



**HAL**  
open science

# D-branes et orientifolds dans des espaces courbes ou dépendant du temps

Nicolas Couchoud

► **To cite this version:**

Nicolas Couchoud. D-branes et orientifolds dans des espaces courbes ou dépendant du temps. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00008263

**HAL Id: tel-00008263**

**<https://theses.hal.science/tel-00008263>**

Submitted on 26 Jan 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET HAUTES ÉNERGIES  
LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

**Nicolas COUCHOUD**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris VI**

Sujet :

*D-branes et orientifolds dans des espaces  
courbes ou dépendant du temps*

Soutenue le 1<sup>er</sup> octobre 2004 devant le jury composé de :

M.	Constantin BACHAS,	directeur de thèse,
M <sup>me</sup>	Ilka BRUNNER,	
M.	Vladimir DOTSENKO,	président du jury,
M.	Marios PETROPOULOS,	rapporteur,
M.	Bert SCHELLEKENS,	rapporteur,
M.	Volker SCHOMERUS,	
et M.	Paul WINDEY,	directeur de thèse.



## *Remerciements*

Tout d'abord, je remercie Laurent Baulieu d'une part, Jean Iliopoulos et Eugène Cremmer d'autre part, de m'avoir accueilli dans les laboratoires qu'ils dirigent ou ont dirigé afin que je puisse y entreprendre mon travail de thèse.

Ensuite, je suis infiniment reconnaissant à Costas Bachas et Paul Windey d'avoir accepté de diriger ma thèse et de m'avoir guidé dans cette matière ardue, mais passionnante qu'est la théorie des cordes, et d'avoir bien voulu relire cette thèse.

Je voudrais également remercier tous ceux avec qui j'ai été amené à discuter au cours de cette thèse, notamment Pedro Bordalo, Eric Gimon, Boris Pioline, Sylvain Ribault et Christoph Schweigert, et évoquer le rôle important de l'encouragement mutuel de mes collègues de bureau et moi-même dans nos travaux respectifs.

Je suis aussi reconnaissant aux rapporteurs, Marios Pétropoulos et Bert Schellekens, d'avoir accepté la charge de lire ma thèse, et au jury d'avoir bien voulu accorder de l'intérêt à ma thèse, parfois en venant de loin pour cela.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis de m'avoir accordé leur soutien dans cette entreprise.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Éléments de théorie des cordes</b>	<b>13</b>
1.1 Cordes bosoniques fermées . . . . .	13
1.1.1 L'action . . . . .	13
1.1.2 L'invariance conforme et le tenseur énergie-impulsion . . . . .	14
1.1.3 Le spectre . . . . .	15
1.1.4 Passage à une surface d'univers euclidienne . . . . .	17
1.1.5 Interactions et fonction de partition . . . . .	18
1.1.6 Compactification et T-dualité . . . . .	21
1.2 Cordes ouvertes et D-branes . . . . .	23
1.2.1 Le spectre . . . . .	23
1.2.2 T-dualité et D-branes . . . . .	24
1.2.3 Interactions . . . . .	26
1.2.4 Fonction de partition et états de bord . . . . .	26
1.2.5 Action effective . . . . .	28
1.3 Cordes non orientées . . . . .	30
1.3.1 Cordes fermées non orientées et orientifolds . . . . .	30
1.3.2 Fonction de partition des cordes fermées et bouteille de Klein . . . . .	32
1.3.3 Cordes ouvertes et D-branes en présence d'un orientifold . . . . .	33
1.3.4 Fonction de partition des cordes ouvertes et ruban de Möbius . . . . .	34
1.4 Supercordes . . . . .	35
1.4.1 Supercordes de type II . . . . .	36
1.4.2 Cordes ouvertes et D-branes . . . . .	39
1.4.3 Actions effectives à basse énergie et S-dualité . . . . .	41
1.4.4 Orientifolds et cordes de type I . . . . .	42

<b>2</b>	<b>Cordes, D-branes et orientifolds dans un groupe compact : l'exemple de <math>S^3</math> et <math>\mathbb{RP}^3</math></b>	<b>45</b>
2.1	Cordes fermées orientées : le modèle de Wess-Zumino-Witten . . . . .	46
2.2	D-branes symétriques sur les groupes compacts . . . . .	49
2.2.1	Description des D-branes . . . . .	49
2.2.2	Couplage des D-branes aux cordes fermées . . . . .	52
2.2.3	Calculs semi-classiques et stabilisation par le flux . . . . .	54
2.3	Orientifolds sur $S^3$ et $\mathbb{RP}^3$ . . . . .	59
2.3.1	Description géométrique des orientifolds . . . . .	60
2.3.2	Couplage aux cordes fermées . . . . .	61
2.3.3	Considérations semi-classiques . . . . .	63
2.4	D-branes en présence d'un orientifold sur $S^3$ ou $\mathbb{RP}^3$ . . . . .	65
2.4.1	Cas des $\mathcal{O}0$ sur la 3-sphère . . . . .	65
2.4.2	Cas des $\mathcal{O}2$ sur la 3-sphère . . . . .	66
2.4.3	Cas de $\mathbb{RP}^3$ . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Univers branaires et D-branes anti-de Sitter</b>	<b>71</b>
3.1	Espaces anti-de Sitter . . . . .	72
3.2	Localisation de la gravité sur une brane . . . . .	73
3.2.1	Cas de la gravité pure . . . . .	73
3.2.2	Réalisation cordiste . . . . .	75
3.3	D-branes dans $AdS_3 \times S^3$ avec des champs de fond NS-NS . . . . .	77
3.3.1	Obtention d' $AdS_3 \times S^3$ . . . . .	77
3.3.2	D-branes dans $AdS_3$ . . . . .	78
3.3.3	$AdS_2 \times S^2$ dans $AdS_3 \times S^3$ . . . . .	79
3.4	D-branes dans $AdS_3 \times S^3$ avec des champs de fond R-R . . . . .	80
3.4.1	Champs de fond . . . . .	80
3.4.2	Petites fluctuations et métrique effective . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Cordes ouvertes dans une onde plane</b>	<b>83</b>
4.1	Quantification de la corde dans la jauge du cône de lumière . . . . .	84
4.2	Corde libre sur une D-corde ondulante . . . . .	86
4.2.1	Description du fond . . . . .	86
4.2.2	Fonctions de corrélation . . . . .	87
4.2.3	Matrice $S$ . . . . .	89

4.2.4	Calcul covariant en termes d'état de bord . . . . .	90
4.3	Interactions sur la D-corde ondulante . . . . .	93
4.3.1	Surface d'univers dans la jauge du cône de lumière . . . . .	93
4.3.2	Fonctions de corrélation et amplitudes . . . . .	95
4.3.3	Calcul covariant . . . . .	97
4.3.4	Remarques finales . . . . .	98
	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>
	<b>A Orientifolds of the 3-sphere</b>	<b>101</b>
	<b>B D-branes and orientifolds of SO(3)</b>	<b>123</b>
	<b>C Anti-de Sitter branes with Neveu-Schwarz and Ramond-Ramond back-</b> <b>grounds</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>
	<b>Index</b>	<b>151</b>



# Introduction

## Généralités sur la théorie des cordes

Le monde tel que nous le connaissons est décrit par le Modèle Standard de la physique des particules (interactions électrofaible et forte) et la Relativité Générale (interaction gravitationnelle), qui rendent compte des données expérimentales actuelles des échelles subatomiques aux échelles cosmologiques. Cette compréhension de l'univers est cependant loin d'être satisfaisante : la Relativité Générale est en effet une théorie classique, et il faudrait, pour obtenir un tout cohérent, une description quantique de la gravitation, ce qui est un problème très difficile, et non encore pleinement résolu.

Il y a eu une tentative de quantification de la gravitation à partir de ses principes fondamentaux, à savoir l'invariance par difféomorphismes, nommée *gravité quantique de boucles*. On ne sait malheureusement pas faire grand-chose avec : notamment, elle n'a pas de développement perturbatif, ce qui rend difficile des prédictions physiques.

La théorie des cordes, à l'inverse, n'est pas fondée sur les principes fondamentaux de la Relativité Générale. En fait, lorsqu'elle est née au début des années soixante-dix, la théorie des cordes avait vocation à décrire les interactions fortes. Mais d'une part, ses prédictions en tant que théorie des interactions fortes étaient incompatibles avec l'expérience, d'autre part il est apparu qu'elle contient nécessairement une excitation de spin 2 et de masse nulle, naturellement identifiée au graviton.

Le principe de la théorie des cordes est que les différentes formes de matière et de rayonnement sont des excitations d'une corde, au lieu d'être des particules ponctuelles. L'intérêt de considérer des objets étendus est que cela permet de ne pas avoir les divergences ultraviolettes que l'on obtient habituellement en théorie des champs, en particulier dans le cas de la gravitation, qui est non renormalisable.

La théorie des cordes, telle qu'elle est formulée actuellement, est une théorie perturbative, en ce sens qu'on y considère des excitations autour d'un vide fixé, alors qu'on s'attend à ce qu'il soit déterminé dynamiquement. Il découle que, comme en théorie quan-

tique des champs, on ne sait guère calculer de quantités physiques qu'à couplage faible. Il ne s'agit donc pas d'une théorie complète, mais du développement perturbatif d'une théorie à l'heure actuelle inconnue. On peut toutefois formuler des conjectures relatives aux propriétés à couplage fort de cette théorie inconnue en utilisant la supersymétrie présente dans la théorie perturbative et les théorèmes de non-renormalisation qui en découlent. On trouve alors notamment des dualités couplage fort/couplage faible, telles que la S-dualité que nous utiliserons dans le chapitre 3. (On notera que cela suppose que la supersymétrie reste présente dans la théorie non perturbative. Sans cette hypothèse, on ne pourrait rien faire.)

Même en restant dans le domaine perturbatif, on ne sait résoudre la théorie des cordes que dans peu de champs de fond : l'espace de Minkowski et ses compactifications toroïdales, bien sûr, et aussi les variétés de groupes compacts. Ces dernières sont un moyen d'étudier les espaces courbes, et nous avons utilisé les techniques qui leur sont spécifiques dans le chapitre 2. Les cas plus généraux restent assez largement inconnus, en particulier les fonds dépendant du temps, d'une grande importance en cosmologie, notamment pour voir si la théorie des cordes permet de résoudre la singularité initiale du Big Bang.

Un développement essentiel dans les années quatre-vingt-dix est la découverte de l'importance des D-branes. Il s'agit d'objets étendus, de dimensions variées, sur lesquels les extrémités des cordes ouvertes s'accrochent. Elles jouent un rôle essentiel dans les dualités mentionnées ci-dessus : par exemple, la S-dualité de la théorie dite de type IIB échange les cordes fondamentales — celles de la théorie perturbative — et les D-branes de dimension spatiale un. Elles joueront un rôle essentiel dans toute cette thèse.

La cohérence de la théorie requiert qu'elle soit formulée en dimension dix, ce qui en fait six de trop si on veut décrire notre univers avec. Le premier moyen envisagé pour obtenir une théorie effective à quatre dimensions est de *compactifier* les six dimensions supplémentaires, c'est-à-dire considérer les cordes sur le produit cartésien de l'espace de Minkowski à quatre dimensions et d'une variété compacte de dimension six. Les D-branes permettent d'autres possibilités, puisque les cordes ouvertes qui y sont accrochées sont contraintes de rester à leur voisinage ; nous évoquerons cela plus en détail dans le chapitre 3.

## Plan de cette thèse

Le premier chapitre vise à introduire la théorie des cordes, en mettant l'accent sur ce qui sera nécessaire dans la suite pour présenter nos travaux. Il commence par la quantifica-

tion de la corde bosonique, qui est une théorie des cordes sans fermions avec laquelle nous travaillerons dans la plus grande partie de cette thèse par souci de simplicité, et explique comment on fait interagir les cordes bosoniques fermées. Ensuite nous introduisons les cordes ouvertes, et montrons que les D-branes apparaissent naturellement dans la théorie. Nous étudions ensuite les cordes non orientées et les orientifolds, qui sont un autre type de défaut topologique. Enfin, nous décrivons brièvement la théorie des supercordes.

Le deuxième chapitre étudie les cordes sur un groupe compact, dont la structure algébrique permet de résoudre la théorie des cordes (dans le même sens qu'on sait la résoudre sur l'espace de Minkowski). Nous commençons par y rappeler des résultats connus sur les cordes et les D-branes dans de tels espaces, et notamment le fait remarquable que, dans ces géométries, un calcul semi-classique des fluctuations des D-branes permet de trouver leur spectre exact tel qu'on sait le calculer en théorie conforme, en nous focalisant sur les cas les plus simples, à savoir la 3-sphère (groupe  $SU(2)$ ) et l'espace projectif  $\mathbb{R}P^3$  (groupe  $SO(3)$ ). Nous décrivons ensuite nos résultats sur les orientifolds dans ces espaces, à savoir leur position et leurs interactions avec les cordes ouvertes et fermées.

Le troisième chapitre s'intéresse aux D-branes dans des espaces anti-de Sitter en présence de champs Ramond-Ramond. La motivation de cette étude est liée au fait que, grâce à la possibilité de localiser la gravité sur une D-brane, on peut envisager un *univers branaire*, c'est-à-dire où ce que nous observons est contenu dans une D-brane à 4 dimensions ; nous commençons donc par rappeler divers faits à propos de ce type de configurations. Ensuite, nous rappelons des résultats connus sur les D-branes anti-de Sitter dans des fonds Neveu-Schwarz et nos résultats sur les fonds Ramond-Ramond, utilisant la S-dualité reliant ces deux types de fonds.

Le quatrième chapitre étudie les cordes ouvertes sur une D-brane parcourue par une onde plane. L'intérêt d'une telle étude est qu'il s'agit d'un fond dépendant du temps suffisamment simple pour arriver à calculer explicitement certaines amplitudes, et présente une analogie avec certains modèles-jouets de singularité cosmologique. Nous présentons les résultats précédemment connus, concernant les amplitudes à deux cordes, et les nôtres, hélas très partiels, concernant les amplitudes à trois cordes.

Nous terminons, de façon originale, par une conclusion, où nous rappelons les principaux résultats de cette thèse et donnons quelques perspectives de recherche.

Les résultats obtenus au cours de cette thèse, à l'exception de ceux du chapitre 4, ont donné lieu à des publications jointes en annexe.



# Chapitre 1

## Éléments de théorie des cordes

Nous allons introduire ici quelques notions fondamentales de théorie des cordes, en mettant l'accent sur ce qui sera utile dans la suite de cette thèse. Ce sujet étant raisonnablement bien traité dans les ouvrages tels que [1] et [2], nous ne donnerons généralement pas de références, et le lecteur pourra se référer aux bibliographies desdits ouvrages.

### 1.1 Cordes bosoniques fermées

#### 1.1.1 L'action

Il est assez aisé d'écrire une action pour une corde relativiste en s'inspirant de l'action d'une particule. L'action d'une particule relativiste dans l'espace-temps plat s'écrivant comme son temps propre :

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX_\mu}{d\tau}}$$

où  $\tau$  est un paramètre le long de la ligne d'univers de la particule, et où la métrique est de signature  $(- + \dots +)$ , il est assez naturel d'écrire pour une corde la généralisation suivante, connue sous le nom d'*action de Nambu-Goto*, où l'action est la surface propre de la surface d'univers de la corde :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det h} \quad \text{avec} \quad h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu.$$

Les coordonnées de la surface d'univers sont ici  $\tau \equiv \sigma^0$  et  $\sigma \equiv \sigma^1$ , et  $1/(2\pi\alpha')$  est la tension de la corde ;  $h$  n'est rien d'autre que la métrique induite sur la surface d'univers par celle de l'espace-temps cible. Dans le cas d'une corde fermée (une boucle), la coordonnée  $\sigma$  est

périodique, et le plus souvent, la période choisie est  $2\pi$ . Dans le cas d'une corde ouverte (un segment),  $\sigma$  parcourt l'intervalle  $[0; \pi]$ .

Cette action étant peu aisée à manier, en particulier lorsqu'il s'agit de quantifier la corde, on lui préfère généralement celle de Polyakov :

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.1.1)$$

qui comprend, en plus du plongement de la corde dans l'espace-temps cible  $X^\mu$ , une métrique *variable*  $\gamma_{\alpha\beta}$ . Les équations du mouvement impliquant que la métrique  $\gamma$  est égale à la métrique induite à un facteur scalaire près, cette action est classiquement équivalente à celle de Nambu-Goto.

Elle admet comme symétries locales les difféomorphismes de la surface d'univers et la symétrie de Weyl, qui multiplie la métrique par un scalaire quelconque et laisse le reste invariant. Les difféomorphismes permettent de mettre la métrique sous la forme  $\gamma_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \Lambda(\tau, \sigma)\eta_{\alpha\beta}$ ; la symétrie de Weyl a alors pour effet que l'action ne dépend pas de  $\Lambda$ , et on aboutit alors à une théorie des champs bidimensionnelle avec  $D$  champs scalaires (du point de vue de la surface d'univers) libres, avec comme équations du mouvement  $\square X^\mu = 0$  et, dans le cas de la corde ouverte, la *condition aux bords de Neumann*  $\partial_\sigma X^\mu = 0$  (nous reviendrons plus tard sur ce point). Il faut ajouter à ces équations une contrainte découlant de la variation de la métrique dans l'action (1.1.1) : le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha'} (\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \text{trace}) \quad (1.1.2)$$

doit s'annuler.

Le fait que sa trace soit nulle sans imposer la contrainte est une conséquence de la symétrie de Weyl. Cette dernière est affectée par une anomalie, qui se manifeste précisément par la non-annulation de cette trace au niveau quantique; dans le cas d'un espace-temps plat, on montre que cette anomalie s'annule uniquement en dimension 26. Nous nous placerons dans ce cas dans la suite.

### 1.1.2 L'invariance conforme et le tenseur énergie-impulsion

Après fixation de la métrique, il reste encore des symétries, qui sont les combinaisons de transformations de coordonnées et de transformations de Weyl qui laissent la métrique invariante. Faire une telle transformation revient à faire un changement de coordonnées tel que le changement de métrique associé est une transformation de Weyl, sans faire ladite transformation de Weyl, autrement dit une transformation conforme.

L'annulation de la trace du tenseur énergie-impulsion est une propriété générale des théories invariantes conformes (CFT). Dans les coordonnées  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ , la trace est  $T_{+-}$ , donc  $T_{\alpha\beta}$  a deux composantes non nulles,  $T \equiv T_{++}$  et  $\bar{T} \equiv T_{--}$ . La conservation de l'énergie-impulsion s'écrit alors

$$\partial_- T = \partial_+ \bar{T} = 0,$$

c'est-à-dire que  $T$  est une fonction de  $\sigma^+$  uniquement, et  $\bar{T}$  de  $\sigma^-$  uniquement. Dans la suite, nous parlerons principalement de  $T$ , étant entendu que  $\bar{T}$  a des propriétés similaires.

$T$  admet le développement en modes suivant :

$$T = \sum_n L_n e^{-in(\tau+\sigma)}$$

avec  $L_{-n} = L_n^\dagger$ . On montre alors que les  $L_n$  admettent les relations de commutation suivantes (algèbre de Virasoro) :

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{m+n} \frac{c}{12}(m^3 - m) \quad (1.1.3)$$

où  $c$  est appelée charge centrale de l'algèbre. Il existe de même une charge  $\bar{c}$  pour l'algèbre des  $\bar{L}$  ; dans la suite, nous considérerons des théories où  $\bar{c} = c$ .

### 1.1.3 Le spectre

Nous décrivons ici l'« ancienne quantification covariante » de la corde bosonique, où on impose la contrainte (1.1.2) comme pour la quantification de Gupta-Bleuler de l'électrodynamique. Nous n'évoquerons pas ici la « nouvelle » quantification, dite BRST, basée sur les fantômes de Fadeev et Popov. La quantification non covariante dans la jauge du cône de lumière, similaire à la quantification de l'électrodynamique dans la jauge de Coulomb, sera traitée dans le chapitre 4.

Dans le cas de la corde fermée, les champs  $X^\mu$  peuvent être développés en modes comme suit :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left( \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^+} + \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^-} \right). \quad (1.1.4)$$

La réalité de  $X^\mu$  impose  $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger$ . Les relations de commutation de ces modes s'écrivent :

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = 0, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}.$$

Les états s'obtiennent alors en faisant agir  $\alpha_{-n}^\mu$  et  $\bar{\alpha}_{-n}^\mu$ ,  $n > 0$ , sur un vide annulé par  $\alpha_n^\mu$  et  $\bar{\alpha}_n^\mu$ . On a alors, comme lors de la quantification de l'électrodynamique, un espace de Hilbert avec un produit scalaire non défini positif à cause du mauvais signe des relations de commutation des  $\alpha^0$ . Il faut alors encore imposer la contrainte (1.1.2).

Les modes du tenseur énergie-impulsion s'écrivent :

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m : \alpha_n \cdot \alpha_{m-n} : \quad (1.1.5)$$

avec  $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu$ . L'ordre normal (opérateurs de création à gauche des opérateurs d'annihilation) est nécessaire pour  $L_0$  parce que  $\alpha_n$  et  $\alpha_{-n}$  ne commutent pas. Il n'est pas très difficile de vérifier alors que les relations (1.1.3) sont vérifiées, avec  $c$  égal à la dimension de l'espace-temps.

Pour imposer la contrainte, on exige des états physiques qu'ils vérifient  $L_n|\psi\rangle = 0$  pour  $n > 0$  et  $(L_0 - a)|\psi\rangle = 0$ , le  $a$  étant nécessaire à cause des problèmes d'ordre des opérateurs. Il en découle l'annulation de  $T$  pris entre deux états physiques. On montre que la cohérence de la théorie impose que  $a = 1$ , en plus de  $D = 26$  que nous avons évoqué avant. (En fait, si on ne considère que des cordes sans interactions, d'autres possibilités sont cohérentes, notamment  $D \leq 25$ ,  $a \leq 1$ . Mais on ne peut mettre d'interactions cohérentes que dans le cas  $D = 26$ ,  $a = 1$ ).

L'annulation de  $L_0 - a$  et  $\bar{L}_0 - a$  donne les équations suivantes :

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2)$$

$$N = \bar{N}$$

où  $N = \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$  est le nombre d'oscillateurs gauches (étant entendu que  $\alpha_{-n}$  en crée  $n$ ) et  $\bar{N}$  le nombre d'oscillateurs droits.

L'état fondamental de ce spectre est un tachyon. On peut vérifier que, pour un tel état,  $L_n$  s'annule automatiquement pour  $n > 0$ . La présence d'un tachyon est gênante, car cela signifie qu'on ne développe pas la théorie autour d'un vide stable. Heureusement, il a le bon goût de disparaître dans la théorie des supercordes que nous évoquerons plus loin.

Le premier état excité, obtenu avec  $N = \bar{N} = 1$ , s'écrit de façon générale  $\zeta_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \bar{\alpha}_{-1}^\nu |k\rangle$ , où  $|k\rangle$  est un état du vide d'impulsion  $k$ . Sachant que, pour un tel état,  $L_n$  s'annule automatiquement pour  $n > 1$ , on n'a à vérifier que l'annulation de  $L_1$ . Il est aisé de voir que cela implique une condition de polarisation  $k^\mu \zeta_{\mu\nu} = k^\nu \zeta_{\mu\nu} = 0$ . L'espace des états ainsi obtenu a un produit scalaire positif, mais pas défini : les états où  $\zeta_{\mu\nu}$  est de la forme

$k_\mu a_\nu$  ou  $a_\mu k_\nu$  découplent (ont un produit scalaire nul avec tout état physique), et il faut donc quotienter l'espace des états par ces états (ce qui revient à une invariance de jauge) pour obtenir les états physiques. Ces excitations se décomposent en un scalaire  $\Phi$ , appelé dilaton, une 2-forme  $B_{\mu\nu}$  et un tenseur symétrique de trace nulle qui est le graviton  $G_{\mu\nu}$ .

L'action de Polyakov (1.1.1) peut être généralisée pour inclure des champs de fond correspondant à une superposition cohérente d'excitations de masse nulle. L'action s'écrit alors

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \hat{B}(X) - \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma} \Phi(X) R \quad (1.1.6)$$

où  $\hat{B}$  est la 2-forme induite par  $B$  sur la surface d'univers et  $R$  est la courbure de la métrique sur la surface d'univers. L'invariance de Weyl impose des contraintes sur les champs de fond : ils doivent vérifier des équations que l'on peut dériver de l'action effective suivante, à l'ordre le plus bas en  $\alpha'$  (c'est-à-dire dans la limite de basse énergie) :

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^D x \sqrt{-\det G} e^{-2\Phi} \left[ R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right]$$

où  $H = dB$ . On y reconnaît notamment l'action d'Einstein-Hilbert, ce qui montre que la théorie des cordes contient la gravitation. La constante  $\kappa_0$  n'a pas de signification physique, puisqu'on peut changer sa normalisation par une translation de  $\Phi$ . Ce qui, en revanche, a une signification, est  $\kappa = \kappa_0 e^{\Phi_0}$ , où  $\Phi_0$  est la valeur moyenne de  $\Phi$  : cela s'interprète comme le couplage gravitationnel. On peut donner au premier terme de l'action la forme habituelle (sans le préfacteur  $e^{-2\Phi}$ ) en écrivant l'action en termes de la *métrique d'Einstein*  $G_E$ , qui s'exprime en termes de la *métrique de corde fermée*  $G$  par  $G_E = e^{-4\Phi/(D-2)} G$ .

#### 1.1.4 Passage à une surface d'univers euclidienne

La surface d'univers de la corde telle que nous l'avons vue jusqu'ici est minkowskienne, car il s'agit de la trajectoire d'une corde dans un espace-temps cible minkowskien. Dans la suite, il apparaîtra néanmoins utile de considérer une surface d'univers euclidienne, car cela simplifie considérablement certains calculs d'amplitudes, notamment parce que les groupes conformes euclidien et minkowskien sont assez différents. Il convient donc de justifier que ce passage du minkowskien vers l'euclidien est légitime.

Pour cela, nous partons de l'intégrale de chemin, qui s'écrit  $\int [de dX] \exp(iS)$ , où  $S$  est l'action du modèle sigma (1.1.6), et  $e$  le vielbein, en termes de laquelle la métrique s'écrit

$\gamma_{\alpha\beta} = -e_\alpha^0 e_\beta^0 + e_\alpha^1 e_\beta^1$ . Puisque l'intégrale de chemin est un produit (infini) d'intégrales ordinaires, on peut déformer les contours d'intégration. On les déforme donc de façon à donner à  $e_\alpha^0$  des valeurs imaginaires pures, c'est-à-dire qu'on pose  $e_\alpha^0 = -i\tilde{e}_\alpha^0$ . La métrique devient alors euclidienne, et l'intégrale de chemin devient  $\int [d\tilde{e} dX] \exp(-S_E)$ , où l'action euclidienne  $S_E$  s'écrit

$$S_E = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) - \frac{i}{2\pi\alpha'} \int B(X) + \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\det \gamma} \Phi(X) R.$$

Ainsi, il découle que les amplitudes de la théorie des cordes données par l'action minkowskienne (1.1.6) sont les mêmes que celles de l'action euclidienne  $S_E$ . C'est cette dernière que nous utiliserons le plus souvent pour étudier les interactions.

Il est important de noter que cette procédure est applicable à l'action avant toute fixation de jauge. Lorsque, par exemple à la suite du choix d'une jauge non covariante, telle que la jauge du cône de lumière que nous utiliserons au chapitre 4, il apparaît dans l'action des termes dépendant du temps  $\tau$  de la surface d'univers, alors cela ne marchera plus, et c'est l'action minkowskienne qu'il faudra utiliser, comme nous le vérifierons explicitement en comparant avec un formalisme covariant.

### 1.1.5 Interactions et fonction de partition

En physique des particules, les interactions s'obtiennent par une sommation sur tous les diagrammes de Feynman possibles, lesdits diagrammes étant constitués de lignes se rejoignant en des vertex. La généralisation de ceci aux cordes consiste à sommer sur des surfaces, orientables dans le cas de cordes orientées, où chaque corde entrante est un tuyau venant de l'infini. Par une transformation conforme appropriée, dans le cas euclidien — et pas dans le cas minkowskien, d'où l'intérêt de travailler avec une action euclidienne — ceci se ramène à une surface compacte privée d'autant de points qu'il y a de cordes, de genre égal au nombre de boucles, et les amplitudes s'obtiennent alors comme des moyennes de produits d'*opérateurs de vertex* insérés en chaque point (fig. 1.1). Pour un état sans excitation (tachyon), l'opérateur de vertex est une fonction de  $X$  uniquement (pas de ses dérivées) donnée par le fait qu'il se transforme de la même façon que l'état correspondant par les transformations de Poincaré, donc  $:e^{ik \cdot X}$ : pour un état d'impulsion  $k$ . Les excitations s'obtiennent en multipliant cela par  $\partial_+^n X^\mu$  pour chaque opérateur de création  $\alpha_{-n}^\mu$ : ainsi, les états de masse nulle ont un opérateur de vertex proportionnel à  $\zeta_{\mu\nu} : \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu e^{ik \cdot X} :$ .

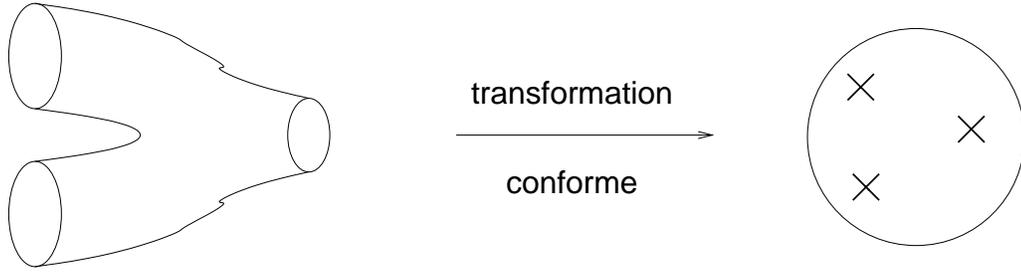


FIG. 1.1 – Exemple de surface d’univers intervenant dans une interaction à trois cordes.

Dans le cas d’une amplitude à l’ordre des arbres, le diagramme est une sphère, et les amplitudes s’obtiennent simplement en prenant la moyenne du produit des opérateurs de vertex, intégrée sur l’ensemble des positions possibles des vertex. Lorsqu’il y a des boucles, les choses sont plus compliquées, car les métriques possibles sur une surface de genre non nul ne sont pas équivalentes par transformation conforme, donc il faut sommer sur les classes d’équivalence des différentes métriques, qui forment un espace à deux paramètres réels pour une boucle (tore), et  $6n - 6$  paramètres pour  $n$  boucles avec  $n \geq 2$ . Nous nous limiterons ici au tore.

Dans le cas du tore, on peut, par une transformation conforme, se ramener au cas d’un tore plat défini comme le plan complexe muni de sa métrique habituelle, quotienté par un réseau engendré par deux complexes  $z_1$  et  $z_2$ . Par des rotations et dilatations appropriées, on peut se ramener à  $z_1 = 1$ , de sorte que seul le rapport  $\tau = z_2/z_1$  caractérise la structure conforme du tore ; en outre, on pourra toujours prendre  $\text{Im}(\tau) > 0$ , étant entendu que si cela n’est pas le cas, on peut y remédier en échangeant  $z_1$  et  $z_2$ . La base  $(z_1, z_2)$  pour le réseau n’est pas unique, puisqu’on peut changer de base par l’action d’une matrice unimodulaire à coefficients entiers (groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ ), l’action qui en résulte sur  $\tau$  étant  $\tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ , avec  $a, b, c$  et  $d$  entiers. Il sera essentiel, dans la suite, de s’assurer de l’invariance par ces transformations, dites modulaires, des amplitudes sur le tore.  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  étant généré par :

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1, \quad S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$$

il suffit de vérifier l’invariance par ces deux transformations.

L’amplitude du tore qui nous intéressera particulièrement est celle du vide, c’est-à-dire sans opérateur de vertex. Elle s’obtient, pour un tore de module  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ , en considérant une corde fermée qu’on fait évoluer pendant le temps euclidien  $2\pi\tau_2$ , puis que l’on translate de  $2\pi\tau_1$  le long de sa coordonnée spatiale  $\sigma$  avant de recoller les bouts. Cela

donne la trace

$$Z(\tau) = \text{Tr}[\exp(2\pi i\tau_1 P - 2\pi\tau_2 H)]$$

où la trace est prise sur le spectre de la théorie. Cette amplitude, faisant intervenir une trace pondérée par le spectre du hamiltonien, n'est autre que la fonction de partition de la corde. L'impulsion est l'intégrale de  $T_{\tau\sigma}$  sur la corde et vaut donc  $L_0 - \bar{L}_0$ . Le hamiltonien vaudrait naïvement  $L_0 + \bar{L}_0$ , mais les corrections quantiques conduisent à y ajouter un terme  $-c/12$ , où  $c$  est la charge centrale de l'algèbre de Virasoro, de sorte que l'amplitude s'écrit

$$Z(\tau) = \text{Tr}[q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}]$$

avec  $q = e^{2\pi i\tau}$ . Sachant que le spectre se décompose en paires de représentations de l'algèbre de Virasoro (une à gauche et une à droite), ou d'une éventuelle algèbre de symétrie étendue (dont nous verrons un exemple au chapitre 2) et que pour une paire donnée les excitations gauche et droite sont indépendantes (la condition  $L_0 = \bar{L}_0$  est une condition de couche de masse que nous n'avons pas à imposer ici), la fonction de partition se décompose en

$$Z(\tau) = \sum_{R, \bar{R}} n_{R, \bar{R}} \chi_R(q) \chi_{\bar{R}}^*(\bar{q})$$

où  $n_{R, \bar{R}}$  est la multiplicité de la représentation  $(R, \bar{R})$  dans le spectre, et

$$\chi_R(q) = \text{Tr}_R(q^{L_0 - c/24}).$$

La somme doit être remplacée par une intégrale en cas de spectre continu. L'invariance modulaire de la fonction de partition a une conséquence importante sur les transformations modulaires des caractères  $\chi_R$  : en effet, le fait que ces transformations laissent invariante une forme sesquilinéaire des caractères entraîne qu'elles agissent linéairement sur l'ensemble des caractères, ce qui nous sera extrêmement utile au chapitre 2.

On peut s'étonner de l'absence apparente de constante de couplage dans les amplitudes. En fait, elle apparaît sous la forme d'un terme  $\Phi_0 \chi$  dans l'action, où

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\det \gamma} R \tag{1.1.7}$$

est un invariant topologique, appelé *caractéristique d'Euler* de la surface d'univers, qui, pour une surface orientée sans bord, vaut  $2 - 2n$ , où  $n$  est le genre de la surface, c'est-à-dire pour nous le nombre de boucles. L'intégrale de chemin fait alors apparaître un

---

\*Dans la mesure où  $q$  n'est pas un réel positif et  $L_0 - c/24$  n'est pas entier, la notation  $q^{L_0 - c/24}$  est mal définie, et on aurait dû lui préférer  $\exp[2\pi i\tau(L_0 - c/24)]$ . C'est, hélas, la notation traditionnelle.

facteur  $e^{\Phi_0(2n-2)}$ , ce qui conduit à interpréter  $g = e^{\Phi_0}$  comme la constante de couplage des cordes. Il en découle que la constante de couplage n'est pas un paramètre de la théorie, comme dans le cas des théories des champs habituelles, mais une propriété du champ de fond autour duquel on développe. Plus généralement, il n'y a pas en théorie des cordes de paramètre libre adimensionné, contrairement au modèle standard qui en a une vingtaine, mais un ensemble de vides, les couplages dépendant du vide considéré. (Dans la mesure où on ne sait pour l'instant pas comment choisir le vide, cela ne fait que déplacer le problème.)

### 1.1.6 Compactification et T-dualité

Comme nous l'avons vu, la théorie des cordes bosoniques n'est cohérente qu'en 26 dimensions, ce qui fait 22 de trop. Nous verrons plus loin que la théorie des supercordes requiert 10 dimensions, donc 6 de trop. Un moyen de régler ce problème est de *compactifier* les dimensions excédentaires, c'est-à-dire considérer des cordes sur le produit cartésien de  $\mathbb{R}^4$  par une variété compacte. Nous nous limiterons ici au cas le plus simple, c'est-à-dire le tore; nous n'allons même ici compactifier qu'une seule dimension, laissant le cas de plusieurs dimensions aux références. D'autres compactifications plus compliquées seront évoquées dans le chapitre 2.

Considérons donc une corde fermée dans un espace où la dimension  $X$  est compactifiée, c'est-à-dire que  $X \sim X + 2\pi R$ . Cela a deux conséquences :

- Une conséquence que l'on rencontre aussi en théorie des champs est la quantification de l'impulsion selon la direction compactifiée :  $p = n/R$ , avec  $n$  entier.
- Une conséquence spécifique aux cordes est l'existence d'états enroulés autour de la dimension compactifiée, c'est-à-dire avec une relation de périodicité modifiée :  $X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi R w$ , où  $w$  est un entier comptant le nombre de tours que fait la corde autour de la direction compacte.

On peut se demander s'il est nécessaire d'inclure les états enroulés dans le spectre. La réponse est oui : d'une part il est aisé d'imaginer un processus par lequel une corde non enroulée se déforme et arrive à interagir avec elle-même pour donner deux cordes de nombres d'enroulement  $+1$  et  $-1$  (fig. 1.2), d'autre part ils sont nécessaires à l'invariance modulaire.

Ceci est une propriété assez générale : lorsqu'on quotiente une théorie des cordes par un sous-groupe  $G$  des isométries de l'espace-temps (ici un sous-groupe  $\mathbb{Z}$  des translations), si on ne garde que les états de la théorie initiale invariants par  $G$ , la fonction de partition

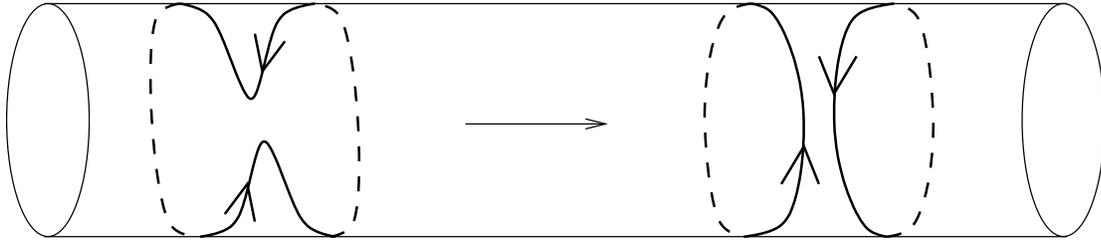


FIG. 1.2 – Processus par lequel une corde enroulée donne deux cordes enroulées de nombres d’enroulement opposés.

obtenue n’est pas invariante modulaire, et il faut ajouter des états où le champ  $X$  sur la surface d’univers n’est périodique en  $\sigma$  qu’à un élément de  $G$  près (ici les états enroulés). Nous reverrons cela à l’œuvre dans le chapitre 2 lorsque nous construirons les cordes sur  $\mathbb{RP}^3$  à partir des cordes sur  $S^3$ .

La dimension compactifiée admet le développement en modes suivant :

$$X = x + \alpha' \frac{n}{R} \tau + w R \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left( \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\sigma^+} + \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-in\sigma^-} \right).$$

Les modes de l’énergie-impulsion restent donnés par l’équation (1.1.5), à cela près que maintenant

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{n}{R} + \frac{wR}{\sqrt{2\alpha'}} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{n}{R} - \frac{wR}{\sqrt{2\alpha'}}$$

d’où le spectre de masse (définie à partir de l’impulsion des dimensions non compactes) :

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \bar{N} - 2)$$

avec la contrainte

$$N - \bar{N} + nw = 0.$$

Dans la limite  $R \rightarrow \infty$ , les états enroulés deviennent infiniment massifs, ce qui est normal car ce sont des cordes très longues, l’impulsion compacte tend vers un spectre continu, et on retrouve donc le spectre d’une dimension non compacte. Dans la limite  $R \rightarrow 0$ , comme prévu les états d’impulsion compacte non nulle deviennent infiniment massifs. En revanche, les états enroulés ont maintenant un spectre continu, ressemblant beaucoup à une dimension non compacte, puisqu’il est facile d’enrouler une corde sur un petit cercle. On aboutit donc à un spectre ressemblant beaucoup à celui d’une dimension non compacte, là où en théorie des champs on tendrait vers un spectre à une dimension de moins, car il n’y a pas de nombre d’enroulement.

C'est qu'en fait les limites  $R \rightarrow \infty$  et  $R \rightarrow 0$  sont *identiques* ; en effet, le spectre est invariant sous

$$R \rightarrow \frac{\alpha'}{R}, \quad n \leftrightarrow w.$$

Sachant que  $X$  se sépare en des parties gauche et droite :  $X(\tau, \sigma) = X_L(\sigma^+) + X_R(\sigma^-)$ , ceci revient à remplacer  $X$  par  $X'(\tau, \sigma) = X_L(\sigma^+) - X_R(\sigma^-)$ , c'est-à-dire que c'est une parité sur la partie droite de  $X$ . Sachant que, pour la corde fermée, les deux parties de  $X$  sont essentiellement indépendantes, cela est une symétrie de l'ensemble de la théorie, et pas seulement du spectre, connue sous le nom de T-dualité.

## 1.2 Cordes ouvertes et D-branes

Après avoir étudié les cordes fermées, nous allons passer aux cordes ouvertes, c'est-à-dire des segments. Notre étude nous amènera à découvrir tout un ensemble d'objets dynamiques étendus, nommés D-branes, auxquels est consacrée une grande partie de cette thèse. Ce sujet étant inconnu de [1], et que [2] est loin d'être complet à ce propos, le lecteur pourra se référer aux revues sur le sujet, notamment [3, 4].

### 1.2.1 Le spectre

Pour obtenir des cordes ouvertes, on considère une surface d'univers avec des bords correspondants aux extrémités de la corde, situé en  $\sigma = 0$  et  $\sigma = \pi$ .

La présence d'un bord implique des conditions aux bords. Dans le cas du tenseur énergie-impulsion, il s'agit d'imposer qu'il n'y ait pas d'énergie qui sorte de la corde par le bord, ce qui impose que  $T = \bar{T}$  au bord. Il en découle que  $\bar{L}_n = L_n$ , autrement dit il n'y a plus qu'une algèbre de Virasoro.

En ce qui concerne les champs  $X^\mu$  de la corde, la condition aux bords, qui découle de la variation de l'action, s'écrit  $\partial_\sigma X^\mu = 0$ . Il en découle le développement en modes de  $X^\mu$  :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (1.2.1)$$

Les relations de commutations sont alors les mêmes que pour la corde fermée (à ceci près qu'il n'y a plus de  $\bar{\alpha}$ , car la condition aux bords identifie les modes gauches et droits).

Comme pour la corde fermée, le spectre découle de l'annulation de  $L_0 - 1$  sur les états, et on trouve

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - 1).$$

Là aussi, il y a un tachyon qui disparaît dans la théorie des supercordes.

Le premier état excité s'écrit de façon générale  $e_\mu \alpha_{-1}^\mu |k\rangle$ , où  $|k\rangle$  est un état du vide d'impulsion  $k$ . L'annulation de  $L_1$  implique la condition de polarisation  $k^\mu e_\mu = 0$ , et les états ayant  $e_\mu \propto k_\mu$  sont de norme nulle, ce qui conduit à considérer comme équivalents des états dont la polarisation diffère d'un multiple de  $k_\mu$ . On reconnaît là les excitations d'un champ de jauge abélien.

Comme dans le cas fermé, on peut ajouter à l'action un terme pour ajouter un champ de fond électromagnétique correspondant à une superposition d'excitations de corde ouverte. Ce terme s'écrit comme une intégrale sur le bord de la surface d'univers :

$$S_{\text{ém}} = \int_{\partial\Sigma} d\tau A_\mu(X) \partial_\tau X^\mu, \quad \text{avec} \quad \int_{\partial\Sigma} = \int_{\sigma=\pi} - \int_{\sigma=0}$$

c'est-à-dire que la corde est un dipôle pour ce champ.

Nous verrons plus loin l'action effective à basse énergie correspondante.

### 1.2.2 T-dualité et D-branes

On considère une corde ouverte dans un espace plat où la dimension  $X$  est compactifiée, avec  $X \sim X + 2\pi R$ . Comme en théorie des champs et pour la corde fermée, l'impulsion est quantifiée ; en revanche, il n'y a pas de nombre d'enroulement. On en conclut que, dans la limite  $R \rightarrow 0$ , on a simplement une dimension en moins, comme en théorie des champs.

Sachant que les cordes ouvertes sont toujours, d'après ce que nous avons vu, accompagnées de cordes fermées, nous avons donc ensemble des cordes ouvertes vivant à  $D - 1$  dimensions et des cordes fermées vivant, comme nous l'avons vu précédemment, à  $D$  dimensions parce que le rayon nul est T-dual d'un rayon infini, ce qui paraît quelque peu étrange. C'est pourtant, en un sens, ce qui arrive. Regardons en effet les conditions aux bords. Elles s'écrivent, nous l'avons vu,  $\partial_\sigma X = 0$ , ou encore  $\partial_+ X_L - \partial_- X_R = 0$ . En termes du champ  $X'$ , cela devient  $\partial_+ X'_L + \partial_- X'_R = 0$ , soit  $\partial_\tau X' = 0$ , c'est-à-dire que la valeur de  $X'$  reste constante le long du bord de la corde. Plus précisément, la coordonnée  $X'$  admet le développement en modes suivant :

$$X'(\tau, \sigma) = x'_0 + 2nR'\sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (1.2.2)$$

où  $R' = \alpha'/R$  est le rayon de compactification T-dual, et  $x'_0$  n'est pas un mode, mais une constante arbitraire liée au fait que  $X'$  est défini à une constante près. Nous voyons clairement ici que, après T-dualité, la corde a ses deux extrémités contraintes de rester sur

l'hyperplan  $X' = x'_0$ . On est donc conduit naturellement à introduire dans la théorie un nouvel objet, baptisé *D-brane*, qui est un hyperplan où les extrémités des cordes ouvertes sont contraintes de rester ; le nom provient des conditions aux bords, appelées *conditions de Dirichlet*, et du mot membrane. Le nombre quantique  $n$  qui intervient ici, qui était, avant de T-dualiser, l'impulsion selon la dimension compacte, est un nombre d'enroulement, qui a un sens bien défini ici, puisqu'on peut imaginer une corde qui, partant de la D-brane, s'enroule  $n$  fois autour de la dimension compacte avant de revenir à la D-brane ; il n'y a pas d'impulsion selon la dimension compacte car la symétrie par translation est brisée par la D-brane.

En compactifiant et T-dualisant plusieurs dimensions, on peut obtenir une D-brane en dimensions inférieures ; on appelle  $Dp$ -brane une telle membrane avec  $p$  dimensions spatiales (et donc  $p + 1$  dimensions en tout). Par extension, on considère que lorsqu'on a des conditions aux bords de Neumann sur toutes les coordonnées, on a affaire à une D25-brane remplissant tout l'espace-temps.

On peut modifier l'action pour faire en sorte que les conditions au bord de Dirichlet découlent de l'action. Pour obtenir une D-brane localisée en  $X^i = Y^i$ , il suffit d'ajouter à l'action un terme

$$S_D = \pm \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\Sigma} d\tau (X^i - Y^i) \partial_\sigma X_i, \quad (1.2.3)$$

le signe étant  $+$  pour une surface d'univers minkowskienne, et  $-$  dans le cas euclidien. Il est alors aisé de voir que lorsqu'on varie  $X^i$ , le terme de bord dans la variation de l'action qui en découle est  $(X^i - Y^i) \partial_\sigma \delta X_i$ , d'où la condition de Dirichlet. On remarque que le terme  $Y^i \partial_\sigma X_i$  est T-dual du terme d'interaction de la corde avec un champ électromagnétique, ce qui conduit à voir une T-dualité entre un tel champ et la position de la D-brane :

$$Y^i \leftrightarrow -2\pi\alpha' A_i.$$

Sachant que  $A_i$  peut ne pas être constant, il découle que  $Y^i$  aussi, autrement dit on peut avoir une D-brane courbe de la forme  $X^i = Y^i(X^\alpha)$ , où les  $X^i$  et les  $X^\alpha$  sont des ensembles disjoints de coordonnées. Cela n'a rien d'étonnant : la théorie des cordes contenant la gravité, la métrique fluctue, et donc on imagine mal qu'une D-brane puisse rester plate dans une géométrie fluctuante.

Il est possible d'avoir plusieurs D-branes simultanément. Dans ce cas, chaque extrémité de corde ouverte est attachée à une D-brane particulière<sup>†</sup>, tous les couples de D-branes

---

<sup>†</sup>À l'époque où la notion de D-brane n'était pas connue, on mettait à chaque extrémité de corde un *indice de Chan-Paton* prenant  $n$  valeurs, là où en langage moderne on considère qu'il y a  $n$  D-branes superposées remplissant l'espace.

étant a priori possibles. Si les deux D-branes auxquelles une corde est attachée sont séparées, ses états (autre que l'état fondamental, qui disparaît dans la théorie des supercordes) sont tous massifs ; si elles sont superposées, il y a des états vectoriels de masse nulle entre eux. Dans le cas de  $n$  D-branes superposées, on a donc  $n^2$  vecteurs de masse nulle, qui forment un champ de jauge  $U(n)$ , la symétrie  $U(n)$  mélangeant les D-branes entre elles. On verra qu'avec des cordes non orientées on pourra obtenir d'autres groupes de jauge.

### 1.2.3 Interactions

Comme précédemment, les interactions s'obtiennent par sommation sur des surfaces. Dans le cas des cordes ouvertes, on considère des surfaces avec un bord, et les opérateurs de vertex pour les cordes ouvertes vivent sur le bord. Dans le cas d'une amplitude à l'ordre des arbres, le diagramme est un disque, et l'ajout de boucles consiste à ajouter des trous (des bords supplémentaires) dans la surface d'univers.

Un point important est que, alors qu'on peut avoir des cordes fermées sans cordes ouvertes de façon cohérente, l'inverse n'est pas vrai. Il est en effet aisé d'imaginer une interaction où les deux bouts d'une même corde ouverte fusionnent pour donner une corde fermée. D'autre part, considérons le diagramme du vide ayant la topologie d'un cylindre. Un tel diagramme peut s'interpréter comme une boucle de corde ouverte, c'est-à-dire une corde ouverte identifiée périodiquement dans le temps, et c'est ce que nous utiliserons pour évaluer la fonction de partition. Il s'interprète aussi comme l'émission puis l'absorption d'une corde *fermée* par une D-brane (fig. 1.3). Il en découle qu'une théorie cohérente de cordes ouvertes doit contenir des cordes fermées. L'interaction entre cordes fermées et cordes ouvertes s'obtient en insérant simultanément des opérateurs de vertex sur le bord de la surface d'univers pour les cordes ouvertes, et à l'intérieur pour les cordes fermées. Signalons que les surfaces avec bord interviennent dans les amplitudes ne contenant que des cordes fermées : par exemple, un disque avec deux opérateurs de vertex à l'intérieur peut s'interpréter comme une interaction où une corde fermée s'ouvre puis se referme.

Pour une surface orientable de genre  $n$  avec  $b$  bords, la caractéristique d'Euler (1.1.7) vaut  $2 - 2n - b$ , ce qui conduit à ajouter un facteur  $g$  par boucle de cordes ouvertes.

### 1.2.4 Fonction de partition et états de bord

Revenons à l'amplitude du cylindre (qu'on appelle aussi amplitude de l'anneau, puisqu'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation conforme). On peut caractériser

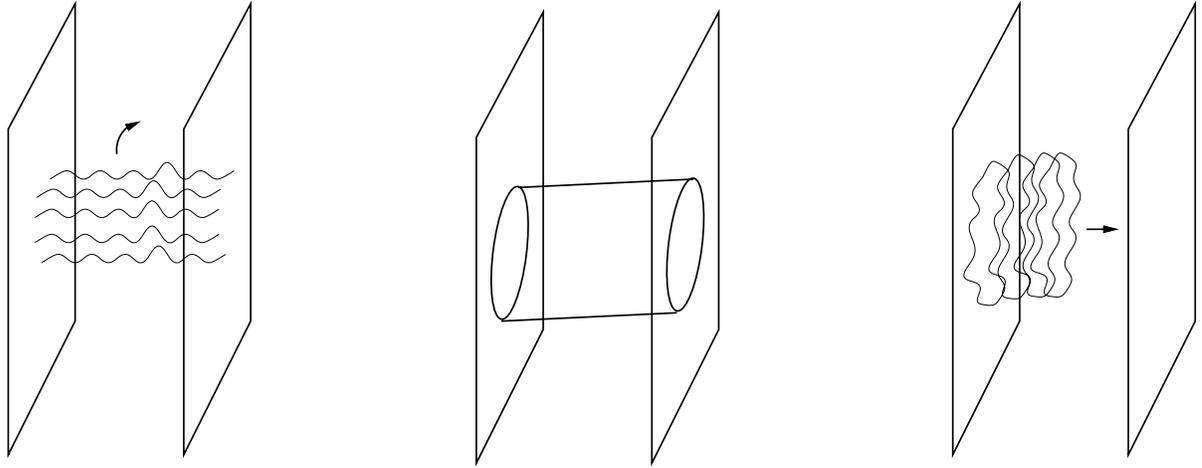


FIG. 1.3 – Les deux interprétations du diagramme du cylindre : à gauche en termes de cordes ouvertes, à droite en termes de cordes fermées.

un cylindre aux dilatations près par un paramètre réel, qui est le rapport  $t$  entre la longueur d'un bord et l'écart entre les bords. L'amplitude s'obtient alors en considérant une corde ouverte (de longueur  $\pi$ ) qu'on fait évoluer pendant le temps euclidien  $\pi t$  avant de l'identifier à la corde initiale. Cela donne la trace

$$Z(t) = \text{Tr}[\exp(-\pi t H_o)] = \text{Tr}[\sqrt{q}^{L_0 - c/24}] \quad (1.2.4)$$

avec  $q = e^{-2\pi t}$  (le fait de prendre  $\tau = it$  est lié au fait que le cylindre peut être vu comme un tore de paramètre  $it$  quotienté par une réflexion, les bords correspondant aux points fixes de la réflexion).

En inversant le rôle de l'espace et du temps, ce qui est l'analogue d'une transformation modulaire pour les cordes fermées, et en effectuant une dilatation appropriée, on obtient une corde fermée (de longueur  $2\pi$ ) qui se propage entre deux D-branes pendant un temps  $2\pi/t$ , d'où une autre expression de la fonction de partition :

$$Z(t) = \langle f | \exp\left(-\frac{2\pi}{t} H_f\right) | i \rangle = \langle f | \tilde{q}^{L_0 + \bar{L}_0 - c/12} | i \rangle \quad (1.2.5)$$

où  $\tilde{q} = e^{-2\pi/t}$ .  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  sont des *états de bord*, c'est-à-dire des états de corde fermée caractérisant les D-branes émettant et absorbant la corde fermée. Les conditions qu'ils vérifient s'obtiennent à partir des conditions aux bords des cordes ouvertes qui se terminent dessus en inversant le temps et l'espace. Considérons d'abord le cas d'une condition aux bords quelconque. Une condition nécessaire de cohérence est qu'elle respecte l'invariance conforme. Pour cela, nous l'avons vu, il est nécessaire que  $T = \bar{T}$  au bord ; il en découle

que l'état de bord doit vérifier  $(T - \bar{T})|B\rangle = 0$ , ce qui, en termes des modes de Fourier, s'écrit  $(L_n - \bar{L}_{-n})|B\rangle = 0$ . En particulier, on a  $L_0|B\rangle = \bar{L}_0|B\rangle$ , ce qui conduit à simplifier la formule précédente en  $Z(t) = \langle f | (\tilde{q}^2)^{L_0 - c/24} | i \rangle$ . On verra dans le chapitre 2 que, dans certains cas, ceci s'écrit comme une combinaison linéaire des caractères  $\chi_R(\tilde{q}^2)$ .

Dans le cas plus spécifique d'une D-brane dans un espace-temps plat où les  $X^i$  ont des conditions de Dirichlet et les  $X^\alpha$  des conditions de Neumann, l'état de bord vérifie, à  $\tau = 0$ ,

$$(X^i - Y^i)|B\rangle = 0 \text{ et } \partial_\tau X^\alpha|B\rangle = 0.$$

Si on développe les  $X^\mu$  en modes (équation (1.1.4)), ces conditions s'écrivent

$$\begin{aligned} (\alpha_n^\alpha + \bar{\alpha}_{-n}^\alpha)|B\rangle &= 0 & p^\alpha|B\rangle &= 0 \\ (\alpha_n^i - \bar{\alpha}_{-n}^i)|B\rangle &= 0 & (x^i - Y^i)|B\rangle &= 0 \end{aligned}$$

et on peut en tirer explicitement l'état de bord :

$$|B\rangle = \prod_i \left[ \delta(x^i - Y^i) \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \alpha_{-n}^i \bar{\alpha}_{-n}^i\right) \right] \prod_\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{n} \alpha_{-n}^\alpha \bar{\alpha}_{-n}^\alpha\right) |0, p^\alpha = 0\rangle$$

à une normalisation près que l'on peut déterminer en imposant l'égalité de (1.2.4) et (1.2.5).

Un exemple simple d'utilisation des états de bords est le calcul de l'amplitude d'émission d'une corde fermée par une D-brane. Par exemple, pour un état de masse nulle, de polarisation  $\zeta_{\mu\nu}$  et d'impulsion  $k$ , l'amplitude s'écrit :

$$A = \langle B | \zeta_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \bar{\alpha}_{-1}^\nu | 0, k \rangle \propto (\eta^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta} - \eta^{ij} \zeta_{ij}).$$

## 1.2.5 Action effective

Nous allons maintenant donner la forme de l'action effective à basse énergie pour une Dp-brane et expliquer, sans la démontrer à proprement parler, pourquoi elle est raisonnable.

On paramètre la D-brane par  $p + 1$  coordonnées  $\xi^a$ . Les champs sur la D-brane sont alors son plongement dans l'espace-temps  $X^\mu(\xi^a)$  et le champ de jauge  $A_a$ . L'action, appelée *action de Born-Infeld*, s'écrit alors

$$S = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\Phi} \sqrt{-\det(\hat{G} + \hat{B} + 2\pi\alpha' F)} \quad (1.2.6)$$

où  $T_p$  est une constante proportionnelle à la tension de la D-brane, et  $\hat{G}$  et  $\hat{B}$  sont les métrique et 2-forme induites sur la D-brane :  $\hat{G}_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}$ , et de même pour  $B$ .

Dans le cas où il n'y a ni dilaton ni 2-forme, le terme  $\sqrt{-\det G}$  obtenu est naturel et n'est rien d'autre que Nambu-Goto généralisé en dimension quelconque.

La dépendance en le dilaton découle du fait que cette action vient du diagramme du disque, dont la caractéristique d'Euler est 1, d'où un facteur  $g^{-1}$  si le dilaton est constant, et donc  $e^{-\Phi}$ .

La dépendance en  $F$  se comprend par T-dualité. Prenons une D-brane qui s'étend dans les directions  $X^1$  et  $X^2$  d'un espace plat, avec un champ magnétique constant  $F_{12}$ . On peut choisir une jauge  $A_2 = F_{12}X^1$ . Si on prend le T-dual de cela dans la direction  $X^2$ , on obtient une D-brane penchée dans le plan  $(X^1, X^2)$  :  $X^2 = -2\pi\alpha'X^1F_{12}$ . On obtient alors un facteur géométrique dans l'action :

$$\int dX^1 \sqrt{1 + (\partial_1 X^2)^2} = \int dX^1 \sqrt{1 + (2\pi\alpha'F_{12})^2}.$$

Dans le cas d'un champ quelconque, on peut, en mettant le champ sous une forme diagonale par blocs, se ramener à un produit de tels facteurs, qui revient au déterminant de l'action (1.2.6).

Enfin, la dépendance en  $B$  découle du fait suivant : la dépendance en  $B$  et  $F$  dans l'action sur la surface d'univers de la corde s'écrit

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \hat{B} + \int_{\partial\Sigma} A.$$

Il en découle les invariances de jauge suivantes :

$$\begin{aligned} \delta B &= 2\pi\alpha' d\Lambda \\ \delta A &= -\hat{\Lambda} + d\lambda \end{aligned}$$

où  $\Lambda$  est une 1-forme et  $\lambda$  un scalaire. Il en découle que  $F = dA$  n'est pas invariant de jauge, mais qu'en revanche  $\hat{B} + 2\pi\alpha'F$  l'est, et c'est donc cette combinaison qui doit apparaître dans l'action.

L'action (1.2.6) montre que la tension (énergie par unité de volume) de la D-brane est  $T_p e^{-\Phi_0}$ . Le fait qu'elle diverge à couplage faible montre que la D-brane est un objet *non perturbatif*, mais sur lequel on sait néanmoins dire plein de choses par un calcul perturbatif grâce à son interprétation en termes de lieu où les extrémités des cordes sont confinées. Le coefficient  $T_p$ , quant à lui, peut être calculé en considérant le couplage de la D-brane au graviton, ce qui s'obtient avec l'état de bord évoqué précédemment.

Avec cette action, on peut également étudier les petites fluctuations de la D-brane ; nous verrons dans les chapitres suivants des exemples explicites de tels calculs, où nous

montrerons que les modes de fluctuations ainsi trouvés coïncident avec le calcul exact en CFT, lorsqu'on sait le faire. Une propriété générale est que les fluctuations de la forme de la D-brane et du champ de jauge sont couplées par la *métrique de corde ouverte*, donnée par

$$G_o^{-1} = [(\hat{G} + \hat{B} + 2\pi\alpha'F)^{-1}]_S$$

où l'indice  $S$  signifie qu'on symétrise la matrice. Cela donne

$$G_o = \hat{G} - (\hat{B} + 2\pi\alpha'F)\hat{G}^{-1}(\hat{B} + 2\pi\alpha'F). \quad (1.2.7)$$

On verra sur les exemples des chapitres suivants que dans certains cas la géométrie vue par les cordes ouvertes est très différente de celle vue par les cordes fermées.

## 1.3 Cordes non orientées

Jusqu'à présent, nous avons considéré des cordes *orientées*, c'est-à-dire où on peut définir un sens particulier sur la corde (par exemple le sens des  $\sigma$  croissants). Sachant que l'opération  $\Omega : \sigma \rightarrow -\sigma$  ( $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$  dans le cas des cordes ouvertes) est une symétrie de la théorie, on peut obtenir une théorie de cordes non orientées en se restreignant aux états invariants par cette transformation, ce qui revient à identifier une corde orientée dans un sens avec la même corde orientée dans l'autre sens.

### 1.3.1 Cordes fermées non orientées et orientifolds

Considérons d'abord le cas des cordes fermées dans un espace plat, avec des champs de fond triviaux. L'action de  $\Omega$  sur les opérateurs  $\alpha_n^\mu$  découle du développement en modes (1.1.4) :  $\Omega\alpha_n^\mu\Omega^{-1} = \bar{\alpha}_n^\mu$ . L'action sur le tachyon, elle, découle de la transformation de l'opérateur de vertex ; en l'occurrence,  $\Omega = +1$ . Il en découle que, parmi les états tachyonique et non massifs, le tachyon, le graviton et le dilaton sont présents dans la théorie non orientée, tandis que la 2-forme en est exclue.

On peut s'intéresser à ce qui se passe si on compactifie la théorie sur un cercle et qu'on en fait tendre le rayon vers zéro. Il est alors préférable de décrire la situation en terme de la coordonnée T-duale  $X' = X_L - X_R$ , considérée comme non compactifiée. Sachant que  $\Omega$  agit en échangeant  $X_L(\sigma^+)$  et  $X_R(\sigma^-)$ , son action sur  $X'$  s'écrit :

$$\Omega : X'(\tau, \sigma) \rightarrow -X'(\tau, -\sigma).$$

Autrement dit, on obtient le produit d'une réflexion selon la coordonnée  $X'$  et d'un changement d'orientation de la corde. La théorie obtenue en se restreignant aux états tels que  $\Omega = +1$  consiste à identifier une corde avec son image par réflexion par rapport au plan  $X' = 0$ , après un changement d'orientation de la corde. Une telle théorie est appelée un orientifold. On notera que, puisque une corde est identifiée à une corde située ailleurs, la physique locale loin du plan  $X' = 0$  est celle de la corde *orientée*.

Des orientifolds plus généraux, pas forcément issus d'une T-dualité, s'obtiennent en quotientant la théorie orientée par le produit de l'inversion d'orientation  $\Omega$  de la corde et d'une isométrie involutive  $h$ . En présence de champs de fond non triviaux, des conditions additionnelles sur  $h$  devront être imposées pour que  $\Omega h$  soit une symétrie de la théorie initiale : par exemple, comme nous le verrons dans le chapitre 2, s'il y a un champ  $B$  non trivial, il est nécessaire que  $h$  inverse l'orientation de l'espace-temps. Signalons enfin que dans la suite, le terme orientifold désignera aussi l'ensemble, ou une partie, des points fixes de  $h$  ; il ne devrait néanmoins pas y avoir de confusion.

Une différence essentielle entre un orientifold et une D-brane est que l'orientifold n'est pas dynamique : il n'y a en effet pas de cordes attachées à l'orientifold qui puissent représenter ses fluctuations. Notons que l'argument comme quoi une D-brane doit fluctuer dans une géométrie fluctuante, utilisé pour arguer du caractère dynamique des D-branes, ne s'applique pas ici : en effet, l'identification de l'orientifold conduit à des conditions au bord pour le champ gravitationnel (et les autres champs) qui empêche toute fluctuation de géométrie de l'orientifold. Ceci n'empêche en revanche pas l'orientifold d'émettre des cordes fermées ; il en découle une action effective très similaire à celles des D-branes :

$$S = -T_{Op} \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{-\det \hat{G}}.$$

La dépendance en  $\Phi$  découle du fait que cette action vient du diagramme du plan projectif (nous verrons plus loin qu'il faut inclure des surfaces non orientables pour les cordes non orientées), dont la caractéristique d'Euler est 1, comme le disque. Les conditions aux bords sur l'orientifold empêchent qu'il y ait un couplage à  $B$ , et l'orientifold n'interagit pas avec les cordes ouvertes, donc il n'y a pas de champ de jauge. Contrairement au cas des D-branes, la tension  $T_{Op}$  peut être négative.

### 1.3.2 Fonction de partition des cordes fermées et bouteille de Klein

Nous nous plaçons ici dans un cadre général où le spectre de la corde fermée orientée se décompose en paires  $(R, \bar{R})$  de représentations des algèbres de Virasoro gauche et droite. L'existence d'une projection orientifold entraîne que si  $(R, \bar{R})$  est dans le spectre, alors  $(\bar{R}, R)$  aussi. Dans le cas où  $R \neq \bar{R}$ , la projection garde une combinaison linéaire de  $(R, \bar{R})$  et  $(\bar{R}, R)$ ; si  $(R, R)$  est dans le spectre initial, soit il reste, soit il est éliminé par la projection. La fonction de partition en découle :

$$Z(\tau) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{R, \bar{R}} n_{R, \bar{R}} \chi_R(q) \chi_{\bar{R}}^*(\bar{q}) + \sum_R k_R \chi_R(q\bar{q}) \right] \quad (1.3.1)$$

où la deuxième somme est sur les  $R$  tels que  $(R, R)$  est dans le spectre, et  $k_R$  est le nombre d'états  $(R, R)$  préservés par la projection moins le nombre d'états éliminés (c'est-à-dire que chaque état  $(R, R)$  est compté 1/2 fois dans le premier terme, et  $\pm 1/2$  fois dans le second).

L'interprétation en termes d'amplitude sur des surfaces d'univers bien choisies se fait en écrivant la fonction de partition de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr} \left[ \frac{1 + \Omega h}{2} q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \text{Tr} [q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}] + \text{Tr} [\Omega q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}] \right] \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{T} + \mathcal{K}). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Dans la première ligne,  $(1 + \Omega)/2$  projette sur les états vérifiant  $\Omega = +1$ , c'est-à-dire précisément les états de la corde non orientée. Les quantités  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{K}$  de la troisième ligne sont définies comme respectivement le premier et le deuxième terme de la deuxième ligne ;  $\mathcal{T}$  n'est rien d'autre que l'amplitude du tore. L'identification avec l'équation (1.3.1), et le fait que son premier terme soit  $\mathcal{T}$ , conduit à identifier  $\mathcal{K}$  et le second terme de (1.3.1), ce qui permettra de calculer  $\mathcal{K}$ . C'est en revanche l'équation (1.3.2) qui permet d'interpréter  $\mathcal{K}$  en termes de surface d'univers : en effet,  $\mathcal{K}$  y apparaît clairement comme s'obtenant en prenant une corde, en la faisant évoluer pendant le temps euclidien  $2\pi t$  et en recollant les bouts après une inversion d'orientation ; le résultat obtenu est une surface non orientable de caractéristique d'Euler nulle (comme le tore et le cylindre), baptisée *bouteille de Klein*. Plus généralement, les amplitudes de cordes non orientées font apparaître, en plus des surfaces orientables, les surfaces non orientables.

La bouteille de Klein peut être définie en considérant le plan  $\tau, \sigma$  avec les identifications suivantes :

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + 2\pi), \quad \text{et} \quad (\tau, \sigma) \sim (\tau + 2\pi t, -\sigma).$$

L'expression de  $\mathcal{K}$  ci-dessus découle du choix de domaine fondamental  $-\pi \leq \sigma \leq \pi$  et  $0 \leq \tau \leq 2\pi t$ , avec les identifications  $(\tau, -\pi) \sim (\tau, \pi)$  et  $(0, \sigma) \sim (2\pi t, -\sigma)$ . Un autre choix de domaine fondamental est  $0 \leq \sigma \leq \pi$  et  $0 \leq \tau \leq 4\pi t$ , avec les identifications  $(0, \sigma) \sim (4\pi t, \sigma)$ ,  $(\tau, 0) \sim (\tau + 2\pi t, 0)$  et  $(\tau, \pi) \sim (\tau + 2\pi t, \pi)$ , c'est-à-dire qu'on peut voir la bouteille de Klein comme un cylindre, à ceci près que sur chaque bord on identifie les points diamétralement opposés. Le résultat ainsi obtenu est que les extrémités ne sont plus des bords, mais ce que l'on appelle des *crosscaps*; de façon générale, toute surface non orientée peut se construire à partir d'une surface orientée en y insérant des crosscaps.

Après avoir échangé le temps et l'espace, et une dilatation appropriée, la bouteille de Klein s'interprète comme la propagation d'une corde fermée pendant le temps  $\pi/2t$  entre deux *états de crosscap*, qui sont aux orientifolds ce que les états de bord sont aux D-branes. Comme pour les états de bord, la préservation de l'invariance conforme impose  $(L_n - \bar{L}_{-n})|C\rangle = 0$ . Dans le cas plus spécifique des orientifolds plats de l'espace plat, on peut les construire explicitement en imposant  $(X(\sigma + \pi) - X(\sigma))|C\rangle = 0$  et  $(\partial_\tau X(\sigma + \pi) + \partial_\tau X(\sigma))|C\rangle = 0$  pour les coordonnées parallèles à l'orientifold, et les mêmes équations avec un signe opposé pour les coordonnées orthogonales à l'orientifold.

Il en découle que l'amplitude de la bouteille de Klein peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \langle C | (\tilde{q}^{1/4})^{L_0 + \bar{L}_0 - c/12} | C \rangle \\ &= \langle C | \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24} | C \rangle. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

On verra dans le chapitre 2 que, dans certains cas, ceci s'écrit comme une combinaison linéaire des caractères  $\chi_R(\sqrt{\tilde{q}})$ .

### 1.3.3 Cordes ouvertes et D-branes en présence d'un orientifold

L'isométrie  $h$  qui intervient dans la définition de l'orientifold identifie une D-brane à son image par  $h$ , et donc identifie un état de corde allant de la D-brane  $i$  à la D-brane  $j$ , noté  $|ij\rangle$ , à un état  $|j'i\rangle$ , où  $i'$  et  $j'$  sont les images des D-branes  $i$  et  $j$ . Notamment, s'il y a une D-brane à une position donnée, il doit y avoir une D-brane image à la position symétrique par  $h$ . Par souci de simplicité, nous nous limiterons aux cas où une D-brane est soit complètement séparée de son image, soit géométriquement confondue avec l'orientifold. Nous nous intéresserons ici principalement aux cordes de masse nulle vivant sur

une D-brane ou un groupe de D-branes superposées, c'est-à-dire notamment le champ de jauge.

Dans le cas de D-branes séparées de l'orientifold, la physique locale est essentiellement la même que sans orientifold. Notamment, pour  $n$  D-branes superposées (et leurs  $n$  images), les excitations de masse nulle contiennent un champ de jauge  $U(n)$ .

Considérons donc maintenant le cas de  $n$  D-branes superposées contenues dans l'orientifold. L'action de  $\Omega h$  sur les opérateurs  $\alpha_m^\mu$  découle des développements en modes (1.2.1) et (1.2.2) :  $\Omega \alpha_m^\mu \Omega^{-1} = (-)^m \alpha_m^\mu$  dans les cas que nous considérons ici. L'action la plus générale de l'orientifold est alors

$$\Omega h |\psi, ij\rangle = (-)^N \gamma_{ii'} \gamma_{jj'}^* |\psi, j'i'\rangle$$

où  $N$  est le nombre d'excitations de l'état  $\psi$  (d'où un signe  $-$  pour les bosons de jauge),  $\gamma$  est une matrice unitaire, et on sous-entend une sommation sur  $i'$  et  $j'$ . La condition  $(\Omega h)^2 = 1$  entraîne que  $\gamma$  doit être symétrique ou antisymétrique.

Dans le cas où  $\gamma$  est symétrique, par un changement de base approprié dans l'espace des D-branes, on se ramène à  $\gamma = \mathbb{I}$ . Les bosons de jauge ainsi trouvés sont alors des combinaisons antisymétriques des états  $|ij\rangle$ , donc le groupe de jauge est  $SO(n)$ .

Dans le cas où  $\gamma$  est antisymétrique, ce qui n'est possible que si  $n$  est pair, on se ramène à  $\gamma = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$ , et le groupe de jauge est alors  $USp(n)$ .

### 1.3.4 Fonction de partition des cordes ouvertes et ruban de Möbius

On note  $I$  et  $J$  deux ensembles de D-branes superposées, et on s'intéresse à la fonction de partition des cordes ouvertes entre ces deux ensembles de D-branes. Si l'image de  $I$ , notée  $I'$ , est distincte de  $J$ , alors les cordes  $|IJ\rangle$  et leurs images  $|J'I'\rangle$  par l'orientifold sont distinctes, et la projection en garde une combinaison linéaire, de sorte que la fonction de partition est simplement la moitié de l'amplitude de l'anneau. Si  $J = I'$ , alors il faut y ajouter un terme pour les cordes  $|II'\rangle$ . Le fait que  $\Omega \alpha_m^\mu \Omega^{-1} = (-)^m \alpha_m^\mu$  fait apparaître la quantité  $\text{Tr}_R [(-)^N \sqrt{q}^{L_0 - c/24}]$ , où  $R$  est une représentation de l'algèbre conforme apparaissant dans le spectre des cordes  $|II'\rangle$ . Sachant que  $L_0 = h_R + N$ , où  $h_R$  est le poids des états conformes non excités de la représentation  $R$ , ceci peut s'écrire

$$\hat{\chi}_R(q) \equiv e^{-i\pi(h_R - c/24)} \chi_R(-\sqrt{q}) \quad (1.3.4)$$

et la fonction de partition s'écrit alors

$$Z(t) = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{M}), \text{ où } \mathcal{M} = n \sum_R m_R \hat{\chi}_R(q).$$

où  $m_R$  indique le nombre d'états  $R$  préservés par la projection moins le nombre d'états éliminés. Dans le cas  $I = I'$ , où on considère donc des cordes entre un ensemble de D-branes et lui-même, l'une de ces représentations contient les bosons de jauge ; pour obtenir le bon nombre de bosons de jauge ( $n(n-1)/2$  pour  $\text{SO}(n)$ , et  $n(n+1)/2$  pour  $\text{USp}(n)$ ),  $m_R$  pour cette représentation doit valoir  $-1$  pour  $\text{SO}(n)$ , et  $+1$  pour  $\text{USp}(n)$ . Ceci nous amènera à trouver des conditions sur les groupes de jauge des différentes D-branes pour assurer la cohérence de la théorie.

De façon analogue au cas des cordes fermées,  $\mathcal{M}$  s'interprète comme une amplitude obtenue en prenant une corde ouverte, en la faisant évoluer pendant le temps  $\pi t$  et en recollant les bouts après une inversion d'orientation ; le résultat obtenu est une surface non orientable, avec un bord, de caractéristique d'Euler nulle, appelée *ruban de Möbius*.

Le ruban de Möbius peut être défini en considérant la bande  $0 \leq \sigma \leq \pi, \tau$  avec l'identification suivante :

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau + \pi t, \pi - \sigma).$$

L'expression de  $\mathcal{M}$  ci-dessus découle du choix de domaine fondamental  $0 \leq \sigma \leq \pi$  et  $0 \leq \tau \leq \pi t$ , avec l'identification  $(0, \sigma) \sim (\pi t, \pi - \sigma)$ . Un autre choix de domaine fondamental est  $0 \leq \sigma \leq \pi/2$  et  $0 \leq \tau \leq 2\pi t$ , avec les identifications  $(0, \sigma) \sim (2\pi t, \sigma)$  et  $(\tau, \pi/2) \sim (\tau + \pi t, \pi/2)$ , c'est-à-dire qu'on peut voir le ruban de Möbius comme un cylindre où l'un des bords a été remplacé par un crosscap. Après avoir échangé le temps et l'espace et effectué une dilatation appropriée, le ruban de Möbius s'interprète comme la propagation d'une corde fermée pendant le temps  $\pi/2t$  entre un état de bord et un état de crosscap, d'où découle que l'amplitude du ruban de Möbius peut s'écrire :

$$\mathcal{M} = \langle C | \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24} | B \rangle. \quad (1.3.5)$$

On verra dans le chapitre 2 que, dans certains cas, ceci s'écrit comme une combinaison linéaire des caractères  $\chi_R(-\sqrt{\tilde{q}})$ .

## 1.4 Supercordes

La théorie des cordes bosoniques que nous avons vue jusqu'à présent a deux défauts majeurs :

- Elle comporte un tachyon, signe qu'on développe autour d'un vide instable.
- Il n'y a pas de fermions, ce qui est fâcheux si on prétend décrire notre monde avec.

Ces deux défauts sont résolus par la théorie des supercordes. Nous allons décrire ici le formalisme de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS). Dans la mesure où les détails de la construction de la supercorde n'interviendront pas dans le reste de cette thèse, nous serons plus brefs que pour la corde bosonique.

### 1.4.1 Supercordes de type II

Le formalisme RNS consiste à avoir, en plus des champs scalaires  $X^\mu$ , des spineurs de Majorana  $\psi^\mu$ , et d'ajouter à l'action de Polyakov (1.1.1) (en fixant la métrique à  $\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ) un terme

$$S_\psi = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma (\psi_-^\mu \partial_+ \psi_{-\mu} + \psi_+^\mu \partial_- \psi_{+\mu})$$

où  $\psi_-$  et  $\psi_+$  sont les composantes de  $\psi$ . Cette action admet une supersymétrie  $\mathcal{N} = (1, 1)$  de surface d'univers, qui relie d'une part la partie gauche de  $X$  et  $\psi_+$ , d'autre part la partie droite de  $X$  et  $\psi_-$ .

Les équations du mouvement correspondantes disent alors que  $\psi_\pm$  ne dépendent que de  $\sigma^\pm$ . L'annulation de l'anomalie de Weyl nécessite que la dimension de l'espace-temps soit 10 ; nous nous placerons dans ce cas dans la suite.

$\psi_+$  et  $\psi_-$  étant des fermions, ils sont définis à un signe près. Il en découle que dans le cas des cordes fermées, on a  $\psi_+^\mu(\sigma + 2\pi) = \pm \psi_+^\mu(\sigma)$ , et de même pour  $\psi_-^\mu$ . Le cas  $+$  est appelé condition de périodicité de Ramond, et donne lieu à un développement en modes avec des modes entiers, tandis que le cas  $-$  est la condition de périodicité de Neveu-Schwarz, qui donne lieu à des modes demi-entiers. Comme on peut choisir indépendamment le signe pour  $\psi_+$  et  $\psi_-$  — le signe doit être indépendant de  $\mu$  pour assurer l'invariance de Poincaré — on aura quatre secteurs dans le spectre, nommés NS-NS, NS-R, R-NS et R-R.

Dans le cas des cordes ouvertes, le terme de bord dans la variation de  $S_\psi$  s'écrit

$$\frac{i}{2\pi} \int d\tau (\psi_- \delta\psi_- - \psi_+ \delta\psi_+).$$

La stationnarité de l'action impose alors l'annulation des fermions sur le bord, d'où découle leur annulation partout à cause des équations du mouvement. Il faut donc ajouter à chaque bord un terme

$$S_\psi^{\text{bord}} = \pm \frac{i}{2\pi} \int d\tau \psi_- \psi_+$$

où le signe  $\pm$  peut dépendre du bord, ce qui donne la condition au bord  $\psi_- = \pm \psi_+$ , et permet en outre de préserver une des deux supersymétries. Il est toujours possible de

prendre un signe  $+$  en  $\sigma = 0$ , en redéfinissant au besoin  $\psi_- \rightarrow -\psi_-$ . Il reste alors un signe en  $\sigma = \pi$ ; le signe  $+$  impliquant des modes entiers, et le signe  $-$  des modes demi-entiers, on parlera de condition au bord de Ramond dans le premier cas, et de Neveu-Schwarz dans le deuxième cas, obtenant ainsi deux secteurs de cordes ouvertes.

## Spectres NS et R

On considère d'abord le spectre engendré par un seul ensemble de modes NS ou R, c'est-à-dire la corde ouverte ou un seul côté (gauche ou droit) de la corde fermée.

Puisque dans le cas NS il n'y a pas de mode zéro, le vide des excitations fermioniques est non dégénéré. La condition à imposer sur les états physiques est qu'ils soient annulés par  $(L_0 - \frac{1}{2})$ , donc l'état correspondant est un tachyon et la première excitation, engendrée par les opérateurs  $\psi_{-1/2}^\mu$ , est un vecteur de masse nulle. Plus généralement les excitations NS sont des bosons.

Dans le cas R, les opérateurs  $\psi_0^\mu$ , qui transforment un état fondamental en un autre état fondamental, forment une algèbre de Dirac, de sorte que l'état fondamental est un spineur de Dirac, dont on montre qu'il est de masse nulle. Plus généralement, les excitations R sont des fermions.

Il existe un opérateur, baptisé *nombre fermionique de surface d'univers*, qui anticommute avec les  $\psi$ , et a comme valeurs propres  $\pm 1$ . Il est conservé multiplicativement lors des interactions, ce qui nous permettra d'envisager des théories dont le spectre NS ou R ne contient que des états de nombre fermionique  $+1$  ou  $-1$ . Parmi les états NS, le tachyon est de nombre fermionique  $-1$  et le vecteur de masse nulle de nombre fermionique  $+1$ . Pour les états R de masse nulle, il est donné par la chiralité de l'état.

## Cordes fermées

Dans le cas de la corde fermée, les oscillateurs gauches et droits étant découplés, les états s'obtiennent comme produit d'un état gauche et d'un état droit, et on a un nombre fermionique pour chaque côté. On obtient donc des secteurs du spectre où on combine un secteur gauche et un secteur droit parmi NS+, NS-, R+ ou R-. Les secteurs (NS,NS) et (R,R) donnent des bosons, tandis que les secteurs (NS,R) et (R,NS) donnent des fermions.

Il faut ensuite imposer l'invariance modulaire. Il en découle que seules certaines combinaisons de secteurs sont possibles. Les deux qui nous intéresseront sont :

- Type IIA : (NS+,NS+) (R+,R-) (NS+,R-) (R+,NS+),
- Type IIB : (NS+,NS+) (R+,R+) (NS+,R+) (R+,NS+).

Une telle procédure, consistant à imposer des conditions indépendantes sur les parties gauche et droite des états, s'appelle la *projection GSO*, du nom de ses inventeurs (Gliozzi, Scherk et Olive). Ces deux spectres ne comportent pas de tachyon. Les deux autres théories invariantes modulaires contiennent un tachyon et pas de fermion, ce qui en limite l'intérêt.

Voyons maintenant le contenu de ces spectres à basse énergie (états de masse nulle).  $(NS+,NS+)$ , produit de deux vecteurs, est identique aux états de masse nulle de la corde bosonique, c'est-à-dire un scalaire (dilaton  $\Phi$ ), une 2-forme ( $B_{\mu\nu}$ ) et un graviton. Cela nous permettra, dans la suite (chapitres 2 et 4), d'étudier la corde bosonique en faisant abstraction des problèmes liés au tachyon : les résultats que nous obtiendrons seront valides dès lors que nous ne considérerons que les états de masse nulle, et nous n'aurons pas à introduire toute la complexité liée aux supercordes.

Le secteur  $(R,R)$ , produit de deux spineurs, se décompose en formes différentielles : dans la théorie IIA, on obtient un vecteur  $C_{(1)}$  et une 3-forme  $C_{(3)}$  ; dans la théorie IIB, on obtient un scalaire  $C_{(0)}$ , une 2-forme  $C_{(2)}$  et une 4-forme self-duale  $C_{(4)}$  (c'est-à-dire que  $dC_{(4)} = *dC_{(4)}$ ). Il sera utile, dans la suite, de définir des formes de degré plus élevé, avec la propriété  $dC_{(8-n)} = *dC_{(n)}$ . Pour plus de détails sur cette décomposition, on se référera au début de [4].

Les secteurs  $(NS,R)$  et  $(R,NS)$  contiennent chacun un gravitino (particle de spin  $3/2$ ) et un spineur de Majorana-Weyl ; les gravitinos de ces deux secteurs sont de même chiralité pour la corde IIB et de chiralités différentes pour la corde IIA.

À ce stade, il paraîtrait naturel d'écrire une généralisation de l'action (1.1.6). Dans le cas de fonds NS-NS, cela est possible, et on obtient l'action (1.1.6) plus des termes fermioniques que le lecteur pourra trouver dans la littérature. Dans le cas de fonds R-R, il n'y a pas de telle action, ce qui rend difficile leur étude, sauf dans certains cas où des dualités permettent de se ramener à des fonds NS-NS. Nous en verrons un exemple dans le chapitre 3.

De même qu'un vecteur de masse nulle ne peut interagir de façon cohérente que s'il existe une symétrie locale avec une quantité conservée scalaire, un spin  $3/2$  de masse nulle ne peut interagir que s'il existe une symétrie locale avec une quantité conservée spinorielle, autrement dit une supersymétrie d'espace-temps. Puisqu'il y a deux gravitinos, c'est même d'une supersymétrie étendue qu'il s'agit, avec  $\mathcal{N} = (1, 1)$  pour la théorie IIA, et  $\mathcal{N} = (2, 0)$  pour la théorie IIB, soit 32 supercharges dans les deux cas. On notera que les supersymétries de surface d'univers et d'espace-temps sont deux choses distinctes, qui ne sont reliées que de façon indirecte.

On peut trouver étrange que la supersymétrie d'espace-temps n'ait pas été manifeste

dès le début. Il existe une formulation manifestement supersymétrique des supercordes, dite *corde de Green-Schwarz*, où, au lieu de fermions de surface d'univers, on a des fermions d'espace-temps. Le problème de cette formulation est qu'elle est très difficile à quantifier sans briser l'invariance de Lorentz, c'est pourquoi on lui préfère souvent la formulation RNS. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Par souci de complétude, signalons l'existence d'un autre type de supercorde, la *corde hétérotique*. Elle s'obtient en mettant, en lieu et place des fermions gauches se transformant sous le groupe de Lorentz d'espace-temps, des champs se transformant selon une symétrie interne, c'est-à-dire qu'on ne garde que la supersymétrie de surface d'univers droite. On obtient alors dans le spectre de masse nulle un dilaton, une 2-forme, un graviton, un gravitino et un vecteur de groupe de jauge  $SO(32)$  ou  $E_8 \times E_8$ . Dans la mesure où cela n'interviendra pas dans cette thèse, nous n'en parlerons pas plus.

## T-dualité

Comme nous l'avons vu précédemment, la symétrie de T-dualité change la composante droite de  $X$  en son opposé. La supersymétrie de surface d'univers entraîne alors qu'il faut aussi appliquer cette transformation à  $\psi_-$ . Cela a pour effet de changer la chiralité du secteur R droit, ce qui échange les théories IIA et IIB. Il en découle également des transformations pour les champs R-R, qui consistent essentiellement à enlever l'indice correspondant à la dimension compactifiée lorsqu'il y était, et à l'ajouter lorsqu'il n'y était pas. Ainsi, dans le cas où la dimension compactifiée est la 9, on a :

$$C \leftrightarrow C_9, \quad C_\mu \leftrightarrow C_{9\mu}, \quad \text{etc.}$$

### 1.4.2 Cordes ouvertes et D-branes

Comme dans le cas de la corde bosonique, on peut ajouter des D-branes et y accrocher des cordes ouvertes, avec des conditions aux bords de Neumann parallèlement à la D-brane, et Dirichlet orthogonalement à la D-brane. La supersymétrie de surface d'univers impose que le signe dans la condition au bord  $\psi_- = \pm\psi_+$  pour une coordonnée Dirichlet soit opposé à celui pour une coordonnée Neumann. Ceci est cohérent avec le fait qu'une T-dualité le long d'une coordonnée la fait passer de Neumann à Dirichlet, ou inversement.

Les D-branes à nombre pair de dimensions spatiales, pour la corde IIA, ou impair, pour la corde IIB, préservent la moitié des supersymétries d'espace-temps, soit 16 supercharges. Il en découle leur stabilité : en effet, la projection GSO appliquée aux cordes ouvertes

élimine alors le tachyon, et leur spectre de masse nulle comporte un boson de jauge, des fluctuations de position de la D-brane (secteur NS+, similaire à la corde bosonique) et un spineur (secteur R±). (Il existe aussi des D-branes stables ne préservant pas de supersymétrie ; nous n'en parlerons pas dans cette thèse.)

### Action effective

Comme dans le cas bosonique, la D-brane admet une action effective. Nous nous limiterons ici à la partie concernant les champs bosoniques.

Le couplage aux champs NS-NS est le même que pour la corde bosonique, et est donné par l'action de Born-Infeld (1.2.6).

On montre qu'une Dp-brane ( $p \leq 8$ ) est, en outre, chargée sous la  $(p+1)$ -forme R-R  $C_{(p+1)}$ , d'où découle un terme  $\int C_{(p+1)}$  dans l'action. (Le cas des D9-branes est spécial, puisqu'elles n'existent que dans le cas de la théorie de type I, que nous évoquerons plus loin.) La supersymétrie entraîne que la charge correspondante est égale au couplage  $T_p$  de la D-brane au graviton. D'autre part, des raisonnements de T-dualité similaires à ceux que nous avons fait dans le cas bosonique montrent l'existence de termes, dits *termes de Wess-Zumino*, couplant les champs R-R et le champ de jauge, que l'on peut résumer par

$$\int \exp(\hat{B} + 2\pi\alpha'F) \wedge \sum_q C_{(q)}$$

étant entendu que l'on extrait de ce produit les termes qui sont des  $(p+1)$ -formes. Il en découle l'action effective de Born-Infeld-Wess-Zumino :

$$S_{\text{eff}} = T_p \left( - \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{-\det(\hat{G} + \hat{B} + 2\pi\alpha'F)} + \int \exp(\hat{B} + 2\pi\alpha'F) \wedge \sum_q C_{(q)} \right). \quad (1.4.1)$$

Le couplage  $T_p$  peut être calculé en comparant l'amplitude de l'échange d'un graviton entre deux D-branes calculée en théorie des cordes et celle calculée avec la théorie des champs effective, et on trouve alors

$$T_p = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa_0} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{3-p}.$$

On remarque tout d'abord la relation  $T_p = 2\pi\sqrt{\alpha'}T_{p+1}$ , qui peut se trouver par T-dualité. D'autre part, on note une dépendance en  $\kappa_0$  qui, comme nous l'avons signalé précédemment, n'est pas une quantité physique, les quantités physiques étant  $\kappa_0 e^{\Phi_0}$  (couplage gravitationnel) et  $\tau_p = T_p e^{-\Phi_0}$  (tension de la Dp-brane).

Dans le cas de la théorie IIB, on a deux objets à une dimension spatiale, la D1-brane, de tension  $\tau_1$ , et la corde fondamentale, de tension  $\tau_F = 1/2\pi\alpha'$ . Le rapport  $\tau_F/\tau_1$  est proportionnel au couplage  $g = e^{\Phi_0}$ ; il apparaîtra dans la suite intéressant de faire en sorte qu'il soit égal à  $g$ , ce qui impose de choisir  $\kappa_0 = 8\pi^{7/2}\alpha'^2$ . Le fait de fixer  $\kappa_0$  fixe aussi  $\Phi_0$  pour un fond donné, autrement dit cela fixe la normalisation additive du dilaton.

Puisque, pour chaque champ R-R, il existe un objet chargé électriquement et un chargé magnétiquement sous lui (un objet chargé électriquement sous  $C_{(p)}$  est chargé magnétiquement sous  $C_{(8-p)}$ ), on peut se demander s'il en est de même pour le champ NS-NS  $B$ . Il découle de l'action (1.1.6) que l'objet chargé électriquement sous  $B$  n'est autre que la corde fondamentale; l'objet chargé magnétiquement sous  $B$  est une *NS5-brane*, dont les fluctuations n'ont pas de description perturbative comme celles des D-branes (qui sont les cordes ouvertes qui y sont accrochées). Comme les D-branes, la NS5-brane préserve la moitié des supersymétries d'espace-temps.

### 1.4.3 Actions effectives à basse énergie et S-dualité

Comme pour la corde bosonique, les excitations de la supercorde admettent une action effective à basse énergie. L'absence de modèle sigma pour une corde en présence de champs R-R n'empêche pas d'écrire une action effective. En effet, la supersymétrie d'espace-temps est très contraignante, et fixe complètement l'action à d'éventuelles redéfinitions des champs près; l'action obtenue est celle de la supergravité IIA ou IIB, selon le cas.

Pour la corde IIA, on obtient

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^D x \sqrt{-\det G} \left[ e^{-2\Phi} \left( R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{12} H^2 \right) - \frac{1}{8} (dC_{(1)})^2 - \frac{1}{48} (dC_{(3)})^2 \right]$$

plus des termes cubiques et quartiques en les formes différentielles.

Dans le cas de la corde IIB, la self-dualité de  $C_{(4)}$  exclut l'existence d'une action covariante. Néanmoins, les équations du mouvement peuvent se déduire de l'action suivante

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^D x \sqrt{-\det G} \left[ e^{-2\Phi} \left( R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{12} H^2 \right) - \frac{1}{2} (dC_{(0)})^2 - \frac{1}{12} (dC_{(2)})^2 - \frac{1}{480} (dC_{(4)})^2 + \text{termes cubiques et quartiques} \right]$$

en imposant la contrainte  $dC_{(4)} = *dC_{(4)}$  sur les solutions.

Cette action possède une symétrie  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  par laquelle les champs se transforment

comme suit :

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \text{ avec } \tau = C_{(0)} + ie^{-\Phi}$$

$$\begin{pmatrix} C'_{(2)} \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{(2)} \\ B \end{pmatrix}$$

où  $ad - bc = 1$ , et  $C_{(4)}$  et la métrique d'Einstein  $G_E = e^{-\Phi/2}G$  restent inchangés.

On peut se demander si la théorie des cordes préserve tout ou partie de cette symétrie de la supergravité. Puisque ces transformations mélangent les 2-formes NS-NS et R-R, cela conduirait, dans le cas où  $a, b, c$  et  $d$  sont quelconques, à transformer la corde fondamentale en un état de charges quelconques sous les deux 2-formes, ce qui violerait la condition de quantification de Dirac, sauf dans le cas où  $a, b, c$  et  $d$  sont entiers. On est donc amené à conjecturer l'existence d'une symétrie  $SL(2, \mathbb{Z})$ , nommée *S-dualité* pour la théorie IIB. Le générateur transformant  $\tau$  en  $-1/\tau$  échange les cordes fondamentales et les D1-branes, les NS5- et D5-branes et laisse les D3-branes invariantes. Dans ce dernier cas, il découle une symétrie  $SL(2, \mathbb{Z})$  de la théorie des champs effective sur la D3-brane, dont le lecteur pourra trouver l'expression et la démonstration en [38] (annexe C de cette thèse). Signalons que, dans le cas où  $C_{(0)} = 0$ , la transformation  $\tau \rightarrow -1/\tau$  change  $\Phi$  en  $-\Phi$ , et donc le couplage en son inverse ; c'est donc une dualité non perturbative.

#### 1.4.4 Orientifolds et cordes de type I

Comme dans le cas des cordes bosoniques, il existe en théorie des supercordes des orientifolds, obtenus en quotientant la théorie par le produit de la parité de surface d'univers  $\Omega$  et d'une isométrie involutive de l'espace-temps.

Dans le cas des cordes IIB,  $\Omega$  est une symétrie de la théorie ; les isométries d'espace-temps changeant l'orientation ne le sont pas parce que le spectre est chiral. Il en découle la possibilité d'orientifolds de dimension spatiale impaire. La moitié des supersymétries d'espace-temps est préservée.

Si l'isométrie intervenant dans le quotient est l'identité, on a affaire à un orientifold  $\mathcal{O}9$ , c'est-à-dire à des cordes non orientées. Après projection, il reste dans le spectre de masse nulle le graviton et le dilaton, comme pour les cordes bosoniques, ainsi que la 2-forme R-R  $C_{(2)}$ . La théorie ainsi obtenue souffre d'anomalies dont la compensation requiert l'introduction de 32 D9-branes, donc de cordes ouvertes, avec un groupe de jauge  $SO(32)$  ; le résultat obtenu est appelé *théorie des cordes de type I*. Réciproquement, l'existence de D9-branes introduit une anomalie dont la compensation requiert la présence d'un  $\mathcal{O}9$ , et

donc n'est possible que dans le cadre de la théorie de type I. Il peut y exister des D1- et D5-branes, chargées respectivement électriquement et magnétiquement sous  $C_{(2)}$ . Comme les cordes de type I n'interviendront pas dans la suite de cette thèse, nous n'en parlerons pas plus.

Dans le cas des cordes IIA,  $\Omega$  n'est pas une symétrie de la théorie, car elle est chirale sur la surface d'univers. En revanche, le produit de  $\Omega$  par une isométrie d'espace-temps changeant l'orientation l'est, et on obtient alors un orientifold de dimension spatiale paire.



# Chapitre 2

## Cordes, D-branes et orientifolds dans un groupe compact : l'exemple de $S^3$ et $\mathbb{RP}^3$

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressé principalement aux cordes dans un espace-temps plat. On voudrait, bien évidemment, envisager le cas d'espaces plus compliqués, mais les calculs y sont le plus souvent très difficiles, voire impossibles. Il y a néanmoins un cas où l'on sait calculer beaucoup de choses : c'est celui où l'espace-temps est un groupe de Lie, ou un produit de groupes de Lie, chacun d'eux étant muni d'une métrique invariante par l'action du groupe, c'est-à-dire, dans le cas d'un groupe dont l'algèbre de Lie est simple, sa forme de Killing. Il découle en effet de la structure algébrique supplémentaire qu'est la structure de groupe une extension de la symétrie conforme permettant, au moins dans le cas compact, l'obtention du spectre exact des cordes fermées et ouvertes.

Nous nous limiterons ici essentiellement aux cas non triviaux les plus simples que sont la 3-sphère ( $SU(2)$ ), qui est simplement connexe, et  $\mathbb{RP}^3$  ( $SO(3)$ ), qui ne l'est pas, et pour lequel nous mettrons l'accent sur les différences avec son recouvrement universel  $S^3$ . Outre le fait d'être un exemple simple de groupe,  $S^3$  apparaît dans la limite proche de l'horizon de plusieurs fonds intéressants, notamment celle d'une superposition de NS5-branes [21], qui s'écrit  $S^3 \times \mathbb{R}_\Phi \times \mathbb{R}^{1,5}$ , où  $\mathbb{R}_\Phi$  est une dimension en laquelle le champ de dilaton est linéaire. Un autre exemple est l'état lié formé par des NS5-branes et des cordes fondamentales, qui est  $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ , qui sera étudié au chapitre suivant.

## 2.1 Cordes fermées orientées : le modèle de Wess-Zu- mino-Witten

On s'intéresse ici aux cordes fermées dans un groupe de Lie compact  $G$  muni d'une métrique proportionnelle à sa forme de Killing. Par exemple,  $SU(2)$  est la 3-sphère munie de sa métrique usuelle. Si on ne met pas d'autre champ de fond que la métrique, le modèle sigma obtenu n'est pas invariant conforme. On peut le rendre invariant conforme par l'ajout d'un terme approprié, et on obtient l'action [6, 7] :

$$S = -\frac{k}{16\pi} \int_{\Sigma} d\tau d\sigma \operatorname{Tr}'(\partial_m g \partial^m g^{-1}) + \frac{k}{24\pi} \int_M \operatorname{Tr}'((g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg)) \quad (2.1.1)$$

où  $\operatorname{Tr}'$  est une trace normalisée de sorte que la longueur carrée des racines longues de l'algèbre soit 2 (pour  $SU(2)$ ,  $\operatorname{Tr}' = 2 \operatorname{Tr}$  dans la représentation fondamentale), et  $M$  est une variété à trois dimensions de bord  $\Sigma$ , ce qui revient à avoir un champ de fond  $B_{\mu\nu}$  non nul, le deuxième terme (appelé terme de Wess-Zumino) étant  $\int_M H = \int_{\Sigma} B$ . Comme  $k$  apparaît en facteur devant la métrique, il est proportionnel au carré du « rayon » du groupe ; dans le cas de la 3-sphère, le carré de son rayon vaut  $k\alpha'$ .

Cette action est ambiguë à cause du choix de  $M$  ; ce qui est important est que  $e^{iS}$  soit bien défini, ce qui est vrai si  $k$ , que l'on appelle le niveau du modèle WZW, est entier.

Elle admet une symétrie bien plus large que l'invariance conforme, puisque elle est invariante par la transformation suivante :

$$g(\tau, \sigma) \rightarrow \Omega(\sigma^+) g(\tau, \sigma) \bar{\Omega}^{-1}(\sigma^-) \quad (2.1.2)$$

où  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}$  sont deux fonctions indépendantes à valeurs dans  $G$ . Il en découle les courants conservés à valeur dans l'algèbre de Lie de  $G$  (notée  $\mathfrak{g}$ )

$$J(\sigma^+) = kg \partial_+ g^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{J}(\sigma^-) = kg^{-1} \partial_- g. \quad (2.1.3)$$

Leurs modes de Fourier, donnés par

$$J(\sigma^+) = \sum_n J_n e^{-2in\sigma^+},$$

et de même pour  $\bar{J}$ , vérifient les relations de commutation

$$[J_n^a, J_m^b] = f^{abc} J_{n+m}^c + kn \delta^{ab} \delta_{n+m,0}$$

où  $J = J^a t^a$ , les  $t^a$  sont des générateurs orthonormés (au sens de la forme de Killing) et les  $f^{abc}$  sont les constantes de structure de  $\mathfrak{g}$ . L'algèbre de Lie qu'ils engendrent, notée  $\hat{\mathfrak{g}}$ , est l'algèbre de Kac-Moody associée à  $\mathfrak{g}$ . Les  $J_0$  forment une sous-algèbre isomorphe à  $\mathfrak{g}$ .

Ces relations de commutation sont assez similaires à celles des  $\alpha_n^\mu$  dans le cas plat. Il en découle que les états sont obtenus en agissant sur un état fondamental avec les opérateurs  $J_{-n}$ . L'ensemble des états fondamentaux étant invariant par les  $J_0$ , ils forment une représentation de  $\mathfrak{g}$ , et à chaque représentation de  $\mathfrak{g}$  est associée une représentation de l'algèbre de Kac-Moody.

Le tenseur énergie-impulsion associé vaut classiquement  $(1/2k) \sum_a J^a J^a$ . Il est toutefois renormalisé par les effets quantiques. En imposant que les relations de commutation vérifiées par  $T$  soient correctes, on obtient la forme correcte, qu'on appelle *tenseur de Sugawara* :

$$T = \frac{1}{2(k + h(\mathfrak{g}))} \sum_a J^a J^a$$

où  $h(\mathfrak{g})$  est le nombre dual de Coxeter de  $\mathfrak{g}$ . Notamment,  $h(\mathfrak{su}(2)) = 2$ . On montre que la charge centrale vaut alors

$$c = \frac{k \dim(G)}{k + h(\mathfrak{g})}$$

et que les relations de commutation entre  $T$  et  $J$  sont

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{m+n}^a,$$

ce qui, là encore, constitue une similitude entre les  $J^a$  et les  $\alpha^i$  du cas plat.

Pour chaque paire de représentations  $(R, \bar{R})$  de  $\mathfrak{g}$ , on peut alors déduire le spectre associé. Bien sûr, considérer  $G$  seul comme espace-temps n'aurait guère de sens, et on considèrera donc le produit de  $G$  par un espace de Minkowski. Il découle alors de l'annulation de  $L_0 + \bar{L}_0 - 2$  sur les états physiques que la masse des états (définie à partir de l'énergie-impulsion de l'espace de Minkowski) est donnée par :

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} \left( -2 + \frac{c_R + c_{\bar{R}}}{k + h(\mathfrak{g})} + N + \bar{N} + M + \bar{M} \right) \quad (2.1.4)$$

où  $c_R$  est le Casimir quadratique de la représentation  $R$  ( $j(j+1)$  dans le cas de la représentation de spin  $j$  de  $\mathfrak{su}(2)$ ),  $N$  et  $\bar{N}$  sont les nombres d'excitations gauches et droites sur le groupe (étant entendu que  $J_{-n}$  crée  $n$  excitations), et  $M$  et  $\bar{M}$  sont les excitations de l'espace de Minkowski. L'annulation de  $L_0 - \bar{L}_0$  impose la contrainte

$$M + N + \frac{c_R}{k + h(\mathfrak{g})} = \bar{M} + \bar{N} + \frac{c_{\bar{R}}}{k + h(\mathfrak{g})}.$$

Il se pose alors la question de savoir quelles représentations sont présentes dans la théorie. Un résultat remarquable est que, pour toutes sauf un nombre fini d'entre elles,

toute fonction de corrélation contenant un opérateur se transformant sous une telle représentation s'annule. Les représentations restantes sont dites intégrables. Dans le cas de  $SU(2)$ , ce sont les représentations de spin inférieur ou égal à  $k/2$ .

Dans le cas d'un groupe simplement connexe, il y a correspondance entre les états de cordes fermées et les opérateurs de vertex, qui sont des fonctions sur le groupe. Sachant que l'ensemble des fonctions sur  $G$  se décompose en représentations de  $G \times G$  par

$$\text{Fon}(G) = \bigoplus_R R \otimes R^*$$

où  $R^*$  est la représentation conjuguée de  $R$  (dans le cas de  $SU(2)$ , on a toujours  $R^* = R$ ). On s'attend alors à ce que le spectre des cordes sur  $G$  soit cet ensemble restreint aux représentations intégrables.

Il faut néanmoins s'assurer de l'invariance modulaire d'un tel spectre. Comme nous l'avons vu précédemment, la fonction de partition s'écrit

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr}(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}) \\ &= \sum_{R, \bar{R}} n_{R, \bar{R}} \chi_R(q) \chi_{\bar{R}}^*(\bar{q}) \end{aligned}$$

avec  $q = e^{2\pi i \tau}$ , où  $\tau$  est le paramètre modulaire du tore,  $n_{R, \bar{R}}$  est la multiplicité de la représentation  $(R, \bar{R})$  dans le spectre, et

$$\chi_R(q) = \text{Tr}_R(q^{L_0 - c/24}).$$

Ces quantités, qu'on appelle *caractères de Kac-Moody*, ont les transformations modulaires suivantes :

$$\chi_R(\tau + 1) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{c_R}{k + h(\mathfrak{g})} - \frac{c}{24}\right)\right) \chi_R(\tau) \quad (2.1.5)$$

$$\chi_R\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{R'} S_{RR'} \chi_{R'}(\tau) \quad (2.1.6)$$

où  $S$  est une matrice unitaire, qui dans le cas de  $SU(2)$  vaut

$$S_{jj'} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{\pi(2j+1)(2j'+1)}{k+2}\right). \quad (2.1.7)$$

L'unitarité de  $S$  entraîne que la fonction de partition

$$Z(\tau) = \sum_R \chi_R \chi_{R^*}^*$$

dite diagonale, et qui n'est autre que celle découlant du spectre que nous avons conjecturé dans le cas d'un groupe simplement connexe, est invariante modulaire. Nous en concluons que ce spectre est le bon.

Il reste maintenant à trouver le spectre dans le cas où  $G$  n'est pas simplement connexe. On a alors  $G = \tilde{G}/H$ , où  $\tilde{G}$  est le recouvrement universel de  $G$ , et  $H$  un sous-groupe discret de  $\tilde{G}$ . Il est aisé de voir que les états de cordes homotopes à un point (dits non twistés) sont ceux de  $\tilde{G}$  invariants par  $H$ , c'est-à-dire ceux associés aux représentations de  $\tilde{G}$  où les éléments de  $H$  sont représentés par l'identité. La fonction de partition associée à ce seul spectre n'étant pas invariante modulaire, il faut y ajouter des états de cordes non homotopes à un point (dits états twistés). Le spectre complet peut être déterminé complètement en imposant l'invariance modulaire.

Le spectre des cordes fermées dans  $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$  a été dérivé explicitement dans [7]. Tout d'abord, il est nécessaire que  $k$  soit pair. Ceci est dû au fait que, le groupe étant de dimension 3, la variété  $M$  dans le terme de Wess-Zumino de l'action (2.1.1) est nécessairement le groupe entier ;  $SO(3)$  étant deux fois plus petit que  $SU(2)$ , il s'ensuit que  $k$  doit être pair pour que ce terme soit correctement quantifié. En ce qui concerne le spectre, on trouve que :

- Les états non twistés contiennent les représentations de la forme  $(j, j)$ , avec  $j$  entier inférieur à  $k/2$ .
- Les états twistés contiennent les représentations de la forme  $(j, k/2 - j)$  où  $j$  est entier si  $k$  est multiple de 4, et demi-entier sinon.

## 2.2 D-branes symétriques sur les groupes compacts

### 2.2.1 Description des D-branes

Les D-branes sur les groupes ont été initialement construites comme des états de bord, dits états de Cardy, dans le cadre des théories conformes rationnelles (dont fait partie le modèle de Wess-Zumino-Witten) pour lesquelles la fonction de partition est diagonale [9].

La condition au bord vérifiée par les courants  $J$  et  $\bar{J}$  s'écrit  $J = -\bar{J}$ , d'où découle que les états de bord associés à des D-branes symétriques, c'est-à-dire préservant l'algèbre de Kac-Moody doivent vérifier  $(J + \bar{J})|B\rangle = 0$ , ce qui, en termes de modes de Fourier, s'écrit  $(J_n + \bar{J}_{-n})|B\rangle = 0$ . On montre que pour chaque représentation  $j$  de l'algèbre de Kac-Moody il existe un unique état ne contenant que la représentation  $j$ , qu'on appelle *état d'Ishibashi* [8] et que nous noterons  $|j\rangle$ .

Dans le cas où la fonction de partition est l'invariant diagonal, les  $|j\rangle$  engendrent l'ensemble des états présents dans le spectre, et donc la fonction de partition du cylindre dans le secteur des cordes fermées (équation (1.2.5)) s'écrit

$$Z(t) = \sum_j \langle f|j\rangle \langle j|i\rangle \langle j| \text{Tr}[(\tilde{q}^2)^{L_0 - c/24}] |j\rangle.$$

La quantité  $\langle f|j\rangle$  s'interprète comme le couplage de l'état de bord  $|f\rangle$  avec les cordes fermées dans la représentation  $j$ , et nous la noterons  $D_f^j$  dans la suite. La quantité  $\langle j| \text{Tr}[(\tilde{q}^2)^{L_0 - c/24}] |j\rangle$ , quant à elle, n'est autre que le caractère  $\chi_j(\tilde{q}^2)$ , d'où l'expression :

$$Z(t) = \sum_j D_f^j D_i^j \chi_j(\tilde{q}^2).$$

Elle doit d'autre part être égale à la fonction de partition dans le canal ouvert (équation (1.2.4)), qui s'écrit

$$Z(t) = \sum_j n_{if}^j \chi_j(\sqrt{q})$$

où  $n_{if}^j$  est le nombre de fois où la représentation  $j$  apparaît dans le spectre des cordes entre les D-branes  $i$  et  $f$ . Le fait que les caractères apparaissant dans les équations précédentes sont reliés par la relation (2.1.6), et que les  $n_{if}^j$  doivent être des entiers positifs, est une contrainte forte sur les états de bord possibles.

Ces états ont été construits par Cardy [9], qui a montré qu'on peut associer à chaque représentation  $r$  de l'algèbre de Kac-Moody un état  $|\tilde{r}\rangle$  (qu'on appellera « état de spin  $r$  » dans le cas de  $SU(2)$ ), et que  $n_{\tilde{r}s}^j$  est le nombre d'apparition de la représentation  $j$  dans le produit des représentations  $r^*$  et  $s$  (coefficient de fusion).

Ainsi, étant données deux D-branes de spins  $r$  et  $s$ , on connaît le spectre des cordes qui sont entre elles, donc leur fonction de partition dans le canal ouvert. Par une transformation modulaire, on obtient le canal fermé, et donc les  $D_r^j$ . Nous utiliserons abondamment cela dans la suite de ce chapitre.

Pour une représentation donnée de l'algèbre de Kac-Moody, la masse des états s'obtient de façon similaire aux cordes fermées, à ceci près qu'il n'y a qu'une algèbre de Virasoro ; avec les mêmes notations que dans l'équation (2.1.4), on trouve

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( -1 + \frac{c_R}{k + h(\mathfrak{g})} + N + M \right). \quad (2.2.1)$$

Dans le cas de  $SU(2)$ , la règle de fusion pour les représentations intégrables de  $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$  est

$$[j_1] \otimes [j_2] = [|j_1 - j_2|] \oplus [|j_1 - j_2| + 1] \oplus \dots \oplus [\min(j_1 + j_2, k - j_1 - j_2)],$$

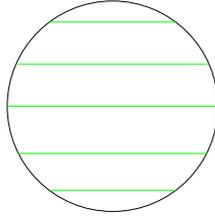


FIG. 2.1 – Position des D-branes sur la 3-sphère (cas  $k = 4$ ).

ce qui donne le spectre.

Leur géométrie a été étudiée plus tard [12, 13]. On montre que les D-branes symétriques sont localisées sur des classes de conjugaison du groupe. Dans le cas de  $SU(2)$ , ce sont des 2-sphères données, dans les coordonnées polaires usuelles, par

$$\psi = \frac{(2j + 1)\pi}{k + 2} \quad (2.2.2)$$

(fig. 2.1).

Dans le cas d'un groupe non simplement connexe, puisque la fonction de partition du tore n'est pas un invariant modulaire diagonal, on ne peut pas appliquer directement la théorie de Cardy. En revanche, puisqu'un groupe non simplement connexe s'obtient par identification de points de son recouvrement universel par un sous-groupe discret, on pourra trouver ses D-branes par identification des D-branes du recouvrement universel.

Dans le cas de  $\mathbb{RP}^3$ , qui est traité dans [20] (annexe B de cette thèse), il s'agit donc de considérer les D-branes de la 3-sphère et d'identifier celles qui sont diamétralement opposées. Sachant que l'identification  $\mathbb{Z}_2$  agit par

$$\psi \rightarrow \pi - \psi, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \phi \rightarrow \phi + \pi, \quad (2.2.3)$$

il en découle que les états de Cardy d'isospins  $j$  et  $k/2 - j$  sont identifiés.

Pour  $j < k/4$ , cela identifie deux D-branes différentes, et l'on obtient donc une D-brane sphérique, que nous baptiserons « brane de type  $j$  ».

Dans le cas  $j = k/4$ , c'est-à-dire sur l'« équateur », qui est un plan projectif, on peut envisager deux types d'identification :

- si on identifie un point d'une D-brane équatoriale de  $S^3$  avec le point opposé sur une *autre* D-brane, on obtient une D-brane sphérique enroulée sur l'équateur, avec deux points de la D-brane sur chaque point de l'équateur.
- si on identifie un point d'une D-brane équatoriale de  $S^3$  avec le point opposé sur la *même* D-brane, la D-brane obtenue est un plan projectif.

Pour dériver le spectre et le groupe de jauge des D-branes équatoriales, nous utiliserons la description suivante : on a  $N$  D-branes sphériques équatoriales sur  $S^3$ , et l'identification  $\mathbb{Z}_2$  agit comme une permutation involutive. Sachant qu'un état de bord peut être une combinaison linéaire quelconque de D-branes, l'espace des états de bord est un espace vectoriel de dimension  $N$  et l'action de  $\mathbb{Z}_2$  sur lui est une matrice unitaire  $Z$ . Puisque  $Z^2 = 1$ ,  $Z$  est diagonalisable avec  $n_+$  valeurs propres  $+1$  et  $n_-$  valeurs propres  $-1$ , avec  $n_+ + n_- = N$ , et on peut donc décrire les D-branes comme  $n_+$  D-branes  $\mathbb{RP}^2$  de signe  $+$ , et  $n_-$  D-branes  $\mathbb{RP}^2$  de signe  $-$ . Nous verrons plus loin la signification de ces signes.

Dans cette description, une D-brane équatoriale sphérique correspond à  $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , qui a une valeur propre  $+1$  et une valeur propre  $-1$ , ce qui conduit à la considérer comme la combinaison de deux D-branes  $\mathbb{RP}^2$  de signes opposés.

## 2.2.2 Couplage des D-branes aux cordes fermées

Nous nous limiterons ici à  $SU(2)$  et  $SO(3)$ .

### Cas de $SU(2)$

La fonction de partition des cordes ouvertes entre deux D-branes de types  $r$  et  $s$  est donnée par le diagramme de l'anneau :

$$\mathcal{A}_{rs} = \text{Tr}(\sqrt{q}^{L_0 - c/24}) = \sum_{j=0}^{k/2} N_{rs}^j \chi_j(\sqrt{q}).$$

où  $q = e^{-2\pi t}$ .

Comme nous l'avons vu dans le cas plat, cette amplitude peut s'interpréter dans le canal fermé comme l'échange d'une corde fermée entre les deux D-branes. Pour cela, il s'agit d'exprimer l'amplitude en termes de  $\tilde{q} = e^{-2\pi/t}$  à l'aide des équations (2.1.6) et (2.1.7). On trouve alors, comme on s'y attend,

$$\mathcal{A}_{rs} = \sum_{j=0}^{k/2} D_r^j D_s^j \chi_j(\tilde{q}^2)$$

où  $D_s^j$  vaut

$$D_s^j = \sin\left(\frac{(2j+1)(2s+1)\pi}{k+2}\right) \sqrt{\mathcal{N}_j} \tag{2.2.4}$$

avec

$$(\mathcal{N}_j)^{-1} = \sqrt{\frac{k+2}{2}} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{k+2}\right). \tag{2.2.5}$$

Le groupe de jauge est, bien sûr,  $\prod_j U(n_j)$ .

### Cas de SO(3)

Les cordes entre deux D-branes de types  $r$  et  $s$  correspondent sur la 3-sphère à des cordes entre les D-branes de types  $r$  et  $s$  d'une part, et  $k/2 - r$  et  $s$  d'autre part (les deux autres possibilités sont identifiées à celles-ci). L'amplitude de l'anneau correspondante est donc :

$$\mathcal{A}_{rs} = \sum_{l=0}^{k/2} (N_{rs}^l + N_{k/2-r,s}^l) \chi_l(\sqrt{q}).$$

Pour obtenir les couplages des D-branes aux cordes fermées, on réécrit, comme précédemment, ces amplitudes en termes de la variable  $\tilde{q}$ . On trouve alors que pour  $j$  demi-entier,  $D_s^j = 0$ , ce qui est normal puisque il n'y a pas d'état non twisté dans la représentation  $(j, j)$  pour  $j$  demi-entier, et pour  $j$  entier  $D_s^j(\text{SO}(3)) = \sqrt{2} D_s^j(\text{SU}(2))$ .

Il convient de noter que, pour des raisons topologiques, les D-branes sphériques ne peuvent pas être couplées aux cordes fermées twistées, donc il s'agit là de couplages aux cordes non twistées uniquement. En outre, comme les D-branes équatoriales sphériques sont très similaires aux autres, on peut les considérer ici comme des D-branes de type  $k/4$ , donc leurs couplages sont donnés par  $D_{k/4}^j$ .

Pour une corde ouverte entre une D-brane  $\mathbb{RP}^2$  et une de type  $s$ , l'anneau s'écrit

$$\mathcal{A}_{rs} = \sum_{l=0}^{k/2} N_{k/4,s}^l \chi_l(\sqrt{q})$$

où  $R$  désigne la D-brane  $\mathbb{RP}^2$ . Ceci est indépendant du signe de la D-brane  $\mathbb{RP}^2$ . On trouve alors

$$D_R^j = \frac{1}{2} D_{k/4}^j \quad (2.2.6)$$

ce qui n'est pas surprenant puisque une D-brane équatoriale sphérique est une combinaison de deux D-branes  $\mathbb{RP}^2$ .

L'amplitude précédente ne contenant aucune information sur le couplage des D-branes  $\mathbb{RP}^2$  aux cordes fermées twistées, nous considérons les cordes entre deux D-branes  $\mathbb{RP}^2$  de signe défini, ce qui correspond sur la 3-sphère à des cordes entre des D-branes équatoriales. En notant  $Z$  l'action de l'identification  $\mathbb{Z}_2$ , on doit avoir

$$Z|N, l, ij\rangle = (-)^l s_i s_j |N, l, ij\rangle \text{ pour } l = 0, 1, \dots, k/2, \quad (2.2.7)$$

où  $N$  est le nombre d'excitations de l'état,  $l$  le spin de la représentation de  $\text{SO}(3)$  sous laquelle il se transforme,  $i$  et  $j$  les indices des deux D-branes,  $s_i$  et  $s_j$  leurs signes. Les valeurs indiquées pour  $l$  sont celles où  $N_{k/4,k/4}^l$  ne s'annule pas et le signe  $(-)^l$  est la parité

du  $l$ -ième harmonique sphérique. Il en découle que l'on a uniquement des cordes d'isospin pair entre D-branes de même signe, et uniquement d'isospin impair entre D-branes de signes différents. L'amplitude de l'anneau correspondante s'écrit donc

$$\mathcal{A}_{RR} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}} \chi_l(\sqrt{q}) \pm \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}} (-)^l \chi_l(\sqrt{q})$$

où  $\pm$  est le produit des deux signes.

Comme le premier terme contient tous les couplages de la D-brane  $\mathbb{RP}^2$  avec les cordes fermées non twistées, le deuxième ne contient que les couplages avec les cordes twistées. Après une transformation modulaire, on trouve que la D-brane n'est couplée qu'à l'état twisté avec  $(j, \bar{j}) = (k/4, k/4)$ , et le couplage est

$$D_R^{\text{twisted}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k+2}{2}}$$

où  $\pm$  est le signe de la D-brane. Ce signe n'est donc rien d'autre, à un facteur numérique près, que sa charge sous l'état twisté  $(k/4, k/4)$ .

Considérons maintenant le champ de jauge. Sachant que nos D-branes ont une géométrie  $S^2 \times M'$  dans  $S^3 \times M$  (puisque la physique sur  $S^3$  seule n'aurait pas de sens), on s'intéresse au champ de jauge effectif sur  $M'$  après réduction dimensionnelle de la 2-sphère, donc à la partie du champ de jauge indépendante des coordonnées sur la 2-sphère, qui se trouve dans la représentation de spin 0 de l'algèbre de Kac-Moody. Sachant que, en ce qui concerne les D-branes équatoriales, la représentation de spin 0 apparaît entre des D-branes de même charge twistée, on conclut que le groupe est  $\prod_{j < k/4} U(n_j) \times U(n_+) \times U(n_-)$ .

### 2.2.3 Calculs semi-classiques et stabilisation par le flux

Nous allons maintenant nous intéresser à la description effective des D-branes à basse énergie, c'est-à-dire l'action de Born-Infeld.

#### Stabilité des D-branes sphériques

Tout d'abord, une question est de savoir d'où vient, au niveau de l'action effective, la quantification de la position des D-branes donnée par la théorie conforme (équation (2.2.2)), ainsi que leur stabilité, sachant qu'elles n'ont pas une surface minimale. On va voir que cela est lié directement à la quantification du flux magnétique à travers la D-brane.

Le cas de la 3-sphère a été considéré initialement en [14], et le calcul a ensuite été généralisé à des groupes compacts quelconques [15]. Nous nous restreindrons ici à la 3-sphère.

Dans les coordonnées sphériques habituelles, la métrique et la 3-forme de Neveu-Schwarz s'écrivent :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \tilde{k}\alpha' [d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \\ H &= dB = 2\tilde{k}\alpha' \sin^2 \psi \sin \theta d\psi d\theta d\phi \end{aligned}$$

où  $\tilde{k}\alpha'$  est le rayon de la 3-sphère (en l'absence de correction quantique,  $\tilde{k}$  serait le niveau de l'algèbre de Kac-Moody). On peut choisir pour  $B$  une jauge préservant une symétrie  $SO(3)$  :

$$B = \left[ \tilde{k}\alpha' \left( \psi - \frac{\sin 2\psi}{2} \right) + \pi\alpha' n_0 \right] \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.2.8)$$

Ceci a des singularités aux deux pôles  $\psi = 0$  et  $\pi$ . La fonction d'onde d'une corde enroulée autour de cette singularité acquiert une phase  $\int_{S^2} B/2\pi\alpha'$ , qui vaut  $2\pi n_0$  en  $\psi = 0$  et  $2\pi(\tilde{k} + n_0)$  en  $\psi = \pi$ . Cela est acceptable si elle est multiple de  $2\pi$ , donc  $n_0$  et  $\tilde{k}$  doivent être entiers. Ceci est un moyen simple de voir que le rayon de la 3-sphère doit être quantifié.

Considérons maintenant une D2-brane sphérique à une valeur fixée de  $\psi$ . On peut la munir d'un flux magnétique uniforme

$$F = dA = -\frac{n}{2} \sin \theta d\theta d\phi$$

où  $n$ , égal à l'opposé du flux magnétique, est un entier. On notera que  $n$  n'est pas invariant de jauge, puisque la 2-forme invariante est  $\hat{B} + 2\pi\alpha' F$ , et non  $F$ . En revanche,  $n - n_0$  l'est. Nous prenons également en compte un fond de dilaton, supposé constant dans un premier temps.

L'énergie de Born-Infeld pour la D2-brane s'écrit

$$\begin{aligned} E &= T_{D2} \int d\theta d\phi e^{-\Phi} \sqrt{\det(\hat{g} + \hat{B} + 2\pi\alpha' F)} + \dots \\ &= 4\pi\tilde{k}\alpha' T_{D2} e^{-\Phi} \sqrt{\sin^4 \psi + \left( \psi - \frac{\sin 2\psi}{2} - \frac{\pi(n - n_0)}{\tilde{k}} \right)^2} + \dots \end{aligned}$$

Si  $0 < n - n_0 < \tilde{k}$ , ceci admet un minimum pour

$$\psi_n = \frac{\pi(n - n_0)}{\tilde{k}}.$$

L'identification avec l'équation (2.2.2) conduit aux relations suivantes entre ces paramètres à basse énergie et ceux de l'état de Cardy en théorie conforme :

$$n - n_0 = 2j + 1 \quad (2.2.9)$$

$$\tilde{k} = k + 2.$$

Noter la renormalisation du rayon  $k \rightarrow k + 2$ , déjà rencontrée dans l'expression du tenseur énergie-impulsion.

Dans le cas de  $\mathbb{RP}^3$ , la stabilisation des D-branes sphériques se fait par le même mécanisme. Les D-branes équatoriales, quant à elles, sont stabilisées par leur topologie, qui est telle qu'elles ne peuvent pas se déformer continûment en un point.

### Couplage aux cordes fermées

Les couplages  $D_s^j$  peuvent s'obtenir semi-classiquement à partir du couplage linéarisé des D-branes au dilaton. Celui-ci peut se décomposer en harmoniques hypersphériques :

$$\Phi = \sum_j \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L \Phi_{jLM} F_{jLM}(\psi) Y_{LM}(\theta, \phi).$$

Sachant que le couplage linéarisé s'écrit, pour une D-brane située en  $\psi_n$ ,

$$\int_{S^2} d\theta d\phi \Phi \sin \psi_n \sin \theta,$$

seuls apparaissent les harmoniques  $L = M = 0$ . Comme

$$F_{j00}(\psi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(2j+1)\psi}{\sin \psi},$$

on trouve un couplage effectif du dilaton valant

$$D_{s \text{ eff}}^j \propto \sin\left(\frac{(2j+1)(2s+1)\pi}{k+2}\right).$$

On note tout d'abord que la dépendance en  $s$  est la même que celle donnée par la théorie conforme (équation (2.2.4)). En ce qui concerne la dépendance en  $j$ , il convient de remarquer que dans les calculs de théorie conforme on considèrerait des états propres de  $J^3$  et  $\bar{J}^3$ , correspondant aux spins gauche et droit de  $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2)_L \oplus \mathfrak{su}(2)_R$ , alors que dans ce calcul semi-classique nous avons considéré plutôt des états propres du spin du sous-groupe diagonal  $\text{SO}(3)$ , l'un et l'autre étant reliés par

$$|j, L = M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j |j, m, -m\rangle,$$

d'où découle qu'il faut en fait comparer  $D_s^j$  et  $(2j+1)^{-1/2} D_{s \text{ eff}}^j$ . On voit alors que, dans la limite de grand  $k$ , ce qui revient à la limite  $\alpha' \rightarrow 0$  à rayon fixé, les deux couplages

sont égaux à un facteur indépendant de  $j$  près qui correspond essentiellement au couplage gravitationnel (cf. [14] pour une prise en compte précise de tous les facteurs). Le fait que l'identification ne marche pas pour  $k$  fini n'a rien d'étonnant, puisque après tout l'action de Dirac-Born-Infeld n'est valide que pour  $\alpha'$  petit ; il est au contraire tout à fait remarquable que, avec seulement la renormalisation  $k \rightarrow k+2$ , l'action effective reproduise exactement la position des D-branes, la dépendance en la D-brane du couplage, et, comme nous le verrons dans la suite, le spectre des fluctuations à basse énergie.

### Petites fluctuations

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des D-branes à  $\psi$  constant. Nous allons maintenant les faire fluctuer, ainsi que le champ électromagnétique sur elles. Dans la mesure où, comme dit précédemment, un espace-temps compact n'aurait guère de sens, nous allons ajouter une dimension temporelle (le fait de ne pas ajouter d'autre dimension signifie simplement que nous n'allons pas nous préoccuper des fluctuations dans ces dimensions). En ce qui concerne le champ électromagnétique, nous nous plaçons dans la jauge  $A_0 = 0$ . Nous avons donc trois champs fonctions de  $(t, \theta, \psi)$ , que nous écrivons comme suit :

$$\psi = \psi_n + \delta, \quad A_\theta = \frac{\tilde{k}}{2\pi} \alpha_\theta, \quad \text{et} \quad A_\phi = \frac{n}{2}(\cos \theta - 1) + \frac{\tilde{k}}{2\pi} \alpha_\phi.$$

Il s'agit maintenant de développer le lagrangien de Born-Infeld jusqu'à l'ordre quadratique en les fluctuations. On a

$$\hat{g} + \hat{B} + 2\pi\alpha'F = \tilde{k}\alpha' \begin{pmatrix} -\frac{1}{k\alpha'} + (\partial_t\delta)^2 & \partial_t\delta\partial_\theta\delta + f_{t\theta} & \partial_t\delta\partial_\phi\delta + f_{t\phi} \\ \partial_t\delta\partial_\theta\delta - f_{t\theta} & \sin^2\psi + (\partial_\theta\delta)^2 & \partial_\theta\delta\partial_\phi\delta + \mathcal{F}_{\theta\phi} \\ \partial_t\delta\partial_\phi\delta - f_{t\phi} & \partial_\theta\delta\partial_\phi\delta - \mathcal{F}_{\theta\phi} & \sin^2\psi \sin^2\theta + (\partial_\phi\delta)^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$f_{mn} = \partial_m\alpha_n - \partial_n\alpha_m \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\theta\phi} = \left( \delta - \frac{\sin 2\psi}{2} \right) + f_{\theta\phi}.$$

Après quelques calculs sans difficultés, on trouve la variation du lagrangien.

Tout d'abord on a un terme linéaire proportionnel à  $f_{\theta\phi}$ . À première vue, cela semble contredire le fait qu'on développe autour d'une solution classique du mouvement. En fait il n'en est rien, car l'intégrale de ce terme sur la 2-sphère est la fluctuation du flux du champ magnétique, laquelle est nécessairement nulle puisque le flux est quantifié. On voit donc que cette quantification est essentielle à la stabilisation de la D-brane.

Les termes quadratiques peuvent s'écrire comme suit :

$$\delta^{(2)}S = -T_{D2}(\tilde{k}\alpha')^2 \sin \psi_n \times \\ \times \int d\theta d\phi \sqrt{-\det \gamma} \left[ \frac{1}{2} \partial_m \delta \partial^m \delta + \frac{\tilde{k}\alpha'}{4} f_{mn} f^{mn} + \frac{1}{\tilde{k}\alpha'} \delta^2 + \frac{2}{\tilde{k}\alpha'} \delta \frac{f_{\theta\phi}}{\sin \theta} \right]$$

où la métrique effective  $\gamma$ , qui sert à faire monter les indices, est donnée par

$$ds^2 = -dt^2 + \tilde{k}\alpha' (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Cette métrique n'est autre que la métrique de corde ouverte de l'équation (1.2.7). On voit clairement sur cet exemple que les champs sur la D-brane voient une géométrie donnée par cette métrique, qui est différente de la géométrie vue par les cordes fermées : notamment, les D-branes ont toutes le même rayon pour les cordes ouvertes.

Il en découle, après quelques calculs, les équations du mouvement suivantes :

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \delta \\ f_{\theta\phi}/\sin \theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{\tilde{k}\alpha'} \begin{pmatrix} -\Delta + 2 & 2 \\ -2\Delta & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ f_{\theta\phi}/\sin \theta \end{pmatrix}$$

où  $\Delta$  est le laplacien sur la 2-sphère de rayon unité.

Pour trouver les valeurs propres de cette matrice, on décompose  $\delta$  et  $f_{\theta\phi}/\sin \theta$  en harmoniques sphériques :

$$\delta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{et} \quad f_{\theta\phi}/\sin \theta = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.2.10)$$

On notera l'absence de terme  $l = 0$  pour  $f$  à cause de la quantification du flux, d'où découle que pour  $l = 0$  la seule fluctuation est celle de  $\delta$ , avec comme masse  $2/(k+2)\alpha'$ . Pour  $l > 0$  la matrice de masse s'écrit

$$\frac{1}{(k+2)\alpha'} \begin{pmatrix} l(l+1) + 2 & 2 \\ 2l(l+1) & l(l+1) \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont  $(l+1)(l+2)/(k+2)\alpha'$  et  $l(l-1)/(k+2)\alpha'$ . Il en découle le spectre :

$$m^2 = \frac{j(j+1)}{(k+2)\alpha'} \quad \text{dans les représentations } (j-1) \oplus (j+1), \quad (2.2.11)$$

où  $j$  prend toutes les valeurs entières positives, étant entendu que seule la représentation de spin 1 apparaît pour  $j = 0$ ; ces modes zéro correspondent à des rotations arbitraires de la 2-sphère dans la 3-sphère. Les autres modes sont massifs, ce qui assure la stabilité de la D-brane.

La comparaison de ce résultat avec la CFT est aisée. Les masses trouvées sont celles de l'équation (2.2.1), avec  $N + M = 1$ , ce qui correspond justement aux excitations de basse énergie, le cas  $N + M = 0$  étant exclu par la projection GSO. Ces états sont de la forme  $J_{-1}^a |j\rangle$ , donc se transforment sous les représentations  $(j - 1) \oplus j \oplus (j + 1)$ . La contrainte de Virasoro éliminant la représentation  $j$  (c'est celle-là qui est éliminée car il y a autant de contraintes que d'états dans la représentation  $j$  de  $SU(2)$ , soit  $2j + 1$ ), le spectre est finalement en accord avec Born-Infeld. Il y a toutefois une différence : c'est que la CFT nous apprend que  $j$  est borné (inférieur à  $k/2$ ), ce que Born-Infeld ne permet pas de voir. Là encore, cela se comprend aisément si on se rappelle que Born-Infeld est valide dans la limite  $k \rightarrow \infty$ .

Dans le cas de  $\mathbb{RP}^3$ , il est nécessaire d'imposer  $n_0 = -\tilde{k}/2$  pour que  $B$  soit univaluée. Cela étant fait, les choses sont très similaires à  $S^3$ , en particulier pour les D-branes sphériques où les résultats sont identiques. Le spectre des petites fluctuations de la D-brane sphérique équatoriale ne contient que la moitié des cordes ouvertes légères car elle est enroulée sur un plan projectif.

Le calcul des fluctuations de la D-brane  $\mathbb{RP}^2$  requiert d'imposer  $F = 0$  afin que l'action de Born-Infeld soit bien définie. Les fluctuations s'obtiennent de la même façon, à cela près que l'on doit imposer l'invariance par les transformations (2.2.3), c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}\delta(\pi - \theta, \phi + \pi) &= \delta(\theta, \phi) \\ \alpha_\theta(\pi - \theta, \phi + \pi) &= -\alpha_\theta(\theta, \phi) \\ \alpha_\phi(\pi - \theta, \phi + \pi) &= \alpha_\phi(\theta, \phi),\end{aligned}$$

ce qui implique que, dans la décomposition (2.2.10), il n'apparaît que des harmoniques impairs, d'où découle que dans l'équation (2.2.11)  $j$  doit être pair, ce qui est conforme aux prévisions de la théorie conforme.

## 2.3 Orientifolds sur $S^3$ et $\mathbb{RP}^3$

Cette section est consacrée à l'étude des orientifolds dans les groupes compacts non abéliens les plus simples que sont  $S^3$  et  $\mathbb{RP}^3$ , telle que nous l'avons faite dans les articles [19] (annexe A de cette thèse) et [20] (annexe B de cette thèse). Contrairement aux approches antérieures, qui soit étaient purement algébriques [10, 11], soit partaient de considérations algébriques pour trouver la géométrie [17, 18], nous sommes parti de la

géométrie, c'est-à-dire que nous avons d'abord trouvé la position des orientifolds possibles, puis leurs couplages aux cordes fermées par une méthode similaire à ce qui a été fait pour les D-branes dans la section précédente. Nous traiterons ici des orientifolds sans D-branes ; l'interaction entre les deux fera l'objet de la section suivante.

### 2.3.1 Description géométrique des orientifolds

#### SU(2)

On peut paramétrer SU(2) comme suit :

$$g = \begin{pmatrix} X_1 + iX_2 & X_3 + iX_4 \\ -X_3 + iX_4 & X_1 - iX_2 \end{pmatrix},$$

où les  $X_i$  sont à valeurs sur une 3-sphère de rayon 1. Outre les coordonnées polaires usuelles :

$$X_1 = \cos \psi, \quad X_2 = \sin \psi \cos \theta, \quad X_3 + iX_4 = \sin \psi \sin \theta e^{i\phi},$$

nous serons amené à utiliser les angles d'Euler, définis par

$$X_1 + iX_2 = \sin \alpha e^{i\beta}, \quad X_3 + iX_4 = \cos \alpha e^{i\gamma},$$

avec  $\alpha \in [0; \pi/2]$  et  $\beta, \gamma \in [0; 2\pi]$ .

L'orientifold, comme nous l'avons vu précédemment, consiste à combiner une inversion d'orientation de la surface d'univers ( $\Omega : \sigma \rightarrow -\sigma$ ) et une isométrie involutive  $h$  de l'espace-temps. Le fait de prendre une isométrie assure l'invariance du premier terme de l'action de WZW (équation (2.1.1)). Cela n'est, en revanche, pas le cas pour le terme de Wess-Zumino : puisque  $\Omega$  inverse l'orientation de toute variété ayant pour bord la surface d'univers de la corde, il faut que  $h$  inverse aussi l'orientation de l'espace-temps pour assurer l'invariance du terme de Wess-Zumino. Nous imposerons également, comme lors de notre étude des D-branes, la préservation de l'une des algèbres de Kac-Moody, ce qui entraîne que  $h$  doit commuter avec les rotations à  $\psi$  fixé.

Sachant que les isométries involutives de la 3-sphère s'écrivent, à conjugaison par un élément du groupe près,  $\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , on aboutit finalement à deux choix pour  $h$  (fig. 2.2) :

-  $h_0 = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , c'est-à-dire  $g \rightarrow g^\dagger$ , ce qui en termes de coordonnées s'écrit

$$(\psi, \theta, \phi) \rightarrow (\psi, \pi - \theta, \phi + \pi), \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, -\beta, \gamma + \pi).$$

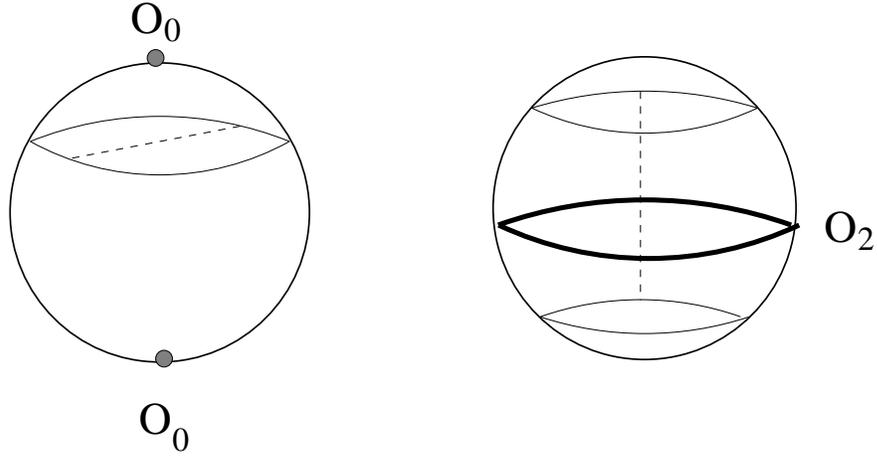


FIG. 2.2 – Positions possibles pour les orientifolds sur la 3-sphère.

Les points fixes sont deux orientifolds  $\mathcal{O}0$  situés aux pôles de la 3-sphère ( $\psi = 0$  et  $\pi$ ).

–  $h_2 = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , c'est-à-dire  $g \rightarrow -g^\dagger$ , ce qui en termes de coordonnées s'écrit

$$(\psi, \theta, \phi) \rightarrow (\pi - \psi, \theta, \phi), \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \pi - \beta, \gamma).$$

L'ensemble des points fixes est un orientifold  $\mathcal{O}2$  situé à l'équateur ( $\psi = \pi/2$ ).

Remarquons en passant que ce type de transformations se généralise aisément à n'importe quel groupe : pour tout élément  $\lambda$  du centre du groupe,  $g \rightarrow \lambda g^{-1}$  définit un orientifold.

### SO(3)

Pour obtenir les orientifolds de  $\mathbb{R}P^3$ , on considère *a priori* une isométrie de  $S^3$  avec  $h^2 = \pm 1$  (puisque 1 et  $-1$  sont identifiés). La nécessité que  $h$  inverse l'orientation impose en fait de se limiter à  $h_0$  ou  $h_2$ , comme pour  $SU(2)$ . Ces deux isométries étant identifiées, elles donnent toutes deux une même configuration, avec comme points fixes un  $\mathcal{O}0$  au pôle et un  $\mathcal{O}2$  plan projectif à l'équateur.

### 2.3.2 Couplage aux cordes fermées

Comme nous l'avons vu précédemment, l'amplitude de la bouteille de Klein peut s'interpréter soit comme une boucle de corde fermée changeant d'orientation, soit comme une émission et absorption d'une corde fermée par un orientifold. En sachant quels états res-

tent et lesquels sont supprimés par la projection orientifold, on pourra trouver l'amplitude de la bouteille de Klein et en déduire le couplage de l'orientifold aux cordes fermées.

## SU(2)

Les états de corde fermée, avant projection, sont de la forme

$$P(J_n^a, \bar{J}_{\bar{n}}^{\bar{a}})|j, m, \bar{m}\rangle$$

où  $P$  est un polynôme,  $J_n^a$  et  $\bar{J}_{\bar{n}}^{\bar{a}}$  sont les générateurs de l'algèbre de Kac-Moody, et  $|j, m, \bar{m}\rangle$  est un état primaire (sans excitations) dans la représentation  $(j, j)$  de l'algèbre.

L'action de l'orientifold sur les courants de Kac-Moody est simple : il découle immédiatement de l'équation (2.1.3) que  $\Omega h_0$  et  $\Omega h_2$  échangent les courants gauche et droit.

En ce qui concerne les primaires, on obtient l'action de l'orientifold en considérant les opérateurs de vertex correspondants. Il s'agit d'harmoniques sphériques qui, dans les coordonnées d'Euler, s'écrivent

$$D_{m\bar{m}}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(m+\bar{m})\gamma} e^{i(m-\bar{m})\beta} P_{m\bar{m}}^j(\cos \alpha).$$

La forme précise de  $P_{m\bar{m}}^j$  n'interviendra pas ici : tout ce qui importe pour nous est leur symétrie par échange de  $m$  et  $\bar{m}$ . L'action de l'orientifold sur les primaires en découle :

$$\Omega h_0|j, m, \bar{m}\rangle = (-)^{m+\bar{m}}|j, \bar{m}, m\rangle, \quad \text{et} \quad \Omega h_2|j, m, \bar{m}\rangle = |j, \bar{m}, m\rangle.$$

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour écrire la bouteille de Klein. Sachant que seuls interviennent les états avec  $m = \bar{m}$ , et qu'on a  $2j = 2m \pmod{2}$ , on obtient :

$$\mathcal{K}_{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k/2} (-)^{2j} \chi_j(q^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k/2} \chi_j(q^2). \quad (2.3.1)$$

Nous avons vu d'autre part (équation (1.3.3)) que l'amplitude de Möbius s'écrit aussi  $\mathcal{K} = \langle C | \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24} | C \rangle$ . En faisant le même raisonnement que pour l'amplitude de l'anneau avec les états d'Ishibashi de crosscap  $|j_C\rangle$  au lieu des états d'Ishibashi de bord, on obtient

$$\mathcal{K} = \sum_{j=0}^{k/2} (C^j)^2 \chi_j(\sqrt{\tilde{q}})$$

où les  $C^j$  sont les couplages de l'orientifold aux cordes fermées dans la représentation  $(j, j)$ . Une transformation modulaire à partir de l'équation (2.3.1) permet de calculer les

$C^j$ , et on trouve

$$C_{(0)}^j = \varepsilon_{(0)}^j E_{2j+k} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k+4}\right) \sqrt{\mathcal{N}_j} \quad (2.3.2)$$

$$C_{(2)}^j = \varepsilon_{(2)}^j E_{2j} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k+4}\right) \sqrt{\mathcal{N}_j} \quad (2.3.3)$$

où  $E_n$  est le projecteur sur les nombres pairs ( $E_n = (1 + (-)^n)/2$ ),  $\mathcal{N}_j$  est donné par l'équation (2.2.5) et les  $\varepsilon^j$  sont des signes, pour l'instant inconnus puisque nous n'avons calculé que les carrés des couplages.

### SO(3)

Outre les états non twistés, tous de spin entier, la bouteille de Klein fait apparaître les états twistés dont les spins gauche et droit sont égaux. Dans le cas de SO(3), il y en a un, avec un spin égal à  $k/4$ . L'amplitude de la bouteille de Klein en découle :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}}^{k/2} \chi_l(q^2) + \zeta \chi_{k/4}(q^2) \right].$$

Le signe  $\zeta$  indique comment l'état twisté se transforme par l'orientifold. Les deux signes sont *a priori* cohérents, et cela sera confirmé par l'étude de l'amplitude du ruban de Möbius.

Comme dans le cas de SU(2), on peut, par une transformation modulaire, trouver le couplage des orientifolds aux cordes fermées. On trouve

$$C^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^j E_{2j} \sqrt{\mathcal{N}_j} \left[ \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k+4}\right) + \zeta (-)^j \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k+4}\right) \right].$$

Cela ressemble fortement à la somme des couplages des deux sortes d'orientifolds de la 3-sphère, ce qui n'a rien d'étonnant puisque justement on a ici un  $\mathcal{O}0$  et un  $\mathcal{O}2$ .

### 2.3.3 Considérations semi-classiques

Pour comprendre ces formules, notamment les facteurs  $E_{2j}$  et  $E_{2j+k}$ , et fixer les signes, une analyse semi-classique est utile. Nous allons, comme pour les D-branes, nous intéresser au couplage linéarisé au dilaton. Sachant que l'action effective de l'orientifold s'écrit

$$S = -T_{\mathcal{O}} \int e^{-\Phi} \sqrt{-\det \hat{g}},$$

où  $T_{\mathcal{O}}$  est la tension de l'orientifold, on peut, par des calculs similaires au cas des D-branes, calculer un couplage effectif.

Dans le cas de l'orientifold  $\mathcal{O}2$ , on trouve

$$C_{(2) \text{ eff}}^j \propto T_{\mathcal{O}}(-)^j E_{2j},$$

ce qui confirme le facteur  $E_{2j}$  et fixe le signe :

$$\varepsilon_{(2)}^j = (-)^j \text{sign}(T_{\mathcal{O}2}).$$

La dépendance en  $j$  et  $k$  de l'équation (2.3.3) n'est pas visible ici car ce calcul n'est valide que dans la limite où  $k$  est grand, auquel cas le cosinus vaut 1.

Le cas des orientifolds  $\mathcal{O}0$  de la 3-sphère est plus subtil. Puisque nous avons un orientifold à chaque pôle, leur couplage au dilaton est la somme de deux termes :

$$T_{\mathcal{O}0}^{\text{nord}} \Phi(\psi = 0) + T_{\mathcal{O}0}^{\text{sud}} \Phi(\psi = \pi)$$

ce qui conduit au couplage effectif

$$C_{(0) \text{ eff}}^j \propto (2j + 1)(T_{\mathcal{O}0}^{\text{nord}} + (-)^{2j} T_{\mathcal{O}0}^{\text{sud}}).$$

Pour aller plus loin nous devons déterminer la nature précise des orientifolds, qui est liée à la torsion discrète du champ  $B$ .

Ce qui se passe est que la présence d'un champ  $B$  ajoute un facteur  $\exp [i \int_{\Sigma} B/2\pi\alpha']$  à l'intégrale de chemin. Sachant que l'orientifold transforme une 2-sphère autour d'un  $\mathcal{O}0$  en un plan projectif, on est amené à considérer le cas  $\Sigma = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , étant entendu que l'intégrale est bien définie car l'orientifold change aussi le signe de  $B$ . Avec les notations de l'équation (2.2.8), le facteur obtenu est  $(-)^{n_0}$  pour l'orientifold nord, et  $(-)^{n_0+k}$  pour l'orientifold sud. La tension de l'orientifold étant proportionnelle à ce facteur — plus précisément, elle est négative (orientifold  $\mathcal{O}0^-$ ) en son absence — il en découle que

$$T_{\mathcal{O}0}^{\text{sud}} = (-)^k T_{\mathcal{O}0}^{\text{nord}}$$

d'où

$$C_{(0) \text{ eff}}^j \propto (2j + 1) E_{2j+k} T_{\mathcal{O}0}^{\text{nord}}$$

ce qui est compatible avec le calcul de la bouteille de Klein (équation (2.3.2)) dans la limite  $k$  grand, et fixe le signe :

$$\varepsilon_{(0)}^j = \text{sign}(T_{\mathcal{O}0}^{\text{nord}}).$$

Le calcul semi-classique des signes  $\varepsilon_{(0)}^j$  et  $\varepsilon_{(2)}^j$  que nous venons de faire sera confirmé, dans le cas où il y a des D-branes, par le calcul des amplitudes de Möbius.

Dans le cas de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ , il découle du calcul semi-classique que le couplage est la somme d'un couplage pour le  $\mathcal{O}0$  et d'un couplage pour le  $\mathcal{O}2$ , c'est-à-dire ce que nous avons trouvé pour la bouteille de Klein ; on s'attend en outre à ce que  $\varepsilon^j$  soit indépendant de  $j$ .

## 2.4 D-branes en présence d'un orientifold sur $S^3$ ou $\mathbb{RP}^3$

Nous allons ici nous intéresser principalement à l'amplitude du vide sur le ruban de Möbius, qui peut s'interpréter soit comme une boucle de corde ouverte non orientée, soit comme un échange de corde fermée entre une D-brane et un orientifold. Ceci nous fournira un test de cohérence des calculs précédents, et nous permettra en outre de trouver les groupes de jauge associés aux D-branes.

Nous avons vu précédemment (équation (1.3.5)) que, dans le canal fermé, l'amplitude de Möbius s'écrit en faisant intervenir les états de bord et de crosscap :  $\mathcal{M} = \langle C | \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24} | B \rangle$ . À l'aide des états d'Ishibashi, ceci s'écrit

$$\mathcal{M} = \sum_j \langle C | j_C \rangle \langle j | B \rangle \langle j_C | \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24} | j \rangle.$$

Sachant que les états de bord vérifient  $(J_n + \bar{J}_{-n})|j\rangle = 0$ , tandis que les états de crosscap vérifient  $(J_n + (-)^n \bar{J}_{-n})|j_C\rangle = 0$ , il découle que le terme  $\langle j_C | \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24} | j \rangle$  s'écrit  $\text{Tr}[(-)^N \sqrt{\tilde{q}}^{L_0 - c/24}]$ , qui n'est autre que  $\hat{\chi}_j(\tilde{q})$ , où  $\hat{\chi}$  est le caractère modifié introduit dans l'équation (1.3.4).

On montre que les  $\hat{\chi}_j(\tilde{q})$  peuvent, par une transformation modulaire, s'écrire

$$\hat{\chi}_i(\tilde{q}) = \sum_j P_{ij} \hat{\chi}_j(q),$$

où la matrice  $P$  vaut

$$P = T^{1/2} S T^2 S T^{1/2}.$$

Elle a comme composantes (cf le calcul dans l'annexe de [19] (annexe A de cette thèse))

$$P_{ij} = \frac{2}{\sqrt{k+2}} \sin\left(\frac{\pi(2i+1)(2j+1)}{2k+4}\right) E_{2i+2j+k}.$$

Signalons enfin que, puisque nous nous restreignons à des configurations préservant une algèbre de Kac-Moody, nos D-branes seront parallèles au  $\mathcal{O}2$ , ou auront les  $\mathcal{O}0$  comme centre.

### 2.4.1 Cas des $\mathcal{O}0$ sur la 3-sphère

L'isométrie  $h_0$  transformant les D-branes en elles-mêmes, l'amplitude de Möbius fait intervenir des cordes entre une D-brane et elle-même. Sachant que  $h_0$  restreint à une D-brane est l'identification antipodale, chaque terme sera affecté d'un signe égal à la parité

de l'harmonique sphérique correspondant, c'est-à-dire  $(-)^l$ . L'amplitude dans le canal ouvert en découle :

$$\mathcal{M}_{(0)r} = \varepsilon'_r \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}}^{\min(2r, k-2r)} (-)^l \hat{\chi}_l(q);$$

le signe global  $\varepsilon'_r$  détermine le type de projection, et donc le groupe de jauge, pour les branes de type  $r$ .

À l'aide de la matrice  $P$ , on peut écrire l'amplitude dans le canal fermé. Après quelques calculs, on trouve

$$\mathcal{M}_{(0)r} = \varepsilon'_r (-)^{2r} \sum_j |C_{(0)}^j| D_r^j \hat{\chi}_j(\tilde{q}).$$

Or il faudrait trouver ce résultat sans valeur absolue ni signe supplémentaire. Il en découle d'une part que le signe  $\varepsilon_{(0)}^j$  ne dépend pas de  $j$ , comme l'analyse semi-classique nous la montré, et d'autre part que le type de projection alterne avec le type de D-brane :

$$\varepsilon'_r = \text{sign}(T_{O0}^{\text{nord}}) (-)^{2r},$$

ce qui donne comme groupe de jauge un produit alterné de groupes orthogonaux et symplectiques. Ceci implique en particulier que les D-branes de type entier dans le cas d'un  $\mathcal{O}0^+$  au nord, demi-entier dans le cas d'un  $\mathcal{O}0^-$  au nord, sont en nombre pair.

On pourrait, naïvement, faire le raisonnement suivant : puisque l'intégralité de la D-brane est hors de l'orientifold, la physique sur elle est localement celle de la corde orientée, donc le groupe de jauge doit être  $U(n)$ . En fait, ce n'est pas correct car, comme auparavant, on regarde le champ de jauge effectif après réduction dimensionnelle sur la 2-sphère ; ce champ a bien  $n(n-1)/2$  ou  $n(n+1)/2$  composantes, d'où un groupe de jauge  $SO(n)$  ou  $USp(n)$ .

## 2.4.2 Cas des $\mathcal{O}2$ sur la 3-sphère

L'isométrie  $h_2$  transforme une D-brane de type  $r$  en une D-brane de type  $k/2 - r$ . Les D-branes viennent donc nécessairement par paires, sauf les branes équatoriales, de type  $k/4$ , qui n'existent que si  $k$  est pair, et l'amplitude de Möbius fait intervenir des cordes entre une D-brane et son image. Sachant que les harmoniques sphériques sont invariants par  $h_2$ , il n'y aura pas de signe dans le canal ouvert comme pour le  $\mathcal{O}0$ . L'amplitude de Möbius s'écrit donc :

$$\mathcal{M}_{(2)r} = \varepsilon'_r \sum_{\substack{l=k/2-2r \\ l \text{ entier}}}^{k/2} \hat{\chi}_l(q).$$

Après une transformation modulaire par la matrice  $P$ , on obtient le canal fermé, et, par un raisonnement similaire au cas précédent, il en découle que  $\varepsilon_{(2)}^j$  est bien celui que nous avons trouvé par un calcul semi-classique, et que  $\varepsilon'_r = \text{sign}(T_{\mathcal{O}2})$ .

Le groupe de jauge est sans surprise : il est unitaire pour les D-branes non équatoriales, et orthogonal ou symplectique pour les D-branes équatoriales.

### 2.4.3 Cas de $\mathbb{RP}^3$

#### Branes non équatoriales

Les cordes entre deux D-branes non équatoriales de même type  $r$  sur  $\mathbb{RP}^3$  correspondent à deux sortes de cordes sur la 3-sphère : des cordes entre deux branes de type  $r$ , et des cordes entre une brane de type  $r$  et une de type  $k/2 - r$ . L'action de  $\Omega h$  sur de telles cordes est celle que nous avons vue dans le cas de la 3-sphère, donc l'amplitude de Möbius s'écrit :

$$\mathcal{M}_r = \varepsilon'_r \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}}^{2r} ((-)^l \hat{\chi}_l(q) + \varepsilon''_r \hat{\chi}_{k/2-l}(q))$$

où  $\varepsilon'_r$  et  $\varepsilon''_r$  sont des signes. Une transformation modulaire confirme que  $\varepsilon^j$  est une constante  $\varepsilon$ , et donne les signes  $\varepsilon'_r = (-)^{2r} \varepsilon$  et  $\varepsilon''_r = (-)^{2r} \zeta$ .

Le groupe de jauge est donné par le signe devant  $\chi_0$ , c'est-à-dire  $\varepsilon'_r$ . Donc, comme pour le  $\mathcal{O}0$  de la 3-sphère, le groupe de jauge pour les D-branes non équatoriales est une alternance de groupes orthogonaux et symplectiques.

#### Branes équatoriales

Le cas des D-branes équatoriales est plus subtil car, comme nous l'avons vu, il y en a deux sortes, et elles peuvent être mélangées par l'orientifold. L'action la plus générale de l'orientifold sur les états est, comme vu précédemment

$$\Omega h |N, l, ij\rangle = (-)^N \gamma_{ii'} \gamma_{jj'}^* |N, l, j'i'\rangle$$

où  $\gamma$  est une matrice unitaire, symétrique ou antisymétrique. Sachant que les états de  $\mathbb{RP}^3$  doivent être invariants par la transformation  $Z$  de l'équation (2.2.7), on doit imposer que l'action de  $\Omega h$  préserve l'invariance par  $Z$ , d'où découle que  $\gamma$  doit commuter ou anticommuter avec la matrice  $Z$ .

Si  $\gamma$  commute avec  $Z$ , alors les branes de charges différentes ne sont pas mélangées par l'orientifold, et le groupe de jauge sur ces branes sera  $\text{SO}(n_+) \times \text{SO}(n_-)$  ou  $\text{USp}(n_+) \times$

$USp(n_-)$ , où  $n_+$  et  $n_-$  sont les nombres de chaque sorte de D-brane. Les états apparaissant dans l'amplitude de Möbius sont alors  $|++\rangle$  et  $|--\rangle$ , qui sont d'isospin pair, d'où l'expression

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R &= (n_+ + n_-)\varepsilon'_R \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ pair}}}^{k/2} \hat{\chi}_l(q) \\ &= \frac{1}{2}(n_+ + n_-)\varepsilon'_R \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}}^{k/2} ((-)^l \hat{\chi}_l(q) + \hat{\chi}_{k/2-l}(q)).\end{aligned}$$

Si  $\gamma$  anticommute avec  $Z$ , ce qui est possible seulement si  $n_+ = n_- \equiv n$ , alors, par un changement de base sur les D-branes  $+$  et  $-$  séparément,  $\gamma$  peut être mise sous la forme

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \pm \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

où les premières lignes et colonnes correspondent aux D-branes  $+$ . L'effet de  $\Omega h$  sur les cordes ouvertes est donc :

$$\begin{aligned}|++\rangle &\leftrightarrow |--\rangle \\ |+-\rangle &\leftrightarrow \pm|+-\rangle \\ |-+\rangle &\leftrightarrow \pm|-+\rangle\end{aligned}$$

Avant de faire l'opération d'orientifold, on avait un groupe de jauge  $U(n)$  correspondant aux états  $|++\rangle$ , et un autre pour les états  $|--\rangle$ . Puisqu'ils sont identifiés par l'orientifold, il reste un groupe de jauge  $U(n)$ . On notera que les D-branes  $+$  et  $-$  ne peuvent pas exister séparément ici, et que la matrice  $\gamma$  définit un appariement entre elles, de sorte qu'il est ici pertinent de considérer que nous avons  $n$  D-branes équatoriales sphériques, le groupe  $U(n)$  s'interprétant alors comme les changements de base arbitraires dans l'espace de ces D-branes. Les états apparaissant dans l'amplitude de Möbius sont alors  $|++\rangle$  et  $|--\rangle$ , qui sont d'isospin pair, d'où l'expression

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R &= 2n\varepsilon'_R \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ impair}}}^{k/2} \hat{\chi}_l(q) \\ &= -n\varepsilon'_R \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}}^{k/2} ((-)^l \hat{\chi}_l(q) - \hat{\chi}_{k/2-l}(q)).\end{aligned}$$

Dans les deux cas, à un facteur  $1/2$  près, qui est aussi présent dans les couplages  $D_R^j$  (2.2.6), ces amplitudes s'écrivent comme pour les D-branes non équatoriales, avec  $\varepsilon''_R = +1$  dans le premier cas, et  $-1$  dans le second cas. La condition de cohérence s'écrit donc, comme précédemment,  $\varepsilon'_R = \varepsilon''_R(-)^{k/2}\varepsilon$  et  $\zeta = \varepsilon''_R(-)^{k/2}$ . Ainsi :

- Si  $\zeta = (-)^{k/2}$ , alors le groupe de jauge est  $\text{SO}(n_+) \times \text{SO}(n_-)$  ou  $\text{USp}(n_+) \times \text{USp}(n_-)$ , selon le signe  $\varepsilon$ .
- Si  $\zeta = -(-)^{k/2}$ , alors on doit avoir  $n_+ = n_- \equiv n$ , et le groupe de jauge est  $\text{U}(n)$ .



# Chapitre 3

## Univers branaires et D-branes anti-de Sitter

Comme nous l'avons vu, la théorie des supercordes n'est cohérente qu'à dix dimensions. Si on veut avoir une chance de décrire notre univers avec, il faut s'arranger pour obtenir une théorie effective qui soit à quatre dimensions, au moins aux échelles d'énergie actuellement accessibles expérimentalement.

Avant qu'on connaisse les D-branes, le seul moyen pour cela était de prendre un espace cible de la forme  $\mathbb{R}^4 \times M$ , où  $M$  est une variété compacte de dimension six ; on obtient alors une théorie effective à quatre dimensions à des échelles très grandes devant la taille de  $M$ . Ceci a donné lieu à d'importants développements dans les années 1980, notamment concernant les variétés de Calabi-Yau, qui ont comme propriété de préserver une partie de la supersymétrie. Le lecteur pourra se référer à [1, 2] pour plus de détails.

Avec l'émergence des D-branes, et des cordes ouvertes contraintes de rester à leur voisinage, est venue l'idée que notre Univers pourrait être une D3-brane (un *univers branaire*), et que la matière serait des cordes ouvertes vivant sur cette D-brane. Malheureusement, cela ne semble a priori pas marcher pour la gravité, puisque ses excitations apparaissent en théorie des cordes comme des cordes fermées, qui peuvent se déplacer dans tout l'espace-temps. Il faut donc, de toute façon, compactifier six dimensions. Toutefois, la loi de Newton de la gravitation n'étant vérifiée expérimentalement que jusqu'à des échelles de l'ordre du dixième de millimètre, on peut envisager des dimensions compactes bien plus grandes que sans D-branes, ce qui ouvre d'autant plus de possibilités. Tout cela est traité en détail dans la revue récente [22].

Par la suite, l'article fondateur de Randall et Sundrum [23] a montré que, en présence d'une brane massive, il peut exister un mode du champ gravitationnel qui est confiné

au voisinage de la brane, et la force gravitationnelle qui en découle est, à basse énergie, celle de Newton. Cette localisation de la gravité permet de réaliser le principe de l'univers branaire sans être obligé de compactifier six dimensions. Il apparaît alors que l'obtention d'une brane plate nécessite un ajustement fin de la tension de la brane par rapport à la constante cosmologique de l'espace ambiant, ajustement sans lequel la brane aura une géométrie de Sitter ou anti-de Sitter. On est donc amené à étudier ces géométries, plus particulièrement dans leur limite de grand rayon où on tend vers un espace plat.

Le but de ce chapitre est d'étudier certains aspects des tentatives de réalisations cordistes de l'univers branaire. Puisque, comme nous l'avons dit, ces réalisations font apparaître des espaces anti-de Sitter, nous rappellerons d'abord ce que sont ces espaces.

### 3.1 Espaces anti-de Sitter

#### Définition

Considérons un espace de Minkowski à  $n + 1$  dimensions et avec deux temps, c'est-à-dire ayant pour métrique

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \dots + dX_{n-1}^2 - dX_n^2.$$

On peut, au sein de cet espace, obtenir un hyperboloïde ayant comme groupe d'isométries  $O(2, n - 1)$  en prenant le sous-ensemble d'équation

$$-X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_{n-1}^2 - X_n^2 = -L^2 \tag{3.1.1}$$

où  $L$  est un réel positif, que nous appellerons *rayon* de l'hyperboloïde, qui a un seul temps. Cet espace ayant des courbes fermées de genre temps, on définit l'espace anti-de Sitter  $AdS_n$  comme le recouvrement universel de l'hyperboloïde.

On définit de la même façon l'espace de de Sitter  $dS_n$  en remplaçant, dans les équations précédentes, les signes  $-$  devant  $X_n$  et  $L^2$  par des  $+$ , et il n'y a alors pas besoin de prendre le recouvrement universel. L'espace ainsi obtenu a comme groupe d'isométries  $O(1, n)$ .

L'espace anti-de Sitter est solution des équations d'Einstein du vide avec une constante cosmologique négative  $-3/L^2$ , tandis que de Sitter l'est avec une constante cosmologique  $3/L^2$ .

#### Systèmes de coordonnées pour $AdS_n$

Divers systèmes de coordonnées sont utilisés pour  $AdS_n$ , selon les sous-espaces et les sous-groupes des isométries auxquels on s'intéresse.

Les coordonnées dites anti-de Sitter s'obtiennent en posant  $X_{n-1} = L \sinh \psi$ . Les sous-espaces  $\psi = \text{constante}$  sont alors des espaces  $AdS_{n-1}$  de rayon  $L \cosh \psi$ , d'où la métrique

$$ds^2 = L^2 [d\psi^2 + \cosh^2 \psi ds^2(AdS_{n-1})] \quad (3.1.2)$$

étant entendu que  $ds^2(AdS_{n-1})$  désigne la métrique d'un espace  $AdS$  de rayon unité.

Les coordonnées dites de Sitter s'obtiennent en posant  $X_n = L \cosh \psi$ . Les sous-espaces  $\psi = \text{constante}$  sont alors des espaces  $dS_{n-1}$  de rayon  $L \sinh \psi$ , d'où la métrique

$$ds^2 = L^2 [d\psi^2 + \sinh^2 \psi ds^2(dS_{n-1})]. \quad (3.1.3)$$

Ces coordonnées ne couvrent pas l'hyperboloïde en entier.

Les coordonnées Poincaré s'obtiennent en posant  $X_n + X_{n-1} = L^2 u$  et  $X_i = L u x_i$  pour  $0 \leq i \leq n-2$ . L'équation (3.1.1) entraîne alors  $X_n - X_{n-1} = u^{-1} + u(-x_0^2 + \dots + x_{n-2}^2)$ , d'où la métrique :

$$ds^2 = L^2 \left[ \frac{du^2}{u^2} + u^2(-dx_0^2 + \dots + dx_{n-2}^2) \right]. \quad (3.1.4)$$

## 3.2 Localisation de la gravité sur une brane

### 3.2.1 Cas de la gravité pure

On considère un espace à 5 dimensions avec une 3-brane massive. L'action s'écrit :

$$S \propto \int d^5x \sqrt{-\det g} \left[ -\frac{1}{4}R - \Lambda_5 \right] - \lambda \int d^4x \sqrt{-\det \hat{g}} \quad (3.2.1)$$

où  $\Lambda_5 = -3/L^2$  est la constante cosmologique, prise négative,  $\lambda$  est la tension de la brane et  $\hat{g}$  est la métrique induite sur la brane. On se place ici dans l'approximation de la brane fine (d'épaisseur nulle), qui facilite grandement la résolution des équations du mouvement.

Comme on cherche à avoir une brane maximale symétrique (c'est-à-dire avec un groupe d'isométries le plus grand possible), donc Minkowski ou (anti-)de Sitter, on va chercher des solutions ayant les symétries de  $\mathbb{R}^{1,3}$  ou  $(A)dS_4$ . On considère donc des solutions de la forme

$$ds^2 = A(r)\bar{g}_{ij}dx^i dx^j + B(r)dr^2 \quad (3.2.2)$$

où  $r$  est une coordonnée telle que la brane est en  $r = 0$ , et  $\bar{g}$  est une métrique Minkowski, de Sitter ou anti-de Sitter.

Un moyen pour trouver la solution est de remplacer la métrique par l'ansatz (3.2.2) dans l'action (3.2.1), et d'intégrer sur les quatre dimensions  $x_i$ , de façon à obtenir une

action à une dimension. On peut alors varier l'action par rapport à  $A(r)$  et  $B(r)$ , ce qui donne deux équations pour  $A$  après avoir imposé  $B(r) = 1$  (ce qui est toujours possible par redéfinition de  $r$ ) et il n'est alors pas très difficile de trouver les solutions. On pourra trouver le détail des calculs dans l'annexe de [24].

Ayant choisi  $A(0) = 1$  (par choix de normalisation pour  $\bar{g}$ ), on peut alors écrire la solution [25] :

$$\begin{aligned}
dS_4 : A &\propto \sinh^2 \frac{c - |r|}{L} & L_{dS_4} &= L \sinh \frac{c}{L} & \lambda &= \frac{3}{L} \coth \frac{c}{L} \\
M_4 : A &= \exp\left(-\frac{2|r|}{L}\right) & & & \lambda &= \frac{3}{L} \\
AdS_4 : A &\propto \cosh^2 \frac{c - |r|}{L} & L_{AdS_4} &= L \cosh \frac{c}{L} & \lambda &= \frac{3}{L} \tanh \frac{c}{L}
\end{aligned}$$

où  $c$  est un paramètre réel positif. On voit que pour une tension faible, la brane est anti-de Sitter, qu'elle devient Minkowski à la tension critique  $\lambda = 3/L$ , et enfin de Sitter pour une tension élevée. L'espace à 5 dimensions, quant à lui, est constitué de deux morceaux d'espace  $AdS_5$  de rayon  $L$  collés au niveau de la brane, la métrique (3.2.2) pour  $r > 0$  ou  $r < 0$  n'étant rien d'autre que celle d' $AdS_5$  dans l'un des systèmes de coordonnées (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4). (Dans le cas Poincaré, il faut poser  $u = L^{-1} \exp(-|r|/L)$ .)

Pour montrer la localisation de la gravité sur une telle brane, on regarde les fluctuations linéarisées de la métrique autour de la solution ci-dessus. Dans le cas des branes de Sitter et Minkowski, on trouve (cf [25]) qu'il y a un état lié de masse nulle confiné sur la brane ; dans le cas anti-de Sitter, ce n'est pas le cas, mais le spectre des fluctuations est discret, et, pour  $\lambda$  suffisamment proche de  $3/L$  (c'est-à-dire une courbure faible pour la brane), l'un des modes, qualifié de mode presque zéro, est très léger devant les autres, et est aussi confiné sur la brane. Dans tous les cas, le mode (presque) zéro reproduit la gravité à quatre dimensions à basse énergie.

Le fait qu'un mode presque zéro puisse reproduire la gravité peut surprendre, dans la mesure où un graviton massif à quatre dimensions a cinq polarisations, alors qu'un graviton de masse nulle en a deux, et il en découle que la limite  $m \rightarrow 0$  d'un graviton massif n'est pas un graviton de masse nulle (discontinuité de Van Dam-Veltman-Zakharov [26]). On montre néanmoins que, dans ce cas précis, il est possible d'éliminer les modes en trop, de sorte que le problème ne se pose pas (cf [27]).

## 3.2.2 Réalisation cordiste

### Obtention d' $AdS_5$

Considérons  $N$  D3-branes plates superposées en théorie IIB, vérifiant  $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$ . Comme nous l'avons vu précédemment, les D3-branes sont chargées sous le champ de Ramond-Ramond  $C_{(4)}$ . On peut explicitement trouver la solution de supergravité correspondante :

$$\begin{aligned} ds^2 &= f^{-1/2}(-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_6^2) + f^{1/2}(dr^2 + r^2 ds^2(S^5)) \\ F_{(5)} &= (1 + *) dx_0 dx_1 dx_2 dx_6 df^{-1} \\ f &= 1 + \frac{L^4}{r^4} \quad \text{avec} \quad L^4 \equiv 4\pi g_s \alpha'^2 N \end{aligned}$$

où  $r^2 = x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2$ .

Dans la limite, dite proche de l'horizon, où  $r$  tend vers zéro, le terme constant de  $f$  disparaît et on obtient

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_6^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} + L^2 ds^2(S^5).$$

En posant  $u = L^{-2}r$ , on voit qu'il s'agit de  $AdS_5 \times S^5$ , la métrique de  $AdS_5$  étant exprimée dans les coordonnées de Poincaré (3.1.4), et où  $AdS_5$  et  $S^5$  ont comme rayon  $L$ .

Il résulte de ce fait une conjecture de dualité entre la théorie des cordes sur  $AdS_5 \times S^5$  et la théorie de Yang-Mills maximale supersymétrique à quatre dimensions, qui est la théorie des champs effective vivant sur la D3-brane ; cette dernière étant invariante conforme, la conjecture est nommée « AdS/CFT ». Le lecteur pourra se reporter à [30] pour plus de détails.

### $AdS_4$ dans $AdS_5$

Dans la géométrie ci-dessus, l'hypersurface  $x_6 = 0$  est un  $AdS_4$ . Pour obtenir cela à partir de D-branes, il faut donc ajouter aux D3-branes ci-dessus une D-brane dont l'intersection avec les D3-branes s'étend selon les dimensions 0, 1 et 2, et vérifie  $x_6 = 0$ . D'autre part, pour assurer la stabilité de cette configuration, on veut préserver une partie de la supersymétrie ; on montre que pour cela, dans le cas de D-branes perpendiculaires, il faut que le nombre de dimensions vérifiant une condition de Neumann pour l'une des D-branes et Dirichlet pour l'autre soit multiple de 4. Il est alors aisé de voir que cela est réalisé si on ajoute aux D3-branes des D5-branes données par  $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$ . Si

on néglige l'effet des D5-branes sur la géométrie de l'espace ambiant, alors, dans la limite proche de l'horizon de la D3-brane, on obtient des D-branes  $AdS_4 \times S^2$  dans  $AdS_5 \times S^5$ .

Bien sûr, pour obtenir la localisation de la gravité au voisinage des D5-branes, il ne faut pas négliger leur action sur la géométrie. Une étude précise de cela nécessite d'écrire la solution de la supergravité en présence des D3- et D5-branes. Malheureusement, cette solution n'est pas connue : on ne connaît que des solutions où soit les D3, soit les D5 sont délocalisées [28]. Néanmoins, comme expliqué dans [29], on a de bonnes raisons de penser que la gravité est localisée sur les D5-branes, au moins au voisinage des D3-branes, de façon similaire au cas en gravité pure que nous avons vu, même si l'approximation de brane fine risque de ne plus marcher lorsque la partie  $AdS_4$  devient plate.

Puisqu'on ne sait pas prendre en compte la rétroaction des D5-branes sur la géométrie, nous allons, dans la suite de ce chapitre, nous placer dans l'approximation où il y a très peu de D5-branes (plus précisément  $g_s M \ll 1$ , où  $M$  est le nombre de D5-branes), de sorte que nous pourrions considérer que la géométrie est celle découlant des D3-branes.

En utilisant l'action de Born-Infeld, on peut étudier semi-classiquement les D-branes  $AdS_4 \times S^2$  dans  $AdS_5 \times S^5$ . Tout d'abord, il est aisé de voir que, outre les D-branes  $x_6 = 0$ , les D-branes données par  $x_6 = C/u$ , où  $C$  est une constante, sont également des  $AdS_4 \times S^2$ , avec un rayon anti-de Sitter égal à  $L\sqrt{1+C^2}$ , et un rayon de la sphère maximal (égal à  $L$ ). Ces rayons sont stabilisés par le flux magnétique à travers la 2-sphère [31]; les calculs étant assez similaires à ceux du chapitre précédent, nous ne les reproduisons pas ici. On peut aussi calculer le spectre des fluctuations quadratiques de la D-brane [32].

On voudrait, bien sûr, pouvoir aller au-delà des calculs semi-classiques. Le problème est que nous avons ici un champ de fond R-R ( $F_{(5)}$  en l'occurrence) et que l'on ne sait pas écrire de modèle sigma sur la surface d'univers de la corde comme on sait le faire pour des champs NS-NS. Un cas intéressant à étudier de ce point de vue là est le cas similaire des D-branes  $AdS_2 \times S^2$  dans  $AdS_3 \times S^3$ . En effet, une telle configuration peut s'obtenir avec des champs de fond R-R ( $F_{(3)}$ ) similaires à ce que nous avons vu précédemment. Comme la S-dualité que nous avons vue dans le premier chapitre échange  $F_{(3)} = dC_{(2)}$  et  $H = dB$ , cette configuration est S-duale à une configuration ne comportant que des fonds NS-NS qui est un modèle de WZW, où on sait que les calculs semi-classiques donnent des résultats exacts.

Nous sommes donc amené à considérer des D-branes  $AdS_2 \times S^2$  dans  $AdS_3 \times S^3$  avec des champs de fond NS-NS. Si on cherche à obtenir quelque chose qui ressemble à un univers branaire, il est intéressant de savoir quelle est la géométrie effective vue par les champs vivant sur la D-brane, c'est-à-dire les cordes ouvertes. Nous verrons que, comme

montré dans [36], les rayons effectifs des parties anti-de Sitter et sphérique sont égaux, même si les rayons dans la géométrie ambiante sont très différents.

Nous étudierons ensuite cette même configuration, mais avec des fonds R-R au lieu de NS-NS. Nous verrons que le calcul des petites fluctuations à l'aide de l'action de Born-Infeld donne les mêmes fluctuations que dans les fonds NS-NS, ce qui nous permet de vérifier la S-dualité dans ce cas particulier. Ce calcul permet également de montrer que, comme dans le cas NS-NS, on a une géométrie effective pour les cordes ouvertes, et que les deux rayons sont aussi égaux. Nous en discuterons les conséquences.

### 3.3 D-branes dans $AdS_3 \times S^3$ avec des champs de fond NS-NS

#### 3.3.1 Obtention d' $AdS_3 \times S^3$

La géométrie  $AdS_3 \times S^3$  s'obtient à partir d'un état lié de  $Q_5$  NS5-branes enroulées sur un 4-tore et de  $Q_1$  cordes fondamentales le long de la dimension non compacte des NS5-branes. On montre que la géométrie proche de l'horizon d'une telle configuration est  $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ , où les rayons d' $AdS_3$  et de  $S^3$  sont égaux à  $L \equiv \sqrt{Q_5 \alpha'}$ . Dans la suite, nous considérerons le  $T^4$  comme spectateur, et nous ne nous en occuperons pas.

$AdS_3$  et  $S^3$  étant des groupes, respectivement le recouvrement universel de  $SL(2, \mathbb{R})$  et  $SU(2)$ , et puisque nous avons ici une configuration sans charge R-R, les champs de fond sont donnés par le modèle de Wess-Zumino-Witten vu au chapitre précédent. Dans des coordonnées appropriées,

$$ds^2 = L^2 [d\psi^2 + \cosh^2 \psi (d\omega^2 - \cosh^2 \omega d\tau^2) + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$B = L^2 \left[ \left( \psi + \frac{\sinh 2\psi}{2} \right) \cosh \omega d\omega \wedge d\tau + \left( \chi - \frac{\sin 2\chi}{2} \right) \sin \theta d\theta \wedge d\phi \right]$$

et le dilaton est une constante  $\Phi = \Phi_{NS}$ .

En ce qui concerne le spectre, ce que nous avons vu dans le cas de groupes compacts s'applique ici. Il y a tout de même quelques différences : d'une part, il y a un nombre infini de représentations de  $SL(2, \mathbb{R})$  qui interviennent, et d'autre part il y a des subtilités à cause du fait que le groupes des transformations (2.1.2) n'est pas connexe. Le lecteur pourra se référer à [5, 35] pour plus de détails.

### 3.3.2 D-branes dans $AdS_3$

Les D-branes dans  $AdS_3 \times S^3$  s'obtiennent comme produit d'une D-brane dans  $AdS_3$  et d'une D-brane dans  $S^3$ . Comme nous avons déjà vu les D-branes dans  $S^3$  dans le chapitre précédent, nous allons maintenant étudier les D-branes dans  $AdS_3$ .

Comme dans le cas de la 3-sphère, la condition aux bords  $J = -\bar{J}$  est réalisée par des classes de conjugaison de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Dans les coordonnées (3.1.1), elles sont données par  $X_0 = \text{constante}$ , et sont des espaces hyperboliques (pour  $X_0 < L$ ) ou de Sitter (pour  $X_0 > L$ ). Dans le premier cas, il s'agit de surfaces entièrement de genre espace, donc de D-instantons (localisés dans le temps), dont l'interprétation n'est pas claire. Dans le deuxième cas, le champ électrique qu'il faut mettre sur la D-brane pour qu'elle minimise le lagrangien de Born-Infeld (1.2.6) est tel que l'expression sous la racine carrée est négative, ce qui rend ces D-branes non physiques [36].

Au lieu de la condition aux bords  $J = -\bar{J}$ , on peut prendre  $J = -\Omega(\bar{J})$ , où  $\Omega$  est un automorphisme de  $SL(2, \mathbb{R})$ . S'il s'agit d'un automorphisme intérieur, c'est à dire de la forme  $\Omega(g) = h_0 g h_0^{-1}$ , avec  $h_0 \in SL(2, \mathbb{R})$ , on obtient essentiellement les mêmes D-branes qu'auparavant après une rotation sur le groupe. Dans le cas de  $SU(2)$ , tous les automorphismes sont intérieurs, et c'est pour cela que nous n'avions pas évoqué ce point. En revanche,  $SL(2, \mathbb{R})$  admet des automorphismes extérieurs qui, modulo un automorphisme intérieur, s'écrivent

$$\Omega(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les D-branes qui en découlent sont des classes de  $\Omega$ -conjugaison, la classe d'un élément  $g$  étant définie par  $\{hg\Omega(h)^{-1}, h \in G\}$ . Ici, il s'agit de surfaces  $AdS_2$  données, dans les coordonnées (3.1.2), par  $\psi = \psi_0$ . Le champ électromagnétique nécessaire à leur stabilisation s'écrit

$$F = -\frac{L^2}{2\pi\alpha'} \psi_0 \cosh \omega d\omega \wedge d\tau.$$

Sachant qu'on a affaire ici à des D-branes non compactes, on pourrait croire que, contrairement aux 2-sphères dans la 3-sphère, les positions de ces D-branes ne sont pas quantifiées. En fait il n'en est rien : en effet, de manière générale, la charge sous  $B$  d'une corde (pas forcément fondamentale) vaut

$$q = 2\pi\alpha' \frac{\delta S}{\delta B_{\omega\tau}}$$

où  $S$  est l'action effective de la D-corde (1.4.1). Elle doit être multiple de la charge d'une corde fondamentale, c'est-à-dire, avec la normalisation choisie, entière. Dans le cas

qui nous concerne, on a  $q = -e^{-\Phi} \sinh \psi_0$ , d'où une quantification de la position de la D-brane. D'autre part, cette charge non nulle signifie qu'on a en fait affaire à un état lié d'une D1-brane et  $q$  cordes fondamentales, baptisé corde  $(1, q)$ . Il convient de noter que cette quantification est de nature différente de celle des 2-sphères dans la 3-sphère : notamment, elle est invisible si on fait tendre le couplage vers zéro, donc on ne verra rien dans la théorie conforme.

### 3.3.3 $AdS_2 \times S^2$ dans $AdS_3 \times S^3$

Les D-branes symétriques dans  $AdS_3 \times S^3$  sont, d'après ce qui précède, données par  $\psi = \psi_0$  et  $\chi = \chi_0$ . Le champ électromagnétique est la somme des deux champs stabilisant respectivement  $AdS_2$  et  $S^2$ , donc

$$F = -\frac{L^2}{2\pi\alpha'} (\psi_0 \cosh \omega d\omega \wedge d\tau + \chi_0 \sin \theta d\theta \wedge d\phi).$$

Pour une D3-brane de topologie  $M \times S^2$ , la charge sous  $B$  s'écrit :

$$q = 2\pi\alpha' \int_{S^2} d\theta d\phi \frac{\delta S}{\delta B_{\omega\tau}} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} d\theta d\phi \tilde{F}_{\theta\phi}.$$

Le champ  $\tilde{F}$  est, de manière générale, donné par

$$2\pi\alpha' \tilde{F}_{mn} = \frac{1}{2} e^{-\Phi} \sqrt{-\det(\hat{g} + B + 2\pi\alpha' F)} [(\hat{g} + B + 2\pi\alpha' F)^{-1}]^{[pq]} \varepsilon_{mnpq} \\ + \hat{C}_{mn} + C_{(0)}(B_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn})$$

où  $\varepsilon$  est le tenseur antisymétrique avec  $\varepsilon_{0123} = +1$ . Pour les branes qui nous intéressent ici, on a  $q = -\frac{L^2}{\pi\alpha'} e^{-\Phi} \sin \chi_0 \sinh \psi_0$ .

D'autre part, nous avons vu précédemment que  $p = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} d\theta d\phi F_{\theta\phi}$  est quantifié. Ici,  $p = \frac{L^2}{\pi\alpha'} \chi_0$ , d'où une quantification de  $\chi_0$ . On peut montrer que les D-branes  $S^2$  dans  $S^3$  peuvent s'interpréter comme des états liés de  $p$  D-branes avec deux dimensions de moins ; on en déduit que nos D-branes sont des cordes  $(p, q)$ .

On peut calculer le spectre des petites fluctuations de la D-brane avec l'action de Born-Infeld, comme on l'a fait dans le chapitre précédent. Nous ne reproduirons pas ici les calculs, et laissons le lecteur se référer à [37], où il est également montré que le spectre trouvé est en accord avec ce que l'on sait faire en CFT, à cela près que, comme dans le chapitre précédent, le calcul semi-classique ne donne pas de borne supérieure pour le spin des représentations de  $SU(2)$  permises.

Considérons maintenant la géométrie effective, c'est-à-dire vue par les cordes ouvertes. Cette géométrie est, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, donnée par la

métrique de corde ouverte (1.2.7). Il est aisé de voir que la géométrie effective de notre D-brane est  $AdS_2 \times S^2$ , comme sa géométrie induite, mais avec comme rayon  $L$  aussi bien pour  $AdS_2$  que pour  $S^2$ , alors que les rayons induits sont respectivement  $L \sin \chi_0$  et  $L \cosh \psi_0$ . Ainsi, alors que, du point de vue de la géométrie induite, il est possible d'avoir un  $AdS_2$  presque plat et une 2-sphère très petite, cela n'est en fait pas possible dans la géométrie vue par les cordes ouvertes. Cela a évidemment une grande importance si on veut obtenir finalement un univers branaire ; nous y reviendrons lors de l'étude avec des fonds R-R.

## 3.4 D-branes dans $AdS_3 \times S^3$ avec des champs de fond R-R

### 3.4.1 Champs de fond

Le fond R-R s'obtient à partir du fond NS-NS par la transformation de S-dualité  $C_{(2)} \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow -C_{(2)}$ ,  $F \rightarrow \tilde{F}$  et  $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ , où  $\tau = C_{(0)} + ie^{-\Phi}$ . Il s'agit d'un état lié de  $Q_5$  D5-branes et  $Q_1$  D1-branes. On montre alors (cf l'appendice de [38] (annexe C de cette thèse)) que  $\tilde{F}$  est transformé en  $-F$ , ce qui garantit que la dualité préserve l'équation du mouvement pour  $F$ , puisqu'elle s'écrit  $d\tilde{F} = 0$ . Ainsi, notre corde  $(p, q)$  devient une corde  $(-q, p)$ , ce qui signifie que, à un signe près, les charges de D-corde et de corde fondamentale sont échangés.

Les champs ainsi obtenus sont

$$\begin{aligned}\Phi &= -\Phi_{\text{NS}} \\ C_{(2)} &= B_{\text{NS}} \\ F &= \frac{e^\Phi L_{\text{NS}}^2}{2\pi\alpha'} (\cos \chi_0 \cosh \psi_0 \cosh \omega d\omega \wedge d\tau + \sin \chi_0 \sinh \psi_0 \sin \theta d\theta \wedge d\phi) \\ ds^2 &= e^\Phi ds_{\text{NS}}^2.\end{aligned}$$

Vu la forme de la métrique, dans la suite, nous redéfinissons  $L^2 \equiv L_{\text{RR}}^2 = e^\Phi L_{\text{NS}}^2$ .

### 3.4.2 Petites fluctuations et métrique effective

Puisque la S-dualité est une symétrie des équations du mouvement découlant de l'action effective à basse énergie, on s'attend à ce que les représentations de  $SL(2, \mathbb{R}) \times SU(2)$

présentes dans le spectre soient les mêmes. Il est néanmoins utile de vérifier que la S-dualité fonctionne bien. Pour cela, comme précédemment, on considère les fluctuations quadratiques de l'action effective (1.4.1). Il apparaît alors qu'après un changement de variables approprié :

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\psi} &= \sinh \psi_0 \cos \chi_0 \delta\psi - \cosh \psi_0 \sin \chi_0 \delta\chi \\ \delta\tilde{\chi} &= \cosh \psi_0 \sin \chi_0 \delta\psi + \sinh \psi_0 \cos \chi_0 \delta\chi\end{aligned}$$

les termes quadratiques sont essentiellement identiques au cas NS-NS, en remplaçant  $\delta\psi$  par  $\delta\tilde{\psi}$  et  $\delta\chi$  par  $\delta\tilde{\chi}$ . Il en découle que le spectre est bien le même.

La S-dualité nous donne des informations supplémentaires qui ne découlent pas de l'action effective. En effet, nous avons vu que, dans le cas NS-NS, le spin maximal des représentations présentes est égal à la moitié de la charge magnétique  $p$  de la D-brane sous le champ  $B$ . Il en découle que, si la S-dualité est vraie, dans le cas RR le spin maximal est la moitié de  $p$ , qui est maintenant la charge électrique sous  $B$ . Un tel résultat ne pouvait être trouvé directement car il n'y a pas de modèle sigma connu pour la surface d'univers des cordes en présence d'un fond RR non nul.

Pour ce qui concerne la géométrie effective, il se pose le problème qu'a priori, la formule (1.2.7) n'a pas de raison d'être valide en présence de champs R-R. Il se pose donc la question de savoir s'il y a une notion de métrique effective dans un tel cas. Dans le développement en fluctuations de l'action effective apparaît naturellement une métrique  $AdS_2 \times S^2$  avec des rayons égaux. Mais ceci ne dit rien sur la normalisation de cette métrique, donc sur la valeur du rayon commun. Pour le trouver, on va, comme on avait fait dans le cas de la 3-sphère, ajouter une dimension supplémentaire  $x$ , qui sera ici spatiale puisqu'il y a une dimension temporelle dans  $AdS_2$ , et considérer une D-brane qui s'étend le long de cette dimension (c'est-à-dire qu'on fait une T-dualité le long d'une dimension orthogonale à  $AdS_3 \times S^3$ ). L'action effective s'exprime alors naturellement en termes de la métrique

$$ds_{\text{eff}}^2 = dx^2 + L^2(\sin^2 \chi_0 + \sinh^2 \psi_0)(d\omega^2 - \cosh^2 \omega d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Sachant que la géométrie effective de la direction  $x$  doit être la même que sa géométrie réelle (car il n'y a aucun champ de fond qui en dépende), on conclut que cette expression donne la métrique effective avec la bonne normalisation, d'où le rayon effectif

$$R^2 = L^2(\sin^2 \chi_0 + \sinh^2 \psi_0).$$

On peut vérifier aisément que c'est ce que l'on trouve en utilisant la formule (1.2.7) sans aucune correction. La question de savoir si cela se généralise reste ouverte.

Ainsi, la situation est différente du cas NS-NS, puisque le rayon dépend de la position de la D-brane, et peut prendre n'importe quelle valeur. Cela ne contredit pas la S-dualité, puisqu'il s'agit d'une symétrie des équations du mouvement, et non de l'action.

L'égalité des rayons des parties anti-de Sitter et sphérique de la géométrie posent problème dans le cadre d'un univers branaire à la Randall-Sundrum : ce que l'on voudrait, en effet, c'est un grand rayon (c'est-à-dire une échelle cosmologique) pour la partie anti-de Sitter, afin qu'elle soit presque plate, conformément aux observations, et un petit rayon pour la partie sphérique, c'est-à-dire plus petit que l'échelle où la loi de Newton est vérifiée expérimentalement (environ 0,1 mm). L'égalité des rayons est liée à la supersymétrie : en effet, l'existence d'une théorie des champs supersymétrique dans une géométrie requiert l'existence d'un spineur covariantement constant, ce qui n'est possible ici que si les deux rayons sont égaux. Plus précisément, c'est de supersymétrie étendue qu'il s'agit puisque, dans la théorie des champs obtenue en supprimant la sphère, les isométries de la sphère deviennent des R-symétries. Par exemple, dans le cas de la D-brane  $AdS_4 \times S^2$  considérée initialement, on a une R-symétrie  $O(4) \cong O(3) \times O(3)$ , le premier  $O(3)$  provenant de la 3-sphère et le deuxième des dimensions extérieures à la D-brane, d'où une supersymétrie  $\mathcal{N} = 4$  à 4 dimensions (16 supercharges). Il semblerait donc que l'obtention d'univers branaires réalistes requière une supersymétrie  $\mathcal{N} \leq 1$ . Il faudrait pouvoir faire le calcul sans négliger la réaction de la D-brane sur la géométrie ambiante pour voir ce qui se passe dans ce cas.

Remarquons toutefois que puisque, dans le cas de  $AdS_2 \times S^2$  avec des fonds R-R, on peut obtenir un rayon très grand, on a là un moyen d'obtenir un espace plat à quatre dimensions (cf la remarque à la fin de [30]). La question de savoir si cela peut donner lieu à un univers branaire réaliste mérite certainement d'être étudiée.

# Chapitre 4

## Cordes ouvertes dans une onde plane

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressé à des fonds indépendants du temps. Les fonds dépendants du temps posent en effet des problèmes à la fois techniques et conceptuels, qui viennent notamment du fait que la théorie des cordes perturbative est formulée comme une théorie de matrice  $S$ , alors qu'on ne peut pas toujours définir d'états asymptotiques dans une géométrie dépendant du temps.

Parmi les fonds les plus étudiés, il y a les géométries obtenues en quotientant l'espace plat par un boost, éventuellement de genre lumière [39], l'intérêt étant que l'espace est plat, ce qui simplifie grandement la quantification de la corde. Ces fonds sont des modèles jouets pour un « rebond cosmologique » (un Big Crunch suivi d'un Big Bang), et peuvent contenir une singularité de genre espace ou lumière ; la résolution de telles singularités en théorie des cordes reste un problème ouvert.

On peut aborder ces problèmes en considérant un analogue en termes de cordes ouvertes [40]. Il s'agit d'une configuration, dite *ciseaux de genre lumière*, où deux D-branes qui se coupent bougent l'une par rapport à l'autre de sorte que les points d'intersection vont à la vitesse de la lumière, le tout étant plongé dans un espace de Minkowski ordinaire. L'intérêt d'une telle étude est que l'on peut isoler les effets cordistes de ceux dûs à une forte gravité, ces derniers étant absents dans le cas ouvert, et qu'on peut régulariser le comportement à grands temps en rendant les D-branes parallèles dans le passé et le futur lointains (fig. 4.1) — cela est analogue à stopper l'expansion de l'Univers dans le cas du quotient ci-dessus, et permet d'avoir des états asymptotiques.

Les ciseaux de genre lumière régularisés sont un cas particulier de D-branes portant une onde plane, qui font l'objet de ce chapitre. L'intérêt de telles D-branes est que, moyennant un choix de jauge particulier, la *jauge du cône de lumière*, la théorie des champs sur la surface d'univers est libre avec des sources, ce qui permet de calculer

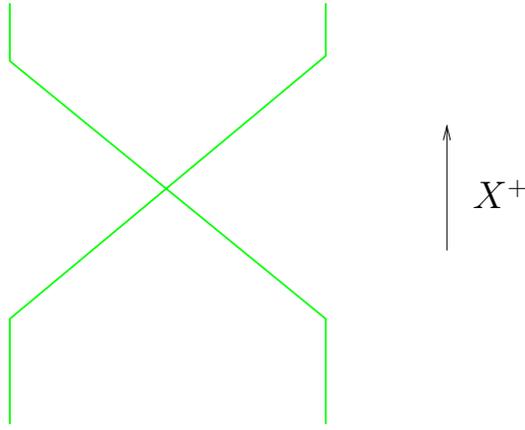


FIG. 4.1 – Ciseaux de genre lumière régularisés.

diverses quantités explicitement. On pourra donc, en particulier, envisager, dans le cas des ciseaux de genre lumière régularisés décrits ci-dessus, de voir s'il y a une divergence infrarouge dans l'émission de cordes ouvertes de masse nulle par une corde tendue entre les deux D-branes, ce qui serait le signe d'une forte rétroaction à tout couplage. On s'attend à ce que ce soit le cas au moins dans la limite où la distance entre les D-branes tend vers l'infini, car alors l'énergie d'une corde tendue entre elles tendrait aussi vers l'infini, et il faut bien qu'elle prenne cette énergie quelque part, d'où une rétroaction sur les D-branes. Un objectif de ce chapitre sera donc de voir comment aborder ce genre de calcul.

## 4.1 Quantification de la corde dans la jauge du cône de lumière

Au début du chapitre 1, nous avons vu qu'après fixation de la métrique dans l'action de Polyakov (1.1.1), il reste des symétries, qui sont les transformations conformes des coordonnées. Nous allons voir que, moyennant un abandon de la covariance manifeste de Lorentz de l'espace-temps cible, on peut fixer complètement la jauge et imposer simplement la contrainte (1.1.2).

La forme générale des transformations conformes est

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+), \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-)$$

avec  $\sigma^\pm \equiv \tau \pm \sigma$ . Il en découle que  $\tau$  et  $\sigma$  se transforment en

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \frac{1}{2}[\tilde{\sigma}^+(\tau + \sigma) + \tilde{\sigma}^-(\tau - \sigma)] \\ \tilde{\sigma} &= \frac{1}{2}[\tilde{\sigma}^+(\tau + \sigma) - \tilde{\sigma}^-(\tau - \sigma)].\end{aligned}$$

Ceci équivaut à demander que  $\tilde{\tau}$  soit une solution quelconque de l'équation  $\square\tilde{\tau} = 0$ , et  $\tilde{\sigma}$  est alors fixé à une constante additive près.

Dans le cas d'une corde ouverte, le fait que  $\tilde{\sigma}$  soit constant aux bords entraîne la condition aux bords  $\partial_\sigma\tilde{\tau}$ . Ces deux conditions sont, par les équations du mouvement, vérifiées par toute combinaison linéaire des coordonnées  $X^\mu$ ; pour simplifier l'expression de la contrainte (1.1.2), on prend  $\tilde{\tau} = X^+/(2\alpha'p^+)$ , la normalisation étant nécessaire pour que  $\tilde{\sigma}$  ait la bonne normalisation (c'est-à-dire un écart de  $\pi$  entre les bords), ce qui revient à considérer qu'on prend

$$X^+ = 2\alpha'p^+\tau,$$

où

$$X^\pm = \frac{X^0 \pm X^1}{\sqrt{2}}$$

sont les coordonnées du cône de lumière.

La contrainte (1.1.2) s'écrit alors

$$\partial_\pm X^- = \frac{1}{p^+}(\partial_\pm X^i)^2,$$

$i$  parcourant les indices 2 à  $D-1$ , de sorte que  $X^-$  est complètement déterminé à une constante additive près. Les variables dynamiques sont donc le mode zéro de  $X^-$  et les  $D-2$  champs  $X^i$ .

Il découle de l'équation précédente que l'impulsion  $p^-$  s'écrit :

$$p^- = \frac{1}{2p^+} \left[ (p^i)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{m>0} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i - a \right) \right]$$

où, comme au premier chapitre, nous avons introduit une constante  $a$  à cause de l'ordre normal. Il en découle que la masse des états vaut

$$m^2 = 2p^+p^- - (p^i)^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - a)$$

où  $N$  est le nombre d'excitations selon les coordonnées 2 à  $D-1$ .

Il se pose alors la question de l'invariance de Lorentz de cette théorie. Puisque nous l'avons obtenue à partir d'une théorie invariante de Lorentz, il est nécessaire à la cohérence

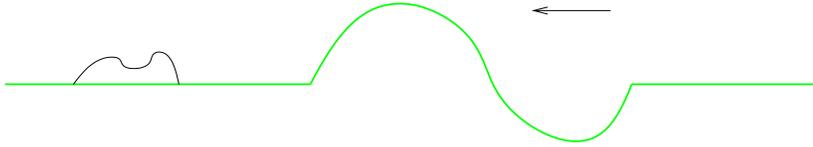


FIG. 4.2 – Corde fondamentale accrochée à une D-corde ondulante.

qu'elle le soit. On peut calculer explicitement les générateurs du groupe de Lorentz, et on constate alors que le commutateur  $[J^{i-}, J^{j-}]$ , qui devrait être nul, ne l'est effectivement que si  $D = 26$  et  $a = 1$ , c'est-à-dire précisément ce que nous avons trouvé lors de la quantification covariante, et le spectre est donc le même. Notons toutefois qu'il n'y a pas à imposer de conditions sur les états comme lors de la quantification covariante, et donc on obtient les états simplement en faisant agir les  $\alpha_{-n}^i$  sur un état non excité.

Dans le cas de la corde fermée, les choses sont similaires, avec des parties gauche et droite indépendantes, à ceci près qu'on doit imposer la condition  $N = \tilde{N}$ . Nous ne détaillerons pas plus.

## 4.2 Corde libre sur une D-corde ondulante

### 4.2.1 Description du fond

La configuration qui nous intéresse ici est une D1-brane, paramétrée par les coordonnées du cône de lumière  $X^+$  et  $X^-$ . Les autres coordonnées sont données par  $X^i = Y^i(X^+)$ , où les  $Y^i$  sont des fonctions continues à support compact (on s'attend à ce que les résultats s'étendent au cas de fonctions décroissant « suffisamment vite »). Ceci décrit une impulsion d'onde plane de déformation allant à la vitesse de la lumière (fig. 4.2). Le support compact des fonctions  $Y^i$  permet, pour les cordes ouvertes sur cette D-brane, des états asymptotiques à temps suffisamment petit ou grand qui sont ceux d'une corde ouverte sur une D-brane plate donnée par  $X^i = 0$ . Le couplage de la corde avec l'onde sur la D-brane est donné, comme le montre l'action (1.2.3), par

$$S_I = \pm \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau Y^i(X^+) \partial_\sigma X_i.$$

Cette action n'ayant pas de dépendance en  $X^-$ , l'impulsion  $p^+$  est conservée, et  $X^+$  vérifie les mêmes équations du mouvement et conditions aux bords qu'en l'absence d'onde. On peut donc passer dans la jauge du cône de lumière comme expliqué précédemment et, du point de vue de la surface d'univers, on a affaire à des champs libres  $X^i$  couplés à des

sources dépendant du temps  $Y^i(2\alpha'p^+\tau)$ . Pour alléger les notations, on prendra dans la suite  $2\alpha' = 1$ .

Par T-dualité, une telle onde est équivalente à une onde électromagnétique plane  $A_i(X^+)$  sur le volume d'univers d'une D-brane en dimension plus élevée. Une grande partie de ce que nous allons faire ici pourra s'y transposer facilement. Néanmoins, dans le cas électromagnétique, les conditions aux bords de Neumann (modifiées par le champ) conduisent à l'existence de modes zéros pour la corde qui compliqueraient quelque peu la discussion ; aussi considérerons-nous le cas d'une onde de déformation d'une D1-brane dans ce qui suit.

Par souci de simplicité, nous ne travaillerons ici que dans le cadre de la corde bosonique. Signalons toutefois que dans le cas de la supercorde, le terme d'interaction fermionique s'écrit uniquement en termes de  $\psi^+$  (le partenaire supersymétrique de  $X^+$ ), qui s'annule dans la jauge du cône de lumière, de sorte que le terme d'interaction est in fine le même que pour la corde bosonique. Il en découle que beaucoup de résultats de la corde bosonique devraient pouvoir se transposer simplement à la supercorde.

Enfin, dans la mesure où les  $X^i$  sont découplés entre eux, nous n'en considérerons qu'un, et omettrons l'indice  $i$ .

## 4.2.2 Fonctions de corrélation

Nous considérons dans un premier temps une corde « libre », au sens où il n'y a pas de coupure ou de fusion de cordes. Malgré cette absence d'interaction entre cordes, la présence d'une source rend la matrice  $S$  non triviale.

Pour calculer les amplitudes, on est amené à considérer des fonctions de corrélation telles que

$$\langle 0_{out} | X(\tau_1, \sigma_1) \dots X(\tau_n, \sigma_n) | 0_{in} \rangle_S = \langle 0_{out} | X(\tau_1, \sigma_1) \dots X(\tau_n, \sigma_n) \exp(iS_I) | 0_{in} \rangle, \quad (4.2.1)$$

les états  $|0_{in}\rangle$  et  $|0_{out}\rangle$  étant en présence de la source dans le premier cas, et en son absence dans le second. On a ici  $|0_{in}\rangle = |0_{out}\rangle$  (en l'absence de source), mais nous les distinguons afin de pouvoir plus loin appliquer ce formalisme au cas des interactions.

On va se placer dans le cas d'une source générique, c'est-à-dire non localisée au bord, et donc

$$S_I = \int d\tau d\sigma J(\tau, \sigma) X(\tau, \sigma)$$

où  $J$  est une fonction quelconque. L'équation du mouvement s'écrit alors  $\square X = -\pi J$ . Il en découle que  $\langle 0_{out} | X(\tau, \sigma) | 0_{in} \rangle_S / \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_S$  doit également vérifier cette équation. Cette

condition, et le fait que cette quantité doit s'annuler au bord (si  $J$  ne contient pas de  $\delta$  ou dérivée de  $\delta$  au bord) et ne contenir que des termes en  $e^{-in\tau}$  (resp.  $e^{+in\tau}$ ),  $n > 0$ , quand  $\tau \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ ), impose que

$$\frac{\langle 0_{out}|X(\tau, \sigma)|0_{in}\rangle_S}{\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S} = i \int d\tau' d\sigma' N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') J(\tau', \sigma') \quad (4.2.2)$$

où  $N$ , le propagateur, doit vérifier  $\square N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') = i\pi\delta(\tau - \tau')\delta(\sigma - \sigma')$ , s'annuler au bord et vérifier les mêmes conditions que  $\langle X \rangle$  quand  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Nous l'expliciterons plus loin.

La fonction de corrélation  $\langle 0_{out}|\exp(iS_I)|0_{in}\rangle$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(\tau, \sigma)} \langle 0_{out}|\exp(iS_I)|0_{in}\rangle &= i \langle 0_{out}|X(\tau, \sigma)\exp(iS_I)|0_{in}\rangle \\ &= - \int d\tau' d\sigma' N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') J(\tau', \sigma') \langle 0_{out}|\exp(iS_I)|0_{in}\rangle \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de l'équation (4.2.2). Cette équation se résout aisément, et on trouve

$$\langle 0_{out}|\exp(iS_I)|0_{in}\rangle = C \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d\tau' d\sigma' d\tau'' d\sigma'' N(\tau', \sigma'; \tau'', \sigma'') J(\tau', \sigma') J(\tau'', \sigma'') \right] \quad (4.2.3)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $J$ . Bien sûr, dans le cas d'une corde libre,  $C = \langle 0_{out}|0_{in}\rangle = 1$ . À partir de cette amplitude, on peut obtenir des fonctions de corrélations générales comme dans l'équation (4.2.1) en dérivant plusieurs fois (4.2.3) par rapport à la source  $J$ . On peut notamment vérifier que  $\langle 0_{out}|X(\tau, \sigma)X(\tau', \sigma')|0_{in}\rangle = N(\tau, \sigma; \tau', \sigma')$ .

Dans le cas qui nous intéresse ici, on a

$$J(\tau, \sigma) = -\frac{1}{\pi}(\delta'(\sigma) - \delta'(\sigma - \pi))Y(p^+\tau)$$

d'où

$$\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S = C \exp \left[ -\frac{1}{2\pi^2} \oint d\tau' \oint d\tau'' \partial_{\sigma'} \partial_{\sigma''} N(\tau', \sigma'; \tau'', \sigma'') Y(p^+\tau') Y(p^+\tau'') \right] \quad (4.2.4)$$

où les intégrales sont sur le bord de la surface d'univers, et

$$\frac{\langle 0_{out}|X(\tau, \sigma)|0_{in}\rangle_S}{\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S} = -\frac{i}{\pi} \oint d\tau' \partial_{\sigma'} N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') Y(p^+\tau').$$

Jusqu'à présent, ce que nous avons dit ici est essentiellement indépendant de la topologie de la surface d'univers, et nous l'utiliserons quand nous étudierons le cas des

interactions entre cordes en présence de l'onde. Le propagateur, en revanche, en dépend. Dans le cas libre, il s'exprime simplement comme la série suivante :

$$N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') = \sum_{n>0} \frac{1}{n} e^{-(i+\varepsilon)n|\tau-\tau'|} \sin(n\sigma) \sin(n\sigma')$$

où  $\varepsilon$  est un petit réel strictement positif servant à faire converger la somme, similaire à celui qu'on met habituellement dans le propagateur de Feynman. Il est aisé de vérifier que ce propagateur satisfait toutes les propriétés requises.

### 4.2.3 Matrice $S$

La présence de l'ondulation permet des transitions entre différents états de la corde. On est donc amené à calculer des quantités du genre

$$\langle 0_{out} | a_{k_1}^{out} \dots a_{k_m}^{out} a_{-l_1}^{in} \dots a_{-l_n}^{in} | 0_{in} \rangle$$

où les  $a^{in}$  (resp.  $a^{out}$ ) sont les opérateurs de création et d'annihilation pour les états asymptotiques entrants (resp. sortants).

Sachant que  $X(\tau, \sigma)$  admet le développement en modes suivant :

$$X(\tau, \sigma) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma),$$

on vérifie aisément que

$$a_n = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{in\tau}}{\pi} \int d\sigma \sin(n\sigma) (nX + i\partial_\tau X)$$

où la limite est en  $+\infty$  pour les états sortants, et  $-\infty$  pour les états entrants. Ainsi, on peut obtenir un élément quelconque de la matrice  $S$  à partir de corrélateurs du type de l'équation (4.2.1).

Le calcul de la quantité (4.2.4), dont le module au carré donne la probabilité de non-excitation pour une corde initialement dans son état fondamental, est fait dans [43] (dans le cas T-dual), et nous laissons le lecteur s'y référer. On trouve, à une phase près (sans signification physique)

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_S = \sum_{\substack{n>0 \\ \text{impair}}} \frac{8n}{(p^+)^2} \left| \tilde{Y} \left( \frac{n}{p^+} \right) \right|^2,$$

où  $\tilde{Y}$  est la transformée de Fourier de  $Y$ ,

$$Y(x^+) = \int dp^- \tilde{Y}(p^-) e^{ip^- x^+}.$$

Il s'agit du résultat que [41] obtient en considérant directement l'opérateur d'évolution  $e^{i \int d\tau H_I(\tau)}$ .

À partir de là, le calcul d'amplitudes entre des états quelconques est aisé, et on peut vérifier que ce sont celles données par la matrice  $S$  calculée en [41] :

$$S = \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_S : \exp \left[ \frac{4i}{p^+} \sum_{n \text{ impair}} \tilde{Y} \left( \frac{n}{p^+} \right) a_n \right] : .$$

#### 4.2.4 Calcul covariant en termes d'état de bord

Il est possible de construire un état de bord correspondant à la D-corde ondulante [42, 43] : en effet, en partant de l'état de bord  $|D1\rangle$ , correspondant à la D-corde sans onde, il est aisé de voir que l'état

$$|B\rangle = \exp \left( \frac{1}{\pi} \int_{\tau_F=0} d\sigma_F Y^i(X^+) \partial_{\tau_F} X^i \right) |D1\rangle, \quad (4.2.5)$$

où  $\tau_F$  et  $\sigma_F$  sont les coordonnées sur la corde fermée, vérifie les conditions aux bords

$$(X^i - Y^i(X^+))|_{\tau_F=0} |B\rangle = 0.$$

(Noter que l'état de bord a un sens pour une surface d'univers euclidienne, et qu'il faut donc, pour vérifier l'équation ci-dessus, utiliser les relations de commutation euclidiennes  $[X(\sigma_F), \partial_{\tau_F} X(\sigma'_F)] = \pi \delta(\sigma_F - \sigma'_F)$ .)

À partir du moment où on dispose d'un tel état de bord, on peut s'en servir pour calculer des amplitudes en insérant des opérateurs de vertex entre l'état de bord et le vide de cordes fermées. Ainsi, l'amplitude pour un état tachyonique d'y rester est donnée par

$$S_{0 \rightarrow 0} \propto \langle 0 | : e^{-ip_\mu X^\mu(0,0)} : : e^{ip_\mu X^\mu(0,\pi)} : |B\rangle \quad (4.2.6)$$

où, s'agissant de cordes fermées, la coordonnée  $\sigma_F$  est périodique de période  $2\pi$ . Nous avons utilisé le fait que le disque a une symétrie conforme  $SL(2, \mathbb{R})$  pour fixer la position des opérateurs de vertex. Quant à la normalisation, elle sera fixée en imposant que  $S_{0 \rightarrow 0} = 1$  en l'absence d'onde. Enfin, l'impulsion d'une corde ouverte étant nécessairement longitudinale à la D-brane, l'indice  $\mu$  ne prendra ici que les valeurs  $+$  et  $-$ .

Il faut tout d'abord préciser ce que l'on entend par le vide de cordes fermées  $\langle 0|$ . Puisque nous considérons des amplitudes sans émission de corde fermée, la prescription appropriée est naturellement que les opérateurs d'impulsion, et notamment  $p^-$  (conjugué du mode zéro de  $X^+$ , noté  $x^+$ ), s'annulent. Il en découle que le vide s'écrit

$$\langle 0| \propto \int dx^+ \langle x^+| \quad (4.2.7)$$

où  $\langle x^+ |$  est un état propre de  $x^+$ .

Dans la suite du calcul, on est amené à séparer les fréquences positives et négatives de  $X^\mu$ . On pose donc  $X^\mu(0, \sigma_F) = X^\mu_> + X^\mu_< + x^\mu$ , avec

$$X^\mu_> = \frac{i}{2} \sum_{n>0} \frac{1}{n} (a_n^\mu e^{-in\sigma_F} + \bar{a}_n^\mu e^{in\sigma_F})$$

et une expression similaire pour  $X^\mu_<$ . De la même façon, nous serons amené à introduire  $\partial_{\tau_F} X^\mu_>$  et  $\partial_{\tau_F} X^\mu_<$ .

Sachant que  $\langle 0 |$  est annulé par  $X^\mu_<$ , et que  $|D1\rangle$  est annulé par  $X^\mu_> - X^\mu_<$  (pour  $\mu \in \{+, -\}$ ), la bonne prescription pour l'ordre normal est de mettre  $X^\mu_<$  à gauche et  $X^\mu_> - X^\mu_<$  à droite. Pour cela, on écrit

$$: e^{ip_\mu X^\mu} : = e^{2ip_\mu X^\mu_<} e^{ip_\mu x^\mu} e^{ip_\mu (X^\mu_> - X^\mu_<)}. \quad (4.2.8)$$

Dans l'expression (4.2.6), les facteurs en  $X^\mu_<$  s'éliminent, ainsi que ceux en  $X^\mu_> - X^\mu_<$  parce que  $(X^\mu_> - X^\mu_<)|B\rangle = 0$ . Les facteurs avec les modes zéros, quant à eux, s'éliminent parce que les états entrant et sortant ont même  $p^+$  (parce que  $p^+$  est conservé) et même  $p^-$  (parce que ce sont deux tachyons ; sinon il y aurait un facteur  $e^{ix^+\Delta p^-}$ ). On obtient alors

$$S_{0 \rightarrow 0} \propto \langle 0 | e^{ip^+(X^-_> - X^-_<)} |_{\sigma_F=0} e^{-ip^+(X^-_> - X^-_<)} |_{\sigma_F=\pi} |B\rangle.$$

Il reste alors à faire passer le facteur en  $X^\mu_> - X^\mu_<$  à droite de l'exponentielle de l'équation (4.2.5). Pour cela, nous allons utiliser la formule

$$e^C g(B) e^{-C} = g(B + [C, B])$$

où  $[C, B]$  doit commuter avec  $C$  et  $B$ , et  $g$  est une fonction quelconque (en principe analytique), et le commutateur

$$[X_>(\sigma_F), X_<(\sigma'_F)] = -\frac{1}{4} \ln \left( 4 \sin^2 \left( \frac{\sigma_F - \sigma'_F}{2} \right) \right),$$

qui n'est autre que le propagateur restreint au bord  $N_F(0, \sigma_F; 0, \sigma'_F)$ . En appliquant ceci une fois pour chaque opérateur de vertex, et après quelques calculs (cf [43]), on obtient

$$S_{0 \rightarrow 0} \propto \langle 0 | \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int d\sigma_F Y^i \left( X^+(\sigma_F) + ip^+ \ln \left| \tan \frac{\sigma_F}{2} \right| \right) \partial_{\tau_F} X^i \right] |D1\rangle. \quad (4.2.9)$$

(Le fait que l'on prolonge ici analytiquement une fonction qui n'a pas de raison de être analytique — les fonctions analytiques à support borné sont rares — peut paraître fumeux. Néanmoins, le résultat final sera identique à celui de la jauge du cône de lumière (équation

(4.2.4)), ce qui laisse supposer qu'il doit y avoir un moyen de rendre cela rigoureux.) On peut en outre remplacer  $X^+(\sigma_F)$  par  $x^+$  car, en l'absence de termes en  $X^-$ , les modes non zéros de  $X^+$  peuvent se déplacer librement à gauche où à droite, et s'annulent sur  $\langle 0|$  ou  $|D1\rangle$ .

Pour aller plus loin, on écrit

$$\partial_{\tau_F} X^i = 2\partial_{\tau_F} X^i_{<} + (\partial_{\tau_F} X^i_{>} - \partial_{\tau_F} X^i_{<}).$$

Le premier terme s'annule sur  $\langle 0|$ , et les conditions de Dirichlet sur la D-corde sans onde entraînent l'annulation du deuxième terme sur  $|D1\rangle$ . On est donc amené à séparer l'exponentielle dans (4.2.9) en utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{B+C} = e^B e^{\frac{1}{2}[C,B]} e^C,$$

applicable si  $[C, B]$  commute avec  $B$  et  $C$ , où  $B$  et  $C$  sont l'exponentielle dans (4.2.9) en remplaçant  $\partial_{\tau_F} X^i$  par respectivement le premier et le deuxième terme de l'équation précédente. En remarquant d'autre part que le terme en  $\ln|\tan(\sigma_F/2)|$  apparaît dans la transformation conforme qui transforme le demi-cylindre infini ( $\tau_F \geq 0$ ) en ruban euclidien :

$$-\tau_E + i\sigma = \ln\left(\tan\left(\frac{\sigma_F + i\tau_F}{2}\right)\right),$$

on obtient

$$S_{0 \rightarrow 0} = \langle 0| \exp\left[\frac{1}{\pi^2} \int d\sigma'_F Y^i(x^+ - ip^+ \tau_E(\sigma'_F)) \int d\sigma''_F Y^i(x^+ - ip^+ \tau_E(\sigma''_F)) \times \right. \\ \left. \times \partial_{\tau'_F} \partial_{\tau''_F} N_F(0, \sigma'_F; 0, \sigma''_F)\right] |D1\rangle$$

Tout naturellement, on fait alors le changement de variable vers les coordonnées  $(\tau_E, \sigma)$ . La dérivée du propagateur se transforme de façon triviale (noter que ce n'est pas le cas du propagateur lui-même), à ceci près que le propagateur ouvert sur la bande a un facteur 2 par rapport au propagateur fermé à cause du bord, donc nous devons ajouter un facteur 1/2; pour plus de détails à ce propos, on se réfèrera à l'annexe de [43]. Enfin, une rotation de Wick ( $\tau_E = i\tau$ ) permet de revenir à un argument réel pour  $Y^i$  et transforme le propagateur euclidien en propagateur minkowskien.

Il faut encore éliminer les  $x^+$ . Pour cela, on peut absorber  $x^+$  dans la variable d'intégration. Il reste alors un facteur  $\int dx^+ \langle x^+ |D1\rangle$  absorbé dans la normalisation, et on aboutit à l'expression (4.2.4).

Notons que la remarque que nous avons faite à la fin de la section 1.1.4 est explicitement vérifiée ici : en partant de l'état de bord, donc dans un formalisme covariant avec une

surface d'univers euclidienne, nous arrivons finalement à une expression faisant apparaître une surface d'univers minkowskienne (puisque le propagateur dans l'expression finale est minkowskien) dans la jauge du cône de lumière, ce qui confirme que c'est bien une métrique minkowskienne qu'il faut considérer dans cette jauge.

Il n'est pas difficile de considérer le processus tachyon  $\rightarrow$  photon dans ce formalisme. Il s'agit alors de calculer l'amplitude

$$\langle 0 | : e^{-ip_\mu X^\mu(0,0)} \partial_\sigma X^i : : e^{ip_\mu X^\mu(0,\pi)} : | B \rangle.$$

On aboutit alors, après la rotation de Wick, à

$$\langle 0 | \frac{i}{\pi} \oint d\tau e^{i\tau Y^i(x^+ + p^+\tau)} \exp [\dots] e^{ix^+/p^+} | B \rangle$$

où  $\exp[\dots]$  est l'exponentielle dans  $S_{0 \rightarrow 0}$ , et le facteur  $e^{ix^+/p^+}$  vient des modes zéros dans (4.2.8). Ce facteur permet de n'avoir qu'une dépendance en  $x^+ + p^+\tau$ , et on peut donc, comme précédemment, absorber  $x^+$  dans la variable d'intégration, et on obtient finalement la même chose que dans la jauge du cône de lumière.

Les opérateurs de vertex devenant rapidement assez compliqués pour les états excités suivants, la vérification du fait que les deux formalismes donnent le même résultat n'a pas été faite au-delà. Néanmoins, on s'attend à ce que la dualité ouvert-fermé soit très générale, et donc à ce que cela marche.

## 4.3 Interactions sur la D-corde ondulante

Après avoir considéré des processus où une corde ouverte donne une autre corde ouverte, éventuellement dans un état différent, nous allons envisager des interactions. Nous nous limiterons au cas d'une corde ouverte se cassant en deux. Plus spécifiquement, on s'intéressera au processus où une corde dans son état fondamental émet une excitation de masse nulle et d'impulsion tendant vers zéro. Ces excitations correspondant aux déformations de la D-brane, une divergence infrarouge serait un signe d'instabilité de la configuration ; à l'inverse, l'absence de divergence signifierait que la rétroaction sur la D-corde est contrôlable, c'est-à-dire peut être rendue négligeable avec un couplage suffisamment petit.

### 4.3.1 Surface d'univers dans la jauge du cône de lumière

Pour décrire une corde ouverte se cassant en deux, nous considérons comme surface d'univers une bande de largeur  $\pi$  avec une coupure parallèle à ses bords partant du

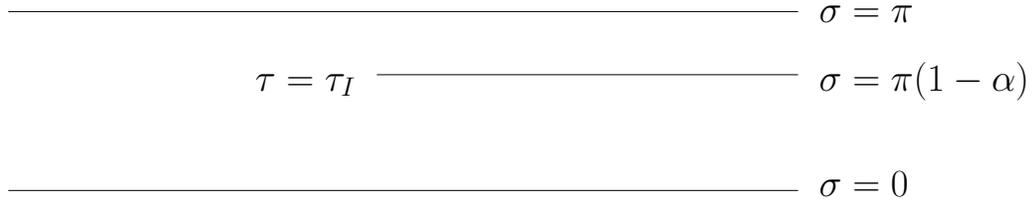


FIG. 4.3 – Surface d’univers d’une corde ouverte se cassant en deux.

temps d’interaction  $\tau_I$ , c’est-à-dire que la coupure est donnée par  $\tau \geq \tau_I$  et  $\sigma = (1 - \alpha)\pi$  (fig. 4.3). Dans la jauge du cône de lumière, où on prend  $X^+ = p^+\tau$ , où  $p^+$  est l’impulsion totale, qui est conservée, l’impulsion de chacun des deux morceaux après séparation est proportionnelle à leur largeur, et vaut donc respectivement  $(1 - \alpha)p^+$  et  $\alpha p^+$ . Nous considérerons le cas où l’excitation de masse nulle émise est dans la partie  $\sigma \in [(1 - \alpha)\pi; \pi]$ ; ainsi, la limite d’impulsion nulle pour cette excitation correspondra à  $\alpha \rightarrow 0$ .

Le formalisme que nous avons développé dans le chapitre précédent reste en grande partie valide pour des cordes en interaction. Un point essentiel qui va différer est la forme du propagateur. Celui-ci peut s’exprimer assez simplement dans le cas euclidien. En effet, dans ce cas-là, la transformation conforme suivante, dite *transformation de Schwarz-Christoffel*, amène le demi-plan complexe supérieur vers la bande coupée avec  $\tau_I = 0$  :

$$\tau_E + i\sigma = \ln(z - 1) - \alpha \ln z + \alpha \ln \alpha + (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha). \quad (4.3.1)$$

Le temps d’interaction correspond au point stationnaire de cette transformation; le lecteur pourra vérifier aisément qu’on a bien  $\tau_I = 0$  (le terme constant a été ajusté dans ce but).

En termes de la coordonnée  $z$ , le propagateur s’écrit

$$N_E(z; z') = -\frac{1}{2} \ln |z - z'| + \frac{1}{2} \ln |\bar{z} - z'|.$$

En l’absence d’expression explicite pour l’inverse de la transformation (4.3.1), nous devons travailler dans ces coordonnées, ce qui nous impose de travailler avec une surface d’univers euclidienne, et donc de faire un prolongement analytique à partir du cas minkowskien.

Pour déterminer comment on doit faire ce prolongement, il faut examiner le lien précis entre les propagateurs euclidien et minkowskien. Pour cela, on peut écrire le propagateur euclidien dans les coordonnées  $\tau_E, \sigma$  sous forme d’une série dépendant des parties de la surface d’univers (corde entrante ou l’une des cordes sortantes), notées  $r$  et  $r'$ , où se

trouvent les points  $(\tau_E, \sigma)$  et  $(\tau'_E, \sigma')$  :

$$N_E(\tau_E, \sigma; \tau'_E, \sigma') = \delta_{rr'} \sum_{n>0} \frac{1}{n} e^{-n|\tau_E - \tau'_E|/|\alpha_r|} \sin(n\sigma_r) \sin(n\sigma'_{r'}) \\ + \sum_{n, n'>0} N_{nn'}^{rr'} e^{n\tau_E/\alpha_r} e^{n'\tau'_E/\alpha'_r} \sin(n\sigma_r) \sin(n'\sigma'_{r'})$$

où  $\sigma_r$  et  $\sigma'_{r'}$  sont des coordonnées spatiales adaptées à chaque partie de la surface d'univers, c'est-à-dire des fonctions affines de  $\sigma$  valant 0 ou  $\pi$  aux bords, et  $\alpha_r$  vaut 1 sur la corde entrante (où  $\tau \leq 0$ ) et  $-(1 - \alpha)$  et  $-\alpha$  sur les cordes sortantes (où  $\tau \geq 0$ ). Pour plus de détails sur cette expression du propagateur, on pourra se référer au chapitre 11 de [1], où on trouvera également des expressions explicites pour les coefficients  $N_{nn'}^{rr'}$ , dont nous n'aurons pas besoin ici.

À partir de cette expression, on peut obtenir une expression pour le propagateur minkowskien :

$$N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') = \delta_{rr'} \sum_{n>0} \frac{1}{n} e^{-in|\tau - \tau'|/|\alpha_r|} \sin(n\sigma_r) \sin(n\sigma'_{r'}) \\ + \sum_{n, n'>0} N_{nn'}^{rr'} e^{in\tau/\alpha_r} e^{in'\tau'/\alpha'_r} \sin(n\sigma_r) \sin(n'\sigma'_{r'}).$$

Un point non trivial à vérifier est que les expressions sur les différents morceaux de la surface d'univers se recollent bien en  $\tau = 0$ . On pourra vérifier que si c'est le cas pour  $N_E$  (ce qui est vrai puisqu'on l'a obtenue à partir d'une expression en  $z$  qui n'a pas de discontinuité), alors c'est vrai aussi pour  $N$ . Il en découle le lien suivant entre les propagateurs :

$$N(\tau, \sigma; \tau', \sigma') = N_E(i\tau, \sigma; i\tau', \sigma').$$

### 4.3.2 Fonctions de corrélation et amplitudes

L'essentiel de ce que nous avons vu sur les fonctions de corrélation et amplitudes dans le cas libre s'applique ici ; bien sûr, puisqu'il y a deux cordes sortantes,  $\langle 0_{out} |$  doit être compris comme le produit tensoriel des vides de chaque corde. Notamment, il découle l'expression suivante, pour un temps d'interaction  $\tau_I$  :

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle_S = C \exp \left[ - \frac{1}{2\pi^2} \oint d\tau' \oint d\tau'' \partial_{\sigma'} \partial_{\sigma''} N(\tau', \sigma'; \tau'', \sigma'') \times \right. \\ \left. \times Y(p^+(\tau_I + \tau')) Y(p^+(\tau_I + \tau'')) \right].$$

Après une rotation de Wick ( $\tau'_E = i\tau'$  et  $\tau''_E = i\tau''$ ), on obtient

$$\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S = C \exp \left[ \frac{1}{2\pi^2} \oint d\tau'_E \oint d\tau''_E \partial_{\sigma'} \partial_{\sigma''} N_E(\tau'_E, \sigma'; \tau''_E, \sigma'') \times \right. \\ \left. \times Y(p^+(\tau_I - i\tau'_E)) Y(p^+(\tau_I - i\tau''_E)) \right].$$

A priori  $C$  peut dépendre de  $\alpha$ . Puisqu'il ne dépend pas de l'onde, on peut utiliser les résultats déjà connus en l'absence d'onde [1], qui disent que  $C$  est une constante, que l'on peut absorber dans la constante de couplage, et que nous omettrons donc dans la suite.

À partir de là, un changement de variables vers  $z'$  et  $z''$  donne

$$\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S = \exp \left[ \frac{1}{2\pi^2} \int dz' dz'' \frac{Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z'))) Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z'')))}{(z' - z'')^2} \right]$$

où  $\tau_E(z)$  est donné par l'équation (4.3.1). Ceci diverge quand  $z' \rightarrow z''$ ; il faut donc comprendre cette intégrale comme étant une partie principale.

Pour calculer l'amplitude d'émission d'une excitation de masse nulle par un tachyon, il faut calculer l'amplitude  $\langle 0_{out}|a_1|0_{in}\rangle_S$ , où  $a_1$  est l'opérateur créant une excitation de masse nulle sortante :

$$a_1 = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{e^{i\tau/\alpha}}{\pi} \int_{(1-\alpha)\pi}^{\pi} d\sigma \sin\left(\frac{\pi - \sigma}{\alpha}\right) \left(\frac{X}{\alpha} + i\partial_\tau X\right).$$

Pour obtenir une expression explicite de l'amplitude, là encore les expressions trouvées dans le cas libre s'appliquent, et comme pour le calcul de  $\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S$  il faut effectuer une rotation de Wick pour passer à la coordonnée  $z$  (on peut vérifier que la limite  $\tau \rightarrow +\infty$  revient à la limite  $\tau_E \rightarrow +\infty$  sur l'expression euclidienne). À partir de là, le calcul est plus fastidieux que difficile : comme la limite  $\tau_E \rightarrow +\infty$  correspond à  $z \rightarrow 0$ , l'intégrale sur  $\sigma$  devient une intégrale de contour autour de  $z = 0$ , que l'on peut calculer explicitement, et on trouve

$$\frac{\langle 0_{out}|a_1|0_{in}\rangle_S}{\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S} = \frac{1}{\pi} \int dz \frac{Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z)))}{z^2}.$$

Ceci nous donne une amplitude à  $\tau_I$  fixé. Pour obtenir l'amplitude physique qui nous intéresse, il faut intégrer sur les temps d'interaction possibles, l'amplitude s'écrivant alors

$$A = \int d\tau_I \langle 0_{out}|a_1|0_{in}\rangle_S \Big|_{\tau_I} e^{i\tau_I p^+ \Delta p^-} \quad (4.3.2)$$

où le facteur  $p^+ \Delta p^-$  dans l'exponentielle n'est autre que la variation de hamiltonien entre les états initial et final, la présence de cette exponentielle étant un résultat classique de la théorie quantique des perturbations dépendantes du temps.

Le moins qu'on puisse dire est que cette expression est peu sympathique. Pour commencer, il faut donner un sens à l'expression  $Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z)))$ . On peut le faire à l'aide de la transformée de Fourier de  $Y$  :

$$Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z))) = \frac{1}{p^+} \int d\omega \tilde{Y}\left(\frac{\omega}{p^+}\right) e^{i\omega\tau_I} e^{\omega\tau_E(z)}.$$

Ainsi, pour calculer  $\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S$ , on sera amené à considérer l'intégrale

$$\int dz' dz'' \frac{e^{\omega'\tau_E(z')} e^{\omega''\tau_E(z'')}}{(z' - z'')^2}$$

qui contient une grande partie de la dépendance en  $\alpha$  (pas tout puisque  $\Delta p^-$  en dépend aussi), ce qui est intéressant puisqu'on s'intéresse à la limite  $\alpha \rightarrow 0$ . L'expression analogue dans le cas de l'amplitude à deux cordes (où l'équation pour  $\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S$  est la même en prenant  $\tau_E(z) = \ln z$ ) peut être calculée exactement après une rotation de Wick  $\omega \rightarrow i\omega_E$  (qui améliore la convergence des intégrales), et on retrouve le résultat déjà trouvé par d'autres moyens. Dans le cas à trois cordes, on ne sait pas faire le calcul exact ; on peut néanmoins espérer trouver des résultats concernant la limite  $\alpha \rightarrow 0$  qui nous intéresse.

### 4.3.3 Calcul covariant

Pour calculer de façon covariante une amplitude à trois cordes, le calcul est similaire au cas à deux cordes (cas libre), à ceci près qu'il y a trois opérateurs de vertex.

Dans le cas qui nous intéresse, l'amplitude à trois tachyons sera donc donnée, après des calculs identiques à ceux du cas libre, par

$$S_{0 \rightarrow 0} \propto \langle 0 | e^{i\alpha p^+(X^+ - X^-)} |_{\sigma_F=0} e^{i(1-\alpha)p^+(X^+ - X^-)} |_{\sigma_F=\pi} e^{-ip^+(X^+ - X^-)} |_{\sigma_F=\pi/2} | B \rangle.$$

Les positions des opérateurs de vertex peuvent être fixées arbitrairement grâce à la symétrie conforme  $SL(2, \mathbb{R})$ . Quelques calculs plus tard, on aboutit à

$$S_{0 \rightarrow 0} \propto \langle 0 | \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int d\sigma_F Y^i \left( X^+(\sigma_F) - ip^+ \left( \ln \left| \tan \frac{\sigma_F}{2} - 1 \right| - \alpha \ln \left| \tan \frac{\sigma_F}{2} \right| \right) \right) \partial_{\tau_F} X^i \right] | D1 \rangle.$$

En utilisant la transformation conforme

$$z = \tan \frac{\sigma_F + i\tau_F}{2}$$

et des calculs similaires à ceux de l'amplitude à deux cordes, on retrouve l'expression obtenue en jauge du cône de lumière ; l'intégrale sur le temps d'interaction (équation (4.3.2)) découle de l'intégrale (4.2.7) et des modes zéros dans (4.2.8), avec  $x^+ = p^+\tau_I$ .

### 4.3.4 Remarques finales

Nos résultats restent pour l'instant très partiels. Nous espérons néanmoins les compléter dans un avenir raisonnablement proche. On peut d'ores et déjà avoir une idée de ce à quoi s'attendre. Dans le cas, que nous avons traité ici, de cordes dont les deux extrémités sont sur une même D-brane, on n'a pas de raison, a priori, de s'attendre à une divergence infrarouge. Dans le cas à deux D-branes, en revanche, les choses sont différentes, et on s'attend à des divergences, au moins dans la limite où leur distance finale (à des temps asymptotiquement grands) tend vers l'infini, comme expliqué au début de ce chapitre. Il faudra donc faire ce calcul pour en savoir plus.

# Conclusion

## Résultats obtenus

Cette thèse avait pour objectif de mieux comprendre la théorie des cordes en espaces-temps courbes ou dépendant du temps. Pour cela, nous en avons étudié divers aspects et obtenu des résultats que nous allons rappeler ici.

Tout d'abord, nous avons construit, par une approche géométrique, les orientifolds sur  $S^3$  et  $\mathbb{RP}^3$ . Nous avons montré que, dans chaque cas, on a deux façons différentes d'effectuer la projection orientifold sur les cordes fermées : dans le cas de la 3-sphère, cela correspond à des géométries différentes pour les orientifolds, tandis que pour  $\mathbb{RP}^3$  les orientifolds sont au même endroit dans les deux cas. Nous avons également calculé les interactions de ces orientifolds avec les D-branes, et en avons déduit les groupes de jauge possibles.

L'étude des univers branaires nous a ensuite amené à nous intéresser aux D-branes dans des espaces anti-de Sitter en présence de champs de fond Ramond-Ramond. Dans le cas où l'espace est  $AdS_3 \times S^3$ , les D-branes sont des D3-branes, laissées invariantes par la S-dualité qui transforme les fonds R-R en fonds Neveu-Schwarz, ce qui nous a permis de les aborder en utilisant les résultats connus dans ce dernier cas. Nous avons vérifié explicitement que ce que l'on sait calculer semi-classiquement est compatible avec la S-dualité.

Enfin, nous avons étudié un des fonds dépendants du temps les plus simples, à savoir D-brane portant une onde plane et plongée dans un espace-temps plat. Nous n'avons obtenu que des résultats très partiels ; néanmoins, nous avons introduit les outils qui devraient permettre, dans un temps raisonnablement court, d'aboutir à des résultats intéressants concernant notamment la rétroaction sur un tel fond.

## Perspectives

Comme indiqué, les résultats du chapitre 4 restent partiels, et il faudrait les compléter, notamment en considérant le cas d'une corde entre deux D-branes différentes. On pourra également considérer l'émission de cordes fermées par une telle D-brane, et ainsi étudier l'émission d'ondes gravitationnelles par un défaut topologique, ce qui pourrait avoir des incidences importantes sur l'histoire de l'Univers primitif.

Au-delà, il est clair que beaucoup reste à faire en ce qui concerne les fonds dépendant du temps, notamment cosmologiques. Les propriétés de stabilité de tels fonds et la façon de les aborder lorsqu'on ne peut pas définir de matrice  $S$  restent largement mystérieuses à l'heure actuelle. Il y a également la question de savoir si la théorie des cordes peut résoudre les singularités telles que celle qui a vraisemblablement eu lieu lors du Big Bang, et si la façon dont cela se résout a des conséquences observationnelles, visibles par exemple dans le fond micro-onde cosmologique observé par des expériences telles que WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe).

On s'attend à ce que l'étude des univers branaires, évoqués dans le chapitre 3, ait un impact significatif sur ces questions. Notamment, il pourrait être intéressant de voir si on peut réaliser l'inflation primordiale par un univers branaire « réaliste ».

En résumé, la recherche en théorie des cordes a encore de longues années devant elle.

# Annexe A

## Orientifolds of the 3-sphere

J. HIGH ENERGY PHYS. 12 (2001) 003



# Annexe B

## D-branes and orientifolds of $SO(3)$

J. HIGH ENERGY PHYS. 03 (2002) 026



## Annexe C

# Anti-de Sitter branes with Neveu-Schwarz and Ramond-Ramond backgrounds

J. HIGH ENERGY PHYS. 03 (2003) 007



# Bibliographie

## Ouvrages généraux sur la théorie des cordes

- [1] M.B. Green, J.H. Schwarz et E. Witten, *Superstring theory* (deux tomes), Cambridge University Press, 1987.
- [2] J. Polchinski, *String Theory* (deux tomes), Cambridge University Press, 1998.
- [3] P. Di Vecchia et A. Liccardo, *D-branes in string theory, I*, hep-th/9912161
- [4] C. Bachas, *Lectures on D-branes*, hep-th/9806199.

## Thèses

- [5] S. Ribault, *Cordes et D-branes dans les espaces-temps courbes*, thèse de doctorat de l'École Polytechnique, 2003 [hep-th/0309272].

## Cordes et D-branes sur des groupes (aspects algébriques)

- [6] E. Witten, *Non-abelian bosonization in two dimensions*, *Commun. Math. Phys.* **92** (1984) 455.
- [7] D. Gepner et E. Witten, *String theory on group manifolds*, *Nucl. Phys.* **B 278** (1986) 493.
- [8] N. Ishibashi, *The boundary and crosscap states in conformal field theories*, *Mod. Phys. Lett.* **A 4** (1989) 251
- [9] J.L. Cardy, *Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989) 581.
- [10] G. Pradisi, A. Sagnotti et Y.S. Stanev, *Planar duality in  $SU(2)$  WZW models*, *Phys. Lett.* **B 354** (1995) 279 [hep-th/9503207]; *The open descendants of nondiagonal  $SU(2)$  WZW models*, *Phys. Lett.* **B 356** (1995) 230 [hep-th/9506014]; *Completeness conditions for boundary operators in 2D conformal field theory*, *Phys. Lett.* **B 381** (1996) 97 [hep-th/9603097].
- [11] A. Sagnotti et Y. S. Stanev, *Open Descendants in Conformal Field Theory*, *Fortsch. Phys.* **44** (1996) 585-596 [hep-th/9605042].

## D-branes sur des groupes (aspects géométriques)

- [12] A.Y. Alekseev et V. Schomerus, *D-branes in the WZW model*, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 061901 [[hep-th/9812193](#)].
- [13] G. Felder, J. Fröhlich, J. Fuchs et C. Schweigert, *The geometry of WZW branes*, *J. Geom. Phys.* **34** (2000) 162 [[hep-th/9909030](#)].
- [14] C. Bachas, M.R. Douglas et C. Schweigert, *Flux stabilization of D-branes*, *J. High Energy Phys.* **05** (2000) 048 [[hep-th/0003037](#)].
- [15] P. Bordalo, S. Ribault et C. Schweigert, *Flux stabilization in compact groups*, *J. High Energy Phys.* **10** (2001) 036 [[hep-th/0108201](#)].

## Orientifolds (aspects géométriques)

- [16] E. Gimon et J. Polchinski, *Consistency conditions for orientifolds and D-manifolds*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1667 [[hep-th/9601038](#)].
- [17] I. Brunner, *On orientifolds of WZW models and their relation to geometry*, *J. High Energy Phys.* **01** (2002) 007 [[hep-th/0110219](#)].
- [18] L.R. Huiszoon, K. Schalm et A.N. Schellekens, *Geometry of WZW Orientifolds*, *Nucl. Phys. B* **264** (2002) 219 [[hep-th/0110267](#)].
- [19] C. Bachas, N. Couchoud et P. Windey, *Orientifolds of the 3-sphere*, *J. High Energy Phys.* **12** (2001) 003 [[hep-th/0111002](#)].
- [20] N. Couchoud, *D-branes et orientifolds of  $SO(3)$* , *J. High Energy Phys.* **03** (2002) 026 [[hep-th/0201089](#)].

## La NS5-brane

- [21] C. Callan, J. Harvey et A. Strominger, *Supersymmetric string solitons*, [hep-th/9112030](#).

## Univers branaires

- [22] E. Kiritsis, *D-branes in Standard Model building, gravity and cosmology*, *Fortsch. Phys.* **52** (2004) 200-263 [[hep-th/0310001](#)].
- [23] L. Randall et R. Sundrum, *An alternative to compactification*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690 [[hep-th/9906064](#)].
- [24] N. Kaloper, *Bent domain walls as braneworlds*, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 123506 [[hep-th/9905210](#)].
- [25] A. Karch et L. Randall, *Locally localized gravity*, *J. High Energy Phys.* **05** (2001) 008 [[hep-th/0011156](#)].
- [26] H. van Dam et M. Veltman, *Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields*, *Nucl. Phys. B* **22** (1970) 397 ; V. Zakharov, *Sov. Phys. JETP Lett.* **12** (1970) 312.

- [27] A. Karch, E. Katz et L. Randall, *Absence of a VVDZ discontinuity in  $AdS_{AdS}$* , *J. High Energy Phys.* **12** (2001) 016 [[hep-th/0106261](#)].
- [28] S. Arapoglu, N.S. Deger et A. Kaya, *A note on supergravity solutions for partially localized intersecting branes*, *Phys. Lett.* **B 578** (2004) 203 [[hep-th/0306040](#)].
- [29] A. Karch et L. Randall, *Localized gravity in string theory*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 061601 [[hep-th/0105108](#)].

## Cordes sur des espaces anti-de Sitter

- [30] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri et Y. Oz, *Large  $N$  field theories, string theory and gravity*, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [[hep-th/9905111](#)] et les références qu'il contient.
- [31] A. Karch et L. Randall, *Open and closed string interpretation of SUSY CFTs on branes with boundaries*, *J. High Energy Phys.* **06** (2001) 063 [[hep-th/0105132](#)].
- [32] O. DeWolfe, D.Z. Freedman et H. Ooguri, *Holography and defect conformal field theories*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 025009 [[hep-th/0111135](#)].
- [33] J. Balog, L. O'Raiheartaigh, P. Forgacs et A. Wipf, *Consistency of string propagation on curved space-times : an  $SU(1,1)$  based counterexample*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 225.
- [34] M. Petropoulos, *Comments on  $SU(1,1)$  string theory*, *Phys. Lett.* **B 236** (1990) 151.
- [35] J. Maldacena, H. Ooguri et J. Son, *Strings in  $AdS_3$  and the  $SL(2, \mathbb{R})$  WZW Model*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929 [[hep-th/0001053](#)], *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961 [[hep-th/0005183](#)] et *Phys. Rev.* **D 65** (2002) 106006 [[hep-th/0111180](#)].
- [36] C. Bachas et M. Petropoulos, *Anti-de Sitter D-branes*, *J. High Energy Phys.* **02** (2001) 025 [[hep-th/0112234](#)].
- [37] M. Petropoulos et S. Ribault, *Some remarks on anti-de Sitter D-branes*, *J. High Energy Phys.* **07** (2001) 036 [[hep-th/0105252](#)].
- [38] N. Couchoud, *Anti-de Sitter branes with Neveu-Schwarz and Ramond-Ramond backgrounds*, *J. High Energy Phys.* **03** (2003) 007 [[hep-th/0301195](#)].

## Orbifolds dépendant du temps

- [39] L. Cornalba et M. Costa, *A new cosmological scenario in string theory*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 066001 [[hep-th/0203031](#)]; H. Liu, G. Moore et N. Seiberg, *Strings in a time-dependent orbifold*, *J. High Energy Phys.* **06** (2002) 045 [[hep-th/0204168](#)]; *Strings in time-dependent orbifolds*, *J. High Energy Phys.* **10** (2002) 031 [[hep-th/0206182](#)].
- [40] C. Bachas et C. Hull, *Null brane intersections*, *J. High Energy Phys.* **12** (2002) 035 [[hep-th/0210269](#)].

## D-brane ondulante

- [41] C. Bachas, *Relativistic string in a pulse*, *Ann. Phys.* **305** (2003) 286 [hep-th/0212217].
- [42] Y. Hikida, H. Takayanagi et T. Takayanagi, *Boundary states for D-branes with travelling waves*, *J. High Energy Phys.* **04** (2003) 032 [hep-th/0303214].
- [43] C. Bachas et M. Gaberdiel, *World-sheet duality for D-branes with travelling waves*, *J. High Energy Phys.* **03** (2004) 015 [hep-th/0310017].

# Index

- action effective
  - corde fermée, 17
  - D-brane, voir Born-Infeld
  - orientifold, 31, 63
  - supercorde fermée, 41
- anneau, voir fonction de partition
- anti-de Sitter, 72
  - $AdS_3$ , 77
  - $AdS_5$ , 75
- Born-Infeld, action de, 28, 55
  - avec terme de Wess-Zumino, 40, 80
- caractère de Kac-Moody, 48
- champ de fond
  - $B_{\mu\nu}$ , 17, 46, 55, 77
  - électromagnétique, 24, 55, 78
  - Ramond-Ramond, 38, 76, 80
- Chan-Paton, indice de, 25
- compactification toroïdale, 21
- condition aux bords
  - Dirichlet, 25
  - Neumann, 14, 23
  - supercorde, 36
  - WZW, 49, 78
- couplage
  - à un champ de fond, voir champ de fond
  - à une D-brane, 25, 86
  - constante de, 20
  - entre D-brane et cordes fermées, 49, 52, 56
  - entre orientifold et cordes fermées, 61
- crosscap, 32
  - état de, 33
- cylindre, voir fonction de partition, anneau
- D-brane
  - avec orientifold, voir orientifold
  - dans  $AdS_3 \times S^3$ , 78–82
  - dans  $AdS_5 \times S^5$ , 75
  - espace plat, 25
  - ondulante, 86–98
  - stabilisation par le flux, 54
  - sur un groupe, 49–59
- développement en modes
  - corde fermée, 15, 22
  - corde ouverte, 23, 24
- Dirichlet, voir condition aux bords
- dualité ouvert-fermé, 26, 50
- état de bord, 27
  - D-brane ondulante, 90, 97
- état de Cardy, 49
- état de crosscap, 33
- état twisté, 49, 54
- fonction de partition
  - anneau, 26, 49
  - $S^3$ , 52
  - $\mathbb{RP}^3$ , 52
  - bouteille de Klein, 32
  - $S^3$ , 62
  - $\mathbb{RP}^3$ , 63
  - ruban de Möbius, 34, 65
  - $S^3$ , 66
  - $\mathbb{RP}^3$ , 67, 68
  - tore, 19, 48
- groupe de jauge
  - orthogonal ou symplectique, 34, 35, 66–68
  - unitaire, 25, 52, 68
- interactions
  - corde fermée, 18
  - corde ouverte, 26

- invariance conforme, 14
- invariance modulaire, 19, 48, 49
- Kac-Moody (algèbre de), 46
- Klein, bouteille de, voir fonction de partition
- localisation de la gravité, 73–74
- métrique
  - d'Einstein, 17
  - de corde ouverte, 30, 79, 81
- Möbius, ruban de, voir fonction de partition
- Nambu-Goto, action de, 13
- Neumann, voir condition aux bords
- NS5-brane, 41, 45
- opérateur
  - opérateur de vertex, 90, 93, 97
- opérateur de vertex, 18, 62
- orientifold, 30–35
  - $S^3$  et  $\mathbb{RP}^3$ , 59–69
  - avec cordes ouvertes, 33–35
    - sur  $S^3$  et  $\mathbb{RP}^3$ , 65–69
  - supercordes, 42
- Polyakov, action de, 14, 17
  - euclidienne, 18
- projection GSO, 37
- propagateur, 88
  - ruban, 89
  - ruban fendu, 94
- quantification
  - covariante, 15
  - dans la jauge du cône de lumière, 84
- $\mathbb{RP}^3$ , 49, 51, 52, 59, 61, 63, 67–69
- S-dualité, 41, 76
- Schwarz-Christoffel, transformation de, 94
- spectre
  - corde bosonique fermée, 15, 22
    - WZW, 47
  - corde bosonique ouverte, 23
    - WZW, 50, 57
  - supercorde fermée, 37
  - supercorde ouverte, 39
- Sugawara, tenseur de, 47
- supercorde
  - hétérotique, 39
  - type I, 42
  - type II, 35–43
- supersymétrie d'espace-temps, 38, 82
- T-dualité, 22, 24
  - supercorde, 39
- tenseur énergie-impulsion, 15, 16
  - WZW, 47
- tore, voir fonction de partition
- transformation modulaire, 48, 65
- Virasoro, algèbre de, 15
- Wess-Zumino, terme de
  - action effective de D-brane, voir Born-Infeld
  - dans WZW, voir Wess-Zumino-Witten
- Wess-Zumino-Witten, modèle de, 46–49, 77
- Weyl, symétrie de, 14