D-branes et orientifolds dans des espaces courbes ou dépendant du temps

Nicolas Couchoud
LPTHE et LPTENS
1er octobre 2004

Thèse de doctorat de l'Université Paris 6

sous la direction de
Constantin Bachas et Paul Windey

Introduction aux cordes

Monde décrit par deux théories incompatibles : Modèle Standard et Relativité Générale.

Théorie des cordes : Matière = excitation de cordes. Pas de divergence UV comme en QFT.
Contient spin 2 de masse nulle $\rightarrow$ candidat pour théorie quantique de la gravitation.

Cordes fermées (bosoniques ou supercordes de type II) décrites par modèle sigma sur leur surface d'univers (action de Polyakov) :

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{-\det\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) \\ & + \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \widehat{B}(X) - \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-\det\gamma}\,\Phi(X) R_{(2)} \\ & + \text{fermions (si supercorde)} \end{aligned}$$

Action invariante par difféomorphismes et transformations de Weyl. Après fixation de la métrique, reste invariance conforme.
Absence d'anomalie de Weyl nécessite $D = 26$ (corde bosonique) ou 10 (supercorde)

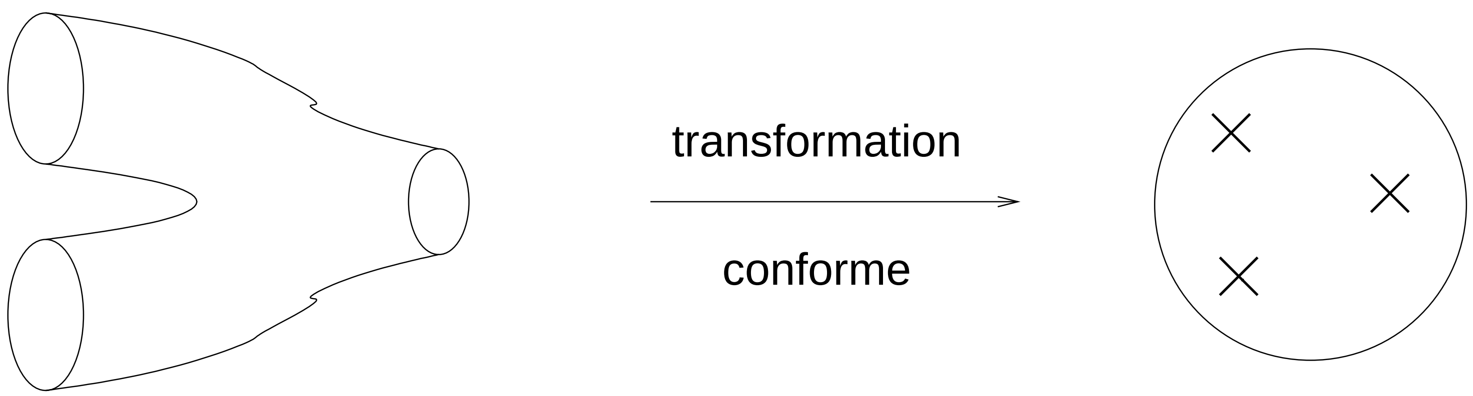
Spectre :

- Tachyon en théorie bosonique, éliminé si supercorde.
- États de masse nulle Neveu-Schwarz (NS-NS) : fluctuations de G, B, Φ.
- États de masse nulle Ramond-Ramond (R-R) (supercorde) : $C_{(1)}$ et $C_{(3)}$ en corde IIA, $C_{(0)}$, $C_{(2)}$ et $C_{(4)}$ self-duale en corde IIB.
- Fermions (supercorde) et états massifs.

Pour fonds R-R, pas de modèle sigma.

Interactions

Généralisation des diagrammes de Feynman $\rightarrow$ somme sur des surfaces :



$\rightarrow$ Amplitude $=$ produit d'opérateurs de vertex insérés en chaque point.

Constante de couplage : $g_s = e^{\Phi}$.

Fonction de partition

= amplitude du vide à une boucle = tore :

$$Z(\tau = \tau_1 + i\tau_2) = \mathrm{Tr}\Big[\exp(2\pi i \tau_1 P - 2\pi\tau_2 H)\Big]$$

États = produits d'une partie gauche et d'une partie droite, donc

$$Z(\tau) = \sum_{R,\bar{R}} n_{R,\bar{R}}\,\chi_R(q)\chi^*_{\bar{R}}(\bar{q})$$

($q = e^{2\pi i\tau}$).

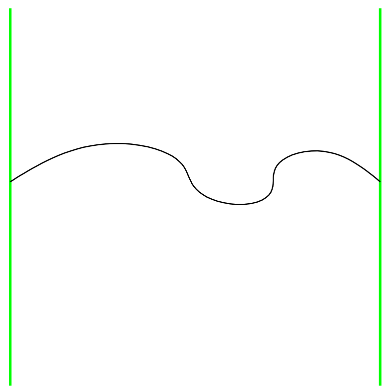
Invariance modulaire :

$$Z(\tau) = Z(\tau+1) = Z\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

Transformations modulaires : $\chi_R(\tilde{q} = e^{-2\pi i/\tau})$ est une combinaison linéaire des $\chi_R(q)$.

Cordes ouvertes et D-branes

Corde ouverte = segment.
Extrémités accrochées à des sous variétés = D-branes.



Dp-brane : variété à p dimensions spatiales. p pair en type IIA, impair en type IIB.

Modèle sigma : mêmes termes que pour la corde fermée, plus terme de bord :

$$S_{\text{bord}} = \int \hat{A}$$

Spectre (supercorde) :

– D-branes séparées : états tous massifs.
– D-branes dans un ensemble de n coïncidentes : bosons de jauge U(n).

Interactions : somme sur des surfaces avec bord, vertex de cordes ouvertes sur le bord.

Action effective

$$S_{\text{eff}} = T_p\Big(-\int d^{p+1}\xi\, e^{-\Phi}\sqrt{-\det(\widehat{G}+\widehat{B}+2\pi\alpha' F)} + \int \exp(\widehat{B}+2\pi\alpha' F)\wedge\sum_q C_{(q)}\Big).$$

Cette action permet de calculer les fluctuations de la forme de la D-brane et du champ de jauge ($F = dA$) qui y vit.

Elles sont couplées avec la métrique de corde ouverte

$$G_o^{-1} = [(G+B+2\pi\alpha' F)^{-1}]_S.$$

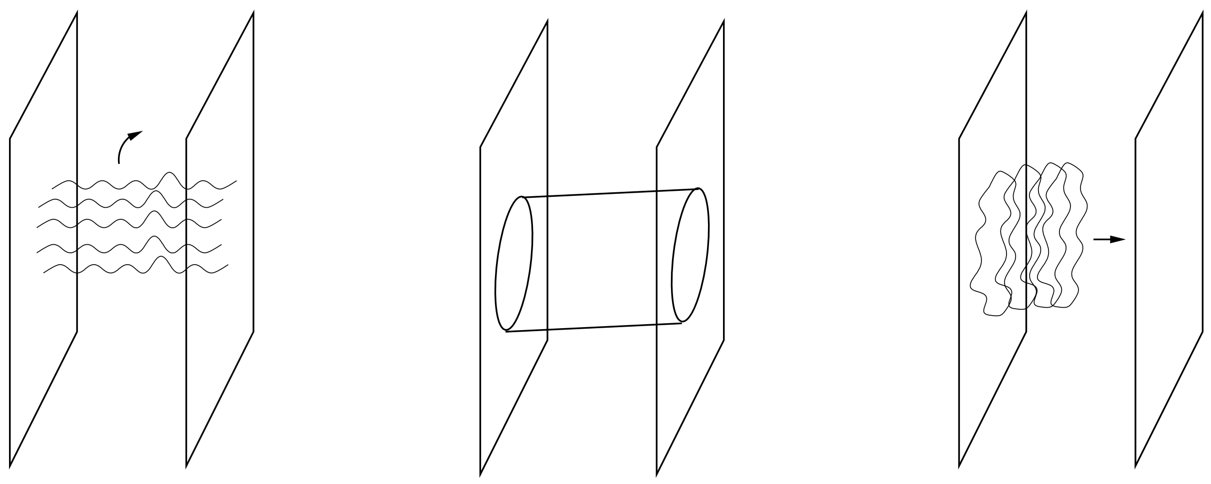
Fonction de partition

Anneau ou cylindre : boucle de corde ouverte

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12} &= \mathrm{Tr}\Big[\exp(-\pi t H_o)\Big] \\ &= \sum_R n_R \chi_R(\sqrt{q}) \qquad (q = e^{-2\pi t}) \end{aligned}$$

Échange temps-espace $\rightarrow$ propagation d'une corde fermée entre deux états de bord :

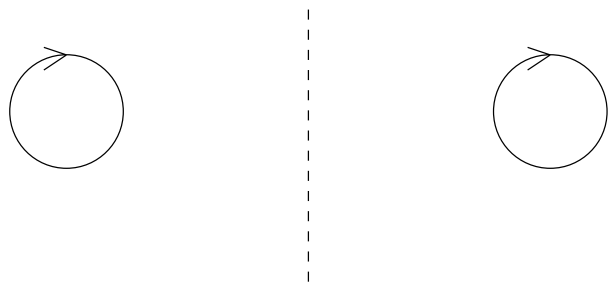
$$\mathcal{A}_{12} = \langle B_1| \exp\Big(-\frac{2\pi}{t} H_f\Big) |B_2\rangle$$



Cordes non orientées

Théorie de cordes non orientées obtenue en quotientant une théorie de cordes orientées par le produit d'une réflexion sur la surface d'univers et d'une isométrie involutive de l'espace-temps.

Points fixes de l'isométrie = orientifold



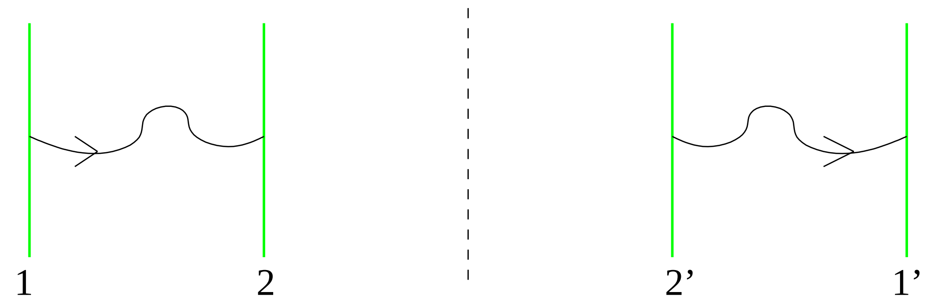
Fonction de partition

$$Z(\tau) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sum_{R,\bar{R}} n_{R,\bar{R}}\chi_R(q)\chi^*_{\bar{R}}(\bar{q})}_{\mathcal{T}} + \underbrace{\sum_R k_R \chi_R(q\bar{q})}_{\mathcal{K}}\Big]$$

$\mathcal{K}$ (bouteille de Klein) = boucle de corde fermée avec changement d'orientation.

La bouteille de Klein peut être vue comme un cylindre en remplaçant les bords par des crosscaps $\rightarrow$ propagation d'une corde fermée entre l'orientifold et lui-même.

Cordes ouvertes non orientées



n D-branes superposées incluses dans orientifold $\longrightarrow$ groupe de jauge SO(n) ou USp(n).

Fonction de partition

$$Z(t) = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{M}), \text{ où } \mathcal{M} = n \sum_R m_R \hat{\chi}_R(q).$$

$(\hat{\chi}_R(q) = \chi_R(-\sqrt{q}).)$

Pour des D-branes incluses dans l'orientifold, le signe de m_R donne le groupe de jauge (SO ou USp).

$\mathcal{M}$ (ruban de Möbius) = boucle de corde ouverte avec changement d'orientation.

Le ruban de Möbius peut être vu comme un cylindre en remplaçant l'un des bords par un crosscap $\rightarrow$ propagation d'une corde fermée entre l'orientifold et une D-brane.

D-branes et orientifolds dans S^3 et $\mathbb{RP}^3$

S^3 = groupe SU(2). En coordonnées hypersphériques (ψ, θ, ϕ), métrique :

$$ds^2 = k\alpha' \left[d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \right]$$

$\psi = 0$ et $\psi = \pi$: pôles nord et sud.
$\psi =$ constante $\in]0; \pi[$: 2-sphères.

L'invariance conforme requiert le champ de fond B donné par

$$B = \left[k\alpha' \left(\psi - \frac{\sin 2\psi}{2} \right) + \pi\alpha' n_0 \right] \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

avec k et n_0 entiers.

Symétrie conforme étendue : algèbre de Kac-Moody $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k \times \widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$.
Représentations de $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$: représentations de $\mathfrak{su}(2)$ de spin inférieur à $k/2$.

Spectre des cordes fermées : $\displaystyle\bigoplus_{j=0}^{k/2} (j, j)$.

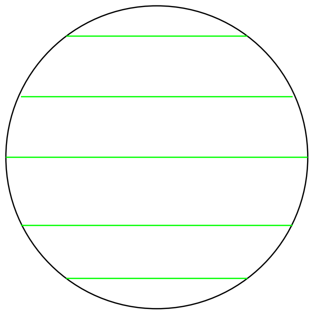
D-branes dans S^3

Théorie de Cardy :

– États de bord laissant invariant $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$ en correspondance avec les représentations de $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$.
– Spectre des cordes ouvertes entre 2 D-branes donné par le produit tensoriel des représentations associées :

$$[j_1] \otimes [j_2] = [|j_1 - j_2|] \oplus [|j_1 - j_2| + 1] \oplus \dots \\ \dots \oplus [\min(j_1 + j_2, k - j_1 - j_2)].$$

Géométrie : $\psi_j = \dfrac{2j+1}{k+2}$



Couplage aux cordes fermées :

$$\mathcal{A}_{rs} = \sum_{j=0}^{k/2} N_{rs}^{j} \chi_j(\sqrt{q}) = \sum_{j=0}^{k/2} D_r^j D_s^j \chi_j(\tilde{q}^2)$$

$\rightarrow$ on trouve les couplages D_s^j : couplage de la brane s aux cordes fermées de la représentation j de $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$.

Considérations semi-classiques

Champ magnétique sur la D-brane : $F = -\frac{n}{2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$.

Énergie de la D-brane :

$$E_{BI} \propto \int d\theta \, d\phi \, e^{-\Phi} \sqrt{\det(\hat{g} + \hat{B} + 2\pi\alpha' F)}$$

- Stabilité de la D-brane à une position dépendante de n $\rightarrow$ quantification de la position liée à celle du flux magnétique.
- Petites fluctuations de la position et de F $\rightarrow$ spectre des cordes ouvertes.

  Dans ces deux cas, résultats exacts si $k \rightarrow k+2$, sauf borne sur le spin des représentations présentes.
- Couplage aux modes du dilaton :

$$\Phi = \sum_j \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{L} \Phi_{jLM} F_{jLM}(\psi) Y_{LM}(\theta, \phi)$$

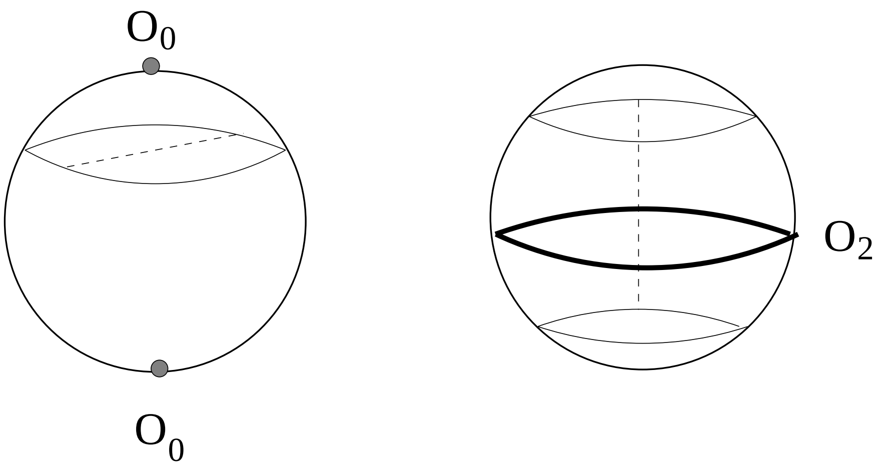
$$F_{j00}(\psi) \propto \frac{\sin(2j+1)\psi}{\sin\psi}$$

  $\rightarrow$ couplages D_s^j : dépendance en s exacte, dépendance en j seulement dans la limite semi-classique $k \rightarrow \infty$.

Orientifolds sur S^3

Théorie quotientée par le produit d'une réflexion sur la surface d'univers et d'une isométrie involutive de l'espace-temps changeant l'orientation.

Deux possibilités inéquivalentes :
- $g \to g^{-1} \quad (\psi, \theta, \phi) \to (\psi, \pi - \theta, \phi + \pi)$
  Points fixes : pôles ($\mathcal{O}0$)
- $g \to -g^{-1} \quad (\psi, \theta, \phi) \to (\pi - \psi, \theta, \phi)$
  Points fixes : équateur $\psi = \pi/2$ ($\mathcal{O}2$)



Couplages aux cordes fermées

$$\mathcal{K}_{(0)} = \sum_{l=0}^{k/2} (-)^{2l} \chi_l(q^2) = \sum_{j=0}^{k/2} (C^j_{(0)})^2 \chi_j \left(\sqrt{\tilde{q}}\right)$$

$$\mathcal{K}_{(2)} = \sum_{l=0}^{k/2} \chi_l(q^2) = \sum_{j=0}^{k/2} (C^j_{(2)})^2 \chi_j \left(\sqrt{\tilde{q}}\right)$$

$\to C^j_{(2)} \neq 0$ pour j entier, et $C^j_{(0)} \neq 0$ pour j entier si k est pair, demi-entier si k est impair.

Interprétation semi-classique

$$S_{\text{eff}} = T_{\mathcal{O}} \int e^{-\Phi} \sqrt{-\det \widehat{g}}$$

$\rightarrow$ couplage au dilaton :

$\mathcal{O}2$: $C^{j}_{(2)\ \text{eff}} \propto \begin{cases} (-)^{j} & \text{si } j \text{ est entier,} \\ 0 & \text{si } j \text{ est demi-entier.} \end{cases}$

$\mathcal{O}0$: $C^{j}_{(0)\ \text{eff}} \propto (T^{\text{nord}}_{\mathcal{O}0} + (-)^{2j} T^{\text{sud}}_{\mathcal{O}0})$.
Signe des $T_{\mathcal{O}0}$ lié au flux de B autour des pôles (facteur $\exp\left(i \int \frac{B}{2\pi\alpha'}\right)$), avec l'intégrale sur la moitié des 2-sphères autour des pôles à cause de l'identification $g \sim g^{-1} \rightarrow (-)^{n_0}$ au nord, et $(-)^{n_0+k}$ au sud, d'où le signe relatif des tensions et le résultat.

D-branes en présence d'orientifolds

L'amplitude de Möbius permet de vérifier la cohérence des résultats précédents.

Elle donne en outre les groupes de jauge :
- $\mathcal{O}0$: alternance de groupes orthogonaux et symplectiques ;
- $\mathcal{O}2$: unitaires, sauf les D-branes équatoriales.

$\mathbb{RP}^3$

$\mathbb{RP}^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$

$$\mathbb{Z}_2 : g \to -g \qquad (\psi, \theta, \phi) \to (\pi - \psi, \pi - \theta, \phi + \pi)$$

Cordes fermées : deux sortes, correspondant aux deux classes d'homotopie de $\mathbb{RP}^3$:
– Cordes non twistées (homotopes à un point) : $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=0 \\ j\in\mathbb{Z}}}^{k/2} (j,j)$.
– Cordes twistées : $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=0 \\ j-k/4\in\mathbb{Z}}}^{k/2} (j, k/2 - j)$.

D-branes obtenues à partir de celles de S^3 en identifiant les D-branes diamétralement opposées.

D-branes non équatoriales $\to$ propriétés similaires à celles sur S^3, couplent uniquement aux cordes non twistées.

D-branes équatoriales : sont des $\mathbb{RP}^2$. Deux sortes, avec des couplages aux cordes non twistées identiques, et des couplages non nuls et opposés aux cordes twistées $(k/4, k/4)$.

Groupe de jauge pour les D-branes équatoriales : $\mathrm{U}(n_+) \times \mathrm{U}(n_-)$.

Orientifolds sur $\mathbb{RP}^3$

L'isométrie involutive $g \to g^{-1}$ a comme points fixes un $\mathcal{O}0$ au pôle et un $\mathcal{O}2$ à l'équateur.

Bouteille de Klein :

$$\mathcal{K} = \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ entier}}}^{k/2} \chi_l(q^2) \pm \chi_{k/4}(q^2)$$

Signe $\pm \to$ deux théories de cordes non orientées.

Couplage aux cordes fermées :

$$C^j \propto C^j_{(0)} \pm C^j_{(2)}$$

Groupe de jauge des D-branes non équatoriales : comme avec $\mathcal{O}0$ sur S^3.
Pour le groupe de jauge des D-branes équatoriales, deux possibilités :

- Pas de mélange des deux sortes de D-branes par l'orientifold $\to$ SO$(n_+) \times$ SO(n_-) ou USp$(n_+) \times$ USp(n_-).
- L'orientifold apparie les branes de charge opposées (ce qui nécessite $n_+ = n_- \equiv n \to$ U(n).

Univers branaires et espaces anti-de Sitter

Univers branaire = configuration où notre univers est une D3-brane, et où la matière est constituée de cordes ouvertes qui y sont accrochées. Problème pour la gravité.

Travaux de Randall et Sundrum, puis Karch et Randall $\longrightarrow$ possibilité de localisation de la gravité.

Gravité pure

$$S \propto \int d^5x \sqrt{-\det g}\left[-\frac{1}{4}R - \Lambda_5\right] - \lambda \int d^4x \sqrt{-\det \hat{g}}$$

Constante cosmologique $\Lambda_5 = -3/L^2 < 0$.
Solution : AdS_5 de part et d'autre de la membrane,

$$\text{membrane} \longrightarrow \begin{cases} AdS_4 & \text{si } \lambda < \frac{3}{L}, \\ M_4 & \text{si } \lambda = \frac{3}{L}, \\ dS_4 & \text{si } \lambda > \frac{3}{L}. \end{cases}$$

Pour λ proche ou supérieur à $3/L$, il existe un mode du champ gravitationnel localisé sur la membrane, et reproduisant la gravité 4D à basse énergie.

Réalisation cordiste

N D3-branes plates superposées en théorie IIB. Solution de supergravité proche de l'horizon (au voisinage des D-branes) : $AdS_5 \times S^5$, avec

$$L^4 = 4\pi g_s \alpha'^2 N \quad \text{et} \quad dC_{(4)} \propto \omega(AdS_5) + \omega(S^5).$$

Obtention d'AdS_4 : on ajoute ci-dessus des D5-branes orthogonales aux D3, avec D5∩D3 de dimension 3 $\rightarrow$ $AdS_4 \times S^2$ si D5-brane test.

Conjecture que si suffisamment de D5-branes, alors gravité localisée sur elles au moins au voisinage de la D3-brane. Mais solution de supergravité inconnue $\rightarrow$ on reste dans l'approximaiton de la D5-brane test.

Fond R-R non nul $\rightarrow$ difficulté pour aller au delà des calculs semi-classiques. On s'intéresse au cas similaire $AdS_2 \times S^2$ dans $AdS_3 \times S^3$, où les configurations avec fonds R-R sont reliées à des configurations avec fonds NS-NS par S-dualité.

S-dualité de la théorie IIB

Action effective :

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^D x\sqrt{-\det G}\left[e^{-2\Phi}\left(R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{12}H^2\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}(dC_{(0)})^2 - \frac{1}{12}(dC_{(2)})^2 - \frac{1}{480}(dC_{(4)})^2 + \ldots\right]$$

Symétrie SL$(2,\mathbb{R})$:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\ , \ \text{avec } \tau = C_{(0)} + ie^{-\Phi}$$
$$\begin{pmatrix} C'_{(2)} \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{(2)} \\ B \end{pmatrix}$$

où $ad - bc = 1$; $C_{(4)}$ et $e^{-\Phi/2}G$ restent inchangés.

En théorie des cordes, reste symétrie SL$(2,\mathbb{Z})$.

Échange de B et $C_{(2)}$ $\rightarrow$ échange cordes fondamentales et D1-branes.

$AdS_3 \times S^3$, fond NS-NS

AdS_3 = recouvrement universel de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$; $S^3 = \mathrm{SU}(2)$.

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= L^2\Big[d\psi^2 + \cosh^2\psi\,(d\omega^2 - \cosh^2\omega\,d\tau^2) \\
&\qquad + d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\Big] \\
B &= L^2\Big[\Big(\psi + \frac{\sinh 2\psi}{2}\Big)\cosh\omega\,d\omega\wedge d\tau \\
&\qquad + \Big(\chi - \frac{\sin 2\chi}{2}\Big)\sin\theta\,d\theta\wedge d\phi\Big] \\
\Phi &= \text{constante.}
\end{aligned}
$$

D-branes : $\psi = \psi_0$ et $\chi = \chi_0$.

$$
F = -\frac{L^2}{2\pi\alpha'}(\psi_0\cosh\omega\,d\omega\wedge d\tau + \chi_0\sin\theta\,d\theta\wedge d\phi).
$$

Objet chargé sous $C_{(2)}$ et B : (p,q)-corde.

$$
p = \frac{L^2}{\pi\alpha'}\chi_0 \qquad q = -\frac{L^2}{\pi\alpha'}e^{-\Phi}\sin\chi_0\sinh\psi_0.
$$

Action effective

- Petites fluctuations en accord avec la CFT.
- Géométrie effective : $AdS_2 \times S^2$ avec des rayons égaux à L. Diffère de la géométrie induite où $R_{S^2} < L < R_{AdS_2}$.

$AdS_3 \times S^3$, fond R-R : obtenu par S-dualité.

$$\Phi = -\Phi_{\mathrm{NS}} \quad C_{(2)} = B_{\mathrm{NS}} \quad ds^2 = e^{\Phi} ds^2_{\mathrm{NS}}$$

$$F = \frac{e^{\Phi} L^2_{\mathrm{NS}}}{2\pi\alpha'} (\cos\chi_0 \cosh\psi_0 \cosh\omega\, d\omega \wedge d\tau$$
$$+ \sin\chi_0 \sinh\psi_0 \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi)$$
$$L^2 \equiv L^2_{\mathrm{RR}} = e^{\Phi} L^2_{\mathrm{NS}}.$$

D-brane = $(-q, p)$-corde.

Action effective

Spectre des petites fluctuations identiques à NS-NS, comme prévu.

S-dualité $\rightarrow$ infos supplémentaires : avec fond NS-NS, spin maximal inférieur à $p/2$, reste vrai avec fond R-R $\rightarrow$ borne pour le spin fonction de la charge sous B de la D-brane.

Géométrie effective : $R^2 = L^2(\sin^2\chi_0 + \sinh^2\psi_0)$. Problème pour un univers branaire où on voudrait R_{AdS} grand et R_S petit. Lié à supersymétrie, $\rightarrow$ univers branires possibles seulement sans susy ?

Nécessité de calculer sans négliger rétroaction de la D-brane sur la géométrie ambiante.

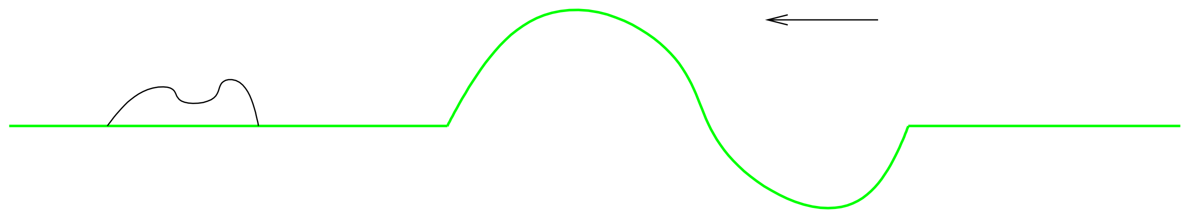
Cordes ouvertes dans une onde plane

Fonds dépendant du temps :

– Importance en cosmologie.

– Difficulté des calculs, et matrice S pas toujours bien définie.

Fond considéré ici : D1-brane portant une onde plane se propageant à la vitesse de la lumière :
$X^i = Y^i(X^0 + X^1)$, $2 \leq i \leq D$.



Intérêt : en jauge du cône de lumière, théorie des champs libre sur la surface d'univers.

Quantification dans la jauge du cône de lumière

Coordonnées du cône de lumière :

$$X^{\pm} = \frac{X^0 \pm X^1}{\sqrt{2}} \qquad ds^2 = -2dX^+ dX^- + (dX^i)^2.$$

Choix de jauge : $\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ et $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ $(2\alpha' = 1)$. X^- fixé en fonction de X^i $\rightarrow$ il reste $D-2$ champs libres.

$$X^i(\tau, \sigma) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n^i}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma)$$

$$a_{-n}^i = (a_n^i)^\dagger \qquad [a_m^i, a_n^j] = m\delta_{m,-n}\delta^{ij}$$

Vide tachyonique. États $a_{-1}^i|0\rangle$ de masse nulle = fluctuations de forme de la D1-brane. Autres états massifs.

D1-brane ondulante : $X^i = Y^i(X^+)$ $\rightarrow$ p^+ conservée, cône de lumière applicable.

Y^i à support compact $\rightarrow$ existence d'états asymptotiques.

Couplage de la corde à l'onde donné par l'action

$$S_I = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau\, Y^i(X^+) \partial_\sigma X_i.$$

$\rightarrow$ champs libres couplés avec des sources dépendant du temps.

Corde libre

Amplitudes corde $\to$ corde :

$$\begin{aligned}&\langle 0_{out}|a^{out}_{k_1}\dots a^{out}_{k_m}a^{in}_{-l_1}\dots a^{in}_{-l_n}|0_{in}\rangle_I\\ &= \langle 0_{out}|a^{out}_{k_1}\dots a^{out}_{k_m}a^{in}_{-l_1}\dots a^{in}_{-l_n}\,e^{iS_I}|0_{in}\rangle_0\end{aligned}$$

Se calcule à partir des quantités

$$\langle 0_{out}|X(\tau_1,\sigma_1)\dots X(\tau_n,\sigma_n)\exp(iS_I)|0_{in}\rangle_0.$$

$$\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_I = \exp\Big[-\frac{1}{2\pi^2}\oint d\tau'\oint d\tau''\,\partial_{\sigma'}\partial_{\sigma''}N(\tau',\sigma';\tau'',\sigma'')\times \\ \times Y(p^+\tau')Y(p^+\tau'')\Big]$$

$$\frac{\langle 0_{out}|X(\tau,\sigma)|0_{in}\rangle_I}{\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_I} = -\frac{i}{\pi}\oint d\tau'\,\partial_{\sigma'}N(\tau,\sigma;\tau',\sigma')Y(p^+\tau').$$

Propagateur de Feynman :

$$N(\tau,\sigma;\tau',\sigma') = \sum_{n>0}\frac{1}{n}e^{-(i+\varepsilon)n|\tau-\tau'|}\sin(n\sigma)\sin(n\sigma')$$

À partir de là, on peut calculer la matrice S :

$$\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_I = \sum_{\substack{n>0\\ \text{impair}}}\frac{8n}{(p^+)^2}\left|\tilde{Y}\Big(\frac{n}{p^+}\Big)\right|^2,$$

$$S = \langle 0_{out}|0_{in}\rangle_S :\exp\left[\frac{4i}{p^+}\sum_{n\ \text{impair}}\tilde{Y}\Big(\frac{n}{p^+}\Big)a_n\right]:.$$

Calcul covariant

État de bord sans onde plane $|\mathrm{D1}\rangle$ tel que $X^i\Big|_{\tau_F=0}|\mathrm{D1}\rangle$.

$$\to |B\rangle = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\tau_F=0} d\sigma_F\, Y^i(X^+)\partial_{\tau_F}X^i\right)|\mathrm{D1}\rangle$$

$$(X^i - Y^i(X^+))\Big|_{\tau_F=0}|B\rangle = 0.$$

Amplitudes calculées en insérant des opérateurs de vertex entre l'état de bord et le vide de cordes fermées :

$$S_{0\to 0} \propto \langle 0| :e^{-ip_\mu X^\mu(0,0)}: :e^{ip_\mu X^\mu(0,\pi)}: |B\rangle$$

Après quelques calculs, on aboutit au même résultat qu'en jauge du cône de lumière.

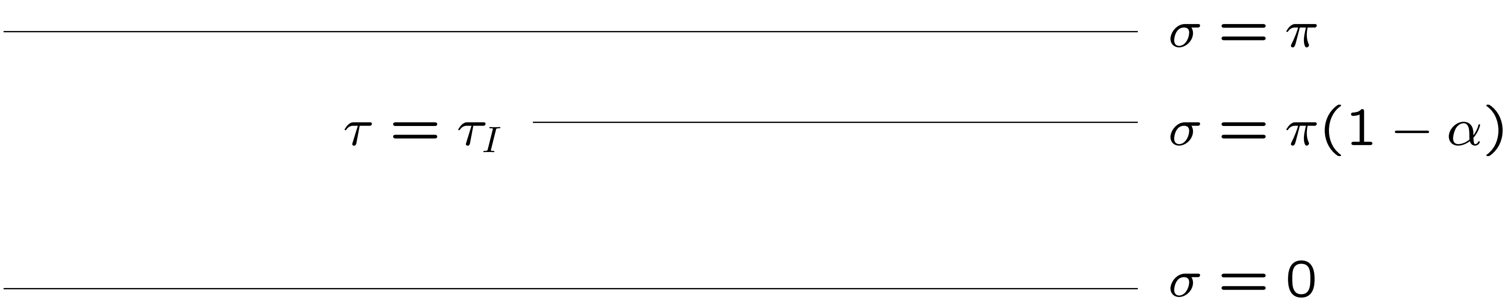
Interactions sur la D1-brane ondulante

On s'intéresse au processus

$$\text{tachyon} \longrightarrow \text{tachyon} + \text{masse nulle}$$

Divergence infrarouge ? Si oui, instabilité de la D-brane (rétroaction forte).

Surface d'univers :



Impulsion $\propto$ largeur de la corde $\longrightarrow$ impulsions sortantes $(1-\alpha)p^+$ et αp^+. On s'intéresse à la limite $\alpha \to 0$.

Propagateur euclidien : obtenu par une transformation conforme du demi-plan vers le ruban fendu ($\tau_I = 0$) :

$$\tau_E + i\sigma = \ln(z-1) - \alpha \ln z + \alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha).$$

$$N_E(z;z') = -\frac{1}{2}\ln|z-z'| + \frac{1}{2}\ln|\bar{z}-z'|.$$

Propagateur minkowskien :

$$N(\tau,\sigma;\tau',\sigma') = N_E(i\tau,\sigma;i\tau',\sigma').$$

$$\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_I = \exp\Bigg[\frac{1}{2\pi^2}\mathcal{P}\int dz'\,dz'' \\ \frac{Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z')))\,Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z'')))}{(z'-z'')^2}\Bigg]$$

$$\frac{\langle 0_{out}|a_1|0_{in}\rangle_I}{\langle 0_{out}|0_{in}\rangle_I} = \frac{1}{\pi}\int dz\,\frac{Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z)))}{z^2}$$

$$A = \int d\tau_I\,\langle 0_{out}|a_1|0_{in}\rangle_S\Big|_{\tau_I} e^{i\tau_I p^+ \triangle p^-}$$

Piste pour faire le calcul :

$$Y(p^+(\tau_I - i\tau_E(z))) = \frac{1}{p^+}\int d\omega\,\tilde{Y}\Big(\frac{\omega}{p^+}\Big)e^{i\omega\tau_I}e^{\omega\tau_E(z)}.$$

Remarques finales

Résultats très partiels.

À quoi s'attendre ?

– Extrémités sur une même D-brane $\longrightarrow$ a priori, pas de divergence infrarouge.

– Extrémités sur des D-branes différentes, distance finale grande $\longrightarrow$ on s'attend à des divergences.

Exemple : ciseaux de genre lumière régularisés :