HAL
open science

Equilibres sur un marché financier avec asymétrie d'information et discontinuité des prix

Caroline Hillairet

To cite this version:

Caroline Hillairet. Equilibres sur un marché financier avec asymétrie d'information et discontinuité des prix. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. Français. NNT : . tel-00008278

HAL Id: tel-00008278

https://theses.hal.science/tel-00008278

Submitted on 27 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE III

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Probabilités

par

Caroline HILLAIRET

Equilibres sur un marché financier avec asymétrie d'information et discontinuité des prix

---

Soutenue le 20 novembre 2004 devant le jury composé de
Mesdames et Messieurs les Professeurs :

Monique PONTIER	Université Paul Sabatier	Directrice de thèse
Hans FÖLLMER	Université de Berlin	Rapporteur
Elyès JOUINI	Université de Paris Dauphine	Rapporteur
Serge COHEN	Université Paul Sabatier	Examinateur
Laure COUTIN	Université Paul Sabatier	Examinatrice
Rose-Anne DANA	Université de Paris Dauphine	Examinatrice

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UMR CNRS 5583, Université Paul Sabatier, Toulouse III

À Jérôme.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monique Pontier pour m'avoir donné le goût des probabilités lors de son cours de maîtrise et pour avoir dirigé si attentivement mes recherches durant ces trois années de thèse. Sa très grande disponibilité et ses conseils m'ont été très précieux, notamment dans les moments les plus difficiles. Je la remercie tout particulièrement pour son écoute et la confiance qu'elle m'a témoignée.

Je suis très reconnaissante à Hans Föllmer et Elyès Jouini d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les remercie, sans oublier Rose-Anne Dana, pour leur lecture attentive de ce manuscrit et leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer mon travail. Merci à Serge Cohen et Laure Coutin qui m'ont fait le plaisir de participer à mon jury. Je voudrais également remercier Gérard Ben Arous et Marco Avellaneda pour m'avoir permis de finir ma thèse au Courant Institute.

J'ai une pensée toute particulière pour Axel Grorud qui m'a donné le goût du travail en équipe, grâce aux groupes de travail qu'il a organisés à Marseille. Nos échanges avec Anne Eyraud-Loisel et Christophette Blanchet-Scalliet ont été pour moi très motivants et productifs. J'espère que ces collaborations se poursuivront. Malheureusement Axel nous a quittés bien trop vite. Sa gentillesse ne sera pas oubliée.

Ces trois années de thèse n'auraient certainement pas été aussi agréables sans mes amis thésards et ex-thésards du LSP. Je les remercie tous pour leur bonne humeur et leur convivialité ; je n'oublierai pas les soirées gastronomiques chez Christophe ni les soirées tarot chez Clément. Je pense tout spécialement à mes "cobureaustistes" Li Vang, Renaud et Christophe, qui m'ont aidée tant de fois devant cet ordinateur récalcitrant. Je les remercie pour leur patience. Je pense également à Céline et Aude, "mes copines d'amphi" depuis la licence. Nos chemins vont certainement se séparer là, après sept ans, mais gageons que l'amitié saura les rapprocher à nouveau.

Je souhaiterais remercier de tout coeur mes parents, pour leur confiance et leur soutien quotidien. Merci à mon grand frère pour son hospitalité ; je n'oublierai pas nos soirées au coin du feu ni les “corvées bois” le week-end avec Claire. Merci à Clémentine pour son amitié. Je finirai par une pensée toute particulière pour Jérôme, qui, malgré la distance, a toujours été présent à mes côtés.

Table des matières

Remerciements **5**

Introduction **13**

1 Le marché **19**

I Information forte initiale **25**

2 Viabilité et complétude du marché **29**
2.1 Théorème de représentation pour les $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingales locales . . . 31
2.2 Probabilité neutre au risque pour l'agent k 33
2.3 Théorème de représentation pour les $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingales locales . . 36

3 Optimisation de la consommation de chaque agent **39**

4 Equilibre dans le cadre d'optimisation de la consommation **47**
4.1 Information pertinente ou non 48
4.2 Existence d'un équilibre 52

5 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale **69**

6 Equilibre dans le cadre d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale **77**

7 Modèle sans monnaie et modèle avec monnaie **85**

8 Equilibre dans un modèle avec salaire **93**
8.1 Le modèle 93
8.2 Equilibre 97
8.3 Solution du problème d'optimisation de chaque agent 100
8.4 Existence d'un équilibre 102

II Autres informations privées 119

9 Information forte progressive 123
9.1 Optimisation de la consommation 126
9.2 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale 126

10 Information faible 129
10.1 Lien entre information faible et information forte initiale 132
10.2 Optimisation de la consommation 134
10.3 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale 136

11 Equilibre avec utilité logarithmique 139
11.1 Gain d'un initié et entropie 139
11.1.1 Information forte initiale 139
11.1.2 Information forte progressive 141
11.1.3 Information faible 142
11.2 Optimisation de la consommation et ressources actualisées déterministes 143
11.2.1 Cas particulier où les agents partagent la même information . 144
11.2.2 Cas où les agents ont des informations différentes 145
11.3 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale, sans ressource 147

III Simulations Matlab 149

12 Simulation de la stratégie d'un initié 153
12.1 Simulation dans le cadre d'un marché purement diffusif 155
12.1.1 Il existe i, $1 \leq i \leq d$, tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$, $0 < a < b$ . . . 155
12.1.2 $L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$ 158
12.1.3 Simulation avec une information forte progressive 161
12.1.4 Simulation avec une information faible 162
12.1.5 Comparaison du gain d'un initié entre les trois types d'information privée 163
12.1.6 Simulation avec une utilité isoélastique 164
12.2 Simulation avec un marché mixte 165
12.2.1 $L_k = N_1(T) + N_2(T)$ 166
12.2.2 Il existe i, $1 \leq i \leq d$, tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$, $0 < a < b$ . . 168
12.2.3 $L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$ 173

13 Simulation d'un équilibre avec utilité logarithmique 177
13.1 Equilibre avec K agents 177
13.2 Poids maximal d'un initié 178

14 Programmes et Graphiques **181**
14.1 Marché purement diffusif 181
14.1.1 $\exists\, i$ tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$ 181
14.1.2 $L_k = \ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T))$ 189
14.1.3 $L_k(t) = (2W_1(T) + a) + B_{(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$ 193
14.1.4 Information faible 195
14.1.5 Comparaison entre les 3 types d'information privée 200
14.1.6 Utilité isoélastique 202
14.2 Marché mixte 205
14.2.1 $L_k = N_1(T) + N_2(T)$, σ constante 205
14.2.2 $L_k = N_1(T) + N_2(T)$, σ prévisible 210
14.2.3 $\exists\, i$ tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_1(T))$ 214
14.2.4 $L_k = \ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T))$ 218
14.3 Equilibre 222
14.3.1 Equilibre avec 3 agents 222
14.3.2 Poids maximal d'un initié 226

Bibliographie **232**

Introduction

Sur un marché financier, les agents souhaitent optimiser leur utilité de leur consommation et/ou de leur richesse terminale. Pour cela, ils peuvent acheter et vendre des actifs financiers. Les petites variations des prix de ces actifs peuvent être modélisées par un processus continu dirigé par un mouvement brownien. Merton (1976) [44] et Jarrow et Rudd (1983) [29] ont montré que l'analyse de l'évolution des prix révèle aussi des variations brutales et rares, qu'il est naturel de modéliser, d'un point de vue probabiliste, par un processus ponctuel ou plus simplement par un processus de Poisson, dont les sauts sont de taille constante et ont lieu à des instants imprévisibles et rares.
On suppose que l'information minimale dont disposent les agents pour résoudre leur problème d'optimisation est celle obtenue par l'observation du processus de ces prix. Cependant, il semble clair que les agents sont informés de façon hétérogène et reçoivent un flux d'information qui leur est propre. Leur stratégie va naturellement dépendre de cette information privée.
L'objectif de cette thèse est d'étudier la réalisation d'un équilibre dans un marché où les prix des actifs financiers sont discontinus et sur lequel les agents sont différemment informés.

Le problème d'optimisation d'un petit investisseur (c'est-à-dire d'un agent financier sans information privée) a tout d'abord été résolu dans le cadre d'un marché purement diffusif (dans le sens où les prix des actifs financiers sont dirigés par un mouvement Brownien). Comme ouvrage de référence on peut citer Merton (1971) [43] ou Karatzas, Lehoczky et Shreve (1987) [36].
Jeanblanc-Picqué et Pontier (1990) [30] ont étendu ces résultats pour un petit investisseur dans le cas d'un marché mixte (les prix des actifs sont dirigés par un mouvement brownien et un processus de Poisson).
Karatzas et Pikovsky (1996) [38], Grorud et Pontier (1998) [25], Amendinger, Imkeller et Schweizer (1998) [2] ont étudié, dans un marché purement diffusif, les problèmes d'optimisation d'utilité pour un agent qui connait dès le début une fonctionnelle des trajectoires du processus des prix (par exemple la valeur d'un actif à un instant donné). Nous dirons alors que l'initié possède une information forte initiale : forte car il connait la fonctionnelle ω par ω, initiale car il possède cette information dès l'instant $t = 0$. La clé de cette modélisation est la théorie du grossissement initial de filtration par une variable aléatoire, théorie qui fut développée par Jeulin (1980) [31], dans une série de travaux du "Séminaire de Calcul Stochastique (1982/1983)" de l'Université Paris VI, Jacod (1985) [28], Jeulin et Yor (1985) [32] puis par Föllmer et Imkeller (1993) [21], Amendinger et al. (1998) [2] et Amendinger (2000) [1].
Elliott et Jeanblanc (1999) [20] ont comparé, dans un marché mixte, les stratégies d'un non-initié et d'un initié dont l'information privée consiste en la connaissance du nombre total de sauts du processus de Poisson.

Le premier travail de cette thèse fut donc de résoudre le problème d'optimisation de la consommation (chapitre 3) et/ou de la richesse terminale (chapitre 5) dans le cadre général d'un marché mixte avec un agent possédant une information forte

initiale. Dans certains cas, ces trois situations donneront lieu à des résultats différents. Pour cela, nous construisons une mesure de probabilité neutre au risque pour cet initié, le marché est ainsi viable pour lui. L'existence d'un théorème de représentation de martingale pour la filtration élargie implique que le marché est aussi complet (cf. chapitre 2).

Une importante littérature sur l'équilibre avec asymétrie d'information fait intervenir un teneur de marché (ou market maker) qui organise les échanges sur le marché en fixant les prix (équilibre concurrentiel). Le modèle de Kyle (1985) [40], repris par Back (1992) [4] dans un cadre non linéaire, fait intervenir des agents (noise traders) qui participent au marché pour des raisons de liquidité, indépendamment des prix (ils ne sont donc pas stratégiques au sens d'une quelconque optimisation). Les noise traders permettent à l'initié de dissimuler son information privée. Dans Glosten et Milgrom (1985) [23], le teneur de marché fixe une fourchette (prix d'achat et prix de vente) qui lui sert de couverture contre le risque de traiter avec un informé. Lasserre (2003) [41] généralise ces modèles à un cadre multidimensionnel et à une plus large classe de fonctions d'utilité, en utilisant de la théorie de grossissement de filtration.

Tout autre est le modèle d'équilibre que nous considérons dans cette thèse : il s'agit d'un équilibre en temps continu, par compétition directe entre les agents, c'est-à-dire sans teneur de marché, qui sera défini en (4.0.7). Un premier courant de littérature traite de l'existence d'un équilibre d'Arrow-Debreu, qui est un équilibre d'une économie d'échange statique (voir par exemple l'article de Bewley (1972) [10]). Un deuxième courant traite d'équilibre de Radner, qui est un équilibre dynamique, et montre comment les prix des actifs sont déterminés par un tel équilibre. L'approche usuelle est de ramener ce problème dynamique d'existence d'un équilibre de Radner en un problème statique (équilibre d'Arrow-Debreu) en considérant les processus de consommation en tant que suite de points d'un espace abstrait. Le problème statique est résolu grâce à un théorème de point fixe. Un théorème de représentation de martingales permet alors d'en déduire une solution au problème dynamique. L'idée d'utiliser la théorie des martingales pour implémenter un équilibre d'Arrow-Debreu en équilibre de Radner a été introduite par Duffie et Huang (1985) [18] dans un modèle où les agents consomment seulement à la date 0 et à la date terminale, puis généralisée par Duffie (1986) [19] à un modèle avec un flux continu de consommation. Dana et Pontier (1992) [17] étudient la réalisation d'un équilibre d'Arrow-Debreu et montrent l'équivalence entre équilibre d'Arrow-Debreu et équilibre de Radner dans le cas d'un marché complet sans asymétrie d'information. Karatzas, Lehoczky et Shreve (1990) [37] n'introduisent pas le concept d'équilibre d'Arrow-Debreu. Dans un marché purement diffusif, sans asymétrie d'information, ils étudient l'existence et l'unicité d'un équilibre de Radner, et caractérisent les stratégies optimales des agents ainsi que les prix des actifs à l'équilibre. Ce modèle est étroitement lié à celui de Chiarolla et Haussmann (2001) [15] dans lequel les agents optimisent aussi leur loisir. Serrat (2001) [47] développe un modèle d'équilibre sur une économie d'échange entre deux pays.

La première partie de cette thèse généralise ces résultats à un marché mixte sur lequel les agents ont une information forte initiale. Les agents agissant pour optimiser leur utilité comme dans le chapitre 3, nous recherchons une condition nécessaire et suffisante pour que les marchés des consommations optimales s'équilibrent. La différence essentielle avec un marché sans asymétrie d'information réside dans le fait que les agents n'ont pas la même probabilité neutre au risque ni la même filtration. Pour pouvoir exhiber un cadre général d'existence d'un tel équilibre (4.0.7) (valable en particulier quelques soient les fonctions d'utilités des agents), nous faisons l'hypothèse 3 d'indépendance des filtrations élargies des agents conditionnellement à la filtration de leur information commune. Cette hypothèse est cruciale et nous permet notamment de montrer qu'à l'équilibre la probabilité neutre au risque de chaque agent coïncide avec la probabilité neutre au risque d'un agent représentatif (agent ayant pour filtration celle de l'information commune) et que les agents ne se servent que de la filtration de l'information commune pour élaborer leur stratégie optimale. La filtration de l'information commune est directement observable par chaque agent, cependant aucun d'entre eux ne peut la distinguer (du point de vue de son problème d'optimisation) de la filtration de leur information personnelle totale disponible. Le fait que les agents peuvent ajuster leur stratégie par rapport à la filtration de l'information commune signifie que le marché, à l'équilibre, révèle toutes les informations pertinentes. Sous cette hypothèse 3, nous établissons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre. Dans un modèle sans monnaie, le taux d'intérêt et la probabilité neutre au risque de l'agent représentatif sont déterminés à l'équilibre. Dans un modèle avec monnaie (cf. chapitre 7), c'est le spot (le prix en monnaie locale d'une unité de produit) qui est déterminé à l'équilibre.
Les résultats sur l'équilibre de cette partie sont donc établis sous l'hypothèse 3. L'objectif des deux parties suivantes est de s'affranchir de cette hypothèse, et de considérer d'autres types d'information privée que l'information forte initiale. Pour cela, nous allons nous placer dans le cadre d'utilité logarithmique et nous allons avoir recours aux simulations.

La modélisation de l'information privée de l'initié par la connaissance, dès l'instant initial, de la réalisation d'une fonctionnelle des prix (information forte initiale) est assez restrictive et parfois peu réaliste. Corcuera et al. (2004) [14] considèrent, dans un marché purement diffusif, un agent dont l'information privée est perturbée par un bruit indépendant qui décroît au cours du temps. On parlera d'information forte progressive : forte car il connait une fonctionnelle des prix perturbée ω par ω, progressive car cette information devient de plus en plus précise. La clé de cette modélisation est la théorie du grossissement progressif de filtration. Dans le chapitre 9 de cette thèse, nous construisons, dans le cadre d'un marché mixte, une probabilité neutre au risque pour un initié ayant une information forte progressive. Bien que le marché soit donc viable pour un tel agent, il n'est cependant pas complet, ce qui ne nous permet de résoudre le problème d'optimisation d'un tel agent que lorsque nous savons exhiber un portefeuille (par exemple dans le cas d'une utilité logarithmique). Un peu à la manière de l'article de Jouini et Napp (2003) [33] où les agents possèdent

une probabilité subjective (c'est-à-dire ils assignent la probabilité de réalisation d'un événement selon leur propre croyance), Baudoin (2002) [5] introduit la notion d'information faible. Un agent faiblement informé anticipe la loi d'une variable aléatoire qui sera réalisée à une date ultérieure. Baudoin montre l'existence d'une mesure de probabilité, qu'il appelle minimale, sous laquelle la loi de la variable aléatoire sera effectivement celle anticipée. D'un point de vue mathématique, l'information privée de l'initié n'est plus exprimée par une augmentation de filtration (à la différence d'une information forte, initiale ou progressive) mais par une mesure de probabilité différente assignée à cet agent. Dans le chapitre 10 de cette thèse, nous résolvons, dans le cadre général d'un marché mixte, le problème d'optimisation d'un agent faiblement informé. Le marché est viable et complet pour un tel agent car il n'a à sa disposition que la filtration de l'information obtenue par l'observation du processus des prix.
La dernière partie de la thèse de Lasserre (2003) [41] traite d'un équilibre, au sens de Kyle, avec un agent faiblement informé et un noise trader. Un équilibre est alors un processus des prix, fixé par le teneur de marché, et une stratégie optimale pour l'agent initié.
Dans le chapitre 11 de cette thèse, nous avons regardé la formation d'un équilibre avec plusieurs agents initiés, ayant des informations différentes (information forte initiale ou progressive, ou information faible) et des problèmes d'optimisation différents. Nous avons plus particulièrement regardé, pour des fonctions d'utilité logarithmiques, sous quelles conditions les marchés des titres s'équilibrent (c'est-à-dire la somme des portefeuilles des agents est nulle, cf. définition (11.2)). Nous établissons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un tel équilibre (11.2). Cette condition établit une relation entre les différentes densités de probabilité des agents (probabilité neutre au risque pour une information forte, probabilité minimale pour une information faible) alors que dans la première partie de cette thèse, l'existence d'un équilibre, sous l'hypothèse 3, déterminait le taux d'intérêt ainsi que la probabilité neutre au risque de l'agent représentatif. Cette relation entre les différentes densités de probabilité va nous permettre, dans la dernière partie de cette thèse, de simuler des équilibres, d'une part pour lesquels l'hypothèse 3 n'est pas vérifiée, et d'autre part pour des agents ayant des informations privées autres qu'une information forte initiale. Nous finissons cette partie en remarquant que plus un agent est informé sur le marché, plus il doit rester discret et investir peu sur ce marché, afin qu'un équilibre puisse exister.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous avons tout d'abord simulé (chapitre 12), avec le logiciel Matlab, les stratégies (consommations, richesses et portefeuilles optimaux) d'agents initiés, pour différentes informations privées et différents problèmes d'optimisation. Nous avons plus particulièrement regardé leurs différences avec la stratégie optimale d'un non-initié. Dans le cas ou l'initié sait si la valeur d'un actif à l'instant terminal sera ou non dans une certaine fourchette, nous explicitons la différence de portefeuille entre cet initié et un non-initié, pour un marché purement diffusif et un marché mixte. Un travail similaire est réalisé dans le cas où

l'initié connait le ratio à l'instant terminal de deux actifs. Nous avons aussi comparé la stratégie optimale entre les trois types d'informations privées (information forte initiale et progressive, information faible), chacune de ces informations étant une variante de la valeur à l'instant terminal de la première composante du mouvement brownien. Les simulations mettent en évidence que plus l'information privée de l'initié est précise, plus son gain est important.
Ayant simulé les stratégies d'un initié pour différents exemples d'information privée, nous nous en servons dans le chapitre 13 pour simuler la formation d'équilibre (défini par (11.2)), sans avoir besoin de l'hypothèse 3 et en considérant différents types d'informations privées. Nous visualisons ici que pour qu'un équilibre puisse exister, les agents ayant une information importante doivent avoir un petit poids dans le marché (comparativement aux autres agents). Ainsi dans le paragraphe 13.2, nous estimons le montant maximal que peut investir un initié dans le marché sans empêcher un équilibre d'avoir lieu.

Chapitre 1

Le marché

Soit W un mouvement brownien réel m-dimensionnel sur son espace de probabilité canonique $(\Omega^W, \mathrm{F}_T^W := (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}^W)$ et N un processus de Poisson n-dimensionnel sur son espace de probabilité canonique $(\Omega^N, \mathrm{F}_T^N := (\mathcal{F}_t^N)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}^N)$, d'intensité $\kappa(t)$, positive, F_T^N-prévisible vérifiant $E_{\mathbb{P}^N}[\int_0^T \kappa(t)dt] < +\infty$. Ainsi, d'après Brémaud théorème 8 p. 27 [13], le processus $M(t) := N(t) - \int_0^t \kappa(s)ds$ est une $(\mathrm{F}_T^N, \mathbb{P}^N)$-martingale, appelé processus compensé du processus de Poisson N.
Soit $(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathrm{F}_T^W \otimes \mathrm{F}_T^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$ l'espace produit.
Soit $\mathcal{A}$ une tribu de l'ensemble Ω. On note $d = m + n$.

Propriété 1.0.1 *W et N sont des processus indépendants.*

Preuve:
Cette propriété provient du fait que W étant un processus continu et N un processus à saut pur, leur crochet est nul.
Soit X une variable aléatoire bornée mesurable pour la tribu terminale du Brownien. Par le théorème de représentation pour la filtration brownienne, il existe un processus ψ tel que

$$X = E_{\mathbb{P}^W}(X) + \int_0^T \psi(s)dW(s).$$

De même, soit Y une variable aléatoire bornée mesurable pour la tribu terminale du processus de Poisson. Par le théorème de représentation pour la filtration poissonnienne, il existe un processus ϕ tel que

$$Y = E_{\mathbb{P}^N}(Y) + \int_0^T \phi(s)dM(s).$$

Par la formule de Itô,

$$XY = E_{\mathbb{P}^W}(X)E_{\mathbb{P}^N}(Y) + \int_0^T Y(s)\psi(s)dW(s) + \int_0^T X(s)\phi(s)dM(s).$$

Puisque $\int_0^T Y(s)\psi(s)dW(s)$ et $\int_0^T X(s)\phi(s)dM(s)$ sont des martingales locales bornées, ce sont des martingales, leur espérance est nulle. Par suite

$$E_{\mathbb{P}}(XY) = E_{\mathbb{P}}(X)E_{\mathbb{P}}(Y). \qquad \square$$

On considère un marché financier avec K agents. D'après Duffie, Huang [18] et Harrison, Kreps [26], pour avoir un marché complet et sans arbitrage, le nombre d'actifs risqués doit être égal au nombre de sources indépendantes d'incertitude. C'est pourquoi on considère un marché avec d actifs risqués.
Chaque agent peut investir dans $d+1$ actifs financiers, dont les prix, exprimés en unité de produits, sont gouvernés par les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$P_0(t) = P_0(0)\exp(\int_0^t r(s)ds) \tag{1.1}$$

$$dP_i(t) = P_i(t^-)[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)d(W^*, N^*)_j^*(t)], \qquad i = 1, ..., d. \tag{1.2}$$

X^* est le vecteur transposé du vecteur colonne X. Les processus r et b sont supposés bornés sur $[0,T] \times \Omega$ et F_T-prévisibles. On suppose b fonctionnelle de Lipschitz.
σ est un processus $d \times d$-matriciel non dégénéré (cf définition (4.6) p. 88 de [37]), fonctionnelle de Lipschitz et F_T-prévisible. Nous supposons de plus que $\sigma_{ij}(t) > -1$ $\forall\ m+1 \leq j \leq d$, $\forall\ 1 \leq i \leq d$ et $\forall\ t \in [0,T]$. Ainsi l'équation (1.2) a une unique solution forte

$$\begin{aligned} P_i(t) &= P_i(0)\exp\left(\int_0^t b_i(s)ds + \sum_{j=1}^{m}(\sigma_{ij}(s)dW_j(s) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2(s)ds)\right) \\ & \prod_{0<s\leq t}\prod_{j=m+1}^{d}(1+\sigma_{ij}(s)dN_{j-m}(s)) \end{aligned}$$

et les prix P_i, $i = 1, \cdots, d$ sont des processus strictement positifs. De plus, d'après Protter [45], F_T coïncide avec la filtration engendrée par les prix. Les prix étant exprimés en unités de produit, ce modèle s'appelle un modèle sans monnaie. Nous verrons dans le chapitre 7 ce qui change si nous considérons un modèle avec monnaie, c'est-à-dire si les prix sont exprimés en monnaie locale.

On suppose que chaque agent a sa propre source d'information, représentée par la filtration $\mathrm{H}_T^k := (\mathcal{H}_t^k)_{t\in[0,T]}$. On introduit, pour tout $k = 1, \cdots, K$, la filtration $\mathrm{G}_T^k := (\mathcal{G}_t^k)_{t\in[0,T]}$ de l'information disponible pour le $k^{\text{ème}}$ agent

$$\mathcal{G}_t^k := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^k, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

En d'autres termes, chaque agent a à sa disposition toutes les informations concernant le marché jusqu'au temps t, plus sa propre information qu'il ne révèle pas aux autres agents.

L'agent k a une richesse initiale $X_k(0)$ à l'instant $t = 0$, $X_k(0) \in L^1(\mathcal{G}_0^k)$, et sa propre ressource. Sa vitesse de ressource ϵ_k, exprimée en unité de produit, est un processus

positif uniformément borné et G_T^k-adapté. On pose

$$\varepsilon(t) := \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k(t).$$

L'agent k est libre de choisir une vitesse de consommation c_k, processus positif, et un portefeuille π_k, processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. $\pi_{ki}(t)$ représente la quantité investie par l'agent k à l'instant t dans le $i^{\text{ème}}$ stock $(i = 1, \cdots, d)$: $\pi_{ki}(t) = \theta_{ki}(t)P_i(t)$ où $\theta_{ki}(t)$ est le nombre d'unités du $i^{\text{ème}}$ stock que possède l'agent k à l'instant t $(i = 0, \cdots, d)$. L'agent k doit choisir le processus c_k G_T^k-adapté et les processus θ_{ki}, $i = 0, \cdots, d$, G_T^k-prévisibles et vérifiant l'hypothèse d'intégrabilité : $\int_0^T (c_k(t) + ||\sigma^*(t)\pi_k(t)||^2)dt < \infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement.
La richesse de l'agent k à l'instant t est

$$X_k(t) = \theta_{k0}(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \pi_{ki}(t) = \sum_{i=0}^{d} \theta_{ki}(t)P_i(t).$$

On suppose que la stratégie est autofinançante, c'est-à-dire que

$$dX_k(t) = \sum_{i=0}^{d} \theta_{ki}(t)dP_i(t) + (\epsilon_k(t) - c_k(t))dt.$$

Par suite, la richesse de l'agent k satisfait l'équation

$$\begin{aligned} dX_k(t) &= \theta_{k0}(t)P_0(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^{d} \theta_{ki}(t)P_i(t)b_i(t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \theta_{ki}(t^-)P_i(t^-) \left(\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)d(W^*, N^*)_j^*(t) \right) + (\epsilon_k(t) - c_k(t))\, dt. \end{aligned}$$

Puisque $X_k(t) = \theta_{k0}(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \pi_{ki}(t)$, X_k est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_k(t) &= (X_k(t)r(t) + \epsilon_k(t) - c_k(t))\, dt + \sum_{i=1}^{d} \pi_{ki}(t)\, (b_i(t) - r(t))\, dt \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \pi_{ki}(t^-) \left(\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)d(W^*, N^*)_j^*(t) \right) \end{aligned}$$

avec pour condition initiale $X_k(0)$. On note $\beta(t) := (P_0(t))^{-1}$. Par suite la richesse actualisée s'écrit :

$$\beta(t)X_k(t) = \beta(0)X_k(0) \quad + \quad \int_0^t \beta(s)(\epsilon_k(s) - c_k(s))ds$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^d \beta(s)\pi_{ki}(s)(b_i(s) - r(s))ds \tag{1.3}$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^d \beta(s)\pi_{ki}(s^-) \left(\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(s) d(W^*, N^*)_j^*(s) \right).$$

Remarque: Pour une filtration élargie $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$, on n'est plus assuré que le processus (W^*, N^*) soit une semi-martingale, donc l'équation de la richesse (1.3) n'a a priori pas de sens stochastique. Nous ajouterons dans la première partie (respectivement dans le chapitre 9) une condition suffisante sous laquelle l'équation de la richesse (1.3) a un sens stochastique pour un agent ayant une information forte initiale (respectivement progressive).

Définition 1.0.2 *Une stratégie G_T^k-admissible pour le $k^{\text{ème}}$ agent est un couple (π_k, c_k) (portefeuille, consommation) tel que c_k est G_T^k-adapté, $\theta_{ki} = \frac{\pi_{ki}}{P_i}$, $i = 0, \cdots, d$, sont G_T^k-prévisibles et vérifient $\int_0^T (c_k(t) + ||\sigma^*(t)\pi_k(t)||^2)dt < \infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et tel que la richesse correspondante X_k est minorée et $X_k(T) \geq 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement.*

Ainsi, on limite les déficits autorisés aux agents et on demande à ce qu'il n'y ait pas de banqueroute à l'instant terminal T. Le $k^{\text{ème}}$ agent choisit sa statégie afin d'optimiser sa consommation (et/ou sa richesse terminale), ou plus exactement l'utilité de sa consommation (et/ou sa richesse terminale).

Définition 1.0.3 *Une fonction $U_k : (t, c) \to U_k(t, c)$ est une fonction d'utilité si*
(i) $U_k : [0, T] \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
(ii) $\forall t \in [0, T]$, $U_k(t, \cdot)$ est strictement croissante et strictement concave.
(iii) Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}U_k$, $\frac{\partial}{\partial c}U_k$, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial c}U_k$, $\frac{\partial^2}{\partial c^2}U_k$, $\frac{\partial^3}{\partial c^3}U_k$ existent et sont continues sur $[0, T] \times]0, +\infty[$.
(iv) $\forall t \in [0, T]$, $\frac{\partial}{\partial c}U_k$ satisfait :

$$\frac{\partial}{\partial c}U_k(t, +\infty) = \lim_{c \to +\infty} \frac{\partial}{\partial c}U_k(t, c) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c}U_k(t, 0) = \lim_{c \searrow 0} \frac{\partial}{\partial c}U_k(t, c) = +\infty$$

$\forall t \in [0, T]$, on note $I_k(t, \cdot)$ la fonction réciproque de l'application strictement décroissante $\frac{\partial}{\partial c}U_k(t, \cdot)$.

<u>Exemples</u>
Les fonctions $U(t, c) = e^{(-\gamma t)} \ln c$ (avec $\gamma > 0$), $U(t, c) = -\exp(-\alpha c)$ $(\alpha > 0)$ ou bien $U(t, c) = \frac{1}{p}c^p$ $(p \neq 0, p < 1)$, pour $t \in [0, T]$ et $c \in]0, +\infty[$ vérifient les hypothèses (i) à (iv).

Nous introduisons quelques notations :
• $I_n = (1, \cdots, 1)^* \in \mathbb{R}^n$.
• Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs de même dimension d, je note $v_1.v_2$ le vecteur dont les composantes est le produit des composantes, c'est-à-dire $(v_1.v_2)_i = v_{1,i}.v_{2,i}$, $i = 1, \cdots, d$.
• $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Doléans.

On introduit

$$\Theta(t) := \ m \text{ premières lignes de } [(\sigma(t))^{-1}(b(t) - r(t)I_d)] \tag{1.4}$$

et le processus n dimensionnel q tel que

$$q(t).\kappa(t) := \ n \text{ dernières lignes de } [-(\sigma(t))^{-1}(b(t) - r(t)I_d)]. \tag{1.5}$$

On suppose que q est un processus à coordonnées strictement positives.

Remarque: Puisque l'intensité κ du processus de Poisson est strictement positive, q est un processus à coordonnées strictement positives si et seulement si les n dernières coordonnées de $(\sigma(t))^{-1}(b(t) - r(t)I_d)$ sont strictement négatives. Ceci correspond à l'hypothèse (1.6) de [30] (avec $m = n = 1$). M. Jeanblanc et M. Pontier montrent dans [30] que si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il peut exister des opportunités d'arbitrage (le marché n'est pas viable) et exhibent dans un modèle très simple une telle stratégie d'arbitrage (cf. remarque page 289 [30]).

Définition 1.0.4

$$\widehat{W}(t) := W(t) + \int_0^t \Theta(s)ds, \qquad t \in [0, T]. \tag{1.6}$$

$$\widehat{M}(t) := N(t) - \int_0^t q(s)\kappa(s)ds, \qquad t \in [0, T]. \tag{1.7}$$

$$\widehat{S} := (\widehat{W}^*, \widehat{M}^*)^*.$$

Première partie

Information forte initiale

Dans cette partie, nous supposons que l'agent k connait dès le début ($t = 0$) une fonctionnelle L_k des trajectoires du processus des prix. On dit qu'il possède une information forte (car il connait la fonctionnelle ω par ω) initiale (car il a cette information dès l'instant $t = 0$). Cet initié a alors à sa disposition la filtration élargie initialement ($\mathcal{G}_t^k = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L_k),\ 0 \leq t \leq T$) alors qu'un non-initié n'a à sa disposition que la filtration ($\mathcal{F}_t\ 0 \leq t \leq T$) engendrée par le processus des prix des actifs.
Dans un premier temps, nous construisons dans le chapitre 2 une probabilité neutre au risque pour cet agent, notée $\widehat{\mathbb{P}^k}$. L'existence de cette probabilité neutre au risque implique que le marché est viable pour cet initié muni de la filtration G_T^k et de la probabilité neutre au risque $\widehat{\mathbb{P}^k}$. De plus, il est aussi complet car nous montrons l'existence d'un théorème de représentation pour les $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingales locales. Ainsi, nous pouvons résoudre en toute généralité le problème d'optimisation de sa consommation dans le chapitre 3, ainsi que de sa consommation et de sa richesse terminale dans le chapitre 5. Bien que ces situations sont traitées de manière similaire pour résoudre le problème d'optimisation de chaque agent, elles donneront lieu à des résultats différents pour certains résultats d'équilibre. Nous résolvons quelques exemples et exhibons le portefeuille optimal dans le cas d'une utilité logarithmique ou isoélastique.
Dans un deuxième temps, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre entre des agents ayant différentes informations fortes initiales, optimisant leur consommation (chapitre 4), ou leur consommation et leur richesse terminale (chapitre 6). Notre condition d'équilibre porte sur les consommations. La différence essentielle avec un marché sans asymétrie d'information est que les agents n'ont a priori pas la même probabilité neutre au risque ni la même filtration ; la remarque suivant la proposition 4.2.2 détaille ces différences. Pour pouvoir exhiber un cadre général d'existence d'un tel équilibre (valable en particulier quelque soient les fonctions d'utilité des agents), nous faisons l'hypothèse 3 d'indépendance des filtrations élargies des agents conditionnellement à la filtration de leur information commune. Cette hypothèse est cruciale et nous permet notamment de montrer que toutes les informations pertinentes sont connues par chaque agent à l'équilibre. En particulier à l'équilibre la probabilité neutre au risque de chaque agent coïncide avec la probabilité neutre au risque de l'agent représentatif et les agents ne se servent que de la filtration de l'information commune pour élaborer leur stratégie optimale. Dans un marché avec asymétrie d'information, les poids des agents ne sont plus des constantes mais des variables aléatoires, dont nous devons montrer la mesurabilité. De plus, il n'est plus aussi immédiat que le fait que le marché des consommations s'équilibre implique que le marché des titres s'équilibre aussi, et ce résultat ne reste vrai que dans le cadre où les agents optimisent leur consommation seulement. Enfin nous résolvons explicitement quelques exemples d'équilibre : dans le cas où tous les agents ont la même fonction d'utilité isoélastique ou logarithmique, leur stratégie optimale consiste à consommer une fraction de la ressource totale disponible sur le marché, cette fraction étant le poids de l'agent dans le marché.

Dans les modèles d'équilibre avec un teneur de marché, ce dernier observe la demande totale des agents et fixe les prix de façon concurrentielle. Dans notre modèle sans monnaie (c'est-à-dire les prix sont exprimés en unités de produit), les prix des actifs financiers sont endogènes et sont partiellement déterminés à l'équilibre : le taux d'intérêt r et la prime de risque $\sigma^{-1}(b - r\mathrm{I}_d)$ sont déterminés (mais pas b et σ^{-1} séparément). Dans notre modèle avec monnaie du chapitre 7 (c'est-à-dire les prix sont exprimés en monnaie locale), ils sont exogènes et c'est le prix en monnaie locale d'une unité de produit (le spot) qui est déterminé à l'équilibre. Ainsi le modèle avec monnaie permet de relacher certaines hypothèses sur les processus de ressource et les fonctions d'utilité.
Dans le chapitre 8, nous étendons le modèle précédent à une situation avec dividendes et actif productif, où les agents optimisent la consommation à la fois de leurs biens et de leur loisir. Nous décrivons ce modèle et définissons l'équilibre. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'un tel équilibre puis nous résolvons deux exemples explicitement.
Les résultats sur l'équilibre de cette partie sont donc établis sous l'hypothèse 3. Sans elle nous ne savons pas exhiber de cadre géneral d'existence d'équilibre dans un marché avec asymétrie d'information, mais nous pouvons nous en affranchir pour certains cas particuliers d'utilité (utilité logarithmique). C'est l'objet de la fin de la deuxième partie ainsi que de la troisième partie.

Chapitre 2

Viabilité et complétude du marché

Soit $\mathcal{A}$ une tribu contenant la tribu $\mathcal{F}_T$.

Hypothèse 1 *$\forall t \in [0,T], \mathcal{H}_t^k = \sigma(L_k)$ où L_k est une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable à valeurs dans un espace polonais $(E_k, \mathcal{E}_k)$ (i.e. l'agent k reçoit son information supplémentaire immédiatement et seulement au temps $t = 0$) et de plus L_k vérifie l'hypothèse :*
Il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{L_k}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $\forall t \in [0,T]$, $\mathcal{F}_t$ est indépendante de $\sigma(L_k)$.

Remarque: Il n'y a pas unicité de la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{L_k}$ mais on peut en construire une qui coïncide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$, c'est toujours celle-ci qui sera utilisée dans la suite.

D'après A.Grorud et M.Pontier [25], l'hypothèse 1 précédente est équivalente à l'hypothèse (2.1) de [1] :
$\mathbb{P}(L_k \in .|\mathcal{F}_t)(\omega) \sim \mathbb{P}(L_k \in .)$ pour tout $t \in [0,T]$ et pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$.

Théorème 2.0.5 *Si l'hypothèse 1 est vérifiée, alors $\forall p \in [0,\infty[$*

$$\mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) = \mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{F_T}) \subseteq \mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$$

$$\mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) = \mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{F_T}) \subseteq \mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$$

De plus, tout $(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$-mouvement brownien m-dimensionnel est un $(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$-mouvement brownien m-dimensionnel et tout $(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$-processus de Poisson n-dimensionnel d'intensité κ est un $(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$-processus de Poisson de même dimension et de même intensité.

Preuve:
Puisque $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{L_k}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, les égalités $\mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) = \mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{F_T})$ et

$\mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) = \mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{F_T})$ sont immédiates.

1ère étape
Montrons que $\mathcal{M}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$.
Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$.

(i). $\forall t \in [0,T]$, M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc $\mathcal{G}_t^k$-mesurable car $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t^k$.

(ii). $\forall t \in [0,T]$, $\int |M_t| d\mathbb{Q}^{L_k} = \int |M_t| d\mathbb{P} < \infty$ car $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{L_k}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ et $M \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$.

(iii). Soient $0 \leq s \leq t \leq T$. Soit $A \in \mathcal{G}_s^k$ de la forme $A = A_s \cap \{L_k \in B\}$ avec $A_s \in \mathcal{F}_s$ et $B \in \mathcal{E}_k$. Alors

$$\int M_t \mathbb{I}_A d\mathbb{Q}^{L_k} = \int M_t \mathbb{I}_{A_s} \mathbb{I}_{\{L_k \in B\}} d\mathbb{Q}^{L_k} = \int M_t \mathbb{I}_{A_s} d\mathbb{Q}^{L_k} \int \mathbb{I}_{\{L_k \in B\}} d\mathbb{Q}^{L_k}$$

car les tribus $\mathcal{F}_T$ et $\sigma(L_k)$ sont indépendantes sous $\mathbb{Q}^{L_k}$. Puisque $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{L_k}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ et $M \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$ on obtient en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_s$

$$\int M_t \mathbb{I}_{A_s} d\mathbb{Q}^{L_k} = \int M_t \mathbb{I}_{A_s} d\mathbb{P} = \int M_s \mathbb{I}_{A_s} d\mathbb{P}.$$

En réutilisant à nouveau l'indépendance des tribus $\mathcal{F}_T$ et $\sigma(L_k)$ sous $\mathbb{Q}^{L_k}$ on aboutit à

$$\int M_t \mathbb{I}_A d\mathbb{Q}^{L_k} = \int M_s \mathbb{I}_{A_s} \mathbb{I}_{\{L_k \in B\}} d\mathbb{Q}^{L_k} = \int M_s \mathbb{I}_A d\mathbb{Q}^{L_k}.$$

Par conséquent, par un argument de classe monotone,

$$E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[M_t | \mathcal{G}_s^k] = M_s.$$

$(i), (ii), (iii)$ prouvent que $M \in \mathcal{M}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$.

2ème étape
Puisque les $\mathrm{F_T}$-temps d'arrêt sont aussi des $\mathrm{G_T^k}$-temps d'arrêt et $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{L_k}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, toute suite de temps d'arrêt localisant un processus L par rapport à $(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$ localise aussi L par rapport à $(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$. Par suite

$$\mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) \subseteq \mathcal{H}^p_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$$

$$\mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{P}, \mathrm{F_T}) \subseteq \mathcal{M}_{(loc)}(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k}).$$

3ème étape
Soit W un $(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$-mouvement brownien m-dimensionnel. Alors W est une $(\mathbb{P}, \mathrm{F_T})$-martingale locale continue donc W est une $(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$-martingale locale continue. D'autre part, la variation quadratique d'un processus continu ne dépend pas de la filtration, donc $< W >_t^{(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G}_T^k)} = < W >_t^{(\mathbb{P}, \mathrm{F}_T)} = tI_m$. Par suite, par le théorème de Lévy, W est un $(\mathbb{Q}^{L_k}, \mathrm{G_T^k})$-mouvement brownien.

4ème étape
$\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\forall s > 0$, $\forall s' \in]s, s+t[$:

$$E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[e^{iu.(N_{t+s}-N_s)}|\mathcal{G}_s^k] = E_{\mathbb{Q}^{L_k}}\left[E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[e^{iu.(N_{t+s}-N_{s'}+N_{s'}-N_s)}|\mathcal{F}_{s'} \vee \sigma(L_k)]|\mathcal{G}_s^k\right].$$

Par indépendance de $\mathcal{F}_T$ et $\sigma(L_k)$ sous $\mathbb{Q}^{L_k}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[e^{iu.(N_{t+s}-N_s)}|\mathcal{G}_s^k] &= E_{\mathbb{Q}^{L_k}}\left[e^{iu.(N_{s'}-N_s)}E_{\mathbb{P}}[e^{iu.(N_{t+s}-N_{s'})}|\mathcal{F}_{s'}]|\mathcal{G}_s^k\right] \\ &= \exp[(e^{iu}-1)\int_{s'}^{s+t}\kappa_v dv]E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[e^{iu.(N_{s'}-N_s)}|\mathcal{G}_s^k] \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après la définition D1 page 21 de [13]. □

De plus, d'après la proposition 3.3 page 105 de Amendinger [1], l'hypothèse 1 assure la continuité à droite de la filtration G_T^k.

On va appliquer les résultats de Amendinger [1] avec $S = (W^*, M^*)^*$ et L_k jouant le rôle de G. $S \in \mathcal{H}^2_{loc}(\mathbb{P}, \mathrm{F}_T)$.
Puisque $(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathbb{P}) := (\Omega^W \times \Omega^N, \mathrm{F}_T^W \otimes \mathrm{F}_T^N, \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N)$, on a un théorème de représentation de martingales sur $(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathbb{P})$ (d'après Protter [45] Théorème 42 p. 155 et corollaire 2 p. 156, et Brémaud [13] Théorème 10 p. 67). Ainsi, l'hypothèse (4.1) de Amendinger [1] est vérifiée (c'est-à-dire toute $(\mathrm{F}_T, \mathbb{P})$-martingale peut être représentée relativement au processus S). Le théorème (4.2) de [1] donne alors un théorème de représentation de martingales sur $(\Omega, \mathrm{G}_T^k, \mathbb{Q}^{L_k})$, i.e.

Théorème 2.0.6 *$\forall K \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathrm{G}_T^k, \mathbb{Q}^{L_k}), \exists \psi \in L^1_{loc}(S, \mathrm{G}_T^k, \mathbb{Q}^{L_k})$ tel que*

$$K(t) = K(0) + \int_0^t \psi^*(s)dS(s)$$

où $S = (W^*, M^*)^*$.

2.1 Théorème de représentation pour les $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingales locales

Par hypothèse, $\mathbb{Q}^{L_k}$ est équivalente à $\mathbb{P}$, on note Z_k le processus densité de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}^{L_k}$, i.e.

$$\forall t \in [0, T], \qquad Z_k(t) = E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{L_k}}|\mathcal{G}_t^k].$$

Z_k est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{Q}^{L_k})$-martingale strictement positive, donc on peut écrire

$$dZ_k(t) = Z_k(t^-)[Z_k(t^-)]^{-1}dZ_k(t).$$

$[Z_k(t^-)]^{-1}dZ_k(t)$ est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{Q}^{L_k})$-martingale locale, on lui applique le théorème 2.0.6. Par suite, il existe des processus G_T^k-prévisibles ρ_1^k et ρ_2^k tels que

$$dZ_k(t) = Z_k(t^-)[\rho_1^{k*}(t)dW(t) + (\rho_2^k(t) - I_n)^* dM(t)],$$

(I_n étant, rappelons le, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées toutes égales à 1). Puisque Z_k est une exponentielle de Doléans strictement positive, ρ_2^k est un processus vectoriel à coordonnées strictement positives (ceci est une conséquence de la proposition 1.5 p.179 de Lépingle et Mémin (1978) [42]).

Exemple 2.1.1
Généralisation de l'exemple 3 p. 1103 de I. Karatzas et I. Pikovsky (1996) [38] avec des sauts.
L_k est la variable aléatoire m-dimensionnelle

$$(L_k)_i = \delta_i W_i(T) + (1 - \delta_i)B_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

avec $\delta_i \in [0, 1[$ et $B = (B_i, i = 1, \cdots, m)$ est un bruit blanc de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et indépendantes de $\mathcal{F}_T$. Alors $\rho_2^k \equiv I_n$ et

$$\rho_1^k(t) = \left(\frac{\delta_i \left((L_k)_i - \delta_i W_i(t) \right)}{\delta_i^2 (T - t) + (1 - \delta_i)^2} \right)_{i=1,\cdots,m} \qquad t \in [0, T].$$

□

Remarque: L'hypothèse 1 page 29 est restrictive car elle n'est pas satisfaite si L_k est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Dans ce cas, il y a des possibilités d'arbitrage pour l'agent informé (cf. Elliott and Jeanblanc (1999) [20]).

Soit A une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale locale. Par le théorème de Girsanov,

$$A_k(\cdot) := A(\cdot) - \int_0^{\cdot} Z_k(t) d[A, \frac{1}{Z_k}](t)$$

est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{Q}^{L_k})$-martingale locale, on lui applique le théorème 2.0.6 : il existe des processus G_T^k-prévisibles γ_1 et γ_2 tels que

$$dA_k(t) = \gamma_1^*(t)dW(t) + \gamma_2^*(t)dM(t).$$

Par le théorème de Girsanov,

$$dA(t) = dA_k(t) - \frac{1}{Z_k(t)} d[A_k, Z_k](t).$$

Ainsi

$$dA(t) = \gamma_1^*(t)dW(t) + \gamma_2^*(t)dM(t) - \gamma_1^*(t)\rho_1^k(t)dt - \frac{Z_k(t^-)}{Z_k(t)}[\gamma_2^*(t).(\rho_2^k(t) - I_n)^*]dN(t).$$

Or s'il existe $j \in [\![0,n]\!]$ et t tels que $dN_j(t) \neq 0$, on a $Z_k(t) = Z_k(t^-)\rho^k_{2,j}(t)$ d'où

$$\begin{aligned}\gamma_2^*(t)dM(t) - \frac{Z_k(t^-)}{Z_k(t)} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^n \quad \gamma_{2,j}(t)[(\rho^k_{2,j}(t)-1)dN_j(t)] \\ &= \sum_{j=1}^n \gamma_{2,j}(t)[dM_j(t) - dN_j(t) + \frac{1}{\rho^k_{2,j}(t)}dN_j(t)] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{2,j}(t)}{\rho^k_{2,j}(t)}[dN_j(t) - \kappa_j(t)\rho^k_{2,j}(t)dt].\end{aligned}$$

Par suite, en posant $\widetilde{\gamma_{2,j}}(t) = \frac{\gamma_{2,j}(t)}{\rho^k_{2,j}(t)}$, nous obtenons

$$dA(t) = \gamma_1^*(t)[dW(t) - \rho_1^k(t)dt] + \widetilde{\gamma_2}^*(t)[dN(t) - (\kappa.\rho_2^k)(t)dt].$$

On définit

$$d\widetilde{W}^k(t) := dW(t) - \rho_1^k(t)dt$$

et

$$d\widetilde{M}^k(t) := dN(t) - (\kappa.\rho_2^k)(t)dt.$$

$\widetilde{W}^k$ est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale locale par le théorème de Girsanov ;
$d\langle W_i, W_j\rangle(s) = d\langle \widetilde{W_i^k}, \widetilde{W_j^k}\rangle(s) = \delta_{ij}ds$ donc par le théorème de Lévy, $\widetilde{W}^k$ est un $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-mouvement brownien.
$\widetilde{M}^k$ est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-processus de Poisson d'intensité $(\kappa.\rho_2^k)$ (Brémaud Théorème 3 p. 166 [13]) car ρ_2^k est à coordonnées strictement positives.
On a donc démontré le résultat suivant :

Proposition 2.1.2 *Sous l'hypothèse 1*
$\forall A \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$, $\exists \gamma \in L^1_{loc}(\widetilde{S}^k, \mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$ *tel que*

$$A(t) = A(0) + \int_0^t \gamma^*(s)d\widetilde{S^k}(s)$$

où $\widetilde{S^k} = (\widetilde{W}^{k*}, \widetilde{M}^{k*})^*$ *est une* $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$*-martingale locale.*

Remarque: En particulier, sous l'hypothèse 1, (W^*, M^*) est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-semi martingale et l'équation de la richesse (1.3) a donc un sens stochastique.

2.2 Probabilité neutre au risque pour l'agent k

On définit

Définition 2.2.1

$$Y_k := \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot}\left(-(\Theta+\rho_1^k)^*(s)d\widetilde{W}^k(s)+\left(\frac{q(s)}{\rho_2^k(s)}-I_n\right)^* d\widetilde{M}^k(s)\right)\right).$$

avec, rappelons le, $\Theta(t) :=$ les m 1ères lignes de $(\sigma(t))^{-1}(b(t)-r(t)I_d)$
et le processus vectoriel q, de dimension n, tel que :
$q(t).\kappa(t) =$ les n dernières lignes de $-(\sigma(t))^{-1}(b(t)-r(t)I_d)$.
$Y_k = \mathcal{E}(C_k)$ avec $C_k(t) = \int_0^t(-(\Theta+\rho_1^k)^*(s)d\widetilde{W}^k(s)+[\frac{q(s)}{\rho_2^k(s)}-I_n]^*d\widetilde{M}^k(s))$ et $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Doléans. Puisque $\Delta C_k > -1$, Y_k est une $(\mathrm{G}_T^k,\mathbb{P})$-martingale locale strictement positive. D'après Lépingle et Mémin, théorème 3.1 p. 185 [42], Y_k est une $(\mathrm{G}_T^k,\mathbb{P})$-martingale si

$$E_{\mathbb{P}}\left[\exp(\frac{1}{2}\langle C_k^c, C_k^c\rangle_T+\sum_{s\leq T}(1+\Delta C_k(s))\ln(1+\Delta C_k(s))-\Delta C_k(s))\right] < +\infty. \quad (2.1)$$

Nous faisons l'hypothèse suivante

Hypothèse 2 *Y_k est une $(\mathrm{G}_T^k,\mathbb{P})$-martingale.*

Sous cette hypothèse 2, nous définissons la mesure de probabilité $\widehat{\mathbb{P}^k}$ sur $\mathcal{G}_T^k$ par :

$$\widehat{\mathbb{P}^k}(A) := E_{\mathbb{P}}[Y_k(T)\mathbb{I}_A], \qquad A\in\mathcal{G}_T^k.$$

$\widehat{W}(t) = W(t)+\int_0^t\Theta(s)ds = \widetilde{W}^k(t)+\int_0^t(\Theta+\rho_1^k)(s)ds$ est un $(\mathrm{G}_T^k,\widehat{\mathbb{P}^k})$-mouvement brownien (par les théorèmes de Girsanov et de Lévy) et

$$\begin{aligned}\widehat{M}(t) &:= N(t)-\int_0^t q(s)\kappa(s)ds\\ &= \widetilde{M}^k(t)+\int_0^t\rho_2^k(s)\kappa(s)ds-\int_0^t q(s)\kappa(s)ds\\ &= \widetilde{M}^k(t)+\int_0^t[\rho_2^k(s)-q(s)]\kappa(s)ds\end{aligned}$$

est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T^k,\widehat{\mathbb{P}^k})$-processus de Poisson d'intensité $(q.\kappa)$ (d'après Brémaud Théorème 3 p. 166 [13]).
On note $\widehat{S} := (\widehat{W}^*,\widehat{M}^*)^*$. On remarque que le processus $\widehat{S}$ ne dépend pas de k, c'est le même pour chaque agent. Par suite l'équation (1.3) de la richesse devient

$$\begin{aligned}\beta(t)X_k(t) &= \beta(0)X_k(0)+\int_0^t\beta(s)(\epsilon_k(s)-c_k(s))ds+\int_0^t\beta(s)\pi_k^*(s^-)\sigma(s)d\widehat{S}(s)\\ &+ \int_0^t\beta(s)\pi_k^*(s^-)[(b(s)-r(s)I_d)-\sigma(s)(\sigma(s))^{-1}(b(s)-r(s)I_d)]ds\end{aligned}$$

soit

$$\beta(t)X_k(t) = \beta(0)X_k(0) + \int_0^t \beta(s)(\epsilon_k(s) - c_k(s))ds + \int_0^t \beta(s)\pi_k^*(s^-)\sigma(s)d\widehat{S}(s). \quad (2.2)$$

De plus, sous cette probabilité $\widehat{\mathbb{P}^k}$, les prix actualisés $\beta(t)P_i(t)$, $i = 1, \cdots, d$, sont des G_T^k-martingales locales. En effet,

$$d(\beta(t)P_i(t)) = (\beta(t)P_i(t))[(b_i(t) - r(t))dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t)dW_j(t) + \sum_{j=m+1}^{d} \sigma_{ij}(t)dN_{j-m}(t)]$$

ce qui donne par définition de $\widehat{S}$ et après simplification :

$$d(\beta(t)P_i(t)) = (\beta(t)P_i(t)) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)d\widehat{S}_j(t).$$

Ainsi, $\widehat{\mathbb{P}^k} = Y_k\mathbb{P}$ est une probabilité neutre au risque pour l'agent k. On pose

$$\zeta_k(t) := \beta(t)Y_k(t), \qquad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

où β est le coefficient d'actualisation.

Lemme 2.2.2

$$d(Y_k^{-1})(t) = Y_k^{-1}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t) \qquad \textit{avec} \quad l_k^* := \left(\left(\Theta + \rho_1^k\right)^*, (\frac{\rho_2^k}{q} - I_n)^* \right).$$

Preuve:
On pose $N_k(t) := (Y_k(t))^{-1}$. Puisque

$$dY_k(t) = Y_k(t^-)[-(\Theta + \rho_1^k)^*(t)d\widetilde{W}^k(t) + (\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)} - I_n)^* d\widetilde{M}^k(t)]$$

$$\begin{array}{rcl} N_k(t) & = & 1 + \int_0^t N_k(s)(\Theta + \rho_1^k)^*(s)d\widetilde{W}^k(s) - \int_0^t N_k(s^-)[\frac{q(s)}{\rho_2^k(s)} - I_n]^* d\widetilde{M}^k(s) \\ & & + \int_0^t N_k(s)(\Theta + \rho_1^k)^*(s)(\Theta + \rho_1^k)(s)ds \\ & & + \sum_{0<s\leq t} N_k(s) - N_k(s^-) + N_k(s^-)[\frac{q(s)}{\rho_2^k(s)} - I_n]^* dN(s) \\ & = & 1 + \int_0^t N_k(s)(\Theta + \rho_1^k)^*(s)d\widehat{W}(s) + \sum_{0<s\leq t} N_k(s) - N_k(s^-) \\ & & + \int_0^t N_k(s)[\frac{q(s)}{\rho_2^k(s)} - I_n]^*(\kappa.\rho_2^k)(s)ds. \end{array}$$

Or $N_k(s) - N_k(s^-) = N_k(s^-)(\frac{\rho_2^k(s)}{q(s)} - I_n)^* dN(s)$. Par suite

$$N_k(t) = 1 + \int_0^t N_k(s)(\Theta + \rho_1^k)^*(s)d\widehat{W}(s) + \int_0^t N_k(s^-)(\frac{\rho_2^k(s)}{q(s)} - I_n)^*[dN(s) - \kappa(s)q(s)ds]$$

$$dN_k(t) = N_k(t^-)[(\Theta + \rho_1^k)^*(t)d\widehat{W}(t) + (\frac{\rho_2^k(t)}{q(t)} - I_n)^* d\widehat{M}(t)]$$

$$dN_k(t) = N_k(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t) \qquad \text{avec} \quad l_k^* := \left(\left(\Theta + \rho_1^k\right)^*, (\frac{\rho_2^k}{q} - I_n)^* \right).$$

□

2.3 Théorème de représentation pour les $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingales locales

Théorème 2.3.1 *On se place sous les hypothèses 1 et 2.*
Si $\widehat{A} \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathcal{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$, $\exists \psi \in L^1_{loc}(\widehat{S}, \mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$ *tel que*

$$\widehat{A}(t) = \widehat{A}(0) + \int_0^t \psi^*(s) d\widehat{S}(s).$$

Preuve:
Soit $\widehat{A} \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathcal{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$. Par le théorème de Girsanov, on lui associe A une $(\mathcal{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale locale telle que

$$\widehat{A}(t) = A(t) - \int_0^t \frac{1}{Y_k(s)} d[A, Y_k](s)$$

car $\widehat{\mathbb{P}^k} = Y_k \mathbb{P}$. On applique la proposition 2.1.2 à A : $\exists \gamma \in L^1_{loc}(\widetilde{S^k}, \mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$ tel que

$$A(t) = A(0) + \int_0^t \gamma^*(s) d\widetilde{S^k}(s).$$

Si on note γ_1 les m 1ères composantes de γ et γ_2 les n dernières, on a

$$dA(t) = \gamma_1^*(t) d\widetilde{W^k}(t) + \gamma_2^*(t) d\widetilde{M^k}(t).$$

D'autre part,

$$dY_k(t) = Y_k(t^-)[-(\Theta + \rho_1^k)^*(t) d\widetilde{W}^k(t) + (\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)} - I_n)^* d\widetilde{M}^k(t)].$$

Par Itô,

$$\begin{aligned} d\widehat{A}(t) &= \gamma_1^*(t)[d\widetilde{W^k}(t) + (\Theta + \rho_1^k)^*(t) dt] \\ &+ \sum_{j=1}^n \gamma_{2,j}(t)[dN_j(t) - \kappa_j(t)\rho_{2,j}^k(t) dt - \frac{\frac{q_j(t)}{\rho_{2,j}^k(t)} - 1}{\frac{q_j(t)}{\rho_{2,j}^k(t)}} dN_j(t)] \end{aligned}$$

$$d\widehat{A}(t) = \gamma_1^*(t) d\widehat{W}(t) + \gamma_3^*(t) d\widehat{M}(t) \qquad \text{avec} \qquad \gamma_3 = \frac{\gamma_2 . q}{\rho_2^k}.$$

□

Remarque: Sur un modèle de marché financier semblable au nôtre, Axel Grorud, dans son papier [24], construit une probabilité neutre au risque pour l'agent initié à partir de la probabilité $\mathbb{Q}^{L_k}$, alors que nous l'avons construite à partir de la probabilité de départ $\mathbb{P}$. Ainsi, notre construction est un peu plus longue que la sienne, le paragraphe 2.1 étant en plus. Nous avons choisi cette construction pour deux

raisons. Tout d'abord, pour résoudre son problème d'optimisation (cf. chapitre 3), l'agent initié doit optimiser l'espérance sous $\mathbb{P}$ de l'utilité de sa consommation (cf. définition (3.3)), sous la contrainte budgétaire (3.1) qui fait intervenir une espérance sous $\widehat{\mathbb{P}^k}$. Il nous est donc paru naturel d'exprimer $\widehat{\mathbb{P}^k}$ en fonction de $\mathbb{P}$. D'autre part, notre étude sur l'équilibre va nous amener à établir des relations entre les probabilités neutres au risque des initiés. Ce travail sera rendu plus lisible si l'on exprime ces probabilités à partir d'une probabilité commune.

Chapitre 3

Optimisation de la consommation de chaque agent

Dans ce chapitre, on fixe $k = 1, \cdots, K$. Soit U_k une fonction d'utilité. Par définition, $\forall t \in [0, T]$, sa dérivée partielle par rapport à c est inversible, on note son inverse $I_k(t, \cdot)$.

Proposition 3.0.2 *On suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. Soit $X_k(0)$ dans $L^1(\mathcal{G}_0^k)$. Si (π_k, c_k) est une stratégie G_T^k-admissible pour l'agent k, alors*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0). \tag{3.1}$$

Réciproquement, quel que soit le processus de consommation c_k positif, G_T^k-adapté et satisfaisant $\int_0^T c_k(t)dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement ainsi que la contrainte budgétaire (3.1), il existe un portefeuille π_k tel que (π_k, c_k) soit G_T^k-admissible.

Preuve:
Puisque π_k est G_T^k-adapté,

$$\tau_m := \inf\{t/ \int_0^t \beta^2(s)||\pi_k^*(s)\sigma(s)||^2 ds \geq m\} \wedge T, m \in \mathbb{N}^*$$

est un G_T^k-temps d'arrêt. En prenant les espérances par rapport à la mesure $\widehat{\mathbb{P}^k}$, conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}_0^k$, de l'équation (2.2) au temps $t = \tau_m$, on obtient

$$E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(\tau_m)X_k(\tau_m)|\mathcal{G}_0^k] = \beta(0)X_k(0) + E_{\mathbb{P}}[\int_0^{\tau_m} \zeta_k(s)(\epsilon_k(s) - c_k(s))ds|\mathcal{G}_0^k]. \tag{3.2}$$

On fait tendre $m \to +\infty$ (et donc $\tau_m \to T$) et le lemme de Fatou donne :

$$\liminf_{m \to +\infty} E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(\tau_m)X_k(\tau_m)|\mathcal{G}_0^k] \geq E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(T)X_k(T)|\mathcal{G}_0^k] \geq 0.$$

En appliquant le théorème de convergence monotone à l'intégrale du membre de droite de (3.2), on obtient donc la contrainte budgétaire (3.1)

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(s)(c_k(s)-\epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0).$$

De plus, (π_k, c_k) stratégie G_T^k-admissible implique $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(s)c_k(s)ds] < +\infty$.

Pour la réciproque, on introduit $D := \int_0^T \beta(s)(c_k(s)-\epsilon_k(s))ds - \beta(0)X_k(0)$.
ϵ_k et β sont bornés, $X_k(0)$ appartient à $L^1(\mathbb{P}^k)$ ainsi que $\int_0^T c_k(s)ds$ car c_k satisfait (3.1) donc $D \in L^1(\mathbb{P}^k)$. Puisque c_k satisfait (3.1), $E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k] \leq 0$.
On applique le théorème 2.3.1 à la $(\widehat{\mathbb{P}^k}, \mathrm{G}_T^k)$-martingale

$$H(t) := E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_t^k], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Il existe $\psi \in L^1_{loc}(\widehat{S}, \mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$ tel que $H(t) = E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k] + \int_0^t \psi^*(s)d\widehat{S}(s)$ et $\int_0^T ||\psi(s)||^2 ds < +\infty$ (lemme 8.4 [37]). $\pi_k(s^-) := \beta(s)^{-1}(\sigma^*(s))^{-1}\psi(s)$.
$\int_0^T ||\sigma^*(s)\pi_k(s)||^2 ds = \int_0^T ||\beta(s)^{-1}\psi(s)||^2 ds < +\infty$ car β^{-1} est borné. La stratégie (π_k, c_k) est G_T^k-admissible et la richesse correspondante $X_k^{(\pi_k,c_k)}$ vérifie

$$dH(t) + \beta(t)(\epsilon_k(t) - c_k(t))dt = d(\beta(t)X_k^{(\pi_k,c_k)}(t)).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\beta(t)X_k^{(\pi_k,c_k)}(t) = -E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k] \quad &- \quad \int_0^t \beta(s)(c_k(s)-\epsilon_k(s))ds \\ &+ \quad E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_0^T \beta(s)(c_k(s)-\epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k].\end{aligned}$$

$$\beta(t)X_k^{(\pi_k,c_k)}(t) = -E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k] - E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_t^T \beta(s)(\epsilon_k(s)-c_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k], 0 \leq t \leq T.$$

On vérifie que la richesse est bien minorée (car ϵ_k est borné, c_k est positif, β est majoré et minoré par une constante strictement positive) et que $X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) \geq 0$. □

L'agent k cherche à maximiser

$$(\pi_k, c_k) \to V(X_k(0), \pi_k, c_k) := E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t, c_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \tag{3.3}$$

parmi les stratégies G_T^k-admissibles, qui vérifient donc la contrainte (3.1) :

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(s)(c_k(s)-\epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0).$$

On résout la maximisation sous contrainte de cette fonctionnelle par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le lagrangien de ce problème sous contrainte est :

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t, c_k(t))dt + \lambda(\int_0^T \zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt - \beta(0)X_k(0))|\mathcal{G}_0^k] \tag{3.4}$$

où λ est une variable aléatoire $\mathcal{G}_0^k$-mesurable (la contrainte est saturée).
c_k optimal doit donc vérifier :

$$\frac{\partial}{\partial c}U_k(t, c_k(t)) = \lambda\zeta_k(t)$$

c'est-à-dire

$$c_k(t) = I_k(t, \lambda\zeta_k(t)).$$

Théorème 3.0.3 *On suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. S'il existe λ une variable aléatoire strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(I_k(t, \lambda\zeta_k(t)) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] = \beta(0)X_k(0) \tag{3.5}$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation de l'agent k, donnée par : $\widehat{c_k}(t) = I_k(t, \lambda\zeta_k(t))$.
La richesse optimale est $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(t) = \frac{1}{\zeta_k(t)}E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta_k(s)(\widehat{c_k}(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k]$.
La valeur optimale du problème de maximisation est

$$V(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k o I_k(t, \lambda\zeta_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k].$$

Preuve:
Remarquons tout d'abord que par la proposition 3.0.2 précédente, toute consommation c_k vérifiant la contrainte budgétaire (3.1) est simulable. D'autre part, (3.5) implique que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)I_k(t, \lambda\zeta_k(t))dt] < +\infty$, donc $\int_0^T I_k(t, \lambda\zeta_k(t))dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Soit c_k une stratégie admissible, qui vérifie donc la contrainte (3.1), par suite

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(\widehat{c_k}(t) - c_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \geq 0.$$

Or, par stricte concavité de l'application $c \to U_k(t, c)$, on a $\forall t \in [0, T], \forall y > 0$,

$$U_k(t, I_k(t, y)) - yI_k(t, y) = \max_{c>0}\{U_k(t, c) - yc\}$$

et le maximum est uniquement atteint.
On applique ceci à t et ω fixés, pour $y = \lambda\zeta_k(t)$. On obtient

$$U_k(t, \widehat{c_k}(t)) - \lambda\zeta_k(t)\widehat{c_k}(t) \geq U_k(t, c_k(t)) - \lambda\zeta_k(t)c_k(t).$$

L'inégalité est stricte si $\widehat{c_k}(t)(\omega) \neq c_k(t)(\omega)$. Par suite

$$V(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) - V(X_k(0), \pi_k, c_k) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (U_k(t, \widehat{c_k}(t)) - U_k(t, c_k(t)))dt|\mathcal{G}_0^k]$$
$$\geq \lambda E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(\widehat{c_k}(t) - c_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \geq 0$$

et $V(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) - V(X_k(0), \pi_k, c_k) = 0$ si et seulement si $\widehat{c_k} = c_k$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. □

On définit pour tout $\omega \in \Omega$ la fonction

$$\Upsilon_\omega^k :]0, +\infty[\to]0, +\infty]$$

par

$$\begin{aligned} \Upsilon_\omega^k(\lambda) &:= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t) I_k(t, \lambda\zeta_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k](\omega) \\ &= \int_{\mathbb{D}[0,T]} (\int_0^T z(t) I_k(t, \lambda z(t))dt)\mathbb{P}[\zeta_k \in dz|\mathcal{G}_0^k](\omega) \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\mathbb{D}[0, T]$ est l'espace polonais de Skorohod des processus càdlàg.

Proposition 3.0.4 *On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Si pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions Υ_ω^k sont finies, alors il existe une unique fonction λ strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant la relation (3.5).*

Preuve:

(i). Puisque $I_k(t, \cdot)$ est strictement décroissante et $\zeta_k > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, le théorème de convergence monotone entraîne que pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions Υ_ω^k sont strictement décroissantes et

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \Upsilon_\omega^k(\lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \Upsilon_\omega^k(\lambda) = +\infty.$$

(ii). On fixe $\omega \in \Omega \backslash N$ avec $\mathbb{P}[N] = 0$ et tel que Υ_ω^k est finie. Soit $\epsilon > 0$. $\forall t \in [0, T]$, la fonction $\lambda \to \zeta_k(t) I_k(t, \lambda\zeta_k(t))$, définie pour $\lambda > 0$, est décroissante, continue et bornée sur $[\epsilon, +\infty[$, par conséquent le théorème de continuité de Lebesgue implique que Υ_ω^k est continue sur $[\epsilon, +\infty[$. Puisque ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, Υ_ω^k est continue sur $]0, +\infty[$.

(iii). Puisque $\mathcal{G}_0^k$ contient les $\mathbb{P}$-négligeables, on peut supposer que $\forall \omega \in \Omega$, Υ_ω^k est continue, inversible.

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega / (E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0))(\omega) > 0\}.$$

Puisque $(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$. Le (i) de la preuve implique alors que $\forall\omega \in \Omega'$,

$$\left(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)\right)(\omega) \in \{\Upsilon_\omega^k(\lambda), \lambda \in]0, +\infty[\}.$$

$\forall\omega \in \Omega'$, il existe un unique $\widehat{\lambda}(\omega)$ tel que $\Upsilon_\omega^k(\widehat{\lambda}) = (E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k]+\beta(0)X_k(0))(\omega)$. Il reste à prouver la $\mathcal{G}_0^k$-mesurabilité de $\widehat{\lambda}$:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega'/\widehat{\lambda}(\omega) \leq b\} &= \{\omega \in \Omega'/\Upsilon_\omega^k(\widehat{\lambda}(\omega)) \geq \Upsilon_\omega^k(b)\} \\ &= \{\omega \in \Omega'/E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k](\omega) \\ &\qquad +(\beta(0)X_k(0))(\omega) \geq \Upsilon_\omega^k(b)\}\end{aligned}$$

$\{\omega \in \Omega'/\widehat{\lambda}(\omega) \leq b\}$ est bien dans $\mathcal{G}_0^k$ car $(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0))(\cdot)$ et $\Upsilon_\cdot^k(b)$ sont $\mathcal{G}_0^k$-mesurables. On définit $\widehat{\lambda}$ arbitrairement sur le complémentaire de Ω'. Puisque $\mathcal{G}_0^k$ contient les $\mathbb{P}$-négligeables, $\{\omega \in \Omega/\widehat{\lambda}(\omega) \leq b\}$ est bien dans $\mathcal{G}_0^k$. Par suite on a l'existence et l'unicité ($\mathbb{P}$ presque sûrement) d'une variable aléatoire $\widehat{\lambda}$ $\mathcal{G}_0^k$-mesurable telle que $\forall\omega \in \Omega$,

$$\Upsilon_\omega^k(\widehat{\lambda}(\omega)) = \left(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)\right)(\omega).$$

□

Exemple 3.0.5
$U_k(t,c) = \ln(c)$ $\qquad \forall(t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
Alors $I_k(t,c) = \frac{1}{c}$ $\qquad \forall(t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda = \frac{T}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{1}{\lambda\beta(t)Y_k(t)} \quad \text{et} \quad \beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{T-t}{\lambda} - E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \beta(s)Y_k(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_t^k].$$

Nous allons exprimer le portefeuille optimal dans le cas où $\beta\epsilon_k$ est déterministe. Dans ce cas,

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{T-t}{\lambda Y_k(t)} - \int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds.$$

Puisque $d(\frac{1}{Y_k})(t) = \frac{1}{Y_k}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$ avec $l_k^* := ((\Theta + \rho_1^k)^*, (\frac{\rho_2^k}{q} - I_n)^*)$, $d(\beta(t)\widehat{X_k}(t)) - \frac{T-t}{\lambda Y_k(t^-)}l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$ est un processus à variations finies.

En comparant la forme différentielle ainsi obtenue à celle de l'équation (2.2), on obtient, par unicité de la décomposition de la $\mathbb{P}$-semi martingale $\beta(t)\widehat{X_k}(t)$, (Théorème de Bichteler-Dellacherie, Protter p. 114 [45])

$$\beta(t)\widehat{\pi_k}^*(t^-)\sigma(t) = \left(\beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t) + Y_k(t)\int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds\right) l_k^*(t)\frac{1}{Y_k(t^-)}.$$

Par suite

$$\widehat{\pi_k}(t^-) = (\sigma^*(t))^{-1}\left(\widehat{X_k}(t) + \frac{\int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{\beta(t)}\right)\frac{Y_k(t)}{Y_k(t^-)}l_k(t).$$

$$\widehat{\pi_k}(t^-) = (\sigma^*(t))^{-1}\left(\frac{T-t}{T\beta(t)}\left(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds + \beta(0)X_k(0)\right)\right)\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k(t).$$

Ainsi l'agent k choisira pour portefeuille

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}\left(\frac{T-t}{T\beta(t)}\left(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds + \beta(0)X_k(0)\right)\right)\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k(t).$$

Son portefeuille est alors continu à gauche (donc prévisible). Dès que l'agent voit le processus Y_k avoir un saut, il réajuste son portefeuille.

Exemple 3.0.6
$U_k(t,c) = \frac{1}{p}c^p \qquad \forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[\qquad (p \neq 0, p < 1).$
Alors $I_k(t,c) = c^{\frac{1}{1-p}} \qquad \forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[.$
On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$(\lambda)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt|\mathcal{G}_0^k]},$$

$$\widehat{c_k}(t) = (\lambda\beta(t)Y_k(t))^{\frac{1}{p-1}},$$

$$\beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t) = (\lambda)^{\frac{1}{p-1}}E_{\mathbb{P}}[\int_t^T (\beta(s)Y_k(s))^{\frac{p}{p-1}}ds|\mathcal{G}_t^k] - E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \beta(s)Y_k(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_t^k].$$

Le calcul du portefeuille optimal est ici beaucoup plus technique que pour une utilité logarithmique et nécessite des hypothèses supplémentaires. Comme le suggère l'expression de la richesse terminale, la difficulté provient du terme $E_{\mathbb{P}}[\int_t^T (\beta(s)Y_k(s))^{\frac{p}{p-1}}ds|\mathcal{G}_t^k]$ qu'il faut différentier par rapport à t. Etablissons tout d'abord quelques résultats techniques préliminaires.
Soit α une constante strictement positive. Puisque

$$dY_k(t) = Y_k(t^-)[-(\Theta + \rho_1^k)^*(t)d\widetilde{W}^k(t) + (\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)} - I_n)^*d\widetilde{M}^k(t)],$$

$$\begin{aligned} dY_k^\alpha(t) &= \alpha Y_k^\alpha(t^-)\left(-(\Theta+\rho_1^k)^*(t)d\widetilde{W}^k(t)+(\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)}-I_n)^*d\widetilde{M}^k(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha-1)\alpha\, Y_k^\alpha(t)\,||\Theta+\rho_1^k||^2(t)dt \\ &+ Y_k^\alpha(t)-Y_k^\alpha(t^-)-\alpha Y_k^\alpha(t^-)(\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)}-I_n)^*dN(t). \end{aligned}$$

Or $\quad Y_k^\alpha(t)-Y_k^\alpha(t^-)=Y_k^\alpha(t^-)\left((\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)})^\alpha-I_n\right)dN(t)$. Par suite

$$\begin{aligned} dY_k^\alpha(t) &= Y_k^\alpha(t^-)\left((-\alpha)(\Theta+\rho_1^k)^*(t)d\widetilde{W}^k(t)+((\frac{q}{\rho_2^k})^\alpha(t)-I_n)^*d\widetilde{M}^k(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha-1)\alpha\, Y_k^\alpha(t)\,||\Theta+\rho_1^k||^2(t)dt \\ &+ Y_k^\alpha(t^-)(\kappa.\rho_2^k)^*\left(\left(\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)}\right)^\alpha-I_n-\alpha(\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)}-I_n)\right)dt. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha}(t) := \alpha r(t) &+ \frac{1}{2}(\alpha-1)\alpha||\Theta+\rho_1^k||^2(t) \\ &+ (\kappa.\rho_2^k)^*\left(\left(\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)}\right)^\alpha-I_n-\alpha(\frac{q(t)}{\rho_2^k(t)}-I_n)\right) \end{aligned}$$

Alors $(\beta Y_k)^\alpha(\cdot)\exp(-\int_0^\cdot \Gamma_{k,\alpha}(s)ds)$ est une $(\mathrm{G}_T^k,\mathbb{P})$-martingale locale.
On suppose que

$$(\beta Y_k)^\alpha(\cdot)\exp(-\int_0^\cdot \Gamma_{k,\alpha}(s)ds) \text{ est une } (\mathrm{G}_T^k,\mathbb{P})-\text{martingale et } \Gamma_{k,\alpha} \text{ est } \mathcal{G}_0^k-\text{mesurable.} \tag{3.7}$$

Sous cette hypothèse (3.7), on a pour tout t et s vérifiant $0\le t\le s\le T$,

$$E_{\mathbb{P}}\left((\beta Y_k)^\alpha(s)|\mathcal{G}_t^k\right)=(\beta Y_k)^\alpha(t)\exp(\int_t^s \Gamma_{k,\alpha}(u)du). \tag{3.8}$$

Nous allons exprimer le portefeuille optimal lorsque le processus $\beta\epsilon_k$ est déterministe et en supposant que l'hypothèse (3.7) est réalisée pour $\alpha=\frac{p}{p-1}$. Dans ce cas, en utilisant la relation (3.8) avec $\alpha=\frac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned} \beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t) &= \lambda^{\frac{1}{p-1}}(\beta(t)Y_k(t))^{\frac{p}{p-1}}\left(\int_t^T \exp(\int_t^s \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(u)du)ds\right) \\ &\quad -Y_k(t)(\int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds). \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \beta(t)\widehat{X_k}(t) &= Y_k^{\frac{1}{p-1}}(t)\beta^{\frac{p}{p-1}}(t)\lambda^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_t^T \exp(\int_t^s \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(u)du)ds\right) \\ &\quad -(\int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\beta\widehat{X_k})(t) &= Y_k^{\frac{1}{p-1}}(t^-)\beta^{\frac{p}{p-1}}(t)\lambda^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_t^T \exp(\int_t^s \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(u)du)ds\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{1-p}(\Theta+\rho_1^k)^*(t)d\widetilde{W}^k(t) + ((\frac{q}{\rho_2^k})^{\frac{1}{p-1}}(t) - I_n)^* d\widetilde{M}^k(t)\right) \\ &\quad +[...]dt. \end{aligned}$$

En comparant la forme différentielle ainsi obtenue à celle de l'équation de la richesse (2.2), on obtient, par unicité de la décomposition de la $\mathbb{P}$-semi martingale $\beta(t)\widehat{X_k}(t)$,

$$\begin{aligned} \beta(t)\widehat{\pi_k}^*(t^-)\sigma(t) &= \left(\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds\right)\left(\frac{Y_k(t^-)}{Y_k(t)}\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{1-p}(\Theta+\rho_1^k)^*(t), ((\frac{q}{\rho_2^k})^{\frac{1}{p-1}}(t) - I_n)^*\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\pi_k}(t) &= (\sigma)^{-1}(t)\left(\widehat{X_k}(t) + \frac{\int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{\beta(t)}\right)\left(\frac{Y_k(t^-)}{Y_k(t)}\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{1-p}(\Theta+\rho_1^k)^*, ((\frac{q}{\rho_2^k})^{\frac{1}{p-1}} - I_n)^*\right)^*(t). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Equilibre dans le cadre d'optimisation de la consommation

Pour tout $k = 1, \cdots, K$, soit U_k une fonction d'utilité de l'agent k et on considère le problème d'optimisation de la consommation (définition (3.3)) de chaque agent.

Définition 4.0.7 *La famille* $(\widehat{c_k}, k = 1, \cdots, K; P)$ *est un équilibre sur le marché financier sans monnaie si*
(i) pour tout $k = 1, \cdots, K$*, la consommation* $(\widehat{c_k})$ *est optimale pour l'agent* k
(ii) le marché des consommations s'équilibre, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k}(t) = \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k(t) = \varepsilon(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{4.1}$$

Remarque: D'après la proposition 3.0.2 page 39, c_k est une consommation optimale (donc en particulier admissible) pour l'agent k si seulement si elle maximise la fonction d'utilité de cet agent sous la contrainte budgétaire (3.1).

Remarque: La définition d'équilibre 4.0.7 est différente de la définition d'un équilibre d'Arrow-Debreu (cf. définition 7.1.9 page 223 [16]) qui elle ne fait pas intervenir le processus P des prix des actifs et qui détermine un processus p, commun à tous les agents, intervenant dans leur contrainte d'optimisation (cf. (i) définition 7.1.9 page 223 [16]). La définition d'équilibre 4.0.7 se rapproche de la définition d'un équilibre d'Arrow-Radner (cf. définition 7.1.7 page 222 [16]) en supprimant la condition (ii)a) sur la nullité de la somme des portefeuilles optimaux. Dans le cadre d'un marché complet sans asymétrie d'information, cette condition est une conséquence de la condition d'équilibre (7.1) (remarque 7.1.8 [16]). Dans notre cadre de marché avec asymétrie d'information et richesse initiale non nulle, ce résultat demande plus de travail (cf. proposition 4.2.9) et n'est plus vrai lorsque les agents optimisent à la fois leur consommation et leur richesse terminale (cf. remarque 6.0.23).

Nous donnons ici un exemple simple de réalisation d'un équilibre, dans le cas où tous les agents ont pour fonction d'utilité la fonction logarithmique.

Exemple 4.0.8
On suppose que pour tout $k = 1, \cdots, K$, $U_k(t,c) = \ln(c)$ et que la ressource actualisée de l'agent k est $\mathcal{G}_0^k$-mesurable : $\beta(t)\epsilon_k(t) = a_k(t)$ avec $a_k(t)$ $\mathcal{G}_0^k$-mesurable pour tout t. Alors puisque $\zeta_k = \beta Y_k$ et que Y_k est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale,
$E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k\right] = \int_0^T a_k(t)dt.$ Par suite la consommation optimale est

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{\int_0^T a_k(t)dt + \beta(0)X_k(0)}{T\beta(t)Y_k(t)}.$$

$$(7.1) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\int_0^T a_k(t)dt + \beta(0)X_k(0)}{T\beta(t)Y_k(t)} = \frac{1}{\beta(t)}\sum_{k=1}^{K} a_k(t), \qquad t \in [0,T].$$

En particulier, si la richesse initiale de tous les agents est nulle,

$$(7.1) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\int_0^T a_k(t)dt}{TY_k(t)} = \beta(t)\sum_{k=1}^{K} a_k(t), \qquad t \in [0,T].$$

Remarque: D'après la proposition 7.2.11 [16], les prix ne sont pas complètement déterminés par l'équilibre d'Arrow-Radner. Ce qui est déterminé est le taux d'intérêt ainsi que la probabilité neutre au risque, qui est commune à tous les agents dans un marché complet sans asymétrie d'information. Dans l'exemple 4.0.8 précédent, la condition d'équilibre (7.1) est équivalente à une relation entre les processus Y_k des agents, c'est-à-dire entre leur probabililité neutre au risque respective.

Nous allons maintenant exhiber un cadre plus général d'existence d'équilibre. Pour cela nous allons ajouter une hypothèse d'indépendance conditionnelle de tribus (hypothèse 3) sous laquelle les probabilités neutres au risque des agents vont coïncider.

4.1 Information pertinente ou non

(D'après Pikovsky et Karatzas [39]).

L'information pertinente pour l'agent est celle qu'il utilise pour résoudre son problème d'optimisation. Intuitivement, seulement une partie de l'information connue par l'agent est utile pour l'élaboration de sa stratégie. Une partie de cette information est non significative pour le marché et ne modifie pas la solution du problème d'optimisation. Dans ce paragraphe, nous allons donner une caractérisation de la pertinence de l'information connue par l'agent. Nous allons aussi montrer que, sous certaines conditions, à l'équilibre, toutes les informations pertinentes connues par un agent sont immédiatement connues par tous les autres agents. Nous verrons comme conséquence que, dans ce cas, les mesures de probabilité $\widehat{\mathbb{P}^k}$ coïncident.
Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3 *Soit* $\mathcal{G}_t := \wedge_{k=1}^K \mathcal{G}_t^k, t \in [0,T]$ *et* $\mathrm{G}_T := (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$.
Les tribus $\mathcal{G}_t^k$, $k = 1, \cdots, K$, *sont indépendantes conditionnellement à* $\mathcal{G}_t$, *pour tout* $t \in [0,T]$.

Remarque: Cette hypothèse est cruciale pour la suite. Elle permet notamment d'obtenir que toutes les informations pertinentes sont connues par chaque agent à l'équilibre (equilibrium is fully revealing).

On suppose que ε est un processus de Itô, G_T-adapté

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \rho_j(s)dW_j(s) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \eta_j(s)dN_j(s) \tag{4.2}$$

où μ, $(\rho_j; j = 1, \cdots, m)$ et $(\eta_j; j = 1, \cdots, n)$ sont des processus G_T-prévisibles. On suppose de plus que ε est minoré par une constante strictement positive $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.

Exemple 4.1.1
L'hypothèse 3 est vérifiée dans les cas suivants :

- (i) Il y a $K = 2$ agents sur le marché, et l'un d'eux est non initié.

- (ii) Tous les agents ont la même information supplémentaire, ou tout du moins leurs informations privées sont équivalentes dans le sens où ils ont tous la même filtration à leur disposition.

- (iii) Il y a $K \leq m$ agents sur le marché, et pour tout k, l'agent k connait $L_k = \int_0^A \phi_k(s)dW_k(s)$ avec $T < A$ et $\phi_k \in L^2([0,A], ds)$ vérifiant $\int_t^A \phi_k^2(s)ds > 0$ pour tout $t < A$.

- (iv) Il y a $K \leq \frac{n}{2}$ agents sur le marché, et pour tout k, l'agent k connait $L_k = N_{2k}(A) + N_{2k-1}(A)$ avec $T < A$. Ces informations vérifient bien l'hypothèse 1 (cf. paragraphe 12.2.1).

Si un équilibre existe et sous l'hypothèse 3, on a d'après l'équation (7.1),

$$\sum_{j\neq k} \widehat{c_j}(t) = \varepsilon(t) - \widehat{c_k}(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad k = 1, \cdots, K. \tag{4.3}$$

On fixe $t \in [0,T]$. Le membre de gauche de l'équation (4.3) est $\vee_{j\neq k}\mathcal{G}_t^j$-mesurable alors que le membre de droite est $\mathcal{G}_t^k$-mesurable, i.e. $\mathcal{F}_L := \sigma\{\sum_{j\neq k} \widehat{c_j}(t)\} \subset \vee_{j\neq k}\mathcal{G}_t^j$, $\mathcal{F}_R := \sigma\{\varepsilon(t) - \widehat{c_k}(t)\} \subset \mathcal{G}_t^k$ et $\mathcal{F}_L = \mathcal{F}_R$. Or les tribus $\vee_{j\neq k}\mathcal{G}_t^j$ et $\mathcal{G}_t^k$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}_t$. Par suite, si $A \in \mathcal{F}_L = \mathcal{F}_R$,

$$E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}_t] = E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_A\mathbb{I}_A|\mathcal{G}_t] = E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}_t]E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}_t]$$

d'où $\mathbb{P}[A|\mathcal{G}_t] = 0$ ou 1. Puisque $\mathcal{G}_t$ contient les $\mathbb{P}$-négligeables, $A \in \mathcal{G}_t$ et par suite les deux membres de l'équation (4.3) sont $\mathcal{G}_t$-mesurables.
En particulier, cela signifie qu'à l'équilibre, les consommations optimales de chaque agent sont des processus adaptés par rapport à la même filtration G_T puisque ε est G_T-adapté. En d'autres termes, la consommation G_T-optimale de l'agent k est aussi G_T^k-optimale. On a donc prouvé le lemme suivant :

Lemme 4.1.2 *(lemme 6.4 p. 16 [39])*
Sous l'hypothèse 3 et s'il existe un équilibre (4.0.7), alors les agents n'utilisent que les informations qui sont contenues dans la filtration $\mathrm{G}_T = \wedge_{k=1}^K \mathrm{G}_T^k$. *Cela signifie que la stratégie consommation/investissement optimale de l'agent k est à la fois* G_T^k *et* G_T*-optimale.*

Remarque: Bien que toute l'information de la filtration G_T soit directement observable par chaque agent, aucun d'entre eux ne peut la distinguer (du point de vue de son propre problème d'optimisation) de son information personnelle de la filtration G_T^k. Le fait que les agents peuvent ajuster leur stratégie par rapport à la filtration de l'information commune G_T et trouver le même résultat (que s'ils avaient ajusté leur stratégie par rapport à leur propre information (G_T^k)) signifie que le marché révèle toutes les informations pertinentes à l'équilibre.

Dans la suite, on fait l'hypothèse :

Hypothèse 4 $\forall t \in [0,T], \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$ *où L est une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable à valeurs dans un espace polonais $(E, \mathcal{E})$ et de plus L vérifie l'hypothèse (H1) : Il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}^L$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $\forall t \in [0,T]$, $\mathcal{F}_t$ est indépendante de $\sigma(L)$.*

Exemple : Les hypothèses 3 et 4 sont vérifiées si $\forall\ k = 1, \cdots, K$,
$L_k = \lambda_k L + (1-\lambda_k)\nu_k$ avec $\lambda_k \in]0,1[$, L variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable vérifiant l'hypothèse (H1) et $(\nu_1, \cdots, \nu_K)$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et indépendantes de $\mathcal{F}_T \vee \sigma(L)$.

Puisque $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale, $\mathcal{G}_0 = \sigma(L)$. Comme dans le début de cet exposé, on note Z le processus densité de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}^L$:

$$\forall t \in [0,T], \qquad Z(t) = E_{\mathbb{Q}^L}[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^L}|\mathcal{G}_t].$$

On a un théorème analogue au théorème 2.0.6 pour les $(\mathrm{G}_T, \mathbb{Q}^L)$-martingales locales. Par suite, il existe des processus G_T-prévisibles ρ_1 et ρ_2 tels que

$$dZ(t) = Z(t^-)[\rho_1^*(t)dW(t) + (\rho_2(t) - I_n)^* dM(t)].$$

ρ_2 est un processus vectoriel à composantes strictement positives. On définit :

$$\begin{cases} d\widetilde{W}(t) & := dW(t) - \rho_1(t)dt \\ d\widetilde{M}(t) & := dN(t) - (\kappa.\rho_2)(t)dt \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dY(t) & := Y(t^-)\left(-(\Theta+\rho_1)^*(t)d\widetilde{W}(t) + [\frac{q(t)}{\rho_2(t)} - I_n]^* d\widetilde{M}(t)\right) \\ Y(0) & := 1 \end{cases}$$

$$\zeta(t) := \beta(t)Y(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4.4}$$

Hypothèse 5 *Pour $k = 1, \cdots, K$, on suppose que les hypothèses 1, 2 et celles de la proposition 3.0.4 sont satisfaites ; ainsi, λ_k l'unique solution de l'équation (3.5) existe. D'autre part, on suppose que Y est une $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P})$-martingale et que, pour tout $k = 1, \cdots, K$, l'équation en λ*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)I_k(t, \lambda\zeta(t))dt|\mathcal{G}_0] = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)\epsilon_k(t)dt + \beta(0)X_k(0)|\mathcal{G}_0] \tag{4.5}$$

admet une unique solution λ_k^0 $\mathcal{G}_0$-mesurable.

Remarque: Rappelons que les hypothèses de la proposition 3.0.4 sont les suivantes : les fonctions $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)I_k(t, \lambda\zeta_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k](\omega)$ sont finies pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$ et $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement.
De même, l'équation (4.5) admet une unique solution λ_k^0 $\mathcal{G}_0$-mesurable dès que les fonctions $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)I_k(t, \lambda\zeta(t))dt|\mathcal{G}_0](\omega)$ sont finies pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$ et $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement.

Nous pouvons alors définir la mesure de probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ sur $\mathcal{G}_T$ par

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) := E_{\mathbb{P}}[Y(T)\mathbb{I}_A], \qquad A \in \mathcal{G}_T.$$

Remarque 4.1.3 *$\widehat{\mathbb{P}}$ est la probabilité neutre au risque d'un agent représentatif ayant pour filtration la filtration de l'information commune G_T.*

$$\widehat{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(s)ds = \widetilde{W}(t) + \int_0^t (\Theta+\rho_1)(s)ds$$

est un $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}})$-mouvement brownien.

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &:= N(t) - \int_0^t q(s)\kappa(s)ds \\ &= \widetilde{M}(t) + \int_0^t \rho_2(s)\kappa(s)ds - \int_0^t q(s)\kappa(s)ds \\ &= \widetilde{M}(t) + \int_0^t [\rho_2(s) - q(s)]\kappa(s)ds \end{aligned}$$

est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-processus de Poisson d'intensité $(q.\kappa)$.
En suivant le même cheminement que dans le chapitre 3 avec les stratégies G_T-admissibles, on obtient que $I_k(t, \lambda_k^0 \zeta(t))$ optimise $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t, c(t))dt|\mathcal{G}_0^k]$ parmi les stratégies G_T-admissibles. Donc par le lemme 4.1.2 et par unicité de la stratégie G_T-optimale, on a

$$\widehat{c_k}(t) = I_k(t, \lambda_k \zeta_k(t)) = I_k(t, \lambda_k^0 \zeta(t)), \qquad t \in [0, T]$$

Mais $I_k(t, \cdot)$ est une bijection de $]0, +\infty[$, donc

$$\lambda_k \zeta_k(t) = \lambda_k^0 \zeta(t), \qquad t \in [0, T]$$

ou de façon équivalente,

$$\frac{Y_k(t)}{Y(t)} = \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} = constante, \qquad t \in [0, T]$$

Puisque $Y_k(0) = Y(0) = 1$, ceci prouve le résultat suivant :

Lemme 4.1.4 *(lemme 6.6 p. 18 [39])*
Si un équilibre (4.0.7) existe et sous les hypothèses 3, 4 et 5, alors $Y_k = Y$ pour tout $k = 1, \cdots, K$ et donc les mesures de probabilité $\widehat{\mathbb{P}}^k$ de chaque agent coïncident avec $\widehat{\mathbb{P}}$ la mesure de probabilité neutre au risque de l'agent représentatif.

4.2 Existence d'un équilibre

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre sur le marché.
On définit sur $[0, T] \times]0, +\infty[\times (]0, +\infty[)^K$ la fonction U (appelée fonction d'utilité représentative des agents) par

$$U(t, c, \Lambda) := \max_{c_k > 0, c_1 + \cdots + c_K = c} \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_k(t, c_k) \tag{4.6}$$

et la fonction I sur $[0, T] \times]0, +\infty[\times (]0, +\infty[)^K$ par

$$I(t, c, \Lambda) := \sum_{k=1}^{K} I_k(t, \frac{c}{\Lambda_k}). \tag{4.7}$$

Lemme 4.2.1 *Pour tout $(t, \Lambda) \in [0, T] \times (]0, +\infty[)^K$, $I(t, \cdot, \Lambda)$ est la bijection réciproque de $\frac{\partial}{\partial c} U(t, \cdot, \Lambda)$ i.e.*

$$\forall c \in]0, +\infty[, \qquad \frac{\partial}{\partial c} U(t, I(t, c, \Lambda), \Lambda) = c.$$

Preuve:
$\forall k = 1, \cdots, K$, $I_k(t, .)$ est une bijection continue strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, donc $I(t, ., \Lambda)$ est une bijection continue strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. On note $H(t, ., \Lambda)$ sa bijection réciproque. On fixe $c \in]0, +\infty[$, on définit

$$\forall k = 1, \cdots, K, \qquad \overline{c_k} := I_k(t, \frac{H(t, c, \Lambda)}{\Lambda_k}).$$

Alors $\sum_{k=1}^{K} \overline{c_k} = I(t, H(t, c, \Lambda), \Lambda) = c$ et

$$\forall k = 1, \cdots, K, \qquad \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \overline{c_k}) = \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, I_k(t, \frac{H(t, c, \Lambda)}{\Lambda_k})) = \frac{H(t, c, \Lambda)}{\Lambda_k}$$

c'est-à-dire

$$H(t, c, \Lambda) = \Lambda_k \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \overline{c_k}).$$

Soient $(c_1, \cdots, c_K) \in (]0, +\infty[)^K$ tels que $c_1 + \cdots + c_K = c$. Par concavité de chaque $U_k(t, .)$ et positivité des Λ_k, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_k(t, c_k) &\leq \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k [U_k(t, \overline{c_k}) + (c_k - \overline{c_k}) \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \overline{c_k})] \\
&= \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_k(t, \overline{c_k}) + \sum_{k=1}^{K} (c_k - \overline{c_k}) H(t, c, \Lambda) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_k(t, \overline{c_k})
\end{aligned}$$

donc

$$\max_{c_k > 0, c_1 + \cdots + c_K = c} \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_k(t, c_k)$$

est réalisé pour $c_k = \overline{c_k}$ et

$$U(t, c, \Lambda) = \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_k(t, I_k(t, \frac{H(t, c, \Lambda)}{\Lambda_k})).$$

Par la propriété (iii) des fonctions d'utilité, $\frac{\partial}{\partial c} I_k$, $\frac{\partial}{\partial t} I_k$, $\frac{\partial^2}{\partial c^2} I_k$ existent et sont continues, donc par le théorème d'inversion locale, $\frac{\partial}{\partial c} H$, $\frac{\partial}{\partial t} H$, $\frac{\partial^2}{\partial c^2} H$ existent et sont continues et par composition, $\frac{\partial}{\partial c} U$, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial c} U$, $\frac{\partial^2}{\partial c^2} U$ aussi.

$$\frac{\partial}{\partial c} U(t, c, \Lambda) = \frac{\partial}{\partial c} H(t, c, \Lambda) \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial}{\partial c} I_k(t, \frac{H(t, c, \Lambda)}{\Lambda_k}) \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, I_k(t, \frac{H(t, c, \Lambda)}{\Lambda_k}))$$

$$= \frac{\partial}{\partial c} H(t,c,\Lambda) \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial}{\partial c} I_k(t, \frac{H(t,c,\Lambda)}{\Lambda_k}) \frac{H(t,c,\Lambda)}{\Lambda_k}$$
$$= H(t,c,\Lambda) \frac{\partial}{\partial c} H(t,c,\Lambda) \frac{\partial}{\partial c} I(t, H(t,c,\Lambda), \Lambda).$$

Finalement,

$$\forall k = 1, \cdots, K, \qquad \frac{\partial}{\partial c} U(t,c,\Lambda) = H(t,c,\Lambda) = \Lambda_k \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \overline{c_k}) \tag{4.8}$$

Par suite, $\frac{\partial^3}{\partial c^3} U$ existe et est continue. D'autre part, l'équation (4.8) conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial c} U(t, I(t,c,\Lambda), \Lambda) = H(t, I(t,c,\Lambda), \Lambda) = c.$$

□

Nous énonçons maintenant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre.

Proposition 4.2.2 *Sous les hypothèses 3, 4 et 5, un équilibre (4.0.7) existe sur le marché financier si et seulement s'il existe $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$ telle que $\forall k = 1, \cdots, K$, Λ_k est une variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable à valeurs dans $]0, +\infty[$ et vérifiant*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \tfrac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda) I_k(t, \tfrac{1}{\Lambda_k} \tfrac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)) dt | \mathcal{G}_0^k]$$
$$= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda) \epsilon_k(t) dt | \mathcal{G}_0^k] + \beta(0) X_k(0) \tag{4.9}$$

ainsi que

$$\zeta_k(t) = \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda), \forall t \in [0,T]. \tag{4.10}$$

De plus, (4.10) est équivalent aux quatre relations suivantes reliant les coefficients r et b du marché et l'utilité agrégée U :

$$r(t) = -\frac{1}{\frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)} [\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} U(t, \varepsilon(t), \Lambda) + (\mu(t) + \langle \rho(t), \rho_1(t) \rangle) \frac{\partial^2}{\partial c^2} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)$$
$$+ \frac{1}{2} ||\rho(t)||^2 \frac{\partial^3}{\partial c^3} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)] + \langle \kappa(t), \rho_2(t) - q(t) \rangle \tag{4.11}$$

$$(\Theta + \rho_1)(t) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial c^2} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)}{\frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)} \rho(t) \tag{4.12}$$

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial c} U(s, \varepsilon(s^-), \Lambda) \sum_{j=m}^{m+n} [\frac{(\sigma^{-1}(s)[b(s) - r(s)I_d])_j}{\kappa_{j-m}(s)\rho_{2,j}(s)} + 1] dN_{j-m}(s)$$
$$= \sum_{0<s\leq t} [\frac{\partial}{\partial c} U(s, \varepsilon(s), \Lambda) - \frac{\partial}{\partial c} U(s, \varepsilon(s^-), \Lambda)] \tag{4.13}$$

$$P_0(0) \frac{\partial}{\partial c} U(0, \varepsilon(0), \Lambda) = 1 \tag{4.14}$$

Remarque: Les prix ne sont pas complètement déterminés par l'équilibre, seuls le taux d'intérêt r et la prime de risque $\sigma^{-1}[b - rI_d]$ le sont (de plus, les n dernières composantes de la prime de risque $\sigma^{-1}[b - rI_d]$ ne sont connues qu'aux instants t où il existe un j tel que N_j saute en t). Par contre, le taux d'intérêt r et la probabilité neutre au risque $\widehat{\mathbb{P}}$ de l'agent représentatif (remarque (4.1.3)) sont parfaitement déterminés à l'équilibre.

Différence avec un marché complet sans asymétrie d'information. Si un équilibre (4.0.7) existe et sous les hypothèses 3, 4 et 5, les agents ont la même probabilité neutre au risque $\widehat{\mathbb{P}}$, ils se servent de la même filtration G_T pour résoudre leur problème d'optimisation, et le marché est complet pour cette probabilité et cette filtration. Cependant, lors de notre recherche d'existence d'un équilibre, ce résultat n'est évidemment pas acquis et le marché n'est donc pas complet, les agents ont des filtrations et des probabilités neutres au risque différentes. La démonstration de cette proposition 4.2.2, donnant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre, est similaire à celle des théorèmes 7.2.8 et 7.2.11 [16] établis dans le cadre d'un marché complet sans asymétrie d'information. La différence réside ici dans le fait que la contrainte budgétaire n'est plus exprimée sous forme d'espérance mais d'espérance conditionnelle (car les tribus initiales des agents ne sont pas triviales), et les poids Λ_k sont des variables aléatoires.
La difficulté de ce modèle avec asymétrie d'information est de donner un cadre, le plus général possible, d'existence d'un équilibre. Démontrer l'existence d'un équilibre demande des étapes supplémentaires par rapport au cadre sans asymétrie d'information. Tout d'abord, nous avons été contraints de supposer que tous les agents ont la même probabibilité neutre au risque (condition nécessaire d'équilibre sous l'hypothèse 3), sans laquelle nous ne savons pas prouver l'existence d'un équilibre dans un cadre général (sans avoir à spécifier les fonctions d'utilités). De plus, pour assurer l'existence d'une variable aléatoire Λ satisfaisant les relations, nous supposons (cf. lemme 4.2.5) que toutes les informations propres à chaque agent et non disponibles par les observations du marché sont non pertinentes pour le comportement futur du marché hypothèse 6) : cette hypothèse est vérifiée si un équilibre existe et sous l'hypothèse 3 (cf. proposition 4.2.9). Nous devons enfin prouver la $\mathcal{G}_0$-mesurabilité

des poids Λ_k (cf. proposition 4.2.7).

Preuve de la proposition 4.2.2 :

La condition est suffisante
On pose $\overline{c_k} := I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda))$. $\overline{c_k}$ vérifie bien la contrainte budgétaire (3.1) d'après les équations (4.9) et (4.10) , et maximise la fonction valeur de l'agent k. En effet, soit c_k une consommation G_T^k-admissible. La concavité de $U_k(t,\cdot)$ et la relation (4.8) impliquent :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t,c_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] &\leq E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t,\overline{c_k}(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \\ &+ E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t)-\overline{c_k}(t))\frac{\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\Lambda_k}dt|\mathcal{G}_0^k]. \end{aligned}$$

D'après la contrainte budgétaire et la relation (4.10)
$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t)-\overline{c_k}(t))\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)dt|\mathcal{G}_0^k]$
$= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t)-\epsilon_k(t))\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)dt|\mathcal{G}_0^k] - \beta(0)X_k(0) \leq 0$
et par suite

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t,c_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t,\overline{c_k}(t))dt|\mathcal{G}_0^k].$$

D'autre part, $\overline{c_k}$ est bien G_T (et par suite G_T^k)-adapté car Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable et la relation (4.10) implique que $\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)$ est G_T-adapté. Par suite, $\overline{c_k} = \widehat{c_k}$. Vérifions que la condition de l'équilibre est alors vérifiée :

$$\sum_{k=1}^K \widehat{c_k}(t) = \sum_{k=1}^K I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)) = I(t, \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda),\Lambda) = \varepsilon(t).$$

La condition est nécessaire
Si l'équilibre a lieu, alors $\forall k = 1,\cdots,K, \zeta_k = \zeta$ par le lemme 4.1.4 et

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^K I_k(t,\lambda_k\zeta(t)) = I(t,\zeta(t),\Lambda)$$

où $\Lambda = (\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_K})$ avec $\forall k = 1,\cdots,K, \lambda_k$ solution de (3.5). Par suite,

$$\zeta(t) = H(t,\varepsilon(t),\Lambda) = \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)$$

$$\widehat{c_k}(t) = I_k(t,\lambda_k\zeta(t)) = I_k(t, \frac{\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\Lambda_k}).$$

D'après le lemme 4.1.2, $\widehat{c_k}$ est G_T-adapté donc $\Lambda_k = \frac{\zeta(0)}{\frac{\partial}{\partial c}U_k(0,\widehat{c_k}(0))}$ est $\mathcal{G}_0$-mesurable. La contrainte budgétaire (3.1) implique alors la relation (4.9).

D'une part, $\zeta(t) = \beta(t)Y(t)$ donne

$$\zeta(t) = \frac{1}{P_0(0)} - \int_0^t r(s)\zeta(s)ds + \int_0^t \zeta(s^-)[\langle -(\Theta+\rho_1)(s), d\widetilde{W}(s)\rangle + \langle \frac{q(s)}{\rho_2(s)} - I_n, d\widetilde{M}(s)\rangle]$$

$$\begin{aligned}\zeta(t) = \frac{1}{P_0(0)} &- \int_0^t \zeta(s)[r(s) + \kappa^*(s)q(s) - \kappa^*(s)\rho_2(s)]ds \\ &+ \int_0^t \zeta(s)\langle -(\Theta+\rho_1)(s), d\widetilde{W}(s)\rangle \\ &+ \int_0^t \zeta(s^-)\langle \frac{q(s)}{\rho_2(s)} - I_n, dN(s)\rangle, \qquad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

D'autre part, $\zeta(t) = \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)$ donne par Itô et la relation (4.2),

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \frac{\partial}{\partial c}U(0,\varepsilon(0),\Lambda) + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t\partial c}U(s,\varepsilon(s),\Lambda)ds + \int_0^t \mu(s)\frac{\partial^2}{\partial c^2}U(s,\varepsilon(s),\Lambda)ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial c^2}U(s,\varepsilon(s),\Lambda)\rho(s)dW(s) + \int_0^t \frac{1}{2}||\rho(s)||^2\frac{\partial^3}{\partial c^3}U(s,\varepsilon(s),\Lambda)ds \\ &+ \sum_{0<s\leq t}\frac{\partial}{\partial c}U(s,\varepsilon(s),\Lambda) - \frac{\partial}{\partial c}U(s,\varepsilon(s^-),\Lambda)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \frac{\partial}{\partial c}U(0,\varepsilon(0),\Lambda) + \sum_{0<s\leq t}\frac{\partial}{\partial c}U(s,\varepsilon(s),\Lambda) - \frac{\partial}{\partial c}U(s,\varepsilon(s^-),\Lambda) \\ &+ \int_0^t [\frac{\partial^2}{\partial t\partial c}U(s,\varepsilon(s),\Lambda) + (\mu(s) + \langle\rho_1(s),\rho(s)\rangle)\frac{\partial^2}{\partial c^2}U(s,\varepsilon(s),\Lambda) \\ &+ \frac{1}{2}||\rho(s)||^2\frac{\partial^3}{\partial c^3}U(s,\varepsilon(s),\Lambda)]ds + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial c^2}U(s,\varepsilon(s),\Lambda)\rho(s)d\widetilde{W}(s).\end{aligned} \tag{4.16}$$

En identifiant les coefficients de ces deux équations (4.15) et (4.16), on obtient les relations (4.11), (4.12) et (4.13) reliant r, b et U ainsi que la condition initiale (4.14). □

Remarque: Imaginons qu'un agent représentatif est à sa disposition la filtration G_T, reçoive la ressource ε et cherche à maximiser

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U(t,c(t),\Lambda)dt|\mathcal{G}_0]$$

sous la contrainte

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)(c(t)-\varepsilon(t))dt|\mathcal{G}_0] \leq 0.$$

(Intuitivement, $\forall k = 1, \cdots, K$, Λ_k représente le poids de l'agent k dans le marché financier). Si λ^0 est solution de

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)(I(t, \lambda^0\zeta(t), \Lambda) - \varepsilon(t))dt|\mathcal{G}_0] = 0,$$

le processus de consommation optimale de l'agent représentatif est alors donné par

$$c^0(t) := I(t, \lambda^0\zeta(t), \Lambda).$$

Imaginons qu'alors l'agent représentatif redistribue cette consommation à chaque agent selon la formule :

$$\overline{c_k}(t) = I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U(t, c^0(t), \Lambda)), \qquad t \in [0, T]$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{c_k}(t) = I(t, \frac{\partial}{\partial c}U(t, c^0(t), \Lambda), \Lambda) = c^0(t).$$

L'équilibre a lieu lorsque $c^0(t) = \varepsilon(t)$ et que, pour chaque agent, la consommation $\overline{c_k}$ coïncide avec sa consommation optimale $\widehat{c_k}$.

Pour exhiber un cadre général d'existence d'un équilibre sur le marché financier, nous devons faire une hypothèse supplémentaire d'indépendance de tribus :

Hypothèse 6 *Les tribus $\mathcal{G}_t^k$ et $\mathcal{G}_T$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}$ conditionnellement à $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \in [0, T]$, et pour tout $k = 1, \cdots, K$.*

Interprétation :
La tribu $\mathcal{G}_T$ représente l'information commune à tous les agents sur tout le passé et le futur du marché, alors que $\mathcal{G}_t^k$ représente l'information au temps t de l'agent k et $\mathcal{G}_t$ l'information commune à tous les agents au temps t. En d'autres termes, l'hypothèse 6 s'interprète de la façon suivante : toutes les informations propres à chaque agent et non disponibles par les observations du marché sont non pertinentes pour le comportement futur du marché.

Cette hypothèse est vérifiée pour les cas (i) (si $\sigma(L_k)$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$) et (ii) de l'exemple 4.1.1, mais pas pour les cas (iii) et (iv).

Lemme 4.2.3 *Sous l'hypothèse 6 et si les ressources ϵ_k, $k = 1, \cdots, K$ sont G_T-adaptés, l'existence d'un équilibre (4.0.7) implique que le marché des titres s'équilibre aussi, c'est-à-dire*

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi_k}(t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Preuve:
L'hypothèse 6 : $\forall k = 1, \cdots, K$, les tribus $\mathcal{G}_t^k$ et $\mathcal{G}_T$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}$ conditionnellement à $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \in [0, T]$, implique que l'espérance sous $\mathbb{P}$ d'un événement $\mathcal{G}_T$-mesurable conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}_t^k$ coïncide avec l'espérance sous $\mathbb{P}$ de cet événement conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}_t$. En effet, soient $A_k \in \mathcal{G}_t^k$, et $B \in \mathcal{G}_T$.

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}\mathbb{I}_B] &= E_{\mathbb{P}}[E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]] \\ &= E_{\mathbb{P}}[E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}|\mathcal{G}_t]E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]] \\ &= E_{\mathbb{P}}[E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]|\mathcal{G}_t]] \\ &= E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]] \end{aligned}$$

d'où $E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t^k] = E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]$ et un argument de classe monotone permet de conclure. Ainsi, puisque $\forall k = 1, \cdots, K$, $\overline{c_k} = \widehat{c_k}$ et ϵ_k sont G_T-adaptés, on a $\forall k = 1, \cdots, K$

$$\begin{aligned} &E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \frac{\partial}{\partial c}U(s, \varepsilon(s), \Lambda)(\widehat{c_k}(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k] \\ &\qquad = E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \frac{\partial}{\partial c}U(s, \varepsilon(s), \Lambda)(\widehat{c_k}(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t]. \end{aligned}$$

Par suite, l'expression de la richesse optimale trouvée au théorème 3.0.3 et la relation (4.10) donnent

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t, \varepsilon(t), \Lambda)\sum_{k=1}^K \widehat{X_k}(t) = E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \frac{\partial}{\partial c}U(s, \varepsilon(s), \Lambda)\sum_{k=1}^K(\widehat{c_k}(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t].$$

Donc en cas d'équilibre,

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t, \varepsilon(t), \Lambda)\sum_{k=1}^K \widehat{X_k}(t) = 0$$

et puisque $\frac{\partial}{\partial c}U(t, \varepsilon(t), \Lambda) > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^K \widehat{X_k}(t) = 0, \qquad t \in [0, T].$$

En sommant les relations (2.2) pour $k = 1, \cdots, K$, on obtient

$$\sum_{k=1}^K \pi^*(t) = 0_{\mathbb{R}^d}, \qquad t \in [0, T].$$

L'existence d'un équilibre des consommations implique donc la nullité de la somme des portefeuilles sous l'hypothèse 6 et si les ressources ϵ_k, $k = 1, \cdots, K$ sont G_T-adaptés. □

Lemme 4.2.4 *Soit $\omega_0 \in \Omega$. L'application*

$$R_k(\Lambda) := E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)[I_k(t,\frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)) - \epsilon_k(t)]dt|\mathcal{G}_0^k](\omega_0)$$

est continue sur $]0,+\infty[^K$.

Preuve:
Montrons d'abord la continuité sur $]0,+\infty[^K$ en la variable Λ de $\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)$. Soit $(\Lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0,+\infty[^K$ qui converge vers $\Lambda^0 \in]0,+\infty[^K$. Par la relation (4.8) page 54 et le fait que $\sum_{k=1}^K \overline{c_k} = \varepsilon(t)$ implique que pour au moins un k, $\overline{c_k} \geq \frac{\varepsilon(t)}{K}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^n) &\leq \max_{k=1,\cdots,K} \Lambda_k^n \frac{\partial}{\partial c}U_k(t,\frac{\varepsilon(t)}{K}) \\ &\leq \max_{n\in\mathbb{N}\,;\,k=1,\cdots,K} \Lambda_k^n \frac{\partial}{\partial c}U_k(t,\frac{\varepsilon(t)}{K}) < +\infty\end{aligned}$$

car $(\Lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (puisque c'est une suite convergente), ε est borné et $\frac{\partial}{\partial c}U_k(\cdot,c)$ est continue. Par suite, de $(\Lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(\Lambda^{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ telle que $y_{n'} := \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^{n'})$ converge. On note y_0 cette limite. D'une part

$$I(t,y_{n'},\Lambda^{n'}) = \varepsilon(t)$$

car $I(t,\cdot,\Lambda^{n'})$ est la bijection réciproque de $\frac{\partial}{\partial c}U(t,\cdot,\Lambda^{n'})$, et d'autre part

$$I(t,y_{n'},\Lambda^{n'}) \overset{n'\to+\infty}{\longrightarrow} I(t,y_0,\Lambda^0)$$

car $I(t,\cdot,\cdot)$ est continue en (y,Λ) d'après sa définition 4.7 page 52.
Ainsi $y_0 = \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^0)$. Par suite

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^0)$$

ce qui prouve la continuité de $\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\cdot)$ en Λ^0, et ceci $\forall\Lambda^0 \in]0,+\infty[^K$.
I_k et les projections étant elles aussi des fonctions continues, l'intégrand

$$f(t,\Lambda) := \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)[I_k(t,\frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)) - \epsilon_k(t)]$$

est une fonction continue. Puisque ε est majoré, et minoré par une constante strictement positive, f est bornée sur tout compact de la forme $[0,T]\times[m,M]$ (avec $m>0$, $M<+\infty$). Par le théorème de convergence dominée, R_k est continue sur tout compact de $]0,+\infty[^K$, donc sur $]0,+\infty[^K$. □

Lemme 4.2.5
Supposons que chaque agent a une richesse initiale nulle : pour tout $k=1,\cdots,K$, $X_k(0)=0$, que ϵ_k est G_T-adapté, $\epsilon_k > 0$ sur un événement $dt\otimes d\mathbb{P}$ non négligeable

et que l'hypothèse 6 est satisfaite. Soit $\omega_0 \in \Omega$. Alors il existe $\Lambda^0 \in (]0,+\infty[)^K$ tel que $\forall k = 1, \cdots, K$,

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda^0)[I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k^0}\frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda^0)) - \epsilon_k(t)]dt|\mathcal{G}_0^k](\omega_0) = 0.$$

Preuve:
Soit $\{e^{(1)}, \cdots, e^{(K)}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^K$, et soit $A = \{1, \cdots, K\}$. Si $B \subset A$, S_B représente l'enveloppe convexe des vecteurs élémentaires $\{e^{(k)}, k \in B\}$, i.e.

$$S_B := \{\sum_{k \in B} \Lambda_k e^{(k)}, \qquad \forall k, \Lambda_k \geq 0, \qquad \sum_{k \in B} \Lambda_k = 1\}.$$

On définit aussi

$$S_B^+ := \{\sum_{k \in B} \Lambda_k e^{(k)}, \qquad \forall k, \Lambda_k > 0, \qquad \sum_{k \in B} \Lambda_k = 1\}.$$

Pour $\Lambda \in S_A^+$ et $k = 1, \cdots, K$

$$\begin{aligned} R_k(\Lambda) &= E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)[I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)) - \epsilon_k(t)]dt|\mathcal{G}_0^k\right](\omega_0) \\ &= E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)[I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)) - \epsilon_k(t)]dt|\mathcal{G}_0\right](\omega_0) \end{aligned}$$

car l'hypothèse 6 est vérifiée. On peut prolonger R_k sur S_A par continuité en posant $\forall y \in]0,+\infty[$, $I_k(t, \frac{y}{\Lambda_k}) = 0$ si $\Lambda_k = 0$. $\frac{\partial}{\partial c} U(t, c, \cdot)$ est continue sur S_A et $\frac{\partial}{\partial c} U(t, c, \Lambda) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et $c \geq 0$. Par suite, si $\Lambda \in S_A$ a une composante nulle, par exemple $\Lambda_j = 0$, alors

$$R_j(\Lambda) = -E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)\epsilon_j(t)dt|\mathcal{G}_0^j](\omega_0) < 0.$$

De plus, on a sous l'hypothèse 6 :

$$\forall \Lambda \in S_A, \qquad \sum_{k=1}^K R_k(\Lambda) = 0.$$

Soit $R_j^- := \max(-R_j, 0)$. Alors $R_j^-(\Lambda) = 0$ si et seulement si $R_j(\Lambda) \geq 0$. Considérons l'application continue H de S_A dans S_A définie par : pour tout $j = 1, \cdots, K$,

$$H_j(\Lambda) = \frac{\Lambda_j + R_j^-(\Lambda)}{1 + \sum_{k=1}^K R_k^-(\Lambda)}.$$

Par le théorème du point fixe de Brouwer, H possède un point fixe que l'on note Λ^0. Deux cas sont possibles :
• Soit $R_k(\Lambda^0) = 0$ pour tout $k = 1, \cdots, K$. Dans ce cas nous avons nécessairement

$\Lambda^0 \in S_A^+ \subset (]0,+\infty[)^K$ car $\Lambda_k = 0$ implique $R_k(\Lambda) < 0$ et le résultat est prouvé.
• Sinon il existe i tel que $R_i(\Lambda^0) \neq 0$ et puisque $\sum_{k=1}^K R_k(\Lambda^0) = 0$, il existe i tel que $R_i(\Lambda^0) > 0$. En particulier $\Lambda_i^0 \neq 0$ et $R_i^-(\Lambda^0) = 0$. Puisque $H_i(\Lambda^0) = \Lambda_i^0$, on a donc $\Lambda_i^0 = \frac{\Lambda_i^0}{1+\sum_{k=1}^K R_k^-(\Lambda^0)}$. Ceci implique que $\sum_{k=1}^K R_k^-(\Lambda^0) = 0$, donc $R_k^-(\Lambda^0) = 0$ et $R_k(\Lambda^0) \geq 0$ pour tout $k = 1, \cdots, K$. Puisque $\sum_{k=1}^K R_k(\Lambda^0) = 0$, nécessairement $R_k(\Lambda^0) = 0$ et $\Lambda_k^0 > 0$ pour tout $k = 1, \cdots, K$. □

Remarque: Pour cette démonstration, on aurait pu utiliser un théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (cf.Border (1985) [11]) plutôt que cette forme généralisée du théorème de point fixe de Brouwer. En effet, si pour $k = 1, \cdots, K$, on définit l'ensemble

$$F_k := \{\Lambda \in S_A, R_k(\Lambda) \geq 0\}$$

qui est fermé par continuité de R_k, alors chaque Λ de S_A doit être au moins dans un F_k, car sinon cette somme serait strictement négative. De même, si $B \subset A$ et $\Lambda \in S_B$, alors $\Lambda \in \cup_{k\in B} F_k$ car sinon on aurait $\sum_{k=1}^K R_k(\Lambda) < 0$. D'après le théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, $\bigcap_{k\in A} F_k \neq \emptyset$. On choisit Λ^0 dans cette intersection. Alors $R_k(\Lambda^0) \geq 0$ pour tout k et puisque $\sum_{k=1}^K R_k(\Lambda^0) = 0$, $R_k(\Lambda^0) = 0$ $\forall k = 1, \cdots, K$. Par suite, $\Lambda^0 \in S_A^+ \subset (]0,+\infty[)^K$. □

Pour exhiber un cadre général d'existence d'un équilibre (4.0.7), nous devons montrer l'existence d'une version mesurable du multiplicateur de Lagrange Λ construit dans le lemme 4.2.5. Le lemme suivant (lemme de type Filippov) est un outil puissant pour montrer l'existence d'une version mesurable.

Lemme 4.2.6 lemme 1 page 182 de Beneš [9].
Soient $(M, \mathcal{M})$ un espace mesurable, A un espace séparable et U une réunion dénombrable de sous-ensembles compacts métrisables.
Soit $R : M \times U \longrightarrow A$ une application, continue en sa deuxième variable pour chaque valeur de la première, et $\mathcal{M}$-mesurable en sa première variable pour chaque valeur de la seconde.
Soit $y : M \longrightarrow A$ une application $\mathcal{M}$-mesurable telle que

$$y(x) \in R(x, U), \qquad x \in M.$$

Alors il existe une application $\mathcal{M}$-mesurable $u : M \longrightarrow U$ telle que

$$y(x) = R(x, u(x)), \qquad x \in M.$$

Proposition 4.2.7 *On suppose que chaque agent a une richesse initiale nulle, que ϵ_k est G_T-adapté, $\epsilon_k > 0$ sur un événement $dt \otimes d\mathbb{P}$ non négligeable et que les hypothèses 3, 4, 5 et 6 sont satisfaites. Supposons de plus que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\zeta_k = \zeta$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors si U, r et b vérifient les relations (4.11), (4.12) et (4.13), il existe un équilibre (4.0.7).*

Preuve:
Les hypothèses du lemme 4.2.5 sont vérifiées, montrons la $\mathcal{G}_0$-mesurabilité de l'application K-vectorielle Λ^0 construite dans ce lemme. On utilise le lemme 4.2.6 avec $M = \Omega$, $\mathcal{M} = \mathcal{G}_0$, $U =]0, +\infty[^K$, $A = \mathbb{R}^K$, y l'application constante égale à $0_{\mathbb{R}^K}$, et

$$\begin{array}{rccl} R: & \Omega \times]0,+\infty[^K & \longrightarrow & \mathbb{R}^K \\ & (\omega, \Lambda) & \longrightarrow & \Big(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda) \\ & & & \quad [I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k} \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda)) - \epsilon_k(t)] dt | \mathcal{G}_0](\omega) \Big)_{k=1,\cdots,K} \end{array}$$

D'après les lemmes 4.2.4 et 4.2.5, les hypothèses du lemme 4.2.6 sont satisfaites, il existe donc une application $\mathcal{G}_0$-mesurable $\Lambda^0 : \Omega \longrightarrow]0, +\infty[^K$ telle que $\forall \omega \in \Omega$, $\forall k = 1, \cdots, K$, $R_k(\omega, \Lambda^0(\omega)) = 0$. Ainsi on a l'existence d'une variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable vérifiant la relation (4.9). En outre, $\frac{\partial}{\partial c} U(t, c, \Lambda)$ est homogène en Λ, donc on peut choisir ce Λ^0 pour qu'il vérifie de plus

$$\frac{\partial}{\partial c} U(0, \varepsilon(0), \Lambda^0) = P_0(0)^{-1}$$

(ceci est possible car $\varepsilon(0) > 0$). Si U, r et b satisfont les relations (4.11), (4.12) et (4.13), on a alors $\zeta(t) = \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda^0)$ en comparant les deux expressions intégrales et la proposition 4.2.2 permet de conclure . □

Corollaire 4.2.8 *Pour tout $k = 1, \cdots, K$, s'il existe un équilibre (4.0.7) et sous les hypothèses 3, 4 et 5, on a :*

$$\widetilde{M^k} = \widetilde{M} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{W^k} = \widetilde{W}$$

(égalité à indistinguabilité près).

Preuve:
On peut écrire des équations similaires à (4.15) et (4.16) pour $\zeta_k = \zeta$ en remplaçant les processus Θ, ρ_1, ρ_2 et $\widetilde{W}$ par respectivement $(\Theta + \rho_1^k)$, ρ_1^k, ρ_2^k et $\widetilde{W^k}$. Ceci conduit à une expression de $(\Theta + \rho_1^k)$, ρ_1^k et ρ_2^k identique à celle de Θ, ρ_1 et ρ_2. Donc $(\Theta + \rho_1^k)$ est indistinguable de Θ et $\rho_{2,k}$ est indistinguable de ρ_2. On en déduit que $\widetilde{W^k} = \widetilde{W}$ et $\widetilde{M^k} = \widetilde{M}$ à indistinguabilité près. □

Proposition 4.2.9 *Si un équilibre (4.0.7) existe et si les hypothèses 3, 4 et 5 sont satisfaites, alors les tribus $\mathcal{G}_t^k$ et $\mathcal{G}_T$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}$ conditionnellement à $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $k = 1, \cdots, K$, c'est-à-dire l'hypothèse 6 est vérifiée.*

Preuve:
Par le théorème de représentation 2.1.2 qui reste valable pour la filtration commune

G_T, on a $\forall A \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega, \mathrm{G}_T, \mathbb{P})$, $\exists \gamma \in L^1_{loc}(\widetilde{S}, \mathrm{G}_T, \mathbb{P})$ tel que

$$A(t) = A(0) + \int_0^t \gamma^*(s) d\widetilde{S}(s)$$

où $\widetilde{S} = (\widetilde{W}^*, \widetilde{M}^*)^* = (\widetilde{W}^{k*}, \widetilde{M}^{k*})^*$ (d'après le corollaire 4.2.8) est à la fois une $(\mathrm{G}^k_T, \mathbb{P})$-martingale locale et une $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P})$-martingale locale. Par suite toute $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P})$-martingale locale est aussi une $(\mathrm{G}^k_T, \mathbb{P})$-martingale locale. En particulier, si Y est une variable aléatoire $\mathcal{G}_T$-mesurable bornée, $E_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{G}_t]$ est alors une $(\mathrm{G}^k_T, \mathbb{P})$-martingale locale bornée donc une $(\mathrm{G}^k_T, \mathbb{P})$-martingale, d'où

$$E_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{G}_t] = E_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{G}^k_t].$$

Maintenant, soient $A_k \in \mathcal{G}^k_t$, $B_t \in \mathcal{G}_t$ et $B \in \mathcal{G}_T$.

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{A_k}\mathbb{I}_{B_t}\mathbb{I}_B\right] &= E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{A_k}\mathbb{I}_{B_t}E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}^k_t]\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{A_k}E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{B_t}\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{B_t}\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]|\mathcal{G}_t]\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}|\mathcal{G}_t]E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{B_t}\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{B_t}E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}|\mathcal{G}_t]E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]\right].
\end{aligned}$$

Par suite,

$$E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t] = E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{A_k}|\mathcal{G}_t]E_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_B|\mathcal{G}_t]$$

et les tribus $\mathcal{G}^k_t$ et $\mathcal{G}_T$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}$ conditionnellement à $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \in [0, T]$. □

Remarque: Cette proposition nous permet de préciser le lemme 4.2.3. En effet, sous les hypothèses 3, 4 et 5 et s'il existe un équilibre (4.0.7), alors on vient de voir que l'hypothèse 6 est vérifiée et donc en particulier,

Proposition 4.2.10 *Sous les hypothèses 3, 4, 5 et si les ressources ϵ_k, $k = 1, \cdots, K$ sont G_T-adaptés, l'existence d'un équilibre (4.0.7) implique que le marché des titres s'équilibre aussi*

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi}_k{}^* = 0_{\mathbb{R}^d}.$$

Donnons des exemples où les relations (4.9) de la proposition 4.2.2 sont vérifiées.

Exemple 4.2.11
$\forall k = 1, \cdots, K$, on pose $\quad U_k(t, c) = \ln(c) \quad \forall (t, c) \in [0, T] \times]0, +\infty[$.
On suppose que les agents n'ont pas de richesse initiale.
On a vu que $\widehat{c}_k(t) = \frac{y_k}{T\zeta_k(t)}$, où $y_k = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}^k_0]$.
On suppose que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\zeta_k = \zeta$ et que les hypothèses 3, 4 et 5 sont satisfaites.

On pose $\Lambda_k := \frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(s)}{\varepsilon(s)}ds|\mathcal{G}_0^k]$. On suppose que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable (ceci est le cas si l'hypothèse 6 est réalisée et si ϵ_k est G_T-adapté).
Par ailleurs, $I(t,c,\Lambda) = \sum_{k=1}^K \frac{\Lambda_k}{c}$ donc $\frac{\partial}{\partial c}U(t,c,\Lambda) = \frac{\sum_{k=1}^K \Lambda_k}{c}$. Par suite, la relation (4.9) est vérifiée car

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\sum_{j=1}^K \Lambda_j}{\varepsilon(t)}(\frac{\Lambda_k\varepsilon(t)}{\sum_{j=1}^K \Lambda_j} - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] = T\Lambda_k - E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(s)}{\varepsilon(s)}ds|\mathcal{G}_0^k] = 0.$$

Puisque la relation (4.9) est homogène en Λ, elle est aussi vérifiée pour $\Lambda_k^0 := \Lambda_k\frac{\varepsilon(0)}{P_0(0)}$, $k = 1,\cdots,K$ et ce Λ^0 vérifie la relation (4.14). Par suite, d'après la proposition 4.2.2 page 54, il existe un équilibre sur le marché si les coefficients du marché et l'utilité agrégée satisfont les relations (4.11), (4.12) et (4.13), c'est-à-dire respectivement :

$$r(t) = (\rho_2(t) - q(t))^*\kappa(t) + \frac{\mu(t) + <\rho(t),\rho_1(t)>}{\varepsilon(t)} - \frac{||\rho(t)||^2}{\varepsilon^2(t)},$$

$$\Theta(t) + \rho_1(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon(t)},$$

$$\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(s^-)}\sum_{j=m}^{m+n}[\frac{(\sigma^{-1}(s)[b(s) - r(s)I_d])_j}{\kappa_{j-m}(s)\rho_{2,j}(s)} + 1]dN_{j-m}(s) = \sum_{0<s\leq t}[\frac{1}{\varepsilon(s)} - \frac{1}{\varepsilon(s^-)}].$$

Ces relations impliquent que $\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^0) = \zeta(t)$. On constate que

$$\widehat{c_k}(t) = \Lambda_k^0\varepsilon(t), \qquad t \in [0,T].$$

La stratégie optimale est donc la même pour chaque agent : leur consommation optimale est une fraction de la ressource totale disponible sur le marché. Cette fraction est le poids de l'agent dans le marché :

$$\Lambda_k^0 = \frac{(\varepsilon(0))}{TP_0(0)}E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(s)}{\varepsilon(s)}ds|\mathcal{G}_0^k].$$

Pour une utilité logarithmique, ce poids est proportionnel à la ressource relative de l'agent.

Exemple 4.2.12
$\forall k = 1,\cdots,K$, on pose $U_k(t,c) = \frac{1}{p}c^p$ $\forall(t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$ $(p \neq 0, p < 1)$.
On suppose que les agents n'ont pas de richesse initiale. On a vu que

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k]}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt|\mathcal{G}_0^k]}(\zeta_k(t))^{\frac{1}{p-1}}.$$

On suppose que $\forall k = 1,\cdots,K$, $\zeta_k = \zeta$ et que les hypothèses 3, 4 et 5 sont satisfaites. On pose

$$\Lambda_k := \left[\frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(s))^{p-1}\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0^k]}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(s))^p ds|\mathcal{G}_0^k]}\right]^{1-p}.$$

On suppose que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable (ceci est le cas si l'hypothèse 6 est réalisée et si ϵ_k est G_T-adapté). $I(t,c,\Lambda) = \sum_{k=1}^{K} \frac{c^{\frac{1}{p-1}}}{\Lambda_k^{\frac{1}{p-1}}} = c^{\frac{1}{p-1}}$ et $\frac{\partial}{\partial c}U(t,c,\Lambda) = c^{p-1}$. Par suite, la relation (4.9) est vérifiée car

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(t))^{p-1} \left(\frac{(\varepsilon(t))^{p-1}}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{p-1}} dt|\mathcal{G}_0^k] \\
&= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(t))^p dt|\mathcal{G}_0^k]\Lambda_k^{\frac{1}{1-p}} \\
&= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(t))^p dt|\mathcal{G}_0^k]\frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(t))^{p-1}\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k]}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(t))^p dt|\mathcal{G}_0^k]} \\
&= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(t))^{p-1}\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k].
\end{aligned}$$

Par homogénéité, la relation (4.9) est aussi vérifiée pour $\Lambda_k^0 := \Lambda_k \frac{(\varepsilon(0))^{1-p}}{P_0(0)}$, $k = 1,\cdots,K$ et ce Λ^0 vérifie la relation (4.14). Par suite, d'après la proposition 4.2.2 page 54, il existe un équilibre sur le marché si les coefficients du marché et l'utilité agrégée satisfont les relations (4.11), (4.12) et (4.13), c'est-à-dire respectivement :

$$r(t) = (\rho_2(t) - q(t))^*\kappa(t) - (p-1)\frac{\mu(t) + <\rho(t),\rho_1(t)>}{\varepsilon(t)} - (p-1)(p-2)\frac{||\rho(t)||^2}{2\varepsilon^2(t)},$$

$$\Theta(t) + \rho_1(t) = \frac{(1-p)\rho(t)}{\varepsilon(t)},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\varepsilon(s^-))^{p-1} \sum_{j=m}^{m+n} \left[\frac{(\sigma^{-1}(s)[b(s) - r(s)I_d])_j}{\kappa_{j-m}(s)\rho_{2,j}(s)} + 1\right] dN_{j-m}(s) \\
= \sum_{0<s\leq t} [(\varepsilon(s))^{p-1} - (\varepsilon(s^-))^{p-1}].
\end{aligned}$$

Ces relations impliquent que $\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda^0) = \zeta(t)$. On constate que

$$\widehat{c_k}(t) = (\Lambda_k^0)^{\frac{1}{1-p}}\varepsilon(t), \qquad t \in [0,T].$$

La consommation optimale de chaque agent est à nouveau une fraction de la ressource totale disponible sur le marché. Cette fraction est le poids de l'agent dans le marché a la puissance $\frac{1}{1-p}$, ce poids étant, pour une utilité isoélastique, une fonction de la ressource relative de l'agent. Si on fait tendre p vers 0, on retrouve les mêmes formules que pour une utilité logarithmique (cf. exemple 4.2.11) : mêmes poids, mêmes consommations optimales et mêmes relations entre les coefficients du marché et l'utilité agrégée. Par ailleurs, si le processus de la ressource totale est constant (ne dépend pas du temps) alors on retrouve aussi les mêmes consommations optimales que pour une utilité logarithmique. L'exemple 4.2.13 suivant traite ce cas particulier d'une ressource totale constante, indépendamment des fonctions d'utilité des agents.

Exemple 4.2.13
On suppose que les fonctions utilité des agents ne dépendent pas du temps (pour tout $k = 1, \cdots, K$, $U_k(t,c)$ ne dépend pas de t, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$). On note U'_k sa dérivée par rapport à la variable c. On suppose que les agents n'ont pas de richesse initiale et que $\mathbb{P}[\sum_{k=1}^K \epsilon_k \equiv a] = 1$ où a est une constante strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable. On suppose que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\zeta_k = \zeta$ et que les hypothèses 3, 4 et 5 sont satisfaites. On pose $\Lambda_k := \frac{1}{U'_k(\frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0^k])}$. On suppose que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable (ceci est le cas si l'hypothèse 6 est réalisée et si ϵ_k est G_T-adapté). Ainsi

$$I(1,\Lambda) = \sum_{k=1}^K I_k\left(\frac{1}{\Lambda_k}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^K E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0] = \frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}[Ta|\mathcal{G}_0] = a$$

donc

$$U'(a,\Lambda) = 1 = \Lambda_k U'_k\left(\frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0]\right).$$

Par suite, la relation (4.9) est vérifiée car

$$TI_k(\frac{1}{\Lambda_k}) - E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0^k] = 0.$$

Par homogénéité, la relation (4.9) est aussi vérifiée pour $\Lambda_k^0 := \Lambda_k \frac{1}{P_0(0)}$, $k = 1, \cdots, K$ et ce $\Lambda^0 := (\Lambda_1^0, \cdots, \Lambda_K^0)$ vérifie la relation (4.14). Par suite, d'après la proposition 4.2.2 page 54, il existe un équilibre sur le marché si les coefficients du marché et l'utilité agrégée satisfont les relations (4.11), (4.12) et (4.13), c'est-à-dire respectivement :

$$r(t) = (\rho_2(t) - q(t))^*\kappa(t),$$

$$\Theta(t) + \rho_1(t) = 0,$$

$$\int_0^t \sum_{j=m}^{m+n}\left[\frac{(\sigma^{-1}(s)\,[b(s) - r(s)I_d])_j}{\kappa_{j-m}(s)\rho_{2,j}(s)} + 1\right] dN_{j-m}(s) = 0.$$

Par conséquent ζ est constant ainsi que la consommation optimale de chaque agent $\widehat{c_k} \equiv \frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0]$. Cependant, le processus ressource ϵ_k est aléatoire et dépend du temps, donc le portefeuille π_k pour financer $\widehat{c_k}$ n'est pas constant, bien que $\widehat{c_k}$ le soit.

Chapitre 5

Optimisation de la consommation et de la richesse terminale

Dans ce chapitre, on fixe $k = 1, \cdots, K$ et on s'intéresse au problème d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale de l'agent k. Soient $U_{1,k}$ et $U_{2,k}$ deux fonctions d'utilité, on suppose que $U_{2,k}$ ne dépend pas du temps t. Par définition, $\forall t \in [0, T]$, leur dérivée partielle par rapport à c est inversible, on note les inverses respectivement $I_{1,k}(t, \cdot)$ et $I_{2,k}$.
Nous allons voir que la contrainte budgétaire est un peu différente de celle que l'on a obtenue précédemment pour le problème d'optimisation de la consommation seulement.

Proposition 5.0.14 *On suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. Soit $X_k(0)$ une variable aléatoire $\mathcal{G}_0^k$-mesurable.*
Si (π_k, c_k) est une stratégie G_T^k-admissible et si $X_k^{(\pi_k, c_k)}(T)$ est la richesse finale correspondante, alors

$$E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(T) X_k^{(\pi_k, c_k)}(T) + \int_0^T \zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt | \mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0) X_k(0). \tag{5.1}$$

Réciproquement, si l'on se donne une richesse initiale $X_k(0) \in L^1(\mathcal{G}_0^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$, une richesse terminale Y vérifiant $\beta(T)Y \in L_+^1(\mathcal{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$ et un processus de consommation c_k positif, G_T^k-adapté et tels que $\int_0^T c_k(s)ds < \infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, et

$$E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(T) Y + \int_0^T \zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt | \mathcal{G}_0^k] = \beta(0) X_k(0)$$

alors il existe un portefeuille $\pi_k = (\pi_k(t), t \in [0, T])$ tel que (π_k, c_k) est une stratégie G_T^k-admissible et $X_k^{(\pi_k, c_k)}(T) = Y$.

Preuve:
L'équation (2.2) :

$$d(\beta(t)X_k(t)) + \beta(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt = \beta(t)\pi_k^*(t^-)\sigma(t)d\widehat{S^k}(t)$$

prouve que $\beta(t)X_k(t)+\int_0^t \beta(s)(c_k(s)-\epsilon_k(s))ds$ est une $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingale locale. Or elle est minorée (par définition d'une stratégie admissible) donc c'est une $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-surmartingale, de valeur initiale $\beta(0)X_k(0)$. Par conséquent,

$$E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) + \int_0^T \beta(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0).$$

Or $\widehat{\mathbb{P}^k} = Y_k(T)\mathbb{P}$ donc la contrainte budgétaire s'écrit :

$$E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) + \int_0^T \zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0).$$

Réciproquement, on applique le théorème 2.3.1 au processus

$$H(t) := E_{\mathbb{P}^k}[\beta(T)Y + \int_0^T \beta(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_t^k], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Il existe $\psi \in L^1_{loc}(\widehat{S}, \mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$ tel que

$$H(t) = E_{\mathbb{P}^k}[H(T)|\mathcal{G}_0^k] + \int_0^t \psi^*(s)d\widehat{S}(s).$$

$\int_0^T ||\psi(s)||^2 ds = \langle H, H\rangle_T < +\infty$. On pose $\pi_k(s^-) := \beta(s)^{-1}(\sigma^*(s))^{-1}\psi(s)$. Le processus π_k est G_T^k-prévisible et $\int_0^T ||\sigma^*(s)\pi_k(s)||^2 ds < +\infty$. Avec la stratégie (π_k, c_k), la richesse $X_k^{(\pi_k,c_k)}$ vérifie :

$$\begin{cases} dH(t) & = d(\beta(t)X_k^{(\pi_k,c_k)}(t)) + \beta(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt = \beta(t)\pi_k^*(t^-)\sigma(t)d\widehat{S^k}(t) \\ H(0) & = \beta(0)X_k(0) \end{cases}$$

Donc $\beta(t)X_k^{(\pi_k,c_k)}(t) + \int_0^t \beta(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds = H(t)$ est une $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingale uniformément intégrable, qui est donc égale à l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale, et par suite,

$$\beta(t)X_k^{(\pi_k,c_k)}(t) = E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)Y + \int_t^T \beta(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k]$$

qui est minorée et $X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) \geq 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, ce qui prouve l'admissibilité de la stratégie. □

L'agent k cherche à maximiser

$$(\pi_k, c_k) \to J(X_k(0), \pi_k, c_k) := E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}(t, c_k(t))dt + U_{2,k}(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T))|\mathcal{G}_0^k] \quad (5.2)$$

parmi les stratégies G_T^k-admissibles vérifiant la contrainte

$$E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) + \int_0^T \zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0).$$

On résout la maximisation sous contrainte de cette fonctionnelle par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le lagrangien de ce problème sous contrainte est :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\int_0^T & U_{1,k}(t, c_k(t))dt + U_{2,k}(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T)) \\ & + \lambda(\zeta_k(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) + \int_0^T \zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt - \beta(0)X_k(0))|\mathcal{G}_0^k] \end{aligned}$$

où λ est une variable aléatoire $\mathcal{G}_0^k$-mesurable (la contrainte est saturée). c_k et $X_k^{(\pi_k,c_k)}(T)$ optimaux doivent donc vérifier :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial c}U_{1,k}(t, c_k(t)) = \lambda\zeta_k(t) \\ \frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T)) = \lambda\zeta_k(T) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} c_k(t) = I_{1,k}(t, \lambda\zeta_k(t)) \\ X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) = I_{2,k}(\lambda\zeta_k(T)) \end{cases}$$

Théorème 5.0.15 *On suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. S'il existe λ une variable aléatoire strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(I_{1,k}(t, \lambda\zeta_k(t)) - \epsilon_k(t))dt + \zeta_k(T)I_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))|\mathcal{G}_0^k] = \beta(0)X_k(0) \quad (5.3)$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation de l'agent k, donnée par : $\widehat{c_k}(t) = I_{1,k}(t, \lambda\zeta_k(t))$ et $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) = I_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))$.
La valeur optimale du problème de maximisation est

$$J(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}oI_{1,k}(t, \lambda\zeta_k(t))dt + U_{2,k}oI_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))|\mathcal{G}_0^k].$$

Preuve:
Remarquons d'abord que par la proposition 5.0.14, la connaissance d'une stratégie G_T^k-admissible (π_k, c_k) est équivalente à la connaissance du couple vitesse de

consommation, richesse finale $(c_k, X_k^{(\pi_k,c_k)}(T))$ satisfaisant la contrainte (5.1) et tel que $\int_0^T c_k(s)ds < \infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et $E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T)] < \infty$. $\widehat{c_k}$ et $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}$ vérifient bien ces relations car $E_{\mathbb{P}}[\beta(0)X_k(0)] = E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[X_k(0)] < \infty$ implique, par la relation (5.3), que $\int_0^T \widehat{c_k}(s)ds < \infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et $E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T)] < \infty$. Soit $(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T), c_k)$ une stratégie admissible, donc qui vérifie la contrainte (5.1), par suite

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(\widehat{c_k}(t) - c_k(t))dt + \zeta_k(T)(X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) - X_k^{(\pi_k,c_k)}(T))|\mathcal{G}_0^k] \geq 0.$$

Or, en étudiant les variations de l'application $c \to U_{1,k}(t,c) - yc$, on a $\forall t \in [0,T]$, $\forall y > 0$,

$$U_{1,k}(t, I_{1,k}(t,y)) - yI_{1,k}(t,y) = \max_{c>0}\{U_{1,k}(t,c) - yc\}.$$

Ce maximum est uniquement atteint par stricte concavité de $U_{1,k}$.
On applique ceci à t et ω fixés, pour $y = \lambda\zeta_k(t)$. On obtient

$$U_{1,k}(t, \widehat{c_k}(t)) - \lambda\zeta_k(t)\widehat{c_k}(t) \geq U_{1,k}(t, c_k(t)) - \lambda\zeta_k(t)c_k(t).$$

L'inégalité est stricte si $\widehat{c_k}(t)(\omega) \neq c_k(t)(\omega)$. De même avec $U_{2,k}$:

$$U_{2,k}(X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T)) - \lambda\zeta_k(T)X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) \geq U_{2,k}(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T)) - \lambda\zeta_k(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T)$$

L'inégalité est stricte si $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T)(\omega) \neq X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T)(\omega)$. Par suite

$$\begin{aligned}
&J(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) - J(X_k(0), \pi_k, c_k) \\
&= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (U_{1,k}(t, \widehat{c_k}(t)) - U_{1,k}(t, c_k(t)))dt + U_{2,k}(X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T)) - U_{2,k}(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T))|\mathcal{G}_0^k] \\
&\geq \lambda E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(\widehat{c_k}(t) - c_k(t))dt + \zeta_k(T)(X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) - X_k^{(\pi_k,c_k)}(T))|\mathcal{G}_0^k] \geq 0
\end{aligned}$$

et $J(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) - J(X_k(0), \pi_k, c_k) = 0$ si et seulement si $\widehat{c_k} = c_k$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement et $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) = X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T)$ $d\mathbb{P}$ presque sûrement. □

On définit pour tout $\omega \in \Omega$ la fonction

$$\chi_\omega :]0, +\infty[\to]0, +\infty]$$

par

$$\chi_\omega(\lambda) := E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta_k(t)I_{1,k}(t, \lambda\zeta_k(t))dt + \zeta_k(T)I_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))|\mathcal{G}_0^k\right](\omega).$$

Proposition 5.0.16 *On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Si pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions χ_ω sont finies, alors il existe une unique fonction λ strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant la relation (5.3).*

Preuve: La preuve est analogue à celle de la proposition 3.0.4.

Exemple 5.0.17
$U_{1,k}(t,c) = U_{2,k}(t,c) = \frac{1}{p}c^p$, $(p \neq 0, p < 1)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
Alors $I_{1,k}(t,c) = I_{2,k}(t,c) = c^{\frac{1}{p-1}}$ $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda = \left[\frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt + (\zeta_k(T))^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{G}_0^k]}\right]^{p-1},$$

$$\widehat{c_k}(t) = (\lambda\beta(t)Y_k(t))^{\frac{1}{p-1}} \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_k}(T) = (\lambda\beta(T)Y_k(T))^{\frac{1}{p-1}}.$$

Nous allons calculer le processus richesse optimale et le portefeuille optimale dans le cas où le processus ressource ϵ_k est identiquement nul et que l'hypothèse (3.7) p. 45 est vérifiée pour $\alpha = \frac{p}{p-1}$. Puisque

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\beta(T)\widehat{X_k}(T) + \int_0^T \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds \mid \mathcal{G}_t^k\right),$$

$$\begin{aligned}\beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t) &= E_{\mathbb{P}}\left(\beta(T)Y_k(T)\widehat{X_k}(T) + \int_t^T \beta(s)Y_k(s)\widehat{c_k}(s)ds \mid \mathcal{G}_t^k\right)\\ &= (\lambda)^{\frac{1}{p-1}}E_{\mathbb{P}}\left((\beta(T)Y_k(T))^{\frac{p}{p-1}} + \int_t^T (\beta(s)Y_k(s))^{\frac{p}{p-1}}ds \mid \mathcal{G}_t^k\right).\end{aligned}$$

La relation (3.8) page 45 implique alors

$$\begin{aligned}&\beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t)\\ &= (\lambda)^{\frac{1}{p-1}}(\beta(t)Y_k(t))^{\frac{p}{p-1}}\left(\exp(\int_t^T \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(s)ds) + \int_t^T \exp(\int_t^s \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(u)du)ds\right).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}d(\beta(t)\widehat{X_k}(t)) = (\lambda)^{\frac{1}{p-1}}&\left(\exp(\int_t^T \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(s)ds) + \int_t^T \exp(\int_t^s \Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}(u)du)ds\right)\\ &\beta(t)^{\frac{p}{p-1}}Y_k(t^-)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{1-p}(\Theta+\rho_1^k)^*(t), ((\frac{q}{\rho_2^k})^{\frac{1}{p-1}}(t) - I_n)^*\right)\left(d\widetilde{W}_k(t), d\widetilde{M}_k(t)\right)\\ &+[\cdots]dt.\end{aligned}$$

En comparant la forme différentielle ainsi obtenue à celle de l'équation de la richesse (2.2), on obtient

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^{-1})(t)\widehat{X_k}(t)\left(\frac{Y_k(t^-)}{Y_k(t)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{1-p}(\Theta+\rho_1^k)^*(t), ((\frac{q}{\rho_2^k})^{\frac{1}{p-1}}(t) - I_n)^*\right)^*.$$

□

Exemple 5.0.18
(exemple 5.2 pages 343-344 [25])
$U_{1,k}(t,c) = U_{2,k}(t,c) = \ln(c)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
Alors $I_{1,k}(t,c) = I_{2,k}(t,c) = \frac{1}{c}$ $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$ et $\chi_\omega(\lambda) = \frac{T+1}{\lambda(\omega)}$.
On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda = \frac{T+1}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{(T+1)\beta(t)Y_k(t)},$$

$$\widehat{X_k}(T) = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{(T+1)\beta(T)Y_k(T)}.$$

Nous allons maintenant exprimer le portefeuille optimal dans le cas où le processus ressource ϵ_k est identiquement nul. D'après la preuve de la proposition 5.0.14,

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)\widehat{X_k}(T) + \int_0^T \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds|\mathcal{G}_t^k].$$

Rappelons que $d\frac{1}{Y_k}(t) = \frac{1}{Y_k}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$ avec $l_k^* := ((\Theta+\rho_1^k)^*, (\frac{\rho_2^k}{q} - I_n)^*)$. Par suite, puisque

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\frac{1}{Y_k}(T) + \int_0^T \frac{1}{Y_k}(s)ds|\mathcal{G}_t^k],$$

on obtient

$$\begin{aligned}\beta(t)\widehat{X_k}(t) &+ \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds \\ &= \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[1 \quad + \quad \int_0^T \frac{1}{Y_k}(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s) + T \\ &\qquad + \quad \int_0^T (\int_0^s \frac{1}{Y_k}(u^-)l_k^*(u)d\widehat{S}(u))ds|\mathcal{G}_t^k].\end{aligned}$$

En utilisant Fubini et en conditionnant par rapport à $\mathcal{G}_t^k$, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta(t)\widehat{X_k}(t) &+ \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds \\ &= \beta(0)X_k(0) + \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}[\int_0^t (1+T-s)\frac{1}{Y_k}(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)]\end{aligned}$$

et en identifiant avec l'expression de la richesse (2.2), on trouve

$$\beta(s)\sigma^*(s)\widehat{\pi}_k(s^-) = \frac{\beta(0)X_k(0)(1+T-s)}{T+1}\frac{1}{Y_k}(s^-)l_k(s). \tag{5.4}$$

D'autre part,

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)\widehat{X_k}(T) + \int_t^T \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds|\mathcal{G}_t^k]$$

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[1 + \int_0^T \frac{1}{Y_k}(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)$$
$$+T - t + \int_t^T(\int_0^s \tfrac{1}{Y_k}(u^-)l_k^*(u)d\widehat{S}(u))ds|\mathcal{G}_t^k]$$

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[1 + \int_0^T \frac{1}{Y_k}(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)$$
$$+(T-t)[1 + \int_0^t \tfrac{1}{Y_k}(u^-)l_k^*(u)d\widehat{S}(u)|\mathcal{G}_t^k].$$

Or $d\frac{1}{Y_k}(t) = \frac{1}{Y_k}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$, donc

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)(T+1-t)}{T+1}\frac{1}{Y_k}(t). \tag{5.5}$$

Les relations (5.4) et (5.5) donnent dans ce cas particulier l'expression explicite du portefeuille optimal :

$$\sigma^*(s)\widehat{\pi_k}(s^-) = \frac{Y_k(s)}{Y_k(s^-)}\widehat{X_k}(s)l_k(s)$$

$$\widehat{\pi_k}(s) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n l_k^{m+j}(s)\mathbb{I}_{\{N_j(s)\neq N_j(s^-)\}}}\widehat{X_k}(s)(\sigma^*(s))^{-1}l_k(s).$$

□

Remarque: Ces résultats sont similaires à ceux des exemples 3.0.5 et 3.0.6 du chapitre 3 où l'on optimise la consommation seulement. En effet, la fonction d'utilité étant fixée (soit logarithmique, soit isoélastique), et si l'agent n'a pas de ressource, alors l'expression de son portefeuille optimal (proportionnellement à sa richesse) est la même qu'il optimise sa consommation seulement ou sa consommation et sa richesse terminale. Cependant, puisque les richesses sont différentes, l'expression du portefeuille est différente lorsqu'on exprime le portefeuille en unités de produit. Pour une utilité logarithmique, un agent voulant optimiser sa consommation et sa richesse terminale consomme moins ($\frac{T+1}{T}$ moins) que s'il optimise sa consommation seulement (les processus de la consommation dans ces deux cadres sont proportionnels de coefficient $\frac{T+1}{T}$, quelle que soit la ressource). En contrepartie, sa richesse est plus grande. Pour une utilité isoélastique, les processus de la consommation ne sont plus proportionnels.

Remarque: On peut refaire la même démarche d'optimisation en supposant que $U_{1,k} = 0$. Les résultats restent vrais avec $I_{1,k} = 0$ et $\widehat{c_k} = 0$. Cela revient à optimiser seulement selon la richesse terminale et à ne rien consommer.

Exemple 5.0.19
(exemple 5.1 page 343 [25])
$U_{1,k} = 0$ et $U_{2,k}(t,c) = \ln(c)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda = \frac{1}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)} \quad \text{et} \quad \widehat{X_k}(T) = \frac{1}{\lambda\beta(T)Y_k(T)}.$$

Comme précédemment, exprimons le portefeuille optimal dans le cas où le processus ressource ϵ_k est identiquement nul. La démarche est tout à fait similaire. D'une part

$$\begin{aligned}
\beta(t)\widehat{X_k}(t) &= E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\beta(T)\widehat{X_k}(T)|\mathcal{G}_t^k] \\
&= \beta(0)X_k(0)E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\frac{1}{Y_k}(T)|\mathcal{G}_t^k] \\
&= \beta(0)X_k(0)E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[1 + \int_0^T \frac{1}{Y_k}(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)|\mathcal{G}_t^k] \\
&= \beta(0)X_k(0)[1 + \int_0^t \frac{1}{Y_k}(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)].
\end{aligned}$$

En identifiant avec l'expression de la richesse (2.2), on trouve

$$\beta(s)\sigma^*(s)\widehat{\pi_k}(s^-) = \beta(0)X_k(0)\frac{1}{Y_k}(s^-)l_k(s).$$

D'autre part,

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \beta(0)X_k(0)[1 + \int_0^t d\frac{1}{Y_k}(s)] = \beta(0)X_k(0)\frac{1}{Y_k}(t).$$

D'où l'expression explicite du portefeuille optimal :

$$\sigma^*(s)\widehat{\pi_k}(s^-) = \frac{Y_k(s)}{Y_k(s^-)}\widehat{X_k}(s)l_k(s) = \frac{\beta(0)}{\beta(s)}X_k(0)\frac{1}{Y_k(s)}l_k(s)$$

$$\widehat{\pi_k}(s) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n l_k^{m+j}(s)\mathbb{I}_{\{N_j(s)\neq N_j(s^-)\}}}\widehat{X_k}(s)(\sigma^*(s))^{-1}l_k(s).$$

□

Remarque: L'expression du portefeuille optimal (proportionnellement à la richesse optimale) est identique à celle des deux autres cadres d'optimisation avec utilité logarithmique et sans ressource. Cependant, la richesse est plus grande car l'agent ne consomme rien.

Chapitre 6

Equilibre dans le cadre d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale

Nous allons maintenant étudier l'existence d'un équilibre sur le marché financier dans le cadre d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale. Bien que la proposition 4.2.2 donnant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre reste semblable, nous allons voir que dans ce cas, l'existence d'un équilibre n'implique plus que les marchés des titres s'equilibrent, ce qui est une différence essentielle avec le précédent problème d'optimisation (optimisation de la consommation uniquement).

Pour tout $k = 1, \cdots, K$, soient $U_{1,k}$ et $U_{2,k}$ deux fonctions d'utilité de l'agent k et on considère le problème d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale (définition (5.2)) de chaque agent. On suppose que ε est un processus de Itô (équation 4.2), G_T-adapté, minoré par une constante strictement positive $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.

Pour traiter le problème d'existence d'un équilibre dans ce cadre, nous allons suivre le même cheminement que dans le chapitre 4 : on suppose les hypothèses 3 et 4 satisfaites, l'hypothèse 5 étant remplacée par la suivante :

Hypothèse 7 *Pour $k = 1, \cdots, K$, on suppose que les hypothèses 1, 2 et celles de la proposition 5.0.16 sont satisfaites. (Ainsi, λ_k l'unique solution de l'équation (5.3) existe.) D'autre part, on suppose que Y est une $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P})$-martingale et que, pour tout $k = 1, \cdots, K$, l'équation en λ*

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t) I_{1,k}(t, \lambda\zeta(t))dt + \zeta(T) I_{2,k}(\lambda\zeta(T))dt | \mathcal{G}_0] \\ = \quad E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)\epsilon_k(t)dt + \beta(0)X_k(0) | \mathcal{G}_0] \end{aligned}$$

admet une unique solution λ_k^0 $\mathcal{G}_0$-mesurable.

Nous rappelons que le processus ζ est défini page 51 par la relation (4.4). Les résultats du paragraphe 4.1 sont alors inchangés.
On définit sur $[0,T]\times]0,+\infty[\times(]0,+\infty[)^K$ la fonction U_1 par

$$U_1(t,c,\Lambda) := \max_{c_k>0, c_1+,\cdots,.+c_K=c} \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_{1,k}(t,c_k) \tag{6.1}$$

et sur $]0,+\infty[\times(]0,+\infty[)^K$ la fonction U_2 par

$$U_2(c,\Lambda) := \max_{c_k>0, c_1+,\cdots,.+c_K=c} \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k U_{2,k}(c_k). \tag{6.2}$$

Nous énonçons maintenant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre dans le cadre d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale.

Proposition 6.0.20 *Sous les hypothèses 3, 4 et 7, un équilibre (4.0.7) existe sur le marché financier si et seulement s'il existe $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$ telle que $\forall k = 1, \cdots, K$,*

- *Λ_k est une variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable à valeurs dans $]0,+\infty[$ vérifiant*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \tfrac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda) I_{1,k}(t, \tfrac{1}{\Lambda_k}\tfrac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda))dt + \tfrac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)$$

$$I_{2,k}(\frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda))|\mathcal{G}_0^k] = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) \tag{6.3}$$

ainsi que

$$\bullet\zeta_k(t) = \frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda), \forall t \in [0,T]. \tag{6.4}$$

De plus, (6.4) est équivalent aux quatre relations suivantes reliant les coefficients r et b du marché et l'utilité agrégée U_1 :

$$r(t) = -\frac{1}{\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}[\frac{\partial^2}{\partial c\partial t}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda) + (\mu(t) + \langle\rho(t),\rho_1(t)\rangle)\frac{\partial^2}{\partial c^2}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)$$

$$+\frac{1}{2}||\rho(t)||^2\frac{\partial^3}{\partial c^3}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)] + \langle\kappa(t),\rho_2(t)-q(t)\rangle \tag{6.5}$$

$$\Theta(t) + \rho_1(t) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial c^2}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}\rho(t) \tag{6.6}$$

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial c} U_1(s,\varepsilon(s^-),\Lambda) \sum_{j=m}^{m+n} [\frac{(\sigma^{-1}(s)[b(s)-r(s)I_d])_j}{\kappa_{j-m}(s)\rho_{2,j}(s)} + 1] dN_{j-m}(s)$$

$$= \sum_{0<s\leq t} [\frac{\partial}{\partial c} U_1(s,\varepsilon(s),\Lambda) - \frac{\partial}{\partial c} U_1(s,\varepsilon(s^-),\Lambda)] \tag{6.7}$$

$$P_0(0)\frac{\partial}{\partial c} U_1(0,\varepsilon(0),\Lambda) = 1 \tag{6.8}$$

Preuve:
La preuve est un peu différente de celle de la proposition 4.2.2 car, dans le cadre d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale, la contrainte budgétaire (5.1) et les relations (6.3) font intervenir la richesse terminale.

<u>La condition est suffisante</u>
On pose $\overline{c_k}(t) := I_{1,k}(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda))$ et $\overline{X_k}(T) := I_{2,k}(\frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda))$. $(\overline{c_k}, \overline{X_k}(T))$ vérifient bien la contrainte budgétaire (5.1) d'après les équations (6.3) et (6.4) , et maximisent la fonction valeur de l'agent k. En effet, soit $(c_k, X_k(T))$ une stratégie admissible. La concavité de $U_{1,k}(t,\cdot)$ et $U_{2,k}$ et la relation (4.8) impliquent :

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}(t,c_k(t))dt + U_{2,k}(X_k(T))|\mathcal{G}_0^k] \leq E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}(t,\overline{c_k}(t))dt + U_{2,k}(\overline{X_k}(T))|\mathcal{G}_0^k]$$

$$+E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t)-\overline{c_k}(t))\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\Lambda_k}dt + (X_k(T)-\overline{X_k}(T))\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T))|\mathcal{G}_0^k].$$

D'après la contrainte budgétaire et la condition (6.4)

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\textstyle\int_0^T (c_k(t)-\overline{c_k}(t))\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)dt|\mathcal{G}_0^k] \\ = E_{\mathbb{P}}[\textstyle\int_0^T (c_k(t)-\epsilon_k(t))\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)dt|\mathcal{G}_0^k] - \beta(0)X_k(0) \\ +E_{\mathbb{P}}[\textstyle\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)\overline{X_k}(T)|\mathcal{G}_0^k] \\ \leq E_{\mathbb{P}}[\textstyle\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)(\overline{X_k}(T)-X_k(T))|\mathcal{G}_0^k]. \end{aligned}$$

Par suite

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t)-\overline{c_k}(t))\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\Lambda_k}dt + (X_k(T)-\overline{X_k}(T))\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T))|\mathcal{G}_0^k]$$

$$\leq E_{\mathbb{P}}[(\overline{X_k}(T)-X_k(T))(\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)}{\Lambda_k} - \frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T)))|\mathcal{G}_0^k] = 0$$

car $\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T)) = \frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(I_{2,k}(\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)}{\Lambda_k}))$. On a bien

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}(t,c_k(t))dt + U_{2,k}(X_k(T))|\mathcal{G}_0^k]$$

$$\leq \quad E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}(t,\overline{c_k}(t))dt + U_{2,k}(\overline{X_k}(T))|\mathcal{G}_0^k].$$

D'autre part, $\overline{c_k}$ est bien G_T (et par suite G_T^k)-adapté car Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable et la relation (6.4) implique que $\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)$ est G_T-adapté. Par suite, $\overline{c_k} = \widehat{c_k}$ et $\overline{X_k}(T) = \widehat{X_k}(T)$. Vérifions que la condition de l'équilibre est alors vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k}(t) = \sum_{k=1}^{K} I_{1,k}(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)) = I_1(t, \frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda),\Lambda) = \varepsilon(t).$$

<u>La condition est nécessaire</u>
Si l'équilibre a lieu, alors $\forall k = 1,\cdots,K, \zeta_k = \zeta$ par le lemme 4.1.4 et

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{K} I_{1,k}(t,\lambda_k\zeta(t)) = I_1(t,\zeta(t),\Lambda)$$

où $\Lambda = (\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_K})$ avec $\forall k = 1,\cdots,K, \lambda_k$ solution de (5.3). Par suite,

$$\zeta(t) = H_1(t,\varepsilon(t),\Lambda) = \frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)$$

$$\widehat{c_k}(t) = I_{1,k}(t,\lambda_k\zeta(t)) = I_{1,k}(t, \frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\Lambda_k})$$

$$\widehat{X_k}(T) = I_{2,k}(\lambda_k\zeta(T)) = I_{2,k}(\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)}{\Lambda_k}).$$

D'après le lemme 4.1.2, $\widehat{c_k}$ est G_T-adapté donc $\Lambda_k = \frac{\zeta(0)}{\frac{\partial}{\partial c}U_{1,k}(0,\widehat{c_k}(0))}$ est $\mathcal{G}_0$-mesurable. La contrainte budgétaire (5.1) implique alors la relation (6.3).
La fin de la preuve est alors identique à celle de la proposition 4.2.2, avec U_1 jouant ici le rôle de U. □

Remarque: Imaginons qu'un agent représentatif reçoive la ressource ε et cherche à maximiser

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(t,c(t),\Lambda)dt + U_2(X(T))|\mathcal{G}_0]$$

sous la contrainte

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)(c(t)-\varepsilon(t))dt + \zeta(T)X(T)|\mathcal{G}_0] \leq 0.$$

(Intuitivement, $\forall k = 1,\cdots,K$, Λ_k représente le poids de l'agent k dans le marché financier). Si λ^0 est solution de

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)(I_1(t,\lambda^0\zeta(t),\Lambda)-\varepsilon(t))dt + \zeta(T)I_2(\lambda^0\zeta(T),\Lambda)|\mathcal{G}_0] = 0$$

le processus de consommation optimale de l'agent représentatif est alors donné par

$$c^0(t) := I_1(t,\lambda^0\zeta(t),\Lambda)$$

et la richesse terminale optimale par

$$X^0(t) := I_2(\lambda^0 \zeta(T), \Lambda).$$

Imaginons qu'alors l'agent représentatif redistribue cette consommation et cette richesse à chaque agent selon la formule :

$$\overline{c_k}(t) = I_{1,k}(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(t, c^0(t), \Lambda)), \qquad t \in [0, T]$$

$$\overline{X_k}(T) = I_{2,k}(\frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(T, c^0(T), \Lambda)), \qquad t \in [0, T]$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{c_k}(t) = I_1(t, \frac{\partial}{\partial c}U_1(t, c^0(t), \Lambda), \Lambda) = c^0(t).$$

L'équilibre a lieu lorsque $c^0(t) = \varepsilon(t)$ et que, pour chaque agent, la consommation $\overline{c_k}$ et la richesse terminale $\overline{X_k}(T)$ coïncident avec sa consommation et sa richesse terminale optimales.

Corollaire 6.0.21 *Pour tout $k = 1, \cdots, K$, s'il existe un équilibre (4.0.7) et sous les hypothèses 3, 4 et 7, on a :*

$$\widetilde{M^k} = \widetilde{M} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{W^k} = \widetilde{W}$$

(égalité à indistinguabilité près).

Preuve: Elle est similaire à celle du corollaire 4.2.8.

Proposition 6.0.22 *Si un équilibre (4.0.7) existe et si les hypothèses 3, 4 et 7 sont satisfaites, alors les tribus $\mathcal{G}_t^k$ et $\mathcal{G}_T$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}$ conditionnellement à $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $k = 1, \cdots, K$, c'est-à-dire l'hypothèse 6 est vérifiée.*

Preuve: Elle est similaire à celle de la proposition 4.2.9.

Remarque 6.0.23 *Bien que la proposition 4.2.9 reste vraie, on n'a plus le fait que l'existence d'un équilibre (4.0.7) implique la nullité de la somme des portefeuilles. En effet, l'expression du processus richesse optimale trouvée au théorème 3.0.3 n'est plus valide dans le cadre d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale, et le lemme 4.2.3 n'est donc plus valide dans ce cadre. On ne peut pas non plus transcrire dans ce cadre le lemme 4.2.5 ainsi que la proposition 4.2.7. En effet, les termes correspondant à la richesse terminale ne s'annulent pas quand on somme les relations (6.3) et ces relations ne sont plus homogènes en Λ.*

Nous concluons ce chapitre avec un exemple d'équilibre avec pour fonctions d'utilité la fonction ln. L'approche de cet exemple est un peu différente de celle dans le cadre d'optimisation de la consommation seulement (exemple 4.2.11) car les relations (6.3) font intervenir la richesse terminale et ne sont plus homogènes en Λ.

Exemple 6.0.24
$\forall k = 1, \cdots, K$, on pose $U_{1,k}(t,c) = U_{2,k}(c) = \ln(c) \quad \forall (t,c) \in [0,T] \times]0, +\infty[$.

$$\text{Alors} \qquad I_1(t,c,\Lambda) = I_2(c,\Lambda) = \frac{\partial}{\partial c} U_1(t,c,\Lambda) = \frac{\partial}{\partial c} U_2(c,\Lambda) = \frac{\sum_{k=1}^K \Lambda_k}{c}.$$

On suppose que les richesses initiales de chaque agent sont $\mathcal{G}_0$-mesurables et que les hypothèses 3, 4, 6 et 7 sont satisfaites. La relation (6.3) s'écrit : $\forall k = 1, \cdots, K$

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\sum_{j=1}^K \Lambda_j}{\varepsilon(t)} (\frac{\Lambda_k \varepsilon(t)}{\sum_{j=1}^K \Lambda_j} - \epsilon_k(t)) dt + \frac{\sum_{j=1}^K \Lambda_j \Lambda_k \varepsilon(T)}{\varepsilon(T) \sum_{j=1}^K \Lambda_j} | \mathcal{G}_0^k] = \beta(0) X_k(0)$$

c'est-à-dire

$$\Lambda_k (T+1) - \sum_{j=1}^K \Lambda_j E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(t)}{\varepsilon(t)} dt | \mathcal{G}_0^k] = \beta(0) X_k(0).$$

Si l'hypothèse 6 est satisfaite et si ϵ_k est G_T-adapté,

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(t)}{\varepsilon(t)} dt | \mathcal{G}_0^k] = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(t)}{\varepsilon(t)} dt | \mathcal{G}_0]$$

donc en sommant ces égalités on obtient :

$$\sum_{j=1}^K \Lambda_j (T+1) - \sum_{j=1}^K \Lambda_j T = \beta(0) \sum_{j=1}^K X_j(0)$$

d'où

$$\sum_{j=1}^K \Lambda_j = \beta(0) \sum_{j=1}^K X_j(0)$$

et

$$\Lambda_k = \frac{\beta(0) X_k(0) + \beta(0) \sum_{j=1}^K X_j(0) E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(t)}{\varepsilon(t)} dt | \mathcal{G}_0]}{T+1}.$$

Ces Λ_k vérifient bien la relation (6.3), $\Lambda := (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$ est bien $\mathcal{G}_0$-mesurable dès que les richesses initiales de chaque agent le sont. On suppose que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\Lambda_k > 0$ (ceci est réalisé par exemple dès que les richesses initiales sont strictement positives) et que $\zeta_k(t) = \frac{\beta(0) \sum_{j=1}^K X_j(0)}{\varepsilon(t)}$ (ainsi la relation (6.4) est vérifiée).
Alors un équilibre existe sur le marché si les relations (6.5), (6.6), (6.7) et (6.8) entre les coefficients du marché et l'utilité agrégée sont vérifiées, c'est-à-dire si

$$r(t) = (\rho_2(t) - q(t))^* \kappa(t) + \frac{\mu(t) + \langle \rho(t), \rho_1(t) \rangle}{\varepsilon(t)} - \frac{||\rho(t)||^2}{\varepsilon^2(t)}$$

$$\Theta(t) + \rho_1(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon(t)}$$

$$\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(s^-)} \sum_{j=m}^{m+n} [\frac{(\sigma^{-1}(s)[b(s) - r(s)I_d])_j}{\kappa_{j-m}(s)\rho_{2,j}(s)} + 1] dN_{j-m}(s) = \sum_{0<s\leq t} [\frac{1}{\varepsilon(s)} - \frac{1}{\varepsilon(s^-)}]$$

$$P_0(0) = \frac{\varepsilon(0)}{\sum_{j=1}^K \Lambda_j} = \frac{\varepsilon(0)}{\beta(0) \sum_{j=1}^K X_j(0)}.$$

Plus précisément, puisque ces Λ_k sont les seuls qui vérifient la relation (6.3), la réalisation de ces quatre relations est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre sous ces hypothèses. On constate que

$$\widehat{c_k}(t) = \Lambda_k \varepsilon(t), \quad t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \widehat{X_k}(T) = \Lambda_k \varepsilon(T).$$

A nouveau la consommation optimale est une fraction de la ressource totale disponible sur le marché. Cette fraction est le poids de l'agent dans le marché. Dans ce cadre d'utilité logarithmique et d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale, ce poids prend en compte à la fois la ressource relative de l'agent et sa richesse initiale relative.

Chapitre 7

Modèle sans monnaie et modèle avec monnaie

Nous détaillons dans ce chapitre les différences entre un modèle avec monnaie et sans monnaie. Ce travail a été initié par Karatzas et al. (1990) [37].

Les résultats trouvés jusqu'ici le sont pour un modèle sans monnaie, c'est-à-dire les prix des actifs financiers et la richesse des agents sont exprimés en unités de produit. Nous allons voir ce qui diffère si nous considérons un modèle avec monnaie : les vitesses de consommation et de ressource restent exprimées en unités de produit, mais les prix des actifs financiers et la richesse des agents sont exprimés en monnaie locale. On introduit le spot ψ, qui est le prix en monnaie locale d'une unité de produit : ψ est déterminé à l'équilibre et doit être strictement positif $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.

Définition 7.0.25 *La famille $(\widehat{c_k}, k = 1, \cdots, K; \psi)$ est un équilibre sur le marché financier avec monnaie si $\psi > 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement et que*
(i) pour tout $k = 1, \cdots, K$, la consommation $(\widehat{c_k})$ est optimale pour l'agent k
(ii) le marché des consommations s'équilibre, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k}(t) = \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k(t) = \varepsilon(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{7.1}$$

Les différences entre le modèle sans monnaie et le modèle avec monnaie proviennent du fait que dans l'expression du processus de la richesse, les vitesses de consommation et de ressource ϵ et c sont maintenant remplacées, pour le modèle avec monnaie, par leur expression en monnaie locale, c'est-à-dire par $\psi\epsilon$ et ψc.

• *Dans la définition 1.0.2*, la condition d'intégrabilité $\int_0^T c_k(t)dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement est remplacée par $\int_0^T \psi(t)c_k(t)dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement.

• *L'expression de la richesse (2.2)* devient

$$\beta(t)X_k(t) = \beta(0)X_k(0) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)(\epsilon_k - c_k)(s)ds + \int_0^t \beta(s)\pi_k^*(s^-)\sigma(s)d\widehat{S}(s).$$

• *Dans la proposition 3.0.2*, la contrainte budgétaire (3.1) devient

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(s)\psi(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0)$$

et dans la partie réciproque, la condition $\int_0^T c_k(t)dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement est remplacée par $\int_0^T \psi(t)c_k(t)dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. La démonstration de la proposition 3.0.2 est identique, le processus $(\epsilon_k - c_k)$ étant remplacé par $\psi(\epsilon_k - c_k)$.

• Le problème d'optimisation de la consommation reste le même, mais la contrainte budgétaire étant différente, le lagrangien (3.4) devient

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t, c_k(t))dt + \lambda(\int_0^T \zeta_k(t)\psi(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt - \beta(0)X_k(0))|\mathcal{G}_0^k].$$

• *La proposition 3.0.3* concernant la solution du problème d'optimisation de la consommation se reformule comme suit
On suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. S'il existe λ une variable aléatoire strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)(I_k(t, \lambda\psi(t)\zeta_k(t)) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] = \beta(0)X_k(0)$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation de l'agent k, donnée par : $\widehat{c_k}(t) = I_k(t, \lambda\psi(t)\zeta_k(t))$.
La richesse optimale est $X_k^{(\widehat{\pi_k}, \widehat{c_k})}(t) = \frac{1}{\zeta_k(t)} E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \psi(s)\zeta_k(s)(\widehat{c_k}(s) - \epsilon_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k]$.
La valeur optimale du problème de maximisation est

$$V(X_k(0), \widehat{\pi_k}, \widehat{c_k}) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k o I_k(t, \lambda\psi(t)\zeta_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k].$$

La démonstration reste la même, ζ_k étant remplacé par $\psi\zeta_k$.

• *Dans la proposition 3.0.4*,
la condition $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement est remplacée par la condition $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et les fonctions Υ_ω^k sont définies par

$$\Upsilon_\omega^k(\lambda) := E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)I_k(t, \lambda\psi(t)\zeta_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k](\omega).$$

A nouveau en changeant ζ_k par $\psi\zeta_k$, la démonstration reste la même, car $\psi > 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.

• *Exemple 3.0.5* avec utilité logarithmique. Dans le modèle avec monnaie,

$$\lambda = \frac{T}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{1}{\lambda\psi(t)\zeta_k(t)} \qquad \text{et} \qquad \zeta_k(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{T-t}{\lambda} - E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \psi(s)\zeta_k(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_t^k].$$

Pour l'expression du portefeuille, on suppose $\beta\psi\epsilon_k$ déterministe. En remplaçant ϵ_k par $\psi\epsilon_k$ dans la démonstration, on trouve le portefeuille optimal

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}[\widehat{X_k}(t) + \frac{\int_t^T \beta(s)\psi(s)\epsilon_k(s)ds}{\beta(t)}]\frac{Y_k(t)}{Y_k(t^-)}l_k(t).$$

• *Dans l'hypothèse 5*, ζ est remplacé par $\psi\zeta$ dans l'équation en λ

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta(t)I_k(t,\lambda\psi(t)\zeta(t))dt|\mathcal{G}_0] = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta(t)\epsilon_k(t)dt + \beta(0)X_k(0)|\mathcal{G}_0]$$

La différence essentielle entre le modèle avec monnaie et le modèle sans monnaie porte sur la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre.

• *La proposition 4.2.2* devient :
Sous les hypothèses 3, 4 et 5, un équilibre (7.0.25) existe sur le marché financier si et seulement s'il existe $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$ *telle que* $\forall k = 1, \cdots, K$, Λ_k *est une variable aléatoire* $\mathcal{G}_0$*-mesurable à valeurs dans* $]0, +\infty[$ *et vérifiant*
$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)I_k(t,\frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda))dt|\mathcal{G}_0^k]$

$$= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)(4.9)$$

ainsi que

$$\psi(t)\zeta_k(t) = \frac{\partial}{\partial c}U(t,\varepsilon(t),\Lambda), \forall t \in [0,T]. \tag{7.2}$$

La démonstration de la condition suffisante est la même, celle de la condition nécessaire est juste modifiée en remplaçant ζ par $\psi\zeta$. On vérifie immédiatement que $\psi > 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.
Ainsi, dans le modèle avec monnaie, le spot ψ nous donne un degré de liberté supplémentaire pour obtenir un équilibre. La contrainte (7.2) porte sur le spot ψ, et non plus sur les coefficients du marché : les relations (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) n'ont plus à être vérifiées pour avoir un équilibre. Dans le modèle sans monnaie, les prix des actifs financiers sont endogènes. Dans le modèle avec monnaie, ils sont exogènes

mais ils influencent ψ à travers (7.2).
Par suite, on peut relacher certaines hypothèses : $\varepsilon = \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k$ n'a plus besoin d'être un processus de Itô et dans la définition d'une fonction d'utilité, partie (iii), on a juste besoin que la fonction soit de classe C^1 en la variable c.
D'autre part, si les richessses initiales de chaque agent sont nulles, alors les relations (4.9) sont homogènes en Λ. Ainsi, dans le modèle avec monnaie, Λ et le spot ψ sont déterminés à une constante multiplicative strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable près. Dans le modèle sans monnaie, cette constante est déterminée par la condition initiale (4.14), donc on a l'unicité de Λ.

• *La proposition 4.2.7* devient
On suppose que chaque agent a une richesse initiale nulle, que ϵ_k est G_T-adapté et $\epsilon_k > 0$ sur un événement $dt \otimes d\mathbb{P}$ non négligeable et que les hypothèses 3, 4, 5 et 6 sont satisfaites. Supposons de plus que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\zeta_k = \zeta$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors il existe un équilibre (7.0.25).

• *Le corollaire 4.2.8 et la proposition 4.2.9* ne sont plus vrais dans le modèle avec monnaie car on n'a plus la contrainte (4.10) $\zeta(t) = \frac{\partial}{\partial c} U(t, \varepsilon(t), \Lambda))$.

• *L'exemple 4.2.11* devient :
$\forall k = 1, \cdots, K$, on pose $U_k(t, c) = \ln(c)$ $\forall (t, c) \in [0, T] \times]0, +\infty[$.
On suppose que les agents n'ont pas de richesse initiale.
On a vu que $\widehat{c_k}(t) = \frac{y_k}{T\psi(t)\zeta_k(t)}$, où $y_k = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(s)\zeta_k(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0^k]$.
On suppose que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\zeta_k = \zeta$ et que les hypothèses 3,4 et 5 sont satisfaites.
On pose $\Lambda_k := \frac{1}{T} E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(s)}{\varepsilon(s)} ds|\mathcal{G}_0^k]$. On suppose que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable (ceci est le cas si l'hypothèse 6 est réalisée et si ϵ_k est G_T-adapté). La relation (4.9) est vérifiée car

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\sum_{j=1}^{K} \Lambda_j}{\varepsilon(t)} (\frac{\Lambda_k \varepsilon(t)}{\sum_{j=1}^{K} \Lambda_j} - \epsilon_k(t)) dt|\mathcal{G}_0^k] = T\Lambda_k - E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\epsilon_k(s)}{\varepsilon(s)} ds|\mathcal{G}_0^k] = 0.$$

Donc il existe un équilibre pour le modèle avec monnaie et le spot à l'équilibre $\psi(t) = (\zeta(t)\varepsilon(t))^{-1}$ (à une constante multiplicative strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable près).

• *L'exemple 4.2.12* devient :
$\forall k = 1, \cdots, K$, on pose $U_k(t, c) = \frac{1}{p} c^p$ $\forall (t, c) \in [0, T] \times]0, +\infty[$ $(p \neq 0, p < 1)$.
On suppose que les agents n'ont pas de richesse initiale. On a vu que

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\psi(t)\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}} dt|\mathcal{G}_0^k]} (\psi(t)\zeta_k(t))^{\frac{1}{p-1}}.$$

On suppose que $\forall k = 1, \cdots, K$, $\zeta_k = \zeta$ et que les hypothèses 3, 4 et 5 sont satisfaites.

On pose

$$\Lambda_k := \left[\frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(s))^{p-1}\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0^k]}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\varepsilon(s))^p ds|\mathcal{G}_0^k]}\right]^{1-p}.$$

On suppose que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable (ceci est le cas si l'hypothèse 6 est réalisée et si ϵ_k est G_T-adapté). $I(t,c,\Lambda) = \sum_{k=1}^K \frac{c^{\frac{1}{p-1}}}{\Lambda_k^{\frac{1}{p-1}}} = c^{\frac{1}{p-1}}$ et $\frac{\partial}{\partial c}U(t,c,\Lambda) = c^{p-1}$. Par suite, la relation (4.9) est vérifiée (cf. exemple 4.2.12). Donc il existe un équilibre pour le modèle avec monnaie et le spot à l'équilibre $\psi(t) = \frac{(\varepsilon(t))^{p-1}}{\zeta(t)}$ (à une constante multiplicative strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable près).

• *L'exemple 4.2.13* devient :
On suppose que les fonctions utilité des agents ne dépendent pas du temps, que $\mathbb{P}[\sum_{k=1}^K \epsilon_k \equiv a] = 1$ où a est une constante strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable, et que les agents n'ont pas de richesse initiale. On suppose que $\forall k = 1,\cdots,K$, $\zeta_k = \zeta$ et que les hypothèses 3, 4 et 5 sont satisfaites. On pose $\Lambda_k := \frac{1}{U_k'(\frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_0^k])}$.
On suppose que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable (ceci est le cas si l'hypothèse 6 est réalisée et si ϵ_k est G_T-adapté). Alors il existe un équilibre pour le modèle avec monnaie et le spot à l'équilibre $\psi(t) = \frac{1}{\zeta(t)}$ (à une constante multiplicative strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable près).

Des changements similaires apparaissent si l'on considère le problème d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale (chapitre 5).

• *Dans la proposition 5.0.14*, la contrainte budgétaire (5.1) devient

$$E_{\mathbb{P}}[\zeta_k(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) + \int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq \beta(0)X_k(0).$$

• *Le théorème 5.0.15* devient
On suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. S'il existe λ une variable aléatoire strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)(I_{1,k}(t,\lambda\psi(t)\zeta_k(t)) - \epsilon_k(t))dt + \zeta_k(T)I_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))|\mathcal{G}_0^k] = \beta(0)X_k(0)$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation de l'agent k, donnée par : $\widehat{c_k}(t) = I_{1,k}(t,\lambda\psi(t)\zeta_k(t))$ et $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) = I_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))$.
La valeur optimale du problème de maximisation est

$$J(X_k(0),\widehat{\pi_k},\widehat{c_k}) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_{1,k}oI_{1,k}(t,\lambda\psi(t)\zeta_k(t))dt + U_{2,k}oI_{2,k}(\lambda\zeta_k(T))|\mathcal{G}_0^k].$$

• *L'exemple 5.0.17* avec utilité isoélastique est modifié comme suit

$$\lambda = [\frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\psi(t)\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt + (\zeta_k(T))^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{G}_0^k]}]^{p-1},$$

$$\widehat{c_k}(t) = (\lambda\psi(t)\zeta_k(t))^{\frac{1}{p-1}} \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_k}(T) = (\lambda\zeta_k(T))^{\frac{1}{p-1}}.$$

• *L'exemple 5.0.18* est modifié comme suit

$$\lambda = \frac{T+1}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi(t)\zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{1}{\lambda\psi(t)\zeta_k(t)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_k}(T) = \frac{1}{\lambda\zeta_k(T)}.$$

L'expression du portefeuille est inchangée dans le cas où le processus ressource ϵ_k est identiquement nul.

• *Dans l'exemple 5.0.19* , il suffit juste de changer ϵ_k par $\psi\epsilon_k$ dans les résultats.

• *proposition 6.0.20.* La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre devient alors :
Sous les hypothèses 3, 4 et 7, un équilibre (7.0.25) existe sur le marché financier si et seulement s'il existe $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$ *telle que* $\forall k = 1, \cdots, K$, Λ_k *est une variable aléatoire* $\mathcal{G}_0$*-mesurable à valeurs dans* $]0, +\infty[$ *vérifiant*

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}[\int_0^T & \frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda)I_{1,k}(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda))dt \\ & + \frac{1}{\psi(T)}\frac{\partial}{\partial c}U_1(T, \varepsilon(T), \Lambda)I_{2,k}(\frac{1}{\psi(T)\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(T, \varepsilon(T), \Lambda))|\mathcal{G}_0^k] \\ & = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) \end{aligned} \tag{7.3}$$

ainsi que

$$\psi(t)\zeta_k(t) = \frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda), \forall t \in [0, T]. \tag{7.4}$$

Démonstration de la condition suffisante :
même définition pour $\overline{c_k}(t) = I_{1,k}(t, \frac{1}{\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda))$ mais $\overline{X_k}(T)$ est modifié par $\overline{X_k}(T) := I_{2,k}(\frac{1}{\psi(T)\Lambda_k}\frac{\partial}{\partial c}U_1(T, \varepsilon(T), \Lambda))$. Donc la contrainte budgétaire et la relation (7.4) impliquent que

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t) - \overline{c_k}(t))\frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda)dt|\mathcal{G}_0^k] \\ & \quad = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t) - \epsilon_k(t))\frac{\partial}{\partial c}U_1(t, \varepsilon(t), \Lambda)dt|\mathcal{G}_0^k] - \beta(0)X_k(0) \\ & \quad + E_{\mathbb{P}}[\frac{\partial}{\partial c}U_1(T, \varepsilon(T), \Lambda)\frac{1}{\psi(T)}\overline{X_k}(T)|\mathcal{G}_0^k] \end{aligned}$$

$$\leq E_{\mathbb{P}}[\tfrac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)\tfrac{1}{\psi(T)}(\overline{X_k}(T)-X_k(T))|\mathcal{G}_0^k].$$

Par suite

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (c_k(t)-\overline{c_k}(t))\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(t,\varepsilon(t),\Lambda)}{\Lambda_k}dt+(X_k(T)-\overline{X_k}(T))\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T))|\mathcal{G}_0^k]$$

$$\leq E_{\mathbb{P}}[(\overline{X_k}(T)-X_k(T))(\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)}{\psi(T)\Lambda_k}-\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T)))|\mathcal{G}_0^k]=0$$

car $\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(\overline{X_k}(T))=\frac{\partial}{\partial c}U_{2,k}(I_{2,k}(\frac{\frac{\partial}{\partial c}U_1(T,\varepsilon(T),\Lambda)}{\psi(T)\Lambda_k}))$.

La démonstration de la condition nécessaire se déduit de celle de la proposition 6.0.20 est remplaçant ζ par $\psi\zeta$ sauf dans l'expression de $\widehat{X}$.

• *Le corollaire 6.0.21* n'est plus vrai pour les mêmes raisons que le corollaire 6.0.21 n'est plus vrai (dans le modèle avec monnaie, l'équilibre ne nous donne pas de relations sur les coefficients du marché).

• Puisque les $\psi(T)$ s'éliminent dans les relations (7.3) avec une utilité logarithmique, *l'exemple 6.0.24* est inchangé dans l'expression des multiplicateurs de Lagrange Λ : $\forall k=1,\cdots,K$, on pose $U_{1,k}(t,c)=U_{2,k}(c)=\ln(c)\ \forall(t,c)\in[0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que les richesses initiales de chaque agent sont $\mathcal{G}_0$-mesurables et strictement positives, que les hypothèses 3, 4, 6 et 7 sont satisfaites et que ϵ_k, $k=1,\cdots,K$, sont G_T-adaptés. Alors un équilibre existe pour le modèle avec monnaie, le spot ψ est donné à l'équilibre par $\psi(t)=\frac{\beta(0)\sum_{k=1}^K X_k(0)}{\zeta(t)\varepsilon(t)}$ (à une constante strictement positive $\mathcal{G}_0$-mesurable près).

Nous finissons ce chapitre en résumant les différences entre les deux modèles.

Remarque 7.0.26 *La différence essentielle entre le modèle avec monnaie et le modèle sans monnaie porte sur la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre. Dans le modèle sans monnaie, les prix des actifs financiers sont endogènes et sont déterminés à l'équilibre. Dans le modèle avec monnaie, ils sont exogènes et c'est le prix en monnaie locale d'une unité de produit (i.e. le spot ψ) qui est déterminé à l'équilibre. Ainsi, le modèle avec monnaie nous apporte un degré de liberté supplémentaire pour obtenir un équilibre.*

Chapitre 8

Equilibre dans un modèle avec salaire

Nous allons étendre le modèle précédent (chapitres 1 et 2) à une situation avec dividendes, actif productif, où les agents optimisent la consommation à la fois de leurs biens et de leur loisir. Ceci est une généralisation de l'article de Chiarolla et Haussmann [15] introduisant d'une part des actifs non continus et d'autre part de l'asymétrie d'information entre les agents.

La vitesse de ressource des agents est leur salaire. Elle est exprimée non pas en biens mais en monnaie locale, et n'est pas exogène. Le travail fourni par les agents produit le bien de consommation à travers une fonction de production. Le manager des équipements de production doit fixer le niveau de travail afin d'optimiser le profit.

8.1 Le modèle

Nous supposons qu'il existe un actif productif produisant un seul type de bien de consommation périssable, lequel est vendu au temps t à $p(t)$ unités de monnaie locale. Cet actif utilise le travail qui, au temps t, coûte $w(t)$ unités de monnaie locale par unité de temps. On peut produire $R(t, L)$ unités de bien de consommation par unité de temps si on utilise L unité de travail. Les profits sont distribués comme dividende :

$$\delta(t) := p(t)R(t, L(t)) - w(t)L(t).$$

Le manager de l'actif choisit $L(t)$ afin d'optimiser le profit. Les K agents fournissent le travail, donc $0 \leq L(t) \leq K$, mais en fait nous devons restreindre le travail à un intervalle plus petit : $0 \leq L(t) \leq L_{max} < K$. L_{max} est le taux maximal d'emploi ; puisque L_{max} est choisi strictement plus petit que K, le plein emploi est impossible. Par suite

$$L(t) \in arg \max_{0 \leq L(t) \leq L_{max}} [p(t)R(t, L(t)) - w(t)L(t)].$$

Pour tout t, la fonction de production $R(t, L)$ est supposée continue sur $[0, L_{max}]$, strictement croissante, strictement concave et de classe C^1 sur $]0, L_{max}[$, prenant ses

valeurs dans $[0, \kappa_R]$ où

$$\kappa_R := \sup_t R(t, L_{max}) < +\infty. \tag{8.1}$$

Nous supposons de plus que

$$\forall L > 0, \quad \inf_t R(t, L) > 0; \qquad \lim_{L \searrow 0} \inf_t \frac{\partial}{\partial L} R(t, L) = +\infty. \tag{8.2}$$

R, p et w sont supposés $\mathrm{F_T}$-prévisibles. Le processus salaire w, positif, ainsi que le processus prix p sera déterminé de façon endogène à l'équilibre. On rappelle que $\zeta_k = \beta Y_k$ où $Y_k \mathbb{P} = \widehat{\mathbb{P}^k}$ est la probabilité neutre au risque de l'agent k. On suppose de plus que

$\forall k = 1, \cdots, K,$ il existe des constantes $k_p, \kappa_p, \kappa_w, \kappa_\delta$ telles que $dt \otimes d\mathbb{P}$ ps :

$$\begin{cases} 0 < \zeta_k w < \kappa_w \\ 0 < k_p < \zeta_k p < \kappa_p \\ 0 \leq \zeta_k \delta < \kappa_\delta \end{cases} \tag{8.3}$$

Le prix unitaire de l'actif productif (il y a au total une unité divisible de cet actif), exprimé en unités de monnaie locale, est la $\mathrm{F_T}$-semimartingale positive vérifiant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} dA(t) &= \gamma(t)dt + \alpha(t)d(W^*, N^*)^*(t) \\ A(T) &= 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

$A(t)$ représente le prix au temps t de l'actif productif. Au temps T, l'actif productif a payé tous ses dividendes, il n'a plus de valeur. Le drift γ et le processus de diffusion α sont déterminés de façon endogène tels que, presque sûrement,

$$\int_0^T [|\gamma(t)| + ||\alpha(t)||^2]dt < +\infty. \tag{8.5}$$

Les K agents fournissent le travail, consomment le bien et possèdent l'actif productif. Ils doivent choisir une stratégie consommation-loisir afin d'optimiser leur utilité. Le marché financier complet introduit dans le chapitre 1, équations (1.1) et (1.2) page 20 (avec cette fois les prix exprimés en monnaie locale et non en unités de produits) permet aux agents de couvrir le risque et de financer leur stratégie consommation-loisir. P_i, $i = 0, \cdots, d$, sont les actifs financiers. On note $P = (P_0, \overline{P})^*$ avec $\overline{P} := (P_1, \cdots, P_d)$.

On pose

$$\theta(t) := \sigma(t)^{-1}(b(t) - r(t)I_d).$$

Ainsi le processus $\widehat{S} := (\widehat{W}^*, \widehat{M}^*)^*$ (définitions 1.6 et 1.7) vérifie

$$\widehat{S}(\cdot) = (W^*, N^*)^*(\cdot) + \int_0^\cdot \theta(s)ds. \tag{8.6}$$

L'agent k

- possède à l'instant initial une proportion ε_k de l'actif productif, avec

$$\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k = 1$$

- choisit son processus loisir ℓ_k, $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-adapté, tel que

$$\ell_k(t) \in [0,1], \qquad t \in [0,T], \qquad p.s. \tag{8.7}$$

- choisit son processus de consommation c_k, $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-adapté, exprimé en unités de bien de consommation, et tel que

$$\inf_{t\in[0,T]} c_k(t) \geq 0, \qquad \sup_{t\in[0,T]} c_k(t) < +\infty, \quad p.s. \tag{8.8}$$

- choisit son processus portefeuille (ψ_k, ϕ_k) $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-prévisible : ψ_k proportions d'actif productif (avec $\psi_k(0) = \varepsilon_k$), et sur les actifs financiers $\phi_k := (\phi_{k,0}, \overline{\phi_k})$ avec $\overline{\phi_k} = (\phi_{k,1}, \cdots, \phi_{k,d})$ et tel que

$$\sup_{t\in[0,T]} |\psi_k(t)| < +\infty, \qquad \int_0^T ||\phi_k(t)||^2 dt < +\infty, \quad p.s. \tag{8.9}$$

Les composantes du portefeuille sont exprimées en nombre de parts d'actif. Notons que $1-\ell_k(t)$ représente l'intensité avec laquelle l'agent travaille. Plus il travaille, plus il gagne de l'argent. Son salaire $e_k(t)$, $t \in [0,T]$, positif, borné, $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-adapté, exprimé en unité de monnaie locale, est donné par

$$e_k(t) = w(t)(1 - \ell_k(t)), \qquad t \in [0,T].$$

Si l'agent k ne modifie pas son apport initial d'actif productif, i.e. $\psi_k(t) = \varepsilon_k$ pour tout $t \in [0,T]$ (nous verrons qu'il existe une stratégie optimale vérifiant cette propriété), son processus ressource est donné par :

$$\widehat{e_k}(t) = e_k(t) + \varepsilon_k \delta(t) = w(t)(1 - \ell_k(t)) + \varepsilon_k \delta(t)$$

Le processus agrégé des ressources des K agents est défini par

$$\widehat{e}(t) = \sum_{k=1}^{K} \widehat{e_k}(t) = \sum_{k=1}^{K} e_k(t) + \delta(t) \qquad t \in [0,T].$$

La richesse à l'instant t de l'agent k est donnée par

$$X_k(t) := \psi_k(t)A(t) + \phi_k(t)P(t).$$

On suppose que X_k satisfait la contrainte budgétaire

$$\begin{aligned} X_k(t) = \varepsilon_k A(0) \quad &- \int_0^t p(s)c_k(s)ds + \int_0^t e_k(s)ds + \int_0^t \psi_k(s)\delta(s)ds \\ &+ \int_0^t \psi_k(s)dA(s) + \int_0^t \phi_k(s)dP(s) \qquad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

En d'autres termes, la richesse actuelle est la richesse initiale moins le coût de la consommation plus le salaire plus les dividendes plus les gains (ou pertes) de l'actif productif et des actifs financiers.
D'après (8.6), $\psi_k(s)dA(s) = \psi_k(s)(\gamma(s) - \alpha(s)\theta(s))ds + \psi_k(s)\alpha(s)d\widehat{S}(s)$. D'autre part,

$$\phi_k(s)dP(s) = \phi_{k,0}(s)r(s)P_0(s)ds + \overline{\phi_k(s)}diag[\overline{P}(s^-)](b(s)ds + \sigma(s)(d\widehat{S}(s) - \theta(s)ds)).$$

Or d'après l'expression de la richesse,
$\phi_{k,0}(s)r(s)P_0(s) = r(s)X_k(s) - \psi_k(s)r(s)A(s) - \overline{\phi_k(s)}diag[\overline{P}(s^-)]I_d r(s)$
et $b(s)ds + \sigma(s)(d\widehat{S}(s) - \theta(s)ds) = \sigma(s)d\widehat{S}(s) + r(s)I_d ds$ donc

$$\phi_k(s)dP(s) = r(s)X_k(s)ds - \psi_k(s)r(s)A(s)ds + \overline{\phi_k(s)}diag[\overline{P}(s^-)]\sigma(s)d\widehat{S}(s).$$

Par suite, pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} X_k(t) = \varepsilon_k A(0) \quad &- \int_0^t p(s)c_k(s)ds + \int_0^t w(s)(1-\ell_k(s))ds + \int_0^t r(s)X_k(s)ds \\ &+ \int_0^t \psi_k(s)[\delta(s) + \gamma(s) - r(s)A(s) - \alpha(s)\theta(s)]ds \\ &+ \int_0^t [\psi_k(s)\alpha(s) + \overline{\phi_k(s)}diag[\overline{P}(s^-)]\sigma(s)]d\widehat{S}(s). \end{aligned} \tag{8.10}$$

On définit alors une stratégie $\mathrm{G}_\mathrm{T}^\mathrm{k}$-admissible de façon analogue à la définition 1.0.2 :

Définition 8.1.1 *Une stratégie $\mathrm{G}_\mathrm{T}^\mathrm{k}$-admissible pour le $k^{\text{ème}}$ agent est un quadruplet $(c_k, \ell_k, \psi_k, \phi_k)$ satisfaisant les relations (8.7), (8.8) et (8.9) et tel que la richesse correspondante X_k est minorée et $X_k(T) \geq 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement.*

La fonction d'utilité $U_k(t,c,\ell) : [0,T] \times [0,+\infty[\times[0,1] \to [-\infty,+\infty[$ représente l'utilité du $k^{\text{ème}}$ agent ayant pour consommation c et pour loisir ℓ. On suppose que pour tout t, $U_k(t,\cdot,\cdot)$ est, en chacune de ses deux variables, de classe C^2, strictement croissante et strictement concave sur son domaine, i.e. où elle est finie, et que

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{(\ell,t)\in[0,1]\times[0,T]} \frac{\partial}{\partial c}U_k(t,c,\ell) = 0 \tag{8.11}$$

et $\forall (c,\ell) \in]0,+\infty[\times]0,1]$:

$$\begin{cases} \sup_{t\in[0,T]} |U_k(t,c,\ell)| < +\infty \quad , & \sup_{t\in[0,T]} \frac{\partial}{\partial \ell} U_k(t,c,\ell) < +\infty \\ \inf_{t\in[0,T]} \frac{\partial}{\partial c} U_k(t,c,\ell) > 0 \quad , & \sup_{t\in[0,T]} \frac{\partial}{\partial c} U_k(t,c,\ell) < +\infty \\ \frac{\partial^2}{\partial c \partial \ell} U_k(t,c,\ell) \geq 0 \quad , & \frac{\partial}{\partial \ell} U_k(t,c,0) = +\infty. \end{cases} \tag{8.12}$$

Par exemple, les fonctions $U(t,c,\ell) = \frac{(c^p \ell^{1-p})^\gamma}{\gamma}$, avec $0 < p < 1$, $0 < \gamma < 1$, ou $U(t,c,\ell) = c^p + \ell^q$ avec $0 < p, q < 1$, vérifient bien les propriétés précédentes.
L'agent k cherche à maximiser

$$(c_k, \ell_k, \psi_k, \phi_k) \to E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t, c_k(t), \ell_k(t))dt | \mathcal{G}_0^k] \tag{8.13}$$

parmi les stratégies admissibles.

8.2 Equilibre

Le market maker doit fixer le prix p du bien de consommation, le salaire w et le prix A de l'actif productif. Le marché est à l'équilibre quand certaines relations entre ces quantités, le processus optimal de travail et les choix individuels des agents sont réalisées.

Définition 8.2.1 *Le marché est à l'équilibre s'il existe un prix p du bien de consommation, un salaire w, un prix A de l'actif productif, un processus dividende δ, un processus travail $\widehat{L}$ et une famille $(\widehat{c}_k, \widehat{\ell}_k, \widehat{\psi}_k, \widehat{\phi}_k)_{k=1,\dots,K}$ tels que :*

$$\bullet (\widehat{c}_k, \widehat{\ell}_k, \widehat{\psi}_k, \widehat{\phi}_k) \text{ est optimal pour l'agent } k \text{ relativement à } p,\ A,\ w,\ \delta, \quad k = 1, \cdots, K \tag{8.14}$$

$$\bullet \widehat{L}(\cdot) \in argmax\{ \quad E_{\mathbb{P}} \left[\int_0^T \exp(-\int_0^t r(s)ds)(p(t)R(t,L(t)) - w(t)L(t))dt\right] : \quad L \quad G_T - \text{ adapté, } L(t) \in [0, L_{max}] \quad \} \tag{8.15}$$

$$\bullet \delta(t) = p(t)R(t, \widehat{L}(t)) - w(t)\widehat{L}(t), \qquad t \in [0,T], \qquad p.s. \tag{8.16}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^K \widehat{c}_k(t) = R(t, \widehat{L}(t)), \qquad t \in [0,T], \qquad p.s. \tag{8.17}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^K \widehat{\ell}_k(t) = K - \widehat{L}(t), \qquad t \in [0,T], \qquad p.s. \tag{8.18}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^K \widehat{\psi}_k(t) = 1, \qquad t \in [0,T], \qquad p.s. \tag{8.19}$$

Dans cette définition, (8.14) demande que chaque agent agisse de façon optimale à l'équilibre, (8.15) assure que la quantité de travail est choisie pour optimiser la valeur actualisée totale de la production, et (8.16) demande que les profits soient redistribués en dividende. Les autres conditions ((8.17) à (8.19)) font que les marchés s'équilibrent.

Nous allons voir que l'absence d'opportunité d'arbitrage, condition nécessaire à l'existence d'un équilibre, détermine le prix A de l'actif productif.

Lemme 8.2.2 *Si A est un prix d'équilibre de l'actif productif, alors*

$$\delta(t) + \gamma(t) - r(t)A(t) - \alpha(t)\theta(t) = 0 \qquad dt \otimes d\mathbb{P} \quad ps. \tag{8.20}$$

Preuve: cf. lemme 8.1 page 93 de [37].

Remarque: Un marché sans stratégie d'arbitrage est dit viable. La relation (8.20) est donc une condition nécessaire de viabilité du marché, qui est aussi suffisante dans le cadre des hypothèses 1 et 2.

Proposition 8.2.3 *Si A est un prix d'équilibre de l'actif productif, alors* $\forall k = 1, \cdots, K$

$$A(t) = \frac{1}{\zeta_k(t)} E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta_k(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k]. \tag{8.21}$$

Réciproquement, si A est définie par (8.21), alors A est solution de (8.4) avec $\forall k = 1, \cdots, K$

$$\begin{cases} \gamma(t) &= r(t)A(t) - \delta(t) + \beta(t)^{-1}H_k(t)\theta(t) \\ \alpha(t) &= \beta(t)^{-1}H_k(t) \end{cases} \tag{8.22}$$

où H_k est défini à partir de la représentation martingale :

$$E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_0^T \beta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k] = A(0) + \int_0^t H_k(s)d\widehat{S}(s).$$

Preuve:
On rappelle que $\beta(t) = (P_0(0))^{-1}\exp[-\int_0^t r(s)ds] = (P_0(t))^{-1}$. Supposons que A est un prix d'équilibre de l'actif productif. En utilisant la relation d'absence d'opportunité d'arbitrage (8.20) et le fait que $d\widehat{S}(t) = d(W^*, N^*)^*(t) + \theta(t)dt$,

$$\begin{aligned} dA(t) &= \gamma(t)dt + \alpha(t)d(W^*, N^*)^*(t) \\ &= [\gamma(t) - \alpha(t)\theta(t)]dt + \alpha(t)d\widehat{S}(t) \\ &= [r(t)A(t) - \delta(t)]dt + \alpha(t)d\widehat{S}(t). \end{aligned}$$

Le prix actualisé βA de l'actif productif vérifie donc

$$d(\beta A)(t) = -\beta(t)\delta(t)dt + \beta(t)\alpha(t)d\widehat{S}(t).$$

Sous l'hypothèse (8.5), la $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingale locale $\int_0^\cdot \beta(t)\alpha(t)d\widehat{S}(t)$ est une martingale donc, puisque $A(T) = 0$, on a $\forall k = 1, \cdots, K$

$$E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[-\beta(0)X_k(0) + \int_0^T \beta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k] = \beta(t)A(t) - \beta(0)X_k(0) + \int_0^t \beta(s)\delta(s)ds$$

$$\beta(t)A(t) = -\int_0^t \beta(s)\delta(s)ds + E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_0^T \beta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k]$$

$$\beta(t)A(t) = E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_t^T \beta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k]$$

$$\zeta_k(t)A(t) = E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta_k(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k].$$

Réciproquement, si A est définie par (8.21),

$$\begin{aligned} A(t) &= \beta(t)^{-1}E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_t^T \beta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k] \\ &= \beta(t)^{-1}[-\int_0^t \beta(s)\delta(s)ds + A(0) + \int_0^t H_k(s)d\widehat{S}(s)] \end{aligned}$$

d'après la représentation martingale de $E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_0^T \beta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k]$. On différentie cette expression de $A(t)$:

$$\begin{aligned} dA(t) &= r(t)\beta(t)^{-1}[-\int_0^t \beta(s)\delta(s)ds + A(0) + \int_0^t H_k(s)d\widehat{S}(s)]dt \\ &\quad +\beta(t)^{-1}[-\beta(t)\delta(t)dt + H_k(t)d\widehat{S}(t)] \\ &= [r(t)A(t) - \delta(t) + \beta(t)^{-1}H_k(t)\theta(t)]dt + \beta(t)^{-1}H_k(t)d(W^*, N^*)^*(t) \end{aligned}$$

et on obtient (8.22) en identifiant les coefficients. Puisque $\zeta_k\delta$ est borné (d'après (8.3)), il en est de même pour $\zeta_k A$ et $H_k \in L^2([0,T])$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Ainsi (8.5) est vérifiée. □

Par conséquent, dès que l'on a trouvé le processus dividende à l'équilibre, on a aussi le prix de l'actif productif à l'équilibre par la relation (8.21).

Remarque: La première partie de la proposition 8.2.3 peut être précisée de la façon suivante : les relations (8.20) et (8.21) sont équivalentes. En effet, la preuve de la proposition 8.2.3 montre que (8.20) implique (8.21). Réciproquement (8.21) implique (8.22), on constate alors immédiatement que les coefficients γ et α vérifient bien (8.20).

8.3 Solution du problème d'optimisation de chaque agent

Chaque agent $k = 1, \cdots, K$ connaît le prix p du bien de consommation, le salaire w, le dividende δ, le prix de l'actif productif A défini par (8.21), lesquels sont fixés par le marché. L'agent k cherche à optimiser

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t, c_k(t), \ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k]$$

parmi les quadruplets $(c_k, \ell_k, \psi_k, \phi_k)$ $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-admissibles.

Lemme 8.3.1 *On suppose le marché viable, i.e. la relation (8.20) est vérifiée. Si $(c_k, \ell_k, \psi_k, \phi_k)$ est une stratégie $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-admissible pour l'agent k,*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(p(t)c_k(t)+w(t)\ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(\varepsilon_k\delta(t)+w(t))dt|\mathcal{G}_0^k]. \quad (8.23)$$

Réciproquement, quels que soient les processus (c_k, ℓ_k) consommation-loisir satisfaisant (8.7), (8.8) et la contrainte budgétaire (8.23), il existe un portefeuille (ψ_k, ϕ_k) tel que $(c_k, \ell_k, \psi_k, \phi_k)$ soit une stratégie $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{k}}$-admissible, on peut même imposer que la part d'actif productif est constante c'est-à-dire pour tout $t \in [0, T]$, $\psi_k(t) = \varepsilon_k$.

Preuve:
D'après (8.10) et (8.20), la richesse actualisée vérifie :

$$\begin{aligned}\beta(t)X_k(t) &= \varepsilon_k\beta(0)A(0) + \int_0^t \beta(s)(w(s)(1-\ell_k(s)) - p(s)c_k(s))ds \\ &+ \int_0^t \beta(s)[\psi_k(s)\alpha(s) + \overline{\phi_k(s)}diag[\overline{P(s^-)}]\sigma(s)]d\widehat{S}(s), \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

$\beta(\cdot)X_k(\cdot) - \varepsilon_k\beta(0)A(0) - \int_0^{\cdot} \beta(s)(w(s)(1-\ell_k(s)) - p(s)c_k(s))ds$ est donc une surmartingle pour $\widehat{\mathbb{P}}^k$ (car c'est une martingale locale minorée), par conséquent

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(p(t)c_k(t) + w(t)\ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k] \leq \varepsilon_k\beta(0)A(0) + E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)w(t)dt|\mathcal{G}_0^k].$$

Or $\beta(0)A(0) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\delta(t)dt|\mathcal{G}_0^k]$ par la relation (8.21), ce qui donne la contrainte budgétaire (8.23).

Réciproquement, on pose

$$D := \int_0^T \beta(s)[w(s)(1-\ell_k(s)) - p(s)c_k(s)]ds + \varepsilon_k\beta(0)A(0).$$

D'après (8.3) et (8.8), $D \in L^1(\mathbb{P}^k)$ donc $\exists\ \rho$ tel que $\int_0^T ||\rho(t)||^2dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et

$$H(t) := E_{\widehat{\mathbb{P}}^k}[D|\mathcal{G}_t^k] = E_{\widehat{\mathbb{P}}^k}[D|\mathcal{G}_0^k] + \int_0^t \rho(s)d\widehat{S}(s)$$

On considère le portefeuille suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \psi_k(t) & = & \varepsilon_k, \\ \overline{\phi_k}(t) & = & -(\beta(t)^{-1}\rho(t)+\varepsilon_k\alpha(t))\sigma^{-1}(t)(diag[\overline{P}(t^-)])^{-1} \qquad t\in[0,T] \\ \phi_{k,0}(t) & = & \beta(t)(X_k(t)-\varepsilon_k A(0)-\overline{\phi_k}(t)\overline{P}(t)) \end{array}\right. \tag{8.24}$$

σ étant non dégénéré, ce portefeuille vérifie bien (8.9). La richesse actualisée correspondant à ce portefeuille vérifie

$$\begin{array}{rcl} d(\beta(t)X_k(t)) & = & \beta(t)(w(t)(1-\ell_k(t))-p(t)c_k(t))dt \\ & + & \beta(t)[\varepsilon_k\alpha(t)-(\beta(t)^{-1}\rho(t)+\varepsilon_k\alpha(t)) \\ & & \qquad \sigma^{-1}(t)(diag[\overline{P}(t^-)])^{-1}diag[\overline{P}(t^-)]\sigma(t)]d\widehat{S}(t) \\ & = & \beta(t)(w(t)(1-\ell_k(t))-p(t)c_k(t))dt-\rho(t)d\widehat{S}(t). \end{array}$$

Par suite

$$\begin{array}{l} \beta(t)X_k(t)-\beta(0)X_k(0) \\ \quad = \displaystyle\int_0^t \beta(s)(w(s)(1-\ell_k(s))-p(s)c_k(s))ds-\int_0^t \rho(s)d\widehat{S}(s) \\ \quad = \displaystyle\int_0^t \beta(s)(w(s)(1-\ell_k(s))-p(s)c_k(s))ds+E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k]-H(t). \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t \beta(s)(w(s)(1-\ell_k(s))-p(s)c_k(s))ds-H(t) \\ \qquad = -\epsilon_k\beta(0)A(0)-E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\displaystyle\int_t^T \beta(s)(w(s)(1-\ell_k(s))-p(s)c_k(s))ds|\mathcal{G}_t^k] \end{array}$$

et $X_k(0)=\epsilon_k A(0)$ donc

$$\beta(t)X_k(t)=E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k]-E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[\int_t^T \beta(s)[w(s)(1-\ell_k(s))-p(s)c_k(s)]ds|\mathcal{G}_t^k].$$

Ainsi la richesse est bien minorée (puisque $\zeta_k w$ est majoré $dt\otimes d\mathbb{P}$ ps) et par ailleurs, $X_k(T)\geq 0$ puisque $E_{\widehat{\mathbb{P}^k}}[D|\mathcal{G}_0^k]\geq 0$ d'après (8.23). □

L'agent k doit donc optimiser

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_k(t,c_k(t),\ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k]$$

sous la contrainte (8.23)

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(p(t)c_k(t)+w(t)\ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k]\leq \xi_k$$

avec

$$\xi_k := E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)(\varepsilon_k\delta(t) + w(t))dt|\mathcal{G}_0^k].$$

La stricte concavité de $U_k(t,\cdot,\cdot)$ implique que $(c,l) \to \nabla_{c,\ell}U_k(t,\cdot,\cdot)$ est bijective sur son image $\mathcal{R}_k \subset \mathbb{R}_+^2$. D'après le lemme (9.1) de Chiarolla et Haussmann (cf. [15]), il existe une fonction continue $I_k(t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+^2 \to [0,+\infty[\times[0,1]$ qui prolonge $(\nabla_{c,\ell}U_k(t,\cdot,\cdot))^{-1}$. $I_k(t,\cdot,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathcal{R}_k$.
On utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 8.3.2 *S'il existe λ une variable aléatoire strictement positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)((p(t),w(t)).I_k(t,\lambda\zeta_k(t)(p(t),w(t)))dt|\mathcal{G}_0^k] = \xi_k \tag{8.25}$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation de l'agent k, donnée par : $(\widehat{c_k},\widehat{\ell_k})(t) = I_k\left(t,\lambda\zeta_k(t)\left(p(t),w(t)\right)\right).$
La richesse optimale est
$X_k(t) = \frac{1}{\zeta_k(t)}E_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta_k(s)\left(p(s)\widehat{c_k}(s) - w(s)(1-\widehat{\ell_k}(s))\right)ds|\mathcal{G}_t^k\right].$

Preuve: Elle est analogue à celle du théorème 3.0.3. c_k vérifie bien (8.8) car $\frac{\partial}{\partial c}U_k$ est décroissante en c par concavité, $\zeta_k p$ est minoré par une constante strictement positive et (8.11) est vérifiée. □

On définit pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\chi_\omega^k(\lambda) := E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta_k(t)\left(p(t),w(t)\right).I_k\left(t,\lambda\zeta_k(t)(p(t),w(t))\right)dt|\mathcal{G}_0^k\right](\omega).$$

Proposition 8.3.3 *On suppose que $\xi_k > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Si pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions χ_ω^k sont finies, alors il existe une unique fonction λ positive $\mathcal{G}_0^k$-mesurable vérifiant la relation (8.25).*

Preuve: La preuve est analogue à celle de la proposition 3.0.4.

8.4 Existence d'un équilibre

Dans ce paragraphe, nous faisons les hypothèses 3 page 49 et 4 page 50, l'hypothèse 5 page 51 étant remplacée par la suivante (le processus Y étant défini dans le paragraphe 4.1)

Hypothèse 8 *Pour $k = 1,\cdots,K$, on suppose que les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites, que $\xi_k > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et que pour $\mathbb{P}$ presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions*

χ^k_ω sont finies. (Ainsi, λ_k l'unique solution de l'équation (8.25) existe). D'autre part, on suppose que Y est une $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P})$-martingale et que, pour tout $k = 1, \cdots, K$, l'équation en λ

$$E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta(t)\,(p(t), w(t))\, I_k\,(t, \lambda\zeta(t)(p(t), w(t)))\, dt|\mathcal{G}_0\right]$$
$$= \quad E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta(t)(w(t) + \varepsilon_k\delta(t))dt|\mathcal{G}_0\right]$$

admet une unique solution λ^0_k $\mathcal{G}_0$-mesurable.

Remarque 8.4.1 *Les lemmes 4.1.2 et 4.1.4 restent vrais. En particulier si un équilibre existe et sous les hypothèses 3, 4 et 8, alors $Y_k = Y$ et $\zeta_k = \zeta$ pour tout $k = 1, \cdots, K$ et donc les mesures de probabilité $\widehat{\mathbb{P}}^k$ de chaque agent coïncident avec $\widehat{\mathbb{P}}$.*

La fonction d'utilité représentative des agents est définie sur
$[0, T] \times [0, +\infty[\times[0, K]\times]0, +\infty[^K$ par

$$U(t, c, \ell; \Lambda) := \max_{\substack{c_k > 0, c_1 + \cdots + c_K = c \\ \ell_k \in [0,1], l_1 + \cdots + \ell_K = \ell}} \sum_{k=1}^K \Lambda_k U_k(t, c_k, \ell_k) \tag{8.26}$$

Lemme 8.4.2 *$\forall t \in [0, T]$, $\forall \Lambda \in]0, +\infty[^K$, $U(t, \cdot; \Lambda)$ est, en chacune de ses deux variables, strictement croissante, strictement concave et de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, K[$. $\nabla_{c,\ell}U$ est bijective, sa fonction inverse peut être prolongée par la fonction continue*

$$I_{c,\ell}(t, y, \Lambda) := \sum_{k=1}^K I_k(t, \frac{y}{\Lambda_k}), \qquad y \in \mathbb{R}^2_+.$$

De plus, $\forall (c, \ell) \in]0, +\infty[\times]0, K[$, $\exists (\overline{c_k}, \overline{\ell_k}) \in]0, +\infty[\times]0, 1[$ tels que

$$U(t, c, \ell; \Lambda) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k U_k(t, \overline{c_k}, \overline{\ell_k})$$

et il existe des constantes $(r^k_i,\ i = 1, 2)$ telles que

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t, c, \ell; \Lambda) = \Lambda_k \frac{\partial}{\partial c}U_k(t, \overline{c_k}, \overline{\ell_k}) + r^k_2, \qquad k = 1, \cdots, K$$

$$\frac{\partial}{\partial \ell}U(t, c, \ell; \Lambda) = \Lambda_k \frac{\partial}{\partial \ell}U_k(t, \overline{c_k}, \overline{\ell_k}) - r^k_1, \qquad k = 1, \cdots, K$$

avec $r^k_i \geq 0$, $(1 - \overline{\ell_k})r^k_1 = 0$, $\overline{c_k}r^k_2 = 0$. De plus $\frac{\partial}{\partial \ell}U(t, c, 0; \Lambda) = +\infty$.

Preuve: cf. la preuve du lemme 9.4 de Chiarolla Haussmann [15].

Le manager de l'actif productif doit optimiser les profits, il doit donc déterminer $\widehat{L}(\cdot)$ qui réalise

$$\sup_{0\leq L\leq L_{max}} (p(t)R(t,L(t)) - w(t)L(t))$$

Soit $I_L(t,\cdot)$ la bijection réciproque de $\frac{\partial}{\partial L}R(t,\cdot)$ sur $[0,L_{max}]$ que l'on prolonge par L_{max} sur $]-\infty,\frac{\partial}{\partial L}R(t,L_{max})]$ et par 0 sur $[\frac{\partial}{\partial L}R(t,0),+\infty[$. Le sup est alors atteint pour $\widehat{L}(t) = I_L(t,\frac{w(t)}{p(t)})$.

Pour $\Lambda = (\Lambda_1,\cdots,\Lambda_K)$ telle que $\forall k = 1,\cdots,K$, Λ_k est une variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable à valeurs dans $]0,+\infty[$, on introduit la fonction utilité du travail :

$$\widehat{U}(t,L;\Lambda) := U\left(t,R(t,L(t)),K-L(t);\Lambda\right). \tag{8.27}$$

Lemme 8.4.3 *$\widehat{U}(t,L;\Lambda)$ est une fonction strictement concave en la variable L sur $[0,L_{max}]$. De plus*

$$\sup_{0\leq L\leq L_{max}} \widehat{U}(t,L;\Lambda)$$

est réalisé pour

$$L(t;\Lambda) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{\partial}{\partial L}\widehat{U}(t,0;\Lambda)\leq 0 \\ L_{max} & si\ \frac{\partial}{\partial L}\widehat{U}(t,L_{max};\Lambda)\geq 0 \\ \widetilde{L}(t) & sinon \end{cases} \qquad t\in[0,T] \tag{8.28}$$

avec $\widetilde{L}(t)$ l'unique zéro de $\frac{\partial}{\partial L}\widehat{U}(t,L;\Lambda)$.

Preuve: cf. lemme 6.3 p. 17 de [15].

On définit :

$$p(t;\Lambda) := \frac{1}{\zeta(t)}\frac{\partial}{\partial c}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda) \tag{8.29}$$

$$w(t;\Lambda) := \frac{1}{\zeta(t)}\frac{\partial}{\partial \ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda) \tag{8.30}$$

$$\delta(t;\Lambda) := p(t;\Lambda)R(t,L(t;\Lambda)) - w(t;\Lambda)L(t;\Lambda). \tag{8.31}$$

Proposition 8.4.4 *On suppose les hypothèses 3, 4, 8 satisfaites. Un équilibre existe sur le marché financier si et seulement s'il existe $\Lambda = (\Lambda_1,\cdots,\Lambda_K)$ telle que pour tout $k = 1,\cdots,K$, Λ_k est une variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable à valeurs dans $]0,+\infty[$ et vérifiant*

$$(i)\ E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \ \nabla_{c,\ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda).$$
$$I_k(t,\tfrac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda))dt|\mathcal{G}_0^k] \tag{8.32}$$
$$= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta(t)(\delta(t;\Lambda)\varepsilon_k + w(t;\Lambda))dt|\mathcal{G}_0^k]$$

$$(ii)\ \zeta_k = \zeta, \qquad dt\otimes d\mathbb{P}\ ps, \qquad \forall k=1,\cdots,K \tag{8.33}$$

$$(iii)\ \forall t\in[0,T],\ \ E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k]\ \ \textit{ne dépend pas de } k=1,\cdots,K. \tag{8.34}$$

Dans ce cas, $[p,A,w,\delta,L,(c_k,\ell_k,\psi_k,\phi_k)]$ *est un équilibre avec*

- L, p, w, δ *définis respectivement par (8.28), (8.29), (8.30), (8.31),*
- $(\widehat{c_k},\widehat{\ell_k})(t) = I_k\left(t,\frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda)\right)$
- $A(t) = \frac{1}{\zeta(t)}E_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k\right], \qquad \forall t\in[0,T], \qquad \forall k=1,\cdots,K,$
- $\psi_k(t)$ *et* $\phi_k(t)$ *définis par (8.24).*
- *La richesse optimale est*

$$X_k(t) = \frac{1}{\zeta_k(t)}E_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta_k(t)\left(p(s)\widehat{c_k}(s) - w(s)(1-\widehat{\ell_k}(s)\right)ds|\mathcal{G}_t^k\right]. \tag{8.35}$$

Preuve:
<u>La condition est suffisante</u>
Soit Λ vérifiant (8.32).
On pose $(\overline{c_k},\overline{\ell_k}) := I_k\left(t,\frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda)\right)$.
$(\overline{c_k},\overline{\ell_k})$ vérifie bien la contrainte budgétaire (8.23) d'après les équations (8.32), (8.33), (8.29) et (8.30). De plus, $(\overline{c_k},\overline{\ell_k})$ maximise la fonction valeur de l'agent k. En effet, la concavité de $U_k(t,\cdot)$ implique :

$$E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T U_k(t,c_k(t),\ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k\right] \le E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T U_k(t,\overline{c_k}(t),\overline{\ell_k}(t))dt|\mathcal{G}_0^k\right]$$

$$+E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \left(c_k(t)-\overline{c_k}(t),\ell_k(t)-\overline{\ell_k}(t)\right)\frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U\left(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda\right)dt|\mathcal{G}_0^k\right]$$

puisque $\frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U\left(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda\nabla_{c,\ell}U_k(t, \overline{c_k}, \overline{\ell_k}\right)$.
Par les relations (8.29) et (8.30),

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (c_k(t), \ell_k(t))\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)|\mathcal{G}_0^k\right] \\ = \; E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta(t)(c_k(t), \ell_k(t))(p(t), w(t))|\mathcal{G}_0^k\right] \\ \leq \; E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta(t)(\varepsilon_k + \delta(t)w(t))|\mathcal{G}_0^k\right] \end{aligned}$$

d'après la contrainte budgétaire et (8.33). Par suite, (8.32) donne

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (c_k(t), \ell_k(t))\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)|\mathcal{G}_0^k\right] \\ \leq \; E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (\overline{c_k}(t), \overline{\ell_k}(t))\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)|\mathcal{G}_0^k\right] \end{aligned}$$

et donc

$$E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T U_k(t, c_k(t), \ell_k(t))dt|\mathcal{G}_0^k\right] \leq E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T U_k(t, \overline{c_k}(t), \overline{\ell_k}(t))dt|\mathcal{G}_0^k\right].$$

De plus, $\overline{c_k}$ et $\overline{\ell_k}$ sont bien G_T (et par suite G_T^k)-adaptés donc $(\overline{c_k}, \overline{\ell_k}) = (\widehat{c_k}, \widehat{\ell_k})$. Vérifions que les conditions de l'équilibre sont alors vérifiées. C'est vrai pour les relations (8.17) et (8.18) car

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \left(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)\right) &= \sum_{k=1}^K I_k\left(t, \frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda\right) \\ &= I_{c,\ell}\left(t, \nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda); \Lambda\right) \\ &= (R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda)). \end{aligned}$$

(8.16) est immédiate.
Le prix A de l'actif productif est donné par la proposition 8.2.3. Par suite, la relation (8.20) est vérifiée et chaque agent peut financer sa stratégie $(\widehat{c_k}, \widehat{\ell_k})$. (8.19) est alors trivialement vérifiée. Montrons (8.15). D'une part,

$$\widehat{L}(t) = I_L\left(t, \frac{w(t)}{p(t)}\right) = I_L\left(t, \frac{\frac{\partial}{\partial \ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)}{\frac{\partial}{\partial c}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)}\right).$$

D'autre part,

$$L(t;\Lambda) = I_L\left(t, \frac{\frac{\partial}{\partial \ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)}{\frac{\partial}{\partial c}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)}\right)$$

(c'est immédiat si $L(t;\Lambda) = \widetilde{L}(t)$, sinon cf. la démonstration du corollaire 6.5 de [15]). Donc $\widehat{L}(t) = L(t;\Lambda)$.

<u>La condition est nécessaire</u>
Si l'équilibre a lieu, alors $\forall k = 1, \cdots, K, \zeta_k = \zeta$ et d'après (8.17), (8.18) et le théorème 8.3.2

$$\left(R(t,\widehat{L}(t)), K - \widehat{L}(t)\right) = \sum_{k=1}^{K} I_k\left(t, \lambda_k \zeta(t)(p(t), w(t))\right) = I_{c,\ell}\left(t, \zeta(t)(p(t), w(t)); \Lambda\right)$$

avec $\Lambda = (\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_K})$ où $\forall k = 1, \cdots, K, \lambda_k$ solution de (8.25). Par suite,

$$\zeta(t)\left(p(t), w(t)\right) = \nabla_{c,\ell} U\left(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda\right)$$

d'où (8.29), (8.30) et (8.31), et par suite (8.28). La proposition 8.2.3 implique (8.34).

$$\begin{aligned}\left(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)\right) &= I_k\left(t, \lambda_k \zeta(t)(p(t), w(t))\right) \\ &= I_k\left(t, \frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell} U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda)\right) \qquad (8.36)\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1.2, $(\widehat{c_k}, \widehat{\ell_k})$ est G_T-adapté donc la relation (8.36) prise au temps $t = 0$ montre que Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable. La contrainte budgétaire (8.23) implique alors la relation (8.32) (car la contrainte est saturée). □

Remarque 8.4.5 *Les relations (8.3) sont bien vérifiées.*

Preuve:
(8.17), (8.1) et le fait que $\widehat{c_k} > 0$ impliquent que pour tout k, $\widehat{c_k} \leq \kappa_R$. De plus, $\sum_{k=1}^{K} \widehat{\ell_k} = K - L(t;\Lambda) \geq K - L_{max}$ donc $\exists\, k_0$ tel que $\widehat{\ell_{k_0}} \geq 1 - \frac{L_{max}}{K}$. Par ailleurs, $\frac{\partial}{\partial c} U_k(t,\cdot,\cdot)$ est croissante en ℓ et décroissante en c, $\frac{\partial}{\partial \ell} U_k(t,\cdot,\cdot)$ est croissante en c et décroissante en ℓ. Par suite,

$$\begin{aligned}\zeta(t)p(t;\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial c} U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda); \Lambda) \\ &\geq \Lambda_k \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \widehat{c_k}, \widehat{\ell_k}) \text{ pour tout k,} \qquad \text{cf. lemme 8.4.2} \\ &\geq \Lambda_k \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \kappa_R, \widehat{\ell_k}) \text{ pour tout k} \\ &\geq \Lambda_{k_0} \frac{\partial}{\partial c} U_{k_0}(t, \kappa_R, 1 - \frac{L_{max}}{K}) \\ &\geq \inf_{t,k} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial c} U_k(t, \kappa_R, 1 - \frac{L_{max}}{K}) \\ &=: k_p > 0 \qquad \text{par (8.12).}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(t)w(t;\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial \ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda) \\
&\leq \Lambda_k \frac{\partial}{\partial \ell}U_k(t,\widehat{c}_k,\widehat{\ell}_k) \quad \text{pour tout k,} \qquad \text{cf. lemme 8.4.2} \\
&\leq \Lambda_{k_0}\frac{\partial}{\partial \ell}U_{k_0}(t,\kappa_R,1-\frac{L_{max}}{K}) \\
&\leq \sup_{t,k}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial \ell}U_k(t,\kappa_R,1-\frac{L_{max}}{K}) =: \kappa_w < +\infty.
\end{aligned}$$

(8.12) implique l'existence de $L_0 > 0$ tel que si $L < L_0$, alors $\frac{\partial}{\partial L}R(t,L) > \frac{\kappa_w}{k_p}$, d'où $L < I_L(t,\frac{\kappa_w}{k_p})$ pour tout t. Par suite,

$$\begin{aligned}
L(t;\Lambda) &= I_L(t,\frac{w(t)}{p(t)}) \\
&\geq I_L(t,\frac{\kappa_w}{k_p}) \\
&\geq L_0 > 0.
\end{aligned}$$

Donc $R(t,L(t;\Lambda)) \geq \inf_t R(t,L_0) =: k_R > 0$ par (8.12), d'où

$$\begin{aligned}
\zeta(t)p(t;\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial c}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda) \\
&= \Lambda_k\frac{\partial}{\partial c}U_k(t,\widehat{c}_k,\widehat{\ell}_k)+r_2^k \qquad \text{pour tout } k, \quad \text{cf. lemme 8.4.2} \\
&\leq \Lambda_k\frac{\partial}{\partial c}U_k(t,\frac{k_R}{K},1) \qquad \text{pour au moins un } k \\
&\leq \sup_{t,k}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial c}U_k(t,\frac{k_R}{K},1) =: \kappa_p < +\infty.
\end{aligned}$$

Par suite $\zeta(t)\delta(t) \leq \kappa_p k_R$. Reste à prouver la positivité de δ. En utilisant le lemme 8.4.3 on obtient

$$\begin{aligned}
\zeta(t)\delta(t) &= \frac{\partial}{\partial c}U\left(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda\right)R(t,L(t;\Lambda)) \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial \ell}U\left(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda\right)L(t;\Lambda) \\
&\geq \frac{\partial}{\partial c}U\left(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda\right)(R(t,L(t;\Lambda)) \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial L}R(t,L(t;\Lambda))L(t;\Lambda)) \\
&\geq \frac{\partial}{\partial c}U\left(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda\right)R(t,0) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

car R est concave. Ainsi, les relations (8.3) sont bien vérifiées. □

Proposition 8.4.6 *Si l'hypothèse 6 est satisfaite et s'il existe un équilibre, alors*

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\phi_k}(t) = 0^*_{d+1} \qquad t \in [0,T], \qquad p.s. \tag{8.37}$$

où 0_{d+1} est le vecteur $d+1$-dimensionnel dont les composantes sont toutes nulles.

Preuve: D'après l'expression de la richesse optimale (8.35) page 105 et l'hypothèse 6, on a par définition de l'équilibre (relations (8.17), (8.18) puis (8.16))

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K} \widehat{X_k}(t) &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\zeta(t)} E_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta(s)(p(s)\widehat{c_k}(s) - w(s)(1-\widehat{\ell_k}(s)))ds|\mathcal{G}_t\right] \\ &= \frac{1}{\zeta(t)} E_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta(s)\delta(s)|\mathcal{G}_t\right].\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\sum_{k=1}^{K} \widehat{X_k}(t) = A(t) + (\sum_{k=1}^{K} \widehat{\phi_k}(t))P(t)$. Or le théorème 8.4.4 nous donne le prix A à l'équilibre, on obtient

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{X_k}(t) = \frac{1}{\zeta(t)} E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta(t)\delta(t)|\mathcal{G}_t] + (\sum_{k=1}^{K} \widehat{\phi_k}(t))P(t).$$

Par suite $\qquad \sum_{k=1}^{K} \widehat{\phi_k}(t) = 0^*_{d+1} \qquad dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. □

Remarque: Contrairement au résultat du chapitre 4, nous n'avons pas ici que $\sum_{k=1}^{K} \widehat{X_k}(t) = 0 \ \forall t \in [0,T]$. Ceci vient du fait que dans ce chapitre, il y a des dividendes. En effet on a sous hypothèse 6

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{X_k}(t) = \frac{1}{\zeta(t)} E_{\mathbb{P}}\left[\int_t^T \zeta(t)\delta(t)|\mathcal{G}_t\right].$$

D'autre part, le résultat de la proposition 4.2.9 n'est plus vrai dans ce cadre. En effet, à l'équilibre, la relation (4.10) n'est plus vérifiée, donc on n'a plus l'égalité (4.16), ce qui ne nous permet plus d'identifier $\widetilde{W}$ avec $\widetilde{W^k}$ ni $\widetilde{M}$ avec $\widetilde{M^k}$ comme dans le corollaire 4.2.8. Or ce corollaire était la clé de la preuve de la proposition 4.2.9. Par conséquent, l'existence d'un équilibre n'implique pas l'hypothèse 6 dans ce cadre.

Lemme 8.4.7 *Soit $\omega_0 \in \Omega$. L'application*

$$\begin{aligned}R_k(\Lambda) \quad := \quad & E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \nabla_{c,\ell} U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda). \\ & [I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell} U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda)) \\ & -(\varepsilon_k R(t, L(t;\Lambda)), 1 - \varepsilon_k L(t;\Lambda))^*]dt|\mathcal{G}_0^k](\omega_0)\end{aligned}$$

est continue sur $(]0,+\infty[)^K$.

Preuve: La démonstration est similaire à celle du lemme 4.2.4. La continuité en Λ de $\nabla_{c,\ell}U$ sur $(]0,+\infty[)^K$ se traite de façon analogue, la continuité de $L(t,\cdot)$ est démontrée dans le lemme 9.6 de [15]; ainsi, l'intégrand est une fonction continue. D'autre part, d'après la preuve de la remarque 8.4.5, on a $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement,

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial \ell} U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda) = \zeta(t)w(t) \leq \kappa_w$$

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial c} U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda) = \zeta(t)p(t) \leq \kappa_p$$

et par la relation (8.17) et la définition (8.1)

$$I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda)) = (\overline{c_k}, \overline{\ell_k}) \leq (\kappa_R, 1)$$

donc le théorème de convergence dominée s'applique et R_k est continue sur $(]0,+\infty[)^K$.
□

Lemme 8.4.8 *Supposons l'hypothèse 6 satisfaite. Soit $\omega_0 \in \Omega$.*
Alors il existe $\Lambda^0 \in (]0,+\infty[)^K$ tel que $\forall k = 1, \cdots, K$,

$$\begin{aligned} R_k(\Lambda) \;=\; & E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda). \\ & [I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda)) \\ & -(\varepsilon_k R(t, L(t;\Lambda)), 1 - \varepsilon_k L(t;\Lambda))^*]dt|\mathcal{G}_0^k](\omega_0) = 0. \end{aligned}$$

Preuve: La démonstration est similaire à celle du lemme 4.2.5. Nous devons cependant vérifier que dans ce cadre, nous avons toujours $R_j(\Lambda) < 0$ si $\Lambda_j = 0$ et que $\sum_{k=1}^K R_k(\Lambda) = 0$ (la démonstration de ces deux résultats est un peu plus fastidieuse dans ce cadre). La fin de la preuve, utilisant le théorème du point fixe de Brouwer, est identique à celle du lemme 4.2.5.
Pour $\Lambda \in S_A^+ = \{\sum_{k=1}^K \Lambda_k e^{(k)} / \forall k, \Lambda_k > 0, \sum_{k=1}^K \Lambda_k = 1\}$ et $k = 1, \cdots, K$ on introduit

$$\begin{aligned} R_k(\Lambda) \;:=\; & E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda). \\ & [I_k(t, \frac{1}{\Lambda_k}\nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda)) \\ & -(\varepsilon_k R(t, L(t;\Lambda)), 1 - \varepsilon_k L(t;\Lambda))^*]dt|\mathcal{G}_0^k](\omega_0). \end{aligned}$$

Prolongons R_k sur $S_A = \{\sum_{k=1}^K \Lambda_k e^{(k)} / \forall k, \Lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \Lambda_k = 1\}$ par continuité. Si $\Lambda_j = 0$,

$$\begin{aligned} R_j(\Lambda) \;=\; & -E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \nabla_{c,\ell}U(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda). \\ & (\varepsilon_j R(t, L(t;\Lambda)), 1 - \varepsilon_j L(t;\Lambda))^* dt|\mathcal{G}_0^j](\omega_0). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial L}\widehat{U}(t,L(t;\Lambda);\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial c}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda)\frac{\partial}{\partial L}R(t,L(t;\Lambda)) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial \ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda).(-\varepsilon_j L(t;\Lambda)) \\ &\quad = \varepsilon_j\frac{\partial}{\partial L}\widehat{U}(t,L(t;\Lambda);\Lambda)L(t;\Lambda) \\ &\qquad -\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial c}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda)\frac{\partial}{\partial L}R(t,L(t;\Lambda))L(t;\Lambda)\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}R_j(\Lambda) &= -E_{\mathbb{P}}[\int_0^T[\frac{\partial}{\partial \ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda) \\ &\qquad +\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial L}\widehat{U}(t,L(t;\Lambda);\Lambda)L(t;\Lambda) \\ &\qquad +\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial c}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda) \\ &\qquad\qquad [R(t,L(t;\Lambda))-\frac{\partial}{\partial L}R(t,L(t;\Lambda))L(t;\Lambda)]]dt|\mathcal{G}_0^j](\omega_0).\end{aligned}$$

Or $\frac{\partial}{\partial \ell}U \geq 0$, $\frac{\partial}{\partial c}U > 0$ et $R - L\frac{\partial}{\partial L}R > 0$ puisque R est strictement concave. De plus, par définition de $L(t;\Lambda)$ (8.28), $L\frac{\partial}{\partial L}\widehat{U} \geq 0$, donc si $\Lambda_j = 0$, $R_j(\Lambda) < 0$.
D'autre part, on observe que sous l'hypothèse 6, $\forall \Lambda \in S_A$,

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{k=1}^K R_k(\Lambda) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \nabla_{c,\ell}U(t,R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda);\Lambda). \\ &(R(t,L(t;\Lambda))-\textstyle\sum_{k=1}^K \varepsilon_k R(t,L(t;\Lambda)),K-L(t;\Lambda)-(K-\textstyle\sum_{k=1}^K \varepsilon_k L(t;\Lambda)))dt|\mathcal{G}_0] \\ &\qquad = 0\end{aligned}$$

puisque $\sum_{k=1}^K \varepsilon_k = 1$.
La fin de la preuve est alors identique à celle du lemme 4.2.5. □

Proposition 8.4.9 *On suppose que les hypothèses 3, 4, 6 et 8 sont satisfaites, ainsi que les relations (8.33) et (8.34), c'est-à-dire* $\zeta_k = \zeta$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ *ps* $\forall k = 1,\cdots,K$ *et* $E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k]$ *ne dépend pas de* $k = 1,\cdots,K$. *Alors il existe un équilibre.*

Preuve: Remarquons que par les relations (8.29), (8.30) et (8.31)

$$\nabla_{c,\ell} U\left(t, R(t, L(t;\Lambda)), K - L(t;\Lambda);\Lambda\right)\left(\varepsilon_k R(t, L(t;\Lambda)), 1 - \varepsilon_k L(t;\Lambda)\right)^* \\ = \zeta(t)\left(\delta(t)\varepsilon_k + w(t)\right).$$

De même que dans la proposition 4.2.7, les lemmes 8.4.7 et 4.2.6 impliquent l'existence d'une version $\mathcal{G}_0$-mesurable de l'application K-vectorielle Λ^0 construite dans le lemme 8.4.8. On a donc l'existence d'une variable aléatoire $\mathcal{G}_0$-mesurable vérifiant la relation (8.32). La proposition 8.4.4 permet de conclure . □

Exemple 8.4.10
On suppose que tous les agents ont la même fonction d'utilité logarithmique :
$\forall k = 1, \cdots, K$, $U_k(t, c, \ell) = e^{-\rho t}(\ln c + \nu \ln \ell)$, avec $\rho > 0$ et $\nu > 0$.
La fonction de production est $R(t, L) = f(t)\sqrt{L}$ où f vérifie $\inf_t f(t) > 0$.
Alors $I_L(t, z) = \min\{\frac{f(t)^2}{(2z)^2}, L_{max}\}$.
$I_k(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2_+ \to [0, +\infty[\times[0, 1]$, le prolongement continu de $\nabla_{c,\ell} U_k(t, \cdot, \cdot)$ à $\mathbb{R}^2_+$, est défini par $I_k(t, y_1, y_2) = e^{-\rho t}(\frac{1}{y_1}, \min\{\frac{\nu}{y_2}, e^{\rho t}\})$. Le théorème 8.3.2 implique que

$$(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)) = e^{-\rho t}\left(\frac{1}{\lambda_k \zeta_k(t) p(t)}, \min\{\frac{\nu}{\lambda_k \zeta_k(t) w(t)}, e^{\rho t}\}\right) \tag{8.38}$$

avec λ_k vérifiant (8.25)

$$\frac{1}{\lambda_k} E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-\rho t} + \min\{\lambda_k \zeta_k(t) w(t), \nu e^{-\rho t}\}) dt | \mathcal{G}_0^k\right] = \xi_k =: E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta_k(t) \overline{e_k}(t) dt | \mathcal{G}_0^k\right]$$

où $\overline{e_k}(t) := \varepsilon_k(t)\delta(t) + w(t)$ est le processus ressource de l'agent k qui n'a pas de loisir. On suppose pour l'instant que $\nu \leq \lambda_k e^{\rho t} \zeta_k(t) w(t)$ pour tout $k = 1, \cdots, K$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)) = \frac{\rho \xi_k}{(1 - e^{-\rho T})(1 + \nu)}\left(\frac{e^{-\rho t}}{\zeta_k(t) p(t)}, \frac{\nu e^{-\rho t}}{\zeta_k(t) w(t)}\right). \tag{8.39}$$

Pour que le marché s'équilibre, nous devons supposer que $\zeta_k(\cdot) = \zeta(\cdot)$ pour tout $k = 1, \cdots, K$ (relation (8.33)) et que (relations (8.17) et (8.18))

$$\frac{\rho \sum_{k=1}^K \xi_k}{(1 - e^{-\rho T})(1 + \nu)}\left(\frac{e^{-\rho t}}{\zeta(t) p(t)}, \frac{\nu e^{-\rho t}}{\zeta(t) w(t)}\right) = (R(t, L(t)), K - L(t)). \tag{8.40}$$

Ainsi

$$\frac{w(t)}{p(t)} = \frac{\nu R(t, L(t))}{K - L(t)}.$$

$L(t) = I_L(t, \frac{w(t)}{p(t)})$ donne $\quad L(t) = \min(L_e, L_{max})$ avec $L_e := \frac{K}{1+2\nu}$.
Remarquons que $\frac{\nu}{K - L_e} = \frac{1+2\nu}{2K} = \frac{1}{2L_e}$ et que $2L_e w(t) = p(t) R(t, L_e)$.
On choisit L_{max} dans l'intervalle $[\frac{K}{1+2\nu}, K[$ (c'est possible car $\nu > 0$), par suite

$$\delta(t) = p(t)R(t, L(t)) - w(t)L(t) = \frac{Kw(t)}{1+2\nu}.$$

$$\begin{aligned}\overline{e}(t) &:= \sum_{k=1}^{K} \overline{e_k}(t) = \delta(t) + Kw(t) = Kw(t)\frac{2+2\nu}{1+2\nu} = 2(1+\nu)w(t)L_e \\ &= (1+\nu)p(t)R(t, L_e).\end{aligned}$$

Si on pose

$$\gamma := \frac{\rho \sum_{k=1}^{K} \xi_k}{(1-e^{-\rho T})(1+\nu)}$$

alors par la relation (8.40) $\gamma = e^{\rho t}\zeta(t)p(t)R(t, L_e)$ et $(1+\nu)\gamma = e^{\rho t}\zeta(t)\overline{e}(t)$. On constate en particulier que γ ne dépend pas de t et est $\mathcal{G}_0$-mesurable. Ainsi, par définition de ξ_k et (8.39), (8.40) implique

$$\begin{aligned}(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)) &= \frac{\rho\xi_k}{(1-e^{-\rho T})(1+\nu)\gamma}(R(t, L_e), K - L_e) \\ &= \frac{\rho}{(1-e^{-\rho T})} E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \frac{\overline{e_k}(t)}{\overline{e}(t)} e^{-\rho t} dt | \mathcal{G}_0^k\right](R(t, L_e), K - L_e) \\ &:= \Lambda_k(R(t, L_e), K - L_e) \qquad (8.41)\end{aligned}$$

où $\Lambda_k = \frac{\rho}{(1-e^{-\rho T})} E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \frac{\overline{e_k}(t)}{\overline{e}(t)} e^{-\rho t} dt | \mathcal{G}_0^k]$ est la moyenne relative de la ressource (sans loisir) de l'agent k, i.e. mesure son importance dans le marché.
Notons que $\frac{\overline{e_k}(t)}{\overline{e}(t)} = \frac{\varepsilon_k}{2(1+\nu)} + \frac{1+2\nu}{2K(1+\nu)}$ donc

$$\Lambda_k = \frac{\varepsilon_k}{2(1+\nu)} + \frac{1+2\nu}{2K(1+\nu)}.$$

Par suite Λ_k est $\mathcal{G}_0$-mesurable et $\sum_{k=1}^{K} \Lambda_k = 1$.
Pour montrer que $\Lambda := (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$ donne un équilibre, il suffit de montrer que $\forall k = 1, \cdots, K$, $R_k(\Lambda) = 0$ (cf. lemme 8.4.8).

Or $\nabla_{c,\ell} U(t, c, \ell; \Lambda) = e^{-\rho t}(\frac{1}{c}, \frac{\nu}{\ell})$ et $I_k\left(t, \frac{\nabla_{c,\ell} U(t, R, K-L; \Lambda)}{\Lambda_k}\right) = (\widehat{c_k}, \widehat{\ell_k})$.

Par suite, le premier terme de l'intégrand de $R_k(\Lambda)$ est

$$\begin{aligned}\nabla_{c,\ell} U(t, R(t, L_e), K - L_e; \Lambda) \quad . \quad & I_k\left(t, \frac{\nabla_{c,\ell} U(t, R(t, L_e), K - L_e; \Lambda)}{\Lambda_k}\right) \\ &= e^{-\rho t}\Lambda_k\left(\frac{1}{R(t, L_e)}, \frac{\nu}{K - L_e}\right) . (R(t, L_e), K - L_e) \\ &= e^{-\rho t}\Lambda_k(1+\nu).\end{aligned}$$

Par ailleurs le deuxième terme de l'intégrand de $R_k(\Lambda)$ est

$$\begin{aligned}
\nabla_{c,\ell}U(t,R(t,L_e),K-L_e;\Lambda) \quad . \quad & (\varepsilon_k R(t,L_e), 1-\varepsilon_k L_e) \\
= \quad & e^{-\rho t}\left(\frac{1}{R(t,L_e)}, \frac{\nu}{K-L_e}\right).(\varepsilon_k R(t,L_e), 1-\varepsilon_k L_e) \\
= \quad & e^{-\rho t}\left(\varepsilon_k + \frac{\nu}{K-L_e}(1-\varepsilon_k L_e)\right) \\
= \quad & e^{-\rho t}\left(\varepsilon_k + \frac{1}{2L_e}(1-\varepsilon_k L_e)\right) \\
= \quad & e^{-\rho t}\left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \frac{1}{2L_e}\right) \\
= \quad & e^{-\rho t}\left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \frac{1+2\nu}{2K})\right) \\
= \quad & e^{-\rho t}\Lambda_k(1+\nu)
\end{aligned}$$

donc $R_k(\Lambda) = 0$. Ainsi (8.32) est réalisée. D'autre part,

$$\delta(s) = \frac{Kw(s)}{1+2\nu} = L_e w(s)$$

et on tire de la définition de γ

$$\zeta(s) = \frac{\gamma e^{-\rho s}}{p(s)R(s,L_e)} = \frac{\gamma e^{-\rho s}}{2w(s)L_e}$$

donc $\zeta(s)\delta(s) = \frac{\gamma}{2}e^{-\rho s}$ avec γ $\mathcal{G}_0$-mesurable donc (8.34) est aussi vérifiée :

$$\forall t \in [0,T], \;\; E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k] \;\; \text{ne dépend pas de } k = 1,\cdots,K.$$

En identifiant les deux expressions (8.39) et (8.41) trouvées pour $\widehat{\ell_k}$, on obtient

$$\frac{\nu e^{-\rho t}}{\lambda_k \zeta(t) w(t)} = \Lambda_k(K-L_e) = \Lambda_k 2\nu \frac{K}{1+2\nu} = \frac{\nu}{(1+\nu)}\left(\frac{\varepsilon_k K}{1+2\nu}+1\right) \leq 1$$

si $0 < \nu \leq \frac{1}{K-2}$. Sous cette restriction, l'hypothèse faite au début de l'exemple est satisfaite : $\nu \leq \lambda_k e^{\rho t}\zeta_k(t)w(t)$ pour tout $k = 1,\cdots,K$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.

Par conséquent, si les hypothèses 3, 4, 8 sont satisfaites, si $0 < \nu \leq \frac{1}{K-2}$ et si les égalités (8.33) (i.e. $\zeta_k = \zeta$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ ps) et (8.40) sont vérifiées, alors il existe un équilibre d'après la proposition (8.4.4).

Remarque: On constate que les politiques optimales de travail L_e et des loisirs $\widehat{\ell_k}$ sont constantes mais les consommations optimales $\widehat{c_k}$ sont proportionnelles à f,

c'est-à-dire à la production totale de l'économie. De même, le salaire $w(t)$ est inversement proportionnel à $e^{\rho t}\zeta(t)$ mais les prix $p(t)$ sont inversement proportionnels à $e^{\rho t}\zeta(t)f(t)$. Ainsi par exemple des cycles dans la fonction de production se répercutent sur les prix et les consommations mais pas sur les salaires et les loisirs.

Exemple 8.4.11
On suppose maintenant que tous les agents ont la même fonction d'utilité puissance : $\forall k = 1, \cdots, K$, $U_k(t, c, \ell) = c^\mu \ell^\nu$ et la fonction de production $R(t, L) = L^\rho$, avec $0 < \rho, \mu, \nu < 1$, $\mu + \nu < 1$. Alors

$$I_L(t, z) = \min\{(\frac{\rho}{z})^{\frac{1}{1-\rho}}, L_{max}\},$$

$$I_k(t, y_1, y_2) = \left((\frac{\mu}{y_1})^{\frac{1-\nu}{1-\mu-\nu}} (\frac{\nu}{y_2})^{\frac{\nu}{1-\mu-\nu}}, \min\{(\frac{\mu}{y_1})^{\frac{\mu}{1-\mu-\nu}} (\frac{\nu}{y_2})^{\frac{1-\mu}{1-\mu-\nu}}, 1\} \right).$$

Comme dans l'exemple précédent, on suppose que le minimum n'est pas égal à 1. Soit λ_k solution de (8.25) :

$$\frac{\mu+\nu}{\lambda_k^{\frac{1}{1-\mu-\nu}}} E_{\mathbb{P}} \left[\int_0^T \left(\frac{\mu}{\zeta_k(t)p(t)} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu-\nu}} \left(\frac{\nu}{\zeta_k(t)w(t)} \right)^{\frac{\nu}{1-\mu-\nu}} dt | \mathcal{G}_0^k \right] = \xi_k$$

avec $\xi_k := E_{\mathbb{P}} \left[\int_0^T \zeta_k(t)\overline{e_k}(t)dt | \mathcal{G}_0^k \right]$ (on rappelle que $\overline{e_k}(t) = \varepsilon_k \delta(t) + w(t)$). Alors

$$\begin{aligned}
(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)) &= ((\frac{\mu}{\lambda_k \zeta_k(t)p(t)})^{\frac{1-\nu}{1-\mu-\nu}} (\frac{\nu}{\lambda_k \zeta_k(t)w(t)})^{\frac{\nu}{1-\mu-\nu}}, \\
&\qquad \min\{(\frac{\mu}{\lambda_k \zeta_k(t)p(t)})^{\frac{\mu}{1-\mu-\nu}} (\frac{\nu}{\lambda_k \zeta_k(t)w(t)})^{\frac{1-\mu}{1-\mu-\nu}}, 1\} \\
&= (\frac{\mu}{\lambda_k \zeta_k(t)p(t)})^{\frac{\mu}{1-\mu-\nu}} (\frac{\nu}{\lambda_k \zeta_k(t)w(t)})^{\frac{\nu}{1-\mu-\nu}} \left(\frac{\mu}{\lambda_k \zeta_k(t)p(t)}, \frac{\nu}{\lambda_k \zeta_k(t)w(t)} \right)
\end{aligned}$$

On suppose que $\zeta_k(\cdot) = \zeta(\cdot)$ pour tout $k = 1, \cdots, K$. On pose alors

$$M(t) := \left(\frac{\mu}{\zeta(t)p(t)} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu-\nu}} \left(\frac{\nu}{\zeta(t)w(t)} \right)^{\frac{\nu}{1-\mu-\nu}},$$

ainsi

$$(\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)) = \frac{\xi_k}{\mu+\nu} \left(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T M(t)dt | \mathcal{G}_0^k] \right)^{-1} M(t) \left(\frac{\mu}{\zeta(t)p(t)}, \frac{\nu}{\zeta(t)w(t)} \right). \quad (8.42)$$

Pour que le marché s'équilibre, nous devons supposer que (relations ((8.17) et (8.18))

$$\frac{\sum_{k=1}^K \xi_k (E_{\mathbb{P}}[\int_0^T M(t)dt | \mathcal{G}_0^k])^{-1}}{\mu+\nu} M(t) \left(\frac{\mu}{\zeta(t)p(t)}, \frac{\nu}{\zeta(t)w(t)} \right) = (R(t, L(t)), K - L(t)). \quad (8.43)$$

Ainsi

$$\frac{w(t)}{p(t)} = \frac{\nu R(t, L(t))}{\mu(K - L(t))}.$$

$L(t) = I_L(t, \frac{w(t)}{p(t)})$ donne $L(t) = \min(L_e, L_{max})$ avec $L_e := \frac{K}{1+\widetilde{\rho}}$ où $\widetilde{\rho} := \frac{\nu}{\rho\mu}$. Remarquons que $K - L_e = \frac{\widetilde{\rho}}{1+\widetilde{\rho}}K = \widetilde{\rho}L_e$ et que $\nu p(t)R(t, L_e) = \mu\frac{\widetilde{\rho}}{1+\widetilde{\rho}}Kw(t)$. On choisit L_{max} dans l'intervalle $[\frac{K}{1+\widetilde{\rho}}, K[$ (c'est possible car $\widetilde{\rho} > 0$), par suite

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta(t) & = p(t)R(t, L(t)) - w(t)L(t) = \frac{\mu\widetilde{\rho}-\nu}{\nu(1+\widetilde{\rho})}Kw(t) \\ \overline{e}(t) & = \delta(t) + Kw(t) = \frac{\mu+\nu}{\nu}\frac{\widetilde{\rho}}{1+\widetilde{\rho}}Kw(t) = \frac{\mu+\nu}{\mu}p(t)R(t, L_e) \end{array}\right. \tag{8.44}$$

On pose

$$\gamma := \frac{\sum_{k=1}^{K} \xi_k \left(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T M(t)dt|\mathcal{G}_0^k]\right)^{-1}}{\mu + \nu}.$$

Ainsi par la relation (8.43),

$$\left\{\begin{array}{rl} \zeta(t)p(t)R(t, L(t)) & = \gamma\mu M(t) \\ \zeta(t)w(t)(K - L(t)) & = \gamma\nu M(t) \\ M(t) & = R(t, L_e)^{\mu}(K - L_e)^{\nu}\gamma^{-\mu-\nu} \end{array}\right. \tag{8.45}$$

On constate que γ ne dépend pas de t et est $\mathcal{G}_0$-mesurable.

$$\begin{array}{rcl} \zeta(t)\overline{e}(t) & = & \frac{(\mu+\nu)}{\mu}\zeta(t)p(t)R(t, L(t)) = (\mu+\nu)\gamma M(t) \\ & = & (\mu+\nu)R(t, L_e)^{\mu}(K - L_e)^{\nu}\gamma^{1-\mu-\nu} \end{array}$$

et par les relations (8.42) et (8.45)

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{c_k}(t), \widehat{\ell_k}(t)) & = & \frac{\xi_k}{\mu+\nu}\left(E_{\mathbb{P}}[\int_0^T M(t)dt|\mathcal{G}_0^k]\right)^{-1}\frac{1}{\gamma}(R(t, L_e), K - L_e) \\ & = & E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \zeta(t)\overline{e_k}(t)dt|\mathcal{G}_0^k\right]\left((\mu+\nu)\gamma E_{\mathbb{P}}[\int_0^T M(t)dt|\mathcal{G}_0^k]\right)^{-1} \\ & & \qquad (R(t, L_e), K - L_e) \\ & = & E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \gamma^{\mu+\nu-1}\zeta(t)\overline{e_k}(t)dt|\mathcal{G}_0^k\right]\left((\mu+\nu)E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \gamma^{\mu+\nu}M(t)dt|\mathcal{G}_0^k]\right)^{-1} \\ & & \qquad (R(t, L_e), K - L_e) \\ & := & \eta_k(R(t, L_e), K - L_e) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \eta_k & = & \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T R(t, L_e)^{\mu}(K - L_e)^{\nu}\overline{e}(t)^{-1}\overline{e_k}(t)dt|\mathcal{G}_0^k]}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T R(t, L_e)^{\mu}(K - L_e)^{\nu}dt|\mathcal{G}_0^k]} \\ & = & \frac{1}{T}E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \frac{\overline{e_k}(t)}{\overline{e}(t)}dt|\mathcal{G}_0^k\right]. \end{array}$$

car $R(t, L_e)$ et L_e sont des constantes. A nouveau, chaque agent reçoit une fraction du total des biens et loisirs disponibles, cette fraction dépendant de son importance relative dans le marché, mesurée par ses ressources. On pose $\Lambda_k := \eta_k^{1-\mu-\nu}$. Les expressions de δ et $\overline{e}$ trouvées en (8.44) impliquent $\frac{\overline{e_k}(t)}{\overline{e}(t)} = \frac{1}{\mu+\nu}\left[\varepsilon_k(\mu - \frac{\nu}{\widetilde{\rho}}) + \frac{\nu}{\widetilde{\rho}L_e}\right]$ pour tout t. Par suite

$$\frac{\overline{e_k}(t)}{\overline{e}(t)} = \eta_k = \frac{1}{\mu+\nu}\left[\varepsilon_k(\mu - \frac{\nu}{\widetilde{\rho}}) + \frac{\nu}{\widetilde{\rho}L_e}\right],$$

ainsi Λ_k est bien $\mathcal{G}_0$-mesurable et $\sum_{k=1}^K \Lambda_k^{\frac{1}{1-\mu-\nu}} = 1$. $\quad \Lambda := (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_K)$.

$$\nabla_{c,\ell} U(t, c, \ell; \Lambda) = \left(\sum_{k=1}^K \Lambda_k^{\frac{1}{1-\mu-\nu}}\right)^{1-\mu-\nu} (\mu c^{\mu-1}\ell^\nu, \nu c^\mu \ell^{\nu-1}) = (\mu c^{\mu-1}\ell^\nu, \nu c^\mu \ell^{\nu-1}).$$

Puisque $R_e := R(t, L_e)$ et L_e sont constantes, ceci implique que

$$\begin{aligned} R_k(\Lambda) &= T\eta_k(\mu+\nu)R_e^\mu(K-L_e)^\nu - E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T R_e^\mu(K-L_e)^\nu(\varepsilon_k\mu + \nu\frac{1-\varepsilon_k L_e}{K-L_e})dt|\mathcal{G}_0^k\right] \\ &= TR_e^\mu(K-L_e)^\nu\left[\eta_k(\mu+\nu) - \varepsilon_k(\mu - \frac{\nu}{\widetilde{\rho}}) - \frac{\nu}{\widetilde{\rho}L_e}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi (8.32) est réalisée. D'autre part,

$$\zeta(s)\delta(s) = \frac{\mu\widetilde{\rho} - \nu}{\nu(1+\widetilde{\rho})} Kw(s)(\mu+\nu)R_e^\mu(K-L_e)^\nu\gamma^{1-\mu-\nu}(\overline{e}(s))^{-1}.$$

Or $\overline{e}(s) = \frac{\mu+\nu}{\mu}p(s)R_e = \frac{\mu+\nu}{\nu}(K-L_e)w(s)$ donc

$$\zeta(s)\delta(s) = \frac{\mu\widetilde{\rho} - \nu}{(1+\widetilde{\rho})} K\gamma^{1-\mu-\nu}R_e^\mu(K-L_e)^{\nu-1}$$

avec γ $\mathcal{G}_0$-mesurable donc (8.34) est aussi vérifiée :

$$\forall t \in [0,T],\ E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \zeta(s)\delta(s)ds|\mathcal{G}_t^k] \text{ ne dépend pas de } k = 1, \cdots, K.$$

Notons de plus que

$$\widehat{\ell_k} = \eta_k(K-L_e) = \eta_k\widetilde{\rho}L_e = \frac{1}{\tau+1}\left[1 + \varepsilon_k K\frac{\tau(1-\rho)}{\tau\rho+1}\right]$$

avec $\tau := \frac{\mu}{\nu}$. $\widehat{\ell_k} \leq 1$ si $\tau \geq \frac{K(1-\rho)-1}{\rho}$.

Par conséquent, si les hypothèses 3, 4, 8 sont satisfaites, si $\frac{\mu}{\nu} \geq \frac{K(1-\rho)-1}{\rho}$ et si les égalités (8.33) (ie $\zeta_k = \zeta$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ ps) et (8.43) sont vérifiées, alors il existe un équilibre d'après la proposition (8.4.4).

Remarque: Il n'est pas surprenant que les solutions ne dépendent pas du temps puisque les fonctions d'utilité et la fontion de production n'en dépendent pas. On observe que les stratégies optimales de consommation et loisir de chaque agent sont les mêmes dans les deux exemples : une fraction de la quantité totale disponible sur le marché, cette fraction étant proportionnelle à la ressource relative de l'agent.

Deuxième partie

Autres informations privées

Jusqu'ici, nous avons modélisé l'information privée d'un initié par une information forte initiale : l'initié connait dès le début la réalisation à une date future d'une fonctionnelle du processus des prix. Cependant, cette modélisation est contraignante et n'est pas toujours réaliste. En effet, l'initié peut recevoir son information privée progressivement, par exemple il connait une fonctionnelle des prix perturbée par un bruit indépendant qui décroît au cours du temps. On parle alors d'information forte (car l'initié connait la fonctionnelle perturbée ω par ω) progressive (car l'information privée devient de plus en plus précise). La clé de cette théorie est le grossissement progressif de filtration. Dans le chapitre 9, nous construisons une mesure de probabilité neutre au risque pour un tel initié. Le marché est donc viable mais il n'est cependant pas complet pour cet agent car nous n'avons pas de théorème de représentation de martingales pour cette filtration élargie progressivement et cette probabilité neutre au risque. Par conséquent, nous résolvons le problème d'optimisation de l'initié dans certains cas particuliers d'utilité (utilité logarithmique) où nous savons exhiber le portefeuille optimal.
D'autre part, l'agent peut savoir qu'une information publique va être révélée à une date fixée, sans pour autant la connaître. Son comportement naturel va être d'anticiper cette information. On parle alors d'information faible (car l'initié anticipe la loi d'une fonctionnelle du processus des prix). L'information privée n'est cette fois plus modélisée par un grossissement de filtration mais par une mesure de probabilité différente assignée à cet agent. Dans le chapitre 10, nous nous servons de la mesure de probabilité minimale introduite par Baudoin [6] pour résoudre en toute généralité le problème d'optimisation d'un tel agent.
Dans la partie précédente, notre condition d'équilibre portait sur les consommations (les marchés des consommations devaient s'équilibrer, c'est-à-dire la somme des consommations des agents devait être égale à la somme de leurs ressources). Cette condition semble être trop contraignante et n'a pas de sens quand les agents optimisent leur richesse terminale seulement. Par conséquent, dans le chapitre 11, nous regardons la condition d'équilibre portant sur les portefeuilles (les marchés des titres doivent s'équilibrer, c'est-à-dire la somme des portefeuilles doit être nulle). Nous trouvons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un tel équilibre, en considérant ces différentes modélisations d'information privée et des utilités logarithmiques. Cette condition établit une relation entre les différentes densités de probabilité des agents (probabilité neutre au risque pour une information forte, probabilité minimale pour une information faible). Ces densités de probabilité "résument" l'information privée de chacun. Nous montrons que plus un agent est informé sur le marché, plus il doit rester discret et investir peu sur ce marché, afin qu'un tel équilibre puisse exister.

Chapitre 9

Information forte progressive

Dans ce chapitre, on considère un agent dont l'information supplémentaire change au court du temps. Il connait une fonctionnelle du processus des prix, perturbée par un bruit indépendant qui diminue au cours du temps. On dit qu'il a une information forte (car il connait la fonctionnelle perturbée ω par ω) progressive (car cette information est de plus en plus précise au cours du temps).

Hypothèse 9
$\forall t \in [0,T], \mathcal{H}_t^k = \sigma(L_k(s), s \leq t)$ *où* $L_k(s) = \mathcal{L}_k(A_k, B_k(s))$ *avec*
- $\mathcal{L}_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction mesurable donnée.*
- $B_k = \{B_k(t), 0 \leq t \leq T\}$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_T$.
- A_k *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable telle que :*

$\mathbb{P}(A_k \in \cdot|\mathcal{F}_t)(\omega) \ll \mathbb{P}(A_k \in \cdot)$ *pour tout* $t \in [0,T[$ *pour* $\mathbb{P}$ *presque tout* $\omega \in \Omega$.

On note G_T^k et Y_T^k les filtrations élargies usuelles :

$$\mathcal{G}_t^k = \cap_{u>t} \left(\mathcal{F}_u \vee \sigma(L_k(s), s \leq u)\right) \text{ et } \mathcal{Y}_t^k = \cap_{u>t} \left(\mathcal{F}_u \vee \sigma(A_k)\right), \quad t \in [0,T[.$$

A_k représente l'information supplémentaire de l'initié, et B_k représente un bruit qui perturbe cette information. Par conséquent, on s'attend en général à ce que $B_k(T) = 0$ et que la variance de ce bruit décroisse vers zéro au fur et à mesure que la date d'échéance T approche. Soit $P_t^k(\omega, dx)$ une version régulière de la loi conditionnelle de A_k sachant $\mathcal{F}_t$ et soit P_{A_k} la loi de A_k.

Lemme 9.0.12 *(proposition 12 Grorud (2000) [24])*
Il existe une version mesurable de la densité conditionnelle

$$p^k(t,x)(\omega) = \frac{dP_t^k}{dP_{A_k}}(\omega, x)$$

qui soit une $(\mathrm{F}_T, \mathbb{P})$*-martingale et qui s'écrive, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$p^k(t,x) = p^k(0,x) + \int_0^t \alpha^k(s,x)dW(s) + \int_0^t \beta^k(s,x)dM(s)$$

où pour tout x, $s \to \alpha^k(s,x)$ et $s \to \beta^k(s,x)$ sont des processus F_T-prévisibles. De plus, pour tout $s < T$, $p^k(s,A_k) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. $W(\cdot) - \int_0^\cdot \frac{\alpha^k(s,A_k)}{p^k(s,A_k)}ds$ est un $(\mathrm{Y}_T^k, \mathbb{P})$-mouvement brownien et si les composantes de $(I_n + \frac{\beta^k(s,A_k)}{p^k(s^-,A_k)})$ sont strictement positives, $M(\cdot) - \int_0^\cdot \frac{\left(\kappa(s).\beta^k(s,A_k)\right)}{p^k(s^-,A_k)}ds$ est le processus compensé d'un $(\mathrm{Y}_T^k, \mathbb{P})$-processus de Poisson d'intensité $\kappa(s).\left(I_n + \frac{\beta^k(s,A_k)}{p^k(s^-,A_k)}\right)$.

Preuve: cf. la preuve de la proposition 12 de Grorud (2000) [24], utilisant des résultats de Jacod [28] (théorème 2.1 et théorème 2.5). □

Théorème 9.0.13 *On suppose que* $E_{\mathbb{P}}\left(||\frac{\alpha^k(t,A_k)}{p^k(t,A_k)}|| + ||I_n + \frac{\beta^k(t,A_k)}{p^k(t^-,A_k)}||\right) < +\infty$ $\forall t \in [0,T[$ *et que les composantes de* $\left(I_n + \frac{\beta^k(t,A_k)}{p^k(t^-,A_k)}\right)$ *sont strictement positives.*
On pose $\rho_1^k(t) = E_{\mathbb{P}}\left(\frac{\alpha^k(t,A_k)}{p^k(t,A_k)}|\mathcal{G}_t^k\right)$ *et* $\rho_2^k(t) = E_{\mathbb{P}}\left(\left(I_n + \frac{\beta^k(t,A_k)}{p^k(t^-,A_k)}\right)|\mathcal{G}_t^k\right)$ *;*
on suppose que $\int_0^T \left(||\rho_1^k(t)|| + ||(\kappa.\rho_2^k)(t)||\right)dt < +\infty$ $\mathbb{P}$ *presque sûrement.*
Alors $\widetilde{W}^k(\cdot) := W(\cdot) - \int_0^\cdot \rho_1^k(s)ds$ *est* $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$*-mouvement brownien et* $\widetilde{M}^k(\cdot) := N(\cdot) - \int_0^\cdot (\kappa.\rho_2^k)(s)ds$ *est le processus compensé d'un* $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$*-processus de Poisson d'intensité* $(\kappa.\rho_2^k)$.

Remarque: Sous les hypothèses de ce théorème, le processus (W^*, M^*) est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-semimartingale et l'équation de la richesse (1.3) a donc un sens.

Preuve: Nous utilisons des arguments analogues à ceux de la proposition 1 de Corcuera et al. (2003) [14] pour généraliser leur résultat à notre modèle mixte diffusion et sauts. En particulier, nous donnons la formule du compensateur pour le processus de Poisson.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $s_1 \leq \cdots \leq s_q \leq s < t$. Soit $C \in \mathcal{F}_s$ et h une fonction mesurable bornée définie sur $\mathbb{R}^q$. Soit $H = h(L_k(s_1), \cdots, L_k(s_q))$. En utilisant le lemme 9.0.12 pour la deuxième égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{P}}\left[(W_t - W_s)\,\mathbb{I}_C\,H|B_k(s_1) = b_1, \cdots, B_k(s_q) = b_q\right] \\
&\quad = E_{\mathbb{P}}\left[(W_t - W_s)\,\mathbb{I}_C\,h\left(\mathcal{L}_k\left(A_k, b_1\right), \cdots, \mathcal{L}_k\left(A_k, b_q\right)\right)\right] \\
&\quad = E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_C\,h\left(\mathcal{L}_k\left(A_k, b_1\right), \cdots, \mathcal{L}_k\left(A_k, b_q\right)\right)\int_s^t \frac{\alpha^k(u,A_k)}{p^k(u,A_k)}du\right] \\
&\quad = E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_C\,H\int_s^t \frac{\alpha^k(u,A_k)}{p^k(u,A_k)}du|B_k(s_1) = b_1, \cdots, B_k(s_q) = b_q\right].
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux membres, on obtient

$$E_{\mathbb{P}}\left[(W_t - W_s)\,\mathbb{I}_C H\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_C H\int_s^t \frac{\alpha^k(u,A_k)}{p^k(u,A_k)}du\right].$$

Ainsi, $W(\cdot) - \int_0^{\cdot} \rho_1^k(s)ds$ est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale locale continue. Le théorème de caractérisation de Lévy implique alors que $W(\cdot) - \int_0^{\cdot} \rho_1^k(s)ds$ est un $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-mouvement brownien. Le même cheminement avec N à la place de W donne

$$E_{\mathbb{P}}\left[(N_t - N_s)\,\mathbb{I}_C H\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_C H \int_s^t \kappa(u).\left(I_n + \frac{\beta^k(u, A_k)}{p^k(u^-, A_k)}\right) du\right].$$

Ainsi, N est un processus à sauts tel que $N(\cdot) - \int_0^{\cdot}(\kappa.\rho_2^k)(s)ds$ est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale locale. $N(\cdot) - \int_0^{\cdot}(\kappa.\rho_2^k)(s)ds$ est donc le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-processus de Poisson d'intensité $(\kappa.\rho_2^k)$ (théorème 5 p. 25 [13]). □

Exemple 9.0.14
(Exemple 1 de Corcuera et al. (2003) [14]).
L_k est le processus m-dimensionnel suivant

$$(L_k)_i(t) = \delta_i W_i(T) + B_i(g_i(T-t)) \quad i = 1, \cdots, m \quad t \in [0, T]$$

où $\delta_i \neq 0$, $B = (B_i, i = 1, \cdots, m)$ est un mouvement brownien m-dimensionnel indépendant de $\mathcal{F}_T$, et $g_i : [0, T[\to [0, +\infty[$ est une fonction bornée strictement croissante avec $g_i(0) = 0$. Alors, $\rho_2^k \equiv \mathbb{I}_n$ et en utilisant le calcul de Malliavin, les auteurs montrent que

$$\rho_1^k(t) = \left(\frac{\delta_i\left((L_k)_i(t) - \delta_i W_i(t)\right)}{\delta_i^2(T-t) + g_i(T-t)}\right)_{i=1,\cdots,m} \qquad t \in [0, T[.$$

□

Maintenant nous pouvons construire une mesure de probabilité neutre au risque pour un agent possédant une information forte progressive.

Définition 9.0.15

$$\begin{cases} l_k^* & := \left((\Theta + \rho_1^k)^*, \left(\frac{\rho_2^k}{q} - I_n\right)^*\right). \\ Y_k & := \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot}\left(-(\Theta + \rho_1^k)^*(s)d\widetilde{W}^k(s) + \left(\frac{q(s)}{\rho_2^k(s)} - I_n\right)^* d\widetilde{M}^k(s)\right)\right). \end{cases}$$

Y_k est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale locale. On suppose que :

Hypothèse 10 *Y_k est une $(\mathrm{G}_T^k, \mathbb{P})$-martingale.*

Ainsi

Proposition 9.0.16 *$\widehat{\mathbb{P}^k} := Y_k(T)\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité neutre au risque pour l'agent k. $\widehat{W}$ est un $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-mouvement brownien motion et $\widehat{M}$ est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-processus de Poisson d'intensité $(q.\kappa)$. De plus,*

$$d(Y_k^{-1})(t) = Y_k^{-1}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t).$$

On définit $\zeta_k := \beta Y_k$. Jusqu'ici, tout semble marcher comme dans le cadre d'une information forte initiale. Mais la différence essentielle ici est le fait que le marché financier n'est pas complet pour un agent initié possédant une information forte progressive car en règle générale, nous n'avons pas l'existence d'une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ et sous laquelle $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{H}_t^k$ sont indépendantes pour tout $t \in [0, T[$. Par conséquent nous n'avons pas de théorème de représentation de martingales pour les $(\mathrm{G}_T^k, \widehat{\mathbb{P}^k})$-martingales locales.

9.1 Optimisation de la consommation

On considère le même problème d'optimisation de la consommation que celui du chapitre 3 (définition 3.3). Le théorème 3.0.3 et par suite la proposition 4.2.2 ne sont plus valables car une consommation satisfaisant la contrainte budgétaire (3.1) n'est pas toujours réalisable. Cependant, il est parfois possible de résoudre ce problème d'optimisation explicitement en exhibant un portefeuille optimal : par exemple, dans le cas d'une utilité logarithmique et d'un processus de ressource actualisé déterministe, on obtient la même solution que dans l'exemple 3.0.5, avec le processus Y_k défini en 9.0.15 (et non plus en 2.2.1).

Exemple 9.1.1
On suppose satisfaites les hypothèses 9 et 10, ainsi que les hypothèses du théorème 9.0.13. Nous supposons aussi que le processus $\beta\epsilon_k$ est déterministe
$U_k(t, c) = \ln(c)$, $\forall (t, c) \in [0, T] \times]0, +\infty[$.
On suppose que $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda_k = \frac{T}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{1}{\lambda_k \beta(t) Y_k(t)} \quad \text{et} \quad \beta(t)Y_k(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{T-t}{\lambda_k} - E_{\mathbb{P}}[\int_t^T \beta(s)Y_k(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{G}_t^k].$$

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}\left(\frac{T-t}{T\beta(t)}\left(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds + \beta(0)X_k(0)\right)\right)\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k(t).$$

La démonstration est identique à celle de l'exemple 3.0.5. □

9.2 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale

On considère le même problème d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale que celui du chapitre 5 (définition 5.2). Le théorème 5.0.15 et par suite la proposition 6.0.20 ne sont plus valables car une consommation et une richesse terminale satisfaisant la contrainte budgétaire (5.1) ne sont pas toujours

réalisables. On peut toutefois exhiber la stratégie optimale dans le cadre d'une utilité logarithmique et sans ressource.

Exemple 9.2.1
On suppose satisfaites les hypothèses 9 et 10, ainsi que les hypothèses du théorème 9.0.13. $U_{1,k}(t,c) = U_{2,k}(t,c) = \ln(c)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$. On suppose que $X_k(0) > 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement et que l'agent n'a pas de ressource ($\epsilon_k \equiv 0$). Alors

$$\lambda_k = \frac{T+1}{\beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{1}{\lambda_k \beta(t) Y_k(t)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_k}(T) = \frac{1}{\lambda_k \beta(T) Y_k(T)}.$$

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1} \frac{1+T-t}{(T+1)\beta(t)} \beta(0) X_k(0) \frac{1}{Y_k(t^-)} l_k(t).$$

La démonstration est identique à celle de l'exemple 5.0.18. □

Exemple 9.2.2
$U_{2,k}(t,c) = \ln(c)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$ et $U_{1,k} \equiv 0$.
(Ainsi, l'agent optimise sa richesse terminale seulement, sans consommation).
Sous les mêmes hypothèses que l'exemple précédent, on obtient le résultat suivant :

$$\lambda_k = \frac{1}{\beta(0)X_k(0)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_k}(T) = \frac{1}{\lambda_k \beta(T) Y_k(T)}.$$

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1} \beta(0) X_k(0) \frac{1}{\beta(t) Y_k(t^-)} l_k(t).$$

La démonstration est identique à celle de l'exemple 5.0.19. □

Chapitre 10

Information faible

Dans ce chapitre on suppose que le vrai modèle du processus des prix n'est que partiellement observé. Plus précisément, la mesure de probabilité effective $\mathbb{P}$ du marché est inconnue, mais les agents connaissent la mesure de probabilité neutre au risque $\widehat{\mathbb{P}}$ d'un non-initié, c'est-à-dire l'unique mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ telle que que les prix actualisés $(\beta P)_{i=1,\cdots,d}$ sont des $(\mathrm{F}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-martingales locales. L'initié est informé faiblement sur une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable L_k : il n'a à sa disposition que la filtration F_T (ainsi sa stratégie est F_T-admissible), mais il anticipe la loi de L_k sous $\mathbb{P}$.

Soit $L_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^j$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable. On note $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$ la loi L_k sous $\widehat{\mathbb{P}}$. On suppose que

Hypothèse 11 *Il existe un processus $\mathcal{F}_T$-adapté et mesurable*

$$\eta_k(t,y), \qquad t \in [0,T[, \qquad y \in \mathbb{R}^j$$

tel que, pour toute fonction f mesurable bornée,

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[f(L_k)|\mathcal{F}_t\right] = E_{\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}}\left[f(L_k)\eta_k(t,L_k)\right] = \int_{\mathbb{R}^j} f(y)\eta_k(t,y)(\omega)d\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(y) \quad dt \ \ p.s.$$

Cette hypothèse est vérifiée dès que $\int_{\mathbb{R}^j} |E_{\widehat{\mathbb{P}}}(e^{i\lambda L_k}|\mathcal{F}_t)|d\lambda < +\infty$ et dans ce cas $\eta_k(t,y) = \int_{\mathbb{R}^j} e^{-i\lambda y}|E_{\widehat{\mathbb{P}}}(e^{i\lambda L_k}|\mathcal{F}_t)|d\lambda$, $(t < T)$ (cf.Baudoin (2002) [5]).
Remarquons que cette hypothèse 11 est analogue à l'hypothèse 1 avec $\mathcal{F}_T$ et $\widehat{\mathbb{P}}$ jouant les rôles respectivement de $\mathcal{A}$ et $\mathbb{P}$.

Remarque: Cette hypothèse 11 est équivalente à l'hypothèse (A1) de [5] :
Pour toute variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_t$-mesurable X_t, $t < T$, et pour $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$ presque tout $y \in \mathbb{R}^j$, $E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_t|L_k = y) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\eta_k(t,y)X_t) = \int_\Omega X_t(\omega)\eta_k(t,y)(\omega)d\widehat{\mathbb{P}}(\omega)$.

En effet, d'une part l'hypothèse 11 est équivalente à :
pour toute variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_t$-mesurable X_t et pour toute fonction mesu-

rable bornée f

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(X_t f(L_k)\right) = \int_\Omega X_t(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}^j} f(y)\eta_k(t,y)(\omega)d\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(y)\right)d\widehat{\mathbb{P}}(\omega).$$

D'autre part, $E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(X_t f(L_k)\right) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(f(L_k)E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_t|L_k)\right)$ ainsi par Fubini, l'hypothèse 11 est équivalente à : pour toute variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_t$-mesurable X_t et pour toute fonction mesurable bornée f

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(f(L_k)E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_t|L_k)\right) = \int_{\mathbb{R}^j} f(y)\left(\int_\Omega X_t(\omega)\eta_k(t,y)(\omega)d\widehat{\mathbb{P}}(\omega)\right)d\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(y)$$

c'est-à-dire $E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_t|L_k = y) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\eta_k(t,y)X_t)$ pour $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$ presque tout $y \in \mathbb{R}^j$. □

On associe à L_k une mesure de probabilité ν_k sur $\mathbb{R}^j$ dont la densité par rapport à $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$, ξ_k, est bornée strictement positive presque sûrement. L'initié anticipe la loi de L_k sous la mesure de probabilité effective $\mathbb{P}$ comme étant ν_k. ν_k est appelée une information faible sur la fonctionnelle L_k.

Proposition 10.0.3 *(proposition 3 Baudoin (2002) [5])*
Sur $\mathcal{F}_T$, il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}^{\nu_k}$ telle que
(i) Pour toute variable aléatoire X bornée et $\mathcal{F}_T$-mesurable,

$$E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}(X|L_k) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X|L_k).$$

(ii) La loi de L_k sous $\mathbb{P}^{\nu_k}$ est ν_k.

Preuve: On vérifie aisément que $\mathbb{P}^{\nu_k}$ donnée par :
pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{P}^{\nu_k}(A) = \int_{\mathbb{R}^j} \widehat{\mathbb{P}}(A|L_k = y)\nu_k(dy)$
est l'unique mesure de probabilité sur $\mathcal{F}_T$ vérifiant (i) et (ii). □

Définition 10.0.4 *$\mathbb{P}^{\nu_k}$ est appelée la mesure de probabilité minimale associée au conditionnement (T, L_k, ν_k).*

Remarque:
D'un point de vue "niveau d'information", on peut dire que

$$\widehat{\mathbb{P}} \preceq \mathbb{P}^{\nu_k} \preceq \mathbb{P}$$

au sens où les densités de probabilités conduisent à des processus de richesse différents et ordonnés dans ce sens.

Lemme 10.0.5

$$(1) \qquad \frac{d\mathbb{P}^{\nu_k}}{d\widehat{\mathbb{P}}} = \frac{d\nu_k}{d\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}}(L_k) = \xi_k(L_k).$$

$$(2) \qquad \left(\frac{d\mathbb{P}^{\nu_k}}{d\widehat{\mathbb{P}}}\right)_{|\mathcal{F}_t} = \int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(t,y)\nu_k(dy) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\xi_k(L_k)|\mathcal{F}_t).$$

Preuve:
(1). $\forall\ A \in \mathcal{F}_T$,

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\mathbf{I}_A \frac{d\nu_k}{d\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}}(L_k)\right) &= E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\widehat{\mathbb{P}}(A|L_k = y)\frac{d\nu_k}{d\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}}(y)\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(dy)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^j} \widehat{\mathbb{P}}(A|L_k = y)\nu_k(dy) \\ &= \mathbb{P}^{\nu_k}(A). \end{aligned}$$

(2). Soit X_t une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_t$-mesurable.

$$E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}(X_t) = \int_{\mathbb{R}^j} E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_t|L_k = y)\nu_k(dy).$$

Par l'hypothèse 11 et la remarque qui la suit,

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_t|L_k = y) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\eta_k(t,y)X_t),$$

ainsi, par le théorème de Fubini,

$$E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}(X_t) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(t,y)\nu_k(dy)X_t\right).$$

De plus,

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\xi_k(L_k)|\mathcal{F}_t) = \int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(t,y)\xi_k(y)\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(dy) = \int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(t,y)\nu_k(dy).$$

□

On définit

Définition 10.0.6

$$\begin{cases} \zeta_k(t) & := E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\xi_k(L_k)|\mathcal{F}_t). \\ Y_k & := \frac{1}{\zeta_k}. \end{cases}$$

Proposition 10.0.7 *$\zeta_k = \frac{1}{Y_k}$ est une $(\mathrm{F}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-martingale locale strictement positive, il existe donc un processus l_k F_T-prévisible tel que*

$$\begin{cases} d\frac{1}{Y_k}(t) & = \frac{1}{Y_k}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t) \\ \frac{1}{Y_k}(0) & = 1. \end{cases}$$

Exemple 10.0.8
Soit $L_k = \widehat{W}_i(T)$ et on étudie la cas où ν_k est la mesure gaussienne

$$\nu_k(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s}\exp\left(\frac{-(y-m)^2}{2s^2}\right)dy, \qquad m \in \mathbb{R}, \qquad s^2 \leq T.$$

Alors

$$\xi(y) = \frac{\sqrt{T}}{s} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right),$$

$$\eta_k(t,y) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_i(t))^2}{2(T-t)}\right),$$

$$\zeta_k(t) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_i(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy.$$

Ainsi dans cet exemple $d\zeta_k(t) = \zeta_k(t^-) l_k^*(t) d\widehat{S}(t)$ avec

$$\begin{aligned} (l_k)_i(t) &= \frac{\int \frac{y-\widehat{W}_i(t)}{T-t} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_i(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy}{\int \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_i(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy}, \\ (l_k)_j &\equiv 0 \qquad \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

□

10.1 Lien entre information faible et information forte initiale

Ceci généralise le théorème 2.2 et la proposition 2.3 de Baudoin (2001) [6] dans le cadre de notre modèle mixte diffusion et sauts.
Par définition, η_k est un processus de densité conditionnelle, c'est donc une $(\mathbb{F}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-martingale positive qui peut s'écrire sous la forme d'une exponentielle de Doléans.

Lemme 10.1.1 *Pour $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$ presque tout $y \in \mathbb{R}^j$, le processus $\eta_k(t,y)$ peut s'écrire sous la forme d'une exponentielle de Doléans : pour $t \in [0,T[$*

$$\eta_k(t,y) = \mathcal{E}\left[\int_0^t \alpha_{1,k}(s,y) d\widehat{W}(s) + \int_0^t \alpha_{2,k}(s,y) d\widehat{M}(s)\right] \quad \textit{sur } \{\eta_k(t,y) > 0\}. \tag{10.1}$$

Preuve: cf. lemme 1.8 de Jacod (1985)[28].

Théorème 10.1.2 *Soit G_T la filtration élargie définie par*

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L_k), \qquad t \in [0,T].$$

Le processus B défini par

$$dB(t) = d\widehat{W}(t) - \alpha_{1,k}(t, L_k) dt, \qquad t \in [0,T[$$

est à la fois un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$ *et un* $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P}^{\nu_k})$*-mouvement brownien.*
On suppose que les coordonnées de $(I_n + \frac{\int_{\mathbb{R}^j} \alpha_{2,k}(s,y)\eta_k(s,y)\nu_k(dy)}{\int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(s,y)\nu_k(dy)})$ *sont strictement positives. Alors le processus* $\overline{M}$ *défini par*

$$\begin{aligned} d\overline{M}(t) &= d\widehat{M}(t) - (q.\kappa)(t).\alpha_{2,k}(t, L_k)dt \\ &= dN(t) - (q.\kappa)(t)(I_n + \alpha_{2,k}(t, L_k)), \quad t \in [0, T[\end{aligned}$$

est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$ *et d'un* $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P}^{\nu_k})$*-processus de Poisson d'intensité* $(q.\kappa).(I_n + \alpha_{2,k}(\cdot, L_k))$.

Preuve:
D'après le (2) du lemme 10.0.5, $D_t := \int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(t,y)\nu_k(dy)$ est le processus densité de $(d\mathbb{P}^{\nu_k})_{|\mathcal{F}_t}$ par rapport à $(d\widehat{\mathbb{P}})_{|\mathcal{F}_t}$, $t \in [0, T[$. Par l'équation (10.1) et le théorème de Fubini,

$$d[D, \widehat{W}]_t = \left(\int_{\mathbb{R}^j} \alpha_{1,k}(t,y)\eta_k(t,y)\nu_k(dy) \right) dt,$$

$$d[D, \widehat{M}]_t = \left(\int_{\mathbb{R}^j} q(t).\kappa(t).\alpha_{2,k}(t,y)\eta_k(t,y)\nu_k(dy) \right) dt.$$

Ainsi, par le théorème de Girsanov,

$$\widehat{W} - \int_0^{\cdot} \frac{\int_{\mathbb{R}^j} \alpha_{1,k}(s,y)\eta_k(s,y)\nu_k(dy)}{\int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(s,y)\nu_k(dy)} ds \text{ est un } (\mathrm{F}_T, \mathbb{P}^{\nu_k})\text{-mouvement brownien} \quad (10.2)$$

et si les coordonnées de $(I_n + \frac{\int_{\mathbb{R}^j} \alpha_{2,k}(s,y)\eta_k(s,y)\nu_k(dy)}{\int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(s,y)\nu_k(dy)})$ sont strictement positives,

$$\widehat{M} - \int_0^{\cdot} \frac{\int_{\mathbb{R}^j} q(s).\kappa(s).\alpha_{2,k}(s,y)\eta_k(s,y)\nu_k(dy)}{\int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(s,y)\nu_k(dy)} ds \text{ est le processus compensé d'un}$$

$$(\mathrm{F}_T, \mathbb{P}^{\nu_k})\text{-processus de Poisson d'intensité } (q.\kappa).(I_n + \frac{\int_{\mathbb{R}^j} \alpha_{2,k}(\cdot,y)\eta_k(\cdot,y)\nu_k(dy)}{\int_{\mathbb{R}^j} \eta_k(\cdot,y)\nu_k(dy)}). \quad (10.3)$$

Montrons maintenant que B est un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-mouvement brownien. Puisque B est un processus continu de crochet $d\langle B \rangle_t = dt$, il suffit donc de montrer que B est une $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-martingale locale (théorème de Paul Lévy). Or, en appliquant le résultat (10.2) avec $\nu_k = \delta_y$, on a que pour $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$ presque tout $y \in \mathbb{R}^j$, B est une $(\mathrm{F}_T, \mathbb{P}^{\delta_y})$-martingale locale (où δ_y est la mesure de Dirac en y). Ainsi pour $s < t < T$, $A \in \mathcal{F}_s$ et Λ un borélien de $\mathbb{R}^j$

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left((B_t - B_s)\, \mathbb{I}_{A \cap (L_k \in \Lambda)} \right) = \int_\Lambda E_{\mathbb{P}^{\delta_y}}\left((B_t - B_s)\, \mathbb{I}_A \right) \widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(dy) = 0.$$

où la première égalité provient du (i) de la Proposition 10.0.3 avec $\nu_k = \delta_y$. Ceci prouve que B est un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-mouvement brownien. Montrons que c'est aussi un

$(\mathrm{G}_T, \mathbb{P}^{\nu_k})$-mouvement brownien. En effet, puisque B est un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-mouvement brownien, il est $\widehat{\mathbb{P}}$ indépendant de $\mathcal{G}_0 = \sigma(L_k)$. Or par définition de $\mathbb{P}^{\nu_k}$ (proposition 10.0.3 (i)), $\mathbb{P}^{\nu_k}$ et $\widehat{\mathbb{P}}$ coïncident sur les événements indépendants de L_k. Ainsi la loi de B est la même sous $\mathbb{P}^{\nu_k}$ et sous $\widehat{\mathbb{P}}$.
Montrons maintenant que $\overline{M}$ est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-processus de Poisson d'intensité $(q.\kappa).(I_n + \alpha_{2,k}(\cdot, L_k))$. Puisque N est un processus à sauts, il suffit de montrer que $\overline{M}$ est une $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-martingale locale (théorème 5 page 25 de [13]). Or pour $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$ presque tout $y \in \mathbb{R}^j$, $\overline{M}$ est une $(\mathrm{F}_T, \mathbb{P}^{\delta_y})$-martingale locale (en appliquant le résultat (10.3) avec $\nu_k = \delta_y$). Ainsi pour $s < t < T$, $A \in \mathcal{F}_s$ et Λ un borélien de $\mathbb{R}^j$, et par le (i) de la proposition 10.0.3

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\left(\overline{M}_t - \overline{M}_s\right) \mathbb{I}_{A\cap(L_k\in\Lambda)}\right) = \int_\Lambda E_{\mathbb{P}^{\delta_y}}\left(\left(\overline{M}_t - \overline{M}_s\right) \mathbb{I}_A\right) \widehat{\mathbb{P}}_{L_k}(dy) = 0.$$

Ceci prouve que $\overline{M}$ est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T, \widehat{\mathbb{P}})$-processus de Poisson d'intensité $(q.\kappa).(I_n + \alpha_{2,k}(\cdot, L_k))$. Puisque N est $\widehat{\mathbb{P}}$ indépendant de $\mathcal{G}_0 = \sigma(L_k)$ et que $\mathbb{P}^{\nu_k}$ et $\widehat{\mathbb{P}}$ coïncident sur les événements indépendants de L_k, $\overline{M}$ est le processus compensé d'un $(\mathrm{G}_T, \mathbb{P}^{\nu_k})$-processus de Poisson d'intensité $(q.\kappa).(I_n + \alpha_{2,k}(\cdot, L_k))$. □

Ce théorème nous permet de faire le lien entre une information faible et une information forte initiale, ou plus précisément sa "mesure martingale associée" (terminologie d'Amendinger (2000) [1], cf. notre hypothèse 1).

Remarque 10.1.3 *On suppose que ν_k est équivalente à $\widehat{\mathbb{P}}_{L_k}$. Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}_T$ équivalente à $\widehat{\mathbb{P}}$ telle que la loi de L_k sous $\mathbb{Q}$ est ν_k. Alors $\mathbb{P}^{\nu_k}$ est l'unique mesure de probabilité sur $\sigma\left(B(s), s < T\right) \vee \sigma\left(\overline{M}(s), s < T\right) \vee \sigma(L_k)$ telle que*
$\mathbb{P}^{\nu_k} = \widehat{\mathbb{P}}$ *sur* $\sigma\left(B(s), s < T\right) \vee \sigma\left(\overline{M}(s), s < T\right)$ *et*
$\mathbb{P}^{\nu_k} = \mathbb{Q}$ *sur* $\sigma(L_k)$.
Selon la terminologie d'Amendinger (2000) [1], $\mathbb{P}^{\nu_k}$ est la mesure martingale associée à $\mathbb{Q}$.

10.2 Optimisation de la consommation

Un agent faiblement informé veut maximiser l'application

$$(\pi_k, c_k) \to V(\pi_k, c_k) := E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}[\int_0^T U_k(t, c_k(t))dt] \tag{10.4}$$

parmi toutes les stratégies F_T-admissibles, qui sont donc caractérisées par la contrainte budgétaire (cf. proposition 3.0.2)

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds] \leq \beta(0)X_k(0). \tag{10.5}$$

Le lagrangien de ce problème sous contrainte est :

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T \zeta_k(t)U_k(t,c_k(t))dt + \int_0^T \lambda\beta(t)(c_k(t)-\epsilon_k(t))dt\right]$$

où λ est une constante. La consommation optimale c_k doit vérifier

$$\zeta_k(t)\frac{\partial}{\partial c}U_k(t,c_k(t)) = \lambda\beta(t)$$

c'est-à-dire

$$c_k(t) = I_k(t,\lambda\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)}).$$

Théorème 10.2.1 *On suppose l'hypothèse 11 satisfaite.*
S'il existe une constante λ_k strictement positive vérifiant

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)(I_k(t,\lambda_k\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)}) - \epsilon_k(t))dt] = \beta(0)X_k(0)$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation du $k^{ème}$ agent faiblement informé. La consommation optimale est $\widehat{c_k}(t) = I_k(t,\lambda_k\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)})$.
La richesse optimale est
$X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(t) = \frac{1}{\beta(t)}E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_t^T \beta(s)(\widehat{c_k}(s)-\epsilon_k(s))ds|\mathcal{F}_t]$.
La valeur optimale de ce problème d'optimisation est

$$V(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k}) = E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}[\int_0^T U_k o I_k(t,\lambda_k\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)})dt].$$

Remarque: L'existence d'une telle constante λ_k est assurée dès que la fonction $\lambda \longrightarrow E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)I_k(t,\lambda\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)})dt]$ est finie et que $E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\widehat{\mathbb{P}}$ presque sûrement.

Exemple 10.2.2
On suppose 11. $U_k(t,c) = \ln(c)$, $\forall(t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que $E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\widehat{\mathbb{P}}$ presque sûrement. Alors puisque ζ_k est le processus densité d'une mesure de probabilité,

$$\lambda_k = \left(\frac{E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt) + \beta(0)X_k(0)}{E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\int_0^T \zeta_k(t)dt)}\right)^{-1} = \left(\frac{E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt) + \beta(0)X_k(0)}{T}\right)^{-1},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{\zeta_k(t)}{\lambda_k\beta(t)} \qquad \text{et} \qquad \beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{(T-t)\zeta_k(t)}{\lambda_k} - E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds|\mathcal{F}_t].$$

Nous allons exprimer le portefeuille optimal dans le cas où $\beta\epsilon_k$ est un processus déterministe. Dans ce cas

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{(T-t)\zeta_k(t)}{\lambda_k} - \int_t^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds.$$

Puisque $\qquad d\zeta_k(t) = \zeta_k(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t),$

$d(\beta(t)\widehat{X_k}(t)) - \frac{T-t}{\lambda_k}\zeta_k(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$ est un processus à variations finies.

En identifiant avec la forme différentielle obtenue dans l'équation de la richesse (2.2), on obtient, par unicité de la décomposition de la $\mathbb{P}$-semimartingale $\beta(t)\widehat{X_k}(t)$, (Théorème de Bichteler-Dellacherie, Protter (1990) p. 114 [45])

$$\beta(t)\widehat{\pi_k}^*(t^-)\sigma(t) = \frac{T-t}{\lambda_k}\zeta_k(t^-)l_k^*(t).$$

Ainsi

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}\left(\frac{T-t}{T\beta(t)}\left(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds + \beta(0)X_k(0)\right)\right)\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k(t).$$

□

10.3 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale

Un agent faiblement informé veut maximiser l'application

$$(\pi_k, c_k) \to V(\pi_k, c_k) := E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}[\int_0^T U_{1,k}(t, c_k(t))dt + U_{2,k}(X_k^{(\pi_k,c_k)}(T))] \tag{10.6}$$

parmi toutes les stratégies F_T-admissibles, caractérisées par la contrainte budgétaire (cf. proposition 5.0.14)

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\beta(T)X_k^{(\pi_k,c_k)}(T) + \int_0^T \beta(s)(c_k(s) - \epsilon_k(s))ds] \leq \beta(0)X_k(0). \tag{10.7}$$

Théorème 10.3.1 *On suppose l'hypothèse 11 satisfaite.*
S'il existe une constante λ_k strictement positive vérifiant

$$E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\beta(T)I_{2,k}(\lambda_k\frac{\beta(T)}{\zeta_k(T)}) + \int_0^T \beta(t)(I_{1,k}(t, \lambda_k\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)}) - \epsilon_k(t))dt] = \beta(0)X_k(0)$$

alors il existe une unique solution au problème d'optimisation du $k^{ème}$ agent faiblement informé. La consommation optimale est $\widehat{c_k}(t) = I_{1,k}(t, \lambda_k\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)})$.
La richesse terminale optimale est $X_k^{(\widehat{\pi_k},\widehat{c_k})}(T) = I_{2,k}(\lambda_k\frac{\beta(T)}{\zeta_k(T)})$.

Remarque: L'existence d'une telle constante λ_k est assurée dès que la fonction $\lambda \longrightarrow E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\,\beta(T)I_{2,k}(\lambda\frac{\beta(T)}{\zeta_k(T)}) + \int_0^T \beta(t)I_{1,k}(t, \lambda\frac{\beta(t)}{\zeta_k(t)})dt\,]$ est finie et que $E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\widehat{\mathbb{P}}$ presque sûrement.

Exemple 10.3.2
On suppose 11. $U_{1,k}(t,c) = U_{2,k}(c) = \ln(c)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que $E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\widehat{\mathbb{P}}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda_k = \left(\frac{E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt) + \beta(0)X_k(0)}{T+1}\right)^{-1},$$

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{\zeta_k(t)}{\lambda_k\beta(t)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{X_k}(T) = \frac{\zeta_k(T)}{\lambda_k\beta(T)}.$$

Nous allons maintenant exprimer le portefeuille optimal dans le cas où le processus ressource ϵ_k est identiquement nul. D'après la preuve de la proposition 5.0.14,

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\beta(T)\widehat{X_k}(T) + \int_0^T \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds|\mathcal{F}_t].$$

$\epsilon_k \equiv 0$ donc

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\zeta_k(T) + \int_0^T \zeta_k(s)ds|\mathcal{F}_t]$$

et puisque $d\zeta_k(t) = \zeta_k(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$, on obtient

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}}}[1 + \int_0^T \zeta_k(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s) + T$$
$$+ \int_0^T(\int_0^s \zeta_k(u^-)l_k^*(u)d\widehat{S}(u))ds|\mathcal{F}_t].$$

En utilisant Fubini et en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_t$, on obtient :

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) + \int_0^t \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds = \beta(0)X_k(0) + \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}[\int_0^t (1+T-s)\zeta_k(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)]$$

et en identifiant avec l'expression (2.2), on trouve

$$\beta(s)\sigma^*(s)\widehat{\pi}_k(s^-) = \frac{\beta(0)X_k(0)(1+T-s)}{T+1}\frac{1}{Y_k(s^-)}l_k(s).$$

D'autre part,

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\beta(T)\widehat{X_k}(T) + \int_t^T \beta(s)\widehat{c_k}(s)ds|\mathcal{F}_t]$$

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}}}[1 + \int_0^T \zeta_k(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)$$
$$+T - t + \int_t^T(\int_0^s \zeta_k(u^-)l_k^*(u)d\widehat{S}(u))ds|\mathcal{F}_t]$$

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}E_{\widehat{\mathbb{P}}}[1 + \int_0^T \zeta_k(s^-)l_k^*(s)d\widehat{S}(s)$$

$$+(T-t)[1+\int_0^t \zeta_k(u^-)l_k^*(u)d\widehat{S}(u)|\mathcal{F}_t].$$

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)(T+1-t)}{T+1}\zeta_k(t).$$

Par suite nous pouvons exprimer le portefeuille optimal proportionnellement à la richesse optimale (on rappelle que, par définition, $\zeta_k = \frac{1}{Y_k}$) :

$$\sigma^*(s)\widehat{\pi_k}(s) = \frac{Y_k(s)}{Y_k(s^-)}\widehat{X_k}(s)l_k(s)$$

□

Exemple 10.3.3
Donnons le résultat du problème d'optimisation de la richesse terminale seulement avec utilité logarithmique. On suppose 11.
$U_{2,k} \equiv 0$ et $U_{1,k}(t,c) = \ln(c)$, $\forall (t,c) \in [0,T]\times]0,+\infty[$.
On suppose que $E_{\widehat{\mathbb{P}}}[\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt] + \beta(0)X_k(0) > 0$ $\widehat{\mathbb{P}}$ presque sûrement. Alors

$$\lambda_k = \frac{1}{E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\int_0^T \beta(t)\epsilon_k(t)dt) + \beta(0)X_k(0)},$$

$$\widehat{X_k}(T) = \frac{\zeta_k(T)}{\lambda_k\beta(T)}.$$

Si le processus ressource ϵ_k est identiquement nul, on peut exprimer le portefeuille :

$$\beta(s)\sigma^*(s)\widehat{\pi_k}(s) = \beta(0)X_k(0)\frac{1}{Y_k(s^-)}l_k(s).$$

□

Remarque: Si tous les agents ont une information faible, n'ont pas de ressources et optimisent seulement leur richesse terminale, alors

$$\sum_{k=1}^K \widehat{\pi_k}^* = 0_{\mathbb{R}^d} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^K \beta(T)\widehat{X_k}(T) = \sum_{k=1}^K \beta(0)X_k(0)$$

En effet, d'après la relation (2.2),

$$\beta(T)X_k(T) = \beta(0)X_k(0) + \int_0^T \beta(s)\pi_k^*(s^-)\sigma(s)d\widehat{S}(s),$$

donc pour tout $t \in [0,T]$ $E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\beta(T)X_k(T)|\mathcal{F}_t) = \beta(t)X_k(t)$. Puisque la tribu $\mathcal{F}_t$ est la même pour tous les agents (ce qui n'est pas le cas pour une information forte !), $E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\sum_{k=1}^K \beta(T)X_k(T)|\mathcal{F}_t) = \sum_{k=1}^K \beta(t)X_k(t)$. D'où $\sum_{k=1}^K \beta(T)X_k(T) = \sum_{k=1}^K \beta(0)X_k(0)$ implique que $\sum_{k=1}^K \beta(t)X_k(t) = \sum_{k=1}^K \beta(0)X_k(0)$ pour tout $t \in [0,T]$ et donc que $\sum_{k=1}^K \pi_k^* = 0_{\mathbb{R}^d}$. La réciproque est immédiate.

Chapitre 11

Equilibre avec utilité logarithmique

Dans ce chapitre, nous allons voir que les processus $\frac{1}{Y_k}$ des agents (définis respectivement en 2.2.1, 9.0.15 et 10.0.6) jouent un rôle central dans la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre. Ceci s'explique par le fait que l'information privée de l'initié k est "résumée " dans le processus $\frac{1}{Y_k}$, c'est-à-dire dans la mesure de probabilité $\widehat{\mathbb{P}^k}$ pour un agent fortement informé (respectivement dans $\mathbb{P}^{\nu_k}$ pour un agent faiblement informé).
Nous commençons ce chapitre par un paragraphe sur le lien entre le gain d'un initié (par rapport à un non-initié) et ces processus $\frac{1}{Y_k}$, ou plus exactement l'entropie relative de ces différentes mesures de probabilités.

11.1 Gain d'un initié et entropie

11.1.1 Information forte initiale

On considère deux agents. Le premier agent, que l'on désignera par l'indice 0, est non-initié. Le deuxième agent, que l'on désignera par l'indice k, a une information privée forte initiale.

Optimisation de la richesse terminale

Dans cette section, les deux agents optimisent le logarithme de leur richesse terminale, avec le même processus de ressource ϵ et la même richesse initiale $X(0)$, cf. exemple 5.0.19 page 76. On suppose que le processus $\beta\epsilon$ est déterministe. La richesse terminale optimale de l'agent i ($i = 0$ ou $i = k$) est alors donnée par

$$\widehat{X_i}(T) = \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon(s)ds + \beta(0)X(0)}{\beta(T)Y_i(T)}.$$

On définit le gain du deuxième agent par rapport au premier, relativement à la mesure $\mathbb{P}$, par

$$Gain(\mathbb{P}) := E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\widehat{X_k}(T)\right)\right) - E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\widehat{X_0}(T)\right)\right)$$

Ainsi $Gain(\mathbb{P}) = E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\frac{Y_0(T)}{Y_k(T)}\right)\right)$. Comparons le processus Y_k d'un initié avec le processus Y_0 d'un non initié (pour lequel $\rho_1^0 = 0_{\mathbb{R}^m}$ et $\rho_2^0 = I_n$).

Lemme 11.1.1 $Y_k = \frac{Y_0}{Z_k}$

Preuve: Nous rappelons que $Z_k(t) = E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{L_k}}|\mathcal{G}_t^k]$ et que

$$dZ_k(t) = Z_k(t^-)[\rho_1^{k*}(t)dW(t) + (\rho_2^k(t) - I_n)^* dM(t)]$$

(cf. le début du paragraphe 2.1 page 31). Par suite

$$\frac{1}{Z_k} = \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot}\left(-\rho_1^{k*}(s)d\widetilde{W}^k(s) + (\frac{1}{\rho_2^k(s)} - I_n)^* d\widetilde{M}^k(s)\right)\right).$$

En outre

$$Y_0 = \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot}(-\Theta^*(s)dW(s) + (q(s) - I_n)^* dM(s))\right).$$

Puisque $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y - [X, Y])$ et par la définition 2.2.1 de Y_k

$$\frac{Y_0}{Z_k} = \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot}\left(-(\Theta + \rho_1^k)^*(s)d\widetilde{W}^k(s) + (\frac{q}{\rho_2^k}(s) - I_n)^* d\widetilde{M}^k(s)\right)\right) = Y_k.$$

□

Par suite

$$Gain(\mathbb{P}) = E_{\mathbb{P}}(\ln(Z_k(T))) = E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{L_k}}\right)\right) = H(\mathbb{P}\,|\mathbb{Q}^{L_k}) \geq 0$$

où $H(\mathbb{P}\,|\mathbb{Q}^{L_k})$ est l'entropie relative (ou distance de Kullback-Leibler) de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{L_k}$ (une entropie est toujours positive, elle mesure la dissemblance entre deux mesures de probabilité).

Nous avons ainsi généralisé à un marché mixte les résultats de Pikovsky et Karatzas (1996) [38] (lemmes 2.3 et 2.5) et d'Amendinger, Imkeller et Schweizer (1998) [2] (paragraphes 3 et 4). Leur démonstration est différente de la nôtre car ils considèrent le processus de ressource nul et passent par le calcul explicite du portefeuille, alors que notre preuve ne nécessite pas la connaissance du portefeuille.

Regardons maintenant le gain du deuxième agent par rapport au premier, relativement à la mesure $\widehat{\mathbb{P}}$:

$$\begin{aligned} Gain(\widehat{\mathbb{P}}) &:= E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\widehat{X_k}(T)\right)\right) - E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\widehat{X_0}(T)\right)\right) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\frac{Y_0(T)}{Y_k(T)}\right)\right) \\ &= E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\widehat{\mathbb{P}^k}}\right)\right) = H(\widehat{\mathbb{P}}\,|\widehat{\mathbb{P}^k}) \end{aligned}$$

car $\widehat{\mathbb{P}} = Y_0(T)\mathbb{P}$ et $\widehat{\mathbb{P}^k} = Y_k(T)\mathbb{P}$.

Optimisation de la consommation

Dans cette section, les deux agents optimisent le logarithme de leur consommation, avec le même processus de ressource ϵ et la même richesse initiale $X(0)$, cf. exemple 3.0.5 page 43. On suppose que le processus $\beta\epsilon$ est déterministe. La consommation optimale de l'agent i ($i = 0$ ou $i = k$) est alors donnée par

$$\widehat{c_i}(t) = \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon(s)ds + \beta(0)X(0)}{\beta(t)Y_i(t)}.$$

On définit le gain du deuxième agent par rapport au premier, relativement à la mesure $\mathbb{P}$, par

$$\begin{aligned} Gain(\mathbb{P}) &:= E_{\mathbb{P}}\left(\int_0^T \ln\left(\widehat{c_k}(t)\right)dt\right) - E_{\mathbb{P}}\left(\int_0^T \ln\left(\widehat{c_0}(t)\right)dt\right) \\ &= E_{\mathbb{P}}\left(\int_0^T \ln\left(\frac{Y_0(t)}{Y_k(t)}\right)dt\right) \\ &= E_{\mathbb{P}}\left(\int_0^T \ln\left(Z_k(t)\right)dt\right). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Or $Z_k(t) = \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{L_k}}\right)_{|\mathcal{G}_t^k}$ et l'entropie relative de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}^{L_k}$ sur $\mathcal{G}_t^k$ est donnée par $H_t(\mathbb{P}\,|\mathbb{Q}^{L_k}) = E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(Z_k(t)\right)\right)$. Nous supposons que la condition de Novikov (2.1) est réalisée et que $E_{\mathbb{P}}\left(\sum_{0<s\leq T} |\ln\left(\frac{q}{\rho_2^k}\right)(s)|\Delta N(s)\right) < +\infty$ (ce qui est vrai dès que le processus $\frac{q}{\rho_2^k}$ est minoré par une constante strictement positive, $dt \otimes d\mathbb{P}$ p.s.). Le théorème de Fubini est alors justifié dans (11.1) et

$$Gain(\mathbb{P}) = \int_0^T H_t(\mathbb{P}\,|\mathbb{Q}^{L_k})dt.$$

Nous allons maintenant voir les liens que l'on peut trouver entre l'entropie et le gain d'un initié pour une information forte progressive et une information faible. Nous nous limiterons à l'optimisation du logarithme de la richesse terminale. On considère donc à nouveau deux agents. Le premier agent, que l'on désignera par l'indice 0, est non-initié. Le deuxième, que l'on désignera par l'indice k, a une information privée forte progressive (respectivement une information faible).

11.1.2 Information forte progressive

L'agent initié possède une information forte progressive. On suppose que les deux agents, initié ou non, ont la même richesse initiale $X(0)$ et n'ont pas de ressource, cf. exemple 9.2.2 page 127. La richesse terminale optimale de l'agent i ($i = 0$ ou $i = k$) est alors donnée par

$$\widehat{X_i}(T) = \frac{\beta(0)X(0)}{\beta(T)Y_i(T)}.$$

On définit le gain du deuxième agent par rapport au premier, relativement à la mesure à la mesure $\widehat{\mathbb{P}}$

$$\begin{aligned} Gain(\widehat{\mathbb{P}}) &:= E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\widehat{X_k}(T)\right)\right) - E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\widehat{X_0}(T)\right)\right) = E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\frac{Y_0(T)}{Y_k(T)}\right)\right) \\ &= E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\ln\left(\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\widehat{\mathbb{P}^k}}\right)\right) = H(\widehat{\mathbb{P}}\,|\widehat{\mathbb{P}^k}) \end{aligned}$$

car $\widehat{\mathbb{P}} = Y_0(T)\mathbb{P}$ et $\widehat{\mathbb{P}^k} = Y_k(T)\mathbb{P}$.

11.1.3 Information faible

L'agent initié possède une information faible. On suppose que les deux agents, initié ou non, ont le même processus de ressource ϵ et la même richesse initiale $X(0)$, cf. exemple 10.3.3 page 138. La richesse terminale optimale de l'agent i ($i = 0$ ou $i = k$) est alors donnée par

$$\widehat{X_i}(T) = \frac{E_{\widehat{\mathbb{P}}}(\int_0^T \beta(s)\epsilon(s)ds) + \beta(0)X(0)}{\beta(T)Y_i(T)}.$$

On définit le gain du deuxième agent par rapport au premier, relativement à la mesure à la mesure $\mathbb{P}^{\nu_k}$

$$\begin{aligned} Gain(\mathbb{P}^{\nu_k}) &:= E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}\left(\ln\left(\widehat{X_k}(T)\right)\right) - E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}\left(\ln\left(\widehat{X_0}(T)\right)\right) = E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}\left(\ln\left(\frac{Y_0(T)}{Y_k(T)}\right)\right) \\ &= E_{\mathbb{P}^{\nu_k}}\left(\ln\left(\frac{d\mathbb{P}^{\nu_k}}{d\mathbb{P}}\right)\right) = H(\mathbb{P}^{\nu_k}\,|\mathbb{P}) \end{aligned}$$

car $\mathbb{P}^{\nu_k} = \frac{1}{Y_k(T)}\widehat{\mathbb{P}}$ et $\widehat{\mathbb{P}} = Y_0(T)\mathbb{P}$.

Remarque: Il est important de faire attention à la mesure de probabilité sous laquelle nous calculons le gain. Pour le gain d'un agent faiblement initié, nous avons utilisé la probabilité $\mathbb{P}^{\nu_k}$ car il optimise l'espérance de sa richesse terminale sous $\mathbb{P}^{\nu_k}$ (cf. 10.4) et non pas sous $\mathbb{P}$ comme un agent fortement initié. D'autre part,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\widehat{X_k}(T)\right)\right) - E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\widehat{X_0}(T)\right)\right) &= E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\frac{Y_0(T)}{Y_k(T)}\right)\right) \\ &= -E_{\mathbb{P}}\left(\ln\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{\nu_k}}\right)\right) \\ &= -H(\mathbb{P}\,|\mathbb{P}^{\nu_k}) \leq 0. \end{aligned}$$

11.2 Optimisation de la consommation et ressources actualisées déterministes

Pour tout $k = 1, \cdots, K$, soit U_k la fonction d'utilité du k-ième agent et on considère le problème d'optimisation de la consommation de chaque agent. Par souci de simplicité, on suppose ici que les agents n'ont pas de richesse initiale ($X_k(0) = 0$ pour tout k). Dans le chapitre 4, dans le cadre où les agents informés possèdent une information forte initiale, nous avons étudié la formation d'un équilibre (4.0.7) ; la condition d'équilibre portait sur la consommation (cf.relation (7.1)). La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre obtenue (proposition 4.2.2) est démontrée sous des hypothèses assez contraignantes. Tout d'abord, nous avons besoin de l'hypothèse 3 d'indépendance conditionnelle de σ-algèbres. En outre, le fait que les agents connaissent une fonctionnelle ω par ω et immédiatement à l'instant $t = 0$ est assez restrictif. Nous ne pouvons pas obtenir une telle condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre avec les autres types d'information privée. En effet, pour un agent initié possédant une information forte progressive, le marché n'est pas complet et on ne peut pas toujours trouver une consommation optimale en résolvant l'équation (3.5) comme dans le théorème 3.0.3, qui est la première clé de la proposition 4.2.2. De plus, pour un agent initié possédant une information faible, le marché est certes complet mais on ne peut pas faire une hypothèse équivalente à l'hypothèse 3 qui implique que tous les agents partagent la même mesure de probabilité (ce qui est la seconde clé de notre proposition 4.2.2). En fait, dans le cadre d'une information faible, partager la même mesure de probabilité est strictement équivalent au fait de partager la même information car les agents n'ont pas de filtration élargie avec une information faible. Par conséquent, la proposition 4.2.10 nous invite à nous intéresser à la condition d'équilibre portant sur les portefeuilles $\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi}_k^* = 0_{\mathbb{R}^d}$ pour les trois types d'information privée.

En fait, la condition d'équilibre (7.1) est restrictive, c'est pourquoi nous allons maintenant nous intéresser à la condition d'équilibre portant sur le portefeuille

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi}_k^*(t) = 0_{\mathbb{R}^d}, \qquad t \in [0, T]. \tag{11.2}$$

Hypothèse 12 *On considère le problème d'optimisation de la consommation avec une utilité logarithmique et des ressources actualisées déterministes. On suppose que les agents n'ont pas de richesse initiale. Pour un agent initié possédant une information forte initiale (respectivement une information forte progressive, ou une information faible), on suppose 1 et 2 (respectivement 9, les hypothèses du théorème 9.0.13 et 10, ou 11) satisfaites.*

Dans ce cas, on peut exprimer le portefeuille optimal pour ces trois types d'information privée, cf. exemples 3.0.5, 9.1.1 et 10.2.2. Pour une information forte (initiale

ou progressive) ou une information faible, le portefeuille optimal est donné par

$$\beta(t)\widehat{\pi}_k^*(t)\sigma(t) = \frac{T-t}{T}\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k^*(t) \tag{11.3}$$

avec les processus Y_k correspondants définis respectivement en 2.2.1, 9.0.15 et 10.0.6. Il est important ici de remarquer que, pour chacun de ces trois types de processus Y_k,

$$d\frac{1}{Y_k}(t) = \frac{1}{Y_k}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{Y_k}(0) = 1$$

avec les l_k correspondants et le **même** $\widehat{S}(t)$ (cf. lemme 2.2.2, propositions 9.0.16 et 10.0.7). Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K \widehat{\pi}_k^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^K \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{Y_k(t^-)}l_k^*(t) = 0 \qquad t \in [0,T[\\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^K \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{Y_k(t^-)}l_k^*(t)d\widehat{S}(t) = 0 \qquad t \in [0,T[\\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^K \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{Y_k(t)} = \sum_{k=1}^K \int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds \qquad t \in [0,T[.
\end{aligned}$$

On a démontré le théorème suivant :

Théorème 11.2.1 *Sous l'hypothèse 12, si les agents ont une information forte (initiale ou progressive) ou une information faible, alors*

$$\sum_{k=1}^K \widehat{\pi}_k^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^K \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{Y_k(t)} = \sum_{k=1}^K \int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds \qquad t \in [0,T[\tag{11.4}$$

avec les processus Y_k correspondants définis respectivement en 2.2.1, 9.0.15 et 10.0.6.

11.2.1 Cas particulier où les agents partagent la même information

On suppose ici que le processus Y_k est le même pour tous les agents, ainsi tous les agents partagent la même information. Dans ce cas, l'équivalence (11.4) implique qu'à l'équilibre, $Y_k \equiv 1$. Par conséquent $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité neutre au risque pour les initiés possédant une information forte et $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}^{\nu_k}$ pour les initiés possédant une information faible, c'est-à-dire les agents n'ont pas d'information privée, ou leur information privée n'est pas pertinente.

Remarque: Regardons, lorsque l'information privée n'est pas pertinente, ce que devient le problème d'optimisation pour un agent ayant une information forte (initiale ou progressive) ou une information faible. Dans le cas d'une information forte (initiale ou progressive), l'agent cherche à maximiser $E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T U_k(t, c_k(t))dt\right]$ sous la contrainte budgétaire $E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T \beta(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt\right] = 0$ tandis qu'un agent ayant une information faible doit maximiser $E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T U_k(t, c_k(t))dt\right]$ sous la contrainte budgétaire $E_{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T \beta(t)(c_k(t) - \epsilon_k(t))dt\right] = 0$. Ceci explique la différence que nous obtenons entre une information forte et une information faible.

Dans le cas d'informations privées non pertinentes, les agents ne "bougent" pas, ils consomment exactement leurs ressources redistribuées sur $[0, T]$: pour tout k,

$$\widehat{\pi_k}^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \qquad \text{et} \qquad \beta\widehat{c_k} \equiv \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{T}.$$

Ce résultat est cohérent avec l'intuition suivante : si tous les agents ont le même marché financier, la même ressource et le même problème d'optimisation, alors ils ont la même stratégie, ainsi la somme de k fois le même portefeuille est nulle si et seulement si ce portefeuille est nul, c'est-à-dire les agents ne bougent pas. Ces résultats restent vrais même si les agents n'ont pas la même ressource.

Remarque: lien avec la condition d'équilibre (7.1) portant sur les consommations. Dans le cas où les informations privées sont non pertinentes, la condition d'équilibre (11.2) portant sur les portefeuilles implique que,

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k}(t) = \frac{\int_0^T \beta(s)(\sum_{k=1}^{K} \epsilon_k(s))ds}{\beta(t)T} \qquad t \in [0, T[.$$

Ainsi en général la relation (7.1) n'est pas vérifiée, mais on a

$$\int_0^T \beta(s)(\sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k}(s))ds = \int_0^T \beta(s)(\sum_{k=1}^{K} \epsilon_k(s))ds.$$

Cet exemple montre que la condition (7.1) est trop restrictive, il est donc justifié et plus naturel de considérer la condition d'équilibre (11.2) portant sur les portefeuilles.

Regardons maintenant le cas plus intéressant où les agents n'ont pas la même information.

11.2.2 Cas où les agents ont des informations différentes

Lemme 11.2.2 *Sous l'hypothèse 12, si les ressources actualisées sont constantes, alors*

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k} \equiv \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi_k}^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d}.$$

Preuve: On suppose que les ressources actualisées sont constantes ($\beta\epsilon_k \equiv a_k$ où a_k est une constante strictement positive), alors

$$\beta(t)\widehat{c_k}(t) = \frac{a_k}{Y_k(t)}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{K} \widehat{c_k} \equiv \sum_{k=1}^{K} \epsilon_k \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{Y_k} \equiv \sum_{k=1}^{K} a_k.$$

De plus, l'équivalence (11.4) se traduit dans ce cas particulier par

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi_k}^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{Ta_k}{Y_k} \equiv \sum_{k=1}^{K} Ta_k.$$

Le résultat est alors immédiat. □

Dans un premier temps, regardons ce qui se passe avec seulement deux agents sur le marché financier. Le processus Y_1 du premier agent étant donné, que doit satisfaire le processus Y_2 du deuxième agent afin d'obtenir un équilibre ? L'équivalence (11.4) montre que

$$\widehat{\pi_1}^* + \widehat{\pi_2}^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \Longleftrightarrow \frac{1}{Y_2} \equiv 1 + \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_1(s)ds}{\int_0^T \beta(s)\epsilon_2(s)ds}(1 - \frac{1}{Y_1}). \tag{11.5}$$

D'une part, Y_2 doit être un processus strictement positif. D'autre part, plus le premier agent est informé, plus le processus $\frac{1}{Y_1}$ est grand (cf. nos simulations de la partie III et le lien avec l'entropie dans le paragraphe précédent 11.1) et donc plus le processus $(1 - \frac{1}{Y_1})$ est négatif. Par conséquent, il faut "contrebalancer" $(1 - \frac{1}{Y_1})$ avec un petit $\frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_1(s)ds}{\int_0^T \beta(s)\epsilon_2(s)ds}$ pour que le processus Y_2 reste strictement positif. Intuitivement, plus l'intégrale $\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds$ est grande, plus l'agent k est influent sur le marché financier. Ceci est cohérent avec la théorie de l'agent représentatif de la remarque suivant la proposition 4.2.2 :

$$\Lambda_k = (\lambda_k)^{-1} = \frac{E_{\mathbb{P}}\left(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds\right)}{T} \text{ est le poids de l'agent } k \text{ dans le marché.}$$

Ainsi, plus un agent est informé, moins il doit avoir de poids dans le marché financier (proportionnellement aux autres agents) pour qu'un équilibre puisse être atteint (cf. simulations paragraphes 13.2 page 178 et 14.3.2 page 226).
D'autre part, plus un agent initié investit de ressources dans un marché financier, plus il va induire des déviations importantes sur ce marché, et donc plus il risque de devenir influent et d'être détecté (cf. la thèse de Guillaume Lasserre (2003) [41] qui étudie, d'un point de vue plus économique, des modèles d'équilibre avec asymétrie d'information, modèles autorisant les prix des actifs financiers à dépendre des stratégies des investisseurs). En outre, les stratégies ou déviations anormales induites par un initié sont d'autant plus importantes que son information privée est pertinente (i.e. importante). Ainsi un initié possédant une information privée pertinente sur un marché serait bien avisé de rester discret et de n'investir qu'une petite partie de ses ressources sur ce marché.

Proposition 11.2.3 *On suppose l'hypothèse 12.*
Les processus Y_k, $k = 1, \cdots, K-1$ des $(K-1)$ premiers agents étant donnés, il existe un équilibre (ie $\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi}_k^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d}$) si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{\int_0^T \beta(s)\epsilon_K(s)ds}(1-\frac{1}{Y_k}) > -1. \\ \frac{1}{Y_K} = 1 + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds}{\int_0^T \beta(s)\epsilon_K(s)ds}(1-\frac{1}{Y_k}). \end{cases}$$

Preuve: C'est une application directe de l'équivalence (11.4). □

11.3 Optimisation de la consommation et de la richesse terminale, sans ressource

Un travail similaire sur l'équilibre (condition (11.2)) peut être réalisé si on considère le problème d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale (respectivement de la richesse terminale seulement), avec une richesse initiale $X_k(0)$ et sans ressource, dans le cadre d'une utilité logarithmique. Le portefeuille optimal est alors donné par

$$\beta(t)\widehat{\pi}_k^*(t)\sigma(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)(1+T-t)}{T+1}\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k^*(t) \tag{11.6}$$

(respectivement

$$\beta(t)\widehat{\pi}_k^*(t)\sigma(t) = \beta(0)X_k(0)\frac{1}{Y_k(t^-)}l_k^*(t). \quad) \tag{11.7}$$

Dans ces deux cadres d'optimisation, au lieu de l'équivalence (11.4), la caractérisation de l'équilibre (définition (11.2)) se traduit par (on multiplie les portefeuilles par $d\widehat{S}(s)$ et on intégre entre 0 et t) :

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi}_k^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{X_k(0)}{Y_k(t)} = \sum_{k=1}^{K} X_k(0) \qquad t \in [0, T[. \tag{11.8}$$

Ici le poids de l'agent k dans le marché est $\Lambda_k = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}$ (respectivement $\beta(0)X_k(0)$). Ainsi, son poids est proportionnel à sa richesse initiale. On obtient des résultats similaires à ceux du paragraphe 11.2. En particulier, si les informations privées ne sont pas pertinentes, $\beta(t)\widehat{c_k}(t) = \frac{\beta(0)X_k(0)}{T+1}$ et $\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{(\beta(0)X_k(0))(T+1-t)}{T+1}$ (respectivement $\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \beta(0)X_k(0)$), i.e. les agents ne bougent pas et répartissent leur richesse initiale entre leur consommation et leur richesse actuelle (respectivement leur richesse actualisée est constante).

Nous pouvons aussi regarder ce que devient la condition (11.2) lorsque les agents ont des problèmes d'optimisation différents : ils ont tous une utilité logarithmique mais les k_1 premiers souhaitent maximiser leur consommation (sans richesse initiale

et avec une ressource actualisée déterministe), les k_2 suivant optimisent leur richesse terminale (sans ressource et avec une richesse initiale), les autres optimisent à la fois leur consommation et leur richesse terminale (sans ressource et avec une richesse initiale). L'expression du portefeuille est alors donnée respectivement par (11.3), (11.6) et (11.7). Ainsi, au lieu de l'équivalence (11.4), on obtient en multipliant les portefeuilles par $d\widehat{S}(s)$ et en intégrant entre 0 et t :

$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi}_k^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d}$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{k_1} \frac{(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds)}{T} \int_0^t (T-s)d(\frac{1}{Y_k})(s) + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \beta(0)X_k(0) \int_0^t d(\frac{1}{Y_k})(s)$$
$$+ \sum_{k=k_2+1}^{K} \frac{\beta(0)X_k(0)}{(T+1)} \int_0^t (1+T-s)d(\frac{1}{Y_k})(s) = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{k_1} \frac{(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds)}{T} \left[(T-t)\frac{1}{Y_k}(t) + \int_0^t \frac{1}{Y_k}(s)ds\right] + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \beta(0)X_k(0)\frac{1}{Y_k}(t)$$
$$+ \sum_{k=k_2+1}^{K} \frac{\beta(0)X_k(0)}{(T+1)} \left[(1+T-t)\frac{1}{Y_k}(t) + \int_0^t \frac{1}{Y_k}(s)ds\right] \tag{11.9}$$
$$= \sum_{k=1}^{k_1}(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds) + \sum_{k=k_1+1}^{K} \beta(0)X_k(0), \quad \forall t \in [0,T].$$

Remarque: Ce chapitre 11 n'est en rien modifiée si on considère un modèle avec monnaie, en remplaçant l'hypothèse sur la ressource $\beta\epsilon$ déterministe par $\beta\psi\epsilon$ déterministe. En effet l'expression des portefeuilles est la même, donc les résultats sur l'équilibre sont inchangés, que l'on considère la relation (11.2) ou la relation (7.1) (car alors ψ est en facteur des deux membres et s'élimine).

Troisième partie

Simulations Matlab

Dans la deuxième partie, nous avons donné, dans le cas d'utilités logarithmiques, une condition nécessaire et suffisante pour que les marchés des titres s'équilibrent. Cette condition est établie dans le cas d'informations fortes initiales et sans supposer l'hypothèse 3, mais aussi dans le cas d'informations privées différentes (information forte initiale ou progressive, information faible). L'objectif de cette troisième partie est de rechercher l'existence d'un tel équilibre, à l'aide de simulations Matlab. Pour cela, nous devons tout d'abord simuler la stratégie de l'initié. Il nous a paru alors intéressant de comparer les stratégies optimales des initiés en fonction de leur information privée. Le chapitre 12 traite cette étude et nous retournons à la simulation d'équilibre dans le chapitre 13. Le chapitre 14 comporte les programmes et les graphiques.

Dans un premier temps, nous avons simulé dans le chapitre 12 la stratégie d'un initié (consommation, richesse et portefeuille optimaux) pour différents exemples d'information privée et nous l'avons comparé à celle d'un non-initié, dans le cadre d'un marché purement diffusif (paragraphe 12.1) et d'un marché mixte (paragraphe 12.2). Dans le premier exemple d'information forte initiale où l'initié sait si la valeur d'un actif à l'instant T sera dans une certaine fourchette ou non, nous donnons explicitement la différence de portefeuille entre un initié et un non initié : dans un marché purement diffusif, nous montrons que l'initié investit la même proportion de sa richesse qu'un non-initié dans les actifs autres que le bond et celui sur lequel il a de l'information ; sa stratégie ne diffère que sur ces deux actifs. Ce résultat n'est plus vrai dans le cadre d'un marché mixte : la stratégie d'un tel initié est alors différente d'un non-initié sur tous les actifs. Un travail similaire est ensuite fait pour le deuxième exemple d'information forte initiale où l'initié connait le ratio à l'instant T de deux actifs. Dans un marché purement diffusif, la stratégie de l'initié cette fois ne diffère que sur les deux actifs dont il connait le ratio à l'instant T, ce qui n'est pas le cas dans un marché mixte. Nous avons aussi comparé la stratégie optimale entre les trois types d'informations privées (information forte initiale et progressive, information faible), chacune de ces informations étant une variante de la valeur à l'instant T de la première composante du mouvement brownien. Les simulations mettent en évidence que plus l'information privée de l'initié est précise, plus son gain est important.

Dans un deuxième temps, nous simulons dans le chapitre 13 un équilibre avec utilité logarithmique. Ainsi, grâce aux simulations, nous nous affranchissons de l'hypothèse 3 et nous simulons des équilibres entre agents ayant différents types d'informations privées (information forte initiale ou progressive, information faible). Le programme est sensiblement différent selon que les agents optimisent leur consommation et/ou leur richesse terminale. Nous visualisons ici que, pour qu'un équilibre puisse exister, les agents ayant une information importante doivent avoir un petit poids dans le marché (comparativement aux autres agents). Ainsi dans le paragraphe 13.2, nous estimons le montant maximal que peut investir un initié dans le marché sans empêcher un équilibre d'avoir lieu.

Le temps d'échéance est d'un an : $T = 1$. Pour que l'information de l'initié vérifie l'hypothèse 1 page 29 (ou 9 page 123), on se placera dans le cadre où l'initié optimise sa stratégie sur l'intervalle $[0, A]$ avec $A = 0.95$.

Chapitre 12

Simulation de la stratégie d'un initié

Nous simulons la stratégie d'un initié k (portefeuille, consommation, richesse) lorsque celui-ci optimise sa consommation et sa richesse terminale sur $[0, A]$ $(A < T)$, sans ressource et avec une richesse initiale $X_k(0) = 1$. Nous la comparons à la stratégie d'un non-initié ayant le même problème d'optimisation. Nous utilisons pour fonction d'utilité la fonction ln, sauf pour l'exemple 12.1.6 où nous avons pris une utilité isoélastique $\frac{x^\alpha}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0, \alpha < 1)$. Pour une utilité logarithmique, les consommation et richesse optimales actualisées sont proportionnelles au processus $\frac{1}{Y_k}$ (cf. exemples 5.0.18, 9.2.2 ou 10.3.2) :
pour tout $t \in [0, A]$,

$$\beta(t)\widehat{c_k}(t) = \frac{X_k(0)}{A+1}\frac{1}{Y_k}(t)$$

$$\beta(t)\widehat{X_k}(t) = \frac{X_k(0)}{A+1-t}\frac{1}{Y_k}(t)$$

$$\widehat{\pi_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}\frac{Y_k(t)}{Y_k(t^-)}\widehat{X_k}(t)l_k(t).$$

Rappelons aussi que (cf. lemme 2.2.2, définition 9.0.15 ou proposition 10.0.7)

$$d(Y_k^{-1})(t) = Y_k^{-1}(t^-)l_k^*(t)d\widehat{S}(t)$$

avec pour une information forte (initiale ou progressive)

$$l_k^* := \left(\left(\Theta + \rho_1^k\right)^*, (\frac{\rho_2^k}{q} - I_n)^* \right).$$

ρ_1^k et ρ_2^k sont définis dans le paragraphe 2.1 pour une information forte initiale (dans le théorème 9.0.13 pour une information forte progressive). Par conséquent, on sait simuler la stratégie d'un initié dès que l'on sait simuler ρ^k (les autres paramètres étant des données du marché).

Ceci nous amène à donner quelques résultats théoriques concernant le calcul de ρ_1^k et de ρ_2^k dans le cas d'une information forte initiale. Rappelons un résultat de Jeulin [31] (cf. lemme 3.1 de Grorud et Pontier [25])

Lemme 12.0.1 *Supposons qu'il existe $A \in]0,T[$ et une fonction $\mathcal{F}_A \otimes \mathcal{E}_k$-mesurable $p(A,\cdot)$ telle que, pour toute fonction f $\mathcal{E}_k$-mesurable bornée,*

$$E_{\mathbb{P}}[f(L_k)|\mathcal{F}_A] = \int_{E_k} f(x)p(A,\omega,x)\mathbb{P}_{L_k}(dx) \tag{12.1}$$

avec $p(A,\omega,x) > 0$ $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_{L_k}$ presque sûrement, où $\mathbb{P}_{L_k}$ est la loi de L_k. Alors la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{L_k} := \frac{1}{p(A,L_k)}\mathbb{P}$ vérifie les conditions de l'hypothèse 1 sur $[0,A]$.

Preuve: Soit f une fonction $\mathcal{E}_k$-mesurable bornée et soit $B \in \mathcal{F}_A$.

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[f(L_k)\mathbb{I}_B] &= E_{\mathbb{P}}\left[\frac{f(L_k)}{p(A,L_k)}\mathbb{I}_B\right] \\ &= E_{\mathbb{P}}\left[E_{\mathbb{P}}\left[\frac{f(L_k)}{p(A,L_k)}\mathbb{I}_B|\mathcal{F}_A\right]\right] \\ &= E_{\mathbb{P}}\left[\int_{E_k}\frac{f(x)}{p(A,x)}p(A,x)\mathbb{P}_{L_k}(dx)\mathbb{I}_B\right]. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que

$$E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[f(L_k)\mathbb{I}_B] = E_{\mathbb{P}}[f(L_k)]\,\mathbb{P}[B].$$

$f = 1$ donne $\mathbb{Q}^{L_k}(B) = \mathbb{P}(B)$; $B = \Omega$ donne $E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[f(L_k)] = E_{\mathbb{P}}[f(L_k)]$. Ainsi $\mathbb{Q}^{L_k}$ est équivalente à $\mathbb{P}$, elle coïncide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_A$ est indépendante de $\sigma(L_k)$ sous $\mathbb{Q}^{L_k}$. □

Remarque 12.0.2 *Si les hypothèses du lemme précédent 12.0.1 sont vérifiées pour une certaine fonction $p(A,\cdot)$, alors $\forall t < A$, $p(t,\cdot)$ défini par $p(t,\cdot) := E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[p(A,\cdot)|\mathcal{G}_t^k]$ vérifie, pour toute fonction f $\mathcal{E}_k$-mesurable bornée,*

$$E_{\mathbb{P}}[f(L_k)|\mathcal{F}_t] = \int_{E_k} f(x)p(t,\omega,x)\mathbb{P}_{L_k}(dx). \tag{12.2}$$

Pour tout $t \leq A$, $p(t,\cdot)$ est donc une version mesurable de la densité conditionnelle $\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_{L_k}}(\cdot)$ où $\mathbb{Q}_t$ est la loi conditionnelle de L_k sachant $\mathcal{F}_t$. En d'autres termes, $\forall t \leq A$, la mesure $p(t,x)\mathbb{P}[L_k \in dx]$ sur $(E_k,\mathcal{E}_k)$ est une version de la loi conditionnelle $\mathbb{P}[L_k \in dx|\mathcal{F}_t]$.

Preuve:
Montrons tout d'abord un résultat intermédiaire. Soit $Y \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_A,\mathbb{Q}^{L_k})$, alors pour tout $t \leq A$, $E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[Y|\mathcal{G}_t^k] = E_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{F}_t]$. En effet, soit $B \in \mathcal{F}_t$ et $g \in L^1(E_k,\mathbb{P}_{L_k})$, on a par indépendance de $\sigma(L_k)$ et de $\mathcal{F}_A$ sous $\mathbb{Q}^{L_k}$ et par le fait que $\mathbb{Q}^{L_k}$ et $\mathbb{P}$ coïncident sur $\mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[Yg(L_k)\mathbb{I}_B] &= E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[Y\mathbb{I}_B]\;E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[g(L_k)] \\ &= E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[E_{\mathbb{P}}[Y\mathbb{I}_B|\mathcal{F}_t]]\;E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[g(L_k)] \\ &= E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[E_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{F}_t]\mathbb{I}_B g(L_k)] \end{aligned}$$

On obtient alors (12.2) en prenant $E_{\mathbb{Q}^{L_k}}[\cdot\,|\mathcal{G}_t^k]$ des deux membres de l'égalité (12.1) et en utilisant ce résultat avec $Y = E_{\mathbb{P}}[f(L_k)|\mathcal{F}_A]$. □

Ainsi, le processus Z_k défini dans le début du paragraphe 2.1 page 31 vérifie pour tout $t \in [0, A]$ $Z_k(t) = p(t, L_k)$. Le calcul de ρ_1^k et ρ_2^k demande donc l'expression de la loi conditionnelle de L_k sachant $\mathcal{F}_t$, et les coefficients sur le mouvement brownien et le processus de Poisson de l'écriture différentielle de cette loi prise en L_k.
Nous rappelons aussi le résultat du lemme 11.1.1 page 140 qui compare le processus Y_k d'un initié (possédant une information forte initiale) avec le processus Y_0 d'un non initié : $Y_k = \frac{Y_0}{Z_k}$. Il est préférable de se servir de cette expression de Y_k plutôt que de le simuler par sa forme exponentielle avec le processus ρ^k.

12.1 Simulation dans le cadre d'un marché purement diffusif

Nous considérons dans ce paragraphe un marché sans sauts. Dans les exemples 12.1.1, 12.1.2 et 12.1.6, nous supposons que les coefficients b et σ sont déterministes. Dans nos simulations, nous avons choisi (r, b, σ) constants mais on pourrait les faire dépendre du temps. Voici les données que nous avons utilisées pour nos simulations. Il y a $d = 4$ actifs risqués. Le taux d'intérêt annuel est de 0.02 : $r(t) = 0.02$ pour tout t.

$$\text{La tendance } b(t) = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.084 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, T].$$

$$\text{La volatilité } \sigma(t) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.042 & -0.17 \\ 0.09 & 0.4 & 0.23 & 0.035 \\ -0.048 & 0.12 & 0.4 & 0.2 \\ -0.075 & -0.26 & 0.11 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, T].$$

Le temps d'échéance est d'un an : $T = 1$. Pour que l'information de l'initié vérifie l'hypothèse 1 page 29 (ou 9 page 123), on se placera dans le cadre où l'initié optimise sa stratégie sur l'intervalle $[0, A]$ avec $A = 0.95$. Le prix des actifs à l'instant $t = 0$ est 1 : $P_i(0) = 1$, $i = 0, \cdots, 4$. le nombre d'instants dans les simulations est $N = 10000$.

12.1.1 Il existe i, $1 \leq i \leq d$, tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$, $0 < a < b$

L'initié sait que la valeur finale du prix de l'actif i est comprise entre a et b. Nous supposons que les coefficients b et σ sont déterministes. Nous détaillons le calcul de $p(t, \cdot)$ et ρ_1^k dans le cadre d'un marché purement diffusif.

Calcul explicite de $p(t,x)$

Soit $0 \leq t \leq A$. On note σ_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice σ.
On a $\ln(P_i(T)) = \ln(P_i(0)) + \int_0^T (b_i(s) - \frac{1}{2}||\sigma_i(s)||^2)ds + \int_0^T \sigma_i(s)dW(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[L_k = 1|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{P}[\ln a \leq \ln(P_i(T)) \leq \ln b\,|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{P}[\ln a \leq \ln(P_i(0)) + \int_0^T (b_i(s) - \frac{1}{2}||\sigma_i(s)||^2)ds \\
&\quad + \int_0^t \sigma_i(s)dW(s) + \int_t^T \sigma_i(s)dW(s) \leq \ln b|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

Or $\int_0^t \sigma_i(s)dW(s)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $\int_t^T \sigma_i(s)dW(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$. Par suite $\mathbb{P}[P_i(T) = 1|\mathcal{F}_t] = F(t, k_b(t)) - F(t, k_a(t))$ avec $F(t,\cdot)$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \int_t^T ||\sigma_i(s)||^2 ds)$ centrée de variance $\Sigma_t := \int_t^T ||\sigma_i(s)||^2 ds$

$$F(t,x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\Sigma_t}\right) dy.$$

$$k_x(t) := \ln x - \ln(P_i(0)) - \int_0^T (b_i(s) - \frac{1}{2}||\sigma_i(s)||^2)ds - \int_0^t \sigma_i(s)dW(s).$$

$$p(t,1) = \frac{F(t,k_b(t)) - F(t,k_a(t))}{F(0,k_b(0)) - F(0,k_a(0))}, \qquad p(t,0) = \frac{1 - F(t,k_b(t)) + F(t,k_a(t))}{1 - F(0,k_b(0)) + F(0,k_a(0))}.$$

Calcul explicite de ρ_1^k

Par la formule de Itô, le coefficient de $dp(t,1)$ sur $dW(t)$ est

$$\frac{-1}{F(0,k_b(0)) - F(0,k_a(0))} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t,k_b(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(t,k_a(t))\right) \sigma_i(t).$$

Par suite $\qquad \rho_1^k(t) = a(t)\sigma_i^*(t) \qquad$ avec $a(t)$ le scalaire suivant

$$a(t) := \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t,k_b(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(t,k_a(t))}{1 - F(t,k_b(t)) + F(t,k_a(t))} \mathbb{I}_{(L_k=0)} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t,k_b(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(t,k_a(t))}{F(t,k_b(t)) - F(t,k_a(t))} \mathbb{I}_{(L_k=1)}.$$

La proposition suivante compare la stratégie optimale d'un initié avec celle d'un non-initié, dans le cadre d'un marché purement diffusif.

Proposition 12.1.1 *Si l'initié connait $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$ pour un certain i ($1 \leq i \leq d$ et $0 < a < b$), alors la différence de la part de la richesse investie par cet initié et un non-initié dans chaque actif risqué est donnée par*

$$\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) = (0, \cdots, 0, \overbrace{a(t)}^{\textit{composante } i}, 0, \cdots, 0)^*.$$

Dans un marché purement diffusif, la part de la richesse investie dans les actifs risqués j ($1 \leq j \leq d$ and $j \neq i$) est la même pour l'initié et un non-initié.

Preuve: Puisque $\frac{\widehat{\pi_k}}{\widehat{X_k}}(t) = (\sigma^*(t))^{-1} l_k(t)$, dans le cadre d'un marché purement diffusif, la différence de la proportion de la richesse investie par un initié et un non initié dans les actifs risqués est donnée par

$$(\sigma^*(t))^{-1}(l_k(t) - l_0(t)) = (\sigma^*(t))^{-1}\rho_1^k(t) = (\sigma^*(t))^{-1}\sigma_i^*(t)a(t)$$

où $a(t) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t,k_b(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(t,k_a(t))\right)}{1-F(t,k_b(t))+F(t,k_a(t))}\mathbb{I}_{(L_k=0)} - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t,k_b(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(t,k_a(t))\right)}{F(t,k_b(t))-F(t,k_a(t))}\mathbb{I}_{(L_k=1)}$ est un scalaire. Or $(\sigma^*(t))^{-1}\sigma_i^*(t)$ est la ième colonne de $(\sigma^*(t))^{-1}\sigma^*(t) = (\sigma(t)\sigma(t))^{-1})^*$ qui est la matrice unité $d \times d$, donc

$$\frac{\widehat{\pi_k}}{\widehat{X_k}}(t) - \frac{\widehat{\pi_0}}{\widehat{X_0}}(t) = ((\sigma^*(t))^{-1}(l_k(t) - l_0(t)) = (0, \cdots, 0, \overbrace{a(t)}^{\text{composante } i}, 0, \cdots, 0)^*. \square$$

Programme avec utilité logarithmique

cf. 14.1.1 page 181.

Résultats

Dans notre simulation, nous avons pris $i = 1$. Par suite
$E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) = P_1(0)\exp\left(\int_0^T (b_1(s) - \frac{1}{2}||\sigma_1(s)||^2)ds\right) = 1.0510.$
On constate (cf. figures 14.1, 14.5, 14.7, 14.9) que $\frac{1}{Y_k}$ est plus grand que $\frac{1}{Y_0}$, et par conséquent la consommation et la richesse de l'initié sont plus grandes que celles d'un non initié (cf. figure 14.2). Ce gain est d'autant plus important si $P_1(T)$ est dans $[a, b]$ et que $[a, b]$ est loin de la moyenne $E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$ (cf. figure 14.9). Ceci s'explique par le fait que dans ce cas, l'initié connait un événement de probabilité faible, donc son information est plus importante. On constate aussi (cf. figures 14.1, 14.5, 14.7) que plus $P_1(T)$ est grand, plus $\frac{1}{Y_k}$ et $\frac{1}{Y_0}$ le sont aussi, d'ordre de grandeur entre 0.5 et 15.
D'autre part, comme nous l'avons montré dans la proposition 12.1.1, la proportion de la richesse investie dans les actifs 2 à 4 est la même pour un initié ou un non initié (par exemple cf. figure 14.4 pour l'actif 2).
Les coefficients du marché r, b et σ étant constants, $\frac{\widehat{\pi_0}}{\widehat{X_0}}$ d'un non-initié est constant, et les parts de la richesse investie par l'initié dans le bond et chacun des actifs risqués sont proportionnelles les unes aux autres.
La stratégies de l'initié dépend de la valeur de L_k et si $E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$ est dans $[a, b]$ ou non.

- **1er Cas :** $P_1(T) \notin [a, b]$ **et** $E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) \notin [a, b]$.
  L'information est alors peu pertinente : $P_1(T)$ n'est pas dans un intervalle qui ne contient pas son espérance. La stratégie de l'initié est alors la suivante.
  ∘ Si $a < b < E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$, la probabilité que $P_1(T) > E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$ est plus grande que celle que $P_1(T) < E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$. Par suite l'initié mise sur le fait que $P_1(T)$ sera plus grand que $E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$, donc il investit plus dans l'actif 1 qu'un non-initié, et ce quelque soit le cours de l'actif 1. On remarque que si $P_1(T)$ s'avère

en fait plus petit que $E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$, il gagnera moins qu'un non-initié.
∘ Inversement, si $E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) < a < b$, l'initié investit moins dans l'actif 1 qu'un non-initié, et ce quelque soit le cours de l'actif 1.

- **2ème Cas :** $P_1(T) \notin [a,b]$ **et** $E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) \in [a,b]$.
  L'information de l'initié est que $P_1(T)$ est "loin" de sa moyenne. L'initié hésite et suit le cours de l'actif 1. A l'instant t, si $P_1(t) < E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$ l'initié pense que $P_1(T) < a$ et investit moins sur l'actif 1 qu'un non-initié. Inversement si $P_1(t) > E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$ l'initié pense que $P_1(T) > b$ et investit plus sur l'actif 1.

- **3ème Cas :** $P_1(T) \in [a,b]$ **et** $E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) \notin [a,b]$.
  L'information est très pertinente, l'initié sait exactement si $P_1(T)$ est plus grand ou plus petit que sa moyenne. Le gain de l'initié est important. Sa stratégie est la suivante : si $P_1(T) > E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$ l'initié investit plus dans l'actif i qu'un non-initié, inversement si $P_1(T) < E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$.

- **4ème Cas :** $P_1(T) \in [a,b]$ **et** $E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) \in [a,b]$.
  L'information de l'initié est que $P_1(T)$ est dans un intervalle autour de sa moyenne. Il hésite et suit le cours de l'actif 1. A l'instant t, il investit plus dans l'actif 1 (par rapport à un non-initié) quand $P_1(t)$ est proche de a le bas de la fourchette (car il sait que $P_1(T)$ ne sera pas plus bas que a et donc que le cours de l'actif 1 va avoir tendance à monter) et il investit moins dans l'actif 1 quand $P_1(t)$ est proche de b le haut de la fourchette (car il sait que $P_1(T)$ ne sera pas plus haut que b).

Remarque: Dans certaines simulations il peut arriver que l'initié gagne moins que le non-initié. En effet les agents optimisent une espérance sous $\mathbb{P}$ c'est-à-dire une moyenne sur les trajectoires. Pour une trajectoire donnée, la stratégie de l'initié peut être moins bonne que celle du non-initié, bien qu'elle soit meilleure en moyenne.

12.1.2 $L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$

L'initié a une information précise sur le rapport de la valeur finale des prix des actifs i_1 et i_2. Nous supposons que les coefficients b et σ sont déterministes. Dans ce cas

$$L_k = \int_0^T \left((b_{i_1} - b_{i_2}) - \frac{1}{2}(||\sigma_{i_1}||^2 - ||\sigma_{i_2}||^2) \right)(s)ds + \int_0^T (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(s)dW(s).$$

Donc la loi de L_k sachant $\mathcal{F}_t$ est la loi normale de moyenne
$m_t := \int_0^T \left((b_{i_1} - b_{i_2}) - \frac{1}{2}(||\sigma_{i_1}||^2 - ||\sigma_{i_2}||^2) \right)(s)ds + \int_0^t (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(s)dW(s)$
et de variance $\Sigma_t := \int_t^T ||\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}||^2(s)ds$. Par suite,

$$Z_k(t) = p(t, L_k) = \frac{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(\frac{-(L_k - m_t)^2}{2\Sigma_t} + \frac{(L_k - m_0)^2}{2\Sigma_0} \right),$$

$$Z_k(t) = \frac{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(\frac{-(\int_t^T (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(s)dW(s))^2}{2\Sigma_t} + \frac{(\int_0^T (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(s)dW(s))^2}{2\Sigma_0} \right).$$

$$\rho_1^k(t) = (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})^*(t)a(t) \quad \text{où} \quad a(t) = \frac{\int_t^T (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(s)dW(s)}{\Sigma_t} \quad \text{est un scalaire.}$$

La proposition suivante compare la stratégie optimale d'un initié avec celle d'un non-initié, dans le cadre d'un marché purement diffusif.

Proposition 12.1.2 *Si l'initié connait $L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$, alors la différence de la part de la richesse investie par cet initié et un non-initié dans chaque actif risqué est donnée par*

$$\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) = (0, \cdots, 0, \overbrace{1}^{\textit{composante } i_1}, 0, \cdots, 0, \overbrace{-1}^{\textit{composante } i_2}, 0, \cdots, 0)^*.$$

Dans un marché purement diffusif, la part de la richesse investie dans le bond et les actifs risqués j ($1 \leq j \leq d$, $j \neq i_1$ et $j \neq i_2$) est la même pour l'initié et un non-initié.

Preuve: Puisque $\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1} l_k(t)$, dans le cadre d'un marché purement diffusif, la différence de la proportion de la richesse investie par un initié et un non initié dans les actifs risqués est donnée par

$$(\sigma^*(t))^{-1}(l_k(t) - l_0(t)) = (\sigma^*(t))^{-1}\rho_1^k(t) = (\sigma^*(t))^{-1}(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(t)a(t)$$

où $a(t) = \frac{\int_t^T (\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})(s)dW(s)}{\Sigma_t}$ est un scalaire. Or $(\sigma^*(t))^{-1}\sigma_i^*(t)$ est la ième colonne de $(\sigma^*(t))^{-1}\sigma^*(t) = (\sigma(t)\sigma(t))^{-1})^*$ qui est la matrice unité $d \times d$, donc

$$\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) = (0, \cdots, 0, \overbrace{1}^{\text{composante } i_1}, 0, \cdots, 0, \overbrace{-1}^{\text{composante } i_2}, 0, \cdots, 0)^*.$$

La proportion de la richesse investie sur le bond par le $k^{\text{ème}}$ agent étant égale à $1 - \sum_{i=1}^d \frac{\widehat{\pi}_{ki}}{\widehat{X}_k}(t)$, un initié et un non-initié investissent la même proportion de leur richesse sur le bond. □

<u>Programme avec utilité logarithmique</u>

Il est semblable au programme précédent 14.1.1, la simulation de L_k, Z_k et ρ^k se faisant comme suit (on a choisi $i_1 = 1$ et $i_2 = 2$) :

```
beta=(b(1)-b(2))-1/2*(sigma(1,:)*(sigma(1,:))'-sigma(2,:)*(sigma(2,:))');
gamma=sigma(1,:)-sigma(2,:);

%valeur de L_k  :
```

```
L= beta*T+gamma*W(:,N);

%calcul  de  p  et  \rho :
p= (sqrt(2*pi*cov*T)) ./(sqrt(2*pi*cov*(T-A)))
     .*exp(-gamma*(repmat(W(:,N),1,Tf)-Z)
     ./(2*cov*(T-A))) .* exp(gamma*(W(:,N))./(2*cov*T)) ;
l=gamma*(repmat(W(:,N),1,Tf)-Z)./(2*cov*(T-A));
```

Pour comparer l'évolution du portefeuille de l'initié avec la position de la variable aléatoire $L(t) := \ln(P_1(t)) - \ln(P_2(t))$ relativement à sa valeur terminale $L_k = L(T)$, nous avons simulé et tracé L.

```
L_A=beta*Tab+gamma*W(:,1:N);
figure(10)
plot(Tab,L_A,'b',Tab,L,'ro'  );
title('ln(P_1)-ln(P_2)');
legend(' (ln(P_1)-ln(P_2))(t) ','(ln(P_1)-ln(P_2)) (T)',2)
xlabel('t'); ylabel('ln(P_1)(t)-ln(P_2)(t)');
```

Résultats

Dans notre simulation, on a pris $i_1 = 1$ et $i_2 = 2$, par suite
$E_{\mathbb{P}}(L_k) = \int_0^T \left((b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(||\sigma_1||^2 - ||\sigma_2||^2)\right)(s)ds = 0.0608$.
On constate (cf. figures 14.15 et 14.10) que $\frac{1}{Y_k}$ croît très vite et devient très grand (de l'ordre de 20 à 1000, voire beaucoup plus). En effet dans ce cas l'initié connait un événement de probabilité nulle, donc son information est plus précise que dans le cas 12.1.1. En particulier, plus l'information est précise, plus $\frac{1}{Y_k}$ est grand et plus il grandit vite à l'approche de la date T. En effet, dans notre deuxième simulation, $L_k = -0.1949$ est plus petit que sa moyenne 0.0608, et un peu après l'instant $t = 0.85$, $L(t)$ devient plus grand que $L_k = L(T)$ tout en restant plus petit que 0.0608 (cf. figure 14.16). Dans ce cas, l'initié a une information très importante car bien que $L(t)$ soit plus petit que la moyenne 0.0608, il sait que L va continuer à baisser alors qu'un non-initié pense qu'il va monter. Après $t = 0.85$, l'initié diminue son portefeuille sur l'actif 1 et l'augmente sur l'actif 2 (cf. figure 14.17) et son gain (cf. figure 14.15) augmente considérablement et devient très important ($\frac{1}{Y_k}(A)$ est de l'ordre de 6000). Dans notre première simulation, $L_k = 0.3833$ est plus grand que sa moyenne 0.0608, et un peu après l'instant $t = 0.8$, $L(t)$ devient plus grand que $L_k = L(T)$ (cf. figure 14.12). Dans ce cas, l'initié a une information moins importante que pour notre deuxième simulation car il sait que $L(t)$ va baisser mais la probabilité de cet événement est grande. Son gain est donc moindre (cf. figure 14.10) : $\frac{1}{Y_k}(A)$ est de l'ordre de 200. On est donc porté à croire que plus l'information de l'initié est importante, plus $\frac{1}{Y_k}$, et par la suite son gain, est grand. Par ailleurs, plus son information est importante, plus la puissance du test statistique permettant de le détecter est grande (cf. Valéry Fonke [22]. Intuitivement, l'initié gagne beaucoup plus qu'un non initié donc il se fait remarquer !).
D'autre part, comme nous l'avons montré dans la proposition 12.1.2, la proportion

de la richesse investie dans le bond et les actifs 3 et 4 est la même pour un initié ou un non initié (cf. figures 14.14 et 14.11). Seule change la proportion de la richesse investie dans les actifs 1 et 2. Le portefeuille de l'initié sur les actifs 1 et 2 à l'instant t est étroitement lié au rapport $\frac{L(t)}{L(T)}$: si $L(t) > L(T) = L_k$ alors l'initié sait qu'à l'instant d'échéance T, le rapport $\ln\left(\frac{P_1(T)}{P_2(T)}\right)$ sera plus petit qu'il ne l'est actuellement, donc son portefeuille à l'instant t sur l'actif 1 (respectivement sur l'actif 2) est plus petit (respectivement plus grand) que celui d'un non-initié. Inversement si $L(t) < L(T) = L_k$ (cf. figures 14.12 et 14.13, 14.16 et 14.17).

12.1.3 Simulation avec une information forte progressive

L'initié a une information forte progressive : il connait une fonction linéaire de la valeur terminale d'une composante du brownien, perturbée par un bruit indépendant qui décroit vers zéro. Soit i fixé entre 1 et 4.

$$L_k(t) = (\lambda W_i(T) + a) + B_{g(T-t)}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

où g est une fonction bornée strictement croissante vérifiant $g(0) = 0$ et B un mouvement brownien indépendant de F_T, λ et a sont des constantes réelles, avec $\lambda \neq 0$. Alors $\rho_j^k = 0$ si $i \neq j$ et

$$\rho_i^k(t) = \frac{\lambda\left(\lambda(W_i(T) - W_i(t)) + B_{g(T-t)}\right)}{g(T-t) + (T-t)\lambda^2}$$

$$\frac{1}{Y_k}(t) = \frac{1}{Y_0}(t)\mathcal{E}\left(\int_0^t \rho^k(s)dW(s)\right).$$

La démarche est ici un peu différente que dans le cas d'une information forte initiale : le calcul de ρ^k est nécessaire pour exprimer le rapport $\frac{Y_0}{Y_k}$ que l'on simule par itération.

Programme avec utilité logarithmique

On a pris $\lambda = 2$ et $g(s) = s\ \forall s$. On simule $p(t) := \mathcal{E}\left(\int_0^t \rho^k(s)dW(s)\right)$ grâce à l'équation différentielle que p vérifie ($dp(t) = p(t)\rho^k(t)dW(t)$, ce qui permet de simuler p par itération) plutôt que par son expression exponentielle, car la fonction exponentielle amplifie les erreurs d'approximation. Le programme est une légère modification du programme 14.1.1 de l'exemple 12.1.1 dans les points suivants :

```
% simulation du bruit  :
Bbis=(cumsum(rnorm([N,1],0,sqrt(dt))))';
Y=fliplr(Bbis);

%calcul de  rho et p
rho= lambda*(lambda*(W(1,N)-Z(1,:))+Y(1:Tf))./((T-A)*(1+(lambda)^2));
```

```
p(1)=1+ lambda*(lambda*W(1,N)+Y(N))/(T*(1+(lambda)^2));
  for  i=1:Tf-1
  p(i+1)=p(i) *(1+ rho(i) *(W(1,i+1)- W(1,i)));
  end

% La variable Var intervenant dans le calcul
%du portefeuille de l'initi\'e devient
 Var=repmat((theta)',1,Tf)+[rho;zeros(1,Tf);zeros(1,Tf);zeros(1,Tf)];
```

Résultats

On constate (cf. figure 14.18) que pour t petit, l'initié ne gagne pas toujours plus qu'un non initié (parfois un peu moins), mais il gagne plus quand t croit et se rapproche de T (car alors le bruit décroit). $\frac{1}{Y_k}$ reste dans l'ordre de grandeur de 10 à 30 maximum. On constate aussi que cette fois, toutes les composantes du portefeuille de l'initié (ou plus exactement les proportions de la richesse investie dans les actifs par l'initié) sont différentes de celui d'un non initié (cf. figures 14.19, 14.20 et 14.21).

12.1.4 Simulation avec une information faible

L'initié a une information faible : il anticipe la loi de $L_k = \widehat{W}_1(T)$ sous la mesure de probabilité effective $\mathbb{P}$ comme étant ν_k, où ν_k est la mesure gaussienne

$$\nu_k(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(\frac{-(y-m)^2}{2s^2}\right) dy, \qquad m \in \mathbb{R}, \qquad s^2 \leq T.$$

Alors (cf. exemple 10.0.8)

$$\zeta_k(t) = \frac{1}{Y_k}(t) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_1(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy.$$

$$\begin{aligned} (l_k)_1(t) &= \frac{\int \frac{y-\widehat{W}_1(t)}{T-t} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_1(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy}{\int \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_1(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy}, \\ (l_k)_j &\equiv 0 \qquad \text{si } j \neq 1. \end{aligned}$$

Programme avec utilité logarithmique

On simule l'intégrale intervenant dans l'expression de $\frac{1}{Y_k}$ par la méthode de Monte-Carlo : on simule nb ($nb = 10^4$ dans notre programme) variables aléatoires $(X_1, \cdots, X_{nb})$ indépendantes de même loi ν_k. Soit $f : y \longrightarrow \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_1(t))^2}{2(T-t)}\right)$. Puisque la loi forte des grands nombres entraîne la convergence presque sûre suivante :

$$\frac{1}{nb}\left(f(X_1) + \cdots + f(X_{nb})\right) \overset{nb\to+\infty}{\longrightarrow} E[f(X_1)],$$

on approche $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(\frac{y^2}{2T} - \frac{(y-\widehat{W}_1(t))^2}{2(T-t)} - \frac{(y-m)^2}{2s^2}\right) dy$ par $\frac{(f(X_1)+\cdots+f(X_{nb}))}{nb}$.
On procède par la même méthode pour la simulation de l_k.

Programme avec utilité logarithmique
cf. section 14.1.4 page 195.

Résultats
On constate que plus m est différent de $\int_0^T \sum_{j=1}^d (\sigma)^{-1}_{1j}(s)(b_j - r)(s)ds = 0.4354$ (qui est la moyenne de la loi de $\widehat{W}_1(T)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$), plus le processus $\frac{1}{Y_k}$ de l'agent anticipateur est petit par rapport au processus $\frac{1}{Y_0}$ d'un non-initié (cf. figures 14.26 et 14.27). Il en est de même si s est différent de 1 (qui est l'écart type de la loi de $\widehat{W}_1(T)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$) (cf. figure 14.28). Si $m = \int_0^T \sum_{j=1}^d (\sigma)^{-1}_{1j}(s)(b_j - r)(s)ds$ et $s = 1$, l'agent anticipateur gagne un peu plus que le non-initié (cf. figure 14.22). On constate aussi que toutes les composantes du portefeuille de l'initié (ou plus exactement les proportions de la richesse investie dans les actifs par l'initié) sont différentes de celui d'un non initié (cf figures 14.23, 14.24 et 14.25).

12.1.5 Comparaison du gain d'un initié entre les trois types d'information privée

Nous souhaitons comparer les processus $\frac{1}{Y_k}$ pour les trois types d'information privée que nous avons étudiés. Pour cela nous simulons simultanément (i.e. pour la même réalisation de ω) le processus $\frac{1}{Y_k}$ de quatre agents.
• Le premier est initialement fortement informé, il connait $L_k = W_1(T)$.
Puisque la loi de L_k sachant à $\mathcal{F}_t$ est la loi d'une gaussienne $\mathcal{N}(W_1(t), T-t)$ de moyenne $W_1(t)$ et de variance $(T-t)$, $p(t,x) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{(x-W_1(t))^2}{2(T-t)} + \frac{x^2}{2T}\right)$ et

$$\frac{1}{Y_k} = \frac{Z_k}{Y_0} \quad \text{avec } Z_k(t) = p(t, L_k) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{(W_1(T) - W_1(t))^2}{2(T-t)} + \frac{W_1(T)^2}{2T}\right).$$

• Le deuxième est progressivement fortement informé, il connait
$L_k(t) = 2W_1(T) + B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$ où B un mouvement brownien indépendant de F_T (cf. section 12.1.3).
• Le troisième est faiblement informé, il anticipe que la loi de $L_k = \widehat{W}_1(T)$ sera une gaussienne de moyenne $m = \int_0^T \sum_{j=1}^d (\sigma)^{-1}_{1j}(s)(b_j - r)(s)ds$ et de variance T (cf. section 12.1.4).
• Nous simulons aussi le processus $\frac{1}{Y_0}$ d'un agent non informé.

Programme avec utilité logarithmique
cf. section 14.1.5 page 200.

Résultats
On constate (cf. figure 14.29) que $\frac{1}{Y_0} \leq \frac{1}{Y_3} \leq \frac{1}{Y_2} \leq \frac{1}{Y_1}$. $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_3}$ sont assez proches l'un de l'autre et la distance qui les sépare reste relativement constante au cours du temps, alors que $\frac{1}{Y_2}$ et $\frac{1}{Y_1}$ s'éloignent d'autant plus rapidement de $\frac{1}{Y_0}$ que la date d'échéance T se rapproche.

12.1.6 Simulation avec une utilité isoélastique

L'initié a l'information forte initiale du paragraphe 12.1.1 :

$\exists\ i,\quad 1 \leq i \leq d,\quad$ tel que $\quad L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T)),\quad 0 < a < b.$

Les processus Z_k et ρ^k ont donc déjà été calculés (nous supposons que les coefficients b et σ sont déterministes). Mais ici les agents n'ont plus une utilité logarithmique mais isoélastique

$$U(t,x) = \frac{x^p}{p}\ (p \neq 0,\ p < 1),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times]0,+\infty[.$$

La consommation optimale actualisée est alors donnée par (cf. exemple 5.0.17) :

$$\widehat{c_k}(t) = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt + (\zeta_k(T))^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{G}_0^k]}(\zeta_k(t))^{\frac{1}{p-1}} \qquad t \in [0,A].$$

Nous ne savons pas exprimer le portefeuille car l'hypothèse (3.7) n'est pas satisfaite dans ce cas (en effet ρ^k, et par la suite $\Gamma_{k,\frac{p}{p-1}}$, n'est pas $\mathcal{G}_0^k$-mesurable). Nous ne savons pas simuler la richesse au temps $t < A$ car son expression fait intervenir une espérance conditionnelle sachant $\mathcal{G}_t^k$ et nous ne savons simuler des espérances que conditionnellement à un nombre fini de variables aléatoires. Nous allons donc simuler la richesse optimale à l'instant A

$$\widehat{X_k}(A) = \frac{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \zeta_k(t)\epsilon_k(t)dt|\mathcal{G}_0^k] + \beta(0)X_k(0)}{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt + (\zeta_k(T))^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{G}_0^k]}(\zeta_k(A))^{\frac{1}{p-1}}.$$

et la consommation optimale $\widehat{c_k}$. La difficulté se trouve dans la simulation de l'espérance conditionnelle

$$E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt + (\zeta_k(T))^{\frac{p}{p-1}}|\mathcal{G}_0^k\right] = E_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (\zeta_k(t))^{\frac{p}{p-1}}dt + (\zeta_k(T))^{\frac{p}{p-1}}|\sigma(L^k)\right].$$

Pour simuler une telle espérance conditionnelle, Bouleau et Lépingle [12] (chapitre 2.D) proposent deux méthodes : l'approximation polynômiale ou le calcul point par point. Bien que la méthode de l'approximation polynômiale soit plus rapide, nous avons choisi la méthode du calcul point par point, qui elle nous assure la positivité.
L'idée de la méthode du calcul point par point est la suivante :
Pour simuler $E[X|Y]$
(i) Faire M réalisations indépendantes de (X,Y) : $(X(\omega_1),Y(\omega_1)),\cdots,(X(\omega_M),Y(\omega_M))$,

(ii) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i = 0, \cdots, 2^k - 1$, calculer le rapport m_i donné par la somme des valeurs des $X(\omega_n)$ tels que $Y(\omega_n) \in [i2^{-k}, (i+1)2^{-k}[$, divisée par le nombre de tels $Y(\omega_n)$,
(iii) Approcher $E[X|Y]$ par $\sum_{i=0}^{2^k-1} m_i \mathbb{I}_{Y \in [i2^{-k},(i+1)2^{-k}[}$.

Nous approchons donc $E[X|Y]$ par

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{\sum_{n=1}^{M} X(\omega_n) \mathbb{I}_{[i2^{-k},(i+1)2^{-k}[}(Y(\omega_n))}{\sum_{n=1}^{M} \mathbb{I}_{[i2^{-k},(i+1)2^{-k}[}(Y(\omega_n))} \mathbb{I}_{[i2^{-k},(i+1)2^{-k}[}(Y).$$

Programme avec utilité isoélastique et résultats
cf. section 14.1.6 page 202. Les résultats sont semblables à ceux du paragraphe 12.1.1 qui traite de la même information mais avec une utilité logarithmique.

12.2 Simulation avec un marché mixte

Dans ce paragraphe nous considérons un marché mixte avec diffusion et sauts. Dans les exemples 12.2.2 et 12.2.3 (qui sont des généralisations des exemples 12.1.1 et 12.1.2 à un marché mixte), nous supposons que les coefficients b et σ sont déterministes. Dans nos simulations, le mouvement brownien est 2-dimensionnel ainsi que le processus de Poisson, $m = n = 2$. L'intensité du processus de Poisson est $\kappa = (3, 2)$. Nous avons pris le même taux d'intérêt r et la même tendance b que dans le cas purement diffusif, mais nous avons modifié la matrice de volatilité σ. En effet nous devons nous assurer que le processus q défini en (1.5) page 23 est bien positif (sinon le marché n'est pas viable). Or ce n'est pas le cas avec la volatilité définie au début du chapitre III. Nous avons donc choisi la matrice de volatilité suivante

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.1 & -0.15 & 0.17 \\ -0.09 & -0.4 & -0.03 & 0.035 \\ 0.048 & -0.12 & 0.1 & -0.12 \\ 0.075 & 0.26 & 0.31 & -0.28 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, T], \tag{12.3}$$

et q est bien positif avec cette volatilité. Les deux dernières colonnes de σ sont les composantes (constantes dans notre simulation, et strictement plus grandes que -1) de la volatilité sur la partie à sauts. Si ces coefficients sont plutôt négatifs (ou positifs), le prix des actifs risqués va baisser (ou monter) à chaque saut. Les agents (initiés ou non) vont alors gagner beaucoup car leur portefeuille sera en conséquence plus sur le bond ou les actifs risqués. Ce phénomène est d'autant plus accentué que le processus de Poisson saute souvent. Nous avons donc choisi une matrice de volatilité telle que σ_{3i} et σ_{4i} $(i = 1, \cdots, 4)$ soient du même ordre de grandeur et de signe opposé afin que le prix de l'actif i ne monte pas (ou ne descende pas) à chaque saut.

$T = 1$ et l'agent optimise sa consommation et sa richesse terminale sur $[0, A]$ $(A < T)$, sans ressource et avec une richesse initiale $X_k(0) = 1$. Sa fonction d'utilité est logarithmique ; les consommations, richesses et portefeuille optimaux ont été rappelés au début de la partie III.

12.2.1 $L_k = N_1(T) + N_2(T)$

L'initié connait la somme du nombre de sauts des deux composantes du Poisson qui ont eu lieu avant T :

$$L_k = N_1(T) + N_2(T).$$

Calcul explicite de $p(t, x)$

Soient k_1 et k_2 deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[(N_1(T), N_2(T)) - (N_1(t), N_2(t)) = (k_1, k_2)|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = \frac{\exp\left(-\int_t^T \kappa_1(s)ds\right)\left(\int_t^T \kappa_1(s)ds\right)^{k_1}}{k_1!} \frac{\exp\left(-\int_t^T \kappa_2(s)ds\right)\left(\int_t^T \kappa_2(s)ds\right)^{k_2}}{k_2!}
\end{aligned}$$

car $N_i(T) - N_i(t)$, $i = 1, 2$, sont indépendants entre eux et indépendants de $\mathcal{F}_t$ et suivent une loi exponentielle de paramètre $\int_t^T \kappa_i(s)ds$. Puisque $N_i(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[(N_1(T), N_2(T)) = (k_1, k_2)|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = e^{\left(-\int_t^T (\kappa_1+\kappa_2)(s)ds\right)} \frac{\left(\int_t^T \kappa_1(s)ds\right)^{k_1 - N_1(t)}}{(k_1 - N_1(t))!} \frac{\left(\int_t^T \kappa_2(s)ds\right)^{k_2 - N_2(t)}}{(k_2 - N_2(t))!} \mathbb{I}_{k_1 \geq N_1(t)} \mathbb{I}_{k_2 \geq N_2(t)}.
\end{aligned}$$

Soit f une fonction mesurable bornée.

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{P}}\left[f(N_1(T) + N_2(T))|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = \sum_{k_1 \geq N_1(t)} \sum_{k_2 \geq N_2(t)} f(k_1 + k_2) e^{\left(-\int_t^T (\kappa_1+\kappa_2)(s)ds\right)} \frac{\left(\int_t^T \kappa_1(s)ds\right)^{k_1 - N_1(t)}}{(k_1 - N_1(t))!} \frac{\left(\int_t^T \kappa_2(s)ds\right)^{k_2 - N_2(t)}}{(k_2 - N_2(t))!} \\
&\quad = \sum_y f(y) \sum_{0 \leq k \leq y - N_2(t) - N_1(t)} e^{\left(-\int_t^T (\kappa_1+\kappa_2)(s)ds\right)} \frac{\left(\int_t^T \kappa_1(s)ds\right)^k}{k!} \frac{\left(\int_t^T \kappa_2(s)ds\right)^{y - k - N_1(t) - N_2(t)}}{(y - k - N_1(t) - N_2(t))!}
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant des changements d'indices suivants $y = k_1 + k_2$ et $k = k_1 - N_1(t)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[L_k = y|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = \sum_{0 \leq k \leq y - N_2(t) - N_1(t)} e^{\left(-\int_t^T (\kappa_1+\kappa_2)(s)ds\right)} \frac{\left(\int_t^T \kappa_1(s)ds\right)^k}{k!} \frac{\left(\int_t^T \kappa_2(s)ds\right)^{y - k - N_1(t) - N_2(t)}}{(y - k - N_1(t) - N_2(t))!}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
& p(t,y) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left[L_k = y|\mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{P}\left[L_k = y\right]} \\
&= e^{(\int_0^t (\kappa_1+\kappa_2)(s)ds)} \frac{\displaystyle\sum_{0\le k\le y-N_2(t)-N_1(t)} \frac{(\int_t^T \kappa_1(s)ds)^k}{k!} \frac{(\int_t^T \kappa_2(s)ds)^{y-k-N_1(t)-N_2(t)}}{(y-k-N_1(t)-N_2(t))!}}{\displaystyle\sum_{0\le k\le y} \frac{(\int_0^T \kappa_1(s)ds)^k}{k!} \frac{(\int_0^T \kappa_2(s)ds)^{y-k}}{(y-k)!}}.
\end{aligned}
$$

$$Z_k(t) = p(t, N_1(T) + N_2(T)).$$

<u>Calcul explicite de ρ_1^k et ρ_2^k</u>

$$dZ_k(t) = Z_k(t^-)[\rho_1^{k*}(t)dW(t) + (\rho_2^k(t) - I_n)^* dM(t)]$$

avec $\rho_1^k \equiv 0, \quad (\rho_2^k)_i \equiv 1 \quad \forall i \geq 3$ et

$$
\begin{aligned}
& (\rho_2^k)_1(t) = (\rho_2^k)_2(t) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N_2(T)+N_1(T)-N_2(t)-N_1(t)} \frac{(\int_t^T \kappa_1(s)ds)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\int_t^T \kappa_2(s)ds)^{N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t)}}{(N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t))!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N_2(T)+N_1(T)-N_2(t)-N_1(t)} \frac{(\int_t^T \kappa_1(s)ds)^{k}}{k!} \frac{(\int_t^T \kappa_2(s)ds)^{N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t)}}{(N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t))!}}
\end{aligned}
$$

si ni N_1 ni N_2 ne saute à l'instant t, et

$$
\begin{aligned}
& (\rho_2^k)_1(t) = (\rho_2^k)_2(t) = \frac{p(t)}{p(t^-)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N_2(T)+N_1(T)-N_2(t)-N_1(t)} \frac{(\int_t^T \kappa_1(s)ds)^{k}}{(k)!} \frac{(\int_t^T \kappa_2(s)ds)^{N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t)}}{(N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t))!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N_2(T)+N_1(T)-N_2(t)-N_1(t)+1} \frac{(\int_t^T \kappa_1(s)ds)^{k}}{k!} \frac{(\int_t^T \kappa_2(s)ds)^{N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t)+1}}{(N_2(T)+N_1(T)-k-N_1(t)-N_2(t)+1)!}}
\end{aligned}
$$

si N_1 ou N_2 saute à l'instant t.

<u>Programme avec utilité logarithmique</u>

Nous avons fait une simulation avec la matrice de covariance constante définie en (12.3) (cf. section 14.2.1 page 205) , puis une autre simulation avec une matrice de

covariance prévisible (cf. section 14.2.2 page 210) :

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.1 & -0.15 & 0.17 \\ -0.09 & -0.4 & -0.03 & 0.035 \\ 0.048 & -0.12 & 0.1 & -0.12 \\ 0.075 & 0.26 & 0.31 & -0.28 \end{pmatrix} \text{ si } W_1(t^-) > 0$$

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & -0.042 & -0.17 \\ 0.09 & 0.4 & -0.03 & 0.135 \\ -0.048 & 0.12 & 0.1 & -0.2 \\ -0.075 & -0.26 & -0.21 & 0.12 \end{pmatrix} \text{ si } W_1(t^-) \leq 0$$

Résultats

On constate à nouveau que l'initié gagne plus que le non initié (cf. figures 14.31, 14.32 et 14.36). Son processus $\frac{1}{Y_k}$ est de l'ordre de grandeur de celui de l'exemple 12.1.1. En effet dans ce cas l'initié connait un événement de probabilité non nulle, ce qui explique pourquoi $\frac{1}{Y_k}$ n'est pas aussi grand que dans l'exemple 12.1.2. Les résultats sont donc semblables entre ces deux simulations. Cependant, pour une volatilité aléatoire, la proportion de la richesse investie par un non-initié dans les différents actifs dépend du temps (puisque σ en dépend) même si le processus de Poisson ne saute pas, alors que pour une volatilité constante, elle est constante dès que le processus de Poisson ne saute pas (cf. figures 14.33, 14.34 et 14.35 pour une volatilité constante, et figures 14.37, 14.38 et 14.39 pour une volatilité aléatoire).

Maintenant, nous allons généraliser les exemples 12.1.1 ($L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$) et 12.1.2 ($L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$) à un marché mixte. On note σ_{iW} les m premières coordonnées et σ_{iN} les n dernières coordonnées de σ_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de σ : $\sigma_i = (\sigma_{iW}, \sigma_{iN})$. Pour simplifier les calculs, nous supposons κ constant.

12.2.2 Il existe i, $1 \leq i \leq d$, tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$, $0 < a < b$

$$\begin{aligned} \ln(P_i(T)) = \ln(P_i(0)) \quad &+ \quad \int_0^T (b_i(s) - \frac{1}{2}||\sigma_{iW}(s)||^2)ds + \int_0^T \sigma_{iW}(s)dW(s) \\ &+ \quad \int_0^T \ln(1 + \sigma_{iN}(s))dN(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_k = 1|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{P}[\ln a \leq \ln(P_i(T)) \leq \ln b \,|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{P}\left[k_a(t) \leq \int_t^T \sigma_{iW}(s)dW(s) + \ln(1 + \sigma_{iN}(s))dN(s) \leq k_b(t)\right] \end{aligned}$$

car $\int_t^T \sigma_{iW}(s)dW(s) + \ln(1 + \sigma_{iN}(s))dN(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$k_x(t) := \ln x \quad - \quad \ln(P_i(0)) - \int_0^T (b_i(s) - \frac{1}{2}||\sigma_{iW}(s)||^2)ds$$

$$- \quad \left(\int_0^t \sigma_{iW}(s)dW(s) + \ln(1+\sigma_{iN}(s))dN(s)\right) \quad \text{est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.}$$

Calculons la loi de $\int_t^T \sigma_{iW}(s)dW(s) + \ln(1+\sigma_{iN}(s))dN(s)$.
Puisque N_j est un processus de Poisson d'intensité κ_j, si τ_i^j est le $i^{\text{ème}}$ instant de saut de N_j, les variables alétoires $(\tau_{i+1}^j - \tau_i^j)_{i\geq 1}$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre κ_j. Ainsi, la loi de $(\tau_1^j, \cdots, \tau_k^j)$ est de densité $\mathbb{I}_{0\leq t_1\leq t_k}\kappa_j^k e^{-\kappa_j t_k} dt_1 \cdots dt_k$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$. Par suite, si f une fonction réelle mesurable bornée,

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{P}}\left(f(\int_t^T \ln(1+\sigma_{ij}(s))dN_j(s))\right) \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0}\sum_{p\geq 1} \kappa_j^{p+k} \int_{D_{t,T,k}} f(\sum_{l=0}^{k-1} \ln(1+\sigma_{ij}(t_{p+l})))e^{-\kappa_j t_{p+k}} dt_1 \cdots dt_{p+k} \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} e^{-\kappa_j(T-t)}\kappa_j^k \int_{F_{t,T,k}} f(\sum_{l=1}^{k} \ln(1+\sigma_{ij}(t_l))) \; dt_1 \cdots dt_k
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
D_{t,T,k} &= \left\{(t_1, \cdots, t_{p+k}) \in \mathbb{R}^{p+k} | t_1 \leq \cdots \leq t_{p-1} \leq t \leq t_p \leq \cdots \leq t_{p+k-1} \leq T \leq t_{p+k}\right\}, \\
F_{t,T,k} &= \left\{(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k | t \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq T\right\}
\end{aligned}$$

avec pour convention $\int_{F_{t,T,k}} f(x + \sum_{l=1}^k \ln(1+\sigma_{ij}(t_l)))\, dt_1 \cdots dt_k = f(x)$ si $k=0$.
Puisque les processus de Poisson $N_1, \cdots, N_n$ sont indépendants entre eux,

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{P}}\left(f(\int_t^T \ln(1+\sigma_{iN}(s))dN(s))\right) \qquad (12.4) \\
&\qquad = \prod_{j=1}^n \sum_{k_j\geq 0} e^{-\kappa_j(T-t)}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} f\left(\sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{k_j} \ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\right) \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}
\end{aligned}$$

où

$$(F_{t,T,k_j})^n = \left\{(t_{jl_j})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq l_j\leq k_j}} \in \mathbb{R}^{k_1+\cdots+k_n} | \forall\ 1\leq j\leq n,\ t \leq t_{jl_1} \leq \cdots \leq t_{jl_{k_j}} \leq T\right\} \qquad (12.5)$$

$\int_t^T \sigma_{iW}(s)dW(s)$ est indépendant de $(N_1, \cdots, N_n)$ et suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma_t)$ centrée de variance $\Sigma_t = \int_t^T ||\sigma_{iW}(s)||^2 ds$ donc

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{P}}\left(f(\int_t^T \sigma_{iW}(s)dW(s) + \ln(1+\sigma_{iN}(s))dN(s))\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n \sum_{k_j\geq 0} e^{-\kappa_j(T-t)}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} f\left(x + \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{k_j} \ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\right) \frac{\exp(\frac{-x^2}{2\Sigma_t})}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}
\end{aligned}$$

Par suite

$$\mathbb{P}\left[P_i(T)=1|\mathcal{F}_t\right]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} e^{-\kappa_j(T-t)}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{\left(k_a(t)\leq x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\leq k_b(t)\right)} \frac{\exp(\frac{-x^2}{2\Sigma_t})}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}$$

$$p(t,1)$$
$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j(T-t)-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{\left(k_a(t)\leq x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\leq k_b(t)\right)} dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}}{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j T-\frac{x^2}{2\Sigma_0}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{0,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{\left(k_a(0)\leq x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\leq k_b(0)\right)} dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}}$$

$$p(t,0)$$
$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j(T-t)-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{[k_a(t),k_b(t)]^C}(x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j})))dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}}{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j T-\frac{x^2}{2\Sigma_0}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{0,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{[k_a(0),k_b(0)]^C}(x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j})))dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}}$$

Le coefficient de $dp(t,1)$ sur $dW(t)$ est

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j(T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} \left(f_{(t_{jl_j})}(k_a(t))-f_{(t_{jl_j})}(k_b(t))\right) \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j} \quad \sigma_{iW}(t)}{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j T-\frac{x^2}{2\Sigma_0}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{0,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{\left(k_a(0)\leq x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\leq k_b(0)\right)} dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}}$$

avec pour $(t_{jl_j})_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq l_j\leq k_j}} \in (F_{t,T,k_j})^n$,

$$f_{(t_{jl_j})}(x) = \exp\left(\frac{-(x-\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j})))^2}{2\Sigma_t}\right). \tag{12.6}$$

De même, le coefficient de $dp(t,0)$ sur $dW(t)$ est

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j(T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{t,T,k_j})^n} \left(f_{(t_{jl_j})}(k_b(t))-f_{(t_{jl_j})}(k_a(t))\right) \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j} \quad \sigma_{iW}(t)}{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j\geq 0} \frac{e^{-\kappa_j T-\frac{x^2}{2\Sigma_0}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}\kappa_j^{k_j} \int_{(F_{0,T,k_j})^n} \mathbb{I}_{[k_a(0),k_b(0)]^C}(x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j})))dx \prod_{l_j=1}^{k_j} dt_{jl_j}}$$

Par suite

$$\rho_1^k(t) = a(t)\sigma_{iW}(t) \quad \text{et} \quad \rho_2^k(t) - \mathbb{I}_n = a(t)\ln(1+\sigma_{iN}(t))$$

où $a(t)$ est le scalaire

$$a(t) := \frac{\prod_{j=1}^{n}\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}\Big(f_{(t_{jl_j})}(k_a(t)) - f_{(t_{jl_j})}(k_b(t))\Big)\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}\ \mathbb{I}_{(L_k=1)}}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{n}\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}\mathbb{I}_{\Big(k_a(t)\leq x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j}))\leq k_b(t)\Big)}dx\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}}$$

$$+\frac{\prod_{j=1}^{n}\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}\Big(f_{(t_{jl_j})}(k_b(t)) - f_{(t_{jl_j})}(k_a(t))\Big)\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}\ \mathbb{I}_{(L_k=0)}}{\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{n}\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}\mathbb{I}_{[k_a(t),k_b(t)]^C}(x+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{ij}(t_{jl_j})))dx\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}}.$$

$Z_k(t) = p(t,L_k) = p(t,1)\mathbb{I}_{(L_k=1)} + p(t,0)\mathbb{I}_{(L_k=0)}$.

La différence essentielle avec les résultats de la section 12.1.1 concerne le portefeuille sur les actifs j $(1 \leq j \leq d,\ j \neq i)$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 12.2.1 *Si l'initié connait $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$ pour un certain i $(0 < a < b$ et $1 \leq i \leq d)$, alors si t n'est pas un temps de saut*

$$\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) \quad = \quad (\sigma^*(t))^{-1}\left(\sigma_{iW}(t),\ \frac{\ln(1+\sigma_{iN}(t))}{q}\right)^* a(t).$$

Dans un marché mixte, la proportion de la richesse investie dans tous les actifs diffère entre un initié et un non initié (cf. figures 14.42 et 14.43) .

Preuve: Soit un instant t tel que le processus de Poisson ne saute pas en t. Alors puisque $\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}l_k(t)$, la différence de la proportion de la richesse investie par un initié et un non initié dans les actifs risqués est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) &= (\sigma^*(t))^{-1}(l_k(t) - l_0(t)) = (\sigma^*(t))^{-1}\left((\rho_1^k)^*, (\frac{\rho_2^k - \mathbb{I}_2}{q})^*\right)^*(t)\\ &= (\sigma^*(t))^{-1}\left(\sigma_{iW}(t),\ \frac{\ln(1+\sigma_{iN}(t))}{q}\right)^* a(t)\end{aligned}$$

où $a(t)$ est un scalaire. Mais cette fois ci,

$$(\sigma^*(t))^{-1}\left(\sigma_{iW}(t),\ \frac{\ln(1+\sigma_{iN}(t))}{q}\right)^* \neq (0,\cdots,0,\ \overbrace{1}^{\text{component } i},0,\cdots,0)^*.$$

Cette différence avec le cas purement diffusif provient de l'expression du logarithme des prix, qui fait intervenir la fonction ln sur la partie à sauts. □

Programme avec utilité logarithmique

cf. section 14.2.3 page 214.

Explicitons les formules trouvées pour p et ρ^k pour σ constante, $m = n = 2$ et $i = 1$. Dans ce cas, $\sum_{j=1}^{2}\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(1+\sigma_{1j}(t_{jl_j})) = k_1\ln(1+\sigma_{13}) + k_2\ln(1+\sigma_{14})$ ne dépend que de k_1 et de k_2, on note cette double somme $g(k_1,k_2)$. Par suite, le numérateur de $p(t,1)$ est égal à

$$e^{-(\kappa_1+\kappa_2)(T-t)}\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\int_{(F_{t,T,k_j})^2}\prod_{l_1=1}^{k_1}dt_{1l_1}\prod_{l_2=1}^{k_2}dt_{2l_2}\int_{k_a(t)-g(k_1,k_2)}^{k_b(t)-g(k_1,k_2)}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}dx.$$

Or

$$\prod_{l_1=1}^{k_1}dt_{1l_1}\prod_{l_2=1}^{k_2}dt_{2l_2} = \frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}$$

et

$$\int_{k_a(t)-g(k_1,k_2)}^{k_b(t)-g(k_1,k_2)}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}dx = F_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) - F_t(k_a(t)-g(k_1,k_2))$$

où F_t est la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,\Sigma_t)$ centrée de variance $\Sigma_t = \int_t^T ||\sigma_{1W}(s)||^2 ds$. Donc le numérateur de $p(t,1)$ est égal à

$$e^{-(\kappa_1+\kappa_2)(T-t)}\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(F_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) - F_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)))$$

et

$$p(t,1) = e^{(\kappa_1+\kappa_2)t} \cdot \frac{\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(F_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) - F_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)))}{\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{T^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(F_0(k_b(0)-g(k_1,k_2)) - F_0(k_a(0)-g(k_1,k_2)))}.$$

De même

$$p(t,0) = e^{(\kappa_1+\kappa_2)t} \cdot \frac{\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(1 - F_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) + F_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)))}{\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{T^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(1 - F_0(k_b(0)-g(k_1,k_2)) + F_0(k_a(0)-g(k_1,k_2)))}.$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_2\geq 0}}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(f_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)) - f_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)))\,\mathbb{I}_{(L_k=1)}}{\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_2\geq 0}}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(F_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) - F_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)))} \\ &\quad + \frac{\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_2\geq 0}}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(f_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) - f_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)))\,\mathbb{I}_{(L_k=0)}}{\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_2\geq 0}}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}(1 - F_t(k_b(t)-g(k_1,k_2)) + F_t(k_a(t)-g(k_1,k_2)))}. \end{aligned}$$

où f_t est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma_t)$ centrée de variance Σ_t.

<u>Résultats</u>
Dans notre simulation avec marché mixte,

$$E_{\mathbb{P}}(P_1(T)) = P_1(0) \exp\left(T(b_1 - \frac{1}{2}||\sigma_{1W}||^2)\right)(1+\sigma_{13})^{\kappa_1 T}(1+\sigma_{14})^{\kappa_2 T} = 0.8971.$$

Pour les processus $\frac{1}{Y_k}$ et $\frac{1}{Y_0}$, les résultats sont similaires à ceux de la section 12.1.1 (cf. figure 14.40). $\frac{1}{Y_k}$ est plus grand que $\frac{1}{Y_0}$. Ce gain est d'autant plus important si $P_1(T)$ est dans $[a, b]$ et que $[a, b]$ est loin de la moyenne $E_{\mathbb{P}}(P_1(T))$. Plus $P_1(T)$ est grand , plus $\frac{1}{Y_k}$ et $\frac{1}{Y_0}$ le sont aussi, d'ordre de grandeur entre 0.5 et 15.
Si $P_1(T)$ est plus petit que sa moyenne 0.8971, l'initié (par rapport à un non-initié) investira moins son portefeuille sur l'actif 1 et plus sur le bond (cf. figure 14.41), et inversement si $P_1(T)$ est plus grand que sa moyenne.
Le fait que les coefficients du marché soient constants implique que, si t n'est pas un instant de saut, $\frac{\widehat{\pi_0}}{\widehat{X_0}}(t)$ d'un non-initié est constant et que les parts de la richesse investies par l'initié dans le bond et chacun des actifs risqués sont proportionnelles les unes aux autres.

12.2.3 $L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$

$$\begin{aligned} L_k &= \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T)) \\ &= \int_0^T \left((b_{i_1} - b_{i_2}) - \frac{1}{2}(||\sigma_{i_1 W}||^2 - ||\sigma_{i_2 W}||^2)\right)(s)ds \\ &\quad + \int_0^T (\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W})(s)dW(s) + \int_0^T \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1 N}}{1+\sigma_{i_2 N}}\right)(s)dN(s). \end{aligned}$$

$$L_k = m_t + \int_t^T (\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W})(s)dW(s) + \int_t^T \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1 N}}{1+\sigma_{i_2 N}}\right)(s)dN(s)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad m_t &:= \int_0^T \left((b_{i_1} - b_{i_2}) - \frac{1}{2}(||\sigma_{i_1 W}||^2 - ||\sigma_{i_2 W}||^2)\right)(s)ds \\ &\quad + \int_0^t (\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W})(s)dW(s) + \int_0^t \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1 N}}{1+\sigma_{i_2 N}}\right)(s)dN(s). \end{aligned}$$

m_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. $\int_t^T (\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W})(s)dW(s)$ est indépendant de $(N_1, \cdots, N_n)$ et suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma_t)$ centrée de variance $\Sigma_t = \int_t^T ||\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W}||^2(s)ds$. La loi de $\int_t^T \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1 N}}{1+\sigma_{i_2 N}}\right)(s)dN(s)$ se déduit immédiatement de la relation (12.4). Par

suite, si f est une fonction réelle mesurable bornée

$$E_{\mathbb{P}}\left(f(\int_t^T(\sigma_{i_1W}-\sigma_{i_2W})(s)dW(s)+\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1N}}{1+\sigma_{i_2N}}\right)(s)dN_j(s))\right)$$
$$=\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)-\frac{x^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{\mathbb{R}\times(F_{t,T,k_j})^n}f\left(x+\sum_{j=1}^n\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1j}}{1+\sigma_{i_2j}}\right)(t_{jl_j})\right)dx\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}$$

où $(F_{t,T,k_j})^n$ est défini en (12.5).

$$E_{\mathbb{P}}\left(f(L_k)|\mathcal{F}_t\right)$$
$$=\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)-\frac{(x-m_t)^2}{2\Sigma_t}}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{\mathbb{R}\times(F_{t,T,k_j})^n}f\left(x+\sum_{j=1}^n\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1j}}{1+\sigma_{i_2j}}\right)(t_{jl_j})\right)dx\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}$$
$$=\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{\mathbb{R}\times(F_{t,T,k_j})^n}f(u)\,e^{\left(\frac{-(u-m_t-\sum_{j=1}^n\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1j}}{1+\sigma_{i_2j}}\right)(t_{jl_j}))^2}{2\Sigma_t}\right)}du\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}.$$

Par suite

$$p(t,x)$$
$$=\frac{\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_j(T-t)}}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}e^{\left(\frac{-(x-m_t-\sum_{j=1}^n\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1j}}{1+\sigma_{i_2j}}\right)(t_{jl_j}))^2}{2\Sigma_t}\right)}\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}}{\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\frac{e^{-\kappa_jT}}{\sqrt{2\pi\Sigma_0}}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{0,T,k_j})^n}e^{\left(\frac{-(x-m_0-\sum_{j=1}^n\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1j}}{1+\sigma_{i_2j}}\right)(t_{jl_j}))^2}{2\Sigma_0}\right)}\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}}.$$

$Z_k(t)=p(t,L_k)$

$$\rho_1^k(t)=a(t)(\sigma_{i_1W}-\sigma_{i_2W})(t)\quad\text{et}\quad\rho_2^k(t)-\mathbb{I}_n=a(t)\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1N}}{1+\sigma_{i_2N}}\right)(t)$$

où $a(t)$ est la fonction scalaire suivante

$$a(t):=\frac{\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\frac{1}{\Sigma_t}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}f_{(t_{jl_j})}(L_k-m_t)(L_k-m_t-\sum_{j=1}^n\sum_{l_j=1}^{k_j}\ln(\frac{1+\sigma_{i_1j}}{1+\sigma_{i_2j}})(t_{jl_j}))\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}}{\prod_{j=1}^n\sum_{k_j\geq 0}\kappa_j^{k_j}\int_{(F_{t,T,k_j})^n}f_{(t_{jl_j})}(L_k-m_t)\prod_{l_j=1}^{k_j}dt_{jl_j}}.$$

La différence essentielle avec les résultats de la section 12.1.2 concerne le portefeuille sur le bond et les actifs j ($1\leq j\leq d$, $j\neq i$), comme le montre la proposition suivante.

Proposition 12.2.2 *Si l'initié connait $L_k = \ln(P_{i_1}(T)) - \ln(P_{i_2}(T))$, alors si t n'est pas un temps de saut*

$$\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) = (\sigma^*(t))^{-1}\left((\sigma_{i_1W} - \sigma_{i_2W})(t),\ \frac{1}{q}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1N}}{1+\sigma_{i_2N}}\right)(t)\right)^* a(t).$$

Dans un marché mixte, la proportion de la richesse investie dans tous les actifs diffère entre un initié et un non initié (cf. figures 14.47 et 14.48).

Preuve: Soit un instant t tel que le processus de Poisson ne saute pas en t. Alors $\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) = (\sigma^*(t))^{-1} l_k(t)$. La différence de la proportion de la richesse investie par un initié et un non initié dans les actifs risqués est donc donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\pi}_k}{\widehat{X}_k}(t) - \frac{\widehat{\pi}_0}{\widehat{X}_0}(t) &= (\sigma^*(t))^{-1}(l_k(t) - l_0(t)) = (\sigma^*(t))^{-1}\left((\rho_1^k)^*, (\frac{\rho_2^k - \mathbb{I}_2}{q})^*\right)^*(t)\\ &= (\sigma^*(t))^{-1}\left((\sigma_{i_1W} - \sigma_{i_2W})(t),\ \frac{1}{q}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1N}}{1+\sigma_{i_2N}}\right)(t)\right)^* a(t)\end{aligned}$$

où $a(t)$ est un scalaire. Mais cette fois ci

$$\begin{aligned}&(\sigma^*(t))^{-1}\left((\sigma_{i_1W} - \sigma_{i_2W})(t),\ \frac{1}{q}\ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1N}}{1+\sigma_{i_2N}}\right)\right)^*\\ &\neq (0,\cdots,0,\overbrace{1}^{\text{composante } i_1},0,\cdots,0,\overbrace{-1}^{\text{composante } i_2},0,\cdots,0)^*.\end{aligned}$$

Cette différence avec le cas purement diffusif provient à nouveau de l'expression du logarithme des prix, qui fait intervenir la fonction ln sur la partie à sauts. □

<u>Programme avec utilité logarithmique</u>
cf. section 14.2.4 page 218.
Explicitons les formules trouvées pour p et ρ^k pour σ constante, $m = n = 2$, $i_1 = 1$ et $i_1 = 2$. Dans ce cas,

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{l_j=1}^{k_j} \ln\left(\frac{1+\sigma_{1j}}{1+\sigma_{2j}}\right)(t_{jl_j}) = k_1 \ln\left(\frac{1+\sigma_{13}}{1+\sigma_{23}}\right) + k_2\ln\left(\frac{1+\sigma_{14}}{1+\sigma_{24}}\right)$$

ne dépend que de k_1 et de k_2, on note cette double somme $g(k_1, k_2)$.
Par suite, le numérateur de $p(t,x)$ est égal à

$$e^{-(\kappa_1+\kappa_2)(T-t)}\sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\int_{(F_{t,T,k_j})^2}\prod_{l_1=1}^{k_1}dt_{1l_1}\prod_{l_2=1}^{k_2}dt_{2l_2}e^{\left(\frac{-(x-m_t-g(k_1,k_2))^2}{2\Sigma_t}\right)}.$$

Par suite

$$p(t,x) = e^{(\kappa_1+\kappa_2)t}\frac{\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_2\geq 0}}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}f_t(x-m_t-g(k_1,k_2))}{\sum_{\substack{k_1\geq 0\\ k_2\geq 0}}\kappa_1^{k_1}\kappa_2^{k_2}\frac{T^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}f_0(x-m_0-g(k_1,k_2))}.$$

où f_t est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma_t)$ centrée de variance $\Sigma_t = \int_t^T ||\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W}||^2(s)ds$. $\rho_1^k(t)$ est le processus

$$\frac{\sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \geq 0}} \kappa_1^{k_1} \kappa_2^{k_2} \frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1! k_2!} f_t(x - m_t - g(k_1, k_2))(L_k - m_t - g(k_1, k_2))(\sigma_{i_1 W} - \sigma_{i_2 W})(t)}{\Sigma_t \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \geq 0}} \kappa_1^{k_1} \kappa_2^{k_2} \frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1! k_2!} f_t(L_k - m_t - g(k_1, k_2))}.$$

$\rho_2^k(t) - \mathbb{I}_2$ est le processus

$$\frac{\sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \geq 0}} \kappa_1^{k_1} \kappa_2^{k_2} \frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1! k_2!} f_t(x - m_t - g(k_1, k_2))(L_k - m_t - g(k_1, k_2)) \ln\left(\frac{1+\sigma_{i_1 N}}{1+\sigma_{i_2 N}}\right)(t)}{\Sigma_t \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_2 \geq 0}} \kappa_1^{k_1} \kappa_2^{k_2} \frac{(T-t)^{k_1+k_2}}{k_1! k_2!} f_t(L_k - m_t - g(k_1, k_2))}.$$

<u>Résultats</u>
Dans notre simulation avec marché mixte,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}(\ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T))) &= \left(T(b_1 - b_2) - \frac{1}{2}(||\sigma_{1W}||^2) - (||\sigma_{2W}||^2)\right) \\ &\quad + \kappa_1 T \ln\left(\frac{1+\sigma_{13}}{1+\sigma_{23}}\right) + \kappa_2 T \ln\left(\frac{1+\sigma_{14}}{1+\sigma_{24}}\right) \\ &= -0.1019. \end{aligned}$$

Pour les processus $\frac{1}{Y_k}$ et $\frac{1}{Y_0}$, les résultats sont similaires à ceux de la simulation avec un marché purement diffusif, section 12.1.2 page 158. Cependant, bien que l'initié gagne plus qu'un non-initié (cf. figure 14.44), son gain est moins important que dans le cadre d'un marché purement diffusif ($\frac{1}{Y_k}$ est de l'ordre de 0.2 à 10). Ceci peut s'expliquer par le fait que le prix des actifs peut sauter entre les instants A et T, donc le ratio des prix des actifs 1 et 2 à la date A peut être très différent de celui à la date T (plus que dans le cas purement diffusif où il n'y a pas de sauts). Donc cette information est moins importante dans le cadre d'un marché mixte que d'un marché purement diffusif, ce qui explique pourquoi le gain de l'initié est moindre.
La stratégie d'un initié sur les actifs 1 et 2 reste la même :
si $L(t) = \ln(P_1(t)) - \ln(P_2(t)) > L(T) = L_k$, la proportion de sa richesse investie sur l'actif 1 (respectivement sur l'actif 2) est plus petit (respectivement plus grand) que celle d'un non-initié, inversement si $L(t) < L_k$ (cf. figures 14.46 et 14.45).

Chapitre 13

Simulation d'un équilibre avec utilité logarithmique

13.1 Equilibre avec K agents

Nous allons mettre en application les résultats du chapitre 11 pour simuler un équilibre. Les agents ont différents problèmes d'optimisation (consommation et/ou richesse terminale) mais tous ont pour fonction d'utilité la fonction ln : les k_1 premiers souhaitent maximiser leur consommation (sans richesse initiale et avec une ressource actualisée déterministe), les k_2 suivant optimisent leur richesse terminale (sans ressource et avec une richesse initiale), les autres optimisent à la fois leur consommation et leur richesse terminale (sans ressource et avec une richesse initiale). Nous nous plaçons sous les hypothèses du chapitre 11. Rappelons la condition nécessaire et suffisante (11.9) :

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{\pi_k}^* \equiv 0_{\mathbb{R}^d} \quad \text{si et seulement si}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{k_1} \quad & \frac{(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds)}{T}\left[(T-t)\frac{1}{Y_k}(t) + \int_0^t \frac{1}{Y_k}(s)ds\right] + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \beta(0)X_k(0)\frac{1}{Y_k}(t) \\
+ \quad & \sum_{k=k_2+1}^{K} \frac{\beta(0)X_k(0)}{(T+1)}\left[(1+T-t)\frac{1}{Y_k}(t) + \int_0^t \frac{1}{Y_k}(s)ds\right] \\
& = \sum_{k=1}^{k_1}(\int_0^T \beta(s)\epsilon_k(s)ds) + \sum_{k=k_1+1}^{K} \beta(0)X_k(0), \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

On se donne $K-1$ agents avec leur problème d'optimisation et leur information privée, pour chacun desquels nous simulons le processus $\frac{1}{Y_k}$. La relation (11.9) nous permet de simuler (ou de déduire directement) le processus $\frac{1}{Y_{k_0}}$ du dernier agent afin qu'un équilibre existe. Plus précisement, si cet agent n'optimise pas sa consommation (i.e. $k_1 < k_0 \leq k_2$), on peut déduire directement de (11.9) son processus

$\frac{1}{Y_{k_0}}$ car $\int_0^{\cdot} \frac{1}{Y_{k_0}}(s)ds$ n'intervient pas dans (11.9). Par contre, si cet agent optimise sa consommation (i.e. $k_0 \leq k_1$ ou $k_0 > k_2$), $\int_0^{\cdot} \frac{1}{Y_{k_0}}(s)ds$ intervient dans (11.9) et nous simulons alors $\frac{1}{Y_{k_0}}$ par itération en posant $\frac{1}{Y_{k_0}}(0) = 1$ et en simulant $\int_0^{\frac{iT}{N}} \frac{1}{Y_k}(s)ds$ par $\frac{T}{N}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{Y_k}(\frac{jT}{N})$, $i = 1, \cdots, N$ (où $\frac{T}{N}$ est le pas des itérations).
Pour que ce processus $\frac{1}{Y_{k_0}}$ soit positif, il faut que les agents ayant une information importante aient un petit poids dans le marché (relativement aux autres agents). Dans notre simulation, nous avons pris 3 agents. Le premier est non initié et optimise sa richesse terminale. Le deuxième connait $\mathbb{I}_{[a,b]}(P_1(T))$ et optimise sa consommation et sa richesse terminale. On simule alors le processus $\frac{1}{Y_3}$ du troisième agent qui optimise sa consommation (avec une ressource actualisée constante).

Programme et résultats
cf. section 14.3.1 page 222. Pour mieux visualiser que notre condition d'équilibre est la nullité de la somme des portefeuilles, nous avons cette fois simulé le portefeuille de chaque agent, et non pas la proportion de leur richesse investie dans chaque actif (cf. figures 14.51, 14.52 et 14.53). Nous avons aussi simulé la consommation et la richesse actualisées optimales du troisième agent (cf. figure 14.50) : bien que la consommation actualisée reste proportionnelle au processus $\frac{1}{Y_3}$, ce n'est plus le cas de la richesse actualisée dans le cadre d'optimisation de la consommation seulement (comme on peut le voir grâce aux calculs théoriques de l'exemple 3.0.5 page 43).

13.2 Poids maximal d'un initié

Nous allons estimer le poids maximal qu'un initié peut investir dans le marché pour qu'un équilibre puisse être réalisé. Plus précisement, nous considérons un marché avec deux agents. Le premier agent a une information privée. Nous rappelons que le poids d'un agent i dans le marché est proportionnel à $a_i := \int_0^T \beta(s)\epsilon_i(s)ds$ s'il n'optimise que sa consommation et a pour processus de ressource ϵ_i, à $a_i := \beta(0)X_i(0)$ sinon (où $X_i(0)$ est sa richesse initiale). La condition nécessaire et suffisante (11.9) nous donne le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ maximal afin que le processus $\frac{1}{Y_2}$ soit strictement positif, donc afin qu'un équilibre puisse exister. Nous simulons ce rapport pour différentes informations et différents problèmes d'optimisation, mais pour la même réalisation de ω.
Si les deux agents ont le même problème d'optimisation, on déduit des relations (11.5) et (11.8) que le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ maximal est égal à $-\left(1 - \max_{t\in[0,T]}(\frac{1}{Y_1(t)})\right)^{-1}$ si $\max_{t\in[0,T]}(\frac{1}{Y_1(t)}) > 1$ (sinon le rapport maximal est infini, il n'y a pas de contrainte sur le poids maximal de l'initié, qui par ailleurs gagne peu dans ce cas).
Si le premier agent (l'initié) optimise sa consommation (respectivement sa consommation et sa richesse terminale) et le deuxième optimise sa richesse terminale, on déduit de la relation (11.9) le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ maximal :

$$-\left(1-\frac{1}{T}\max_{t\in[0,T]}(\frac{T-t}{Y_1(t)}+\int_0^t\frac{1}{Y_1(s)}ds)\right)^{-1} \text{ si } \frac{1}{T}\max_{t\in[0,T]}(\frac{T-t}{Y_1(t)}+\int_0^t\frac{1}{Y_1(s)}ds)>1$$

$$\text{(respectivement } -\left(1-\frac{1}{T+1}\max_{t\in[0,T]}(\frac{1+T-t}{Y_1(t)}+\int_0^t\frac{1}{Y_1(s)}ds)\right)^{-1}$$

$$\text{si } \frac{1}{T+1}\max_{t\in[0,T]}(\frac{1+T-t}{Y_1(t)}+\int_0^t\frac{1}{Y_1(s)}ds>1),$$

sinon il n'y a pas de contrainte sur le poids maximal de l'initié.
La détermination du rapport $\frac{a_1}{a_2}$ maximal devient plus délicate quand $\frac{1}{Y_2}$ intervient sous forme intégrée dans la relation (11.9) car alors il faut simuler $\frac{1}{Y_2}$ par itération. Par conséquent nous avons choisi dans ces cas là de simuler le rapport maximal de la façon suivante. Nous avons créé une première fonction qui a pour entrée $\frac{1}{Y_1}$ et $\frac{a_1}{a_2}$ et qui donne le minimum de $\frac{1}{Y_2}$. Nous nous servons de cette fonction dans une deuxième fonction qui a pour entrée $\frac{1}{Y_1}$ et qui calcule par interpolation linéaire $\frac{a_1}{a_2}$ maximal tel que le minimum de $\frac{1}{Y_2}$ soit positif. Nous avons détaillé dans la section 14.3.2 page 226 ces deux fonctions dans le cas où l'agent initié optimise sa consommation et le deuxième agent sa consommation et sa richesse terminale, les autres fonctions correspondant aux autres problèmes d'optimisation étant tout à fait similaires.

<u>Résultats</u>
cf. section 14.3.2 page 226.
Nous avons simulé quatre informations privées différentes :

$$\begin{cases} \text{information 1} & : \text{information forte initiale } \mathbb{I}_{[a,b]}(P_1(T)). \\ \text{information 2} & : \text{information forte initiale } \ln(P_1(T))-\ln(P_2(T)). \\ \text{information 3} & : \text{information forte progressive } 2W_1(T)+a+B_{(T-t)}. \\ \text{information 4} & : \text{information faible de la section 12.1.4.} \end{cases}$$

Nous constatons que plus le processus $\frac{1}{Y_1}$ est grand, plus le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ maximal doit être petit. Notamment lors de notre deuxième simulation, $\frac{1}{Y_1}$ est très grand pour la deuxième information et un agent possédant cette information doit investir un montant dérisoire (le rapport maximal est de l'ordre de 1e-4) pour qu'un équilibre puisse exister entre les deux agents. Dans nos deux simulations, le processus $\frac{1}{Y_1}$ est plus grand (et donc le rapport maximal est plus petit) dans le cas de l'information forte progressive (information 3) que dans le cas de l'information forte initiale 1. Cela s'explique par le fait que pour l'information 1, l'initié connait un événement de probabilité strictement positive, alors que pour l'information 3, l'événement que connait l'initié, certes de façon perturbée, est de probabilité nulle.
Nous constatons aussi que le rapport maximal dépend du problème d'optimisation des deux agents. En particulier, il est d'autant plus grand si l'initié n'optimise pas que sa richesse terminale et encore plus grand s'il n'optimise que sa consommation. Inversement, il est d'autant plus petit si le deuxième agent n'optimise pas que sa richesse terminale et encore plus petit s'il n'optimise que sa consommation.

Chapitre 14

Programmes et Graphiques

14.1 Marché purement diffusif

14.1.1 $\exists\ i$ tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_i(T))$

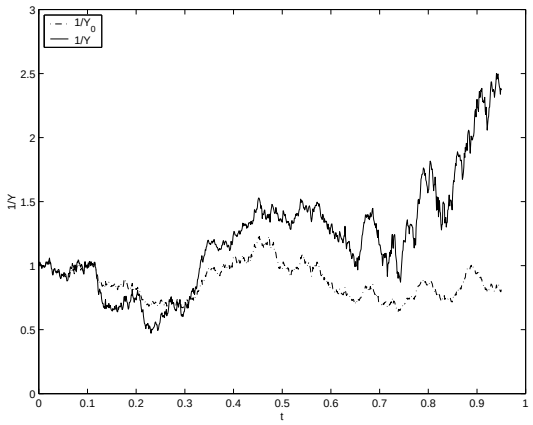
```
clf; clear
T=1; N=1000; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-50;
r=0.02; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=[0.4,0.1,0.042,-0.17;0.09,0.4,0.23,0.035;
       -0.048,0.12,0.4,0.2;-0.075,-0.26,0.11,0.4];
cov=sigma(1,:)*(sigma(1,:))';
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';
a=1.2; c=2;
Xo=1;
Tab=[t1:dt:N*dt];
A=Tab(1:Tf);

%simulation du Brownien W
W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))';
Z=W(:,1:Tf);

%valeur de P_1(T)
S_T= exp((b(1)-cov/2)*T)*exp(sigma(1,:)*W(:,N))
S_A= exp((b(1)-cov/2)*Tf/N)*exp(sigma(1,:)*W(:,Tf))

%calcul de p et l
ka=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
kb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
ka0=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov);
kb0=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov);

if (S_T>=a) & (S_T<=c)
```

```
   for i=1:Tf
   p(i)=(pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
           -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
          /(pnorm(kb0,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ka0,0,sqrt(T*cov)));
   l(i)=-(dnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
           -dnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
         /(pnorm(kb(i),0,(sqrt(T-Tab(i))*cov))
             -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)));
  end
else
   for i=1:Tf
   p(i)=(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
           +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
        /(1- (pnorm(kb0,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ka0,0,sqrt(T*cov))) );
   l(i)=(dnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
          -dnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
         /(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
            +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)));
   end
end

%calcul de N_0=1/Y_0 et N=1/Y
  D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));
  D=D_0.*p;

%calcul du portefeuille du non initie :  il est plus interessant de regarder
% la proportion de richesse investie  dans chacun des actifs
      PI_ni= (sigma^-1)'*repmat((theta)',1,Tf);
%part de la richesse sur le bond
      B_ni=1-sum((PI_ni));

%calcul du portefeuille de l'initie
    Var=repmat((theta)',1,Tf)  + sigma(1,:)'*l;
    PI_i=(sigma^-1)'* Var;
%part de la richesse sur le bond
    B_i=1-sum((PI_i));

%consommation actualisee
           c_ni=Xo/(Tf/N+1) *D_0;
         c_i=Xo/(Tf/N+1) *D;
%richesse actualisee
           X_ni= Xo /(Tf/N+1)*(Tf/N+1-A).*D_0;
         X_i= Xo /(Tf/N+1)*(Tf/N+1-A).*D;
```

```
%TRACES
figure(1)
plot([0,A],[1,D_0],'r-.',[0,A],[1,D],'b');
legend('1/Y_0','1/Y',2);
xlabel('t'); ylabel('1/Y');
figure(2)
plot(A,p);
legend('Simulation de p',2);
xlabel('t'); ylabel('p(t)');
figure(3)
plot(A,B_ni,'r -.', A,B_i,'b'  );
title('portefeuille sur bond');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel(' portefeuille sur bond  (t)');
figure(4)
plot(A,PI_ni(1,:),'r-.', A,PI_i(1,:),'b'  );
title('portefeuille sur actif1');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel(' portefeuille sur actif1 (t)');
figure(5)
plot(A,PI_ni(2,:),'r-.', A,PI_i(2,:),'b'  );
title('portefeuille sur actif2');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel(' portefeuille sur actif2 (t)');
figure(6)
plot(A,PI_ni(3,:),'r-.', A,PI_i(3,:),'b'  );
title('portefeuille sur actif3');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel(' portefeuille sur actif3 (t)');
figure(7)
plot(A,PI_ni(4,:),'r-.', A,PI_i(4,:),'b'  );
title('portefeuille sur actif4');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel(' portefeuille sur actif4 (t)');
figure(8)
plot(A,c_ni,'r-.', A,c_i,'b'  );
title('consommation actualisee');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel('  c(t)');
figure(9)
plot(A,X_ni,'r-.', A,X_i,'b'  );
title('richesse actualisee');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel('  X(t)');
```

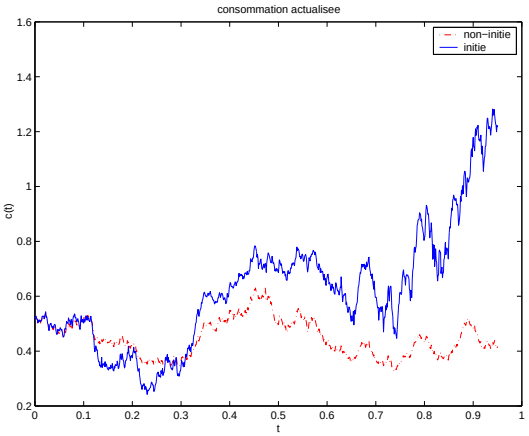
$\underline{P_1(T) = 1.0525,\ a = 0.85,\ b = 1.2}$

cf. figures 14.1, 14.2, 14.3 et 14.4.

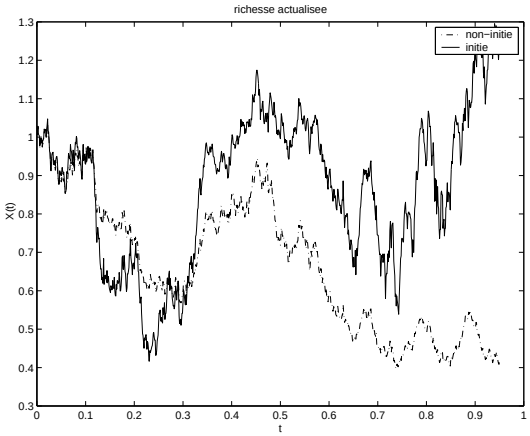


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.1 – $P_1(T) = 1.0525,\ a = 0.85,\ b = 1.2$

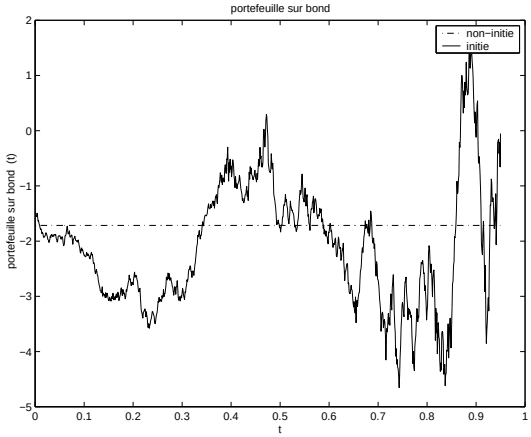


consommation actualisée

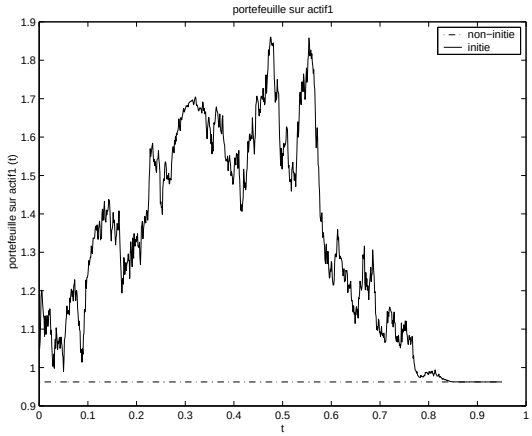


richesse actualisée

FIG. 14.2 – $P_1(T) = 1.0525,\ a = 0.85,\ b = 1.2$

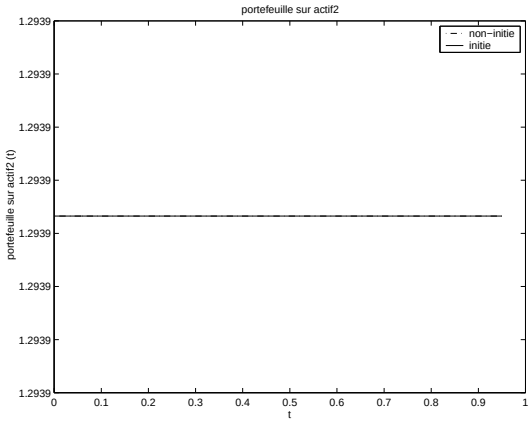


portefeuille sur le bond



portefeuille sur l'actif 1

FIG. 14.3 – $P_1(T) = 1.0525,\ a = 0.85,\ b = 1.2$

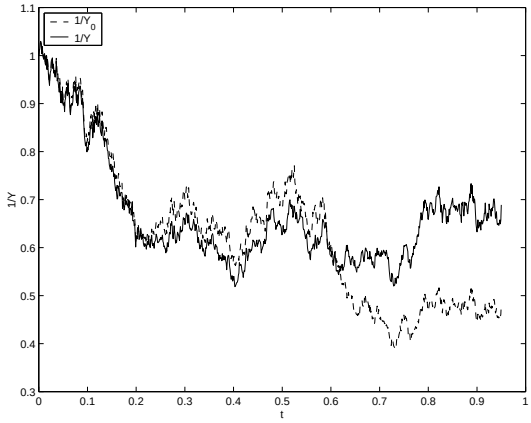


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.4 – $P_1(T) = 1.0525,\ a = 0.85,\ b = 1.2$

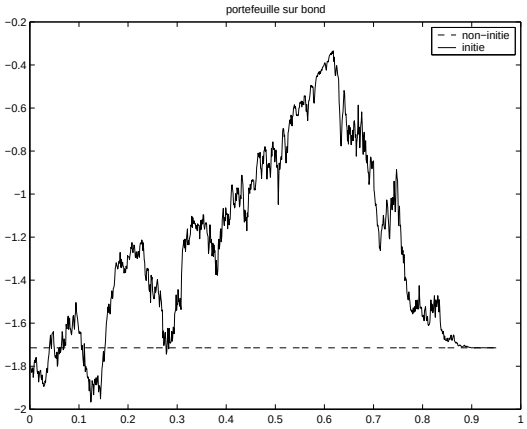
$\underline{P_1(T) = 0.5096,\ a = 0.85,\ b = 1.2}$

cf. figures 14.5, 14.6.

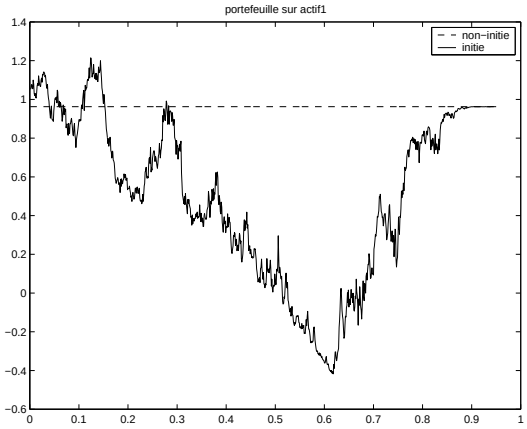


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.5 – $P_1(T) = 0.5096$, $a = 0.85$, $b = 1.2$



portefeuille sur le bond

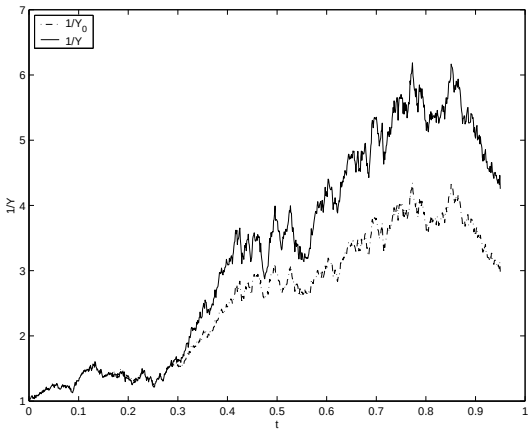


portefeuille sur l'actif 1

FIG. 14.6 – $P_1(T) = 0.5096$, $a = 0.85$, $b = 1.2$

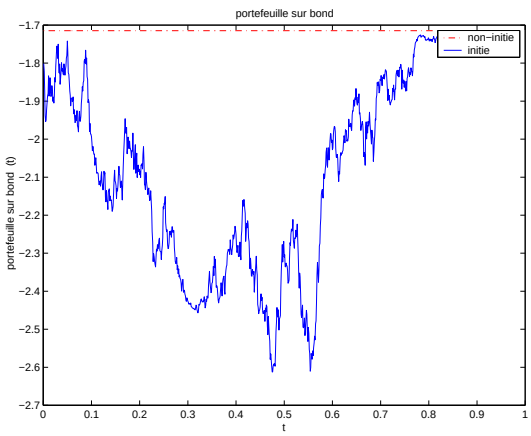
$\underline{P_1(T) = 2.0798,\ a = 0.85,\ b = 1.2}$

cf. figures 14.7 et 14.8.

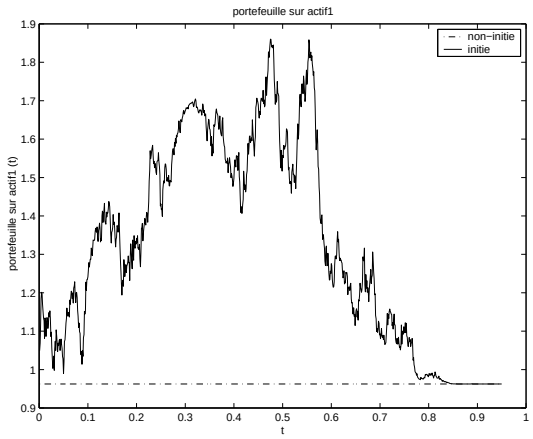


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.7 – $P_1(T) = 2.0798,\ a = 0.85,\ b = 1.2$



portefeuille sur le bond

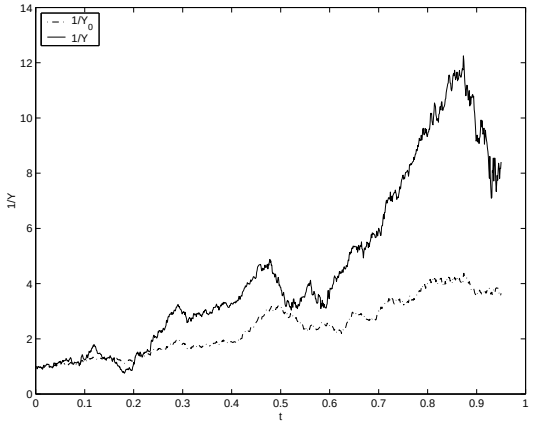


portefeuille sur l'actif 1

FIG. 14.8 – $P_1(T) = 2.0798,\ a = 0.85,\ b = 1.2$

$\underline{P_1(T) = 1.8752,\ a = 1.2,\ b = 2}$

cf. figure 14.9.



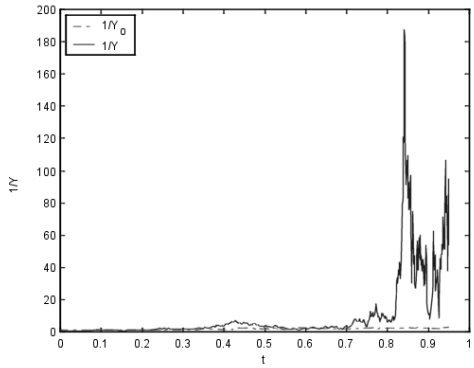
Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.9 – $P_1(T) = 1.8752$, $a = 1.2$, $b = 2$

14.1.2 $L_k = \ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T))$

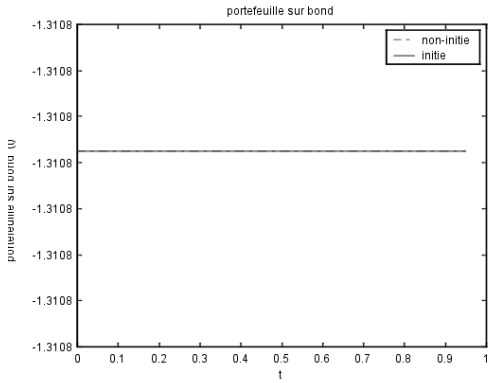
$\underline{L_k = 0.3833}$

cf. figures 14.10, 14.11, 14.12, 14.13 et 14.14.



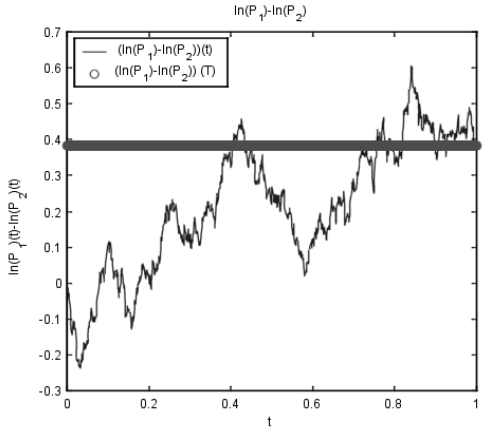
Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.10 – $L_k = 0.3833$



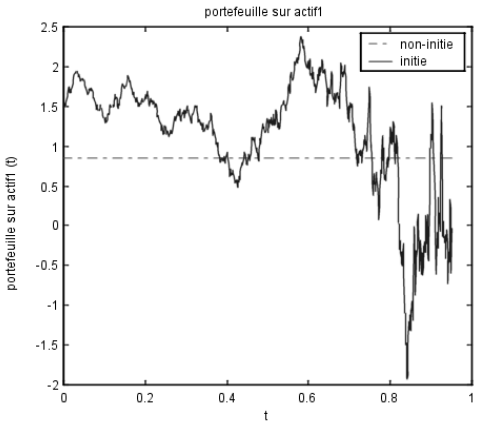
portefeuille sur le bond

FIG. 14.11 – $L_k = 0.3833$

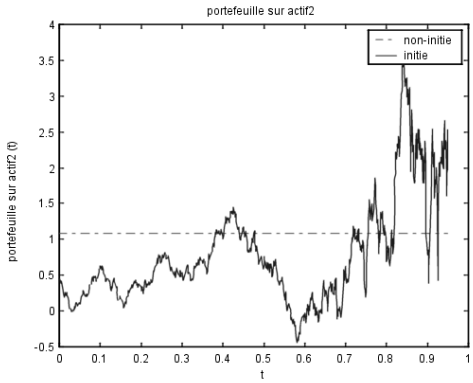


$\ln(P_1(t)) - \ln(P_2(t))$

FIG. 14.12 – $L_k = 0.3833$

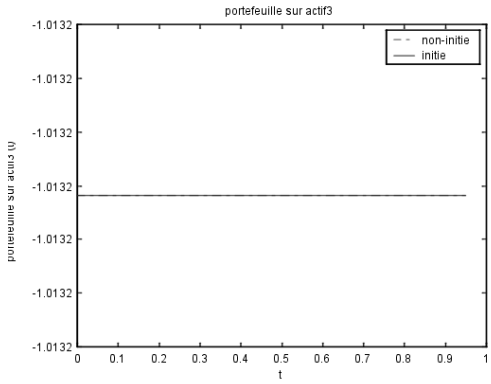


portefeuille sur l'actif 1

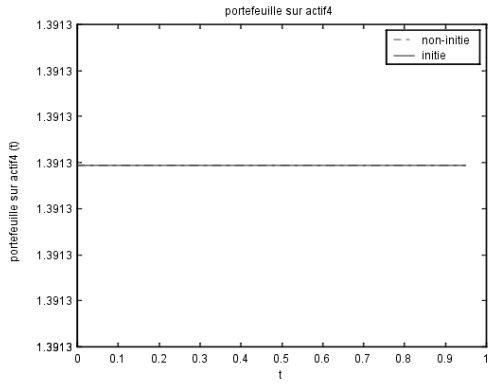


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.13 – $L_k = 0.3833$



portefeuille sur l'actif 3

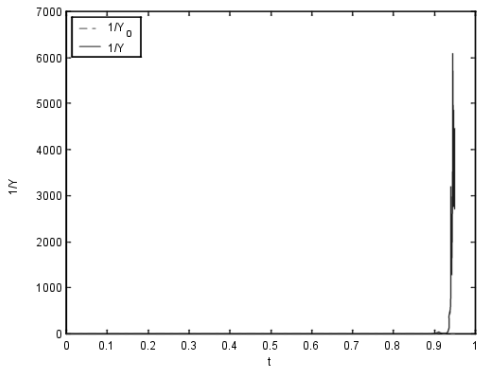


portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.14 – $L_k = 0.3833$

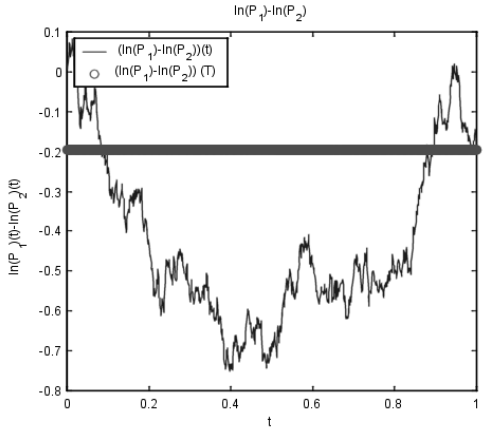
$\underline{L_k = -0.1949}$

cf. figures 14.15, 14.16 et 14.17.



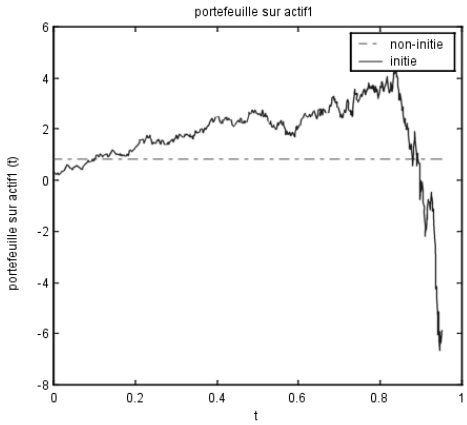
Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.15 – $L_k = -0.1949$

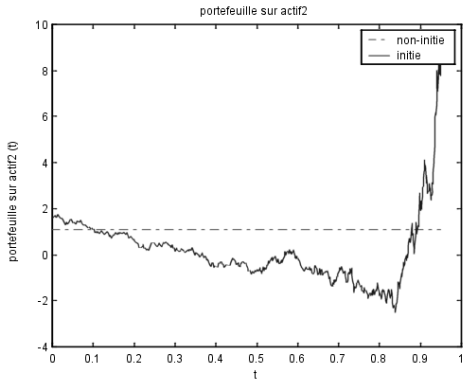


$\ln(P_1(t)) - \ln(P_2(t))$

FIG. 14.16 – $L_k = -0.1949$



portefeuille sur l'actif 1

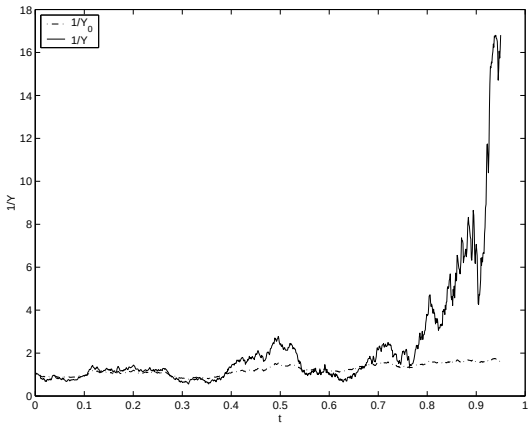


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.17 – $L_k = -0.1949$

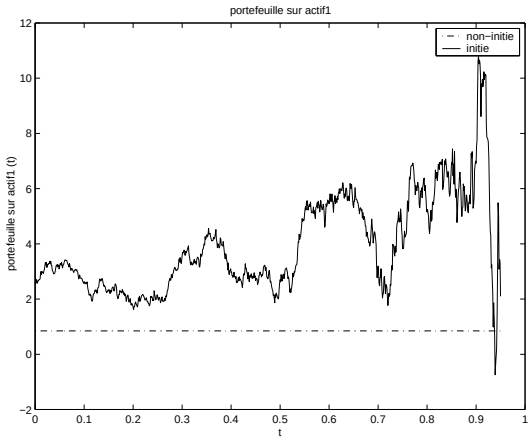
14.1.3 $L_k(t) = (2W_1(T) + a) + B_{(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$

cf. figures 14.18, 14.19, 14.20 et 14.21.

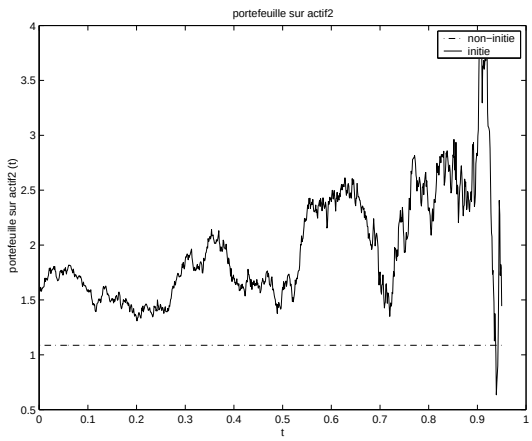


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.18 – $L_k(t) = (2W_1(T) + a) + B_{(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$

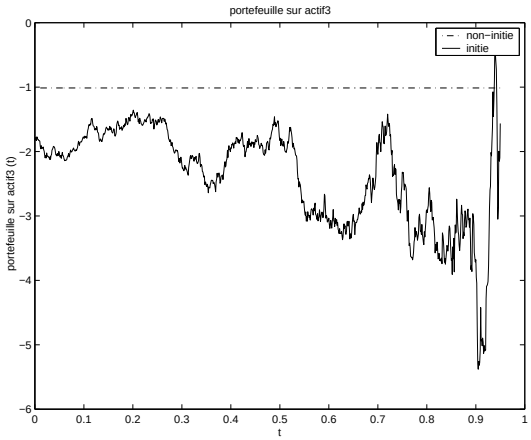


portefeuille sur l'actif 1

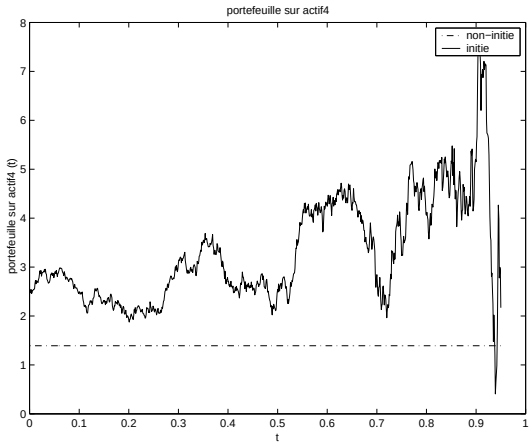


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.19 – $L_k(t) = (2W_1(T) + a) + B_{(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$

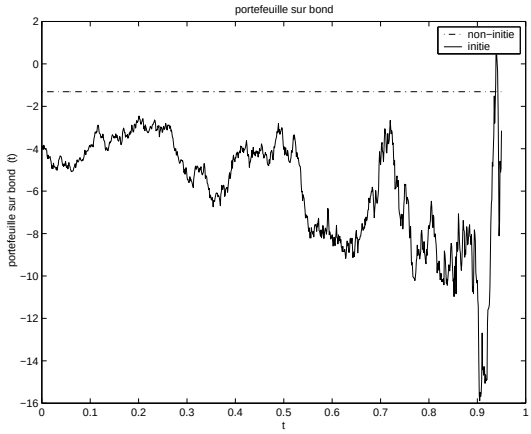


portefeuille sur l'actif 3



portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.20 – $L_k(t) = (2W_1(T) + a) + B_{(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$



portefeuille sur le bond

FIG. 14.21 – $L_k(t) = (2W_1(T) + a) + B_{(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$

14.1.4 Information faible

$L_k = \widehat{W}_1(T)$ et ν_k est la mesure gaussienne

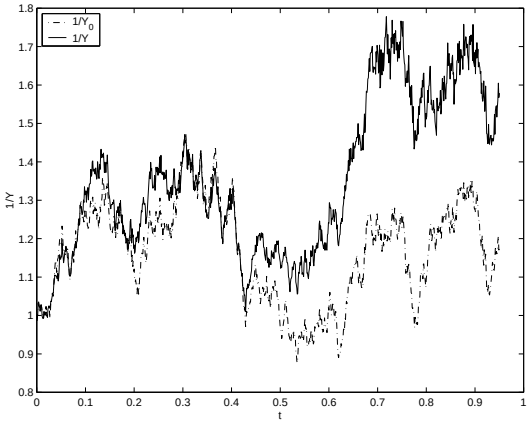
$$\nu_k(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(\frac{-(y-m)^2}{2s^2}\right) dy, \quad m \in \mathbb{R}, \quad s^2 \leq T.$$

```
clf; clear
T=1; N=1000; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-50;
r=0.02; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=[0.4,0.1,0.042,-0.17;0.09,0.4,0.23,0.035;
       -0.048,0.12,0.4,0.2;-0.075,-0.26,0.11,0.4];
cov=sigma(1,:)*(sigma(1,:))';
Xo=1;
Tab=[t1:dt:N*dt];
A=Tab(1:Tf);
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';
m=theta(1);s=1;

%simulation du Brownien W
W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))';
Z=W(:,1:Tf);
Wchapeau=Z(1,:)+theta(1)*dt*[1:1:Tf];

%calcul de N=1/Y et de l_1
nb=10000;
for i=1:Tf
  X=rnorm(nb,m,s);
  int(i)=(mean(exp((X.^2)/(2*T)-(X-Wchapeau(i)*ones(nb,1)).^2
             /(2*(T-i*dt)))));
  int2(i)=(mean( (X- Wchapeau(i)*ones(nb,1))./(T- i*dt)
           .*  exp((X.^2)/(2*T)
           -(X-Wchapeau(i)*ones(nb,1)).^2/(2*(T-i*dt)))));
end
D= sqrt(T ./(T- [1:1:Tf]*dt)).*int;
D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));
l=int2 ./ int;

%calcul du portefeuille du non initie
PI_ni= (sigma^-1)'*repmat((theta)',1,Tf);
%part de la richesse sur le bond
B_ni=1-sum((PI_ni));

%calcul du portefeuille de l'initie
PI_i=(sigma^-1)'* [l;zeros(1,Tf);zeros(1,Tf);zeros(1,Tf)];
```

```
%part de la richesse sur le bond
B_i=1-sum((PI_i));
```

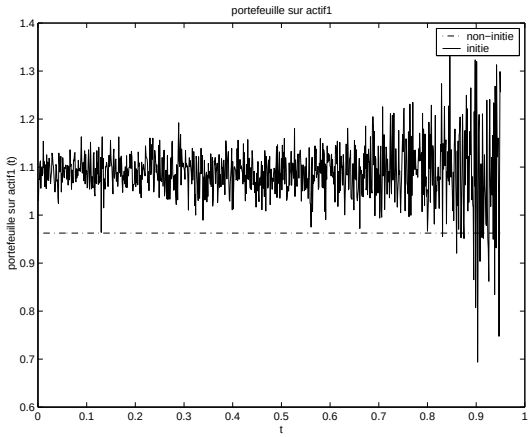
information faible, $m = 0.4354$**,** $s = 1$

cf. figures 14.22, 14.23, 14.24 et 14.25.

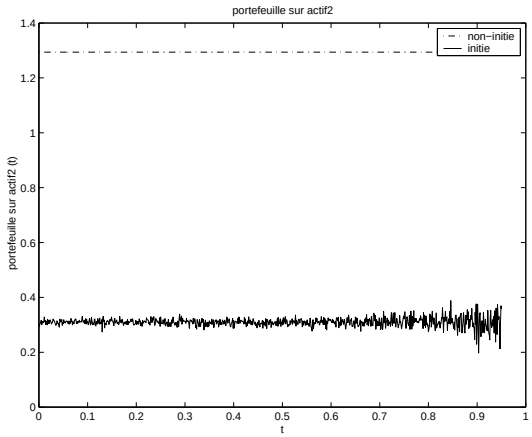


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.22 – $m = 0.4354$, $s = 1$

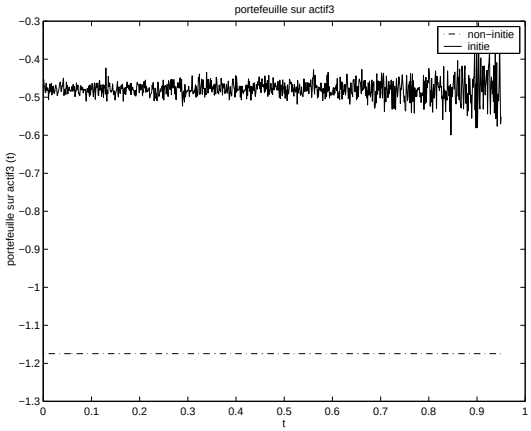


portefeuille sur l'actif 1

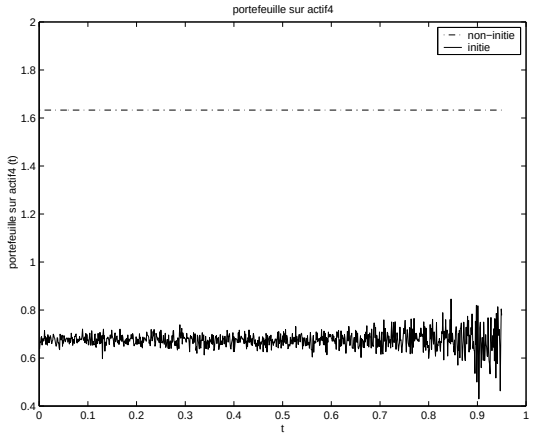


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.23 – $m = 0.4354$, $s = 1$

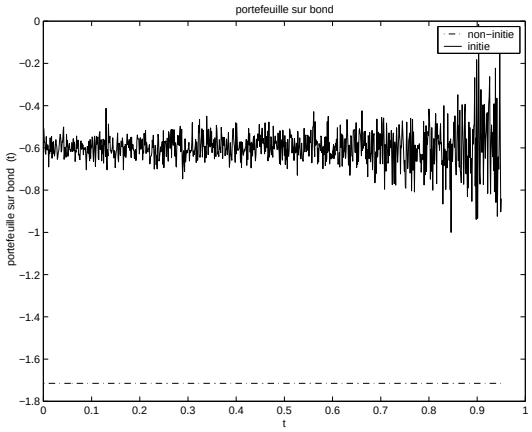


portefeuille sur l'actif 3



portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.24 – $m = 0.4354$, $s = 1$

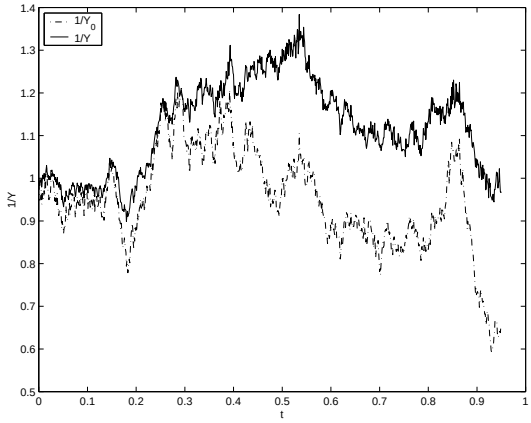


portefeuille sur le bond

FIG. 14.25 – $m = 0.4354$, $s = 1$

information faible, $m = 0.3$, $s = 1$

cf. figure 14.26.

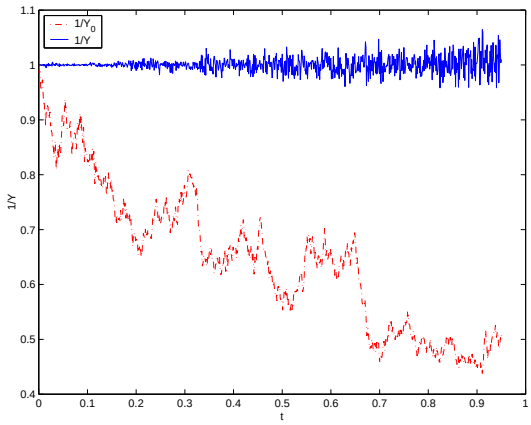


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.26 – $m = 0.3$, $s = 1$

information faible, $m = 0$, $s = 1$

cf. figure 14.27.

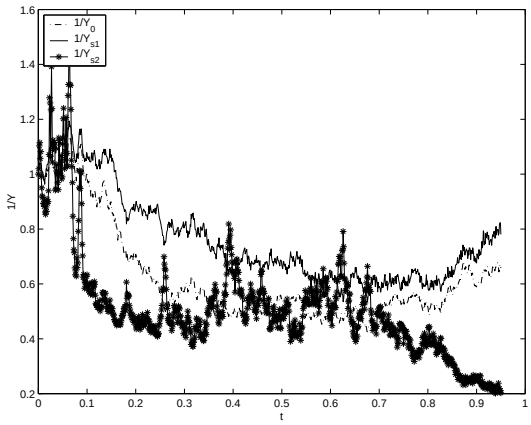


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.27 – $m = 0$, $s = 1$

information faible, $m = 0.4354$, $s = 1$ ou $s = 5$

cf. figure 14.28.



Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

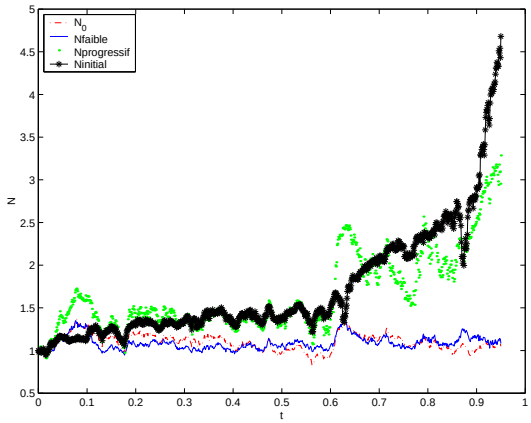
FIG. 14.28 – $m = 0.4354$, $s1 = 1$ et $s2 = 5$

14.1.5 Comparaison entre les 3 types d'information privée

Nous considérons les 3 types d'information définis dans la section 12.1.5. cf. figure 14.29 pour le résultat graphique.

```
clf; clear
T=1; N=1000; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-50;
r=0.02; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=[0.4,0.1,0.042,-0.17;0.09,0.4,0.23,0.035;
   -0.048,0.12,0.4,0.2;-0.075,-0.26,0.11,0.4];
cov=sigma(1,:)*(sigma(1,:))';
Xo=1;
Tab=[t1:dt:N*dt];
A=Tab(1:Tf);
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';
m=theta(1); s=1; lambda=2;

%simulation du Brownien W
W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))';
Z=W(:,1:Tf);
Wchapeau=Z(1,:)+theta(1)*dt*[1:1:Tf];

D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));

%simulation du bruit Y
Bbis=(cumsum(rnorm([N,1],0,sqrt(dt))))';
Y=fliplr(Bbis);


%calcul de Nfaible=1/Y
nb=10000;
 for i=1:Tf
 X=rnorm(nb,m,s);
 int(i)=(mean(exp((X.^2)/(2*T)-(X-Wchapeau(i)*ones(nb,1))
     .^2/(2*(T-i*dt)))));
 end
Dfaible= sqrt(T ./(T- [1:1:Tf]*dt)).*int;

%calcul de Ninitial
pinitial=sqrt(T ./(T- [1:1:Tf]*dt)).* exp( W(1,N)^2/(2*T))
  .* exp(-( W(1,N)*ones(1,Tf)-Z(1,:)).^2./(2*(T-[1:1:Tf]*dt)));
Dinitial=D_0.*pinitial;

%calcul de  rho puis  p puis Nprogressif
rho= lambda*(lambda*(W(1,N)-Z(1,:))+Y(1:Tf))
```

```
        ./((T-A)*(1+(lambda)^2));
p(1)=1+ W(1,1)*lambda*(lambda*W(1,N)+Y(N))/(T*(1+(lambda)^2));
  for i=1:Tf-1
  p(i+1)=p(i) *(1+ rho(i) *(W(1,i+1)- W(1,i)));
  end
Dprogressif=D_0.*p;

figure(1)
plot([0,A],[1,D_0],'r-.',[0,A],[1,Dfaible],'b',
     [0,A],[1,Dprogressif],'g.',[0,A],[1,Dinitial],'k -*');
legend('N_0','Nfaible','Nprogressif','Ninitial',2);
xlabel('t'); ylabel('N');
```



Processus $\frac{1}{Y}$

FIG. 14.29 – comparaison 3 types d'information privée

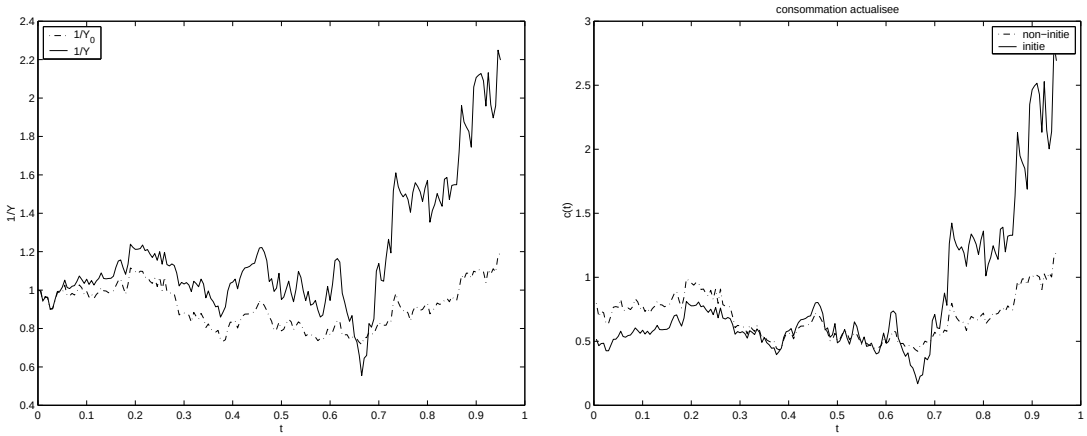
14.1.6 Utilité isoélastique

$L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_1(T))$, $a = 0.85$ et $b = 1.2$.
$U(t,x) = \frac{x^p}{p}$ $(p \neq 0,\, p < 1)$, $\forall (t,x) \in [0,T] \times]0,+\infty[$.
cf. figure 14.30.

```
clf; clear
T=1; N=200; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-10;
r=0.035; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=[0.4,0.1,0.042,-0.17;0.09,0.4,0.23,0.035;
       -0.048,0.12,0.4,0.2;-0.075,-0.26,0.11,0.4];
cov=sigma(1,:)*(sigma(1,:))';
a=0.85; c=1.2; alpha=1/2;
Xo=1;
Tab=[t1:dt:N*dt];
A=Tab(1:Tf);
M=100;
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';
P_0=exp(r*A);

%CALCUL DE L'ESPERANCE CONDITIONNELLE
%DANS LE MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
for j=1:M
  W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))';
  Z=W(:,1:Tf);
  S_T= exp((b(1)-cov/2)*T)*exp(sigma(1,:)*W(:,N));
  L(j)= ((S_T>a) & (S_T<c));
  ka=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
  kb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
  ma=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov);
  mb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov);
    if L(j)==1
       for i=1:Tf
       p(i)=(pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
             -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
            /(pnorm(mb,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ma,0,sqrt(T*cov)));
       end
    else
       for i=1:Tf
       p(i)=(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
             +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
        /(1- (pnorm(mb,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ma,0,sqrt(T*cov))) );
       end
    end
D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));
```

```
D=D_0.*p;
F(j)=(P_0(Tf)*D(Tf))^(- alpha/ (alpha-1))
     +1/N * sum((P_0(i).*D(i)).^(- alpha/( alpha-1)));
F_0(j)=(P_0(Tf)*D_0(Tf))^(- alpha/( alpha-1))
     +1/N * sum((P_0(i).*D_0(i)).^(- alpha/( alpha-1)));
end

lambda_0=sum(F_0)/M;

if L==zeros(1,M) lambda(2)=0;
 else  lambda(2)=sum(F.*L)/sum(L);
end;
if L==ones(1,M)  lambda(1)=0;
   else lambda(1)=sum(F.*(1-L))/sum((1-L));
end;

%CALCUL D'UNE TRAJECTOIRE
W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))';
Z=W(:,1:Tf);
S_T= exp((b(1)-cov/2)*T)*exp(sigma(1,:)*W(:,N))
Li= ((S_T>=a) & (S_T<=c));
ka=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
kb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
ma=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov);
mb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov);
if Li==1
   for i=1:Tf
   p(i)=(pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
          -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
     /(pnorm(mb,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ma,0,sqrt(T*cov)));
   end
else
  for i=1:Tf
  p(i)=(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
         +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
    /(1- (pnorm(mb,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ma,0,sqrt(T*cov))) );
  end
end
D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));
D=D_0.*p;

%consommation actualisee
           c_ni=Xo/lambda_0*(D_0.*P_0).^(-1/( alpha-1));
            c_i=Xo/lambda(Li+1) *(D.*P_0).^(-1/( alpha-1));
```

```
%TRACES
figure(1)
plot([0,A],[1,D_0],'r-.',[0,A],[1,D],'b');
legend('1/Y_0','1/Y',2);
xlabel('t'); ylabel('1/Y');

figure(2)
plot(A,p);
legend('Simulation de p',2);
xlabel('t'); ylabel('p(t)');

figure(3)
plot(A,c_ni,'r-.', A,c_i,'b'  );
title('consommation actualisee');
legend('non-initie','initie')
xlabel('t'); ylabel('  c(t)');
```



Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$ Consommation actualisée

FIG. 14.30 – Utilité isoélastique, $p = 0.5$

14.2 Marché mixte

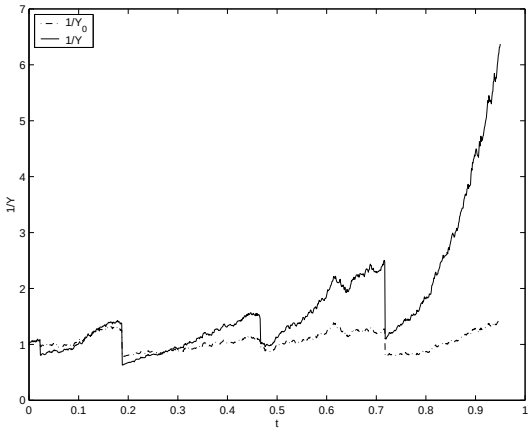
14.2.1 $L_k = N_1(T) + N_2(T)$, σ constante

Dans notre simulation, $L_k = 4$: le premier processus de Poisson saute aux instants 0.0227 et 0.446, le deuxième processus de Poisson saute aux instants 0.1875 et 0.718. cf. figures 14.31, 14.32, 14.33, 14.34 et 14.35.

```
clf; clear
T=1;  N=1000; t1=T/N; dt=T/N;  Tf=N-50;
r=0.035; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=-[0.4,0.1,0.15,-0.17;0.09,0.4,0.03,-0.035;
        -0.048,0.12,-0.1,0.12;-0.075,-0.26,0.31,-0.28];
kappa=[3,2]; Xo=1;
Tab=[t1:dt:N*dt]; A=Tab(1:Tf);

%simulation du Brownien W
W=(cumsum(rnorm([N,2],0,sqrt(dt))))';

%simulation du Poisson
saut1=cumsum(rexpweib(15,kappa(1),1));
  for i=1:N
  Poiss1(i)=sum(  ( saut1<= (i*T/N) )  );
  end
saut2=cumsum(rexpweib(15,kappa(2),1));
  for i=1:N
  Poiss2(i)=sum(  ( saut2<= (i*T/N) )  );
  end
Poiss=[Poiss1;Poiss2];

%valeur de L
L=Poiss1+Poiss2;
L(N)
L(Tf)

%calcul de p et rho
S=sum(kappa);
ind=(0:L(N));
loiL=( sum(  ((T)*kappa(1)).^(ind).*((T)*kappa(2)).^(L(N)- ind )
        ./(gamma(ind+1).*gamma(L(N)-ind+1))));
   for i=1:Tf
   indi=(0:L(N)-L(i));
   indi1=(1:L(N)-L(i));
   sumi=( sum(  ((T-i*T/N)*kappa(1)).^(indi).*
          ((T-i*T/N)*kappa(2)).^ (L(N)-L(i)- indi )
```

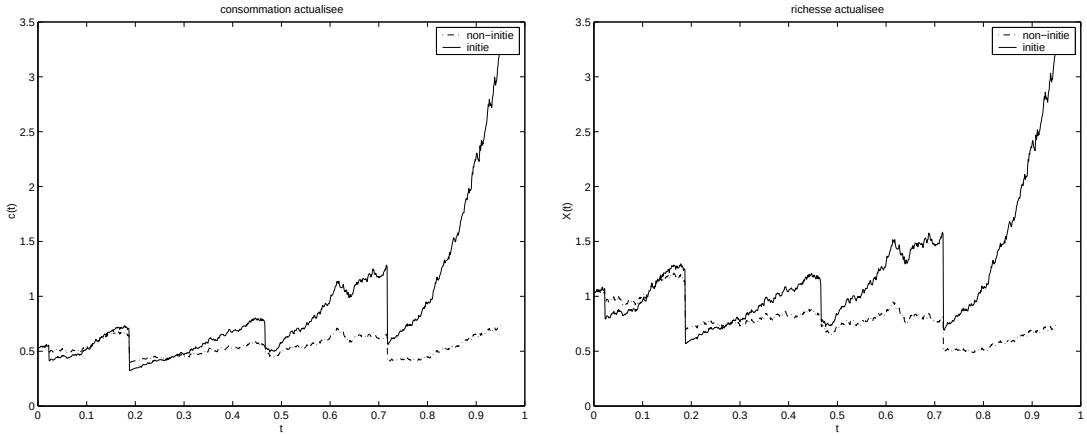
```
            ./(gamma(indi+1) .* gamma(L(N)-L(i)-indi+1) ))) ;
   p(i)= exp(i*T/N *S) *  sumi  / loiL  ;
   rho(i)=( sum(  ((T-i*T/N)*kappa(1)).^(indi1-1).*
          ((T-i*T/N)*kappa(2)).^ (L(N)-L(i)- indi1 )
          ./(gamma(indi1) .* gamma(L(N)-L(i)-indi1+1) ))) /sumi;
   end

%calcul de 1/Y_0 et 1/Y
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';
q=-theta(3:4)./kappa
var1=theta(1:2)*theta(1:2)';
var2=sum(-theta(3:4))-sum(kappa);
  for i=1:Tf
  D_0(i)=exp(theta(1:2)*W(:,i)+1/2*i*dt*var1)
            *exp( i*dt *var2)*(1/q(1))^(Poiss1(i))
            *(1/q(2))^(Poiss2(i));
  end
D_0_=[1,D_0];
D=D_0.*p;
D_=[1,D];
p_=[1,p];

%calcul des sauts de 1/Y et 1/Y_0
sautD0=eye(Tf);
sautD=eye(Tf);
indsaut1=floor(1/dt*saut1);
i=1;
  while indsaut1(i)<Tf
  sautD0(indsaut1(i)+1,indsaut1(i)+1)
     =D_0_(indsaut1(i)+1)/D_0_(indsaut1(i)+2);
  sautD(indsaut1(i)+1,indsaut1(i)+1)
     =D_(indsaut1(i)+1)/D_(indsaut1(i)+2);
  i=i+1;
  end;
indsaut2=floor(1/dt*saut2);
i=1;
  while indsaut2(i)<Tf
  sautD0(indsaut2(i)+1,indsaut2(i)+1)
       =D_0_(indsaut2(i)+1)/D_0_(indsaut2(i)+2);
  sautD(indsaut1(i)+1,indsaut1(i)+1)
       =D_(indsaut2(i)+1)/D_(indsaut2(i)+2);
  i=i+1;
  end;
```

```
%calcul du portefeuille du non initie
l_0=[theta(1:2),(1/q(1)-1),(1/q(2)-1)];
PI_ni= (sigma^-1)'*repmat(l_0',1,Tf)*sautD0;
B_ni=1-sum((PI_ni));

%calcul du portefeuille de l'initie
Var=[repmat((theta(1:2)'),1,Tf);rho/q(1)-1 ;rho/q(2)-1 ] ;
PI_i=(sigma^-1)'* Var*sautD;
B_i=1-sum((PI_i));

%consommation actualisee
          c_ni=Xo/(Tf/N+1) *D_0;
          c_i=Xo/(Tf/N+1) *D;
%richesse actualisee
          X_ni= Xo /(Tf/N+1)*(Tf/N+1-A).*D_0;
          X_i= Xo /(Tf/N+1)*(Tf/N+1-A).*D;

%TRACES
```



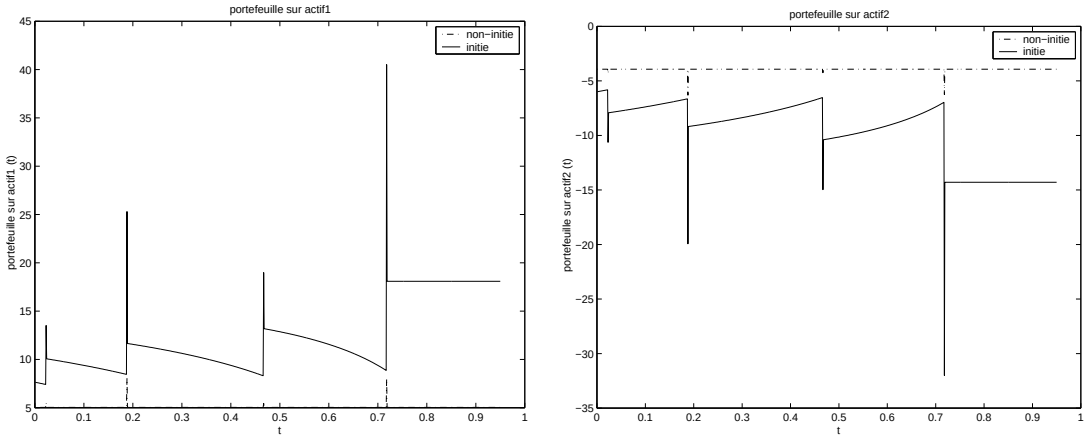
Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.31 – $N_1(T) + N_2(T) = 4$, σ constant



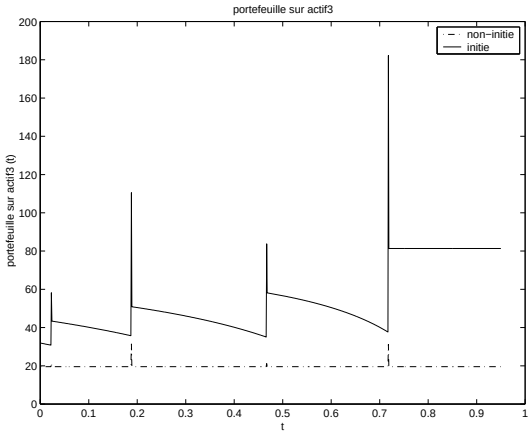
consommation actualisée richesse actualisée

FIG. 14.32 – $N_1(T) + N_2(T) = 4$, σ constant

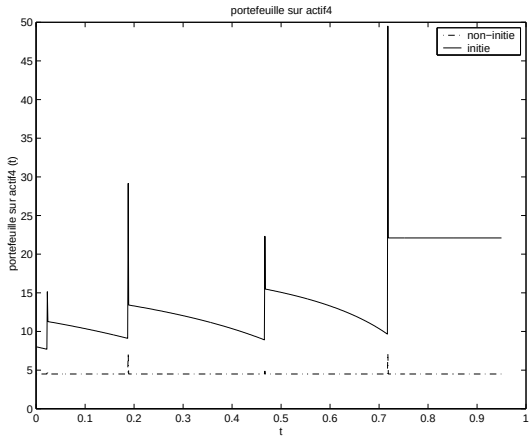


portefeuille sur l'actif 1 portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.33 – $N_1(T) + N_2(T) = 4$, σ constant

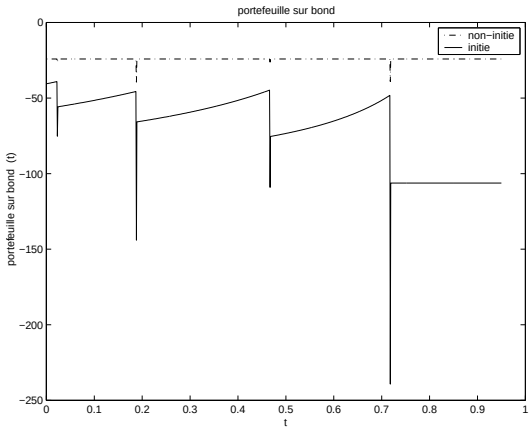


portefeuille sur l'actif 3



portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.34 – $N_1(T) + N_2(T) = 4$, σ constant



portefeuille sur bond

FIG. 14.35 – $N_1(T) + N_2(T) = 4$, σ constant

14.2.2 $L_k = N_1(T) + N_2(T)$, σ prévisible

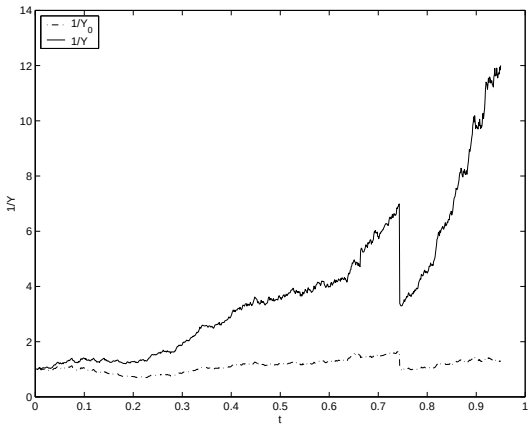
Dans notre simulation, $L_k = 2$: le premier processus de Poisson saute à l'instant 0.8666, et le deuxième processus de Poisson saute à l'instant 0.9277.
cf. figures 14.36, 14.37, 14.38 et 14.39.
Le programme fait appel à une fonction qui calcule la matrice de covariance à l'instant $t = \frac{i}{N}$.

```
function[sig]=sigmamat(i,W)
sigmaW=-[0.4,0.1;0.09,0.4;-0.048,0.12;-0.075,-0.26];
sigma1N=-[0.15,-0.17;0.03,-0.035;-0.1,0.12;0.31,-0.28];
sigma2=-[0.042,-0.17;0.03,-0.135;-0.1,0.2;0.21,-0.12];
if (i==1)
   sig=-[0.4,0.1,0.15,-0.17;0.09,0.4,0.03,-0.035;
           -0.048,0.12,-0.1,0.12;-0.075,-0.26,0.31,-0.28];
else
   sig=[sigmaW,sigma1N .* repmat((W(1,i-1) >0)',4,2)
                + sigma2 .*repmat((W(1,i-1) <=0)',4,2)];
end;
return;
```

Voici le programme. Par rapport au programme précédent 14.2.1 page 205, seul change la simulation des processus $\frac{1}{Y_0}$, $\frac{1}{Y_k}$ et des portefeuilles :

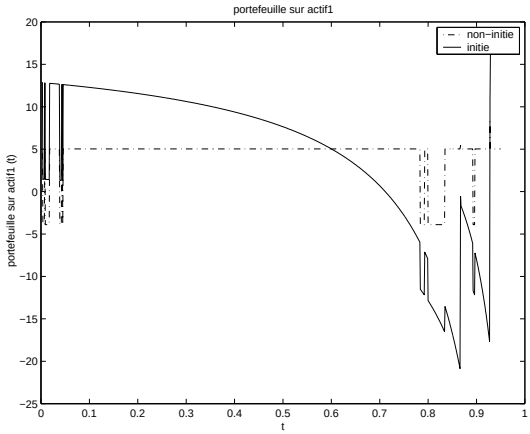
```
%calcul de 1/Y_0 et 1/Y
W_=[zeros(2,1),W(:,1:Tf-1)];
Poiss_=[ zeros(2,1),Poiss(:,1:Tf-1)];
  for i=1:Tf
  theta(:,i)=(sigmamat(i,W))^(-1)*(b-r*ones(4,1));
  q(:,i)=-theta(3:4,i)./kappa';
  end
incchap=[W(:,1:Tf)-W_;Poiss(:,1:Tf)-Poiss_]+dt *theta;
lni=[theta(1:2,:);(1./q)-1];
D_0(1)=1+ (lni(:,1))' * incchap(:,1);
  for i=1:Tf-1
  D_0(i+1)=D_0(i)*(1+ (lni(:,i+1))'* incchap(:,i+1));
  end
D_0_=[1,D_0];
D=D_0.*p;
D_=[1,D];
p_=[1,p];

%calcul du portefeuille du non initie
Varni=lni*sautD0;
  for i=1:Tf
```

```
  PI_ni(:,i)= (sigmamat(i,W)^(-1))'* Varni(:,i);
  end
B_ni=1-sum((PI_ni));

%calcul du portefeuille de l'initie
Var=[theta(1:2,:);rho./q(1,:)-1 ;rho./q(2,:)-1 ]*sautD ;
  for i=1:Tf
  PI_i(:,i)= (sigmamat(i,W)^(-1))'* Var(:,i);
  end
B_i=1-sum((PI_i));
```

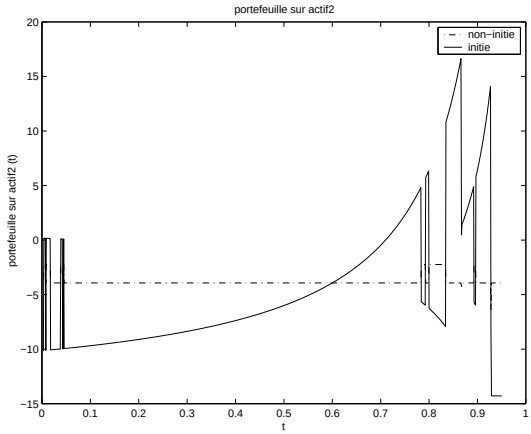


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.36 – $N_1(T) + N_2(T) = 2$, σ aléatoire

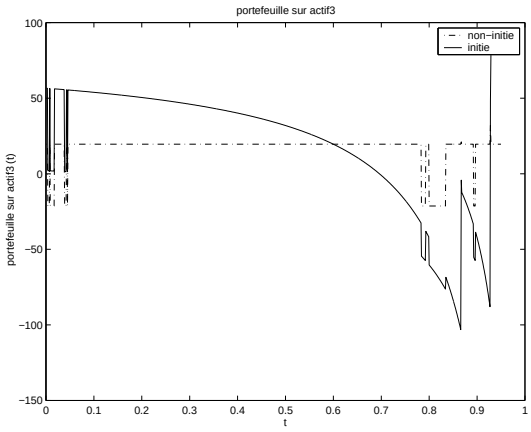


portefeuille sur l'actif 1

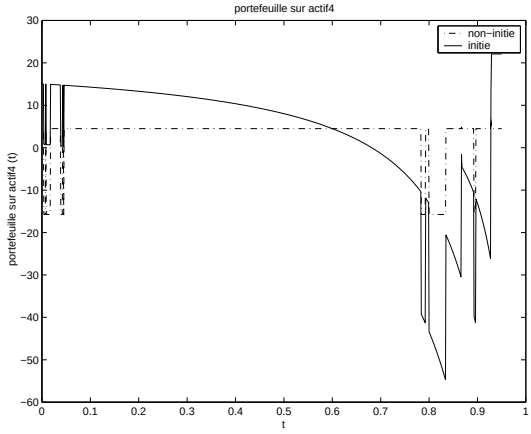


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.37 – $N_1(T) + N_2(T) = 2$, σ aléatoire

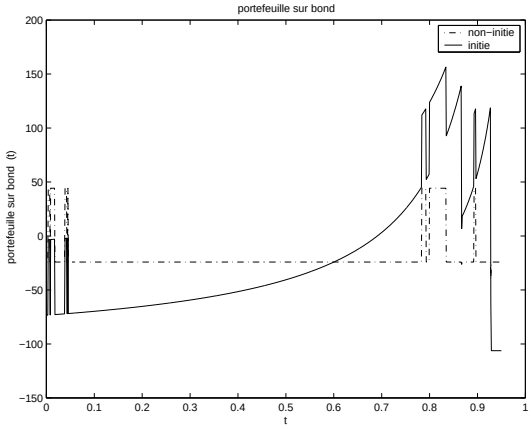


portefeuille sur l'actif 3



portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.38 – $N_1(T) + N_2(T) = 2$, σ aléatoire



portefeuille sur bond

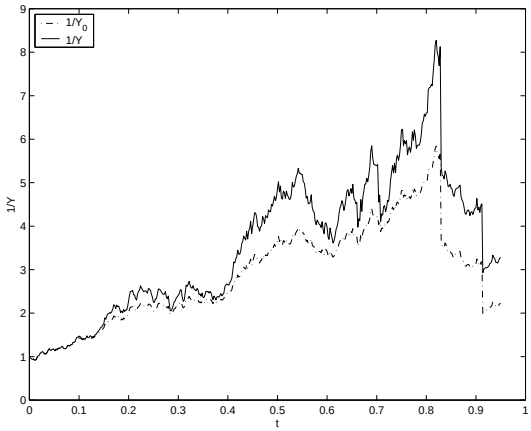
FIG. 14.39 – $N_1(T) + N_2(T) = 2$, σ aléatoire

14.2.3 $\exists\ i$ tel que $L_k = \mathbb{I}_{[a,b]}(P_1(T))$

Le programme est une modification du programme 14.2.1 page 205 dans le calcul de L, p et ρ. Dans notre simulation, $a = 0.7$, $b = 1.1$, $P_1(T) = 1.5422$. Le premier processus de Poisson saute aux instants 0.7039 et 0.9695. Le deuxième processus de Poisson saute aux instants 0.8280 et 0.9129.
cf. figures 14.40, 14.41, 14.42 et 14.43.

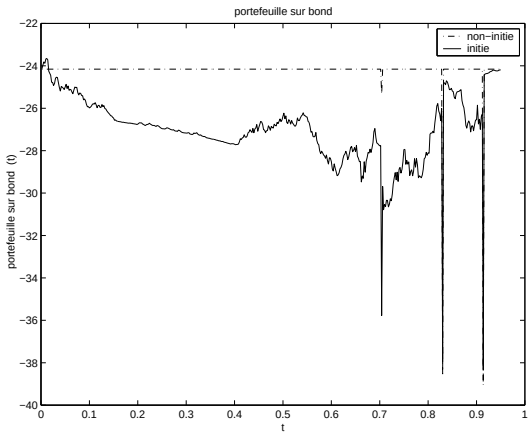
```
cov=sigma(1,1:2)*(sigma(1,1:2))';
a=0.7; c=1.1;
%valeur de L
L=exp((b(1)-cov/2)*T)*exp(sigma(1,1:2)*W(:,N))
  *(1+sigma(1,3))^Poiss1(N)*(1+sigma(1,4))^Poiss2(N)

%calcul de p et l
ln1=log((1+sigma(1,3))); ln2=log((1+sigma(1,4)));
ka=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,1:2)*Z-ln1*Poiss1(1:Tf)-ln2*Poiss2(1:Tf);
kb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,1:2)*Z-ln1*Poiss1(1:Tf)-ln2*Poiss2(1:Tf);
ka0=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov);
kb0=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov);
M=20;
if (L>=a) & (L<=c)
  for k1=1:M
  for k2=1:M
  Mat0(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1) * kappa(2)^(k2-1)
           *(pnorm(kb0-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T)*cov))
             -pnorm(ka0-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T)*cov)))
            *(T)^(k1+k2-2)/(gamma(k1)* gamma(k2));
  end
  end
sum0=sum( sum(Mat0));
  for i=1:Tf
    for k1=1:M
    for k2=1:M
    Mat(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1) * kappa(2)^(k2-1)
           *(pnorm(kb(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
           -pnorm(ka(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
           *(T-Tab(i))^(k1+k2-2)/(gamma(k1)* gamma(k2));
    Matl(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1) * kappa(2)^(k2-1)
            *(dnorm(ka(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
            -dnorm(kb(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
            *(T-Tab(i))^(k1+k2-2)/(gamma(k1)* gamma(k2));
    end
    end
  sum1=sum( sum(Mat));
```

```
  p(i)=exp(S*i*dt)*( sum1 )/( sum0 );
  l(i)=(sum(sum(Matl)))/sum1;
  end
else
    for k1=1:M
    for k2=1:M
    Mat0(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1) * kappa(2)^(k2-1)
                   *(1-pnorm(kb0-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T)*cov))
                   +pnorm(ka0-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T)*cov)))
                   *(T)^(k1+k2-2)/(gamma(k1)* gamma(k2));
    end
    end
sum0=sum( sum(Mat0));
  for i=1:Tf
    for k1=1:M
    for k2=1:M
    Mat(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1) * kappa(2)^(k2-1)*
            (1-pnorm(kb(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
            +pnorm(ka(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
            *(T-Tab(i))^(k1+k2-2)/(gamma(k1)* gamma(k2));
    Matl(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1) * kappa(2)^(k2-1)*
             (dnorm(kb(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
             -dnorm(ka(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
             *(T-Tab(i))^(k1+k2-2)/(gamma(k1)* gamma(k2));
    end
    end
  sum1=sum( sum(Mat));
  p(i)=exp(S*i*dt)*( sum1 )/( sum0 );
  l(i)=  ( sum( sum(Matl)) )/sum1;
  end
end

%calcul du portefeuille de l'initie
Var=[repmat((theta(1:2)'),1,Tf)+(l'*sigma(1,1:2))';
     (1+ (l'*ln1)')/q(1)-1 ; (1+ (l'*ln2)')  /q(2)-1 ] ;
```

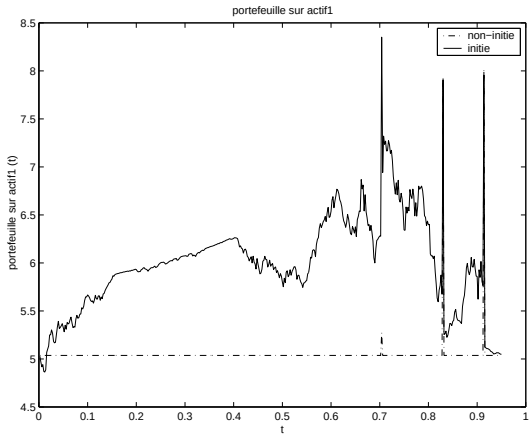


Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.40 – $a = 0.7$, $b = 1.1$, $P_1(T) = 1.5422$

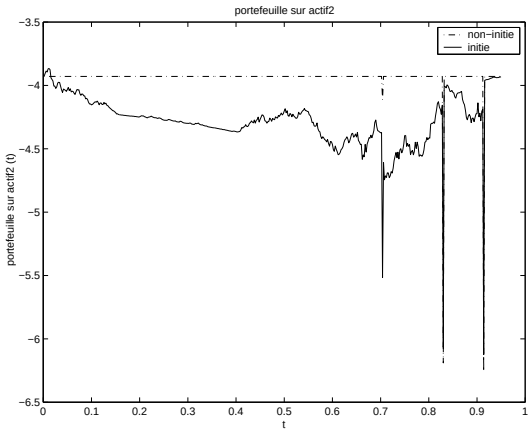


portefeuille sur le bond

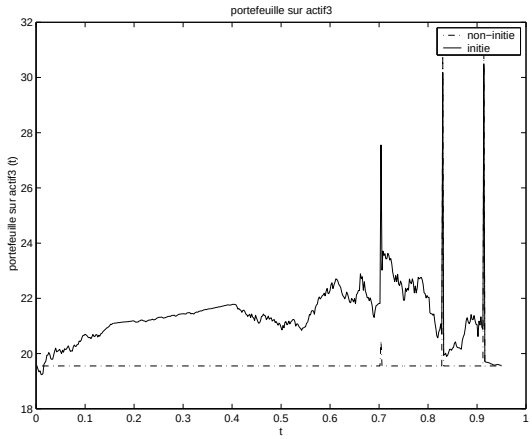


portefeuille sur l'actif 1

FIG. 14.41 – $a = 0.7$, $b = 1.1$, $P_1(T) = 1.5422$

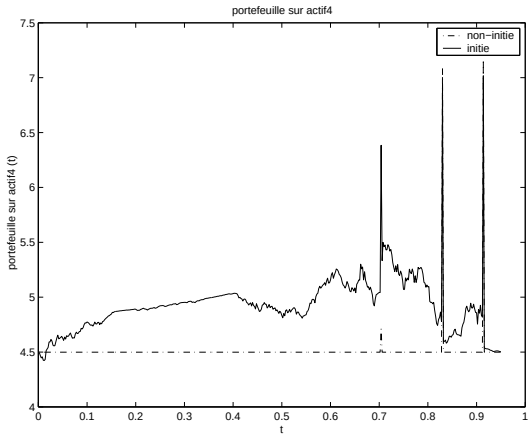


portefeuille sur l'actif 2



portefeuille sur l'actif 3

FIG. 14.42 – $a = 0.7$, $b = 1.1$, $P_1(T) = 1.5422$



portefeuille sur l'actif 4

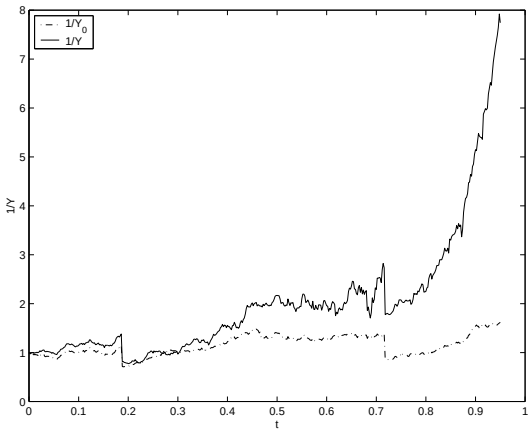
FIG. 14.43 – $a = 0.7$, $b = 1.1$, $P_1(T) = 1.5422$

14.2.4 $L_k = \ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T))$

Le programme est une modification du programme 14.2.1 page 205 dans le calcul de L, p et ρ. Dans notre simulation, $L_k = -0.316$. Le premier processus de Poisson saute aux instants 0.0227 et 0.466. Le deuxième processus de Poisson saute aux instants 0.1875 et 0.718. cf. figures 14.44, 14.45, 14.46, 14.47 et 14.48.

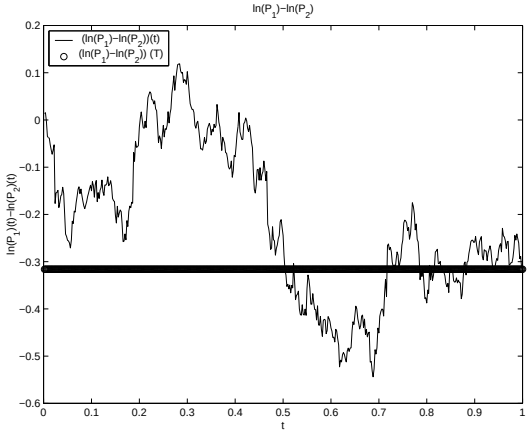
```
beta=(b(1)-b(2))-1/2*(sigma(1,1:2)
    *(sigma(1,1:2))'-sigma(2,1:2)*(sigma(2,1:2))');
gammas=sigma(1,1:2)-sigma(2,1:2);
cov=gammas*gammas';
kappa=[3,2];
S=sum(kappa);
Xo=1;
Tab=[t1:dt:N*dt];
 A=Tab(1:Tf);
ln1=log((1+sigma(1,3))/(1+sigma(2,3)));
ln2=log((1+sigma(1,4))/(1+sigma(2,4)));

%valeur de L
L= beta*T+gammas*W(:,N)+ln1*Poiss1(N)+ln2*Poiss2(N)
L_A=beta*Tab+gamma*W(:,1:N)+ln1*Poiss1(1:N)+ln2*Poiss2(1:N);

%calcul de p et l
M=20;
m=beta*T+gammas*W(:,1:Tf)+ln1*Poiss1(1:Tf)+ln2*Poiss2(1:Tf);
m0=beta*T;
  for k1=1:M
  for k2=1:M
    Mat0(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1)*kappa(2)^(k2-1)
           *(dnorm(L-m0-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T)*cov)))
           *(T)^(k1+k2-2)/(gamma(k1)*gamma(k2));
  end
  end
sum0=sum( sum(Mat0));
for i=1:Tf
    for k1=1:M
    for k2=1:M
    Mat(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1)*kappa(2)^(k2-1)
           *(dnorm(L-m(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
           *(T-Tab(i))^(k1+k2-2)/(gamma(k1)*gamma(k2));
    Matl(k1,k2)=kappa(1)^(k1-1)* kappa(2)^(k2-1)
           *(dnorm(L-m(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2,0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
           *(L-m(i)-(k1-1)*ln1-(k2-1)*ln2)*(T-Tab(i))^(k1+k2-2)
           /(gamma(k1)*gamma(k2));
```

```
   end
   end
sum1=sum( sum(Mat));
p(i)=exp(S*i*dt)*( sum1 )/( sum0 );
l(i)=  ( sum( sum(Matl)) )/(cov*sum1);
end

%calcul du portefeuille de l'initie
Var=[repmat((theta(1:2)'),1,Tf)+gammas'*l;
     (1+ln1*l)/q(1)-1 ;  (1+ln2*l) /q(2)-1 ] ;
```



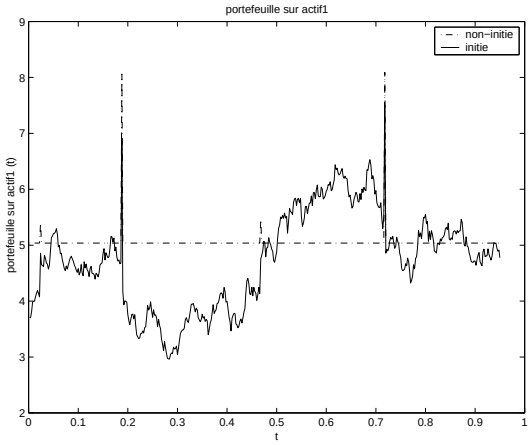
Processus $\frac{1}{Y_0}$ et $\frac{1}{Y_k}$

FIG. 14.44 – $L_k = -0.316$

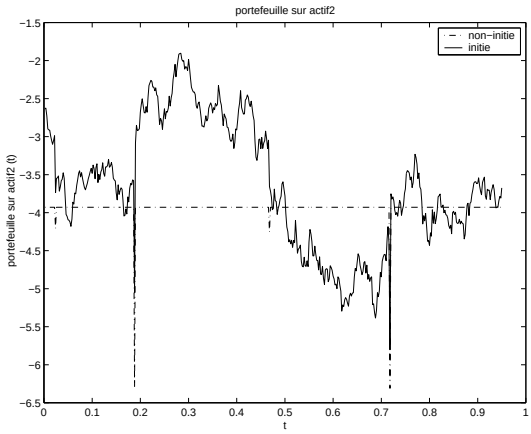


$\ln(P_1(t)) - \ln(P_2(t))$

FIG. 14.45 – $L_k = -0.316$

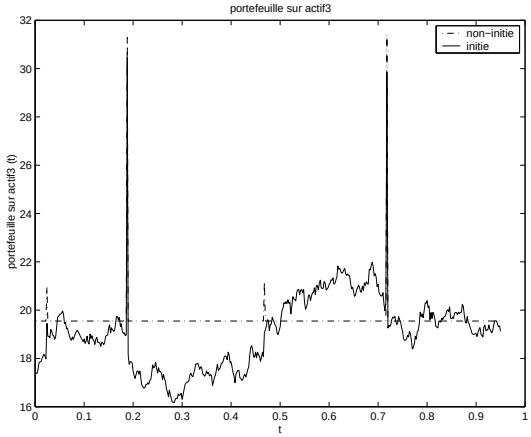


portefeuille sur l'actif 1

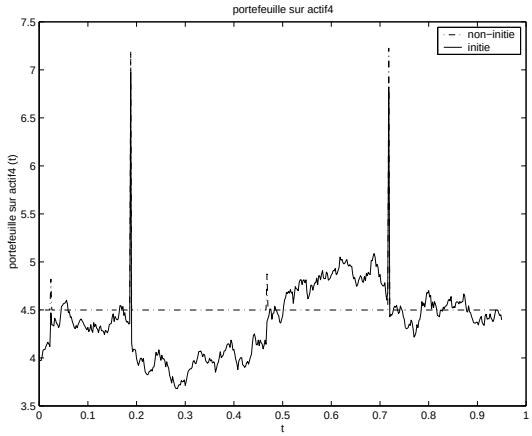


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.46 – $L_k = -0.316$

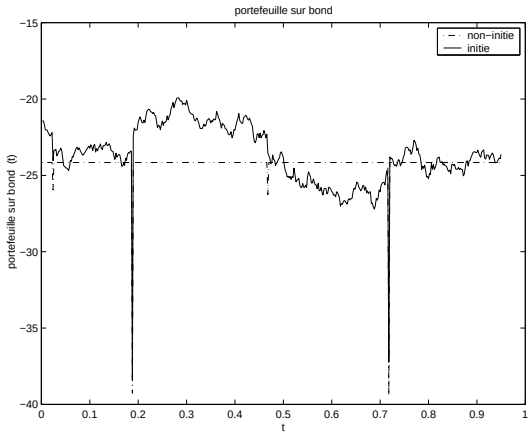


portefeuille sur l'actif 3



portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.47 – $L_k = -0.316$



portefeuille sur le bond

FIG. 14.48 – $L_k = -0.316$

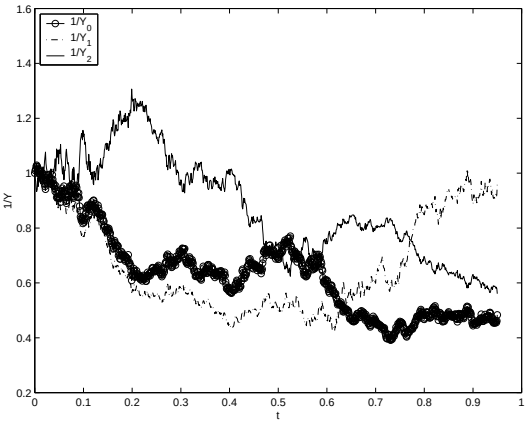
14.3 Equilibre

14.3.1 Equilibre avec 3 agents

Dans notre simulation, nous avons pris 3 agents. Le premier est non initié et optimise sa richesse terminale. Le deuxième connait $\mathbb{I}_{[0.7,1.3]}(P_1(T))$ et optimise sa consommation et sa richesse terminale. Ces deux agents ont une richesse initiale égale à 1. On simule alors le processus $\frac{1}{Y_3}$ du troisième agent qui optimise sa consommation (avec une ressource actualisée constante égale à 1). Nous avons considéré un marché purement diffusif, le programme et les résultats étant similaires pour un marché mixte.
cf. figures 14.49, 14.50, 14.51, 14.52 et 14.53.

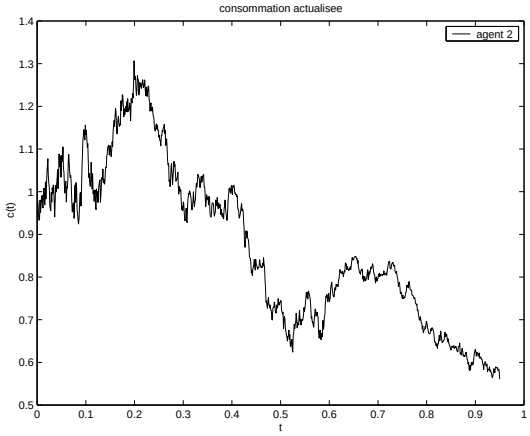
```
clf; clear
T=1; N=1000; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-50;
r=0.02; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=[0.4,0.1,0.042,-0.17;0.09,0.4,0.23,0.035
       ;-0.048,0.12,0.4,0.2;-0.075,-0.26,0.11,0.4];
cov=sigma(1,:)*(sigma(1,:))';
a=0.7; c=1.3;
Xo=1;X1=1;epsilon=1;
Tab=[t1:dt:N*dt]; A=Tab(1:Tf);
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';

%simulation du Brownien W
W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))';
Z=W(:,1:Tf);
%valeur de P_1(T)
S_T= exp((b(1)-cov/2)*T)*exp(sigma(1,:)*W(:,N))
%valeur de P_0
P_0=exp(r*Tab);

%calcul de p et l
ka=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
kb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
ma=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov);
mb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov);
if (S_T>=a) & (S_T<=c)
  for i=1:Tf
  p(i)=(pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
         -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
        /(pnorm(mb,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ma,0,sqrt(T*cov)));

 l(i)=-(dnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
         -dnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
```

```
      /(pnorm(kb(i),0,(sqrt(T-Tab(i))*cov))
        -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)));
  end
else
  for i=1:Tf
  p(i)=(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
          +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))\
       /(1- (pnorm(mb,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ma,0,sqrt(T*cov))) );
  l(i)=(dnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
        -dnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
       /(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
         +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)));
  end
end

%calcul de N_0 et N_1
D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));
D_1=D_0.*p;

%calcul de N_2
int_N1=1/N * cumsum(D_1);
D_2(1)=1/((epsilon)*(Tf/N))*((epsilon)*Tf/N +X1+Xo -Xo * D_0(1)
        -X1/((Tf/N)+1)*(((Tf/N)+1-1/N)* D_0(1)+int_N1(1)));
  for i=2:Tf
  D_2(i)=1/((epsilon)*((Tf+i-1)/N))*((epsilon)*Tf/N +X1+Xo-
            (epsilon)/N* sum (D_2(1:i-1))-Xo * D_0(i)-  X1/((Tf/N)+1)
            * (((Tf/N)+1-i/N)* D_0(i)+int_N1(i)));
  end

%calcul du portefeuille du non initie, ie agent 0
PI_ni= Xo*(sigma^(-1))'*repmat((theta)',1,Tf)*diag(Xo*D_0.*P_0(1:Tf));
B_ni=Xo*D_0 .*P_0(1:Tf)-sum(PI_ni)  ;
%calcul du portefeuille de l'initie 1
Var=repmat((theta)',1,Tf)  + sigma(1,:)'*l;
PI_i=(sigma^(-1))'*Var*diag(X1/(Tf/N+1)*(Tf/N+1-A).*D_1.*P_0(1:Tf));
B_i= X1 /(Tf/N+1)*(Tf/N+1-A).*D_1 .*P_0(1:Tf)-sum(PI_i);
%calcul du portefeuille de l'agent 2
PI2 =-PI_ni-PI_i;
B2=epsilon*(Tf/N-A) .*(D_2-1)-sum(PI2);
%consommation et richesse actualisee de l'agent 2
           c2=epsilon *D_2;
         X2=epsilon*(Tf/N-A).*(D_2-1) ;
%TRACES
```

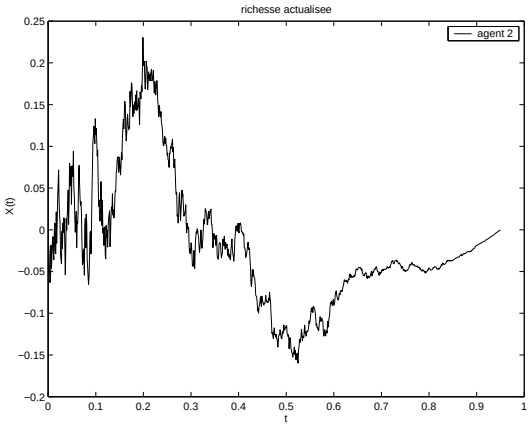


$\frac{1}{Y}$ des 3 agents à l'équilibre

FIG. 14.49 – $P_1(T) = 0.5096$

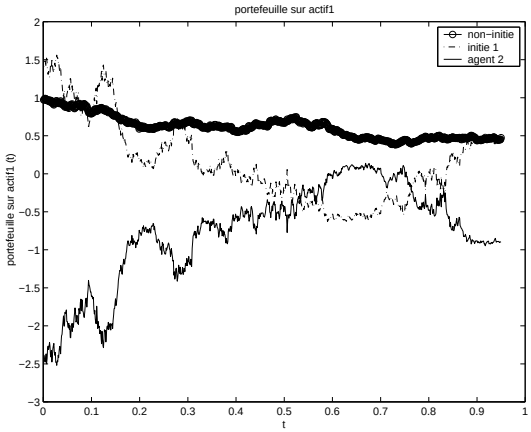


consommation actualisée du 3ème agent

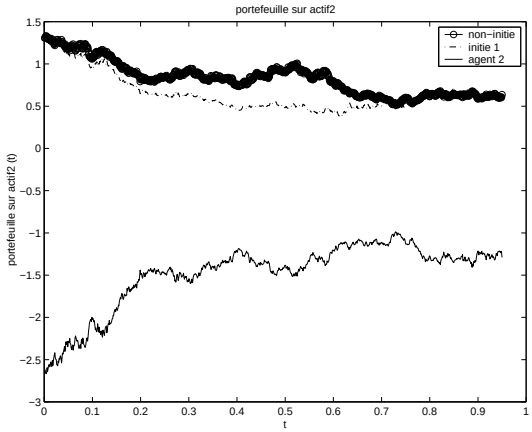


richesse actualisée du 3ème agent

FIG. 14.50 – A l'équilibre, $P_1(T) = 0.5096$

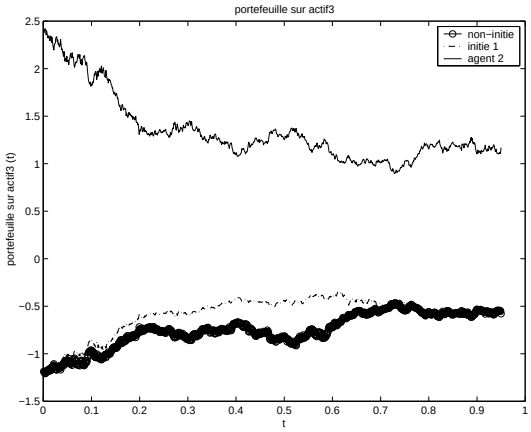


portefeuille sur l'actif 1

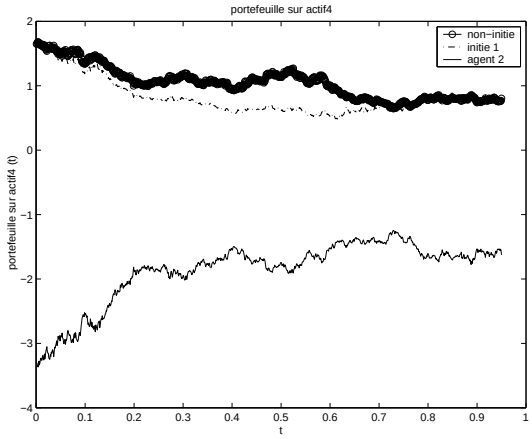


portefeuille sur l'actif 2

FIG. 14.51 – Portefeuilles à l'équilibre, $P_1(T) = 0.5096$

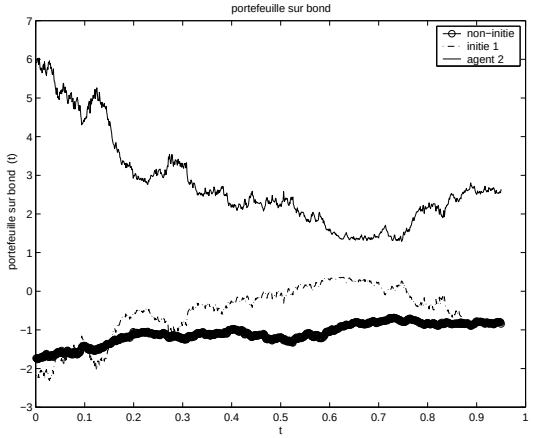


portefeuille sur l'actif 3



portefeuille sur l'actif 4

FIG. 14.52 – Portefeuilles à l'équilibre, $P_1(T) = 0.5096$



portefeuille sur le bond des 3 agents à l'équilibre

FIG. 14.53 – $P_1(T) = 0.5096$

14.3.2 Poids maximal d'un initié

Nous considérons un marché avec deux agents. Le premier agent a une information privée. Nous simulons le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ maximal afin qu'un équilibre puisse exister. Nous simulons ce rapport pour différentes informations privées et différents problèmes d'optimisation, mais pour la même réalisation de ω.
L'agent initié peut avoir l'information privée i, $i = 1, \cdots, 4$.

$$\begin{cases} \text{information 1} & : \text{information forte initiale } \mathbb{I}_{[a,b]}(P_1(T)). \\ \text{information 2} & : \text{information forte initiale } \ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T)). \\ \text{information 3} & : \text{information forte progressive } 2W_1(T) + a + B_{(T-t)}. \\ \text{information 4} & : \text{information faible de la section 12.1.4.} \end{cases}$$

Les deux agents peuvent optimiser leur consommation (optimisation numero 1), leur richesse terminale (optimisation numero 2) ou leur consommation et leur richesse terminale (optimisation numero 3). Si l'initié a l'optimisation 1 et le deuxième agent l'optimisation 2, les deux fonctions permettant le calcul du rapport maximal sont les suivantes. Fonction qui a pour entrée $\frac{1}{Y_1}$ et $\frac{a_1}{a_2}$ et pour sortie le minimum de $\frac{1}{Y_2}$:

```
function[minD]=minDinc13(D1,rap)
Tf = length(D1) ;T = 1;N = Tf / 0.95;
%Dinc=1/Y_2
Dinc(1)=( 1+rap*(1-D1(1))  );
for j=2:Tf
    Dinc(j)=(T+1)*(1+(N+1-j)*T/N)^-1
          *( 1+rap*(1-(1-j/N)*D1(j)-1/N *sum(D1(1:j)))
          -T/N*1/(T+1) *sum(Dinc(1:j-1))  );
end;
minD = min(Dinc);
```

Fonction qui a pour entrée $\frac{1}{Y_1}$ et pour sortie $\frac{a_1}{a_2}$ maximal tel que le minimum de $\frac{1}{Y_2}$ soit positif :

```
function[minLambda]=rapport13(D1)
T=1; N=1000; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-50;
Tab=[t1:dt:N*dt];A=Tab(1:Tf);
Lup =-(1-max(((T-A).* D1 + cumsum(D1)/N)/T))^(-1);
if Lup == 1 then Ldn = 0.5; else  Ldn = 1; end ;
Dup = minDinc13(D1,Lup);
Ddn = minDinc13(D1,Ldn);
MaxIteration = 50; minLambda = -10;
for i = 1:MaxIteration
    if or(or(abs(Dup-Ddn)<1e-6,abs(Dup)<1e-6),abs(Ddn)<1e-6)
      if abs(Dup) < 1e-6  i=MaxIteration; minLambda= Lup;
      elseif abs(Ddn)<1e-6  i=MaxIteration; minLambda= Ldn;
      else   minLambda= -10;
      end;
    else
       Lnew = - Dup *(Ldn - Lup)/(Ddn - Dup)+Lup;
       Dnew = minDinc13(D1,Lnew);
       if Dnew < 0  Dup = Dnew; Lup = Lnew;
       else Ddn = Dnew; Ldn = Lnew;
       end;
      minLambda= Lnew;
    end;
end;
```

Le programme est alors le suivant

```
clf; clear
T=1; N=1000; t1=1/N; dt=1/N; Tf=N-50;
r=0.02; b=[0.15,0.1,0.084,0.1]';
sigma=[0.4,0.1,0.042,-0.17;0.09,0.4,0.23,0.035;
      -0.048,0.12,0.4,0.2;-0.075,-0.26,0.11,0.4];
cov=sigma(1,:)*(sigma(1,:))';
theta=((sigma)^(-1)*(b-r*ones(4,1)))';
a=0.85; c=1.2;
Tab=[t1:dt:N*dt]; A=Tab(1:Tf);
beta=(b(1)-b(2))-1/2*(sigma(1,:)*(sigma(1,:))'-sigma(2,:)*(sigma(2,:))');
gamma=sigma(1,:)-sigma(2,:);
cov2=gamma*gamma'; lambda=2;
%simulation du Brownien W
W=(cumsum(rnorm([N,4],0,sqrt(dt))))'; Z=W(:,1:Tf);
D_0=exp(theta*Z+1/2*A*(theta*theta'));
%INFO1 : a<P_1(T)<b
```

```
S_T= exp((b(1)-cov/2)*T)*exp(sigma(1,:)*W(:,N))
%calcul de p1
ka=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
kb=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov)-sigma(1,:)*Z;
ka0=log(a)-T*(b(1)-1/2*cov);
kb0=log(c)-T*(b(1)-1/2*cov);
if (S_T>=a) & (S_T<=c)
   for i=1:Tf
      p1(i)=(pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
            -pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
            /(pnorm(kb0,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ka0,0,sqrt(T*cov)));
end
else
   for i=1:Tf
    p1(i)=(1-pnorm(kb(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov))
          +pnorm(ka(i),0,sqrt((T-Tab(i))*cov)))
          /(1-(pnorm(kb0,0,sqrt(T*cov))-pnorm(ka0,0,sqrt(T*cov))));
end
end
D1=D_0.*p1;
%INFO2 : diff ln des prix
L= beta*T+gamma*W(:,N)
%calcul de p2
p2=(sqrt(2*pi*cov2*T)) ./(sqrt(2*pi*cov2*(T-A)))
   .* exp(-gamma*(repmat(W(:,N),1,Tf)-Z)./(2*cov2*(T-A)))
   .* exp(gamma*(W(:,N))./(2*cov2*T)) ;
D2=D_0.*p2;
%INFO3 : progressif
%simulation du bruit Y
Bbis=(cumsum(rnorm([N,1],0,sqrt(dt))))'; Y=fliplr(Bbis);
%calcul de  rho et p3
rho= lambda*(lambda*(W(1,N)-Z(1,:))+Y(1:Tf))./((T-A)*(1+(lambda)^2));
p3(1)=1+ W(1,1)*lambda*(lambda*W(1,N)+Y(N))/(T*(1+(lambda)^2));
for i=1:Tf-1
p3(i+1)=p3(i) *(1+ rho(i) *(W(1,i+1)- W(1,i)));
end
D3=D_0.*p3;
%INFO4 : faible
m=theta(1);s=1; Wchapeau=Z(1,:)+theta(1)*dt*[1:1:Tf];
%calcul de N4=1/Y4
for i=1:Tf
nb=10000; X=rnorm(nb,m,s);
int(i)=(mean(exp((X.^2)/(2*T)-(X-Wchapeau(i)*ones(nb,1)).^2/(2*(T-i*dt)))));
end
```

```
D4= sqrt(T ./(T- [1:1:Tf]*dt)).*int;

%Opti1:conso; Opti2:richesse terminale, opti3:conso+richesse terminale
%rapportmax(i,j,k)= rapport max ressource ou richesse  pour infoi
  %                avec optij pour initie et optik pour 2e agent.

%si les 2 agents ont le meme pb d'opti (11,22 ou 33)
rapportmax1jj=-(1-max(D1))^(-1)
rapportmax2jj=-(1-max(D2))^(-1)
rapportmax3jj=-(1-max(D3))^(-1)
rapportmax4jj=-(1-max(D4))^(-1)
%initie opti1, 2e agent opti2
rapportmax112=-(1-max(((T-A).* D1 + cumsum(D1)/N)/T))^(-1)
rapportmax212=-(1-max(((T-A)  .* D2 + cumsum(D2)/N)/T))^(-1)
rapportmax312=-(1-max(((T-A)  .* D3+ cumsum(D3)/N)/T))^(-1)
rapportmax412=-(1-max(((T-A)  .* D4 + cumsum(D4)/N)/T))^(-1)
%initie opti3, 2e agent opti2
rapportmax132=-(1-max(((1+T-A).* D1 + cumsum(D1)/N)/(T+1)))^(-1)
rapportmax232=-(1-max(((1+T-A).* D2 + cumsum(D2)/N)/(T+1)))^(-1)
rapportmax332=-(1-max(((1+T-A).* D3+ cumsum(D3)/N)/(T+1)))^(-1)
rapportmax432=-(1-max(((1+T-A).* D4 + cumsum(D4)/N)/(T+1)))^(-1)
%initie opti2, 2e agent opti3
rapportmax123=rapport23(D1)
rapportmax223=rapport23(D2)
rapportmax323=rapport23(D3)
rapportmax423=rapport23(D4)
%initie opti1, 2e agent opti3
rapportmax113=rapport13(D1)
rapportmax213=rapport13(D2)
rapportmax313=rapport13(D3)
rapportmax413=rapport13(D4)
%initie opti2, 2e agent opti1
rapportmax121=rapport21(D1)
rapportmax221=rapport21(D2)
rapportmax321=rapport21(D3)
rapportmax421=rapport21(D4)
%initie opti3, 2e agent opti1
rapportmax131=rapport31(D1)
rapportmax231=rapport31(D2)
rapportmax331=rapport31(D3)
rapportmax431=rapport31(D4)
```

Voici le tableau des résultats. Optimisation jk correspond au problème d'optimisation j pour l'initié et k pour le deuxième agent. Nous avons regroupé les résultats

pour optimisation jj, $j = 1 \cdots 4$, car le rapport maximal est le même pour ces quatre cas. Nous avons aussi tracé les processus $\frac{1}{Y_1}$ pour les quatre informations privées.

1ère simulation : $P_1(T) = 2.2397$, $\ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T)) = 0.7127$

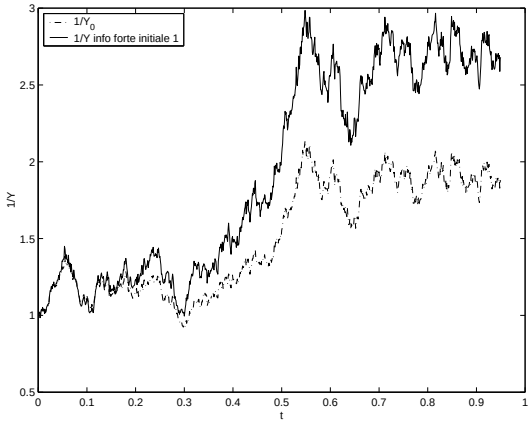
cf. figures 14.54 et 14.55.

information	optimisation						
	jj	12	32	21	31	13	23
info1	0.5037	0.8791	0.6404	0.1996	0.2544	0.7019	0.38
info2	0.0092	0.1008	0.0168	6.4122e-4	0.0012	0.0595	0.005
info3	0.0405	0.1080	0.0597	0.0069	0.0117	0.0806	0.0266
info4	0.6637	1.235	0.8728	0.1791	0.2474	0.9954	0.4797

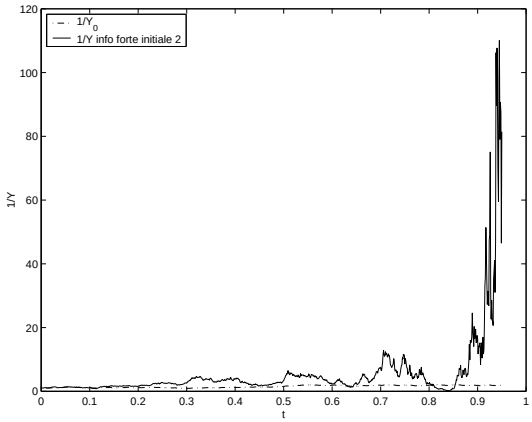
2ème simulation : $P_1(T) = 1.5826$, $\ln(P_1(T)) - \ln(P_2(T)) = 0.5693$.

cf. figures 14.56 et 14.57.

information	optimisation						
	jj	12	32	21	31	13	23
info1	2.1651	2.617	2.3697	0.3379	0.4751	2.3947	1.804
info2	2.438e-4	0.0045	4.628e-4	1.292e-5	2.455e-5	0.0024	1.285e-4
info3	0.4368	2.1304	0.7249	0.0539	0.0915	1.4966	0.2557
info4	2.6308	3.9503	3.5785	0.5004	0.5918	3.615	1.6328

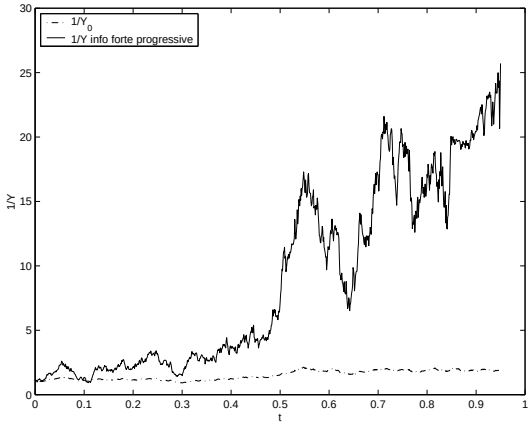


Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 1

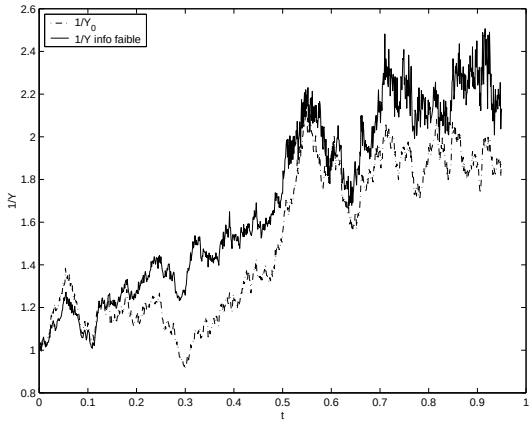


Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 2

FIG. 14.54 – $P_1(T) = 2.2397$

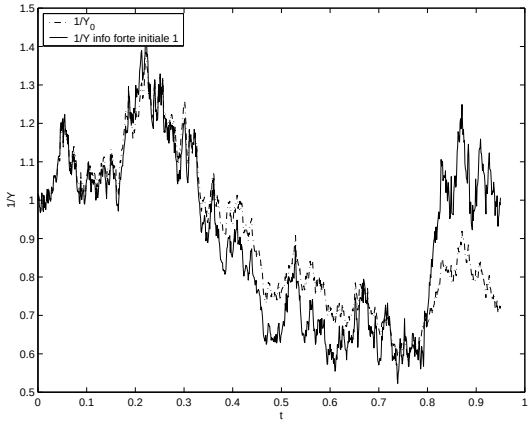


Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 3

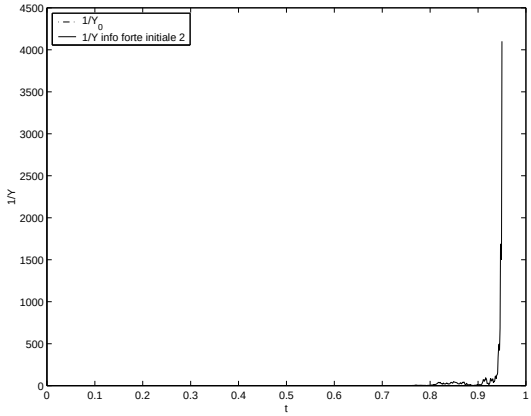


Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 4

FIG. 14.55 – $P_1(T) = 2.2397$

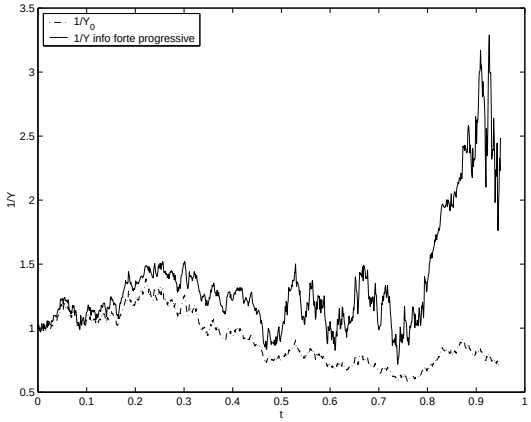


Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 1

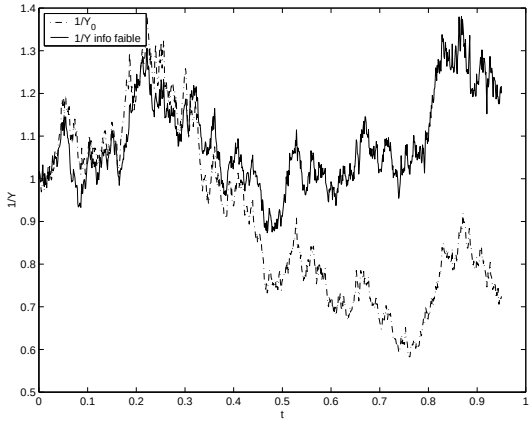


Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 2

FIG. 14.56 – $P_1(T) = 1.5826$



Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 3



Processus $\frac{1}{Y_1}$ pour information 4

FIG. 14.57 – $P_1(T) = 1.5826$

Bibliographie

[1] J. AMENDINGER, (2000) : Martingale Representation Theorems for Initially Enlarged Filtrations, *Stochastic Processes and their Applications 89*, 101-116.

[2] J. AMENDINGER, P. IMKELLER, M. SCHWEIZER, (1998) : Additional Logarithmic Utility of an Insider, *Stochastic Processes and their Applications 75*, 263-286.

[3] J. AMENDINGER, D. BECHERER, M. SCHWEIZER, (2003) : A monetary value for initial information in portfolio optimization, *Finance and Stochastics 7*, 29-42.

[4] K. BACK (1992) : Insider Trading in Continuous Time , *Review of Financial Studies 5*, 387-409.

[5] F. BAUDOIN (2002) : Conditioned stochastic differential equations : Theory, Examples and Applications to finance, *Stochastic Processes and their Applications Vol 100*, 109-145.

[6] F. BAUDOIN (2001) : Portfolio optimization associated with a weak information, *technical report, Université Pierre et Marie Curie.*

[7] F. BAUDOIN (2002) : Modeling Anticipations on Financial Markets, *Lecture Notes in Mathematics 1814, Springer-Verlag*, 43-94.

[8] F. BAUDOIN, L. NGYEN NGOC (2004) : The financial value of a weak information, *Finance and Stochastics, 8*, 415-435.

[9] V. E. BENES, (1970) : Existence of optimal strategies based on specified information, for a class of stochastic decision problems, *SIAM J. Control, Vol 8, No 2*, 179-189.

[10] T. F. BEWLEY, (1972) : Existence of Equilibria in Economics with Infinitely Many Commodities, *Journal of Economic Theory, 4*, 514-540.

[11] KC. BORDER, (1985) : Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, *Cambridge University Press.*

[12] N. BOULEAU, D. LEPINGLE, (1994) : Numerical Methods for Stochastic Processes Fixed Point Theorems, *Wiley Interscience.*

[13] P. BREMAUD, (1981) : Point Processes and Queues, *Springer-Verlag, New York.*

[14] J. M. CORCUERA, P. IMKELLER, A. KOHATSU-HIGA, D. NUALART (2004) : Additional utility of insiders with imperfect dynamical information, *Finance and Stochastics, 8*, 437-450.

[15] M. B. CHIAROLLA, U. G. HAUSSMANN, (2001) : Equilibrium in a Stochastic Model with Consumption, Wages ansd Investment, *Journal of Mathematical Economics, Vol 35*, 311-346.
cf. http ://www.math.ubc.ca/ uhaus/pubs.html pour une version révisée.

[16] R.A. DANA, M. JEANBLANC-PICQUE, (1998) : Marchés Financiers en Temps Continu, Valorisation et Equilibre, *Economica, 2e édition.*

[17] R.A. DANA, M. PONTIER, (1992) : On existence of an Arrow-Radner equilibrium in the case of complete markets, *Mathematics of Operations Research,Vol 17, No 1,* 148-163.

[18] D. DUFFIE, C. H. HUANG, (1985) : Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities, *Econometrica, 53 (6)*, 1337-1355.

[19] D. DUFFIE, (1986) : Stochastic Equilibria : Existence, Spanning number and the "No Expected Financial Gain from Trade" hypothesis, *Econometrica, 54*, 1161-1183.

[20] R.J. ELLIOTT, M. JEANBLANC (1999) : Incomplete markets with jumps and informed agents, *Mathematical Methods of Operations Research*, 50, 475-492.

[21] H. FOLLMER, P. IMKELLER (1993) : Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space, *Ann. Inst. Henri Poincaré, 29(4)*, 569-586.

[22] V. FONKE (1998) : Analyse de l'information dans un modèle financier, *DESS de Mathématiques pour l'ingénieur*, Université d'Aix-Marseille.

[23] L.R. GLOSTEN, L.R. MILGROM (2000) : Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously informed Traders, *Journal of Financial Economics* Vol 14.

[24] A. GRORUD (2000) : Asymmetric information in a financial market with jumps, *International Journal of Theorical and Applied Finance* Vol 3 (4), 641-660.

[25] A. GRORUD, M. PONTIER, (1998) : Insider Trading in a Continuous Time Market Model, *International Journal of Theorical and Applied Finance 1*, 331-347.

[26] J. M. HARRISON, D. M. KREPS, (1979) : Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *J. Econ.Theory, 20*, 391-408.

[27] J. JACOD, (1979) : Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes 714, Springer-Verlag, New York.*

[28] J. JACOD, (1985) : Grossissement Initial, Hypothèse (H') et Théorème de Girsanov, *Lecture Notes 1118, Springer-Verlag,* 15-35.

[29] R. A. JARROW, A. RUDD, (1983) : Option Pricing, *Irwin.*

[30] M. JEANBLANC-PICQUE, M. PONTIER (1990) : Optimal Portfolio for a Small Investor in a Market Model with Discontinuous Prices, *Applied Mathematics and Optimization* 22, 287-310.

[31] J. JEULIN (1980) : Semi-martingales et grossissement d'une filtration, *Lecture Notes Math 833, Springer-Verlag.*

[32] J. JEULIN, M. YOR (1985) : Séminaire de Calcul Stochastique 1982/83, Université Paris VI. Grossissement de filtrations : exemples et applications, *Lecture Notes* 1118, Springer-Verlag.

[33] E. JOUINI, C. NAPP (2003) : Consensus Consumer and Intertemporel Asset Pricing under Heterogeneous Beliefs, *Working paper, Ceremade, Université Paris 9.*

[34] I. KARATZAS, S.E. SHREVE (1988) : Brownian Motion and Stochastic calculus, *Springer-Verlag, New York.*

[35] I. KARATZAS, S.E. SHREVE (1998) : Methods of Mathematical Finance, *Springer-Verlag, New York.*

[36] I. KARATZAS, J. LEHOCZKY, S.E. SHREVE (1990) : Existence and Uniqueness of Multi-agent Equilibrium in a stochastic, Dynamic Consumption / Investment Model, *Mathematics of Operations Research, vol 15,* 80-128.

[37] I. KARATZAS, J. LEHOCZKY, S.E. SHREVE, (1987) : Optimal portfolio and Consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon, *SIAM J. Control and Optimization, Vol 25 (6),* 1557-1586.

[38] I. KARATZAS, I. PIKOVSKY (1996) : Anticipative Portfolio Optimization, *Advances in Applied Probability 28*, 1095-1122.

[39] I. KARATZAS, I. PIKOVSKY (1996) : Market Equilibrium with Differential Information, *Finance and Stochastics. preprint.*

[40] A. KYLE (1985) : Continuous Auctions and Insider Trading, *Econometrica 53*, 1313-1335.

[41] G. LASSERRE (2003) : Quelques Modèles d'Equilibre avec Asymétrie d'Information, *Thèse Doctorale*, Université Paris VII.

[42] D. LEPINGLE, J. MEMIN (1978) : Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, *Zeitschrift für Warscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 42*, 175-203.

[43] R. C. MERTON (1971) : Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, *J. Econom. Theory, 3*, 373-413.

[44] R. C. MERTON (1976) : Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *J.Financial Econom., 3*, 125-144.

[45] P. PROTTER (1990) : Stochastic Integration and Differential Equations, *Springer-Verlag, New York.*

[46] D. REVUZ, M. YOR (1990) : Continuous Martingales and Brownian Motion, *Springer Verlag.*

[47] A. SERRAT (2001) : A dynamic Equilibrium Model of International Portfolio Holdings, *Econometrica, Vol 69 (6)*, 1467-1489.