



HAL
open science

Applications de la théorie de Galois différentielle aux équations différentielles linéaires d'ordre 4

Philippe Gaillard

► **To cite this version:**

Philippe Gaillard. Applications de la théorie de Galois différentielle aux équations différentielles linéaires d'ordre 4. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2004. Français. NNT: . tel-00008234

HAL Id: tel-00008234

<https://theses.hal.science/tel-00008234>

Submitted on 24 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3057

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE
RENNES 1

Mention Mathématiques et Applications

par

Philippe GAILLARD

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*Applications de la théorie de Galois différentielle aux
équations différentielles linéaires d'ordre 4.*

Soutenue le 25 Octobre 2004 devant la commission d'examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	Frits	BEUKERS	Rapporteur
M.	Manuel	BRONSTEIN	Rapporteur
M.	Louis	MAHÉ	Président
M.	Michael F.	SINGER	Directeur
M.	Felix	ULMER	Directeur

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Felix Ulmer. Après m'avoir initié aux délices de la théorie de Galois différentielle en DEA (qui chantera la beauté jubilatoire de la preuve de la normalité des extensions de corps de Picard-Vessiot, ces plaisirs exquis et rares qu'elle recèle?), il sut me faire découvrir ses multiples aspects et guider mes travaux tout au long de mes années de thèse. C'est aussi grâce à lui que je dois d'avoir découvert les aspects intellectuels et humains de la recherche mathématique. Son soutien constant, son dynamisme sans faille et sa sollicitude presque paternelle me furent si précieux que cette thèse n'aurait pu aboutir sans son insistance de tous les instants.

J'adresse aussi mes remerciements les plus chaleureux à mon codirecteur de thèse Michael F. Singer. Les occasions régulières que j'eus de le rencontrer me permirent de prendre du recul sur mes recherches avant d'aborder de nouvelles perspectives motivées par ses riches analyses. Son aide me fut très précieuse sur des points essentiels de mon travail.

J'exprime ici toute ma gratitude à mes rapporteurs Frits Beukers et Manuel Bronstein. Dès la conférence de Bedlewo, Frits Beukers me fit bénéficier de ses analyses et de la richesse de ses explications et questions sur les aspects plus théoriques de mon travail. Par ses commentaires sur ma thèse, Manuel Bronstein sut enrichir ma perception des enjeux algorithmiques de mon travail et m'ouvrir de nouvelles perspectives pour l'approfondissement de celui-ci. Je tiens aussi à remercier spécialement MM Beukers et Bronstein pour leur présence à ma soutenance en dépit de leur éloignement géographique.

Louis Mahé m'a fait l'honneur d'accepter de présider mon jury et je tiens ici tout particulièrement à le remercier de l'intérêt qu'il a ainsi manifesté à mon travail.

Travailler avec elle contribua beaucoup à ma motivation et elle m'accepta avec bienveillance dans son bureau. Delphine se sera reconnue et je la remercie ici pour son suivi attentif de l'avancée de ma thèse et pour l'exemple d'investissement total dans le travail qu'elle a toujours représenté pour moi.

Ces quelques années de thèse m'ont appris le poids des contacts humains dans le travail scientifique et je ne manquerai donc pas de remercier toutes celles et ceux qui m'enrichirent de leurs conseils et encouragements. Je pense à Mme Michèle Loday et aux membres du groupe de travail Rennes-Angers consacré à la théorie de Galois différentielle, à Jean-Pierre Ramis, à Marius van der Put, à Mme Claudine Mitschi, à Jan Draisma et au forum GAP, à Jacques-Arthur Weil, à Gilles Villard et à Axelle.

Je souhaite aussi faire part de mes remerciements aux équipes informatiques de l'IRMAR et de l'UMS MÉDICIS. Sans elles, cette thèse, qui se fonde sur de nombreux et exigeants calculs, n'aurait jamais pu voir le jour. Je n'oublie pas non plus Mme Christine Noot-Huyghe qui se dévoua pour rendre mon portable opérationnel.

Les Hommes ne sont pas des êtres spirituels et les soucis du quotidien qui en découlent feraient de notre vie un enfer si leur prévenance et leur disponibilité (un spécialiste ès reliure de thèse le vendredi en fin d'après-midi vous parle) ne nous sauvaient. C'est donc à nos dévouées secrétaires que j'adresse ici mes remerciements les plus reconnaissants, ainsi qu'aux femmes de ménage de l'UFR.

Je voudrais aussi remercier tous les enseignants qui m'ont eu pour élève ou étudiant depuis l'école primaire jusqu'à l'université. C'est à ma famille et à eux que je dois le goût de l'étude et de l'abstraction qui m'ont conduit sur les voies de la théorie de Galois différentielle et de ma thèse. L'effort de persévérance que celle-ci m'a demandé doit beaucoup à Felix Ulmer et à mes parents, mais aussi à Michel Pierre que je souhaite ici remercier pour ses conseils avisés.

Parallèlement à l'initiation à la recherche, ces années de thèse furent aussi pour moi l'occasion de découvrir le métier de l'enseignement, ses méthodes et ses joies. Pour cette découverte, mes remerciements vont naturellement à Mme Marie-Pierre Lebaud, à Jacques Camus (que je remercie tout particulièrement pour l'aide dévouée qu'il m'apporte dans de nombreuses démarches) et à mon tuteur pédagogique Raymond Rolland.

Étant de l'école de ceux qui travaillent toujours mieux à leur bureau que chez eux, il m'est naturellement important de partager mon espace de travail en bonne compagnie et je profite de ces quelques lignes pour saluer ceux qui me supportèrent durant ces années de thèse : Delphine, Axelle, Olivier, Gabor, Daniel, David et ceux qui me supportent maintenant : Sébastien, Guillaume et Olivier. Plus généralement, l'ambiance toujours sympathique de l'IRMAR et les amitiés et contacts qu'un travail partagé ne manquent pas de susciter (je crains trop les défaillances de ma mémoire pour me lancer dans la folle aventure d'une liste qui ne saurait être incomplète!) furent pour moi un soutien aussi constant que nécessaire tout au long de ces années.

Je ne citerai pas ici les très nombreux amis, connaissances et soutiens que j'ai rencontrés lors de mes multiples activités et occupations "extra-mathématiques". Que ce paragraphe, quoique modeste, soit un gage de toute ma reconnaissance et un témoignage de mon amitié.

Ceux à qui je dois la vie (condition sine qua non de soutenance à ma connaissance!) méritent enfin toute ma reconnaissance et toute ma déférence. C'est donc d'abord à eux que je dédie cette thèse et tous mes travaux.

Table des matières

1	Introduction et motivation	8
2	Théorie de Galois différentielle, semi-invariants et classification des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$	11
2.1	Introduction à la théorie de Galois différentielle	11
2.2	Représentations de groupes et semi-invariants	15
2.2.1	Notions sur les caractères	15
2.2.2	Semi-invariants et théorème de Molien	16
2.3	Solutions Liouvilliennes	21
2.4	Puissance symétrique d'une équation différentielle	23
2.5	Classification des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$	26
2.5.1	Groupes imprimitifs non monomiaux	28
2.5.2	Groupes imprimitifs monomiaux d'image $V = \langle a, b \rangle$ dans S_4	30
2.5.3	Groupes imprimitifs monomiaux d'image $C = \langle c \rangle$ dans S_4	34
2.5.4	Groupes imprimitifs monomiaux d'image $D = \langle a, c \rangle$ dans S_4	37
2.5.5	Groupes imprimitifs monomiaux d'image A_4 dans S_4	39
2.5.6	Groupes imprimitifs monomiaux d'image S_4 dans S_4	40
2.5.7	Groupes primitifs	40
3	(Semi-)invariants des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$	42
3.1	Groupes (finis) imprimitifs non monomiaux	42
3.1.1	Introduction	42
3.1.2	Groupes monomiaux	43
3.1.3	Groupes imprimitifs non monomiaux	45
3.1.4	Commentaires	51
3.2	(Semi-)invariants de degré 2 et 4 des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$: informations et notations communes à tous les groupes	52
3.3	Cas de la projection $T = V = \langle a, b \rangle$	54
3.3.1	Résultats pour la liste \mathcal{F}_1 de D.L. Flannery	54
3.3.2	Résultats pour la liste \mathcal{F}_2 de D.L. Flannery	60
3.3.3	Résultats pour la liste \mathcal{F}_3 de D.L. Flannery	65

3.3.4	Résultats pour la liste \mathcal{F}_4	75
3.4	Cas de la projection $T = C = \langle c \rangle$	77
3.4.1	Famille \mathcal{C}_1 de D.L. Flannery	77
3.4.2	Famille \mathcal{C}_2 de D.L. Flannery	78
3.5	Cas de la projection $T = D = \langle a, c \rangle$	80
3.6	Cas de la projection $T = A_4$	83
3.7	Cas de la projection $T = S_4$	84
3.8	Cas des groupes primitifs	84
3.9	Retour sur les groupes imprimitifs non monomiaux	85
3.10	Conséquences : informations sur le groupe et les solutions obtenues à partir de ces tables.	86
3.10.1	Informations sur le groupe à partir de ses semi-invariants de degré 2 et 4.	86
3.10.2	Application à la recherche de semi-invariants (de degré 4) produits de forme linéaires	95
4	L'ordre de la puissance symétrique quatrième d'une équation différentielle	98
4.1	Puissance symétrique quatrième d'ordre 34	99
4.2	Puissance symétrique quatrième d'ordre inférieur ou égal à 33	101
5	Des exemples	104
5.1	Le groupe $G = \langle a, b, u_1, v_1 \rangle = G_{v_1, 27}(1, 1, 0)$	104
5.2	Un exemple d'équation de groupe $SO(4, \mathbb{C})$	111
5.2.1	Modules de Chevalley et paires régulières de générateurs : l'exemple de $SO(4, \mathbb{C})$	111
5.2.2	A la recherche d'une équation	114
A	Tables complètes pour les semi-invariants de degré 2 et 4 des groupes monomiaux.	117
A.1	Notation des principaux polynômes (semi-)invariants de degré 2 et 4	118
A.2	Tables pour $T = V = \langle a, b \rangle$	123
A.2.1	Tables pour la famille \mathcal{F}_1	123
A.2.2	Tables pour la famille \mathcal{F}_2	130
A.2.3	Tables pour la famille \mathcal{F}_3	137
A.2.4	Table pour la famille \mathcal{F}_4	148
A.3	Tables pour $T = C = \langle c \rangle$	149
A.3.1	Tables pour la famille \mathcal{C}_1	149
A.3.2	Tables pour la famille \mathcal{C}_2	150
A.4	Tables pour $T = D = \langle a, c \rangle$	152
A.5	Tables pour $T = A_4$	157
A.6	Tables pour $T = S_4$	158

B Programmes de calcul des semi-invariants d'un groupe.	160
C Version originale de l'article [8] traduit en 3.1	164
C.0.1 Introduction	164
C.0.2 Monomial groups	165
C.0.3 Imprimitif non monomial groups	167
C.0.4 Final remarks	173

Chapitre 1

Introduction et motivation

Pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 et 3, des algorithmes de résolution exacte avec des temps de calcul réalistes existent, se fondant sur une étude préalable précise des groupes apparaissant comme groupes de Galois différentiels de ces équations. Plusieurs études de l'ordre 4 ont déjà eu lieu (travaux de S. Hessinger, O. Cormier, A. Person, J. Hartmann), mais chacune de ces contributions ne concernait qu'un aspect particulier de la classification des groupes apparaissant comme groupes de Galois différentiels. Dans cette thèse, on complète la classification en considérant le cas imprimitif-monomial, ce qui permet d'avoir une vision complète. La nouveauté par rapport aux ordres plus petits est l'apparition de groupes imprimitifs non monomiaux et un plus grand nombre de groupes monomiaux lié au nombre croissant de groupes transitifs. Plus précisément, dans sa thèse ([29],[30]), S. Hessinger classe les sous-groupes algébriques de $SL(4, \mathbb{C})$ à conjugaison près, sauf pour les groupes finis monomiaux et pour les groupes primitifs finis (dont elle reprend la classification à projection près de H.F. Blichfeldt). Ces derniers groupes ont été classifiés à conjugaison près par O. Cormier dans sa thèse ([18]). La classification des sous-groupes monomiaux finis de $GL(4, \mathbb{C})$ (et donc a fortiori de $SL(4, \mathbb{C})$) est l'oeuvre de D.L. Flannery ([23],[24] en prenant en compte les corrections mentionnées dans [25]). Dans le deuxième chapitre, on reprend ces listes en veillant à la cohérence de leurs notations. Le travail présenté dans cette thèse repose sur l'exploitation de ces listes. M.F. Singer et F. Ulmer ([58]) ont mis en évidence le lien existant entre les solutions liouvilliennes d'une équation différentielle et les (semi-)invariants de son groupe de Galois différentiel. En particulier, le groupe et ses semi-invariants permettent de connaître le degré de la dérivée logarithmique d'une solution. Avec D. Boucher et F. Ulmer, nous avons exploité ce résultat ainsi que la liste des groupes imprimitifs non monomiaux finis unimodulaires de degré 4 due à H.F. Blichfeldt ([6]) afin de déterminer des bornes optimales pour le degré algébrique de la dérivée logarithmique d'une solution d'une équation ayant un de ces groupes pour groupe de Galois différentiel. Ceci a fait l'objet d'une publication dans les actes de la conférence ISSAC 2003 ([8]) qui est reprise (et intégrée) dans le cha-

pitre 3 de cette thèse. L'étude systématique des (semi-)invariants de degré 2 et 4 pour tous les sous-groupes algébriques de $SL(4, \mathbb{C})$ a permis en particulier d'établir des résultats sur le groupe à partir de la connaissance de ses seuls (semi-)invariants de degré 2 et 4 (comme des critères de monomialité par exemple). Par ailleurs, d'autres résultats donnent des informations complémentaires permettant de trouver des (semi-)invariants produits de formes linéaires quand des propriétés du groupe (comme sa monomialité) sont déjà connues.

Ceci permet d'élaborer une "stratégie" (théorème 3.10.1, p.86) qui vise, à partir d'une équation, à obtenir des informations permettant de mieux connaître son groupe et d'en chercher des solutions liouvilliennes plus efficacement.

Voici les grandes lignes du plan de cette thèse :

- dans le chapitre 2 se trouve un rappel des principales notions utilisées par la suite en théorie de Galois différentielle et sur les (semi-)invariants. La classification complète des sous-groupes algébriques de $SL(4, \mathbb{C})$ y est aussi décrite.
- l'article [8] sus-mentionné introduit le chapitre 3. Celui-ci continue avec l'étude systématique des (semi-)invariants de degré 2 et 4 des sous-groupes algébriques de $SL(4, \mathbb{C})$ (liste des dimensions des espaces de semi-invariants et de leurs ordres). Pour les groupes unimodulaires finis monomiaux, on étudie les 229 familles infinies de tels groupes en reprenant la méthode de recherche de semi-invariants mise en oeuvre dans [8]. On procède de même pour les sous-groupes unimodulaires infinis et on peut calculer directement les (semi-)invariants des 57 groupes primitifs finis. Ce chapitre se termine par un résultat donnant une stratégie permettant d'obtenir des informations sur le groupe d'une équation différentielle donnée à partir des informations sur les semi-invariants de degré 2 et 4 de ce groupe que l'équation permet d'obtenir. Les groupes de certaines équations peuvent être déterminés par cette méthode ; un exemple est donné dans le chapitre 5.
- dans le chapitre 4, on s'intéresse au degré de la puissance symétrique quatrième d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4 et plus spécialement aux informations que peut apporter une chute de celui-ci. Le cas d'une chute de degré de 1 est traité à part, tandis qu'un théorème de M.F. Singer permet de décrire les situations de plus grande chute de degré.
- le chapitre 5 décrit quelques exemples. On y trouve tout d'abord un exemple d'équation ayant un groupe fini donné pour groupe de Galois différentiel construite par L. Schmidt-Thieme à partir d'un polynôme donné par G. Malle et B.H. Matzat ayant ce groupe pour groupe de Galois (la stratégie décrite dans le chapitre 3 s'applique à cette équation et permet d'en déterminer le groupe). Ce chapitre présente ensuite un exemple d'équation ayant pour groupe de Galois différentiel $SO(4, \mathbb{C})$, construite à l'aide de la méthode décrite par C. Mitschi et M.F. Singer dans [42].
- en annexe, on trouvera la liste des (semi-)invariants des sous-groupes monomiaux de $SL(4, \mathbb{C})$ (à partir de laquelle les tables du chapitre 3 ont été

réalisées).

Chapitre 2

Théorie de Galois différentielle, semi-invariants et classification des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$

2.1 Introduction à la théorie de Galois différentielle

Dans cette partie, on introduira les notions de base de la théorie de Galois différentielle, ainsi que les notations utilisées par la suite. Pour un exposé approfondi de cette théorie et les démonstrations des résultats qui seront rappelés ici, le lecteur pourra se référer au livre de M. van der Put et M.F. Singer consacré à ce sujet ([46]) ou à celui de I. Kaplansky ([37]). Dans cette thèse, les corps seront toujours supposés de caractéristique nulle.

Définition 2.1.1 *Soit k un corps. Une application $\delta : k \rightarrow k$ est appelée une dérivation si $\forall a, b \in k, \delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ et $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. On notera $a' = \delta(a)$. Un corps muni d'une dérivation est appelé un corps différentiel.*

Si k est un corps différentiel, $\{c \in k \mid c' = 0\}$ est un sous-corps de k noté C_k (ou C lorsque cela ne prête pas à confusion). Il est appelé corps des constantes de k . Soit (k, δ) un corps différentiel. Une extension de corps différentiels de (k, δ) est un corps différentiel (K, Δ) tel que K contienne k et que la restriction de Δ à k soit δ .

Etant donné un corps différentiel k muni d'une dérivation δ , on note, pour $a \in k$, $\delta^m(a) = a^{(m)}, a^{(1)} = a'$... Si K est une extension de corps différentiels de k et S un sous-ensemble de K , on note $k \langle S \rangle$ le plus petit sous-corps différentiel de K contenant k et S . Il s'agit du corps engendré sur k par les éléments de S et leurs dérivées.

Exemple 2.1.2 *L'extension algébrique $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(y)$ avec $y^4 - x = 0$ est aussi une extension différentielle avec $y' = \frac{1}{4y^3} \in \mathbb{Q}(y)$ (que l'on déduit du polynôme*

minimal de y) en considérant la dérivation ordinaire sur $\mathbb{Q}(x)$. Cette égalité nous dit aussi que y est solution de $y' - \frac{1}{4x}y = 0$.

Définition 2.1.3 Soit (k, δ) un corps différentiel. L'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans k est l'anneau $k[\delta]$ des polynômes non commutatifs en la variable δ à coefficients dans k muni de la relation : $\forall a \in k, \delta a = a\delta + a'$.

La notation $L(y) = 0$ pour une équation différentielle désignera une équation différentielle linéaire homogène ordinaire d'ordre n : $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ à coefficients dans un corps différentiel k . On peut lui associer un opérateur différentiel $\delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + \dots + a_0Id$ et un système différentiel $Y' = AY$ où A est la matrice compagnon de L :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Les solutions de $L(y) = 0$ forment un espace vectoriel sur C_k de dimension au plus n ([46, Lemme 1.10]). Un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$ est un ensemble $\{y_1, \dots, y_n\}$ solutions de $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ linéairement indépendantes sur C_k , ce qui équivaut ([46, Lemme 1.12]) à dire que le wronskien $wr(y_1, \dots, y_n)$ de y_1, \dots, y_n n'est pas nul, en notant $wr(y_1, \dots, y_n) = \det(W)$ avec $W = (y_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1}$. On peut calculer le wronskien en remarquant qu'il est solution de l'équation différentielle $w' + a_{n-1}w = 0$ ([37, Chap VI, Sec. 24, Lemme 6.3]).

Définition 2.1.4 Soit k un corps différentiel et $L(y) = 0$ une équation différentielle d'ordre n à coefficients dans k .

1. On appelle extension de Picard-Vessiot de k associée à $L(y) = 0$ une extension de corps différentiels K de k telle que :
 - $K = k \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ avec $\{y_1, \dots, y_n\}$ un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$
 - $C_K = C_k$.
2. Soit (K_1, Δ_1) et (K_2, Δ_2) deux extensions de corps différentiels de (k, δ) . Un k -morphisme différentiel ϕ de K_1 vers K_2 est un morphisme de corps ϕ de K_1 vers K_2 laissant k fixe et commutant avec la dérivation (i.e. $\forall a \in K_1, \phi(\Delta_1(a)) = \Delta_2(\phi(a))$).
3. Le groupe de Galois différentiel $\mathcal{G}(K|k)$ d'une extension de corps différentiels K de k est le groupe des k -automorphismes différentiels de K .

Exemple 2.1.5 *L'extension différentielle $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(y)$ définie dans l'exemple 2.1.2 est une extension de Picard-Vessiot associée à l'équation différentielle $y(x)' - \frac{1}{4x}y(x) = 0$.*

Si C_k est algébriquement clos, on peut montrer ([46, partie 1.3]) qu'il existe pour toute équation différentielle $L(y) = 0$ à coefficients dans k une extension de Picard-Vessiot qui lui est associée. De plus, cette extension est unique à k -isomorphisme différentiel près. On appellera groupe de Galois différentiel de $L(y) = 0$ le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot de k associée à $L(y) = 0$. Dorénavant, tous les corps différentiels seront supposés de corps des constantes algébriquement clos (de caractéristique nulle). On remarque que le groupe de Galois différentiel est un sous-groupe du groupe de Galois et on a par ailleurs le lien suivant entre théories de Galois classique et différentielle :

Proposition 2.1.6 ([64, Théorème 4.7],[38]) *Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle à coefficients dans k . Alors, le groupe $\mathcal{G}(L)$ est fini si et seulement si toutes les solutions de $L(y) = 0$ sont algébriques sur k . De plus, dans ce cas, les groupes de Galois classique et différentiel coïncident.*

On va maintenant introduire une représentation linéaire du groupe de Galois différentiel d'une équation. Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle à coefficients dans k de corps des constantes C . Soit K une extension de Picard-Vessiot de k associée à $L(y) = 0$ et $V = \text{Sol}(L) = \{y \in K | L(y) = 0\}$ dont on choisit une C -base y_1, \dots, y_n . Pour $\sigma \in \mathcal{G}(L)$ et $v \in V$, on a $L(\sigma(v)) = \sigma(L(v)) = 0$, donc pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(y_i) = \sum_{j=1}^n c_{i,j} y_j$ avec $c_{i,j} \in C$. L'identification $\sigma \mapsto (c_{i,j})$ donne alors une représentation fidèle de $\mathcal{G}(L)$ comme sous-groupe de $GL(n, C)$.

Exemple 2.1.7 *Le groupe de Galois différentiel (qui coïncide ici avec le groupe de Galois algébrique) de $y(x)' - \frac{1}{4x}y(x) = 0$ (équation apparaissant dans l'exemple 2.1.2) est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et son image dans $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$ est $\langle i \rangle$.*

Théorème 2.1.8 *Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle d'ordre n à coefficients dans k de corps des constantes C . Soit K une extension de Picard-Vessiot de k associée à $L(y) = 0$. Soit G son groupe de Galois différentiel.*

(i) *(algébricité du groupe de Galois ; [46, Théorème 1.27], [37, Théorème 5.5]) L'image de G dans $GL(n, C)$ est un groupe algébrique linéaire.*

(ii) *(correspondance de Galois ; [46, Proposition 1.34], [37, Théorème 5.9]) On note \mathcal{S} l'ensemble des sous-groupes de G fermés (au sens de la topologie de Zariski) et \mathcal{K} l'ensemble des sous-corps différentiels de K contenant k .*

– *les ensembles \mathcal{S} et \mathcal{K} sont en bijection. Plus précisément, les applications $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{K}, H \mapsto K^H = \{y \in K | \forall h \in H, h(y) = y\}$ et $\beta : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}, M \mapsto \text{Gal}(K|M)$ sont inverses l'une de l'autre.*

En particulier, on a $k = K^G = \{y \in K | \forall h \in G, h(y) = y\}$ (normalité du groupe de Galois).

- Un sous-groupe $H \in \mathcal{S}$ est distingué dans G si et seulement si $M = L^H$ est invariant (comme ensemble) sous l'action de G . Dans ce cas, la restriction canonique $G \rightarrow \text{Gal}(M|k)$ est surjective de noyau H . De plus, M est l'extension de Picard-Vessiot d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans k .

Remarque 2.1.9 ([37, Chap. VI, Sec. 24]) Soit une équation différentielle linéaire $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ de groupe de Galois $G \subset GL(n, \mathbb{C})$. Si $G \subset SL(n, \mathbb{C})$, l'équation est dite unimodulaire (de même que le groupe). Sinon, on peut la rendre unimodulaire en effectuant le changement de variables suivant : $y = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{n} z} z$. La nouvelle équation en z sera alors unimodulaire.

On rappelle maintenant la notion d'irréductibilité.

Définition 2.1.10 Soit (k, δ) un corps différentiel. Un opérateur différentiel $L \in k[\delta]$ est dit réductible sur k s'il existe deux opérateurs différentiels $L_1, L_2 \in k[\delta]$ tels que $L = L_1L_2$ avec $\text{ord}(L_1), \text{ord}(L_2) < \text{ord}(L)$. Dans le cas contraire, il est dit irréductible. Une équation différentielle linéaire est dite (ir)réductible si son opérateur différentiel associé l'est.

Exemple 2.1.11 Avec $\mathbb{C}(x)$ muni de la dérivation ordinaire, l'opérateur δ^2 est réductible car on peut l'écrire de la manière suivante : $\delta^2 = \delta\delta = \left(\delta + \frac{1}{x+a}\right) \left(\delta - \frac{1}{x+a}\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$. On remarque sur cet exemple qu'il n'y a pas unicité de la décomposition des opérateurs réductibles. On peut établir un résultat plus faible d'unicité ([46, p. 58]).

On déduit de [46, Corollaire 2.35] le résultat suivant.

Proposition 2.1.12 Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans un corps différentiel k . Soit K l'extension de Picard-Vessiot correspondante et G son groupe de Galois différentiel. On a équivalence des propriétés suivantes :

1. le module différentiel $\mathcal{M}_L \simeq k[\delta]/k[\delta]L$ contient un sous-module propre non nul.
2. l'opérateur différentiel L est réductible.
3. l'espace des solutions $V \subset K^n$ de $L(y) = 0$ est un G -module réductible.

Au sujet de la factorisation d'opérateurs différentiels, on peut consulter la section 4.2 de [46] ([2], [11], [54] et [31] dont les méthodes sont implantées dans Maple).

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}[x]$: $L(y) = a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_0 y(x) = 0$. En un point $c \in \mathbb{C}$, on s'intéresse aux solutions de cette équation de la forme $(x-c)^\rho \sum_{j \geq 0} c_j (x-c)^j$. On écrit alors les

coefficients a_i dans la base des $(x - c)^j (j \geq 0)$ et on remplace y par la forme susmentionnée dans l'équation pour chercher les valeurs possibles de ρ . On trouve alors une série de Laurent en $x - c$: le coefficient de plus petit degré de cette série est un polynôme $I(\rho)$.

Définition 2.1.13 *Un point c est dit singulier s'il est une racine de a_n et ordinaire sinon. On appelle équation indicielle au point c l'équation $I(\rho) = 0$ et exposants de L en c les racines de $I(\rho)$.*

Si c est un point ordinaire de L , ses exposants sont $0, 1, \dots, n - 1$. Pour étudier le point à l'infini, on effectue le changement de variables $x = \frac{1}{t}$ (et $\frac{d}{dx} = -t^2 \frac{d}{dt}$) et on étudie cette équation en 0 (autrement dit, l'équation indicielle en l'infini de L est l'équation indicielle en 0 de cette nouvelle équation).

Définition 2.1.14 *Un point c (éventuellement infini) est dit régulier si l'équation indicielle à ce point est de degré n et irrégulier sinon. Une singularité c est dite apparente si l'équation $L(y) = 0$ admet n solutions indépendantes analytiques en c . Une équation $L(y) = 0$ est dite fuchsienne si toutes ses singularités sont des points singuliers réguliers.*

Exemple 2.1.15 *Considérons l'équation suivante (donnée par L. Schmidt-Thieme dans [49, p.87]) :*

$$\begin{aligned} L(y) = & y(t)^{(4)} + 3 \frac{550t^8 - 1849t^6 + 865t^4 - 16}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)t} y(t)^{(3)} \\ & + \frac{3}{4} \frac{8360t^{12} - 54358t^{10} + 101761t^8 - 61267t^6 + 8884t^4 + 4784t^2 - 64}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)^2(t+1)^2(t-1)^2(t-2)^2t^2} y(t)^{(2)} \\ & + \frac{3}{4} \frac{7040t^{10} - 35162t^8 + 42229t^6 - 14924t^4 - 4756t^2 + 848}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)^2(t+1)^2(t-1)^2(t-2)^2t} y'(t) \\ & + \frac{3}{16} \frac{1320t^8 - 5620t^6 + 1758t^4 - 5031t^2 + 148}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)^2(t+1)^2(t-1)^2(t-2)^2t^2} y(t) = 0 \end{aligned}$$

En 0 , on trouve l'équation indicielle $t^4 - 3t^3 + \frac{11}{4}t^2 - \frac{3}{4}t = 0$. Ceci nous donne les exposants de l'équation en 0 qui sont $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Cette équation est fuchsienne.

2.2 Représentations de groupes et semi-invariants

2.2.1 Notions sur les caractères

Dans cette partie, on rappelle brièvement ce que sont une représentation de groupe et un caractère (en suivant le livre [36] de I. Martin Isaacs) puis on définit la puissance symétrique d'un caractère.

Par C et G , on désignera respectivement un corps (de caractéristique nulle) et un groupe fini. Tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie et toutes les algèbres aussi unitaires.

Définition 2.2.1 Soit A une C -algèbre et $n \in \mathbb{N}^*$. On appellera représentation de A un morphisme d'algèbres de A dans $\text{Mat}(n, C)$. L'entier n est le degré de la représentation. Deux représentations α, β de degré n seront dites équivalentes s'il existe une matrice $P \in \text{Gl}(n, C)$ telle que : $\forall a \in A, \alpha(a) = P^{-1}\beta(a)P$.

On appellera représentation de G sur C un morphisme de groupes de G dans $\text{Gl}(n, C)$. Soit α une telle représentation, on appellera caractère associé à α la fonction $G \rightarrow C, g \mapsto \text{Tr}(\alpha(a))$ où Tr désigne la trace. L'entier n est le degré du caractère. Si V désigne un C -espace vectoriel, une représentation de G dans V est un morphisme de groupes de G dans $\text{Gl}(V)$. On définit comme ci-dessus l'équivalence entre représentations.

On notera $C[G]$ l'algèbre du groupe G , c'est-à-dire $\{\sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in C\}$ muni de sa structure naturelle de C -algèbre. Il est équivalent d'étudier les représentations de G sur C et les $C[G]$ -modules et deux $C[G]$ -modules V et W sont isomorphes si et seulement si leurs représentations associées sont équivalentes. De plus, deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractère.

On considère une représentation de G dans un C -espace vectoriel V de caractère χ . Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on en déduit une représentation de G dans la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de V , $S^m(V)$, puisque G agit sur $V^{\otimes m}$ par $g. \bigotimes_{i=1}^m v_i = \bigotimes_{i=1}^m g.v_i$ pour $v_i \in V$ ($i = 1, \dots, m$) et que cette action passe au quotient. Le caractère de cette représentation sera appelé la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de χ et noté $\chi^{\otimes m}$ ([44]).

2.2.2 Semi-invariants et théorème de Molien

On introduit la notion de semi-invariant ou invariant relatif polynômial via une approche calculatoire ([59],[61]).

On se donne un groupe fini G , un corps¹ C , un C -espace vectoriel de dimension finie V et une représentation ρ de G dans V .

On appelle algèbre des fonctions polynômiales sur V l'algèbre symétrique sur le dual V^* de V et on la note $C[V]$. Plus concrètement, si $n = \dim_C(V)$, on note x_1, \dots, x_n une base de $V^* = \text{Hom}_C(V, C)$ et on a

$$C[V] = C[x_1, \dots, x_n] = C \oplus V^* \oplus S^2(V^*) \oplus S^3(V^*) \oplus \dots$$

où $S^m(V^*)$ désigne la $m^{\text{ième}}$ puissance symétrique de V^* qui consiste en les polynômes homogènes de degré m en x_1, \dots, x_n . On rappelle que $S^m(V^*)$ est un C -espace vectoriel de dimension $\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$. Par exemple, une base de

¹on rappelle que tous les corps sont supposés de caractéristique nulle dans cette thèse.

$S^2(V^*)$ est donnée par les $x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq n$. L'algèbre $C[V]$ est un anneau gradué (en affectant un degré 1 à chaque x_i). On note alors $C[V]_n$ la composante homogène de degré n de $C[V]$ (c'est $S^n(V^*)$ pour $n \geq 2$).

Le groupe G agit sur $C[V]$ en posant, pour $g \in G, f \in C[V], v \in V, (g.f)(v) = f(\rho(g^{-1})v)$. L'objet de base de la théorie des invariants est l'ensemble des points fixes sous cette action, appelé anneau de invariants de G :

$$C[V]^G = \{f \in C[V] \mid \forall g \in G, g.f = f\}.$$

On peut généraliser cette notion en introduisant, pour un caractère χ de G (dans C^\times) le $C[V]^G$ -module des invariants χ -relatifs de G (ou semi-invariants de G associés à χ) :

$$C[V]^{G,\chi} = \{f \in C[V] \mid \forall g \in G, g.f = \chi(g)f\}.$$

Exemple 2.2.2 ([59, Proposition 1.3.1 et son corollaire]) *On considère la représentation standard de S_n sur $C^n = V$ et le caractère sgn de S_n qui associe sa signature à chaque permutation. On a alors $C[V]^{A_n} = C[V]^{S_n} \oplus C[V]_{\text{sgn}}^{S_n}$ avec $C[V]_{\text{sgn}}^{S_n} = C[V]^{S_n} \cdot \Delta_n$ où $\Delta_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ est le déterminant de Vandermonde. Par exemple, pour $n = 4$, en notant $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ les polynômes symétriques élémentaires en 4 variables, on a $C[V]^{A_4} = C[\sigma_1, \dots, \sigma_4] \oplus C[\sigma_1, \dots, \sigma_4] \cdot \Delta_4$.*

On s'intéresse maintenant au calcul des (semi-)invariants d'un certain degré. Hilbert avait introduit pour étudier les polynômes invariants une série génératrice dont la définition se généralise immédiatement au cas des semi-invariants :

$$\Phi^{G,\chi}(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \left(\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]_d^{G,\chi} \right) z^d.$$

On peut aussi dire que cette série est la série de Poincaré de $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]^{G,\chi}$ (L. Smith, [59, p.73]). Une généralisation aux semi-invariants de l'opérateur de Reynolds et du théorème de Molien permettra leur calcul, en s'inspirant d'un exercice de B. Sturmfels ([61, section 2.2, exercice 4]). On définit d'abord un opérateur de Reynolds modifié :

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]^{G,\chi} \\ p &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\sigma}{\chi(\sigma)}(p) \end{aligned}$$

Cet opérateur est un projecteur (linéaire). On a aussi le théorème suivant, qui permet de calculer les dimensions des sous-espaces de semi-invariants.

Théorème 2.2.3 (*Théorème de Molien pour les semi-invariants*)

$$\Phi^{G,\chi}(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\chi(\sigma) \det(Id_n - z\sigma)}$$

Avant de montrer ce résultat, on va établir le lemme suivant.

Lemme 2.2.4 *Soit $G \subset Gl(\mathbb{C}^n)$ un groupe fini et χ un caractère de degré 1 de G . On a alors :*

$$\dim(V^{G,\chi}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\text{trace}(\sigma)}{\chi(\sigma)} \quad \text{où} \quad V^{G,\chi} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall \sigma \in G, \sigma v = \chi(\sigma)v\}.$$

Démonstration.

On considère la matrice $p = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\sigma}{\chi(\sigma)}$. On a $p^2 = p$ et p est donc un projecteur sur son image, qui est $V^{G,\chi}$. Or le rang d'un projecteur est égal à sa trace. Par conséquent, $\dim(V^{G,\chi}) = \text{rang}(p) = \text{trace}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\text{trace}(\sigma)}{\chi(\sigma)}$. \square

Démonstration du théorème 2.2.3.

Pour $d \geq 1$, tout élément $\sigma \in G$ induit un endomorphisme linéaire $\sigma^{(d)}$ de $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]_d^{G,\chi}$. On souhaite calculer sa trace. Pour cela, on identifie \mathbb{C}^n avec $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]_1$ et, après avoir constaté que σ est diagonalisable sur \mathbb{C} car d'ordre fini (G est fini), on note $e_{\sigma,1}, \dots, e_{\sigma,n} \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]_1$ les vecteurs propres de $\sigma^{(1)} = \sigma$, de valeurs propres correspondantes $\rho_{\sigma,1}, \dots, \rho_{\sigma,n}$. Les vecteurs propres de $\sigma^{(d)}$ sont alors les $e_{\sigma,1}^{d_1} \dots e_{\sigma,n}^{d_n}$ avec $d_1 + \dots + d_n = d$. En conséquence, les valeurs propres de $\sigma^{(d)}$ sont les $\rho_{\sigma,1}^{d_1} \dots \rho_{\sigma,n}^{d_n}$ avec $d_1 + \dots + d_n = d$ et, la trace étant la somme des valeurs propres, il vient :

$$\text{trace}(\sigma^{(d)}) = \sum_{d_1 + \dots + d_n = d} \prod_{i=1}^n \rho_{\sigma,i}^{d_i}.$$

D'après le lemme précédent, $\dim(\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]_d^{G,\chi}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\text{trace}(\sigma^{(d)})}{\chi(\sigma)}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \Phi^{G,\chi}(z) &= \sum_{d=0}^{\infty} \dim(\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]_d^{G,\chi}) z^d \\ &= \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\text{trace}(\sigma^{(d)})}{\chi(\sigma)} z^d \\ &= \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{d_1 + \dots + d_n = d} \frac{\prod_{i=1}^n \rho_{\sigma,i}^{d_i}}{\chi(\sigma)} z^{d_1 + \dots + d_n} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\chi(\sigma)} \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n} \prod_{i=1}^n \rho_{\sigma,i}^{d_i} z^{d_i} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\chi(\sigma)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - z\rho_{\sigma,i})} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\chi(\sigma) \det(Id - z\sigma)} \quad \square \end{aligned}$$

Ces résultats permettent de calculer les (semi-)invariants d'un degré donné, comme l'illustrera l'exemple ci-dessous. De plus, E. Noether a montré que l'anneau des invariants sous l'action d'un groupe fini était engendré par les polynômes invariants de degré inférieur ou égal à l'ordre du groupe ([19, Théorème 7.3.5, p.331]). Pour chacun de ces degrés, le théorème de Molien nous donne la dimension de l'espace des polynômes invariants de ce degré et l'opérateur de Reynolds permet d'en calculer explicitement une base. On obtient une base de l'anneau des invariants en concaténant les bases précédentes et en en extrayant une famille libre.

Dans l'exemple suivant, on cherche les semi-invariants d'un degré donné pour un groupe.

Exemple 2.2.5 *On considère le groupe $G_1 \subset SL(4, \mathbb{C})$ d'ordre 240 engendré par :*

$$S_{13} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^4 \end{pmatrix}, S_{14} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon w}{v} & \frac{\epsilon}{v} & 0 & 0 \\ \frac{1}{v} & \frac{-w}{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon w}{v} & \frac{\epsilon}{v} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v} & \frac{-w}{v} \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec ϵ racine primitive cinquième de l'unité et $w = \epsilon + \epsilon^4$, $v = \epsilon - 1$. Il s'agit d'un sous-groupe des groupes de la douzième famille décrite par H.F. Blichfeldt dans [6] (ces groupes interviendront dans la classification des sous-groupes algébriques de $SL(4, \mathbb{C})$ qui suit). Ce groupe a 2 caractères linéaires. Avec MAGMA, on calcule les premiers termes de la série de Hilbert-Poincaré de ces caractères à l'aide du théorème de Molien. Pour le caractère trivial, on trouve la série suivante :

$$1 + u^4 + u^8 + 8u^{12} + 6u^{14} + 8u^{16} + 6u^{18} + 19u^{20} + 16u^{22} + 32u^{24} + O(u^{26})$$

tandis que la série du second caractère linéaire χ_2 est :

$$u^2 + u^6 + u^{10} + 6u^{12} + 8u^{14} + 6u^{16} + 8u^{18} + 16u^{20} + 19u^{22} + 28u^{24} + O(u^{26}).$$

On va chercher les semi-invariants de degré 12 pour χ_2 . D'après le théorème de Molien, ils forment un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 6. On applique l'opérateur de Reynolds modifié associé à χ_2 aux différents monômes de degré 12 et on considère les résultats non nuls. On construit alors pas à pas une base des semi-invariants de degré 12 associés à χ_2 en vérifiant leur indépendance linéaire sur \mathbb{C} (on peut s'arrêter au sixième générateur linéairement indépendant).

On obtient ainsi la base suivante :

1. $I_1 = \frac{50}{7}R(x_1^{11}x_2) = x_1^{11}x_2 + 11x_1^6x_2^6 - x_1x_2^{11} - x_3^{11}x_4 - 11x_3^6x_4^6 + x_3x_4^{11}$
2. $I_2 = \frac{600}{7}R(x_1^{10}x_2x_3) = 11x_1^{10}x_2x_3 + 66x_1^5x_2^6x_3 - x_2^{11}x_3 - x_2x_3^{11} + x_1^{11}x_4 + 66x_1^6x_2^5x_4 - 11x_1x_2^{10}x_4 - 11x_1x_3^{10}x_4 - 66x_2x_3^6x_4^5 - 66x_1x_3^5x_4^6 + 11x_2x_3x_4^{10} + x_1x_4^{11}$

3. $I_3 = \frac{300}{7}R(x_1^9x_2x_3^2) = 5x_1^9x_2x_3^2 + 15x_1^4x_2^6x_3^2 - x_1x_2x_3^{10} + x_1^{10}x_3x_4 + 36x_1^5x_2^5x_3x_4 - x_2^{10}x_3x_4 - 5x_1^2x_3^9x_4 + 15x_1^6x_2^4x_4^2 - 5x_1x_2^9x_4^2 - 15x_2^2x_3^6x_4^4 - 36x_1x_2x_3^5x_4^5 - 15x_1^2x_3^4x_4^6 + 5x_2^2x_3x_4^9 + x_1x_2x_4^{10}$
4. $I_4 = \frac{200}{7}R(x_1^8x_2x_3^3) = 3x_1^8x_2x_3^3 + 4x_1^3x_2^6x_3^3 - x_1^2x_2x_3^9 + x_1^9x_2^2x_4 + 18x_1^4x_2^5x_3^2x_4 - 3x_1^3x_3^8x_4 + 18x_1^5x_2^4x_3x_4^2 - x_2^9x_3x_4^2 + 4x_1^6x_2^3x_4^3 - x_1x_2^8x_4^3 - x_2^3x_3^6x_4^3 - 18x_1x_2^2x_3^5x_4^4 - 18x_1^2x_2x_3^4x_4^5 - 4x_1^3x_3^3x_4^6 + 3x_2^3x_3x_4^8 + x_1x_2^2x_4^9$
5. $I_5 = \frac{150}{7}R(x_1^7x_2x_3^4) = 2x_1^7x_2x_3^4 + x_1^2x_2^6x_3^4 - x_1^3x_2x_3^8 + x_1^8x_3^3x_4 + 8x_1^3x_2^5x_3^3x_4 - 2x_1^4x_3^7x_4 + 15x_1^4x_2^4x_3^2x_4^2 - x_2^4x_3^6x_4^2 + 8x_1^5x_2^3x_3x_4^3 - x_2^8x_3x_4^3 - 8x_1x_2^3x_3^5x_4^3 + x_1^6x_2^2x_4^4 - x_1x_2^7x_4^4 - 15x_1^2x_2^2x_3^4x_4^4 - 8x_1^3x_2x_3^3x_4^5 - x_1^4x_3^2x_4^6 + 2x_2^4x_3x_4^7 + x_1x_2^3x_4^8$
6. $I_6 = \frac{600}{7}R(x_1^6x_2x_3^5) = 7x_1^6x_2x_3^5 + x_1x_2^6x_3^5 - 5x_1^4x_2x_3^7 + 5x_1^7x_3^4x_4 + 15x_1^2x_2^5x_3^4x_4 - 7x_1^5x_3^6x_4 - x_2^5x_3^6x_4 + 50x_1^3x_2^4x_3^3x_4^2 - 15x_1x_2^4x_3^5x_4^2 + 50x_1^4x_2^3x_3^2x_4^3 - 50x_1^2x_2^3x_3^4x_4^3 + 15x_1^5x_2^2x_3x_4^4 - 5x_2^7x_3x_4^4 - 50x_1^3x_2^2x_3^3x_4^4 + x_1^6x_2x_4^5 - 7x_1x_2^6x_4^5 - 15x_1^4x_2x_3^2x_4^5 - x_1^5x_3x_4^6 + 7x_2^5x_3x_4^6 + 5x_1x_2^4x_4^7.$

Magma permet de calculer une base de l'anneau des invariants de ce groupe, constituée de 51 polynômes de degré 4 à 30, que l'on pourrait obtenir par des calculs analogues à ceux décrits ci-dessus, grâce au théorème de Noether.

En suivant [4], on peut s'intéresser au lien entre équation différentielle et invariants du groupe de Galois. Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ et y_1, \dots, y_n un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$ dans une extension de Picard-Vessiot $K \supset \mathbb{C}(z)$. On considère l'anneau de polynômes $R = \mathbb{C}(z)[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}, 1/W]$ à $n^2 + 1$ indéterminées avec $W = \det((X_{i,j}))$. Comme le wronskien d'un système fondamental de solutions n'est pas nul, on peut définir la substitution $\phi : R \rightarrow K, X_{i,j} \mapsto y_j^{(i-1)}$ et l'idéal $I = \ker \phi$. Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ agit sur R par la transformation $(X_{i,j}) \mapsto (X_{i,j})g$ pour $g \in GL(n, \mathbb{C})$. Le groupe de Galois différentiel de $L(y) = 0$ peut être vu comme $\{g \in GL(n, \mathbb{C}) | I^g = I\}$ et l'image par ϕ d'un polynôme de R fixe sous l'action de G est une fraction rationnelle. D'après un théorème de E. Compoint ([14, Theorem 1.1], [4, Theorem 1.2]), si l'on suppose que le groupe G est réductif², l'idéal I des relations algébriques entre les éléments d'un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$ est engendré par les polynômes de R invariants sous l'action de G qui sont contenus dans I . En conséquence, pour G réductif, si l'on se donne un ensemble de générateurs P_1, \dots, P_r de la \mathbb{C} -algèbre des polynômes G -invariants de R , l'idéal I sera engendré sur R par les $P_i - f_i, (i = 1..r)$ où $f_i = \phi(P_i) \in \mathbb{C}(z)$ ([4, Corollary 1.3], [15]).

²un groupe algébrique linéaire est dit réductif si son radical unipotent, c'est-à-dire un sous-groupe maximal unipotent fermé connexe (au sens de la topologie de Zariski), est réduit à l'identité ([60]).

2.3 Solutions Liouvilliennes

Définition 2.3.1 Soit k un corps différentiel de corps des constantes C et K une extension de corps différentiels de k . On dit que K est une extension liouvilienne de k si $C_K = C$ et s'il existe une tour d'extension de corps différentiels $k = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K$ telle que $K_i = K_{i-1}(t_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ avec t_i vérifiant l'une des conditions suivantes :

1. $t'_i \in K_{i-1}$: extension par une intégrale (d'un élément de K_{i-1})
2. $t_i \neq 0$ et $\frac{t'_i}{t_i} \in K_{i-1}$: extension par une exponentielle (d'une intégrale d'un élément de K_{i-1})
3. t_i est algébrique sur K_{i-1}

On dit qu'un élément d'une extension de corps différentiels de k est liouvilien sur k s'il appartient à une extension liouvilienne de k .

Exemple 2.3.2 L'équation étudiée dans l'exemple 2.1.15 admet une solution liouvilienne. En effet, on verra dans la première partie du chapitre 5 que cette équation admet une solution algébrique (donc liouvilienne) de polynôme minimal sur $\mathbb{C}(t)$:

$$Y^8 - \frac{t^2 - 2}{2(t^2 - 1)}Y^6 + \frac{t^2(2t^2 - 3)}{32(t^2 - 1)^2}Y^4 - \frac{t^2(t^2 + 2)}{128(t^2 - 1)^3}Y^2 + \frac{9t^4}{4096(t^2 - 1)^4}.$$

On peut aussi exprimer cette solution Y sous la forme de l'exponentielle d'un élément algébrique sur $\mathbb{C}(t)$ (on verra ci-dessous qu'une équation admettant une solution liouvilienne admet toujours une solution de cette forme). Plus précisément, la solution Y peut s'écrire $Y = e^{\int u}$ avec u de polynôme minimal (sur $\mathbb{C}(t)$) :

$$U^4 + \frac{2(t^2 + 1)}{t(t-1)(t+1)}U^3 + \frac{t^6 - 2t^4 - 12t^2 - 5}{t^2(t-2)(t+2)(t-1)^2(t+1)^2}U^2 \\ + \frac{t^6 - 12t^4 - 11t^2 - 2}{2(t-2)(t+2)(t-1)^3(t+1)^3t^3}U + \frac{8t^8 - 37t^6 + 39t^4 + 97t^2 + 37}{16t^2(t-2)^2(t+2)^2(t-1)^4(t+1)^4}.$$

Un groupe algébrique linéaire G peut se décomposer en une union disjointe finie de variétés algébriques irréductibles. On note G^o celle qui contient l'identité. D'après [46, Prop.A.37 (1)], la variété G^o est un sous-groupe algébrique de G distingué d'indice fini (égal au nombre de composantes irréductibles de G) et connexe (au sens de la topologie de Zariski pour laquelle les fermés sont les ensembles algébriques). Pour éviter toute confusion entre les notions d'irréductibilité pour les actions de groupes et pour les variétés algébriques, on appellera G^o la composante connexe de l'identité (de G). Celle-ci va nous permettre de décrire le lien entre le caractère liouvilien d'une extension et son groupe de Galois différentiel.

Théorème 2.3.3 ([46, Théorème 1.43],[38]) Soit K une extension de Picard-Vessiot d'un corps différentiel k de groupe de Galois différentiel G . Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1. G^o est un groupe résoluble
2. K est une extension liouvillienne de k
3. K est contenue dans une extension liouvillienne de k

On peut compléter cette description par le résultat suivant :

Proposition 2.3.4 ([46, Proposition 1.45]) Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans k et K une extension de Picard-Vessiot associée. On suppose que $L(y) = 0$ admet une solution liouvillienne non nulle. L'équation $L(y) = 0$ admet alors une solution de la forme $z = e^{\int u}$ telle que $u = \frac{z'}{z}$ soit algébrique sur k .

Si K est liouvillienne, cette proposition est une conséquence immédiate du théorème précédent et de celui de Lie-Kolchin ([46, Thr A.46]), en prenant pour z un vecteur propre commun à tous les éléments de G^o , G désignant le groupe de Galois de l'équation.

Corollaire 2.3.5 ([32, Lemme 3.1],[64]) Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire irréductible d'ordre n à coefficients dans k . Si $L(y) = 0$ admet une solution liouvillienne, toutes ses solutions seront liouvilliennes.

Démonstration.

On note K une extension de Picard-Vessiot associée à $L(y) = 0$ et G son groupe de Galois différentiel. Soit $z = e^{\int u}$ la solution donnée par la proposition précédente et $P(x) = \prod_{i=1}^r (x - u_i) \in k[x]$ le polynôme minimal de u . On remarque que l'orbite de z sous l'action de G est $\{e^{\int u_i}; i = 1..r\}$ donc le sous-espace $W = \mathbb{C}(e^{\int u_i}; i = 1..r)$ de l'espace des solutions V de $L(y) = 0$ est invariant sous l'action de G et n'est pas réduit à 0. L'équation étant irréductible, la proposition 2.1.12 implique que $W = V$ et toutes les solutions de $L(y) = 0$ sont donc liouvilliennes. \square

Le théorème suivant établit un lien entre les solutions liouvilliennes d'une équation différentielle et les (semi-)invariants de son groupe de Galois différentiel. Il nous dit que le groupe et ses semi-invariants permettent de connaître le degré de la dérivée logarithmique d'une solution.

Théorème 2.3.6 (Singer, Ulmer [58, Th.3]) Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans k , corps différentiel de corps des constantes C , de groupe de Galois $\mathcal{G}(L) \subset GL(n, C)$.

1. Si l'équation $L(y) = 0$ a une solution liouvillienne dont la dérivée logarithmique est algébrique sur k de degré m , alors il existe un semi-invariant de $\mathcal{G}(L)$ de degré m dans $C[Y_1, \dots, Y_n]$ qui factorise en produit de formes linéaires.
2. S'il existe un semi-invariant de $\mathcal{G}(L)$ de degré m dans $C[Y_1, \dots, Y_n]$ qui factorise en produit de formes linéaires, alors l'équation $L(y) = 0$ a une solution liouvillienne dont la dérivée logarithmique est algébrique sur k de degré au plus m .

2.4 Puissance symétrique d'une équation différentielle

En notant V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, une construction associée à V est un espace vectoriel obtenu par itération de passage au dual, produits tensoriels (finis), sommes directes finies, puissances symétriques ou extérieures. Le point de vue tannakien de la théorie de Galois différentielle consiste en l'étude de ces opérations sur les modules différentiels : on en trouvera une présentation dans le cours [3], la section 4 du chapitre 1 de [41] ou dans les sections 2.2 à 2.4 de [46].

Soit deux modules différentiels (sur un corps différentiel k) (M_1, δ_1) et (M_2, δ_2) . On construit leur produit tensoriel (M_3, δ_3) en prenant $M_3 = M_1 \otimes_k M_2$ et, pour $m_i \in M_i (i = 1, 2)$, $\delta_3(m_1 \otimes m_2) = (\delta_1 m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes (\delta_2 m_2)$. Si N est un sous-module différentiel de (M_1, δ_1) , on définit le module différentiel quotient M/N avec la dérivation $\delta(m + N) = \delta(m) + N$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et (M, δ) , le module $N = \{v_1 \otimes \dots \otimes v_m - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}; v_i \in M, \sigma \in S_m\}$ est un sous-module différentiel de $\bigotimes_{k=1}^m M$ puisque $\delta(v_1 \otimes \dots \otimes v_m - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}) = \sum_{k=1}^m \dots \otimes \delta v_k \otimes \dots - \sum_{k=1}^m \dots \otimes \delta v_{\sigma(k)} \otimes \dots = \sum_{k=1}^m (\dots \otimes \delta v_k \otimes \dots - \dots \otimes \delta v_{\sigma^{-1}(k)} \otimes \dots) \in N$. Ceci nous permet de définir la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de M : on considère d'abord le produit tensoriel de m copies de (M, δ) puis on prend son quotient par le sous-module différentiel N précédemment défini ([3, p.38]). On la notera $S^m(M)$. Si le module M est de dimension n , sa puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ sera de dimension $\binom{m+n-1}{n-1}$.

On introduit maintenant la notion de puissance symétrique d'une équation différentielle en suivant d'abord ce point de vue ([46, Sections 2.1 et 2.2]) puis directement à partir des équations ([55, Section 3.2.2]). Etant donnée une équation différentielle d'ordre n , on lui associe un opérateur différentiel unitaire $L \in k[\delta]$ et un module différentiel $M = k[\delta]/k[\delta]L$. D'après [46, Proposition 2.9], ce module admet un vecteur cyclique e , c'est-à-dire un vecteur $e \in M$ tel que M est engendré par $e, \delta e, \dots, \delta^{n-1}e$ (L est alors l'opérateur différentiel unitaire de plus petit degré annihilant e). Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on construit la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de M et l'image f de e dans celle-ci. On définit alors la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de L comme étant l'opérateur différentiel unitaire de plus petit degré annihilant f dans $S^m(M)$ ([46, Définition 2.24]), l'équation différentielle associée à cet opérateur

étant alors par définition la puissance symétrique $m^{\text{ième}}$ de l'équation de départ. Si f est un vecteur cyclique de $S^m(M)$, L sera de degré $\binom{m+n-1}{n-1}$, sinon, on aura une chute de degré.

On peut aussi définir la puissance symétrique d'une équation différentielle de manière plus directe ([55, section 3.2.2]).

Théorème 2.4.1 (*Singer, [51, Lemme 3.8(a)]*) Soit $L_1(y) = 0$ et $L_2(y) = 0$ des équations différentielles linéaires d'ordre n_1 et n_2 et de système fondamental de solutions respectif $S_1 = \{u_1, \dots, u_{n_1}\}$ et $S_2 = \{v_1, \dots, v_{n_2}\}$. Alors on peut construire une équation différentielle linéaire $L_3(y) = 0$ notée $L_1(y) \otimes L_2(y)$ d'ordre $n_3 \leq n_1 n_2$ dont l'espace des solutions est $S_3 = \text{Vect}_C(u_1 v_1, \dots, u_{n_1} v_{n_2})$.

Ce théorème permet la définition suivante.

Définition 2.4.2 Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire à coefficients dans k . L'équation différentielle linéaire $\overbrace{L(y) \otimes \dots \otimes L(y)}^m$, notée $L^{\otimes m}(y) = 0$, est appelée la puissance symétrique d'ordre m de $L(y) = 0$.

En vue de calculer $L^{\otimes m}(y)$, on peut considérer $v = y^m$ où y est une solution de $L(y) = 0$. Ensuite, on considère les dérivées successives de v jusqu'à ce qu'elles forment une famille liée (dans k). La relation entre ces dérivées successives nous donne alors une équation différentielle satisfaite par v . Cette équation est en fait $L^{\otimes m}(y)$, d'ordre au plus $\binom{m+n-1}{n-1} = C_{(m+n-1)}^{(n-1)}$ ([52, Lemme 3.2 et discussion le précédant]).

On s'intéresse maintenant au lien entre les semi-invariants du groupe de Galois \mathcal{G} d'une équation différentielle $L(y) = 0$ (d'espace des solutions V inclus dans une extension de Picard-Vessiot K de k) et les puissances symétriques de cette équation. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, il existe naturellement un morphisme ϕ_m de \mathcal{G} -modules de $S^m(V)$ dans K qui correspond à l'évaluation d'un polynôme homogène de degré m en n variables en un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$. Son image est l'espace des solutions de $L^{\otimes m}(y)$ dans K .

Lemme 2.4.3 ([56, Lemme 1.6], [32, Lemme 2.1], [12, Section 3, après 3.1]) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire de groupe de Galois \mathcal{G} et ϕ_m le morphisme ci-dessus décrit. L'image par ϕ_m d'un polynôme homogène de degré m invariant (resp. semi-invariant) sous l'action de \mathcal{G} est une solution dans k (resp. exponentielle) de $L^{\otimes m}(y) = 0$. De plus, si $L^{\otimes m}(y)$ est d'ordre maximal, on a une bijection entre les solutions exponentielles de $L^{\otimes m}(y) = 0$ et les semi-invariants (sous l'action de \mathcal{G}) de degré m .

Démonstration.

Soit $P \in C[Y_1, \dots, Y_n]_m$. L'image $\phi_m(P)$ correspond à l'évaluation en un système fondamental de solutions y_1, \dots, y_n de $L(y) = 0$. Si le polynôme P est invariant, son image $\phi_m(P)$ est une solution de $L^{\otimes m}(y) = 0$ qui sera aussi invariante sous l'action

de \mathcal{G} donc qui sera un élément de k . Si le polynôme P est semi-invariant, son image $\phi_m(P)$ est une solution de $L^{\otimes m}(y) = 0$ telle que son image par un élément du groupe de Galois est un produit d'elle-même par un scalaire. En conséquence, $C.\phi_m(P)$ est un sous-espace de $Sol(L^{\otimes m}(y))$ \mathcal{G} -invariant de dimension 1, qui correspond à un facteur à droite d'ordre 1 de $L^{\otimes m}(y) = 0$. L'image $\phi_m(P)$ est donc une solution exponentielle de $L^{\otimes m}(y) = 0$.

On suppose que l'équation $L^{\otimes m}(y) = 0$ est d'ordre maximal : l'application ϕ_m est donc injective et on vient de voir que l'image des semi-invariants est incluse dans l'ensemble des solutions exponentielles. Il reste alors à voir que cette image est exactement l'ensemble des solutions exponentielles de $L^{\otimes m}(y) = 0$. Soit $z \in Sol(L^{\otimes m}(y))$ une telle solution exponentielle. On note P son antécédent pour ϕ_m . Soit $\sigma \in \mathcal{G}$. Comme z est une solution exponentielle, on a $\lambda \in C$ tel que $\sigma.z = \lambda z$, d'où, puisque ϕ_m est injective, $\sigma.P = \lambda P$. Le polynôme P est ainsi semi-invariant sous l'action de \mathcal{G} . \square

Au sujet du calcul des solutions rationnelles et exponentielles d'une équation différentielle, on peut consulter la section 4.1 de [46] ([1], [10], [31]).

Exemple 2.4.4 *On considère à nouveau l'équation de l'exemple 2.1.15 (p.15) et on cherche les semi-invariants de degré 2 de cette équation. Sa puissance symétrique deuxième est d'ordre maximal (ici 10) : on a donc correspondance entre les semi-invariants de degré 2 du groupe de cette équation et ses solutions exponentielles. On calcule ces dernières (avec Maple) :*

$$\begin{aligned} & \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1}, \frac{t^{1/2}}{(t+1)^{1/2}(t-1)}, \frac{t^{1/2}}{(t+1)(t-1)^{1/2}}, \frac{t}{(t^2-1)^{1/2}}, \frac{(t-2)^{1/2}}{(t+1)^{1/2}(t-1)}, \\ & \frac{(t+2)^{1/2}}{(t+1)(t-1)^{1/2}}, \frac{(t-2)^{1/2}t^{1/2}}{t^2-1}, \frac{(t+2)^{1/2}t^{1/2}}{t^2-1}, \frac{(t^2-4)^{1/2}t}{t^2-1}, \frac{(t^2-4)^{1/2}}{(t^2-1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

On trouve ainsi l'existence, en degré 2, d'un (espace de dimension 1 d') invariant(s) et de neuf (espaces de dimension 1 de) semi-invariants d'ordre 2.

Après avoir choisi un système fondamental de solutions de l'équation différentielle de départ, on peut expliciter cette bijection ([12, Section 3, avant 3.2]). Par exemple, les solutions formelles en 0 de l'équation forment un système fondamental de solutions $\{y_1, \dots, y_4\}$. D'après le lemme précédent, $\frac{t^2-2}{t^2-1}$ s'exprime comme un polynôme homogène de degré 2 en les y_i . Un calcul en Maple nous donne :

$$\frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} = 2y_1^2 - \frac{9y_2^2}{32} - \frac{y_3y_4}{8} = Y_1Y_2 + Y_3Y_4$$

en posant $Y_1 = \sqrt{2}y_1 + \frac{3y_2}{4\sqrt{2}}$, $Y_2 = \sqrt{2}y_1 - \frac{3y_2}{4\sqrt{2}}$, $Y_3 = -\frac{y_3}{8}$, $Y_4 = y_4$. On verra chapitre 5 que le groupe de Galois différentiel de cette équation est $G_{v1,27}(1, 1, 0)$ (qui sera défini dans la section suivante) et on trouve ainsi l'invariant de degré 2 de ce groupe donné dans l'appendice.

2.5 Classification des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$

Définition 2.5.1 Soit G un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$. Le groupe G est réductible s'il laisse un sous-espace vectoriel non trivial de \mathbb{C}^n invariant. Il est dit irréductible sinon. Si G laisse une droite dans \mathbb{C}^n invariante, il est 1-réductible.

Soit G un sous-groupe irréductible de $GL(n, \mathbb{C})$. Il est imprimitif s'il existe $d > 1$ et des sous-espaces V_1, \dots, V_d de $V = \mathbb{C}^n$ tels que $V = \bigoplus_{i=1}^d V_i$ et pour $\sigma \in G$, l'application $V_i \mapsto \sigma(V_i)$ est une permutation de l'ensemble $\{V_1, \dots, V_d\}$. Un tel ensemble est appelé un système d'imprimitivité pour V . Si $\dim V_i = 1$, le groupe G est dit monomial. Le groupe G est primitif s'il n'existe pas une telle décomposition de V .

Théorème 2.5.2 ([20, Th 4.2B]) Soit G un sous-groupe imprimitif de $GL(V)$. Soit $V = \bigoplus_{i=1}^d V_i$ un système d'imprimitivité pour G . Soit $H_i = \text{Stab}_G(V_i)$ ($i = 1, \dots, d$), $N = \bigcap_i H_i$ et σ^ϕ la permutation $V_i \mapsto \sigma(V_i)$ ($i = 1, \dots, d$). Alors, l'application $\phi : \sigma \mapsto \sigma^\phi$ est un morphisme de G dans S_d d'image un sous-groupe transitif et de noyau N . En particulier, les H_i sont conjugués dans G d'indice d et $\dim(V_i) = n/d$. De plus, le groupe $N_{|V_i}$ est complètement réductible et N est isomorphe à un sous-groupe de $N_{|V_1} \times \dots \times N_{|V_d}$. Enfin, si $\{V_1, \dots, V_d\}$ est minimal (i.e. tel que $\dim V_i$ est minimale), le groupe $H_i|_{V_i}$ agit primitivement sur V_i .

Des travaux précédents de H.F. Blichfeldt, S. Hessinger, O. Cormier et D.L. Flannery en particulier permettent de donner une classification des sous-groupes irréductibles de $SL(4, \mathbb{C})$ en se fondant sur la distinction entre primitif et imprimitif, monomial ou non. On remarque que 4 est le plus petit degré pour lequel des groupes imprimitifs non monomiaux apparaissent.

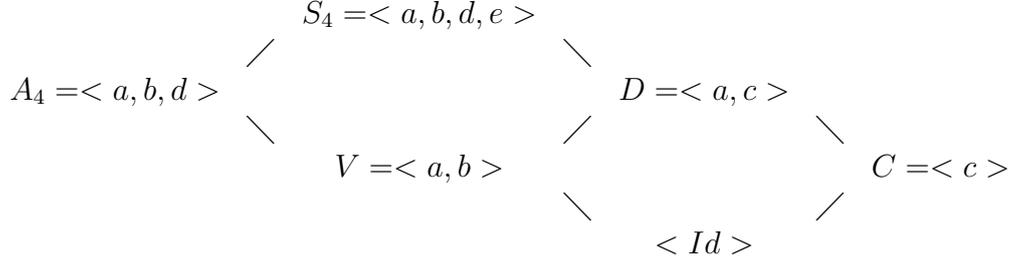
On adoptera principalement les notations de D.L. Flannery ([24]). On désignera par $M(4)$ le groupe de toutes les matrices monomiales, par $D(4)$ le groupe de toutes les matrices diagonales et par $S(4)$ le groupe de toutes les matrices de permutation. On note π la projection de $M(4)$ dans S_4 .

On notera des matrices unimodulaires (de permutation) représentant (respectivement) $(1, 2)(3, 4)$; $(1, 3)(2, 4)$; $(1, 2, 3, 4)$; $(1, 2, 3)$ et $(1, 2)$:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 \\ e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}.$$

D.L. Flannery note les sous-groupes transitifs de S_4 comme suit :



On utilisera aussi les notations suivantes pour les matrices génératrices de nos groupes : $\omega_j = e^{\frac{2i\pi}{2^j+1}} = e^{\frac{i\pi}{2^j}}$, $\omega_{j,p} = e^{\frac{2i\pi}{p^j+1}}$ pour p premier,

$$\begin{aligned}
 x_j &= \begin{pmatrix} \omega_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_j \end{pmatrix}, y_j = \begin{pmatrix} \omega_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_j^{-1} \end{pmatrix}, \\
 u_j &= \begin{pmatrix} \omega_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_j^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_j^{-1} \end{pmatrix}, v_j = \begin{pmatrix} \omega_j^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_j^{-1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

et plus généralement :

$$\begin{aligned}
 x_{j,p} &= \begin{pmatrix} \omega_{j,p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{j,p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{j,p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{j,p} \end{pmatrix}, y_{j,p} = \begin{pmatrix} \omega_{j,p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{j,p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{j,p}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{j,p}^{-1} \end{pmatrix}, \\
 u_{j,p} &= \begin{pmatrix} \omega_{j,p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{j,p}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{j,p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{j,p}^{-1} \end{pmatrix}, v_{j,p} = \begin{pmatrix} \omega_{j,p}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{j,p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{j,p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{j,p}^{-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

NOTATIONS

Pour p premier, on désigne par B_p le groupe des matrices diagonales d'ordre une puissance de p . On notera respectivement X, Y, U, V le groupe des matrices de la forme $x_{k,p}, y_{k,p}, u_{k,p}, v_{k,p}$. L'intersection $X \cap B_p$ sera notée X_p (de même pour Y_p, U_p, V_p) et on a $B_p = X_p Y_p U_p V_p$, cette décomposition étant directe si et seulement si $p \neq 2$.

Pour la description des groupes infinis, on utilisera les notations suivantes dues à S. Hessinger ([29], [30]), en notant U_n le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 ($n \geq 1$) :

$$H_1^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}^* \right\},$$

$$H_1^2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \xi\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{C}^*, \\ \xi \in \{\pm 1\} \end{array} \right\},$$

$$H_2^n = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \xi\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^{-1}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*, \\ \xi \in U_n \end{array} \right\} \text{ et } H_3 = \text{diag}(SL(4, \mathbb{C})).$$

Dans ses articles ([24],[23]), D.L. Flannery donne une liste des sous-groupes monomiaux finis irréductibles de $GL(4, \mathbb{C})$ avec unicité à conjugaison près (i.e. tout sous-groupe monomial est conjugué dans $GL(4, \mathbb{C})$ à un unique groupe de cette liste) en donnant des générateurs explicites pour chaque groupe. Plus précisément, dans [23], D.L. Flannery établit une classification complète des 2-groupes finis irréductibles de $GL(4, \mathbb{C})$ en donnant un groupe avec ses générateurs pour chaque classe de conjugaison. La résolution de ce problème fait intervenir de nombreux outils dont la théorie des caractères, une méthode de description des diagrammes de Hasse de réseaux de sous-modules et des calculs de 2-cohomologie à l'aide de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre. La classification établie dans [24], qui est celle que nous utiliserons, est établie principalement à partir des résultats et méthodes développés dans [23] avec aussi l'apport de la théorie des groupes. Nous allons extraire de cette classification les sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$, puisque la donnée explicite des matrices génératrices par D.L. Flannery permet de déterminer sans difficulté les sous-groupes unimodulaires dans ses listes.

Dans sa thèse ([29],[30]), S. Hessinger donne une liste des sous-groupes algébriques irréductibles de $SL(4, \mathbb{C})$ et plus particulièrement des sous-groupes infinis, en se fondant sur la théorie des groupes, celle des représentations (algèbres de Lie) et des observations matricielles. Cette liste est à équivalence projective près pour les groupes primitifs finis (reprenant la liste de H.F. Blichfeldt) et ne détaille pas les groupes monomiaux finis : c'est sur ce point que la classification suivante la complète (à partir des travaux de D.L. Flannery). Le point de départ de ces classifications est souvent le travail de H.F. Blichfeldt qui a classifié à équivalence projective près les groupes finis primitifs (dans [7]) et imprimitifs non monomiaux (dans [6]), en se fondant sur des considérations de théorie des groupes et sur des observations matricielles et géométriques.

2.5.1 Groupes imprimitifs non monomiaux

Dans sa thèse ([29, Théorème 4.2],[30, Théorème 2.2.2]), S. Hessinger donne une description des sous-groupes imprimitifs non monomiaux infinis de $SL(4, \mathbb{C})$. En notant $SL(2, \mathbb{C})_n = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det(A^n) = 1\}$, un tel groupe est conjugué

pour un certain $n \in \mathbb{N}$ à un des groupes suivants :

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}; \begin{matrix} A, B \in SL(2, \mathbb{C})_n \\ \det(AB) = 1 \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}; \begin{matrix} A, B \in SL(2, \mathbb{C})_n \\ \det(AB) = 1 \end{matrix} \right\}$$

d'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{\pm 1}{\det(B)} B \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pm 1}{\det(B)} B \\ B & 0 \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\} \text{ ou}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det(B)} B \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\det(B)} B \\ B & 0 \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\}$$

d'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C})$.

Dans [6], H.F. Blichfeldt dresse page 235 la liste des groupes imprimitifs finis non monomiaux sous la forme de 14 familles de groupes pour lesquels il donne des matrices génératrices. Avant de donner ces familles, on définit les nouvelles matrices suivantes (pour lesquelles ρ désigne un scalaire tel que les matrices sont unimodulaires et $w = \omega_{0,5} + \omega_{0,5}^{-1} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$) :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B_3^{(k)} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & -ki & ki \end{pmatrix},$$

$$B_4^{(r)} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, B_5 = \frac{1}{\omega_{0,5} - 1} \begin{pmatrix} \omega_{0,5} w & \omega_{0,5} & 0 & 0 \\ 1 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{0,5} w & \omega_{0,5} \\ 0 & 0 & 1 & -w \end{pmatrix},$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} \omega_{0,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{0,5}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{0,5}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{0,5}^3 \end{pmatrix}, B_7 = \frac{1}{\omega_{0,5} - 1} \begin{pmatrix} \omega_{0,5} w & \omega_{0,5} & 0 & 0 \\ 1 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{0,5}^{-1} & -\omega_{0,5}^{-1} w \\ 0 & 0 & -\omega_{0,5}^2 w & -\omega_{0,5}^2 \end{pmatrix},$$

$$B_8 = \begin{pmatrix} \omega_{0,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{0,5}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_9^{(k)} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+i)k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+i)k \end{pmatrix},$$

$$B_{10}^{(l)} = \rho \begin{pmatrix} (1+i)l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix}, B_{11}^{(r)} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\beta \end{pmatrix},$$

$$B_{12} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\gamma \end{pmatrix}, B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^{-1} \\ \omega_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{3\pi}{8}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \omega_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $k^{3r} = l^{3r} = \beta^r = 1, \gamma^{4r} = (-1)^r$ et α racine primitive $n^{\text{ième}}$ de 1. On peut alors écrire les familles de groupes imprimitifs non monomiaux finis (classifiées par H.F. Blichfeldt) :

- famille 1° des groupes engendrés par $y_1 v_1, a, b, B_3^{(k)}, B_4^{(r)}$ ($r > 1$)
- famille 2° des groupes engendrés par $y_1 v_1, a, B_{14}, B_3^{(1)}, B_4^{(r)}$ ($(r, k) \neq (1, 1)$)
- famille 3° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, b, B_3^{(1)}, B_4^{(2r)}$
- famille 4° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, B_{14}, B_3^{(k)}, B_4^{(2r)}$
- famille 5° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, b, B_9^{(1)}, B_{10}^{(1)}, B_4^{(2r)}$
- famille 6° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, B_{14}, B_9^{(k)}, B_{10}^{(l)}, B_4^{(2r)}$
- famille 7° des groupes engendrés par $y_1 v_1, a, b, B_3^{(1)}, B_4^{(r)}, B_{11}^{(2r)}$
($(r, \beta) \neq (1, 1)$)
- famille 8° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, b, B_3^{(1)}, B_4^{(2r)}, B_{11}^{(4r)}$
- famille 9° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, b, B_9^{(1)}, B_{10}^{(1)}, B_4^{(2r)}, B_{11}^{(4r)}$
- famille 10° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, B_{13}, B_9^{(1)}, B_{10}^{(1)}, B_4^{(2r)}, B_{11}^{(4r)}$
- famille 11° des groupes engendrés par $u_2 v_2^{-1}, u_2 v_2, B_1, B_2, b, B_9^{(1)}, B_{10}^{(1)}, B_4^{(2r)}, B_{11}^{(4r)}, B_{12}$
- famille 12° des groupes engendrés par $u_{0,5}, B_5, b, B_4^{(r)}$ ($r > 1$)
- famille 13° des groupes engendrés par $B_6, B_7, B_{15}, B_4^{(r)}$
- famille 14° des groupes engendrés par $u_{0,5}, B_5, B_8, b, B_4^{(r)}$

2.5.2 Groupes imprimitifs monomiaux d'image $V = \langle a, b \rangle$ dans S_4

Les sous-groupes monomiaux infinis de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image V dans S_4 sont décrits par le résultat suivant :

Lemme 2.5.3 (Hessinger) *Soit G un sous-groupe algébrique infini monomial de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image V dans S_4 . Alors le groupe G est conjugué à $\cup_{m \in \mathcal{S}} mH$ où $\mathcal{S} = \{I_4, a, b, ab\}$ et $H = H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 .*

Démonstration.

Dans sa thèse, S. Hessinger montre ([29, Th 4.1, p.38],[30, Th 2.2.1, p.503]) que tout sous-groupe algébrique infini G de $SL(4, \mathbb{C})$ agissant monomialement sur \mathbb{C}^4 d'image V dans S_4 est conjugué à $\cup_{m \in \mathcal{S}} mH$ où $H = H_1^1, H_1^2, H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 et

\mathcal{S} est l'un des ensembles suivants : $\mathcal{S}_3 = \{I_4, a, b, ab\}$, $\mathcal{S}_4 = \{I_4, ay_1v_1, by_1v_1, aby_1v_1\}$. On remarque que les cas $\mathcal{S} = \mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_4$ coïncideront pour $H = H_1^2, H_2^n$ ou H_3 , mais pas pour H_1^1 . Afin de savoir si ces groupes agissant monomialement sont monomiaux, il convient maintenant de vérifier s'ils sont irréductibles. On notera $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ la base canonique de la représentation de S . Hessinger des groupes. Les groupes obtenus avec $\mathcal{S} = \mathcal{S}_3$ ou \mathcal{S}_4 et $H = H_1^1$ ou H_1^2 sont alors réductibles car le sous-espace engendré par $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_4$ sera invariant sous leur action.

Il reste enfin à vérifier que les autres groupes sont irréductibles, c'est-à-dire que \mathbb{C}^4 n'admet pas de sous-espace non trivial invariant sous leur action. Chacun de ces groupes contient le sous-groupe K engendré par a, b et les matrices de H_2^n obtenues en prenant $\alpha = e^{\frac{i\pi}{8}}, \beta = 1, \xi = 1$ et $\alpha = 1, \beta = e^{\frac{i\pi}{8}}, \xi = 1$. Le groupe K est irréductible donc son action sur \mathbb{C}^4 ne laissera pas de sous-espace non trivial invariant et il en sera de même pour l'action des groupes infinis qui nous intéressent : ceux-ci seront donc irréductibles. \square

On s'intéresse maintenant aux groupes finis. Dans sa classification ([24]), D.L. Flannery regroupe les groupes monomiaux finis de degré 4 d'image V dans S_4 en trois familles : $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}'_3$ (définies p.453-454) auxquelles il convient d'ajouter la famille \mathcal{F}_4 (correspondant aux groupes supplémentaires donnés dans [25]). On notera \mathcal{F} la réunion de ces quatre familles. On va les décrire séparément. Pour connaître la liste des groupes de la famille \mathcal{F}_1 , on part de la liste du théorème 3.3.1 de [23] (p.43) dont on a exclu ceux qui ne sont pas unimodulaires. On exclut alors les familles mentionnées dans le théorème 3.3.14 de [23] (p.53) et au début du paragraphe 6.1 de [24] (p.451). On lui ajoute enfin le groupe mentionné dans l'appendice de [25]. On obtient ainsi la liste :

- $G_{v1,1}(j, k, l) = \langle a, b, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,2}(j, k, l) = \langle a, bv_{l+1}, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,3}(j, k, l) = \langle a, bu_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,4}(j, k, l) = \langle a, bu_{k+1}v_{l+1}, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,5}(j, k, l) = \langle ay_{j+1}, b, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,6}(j, k, l) = \langle ay_{j+1}, bv_{l+1}, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,7}(j, k, l) = \langle ay_{j+1}, bu_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,8}(j, k, l) = \langle ay_{j+1}, bu_{k+1}v_{l+1}, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$
- $G_{v1,9}(j, k) = \langle a, b, x_1, y_j, u_k, v_k \rangle$ avec $1 \leq j, k; j \neq k$
- $G_{v1,10}(j, k) = \langle a, bu_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_k \rangle$ avec $1 \leq j, k; j \neq k$
- $G_{v1,11}(j, k) = \langle a, bu_{k+1}v_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_k \rangle$ avec $1 \leq j, k; j \neq k$
- $G_{v1,12}(j, k) = \langle ay_{j+1}, b, x_1, y_j, u_k, v_k \rangle$ avec $1 \leq j, k; j \neq k$
- $G_{v1,13}(j, k) = \langle ay_{j+1}, bu_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_k \rangle$ avec $1 \leq j, k; j \neq k$
- $G_{v1,14}(j, k) = \langle ay_{j+1}, bu_{k+1}v_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_k \rangle$ avec $1 \leq j, k; j \neq k$
- $G_{v1,15}(j) = \langle a, bv_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$
- $G_{v1,16}(j) = \langle a, bv_{j+1}^2, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$
- $G_{v1,17}(j) = \langle a, bu_{j+1}v_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$

- $G_{v1,18}(j) = \langle ay_{j+1}, bv_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$
- $G_{v1,19}(j) = \langle ay_{j+1}, bv_{j+1}^2, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$
- $G_{v1,20}(j) = \langle ay_{j+1}, bu_{j+1}v_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$
- $G_{v1,21}(j) = \langle ay_{j+1}, bu_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $1 \leq j$
- $G_{v1,22}(j, k, l) = \langle a, b, x_1, y_j, u_k, v_l, y_{j+1}u_{k+1}^{-1}v_{l+1}^{-1} \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$ ou $1 \leq j, k; k = l$
- $G_{v1,23}(j, k, l) = \langle a, bu_{k+1}, x_1, y_j, u_k, v_l, y_{j+1}u_{k+1}^{-1}v_{l+1}^{-1} \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$ ou $1 \leq j, k; k = l$
- $G_{v1,24}(j, k, l) = \langle a, b, x_1, y_j, u_k, v_l, u_{k+1}v_{l+1} \rangle$ avec $1 \leq j, k; k \leq l$
- $G_{v1,25}(j, k, l) = \langle ay_{j+1}, b, x_1, y_j, u_k, v_l, u_{k+1}v_{l+1} \rangle$ avec $1 \leq j, k; k \leq l$
- $G_{v1,26}(j, k, l) = \langle a, b, x_1, y_j, u_{k+1}v_{l+1}, v_l, y_{j+1}u_{k+1} \rangle$ avec $1 \leq j < k < l$ ou $1 \leq j, k; k = l$
- $G_{v1,27}(k, l, \epsilon) = \langle ax_1^\epsilon, b, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v1,28}(k, l, \epsilon) = \langle ax_1^\epsilon, bv_{l+1}, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq k < l$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v1,29}(k, l, \epsilon) = \langle ax_1^\epsilon, bu_{k+1}, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v1,30}(k, l, \epsilon) = \langle ax_1^\epsilon, bu_{k+1}v_{l+1}, u_k, v_l \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v1,31}(k, l) = \langle a, b, u_k, v_l, x_1u_{k+1} \rangle$ avec $1 \leq k, l$
- $G_{v1,32}(k, l) = \langle a, bv_{l+1}, u_k, v_l, x_1u_{k+1} \rangle$ avec $1 \leq k, l$
- $G_{v1,33}(k, l) = \langle a, b, u_k, v_l, x_1u_{k+1}^{-1}v_{l+1}^{-1} \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$
- $G_{v1,34}(k, l) = \langle a, bv_{l+1}, u_k, v_l, x_1u_{k+1}^{-1}v_{l+1}^{-1} \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$
- $G_{v1,35}(k, l, \epsilon) = \langle ax_1^\epsilon, b, u_k, v_l, u_{k+1}v_{l+1} \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v1,36}(k, l) = \langle a, b, v_l, x_1y_1, u_{k+1}v_{l+1}, x_1u_{k+1} \rangle$ avec $1 \leq k \leq l$

Les groupes de la famille \mathcal{F}_2 sont définis comme des produits semi-directs G_2N de deux groupes G_2 et N , la forme de ce dernier dépendant de G_2 . Le groupe G_2 est un sous-groupe de B_2 d'image V par π . Dans [23], D.L. Flannery dresse la liste à conjugaison près des 2-groupes irréductibles de $GL(4, \mathbb{C})$ et en particulier de ceux d'image V . C'est à partir de cette liste (et des résultats préliminaires qui permettent de l'établir) que D.L. Flannery peut déterminer la liste des groupes G_2 possibles pour la famille \mathcal{F}_2 dans [24, Prop.6.1.1(i)]. Cette liste comprend les groupes de la famille \mathcal{F}_1 . Pour $1 \leq n \leq 36$, on notera $G_{v2,n}$ le groupe de \mathcal{F}_2 dont le sous-groupe G_2 est $G_{v1,n}$. D'autres possibilités existent pour G_2 , qui donneront d'autres groupes :

- $G_{v2,37}(j, \epsilon)$ avec $G_2 = \langle ay_{j+1}^\epsilon, b, x_1, y_j \rangle$ où $j \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v2,38}(\epsilon)$ avec $G_2 = \langle ax_1^\epsilon, b, x_0 \rangle$ où $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v2,39}$ avec $G_2 = \langle a, b, x_0, x_1y_1, x_1u_1 \rangle$
- $G_{v2,40}(j)$ avec $G_2 = \langle a, b, x_1, y_j, u_1y_{j+1} \rangle$ où $j \geq 1$
- $G_{v2,41}$ avec $G_2 = \langle a, b \rangle$
- $G_{v2,42}(i, \epsilon)$ avec $G_2 = \langle a, bu_1^\epsilon, x_i \rangle$ où $\epsilon, i \in \{0, 1\}$
- $G_{v2,43}(\epsilon)$ avec $G_2 = \langle ax_1^\epsilon, bx_1^{1-\epsilon}u_1^\epsilon, x_0 \rangle$ où $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v2,44}(j, \epsilon, \mu, \eta)$ avec $G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_{j+1}^\eta, bx_1^{\mu(1-\epsilon)}, y_j \rangle$ où $j \geq 1$ et $\epsilon, \mu, \eta \in \{0, 1\}$

- $G_{v2,45}(j, \epsilon)$ avec $G_2 = \langle ax_1^\epsilon, b, x_1 y_j \rangle$ où $j \geq 2$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v2,46}(j, \epsilon)$ avec $G_2 = \langle ax_1^\epsilon, b, u_1 y_j \rangle$ où $j \geq 2$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$

Le sous-groupe fini $N \subset \prod_{p>2} \text{premier} B_p$ sera constitué de matrices diagonales d'ordre impair (et de I_4). La donnée de N dépend de la connaissance de $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2))$, la projection dans S_4 du normalisateur de G_2 dans $M(4)$, groupe de toutes les matrices monomiales de $Gl(4, \mathbb{C})$. Les valeurs possibles de cette image sont données par D.L. Flannery dans le lemme 6.1.2 de [24] : ce sont $V, \langle a, b, ed^\sigma \rangle$ pour $0 \leq \sigma \leq 2$ ou S_4 . On note ed^σ le produit standard³ dans S_4 . On remarque que les groupes $\langle a, b, ed^\sigma \rangle$ sont conjugués à D (avec égalité si $\sigma = 2$). La démonstration de ce lemme ([24, p.452-453]) donne une méthode pour déterminer cette image. Avant de décrire plus précisément ces groupes N , on introduit de nouvelles notations ([24, p.442]). On se donne M un sous- V -module fini de $\prod_{p>2} \text{premier} B_p$: c'est un produit fini de $F(j_p, k_p, l_p; p) = \langle y_{j_p, p}, u_{k_p, p}, v_{l_p, p} \rangle$ avec $j, k, l \geq -1$. On remarque que $F(j_p, k_p, l_p; p) = M \cap B_p = M_p$. On dira alors que

- M est de type 1 si, pour tout p , $j_p = k_p = l_p$.
- M est de type 2 si, pour tout p , $k_p = l_p$ et si pour au moins un p , $j_p \neq k_p$ (sinon, M est de type 1).
- M est de type 3 si l'on est dans une des deux situations suivantes :
 - pour un premier p , on a $j_p < k_p < l_p$, p étant le plus petit nombre premier pour lequel j_p, k_p, l_p seront deux à deux distincts.
 - pour tout p , j_p, k_p, l_p ne sont pas deux à deux distincts et on a deux nombres premiers $q < r$ tels que pour $p < q$, $j_p = k_p = l_p$, $M_q = F(j_q, k_q, k_q; q)$ avec $j_q \neq k_q$, $k_p = l_p$ pour $q < p < r$ et $M_r = F(j_r, j_r, l_r; r)$ avec $j_r \neq l_r$.

On dira que M est de type 2_σ (resp. 3_σ) s'il est l'image par la conjugaison par d^σ d'un sous-module de type 2 (resp. 3) avec $0 \leq \sigma \leq 2$. Les groupes N de la famille \mathcal{F}_2 sont alors déterminés comme suit ([24, p.453-454]) :

- si $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2)) = V$, N est un sous- V -module fidèle fini de $\prod_{p>2} \text{premier} B_p$.
- si $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2)) = \langle a, b, ed^\sigma \rangle$ ($0 \leq \sigma \leq 2$), N est un sous- V -module fidèle fini de type 1, $2_\sigma, 2_{(\sigma+1)}$ ou 3_σ .
- si $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2)) = S_4$, N est un sous- V -module fidèle fini de type 1, 2 ou 3.

Les groupes de la famille \mathcal{F}_3 sont définis de manière similaire comme des produits semi-directs $G_2 N$ de deux groupes G_2 et N , la forme de ce dernier dépendant de G_2 . La liste des groupes G_2 possibles comprend les groupes de la famille \mathcal{F}_1 . Pour $1 \leq n \leq 36$, on notera $G_{v3,n}$ le groupe de \mathcal{F}_3 dont le sous-groupe G_2 est $G_{v1,n}$. D'autres possibilités existent pour G_2 , qui donneront d'autres groupes :

- $G_{v3,37}(j, \epsilon)$ avec $G_2 = \langle ax_1^\epsilon, b, u_1 y_j \rangle$ où $j \geq 2$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v3,38}(j)$ avec $G_2 = \langle a, b, x_1, y_j, u_1 y_{j+1} \rangle$ où $j \geq 1$

³ dans son article, D.L. Flannery travaille néanmoins essentiellement avec des actions à droite; on adopte donc ici une notation différente

– $G_{v3,39}$ avec $G_2 = \langle a, b, x_0, x_1 y_1, x_1 u_1 \rangle$

Les groupes N possibles de la famille \mathcal{F}_3 seront alors donnés comme suit :

- si $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2)) = V$, N est un sous- V -module fini de type 2_σ de la forme $\prod_p F(j_p, -1, -1; p)^{d^\sigma}$ avec $0 \leq \sigma \leq 2$.
- si $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2)) = \langle a, b, ed^\sigma \rangle$ ($0 \leq \sigma \leq 2$), N est un sous- V -module fini de type 2_τ de la forme $\prod_p F(j_p, -1, -1; p)^{d^\tau}$ avec $\tau = \sigma$ ou $\tau = \sigma + 1$.
- si $\pi(\text{Norm}_{M(4)}(G_2)) = S_4$, N est un sous- V -module fini de type 2 de la forme $\prod_p F(j_p, -1, -1; p)$.

Dans [25], D.L. Flannery complète la liste précédente : les nouveaux groupes qui suivent sont regroupés dans une famille \mathcal{F}_4 . D.L. Flannery ajoute d'abord des groupes produits semi-directs $G_2 N$ d'un sous-groupe fini non trivial de $\prod_{p>2 \text{ premier}} U_p$ (qui aura donc un nombre fini de générateurs de la forme $u_{k,p}$ pour p premier impair) et d'un groupe G_2 dans la liste suivante :

- $G_{v4,1}(i, \epsilon) : G_2 = \langle ay_{i+1}^\epsilon, b, x_1, y_i \rangle$ avec $i \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v4,2}(\epsilon) : G_2 = \langle ax_1^\epsilon, b, x_0, \text{diag}(1, 1, -1, -1) \rangle$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$
- $G_{v4,3}(i, \eta, \epsilon, \mu) : G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_{i+1}^\eta, bx_1^{\mu(1-\epsilon)}, y_i \rangle$ avec $i \geq 2$ et $\eta, \epsilon, \mu \in \{0, 1\}$
- $G_{v4,4}(\epsilon, \mu) : G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_2, bx_1^{\mu(1-\epsilon)}, y_1 \rangle$ avec $\epsilon, \mu \in \{0, 1\}$
- $G_{v4,5} : G_2 = \langle a, bx_1, y_1 \rangle$
- $G_{v4,6}(i, \epsilon) : G_2 = \langle ax_1^\epsilon, b, x_1 y_i \rangle$ avec $i \geq 2$

Il s'y ajoute $G_{v4,7}(i, \epsilon)$, produit semi-direct $G_2 N$ de $G_2 = \langle ax_1 y_{i+1}^\epsilon, b, y_i \rangle$ (avec $i \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$) avec un sous-groupe fini non trivial de $\prod_{p>2 \text{ premier}} V_p$ (qui aura donc un nombre fini de générateurs de la forme $v_{k,p}$ pour p premier impair).

2.5.3 Groupes imprimitifs monomiaux d'image $C = \langle c \rangle$ dans S_4

Les sous-groupes monomiaux infinis de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image C dans S_4 sont décrits par le résultat suivant :

Lemme 2.5.4 (Hessinger) *Soit G un sous-groupe algébrique infini monomial de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image C dans S_4 . Alors le groupe G est conjugué à un groupe engendré par cu_2^{-1} et $H = H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 .*

Démonstration.

Dans sa thèse, S. Hessinger montre ([29, Th 4.1, p.38], [30, Th 2.2.1, p.503]) que tout sous-groupe algébrique infini G de $SL(4, \mathbb{C})$ agissant monomialement sur \mathbb{C}^4 d'image C dans S_4 est conjugué à $\cup_{m \in \mathcal{S}} mH$ où $H = H_1^1, H_1^2, H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \{I_4, m = d_c cu_2^{-1} d_c^{-1}, m^2, m^3 y_1 v_1\}$ en notant

$$d_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Afin de voir si ces groupes agissant monomialement sont monomiaux, il convient maintenant de savoir s'ils sont irréductibles.

On notera $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ la base canonique de la représentation de S. Hésinger des groupes. Pour $H = H_1^1$ ou H_1^2 , le sous-espace engendré par $e_1 + ie_3$ et $e_2 + ie_4$ ($i^2 = -1$) est invariant sous l'action du groupe. Ces groupes sont donc réductibles. On vérifie maintenant que les autres groupes (avec $H = H_2^n$ ou H_3) sont irréductibles, c'est-à-dire que \mathbb{C}^4 n'admet pas de sous-espace non trivial invariant sous leur action. On considère le sous-groupe K (d'ordre 1024) de ces groupes engendré par $m, m^3 y_1 v_1$ et les matrices de H_2^n obtenues en prenant $\alpha = e^{\frac{i\pi}{8}}, \beta = 1, \xi = 1$ et $\alpha = 1, \beta = e^{\frac{i\pi}{8}}, \xi = 1$.

On vérifie alors que le caractère de K est irréductible, donc que ce groupe l'est. Ainsi, les groupes seront eux aussi irréductibles.

On remarque que

$$y_1 v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in H_2^n \subset H_3$$

Ainsi, un sous-groupe algébrique infini monomial de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image C dans S_4 est conjugué à un groupe engendré par m et $H = H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 . D'autre part, d_c laisse stable $H = H_2^n$ et H_3 par conjugaison (car les matrices diagonales commutent entre elles), d'où le résultat car $d_c^{-1} m d_c = c u_2^{-1}$. \square

Les groupes finis dont la projection est C sont donnés par D.L. Flannery dans le théorème 6.2.3 de [24] et correspondent aux groupes donnés dans les listes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 (p.457), à moins qu'ils ne soient conjugués à un groupe de la liste \mathcal{F} présentée dans le paragraphe précédent. On notera \mathcal{C} la réunion de ces deux familles. On donne déjà les groupes de la liste \mathcal{C}_1 : ce sont des produits semi-directs de G_2 avec N , où le groupe G_2 parcourt la liste de familles de groupes donnée dans le théorème 4.8 de [23](p.59) dont on exclut ceux qui ne sont pas unimodulaires et où le groupe N est engendré par un nombre fini de $u_{k',p}$ avec $p \geq 3$ un nombre premier et $k' \geq -1$. On donne maintenant la liste des groupes G_2 possibles :

1. $G_{c1,1}(k, k') : G_2 = \langle c, y_k, v_k \rangle$ avec $k \geq 2$
2. $G_{c1,2}(k, k', \epsilon) : G_2 = \langle c, y_k, v_k, x_1^\epsilon y_{k+1} v_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$
3. cas $G_{c1,3}(k, k') : G_2 = \langle c, v_k, y_{k+1} v_{k+1}, x_1 y_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$
4. cas $G_{c1,4}(k, k') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_k \rangle$ avec $j \geq 1, k \geq 2$
5. cas $G_{c1,5}(k, k') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_k, y_{k+1} v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1, k \geq 1$
6. cas $G_{c1,6}(k, k') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_k, u_{j+1} y_{k+1} v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1, k \geq 1$
7. cas $G_{c1,7}(k, k') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_{k+1} v_{k+1}, u_{j+1} y_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1, k \geq 1$

On s'intéresse maintenant aux groupes de la deuxième famille \mathcal{C}_2 . Pour les décrire, on adoptera les notations suivantes :

- pour $j, k \geq -1, p \neq 2$ premier, on note $F(j, k; p)$ la famille $\langle u_{k,p}, y_{j,p}, v_{j,p} \rangle$
- pour $j, k \geq -1, r \geq 1, \xi \in \{-1, 1\}, p \neq 2$ premier, $p \equiv 1[4]$, on note $C(j, k, r, \xi; p)$ la famille $\langle u_{k,p}, y_{j,p}, v_{j,p}, y_{j+r,p} v_{j+r,p}^{\xi s} \rangle$ avec s une racine carrée fixée de -1 dans \mathbb{Z}_{p^r} .

Les groupes de la famille \mathcal{C}_2 sont des produits semi-directs de G_2 avec N , où le groupe G_2 parcourt la liste de familles de groupes donnée dans le théorème 4.8 de [23](p.59) et dans la proposition 6.2.2 de [24](p.456) dont on exclut ceux qui ne sont pas unimodulaires et où le groupe N peut être de deux formes différentes, suivant l'image dans S_4 du normalisateur de G_2 dans $M(4)$ qui sera C ou D .

Pour les groupes suivants, le sous-groupe N sera engendré par une famille de matrices de la forme $C(j'', k'', r'', 1; p)$ pour un nombre premier impair p et un nombre fini (éventuellement nul) de familles de la forme $F(j', k'; p')$ ou $C(j''', k''', r''', 1; p''')$ pour d'autres nombres premiers impairs p', p''' . On donne maintenant la liste des groupes G_2 possibles :

- cas $G_{c2,1}(j, k, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_k \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 2$
- cas $G_{c2,2}(j, k, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_k, y_{k+1} v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{c2,3}(j, k, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_k, u_{j+1} y_{k+1} v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{c2,4}(j, k, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_j, v_k, y_{k+1} v_{k+1}, u_{j+1} y_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{c2,5}(k, k'') : G_2 = \langle c, y_k, v_k \rangle$ avec $k \geq 2$
- cas $G_{c2,6}(k, \epsilon, k'') : G_2 = \langle c, y_k, v_k, x_1^\epsilon y_{k+1} v_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{c2,7}(k, k'') : G_2 = \langle c, v_k, y_{k+1} v_{k+1}, x_1 y_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$
- cas $G_{c2,8}(k'') : G_2 = \langle c \rangle = \langle c, x_0 \rangle$
- cas $G_{c2,9}(k'') : G_2 = \langle c, x_1 \rangle$
- cas $G_{c2,10}(i, k'') : G_2 = \langle c, u_i \rangle$ avec $i \geq 1$
- cas $G_{c2,11}(i, k'') : G_2 = \langle c, x_1 u_{i+1} \rangle$ avec $i \geq 1$
- cas $G_{c2,12}(i, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_i, y_1, v_1 \rangle$ avec $i \geq 1$
- cas $G_{c2,13}(i, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_i, y_1 v_1 \rangle$ avec $i \geq 1$
- cas $G_{c2,14}(i, k'') : G_2 = \langle c, x_1, u_i, y_1 v_1, y_1 u_{i+1} \rangle$ avec $i \geq 1$
- cas $G_{c2,15}(k'') : G_2 = \langle c, y_1, v_1, x_1 u_1 \rangle$
- cas $G_{c2,16}(k'') : G_2 = \langle c, y_1 v_1, x_1 u_1 \rangle$
- cas $G_{c2,17}(k'') : G_2 = \langle c, x_1 u_1, y_1 v_1, x_1 y_1 \rangle$

Pour les groupes suivants (pour lesquels l'image du normalisateur est C), le sous-groupe N sera engendré par une famille de matrices de la forme $F(j', k'; p)$ avec $j' \geq 0$ pour un nombre premier impair p et un nombre fini (éventuellement nul) de familles de la forme $F(j', k'; p')$ pour d'autres nombres premiers impairs p' . On donne maintenant la liste des groupes G_2 possibles :

- cas $G_{c2,18}(k') : G_2 = \langle c \rangle = \langle c, x_0 \rangle$
- cas $G_{c2,19}(i, k') : G_2 = \langle c, u_i \rangle$ avec $i \geq 1$

2.5.4 Groupes imprimitifs monomiaux d'image $D = \langle a, c \rangle$ dans S_4

Les sous-groupes monomiaux infinis de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image D dans S_4 sont décrits par le résultat suivant :

Lemme 2.5.5 (Hessinger) *Soit G un sous-groupe algébrique infini monomial de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image D dans S_4 . Alors le groupe G est conjugué à un groupe engendré par $cu_2^{-1}, au_1v_1, y_1v_1$ et $H = H_1^1, H_1^2, H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 .*

Démonstration.

Dans sa thèse, S. Hessinger montre ([29, Th 4.1, p.38], [30, Th 2.2.1, p.503]) que tout sous-groupe algébrique infini G de $SL(4, \mathbb{C})$ agissant monomialement sur \mathbb{C}^4 d'image D dans S_4 est conjugué à $\cup_{m \in \mathcal{S}} mH$ où $H = H_1^1, H_1^2, H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 et

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 = \{I_4, m = d_c cu_2^{-1} d_c^{-1}, m^2, m_1 = m^3 y_1 v_1, m_2 = au_1 v_1, m^2 m_2, m m_2, m_1 m_2\}$$

en notant toujours

$$d_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe de ces groupes engendré par m, m_1 et m_2 est irréductible donc tous ces groupes le seront aussi. Par ailleurs, $m_1 = m^3 y_1 v_1$. Ainsi, un sous-groupe algébrique infini monomial de $SL(4, \mathbb{C})$ d'image D dans S_4 est conjugué à un groupe engendré par $m, y_1 v_1, m_2$ et $H = H_1^1, H_1^2, H_2^n$ ($n \geq 1$) ou H_3 . D'autre part, on constate que $d_c^{-1} m d_c = cu_2^{-1}$, que $d_c^{-1} m_2 d_c = m_2 = au_1 v_1$ et que d_c laisse stable H par conjugaison (car les matrices diagonales commutent entre elles), d'où le résultat. \square

Les groupes finis dont la projection est D sont donnés par D.L. Flannery dans le théorème 6.3.3 de [24]. Ils correspondent aux groupes donnés dans \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 (p.459) ou sont conjugués à un groupe des listes \mathcal{F} ou \mathcal{C} .

Les groupes des familles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont des produits semi-directs de G_2 avec N . Dans le cas \mathcal{D}_1 , le groupe G_2 parcourt les familles dont la liste est donnée dans le théorème 5.12 de [23] (p.66) et le groupe N est engendré par un nombre fini de $u_{k', p}$ avec $p \geq 3$ un nombre premier et $k' \geq -1$. On donne maintenant la liste des groupes G_2 possibles :

- cas $G_{d1,1}(j, k, k') : G_2 = \langle a, c, u_j, y_k, v_k \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 2$
- cas $G_{d1,2}(j, k, k') : G_2 = \langle au_{j+1}, c, u_j, y_k, v_k \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 2$
- cas $G_{d1,3}(j, k, k') : G_2 = \langle ay_{k+1}v_{k+1}, c, u_j, y_k, v_k \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 2$
- cas $G_{d1,4}(j, k, k') : G_2 = \langle au_{j+1}y_{k+1}v_{k+1}, c, u_j, y_k, v_k \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 2$
- cas $G_{d1,5}(j, k, k') : G_2 = \langle a, c, u_j, y_k, v_k, u_{j+1}y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$

- cas $G_{d1,6}(j, k, k') : G_2 = \langle au_{j+2}y_{k+1}, c, u_j, y_k, v_k, u_{j+1}y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,7}(j, k, k') : G_2 = \langle a, c, u_j, y_k, v_k, y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,8}(j, k, k') : G_2 = \langle au_{j+1}, c, u_j, y_k, v_k, y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,9}(j, k, k') : G_2 = \langle ay_{k+1}, c, u_j, y_k, v_k, y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,10}(j, k, k') : G_2 = \langle au_{j+1}y_{k+1}, c, u_j, y_k, v_k, y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,11}(j, k, k') : G_2 = \langle a, c, u_j, v_k, y_{k+1}v_{k+1}, u_{j+1}y_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,12}(j, k, k') : G_2 = \langle au_{j+1}, c, u_j, v_k, y_{k+1}v_{k+1}, u_{j+1}y_{k+1} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$
- cas $G_{d1,13}(k, \epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon, cu_2, y_k, v_k \rangle$ avec $k \geq 2$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d1,14}(k, \epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_{k+1}v_{k+1}, cu_2, y_k, v_k \rangle$ avec $k \geq 2$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d1,15}(k, k') : G_2 = \langle ay_{k+1}, c, y_k, v_k, x_1y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$
- cas $G_{d1,16}(k, k') : G_2 = \langle au_2, c, y_k, v_k, x_1y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 2$
- cas $G_{d1,17}(k, \epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon, cu_2, y_k, v_k, y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d1,18}(k, \epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_{k+1}, cu_2, y_k, v_k, y_{k+1}v_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d1,19}(k, \epsilon, k') : G_2 = \langle au_1^\epsilon, cu_2^{-1}, y_{k+1}v_{k+1}, v_k, x_1y_{k+1} \rangle$ avec $k \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$

Dans le cas \mathcal{D}_2 , le groupe N est un produit fini de $\langle y_{j',p}, u_{k',p}, v_{j',p} \rangle$ ($j', k' \geq -1$ et $p \geq 3$ un nombre premier) avec $j' \geq 0$ pour au moins un p et le groupe G_2 parcourt les familles dont la liste est donnée dans la proposition 6.3.2 de [24] (p.458). Cette liste est constituée d'une part des groupes G_2 apparaissant pour \mathcal{D}_1 et d'autre part de nouveaux groupes. Pour $1 \leq i \leq 19$, on note $G_{d2,i}$ le groupe de la famille \mathcal{D}_2 dont le sous-groupe G_2 est le même que celui de $G_{d1,i}$. On donne maintenant la liste des nouveaux groupes G_2 possibles apparaissant pour \mathcal{D}_2 :

- cas $G_{d2,20}(j, k') : G_2 = \langle a, c, u_j, y_1, v_1 \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{d2,21}(j, k') : G_2 = \langle au_{j+1}, c, u_j, y_1, v_1 \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{d2,22}(j, k') : G_2 = \langle ay_2v_2, c, u_j, y_1, v_1 \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{d2,23}(j, k') : G_2 = \langle au_{j+1}y_2v_2, c, u_j, y_1, v_1 \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{d2,24}(\epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon, cu_2, y_1, v_1 \rangle$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d2,25}(\epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_2v_2, cu_2, y_1, v_1 \rangle$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d2,26}(k') : G_2 = \langle au_2, c, y_1, v_1, x_1y_2v_2 \rangle$
- cas $G_{d2,27}(k') : G_2 = \langle a, cu_2^{-1}, \text{diag}(-1, -1, 1, 1), -I_4, \text{diag}(-1, 1, -1, 1) \rangle$
- cas $G_{d2,28}(k') : G_2 = \langle au_1, cu_2^{-1}, \text{diag}(-1, -1, 1, 1), -I_4, \text{diag}(-1, 1, -1, 1) \rangle$
- cas $G_{d2,29}(\epsilon, \nu, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon u_2v_1, cx_1^\nu, -I_4 \rangle$ avec $\epsilon, \nu \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d2,30}(k') : G_2 = \langle a, c, x_1 \rangle$
- cas $G_{d2,31}(k') : G_2 = \langle au_2v_1, c, x_1 \rangle$
- cas $G_{d2,32}(j, \epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon v_1, c, u_j \rangle$ avec $j \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d2,33}(j, \epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon u_{j+1}v_1, c, u_j \rangle$ avec $j \geq 1$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$

- cas $G_{d2,34}(j, k') : G_2 = \langle av_1^{-1}, c, x_1u_{j+1} \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{d2,35}(j, k') : G_2 = \langle au_{j+2}, c, x_1u_{j+1} \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{d2,36}(\epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon, cu_2, -I_4, \text{diag}(-1, 1, -1, 1) \rangle$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$
- cas $G_{d2,37}(\epsilon, k') : G_2 = \langle ax_1^\epsilon y_1, cu_2, -I_4, \text{diag}(-1, 1, -1, 1) \rangle$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$

2.5.5 Groupes imprimitifs monomiaux d'image A_4 dans S_4

D'après S. Hessinger, il existe à conjugaison près un sous-groupe infini monomial d'image A_4 dans S_4 qui est engendré par $\langle a, b, d \rangle$ et H_3 . En effet, dans sa thèse, S. Hessinger montre ([29, Th 4.1, p.38], [30, Th 2.2.1, p.503]) que tout sous-groupe algébrique infini G de $SL(4, \mathbb{C})$ agissant monomialement sur \mathbb{C}^4 d'image A_4 dans S_4 est conjugué à $\cup_{m \in \mathcal{S}} mH$ où $H = H_3$ et $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{A_4} \text{diag}(GL(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \cap SL(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où \mathcal{P}_{A_4} est la projection classique de A_4 dans $GL(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, ce qui nous donne le groupe décrit plus haut (qui est bien irréductible).

Les sous-groupes monomiaux finis de $SL(4, \mathbb{C})$ dont l'image dans S_4 est A_4 sont donnés par D.L. Flannery dans le théorème 7.2 de [24].

On peut avoir $G = G_2N$ produit semi-direct de G_2 avec N , où le groupe N est un produit fini de $\langle y_{j'',p}, u_{j'',p}, v_{j'',p} \rangle$ ($j'' \geq -1$) pour $p > 3$ nombre premier et le groupe G_2 parcourt la liste suivante :

- cas $G_{a4,1}(j, j') : G_2 = \langle a, b, d, x_1, y_j, u_j, v_j, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $j' \geq -1$
- cas $G_{a4,2}(j, j') : G_2 = \langle ay_{j+1}, bu_{j+1}v_{j+1}, dy_{j+2}u_{j+2}^{-1}, x_1, y_j, u_j, v_j, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $j' \geq -1$
- cas $G_{a4,3}(j, j') : G_2 = \langle a, b, d, x_1, y_j, u_j, v_j, y_{j+1}u_{j+1}^{-1}v_{j+1}^{-1}, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $j' \geq -1$
- cas $G_{a4,4}(j, j') : G_2 = \langle a, bu_{j+1}, du_{j+2}v_{j+2}^{-1}, x_1, y_j, u_j, v_j, y_{j+1}u_{j+1}^{-1}v_{j+1}^{-1}, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $j' \geq -1$
- cas $G_{a4,5}(j, j') : G_2 = \langle a, b, d, x_1, y_j, v_j, u_{j+1}v_{j+1}, y_{j+1}u_{j+1}, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j \geq 1$ et $j' \geq -1$
- cas $G_{a4,6}(j') : G_2 = \langle a, b, d, \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1), -I_4, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j' \geq -1$
- cas $G_{a4,7}(j', \mu) : G_2 = \langle a, b, d, x_\mu, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j' \geq 0$ et $\mu \in \{-1, 0, 1\}$
- cas $G_{a4,8}(j', \mu) : G_2 = \langle ax_1, bu_1, du_2v_2^{-1}, x_\mu, y_{j',3}, u_{j',3}, v_{j',3} \rangle$ avec $j' \geq 0$ et $\mu \in \{-1, 0, 1\}$

On peut aussi avoir $G = G_2N$ produit semi-direct de G_2 avec N , où le groupe N est un produit fini de $\langle y_{j'',p}, u_{j'',p}, v_{j'',p} \rangle$ ($j'' \geq -1$) pour $p > 3$, avec au moins un premier $p > 3$ tel que $j'' \geq 0$, et le groupe G_2 parcourt la liste suivante :

- cas $G_{a4,9}(\mu) : G_2 = \langle a, b, d, x_\mu \rangle$ avec $\mu \in \{-1, 0, 1\}$
- cas $G_{a4,10}(\mu) : G_2 = \langle ax_1, bu_1, du_2v_2^{-1}, x_\mu \rangle$ avec $\mu \in \{-1, 0, 1\}$

2.5.6 Groupes imprimitifs monomiaux d'image S_4 dans S_4

D'après S. Hessinger, il existe à conjugaison près un sous-groupe infini monomial d'image S_4 dans S_4 qui est engendré par $\langle a, b, d, e \rangle$ et H_3 . En effet, dans sa thèse, S. Hessinger montre ([29, Th 4.1, p.38], [30, Th 2.2.1, p.503]) que tout sous-groupe algébrique infini G de $SL(4, \mathbb{C})$ agissant monomialement sur \mathbb{C}^4 d'image S_4 dans S_4 est conjugué à $\cup_{m \in \mathcal{S}} mH$ où $H = H_3$ et $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{S_4} \text{diag}(GL(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \cap SL(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où \mathcal{P}_{S_4} est la projection classique de S_4 dans $GL(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, ce qui nous donne le groupe décrit plus haut (qui est bien irréductible).

Les sous-groupes monomiaux finis de $SL(4, \mathbb{C})$ dont l'image dans S_4 est S_4 sont donnés par D.L. Flannery dans le théorème 8.1 de [24]. On obtient ainsi une liste de familles de groupes à étudier.

On peut avoir $G = G_2N$ produit semi-direct de G_2 avec N , où le groupe N est un produit fini de $\langle y_{j',p}, u_{j',p}, v_{j',p} \rangle$ ($j' \geq -1$) pour $p > 2$ nombre premier et le groupe G_2 parcourt la liste suivante :

- cas $G_{s4,1}(j) : G_2 = \langle a, b, d, e, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{s4,2}(j) : G_2 = \langle a, b, d, ey_{j+1}u_{j+1}v_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{s4,3}(j) : G_2 = \langle a, b, d, e, x_1, y_j, u_j, v_j, y_{j+1}u_{j+1}^{-1}v_{j+1}^{-1} \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{s4,4}(j) : G_2 = \langle a, bu_{j+1}, du_{j+2}v_{j+2}^{-1}, ey_{j+2}u_{j+1}, x_1, y_j, u_j, v_j, y_{j+1}u_{j+1}^{-1}v_{j+1}^{-1} \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{s4,5}(j) : G_2 = \langle a, b, d, e, x_1, y_j, u_{j+1}v_{j+1}, v_j, y_{j+1}u_{j+1} \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{s4,6}(j) : G_2 = \langle a, b, d, ey_{j+1}, x_1, y_j, u_{j+1}v_{j+1}, v_j, y_{j+1}u_{j+1} \rangle$ avec $j \geq 1$
- cas $G_{s4,7}(\nu) : G_2 = \langle a, b, d, ex_2^\nu y_2 u_2 v_2, \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1), -I_4 \rangle$ avec $\nu \in \{-2, 0\}$
- cas $G_{s4,8}(\nu) : G_2 = \langle ax_1, bu_1, du_2v_2^{-1}, ey_2u_1, x_1 \rangle$
- on peut aussi avoir $G_{s4,9} = G_2N$ produit semi-direct de $G_2 = \langle a, b, d, e, x_1 \rangle$ avec N , où le groupe N est un produit fini de $\langle y_{j',p}, u_{j',p}, v_{j',p} \rangle$ ($j' \geq -1$) pour $p > 2$ nombre premier, avec au moins un p tel que $j' \geq 0$.

2.5.7 Groupes primitifs

Dans sa thèse ([29],[30]), S. Hessinger décrit les sous-groupes primitifs infinis G de $SL(4, \mathbb{C})$ suivant leur composante connexe de l'identité. Si celle-ci est réductible, on aura $G = HG^o$ avec

$$G^o = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & A \end{array} \right); A \in SL(2, \mathbb{C}) \right\} \text{ et } H = \left\{ \left(\begin{array}{cc} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \tilde{H} \right\}$$

où \tilde{H} désigne un sous-groupe primitif fini de $SL(2, \mathbb{C})_2 = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) | \det(A^2) = 1\}$, c'est-à-dire que \tilde{H} est $A_4^{SL_2}, S_4^{SL_2}, A_5^{SL_2}$ (ces groupes sont décrits explicitement par H.F. Blichfeldt dans [7, paragraphes 57,58]) ou une extension d'un de ces trois

groupes par iI_2 (notée respectivement $(A_4^{SL_2})_2, (S_4^{SL_2})_2$ ou $(A_5^{SL_2})_2$).

Si le groupe G^o est irréductible, on a les possibilités suivantes :

- $G^o \subset G \subset \cup_{\omega^4=1} \omega G^o$ avec $G^o = SP(4, \mathbb{C})$ ou $G^o = SL(2, \mathbb{C})$
- $G^o \subset G \subset (\cup_{\omega^4=1} \omega G^o) \cup (\cup_{\omega^4=1} \omega J G^o)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$, G^o étant la représentation usuelle de $SO(4, \mathbb{C})$ comme $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$.
- $G = G^o = SL(4, \mathbb{C})$.

Dans sa thèse ([18, p. 75-81]), O. Cormier a établi pages 75 à 81 la liste des 57 sous-groupes primitifs finis de $SL(4, \mathbb{C})$, à partir de travaux de Blichfeldt ([7]) et de Dixon ([20]).

Chapitre 3

(Semi-)invariants des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$

3.1 Groupes (finis) imprimitifs non monomiaux

On reprend dans cette partie l'article [8] qui est un travail commun avec D. Boucher et F. Ulmer. Son résultat principal décrit les bornes optimales pour le degré de la dérivée logarithmique d'une solution liouvillienne d'une équation d'ordre 4 de groupe de Galois différentiel imprimitif non monomial. Il est à noter que 4 est le plus petit ordre pour lequel le groupe de Galois puisse être imprimitif non monomial.

3.1.1 Introduction

D'après [58, Théorème 3], l'existence d'une solution liouvillienne de la forme $z = e^{\int u}$ avec u est algébrique sur k est équivalente à l'existence d'un semi-invariant qui factorise en produit de formes linéaires. Si $m = [k(u) : k]$ est minimal, il est le degré minimal d'une forme produit de formes linéaires. Pour chaque ordre n , on peut décrire la liste finie des m possibles qui doivent être considérés en vue de calculer les solutions liouvilliennes de $L(y) = 0$. Pour les équations du deuxième ordre, la plus petite liste possible est donnée dans [39] et pour les équations du troisième ordre dans [56].

Pour les groupes primitifs de degré 4, la liste des plus petits m possibles, $\{4, 5, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 40, 48, 60, 72, 120\}$ est donnée dans [18].

Une représentation d'un groupe G est imprimitive si le caractère de la représentation est irréductible et induit par le caractère d'un sous-groupe. Si un système d'imprimitivité donné ne peut pas être décomposé en un de dimension moindre, la restriction du stabilisateur \mathcal{G}_i de V_i dans \mathcal{G} à V_i , notée $H_i = \rho_i(\mathcal{G}_i)$, est un groupe primitif de degré $d = \dim(V_i)$. Si $n = 4$ et $d = 2$, $H_i/Z(H_i)$ est conjugué à A_4 ,

S_4 , A_5 ou à $PSL(2, \mathbb{C})$ ([6, 39, 56]). Dans ce cas, on dit que la représentation imprimitive est *de type* A_4 , S_4 , A_5 ou $PSL(2, \mathbb{C})$.

D'après [56, Théorème 3.2] et [55, Proposition 2.1], on a les bornes supérieures suivantes pour m tel que $z = e^{\int u}$ est une solution liouvillienne avec $[k(u) : k] = m$:

1. 4 si $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ est monomial.
2. $8 = 2 \cdot 4$ si $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ est de type A_4 .
3. $12 = 2 \cdot 6$ si $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ est de type S_4 .
4. $24 = 2 \cdot 12$ si $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ est de type A_5 .
5. il n'y a pas de solutions liouvilliennes si $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ est de type $PSL(2, \mathbb{C})$.

Par la suite, on désignera ces bornes sous le nom de bornes *standard*. Il est connu que ces bornes ne sont pas les meilleures possibles pour $n = 6$ ([17, 18]) et nous allons montrer que pour $n = 4$, elles ne sont pas non plus les meilleures possibles. La notion de *type* d'un groupe imprimitif introduite ci-dessus est ambiguë puisque nous verrons qu'un groupe peut être de plusieurs types différents (cf. exemple C.0.4 et exemple 3.1.3). On définit donc le type d'un groupe comme le groupe A_4 , S_4 ou A_5 de plus petit ordre parmi les différents types possibles. Ceci donnera la plus petite borne standard possible pour un groupe.

Dans cette section, on se demande si les bornes ci-dessus sont les meilleures possibles pour chaque type.

3.1.2 Groupes monomiaux

La version explicite suivante de [55, Proposition 3.6] montre que l'on peut caractériser les équations $L(y)$ dont le groupe de Galois $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ est monomial :

Lemme 3.1.1 *Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire irréductible d'ordre n avec $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathcal{C})$.*

1. *S'il existe une solution $z = e^{\int u}$ avec $[k(u) : k] = m$, alors $m \geq n$.*
2. *Le groupe de Galois différentiel \mathcal{G} of $L(y)$ est monomial si et seulement s'il existe une solution $z = e^{\int u}$ telle que $[k(u) : k] = n$.*

Preuve.

1. Supposons que $L(y) = 0$ a une solution liouvillienne $z = e^{\int u}$ avec $[k(u) : k] = m$ et m minimal. Puisque \mathcal{G} envoie la dérivée logarithmique $u = z'/z$ sur une autre dérivée logarithmique, le polynôme minimal $P \in k[U]$ de u doit être de la forme

$$P = \prod_{i=1}^m \left(U - \frac{z'_i}{z_i} \right)$$

où les z_i sont des solutions de $L(y) = 0$. Puisque \mathcal{G} envoie z'_i/z_i sur z'_j/z_j , il envoie z_i sur un multiple de z_j . En particulier l'espace engendré par z_1, \dots, z_m est \mathcal{G} -invariant. Puisque $L(y)$ est irréductible, le groupe $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathcal{C})$ est un groupe linéaire irréductible, donc $m \geq n$.

2. Avec les notations précédentes, supposons maintenant que $m = n$. Alors, dans la base z_1, \dots, z_n le groupe \mathcal{G} envoie une solution z_i sur un multiple d'un certain z_j . En conséquence, la représentation de \mathcal{G} est monomiale dans cette base. Réciproquement, si \mathcal{G} est monomial dans une certaine base y_1, \dots, y_n , alors \mathcal{G} permute les y'_i/y_i qui sont donc de degré au plus n . Puisque $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathcal{C})$ est irréductible, le point précédent montre que l'orbite de $u = y'_1/y_1$ ne peut pas être de cardinal inférieur à n , donc $[k(u) : k] = n$. \square

Exemple 3.1.2 *Le groupe transitif G de degré 16 de numéro 189 dans la classification de [16] est d'ordre 96. On va utiliser la méthode présentée dans [47] pour calculer une équation différentielle linéaire dont c'est le groupe de Galois différentiel et dont l'espace des solutions est un sous-espace de l'espace des 1-formes holomorphes d'un certain revêtement galoisien de groupe de Galois G . Ce groupe a deux caractères de degré 4 qui sont tous deux unimodulaires et induits par le caractère de dimension 1 d'un sous-groupe et donc monomiaux. Le groupe peut être engendré par des éléments σ_1 and σ_2 appartenant à l'unique classe de conjugaison de taille 12 dont les éléments sont d'ordre 4 et à une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 12 tels que $\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_2)^{-1}$ soit d'ordre 8. Considérons un revêtement galoisien de \mathbf{P}^1 de groupe de Galois G ramifié en $0, 1, \infty$ selon $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Le caractère de G dans l'espace des 1-formes holomorphes (cf. [47, Théorème 4.2]) contient les deux caractères de degré 4 exactement une fois. D'après la table de caractères (cf. [47, Section 5.2]), les plus petits exposants possibles en $0, 1, \infty$ sont $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\}$, $\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{12}, -\frac{7}{12}\}$ et $\{1 + \frac{5}{8}, 1 + \frac{1}{8}, 1 + \frac{7}{8}, 1 + \frac{3}{8}\}$. Puisque leur somme vaut 6, il n'y a pas de singularité apparente et ce sont effectivement les exposants (cf. [47, Section 6.3.1]). En conséquence, une équation avec ces exposants en $0, 1, \infty$ doit exister. D'après [35, Section 15.4], les exposants déterminent l'équation à 3 paramètres accessoires près b_0, c_1 et c_0 :*

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{12x - 5}{x(x-1)} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{11043x^2 - 9359x + 1080}{288(x-1)^2 x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ & \frac{4806x^2 + (144b_0 - 4655)x - 144b_0}{144(x-1)^3 x^2} \frac{dy}{dx} + \\ & \left(\frac{57915x^3 + (12288c_1 - 59147)x^2}{12288x^3(x-1)^4} \right. \\ & \left. + \frac{(12288c_0 - 12288c_1)x - 12288c_0}{12288x^3(x-1)^4} \right) y. \end{aligned}$$

Puisque nous avons trois quadruplets d'exposants à certaines singularités où les exposants diffèrent d'entiers, on peut calculer les paramètres accessoires à l'aide

de l'approche développée dans [47, Section 6.2] et on trouve l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{12x - 5}{x(x-1)} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{11043x^2 - 9359x + 1080}{288(x-1)^2 x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ \frac{19224x^2 - 25097x + 6477}{576(x-1)^3 x^2} \frac{dy}{dx} + \\ \frac{47171 + 57915x^2 - 106318x}{12288x^2(x-1)^4} y. \end{aligned}$$

On a par construction $\mathcal{G} \cong G$. Il est intéressant de noter que \mathcal{G} peut aussi être induit par le caractère de dimension 2 d'un sous-groupe projectivement équivalent à A_4 . Le groupe G est donc monomial et de type A_4 . \square

3.1.3 Groupes imprimitifs non monomiaux

Les sous-groupes imprimitifs non monomiaux finis de $Gl(4, \mathcal{C})$ sont classifiés projectivement, i.e. à multiples scalaires près, par H.F. Blichfeldt dans [6]. Blichfeldt donne 14 types de groupes imprimitifs finis. Les groupes appartenant aux familles 1° à 6° sont de type A_4 , ceux appartenant aux familles 7° à 11° de type S_4 and ceux appartenant aux familles 12° à 14° de type A_5 . Toutefois, ces familles ne sont pas disjointes :

Exemple 3.1.3 En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ dans la famille 7°, on a le groupe G d'ordre 192 engendré par

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{cccc} \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1-\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1-\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} -\xi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi \end{array} \right) \end{aligned}$$

où $\xi^4 + 1 = 0$. Le groupe G a 7 sous-groupes d'ordre 96. L'un d'entre eux, noté K_1 est engendré par :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{-\xi-\xi^3}{2} & \frac{\xi-\xi^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\xi-\xi^3}{2} & \frac{-\xi-\xi^3}{2} \\ \frac{\xi+\xi^3}{2} & \frac{-\xi+\xi^3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\xi+\xi^3}{2} & \frac{\xi+\xi^3}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\xi+\xi^3}{2} & \frac{\xi+\xi^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\xi+\xi^3}{2} & \frac{-\xi-\xi^3}{2} \\ \frac{-\xi-\xi^3}{2} & \frac{-\xi-\xi^3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\xi-\xi^3}{2} & \frac{\xi+\xi^3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un autre, noté K_2 est engendré par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{-1+\xi^2}{2} \\ \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{-1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} \\ \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1+\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La représentation de chaque sous-groupe K_i est une somme de deux représentations irréductibles de dimension 2 et on note χ_i un de ces caractères. Puisque $(\chi_i)^G$ est le caractère de G , on a un système d'imprimitivité pour chaque groupe K_i . Notant H_i le noyau de χ_i et $Z(H_i)$ le centre de H_i , on a $|H_1/Z(H_1)| = 24$ et $|H_2/Z(H_2)| = 12$, ce qui prouve que G est de type A_4 et S_4 . Il est cependant naturel de considérer ce groupe comme un groupe de type A_4 (cf. Section 3.1.1). \square

Théorème 3.1.4 Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire irréductible de groupe de Galois différentiel un sous-groupe imprimitif non monomial de $SL(4, \mathbb{C})$. Si \mathcal{G} est respectivement de type A_4 , S_4 ou A_5 , il existe une solution $z = e^{\int u}$ avec $[k(u) : k]$ minimal et respectivement égal à 8, 12 ou 24, à l'exception du groupe de la famille 13° avec $r = 1$ de type A_5 pour lequel il existe une solution $z = e^{\int u}$ avec $[k(u) : k] = 20$.

Démonstration.

On note qu'il existe une solution liouvillienne de $L(y) = 0$ si et seulement si le groupe imprimitif non monomial \mathcal{G} est de type A_4 , S_4 ou A_5 . Le résultat s'obtient par des calculs à partir de la classification des groupes imprimitifs non monomiaux finis donnée dans [6]. Puisque l'on montre qu'il existe seulement un groupe imprimitif non monomial fini pour lequel la borne standard n'est pas la meilleure possible, les bornes standard seront toujours les meilleures possibles pour les groupes imprimitifs non monomiaux infinis qui contiennent par construction des groupes imprimitifs non monomiaux finis d'ordre arbitrairement grand (cf. [30, Théorème 2.2.3]).

On illustre cette approche sur la première famille de sous-groupes G_1^n de [6] dont

les éléments sont de type A_4 . Un groupe imprimitif de cette famille est engendré par $b, y_1 v_1, a, S_4^{(r)}, S_3^{(k)}$ avec $\alpha^r = 1$ et $k^{3r} = 1$.

Notons que la classification donnée dans [6] est une classification *projective*, i.e. à multiples scalaires près. D'après [56, Lemme 3.1], l'indice minimal $[k(u) : k]$ est l'indice d'un sous-groupe 1-réductible¹ d'indice minimal, ce qui est invariant par équivalence projective ([63]). En conséquence, on peut travailler avec les matrices données dans [6], même si elles ne sont pas unimodulaires.

Puisque l'existence d'une solution $z = e^{\int u}$ avec $[k(u) : k] = m$ minimal est équivalente à l'existence d'un semi-invariant de degré m produit de formes linéaires, notre but est de montrer que pour aucune valeur des paramètres il n'existe de semi-invariant produit de formes linéaires de degré plus petit que 8, qui est la borne standard pour le type A_4 . Puisque les groupes donnés dans [6] sont irréductibles, il n'y aura pas de tel semi-invariant de degré < 4 (cf. preuve du lemme 3.1.1).

En vue de construire les semi-invariants du groupe G_1 nous considérons d'abord le sous-groupe fini \tilde{G}_1 engendré par les matrices sans paramètres $y_1 v_1, a, b$.

Pour chaque caractère linéaire ψ de \tilde{G}_1 , on calcule la dimensions des espaces $V_{\psi,d}$ de semi-invariants de \tilde{G}_1 de degré plus petit que 8 de caractère ψ . On utilise la série de Molien (Théorème 2.2.1 de [61]) que l'on généralise aux caractères linéaires non triviaux. Pour un groupe G et un caractère ψ de G , on a :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \frac{1}{\psi(u)} \frac{1}{\det(I - zu)} = \sum_{d=0}^{\infty} \dim(V_{\psi,d}) z^d.$$

On commence avec les invariants de \tilde{G}_1 , qui sont les semi-invariants correspondant au caractère trivial de \tilde{G}_1 . La série de Molien de \tilde{G}_1 est

$$1 + 2u^2 + 7u^4 + 12u^6 + O(u^8)$$

montrant que la dimension de l'espace des invariants de degré 2, 4, 6 est respectivement 2, 7, 12. A l'aide de l'opérateur de Reynolds, on calcule les invariants de degré 4 jusqu'à ce que l'on en obtienne 7 linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} \tilde{B} = & [x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4, \\ & x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2, \\ & x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_4 + x_2 x_4^3, \\ & x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_3 x_4^2 + x_2 x_3^2 x_4, \\ & x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2, \\ & x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2, \\ & x_1 x_2 x_3 x_4]. \end{aligned}$$

¹un sous-groupe de $GL(n, \mathcal{C})$ est dit 1-réductible s'il laisse invariante une droite dans \mathcal{C}^n invariante.

Les invariants de degré 4 de G_1 doivent être des combinaisons linéaires des invariants de \tilde{G}_1 (listés ci-dessus) et donc de la forme $f = \sum_{I \in \tilde{B}} \alpha_I I$, mais les invariants de \tilde{G}_1 peuvent être semi-invariants sous l'action de G_1 . Toutefois, des semi-invariants correspondant à des caractères différents de \tilde{G}_1 vont aussi correspondre à des caractères différents de G_1 . En conséquence, les espaces de semi-invariants de G_1 doivent être des sous-espaces des espaces de semi-invariants de \tilde{G}_1 qui sont aussi semi-invariants sous l'action de G_1 , i.e. qui sont aussi semi-invariants sous l'action des matrices à paramètres $S_4^{(r)}, S_3^{(k)}$. On pose donc

$$S_4^{(r)}.f - \lambda_1 f = 0 \quad (1)$$

et

$$S_3^{(k)}.f - \lambda_2 f = 0 \quad (2)$$

Sous la condition que $\alpha \neq 0$ et $k \neq 0$, on obtient une base de Gröbner dont les éléments (faisant intervenir $\lambda_i, \alpha_j, \alpha, k$) sont

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\lambda_1 - 1), \alpha_2 (\lambda_1 - 1), \alpha_3 (\lambda_1 - \alpha), \alpha_4 (\lambda_1 - \alpha), \\ & \alpha_5 (\lambda_1 - \alpha^2), \alpha_6 (\lambda_1 - \alpha^2), \alpha_7 (\lambda_1 - \alpha^2), \\ & \lambda_2 \alpha_1 - 2 \alpha_1 + \alpha_2, \lambda_2 \alpha_2 - 12 \alpha_1 - 2 \alpha_2, \lambda_2 \alpha_3 - 2 \alpha_3 k + 2 \alpha_4 k, \\ & \lambda_2 \alpha_4 - 6 \alpha_3 k - 2 \alpha_4 k, \lambda_2 \alpha_5 - 2 \alpha_5 k^2 + 2 \alpha_6 k^2 + \alpha_7 k^2, \\ & \lambda_2 \alpha_6 - 2 \alpha_5 k^2 + 2 \alpha_6 k^2 - \alpha_7 k^2, \lambda_2 \alpha_7 - 8 \alpha_5 k^2 - 8 \alpha_6 k^2, \\ & \alpha_1 (\alpha^4 - 1), \alpha_2 (\alpha^4 - 1), \alpha_1 (k^4 - 1), \alpha_2 (k^4 - 1), \\ & \alpha_1 \alpha_7 (\alpha^2 - 1), \alpha_2 \alpha_7 (\alpha^2 - 1), \alpha_1 \alpha_7 (k^2 - 1), \alpha_2 \alpha_7 (k^2 - 1), \\ & \alpha_1 \alpha_4 (\alpha - 1), \alpha_2 \alpha_4 (\alpha - 1), \alpha_3 \alpha_7 (\alpha - 1), \alpha_4 \alpha_7 (\alpha - 1), \\ & \alpha_3 (\alpha^2 - 1), \alpha_4 (\alpha^2 - 1), \alpha_1 \alpha_4 (k - 1), \alpha_2 \alpha_4 (k - 1), \\ & \alpha_3 \alpha_7 (k - 1), \alpha_4 \alpha_7 (k - 1), \alpha_3 (k^2 - 1), \alpha_4 (k^2 - 1), \\ & \alpha_1^2 + 1/12 \alpha_2^2, \alpha_1 \alpha_3 + 1/6 \alpha_2 \alpha_4, \alpha_2 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \alpha_4, \alpha_3^2 + 1/3 \alpha_4^2, \\ & \alpha_1 \alpha_5 + 1/8 \alpha_2 \alpha_7, \alpha_2 \alpha_5 - 3/2 \alpha_1 \alpha_7, \alpha_3 \alpha_5 + 1/4 \alpha_4 \alpha_7, \\ & \alpha_4 \alpha_5 - 3/4 \alpha_3 \alpha_7, \alpha_5^2 + 1/4 \alpha_6 \alpha_7 + 1/8 \alpha_7^2, \\ & 1/4 \alpha_1 (4 \alpha_6 - \alpha_7), 1/4 \alpha_2 (4 \alpha_6 - \alpha_7), 1/4 \alpha_3 (4 \alpha_6 - \alpha_7), \\ & 1/4 \alpha_4 (4 \alpha_6 - \alpha_7), 1/4 \alpha_5 (4 \alpha_6 - \alpha_7), \\ & 1/8 (2 \alpha_6 + \alpha_7) (4 \alpha_6 - \alpha_7). \end{aligned}$$

On en déduit les cas suivants :

1. Il n'y a pas de condition sur α and k si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Dans ce cas, le semi-invariant le plus générique de G_1 "venant" d'un invariant de \tilde{G}_1 est de la forme

$$f = \alpha_5 (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) + \alpha_6 (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + \alpha_7 x_1 x_2 x_3 x_4$$

avec

$$\alpha_5 (\alpha_6 - 1/4 \alpha_7) = \alpha_5^2 + 1/4 \alpha_6 \alpha_7 + 1/8 \alpha_7^2 = \alpha_6^2 + 1/4 \alpha_6 \alpha_7 - 1/8 \alpha_7^2 = 0.$$

Les relations possibles entre les α_i et les λ_i montrent que tous les semi-invariants ne correspondent pas toujours au même caractère de G_1 , mais ne pas en tenir compte donne clairement le cas "le pire possible" contenant tous les semi-invariants possibles dans des espaces de semi-invariants pour des caractères distincts de G_1 . Notons qu'ici, le cas "le pire possible" signifie que l'on peut chercher un semi-invariant produit de formes linéaires dans un espace de semi-invariants qui est de dimension trop grand. S'il existe un semi-invariant produit de formes linéaires, alors $\text{resultant}(f, x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4, x_1) = 0$ (cf. [32]). Le calcul d'une base de Gröbner montre qu'il n'y a pas de solution dans ce cas (i.e. pas de valeurs de c_i, α_j avec les α_j non tous nuls).

2. Soit $\alpha^4 = k^4 = 1$ ou $\alpha^2 = k^2 = 1$. On multiplie alors chacune de ces matrices par l'inverse de leur déterminant ce qui nous donne les groupes unimodulaires H_{576} , H_{384} , H_{288} , H_{192} et H_{96} d'ordre respectif 576, 384, 288, 192 and 96. Dans le dernier cas, correspondant à $\alpha = k = 1$, le groupe est réductible, comme noté par Blichfeldt. Dans les autres cas, la théorie des caractères permet de montrer qu'il n'y a pas de sous-groupe 1-réductible d'indice plus petit que 8 (cf. [56, preuve du Théorème 3.2]). Considérons par exemple le groupe H_{192} . On considère tous les caractères imprimitifs unimodulaires fidèles χ of H_{192} . En vue de trouver l'indice minimal d'un groupe 1-réductible, on considère tous les sous-groupes K of H_{192} d'indice < 8 et on décompose la restriction χ_K du caractère χ à K . Si la borne standard n'est pas la meilleure possible, alors on doit trouver un groupe K tel que χ_K se décompose en une somme de caractères irréductibles dont l'un des caractères est de degré 1. Il se trouve qu'aucun de ces groupes n'a un groupe 1-réductible d'indice < 8 .

Les calculs précédents pour les invariants de \tilde{G}_1 correspondent au caractère trivial de \tilde{G}_1 . Ensuite, on doit considérer les autres caractères linéaires de \tilde{G}_1 , il y en a 7 dans ce cas. Pour chaque caractère linéaire de \tilde{G}_1 , on calcule la série de Molien correspondante et, à l'aide d'un opérateur de Reynolds pour ce caractère, on calcule tous les semi-invariants de degré ≤ 8 . On considère à nouveau les semi-invariants qui sont aussi des semi-invariants de G_1 et on calcule comme ci-dessus. Ceci fait, on peut conclure que pour cette famille de groupes de type A_4 , la borne standard est la meilleure possible.

La borne standard fut toujours la meilleure possible, sauf pour un groupe de la famille 13° de la classification donnée dans [6] pour le paramètre $r = 1$ pour lequel on trouva 20 au lieu de 24. Ce groupe est présenté dans l'exemple ci-dessous. \square

Exemple 3.1.5 *Le groupe unimodulaire G correspondant à $r = 1$ dans la famille 13° est d'ordre 240 et engendré par*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{11} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\omega^2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2+\omega^2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1-\omega^2}{3} & \frac{-5}{12} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{-2+\omega^2}{3} \end{pmatrix}$$

avec $\omega^4 - \omega^2 + 1 = 0$. Ce groupe a un sous-groupe abélien d'indice 20 qui doit être 1-réductible. La construction d'une équation pour le groupe G par la méthode de [47] est possible. Dans la suite, on donne tous les ingrédients nécessaires à la construction, montrant aussi pourquoi elle est difficile au niveau calculatoire. Prenant pour matrices de monodromie aux singularités $0, 1, \infty$ les matrices $\sigma_1, \sigma_2, (\sigma_1\sigma_2)^{-1}$, on voit que le caractère unimodulaire imprimitif de G apparaît deux fois dans le G -module des 1-formes holomorphes du revêtement correspondant de $P^1(\mathbb{C})$. En conséquence, il existe une équation différentielle dont les exposants en $0, 1, \infty$ sont à des entiers près $\{-7/12, -1/12, -11/12, -5/12\}, \{-2/3, -1/3, 1/3, 2/3\}, \{1 + 1/8, 1 + 3/8, 1 + 5/8, 1 + 7/8\}$. Puisque la somme des exposants vaut 4, on doit effectuer une des opérations suivantes :

1. ajouter un entier 2 à un exposant,
2. ajouter deux entiers à deux exposants différents de sorte que les exposants restent deux à deux distincts,
3. ajouter une singularité apparente d'exposants $0, 1, 2, 3, 5$ et un entiers à un des exposants en $0, 1, \infty$ de sorte que les exposants restent deux à deux distincts,
4. ajouter deux singularités apparentes d'exposants $0, 1, 2, 3, 5$,
5. ajouter une singularité apparente d'exposants $0, 1, 2, 3, 6$.

Pour chacune de ces 71 possibilités, on doit calculer les paramètres accessoires restants à l'aide des invariants of G . Il y a 3 invariants linéairement indépendants de plus petit degré 8 de G .

On considère le cas où l'on ajoute l'entier 2 à l'exposant $-\frac{5}{12}$. D'après [57, Lemma

3.1], les valeurs des invariants de degré 8, qui sont des solutions rationnelles de la 8^{ième} puissance symétrique, doivent être de la forme

$$\frac{\sum_{i=0}^3 \gamma_i x^i}{x^7(x-1)^5}$$

Suivant la méthode de [47], on trouve des équations polynômiales pour les paramètres accessoires.

Nous n'avons pu terminer tous les calculs mais l'existence de l'équation est garantie. \square

3.1.4 Commentaires

La méthode utilisée dans cette section se fonde sur la classification de Blichfeldt via des matrices à paramètres. Une telle classification aussi simple n'a pas été donnée pour des représentations de degré plus grand. Dans la preuve du théorème 3.1.4, le cas général pouvait toujours être traité par une méthode type "pire des cas possibles" où l'on considère tout l'espace des semi-invariants de \tilde{G}_i qui sont aussi semi-invariants sous l'action de G_i . Un autre fait notable est que, pour chaque famille, on a toujours été amené à considérer séparément un nombre fini de groupes finis. Il n'est pas clair qu'il en serait de même pour des degrés plus grands.

3.2 (Semi-)invariants de degré 2 et 4 des sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$: informations et notations communes à tous les groupes

Pour chaque famille de groupes, on procédera de la même manière que dans l'article [8] pour trouver les (semi-)invariants de degré 2 et 4 de ces groupes. Les calculs ont été réalisés avec Magma sur les machines de MEDICIS ou celles de l'IRMAR.

Décrivons les notations principales qui seront utilisées dans tous les tableaux. On désigne les groupes par les notations introduites dans l'introduction. La colonne "Compl." ("Compléments" ; dernière colonne) donne des précisions sur les indices intervenant dans les définitions des groupes.

Dans la deuxième colonne, on liste les espaces de polynômes semi-invariants sous l'action du groupe par caractère. A chaque espace correspond une parenthèse (d, o) où d désigne la dimension de l'espace de (semi-)invariants pour un certain caractère ψ et o l'ordre de ψ . Dans la troisième colonne (colonne "pff"), on signale le nombre de droites de polynômes produits de formes linéaires dans chaque espace de (semi-)invariants. Le résultat est donné sous la forme d'une liste. La $i^{\text{ème}}$ entrée de la liste donne le nombre de droites de produits de formes linéaires dans le $i^{\text{ème}}$ espace de (semi-)invariant (de la deuxième colonne). Une liste plus courte que le nombre de caractères signifie simplement que les espaces de semi-invariants n'ayant pas d'entrée dans la liste ne contiennent pas de produits de formes linéaires (i.e. les zéros à droite ne sont pas écrits). Par exemple, si la deuxième colonne est : $[(1, 1), (1, 2), (1, 2)]$ et la troisième $[0, 1]$ (au lieu de $[0, 1, 0]$), cela signifie que l'on a un invariant qui n'est pas un produit de formes linéaires, un semi-invariant d'ordre 2 produit de formes linéaires et un semi-invariant d'ordre 2 qui n'est pas un produit de formes linéaires.

Pour les (semi-)invariants de degré 2, on reprend ce même principe ($i^{\text{ème}}$ parenthèse pour "le" $i^{\text{ème}}$ caractère). Une parenthèse vide $()$ signifie qu'il n'y a pas de semi-invariant de degré 2 dont le caractère associé est le même que celui de l'espace de semi-invariants de degré 4 correspondant (autrement dit, pour ce caractère, on a des semi-invariants de degré 4 associés mais aucun de degré 2 qui lui soit associé). La notation $(), \dots, ()$ signifie que les semi-invariants de degré 2 listés après ce signe correspondent à des caractères pour lesquels il n'y a pas de semi-invariants de degré 4.

En annexe, on trouvera des bases des espaces de polynômes (semi-)invariants de degré 2 et 4 décrits dans ce chapitre.

Remarque 3.2.1 *Pour les groupes monomiaux, on ne notera pas les situations où l'on a un seul (semi-)invariant de degré 4 (celui-ci factorisant alors en produit de formes linéaires) et aucun (semi-)invariant de degré 2. Il s'agit en effet d'une situation générique pour les groupes monomiaux. Plus précisément, pour les*

groupes infinis monomiaux, cette situation sera toujours générique. Concernant les groupes monomiaux finis, en reprenant les notations de la classification de ces groupes décrite dans le chapitre précédent (due à D.L. Flannery), cette situation sera générique pour 26 des 36 familles infinies de groupes finis de la famille \mathcal{F}_1 (mais ne se produit pas pour les autres), pour 36 des 46 familles infinies de groupes finis de \mathcal{F}_2 (mais sera courante pour les autres), pour 36 des 39 familles infinies de groupes finis de \mathcal{F}_3 (mais sera courante pour les autres), pour aucune des 7 familles infinies de groupes finis de \mathcal{F}_4 (pour ceux-ci, cette situation ne se produit pas) et pour les 101 familles infinies de groupes monomiaux de projection dans S_4 un sous-groupe transitif différent de V . Au total, c'est une situation générique pour 199 des 229 familles infinies de groupes monomiaux finis et pour les groupes monomiaux infinis.

3.3 Cas de la projection $T = V = \langle a, b \rangle$

Pour les groupes infinis, on a les résultats suivants :

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$\langle a, b, H_2^1 \rangle$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$ Deg 2 : $[(1,1), (1,2)]$	[1]	
$\langle a, b, H_2^2 \rangle$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	
$\langle a, b, H_2^4 \rangle$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	

3.3.1 Résultats pour la liste \mathcal{F}_1 de D.L. Flannery

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,1}(1, 2, l)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2), (1,2), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,1}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,1}(2, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,2}(1, 2, l)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2), (1,2), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,2}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,2}(2, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,3}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v1,3}(2, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,4}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v1,4}(2, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,5}(1, 2, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,5}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,6}(1, 2, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,6}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,7}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v1,8}(1, k, l)$	Deg 4 : $[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v1,9}(1, 2)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2), (1,2), (1,2), (1,2),]$ $[, (1,2), (1,2), (1,2), (1,2), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	
$G_{v1,9}(1, k)$	Deg 4 : $[(2,1), (1,2)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,9}(2, 1)$	Deg 4 : $[(3,1), (2,2), (2,2), (1,2), (1,2), (1,2), (1,2),]$ $[, (1,2), (1,2), (1,2), (1,2), (1,4), (1,4), (1,4), (1,4)]$ Deg 2 : $[(\), (\), (\), (1,2), (1,2), (1,2), (1,2)]$	[3]	

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,9}(2, k)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,9}(j, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v1,9}(j, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v1,10}(1, 2)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,10}(1, k)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,10}(2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,10}(2, k)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,10}(j, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (), (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 3$
$G_{v1,10}(j, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,11}(1, 2)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,11}(1, k)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,11}(2, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [, (1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,11}(2, k)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,11}(j, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 3$
$G_{v1,12}(1, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [, (1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,12}(1, k)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,12}(j, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$j \geq 2$
$G_{v1,12}(j, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v1,13}(1, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,13}(1, k)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,13}(2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,13}(j, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (), (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 3$
$G_{v1,13}(j, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v1,14}(1, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{v1,14}(1, k)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v1,14}(j, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,15}(1)$	Deg 4 :[(4,1),(3,2),(3,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3,2,2]	
$G_{v1,15}(2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,16}(1)$	Deg 4 :[(5,1),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),] [,(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[15]	
$G_{v1,16}(2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,17}(1)$	Deg 4 :[(3,1),(4,2),(2,2),(2,2),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,6]	
$G_{v1,17}(2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{v1,18}(1)$	Deg 4 :[(3,1),(4,2),(2,2),(2,2),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,6]	
$G_{v1,18}(2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{v1,19}(1)$	Deg 4 :[(4,1),(3,2),(3,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3,2,2]	
$G_{v1,19}(2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,20}(1)$	Deg 4 :[(2,1),(3,2),(3,2),(3,2),(2,4),(2,4),] [,(2,4),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4),] [,(2,4),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4)]	[1,2,2,2]	
$G_{v1,21}(1)$	Deg 4 :[(3,1),(4,2),(2,2),(2,2),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,6]	
$G_{v1,21}(2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,22}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(4,2),(2,2),(2,2),(2,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,6]	
$G_{v1,22}(1, k, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,22}(2, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,2]	
$G_{v1,22}(2, 2, 2)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,22}(j, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 3$
$G_{v1,23}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(3,2),(3,2),(3,2),(1,2)]	[1,2,2,2]	
$G_{v1,23}(1, k, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,23}(j, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 3$
$G_{v1,24}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,24}(1, 1, l)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,24}(1, k, l)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,24}(2, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(2,2),(2,2),...] [..., (1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,24}(2, 1, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,24}(2, k, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,24}(j, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 3$
$G_{v1,24}(j, 1, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3, l \geq 2$
$G_{v1,25}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,25}(1, 1, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,25}(1, k, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,25}(j, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 2$
$G_{v1,25}(j, 1, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2, l \geq 2$
$G_{v1,26}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,26}(1, k, l)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,26}(j, 1, 1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v1,27}(1, 1, 0)$	Deg 4 :[(5,1),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),] [,(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),] [,(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[15]	groupe étudié en exemple
$G_{v1,27}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(5,1),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),] [,(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),] [,(2,2),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[15]	
$G_{v1,27}(1, 2, 0)$	Deg 4 :[(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	si $\epsilon = 1$ gr. conjugué (même car.)
$G_{v1,27}(1, l, 0)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$l \geq 3$
$G_{v1,27}(1, l, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$l \geq 3$
$G_{v1,27}(2, 2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,27}(2, 2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,27}(2, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,27}(2, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,27}(k, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,27}(k, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,28}(1, l, 0)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$l \geq 2$
$G_{v1,28}(1, l, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(1,2),(1,2),(),(),(),(1,2)]	[3]	$l \geq 2$
$G_{v1,28}(2, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,28}(2, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,28}(k, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,28}(k, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v1,29}(1, 1, 0)$	Deg 4 :[(4,1),(3,2),(3,2),(1,2),...] [..., (2,2),(2,2),(2,2),(2,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(), (),(1,2),(1,2)]	[3,2,2]	
$G_{v1,29}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(4,1),(3,2),(3,2),(1,2),...] [..., (2,2),(2,2),(2,2),(2,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3,2,2]	
$G_{v1,29}(1, 2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,29}(1, 2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(), (),(1,2),(), (),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,29}(1, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 3$
$G_{v1,29}(1, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 3$
$G_{v1,29}(2, 2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,29}(2, 2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,29}(k, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$2 \leq k \leq l,$ $l \geq 3$
$G_{v1,29}(k, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$2 \leq k \leq l,$ $l \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,30}(1, 1, 0)$	Deg 4 :[(3,1),(4,2),(2,2),(2,2),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(),(),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,6]	
$G_{v1,30}(1, 1, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(4,2),(2,2),(2,2),(2,4),(2,4),(2,4),(2,4)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,6]	
$G_{v1,30}(1, 2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,30}(1, 2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,30}(1, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 3$
$G_{v1,30}(1, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 3$
$G_{v1,30}(2, 2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,30}(2, 2, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,30}(k, l, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$2 \leq k \leq l,$ $l \geq 3$
$G_{v1,30}(k, l, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$2 \leq k \leq l,$ $l \geq 3$
$G_{v1,31}(1, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v1,31}(1, 2)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,31}(1, l)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v1,31}(k, 1)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$k \geq 2$
$G_{v1,31}(k, 2)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v1,31}(k, l)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2,$ $l \geq 3$
$G_{v1,32}(1, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,32}(1, l)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v1,32}(k, 1)$	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$k \geq 2$
$G_{v1,32}(k, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k, l \geq 2$
$G_{v1,33}(1, 1)$	Deg 4 : [(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(1,2),(),...,(),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,33}(1, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,33}(k, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,34}(1, 1)$	Deg 4 : [(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(),...,(),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,34}(1, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,34}(k, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,35}(1, 1, 0)$	Deg 4 : [(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(1,1),(),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,35}(1, 1, 1)$	Deg 4 : [(3,1),(2,2),(2,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v1,35}(1, l, 0)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(1,1),(),(),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,35}(1, l, 1)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,35}(k, l, 0)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,35}(k, l, 1)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,36}(1, 1)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),] [, (1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v1,36}(1, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v1,36}(k, l)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$

3.3.2 Résultats pour la liste \mathcal{F}_2 de D.L. Flannery

Les descriptions des différents N possibles ont en commun de le décrire comme un sous- V -module fini de $\prod_{p>2} \text{premier} B_p$ fidèle. D'après [24, section 2.3], les générateurs d'un sous- V -module fini de $SL(4, \mathbb{C}) \cap \prod_{p>2} \text{premier} B_p$ seront des

$y_{j,p}, u_{k,p}, v_{l,p}$ avec $j, k, l \geq -1$ pour des nombres premiers $p > 2$. Si les générateurs de N sont tous de la forme $y_{j,p}$ (respectivement $u_{k,p}, v_{l,p}$), le noyau de l'action de V sur N par conjugaison sera $\langle a \rangle$ (respectivement $\langle b \rangle, \langle ab \rangle$), donc N ne sera pas fidèle. Si les générateurs de N sont d'au moins deux formes différentes, N sera alors un sous- V -module fini de $\prod_{p>2 \text{ premier}} B_p$ fidèle. On peut alors distinguer quatre situations :

- si les générateurs de N sont tous de la forme $u_{k,p}$ ou $v_{l,q}$, on dira que l'on est dans la situation Y .
- si les générateurs de N sont tous de la forme $y_{j,p}$ ou $v_{l,q}$, on dira que l'on est dans la situation U .
- si les générateurs de N sont tous de la forme $y_{j,p}$ ou $u_{k,q}$, on dira que l'on est dans la situation V .
- si N est engendré par des éléments de chacune des trois formes $y_{j,p}, u_{k,q}$ et $v_{l,r}$, le seul (semi-)invariant du groupe sera $P_1 = Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$.

On traite dans les tables chacune des trois premières situations possibles pour N . On note que, pour ces groupes, les semi-invariants qui ne sont pas invariants correspondront toujours à des caractères d'ordre 2.

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	(Semi-)invariants de degré 2	Compl.
$G_{v2,1}(1, 2, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l \geq 3$
$G_{v2,1}(1, k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,1}(2, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,1}(1, 2, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,2}(1, 2, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l \geq 3$
$G_{v2,2}(1, k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,2}(2, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,2}(1, 2, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,3}(1, k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l > k \geq 2$
$G_{v2,3}(2, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,4}(1, k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l > k \geq 2$
$G_{v2,4}(2, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,5}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,5}(1, 2, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,5}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,6}(1, 2, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,7}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,8}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,9}(1, k)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$k \geq 2$
$G_{v2,9}(2, k)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$k = 1$ ou $k \geq 3$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	(Semi-)invariants de degré 2	Compl.
$G_{v2,9}(j, 1)$	U, V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$j \geq 2$
$G_{v2,9}(j, 2)$	U, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,10}(1, k)$	Y	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$k \geq 2$
$G_{v2,10}(2, k)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$k = 1$ ou $k \geq 3$
$G_{v2,10}(j, 1)$	U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,10}(j, 1)$	V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$j \geq 2$
$G_{v2,10}(j, 2)$	V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,11}(1, k)$	Y	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$k \geq 2$
$G_{v2,11}(2, k)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$k = 1$ ou $k \geq 3$
$G_{v2,11}(j, 1)$	U, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,12}(1, k)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$k \geq 2$
$G_{v2,12}(j, 1)$	U	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$j \geq 2$
$G_{v2,12}(j, 2)$	U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,12}(j, 1)$	V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$j \geq 2$
$G_{v2,12}(j, 2)$	V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,13}(1, k)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$k \geq 2$
$G_{v2,13}(j, 1)$	U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,13}(j, 1)$	V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	$j \geq 2$
$G_{v2,13}(j, 2)$	V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,14}(j, k)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j = 1$ ou $k = 1$
$G_{v2,14}(j, 1)$	U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,15}(1)$	Y, U	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	
$G_{v2,15}(2)$	Y, U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,16}(1)$	Y, U, V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	
$G_{v2,16}(2)$	Y, U, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,17}(1)$	Y	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	
$G_{v2,17}(2)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,17}(1)$	U, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,18}(1)$	Y, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,18}(1)$	U	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	
$G_{v2,18}(2)$	U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,19}(1)$	Y	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,19}(1)$	U, V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	
$G_{v2,19}(2)$	U, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,20}(1)$	Y, U, V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,21}(1)$	Y, U	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		
$G_{v2,21}(1)$	V	$[(2,1), (1,2)]$	[1]	$[(\), (\), (1,2), (1,2)]$	
$G_{v2,21}(2)$	V	$[(1,1), (1,2), (1,2)]$	[1]		

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	(Semi-)invariants de degré 2	Compl.
$G_{v2,22}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,22}(j, 1, 1)$	U, V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1$
$G_{v2,23}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,23}(j, 1, 1)$	U, V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1$
$G_{v2,24}(1, k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,24}(2, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,24}(j, 1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1, l \geq 2$
$G_{v2,24}(j, 1, 1)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1$
$G_{v2,25}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,25}(j, 1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1, l \geq 2$
$G_{v2,25}(j, 1, 1)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1$
$G_{v2,26}(1, k, l)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,26}(j, 1, 1)$	U, V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$j \geq 1$
$G_{v2,27}(k, l, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(1,1),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,27}(k, l, 1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,27}(1, l, \epsilon)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l \geq 1$
$G_{v2,27}(2, l, \epsilon)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,27}(1, 1, \epsilon)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,27}(k, 2, \epsilon)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$k \leq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,28}(k, l, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(1,1),(1,2)]$	$l > k \geq 3$
$G_{v2,28}(k, l, 1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l > k \geq 3$
$G_{v2,28}(1, l, \epsilon)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,28}(2, l, \epsilon)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(k, l, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(1,1),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,29}(k, l, 1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,29}(1, l, \epsilon)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(1, 1, \epsilon)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$		$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(k, 2, \epsilon)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$k \leq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,30}(k, l, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(1,1),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,30}(k, l, 1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,30}(1, l, \epsilon)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,30}(1, 1, \epsilon)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,31}(k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$k, l \geq 1$
$G_{v2,31}(1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq 1$
$G_{v2,31}(k, 1)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$k \geq 1$
$G_{v2,31}(k, 2)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$k \geq 1$
$G_{v2,32}(k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	$[1]$	$[(0),(0),(1,2),(1,2)]$	$k, l \geq 1$
$G_{v2,32}(1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	$[1]$		$l \geq 1$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	(Semi-)invariants de degré 2	Compl.
$G_{v2,32}(k, 1)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$k \geq 1$
$G_{v2,33}(k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,33}(1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,33}(1, 1)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,34}(k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,34}(1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,34}(1, 1)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,35}(k, l, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,35}(k, l, 1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,35}(1, l, \epsilon)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,35}(1, 1, \epsilon)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,36}(k, l)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,36}(1, l)$	U	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,36}(1, 1)$	V	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,37}(1, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,37}(1, 1)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,37}(2, 0)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,37}(j, \epsilon)$	U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$j \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,38}(0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,38}(1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,38}(\epsilon)$	U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,39}$	Y, U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,40}(1)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,40}(j)$	U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$j \geq 1$
$G_{v2,41}$	Y, U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,42}(0, 0)$	Y, U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,42}(0, 1)$	Y, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,42}(0, 1)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,42}(1, \epsilon)$	Y, U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,43}(\epsilon)$	Y, U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,44}(1, \epsilon, \mu, 0)$	Y	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,44}(1, \epsilon, \mu, 1)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,44}(2, \epsilon, \mu, 0)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,44}(j, 0, 0, \eta)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,44}(j, 0, 1, \eta)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,44}(j, 1, \mu, \eta)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	$\mu \in \{0, 1\}$
$G_{v2,44}(j, 0, 0, \eta)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,44}(j, \epsilon, \mu, \eta)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	$\epsilon = 1$ ou $\mu = 1$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	(Semi-)invariants de degré 2	Compl.
$G_{v2,45}(2, \epsilon)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,45}(j, \epsilon)$	U, V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,46}(2, \epsilon)$	Y	$[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]		
$G_{v2,46}(j, \epsilon)$	U	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	
$G_{v2,46}(j, 0)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(1,1),(1,2)]$	
$G_{v2,46}(j, 1)$	V	$[(2,1),(1,2)]$	[1]	$[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	

3.3.3 Résultats pour la liste \mathcal{F}_3 de D.L. Flannery

Par rapport aux deux familles précédentes, les groupes nouveaux donnés par la famille \mathcal{F}_3 seront des groupes pour lesquels N sera de l'une des trois formes suivantes :

- les générateurs de N sont tous de la forme $y_{k,p}$: c'est le cas y
- les générateurs de N sont tous de la forme $u_{k,p}$: c'est le cas u
- les générateurs de N sont tous de la forme $v_{k,p}$: c'est le cas v .

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,1}(1, 2, l)$	y	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,1}(1, k, l)$	u	Deg 4 : $[(2,1),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v3,1}(2, k, l)$	u	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,1}(1, 2, l)$	v	Deg 4 : $[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)]$ Deg 2 : $[(\),\dots,(\),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,1}(1, k, l)$	v	Deg 4 : $[(2,1),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,1}(2, k, l)$	v	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,2}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,1}(j, k, l)$		
$G_{v3,3}(1, k, l)$	u, v	Deg 4 : $[(2,1),(1,2)]$ Deg 2 : $[(\),(\),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v3,3}(2, k, l)$	u, v	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,4}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,3}(j, k, l)$		
$G_{v3,5}(1, 2, l)$	y	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,5}(1, k, l)$	u	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v3,5}(1, 2, l)$	v	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,5}(1, k, l)$	v	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,6}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,5}(j, k, l)$		
$G_{v3,7}(1, k, l)$	u, v	Deg 4 : $[(1,1),(1,2),(1,2)]$	[1]	$l > k \geq 2$
$G_{v3,8}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,7}(j, k, l)$		
$G_{v3,9}(j, 1)$	y	Deg 4 : $[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]$ Deg 2 : $[(\),\dots,(\),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]$	[3]	

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,9}(j, 2)$	y	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 1$
$G_{v3,9}(1, 2)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,9}(1, k)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,9}(2, 1)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,9}(2, k)$	u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 1)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 2)$	u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,9}(1, 2)$	v	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,9}(1, k)$	v	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,9}(2, 1)$	v	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,9}(2, k)$	v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 1)$	v	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 2)$	v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,10}(j, 1)$	y	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,10}(j, 2)$	y	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,10}(1, 2)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,10}(1, k)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,10}(2, 1)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,10}(2, k)$	u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,10}(j, 1)$	u	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,10}(j, 2)$	u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,10}(1, k)$	v	Deg 4 : [(2,1),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,10}(2, 1)$	v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,10}(2, k)$	v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,10}(j, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,11}(j, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),...] [...,(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 2$
$G_{v3,11}(1, k)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,11}(2, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,11}(2, k)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,11}(j, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,11}(1, k)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,11}(2, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,11}(2, k)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,11}(j, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,12}(j, 1)$	y	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(,)...,(,),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$j \geq 2$
$G_{v3,12}(j, 2)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \neq 2$
$G_{v3,12}(1, 2)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,12}(1, k)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,12}(j, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,12}(j, 2)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,12}(1, 2)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,12}(1, k)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,12}(j, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,12}(j, 2)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,13}(j, 1)$	y	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 2$
$G_{v3,13}(j, 2)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \neq 2$
$G_{v3,13}(1, 2)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,13}(1, k)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{v3,13}(j, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 2$
$G_{v3,13}(j, 2)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(,),(,),(,),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,13}(1, k)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,13}(j, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,14}(j, 1)$	y	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,14}(j, k)$	u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j = 1$ ou $k = 1$
$G_{v3,14}(1, k)$	v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,14}(j, 1)$	v	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 2$
$G_{v3,15}(1)$	y, u	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,15}(2)$	y, u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,15}(1)$	v	Deg 4 : [(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v3,15}(2)$	v	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,16}(1)$	y, u, v	Deg 4 : [(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v3,16}(2)$	y, u, v	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,17}(1)$	y	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,2]	
$G_{v3,17}(1)$	u, v	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,17}(2)$	u, v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,18}(1)$	y	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,18}(2)$	y	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,18}(1)$	u	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,2]	
$G_{v3,18}(1)$	v	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,18}(2)$	v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,19}(1)$	y	Deg 4 : [(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v3,19}(2)$	y, v	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,19}(1)$	u, v	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,19}(2)$	u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,20}(1)$	y, u, v	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,2]	
$G_{v3,21}(1)$	y, u	Deg 4 : [(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,21}(2)$	y, u	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,21}(1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),] [, (1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,22}(j, 1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 1$
$G_{v3,22}(1, 1, 1)$	u, v	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,22}(1, k, l)$	u, v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,22}(j, 1, 1)$	u, v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,23}(j, 1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 1$
$G_{v3,23}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,23}(1, k, l)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,23}(j, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,23}(1, 1, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,23}(1, k, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,23}(j, 1, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,24}(j, 1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,24}(j, 1, l)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,24}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(), ..., (), (1,2), (1,2)]	[1]	
$G_{v3,24}(1, k, l)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (), (1,2), (1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,24}(2, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,24}(2, k, l)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,24}(j, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3$
$G_{v3,24}(1, 1, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(), ..., (), (1,2), (1,2)]	[1]	
$G_{v3,24}(1, k, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (), (1,2), (1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,24}(2, 1, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,24}(2, k, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,24}(j, 1, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 3, l \geq 1$
$G_{v3,25}(j, 1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$j \geq 1$
$G_{v3,25}(j, 1, l)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 1, l \geq 2$
$G_{v3,25}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,25}(1, k, l)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,25}(j, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,25}(1, 1, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,25}(1, k, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,25}(j, 1, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2, l \geq 1$
$G_{v3,26}(j, 1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,26}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,26}(1, k, l)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,26}(1, 1, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,26}(1, k, l)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, 1, 1)$	v	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,27}(1, 1, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v3,27}(1, 2, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(1, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(2, 2, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(2, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(1, 1, 0)$	u	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(1,2),(1,2),(),..., (),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(1, 2, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(1, 2, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(1, l, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(1, l, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(2, 2, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(2, 2, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,27}(k, l, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,27}(k, l, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,27}(1, l, 0)$	v	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$l \geq 1$
$G_{v3,27}(1, l, 1)$	v	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(1,2),(1,2),(), (),(1,2)]	[3]	$l \geq 1$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,27}(2, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,27}(2, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,27}(k, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,27}(k, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,28}(1, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,28}(2, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,28}(k, l, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,28}(k, l, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,28}(1, l, 0)$	v	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$l \geq 2$
$G_{v3,28}(1, l, 1)$	v	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$l \geq 2$
$G_{v3,28}(2, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,28}(2, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,28}(k, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,28}(k, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l > k \geq 3$
$G_{v3,29}(1, 1, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,29}(1, 2, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,29}(1, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$
$G_{v3,29}(2, 2, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,29}(1, 1, 0)$	u	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v3,29}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v3,29}(k, 2, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$k \leq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,29}(k, 2, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq 2$
$G_{v3,29}(k, l, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,29}(k, l, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,29}(1, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 1$
$G_{v3,29}(1, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 1$
$G_{v3,29}(k, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,29}(k, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,30}(1, 1, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,2]	
$G_{v3,30}(1, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,30}(1, 1, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,30}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,30}(k, l, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,30}(k, l, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,30}(1, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 1$
$G_{v3,30}(1, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$l \geq 1$
$G_{v3,30}(k, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,30}(k, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,31}(1, 1)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,31}(1, 2)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),...] [..., (1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,31}(1, l)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 3$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,31}(k, 1)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,31}(k, 2)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,31}(k, 1)$	u	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),...] [..., (1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$k \geq 1$
$G_{v3,31}(k, 2)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{v3,31}(k, l)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1, l \geq 3$
$G_{v3,31}(1, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,31}(k, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2, l \geq 1$
$G_{v3,32}(1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,32}(1, l)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,32}(k, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{v3,32}(k, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$k \geq 1$
$G_{v3,32}(k, l)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1, l \geq 2$
$G_{v3,32}(1, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,32}(k, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2, l \geq 1$
$G_{v3,33}(1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,33}(1, l)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,33}(1, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,33}(k, l)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,33}(1, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,33}(k, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,34}(1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,34}(1, l)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,34}(k, l)$	y	Deg 4 :[(2,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,34}(1, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,34}(k, l)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,34}(1, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(), (),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,34}(k, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,35}(1, 1, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v3,35}(1, l, \epsilon)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,35}(1, 1, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,35}(1, 1, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,35}(k, l, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,35}(k, l, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,35}(1, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(), (),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,35}(1, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 1$
$G_{v3,35}(k, l, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,35}(k, l, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,36}(1, 1)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,36}(1, l)$	y	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,36}(1, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,36}(k, l)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,36}(1, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq 2$
$G_{v3,36}(k, l)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(), (),(1,2),(1,2)]	[1]	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,37}(i, 0)$	y	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$i \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v3,37}(i, 1)$	y	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(),...,(),(1,2)]	[3]	$i \geq 2$
$G_{v3,37}(2, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,37}(2, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,37}(i, 0)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v3,37}(i, 1)$	u	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v3,37}(2, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,37}(2, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(),(),(),(1,2)]	[1]	
$G_{v3,37}(i, 0)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v3,37}(i, 1)$	v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v3,38}(j)$	y	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2), [, (1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$j \geq 1$
$G_{v3,38}(1)$	u, v	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v3,38}(j)$	u, v	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	$j \geq 2$
$G_{v3,39}$	y, u, v	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2), [, (1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	$j \geq 1$

3.3.4 Résultats pour la liste \mathcal{F}_4

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v4,1}(1, 0)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v4,1}(2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v4,1}(i, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{v4,1}(1, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v4,1}(i, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$i \geq 2$
$G_{v4,2}(0)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v4,2}(1)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(1,2),(1,2),(),(),(),(1,2)]	[3]	
$G_{v4,3}(2, 0, 0, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v4,3}(2, 0, \epsilon, \mu)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,2),(1,2)]	[1]	$\epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,3}(i, 0, 0, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v4,3}(i, 0, \epsilon, \mu)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$i \geq 3, \epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,3}(i, 1, 0, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 2$
$G_{v4,3}(i, 1, \epsilon, \mu)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$i \geq 2, \epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,4}(0, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v4,4}(\epsilon, \mu)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(),(1,2),(1,2)]	[1,2]	$\epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,5}$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(1,2),(1,2),(),(),(),(1,2)]	[3]	
$G_{v4,6}(2, \epsilon)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(1,2),(),(),(1,2)]	[1]	
$G_{v4,6}(i, \epsilon)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,2),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v4,7}(1, 0)$	Deg 4 :[(3,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2)]	[3]	
$G_{v4,7}(2, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	
$G_{v4,7}(i, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 3$
$G_{v4,7}(1, 1)$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1,2]	
$G_{v4,7}(i, 0)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2)] Deg 2 :[(1,1),(1,2)]	[1]	$i \geq 2$

3.4 Cas de la projection $T = C = \langle c \rangle$

Pour les groupes infinis, on a les résultats suivants :

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$\langle cu_2^{-1}, H_2^1 \rangle$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$\langle cu_2^{-1}, H_2^2 \rangle$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$\langle cu_2^{-1}, H_2^4 \rangle$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	

3.4.1 Famille \mathcal{C}_1 de D.L. Flannery

NOTATION : Pour la variable k' , $k' = -1$ signifie que pour tout p premier impair, k' vaudra -1, tandis que $k' \geq \alpha$ (avec $\alpha \geq 0$) signifie que l'on a $k' \geq \alpha$ pour au moins un p (mais k' ne sera positif ou nul que pour un nombre fini de premiers impairs car les groupes sont finis).

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{c1,1}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),...,(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c1,1}(k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 3$
$G_{c1,2}(1, -1, \epsilon)$	Deg 4 : [(2,1),(3,2),(1,2),(1,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),(),(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1,1,1]	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{c1,2}(k, -1, \epsilon)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{c1,2}(1, k', \epsilon)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	$k' \geq 0$
$G_{c1,3}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),(),(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c1,3}(k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{c1,4}(1, 2, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),...,(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c1,4}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 3$
$G_{c1,4}(2, 2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{c1,4}(2, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{c1,5}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(2,1),(3,2),(1,2),(1,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),...,(),(1,4),(1,4)]	[0,1,1,1]	

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{c1,5}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{c1,5}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(2,2),(2,2),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	
$G_{c1,5}(2, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{c1,5}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,6}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(3,2),(3,2),(1,2),] [, (2,4),(2,4),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),..., (),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	
$G_{c1,6}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{c1,6}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4),] [, (1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	
$G_{c1,6}(2, 2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{c1,6}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,7}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c1,7}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$

3.4.2 Famille \mathcal{C}_2 de D.L. Flannery

Pour trouver les semi-invariants, on procède toujours de la même manière que dans l'article [8]. Toutefois, avant de continuer, on donne un exemple de polynôme qui n'est pas (semi-)invariant sous l'action de $C(j'', k'', r'', 1; p)$ pour illustrer la manière dont on montre qu'un polynôme semi-invariant sous l'action du groupe engendré par les matrices sans paramètres peut ne pas le rester sous l'action de $C(j'', k'', r'', 1; p)$. On considère $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$. S'il est semi-invariant sous l'action de $u_{k'', p}, y_{j'', p}$ ou $v_{j'', p}$, on a $\omega_{k'', p}^4 = \omega_{k'', p}^{-4}$ donc $\omega_{k'', p}^8 = 1$ d'où $k'' = -1$ car $p \neq 2$ (et de même $j'' = -1$). On considère ensuite l'action de $y_{j''+r'', p} v_{j''+r'', p}^8$ sur le polynôme. Les termes en x_2 et x_3 nous donnent $\omega_{r''-1, p}^{4s+4} = \omega_{r''-1, p}^{4s-4}$ donc $\omega_{r''-1, p}^8 = 1$ d'où $r'' = 0$ ($p \neq 2$), ce qui est impossible car $r'' \geq 1$. En conséquence, ce polynôme n'est pas semi-invariant sous l'action de $C(j'', k'', r'', 1; p)$.

En procédant comme expliqué ci-dessus pour toutes les familles de groupes, on obtient les résultats suivants, les calculs étant toujours réalisés avec Magma sur les machines de MEDICIS ou celles de l'IRMAR.

NOTATIONS

Pour les groupes 1 à 17, on aura toujours $j'' \geq -1, r'' \geq 1$ pour les nombres premiers pour lesquels on aura des générateurs dans un ensemble de la forme $C(j'', k'', r'', \xi; p)$. Pour ces groupes, la notation $k'' = -1$ signifie que pour tous les ensembles de générateurs de la forme $C(j'', k'', r'', \xi; p)$ et éventuellement $F(j', k'; p)$, on aura $k'' = -1$ et, le cas échéant, $k' = -1$. La notation $k'' \geq 0$ signifie que l'on a $k'' \geq 0$ pour un des ensembles de générateurs de la forme $C(j'', k'', r'', \xi; p)$ ou $k' \geq 0$ pour un des ensembles de générateurs de la forme

$F(j', k'; p)$ (s'il y en a).

Pour les groupes 18 et 19, on n'aura pas de conditions particulières pour les coefficients j' intervenant dans les définitions des ensembles de générateurs de la forme $F(j', k'; p)$ (on rappelle que l'on sait par définition de ces groupes que l'un au moins est positif pour un nombre premier $p > 3$). Pour ces groupes, la notation $k' = -1$ signifie que pour tous les ensembles de générateurs (de la forme $F(j', k'; p)$), on aura $k' = -1$. La notation $k' \geq 0$ signifie que l'on a $k' \geq 0$ pour un des ensembles de générateurs (de la forme $F(j', k'; p)$).

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{c2,1}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{c2,1}(2, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{c2,2}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{c2,2}(2, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{c2,3}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{c2,4}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{c2,5}(k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{c2,6}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{c2,7}(k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{c2,8}(k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{c2,9}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{c2,10}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{c2,10}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{c2,11}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{c2,12}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c2,12}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{c2,13}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c2,13}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{c2,14}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{c2,15}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{c2,16}(-1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c2,17}(-1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c2,18}(-1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c2,19}(1, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{c2,19}(2, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	

3.5 Cas de la projection $T = D = \langle a, c \rangle$

Pour les groupes infinis, on a les résultats suivants :

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, y_1v_1, H_1^i \rangle$	Deg 4 :[(2,1),(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(),(1,4),(1,4)]	[1,2]	$i = 1$ ou 2
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_2^i \rangle$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$i = 1$ ou 2
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_2^4 \rangle$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	

Pour les groupes de la liste \mathcal{D}_1 , on a les résultats dans les tableaux ci-après.

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Complément
$G_{d1,1}(1, 2, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 :[(),..., (),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,1}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{d1,1}(2, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d1,1}(2, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{d1,2}(1, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d1,2}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 3$
$G_{d1,2}(2, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,3}(1, 2, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2),(1,4),(1,4)] Deg 2 :[(),..., (),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,3}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{d1,3}(2, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,3}(2, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 3$
$G_{d1,4}(1, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{d1,4}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,4)]	[0,1]	$k \geq 3$
$G_{d1,4}(2, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{d1,5}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(3,2),(2,2),(1,2),(1,2)] Deg 2 : [(),...,(),(1,4),(1,4)]	[1,0,1,1]	
$G_{d1,5}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,5}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,1,1]	
$G_{d1,5}(2, 2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,5}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,1,1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,6}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(2,4),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,6}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,7}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(3,2),(2,2),(1,2),(1,2)]	[1,0,1,1]	
$G_{d1,7}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,7}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(2,2),(2,2)]	[1,1,1]	
$G_{d1,7}(2, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,7}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,1,1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,8}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(2,2)]	[0,1,1,1]	
$G_{d1,8}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d1,8}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1,1,1]	
$G_{d1,8}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,1,1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,9}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{d1,9}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,9}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,9}(2, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,9}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,10}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{d1,10}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d1,10}(2, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,4),(1,4),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d1,10}(j, 1, k')$	Deg 4 : [(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,11}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d1,11}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,12}(1, 1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d1,12}(1, k, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d1,13}(2, \epsilon, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d1,13}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 3$
$G_{d1,14}(2, \epsilon, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{d1,14}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 3$
$G_{d1,15}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)] Deg 2 : [(),(),(),(),(1,4),(),(1,4)]	[0,1]	
$G_{d1,15}(k, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	$k \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{d1,15}(1, k')$	Deg 4 :[(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	$k' \geq 0$
$G_{d1,16}(k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d1,17}(1, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(2,1),(1,2),(1,2),(1,2),(2,2)]	[0,1,1,1]	
$G_{d1,17}(1, \epsilon, k')$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1,1,1]	$k' \geq 0$
$G_{d1,17}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d1,18}(1, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(2,2),(1,2),(1,2),(1,4),(1,4)]	[0,1]	
$G_{d1,18}(1, \epsilon, k')$	Deg 4 :[(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	$k' \geq 0$
$G_{d1,18}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d1,19}(1, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d1,19}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$

Pour la famille \mathcal{D}_2 , les résultats sont dans les tables suivantes. Pour chacun de ces groupes, j' sera quelconque (on ne le reprécise pas dans les tableaux).

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{d2,1}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d2,1}(2, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d2,2}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d2,2}(2, 2, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d2,3}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d2,3}(2, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 2$
$G_{d2,4}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d2,5}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,7}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,7}(2, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,8}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{d2,9}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,9}(2, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,10}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{d2,11}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,12}(1, k, -1)$	Deg 4 :[(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,13}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d2,14}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d2,15}(k, -1)$	Deg 4 :[(2,2),(1,2)] Deg 2 :[(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	$k \geq 1$
$G_{d2,16}(k, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 2$
$G_{d2,17}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{d2,18}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 1$
$G_{d2,19}(k, \epsilon, -1)$	Deg 4 :[(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	$k \geq 1$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{d2,20}(1, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d2,20}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d2,21}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d2,22}(1, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d2,22}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d2,23}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d2,24}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,25}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,26}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,27}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,28}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,29}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,30}(-1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d2,31}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,32}(1, -1)$	Deg 4 : [(2,2),(1,2)] Deg 2 : [(),(),(1,4),(1,4)]	[1]	
$G_{d2,32}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d2,33}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,34}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,2),(1,2),(1,2)]	[1]	
$G_{d2,36}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	
$G_{d2,37}(-1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2),(1,2)]	[0,1]	

3.6 Cas de la projection $T = A_4$

Le groupe infini n'admet qu'un (semi-)invariant, qui est produit de formes linéaires. On a les résultats suivants pour les groupes finis :

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{a4,1}(1, -1)$	Deg 4 : [(3,1),(1,3),(1,3)] Deg 2 : [(),(),(),(1,2)]	[3]	$j'' = -1$
$G_{a4,1}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2)]	[1]	$j'' = -1$
$G_{a4,2}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2)]	[1]	$j'' = -1$
$G_{a4,3}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(2,2),(1,3),(1,3)] Deg 2 : [(),..., (),(1,2)]	[1]	$j'' = -1$
$G_{a4,3}(2, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2)]	[1]	$j'' = -1$
$G_{a4,4}(1, -1)$	Deg 4 : [(1,1),(1,2)]	[1]	$j'' = -1$

Groupe	(Semi-)invariants	pfl	Compl.
$G_{a4,5}(1, -1)$	Deg 4 : [(2,1)]	[1]	$j'' = -1$
$G_{a4,6}(-1)$	Deg 4 : [(3,1), (1,3), (1,3)] Deg 2 : [(1,1)]	[3]	$j'' = -1$

3.7 Cas de la projection $T = S_4$

Le groupe infini n'admet qu'un semi-invariant, qui est produit de formes linéaires. On a les résultats suivants pour les groupes finis :

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	(Semi-)invariants de degré 2	Compl.
$G_{s4,1}(1)$	[(3,2)]	[3]	[(1,2)]	$j' = -1$
$G_{s4,1}(2)$	[(1,2), (1,2)]	[1]		$j' = -1$
$G_{s4,2}(1)$	[(2,2), (1,2)]	[0,1]	[(1,2)]	$j' = -1$
$G_{s4,2}(2)$	[(1,2), (1,2)]	[1]		$j' = -1$
$G_{s4,3}(1)$	[(2,2), (1,2)]	[0,1]	[(1,2)]	$j' = -1$
$G_{s4,3}(2)$	[(1,2), (1,2)]	[1]		$j' = -1$
$G_{s4,4}(1)$	[(1,2), (1,2)]	[1]		$j' = -1$
$G_{s4,6}(1)$	[(1,1), (1,2)]	[0,1]		$j' = -1$
$G_{s4,7}(-2)$	[(2,1), (1,2)]	[0,1]	[(1,1)]	$j' = -1$
$G_{s4,7}(0)$	[(2,1), (1,2)]	[0,1]	[(1,2)]	$j' = -1$
$G_{s4,8}$	[(2,1), (1,2)]	[0,1]	[(1,2)]	$j' = -1$

3.8 Cas des groupes primitifs

Pour les groupes primitifs infinis de composante connexe de l'identité réductible, on a la situation suivante :

- si \tilde{H} est $A_4^{SL_2}, S_4^{SL_2}$ ou $A_5^{SL_2}$, le groupe aura un invariant de degré 2 et un invariant de degré 4
- si \tilde{H} est $(A_4^{SL_2})_2, (S_4^{SL_2})_2$ ou $(A_5^{SL_2})_2$, le groupe aura un semi-invariant de degré 2 d'ordre 2 et un invariant de degré 4.

Les groupes primitifs infinis de composante connexe de l'identité (irréductible) l'image de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $SL(4, \mathbb{C})$ admettent un invariant de degré 4.

Le groupe primitif infini $SO(4, \mathbb{C})$ a un invariant de degré 2 et un invariant de degré 4, tandis que les autres groupes primitifs infinis ayant $SO(4, \mathbb{C})$ pour composante connexe de l'identité mais distincts de celle-ci ont un semi-invariant de degré 2 d'ordre 2 et un invariant de degré 4.

En reprenant les notations d'Olivier Cormier pour les groupes, on a les semi-invariants suivants pour les groupes primitifs finis (on ne consigne pas dans le tableau les groupes pour lesquels il n'y a pas de (semi-)invariants de degré 2 ou 4) :

Groupes	(Semi-)invariants de degré 4	(Semi-)invariants de degré 2
$A, A_{1/2}$	$[(2,1)]$	
$B, B \times C_2$	$[(2,1)]$	$[(1,1)]$
$B \times C_4$	$[(2,1)]$	$[(),(1,2)]$
$E, E_{1/2}$	$[(1,1)]$	
$G, G_{1/2}^+, G_{1/2}^-$	$[(1,1),(1,2)]$	
H	$[(2,2)]$	$[(),(1,4)]$
G_1	$[(1,1),(1,3),(1,3),(1,3),(1,3)]$	$[(1,1)]$
$\langle G_1, C_4 \rangle$	$[(1,1),(1,3),(1,3),(1,3),(1,3)]$	$[(),\dots,(),(1,2)]$
$G_2, \langle G_2, C_4 \rangle$	$[(1,1)]$	$[(),(1,2)]$
G_3, G_4	$[(1,1)]$	$[(1,1)]$
$\langle G_3, C_4 \rangle, \langle G_4, C_4 \rangle$	$[(1,1)]$	$[(),(1,2)]$
G_5, G_6, G_7	$[(1,1)]$	$[(1,1)]$
$\langle G_5, C_4 \rangle, \langle G_6, C_4 \rangle, \langle G_7, C_4 \rangle$	$[(1,1)]$	$[(),(1,2)]$
$G_8, G_9, \langle G_9, C_4 \rangle$	$[(1,2)]$	$[(),(1,4)]$
G_{10}	$[(1,2),(1,6),(1,6)]$	$[(),(),(),(1,4)]$
G_{11}, G_{12}	$[(1,2)]$	$[(),(1,4)]$
G_{13}	$[(1,1),(1,5),(1,5),(1,5),(1,5)]$	
$G_{14}, G_{14}^{+1/2}, G_{14}^{-1/2}$	$[(1,1)]$	
$G_{15}, G_{15}^{+1/2}, G_{15}^{-1/2}$	$[(1,2)]$	
G_{17}	$[(1,1)]$	
G_{19}	$[(1,2)]$	

3.9 Retour sur les groupes imprimitifs non monomiaux

On s'intéresse dans ce paragraphe aux semi-invariants de degré 2 et 4 des sous-groupes imprimitifs non monomiaux de $SL(4, \mathbb{C})$. En reprenant les groupes de la liste de H.F. Blichfeldt, on a le tableau suivant (on n'y consigne pas les groupes pour lesquels il n'y a pas de (semi-)invariants de degré 2 ou 4) :

Groupes	(Semi-)invariants de degré 4	(Semi-)invariants de degré 2	Paramètres
1	$[(1,1),(2,3),(2,3),(1,6),(1,6),]$ $[, (1,6),(1,6),(1,6),(1,6)]$	$[(),\dots,(),(1,2)]$	$k = 1, r = 2$
1	$[(1,1),(1,3),(1,3),]$ $[, (1,6),(1,6),(1,6),(1,6)]$	$[(),\dots,(),(1,2)]$	$k = 1, r = 4$
1	$[(1,1),(1,3),(1,6)]$	$[(),(),(),(1,2)]$	$k \neq 1$ ou $r \nmid 4$
2	$[(1,1)]$	$[(),(1,2)]$	

Groupes	(Semi-)invariants de degré 4	(Semi-)invariants de degré 2	Paramètres
3	[(1,3),(1,3),(1,6),(1,6)]		$r \mid 2$
4	[(1,1),(1,2)]		$r \mid 2, k \neq \pm 1$
6	[(1,3),(1,6)]		$r = 1$ et $k = j, l = j^2$ ou $l = j, k = j^2$
6	[(1,3),(1,6)]		$r = 2$ et $k = \pm j, l = \pm j^2$ ou $l = \pm j, k = \pm j^2$
7,12	[(1,1)]	[(),(1,2)]	

Les groupes infinis conjugués à un groupe de la forme suivante (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{\pm 1}{\det(B)} B \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pm 1}{\det(B)} B \\ B & 0 \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\} \text{ ou}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det(B)} B \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\det(B)} B \\ B & 0 \end{pmatrix}; B \in SL(2, \mathbb{C})_n \right\}$$

admettent un semi-invariant (d'ordre 2) de degré 2 et un invariant de degré 4.

3.10 Conséquences : informations sur le groupe et les solutions obtenues à partir de ces tables.

3.10.1 Informations sur le groupe à partir de ses semi-invariants de degré 2 et 4.

Dans ce chapitre ont été étudiés les semi-invariants de degré 2 et 4 de tous les sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$ (à conjugaison près). A l'aide de ces tables, on obtient des critères pour déterminer si un groupe est monomial ou pour identifier un groupe particulier à partir de la seule connaissance de ses semi-invariants de degré 2 et 4. Ces résultats permettent l'élaboration d'une "stratégie" donnant des informations sur le groupe d'une équation différentielle à partir de renseignements sur ses (semi-)invariants de degré 2 et 4. Elle est décrite par le théorème suivant.

Théorème 3.10.1 *Etant donnée une équation différentielle linéaire irréductible d'ordre 4 $L(y) = 0$ de groupe de Galois $G \subset SL(4, \mathbb{C})$, on commence par regarder ses semi-invariants de degré 2 :*

- A. si on n'a aucun semi-invariant de degré 2, on regarde les semi-invariants de degré 4 :

1. dès qu'un espace de (semi-)invariants de degré 4 associés à un même caractère sera de dimension supérieure ou égale à 3 (s'il en existe un pour le groupe considéré), cet espace contiendra (au moins) un (semi-)invariant produit de formes linéaires, et le groupe sera (donc) monomial (ce résultat reste vrai si le groupe admet des semi-invariants de degré 2)
2. le groupe G est le groupe primitif fini G_{13} si on trouve un semi-invariant d'ordre 5
3. le groupe G est $G_{c1,4}(2, 2, -1)$ si on a cinq espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
4. le groupe G est $G_{c1,5}(2, 1, -1)$ si on a deux espaces de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
5. le groupe G est $G_{c1,6}(2, 1, -1)$ si on a trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et six espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
6. le groupe G est $G_{d1,6}(1, 1, -1)$ si on a un semi-invariant d'ordre 2 et un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
7. le groupe G est $G_{d1,7}(1, 1, -1)$ si on a un espace de dimension 3, un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
8. le groupe G est $G_{d1,7}(2, 1, -1)$ si on a deux espaces de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
9. le groupe G est $G_{d1,9}(2, 1, -1)$ si on a cinq espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
10. le groupe G est $G_{d1,11}(1, 1, -1)$ si on a un espace de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
11. le groupe G est $G_{v1,20}(1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants, trois espaces de dimension 3 de semi-invariants d'ordre 2 et douze espaces de dimension 2 de semi-invariants d'ordre 4.
12. le groupe G est $G_{v1,11}(2, 1)$ si on a un invariant et trois espaces de dimension 2 et douze espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
13. le groupe G est $G_{v1,21}(2)$ si on a un invariant et six espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
14. le groupe G est $G_{v1,23}(1, 1, 1)$ si on a un invariant et trois espaces de dimension 3 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.

15. le groupe G est $G_{v1,24}(2, 1, 1)$ si on a un invariant et trois espaces de dimension 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
16. le groupe G est $G_{v1,26}(1, 1, 1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et neuf espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
17. le groupe G est $G_{v1,25}(1, 1, 1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et trois espaces de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
18. le groupe G est $G_{v1,12}(1, 2)$ ou $G_{v1,16}(2)$ si on a un invariant et dix espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
19. le groupe G est $G_{d1,8}(1, 1, -1)$ ou $G_{d1,17}(1, \epsilon, -1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et un espace de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
20. le groupe G est $G_{c1,6}(2, 2, -1)$ ou $G_{d1,10}(2, 1, -1)$ si on a un semi-invariant d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
21. le groupe G est $G_{d1,1}(2, 2, -1)$ ou $G_{d1,5}(2, 1, -1)$ si on a cinq espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
22. le groupe G est $G_{c1,7}(1, 1, -1)$, $G_{d1,9}(1, 1, -1)$, $G_{d1,10}(1, 1, -1)$ ou $G_{d1,18}(1, \epsilon, -1)$ si on a un invariant, un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
23. le groupe G est $G_{d1,4}(1, 2, -1)$ ou $G_{d1,14}(2, \epsilon, -1)$ si on a un invariant, deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
24. le groupe G est un groupe imprimitif non monomial fini de la famille 3° avec un paramètre $r \mid 2$ si on a deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 6
25. le groupe G est un groupe imprimitif non monomial fini de la famille 6° avec les paramètres ($r = 1$ et $k = j, l = j^2$ ou $l = j, k = j^2$) ou ($r = 2$ et $k = \pm j, l = \pm j^2$ ou $l = \pm j, k = \pm j^2$) si on a un semi-invariant d'ordre 3 et un semi-invariant d'ordre 6
26. le groupe G est $G_{a4,5}(1, -1)$ ou un des groupes primitifs finis A ou $A_{1/2}$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants.
27. le groupe G est $G_{s4,1}(2)$, $G_{s4,2}(2)$, $G_{s4,3}(2)$ ou $G_{s4,4}(1)$ si on a deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2
28. le groupe G est $G_{v1,14}(1, 2)$, $G_{v1,17}(2)$ ou $G_{v1,18}(2)$ si on a un invariant, deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.

29. le groupe G est $G_{v3,34}(1, l)$ ($l \geq 2$) (avec N de la forme y) si on a un espace de dimension 2 d'invariants et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
30. le groupe G est $G_{v1,22}(2, 1, 1)$, $G_{v3,17}(1)$ (avec N de la forme y), $G_{v3,18}(1)$ (avec N de la forme u), $G_{v3,20}(1)$ (avec N de la forme y, u ou v) ou $G_{v3,30}(1, 1, \epsilon)$ (avec N de la forme y) si on a un invariant, un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
31. le groupe G est $G_{v1,11}(j, 1)$ ($j \geq 3$), $G_{v1,14}(j, 1)$ ($j \geq 2$), $G_{v3,11}(j, 1)$ ($j \geq 2$ et N de la forme y), $G_{v3,14}(j, 1)$ ($j \geq 2$ et N de la forme y) ou $G_{v3,21}(1)$ (avec N de la forme v) si on a un invariant et un espace de dimension 2 et six espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
32. le groupe G est $G_{a4,1}(2, -1)$, $G_{a4,2}(1, -1)$, $G_{a4,3}(2, -1)$, $G_{a4,4}(1, -1)$, $G_{s4,6}(1)$ ou un groupe primitif fini G , $G_{1/2}^+$, $G_{1/2}^-$ ou un groupe imprimitif non monomial fini de la famille 4° avec des paramètres $r \mid 2, k \neq \pm 1$ si on a un invariant et un semi-invariant d'ordre 2.
33. le groupe G est $G_{d1,4}(1, k, -1)$ ($k \geq 3$) si on a un invariant, un semi-invariant d'ordre 2 et un semi-invariant d'ordre 4.
34. le groupe G est $G_{d1,7}(1, k, -1)$ ($k \geq 2$), $G_{d1,9}(1, k, -1)$ ($k \geq 2$), $G_{d2,7}(1, k, -1)$ ($k \geq 1$) ou $G_{d2,9}(1, k, -1)$ ($k \geq 1$) si on a un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
35. le groupe G est $G_{c1,2}(1, k', \epsilon)$ ($k' \geq 0$), $G_{c1,5}(j, 1, k')$ ($j \geq 3$ ou $k' \geq 0$), $G_{c1,6}(j, 1, k')$ ($j \geq 3$ ou $k' \geq 0$), $G_{d1,3}(2, 2, -1)$ ou $G_{d1,8}(2, 1, -1)$ si on a trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
36. le groupe G est un groupe monomial fini de projection D si on a un semi-invariant d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
37. le groupe G est un groupe monomial fini de projection V si on a un espace de dimension 2 d'invariants et un semi-invariant d'ordre 2.
38. le groupe G est $G_{d1,2}(1, 2, -1)$, $G_{d1,12}(1, 1, -1)$, $G_{d1,13}(2, \epsilon, -1)$, $G_{d1,19}(1, \epsilon, -1)$ ou un groupe monomial fini de projection V si on a un invariant et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
39. le groupe G est $G_{c1,7}(1, k, -1)$ ($k \geq 2$) ou un groupe monomial fini de projection V si on a un invariant et un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
40. le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection C ou D si on a trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
41. le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection V ou D si on a un invariant et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.

42. le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection V ou A_4 ou un des groupes primitifs finis $E, E_{1/2}, G_{14}, G_{14}^{+1/2}, G_{14}^{-1/2}, G_{17}$ ou un groupe primitif infini de composante connexe de l'identité l'image irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $SL(4, \mathbb{C})$ si on a un invariant.
43. le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection C, D ou S_4 ou un des groupes primitifs finis $G_{15}, G_{15}^{+1/2}, G_{15}^{-1/2}, G_{19}$ si on a un semi-invariant d'ordre 2.
- B. si on a un seul semi-invariant de degré 2 :
1. s'il est d'ordre 1 (ie. si c'est un invariant), on regarde les semi-invariants de degré 4 :
 - (a) le groupe G est $G_{a4,6}(-1)$ si on a un espace de dimension 3 d'invariants et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3.
 - (b) le groupe G est $G_{s4,7}(-2)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et un semi-invariant d'ordre 2.
 - (c) le groupe G est le groupe primitif fini G_1 si on a un invariant et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3.
 - (d) le groupe G est un des groupes primitifs finis B ou $B \times C_2$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants.
 - (e) le groupe G est un des groupes primitifs finis G_3, G_4, G_5, G_6, G_7 ou infinis avec $\tilde{H} = A_4^{SL(2, \mathbb{C})}, S_4^{SL(2, \mathbb{C})}$ ou $A_5^{SL(2, \mathbb{C})}$ ou $SO(4, \mathbb{C})$ si on a un invariant.
 2. s'il est d'ordre 2, on regarde les semi-invariants de degré 4 :
 - (a) le groupe G est $G_{a4,1}(1, -1)$ si on a un espace de dimension 3 d'invariants et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3.
 - (b) le groupe G est $G_{s4,1}(1)$ si on a un espace de dimension 3 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (c) le groupe G est $G_{a4,3}(1, -1)$ si on a un invariant, un espace de dimension 2 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3.
 - (d) le groupe G est le groupe primitif fini $B \times C_4$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants.
 - (e) le groupe G est le groupe primitif fini $\langle G_1, C_4 \rangle$ si on a un invariant et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3.
 - (f) le groupe G est le groupe imprimitif non monomial fini de la famille 1° avec les paramètres $k = 1, r = 2$ si on a un invariant, deux espaces de dimension 2 de semi-invariants d'ordre 3 et six espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 6.

- (g) le groupe G est le groupe imprimitif non monomial fini de la famille 1° avec les paramètres $k = 1, r = 4$ si on a un invariant, deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 3 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 6.
 - (h) le groupe G est $G_{s4,2}(1)$ ou $G_{s4,3}(1)$ si on a un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (i) le groupe G est $G_{s4,7}(0)$ ou $G_{s4,8}$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et un semi-invariant d'ordre 2.
 - (j) le groupe G est un groupe imprimitif non monomial fini de la famille 1° avec des paramètres k, r vérifiant $k \neq 1$ ou $r \nmid 4$ si on a un invariant, un semi-invariant d'ordre 3 et un semi-invariant d'ordre 6.
 - (k) le groupe G est un groupe (éventuellement infini) primitif ou imprimitif non monomial si on a un invariant.
3. s'il est d'ordre 4, on regarde les semi-invariants de degré 4 :
- (a) le groupe G est le groupe primitif fini H si on a un espace de dimension 2 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (b) le groupe G est le groupe primitif fini G_{10} si on a un semi-invariant d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 6.
 - (c) le groupe G est un des groupes primitifs finis $G_8, G_9, \langle G_9, C_4 \rangle, G_{11}$ ou G_{12} si on a un semi-invariant d'ordre 2.
- C. si on a deux semi-invariants de degré 2 :
1. si ces semi-invariants sont tous deux d'ordre 4, le groupe G est monomial de projection C ou D . En regardant les (semi-)invariants de degré 4, on peut dire plus précisément que :
 - (a) le groupe G est $G_{d1,1}(1, 2, -1)$ si on a un espace de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (b) le groupe G est $G_{d1,5}(1, 1, -1)$ si on a un espace de dimension 3, un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (c) le groupe G est $G_{d1,3}(1, 2, -1)$ si on a un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
 - (d) le groupe G est $G_{e1,6}(1, 1, -1)$ si on a deux espaces de dimension 3 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.

- (e) le groupe G est $G_{c1,2}(1, -1, \epsilon)$ ($\epsilon \in \{0, 1\}$) ou $G_{c1,5}(1, 1, -1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants, un espace de dimension 3 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
- (f) le groupe G est $G_{c1,1}(2, -1)$, $G_{c1,3}(1, -1)$, $G_{c1,4}(1, 2, -1)$ ou $G_{d1,15}(1, -1)$ si on a un invariant, un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
- (g) le groupe G est le groupe infini $\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, y_1v_1, H_1^i \rangle$ ($i = 1$ ou 2) si on a un espace de dimension 2 d'invariants, un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
- (h) le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection C si on a un invariant et un espace de dimension 2 de semi-invariants d'ordre 2.
- (i) le groupe G est monomial fini de projection D si on a un espace de dimension 1 et un espace de dimension 2 de semi-invariants d'ordre 2.
2. si on a un invariant et un semi-invariant d'ordre 2, le groupe G est monomial de projection V . En regardant les (semi-)invariants de degré 4, on peut dire plus précisément que :
- (a) le groupe G est $G_{v1,30}(1, 2, 0)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants, un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
- (b) le groupe G est $G_{v1,30}(2, 2, 0)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants, un semi-invariant d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
- (c) le groupe G est $G_{v1,27}(2, 2, 0)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et neuf espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
- (d) le groupe G est $G_{v1,29}(1, 2, 0)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et trois espaces de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
- (e) le groupe G est $G_{v1,35}(1, 1, 0)$ un espace de dimension 3 d'invariants et deux espaces de dimension 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
- (f) le groupe G est $G_{v1,29}(1, l, 0)$ ($l \geq 3$), $G_{v1,30}(1, l, 0)$ ($l \geq 3$), $G_{v3,29}(1, l, 0)$ ($l \geq 1$ et N de la forme v), $G_{v3,30}(1, 1, 0)$ (N de la forme u), $G_{v3,30}(1, l, 0)$ ($l \geq 1$ et N de la forme v), $G_{v4,4}(0, 0)$ ou $G_{v4,7}(1, l)$ si on a un espace de

dimension 2 d'invariants, un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.

3. si on a deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2, le groupe G est monomial de projection V . En regardant les (semi-)invariants de degré 4, on peut dire plus précisément que :
 - (a) le groupe G est $G_{v1,10}(2,1)$, $G_{v1,29}(1,2,1)$ ou $G_{v1,32}(1,1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et trois espaces de dimension 2 et trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (b) le groupe G est $G_{v1,13}(2,1)$ ou $G_{v1,30}(1,2,1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants, un espace de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
 - (c) le groupe G est $G_{v1,11}(1,2)$ ou $G_{v1,30}(2,2,1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants, un semi-invariant d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
 - (d) le groupe G est $G_{v1,9}(1,2)$, $G_{v1,27}(2,2,1)$, $G_{v1,31}(1,2)$ ou $G_{v1,36}(1,1)$ si on a un espace de dimension 2 d'invariants et neuf espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (e) le groupe G est $G_{v1,24}(1,1,1)$, $G_{v1,33}(1,1)$, $G_{v1,34}(1,1)$ ou $G_{v1,35}(1,1,1)$ si on a un espace de dimension 3 d'invariants et deux espaces de dimension 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 - (f) le groupe G est $G_{v1,13}(j,2)(j \geq 3)$ ou $G_{v3,13}(j,2)(j \geq 3)$ et N de la forme y ou u) si on a un invariant et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
- D. si on a plus de trois semi-invariants, le groupe G est monomial fini de projection V et on a les cas particuliers suivant.
- E. si on a 4 semi-invariants d'ordre 4, le groupe G est $G_{v1,22}(1,1,1)$.
- F. si on a 4 espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2, en regardant les (semi-)invariants de degré 4, on peut dire que :
 1. le groupe G est $G_{v1,9}(2,1)$ si on a un espace de dimension 3 d'invariants, deux espaces de dimension 2 et huit espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4.
 2. le groupe G est $G_{v1,31}(1,1)$ si on a un espace de dimension 3 d'invariants, deux espaces de dimension 2 et onze espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 3. le groupe G est $G_{v1,15}(1)$, $G_{v1,19}(1)$ ou $G_{v1,29}(1,1,1)$ si on a un espace de dimension 4 d'invariants et deux espaces de dimension 3, quatre espaces de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.

- *G.* si on a un invariant et 3 espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2, en regardant les (semi-)invariants de degré 4, on peut dire que :
 1. le groupe G est $G_{v1,29}(1, 1, 0)$ si on a un espace de dimension 4 d'invariants et deux espaces de dimension 3, quatre espaces de dimension 2 et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
 2. le groupe G est $G_{v1,27}(1, 2, 0)$ si on a un espace de dimension 3 d'invariants, deux espaces de dimension 2 et douze espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2.
- *H.* si on a 1 invariant, 1 semi-invariant d'ordre 2 et 4 semi-invariants d'ordre 4, le groupe G est $G_{v1,30}(1, 1, 0)$.
- *I.* si on a 2 semi-invariants d'ordre 2 et 4 semi-invariants d'ordre 4, le groupe G est $G_{v1,17}(1), G_{v1,18}(1), G_{v1,21}(1)$ ou $G_{v1,30}(1, 1, 1)$ (qui ont tous la même configuration en degré 4).
- *J.* si on a 1 invariant et 9 semi-invariants d'ordre 2, le groupe G est $G_{v1,27}(1, 1, 0)$.
- *K.* si on a 10 semi-invariants d'ordre 2, le groupe G est $G_{v1,27}(1, 1, 1)$ ou $G_{v1,16}(1)$ (non distinguables par leurs semi-invariants de degré 4).

Remarque 3.10.2 Cette stratégie permet d'identifier directement 44 groupes à partir de la seule connaissance de leurs semi-invariants de degré 2 et 4. Lorsqu'elle identifie un nombre fini de groupes possibles, on peut chercher à les distinguer par leurs semi-invariants de degré supérieur. Par exemple, les groupes $G_{v1,13}(2, 1) = \langle ay_3, bu_2, x_1, y_2, u_1, v_1 \rangle$ et $G_{v1,30}(1, 2, 1) = \langle ax_1, bu_2v_3, u_1, v_2 \rangle$ ont la même configuration en degré 2 et 4 mais le premier a la configuration suivante en degré 6 : (1, 2), (1, 2), (3, 2), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 4), tandis que, pour le second, on a : (1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 2), (3, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 4).

Par ailleurs, ces tables donnent la condition suivante pour savoir si une équation peut avoir des solutions non liouvilliennes.

Proposition 3.10.3 Si un groupe G est le groupe de Galois d'une équation différentielle unimodulaire irréductible ayant des solutions non liouvilliennes, soit il aura un invariant de degré 4, soit il n'aura pas de semi-invariant de degré 4 (et 2). Plus précisément, les seules "configurations" possibles pour ses semi-invariants de degré 2 et 4 sont les suivantes :

- un invariant de degré 2 et un invariant de degré 4
- un semi-invariant de degré 2 d'ordre 2 et un invariant de degré 4
- un invariant de degré 4
- aucun semi-invariant de degré 2 ou 4.

Pour chacune de ces "configurations", il existe aussi des groupes de Galois d'équations différentielles dont les solutions sont liouvilliennes.

3.10.2 Application à la recherche de semi-invariants (de degré 4) produits de forme linéaires

On se donne une équation différentielle linéaire irréductible d'ordre 4 $L(y) = 0$ dont on ne suppose pas le groupe de Galois G monomial a priori et ses semi-invariants de degré 2 et 4 (si elle n'en a aucun, son groupe n'est pas monomial). On cherche un (semi-)invariant produit de forme linéaires parmi ceux de degré 4 (l'existence d'un tel semi-invariant est une condition équivalente à la monomialité du groupe, par le lemme 3.1.1), ce qui permet ensuite de calculer une solution liouvillienne de l'équation par le théorème 2.1 de [32] ([12, Section 3, entre 3.4 et 3.5]).

On considère d'abord un exemple (qui est la situation générique pour les groupes monomiaux, comme vu dans la remarque 3.2.1). Si le groupe de l'équation admet un unique (semi-)invariant de degré 4 et aucun de degré 2 (sinon, le groupe n'est pas monomial), on cherche à savoir si ce semi-invariant est produit de formes linéaires. Pour cela, on se donne un système fondamental de solutions de l'équation (comme, par exemple, les solutions formelles de celles-ci dont un développement en série à un ordre donné est calculable en Maple comme dans l'exemple 2.4.4) puis on exprime le semi-invariant en fonction de ces solutions formelles. On trouve ainsi une expression polynômiale du semi-invariant. Si celle-ci factorise, le groupe est monomial et on a un (le) semi-invariant produit de formes linéaires ; sinon, le groupe n'est pas monomial.

Plus généralement, pour chercher des semi-invariants produits de formes linéaires, on commence par appliquer la stratégie précédente pour obtenir des informations sur le groupe (et éventuellement le déterminer). Ensuite, on peut utiliser la proposition suivante (qui s'établit à partir des tables) pour restreindre la recherche des semi-invariants qui nous intéressent aux espaces de semi-invariants d'ordre inférieur ou égal à 2 :

Proposition 3.10.4 *Un (semi-)invariant (de degré 4) produit de formes linéaires est toujours dans un espace de semi-invariants associé à un caractère d'ordre au plus 2.*

En général, si deux groupes ont la même configuration pour leurs semi-invariants de degré 2 et 4, c'est-à-dire les mêmes dimensions d'espaces de semi-invariants associés à des caractères d'un certain ordre (en degré 2 et 4), alors les semi-invariants produits de formes linéaires seront répartis de la même manière dans les espaces de semi-invariants d'une certaine dimension pour un certain ordre. Par exemple, si on a un semi-invariant de degré 2 d'ordre 2 et, en degré 4, un espace de dimension 2 d'invariants et un semi-invariant d'ordre 2, alors pour les deux groupes concernés (qui sont ici $G_{s4,7}(0)$ et $G_{s4,8}$), le semi-invariant d'ordre 2 (et de degré 4) sera produit de formes linéaires, mais aucun invariant. Les configurations faisant exception à la règle précédente sont celles pour lesquelles on n'a aucun semi-invariant de degré 2 et les configurations suivantes en degré

4 (la recherche de semi-invariants produits de formes linéaires est alors aussi un moyen de mieux distinguer les groupes) :

1. cinq espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 : si parmi ceux-ci, un seul est produit de formes linéaires, le groupe G est $G_{d1,1}(2, 2, -1)$; si trois de ceux-ci sont produits de formes linéaires, le groupe G est $G_{d1,5}(2, 1, -1)$.
2. un espace de dimension 1 d'invariants et un espace de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 : si l'invariant est produit de formes linéaires, le groupe G est $G_{s4,6}(1)$; si le semi-invariant est produit de formes linéaires, le groupe G est $G_{a4,1}(2, -1)$, $G_{a4,2}(1, -1)$, $G_{a4,3}(2, -1)$ ou $G_{a4,4}(1, -1)$; si aucun des deux n'est produit de formes linéaires, le groupe G est un groupe primitif fini G , $G_{1/2}^+$, $G_{1/2}^-$ ou un groupe imprimitif fini de la famille 6° avec des paramètres $r \mid 2, k \neq \pm 1$.
3. trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 4 : si un seul semi-invariant d'ordre 2 est un produit de formes linéaires, le groupe G est $G_{d1,3}(2, 2, -1)$; sinon, tous les semi-invariants d'ordre 2 sont produits de formes linéaires et le groupe G est $G_{c1,2}(1, k', \epsilon)$ ($k' \geq 0$), $G_{c1,5}(j, 1, k')$ ($j \geq 3$ ou $k' \geq 0$), $G_{c1,6}(j, 1, k')$ ($j \geq 3$ ou $k' \geq 0$) ou $G_{d1,8}(2, 1, -1)$.
4. un invariant et quatre espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 : si l'invariant est produit de formes linéaires, le groupe G est monomial fini de projection V ; sinon, un seul des semi-invariants d'ordre 2 est produit de formes linéaires et le groupe G est $G_{d1,2}(1, 2, -1)$, $G_{d1,12}(1, 1, -1)$, $G_{d1,13}(2, \epsilon, -1)$, ou $G_{d1,19}(1, \epsilon, -1)$.
5. un invariant et un espace de dimension 2 et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 : si l'invariant est produit de formes linéaires, le groupe G est monomial fini de projection V ; sinon, le groupe G est $G_{c1,7}(1, k, -1)$ ($k \geq 2$).
6. trois espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 : si un seul (à multiple près) semi-invariant d'ordre 2 est produit de formes linéaires, le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection C ou D ; sinon, tous sont produits de formes linéaires et le groupe G est monomial fini de projection D .
7. un invariant et deux espaces de dimension 1 de semi-invariants d'ordre 2 : si l'invariant est produit de formes linéaires, le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection V ; sinon, un semi-invariant est produit de formes linéaires et le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection D .
8. un invariant : s'il est produit de formes linéaires, le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection V ou A_4 ; sinon, le groupe G est un des groupes primitifs finis E , $E_{1/2}$, G_{14} , $G_{14}^{+1/2}$, $G_{14}^{-1/2}$, G_{17} ou un groupe primitif

infini de composante connexe de l'identité l'image irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $SL(4, \mathbb{C})$.

9. un semi-invariant d'ordre 2 : s'il est produit de formes linéaires, le groupe G est monomial (éventuellement infini) de projection C, D ou S_4 ; sinon, le groupe G est un des groupes primitifs finis $G_{15}, G_{15}^{+1/2}, G_{15}^{-1/2}, G_{19}$.
10. un espace de dimension 2 d'invariants : si on a un semi-invariant produit de formes linéaires dans cet espace, le groupe G est $G_{a_4,5}(1, -1)$; sinon, le groupe G est le groupe primitif fini A ou $A_{1/2}$.

En résumé, pour chercher un semi-invariant produit de formes linéaires, si l'on n'est pas dans une des situations de la liste précédente, le théorème 3.10.1 nous donne des informations sur le groupe G . On peut alors consulter les tables : tous les groupes ayant cette configuration auront la même répartition de leurs semi-invariants produits de formes linéaires (en dehors de la liste précédente, la stratégie permet de distinguer les groupes monomiaux des autres). Ceci permettra soit de trouver le semi-invariant qui nous intéresse sans autres calculs, soit de faciliter ceux-ci. Par exemple, si on a quatre semi-invariants de degré 2 d'ordre 2, le groupe G est $G_{v_1,22}(1, 1, 1)$ et on a alors un unique invariant (à multiple près) produit de formes linéaires : il suffit de le prendre et il n'est pas ici nécessaire de procéder à d'autres calculs puisque la configuration en degré 4 pour ce groupe est $(1, 1), (4, 2), (2, 2), (2, 2), (2, 2)$ avec un invariant produit de formes linéaires et six (droites de) semi-invariants produits de formes linéaires dans l'espace de dimension 4. Si l'on n'a aucun semi-invariant de degré 2 et deux semi-invariants de degré 4 d'ordre 2, le groupe G sera $G_{s_4,1}(2), G_{s_4,2}(2), G_{s_4,3}(2)$ ou $G_{s_4,4}(1)$ et on devra calculer l'expression polynômiale des semi-invariants pour savoir lequel des deux est un produit de formes linéaires. Les semi-invariants produits de formes linéaires peuvent aussi être tous dans des espaces de semi-invariants de dimension supérieure à 1, ce qui rendra leur recherche plus difficile : par exemple, si on n'a aucun semi-invariant de degré 2 et, en degré 4, un espace de dimension 2 d'invariants et un (espace de dimension 1 de) semi-invariant(s) d'ordre 2, le groupe sera alors monomial fini de projection V et il admettra un seul (semi-)invariant produit de formes linéaires, qui sera dans l'espace de dimension 2 d'invariants.

Chapitre 4

L'ordre de la puissance symétrique quatrième d'une équation différentielle

En général, la puissance symétrique quatrième d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4 est d'ordre maximal (35). Le calcul de ses solutions exponentielles donne alors des informations sur les semi-invariants de degré 4 sous l'action de son groupe de Galois différentiel (lemme 2.4.3). Toutefois, en raison de relations pouvant exister entre les solutions, le degré de la puissance symétrique quatrième peut chuter et cette chute peut même être importante¹.

Cette chute peut être évitée en transformant l'équation en une équation ayant même groupe de Galois différentiel et (à isomorphisme près) même espace de solutions de puissance symétrique d'ordre maximal comme cela est expliqué par M.F. Singer et F. Ulmer dans [57] (démonstration du théorème 3.5). Une autre méthode pour éviter ce problème de chute de degré consiste à passer par les systèmes différentiels plutôt que par les équations, comme l'exposent M. van Hoeij et J.-A. Weil dans [33, Section 2.3] (on peut aussi consulter [12, Section 3]).

Néanmoins, à l'ordre 3, une chute de degré peut aussi donner des informations utiles pour l'étude d'une équation. Ceci a été exploité par F. Ulmer en vue d'élaborer un nouvel algorithme de calcul des solutions liouvilliennes des équations différentielles d'ordre 3 dans [65] (algorithme en section 3.4, ainsi que lemme 3.1 et corollaire 3.3). Il apparaît ainsi justifié de s'interroger sur le comportement d'une équation différentielle d'ordre 4 dont le degré de la puissance symétrique quatrième chute.

¹on peut garder en mémoire l'exemple 3.1.2 ([8, Example 2.2]). On a alors une puissance symétrique deuxième d'ordre (maximal) 10, une puissance symétrique troisième d'ordre (maximal) 20 et une puissance symétrique quatrième d'ordre 29 (pour un ordre maximal de 35), d'où une chute de 6 pour le degré.

Soit $L(y) = 0$ une équation irréductible de degré 4 admettant le système fondamental de solutions $\{u_1, \dots, u_4\}$. On a alors :

$$\text{Sol}(L^{\otimes 4}) = \text{Vect}_C \left(\left\{ \prod_{i+j+k+l=4} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l \right\} \right).$$

Le cardinal de cette famille génératrice est 35 ; si la puissance symétrique quatrième n'est pas d'ordre maximal 35, l'espace $\text{Sol}(L^{\otimes 4})$ sera de dimension inférieure à 35 (sa dimension étant l'ordre de la puissance symétrique quatrième) donc la famille génératrice sera liée, ce qui signifie qu'il existe au moins un polynôme en 4 variables de degré 4 à coefficients dans C dont l'évaluation en les u_i est nulle.

4.1 Puissance symétrique quatrième d'ordre 34

Dans ce cas, il n'existe qu'un polynôme (à multiple près) annulant les u_i : ceux-ci seront donc sur une surface. Le lemme suivant nous donne des informations sur les semi-invariants de degré 4 du groupe de Galois différentiel de cette équation.

Lemme 4.1.1 *Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire unimodulaire d'ordre 4 à coefficients dans un corps différentiel k de groupe de Galois G . On suppose que sa puissance symétrique quatrième est d'ordre 34. Le groupe G admet alors (au moins) un semi-invariant de degré 4. De plus, si G est monomial, il admet alors (au moins) deux semi-invariants de degré 4.*

Démonstration.

Soit K une extension de Picard-Vessiot de k associée à $L(y) = 0$ et u_1, \dots, u_4 un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$ dans K . Si G est monomial, on peut supposer que u_1, \dots, u_4 correspond à un système de monomialité de G .

On notera ϕ le morphisme d'évaluation $C[x_1, \dots, x_4]_4 \rightarrow K : Q(x_1, \dots, x_4) \mapsto Q(u_1, \dots, u_4)$. Comme $L^{\otimes 4}(y)$ est d'ordre 34, l'espace $\text{Ker}\phi$ sera de dimension 1, de base $P(x_1, \dots, x_4) \in C[x_1, \dots, x_4]_4$. On va étudier l'action de G sur ce polynôme. Soit $\sigma \in G \subset SL(n, C)$. La restriction de ϕ à C étant l'identité, on a :

$$\phi(\sigma.P(x_1, \dots, x_4)) = \sigma.\phi(P(x_1, \dots, x_4)) = \sigma.P(u_1, \dots, u_4) = 0$$

donc $\sigma.P(x_1, \dots, x_4) \in \text{Ker}\phi$. De ce fait, il existe $\lambda_\sigma \in C$ tel que $\sigma.P(x_1, \dots, x_4) = \lambda_\sigma P(x_1, \dots, x_4)$. En conséquence, le polynôme $P(x_1, \dots, x_4) \in C[x_1, \dots, x_4]_4$ est semi-invariant sous l'action de G et la première partie du lemme est établie.

Si G est monomial, le choix de u comme système de monomialité de G implique que le produit $x_1 x_2 x_3 x_4$ est un polynôme semi-invariant sous son action (plus précisément, ce choix de u fixe une représentation de $G \subset SL(n, C)$ pour laquelle $x_1 x_2 x_3 x_4$ est un semi-invariant) et il est différent de $P(x_1, \dots, x_4)$ puisque $\phi(x_1 x_2 x_3 x_4) = u_1 u_2 u_3 u_4 \neq 0 = \phi(P(x_1, \dots, x_4))$. \square

A l'aide des tables du chapitre précédent, on peut déduire la proposition suivante de ce lemme.

Proposition 4.1.2 Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire unimodulaire d'ordre 4 à coefficients dans un corps différentiel k de groupe de Galois G . On suppose que sa puissance symétrique quatrième est d'ordre 34. Si G admet un seul polynôme semi-invariant de degré 4, ce groupe sera primitif :

- si ce polynôme est un invariant, le groupe G sera $E, E_{1/2}, G_{14}, G_{14}^{+1/2}, G_{14}^{-1/2}, G_{17}$ ou un groupe primitif infini de composante connexe de l'identité l'image irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $SL(4, \mathbb{C})$ (dans ce cas, on n'aurait pas de solution liouvillienne puisque $SL(2, \mathbb{C})$ n'est pas résoluble).
- si ce polynôme est un semi-invariant d'ordre 2, le groupe G sera $G_{15}, G_{15}^{+1/2}, G_{15}^{-1/2}$ ou G_{19} .

Sinon (i.e. si G admet plusieurs semi-invariants de degré 4), ce groupe sera monomial (éventuellement infini) ou fini et l'équation admettra des solutions liouvilliennes.

Démonstration.

Si G admet un seul polynôme semi-invariant de degré 4, le groupe ne peut pas être monomial (sinon, il aurait au moins deux semi-invariants de degré 4 d'après le lemme). Les tables des groupes primitifs et imprimitifs non monomiaux nous donnent alors les groupes possibles. Si le groupe G admet un semi-invariant $R(x_1, \dots, x_4)$ d'ordre 2, le carré de celui-ci est un semi-invariant de degré 4 : c'est donc $P(x_1, \dots, x_4)$ à multiple près. Or, $P(u_1, \dots, u_4) = 0$, donc $R(u_1, \dots, u_4) = 0$. On a donc un semi-invariant de degré 2 qui s'annule sur un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$. On en déduit qu'il existe plusieurs polynômes de degré 4 dont l'évaluation en u_1, \dots, u_4 s'annule, ce qui contredit notre hypothèse de départ sur le degré de la puissance symétrique quatrième de $L(y)$. En conséquence, le groupe G n'admet aucun semi-invariant de degré 2 et le premier point (situation où l'on a un seul semi-invariant de degré 4) de la proposition est établi.

La première assertion du second point est une conséquence des tables du chapitre précédent. Enfin, des solutions algébriques étant nécessairement liouvilliennes, il suffit pour établir la dernière assertion de vérifier que les composantes connexes de l'identité des groupes monomiaux infinis sont résolubles. Ceci est immédiat puisque ces composantes sont, suivant les groupes, H_1^1, H_1^2, H_2^n ou H_3 qui sont diagonales donc résolubles. \square

Remarque 4.1.3 Dans la situation de la proposition, si la puissance symétrique quatrième de l'équation n'a pas de solution exponentielle (non nulle), on aura un unique (semi-)invariant de degré 4. En transformant cette équation à l'aide de la méthode décrite dans [57], on obtient une équation de même groupe de Galois dont la puissance symétrique quatrième est d'ordre maximal : on peut calculer ses solutions exponentielles, connaître l'ordre de cet unique (semi-)invariant et appliquer alors la proposition ci-dessus (partir directement de l'équation transformée n'aurait pas permis de prouver que le groupe ne pouvait être monomial).

4.2 Puissance symétrique quatrième d'ordre inférieur ou égal à 33

Si les solutions u_i sont sur une courbe irréductible, on est alors dans la situation décrite par le théorème suivant de M.F. Singer pour les équations différentielles linéaires d'ordre 4 (le théorème est vrai pour un degré quelconque) :

Théorème 4.2.1 (*Singer, [53, théorème 4, p.130]*) *Soit k un corps différentiel de corps des constantes C et $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients dans k de groupe de Galois différentiel \mathcal{G} unimodulaire. Si $L(y) = 0$ admet un système fondamental de solutions sur une courbe algébrique irréductible \mathcal{C} , on a une des conditions suivantes :*

1. *les solutions de $L(y) = 0$ sont algébriques sur k et \mathcal{G} sera fini.*
2. *il existe une équation différentielle linéaire d'ordre 2 $L_2(y) = 0$ à coefficients dans k telle que $L(y) = L_2^{\otimes 3}(y)$.*
3. *il existe deux racines v_1 et v_2 d'un polynôme de degré 2 sur k et des entiers strictement positifs $N > 4$ et $i_1 < \dots < i_4 \leq N$ tels que $\{w_1^{i_1} w_2^{N-i_1}, \dots, w_1^{i_4} w_2^{N-i_4}\}$ forme un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$, où $w_1 = \exp(\int v_1)$ et $w_2 = \exp(\int v_2)$.*

Pour prouver ce théorème, M.F. Singer distingue différents cas suivant le genre de la courbe \mathcal{C} et son degré. Si $\text{genre}(\mathcal{C}) \geq 1$, le groupe \mathcal{G} est fini et toutes les solutions sont donc algébriques. Si $\text{genre}(\mathcal{C}) = 0$ et $\text{degré}(\mathcal{C}) > 3$, soit \mathcal{G} est fini, soit on est dans le troisième cas du théorème. Sinon, on a $\text{genre}(\mathcal{C}) = 0$ et $\text{degré}(\mathcal{C}) = 3$ (car $\text{degré}(\mathcal{C}) \geq 3$). Un changement linéaire de coordonnées dans l'espace des solutions de $L(y) = 0$ (donc modifiant le système fondamental de solutions de départ mais pas l'équation différentielle) permet alors de se ramener au cas où la courbe annulant nos solutions est la courbe normale rationnelle $\mathcal{R}_3 \subset \mathbf{P}^3$, définie par les équations : $y_1 y_3 - y_2^2, y_2 y_4 - y_3^2$. On rappelle l'énoncé du lemme 4 qui s'applique alors.

Lemme 4.2.2 (*[53, Lemma 4, p.129]*) *Soit k un corps différentiel de corps des constantes C et $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients dans k . Alors il existe une équation différentielle linéaire d'ordre 2 $L_2(y) = 0$ à coefficients dans k telle que $L(y) = L_2^{\otimes 3}(y)$ si et seulement si il existe un système fondamental de solutions $\{y_1, \dots, y_4\}$ de $L(y) = 0$ tel que : $y_1 y_3 - y_2^2 = 0, y_2 y_4 - y_3^2 = 0$.*

Ce lemme montre alors que l'on est dans le deuxième cas.

Par ailleurs, on ne rencontrera pas le troisième cas puisque l'équation est alors réductible, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.2.3 Soit k un corps différentiel de corps des constantes C et $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients dans k . On suppose qu'il existe deux racines v_1 et v_2 d'un polynôme $P \in k[X]$ de degré 2 et des entiers strictement positifs $N > 4$ et $i_1 < \dots < i_4 \leq N$ tels que $\{w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}, \dots, w_1^{i_4}w_2^{N-i_4}\}$ forme un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$, où $w_1 = \exp(\int v_1)$ et $w_2 = \exp(\int v_2)$. Alors l'équation L sera réductible.

Démonstration.

On notera K l'extension de Picard-Vessiot de k correspondant à $L(y) = 0$ engendrée par le système fondamental de solutions de l'énoncé et \mathcal{G} le groupe de Galois différentiel correspondant. Les dérivées logarithmiques des éléments (non nuls) de K sont dans K et $w_1^{i_j}w_2^{N-i_j} = \exp(\int i_j v_1 + (N - i_j)v_2)$, donc $i_1 v_1 + (N - i_1)v_2 \in K$ et $i_2 v_1 + (N - i_2)v_2 \in K$. On en déduit que $v_1, v_2 \in K$ car $i_1 < i_2$ et on peut donc étudier l'action des éléments de \mathcal{G} sur v_1, v_2 . Comme v_1, v_2 sont les deux racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans k , le groupe \mathcal{G} les permutera.

On regarde maintenant l'action de \mathcal{G} sur $w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}$. On constate que $w_1^{i_1}w_2^{N-i_1} = \exp(\int i_1 v_1 + (N - i_1)v_2)$ est solution de l'équation suivante à coefficients dans K :

$$y' - (i_1 v_1 + (N - i_1)v_2)y = 0.$$

En conséquence, si $\sigma \in \mathcal{G}$, selon son action sur v_1, v_2 , on a les deux situations suivantes :

- si $\sigma(v_1) = v_1, \sigma(v_2) = v_2$, alors $\sigma(w_1^{i_1}w_2^{N-i_1})$ sera solution de $y' - (i_1 v_1 + (N - i_1)v_2)y = 0$ donc sera égal à $w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}$, à produit par une constante (dans C) près.
- si $\sigma(v_1) = v_2, \sigma(v_2) = v_1$, alors $\sigma(w_1^{i_1}w_2^{N-i_1})$ sera solution de $y' - (i_1 v_2 + (N - i_1)v_1)y = 0$ donc sera égal à $w_2^{i_1}w_1^{N-i_1}$, à produit par une constante (dans C) près.

Ainsi, l'action de \mathcal{G} sur $w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}$ l'enverra sur un C -multiple de lui-même ou de $w_2^{i_1}w_1^{N-i_1}$.

On va montrer qu'il existe j dans $\{1, \dots, 4\}$ tel que $w_2^{i_1}w_1^{N-i_1} = w_1^{i_j}w_2^{N-i_j}$ (ou, plus simplement, $N - i_1 = i_j$)². Si ce n'est pas le cas, on écrit $w_2^{i_1}w_1^{N-i_1} \in K$ dans la base $\{w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}, \dots, w_1^{i_4}w_2^{N-i_4}\}$, ce qui nous donne une combinaison linéaire nulle non triviale de $w_1^{N-i_1}w_2^{i_1}, w_1^{N-i_2}w_2^{i_2}, \dots, w_1^{N-i_4}w_2^{i_4}$ à coefficients dans C . Désignant par α le minimum de $\{i_1, N - i_1\}$, on met en facteur $w_1^\alpha w_2^{N-\alpha}$ et on trouve alors un polynôme non nul à coefficients dans C annihilant $\frac{w_1}{w_2}$. Or C est algébriquement clos, donc $\frac{w_1}{w_2} \in C$, donc $w_1^{i_m}w_2^{N-i_m} = \beta_m w_2^N$ avec $\beta_m \in C, m = 1, \dots, 4$. On en déduit que la famille $\{w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}, \dots, w_1^{i_4}w_2^{N-i_4}\}$ est liée, ce qui est impossible (c'est une base!).

On considère alors le sous- C -espace vectoriel de K engendré par $w_1^{i_1}w_2^{N-i_1}$ et $w_1^{i_j}w_2^{N-i_j}$. Il est stable sous l'action de \mathcal{G} . En effet, on a vu ci-dessus que les

²on aura $j = 1$ si $i_1 = N/2$

éléments de \mathcal{G} envoient $w_1^{i_1} w_2^{N-i_1}$ sur un multiple de lui-même ou de $w_2^{i_1} w_1^{N-i_1} = w_1^{i_j} w_2^{N-i_j}$. De même ($N - i_j = i_1$), les éléments de \mathcal{G} envoient $w_1^{i_j} w_2^{N-i_j}$ sur un multiple de lui-même ou de $w_2^{i_j} w_1^{N-i_j} = w_1^{i_1} w_2^{N-i_1}$.

En conséquence, on a trouvé un sous- C -espace vectoriel de K de dimension inférieure à 2 stable sous \mathcal{G} : l'équation de départ est donc réductible (proposition 2.1.12). \square

Dans sa thèse ([45, Prop.6]), A. Person donne le critère suivant pour savoir si l'on est dans le deuxième cas :

Lemme 4.2.4 *Soit $L(y) = y^{(4)} + p_3 y^{(3)} + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 4 à coefficients dans un corps différentiel k . Alors il existe une équation différentielle linéaire homogène $L_2(y) = 0$ d'ordre 2 à coefficients dans une extension différentielle de k telle que $L = L_2^{\otimes 3}$ si et seulement si*

$$p_1 = \frac{p_3^3}{36} + \frac{7p_3 p_3'}{36} + p_3 \frac{p_2 - \frac{11}{36} p_3^2 - \frac{2}{3} p_3'}{2} + p_2' - \frac{11p_3 p_3'}{18} - \frac{2}{3} p_3'' + \frac{p_3'''}{6}$$

$$p_0 = 18r^2 s + 6r' s + 9s^2 + 15r s' + 3s''$$

$$\text{avec } r = \frac{p_3}{6} \text{ et } s = \frac{p_2 - \frac{11p_3^2}{36} - \frac{2}{3} p_3'}{10}.$$

Dans ce cas, on a $L_2(y) = y'' + ry' + sy$ et cette équation est à coefficients dans k .

Ainsi, étant donnée une équation unimodulaire irréductible d'ordre 4, on détermine si elle provient d'une équation d'ordre 2 grâce au critère précédent. Si c'est le cas, on peut trouver ses solutions. Sinon, si l'équation admet un système fondamental de solutions sur une courbe algébrique irréductible, le groupe de l'équation sera alors fini. En effet, le théorème de M.F. Singer s'applique alors à cette équation et il nous dit que n'étant pas réductible (cas 3) et ne provenant pas d'une équation d'ordre 2 (cas 2), l'équation qui nous intéresse a une solution algébrique sur k et un groupe de Galois fini.

Il faudrait maintenant voir quels groupes finis peuvent être des groupes d'équations dont la puissance symétrique quatrième n'est pas d'ordre maximal. Pour cela, il faudrait une méthode pour vérifier si un groupe donné est ainsi (et si possible une méthode qui puisse après s'appliquer à des familles de groupes finis).

Chapitre 5

Des exemples

5.1 Le groupe $G = \langle a, b, u_1, v_1 \rangle = G_{v_1, 27}(1, 1, 0)$

Pour ce groupe, en degré 4, on a un espace de dimension 5 d'invariants dont 15 produits de formes linéaires et 15 espaces de dimension 2 de semi-invariants non produits de formes linéaires. On s'intéresse plus précisément à ce groupe en cherchant d'abord sa représentation de permutation fidèle de plus petit degré : pour cela, on cherche un sous-groupe d'indice minimal tel que la représentation de G par permutation des classes de ce sous-groupe soit fidèle ([34, Théorème 6.2, p.28]), le degré de cette représentation étant l'indice du sous-groupe. On trouve alors le groupe suivant avec Magma :

Permutation group g1 acting on a set of cardinality 8

Order = 32 = 2⁵

(1, 2)(3, 6)(4, 7)(5, 8)

(1, 2)(3, 5)(4, 7)(6, 8)

(1, 3, 7, 8)(2, 5, 4, 6)

(1, 4, 7, 2)(3, 6, 8, 5)

Dans la liste des groupes transitifs de Magma (G. Butler et J. McKay, [13]), il s'agit de $T_{8,22}$.

D'après G. Malle et B.H. Matzat ([40, Table 6, p.405-406]), le polynôme suivant est le polynôme minimal d'une extension régulière de $\mathbb{Q}(t)$ de groupe de Galois $T_{8,22}$:

$$(x^2 - 2)^4 - \frac{16(2x - 3)^2 t^2}{(t^2 - 1)^3}.$$

L. Schmidt-Thieme a calculé ([49, p.87]) une équation différentielle d'ordre 4 dont $T_{8,22}$ est le groupe de Galois différentiel :

$$\begin{aligned}
L(y) = & y(t)^{(4)} + 3 \frac{550t^8 - 1849t^6 + 865t^4 - 16}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)t} y(t)^{(3)} \\
& + \frac{3}{4} \frac{8360t^{12} - 54358t^{10} + 101761t^8 - 61267t^6 + 8884t^4 + 4784t^2 - 64}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)^2(t+1)^2(t-1)^2(t-2)^2t^2} y(t)^{(2)} \\
& + \frac{3}{4} \frac{7040t^{10} - 35162t^8 + 42229t^6 - 14924t^4 - 4756t^2 + 848}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)^2(t+1)^2(t-1)^2(t-2)^2t} y'(t) \\
& + \frac{3}{16} \frac{1320t^8 - 5620t^6 + 1758t^4 - 5031t^2 + 148}{(110t^4 - 61t^2 - 4)(t+2)^2(t+1)^2(t-1)^2(t-2)^2t^2} y(t) = 0
\end{aligned}$$

Avant d'étudier cette équation plus en détail, on peut mettre en oeuvre la stratégie décrite dans le chapitre 3 afin de chercher son groupe (ou plutôt de vérifier que c'est bien celui qui nous intéresse). On cherche d'abord ses semi-invariants de degré 2 et on calcule pour cela la deuxième puissance symétrique de cette équation. Elle est d'ordre maximal ; d'après le lemme 2.4.3, les semi-invariants de degré 2 du groupe de cette équation sont en bijection avec ses solutions exponentielles. On calcule ces dernières :

$$\begin{aligned}
& \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1}, \frac{t^{1/2}}{(t+1)^{1/2}(t-1)}, \frac{t^{1/2}}{(t+1)(t-1)^{1/2}}, \frac{t}{(t^2-1)^{1/2}}, \frac{(t-2)^{1/2}}{(t+1)^{1/2}(t-1)}, \\
& \frac{(t+2)^{1/2}}{(t+1)(t-1)^{1/2}}, \frac{(t-2)^{1/2}t^{1/2}}{t^2-1}, \frac{(t+2)^{1/2}t^{1/2}}{t^2-1}, \frac{(t^2-4)^{1/2}t}{t^2-1}, \frac{(t^2-4)^{1/2}}{(t^2-1)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

On a donc, en degré 2, un (espace de dimension 1 d') invariant(s) et neuf (espaces de dimension 1 de) semi-invariants d'ordre 2 : le groupe de cette équation est donc $G_{v1,27}(1, 1, 0)$, d'après le cas J du théorème 3.10.1 (p. 86).

A l'aide de Maple, on peut calculer les exposants de cette équation et on trouve $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ en 0, en 2 et en -2, $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ en 1 et en -1, $(0, 1, 3, 5)$ en ∞ et $(0, 1, 2, 4)$ en $\pm \frac{\sqrt{3355 \pm 165\sqrt{609}}}{110}$ (racines de $110t^4 - 61t^2 - 4$).

Reprenons la méthode décrite par F. Ulmer dans la section 2 de [66] en la singularité $c = 0$. On a la matrice de monodromie suivante en 0 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = u_1 v_1$$

On calcule ensuite avec Magma un ensemble de générateurs de l'anneau des invariants de G (vu comme une algèbre sur \mathbb{C}), la finitude de cet ensemble étant garantie par le théorème d'E. Noether :

$$I_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, I_2 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4, I_3 = x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2, I_4 = x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2,$$

$$I_5 = x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2, I_6 = x_1^4 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3^4 + x_1 x_2 x_4^4 + x_2^4 x_3 x_4.$$

L'espace des invariants de degré 4 est engendré par I_1^2, I_2, I_3, I_4 et I_5 .

On s'intéresse à la valeur de ces invariants, c'est-à-dire à leur image par un morphisme d'évaluation envoyant (x_1, x_2, x_3, x_4) sur un système fondamental de solutions de $L(y) = 0$. D'après [56, Lemme 1.6], la valeur d'un invariant de degré m est une solution rationnelle de $L^{\otimes m}(y) = 0$. Toutefois, en pratique¹, le calcul d'une puissance symétrique peut s'avérer très difficile et on va essayer d'avoir d'autres méthodes pour trouver les valeurs d'invariants. Le lemme suivant, dû à M.F. Singer et F. Ulmer, établit un lien entre les exposants de $L(y) = 0$ et ceux de $L^{\otimes m}(y) = 0$ et va nous permettre de déterminer la forme de la valeur d'un invariant.

Lemme 5.1.1 (*Singer-Ulmer, [57, Lemmes 2.2.4 et 3.1]*)

(i) Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire fuchsienne d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ et a_1, \dots, a_n ses exposants en un point $c \in \mathbb{C}$. La puissance symétrique m -ième de $L(y) = 0$ est alors fuchsienne et ses exposants en c se trouvent dans l'ensemble $\left\{ k + \sum_{j=1}^m a_{i_j} \mid i_j \in 1, \dots, n; k \in \mathbb{N} \right\}$.

(ii) Si une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$ $L(y) = 0$ d'ordre n a une solution de la forme $P(x) \prod_i (x - c_i)^{a_i}$ avec $P \in \mathbb{C}[x], c_i \neq \infty$ les points singuliers de $L(y) = 0$ et a_i des exposants en c_i , il existe un exposant à l'infini e_∞ tel que $\sum_i a_i + e_\infty$ est un entier négatif (qui vaut $-\deg(P)$).

Prenons maintenant l'exemple de I_1 . Il est de degré 2 et sa valeur, qui est une solution rationnelle de $L^{\otimes 2}(y) = 0$, sera de la forme $P(t) \prod_i (t - c_i)^{a_i}$ où les c_i sont les singularités finies de notre équation et les a_i des exposants de $L^{\otimes 2}(y) = 0$. Le lemme précédent (partie (i)) nous permet de trouver la valeur minimale des a_i : ce sera 0 si c_i est 0, 2, -2 ou une racine de $110t^4 - 61t^2 - 4$ et -1 si c_i est 1 ou -1 . I_1 sera donc de la forme $Q(t)(t+1)^{-1}(t-1)^{-1}$ avec $Q \in \mathbb{C}[t]$. On borne alors le degré de Q en minimisant e_∞ (en appliquant la partie (ii) du lemme). La valeur de I_1 sera ainsi :

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2}{(t+1)(t-1)}.$$

On procède de même pour montrer que la valeur de $I_j (j = 2, \dots, 6)$ sera :

$$\frac{\sum_{i=0}^4 \beta_{i,j} t^i}{(t+1)^2 (t-1)^2} \text{ pour } j = 2, \dots, 5, \quad \frac{\sum_{i=0}^6 \gamma_i t^i}{(t+1)^3 (t-1)^3} \text{ pour } j = 6.$$

¹pour l'équation qui nous intéresse ici, le calcul de sa puissance symétrique deuxième n'a pas posé de difficulté; en revanche, les essais réalisés mi-Janvier 2004 avec Maple pour calculer sa puissance symétrique troisième (sur le serveur de calcul de l'IRMAR) ou quatrième (sur MEDICIS [Cosimo]) n'ont pas abouti. Toutefois, ces puissances sont désormais calculables à l'aide du logiciel BERNINA qui permet aussi le calcul rapide de (semi-)invariants (de degré 2 et 4) (<http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/sumit/bernina.html>).

Essayer de calculer directement les valeurs des invariants à partir de ces informations ferait intervenir de trop nombreux paramètres (car les exposants diffèrent d'entiers) et on va procéder différemment pour obtenir (d'abord) certaines valeurs des invariants en calculant autrement des polynômes minimaux de solutions.

Pour cela, on applique la méthode décrite par F. Ulmer dans la section 3.2 de [66]. Pour avoir une singularité avec une matrice de monodromie d'ordre maximal et les plus petits espaces propres possibles, on se place en 0 (matrice d'ordre 2 avec deux espaces propres de dimension 2). L'image de la matrice de monodromie en 0 dans G_1 , la représentation fidèle de degré 8 de G , est $(1, 6)(2, 3)(4, 8)(5, 7)$. On notera χ le caractère de G_1 .

Soit K l'extension de Picard-Vessiot de $k = \mathbb{C}(t)$ associée à $L(y) = 0$. On va chercher le polynôme minimal d'une solution z de $L(y) = 0$ qui est un vecteur propre associé à une valeur propre α de M_0 . On notera ϕ_α le caractère de degré 1 de $\langle M_0 \rangle$ associé à α ($\phi_\alpha(M_0) = \alpha$).

On cherche d'abord la forme d'un tel polynôme minimal. A la tour d'extensions $k \subset k\left(\frac{z'}{z}\right) \subset k(z) \subset K$ correspond la tour $\mathcal{G}(L) \supset H_1 \supset H_2 \supset \{Id\}$ avec $H_1 = \text{Stab}_{\mathcal{G}}\left(\frac{z'}{z}\right)$ et $H_2 = \text{Stab}_{\mathcal{G}}(z)$. D'après un résultat de M.F. Singer et F. Ulmer ([56, Corollaire 1.4]), en notant $i = [k(z) : k\left(\frac{z'}{z}\right)] = [H_1 : H_2]$ et $m = [k\left(\frac{z'}{z}\right) : k] = [\mathcal{G} : H_1]$, le polynôme minimal de z sera de la forme :

$$a_m Y^{i \cdot m} + \dots + a_1 Y^i + a_0 \quad (a_j \in k).$$

Afin de déterminer les valeurs possibles de m et de i , on va utiliser le résultat suivant sur les stabilisateurs de vecteurs propres de M_0 et de leurs dérivée logarithmique, dû à F. Ulmer.

Lemme 5.1.2 (*Ulmer, [66]*) *Soit un vecteur propre z de M_0 associé à α solution de $L(y) = 0$ avec $H_1 = \text{Stab}_{\mathcal{G}}\left(\frac{z'}{z}\right)$ et $H_2 = \text{Stab}_{\mathcal{G}}(z)$. Alors, les groupes H_1 et H_2 sont tels que :*

1. *le sous-groupe $H_1 \subset \mathcal{G}$ est maximal parmi les groupes vérifiant les propriétés suivantes :*
 - (a) $\langle M_0 \rangle \subset H_1$
 - (b) $\chi|_{H_1}$ (la restriction de χ à H_1) a un terme ψ de degré 1 dans sa décomposition en caractères irréductibles
 - (c) $\psi|_{\langle M_0 \rangle} = \phi_\alpha$
2. *le sous-groupe $H_2 \subset H_1 \subset \mathcal{G}$ est maximal parmi les groupes vérifiant les propriétés suivantes :*
 - (a) H_2 est distingué dans H_1 et H_1/H_2 est cyclique
 - (b) $\psi|_{H_2} = \mathbf{1}_{H_2}$ (le caractère trivial de H_2).

Démonstration.

Montrons que H_1 vérifie les propriétés (1.a) à (3.a). Comme $M_0.z = \alpha z$, on a $M_0.\frac{z'}{z} = \frac{z'}{z}$ donc $\langle M_0 \rangle \subset H_1$ et (1.a) est vérifiée. De plus, pour $\sigma \in H_1$, on a :

$$\frac{z'}{z} = \sigma \left(\frac{z'}{z} \right) = \frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)} \text{ d'où } \left(\frac{\sigma(z)}{z} \right)' = \frac{\sigma(z)'z - z'\sigma(z)}{z^2} = 0.$$

En conséquence, z sera un vecteur propre commun aux éléments de H_1 et l'espace $C_k z$ est un sous-espace stable sous H_1 , irréductible car de dimension 1. Il lui correspond donc un caractère ψ de degré 1 dans la décomposition en somme d'irréductibles du caractère de H_1 ($\chi_{|H_1}$). On aura alors, pour $M \in H_1$, $M.z = \psi(M)z$ d'où en particulier $\psi(M_0) = \alpha = \phi_\alpha(M_0)$ et donc $\psi_{|\langle M_0 \rangle} = \phi_\alpha$. Les points (1.b) et (1.c) sont donc vérifiés.

Dans le paragraphe précédent, on a seulement utilisé le fait que H_1 était un sous-groupe de \mathcal{G} stabilisant $\frac{z'}{z}$ et contenant M_0 . Par définition, le groupe $\text{Stab}_{\mathcal{G}}\left(\frac{z'}{z}\right)$ est maximal parmi les sous-groupes de \mathcal{G} stabilisant $\frac{z'}{z}$ (et il contient M_0), donc H_1 vérifie bien la condition 1.

Un élément stabilisant z stabilise $\frac{z'}{z}$ donc $H_2 \subset H_1$. La propriété (2.a) est vérifiée d'après un résultat de M.F. Singer et F. Ulmer : le corollaire 1.4 de [56]. Par ailleurs, on a, pour $M \in H_2$, $M.z = \psi(M)z$ comme $H_2 \subset H_1$ et $M.z = z$ puisque H_2 stabilise z donc $\psi_{|H_2} = \mathbf{1}_{H_2}$ (ce qui est la propriété (2.b)). La maximalité de H_2 vérifiant ces hypothèses est une conséquence de la maximalité du stabilisateur (la condition (2.b) décrit précisément les sous-groupes de H_1 qui stabilisent z). \square

Pour connaître les valeurs possibles de m et i pour les différents vecteurs propres de M_0 , il suffira donc de chercher tous les couples H_1, H_2 de sous-groupes de \mathcal{G} vérifiant les propriétés décrites dans le lemme ci-dessus (avec les conditions de maximalité) et de prendre comme valeurs possibles $m = [\mathcal{G} : H_1]$ et $i = [H_1 : H_2]$ pour chacun de ces couples.

On calcule ces couples possibles pour notre exemple en commençant avec la valeur propre -1. A l'aide de Magma, on peut connaître le treillis des sous-groupes de G_1 . Dans ce treillis, le groupe d'ordre 2 engendré par l'image de M_0 , matrice de monodromie en 0, est conjugué au groupe n.3 de ce treillis. Voici les sous-groupes de G_1 le contenant :

Partially ordered set of subgroup classes

```

-----
[ 1] Order 1   Length 1   Maximal Subgroups:
---
[ 3] Order 2   Length 2   Maximal Subgroups: 1
---
[12] Order 4   Length 1   Maximal Subgroups: 2 3
[27] Order 4   Length 4   Maximal Subgroups: 3 6 11
[30] Order 4   Length 4   Maximal Subgroups: 3 7 10
-----

```

[39]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 17 26
[40]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 23 24 27
[49]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 15 21
[50]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 14 22 30
[53]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 13 25
[55]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 16 20
[56]	Order 8	Length 1	Maximal Subgroups:	12 18 19

[70]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	42 53 54 55 56 57 64
[71]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	38 39 40 41 52 53 59
[76]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	37 40 44 50 56 62 67
[77]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	43 48 49 50 51 53 63
[78]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	33 34 40 47 49 55 58
[80]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	35 39 46 49 56 61 66
[82]	Order 16	Length 1	Maximal Subgroups:	36 39 45 50 55 60 65

[83]	Order 32	Length 1	Maximal Subgroups:	68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82

On cherche d'abord un sous-groupe d'ordre maximal contenant $\langle M_0 \rangle$ et tel que la restriction de χ à ce groupe ait un terme ψ qui soit un caractère linéaire. On vérifie ensuite si la restriction de ψ à $\langle M_0 \rangle$ est ϕ_{-1} . Aucun groupe d'ordre 16 ne convient. Parmi ceux d'ordre 8, on trouve les groupes 40, 50 et 56 qui vérifient ces conditions et contiennent les sous-groupes d'ordre 4 contenant $\langle M_0 \rangle$. Ces trois groupes seront donc maximaux vérifiant cette propriété et, en notant z un vecteur propre de M_0 associé à -1 , $H_1 = \text{Stab}_{G_1}(\frac{z'}{z})$ pourra être l'un d'eux trois. On cherche maintenant $H_2 = \text{Stab}_{G_1}(z) \subset H_1$, en suivant toujours le lemme précédent.

Si H_1 est le groupe 40 (engendré par $(2, 4)(3, 8); (1, 5)(2, 3)(4, 8)(6, 7)$ et $(1, 7)(2, 4)(3, 8)(5, 6)$), on a deux choix possibles pour le caractère linéaire ψ (tel que $\psi|_{\langle M_0 \rangle} = \phi_{-1}$). Pour chacun de ces caractères, il existe un unique sous-groupe d'ordre 4 tel que la restriction à ce sous-groupe de ψ soit le caractère trivial : ce sont les groupes $\langle (1, 7)(5, 6); (1, 5)(2, 3)(4, 8)(6, 7) \rangle$ (pour le sixième caractère de la table de H_1) et $\langle (2, 4)(3, 8); (1, 6)(2, 8)(3, 4)(5, 7) \rangle$ (pour le septième caractère de la table de H_1). On remarque que les sous-groupes d'ordre 2 seront toujours distingués mais que le quotient de H_1 par eux-mêmes ne sera jamais cyclique.

Si H_1 est le groupe 50 ($\langle (1, 3)(2, 6)(4, 5)(7, 8); (1, 2)(3, 6)(4, 7)(5, 8); (1, 7)(2, 4)(3, 8)(5, 6) \rangle$), on trouve aussi deux sous-groupes d'ordre 4 correspondant aux deux choix possibles pour ψ : $\langle (1, 3)(2, 6)(4, 5)(7, 8); (1, 2)(3, 6)(4, 7)(5, 8) \rangle$ (caractère 5) et $\langle (1, 8)(2, 5)(3, 7)(4, 6); (1, 4)(2, 7)(3, 5)(6, 8) \rangle$ (caractère 8). Comme précédemment, les quotients du groupe par ses sous-groupes d'ordre 2 ne seront pas cycliques.

Si H_1 est le groupe 56 ($\langle (1, 2, 7, 4)(3, 5, 8, 6); (1, 3, 7, 8)(2, 5, 4, 6); (1, 7)(2, 4)(3, 8)(5, 6) \rangle$), on trouve le même sous-groupe d'ordre 2 pour les deux choix possibles pour ψ (caractères 3 et 7) : $\langle (1, 6)(2, 3)(4, 8)(5, 7) \rangle$.

En conclusion, on trouve que m vaudra 4 et que i peut valoir 2 ou 4. Ainsi, par [56, Corollaire 1.4], le polynôme minimal d'un vecteur propre de M_0 sera de la forme :

$$Q(Y) = Y^{4i} + \sum_{j=0}^3 b_{j,i} Y^{j.i} \text{ avec } i \in \{2, 4\}.$$

On souhaite déterminer la forme possible de $b_{j,i}$. Pour cela, on va reprendre la méthode fondée sur le lemme 5.1.1 décrite plus haut pour trouver la forme des invariants. D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, $b_{j,i}$ sera une somme de produits de $4i - j.i$ solutions de $L(y) = 0$ (et racines du polynôme), donc une somme de solutions de l'équation $L^{\otimes(4-j).i}(y) = 0$. D'après le lemme 5.1.1, $b_{j,i}$ sera de la forme :

$$\frac{\sum_{k=1}^{(4-j).i} \gamma_{k,j,i} t^k}{(t+1)^{\frac{(4-j).i}{2}} (t-1)^{\frac{(4-j).i}{2}}}.$$

Les solutions formelles correspondant à la valeur propre -1 auront pour polynôme minimal un polynôme correspondant à $i = 2$ ou $i = 4$. Pour chacune des solutions formelles et chaque i , on applique le polynôme à coefficients indéterminés correspondant à i (on aura 24 indéterminés pour $i = 2$ et 44 indéterminés pour $i = 4$) à la solution et on prend les premiers termes du développement en série, ce qui nous donne un système linéaire en les coefficients indéterminés que l'on peut résoudre. Dans les deux cas, on ne trouve pas de polynôme pour $i = 2$ mais on en trouve un pour $i = 4$. Le polynôme minimal de la solution formelle correspondant à l'exposant $\frac{3}{2}$ est :

$$Y^{16} + \frac{4096(2t^4 - t^2 - 8)}{(t^2 - 1)^2} Y^{12} + \frac{2097152(8t^8 - 72t^6 + 259t^4 - 224t^2 + 128)}{(t^2 - 1)^4} Y^8 \\ + \frac{4294967296t^2(-256 + 440t^2 - 225t^4 + 34t^6)}{(t^2 - 1)^6} Y^4 + \frac{1099511627776t^8}{(t^2 - 1)^8}.$$

Le polynôme minimal de la solution formelle correspondant à l'exposant $\frac{1}{2}$ est :

$$Y^{16} + \frac{2t^4 - t^2 - 8}{(t^2 - 1)^2} Y^{12} + \frac{8t^8 - 72t^6 + 259t^4 - 224t^2 + 128}{8(t^2 - 1)^4} Y^8 \\ + \frac{t^2(-256 + 440t^2 - 225t^4 + 34t^6)}{16(t^2 - 1)^6} Y^4 + \frac{t^8}{256(t^2 - 1)^8}.$$

Pour l'autre valeur propre 1 de M_0 , on trouve aussi que m vaudra 4 et que i peut valoir 2 ou 4. On procède alors comme précédemment et on trouve avec le

polynôme correspondant à $i = 2$ un polynôme minimal pour chacune des solutions formelles correspondant à la valeur propre 1. La solution formelle correspondant à l'exposant 0 a pour polynôme minimal :

$$Y^8 - \frac{t^2 - 2}{2(t^2 - 1)}Y^6 + \frac{t^2(2t^2 - 3)}{32(t^2 - 1)^2}Y^4 - \frac{t^2(t^2 + 2)}{128(t^2 - 1)^3}Y^2 + \frac{9t^4}{4096(t^2 - 1)^4}.$$

La solution formelle correspondant à l'exposant 1 a pour polynôme minimal :

$$Y^8 - \frac{32(t^2 - 2)}{9(t^2 - 1)}Y^6 + \frac{128t^2(2t^2 - 3)}{81(t^2 - 1)^2}Y^4 + \frac{2048t^2(t^2 + 2)}{729(t^2 - 1)^3}Y^2 + \frac{4096t^4}{729(t^2 - 1)^4}.$$

A l'aide de ces polynômes, on peut trouver les valeurs de certains invariants :
 – en degré 2, on a un seul invariant I_1 (à multiple près) et on connaît une valeur possible (à multiple près) pour les invariants de degré 2 donnée par le coefficient de Y^6 du polynôme minimal correspondant à une solution formelle associée à l'exposant 0 ou 1. La valeur de I_1 est donc (à multiple près) :

$$\frac{t^2 - 2}{t^2 - 1}.$$

On vérifie que cette valeur est bien celle trouvée directement à partir de la puissance symétrique deuxième de l'équation.

– en degré 4, on trouve à l'aide de ces polynômes deux valeurs (auxquelles s'ajoute le carré de la valeur de l'invariant de degré 2) :

$$\frac{2t^4 - t^2 - 8}{(t^2 - 1)^2}, \frac{t^2(2t^2 - 3)}{(t^2 - 1)^2}.$$

On remarque que l'espace vectoriel engendré par ces valeurs admet pour base :

$$\frac{t^4}{(t^2 - 1)^2}, \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2}, \frac{1}{(t^2 - 1)^2}.$$

5.2 Un exemple d'équation de groupe $SO(4, \mathbb{C})$

Le fil directeur de cette partie est la recherche d'une équation d'ordre 4 dont le groupe de Galois différentiel soit $SO(4, \mathbb{C})$ à l'aide de la méthode de C. Mitschi et M.F. Singer ([42]). Il nous faut d'abord chercher un module de Chevalley pour ce groupe, puis une paire régulière de générateurs pour ce module et enfin notre équation.

5.2.1 Modules de Chevalley et paires régulières de générateurs : l'exemple de $SO(4, \mathbb{C})$

Rappelons la définition d'un module de Chevalley :

Définition 5.2.1 Soit G un groupe linéaire algébrique connexe semisimple. Un module de Chevalley pour G est un G -module V fidèle de dimension finie tel que :

1. V ne contient aucun sous- G -module de dimension 1
2. tout sous-groupe propre connexe fermé $H \subset G$ laisse un sous-espace $W_H \subset V$ de dimension 1 invariant.

Il s'agit maintenant de chercher un module de Chevalley pour $SO(4, \mathbb{C})$, question qui fut résolue par Jan Draisma ([21],[22]).

Proposition 5.2.2 On considère $so(4, \mathbb{C})$ comme $sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$. Le module

$$V = (V_1 \otimes V_1) + (V_0 \otimes V_1) + (V_1 \otimes V_0),$$

où V_1 désigne le $sl(2, \mathbb{C})$ -module standard et V_0 le $sl(2, \mathbb{C})$ -module trivial, est alors un module de Chevalley pour $SO(4, \mathbb{C})$.

Démonstration

Les sous-algèbres maximales de $so(4, \mathbb{C})$ sont en effet l'algèbre diagonale qui laisse une ligne invariante dans $V_1 \otimes V_1$ ainsi que $sl(2, \mathbb{C}) + B$ et $B + sl(2, \mathbb{C})$ (où B désigne une sous-algèbre de Borel de $sl(2, \mathbb{C})$, c'est-à-dire une sous-algèbre résoluble maximale) qui laissent, respectivement, une ligne invariante dans $V_0 \otimes V_1$ et $V_1 \otimes V_0$.

Il existe trois $so(4, \mathbb{C})$ -modules irréductibles de dimension 4 : $V_0 \otimes V_3$, $V_3 \otimes V_0$ et $V_1 \otimes V_1$, V_3 désignant le $sl(2, \mathbb{C})$ -module irréductible de dimension 4 (puisque tout $so(4, \mathbb{C})$ -module irréductible est de la forme $V_i \otimes V_j$ où V_i, V_j sont des $sl(2, \mathbb{C})$ -modules irréductibles). D'une part, les modules $V_0 \otimes V_3$ et $V_3 \otimes V_0$ ne sont pas fidèles. D'autre part, il existe un $so(4, \mathbb{C})$ -module irréductible de dimension 4 fidèle (celui qui correspond à la représentation usuelle de $so(4, \mathbb{C})$). En conséquence, $V_1 \otimes V_1$ est le $so(4, \mathbb{C})$ -module irréductible de dimension 4 fidèle correspondant à la représentation usuelle de $so(4, \mathbb{C})$ (et de $SO(4, \mathbb{C})$). En conséquence, $V = (V_1 \otimes V_1) + (V_0 \otimes V_1) + (V_1 \otimes V_0)$ est lui aussi fidèle. \square

Plus généralement, C. Mitschi et M.F. Singer montrent que tout groupe algébrique linéaire (défini sur C , corps algébriquement clos de caractéristique nulle) connexe semisimple admet un module de Chevalley ([42, lemme 3.1]) et établissent le lemme technique suivant qui sera utile pour déterminer le groupe de Galois d'extensions de Picard-Vessiot.

Lemme 5.2.3 ([42, lemme 3.3]) Soit G un groupe algébrique linéaire connexe semisimple d'algèbre de Lie \mathcal{G} et V un module de Chevalley pour G . Soit $A \in \mathcal{G} \otimes_C C[x]$ et t le degré maximal des polynômes apparaissant dans A . Si $C(x)(g)$ est une extension de Picard-Vessiot de $C(x)$ avec $g' = Ag$, de groupe de Galois un sous-groupe propre de G , il existe $w \in V \otimes_C C[x]$, $w \neq 0$ et $c \in C[x]$ avec $\deg_x c \leq t$ tels que

$$w' - (A - cI)w = 0.$$

On cherche ensuite pour ce module une paire régulière de générateurs ([42, p.349]), dont on donne d'abord la définition. On considère \mathcal{G} une algèbre de Lie semi-simple, V un \mathcal{G} -module et ρ la représentation de \mathcal{G} dans $GL(V)$. On notera \mathcal{H} une sous-algèbre de Cartan² de \mathcal{G} et on considère la décomposition suivante de V :

$$V = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{H}^*} V_\beta \text{ où } V_\beta = \{v \in V \mid \forall h \in \mathcal{H}, \rho(h).v = \beta(h)v\}.$$

On considère alors

$$A_0 = \sum_{\alpha \text{ racine de } \mathcal{G}} X_\alpha$$

où X_α est un élément non nul de \mathcal{G}_α , sous-espace primaire³ relatif à α et on note aussi A_0 la matrice de l'action de A_0 sur V dans une base correspondant à la décomposition précédente (la diagonale par blocs de cette matrice est alors nulle).

On considère ensuite A_1 un élément régulier de \mathcal{H} (c'est-à-dire un élément de \mathcal{H} dont le centralisateur dans \mathcal{G} est \mathcal{H}) tel que des racines distinctes prennent des valeurs non nulles distinctes en A_1 et que des poids distincts (de \mathcal{H} dans V) prennent des valeurs distinctes en A_1 . Comme précédemment, on nommera aussi A_1 la matrice de l'action de A_1 sur V dans la même base (cette matrice est diagonale). Le couple (A_0, A_1) engendre alors \mathcal{G} ([9, Ch.8, Sec.2, Ex.8, p.221]) et on le désignera comme étant une paire régulière de générateurs de \mathcal{G} (ou plutôt de la représentation $\rho(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} dans $GL(V)$).

Cherchons une telle paire de générateurs de $SO(4, \mathbb{C})$ pour le module de Chevalley trouvé plus haut. On utilise pour cela le logiciel Gap⁴ sur \mathbb{Q} par souci de facilité et de généralité. Voici les quelques lignes qui ont permis de définir nos deux matrices.

S=sl(2,C) et T=so(4,C)

```
gap> S:=SimpleLieAlgebra("A",1,Rationals);
<Lie algebra of dimension 3 over Rationals>
gap> T:=DirectSumOfAlgebras(S,S);
<Lie algebra of dimension 6 over Rationals>
```

Recherche de l'élément régulier de la paire:

```
gap> uu:=ChevalleyBasis(T);
[ [ v.1, v.4 ], [ v.2, v.5 ], [ v.3, v.6 ] ]
```

²Une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre nilpotente égale à son normalisateur (dans l'algèbre).

³On rappelle que $\mathcal{G}_\alpha = \{x \in \mathcal{G} \mid \forall h \in \mathcal{H}, [h, x] = \alpha(h).x\}$, pour $\alpha \in \mathcal{H}^*$, α étant une racine si \mathcal{G}_α n'est pas réduit à zéro.

⁴Gap : Groups, Algorithms and Programming : <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/>

```
gap> v:=uu[3][1]+3*uu[3][2];
v.3+(3)*v.6
```

Premier élément de la paire:

```
gap> w:=uu[1][1]+uu[1][2]+uu[2][1]+uu[2][2];
v.1+v.2+v.4+v.5
```

La fonction *MatrixOfAction* de Gap nous a ensuite donné l'écriture matricielle de A_0 et A_1 :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.2.2 A la recherche d'une équation

Le théorème [42, Th.3.6], ou plutôt sa preuve, montre que le groupe de Galois différentiel du système $Y' = (A_0 + x^2 A_1)Y$ est $SO(4, \mathbb{C})$. Voici en effet ce théorème.

Théorème 5.2.4 ([42]) *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe semisimple d'algèbre de Lie \mathcal{G} et $n > 1$ un entier. Alors il existe un G -module fidèle V et une paire régulière (A_0, A_1) de générateurs de $\mathcal{G} \subset \mathfrak{gl}(V)$ tels que G soit le groupe de Galois différentiel de*

$$Y' = (A_0 + A_1 x^n)Y.$$

Plus précisément, il suffit de prendre pour V un module de Chevalley pour G , puis une paire régulière de générateurs quelconque.

L'idée de la démonstration de ce théorème est la suivante : on considère un module de Chevalley V pour G et une paire régulière (A_0, A_1) de générateurs de \mathcal{G} . Pour montrer que le groupe de Galois différentiel de $Y' = (A_0 + A_1 x^n)Y$ est G , on suppose le contraire et on peut alors appliquer le lemme 5.2.3, d'où l'existence d'un polynôme $c(x) = c_n x^n + \dots + c_0 \in C[x]$ et d'un tenseur non nul $w(x) = w_m x^m + \dots + w_0 \in V \otimes_C C[x]$ tels que $w' - (A_0 + A_1 x^n - c I)w = 0$ (*). On distingue ensuite trois cas suivant que n est supérieur, égal ou inférieur à m . L'annulation de certains coefficients de (*) aboutit alors à une contradiction dans chacun des cas : le groupe de Galois de $Y' = (A_0 + A_1 x^n)Y$ est donc bien G .

En prenant $n = 2$, ce théorème nous dit que $SO(4, \mathbb{C})$ sera le groupe de Galois différentiel du système $Y' = AY$ avec $A = A_0 + x^2A_1$, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 4x^2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2x^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3x^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3x^2 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel $Y' = AY$ est équivalent à un système correspondant à une équation différentielle d'ordre 8, que l'on peut trouver à l'aide de l'algorithme du vecteur cyclique (cf [64, 1.3] ou [46, Prop 2.9 & Exercice 2.12 (7)]) avec le vecteur $[0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$. Cette équation n'est pas reproduite ici, car elle couvrirait plusieurs pages. Elle est réductible et l'algorithme de factorisation des opérateurs différentiels de Maple (*DFactor* ; [31] ; calcul réalisé sur les machines de Médecis) nous donne trois facteurs : deux de degré 2 et un⁵ de degré 4, que voici :

$$L := \partial_x^4 - \frac{4x^3 - 1}{x(x^3 - 1)}\partial_x^3 - 4(5x^4 - 2x + 1)\partial_x^2 - 4\frac{10x^7 - 20x^4 - 4x^3 + x + 1}{x(x^3 - 1)}\partial_x + 4\frac{16x^{12} - 48x^9 + 58x^6 + 1}{x(x^3 - 1)}$$

On s'intéresse dorénavant à l'équation d'ordre 4 associée à cet opérateur différentiel et on cherche à déterminer son groupe de Galois.

Proposition 5.2.5 *Le groupe de Galois différentiel de cette équation est $SO(4, \mathbb{C})$.*

Démonstration.

Cette équation étant un facteur irréductible d'ordre 4 de l'équation ayant V pour espace des solutions, son espace des solutions, noté W sera un sous-espace irréductible de dimension 4 de V . On rappelle la décomposition de V :

$$V = (V_1 \otimes V_1) + (V_0 \otimes V_1) + (V_1 \otimes V_0).$$

La projection de W dans $V_0 \otimes V_1$ est nulle puisque W est irréductible de dimension 4. De même, la projection de W dans $V_1 \otimes V_0$ sera nulle. En conséquence, W se projette dans $V_1 \otimes V_1$ et a même dimension. On en déduit que $W = V_1 \otimes V_1$.

D'après la démonstration de la proposition 5.2.2, le module $V_1 \otimes V_1$ est le $so(4, \mathbb{C})$ -module irréductible de dimension 4 fidèle correspondant à la représentation usuelle de $so(4, \mathbb{C})$ (et de $SO(4, \mathbb{C})$). Ainsi, l'espace des solutions W de L est une

⁵celui-ci est donné en troisième position dans la liste des résultats de *DFactor*

représentation fidèle de $so(4, \mathbb{C})$. La composante connexe de l'identité de son groupe de Galois différentiel sera donc $SO(4, \mathbb{C})$.

On peut alors montrer que ce groupe est bien $SO(4, \mathbb{C})$. En effet, on note $K_8 \supset \mathbb{C}(x)$ une extension de Picard-Vessiot pour l'équation d'ordre 8 et K_4 celle pour l'équation d'ordre 4 telle que $\mathbb{C}(x) \subset K_4 \subset K_8$. Le groupe de Galois de l'équation d'ordre 4 est donc un sous-groupe de celui de l'équation d'ordre 8 qui est $SO(4, \mathbb{C})$ et la composante connexe de ce même groupe est $SO(4, \mathbb{C})$: on en déduit que le groupe de l'équation d'ordre 4 est $SO(4, \mathbb{C})$. \square

Complément sur l'équation

Comme $so(4, \mathbb{C})$ est semisimple sans être simple, on sait par un théorème de M.F. Singer ([53, thr 1, p.118]) que cette équation pourra être résolue en terme d'équations d'ordre moindre. Par ailleurs, dans sa thèse ([45, Ex.5.2.1.1]), A. Person a montré que cette équation était le produit symétrique de $y'' + (-9x^4 + 6x - 1)y$ et de $y'' + (-x^4 - 2x - 1)y$.

Annexe A

Tables complètes pour les semi-invariants de degré 2 et 4 des groupes monomialux.

Dans ces tableaux, les notations seront les mêmes que dans la partie principale (chapitre 3). Pour les degrés 2 et 4, à une parenthèse correspondra un espace de (semi-)invariants (la première parenthèse du degré 4 correspondant toujours aux invariants).

Dans la deuxième colonne, on liste les polynômes semi-invariants sous l'action du groupe par caractère (les numéros correspondent à ceux de la liste des P_i donnée ci-après). La première parenthèse correspondra toujours à l'espace des invariants, une parenthèse vide signifiant qu'il n'y a pas de polynôme invariant sous l'action du groupe en question. Les (éventuelles) autres parenthèses correspondent à d'autres caractères dont l'ordre est indiqué en indice de la parenthèse. Dans la troisième colonne (colonne "pfl"), on signale le nombre de droites de polynômes produits de formes linéaires dans chaque espace de (semi-)invariants. Le résultat est donné sous la forme d'une liste. La $i^{\text{ème}}$ entrée de la liste donne le nombre de droites de produit de formes linéaires dans le $i^{\text{ème}}$ espace de (semi-)invariant (de la deuxième colonne). Une liste plus courte que le nombre de caractères signifie simplement que les espaces de semi-invariants n'ayant pas d'entrée dans la liste ne contiennent pas de produits de formes linéaires. Par exemple, si la deuxième colonne est : (6), (1), (7) et la troisième [0, 1], cela signifie que P_6 est un invariant qui n'est pas un produit de formes linéaires, que P_1 est un semi-invariant produit de formes linéaires et que P_7 est un semi-invariant qui n'est pas un produit de formes linéaires.

Pour la quatrième colonne (celle des (semi-)invariants de degré 2), on reprend ce même principe ($i^{\text{ème}}$ parenthèse pour "le" $i^{\text{ème}}$ caractère), les numéros de ces listes correspondant aux Q_i . Une parenthèse vide () signifie qu'il n'y a pas de semi-invariant de degré 2 pour l'espace de semi-invariant de degré 4 correspondant. La notation (),...,() signifie que les semi-invariants de degré 2 listés après ce signe

correspondent à des caractères pour lesquels il n'y a pas de semi-invariants de degré 4.

A.1 Notation des principaux polynômes (semi-)invariants de degré 2 et 4

On adoptera les notations suivantes pour les polynômes homogènes de degré 2 de $\mathbb{C}[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ qui seront dans les listes de (semi-)invariants des différents groupes auxquels nous nous intéresserons :

- $Q_1 = Y_1Y_2 + Y_3Y_4$
- $Q_2 = Y_1Y_2 - Y_3Y_4$
- $Q_3 = Y_1Y_3 + Y_2Y_4$
- $Q_4 = Y_1Y_3 - Y_2Y_4$
- $Q_5 = Y_1Y_4 + Y_2Y_3$
- $Q_6 = Y_1Y_4 - Y_2Y_3$
- $Q_7 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2$
- $Q_8 = Y_1^2 - Y_2^2 + Y_3^2 - Y_4^2$
- $Q_9 = Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 - Y_4^2$
- $Q_{10} = Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2 + Y_4^2$
- $Q_{11} = Y_1^2 + Y_2^2 + i(Y_3^2 + Y_4^2)$
- $Q_{12} = Y_1^2 - Y_2^2 + i(Y_3^2 - Y_4^2)$
- $Q_{13} = Y_1^2 + Y_2^2 - i(Y_3^2 + Y_4^2)$
- $Q_{14} = Y_1^2 - Y_2^2 - i(Y_3^2 - Y_4^2)$
- $Q_{15} = Y_1^2 + Y_2^2 + i(Y_3^2 - Y_4^2)$
- $Q_{16} = Y_1^2 + Y_2^2 - i(Y_3^2 - Y_4^2)$
- $Q_{17} = Y_1^2 - Y_2^2 + i(Y_3^2 + Y_4^2)$
- $Q_{18} = Y_1^2 - Y_2^2 - i(Y_3^2 + Y_4^2)$
- $Q_{19} = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - Y_4^2$
- $Q_{20} = Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 + Y_4^2$
- $Q_{21} = Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2 - Y_4^2$
- $Q_{22} = Y_1^2 - Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2$
- $Q_{23} = Y_1^2 - iY_2^2 - (Y_3^2 - iY_4^2)$
- $Q_{24} = Y_1^2 + iY_2^2 - (Y_3^2 + iY_4^2)$
- $Q_{25} = Y_1Y_3 + iY_2Y_4$
- $Q_{26} = Y_1Y_3 - iY_2Y_4$
- $Q_{27} = Y_1Y_2 - Y_1Y_4 + Y_2Y_3 + Y_3Y_4$
- $Q_{28} = Y_1Y_2 + Y_1Y_4 - Y_2Y_3 + Y_3Y_4$
- $Q_{29} = Y_1Y_2 - Y_3Y_4 + i(Y_1Y_4 - Y_2Y_3)$
- $Q_{30} = Y_1Y_2 - Y_3Y_4 - i(Y_1Y_4 - Y_2Y_3)$

On adoptera les notations suivantes pour les polynômes homogènes de degré 4 de $\mathbb{C}[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ qui seront dans les listes de (semi-)invariants des différents

groupes auxquels nous nous intéresserons :

$$\begin{aligned}
& - P_1 = Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \\
& - P_2 = Y_1^4 + Y_2^4 + Y_3^4 + Y_4^4 \\
& - P_3 = Y_1^4 - Y_2^4 + Y_3^4 - Y_4^4 \\
& - P_4 = Y_1^4 - Y_2^4 - Y_3^4 + Y_4^4 \\
& - P_5 = Y_1^4 + Y_2^4 - Y_3^4 - Y_4^4 \\
& - P_6 = Y_1^2 Y_3^2 + Y_2^2 Y_4^2 \\
& - P_7 = Y_1^2 Y_3^2 - Y_2^2 Y_4^2 \\
& - P_8 = Y_1^2 Y_2^2 + Y_3^2 Y_4^2 \\
& - P_9 = Y_1^2 Y_2^2 - Y_3^2 Y_4^2 \\
& - P_{10} = Y_1^2 Y_4^2 + Y_2^2 Y_3^2 \\
& - P_{11} = Y_1^2 Y_4^2 - Y_2^2 Y_3^2 \\
& - P_{12} = P_8 + P_{10} = Y_1^2 Y_2^2 + Y_2^2 Y_3^2 + Y_3^2 Y_4^2 + Y_4^2 Y_1^2 \\
& - P_{13} = P_8 - P_{10} = Y_1^2 Y_2^2 - Y_2^2 Y_3^2 + Y_3^2 Y_4^2 - Y_4^2 Y_1^2 \\
& - P_{14} = Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{15} = Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{16} = Y_1^3 Y_3 + Y_2^3 Y_4 + Y_3^3 Y_1 + Y_4^3 Y_2 \\
& - P_{17} = Y_1^3 Y_3 - Y_2^3 Y_4 + Y_3^3 Y_1 - Y_4^3 Y_2 \\
& - P_{18} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{19} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{20} = Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{21} = Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_1 - Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{22} = Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{23} = Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_1 - Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{24} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{25} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_3 - Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{26} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_3 - Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{27} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{28} = Y_1^3 Y_3 - Y_2^3 Y_4 - Y_3^3 Y_1 + Y_4^3 Y_2 \\
& - P_{29} = Y_1^3 Y_3 + Y_2^3 Y_4 - Y_3^3 Y_1 - Y_4^3 Y_2 \\
& - P_{30} = Y_1^2 Y_2 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_3 - Y_3^2 Y_2 Y_4 + Y_4^2 Y_1 Y_3 \\
& - P_{31} = Y_1^2 Y_2 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_3 - Y_3^2 Y_2 Y_4 - Y_4^2 Y_1 Y_3 \\
& - P_{32} = Y_1^2 Y_2 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_3 + Y_3^2 Y_2 Y_4 + Y_4^2 Y_1 Y_3 \\
& - P_{33} = Y_1^2 Y_2 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_3 + Y_3^2 Y_2 Y_4 - Y_4^2 Y_1 Y_3 \\
& - P_{34} = Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_4 + Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{35} = Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_4 - Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{36} = Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_1 Y_4 - Y_3^2 Y_1 Y_4 + Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{37} = Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_1 Y_4 - Y_3^2 Y_1 Y_4 - Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{38} = Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + Y_4^2 Y_1 Y_2 \\
& - P_{39} = Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - Y_4^2 Y_1 Y_2 \\
& - P_{40} = Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{41} = Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{42} = Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_1 Y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - P_{43} = Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_3 Y_4 - Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_1 Y_2 \\
& - P_{44} = Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_1 Y_2 \\
& - P_{45} = Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_3 Y_4 - Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_1 Y_2 \\
& - P_{46} = (Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3) + (Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{47} = (Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3) - (Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{48} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_2 Y_3) + (Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{49} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_2 Y_3) - (Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{50} = (Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3) + (Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{51} = (Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3) - (Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{52} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_2 Y_3) + (Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{53} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_2 Y_3) - (Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{54} = (Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3) + i(Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{55} = (Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3) - i(Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{56} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_2 Y_3) + i(Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{57} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_2 Y_3) - i(Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{58} = (Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3) + i(Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{59} = (Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3) - i(Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{60} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_2 Y_3) + i(Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{61} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_2 Y_3) - i(Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - \\
& \quad Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{62} = (Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1) + i(Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{63} = (Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_1) - i(Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{64} = (Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + Y_4^2 Y_1 Y_2) + i(Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - \\
& \quad Y_4^2 Y_2 Y_3) \\
& - P_{65} = (Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 + Y_4^2 Y_1 Y_2) - i(Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 - \\
& \quad Y_4^2 Y_2 Y_3) \\
& - P_{66} = (Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1) + i(Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{67} = (Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_1) - i(Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{68} = (Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - Y_4^2 Y_1 Y_2) + i(Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + \\
& \quad Y_4^2 Y_2 Y_3) \\
& - P_{69} = (Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_3 Y_4 + Y_3^2 Y_4 Y_1 - Y_4^2 Y_1 Y_2) - i(Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_2 + \\
& \quad Y_4^2 Y_2 Y_3) \\
& - P_{70} = P_8 + (e^{\frac{i\pi}{3}} - 1)P_6 - e^{\frac{i\pi}{3}}P_{10} \\
& - P_{71} = P_8 - e^{\frac{i\pi}{3}}P_6 + (e^{\frac{i\pi}{3}} - 1)P_{10} \\
& - P_{72} = Y_1^4 + Y_2^4 + i(Y_3^4 + Y_4^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - P_{73} = Y_1^4 + Y_2^4 - i(Y_3^4 + Y_4^4) \\
& - P_{74} = (Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_1) + i(Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{75} = (Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_1) - i(Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{76} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_3 Y_4) + i(Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{77} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_3 Y_4) - i(Y_3^2 Y_1 Y_2 + Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{78} = Y_1^4 - Y_2^4 + i(Y_3^4 - Y_4^4) \\
& - P_{79} = Y_1^4 - Y_2^4 - i(Y_3^4 - Y_4^4) \\
& - P_{80} = (Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_1) + i(Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{81} = (Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_1) - i(Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_3) \\
& - P_{82} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_3 Y_4) + i(Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{83} = (Y_1^2 Y_3 Y_4 - Y_2^2 Y_3 Y_4) - i(Y_3^2 Y_1 Y_2 - Y_4^2 Y_1 Y_2) \\
& - P_{84} = (Y_1^3 Y_3 + Y_2^3 Y_4) + i(Y_3^3 Y_1 - Y_4^3 Y_2) \\
& - P_{85} = (Y_1^3 Y_3 + Y_2^3 Y_4) - i(Y_3^3 Y_1 - Y_4^3 Y_2) \\
& - P_{86} = (Y_1^3 Y_3 - Y_2^3 Y_4) + i(Y_3^3 Y_1 + Y_4^3 Y_2) \\
& - P_{87} = (Y_1^3 Y_3 - Y_2^3 Y_4) - i(Y_3^3 Y_1 + Y_4^3 Y_2) \\
& - P_{88} = (Y_1^2 Y_2 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_3) + i(Y_3^2 Y_2 Y_4 - Y_4^2 Y_1 Y_3) \\
& - P_{89} = (Y_1^2 Y_2 Y_4 + Y_2^2 Y_1 Y_3) - i(Y_3^2 Y_2 Y_4 - Y_4^2 Y_1 Y_3) \\
& - P_{90} = (Y_1^2 Y_2 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_3) + i(Y_3^2 Y_2 Y_4 + Y_4^2 Y_1 Y_3) \\
& - P_{91} = (Y_1^2 Y_2 Y_4 - Y_2^2 Y_1 Y_3) - i(Y_3^2 Y_2 Y_4 + Y_4^2 Y_1 Y_3) \\
& - P_{92} = Y_1^4 + Y_2^4 + i(Y_3^4 - Y_4^4) \\
& - P_{93} = Y_1^4 + Y_2^4 - i(Y_3^4 - Y_4^4) \\
& - P_{94} = Y_1^4 - Y_2^4 + i(Y_3^4 + Y_4^4) \\
& - P_{95} = Y_1^4 - Y_2^4 - i(Y_3^4 + Y_4^4) \\
& - P_{96} = Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_1 Y_4 - Y_3^2 Y_1 Y_4 + Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{97} = Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_1 Y_4 - Y_3^2 Y_1 Y_4 - Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{98} = Y_1^2 Y_2 Y_3 + Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_4 - Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{99} = Y_1^2 Y_2 Y_3 - Y_2^2 Y_1 Y_4 + Y_3^2 Y_1 Y_4 + Y_4^2 Y_2 Y_3 \\
& - P_{100} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{101} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_3 + Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{102} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_3 - Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{103} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_3 - Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_1 \\
& - P_{104} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_3 + i(Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{105} = Y_1^3 Y_4 + Y_2^3 Y_3 - i(Y_3^3 Y_2 + Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{106} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_3 + i(Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{107} = Y_1^3 Y_4 - Y_2^3 Y_3 - i(Y_3^3 Y_2 - Y_4^3 Y_1) \\
& - P_{108} = Y_1^4 - iY_2^4 - Y_3^4 + iY_4^4 \\
& - P_{109} = Y_1^4 + iY_2^4 - Y_3^4 - iY_4^4 \\
& - P_{110} = Y_1^2 Y_2^2 - Y_3^2 Y_4^2 + i(Y_1^2 Y_4^2 - Y_2^2 Y_3^2) \\
& - P_{111} = Y_1^2 Y_2^2 - Y_3^2 Y_4^2 - i(Y_1^2 Y_4^2 - Y_2^2 Y_3^2) \\
& - P_{112} = Y_1^3 Y_3 - Y_3^3 Y_1 - i(Y_2^3 Y_4 - Y_4^3 Y_2) \\
& - P_{113} = Y_1^3 Y_3 - Y_3^3 Y_1 + i(Y_2^3 Y_4 - Y_4^3 Y_2) \\
& - P_{114} = Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_1 - Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_3 \\
& - P_{115} = Y_1^3 Y_2 - Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - P_{116} &= Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_1 + Y_3^3 Y_4 - Y_4^3 Y_3 \\ - P_{117} &= Y_1^3 Y_2 + Y_2^3 Y_1 - Y_3^3 Y_4 + Y_4^3 Y_3 \end{aligned}$$

A.2 Tables pour $T = V = \langle a, b \rangle$

Pour les groupes infinis, on a les résultats suivants :

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$\langle a, b, H_2^1 \rangle$	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(3), (4)$	
$\langle a, b, H_2^2 \rangle$	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3), (4)$	
$\langle a, b, H_2^4 \rangle$	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		
$\langle a, b, H_2^n \rangle$	(1)	[1]		$n \nmid 4$
$\langle a, b, H_3 \rangle$	(1)	[1]		

A.2.1 Tables pour la famille \mathcal{F}_1

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,1}(1, 2, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,1}(1, k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,1}(2, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,1}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v1,2}(1, 2, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,2}(1, k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,2}(2, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,2}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v1,3}(1, k, l)$	$(1, 8)_2, (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l > k \geq 2$
$G_{v1,3}(2, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,3}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v1,4}(1, k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l > k \geq 2$
$G_{v1,4}(2, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,4}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v1,5}(1, 2, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v1,5}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,5}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v1,6}(1, 2, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v1,6}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v1,6}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v1,7}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v1,7}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v1,8}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v1,8}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,9}(1, 2)$	$(1, 8), (2)_2, (3)_2, (4)_2, (5)_2,$ $(6)_2, (7)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,9}(1, k)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 3$
$G_{v1,9}(2, 1)$	$(1, 6, 10), (2, 8)_2, (5, 9)_2, (3), (4),$ $(7)_2, (11)_2, (20)_4, (21)_4, (22)_4,$ $(23)_4, (42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (),$ $(3)_2, (4)_2,$ $(5)_2, (6)_2$	
$G_{v1,9}(2, k)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v1,9}(j, 1)$	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2,$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v1,9}(j, 2)$	$(1), (6)_2, (10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v1,9}(j, k)$	(1)	[1]		$j, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v1,10}(1, 2)$	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,10}(1, k)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 3$
$G_{v1,10}(2, 1)$	$(1, 10), (7, 11)_2, (5, 8)_2, (2, 9)_2,$ $(3)_2, (4)_2, (6)_2$	[1,2]	$(), \dots, (),$ $(5)_2, (6)_2$	
$G_{v1,10}(2, k)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v1,10}(j, 1)$	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v1,10}(j, 2)$	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v1,10}(j, k)$	(1)	[1]		$j, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v1,11}(1, 2)$	$(1, 8), (9)_2, (72)_4, (73)_4,$ $(78)_4, (79)_4$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,11}(1, k)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 3$
$G_{v1,11}(2, 1)$	$(1)_1, (6, 10)_2, (2, 8)_2, (5, 9)_2,$ $(3)_2, (4)_2, (7)_2, (11)_2,$ $(74)_2, (75)_2, (76)_2, (77)_2,$ $(80)_2, (81)_2, (82)_2, (83)_2$	[1,2]		
$G_{v1,11}(2, k)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v1,11}(j, 1)$	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2,$ $(76)_2, (77)_2, (82)_2, (83)_2$	[1,2]		$j \geq 3$
$G_{v1,11}(j, k)$	(1)	(1)		$j \geq 3, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v1,12}(1, 2)$	$(1), (2)_2, (3)_2, (4)_2, (5)_2, (6)_2,$ $(7)_2, (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v1,12}(1, k)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v1,12}(j, 1)$	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2,$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	$j \geq 2$
$G_{v1,12}(j, 2)$	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v1,12}(j, k)$	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 2, j \neq k$
$G_{v1,13}(1, 2)$	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,13}(1, k)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	(1)		$k \geq 3$
$G_{v1,13}(2, 1)$	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$ $(114)_4, (115)_4, (116)_4, (117)_4$	$[1,2]$	$(), \dots, (),$ $(5)_2, (6)_2$	
$G_{v1,13}(j, 1)$	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$	$[1,2]$	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v1,13}(j, 2)$	$(1), (10)_2, (11)_2$	$[1]$	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v1,13}(j, k)$	(1)	$[1]$		$2 \leq j \neq k \geq 3$
$G_{v1,14}(1, 2)$	$(1), (8)_2, (9)_2,$ $(72)_4, (73)_4, (78)_4, (79)_4$	$[1]$		
$G_{v1,14}(1, k)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	$[1]$		$k \geq 3$
$G_{v1,14}(j, 1)$	$(1), (6, 8)_2, (7)_2, (9)_2,$ $(76)_2, (77)_2, (82)_2, (83)_2$	$[1,2]$		$j \geq 2$
$G_{v1,14}(j, k)$	(1)	$[1]$		$j, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v1,15}(1)$	$(1, 5, 6, 8), (2, 9, 10)_2, (4, 7, 11)_2,$ $(24, 37)_2, (25, 34)_2, (26, 35)_2,$ $(27, 36)_2, (3)_2$	$[3,2,2]$	$(), \dots, (), (1)_2,$ $(2)_2, (3)_2, (4)_2$	
$G_{v1,15}(2)$	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	$[1]$		
$G_{v1,15}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3$
$G_{v1,16}(1)$	$(1, 2, 6, 8, 10), (3, 7)_2, (4, 11)_2,$ $(5, 9)_2, (16, 32)_2, (17, 33)_2, (20, 42)_2,$ $(21, 45)_2, (22, 44)_2, (23, 43)_2,$ $(24, 34)_2, (25, 37)_2, (26, 36)_2,$ $(27, 35)_2, (28, 30)_2, (29, 31)_2$	$[15]$	$(), \dots, (), (1)_2,$ $(2)_2, (3)_2, (4)_2,$ $(5)_2, (6)_2, (7)_2,$ $(8)_2, (9)_2, (10)_2$	
$G_{v1,16}(2)$	$(1), (2)_2, (3)_2, (4)_2, (5)_2, (6)_2,$ $(7)_2, (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	$[1]$		
$G_{v1,16}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3$
$G_{v1,17}(1)$	$(1, 2, 8), (5, 6, 9, 10)_2, (3, 11)_2,$ $(4, 7)_2, (74, 76)_4, (75, 77)_4,$ $(80, 82)_4, (81, 83)_4$	$[1,6]$	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2, (11)_4,$ $(12)_4, (13)_4, (14)_4$	
$G_{v1,17}(2)$	$(1), (8)_2, (9)_2,$ $(72)_4, (73)_4, (78)_4, (79)_4$	$[1]$		
$G_{v1,17}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3$
$G_{v1,18}(1)$	$(1, 4, 6), (5, 8, 7, 11)_2, (2, 9)_2,$ $(3, 10)_2, (84, 88)_4, (85, 89)_4,$ $(86, 90)_4, (87, 91)_4$	$[1,6]$	$(), \dots, (),$ $(3)_2, (4)_2, (15)_4,$ $(16)_4, (17)_4, (18)_4$	
$G_{v1,18}(2)$	$(1), (6)_2, (7)_2,$ $(92)_4, (93)_4, (94)_4, (95)_4$	$[1]$		
$G_{v1,18}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,19}(1)$	$(1, 3, 6, 10), (2, 7, 8)_2,$ $(5, 9, 11)_2, (20, 44)_2, (21, 43)_2,$ $(22, 42)_2, (23, 45)_2, (4)_2$	$[3,2,2]$	$(), \dots, (),$ $(3)_2, (4)_2,$ $(5)_2, (6)_2$	
$G_{v1,19}(2)$	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	$[1]$		
$G_{v1,19}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3$
$G_{v1,20}(1)$	$(1, 3), (2, 8, 11)_2, (4, 6, 10)_2,$ $(5, 7, 9)_2, (74, 82)_4, (75, 83)_4,$ $(76, 80)_4, (77, 81)_4, (84, 89)_4,$ $(85, 88)_4, (86, 91)_4, (87, 90)_4,$ $(96, 100)_4, (97, 101)_4,$ $(98, 102)_4, (99, 103)_4$	$[1,2,2,2]$		
$G_{v1,20}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 2$
$G_{v1,21}(1)$	$(1, 4, 10), (2, 7, 9, 11)_2, (3, 6)_2,$ $(5, 8)_2, (96, 102)_4, (97, 103)_4,$ $(98, 100)_4, (99, 101)_4$	$[1,6]$	$(), \dots, (), (5)_2,$ $(6)_2, (19)_4, (20)_4,$ $(21)_4, (22)_4$	
$G_{v1,21}(2)$	$(1), (2)_2, (3)_2, (4)_2,$ $(5)_2, (10)_2, (11)_2$	$[1]$		
$G_{v1,21}(j)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3$
$G_{v1,22}(1, 1, 1)$	$(1), (2, 6, 8, 10)_2,$ $(3, 7)_2, (4, 11)_2, (5, 9)_2$	$[1,6]$	$(), \dots, (), (7)_4,$ $(8)_4, (9)_4, (10)_4$	$j \geq 3$
$G_{v1,22}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	$[1]$		$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,22}(2, 1, 1)$	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$ $(20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4$	$[1,2]$		
$G_{v1,22}(2, 2, 2)$	$(1), (2)_2, (3)_2, (4)_2, (5)_2$	$[1]$		
$G_{v1,22}(2, k, l)$	(1)	$[1]$		$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,22}(j, 1, 1)$	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	$[1,2]$		$j \geq 3$
$G_{v1,22}(j, k, l)$	(1)	$[1]$		$j \geq 3, l = k \geq 2$
$G_{v1,22}(j, k, l)$	(1)	$[1]$		$l > k > j \geq 3$
$G_{v1,23}(1, 1, 1)$	$(1), (2, 6, 9)_2, (3, 7, 11)_2,$ $(5, 8, 10)_2, (4)_2$	$[1,2,2,2]$		
$G_{v1,23}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	$[1]$		$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,23}(j, 1, 1)$	$(1), (7, 11)_2, (6)_2, (10)_2$	$[1,2]$		$j \geq 2$
$G_{v1,23}(j, k, l)$	(1)	$[1]$		$l > k > j \geq 2$
$G_{v1,23}(j, k, l)$	(1)	$[1]$		$j \geq 2, l = k \geq 2$
$G_{v1,24}(1, 1, 1)$	$(1, 2, 8), (6, 10)_2, (5, 9)_2$ $(3)_2, (4)_2, (7)_2, (11)_2$	$[1,2]$	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,24}(1, 1, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	$[1]$	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,24}(1, k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	$[1]$	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,24}(2, 1, 1)$	$(1), (6, 10)_2, (2, 8)_2, (5, 9)_2$ $(3)_2, (4)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		
$G_{v1,24}(2, 1, l)$	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v1,24}(2, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,24}(j, 1, 1)$	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		$j \geq 3$
$G_{v1,24}(j, 1, l)$	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 3, l \geq 2$
$G_{v1,24}(j, k, l)$	(1)	[1]		$j \geq 3, l \geq k \geq 2$
$G_{v1,25}(1, 1, 1)$	$(1, 3), (6, 10)_2, (2, 8)_2, (5, 9)_2,$ $(4)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		
$G_{v1,25}(1, 1, l)$	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v1,25}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,25}(j, 1, 1)$	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		$j \geq 2$
$G_{v1,25}(j, 1, l)$	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 2, l \geq 2$
$G_{v1,25}(j, k, l)$	(1)	[1]		$j \geq 2, l \geq k \geq 2$
$G_{v1,26}(1, 1, 1)$	$(1, 2), (3)_2, (4)_2, (5)_2, (6)_2,$ $(7)_2, (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v1,26}(1, k, l)$	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,26}(j, 1, 1)$	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v1,26}(j, k, l)$	(1)	[1]		$j \geq 2,$ $l = k \geq 2$
$G_{v1,26}(j, k, l)$	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v1,27}(1, 1, 0)$	$(1, 2, 6, 8, 10), (5, 9)_2, (16, 32)_2,$ $(20, 42)_2, (21, 45)_2, (22, 44)_2,$ $(23, 43)_2, (24, 34)_2, (27, 35)_2,$ $(28, 30)_2, (3, 7)_2, (4, 11)_2, (17, 33)_2,$ $(25, 37)_2, (26, 36)_2, (29, 31)_2$	[15]	$(1), (2)_2, (5)_2,$ $(7)_2, (10)_2, (8)_2,$ $(9)_2, (3)_2, (4)_2,$ $(6)_2$	groupe étudié en exemple
$G_{v1,27}(1, 1, 1)$	$(1, 2, 6, 8, 10), (3, 7)_2, (4, 11)_2,$ $(17, 33)_2, (20, 42)_2, (21, 45)_2,$ $(22, 44)_2, (23, 43)_2, (24, 34)_2,$ $(27, 35)_2, (29, 31)_2, (5, 9)_2, (16, 32)_2$ $(25, 37)_2, (26, 36)_2, (28, 30)_2$	[15]	$(), (1)_2, (2)_2,$ $(5)_2, (8)_2, (9)_2,$ $(7)_2, (10)_2, (4)_2,$ $(3)_2, (6)_2$	
$G_{v1,27}(1, 2, \epsilon)$	$(1, 6, 8), (2, 10)_2, (4, 11)_2, (9)_2,$ $(34)_2, (35)_2, (3)_2, (5)_2, (7)_2, (24)_2,$ $(25)_2, (26)_2, (27)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(1), (), (),$ $(2), (3), (4),$	$\epsilon \in \{0, 1\}$ gr. conjugués (même car.)
$G_{v1,27}(1, l, 0)$	$(1, 6, 8), (9)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(7)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(1), (2)_2,$ $(3)_2, (4)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,27}(1, l, 1)$	$(1, 6, 8), (7)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(9)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), (1), (4), (3)$ $(), \dots, (), (2)_2$	$l \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,27}(2, 2, 0)$	$(1, 8), (9)_2, (2)_2, (3)_2, (4)_2,$ $(5)_2, (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(1), (2)_2$	
$G_{v1,27}(2, 2, 1)$	$(1, 8), (2)_2, (3)_2, (4)_2, (5)_2, (6)_2,$ $(7)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,27}(2, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v1,27}(2, l, 1)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,27}(k, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,27}(k, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,28}(1, l, 0)$	$(1, 6, 8), (9)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(7)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(1), (2), (3), (4)$	$l \geq 2$
$G_{v1,28}(1, l, 1)$	$(1, 6, 8), (7)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(9)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), (1), (4), (3),$ $(), \dots, (), (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,28}(2, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v1,28}(2, l, 1)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,28}(k, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l > k \geq 3$
$G_{v1,28}(k, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l > k \geq 3$
$G_{v1,29}(1, 1, 0)$	$(1, 5, 8, 10), (2, 6, 9)_2,$ $(3, 7, 11)_2, (4)_2, (17, 30)_2,$ $(29, 32)_2, (16, 31)_2, (28, 33)_2$	[3,2,2]	$(1), (2), (),$ $(), (6), (5)$	
$G_{v1,29}(1, 1, 1)$	$(1, 5, 8, 10), (2, 6, 9)_2,$ $(3, 7, 11)_2, (4)_2, (16, 31)_2,$ $(28, 33)_2, (17, 30)_2, (29, 32)_2$	[3,2,2]	$(), (), (2),$ $(1), (6), (5)$	
$G_{v1,29}(1, 2, 0)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (3, 11)_2, (5, 10)_2,$ $(2)_2, (4)_2, (7)_2$	[1,2]	$(1), (2)$	
$G_{v1,29}(1, 2, 1)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2, (3, 11)_2,$ $(5, 10)_2, (2)_2, (4)_2$	[1,2]	$(), (), (2),$ $(), \dots, (), (1)_2$	
$G_{v1,29}(1, l, 0)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v1,29}(1, l, 1)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(), (), (2), (1)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,29}(2, 2, 0)$	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(1), (2)$	
$G_{v1,29}(2, 2, 1)$	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,29}(2, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v1,29}(2, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,29}(k, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,29}(k, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,30}(1, 1, 0)$	$(1, 2, 8), (5, 6, 9, 10)_2,$ $(3, 11)_2, (4, 7)_2, (74, 76)_4,$ $(75, 77)_4, (80, 82)_4, (81, 83)_4$	[1,6]	$(1), (2), (),$ $(), (11), (13),$ $(12), (14)$	

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,30}(1, 1, 1)$	$(1, 2, 8), (5, 6, 9, 10)_2,$ $(3, 11)_2, (4, 7)_2, (74, 76)_4,$ $(75, 77)_4, (80, 82)_4, (81, 83)_4$	[1,6]	$(), (), (1),$ $(2), (12), (14),$ $(11), (13)$	
$G_{v1,30}(1, 2, 0)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2, (104)_4,$ $(105)_4, (106)_4, (107)_4$	[1,2]	$(1), (2)$	
$G_{v1,30}(1, 2, 1)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2, (104)_4,$ $(105)_4, (106)_4, (107)_4$	[1,2]	$(), (), (2),$ $(), \dots (), (1)_2$	
$G_{v1,30}(1, l, 0)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v1,30}(1, l, 1)$	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(), (), (2)_2, (1)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,30}(2, 2, 0)$	$(1, 8), (9)_2, (72)_4,$ $(73)_4, (78)_4, (79)_4$	[1]	$(1), (2)$	
$G_{v1,30}(2, 2, 1)$	$(1, 8), (9)_2, (72)_4,$ $(73)_4, (78)_4, (79)_4$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v1,30}(2, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v1,30}(2, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,30}(k, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,30}(k, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v1,31}(1, 1)$	$(1, 8, 10), (2, 6)_2, (3, 7)_2,,$ $(5)_2, (16)_2, (28)_2, (4)_2, (9)_2, (11)_2,$ $(17)_2, (29)_2, (30)_2, (31)_2, (32)_2$	[3]	$(), (1), (),$ $(2), (5), (6)$	
$G_{v1,31}(1, 2)$	$(1, 8), (6)_2, (2)_2, (3)_2, (4)_2, (5)_2,$ $(7)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), (1), (),$ $\dots, (), (2)_2$	
$G_{v1,31}(1, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v1,31}(k, 1)$	$(1, 8, 10), (9)_2, (11)_2,$ $(30)_2, (31)_2, (32)_2, (33)_2$	[3]	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2, (5)_2, (6)_2$	$k \geq 2$
$G_{v1,31}(k, 2)$	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2$
$G_{v1,31}(k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2, l \geq 3$
$G_{v1,32}(1, 1)$	$(1, 8), (9, 10)_2, (5, 6)_2, (4, 7)_2,$ $(2)_2, (3)_2, (11)_2$	[1,2]	$(), (), (1), (),$ (2)	
$G_{v1,32}(1, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,32}(k, 1)$	$(1, 8), (9, 10)_2, (11)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2$
$G_{v1,32}(k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k, l \geq 2$
$G_{v1,33}(1, 1)$	$(1, 2, 8), (6, 10)_2, (5, 9)_2,$ $(3)_2, (4)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]	$(), (1), (),$ $\dots, (), (2)_2$	
$G_{v1,33}(1, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,33}(k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2, l \geq k$
$G_{v1,34}(1, 1)$	$(1, 5, 8), (7, 11)_2, (2, 9)_2,$ $(6)_2, (3)_2, (4)_2, (10)_2$	[1,2]	$(), (), (),$ $(1), (), \dots, (), (2)_2$	

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v1,34}(1, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,34}(k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,35}(1, 1, 0)$	$(1, 2, 8), (6, 10)_2, (5, 9)_2,$ $(3)_2, (4)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]	$(1), (), (2)$	
$G_{v1,35}(1, 1, 1)$	$(1, 2, 8), (6, 10)_2, (5, 9)_2,$ $(3)_2, (4)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]	$(), (), (),$ $(1), (2)$	
$G_{v1,35}(1, l, 0)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(1), (), (), (2)$	$l \geq 2$
$G_{v1,35}(1, l, 1)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,35}(k, l, 0)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,35}(k, l, 1)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v1,36}(1, 1)$	$(1, 8), (2)_2, (5)_2, (3)_2, (4)_2,$ $(6)_2, (7)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), (1), (2)$	
$G_{v1,36}(1, l)$	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v1,36}(k, l)$	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$

A.2.2 Tables pour la famille \mathcal{F}_2

On précise que, pour ces groupes, les semi-invariants qui ne sont pas invariants correspondront toujours à des caractères d'ordre 2.

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,1}(1, 2, l)$	Y	$(1, 8), (9)$	[1]	$(), (), (1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v2,1}(1, k, l)$	Y	$(1, 8), (9)$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,1}(2, k, l)$	Y	$(1), (8), (9)$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,1}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v2,1}(1, 2, l)$	U	$(1), (6), (7)$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,1}(1, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,1}(j, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,1}(j, k, l)$	V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,2}(1, 2, l)$	Y	$(1, 8), (9)$	[1]	$(), (), (1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v2,2}(1, k, l)$	Y	$(1, 8), (9)$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,2}(2, k, l)$	Y	$(1), (8), (9)$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,2}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v2,2}(1, 2, l)$	U	$(1), (6), (7)$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,2}(1, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,2}(j, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,2}(j, k, l)$	V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,3}(1, k, l)$	Y	$(1, 8), (9)$	[1]	$(), (), (1), (2)$	$l > k \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,3}(2, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,3}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v2,3}(j, k, l)$	U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,4}(1, k, l)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l > k \geq 2$
$G_{v2,4}(2, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,4}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v2,4}(j, k, l)$	U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,5}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,5}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,5}(1, 2, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,5}(1, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,5}(j, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,5}(j, k, l)$	V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,5}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,5}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,6}(1, 2, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 3$
$G_{v2,6}(1, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v2,6}(j, k, l)$	U	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,6}(j, k, l)$	V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,7}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,7}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,7}(j, k, l)$	U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,8}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v2,8}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v2,8}(j, k, l)$	U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v2,9}(1, k)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$k \geq 2$
$G_{v2,9}(2, k)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$k = 1$ ou $k \geq 3$
$G_{v2,9}(j, k)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3, k \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,9}(j, 1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	$j \geq 2$
$G_{v2,9}(j, 2)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,9}(j, k)$	U	(1)	[1]		$j \geq 1, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v2,9}(j, 1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$j \geq 2$
$G_{v2,9}(j, 2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,9}(j, k)$	V	(1)	[1]		$j \geq 1, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v2,10}(1, k)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$k \geq 2$
$G_{v2,10}(2, k)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$k = 1$ ou $k \geq 3$
$G_{v2,10}(j, k)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3, k \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,10}(j, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,10}(j, k)$	U	(1)	[1]		$j \geq 1, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v2,10}(j, 1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$j \geq 2$
$G_{v2,10}(j, 2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,10}(j, k)$	V	(1)	[1]		$j \geq 1, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v2,11}(1, k)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$k \geq 2$
$G_{v2,11}(2, k)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$k = 1$ ou $k \geq 3$
$G_{v2,11}(j, k)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3, k \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,11}(j, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,11}(j, k)$	U	(1)	[1]		$j \geq 1, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v2,11}(j, 1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,11}(j, k)$	V	(1)	[1]		$j \geq 1, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v2,12}(1, k)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$k \geq 2$
$G_{v2,12}(j, k)$	Y	(1)	[1]		$k \geq 1, j \geq 2, j \neq k$
$G_{v2,12}(j, 1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	$j \geq 2$
$G_{v2,12}(j, 2)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,12}(j, k)$	U	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,12}(j, 1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$j \geq 2$
$G_{v2,12}(j, 2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,12}(j, k)$	V	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,13}(1, k)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$k \geq 2$
$G_{v2,13}(j, k)$	Y	(1)	[1]		$k \geq 1, j \geq 2, j \neq k$
$G_{v2,13}(j, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,13}(j, k)$	U	(1)	[1]		$k \geq 2, j \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,13}(j, 1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$j \geq 2$
$G_{v2,13}(j, 2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j = 1$ ou $j \geq 3$
$G_{v2,13}(j, k)$	V	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,14}(j, k)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$j = 1$ ou $k = 1$
$G_{v2,14}(j, k)$	Y	(1)	[1]		$j, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v2,14}(j, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,14}(j, k)$	U	(1)	[1]		$k \geq 2, j \geq 1, j \neq k$
$G_{v2,14}(j, k)$	V	(1)	[1]		
$G_{v2,15}(1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	
$G_{v2,15}(2)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,15}(1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v2,15}(2)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v2,15}(j)$	Y, U	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v2,15}(j)$	V	(1)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,16}(1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v,16}(2)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v,16}(1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v,16}(2)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v,16}(1)$	V	(1, 10), (11),	[1]	(), (), (5), (6)	
$G_{v,16}(2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		
$G_{v,16}(j)$	Y, U, V	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v,17}(1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	
$G_{v,17}(2)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v,17}(j)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v,17}(1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v,17}(1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		
$G_{v,17}(j)$	U, V	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v,18}(1)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v,18}(1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v,18}(2)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v,18}(j)$	U	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v,18}(1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		
$G_{v,18}(j)$	Y, V	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v,19}(1)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v,19}(j)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v,19}(1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v,19}(2)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v,19}(1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	
$G_{v,19}(2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		
$G_{v,19}(j)$	U, V	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v,20}(1)$	Y	(1), (8), (9),	[1]		
$G_{v,20}(1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v,20}(1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		
$G_{v,20}(j)$	Y, U, V	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v,21}(1)$	Y	(1), (8), (9),	[1]		
$G_{v,21}(1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		
$G_{v,21}(j)$	Y, U	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v,21}(1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	
$G_{v,21}(2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		
$G_{v,21}(j)$	V	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v,22}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l \geq k \geq 1$
$G_{v,22}(j, 1, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v,22}(j, 1, 1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j \geq 1$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,22}(j, k, l)$	Y, U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$ ou $j, l = k \geq 2$
$G_{v2,23}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,23}(j, 1, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,23}(j, 1, 1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,23}(j, k, l)$	Y, U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$ ou $j, l = k \geq 2$
$G_{v2,24}(1, k, l)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,24}(2, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,24}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3, l \geq k \geq 1$
$G_{v2,24}(j, 1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1, l \geq 2$
$G_{v2,24}(j, k, l)$	U	(1)	[1]		$j \geq 1, l \geq k \geq 2$
$G_{v2,24}(j, 1, 1)$	V	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,24}(j, k, l)$	V	(1)	[1]		$j \geq 1, k \leq l \geq 2$
$G_{v2,25}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,25}(j, k, l)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 2, l \geq k \geq 1$
$G_{v2,25}(j, 1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1, l \geq 2$
$G_{v2,25}(j, k, l)$	U	(1)	[1]		$j \geq 1, l \geq k \geq 2$
$G_{v2,25}(j, 1, 1)$	V	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,25}(j, k, l)$	V	(1)	[1]		$j \geq 1, k \leq l \geq 2$
$G_{v2,26}(1, k, l)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,26}(j, 1, 1)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,26}(j, 1, 1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$j \geq 1$
$G_{v2,26}(j, k, l)$	Y, U, V	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$ ou $j, l = k \geq 2$
$G_{v2,27}(k, l, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,27}(k, l, 1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,27}(1, l, \epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	$l \geq 1$
$G_{v2,27}(2, l, \epsilon)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,27}(k, l, \epsilon)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,27}(1, 1, \epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,27}(k, 2, \epsilon)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$k \leq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,27}(k, l, \epsilon)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,28}(k, l, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	$l > k \geq 3$
$G_{v2,28}(k, l, 1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l > k \geq 3$
$G_{v2,28}(1, l, \epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	$l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,28}(2, l, \epsilon)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,28}(k, l, \epsilon)$	U	(1)	[1]		$l > k \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,28}(k, l, \epsilon)$	V	(1)	[1]		$l > k \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(k, l, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,29}(k, l, 1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,29}(1, l, \epsilon)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(k, l, \epsilon)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(1, 1, \epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]		$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(k, 2, \epsilon)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$k \leq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,29}(k, l, \epsilon)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,30}(k, l, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,30}(k, l, 1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,30}(1, l, \epsilon)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,30}(k, l, \epsilon)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,30}(1, 1, \epsilon)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,30}(k, l, \epsilon)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,31}(k, l)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$k, l \geq 1$
$G_{v2,31}(1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,31}(k, l)$	U	(1)	[1]		$k \geq 2, l \geq 1$
$G_{v2,31}(k, 1)$	V	(1, 10), (11),	[1]	(), (), (5), (6)	$k \geq 1$
$G_{v2,31}(k, 2)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$k \geq 1$
$G_{v2,31}(k, l)$	V	(1)	[1]		$k \geq 1, l \geq 3$
$G_{v2,32}(k, l)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$k, l \geq 1$
$G_{v2,32}(1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,32}(k, l)$	U	(1)	[1]		$k \geq 2, l \geq 1$
$G_{v2,32}(k, 1)$	V	(1), (10), (11)	[1]		$k \geq 1$
$G_{v2,32}(k, l)$	V	(1)	[1]		$k \geq 1, l \geq 2$
$G_{v2,33}(k, l)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,33}(1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,33}(k, l)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v2,33}(1, 1)$	V	(1) ₁ , (10) ₂ , (11) ₂	[1]		
$G_{v2,33}(k, l)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 2$
$G_{v2,34}(k, l)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,34}(1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,34}(k, l)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v2,34}(1, 1)$	V	(1) ₁ , (10) ₂ , (11) ₂	[1]		
$G_{v2,34}(k, l)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 2$
$G_{v2,35}(k, l, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,35}(k, l, 1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,35}(1, l, \epsilon)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pf	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,35}(k, l, \epsilon)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,35}(1, 1, \epsilon)$	V	$(1)_1, (10)_2, (11)_2$	[1]		$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,35}(k, l, \epsilon)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,36}(k, l)$	Y	(1, 8), (9),	[1]	$(), (), (1), (2)$	$l \geq k \geq 1$
$G_{v2,36}(1, l)$	U	(1), (6), (7)	[1]		$l \geq 1$
$G_{v2,36}(k, l)$	U	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v2,36}(1, 1)$	V	$(1)_1, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v2,36}(k, l)$	V	(1)	[1]		$k \leq l \geq 2$
$G_{v2,37}(1, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	$(), (), (1), (2)$	
$G_{v2,37}(1, 1)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,37}(2, 0)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,37}(2, 1)$	Y	(1)	[1]		
$G_{v2,37}(j, \epsilon)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,37}(j, \epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	$(), (), (3), (4)$	$j \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,37}(j, \epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]	$(), (), (5), (6)$	$j \geq 1, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,38}(0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	
$G_{v2,38}(1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	$(), (), (1), (2)$	
$G_{v2,38}(\epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	$(), (), (3), (4)$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,38}(\epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]	$(), (), (5), (6)$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,39}$	Y	(1, 8), (9)	[1]	$(), (), (1), (2)$	
$G_{v2,39}$	U	(1, 6), (7)	[1]	$(), (), (3), (4)$	
$G_{v2,39}$	V	(1, 10), (11)	[1]	$(), (), (5), (6)$	
$G_{v2,40}(1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]		
$G_{v2,40}(j)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v2,40}(j)$	U	(1, 6), (7)	[1]	$(), (), (3), (4)$	$j \geq 1$
$G_{v2,40}(j)$	V	(1, 10), (11)	[1]	$(), (), (5), (6)$	$j \geq 1$
$G_{v2,41}$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	
$G_{v2,41}$	U	(1, 6), (7)	[1]	(3), (4)	
$G_{v2,41}$	V	(1, 10), (11)	[1]	(5), (6)	
$G_{v2,42}(0, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	
$G_{v2,42}(0, 0)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(3), (4)	
$G_{v2,42}(0, 0)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(5), (6)	
$G_{v2,42}(0, 1)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(1), (2)	
$G_{v2,42}(0, 1)$	U	(1, 6), (7)	[1]	$(), (), (3), (4)$	
$G_{v2,42}(0, 1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(5), (6)	
$G_{v2,42}(1, \epsilon)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	$(), (), (1), (2)$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,42}(1, \epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	$(), (), (3), (4)$	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,42}(1, \epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]	$(), (), (5), (6)$	$\epsilon \in \{0, 1\}$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v2,43}(\epsilon)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,43}(\epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,43}(\epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$\epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v2,44}(1, \epsilon, \mu, 0)$	Y	(1, 8), (9)	[1]	(), (), (1), (2)	
$G_{v2,44}(1, \epsilon, \mu, 1)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,44}(2, \epsilon, \mu, 0)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,44}(2, \epsilon, \mu, 1)$	Y	(1)	[1]		
$G_{v2,44}(j, \epsilon, \mu, \eta)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v2,44}(j, 0, 0, \eta)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(3), (4)	
$G_{v2,44}(j, 0, 1, \eta)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v2,44}(j, 1, \mu, \eta)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(4), (3)	$\mu \in \{0, 1\}$
$G_{v2,44}(j, 0, 0, \eta)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(5), (6)	
$G_{v2,44}(j, \epsilon, \mu, \eta)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	$\epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v2,45}(2, \epsilon)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,45}(j, \epsilon)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v2,45}(j, \epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v2,45}(j, \epsilon)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	
$G_{v2,46}(2, \epsilon)$	Y	(1), (8), (9)	[1]		
$G_{v2,46}(j, \epsilon)$	Y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v2,46}(j, \epsilon)$	U	(1, 6), (7)	[1]	(), (), (3), (4)	
$G_{v2,46}(j, 0)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(5), (6)	
$G_{v2,46}(j, 1)$	V	(1, 10), (11)	[1]	(), (), (5), (6)	

A.2.3 Tables pour la famille \mathcal{F}_3

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,1}(1, 2, l)$	y	(1), (6) ₂ , (7) ₂	[1]		$l \geq 3$
$G_{v3,1}(1, k, l)$	y	(1)	[1]		$l > k \geq 3, j < k$
$G_{v3,1}(1, k, l)$	u	(1, 8), (9) ₂	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v3,1}(2, k, l)$	u	(1), (8) ₂ , (9) ₂	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v3,1}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v3,1}(1, 2, l)$	v	(1, 8), (6) ₂ , (7) ₂ , (9) ₂	[1]	(), ..., (), (1), (2)	$l \geq 3$
$G_{v3,1}(1, k, l)$	v	(1, 8), (9) ₂	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v3,1}(2, k, l)$	v	(1), (8) ₂ , (9) ₂	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v3,1}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v3,2}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,1}(j, k, l)$			
$G_{v3,3}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,3}(1, k, l)$	u, v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1), (2)$	$l > k \geq 2$
$G_{v3,3}(2, k, l)$	u, v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v3,3}(j, k, l)$	u, v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v3,4}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,3}(j, k, l)$			
$G_{v3,5}(1, 2, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v3,5}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$l > k \geq 3, j < k$
$G_{v3,5}(1, k, l)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v3,5}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,5}(1, 2, l)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v3,5}(1, k, l)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 3$
$G_{v3,5}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,6}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,5}(j, k, l)$			
$G_{v3,7}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		
$G_{v3,7}(1, k, l)$	u, v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l > k \geq 2$
$G_{v3,7}(j, k, l)$	u, v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,8}(j, k, l)$	y, u, v	comme pour $G_{v3,7}(j, k, l)$			
$G_{v3,9}(j, 1)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2,$ $(42)_2, (43), (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	$j \geq 1$
$G_{v3,9}(j, 2)$	y	$(1), (6)_2, (10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 1$
$G_{v3,9}(j, k)$	y	(1)	[1]		$1 \leq j \neq k \geq 3$
$G_{v3,9}(1, 2)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,9}(1, k)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1), (2)$	$k \geq 3$
$G_{v3,9}(2, 1)$	u	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,9}(2, k)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 1)$	u	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 2)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,9}(j, k)$	u	(1)	[1]		$j, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v3,9}(1, 2)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,9}(1, k)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 3$
$G_{v3,9}(2, 1)$	v	$(1, 6), (8)_2, (9)_2, (7)_2$	[1]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,9}(2, k)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 1)$	v	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3), (4)$	$j \geq 3$
$G_{v3,9}(j, 2)$	v	$(1), (6), (7)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,9}(j, k)$	v	(1)	[1]		$j, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v3,10}(j, 1)$	y	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,10}(j, 2)$	y	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,10}(j, k)$	y	(1)	[1]		$j, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v3,10}(1, 2)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,10}(1, k)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 3$
$G_{v3,10}(2, 1)$	u	$(1, 10), (11)_2, (8)_2, (9)_2,$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,10}(2, k)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,10}(j, 1)$	u	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v3,10}(j, 2)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,10}(j, k)$	u	(1)	[1]		$j, k \geq 3, j \neq k$
$G_{v3,10}(1, k)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2$
$G_{v3,10}(2, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2,$	[1]		
$G_{v3,10}(2, k)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,10}(j, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,10}(j, k)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,11}(j, 1)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2,$ $(76)_2, (77)_2, (82)_2, (83)_2$	[1,2]		$j \geq 2$
$G_{v3,11}(j, k)$	y	(1)	(1)		$j \geq 1, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,11}(1, k)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2$
$G_{v3,11}(2, 1)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,11}(2, k)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,11}(j, 1)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,11}(j, k)$	u	(1)	(1)		$j \geq 3, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,11}(1, k)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2$
$G_{v3,11}(2, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2,$	[1]		
$G_{v3,11}(2, k)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,11}(j, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,11}(j, k)$	v	(1)	(1)		$j \geq 3, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,12}(j, 1)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2,$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (),$ $(3)_2, (4)_2, (5)_2, (6)_2$	$j \geq 2$
$G_{v3,12}(j, 2)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \neq 2$
$G_{v3,12}(j, k)$	y	(1)	[1]		$k \geq 3, j \neq k$
$G_{v3,12}(1, 2)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,12}(1, k)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,12}(j, 1)$	u	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 2$
$G_{v3,12}(j, 2)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2,$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,12}(j, k)$	u	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,12}(1, 2)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		
$G_{v3,12}(1, k)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,12}(j, 1)$	v	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3), (4)$	$j \geq 2$
$G_{v3,12}(j, 2)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,12}(j, k)$	v	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 2, j \neq k$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,13}(j, 1)$	y	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 2$
$G_{v3,13}(j, 2)$	y	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \neq 2$
$G_{v3,13}(j, k)$	y	(1)	[1]		$k \geq 3, j \neq k$
$G_{v3,13}(1, 2)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,13}(1, k)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 3$
$G_{v3,13}(j, 1)$	u	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 2$
$G_{v3,13}(j, 2)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 3$
$G_{v3,13}(j, k)$	u	(1)	[1]		$k \geq 3, j \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,13}(1, k)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 2$
$G_{v3,13}(j, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,13}(j, k)$	v	(1)	[1]		$j, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,14}(j, 1)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2,$ $(76)_2, (77)_2, (82)_2, (83)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,14}(j, k)$	y	(1)	[1]		$k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,14}(j, k)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$j = 1$ ou $k = 1$
$G_{v3,14}(j, k)$	u	(1)	[1]		$j, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,14}(1, k)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \geq 2$
$G_{v3,14}(j, 1)$	v	$(1), (6, 8)_2, (7)_2, (9)_2$	[1,2]		$j \geq 2$
$G_{v3,14}(j, k)$	v	(1)	[1]		$j, k \geq 2, j \neq k$
$G_{v3,15}(1)$	y	$(1, 6), (7, 11)_2, (10)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,15}(2)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		
$G_{v3,15}(j)$	y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,15}(1)$	u	$(1, 8), (9, 10)_2, (11)_2,$	[1,2]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,15}(2)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		
$G_{v3,15}(j)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,15}(1)$	v	$(1, 6, 8), (7)_2, (9)_2, (34)_2,$ $(35)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2, (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,15}(2)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		
$G_{v3,15}(j)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,16}(1)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2, (42)_2,$ $(45)_2, (44)_2, (43)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,16}(2)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,16}(j)$	y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,16}(1)$	u	$(1, 8, 10), (11)_2, (9)_2,$ $(30)_2, (31)_2, (32)_2, (33)_2$	[3]	$(), \dots, (), (1)_2,$ $(2)_2, (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,16}(2)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,16}(j)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,16}(1)$	v	$(1, 6, 8), (7)_2, (9)_2,$ $(34)_2, (35)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), \dots, (), (1)_2,$ $(2)_2, (3)_2, (4)_2,$	
$G_{v3,16}(2)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		
$G_{v3,16}(j)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,17}(1)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2,$ $(76)_4, (77)_4, (82)_4, (83)_4$	[1,2]		
$G_{v3,17}(j)$	y	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,17}(1)$	u	$(1, 8), (9, 10)_2, (11)_2,$	[1,2]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,17}(2)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		
$G_{v3,17}(j)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,17}(1)$	v	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,17}(2)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		
$G_{v3,17}(j)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,18}(1)$	y	$(1, 6), (7, 11)_2, (10)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,18}(2)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		
$G_{v3,18}(j)$	y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,18}(1)$	u	$(1), (8, 11)_2, (9)_2, (10)_2,$ $(88)_4, (89)_4, (90)_4, (91)_4$	[1,2]		
$G_{v3,18}(j)$	u	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,18}(1)$	v	$(1, 6), (8, 7)_2, (9)_2,$	[1,6]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,18}(2)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		
$G_{v3,18}(j)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,19}(1)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2,$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,19}(2)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,19}(j)$	y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,19}(1)$	u	$(1, 10), (9, 11)_2, (8)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,19}(2)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,19}(j)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,19}(1)$	v	$(1, 6), (7, 8)_2, (9)_2,$	[1,2]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,19}(2)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,19}(j)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,20}(1)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2,$ $(76)_4, (77)_4, (82)_4, (83)_4$	[1,2]		
$G_{v3,20}(1)$	u	$(1), (8, 11)_2, (9)_2, (10)_2,$ $(88)_4, (89)_4, (90)_4, (91)_4$	[1,2]		
$G_{v3,20}(1)$	v	$(1), (7, 9)_2, (6)_2, (8)_2,$ $(96)_4, (97)_4, (98)_4, (99)_4$	[1,2]		

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,20}(j)$	y, u, v	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,21}(1)$	y	(1, 10), (7, 11) ₂ , (6) ₂ ,	[1,2]	(), ..., (), (5) ₂ , (6) ₂	
$G_{v3,21}(2)$	y	(1), (10) ₂ , (11) ₂	[1]		
$G_{v3,21}(j)$	y	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,21}(1)$	u	(1, 10), (9, 11) ₂ , (8) ₂	[1,2]	(), ..., (), (5), (6)	
$G_{v3,21}(2)$	u	(1), (10) ₂ , (11) ₂	[1]		
$G_{v3,21}(j)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,21}(1)$	v	(1), (7, 9) ₂ , (6) ₂ , (8) ₂ , (96) ₂ , (97) ₂ , (98) ₂ , (99) ₂	[1,2]		
$G_{v3,21}(j)$	v	(1)	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,22}(j, 1, 1)$	y	(1), (6, 10) ₂ , (7) ₂ , (11) ₂	[1,2]		$j \geq 1$
$G_{v3,22}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,22}(1, 1, 1)$	u	(1), (8, 10) ₂ , (9) ₂ , (11) ₂	[1,2]		$j \geq 3$
$G_{v3,22}(1, k, l)$	u	(1), (8) ₂ , (9) ₂	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,22}(2, 2, 2)$	u	(1)	[1]		
$G_{v3,22}(2, k, l)$	u	(1)	[1]		$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,22}(j, 1, 1)$	u	(1), (10) ₂ , (11) ₂	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,22}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3, l = k \geq 2$
$G_{v3,22}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v3,22}(1, 1, 1)$	v	(1), (6, 8) ₂ , (7) ₂ , (9) ₂	[1,2]		$j \geq 3$
$G_{v3,22}(1, k, l)$	v	(1), (8) ₂ , (9) ₂	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,22}(2, 2, 2)$	v	(1)	[1]		
$G_{v3,22}(2, k, l)$	v	(1)	[1]		$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,22}(j, 1, 1)$	v	(1), (6) ₂ , (7) ₂	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,22}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3, l = k \geq 2$
$G_{v3,22}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 3$
$G_{v3,23}(j, 1, 1)$	y	(1), (7, 11) ₂ , (6) ₂ , (10) ₂	[1,2]		$j \geq 1$
$G_{v3,23}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$l > k > j \geq 1$
$G_{v3,23}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$j \geq 2, l = k \geq 2$
$G_{v3,23}(1, 1, 1)$	u	(1), (8, 10) ₂ , (9) ₂ , (11) ₂	[1,2]		
$G_{v3,23}(1, k, l)$	u	(1), (8) ₂ , (9) ₂	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,23}(j, 1, 1)$	u	(1), (10) ₂ , (11) ₂	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,23}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,23}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$j \geq 2, l = k \geq 2$
$G_{v3,23}(1, 1, 1)$	v	(1), (6, 9) ₂ , (7) ₂ , (8) ₂	[1,2,2,2]		
$G_{v3,23}(1, k, l)$	v	(1), (8) ₂ , (9) ₂	[1]		$l \geq k \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pff	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,23}(j, 1, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,23}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,23}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$j \geq 2, l = k \geq 2$
$G_{v3,24}(j, 1, 1)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		
$G_{v3,24}(j, 1, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,24}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,24}(1, 1, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,24}(1, k, l)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,24}(2, 1, 1)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,24}(2, k, l)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,24}(j, 1, 1)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 3$
$G_{v3,24}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$j \geq 3, k \leq l \geq 2$
$G_{v3,24}(1, 1, l)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,24}(1, k, l)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,24}(2, 1, l)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq 1$
$G_{v3,24}(2, k, l)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,24}(j, 1, l)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 3, l \geq 1$
$G_{v3,24}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$j \geq 3, l \geq k \geq 2$
$G_{v3,25}(j, 1, 1)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		$j \geq 1$
$G_{v3,25}(j, 1, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 1, l \geq 2$
$G_{v3,25}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$j \geq 1, l \geq k \geq 2$
$G_{v3,25}(1, 1, 1)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,25}(1, k, l)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,25}(j, 1, 1)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,25}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$j \geq 2, k \leq l \geq 2$
$G_{v3,25}(1, 1, l)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq 1$
$G_{v3,25}(1, k, l)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,25}(j, 1, l)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 2, l \geq 1$
$G_{v3,25}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$j \geq 2, l \geq k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, 1, 1)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,26}(j, k, l)$	y	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,26}(1, 1, 1)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,26}(1, k, l)$	u	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, 1, 1)$	u	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,26}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$j \geq 2, l = k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, k, l)$	u	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,26}(1, 1, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2, (8)_2, (9)_2,$	[1]		

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,26}(1, k, l)$	v	$(1), (8)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, 1, 1)$	v	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$j \geq 2$
$G_{v3,26}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$j \geq 2, l = k \geq 2$
$G_{v3,26}(j, k, l)$	v	(1)	[1]		$l > k > j \geq 2$
$G_{v3,27}(1, 1, \epsilon)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2,$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,27}(1, 2, \epsilon)$	y	$(1, 6), (7)_2, (10)_2, (11)_2,$	[1]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,27}(1, l, \epsilon)$	y	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3)_2, (4)_2$	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(2, 2, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,27}(2, l, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v3,27}(k, l, \epsilon)$	y	(1)	[1]		$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,27}(1, 1, 0)$	u	$(1, 8, 10), (9)_2, (32)_2,$ $(30)_2, (31)_2, (33)_2, (11)_2$	[3]	$(1), (2), (5),$ (6)	
$G_{v3,27}(1, 1, 1)$	u	$(1, 8, 10), (11)_2, (31)_2,$ $(33)_2, (9)_2, (30)_2, (32)_2$	[3]	$(), (2), (6),$ $(5), (), \dots, (), (1)_2$	
$G_{v3,27}(1, 2, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2,$	[1]	$(1), (2)$	
$G_{v3,27}(1, 2, 1)$	u	$(1, 8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2,$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,27}(1, l, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(1, l, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v3,27}(2, 2, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(1), (2)$	
$G_{v3,27}(2, 2, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,27}(k, l, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,27}(k, l, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,27}(1, 1, 0)$	v	$(1, 6, 8), (9)_2,$ $(34)_2, (35)_2, (7)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(1), (2),$ $(3), (4),$	
$G_{v3,27}(1, 1, 1)$	v	$(1, 6, 8), (7)_2, (34)_2,$ $(35)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), (1), (4),$ $(3), (), (), (2)_2$	
$G_{v3,27}(1, l, 0)$	v	$(1, 6, 8), (9)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(7)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(1), (2), (3), (4)$	$l \geq 2$
$G_{v3,27}(1, l, 1)$	v	$(1, 6, 8), (7)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(9)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), (1), (4), (3)$ $(), \dots, (), (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v3,27}(2, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 2$
$G_{v3,27}(2, l, 1)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v3,27}(k, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,27}(k, l, 1)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 3$
$G_{v3,28}(1, l, \epsilon)$	y	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3)_2, (4)_2$	$l \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v3,28}(2, l, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{v3,28}(k, l, \epsilon)$	y	(1)	[1]		$l > k \geq 3$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,28}(k, l, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	
$G_{v3,28}(k, l, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,28}(1, l, 0)$	v	$(1, 6, 8), (9)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(7)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(1), (2), (3), (4)$	$l \geq 2$
$G_{v3,28}(1, l, 1)$	v	$(1, 6, 8), (7)_2, (34)_2, (35)_2,$ $(9)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), (1), (4), (3),$ $(), \dots, (), (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v3,28}(2, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2, (6)_2, (7)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq 3$
$G_{v3,28}(2, l, 1)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 3$
$G_{v3,28}(k, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l > k \geq 3$
$G_{v3,28}(k, l, 1)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l > k \geq 3$
$G_{v3,29}(1, 1, \epsilon)$	y	$(1, 10), (7, 11)_2, (6)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,29}(1, 2, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,29}(1, l, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v3,29}(2, 2, \epsilon)$	y	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,29}(k, l, \epsilon)$	y	(1)	[1]		$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,29}(1, 1, 0)$	u	$(1, 8, 10), (9)_2, (11)_2,$ $(30)_2, (32)_2, (31)_2, (33)_2$	[3]	$(1), (2), (),$ $(6), (5)$	
$G_{v3,29}(1, 1, 1)$	u	$(1, 8, 10), (9)_2, (11)_2, ()$ $(31)_2, (33)_2, (30)_2, (32)_2$	[3]	$(), (), (2), (1),$ $(6), (5)$	
$G_{v3,29}(k, 2, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(1), (2)$	$k \leq 2$
$G_{v3,29}(k, 2, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq 2$
$G_{v3,29}(k, l, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,29}(k, l, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 3$
$G_{v3,29}(1, l, 0)$	v	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(1), (2)$	$l \geq 1$
$G_{v3,29}(1, l, 1)$	v	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(), (), (2), (1)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,29}(k, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,29}(k, l, 1)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,30}(1, 1, \epsilon)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2,$ $(76)_4, (77)_4, (82)_4, (83)_4$	[1,2]		
$G_{v3,30}(1, l, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,30}(k, l, \epsilon)$	y	(1)	[1]		$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,30}(1, 1, 0)$	u	$(1, 8), (9, 10)_2, (11)_2,$	[1,2]	$(1), (2)$	
$G_{v3,30}(1, 1, 1)$	u	$(1, 8), (9, 10)_2, (11)_2$	[1,2]	$(), (), (1)_2, (2)_2,$	
$G_{v3,30}(k, l, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,30}(k, l, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,30}(1, l, 0)$	v	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(1), (2)$	$l \geq 1$
$G_{v3,30}(1, l, 1)$	v	$(1, 8), (6, 9)_2, (7)_2$	[1,2]	$(), (), (2)_2, (1)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,30}(k, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,30}(k, l, 1)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,31}(1, 1)$	y	$(1, 10), (6)_2, (7)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,31}(1, 2)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,31}(1, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 3$
$G_{v3,31}(k, 1)$	y	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$k \geq 2$
$G_{v3,31}(k, 2)$	y	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$k \geq 2$
$G_{v3,31}(k, l)$	y	(1)	[1]		$k \geq 2, l \geq 3$
$G_{v3,31}(k, 1)$	u	$(1, 8, 10), (9)_2, (11)_2,$ $(30)_2, (31)_2, (32)_2, (33)_2$	[3]	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2, (5)_2, (6)_2$	$k \geq 1$
$G_{v3,31}(k, 2)$	u	$(1, 8)_2, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 1$
$G_{v3,31}(k, l)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 1, l \geq 3$
$G_{v3,31}(1, l)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,31}(k, l)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2, l \geq 1$
$G_{v3,32}(1, 1)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,32}(1, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,32}(k, 1)$	y	$(1), (10)_2, (11)_2$	[1]		$k \geq 2$
$G_{v3,32}(k, l)$	y	(1)	[1]		$k, l \geq 2$
$G_{v3,32}(k, 1)$	u	$(1, 8), (9, 10)_2, (11)_2$	[1,2]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 1$
$G_{v3,32}(k, l)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 1, l \geq 2$
$G_{v3,32}(1, l)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,32}(k, l)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \geq 2, l \geq 1$
$G_{v3,33}(1, 1)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		
$G_{v3,33}(1, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,33}(k, l)$	y	(1)	[1]		$k \geq 2, l \geq k$
$G_{v3,33}(1, 1)$	u	$(1, 8)_1, (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), (), (1), (), (2)_2$	
$G_{v3,33}(k, l)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,33}(1, l)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,33}(k, l)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,34}(1, 1)$	y	$(1), (7, 11)_2, (6)_2, (10)_2$	[1,2]		
$G_{v3,34}(1, l)$	y	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,34}(k, l)$	y	$(1, 8), (9)_2$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,34}(1, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,34}(k, l)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,34}(1, l)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), (1), (), (), (2)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,34}(k, l)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,35}(1, 1, \epsilon)$	y	$(1), (6, 10)_2, (7)_2, (11)_2$	[1,2]		
$G_{v3,35}(1, l, \epsilon)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,35}(k, l, \epsilon)$	y	(1)	[1]		$l \geq k \geq 2$

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,35}(1, 1, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(1), (2)$	
$G_{v3,35}(1, 1, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,35}(k, l, 0)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,35}(k, l, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,35}(1, l, 0)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(1), (), (), (2)$	$l \geq 1$
$G_{v3,35}(1, l, 1)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 1$
$G_{v3,35}(k, l, 0)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(1), (2)$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,35}(k, l, 1)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,36}(1, 1)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]		
$G_{v3,36}(1, l)$	y	$(1), (6)_2, (7)_2$	[1]		$l \geq 2$
$G_{v3,36}(k, l)$	y	$(1),$	[1]		$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,36}(1, 1)$	u	$(1, 8), (9)_2, (10)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	
$G_{v3,36}(k, l)$	u	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$k \leq l \geq 2$
$G_{v3,36}(1, l)$	v	$(1, 8), (6)_2, (7)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq 2$
$G_{v3,36}(k, l)$	v	$(1, 8), (9)_2$	[1]	$(), (), (1)_2, (2)_2$	$l \geq k \geq 2$
$G_{v3,37}(i, 0)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(5), (), (6),$ $(3), (), (4)$	$i \geq 2$
$G_{v3,37}(i, 1)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(4), (5), (),$ $(), (), (3), (), (6)_2$	$i \geq 2$
$G_{v3,37}(2, 0)$	u	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2$	[1]	$(5), (), (), (6)$	
$G_{v3,37}(2, 1)$	u	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,37}(i, 0)$	u	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(5), (6)$	$i \geq 3$
$G_{v3,37}(i, 1)$	u	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$i \geq 3$
$G_{v3,37}(2, 0)$	v	$(1, 6), (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]	$(), (), (3), (), (4)_2$	
$G_{v3,37}(2, 1)$	v	$(1, 6), (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]	$(4), (), (), (), (3)_2$	
$G_{v3,37}(i, 0)$	v	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3)_2, (4)_2$	$i \geq 3$
$G_{v3,37}(i, 1)$	v	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(4)_2, (), (3)_2$	$i \geq 3$
$G_{v3,38}(j)$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	$j \geq 1$
$G_{v3,38}(1)$	u	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,38}(j)$	u	$(1, 10), (11)_2$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$j \geq 2$
$G_{v3,38}(1)$	v	$(1, 6), (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]	$(), \dots, (), (3)_2, (4)_2$	
$G_{v3,38}(j)$	v	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(), (), (3)_2, (4)_2$	$j \geq 2$
$G_{v3,39}$	y	$(1, 6, 10), (7)_2, (11)_2$ $(42)_2, (43)_2, (44)_2, (45)_2$	[3]	$(), \dots, (), (3)_2,$ $(4)_2, (5)_2, (6)_2$	
$G_{v3,39}$	u	$(1, 8, 10), (9)_2, (11)_2,$ $(30)_2, (31)_2, (32)_2, (33)_2$	[3]	$(), \dots, (), (1)_2,$ $(2)_2, (5)_2, (6)_2$	

Groupe	N	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v3,39}$	v	$(1, 6, 8), (7)_2, (9)_2,$ $(34)_2, (35)_2, (36)_2, (37)_2$	[3]	$(), \dots, (), (1)_2,$ $(2)_2, (3)_2, (4)_2$	

A.2.4 Table pour la famille \mathcal{F}_4

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{v4,1}(1, 0)$	$(1, 8, 10), (9)_2, (11)_2,$ $(30)_2, (31)_2, (32)_2, (33)_2$	[3]	$(), \dots, (),$ $(1)_2, (2)_2, (5)_2, (6)_2$	
$G_{v4,1}(2, 0)$	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2,$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v4,1}(i, 0)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$i \geq 3$
$G_{v4,1}(1, 1)$	$(1, 10), (9, 11)_2, (8)_2$	[1,2]	$(), (), (), (5)_2, (6)_2$	
$G_{v4,1}(i, 1)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$i \geq 2$
$G_{v4,2}(0)$	$(1, 8, 10), (9)_2, (30)_2,$ $(32)_2, (11)_2, (31)_2, (33)_2$	[3]	$(1), (2), (6),$ (5)	
$G_{v4,2}(1)$	$(1, 8, 10), (11)_2, (31)_2,$ $(33)_2, (9)_2, (30)_2, (32)_2$	[3]	$(), (2), (6),$ $(5), (), (), (), (1)_2$	
$G_{v4,3}(2, 0, 0, 0)$	$(1, 10), (11)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]	$(5)_2, (6)_2$	
$G_{v4,3}(2, 0, \epsilon, \mu)$	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2,$	[1]	$(), \dots, (), (5)_2, (6)_2$	$\epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,3}(i, 0, 0, 0)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(5), (6)$	$i \geq 3$
$G_{v4,3}(i, 0, \epsilon, \mu)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$i \geq 3, \epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,3}(i, 1, 0, 0)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(5), (6)$	$i \geq 2$
$G_{v4,3}(i, 1, \epsilon, \mu)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$i \geq 2, \epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,4}(0, 0)$	$(1, 10), (9, 11)_2, (8)_2$	[1,2]	$(5), (6)$	
$G_{v4,4}(\epsilon, \mu)$	$(1, 10), (9, 11)_2, (8)_2$	[1,2]	$(), (), (), (5)_2, (6)_2$	$\epsilon = 1$ ou $\mu = 1$
$G_{v4,5}$	$(1, 8, 10), (9)_2, (31)_2,$ $(32)_2, (11)_2, (30)_2, (33)_2$	[3]	$(), (5), (1)$ $(2), (), (), (), (6)_2$	
$G_{v4,6}(2, 0)$	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2,$	[1]	$(), (5), (), (), (6)_2$	
$G_{v4,6}(2, 1)$	$(1, 10), (8)_2, (9)_2, (11)_2,$	[1]	$(), (), (6), (), (5)_2$	
$G_{v4,6}(i, \epsilon)$	$(1, 10), (11)_2,$	[1]	$(), (), (5)_2, (6)_2$	$i \geq 3$
$G_{v4,7}(1, 0)$	$(1, 6, 8), (7)_2, (35)_2,$ $(36)_2, (9)_2, (34)_2, (37)_2$	[3]	$(4), (3), (1),$ (2)	
$G_{v4,7}(2, 0)$	$(1, 6), (7)_2, (8)_2, (9)_2$	[1]	$(4), (3)$	
$G_{v4,7}(i, 0)$	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(4), (3)$	$i \geq 3$
$G_{v4,7}(1, 1)$	$(1, 6), (7, 8)_2, (9)_2$	[1,2]	$(4), (3)$	
$G_{v4,7}(i, 0)$	$(1, 6), (7)_2$	[1]	$(4), (3)$	$i \geq 2$

A.3 Tables pour $T = C = \langle c \rangle$

Pour les groupes infinis, on a les résultats suivants :

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$\langle cu_2^{-1}, H_2^1 \rangle$	$(6), (1, 7)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (25)_4, (26)_4$	
$\langle cu_2^{-1}, H_2^2 \rangle$	$(6), (1, 7)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (25)_4, (26)_4$	
$\langle cu_2^{-1}, H_2^4 \rangle$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		
$\langle cu_2^{-1}, H_2^n \rangle$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$n \nmid 4$
$\langle cu_2^{-1}, H_3 \rangle$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		

A.3.1 Tables pour la famille \mathcal{C}_1

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{c1,1}(2, -1)$	$(7), (1, 6)_2, (2)_2, (3)_2,$ $(108)_4, (109)_4$	$[0, 1]$	$(), \dots, (),$ $(3)_4, (4)_4$	
$G_{c1,1}(k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 3$
$G_{c1,1}(k, k')$	$(), (1)$	$[0, 1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{c1,2}(1, -1, 0)$	$(3, 7), (1, 2, 6)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(108)_4, (109)_4, (110)_4, (111)_4$	$[0, 1, 1, 1]$	$(), (), (), (),$ $(3), (4)$	
$G_{c1,2}(1, -1, 1)$	$(3, 7), (1, 2, 6)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(110)_4, (111)_4, (108)_4, (109)_4$	$[0, 1, 1, 1]$	$(), (), (), (),$ $(3), (4)$	
$G_{c1,2}(k, -1, \epsilon)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2,$
$G_{c1,2}(1, k', \epsilon)$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(110)_4, (111)_4$	$[0, 1, 1, 1]$		$k' \geq 0$
$G_{c1,2}(k, k', \epsilon)$	$(), (1)$	$[0, 1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{c1,3}(1, -1)$	$(7), (1, 6)_2, (2)_2, (3)_2,$ $(108)_4, (109)_4$	$[0, 1]$	$(), (), (), (),$ $(3), (4)$	
$G_{c1,3}(k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2$
$G_{c1,3}(k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1, k' \geq 0$
$G_{c1,4}(1, 2, -1)$	$(7), (1, 6)_2, (2)_2, (3)_2,$ $(108)_4, (109)_4$	$[0, 1]$	$(), \dots, (),$ $(3)_4, (4)_4$	
$G_{c1,4}(1, k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0, 1]$	$(), (),$ $(3), (4)$	$k \geq 3$
$G_{c1,4}(2, 2, -1)$	$(), (1)_2, (2)_2, (3)_2, (6)_2,$ $(7)_2, (108)_4, (109)_4$	$[0, 1]$		
$G_{c1,4}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{c1,4}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$ et $j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,5}(1, 1, -1)$	$(3, 7), (1, 2, 6)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(108)_4, (109)_4, (110)_4, (111)_4$	$[0,1,1,1]$	$(), \dots(),$ $(3)_4, (4)_4$	
$G_{c1,5}(1, k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (),$ $(3)_4, (4)_4$	$k \geq 2$
$G_{c1,5}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(2, 6)_2, (3, 7)_2,$ $(108)_4, (109)_4, (110)_4, (111)_4$	$[0,1,1,1]$		
$G_{c1,5}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{c1,5}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(110)_4, (111)_4$	$[0,1,1,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,5}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$ et $j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,6}(1, 1, -1)$	$(), (2, 6, 12)_2, (3, 7, 13)_2, (1)_2,$ $(108, 110)_4, (109, 111)_4$	$[0,1,1,1]$	$(), \dots, (),$ $(7)_4, (8)_4,$ $(23)_4, (24)_4$	
$G_{c1,6}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{c1,6}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2, (16)_4, (17)_4,$ $(110)_4, (111)_4, (112)_4, (113)_4$	$[0,1,1,1]$		
$G_{c1,6}(2, 2, -1)$	$(), (1)_2, (2)_4, (3)_4, (108)_4, (109)_4$	$[0,1]$		
$G_{c1,6}(2, k, -1)$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 3$
$G_{c1,6}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(110)_4, (111)_4$	$[0,1,1,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,6}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$ et $j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{c1,7}(1, 1, -1)$	$(3), (1, 2)_2, (6)_2, (7)_2,$ $(108)_4, (109)_4$	$[0,1]$		
$G_{c1,7}(1, k, -1)$	$(3), (1, 2)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{c1,7}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$ et $j \geq 2$ ou $k' \geq 0$

A.3.2 Tables pour la famille C_2

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{c2,1}(1, k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2$
$G_{c2,1}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{c2,1}(j, k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$ et $j \geq 3$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,2}(1, k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 1$
$G_{c2,2}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$
$G_{c2,2}(j, k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$ et $j \geq 3$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,3}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$
$G_{c2,3}(j, k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$ et $j \geq 2$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,4}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$
$G_{c2,4}(j, k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$ et $j \geq 2$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,5}(k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2$
$G_{c2,5}(k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2, k'' \geq 0$
$G_{c2,6}(k, \epsilon, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{c2,6}(k, \epsilon, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2, k'' \geq 0, \epsilon \in \{0, 1\}$
$G_{c2,7}(k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 1$
$G_{c2,7}(k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1, k'' \geq 0$
$G_{c2,8}(k, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 1$
$G_{c2,8}(k, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1, k'' \geq 0$
$G_{c2,9}(-1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 1$
$G_{c2,9}(k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1, k'' \geq 0$
$G_{c2,10}(1, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,10}(2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{c2,10}(j, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,11}(1, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{c2,11}(j, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,12}(1, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,12}(2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{c2,12}(j, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,13}(1, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,13}(2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{c2,13}(j, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,14}(1, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{c2,14}(j, k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k'' \geq 0$
$G_{c2,15}(-1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,15}(k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k'' \geq 0$
$G_{c2,16}(-1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,16}(k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k'' \geq 0$
$G_{c2,17}(-1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,17}(k'')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k'' \geq 0$
$G_{c2,18}(-1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(), (), (3)_4, (4)_4$	

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{c2,18}(k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{c2,19}(1, -1)$	$(7), (1, 6)_2$	$[0,1]$	$(\), (\), (3)_4, (4)_4$	
$G_{c2,19}(2, -1)$	$(\), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{c2,19}(j, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$

A.4 Tables pour $T = D = \langle a, c \rangle$

Pour les groupes infinis, on a les résultats suivants :

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Compl.
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, y_1v_1, H_1^1 \rangle$	$(13, 33), (1, 12)_2, (32)_2$	$[1,2]$	$(\), (\), (\), (29)_4, (30)_4$	
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_1^2 \rangle$	$(13, 33), (1, 12)_2, (32)_2$	$[1,2]$	$(\), (\), (\), (29)_4, (30)_4$	
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_2^1 \rangle$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_2^2 \rangle$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_2^4 \rangle$	$(\), (1), (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_2^n \rangle$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$n \nmid 4$
$\langle cu_2^{-1}, au_1v_1, H_3 \rangle$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		

Pour les groupes de la liste \mathcal{D}_1 , on a les résultats dans les tableaux ci-après.

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d1,1}(1, 2, -1)$	$(\), (1, 6)_2, (2)_2, (3)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(\), \dots, (\), (3)_4, (4)_4$	
$G_{d1,1}(1, k, -1)$	$(\), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(\), \dots, (\), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 3$
$G_{d1,1}(2, 2, -1)$	$(\), (1)_2, (2)_2, (3)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d1,1}(2, k, -1)$	$(\), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 3$
$G_{d1,1}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,2}(1, 2, -1)$	$(7), (1)_2, (2)_2, (3)_2, (6)_2$	$[0,1]$		
$G_{d1,2}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		$k \geq 3$
$G_{d1,2}(2, 2, -1)$	$(\), (1)_2, (108)_4, (109)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,2}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ ou $j = 2, k \geq 3$
$G_{d1,3}(1, 2, -1)$	$(\), (1, 6)_2, (7)_2, (108)_4, (109)_4$	$[0,1]$	$(\), \dots, (\), (3)_4, (4)_4$	
$G_{d1,3}(1, k, -1)$	$(\), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(\), \dots, (\), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 3$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d1,3}(2, 2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2,$ $(108)_4, (109)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,3}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 3$
$G_{d1,3}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,4}(1, 2, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2,$ $(108)_4, (109)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,4}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_4$	$[0,1]$		$k \geq 3$
$G_{d1,4}(2, 2, -1)$	$(), (1)_2, (2)_4, (3)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,4}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ ou $j = 2, k \geq 3$
$G_{d1,5}(1, 1, -1)$	$(), (2, 6, 12)_2, (3, 7)_2,$ $(1)_2, (13)_2$	$[0,1,0,1,1]$	$(), \dots, (),$ $(7)_4, (8)_4$	
$G_{d1,5}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,5}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2,$ $(16)_2, (17)_2$	$[0,1,1,1]$		
$G_{d1,5}(2, 2, -1)$	$(), (1)_2, (2)_4, (3)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,5}(2, k, -1)$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 3$
$G_{d1,5}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2$	$[0,1,1,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,5}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,6}(1, 1, -1)$	$(), (1)_2, (108, 110)_4,$ $(109)_4, (111)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,6}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (110)_4, (111)_4$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,6}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,7}(1, 1, -1)$	$(), (1, 2, 6)_2, (3, 7)_2, (12)_2, (13)_2$	$[0,1,0,1,1]$		
$G_{d1,7}(1, k, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,7}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2, (2, 6)_2, (3, 7)_2$	$[0,1,1,1]$		
$G_{d1,7}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,7}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2$	$[0,1,1,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,7}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,8}(1, 1, -1)$	$(3, 7), (1)_2, (12)_2, (13)_2, (2, 6)_2$	$[0,1,1,1]$		
$G_{d1,8}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,8}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2, (108)_4, (109)_4$	$[0,1,1,1]$		
$G_{d1,8}(2, k, -1)$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,8}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (12)_2, (13)_2$	$[0,1,1,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d1,8}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,9}(1, 1, -1)$	$(3), (1, 6)_2, (2)_2, (7)_2,$ $(110)_4, (111)_4$	[0,1]		
$G_{d1,9}(1, k, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	[0,1]		$k \geq 2$
$G_{d1,9}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (2)_2, (3)_2,$ $(6)_2, (7)_2, (110)_4, (111)_4$	[0,1]		
$G_{d1,9}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	[0,1]		$k \geq 2$
$G_{d1,9}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (110)_4, (111)_4$	[0,1]		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,9}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,10}(1, 1, -1)$	$(7), (1, 2)_2, (3)_2,$ $(6)_2, (110)_4, (111)_4$	[0,1]		
$G_{d1,10}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	[0,1]		$k \geq 2$
$G_{d1,10}(2, 1, -1)$	$(), (1)_2, (108)_4, (109)_4,$ $(110)_4, (111)_4$	[0,1]		
$G_{d1,10}(2, k, -1)$	$(), (1)_2$	[0,1]		$k \geq 2$
$G_{d1,10}(j, 1, k')$	$(), (1)_2, (110)_4, (111)_4$	[0,1]		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,10}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d1,11}(1, 1, -1)$	$(), (1, 2)_2, (3)_2, (6)_2, (7)_2$	[0,1]		
$G_{d1,11}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	[0,1]		$k \geq 2$
$G_{d1,11}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,12}(1, 1, -1)$	$(3), (1)_2, (2)_2, (6)_2, (7)_2$	[0,1]		
$G_{d1,12}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	[0,1]		$k \geq 2$
$G_{d1,12}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d1,13}(2, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (2)_2, (3)_2, (7)_2$	[0,1]		
$G_{d1,13}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	[0,1]		$k \geq 3$
$G_{d1,13}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d1,14}(2, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (2)_2, (108)_4, (109)_4$	[0,1]		
$G_{d1,14}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	[0,1]		$k \geq 3$
$G_{d1,14}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	[0,1]		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d1,15}(1, -1)$	$(3), (1, 6)_2, (111)_4, (2)_2,$ $(7)_2, (110)_4$	[0,1]	$(), (4),$ $(), \dots, (3)$	
$G_{d1,15}(k, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	[0,1]	$(), (3), (4)$	$k \geq 2$
$G_{d1,15}(1, k')$	$(), (1)_2, (110)_4, (111)_4$	[0,1]		$k' \geq 0$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d1,15}(k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d1,16}(k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,16}(k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d1,17}(1, \epsilon, -1)$	$(2, 6), (1)_2, (12)_2, (13)_2, (3, 7)_2$	$[0,1,1,1]$		
$G_{d1,17}(1, \epsilon, k')$	$(\), (1)_2, (12)_2, (13)_2$	$[0,1,1,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d1,17}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,17}(k, \epsilon, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d1,18}(1, \epsilon, -1)$	$(6), (1, 3)_2, (2)_2,$ $(7)_2, (110)_4, (111)_4$	$[0,1]$		
$G_{d1,18}(1, \epsilon, k')$	$(\), (1)_2, (110)_4, (111)_4$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d1,18}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,18}(k, \epsilon, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d1,19}(1, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (2)_2, (3)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d1,19}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d1,19}(k, \epsilon, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1, k' \geq 0$

Pour la famille \mathcal{D}_2 , les résultats sont dans les tables suivantes. Pour chacun de ces groupes, j' sera quelconque (on ne le réprécise pas dans les tableaux).

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d2,1}(1, k, -1)$	$(\), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(\), (\), (\), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2$
$G_{d2,1}(2, k, -1)$	$(\), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,1}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d2,2}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,2}(2, 2, -1)$	$(\), (1)_2, (108)_4, (109)_4$	$[0,1]$		
$G_{d2,2}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ ou $j = 2, k \geq 3$
$G_{d2,3}(1, k, -1)$	$(\), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(\), (\), (\), (3)_4, (4)_4$	$k \geq 2$
$G_{d2,3}(2, k, -1)$	$(\), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,3}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$ et $k \geq 2$
$G_{d2,4}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_4$	$[0,1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,4}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,5}(1, k, -1)$	$(\), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,5}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,6}(j, k, k')$	$(\), (1)_2$	$[0,1]$		

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d2,7}(1, k, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,7}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,7}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,8}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,8}(2, k, -1)$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,8}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,9}(1, k, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,9}(2, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,9}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,10}(1, k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,10}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,11}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,11}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,12}(1, k, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,12}(j, k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,13}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,13}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d2,14}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,14}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d2,15}(k, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (), (3), (4),$	$k \geq 1$
$G_{d2,15}(k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1, k' \geq 0$
$G_{d2,16}(k, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 2$
$G_{d2,16}(k, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 2, k' \geq 0$
$G_{d2,17}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,17}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1, k' \geq 0$
$G_{d2,18}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,18}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1, k' \geq 0$
$G_{d2,19}(k, \epsilon, -1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1$
$G_{d2,19}(k, \epsilon, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$k \geq 1, k' \geq 0$
$G_{d2,20}(1, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (), (3)_4, (4)_4,$	
$G_{d2,20}(2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		
$G_{d2,20}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,21}(1, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		
$G_{d2,21}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,22}(1, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$	$(), (), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{d2,22}(2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		
$G_{d2,22}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0, 1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,23}(1, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0, 1]$		

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{d2,23}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,24}(-1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,24}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,25}(-1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,25}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,26}(-1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,26}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,27}(-1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,27}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,28}(-1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,28}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,29}(-1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,29}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,30}(-1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(), (), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{d2,30}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,31}(-1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,31}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,32}(1, -1)$	$(), (1, 6)_2, (7)_2$	$[0,1]$	$(), (), (), (3)_4, (4)_4$	
$G_{d2,32}(2, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,32}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 3$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,33}(1, -1)$	$(7), (1)_2, (6)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,33}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,34}(1, -1)$	$(), (1)_2, (6)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,34}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $k' \geq 0$
$G_{d2,35}(j, k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 1, k' \geq -1$
$G_{d2,36}(-1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,36}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$
$G_{d2,37}(-1)$	$(6), (1)_2, (7)_2$	$[0,1]$		
$G_{d2,37}(k')$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$k' \geq 0$

A.5 Tables pour $T = A_4$

Le groupe infini n'admet qu'un (semi-)invariant, qui est produit de formes linéaires : c'est P_1 . On a les résultats suivants pour les groupes finis :

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{a4,1}(1, -1)$	$(1, 2, 12 + 6), (), (70)_3, (71)_3$	$[3]$	$(), (7)_2$	$j'' = -1$
$G_{a4,1}(2, -1)$	$(1), (2)_2$	$[1]$		$j'' = -1$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{a4,1}(j, j')$	(1)	[1]		$j \geq 3, j' \geq 0$ ou $j'' \geq 0$
$G_{a4,2}(1, -1)$	(1), (5) ₂	[1]		$j'' = -1$
$G_{a4,2}(j, j')$	(1)	[1]		$j \geq 2, j' \geq 0$ ou $j'' \geq 0$
$G_{a4,3}(1, -1)$	(1), (), (2, 12 + 6) ₂ , (70) ₃ , (71) ₃	[1]	(), (7) ₂	$j'' = -1$
$G_{a4,3}(2, -1)$	(1), (2) ₂	[1]		$j'' = -1$
$G_{a4,3}(j, j')$	(1)	[1]		$j \geq 3, j' \geq 0$ ou $j'' \geq 0$
$G_{a4,4}(1, -1)$	(1), (3) ₂	[1]		$j'' = -1$
$G_{a4,4}(j, j')$	(1)	[1]		$j \geq 2, j' \geq 0$ ou $j'' \geq 0$
$G_{a4,5}(1, -1)$	(1, 2)	[1]		$j'' = -1$
$G_{a4,5}(j, j')$	(1)	[1]		$j \geq 2, j' \geq 0$ ou $j'' \geq 0$
$G_{a4,6}(-1)$	(1, 2, 12 + 6), (70) ₃ , (71) ₃	[1]	(7)	$j'' = -1$
$G_{a4,6}(j')$	(1)	[1]		$j' \geq 0$ ou $j'' \geq 0$
$G_{a4,7}(j', \mu)$	(1)	[1]		$j' \geq 0, \mu \in \{-1, 0, 1\}$ et $j'' \geq -1$
$G_{a4,8}(j', \mu)$	(1)	[1]		$j' \geq 0, \mu \in \{0, 1\}$ et $j'' \geq -1$
$G_{a4,9}(\mu)$	(1)	[1]		$\mu \in \{-1, 0, 1\}$ et $j'' \geq -1$
$G_{a4,10}(\mu)$	(1)	[1]		$\mu \in \{0, 1\}$ et $j'' \geq -1$

A.6 Tables pour $T = S_4$

Le groupe infini n'admet qu'un semi-invariant, qui est produit de formes linéaires : c'est P_1 . On a les résultats suivants pour les groupes finis :

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{s4,1}(1)$	(), (1, 2, 12 + 6) ₂	[0,3]	(), (), (7)	$j' = -1$
$G_{s4,1}(2)$	(), (1), (2) ₂	[0,1]		$j' = -1$
$G_{s4,1}(j)$	(), (1)	[0,1]		$j \geq 3$ ou $j' \geq 0$
$G_{s4,2}(1)$	(), (2, 12 + 6) ₂ , (1)	[0,0,1]	(), ..., (), (7) ₂	$j' = -1$
$G_{s4,2}(2)$	(), (1) ₂ , (2) ₂	[0,1]		$j' = -1$
$G_{s4,2}(j)$	(), (1) ₂	[0,1]		$j \geq 3$ ou $j' \geq 0$
$G_{s4,3}(1)$	(), (2, 12 + 6) ₂ , (1) ₂	[0,0,1]	(), ..., (), (7) ₂	$j' = -1$
$G_{s4,3}(2)$	(), (1) ₂ , (2) ₂	[0,1]		$j' = -1$
$G_{s4,3}(j)$	(), (1) ₂	[0,1]		$j \geq 3$ ou $j' \geq 0$
$G_{s4,4}(1)$	(), (1) ₂ , (3) ₂	[0,1]		$j' = -1$
$G_{s4,4}(j)$	(), (1) ₂	[0,1]		$j \geq 2$ ou $j' \geq 0$
$G_{s4,5}(1)$	(), (1, 2) ₂	[0,1]		$j' = -1$
$G_{s4,5}(j)$	(), (1) ₂	[0,1]		$j \geq 2$ ou $j' \geq 0$
$G_{s4,6}(1)$	(2), (1) ₂	[0,1]		$j' = -1$

Groupe	(Semi-)invariants de degré 4	pfl	s-i degré 2	Complément
$G_{s4,6}(j)$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j \geq 2$ ou $j' \geq 0$
$G_{s4,7}(-2)$	$(2, 12 + 6), (1)_2$	$[0,1]$	$(7)_2$	$j' = -1$
$G_{s4,7}(0)$	$(2, 12 + 6), (1)_2$	$[0,1]$	$(), (7)_2$	$j' = -1$
$G_{s4,7}(\nu)$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$\nu \in \{-2, 0\}$ et $j' \geq 0$
$G_{s4,8}$	$(2, 12 - 6), (1)_2$	$[0,1]$	$(), (), (8)_2$	$j' = -1$
$G_{s4,8}$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		$j' \geq 0$
$G_{s4,9}$	$(), (1)_2$	$[0,1]$		

Annexe B

Programmes de calcul des semi-invariants d'un groupe.

Le calcul des semi-invariants de degré 2 et 4 des différents sous-groupes de $SL(4, \mathbb{C})$ a été réalisé en utilisant les programmes suivants (en Magma).

semireyb calcule l'image (à un scalaire près) d'un polynôme f par l'opérateur de Reynolds associé à un caractère xi d'un groupe donné (L est la liste des éléments du groupe avec leur numero de classe). La fonction suivante calcule la série de Hilbert associée à un caractère d'un groupe donné en se fondant sur la version semi-invariants du théorème de Molien (théorème 2.2.3).

```
semireyb:=function(L,xi,f)
  s:=0;
  for u in L do
    s:=s+f^u[1]*1/xi[u[2]];
  end for;
return s;
end function;
// série de Hilbert
semimol:=function(L,xi,ord,A)
  CDM<t>:=FieldOfFractions(PolynomialRing(A));
  GLG:=MatrixAlgebra(CDM,4);
  id:=GLG![1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1];
  matt:=GLG![t,0,0,0,0,t,0,0,0,0,t,0,0,0,0,t];
  s:=0;
  for u in L do
    mataux:=GLG!u[1];
    s:=s+1/(xi[u[2]]*Determinant(id-matt*mataux));
  end for;
return s/ord;
end function;
```

La fonction suivante permet de calculer une base de l'espace des semi-invariants d'un certain degré associés à un caractère χ d'un groupe donné. La dimension dim de cet espace est supposée connue (et se calcule grâce au théorème de Molien et au programme précédent).

```

rechinvb:=function(L,xi,ord,M,dim,lipar)
// L: liste des éléments du groupe avec leur numéro de classe de conjugaison;
// ord: ordre du groupe; M: liste des monômes du degré qui nous intéresse;
// lipar: une liste de paramètres donnée par l'utilisateur
  i:=1;j:=1; //i-1: cardinal de la famille libre construite
  N:=#M;      //j: monôme à étudier
  while (i le dim) and (j le N) do
    u:=semireyb(L,xi,M[j]);
    if u ne 0 then
      u:=u/LeadingCoefficient(u);
      if i eq 1 then
        res:=[u]; i:=2; sommebg:=lipar[1]*u;
      else
        bg:=GroebnerBasis([Numerator(e1) : e1 in Coefficients(sommebg+u)]);
        // ce calcul permet de vérifier si le nouvel élément non nul est
        // une combinaison linéaire des précédents; si ce n'est pas le cas,
        // on l'ajoute à la famille libre précédemment obtenue
        if (#bg eq 1) and (bg[1] eq 1) then
          res:=res cat [u];
          sommebg:=sommebg+lipar[i]*u;
          i:=i+1;
        end if;
      end if;
    end if;
  end while;
  return res,sommebg; //res est une base de l'espace qui nous intéresse;
  //sommebg est un élément générique de cet espace donné comme
  //combinaison linéaire des vecteurs de notre base
end function;

```

Ensuite, pour chaque famille de groupes, on cherche un sous-groupe commun à tous les groupes de la famille, on en calcule les semi-invariants puis on étudie l'action des matrices à paramètres sur ceux-ci. Prenons l'exemple de la famille des groupes $G_{v,1}(j, k, l) = \langle a, b, x_1, y_j, u_k, v_l \rangle \supset \langle a, b, x_1, y_1, u_2, v_3 \rangle$ ($1 \leq j < k < l$). On a les lignes de commande suivantes :

```

expo:=16;
A<z>:=CyclotomicField(expo);

```

```

im:=z^(expo div 4);rac8:=z^(expo div 8);racim:=z^(expo div 16);
// définition du sous-groupe commun aux groupes de la famille
MG:=GeneralLinearGroup(4,A);
ma:=MG![0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0];
mb:=MG![0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0];
my1:=MG![im,0,0,0,0,im,0,0,0,0,-im,0,0,0,0,-im];
mx1:=MG![im,0,0,0,0,im,0,0,0,0,im,0,0,0,0,im];
mu2:=MG![rac8,0,0,0,0,1/rac8,0,0,0,0,rac8,0,0,0,0,1/rac8];
mv3:=MG![1/racim,0,0,0,0,racim,0,0,0,0,racim,0,0,0,0,1/racim];
grc:=MatrixGroup<4,A|ma,mb,mx1,my1,mu2,mv3>;
// vers la calcul des semi-invariants
ord:=Order(grc);C:=Classes(grc);Xdar:=CharacterTable(grc);
R<iw3,iw4,iw5,iw1,iw2,iw6,iw7,iw8,iw9,iw10,iwu,iwy,iwv,iwup,iwvp,iwyp,
a1,a2,a3,w3,w4,w1,w5,w2,w6,w7,w8,w9,w10,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,
c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,c22,c23,c24,c25,c26,c27,c28,c29,c30,
wu,wy,wv,wup,wyp,wvp>:=PolynomialRing(A,65,"lex");
FR:=FieldOfFractions(R); Q<x1,x2,x3,x4>:=PolynomialRing(FR,4,"lex");
para:=[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,
c21,c22,c23,c24,c25,c26,c27,c28,c29,c30];
P<u> := PowerSeriesRing(IntegerRing());
load "fonct.m"; // contient en particulier les programmes décrits précédemment
L:=listeL(grc); // liste des éléments de grc et de leur numéro
// de classes de conjugaison
M4:=monomes(4);M2:=monomes(2); //liste des monômes en x1,...,x4 de degré 2 ou 4
MG2:=GeneralLinearGroup(4,FR);
mu:=MG2![wu,0,0,0,0,iwu,0,0,0,0,wu,0,0,0,0,iwu];
my:=MG2![wy,0,0,0,0,wy,0,0,0,0,iwy,0,0,0,0,iwy];
mv:=MG2![iwv,0,0,0,0,wv,0,0,0,0,wv,0,0,0,0,iwv];

// calcul des invariants
// dimensions des espaces d'invariants sous grc
> xi:=Xdar[1];sr:=semimol(L,xi,ord,A);P ! sr;
1 + 2*u^4 + 4*u^8 + 6*u^12 + 12*u^16 + 20*u^20 + 30*u^24 + 41*u^28 + 59*u^32 +
82*u^36 + 0(u^37)
// base de l'espace des invariants de degré 4 sous grc
> l,u:=rechinvb(L,xi,ord,M4,2,para);l;
[ x1^2*x2^2 + x3^2*x4^2, // c'est $P_8$ avec les notations de l'annexe A.1
x1*x2*x3*x4 ] // c'est $P_1$ avec les notations de l'annexe A.1

// action des matrices à paramètres sur une combinaison linéaire générique
// de ceux-ci (ici u)
> als:=[Numerator(el) : el in Coefficients(u^mv-w3*u)];
als:=als cat [Numerator(el) : el in Coefficients(u^my-w1*u)];

```

```

als:=als cat [Numerator(el) : el in Coefficients(u^mu-w2*u)];
als:=als cat [1-iwu*wu,1-iwv*wv,1-iwy*wy];bg:=GroebnerBasis(als);bg;
[   iwu*wu - 1,
    iwy*c1 - c1*wy^7,
    iwy*wy - 1,
    iwv*wv - 1,
    w3*c1 - c1,
    w3*c2 - c2,
    w1*c1 - c1*wy^4,
    w1*c2 - c2,
    w2*c1 - c1,
    w2*c2 - c2,
    c1*c2*wy^4 - c1*c2,
    c1*wy^8 - c1 ]
// utilisation du critère de van Hoeff-Ragot-Ulmer-Weil pour chercher
// les (éventuels) produits de formes linéaires
> v:=Resultant(u,x1+a1*x2+a2*x3+a3*x4,x1);
w:=[Numerator(el): el in Coefficients(v)];bg2:=GroebnerBasis(w cat bg);bg2;
[   iwu*wu - 1,
    iwy*wy - 1,
    iwv*wv - 1,
    a1*c2,
    a2*c2,
    a3*c2,
    w3*c2 - c2,
    w1*c2 - c2,
    w2*c2 - c2,
    c1 ]

```

On procède de même pour tous les caractères linéaires de grc et on dresse alors la table des semi-invariants des groupes de la famille $G_{v,1,1}$. Ici, on trouve les polynômes suivants en degré 4 en exploitant les résultats donnés par le caractère trivial. Comme $wy^2 = -1$ correspond au cas $j = 1$, on a alors un espace de dimension 2 d'invariants engendré par P_1 et P_8 avec un seul produit de formes linéaires (à multiple près). Pour $j = 2$ (i.e. $wy^4 = -1$), on trouve une droite d'invariants produits de formes linéaires (engendrée par P_1) et une droite de semi-invariants d'ordre 2 non produits de formes linéaires (engendrée par P_8). Pour $j \geq 3$, on n'a plus qu'une droite d'invariants produits de formes linéaires (engendrée par P_1).

Les résultats ainsi obtenus sont dans les tables de l'annexe A.

Annexe C

Version originale de l'article [8] traduit en 3.1

C.0.1 Introduction

Let k be a field and δ a derivation on k whose field of constants \mathcal{C} is algebraically closed of characteristic 0 (e.g. $\overline{\mathbb{Q}}(x)$ with the usual derivation d/dx). For the derivation δ of k and $a \in k$ we write $\delta^m(a) = a^{(m)}$ and also $a^{(1)} = a'$, $a^{(2)} = a''$, \dots . Any n -th order linear differential equation can be transformed to

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_0 y = 0, \quad a_i \in k \quad (\text{C.1})$$

The differential Galois group \mathcal{G} of $L(y)$ is a subgroup of $SL(n, \mathcal{C})$.

Definition C.0.1 *Let V be a \mathcal{C} -vector space, let Y_1, \dots, Y_n be a basis for V and let $G \subseteq GL(V)$ be a linear group. Define a group action of $\sigma \in G$ on $I \in \mathcal{C}[Y_1, \dots, Y_n]$ by $\sigma \cdot (I(Y_1, \dots, Y_n)) = I(\sigma(Y_1), \dots, \sigma(Y_n))$. If a homogeneous $I \in \mathcal{C}[Y_1, \dots, Y_n]$ of degree m has the property that*

$$\forall \sigma \in G, \quad \sigma \cdot I(Y_1, \dots, Y_n) = \psi_I(\sigma) \cdot (I(Y_1, \dots, Y_n)), \\ \text{with } \psi_I(\sigma) \in \mathcal{C}$$

then $\psi_I: G \rightarrow \mathcal{C}$ is a one dimensional character of G and I is a semi-invariant of degree m of G with character ψ_I . If ψ_I is the trivial character $\mathbb{1}$ of G , then I is an invariant of degree m of G . If $j \in \mathbb{N}$ is minimal such as $(\psi_I)^j = \mathbb{1}$, then j is the order of the character ψ_I and of the semi-invariant I .

From [58] Theorem 3 we get that the existence of a Liouvillian solution of the form $z = e^{\int u}$ where u is algebraic over k is equivalent to the existence of a semi-invariant that factors into linear forms. If $m = [k(u) : k]$ is minimal, then m is the minimal degree of a form that factors into linear forms. For each order n it is possible to derive a finite list of possible m that have to be considered in order to compute Liouvillian solutions of $L(y) = 0$. For second order equations the smallest possible list is given in [39] and for third order equations in [56].

Definition C.0.2 Let $G \subset GL(V)$ be a linear group acting irreducibly on the vector space V of dimension n over \mathcal{C} . Then G is said to be *imprimitive* if there exist subspaces V_1, \dots, V_k with $k > 1$ such that $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ and, for each $g \in G$, the mapping $V_i \rightarrow g(V_i)$ is a permutation of the set $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$. The set \mathcal{S} is called a *system of imprimitivity* of G . If all the subspaces V_i are one dimensional, then G is called *monomial*. An irreducible group $G \subset GL(V)$ which is not imprimitive is called *primitive*.

For primitive groups of degree 4, the list of smallest possible m , $\{4, 5, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 40, 48, 60, 72, 120\}$ is derived in [18].

A representation of a group G is imprimitive if the character of the representation is irreducible and induced by the character of a subgroup. If a given system of imprimitivity cannot be further decomposed, then the restriction of the stabilizer \mathcal{G}_i of V_i in \mathcal{G} to V_i , which we denote $H_i = \rho_i(\mathcal{G}_i)$, is a primitive group of degree $d = \dim(V_i)$. If $n = 4$ and $d = 2$ then $H_i/Z(H_i)$ is conjugated to either A_4, S_4, A_5 or $PSL(2, \mathbb{C})$ ([6, 39, 56]). In this case we say that the imprimitive representation is *of type* A_4, S_4, A_5 or $PSL(2, \mathbb{C})$.

From [56] Theorem 3.2 and [55] Proposition 2.1 we get the following upper bounds for m where $z = e^{\int u}$ is a Liouvillian solution with $[k(u) : k] = m$

1. 4 if $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ monomial.
2. $8 = 2 \cdot 4$ if $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ is of type A_4 .
3. $12 = 2 \cdot 6$ if $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ is of type S_4 .
4. $24 = 2 \cdot 12$ if $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ is of type A_5 .
5. There are no Liouvillian solutions if $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ is of type $PSL(2, \mathbb{C})$.

In the following we will refer to the above bounds as the *standard* bounds. It is known that the standard bounds are not best possible for $n = 6$ ([17, 18]) and we will show that for $n = 4$ they are also not best possible. The above notion of *type* of an imprimitive group is ambiguous since we will see that a group can be of several distinct types (cf. example C.0.4 and example C.0.5). We thus define the type of a group as the group A_4, S_4 or A_5 of lowest possible order among the possible types. This will associate the smallest possible standard bound to a group.

In this paper we investigate if the bounds above are best possible for each type.

C.0.2 Monomial groups

The following explicit version of [55] Proposition 3.6 shows that it is possible to characterize the equation $L(y)$ whose Galois group $\mathcal{G} \subset SL(4, \mathcal{C})$ is monomial :

Lemma C.0.3 *Let $L(y) = 0$ be an irreducible linear differential equation of order n with $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathcal{C})$.*

1. If there exists a solution $z = e^{\int u}$ with $[k(u) : k] = m$, then $m \geq n$.
2. The differential Galois group \mathcal{G} of $L(y)$ is monomial if and only if there exists a solution $z = e^{\int u}$ such that $[k(u) : k] = n$.

Proof.

1. Suppose that $L(y) = 0$ has a Liouvillian solution $z = e^{\int u}$ with $[k(u) : k] = m$ and such that m is minimal. Since \mathcal{G} sends the logarithmic derivative $u = z'/z$ into another logarithmic derivative, the minimal polynomial $P \in k[U]$ of u must be of the form

$$P = \prod_{i=1}^m \left(U - \frac{z'_i}{z_i} \right)$$

where the z_i are solutions of $L(y) = 0$. Since \mathcal{G} sends z'_i/z_i to z'_j/z_j , it sends z_i to a multiple of z_j . In particular the space spanned by z_1, \dots, z_m is \mathcal{G} -invariant. Since $L(y)$ is irreducible, the group $\mathcal{G} \subset GL(m, \mathcal{C})$ is an irreducible linear group, showing that $m \geq n$.

2. Keeping the above notation, suppose now that $m = n$. Then in the basis z_1, \dots, z_n the group \mathcal{G} sends a solution z_i into a multiple of some z_j . Therefore in this basis the representation of \mathcal{G} is monomial. Conversely, if \mathcal{G} is monomial in some basis y_1, \dots, y_n , then \mathcal{G} permutes the y'_i/y_i which are therefore of degree at most n . Since $\mathcal{G} \subset GL(n, \mathcal{C})$ is irreducible, we get from the above that the orbit of $u = y'_1/y_1$ cannot be less than n , showing that $[k(u) : k] = n$.

□

Example C.0.4 *The transitive group G of degree 16 of number 189 in the classification of [16] is of order 96. We will use the method presented in [47] to compute a linear differential equation with this group as differential Galois group and whose solution space is a subspace of the space of holomorphic one forms of some Galois cover with Galois group G . This group has two characters of degree 4 which are both unimodular and induced by the one dimensional character of a subgroup and thus monomial. The group can be generated by elements σ_1 and σ_2 belonging to the unique conjugacy class of size 12 whose elements are of order 4 and to a conjugacy class of elements of order 12 with the property that $\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_2)^{-1}$ is of order 8. Consider a Galois cover of \mathbf{P}^1 with Galois group G ramified in $0, 1, \infty$ according to $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. The character of G on the space of holomorphic one forms (cf. [47], Theorem 4.2) contains both characters of degree 4 exactly once. From the character table (cf. [47] Section 5.2) we get that the smallest possible exponents at $0, 1, \infty$ are $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\}$, $\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{12}, -\frac{7}{12}\}$ and $\{1 + \frac{5}{8}, 1 + \frac{1}{8}, 1 + \frac{7}{8}, 1 + \frac{3}{8}\}$. Since they add up to 6, there is no apparent singularity and the above must be the actual exponents (cf. [47] Section 6.3.1). Therefore an equation with those exponents at $0, 1, \infty$ must exist. According to ([35] Section*

15.4) the exponents determine the equation up to 3 accessory parameters b_0 , c_1 and c_0 :

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{12x - 5}{x(x-1)} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{11043x^2 - 9359x + 1080}{288(x-1)^2 x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ & \frac{4806x^2 + (144b_0 - 4655)x - 144b_0}{144(x-1)^3 x^2} \frac{dy}{dx} + \\ & \left(\frac{57915x^3 + (12288c_1 - 59147)x^2}{12288x^3(x-1)^4} \right. \\ & \left. + \frac{(12288c_0 - 12288c_1)x - 12288c_0}{12288x^3(x-1)^4} \right) y. \end{aligned}$$

Since we have three tuples of exponents at some singularities where the exponents differ by integers, it is possible to compute the accessory parameters using the approach given in [47] Section 6.2 in order to get :

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{12x - 5}{x(x-1)} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{11043x^2 - 9359x + 1080}{288(x-1)^2 x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ & \frac{19224x^2 - 25097x + 6477}{576(x-1)^3 x^2} \frac{dy}{dx} + \\ & \frac{47171 + 57915x^2 - 106318x}{12288x^2(x-1)^4} y. \end{aligned}$$

By construction we must have $\mathcal{G} \cong G$. It is interesting to note that \mathcal{G} can also be induced by a 2 dimensional character of a subgroup which is projectively equivalent to A_4 . The group G is thus monomial and of type A_4 . \square

C.0.3 Imprimitve non monomial groups

The finite imprimitive non monomial subgroups of $Gl(4, \mathcal{C})$ are classified projectively, i.e. up to scalar multiples, by H.F. Blichfeldt in [6] and we will use the notation introduced there in the following. Blichfeldt gives 14 types of finite imprimitive groups. The groups belonging to the families 1° to 6° are of type A_4 , those belonging to the families 7° to 11° are of type S_4 and those belonging to the families type 12° to 14° are of type A_5 . However those families are not disjoint :

Example C.0.5 Taking $\alpha = 1$ and $\beta = -1$ in the family 7° we get the group G of order 192 generated by

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1-\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1-\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} -\xi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi \end{array} \right)$$

where $\xi^4+1=0$. The group G has 7 subgroups of order 96. One of them, denoted K_1 is generated by :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{-\xi-\xi^3}{2} & \frac{\xi-\xi^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\xi-\xi^3}{2} & \frac{-\xi-\xi^3}{2} \\ \frac{\xi+\xi^3}{2} & \frac{-xi+\xi^3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\xi+\xi^3}{2} & \frac{\xi+\xi^3}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

and

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{\xi+\xi^3}{2} & \frac{\xi+\xi^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\xi+\xi^3}{2} & \frac{-\xi-\xi^3}{2} \\ \frac{-\xi-\xi^3}{2} & \frac{-\xi-\xi^3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\xi-\xi^3}{2} & \frac{\xi+\xi^3}{2} & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Another one, denoted K_2 is generated by

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{-1+\xi^2}{2} \\ \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-\xi^2}{2} & \frac{-1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

and

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} \\ \frac{1+\xi^2}{2} & \frac{1+\xi^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1+\xi^2}{2} & \frac{1-\xi^2}{2} & 0 & 0 \end{array} \right).$$

The representation of each subgroup K_i is a sum of two irreducible representations of dimension 2 and we denote one of those characters χ_i . Since $(\chi_i)^G$ is the character of G we get a system of imprimitivity for each group K_i . Denoting H_i the kernel of χ_i and $Z(H_i)$ the center of H_i we have $|H_1/Z(H_1)| = 24$ and $|H_2/Z(H_2)| = 12$, which proves that G is of type A_4 and S_4 . It is however natural to consider this group as a group of type A_4 (cf. Section 1). \square

Theorem C.0.1 Let $L(y) = 0$ be an irreducible fourth order linear differential equation whose differential Galois group is an imprimitive non monomial subgroup of $SL(4, \mathbb{C})$. If \mathcal{G} is respectively of type A_4 , S_4 or A_5 , then there exists a solution $z = e^{\int u}$ where $[k(u) : k]$ is minimal and equal to resp. 8, 12 or 24, with the exception of the group of family number 13° with $n = 1$ of type A_5 where there exists a solution $z = e^{\int u}$ with $[k(u) : k] = 20$.

Proof.

We note that there exists a Liouvillian solution of $L(y) = 0$ if and only if the non monomial imprimitive group \mathcal{G} is of type A_4 , S_4 or A_5 . The result is obtained by computation using the classification of the finite imprimitive non monomial groups given in [6]. Since we show that there is only one finite imprimitive non monomial group for which the classical bound is not best possible, the classical bound will always be best possible for the infinite imprimitive non monomial groups which, by construction, contain finite imprimitive non monomial groups of arbitrary large order (cf. [30], Theorem 2.2.3).

We illustrate the approach on the first family of subgroups G_1^n of [6] whose elements are of type A_4 . An imprimitive group in this family is generated by

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_4(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad S_3(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -ib & ib \end{pmatrix}$$

where

$$a^n = 1 \quad \text{and} \quad b^{3n} = 1.$$

Note that the classification given in [6] is a *projective* classification, i.e. up to scalar multiples. From [56] Lemma 3.1 we get that the minimal index $[k(u) : k]$ is the index of a 1-reducible subgroup of minimal index, which is invariant up to projective equivalence [63]. Therefore it is possible to work with the matrices given in [6], even if they are not unimodular.

Since the existence of a solution $z = e^{\int u}$ with $[k(u) : k] = m$ minimal is equivalent to the existence of a semi-invariant of degree m that factors into linear forms, our goal is to show that for no value of the parameters there exists a semi-invariant that factors into linear forms of degree less than 8, which is the standard bound for the type A_4 . Since the groups in [6] are irreducible, there will be no such semi-invariant of degree < 4 (cf. proof of Lemma C.0.3).

In order to construct the semi-invariants of the group G_1 we first consider the finite subgroup \tilde{G}_1 generated by the non parametrized matrices R_1, S_1, S_2 .

For each linear character ψ of \tilde{G}_1 , we compute the dimensions of the spaces $V_{\psi,d}$ of semi-invariants of \tilde{G}_1 of degree less than 8 with character ψ . We use the

Molien series (Theorem 2.2.1 of [61]) that we generalize to non necessarily trivial characters. For a group G and a character ψ of G we get :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \frac{1}{\psi(u)} \frac{1}{\det(I - zu)} = \sum_{d=0}^{\infty} \dim(V_{\psi,d}) z^d.$$

We start with the invariants of \tilde{G}_1 , which are the semi-invariants corresponding to the trivial character of \tilde{G}_1 . The Molien series of \tilde{G}_1 is

$$1 + 2u^2 + 7u^4 + 12u^6 + O(u^8)$$

showing that the space of invariants of degree 2, 4, 6 is respectively 2, 7, 12. Using the Reynolds operator, we compute invariants of degree 4 until we get 7 linearly independent ones and we get :

$$\begin{aligned} \tilde{B} = & [x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4, \\ & x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2, \\ & x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_4 + x_2 x_4^3, \\ & x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_3 x_4^2 + x_2 x_3^2 x_4, \\ & x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2, \\ & x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2, \\ & x_1 x_2 x_3 x_4]. \end{aligned}$$

Invariants of degree 4 of G_1 must be linear combinations of the above invariants of \tilde{G}_1 and thus be of the form $f = \sum_{I \in \tilde{B}} \alpha_I I$, but invariants of \tilde{G}_1 could become semi-invariants of G_1 . However semi-invariants corresponding to different characters of \tilde{G}_1 will also correspond to different characters of G_1 . Therefore the space of semi-invariants of G_1 must be subspaces of the spaces of semi-invariants of \tilde{G}_1 which are also semi-invariants of G_1 , i.e. which are also semi-invariants of the parametrized matrices $S_4(n), S_3(n)$. We thus set

$$S_4(n).f - \lambda_1 f = 0 \quad (1)$$

and

$$S_3(n).f - \lambda_2 f = 0 \quad (2)$$

Under the condition that $a \neq 0$ and $b \neq 0$ we get a Gröbner basis whose elements involving $\lambda_i, \alpha_j, a, b$ are

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\lambda_1 - 1), \alpha_2 (\lambda_1 - 1), \alpha_3 (\lambda_1 - a), \alpha_4 (\lambda_1 - a), \\ & \alpha_5 (\lambda_1 - a^2), \alpha_6 (\lambda_1 - a^2), \alpha_7 (\lambda_1 - a^2), \\ & \lambda_2 \alpha_1 - 2 \alpha_1 + \alpha_2, \lambda_2 \alpha_2 - 12 \alpha_1 - 2 \alpha_2, \lambda_2 \alpha_3 - 2 \alpha_3 b + 2 \alpha_4 b, \\ & \lambda_2 \alpha_4 - 6 \alpha_3 b - 2 \alpha_4 b, \lambda_2 \alpha_5 - 2 \alpha_5 b^2 + 2 \alpha_6 b^2 + \alpha_7 b^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_2 \alpha_6 - 2 \alpha_5 b^2 + 2 \alpha_6 b^2 - \alpha_7 b^2, \lambda_2 \alpha_7 - 8 \alpha_5 b^2 - 8 \alpha_6 b^2, \\
& \alpha_1 (a^4 - 1), \alpha_2 (a^4 - 1), \alpha_1 (b^4 - 1), \alpha_2 (b^4 - 1), \\
& \alpha_1 \alpha_7 (a^2 - 1), \alpha_2 \alpha_7 (a^2 - 1), \alpha_1 \alpha_7 (b^2 - 1), \alpha_2 \alpha_7 (b^2 - 1), \\
& \alpha_1 \alpha_4 (a - 1), \alpha_2 \alpha_4 (a - 1), \alpha_3 \alpha_7 (a - 1), \alpha_4 \alpha_7 (a - 1), \\
& \alpha_3 (a^2 - 1), \alpha_4 (a^2 - 1), \alpha_1 \alpha_4 (b - 1), \alpha_2 \alpha_4 (b - 1), \\
& \alpha_3 \alpha_7 (b - 1), \alpha_4 \alpha_7 (b - 1), \alpha_3 (b^2 - 1), \alpha_4 (b^2 - 1), \\
& \alpha_1^2 + 1/12 \alpha_2^2, \alpha_1 \alpha_3 + 1/6 \alpha_2 \alpha_4, \alpha_2 \alpha_3 - 2 \alpha_1 \alpha_4, \alpha_3^2 + 1/3 \alpha_4^2, \\
& \alpha_1 \alpha_5 + 1/8 \alpha_2 \alpha_7, \alpha_2 \alpha_5 - 3/2 \alpha_1 \alpha_7, \alpha_3 \alpha_5 + 1/4 \alpha_4 \alpha_7, \\
& \alpha_4 \alpha_5 - 3/4 \alpha_3 \alpha_7, \alpha_5^2 + 1/4 \alpha_6 \alpha_7 + 1/8 \alpha_7^2, \\
& 1/4 \alpha_1 (4 \alpha_6 - \alpha_7), 1/4 \alpha_2 (4 \alpha_6 - \alpha_7), 1/4 \alpha_3 (4 \alpha_6 - \alpha_7), \\
& 1/4 \alpha_4 (4 \alpha_6 - \alpha_7), 1/4 \alpha_5 (4 \alpha_6 - \alpha_7), \\
& 1/8 (2 \alpha_6 + \alpha_7) (4 \alpha_6 - \alpha_7).
\end{aligned}$$

From this we get the following cases :

1. There are no conditions on a and b if and only if $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. In this case the most generic semi-invariant of G_1 “coming from” an invariant of \tilde{G}_1 is of the form

$$f = \alpha_5 (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) + \alpha_6 (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + \alpha_7 x_1 x_2 x_3 x_4$$

where

$$\alpha_5 (\alpha_6 - 1/4 \alpha_7) = \alpha_5^2 + 1/4 \alpha_6 \alpha_7 + 1/8 \alpha_7^2 = \alpha_6^2 + 1/4 \alpha_6 \alpha_7 - 1/8 \alpha_7^2 = 0.$$

The possible dependence between α_i and λ_i shows that not all semi-invariants will always correspond to the same character of G_1 , but ignoring these possibilities clearly gives us the “worst possible” case containing all possible splittings in spaces of invariants for distinct characters of G_1 . Note that “worst possible” case here means that we may look for a semi-invariant that factors into linear form in a space of semi-invariants that is too large. If there exists a semi-invariant that factors into linear forms in this space, then $\text{resultant}(f, x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4, x_1) = 0$ (cf. [32]). Computing a Gröbner basis we get that in this case there is no solution (i.e. no values of c_i, α_j with the α_j not all zero).

2. Either $a^4 = b^4 = 1$ or $a^2 = b^2 = 1$. We now multiply each of the above matrices by the inverse of their determinant which gives us the unimodular groups $H_{576}, H_{384}, H_{288}, H_{192}$ and H_{96} of respective order 576, 384, 288, 192 and 96. In the last case corresponding to $a = b = 1$, as noted by Blichfeldt, the group is reducible. In the other cases we use character theory to compute

that there are no 1-reducible subgroups of index less than 8 (cf. [56] proof of Theorem 3.2). Consider for example the group H_{192} . We consider all faithful imprimitive unimodular characters χ of H_{192} . In order to find the minimal index of a 1-reducible group, we consider all subgroups K of H_{192} of index < 8 and decompose the restriction χ_K of the character χ to K . If the standard bound is not best possible, then we must find a group K such that χ_K has a summand of degree 1. It turned out that none of the above groups has a 1-reducible group of index < 8 .

The above computations for the invariants of \tilde{G}_1 correspond to the trivial character of \tilde{G}_1 . Next we have to consider all other linear characters of \tilde{G}_1 , there are 7 in this case. For each linear character of \tilde{G}_1 we compute the corresponding Molien series and using a Reynolds operator for this character we now compute all semi-invariants of degree ≤ 8 . We again consider those semi-invariants that are also semi-invariants of G_1 and do the above computations. Having done this, we can conclude that for this family of groups of type A_4 the standard bound is best possible.

The standard bound was always best possible, except for one group in the family number 13° of the classification given in [6] for the parameter $n = 1$ where we found 20 instead of 24. This group is presented in the example below. \square

Example C.0.6 *The unimodular group G corresponding to $n = 1$ in the family 13 is of order 240 and generated by*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{11} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\omega^2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2+\omega^2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1-\omega^2}{3} & \frac{-5}{12} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{-2+\omega^2}{3} \end{pmatrix}$$

where $\omega^4 - \omega^2 + 1 = 0$. This group has an abelian subgroup of index 20 which must be 1-reducible. The construction of an equation for the group G via the method of [47] is possible. In the following we give all necessary ingredients for the construction, showing also why the construction is computationally difficult. Selecting the monodromy matrices at the singularities $0, 1, \infty$ to be $\sigma_1, \sigma_2, (\sigma_1\sigma_2)^{-1}$ we see that the unimodular imprimitive character of G appears twice in the G -module of the holomorphic one forms of the corresponding covering of $P^1(\mathbb{C})$. Therefore there exists a differential equation whose exponents at $0, 1, \infty$ are up to integers $\{-7/12, -1/12, -11/12, -5/12\}, \{-2/3, -1/3, 1/3, 2/3\},$

$\{1 + 1/8, 1 + 3/8, 1 + 5/8, 1 + 7/8\}$. Since the exponents add up to 4, we have to either :

1. add an integer 2 at one exponent,
2. add two integers at two different exponents so that the exponents remain all distinct,
3. add one apparent singularity with exponents 0, 1, 2, 3, 5 and one integer at one of the exponents at 0, 1, ∞ so that the exponents remain all distinct,
4. add two apparent singularities with exponents 0, 1, 2, 3, 5,
5. add one apparent singularity with exponents 0, 1, 2, 3, 6.

For each of the above 71 possibilities we have to compute the remaining accessory parameters using the invariants of G . There are 3 linearly independent invariants of lowest degree 8 of G .

We consider the case when we add the integer 2 to the exponent $-\frac{5}{12}$. From ([57], Lemma 3.1) we get that the values of the invariants of degree 8, which are rational solutions of the 8-th symmetric power, must be of the form

$$\frac{\sum_{i=0}^3 \gamma_i x^i}{x^7(x-1)^5}$$

Following the method of [47], we get polynomial equations for the accessory parameters.

We could not complete the computations of all cases yet, but the equation is guaranteed to exist. \square

C.0.4 Final remarks

The method used in this paper relies on the classification of Blichfeldt via parametrized matrices. Such a simple classification is not available for representations of higher degree. In the proof of Theorem C.0.1 the general case could always be treated using a “worst case” approach where we considered all space of semi-invariants of \tilde{G}_i which were also semi-invariants of G_i together. Another notable fact was that for each family we always had to consider separately only a finite set of finite groups. It is not clear that the same approach would work for higher degree.

Bibliographie

- [1] S.A. Abramov, M. Bronstein & M. Petkovsek. On Polynomial Solutions of Linear Operator Equations. *Proceedings of ISSAC'95*, ACM Press, 290-296, 1995.
- [2] E. Beke. Die Irreducibilität der homogenen Differentialgleichungen. *Math. Annal.*, 45 : 278-294, 1894.
- [3] D. Bertrand. *Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle*. Cours de troisième cycle, 1985-86, Université Paris VI, notes rédigées par R. Lardon, 1986.
- [4] F. Beukers. The maximal differential ideal is generated by its invariants. *Indag. Math.* 11 : 13-18, 2000.
- [5] F. Beukers & G. Heckman. Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$. *Invent. Math.* 95 : 325-354, 1989.
- [6] H.F. Blichfeldt. On imprimitive linear homogenous groups. *Trans. Am. Math. Soc.*, 6 : 230-236, 1905.
- [7] H.F. Blichfeldt. *Finite collineation groups*. The University of Chicago Press, Chicago, 1917.
- [8] D. Boucher, P. Gaillard & F. Ulmer. Fourth order linear differential equations with imprimitive group. Dans *Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2003)*. J.R. Sendra Ed., ACM Press, Philadelphia, August 3-6 2003.
- [9] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie*. Chap. 7 et 8. Masson, Paris, 1990.
- [10] M. Bronstein. On Solutions of Linear Ordinary Differential Equations in their Coefficient Field. *J. Symb. Comp.*, 13(4) : 413-440, 1992.
- [11] M. Bronstein. An improved algorithm for factoring linear ordinary differential operators. *Proceedings of ISSAC'94*, ACM Press, 336-340, 1994.
- [12] M. Bronstein. Computer Algebra Algorithms for Linear Ordinary Differential and Difference equations. *Proceedings of the third European Congress of Mathematics*, vol.II, *Progress in Mathematics* 202, Birkhauser, 105-119, 2001.
- [13] G. Butler & J. McKay. The transitive groups of degree up to eleven. *Comm. Algebra* 11 : 863-911, 1983.

- [14] E. Compoint. Differential equations and algebraic relations. *J. Symb. Comp.* 25(6) : 705-725, 1998.
- [15] E. Compoint & M.F. Singer. Computing Galois Groups of Completely Reducible Differential Equations. *J. Symb. Comp.*, 28/4-5 : 473-494, 1999.
- [16] J.H. Conway, A. Hulpke & J. McKay. On transitive permutation groups. *LMS J. Comput. Math.*, 1 : 1-8, 1998.
- [17] O. Cormier. On liouvillian solutions of linear differential equations of order 4 and 5. *Proceedings of ISSAC'2001*, ACM Press, 2001.
- [18] O. Cormier. Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 4 et 5 : applications à la théorie de Galois classique. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 2001.
- [19] D. Cox, J. Little & D. O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms : an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer, New York, 1997.
- [20] J.D. Dixon. *The structure of linear groups*. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, Londres, 1971.
- [21] J. Draisma. Courriel sur le forum GAP. 10 Avril 2001.
- [22] J. Draisma. Courriel sur le forum GAP. 24 Août 2001.
- [23] D.L. Flannery. The finite irreducible linear 2-groups of degree 4. *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol.613, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [24] D.L. Flannery. The finite irreducible monomial linear groups of degree 4. *J. of Alg.* 218 : 436-469, 1999.
- [25] D.L. Flannery. Irreducible monomial linear groups of degree four over finite fields. A paraître dans *International Journal of Algebra and Computation*.
- [26] W. Fulton & J. Harris. *Representation theory. A first course*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, GTM 129 (3ème série), 1991.
- [27] P. Gaillard. Aspects du groupe de monodromie de l'équation hypergéométrique. Mémoire de DEA (directeur : F. Ulmer). Université de Rennes 1, 2000.
- [28] J. Hartmann. Invariants and Differential Galois Groups in Degree 4. Dans : *Differential Galois Theory*, Banach Center Publications Vol. 58, T. Crespo and Z. Hajto (eds.), 2002.
- [29] S. Hessinger. Computing Galois group of linear differential equations of order four. Ph.D Thesis, North Carolina State University, 1997.
- [30] S. Hessinger. Computing the Galois group of a linear differential equation of order four. *Appl. Algebra in Eng., Comm. and Comp.* 11 : 489-536, 2001.
- [31] M. van Hoeij. Factorization of differential operators with rational function coefficients. *J. Symb. Comp.*, 24(5) : 537-561, 1997.

- [32] M. van Hoeij, J.F. Ragot, F. Ulmer & J.-A. Weil. Liouvillian solutions of linear differential equations of order three and higher. *J. Symb. Comp.*, 28 : 589-609, 1999.
- [33] M. van Hoeij & J.-A. Weil. An algorithm for computing invariants of differential Galois groups. *J. of Pure and Appl. Alg.*, 117 & 118 : 353-379, 1997.
- [34] B. Huppert. *Endliche Gruppen I*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1967.
- [35] E.L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1956.
- [36] I. Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Dover Publications, New York, 1976.
- [37] I. Kaplansky. *An Introduction to Differential Algebra*. Hermann, Paris, 1957.
- [38] E.R. Kolchin. Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. *Ann. of Math.*, 49(1) : 1-42, 1948.
- [39] J.J. Kovacic. An Algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comp.*, 2 : 3-43, 1986.
- [40] G. Malle & B.H. Matzat. *Inverse Galois Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [41] J. Martinet & J.-P. Ramis. Théorie de Galois différentielle et resommation. Dans *Computer Algebra and Differential Equations*, E. Tournier, ed, Acad. Press, pp.115-224, 1989.
- [42] C. Mitschi & M.F. Singer. Connected linear groups as differential Galois groups. *J. of Alg.* 184 : 333-361, 1996.
- [43] C. Mitschi & M.F. Singer. Solvable-by-finite Groups as Differential Galois Groups. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 11/3 : 403-423, 2002.
- [44] J. Neubüser, H. Pahlings & W. Plesken. CAS; Design and Use of a System for the Handling of Characters of Finite Groups. Dans *Computational Group Theory. Proceedings of the London Mathematical Society Symposium on Computational Group Theory*. M.D. Atkinson éd., Academic Press Inc., Londres, 1984.
- [45] A. Person. Solving homogenous linear differential equations of order 4 in terms of equations of smaller order. Thèse de doctorat, Université de Rennes I et North Carolina State University, 2002.
- [46] M. van der Put & M.F. Singer. *Differential Galois Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 328. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [47] M. van der Put & F. Ulmer. Differential Equations and Finite Groups. *J. of Alg.* 226 : 920-966, 2000.

- [48] D.J.S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. GTM 80. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.
- [49] L. Schmidt-Thieme. *Lineare Differentialoperatoren mit endlicher Galoisgruppe*. Diplomarbeit. IWR, Heidelberg, preprint 1999-25, 1999.
- [50] M.F. Singer. Algebraic solutions of n -th order linear differential equations. *Proceedings on the 1979 Queens Conference on Number Theory*. Queens Papers in Pure and Applied Mathematics 54 : 379-420, 1980.
- [51] M.F. Singer. Liouvillian Solutions of n -th order linear differential equations. *Am.J.of Math.* 103 : 661-682, 1981.
- [52] M.F. Singer. Solving homogeneous linear differential equations in terms of second order linear differential equations. *Am.J.of Math.* 107 : 663-696, 1985.
- [53] M.F. Singer. Algebraic relations among solutions of linear differential equations : Fano's theorem. *Am.J.of Math.* 110 : 115-144, 1988.
- [54] M.F. Singer. Testing reducibility of linear differential operators : a group theoretic perspective. *Appl. Algebra in Eng., Comm. and Comp.* 7 : 77-104, 1996.
- [55] M.F. Singer & F. Ulmer. Galois groups of second and third order linear differential equations. *J. Symb. Comp.* 16 : 1-36, 1993.
- [56] M.F. Singer & F. Ulmer. Liouvillian and Algebraic Solutions of Second and Third Order Linear Differential Equations. *J. Symb. Comp.* 16 : 37-73, 1993.
- [57] M.F. Singer & F. Ulmer. Necessary conditions for Liouvillian solutions of (third order) linear differential equations. *J. of Appl. Alg. in Eng. Comm. and Comp.* 6 : 1-22, 1995.
- [58] M.F. Singer & F. Ulmer. Linear differential equations and products of linear forms. *J. Pure and Applied Alg.* 117& 118 : 549-563, 1997.
- [59] L. Smith. *Polynomial Invariants of Finite Groups*. A K Peters, Wellesley, MA, 1995.
- [60] T.A. Springer. *Linear algebraic groups*. 2nd edition. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [61] B. Sturmfels. *Algorithms in invariant theory*. Springer, Vienne, New York, 1993.
- [62] P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation*. Masson, Paris, 2ème édition, 1997.
- [63] F. Ulmer. On Liouvillian solutions of linear differential equations. *Appl. Algebra in Eng. Comm. and Comp.*, 2 : 171-193, 1992.
- [64] F. Ulmer. Introduction to differential Galois theory. Cours de DEA, 2000.
- [65] F. Ulmer. Liouvillian solutions of third order differential equations. *J. Symb. Comp.*, 36 : 855-889, 2003.
- [66] F. Ulmer. Note on Algebraic solutions of differential equations with known finite Galois group. IRMAR, Rennes, Prépublication 19 Juillet 2003.

Résumé :

Pour les équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 et 3, des algorithmes de résolution exacte avec des temps de calcul réalistes existent, se fondant sur une étude préalable précise des groupes de Galois différentiels potentiels de ces équations. Plusieurs études de l'ordre 4 ont déjà eu lieu mais ne concernaient qu'un aspect particulier de la classification des groupes. Dans cette thèse, on donne les bornes optimales pour le degré du polynôme minimal des dérivées logarithmiques des solutions liouvilliennes de telles équations (travail commun avec D. Boucher et F. Ulmer) puis on présente une stratégie algorithmique de recherche du groupe de Galois différentiel d'une équation en connaissant ses semi-invariants de degré 2 et 4, obtenue après avoir en particulier complété les travaux précédents par les cas imprimitif-monomial de la classification des groupes. On trouve alors plus efficacement des semi-invariants produits de formes linéaires. Dans le chapitre 4 de cette thèse, on s'intéresse aux chutes d'ordre de la puissance symétrique quatrième d'une équation. Plus précisément, on montre qu'une chute d'ordre n implique l'existence d'au moins un semi-invariant de degré n , ce qui permet d'obtenir des informations sur le groupe de l'équation. En cas de chute d'ordre de deux et plus, des conditions de finitude du groupe sont données par un théorème de M.F. Singer. Dans le chapitre 5, on traite deux exemples. Dans le premier, on applique la stratégie algorithmique décrite dans le chapitre 3 en vue de trouver le groupe de Galois différentiel d'une équation dont on calcule ensuite les solutions (à l'aide d'une méthode décrite par F. Ulmer). Le second est un exemple de résolution du problème inverse pour le groupe $SO(4, C)$ à l'aide de la méthode décrite par C. Mitschi et M.F. Singer (équation qui n'admet donc pas de solutions liouvilliennes). On trouvera en annexe la liste explicite des semi-invariants de degré 2 et 4 des sous-groupes monomiaux de $SL(4, C)$.

Mots-clés (MSC 2000) : Algèbre différentielle (12H05), Actions de groupes sur des anneaux commutatifs ; théorie des invariants (13A50), Représentations ordinaires et caractères (20C15), Groupes algébriques linéaires (20Gxx), Équations différentielles linéaires dans le domaine complexe (34Mxx), Calcul formel (68W30).