^N(t)|^2 dt \leq Ch, \quad \int_0^{T_0-h} |\omega^N(t+h) - \omega^N(t)|^2 dt \leq Ch, \\ \int_0^{T_0-h} \int_{\Omega_S(0)} |\partial_t \xi^N(t+h, y) - \partial_t \xi^N(t, y)|^2 dy dt \leq Ch.$$

Ceci permet de conclure la preuve du théorème de convergence forte. \square

6 Conclusion

6.1 Passage à la limite

Un calcul montre que pour tout $N \geq M$, u^N est solution de :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S^N(t, 0, y) \partial_t V^{M,N}(t, y) dy dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N(t, x) u^N(t, x) \partial_t v^{M,N}(t, x) dx dt \\ + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N(t, x) u^N(t, x) \otimes u^N(t, x) : \nabla v^{M,N}(t, x) dx dt \\ + \epsilon \int_0^{T_0} \left(\partial_t \xi^N, \partial_t V_E^{M,N} \right)_{H^3(\Omega_S(0))} dt - 2\nu \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} \varepsilon(u^N) : \varepsilon(v^{M,N}) dx dt \\ - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N) : V_E^{M,N} dy dt = - \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S^N(0, 0, y) \partial_t V^{M,N}(0, y) dy \\ - \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0(y) u_F^N(0, y) v^{M,N}(0, y) dy - \epsilon \left(\partial_t \xi^N(0, \cdot), V_E^{M,N}(0, \cdot) \right)_{H^3(\Omega_S(0))}$$

pour tout :

$$v^{M,N}(t, x) = (V^{M,N}(t, X_S^N(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^M C_i(t) [(Y_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x)$$

avec :

$$V^{M,N}(t, y) = \dot{b}^M(t) + r^M(t) \wedge (Q^N(t)(y - g_0 + \xi^N(t, y))) + Q^N(t) V_E^{M,N}(t, y)$$

et :

$$V_E^{M,N}(t, y) = \sum_{i=1}^M B_i(t) \psi_i(y) + B_0^{M,N}(t) \psi_0(y)$$

où $B_0^{M,N}$ est tel que :

$$\int_{\partial\Omega_S^N(t)} V_E^{M,N}(t, X_S^N(0, t, x)) \cdot n_x \, d\gamma = 0.$$

Ici, on a pris $b^M \in H^2(0, T_0)^3$, $r^M \in H^1(0, T_0)^3$, $B_i \in H^1(0, T_0)$ et $C_i \in H^2(0, T_0)$ tous nuls en T_0 .

Passons à la limite en N dans cette formulation variationnelle. A l'aide de la densité des fonctions-tests, on passera ensuite à la limite en M .

Pour $V_E^{M,N}$, le coefficient $B_0^{M,N}$ est défini par :

$$B_0^{M,N}(t) = -\frac{1}{r_0^N(t)} \sum_{i=1}^M r_i^N(t) B_i(t).$$

Soit :

$$V_E^M(t, y) = \sum_{i=1}^M B_i(t) \psi_i(y) + B_0^M(t) \psi_0(y) \text{ où } B_0^M \text{ est tel que :}$$

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} V_E^M(t, X_S(0, t, x)) \cdot n_x \, d\gamma = 0.$$

D'après le résultat de convergence forte sur X_S^N ,

$$r_i^N \rightarrow r_i \text{ dans } H^1(0, T_0)$$

et donc :

$$V_E^{M,N} \rightarrow V_E^M \text{ dans } H^1(0, T_0; \mathcal{C}^3(\Omega_S(0)))^3.$$

En utilisant les résultats de convergence faible pour la solution, on obtient :

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^{T_0} \left(\partial_t \xi^N, \partial_t V_E^{M,N} \right)_{H^3(\Omega_S(0))} dt - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi^N) : V_E^{M,N} \, dy \, dt \\ & \rightarrow \epsilon \int_0^{T_0} \left(\partial_t \xi, \partial_t V_E^M \right)_{H^3(\Omega_S(0))} dt - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : V_E^M \, dy \, dt \end{aligned}$$

et

$$\epsilon \left(\partial_t \xi^N(0, \cdot), V_E^{M,N}(0, \cdot) \right)_{H^3(\Omega_S(0))} \rightarrow \epsilon \left(\partial_t \xi^1, V_E^M(0, \cdot) \right)_{H^3(\Omega_S(0))}.$$

Considérons ensuite la fonction-test :

$$V^{M,N}(t, y) = \dot{b}^M(t) + r^M(t) \wedge (Q^N(t)(y - g_0 + \xi^N(t, y))) + Q^N(t) V_E^{M,N}(t, y)$$

puis :

$$V^M(t, y) = \dot{b}^M(t) + r^M(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t)V_E^M(t, y).$$

Alors,

$$V^{M,N} \rightarrow V^M \text{ dans } H^1(0, T_0; H^s(\Omega_S(0)))^3$$

pour tout $s < 3$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S^N(t, 0, y) \partial_t V^{M,N}(t, y) dy dt \\ & \rightarrow \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S(t, 0, y) \partial_t V^M(t, y) dy dt \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S^N(0, 0, y) \partial_t V^{M,N}(0, y) dy \rightarrow \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S(0, 0, y) \partial_t V^M(0, y) dy.$$

Enfin, on considère les fonctions-tests :

$$v^M(t, x) = (V^M(t, X_S(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^M C_i(t) [(Y_{S,p}(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x)$$

et :

$$v^{M,N}(t, x) = (V^{M,N}(t, X_S^N(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^M C_i(t) [(Y_{S,p}^N(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x).$$

En utilisant le **lemme 6.1** ci-dessous, on a :

$$v^{M,N} \rightarrow v^M \text{ dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3 \cap H^1(0, T_0; L^2(\Omega))^3.$$

Ainsi, on a tout d'abord,

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} \varepsilon(u^N) : \varepsilon(v^{M,N}) dx dt \rightarrow \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varepsilon(u) : \varepsilon(v^M) dx dt.$$

De plus, ∇v^M est un élément de $L^4((0, T_0) \times \Omega)^3$, donc en écrivant que :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N(t, x) u^N(t, x) \otimes u^N(t, x) : \nabla v^{M, N}(t, x) dx dt \\
& - \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \otimes u(t, x) : \nabla v^M(t, x) dx dt = \\
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N(t, x) u^N(t, x) \otimes u^N(t, x) : (\nabla v^{M, N}(t, x) - \nabla v^M(t, x)) dx dt \\
& + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} (\rho_F^N(t, x) - \rho_F(t, x)) u^N(t, x) \otimes u^N(t, x) : \nabla v^M(t, x) dx dt \\
& + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u^N(t, x) \otimes (u^N(t, x) - u(t, x)) : \nabla v^M(t, x) dx dt \\
& + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \otimes (u^N(t, x) - u(t, x)) : \nabla v^M(t, x) dx dt
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F^N(t, x) u^N(t, x) \otimes u^N(t, x) : \nabla v^{M, N}(t, x) dx dt \rightarrow \\
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \otimes u(t, x) : \nabla v^M(t, x) dx dt.
\end{aligned}$$

Lemme 6.1 :

Soit une suite (u^N) définie sur $\Omega_S^N(t) = X_S^N(t, 0, \Omega_S(0))$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T_0]$, on prolonge $u^N(t)$ à Ω par $u_p^N(t)$ définie sur $\Omega_F^N(t)$ comme la solution de :

$$\begin{cases}
-\Delta u_p^N + \nabla p^N & = 0 & \Omega_F^N(t) \\
\operatorname{div} u_p^N & = 0 & \Omega_F^N(t) \\
u_p^N & = u_N & \partial \Omega_S^N(t) \\
u_p^N & = 0 & \partial \Omega \cap \partial \Omega_F^N(t).
\end{cases}$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}
X_S^N & \rightarrow X_S & \text{dans } H^1(0, T_0; H^s(\Omega_S(0)))^3 \\
u^N(t, X_S^N(t, 0, \cdot)) & \rightarrow u(t, X_S(t, 0, \cdot)) & \text{dans } H^1(0, T_0; H^s(\Omega_S(0)))^3
\end{aligned}$$

pour tout $0 < s < 3$.

Alors (u_p^N) converge vers u_p dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3 \cap H^1(0, T_0; L^2(\Omega))^3$.

Preuve du lemme 6.1 :

L'idée est de ramener le problème à l'ouvert $\Omega_F(t)$ par un changement de variables. On définit pour tout $t \in [0, T_0]$:

$$Z^N(t, 0, \cdot) = X_S^N(t, 0, X_S(0, t, \cdot)) \quad \text{sur } \Omega_S(t)$$

puis les fonctions suivantes de prolongement des flots X_S^N et X_S à Ω :

$$Y_{S,p}^N(t, 0, \cdot) = Id + \mathcal{P}(X_S^N(t, 0, \cdot) - Id), \quad Y_{S,p}(t, 0, \cdot) = Id + \mathcal{P}(X_S(t, 0, \cdot) - Id)$$

où \mathcal{P} est donné par (3.3). Enfin, on définit Z_p^N qui prolonge Z^N par :

$$Z_p^N(t, 0, \cdot) = Y_{S,p}^N(t, 0, Y_{S,p}(0, t, \cdot)) \text{ sur } \Omega.$$

On vérifie que :

$$Z_p^N \rightarrow Id \quad \text{dans } L^\infty(0, T_0; H^s(\Omega))$$

pour tout $0 < s < 3$.

Pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega_F^N(t))^3$ et $\bar{\phi} \in H_0^1(\Omega_F(t))^3$, on a :

$$-\int_{\Omega_F^N(t)} \nabla u_p^N : \nabla \phi + \int_{\Omega_F^N(t)} p^N \operatorname{div} \phi = 0 \quad (6.1)$$

$$-\int_{\Omega_F(t)} \nabla u_p : \nabla \bar{\phi} + \int_{\Omega_F(t)} p \operatorname{div} \bar{\phi} = 0. \quad (6.2)$$

Prenons $\phi(t, x) = \bar{\phi}(t, Z_p^N(0, t, x))$ dans (6.1). On obtient en faisant un changement de variables :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_F(t)} (\nabla v_p^N(t, y) \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-1} \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-t} \cdot \nabla \bar{\phi}(t, y) \det \nabla Z_p^N(t, 0, y) dy \\ & + \int_{\Omega_F(t)} q^N(t, y) \operatorname{tr}(\nabla \bar{\phi}(t, y) \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-1}) \det \nabla Z_p^N(t, 0, y) dy = 0. \end{aligned}$$

Posons $w_p^N = v_p^N - u_p$ et $r^N = q^N - p$. Des calculs montrent que le couple (w_p^N, r^N) est solution du problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w_p^N + \nabla r^N = f^N & \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} w_p^N = g^N & \Omega_F(t) \\ w_p^N(t, y) = u^N(t, Y_S^N(t, 0, y)) - u^N(t, y) & \partial \Omega_S(t) \\ w_p^N(t, y) = 0 & \partial \Omega \end{array} \right.$$

avec :

$$\begin{aligned} f^N &= \operatorname{div}(\nabla v_p^N(t, y) (\det \nabla Z_p^N(t, 0, y) \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-1} \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-t} - Id)) \\ &+ (Id - \operatorname{cof} \nabla Z_p^N(t, 0, y)) \nabla q^N \\ &- q^N {}^t \nabla (Z_p^N(0, t, \cdot))(Z_p^N(t, 0, y)) \nabla (\det \nabla Z_p^N(t, 0, y)) \\ &- \det \nabla Z_p^N(t, 0, y) \nabla \operatorname{div} Z_p^N(t, 0, y) q^N(t, y) \end{aligned}$$

et

$$g^N = \operatorname{tr}(\nabla v_p^N(t, y) (Id - \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-1}).$$

On désire maintenant appliquer la **proposition 1**. La **proposition 2** donne la régularité suivante sur v_p^N et q^N :

$$(v_p^N) \text{ bornée dans } L^\infty(0, T_0; H^2(\Omega)), \quad (q^N) \text{ bornée dans } L^\infty(0, T_0; H^1(\Omega))$$

Ainsi, on a :

$$\|g^N\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))} \leq \|\nabla v_p^N\|_{L^\infty(0, T_0; L^4(\Omega))} \|Id - \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-1}\|_{L^\infty(0, T_0; L^4(\Omega))}$$

et donc :

$$g^N \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} & \|f^N\|_{L^\infty(0, T_0; H^{-1}(\Omega))} \leq \\ & \|\nabla v_p^N(t, y)(\det \nabla Z_p^N(t, 0, y) \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-1} \nabla Z_p^N(t, 0, y)^{-t} - Id)\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))} \\ & + \|(Id - \text{cof } \nabla Z_p^N(t, 0, y)) \nabla q^N\|_{L^\infty(0, T_0; H^{-1}(\Omega))} \\ & + \|\det \nabla Z_p^N(t, 0, y) \nabla \text{div } Z_p^N(t, 0, y) q^N(t, y)\|_{L^\infty(0, T_0; H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned}$$

On montre que le premier terme tend vers 0 avec les mêmes arguments que g^N . Pour les deuxième et troisième termes, on utilise les hypothèses de convergence sur Z_p^N et la majoration sur (q^N) . Ainsi, d'après la **proposition 1** :

$$w_p^N \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T_0; H^1(\Omega)).$$

Ceci donne la convergence de u_p^N vers u_p dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))$.

Pour la convergence de $(\partial_t u_p^N)$, on utilise la **proposition 3** qui donne le problème de Stokes vérifié par $\partial_t u_p^N$. On travaille donc exactement de la même manière que précédemment mis à part que la condition au bord a une régularité H^2 . Ceci termine la preuve du lemme. \square

On a donc trouvé une solution de :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S(t, 0, y) \partial_t V^M(t, y) dy dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \partial_t v^M(t, x) dx dt \\ & + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \otimes u(t, x) : \nabla v^M(t, x) dx dt \\ & + \epsilon \int_0^{T_0} (\partial_t \xi, \partial_t V_E^M)_{H^3(\Omega_S(0))} dt - 2\nu \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varepsilon(u) : \varepsilon(v^M) dx dt \\ & - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : V_E^M dy dt = - \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S(0, 0, y) \partial_t V^M(0, y) dy \\ & - \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0(y) u_F(0, y) v^M(0, y) dy - \epsilon (\xi^1, V_E^M(0, \cdot))_{H^3(\Omega_S(0))} \end{aligned}$$

pour tout :

$$v^M(t, x) = (V^M(t, X_S(0, t, x)))_p + \sum_{i=1}^M C_i(t) [(Y_{S,p}(0, t, \cdot))^* \varphi_i](t, x)$$

avec :

$$V^M(t, y) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t)V_E^M(t, y)$$

et :

$$V_E^M(t, y) = \sum_{i=1}^M B_i(t)\psi_i(y) + B_0^M(t)\psi_0(y)$$

où B_0^M est tel que :

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} V_E^M(t, X_S(0, t, x)) \cdot n_x \, d\gamma = 0.$$

Il reste à passer à la limite en M . Soit $V_E \in H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^3$, V_E s'écrit :

$$V_E(t, y) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(t)\psi_i(y), \text{ avec } \sum_{i=0}^{\infty} B_i(t)^2 + \sum_{i=0}^{\infty} B_i'(t)^2 \in L^2(0, T_0).$$

On définit la suite (V_E^M) par $V_E^M(t, y) = \sum_{i=1}^M B_i(t)\psi_i(y) + B_0^M(t)\psi_0(y)$

où B_0^M est donné par :

$$B_0^M(t) = -\frac{1}{r_0(t)} \sum_{i=1}^M r_i(t)B_i(t).$$

Alors, on peut écrire que :

$$V_E(t, y) - V_E^M(t, y) = \sum_{i=M+1}^{\infty} B_i(t)\psi_i(y) + (B_0(t) - B_0^M(t))\psi_0(y)$$

donc :

$$\|V_E - V_E^M\|_{L^2(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))}^2 = \int_0^{T_0} \sum_{i=M+1}^{\infty} B_i(t)^2 + (B_0(t) - B_0^M(t))^2 \, dt$$

Or,

$$B_0(t) - B_0^M(t) = -\frac{1}{r_0(t)} \int_{\partial\Omega_S(0)} \sum_{i=M+1}^{\infty} B_i(t)\psi_i(y) \cdot (\text{cof} \nabla X_S(t, 0, y) N_y) \, d\gamma(y)$$

donc :

$$\|B_0(t) - B_0^M(t)\| \leq C \left(\sum_{i=M+1}^{\infty} B_i(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On fait le même raisonnement pour $\partial_t V_E^M$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a donc :

$$V_E^M \rightarrow V_E \text{ dans } H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^3 \text{ et } V^M \rightarrow V \text{ dans } H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))^3$$

avec :

$$V(t, y) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t)V_E(t, y).$$

Ceci permet de passer à la limite dans les termes de la formulation variationnelle où V_E^M et V^M interviennent.

De même qu'avec V_E , si on prend $w_F \in H^1(0, T_0; V(\Omega_F(0)))$, on peut expliciter une suite (w_F^M) qui tend vers w_F dans $H^1(0, T_0; V(\Omega_F(0)))$.

Pour terminer, on prend v dans

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{ & v \in H^1(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3 / v(T_0) = 0, \operatorname{div} v(t, \cdot) = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \\ & v(t, x) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t)V_E(t, X_S(0, t, x)) \text{ sur } \Omega_S(t), \\ & \text{où } b \in H^2(0, T_0), r \in H^1(0, T_0), V_E \in H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0))) \}. \end{aligned}$$

Alors, v s'écrit sur $[0, T_0] \times \Omega$:

$$v(t, x) = (V(t, X_S(0, t, x)))_p + [(Y_{S,p}(0, t, \cdot))^* w_F](t, x)$$

avec $V \in H^1(0, T_0, H^3(\Omega_S(0)))$ et $w_F \in H^1(0, T_0; V(\Omega_F(0)))$. Soit

$$v^M(t, x) = (V^M(t, X_S(0, t, x)))_p + [(Y_{S,p}(0, t, \cdot))^* w_F^M](t, x)$$

où V^M et w_F^M ont été définis précédemment. On voit que :

$$v(t, x) - v^M(t, x) = (Q(t)(V_E - V_E^M)(t, X_S(0, t, x)))_p + [(Y_{S,p}(0, t, \cdot))^* (w_F - w_F^M)](t, x).$$

Grâce à la régularité de $Y_{S,p}$, on a bien :

$$[(Y_{S,p}(0, t, \cdot))^* (w_F - w_F^M)] \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Enfin comme :

$$V_E - V_E^M \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0))),$$

on a :

$$(Q(t)(V_E - V_E^M)(t, X_S(0, t, x)))_p \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T_0; L^2(\Omega))$$

et donc :

$$v^M \rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

On obtient donc (ρ_F, u) dans l'espace des solutions vérifiant la formulation variationnelle voulue :

$$\begin{aligned}
& \forall v \in \mathcal{V}, \\
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S(t, 0, y) \partial_t V(t, y) dy dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \partial_t v(t, x) dx dt \\
& \quad + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \rho_F(t, x) u(t, x) \otimes u(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\
& + \epsilon \int_0^{T_0} (\partial_t \xi, \partial_t V_E)_{H^3(\Omega_S(0))} dt - 2\nu \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx dt \\
& - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : V_E dy dt = - \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t X_S(0, 0, y) \partial_t V(0, y) dy \\
& - \int_{\Omega_F(0)} \rho_F^0(y) u_F(0, y) v(0, y) dy - \epsilon (\xi^1, V_E(0, \cdot))_{H^3(\Omega_S(0))}.
\end{aligned}$$

D'après (4.17) et l'estimation d'énergie (4.29), cette solution vérifie l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) |\partial_t X_S(t, 0, y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(t)} \rho_F(t, x) |u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \epsilon \|\partial_t \xi\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi)(t, y) : \varepsilon_y(\xi)(t, y) dy + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\varepsilon_x(u_F(s, x))|^2 dx ds \leq E_0. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

6.2 Prolongement de la solution

Il reste à prolonger la solution à l'intervalle $[0, T]$. Pour l'instant, on a obtenu une solution sur $[0, T_0]$ où T_0 dépend de E_0 , ϵ , κ_0 , κ_1 et κ_2 . Le temps T_0 a été choisi de telle sorte que la solution de notre problème vérifie :

$$\|a - g_0\|_{L^\infty(0, T_0)} \leq \kappa_0, \|Q - Id\|_{L^\infty(0, T_0)} \leq \kappa_1 \text{ et } \|\xi\|_{L^\infty(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))} \leq \kappa_2.$$

Ces conditions sont nécessaires pour construire notre solution de façon explicite, on veut que le flot de la partie solide reste assez proche de la fonction Id et aussi éviter les collisions. En effet, sur $[0, T_0]$, on a :

$$d(\Omega_S(t), \partial\Omega) \geq \alpha > 0, \|X_S(t, 0, y) - y\|_{L^\infty(0, T_0; W^{1, \infty}(\Omega_S(0)))} \leq \frac{\epsilon_0}{C_P} \text{ et } \xi(t) \in \mathcal{Y}_\delta(\Omega_S(0))$$

d'après la construction faite dans le **paragraphe 3**. On va tout d'abord montrer qu'on peut prolonger notre solution jusqu'au temps T_α défini par :

$$T_\alpha = \sup\{t > 0 / \xi(t) \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}(\Omega_S(0)), d(t) > \alpha_2, \gamma(t) > \alpha_3 \text{ et } X_S(t, 0, \cdot) \text{ injective}\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est composé de réels strictement positifs.

On part d'une nouvelle configuration de référence $\Omega_S(T_0)$ et on cherche une solution $(\bar{u}, \bar{\rho}_F)$. Pour les conditions initiales, les données exprimées de manière lagrangienne (U_E, ρ_S) doivent être ramenées sur $\Omega_S(T_0)$ par le biais du flot. Les équations de la partie solide ne sont plus les

mêmes : on part d'une configuration avec contraintes ($\Omega_S(T_0)$ n'est plus un état naturel pour la structure). Il faut recommencer la construction des vitesses faite dans le **paragraphe 2** avec pour domaine de référence $\Omega_S(T_0)$. Pour cela, on doit à nouveau construire une fonction $\bar{\eta}$ dans $H^3(\Omega_S(T_0))$ qui permet de compenser les variations de volume provoquées par les déplacements élastiques. Or, sur $\Omega_S(T_0)$, la normale a maintenant une régularité $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_S(T_0))$ puisque la normale \bar{n} sur $\partial\Omega_S(T_0)$ est définie par :

$$\bar{n}_{X_S(T_0,0,y)} = \frac{\text{cof}\nabla X_S(T_0,0,y)N_y}{\|\text{cof}\nabla X_S(T_0,0,y)N_y\|}, \forall y \in \partial\Omega_S(0). \quad (6.4)$$

et le flot $X_S(T_0,0,\cdot)$ a une régularité $H^3(\Omega_S(0))$. Il faut donc prendre une régularisation d'un relèvement de la normale.

On définit une fonction de relèvement γ sur $\Omega_S(0)$ continu de $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_S(0))$ dans $H^2(\Omega_S(0))$ et on pose sur $\Omega_S(T_0)$:

$$\bar{N}(x) = \gamma(\bar{n}_{X_S(T_0,0,\cdot)}) \circ X_S(0, T_0, x).$$

L'estimation d'énergie (2.7) donne :

$$\|X_S(T_0,0,\cdot)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 \leq C(E_0, \epsilon, \delta)T_0^2 \leq C(E_0, \epsilon, \delta)T^2. \quad (6.5)$$

Cette estimation est donc indépendante du temps T_0 . En utilisant la définition (6.4) de \bar{n} , (6.5) et la définition de T_α , on obtient ainsi que :

$$\|\bar{N}\|_{H^2(\Omega_S(T_0))} \leq C_0 \quad (6.6)$$

où C_0 est fonction des données T, E_0, α, ϵ .

On choisit maintenant $\bar{\eta}$ dans $H^3(\Omega_S(T_0))$ telle que

$$\|\bar{N} - \bar{\eta}\|_{H^2(\Omega_S(T_0))} \leq \frac{1}{4C_1} \quad (6.7)$$

où C_1 est la constante d'injection de $H^2(\Omega_S(T_0)) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Omega_S(T_0))$. Toujours d'après (6.5), C_1 est indépendante de T_0 . De plus :

$$\|\bar{N} - \bar{\eta}\|_{\mathcal{C}(\Omega_S(T_0))} \leq \frac{1}{4}. \quad (6.8)$$

On procède ensuite exactement de la même façon. Le temps d'existence de la solution dépend maintenant de $E_0, \epsilon, \bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1$ et $\bar{\kappa}_2$. Il faut montrer que les valeurs de $\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1$ et $\bar{\kappa}_2$ peuvent être déterminées indépendamment de T_0 .

De même que dans le **lemme 3.1**, la constante $\bar{\kappa}_2$ est obtenue en appliquant le théorème des fonctions implicites à :

$$\begin{aligned} H^3(\Omega_S(T_0)) \times \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ \bar{f} : (\xi, \lambda) &\mapsto \int_{\Omega_S(T_0)} \det(Id + \nabla\xi(y) + \lambda\nabla\bar{\eta}(y)) dy. \end{aligned}$$

Reprenons la démonstration du théorème des fonctions implicites. Soit :

$$\begin{aligned} H^3(\Omega_S(T_0)) \times \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ \bar{h} : (\xi, \lambda) &\mapsto \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) \right)^{-1} \left(\lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) - \bar{f}(\xi, \lambda) + |\Omega_S(0)| \right). \end{aligned}$$

La démonstration repose sur le fait que, pour tout ξ fixé dans un voisinage de 0, $\bar{h}(\xi, \cdot)$ est une contraction par rapport à la variable λ sur un voisinage de 0. En effet, si on montre ceci, le théorème du point fixe permet d'obtenir l'existence d'un point fixe qui est alors solution de :

$$\bar{h}(\xi, \lambda) = \lambda \Leftrightarrow \bar{f}(\xi, \lambda) = |\Omega_S(0)|$$

Montrons que \bar{h} est contractante en λ de façon indépendante de $\Omega_S(T_0)$. Regardons :

$$\begin{aligned} \bar{h}(\xi, \lambda') - \bar{h}(\xi, \lambda) &= \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) \right)^{-1} \left((\lambda' - \lambda) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) - (\bar{f}(\xi, \lambda') - \bar{f}(\xi, \lambda)) \right) \\ &= (\lambda' - \lambda) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(\xi, \theta) \right) \end{aligned}$$

avec $\lambda < \theta < \lambda'$. On a, en utilisant (6.8) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) &= \int_{\partial \Omega_S(T_0)} \bar{\eta}(y) \cdot \bar{n}(y) \, d\gamma(y) \\ &\geq \frac{3}{4} \int_{\partial \Omega_S(T_0)} d\gamma(y) \geq \frac{3}{4} \text{aire}(\partial \Omega_S(T_0)) \geq \frac{3}{4} \text{aire}(\partial B) \end{aligned}$$

où B désigne la boule de même volume que $\Omega_S(T_0)$. Ceci provient de l'inégalité isopérimétrique. Du fait de la conservation du volume, B est indépendante de T_0 . Ainsi :

$$\left| \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) \right)^{-1} \right| \leq A$$

où A est une constante dépendant seulement de la géométrie du domaine à l'instant initial.

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(\xi, \theta) &= \int_{\Omega_S(T_0)} \text{tr}(\nabla \bar{\eta}(y)) \, dy - \\ &\int_{\Omega_S(T_0)} \det(\text{Id} + \nabla \xi(y) + \theta \nabla \bar{\eta}(y)) \text{tr}({}^t \text{cof}(\text{Id} + \nabla \xi(y) + \theta \nabla \bar{\eta}(y)) \nabla \bar{\eta}(y)) \, dy \end{aligned}$$

d'où :

$$\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(0, 0) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(\xi, \theta) \right| \leq C_2$$

où C_2 dépend des normes de $\bar{\eta}$ et ξ dans $H^2(\Omega_S(T_0))$. D'après (6.6) et (6.7) et l'estimation d'énergie, C_2 est donc indépendante de T_0 . Et donc :

$$|\bar{h}(\xi, \lambda') - \bar{h}(\xi, \lambda)| \leq AC_2 |\lambda - \lambda'|$$

où C_2 est une constante dépendant de T, E_0, α, ϵ .

Ces estimations permettent de redémontrer le théorème des fonctions implicites sur des voisinages de ξ et λ indépendants de T_0 et donc de prendre $\bar{\kappa}_2$ et $\bar{\rho}$ dépendant uniquement de $T, \Omega_S(0), \epsilon, \alpha$ et E_0 .

Il faut aussi que $\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1$ et $\bar{\kappa}_2$ soient assez petits pour que le flot prolongé $\bar{Y}_{S,p}$ soit inversible. Les conditions (3.5) et (3.6) s'écrivent maintenant :

$$\bar{\kappa}_0 \leq \frac{e_0}{3C_{\bar{\mathcal{P}}}}, \quad \sup_{y \in \Omega_S(T_0)} \|y - a(T_0)\| \bar{\kappa}_1 \leq \frac{e_0}{3C_{\bar{\mathcal{P}}}} \quad \text{et} \quad \bar{C}_0 \bar{\kappa}_2 + \bar{\rho} \|\bar{\eta}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_S(T_0))^3} \leq \frac{e_0}{3C_{\bar{\mathcal{P}}}}$$

où \bar{C}_0 est la constante d'injection de $H^3(\Omega_S(T_0))$ dans $W^{1,\infty}(\Omega_S(T_0))$ (qui est majorée indépendamment de T_0 grâce à (6.5)) et $C_{\bar{\mathcal{P}}}$ la constante de continuité du nouvel opérateur de prolongement $\bar{\mathcal{P}}$ maintenant défini sur $\Omega_S(T_0)$. On définit $\bar{\mathcal{P}}$ en transportant \mathcal{P} par le biais du flot $X_S(T_0, 0, \cdot)$:

$$\bar{\mathcal{P}}(f) = \mathcal{P}(f \circ X_S(T_0, 0, \cdot)), \quad \forall f \in H^3(\Omega_S(T_0)).$$

On vérifie alors, grâce à (6.5) et par définition de T_α , que la constante de continuité $C_{\bar{\mathcal{P}}}$ de l'opérateur $\bar{\mathcal{P}}$ est majorée par une constante dépendant uniquement de T, E_0, α et ϵ . Les paramètres $\bar{\kappa}_0$ et $\bar{\kappa}_1$ et $\bar{\kappa}_2$ peuvent donc être choisis indépendamment de T_0 .

Finalement, on voit qu'on peut prolonger la solution sur un intervalle $[0, T_1]$ avec T_1 dépendant uniquement de T, E_0, α, ϵ . Si $T_1 < T_\alpha$, on réitère ce procédé en gardant le même pas de temps $T_1 - T_0$ et ce jusqu'au temps T_α . On a donc un résultat d'existence pour notre solution sur l'intervalle de temps $[0, T_\alpha]$, où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ où α_1, α_2 et α_3 sont des réels strictement positifs quelconques. On peut ensuite étendre la solution à l'intervalle $[0, T]$ où T est donné par le **théorème 1** en utilisant la régularité de la solution. Ceci conclut la démonstration.

Remarques 7 :

- Pour obtenir $\bar{\eta}$ dans $H^3(\Omega_S(T_0))$ à partir de \bar{N} dans $H^2(\Omega_S(T_0))$, on peut, par exemple, résoudre le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{\eta} \in H^3(\Omega_S(T_0)) \\ h \tilde{a}_3(\bar{\eta}, w) + a_2(\bar{\eta} - \bar{N}, w) = 0, \quad \forall w \in H^3(\Omega_S(T_0)) \end{cases}$$

avec

$$\tilde{a}_3(\eta, w) = (D^3\eta, D^3w)_{L^2(\Omega_S(T_0))}, \quad a_2(\eta, w) = (\eta, w)_{H^2(\Omega_S(T_0))}.$$

On vérifie facilement que, pour h strictement positif assez petit, $\bar{\eta}$ est défini de manière unique et vérifie la propriété voulue.

- Si on part de conditions initiales élastiques nulles (déplacements nuls et vitesses élastiques nulles), rien n'empêche le solide de se déformer quand-même. Ceci est lié à l'estimation d'énergie qui autorise des transferts d'énergie entre le fluide et la structure et entre le mouvement rigide et le mouvement élastique. En revanche, si on considère dès le départ une structure rigide (sans les équations d'élasticité), on peut reprendre la démarche développée dans ce travail. On obtient alors un résultat d'existence tant qu'il n'y a pas de chocs.

Bibliographie

- [1] S.N. ANTONTSEV, A.V. KAZHIKHOV, V.N. MONAKHOV, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, Translated from the Russian.
- [2] H. BEIRAO DA VEIGA, *On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem*, J. Math. Fluid Mech., **6** No 1 (2004), 21-52.
- [3] J. A. BELLO, *L^r regularity for the Stokes and Navier-Stokes Problems*, Ann. Math. Pura Appl., **170** No 4 (1996), 187-206.
- [4] J.A. BELLO, E. FERNANDEZ-CARA, J. LEMOINE, J. SIMON, *The differentiability of the drag with respect to the variations of a Lipschitz domain in a Navier-Stokes flow*, SIAM J. Control Optim., **35** No 2 (1997), 626-640.
- [5] M. BOULAKIA, *Existence of weak solutions for the three dimensional motion of an elastic structure in an incompressible fluid*, soumis.
- [6] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris (1996).
- [7] L. CATTABRIGA, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), 308-340.
- [8] A. CHAMBOLLE, B. DESJARDINS, M.J. ESTEBAN, C. GRANDMONT, *Existence of weak solutions for an unsteady fluid-plate interaction problem*, to appear in J. Math. Fluid Mech.
- [9] P.G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1988).
- [10] C. CONCA, J. SAN MARTIN, M. TUCSNAK, *Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid*, Comm. Partial Differential Equations, **25** (2000), 1019-1042.
- [11] B. DESJARDINS, *Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space*, Diff. Int. Eq., **10** No 3 (1997), 587-598.
- [12] B. DESJARDINS, M.J. ESTEBAN, *On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models*, Comm. Partial Differential Equations, **25** No 7-8 (2000), 1399-1413.
- [13] B. DESJARDINS, M.J. ESTEBAN, C. GRANDMONT, P. LE TALLEC, *Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model*, Rev. Mat. Complut., **14** No 2 (2001), 523-538.

-
- [14] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., **98** No 3 (1989), 511-547.
- [15] A. DOUBOVA, E. FERNANDEZ-CARA, *Some control results for simplified one-dimensional models of fluid-solid interaction*, à paraître dans Math. Models Methods Appl. Sci.
- [16] E. FEIREISL, *On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid*, J. Evol. Equ., **3** No 3 (2003), 419-441.
- [17] C. GRANDMONT, Y. MADAY, P. METIER, *Existence of a solution for an unsteady elasticity problem in large displacement and small perturbation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **334** No 6 (2002), 521-526.
- [18] M.D. GUNZBURGER, H.C. LEE, G.A. SEREGIN, *Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions*, J. Math. Fluid Mech., **2** No 3 (2000), 219-266.
- [19] K.H. HOFFMANN, V.N. STAROVOITOV, *On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case*, Adv. Math. Sci. Appl., **9** No 2 (1999), 633-648.
- [20] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes non linéaires*, Dunod, Paris (1969).
- [21] P.L. LIONS, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Science Publications (1996).
- [22] A. MUNNIER, E. ZUAZUA, *Large time behaviour for a simplified N-dimensional model of fluid-solid interaction*, à paraître.
- [23] F. MURAT, J. SIMON, *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*, Rapport du L.A. 189, Univ. Paris VI (1974).
- [24] F. MURAT, J. SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Rapport du L.A. 189, Univ. Paris VI (1976).
- [25] J. SAN MARTIN, V. STAROVOITOV, M. TUCSNAK, *Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid*, Arch. Rational Mech. Anal., **161** No 2 (2002), 93-112.
- [26] D. SERRE, *Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence.*, Japan J. Appl. Math., **4** No 1 (1987), 99-110.
- [27] J. SIMON, *Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Math. Pura Appl., **146** No 4 (1987), 65-96.
- [28] J. SIMON, *Domain variation for drag in Stokes flow*, Control theory of distributed parameter systems and applications (Shanghai, 1990), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **159**, Springer, Berlin (1991) 28-42.
- [29] T. TAKAHASHI, *Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain*, Adv. Differential Equation, **8** No 12 (2003), 1499-1532.
- [30] T. TAKAHASHI, M. TUCSNAK, *Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid*, J. Math. Fluid Mech., **6** No 1 (2004), 53-77.
- [31] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, Third Revised Edition, 2001.

- [32] X. ZHANG, E. ZUAZUA, *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system*, J. Differential Equations, **204** No 2 (2004), 380-438.

Deuxième partie

Problème d'interaction entre un
fluide compressible et une structure
élastique

Chapitre 1

Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide visqueux compressible-solide élastique

Existence d'une solution faible pour un problème d'interaction fluide visqueux compressible-solide élastique

Le travail présenté ici a fait l'objet d'une note aux comptes rendus [4] en cours de publication et d'un article [5] actuellement soumis.

1 Introduction et notations

On considère le mouvement tridimensionnel d'un solide élastique immergé dans un fluide compressible. L'ensemble fluide-structure se trouve à l'intérieur d'une cavité fixe bornée Ω . On suppose que Ω est assez régulière et connexe. Le mouvement du solide élastique se décompose en un mouvement rigide (translation et rotation) et un mouvement élastique.

Les problèmes d'existence globale de solutions pour les fluides compressibles font l'objet de recherches actives. Le premier résultat d'existence en dimension quelconque sans contraintes sur les données initiales (petitesse, régularité) ou sur la géométrie du domaine (domaine sphérique) est obtenu par Lions [18]. Dans ce travail, les conditions portant sur la constante adiabatique γ intervenant dans l'équation (1.4) sont les suivantes :

$$\gamma \geq \frac{3}{2} \text{ quand } N = 2, \gamma \geq \frac{9}{5} \text{ quand } N = 3 \text{ et } \gamma > \frac{N}{2} \text{ quand } N \geq 4.$$

Pour les cas $N = 2, 3$, on a donc des conditions plus fortes sur γ que dans le cas général. Les travaux de Feireisl, Novotny et Petzeltova [11] affaiblissent ces hypothèses en supposant simplement que :

$$\gamma > \frac{N}{2} \text{ quand } N \geq 2.$$

Notre étude repose sur une adaptation de ces travaux dans le cadre d'un problème d'interaction entre un fluide compressible et une structure élastique. Cette méthode a déjà été adaptée au cas de structures rigides immergées dans un fluide par Feireisl [10]. Pour l'étude de structures rigides, on peut aussi se référer aux travaux de Desjardins et Esteban [8]. Le cas de structure élastique a été étudié dans les travaux de Flori et Orenge [12] et [13] qui s'intéressent à un couplage fluide-plaque tridimensionnel avec un fluide modélisé par l'équation de Stokes instationnaire (sans terme de convection $\rho u \otimes u$).

1.1 Notations

Sur la partie solide, on considère le flot X_S défini sur l'ouvert $\Omega_S(0)$, le domaine occupé par le solide à l'instant initial. Il s'écrit :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y), \forall y \in \Omega_S(0), \forall t \in [0, T]$$

où g_0 représente le centre de gravité du solide à l'instant initial, a la translation, $Q \in SO_3(\mathbb{R})$ la rotation et ξ le déplacement élastique du solide. Pour t dans $[0, T]$ et y dans $\Omega_S(0)$, $X_S(t, 0, y)$ donne la position à l'instant t de la particule qui se trouvait en y à l'instant initial. Pour exprimer le fait que le mouvement élastique ne "contient" pas de mouvement rigide, on suppose que :

$$\int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0(y) \xi(t, y) dy = 0, \int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0(y) \xi(t, y) \wedge y dy = 0. \quad (1.1)$$

On exprime ainsi le fait que le déplacement élastique est orthogonal aux déplacements rigides infinitésimaux en norme L^2 . Ici, ϱ_S^0 désigne la densité volumique du solide à l'instant initial.

Ceci revient à supposer que :

$$\int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0(y) \xi(t, y) \cdot v(y) dy = 0, \forall v \in H^1(\Omega_S(0)) / D(v) = 0 \text{ sur } \Omega_S(0)$$

où $D(v)$ est le gradient symétrisé de v :

$$D(v) = \text{Sym}(\nabla v) = \frac{1}{2}(\nabla v + {}^t \nabla v). \quad (1.2)$$

La vitesse lagrangienne s'exprime à partir du flot $X_S : \forall t \in (0, T), \forall y \in \Omega_S(0)$,

$$\begin{aligned} U_S(t, y) &= \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, y) \\ &= \frac{da}{dt}(t) + \omega(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t) \frac{\partial \xi}{\partial t}(t, y) \end{aligned}$$

où ω désigne le vecteur-vitesse instantanée de rotation du solide défini par la formule suivante :

$$Q'(t)y = \omega(t) \wedge (Q(t)y), \forall y \in \Omega_S(0)$$

(cette définition utilise le fait que $Q'(t) {}^t Q(t)$ est une matrice antisymétrique). A l'instant t , le solide occupe le domaine $\Omega_S(t) = X_S(t, 0, \Omega_S(0))$. Si on suppose que, pour tout t , le flot $X_S(t, 0, \cdot)$ est inversible de $\Omega_S(0)$ sur $\Omega_S(t)$ d'inverse $X_S(0, t, \cdot)$ (ce qui sera vérifié par notre solution pendant un temps petit), alors on peut définir la vitesse eulérienne u_S :

$$u_S(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, X_S(0, t, x)), \forall x \in \Omega_S(t), \forall t \in (0, T).$$

Ainsi :

$$u_S(t, x) = \frac{da}{dt}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)) + Q(t) \frac{\partial \xi}{\partial t}(t, X_S(0, t, x)). \quad (1.3)$$

A partir de $X_S(0, t, \cdot)$, on définit $X_S(t', t, \cdot)$ sur $\Omega_S(t)$ pour tout t et t' dans $[0, T]$ par :

$$X_S(t', t, x) = X_S(t', 0, X_S(0, t, x)), \forall x \in \Omega_S(t).$$

Le point $X_S(t', t, x)$ donne la position à l'instant t' de la particule qui se trouvait en x à l'instant t .

On note ϱ_S la densité volumique solide et ϱ_F la densité volumique fluide. On note u_F la vitesse eulérienne fluide définie sur l'ouvert $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$. On définit aussi la vitesse globale u sur Ω :

$$u = \begin{cases} u_S \text{ sur } \Omega_S(t) \\ u_F \text{ sur } \Omega_F(t) \end{cases}$$

De la même manière, on définit, à partir de ϱ_F et ϱ_S , la densité globale ϱ sur Ω .

On introduit la définition suivante qui généralise les définitions habituelles d'espaces de Sobolev à des domaines dépendant du temps :

Définition 1 :

Soit $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{N}$. On dira que u défini sur Ω est un élément de $L^p(0, T; W^{s,q}(\Omega_F(t)))$ si :

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \chi_{\Omega_F(t)} \in L^p(0, T; L^q(\Omega))$$

pour tout $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ tels que $k = k_1 + k_2 + k_3 \leq s$ où χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^3$.

Le sous-paragraphe qui suit définit les équations modélisant notre problème. On présente ici un modèle complètement eulérien (aussi bien pour le solide que pour le fluide). Ceci n'est pas habituel dans les études de problèmes d'interaction fluide-structure. On verra au cours de ce travail que ce choix simplifie beaucoup l'écriture du problème.

La recherche d'un modèle eulérien a été faite en collaboration avec C. Conca, J. San Martin et T. Takahashi que je remercie. Je remercie aussi H. Le Dret pour les discussions portant sur ce problème.

1.2 Le modèle

Le mouvement du fluide est donné par les équations de Navier-Stokes compressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) - \operatorname{div} \sigma_F = 0 \text{ sur } \Omega_F(t)$$

où σ_F est le tenseur de Cauchy sur le fluide défini par :

$$\sigma_F = \mu_F \nabla u_F + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p) Id$$

Les coefficients de viscosité λ_F et μ_F vérifient :

$$\mu_F > 0, 3\lambda_F + 2\mu_F > 0$$

et p désigne la pression sur la partie fluide. On se place dans le cadre barotrope : p est uniquement fonction de ϱ_F . On considère la loi d'état suivante :

$$p = a \varrho_F^\gamma \tag{1.4}$$

(cadre isentropique) où a est une constante strictement positive et γ est la constante adiabatique qui satisfait :

$$\gamma > \frac{3}{2}.$$

L'évolution de ϱ_F est donnée par la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \varrho_F}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_F u_F) = 0 \text{ sur } \Omega_F(t).$$

Pour le solide élastique, on choisit de garder le même point de vue eulérien. Ceci permet d'avoir une écriture complètement eulérienne du problème. On verra au cours de la preuve que ce choix simplifie conséquemment l'écriture du problème et de l'espace des fonctions tests qui ne dépend pas de la solution. Le mouvement du solide satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_S u_S) + \operatorname{div}(\varrho_S u_S \otimes u_S) + \theta A_3 u_S - \operatorname{div} \sigma_S = 0 \text{ sur } \Omega_S(t). \quad (1.5)$$

Le terme $\theta A_3 u_S$ est un terme régularisant qui est nécessaire dans notre étude. Ici A_3 est défini par :

$$A_3 = Id - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} - \frac{\partial^6}{\partial x_i^2 \partial x_j^2 \partial x_k^2}$$

de telle sorte que, pour u et v dans $\mathcal{D}(\Omega_S(t))$,

$$(u, v)_{H^3(\Omega_S(t))} = \int_{\Omega_S(t)} A_3 u v$$

et θ est un paramètre réel strictement positif fixé. Comme on le précisera plus loin, cette régularisation permet pendant un temps petit d'éviter les chocs entre le solide et la paroi ainsi que la non-préservation de l'orientation sur la partie solide. Ceci permet aussi, toujours pendant un temps petit, de garder le flot $X_S(t, 0, \cdot)$ inversible (et donc de passer de la configuration déformée $\Omega_S(t)$ à la configuration de référence $\Omega_S(0)$).

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3, \partial \Omega_S(t)}$ l'opérateur défini pour tout t par : pour tout $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_S(t)})^3$,

$$\int_{\Omega_S(t)} A_3 u v = (u, v)_{H^3(\Omega_S(t))} + \langle u, v \rangle_{3, \partial \Omega_S(t)}.$$

Afin d'être complet, on donne ici l'écriture de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3, \partial \Omega_S(t)}$:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{3, \partial \Omega_S(t)} = & - \int_{\partial \Omega_S(t)} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i v + \int_{\partial \Omega_S(t)} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} n_i v - \int_{\partial \Omega_S(t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} n_j \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ & - \int_{\partial \Omega_S(t)} \frac{\partial^5 u}{\partial x_i \partial x_j^2 \partial x_k^2} n_i v + \int_{\partial \Omega_S(t)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k^2} n_j \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ & - \int_{\partial \Omega_S(t)} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} n_k \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de définir une loi de comportement pour la structure. Le tenseur de Cauchy σ_S est défini à partir du second tenseur de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}_S$ par :

$$\sigma_S(t, x) = \det \nabla X_S(0, t, x) \nabla X_S(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S(t, X_S(0, t, x)) \nabla X_S(0, t, x)^{-t}, \forall x \in \Omega_S(t). \quad (1.6)$$

On choisit comme loi de comportement la loi de Saint-Venant Kirchhoff : le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}_S$ est une fonction linéaire du tenseur de Green-Saint Venant E défini par :

$$\begin{aligned} E(X_S) &= \frac{1}{2}({}^t \nabla X_S \nabla X_S - Id) \\ &= \frac{1}{2}({}^t (Id + \nabla \xi)(Id + \nabla \xi) - Id) = \frac{1}{2}({}^t \nabla \xi + \nabla \xi + {}^t \nabla \xi \nabla \xi). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Plus précisément :

$$\hat{\sigma}_S[X_S] = 2\mu_S E(X_S) + \lambda_S \text{tr}(E(X_S)) Id \quad (1.8)$$

où λ_S et μ_S sont les constantes de Lamé du milieu élastique satisfaisant les inégalités :

$$\mu_S > 0, \lambda_S + 2\mu_S > 0.$$

Cette loi correspond à un matériau isotrope homogène. C'est le modèle le plus simple en élasticité non linéaire.

De même que pour ϱ_F , la densité volumique du solide ϱ_S vérifie la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \varrho_S}{\partial t} + \text{div}(\varrho_S u_S) = 0 \text{ sur } \Omega_S(t).$$

Pour les conditions aux bords sur les vitesses, le fluide étant visqueux, ce dernier adhère complètement aux parois. Ainsi la vitesse globale u est continue à l'interface fluide-structure et nulle au bord de Ω :

$$\begin{cases} u_F = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u_F = u_S \text{ sur } \partial\Omega_S(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

(tant qu'il n'y a pas de chocs, la frontière du fluide $\partial\Omega_F(t)$ est la réunion de la frontière du solide $\partial\Omega_S(t)$ et de la frontière du domaine global $\partial\Omega$).

La dernière équation de (1.9) correspond à une équation de couplage entre le fluide et la structure. Le couplage s'exprime aussi par l'égalité des contraintes sur le bord du solide d'après le principe d'action-réaction : pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $v \in \mathcal{C}(\partial\Omega_S(t))$,

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_F n_x \cdot v = \int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_S n_x \cdot v - \theta \langle u_S, v \rangle_{3, \partial\Omega_S(t)}.$$

Ici, n_x désigne la normale unitaire extérieure au solide au point $x \in \partial\Omega_S(t)$.

Ces équations sont complétées par la donnée de conditions initiales u^0 dans $H_0^1(\Omega)^3$, ϱ_S^0 dans $L^\infty(\Omega_S(0))$ et ϱ_F^0 dans $L^\gamma(\Omega_F(0))$:

$$u(t=0) = u^0 \text{ sur } \Omega, \varrho(t=0) = \varrho^0 = \begin{cases} \varrho_S^0 \text{ sur } \Omega_S(0) \\ \varrho_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0) \end{cases}.$$

A l'instant initial, on suppose que :

$$0 < \underline{\varrho}_S \leq \varrho_S^0(x) \leq \bar{\varrho}_S, \forall x \in \Omega_S(0) \text{ et } \varrho_F^0(x) \geq 0, \forall x \in \Omega_F(0). \quad (1.10)$$

Pour conclure, on résume les équations données sous forme forte dont on cherche une solution :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) - \operatorname{div} \sigma_F = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \varrho_F}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_F u_F) = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_S u_S) + \operatorname{div}(\varrho_S u_S \otimes u_S) + \theta A_3 u_S - \operatorname{div} \sigma_S = 0 \text{ sur } \Omega_S(t) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \varrho_S}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_S u_S) = 0 \text{ sur } \Omega_S(t) \quad (1.14)$$

$$u_F = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.15)$$

$$u_F = u_S \text{ sur } \partial\Omega_S(t) \quad (1.16)$$

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_F n_x \cdot v = \int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_S n_x \cdot v - \theta \langle u_S, v \rangle_{3, \partial\Omega_S(t)}, \forall v \in \mathcal{C}(\Omega_S(t)). \quad (1.17)$$

1.3 Estimation d'énergie

On fait tout d'abord une étude formelle pour obtenir une estimation d'énergie a priori. Supposons que le couple (u, ϱ) vérifie le système d'équations (1.11), (1.12), (1.13) et (1.14) ainsi que les conditions (1.15), (1.16) et (1.17), alors en multipliant tout d'abord (1.11) par u_F et en intégrant en espace, on obtient :

$$\int_{\Omega_F(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho_F u_F) u_F + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) u_F - \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} \sigma_F u_F = 0$$

On voit que :

$$\int_{\Omega_F(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho_F u_F) u_F + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) u_F = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F |u_F|^2 dx \quad (1.18)$$

Ceci résulte de l'équation de conservation de la masse (1.12) et du théorème de transport. D'autre part, à l'aide d'une intégration par parties en espace, comme $u_F = 0$ sur $\partial\Omega$ d'après (1.15),

$$\int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} \sigma_F u_F = - \int_{\Omega_F(t)} \sigma_F : \nabla u_F - \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot u_F.$$

On rappelle que n désigne la normale unitaire extérieure au solide. On a utilisé la notation habituelle :

$$A : B = \operatorname{tr}({}^t AB), \forall A, B \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

En procédant de même sur le domaine solide et en sommant les 2 estimations d'énergie, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx + \int_{\Omega_F(t)} \sigma_F : \nabla u_F + \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot u_F + \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla u_S \\ & - \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_S n) \cdot u_S + \theta \|u_S\|_{H^3(\Omega_S(t))}^2 + \theta \langle u_S, u_S \rangle_{3, \partial\Omega_S(t)} = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

D'après la continuité des vitesses (1.16) et des tenseurs (1.17) sur $\partial\Omega_S(t)$,

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot u_F = \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_S n) \cdot u_S - \theta \langle u_S, u_S \rangle_{3, \partial\Omega_S(t)}. \quad (1.20)$$

Ainsi, les termes de bord intervenant dans (1.19) s'annulent. De plus,

$$\int_{\Omega_F(t)} \sigma_F : \nabla u_F = \mu_F \int_{\Omega_F(t)} |\nabla u_F|^2 + (\lambda_F + \mu_F) \int_{\Omega_F(t)} |\operatorname{div} u_F|^2 - a \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma \operatorname{div} u_F.$$

Pour estimer le dernier terme, on multiplie l'équation de continuité de la masse (1.12) par $\varrho_F^{\gamma-1}$ et on intègre en espace. On obtient :

$$\int_{\Omega_F(t)} \frac{\partial \varrho_F}{\partial t} \varrho_F^{\gamma-1} + \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^{\gamma-1} u_F \cdot \nabla \varrho_F + \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma \operatorname{div} u_F = 0.$$

Soit, en utilisant le théorème de transport,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma \operatorname{div} u_F = 0$$

d'où :

$$\int_{\Omega_F(t)} \sigma_F : \nabla u_F = \mu_F \int_{\Omega_F(t)} |\nabla u_F|^2 + (\lambda_F + \mu_F) \int_{\Omega_F(t)} |\operatorname{div} u_F|^2 + \frac{a}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma. \quad (1.21)$$

Pour le terme solide, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla u_S dx \\ & = \int_{\Omega_S(t)} \left[\det \nabla X_S(0, t, x) \nabla X_S(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S(t, X_S(0, t, x)) \nabla X_S(0, t, x)^{-t} \right] : \nabla u_S dx \\ & = \int_{\Omega_S(t)} \left[\det \nabla X_S(0, t, x) \nabla X_S(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S(t, X_S(0, t, x)) \right] : [\nabla_x u_S \nabla X_S(0, t, x)^{-1}] dx \\ & = \int_{\Omega_S(0)} \left[\nabla X_S(t, 0, y) \hat{\sigma}_S(t, y) \right] : [\nabla_y (u_S(t, X_S(t, 0, y)))] dy \\ & = \int_{\Omega_S(0)} \hat{\sigma}_S(t, y) : [{}^t \nabla X_S(t, 0, y) \nabla_y (u_S(t, X_S(t, 0, y)))] dy \end{aligned}$$

où on a fait un changement de variables pour passer à la configuration de référence en posant $x = X_S(t, 0, y)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla u_S dx &= \int_{\Omega_S(0)} \hat{\sigma}_S(t, y) : \left[{}^t \nabla X_S(t, 0, y) \nabla_y \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, y) \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \hat{\sigma}_S(t, y) : \left[{}^t \nabla X_S(t, 0, y) \nabla_y \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, y) + {}^t \nabla_y \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, y) \nabla X_S(t, 0, y) \right] dy \end{aligned}$$

puisque $\hat{\sigma}_S$ est un tenseur symétrique. Le tenseur E étant précédemment défini par (1.7), on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla u_S dx &= \int_{\Omega_S(0)} \hat{\sigma}_S(t, y) : \frac{\partial}{\partial t} E(X_S(t, 0, y)) dy \\ &= \mu_S \frac{d}{dt} \int_{\Omega_S(0)} |E(X_S(t, 0, y))|^2 dy + \frac{\lambda_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_S(0)} |\text{tr} E(X_S(t, 0, y))|^2 dy \end{aligned} \quad (1.22)$$

d'après la loi de comportement (1.8). Ainsi, pour terminer, si on rassemble (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) et (1.22) on obtient l'estimation d'énergie a priori suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho |u|^2 dx + \frac{a}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma + \mu_F \int_{\Omega_F(t)} |\nabla u_F|^2 + (\lambda_F + \mu_F) \int_{\Omega_F(t)} |\text{div} u_F|^2 \\ + \theta \|u_S\|_{H^3(\Omega_S(t))}^2 + \mu_S \frac{d}{dt} \int_{\Omega_S(0)} |E(X_S(t, 0, y))|^2 dy + \frac{\lambda_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_S(0)} |\text{tr} E(X_S(t, 0, y))|^2 dy = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Remarque 1 :

La loi de comportement la plus simple pour le solide est la loi d'élasticité linéarisée. Le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}_S$ est donné par :

$$\hat{\sigma}_S[X_S] = 2\mu_S D(\xi) + \lambda_S \text{tr}(D(\xi)) Id$$

où $D(\xi)$ est le gradient symétrisé de ξ qui est défini par (1.2) (c'est une linéarisation du tenseur de Green-Saint Venant (1.7)). Pour cette loi, on ne peut pas obtenir d'estimation d'énergie. Des termes supplémentaires qu'on ne peut pas contrôler apparaissent au niveau du calcul (1.22).

1.4 Résultats annexes

1.4.1 Existence et régularité d'une solution d'une équation différentielle

Au cours de la démonstration, on a besoin d'extensions simples du théorème de Cauchy-Lipschitz. Afin d'être complet, on donne un énoncé précis de ces résultats :

Proposition 1 :

Soit f une fonction de $L^2(0, T; \mathcal{C}(\mathbb{R}^3))$ telle que :

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L(t) |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$$

où L est une fonction de $L^2(0, T)$. Alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

admet une unique solution globale dans $H^1(0, T)$ pour toute condition initiale z_0 dans \mathbb{R}^3 . De plus, si :

$$f(t, z) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega,$$

pour une condition initiale $z_0 \in \Omega$, la solution z reste à valeurs dans Ω .

Preuve de la proposition 1 :

on adapte ici la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir par exemple Crouzeix et Mignot [7], paragraphe 2, chapitre 3) au cadre L^2 en temps. On définit pour tout z dans $\mathcal{C}(0, T)$ la fonction $\phi(z)$ dans $\mathcal{C}(0, T)$ par :

$$\phi(z) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s)) ds.$$

En introduisant la norme :

$$\|z\|_L = \max_{0 \leq s \leq T} \left(\exp \left(-2 \int_0^s L(s) ds \right) |z(s)| \right)$$

on vérifie facilement que :

$$\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_L \leq \frac{1}{2} \|z_1 - z_2\|_L$$

donc ϕ est une application contractante pour cette norme et admet un point fixe dans $\mathcal{C}(0, T)$. Ceci permet de montrer l'existence d'une solution globale. La seconde partie de la proposition résulte du fait que, pour tout $z_0 \in \partial\Omega$, $z(t) = z_0$ est l'unique solution du problème et du fait que deux trajectoires ayant des conditions initiales différentes ne se rencontrent pas. \square

La proposition suivante donne des résultats de régularité de la solution par rapport à la condition initiale. Le cas \mathcal{C}^k est classique. Le cas H^3 se montre d'une façon très similaire.

Proposition 2 :

Soit f une fonction de $L^2(0, T; \mathcal{C}(\mathbb{R}^3))$ telle que :

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L(t)|z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$$

où L est une fonction de $L^2(0, T)$. On s'intéresse à la régularité de l'application continue :

$$\begin{aligned} z : [0, T] \times \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (t, z_0) &\mapsto z(t, z_0) \end{aligned} \quad (1.25)$$

où $z(\cdot, z_0)$ est la solution du problème (1.24) avec condition initiale z_0 .

Soit k un entier positif. Si f est une fonction de $L^2(0, T; \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3))$, alors z est une fonction de $H^1(0, T; \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3))$ et si f est une fonction de $L^2(0, T; H^3(\mathbb{R}^3))$, alors z est une fonction de $H^1(0, T; H^3(\mathbb{R}^3))$.

1.4.2 Condition d'injectivité

On énonce maintenant un lemme qui donne une condition suffisante d'injectivité du flot. La démonstration de ce lemme se trouve dans Ciarlet [6] (théorème 5.5.1, chapitre 5).

Lemme 1.1 :

Il existe un réel $e_0 > 0$ dépendant uniquement de la géométrie du domaine Ω tel que pour tout φ dans $C^1(\overline{\Omega})$ satisfaisant :

$$\|\nabla\varphi - Id\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e_0,$$

l'application φ est inversible de Ω sur son image.

1.4.3 Résultats de régularité pour un problème parabolique

Définition 2 :

On dira qu'un ouvert borné Ω est un ensemble de classe $W^{m,k}$ si, pour tout point $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage U de x , un voisinage V de 0 et un $W^{m,k}$ -difféomorphisme $\Psi : V \mapsto U$ tels que :

$$\Psi(0) = x, \Psi(\Gamma_0(V)) = \partial\Omega \cap U, \Psi(V^+) = \Omega \cap U$$

avec :

$$\Gamma_0(V) = V \cap \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} / x_N = 0\}$$

et :

$$V^+ = V \cap \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} / x_N > 0\}.$$

On énonce tout d'abord un résultat de régularité maximale dans le cadre L^q . On ne donne pas ici une version générale du théorème mais simplement le cas particulier qui nous intéresse. L'opérateur qui intervient est un opérateur elliptique écrit sous forme divergence.

Théorème 1 :

Soient $q = \frac{4}{3}$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe C^2 et w_0 un élément de $W^{2,q}(\Omega)$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}(B\nabla w) = f & \text{sur } (0, T) \times \Omega \\ (B\nabla w) \cdot n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ w(0) = w_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où f est un élément de $L^q((0, T) \times \Omega)$ et B une matrice symétrique de $C(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ coercive uniformément en temps et en espace c'est-à-dire :

$$\exists \gamma > 0, \forall (t, y) \in (0, T) \times \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{R}^3, \alpha \cdot (B(t, y)\alpha) \geq \gamma \|\alpha\|^2.$$

Alors, ce problème admet une unique solution w dans $W^{1,q}(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^q(0, T; W^{2,q}(\Omega))$.

On trouve une démonstration de ce résultat énoncé dans un cadre plus général dans Ladyzhenskaya, Solonnikov et Ural'tseva [16]. Le cas Dirichlet est démontré complètement (chapitre IV, théorème 9.1) et la démonstration du cas Neumann est évoquée à la fin du paragraphe.

Proposition 3 :

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe \mathcal{C}^2 . On considère le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}(B\nabla w) + aw + c \cdot \nabla w = f & \text{sur } (0, T) \times \Omega \\ (B\nabla w) \cdot n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ w(0) = w_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où B est une matrice symétrique de $\mathcal{C}(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ coercive uniformément en temps et en espace.

- (i) si on suppose que w_0 est un élément de $H^2(\Omega)$, a est un élément de $L^2(0, T; \mathcal{C}(\Omega))$, f est un élément de $L^2((0, T) \times \Omega)$ et c un élément de $\mathcal{C}((0, T) \times \Omega)^3$, alors notre problème admet une unique solution w dans $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et l'équation est satisfaite presque partout.
- (ii) si on suppose que w_0 un élément de $W^{2,q}(\Omega)$ avec $q = \frac{4}{3}$, f est un élément de $L^q((0, T) \times \Omega)$, a est un élément de $L^2((0, T) \times \Omega)$ et c un élément de $L^2(0, T; L^4(\Omega))^3$ et que de plus, notre problème admet une solution w dans $L^4(0, T; H^1(\Omega))$, alors cette solution w est en fait un élément de $W^{1,q}(0, T; L^q(\Omega)) \cap L^q(0, T; W^{2,q}(\Omega))$ et l'équation est satisfaite presque partout.

Preuve de la proposition 3 :

Le premier résultat de régularité maximale est un résultat classique de régularité sur une équation parabolique linéaire (qu'on peut aussi trouver dans [16]). Le second résultat repose sur le **théorème 1** avec comme second membre :

$$f - aw - c \cdot \nabla w.$$

Proposition 4 :

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de classe \mathcal{C}^1 . On considère le problème suivant : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\overline{(0, T) \times \Omega})$ qui s'annule en $t = T$,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} w \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} B\nabla w \cdot \nabla \phi + \int_0^T \int_{\Omega} c \cdot \nabla w \phi = \int_0^T \int_{\Omega} f \phi + \int_{\Omega} w_0 \phi(0) \quad (1.26)$$

où B est une matrice symétrique de $H^1(0, T; W^{1,6}(\Omega))$ coercive uniformément en temps et en espace telle que $B(0) = Id$. On suppose que f est un élément de $L^q(0, T; H^1(\Omega)')$ avec $q > 2$, w_0 est un élément de $H^1(\Omega)$ et c un élément de $L^2(0, T; L^\infty(\Omega))^3$, alors notre problème admet une unique solution w dans $L^q(0, \bar{T}; H^1(\Omega))$ où \bar{T} ne dépend que de la norme de B dans $H^1(0, T; W^{1,6}(\Omega))$.

Preuve de la proposition 4 :

On va tout d'abord montrer que le problème suivant a une unique solution : trouver v dans $L^q(0, T; H^1(\Omega))$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\overline{(0, T) \times \Omega})$ qui s'annule en $t = T$,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi + \int_0^T \int_{\Omega} c \cdot \nabla v \phi = \int_0^T \int_{\Omega} f \phi + \int_{\Omega} w_0 \phi(0).$$

Pour cela, on considère le problème suivant : trouver \bar{v} tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\overline{(0, T) \times \Omega})$ qui s'annule en $t = T$,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \phi = \int_0^T \int_{\Omega} f \phi + \int_{\Omega} w_0 \phi(0).$$

Alors ce problème admet une unique solution \bar{v} dans $L^q(0, T; H^1(\Omega))$ (voir par exemple Amann [1] (chapitre III.4)). On pose maintenant :

$$u = v - \bar{v}.$$

Alors u est solution de : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\overline{(0, T) \times \Omega})$ qui s'annule en $t = T$,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi + \int_0^T \int_{\Omega} c \cdot \nabla u \phi = -\int_0^T \int_{\Omega} c \cdot \nabla \bar{v} \phi. \quad (1.27)$$

On va tout d'abord considérer une régularisation du terme de convection. On considère une suite de fonctions (c_n) de $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ qui converge vers c dans $L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Alors, on montre facilement que le problème suivant possède une unique solution u_n dans $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ à n fixé :

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u_n \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \phi + \int_0^T \int_{\Omega} c_n \cdot \nabla u_n \phi = -\int_0^T \int_{\Omega} c_n \cdot \nabla \bar{v} \phi. \quad (1.28)$$

De plus, $(c_n \cdot \nabla \bar{v})$ est bornée dans $L^r(0, T; L^2(\Omega))$ avec $1 < r < 2$. Ainsi, un résultat de régularité permet d'affirmer qu'on a l'estimation suivante :

$$\|u_n\|_{L^r(0, T; H^2(\Omega))} + \|u_n\|_{W^{1, r}(0, T; L^2(\Omega))} \leq C(\|c_n \cdot \nabla \bar{v}\|_{L^r(0, T; L^2(\Omega))} + \|c_n\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))} \|u_n\|_{L^s(0, T; H^1(\Omega))})$$

où $s > 2$ est défini par :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}.$$

En raisonnant par l'absurde, on montre alors que cette estimation implique l'inégalité suivante :

$$\|u_n\|_{L^r(0, T; H^2(\Omega))} + \|u_n\|_{W^{1, r}(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \|c_n \cdot \nabla \bar{v}\|_{L^r(0, T; L^2(\Omega))}.$$

La suite (u_n) est donc bornée dans $L^r(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1, r}(0, T; L^2(\Omega))$. Elle converge faiblement dans ces espaces et donc dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. On vérifie facilement par passage à la limite dans (1.28) que la limite faible est la solution de (1.27). Ainsi, u est un élément de $L^r(0, T; H^2(\Omega)) \cap W^{1, r}(0, T; L^2(\Omega))$ et donc de $\mathcal{C}(0, T; H^1(\Omega))$. Ceci permet de conclure que $v = u + \bar{v}$ est un élément de $L^q(0, T; H^1(\Omega))$.

Montrons maintenant que le problème (1.26) admet une unique solution. L'unicité est déjà acquise puisque ce problème admet une unique solution dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. On va montrer l'existence sur un intervalle de temps petit en utilisant un argument de point fixe. Pour cela, on définit l'application suivante :

$$S : L^q(0, T; H^1(\Omega)) \xrightarrow{\tilde{w}} L^q(0, T; H^1(\Omega)) \xrightarrow{w} \quad (1.29)$$

où w est la solution du problème variationnel : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\overline{(0, T) \times \Omega})$ qui s'annule en $t = T$,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} w \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \phi + \int_0^T \int_{\Omega} c \cdot \nabla w \phi = \int_0^T \int_{\Omega} f \phi + \int_{\Omega} w_0 \phi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} (Id - B) \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \phi.$$

On va montrer que l'application S est contractante sur un intervalle de temps petit : soient \tilde{w}_1 et \tilde{w}_2 appartenant à $L^q(0, T; H^1(\Omega))$. Alors, $S(\tilde{w}_1) - S(\tilde{w}_2)$ est solution du problème variationnel :

$$-\int_0^T \int_{\Omega} w \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \phi + \int_0^T \int_{\Omega} c \cdot \nabla w \phi = \int_0^T \int_{\Omega} (Id - B) \nabla (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2) \cdot \nabla \phi.$$

D'après le résultat de régularité qui vient d'être montré, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|S(\tilde{w}_1) - S(\tilde{w}_2)\|_{L^q(0, T; H^1(\Omega))} &\leq C \|(Id - B) \nabla (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)\|_{L^q(0, T; L^2(\Omega))} \\ &\leq C \|(Id - B)\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_{L^q(0, T; H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque B est un élément de $H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ et $B(0) = Id$, pour $T = \bar{T}$ assez petit :

$$\|S(\tilde{w}_1) - S(\tilde{w}_2)\|_{L^q(0, T; H^1(\Omega))} \leq \alpha \|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_{L^q(0, T; H^1(\Omega))}$$

avec $\alpha < 1$. D'après le théorème de point fixe des applications contractantes, S admet un point fixe dans $L^q(0, \bar{T}; H^1(\Omega))$ et ce point fixe est la solution du problème variationnel (1.26).

2 Formulation variationnelle et résultat principal

Soit \mathcal{V} l'espace des fonctions tests défini par :

$$\mathcal{V} = \{v \in C^\infty((0, T) \times \Omega)^3 / v(T) = 0, v(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)^3, \forall t \in [0, T]\}. \quad (2.1)$$

En faisant des intégrations pas parties, on obtient l'expression sous forme variationnelle faible du problème énoncé sous forme forte à la fin du **paragraphe 1.2** :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{V}, \\ \int_0^T \int_{\Omega} \varrho(t, x) u(t, x) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \varrho(t, x) (u \otimes u)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\ - \int_0^T \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla v - \theta \int_0^T (u(t, \cdot), v(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S(t))} dt - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx dt \\ - \mu_F \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \nabla u : \nabla v dx dt + a \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma \operatorname{div} v dx dt = - \int_{\Omega} \varrho^0 u^0 v(0, \cdot) dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

Définition 3 :

On dira que (X_S, ϱ, u) est une solution faible du problème (1.11) à (1.17) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $X_S \in H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$, $\varrho \in L^\infty(0, T, L^\gamma(\Omega))$, $\varrho \geq 0$, $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))^3$

(ii) pour tout $y \in \Omega_S(0)$, $X_S(t, 0, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_S(t, 0, y) = u(t, X_S(t, 0, y)) \\ X_S(0, 0, y) = y. \end{cases} \quad (2.3)$$

De plus, $X_S(t, 0, \cdot)$ est une application inversible de $\Omega_S(0)$ sur $\Omega_S(t) = X_S(t, 0, \Omega_S(0))$.

(iii) ϱ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \varrho(t=0) = \varrho^0 \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Cette équation est satisfaite au sens des solutions renormalisées c'est-à-dire : pour tout $b \in C^1(\mathbb{R})$ telle que

$$b'(z) = 0, \text{ pour tout } z \text{ assez grand}, \quad (2.5)$$

alors :

$$\frac{\partial b(\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div}(b(\varrho)u) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega). \quad (2.6)$$

(iv) (X_S, ϱ, u) satisfait la formulation variationnelle (2.2).

Remarque 2 :

La notion de solutions renormalisées a été introduite par di Perna et Lions [9]. Ici, on se place dans un cadre légèrement différent du leur. En effet, ils imposent sur les fonctions admissibles b les conditions suivantes :

$$b \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \frac{b'}{1+|z|} \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } b = 0 \text{ sur un voisinage de } 0.$$

Les conditions sur b sont donc d'un autre type dans notre contexte.

Reprenant l'idée de Feireisl, Novotny et Petzeltova [11], on peut d'ores et déjà remarquer que la condition (2.5) peut être affaiblie : en effet, si $\varrho \in L^\infty(0, T; L^\alpha(\Omega))$ avec $\alpha > \frac{3}{2}$, alors l'équation (2.6) est satisfaite pour toute fonction b dans $C^1(\mathbb{R}_*) \cap C(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$|b'(z)z| \leq C(z^{\frac{\alpha}{2}} + z^\theta), \forall z > 0 \text{ avec } \theta < \frac{\alpha}{2}. \quad (2.7)$$

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soient $u^0 \in H_0^1(\Omega)^3$, $\varrho_S^0 \in L^\infty(\Omega_S(0))$ et $\varrho_F^0 \in L^\gamma(\Omega_F(0))$ vérifiant la condition (1.10). On suppose qu'à l'instant initial $d(\partial\Omega_S(0), \partial\Omega) > 0$ et on définit :

$$d(t) = d(\partial\Omega_S(t), \partial\Omega) \text{ et } g(t) = \inf_{y \in \Omega_S(0)} |\det \nabla X_S(t, 0, y)|.$$

Alors, notre problème admet une solution faible au sens de la **définition 3** définie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ où T est défini par :

$$T = \sup\{t > 0 / d(t) > 0, g(t) > 0 \text{ et } X_S(t, 0, \cdot) \text{ injective}\}. \quad (2.8)$$

Le temps d'existence T est minoré par une constante strictement positive dépendant des données initiales, de d_0 et du paramètre de régularisation θ .

La solution obtenue satisfait de plus l'estimation d'énergie (1.23).

On va commencer par s'intéresser à la résolution d'un problème régularisé. On suit le schéma donné par Feireisl, Novotny et Petzeltova [11] : on fait une régularisation dans l'équation de la quantité de mouvement en rajoutant un terme de pression artificielle $\delta\varrho_F^\beta$ avec β assez grand. On a toujours :

$$\sigma_F = \mu_F \nabla u_F + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p) Id$$

mais maintenant avec :

$$p = a\varrho_F^\gamma + \delta\varrho_F^\beta.$$

En plus de cette régularisation, on rajoute un terme de viscosité dans la loi de conservation de la masse portant sur ϱ_F :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_F}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_F u) = \epsilon \Delta \varrho_F \text{ sur } \Omega_F(t) \\ \frac{\partial \varrho_F}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_F(t) \\ \varrho_F(0, \cdot) = \varrho_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0). \end{cases} \quad (2.9)$$

On définit ϱ_S par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_S}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_S u) = 0 \text{ sur } \Omega_S(t) \\ \varrho_S(0, \cdot) = \varrho_S^0 \text{ sur } \Omega_S(0) \end{cases} \quad (2.10)$$

puis

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_S \text{ sur } \Omega_S(t) \\ \varrho_F \text{ sur } \Omega_F(t). \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour les données initiales, on garde la même régularité sur la partie solide : on prend toujours ϱ_S^0 dans $L^\infty(\Omega_S(0))$ satisfaisant l'encadrement (1.10). Sur la partie fluide, on considère une donnée initiale ϱ_F^0 plus régulière. On prend :

$$\varrho_F^0 \in H^2(\Omega_F(0)) \text{ satisfaisant } 0 < \underline{\varrho}_F \leq \varrho_F^0(x) \leq \bar{\varrho}_F, \forall x \in \Omega_F(0)$$

de sorte que :

$$0 < \underline{\varrho} \leq \varrho^0(x) \leq \bar{\varrho}, \forall x \in \Omega. \quad (2.12)$$

Cette régularisation des conditions initiales permettra d'avoir une certaine régularité pour la solution de (2.9). Ce type de régularisation, avec un terme de viscosité dans la loi de conservation de la masse est aussi utilisé dans Lions [18].

Le terme de viscosité modifie l'estimation d'énergie. En effet, on a maintenant :

$$\int_{\Omega_F(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) \right) u_F = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F |u_F|^2 - \frac{1}{2} \epsilon \int_{\Omega_F(t)} \Delta \varrho_F |u_F|^2 \quad (2.13)$$

On rajoute dans l'équation de la quantité de mouvement portant sur le fluide un terme permettant de conserver une estimation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) + \epsilon \nabla u_F \nabla \varrho_F - \operatorname{div} \sigma_F = 0 \text{ sur } \Omega_F(t) \quad (2.14)$$

Pour ce nouveau problème, la formulation variationnelle est maintenant :

$$\begin{aligned} & \forall v \in \mathcal{V}, \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \varrho(t, x) u(t, x) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \varrho(t, x) (u \otimes u)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\ & - \epsilon \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} (\nabla u_F(t, x) \cdot \nabla \varrho_F(t, x)) v(t, x) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla v \\ & - \theta \int_0^T (u(t, \cdot), v(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S(t))} dt - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx dt \\ & - \mu_F \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \nabla u : \nabla v dx dt + a \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma \operatorname{div} v dx dt \\ & + \delta \int_0^T \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\beta \operatorname{div} v dx dt = - \int_{\Omega} \varrho^0 u^0 v(0, \cdot) dy \end{aligned} \quad (2.15)$$

et l'estimation d'énergie a priori satisfaite par la solution de ce problème est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho(t) |u(t)|^2 dx + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F(t)^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F(t)^\beta + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla u_F|^2 \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\operatorname{div} u_F|^2 + \theta \int_0^t \|u_S(s)\|_{H^3(\Omega_S(s))}^2 + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X_S(t, 0, y))|^2 dy \\ & + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X_S(t, 0, y))|^2 dy + \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} (a\gamma(\varrho_F)^{\gamma-2} + \delta\beta(\varrho_F)^{\beta-2}) |\nabla \varrho_F|^2 \leq E_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

où E_0 est l'énergie initiale définie par :

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho^0 |u^0|^2 dx + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_F(0)} (\varrho_F^0)^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1} \int_{\Omega_F(0)} (\varrho_F^0)^\beta.$$

On va d'abord montrer que ce problème régularisé admet une solution. Le problème régularisé présente les difficultés habituelles des problèmes fluide-structure. On ne peut pas espérer résoudre directement ce type de problèmes, on passe donc par une linéarisation et un argument de point fixe. La formulation entièrement eulérienne permet tout de même de simplifier l'écriture du problème : en particulier, on voit que les fonctions tests appartiennent à un espace indépendant de la solution recherchée. Après avoir montré l'existence de solutions du problème régularisé, on passera à la limite en ϵ puis en δ .

3 Résolution du problème approché en dimension finie

On va résoudre une approximation en dimension finie du problème non linéaire. Pour cela, on résoudra d'abord un problème linéarisé puis on passera au problème non linéaire par un argument de point fixe.

3.1 Le problème linéarisé en dimension finie

On définit une base constituée d'éléments assez réguliers $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ orthogonale dans $H^3(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3$ et orthonormée dans $H_0^1(\Omega)^3$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)^3} = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Il faut d'abord définir une linéarisation de notre problème en dimension finie. Soit N un entier fixé. On se donne N fonctions $(\tilde{\alpha}_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $L^2(0, T)$ à valeurs dans \mathbb{R} . Ceci permet de définir une vitesse \tilde{u}^N :

$$\tilde{u}^N(t, x) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i(t) \varphi_i(x).$$

On prend les fonctions $(\tilde{\alpha}_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans un ensemble convexe borné de $L^2(0, T)^N$: on suppose que :

$$\int_0^T \sum_{i=1}^N |\tilde{\alpha}_i(t)|^2 \, dt \leq M \quad (3.1)$$

où M est un réel strictement positif fixé.

Cette vitesse étant régulière, on peut ensuite résoudre d'après la **proposition 1** pour tout $y \in \overline{\Omega}$ l'équation différentielle en t suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{X}^N(t, 0, y) = \tilde{u}^N(t, \tilde{X}^N(t, 0, y)) \\ \tilde{X}^N(0, 0, y) = y. \end{cases}$$

Le flot \tilde{X}^N est donc bien défini et appartient à $H^1(0, T; \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))$ d'après la **proposition 2**. De plus, pour t fixé dans $[0, T]$, $\tilde{X}^N(t, 0, \cdot)$ est inversible de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\Omega}$. Ce flot nous permet de définir les domaines $\tilde{\Omega}_S^N(t) = \tilde{X}^N(t, 0, \Omega_S(0))$ et $\tilde{\Omega}_F^N(t) = \tilde{X}^N(t, 0, \Omega_F(0)) = \Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}_S^N(t)}$. Du fait de l'inversibilité et de la régularité du flot sur tout Ω ,

$$\forall t \in [0, T], d(\tilde{\Omega}_S^N(t), \partial\Omega) > 0.$$

L'ouvert $\tilde{\Omega}_F^N(t)$ a donc la même régularité que $\tilde{\Omega}_S^N(t)$, $\tilde{\Omega}_F^N(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 . Ceci est évidemment spécifique au problème discret où la vitesse fluide et la vitesse solide sont aussi régulières que l'on veut. Pour le problème continu, le flot sera défini uniquement sur la partie solide.

On définit aussi $\tilde{\varrho}_F^N$ par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\varrho}_F^N}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\varrho}_F^N \tilde{u}^N) = \epsilon \Delta \tilde{\varrho}_F^N \text{ sur } \tilde{\Omega}_F^N(t) \\ \frac{\partial \tilde{\varrho}_F^N}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \tilde{\Omega}_F^N(t) \\ \tilde{\varrho}_F^N(0, \cdot) = \varrho_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0) \end{cases} \quad (3.2)$$

puis $\tilde{\varrho}_S^N$ par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\varrho}_S^N}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\varrho}_S^N \tilde{u}^N) = 0 \text{ sur } \tilde{\Omega}_S^N(t) \\ \varrho_S(0, \cdot) = \varrho_S^0 \text{ sur } \Omega_S(0) \end{cases} \quad (3.3)$$

et enfin :

$$\tilde{\varrho}^N = \begin{cases} \tilde{\varrho}_S^N \text{ sur } \tilde{\Omega}_S^N(t) \\ \tilde{\varrho}_F^N \text{ sur } \tilde{\Omega}_F^N(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

Ces fonctions sont bien définies grâce au lemme qui suit :

Lemme 3.1 :

Avec les notations et les hypothèses précédentes de régularité, le problème (3.2) à (3.4) possède une unique solution $\tilde{\varrho}^N$ dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ satisfaisant l'estimation d'énergie :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N(t, x)^2 dx + 2\epsilon \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |\nabla \tilde{\varrho}^N(t, x)|^2 dx \leq C$$

où C est une constante dépendant de $\|\operatorname{div} \tilde{u}^N\|_{L^1(0, T; L^\infty(\Omega))}$. De plus, on a une écriture explicite de la solution de (3.3) sur $\tilde{\Omega}_S^N(t)$:

$$\tilde{\varrho}_S^N(t, x) = \varrho^0(\tilde{X}^N(0, t, x)) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} \tilde{u}^N(s, \tilde{X}^N(s, t, x)) ds\right). \quad (3.5)$$

Enfin, $\tilde{\varrho}^N$ satisfait l'inégalité suivante : $\forall t \in [0, T], \forall x \in \Omega$,

$$\underline{\varrho} \exp\left(-\int_0^t \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds\right) \leq \tilde{\varrho}^N(t, x) \leq \bar{\varrho} \exp\left(\int_0^t \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds\right) \quad (3.6)$$

où $\underline{\varrho}$ et $\bar{\varrho}$ interviennent dans l'encadrement (2.12).

Preuve du lemme 3.1 :

Comme \tilde{X}^N est une fonction de $H^1(0, T; H^3(\bar{\Omega}))$ inversible à t fixé, on peut ramener les problèmes (3.2) et (3.3) aux domaines de configuration initiale. Soit tout d'abord :

$$\bar{\varrho}_F(t, y) = \tilde{\varrho}_F^N(t, \tilde{X}^N(t, 0, y)) \text{ pour tout } (t, y) \in [0, T] \times \Omega_F(0).$$

Le problème de départ revient à chercher $\bar{\varrho}_F$ solution de :

$$\begin{aligned} \det \nabla \tilde{X}^N(t, 0, \cdot) \frac{\partial \bar{\varrho}_F}{\partial t} - \epsilon \operatorname{div}(A \nabla \bar{\varrho}_F) + \det \nabla \tilde{X}^N(t, 0, \cdot) \operatorname{div} \tilde{u}^N(t, \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)) \bar{\varrho}_F &= 0 \text{ sur } \Omega_F(0) \\ (A(t, y) \nabla \bar{\varrho}_F) \cdot N_y &= 0 \text{ sur } \partial \Omega_F(0) \end{aligned}$$

avec :

$$A(t, y) = \det \nabla \tilde{X}^N(t, 0, y) \nabla \tilde{X}^N(t, 0, y)^{-1} \nabla \tilde{X}^N(t, 0, y)^{-t}.$$

soit aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varrho}_F}{\partial t} - \epsilon \operatorname{div}(B \nabla \bar{\varrho}_F) + \operatorname{div} \tilde{u}^N(t, \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)) \bar{\varrho}_F - \frac{\epsilon}{\det \nabla \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)} \nabla (\det \nabla \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)) B \nabla \bar{\varrho}_F &= 0 \\ (B \nabla \bar{\varrho}_F) \cdot N_y &= 0 \text{ sur } \partial \Omega_F(0) \end{aligned}$$

avec :

$$B(t, y) = \nabla \tilde{X}^N(t, 0, y)^{-1} \nabla \tilde{X}^N(t, 0, y)^{-t}.$$

L'opérateur B est un élément de $H^1(0, T; W^{1,6}(\bar{\Omega}))$ et de plus B est coercif uniformément en temps et en espace d'après les propriétés de \tilde{X}^N . On se trouve donc dans le cadre de la **proposition 3** qui donne l'existence et l'unicité d'une solution $\bar{\varrho}_F$ dans $L^2(0, T; H^2(\Omega_F(0))) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega_F(0)))$.

On obtient de cette façon une solution $\tilde{\varrho}_F^N$ dans $L^2(0, T; H^2(\tilde{\Omega}_F^N(t))) \cap H^1(0, T; L^2(\tilde{\Omega}_F^N(t)))$ et l'équation (3.2) est satisfaite presque partout.

Soit maintenant :

$$\bar{\varrho}_S(t, y) = \tilde{\varrho}_S^N(t, \tilde{X}^N(t, 0, y)) \text{ pour tout } (t, y) \in [0, T] \times \Omega_S(0).$$

Alors, $\bar{\varrho}_S$ est solution de :

$$\frac{\partial \bar{\varrho}_S}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{u}^N(t, \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)) \bar{\varrho}_S = 0 \text{ sur } \Omega_S(0).$$

On voit ainsi que $\bar{\varrho}_S$ a une écriture explicite et en retransportant la solution à l'aide du flot, on obtient la formule (3.5). Ainsi, $\tilde{\varrho}_S^N$ est aussi un élément de $L^2(0, T; H^2(\tilde{\Omega}_S^N(t))) \cap H^1(0, T; L^2(\tilde{\Omega}_S^N(t)))$.

Il reste à montrer l'estimation (3.6) du lemme. Sur la partie solide, cela vient directement de la formule (3.5). Sur la partie fluide, on définit :

$$f^N(t, x) = \tilde{\varrho}_F^N(t, x) \exp \left(- \int_0^t \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right)$$

alors f^N satisfait presque partout l'équation :

$$\frac{\partial f^N}{\partial t} + \tilde{u}^N \cdot \nabla f^N + (\operatorname{div} \tilde{u}^N - \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}) f^N = \epsilon \Delta f^N \text{ sur } \tilde{\Omega}_F^N(t).$$

En multipliant cette équation par $(f^N - k)^+$ avec k un réel et :

$$u^+ = \max(0, u),$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |(f^N - k)^+|^2 \leq \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} \operatorname{div} \tilde{u}^N |(f^N - k)^+|^2.$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |(f^N - k)^+|^2 \leq \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |(f^N - k)^+|^2$$

et donc :

$$\|(f^N - k)^+\|_{L^2(\tilde{\Omega}_F^N(t))}^2 \leq \|(\varrho_F^0 - k)^+\|_{L^2(\Omega_F(0))}^2 \exp\left(\int_0^t \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds\right)$$

Ainsi, comme la donnée initiale satisfait l'encadrement (2.12), si on prend $k = \bar{\varrho}$, on obtient l'inégalité de droite de l'estimation (3.6). L'inégalité de gauche est obtenue de la même façon. La densité globale $\tilde{\varrho}^N$ est donc un élément de $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ qui satisfait :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N(t, x)^2 dx + 2\epsilon \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |\nabla \tilde{\varrho}^N(t, x)|^2 dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{u}^N \tilde{\varrho}^N(t, x)^2 dx$$

ce qui donne pour finir l'estimation d'énergie exprimée dans le lemme. \square

On cherche (u^N, X^N, ϱ^N) solution du problème approché suivant :

(i) u^N se décompose sous la forme :

$$u^N(t, x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \varphi_i(x), \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

avec $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans $H^1(0, T)$ et u^N satisfait le problème suivant :

pour tout $v^N(t, x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) \varphi_i(x)$ avec $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans $L^2(0, T)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N(t, x) \frac{\partial u^N}{\partial t}(t, x) v^N(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N(t, x) ((\tilde{u}^N \cdot \nabla) u^N)(t, x) v^N(t, x) dx dt \\ & - \epsilon \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\nabla v^N(t, x) \cdot \nabla \tilde{\varrho}^N(t, x)) u^N(t, x) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_S^N(t)} \tilde{\sigma}_S^N : \nabla v^N dx dt + \theta \int_0^T (u^N(t, \cdot), v^N(t, \cdot))_{H^3(\tilde{\Omega}_S^N(t))} dt \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} \operatorname{div} u^N \operatorname{div} v^N dx dt + \mu_F \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} \nabla u^N : \nabla v^N dx dt \\ & - a \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\tilde{\varrho}^N)^\gamma \operatorname{div} v^N dx dt - \delta \int_0^T \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\tilde{\varrho}^N)^\beta \operatorname{div} v^N dx dt \\ & = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $\tilde{\sigma}_S^N$ est défini par : pour tout $x \in \tilde{\Omega}_S^N(t)$,

$$\tilde{\sigma}_S^N(t, x) = \det \nabla \tilde{X}^N(0, t, x) \nabla \tilde{X}^N(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S[\tilde{X}^N](t, \tilde{X}^N(0, t, x)) \nabla \tilde{X}^N(0, t, x)^{-t}$$

où $\hat{\sigma}_S[\tilde{X}^N]$ est donné par (1.8).

De plus, à l'instant initial, la donnée u^0 est une fonction de $H_0^1(\Omega)^3$ et s'écrit donc sous la forme :

$$u^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 \varphi_i \text{ avec } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^0|^2 < \infty.$$

On impose donc la condition initiale suivante :

$$u^N(t=0) = u_0^N := \sum_{i=1}^N \alpha_i^0 \varphi_i$$

soit :

$$\alpha_i(0) = \alpha_i^0, \forall 1 \leq i \leq N. \quad (3.8)$$

(ii) pour tout $y \in \bar{\Omega}$, $X^N(t, 0, y)$ est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X^N(t, 0, y) = u^N(t, X^N(t, 0, y)) \\ X^N(0, 0, y) = y \end{cases} \quad (3.9)$$

(iii)

$$\varrho^N = \begin{cases} \varrho_S^N \text{ sur } \Omega_S^N(t) \\ \varrho_F^N \text{ sur } \Omega_F^N(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $\Omega_S^N(t) = X^N(t, 0, \Omega_S(0))$ et $\Omega_F^N(t) = X^N(t, 0, \Omega_F(0)) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S^N(t)}$ et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_F^N}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_F^N u^N) = \epsilon \Delta \varrho_F^N \text{ sur } \Omega_F^N(t) \\ \frac{\partial \varrho_F^N}{\partial t} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_F^N(t) \\ \varrho_F^N(0, \cdot) = \varrho_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0) \end{cases} \quad (3.11)$$

puis :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_S^N}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_S^N u^N) = 0 \text{ sur } \Omega_S^N(t) \\ \varrho_S^N(0, \cdot) = \varrho_S^0 \text{ sur } \Omega_S(0) \end{cases} \quad (3.12)$$

3.2 Résolution du problème linéaire

On cherche donc une vitesse u^N solution du problème linéaire (3.7). Vérifions que ce problème admet une unique solution. Le problème (3.7) complété par les conditions initiales (3.8) est équivalent au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} A^N \frac{dY^N}{dt} = M^N Y^N + F^N \\ Y^N(0) = Y^0 \end{cases} \quad (3.13)$$

où $Y^N = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est un vecteur de longueur N et $Y^0 = {}^t(\alpha_1^0, \dots, \alpha_N^0)$. Les matrices carrées A^N et M^N sont données par :

$$\begin{aligned} (A^N(t))_{i,j} &= \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N(t, x) \varphi_i \varphi_j dx \\ (M^N(t))_{i,j} &= - \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N(t, x) ((\tilde{u}^N(t, x) \cdot \nabla) \varphi_j) \varphi_i dx + \epsilon \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \tilde{\varrho}^N(t, x)) \varphi_j dx \\ &\quad - \theta (\varphi_i, \varphi_j)_{H^3(\tilde{\Omega}_S^N(t))} - (\lambda_F + \mu_F) \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} \operatorname{div} \varphi_i \operatorname{div} \varphi_j dx \\ &\quad - \mu_F \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} \nabla \varphi_i : \nabla \varphi_j dx \end{aligned}$$

et le vecteur F^N de longueur N est donné par :

$$(F^N(t))_i = \int_{\tilde{\Omega}_S^N(t)} \tilde{\sigma}_S^N : \nabla \varphi_i dx - a \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\tilde{\varrho}^N)^\gamma \operatorname{div} \varphi_i dx - \delta \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\tilde{\varrho}^N)^\beta \operatorname{div} \varphi_i dx$$

La matrice $A^N(t)$, pour tout t fixé est une matrice symétrique définie positive. De plus, d'après le **lemme 3.1**, la matrice A^N et le vecteur F^N sont continus et la matrice M^N est un élément de $L^2(0, T)$. Ainsi, notre système admet une unique solution u^N . A partir de là, on peut définir un flot X^N satisfaisant l'équation (3.9) puis, d'après le **lemme 3.1**, on obtient l'existence d'une densité ϱ^N satisfaisant le système d'équations (3.10), (3.11) et (3.12). Ceci donne une solution (u^N, X^N, ϱ^N) au problème linéaire en dimension finie (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12).

3.3 Passage au problème non linéaire en dimension finie

La solution (u^N, X^N, ϱ^N) définie ci-dessus satisfait une estimation d'énergie. Soit :

$$B^N(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{\varrho}^N |u^N|^2 dx + (\lambda_F + \mu_F) \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |\operatorname{div} u_F^N|^2 + \mu_F \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |\nabla u_F^N|^2 + \theta \|u_S^N\|_{H^3(\tilde{\Omega}_S^N(t))}^2$$

En prenant $v^N = u^N$ dans l'équation (3.7), on a :

$$B^N(t) = a \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\tilde{\varrho}^N)^\gamma \operatorname{div} u^N dx + \delta \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} (\tilde{\varrho}^N)^\beta \operatorname{div} u^N dx - \int_{\tilde{\Omega}_S^N(t)} \tilde{\sigma}_S^N : \nabla u^N dx$$

Ainsi,

$$B^N(t) \leq C_0 \sqrt{B^N(t)} \left(\|\tilde{\varrho}^N(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^\beta + \|\tilde{\varrho}^N(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^\gamma + \|\tilde{\sigma}_S^N(t)\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}_S^N(t))} \right) \quad (3.14)$$

où C_0 ne dépend que des données a , δ , λ_F et μ_F . D'après le **lemme 3.1** et l'inégalité (3.1) : pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{\varrho}^N(t, x) \leq \bar{\varrho} \exp \left(\int_0^t \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right) \leq \bar{\varrho} \exp \left(\sqrt{TM} C_1(N) \right) \quad (3.15)$$

où $C_1(N)$ est une constante dépendant des fonctions de base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$. D'après la définition de $\tilde{\sigma}_S^N$, étant donné que $\nabla \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)$ et $\frac{1}{\det \nabla \tilde{X}^N(t, 0, \cdot)}$ sont bornés dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ par une constante dépendant de M et des fonctions de base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$, on obtient donc :

$$B^N(t) \leq C_2(M, N), \forall t \in [0, T].$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u^N(t, x)|^2 dx \leq \int_{\tilde{\Omega}_F^N(t)} |\nabla u^N(t, x)|^2 dx + \|u_S^N\|_{H^3(\tilde{\Omega}_S^N(t))}^2 \leq C_3(M, N)$$

où $C_3(M, N)$ dépend de M , N et des données du problème. De là, on en déduit que :

$$\int_0^t \sum_{i=1}^N |\alpha_i(s)|^2 ds = \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u^N(s, x)|^2 dx ds \leq C_3(M, N)t.$$

Ainsi, on obtient l'existence d'un temps T^N dépendant de N tel que :

$$\int_0^{T^N} \sum_{i=1}^N |\alpha_i(t)|^2 \leq M.$$

On définit l'espace :

$$\mathcal{C} = \left\{ (\alpha_i)_{1 \leq i \leq N} \in L^2(0, T^N)^N \mid \int_0^{T^N} \sum_{i=1}^N |\alpha_i(t)|^2 \leq M \right\}$$

et l'application :

$$\begin{aligned} K : \mathcal{C} &\mapsto L^2(0, T^N)^N \\ \tilde{Y}^N = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_N) &\mapsto Y^N = (\alpha_1, \dots, \alpha_N). \end{aligned}$$

L'espace \mathcal{C} est un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(0, T^N)^N$ et l'application K est continue. De plus, d'après ce qui précède, $K(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Montrons que $K(\mathcal{C})$ est relativement compact dans $L^2(0, T^N)^N$: sur $[0, T^N]$,

$$\frac{dY^N}{dt} = (A^N)^{-1}(M^N Y^N + F^N).$$

Le vecteur F^N est borné dans $L^\infty(0, T^N)$ et la matrice M^N est bornée dans $L^2(0, T^N)$ uniformément en \tilde{Y}^N dans \mathcal{C} d'après le **lemme 3.1**. De plus, toujours d'après ce lemme, pour $Y = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$,

$$(A^N(t)Y, Y) \geq \underline{\varrho} \exp\left(-C_4(M, N)\sqrt{T^N}\right) \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right|^2, \forall t \in [0, T^N].$$

De cette manière, on montre que $(A^N)^{-1}$ est majoré dans $L^\infty(0, T^N)$ de façon indépendante de \tilde{Y}^N . Ainsi, $K(\mathcal{C})$ est un sous-ensemble borné de $W^{1,1}(0, T^N)^N$ et est donc relativement compact dans $L^2(0, T^N)^N$. On peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe à l'application K . Le point fixe u^N est défini sur l'intervalle de temps $[0, T^N]$ et le couple (u^N, X^N, ϱ^N) satisfait l'estimation d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho^N(t) |u^N(t)|^2 dx + \frac{a}{\gamma-1} \int_{\Omega_F^N(t)} (\varrho_F^N(t))^\gamma + \frac{\delta}{\beta-1} \int_{\Omega_F^N(t)} (\varrho_F^N(t))^\beta + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} |\nabla u_F^N|^2 \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} |\operatorname{div} u_F^N|^2 + \theta \int_0^t \|u_S^N(s)\|_{H^3(\Omega_S^N(s))}^2 + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X^N(t, 0, y))|^2 dy \\ & + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X^N(t, 0, y))|^2 dy + \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} (a\gamma(\varrho_F^N)^{\gamma-2} + \delta\beta(\varrho_F^N)^{\beta-2}) |\nabla \varrho^N|^2 = E_0^N \end{aligned} \quad (3.16)$$

où E_0^N est l'énergie approchée à l'instant initial :

$$E_0^N = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho^0 |u_0^N|^2 dx + \frac{a}{\gamma-1} \int_{\Omega_F(0)} (\varrho_F^0)^\gamma + \frac{\delta}{\beta-1} \int_{\Omega_F(0)} (\varrho_F^0)^\beta.$$

On rappelle que $E(X^N)$ désigne le tenseur de Green-Saint Venant défini par (1.7).

3.4 Prolongement de la solution sur un intervalle indépendant de N

Montrons qu'on peut réitérer ce procédé jusqu'à un temps T arbitraire en un nombre fini d'itérations : pour continuer, on part des nouvelles configurations de référence $\Omega_S^N(T^N)$ et $\Omega_F^N(T^N)$ et des nouvelles conditions initiales $u^N(T^N)$ et $\varrho^N(T^N)$ et on cherche (u^N, X^N, ϱ^N) défini sur $[T^N, T]$. De même que précédemment, on résout un problème linéarisé et on arrive à l'inégalité (3.14). Le flot qui intervient dans la définition de $\tilde{\sigma}_S^N$ est maintenant $\tilde{X}_S^N(t, T^N, \cdot)$. On majore donc le terme $\|\tilde{\sigma}_S^N(t)\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}_S^N(t))}$ par la même constante. Pour la majoration correspondant à (3.15), on a maintenant :

$$\tilde{\varrho}^N(t, x) \leq \bar{\varrho}^N \exp\left(\int_0^t \|\operatorname{div} \tilde{u}^N(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds\right)$$

avec $\bar{\varrho}^N$ un majorant de $\varrho^N(T^N)$. Or, d'après le **lemme 3.1** appliqué à notre point fixe (u^N, X^N, ϱ^N) et l'estimation d'énergie (3.16),

$$\bar{\varrho}^N \leq \bar{\varrho} \exp\left(\int_0^{T^N} \|\operatorname{div} u^N(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds\right) \leq \bar{\varrho} \exp\left(\sqrt{TE_0^N} C_5(N)\right)$$

où $C_5(N)$ est une constante dépendant des fonctions de base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$. Cette majoration ne dépend que de T , de N et des données initiales à $t = 0$. A partir de là, on peut donc réitérer l'argument de point fixe sur des intervalles de temps de longueur fixe et atteindre le temps arbitraire T .

On a donc trouvé une solution (u^N, X^N, ϱ^N) définie sur un intervalle de temps $[0, T]$ où T est un temps arbitraire.

La vitesse u^N satisfait le problème variationnel suivant : pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \leq N$, pour tout $v^M(t, x) = \sum_{i=1}^M \gamma_i(t) \varphi_i(x)$ avec $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq M}$ dans $H^1(0, T)$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} \varrho^N(t, x) u^N(t, x) \frac{\partial v^M}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \varrho^N(t, x) (u^N \otimes u^N)(t, x) : \nabla v^M(t, x) dx dt \\
& - \epsilon \int_0^T \int_{\Omega_F^N(t)} (\nabla u_F^N(t, x) \cdot \nabla \varrho_F^N(t, x)) v^M(t, x) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega_S^N(t)} \sigma_S^N : \nabla v^M \\
& - \theta \int_0^T (u^N(t, \cdot), v^M(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S^N(t))} dt - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^T \int_{\Omega_F^N(t)} \operatorname{div} u^N \operatorname{div} v^M dx dt \\
& - \mu_F \int_0^T \int_{\Omega_F^N(t)} \nabla u^N : \nabla v^M dx dt + a \int_0^T \int_{\Omega_F^N(t)} (\varrho_F^N)^\gamma \operatorname{div} v^M dx dt \\
& + \delta \int_0^T \int_{\Omega_F^N(t)} (\varrho_F^N)^\beta \operatorname{div} v^M dx dt = - \int_{\Omega} \varrho^0 u_0^N v^M(0, \cdot) dy
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où σ_S^N est défini par : pour tout $x \in \Omega_S^N(t)$,

$$\sigma_S^N(t, x) = \det \nabla X^N(0, t, x) \nabla X^N(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S[X^N](t, X^N(0, t, x)) \nabla X^N(0, t, x)^{-t}$$

Ici, X^N est solution de (3.9) et ϱ^N est solution de (3.10), (3.11) et (3.12).

Remarque 3 :

A ce niveau, on obtient donc une solution du problème approché sur $[0, T]$ avec T quelconque. Les chocs ne peuvent pas avoir lieu du fait que le flot est défini et inversible sur Ω .

4 Passage au problème continu

A chaque fois que ce sera nécessaire, pour avoir des résultats de convergence faible, on considérera une sous-suite plutôt que la suite elle-même. Ceci sera sous-entendu et on gardera la même notation pour désigner la sous-suite.

Il faut passer à la limite dans l'équation du flot (3.9), dans les équations portant sur ϱ^N dérivées de la loi de conservation de la masse (3.10) à (3.12) et dans la formulation variationnelle (3.17) dérivée de l'équation de la quantité de mouvement.

4.1 Convergence forte de $(X^N)_{N \in \mathbb{N}}$

Dans (3.16), pour N assez grand,

$$E_0^N \leq 2E_0 \text{ puisque } u_0^N \rightarrow u^0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Le flot X^N est solution de (3.9). D'après (3.16),

$$\theta \int_0^T \|u_S^N(t, \cdot)\|_{H^3(\Omega_S^N(t))}^2 dt \leq 2E_0 \quad (4.1)$$

Ainsi, d'après la **proposition 2**, $(X^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est borné dans $H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0)))$ par une constante dépendant uniquement de E_0, θ . On note X la limite faible de $(X^N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0)))$ et, pour tout $t \in [0, T]$, on définit :

$$\Omega_S(t) = X(t, 0, \Omega_S(0)) \text{ et } \Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}.$$

Le flot X est solution du problème suivant : pour tout $y \in \Omega_S(0)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t, 0, y) = u(t, X(t, 0, y)) \\ X(0, 0, y) = y \end{cases} \quad (4.2)$$

où u est la limite faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^3$ de $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$. De plus, on a un résultat de convergence forte sur $(X^N)_{N \in \mathbb{N}}$: comme $H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0)))$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}(0, T; \mathcal{C}^1(\Omega_S(0)))$,

$$X^N \rightarrow X \text{ dans } \mathcal{C}(0, T; \mathcal{C}^1(\Omega_S(0))). \quad (4.3)$$

De ce résultat, on déduit que :

$$\chi_{\Omega_S^N(t)} \rightarrow \chi_{\Omega_S(t)} \text{ et } \chi_{\Omega_F^N(t)} \rightarrow \chi_{\Omega_F(t)} \text{ dans } \mathcal{C}(0, T; L^p(\Omega)), \forall 1 \leq p < \infty. \quad (4.4)$$

Maintenant, on a uniquement une définition de X sur $\Omega_S(0)$. A priori, rien n'assure plus que $X(t, 0, \cdot)$ soit inversible de $\Omega_S(0)$ sur son image $\Omega_S(t)$. De même, à partir d'un certain temps, $\Omega_S(t)$ peut sortir du domaine Ω (ce qui correspond à un choc). Ces deux restrictions sont fondamentales pour la suite. Or, si $d(t)$ est la distance entre $\partial\Omega$ et $\Omega_S(t)$,

$$d(t) \geq d_0 - \sup_{y \in \Omega_S(0)} \left| \int_0^t \frac{\partial X(s, 0, y)}{\partial s} ds \right|$$

Ainsi, grâce à (4.1), on peut écrire que :

$$d(t) \geq d_0 - C_1 \sqrt{t}$$

où C_1 est une constante dépendant de E_0, θ et de la constante de l'injection de $H^2(\Omega_S(0))$ dans $L^\infty(\Omega_S(0))$.

Pour l'hypothèse d'inversibilité, on a besoin au cours de la preuve de pouvoir prolonger le flot X sur Ω en une fonction Y de $H^1(0, T_0; H^3(\Omega))$ inversible qui laisse les points de la frontière de Ω invariants. Pour cela, on définit par exemple un opérateur linéaire continu \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} : H^3(\Omega_S(0)) \mapsto H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

puis, pour tout $t \in [0, T_0]$, la fonction :

$$Y(t, \cdot) = Id + \mathcal{P}(X(t, 0, \cdot) - Id) \text{ sur } \Omega. \quad (4.5)$$

Pour avoir l'injectivité de Y , on veut que :

$$\|\nabla Y(t, \cdot) - Id\|_{L^\infty((0, T_0) \times \Omega)} \leq e_0$$

avec e_0 le réel défini dans le **lemme 1.1** pour le domaine Ω . Pour cela, on voit que :

$$\|Y(t, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega))} \leq C_{\mathcal{P}} \|X(t, 0, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))}$$

où $C_{\mathcal{P}}$ désigne la constante de continuité de \mathcal{P} . Or :

$$\|X(t, 0, y) - Id\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))} \leq \left\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} X(s, 0, y) ds \right\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega_S(0)))} \leq C_2 \sqrt{T}$$

où C_2 dépend uniquement de E_0 . Ainsi,

$$\|\nabla Y(t, \cdot) - Id\|_{L^\infty((0, T_0) \times \Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} C_3 \sqrt{T}$$

où C_3 dépend de E_0 et de la constante d'injection de $H^3(\Omega)$ dans $W^{1, \infty}(\Omega)$.

Soit T_0 défini par :

$$T_0 = \inf \left(\frac{\alpha^2 d_0^2}{C_1^2}, \frac{e_0^2}{C_3^2 C_{\mathcal{P}}^2} \right) \quad (4.6)$$

avec $\alpha < 1$. Alors, pour tout (X_S, ϱ, u) satisfaisant l'estimation d'énergie (1.23) (ce qui est le cas de notre solution discrète (X_S^N, ϱ^N, u^N) et de la limite (X_S, ϱ, u)), on a :

$$d(t) \geq (1 - \alpha)d_0 \text{ pour tout } t \in [0, T_0] \text{ et } \|\nabla Y(t, y) - Id\|_{L^\infty((0, T_0) \times \Omega)} \leq e_0$$

où Y est défini à partir de X_S par (4.5) et donc, en particulier, comme $Y(t, \cdot)$ est inversible, le flot $X_S(t, 0, \cdot)$ est inversible de $\Omega_S(0)$ sur $\Omega_S(t)$ et il n'y a pas de choc entre le solide et la paroi. On note $X_S(0, t, \cdot)$ l'inverse de $X_S(t, 0, \cdot)$ défini de $\Omega_S(t)$ sur $\Omega_S(0)$, pour tout $t \in [0, T_0]$. On voit facilement que :

$$\nabla X_S^N(0, t, X_S^N(t, 0, \cdot)) \rightarrow \nabla X_S(0, t, X_S(t, 0, \cdot)) \text{ dans } \mathcal{C}((0, T_0) \times \Omega_S(0)). \quad (4.7)$$

A partir de maintenant, on se place sur cet intervalle $[0, T_0]$. Dans la dernière partie, on prolongera notre solution sur l'intervalle de temps $[0, T]$ où T est défini par (2.8).

4.2 Convergence forte de $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$

Lemme 4.1 :

On a les estimations suivantes sur $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$: pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_{\Omega} |\varrho^N(t, x)|^\gamma dx \leq C, \quad \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_{\Omega} |\varrho^N(t, x)|^\beta dx \leq C \quad (4.8)$$

$$\epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} |\nabla \varrho^N|^2 dx dt \leq C, \quad \int_0^{T_0} \int_{\Omega} |\varrho^N|^{\beta+1} dx dt \leq C \quad (4.9)$$

Preuve du lemme 4.1 :

Sur la partie solide, on voit que $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^\infty(\Omega_S^N(t)))$ en utilisant l'écriture (3.5) de ϱ_S^N donnée par le **lemme 3.1**. Les estimations de ϱ_S^N sont donc immédiates. Sur la partie fluide, les 2 premières estimations viennent directement de l'estimation d'énergie (3.16). En multipliant (3.11) par ϱ^N et en intégrant en espace et en temps, on obtient :

$$\epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} |\nabla \varrho^N|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_F(0)} |\varrho^0|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\varrho^N(t)\|_{L^4(\Omega_F^N(t))}^2 \sqrt{T_0} \left(\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} |\nabla u^N|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Ainsi :

$$\epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} |\nabla \varrho^N|^2 \leq C.$$

De plus, d'après (3.16), $((\varrho^N)^{\frac{\beta}{2}})_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; H^1(\Omega_F^N(t)))$. Or on peut noter que :

$$H^1(\Omega_F^N(t)) \hookrightarrow L^6(\Omega_F^N(t))$$

avec une constante d'injection indépendante de N et de $t \in [0, T_0]$ (en effet, cette constante dépend de $\|\nabla X^N(t, 0, \cdot)\|_{L^\infty((0, T_0) \times \Omega_S(0))}$ et de $\|\nabla X^N(t, 0, \cdot)^{-1}\|_{L^\infty((0, T_0) \times \Omega_S(0))}$ et ces termes sont bornés indépendamment de N).

On en déduit que $((\varrho^N)^\beta)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(0, T_0; L^3(\Omega_F^N(t)))$. De plus, on a l'inégalité d'interpolation valable pour tout $t \in [0, T_0]$:

$$\left\| \varrho^N(t)^\beta \right\|_{L^2(\Omega_F^N(t))} \leq C \left\| \varrho^N(t)^\beta \right\|_{L^1(\Omega_F^N(t))}^{\frac{1}{4}} \left\| \varrho^N(t)^\beta \right\|_{L^3(\Omega_F^N(t))}^{\frac{3}{4}}$$

où C dépend uniquement du diamètre de Ω . Ainsi, puisque $((\varrho^N)^\beta)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^1(\Omega_F^N(t))) \cap L^1(0, T_0; L^3(\Omega_F^N(t)))$, $((\varrho^N)^\beta)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T_0; L^2(\Omega_F^N(t)))$ et donc, comme $\beta > 4$, on en déduit que $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{\beta+1}(0, T_0; L^{\beta+1}(\Omega_F^N(t)))$. Ceci prouve la dernière estimation. \square

Sur la partie solide, étant donné que la vitesse est régulière, on garde une écriture explicite de la densité en fonction de u :

$$\varrho(t, x) = \varrho^0(X(0, t, x)) \exp \left(- \int_0^t \operatorname{div} u(s, X(s, t, x)) ds \right), \quad \forall x \in \Omega_S(t) \quad (4.10)$$

où ϱ est la limite faible de ϱ^N dans $L^\infty(0, T_0; L^\beta(\Omega))$. Ainsi, ϱ est solution sur $\Omega_S(t)$ de la loi de conservation de la masse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_S}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_S u) = 0 \text{ sur } \Omega_S(t) \\ \varrho_S(0, \cdot) = \varrho_S^0 \text{ sur } \Omega_S(0). \end{cases}$$

Pour passer à la limite dans les équations de conservation de la masse sur la partie fluide, on écrit l'ensemble d'équations (3.10) à (3.12) sous forme variationnelle :

$$- \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varrho^N \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u^N \cdot \nabla \psi \right) + \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho^N \nabla \psi = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \Omega). \quad (4.11)$$

Etant donné que $(\sqrt{\varrho^N} u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))^3$, $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3$. Il faut maintenant montrer que la limite faible de $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3$ est ϱu . Pour cela, on a besoin d'un résultat de convergence forte sur $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$.

Proposition 5 :

Avec les notations précédentes,

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } L^\beta((0, T_0) \times \Omega).$$

Preuve de la proposition 5 :

Puisque $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^6(\Omega))$ et $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^\beta(\Omega))$, la suite $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. D'après (4.9), $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. Ainsi, d'après (3.11) et (3.12), $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(0, T_0; H^{-1}(\Omega))$. De plus, d'après (4.9) et l'écriture explicite de ϱ^N sur $\Omega_S^N(t)$, on sait que $(\nabla \varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_F^N(t)))$ et dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_S^N(t)))$. Ainsi, grâce au **lemme 4.2** qui suit, on obtient la convergence forte de $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. De plus, comme $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{\beta+1}((0, T_0) \times \Omega)$ d'après (4.9), on en déduit que $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers ϱ dans $L^\beta((0, T_0) \times \Omega)$. \square

On énonce maintenant une variante du lemme d'Aubin avec des domaines variables. Un énoncé de ce lemme sous sa forme classique est donné par Lions [17] (chapitre 1, théorème 5.1).

Lemme 4.2 :

Soit $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$ telle que :

$$\frac{\partial \varrho^N}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \varrho}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T_0; H^{-1}(\Omega)) \text{ w}$$

et $(\nabla \varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_F^N(t)))$ et dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_S^N(t)))$, alors :

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } L^2((0, T_0) \times \Omega).$$

Preuve du lemme 4.2 :

On reprend ici exactement la démarche de Lions [17] en adaptant la démonstration à notre cadre. On peut toujours supposer que $\varrho = 0$. Montrons tout d'abord l'estimation suivante :

$$\forall \eta > 0, \exists C_\eta > 0, \forall t \in [0, T_0], \forall N \in \mathbb{N}, \forall v \in L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega_F^N(t)) \cap H^1(\Omega_S^N(t)),$$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta (\|v\|_{H^1(\Omega_F^N(t))} + \|v\|_{H^1(\Omega_S^N(t))}) + C_\eta \|v\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (4.12)$$

Supposons que cette estimation soit fautive :

$\exists \eta, \forall p \in \mathbb{N}, \exists t_p \in [0, T_0], \exists N_p \in \mathbb{N}, \exists v_p \in L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega_F^{N_p}(t_p)) \cap H^1(\Omega_S^{N_p}(t_p))$ tel que

$$\|v_p\|_{L^2(\Omega)} \geq \eta (\|v_p\|_{H^1(\Omega_F^{N_p}(t_p))} + \|v_p\|_{H^1(\Omega_S^{N_p}(t_p))}) + p \|v_p\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

On définit : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$w_p = \frac{v_p}{\|v_p\|_{H^1(\Omega_F^{Np}(t_p))} + \|v_p\|_{H^1(\Omega_S^{Np}(t_p))}}.$$

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|w_p\|_{L^2(\Omega)} \geq \eta + p\|w_p\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (4.13)$$

Or :

$$\|w_p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_p\|_{H^1(\Omega_F^{Np}(t_p))} + \|w_p\|_{H^1(\Omega_S^{Np}(t_p))} \leq 1$$

donc, d'après (4.13) :

$$w_p \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \quad (4.14)$$

On prolonge $w_p|_{\Omega_F^{Np}(t_p)}$ en une fonction w_p^F de $H^1(\Omega)$. Le prolongement peut être choisi de sorte que :

$$\|w_p^F\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Ainsi, pour tout $q < 6$, $w_p^F \rightarrow w^F$ dans $L^q(\Omega)$. De plus, à une sous-suite près, $t_p \rightarrow t'$ et donc :

$$\chi_{\Omega_F^{Np}(t_p)} \rightarrow \chi_{\Omega_F(t')} \text{ dans } L^r(\Omega), \forall 1 \leq r < \infty$$

donc :

$$\chi_{\Omega_F^{Np}(t_p)} w_p \rightarrow \chi_{\Omega_F(t')} w^F \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (4.15)$$

On a déjà signalé que :

$$H^1(\Omega_F^N(t)) \hookrightarrow L^6(\Omega_F^N(t)) \text{ et } H^1(\Omega_S^N(t)) \hookrightarrow L^6(\Omega_S^N(t))$$

avec des constantes d'injection indépendantes de N et de $t \in [0, T_0]$.

Ainsi, puisque $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega_F^N(t))$ et dans $H^1(\Omega_S^N(t))$, $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^6(\Omega)$. De cela et de (4.15), on déduit que :

$$\chi_{\Omega_F(t')} w_p \rightarrow \chi_{\Omega_F(t')} w^F \text{ dans } L^2(\Omega).$$

En procédant de même sur $\Omega_S^{Np}(t_p)$ et en notant w_p^S le prolongement dans $H^1(\Omega)$ de $w_p|_{\Omega_S^{Np}(t_p)}$, on obtient :

$$\chi_{\Omega_S(t')} w_p \rightarrow \chi_{\Omega_S(t')} w^S \text{ dans } L^2(\Omega)$$

où w^S est la limite faible de w_p^S dans $H^1(\Omega)$. On a donc montré que $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$. D'après (4.14), $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge donc fortement dans $L^2(\Omega)$ vers 0. Ceci est en contradiction avec (4.13) qui affirme que :

$$\|w_p\|_{L^2(\Omega)} \geq \eta, \forall p \in \mathbb{N}.$$

L'estimation (4.12) est donc vérifiée. Passons maintenant à la démonstration proprement dite du **lemme 4.2**.

Comme $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; H^1(\Omega_S^N(t))) \cap L^2(0, T_0; H^1(\Omega_F^N(t)))$, pour tout $\tau > 0$ fixé, d'après l'estimation (4.12), il existe C_τ tel que :

$$\|\varrho^N\|_{L^2((0, T_0) \times \Omega)} \leq \tau + C_\tau \|\varrho^N\|_{L^2(0, T_0; H^{-1}(\Omega))}.$$

Ainsi, montrer que $\varrho^N \rightarrow 0$ dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$ revient à montrer que $\varrho^N \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T_0; H^{-1}(\Omega))$. Comme $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(0, T_0; H^{-1}(\Omega))$, il faut simplement prouver que :

$$\forall s \in [0, T_0], \varrho^N(s) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

On se place en $s = 0$ (la démonstration est la même pour un s quelconque). On définit :

$$\psi^N(t) = \varrho^N(\lambda t)$$

avec $0 < \lambda \leq 1$ à déterminer. Alors :

$$\psi^N(0) = \varrho^N(0) \text{ et } \|(\psi^N)'\|_{L^2(0, T_0; H^{-1}(\Omega))} \leq C_0 \sqrt{\lambda}, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Soit $\Theta \in \mathcal{C}(0, T_0)$ telle que $\Theta(0) = -1$ et $\Theta(T_0) = 0$. Alors :

$$\psi^N(0) = \int_0^{T_0} (\Theta \psi^N)'(t) dt = \beta^N + \gamma^N$$

avec :

$$\beta^N = \int_0^{T_0} \Theta(t) (\psi^N)'(t) dt \text{ et } \gamma^N = \int_0^{T_0} \Theta'(t) \psi^N(t) dt.$$

Ainsi,

$$\|\varrho^N(0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\beta^N\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\gamma^N\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Soit $\tau > 0$ fixé, on choisit λ suffisamment petit pour que :

$$\|\beta^N\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{\tau}{2}, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Il faut montrer que $\|\gamma^N\|_{H^{-1}(\Omega)} \rightarrow 0$. Or $(\psi^N)_{N \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0 dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. On en déduit que $(\gamma^N)_{N \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ et donc fortement dans $H^{-1}(\Omega)$. Ainsi, on a bien montré que $\varrho^N(0) \rightarrow 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$, ce qui achève la preuve du **lemme 4.2**. \square

Ce résultat de convergence forte montré dans la **proposition 5** permet d'identifier la limite faible de la suite $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$: puisque $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers ϱ dans $L^\beta((0, T_0) \times \Omega)$ et $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3$, la limite de $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3$ est ϱu .

Pour passer à la limite dans (4.11), il reste à étudier la convergence de $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$. Or on sait déjà que $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. Puisque $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^4((0, T_0) \times \Omega)$ et $(\chi_{\Omega_F^N(t)})_{N \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^4((0, T_0) \times \Omega)$, on conclut facilement que $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\chi_{\Omega_F(t)} \nabla \varrho$ dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. Ainsi, ϱ est solution du problème variationnel suivant :

$$-\int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \cdot \nabla \psi \right) + \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \nabla \varrho \nabla \psi = 0, \forall \psi \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \Omega) \quad (4.16)$$

et donc :

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_S \text{ sur } \Omega_S(t) \\ \varrho_F \text{ sur } \Omega_F(t) \end{cases} \quad (4.17)$$

où ϱ_F est solution au sens faible de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_F}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_F u) = \epsilon \Delta \varrho_F \text{ sur } \Omega_F(t) \\ \frac{\partial \varrho_F}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_F(t) \\ \varrho_F(0, \cdot) = \varrho_F^0 \text{ sur } \Omega_F(0) \end{cases} \quad (4.18)$$

et ϱ_S est solution au sens faible de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho_S}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_S u) = 0 \text{ sur } \Omega_S(t) \\ \varrho_S(0, \cdot) = \varrho_S^0 \text{ sur } \Omega_S(0) \end{cases} \quad (4.19)$$

Enfin, on montre un résultat de régularité sur la densité qui sera utile dans le paragraphe qui suit.

Lemme 4.3 :

La suite $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,q}(0, T_0; L^q(\Omega)) \cap L^q(0, T_0; W^{2,q}(\Omega_F^N(t))) \cap L^q(0, T_0; W^{2,q}(\Omega_S^N(t)))$ avec $q = \frac{4}{3}$. De plus, ϱ est un élément de $W^{1,q}(0, T_0; L^q(\Omega)) \cap L^q(0, T_0; W^{2,q}(\Omega_F(t))) \cap L^q(0, T_0; W^{2,q}(\Omega_S(t)))$ et le système d'équations (4.17)-(4.18)-(4.19) est satisfait presque partout.

Preuve du lemme 4.3 :

On va tout d'abord montrer ces estimations sur la partie fluide. Pour cela, il faut transporter le problème (3.11) satisfait par ϱ_F^N sur le domaine $\Omega_F(0)$ à l'aide du flot. On ne peut plus procéder comme dans la preuve du **lemme 3.1** et utiliser directement le flot global pour transporter le problème car on n'a pas une estimation uniforme en N sur le flot global (la limite de $(X^N)_{N \in \mathbb{N}}$ n'est définie que sur la partie solide). On va donc prolonger le flot solide, qui reste borné, en une fonction régulière sur le domaine global et utiliser ce prolongement pour se ramener au domaine initial.

Comme on l'explique dans le **paragraphe 4.1**, on peut prolonger X^N sur Ω en une fonction Y^N de $H^1(0, T_0; H^3(\Omega))$ telle que, pour tout $t \in [0, T_0]$, $Y^N(t, \cdot)$ est inversible de Ω sur Ω . Soit :

$$\bar{\varrho}_F^N(t, y) = \varrho_F^N(t, Y^N(t, y)), \quad \forall t \in (0, T_0), \quad \forall y \in \Omega_F(0).$$

On a :

$$\left(\frac{\partial \bar{\varrho}_F^N}{\partial t} + v^N \nabla \bar{\varrho}_F^N \right) (t, y) = \frac{\partial \varrho_F^N}{\partial t} (t, Y^N(t, y))$$

avec $v^N \in L^2(0, T_0; H^2(\Omega_F(0)))$ la vitesse eulérienne associée à $(Y^N)^{-1}$. Alors $\bar{\varrho}_F^N$ est solution de :

$$\frac{\partial \bar{\varrho}_F^N}{\partial t} + c^N \cdot \nabla \bar{\varrho}_F^N - \epsilon \operatorname{div}(B^N \nabla \bar{\varrho}_F^N) = -\operatorname{div}(\varrho_F^N u^N)(t, Y^N(t, \cdot)) \text{ sur } (0, T) \times \Omega_F(0)$$

où c^N est défini par :

$$c^N = v^N - \frac{\epsilon}{\det \nabla Y^N(t, \cdot)} B^N \nabla (\det \nabla Y^N(t, \cdot))$$

De plus, $\bar{\varrho}_F^N$ satisfait la condition aux limites :

$$(B^N \nabla \bar{\varrho}_F^N) \cdot N_y = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial \Omega_F(0) \quad (4.20)$$

avec :

$$B^N(t, y) = \nabla Y^N(t, y)^{-1} \nabla Y^N(t, y)^{-t}.$$

La suite de matrices $(B^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(0, T_0; W^{1,6}(\Omega))$ et est coercive uniformément en temps, en espace et en N et la suite $(c^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^\infty(\Omega))$. De plus, $(\varrho_F^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^{\frac{6\beta}{\beta+6}}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega))$. Par interpolation, on en déduit que $(\varrho_F^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^4(0, T_0; L^2(\Omega))$. On peut donc appliquer la **proposition 4** : la suite $(\bar{\varrho}_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^4(0, \bar{T}; H^1(\Omega))$ avec \bar{T} dépendant uniquement de la norme de B^N dans $H^1(0, T_0; W^{1,6}(\Omega))$ (qui est bornée). En décomposant $\text{div}(\varrho_F^N u^N)$ en :

$$\text{div}(\varrho_F^N u^N) = u^N \cdot \nabla \varrho_F^N + \text{div}(u^N) \varrho_F^N,$$

on peut maintenant affirmer que $(\text{div}(\varrho_F^N u^N))_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^q((0, \bar{T}) \times \Omega_F(0))$ avec $q = \frac{4}{3}$. Ainsi, d'après la deuxième partie de la **proposition 3**, $(\bar{\varrho}_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,q}(0, \bar{T}; L^q(\Omega_F(0))) \cap L^q(0, \bar{T}; W^{2,q}(\Omega_F(0)))$. On en déduit les estimations recherchées sur ϱ_F^N sur l'intervalle $[0, \bar{T}]$ en retransportant la densité $\bar{\varrho}_F^N$. Pour obtenir ces estimations sur tout l'intervalle $[0, T_0]$, on repart de la nouvelle configuration de référence $\Omega_F(\bar{T})$ et on fait un changement de variables. On obtient alors la même estimation et on réitère le raisonnement.

Les estimations sur la partie solide sont obtenues directement grâce à (4.10). Enfin, pour les estimations sur la densité ϱ , on fait exactement le même raisonnement en utilisant la régularité $H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))$ de X . \square

4.3 Convergence forte de $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$

On sait déjà que :

$$\varrho^N u^N \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3 \quad w * .$$

A partir de la formulation variationnelle (3.17), on va en déduire que :

Lemme 4.4 :

$$\varrho^N u^N \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))^3$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in \left(L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \right)', \quad \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_{\Omega} ((\varrho^N u^N)(t) - (\varrho u)(t)) \varphi \rightarrow 0.$$

Preuve du lemme 4.4 :

Soit $\varphi \in \left(L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)'$ donnée. Puisque $\frac{2\gamma}{\gamma+1} > \frac{6}{5}$, φ est une fonction de $L^6(\Omega)$. Ainsi, on peut montrer que :

$$\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \text{ dans } \left(L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)'.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\varrho^N u^N)(t) - (\varrho u)(t)) \varphi &= \int_{\Omega} ((\varrho^N u^N)(t) - (\varrho u)(t)) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right) \\ &\quad - \int_{\Omega} ((\varrho^N u^N)(t) - (\varrho u)(t)) \left(\varphi - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right). \end{aligned}$$

Soit $\tau > 0$ fixé. Etant donné que $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$, on peut trouver $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $N \geq K_0$

$$\left| \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_{\Omega} ((\varrho^N u^N)(t) - (\varrho u)(t)) \left(\varphi - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right) \right| \leq \frac{\tau}{2}.$$

Ainsi, pour montrer le **lemme 4.4**, il suffit de prouver que : pour toute fonction de base φ_i ,

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_{\Omega} ((\varrho^N u^N)(t) - (\varrho u)(t)) \varphi_i \rightarrow 0.$$

En fait , il suffit de montrer que $\left(\int_{\Omega} \varrho^N u^N \varphi_i \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $\mathcal{C}(0, T_0)$.

Si on choisit comme fonction test $v^M = \chi_{[0,t]} \varphi_i$ dans (3.17), l'équation devient :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varrho^N(t, x) u^N(t, x) \varphi_i dx - \int_{\Omega} \varrho^0 u_0^N \varphi_i(x) dx \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \varrho^N u^N \otimes u^N : \nabla \varphi_i dx ds - \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} (\nabla u_F^N \cdot \nabla \varrho_F^N) \varphi_i dx ds + \int_0^t \int_{\Omega_S^N(s)} \sigma_S^N : \nabla \varphi_i \\ &\quad + \theta \int_0^t (u^N(s, \cdot), \varphi_i(\cdot))_{H^3(\Omega_S^N(s))} ds + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} \operatorname{div} u^N \operatorname{div} \varphi_i dx ds \\ &\quad + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} \nabla u^N : \nabla \varphi_i dx ds - a \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} (\varrho_F^N)^\gamma \operatorname{div} \varphi_i dx ds \\ &\quad - \delta \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} (\varrho_F^N)^\beta \operatorname{div} \varphi_i dx ds. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Soit pour commencer :

$$h_1^N(t) = \int_0^t \int_{\Omega} \varrho^N u^N \otimes u^N : \nabla \varphi_i dx ds.$$

Puisque $(\varrho^N u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$ et dans $L^2(0, T_0; L^6(\Omega))$, $(\varrho^N u^N \otimes u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^1(\Omega))$. En supposant que φ_i est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, ce qui est toujours possible, on en déduit que $(h_1^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(0, T_0)$ et donc, par compacité de $H^1(0, T_0)$ dans $\mathcal{C}(0, T_0)$, $(h_1^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $\mathcal{C}(0, T_0)$.

Soit maintenant :

$$h_2^N(t) = -\epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} (\nabla u_F^N \cdot \nabla \varrho_F^N) \varphi_i \, dx \, ds.$$

On sait que $(\nabla u_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$. Il faut montrer que $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans un espace du type $L^\alpha(0, T_0; L^2(\Omega))$ avec $\alpha > 2$. Pour cela, on utilise le résultat de régularité donné par le **lemme 4.3** : comme $(\varrho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^q(0, T_0; W^{2,q}(\Omega_F^N(t))) \cap L^\infty(0, T_0; L^4(\Omega_F^N(t)))$ avec $q = \frac{4}{3}$, en faisant une intégration par parties en espace, on a :

$$\int_{\Omega_F^N(t)} |\nabla \varrho_F^N(t, x)|^2 \, dx \leq \left(\int_{\Omega_F^N(t)} |\varrho_F^N(t, x)|^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega_F^N(t)} |\Delta \varrho_F^N(t, x)|^{\frac{4}{3}} \, dx \right)^{\frac{3}{4}}$$

et donc $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{\frac{8}{3}}(0, T_0; L^2(\Omega))$. On en déduit que $(h_2^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1, \frac{8}{7}}(0, T_0)$ ce qui donne un résultat de convergence forte de $(h_2^N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}(0, T_0)$. Pour tous les autres termes du membre de droite de (4.21), on utilise les mêmes arguments qu'avec h_1^N . De cette manière, on a montré le **lemme 4.4**. \square

Comme $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $H^{-1}(\Omega)$, le **lemme 4.4** nous permet d'affirmer que :

$$\varrho^N u^N \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; H^{-1}(\Omega)).$$

4.4 Passage à la limite dans la formulation variationnelle

D'après ce qui précède et étant donné que $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(0, T_0; H^1(\Omega))$ vers u ,

$$\varrho^N (u^N \otimes u^N) \rightharpoonup \varrho (u \otimes u) \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \Omega). \quad (4.22)$$

Le **lemme 4.4** et (4.22) permettent donc de passer à la limite dans les 2 premiers termes de (3.17). Pour le passage à la limite dans :

$$-\int_0^{T_0} \int_{\Omega_S^N(t)} \sigma_S^N : \nabla v^M,$$

on utilise les résultats de convergence forte (4.3) et (4.7).

La **proposition 5** permet ensuite de passer à la limite dans :

$$a \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} (\varrho_F^N)^\gamma \operatorname{div} v^M \, dx \, dt + \delta \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} (\varrho_F^N)^\beta \operatorname{div} v^M \, dx \, dt.$$

La convergence des termes :

$$\begin{aligned} & -\theta \int_0^{T_0} (u^N(t, \cdot), v^M(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S^N(t))} dt - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} \operatorname{div} u^N \operatorname{div} v^M dx dt \\ & -\mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} \nabla u^N : \nabla v^M dx dt \end{aligned}$$

est obtenue directement en utilisant (4.4) et le fait que $(u^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))$. Il reste le terme :

$$-\epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} (\nabla u_F^N(t, x) \cdot \nabla \varrho_F^N(t, x)) v^M(t, x) dx dt. \quad (4.23)$$

Pour ce terme, on a besoin d'une convergence forte sur la suite $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$. Pour cela, on multiplie (3.11) par ϱ_F^N . On obtient :

$$\int_{\Omega_F^N(t)} |\varrho_F^N(t, x)|^2 dx + 2\epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} |\nabla \varrho_F^N|^2 dx ds = - \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} \operatorname{div} u^N |\varrho_F^N|^2 dx ds + \int_{\Omega_F(0)} |\varrho^0|^2 dx$$

Comme l'équation (4.17) est satisfaite presque partout d'après le **lemme 4.3**, on peut aussi multiplier cette équation par ϱ_F . On obtient :

$$\int_{\Omega_F(t)} |\varrho_F(t, x)|^2 dx + 2\epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla \varrho_F|^2 dx ds = - \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \operatorname{div} u |\varrho_F|^2 dx ds + \int_{\Omega_F(0)} |\varrho^0|^2 dx.$$

Or, comme $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers ϱ dans $L^\beta((0, T_0) \times \Omega)$, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} \operatorname{div} u^N |\varrho_F^N|^2 dx ds \rightarrow \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \operatorname{div} u |\varrho_F|^2 dx ds$$

donc, finalement : pour tout $t \in [0, T_0]$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_F^N(t)} |\varrho_F^N(t, x)|^2 dx + 2\epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} |\nabla \varrho_F^N|^2 dx ds \\ & \rightarrow \int_{\Omega_F(t)} |\varrho_F(t, x)|^2 dx + 2\epsilon \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla \varrho_F|^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.24)$$

D'après (4.9), pour tout $t \in [0, T_0]$,

$$\int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla \varrho_F|^2 dx ds \leq \underline{\lim} \int_0^t \int_{\Omega_F^N(s)} |\nabla \varrho_F^N|^2 dx ds.$$

De plus, grâce à (4.8) et puisque $\beta > 4$ on sait que :

$$\varrho^N \rightharpoonup \varrho \text{ dans } L^\infty(0, T_0; L^4(\Omega)) w *.$$

En raisonnant de même que dans le **lemme 4.4** à partir de la formulation variationnelle (4.11), on renforce cette convergence :

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^4(\Omega))$$

et de cette manière, pour tout $t \in [0, T_0]$,

$$\int_{\Omega_F(t)} |\varrho_F(t, x)|^2 dx \leq \liminf \int_{\Omega_F^N(t)} |\varrho_F^N(t, x)|^2 dx.$$

Ainsi, en utilisant (4.24), on obtient, comme résultat de convergence en norme sur $(\varrho^N)_{N \in \mathbb{N}}$:

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F^N(t)} |\nabla \varrho_F^N|^2 dx dt \rightarrow \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} |\nabla \varrho_F|^2 dx dt$$

et donc la convergence forte de $(\chi_{\Omega_F^N(t)} \nabla \varrho_F^N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers $\chi_{\Omega_F(t)} \nabla \varrho_F$ dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$ ce qui permet de passer à la limite dans (4.23).

Pour terminer ce paragraphe, il reste à passer à la limite en M dans (3.17). Ceci ne présente pas de difficultés : pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^\infty((0, T_0) \times \Omega)$ telle que $v(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$, on peut trouver une suite (v^M) qui converge vers v dans $\mathcal{C}^1(0, T_0; H^3(\Omega))$ s'écrivant :

$$v^M = \sum_{i=1}^M \alpha_i \varphi_i.$$

Cette convergence permet d'effectuer le passage à la limite sans difficulté. On a donc montré le résultat suivant :

Proposition 6 :

Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe une solution $(X_\epsilon, \varrho_\epsilon, u_\epsilon)$ du problème (4.2), (4.17), (4.18), (4.19) et (2.15) qui satisfait l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho_\epsilon(t) |u_\epsilon(t)|^2 dx + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon}(t)^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon}(t)^\beta + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_{F,\epsilon}(s)} |\nabla u_{F,\epsilon}|^2 \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_{F,\epsilon}(s)} |\operatorname{div} u_{F,\epsilon}|^2 + \theta \int_0^t \|u_{S,\epsilon}(s)\|_{H^3(\Omega_{S,\epsilon}(s))}^2 + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X_\epsilon(t, 0, y))|^2 dy \\ & + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X_\epsilon(t, 0, y))|^2 dy + \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_{F,\epsilon}(s)} (a\gamma(\varrho_{F,\epsilon})^{\gamma-2} + \delta\beta(\varrho_{F,\epsilon})^{\beta-2}) |\nabla \varrho_{F,\epsilon}|^2 \leq E_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

De plus,

$$\|X_\epsilon(t, 0, \cdot)\|_{H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))} \leq C \text{ et } \epsilon \|\nabla \varrho_{F,\epsilon}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))}^2 \leq C. \quad (4.26)$$

5 Passage à la limite en ϵ

Le but de ce paragraphe est de passer à la limite en ϵ le coefficient de viscosité apparaissant dans la loi de conservation de la masse. Pour la convergence du flot (X_ϵ) défini sur $\Omega_S(0)$, on reprend exactement les mêmes arguments que dans le **paragraphe 4.1** qui s'appuient sur la régularité de la vitesse sur la partie solide. Ainsi :

$$X_\epsilon \rightarrow X \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; \mathcal{C}^1(\Omega_S(0))) \quad (5.1)$$

et :

$$\chi_{\Omega_{S,\epsilon}(t)} \rightarrow \chi_{\Omega_S(t)} \text{ et } \chi_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \rightarrow \chi_{\Omega_F(t)} \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega)), \forall 1 \leq p < \infty$$

avec $\Omega_S(t) = X(t, 0, \Omega_S(0))$, $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$. De plus, X est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t, 0, y) = u(t, X(t, 0, y)) \\ X(0, 0, y) = y \end{cases} \quad (5.2)$$

où u est la limite faible dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))^3$ de (u_ϵ) . On a aussi, pour tout ϵ , l'inversibilité du flot $X_\epsilon(t, 0, \cdot)$ de $\Omega_S(0)$ sur $\Omega_{S,\epsilon}(t)$ et :

$$\nabla X_\epsilon(0, t, X_\epsilon(t, 0, \cdot)) \rightarrow \nabla X(0, t, X(t, 0, \cdot)) \text{ dans } \mathcal{C}((0, T_0) \times \Omega_S(0)).$$

On définit un prolongement Y_ϵ de X_ϵ dans $H^1(0, T_0; H^3(\Omega))$ tel que, pour tout t dans $[0, T_0]$, $Y_\epsilon(t, \cdot)$ soit inversible de Ω sur Ω .

Comme pour le passage au problème continu, on peut passer à la limite dans l'expression de la densité volumique sur la partie solide :

$$\varrho(t, x) = \varrho^0(X(0, t, x)) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} u(s, X(s, t, x)) ds\right), \forall x \in \Omega_S(t).$$

où ϱ désigne la limite faible de (ϱ_ϵ) dans $L^\infty(0, T_0; L^\beta(\Omega))$.

5.1 Estimation sur la densité

Avant de passer à la limite dans les autres équations, on va montrer une estimation supplémentaire sur (ϱ_ϵ) . Des difficultés liées à l'interface mobile apparaissent. On utilise ici une méthode introduite par Lions [19]. Cette méthode nécessite certains résultats de régularité sur le problème de Stokes sur l'ouvert $\Omega_{F,\epsilon}(t)$ qui est de classe H^3 .

Tout d'abord, on définit les opérateurs linéaires R_t^ϵ et P_t^ϵ par $R_t^\epsilon(f) = v$ et $P_t^\epsilon(f) = p$ où (v, p) est l'unique solution du problème de Stokes suivant à t et ϵ fixés :

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla p = f & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \int_{\Omega_F(0)} p \circ Y_\epsilon(t, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

On établit tout d'abord un résultat d'existence de l'application P_t^ϵ . Le lemme qui suit énonce un résultat de régularité sur le problème de Stokes. L'ouvert considéré est ici uniquement de classe H^3 . On ne se trouve donc pas dans le cadre classique (voir Temam [23]) où l'ouvert est de classe C^2 . Un résultat de régularité avec un second membre dans L^r , pour $1 < r < \infty$ a été montré par Bello [2] dans le cadre d'un ouvert $W^{2,\infty}$. On va ici reprendre sa démarche dans notre cadre (ouvert H^3) et l'adapter pour $1 < r < 6$ (il semble qu'on ne puisse pas avoir mieux).

Lemme 5.1 :

P_t^ϵ est un opérateur continu de $L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ dans $W^{1,r}(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ pour tout $1 < r \leq 6$ et de $W^{-1,r}(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ dans $L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ pour tout $1 < r < \infty$. Cette continuité est uniforme en t et en ϵ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|P_t^\epsilon(f)\|_{W^{1,r}(\Omega_{F,\epsilon}(t))} &\leq C\|f\|_{L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t))} \\ \|P_t^\epsilon(f)\|_{L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t))} &\leq C\|f\|_{W^{-1,r}(\Omega_{F,\epsilon}(t))} \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ϵ et t .

Preuve du lemme 5.1 :

La continuité de l'opérateur P_t^ϵ de $L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ dans $W^{1,r}(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ a déjà été montrée dans la première partie de ce mémoire (chapitre 2, Proposition 2) pour le cas $r = 2$. La démonstration repose sur une adaptation de l'article de Bello [2] qui considère des ouverts de classe $W^{2,\infty}$. On va montrer qu'on peut adapter la suite de cet article (qui utilise le cas $r = 2$) à notre cadre pour $1 < r \leq 6$. La méthode suivie est présentée dans Gilbarg et Trudinger [15] pour les équations de Laplace et de Poisson. L'article de Bello montre tout d'abord une formule de représentation de la solution du problème de Stokes : la solution est exprimée à partir des potentiels hydrodynamiques exprimés en fonction des solutions fondamentales singulières. L'étape suivante consiste à obtenir des estimations a posteriori sur la solution. On va se concentrer sur cette étape importante de la preuve (section 5 de l'article) en montrant les différences qui se présentent dans notre cadre. Pour l'adaptation du reste de la preuve, les arguments seront du même type. Nous allons donc montrer le résultat suivant :

Lemme 5.1.1 : Soit Ω un domaine borné de classe H^3 .

Pour tout (w, p) dans $(W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)) \times W^{1,r}(\Omega)$ avec $1 < r \leq 6$, on pose :

$$f = -\Delta w + \nabla p, \quad g = \operatorname{div} w.$$

Alors, il existe une constante C telle que :

$$\|w\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|w\|_{L^r(\Omega)} + \|p\|_{L^r(\Omega)}). \quad (5.4)$$

Pour montrer ce lemme, on introduit, comme dans la démonstration du cas $r = 2$ (voir première partie, chapitre 2, Proposition 2 pour les notations), une partition de l'unité $(\theta_i)_{0 \leq i \leq k}$ associée à un recouvrement $(U_i)_{0 \leq i \leq k}$. Alors :

$$w = \sum_{i=0}^k \theta_i w, \quad p = \sum_{i=0}^k \theta_i p.$$

Pour l'estimation du couple $(\theta_0 w, \theta_0 p) \in W_0^{2,r}(U_0) \times W_0^{1,r}(U_0)$, on peut reprendre exactement le raisonnement présenté par Bello. Grâce à une formule de représentation de la solution du problème de Stokes en fonction des solutions fondamentales singulières, on obtient l'estimation voulue sur U_0 :

$$\|\theta_0 w\|_{W^{2,r}(U_0)} + \|\theta_0 p\|_{W^{1,r}(U_0)} \leq C (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|w\|_{L^r(\Omega)} + \|p\|_{L^r(\Omega)}).$$

On considère ensuite les couples $(\theta_i w, \theta_i p)$ pour $1 \leq i \leq k$ et on pose :

$$\begin{cases} -\Delta(\theta w) + \nabla(\theta p) = F \\ \operatorname{div}(\theta w) = G \end{cases}$$

On a omis ici l'indice i pour plus de lisibilité. Un rapide calcul montre que F appartient à $L^2(\Omega \cap U)$, G appartient à $H^1(\Omega \cap U)$. Ces fonctions satisfont de plus :

$$\|F\|_{L^2(\Omega \cap U)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } \|G\|_{H^1(\Omega \cap U)} \leq C \|g\|_{H^1(\Omega)}.$$

On effectue le changement de variables :

$$z = (\theta w) \circ \Psi \text{ et } q = (\theta p) \circ \Psi$$

en reprenant les notations du cas $r = 2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_l &= - \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j} \frac{\partial^2 z_l}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial z_l}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^3 m_{l,i} \frac{\partial q}{\partial y_i}, \quad 1 \leq l \leq 3 \\ \tilde{G} &= - \sum_{i,j=1}^3 m_{i,j} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \end{aligned}$$

où les coefficients $m_{i,j}$, $a_{i,j}$ dans $W^{1,6}(V)$ ont déjà été définis dans le cas $r = 2$, b est un vecteur de $L^6(V)$ et \tilde{F} et \tilde{G} vérifient :

$$\tilde{F} = \operatorname{Jac} \Psi F \circ \Psi, \quad \tilde{G} = \operatorname{Jac} \Psi G \circ \Psi.$$

Soit maintenant $x_0 \in \Gamma_0(V)$ et $B_R^+ = B(x_0; R) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+)$. On définit :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_l^0 - \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial z_l}{\partial y_i} &= - \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j}(x_0) \frac{\partial^2 z_l}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^3 m_{l,i}(x_0) \frac{\partial q}{\partial y_i}, \quad 1 \leq l \leq 3 \\ \tilde{G}^0 &= - \sum_{i,j=1}^3 m_{i,j}(x_0) \frac{\partial z_l}{\partial y_i}. \end{aligned}$$

Les coefficients étant maintenant fixés, on se ramène à un problème de Stokes par un changement de variables affine. Grâce aux estimations des potentiels hydrodynamiques, on a une estimation de (z, q) dans les espaces souhaités en fonction de \tilde{F}^0 et \tilde{G}^0 :

$$\|z\|_{W^{2,r}(B_R^+)} + \|q\|_{W^{1,r}(B_R^+)} \leq C \left(\|\tilde{F}^0\|_{L^r(B_R^+)} + \|\tilde{G}^0\|_{W^{1,r}(B_R^+)} + \sum_{i=1}^3 \left\| b_i \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \right\|_{L^r(B_R^+)} \right).$$

On a, par définition :

$$\begin{aligned}\tilde{F}_l^0 &= \tilde{F}_l - \sum_{i,j=1}^3 (a_{i,j}(x_0) - a_{i,j}) \frac{\partial^2 z_l}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^3 (m_{l,i}(x_0) - m_{l,i}) \frac{\partial q}{\partial y_i} \\ \tilde{G}_l^0 &= \tilde{G}_l - \sum_{i,j=1}^3 (m_{i,j}(x_0) - m_{i,j}) \frac{\partial z_l}{\partial y_i}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\|\tilde{F}^0\|_{L^r(B_R^+)} \leq \|\tilde{F}\|_{L^r(B_R^+)} + C\sqrt{R} \left(\|z\|_{W^{2,r}(B_R^+)} + \|q\|_{W^{1,r}(B_R^+)} \right)$$

et

$$\|\tilde{G}^0\|_{W^{1,r}(B_R^+)} \leq \|\tilde{G}\|_{W^{1,r}(B_R^+)} + C\sqrt{R} \|z\|_{W^{1,r}(B_R^+)}$$

car les coefficients $a_{i,j}$ et $m_{i,j}$ sont höldériens d'ordre $\frac{1}{2}$ d'après le théorème de Morrey. Enfin, on montre facilement, en distinguant les cas $1 < r < 3$, $r = 3$, $3 < r < 6$ et $r = 6$ que :

$$\left\| b_i \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \right\|_{L^r(B_R^+)} \leq CR^\mu \|z\|_{W^{2,r}(B_R^+)}$$

où μ est un réel strictement positif ne dépendant que de r . On voit que cette estimation ne peut pas être obtenue si $r > 6$. Ainsi, par un changement de variables, on obtient le **lemme 5.1.1**. La suite de la démonstration donnée par Bello s'adapte à notre cadre : par une technique de type boot-strap, on montre alors l'existence et l'unicité d'une solution forte.

Pour la continuité de l'opérateur P_t^ϵ de $W^{-1,r}(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ dans $L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t))$, avec r quelconque, ce résultat est donné par Galdi, Simader et Sohr [14]. Cet article montre que le résultat est vrai pour un ouvert de classe \mathcal{C}^1 ou pour un ouvert lipschitzien avec une constante de lipschitz pour la frontière suffisamment petite. La démonstration repose sur un changement de variables qui permet de se ramener localement au demi-espace \mathbb{R}_+^3 . En reprenant la démonstration, on voit que la constante de continuité de P_t^ϵ est majorée indépendamment de t dans $[0, T_0]$ et ϵ . \square

On énonce ensuite un résultat de différentiation par rapport au temps d'un problème de Stokes à domaine variable.

Lemme 5.2 :

Soit f dans $\mathcal{C}^1(0, T_0; L^r(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. On a la relation suivante :

$$P_t^\epsilon \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} P_t^\epsilon(f) + \frac{1}{\text{vol}(\Omega_F(0))} \left(\int_{\Omega_F(0)} (\nabla P_t^\epsilon(f) \cdot v_\epsilon) \circ Y_\epsilon(t, \cdot) \right) + p \quad (5.5)$$

où v_ϵ est la vitesse eulérienne associée à Y_ϵ et p est la pression solution du problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta w + \nabla p = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \text{div } w = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ w = (u_\epsilon \cdot \nabla) R_t^\epsilon(f) & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \int_{\Omega_F(0)} p \circ Y_\epsilon(t, \cdot) = 0. \end{cases}$$

Preuve du lemme 5.2 :

La méthode générale des problèmes de différentiation par rapport à un domaine variable est présentée par Murat et Simon [20]-[21] dans le cadre d'équations elliptiques. L'article de Simon [22] prouve un résultat de différentiation pour un problème de Stokes avec un domaine régulier. L'article de Bello, Fernandez-Cara, Lemoine et Simon [3] prouve un résultat de différentiation sur le problème de Navier-Stokes avec des données petites et un ouvert seulement lipschitzien. On donne tout d'abord une explication formelle du résultat où on suppose que les fonctions qui interviennent sont très régulières. Les méthodes sont très différentes de celles qui interviennent pour prouver rigoureusement le résultat.

Si on dérive (5.3) par rapport au temps, les 2 premières équations se dérivent sans difficulté :

$$\begin{cases} -\Delta \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \end{cases}$$

En effet, si on écrit la formulation variationnelle de la première équation, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_{F,\epsilon}(t))$, on a :

$$\int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \nabla v(t) : \nabla \phi + \nabla p(t) \cdot \phi = 0.$$

On veut dériver l'équation par rapport à t autour de t_0 . Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_{F,\epsilon}(t_0))$ fixé. Etant donné la régularité du domaine par rapport au temps, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_{F,\epsilon}(t))$ sur un petit intervalle de temps autour de t_0 . Ainsi, sur cet intervalle,

$$\int_{\Omega_{F,\epsilon}(t_0)} \nabla v(t) : \nabla \phi + \nabla p(t) \cdot \phi = 0.$$

on se ramène de cette façon à un domaine indépendant du temps et on peut dériver cette formulation variationnelle. On procède de même pour la seconde équation de (5.3).

La troisième équation de (5.3) s'écrit sous forme variationnelle : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\partial\Omega_F(0))$,

$$\int_{\partial\Omega_F(0)} v(t, X_\epsilon(t, 0, y)) \varphi d\gamma = 0.$$

En dérivant cette expression par rapport à t , on a :

$$\int_{\partial\Omega_F(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (u_\epsilon \cdot \nabla) v \right) (t, X_\epsilon(t, 0, y)) \varphi d\gamma = 0.$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(u_\epsilon \cdot \nabla) v \text{ sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t)$$

Enfin, la dernière équation dérivée par rapport à t donne :

$$\int_{\Omega_F(0)} \frac{\partial p}{\partial t} \circ Y_\epsilon(t, \cdot) = - \int_{\Omega_F(0)} (\nabla p \cdot v_\epsilon) \circ Y_\epsilon(t, \cdot)$$

Ainsi le couple de dérivées locales $\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right)$ est solution du problème de Stokes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w + \nabla q = \frac{\partial f}{\partial t} & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ w = -(u_\epsilon \cdot \nabla) R_t^\epsilon(f) & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \int_{\Omega_F(0)} q \circ Y_\epsilon(t, \cdot) = - \int_{\Omega_F(0)} (\nabla P_t^\epsilon(f) \cdot v_\epsilon) \circ Y_\epsilon(t, \cdot) & \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Ceci permet d'obtenir la relation (5.5).

On va maintenant démontrer le résultat de façon rigoureuse en ne donnant que les étapes principales. Dans les articles de Simon [22] et de Bello, Fernandez-Cara, Lemoine et Simon [3], un changement de variables permet de se ramener à l'ouvert de référence puis le théorème des fonctions implicites permet de prouver la différentiabilité de la solution par rapport au temps dans des espaces à préciser. Cette méthode s'applique directement à notre problème. Tout d'abord, on prouve la différentiabilité de la solution en $t = 0$. Posons :

$$\bar{v}(t, y) = v(t, Y_\epsilon(t, y)), \bar{p}(t, y) = p(t, Y_\epsilon(t, y)), \forall y \in \Omega_F(0), \forall t \in [0, T_0].$$

On va ramener le problème (5.3) à $\Omega_F(0)$. Pour cela, on reprend les notations de [3] :

$$M(t) = {}^t \nabla Y_\epsilon(t, \cdot)^{-1}, D_i(t) = \sum_j M_{i,j}(t) \partial_j.$$

Alors, le problème (5.3) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(t, \bar{v}, \bar{p}) = \bar{f} & \text{sur } \Omega_F(0) \\ R(t, \bar{v}, \bar{p}) = 0 & \text{sur } \Omega_F(0) \\ \bar{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_F(0) \\ \int_{\Omega_F(0)} \bar{p} = 0 & \end{array} \right. \quad (5.7)$$

avec :

$$\bar{f}(t, y) = f(t, Y_\epsilon(t, y)), \forall y \in \Omega_F(0), \forall t \in [0, T_0]$$

et :

$$\begin{aligned} F_k(t, \bar{v}, \bar{p}) &= - \sum_{i,j} \partial_j (\operatorname{Jac} Y_\epsilon(t, \cdot) M_{i,j}(t) D_i(t) \bar{v}_k) + \sum_j \partial_j (\operatorname{Jac} Y_\epsilon(t, \cdot) M_{k,j}(t) \bar{p}) \\ R(t, \bar{v}, \bar{p}) &= \operatorname{Jac} Y_\epsilon(t, \cdot) D(t) \bar{v}. \end{aligned}$$

On définit maintenant l'application H définie de $(0, T_0) \times H_0^1(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$ dans $H^{-1}(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$ par :

$$H(t, \bar{v}, \bar{p}) = (F(t, \bar{v}, \bar{p}), R(t, \bar{v}, \bar{p})).$$

Le problème (5.3) s'écrit donc :

$$H(t, \bar{v}, \bar{p}) = (\bar{f}, 0).$$

On va maintenant appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction H au voisinage de $(0, v(0), p(0))$. Pour cela, on remarque, du fait que Y_ϵ est un élément de $H^1(0, T_0; H^3(\Omega))$, que H est de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage de $(0, v(0), p(0))$. De plus, la différentielle de H en $(0, v(0), p(0))$ est donnée par : pour tout $(\chi, \pi) \in H_0^1(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$,

$$L(\chi, \pi) = (-\Delta\chi + \nabla\pi, \operatorname{div}\chi).$$

Ainsi, dire que L est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$ dans $H^{-1}(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$ revient à dire que pour tout $(g, \phi) \in H_0^1(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$, il existe un unique couple $(\chi, \pi) \in H_0^1(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$ tel que :

$$\begin{cases} -\Delta\chi + \nabla\pi = g & \text{sur } \Omega_F(0) \\ \operatorname{div}\chi = \phi & \text{sur } \Omega_F(0) \end{cases} \quad (5.8)$$

Ceci est un résultat classique d'existence pour le problème de Stokes (voir Temam [23], paragraphe 2.4, chapitre 1). La dernière équation du système (5.3) nous a permis d'obtenir une condition de moyenne nulle sur la pression transportée \bar{p} . On voit que c'est important ici pour montrer que la différentielle en 0 est un isomorphisme.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites : l'application $t \mapsto (\bar{v}(t), \bar{p}(t))$ à valeurs dans $H^{-1}(\Omega_F(0)) \times L_0^2(\Omega_F(0))$ est différentiable au voisinage de 0. Pour obtenir le système vérifié par la dérivée locale $\left(\frac{\partial v}{\partial t}(0), \frac{\partial p}{\partial t}(0)\right)$, on utilise la formule suivante de différentiation :

$$L(\dot{v}(0), \dot{p}(0)) = -\frac{\partial H}{\partial t}(0, v(0), p(0)) + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(0), 0\right)$$

où $(\dot{v}(0), \dot{p}(0))$ désigne la dérivée totale de (v, p) en 0. A partir de là, des calculs permettent de retrouver le système (5.6). A ce niveau, on ne détaille pas les calculs, on fait référence à [3] pour plus d'explications.

Pour montrer la différentiabilité de la solution par rapport au temps en $t = t_0$, on fait le même raisonnement en se ramenant à $\Omega_F(t_0)$ par le biais de l'application $Y_\epsilon(t, t_0, \cdot)$. \square

On va maintenant montrer des estimations supplémentaires sur la densité fluide.

Lemme 5.3 :

On a :

$$\|\varrho_{F,\epsilon}\|_{L^{\gamma+1}(0, T_0; L^{\gamma+1}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} + \|\varrho_{F,\epsilon}\|_{L^{\beta+1}(0, T_0; L^{\beta+1}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \leq C \quad (5.9)$$

où C ne dépend que de δ et des données initiales.

Preuve du lemme 5.3 :

Soit tout d'abord (u_0, p_0) la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \nabla p_0 = -\Delta u_\epsilon & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div} u_0 = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \int_{\Omega_F(0)} p_0 \circ Y_\epsilon(t, \cdot) = 0 \end{cases}$$

et (u_1, p_1) solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1 + \nabla p_1 = \frac{\partial}{\partial t}(\varrho_\epsilon u_\epsilon) + \operatorname{div}(\varrho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon) + \epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div} u_1 = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \int_{\Omega_F(0)} p_1 \circ Y_\epsilon(t, \cdot) = 0. & \end{array} \right. \quad (5.10)$$

On verra au cours de la démonstration que ces systèmes admettent bien des solutions faibles et en particulier que p_0 et p_1 sont des fonctions de $L^1(0, T_0; L^{\frac{4}{3}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. La formulation variationnelle (2.15) devient : pour tout $v \in \mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \nabla u_1 : \nabla v \, dx \, dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} p_1 \operatorname{div} v \, dx \, dt - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \nabla u_0 : \nabla v \, dx \, dt \\ & + \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} p_0 \operatorname{div} v \, dx \, dt - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \operatorname{div} u_\epsilon \operatorname{div} v \, dx \, dt \\ & + a \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\varrho_{F,\epsilon})^\gamma \operatorname{div} v \, dx \, dt + \delta \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\varrho_{F,\epsilon})^\beta \operatorname{div} v \, dx \, dt = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ainsi, au sens faible, on a, pour tout t et ϵ fixés,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta(u_1 + \mu_F u_0) + \nabla(\mu_F p_0 + p_1 + a(\varrho_{F,\epsilon})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\epsilon})^\beta - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon) = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div}(u_1 + \mu_F u_0) = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ u_1 + \mu_F u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \end{array} \right.$$

Etant donné l'existence et l'unicité de la pression à une constante près pour ce problème de Stokes, on obtient que, à chaque instant t , la pression de ce problème est nulle à une constante près :

$$\mu_F p_0 + p_1 + a(\varrho_{F,\epsilon})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\epsilon})^\beta - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon = c_\epsilon(t), \quad \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t)$$

où $c_\epsilon(t)$, constante dépendant uniquement du temps, est déterminée par :

$$\int_{\Omega_F(0)} \left(\mu_F p_0 + p_1 + a(\varrho_{F,\epsilon})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\epsilon})^\beta - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon \right) \circ Y_\epsilon(t, y) - c_\epsilon(t) \, dy = 0. \quad (5.12)$$

Ainsi, en reprenant les notations du début du paragraphe, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} a(\varrho_{F,\epsilon})^{\gamma+1} + \delta(\varrho_{F,\epsilon})^{\beta+1} = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon + c_\epsilon(t)) \varrho_{F,\epsilon} \\ & - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \left(\mu_F P_t^\epsilon(-\Delta u_\epsilon) + P_t^\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \right) + P_t^\epsilon(\operatorname{div}(\varrho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon)) + P_t^\epsilon(\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon) \right) \varrho_{F,\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ce calcul et les expressions précédentes sont formels. Pour être exact, il faudrait tout exprimer avec des crochets de dualité. Les estimations que l'on va montrer pour avoir des bornes

indépendantes de ϵ montreront de manière implicite que les termes du membre de droite sont bien définis.

Soit :

$$I_1(\epsilon) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon \varrho_{F,\epsilon}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |I_1(\epsilon)| &\leq C \left(\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} |\operatorname{div} u_\epsilon|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} |\varrho_{F,\epsilon}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \end{aligned}$$

puisque, d'après (4.25), $(\varrho_{F,\epsilon})$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^\beta(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$ avec $\beta > 4$. Soit maintenant :

$$I_2(\epsilon) = \int_0^{T_0} c_\epsilon(t) \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon}.$$

La constante $c_\epsilon(t)$ est déterminée par la condition (5.12) soit :

$$c_\epsilon(t) = \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_F(0))} \int_{\Omega_F(0)} \left(a(\varrho_{F,\epsilon})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\epsilon})^\beta - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon \right) \circ Y_\epsilon(t, y) dy. \quad (5.14)$$

D'après l'estimation d'énergie (4.25), on voit que (c_ϵ) est bornée dans $L^1(0, T_0)$ indépendamment de ϵ . D'où :

$$\begin{aligned} |I_2(\epsilon)| &\leq \left(\int_0^{T_0} |c_\epsilon(t)| \right) \|\varrho_{F,\epsilon}\|_{L^\infty(0, T_0; L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Soit :

$$I_3(\epsilon) = \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\Delta u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon}.$$

Comme (u_ϵ) est bornée dans $L^2(0, T_0; H^1(\Omega))$, d'après le **lemme 5.1**, $P_t^\epsilon(\Delta u_\epsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. Ceci permet donc de conclure que :

$$\begin{aligned} |I_3(\epsilon)| &\leq C \|P_t^\epsilon(\Delta u_\epsilon)\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|\varrho_{F,\epsilon}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

On considère maintenant :

$$\begin{aligned} I_4(\epsilon) &= \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varrho_\epsilon u_\epsilon) \right) \varrho_{F,\epsilon} \\ &= \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) + \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_F(0))} \left(\int_{\Omega_F(0)} (\nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot v_\epsilon) \circ Y_\epsilon(t, \cdot) \right) + p_\epsilon \right) \varrho_{F,\epsilon} \end{aligned}$$

où p_ϵ est la pression solution de :

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon + \nabla p_\epsilon = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \operatorname{div} v_\epsilon = 0 & \text{sur } \Omega_{F,\epsilon}(t) \\ v_\epsilon = (u_\epsilon \cdot \nabla) R_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) & \text{sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t) \\ \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} p_\epsilon = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Ceci provient de (5.5). On va estimer séparément ces termes. Tout d'abord, on pose :

$$I_4^1(\epsilon) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \frac{\partial}{\partial t} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon}.$$

Par le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant du temps, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} &= \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \frac{\partial}{\partial t} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} + \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \frac{\partial \varrho_{F,\epsilon}}{\partial t} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot n \\ &= \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \frac{\partial}{\partial t} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} + \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) (\epsilon \Delta \varrho_\epsilon - \operatorname{div}(\varrho_\epsilon u_\epsilon)) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot n \\ &= \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \frac{\partial}{\partial t} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} + \epsilon \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \Delta \varrho_\epsilon + \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_\epsilon \nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot u_\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_4^1(\epsilon) &= \int_{\Omega_{F,\epsilon}(T_0)} P_{T_0}^\epsilon(\varrho_\epsilon(T_0) u_\epsilon(T_0)) \varrho_{F,\epsilon}(T_0) - \int_{\Omega_F(0)} P_0^\epsilon(\varrho^0 u^0) \varrho_F^0 - \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \Delta \varrho_\epsilon \\ &\quad - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_\epsilon \nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot u_\epsilon. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, d'après l'estimation d'énergie (4.25) et le **lemme 5.1**, pour tout ϵ , $P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est un élément de $\mathcal{C}(0, T_0; W^{1, \frac{16}{9}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$ et

$$\begin{aligned} \|P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)\|_{L^\infty(0, T_0; W^{1, \frac{16}{9}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} &\leq C \|\varrho_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^{\frac{16}{9}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq \|\sqrt{\varrho_\epsilon} u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|\sqrt{\varrho_\epsilon}\|_{L^\infty(0, T_0; L^8(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \end{aligned}$$

ainsi, $P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^8(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. Cette estimation permet de majorer le premier terme.

De plus,

$$-\epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \Delta \varrho_\epsilon = \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot \nabla \varrho_\epsilon \quad (5.16)$$

puisque :

$$\frac{\partial \varrho_\epsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F,\epsilon}(t).$$

D'après (4.26), $(\epsilon \nabla \varrho_\epsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. De plus, d'après le **lemme 5.1**,

$$\begin{aligned} \|\nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} &\leq C \|\varrho_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq \|\varrho_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^4(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|u_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^6(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \leq C. \end{aligned}$$

Ceci permet donc d'estimer (5.16). Pour le dernier terme de $I_4^1(\epsilon)$, on utilise aussi cette estimation pour finalement conclure que :

$$|I_4^1(\epsilon)| \leq C.$$

Estimons maintenant :

$$I_4^2(\epsilon) = \int_0^{T_0} \left(\frac{1}{\text{vol}(\Omega_F(0))} \int_{\Omega_F(0)} (\nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot v_\epsilon) \circ Y_\epsilon(t, \cdot) \right) \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon}.$$

On voit que :

$$\|\nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot v_\epsilon\|_{L^1(0, T_0; L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \leq \|\nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|v_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \leq C.$$

Ainsi :

$$|I_4^2(\epsilon)| \leq C \|\nabla P_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon) \cdot v_\epsilon\|_{L^1(0, T_0; L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|\varrho_\epsilon\|_{L^\infty(0, T_0; L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \leq C.$$

Enfin, on considère :

$$I_4^3(\epsilon) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} p_\epsilon \varrho_{F,\epsilon}$$

où p_ϵ est défini par (5.15). Comme $(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$, $R_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est borné dans $L^2(0, T_0; H^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. Ainsi, étant donné que (u_ϵ) est borné dans $L^2(0, T_0; H^3(\Omega_{S,\epsilon}(t)))$, on voit que, dans (5.15), $(u_\epsilon \cdot \nabla) R_t^\epsilon(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est borné dans $L^1(0, T_0; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{F,\epsilon}(t)))$ ce qui donne une estimation de p_ϵ dans $L^1(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. Ceci permet d'avoir une majoration sur $I_4^3(\epsilon)$ indépendante de ϵ et finalement :

$$|I_4(\epsilon)| \leq C.$$

Il reste à estimer :

$$I_5(\epsilon) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\text{div}(\varrho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon)) \varrho_{F,\epsilon}.$$

Pour cela, on utilise l'estimation suivante donnée par le **lemme 5.1** :

$$\begin{aligned} \|P_t^\epsilon(\text{div}(\varrho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon))\|_{L^1(0, T_0; L^{\frac{3}{2}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} &\leq C \|\varrho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon\|_{L^1(0, T_0; L^{\frac{3}{2}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq \|\varrho_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|u_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^6(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \leq C. \end{aligned}$$

Pour terminer ces séries d'estimation, on définit :

$$I_6(\epsilon) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} P_t^\epsilon(\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon}$$

Ici, $(\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon)$ est bornée dans $L^1(0, T_0; L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. Or,

$$W_0^{1,4}(\Omega_{F,\epsilon}(t)) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_{F,\epsilon}(t)) \text{ donc } L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)) \hookrightarrow W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)).$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \|P_t^\epsilon(\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon)\|_{L^1(0, T_0; L^{\frac{4}{3}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} &\leq C \|\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon\|_{L^1(0, T_0; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq C \|\epsilon \nabla u_\epsilon \nabla \varrho_\epsilon\|_{L^1(0, T_0; L^1(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Comme (ϱ_ϵ) est borné dans $L^\infty(0, T_0; L^4(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$, $I_6(\epsilon)$ est bornée indépendamment de ϵ . Avec toutes ces estimations, on a montré que les termes de droite de (5.13) étaient bornés indépendamment de ϵ . Ceci montre donc le **lemme 5.3**. \square

Remarque 4 :

Les termes supplémentaires de régularisation en ϵ posent des problèmes dans les estimations qui viennent d'être montrées. C'est la raison pour laquelle on effectue le passage à la limite en deux temps avec une régularisation en δ intermédiaire.

5.2 Passage à la limite

On va tout d'abord passer à la limite dans l'équation portant sur ϱ_ϵ :

$$-\int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho_\epsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_\epsilon \cdot \nabla \psi \right) + \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \nabla \varrho_\epsilon \nabla \psi = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \Omega). \quad (5.17)$$

Tout d'abord, d'après (4.26),

$$\epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \nabla \varrho_\epsilon \nabla \psi \rightarrow 0.$$

De plus, (ϱ_ϵ) est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^\gamma(\Omega))$, d'après (4.25) et d'après l'écriture explicite de ϱ_ϵ sur $\Omega_{S,\epsilon}(t)$ donnée dans la seconde partie du **lemme 3.1**. Comme $(\sqrt{\varrho_\epsilon} u_\epsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$ et $(\sqrt{\varrho_\epsilon})$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^{2\gamma}(\Omega))$, $(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$. Montrons que la limite faible de $(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est ϱu . Tout d'abord, on va montrer que :

$$\varrho_\epsilon \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^\beta(\Omega)). \quad (5.18)$$

Par les mêmes arguments que dans le **lemme 4.4**, on voit qu'il suffit de prouver que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_\Omega (\varrho_\epsilon(t) - \varrho(t)) \psi \rightarrow 0.$$

Or, d'après la formulation variationnelle (5.17),

$$\int_\Omega \varrho_\epsilon(t) \psi - \int_\Omega \varrho^0 \psi = \int_0^t \int_\Omega \varrho_\epsilon(s) u_\epsilon(s) \cdot \nabla \psi - \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_{F,\epsilon}(s)} \nabla \varrho_\epsilon(s) \cdot \nabla \psi.$$

Soit :

$$\bar{h}_1^\epsilon(t) = \int_0^t \int_\Omega \varrho_\epsilon(s) u_\epsilon(s) \cdot \nabla \psi.$$

Puisque $(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$, on voit que \bar{h}_1^ϵ est bornée dans $H^1(0, T_0)$. De même, soit :

$$\bar{h}_2^\epsilon(t) = \epsilon \int_0^t \int_{\Omega_{F,\epsilon}(s)} \nabla \varrho_\epsilon(s) \cdot \nabla \psi.$$

D'après (4.26), \bar{h}_2^ϵ est bornée dans $H^1(0, T_0)$. Ainsi du fait de la compacité de l'injection de $H^1(0, T_0)$ dans $\mathcal{C}(0, T_0)$, $\int_\Omega \varrho_\epsilon(t) \psi$ converge fortement dans $\mathcal{C}(0, T_0)$ et la limite est $\int_\Omega \varrho(t) \psi$. Ceci montre (5.18). De ceci, on déduit que :

$$\varrho_\epsilon \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; H^{-1}(\Omega))$$

et comme

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega)),$$

on peut identifier la limite faible de la suite $(\varrho_\epsilon u_\epsilon)$:

$$\varrho_\epsilon u_\epsilon \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^2(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)). \quad (5.19)$$

Ceci permet de passer à la limite dans la formulation variationnelle (5.17). Ainsi, ϱ est solution du problème :

$$- \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \cdot \nabla \psi \right) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}((0, T_0) \times \Omega).$$

et donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \varrho(t=0) = \varrho^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.20)$$

De plus, on note que l'équation (5.20) est en fait satisfaite au sens faible sur tout \mathbb{R}^3 (voir le lemme 3.3 de [11]). Montrons que cette équation est vérifiée au sens des solutions renormalisées défini par (2.6). Pour cela, on passe par une régularisation $S_m[\varrho]$ de ϱ et on utilise le résultat suivant (théorème II.1 de [9]) :

Proposition 7 :

Soit ϱ une solution de (5.20) dans $L^\infty(0, T_0; L^p(\Omega))$ avec $2 \leq p \leq \infty$ et soit $S_m[\varrho]$ donné par :

$$S_m[\varrho] = \varrho \star \phi_m$$

où ϕ_m est une suite régularisante, alors $S_m[\varrho]$ est solution du problème :

$$\frac{\partial S_m[\varrho]}{\partial t} + \operatorname{div}(S_m[\varrho]u) = r_m \quad (5.21)$$

avec $r_m \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T_0; L^q(\mathbb{R}^3))$ où :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}.$$

Soit maintenant $b \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction admissible (c'est-à-dire satisfaisant (2.5)). En multipliant (5.21) par $b'(S_m[\varrho])$, on obtient :

$$\frac{\partial b(S_m[\varrho])}{\partial t} + (\operatorname{div} u)S_m[\varrho]b'(S_m[\varrho]) + u \cdot \nabla b(S_m[\varrho]) = r_m b'(S_m[\varrho]).$$

On montre facilement, avec les hypothèses sur b , que :

$$S_m[\varrho] \rightarrow \varrho \text{ dans } L^p((0, T_0) \times \mathbb{R}^3), \forall p \leq 4 \text{ et } b'(S_m[\varrho]) \rightarrow b'(\varrho) \text{ dans } L^\infty((0, T_0) \times \mathbb{R}^3).$$

Ces résultats de convergence permettent de passer à la limite en m et on obtient :

$$\frac{\partial b(\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div}(b(\varrho)u) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \Omega). \quad (5.22)$$

Ainsi, ϱ vérifie la loi de conservation de la masse au sens des solutions renormalisées.

Il faut maintenant passer à la limite dans la formulation variationnelle portant sur u_ϵ c'est-à-dire : pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho_\epsilon(t, x) u_\epsilon(t, x) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho_\epsilon(t, x) (u_\epsilon \otimes u_\epsilon)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\ & - \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F, \epsilon}(t)} (\nabla u_{F, \epsilon}(t, x) \cdot \nabla \varrho_{F, \epsilon}(t, x)) v(t, x) dx dt - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{S, \epsilon}(t)} \sigma_{S, \epsilon} : \nabla v \\ & - \theta \int_0^{T_0} (u_\epsilon(t, \cdot), v(t, \cdot))_{H^3(\Omega_{S, \epsilon}(t))} dt - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F, \epsilon}(t)} \operatorname{div} u_\epsilon \operatorname{div} v dx dt \\ & - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F, \epsilon}(t)} \nabla u_\epsilon : \nabla v dx dt + a \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F, \epsilon}(t)} \varrho_{F, \epsilon}^\gamma \operatorname{div} v dx dt \\ & + \delta \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F, \epsilon}(t)} \varrho_{F, \epsilon}^\beta \operatorname{div} v dx dt = - \int_\Omega \varrho^0 u^0 v(0, \cdot) dy \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec

$$\sigma_{S, \epsilon}(t, x) = \det \nabla X_\epsilon(0, t, x) \nabla X_\epsilon(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S[X_\epsilon](t, X_\epsilon(0, t, x)) \nabla X_\epsilon(0, t, x)^{-t}$$

De même que dans le **paragraphe 4**, pour le passage au problème continu, on peut renforcer (5.19) en une convergence plus forte en temps :

$$\varrho_\epsilon u_\epsilon \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)). \quad (5.24)$$

Pour cela, on reprend la preuve du **lemme 4.4**. Le seul terme qui se traite différemment est :

$$h_2^\epsilon(t) = -\epsilon \int_0^t \int_{\Omega_{F, \epsilon}(s)} (\nabla u_{F, \epsilon} \cdot \nabla \varrho_{F, \epsilon}) \varphi_i dx ds.$$

Or, pour tout $t \in [0, T_0]$,

$$|h_2^\epsilon(t)| \leq \sqrt{\epsilon} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2((0, T_0) \times \Omega)} \|\sqrt{\epsilon} \nabla \varrho_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F, \epsilon}(t)))}$$

et donc :

$$h_2^\epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0).$$

En raisonnant de même que dans le **paragraphe 4**, on montre alors que :

$$\varrho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon \rightharpoonup \varrho u \otimes u \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \Omega).$$

On peut ainsi passer à la limite en ϵ dans la formulation variationnelle (5.23) et on obtient : pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho(t, x) u(t, x) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho(t, x) (u \otimes u)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\ & - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla v - \theta \int_0^{T_0} (u(t, \cdot), v(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S(t))} dt \\ & - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx dt - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \nabla u : \nabla v dx dt \\ & + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} p \operatorname{div} v dx dt = - \int_\Omega \varrho^0 u^0 v(0, \cdot) dy \end{aligned} \quad (5.25)$$

où p est défini par :

$$a \varrho_{F, \epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F, \epsilon}^\beta \rightharpoonup p \text{ dans } L^{\frac{\beta+1}{\beta}}((0, T_0) \times \Omega).$$

Il reste à montrer que :

$$p = a \varrho_F^\gamma + \delta \varrho_F^\beta \text{ dans } \Omega_F(t).$$

5.3 Identification de la pression

Lemme 5.4 :

Avec les notations précédentes, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_\Omega \varphi^2 (a \varrho_{F, \epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F, \epsilon}^\beta - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon) \varrho_{F, \epsilon} = \int_0^{T_0} \int_\Omega \varphi^2 (p - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \varrho_F$$

Preuve du lemme 5.4 :

On définit l'opérateur \mathcal{A}_j , pour $j = 1, 2, 3$ par :

$$\widehat{\mathcal{A}_j[v]}(z) = -i \frac{z_j}{|z|^2} \hat{v}(z), \quad \forall v \text{ assez régulière}$$

où \hat{f} désigne la transformée de Fourier de f dans \mathbb{R}^3 .

Ceci revient à considérer :

$$\mathcal{A}_j = \Delta^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right].$$

L'opérateur \mathcal{A} a les propriétés suivantes :

$$\operatorname{div} \mathcal{A}[v] = v \quad (5.26)$$

$$\|\mathcal{A}[v]\|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq c(s, \Omega) \|v\|_{L^s(\mathbb{R}^3)}, \quad \forall 1 < s < \infty. \quad (5.27)$$

On prolonge la densité volumique fluide $\varrho_{F,\epsilon}$ par 0 (on appelle toujours $\varrho_{F,\epsilon}$ le prolongement) sur \mathbb{R}^3 . Puis on prend comme fonction-test dans (5.23) :

$$\varphi \mathcal{A}_i[\varphi \varrho_{F,\epsilon}].$$

Comme φ est une fonction de $\mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$, on peut considérer que, pour ϵ petit, φ est une fonction de $\mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$, étant donné le résultat de convergence forte du flot (X_ϵ) (5.1). En utilisant la propriété (5.26) vérifiée par \mathcal{A}_i , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} \\ &= - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon) \nabla \varphi \cdot \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}] \\ &+ \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\nabla u_\epsilon \nabla \varphi) \cdot \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}] + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} (u_\epsilon \cdot \nabla \varphi) (u_\epsilon \cdot \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}]) \\ &- \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}] - \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \varphi \mathcal{A}[\varphi \Delta \varrho_{F,\epsilon}] \\ &- \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \varphi \mathcal{A} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \varrho_{F,\epsilon} \right] - \epsilon \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\nabla u_\epsilon \nabla \varrho_{F,\epsilon}) \varphi \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}] \\ &+ \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} \nabla \varphi \cdot u_\epsilon - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\nabla \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}] \nabla \varphi) \cdot u_\epsilon \\ &+ \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot (\mathcal{A}[\varphi \operatorname{div} (\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon)] - (u_\epsilon \cdot \nabla) \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}]) \end{aligned} \quad (5.28)$$

où on a utilisé que :

$$\varphi \frac{\partial \varrho_{F,\epsilon}}{\partial t} = \varphi (\epsilon \Delta \varrho_{F,\epsilon} - \operatorname{div} (\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon)) \text{ sur } \mathbb{R}^3.$$

Si on définit :

$$\mathcal{R}_{i,j}[v] = \frac{\partial \mathcal{A}_i[v]}{\partial x_j},$$

alors la dernière intégrale devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot (\mathcal{A}[\varphi \operatorname{div} (\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon)] - (u_\epsilon \cdot \nabla) \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}]) \\ &= \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot (\mathcal{A}[\operatorname{div} (\varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon)] - (u_\epsilon \cdot \nabla) \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}]) - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot \mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot \nabla \varphi] \\ &= \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} u_{\epsilon,i} (\varphi \varrho_{F,\epsilon} \mathcal{R}_{i,j}[\varphi \varrho_{F,\epsilon} u_{\epsilon,j}] - \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_{\epsilon,j} \mathcal{R}_{i,j}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}]) - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot \mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot \nabla \varphi]. \end{aligned}$$

On procède de même dans (5.25) en prenant comme fonction-test :

$$\varphi \mathcal{A}_i[\varphi \varrho_F]$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varphi^2 (p - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \varrho_F = - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (p - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u) \nabla \varphi \cdot \mathcal{A}[\varphi \varrho_F] \\
& + \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (\nabla u \nabla \varphi) \cdot \mathcal{A}[\varphi \varrho_F] + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F (u \cdot \nabla \varphi) (u \cdot \mathcal{A}[\varphi \varrho_F]) \\
& - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathcal{A}[\varphi \varrho_F] - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F u \varphi \mathcal{A} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \varrho_F \right] + \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F \nabla \varphi \cdot u \\
& - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (\nabla \mathcal{A}[\varphi \varrho_F] \nabla \varphi) \cdot u - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varphi \varrho_F u \cdot \mathcal{A}[\varrho_F u \cdot \nabla \varphi] \\
& + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} u_i (\varphi \varrho_F \mathcal{R}_{i,j}[\varphi \varrho_F u_j] - \varphi \varrho_F u_j \mathcal{R}_{i,j}[\varphi \varrho_F]). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Pour montrer le **lemme 5.4**, il suffit donc de montrer que les termes de droite de (5.28) convergent vers les termes de droite de (5.29). Pour cela, on utilise les résultats suivants de convergence obtenus grâce à (5.18) :

$$\mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon}] \rightarrow \mathcal{A}[\varrho_F] \text{ dans } \mathcal{C}((0, T_0) \times \Omega) \text{ et } \nabla \mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon}] \rightarrow \nabla \mathcal{A}[\varrho_F] \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^\beta(\Omega)).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& \epsilon \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \varphi \mathcal{A}[\varphi \Delta \varrho_{F,\epsilon}] \right| \\
& \leq \epsilon \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \varphi \mathcal{A}[\operatorname{div}(\varphi \nabla \varrho_{F,\epsilon})] \right| + \epsilon \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \varphi \mathcal{A}[\nabla \varphi \cdot \nabla \varrho_{F,\epsilon}] \right| \\
& \leq \sqrt{\epsilon} \|\varrho_{F,\epsilon}\|_{L^\infty(0, T_0; L^3(\Omega))} \|u_\epsilon\|_{L^2(0, T_0; L^6(\Omega))} \|\sqrt{\epsilon} \nabla \varrho_{F,\epsilon}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1((0, T_0) \times \Omega)}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
& \epsilon \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (\nabla u_\epsilon \nabla \varrho_{F,\epsilon}) \varphi \mathcal{A}[\varphi \varrho_{F,\epsilon}] \right| \\
& \leq \sqrt{\epsilon} \|\sqrt{\epsilon} \nabla \varrho_{F,\epsilon}\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\epsilon}(t)))} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2((0, T_0) \times \Omega)} \|\varphi\|_{\mathcal{C}((0, T_0) \times \Omega)} \|\mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon}]\|_{\mathcal{C}((0, T_0) \times \Omega)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, ces 2 termes tendent vers 0. De plus,

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varphi \varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot \mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \cdot \nabla \varphi] \rightarrow \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varphi \varrho_F u \cdot \mathcal{A}[\varrho_F u \cdot \nabla \varphi]. \tag{5.30}$$

En effet, d'après (5.24),

$$\mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon] \rightarrow \mathcal{A}[\varrho_F u] \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; W_w^{1, \frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)) \text{ donc } \mathcal{A}[\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon] \rightarrow \mathcal{A}[\varrho_F u] \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L^2(\Omega))$$

et de plus, on a aussi vu que :

$$\varrho_{F,\epsilon} u_\epsilon \rightharpoonup \varrho_F u \text{ dans } L^2((0, T_0) \times \Omega).$$

Ceci permet donc de montrer (5.30). Pour terminer la démonstration du **lemme 5.4**, il reste à montrer que :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega} u_{\epsilon,i} (\varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon} \mathcal{R}_{i,j} [\varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon} u_{\epsilon,j}] - \varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon} u_{\epsilon,j} \mathcal{R}_{i,j} [\varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon}]) \\ & \rightarrow \int_0^{T_0} \int_{\Omega} u_i (\varrho_{\mathcal{Q}F} \mathcal{R}_{i,j} [\varrho_{\mathcal{Q}F} u_j] - \varrho_{\mathcal{Q}F} u_j \mathcal{R}_{i,j} [\varrho_{\mathcal{Q}F}]). \end{aligned}$$

Pour cela, on utilise le résultat suivant dont la démonstration est donnée dans [11] (la preuve repose sur un lemme divergence-rotationnel (div-curl lemma)) :

si $v_n \rightharpoonup v$ dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ et $w_n \rightharpoonup w$ dans $L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$ alors,

$$v_n \mathcal{R}_{i,j} [w_n] - w_n \mathcal{R}_{i,j} [v_n] \rightharpoonup v \mathcal{R}_{i,j} [w] - w \mathcal{R}_{i,j} [v] \text{ dans } L^r(\mathbb{R}^3), \text{ pour } i, j = 1, 2, 3.$$

En utilisant (5.18) et (5.24), on a la convergence de $\varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon} \mathcal{R}_{i,j} [\varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon} u_{\epsilon,j}] - \varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon} u_{\epsilon,j} \mathcal{R}_{i,j} [\varrho_{\mathcal{Q}F,\epsilon}]$ dans $L^2(0, T_0; L^s_w(\Omega))$ avec $s > \frac{6}{5}$ si on choisit β assez grand (plus précisément $\beta > \frac{6\gamma}{2\gamma-3}$) et on a une convergence forte dans $L^2(0, T_0; H^{-1}(\Omega))$. Ceci achève la démonstration du lemme. \square

Dans la fin de ce paragraphe, on reprend exactement la démarche de [11]. D'après la **remarque 2** puisque ϱ est un élément de $L^\infty(0, T_0; L^\beta(\Omega))$, $b(z) = z \log(z)$ satisfait l'inégalité (2.7) et est donc une fonction admissible. Ainsi, en intégrant (5.22) en temps et en espace sur $\Omega_F(t)$, comme $b'(z)z - b(z) = z$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho \operatorname{div} u &= - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \frac{\partial b(\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div} (b(\varrho)u) = - \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} b(\varrho) \\ &= \int_{\Omega_F(0)} \varrho^0 \log(\varrho^0) - \int_{\Omega_F(T_0)} \varrho(T_0) \log(\varrho(T_0)). \end{aligned} \quad (5.31)$$

De plus, d'après la **proposition 4.3**, à ϵ fixé, $\varrho_{F,\epsilon}$ est solution de (4.18) pour presque tout $t \in (0, T_0)$ et pour presque tout $x \in \Omega_{F,\epsilon}(t)$. Ainsi, en multipliant (4.18) par $b'(\varrho_{F,\epsilon})$ avec b une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convexe, on a :

$$\frac{\partial b(\varrho_{F,\epsilon})}{\partial t} + \operatorname{div} (b(\varrho_{F,\epsilon})u_\epsilon) + (b'(\varrho_{F,\epsilon})\varrho_{F,\epsilon} - b(\varrho_{F,\epsilon})) \operatorname{div} u_\epsilon - \epsilon \Delta b(\varrho_{F,\epsilon}) \leq 0 \text{ sur } \Omega_{F,\epsilon}(t).$$

Ainsi, en prenant de nouveau $b(z) = z \log(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} \operatorname{div} u_\epsilon &\leq - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \frac{\partial b(\varrho_{F,\epsilon})}{\partial t} + \operatorname{div} (b(\varrho_{F,\epsilon})u_\epsilon) = - \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} b(\varrho_{F,\epsilon}) \\ &\leq \int_{\Omega_F(0)} \varrho^0 \log(\varrho^0) - \int_{\Omega_{F,\epsilon}(T_0)} \varrho_{F,\epsilon}(T_0) \log(\varrho_{F,\epsilon}(T_0)). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives de $\mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$ qui converge vers $\chi_{\Omega_F(t)}$ dans $L^p((0, T_0) \times \Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$. Pour $\epsilon > 0$ petit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in$

$\mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_{F,\epsilon}(t)))$. Ainsi, pour tout $m \leq n$:

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_m^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta) \varrho_{F,\epsilon} \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_n^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta) \varrho_{F,\epsilon} \\ & \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_n^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta - (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} + (\lambda + 2\mu) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_n^2 \operatorname{div} u_\epsilon \varrho_{F,\epsilon}. \end{aligned}$$

D'où, grâce au **lemme 5.4** :

$$\begin{aligned} & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_m^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta) \varrho_{F,\epsilon} \leq \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_n^2 (p - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \varrho_F \\ & \quad + (\lambda_F + 2\mu_F) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_n^2 \varrho_{F,\epsilon} \operatorname{div} u_\epsilon \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} p \varrho_F - (\lambda_F + 2\mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F \operatorname{div} u + (\lambda_F + 2\mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (1 - \varphi_n^2) \varrho_F \operatorname{div} u \\ & \quad + (\lambda_F + 2\mu_F) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} \operatorname{div} u_\epsilon - (\lambda_F + 2\mu_F) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} (1 - \varphi_n^2) \varrho_{F,\epsilon} \operatorname{div} u_\epsilon \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} p \varrho_F - (\lambda_F + 2\mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F \operatorname{div} u + (\lambda_F + 2\mu_F) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} \varrho_{F,\epsilon} \operatorname{div} u_\epsilon + \eta(n) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(n) = 0$. Ainsi, en utilisant (5.31) et (5.32) et en passant à la limite en n , on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_m^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta) \varrho_{F,\epsilon} & \leq \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} p \varrho_F + (\lambda_F + 2\mu_F) \int_{\Omega_F(T_0)} \varrho(T_0) \log(\varrho(T_0)) \\ & \quad - (\lambda_F + 2\mu_F) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(T_0)} \varrho_{F,\epsilon}(T_0) \log(\varrho_{F,\epsilon}(T_0)). \end{aligned}$$

Or, comme $(\varrho_\epsilon(T_0))$ est bornée dans $L^4(\Omega)$, on montre facilement que $(\varrho_\epsilon(T_0) \log(\varrho_\epsilon(T_0)))$ est bornée, par exemple, dans $L^2(\Omega)$ et donc :

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(T_0)} \varrho_\epsilon(T_0) \log(\varrho_\epsilon(T_0)) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_F(T_0)} \varrho_\epsilon(T_0) \log(\varrho_\epsilon(T_0)).$$

En utilisant la convexité de l'application b choisie, on montre ainsi que :

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varphi_m^2 (a \varrho_{F,\epsilon}^\gamma + \delta \varrho_{F,\epsilon}^\beta) \varrho_{F,\epsilon} \leq \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} p \varrho_F. \quad (5.33)$$

On conclut par un argument de monotonie. On définit $P(z) = az^\gamma + \delta z^\beta$. L'application P est monotone. Ainsi, pour toute fonction v assez régulière,

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varphi_m^2 (P(\varrho_\epsilon) - P(v)) (\varrho_\epsilon - v) \geq 0.$$

Par passage à la limite en ϵ , on en déduit en utilisant (5.33) :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} p \varrho_F + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varphi_m^2 P(v) v - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varphi_m^2 (pv + P(v) \varrho_F) \geq 0$$

puis en passant à la limite en m , on a :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (p - P(v)) (\varrho_F - v) \geq 0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout v ,

$$p = P(\varrho_F) = a \varrho_F^\gamma + \delta \varrho_F^\beta \text{ p.p. } x \in \Omega_F(t), t \in (0, T_0).$$

Ceci conclut donc le paragraphe. On résume le résultat obtenu avec la proposition suivante :

Proposition 8 :

Pour tout $\delta > 0$ fixé, pour toute donnée initiale $\varrho_{S,\delta}^0$ dans $L^\infty(\Omega_S(0))$, $\varrho_{F,\delta}^0$ dans $H^2(\Omega_F(0))$ satisfaisant (2.12) et u^0 dans $H_0^1(\Omega)^3$, on a une solution $(X_\delta, \varrho_\delta, u_\delta)$ de (5.2), (5.20) qui satisfait la formulation variationnelle suivante : pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varrho_\delta(t, x) u_\delta(t, x) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \varrho_\delta(t, x) (u_\delta \otimes u_\delta)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\ & - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{S,\delta}(t)} \sigma_{S,\delta} : \nabla v - \theta \int_0^{T_0} (u_\delta(t, \cdot), v(t, \cdot))_{H^3(\Omega_{S,\delta}(t))} dt \\ & - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \operatorname{div} u_\delta \operatorname{div} v dx dt - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \nabla u_\delta : \nabla v dx dt \\ & + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} (a \varrho_\delta^\gamma + \delta \varrho_\delta^\beta) \operatorname{div} v dx dt = - \int_{\Omega} \varrho^0 u^0 v(0, \cdot) dy \end{aligned} \quad (5.34)$$

avec :

$$\sigma_{S,\delta}(t, x) = \det \nabla X_\delta(0, t, x) \nabla X_\delta(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S[X_\delta](t, X_\delta(0, t, x)) \nabla X_\delta(0, t, x)^{-t}.$$

Le couple $(X_\delta, \varrho_\delta, u_\delta)$ satisfait l'estimation d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho_\delta(t) |u_\delta(t)|^2 dx + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta}(t)^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta}(t)^\beta \\ & + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_{F,\delta}(s)} |\nabla u_{F,\delta}|^2 + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_{F,\delta}(s)} |\operatorname{div} u_{F,\delta}|^2 + \theta \int_0^t \|u_{S,\delta}(s)\|_{H^3(\Omega_{S,\delta}(s))}^2 \\ & + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X_\delta(t, 0, y))|^2 dy + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X_\delta(t, 0, y))|^2 dy \leq E_{0,\delta} \end{aligned} \quad (5.35)$$

De plus :

$$\|X_\delta(t, 0, \cdot)\|_{H^1(0, T_0; H^3(\Omega_S(0)))} \leq C. \quad (5.36)$$

et ϱ_δ est solution de la loi de conservation de la masse au sens des solutions renormalisées, c'est-à-dire satisfait (5.22).

6 Passage à la limite en δ le coefficient de pression artificielle

La donnée initiale du problème non régularisé pour la densité fluide est un élément ϱ_F^0 qui est une fonction positive de $L^\gamma(\Omega_F(0))$. Jusqu'à présent, on a considéré une donnée initiale régularisée $\varrho_{F,\delta}^0$ dans $H^2(\Omega_F(0))$ satisfaisant l'encadrement :

$$0 < \underline{\varrho}_{F,\delta} \leq \varrho_{F,\delta}^0 \leq \bar{\varrho}_{F,\delta}.$$

Ceci était nécessaire pour avoir des résultats de régularité sur la densité sur le domaine fluide et être dans le cadre du **théorème 1**. On veut affaiblir ces hypothèses, on considère donc une suite $(\varrho_{F,\delta}^0)$ d'éléments de $H^2(\Omega_F(0))$ tels que :

$$\varrho_{F,\delta}^0 \rightarrow \varrho_F^0 \text{ dans } L^\gamma(\Omega_F(0)) \text{ et } \delta \leq \varrho_{F,\delta}^0(x) \leq \frac{1}{\delta^\beta}, \forall x \in \Omega_F(0).$$

Comme $E_{0,\delta}$ est défini par :

$$E_{0,\delta} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho_{\delta}^0 |u^0|^2 dx + \frac{a}{\gamma-1} \int_{\Omega_F(0)} (\varrho_{F,\delta}^0)^\gamma + \frac{\delta}{\beta-1} \int_{\Omega_F(0)} (\varrho_{F,\delta}^0)^\beta,$$

l'énergie initiale $E_{0,\delta}$ est bornée indépendamment de δ et donc l'estimation d'énergie (5.35) donne des résultats de convergence faible sur la suite $(X_\delta, \varrho_\delta, u_\delta)$.

On commence par effectuer un passage à la limite dans l'équation portant sur le flot X_δ . Ceci ne pose pas de problème et se traite comme dans les sections précédentes :

$$X_\delta \rightarrow X \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; \mathcal{C}^1(\Omega_S(0))) \quad (6.1)$$

et donc :

$$\chi_{\Omega_{S,\delta}(t)} \rightarrow \chi_{\Omega_S(t)} \text{ et } \chi_{\Omega_{F,\delta}(t)} \rightarrow \chi_{\Omega_F(t)} \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega)), \forall 1 \leq p < \infty$$

avec $\Omega_S(t) = X(t, 0, \Omega_S(0))$, $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$ et X est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t, 0, y) = u(t, X(t, 0, y)) \\ X(0, 0, y) = y \end{cases} \quad (6.2)$$

où u est la limite faible dans $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))$ de (u_δ) .

Enfin, toujours de façon immédiate, (ϱ_δ) converge faiblement vers ϱ dans $L^\infty(0, T_0; L^\gamma(\Omega))$ et sur la partie solide :

$$\varrho_S(t, x) = \varrho^0(X(0, t, x)) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} u(s, X(s, t, x)) ds\right), \forall x \in \Omega_S(t).$$

Comme dans la section précédente, les estimations sur ϱ_δ établies dans le sous-paragraphe qui suit sont obtenues à partir d'une méthode que l'on trouve dans [19].

6.1 Estimation sur la densité

Lemme 6.1 :

Avec les notations précédentes, $\varrho_{F,\delta}$ vérifie l'estimation suivante :

$$\|\varrho_{F,\delta}\|_{L^{\gamma+\alpha}(0,T_0;L^{\gamma+\alpha}(\Omega_{F,\delta}(t)))} + \delta\|\varrho_{F,\delta}\|_{L^{\beta+\alpha}(0,T_0;L^{\beta+\alpha}(\Omega_{F,\delta}(t)))} \leq C \quad (6.3)$$

où α est un réel strictement positif et C ne dépend que des données initiales.

Preuve du lemme 6.1 :

En reprenant la démarche du **lemme 5.3**, on a l'égalité suivante :

$$\mu_F p_0 + p_1 + a(\varrho_{F,\delta})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\delta})^\beta - (\lambda_F + \mu_F)\operatorname{div} u_\delta = c_\delta(t) \text{ sur } \Omega_{F,\delta}(t).$$

Ici, la constante $c_\delta(t)$ est donnée par l'équation (5.14) où on a remplacé l'indice ϵ par l'indice δ . Du fait que $\varrho_{F,\delta}$ n'a pas de trace, les calculs effectués dans la section précédente n'ont plus de sens maintenant. On va donc reprendre ces calculs en multipliant l'équation par une fonction régulière et en intégrant en temps et en espace. On considérera alors une suite régularisante qui approche $\varrho_{F,\delta}^\alpha$, puis on passera à la limite. Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}([0, T_0] \times \Omega_{F,\delta}(t))$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \left(a(\varrho_{F,\delta})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\delta})^\beta \right) \phi &= \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \left((\lambda_F + \mu_F)\operatorname{div} u_\delta + c_\delta(t) \right) \phi \\ &\quad - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \left(\mu P_t^\delta(-\Delta u_\delta) + P_t^\delta \left(\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \right) + P_t^\delta(\operatorname{div}(\varrho_{F,\delta} u_\delta \otimes u_\delta)) \right) \phi. \end{aligned} \quad (6.4)$$

La suite $(\varrho_{F,\delta})$ est maintenant uniquement bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^\gamma(\Omega))$ avec $\gamma > \frac{3}{2}$. On reprend les notations dérivées de la preuve du **lemme 5.3** pour estimer les différents termes. Soit :

$$I_1(\delta) = (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \operatorname{div} u_\delta \phi.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |I_1(\delta)| &\leq C \|\phi\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))} \|\operatorname{div} u_\delta\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))} \\ &\leq C \|\phi\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))}. \end{aligned}$$

Soit :

$$I_2(\delta) = \int_0^{T_0} c_\delta(t) \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \phi.$$

On montre facilement que (c_δ) est bornée dans $L^\infty(0, T_0)$ en utilisant l'estimation d'énergie satisfaite par la solution (5.35) On a ainsi :

$$|I_2(\delta)| \leq \left(\int_0^{T_0} |c_\delta(t)| \right) \|\phi\|_{L^\infty(0,T_0;L^1(\Omega_{F,\delta}(t)))} \leq C \|\phi\|_{L^\infty(0,T_0;L^1(\Omega_{F,\delta}(t)))}.$$

Pour $I_3(\delta)$, on utilise les propriétés de l'opérateur P_t^δ énoncées dans le **lemme 5.1** : puisque (u_δ) est bornée dans $L^2(0, T_0; H^1(\Omega_{F,\delta}(t)))$, $P_t^\delta(-\Delta u_\delta)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))$ et donc :

$$|I_3(\delta)| \leq C \|\phi\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))}.$$

Soit :

$$I_4^1(\delta) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \frac{\partial}{\partial t} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \phi.$$

En faisant une intégration par parties en temps, on remarque que :

$$\begin{aligned} I_4^1(\delta) &= \int_{\Omega_{F,\delta}(T_0)} P_{T_0}^\delta((\varrho_{F,\delta} u_\delta)(T_0)) \phi(T_0) - \int_{\Omega_F(0)} P_0^\delta(\varrho_{F,\delta}^0 u^0) \phi(0) \\ &\quad - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \operatorname{div} \left(P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \phi u_\delta \right) \\ &= \int_{\Omega_{F,\delta}(T_0)} P_{T_0}^\delta((\varrho_{F,\delta} u_\delta)(T_0)) \phi(T_0) - \int_{\Omega_F(0)} P_0^\delta(\varrho_{F,\delta}^0 u^0) \phi(0) \\ &\quad - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi u_\delta) \right) - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \nabla P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \cdot u_\delta \phi. \end{aligned}$$

Comme $(\sqrt{\varrho_{F,\delta}} u_\delta)$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))$ et $(\sqrt{\varrho_{F,\delta}})$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^{2\gamma}(\Omega_{F,\delta}(t)))$, $(P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta))$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^q(\Omega_{F,\delta}(t)))$ indépendamment de δ où q satisfait $\frac{1}{q} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2\gamma}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |I_4^1(\delta)| &\leq C \|\phi\|_{L^\infty(0, T_0; L^{q'}(\Omega_{F,\delta}(t)))} + \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi u_\delta) \right) \right| \\ &\quad + \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \nabla P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \cdot u_\delta \phi \right|. \end{aligned}$$

où q' le conjugué de q est défini par :

$$\frac{1}{q'} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2\gamma} > 0.$$

De plus, comme $(\varrho_{F,\delta})$ est borné dans $L^\infty(0, T_0; L^\gamma(\Omega_{F,\delta}(t)))$ et (u_δ) est bornée dans $L^2(0, T_0; L^6(\Omega))$, on voit que $(\nabla P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta))$ est borné dans $L^2(0, T_0; L^s(\Omega_{F,\delta}(t)))$ où $s < 6$ est défini par :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{6} + \frac{1}{\gamma}. \quad (6.5)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} |I_4^1(\delta)| &\leq C (\|\phi\|_{L^\infty(0, T_0; L^{q'}(\Omega_{F,\delta}(t)))} + \|\phi\|_{L^\infty(0, T_0; L^{p'}(\Omega_{F,\delta}(t)))}) \\ &\quad + \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi u_\delta) \right) \right| \end{aligned}$$

où p' est défini par :

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{3} - \frac{1}{\gamma} > 0$$

car $\gamma > \frac{3}{2}$. Pour $I_4^2(\delta)$, on voit que, si $\gamma > \frac{3}{2}$:

$$\|\nabla P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \cdot v_\delta\|_{L^1(0,T_0;L^1(\Omega_{F,\delta}(t)))} \leq \|\nabla P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta)\|_{L^2(0,T_0;L^s(\Omega_{F,\delta}(t)))} \|v_\delta\|_{L^2(0,T_0;L^6(\Omega_{F,\delta}(t)))} \leq C$$

où $s \geq \frac{6}{5}$ est défini par (6.5). Ainsi,

$$|I_4^2(\delta)| \leq C \|\phi\|_{L^\infty(0,T_0;L^1(\Omega_{F,\delta}(t)))}.$$

Soit :

$$I_4^3(\delta) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} p_\delta \phi$$

où p_δ est défini par le problème (5.15) en remplaçant ϵ par δ .

Comme $(\varrho_{F,\delta} u_\delta)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^s(\Omega_{F,\delta}(t)))$ avec $s < 6$, la suite $(R_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta))$ est bornée dans $L^2(0, T_0; W^{2,s}(\Omega_{F,\delta}(t)))$ où s est défini par (6.5). Ainsi, dans (5.15), $(u_\delta \cdot \nabla) R_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta)$ est dans $L^1(0, T_0; W^{1-\frac{1}{s},s}(\partial\Omega_{F,\delta}(t)))$ donc p_δ est un élément de $L^1(0, T_0; L^s(\Omega_{F,\delta}(t)))$. Ainsi,

$$|I_4^3(\delta)| \leq C \|\phi\|_{L^\infty(0,T_0;L^{s'}(\Omega_{F,\delta}(t)))}$$

où s' le conjugué de s est défini par $\frac{1}{s'} = \frac{5}{6} - \frac{1}{\gamma}$ et on montre pour finir que :

$$|I_5(\delta)| \leq C \|\phi\|_{L^\infty(0,T_0;L^{p'}(\Omega_{F,\delta}(t)))}.$$

On obtient donc finalement d'après (6.4) et en remarquant que $p' > s'$ et $p' > q'$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \left(a(\varrho_{F,\delta})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\delta})^\beta \right) \phi \right| &\leq C \left(\|\phi\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_{F,\delta}(t)))} + \|\phi\|_{L^\infty(0,T_0;L^{p'}(\Omega_{F,\delta}(t)))} \right) \\ &\quad + \left| \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi u_\delta) \right) \right| \end{aligned}$$

On considère alors une suite (ϕ_n) de $\mathcal{D}([0, T_0] \times \Omega_{F,\delta}(t))$ qui converge vers $\varrho_{F,\delta}^\alpha$ avec $\alpha > 0$ à déterminer, dans $L^\infty(0, T_0; L^{\frac{\gamma}{\alpha}}(\Omega_{F,\delta}(t))) \cap L^\infty(0, T_0; L^{\frac{\beta}{\alpha}}(\Omega_{F,\delta}(t)))$. L'intégrale de gauche dans l'inégalité converge vers :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \left(a(\varrho_{F,\delta})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\delta})^\beta \right) \varrho_{F,\delta}^\alpha.$$

Si $p' \leq \frac{\gamma}{\alpha}$, (ϕ_n) converge vers $\varrho_{F,\delta}$ dans $L^\infty(0, T_0; L^{p'}(\Omega_{F,\delta}(t)))$. Pour cela, il suffit de prendre :

$$\alpha \leq \frac{2}{3}\gamma - 1.$$

On voit donc apparaître la condition :

$$\gamma > \frac{3}{2}.$$

De plus :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi_n u_\delta) \rightharpoonup \frac{\partial \varrho_{F,\delta}^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_{F,\delta}^\alpha u_\delta) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T_0; \mathcal{D}'(\Omega_{F,\delta}(t))).$$

Or, puisque ϱ_δ est solution de (5.20) au sens des solutions renormalisées, et puisqu'on peut étendre la classe des fonctions b d'après la **remarque 2**, on peut écrire que :

$$\frac{\partial \varrho_{F,\delta}^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_{F,\delta}^\alpha u_\delta) + (\alpha - 1)\varrho_{F,\delta}^\alpha \operatorname{div} u_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T_0; \mathcal{D}'(\Omega_{F,\delta}(t))).$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi_n u_\delta) \rightharpoonup -(\alpha - 1)\varrho_{F,\delta}^\alpha \operatorname{div} u_\delta \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T_0; \mathcal{D}'(\Omega_{F,\delta}(t)))$$

et :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi_n u_\delta) \right) \rightarrow -(\alpha - 1) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta) \varrho_{F,\delta}^\alpha \operatorname{div} u_\delta.$$

Ce dernier terme est borné car $(P_t^\delta(\varrho_{F,\delta} u_\delta))$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^r(\Omega_{F,\delta}(t)))$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{6}$. Finalement, on obtient :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} a(\varrho_{F,\delta})^{\gamma+\alpha} + \delta(\varrho_{F,\delta})^{\beta+\alpha} \leq C \|\varrho_{F,\delta}\|_{L^{2\alpha}(0, T_0; L^{2\alpha}(\Omega_{F,\delta}(t)))}^\alpha + C$$

Si on suppose que $\alpha < \gamma$, alors

$$L^{\gamma+\alpha}(0, T_0; L^{\gamma+\alpha}(\Omega_{F,\delta}(t))) \hookrightarrow L^{2\alpha}(0, T_0; L^{2\alpha}(\Omega_{F,\delta}(t))).$$

avec une constante d'injection indépendante de δ . Ainsi,

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \left(a(\varrho_{F,\delta})^\gamma + \delta(\varrho_{F,\delta})^\beta \right) \varrho_{F,\delta}^\alpha \leq C$$

□

Remarque 5 :

La démonstration donne une estimation de (ϱ_δ) dans $L^{\gamma+\alpha}((0, T_0) \times \Omega)$ avec comme valeur optimale pour α :

$$\alpha = \frac{2}{3}\gamma - 1 > 0$$

soit dans $L^p((0, T_0) \times \Omega)$ avec $p = \frac{5}{3}\gamma - 1$. Dans le cadre de [18], à ce niveau, on a besoin d'une estimation de (ϱ_δ) dans $L^p((0, T_0) \times \Omega)$ avec $p \geq 2$ d'où la condition :

$$\gamma > \frac{9}{5}.$$

La condition $\gamma > \frac{3}{2}$ paraît fondamentale. En effet, par exemple, si ϱ est dans $L^\infty(0, T_0; L^\gamma(\Omega))$ et si u est un élément de $L^2(0, T_0; H^1(\Omega))$, $\gamma = \frac{3}{2}$ est la valeur critique pour laquelle $\varrho u \otimes u$ a un sens presque partout (et appartient à un espace de Lebesgue).

6.2 Passage à la limite

Les arguments sont très proches de ceux du **paragraphe 5.2**. Pour le passage à la limite dans l'équation de conservation de la masse, on remarque comme précédemment que :

$$\varrho_\delta \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^\gamma(\Omega)), \quad u_\delta \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega)).$$

De plus, $(\varrho_\delta u_\delta)$ est bornée dans $L^2(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$. Comme l'injection de $L^\gamma(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est compacte, on peut identifier la limite faible de $(\varrho_\delta u_\delta)$:

$$\varrho_\delta u_\delta \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^2(0, T_0; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)).$$

Ainsi, la limite faible ϱ de (ϱ_δ) est solution de :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (6.6)$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite dans (5.34). Pour la convergence de $(\varrho_\delta u_\delta \otimes u_\delta)$, on reprend le raisonnement du **paragraphe 5.2** :

$$\varrho_\delta u_\delta \otimes u_\delta \rightharpoonup \varrho u \otimes u \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \Omega).$$

Les résultats de convergence forte sur (X_δ) donnés par (6.1) permettent d'affirmer que :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_{S,\delta}(t)} \sigma_{S,\delta} : \nabla v \rightarrow \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla v, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

avec :

$$\sigma_S(t, x) = \det \nabla X(0, t, x) \nabla X(0, t, x)^{-1} \hat{\sigma}_S[X](t, X(0, t, x)) \nabla X(0, t, x)^{-t}.$$

D'après (6.3), $(\delta \varrho_{F,\delta}^\beta)$ a une limite nulle dans $L^1((0, T_0) \times \Omega)$. Ainsi, on peut maintenant passer à la limite dans (5.34) et on obtient : pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho(t, x) u(t, x) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt + \int_0^{T_0} \int_\Omega \varrho(t, x) (u \otimes u)(t, x) : \nabla v(t, x) dx dt \\ & - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_S(t)} \sigma_S : \nabla v - \theta \int_0^{T_0} (u(t, \cdot), v(t, \cdot))_{H^3(\Omega_S(t))} dt \\ & - (\lambda_F + \mu_F) \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx dt - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \nabla u : \nabla v dx dt \\ & + a \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \overline{\varrho_F^\gamma} \operatorname{div} v dx dt = - \int_\Omega \varrho^0 u^0 v(0, \cdot) dy \end{aligned} \quad (6.7)$$

avec :

$$\varrho_{F,\delta}^\gamma \rightharpoonup \overline{\varrho_F^\gamma} \text{ dans } L^{\frac{\gamma+\alpha}{\gamma}}((0, T_0) \times \Omega).$$

De même que dans le paragraphe précédent, il faut montrer que :

$$\overline{\varrho_F^\gamma} = \varrho_F^\gamma.$$

6.3 Identification de la pression

On introduit la suite de fonctions de troncature suivante : soit tout d'abord une fonction T concave de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$T(z) = z, \forall z \leq 1 \text{ et } T(z) = 2, \forall z \geq 3.$$

On définit ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k(z) = kT\left(\frac{z}{k}\right).$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$T_k(\varrho_{F,\delta}) \rightarrow \overline{T_k(\varrho_F)} \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^p(\Omega)), \forall 1 \leq p < \infty. \quad (6.8)$$

On a le résultat de convergence suivant :

Lemme 6.2 :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_\Omega \varphi^2 (a\varrho_{F,\delta}^\gamma - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_\delta) T_k(\varrho_{F,\delta}) = \int_0^{T_0} \int_\Omega \varphi^2 (a\overline{\varrho_F^\gamma} - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \overline{T_k(\varrho_F)}$$

Preuve du lemme 6.2 :

Puisque T_k est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$ à dérivée nulle pour z assez grand et puisqu'on a montré que ϱ_δ était solution de la loi de conservation de la masse au sens des solutions renormalisées, alors :

$$\frac{\partial T_k(\varrho_\delta)}{\partial t} + \operatorname{div} (T_k(\varrho_\delta) u_\delta) + (T_k'(\varrho_\delta) \varrho_\delta - T_k(\varrho_\delta)) \operatorname{div} u_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \mathbb{R}). \quad (6.9)$$

On prend comme fonction-test dans (5.34) :

$$v = \varphi \mathcal{A}_i[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})]$$

où l'opérateur \mathcal{A}_i a déjà été utilisé dans le sous-paragraphe (5.3). Alors, en utilisant (6.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varphi^2 (a \varrho_{F,\delta}^\gamma + \delta \varrho_{F,\delta}^\beta - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_\delta) T_k(\varrho_{F,\delta}) \\
&= - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} (a \varrho_{F,\delta}^\gamma + \delta \varrho_{F,\delta}^\beta - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_\delta) \nabla \varphi \cdot \mathcal{A}[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})] \\
&+ \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} (\nabla u_\delta \nabla \varphi) \cdot \mathcal{A}[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})] + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta} (u_\delta \cdot \nabla \varphi) (u_\delta \cdot \mathcal{A}[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})]) \\
&- \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta} u_\delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathcal{A}[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})] - \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta} u_\delta \varphi \mathcal{A} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} T_k(\varrho_{F,\delta}) \right] \\
&- \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta} u_\delta \varphi \mathcal{A}[\varphi (T_k'(\varrho_\delta) \varrho_\delta - T_k(\varrho_\delta)) \operatorname{div} u_\delta] \\
&+ \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varrho_{F,\delta} \nabla \varphi \cdot u_\delta - \mu_F \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} (\nabla \mathcal{A}[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})] \nabla \varphi) \cdot u_\delta \\
&+ \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} u_{\delta,i} (\varphi T_k(\varrho_{F,\delta}) \mathcal{R}_{i,j}[\varphi \varrho_{F,\delta} u_{\delta,j}] - \varphi \varrho_{F,\delta} u_{\delta,j} \mathcal{R}_{i,j}[\varphi T_k(\varrho_{F,\delta})]) \\
&- \int_0^{T_0} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \varphi T_k(\varrho_{F,\delta}) u_\delta \cdot \mathcal{A}[\varrho_{F,\delta} u_\delta \cdot \nabla \varphi]. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

On prend ensuite comme fonction-test dans (6.7) :

$$v = \varphi \mathcal{A}_i[\overline{\varphi T_k(\varrho_F)}].$$

En utilisant (6.8), la propriété (5.27) vérifiée par \mathcal{A} et les résultats du sous-paragraphe précédent, on obtient la convergence des termes de (6.10). On utilise aussi le résultat de convergence du commutateur $v_n \mathcal{R}_{i,j}[w_n] - w_n \mathcal{R}_{i,j}[v_n]$ énoncé dans le **sous-paragraphe 5.3**. Ceci permet de montrer le **lemme 6.2**. \square

Puisque $(\varrho_{F,\delta}^\gamma)$ est bornée dans $L^r((0, T_0) \times \Omega)$ avec $r > 1$, en appliquant ce lemme avec une suite de fonctions φ_m dans $\mathcal{D}(0, T_0; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$ qui tend vers

$$(t, x) \mapsto \chi_{\Omega_F(t)}(x)$$

dans $L^p((0, T_0) \times \Omega)$, pour tout $p < \infty$, on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (a \varrho_{F,\delta}^\gamma - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_\delta) T_k(\varrho_{F,\delta}) = \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (a \overline{\varrho_F^\gamma} - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \overline{T_k(\varrho_F)}. \tag{6.11}$$

On va en déduire le lemme suivant :

Lemme 6.3 :

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)\|_{L^{\gamma+1}((0, T_0) \times \Omega)} \leq c \tag{6.12}$$

où c est indépendante de k .

Preuve du lemme 6.3 :

On va d'abord montrer, en utilisant les mêmes arguments que [11] (lemme 4.3) l'inégalité suivante :

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0) \times \Omega)} \leq c \quad (6.13)$$

On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_{F,\delta}^\gamma T_k(\varrho_{F,\delta}) - \overline{\varrho_F^\gamma T_k(\varrho_F)} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (\varrho_{F,\delta}^\gamma - \varrho_F^\gamma)(T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)) + \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (\overline{\varrho_F^\gamma} - \varrho_F^\gamma)(T_k(\varrho_F) - \overline{T_k(\varrho_F)}) \end{aligned}$$

Or, par convexité de l'application $z \mapsto z^\gamma$ et par concavité de T_k , on a l'inégalité suivante :

$$\int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} (\overline{\varrho_F^\gamma} - \varrho_F^\gamma)(T_k(\varrho_F) - \overline{T_k(\varrho_F)}) \geq 0$$

De plus, comme :

$$(z^\gamma - y^\gamma)(T_k(z) - T_k(y)) \geq |T_k(z) - T_k(y)|^{\gamma+1}, \quad \forall y, z \geq 0,$$

on obtient :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_{F,\delta}^\gamma T_k(\varrho_{F,\delta}) - \overline{\varrho_F^\gamma T_k(\varrho_F)} \geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} |T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)|^{\gamma+1} \quad (6.14)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u_\delta T_k(\varrho_{F,\delta}) - \operatorname{div} u \overline{T_k(\varrho_F)} = \\ & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u_\delta (T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F) + T_k(\varrho_F) - \overline{T_k(\varrho_F)}) \\ & \leq 2 \sup_{\delta > 0} \|\operatorname{div} u_\delta\|_{L^2((0,T_0) \times \Omega)} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_F(t)))} \\ & \leq C \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_F(t)))} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ainsi en utilisant (6.11) et les estimations précédentes (6.14) et (6.15), on obtient :

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T_0} \int_{\Omega_F(t)} |T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)|^{\gamma+1} \leq C \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_{F,\delta}) - T_k(\varrho_F)\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega_F(t)))}$$

où C est une constante indépendante de k . Comme $\gamma + 1 \geq 2$, ceci donne l'estimation recherchée sur la partie fluide.

De plus, on a la même estimation sur la partie solide de façon évidente :

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_{S,\delta}) - T_k(\varrho_S)\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0) \times \Omega)} \leq c \quad (6.16)$$

toujours avec c indépendante de k . En effet,

$$\|T_k(\varrho_{S,\delta}) - T_k(\varrho_S)\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0)\times\Omega)} \leq \|T_k(\varrho_{S,\delta})\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0)\times\Omega)} + \|T_k(\varrho_S)\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0)\times\Omega)}$$

Or, pour tout $1 \leq p < \infty$:

$$\|T_k(\varrho_{S,\delta})\|_{L^p((0,T_0)\times\Omega)} \leq \|\varrho_{S,\delta}\|_{L^p((0,T_0)\times\Omega)} \quad (6.17)$$

Ainsi,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \|T_k(\varrho_{S,\delta}) - T_k(\varrho_S)\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0)\times\Omega)} \leq C \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|\varrho_{S,\delta}\|_{L^{\gamma+1}((0,T_0)\times\Omega)}$$

où C est indépendante de k . Ceci montre finalement (6.16) puisque, pour tout $p \geq 1$, $(\varrho_{S,\delta})$ est bornée dans $L^p((0, T_0) \times \Omega)$.

A partir de (6.13) et (6.16), on montre facilement l'estimation globale (6.12), ce qui achève la preuve du lemme. \square

On énonce le lemme suivant, qu'on prouverait en reprenant exactement la démarche de [11] (lemme 4.4) :

Lemme 6.4 :

ϱ est solution de la loi de conservation de la masse au sens des solutions renormalisées.

La démonstration de ce lemme n'est pas immédiate car on ne peut pas utiliser directement la **proposition 7**. Il faut passer à la limite en δ dans l'équation (6.9) puis régulariser cette équation.

On note $\overline{\varrho \log \varrho}$ la limite faible de $(\varrho_\delta \log \varrho_\delta)$ dans $L^\gamma((0, T_0) \times \Omega)$. On va montrer que :

$$\overline{\varrho \log \varrho} = \varrho \log \varrho.$$

On ne peut pas prendre directement $b(z) = z \log z$ comme fonction admissible dans l'équation de la conservation de la masse renormalisée. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$L_k(z) = \begin{cases} z \log z & \text{pour } 0 < z \leq k \\ z \log k + z \int_k^z \frac{T_k(s)}{s^2} & \text{pour } z > k \end{cases}$$

qui a la propriété suivante :

$$\forall z \in \mathbb{R}^+, L'_k(z)z - L_k(z) = T_k(z)$$

Maintenant, L_k est une fonction admissible. En effet, on peut écrire L_k sous la forme :

$$L_k(z) = \beta_k z + b_k(z) \text{ avec } \beta_k = \log k + \int_k^\infty \frac{T_k(s)}{s^2}$$

où b_k est une fonction admissible. Ainsi, on a :

$$\frac{\partial L_k(\varrho_\delta)}{\partial t} + \operatorname{div}(L_k(\varrho_\delta)u_\delta) + T_k(\varrho_\delta)\operatorname{div} u_\delta = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \mathbb{R}^3).$$

De plus, $(L_k(\varrho_\delta))$ est bornée dans $L^\infty(0, T_0; L^\gamma(\Omega))$. A partir de là, on peut montrer que :

$$L_k(\varrho_\delta) \rightarrow \overline{L_k(\varrho)} \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^\gamma(\Omega))$$

et donc, ceci renforce aussi la convergence en temps de $(\varrho_\delta \log \varrho_\delta)$:

$$\varrho_\delta \log \varrho_\delta \rightarrow \overline{\varrho \log \varrho} \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L_w^p(\Omega)), \text{ pour tout } p < \gamma.$$

De plus, pour tout $\phi_\delta \in \mathcal{D}([0, T_0] \times \Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_k(\varrho_\delta)(t)\phi_\delta(t) dx &= \int_{\Omega} L_k(\varrho^0)\phi_\delta(0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} L_k(\varrho_\delta) \left(\frac{\partial \phi_\delta}{\partial s} + u_\delta \cdot \nabla \phi_\delta \right) dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} T_k(\varrho_\delta)\operatorname{div} u_\delta \phi_\delta dx ds. \end{aligned}$$

Le flot X_δ est défini uniquement sur $\Omega_S(0)$. On peut le prolonger sur Ω en une fonction Y_δ de $H^1(0, T_0; H^3(\Omega))$ telle que, pour tout t fixé, $Y_\delta(t, \cdot)$ soit inversible de Ω sur Ω . Pour cela, on reprend l'opérateur \mathcal{P} introduit dans le **paragraphe 4.1** puis on définit :

$$Y_\delta(t, \cdot) = Id + \mathcal{P}(X_\delta(t, 0, \cdot) - Id) \text{ sur } \Omega$$

On note $Y_\delta^{-1}(t, \cdot)$ l'inverse. On prend maintenant ϕ_δ sous la forme :

$$\phi_\delta(t, x) = \psi(Y_\delta^{-1}(t, x))$$

où ψ est dans $\mathcal{D}(\Omega_F(0))$. Alors,

$$\frac{\partial \phi_\delta}{\partial s} + \tilde{u}_\delta \cdot \nabla \phi_\delta = 0$$

où \tilde{u}_δ est la vitesse eulérienne associée à Y_δ . On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_k(\varrho_\delta)(t)\phi_\delta(t) dx &= \int_{\Omega} L_k(\varrho^0)\psi dx + \int_0^t \int_{\Omega} L_k(\varrho_\delta) ((u_\delta - \tilde{u}_\delta) \cdot \nabla \phi_\delta) dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} T_k(\varrho_\delta)\operatorname{div} u_\delta \phi_\delta dx ds. \end{aligned} \tag{6.18}$$

De plus, puisque ϱ est une solution renormalisée, on a aussi :

$$\frac{\partial L_k(\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div}(L_k(\varrho)u) + T_k(\varrho)\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T_0) \times \mathbb{R}^3).$$

En prenant maintenant comme fonction-test :

$$\phi(t, x) = \psi(Y^{-1}(t, x))$$

où Y est la limite faible de Y_δ dans $H^1(0, T_0; H^3(\Omega))$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_k(\varrho)(t)\phi(t) dx &= \int_{\Omega} L_k(\varrho^0)\psi dx + \int_0^t \int_{\Omega} L_k(\varrho) ((u - \tilde{u}) \cdot \nabla \phi) dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} T_k(\varrho) \operatorname{div} u \phi dx ds. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Enfin, comme :

$$\phi_\delta \rightarrow \phi \text{ dans } \mathcal{C}(0, T_0; L^p(\Omega)) \text{ pour tout } p < \infty,$$

on peut passer à la limite en δ dans (6.18) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \overline{L_k(\varrho)}(t)\phi(t) dx &= \int_{\Omega} L_k(\varrho^0)\psi dx + \int_0^t \int_{\Omega} \overline{L_k(\varrho)} ((u - \tilde{u}) \cdot \nabla \phi) dx ds \\ &- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} T_k(\varrho_\delta) \operatorname{div} u_\delta \phi_\delta dx ds. \end{aligned}$$

Ainsi, en soustrayant (6.19) à cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho))(t)\phi_m(t) dx &= \int_0^t \int_{\Omega} (\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho)) ((u - \tilde{u}) \cdot \nabla \phi_m) dx ds \\ &+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} (T_k(\varrho_F) \operatorname{div} u - T_k(\varrho_{F,\delta}) \operatorname{div} u_\delta) \phi_m(s, x) dx ds. \end{aligned} \quad (6.20)$$

avec :

$$\phi_m(s, x) = \psi_m(Y^{-1}(s, x))$$

où (ψ_m) est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega_F(0))$ telle que :

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi_m \leq 1, |\nabla \psi_m| &\leq 2m, \forall x \in \Omega_F(0) \\ \psi_m &= 1 \text{ pour tout } x \in \Omega_F(0) \text{ tel que } d(x, \partial\Omega_F(0)) \geq \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\phi_m \rightarrow \chi_{\Omega_F(s)} \text{ dans } L^p((0, T_0) \times \Omega), \text{ pour tout } p < \infty,$$

on peut passer à la limite en m dans le second terme du membre de droite de (6.20) :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} (T_k(\varrho_F) \operatorname{div} u - T_k(\varrho_{F,\delta}) \operatorname{div} u_\delta) \phi_m(s, x) dx ds \\ \longrightarrow \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} T_k(\varrho_F) \operatorname{div} u dx ds - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} T_k(\varrho_{F,\delta}) \operatorname{div} u_\delta dx ds. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho)) ((u - \tilde{u}) \cdot \nabla \phi_m) dx ds = \\ \int_0^t \int_{\Omega_F(0)} (\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho))(s, Y(s, y)) (\nabla Y(s, y))^{-1} (u - \tilde{u})(s, Y(s, y)) \cdot \nabla \psi_m \det \nabla Y(s, y) dy ds \end{aligned}$$

Comme $(u - \tilde{u})(\cdot, Y(\cdot, y))$ est une fonction de $L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega_F(0)))$,

$$(u - \tilde{u})(\cdot, Y(\cdot, y))d(y, \partial\Omega_F(0))^{-1} \in L^2((0, T_0) \times \Omega_F(0)).$$

de plus, comme :

$$\nabla\psi_m(y)d(y, \partial\Omega_F(0)) \rightarrow 0 \text{ et } |\nabla\psi_m(y)|d(y, \partial\Omega_F(0)) \leq 2, \text{ p.p. } y \in \Omega_F(0),$$

on a :

$$\nabla\psi_m d(y, \partial\Omega_F(0)) \rightarrow 0 \text{ dans } L^p(\Omega_F(0)), \text{ pour tout } p < \infty.$$

Ceci permet de passer à la limite en m dans le premier terme du membre de droite de (6.20) :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left(\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho) \right) ((u - \tilde{u}) \cdot \nabla \phi_m) dx ds \rightarrow 0.$$

Finalement, l'équation (6.20) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F(t)} \left(\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho) \right) (t) dx &= \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} T_k(\varrho_F) \operatorname{div} u dx ds \\ &- \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} T_k(\varrho_{F,\delta}) \operatorname{div} u_\delta dx ds. \end{aligned}$$

Grâce au **lemme 6.2**, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} T_k(\varrho_{F,\delta}) \operatorname{div} u_\delta dx ds &= \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \overline{T_k(\varrho_F)} \operatorname{div} u dx ds \\ &+ \frac{a}{\lambda_F + 2\mu_F} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \varrho_{F,\delta}^\gamma T_k(\varrho_{F,\delta}) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \overline{\varrho_F^\gamma T_k(\varrho_F)} dx ds \right). \end{aligned}$$

Réutilisant l'inégalité (6.14), on voit ainsi que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} T_k(\varrho_{F,\delta}) \operatorname{div} u_\delta dx ds \geq \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \overline{T_k(\varrho_F)} \operatorname{div} u dx ds.$$

D'où :

$$\int_{\Omega_F(t)} \left(\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho) \right) (t) dx \leq \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} \left(T_k(\varrho_F) - \overline{T_k(\varrho_F)} \right) \operatorname{div} u dx ds.$$

Or, d'après l'estimation (6.13), $T_k(\varrho_F) - \overline{T_k(\varrho_F)}$ est bornée dans $L^2((0, T_0) \times \Omega)$ indépendamment de k . Puisque :

$$T_k(\varrho_F) \rightarrow \varrho_F \text{ et } \overline{T_k(\varrho_F)} \rightarrow \varrho_F \text{ dans } L^p((0, T_0) \times \Omega), \text{ pour tout } p < \gamma,$$

on a :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_F(t)} \left(\overline{L_k(\varrho)} - L_k(\varrho) \right) (t) dx \leq 0, \forall t \in [0, T_0]$$

et donc :

$$\int_{\Omega_F(t)} (\overline{\varrho \log \varrho} - \varrho \log \varrho)(t) dx \leq 0, \forall t \in [0, T_0].$$

En utilisant la convexité de $z \mapsto z \log(z)$, on en déduit finalement que :

$$\overline{\varrho \log \varrho}(t) = (\varrho \log \varrho)(t), \forall x \in \Omega_F(t), \forall t \in [0, T_0].$$

Ceci implique la convergence forte de la suite (ϱ_δ) dans $L^1(0, T_0; L^1(\Omega_F(t)))$ et comme (ϱ_δ) est borné dans $L^{\gamma+\alpha}(0, T_0; L^{\gamma+\alpha}(\Omega_F(t)))$ avec $\alpha > 0$, la suite (ϱ_δ) converge fort dans $L^\gamma(0, T_0; L^\gamma(\Omega_F(t)))$ vers ϱ . Ceci permet donc d'identifier la limite de $(\varrho_{F,\delta}^\gamma)$ et de terminer le passage à la limite en δ .

7 Conclusion

On va montrer qu'on peut prolonger la solution jusqu'au temps :

$$T_\alpha = \sup \{t > 0/d(t) > \alpha_1, g(t) > \alpha_2, X_S(t, 0, \cdot) \text{ injective}\}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ où α_1 et α_2 sont deux réels strictement positifs assez petits quelconques. Ceci donnera l'existence d'une solution sur $[0, T]$ où T est défini par (2.8) en utilisant la régularité de la solution. Si $T_0 < T_\alpha$ (ce qui est le cas pour α_1 et α_2 suffisamment petits), il faut donc prolonger la solution à partir du temps intermédiaire T_0 sur un intervalle de temps de longueur indépendant de T_0 . Pour cela, on repart de T_0 en considérant une nouvelle configuration initiale $\Omega_S(T_0)$ pour le domaine solide et $\Omega_F(T_0)$ pour le domaine fluide. Les équations du solide et du fluide restent inchangées puisqu'elles sont exprimées de manière eulérienne, seules les données initiales changent. Les données sont maintenant $\varrho_F(T_0)$ dans $L^\gamma(\Omega_F(T_0))$, $\varrho_S(T_0)$ dans $L^\infty(\Omega_S(T_0))$ et $u(T_0)$ dans $H_0^1(\Omega)^3$. Comme on a fait sur $[0, T_0]$, on régularise la donnée $\varrho(T_0)$ sur la partie fluide quand on résout le problème régularisé en ϵ . Les conditions portant sur le temps d'existence T_0 sont établies dans le **sous-paragraphe 4.1**. Il faut reprendre ces conditions pour construire une solution à partir du temps T_0 . Quand on repart de l'instant T_0 , la solution du problème approché en dimension finie satisfait :

$$\theta \int_{T_0}^T \|u_S^N(t, \cdot)\|_{H^3(\Omega_S^N(t))}^2 dt \leq 2E(T_0) \leq 2E_0. \quad (7.1)$$

Pour tout y dans $\Omega_S(T_0)$, le flot $X_S^N(t, T_0, \cdot)$ est solution de l'équation différentielle définie pour $t \geq T_0$ par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X_S^N(t, T_0, y) = u^N(t, X_S^N(t, T_0, y)) \\ X_S^N(T_0, T_0, y) = y. \end{cases} \quad (7.2)$$

L'estimation (7.1) donne une estimation de $X_S^N(t, T_0, \cdot)$ dans $H^3(\Omega_S(T_0))$ dépendant uniquement de θ et E_0 . On a alors la minoration suivante sur la distance entre le solide et la frontière $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} d(t) &\geq d(T_0) - \sup_{y \in \Omega_S(0)} \left| \int_{T_0}^t \frac{\partial X_S^N(s, T_0, y)}{\partial s} ds \right| \\ &\geq \alpha_1 - \bar{C}_1 \sqrt{t} \end{aligned}$$

où \bar{C}_1 dépend de E_0 , θ et de la constante d'injection de $H^2(\Omega_S(T_0))$ dans $L^\infty(\Omega_S(T_0))$. On montre facilement que cette constante d'injection est en fait indépendante de T_0 en se ramenant à l'injection de $H^2(\Omega_S(0))$ dans $L^\infty(\Omega_S(0))$ par le biais du flot $X(T_0, 0, \cdot)$ et dépend de E_0 , θ et α_2 . Ainsi sur un intervalle de temps de longueur strictement positive et dépendant uniquement de α , E_0 et θ , on a :

$$d(t) \geq \frac{\alpha_1}{2}.$$

Pour pouvoir reprendre la même construction, il faut aussi que :

$$\|\nabla \bar{Y}^N(t, \cdot) - Id\|_{L^\infty((0, T_0) \times \Omega)} \leq e_0$$

où e_0 est défini dans le **lemme 1.1** pour le domaine Ω et

$$\bar{Y}^N(t, \cdot) = Id + \bar{\mathcal{P}}(X_S^N(t, T_0, \cdot) - Id) \text{ sur } \Omega.$$

Maintenant, $\bar{\mathcal{P}}$ est un opérateur de prolongement $H^3(\Omega_S(T_0))$ dans $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On le définit à partir de \mathcal{P} par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} : H^3(\Omega_S(T_0)) &\mapsto H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ f &\mapsto \mathcal{P}(f \circ X_S(T_0, 0, \cdot)). \end{aligned}$$

Avec cette définition, on montre que : pour tout $f \in H^3(\Omega_S(T_0))$,

$$\|\bar{\mathcal{P}}(f)\|_{H^3(\Omega)} \leq C_{\bar{\mathcal{P}}} \|f\|_{H^3(\Omega_S(T_0))}$$

où $C_{\bar{\mathcal{P}}}$ dépend uniquement de α_2 , $C_{\mathcal{P}}$ et $\|X_S(T_0, 0, \cdot)\|_{H^3(\Omega_S(0))}$ et donc $C_{\bar{\mathcal{P}}}$ ne dépend que de α , θ et E_0 . On voit ainsi qu'on peut reprendre le même raisonnement pour prolonger la solution à partir du temps T_0 sur un intervalle de longueur strictement positive dépendant uniquement des données, du paramètre de régularisation θ et de α .

La régularité de la configuration de référence est maintenant plus faible : $\Omega_S(T_0)$ a la régularité du flot et est donc un ouvert de classe H^3 . On a besoin d'étendre le résultat de régularité donné par la **proposition 3** à des ouverts moins réguliers. Si on considère le problème énoncé dans le **théorème 1** sur l'ouvert $\Omega_F(T_0)$, on peut se ramener à l'aide du flot $Y(T_0, \cdot)$ qui est inversible sur Ω à l'ouvert $\Omega_F(0)$. On obtient alors un nouveau problème exprimé sur l'ouvert $\Omega_F(0)$ de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - \operatorname{div}(\tilde{B} \nabla \tilde{w}) + \tilde{c} \cdot \nabla \tilde{w} = \tilde{f} & \text{sur } (0, T) \times \Omega_F(0) \\ (\tilde{B} \nabla \tilde{w}) \cdot n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial \Omega_F(0) \\ \tilde{w} = \tilde{w}_0 & \text{sur } \Omega_F(0) \end{array} \right.$$

où \tilde{f} est un élément de $L^q((0, T) \times \Omega_F(0))$, \tilde{B} est une matrice symétrique de $H^1(0, T; W^{1,6}(\Omega_F(0)))$ coercive uniformément en temps et en espace et \tilde{c} est dans $H^1(0, T; W^{1,6}(\Omega_F(0)))$. On est donc toujours dans le cadre du **théorème 1**. Ceci permet donc de garder les mêmes résultats de régularité sur la densité fluide.

De cette manière, on voit qu'on peut prolonger la solution à partir du temps T_0 sur un intervalle de longueur strictement positive dépendant uniquement des données, du paramètre de régularisation θ et de α . Ceci permet d'itérer le raisonnement jusqu'au temps T_α et donne le résultat d'existence annoncé par le **théorème 2**.

Bibliographie

- [1] H. AMANN, *Linear and quasilinear parabolic problems, Vol. 1, Abstract Linear Theory*, Birckhäuser Verlag, Basel (1995).
- [2] J. A. BELLO, *L^r regularity for the Stokes and Navier-Stokes Problems*, Ann. Math. Pura Appl., **170** No 4 (1996), 187-206.
- [3] J.A. BELLO, E. FERNANDEZ-CARA, J. LEMOINE, J. SIMON, *The differentiability of the drag with respect to the variations of a Lipschitz domain in a Navier-Stokes flow*, SIAM J. Control Optim., **35** No 2 (1997), 626-640.
- [4] M. BOULAKIA, *Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, à paraître.
- [5] M. BOULAKIA, *Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid*, soumis.
- [6] P.G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1988).
- [7] M. CROUZEIX, A.L. MIGNOT, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, seconde édition (1989).
- [8] B. DESJARDINS, M.J. ESTEBAN, *On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models*, Comm. Partial Differential Equations, **25** No 7-8 (2000), 1399-1413.
- [9] R.J. DI PERNA, P.L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., **98** No 3 (1989), 511-547.
- [10] E. FEIREISL, *On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., **167** No 4 (2003), 281-308.
- [11] E. FEIREISL, A. NOVOTNÝ, H. PETZELTOVÀ, *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech., **3** No 4 (2001), 358-392.
- [12] F. FLORI, P. ORENGA, *On a nonlinear fluid-structure interaction problem defined on a domain depending on time*, Nonlinear Anal., **38** No 5 (1999), 549-569.
- [13] F. FLORI, P. ORENGA, *Fluid-structure interaction : analysis of a 3-D compressible model*, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire, **17** No 6 (2000), 753-777.
- [14] G.P. GALDI, C.G. SIMADER, H. SOHR, *On the Stokes problem in Lipschitz domains*, Ann. Mat. Pura Appl., **167** No 4 (1994), 147-163.

- [15] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [16] O.A. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URALTSEVA, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs. 23. Providence, RI : American Mathematical Society (1988).
- [17] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes non linéaires*, Dunod, Paris (1969).
- [18] P.L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 2, Compressible models*, Oxford Science Publications (1996).
- [19] P.L. LIONS, *Bornes sur la densité pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math., **328** No 8 (1999), 659-662.
- [20] F. MURAT, J. SIMON, *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*, Rapport du L.A. 189, Univ. Paris VI (1974).
- [21] F. MURAT, J. SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Rapport du L.A. 189, Univ. Paris VI (1976).
- [22] J. SIMON, *Domain variation for drag in Stokes flow*, Control theory of distributed parameter systems and applications (Shanghai, 1990), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **159**, Springer, Berlin (1991) 28-42.
- [23] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing, Third Revised Edition, 2001.

