



HAL
open science

Jeux abstraits et composition catégorique

Michel Hirschowitz

► **To cite this version:**

Michel Hirschowitz. Jeux abstraits et composition catégorique. Autre [cs.OH]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT: . tel-00008275

HAL Id: tel-00008275

<https://theses.hal.science/tel-00008275>

Submitted on 27 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jeux abstraits et composition catégorique

THÈSE

pour l'obtention du diplôme de
docteur de l'université Paris 7, spécialité informatique
présentée et soutenue publiquement par

Michel Hirschowitz

le 17 décembre 2004

DIRECTEUR DE THÈSE

Vincent Danos

JURY

M. Pierre-Louis Curien	<i>président</i>
M. Martin Hyland	<i>rapporteur</i>
M. Laurent Regnier	<i>rapporteur</i>
M. Vincent Danos	<i>directeur de thèse</i>
M. Glynn Winskel	

Abstract

Le but de cette thèse est de mettre en évidence une nouvelle notion de jeux qu'on appellera *jeux d'équipe*, en extrayant l'essence de la notion de jeux conçue par Hyland et Ong.

Un jeu d'équipe généralise les notions usuelles de positions, coups, parties et stratégies en leur donnant une interprétation géométrique. Parmi les positions on distinguera les positions perdantes des positions gagnantes alors que parmi les stratégies on distinguera les stratégies gagnantes et les stratégies déterministes.

La composition, qui permet à deux joueurs de combiner leurs stratégies respectives pour se partager un but en deux objectifs complémentaires, constitue l'attrait principal d'un jeu d'équipe.

Notre composition de stratégies a un élément neutre et vérifie la condition habituelle d'associativité. De plus les propriétés du type *gagnant* ou *déterministe* sont préservées à travers cette composition.

Pour rendre ce travail cohérent je me devais de donner un jeu d'équipe pour les jeux *HO* totaux, dans lequel les objets sont les parties dans une arène donnée.

Remerciements

Tout d'abord je voudrais remercier Vincent Danos d'avoir encadré mes travaux. Il m'a fait découvrir sa façon d'appréhender le monde de la recherche sous un angle qui lui est propre et que j'ai beaucoup apprécié. Je remercie également Glynn Winskel d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je remercie plus spécialement mes rapporteurs Martin Hyland et Laurent Regnier qui ont réussi le tour de force de travailler efficacement dans des délais indécemment courts ce pour quoi je leur dois excuses et reconnaissance.

Plus généralement, je remercie tous les monuments de science du laboratoire PPS et d'ailleurs que j'ai eu la chance de côtoyer et qui font de cette communauté un endroit, où les idées fleurissent aussi souvent que les mauvais repas de la cantine et de ce fait particulièrement propice à l'épanouissement et au développement de la science : Jean-Louis Krivine, Jean-Marie Rifflet, Michel Parigot, Albert Buroni, Paul-André Melliès, Patrick Baillot, Antonio Bucciarelli, Vincent Padovani, Emmanuel Chailloux, Pascal Manoury, Juliusz Chroboczek, Alexandre Miquel et Delia Kesner.

Je remercie tout particulièrement Olivier Laurent et Pierre-Louis Curien pour leurs relectures et les conseils avisés qui les suivaient invariablement, Guy Cousineau et Roberto DiCosmo pour leur gentillesse leur disponibilité et leur patience.

Je remercie Yves LeGrandgérard pour sa facilité à aider et à résoudre les problèmes avec une aussi grande sympathie que rapidité.

Je remercie aussi les quelques personnes de notre cher laboratoire voisin avec lesquels j'ai eu d'agréables interactions à l'occasion de nos activités d'enseignement ou autour d'un café, notamment Christophe Prieur, Antoine Meyer et Hugo Gimbert. Également Pierre Moro qui a eu des idées absolument redoutables pour réinventer les relations entre les thésards des deux laboratoires. Merci aussi à Charles Hymans pour tous ses conseils.

Bien entendu, les éternels et non moins indispensables occupants des bureaux 6C10 et 6C12, compagnons de thèse et néanmoins amis, me laisseront longtemps la nostalgie des trois années passées. Pour ne pas les citer je commencerai par Sylvain Baro, Vincent Balat, Emmanuel Polonovski et Jean-Vincent Loddo qui m'ont accueillis chacun à leur manière, François Maurel et Raphaël Montelatici qui m'ont beaucoup aidé tout au long de ma thèse, Benjamin Leperchey et Emmanuel Beffara avec qui les discussions étaient souvent intéressantes et toujours instructives pour moi, Anne-Gwenn Bosser, Zhang Min, Fabien Tarissan, Sam Hym et Deng Yuxin pour la fraîcheur qu'ils apportaient au quotidien, sans oublier Li Zheng et Feng Yangyue.

Enfin les plus nouveaux Joachim De Lataillade, Sylvain Lebresne, Stéphane Lengrand et Caroline Priou, dont les qualités se portent garantes de quelques années supplémentaires de prospérité pour ce fabuleux laboratoire.

Je remercie Noëlle Delgado, Dominique Raharijesy, Michelle Wasse, Yolène Martin et Monsieur Dedecker d'avoir amplement facilité mes nombreuses et périlleuses démarches administratives. Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide et la bonne humeur quotidienne d'Odile Ainardi.

Je remercie enfin tous mes proches, plus ou moins extérieurs au milieu scientifique pour leurs contributions humaines et/ou scientifiques.

Introduction

La sémantique des jeux est apparue dans les années 90 et a permis de modéliser de nombreux traits non fonctionnels de langages de programmation [AM94, Abr90, AM96, Lai97, AHM98, Har99, Lau04]. La sémantique des jeux est une sémantique satisfaisante à la fois d'un point de vue opérationnel, puisqu'elle décrit les transitions entre états de l'environnement d'un programme, et d'un point de vue dénotationnel puisqu'elle traduit la signification du programme et qu'elle préserve la compositionnalité, ce qui permet notamment de comprendre un programme en analysant ses sous-programmes mais aussi de prouver des équivalences. Cependant, certains aspects de la sémantique des jeux ne sont pas totalement satisfaisants. D'abord il y a à peu près autant de variantes que d'auteurs, voire que de travaux, on peut moduler la définition d'arène et celle de partie, et pour bien faire, chaque auteur doit vérifier que les modifications mineures qui l'intéressent ne perturbent pas la théorie. On a ainsi un certain nombre de théories voisines. Chacune d'elles est relativement encombrée de détails combinatoires rébarbatifs, et on ressent bien que la théorie devrait pouvoir être débarrassée de ces détails. C'est une telle théorie abstraite des jeux que nous proposons ici. C'est-à-dire que nous introduisons un cadre catégorique très dépouillé dans lequel un certain nombre de notions centrales en sémantique des jeux trouvent naturellement leur place : position, coup, partie, stratégie, stratégie gagnante ou déterministe, partie ou stratégie copycat, et enfin (surtout) composition des parties et des stratégies. On va maintenant décrire ce cadre catégorique.

Dans ce travail on introduit une nouvelle notion de jeu, que nous appelons jeu d'équipe. Il ne s'agit pas d'une nouvelle catégorie de jeux et stratégies qui prendrait place aux côtés des constructions classiques existantes, comme celle de Martin Hyland et Luke Ong [HO00] ou encore celle de Samson Abramsky, Radha Jagadeesan et Pasquale Malacaria [AJM00], auxquelles on fera dorénavant allusion à travers les acronymes déjà usités : *HO* et *AJM*. Au lieu de ça, *HO* et *AJM* constituent des exemples de jeu d'équipe et notre définition se situe donc à un autre niveau d'abstraction.

En première approximation, un jeu d'équipe est simplement une catégorie signée (c'est-à-dire que les objets sont soit positifs soit négatifs), munie de deux familles distinguées de morphismes négatifs (c'est-à-dire dont les extrémités sont de signe contraire), qu'on appelle les coups *forward* et les coups *backward*. Expliquons maintenant comment ces données permettent de jouer.

Au début d'une partie, on choisit au hasard un morphisme de départ, m , disons positif. Les deux joueurs \mathcal{P} et \mathcal{O} s'affrontent autour de la question de savoir si m appartient ou non à la sous-catégorie S engendrée par les deux familles de coups. Ils jouent chacun à leur

tour. Le joueur \mathcal{O} , qui joue le premier doit pré-composer m avec un coup backward b , ou alors post-composer m avec un coup forward f . Ce faisant, il remplace m par $m' = m \circ b$ ou par $m' = f \circ m$. On remarque que si m est dans S , m' y est aussi. Le joueur \mathcal{P} se trouve donc face à un morphisme m' négatif qu'il doit décomposer sous la forme $m' = c \circ m''$ avec c backward, ou alors sous la forme $m' = m'' \circ d$ avec d forward. On remarque que si m' n'est pas dans S , m'' n'y est pas non plus. La partie continue avec \mathcal{O} qui compose m'' et ainsi de suite. La partie s'arrête quand un joueur ne peut plus jouer, auquel cas ce joueur a perdu.

Remarquons qu'à chaque coup, chaque joueur doit choisir entre changer le but ou changer la source du morphisme. On dit qu'il joue à droite dans le premier cas et à gauche dans le second.

Comme on l'a dit plus haut, HO constitue un exemple de jeu d'équipe, c'est-à-dire essentiellement une catégorie avec deux sélections de morphismes. Les objets de cette catégorie sont, à peu de choses près, les parties (justifiées mais non nécessairement alternées) dans une arène quelconque; et les morphismes sont les parties justifiées alternées dans une arène flèche: la source et le but d'un tel morphisme sont les restrictions de la partie, respectivement à l'arène de gauche et à celle de droite. Quant aux coups, ce sont les préfixes impairs des parties copycats (ceux dont la partie gauche est plus grande que la partie droite sont forward alors que les autres sont backward) : quand l'opposant compose la position courante avec un tel coup, il ajoute un coup à la partie, du côté où il joue, et quand le joueur décompose avec un tel coup, il ajoute lui aussi un coup à la partie, du côté où il joue.

L'intérêt principal de la notion de jeu d'équipe est que la notion de composition des parties et, par voie de conséquence des stratégies, y trouve tout naturellement sa place. Pour voir cela, expliquons comment deux joueurs P_1 et P_2 coopèrent naturellement, au travers de deux positions composables $m_1 : a \rightarrow b$ et $m_2 : b \rightarrow c$ respectivement, pour convaincre \mathcal{O} que le morphisme composé $m = m_2 \circ m_1$, est dans S .

Si \mathcal{O} commence à droite, c'est P_2 qui doit réagir. S'il répond à droite, il rend la main à \mathcal{O} mais si P_2 répond à gauche, sa décomposition $m'_2 = m''_2 \circ f$ génère la composition $m'_1 = f \circ m_1$ que P_1 reçoit comme un coup de "son" opposant, et auquel il doit réagir. Ainsi la partie à trois peut se poursuivre, chaque joueur passant la main à l'un des deux autres joueurs selon sa convenance.

En première approximation, la composition des stratégies induite par cette composition des parties a les bonnes propriétés, par exemple : la composée de deux stratégies déterministes est déterministe et il en est de même pour les stratégies gagnantes.

Dans le cas de HO [Lau04], cette composition des parties, qu'on appelle interaction, est multiforme. Elle donne donc lieu à un ensemble simplicial qui n'est pas une catégorie. Il apparaît cependant que cet ensemble simplicial a de bonnes propriétés du type catégorique faible. C'est un phénomène assez général, qui nous a conduit à introduire des notions de catégories et de doubles-catégories faibles adaptées à nos développements.

Au vu des jeux considérés à ce jour, nous avons dégagé la notion de timing. Le timing est la partie "contrôle" du jeu, tandis que l'arène en est le cadre. Une partie HO a un timing, qui est l'arène qu'on dessine quand on dessine la partie, et on définit une notion de morphisme d'arènes qui permet de voir une partie P dans l'arène A comme un morphisme

du timing de P dans A . Nous présentons une version abstraite de ce point de vue : il s'agit donc d'un mécanisme qui permet de fabriquer un jeu à partir d'un foncteur d'une catégorie (dite des timings) vers une autre (dite des arènes). Nous montrons que ce mécanisme est bien adapté pour définir diverses variantes du jeu HO .

Travaux connexes

À notre connaissance, le seul travail antérieur donnant une définition de jeu abstrait est celui de Hyland et Schalk [SH02], qui vise plutôt à caractériser les catégories qui ressemblent suffisamment à des catégories de stratégies susceptibles de représenter la logique linéaire. Alors que la sémantique des jeux est une façon de fabriquer concrètement des catégories de stratégies, ces auteurs identifient abstraitement une classe de catégories ayant suffisamment de bonnes propriétés pour rendre les services qu'on attend des catégories de stratégies. Ce travail est donc transversal au nôtre, puisque nous donnons une définition "en extension" de nos catégories de stratégies, alors qu'ils donnent une définition "en compréhension" et d'ailleurs très différente.

En dehors de la sémantique des jeux les aspects double-catégoriques de la notion de calcul ont déjà été explorés notamment par [BM99, Mel02].

Plan de la thèse

Après être revenu brièvement sur les notions catégoriques de base, on rappelle dans le chapitre 1 la construction de Mac Lane qui fabrique une catégorie libre à partir d'un graphe, on rappelle aussi l'adjonction entre cette construction et celle qui consiste à oublier une catégorie vers son graphe sous-jacent.

On explique dans le chapitre 2 la construction de la catégorie simpliciale des parties dans une catégorie. On y voit l'empilement des coups et des interactions à deux ou à plusieurs. Ces constructions joueront un rôle crucial dans le reste de cette thèse.

Au chapitre 3 on examine les propriétés de la construction précédente et ses lacunes, on en donne une interprétation informelle en termes de jeux, et on étudie l'ensemble simplicial des parties. On montre que la composition ("horizontale") des parties, bien que multivaluée, est associative. On construit aussi les parties copycats, et on constate que ce ne sont pas toujours des unités.

Le chapitre 4 replace la notion de stratégie dans son cadre naturel, celui des catégories ou des graphes signés. On y présente une forme rudimentaire et déjà explorée de jeux et stratégies; cette construction n'a rien d'original; par exemple [SH02] et [AM99] ont déjà présenté les jeux avec des graphes signés.

La notion de demi-catégorie est exposée dans le chapitre 5 avec d'autres notions de structures catégoriques faibles. On y introduit en fait les outils catégoriques que l'on vient de mettre en lumière et qui vont se révéler nécessaires dans l'optique de mieux formaliser les constructions des chapitres qui suivent.

Le chapitre 6 explique la construction de la catégorie des stratégies associée à une double catégorie faible (plus précisément à ce que nous appelons une sesqui-catégorie stratégique). on y montre comment construire une demi-catégorie de stratégies $\mathcal{S}(\mathfrak{C})$ à

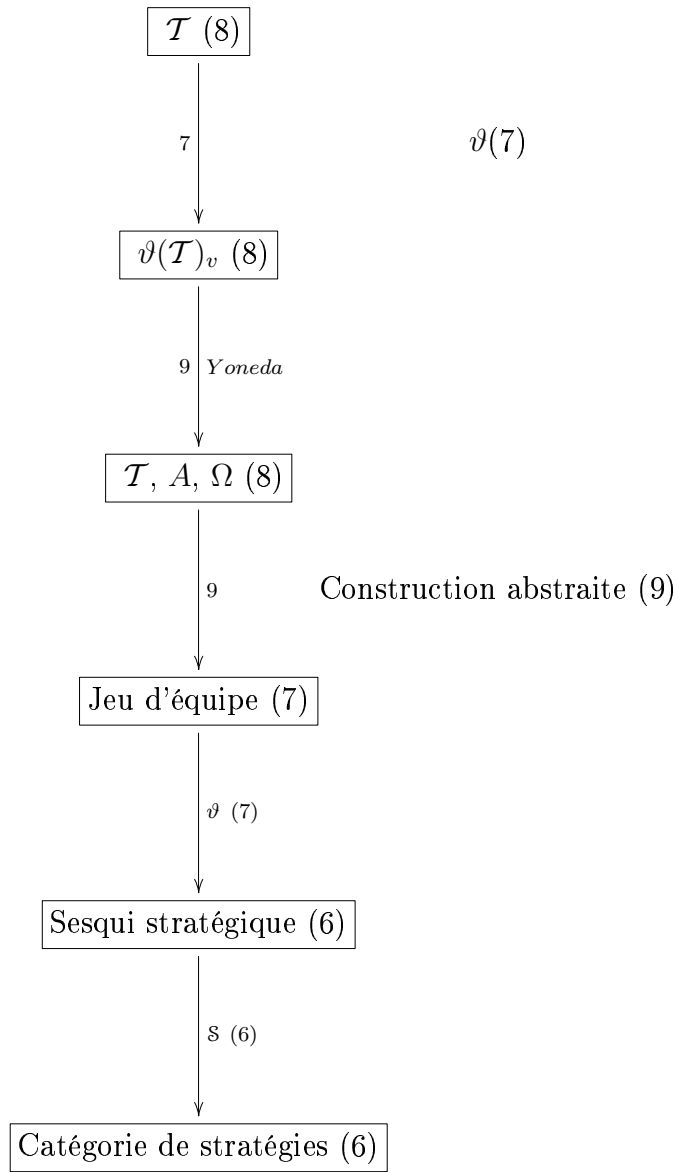
partir d'une sesqui-catégorie vérifiant certaines conditions. Cette construction se combine à celle du chapitre suivant pour fournir le mécanisme de génération de modèles de jeux qui est l'objet central de cette étude.

Au chapitre 7 on définit notre notion de jeu d'équipe, puis on raffine la construction du chapitre 1 à partir d'un tel jeu d'équipe \mathfrak{S} pour obtenir une sesqui-catégorie stratégique $\vartheta(\mathfrak{S})$.

Nos deux derniers chapitres sont consacrés aux exemples. Le chapitre 8 est consacré aux timings; tandis que le dernier chapitre (9) expose les exemples de type HO avec la construction abstraite qui permet de les décrire.

Conclusion

Pour donner une vision d'ensemble du travail, esquissons une construction composée qui combine nos principales contributions. On part d'une catégorie (de timings, mais nous ne donnons pas un sens précis à ce mot) \mathcal{T} , on obtient la sesqui-catégorie $\vartheta(\mathcal{T})$ en lui appliquant la construction du chapitre 7, on obtient un foncteur en appliquant la construction de Yoneda à la catégorie verticale $\vartheta(\mathcal{T})_v$, on obtient une nouvelle catégorie $\mathbf{y}(\vartheta(\mathcal{T})_v)$ en appliquant notre construction abstraite (du chapitre 9) à ce foncteur, on obtient une nouvelle sesqui-catégorie $\vartheta(\mathbf{y}(\vartheta(\mathcal{T})_v))$ en appliquant à $\mathbf{y}(\vartheta(\mathcal{T})_v)$ de nouveau la construction du chapitre 7, enfin on obtient une catégorie de stratégies $\mathcal{S}(\vartheta(\mathbf{y}(\vartheta(\mathcal{T})_v)))$ en appliquant à $\vartheta(\mathbf{y}(\vartheta(\mathcal{T})_v))$ la construction du chapitre 6.



version du 13 Décembre 2004

Table des matières

Introduction	5
I Introduction	17
1 Rappels catégoriques	19
1.1 Notations	19
1.2 Rappels de Catégories	20
1.3 La construction de Mac Lane	21
1.4 L'adjonction entre \mathcal{L} et \mathcal{U}	22
1.5 Foncteurs et catégories de foncteurs	22
1.6 Yoneda	24
1.7 Over-catégorie	24
2 Empilements libres : construction des graphes simpliciaux	27
2.1 Les coups \mathcal{J}_1^\bullet	27
2.1.1 Le graphe des \mathcal{J}_1^\bullet coups $G\mathcal{J}_1^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^0	27
2.2 Les biplexes \mathcal{J}_2^\bullet	28
2.2.1 Le graphe des \mathcal{J}_2^\bullet biplexes $G\mathcal{J}_2^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^1	28
2.3 Les triplexes \mathcal{J}_3^\bullet	31
2.3.1 Le graphe des \mathcal{J}_3^\bullet triplexes $G\mathcal{J}_3^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^2	31
2.4 Les n -plexes \mathcal{J}_n^\bullet	33
2.4.1 Le graphe des n -plexes $G\mathcal{J}_n^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^{n-1}	33
3 Des empilements aux entrelacs : analyse, critiques	39
3.1 Considérations ludiques	39
3.2 La composition des parties	42
3.3 Les parties identités	48
4 Stratégies	51
4.1 Stratégies dans une catégorie signée	51
4.2 Propriétés des stratégies	52

II	Construction principale	55
5	Matériel catégorique faible	57
5.1	Demi-catégories	57
5.2	Demi-catégories signées	58
5.3	Demi-catégories faibles	61
5.4	Sesqui-catégories	62
5.5	Sesqui-catégories signées	65
6	Demi-catégorie des stratégies	67
6.1	Stratégies dans une sesqui-catégorie \mathfrak{S}	67
6.2	Sesqui-catégories stratégiques	69
7	La sesqui-catégorie signée associée à un jeu d'équipe	73
7.1	La notion de jeu d'équipe	73
7.2	La catégorie 0-horizontale	74
7.3	La catégorie 0-verticale	74
7.4	La catégorie 1-verticale	74
7.5	La catégorie 2-verticale	75
7.6	Les interactions à quatre	77
7.7	Les projections	80
7.8	La demi-catégorie 1-horizontale	81
7.9	Propriétés de la sesqui-catégorie $\vartheta(\mathfrak{S})$	82
III	Exemples	85
8	Timings	87
8.1	Le jeu <i>hoT</i> des timings <i>HO</i>	87
8.1.1	Les objets	87
8.1.2	Les morphismes	88
8.1.3	La composition	88
8.1.4	La demi-catégorie horizontale	88
8.1.5	Les coups	88
8.1.6	La demi-catégorie verticale	88
8.2	Le jeu <i>rhoT</i> des timings rho	89
8.2.1	Les objets	89
8.2.2	La demi-catégorie	89
8.2.3	Les coups	89
8.2.4	La catégorie verticale	90
8.3	Le jeu <i>ajmT</i> des <i>AJM</i> -timings	90
8.3.1	Les objets	90
8.3.2	Les morphismes	90
8.3.3	Le copycat	90

8.3.4	La composition	91
8.3.5	Les coups	91
8.3.6	La catégorie verticale des timings AJM	92
8.4	Les sho -timings	92
8.4.1	Les objets	92
8.4.2	Les morphismes	92
8.4.3	La composition	93
8.4.4	Les coups	93
8.4.5	La catégorie verticale	93
9	Le jeu HO et ses variantes	95
9.1	Une théorie HO classique	95
9.2	La construction abstraite	97
9.2.1	Les données	97
9.2.2	Les objets	97
9.2.3	Les morphismes	98
9.2.4	La catégorie horizontale	98
9.2.5	Les coups	98
9.2.6	Vocabulaire	100
9.2.7	Jeux de Yoneda	100
9.3	Le jeu d'équipe pour HO	101
9.3.1	Le foncteur Ω pour HO	101
9.3.2	Retour sur le jeu classique	101
9.4	sHO	103
9.5	AJM	103
	Conclusion	105

Index des symboles

\mathfrak{J}^2 , 61
 $\vartheta(\mathfrak{S})$ sesqui-catégorie stratégique, 54
 \mathfrak{S} (jeu d'équipe), 53
 \mathfrak{J}^2 , **61**
 \mathcal{J}_n^\bullet (n -plexes), **20**
 F_{mor} , **43**
 F_{obj} , **43**
 \mathcal{J}_2^\bullet (biplexe), **15**
 $\text{but}_{\mathcal{J}_1^\bullet}$ (but des coups), **15**
 \mathfrak{J}^0 (catégorie 1-verticale), **15**
 \mathfrak{J}^2 (catégorie 3-verticale), **18**
 \mathfrak{J}^{n-1} (catégorie n -verticale), **20**
 \mathfrak{J}^1 (catégorie des biplexes), **15**
 \mathcal{J}_1^\bullet (coup), **15**
 $G\mathcal{J}_2^\bullet$ (graphe des biplexes), **15**
 $G\mathcal{J}_1^\bullet$ (graphe des coups), **15**
 \mathcal{J}_n^\bullet (graphe des n -plexes), **20**
 $G\mathcal{J}_n^\bullet$ (graphe des n -plexes), **20**
 $G\mathcal{J}_3^\bullet$ (graphe des triplexes), **18**
 $\text{src}_{\mathcal{J}_1^\bullet}$ (source des coups), **15**
 \mathcal{J}_3^\bullet (triplexes), **18**

Index

- n -plexe, **33**
 - but vertical, **34**
 - source verticale, **34**
- adjonction de Mac Lane, **22**, 30, 31, 33
- application, 20
- bipexe
 - nord, 29
 - sud, 29
- biplexe, **29**
 - \mathcal{O} -biplexe, 29
 - \mathcal{P} -biplexe, 29
 - $\text{src}_{\mathcal{J}_2}(\cdot)$ et $\text{but}_{\mathcal{J}_2}(\cdot)$, **29**
- but, **20**
- catégorie, **20**
 - comma, **25**
 - des catégories, **22**
 - duale, **20**
 - over, **26**
- catégorie noethérienne, **48**
- composée
 - verticale, **24**
- construction de Mac Lane, 21, 28, 30, 32, 34, 71
 - composable, 21
- coup, 70
- coup (\mathcal{J}_1^\bullet), 27
 - $\text{but}_{\mathcal{J}_1^\bullet}$, 27
 - $\text{src}_{\mathcal{J}_1^\bullet}$, 27
- coups, **27**
- demi-catégorie, **53**
 - associativité, 54
 - demi-foncteur, **56**
 - faible, **57**
 - fallacieuse, **55**
- demi-catégorie signée, **54**
- direction, **27**
 - backward, **27**
 - forward, **27**
- double catégorie, **58**
 - h -morphisme, **58**
 - v -morphisme, **58**
 - cellules, **58**
- embedding, 22
- ensemble simplicial, 27
- ensemble simplicial des partie, 36
- faithful, 22
- flèches, **20**
- foncteur
 - fidèle, **22**
 - plein, **22**
 - pleinement fidèle, **22**
- fonction de polarité, **54**
- full, 22
- full and faithful, 22
- graphe orienté, **20**
- graphe signé
 - stratégie, 48
- graphes simpliciaux, 27
- hom-foncteur contravariant, **23**
- identité, **20**
- interaction, 59
 - \mathfrak{p}_{int1} , **33**
 - \mathfrak{p}_{int1} , 73
 - \mathfrak{p}_{int2} , **33**, 73
 - \mathfrak{p}_{ext} , **33**, 73

- isomorphisme
 entre catégories, **22**
- \mathfrak{J}^0 , **28**
 \mathfrak{J}^1 , **30**
 \mathfrak{J}^2 , **32**
- jeu, 69
 états, 72
 biplexe, 70
 compose, 38
 coup, 3, 70
 décompose, 38
 HO, 72
 interaction, 72
 jeu d'équipe, **69**
 partie, 70
 port, 69
 position, 3, 69
 traduction, 72
 triplexe, 73
- morphismes, **20**
- objet (d'une catégorie), **20**
 \mathcal{O} , 29
- partie, **30**, 47, 48
 copycat cop, **30**
 préfixe, **47**
 strict, **47**
 suffixe, **47**
 suite croissante, 48
- plongement, **22**
plongement de Yoneda, **24**
- position, 47, 48
 gagnées, **37**
 gagnante, **37**
- \mathcal{P} , 29
- sesqui-catégorie, **58**
 catégorie 1-horizontale, 59
 catégorie 1-verticale, 59
 catégorie horizontale, 59
 catégorie verticale, 59
 fallacieuse, 61
- fenêtre flexible, 65
fenêtre flexible (win), **65**
flexible, 65
signée, 61
stratégique, **66**
- source, **20**
stratégie, **48**, 63
 copycat, **64**
 Pref_{id} , 66
 déterministe, **49**
 gagnante, **49**
 robuste, **49**
- timing, **83**
transformation naturelle, **24**
- triplexe (\mathfrak{J}_3^*), **31**
 but vertical, **32**
 source verticale, **32**
 arête charnière, **32**
 coup, 32
 P_{int1} , **32**
 P_{int2} , **32**
 P_{ext} , **32**

Partie I

Introduction

Chapitre 1

Rappels catégoriques

Résumé

Après être revenu brièvement sur les notions catégoriques de base, on rappelle ici quelques constructions classiques, notamment la celle de Mac Lane qui fabrique une catégorie libre à partir d'un graphe; ainsi que l'adjonction entre cette construction et celle qui consiste à oublier une catégorie vers son graphe sous-jacent.

1.1 Notations

Dans cette section on pose les conventions et notations qui guideront le lecteur à travers le manuscrit pour une compréhension accrue.

Notation :

- *Étant donné un graphe G , on note G_0 l'ensemble de ses sommets, et G_1 l'ensemble de ses arêtes.*
- *Étant donnée une catégorie \mathfrak{C} , on note \mathfrak{C}_0 l'ensemble de ses objets, \mathfrak{C}_1 l'ensemble de ses morphismes, \mathfrak{C}_2 l'ensemble de ses triangles commutatifs, et \mathfrak{C}_3 l'ensemble de ses tétraèdres d'associativité.*
- *On utilisera des notations analogues pour les structures catégoriques affaiblies qu'on introduira par la suite.*

- Dans la suite \mathbf{Graph} désigne la catégorie des graphes, \mathbf{Ens} la catégorie des ensembles et \mathbf{Cat} la catégorie des catégories.
- On adopte les notations de la théorie de graphes et de la théorie des catégories.
- On notera les catégories $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{J} \dots$ ou \mathfrak{J} .
- Les catégories faibles qu'on introduira plus loin s'appelleront souvent \mathfrak{H} .

1.2 Rappels de Catégories

Définition 1 – graphe orienté

Un graphe orienté est un quadruplet G constitué :

- d'une collection notée G_0 dont les éléments sont appelés objets de G ,
- d'une collection notée G_1 dont les éléments sont appelés morphismes ou flèches de G ,
- de deux applications src_G et but_G qui associent à chaque morphisme f des objets A et B appelés respectivement source et but de f , ce que l'on notera $f : A \rightarrow B$. On notera aussi $Mor_G(A, B)$, ou plus simplement $Mor(A, B)$ l'ensemble des morphismes de source A et but B .

Définition 2 – catégorie

Une catégorie est un graphe orienté \mathfrak{C} muni des deux données supplémentaires suivantes:

- pour A, B et C objets de \mathfrak{C} , une application de $Mor(B, C) \times Mor(A, B)$ dans $Mor(A, C)$; l'image de (g, f) est notée $g \circ f$.
- pour chaque objet A de \mathfrak{C} , un élément noté $id_A : A \rightarrow A$ et appelé identité de A et vérifiant pour tous objets A, B, C, D et morphismes $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$,
 - $id_B \circ f = f$ et $f \circ id_A = f$ (lois de l'identité)
 - $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associativité)

La flèche identité d'un objet A sera souvent notée simplement id au lieu de id_A si cela n'entraîne pas de confusion.

Exemple : \mathbf{Ens} , la catégorie des ensembles, dont les flèches sont les applications (fonctions totales) entre les ensembles. On notera \mathbf{Ens}_f la catégorie des ensembles finis. dithyrambique

Définition 3 – catégorie duale

On appellera *catégorie duale* d'une catégorie \mathfrak{C} la catégorie notée \mathfrak{C}^{op} définie par

- $Obj_{\mathfrak{C}^{op}} = Obj_{\mathfrak{C}}$,
- $Mor_{\mathfrak{C}^{op}} = Mor_{\mathfrak{C}}$,
- $src_{\mathfrak{C}^{op}} = but_{\mathfrak{C}}$ et $but_{\mathfrak{C}^{op}} = src_{\mathfrak{C}}$

La composition de deux morphismes f et g de \mathfrak{C}^{op} est donnée par $f \circ_{\mathfrak{C}^{op}} g = g \circ_{\mathfrak{C}} f$ et on garde les mêmes identités.

Définition 4 – foncteur

Un foncteur covariant F entre deux catégories \mathfrak{C} et \mathfrak{D} est un couple d'applications

$F_{obj} : \mathfrak{C}_0 \rightarrow \mathfrak{D}_0$ et $F_{mor} : \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{D}_1$ telles que,
 $\forall A, B, C \in \mathfrak{C}, \quad \forall f : A \rightarrow B, \quad \forall g : B \rightarrow C$

- $F_{mor}(f) : F_{obj}(A) \rightarrow F_{obj}(B)$
- $F_{mor}(g \circ f) = F_{mor}(g) \circ F_{mor}(f)$
- $F_{mor}(id_A) = id_{F_{obj}(A)}$

Un foncteur contravariant de \mathfrak{C} dans \mathfrak{D} est un foncteur (covariant) de \mathfrak{C}^{op} dans \mathfrak{D} .

Un foncteur de \mathfrak{C} dans \mathfrak{D} est un foncteur (covariant ou contravariant) de \mathfrak{C} dans \mathfrak{D} .

1.3 La construction de Mac Lane

Dans cette section, on rappelle brièvement la construction de Mac Lane d'une catégorie libre $\mathcal{L}(G)$ engendrée par un graphe G [Lan71](p. 49).

Soit G un graphe.

Deux arêtes c, c' sont *composables* dès qu'on a l'égalité suivante $src(c') = but(c)$. Et on fabrique $\mathcal{L}(G)$:

► –les objets

de $\mathcal{L}(G)$ sont les sommets de G ,

► –un morphisme

de p vers q est une suite finie (peut-être vide) de coups composables c_1, \dots, c_n , avec, si n est non nul, $p = src(c_1)$ et $q = but(c_n)$, et, si n est nul, $p = q$.

Lemme 5 – Catégorie libre engendrée par un graphe

Cette structure forme une catégorie [Lan71], dont la composition est la concaténation de suites, et les identités sont les suites vides.

Notation :

Si G est un graphe, on notera $\mathcal{L}(G)$ cette catégorie associée à G .

Et on dit que les arêtes sont les *générateurs* de $\mathcal{L}(G)$.

Si g_1, \dots, g_n est une suite composable d'arêtes de G , on notera $g_1; \dots; g_n$ le morphisme correspondant dans $\mathcal{L}(G)$.

1.4 L'adjonction entre \mathcal{L} et \mathcal{U}

$\mathcal{L} : \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{Cat}$ est la construction définie ci-dessus, qui fabrique la catégorie libre associée à un graphe G , et $\mathcal{U} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$ la construction qui oublie la structure d'une catégorie pour en extraire son graphe sous-jacent.

Pour tout graphe G , et pour toute catégorie \mathcal{C} , on a une bijection naturelle $Hom_{\mathbf{Cat}}[\mathcal{L}(G), \mathcal{C}] \simeq Hom_{\mathbf{Graph}}[G, \mathcal{U}(\mathcal{C})]$.

Étant donné un morphisme $F_g : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{C})$, le foncteur associé $F : \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{C}$ est défini par: $F(g_1; \dots; g_p) := F_g(g_p) \circ \dots \circ F_g(g_1)$.

Grâce à cette bijection qu'on appelle l'adjonction de Mac Lane et étant donnés deux graphes G, G' , pour définir un foncteur de $\mathcal{L}(G)$ dans $\mathcal{L}(G')$, il nous suffit d'exhiber sa restriction à G .

1.5 Foncteurs et catégories de foncteurs

On a défini plus haut ce qu'est un foncteur, et on omettra souvent de préciser les indices *obj* et *mor* des foncteurs.

Définition 6 – foncteur pleinement fidèle

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Pour tous objets A et B de \mathcal{C} , appelons $F_{mor}(A, B)$ la restriction de F_{mor} à $\mathcal{C}(A, B)$, vue comme une application de $\mathcal{C}(A, B)$ dans $\mathcal{D}(F(A), F(B))$.

- Le foncteur F est dit fidèle [\triangleright faithful] si $F_{mor}(A, B)$ est injective pour tout couple (A, B) d'objets de \mathcal{C} .
- Le foncteur F est dit plein [\triangleright full] si $F_{mor}(A, B)$ est surjective pour tout couple (A, B) d'objets de \mathcal{C} .
- Le foncteur F est dit pleinement fidèle [\triangleright full and faithful] si $F_{mor}(A, B)$ est bijective pour tout couple (A, B) d'objets de \mathcal{C} . On parlera aussi de plongement [\triangleright embedding].

On notera $F : A \hookrightarrow B$ un foncteur pleinement fidèle entre A et B .

On peut définir la composition de deux foncteurs très simplement, ce qui permet de définir la catégorie des catégories, que l'on notera \mathbf{Cat} . Deux catégories sont dites isomorphes si elles sont isomorphes en tant qu'objets de la catégorie \mathbf{Cat} .

Définition 7 – hom-foncteur contravariant

Soit \mathfrak{C} une catégorie, et B un objet de \mathfrak{C} . On notera $\mathfrak{C}(-, B) : \mathfrak{C}^{op} \rightarrow \mathfrak{Ens}$ le foncteur appelé hom-foncteur contravariant défini par :

- pour tout objet A de \mathfrak{C} , $\mathfrak{C}(-, B)(A) = \mathfrak{C}(A, B)$
- pour toute flèche $h : A \rightarrow A'$, $\mathfrak{C}(-, B)(h) : \mathfrak{C}(A', B) \rightarrow \mathfrak{C}(A, B)$
 $f \mapsto f \circ h$

Définition 8 – transformation naturelle

Étant donnés deux foncteurs F et G de même source \mathfrak{C} et même but \mathfrak{D} , une transformation naturelle entre F et G est une famille

$$\varphi = \{\varphi_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}}}$$

de flèches de \mathfrak{D} , telle que :

pour toute flèche $f : A \rightarrow B$ de \mathfrak{C} , le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi_B} & G(B) \end{array}$$

Une transformation naturelle est représentée de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathfrak{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \varphi \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathfrak{D} \\ & G & \end{array}$$

La notion de transformation naturelle nous permet de considérer les foncteurs comme des objets d'une catégorie. Étant données deux catégories \mathfrak{C} et \mathfrak{D} , on notera $\mathfrak{D}^{\mathfrak{C}}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de \mathfrak{C} dans \mathfrak{D} , et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs. La composition de deux transformations naturelles $\varphi : F \rightarrow G$ et $\psi : G \rightarrow H$ est la transformation naturelle $\psi \circ \varphi : F \rightarrow H$, appelée composée verticale, et définie par $(\psi \circ \varphi)_A = \psi_A \circ \varphi_A$.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathfrak{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \varphi \\ \curvearrowleft \\ \Downarrow \psi \\ \curvearrowright \end{array} & \mathfrak{D} \\ & H & \end{array}$$

On vérifie facilement que l'on définit bien ainsi une catégorie.

1.6 Yoneda

Définition 9 – plongement de Yoneda

Le plongement de Yoneda entre une catégorie \mathfrak{C} et la catégorie des foncteurs de \mathfrak{C}^{op} dans \mathfrak{Ens} est le foncteur \mathbf{y} défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Ens}^{\mathfrak{C}^{op}} \\ A &\mapsto \mathbf{y}_A = \mathfrak{C}(-, A) \end{aligned}$$

et par

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{A,B} &: C(A, B) \rightarrow \mathfrak{Ens}^{\mathfrak{C}^{op}}(\mathbf{y}(A), \mathbf{y}(B)) \\ f &\mapsto X \mapsto g \mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Théorème 10

Le foncteur \mathbf{y} est pleinement fidèle.

Cette proposition justifie l'appellation de plongement. La preuve utilise le lemme de Yoneda énoncé ci-dessous.

Théorème 11 – Lemme de Yoneda

Soit A un objet d'une catégorie \mathfrak{C} , et P un objet de $\mathfrak{Ens}^{\mathfrak{C}^{op}}$. Il existe une bijection canonique

$$i(A, P) : P(A) \rightarrow \mathfrak{Ens}^{\mathfrak{C}^{op}}(\mathbf{y}_A, P)$$

qui associe à tout élément a de l'ensemble $P(A)$ la transformation naturelle $\alpha_a : \mathbf{y}_A \rightarrow P$ définie, pour tout $B \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}}$ et pour tout $f \in \mathbf{y}_A(B)$ par

$$\alpha_{a,B}(f) = P(f)(a)$$

Proposition 12

Deux objets A et B d'une catégorie \mathfrak{C} sont isomorphes si et seulement si \mathbf{y}_A est isomorphe à \mathbf{y}_B .

Démonstration :

C'est une conséquence de la pleine fidélité du foncteur de Yoneda. ■

1.7 Over-catégorie

Définition 13 – catégorie comma

Soient $F_1 : \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{D}$ et $F_2 : \mathfrak{C}_2 \rightarrow \mathfrak{D}$ deux foncteurs de même but.

On appelle catégorie comma du couple (F_1, F_2) la catégorie, notée $F_1 \downarrow_{\mathfrak{D}} F_2$ ou $F_1 \downarrow F_2$, définie de la manière suivante :

- Un objet de $F_1 \downarrow F_2$ est un triplet $(A_1, f, A_2) \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}_1} \times \text{Mor}_{\mathfrak{D}} \times \text{Obj}_{\mathfrak{C}_2}$ tel que $f : F_1(A_1) \rightarrow F_2(A_2)$
- Un morphisme $(a_1, a_2) : (A_1, f, A_2) \rightarrow (A'_1, f', A'_2)$ de $F_1 \downarrow F_2$ est défini par deux morphismes $a_1 : A_1 \rightarrow A'_1$ et $a_2 : A_2 \rightarrow A'_2$, tels que

$$f' \circ F_1(a_1) = F_2(a_2) \circ f$$

Remarque 14 – Over catégorie

On n'utilisera ici qu'une forme très dégénérée de cette construction :
Soit $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$, étant donné un objet D de \mathfrak{D} , on appelle over catégorie au dessus de D la catégorie, notée $F \downarrow_D$ définie de la manière suivante :

- Un objet de $F \downarrow_D$ est un couple $(C, m) \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{D}(F(C), D)$
- Un morphisme $a : (C, m) \rightarrow (C', m')$ de $F \downarrow_D$ est défini par un morphisme $p : C \rightarrow C'$, tel que

$$m' \circ F(p) = m$$

Définition 15 – Les ensembles simpliciaux

On note Δ la catégorie dont

- les objets sont les entiers naturels. À chaque objet p , on associe l'ensemble ordonné $\underline{p} := (0, \dots, p)$ vu comme une catégorie;
- les morphismes de p dans q sont les applications croissantes de $(0, \dots, p)$ dans $(0, \dots, q)$, qu'on peut voir comme les foncteurs de \underline{p} vers \underline{q}
- la composition est celle des foncteurs.

Un ensemble simplicial est un foncteur contravariant de Δ vers la catégorie \mathfrak{Ens} des ensembles [Lan71].

À toute catégorie \mathfrak{C} , on associe son nerf, $\mathbf{nerf}_{\mathfrak{C}}$, qui est un ensemble simplicial à savoir le foncteur qui à p associe $\mathfrak{Cat}(\underline{p}, \mathfrak{C})$ (l'ensemble des morphismes dans la catégorie des catégories, autrement dit l'ensemble des foncteurs).

Pour caractériser les nerfs parmi les ensembles simpliciaux, on considère un ensemble simplicial E . C'est un nerf si et seulement si, pour tout n , chaque suite de n arêtes de E adjacentes (en ce sens que l'extrémité de l'une est l'origine de la suivante) est la suite des arêtes principales d'un unique n -simplexe de E .

Chapitre 2

Empilements libres : construction des graphes simpliciaux

Résumé

Dans ce chapitre on expose diverses constructions simpliciales, qui joueront un rôle crucial dans le reste de cette thèse.

On se donne une catégorie \mathcal{J} vue comme son ensemble simplicial $(\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4 \dots)$ [Lan71](p.179).

2.1 Les coups \mathcal{J}_1^\bullet

2.1.1 Le graphe des \mathcal{J}_1^\bullet coups $G\mathcal{J}_1^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^0

Définition 16 – Les coups \mathcal{J}_1^\bullet

Étant donnés deux sous-ensembles $\mathcal{J}_1^f, \mathcal{J}_1^b \subseteq \mathcal{J}_1$, on pose $\mathcal{J}_1^\bullet = \mathcal{J}_1^f \amalg \mathcal{J}_1^b$; les exposants f et b correspondent à une direction : forward ou backward ; par défaut, on prend $\mathcal{J}_1^f = \mathcal{J}_1^b = \mathcal{J}_1$.

On appelle coups ou monoplexes les éléments de \mathcal{J}_1^\bullet . Un coup a donc une direction (f ou b) et une position, qui est un élément de \mathcal{J}_1 .

Remarque 17

Pour que le jeu soit intéressant, il faut choisir les ensembles de coups avec parcimonie et à bon escient, mais pour ce qui nous intéresse ici, à savoir les mécanismes du jeu, aucune restriction n'est indispensable.

Définition 18 – La source et le but verticaux : $\mathcal{J}_1^\bullet \rightarrow \mathcal{J}_0$

Grâce aux applications source et but dans \mathcal{J} , on définit la source et le but, $src_{\mathcal{J}_1^\bullet}$ et $but_{\mathcal{J}_1^\bullet}$ de \mathcal{J}_1^\bullet vers \mathcal{J}_0 : si c est un coup forward alors $src_{\mathcal{J}_1^\bullet}(c) := src_{\mathcal{J}}(c)$ et $but_{\mathcal{J}_1^\bullet}(c) := but_{\mathcal{J}}(c)$ sinon c est un coup backward et $src_{\mathcal{J}_1^\bullet}(c) := but_{\mathcal{J}}(c)$ et $but_{\mathcal{J}_1^\bullet}(c) := src_{\mathcal{J}}(c)$.

Autrement dit, pour un élément forward de \mathcal{J}_1^\bullet la source et le but sont respectivement la source et le but de sa position et à l'inverse, la source et le but d'un élément backward de \mathcal{J}_1^\bullet sont respectivement le but et la source de sa position.

Définition 19 – Le graphe $G\mathcal{J}_1^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^0

On fabrique $G\mathcal{J}_1^\bullet$, le graphe dont les sommets sont les éléments de \mathcal{J}_0 et les arêtes sont les éléments de \mathcal{J}_1^\bullet avec la source et le but définis ci-dessus.

Enfin on définit $\mathfrak{J}^0 = \mathcal{L}(G\mathcal{J}_1^\bullet)$ qui est la catégorie fabriquée à partir de ce graphe grâce à la construction de Mac Lane.

2.2 Les bplexes \mathcal{J}_2^\bullet **2.2.1 Le graphe des \mathcal{J}_2^\bullet bplexes $G\mathcal{J}_2^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^1** **Définition 20 – Petit côté**

Lorsqu'on a un triangle de composition $(f, g, g \circ f)$, on parlera de petits côtés pour désigner f et g (figure 2.1). De manière plus générale, les petits côtés d'un diagramme de composition de longueur quelconque sont les côtés qui ne sont pas la composée (ex. voir figure 2.2).

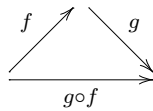


Figure 2.1: Les petits côtés d'un triangle

Définition 21 – Les bplexes

On appelle bplexe tout triangle de \mathcal{J}_2 dont l'un des petits côtés est muni d'une direction qui en fait un élément de \mathcal{J}_1^\bullet . On note \mathcal{J}_2^\bullet l'ensemble de ces bplexes.

Pour un triangle de \mathcal{J}_2 , il y a donc au plus quatre bplexes possibles dans \mathcal{J}_2^\bullet , qui dépendent du choix (gauche ou droite) du petit côté et de son orientation (forward ou backward).

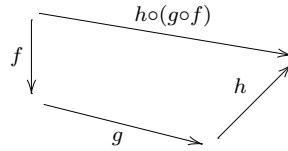


Figure 2.2: Les petits côtés d'un tétraèdre

Convention :

Sur nos figures, on aligne systématiquement le côté *sélectionné* sur la verticale et on le dessine torsadé, à gauche ou à droite selon le cas. On dessine aussi systématiquement ce qu'on va définir comme étant la source du coup (qu'on appelle s pour sud) en bas et le but (qu'on appelle n pour nord) en haut.

Attribution des coups**Définition 22 – Côté d'un biplexe**

Le côté muni d'une direction est appelé côté du biplexe.

► On appellera \mathcal{O} -biplexes

les biplexes dont la direction est backward et le côté est gauche, ainsi que ceux dont la direction est forward et le côté est droite (voir [fig 2.3]).

► Symétriquement on appellera \mathcal{P} -biplexes

les biplexes dont la direction est forward et le côté est gauche, ainsi que ceux dont la direction est backward et le côté est droite (voir [fig 2.3] ci-dessous).

Les différents biplexes associés à un triangle sont mis en évidence par les quatre diagrammes de la figure 2.3.

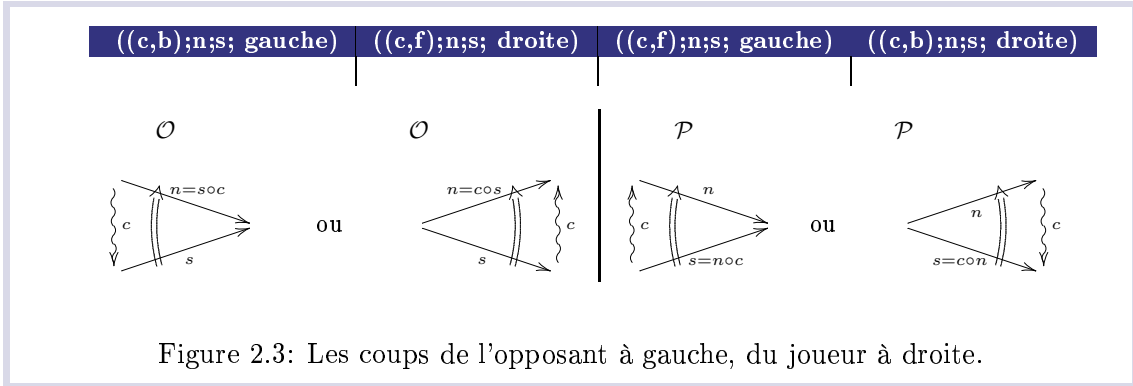
Remarque 23 – Composition / décomposition

Dans la figure 2.3 on observe dans le premier dessin à gauche, que le but s'obtient par précomposition avec la source tandis que par exemple, dans le dernier la source est une décomposition par post-composition du but avec le coup.

Définition 24 – La source et le but vertical: $\mathcal{J}_2^\bullet \rightarrow \mathcal{J}_1$

Si B est un biplexe, $\text{src}_{\mathcal{J}_2^\bullet}(B)$ est le côté du triangle de B qui n'est pas le coup c de B , et qui partage la source (au sens de \mathcal{J}_1^\bullet) de c comme sommet.

Et $\text{but}_{\mathcal{J}_2^\bullet}(B)$ est le côté du triangle de B qui n'est pas le coup c de B et qui partage le



but de c comme sommet.

La *source* et le *but* vertical de chaque biphex sont donnés comme les côtés non verticaux des triangles ci-dessus, la double flèche détermine la source et le but du biphex.

Définition 25 – Le graphe $G\mathcal{J}_2^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^1

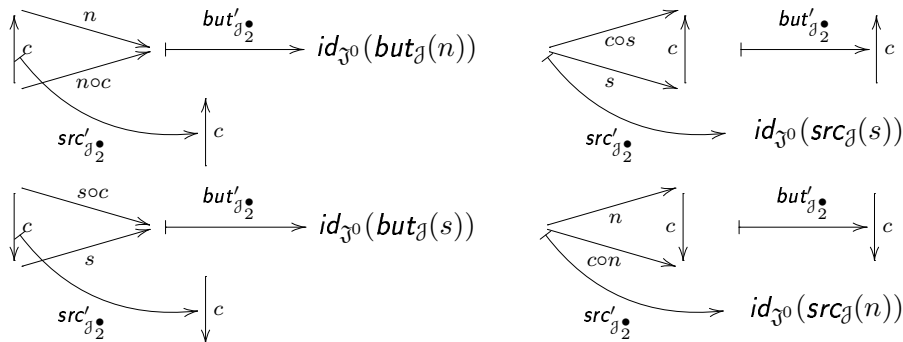
On définit $G\mathcal{J}_2^\bullet$, le graphe dont les sommets sont les éléments de \mathcal{J}_1 et les arêtes sont les éléments de \mathcal{J}_2^\bullet .

La source et le but sont définis ci-dessus. Et sa catégorie associée $\mathfrak{J}^1 = \mathcal{L}(G\mathcal{J}_2^\bullet)$, fabriquée à partir de ce graphe grâce à la construction de Mac Lane. On appellera les morphismes de la catégorie \mathfrak{J}^1 des parties. Par conséquent \mathfrak{J}^1 est appelée la catégorie des parties.

Définition 26 – projections horizontales

Grâce à la bijection de Mac Lane (1.4), pour définir deux foncteurs $src_{\mathfrak{J}}, but_{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}^1 \rightarrow \mathfrak{J}^0$, il suffit de fournir deux morphismes de $G\mathcal{J}_2^\bullet$ vers $\mathcal{U}(\mathfrak{J}^0)$.

On définit donc deux projections horizontales: $src'_{\mathcal{J}_2^\bullet}, but'_{\mathcal{J}_2^\bullet} : G\mathcal{J}_2^\bullet \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{J}^0)$ sur les biphexes.

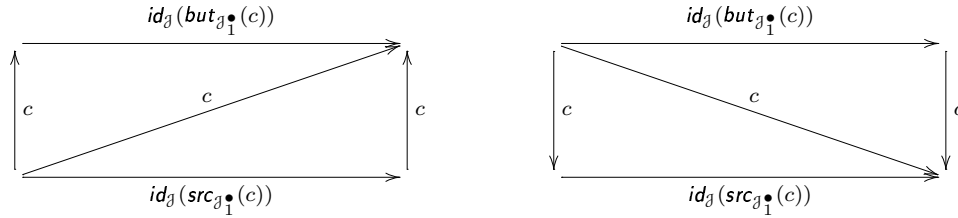


Définition 27 – Le foncteur copycat $\text{cop} : \mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}^1$

On utilise ici le même procédé pour définir un foncteur copycat $\text{cop} : \mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}^1$, il suffit donc de fournir un morphisme de $G\mathcal{J}_1^\bullet$ vers $\mathcal{U}(\mathfrak{J}^1)$.

On se donne un c dans \mathcal{J}_1^\bullet , en distinguant deux cas selon que c est un coup backward, ou forward.

Si c est forward, alors le copycat élémentaire associé à c est l'empilement des deux biphexes dessiné ci-dessous à gauche; et si c est backward, c'est l'empilement des deux biphexes dessiné ci-dessous à droite (bien voir que, dans les deux cas, c'est l'opposant qui commence, et le joueur ne fait que répercuter son coup) :



Ce qui nous donne (par le biais de l'adjonction de Mac Lane 1.4) le foncteur: $\text{cop} : \mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}^1$.

Remarque 28 –

On remarque d'une part que les copycats élémentaires sont des empilements, et d'autre part que les deux autres empilements envisageables sont interdits puisqu'ils diraient que c est un isomorphisme, ce qui n'est pas le sujet.

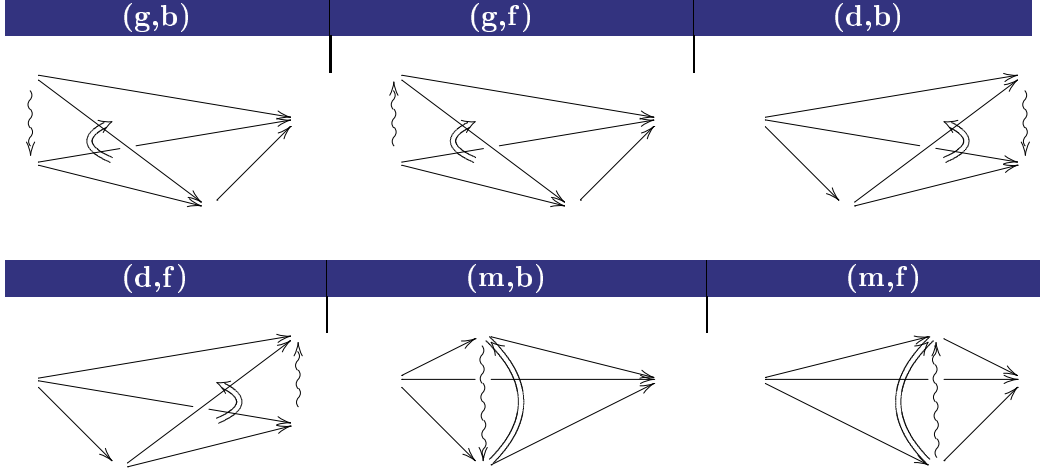
2.3 Les triplexes \mathcal{J}_3^\bullet **2.3.1 Le graphe des \mathcal{J}_3^\bullet triplexes $G\mathcal{J}_3^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^2** **Définition 29 – Les triplexes**

On appelle triplex tout tétraèdre d'associativité de \mathcal{J}_3 dont l'un des trois petits côtés est muni d'une direction qui en fait un élément de \mathcal{J}_1^\bullet . Un triplex a donc un côté g , d , ou m , pour gauche, droite et milieu, et un coup. Les deux faces du tétraèdre qui contiennent le coup sont des biphexes de \mathcal{J}_2^\bullet .

On note \mathcal{J}_3^\bullet l'ensemble de ces triplexes.

Pour chaque élément de \mathcal{J}_3 (en respectant la convention de représenter la source globale à gauche et le but global à droite) on compte six différents triplexes possibles, qui se distinguent comme précédemment selon le petit côté sélectionné et l'orientation verticale. Ci-dessous, on représente les six cas possibles avec la convention que le coup est aligné sur

la verticale (forward ou backward) :



Définition 30 – La source et le but vertical d’un triplex

La source d’un triplex $t \in \mathcal{J}_3^\bullet$ est la face $f \in \mathcal{J}_2$ qui ne contient pas le coup de t mais qui contient la source de ce coup. Alors que son but est l’autre face qui ne contient pas le coup (elle contient le but du coup).

Comme précédemment on voit un triplex comme orienté vers le haut avec le coup aligné sur la verticale.

La double flèche détermine la source et le but du triplex.

Définition 31 – Le graphe $G\mathcal{J}_3^\bullet$ et la catégorie \mathfrak{J}^2

On construit le graphe $G\mathcal{J}_3^\bullet$ dont les sommets sont les éléments de \mathcal{J}_2 et les arêtes sont les éléments de \mathcal{J}_3^\bullet .

La source et le but sont définis ci-dessus. On définit $\mathfrak{J}^2 = \mathcal{L}(G\mathcal{J}_3^\bullet)$, la catégorie fabriquée à partir de ce graphe grâce à la construction de Mac Lane.

Un triplex comporte quatre faces. On représente horizontalement la source et le but du triplex, qui sont les deux faces qui ne contiennent pas le coup, et on représente le coup verticalement.

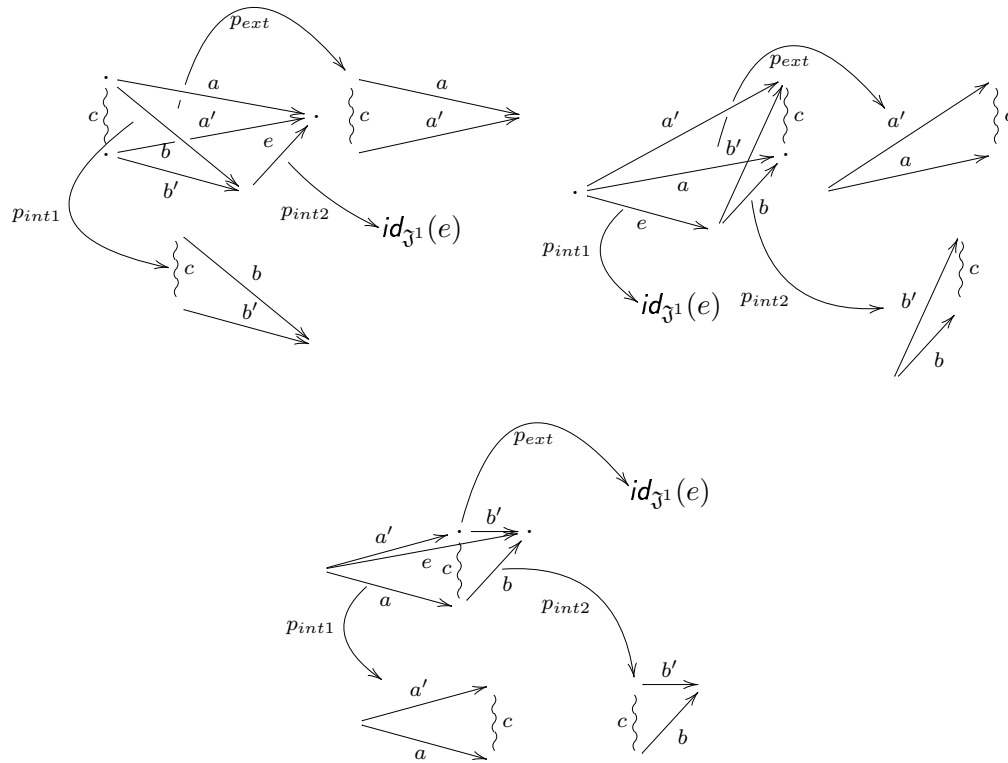
On appelle arête charnière l’arête opposée au coup, qui constitue l’axe de rotation autour duquel on peut voir la source du triplex se faire soulever par le coup sur le but du triplex, laissant apparaître les deux autres faces, qui contiennent le coup et sont dessinées verticalement.

Définition 32 – Les trois foncteurs projection horizontale $\mathfrak{p}_{int1}, \mathfrak{p}_{int2}, \mathfrak{p}_{ext} : \mathfrak{J}^2 \rightarrow \mathfrak{J}^1$

Comme précédemment, on définit nos trois projections horizontales pour les triplexes : $\mathfrak{p}_{int1}, \mathfrak{p}_{int2}, \mathfrak{p}_{ext} : G\mathcal{J}_3^\bullet \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{J}^1)$.

Ici int_1 et int_2 désignent les projections verticales au dessus des deux petits côtés du triangle "socle", alors que ext est la projection verticale au dessus du grand côté de ce triangle (ces notations sont là pour rappeler leurs homologues dans les jeux de Hyland et Ong [HO00]).

Les deux faces qui contiennent le coup (citées plus haut) constituent deux des trois projections horizontales, la troisième étant l'identité de l'arête charnière. Ces trois constructions sont décrites par les figures ci-dessous, où je n'indique pas la direction du coup, parce qu'elle n'intervient pas.



Ceci nous donne une nouvelle fois, par le biais de l'adjonction de Mac Lane 1.4, trois foncteurs: $\mathbf{p}_{int1}, \mathbf{p}_{int2}, \mathbf{p}_{ext} : \mathcal{J}^2 \rightarrow \mathcal{J}^1$.

2.4 Les n -plexes \mathcal{J}_n^\bullet

2.4.1 Le graphe des n -plexes $G\mathcal{J}_n^\bullet$ et la catégorie \mathcal{J}^{n-1}

Cette section est la déclinaison naturelle de la construction précédente itérée au rang n , les résultats exposés ici ne servent pas dans la suite.

Définition 33 – Les n -plexes

On appelle n -plexe tout élément de \mathcal{J}_n dont l'un des n petits côtés est muni d'une

direction qui en fait un élément de \mathcal{J}_1^\bullet . Un n -plexe a donc un numéro dans $1, \dots, n$ pour le petit côté sélectionné. On note \mathcal{J}_n^\bullet l'ensemble de ces n -plexes. Pour chaque élément de \mathcal{J}_n on compte $2n$ différents n -plexes possibles, qui se distinguent comme précédemment par le petit côté sélectionné et l'orientation verticale.

Définition 34 – La source et le but vertical d'un n -plexe

La source d'un n -plexe $t \in \mathcal{J}_n^\bullet$ est la face $f \in \mathcal{J}_{n-1}$ qui ne contient pas le coup de t mais qui contient la source de ce coup. Alors que le but d'un n -plexe $t \in \mathcal{J}_n^\bullet$ est l'autre face qui ne contient pas le coup.

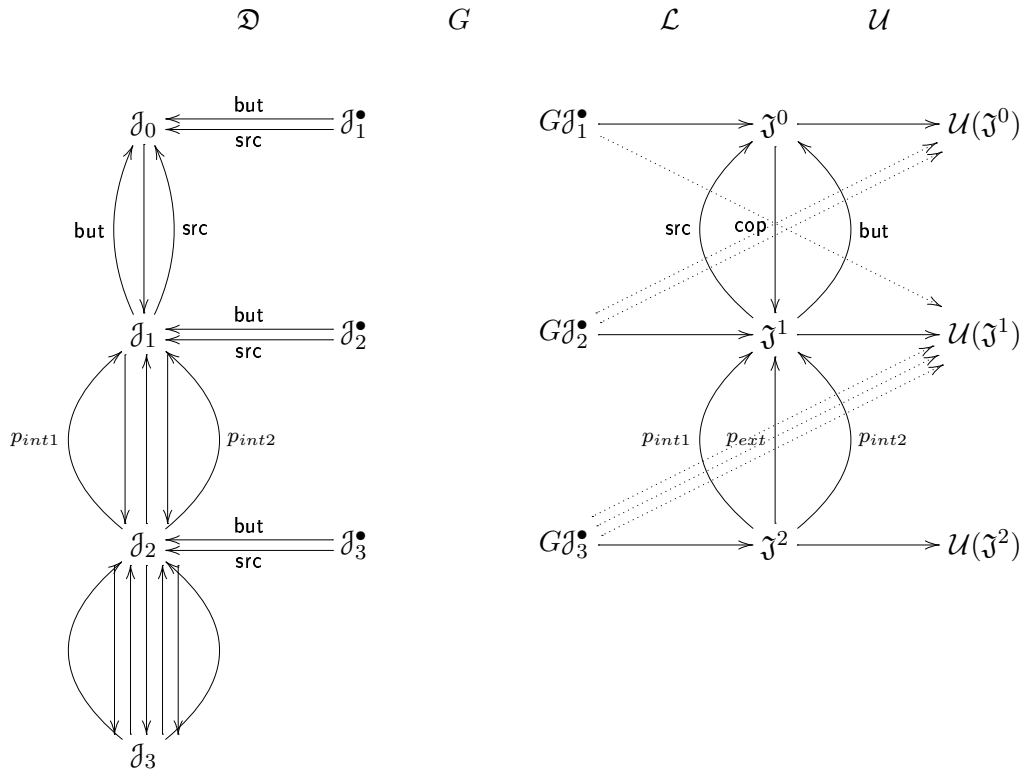
Comme précédemment on voit un n -plexe comme orienté vers le haut avec le coup aligné sur la verticale.

On note $G\mathcal{J}_n^\bullet$ le graphe dont les sommets sont les éléments de \mathcal{J}_{n-1} et les arêtes sont les éléments de \mathcal{J}_n^\bullet . Et on note \mathfrak{J}^{n-1} la catégorie libre $\mathcal{L}(G\mathcal{J}_n^\bullet)$ fabriquée à partir de ce graphe avec la construction de Mac Lane.

La suite des \mathfrak{J}^n constitue une catégorie simpliciale, plus précisément un objet simplicial dans la catégorie des catégories. Plutôt que cette structure simpliciale complète, on décrit ci-dessous les n morphismes principaux de \mathfrak{J}^{n-1} vers \mathfrak{J}^0 : on peut penser à \mathfrak{J}^{n-1} comme la catégorie des parties avec n joueurs, et ces n projections “internes” comme les restrictions des parties au domaine de compétence des différents joueurs. Comme d'habitude, on utilise l'adjonction de Mac Lane et on définit ces foncteurs par leur restriction au graphe générateur.

Les $n + 1$ projections d'un n -plexe sont d'une part les deux biplexes qui contiennent le coup et un autre côté particulier du simplexe (pas de diagonale) et d'autre part les identités des autres côtés, la projection externe étant celle concernée par le grand côté du simplexe.

Conclusion(résumé)

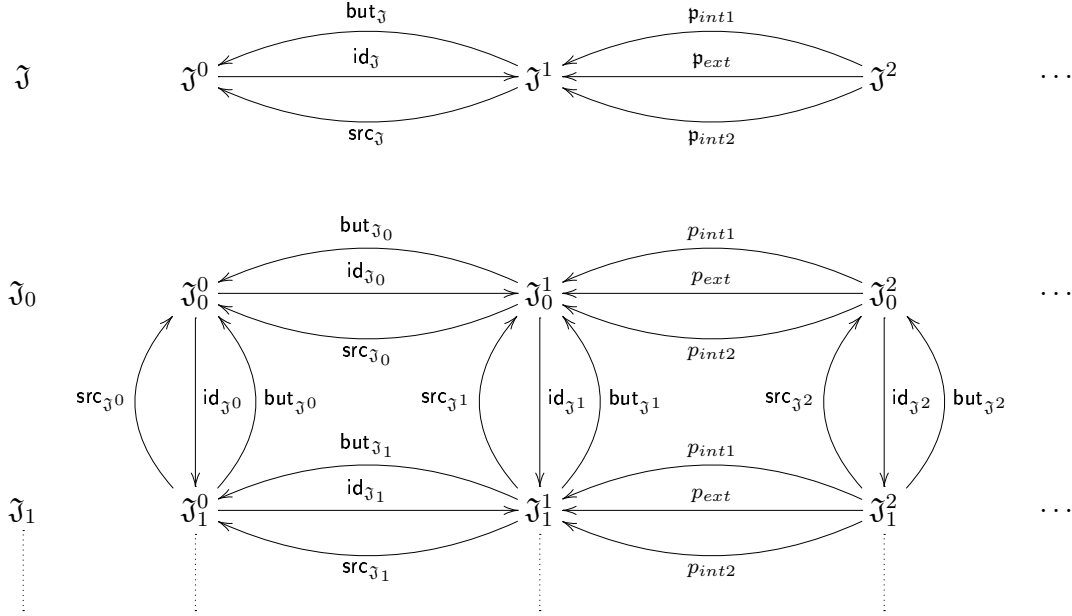


Remarque 35 – Les autres dégénérescences

Sur le dessin de droite, on n'a volontairement pas représenté les deux dégénérescences de \mathfrak{J}^1 dans \mathfrak{J}^2 (qui correspondent à la composition à droite ou à gauche avec le copycat) puisque nous n'en avons pas besoin pour la suite.

Pour résumer la construction, avec une catégorie de départ \mathcal{J} (et une sélection de coups \mathcal{J}_1^\bullet), on passe de $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ et \mathcal{J}_3 à $\mathcal{J}_1^\bullet, \mathcal{J}_2^\bullet$ et \mathcal{J}_3^\bullet en attribuant une direction à un petit côté, puis on passe aux graphes correspondants en définissant la source et le but de \mathcal{J}_n^\bullet vers \mathcal{J}_{n-1} . Enfin on applique la construction de Mac Lane pour obtenir les catégories \mathfrak{J}^n , qu'on munit d'une structure simpliciale, grâce à l'adjonction de Mac Lane. Parmi les foncteurs constituant cette structure simpliciale, six nous intéressent plus particulièrement (les morphismes de graphes qui ont servi à les obtenir, sont dessinés en pointillés dans la figure ci-dessus).

On dispose au sortir de cette construction de l'ensemble bi-simplicial suivant :



Explication du diagramme : les catégories \mathfrak{J}^i sont toutes fabriquées selon la construction du chapitre 2, ce sont par conséquent des catégories libres qu'on a pris l'habitude de dessiner verticalement, et où la composition concatène les morphismes les uns sur les autres. En dessous de chacune de ces catégories, on dessine verticalement l'ensemble simplicial correspondant :

► -pour \mathfrak{J}^0 ,

\mathfrak{J}_0^0 est l'ensemble des objets de \mathcal{J} , \mathfrak{J}_1^0 est l'ensemble des empilements de coups, et \mathfrak{J}_2^0 est l'ensemble des couples de tels empilements composables (et ainsi de suite),

► -alors que pour \mathfrak{J}^1 ,

\mathfrak{J}_0^1 est l'ensemble des morphismes de \mathcal{J} , \mathfrak{J}_1^1 est l'ensemble des empilements de biphxes, et \mathfrak{J}_2^1 est l'ensemble des couples de tels empilements composables (et ainsi de suite),

► -et pour \mathfrak{J}^2 ,

\mathfrak{J}_0^2 est l'ensemble des triangles de composition de \mathcal{J} , \mathfrak{J}_1^2 est l'ensemble des empilements de triplexes, et \mathfrak{J}_2^2 est l'ensemble des couples de tels empilements composables (et ainsi de suite).

Cette construction met en évidence horizontalement autant de nouveaux ensembles simpliciaux :

► $-\mathfrak{J}_0$,

\mathfrak{J}_0^0 est l'ensemble des objets de \mathcal{J} , \mathfrak{J}_0^1 est l'ensemble des morphismes de \mathcal{J} , et \mathfrak{J}_0^2 est l'ensemble des couples de morphismes composables de \mathcal{J} de sorte que \mathfrak{J}_0 est tout simplement notre catégorie de départ \mathcal{J} ,

► $-\mathfrak{J}_1$,

\mathfrak{J}_1^0 est l'ensemble des empilements de coups, \mathfrak{J}_1^1 est l'ensemble des empilements de biplexes, et \mathfrak{J}_1^2 est l'ensemble des empilements de triplexes de sorte que \mathfrak{J}_1 est l'ensemble simplicial des parties.

Conclusion

On dispose donc de la catégorie simpliciale \mathfrak{J} : l'ensemble simplicial de ses objets \mathfrak{J}_0 n'est autre que notre catégorie de départ \mathcal{J} . Dans la suite, on va beaucoup s'intéresser à l'ensemble simplicial \mathfrak{J}_1 de ses morphismes, qu'on appelle ensemble simplicial des parties, qui n'est pas une catégorie, et qui constitue le prototype des catégories faibles qu'on va introduire. On va appeler parties les éléments de \mathfrak{J}_1^0 , interactions à trois les éléments de \mathfrak{J}_1^1 , et plus généralement, on appelle $(n-1)$ -interactions les éléments de \mathfrak{J}_1^n .

Chapitre 3

Des empilements aux entrelacs : analyse, critiques

Résumé

Dans ce chapitre, on donne une interprétation informelle des constructions du chapitre précédent en termes de jeux, et on étudie l'ensemble simplicial des parties. On montre que la composition ("horizontale") des parties, bien que multivaluée, est associative. On construit aussi les parties copycats, et on constate que ce ne sont pas toujours des identités.

3.1 Considérations ludiques

Remarque 36 – Les deux sélections

On peut voir la catégorie donnée \mathcal{J} comme un cadre dans lequel on peut s'adonner à divers jeux. Ce sont les deux sélections de morphismes (voir définition 16) qui déterminent les règles du jeu auquel on joue. Il convient alors de considérer la sous-catégorie engendrée par les deux sélections de morphismes comme la catégorie des positions gagnantes, et les identités comme les positions gagnées. Le jeu consiste maintenant pour \mathcal{P} à prouver que la position donnée (ou courante) est une position gagnante, tandis que \mathcal{O} cherche à prouver le contraire. Pour ce faire, \mathcal{P} factorise la position courante en une composée de l'un des coups générateurs (forward ou backward selon le côté) avec une nouvelle position qu'il espère plus près d'être gagnée ; \mathcal{O} quant à lui, pré-compose ou post-compose la position courante avec un des coups générateurs (backward ou forward respectivement), pour essayer de mettre \mathcal{P} en difficulté. Cependant puisqu'il

compose la position courante avec un générateur, si celle-ci était gagnante, la nouvelle position l'est forcément aussi ; autrement dit, seul \mathcal{P} peut, en jouant mal, sortir des positions gagnantes.

Il convient aussi de bien comprendre la répartition des rôles entre les deux sélections: face à une position $p : A \rightarrow B$, \mathcal{O} peut composer avec un coup forward en B , ou avec un coup backward en A , tandis que dans la même position, \mathcal{P} peut décomposer p avec un coup backward en B , ou avec un coup forward en A . C'est cette règle qui garantit que, dans une interaction $I : A \rightarrow B \rightarrow C$, si par exemple \mathcal{P} joue en B dans $B \rightarrow C$, son action est automatiquement traduite ou reconnue comme une action de \mathcal{O} dans $A \rightarrow B$.

Remarquons que si un morphisme apparaît dans les deux sélections, c'est-à-dire que le premier joueur peut le jouer dans un sens et son adversaire dans l'autre, il constitue deux coups "inutiles"; en effet, l'adversaire a toujours la possibilité d'annuler un tel coup.

Remarque 37 – Les triplexes sont des traductions

Dans le cadre d'une interaction, on doit considérer que trois joueurs \mathcal{O} , \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 interviennent tour à tour. Chacun intervient dans une position, ou plutôt une 2-position, $A \rightarrow B \rightarrow C$, dont il ne voit qu'une projection : \mathcal{O} voit la projection externe $A \rightarrow C$ et joue dedans, \mathcal{P}_1 voit la projection interne gauche $A \rightarrow B$ et joue dedans, \mathcal{P}_2 voit la projection interne droite $B \rightarrow C$ et joue dedans. Mais lorsqu'un joueur joue dans sa projection, son coup est répercuté dans les deux autres par composition, ou plus exactement par associativité. Ce sont les triplexes qui encodent cette sorte de traduction. En effet, un triplex est déterminé par deux de ses faces : sa source verticale, qui est notre 2-position $A \rightarrow B \rightarrow C$, et sa projection active, qui est le biplexe choisi par le joueur actif.

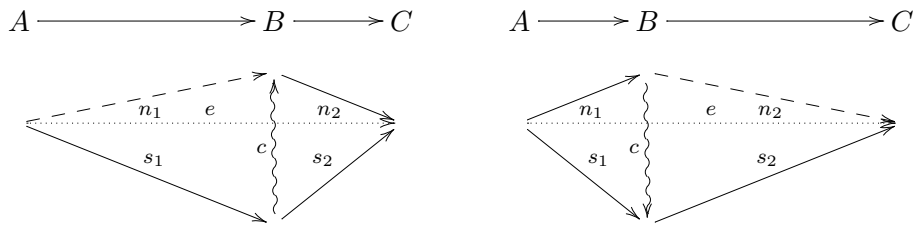
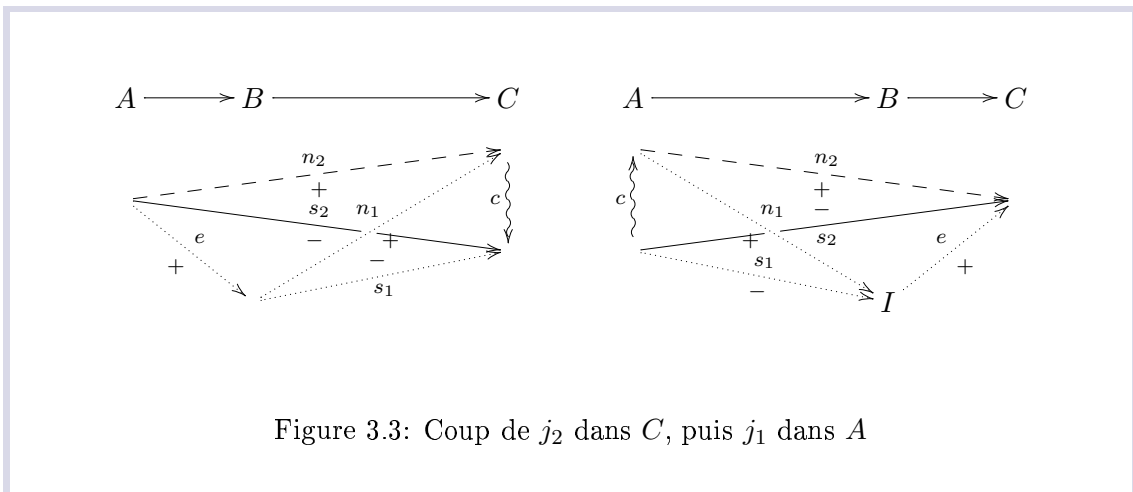
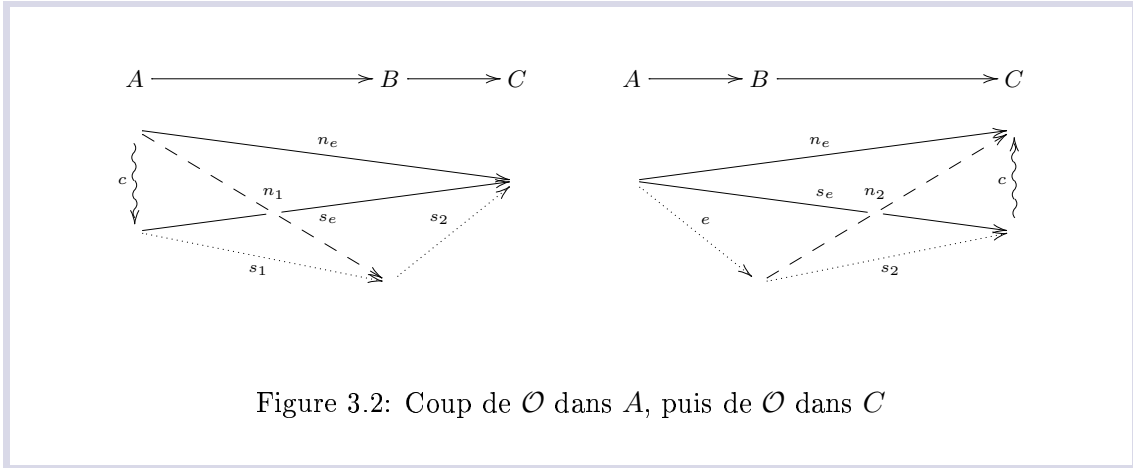


Figure 3.1: Coup de j_2 dans B , puis de j_1 dans B

Les deux dernières faces sont alors fournies par la définition même de l'associativité.



Remarque 38 – À quoi joue l'opposant

En réalité, il est plus juste d'imaginer que l'opposant joue non pas dans la projection externe, mais ailleurs, sur une position qui partage un port avec la position considérée. Mieux, on peut penser qu'on a affaire à deux opposants, un à gauche et un à droite, entre lesquels joueur 1 et joueur 2 ne font pas de différence. Plus exactement, joueur 1 négocie avec opposant 1 à sa gauche, et avec joueur 2 à sa droite, et c'est la seule différence qu'il fait entre ses deux interlocuteurs. Quand il passe la main à sa droite, joueur 1 ne sait pas que, de ce côté, derrière son opposant, c'est joueur 2 qui se cache.

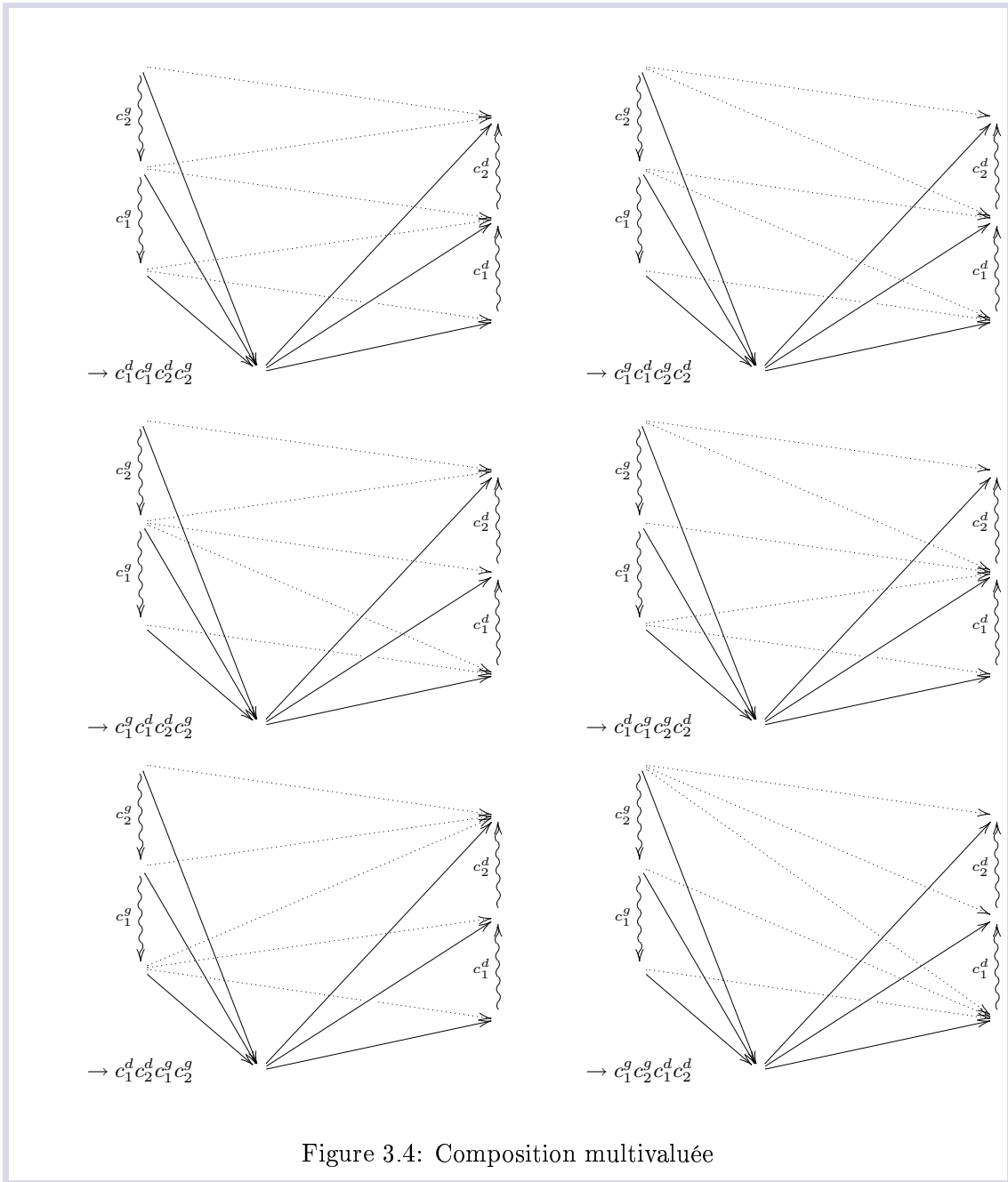
3.2 La composition des parties**Définition 39 – Composition de parties**

On rappelle que nos parties forment un ensemble simplicial \mathfrak{J}_1 , dont nous étudions la composition. Cette composition est définie comme suit : étant données trois parties Π, Π_1, Π_2 on va dire que Π appartient à $\Pi_2 \circ_{\mathfrak{J}} \Pi_1$ dès que Π, Π_1 , et Π_2 sont trois projections d'une même interaction dans \mathfrak{J}_1^2 , plus précisément quand Π est la projection externe \mathfrak{p}_{ext} et Π_2 et Π_1 respectivement les projections internes \mathfrak{p}_{int2} et \mathfrak{p}_{int1} .

Remarque 40 – Composition multivaluée de parties

Cette composition n'est pas forcément unique, on dira qu'elle est multivaluée.

- L'exemple qui suit est une illustration de la non unicité de la composition de \mathfrak{J} . Les dessins ci-dessous montrent six interactions qui ne diffèrent que par leur projection externe.
On représente la projection externe Π en pointillés et respectivement la projection Π_1 et la projection Π_2 de gauche à droite et on indique l'entrelacs correspondant à chaque dessin.

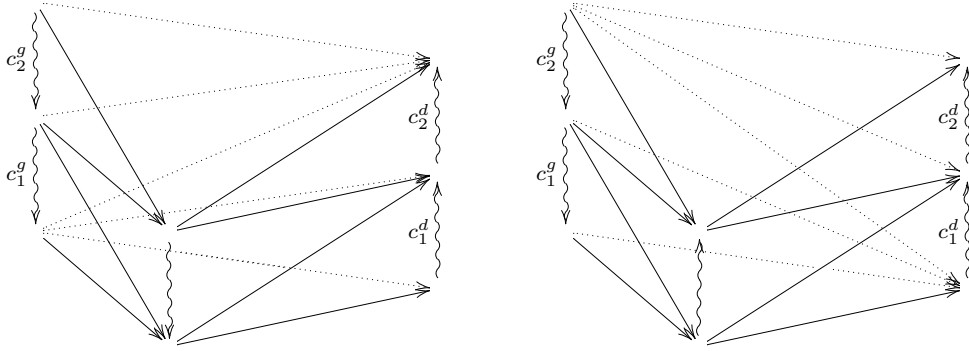


Remarque 41

En fait, il y a autant de composées que d'entrelacements possibles pour les deux projections internes ci-dessus de sorte que leur composition donne lieu à un ensemble qui n'est autre que l'ensemble de leurs entrelacements.

Remarque 42

Dans l'exemple précédent, tous les coups considérés étaient dans les ports externes et c'est ce qui faisait que tous les entrelacements étaient possibles. Dans le cas général, la seule contrainte imposée par les projections internes sur l'entrelacement figurant dans la projection externe est de respecter les rendez-vous imposés par les coups joués dans le port médian. On montre ci-dessous deux entrelacements interdits. Le phénomène qu'on observe ici est que si A, B, C sont trois ensembles disjoints ordonnés, un prolongement quelconque de ces ordres à $A \amalg B, B \amalg C$ et $A \amalg C$ ne provient pas forcément d'un ordre sur $A \amalg B \amalg C$.

**Remarque 43**

Ce rendez-vous n'altère pas les bords externes, et pourtant, parmi les six entrelacements vus plus haut, il interdit les deux derniers.

Une partie dans \mathfrak{J}_1 a sa suite de coups à gauche S_g et sa suite de coups à droite S_d toutes deux dans \mathfrak{J}_1^0 , et la réunion disjointe de ces deux suites est totalement ordonnée par la suite de ses biplexes. On a donc un entrelacs de S_g et S_d , au sens de la définition suivante.

Définition 44 – Entrelacs

On appelle entrelacs de deux suites finies de longueur m et n tout ordre total sur $[1, \dots, m] \amalg [1, \dots, n]$ raffinant l'ordre usuel sur les deux composantes.

Définition 45 – Demi-interaction

Appelons demi-interaction la donnée de deux projections internes (parties) compatibles en ce sens que le bord droit (le but dans la catégorie horizontale des parties 26) de celle de gauche est égal au bord gauche (la source dans la catégorie horizontale des parties de la section 26) de celle de droite. À toute interaction I est associée la demi-interaction constituée de ses deux projections internes, qu'on appelle la demi-interaction induite par I .

Toute demi-interaction possède trois suites S_g, S_d et S_m (ses projections dans \mathfrak{J}_1^0) avec un ordre total sur $S_g \amalg S_m$ et sur $S_m \amalg S_d$.

Lemme 46

La restriction R à $S_g \amalg S_d$ de la fermeture transitive F sur $S_g \amalg S_m \amalg S_d$ de la réunion U de ces deux relations d'ordre sur $S_g \amalg S_m$ et sur $S_m \amalg S_d$ est un ordre partiel sur $S_g \amalg S_d$ (qu'on appelle l'ordre imposé par les rendez-vous).

Démonstration :

On considère la relation F' sur $S_g \amalg S_m \amalg S_d$ obtenue comme suit: sur $S_g \amalg S_m$ et $S_m \amalg S_d$, on prend les ordres totaux donnés (notés \leq). Sur $S_g \times S_d$, on prend l'ensemble des projections de triplets (a, b, c) dans $S_g \times S_m \times S_d$ vérifiant $a < b$ (dans $S_g \times S_m$) et $b < c$ (dans $S_m \times S_d$). Enfin sur $S_d \times S_g$, on prend l'ensemble des projections de triplets (a, b, c) dans $S_g \times S_m \times S_d$ vérifiant $a > b$ (dans $S_g \times S_m$) et $b > c$ (dans $S_m \times S_d$). On vérifie que F' est une relation d'ordre contenant U et contenue dans R , donc c'est F . Donc R est aussi la restriction de F' et par conséquent c'est une relation d'ordre. ■

On se donne une demi-interaction D avec ses deux suites S_g et S_d , on note S la réunion disjointe de S_g et S_d et p l'ordre partiel induit sur S . Enfin on note $comp(D)$ l'ensemble des interactions induisant D ,

Lemme 47

L'application de $comp(D)$ dans l'ensemble des entrelacs de S_g et S_d est injective et son image est l'ensemble des entrelacs raffinant p .

Autrement dit, il y a autant de composées Π de deux parties Π_1, Π_2 que d'entrelacements de leurs bords externes respectant les rendez-vous.

Démonstration :

Facile. ■

Le théorème ci-dessous énonce une condition d'associativité faible satisfaite par la composition des parties, condition qu'on étudiera plus en détails au long du chapitre 5.

Théorème 48 – Une propriété d'associativité dans \mathfrak{J}_1

Tout couple de deux interactions I et I' dans \mathfrak{J}_1^2 tel que la projection externe de I' soit égale à la projection interne gauche (resp. droite) de I , provient d'une 3-interaction R (empilement de quadriplexes) dans \mathfrak{J}_1^3 en ce sens qu'on a $\delta_3(R) = I'$ et $\delta_1(R) = I$ (resp. $\delta_2(R) = I'$ et $\delta_0(R) = I$).

Ici on a utilisé les notations usuelles pour les opérateurs de faces [Lan71](p.179).

Démonstration :

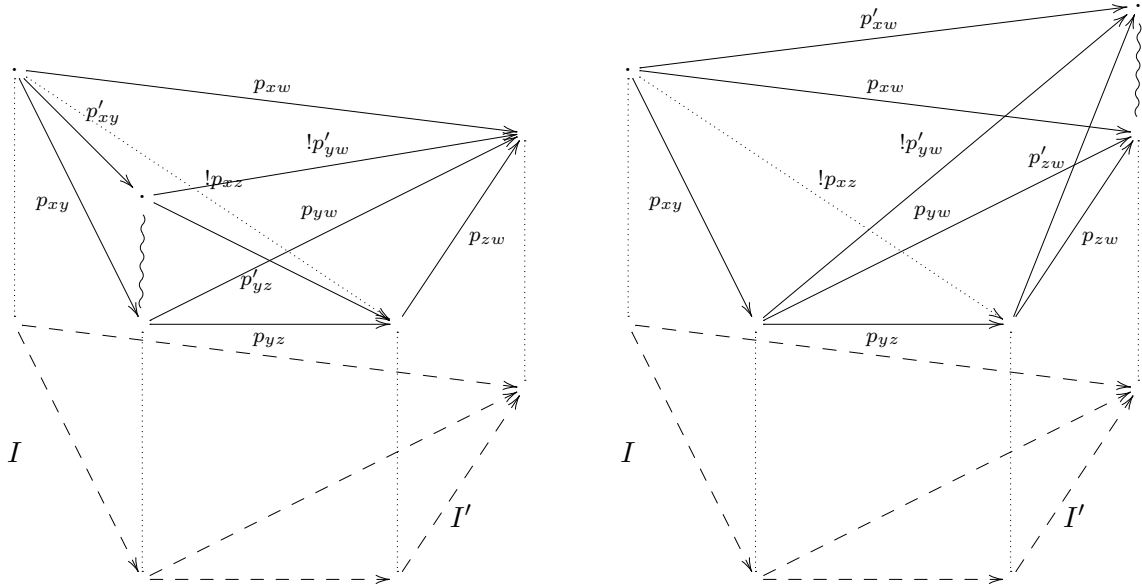
Ici on notera $I;T$ pour la liste I à la suite de laquelle on a apposé l'élément T .

On raisonne par induction sur la somme des longueurs de I et I' . On applique l'hypothèse inductive au couple obtenu en retirant le dernier triplex à I et/ou à I' selon le cas, comme expliqué plus bas. On obtient ainsi un élément R' de \mathfrak{J}_1^3 sur lequel on empile le quadriplexe construit comme indiqué ci-dessous à partir du ou des deux

triplexes préalablement retirés.

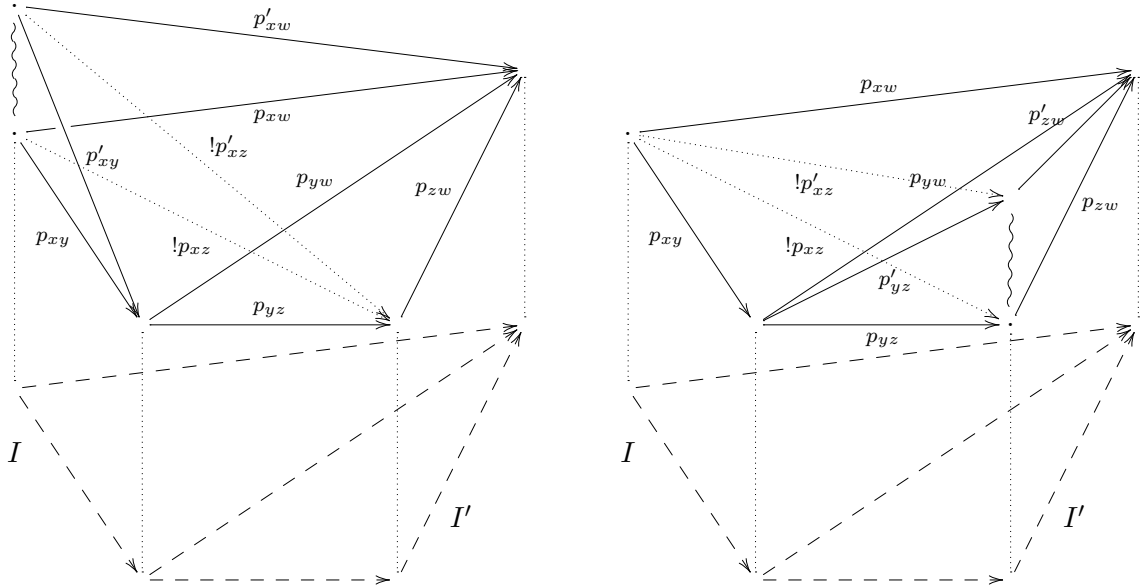
Si les deux triplexes aux sommets de I et I'

► ont un effet de bord en commun :



Pour le dessin de gauche, $I = I^-; T$ où T est le triplexé formé par p_{xy} , p_{yw} , p_{xw} , p'_{xy} , p'_{yw} et le coup, et $I' = I'^-; T'$ où T' est le triplexé formé par p_{yz} , p_{yw} , p_{zw} , p'_{yz} , p'_{yw} et le coup. On applique donc l'hypothèse de récurrence à I^- et à I'^- et on complète le couple de triplexes T , T' en un élément de \mathcal{J}_3^\bullet grâce à p_{xz} qui est obtenu par associativité dans \mathcal{J} . Pour le dessin de droite les triplexes T et T' sont différents mais l'argument est le même.

► sinon



On voit sur les dessins que p_{xz} et p'_{xz} s'obtiennent par associativité dans \mathcal{J} , respectivement dans les tétraèdres constitués par $p_{xy}, p_{yz}, p_{zw}, p_{xw}$ et p_{yw} pour p_{xz} , et par $p'_{xy}, p_{yz}, p_{zw}, p'_{xw}$ et p_{yw} pour p'_{xz} (dans le premier schéma). Pour le dessin de gauche, $I = I^-; T$ où T est le triplexe formé par $p_{xy}, p_{yw}, p_{xw}, p'_{xy}, p'_{xw}$ et le coup. On applique donc l'hypothèse de récurrence à I^- et à I' on complète donc le triplexe T en un élément de \mathcal{J}_3^\bullet grâce à p_{xz} et p'_{xz} . Pour le dessin de droite les rôles sont inversés c'est en haut de I' qu'on enlève un triplexe et le résultat est le même.

L'argument ci-dessus s'adapte aussi bien au cas où le coup est forward qu'à celui où il est backward, c'est la raison pour laquelle les coups sont dessinés sans direction.

Les cas symétriques se traitent de la même façon. ■

Remarque 49 – Associativité

Du fait que tout tel couple d'interactions provient d'une 3-interaction, si l'on considère une composée de trois parties dans un certain ordre, on peut obtenir la même partie composée en composant les trois parties dans l'autre ordre. Autrement dit, étant données trois parties, on obtient le même ensemble de parties composées quel que soit l'ordre dans lequel on compose. Cette propriété exprime donc bien une forme d'associativité (voir remarque 72).

Remarque 50 – La condition d'associativité dans \mathfrak{J}_1

On aurait pu exprimer cette condition non seulement pour les interactions mais aussi pour toute demi- n -interaction (la donnée d'une suite de n projections internes i.e. par-

ties compatibles) pour tout n : à tout couple d'une p -interaction P dans \mathfrak{J}_1^p et d'une q -interaction Q dans \mathfrak{J}_1^q tel que la projection externe de l'une soit égale à une projection interne de l'autre on sait associer une $(q + p - 1)$ -interaction dans \mathfrak{J}_1^{p+q-1} ayant les deux faces voulues.

La preuve est la même que pour le cas $p + q - 1 = 3$ traité ci-dessus.

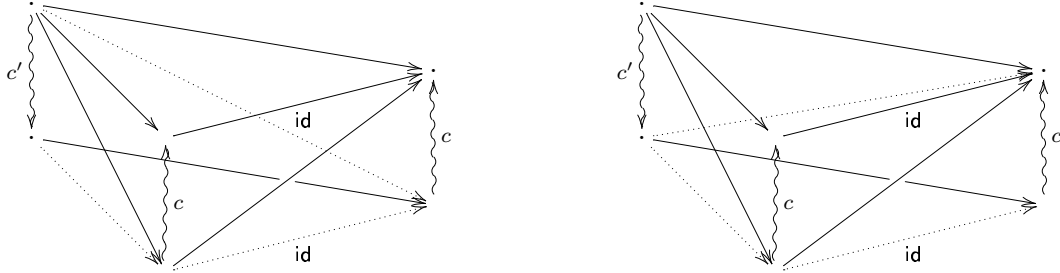
3.3 Les parties identités

Lemme 51 – Le copycat n'est pas une identité

► Si l'on pré-compose ou post-compose une partie $\Pi : \mathfrak{J}_1$ avec $\text{cop}(\text{src}(\Pi))$ d'un côté ou avec $\text{cop}(\text{but}(\Pi))$ de l'autre, on obtient Π , mais pas seulement, autrement dit cop n'est pas neutre pour la composition horizontale des parties.

Démonstration :

Voici deux interactions d'une partie Π à deux coups avec l'identité de son bord droit; en terme d'entrelacements ci-dessous, $\Pi \circ_{\mathfrak{J}} \text{id}_{\mathfrak{J}}(c) = \{(c; c'), (c'; c)\}$.



Autrement dit : si $c_{(m)}$ et $c_{(d)}$ désignent respectivement les copies du milieu et du côté droit du coup c , les ordres induits par les projections internes ($c' < c_{(m)}$ et $c_{(d)} < c_{(m)}$) ne contraignent pas l'ordre de la projection externe, il y a donc deux possibilités : $c_{(d)} < c'$ ou $c_{(d)} > c'$. ■

Conclusion

On a donc mis sur nos parties une sorte de structure de catégorie assez faible puisque la composition est multivaluée, l'associativité n'est pas aussi forte qu'on pourrait le souhaiter et les copycats ne sont pas vraiment neutres. On va exposer au chapitre [6] une variante plus satisfaisante de la construction du chapitre 2.

Entre temps on va introduire les notions caté-

goriques appropriées pour faire ces constructions, notions qui mettent en scène des compositions faibles (voir chapitre 5), et on mettra aussi en place une notion adaptée de stratégie (voir chapitre 4).

Chapitre 4

Stratégies

Résumé

Dans ce chapitre on présente une forme rudimentaire et déjà explorée de jeux et stratégies; cette construction n'a rien d'original; par exemple [SH02] et [AM99] ont déjà présenté les jeux avec des graphes signés.

4.1 Stratégies dans une catégorie signée

Étant donnée une catégorie \mathcal{C} (dont on appelle les objets *positions* et les morphismes *parties*), on définit:

Définition 52 – Parties préfixes

Soient Π, Π' et Π'' trois parties; si $\Pi = \Pi' \circ \Pi''$, alors on dit que Π'' est un préfixe de Π et que Π' est un suffixe Π .

Dans le cas où Π' n'est pas un isomorphisme, on dira que Π'' est un préfixe strict de Π .

Cette définition a un sens pour toute notion de composition.

Définition 53 – Catégories signées

Une catégorie signée est une catégorie dont l'ensemble des objets est muni d'une application λ à valeurs dans $\{-, +\}$, qui fait apparaître l'ensemble des objets comme réunion disjointe de l'ensemble des \mathcal{P} -positions et de l'ensemble des \mathcal{O} -positions.

Définition 54 – Parties paires

Étant donnée une catégorie signée \mathfrak{C} , on appelle partie paire dans \mathfrak{C} toute partie dont la source et le but ont même signe. Les parties paires forment une sous-catégorie \mathfrak{C}^P de \mathfrak{C} qui est la réunion disjointe des deux sous-catégories pleines \mathfrak{C}^P des \mathcal{P} -positions et \mathfrak{C}^O des \mathcal{O} -positions. Les parties impaires sont les parties qui ne sont pas paires.

Définition 55 – Stratégies

Étant donnée une position p dans une catégorie signée \mathfrak{C} , une stratégie dédiée à p (on dira aussi une stratégie pour p ou p -stratégie) est un ensemble de parties paires qui ont p comme source commune, clos par préfixe, et qui contient l'identité de p . Une stratégie dans \mathfrak{C} est une p -stratégie pour un p donné ; c'est une \mathcal{P} -stratégie ou une \mathcal{O} -stratégie selon que p est une \mathcal{P} -position ou une \mathcal{O} -position.

Si une stratégie σ contient une partie Π on dira que σ sélectionne Π .

4.2 Propriétés des stratégies

On introduit ici les notions de stratégies gagnantes, robustes et déterministes toujours dans le contexte d'une catégorie signée.

Définition 56 – Catégorie noethérienne

On dit d'une suite de parties qu'elle est croissante dès que chaque partie de cette suite est un préfixe de la suivante.

On dit d'une catégorie \mathfrak{C} (signée ou non) qu'elle est noethérienne si toute suite croissante de parties dans \mathfrak{C} est stationnaire.

Définition 57 – Propriétés des stratégies**► Déterminisme**

une p -stratégie σ est dite déterministe lorsqu'elle vérifie la condition suivante : si π est une partie impaire sélectionnée par σ , alors il existe au plus une partie paire π' sélectionnée par σ et ayant les mêmes préfixes impairs que π (autrement dit σ a au plus une réaction possible pour chaque comportement de l'adversaire). Plus précisément, deux parties π et π' sélectionnées par σ et ayant le même ensemble de préfixes stricts sont isomorphes.

► Robustesse

une p -stratégie σ est dite robuste lorsqu'elle vérifie la condition suivante : si i est une partie impaire dont σ sélectionne tous les préfixes pairs, alors il existe au moins une partie paire q sélectionnée par σ et ayant les mêmes préfixes impairs que i (autrement dit σ sait comment réagir à tout comportement de l'adversaire)

► Gagnance

une stratégie est dite gagnante si elle est robuste et si toute suite croissante de parties sélectionnées est stationnaire, en d'autres termes une stratégie gagnante ne sélectionne aucune partie infinie.

Remarque 58

- *Dans une catégorie signée noethérienne, toute stratégie robuste est automatiquement gagnante.*
- *La notion de robustesse est aussi connue sous le nom de totalité.*

Partie II

Construction principale

Chapitre 5

Matériel catégorique faible

Résumé

Dans ce chapitre on introduit les outils catégoriques que l'on vient de mettre en lumière et qui vont se révéler nécessaires dans l'optique de mieux formaliser les constructions des chapitres qui vont suivre.

Plus précisément on introduit une notion de catégorie affaiblie par le caractère partiel de sa composition. On appelle demi-catégorie cette notion de catégorie faible. On introduit aussi une notion affaiblie de double catégorie qu'on appellera sesqui-catégorie. Une double catégorie est constituée de quatre catégories tandis que dans notre notion de sesqui-catégorie, deux de ces catégories deviennent des catégories faibles. La construction principale de cette thèse, qui reprend la construction du chapitre 2 dans ses grandes lignes, construit une sesqui-catégorie en partant d'une demi-catégorie.

5.1 Demi-catégories

Pour définir notre notion de jeu d'équipe dont on va parler au chapitre 7, on aura besoin d'une notion adéquate de catégorie faible.

La notion de demi-catégorie ne diffère de la notion de catégorie usuelle que par le caractère partiel de sa composition.

Notation (application partiellement définie) :

On notera $A \dashrightarrow B$ l'ensemble des applications partielles de A dans B .

Définition 59 – demi-catégorie

Une demi-catégorie est constituée d'un ensemble d'objets \mathfrak{H}_0 , d'un ensemble de morphismes \mathfrak{H}_1 , de trois applications: $src, but : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_0$, $id : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_1$ et d'une

application partielle $\circ : \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1 \dashrightarrow \mathfrak{H}_1$ pour la composition dans \mathfrak{H}_1 . On dira que f et g sont composables si leur composition $f \circ g$ est définie.

Ces données sont sujettes à la liste de conditions suivantes :

- (1) la *src* et le *but* de $id(x)$ sont égaux à x ;
- (2) si f et g sont composables, alors $src(f)$ est égale à $but(g)$;
- (3) si $h = f \circ g$ alors $src(h)$ est égale à $src(g)$ et $but(h)$ à $but(f)$;
- (4) la composition est associative en ce sens que : étant donnés f, g, h dans \mathfrak{H}_1 , si l'une des deux compositions suivantes est bien définie, $(h \circ g) \circ f$ ou $h \circ (g \circ f)$ alors l'autre l'est aussi, et de plus elles sont égales ;
- (5) les identités sont neutres au sens où : pour tout f dans \mathfrak{H}_1 , $f \circ id_{src(f)}$ et $id_{but(f)} \circ f$ sont (bien définis et) égaux à f .

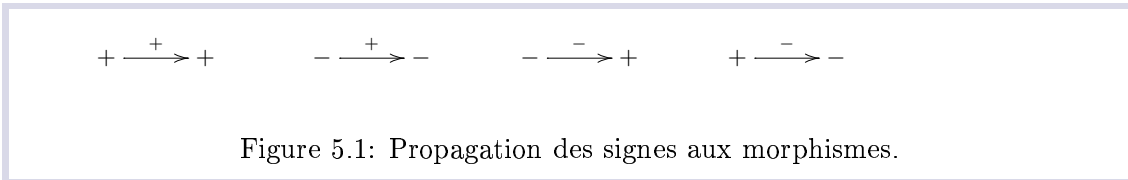
Remarque 60

- Les catégories usuelles sont des demi-catégories qui satisfont la condition additionnelle suivante: f et g sont composables dès que $src(f)$ est égale à $but(g)$.

5.2 Demi-catégories signées

Définition 61 – Demi-catégorie signée

Une demi-catégorie signée est une demi-catégorie \mathfrak{H} munie d'une fonction de polarité sur les objets, $\lambda : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \{-, +\}$ qui s'étend naturellement aux flèches par la règle des signes usuelle illustrée dans le schéma ci-dessous:



Remarque 62

Étant donnée une demi-catégorie signée \mathfrak{H} , on fabrique une nouvelle demi-catégorie \mathfrak{H}^+ comme suit :

- Comme objets on prend seulement les objets positifs de \mathfrak{H} ,
- et comme morphismes on prend tous les morphismes entre de tels objets.
- Les identités sont dans \mathfrak{H}^+ ,
- et la composée de deux flèches positives est aussi positive.

\mathfrak{H}^+ est bien une demi-catégorie. On dit aussi que \mathfrak{H}^+ est la sous demi-catégorie pleine des objets positifs de \mathfrak{H} .

On va s'intéresser surtout aux demi-catégories signées dans lesquelles les flèches négatives ne sont pas composables, on leur donne donc un statut :

Définition 63 – Demi-catégories fallacieuses

Une demi-catégorie fallacieuse est une demi-catégorie signée qui vérifie la condition que deux flèches négatives ne sont jamais composables.

On donne maintenant un procédé pour obtenir de telles demi-catégories.

Exemple 64 – Exemples de demi-catégorie fallacieuse

Une catégorie \mathfrak{C} équipée d'une fonction de signe $\lambda : \mathfrak{C}_0 \rightarrow \{-, +\}$ donne lieu à une demi-catégorie signée $D(\mathfrak{C}, \lambda)$ dont les objets et les morphismes sont les objets et les morphismes de \mathfrak{C} et où la composition est la restriction de la composition de \mathfrak{C} à la réunion de $\mathfrak{C}_1^+ \times \mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_1^+$. En général $D(\mathfrak{C}, \lambda)$ n'est pas une catégorie. Mais $D(\mathfrak{C}, \lambda)$ est une demi-catégorie fallacieuse.

Remarque 65

On peut remarquer qu'ici la catégorie est totale sur toutes les autres compositions (celles dans lesquelles un morphisme au moins est positif) en ce sens que dans $\mathfrak{C}_1^+ \times \mathfrak{C}_1 \amalg \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_1^+$ la composition est partout bien définie.

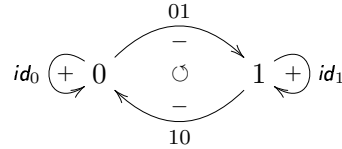
Démonstration :

- L'identité est neutre à droite puisqu'on compose l'identité qui est une flèche positive avec une autre flèche donc toutes ces composées sont les mêmes que dans \mathfrak{C} .
- De même l'identité est neutre à gauche.
- Associativité :
 Dans les cas dans lesquels il y a au plus une flèche négative sur les trois petites flèches, grâce à la loi sur les signes, si la composée existe dans un sens, elle existe aussi dans l'autre; si par contre il y a deux flèches négatives ou plus, la composée n'existe ni dans un sens ni dans l'autre.

■

Définition 66 – \mathbb{Z}_2

\mathbb{Z}_2 est la catégorie signée décrite par le schéma ci-dessous :



en associant $+$ à 0 et $-$ à 1; autrement dit \mathbb{Z}_2 est la catégorie à deux objets $\{0, 1\}$ et quatre morphismes $\{id_0, id_1, 01, 10\}$ satisfaisant :

► $01 \circ 10 = id_1$ et $10 \circ 01 = id_0$

On peut noter que \mathbb{Z}'_2 égale $D(\mathbb{Z}_2, \lambda)$, où λ est la fonction de polarité introduite plus haut qui associe $+$ à 0 et $-$ à 1.

Définition 67 – \mathbb{Z}'_2

\mathbb{Z}'_2 est la demi-catégorie dont les objets et les morphismes sont ceux de \mathbb{Z}_2 mais dans laquelle $01 \circ 10 = \perp$ et $10 \circ 01 = \perp$. Ce qui veut dire que 01 et 10 ne se composent ni dans un sens ni dans l'autre.

On construit ainsi une demi-catégorie fallacieuse.

Définition 68 – Les demi-foncteurs

La notion de foncteur s'étend facilement aux demi-catégories. La deuxième condition n'est vérifiée que dans les cas où f et g sont composables et impliquant que $F(f)$ et $F(g)$ le sont aussi.

On peut donc expliquer une nouvelle façon de donner un signe à une catégorie et ensuite d'en extraire une demi-catégorie.

En effet, étant donné un demi-foncteur $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{Z}'_2$, on peut fabriquer la demi-catégorie $\mathfrak{C}' = D(\mathfrak{C}, F)$: ses objets et ses morphismes sont ceux de \mathfrak{C} , l'ensemble des objets positifs de \mathfrak{C}' est l'image réciproque de 0 par F , et l'ensemble des objets négatifs de \mathfrak{C}' est l'image réciproque de 1 par F , et les morphismes composables sont ceux dont les images sont composables.

Remarque 69

Les morphismes positifs sont donc ceux qui sont envoyés sur les identités alors que les négatifs sont ceux qui sont envoyés sur les deux autres morphismes (01 et 10), la loi des signes est ainsi naturellement mise en place.

\mathfrak{C}' peut être vue comme l'image réciproque de \mathbb{Z}'_2 vue comme sous-demi-catégorie de \mathbb{Z}_2 .

En particulier, dans \mathfrak{C}' deux flèches négatives ne sont pas composables.

Remarque 70

En terme de jeux, le fait d'interdire que les flèches négatives composent nous évite les

triangles de composition $(-, -)$ dans lesquels ça serait au joueur de jouer dans les deux arènes internes. Plus généralement c'est la condition qui code l'habituel diagramme des états (voir [Bla92, Har99, McC96] ou remarque 7.5).

5.3 Demi-catégories faibles

La différence entre demi-catégories et demi-catégories faibles réside dans le fait que pour ces dernières la composition est une relation ternaire et pas nécessairement une application partielle.

Définition 71 – demi-catégorie faible

Une demi-catégorie faible \mathfrak{A} est constituée d'un ensemble d'objets \mathfrak{A}_0 , d'un ensemble de morphismes \mathfrak{A}_1 , de trois applications $\text{src}, \text{but} : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_0$, $\text{id} : \mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}_1$ et d'une relation ternaire $\circ \subseteq \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1$ pour la composition dans \mathfrak{A}_1 . On note $f \circ g$ l'ensemble des flèches h telles que $(h, f, g) \in \circ$ en accord avec quoi on écrira $h \in f \circ g$ au lieu de $(h, f, g) \in \circ$.

Par opposition aux demi-catégories faibles, on dira parfois demi-catégorie stricte à la place de demi-catégorie.

Ces données sont sujettes à la liste de conditions suivantes :

► (1)

$\text{src}(\text{id}(x)) = x$ et $\text{but}(\text{id}(x)) = x$

► (2)

si h est une composée de f et g ,

$\text{src}(f)$ doit être égal à $\text{but}(g)$, $\text{src}(g)$ à $\text{src}(h)$ et $\text{but}(f)$ à $\text{but}(h)$

► (3)

si f_{xz} est une composée de f_{yz} avec f_{xy} , et f_{xw} est une composée de f_{zw} avec f_{xz} , alors il existe une composée f_{yw} de f_{zw} avec f_{yz} de laquelle f_{xw} est une composée avec f_{xy} .

Autrement dit, si $f_{xz} \in f_{yz} \circ f_{xy}$, et $f_{xw} \in f_{zw} \circ f_{xz}$, alors il existe une composée $f_{yw} \in f_{zw} \circ f_{yz}$ telle que $f_{xw} \in f_{yw} \circ f_{xy}$.

► (3')

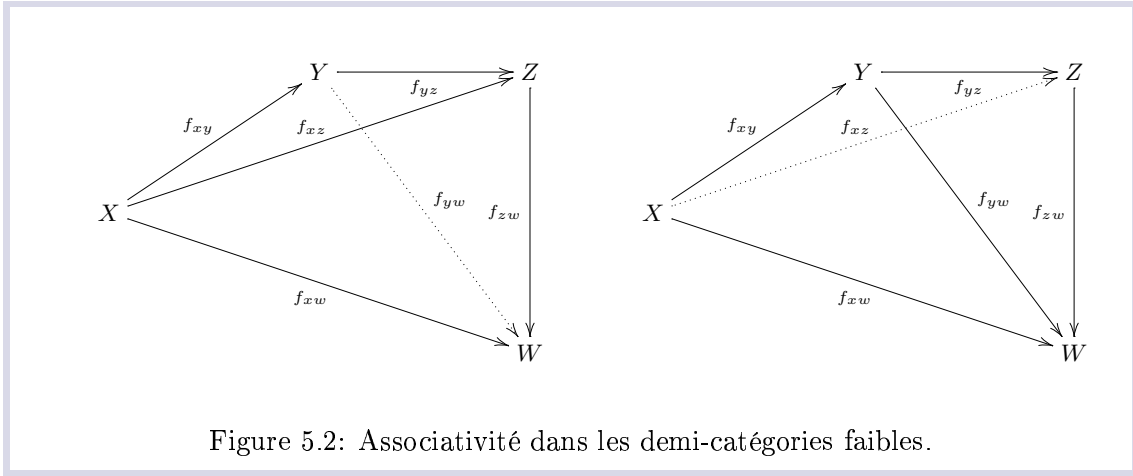
de façon similaire, si f_{yw} est un composé de f_{zw} avec f_{yz} , et f_{xw} un composé de f_{yw} avec f_{xy} , alors il existe un composé f_{xz} de f_{yz} avec f_{xy} duquel f_{xw} est composé avec f_{zw} . Autrement dit, si $f_{yw} \in f_{zw} \circ f_{yz}$, et $f_{xw} \in f_{yw} \circ f_{xy}$, alors il existe un composé $f_{xz} \in f_{yz} \circ f_{xy}$ tel que $f_{xw} \in f_{xz} \circ f_{zw}$. (voir [fig 5.2])

► (4)

les identités sont *neutres* dans le sens suivant : étant donné f dans \mathfrak{A}_1 , $f \circ \text{id}_{\text{src}(f)}$ et $\text{id}_{\text{but}(f)} \circ f$ sont égaux à $\{f\}$.

Remarque 72

La condition usuelle d'associativité est exprimée par les deux conditions adéquates (3) et (3') (voir fig. 5.2).



Les conditions (3) et (3') reviennent à dire que la composition ensembliste $\circ : \mathcal{P}(\text{Hom}(B, C)) \times \mathcal{P}(\text{Hom}(A, B)) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Hom}(A, C))$ définie par :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \{h : \text{Hom}(A, C) \mid \exists f : \mathcal{F}, g : \mathcal{G} \text{ tels que } h = f \circ g\}$$

est associative. (On fait ici référence à la notion d'associativité ensembliste déjà introduite par la remarque 49).

5.4 Sesqui-catégories

C'est ici que l'on présente notre notion de double catégorie faible, qui est une variante affaiblie de la notion de catégorie double introduite par Benabou [Bén67].

On utilisera les conventions de la section 1.1 : c, c', c'' désignent des coups, h, h', h'' sont des noms qu'on donne à des flèches horizontales.

On donne ici une illustration des objets qu'on va manipuler quand on parlera de doubles catégories :

Définition 73 – sesqui-catégorie

Une sesqui-catégorie \mathfrak{S} est constituée des données suivantes :

un quadruplet d'ensembles $\{S_0, S_v, S_h, S_2\}$: ports (pour objets), morphismes verticaux, positions (pour morphismes horizontaux), et parties (pour cellules) respectivement.

— huit faces entre eux : $\text{src}_v, \text{but}_v : S_v \rightarrow S_0$; $\text{src}_h, \text{but}_h : S_h \rightarrow S_0$; $\text{src}_V, \text{but}_V : S_2 \rightarrow$

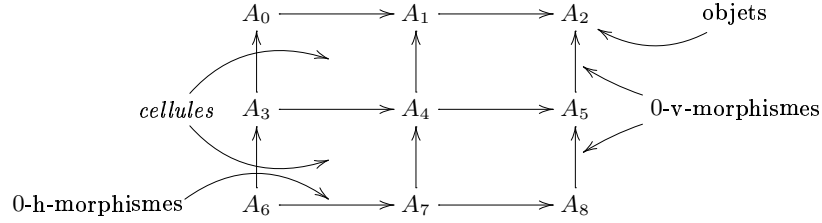


Figure 5.3: Double catégorie; dans 0-h-morphismes, 0 réfère à la dimension du contact, par exemple les cellules sont à la fois des 1-v et des 1-h morphismes.

$$S_h; \text{src}_H, \text{but}_H : S_2 \rightarrow S_v$$

— et quatre dégénérescences : $id_v : S_0 \rightarrow S_v; id_h : S_0 \rightarrow S_h; id_V : S_h \rightarrow S_2; id_H : S_v \rightarrow S_2$.

— quatre notions de compositions :

– trois d'entre elles sont des applications partiellement définies:

$$\circ_v : S_v \times S_v \dashrightarrow S_v; \circ_V : S_2 \times S_2 \dashrightarrow S_2; \circ_h : S_h \times S_h \dashrightarrow S_h$$

– alors que la composition horizontale des parties est un sous-ensemble \circ_H de $(S_2 \times S_2 \times S_2)$

dont on appellera les éléments interactions. On écrira parfois $I \in I_1 \circ I_2$ à la place de $(I, I_1, I_2) \in \circ_H$.

Ces données donnent lieu à quatre structures catégoriques,

— $\mathfrak{S}_h = \{S_0, S_h, \circ_h, id_h\}$ est une demi-catégorie qu'on va maintenant appeler demi-catégorie horizontale,

— $\mathfrak{S}_v = \{S_0, S_v, \circ_v, id_v\}$ est une catégorie qu'on appellera catégorie verticale,

— $\mathfrak{S}_V = \{S_h, S_2, \circ_V, id_V\}$ est une catégorie qu'on appellera la catégorie 1-verticale,

— $\mathfrak{S}_H = \{S_v, S_2, \circ_H, id_H\}$ est une demi-catégorie faible qu'on appellera la demi-catégorie faible 1-horizontale,

Ces données doivent vérifier les conditions de compatibilités suivantes :

► (1)

src_V et but_V sont des foncteurs en ce sens que, si c est un composé (horizontal) de c' avec c'' alors $\text{src}_V(c)$ est le composé de $\text{src}_V(c')$ avec $\text{src}_V(c'')$ (resp. but_V est le composé de $\text{but}_V(c')$ avec $\text{but}_V(c'')$)

▶ (1')

src_H et but_H sont des foncteurs en ce sens que, si c est le composé vertical de c' avec c'' alors $src_H(c)$ est le composé vertical (dans \mathfrak{J}^0) de $src_H(c')$ avec $src_H(c'')$ (resp. but_H est un composé de $but_H(c')$ avec $but_H(c'')$)

▶ (2)

si h est le composé de h' avec h'' alors $id_V(h)$ est un composé (horizontal) de $id_V(h')$ avec $id_V(h'')$

de plus $id_V(h)$ est l'unique composé:

$$\{id_V(h)\} = id_V(h') \circ_H id_V(h'').$$

▶ (3)

Pour tout $d : S_0$, $id_V(id_h(d)) = id_H(id_v(d))$

▶ (4)

les fonctions src et but sur les cellules satisfont les quatre identités naturelles suivantes, pour toute cellule c ,

$$src_v(src_H(c)) = src_h(src_V(c))$$

$$src_v(but_H(c)) = but_h(src_V(c))$$

$$but_v(src_H(c)) = src_h(but_V(c))$$

$$but_v(but_H(c)) = but_h(but_V(c))$$

▶ (5)

les src et but verticales (resp. horizontales) d'une cellule identité horizontale (resp. verticale) sont des identités horizontales (resp. verticales) des sommets correspondants.

Exemple 74 – Sesqui-catégorie

Pour toute catégorie \mathfrak{C} on peut construire une sesqui-catégorie:

▶ \mathfrak{S}_h

= \mathfrak{C} (il faut se représenter les flèches horizontalement)

▶ \mathfrak{S}_v

= \mathfrak{C} (il faut se représenter les flèches verticalement)

▶ \mathfrak{S}_H

la catégorie des morphismes de \mathfrak{C} c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les morphismes de \mathfrak{C} et les morphismes sont les carrés commutatifs de \mathfrak{C} (il faut voir un carré comme un morphisme horizontal qui va du bord gauche au bord droit)

▶ \mathfrak{S}_V

= \mathfrak{S}_H (il faut voir un carré dans l'autre orientation, comme menant verticalement du bord d'en bas au bord d'en haut)

Remarque 75

Cette sesqui-catégorie est en fait une double catégorie.

Définition 76 – Condition de fenêtre

On énonce ici la condition de fenêtre des double catégories, selon la définition de

[Mel02].

Étant données quatre cellules composable au sens de la figure 5.1,

$$\begin{array}{ccccc}
 d & \xrightarrow{h} & e & \xrightarrow{h_1} & f \\
 \uparrow v & & \uparrow v_1 & & \uparrow v_2 \\
 & \Pi & & \Pi_1 & \\
 d' & \xrightarrow{h'} & e' & \xrightarrow{h'_1} & f' \\
 \uparrow v' & & \uparrow v'_1 & & \uparrow v'_2 \\
 & \Pi_2 & & \Pi_3 & \\
 d'' & \xrightarrow{h''} & e'' & \xrightarrow{h''_1} & f''
 \end{array} \quad (5.1)$$

le résultat de la composition horizontale puis verticale est le même que dans l'ordre inverse, ce résultat est traduit par l'égalité des diagrammes ci-dessous (figure 5.2) :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 d & \xrightarrow{h} & e & \xrightarrow{h_1} & f \\
 \uparrow v & & & & \uparrow v_2 \\
 & \Pi_1 \circ_H \Pi & & & \\
 d' & \xrightarrow{h'} & e' & \xrightarrow{h'_1} & f' \\
 \uparrow v' & & & & \uparrow v'_2 \\
 & \Pi_3 \circ_H \Pi_2 & & & \\
 d'' & \xrightarrow{h''} & e'' & \xrightarrow{h''_1} & f''
 \end{array} & = & \begin{array}{ccccc}
 d & \xrightarrow{h} & e & \xrightarrow{h_1} & f \\
 \uparrow v & & \uparrow v_1 & & \uparrow v_2 \\
 & \Pi \circ_V \Pi_2 & & & \\
 d' & \xrightarrow{h'} & e' & \xrightarrow{h'_1} & f' \\
 \uparrow v' & & \uparrow v'_1 & & \uparrow v'_2 \\
 & \Pi_1 \circ_V \Pi_3 & & & \\
 d'' & \xrightarrow{h''} & e'' & \xrightarrow{h''_1} & f''
 \end{array}
 \end{array} \quad (5.2)$$

Remarque 77 – Double catégorie

- Une sesqui-catégorie dans laquelle les structures catégoriques faibles sont des catégories normales et qui vérifie la condition de fenêtre définie ci-dessus est une double catégorie au sens de [Bén67].
- La structure qui motive ces définitions est celle qui est implicite au chapitre 3 et qui sera explicitée au chapitre 7.

5.5 Sesqui-catégories signées

Définition 78 – sesqui-catégorie signée

Une sesqui-catégorie signée est une sesqui-catégorie équipée d'une fonction de polarité définie sur les objets et étendue aux morphismes (verticaux et horizontaux respectivement dans \mathfrak{S}_v et \mathfrak{S}_h) comme ci-dessus, de sorte que \mathfrak{S}_h forme une demi-catégorie signée.

Définition 79 – sesqui-catégorie fallacieuse

Une sesqui-catégorie fallacieuse est une sesqui-catégorie signée, dont la demi-catégorie

| horizontale \mathfrak{S}_h est fallacieuse.

Définition 80 – La sesqui-catégorie des parties paires

Étant donnée une sesqui-catégorie signée \mathfrak{S} , on appelle \mathfrak{S}^+ la sesqui-catégorie des parties paires de \mathfrak{S} . Les données de \mathfrak{S}^+ sont :

pour S_0^+ et S_v^+ on prend respectivement S_0 et S_v ; pour S_h^+ on prend l'ensemble des positions positives de S_h ; pour S_2^+ on prend en conséquence l'ensemble des parties entre positions positives (qui est un sous-ensemble de S_2).

Pour les applications *src*, *but*, *id* on prend les restrictions correspondantes.

Proposition 81

| \mathfrak{S}^+ est une sesqui-catégorie.

Chapitre 6

Demi-catégorie des stratégies

Résumé

Dans ce chapitre on montre comment construire une demi-catégorie de stratégies $\mathcal{S}(\mathfrak{G})$ à partir d'une sesqui-catégorie vérifiant certaines conditions. Cette construction se combine à celle du chapitre suivant pour fournir le mécanisme de génération de modèles de jeux qui est l'objet central de cette étude.

6.1 Stratégies dans une sesqui-catégorie \mathfrak{G}

Définition 82 – Les données du graphe $\mathcal{S}(\mathfrak{G})$

Soit \mathfrak{G} une sesqui-catégorie, les objets de $\mathcal{S}(\mathfrak{G})$ sont les objets de \mathfrak{G} , les morphismes de $\mathcal{S}(\mathfrak{G})$ sont les stratégies dans la catégorie \mathfrak{G}_V des parties de \mathfrak{G} , et les applications source et but d'une stratégie pour une position p sont la source et le but de p dans \mathfrak{G}_h .

Dans un premier temps nous fournissons les données des fonctions de composition et d'identité, en observant qu'elles ne constituent pas pour autant des stratégies. On formulera dans un deuxième temps les hypothèses assurant que ces constructions donnent bien des stratégies.

Définition 83 – La composition dans $\mathcal{S}(\mathfrak{G})$

La composition des stratégies est définie comme suit :
étant données deux positions composables $p', p'' : \mathfrak{G}_h$, deux stratégies σ', σ'' dédiées respectivement à p' et p'' sont composables, et la composée $\sigma := \sigma' \circ \sigma''$ est dédiée à $p' \circ_h p''$. Elle est définie comme l'ensemble des parties Π qui résultent de la compo-

tion horizontale de deux parties Π' et Π'' respectivement dans σ' et σ'' :
 $\sigma' \circ \sigma'' := \{\Pi : S_2 \mid \exists \Pi', \Pi'' : S_2 \text{ avec } \Pi' \in \sigma', \Pi'' \in \sigma'' \text{ et } \Pi \in \Pi' \circ_H \Pi''\}$.

Définition 84 – Les Copycats

Les copycats sont définis comme suit :
 étant donné x de \mathfrak{S} , la stratégie $\text{copycat}(x)$, dédiée à la position $\text{id}_h(x) : x \rightarrow x$, est l'ensemble des parties identités $\text{id}_H(f)$ avec f un morphisme vertical tel que $\text{src}(f) = x$:

$$\begin{array}{ccc}
 x_0 & \xrightarrow{\text{id}_h(x_0)} & x_0 \\
 \uparrow f & \text{id}_H(f) & \uparrow f \\
 x & \xrightarrow{\text{id}_h(x)} & x
 \end{array}$$

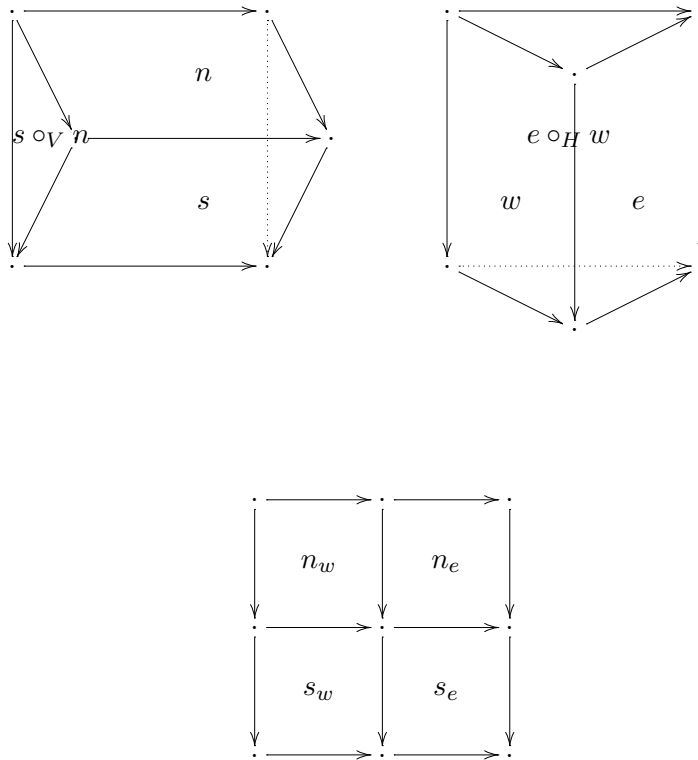
À priori ni la composée de deux stratégies ni le copycat ne sont des stratégies et la section qui suit s'enquiert de régler ces problèmes.

6.2 Sesqui-catégories stratégiques

Définition 85 – La condition “fenêtre flexible” win

Cette condition supplémentaire, qu'on note *win*, va faire que la composée de deux stratégies soit une stratégie.

On dira d'une sesqui-catégorie qu'elle est flexible si elle vérifie la condition suivante: étant données quatre parties n, s, e, w telles que $s \circ_V n \in e \circ_H w$ alors il existe n_w, n_e, s_e, s_w telles que $s \in s_e \circ_H s_w$; $n \in n_e \circ_H n_w$; $e = s_e \circ_V n_e$ et $w = s_w \circ_V n_w$



Remarque 86

Cette condition peut se traduire par les deux propriétés suivantes :

- les préfixes d'une cellule H -composée sont des composées de préfixes.
- et les suffixes d'une cellule H -composée sont des composées de suffixes.

Lemme 87

Dans une sesqui-catégorie flexible, la composée de deux stratégies est une stratégie.

Démonstration :

On doit montrer que la composée s de deux stratégies s'', s' vérifie la condition de préfixe. On se donne donc une partie Π dans s , c'est-à-dire une composée $\Pi'' \circ_H \Pi'$ avec $\Pi'' \in s''$ et $\Pi' \in s'$ et un préfixe π_1 de Π autrement dit une décomposition $\Pi = \pi_2 \circ_V \pi_1$. En appliquant la condition win à ces données, on obtient la décomposition horizontale voulue pour Π . ■

Remarque 88

Toute stratégie dédiée à une position p contient l'identité de p . Le caractère faible de la composition de $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$ découle donc directement de celui de \mathfrak{S} puisque deux stratégies ne sont composables que si les positions auxquelles elles sont dédiées sont composables.

Lemme 89 – Les copycats sont des stratégies (sous la condition Pref_{id})

Si \mathfrak{S} satisfait la condition :

(Pref_{id}) les préfixes verticaux de parties identités horizontales sont encore des parties identités horizontales,
alors les copycats sont des stratégies.

Démonstration :

Ce résultat découle directement de la condition Pref_{id} . ■

Lemme 90 – Les copycats sont des identités

Les stratégies copycat sont neutres pour la composition dans $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$.

Démonstration :

Facile grâce à la neutralité des parties identités dans \mathfrak{S}_H . ■

Lemme 91 – Associativité

Cette composition est associative.

Démonstration :

Facile grâce à l'associativité de la composition dans \mathfrak{S}_H . ■

Définition 92 – Sesqui-catégorie stratégique

Une sesqui-catégorie stratégique est une sesqui-catégorie fallacieuse qui vérifie la condition win et dont la sous-catégorie des parties paires vérifie Pref_{id} .

Théorème 93 – La demi-catégorie de stratégies associée à une sesqui-catégorie

Étant donnée une sesqui-catégorie stratégique \mathfrak{S} alors $\mathcal{S}(\mathfrak{S}^+)$ est une demi-catégorie.

De plus :

- *l'ensemble des stratégies dédiées à des positions d'une sous-demi-catégorie de \mathfrak{G}_h^+ forme une sous demi-catégorie de $\mathcal{S}(\mathfrak{G}^+)$*
- *l'ensemble des stratégies dédiées à des positions d'une sous catégorie de \mathfrak{G}_h^+ forme une sous-catégorie de $\mathcal{S}(\mathfrak{G}^+)$.*

Chapitre 7

La sesqui-catégorie signée associée à un jeu d'équipe

Résumé

Dans ce chapitre on définit une notion de jeu d'équipe, puis on reprend la construction du chapitre 2 à partir d'un tel jeu d'équipe \mathfrak{S} pour obtenir une sesqui-catégorie stratégique $\mathcal{V}(\mathfrak{S})$.

On reprend ici la construction du chapitre 2 en partant d'une demi-catégorie signée munie de données supplémentaires. On baptise cette structure *jeu d'équipe*. Nantis d'un jeu d'équipe \mathfrak{S} , on va fabriquer, de manière similaire à celle déployée dans le chapitre 2, une sesqui-catégorie stratégique $\mathcal{V}(\mathfrak{S})$. Après quoi, on hérite donc de la demi-catégorie de stratégies produite par la construction du chapitre précédent. La nouvelle construction diffère de celle du chapitre 2 notamment par les règles de signes qui imposent naturellement l'alternance des parties.

En repassant de façon édulcorée sur l'étude du chapitre 2 on insistera sur les nouveautés qu'on y apporte.

7.1 La notion de jeu d'équipe

Définition 94 – Jeu d'équipe

Un jeu d'équipe \mathfrak{S} consiste en :

- une demi-catégorie fallacieuse \mathcal{J} dont on appellera ports les objets et positions les morphismes,
- deux familles \mathcal{J}_1^f et \mathcal{J}_1^b , de morphismes négatifs de \mathcal{J} ; on note \mathcal{J}_1^\bullet la réunion disjointe de ces deux familles.

Notations :

\mathcal{J}_1^\bullet est donc la réunion disjointe de deux familles \mathcal{J}_1^f et \mathcal{J}_1^b à valeurs dans \mathcal{J}_1^- . On dira que \mathcal{J}_1^f est la famille des coups forward et \mathcal{J}_1^b celle des coups backward de \mathfrak{S} . On dira aussi que ces coups sont des 0-coups, pour mieux les distinguer des 1-coups, qu'on introduit plus loin. On note **src** et **but** les applications définies sur \mathcal{J}_1^\bullet qui, à un coup, associent respectivement la source et le but de son image dans \mathcal{J}_1^- . Pour distinguer facilement les coups forward des coups backward, on notera les premiers avec une flèche vers la droite (par exemple \overrightarrow{c}) et les seconds avec une flèche vers la gauche (\overleftarrow{c}).

Pour la suite de ce chapitre on se donne un jeu d'équipe \mathfrak{S} , et on fabrique une sesqui-catégorie stratégique $\vartheta(\mathfrak{S})$. On dira stratégies dans \mathfrak{S} pour parler des stratégies dans la sous-catégorie des parties paires de $\vartheta(\mathfrak{S})$.

Dans les quatre sections à venir on va expliquer comment construire les données pour les quatre structures catégoriques \mathcal{J} , \mathfrak{J}^0 , \mathfrak{J}_1 , \mathfrak{J}^1 qui constitueront la sesqui-catégorie $\vartheta(\mathfrak{S})$ (respectivement $\vartheta(\mathfrak{S})_h$, $\vartheta(\mathfrak{S})_v$, $\vartheta(\mathfrak{S})_H$ et $\vartheta(\mathfrak{S})_V$).

7.2 La catégorie 0-horizontale

La demi-catégorie \mathcal{J} , donnée dans le jeu \mathfrak{S} , constitue la partie 0-horizontale de $\vartheta(\mathfrak{S})$: $\vartheta(\mathfrak{S})_h$. Les ports et positions de la sesqui-catégorie $\vartheta(\mathfrak{S})$ sont donc les ports et positions du jeu d'équipe.

7.3 La catégorie 0-verticale

Définition 95 – Le graphe des coups

On définit le graphe $G\mathcal{J}_1^\bullet$ dont les sommets sont les objets (ports) de \mathfrak{S} (\mathfrak{S}_0) et l'ensemble des arêtes est l'ensemble des coups $\mathcal{J}_1^\bullet = \mathcal{J}_1^f \amalg \mathcal{J}_1^b$, les applications **src** et **but** étant définies comme suit :
la source (resp. le but) d'un coup c donné est $\text{src}(c)$ (resp. $\text{but}(c)$) si c est forward et $\text{but}(c)$ (resp. $\text{src}(c)$) dans le cas contraire.

Remarque 96

Ce graphe est naturellement signé (biparti).

Définition 97 – La catégorie verticale $\vartheta(\mathfrak{S})_v : \mathfrak{J}^0$

La catégorie 0-verticale de $\vartheta(\mathfrak{S})$ est la catégorie libre \mathfrak{J}^0 engendrée par le graphe $G\mathcal{J}_1^\bullet$ des coups (voir définition 19 du chapitre 2).

7.4 La catégorie 1-verticale

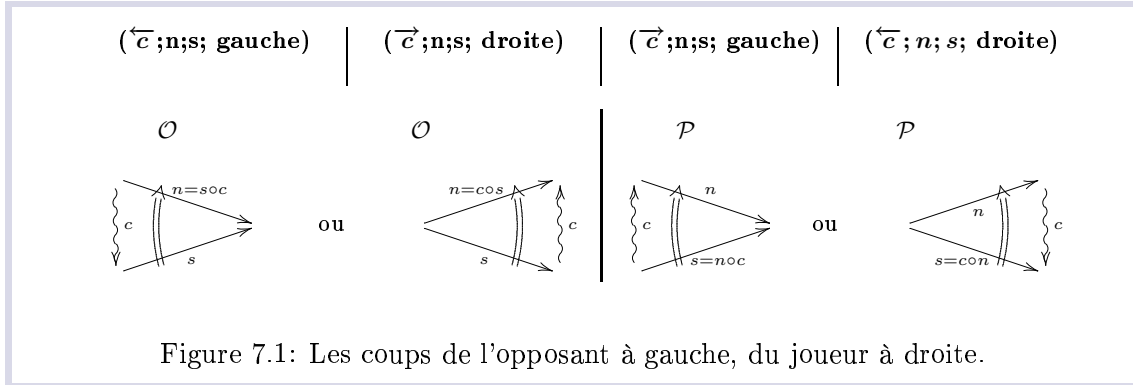
On construit, comme au chapitre 2, l'ensemble des biplexes \mathcal{J}_2^\bullet , le graphe des biplexes $G\mathcal{J}_2^\bullet$ et la catégorie 1-verticale \mathfrak{J}^1 .

La catégorie verticale \mathfrak{J}^1 de \mathfrak{S} est la catégorie libre engendrée par le graphe $G\mathcal{J}_2^\bullet$ des biphexes. Un biphexe est un triangle de \mathcal{J}_2 dont un petit côté est muni d'un antécédent dans \mathcal{J}_1^\bullet . Il y a donc des biphexes forward et des biphexes backward. Le graphe des biphexes a pour sommets les positions de \mathcal{J}_1 , et pour arêtes les biphexes. Ce graphe est maintenant signé, puisque les arêtes sont signées et que la source et le but (verticaux) d'un biphexe sont de signes contraires.

On a quatre sortes de biphexes et dans chaque cas les signes des positions sont imposés par les contraintes de commutativité. Sur les schémas, on représente les coups par des flèches torsadées. Sur le schéma ci-dessous, $(\overleftarrow{c}; n; s; droite)$, par exemple, désigne un biphexe dont le coup \overleftarrow{c} est forward et les deux autres côtés du triangle sont n et s ; la mention droite indique que c est le petit côté de droite.

Dans l'exemple des jeux HO , ces biphexes correspondent aux coups constituant une partie dans une arène flèche. Pour cette raison, on dit aussi 1-coup à la place de biphexe, ou même tout simplement coup, quand ça ne prête pas à confusion.

Et parmi ces coups, on distingue ceux du joueur et ceux de l'opposant. Les coups de l'opposant, ou \mathcal{O} -coups, sont définis comme ceux dont la source est positive, et ceux du joueur, ou \mathcal{P} -coups, comme ceux dont le but est positif. Avec cette définition, les parties sont des suites alternant les \mathcal{O} -coups et les \mathcal{P} -coups. Les \mathcal{O} -coups étant négatifs, le signe de la position courante détermine le joueur qui est attendu pour jouer de sorte que dans une position positive, seul l'opposant peut jouer et au contraire dans une position négative, seul le joueur peut jouer. Le fait que les \mathcal{O} -coups soient négatifs impose l'alternance des joueurs dans les parties.



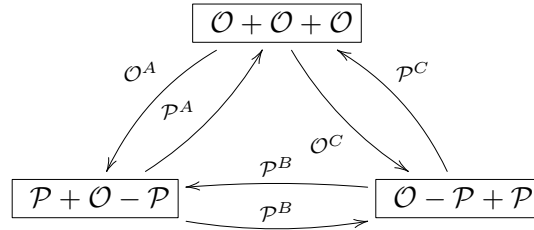
Définition 98 – La catégorie 1-verticale de $\mathcal{V}(\mathfrak{S})_V : \mathfrak{J}^1$

On obtient la catégorie 1-verticale de $\mathcal{V}(\mathfrak{S})_V$ comme au chapitre 2 (définition 25) en appliquant la construction de Mac Lane au graphe des biphexes $G\mathcal{J}_2^\bullet$.

7.5 La catégorie 2-verticale

On définit comme au chapitre 2 le graphe $G\mathcal{J}_3^\bullet$ dont les sommets sont les triangles de composition dans \mathcal{J} . On distingue les triangles positifs, dont les trois côtés sont positifs,

des triangles négatifs, dont deux côtés sont négatifs. Le signe d'un triangle est celui de son grand côté. On dit que l'état d'un triangle positif est $++$, tandis que celui d'un triangle négatif est $+-$ ou $-+$ selon que le premier petit côté est positif ou négatif. On a donc trois états, et les flèches de notre graphe vont concrétiser les six façons de passer de l'un de ces états à l'autre et on retrouve ainsi le diagramme des états familier en sémantique des jeux :



Notre graphe n'est donc pas signé. Voyons maintenant quelles sont ses flèches, les *triplexes*.

Définition 99 – Triplexes

Un triplexe est un tétraèdre d'associativité de \mathcal{J} , autrement dit un élément de \mathcal{J}_3 , dont un petit côté est muni d'une direction.

Comme on l'a expliqué dans le chapitre 2, les triplexes qui proviennent d'un même tétraèdre se distinguent par le petit côté sélectionné (trois choix possibles) et par la direction (deux choix possibles). Ces six choix correspondent aux six changements d'états possibles.

Définition 100 – La catégorie \mathfrak{J}^2

La catégorie 2-verticale \mathfrak{J}^2 des interactions est la catégorie libre engendrée par le graphe $G\mathcal{J}_3^\bullet$ des triplexes (voir définition 31 du chapitre 2).

On appelle aussi interactions les morphismes de cette catégorie 2-verticale. On décrit donc les interactions par un procédé analogue à celui décrit dans la section 2.3. Nos biplexes correspondaient à des coups dans une partie à deux, dans une arène flèche. Les triplexes quant à eux peuvent être interprétés comme des coups dans une partie à trois. Il faut voir une interaction comme une joute que se livrent une équipe de deux joueurs d'une part et un opposant d'autre part, l'opposant joue dans la position composée, (comme dans les jeux habituels [Har99]) alors que les deux joueurs collaborent au travers d'un port central qui leur permet de cumuler leur savoir-faire (chacun sur l'une des deux positions internes). En d'autres termes l'opposant joue sur une position $A \rightarrow C$ tandis que le joueur j_1 joue sur $A \rightarrow B$ et le joueur j_2 sur $B \rightarrow C$, de sorte que j_1 sait jouer sur A et j_2 sur C , B leur sert donc à se passer la main pour répondre à l'opposant sur $A \rightarrow C$. D'autre part les joueurs, doivent interpréter (comme dans les jeux *HO*) les coups de l'opposant comme des coups dans leur arène respective, j_1 doit interpréter les coups de l'opposant à gauche dans $A \rightarrow C$ comme des coups dans $A \rightarrow B$ alors que j_2 doit interpréter les coups de l'opposant à droite dans $A \rightarrow C$ comme des coups dans $B \rightarrow C$ pour pouvoir y répondre. Et inversement, les coups des joueurs dans les arènes internes doivent s'interpréter comme des coups dans la projection externe. Et c'est le rôle que

jouent les triplexes, ils traduisent un coup d'une position dans une autre : par exemple, on est dans une interaction, c'est-à-dire dans un triangle de composition de parties et le biplexe source de mon triplex est le sommet courant de cette interaction, alors l'opposant peut jouer son coup dans $A \rightarrow C$ et le triplex (c'est-à-dire l'associativité de \mathcal{J}) me donne la réalisation de ce coup dans la position $A \rightarrow B$ (si le coup était dans A).

Et d'autre part un triplex qui réalise un coup de j_1 (qui joue dans $A \rightarrow B$) dans B par exemple, peut être interprété comme la traduction de ce coup en un coup de l'opposant dans $B \rightarrow C$ puisque la réalisation de ce nouveau coup s'obtient par associativité de \mathcal{J} une nouvelle fois.

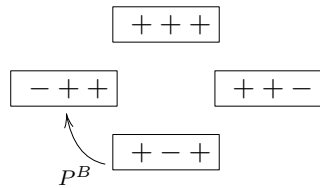
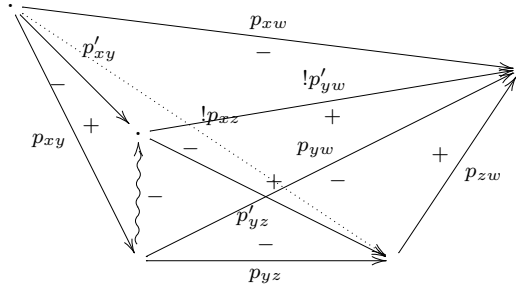
Ceci valorise notre choix d'équiper les coups d'une direction *forward* et *backward*: c'est ce qui permet à chacune des six traductions d'être exprimées en termes d'associativité dans \mathcal{J} .

On peut distinguer deux sortes parmi ces réalisations puisque l'une d'elles correspond au passage de main des joueurs entre eux, d'une arène interne à l'autre, passage contravariant puisqu'il traduit un coup de joueur en un coup d'opposant, tandis que la deuxième est une traduction d'un coup de l'opposant vu comme le même coup mais dans une arène différente, changement covariant en ce sens que ce coup reste un coup de l'opposant ou inversement une traduction d'un coup d'un joueur qui reste aussi un coup de joueur.

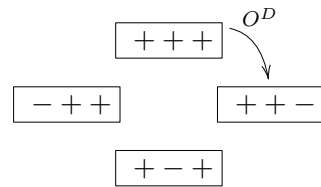
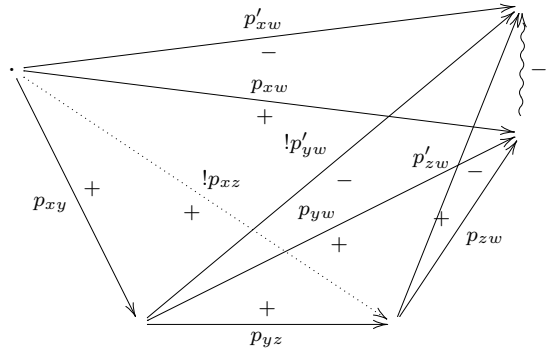
7.6 Les interactions à quatre

La description de la catégorie 3-verticale (et des suivantes) est tout à fait analogue à celle qu'on vient de donner. On se contente de remarquer ici que les tétraèdres de composition de \mathcal{J}_3 respectent une certaine discipline sur les signes, à savoir qu'au plus un des petits côtés est affublé du signe $-$ (sinon on serait forcément amené à composer deux flèches négatives). On distingue donc quatre différents "états" pour les tétraèdres de \mathcal{J}_3 (qui sont les sources ou les buts verticaux des quadriplexes de \mathcal{J}_4^\bullet), ces états sont déterminés par la suite des signes des trois petits côtés du tétraèdre ($+++$, $++-$, $+ - +$ et $- + +$). Les parties à quatre respectent naturellement une certaine forme d'alternance entre ces quatre états décrite par les figures ci-dessous :

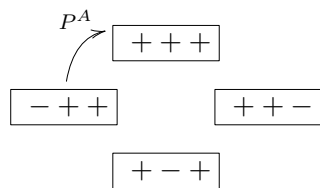
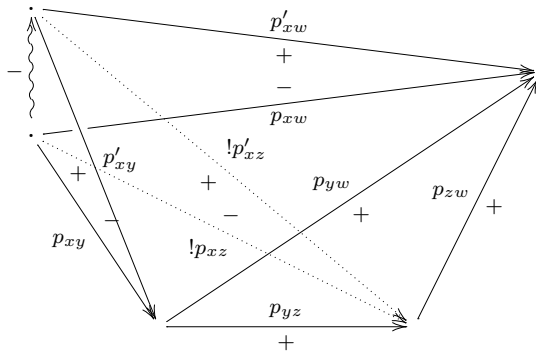
$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$



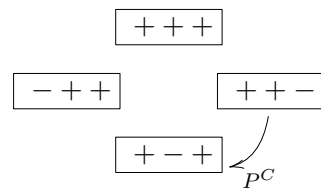
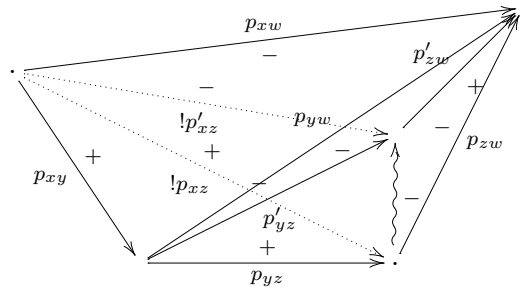
$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$

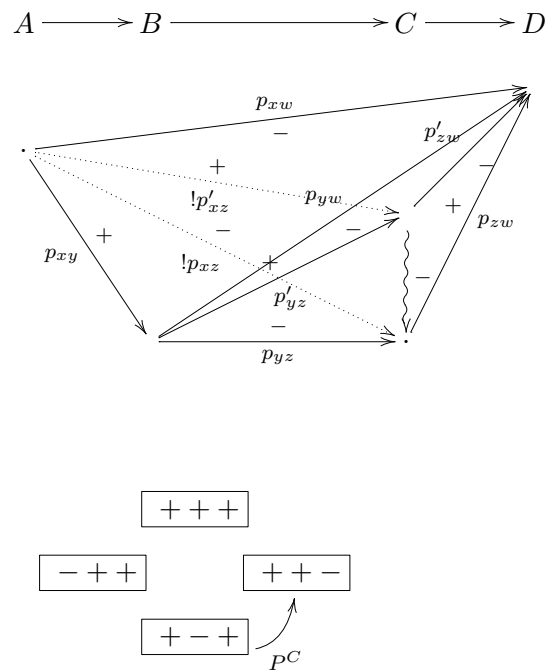
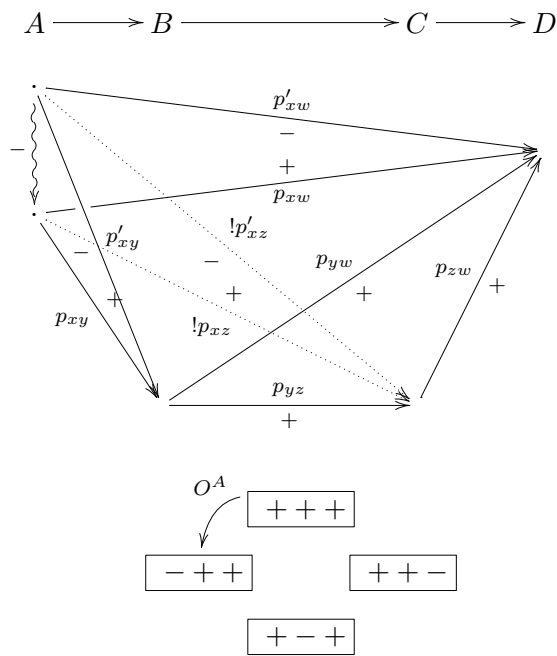
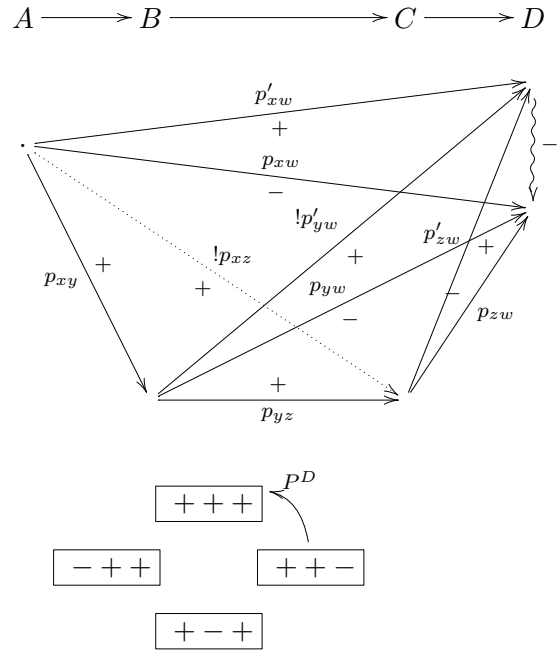
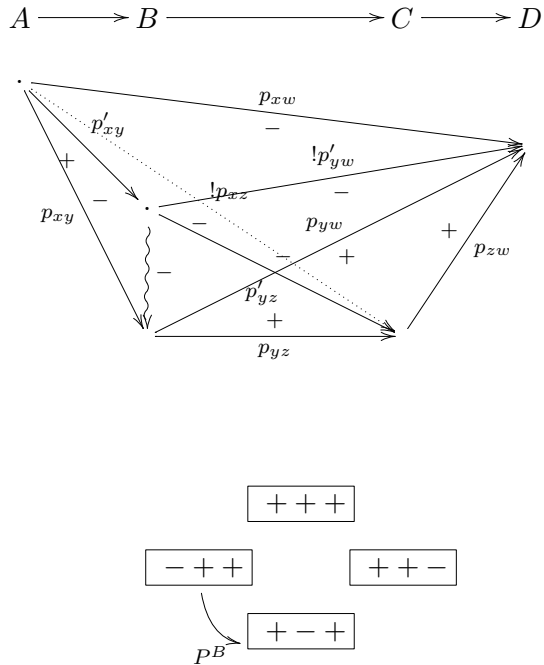


$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$



$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$

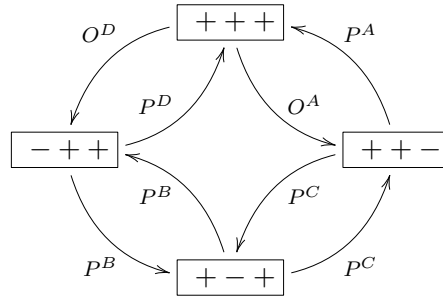




Remarque 101 – Le diagramme des états à 4

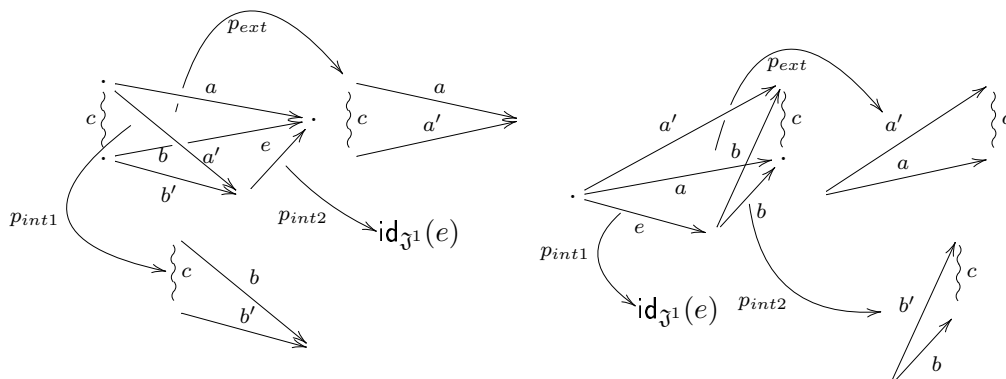
Comme précédemment, en mettant comme relation d'équivalence sur les triplexes

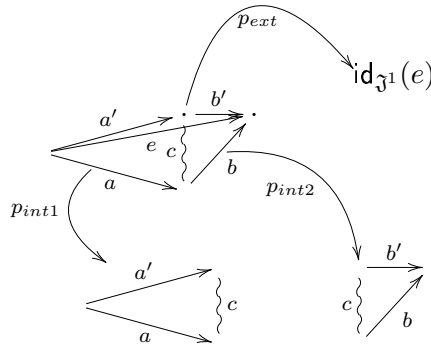
celle qui lie les triplexes de même état (il y a donc quatre classes de triplexes) de la même façon on distingue les quadriplexes selon la transition qu'ils incarnent, on remarque alors que les fonctions source et but sur les quadriplexes passent au quotient. Cette remarque traduit le fait que nos interactions à quatre respectent le diagramme des états usuel de HO . [Har99].



7.7 Les projections

La structure de catégorie simpliciale comporte en particulier des foncteurs entre nos trois catégories verticales. Par exemple on définit comme au chapitre 2 (voir définition 32) les foncteurs p_{int1} , p_{int2} et p_{ext} de \mathfrak{J}^2 dans \mathfrak{J}^1 qui sont les images par l'adjonction de Mac Lane des trois projections horizontales d'un triplex. Les figures suivantes font apparaître ces trois projections p_{int1} , p_{int2} , $p_{ext}: G\mathcal{J}_3^\bullet \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{J}^1)$. La direction du coup n'est pas indiquée sur les dessins puisqu'elle n'intervient pas.





7.8 La demi-catégorie 1-horizontale

On décrit maintenant notre structure 1-horizontale. On connaît déjà les objets, qui sont les morphismes de la catégorie 0-verticale, c'est-à-dire les 0-parties, et on connaît les morphismes, qui sont aussi ceux de la catégorie 1-verticale, c'est-à-dire les 1-parties. La source et le but sont donnés par les deux projections de la catégorie 1-verticale dans la catégorie 0-verticale. Expliquons maintenant la composition.

Définition 102 – Composition dans \mathfrak{Z}_1

Étant données trois parties Π, Π_1, Π_2 on va dire que Π appartient à $\Pi_2 \circ_{\mathfrak{Z}} \Pi_1$ dès que $\Pi, \Pi_1,$ et Π_2 sont trois projections d'une même interaction dans \mathfrak{Z}^2 , plus précisément quand Π est la projection externe p_{ext} et Π_2 et Π_1 respectivement les projections internes p_{int2} et p_{int1} .

Théorème 103

Cette composition est associative.

Démonstration :

La démonstration du chapitre 2 s'adapte sans changement. ■

Remarque 104

Ce théorème généralise les résultats de [BDER97] notamment le “zipping lemma” et le théorème d'associativité qui en découle.

Théorème 105 – Propriété du copycat

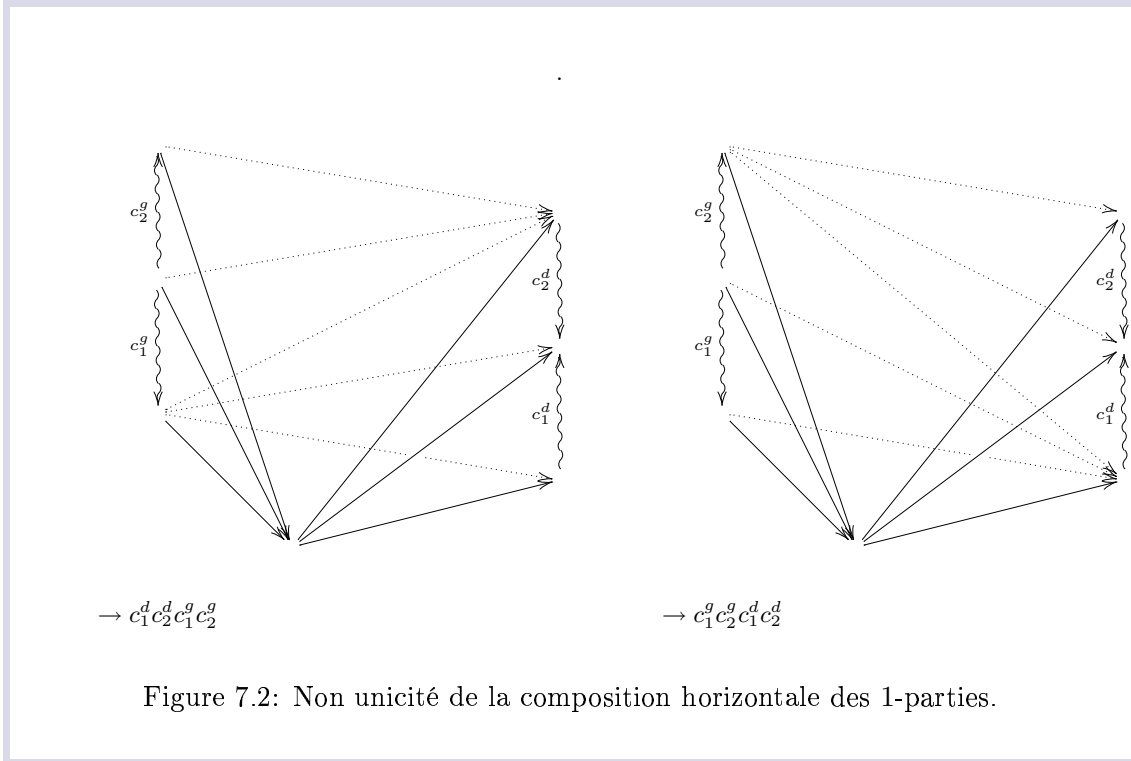
• Si l'on pré-compose ou post-compose une partie paire Π de $\vartheta^+(\mathfrak{S})$ avec un copycat on obtient $\{\Pi\}$.

Démonstration :

Preuve facile par induction sur Π . ■

► La composition des parties est multivaluée (voir fig. 7.2)

l'exemple qui suit est une illustration de la non unicité de la composition de \mathfrak{J}_1 que l'on vient de définir. Le dessin de la figure 7.2 montre deux interactions qui ont les mêmes projections internes mais qui diffèrent par leur projection externe. On dénote, en dessous de chaque interaction, l'ordre des coups de leur projection externe.



Remarque 106 – Composition multi-valuée des parties

Comme on l'explique dans la remarque 40, la composition des parties n'est pas fonctionnelle en ce sens qu'elle peut produire un ensemble de parties. La loi sur les signes autorise les deux entrelacs de la figure 7.2.

7.9 Propriétés de la sesqui-catégorie $\vartheta(\mathfrak{S})$

Théorème 107 – $\vartheta(\mathfrak{S})$ est une sesqui-catégorie stratégique

$\vartheta(\mathfrak{S})$ est une sesqui-catégorie qui vérifie la condition de fenêtre flexible et la condition Pref_{id} .

Démonstration :

Il reste à vérifier la condition de fenêtre flexible, qui découle du caractère libre de la construction (les préfixes d'une composée sont des composées de préfixes) et la condition Pref_{id} pour la sous-catégorie des parties paires. Mais alors les préfixes impairs (rencontrés dans les premiers chapitres) n'existent plus de sorte que tout préfixe d'une partie identité est encore une partie identité. ■

On note $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$ la demi-catégorie $\mathcal{S}(\vartheta(\mathfrak{S})^+)$.

Théorème 108 – Déterminisme de la composition dans $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$

La composition des stratégies sur \mathfrak{S} préserve le déterminisme.

Dans le contexte de la preuve qui met en jeu une interaction où $\Pi = \Pi'' \circ \Pi'$, on utilise localement la terminologie suivante :

- ici *droite* désigne la projection droite de l'interaction, c'est-à-dire la projection interne \mathfrak{p}_{int2}
- tandis que *gauche* désigne la projection gauche de l'interaction, c'est-à-dire la projection interne \mathfrak{p}_{int1} (voir définition 32).

Démonstration :

Soit $\sigma = \sigma'' \circ \sigma'$ une stratégie composée de deux stratégies déterministes et montrons que σ est déterministe. Soit donc Π une partie impaire dont tous les préfixes pairs sont acceptés par σ . Alors le plus grand préfixe pair de Π s'écrit $\Pi_0 = \Pi'' \circ \Pi'$ avec $\Pi' \in \sigma'$ et $\Pi'' \in \sigma''$. Traitons par exemple le cas où le dernier coup c de Π , est à droite et notons c'' sa traduction à droite (*i.e.* dans Π''). On doit démontrer que Π a au plus une réponse à c . Si Π'' n'a pas de réponse à c'' , alors Π n'a pas de réponse à c . Si la réponse r'' de Π'' à c'' est à droite, alors la seule réponse possible de Π à c est la traduction de r'' . Considérons maintenant le dernier cas, où r'' est à gauche. Trois cas peuvent se produire : soit, à partir de cette position, la partie Π'' va toujours répondre à gauche et Π' à droite, auquel cas Π n'a pas de réponse à c ; soit par exemple Π' finit par répondre à gauche un coup c' auquel cas la traduction de c' est la seule réponse possible de Π à c . Le troisième cas, où Π'' finit par répondre à droite est analogue. ■

Théorème 109 – La composition dans $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$ préserve les stratégies gagnantes

Les stratégies gagnantes sont stables par composition.

Démonstration :

Soit $\sigma = \sigma'' \circ \sigma'$ une stratégie composée de deux stratégies gagnantes et montrons que σ est robuste. Soit donc Π une partie impaire dont tous les préfixes pairs sont acceptés par σ . Alors le plus grand préfixe pair de Π s'écrit $\Pi_0 = \Pi'' \circ \Pi'$ avec $\Pi' \in \sigma'$ et $\Pi'' \in \sigma''$. Traitons par exemple le cas où le dernier coup c de Π , est à droite et notons c'' sa traduction à droite. On doit démontrer que Π a au moins une réponse à c . Si une

réponse r'' de Π'' à c'' est à droite, alors une réponse possible de Π à c est la traduction de r'' . Considérons maintenant le cas où r'' est à gauche. Nous devons considérer trois cas : soit à partir de cette position, Π'' va toujours répondre à gauche et Π' à droite; ce cas n'est pas possible parce que Π' par exemple n'accepte pas de partie infinie. Soit par exemple Π' finit par répondre à gauche un coup c' auquel cas la traduction de c' est une réponse possible de Π à c . Le troisième cas, où Π'' finit par répondre à droite, est analogue. ■

Proposition 110 – Demi-fenêtre inclusive

La window condition usuelle (définition 76) (dans les double-catégories) n'est pas vérifiée par $\vartheta(\mathfrak{S})$ mais devient la demi-fenêtre inclusive :

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot
 \end{array}$$

n_w n_e
 s_w s_e

On appelle condition de demi-fenêtre inclusive la condition suivante : $(n_e \circ_H n_w) \circ_V (s_e \circ_H s_w) \subseteq (n_w \circ_V s_w) \circ_H (n_e \circ_V s_e)$.

Qui est une version faible de la condition 76. Le fait de composer d'abord horizontalement impose un rendez-vous c'est-à-dire une synchronisation au niveau du pliage horizontal médian. Ceci illustre bien la différence qu'induit la faiblesse des catégories horizontales, puisqu'en composant d'abord verticalement on a plus de liberté.

Conclusion

La construction polarisée complète donc celle des chapitre 2 et 3 comme on l'espérait. En effet, le copycat devient élément neutre, la composition, moins permissive, est régie par le diagramme des états qui minimise la multi-valuation de sorte que la catégorie des parties qu'on obtient devient un cadre approprié à y modéliser des jeux.

Partie III
Exemples

Chapitre 8

Timings

Résumé

Dans ce chapitre, on construit des exemples de jeux d'équipe, que nous appelons jeux de timings, et qui servent plus loin dans la description de jeux plus complexes (chapitre 9).

Les formes de parties

Ici nous allons décliner différentes versions de catégories de timings. Nous ne donnons pas une définition abstraite de timing, mais seulement des exemples de jeux d'équipes qu'il nous semble raisonnable d'appeler jeux de timings.

Un timing correspond à une forme (ou squelette) de partie qui se destine à être réalisée dans une arène (concrète). On verra au chapitre suivant comment interpréter une partie HO comme un morphisme d'un timing dans une arène. Les timings HO que nous définissons sont des arènes, avec justification. Quant à nos timings AJM , ce sont des suites finies de parenthèses: les parenthèses ouvrantes correspondent à des questions et sont aussi notées Q , tandis que les fermantes représentent les réponses et sont aussi notées R . Ces timings AJM ne comportent donc pas de justification.

8.1 Le jeu hoT des timings HO

On définit le jeu hoT comme suit.

8.1.1 Les objets

Un ho -timing est un graphe signé fini, à justification unique (c'est-à-dire que chaque sommet est l'origine d'au plus une flèche), sans cycle (c'est-à-dire que la fonction partielle de

justification n'a pas de cycle, autrement dit pas de solution non triviale à $f^n(x) = x$ et où tous les sommets initiaux (*i.e.* non justifiés) sont positifs. On note $Init(a)$ l'ensemble des sommets initiaux de a .

Définition 111 – Le signe des timings

est la parité de son nombre de sommets.

On explique plus bas pourquoi ces timings ne sont pas totalement ordonnés, à la différence des parties HO .

8.1.2 Les morphismes

Un morphisme (horizontal) de ho -timings de a vers b est une application de $Init(a)$ dans $Init(b)$. Cette définition nous permettra, au prochain chapitre, d'interpréter une partie HO dans l'arène flèche $A \rightarrow B$ comme un couple formé d'un morphisme d'un timing a dans A (c'est-à-dire une partie dans A) et d'un morphisme d'un timing b dans B (c'est-à-dire une partie dans B), muni d'un morphisme (horizontal) de a dans b .

8.1.3 La composition

La composition des morphismes est la composition usuelle des fonctions, mais on interdit les compositions de morphismes négatifs.

8.1.4 La demi-catégorie horizontale

Par construction, nous définissons donc une demi-catégorie fallacieuse. On remarque que dans cette demi-catégorie, deux timings peuvent être isomorphes sans avoir le même nombre de coups (il doivent cependant avoir la même parité et le même nombre de coups initiaux).

8.1.5 Les coups

Nos coups sont ce qu'on peut appeler les 1-extensions. Un morphisme m de source a et de but b est un coup forward si m s'étend en un morphisme de graphes signés qui est un isomorphisme de a sur b privé d'un coup positif.

Parallèlement, un morphisme m de source a et de but b est un coup backward si m est bijectif et m^{-1} s'étend en un morphisme de graphes signés qui est un isomorphisme de b sur a privé d'un coup négatif. Ici, il faut bien voir que dans la catégorie horizontale les coups backward ont un coup de plus à la source qu'au but, mais dans la catégorie verticale, comme ils sont retournés, c'est au but qu'ils ont un coup de plus.

8.1.6 La demi-catégorie verticale

On vérifie facilement qu'un morphisme vertical $m : a \rightarrow b$ de ho -timings est une injection de timings (autrement dit : un morphisme d'arènes injectif sur les sommets), munie d'un ordre total sur les sommets de b qui ne sont pas dans l'image de m , cet ordre étant compatible avec les justifications.

En effet, quand on fait notre construction de MacLane, les morphismes deviennent des suites de 1-extensions puisqu'on empile plusieurs coups, mais aussi on se souvient de l'ordre dans lequel on les a empilés. Il y a donc un ordre seulement sur les coups ajoutés. On voit donc ici que le fait que nos timings ne soient pas totalement ordonnés n'empêche pas nos parties d'être totalement ordonnées (notamment on part d'une pile vide). Si nous avons choisi de ne pas ordonner nos timings, c'est pour assurer que la demi-catégorie horizontale soit stricte. En effet, cette condition figure dans nos définitions générales, bien qu'on puisse vraisemblablement s'en dispenser.

8.2 Le jeu ρT des timings rho

On définit le jeu ρT comme “responsive HO timings”, qui est une variante très proche de hoT .

8.2.1 Les objets

Les ρ -timings sont des ho -timings disposant d'une deuxième fonction de polarité sur les sommets.

Pour un timing t , on la nomme $\lambda_t^{Q/R}$ par similitude avec celle des jeux HO usuels (la première pourrait s'appeler $\lambda_t^{O/P}$), et on note les deux valeurs qu'elle peut prendre Q et R (pour **question** ou **réponse**).

Cette fonction de polarité respecte les mêmes règles que d'habitude :

-(ho_1)- si un coup c est initial dans un timing t alors $\lambda_t^{O/P}(c) = \mathcal{O}$ et $\lambda_t^{Q/R}(c) = Q$

-(ho_2)- si on a $c \vdash_t c'$ alors $\lambda_t^{Q/R}(c) = Q$

8.2.2 La demi-catégorie

Les morphismes (horizontaux) de ρ -timings sont les morphismes entre les ho -timings sous-jacents. La composition est celle des morphismes entre les ho -timings sous-jacents. On obtient bien ainsi une demi-catégorie fallacieuse.

8.2.3 Les coups

Un morphisme m de source a et de but b est un coup forward si m s'étend en un morphisme de graphes signés qui est un isomorphisme de a sur b privé d'un coup positif et compatible avec les fonctions de polarité. Parallèlement, un morphisme m de source a et de but b est un coup backward si m est bijectif et m^{-1} s'étend en un morphisme de graphes signés qui est un isomorphisme de b sur a privé d'un coup négatif et compatible avec les fonctions de polarité.

8.2.4 La catégorie verticale

On vérifie facilement qu'un morphisme vertical $m : a \rightarrow b$ de *ho*-timings est une injection de timings compatible avec les fonctions de polarité et munie d'un ordre total sur les sommets de b qui ne sont pas dans l'image de m , cet ordre étant compatible avec les justifications.

8.3 Le jeu $ajmT$ des *AJM*-timings

On définit ici le jeu des timings *AJM*.

8.3.1 Les objets

Un timing (*AJM*; dans cette section tous les timings sont *AJM*) est un triplet $\langle I, m, o \rangle$, où I est un ensemble fini et m une application de I dans l'alphabet $\{Q, R\}$, et o un ordre total sur I qui rende m bien parenthésé, au sens que sur I et sur tous ses préfixes, le nombre des Q majore celui des R . Ici, par préfixe on entend intervalle commençant, et on peut définir les préfixes d'un timing *AJM* puisque, par notre définition, tout préfixe d'un mot bien parenthésé est encore bien parenthésé.

Pour un timing $t = \langle I, m, o \rangle$, on définit sa justification (partielle) $j : I \rightarrow I_{\perp}$ qui est bien définie là où m vaut R et qui donne l'indice du Q correspondant. Ici il faut voir les Q comme des parenthèses ouvrantes et les R comme des parenthèses fermantes.

On définit la parité du timing $s = \langle I, i, p \rangle$ comme celle du cardinal de I .

8.3.2 Les morphismes

Un morphisme du timing $s = \langle I, i, p \rangle$ dans le timing $t = \langle J, j, q \rangle$ est un timing u de la forme $\langle I \amalg J, i \amalg j, \varphi \rangle$ vérifiant :

- le plus grand élément pour φ est dans J , et les ordres induits par φ sur I et J sont p et q ,
- (*stack discipline*) la justification de u induit celles de s et de t ,
- (*switching condition*) dans $I \amalg J$, les éléments de rang impair (sauf le premier) sont du même côté (I ou J) que leur prédécesseur.

8.3.3 Le copycat

Lemme 112

Soit $s = \langle I, i, p \rangle$ et $s' = \langle I', i', p' \rangle$ deux timings équivalents en ce sens qu'il existe une bijection croissante de I sur I' qui commute à i et i' (voir figure 8.1). Soit φ l'unique ordre sur $I \amalg I'$ compatible avec p et p' et dans lequel

- les éléments de rang pair ne sont pas du même côté que leur prédécesseur.
- les éléments de rang impair (sauf le premier) sont du même côté que leur prédécesseur.

Alors $(I \amalg I', i \amalg i', \varphi)$ est un morphisme de s dans s' qu'on appelle le copycat de s à s' . Si $s = s'$ on dit aussi le copycat de s .

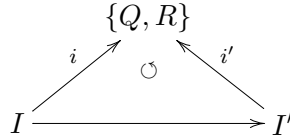


Figure 8.1: la bijection commute à i et i'

8.3.4 La composition

Lemme 113

Soient $f = \langle I \amalg J, i \amalg j, \varphi \rangle$ un morphisme du timing $r = \langle I, i, m \rangle$ dans le timing $s = \langle J, j, n \rangle$ et $g = \langle J \amalg K, j \amalg k, \psi \rangle$ un morphisme du timing s dans le timing $t = \langle K, k, p \rangle$. Si on note o la relation sur $I \amalg J \amalg K$ obtenue en prenant la clôture transitive de $\varphi \cup \psi$, alors :

- o est l'unique ordre total sur $I \amalg J \amalg K$ induisant φ et ψ ;
- si on note o' la restriction de o à $I \amalg K$, alors $\langle I \amalg K, i \amalg k, o' \rangle$ est un morphisme de r dans t .

Démonstration :

Le point crucial est que si la longueur de J est impaire, le dernier coup de ψ est dans J tandis que si cette longueur est paire, c'est le dernier coup de φ qui est forcé dans J . ■

On définit le composé de deux morphismes f et g comme dans le lemme, par la formule $(I \amalg K, i \amalg k, o')$.

Proposition 114 – T_{AJM} est une catégorie

Cette composition munit l'ensemble des timings d'une structure de catégorie fallacieuse dont les identités sont les copycats.

8.3.5 Les coups

On sélectionne comme coups les préfixes impairs des copycats. Comme coups backward, on prend ceux qui se terminent à gauche, et comme coups forward, ceux qui se terminent à droite. On remarque que dans un coup backward, la source est paire et le but est impair,

tandis que pour les coups forward, c'est la même chose. Il s'ensuit que deux coups backward (ou deux coups forward) ne sont jamais composables.

8.3.6 La catégorie verticale des timings AJM

Avec ces données on fabrique donc un jeu et on a une description agréable de sa catégorie verticale :

Proposition 115

Un morphisme vertical du timing $r = \langle I, i, m \rangle$ dans le timing $s = \langle J, j, n \rangle$ est une injection préfixe de I dans J commutant à i et j .

Démonstration :

On définit deux applications entre les deux ensembles et on montre que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. ■

8.4 Les *sho*-timings

On définit ici le jeu *sho* des timings adaptés à la *switching condition* [BDER97].

8.4.1 Les objets

Un *sho*-timing est un *ho*-timing muni d'un ordre total compatible avec les justifications et alternant sommets positifs et négatifs. On dit que deux *sho*-timings sont équivalents s'il y a entre eux une (unique) bijection croissante et compatible avec les justifications.

8.4.2 Les morphismes

Un morphisme horizontal m de *sho*-timings de a vers b est un morphisme $init_m$ entre les *ho*-timings sous-jacents, avec en plus un ordre total τ (aussi noté $<$), qu'on appelle l'entrelacs de m , sur la réunion des sommets de a avec ceux de b , le tout assujetti aux conditions suivantes.

- τ induit les ordres donnés sur a et b
- si s est un sommet initial dans a , alors $init_m(s) < s$
- τ est alterné (pour \mathcal{O}/\mathcal{P}) et vérifie la *switching condition* : les sommets positifs sont du même côté que leur prédécesseur.

On dit que l'entrelacs est copycat s'il a au plus deux sommets consécutifs du même côté.

Pour les timings *HO*, on avait pris des graphes non ordonnés pour assurer l'unicité de la composition horizontale. Ici, ce n'est plus nécessaire: on peut donc prendre des graphes ordonnés, et c'est heureux puisque, pour choisir des coups qui respectent la *switching condition*, il faut pouvoir reconstituer le dernier coup joué.

8.4.3 La composition

Ici encore, on ne compose que des morphismes dont l'un au moins est positif. Pour composer deux tels morphismes, $n : b \rightarrow c$ et $m : a \rightarrow b$, d'une part on compose la justification des sommets initiaux. D'autre part, on observe que l'ordre induit par m et n sur $a \amalg b \amalg c$ est total, et on prend sa restriction à $a \amalg c$ comme ordre total composé. On obtient bien ainsi une demi-catégorie fallacieuse.

8.4.4 Les coups

Comme coups forward, on sélectionne les morphismes $m : a \rightarrow b$ où le dernier sommet de b est positif, a est équivalent à b privé de ce dernier sommet, $init_m$ justifie les sommets initiaux par les sommets de même rang, et l'entrelacs est copycat.

Symétriquement, comme coups backward on sélectionne les morphismes $m : a \rightarrow b$ où le dernier sommet de a est négatif, b est équivalent à a privé de ce dernier sommet, $init_m$ justifie les sommets initiaux par les sommets de même rang, et l'entrelacs est copycat.

8.4.5 La catégorie verticale

On vérifie facilement qu'un morphisme vertical $m : a \rightarrow b$ de *sho*-timings identifie a comme un préfixe de b .

Chapitre 9

Le jeu HO et ses variantes

Résumé

Dans ce chapitre, on présente succinctement une théorie des jeux d'un point de vue standard. Notre présentation est largement inspirée de [Lau04] et [Har99]. Pour faire entrer complètement cette théorie dans notre cadre, nous exposons une construction abstraite qui permet aussi de fabriquer un certain nombre de variantes de la théorie HO .

9.1 Une théorie HO classique

Définition 116 – Arène

Une arène est une forêt finie, dont les nœuds sont appelés coups. La polarité d'un coup est la parité de la longueur du chemin entre ce coup et la racine de l'arbre auquel il appartient. Les racines sont de polarité \mathcal{O} , leurs fils sont de polarité \mathcal{P} . Si n est une racine de l'un des arbres, on dit que n est un coup initial ce qu'on note $\vdash n$. Si le coup n est un fils du coup m , on dit que m valide n , ce qu'on note $m \vdash n$.

On constate que ces arènes sont exactement nos ho -timings.

Définition 117 – Arène flèche

Si A et B sont deux arènes, l'arène flèche $A \rightarrow B$ est obtenue en ajoutant à B une copie de A pour chaque racine r de B et en justifiant tous les coups initiaux de cette copie par r .

Définition 118 – Suite pointée

Une suite pointée sur l'arène A est un couple (s, f) où s est une suite finie de coups de A et, si k est la longueur $|s|$ de s ($s = \overline{95} n_1 n_2 \dots n_k$), f est une fonction de $\{1, \dots, k\}$

dans $\{0, \dots, k-1\}$ telle que :

- $f(i) < i$
- si $f(i) = 0$ alors n_i est un coup initial de A
- si $f(i) = j \neq 0$ alors n_j valide n_i dans A (on dit que n_j justifie n_i dans (s, f) ou que n_i pointe sur n_j).

S'il existe $p > 0$ tel que $f^p(i) = j \neq 0$, on dit que n_j justifie héréditairement n_i dans (s, f) .

Définition 119 – Timing

A une suite pointée (s, f) de longueur k sur l'arène A on associe son timing : c'est l'arène dont l'ensemble des coups est $\{1, \dots, k\}$ et dont la justification est l'ensemble des couples $(i, f(i))$ pour $i = 1, \dots, k$ et $f(i) \neq 0$.

Définition 120 – Catégorie des arènes

On appelle morphisme entre deux arènes A et B tout morphisme de graphe envoyant les coups initiaux de A sur des coups initiaux de B . On définit évidemment ainsi une sous-catégorie notée \mathcal{A} de la catégorie des graphes.

On constate que cette catégorie n'est pas identique à notre catégorie verticale des ho -timings, qui n'en est même pas une sous-catégorie : en effet, comme on l'a vu (dans la section 8.1.6), un morphisme vertical est un morphisme d'arènes injectif, muni d'un ordre adéquat sur les coups non atteints. On a cependant un foncteur Ω de la catégorie des ho -timings dans celle des arènes :

Définition 121 – Le foncteur Ω

Dans cette section on note Ω le foncteur de la catégorie verticale ho_v des timings dans la catégorie \mathcal{A} : sur les objets, c'est l'identité (rappelons qu'un ho -timing est justement une arène), tandis que l'image d'un morphisme est l'injection préfixe sous-jacente (on oublie donc l'ordre sur la différence).

Définition 122 – Morphisme associé à une suite pointée

À toute suite pointée (s, f) de longueur k sur l'arène A de timing T , on associe l'application p de T dans A qui à i associe $s(i)$. Les conditions vérifiées par une suite pointée assurent précisément que p est un morphisme d'arènes.

Voici notre interprétation catégorique des suites pointées. Pour une arène A , on peut donc considérer l'over-catégorie $\mathcal{A} \downarrow_A$ dont on note \emptyset_A l'objet correspondant au timing vide (qui est arène initiale mais pas timing initial). Comme on a vu, une suite pointée s dans A définit un objet $\hat{s} \in \Omega(A)$ et plus précisément un morphisme $\tilde{s} : \emptyset_A \rightarrow \hat{s}$. On vérifie que s est déterminée par \tilde{s} et qu'inversement tout morphisme de source \emptyset_A est isomorphe à un unique \tilde{s} . On a donc trouvé une catégorie équivalente à celle des suites pointées dans A : l'under-catégorie qu'on note $\mathcal{A} \uparrow_{\Omega(A)}^{\emptyset}$.

Définition 123 – Partie

Une partie sur l'arène A est une suite pointée sur A dont la polarité des coups est alternée.

L'ensemble des parties sur l'arène A est noté \mathcal{P}_A .

Nous n'avons pas d'interprétation catégorique de l'ensemble des parties (alternées) dans une arène : dans le présent jeu HO (qui ne comporte pas de switching condition), nous ne sommes concernés que par les parties alternées dans une arène flèche, parties que nous savons bien interpréter, mais avant cette interprétation il nous faut introduire des constructions qu'il est plus simple de présenter de façon générale.

9.2 La construction abstraite

On donne ici une version abstraite de l'idée qui consiste à voir une partie HO comme un morphisme qui habille sa forme (son timing) dans une arène autrement dit de son timing dans son arène.

9.2.1 Les données

Pour fabriquer notre jeu J , on part d'un jeu \mathcal{T} ; les objets de \mathcal{T} sont appelés les timings de J . On se donne aussi une catégorie \mathcal{A} , une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{A} , qu'on appelle les arènes de J . Enfin on se donne un foncteur $\Omega : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ de la catégorie verticale de \mathcal{T} dans \mathcal{A} .

9.2.2 Les objets

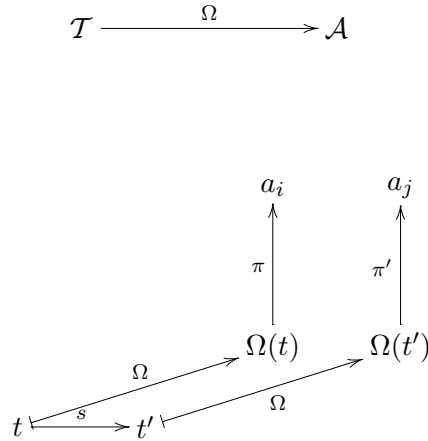
À partir de là, on introduit la catégorie signée $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T}}$ des positions : les objets, qu'on appelle aussi 0-positions, sont constitués d'un objet t de \mathcal{T} , qu'on appelle le timing de la position, d'un indice $i \in I$ (on dit que la position est dans l'arène a_i), et d'un morphisme π de $\Omega(t)$ vers a_i , qu'on appelle la trace de la position (quand on ne considère pas abusivement que ce morphisme "est" la position); un tel objet hérite du signe de t ;

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} & & a_i \\ & & \uparrow \pi \\ & & \Omega(t) \\ & \nearrow \Omega & \\ t & & \end{array}$$

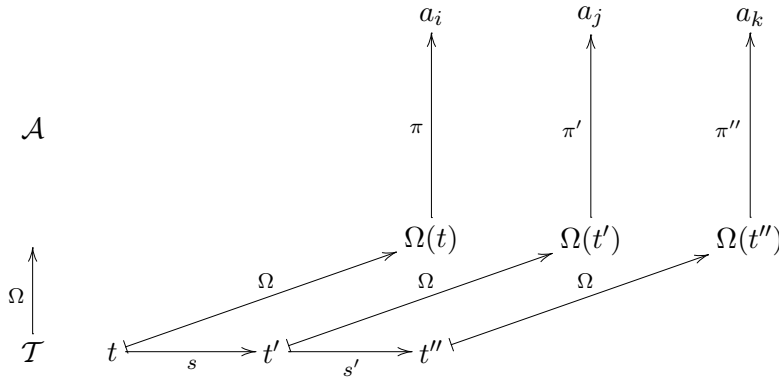
9.2.3 Les morphismes

Les morphismes de (t, i, π) vers (t', j, π') sont simplement constitués d'un morphisme horizontal (de $\vartheta(\mathcal{T})_h$) $s : t \rightarrow t'$, qu'on appelle le bord sud du morphisme. On dit aussi que ces morphismes sont les 1-positions.



9.2.4 La catégorie horizontale

Comme composition, on prend celle de \mathcal{T}_h , ce qui fait évidemment de $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T}}$ une catégorie.

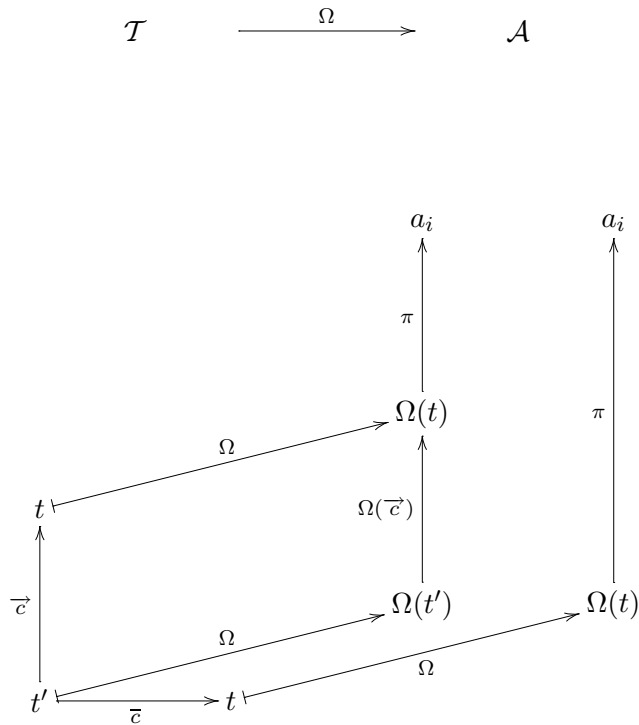


9.2.5 Les coups

On dispose donc de la catégorie $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T}}$ et, pour définir notre jeu, nous allons y sélectionner les coups.

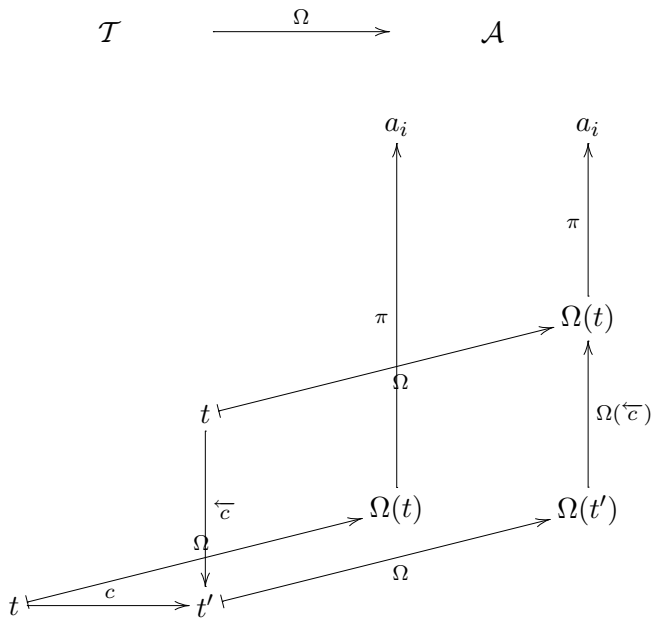
► Comme coups forward,

on sélectionne les 1-positions obtenues comme suit:
 on part d'une 0-position $\pi : \Omega(t) \rightarrow a_i$ et d'un coup forward $c : t' \rightarrow t$ de \mathcal{T}^f et on sélectionne le morphisme de $\pi \circ \Omega(c) : \Omega(t') \rightarrow a_i$ vers π dont le bord sud est c .



► Symétriquement, comme coups backward,

on sélectionne les 1-positions obtenues comme suit:
 on part d'une 0-position $\pi : \Omega(t) \rightarrow a_i$ et d'un coup backward $c : t \rightarrow t'$ de \mathcal{T}^b et on sélectionne le morphisme de π vers $\pi \circ \Omega(\overleftarrow{c}) : \Omega(t') \rightarrow a_i$, et le sud est c .



9.2.6 Vocabulaire

Ici on fait l'hypothèse supplémentaire

H_\emptyset : la catégorie horizontale de timings \mathcal{T} a un objet initial, noté $\emptyset_{\mathcal{T}}$ ou simplement \emptyset , dont l'image par Ω est aussi initiale.

Cette hypothèse est vérifiée dans tous nos exemples. Au départ, nous avons donc la catégorie (horizontale) des positions et nous observons maintenant les catégories verticales. Rappelons qu'au chapitre 7, nous avons associé à tout jeu une sesqui-catégorie qui est en particulier une catégorie simpliciale. Nous avons donc ici une première catégorie que nous appelons la catégorie 0-verticale des positions, ou la catégorie verticale des 0-positions, car ses objets sont les 0-positions, une deuxième catégorie que nous appelons la catégorie 1-verticale des positions, ou la catégorie verticale des 1-positions, car ses objets sont les 1-positions, une troisième catégorie que nous appelons la catégorie 2-verticale des positions, ou la catégorie verticale des 2-positions, car ses objets sont les 2-positions, et ainsi de suite.

Pour chaque arène A du jeu, on dispose du morphisme unique de $\Omega(\emptyset)$ dans A , qui constitue une 0-position qu'on note \emptyset_A , et qu'on appelle position initiale dans A . On appelle 0-partie dans A , ou simplement partie dans A , tout morphisme vertical de source \emptyset_A . Le but d'un tel morphisme est forcément une 0-position dans A .

Passons maintenant à la description de la catégorie 1-verticale de notre jeu J . Ses objets sont donc les 1-positions. Une 1-position comporte en particulier une source et un but, qui sont deux 0-positions dans deux arènes disons A et B , et on dit que la position est dans $A \rightarrow B$. Une 1-position comporte aussi un morphisme de timings (on dira un 1-timing). Un cas particulier intéressant est celui où le morphisme de timing est entre les deux timings vides \emptyset_A et \emptyset_B . Une telle 1-position ne dépend que de A et de B et on la note $\emptyset_{A,B}$.

De même, un morphisme vertical $m : p' \rightarrow p$ entre deux 1-positions p' et p dans $A \rightarrow B$ de 1-timings respectifs t' et t , comporte un morphisme vertical $m_T : t' \rightarrow t$. Inversement, si p est une 1-position de 1-timing t dans $A \rightarrow B$, alors se donner un morphisme vertical de but p revient à se donner le morphisme vertical $m_T : t' \rightarrow t$. En effet, la 1-position p' correspondante s'obtient en restreignant dans le sens évident p à t' . Bien entendu, à travers cette description, la composition des morphismes verticaux de 1-positions s'obtient en composant les morphismes verticaux de 1-timings.

On peut décrire la 2-catégorie verticale de façon tout à fait analogue.

9.2.7 Jeux de Yoneda

Étant donnée un jeu d'équipe \mathcal{T} , on dispose d'un foncteur privilégié auquel appliquer la construction précédente : il s'agit du plongement de Yoneda, qui envoie la catégorie verticale de \mathcal{T} (voir chapitre 1) dans $\hat{\mathcal{T}}_v$. On appelle jeu de Yoneda de \mathcal{T} le jeu ainsi construit.

Ce jeu est universel au sens suivant : si on part d'un autre foncteur $\Omega : \vartheta(\mathcal{T})_v \rightarrow \mathcal{A}$, avec une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{A} , on peut construire un foncteur $\hat{\Omega}$ de \mathcal{A} vers $\hat{\mathcal{T}}_v$ en composant le foncteur de Yoneda de \mathcal{A} avec le foncteur de $\hat{\mathcal{A}}$ dans $\hat{\mathcal{T}}_v$ obtenu en composant avec Ω . On vérifie alors que le jeu obtenu à partir des données initiales est isomorphe

(dans le sens évident) à celui obtenu avec comme foncteur le foncteur de Yoneda de \mathcal{T}_v , et comme famille d'objets la famille $\hat{\Omega}(a_i)_{i \in I}$.

9.3 Le jeu d'équipe pour HO

On revient ici sur le jeu HO . On explique d'abord, à l'aide de la construction abstraite précédente, notre présentation catégorique de ce jeu. Puis nous reprenons là où on l'a laissée, l'interprétation catégorique du jeu HO classique présenté au début de ce chapitre.

9.3.1 Le foncteur Ω pour HO

Pour reproduire le jeu HO avec la construction précédente, on choisit \mathcal{T} , \mathcal{A} et le foncteur $\Omega : \vartheta(\mathcal{T})_v \rightarrow \mathcal{A}$ comme déjà indiqué au début du chapitre:

- On prend pour \mathcal{T} le jeu ho ,
- Pour \mathcal{A} on prend la catégorie des arènes introduite en définition 120.
- Pour Ω on prend le foncteur naturel.

9.3.2 Retour sur le jeu classique

On est maintenant en mesure de reprendre notre interprétation catégorique du jeu classique HO , là où on l'a laissée, c'est-à-dire aux parties dans une arène flèche $A \rightarrow B$.

Si Π est une telle partie dans $A \rightarrow B$, on lui associe ses restrictions à A et B , qui sont des suites pointées qu'on note Π_A et Π_B . Chacune a son timing, et la justification des coups initiaux nous donne un morphisme horizontal entre ces deux timings : $\Pi_h : t\Pi_A \rightarrow t\Pi_B$. Nous avons donc là un 1-timing Π_h , mais ce 1-timing ne permet pas de reconstituer les deux suites pointées et encore moins l'entrelacs entre elles. En revanche, toute cette information se retrouve dans le morphisme qu'on note $\tilde{\Pi}_h$ du 1-timing vide $\emptyset_{A,B}$ dans Π_h obtenu en empilant les coups de Π_h dans l'ordre prescrit par l'entrelacs. L'application $\Pi \mapsto \tilde{\Pi}_h$ établit une bijection entre l'ensemble des parties classiques dans $A \rightarrow B$ et celui des classes d'isomorphisme de morphismes de source $\emptyset_{A,B}$ dans la catégorie 1-verticale.

Définition 124 – Projection

Soit s une partie sur $A \rightarrow B$; la projection de s sur A (resp. B), notée $s \upharpoonright_A$ (resp. $s \upharpoonright_B$), est la sous-suite pointée de s obtenue en ne gardant que les coups de A (resp. B).

Dans notre cadre, s correspond à un morphisme de source vide dans la catégorie 1-verticale. On obtient ses projections en lui appliquant les deux projections de la catégorie 1-verticale dans la catégorie 0-verticale.

Définition 125 – Stratégie

Une stratégie σ de l'arène A dans l'arène B est un ensemble non vide de parties sur l'arène $A \rightarrow B$ de longueur paire (appelées \mathcal{P} -parties) clos par préfixes (l'ordre préfixe

| est noté \leq) de longueur paire (ou \mathcal{P} -préfixes).

Ici nous nous écartons du point de vue de [Lau04] en n'imposant pas la condition de déterminisme. De notre point de vue, une telle stratégie apparaît comme une stratégie dédiée à la position $\emptyset_{A,B}$ dans la catégorie 1-verticale des parties paires. Remarquons que nous avons fait le choix d'accepter comme timings des ensembles finis quelconques, au lieu de nous restreindre aux intervalles d'entiers de la forme $[1, \dots, n]$ comme en théorie classique. Il faut voir que ça ne change rien ici : la condition de clôture assurant que nos stratégies ne font pas de distinction entre deux parties isomorphes.

Définition 126 – Interaction

| Soient A, B et C trois arènes, une interaction u sur A, B, C , noté $u \in \text{int}(A, B, C)$, est une suite pointée de $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ telle que $u \upharpoonright_{A,B}$, $u \upharpoonright_{B,C}$ et $u \upharpoonright_{A,C}$ sont des parties sur $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ et $A \rightarrow C$. Concernant les notations :

- $u \upharpoonright_{A,B} = u \upharpoonright_{A \rightarrow B}$,
- $u \upharpoonright_{B,C}$ est la sous-suite pointée de u obtenue en ne gardant que les coups de B et C ,
- $u \upharpoonright_{A,C}$ est la sous-suite pointée de u obtenue en ne gardant que les coups de A et C , et pour tout coup a dans A qui pointe sur b dans B (ce qui implique que b est initial dans B par définition de $A \rightarrow B$) et qui pointe lui-même sur c dans C (initial dans C par définition de $(A \rightarrow B) \rightarrow C$) on fait pointer a sur c dans $u \upharpoonright_{A,C}$ (ce qui est correct puisque c valide a dans $A \rightarrow C$).

Pour interpréter cette définition un peu technique dans notre cadre, il nous suffit d'introduire la 2-position $\emptyset_{A,B,C}$, dont le 2-timing est vide.

À une interaction I , nous associons ses restrictions à A, B, C (resp. $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ et $A \rightarrow C$) qui sont des suites pointées (resp. des parties) qu'on note I_A etc (resp. $I_{A \rightarrow B}$), toutes choses que nous avons déjà interprétées. Chacune a son 0-timing (resp. 1-timing). La condition de compatibilité requise sur les justifications exprime exactement que ces six timings sont les faces d'un 2-timing I_T qu'on appelle le timing de l'interaction. Et les six restrictions de notre interaction sont les faces d'une unique 2-position I_h . Mais, comme dans le cas des parties, cette 2-position ne permet pas de reconstituer l'entrelacs entre nos suites pointées, ni d'ailleurs les suites pointées elles-mêmes. En revanche, toute cette information se retrouve dans un morphisme, qu'on note \tilde{I}_h , de la 2-position vide $\emptyset_{A,B,C}$ dans I_h obtenu en empilant les coups de I_h dans l'ordre prescrit par l'interaction. La structure de catégorie simpliciale nous permet d'associer à ce morphisme ses trois faces, qui sont les interprétations catégoriques des trois projections de notre interaction.

Définition 127 – Composition

| Si $\sigma : A \rightarrow B$ et $\tau : B \rightarrow C$ sont deux stratégies, la composée $\sigma; \tau$ est obtenue par :

$$\sigma; \tau = \{u \upharpoonright_{A,C} \mid u \in \text{int}(A, B, C), u \upharpoonright_{A,B} \in \sigma, u \upharpoonright_{B,C} \in \tau\}$$

Cette définition ne diffère de celle que nous avons donnée que par le fait que nous travaillons avec les parties paires (mais si cette condition n'est pas mentionnée dans la définition précédente, c'est seulement parce qu'elle est automatique: si les deux projections internes d'une interaction sont paires, la projection externe l'est aussi).

Proposition 128 – Catégorie de jeux

En prenant comme objets les arènes, comme morphismes de A dans B les stratégies sur $A \rightarrow B$ et comme loi de composition “;”, on obtient une catégorie.

Démonstration :

On a reconnu ces stratégies classiques comme les stratégies dédiées aux positions vides, et la composition classique comme notre composition catégorique. On obtient donc le présent résultat en appliquant notre résultat général du chapitre 6 à la sous-catégorie des positions vides. ■

Bien entendu, la théorie qu'on a faite au chapitre 7 n'est que l'abstraction de la théorie classique. On peut cependant prétendre que l'abstraction clarifie la démarche. Certaines conditions, comme celle de compatibilité des justifications rencontrée dans la définition classique d'interaction, sont, comme on l'a vu, conceptualisées. Et dans certains cas, la structuration du contexte se propage aux preuves. Par exemple la preuve d'associativité (ou de neutralité) pour les stratégies se réduit à la preuve correspondante pour les parties (dans la demi-catégorie 1-horizontale). Une telle réduction n'est rendue possible que par l'introduction de cette demi-catégorie 1-horizontale. Dans le même ordre d'idée, notre preuve d'associativité abstraite manipule des empilements de triplexes ou de quadriplexes que la preuve classique ne met pas du tout en évidence.

9.4 *sHO*

La caractéristique spécifique de *sHO* est qu'on impose la switching condition. Pour cela, on remplace seulement le jeu de timings *ho* par *sho*.

9.5 *AJM*

On donne ici l'interprétation catégorique des jeux *AJM* classiques (cf [AJM00]).

Un jeu *AJM* classique est un quadruplet $A = (M, \lambda, P, \equiv)$ où

M est l'ensemble des coups du jeu;

$\lambda : M \rightarrow \{O, P\} \times \{Q, R\}$ une application, qui distingue les coups de l'opposant de ceux du joueur, et les questions des réponses;

P , l'ensemble des positions, est une partie non vide et stable par préfixe de l'ensemble M^\oplus des suites s de coups vérifiant:

si s est non-vide elle commence par un coup de l'opposant;

s alterne les coups du joueur et ceux de l'opposant

s est bien parenthésée, au sens que tous ses préfixes ont au moins autant de questions que de réponses;

\equiv est une relation d'équivalence sur P compatible à la longueur et à λ , compatible aux préfixes et compatible aux extensions au sens suivant: si de deux suites équivalentes, l'une admet une extension, alors l'autre admet une extension équivalente.

Notre interprétation de ce jeu est dans le jeu de Yoneda associé au jeu des timings AJM vu en 8.3.

Nous devons donc associer à un jeu classique A , comme ci-dessus, un foncteur \tilde{A} sur la catégorie verticale $tAJM_v$ des timings AJM . Pour un tel timing t , on définit $\tilde{A}(t)$ comme le quotient par \equiv de l'ensemble des applications de t dans M compatibles à λ dont la suite associée est dans P . On définit bien ainsi un foncteur puisque P est stable par préfixe et \equiv aussi. Le quotient $\overline{P} := P/\equiv$ mérite le nom d'ensemble des parties dans A . A chaque partie p , on peut associer son timing p_T , qui ne retient de la suite de coups que les valeurs dans $\{Q, R\}$, et p apparaît alors comme un élément de $\tilde{A}(p_T)$. Via le lemme de Yoneda, cet élément correspond à un morphisme de \hat{p}_T dans \tilde{A} , c'est-à-dire à une 0-position dans le jeu de Yoneda. Cette 0-position comporte autant d'information que le morphisme 0-vertical de source vide dont elle est le but, et l'ensemble \overline{P} est ainsi en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de 0-parties dans \tilde{A} pour le jeu de Yoneda.

On appelle stratégie (classique) sur A un sous-ensemble non-vide de l'ensemble P^{even} des parties paires stable par préfixes pairs et par \equiv . Cette définition diffère en deux points de celle donnée dans [AJ94]. D'abord nous imposons la stabilité sous \equiv au lieu d'identifier deux stratégies sélectionnant des représentants des mêmes classes sous \equiv , ce qui ne change rien. Ensuite dans [AJ94], on ne s'intéresse qu'aux stratégies "history-free", que notre point de vue ne permet pas bien d'identifier.

Étant donnés deux jeux classiques A et B , on construit le jeu $A \multimap B$ dont

l'ensemble M des coups est la réunion des coups de A et B ,

la polarité Q/R est celle provenant de A et B , la polarité O/P est celle provenant de B et l'opposée de celle provenant de A l'ensemble des positions est l'ensemble des suites de M^\oplus dont les restrictions à A et B sont des positions et vérifiant de plus la discipline de pile, à savoir que chaque réponse est du même côté (A ou B) que la question correspondante;

enfin la relation d'équivalence identifie deux positions de même longueur lorsqu'elles restent toujours ensemble du même côté et que leurs restrictions des deux côtés sont équivalentes.

On voit que cet ensemble de positions, qui est ordonné par l'inclusion préfixe, s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme de 1-positions dans $A \rightarrow B$ dans le jeu de Yoneda. Et une telle 1-position s'identifie à son tour au morphisme 1-vertical dont elle est le but, et de source le 1-timing vide $\emptyset_{A,B}$. De sorte que les stratégies classiques sur $A \multimap B$ s'identifient bien aux stratégies dédiées à la position vide $\emptyset_{A,B}$.

La définition de la composition des stratégies dans AJM94 prend plus d'une page. L'identification précédente entre les stratégies classiques et leur contrepartie dans le jeu de Yoneda, transforme cette composition en la composition dans le jeu de Yoneda.

Conclusion

Nous avons soutenu la thèse que le cadre naturel pour faire des jeux, c'est une catégorie (éventuellement faible, et nous avons introduit pour cela la notion de demi-catégorie) dans laquelle la règle du jeu stipule quels morphismes sont les coups forward et quels morphismes sont les coups backward. Nous avons expliqué comment un tel jeu se décrit naturellement dans une sorte de double-catégorie dont la catégorie de départ est la composante 0-horizontale tandis que la composante 1-verticale est la catégorie des parties. La composante 0-verticale ne s'interprète comme une catégorie de parties (alternées) que si on impose une "switching condition" que nous avons choisi de ne pas imposer en général. Nous avons montré comment ce cadre général permet la construction d'une catégorie des stratégies. Nous avons montré au chapitre 9 une construction abstraite de jeu qui permet de reconstruire dans notre cadre les exemples classiques (HO, AJM) et nous avons vu, sur l'exemple de HO, que notre catégorie de stratégies redonne bien la catégorie de stratégies classique.

Nous avons aussi avancé la thèse qu'un jeu, classique ou non, avait avant tout une catégorie de timings (mais nous n'avons pas donné de définition abstraite de timing). Et nous avons introduit, pour chaque catégorie de timings, le "jeu de Yoneda" correspondant. Ces jeux de Yoneda semblent être des variantes très naturelles des jeux classiques.

Notre travail n'épuise certainement pas le sujet abordé. Citons trois pistes pour des travaux futurs.

La théorie classique ne se contente pas de construire des catégories de stratégies, elle munit ces catégories d'une structure monoïdale fermée. Il y a donc lieu de raffiner nos constructions, moyennant des données et hypothèses supplémentaires, de façon à munir notre catégorie de stratégies d'une structure monoïdale fermée. Un tel projet pourrait prendre comme point de départ les jeux de Yoneda et conduire à une meilleure compréhension de la notion de timing.

Par ailleurs la théorie classique utilise les jeux pour donner une sémantique aux langages de programmation. Pour ce faire, elle identifie diverses sous-catégories intéressantes des catégories de stratégies classiques. Il y a donc lieu d'explorer la possibilité de mieux comprendre ou exprimer cette sémantique avec nos nouveaux jeux, en particulier avec nos jeux de Yoneda. On pourra aussi s'atteler à retrouver les sous-catégories du "cube HO ", plus généralement essayer de répondre aux habituelles attentes que provoque la sémantique des jeux : faire un modèle pour PCF , polymorphisme, appels par noms ou par valeurs, calcul parallèle. Signalons par exemple que dans un jeu de Yoneda, la différence entre arène et stratégie s'évanouit plus ou moins (aux questions de parité près): une stratégie

sur l'arène a est essentiellement un sous-foncteur de \hat{a} , et donc une stratégie est aussi un foncteur.

Enfin la théorie classique s'est employée à donner une interprétation ludique de la logique (linéaire). Nous pensons que notre formalisme plus général permet de redéfinir la logique comme un jeu, et plus tard les logiques comme un certain type de jeu. Comme conséquences de ce point de vue, on peut déjà mentionner trois pistes. Le théorème de composition des stratégies gagnantes fournira une formulation originale de l'élimination des coupures au niveau stratégique. La distinction entre stratégie gagnante et preuve (une preuve étant une stratégie munie d'une preuve du fait qu'elle est gagnante) pourrait permettre de mieux aborder le monde de l'indécidable, qui sépare le vrai du prouvable. Enfin un formalisme de type "catégorie des logiques" devrait aider à comprendre les relations entre les diverses logiques.

Bibliography

- [Abr90] Samson Abramsky. The lazy Lambda calculus. In D. Turner, editor, *Research Topics in Functional Programming*, pages 65–117. Addison Wesley, 1990.
- [AHM98] Samson Abramsky, Kohei Honda, and Guy McCusker. A fully abstract game semantics for general references. In *Proceedings of the thirteenth annual IEEE symposium on Logic in Computer Science*, pages 334–344, Indianapolis, Indiana, June 1998.
- [AJ94] Samson Abramsky and Radha Jagadeesan. Games and full completeness for multiplicative linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 59(2):543–574, June 1994.
- [AJM00] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria. Full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2):409–470, December 2000.
- [AM94] Samson Abramsky and Guy McCusker. Games for recursive types. In *Proceedings of the Second Workshop of the Theory and Formal Methods Section*. Department of Computing, Imperial College, 1994.
- [AM96] Samson Abramsky and Guy McCusker. Linearity, sharing and state: a fully abstract game semantics for Idealized Algol with active expressions (extended abstract). In *Proceedings of the 1996 Workshop on Linear Logic*, volume 3 of *Electronic notes in Theoretical Computer Science*. Elsevier, 1996.
- [AM99] Samson Abramsky and Paul-André Mellès. Concurrent games and full completeness. In *Proceedings of the Fourteenth International Symposium on Logic in Computer Science (LICS'99)*, pages 431–442. IEEE Computer Society Press, 1999.
- [BDER97] P. Baillot, V. Danos, T. Ehrhard, and L. Regnier. Believe it or not, AJM's games model is a model of classical linear logic. In *Proceedings of the Twelfth International Symposium on Logic in Computer Science (LICS'97)*. IEEE Computer Society Press, 1997.
- [Bla92] A. Blass. A game semantics for linear logic. In *Analys of Pure and Applied Logic*, vol. 56, n°1-3, pp.183-220, 1992.

-
- [BM99] R. Bruni and U. Montanari. Cartesian closed double categories, their lambda-notation, and the pi-calculus. In *14th Symposium on Logic in Computer Science (IEEE Computer Society, 1999, pp.246-265)*, Trento, July 2-5 1999.
- [Bén67] Jean Bénabou. Introduction to bicategories. In *Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Math. 47(1967), 1-77*, 1967.
- [Har99] Russel Harmer. *Games and Full Abstraction for Nondeterministic Languages*. Ph.D. thesis, Imperial College and University of London, 1999.
- [HO00] Martin Hyland and Luke Ong. On full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2):285–408, December 2000.
- [Lai97] James Laird. Full abstraction for functional languages with control. In *Proceedings of the Twelfth International Symposium on Logic in Computer Science (LICS'97)*, Warsaw, Poland, 1997.
- [Lan71] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer Verlag. 1971.
- [Lau04] Olivier Laurent. Sémantique des jeux. Notes de cours du DEA de Programmation (Paris VII), April 2004.
- [McC96] Guy McCusker. *Games and Full Abstraction for a Functional Metalanguage with Recursive Types*. Ph.D. thesis, Imperial College and University of London, 1996. Published in Springer-Verlag's Distinguished Dissertations in Computer Science series, 1998.
- [Mel02] Paul-André Melliès. Double catégories : a modular model of multiplicative linear logic. volume 12, pages 449–479, 2002.
- [SH02] Andrea Schalk and Martin Hyland. Games on graphs and sequentially realizable functionals. *Logic In Computer Science*, June 2002.

Résumé :

Le but de cette thèse est de mettre en évidence une nouvelle notion de jeux qu'on appellera *jeux d'équipe*, en extrayant l'essence de la notion de jeux conçue par Hyland et Ong.

Un jeu d'équipe généralise les notions usuelles de positions, coups, parties et stratégies en leur donnant une interprétation géométrique. Parmi les positions on distinguera les positions perdantes des positions gagnantes alors que parmi les stratégies on distinguera les stratégies gagnantes et les stratégies déterministes.

La composition, qui permet à deux joueurs de combiner leurs stratégies respectives pour se partager un but en deux objectifs complémentaires, constitue l'attrait principal d'un jeu d'équipe.

Notre composition de stratégies a un élément neutre et vérifie la condition habituelle d'associativité. De plus les propriétés du type *gagnant* ou *déterministe* sont préservées à travers cette composition.

Pour rendre ce travail cohérent je me devais de donner un jeu d'équipe pour les jeux *HO* totaux, dans lequel les objets sont les parties dans une arène donnée.

Abstract :

In this thesis, we propose a new notion of game, which we call team game, obtained by extracting the essence of the notion introduced by Hyland and Ong. In a team game, we have natural geometric notions of position, move, play, and strategy. Among positions, we distinguish winning and losing ones, and among strategies, we distinguish winning and deterministic ones. Composition, which allows players to combine their strategies in order to split the common goal into complementary parts, is the main feature of a team game. This composition has neutral elements and satisfies the natural associativity condition. Moreover, winning and deterministic strategies are stable by composition. As a main example, we give a team game corresponding to the *HO*-games, where objects are plays in some arena.

ENGLISH TITLE: Abstract games: categorical composition of strategies.

DISCIPLINE : Informatique

LABORATOIRE : Laboratoire *Preuves, Programmes, Systèmes*

Université Paris 7 - Denis Diderot

Case 7014

2, place Jussieu

75251 PARIS CEDEX 05