



HAL
open science

EXPERTISE MECANIQUE DES SCIAGES PAR ANALYSES DES VIBRATIONS DANS LE DOMAINE ACOUSTIQUE

Loic Brancheriau

► **To cite this version:**

Loic Brancheriau. EXPERTISE MECANIQUE DES SCIAGES PAR ANALYSES DES VIBRATIONS DANS LE DOMAINE ACOUSTIQUE. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2002. Français. NNT : . tel-00008291

HAL Id: tel-00008291

<https://theses.hal.science/tel-00008291>

Submitted on 28 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de la méditerranée – Aix Marseille II

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité :
MECANIQUE option ACOUSTIQUE

Présentée et soutenue publiquement

par

Loïc BRANCHERIAU

**TITRE : EXPERTISE MECANIQUE DES SCIAGES PAR ANALYSES
DES VIBRATIONS DANS LE DOMAINE ACOUSTIQUE**

Soutenue le : 27 Septembre 2002

Après avis de :

M. GUITARD D.
M. DEPOLLIER C.

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

M. GUITARD D.
M. DEPOLLIER C.
M. LEFEBVRE J.P.
M. KRONLAND R.
M. BAILLERES H.
M. LANVIN J.D.
M. SALES C.

Président et Rapporteur
Rapporteur
Examineurs

à ma Mère

« Si vous n'avez que des observations, vous faites de la botanique et, si vous n'avez que des théories, vous faites de la philosophie. »

M. Turner

« Le pouvoir est à l'imagination. »

H. Marcuse

REMERCIEMENTS

Aucun travail ne s'accomplit dans la solitude, le mythe de la tour d'ivoire a vécu. Le présent mémoire, aboutissement de trois années de pérégrinations initiatiques, est le résultat de foisonnements d'idées entre les différentes personnes qui m'ont aidé et soutenu pour accomplir ce travail.

Je voudrais remercier en premier lieu Daniel GUITARD, qui m'a inoculé, alors que j'étais jeune et insouciant, sa passion et ses questionnements sur le matériau extraordinairement complexe qu'est le bois.

Je tiens à remercier tout particulièrement Henri BAILLERES qui m'a accueilli et guidé tout au long de mon initiation. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée, pour sa patience, ses encouragements, et son amitié.

Que soit remercié Jean Denis LANVIN, pour son accueil au CTBA, sa disponibilité, son aide, et son soutien tout au long de ces trois années de travail.

J'exprime ma profonde gratitude et ma sympathie à mes directeurs de thèse, Richard KRONLAND et Jean Pierre LEFEBVRE, pour leur disponibilité et leurs nombreux conseils avisés.

Que Claude DEPOLLIER trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour avoir bien voulu rapporter sur ce travail sans hésitation et avec beaucoup de sympathie.

Que soit également remerciés Gilles CALCHERA et Sébastien PARADIS, mes coéquipiers de tous les jours au sein du thème "Qualité et Valorisation des Bois de Plantations" du CIRAD-Forêt, pour leur dévouement, leur professionnalisme, et leur amitié.

Je terminerai en remerciant l'équipe du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du CNRS, et tout particulièrement Philippe GUILLEMAIN, Solvi YSTAD, Mitusko ARAMAKI, Thierry VOINIER, pour leurs précieux conseils et l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail.

TABLE DES MATIERES

PRESENTATION	1
CHAPITRE I : VIBRATIONS "LIBRE - LIBRE" D'UNE POUTRE COMPORTANT UN OU PLUSIEURS ELEMENTS FAIBLES	4
1 ETUDE THEORIQUE	6
1.1 MODELES CLASSIQUES EN DYNAMIQUE DES POUTRES.....	6
1.1.1 <i>Définition géométrique</i>	6
1.1.2 <i>Hypothèses</i>	6
1.1.3 <i>Description du mouvement</i>	6
1.1.4 <i>Equations du mouvement</i>	7
1.1.5 <i>Sollicitation en compression</i>	9
1.1.5.1 Solution classique en vibrations longitudinales	9
1.1.5.2 Solution approchée prenant en compte les mouvements latéraux de matière	10
1.1.6 <i>Sollicitation en flexion</i>	13
1.1.6.1 Modèle et solution de Bernoulli	15
1.1.6.2 Modèle et solution de Rayleigh.....	15
1.1.6.3 Modèle de Timoshenko et solution de Bordonné	16
1.1.6.4 Modèle de Timoshenko et solution de Goens	18
1.1.6.5 Modèle et solution de Liot-Guitard	18
1.1.6.6 Influence des supports élastiques.....	18
1.1.7 <i>Limites de validité des solutions de vibration en flexion</i>	20
1.1.7.1 Influence de l'élançement transverse	20
1.1.7.2 Solution de Bernoulli	20
1.1.7.3 Solutions engendrées par le développement de Taylor-Lagrange	20
1.1.7.4 Influence de l'erreur maximale sur le calcul du module d'élasticité et du module de cisaillement	20
1.1.8 <i>Différence entre les solutions de vibration en flexion dans le domaine d'étude</i>	25
1.1.8.1 Solution de Bordonné.....	25
1.1.8.2 Solution de Goens	25
1.1.8.3 Influence des supports élastiques.....	25
1.1.8.4 Solutions de Rayleigh et de bernoulli.....	26
1.1.9 <i>Bilan des modèles classiques en vibration de flexion</i>	28
1.2 INCLUSION D'UN ELEMENT FAIBLE, DYNAMIQUE DES POUTRES SINGULIERES	29
1.2.1 <i>Notion d'élément faible</i>	29
1.2.2 <i>L'élément faible en pratique</i>	29
1.2.3 <i>Définition géométrique</i>	30
1.2.4 <i>Préambule</i>	30
1.2.5 <i>Sollicitation en compression</i>	31
1.2.5.1 Equations du mouvement.....	31
1.2.5.2 continuité des grandeurs physiques	31
1.2.5.3 conditions aux limites	32
1.2.5.4 Expression de l'équation aux fréquences.....	33
1.2.6 <i>Simulation numérique en compression</i>	33
1.2.7 <i>Sollicitation en flexion</i>	34
1.2.7.1 Equations du mouvement.....	34
1.2.7.2 Continuité des grandeurs physiques.....	34
1.2.7.3 Conditions aux limites	36
1.2.8 <i>Simulation numérique en flexion</i>	36
2 ETUDE EXPERIMENTALE	38
2.1 MATERIEL ET METHODE	38
2.1.1 <i>Matériel végétal</i>	38
2.1.2 <i>Démarche expérimentale</i>	39
2.1.3 <i>Essais vibratoire</i>	40
2.1.3.1 principe	40
2.1.3.2 Appareillage.....	40
2.1.3.3 Mode opératoire	40
2.1.3.4 L'acquisition et le traitement du signal acoustique	41
2.1.3.5 Réglages retenus pour les essais expérimentaux	42
2.1.4 <i>Incertitudes expérimentales</i>	42

2.2	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES-----	44
2.2.1	<i>Sollicitation en flexion</i> -----	44
2.2.2	<i>Sollicitation en compression</i> -----	48
3	SIMULATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE D'UNE POUTRE COMPORTANT PLUSIEURS ELEMENTS FAIBLES -----	54
3.1	MODELISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS -----	54
3.2	COMPARAISON ENTRE L'APPROCHE ANALYTIQUE ET LA METHODE DES ELEMENTS FINIS -----	54
3.2.1	<i>Poutre comportant un élément faible</i> -----	54
3.2.2	<i>Poutre comportant plusieurs éléments faibles</i> -----	55
4	CARACTERISATION D'UNE POUTRE COMPORTANT UN ELEMENT FAIBLE A PARTIR DE SA REPONSE VIBRATOIRE -----	57
4.1	PROBLEMATIQUE -----	57
4.2	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME-----	57
4.3	METHODES D'OPTIMISATION -----	59
4.3.1	<i>Optimisation locale</i> -----	59
4.3.2	<i>Optimisation globale</i> -----	61
4.3.2.1	Méthodes exactes-----	61
4.3.2.2	Méthodes heuristiques -----	61
4.4	ETUDE DES FONCTIONNELLES -----	62
4.4.1	<i>Cartographie du domaine d'étude</i> -----	62
4.4.2	<i>Cartographie au voisinage de la solution</i> -----	63
4.5	CHOIX DE LA STRATEGIE D'OPTIMISATION -----	64
4.6	PERFORMANCES DE LA STRATEGIE D'OPTIMISATION RETENUE-----	65
	CHAPITRE II : INFLUENCE DE L'ELANCEMENT TRANSVERSE SUR LES FREQUENCES DE VIBRATION "LIBRE-LIBRE" D'UNE POUTRE HOMOGENE -----	70
5	ETUDE THEORIQUE -----	72
5.1	THEORIE CLASSIQUE EN RESISTANCE DES MATERIAUX-----	72
5.1.1	<i>Energie de déformation élastique</i> -----	72
5.1.2	<i>Contrainte de cisaillement dans une section massive rectangulaire</i> -----	72
5.1.3	<i>Application au calcul de l'énergie de déformation dans une section massive rectangulaire</i> -----	73
5.2	THEORIE DE L'ELASTICITE -----	74
5.2.1	<i>Prise en compte du cisaillement en flexion d'une poutre de section massive rectangulaire</i> -----	74
5.2.1.1	Solution approchée -----	74
5.2.1.2	Solution exacte-----	77
5.2.2	<i>Application au calcul de l'énergie de déformation dans une section massive rectangulaire</i> -----	78
5.2.2.1	Détermination du facteur de forme en utilisant la distribution Guitard -----	78
5.2.2.2	Détermination du facteur de forme en utilisant les distributions Timoshenko -----	78
5.3	INFLUENCE DE L'ELANCEMENT LONGITUDINAL ET DE L'ELANCEMENT TRANSVERSE SUR LES FREQUENCES DE VIBRATION DE FLEXION -----	79
5.3.1	<i>Variation du facteur de forme en fonction de l'élançement transverse dans la plage de densité du matériau bois</i> -----	79
5.3.2	<i>Influence de la variation du facteur de forme et de l'élançement longitudinal sur le premier mode de vibration en flexion</i> -----	79
5.3.3	<i>Apparition de fréquences relatives à d'autres modes de vibration</i> -----	81
5.4	BILAN THEORIQUE DE L'INFLUENCE DES VARIATIONS GEOMETRIQUES SUR LES FREQUENCES DE VIBRATION ---	84
6	ETUDE EXPERIMENTALE -----	86
6.1	MATERIEL ET METHODE -----	86
6.1.1	<i>Matériel végétal</i> -----	86
6.1.2	<i>Démarche expérimentale</i> -----	86
6.1.3	<i>Essais vibratoire</i> -----	87
6.1.3.1	principe -----	87
6.1.3.2	Réglages retenus pour les essais expérimentaux -----	87
6.1.4	<i>Incertitudes expérimentales sur la mesure des fréquences de vibration</i> -----	88
6.2	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES -----	90
6.2.1	<i>Sollicitation en flexion par percussion dans le sens (OY)</i> -----	90
6.2.2	<i>Sollicitation en flexion par percussion dans le sens (OZ)</i> -----	92

6.2.3	<i>sollicitation en compression</i>	93
CHAPITRE III : DYNAMIQUE DES POUTRES HOMOGENES VISCOELASTIQUES		97
7	DYNAMIQUE DES POUTRES HOMOGENES VISCOELASTIQUES	99
7.1	LE CONCEPT DE LA SYNTHESE SONORE	99
7.2	SYSTEMES LINEAIRES ET INVARIANTS DANS LE TEMPS (SLIT)	99
7.3	GUIDE D'ONDE ACOUSTIQUE SANS PERTE	100
7.4	MODELE DE KARPLUS-STRONG	101
7.5	LES DIFFERENTS MECANISMES D'AMORTISSEMENT DANS LES CORDES MONOFILANTES ET LES POUTRES	102
7.6	MODELISATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE DU BOIS	102
7.6.1	<i>Les essais cycliques à oscillations forcées, frottement interne</i>	102
7.6.2	<i>Choix d'un modèle viscoélastique linéaire</i>	103
7.7	VIBRATIONS DES POUTRES HOMOGENES VISCOELASTIQUES	106
7.7.1	<i>Modèle guide d'onde acoustique avec perte</i>	106
7.7.2	<i>Vibrations longitudinales</i>	107
7.7.3	<i>Vibrations transversales</i>	112
7.7.4	<i>Comparaison entre la solution guide d'onde au modèle de Timoshenko et la solution mécanique en vibrations de flexion</i>	116
7.7.5	<i>Effet du phénomène de dispersion sur le calcul du module d'élasticité</i>	117
7.8	SYNTHESE INVERSE, CARACTERISATION DES POUTRES VISCOELASTIQUES EN VIBRATIONS LONGITUDINALES	118
7.8.1	<i>Du décrétement logarithmique au frottement interne</i>	118
7.8.1.1	Structure linéaire dissipative à un degré de liberté (Laroze, 1992)	119
7.8.1.2	De la synthèse additive au modèle guide d'onde	120
7.8.1.3	Une nouvelle expression du décrétement logarithmique	121
7.8.2	<i>Exploitation des amortissements temporels des vibrations</i>	122
7.8.2.1	Extraction de l'amortissement temporel associé à une pulsation d'un signal réel	122
7.8.2.2	Calcul des temps caractéristiques du modèle de Zener	123
7.8.3	<i>Exploitation des fréquences propres de vibration</i>	124
7.9	CARACTERISATION DU PHENOMENE DE DISPERSION	124
7.9.1	<i>Retard et vitesse de phase</i>	124
7.9.2	<i>Retard et vitesse de groupe</i>	125
8	ETUDE EXPERIMENTALE	126
8.1	MATERIEL ET METHODE	126
8.1.1	<i>Matériel végétal</i>	126
8.1.2	<i>Démarche expérimentale</i>	126
8.1.3	<i>Essais vibratoires</i>	127
8.1.3.1	Principe de la mesure	127
8.1.3.2	Mode opératoire	127
8.1.3.3	Appareillage	128
8.1.3.4	Réglages retenus pour l'acquisition du signal	129
8.2	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES	129
8.2.1	<i>Répétabilité des mesures</i>	129
8.2.2	<i>Différence entre les deux orientations possibles de l'essai</i>	133
8.2.3	<i>Différence entre les deux capteurs utilisés</i>	135
8.2.4	<i>Essais de vibrations longitudinales</i>	137
8.2.4.1	Identification des paramètres viscoélastiques	137
8.2.4.2	Validation des hypothèses simplificatrices	139
8.2.4.3	Resynthèse des vibrations produites	139
8.2.5	<i>Essais de vibrations transversales</i>	143
8.2.5.1	Etude des amortissements temporels	143
8.2.5.2	Calcul du module d'élasticité	144
8.2.5.3	Pertinence de l'utilisation d'un modèle viscoélastique linéaire généralisé	146
CHAPITRE IV : DETECTION DES ELEMENTS FAIBLES MECANIQUEMENT PREPONDERANTS DANS LES POUTRES EN BOIS		151
9	PRINCIPE ET MISE EN ŒUVRE DE L'ECHOLOCATION	153
9.1	ECHOLOCATION, UNE DEFINITION	153
9.2	THEORIE DE L'IMPACT – ECHO	153
9.3	DE L'IMPACT – ECHO A L'ECHOLOCATION	154

9.4	PRINCIPE THEORIQUE DE L'ECHOLOCATION -----	155
9.4.1	<i>Etude du choc et du temps de contact</i> -----	155
9.4.2	<i>Transmission et réflexion à travers une double interface sous incidence normale</i> -----	157
9.4.3	<i>Dimension critique de singularité détectable par écholocation</i> -----	158
9.4.4	<i>Modélisation des échos par les modèles guide d'onde</i> -----	161
9.5	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ALGORITHME UTILISES EN ECHOLOCATION -----	163
10	VALIDATION EXPERIMENTALE -----	167
10.1	MATERIEL ET METHODE -----	167
10.1.1	<i>Matériel végétal</i> -----	167
10.1.2	<i>Démarche expérimentale</i> -----	167
10.1.3	<i>Essais vibratoires</i> -----	168
10.2	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES -----	170
10.2.1	<i>Etude phénoménologique des échos</i> -----	170
10.2.1.1	Absence de matière dans le sens de la largeur de la poutre -----	170
10.2.1.2	Absence de matière dans le sens de la longueur de la poutre -----	171
10.2.2	<i>Application de l'écholocation sur un lot de poutres en dimensions d'emploi</i> -----	174
10.2.2.1	Repérage des hétérogénéités, profil densimétrique -----	174
10.2.2.2	Détection des interfaces par écholocation -----	175
	CHAPITRE V : DE LA THEORIE A LA PRATIQUE, ETUDES EXPERIMENTALES SUR DES LOTS REPRESENTATIFS -----	177
11	INVESTIGATION SUR LE CLASSEMENT DES BOIS DE STRUCTURE AU MOYEN D'UN PROTOTYPE DE CLASSEMENT BASE SUR UNE METHODE D'ANALYSE VIBRATOIRE -----	178
11.1	CONTEXTE -----	178
11.2	MATERIEL ET METHODE -----	178
11.2.1	<i>Matériel végétal</i> -----	178
11.2.2	<i>Démarche expérimentale</i> -----	178
11.2.3	<i>Essai de flexion statique 4 points (EN 408)</i> -----	179
11.2.4	<i>Essai vibratoire</i> -----	181
11.3	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES -----	181
11.3.1	<i>Cas de l'épicéa</i> -----	181
11.3.2	<i>Cas du mélèze</i> -----	182
11.4	BILAN DU PARAGRAPHE 11 -----	182
12	STRATEGIE D'ANALYSES MECANIQUES DES STRUCTURES ANCIENNES EN BOIS -----	184
12.1	CONTEXTE -----	184
12.2	MATERIEL ET METHODE -----	184
12.2.1	<i>Matériel végétal</i> -----	184
12.2.2	<i>Démarche expérimentale</i> -----	185
12.2.3	<i>Essais d'évaluation non destructive</i> -----	186
12.2.3.1	Mesure d'une vitesse de propagation -----	186
12.2.3.2	Analyse modale -----	187
12.3	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES -----	187
12.3.1	<i>Relations entre les différentes mesures de vitesse</i> -----	187
12.3.2	<i>Relations entre les paramètres déduits des vibrations longitudinales</i> -----	188
12.3.3	<i>Relation entre module statique et contrainte à la rupture</i> -----	190
12.3.4	<i>Estimation du module statique et de la contrainte à la rupture</i> -----	190
12.3.4.1	Effet des caractéristiques physiques -----	190
12.3.4.2	Mesure des vitesses de propagation -----	192
12.3.4.3	Mesure des modules dynamiques par analyse modale en vibrations transversales -----	193
12.3.4.4	Modèle multi – paramètres déduits des vibrations longitudinales -----	193
12.4	BILAN DU PARAGRAPHE 12 -----	197
13	QUALIFICATION DES AVIVES PAR ANALYSE DES VIBRATIONS DANS LE DOMAINE ACOUSTIQUE -----	199
13.1	CONTEXTE -----	199
13.2	MATERIEL ET METHODE -----	199
13.2.1	<i>Matériel végétal</i> -----	199
13.2.2	<i>Démarche expérimentale</i> -----	200

13.2.3	<i>Méthodes d'analyse des essais vibratoires</i>	201
13.2.3.1	Mesure d'un temps de propagation et du module dynamique associé	201
13.2.3.2	Caractérisation de la poutre comportant un élément faible	202
13.2.3.3	Simulation de l'essai statique	206
13.3	RESULTATS SYNTHETIQUES ET ANALYSES	208
13.3.1	<i>Essais statiques, mesure des caractéristiques mécaniques de référence</i>	208
13.3.2	<i>Estimation du module statique et de la contrainte à la rupture</i>	209
13.3.2.1	Effet des caractéristiques physiques	209
13.3.2.2	Description des variables prédictives utilisées	210
13.3.2.3	Modèles linéaires multi - paramètres	212
13.4	BILAN DU PARAGRAPHE 13	225
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES		229
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		234
ANNEXES		241
1	NOTIONS ET DEFINITIONS EN TRAITEMENT DU SIGNAL	240
1.1	TRANSFORMEE DE FOURIER	240
1.2	PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER	240
1.3	SIGNAL ANALYTIQUE	241
1.4	TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE	242
1.5	FENETRES DE PONDERATION, FILTRAGE	242
1.6	ENERGIE DES SIGNAUX	245
1.7	ECHANTILLONNAGE	246
1.8	BRUIT	247
1.9	SIGNAUX DETERMINISTES, SYSTEMES DE TRANSMISSION	247
1.10	TRANSFORMEES EN Z POUR LES SYSTEMES DISCRETS	248
1.11	SYSTEMES LINEAIRES DISCRETS INVARIANTS DANS LE TEMPS, CAS DES MODELES ARMA	248
2	IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES	250
2.1	SYSTEMES LINEAIRES	250
2.1.1	<i>Définition</i>	250
2.1.2	<i>Représentation temporelle</i>	250
2.1.3	<i>Représentation fréquentielle</i>	250
2.2	IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES	251
2.2.1	<i>Problématiques</i>	251
2.2.2	<i>Les méthodes d'identification</i>	252
2.2.2.1	Identification par réponse harmonique (méthode harmonique)	252
2.2.2.2	Identification par réponse à un signal aléatoire blanc (méthode stochastique)	253
2.2.2.3	Identification par réponse indicielle (méthode impulsionnelle)	253
2.2.2.4	Signaux bruités, fonction de cohérence	254
3	CARACTERISTIQUES PHYSIQUES ET PROFILS DENSIMETRIQUES DES POUTRES DE PIN SYLVESTRE	255
4	RESULTATS DES TESTS D'ECHOLOCATION	258
5	LE CLASSEMENT EN STRUCTURE DES BOIS RESINEUX (SOURCE CTBA)	260
5.1	RAPPEL DE L'OBJECTIF	260
5.1.1	<i>Méthode visuelle</i>	260
5.1.2	<i>Méthode par machine</i>	261
5.2	LES AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES DEUX METHODES	261
5.3	LE CLASSEMENT EN STRUCTURE DES BOIS PAR LA METHODE VISUELLE	261
5.3.1	<i>Les mesures du classement visuel</i>	261
5.3.2	<i>Mesures et critères à prendre en compte pour le classement visuel</i>	262
5.4	LE CLASSEMENT EN STRUCTURE DES BOIS PAR LA METHODE MACHINE	263
5.5	CLASSES DE RESISTANCES ET CLASSES VISUELLES	263
5.6	LES CARACTERISTIQUES MECANIQUES DES CLASSES DE RESISTANCE (EN 338 DE 1995)	263
5.7	LES EVOLUTIONS LIEES AU CLASSEMENT STRUCTURE DES BOIS	264
5.7.1	<i>Les obligations liées à la norme NF B 52-001</i>	264

5.7.2	<i>Intérêts du classement et les évolutions actuelles et à venir</i>	-----	264
6	ESSAIS DE FLEXION SUR PIÈCES EN DIMENSIONS COMMERCIALES (SOURCE CTBA)	-----	265
6.1	OBJECTIFS ET DÉFINITION DE LA MÉTHODE D'ESSAI	-----	265
6.2	FONCTIONNALITÉS	-----	265
6.3	PRINCIPE	-----	265
6.4	DESCRIPTION DES PARAMÈTRES MESURES	-----	266
6.5	CALCUL DU MODULE D'ÉLASTICITÉ	-----	266
6.6	CALCUL DE LA CONTRAINTE À LA RUPTURE	-----	267
6.7	CORRECTION DES VALEURS EXPÉRIMENTALES	-----	267

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

Caractéristiques physiques

L	longueur
h	hauteur
e	base
ρ	masse volumique
G	centre de gravité de la section droite
S	aire de la section droite
I	moment quadratique de la section droite

Grandeurs permettant de décrire le comportement élastique et visqueux du matériau

N	effort normal
T	effort tranchant
M	moment fléchissant
ε	petite déformation
σ	contrainte
E	module d'Young
G	module de cisaillement
ν	coefficient de Poisson
τ_σ	temps de fluage du solide de Zener
τ_ε	temps de relaxation du solide de Zener
K	facteur de forme de la section droite
k	raideur des appuis élastiques

Grandeurs décrivant un mouvement vibratoire

u	déplacement de matière longitudinal
v	déplacement de matière transversal
t	temps
ω	pulsation naturelle
f	fréquence associée à la pulsation
φ	déphasage des fonctions temporelles
e(t)	signal temporel en entrée
s(t)	signal temporel en sortie
h(t)	réponse impulsionnelle du système en vibrations
T(ω)	fonction de transfert du système en vibrations
V	vitesse de propagation
k(ω)	nombre d'onde fonction de la pulsation
α_p	amortissement temporel associé à ω_p
Z	impédance acoustique du milieu de propagation

Grandeurs caractéristiques d'un élément faible

E_0	module d'élasticité de l'élément faible
(l_1, l_2)	positions de l'élément faible dans la longueur
A	taille de l'élément faible

LOGICIELS ET MATERIELS INFORMATIQUES

Ordinateur : PC, processeur Pentium II MMX 400 MHz, RAM 128 MB

Analyses numériques : Matlab 5.3 – The MathWorks – 1999.
Signal Processing Matlab Toolbox 4.2 - The MathWorks – 1998.
Time-Frequency Matlab Toolbox 1.0 – CNRS & Rice University (USA) – 1996.
PLS Matlab Toolbox 2.1 – Eigenvector Research – 2001.

Calculs formels : Mathematica 4.0 – Wolfram Research – 1999.
Scientific WorkPlace 3.0 – TCI Software Research – 1998.

Analyses statistiques : SPSS 9.0 – SPSS Scientific Software – 1999.

Traitements du signal : AutoSignal 1.5 – SPSS Scientific Software – 1999.

PRESENTATION

Le bois est un matériau indispensable à l'existence des arbres qui le produisent. Il assure notamment les propriétés de solidité, de stabilité et de souplesse qui sont nécessaires aux arbres compte tenu de leur conformation très élancée (Bary-Lenger, et al., 1999). Comment résisterait en effet la tige d'un arbre de quarante mètres de hauteur et d'un mètre de diamètre à la base, chargée au sommet d'une ramure et d'un feuillage formant une couronne pesant près d'une tonne ? (Fournier, 1989).

La structure et les qualités naturelles du bois en font un matériau très utile aux Hommes, et dont le gisement peut, dans le cas d'une bonne gestion des peuplements forestiers, se renouveler indéfiniment. Le matériau bois est employé pour ses propriétés mécaniques dans les bâtiments et les ouvrages d'art, pour les charpentes ou les ossatures par exemples, mais aussi dans de nombreux autres emplois tels que les emballages, les poteaux, ou les constructions nautiques.

Dans ces diverses utilisations, les pièces de bois sont soumises à des sollicitations mécaniques pouvant entraîner la rupture et la ruine de l'ensemble de la structure dont elles font partie. La pérennité des ouvrages en bois dépend notamment des propriétés physiques et mécaniques du bois mis en œuvre, de la conception de l'ouvrage, de la durée des efforts imposés, et une caractéristique de leur environnement (Bary-Lenger, et al., 1999). Cette pérennité doit être assurée par un dimensionnement correct des pièces de bois composant l'ouvrage.

Le bois est un matériau qui présente de grandes variations de qualité selon les essences et les conditions de croissance des arbres dont il est issu. Les propriétés du bois ne varient pas seulement d'arbre en arbre, mais aussi au sein d'un même arbre, selon sa section transversale et le long de l'axe de l'arbre (Zobel, et al., 1989). De plus, les processus de transformation du bois sous forme de grumes en avivés interfèrent avec la structure interne du bois naturel. Ceci entraîne alors des variations plus importantes des propriétés mécaniques des avivés par rapport à celles des bois ronds (Racher, et al., 2000). Une bonne connaissance des propriétés physiques et mécaniques de chaque pièce de bois est donc nécessaire pour permettre un dimensionnement correct.

Le dimensionnement des pièces peut reposer comme jadis sur des connaissances empiriques à base expérimentale. Cependant dans ce cas, le concepteur d'ouvrage est tenté de surévaluer les coefficients de sécurité, ce qui est prudent mais peu économe de la matière première (Bary-Lenger, et al., 1999). A l'heure actuelle, le dimensionnement fait appel à des calculs qui prennent en compte le comportement des pièces et des structures dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie (réglementation CB 71, 1971, puis Eurocode 5, 1995).

Dans le cadre des nouveaux règlements européens de normalisation, applicable dans le domaine du bâtiment, des travaux publics, et du génie civil, les bois employés en structure doivent suivre les exigences des normes Eurocode 5 (EC5 - DAN, 1995 - calcul des structures en bois - partie 1.1). Le passage progressif des règles de calcul des structures en bois aux contraintes admissibles (règles CB 71, 1971) à celles aux états limites (Eurocode 5, 1995) implique une évaluation précise et non destructive des caractéristiques mécaniques afin de produire des classements en accord avec l'Eurocode 5 (Racher, et al., 2000). Pour les bois de structure utilisés en flexion (utilisation majoritaire) deux caractéristiques mécaniques sont à prendre en compte (EN 338, 1995) : la rigidité (module d'élasticité) et la résistance (résistance à la rupture) telles qu'elles sont définies par exemple dans la norme EN 408 (1995).

En structure, l'utilisation du bois est basée sur ses valeurs caractéristiques de résistance. Le bois ne peut donc être utilisé s'il n'a pas été préalablement classé. Les lots de pièces sont séparés en classes de différentes qualités, cette segmentation étant effectuée pièce par pièce en raison de la forte variabilité du matériau. La résistance mécanique ne peut être déterminée qu'indirectement par des paramètres non destructifs qui peuvent être établis visuellement (EN 518, 1995) ou de manière automatique par des machines (EN 519, 1995).

Traditionnellement, le classement en structure est réalisé par un examen visuel des pièces de bois. Afin d'améliorer la précision du classement, avec pour objectif d'améliorer les qualités du bois disponible, des processus de classement par machine ont été développés à partir des années 1960. La majorité des machines de classement en service à ce jour déterminent un module d'élasticité moyen en flexion sur de faibles portées (Racher, et al., 2000). Le bois passe alors en continu dans la machine, et il est sollicité en flexion à plat. Le module d'élasticité est dans ce cas l'unique paramètre utilisé pour estimer la valeur de la contrainte à la rupture (Boström, 1994).

Depuis l'introduction des machines de classement dans les années 1970, des recherches ont été menées pour en améliorer le processus. Ces recherches ont notamment porté sur la détermination du module d'élasticité par des méthodes autres que la flexion telles que les ultrasons, l'analyse modale, ou les micro-ondes par exemples (Bodig, 2000). Des recherches ont également porté sur l'emploi des rayons X ou γ afin d'utiliser le profil de densité, mesuré en

continu, comme paramètre prédicteur des propriétés mécaniques (Adjanohoun, et al., 1998). Par ailleurs, la précision de prédiction des machines de classement peut être améliorée en introduisant plusieurs paramètres prédicteurs des propriétés mécaniques, comme par exemple la prise en compte des nœuds en plus du module d'élasticité (Baillères, et al., 1999; Divos et Tanaka, 1997).

Dans le but de tendre vers un classement structurel rigoureux des pièces de bois, et donc d'améliorer le processus de classement par machine, l'objet de ce travail est d'imaginer un système de mesure qui puissent répondre à deux questions de première importance :

- Peut-on mesurer directement de manière non destructive et fiable les caractéristiques mécaniques importantes pour une utilisation en structure ?
- Est-il possible de détecter et de quantifier le ou les défauts d'une pièce afin de pouvoir contrôler et évaluer efficacement la production ?

La dernière question sous-tend, en fait, deux principes distincts :

- D'une part, il s'agit de détecter, rapidement et très tôt dans la chaîne de production, les pièces défectueuses afin de pouvoir optimiser les processus de fabrication et de pouvoir garantir des spécifications strictes indépendamment d'une utilisation en structure. Il convient donc de souligner dans ce cas que l'emploi final des produits n'est pas restreint aux cas des structures porteuses. Ce type de contrôle s'inscrit dans une démarche qualité et va dans le sens d'une optimisation de la productivité.
- D'autre part, d'attribuer de manière fiable, et pour chaque pièce, des qualités mécaniques répondant à des standards (ou des cahiers des charges) bien définis dès lors que les produits manufacturés ont une vocation structurelle. Cette évaluation peut intervenir à la sortie des chaînes de fabrication ou avant la mise en œuvre des produits. Dans ce cas le problème majeur est constitué par l'estimation de la résistance à la rupture.

Pour satisfaire ces deux finalités, il est possible de s'appuyer sur une méthode de mesure basée sur l'analyse des vibrations naturelles engendrées par un choc (Bordonné, 1989 ; Baillères, et al., 1997). Cette méthode, connue depuis des décennies (Bernoulli, 1748), commence à être appliquée en raison des progrès rapides et très significatifs dans les domaines de l'informatique et de l'électronique.

Dans le cadre du présent mémoire, les modèles classiques en dynamique des poutres sont, dans un premier temps, présentés sur la base des travaux de Bordonné (1989) au chapitre I. Ces modèles ne sont valables que pour des matériaux homogènes et permettent dans ce cas une bonne caractérisation de l'élasticité de la pièce testée en vibrations longitudinales ou transversales. Afin d'évaluer au mieux la rigidité et la résistance des pièces de bois, il est cependant nécessaire de caractériser mécaniquement les éventuelles faiblesses locales présentes dans les poutres. Une nouvelle approche théorique, basée sur les modèles unidimensionnels classiques et prenant en compte la présence d'une ou plusieurs singularités (faiblesses locales) dans les poutres, est pour cela développée, dans un deuxième temps, au chapitre I. Dans cette approche, une analogie mécanique de comportement permet de caractériser les singularités de la poutre réelle par la présence d'un ou plusieurs éléments faibles dans la modélisation analytique du comportement dynamique.

L'objet du chapitre II est de préciser les limites de validité de la solution proposée par Bordonné (1989) au modèle de Timoshenko (1921), pour des poutres prismatiques homogènes en vibrations longitudinales ou transversales, lorsque les rapports entre les dimensions de la section transversale ne sont plus du même ordre de grandeur. L'étude de l'influence de l'élançement transverse (rapport base / hauteur) sur les fréquences de vibrations transversales est réalisée de façon théorique à partir du facteur de forme utilisé par Timoshenko dans l'équation du mouvement. Ce facteur, dépendant de la géométrie de la section, permet de prendre en compte le champ de contrainte de cisaillement. La compréhension du comportement mécanique d'une poutre en vibration libre - libre lorsque son élançement transverse varie conduit notamment à établir une liaison entre le modèle plaque et le modèle poutre.

Les modèles mécaniques unidimensionnels classiques de vibrations longitudinales ou transversales des poutres considèrent le matériau en vibrations comme étant élastique et homogène (Bernoulli, 1748 ; Timoshenko, 1921). Pour le mécanicien travaillant en élasticité pure avec les modèles mécaniques classiques, le spectre se réduit à une succession de barres verticales infiniment longues dont les abscisses correspondent aux valeurs des fréquences propres. Or dans la réalité physique, les spectres en fréquence obtenus expérimentalement sont bien loin de ressembler à une modélisation purement élastique qui reste donc très restrictive. Depuis une vingtaine d'années, les progrès technologiques en matière de capacité de calcul et de capacité de mémoire en informatique ont permis de développer de nouveaux instruments de

musique très différents de ceux habituellement fabriqués en lutherie puisque constitués essentiellement de circuits imprimés. Le mécanicien et l'informaticien en synthèse musicale abordent le même problème physique sous deux aspects différents et complémentaires. Il est en effet possible d'unifier les modèles de synthèse musicale et les modèles de mécanique des matériaux (Guillemain, et al., 1997 ; Ystad, 1998).

Le chapitre III a pour objet le développement de modèles utilisant la synthèse musicale et la mécanique des matériaux dans le cadre de poutres en bois vibrant longitudinalement, ou transversalement, en considérant le matériau comme viscoélastique. Les développements théoriques présentés dans ce chapitre ont pour objectif une meilleure compréhension des phénomènes physiques se produisant lorsque le matériau est en vibration. Ce chapitre doit surtout permettre une caractérisation correcte du matériau bois en vibrations du point de vue de son élasticité mais aussi de sa viscosité à partir d'un essai dynamique impulsif. La caractérisation globale de la poutre de bois testée, du point de vue viscoélastique, pourra apporter des paramètres pertinents quant au classement mécanique des poutres. En effet, lorsqu'une poutre est dégradée par une attaque fongique, par une attaque d'insectes xylophages, ou qu'elle possède de nombreuses hétérogénéités, les phénomènes de dissipation et de dispersion des ondes propagatives dans le matériau vont être plus importants que s'il était parfaitement homogène (Machek, et al., 2001).

Le chapitre IV aborde le problème de l'identification du nombre d'hétérogénéités majeures présentes dans une poutre, et de leurs positions associées dans le sens de la longueur. Le type d'hétérogénéité envisagé est qualifié "d'hétérogénéité majeure", aisément identifiable visuellement sur les avivés et localisée dans une région de l'espace bien délimitée, par opposition à la présence d'un défaut de fil ou à la présence diffuse de nœuds de petites tailles réparties sur toute la longueur de la poutre. La connaissance du nombre et des positions des hétérogénéités réelles est d'autre part susceptible d'apporter une information directement utilisable pour identifier les caractéristiques de la poutre mécaniquement analogue comportant un élément faible à partir d'un ou plusieurs essais vibratoires. La méthode proposée dans le chapitre IV est basée sur le principe de l'impact – écho et s'appuie également sur les notions abordées au chapitre III.

Le chapitre V réalise de manière progressive la synthèse de l'ensemble des techniques développées au cours des précédents chapitres afin d'estimer au mieux la rigidité et la résistance de pièces de bois dans le cadre de trois applications expérimentales :

1. La première application expérimentale concerne les travaux réalisés au CTBA¹, par le consortium CTBA, CNRS-LMA², et le CIRAD³-Forêt, afin d'évaluer les performances de la technique d'analyse vibratoire développée au CIRAD-Forêt, d'après les travaux de Bordonné (1989), en tant qu'outil de classement mécanique des sciages utilisés en structure. La méthode d'analyse testée utilise uniquement une valeur de module dynamique comme paramètre prédictif de la résistance en flexion.
2. La deuxième application expérimentale concerne l'étude d'un lot de poutres issues de monuments historiques. Les résultats obtenus permettent de vérifier sur un cas réel et extrême du point de vue de la complexité géométrique et mécanique si la méthode présentée au chapitre III donne des résultats pertinents quant à l'estimation de la contrainte et du module statique.
3. Dans la troisième application expérimentale, les techniques d'analyses vibratoires sont utilisées ensemble. La synthèse de l'ensemble de ces techniques d'analyse permet notamment d'arriver à une prise en compte, dans le calcul d'un "module statique simulé", des singularités présentes dans chaque poutre et de la géométrie particulière de l'essai de flexion statique normalisé (EN 408, 1995). Les paramètres caractéristiques fournis par les analyses vibratoires constituent alors des variables prédictives qui sont utilisés pour construire des modèles d'estimation des valeurs mécaniques de référence, le module d'élasticité statique et la contrainte à la rupture.

Les outils statistiques employés dans l'élaboration des modèles de prédiction sont la régression linéaire simple et multiple, mais également des outils de chimiométrie comme la régression en composantes principales et la régression par les moindres carrés partiels qui ont l'avantage de prendre en compte la totalité de l'information disponible, et utile à l'estimation, dans les variables prédictives. Ces outils chimiométriques rendent également possible une estimation des valeurs mécaniques de référence directement à partir des spectres de vibrations. Cette dernière remarque, qui constitue une méthode d'estimation à part entière, a l'avantage d'utiliser directement la quasi-totalité de l'information expérimentale, contenue dans le spectre de vibrations, comme paramètre prédictif. Les lacunes induites par les approches analytiques, qui tentent de représenter la réalité par l'intermédiaire d'hypothèses pas toujours vérifiées, sont ainsi évitées par ce type de méthode purement expérimentale.

¹ CTBA : Centre Technique du Bois et de l'Ameublement

² CNRS-LMA : Centre National de la Recherche Scientifique – Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

³ CIRAD : Centre de Coopération Internationale en Recherche Agronomique pour le Développement

Chapitre I : Vibrations "libre - libre" d'une poutre comportant un ou plusieurs éléments faibles

INTRODUCTION

Afin d'estimer au mieux la rigidité et la résistance des pièces de bois à usage structurelle, il est nécessaire de caractériser mécaniquement les éventuelles faiblesses locales présentes dans les poutres. On utilise pour cela une technique d'analyse dynamique basée sur une nouvelle approche théorique prenant en compte la présence d'une ou plusieurs singularités (faiblesses locales) par l'intermédiaire d'éléments faibles inclus dans une représentation théorique unidimensionnelle de poutre en vibrations.

Les modèles classiques en dynamique des poutres sont, dans un premier temps, présentés sur la base des travaux de Bordonné (1989). Ces modèles ne sont valables que pour des matériaux homogènes. Une nouvelle approche théorique est alors proposée, dans un deuxième temps, concernant la dynamique des poutres comportant une ou plusieurs singularités. Cette approche permet de décrire le comportement d'une poutre de grand élancement, comportant un ou plusieurs éléments faibles, en vibrations longitudinales ou transversales. Le modèle de Bernoulli (1748) est utilisé pour décrire le comportement dynamique d'une poutre homogène.

Un élément faible représente mécaniquement une ou plusieurs hétérogénéités réelles de la structure du matériau. Il est notamment caractérisé par les propriétés suivantes : un élément faible peut provoquer la rupture du matériau, il peut ne pas être unique, il est défini physiquement par deux paramètres de position et par son module d'élasticité, et la matière reste continue. Un élément faible correspond donc à une analogie mécanique de comportement. Il permet de décrire simplement le comportement dynamique des poutres comportant des singularités.

Afin de valider cette nouvelle approche, une série d'expériences a été réalisée. La présentation des résultats obtenus et la confrontation de l'expérience avec le nouveau modèle théorique font l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. La validation expérimentale n'a concerné que les poutres comportant un seul élément faible. Dans le cas de plusieurs éléments, en raison de la difficulté à façonner les éprouvettes, une validation numérique à partir de la méthode des éléments finis a été effectuée, et est présentée à la troisième partie de ce chapitre.

La quatrième et dernière partie de ce chapitre a pour objet la caractérisation mécanique des faiblesses locales à partir de la réponse vibratoire des poutres testées. Les paramètres définissant une poutre à élément faible sont alors déduits des fréquences propres de vibrations en utilisant des méthodes numériques de résolution des problèmes inverses.

1 ETUDE THEORIQUE

1.1 Modèles classiques en dynamique des poutres

1.1.1 Définition géométrique

Considérons une poutre prismatique pleine (Figure 1), limitée par les sections droites extrêmes 'S₀' et 'S₁', et rapportée au repère principal orthonormé $\{G_0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}$ de 'S₀'. On note 'S' la section droite courante, d'abscisse 'x' et de centre de gravité 'G'. La ligne neutre [G₀, G₁] est confondue avec l'axe (OX). La longueur totale de la poutre est notée 'L'. Soit 'h' la hauteur et 'e' l'épaisseur des sections droites.

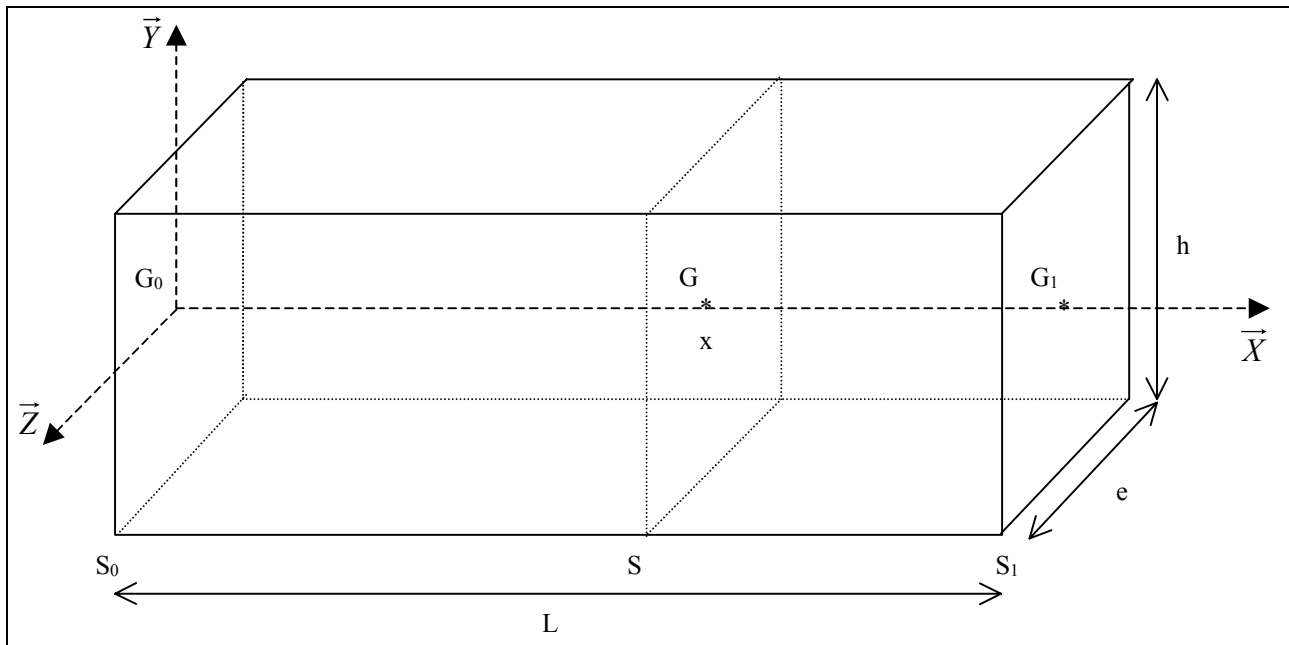


Figure 1 : Schéma d'une poutre, définition géométrique.

1.1.2 Hypothèses

Les hypothèses de la théorie des poutres en résistance des matériaux sont appliquées (Kerguignas et Caignaert, 1977).

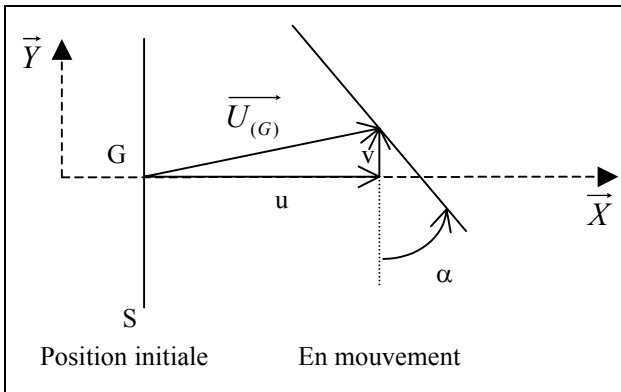
1. Homogénéité des matériaux.
2. Les matériaux sont utilisés dans le domaine élastique, ce qui se traduit par la loi de Hooke généralisée pour la relation contrainte déformation.
3. Géométrie des poutres :
 - *Le rayon de courbure de la fibre moyenne 'Rc' est grand par rapport aux dimensions des sections droites ($Rc > 20$ fois la plus grande dimension : e ou h).
 - *La longueur de la fibre moyenne est grande devant les dimensions des sections droites ($L > 20$ fois la plus grande dimension : e ou h).
4. Hypothèse de Barré de Saint-Venant : les résultats fournis ne s'appliquent valablement qu'à une distance 'l' suffisamment éloignée de la région d'application des efforts intenses ($l > 3$ fois la largeur de la section normale : e).
5. Hypothèses de Bernoulli : les sections planes, normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après.

1.1.3 Description du mouvement

La poutre vibre en flexion ou en compression. L'état de référence est la position d'équilibre de la poutre sur des appuis élastiques. La vibration est produite par une percussion latérale (vibration de flexion) ou longitudinale (vibration en compression) à une des extrémités. En vibration de flexion, solliciter à une des extrémités permet de faire vibrer au mieux la poutre, car les amplitudes des mouvements de vibration sont alors maximums (Sobue, 1986). La poutre vibre ensuite librement.

Les sollicitations auxquelles la poutre est soumise sont symétriques par rapport au plan (OXY) ; le mouvement s'inscrit donc dans ce plan. L'application de l'hypothèse de Bernoulli permet une description simple du mouvement par trois

paramètres. En effet, les paramètres cinématiques nécessaires et suffisants sont les deux coordonnées du vecteur déplacement du centre de gravité d'une section droite 'G' et la rotation par rapport à l'axe (OZ) de cette section (Figure 2) (Timoshenko, 1921 ; Bordonné, 1989).



Vecteur déplacement :

$$\vec{U}_{(G)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

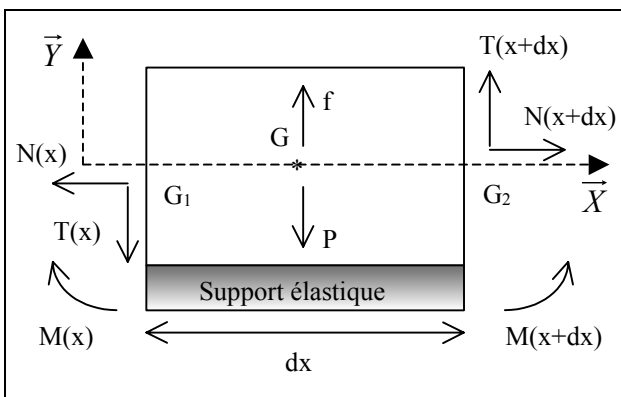
Vecteur rotation :

$$\vec{R}_{(S)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Figure 2 : Description cinématique du mouvement.

1.1.4 Equations du mouvement

Compte tenu des symétries du problème, on considère une tranche de poutre de longueur infinitésimale dx (Figure 3).



Forces extérieures :

Appuis élastiques

$$\vec{f} = (-kvdx)\vec{y}$$

Poids propre

$$\vec{P} = (-\rho Sgdx)\vec{y}$$

Forces de cohésion :

Efforts

$$\text{Normal } N\vec{x}$$

$$\text{Tranchant } T\vec{y}$$

Moments

$$\text{Flexion } M\vec{z}$$

Figure 3 : Equilibre dynamique d'un tronçon de poutre.

Théorème de la résultante cinétique appliqué en 'G' :

$$\sum \vec{F}_{(G)} = (\rho S dx) \vec{a}_G \quad \text{avec} \quad \vec{a}_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(x+dx) - N(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$T(x+dx) - T(x) - kvdx - \rho Sgdx = \rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

La poutre est en équilibre sur des appuis élastiques. Au repos, on a :
$$\begin{cases} -\rho Sgdx - kv_0 dx = 0 \\ kv_0 = -\rho Sg \end{cases}$$

La déviation v_0 est due au poids propre de la poutre. L'état de référence étant la position au repos, on effectue le changement de repère : $v = v_0 + v$. La dernière équation devient alors :

$$T(x+dx) - T(x) - kvdx = \rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Théorème du moment cinétique appliqué en G_2 :

$$\sum \overrightarrow{M}_{(G_2)} = J_{G_2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad J_{G_2} = \iiint y^2 dm$$

$$M(x+dx) - M(x) + T(x)dx + \frac{1}{2}kvdx^2 + \frac{1}{2}\rho Sgd x^2 = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \iiint y^2 \rho dx dy dz$$

Les termes infinitésimaux d'ordre deux 'dx²' sont négligés, il vient alors :

$$M(x+dx) - M(x) + T(x)dx = \rho dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \iint y^2 dy dz$$

$$M(x+dx) - M(x) + T(x)dx = \rho I_{G_z} dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

On obtient les trois équations suivantes :

$$\text{Eq. 1} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{Eq. 2} \quad \frac{\partial T}{\partial x} - kv = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\text{Eq. 3} \quad \frac{\partial M}{\partial x} + T = \rho I_{G_z} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

L'étude de la déformation de la fibre neutre en flexion donne (Kerguignas et Caignaert, 1977) :

$$\text{Eq. 4} \quad M = E_X I_{G_z} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

L'expression de l'effort tranchant découle de l'étude de l'énergie de déformation (Timoshenko, 1953 ; Laroze, 1988) en utilisant la distribution parabolique classique de la contrainte de cisaillement dans la section (Kerguignas et Caignaert, 1977) :

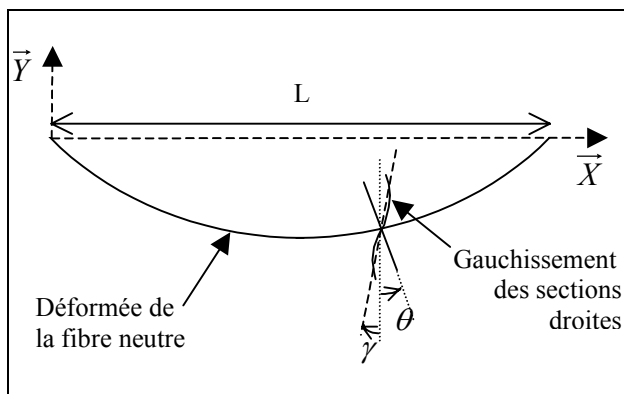
$$\text{Eq. 5} \quad T = KSG_{XY} \gamma$$

où K est un coefficient qui dépend de la géométrie de la section et γ l'angle de déformation dû au cisaillement (Figure 4). Dans ce cas (Kerguignas et Caignaert, 1977) : $K = \frac{5}{6}$ (section rectangulaire).

L'effort normal se déduit de la loi de Hooke (Kerguignas et Caignaert, 1977) :

$$\text{Eq. 6} \quad N = E_X S \frac{\partial u}{\partial x}$$

La relation entre les angles α et γ est donnée par l'équation suivante (Figure 4) (Timoshenko, 1921) :



$$\text{Eq. 7} \quad \alpha = \theta - \gamma$$

avec $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$: déviation de la fibre neutre,
 γ : déviation de cisaillement, et
 α : déviation de la section droite.

Figure 4 : Relation angulaire, description du mouvement.

En faisant l'hypothèse que E_X , I_{Gz} , G_{XY} et S sont constants le long de la poutre, on obtient les deux équations suivantes :

Equation de vibration longitudinale ou vibration en compression

Eq. 8 $E_X \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Equation de vibration transversale ou vibration de flexion

Eq. 9 $E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho I_{Gz} \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_{Gz}}{KG_{XY}} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} +$ } Termes de vibration libre-libre

$\frac{\rho k I_{Gz}}{KSG_{XY}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{E_X k I_{Gz}}{KSG_{XY}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kv = 0$ } Termes de vibration engendré par les supports élastiques

A l'origine, le modèle de Timoshenko négligeait l'influence des supports élastiques (Timoshenko, 1921 ; 1922 ; 1939 ; Weaver, et al., 1990). L'équation du mouvement de vibration transversale selon ce modèle s'écrit donc sans les termes induits par les supports élastiques dans l'équation (Eq. 9).

1.1.5 Sollicitation en compression

1.1.5.1 Solution classique en vibrations longitudinales

L'équation (Eq. 8) peut s'écrire :

Eq. 10 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V_X^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Cette dernière expression décrit une onde sinusoïdale plane se propageant dans la direction (OX) (Kolsky, 1953). Sa vitesse de propagation V_X est alors égale à :

$V_X = \sqrt{\frac{E_X}{\rho}}$

Le milieu étudié étant borné, l'onde propagative est réfléchi aux extrémités. Ce phénomène donne naissance à une onde stationnaire. Les solutions de (Eq. 10) sont alors de la forme $u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$ (Laroze, 1992). Tous calculs faits, l'expression littérale du mouvement est de la forme :

$u(x, t) = \left[C_1 \cos\left(\frac{\omega}{V_X} x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{V_X} x\right) \right] \cos(\omega t + \varphi)$

A chaque extrémité de la poutre l'effort normal est nul : $N(0, t) = 0$ et $N(L, t) = 0$ à chaque instant 't'. Ces conditions aux limites imposent $C_2 = 0$ et permettent de conjecturer les fréquences propres de vibration. On a, en effet :

$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\omega}{V_X} L\right) = 0$ d'où finalement $\omega_n = n \frac{\pi}{L} V_X$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On retiendra l'expression finale du mouvement :

Eq. 11 $u(x, t) = C_1 \cos\left(\frac{2\pi f_n}{V_X} x\right) \cos(\omega t + \varphi)$

avec

Eq. 12 $f_n = \frac{n}{2L} V_X$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Connaissant la fréquence 'f' de vibration et son rang associé 'n', il est possible en utilisant l'équation (Eq. 12) d'évaluer la valeur du module d'élasticité E_X . La formule utilisée est alors la suivante :

$$\text{Eq. 13 } E_X = 4L^2 \rho \frac{f_n^2}{n^2}$$

1.1.5.2 Solution approchée prenant en compte les mouvements latéraux de matière

Quand une poutre est étirée par une force colinéaire à l'axe de plus grande longueur, l'étirement de la matière est en général accompagné par une contraction latérale (Rayleigh, 1877 ; Love, 1892), que nous nommerons par la suite "effet Poisson". Dans le cas de poutre très élancée et d'élément de matière situé au voisinage de la fibre neutre, l'effet Poisson peut être négligé (Rayleigh, 1877). Négliger les déplacements latéraux de matière revient à modéliser les vibrations longitudinales d'une poutre selon la méthode classique décrite au paragraphe précédant (§ 1.1.5.1). Dans ce paragraphe, la solution classique donnant l'expression des fréquences de vibrations longitudinales est "corrigée" en prenant en compte les effets Poisson. La méthode utilisée est décrite par (Rayleigh, 1877), elle est basée sur une approche énergétique et donne un résultat approché. Dans un premier temps, la poutre est supposée isotrope et de géométrie cylindrique. Cette configuration correspond au cas traité par (Rayleigh, 1877) et complétée par Love en 1892 qui donna la solution exacte à la propagation d'une onde volumique dans un milieu élastique isotrope (application aux vibrations longitudinales, cas d'un cylindre - Love, 1892). Dans un deuxième temps le cas d'une poutre orthotrope de section rectangulaire est traité en utilisant l'approximation énergétique de Rayleigh, et l'influence des effets Poisson est quantifiée numériquement pour la géométrie normalisée des petites éprouvettes de bois sans défaut, et pour une géométrie de poutre en dimensions d'emploi.

➤ **Théorème de l'énergie cinétique**

La variation de l'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale au travail de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, y compris les liaisons entre ces deux instants (Timoshenko, et al., 1950). En notant E_C l'énergie cinétique du système, W_E le travail des forces extérieures, et W_I le travail des forces intérieures, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\text{Eq. 14 } \Delta E_C = \Delta W_E + \Delta W_I$$

Dans le cas d'une poutre en vibrations libre-libre, les forces extérieures sont nulles, l'équation (Eq. 14) devient alors :

$$\text{Eq. 15 } \Delta E_C = \Delta W_I \Leftrightarrow \max\{E_C\} = \max\{W_I\}$$

On considère seulement les vibrations longitudinales d'une poutre, l'énergie cinétique par unité de volume s'écrit alors (Timoshenko, et al., 1950 ; 1961) :

$$\text{Eq. 16 } E_C = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

Le travail de l'effort normal a pour expression (Timoshenko, 1953 ; Kerguignas et Caignaert, 1977) :

$$\text{Eq. 17 } W_N = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{E_X S} dx = \frac{E_X S}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

On suppose que la poutre vibre sans frottement, ni échange de chaleur, l'équation (Eq. 15) devient :

$$\text{Eq. 18 } \Delta E_C = \Delta W_I \Leftrightarrow \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,y,z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \right\} = \max \left\{ \frac{E_X S}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$$

➤ **Cas d'une poutre isotrope de section circulaire** (Rayleigh, 1877) :

On se place en coordonnées cylindriques, un point P de la section droite d'abscisse x est repéré par ces coordonnées (r,θ,x) comme indiqué à la Figure 5.

Le problème étant symétrique par rapport à la direction de déplacement \vec{u}_θ , l'onde est progressive dans les directions \vec{u}_X et \vec{u}_R (Figure 5). L'état des contraintes dans le matériau est la même que dans le problème classique (§ 1.1.5.1), seules les contraintes normales à la section droite ne sont pas nulles ($\sigma_{XX} \neq 0$). L'état des déformations s'écrit alors :

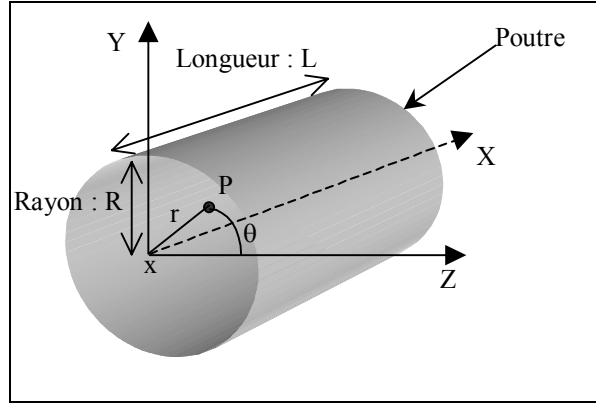


Figure 5 : Coordonnées cylindriques.

$$\text{Eq. 19 } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{RR} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ \frac{\partial u_R}{\partial r} \\ \frac{u_X}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ -\nu \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ \frac{u_X}{r} \end{bmatrix}$$

En intégrant, on obtient l'expression des déplacements :

$$\text{Eq. 20 } \begin{bmatrix} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ \frac{\partial u_R}{\partial r} \\ \frac{u_X}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ -\nu \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ \frac{u_X}{r} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_X = u_X \neq 0 \\ u_R = -\nu r \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ u_\theta = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où l'effet des déplacements perpendiculaires à la direction longitudinale des vibrations est pris en compte, l'équation (Eq. 18) devient :

$$\text{Eq. 21 } \Delta E_C = \Delta W_I \Leftrightarrow \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,r,\theta} \left[\left(\frac{\partial u_X}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_R}{\partial t} \right)^2 \right] dx dr d\theta \right\} = \max \left\{ \frac{E_X S}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_X}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$$

On suppose que l'erreur commise en négligeant l'effet des déplacements perpendiculaires à la direction longitudinale des vibrations est faible. Cette hypothèse permet d'exprimer le déplacement longitudinal comme dans le cas classique (Eq. 11) :

$$\text{Eq. 22 } u_X \approx U_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

Les résultats des équations (Eq. 20 et Eq. 22) permettent de calculer les trois termes de l'équation (Eq. 21) :

$$\text{Eq. 23 } \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,r,\theta} \left(\frac{\partial u_X}{\partial t} \right)^2 dx dr d\theta \right\} = \frac{\rho S L \omega^2}{4} U_0^2$$

$$\text{Eq. 24 } \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,r,\theta} \left(\frac{\partial u_R}{\partial t} \right)^2 dx dr d\theta \right\} = \frac{\rho}{4} \frac{J(n\pi v \omega)^2}{L} U_0^2, \text{ avec } J = \frac{\pi R^4}{2} \text{ moment polaire}$$

$$\text{Eq. 25 } \max \left\{ \frac{E_X S}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_X}{\partial x} \right)^2 dx \right\} = \frac{E_X S}{4} \frac{(n\pi)^2}{L} U_0^2$$

L'équation (Eq. 21) s'écrit alors, d'après (Eq. 23, Eq. 24, et Eq. 25) :

$$\text{Eq. 26 } \rho L \omega^2 \left(1 + \frac{(n\pi R v)^2}{2L^2} \right) = E_X \frac{(n\pi)^2}{L}$$

De cette dernière équation se déduit l'expression approchée des fréquences de vibrations longitudinales, en prenant en compte l'effet des déplacements perpendiculaires à la direction longitudinale de propagation :

$$\text{Eq. 27 } f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(n\pi\nu)^2}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

Par hypothèse, l'effet des déplacements perpendiculaires à la direction longitudinale des vibrations est faible, le terme correctif contenant le coefficient de Poisson ν est donc très petit devant l'unité. L'équation (Eq. 27) conduit alors à l'expression finale des fréquences de vibrations :

$$\text{Eq. 28 } f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}} \left(1 - \frac{(n\pi\nu)^2}{4} \left(\frac{R}{L}\right)^2\right)$$

Ce résultat théorique est celui présenté par Rayleigh (1877), et notamment repris et complété par Love (1892), Kolsky (1953), et Graff (1975). L'équation (Eq. 28) montre que plus l'élanement de la poutre (ratio L/R) est grand, plus l'influence des effets Poisson est importante sur les fréquences de vibrations longitudinales. L'équation (Eq. 28) n'est qu'un résultat approché, cependant il est important de remarquer que le terme correctif prenant en compte les effets Poisson dépend du rang n de la fréquence considérée, ou plus exactement de la fréquence elle-même. Le terme correctif de l'équation (Eq. 28) correspond au phénomène physique de dispersion de l'onde qui se propage dans le matériau, la vitesse de propagation est en effet fonction de la fréquence de vibration (Graff, 1975).

➤ **Cas d'une poutre orthotrope de section rectangulaire**

La poutre est définie géométriquement comme illustré à la Figure 1. L'état des contraintes dans le matériau est la même que dans le problème classique (§ 1.1.5.1), seules les contraintes normales à la section droite ne sont pas nulles ($\sigma_{XX} \neq 0$). L'état des déformations s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\text{Eq. 29 } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ \frac{\partial u_Y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_Z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ -\nu_{XY} \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ -\nu_{XZ} \frac{\partial u_X}{\partial x} \end{bmatrix}$$

En intégrant, on obtient l'expression des déplacements :

$$\text{Eq. 30 } \begin{cases} u_X = u_X \neq 0 \\ u_Y = -\nu_{XY} y \frac{\partial u_X}{\partial x} \\ u_Z = -\nu_{XZ} z \frac{\partial u_X}{\partial x} \end{cases}$$

L'équation (Eq. 18) devient :

$$\text{Eq. 31 } \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,y,z} \left[\left(\frac{\partial u_X}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_Y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_Z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \right\} = \max \left\{ \frac{E_X S}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_X}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$$

Comme dans le cas d'une poutre isotrope cylindrique, on utilise la fonction de déplacement de la solution classique (Eq. 11). Les quatre termes de l'équation (Eq. 31) se déduisent alors de (Eq. 22 et Eq. 30) :

$$\text{Eq. 32 } \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,y,z} \left(\frac{\partial u_X}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \right\} = \frac{\rho S L \omega^2}{4} U_0^2$$

$$\text{Eq. 33 } \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,y,z} \left(\frac{\partial u_Y}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \right\} = I_{GZ} (\nu_{XY})^2 \frac{\rho}{4} \frac{(n\pi\omega)^2}{L} U_0^2$$

$$\text{Eq. 34 } \max \left\{ \frac{\rho}{2} \iiint_{x,y,z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \right\} = I_{GY} (v_{XZ})^2 \frac{\rho (n\pi\omega)^2}{4L} U_0^2$$

$$\text{Eq. 35 } \max \left\{ \frac{E_X S}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_X}{\partial x} \right)^2 dx \right\} = \frac{E_X S (n\pi)^2}{4L} U_0^2$$

L'équation (Eq. 31) s'écrit alors, d'après (Eq. 32, Eq. 33, Eq. 34, et Eq. 35) :

$$\text{Eq. 36 } \rho L \omega^2 \left(1 + \frac{(n\pi)^2}{SL^2} (I_{GZ} (v_{XY})^2 + I_{GY} (v_{XZ})^2) \right) = E_X \frac{(n\pi)^2}{L}$$

De cette dernière équation se déduit l'expression approchée des fréquences de vibrations longitudinales pour une poutre orthotrope de section rectangulaire en prenant en compte les effets Poisson :

$$\text{Eq. 37 } f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(n\pi)^2}{SL^2} (I_{GZ} (v_{XY})^2 + I_{GY} (v_{XZ})^2)}}$$

On vérifie que (a) si $v_{XY}=v_{XZ}=0$, l'équation (Eq. 37) se ramène à la formulation classique (Eq. 12), (b) si $v_{XY}=v_{XZ}=v$ et $I_{GZ}=I_{GY}=(\pi R^4)/4$, cas d'une poutre cylindrique isotrope, l'équation (Eq. 37) se ramène à l'expression donnée par Rayleigh (Eq. 27).

➤ **Quantification de l'influence des effets Poisson sur les fréquences de vibrations longitudinales**

Les applications numériques sont réalisées en considérant uniquement les trois premières fréquences de vibration. Deux géométries sont envisagées, (a) cas d'une petite éprouvette de bois sans défaut de dimensions 360x20x20mm (NF B 51-008), (b) cas d'une poutre de bois en dimensions d'emploi de 3000x150x50mm. Les caractéristiques mécaniques retenues sont celles du "résineux standard", $E_X=E_L=13100$ MPa, $\rho=450$ kg/m³, $v_{XY}=v_{LT}=0,43$, $v_{XZ}=v_{LR}=0,38$ (Guitard, 1987). Les résultats du Tableau 1 sont donnés relativement à la formulation classique (Eq.12) en utilisant l'équation (Eq. 37).

Dimensions	$ \Delta f_1/f_1 $ (%)	$ \Delta f_2/f_2 $ (%)	$ \Delta f_3/f_3 $ (%)
360x20x20mm	<0,1	0,2	0,4
3000x150x50mm	<0,1	<0,1	0,2

Tableau 1 : Influence des déplacements latéraux de matière sur les fréquences de vibrations longitudinales.

Le Tableau 1 montre que l'influence des effets Poisson sur les fréquences de vibrations longitudinales est négligeable. Cette remarque ne remet pas en cause l'hypothèse de calcul permettant d'exprimer le déplacement longitudinal comme dans le cas classique (Eq. 22).

1.1.6 Sollicitation en flexion

Comme dans le chapitre précédant, on cherche les solutions de l'équation (Eq. 9) sous la forme :

$v(x,t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$. On définit préalablement les variables intermédiaires suivantes :

Vibration libre-libre (Bordonné, 1989) :

$$\alpha^* = \frac{I_{Gz}}{SL^2}$$

$$X^* = \frac{\omega^2 L^4 S \rho}{E_X I_{Gz}}$$

$$\Gamma^* = \frac{E_X I_{Gz}}{KSG_{XY} L^2}$$

Vibration libre sur supports élastiques :

$$Y = \frac{k}{\rho S \omega^2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha^*}{(1 - Y)}$$

$$X = X^* (1 - Y)$$

$$\Gamma = \Gamma^*$$

L'équation que doit vérifier la fonction f(x) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{X}{L^2} (\alpha + \Gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{X}{L^4} (1 - X\alpha\Gamma) f = 0$$

Les solutions sont de la forme :

$$f(x) = C_1 \cos(d_1 x) + C_2 \cosh(d_2 x) + C_3 \sin(d_1 x) + C_4 \sinh(d_2 x)$$

$$\text{avec} \begin{cases} d_1 = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{X(\alpha + \Gamma)}{2} + \sqrt{\frac{X^2(\alpha - \Gamma)^2}{4} + X}} \\ d_2 = \frac{1}{L} \sqrt{-\frac{X(\alpha + \Gamma)}{2} + \sqrt{\frac{X^2(\alpha - \Gamma)^2}{4} + X}} \end{cases}$$

Cette expression n'est valable que pour $X\alpha\Gamma \leq 1$. Cette condition peut se traduire sur les fréquences propres de vibration par la relation suivante :

$$f_n \leq \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{G_{XY}}{\rho}}, \text{ on suppose pour le moment que la condition est satisfaite. Les résultats du paragraphe 1.1.6.3}$$

permettent d'exploiter cette inégalité et de définir une des limites de validité des solutions proposées.

A chaque extrémité de la poutre le moment de flexion et l'effort tranchant sont nuls : $M(0,t)=0$, $M(L,t)=0$ et $T(0,t)=0$, $T(L,t)=0$ à chaque instant 't'. Ces conditions aux limites conduisent à un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues : C_1, C_2, C_3 et C_4 .

$$\begin{cases} \left(\frac{X\Gamma}{L^2} - d_1^2\right)C_1 + \left(\frac{X\Gamma}{L^2} + d_2^2\right)C_2 = 0 \\ \left(\frac{X\Gamma}{L^2} - d_1^2\right)(C_1 \cos(d_1 L) + C_3 \sin(d_1 L)) + \left(\frac{X\Gamma}{L^2} + d_2^2\right)(C_2 \cosh(d_2 L) + C_4 \sinh(d_2 L)) = 0 \\ -\left[d_1^2 - \frac{X}{L^2}(\alpha + \Gamma)\right]d_1 C_3 + \left[d_2^2 + \frac{X}{L^2}(\alpha + \Gamma)\right]d_2 C_4 = 0 \\ \left[d_1^2 - \frac{X}{L^2}(\alpha + \Gamma)\right](C_1 \sin(d_1 L) - C_3 \cos(d_1 L))d_1 + \left[d_2^2 + \frac{X}{L^2}(\alpha + \Gamma)\right](C_2 \sinh(d_2 L) + C_4 \cosh(d_2 L))d_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions correspondant au mode propre de vibration et à ses harmoniques associées. Le déterminant 'Δ' doit donc s'annuler.

Ce qui permet d'écrire l'équation aux fréquences suivante :

$$\text{Eq. 38 } \Delta = 0 \Leftrightarrow d_1 d_2 L^2 [1 - \cos(d_1 L) \cosh(d_2 L)] + [2\alpha(X + X^2 S^2) - XR] \sin(d_1 L) \sinh(d_2 L) = 0$$

$$\text{Avec } S = \frac{\alpha - \Gamma}{2} \text{ et } R = \frac{\alpha + \Gamma}{2}.$$

La résolution de l'équation différentielle du mouvement proposée par Timoshenko conduit à chercher les solutions de l'équation aux fréquences (Timoshenko, 1921). Pour simplifier, on note Eq. 38 $\Leftrightarrow F(X, \alpha, \Gamma) = 0$. L'équation aux fréquences n'a pas été résolue de façon exacte. Plusieurs solutions approchées ont été proposées, notamment par Bernoulli (1748), Rayleigh (1877), Goens (1931) et Bordonné (1989).

Il est possible d'évaluer directement les valeurs du module d'élasticité et du module de cisaillement à partir de l'équation aux fréquences. Si les deux premières fréquences de vibrations sont mesurées expérimentalement, deux équations en E_X et G_{XY} se déduisent alors de l'équation aux fréquences. Comme le système d'équations ainsi obtenu n'est pas linéaire, la détermination des constantes élastiques nécessite une procédure itérative. Un seul essai est nécessaire pour obtenir les valeurs de ces constantes, une fois mesurées les deux premières fréquences de vibration. (Chui, 1991).

La méthode dite de Mead-Joannides permet d'évaluer le module de cisaillement G_{XY} à partir de l'équation aux fréquences. Cette méthode est basée sur le calcul au préalable du module d'élasticité E_X par les fréquences de vibration longitudinale (Eq. 13). (Kuboijima, et al., 1996).

1.1.6.1 Modèle et solution de Bernoulli

Le modèle de Bernoulli (1748) et la solution qui en découle sont basés sur trois hypothèses :

1. L'élanement est très grand ($L/h \gg 1$). La poutre est alors considérée comme un fil mince.
2. Le cisaillement est négligé ($\gamma \approx 0$).
3. L'influence des appuis est négligée ($Y \approx 0$).

Les paramètres de l'équation (Eq. 38) deviennent $\{X = X^*, \alpha = 0, \Gamma = 0\}$.

L'équation du mouvement (Eq. 9) se simplifie et s'écrit :

$$\text{Eq. 39 } E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale s'écrit :

$$\text{Eq. 40 } v(x,t) = [C_1 \cos(a_n x) + C_2 \cosh(a_n x) + C_3 \sin(a_n x) + C_4 \sinh(a_n x)] \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec } a_n^4 = 4\pi^2 \frac{\rho S}{E_X I_{Gz}} f_n^2$$

L'équation aux fréquences (Eq. 38) se simplifie également :

$$\text{Eq. 41 } 1 - \cos(\sqrt[4]{X}) \cosh(\sqrt[4]{X}) = 0$$

$$F(X, \alpha, \Gamma) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt[4]{X}) \cosh(\sqrt[4]{X}) = 1$$

Les solutions en X de cette dernière équation ne sont pas triviales. Les six premières racines successives ont pour valeur :

$\sqrt[4]{X_0}$	$\sqrt[4]{X_1}$	$\sqrt[4]{X_2}$	$\sqrt[4]{X_3}$	$\sqrt[4]{X_4}$	$\sqrt[4]{X_5}$
0,000	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279

Les valeurs approchées sont données par :

$$\text{Eq. 42 } \sqrt[4]{X_n} = (2n+1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}^*, \text{ avec } a_n = \frac{1}{L} \sqrt[4]{X_n}$$

On déduit alors l'expression des fréquences de vibration :

$$\text{Eq. 43 } f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz} X_n}{\rho S L^4}}$$

Connaissant la fréquence 'f' de vibration et son rang associé 'n', il est possible en utilisant les équations (Eq. 42 et Eq. 43) d'évaluer la valeur du module d'élasticité E_X . La formule utilisée est alors la suivante :

$$\text{Eq. 44 } E_X = 4\pi^2 \frac{\rho S L^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n}$$

1.1.6.2 Modèle et solution de Rayleigh

Lord Rayleigh a déterminé l'équation du mouvement de vibration en flexion en utilisant la méthode des travaux virtuels (Rayleigh, 1877). Il est néanmoins possible de retrouver la solution de Rayleigh en utilisant le modèle exploité au paragraphe 1.1.4 (Bordonné, 1989). Les hypothèses de départ sont :

1. L'élanement est relativement faible. La poutre n'est plus un fil mince mais possède une 'épaisseur'. Cette hypothèse a une conséquence directe sur l'inertie de rotation des sections droites qui n'est plus négligeable.
2. Le paramètre X est très voisin de la solution de Bernoulli X_n .
3. Le cisaillement est négligé ($\gamma \approx 0$).
4. L'influence des appuis est négligée ($Y \approx 0$).

Les paramètres de l'équation (Eq. 38) deviennent $\{X \approx X_n \text{ solution de Bernoulli, } \alpha = \alpha^* \text{ supposé petit, } \Gamma = 0\}$.

L'équation du mouvement (Eq. 9) se simplifie et s'écrit :

$$\text{Eq. 45 } E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

L'équation aux fréquences (Eq. 38) se simplifie également :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow F(X, \alpha, 0) = d_1 d_2 L^2 [1 - \cos(d_1 L) \cosh(d_2 L)] + \frac{X\alpha}{2} (3 + X\alpha^2) \sin(d_1 L) \sinh(d_2 L) = 0$$

Le paramètre α étant supposé petit, la fonction $F(X, \alpha, \Gamma)$ peut s'écrire au voisinage de $(X_n, 0, 0)$ par la formule de Taylor-Lagrange (Goens, 1931) au premier ordre :

$$F(X, \alpha, 0) = F(X_n, 0, 0) + (X - X_n) \frac{\partial F}{\partial X}(X_n, 0, 0) + \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha}(X_n, 0, 0) + O(X - X_n, \alpha, 0)$$

X_n étant solution de Bernoulli, on a $F(X_n, 0, 0) = 0$.

$$F(X, \alpha, 0) = (X - X_n) \frac{\tan(m) - \tanh(m)}{4m} + \alpha m^3 \frac{m^2 [\tan(m) + \tanh(m)] + 6m \tan(m) \tanh(m)}{4}$$

$$\text{Avec } m = \sqrt[4]{X_n} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

On obtient finalement, en notant X_{Rn} la solution de Rayleigh (solution approchée de Eq. 38) :

$$\text{Eq. 46 } X_{Rn} = X_n \left[1 - \alpha \left(m^2 \frac{\tan(m) + \tanh(m)}{\tan(m) - \tanh(m)} + 6m \frac{\tan(m) \tanh(m)}{\tan(m) - \tanh(m)} \right) \right]$$

La solution de Rayleigh est définie pour les inverses de X . l'équation (Eq. 46) peut s'écrire :

$$X_{Rn} = X_n (1 - \varepsilon) \text{ avec } \varepsilon \text{ très petit.}$$

$$\frac{1}{X_{Rn}} = \frac{1}{X_n} \frac{1}{1 - \varepsilon} \approx \frac{1}{X_n} (1 + \varepsilon), \text{ d'où finalement :}$$

$$\text{Eq. 47 } \frac{1}{X_{Rn}} = \frac{1}{X_n} \left[1 + \alpha (\theta^2(m) + 6\theta(m)) \right] \text{ en posant } \theta(m) = m \frac{\tan(m) \tanh(m)}{\tan(m) - \tanh(m)}$$

Les expressions des fréquences de vibration et du module d'élasticité dans le sens (OX) se déduisent des équations (Eq. 43 et Eq. 44) en remplaçant X_n par X_{Rn} .

1.1.6.3 Modèle de Timoshenko et solution de Bordonné

Hypothèses de départ :

1. L'élançement est relativement faible.
2. Le paramètre X est très voisin de la solution de Bernoulli X_n .
3. Le cisaillement n'est plus négligé.
4. L'influence des appuis est négligée ($Y \approx 0$).

Les paramètres de l'équation (Eq. 38) deviennent $\{X \approx X_n \text{ solution de Bernoulli, } \alpha = \alpha^* \text{ supposé petit, } \Gamma = \Gamma^* \text{ supposé petit}\}$.

L'équation du mouvement (Eq. 9) se simplifie et s'écrit :

$$\text{Eq. 48 } E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho I_{Gz} \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_{Gz}}{KG_{XY}} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Les paramètres α et Γ étant supposés petits, la fonction $F(X, \alpha, \Gamma)$ peut s'écrire au voisinage de $(X_n, 0, 0)$ par la formule de Taylor-Lagrange (Goens, 1931) au premier ordre :

$$F(X, \alpha, 0) = F(X_n, 0, 0) + (X - X_n) \frac{\partial F}{\partial X}(X_n, 0, 0) + \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha}(X_n, 0, 0) + \Gamma \frac{\partial F}{\partial \Gamma}(X_n, 0, 0) + O(X - X_n, \alpha, \Gamma)$$

X_n étant solution de Bernoulli, on a $F(X_n, 0, 0) = 0$. En utilisant les notations du chapitre précédent, on exprime :

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma}(X_n, 0, 0) = m^3 \frac{m^2 [\tan(m) + \tanh(m)] - 2m \tan(m) \tanh(m)}{4}$$

On obtient finalement, en notant X_{Bn} la solution de Bordonné (solution approchée de Eq. 38) :

$$X_{Bn} = X_n \left[1 - \alpha [\theta^2(m) + 6\theta(m)] - \Gamma [\theta^2(m) - 2\theta(m)] \right]$$

Numériquement, on montre que l'utilisation de l'inverse de X_{Bn} est préférable. L'écart relatif entre la valeur vraie et la valeur approchée est ainsi minimisée.

$$\text{Eq. 49} \quad \frac{1}{X_{Bn}} = \frac{1}{X_n} \left[1 + \alpha \left[\theta^2(m) + 6\theta(m) \right] + \Gamma \left[\theta^2(m) - 2\theta(m) \right] \right]$$

L'équation (Eq. 49) est plus précise que (Eq. 46) car elle prend en compte l'effet du cisaillement (paramètre Γ). Les expressions des fréquences de vibration et du module d'élasticité dans le sens (OX) se déduisent des équations (Eq. 43 et Eq. 44) en remplaçant X_n par X_{Bn} :

$$\text{Eq. 50} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4 \left[1 + \alpha F_1(m) + \alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m) \right]}}$$

Avec $F_1(m) = \theta^2(m) + 6\theta(m)$ et $F_2(m) = \theta^2(m) - 2\theta(m)$. Les paramètres m , X_n , $F_1(m)$ et $F_2(m)$ se calculent en fonction de l'indice n , et sont utilisés pratiquement pour calculer la valeur du module E_X ainsi que celle du module de cisaillement G_{XY} .

$$E_X = 4\pi^2 \frac{\rho S L^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \left[1 + \alpha F_1(m) + \alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m) \right]$$

En séparant les termes, on obtient :

$$\text{Eq. 51} \quad \frac{E_X}{\rho} - \frac{E_X}{KG_{XY}} \left[\alpha F_2(m) 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \right] = 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} [1 + \alpha F_1(m)]$$

Les valeurs de E_X et G_{XY} se calculent en effectuant une régression linéaire sur les couples (x,y), dépendant de l'indice n (Hearmon, 1958 ; 1966), tels que :

$$x = \alpha F_2(m) 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \text{ et } y = 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} [1 + \alpha F_1(m)]$$

Les solutions de l'équation aux fréquences (Eq. 38) exprimées ne sont valables que si la relation suivante est vérifiée (§1.1.6) :

$$X\alpha\Gamma \leq 1 \Leftrightarrow f_n \leq \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{G_{XY}}{\rho}}$$

En utilisant la solution de Bordonné (Eq. 50), on obtient une condition sur l'élancement de la forme :

$$\text{Eq. 52} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{12\pi^2} \frac{E_X}{G_{XY}} X_n} \leq \frac{L}{h}$$

L'équation Eq. 52 est utilisée pour tracer l'évolution de l'élancement en fonction de la densité du matériau bois (Figure 6). Le ratio E_X/G_{XY} est calculé en utilisant les relations de Guitard (1987). La courbe ci-contre est tracée en prenant la valeur de la cinquième racine de Bernoulli (§ 1.1.6.1).

Pour le matériau bois, la Figure 6 montre que la solution de Bordonné n'est applicable que pour des élancements supérieurs à 10 en ce qui concerne les cinq premiers modes de vibration.

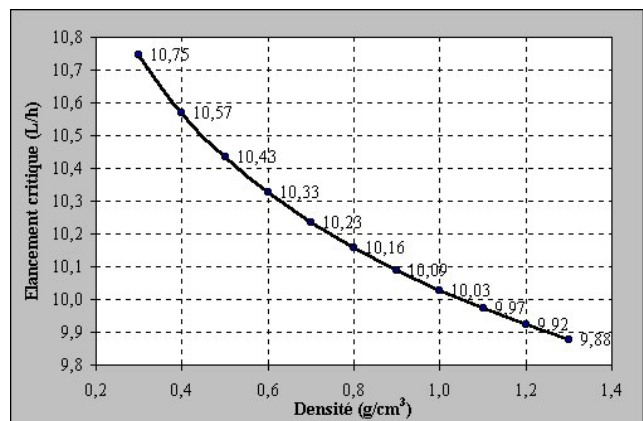


Figure 6 : Élancement critique fonction de la densité pour le matériau bois.

1.1.6.4 *Modèle de Timoshenko et solution de Goens*

Hypothèses de départ :

1. Les paramètres α et Γ sont supposés petits.
2. Le paramètre X est très voisin de la solution de Bernoulli X_n .
3. De plus, $\tanh(m)$ est peu différent de 1 et d_1L , d_2L sont peu différents de m .
4. L'influence des appuis est négligée ($Y \approx 0$).

Dans ces conditions, l'équation (Eq. 38) conduit à la relation suivante, en notant X_G la solution de Goens (1931) :

$$\frac{1}{X_G} = \frac{1}{X_n} \left[1 + \alpha [m^2 + 6m] + \Gamma [m^2 - 2m] - X_G \alpha \Gamma \right]$$

Constatant que $\theta(m) \approx m$ et connaissant les approximations linéaires au premier ordre, il en découle l'expression suivante (Goens, 1931 ; Bordonné, 1989) :

$$\text{Eq. 53} \quad \frac{1}{X_G} = \frac{1}{X_n} \left[1 + \alpha [\theta^2(m) + 6\theta(m)] + \Gamma [\theta^2(m) - 2\theta(m)] - X_G \alpha \Gamma \right]$$

Le terme complémentaire introduit par Goens dans l'équation (Eq. 49) est analogue au terme représentatif du deuxième ordre dans le développement de la fonction $F(X, \alpha, \Gamma)$ au voisinage de $(X_n, 0, 0)$ par la formule de Taylor-Lagrange. On montre en effet que les termes du second ordre du développement sont peu différents du produit $X_n \alpha \Gamma$ (Bordonné, 1989).

Comme dans le paragraphe 1.1.6.3, l'expression du module d'élasticité se déduit de l'équation (Eq. 44) en remplaçant X_n par X_G :

$$E_X = 4\pi^2 \frac{\rho S L^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \left[1 + \alpha F_1(m) + \alpha \frac{E_X}{K G_{XY}} F_2(m) - \frac{4\pi^2 \rho I_{Gz} f_n^2}{K S G_{XY}} \right]$$

Les valeurs de E_X et G_{XY} se calculent par la méthode de Hearmon (§ 1.1.6.3) (Hearmon, 1958 ; 1966).

Pour une configuration géométrique précise de poutre, hauteur h environ quatre fois supérieure à la base e , le module de cisaillement calculé en vibration de torsion est très proche du module G_{XY} (Sobue, 1986 ; Ohlsson et Perstorper, 1992). Perstorper (1994) utilise la valeur du module de cisaillement de torsion avec celle du module d'élasticité évaluée d'après le modèle de Bernoulli (Eq. 43) dans le terme entre crochet de la solution de Goens présentée ci-dessus. Cette méthode lui permet de trouver une valeur approximative du terme entre crochet. Une procédure itérative calcule ensuite une valeur stable du module d'élasticité E_X en fonction des fréquences de vibration expérimentales. (Perstorper, 1994). La combinaison des vibrations de flexion et de torsion pour calculer le module d'élasticité longitudinal a également été utilisée par Sobue (1988). Il est important de remarquer que cette méthode de détermination du module d'élasticité utilise un calcul approché, de plus le matériel requis pour l'essai de torsion est plus sophistiqué et est en général plus difficile à conduire (Chui, 1991).

1.1.6.5 *Modèle et solution de Liot-Guitard*

Considérant les caractéristiques géométriques de la section transverse, on constate expérimentalement que lorsque l'élançement transverse (e/h) augmente les fréquences propres de vibration de flexion augmentent. La variation constatée est de l'ordre de 7%, lorsque e/h passe de 2 à 10. Afin de tenir compte de l'influence de l'élançement transverse de la section droite sur les fréquences de vibration, Liot (1994) et Guitard (1996) ont développé une formulation de l'équation du mouvement des vibrations de flexion qui prend en compte les effets Poisson. Cette formulation convient à l'étude d'éprouvettes ayant un élançement transverse élevé. (Liot, et al., 1994 ; Guitard, et al., 1996).

1.1.6.6 *Influence des supports élastiques*

Hypothèses de départ :

1. Les paramètres α et Γ sont supposés petits.
2. Le paramètre X est très voisin de la solution de Bernoulli X_n .
3. L'influence des appuis n'est plus négligée.

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 1.1.6.3, et en tenant compte du terme représentatif du deuxième ordre, la solution approchée X_{An} de l'équation (Eq. 38) s'écrit :

$$\text{Eq. 54} \quad \frac{1}{X_{An}} = \frac{1}{X_n} \left[1 - \frac{k}{\rho S \omega^2} + \alpha^* F_1(m) + \alpha^* \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m) - \frac{X_n \alpha^{*2}}{1 - \frac{k}{\rho S \omega^2}} \frac{E_X}{KG_{XY}} \right]$$

L'équation (Eq. 54) permet alors d'exprimer les fréquences de vibration et le module d'élasticité :

$$\text{Eq. 55} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4} \left[1 - \frac{k}{\rho S \omega^2} + \alpha^* F_1(m) + \left(\alpha^* F_2(m) - \frac{X_n \alpha^{*2}}{1 - \frac{k}{\rho S \omega^2}} \right) \frac{E_X}{KG_{XY}} \right]^{-1}}$$

$$E_X = 4\pi^2 \frac{\rho S L^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \left[1 - \frac{k}{\rho S \omega^2} + \alpha^* F_1(m) + \left(\alpha^* F_2(m) - \frac{X_n \alpha^{*2}}{1 - \frac{k}{\rho S \omega^2}} \right) \frac{E_X}{KG_{XY}} \right]$$

Ce qui donne, en séparant les termes :

$$\text{Eq. 56} \quad \frac{E_X}{\rho} - \frac{E_X}{KG_{XY}} \left(4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \right) \left(\alpha^* F_2(m) - \frac{X_n \alpha^{*2}}{1 - \frac{k}{\rho S \omega^2}} \right) = 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \left[1 - \frac{k}{\rho S \omega^2} + \alpha^* F_1(m) \right]$$

L'équation (Eq. 56) est semblable à (Eq. 51). Elle inclut à la fois le terme le plus représentatif du développement au deuxième ordre et l'influence des supports élastiques. La solution proposée ici est donc la plus précise des solutions de l'équation (Eq. 38) ; elle est applicable dans le cas où la poutre repose entièrement sur un support élastique (Figure 7).

Ce cas de figure a été traité par Timoshenko (1939) en utilisant le modèle et la solution de Bernoulli (§ 1.1.6.1) (Timoshenko, 1939 ; Weaver, et al., 1990).

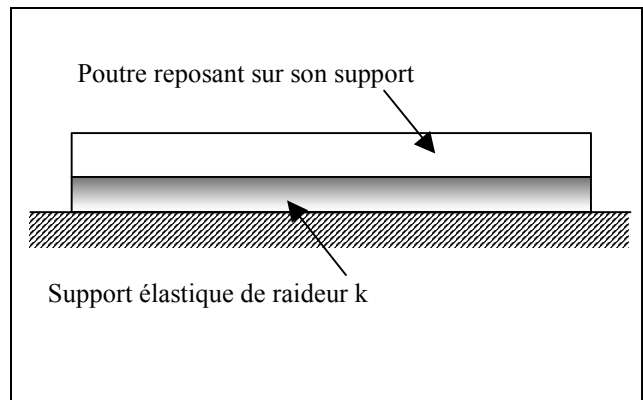


Figure 7 : Poutre reposant entièrement sur son support élastique.

Blay (1971) et Weaver (1990) ont étudié le cas d'une poutre reposant sur deux supports élastiques (Figure 8). Le modèle et la solution de Bernoulli ont été utilisés. Les fréquences naturelles ont été calculées pour des poutres appuyées à leurs extrémités avec des raideurs de supports identiques notés k. Quand la valeur de k croît de zéro à l'infini, on remarque que le barreau passe, de façon monotone, des conditions aux limites "libre-libre" aux conditions "appuis-appuis". Le même type d'évolution a été observé par Chui (1990).

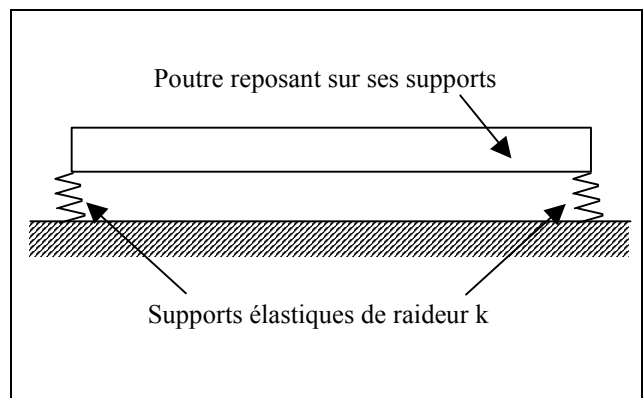


Figure 8 : Poutre reposant sur deux appuis élastiques placés à ses extrémités.

Les conditions "libre-libre" sont réalisées pour (Blay, et al., 1971) :

$$\text{Eq. 57 } \frac{kL^3}{2E_X I_{GZ}} < 1$$

De même, les conditions appuis rigides sont réalisées, du moins pour les six premières fréquences naturelles, quand (Blay, et al., 1971) :

$$\text{Eq. 58 } \frac{kL^3}{2E_X I_{GZ}} > 10^5$$

Le barreau a été placé de façon quelconque sur ses supports. Les calculs ont montré que les fréquences propres variaient peu d'une configuration à l'autre. L'expérience a confirmé ce fait et mis en évidence la non-influence du type de matériau constitutif du support (caoutchouc, acier à ressort, etc...). (Blay, et al., 1971).

1.1.7 Limites de validité des solutions de vibration en flexion

1.1.7.1 Influence de l'élancement transverse

Afin de négliger l'influence de l'élancement transverse sur les fréquences propres de vibration en flexion, nous retiendrons la condition suivante sur les caractéristiques géométriques de la section droite :

$$\frac{e}{h} \leq 2$$

Négliger l'influence de l'élancement transverse, sous cette condition, permet d'utiliser au mieux les autres modèles mécaniques qui n'en tiennent pas compte.

1.1.7.2 Solution de Bernoulli

Le modèle de Bernoulli et donc la solution qui en découle respectent toutes les hypothèses de la théorie des poutres en résistance des matériaux. On retiendra notamment la condition sur l'élancement :

$$\frac{L}{h} \geq 20$$

1.1.7.3 Solutions engendrées par le développement de Taylor-Lagrange

L'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange, pour développer la fonction $F(X, \alpha, \Gamma)$ au voisinage de la solution de Bernoulli, concerne les solutions de Rayleigh (1877), Goens (1931) et Bordonné (1989). Cette méthode de calcul revient à décrire la relation entre module d'élasticité apparent (solution de Bernoulli) et module d'élasticité vrai par une relation linéaire de α et Γ . Une telle linéarisation peut s'appliquer lorsque les paramètres α et Γ sont petits (élancement > 25), ou lorsque l'on se limite aux premiers modes de vibration (Bordonné, 1989).

Il est important de remarquer que l'équation aux fréquences (Eq. 38) n'est valable qu'à la condition $X\alpha\Gamma \leq 1$ (§ 1.1.6). Cette condition, exploitée avec la solution de Bordonné (1989) au paragraphe 1.1.6.3 - Figure 6, implique que l'utilisation des cinq premiers modes de vibration dans la solution issue de l'équation aux fréquences n'est correcte qu'en considérant un élancement L/h supérieur à dix.

De ces remarques, on déduit que le développement de l'équation aux fréquences par la formule de Taylor-Lagrange, concernant de manière indirecte la solution de Rayleigh (1877) et de manière directe les solutions de Goens (1931) et Bordonné (1989), n'est applicable aux cinq premiers modes de vibration que si l'élancement longitudinal est supérieur à dix.

1.1.7.4 Influence de l'erreur maximale sur le calcul du module d'élasticité et du module de cisaillement

On appelle erreur absolue sur la mesure d'une grandeur X , notée ΔX , la différence algébrique entre un résultat de mesurage X_{MESUREE} et sa valeur vraie.

$$\Delta X = X_{\text{MESUREE}} - X_{\text{valeur vraie}}$$

L'erreur absolue et l'erreur relative d'une mesure X fonction de n mesures s'obtiennent à partir d'un développement de Taylor-Lagrange au premier ordre :

$$\text{soit } X = f(y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow \Delta X \approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_i) \Delta y_i \right] \quad \text{et} \quad \frac{\Delta X}{X} \approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_i) \frac{\Delta y_i}{X} \right]$$

$$\text{Pour une somme: } \frac{\Delta(X + Y)}{(X + Y)} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y}$$

$$\text{Pour un produit: } \frac{\Delta(XY)}{(XY)} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

Pour un quotient: $\frac{\Delta(X/Y)}{(X/Y)} = \frac{\Delta X}{X} - \frac{\Delta Y}{Y}$

L'erreur absolue maximum et l'erreur relative maximum sur la mesure de la grandeur X s'écrivent sous les formes suivantes :

soit $X = f(y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow |\Delta X| \approx \sum_{i=1}^n \left[\left| \frac{\partial f}{\partial z_i} \right| (z_i) \left| \Delta z_i \right| \right]$ et $\left| \frac{\Delta X}{X} \right| \approx \sum_{i=1}^n \left[\left| \frac{\partial f}{\partial z_i} \right| (z_i) \left| \frac{\Delta z_i}{X} \right| \right]$

On rappelle la relation obtenue par Bordonné (1989), paragraphe 1.1.6.3 :

Eq. 51 $\frac{E_X}{\rho} - \frac{E_X}{KG_{XY}} \left[\alpha F_2(m) 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} \right] = 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} [1 + \alpha F_1(m)]$

Les valeurs de E_X et G_{XY} se calculent en effectuant une régression linéaire sur les couples (x_n, y_n) (Hearmon, 1958 ; 1966), tels que :

$\frac{E_X}{\rho} = \frac{E_X}{KG_{XY}} x_n + y_n$ avec $x_n = \alpha F_2(m) 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n}$ et $y_n = 4\pi^2 \frac{SL^4}{I_{Gz}} \frac{f_n^2}{X_n} [1 + \alpha F_1(m)]$

Cette relation linéaire peut être réécrite pour les deux premières fréquences :

Eq. 59 $\frac{E_X}{\rho} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$

Eq. 60 $\frac{E_X}{KG_{XY}} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$

Compte tenu de $y_n = \frac{(1 + \alpha F_{1n})}{\alpha F_{2n}} x_n$, On exprime Eq. 59 en fonction de α (facteur d'élanement) :

$\frac{E_X}{\rho} = \frac{x_1 x_2 g(\alpha)}{x_1 - x_2}$ avec $g(\alpha) = - \frac{(F_{22} - F_{21})\alpha^{-1} + F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}}{F_{22}F_{21}}$

En appliquant les règles de calcul d'erreur, il vient :

$\frac{\Delta(E_X / \rho)}{(E_X / \rho)} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} - \frac{\Delta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} + \frac{\Delta g}{g}$
 $\frac{\Delta(E_X / \rho)}{(E_X / \rho)} = \left(\frac{A}{A-1} \right) \frac{\Delta x_1}{x_1} - \left(\frac{1}{A-1} \right) \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta g}{g}$ avec $A = \frac{x_2}{x_1}$

On détermine :

$\frac{\Delta x}{x} = 2 \frac{\Delta f}{f} + 2 \frac{\Delta L}{L}$
 $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{1 + \alpha B} \right)$ avec $B = \frac{F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}}{F_{22} - F_{21}}$
 $\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 2 \frac{\Delta h}{h} - 2 \frac{\Delta L}{L}$

D'où : $\frac{\Delta(E_X / \rho)}{(E_X / \rho)} = 2 \left(1 + \frac{1}{1 + \alpha B} \right) \frac{\Delta L}{L} - 2 \left(\frac{1}{1 + \alpha B} \right) \frac{\Delta h}{h} + 2 \left(\frac{A}{A-1} \right) \frac{\Delta f_1}{f_1} - 2 \left(\frac{1}{A-1} \right) \frac{\Delta f_2}{f_2}$

Comme : $E_X = \frac{E_X}{\rho} \rho \Rightarrow \frac{\Delta E_X}{E_X} = \frac{\Delta(E_X / \rho)}{(E_X / \rho)} + \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta(E_X / \rho)}{(E_X / \rho)} + \frac{\Delta m}{m} - \frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta e}{e} - \frac{\Delta L}{L}$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{\Delta E_X}{E_X} = \frac{\Delta m}{m} - C \frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta e}{e} + C \frac{\Delta L}{L} + D \frac{\Delta f_1}{f_1} + (2-D) \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

$$\text{avec } A = \frac{F_{22} \left(1 + \alpha \left(F_{11} + \frac{E_X}{KG_{XY}} F_{21} \right) \right)}{F_{21} \left(1 + \alpha \left(F_{12} + \frac{E_X}{KG_{XY}} F_{22} \right) \right)} \quad B \approx 27,8C = \left(1 + \frac{2}{1 + \alpha B} \right) \quad D = 2 \left(\frac{A}{A-1} \right) \quad \alpha = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

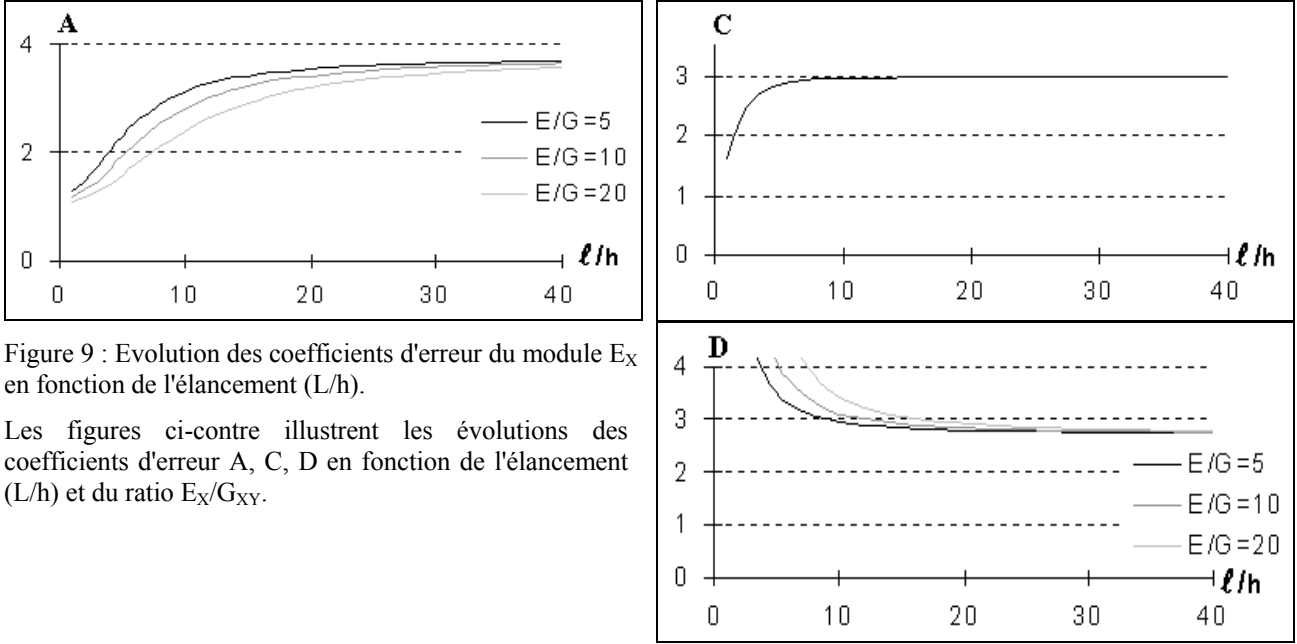


Figure 9 : Evolution des coefficients d'erreur du module E_X en fonction de l'élanement (L/h).

Les figures ci-contre illustrent les évolutions des coefficients d'erreur A, C, D en fonction de l'élanement (L/h) et du ratio E_X/G_{XY} .

On remarque que les évolutions (Figure 9) sont de type asymptotique et qu'elles permettent d'encadrer l'erreur relative. Pour un élanement variant de 10 à 40 et un ratio E_X/G_{XY} de 12 à 20 (plage du matériau bois), on peut raisonnablement prendre les valeurs $A=4$, $C=3$, $D=3$ et déterminer l'erreur relative maximum sur E_X :

$$\text{Eq. 61} \quad \frac{|\Delta E|}{E} = \frac{|\Delta m|}{m} + 3 \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta b|}{b} + 3 \frac{|\Delta \ell|}{\ell} + 3 \frac{|\Delta f_1|}{f_1} + \frac{|\Delta f_2|}{f_2}$$

Par contre, pour des élanements inférieurs à 10, le risque d'erreur lié aux fréquences est plus important en raison de la croissance rapide du coefficient D.

Considérons maintenant l'équation Eq. 60, on exprime l'erreur relative :

$$\frac{\Delta(E_X/G_{XY})}{(E_X/G_{XY})} = \frac{\Delta(y_2 - y_1)}{y_2 - y_1} - \frac{\Delta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{\Delta(E_X/G_{XY})}{(E_X/G_{XY})} = \left(\frac{1}{1-N} \right) \frac{\Delta y_1}{y_1} - \left(\frac{N}{1-N} \right) \frac{\Delta y_2}{y_2} + \left(\frac{1}{A-1} \right) \frac{\Delta x_1}{x_1} - \left(\frac{A}{A-1} \right) \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad \text{avec } A = \frac{x_2}{x_1} \text{ et } N = \frac{y_2}{y_1}$$

Compte tenu de $y_n = \frac{(1 + \alpha F_{1n})}{\alpha F_{2n}} x_n$, il vient :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta \alpha}{\alpha(1 + \alpha F_{1n})}$$

$$\text{D'où : } \frac{\Delta(E_X/G_{XY})}{(E_X/G_{XY})} = \underbrace{\left(\frac{1}{1-N} + \frac{1}{A-1} \right)}_F \frac{\Delta x_1}{x_1} - \underbrace{\left(\frac{N}{1-N} + \frac{A}{A-1} \right)}_{G=F} \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \underbrace{\left(\frac{N}{(1 + \alpha F_{12})(N-1)} - \frac{1}{(1 + \alpha F_{11})(1-N)} \right)}_H$$

On a de plus :

$$\frac{\Delta x}{x} = 2 \frac{\Delta f}{f} + 2 \frac{\Delta L}{L} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 2 \frac{\Delta h}{h} - 2 \frac{\Delta L}{L}$$

Donc :

$$\frac{\Delta(E_X / G_{XY})}{(E_X / G_{XY})} = 2H \frac{\Delta h}{h} - 2H \frac{\Delta L}{L} + 2F \frac{\Delta f_1}{f_1} - 2F \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

$$G_{XY} = \frac{E_X}{(E_X / G_{XY})} \Rightarrow \frac{\Delta G_{XY}}{G_{XY}} = \frac{\Delta E_X}{E_X} - \frac{\Delta(E_X / G_{XY})}{(E_X / G_{XY})}$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{\Delta G_{XY}}{G_{XY}} = \frac{\Delta m}{m} - J \frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta e}{e} + J \frac{\Delta L}{L} - K \frac{\Delta f_1}{f_1} + (2 + K) \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

$$\text{avec } J = 1 - \frac{2(F_{12} - F_{11})}{\frac{E_X}{KG_{XY}}(F_{22} - F_{21}) + \alpha(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21})} \quad K = \frac{2(1 + \alpha F_{12}) \left(1 + \alpha \left(F_{11} + \frac{E_X}{KG_{XY}} F_{21} \right) \right)}{\alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} (F_{22} - F_{21}) + \alpha(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21})} \quad \alpha = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

Les figures ci-dessous illustrent les évolutions des coefficients d'erreur J, K en fonction de l'élanement et du ratio E_X/G_{XY} .

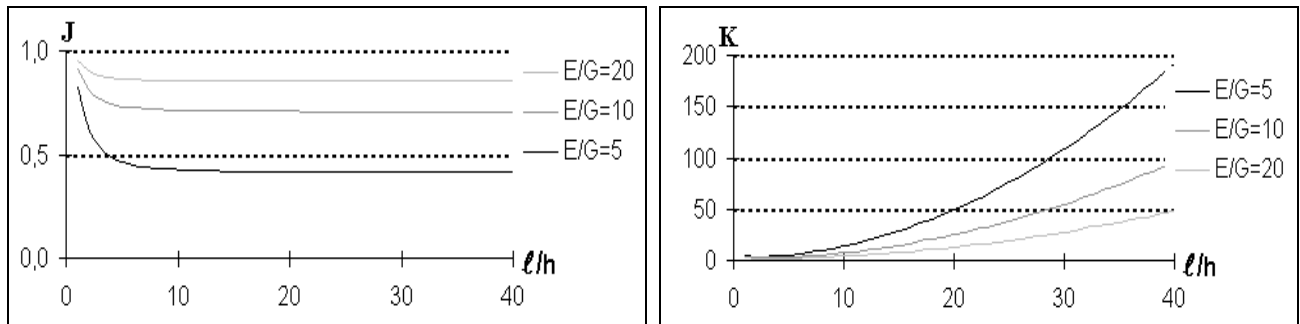


Figure 10 : Evolution des coefficients d'erreur du module G_{XY} en fonction de l'élanement (L/h).

L'évolution de J est asymptotique mais celle de K ne l'est pas (Figure 10). Le coefficient d'erreur K augmente fortement avec l'élanement et ce d'autant plus que le ratio des modules est petit. Par conséquent, plus l'élanement est grand, plus l'erreur relative sur G_{XY} risque d'augmenter. L'erreur relative maximum sur G_{XY} s'écrit :

$$\text{Eq. 62} \quad \frac{|\Delta G_{XY}|}{G_{XY}} = \frac{|\Delta m|}{m} + J \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta e|}{e} + J \frac{|\Delta L|}{L} + K \frac{|\Delta f_1|}{f_1} + (2 + K) \frac{|\Delta f_2|}{f_2}$$

L'exemple étudié est une éprouvette d'essai avec des caractéristiques moyennes de type "feuillu standard" (Guitard, 1987) à une humidité de 12% :

- $\rho=0,65 \text{ g/cm}^3$, $E_L=14400 \text{ MPa}$, $G_{TL}=971 \text{ MPa}$, $E_L/G_{TL}=14,8$
- $h=20\text{mm}$, $e=20\text{mm}$, $L=360\text{mm}$

A partir des instruments utilisés au laboratoire, on peut évaluer alors les paramètres suivants:

- * pour la masse: $m = 94 \pm 0,1 \text{ (g)} \Rightarrow \frac{|\Delta m|}{m} = 0,1\%$
- * la hauteur (pied à coulisse) : $h = 20 \pm 0,1 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{|\Delta h|}{h} = \frac{0,1}{20} = 0,5\%$
- * la largeur (pied à coulisse) : $e = 20 \pm 0,1 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{|\Delta e|}{e} = \frac{0,1}{20} = 0,5\%$
- * la longueur (règle) : $L = 360 \pm 1 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{|\Delta L|}{L} = \frac{1}{360} = 0,3\%$

Les fréquences propres sont déterminées par une transformée de Fourier discrète après numérisation et la résolution r est fonction de f_s la largeur fréquentielle de mesure (largeur spectrale) et N le nombre de points de mesure. L'erreur absolue Δf peut être majorée par l'erreur absolue expérimentale (1Hz) plus la moitié de la résolution:

$$\frac{|\Delta f_1|}{f_1} = \frac{\Delta f_{\text{exp}} + 0,5r}{f_1} \quad \frac{|\Delta f_2|}{f_2} = \frac{\Delta f_{\text{exp}} + 0,5r}{f_2}$$

La largeur spectrale f_s permet de sélectionner les deux premières fréquences, soit $f_s=f_2$ avec 4096 points de mesure. Compte tenu des valeurs fixées pour E_X et G_{XY} , on détermine f_1 et f_2 :

$$f_1=722\text{Hz}, f_2=1849\text{Hz} \text{ et } r = \frac{2,56f_2}{N} = 1,16\text{Hz} \Rightarrow \frac{|\Delta f_1|}{f_1} = 0,22\% \quad \frac{|\Delta f_2|}{f_2} = 0,09\%$$

Finalement, pour E_X :

$$\frac{|\Delta E_L|}{E_L} = \underbrace{0,1}_m + \underbrace{3 \times 0,5}_h + \underbrace{0,5}_e + \underbrace{3 \times 0,3}_L + \underbrace{3 \times 0,22}_{f_1} + \underbrace{0,09}_{f_2} \Rightarrow \frac{|\Delta E_L|}{E_L} \approx 3,6\%$$

Pour G_{XY} , il faut évaluer les coefficients J et K . Le ratio E_X/G_{XY} est voisin de 15 et en se référant à la Figure 10, on obtient: $J \approx 0,8$ et $K \approx 14$

$$\frac{|\Delta G_{TL}|}{G_{TL}} = \underbrace{0,1}_m + \underbrace{0,8 \times 0,5}_h + \underbrace{0,5}_e + \underbrace{0,8 \times 0,3}_L + \underbrace{14 \times 0,16}_{f_1} + \underbrace{16 \times 0,06}_{f_2} \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TL}|}{G_{TL}} \approx 5,7\%$$

En reprenant le protocole précédent et les lois expérimentales de Guitard (1987), on peut simuler les écarts relatifs sur les mesures de E_X et G_{XY} en fonction de l'éclatement pour une plage de densité à 12% d'humidité.

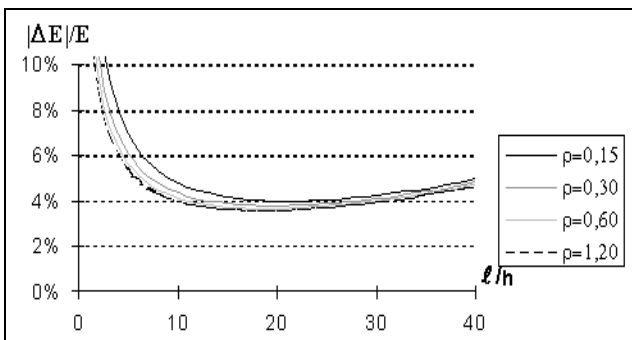


Figure 11 : Erreurs relatives maximum du module E_X en fonction de l'éclatement L/h .

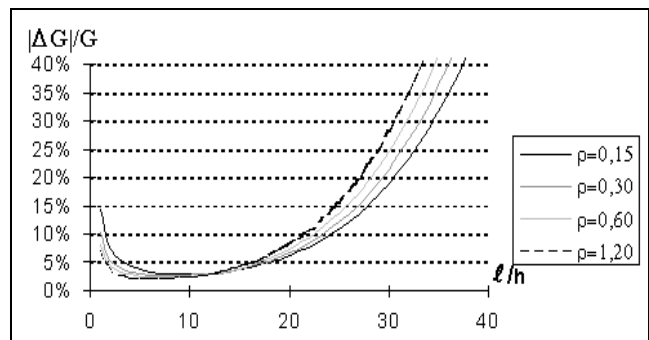


Figure 12 : Erreurs relatives maximum du module G_{XY} en fonction de l'éclatement L/h .

On notera que pour un éclatement L/h de 10 à 20, l'erreur relative maximum sur E_X reste inférieure à 5% et celle de G_{XY} à 8% (Figure 11 et Figure 12). Au delà de 20, l'éclatement influe surtout sur l'erreur de mesure de G_{XY} . La croissance rapide du coefficient d'erreur K (Figure 10) en est la cause principale et ce d'autant plus que le ratio des modules est petit. Sinclair (1987) et Kubojima (1996) ont obtenu des résultats similaires et mentionnent que les valeurs calculées du module G_{XY} sont acceptables en utilisant les premiers modes quand l'éclatement longitudinal est faible ; mais l'erreur augmente quand l'éclatement devient grand car la contribution du cisaillement dans le mouvement de vibration est faible (Sinclair et Farshad, 1987 ; Kubojima, et al., 1996). Il est important de remarquer que le fait d'utiliser une régression linéaire dans le calcul des modules E_X et G_{XY} (§ 1.1.6.3) n'est pas pris en compte dans le calcul d'erreur. Intuitivement, plus le nombre de fréquences utilisé sera élevé et meilleur sera l'ajustement de la régression linéaire (attention, pour un éclatement de 10, le nombre maximum de fréquences utilisable est de 5, paragraphe 1.1.7.3). Cette dernière remarque rejoint Kubojima (1997) qui mentionne que lorsque le nombre de fréquences utilisées pour le calcul est faible, les valeurs du module G_{XY} obtenues sont peu exactes.

Il est donc possible d'évaluer de manière analytique l'erreur maximale de mesure du module d'élasticité et du module de cisaillement en utilisant la solution de Bordonné (Eq. 51) pour les deux premières fréquences de vibration. On constate que plus l'éclatement est grand et plus l'erreur relative sur le module de cisaillement augmente. Au contraire, plus l'éclatement est faible et plus l'erreur relative sur le module d'élasticité est élevée. Ces remarques permettent de trouver l'intervalle de variation de l'éclatement pour lequel les erreurs sur le module d'élasticité et le module de

cisaillement restent minimales. Pour un élancement compris entre 10 et 20, l'erreur relative sur le module d'élasticité reste inférieure à 5% et celle du module de cisaillement à 8% (valeurs calculées pour de petites éprouvettes sans défauts de 20x20x360 mm avec une densité variant de 0,15 g/cm³ à 1,20 g/cm³).

Synthèse des limites de validité

Le domaine d'étude retenu concerne les poutres ayant les caractéristiques géométriques suivantes :

Elancement transverse $\frac{e}{h} \leq 2$
 Elancement $\frac{L}{h} \in [10;20]$

Nous supposons applicable la solution de Bernoulli dans l'intervalle précité.

Seules les trois premières fréquences de vibration de flexion sont utilisées pour calculer le module d'élasticité et le module de cisaillement par les solutions de Rayleigh, Bordonné et Goens.

1.1.8 Différence entre les solutions de vibration en flexion dans le domaine d'étude

1.1.8.1 Solution de Bordonné

L'écart relatif absolu entre X_B et X_{vrai} est très faible (de l'ordre de 1% pour un élancement de 10 en considérant la deuxième fréquence propre, voir Tableau 2). Cette conclusion s'applique toutefois aux cinq premières fréquences. La solution de Bordonné sous estime légèrement X_{vrai}. (Bordonné, 1989).

E _X /KG _{XY}	L/h	10	15	20
15		-1,2	-0,4	-0,2
25		-1,0	-0,4	-0,2

Tableau 2 : Ecart relatif entre X_B et X_{vrai} pour le deuxième mode de vibration (Bordonné, 1989).

1.1.8.2 Solution de Goens

Le terme complémentaire introduit par Goens dans l'équation (Eq. 49) affecte peu l'approximation au premier ordre. L'écart relatif entre X_G et X_{vrai} (Eq. 63) étant presque toujours inférieur à 1%, le gain éventuel apporté par cette solution est peu significatif (Tableau 3).

$$\text{Eq. 63 } \frac{X_{Bn} - X_{Gn}}{X_{Bn}} = 1 - \left[1 + \frac{X_n \alpha^2}{1 + \alpha F_1(m) + \alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m)} \frac{E_X}{KG_{XY}} \right]^{-1}$$

Cette constatation est valable pour les cinq premiers modes de vibration, pour les élancements compris entre 10 et 100 et pour un ratio de module E/KG inférieur ou égal à 40. (Bordonné, 1989).

E _X /KG _{XY}	L/h	10	15	20
15		1,2	0,2	0,1
25		2,3	0,5	0,1

Tableau 3 : Ecart relatif entre X_G et X_{vrai} pour le deuxième mode de vibration (Bordonné, 1989).

1.1.8.3 Influence des supports élastiques

Première approche : on utilise le résultat obtenu par l'étude d'une poutre reposant entièrement sur un support élastique.

L'influence des supports élastiques est étudiée par rapport à la solution de Bordonné qui est la plus efficace. On utilise l'équation (Eq. 54) en omettant le terme de Goens. L'erreur relative s'écrit alors :

$$\text{Eq. 64 } \frac{X_{Bn} - X_{An}}{X_{Bn}} = 1 - \left[1 - \frac{\frac{k}{\rho S \omega^2}}{1 + \alpha F_1(m) + \alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m)} \right]^{-1}$$

A titre d'exemple, on considère une éprouvette de dimension 20x20x400 mm, de faible densité 0,4g/cm³, reposant sur deux élastiques de dimension 1,22x7,88x113 mm (Figure 13).

Le module d'élasticité du support a été préalablement mesuré et est de 0,185 Mpa. La raideur de chaque support se calcule comme suit :

$$k = \frac{E \times Surface}{Longueur}$$

$$k = \frac{0,185 \cdot 10^6 \times (1,22 \times 4) \cdot 10^{-3} \times 7,88 \cdot 10^{-3}}{(113 / 2) \cdot 10^{-3}} = 125,91 \text{ N/m}$$

L'utilisation de l'équation (Eq. 64) suppose que la poutre repose entièrement sur un support élastique. Pour déterminer l'influence du support sur le calcul des paramètres 'X' et 'f', il est donc nécessaire de prendre une raideur linéique déduite de 'k' :

$$\bar{k} = \frac{2 \times 125,91}{400 \cdot 10^{-3}} = 629,55 \text{ N/m}^2$$

La pulsation propre 'ω' dans l'équation (Eq. 64) est estimée en utilisant le modèle de Bernoulli (Eq. 43). On obtient alors les résultats suivants :

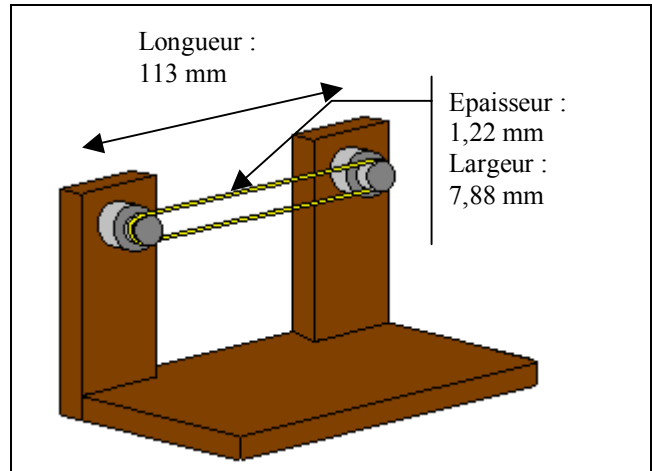


Figure 13 : Support élastique utilisé pour des essais dynamiques.

Rang n	Ecart relatif (%) sur 'X _n '	Ecart relatif (%) sur 'f _n '
1	-0,0261	-0,0130
2	-0,0030	-0,0015
3	-0,0007	-0,0003

Tableau 4 : Influence des supports élastiques sur la solution de Bordonné pour les trois premiers modes.

Les résultats obtenus montrent que l'influence des supports élastiques est négligeable sur le calcul des fréquences de vibration, ou sur celui du module d'élasticité et du module de cisaillement. Cette conclusion est valable pour des poutres de forte densité (1,2 g/cm³), et/ou de faible élanement (L/h=10).

Deuxième approche : on utilise le résultat obtenu par l'étude d'une poutre reposant sur deux appuis élastiques placés à ses extrémités.

Les conditions "libre-libre" sont réalisées pour (Blay, et al., 1971) :

$$\text{Eq.33 } \frac{kL^3}{2E_X I_{GZ}} < 1$$

En utilisant les mêmes données numériques que ci-dessus, on obtient : $\frac{kL^3}{2E_X I_{GZ}} \approx 0,035$.

Les résultats obtenus montrent donc que l'influence des supports élastiques est négligeable sur le calcul des fréquences de vibration, ou sur celui du module d'élasticité et du module de cisaillement.

1.1.8.4 Solutions de Rayleigh et de Bernoulli

La pertinence des solutions de Rayleigh et de Bernoulli est étudiée par rapport à la solution de Bordonné. Les erreurs relatives s'écrivent :

$$\text{Eq. 65 } \frac{X_{Bn} - X_{Rn}}{X_{Bn}} = -\frac{\alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m)}{1 + \alpha F_1(m)} \text{ et Eq. 66 } \frac{X_{Bn} - X_n}{X_{Bn}} = -\alpha \left(F_1(m) + \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m) \right)$$

E_x/KG_{xy}	L/h	10			15			20		
		Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)
15		1	-15,2	-7,6	1	-6,9	-3,5	1	-3,9	-2,0
		2	-54,4	-27,2	2	-25,3	-12,7	2	-14,5	-7,2
		3	-110,2	-55,1	3	-53,0	-26,5	3	-30,7	-15,3
		Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)
25		1	-24,6	-12,3	1	-11,2	-5,6	1	-6,3	-3,2
		2	-87,7	-43,9	2	-40,9	-20,4	2	-23,4	-11,7
		3	-177,8	-88,9	3	-85,4	-42,7	3	-49,5	-24,7
		Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)

Tableau 5 : Ecart relatif entre les solutions de Rayleigh et de Bordonné pour les trois premiers modes de vibration.

E_x/KG_{xy}	L/h	10			15			20		
		Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)
15		1	-20,0	-9,5	1	-8,9	-4,3	1	-5,0	-2,5
		2	-68,4	-29,8	2	-30,4	-14,2	2	-17,1	-8,2
		3	-143,0	-55,9	3	-63,5	-27,9	3	-35,7	-16,5
		Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)
25		1	-29,7	-13,9	1	-13,2	-6,4	1	-7,4	-3,6
		2	-104,8	-43,1	2	-46,6	-21,1	2	-26,2	-12,3
		3	-221,1	-79,2	3	-98,3	-40,8	3	-55,3	-24,6
		Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)	Mode	$\Delta 'X'$ (%)	$\Delta 'f'$ (%)

Tableau 6 : Ecart relatif entre les solutions de Bernoulli et de Bordonné pour les trois premiers modes de vibration.

Les écarts engendrés par les solutions de Rayleigh et de Bernoulli (Tableau 5 et Tableau 6) sont très proches. Les fréquences calculées à partir de l'équation de Bernoulli diffèrent par excès des valeurs exactes, l'écart augmentent avec l'ordre du mode (Blay, et al., 1971 ; Chui et Smith, 1990). L'hypothèse de Bernoulli d'un grand élanement fait qu'il est impossible pratiquement de déduire une valeur unique du module d'élasticité. Les modules 'apparents' calculés décroissent lorsque la fréquence augmente (Bordonné, 1989). Le modèle de Bernoulli a l'avantage d'être le plus simple ; cependant, tenter de l'appliquer à des poutres dont l'élanement est inférieur à 20 conduit à des écarts importants, même en se limitant aux deux premiers modes de vibration (Hu et Hsu, 1996).

1.1.9 *Bilan des modèles classiques en vibration de flexion*

L'étude des vibrations de flexion d'une poutre homogène est présentée dans ce chapitre. Il n'existe pas de solution exacte qui donne de manière analytique les fréquences de vibration en tenant compte des principaux paramètres significatifs comme l'élanement, l'élanement transverse de la section droite, et le cisaillement. Parmi les modèles et solutions envisagés, la plus fidèle et l'une des plus aboutie est la solution de Bordonné (1989). Le modèle le plus simple, donnant des résultats acceptables à condition d'être correctement employé, est celui de Bernoulli (1748).

On retiendra les expressions pertinentes du mouvement :

1. Modèle et solution de Bernoulli

$$v(x,t) = [C_1 \cos(a_n x) + C_2 \cosh(a_n x) + C_3 \sin(a_n x) + C_4 \sinh(a_n x)] \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{Eq. 40})$$

$$a_n = \frac{1}{L} \sqrt[4]{X_n} \quad \text{et} \quad X_n = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{Eq. 42})$$

Avec
$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4}} \quad (\text{Eq. 43})$$

2. Modèle de Timoshenko et solution de Bordonné

Eq. 67
$$v(x,t) = [C_1 \cos(d_1 x) + C_2 \cosh(d_2 x) + C_3 \sin(d_1 x) + C_4 \sinh(d_2 x)] \cos(\omega t + \varphi)$$

$$d_1 = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{X(\alpha + \Gamma)}{2} + \sqrt{\frac{X^2(\alpha - \Gamma)^2}{4} + X}} \quad \alpha = \frac{I_{Gz}}{SL^2}$$

$$d_2 = \frac{1}{L} \sqrt{-\frac{X(\alpha + \Gamma)}{2} + \sqrt{\frac{X^2(\alpha - \Gamma)^2}{4} + X}} \quad \text{et} \quad X = X_{Bn} = \frac{\omega^2 L^4 S \rho}{E_X I_{Gz}}$$

$$\Gamma = \frac{E_X I_{Gz}}{KSG_{XY} L^2}$$

$$\frac{1}{X_{Bn}} = \frac{1}{X_n} [1 + \alpha F_1(m) + \Gamma F_2(m)] \quad (\text{Eq. 49})$$

$$F_1(m) = \theta^2(m) + 6\theta(m) \quad \text{et} \quad F_2(m) = \theta^2(m) - 2\theta(m)$$

$$\theta(m) = m \frac{\tan(m) \tanh(m)}{\tan(m) - \tanh(m)} \quad \text{et} \quad m = \sqrt[4]{X_n} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

Avec
$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4 \left[1 + \alpha F_1(m) + \alpha \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m) \right]}} \quad (\text{Eq. 50})$$

1.2 Inclusion d'un élément faible, dynamique des poutres singulières

L'objet de ce paragraphe est de décrire le comportement d'une poutre de grand élançement, comportant un ou plusieurs éléments faibles, en vibration de compression ou de flexion. Le modèle de Bernoulli est utilisé pour décrire le comportement dynamique d'une poutre homogène.

1.2.1 Notion d'élément faible

Un élément faible représente mécaniquement une ou plusieurs hétérogénéités de la structure du matériau. Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

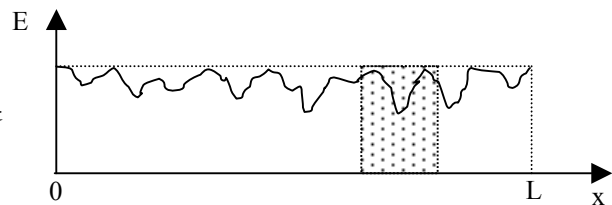
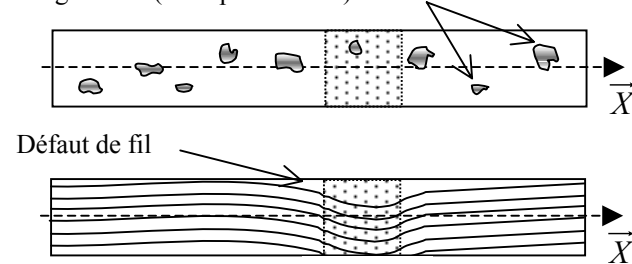
1. Un élément faible peut provoquer la rupture du matériau.
2. La matière reste continue (dans un premier temps) ; un élément faible ne peut donc être un vide.
3. Un élément faible peut ne pas être unique.
4. Il est défini physiquement par deux paramètres de position et par son module d'élasticité.

1.2.2 L'élément faible en pratique

De par sa définition, un élément faible n'est pas un défaut réel de la poutre. Cet élément représente un ou plusieurs défauts et peut ne pas être unique. Trois cas de figure permettent aisément de clarifier la notion d'élément faible :

1. Dispersion diffuse des irrégularités réelles

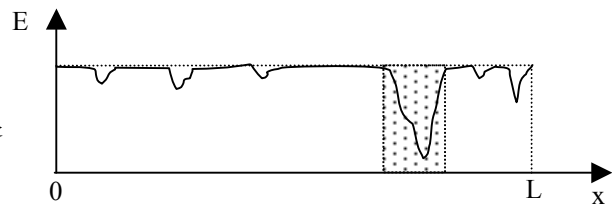
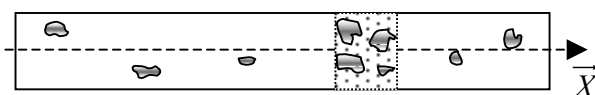
Irrégularités (exemple : nœuds)



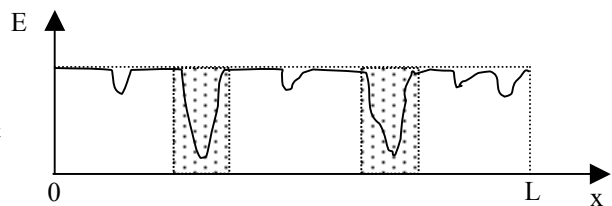
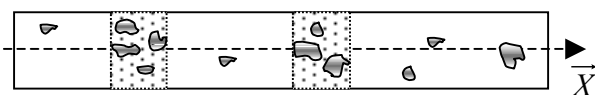
: Élément faible

Dans ce cas l'élément faible ne traduit pas la position réelle des irrégularités. Il exprime une analogie mécanique de comportement.

2. Élément faible unique localisé



3. Éléments faibles multiples localisés



Dans les cas 2 et 3, l'analogie mécanique se rapproche plus de la réalité. La position de chaque élément faible n'est pas aussi délicate à déterminer que dans le cas 1 où la dispersion est diffuse.

On retiendra la constatation qui s'impose lors de l'étude des trois cas précités :

A propos de la nature d'un élément faible :

Un élément faible correspond à une analogie mécanique de comportement. Il permet de décrire simplement le comportement dynamique des poutres singulières.

1.2.3 Définition géométrique

Considérons une poutre prismatique pleine (Figure 14), limitée par les sections droites extrêmes 'S₀' et 'S₁', et rapportée au repère principal orthonormé {G₀, \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} } de 'S₀'. On note 'S' la section droite courante, d'abscisse 'x' et de centre de gravité 'G'. La ligne neutre [G₀, G₁] est confondue avec l'axe (OX). La longueur totale de la poutre est notée 'L'. Soit 'h' la hauteur et 'e' l'épaisseur des sections droites.

L'élément faible est repéré par la position des deux interfaces (l₁, l₂). On note le module d'élasticité longitudinal selon l'axe (OX) de la structure saine 'E' et le module de l'élément faible 'E₀'.

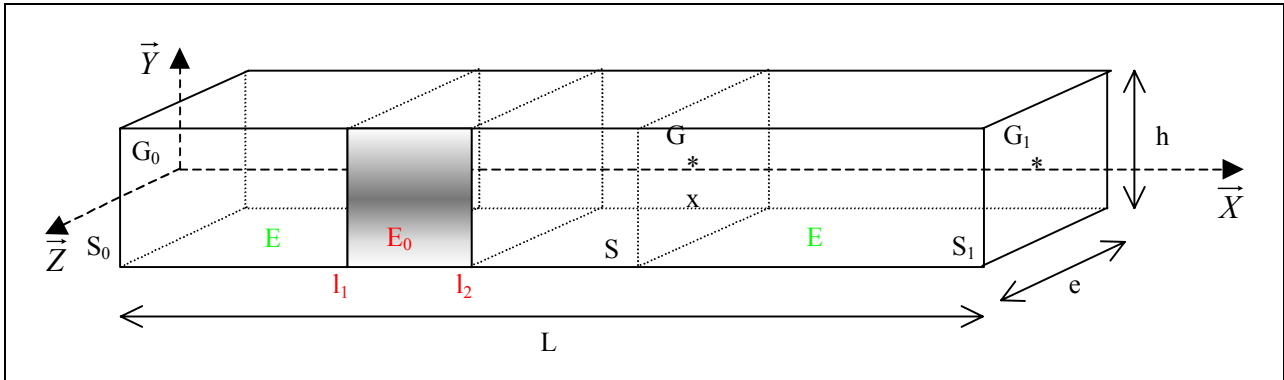


Figure 14 : Schéma d'une poutre comportant une singularité, définition géométrique et caractérisation physique.

1.2.4 Préambule

Soit W(x,t) une fonction de déplacement, qui peut se décomposer comme suit : $W(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$. Cette fonction traduit le déplacement des particules dans un milieu homogène.

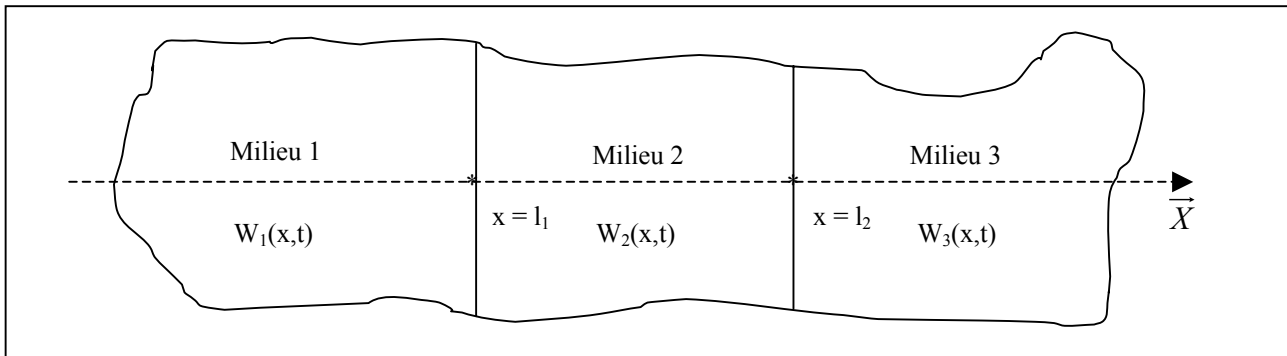


Figure 15 : Propagation d'une onde à travers une double interface, expression des fonctions de déplacement.

On suppose que dans un milieu hétérogène, composé de trois milieux homogènes (Figure 15), la fonction de déplacement puisse s'écrire selon le milieu considéré : W₁(x,t), W₂(x,t) et W₃(x,t). Chaque fonction W_i(x,t) caractérise le déplacement des particules dans le milieu homogène 'i'.

La continuité du déplacement au niveau de l'interface entre les milieux 1 et 2 impose :

$$W_1(l_1, t) = W_2(l_1, t) \Leftrightarrow f_1(l_1) \cos(\omega t + \varphi_1) = f_2(l_1) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

a) Si $f_1(l_1) = 0$, alors $f_2(l_1) = 0$. Il n'y a aucune condition sur les phases φ_1 et φ_2 , on peut donc prendre $\varphi_1 = \varphi_2$. On a de plus $f_1(l_1) = f_2(l_1)$.

b) Si $f_1(l_1) \neq 0$, alors $f_2(l_1) \neq 0$. La condition de continuité s'écrit :

$$W_1(l_1, t) = W_2(l_1, t) \Leftrightarrow \cos(\omega t + \varphi_2) = \frac{f_1(l_1)}{f_2(l_1)} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

Par commodité, on note : $\frac{f_1(l_1)}{f_2(l_1)} = C_1$, terme constant.

$$W_1(l_1, t) = W_2(l_1, t) \Leftrightarrow \cos(\omega t) [\cos(\varphi_2) - C_1 \cos(\varphi_1)] - \sin(\omega t) [\sin(\varphi_2) - C_1 \sin(\varphi_1)] = 0$$

L'équation de condition devant être vérifiée pour toute valeur de 't', il vient :

$$\begin{aligned}
 W_1(l_1, t) = W_2(l_1, t) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\varphi_2) - C_1 \cos(\varphi_1) = 0 \\ \sin(\varphi_2) - C_1 \sin(\varphi_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) - \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_1) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) \\ \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi, n \in \mathbb{N} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi, n \in \mathbb{N} \\ C_1 \cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_1 + n\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi, n \in \mathbb{N} \\ C_1 = \pm 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le raisonnement au niveau de l'interface entre les milieux 2 et 3 est analogue. On retiendra finalement les résultats suivant :

La continuité du déplacement au niveau d'une double interface impose :

$$\text{Eq. 68 } W_1(l_1, t) = W_2(l_1, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_2 = \varphi_1 + n\pi, n \in \mathbb{N} \\ f_2(l_1) = \pm f_1(l_1) \end{cases}$$

$$\text{Eq. 69 } W_2(l_2, t) = W_3(l_2, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_3 = \varphi_2 + n\pi, n \in \mathbb{N} \\ f_3(l_2) = \pm f_2(l_2) \end{cases}$$

Lors de l'étude de la continuité des fonctions de déplacement au niveau d'une double interface :

Il est nécessaire de prendre en compte les quatre cas ci-dessous, en vibration de compression comme en vibration de flexion.

$$(1) \begin{cases} f_1(l_1) = f_2(l_1) \\ f_3(l_2) = f_2(l_2) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} f_1(l_1) = f_2(l_1) \\ f_3(l_2) = -f_2(l_2) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} f_1(l_1) = -f_2(l_1) \\ f_3(l_2) = f_2(l_2) \end{cases} \quad (4) \begin{cases} f_1(l_1) = -f_2(l_1) \\ f_3(l_2) = -f_2(l_2) \end{cases}$$

1.2.5 Sollicitation en compression

1.2.5.1 Equations du mouvement

On considère une poutre prismatique pleine définie par la Figure 14. Dans les trois milieux ou morceaux de poutre, on peut écrire :

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

L'effort normal s'exprime dans les milieux 1, 2 et 3 :

$$N_1 = ES \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad N_2 = E_0 S \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{et} \quad N_3 = ES \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

Les mouvements associés s'écrivent : $u_i(x, t) = f_i(x) \cos(\omega t + \varphi_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\text{Avec } \begin{cases} f_1(x) = C_{11} \cos(ax) + C_{12} \sin(ax) \\ f_2(x) = C_{21} \cos(a_0 x) + C_{22} \sin(a_0 x) \\ f_3(x) = C_{31} \cos(ax) + C_{32} \sin(ax) \end{cases}$$

1.2.5.2 continuité des grandeurs physiques

En utilisant les résultats du paragraphe 1.2.4, la continuité du déplacement et la continuité de l'effort normal aux interfaces imposent les conditions suivantes.

➤ Le déplacement est continu à tout moment si et seulement si :

$$\begin{aligned}
 f_1(l_1) &= \pm f_2(l_1) \\
 f_2(l_2) &= \pm f_3(l_2)
 \end{aligned}$$

➤ L'effort normal est continu à tout moment si et seulement si :

$$N_1(l_1, t) = N_2(l_1, t) \Leftrightarrow E \frac{\partial f_1}{\partial x}(l_1) = \pm E_0 \frac{\partial f_2}{\partial x}(l_1)$$

$$N_2(l_2, t) = N_3(l_2, t) \Leftrightarrow E_0 \frac{\partial f_2}{\partial x}(l_2) = \pm E \frac{\partial f_3}{\partial x}(l_2)$$

Ces quatre équations vont permettre d'exprimer sous forme matricielle la continuité aux interfaces. Pour cela on définit les vecteurs et variables intermédiaires suivantes.

➤ Vecteurs constantes des fonctions spatiales :

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} \text{ et } C_3 = \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \end{bmatrix}$$

➤ Variables intermédiaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(al_1) = m_1 \\ \sin(al_1) = n_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos(al_2) = m_2 \\ \sin(al_2) = n_2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos(a_0l_1) = m_3 \\ \sin(a_0l_1) = n_3 \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \cos(a_0l_2) = m_4 \\ \sin(a_0l_2) = n_4 \end{array} \right\}$$

Les matrices de continuité ont toutes la même structure. Elles sont notées $M(i,j)$ avec $i \in \{1,2,3,4\}$ et $j \in \{-, 0\}$.

$$M(i, E_j a_j) = \begin{bmatrix} m_i & n_i \\ -E_j a_j n_i & E_j a_j m_i \end{bmatrix}.$$

Ces matrices sont toujours inversibles :

$$M^{-1}(i, E_j a_j) = \begin{bmatrix} m_i & -\frac{n_i}{E_j a_j} \\ n_i & \frac{m_i}{E_j a_j} \end{bmatrix}$$

On obtient finalement les deux relations de continuité suivantes :

$$\text{Eq. 70} \quad \left\{ \begin{array}{l} M(1, Ea).C_1 = \pm M(3, E_0 a_0).C_2 \\ M(4, E_0 a_0).C_2 = \pm M(2, Ea).C_3 \end{array} \right.$$

L'équation (Eq. 70) permet de trouver la matrice de passage du milieu 1 au milieu 3, notée P.

$$\text{Eq. 71} \quad \begin{array}{l} P = M^{-1}(2, Ea).M(4, E_0 a_0).M^{-1}(3, E_0 a_0).M(1, Ea) \\ C_3 = \pm P.C_1 \end{array}$$

1.2.5.3 conditions aux limites

A chaque extrémité de la poutre l'effort normal est nul quelque soit la valeur de 't'. Ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(0, t) = 0 \\ N_3(L, t) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} C_1 = 0 \\ \begin{bmatrix} -n_x & m_x \end{bmatrix} C_3 = 0 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \cos(aL) = m_x \\ \sin(aL) = n_x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} C_1 = 0 \\ \begin{bmatrix} -n_x & m_x \end{bmatrix} C_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_1.C_1 = 0 \\ B_3.C_3 = 0 \end{array} \right.$$

En utilisant l'équation (Eq. 71), on obtient un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1.C_1 = 0 \\ \pm B_3.P.C_1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \pm B_3.P \end{array} \right].C_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_3.P \end{array} \right].C_1 = 0$$

Il est important de remarquer que les quatre cas distincts à étudier selon le paragraphe 1.2.4 sont identiques quant à la recherche des modes propres de vibration, le système obtenu ne comportant plus d'ambiguïté '±'.

Ce système a une infinité de solutions correspondant au mode propre de vibration et à ses harmoniques associées. Le déterminant $\Delta(f)$ doit donc s'annuler. l'ensemble des f_n tels que $\Delta(f_n)=0$ est l'ensemble des fréquences propres de la poutre.

$$\text{Eq. 72} \quad \Delta(f_n) = \left| \begin{array}{c} B_1 \\ B_3.P \end{array} \right| = 0, n \in \mathbb{N}^*$$

1.2.5.4 Expression de l'équation aux fréquences

L'équation aux fréquences est définie par l'équation (Eq. 72). A ce stade il est tout à fait possible de calculer numériquement les fréquences de vibration de la poutre par un programme informatique. Mais il est encore possible, car le degré de complexité est faible, de trouver une expression analytique de l'équation aux fréquences. Le calcul est épargné au lecteur.

On retiendra l'expression de l'équation aux fréquences en vibration de compression :

Soit f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des fréquences propres de la poutre.

$$\Delta(f_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Eq. 73} \quad \left[2\sqrt{EE_0} \cos\{a_0(l_2 - l_1)\} \sin[a(l_2 - l_1)] - \sin\{a_0(l_2 - l_1)\} [\cos\{a(l_2 - l_1)\}(E_0 + E) + \cos\{a(l_2 + l_1)\}(E_0 - E)] \right] \cos(aL) -$$

$$\left[2\sqrt{EE_0} \cos\{a_0(l_2 - l_1)\} \cos\{a(l_2 - l_1)\} - \sin\{a_0(l_2 - l_1)\} [\sin\{a(l_2 - l_1)\}(E_0 - E) + \sin\{a(l_2 + l_1)\}(E_0 + E)] \right] \sin(aL) = 0$$

Les valeurs des fréquences de vibration, vérifiant l'équation (Eq. 73), ne sont pas triviales. Un programme informatique permet de les calculer en recherchant les valeurs d'annulation de la fonction $\Delta(f)$ au voisinage des fréquences de compression d'une poutre homogène (Eq. 12).

1.2.6 Simulation numérique en compression

L'utilisation du programme informatique permet de tracer la fonction (Figure 16) dite 'de compression' $\Delta(f)$ pour une poutre de dimensions 20x20x400 mm, de densité 0,7 g/cm³ et de module d'élasticité sain 15542 N/mm². L'élément faible est caractérisé par sa position ($l_1 = 180$ mm, $l_2 = 200$ mm) et par son module pris égal à 1/10 du module sain.

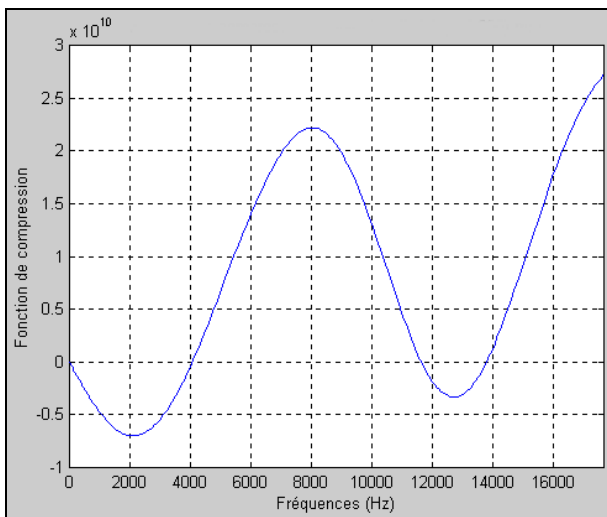


Figure 16 : Allure de la fonction de compression $\Delta(f)$.

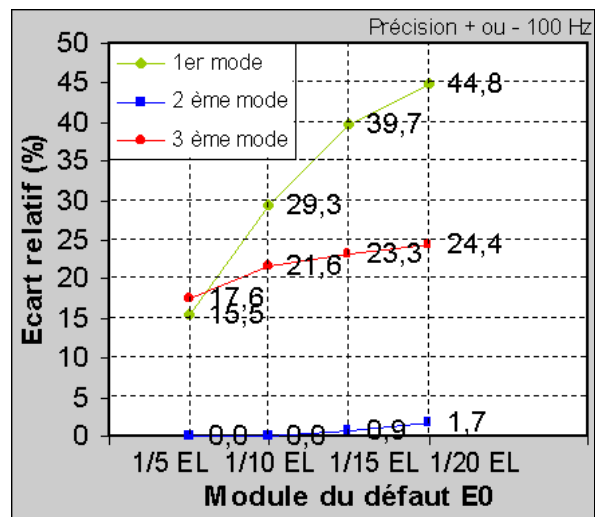
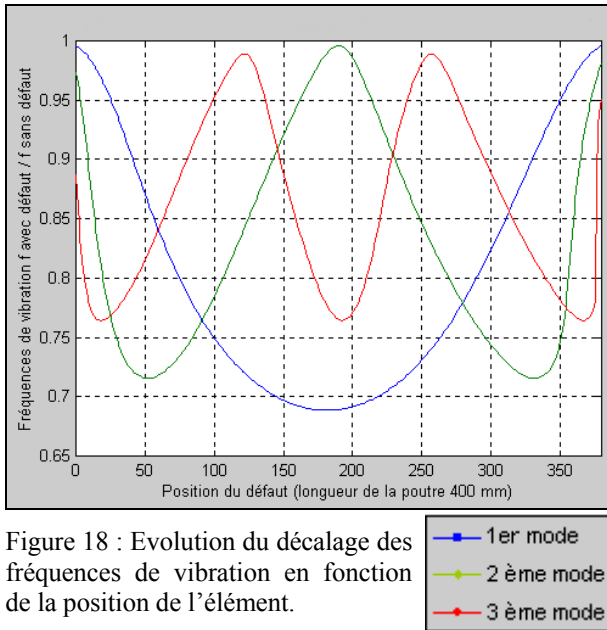


Figure 17 : Ecart entre les fréquences d'une poutre saine et d'une poutre avec élément faible ('défaut') en fonction du module d'élasticité de l'élément E_0 .

Les fréquences propres de vibration annulent la fonction de compression. Dans le cas de la Figure 16, les trois premières fréquences sont égales à 4056 Hz, 11634 Hz et 13786 Hz. La recherche des valeurs d'annulation de $\Delta(f)$ au voisinage des fréquences de compression d'une poutre homogène est effectuée de manière automatique par une procédure Matlab, le résultat affiche les trois premières fréquences de la poutre saine, les trois premières fréquences avec élément faible et le ratio fréquence avec 'défaut' sur fréquence de la poutre saine associée.



Il est possible de faire varier la valeur du module E_0 afin d'étudier la sensibilité de ce paramètre dans le calcul des fréquences. La Figure 17 illustre graphiquement l'influence du module de l'élément faible sur le décalage des fréquences de vibration par rapport aux fréquences d'une poutre homogène.

On constate que lorsque le module de l'élément diminue l'écart des fréquences augmente. L'augmentation de l'écart correspond à une diminution progressive des fréquences par rapport aux fréquences de la poutre homogène. Ce résultat peut se retrouver de manière intuitive ; l'élément devenant de plus en plus faible, le module d'élasticité global de la poutre diminue de même que les fréquences propres.

On constate également que l'affaiblissement des fréquences n'est pas le même selon le rang considéré. En effet, pour un élément situé au milieu de la poutre, le premier et le troisième mode sont très affaiblis alors que le deuxième n'est quasiment pas affecté dans la plage de variation du module du 'défaut' considéré.

La position de l'élément faible le long de la poutre a donc une très grande importance quant à la variation des fréquences de vibration. Ce phénomène est illustré par la Figure 18 tracée en utilisant les mêmes valeurs de paramètre que dans la Figure 16. On observe bien que pour un élément situé au milieu de la poutre les modes un et trois sont affaiblis alors que le mode deux n'est pas affecté. Il existe des positions particulières le long de la poutre pour lesquelles un mode en particulier n'est quasiment pas perturbé par la présence du 'défaut'.

1.2.7 Sollicitation en flexion

1.2.7.1 Equations du mouvement

On considère une poutre prismatique pleine définie par la Figure 14. Dans les trois milieux ou morceaux de poutre, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Le moment de flexion s'exprime dans les milieux 1, 2 et 3 :

$$M_1 = EI_{Gz} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, M_2 = E_0 I_{Gz} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \text{ et } M_3 = EI_{Gz} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}$$

Les mouvements associés s'écrivent : $v_i(x, t) = f_i(x) \cos(\omega t + \varphi_i), i \in \{1, 2, 3\}$

$$\text{Avec } \begin{cases} f_1(x) = C_{11} \cos(ax) + C_{12} \cosh(ax) + C_{13} \sin(ax) + C_{14} \sinh(ax) \\ f_2(x) = C_{21} \cos(a_0 x) + C_{22} \cosh(a_0 x) + C_{23} \sin(a_0 x) + C_{24} \sinh(a_0 x) \\ f_3(x) = C_{31} \cos(ax) + C_{32} \cosh(ax) + C_{33} \sin(ax) + C_{34} \sinh(ax) \end{cases}$$

1.2.7.2 Continuité des grandeurs physiques

En utilisant les résultats du paragraphe 1.2.4, la continuité du déplacement, la continuité de la déviation de la fibre neutre (angle θ), la continuité du moment de flexion et de l'effort tranchant aux interfaces imposent les conditions suivantes.

➤ Le déplacement est continu à tout moment si et seulement si :

$$\begin{aligned} f_1(l_1) &= \pm f_2(l_1) \\ f_2(l_2) &= \pm f_3(l_2) \end{aligned}$$

➤ L'angle de déviation de la fibre neutre est continu à tout moment si et seulement si :

$$\theta_1(l_1, t) = \theta_2(l_1, t) \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x}(l_1) = \pm \frac{\partial f_2}{\partial x}(l_1)$$

$$\theta_2(l_2, t) = \theta_3(l_2, t) \Leftrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x}(l_2) = \pm \frac{\partial f_3}{\partial x}(l_2)$$

➤ Le moment de flexion est continu à tout moment si et seulement si :

$$M_1(l_1, t) = M_2(l_1, t) \Leftrightarrow E \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(l_1) = \pm E_0 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(l_1)$$

$$M_2(l_2, t) = M_3(l_2, t) \Leftrightarrow E_0 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(l_2) = \pm E \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(l_2)$$

➤ L'effort tranchant est continu à tout moment si et seulement si :

$$T_1(l_1, t) = T_2(l_1, t) \Leftrightarrow E \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3}(l_1) = \pm E_0 \frac{\partial^3 f_2}{\partial x^3}(l_1)$$

$$T_2(l_2, t) = T_3(l_2, t) \Leftrightarrow E_0 \frac{\partial^3 f_2}{\partial x^3}(l_2) = \pm E \frac{\partial^3 f_3}{\partial x^3}(l_2)$$

Ces huit équations vont permettre d'exprimer sous forme matricielle la continuité aux interfaces. Pour cela on définit les vecteurs et variables intermédiaires suivantes.

➤ Vecteurs constantes des fonctions spatiales :

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{24} \end{bmatrix} \text{ et } C_3 = \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \\ C_{34} \end{bmatrix}$$

➤ Variables intermédiaires :

$$\left. \begin{array}{l} \cos(al_1) = m_1 \\ \cosh(al_1) = k_1 \\ \sin(al_1) = n_1 \\ \sinh(al_1) = p_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \cos(al_2) = m_2 \\ \cosh(al_2) = k_2 \\ \sin(al_2) = n_2 \\ \sinh(al_2) = p_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \cos(a_0 l_1) = m_3 \\ \cosh(a_0 l_1) = k_3 \\ \sin(a_0 l_1) = n_3 \\ \sinh(a_0 l_1) = p_3 \end{array} \right\} \text{ et } \left. \begin{array}{l} \cos(a_0 l_2) = m_4 \\ \cosh(a_0 l_2) = k_4 \\ \sin(a_0 l_2) = n_4 \\ \sinh(a_0 l_2) = p_4 \end{array} \right\}$$

Les matrices de continuité ont toutes la même structure. Elles sont notées $M(i,j)$ avec $i \in \{1,2,3,4\}$ et $j \in \{-, 0\}$.

$$M(i, E_j a_j) = \begin{bmatrix} m_i & k_i & n_i & p_i \\ -a_j n_i & a_j p_i & a_j m_i & a_j k_i \\ -E_j a_j^2 m_i & E_j a_j^2 k_i & -E_j a_j^2 n_i & E_j a_j^2 p_i \\ E_j a_j^3 n_i & E_j a_j^3 p_i & -E_j a_j^3 m_i & E_j a_j^3 k_i \end{bmatrix}$$

Ces matrices sont toujours inversibles :

$$\text{Eq. 74 } M^{-1}(i, E_j a_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_i & -\frac{n_i}{a_j} & -\frac{1}{E_j a_j^2} m_i & \frac{1}{E_j a_j^3} n_i \\ k_i & -\frac{p_i}{a_j} & \frac{1}{E_j a_j^2} k_i & -\frac{1}{E_j a_j^3} p_i \\ n_i & \frac{m_i}{a_j} & -\frac{1}{E_j a_j^2} n_i & -\frac{1}{E_j a_j^3} m_i \\ -p_i & \frac{k_i}{a_j} & -\frac{1}{E_j a_j^2} p_i & \frac{1}{E_j a_j^3} k_i \end{bmatrix}$$

On obtient finalement les deux relations de continuité suivantes :

$$\text{Eq. 75} \quad \begin{cases} M(1, Ea).C_1 = \pm M(3, E_0 a_0).C_2 \\ M(4, E_0 a_0).C_2 = \pm M(2, Ea).C_3 \end{cases}$$

L'équation (Eq. 70) permet de trouver la matrice de passage du milieu 1 au milieu 3, notée P.

$$\text{Eq. 76} \quad \begin{aligned} P &= M^{-1}(2, Ea).M(4, E_0 a_0).M^{-1}(3, E_0 a_0).M(1, Ea) \\ C_3 &= \pm P.C_1 \end{aligned}$$

1.2.7.3 Conditions aux limites

A chaque extrémité de la poutre le moment de flexion et l'effort tranchant sont nuls quelque soit la valeur de 't'. Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} M_1(0, t) = 0 \\ M_3(L, t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.C_1 = 0 \\ \begin{bmatrix} -m_x & k_x & -n_x & p_x \\ n_x & p_x & -m_x & k_x \end{bmatrix}.C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1.C_1 = 0 \\ B_3.C_3 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos(aL) = m_x \\ \cosh(aL) = k_x \\ \sin(aL) = n_x \\ \sinh(aL) = p_x \end{cases}$$

En utilisant l'équation (Eq. 76), on obtient un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues.

$$\begin{cases} B_1.C_1 = 0 \\ \pm B_3.P.C_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ \pm B_3.P \end{bmatrix}.C_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3.P \end{bmatrix}.C_1 = 0$$

Ce système a une infinité de solutions correspondant au mode propre de vibration et à ses harmoniques associées. Le déterminant $\Delta(f)$ doit donc s'annuler. l'ensemble des f_n tels que $\Delta(f_n)=0$ est l'ensemble des fréquences propres de la poutre.

$$\text{Eq. 77} \quad \Delta(f_n) = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_3.P \end{vmatrix} = 0, n \in \mathbb{N}^*$$

L'équation aux fréquences est définie par l'équation (Eq. 77). Un programme informatique permet de calculer les fréquences de vibration en recherchant les valeurs d'annulation de la fonction $\Delta(f)$ au voisinage des fréquences solutions de Bernoulli (Eq. 43) pour une poutre homogène.

1.2.8 Simulation numérique en flexion

La fonction dite 'de flexion' $\Delta(f)$ est représentée par la Figure 19 pour une poutre de dimensions 20x20x400 mm, de densité 0,7 g/cm³ et de module d'élasticité sain 15542 N/mm². L'élément faible est caractérisé par sa position ($l_1 = 180$ mm, $l_2 = 200$ mm) et par son module pris égal à 1/10 du module sain. Ces données numériques sont identiques à celles utilisées au paragraphe 1.2.6 lors de la simulation numérique en compression.

Les fréquences propres de vibration annulent la fonction de flexion. Dans le cas de la Figure 19, les trois premières fréquences sont égales à 414 Hz, 1644 Hz et 2771 Hz.

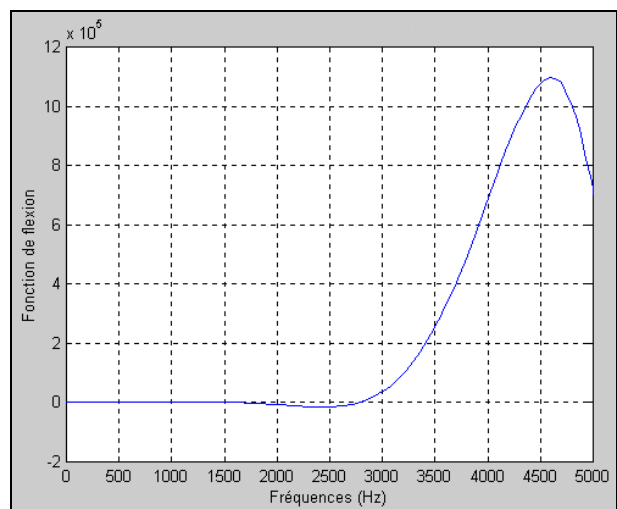


Figure 19 : Allure de la fonction de flexion.

Comme en compression, la recherche des valeurs d'annulation de $\Delta(f)$ au voisinage des solutions de Bernoulli pour une poutre homogène est effectuée de manière automatique par une procédure Matlab, le résultat affiche les trois premières fréquences de Bernoulli, les trois premières fréquences avec élément faible et le ratio fréquence avec élément sur fréquence de Bernoulli associée.

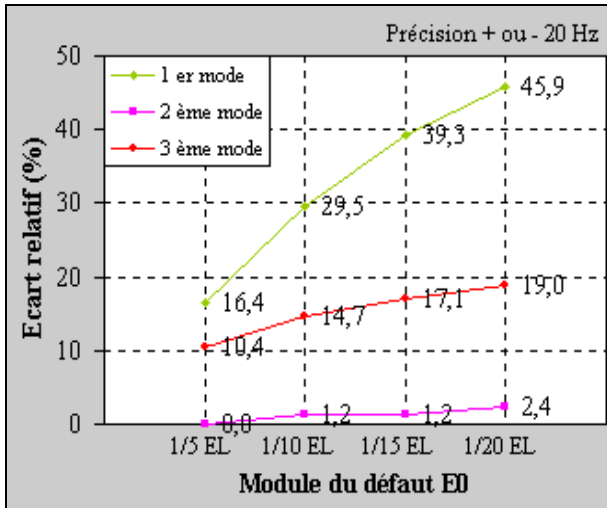


Figure 20 : Ecart entre les fréquences d’une poutre saine et d’une poutre avec élément en fonction du module d’élasticité de l’élément faible.

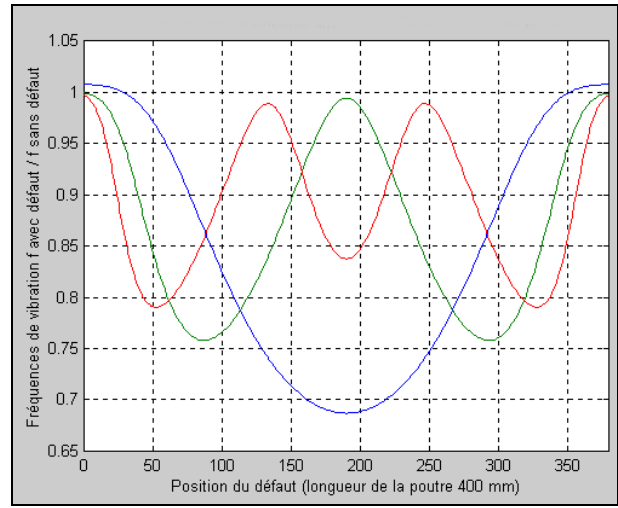


Figure 21 : Evolution du décalage des fréquences de vibration en fonction de la position de l’élément faible.

Il est possible de faire varier la valeur du module E_0 afin d’étudier la sensibilité de ce paramètre dans le calcul des fréquences en vibration de flexion. La Figure 20 illustre graphiquement l’influence du module de l’élément faible sur le décalage des fréquences de vibration par rapport aux fréquences d’une poutre homogène. Comme en compression, on constate que lorsque le module de l’élément diminue l’écart des fréquences augmente. L’augmentation de l’écart correspond à une diminution progressive des fréquences par rapport aux fréquences de la poutre homogène. On constate également que l’affaiblissement des fréquences n’est pas le même selon le rang considéré. La position de l’élément faible le long de la poutre a donc une très grande importance quant à la variation des fréquences de vibration. Ce phénomène est illustré par la Figure 21 tracée en utilisant les mêmes valeurs de paramètre que dans la Figure 19.

Les courbes d’évolutions présentées (Figure 17-Figure 20 et Figure 18-Figure 21) en vibration de compression et de flexion sont similaires. Ce phénomène s’explique par la nature des ondes qui se propagent dans le matériau lors d’une vibration de compression ou de flexion. Les paragraphes 1.1.5.1 (Eq. 11) et 1.1.6.1 (Eq. 40) décrivent et utilisent des ondes stationnaires planes. Des ondes de même nature (compression et flexion) se propageant dans un même milieu se comportent de manière similaire.

Le phénomène de décalage des fréquences de vibration, illustré à la Figure 21, est utilisé par les fabricants d’instruments de musique, et notamment par les fabricants de marimba (xylophone). L’élément faible correspond alors à un manque de matière à un endroit précis de la lame de marimba. Enlever de la matière à un endroit de la lame affecte en effet les fréquences de vibration de manière différente selon le mode considéré, il est alors possible d’accorder les différentes lames constitutives du marimba (Fletcher, 1991). La Figure 22 apparaît dans l’ouvrage de Fletcher (1991) pour illustrer ce phénomène. Cette figure montre l’effet d’un petit trait de scie latéral à des positions différentes selon le sens de la longueur de la lame sur les quatre premiers modes de vibration. Les évolutions représentées à la Figure 22 sont identiques à celles de la Figure 21.

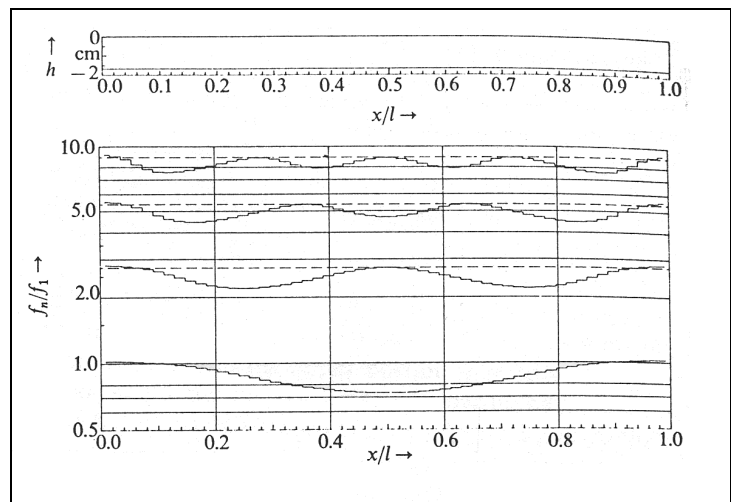


Figure 22 : Effet d’un trait de scie latéral en différentes positions le long d’une barre de bois rectangulaire sur les quatre premières fréquences de vibrations transversales (Fletcher, 1991).

2 ETUDE EXPERIMENTALE

2.1 Matériel et méthode

2.1.1 Matériel végétal

Deux essences de forte et de moyenne densité ont été retenues (Tableau 7). Les éprouvettes destinées aux essais sont issues de débits en plot (planche proche de la périphérie). Au total, douze éprouvettes pour chaque essence sont élaborées. Elles ont pour dimensions finales 20x20x400 mm, après conditionnement jusqu'à stabilisation à une humidité théorique de 12 %.

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm ³)	Dimensions finales (mm)	Nombre D'éprouvettes
Grignon franc	Guyane française	<i>Ocotea rubra</i> Mez	0,65	20x20x400	12
Ebène verte	Guyane française	<i>Tabebuia</i> spp.	1,10	20x20x400	12

Tableau 7 : Répertoire des essences sélectionnées.

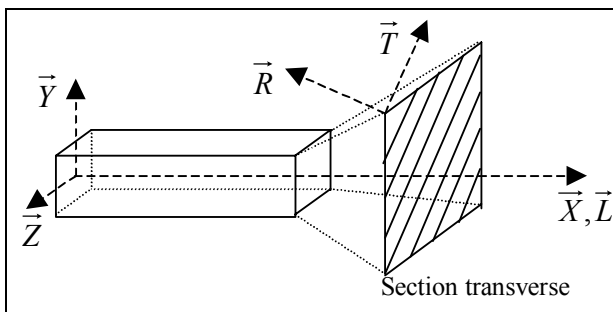


Figure 23 : Plan de découpe des éprouvettes.

Les éprouvettes sont, pour autant que possible, prismatiques, de droit fil, sans nœud, ni défaut. Elles sont prélevées de telle manière que les cernes d'accroissement aient une courbure négligeable et soient parallèles à la direction tangentielle du bois. Le sens longitudinal est colinéaire à l'axe longitudinal (OX) des éprouvettes, le sens tangentiel fait un angle de 45° avec l'axe (OY) (Figure 23).

Un élément faible est créé artificiellement, pour les dix premières éprouvettes de chaque essence, en découpant un cube de 20 mm de côté, puis en le recollant⁴ de manière à ce que le sens tangentiel du cube soit colinéaire à l'axe longitudinal de l'éprouvette (Figure 24).

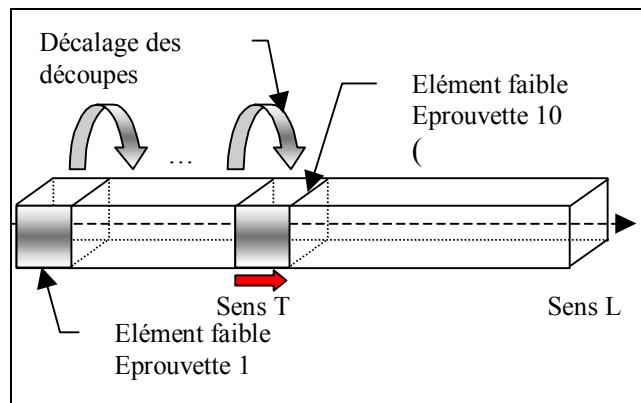


Figure 24 : Plan de découpe, inclusion d'un élément faible dans les dix premières éprouvettes.

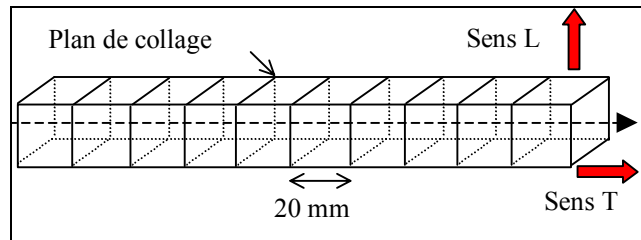


Figure 25 : Epreuve 11 reconstituée par collage de cubes.

La découpe est réalisée à l'extrémité de la première éprouvette ; elle est ensuite décalée, éprouvette par éprouvette, d'un pas de 20 mm jusqu'à atteindre le milieu de l'éprouvette 10. La position de l'élément faible est alors de (180,200) mm.

L'éprouvette 11 est découpée en petits cubes de 20 mm de côté, puis reconstituée de telle façon que le sens tangentiel de tous les cubes soit colinéaire à l'axe longitudinal de l'éprouvette (Figure 25). Un cube est découpé puis recollé tel quel pour l'éprouvette 12. Sa position pour le grignon franc est de (240,260) mm, et de (307,327) mm pour l'ébène verte.

⁴ Une colle vinylique résistant à l'eau est utilisée : CECA-ATO Alfo DN41. Classement D3 selon EN 204/205 (sans durcisseur). Usine expéditrice : CECA S.A. 65420 IBOS

2.1.2 Démarche expérimentale

L'objectif de l'expérimentation est d'étudier l'influence de la présence d'un élément faible en différents endroits d'une petite poutre sur ses trois premières fréquences de vibration, en compression comme en flexion. Les fréquences de vibration obtenues à partir du dispositif BING, mis au point par le CIRAD-Forêt, seront comparées aux résultats des modèles analytiques développés au paragraphe 1.2. Afin d'atteindre ces objectifs, on se propose de réaliser les essais expérimentaux indiqués par la Figure 26 ci-dessous.

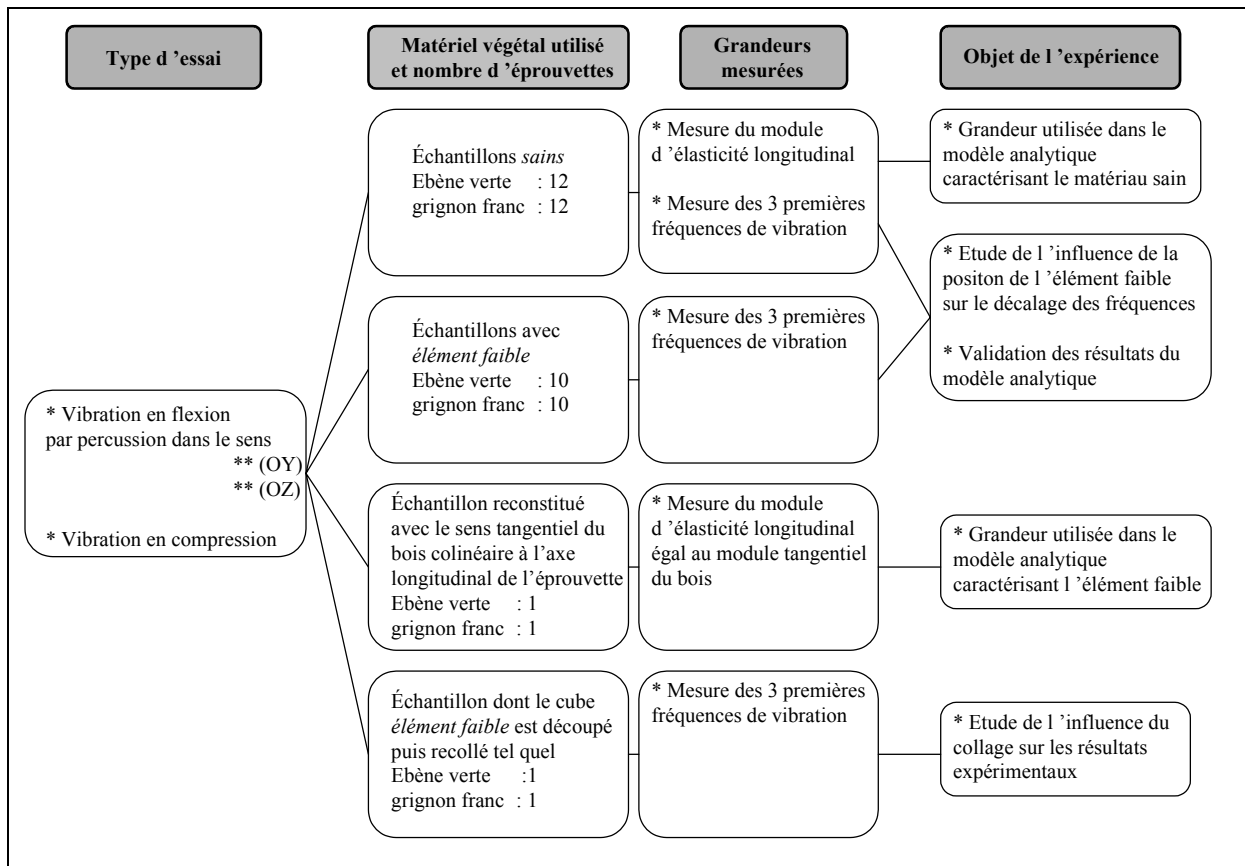


Figure 26 : Présentation des essais expérimentaux réalisés.

En ce qui concerne les échantillons avec élément faible, une mesure des fréquences de vibration a été réalisée à chacune des deux extrémités de chaque échantillon. Les positions du cube constitutif de l'élément faible sont en effet localisées sur la moitié de la longueur des éprouvettes (§ 2.1.1).

Remarque : Pour une sollicitation en compression (§ 1.1.5.1), le rapport de deux fréquences propres successives n'est pas rigoureusement constant lorsque le rang 'n' augmente (Eq. 13). La viscoélasticité semble être la principale cause de ce phénomène. Pour le calcul, la fréquence propre de premier rang est prise en compte ; les incertitudes expérimentales sont alors plus importantes que le biais correspondant au phénomène viscoélastique.

2.1.3 Essais vibratoire

2.1.3.1 principe

Le module d'élasticité longitudinal et le module de cisaillement transverse sont déterminés par l'analyse du spectre des fréquences des vibrations naturelles transverses de l'éprouvette. Le principe de l'analyse modale des vibrations naturelles de flexion d'une éprouvette flottante et leur détermination par la théorie des poutres élastiques sont exposés en détail au paragraphe 1.1.

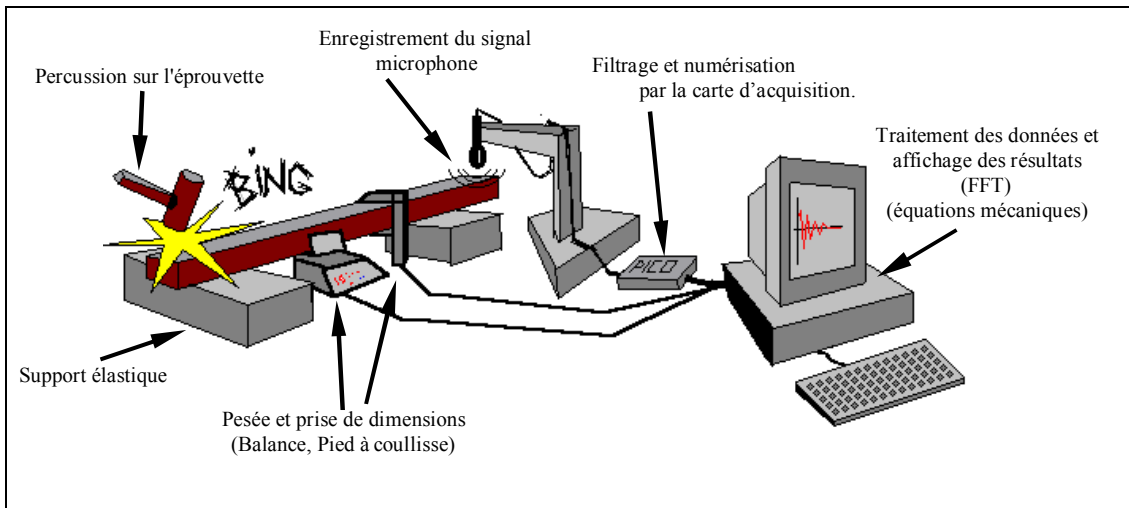


Figure 27 : Schéma de principe d'un essai vibratoire.

L'éprouvette repose sur des supports élastiques et la sollicitation est provoquée par percussion dans la direction tangentielle du bois sur une des extrémités (Figure 27).

2.1.3.2 Appareillage

- Un dispositif assurant le maintien en équilibre de l'éprouvette. Il est composé d'un bâti rectangulaire, réglable en longueur, muni de quatre montants verticaux qui servent de points d'attache pour les élastiques.
- Un microphone à condensateur EMU 4535 (effet électret) unidirectionnel.
- Une carte d'acquisition (PicoTechnology ADC212 ; 12 bits). Le boîtier d'acquisition a été développé par une entreprise anglaise située à Cambridge (banlieue de Londres), "Pico Technology Limited". Ce boîtier est en fait une modification d'une carte d'acquisition externe commercialisée par Pico Technology (ADC212). Le boîtier est connecté entre le microphone et l'ordinateur.
- Logiciel d'exploitation : BING V7.

2.1.3.3 Mode opératoire

- L'éprouvette est pesée et mesurée. Pour la hauteur et la largeur, une moyenne sur trois position équidistante est effectuée.
- L'éprouvette est mise en place sur les deux élastiques en respectant l'orientation choisie de la sollicitation ainsi que la symétrie des appuis (Figure 28). Le microphone est ensuite placée à l'une des extrémités.

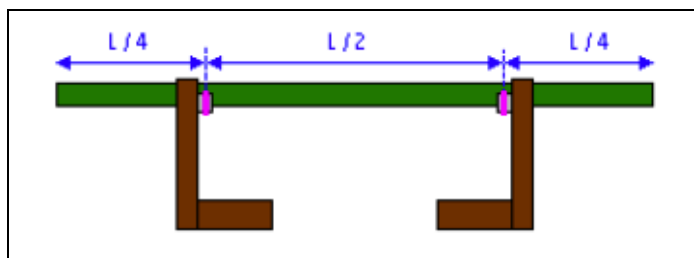


Figure 28 : Positionnement de l'éprouvette sur les appuis élastiques.

- Une percussion est donnée sur l'extrémité libre de l'éprouvette en veillant à ce que les vibrations soient le plus libre possible et dans le plan vertical de sollicitation.
- On vérifie à l'écran la qualité du spectre et des pics de fréquences obtenus. Ces derniers doivent être suffisamment nets et distincts.
- Deux pics au moins sont sélectionnés pour la mesure en leur affectant un numéro d'ordre croissant avec le niveau de fréquence.
- On réitère ensuite la mesure plusieurs fois pour vérifier la valeur du module élastique obtenu.

2.1.3.4 *L'acquisition et le traitement du signal acoustique*

Le micro-ordinateur gère la totalité du paramétrage du boîtier d'acquisition et du traitement de l'information recueillie à la suite de la percussion appliquée.

- Paramétrage du boîtier d'acquisition : voies d'acquisition, amplificateurs des signaux, filtre anti-repliement (anti-aliasing), temps d'acquisition et nombre d'échantillons recueillis.
- L'onde sonore émise par l'extrémité de la poutre, est transformée en signal électrique par un capteur adapté (microphone, accéléromètre, capteur Laser ...). Celui-ci est amplifié, filtré puis échantillonné par l'intermédiaire du boîtier d'acquisition. Puis, après conversion du signal analogique en information numérique, l'enregistrement est transféré directement via le port parallèle dans une mémoire utilisateur du PC.
- La composition spectrale de l'enregistrement est obtenue par transformée de Fourier rapide. La largeur spectrale (fenêtre d'investigation) dépend des paramètres d'acquisition fixés (nombre de points et durée d'acquisition). Un zoom sur le spectre est possible.

➤ La poutre est supposée obéir au modèle de Timoshenko ou de Bernoulli. Le contrôle est donné par l'opérateur qui indique en les sélectionnant, à partir de la souris, les fréquences propres à prendre en compte (nombre et rang). Le module d'élasticité dynamique (E) et le module de cisaillement (G) dans le plan du mouvement, sont ensuite calculés par la méthode des moindres carrés appliquée à la relation d'approximation linéaire que vérifient ces différents facteurs.

➤ Afin de faciliter l'identification des fréquences propres, le logiciel intègre un calcul théorique basé sur les relations qui existent, dans le matériau bois sans défaut, entre les modules d'élasticité et la masse volumique à une humidité donnée. Les relations utilisées dans le logiciel proviennent d'ajustement réalisés par Guitard (1987).

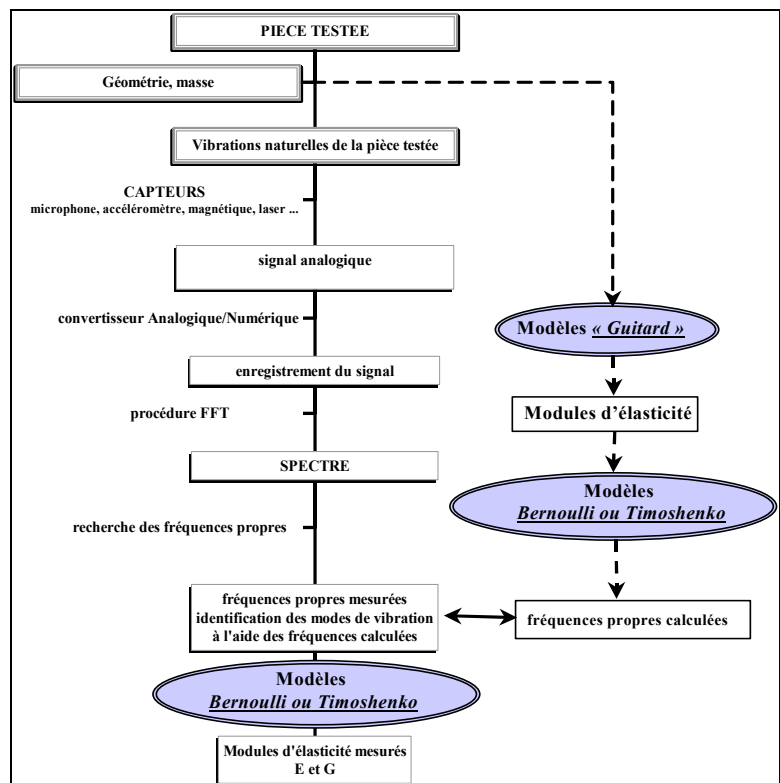


Figure 29 : processus de calcul des caractéristiques mécaniques.

La Figure 29 détaille le logigramme du processus de calcul des caractéristiques mécaniques.

2.1.3.5 Réglages retenus pour les essais expérimentaux

➤ En flexion :

Micro	Signal x 10	Durée d'acquisition	350 ms
Seuil de déclenchement	20 mV	Largeur spectrale	4 000 Hz
Gamme	200 mV	Nombre de points	16384 points
Fréquence de coupure du filtre	5 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	46 811 Hz
		Résolution	2,86 Hz

➤ En compression :

Micro	Signal x 10	Durée d'acquisition	40 ms
Seuil de déclenchement	100 mV	Largeur spectrale	25 000 Hz
Gamme	1 V	Nombre de points	16384 points
Fréquence de coupure du filtre	30 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	409 600 Hz
		Résolution	25 Hz

2.1.4 Incertitudes expérimentales

➤ Mesure des fréquences de vibration

Les fréquences propres sont déterminées par une transformée de Fourier discrète après numérisation. La résolution notée 'r' est fonction de la fréquence d'échantillonnage 'F_e' et du nombre de points de mesure 'N', ou simplement fonction de la durée d'acquisition 'D_a'. L'erreur absolue Δf peut être majorée par l'erreur absolue expérimentale (1 Hz) plus la moitié de la résolution :

$$r = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{D_a}$$

$$\frac{|\Delta f_i|}{f_i} = \frac{\Delta f_{i_exp} + 0,5.r}{f_i}$$

Compte tenu des réglages retenus (§ 2.1.3.5), on obtient les incertitudes expérimentales suivantes :

Vibration de flexion :

$$\begin{aligned} & \text{Max} \left(\frac{|\Delta f_1|}{f_1} \right) = 0,76 \% \\ \text{Min}(f_1) = 321 \text{ Hz} & \\ \text{Min}(f_2) = 1176 \text{ Hz} \Rightarrow & \text{Max} \left(\frac{|\Delta f_2|}{f_2} \right) = 0,21 \% \\ \text{Min}(f_3) = 2195 \text{ Hz} & \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Minima des valeurs expérimentales}} & \text{Max} \left(\frac{|\Delta f_3|}{f_3} \right) = 0,11 \% \end{aligned}$$

Vibration de compression :

$$\begin{aligned} & \text{Max} \left(\frac{|\Delta f_1|}{f_1} \right) = 0,61 \% \\ \text{Min}(f_1) = 2207 \text{ Hz} & \\ \text{Min}(f_2) = 4319 \text{ Hz} \Rightarrow & \text{Max} \left(\frac{|\Delta f_2|}{f_2} \right) = 0,31 \% \\ \text{Min}(f_3) = 6573 \text{ Hz} & \\ & \text{Max} \left(\frac{|\Delta f_3|}{f_3} \right) = 0,21 \% \end{aligned}$$

➤ Evaluation du module d'élasticité longitudinal

Vibration de flexion (modèle de Timoshenko, solution de Bordonné) :

On montre que dans le cas d'un matériau homogène, pour un élanement variant de 10 à 40 et un ratio E_X/G_{XY} de 12 à 20 (plage du matériau bois), la formule suivante est applicable pour déterminer en valeur absolue l'écart maximal relatif sur E_X :

$$\frac{|\Delta E_X|}{E_X} = \frac{|\Delta m|}{m} + 3 \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta e|}{e} + 3 \frac{|\Delta L|}{L} + 3 \frac{|\Delta f_1|}{f_1} + \frac{|\Delta f_2|}{f_2}$$

* pour la masse : $m = 84,1 \pm 0,1 \text{ (g)} \Rightarrow \frac{|\Delta m|}{m} = 0,1 \%$

* la hauteur (pied à coulisse) : $h = 19,8 \pm 0,1 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{|\Delta h|}{h} = \frac{0,1}{19,8} = 0,5 \%$

* la largeur (pied à coulisse) : $e = 19,8 \pm 0,1 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{|\Delta e|}{e} = \frac{0,1}{19,8} = 0,5 \%$

* la longueur (règle) : $L = 391 \pm 1 \text{ (mm)} \Rightarrow \frac{|\Delta L|}{L} = \frac{1}{391} = 0,3 \%$

On obtient :

$$\frac{|\Delta E_X|}{E_X} = \underbrace{0,1}_m + \underbrace{3 \times 0,5}_h + \underbrace{0,5}_e + \underbrace{3 \times 0,3}_L + \underbrace{3 \times 0,76}_{f_1} + \underbrace{0,21}_{f_2} \Rightarrow \frac{|\Delta E_X|}{E_X} = 5,5 \%$$

Vibration de compression :

La formule suivante est utilisée.

$$\frac{|\Delta E_X|}{E_X} = \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta e|}{e} + \frac{|\Delta L|}{L} + 2 \frac{|\Delta f_1|}{f_1}$$

La valeur absolue de l'écart maximal relatif sur E_X est alors égal à :

$$\frac{|\Delta E_X|}{E_X} = \underbrace{0,1}_m + \underbrace{0,5}_h + \underbrace{0,5}_e + \underbrace{0,3}_L + \underbrace{2 \times 0,61}_{f_1} \Rightarrow \frac{|\Delta E_X|}{E_X} = 2,6 \%$$

Remarque : On observe que l'incertitude théorique sur la mesure du module ' E_X ' en flexion (5,5%) est supérieure à celle en compression (2,6%). Cependant, il est important de remarquer qu'expérimentalement le module dynamique en flexion et le module statique (flexion 4 points selon la norme NF B 51-016) sont proches, alors que le module dynamique déterminé en compression surestime systématiquement le module statique. La viscoélasticité semble être la principale cause de ce phénomène (voir remarque 1). La viscosité implique une dépendance entre les contraintes et les vitesses de déformation du matériau. Dans le cas du bois, les fréquences de compression sont très supérieures à celles de flexion. Le mouvement particulaire en est d'autant plus freiné en compression, ce qui correspond à une rigidification apparente du matériau bois.

Synthèse des incertitudes expérimentales :

➤ **Mesure des fréquences de vibration**

Vibration de flexion :

$$\frac{|\Delta f_1|}{f_1} = 0,76 \%$$

$$\frac{|\Delta f_2|}{f_2} = 0,21 \%$$

$$\frac{|\Delta f_3|}{f_3} = 0,11 \%$$

Vibration de compression :

$$\frac{|\Delta f_1|}{f_1} = 0,61 \%$$

$$\frac{|\Delta f_2|}{f_2} = 0,31 \%$$

$$\frac{|\Delta f_3|}{f_3} = 0,21 \%$$

➤ **Evaluation du module d'élasticité longitudinal**

Vibration de flexion :

$$\frac{|\Delta E_X|}{E_X} = 5,5 \%$$

Vibration de compression :

$$\frac{|\Delta E_X|}{E_X} = 2,6 \%$$

2.2 Résultats synthétiques et analyses

2.2.1 Sollicitation en flexion

➤ Echantillons sains

Le module d'élasticité longitudinal et les trois premières fréquences de vibration ont été mesurées par percussion dans le sens (OY) et (OZ) de chaque éprouvette. La comparaison des deux modes de percussion sur les modules longitudinaux et les fréquences n'indique aucune différence statistique⁵ (avec un risque de 5%). Le fait de retrouver les mêmes fréquences quelque soit la direction de percussion s'explique par l'orientation particulière des axes d'orthotropie du bois dans la découpe des éprouvettes (rotation de 45° dans la section transverse, Figure 15). En effet, les modules de cisaillement dans le sens (OY) et (OZ) sont identiques, ils peuvent s'écrire (en notant χ l'angle de rotation) :

$$\frac{1}{G_{XY}} = \frac{\cos^2(\chi)}{G_{LT}} + \frac{\sin^2(\chi)}{G_{LR}} \text{ et } \frac{1}{G_{XZ}} = \frac{\sin^2(\chi)}{G_{LT}} + \frac{\cos^2(\chi)}{G_{LR}}, \text{ si } \chi = 45^\circ \text{ alors } G_{XY} = G_{XZ}, \text{ d'où l'égalité théorique}$$

des fréquences dans les deux sens de percussion. On prendra la moyenne des deux modules et de chacune des deux fréquences comme valeurs de référence pour chaque échantillon.

➤ Echantillons avec un élément faible

Les trois premières fréquences de vibration ont été mesurées par percussion dans le sens (OY) et (OZ), ainsi qu'aux deux extrémités de chaque éprouvette. Statistiquement⁵, les fréquences ainsi mesurées sont équivalentes quelque soit le sens de percussion et quelque soit l'extrémité sollicitée. Les résultats obtenus par 'déplacement' de l'élément faible le long d'une poutre sont donc symétriques par rapport à son milieu. Les fréquences mesurées par percussion aux deux extrémités permettent d'examiner 20 configurations de l'élément faible avec 10 échantillons. On prendra les moyennes de chacune des deux fréquences obtenues en changeant de sens de percussion comme valeurs de référence pour chaque échantillon comportant un élément faible.

➤ Echantillon dont le cube élément faible est recollé sans changement d'orientation

L'influence du collage est ici étudiée sur une éprouvette pour chaque essence. Le Tableau 8 montre les résultats obtenus.

Sens de percussion	Ebène verte			Grignon franc		
	Eprouvette d'origine	Eprouvette reconstituée	Ecart (%)	Eprouvette d'origine	Eprouvette reconstituée	Ecart (%)
	(OY) (OZ)	(OY) (OZ)		(OY) (OZ)	(OY) (OZ)	
1er mode	610	630	-3,3	610	620	-1,6
	602	622	-3,3	610	622	-1,9
2ème mode	1585	1622	-2,4	1567	1594	-1,7
	1573	1610	-2,4	1556	1584	-1,8
3ème mode	2874	2926	-1,8	2837	2814	0,8
	2837	2903	-2,3	2762	2843	-2,9

Tableau 8 : Ecart relatif expérimentaux relatant l'influence du collage sur les fréquences de vibration en flexion.

Les écarts sont presque tous négatifs ce qui correspond à une rigidification du matériau. Le biais induit par les plans de collage sur la mesure des trois premières fréquences de vibration reste faible, et est de l'ordre de 3 % pour un cube recollé.

➤ Echantillon dont le sens tangentiel du bois est colinéaire à l'axe longitudinal

Le module d'élasticité tangentiel est évalué sur une éprouvette, pour chaque essence, reconstituée par collage de 14 petits cube de 20 mm de côté (soit 13 plans de collage, Figure 25). Le Tableau 9 montre les résultats obtenus.

⁵ Comparaison des résultats expérimentaux par ajustement linéaire : Test de signification des coefficients de régression (test de Student avec un risque de 5 %), et détermination des intervalles de confiance des coefficients.

	Ebène verte (d=1,044 g/cm³) Module 'tangential' (OY) (Mpa)	Grignon franc (d=0,597 g/cm³) Module 'tangential' (OY) (Mpa)
Percussion sens (OY)	2494	778
Percussion sens (OZ)	2226	773
Moyenne	2360	775
Module de Guitard	2349	888

Tableau 9 : Mesure du module d'élasticité tangential en vibration de flexion.

Le calcul du module de Guitard donne un ordre de grandeur. On prendra la moyenne des deux modules évalués par percussion dans le sens (OY) et (OZ) comme valeur de référence du module 'tangential' de chaque éprouvette. Il est nécessaire de faire plusieurs remarques sur l'évaluation de ce module ainsi que sur son utilisation dans les modèles analytiques. Les deux éprouvettes utilisées ont été reconstituées au mieux, car le collage et l'orientation des cubes sont difficiles en pratique. De plus la multiplicité des plans de collage induit un biais sur la mesure. Enfin le fait de prendre une valeur constante du module pour toutes les éprouvettes dans les modèles analytiques est source d'imprécision.

➤ **Influence de la présence d'un élément faible sur les fréquences propres de vibration**

L'étude de l'influence de la position d'un élément faible sur le décalage des fréquences est illustrée expérimentalement par la Figure 30 et la Figure 32. Ces courbes d'évolution sont similaires à celles obtenues par simulation numérique (Figure 21).

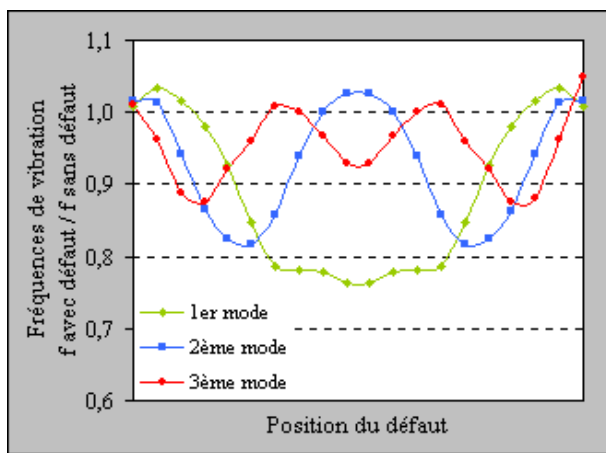


Figure 30 : Influence d'un élément faible sur la vibration en flexion d'une poutre, essence ébène verte.

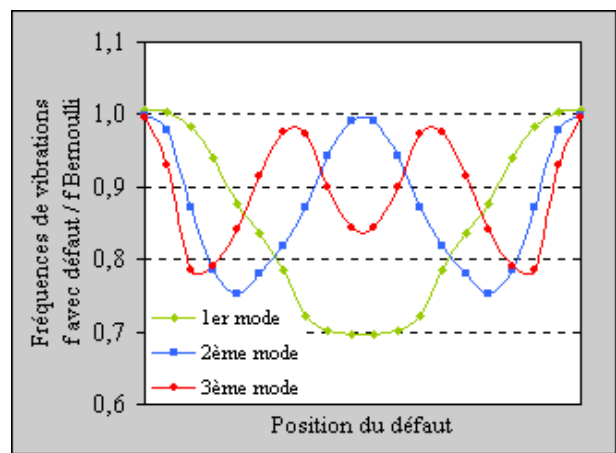


Figure 31 : Simulation de l'influence d'un élément faible sur la vibration en flexion d'une poutre, essence ébène verte.

Afin de déterminer si le modèle analytique en flexion, décrit au paragraphe 1.2.7, ne produit pas des résultats erronés ayant des écarts avec l'expérience trop importants, les données telles que le module d'élasticité longitudinal du matériau, la densité, et la valeur du module 'tangential' mesurés ont été utilisées dans le modèle analytique pour chaque éprouvette. La Figure 31 et la Figure 33 montrent des évolutions et des grandeurs proches de l'expérience.

Le Tableau 10 donne les écarts entre les fréquences mesurées expérimentalement et celles calculées par le modèle analytique. Ces écarts ne seront considérés comme acceptables que si ils sont voisins des effets cumulés de l'incertitude sur la mesure des fréquences de vibration, de l'incertitude liée à l'utilisation du modèle de Bernoulli, et de l'incertitude due aux plans de collage. L'incertitude liée à l'utilisation d'une valeur unique du module 'tangential' pour chaque éprouvette n'est pas prise en compte.

On rappelle les valeurs des incertitudes expérimentales sur la mesure des fréquences de vibration en flexion (§ 2.1.4).

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = -0,76 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = -0,21 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = -0,11 \%$$

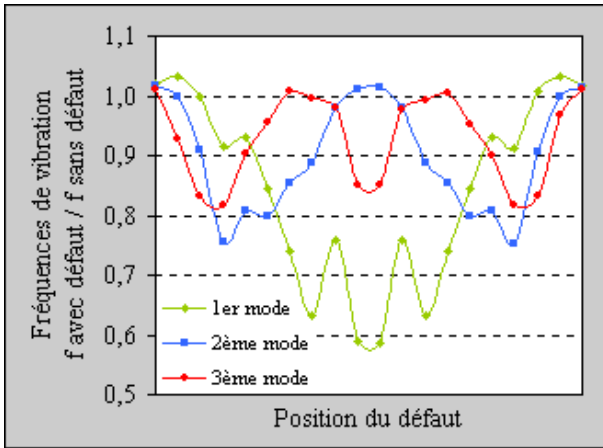


Figure 32 : Influence d'un élément faible sur la vibration en flexion d'une poutre, essence grignon franc.

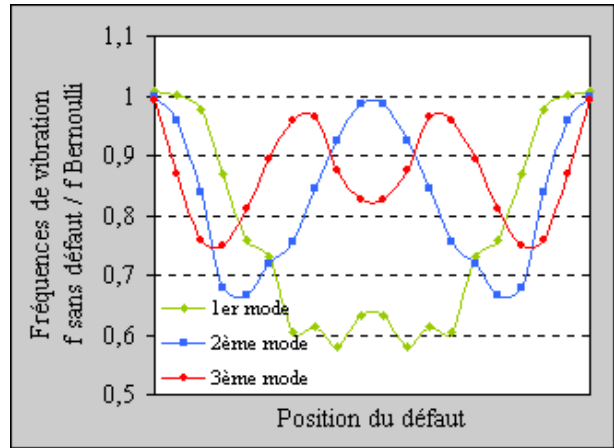


Figure 33 : Simulation de l'influence d'un élément faible sur la vibration en flexion d'une poutre, essence grignon franc.

Ecart pour l'ébène verte						
Epreuve	Fréquences de vibration			Orientation du cube	Collage	
	N°	f1 (%)	f2 (%)			f3 (%)
1		-3,2	-10,3	-20,8	45°	bon
2		-3,0	-8,7	-17,2	tangentiel	moyen
3		-3,1	-5,8	-11,3	45°	moyen
4		-2,1	-4,6	-13,2	45°	bon
5		-1,4	-4,3	-14,8	45°	bon
6		-4,4	-7,0	-15,1	tangentiel	bon
7		-6,4	-9,6	-21,5	45°	bon
8		1,0	-7,0	-21,9	45°	bon
9		4,4	-7,0	-14,3	radial	bon
10		3,4	-10,0	-11,7	radial	bon

Ecart pour le grignon franc						
Epreuve	Fréquences de vibration			Orientation du cube	Collage	
	N°	f1 (%)	f2 (%)			f3 (%)
1		-3,4	-11,5	-22,2	45°	bon
2		-3,6	-11,0	-18,5	45°	moyen
3		-2,8	-4,4	-11,0	45°	moyen
4		-0,9	-2,0	-13,2	45°	bon
5		12,4	6,6	-13,4	radial	bon
6		9,4	1,5	-9,9	radial	bon
7		12,9	-0,5	-18,4	45°	mauvais
8		-2,2	-8,6	-19,5	45°	bon
9		18,6	-9,5	-12,5	radial	mauvais
10		-13,8	-11,0	-17,2	45°	bon

Tableau 10 : Ecart relatif entre les résultats expérimentaux et le modèle analytique en flexion.

Le modèle de Bernoulli engendre les écarts page suivante pour un élancement de 20, une densité de 1,1 g/cm³ pour l'ébène verte, 0,65 g/cm³ pour le grignon franc et un ratio E_X/K_{GXY} associé de 16 et 18.

$$\text{Ebène verte : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = -2,5\% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = -8,3\% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = -16,8\%$$

$$\text{Grignon franc : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = -2,8\% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = -9,2\% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = -18,6\%$$

On prendra les valeurs moyennes entre les deux sens de percussion (Tableau 8) pour quantifier les incertitudes liées aux plans de collage. Il est important de remarquer que l'utilisation du modèle de Bernoulli et le collage d'un cube

produisent des effets opposés concernant le décalage des fréquences en présence d'un élément faible. Les fréquences théoriques de Bernoulli sont supérieures aux fréquences mesurées expérimentalement, alors que les fréquences expérimentales des éprouvettes recollées sont supérieures à celles sans plan de collage.

$$\text{Ebène verte : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +3,3 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +2,4 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +2,1 \%$$

$$\text{Grignon franc : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +1,8 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +1,8 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +1,1 \%$$

Les écarts, correspondant aux effets cumulés de l'incertitude de mesure, de l'utilisation du modèle de Bernoulli, et des plans de collage, sont alors les suivants. Ils donnent un ordre de grandeur. On rappelle que l'erreur liée à l'utilisation d'une valeur unique du module 'tangential' n'est pas prise en compte.

$$\text{Ebène verte : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +0,0 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = -6,1 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = -14,8 \%$$

$$\text{Grignon franc : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = -1,8 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = -7,6 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = -17,6 \%$$

Le Tableau 10 montre que les écarts relatifs entre les résultats expérimentaux et le modèle analytique en flexion sont acceptables car voisins des ordres de grandeur calculés. Les écarts trop importants sont surlignés en jaune dans le Tableau 10.

Concernant l'ébène verte, seules les éprouvettes 6 et 7 posent problème. Aucune anomalie de collage n'est visible pour ces deux éprouvettes. On constate néanmoins que l'éprouvette 7 possède une densité faible de $0,865 \text{ g/cm}^3$ par rapport à la moyenne de $1,030 \text{ g/cm}^3$. La valeur du module d'élasticité longitudinal de 20976 Mpa , pour l'éprouvette 6, est quant à elle relativement faible par rapport à la moyenne de 23317 Mpa . Les valeurs des modules d'élasticité tangential et radial sont très voisines pour l'ébène verte. Les erreurs d'orientation du cube (sens tangential ou radial au lieu d'une orientation médiane) n'ont donc pas ou peu d'influence sur les écarts entre résultats expérimentaux et résultats théoriques (Tableau 10).

Les fortes valeurs des écarts rencontrées pour les éprouvettes en grignon franc 5, 6 et 9 s'expliquent par une mauvaise orientation du cube (sens radial). Le collage de l'éprouvette 7 est imparfait (constatation visuelle), d'où l'écart important entre valeur théorique et expérimentale. L'éprouvette 10 de cette même essence ne comporte pas d'anomalie visible (orientation du cube et collage corrects), mais son module d'élasticité longitudinal de 9887 Mpa est faible par rapport à la moyenne de 13651 Mpa .

➤ Evaluation du module d'élasticité 'tangential'

Le module d'élasticité 'tangential' de chaque éprouvette est calculé en utilisant les valeurs expérimentales des fréquences de vibration. Le calcul consiste à ajuster, de manière récurrente, la valeur du module afin d'obtenir, par l'intermédiaire du modèle analytique, les fréquences expérimentales.

Une étude de sensibilité du paramètre 'fréquences' est préalablement réalisée sur trois densités différentes (faible, moyenne et forte densité). Cette étude est une simulation numérique basée sur les paramètres d'entrée suivant : la poutre a pour dimension $20 \times 20 \times 400 \text{ mm}$, l'élément faible est caractérisé par sa position ($180, 200 \text{ mm}$) et par son module pris égal à $1/10$ du module sain. Les modules longitudinaux ou module sain ont pour valeur 15542 Mpa associée à une densité de $0,7 \text{ g/cm}^3$, 6494 Mpa associée à une densité de $0,3 \text{ g/cm}^3$, et 27078 Mpa associée à une densité de $1,2 \text{ g/cm}^3$. Les trois premières fréquences de vibration de flexion sont calculées par le modèle analytique. Ces fréquences sont ensuite biaisées de -15% , -10% , -5% , $+5\%$, $+10\%$ et $+15\%$. L'ajustement de la valeur du module d'élasticité de l'élément faible est ensuite réalisé sur ces nouvelles valeurs de fréquences.

Le calcul du module a été effectué à l'origine pour les trois fréquences. Cependant, dès que l'écart atteint $\pm 5\%$ sur les fréquences, l'ajustement numérique est impossible pour les modes 2 et 3. En conséquence, le calcul final du module n'est fait que pour le premier mode de vibration. Les résultats sont illustrés à la Figure 34. On observe que la densité n'influe pas sur le calcul du module. Par contre, le paramètre 'fréquence' est très sensible sur l'ajustement du module. Un écart de seulement $+5\%$ en fréquence, quelque soit la densité, provoque une surestimation de $18,4\%$ du module de l'élément faible.

Les résultats du calcul avec les valeurs expérimentales pour chaque éprouvette sont illustrés par la Figure 35 et la Figure 36. Seules 7 valeurs pour l'ébène verte et 8 valeurs pour le grignon franc ont pu être calculées en utilisant le premier mode de vibration ; dans les autres cas, l'ajustement numérique est impossible.

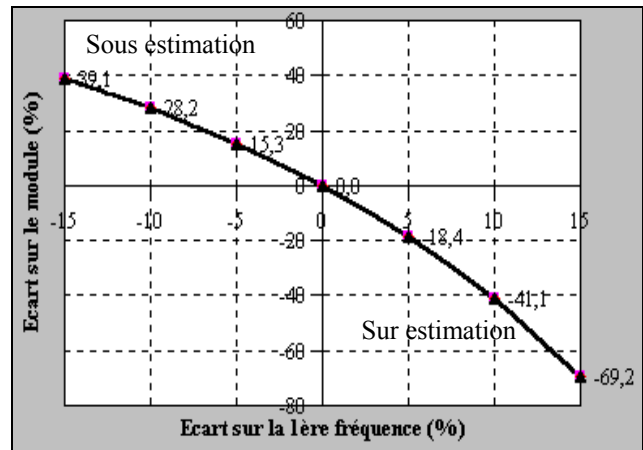


Figure 34 : Simulation numérique, écart sur le module de l'élément faible fonction de l'écart sur la première fréquence de vibration en flexion.
 - \blacktriangle $d=0,3 \text{ g/cm}^3$
 - \bullet $d=0,7 \text{ g/cm}^3$
 - \blacktriangle $d=1,2 \text{ g/cm}^3$

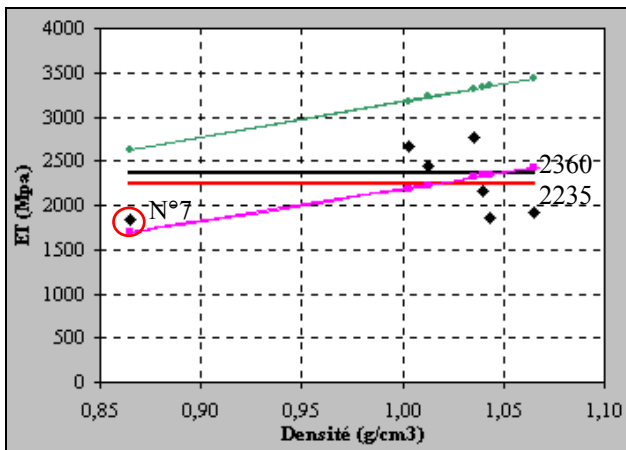


Figure 35 : Calcul du module 'tangentiel' pour l'ébène verte en utilisant les fréquences expérimentales de flexion.

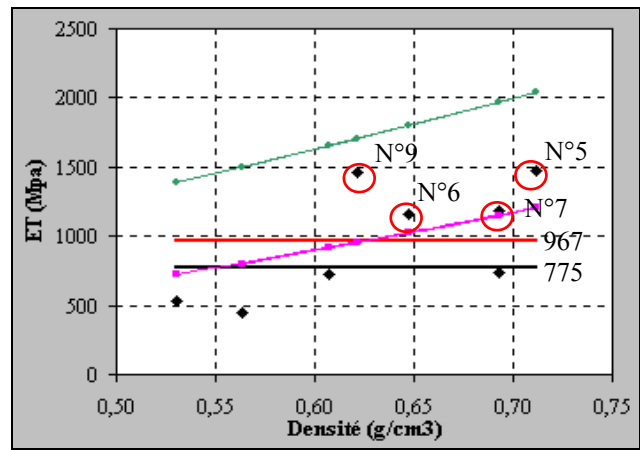


Figure 36 : Calcul du module 'tangentiel' pour le grignon franc en utilisant les fréquences expérimentales de flexion.
 - \blacklozenge Calculé 1^{er} mode
 - --- Moyenne calculée
 - --- Réf. (flexion)
 - --- Guitard ET
 - --- Guitard ER

La Figure 35 montre que, pour l'ébène verte, la valeur moyenne des modules calculés (2235 Mpa) est voisine de la valeur trouvée expérimentalement sur l'éprouvette reconstituée (2360 Mpa, Tableau 9). Les modules obtenus sont voisins des tendances des modules radial et tangentiels en fonction de la densité (ajustements de Guitard pour les feuillus). On retrouve également une valeur parmi les plus basses du module pour l'éprouvette 7 en accord avec sa faible densité.

L'ensemble des remarques de la Figure 35 s'appliquent à la Figure 36. Pour le grignon franc, on distingue nettement les éprouvettes 5, 6 et 9 dont le module est relativement fort par rapport à la moyenne de 967 Mpa en accord avec l'orientation du cube dans le sens radial. La forte valeur du module pour l'éprouvette 7 ne peut, a priori, s'expliquer que par un défaut de collage.

2.2.2 Sollicitation en compression

➤ Echantillons sains

Le module d'élasticité longitudinal a été évalué expérimentalement en flexion comme en compression. Le Tableau 11 montre les écarts obtenus entre le module longitudinal de compression, calculé pour les trois premières fréquences de vibration, et celui de flexion. Le module évalué en compression est supérieur à celui de flexion, les écarts étant presque tous négatifs. Cette constatation rejoint la remarque du paragraphe 2.1.4. La surestimation du module en vibration de compression est probablement causée par la viscoélasticité du matériau bois. Fort de cette remarque, l'écart entre module de flexion et module de compression doit augmenter avec le rang des fréquences considérées. Le Tableau 11 ne

permet pas de vérifier l'augmentation de l'écart avec le rang. Le nombre d'éprouvettes testées étant relativement faible (effectif de 23), il est difficile de déduire une tendance statistique significative. Les écarts constatés donnent seulement un ordre de grandeur.

Ecart de module (%)	Ebène verte			Grignon franc		
	1 ^{er} mode	2 ^{ème} mode	3 ^{ème} mode	1 ^{er} mode	2 ^{ème} mode	3 ^{ème} mode
Maximum	-0,6	+2,4	+2,0	+2,4	+4,4	+4,3
Minimum	-6,4	-8,5	-7,8	-9,2	-8,4	-7,7
Moyen	-2,6	-1,4	-1,6	-2,9	-3,1	-1,5

Tableau 11 : Ecart du module d'élasticité longitudinal évalué en compression pour les trois premiers modes par rapport au module évalué en flexion.

Il est toutefois possible d'évaluer l'influence de la viscosité sur les fréquences propres de vibration en compression.

$$E_x = 4L^2 \rho \frac{f^2}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{E_x \text{ flexion} - E_x \text{ compression}}{E_x \text{ flexion}} = 2 \frac{\Delta f_n}{f_n}$$

Les erreurs maximisées se déduisent alors de cette dernière équations :

Ebène verte : $\frac{\Delta f_1}{f_1} = -3,2\%$; $\frac{\Delta f_2}{f_2} = -4,3\%$; $\frac{\Delta f_3}{f_3} = -3,9\%$

Grignon franc : $\frac{\Delta f_1}{f_1} = -4,6\%$; $\frac{\Delta f_2}{f_2} = -4,2\%$; $\frac{\Delta f_3}{f_3} = -3,9\%$

➤ **Echantillons avec un élément faible**

Les trois premières fréquences de vibration ont été mesurées par percussion aux deux extrémités de chaque éprouvette. Statistiquement⁵, les fréquences ainsi mesurées sont équivalentes quelque soit l'extrémité sollicitée. Les résultats obtenus par 'déplacement' de l'élément faible le long d'une poutre sont donc symétriques par rapport à son milieu. Les fréquences mesurées par percussion aux deux extrémités permettent d'examiner 20 configurations de l'élément faible avec 10 échantillons.

➤ **Echantillon dont le cube élément faible est recollé sans changement d'orientation**

	Ebène verte			Grignon franc		
	Eprouvette d'origine	Eprouvette reconstituée	Ecart (%)	Eprouvette d'origine	Eprouvette reconstituée	Ecart (%)
1er mode	6036	6364	-5,4	6036	6338	-5,0
2ème mode	12118	12775	-5,4	12207	12911	-5,8
3ème mode	18108	19187	-6,0	18152	19250	-6,0

Tableau 12 : Ecart relatif expérimentaux relatant l'influence du collage sur les fréquences de vibration en compression.

L'influence du collage est ici étudiée sur une éprouvette pour chaque essence. Le Tableau 12 montre les résultats obtenus. Comme en flexion, les écarts sont presque tous négatifs ce qui correspond à une rigidification du matériau. La présence de plans de collage semble avoir une plus grande influence sur la mesure des trois premières fréquences de vibration en compression qu'en flexion. Le biais induit par les plans de collage est en effet de l'ordre de 6 % pour un cube recollé en vibration de compression, contre 3 % pour ce même cube en flexion.

➤ **Echantillon dont le sens tangentiel du bois est colinéaire à l'axe longitudinal**

Comme en vibration de flexion, le module d'élasticité tangentiel est évalué sur une éprouvette, pour chaque essence, reconstituée par collage de 14 petits cube de 20 mm de côté (soit 13 plans de collage, Figure 17). Le Tableau 13 montre les résultats obtenus.

Nature de la sollicitation	Ebène verte (d=1,044 g/cm ³) Module 'tangentiel' (OY) (Mpa)	Grignon franc (d=0,597 g/cm ³) Module 'tangentiel' (OY) (Mpa)
Compression	2737	912
Flexion	2360	775
Erreur	-16 %	-18 %

Tableau 13 : Mesure du module d'élasticité tangentiel en vibration de compression.

Compte tenu du biais systématique induit probablement par la viscosité du matériau ajouté à celui produit par les différents plans de collage, on prendra la valeur du module d'élasticité 'tangentielle' obtenue en flexion comme valeur de référence de chaque éprouvettes sans défaut. La valeur trouvée en vibration de flexion est donc utilisée dans le modèle analytique de compression (§ 1.2.5).

➤ **Influence de la présence d'un élément faible sur les fréquences propres de vibration**

L'étude de l'influence de la position d'un élément faible sur le décalage des fréquences est illustrée expérimentalement par la Figure 37 et la Figure 39. Ces courbes d'évolution sont similaires à celles obtenues par simulation numérique (Figure 18).

Le modèle analytique en compression est utilisé avec les valeurs du module d'élasticité longitudinal du matériau, de la densité, et du module 'tangentielle' mesurées en vibration de flexion pour chaque éprouvette. Ce sont donc les mêmes paramètres qui ont servi pour les modèles analytiques de flexion et de compression. Graphiquement, la Figure 38 et la Figure 40 montrent des évolutions similaires à celles de l'expérience.

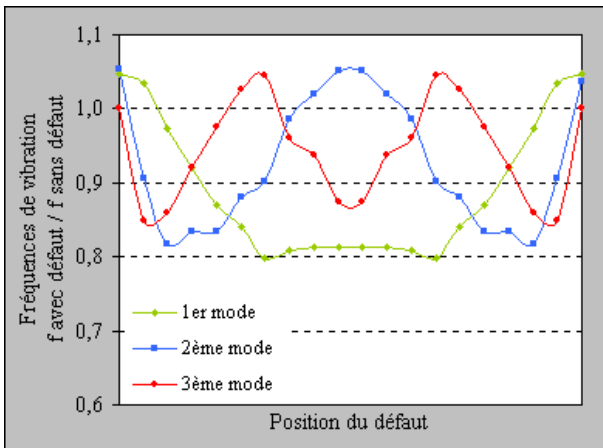


Figure 37 : Influence d'un élément faible sur la vibration en compression d'une poutre, essence ébène verte.

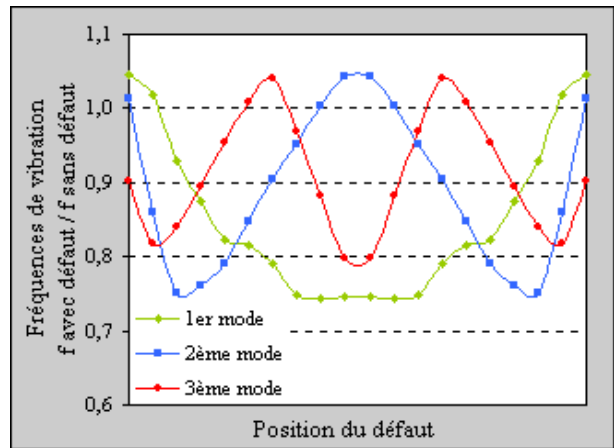


Figure 38 : Simulation de l'influence d'un élément faible sur la vibration en compression d'une poutre, essence ébène verte.

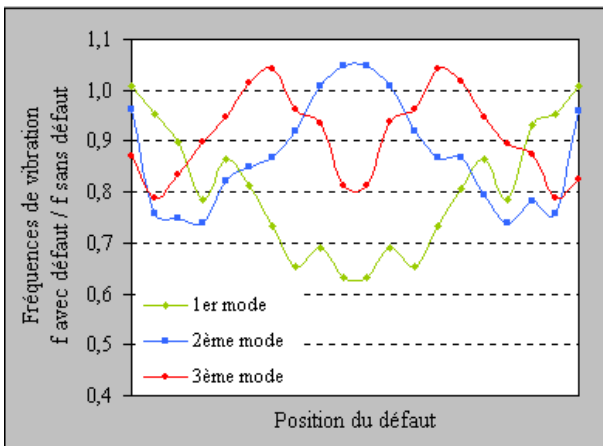


Figure 39 : Influence d'un élément faible sur la vibration en compression d'une poutre, essence grignon franc.

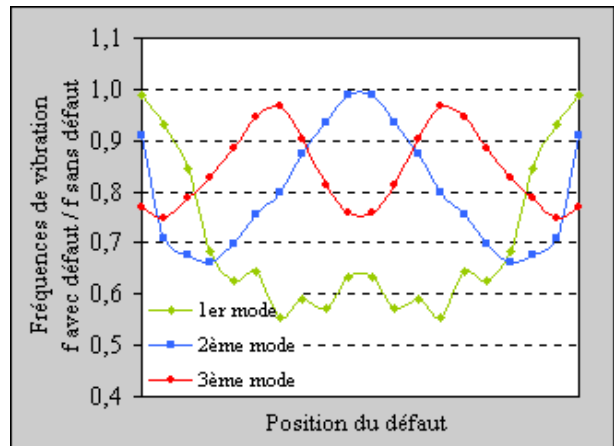


Figure 40 : Simulation de l'influence d'un élément faible sur la vibration en compression d'une poutre, essence grignon franc.

Le Tableau 14 donne les écarts entre les fréquences mesurées expérimentalement et celles calculées par le modèle analytique. Ces écarts ne seront considérés comme acceptables que si ils sont voisins des effets cumulés de l'incertitude sur la mesure des fréquences de vibration, de l'incertitude probablement due à la viscoélasticité du matériau, et de l'incertitude due aux plans de collage. Comme en flexion, l'incertitude liée à l'utilisation d'une valeur unique du module 'tangentielle' pour chaque éprouvette n'est pas prise en compte.

On rappelle les valeurs des incertitudes expérimentales sur la mesure des fréquences de vibration en compression (§ 2.1.4).

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = +0,61\% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +0,31\% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +0,21\%$$

L'influence de la viscosité sur les fréquences propres de vibration se traduit par les écarts suivants. Les fréquences mesurées expérimentalement étant supérieures aux fréquences théoriques en élasticité linéaire, les valeurs des écarts sont toutes positives.

$$\text{Ebène verte : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +3,2 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +4,3 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +3,9 \%$$

$$\text{Grignon franc : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +4,6 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +4,2 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +3,9 \%$$

Les incertitudes liées aux plans de collage sont les suivantes :

$$\text{Ebène verte : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +5,4 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +5,4 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +6,0 \%$$

$$\text{Grignon franc : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +5,0 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +5,8 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +6,0 \%$$

Les écarts, correspondant aux effets cumulés de l'incertitude de mesure, de la viscoélasticité du matériau, et des plans de collage, sont alors les suivants. Ils donnent un ordre de grandeur, car l'erreur liée à l'utilisation d'une valeur unique du module 'tangential' n'est pas prise en compte.

$$\text{Ebène verte : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +9,2 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +10,0 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +10,1 \%$$

$$\text{Grignon franc : } \frac{\Delta f_1}{f_1} = +10,2 \% ; \frac{\Delta f_2}{f_2} = +10,3 \% ; \frac{\Delta f_3}{f_3} = +10,1 \%$$

Epreuve N°	Ecarts pour l'ébène verte			Orientation du cube	Collage
	Fréquences de vibration				
	f1 (%)	f2 (%)	f3 (%)		
1	3,2	4,5	11,6	45°	bon
2	5,6	9,5	9,1	tangentiel	moyen
3	8,6	13,4	7,0	45°	moyen
4	9,8	12,5	6,6	45°	bon
5	10,1	8,9	5,2	45°	bon
6	10,9	1,2	1,9	tangentiel	bon
7	3,3	10,8	8,1	45°	bon
8	12,6	6,3	1,8	45°	bon
9	13,3	3,2	8,4	radial	bon
10	13,5	2,7	9,7	radial	bon

Epreuve N°	Ecarts pour le grignon franc			Orientation du cube	Collage
	Fréquences de vibration				
	f1 (%)	f2 (%)	f3 (%)		
1	0,2	3,8	9,1	45°	bon
2	1,4	3,8	2,1	45°	moyen
3	4,2	8,1	4,0	45°	moyen
4	12,2	10,3	7,4	45°	bon
5	28,7	16,4	8,0	radial	bon
6	21,8	12,1	7,6	radial	bon
7	23,6	9,1	7,1	45°	mauvais
8	9,6	3,9	5,9	45°	bon
9	15,8	6,1	11,5	radial	mauvais
10	-1,7	4,5	4,9	45°	bon

Tableau 14 : Ecart relatif entre les résultats expérimentaux et le modèle analytique en compression.

Le Tableau 14 montre que les écarts relatifs entre les résultats expérimentaux et le modèle analytique en compression sont acceptables car voisins des ordres de grandeur calculés. Les écarts trop importants sont surlignés en jaune dans le Tableau 14.

Les éprouvettes en grignon franc 5, 6 et 9 possèdent de fortes valeurs d'écart dues à une mauvaise orientation du cube (sens radial). Le collage imparfait de l'éprouvette 7 permet d'expliquer l'écart important entre valeur théorique et expérimentale des fréquences.

➤ **Evaluation du module d'élasticité 'tangential'**

Comme en flexion, le module d'élasticité 'tangential' de chaque éprouvette est calculé en utilisant les valeurs expérimentales des fréquences de vibration.

Une étude de sensibilité du paramètre 'fréquences' est préalablement réalisée sur trois densités différentes (faible, moyenne et forte densité). Les paramètres d'entrée sont les mêmes que pour l'étude en flexion (Figure 34).

Le calcul du module a été effectué à l'origine pour les trois fréquences. Cependant, dès que l'écart atteint $\pm 5\%$ sur les fréquences, l'ajustement numérique est impossible pour les modes 2 et 3. En conséquence, le calcul final du module n'est fait que pour le premier mode de vibration.

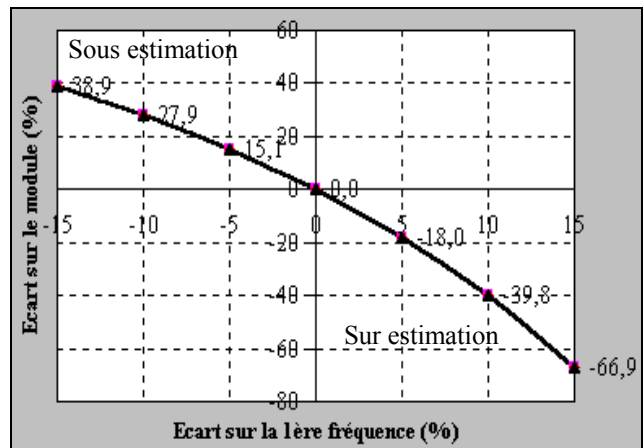


Figure 41 : Simulation numérique, écart sur le module de l'élément faible fonction de l'écart sur la première fréquence de vibration en compression.

Les résultats sont illustrés à la Figure 41. Comme en flexion (Figure 34), on observe que la densité n'influe pas sur le calcul du module. Par contre, le paramètre 'fréquence' est très sensible sur l'ajustement du module. Un écart de seulement $+5\%$ en fréquence, quelque soit la densité, provoque une surestimation de 18% du module de l'élément faible. Les courbes d'évolution, Figure 34 et Figure 41, montrent des évolutions et des grandeurs proches.

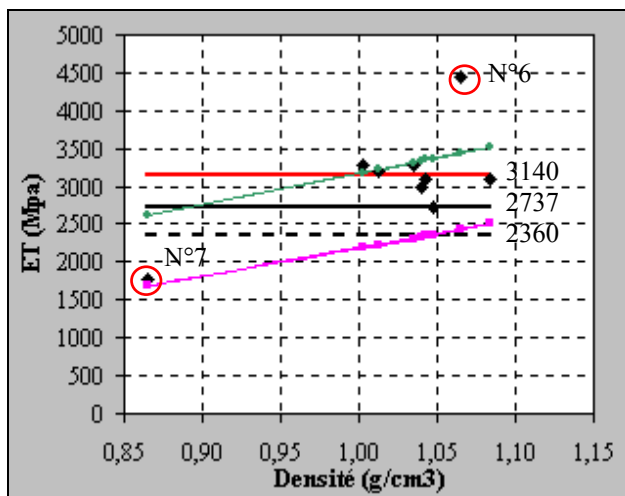


Figure 42 : Calcul du module 'tangential' pour l'ébène verte en utilisant les fréquences expérimentales de compression.

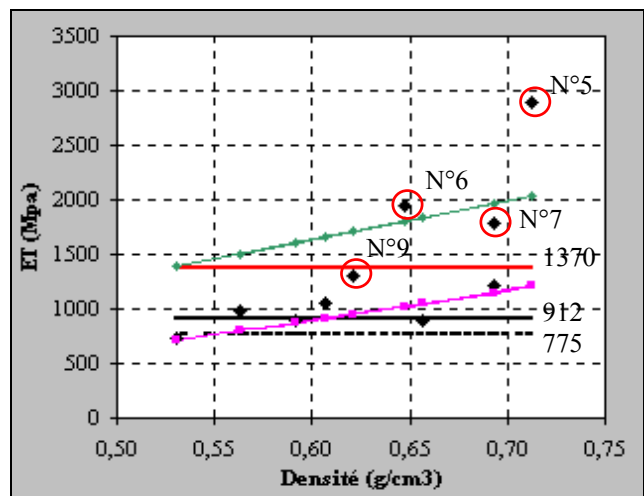


Figure 43 : Calcul du module 'tangential' pour le grignon franc en utilisant les fréquences expérimentales de compression.

Les résultats du calcul avec les valeurs expérimentales pour chaque éprouvette sont illustrés par la Figure 42 et la Figure 43. Neuf valeurs pour l'ébène verte et les 10 valeurs du grignon franc ont pu être calculées en utilisant le premier mode de vibration ; dans l'autre cas, l'ajustement numérique est impossible.

Comme en flexion, la Figure 42 montre que, pour l'ébène verte, la valeur moyenne des modules calculés (3140 Mpa) est voisine de la valeur trouvée expérimentalement en compression sur l'éprouvette reconstituée (2737 Mpa, Tableau 13). Les modules obtenus sont voisins des tendances des modules radial et tangential en fonction de la densité (ajustements de Guitard pour les feuillus). On retrouve également une valeur parmi les plus basses du module pour

l'éprouvette 7 en accord avec sa faible densité. L'éprouvette 6 a une très forte valeur du module ajusté (4440 Mpa) par rapport à la moyenne calculée (3140 Mpa). Ce comportement atypique se retrouve en flexion, mais dans ce cas le module calculé de l'éprouvette 6 est parmi les plus basses valeurs (1911 Mpa). La valeur relativement faible du module d'élasticité longitudinal (20976 Mpa) de cette éprouvette ne permet pourtant pas d'expliquer son comportement particulier en compression. Il est très probable qu'une imprécision dans la mesure des fréquences de compression soit à l'origine de ce phénomène. Une simulation numérique avec un écart de -5% sur le premier mode de vibration donne en effet un module d'élément faible en compression de 3350 Mpa au lieu des 4440 Mpa préalablement obtenus.

Pour le grignon franc (Figure 43), on distingue nettement les éprouvettes 5, 6 et 9 dont le module est relativement fort par rapport à la moyenne de 1370 Mpa en accord avec l'orientation du cube dans le sens radial. La forte valeur du module pour l'éprouvette 7 ne peut, à priori, s'expliquer que par un défaut de collage.

➤ **Comparaison entre module 'tangential' évalué en flexion et en compression**

Les valeurs des module d'élasticité 'tangential', ajustées pour chaque éprouvette, en flexion et en compression sont mises en relation dans la Figure 44 et la Figure 45.

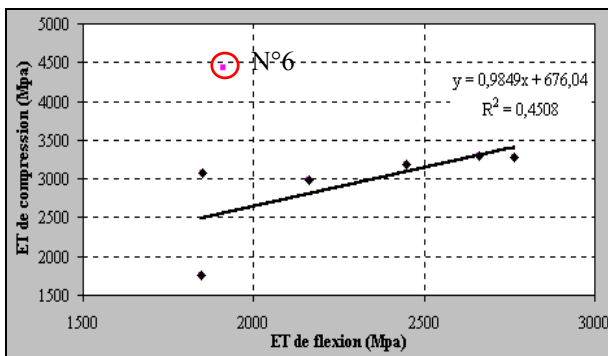


Figure 44 : Comparaison des modules 'tangentiels' évalués en flexion et en compression pour l'ébène verte.

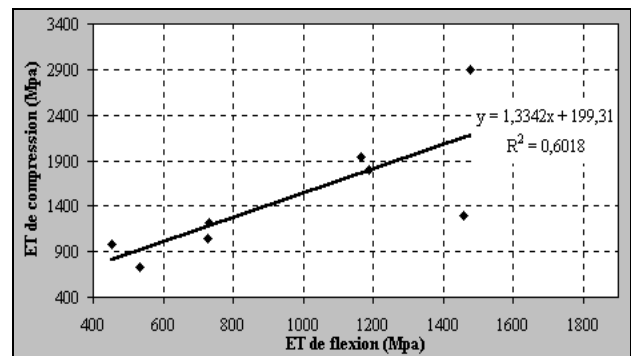


Figure 45 : Comparaison des modules 'tangentiels' évalués en flexion et en compression pour le grignon franc.

Pour chacune des deux essences, une régression linéaire est effectuée. Concernant l'ébène verte, l'éprouvette 6, de couleur bleue sur la Figure 44, n'est pas pris en compte dans le calcul de la régression car la valeur du module en compression semble être erronée.

Les résultats obtenus montrent que le module de compression est en moyenne plus fort de 29% pour l'ébène verte et de 54% pour le grignon franc que le module calculé en flexion. Ce phénomène s'explique par la viscoélasticité du matériau bois (voir remarque 2 du paragraphe 2.1.4). La viscosité du matériau fait que les fréquences de compression sont supérieures à celles d'un matériau élastique pur (cas de la théorie, § 1). Or le paramètre 'fréquence' est très sensible sur l'ajustement du module (Figure 34 et Figure 41), ce qui explique la sur estimation importante du module en compression par rapport à une vibration de flexion. La valeur correcte du module de l'élément faible doit en conséquence être obtenue par un ajustement en flexion.

3 SIMULATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE D'UNE POUTRE COMPORTANT PLUSIEURS ELEMENTS FAIBLES

3.1 Modélisation par la méthode des éléments finis

L'objet de ce chapitre est de décrire le comportement d'une poutre de grand élancement, comportant un ou plusieurs éléments faibles, en vibrations longitudinales ou transversales à partir de la méthode des éléments finis. Le modèle de Bernoulli est utilisé pour décrire le comportement dynamique d'une poutre homogène en vibrations transversales. Le modèle par éléments finis obtenu sera ensuite confronté à la modélisation analytique déjà développée en exprimant la continuité des grandeurs mécaniques au niveau de chaque interface. Un élément faible est défini physiquement par deux paramètres de position et par son module d'élasticité (Figure 14). L'élément faible est repéré par la position des deux interfaces (l_1, l_2). On note le module d'élasticité longitudinal selon l'axe (OX) de la structure saine 'E' et le module de l'élément faible 'E₀'.

La modélisation de la structure "poutre singulière" représentée à la Figure 14 a été réalisée avec le code de calcul par éléments finis CASTEM2000. A l'origine, ce code a été développé par le Département de Mécanique et de Technologie (DMT) du Commissariat français à l'Energie Atomique (CEA) (Locatelli, 1999). Le développement de CASTEM2000 entre dans le cadre d'une activité de recherche dans le domaine de la mécanique ; le but étant de définir un instrument de haut niveau, pouvant servir de support valable pour la conception, le dimensionnement et l'analyse de structures et de composants, dans le domaine nucléaire comme dans le secteur industriel classique. CASTEM2000 permet de traiter des problèmes d'élasticité linéaire notamment dans le domaine dynamique. le programme de calcul qui, dès que la sélection d'une procédure de résolution est donnée, envoie une série de processus que l'utilisateur est contraint d'utiliser en "boîte noire".

La modélisation d'une poutre comportant un élément faible en vibrations longitudinales a été réalisée avec un modèle à une dimension, le modèle 'BARRE'. Ce modèle, comme celui utilisé en vibrations transversales utilise l'opérateur 'VIBR'. Cette opérateur recherche les valeurs et les modes propres d'un système physique représenté par sa rigidité et sa masse.

La modélisation en vibrations transversales utilise également un modèle à une dimension, le modèle 'POUT'. Ce modèle de poutre correspond à celui de Bernoulli. Le matériau est considéré comme élastique isotrope. La variable déclarée est le module d'Young E_x, le coefficient de Poisson ν_{xy} étant toujours pris égal à zéro. Un exemple de déformée en vibrations de flexion est donnée à la Figure 46.

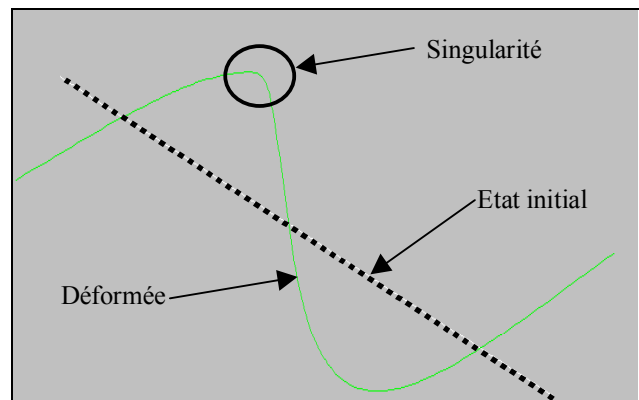


Figure 46 : Déformée de rang 2 en vibrations transversales d'une poutre comportant une singularité (CASTEM2000).

3.2 Comparaison entre l'approche analytique et la méthode des éléments finis

3.2.1 Poutre comportant un élément faible

(a) Vibrations en compression

Le calcul des trois premières fréquences en vibrations longitudinales a été effectué sur 20 poutres en utilisant la solution analytique et la méthode des éléments finis. Les poutres ont pour dimensions 20x20x400 mm, et sont divisées en deux lots de 10 éprouvettes correspondant aux essences ébène verte ($d_{12}=1,10 \text{ g/cm}^3$, $E_L=23200 \text{ Mpa}$) et grignon franc ($d_{12}=0,65 \text{ g/cm}^3$, $E_L=12700 \text{ Mpa}$). Ces éprouvettes ont été utilisées lors de la validation expérimentale de la solution analytique. Les caractéristiques physiques et mécaniques de chaque éprouvette mesurées sont les paramètres du calcul numérique des fréquences. Les résultats obtenus (Tableau 15) montre qu'il existe un très faible écart ($<10^{-1}\%$) entre les deux méthodes.

Ebène verte	Ecart relatif (%)			Grignon franc	Ecart relatif (%)		
Nombre : 10	f1	f2	f3	Nombre : 10	f1	f2	f3
Moyenne	$<10^{-1}$	$<10^{-1}$	$<10^{-1}$	Moyenne	$<10^{-1}$	$<10^{-1}$	$<10^{-1}$
Ecart type	0,006	0,005	0,008	Ecart type	0,010	0,009	0,014

Tableau 15 : Ecart relatif (%) entre résultats analytiques et calculs par éléments finis concernant les trois premières fréquences en vibrations longitudinales sur 10 poutres comportant un élément faible.

(b) Vibrations en flexion

Comme en vibrations longitudinales, Le calcul des trois premières fréquences en vibrations transversales, sur dix poutres comportant une singularité pour chaque essence, en utilisant la solution analytique et la méthode des éléments finis montre l'existence d'un très faible écart (<3%) entre les deux méthodes (Tableau 16).

Ebène verte	Ecart relatif (%)			Grignon franc	Ecart relatif (%)		
Nombre : 10	f1	f2	f3	Nombre : 10	f1	f2	f3
Moyenne	-0,5	-1,3	-2,1	Moyenne	-0,6	-1,3	-2,2
Ecart type	0,1	0,2	0,3	Ecart type	0,1	0,2	0,5

Tableau 16 : Ecart relatif (%) entre résultats analytiques et calculs par éléments finis concernant les trois premières fréquences en vibrations transversales sur 10 poutres comportant un élément faible.

Les deux méthodes de calcul donnent des résultats équivalents. Cependant, la solution analytique demande moins de calculs (4 matrices carrées 4x4) que la méthode des éléments faibles (maillage en 400 éléments, ce qui impose 2 matrices carrées 400x400) (Imbert, 1991). La solution analytique proposée est de plus auto – adaptative ; à partir du nombre d'éléments indiqué, l'algorithme génère lui même le modèle analytique correspondant sans intervention de l'utilisateur.

La méthode des éléments finis est employée ici pour vérifier si la solution analytique proposée ne produit pas d'erreur. C'est pourquoi, une comparaison des résultats entre ces deux méthodes a semblé nécessaire dans le cas particulier où le nombre d'éléments faibles croît de manière importante, avec une distribution spatiale située à la fois dans les deux demi - poutres.

3.2.2 Poutre comportant plusieurs éléments faibles

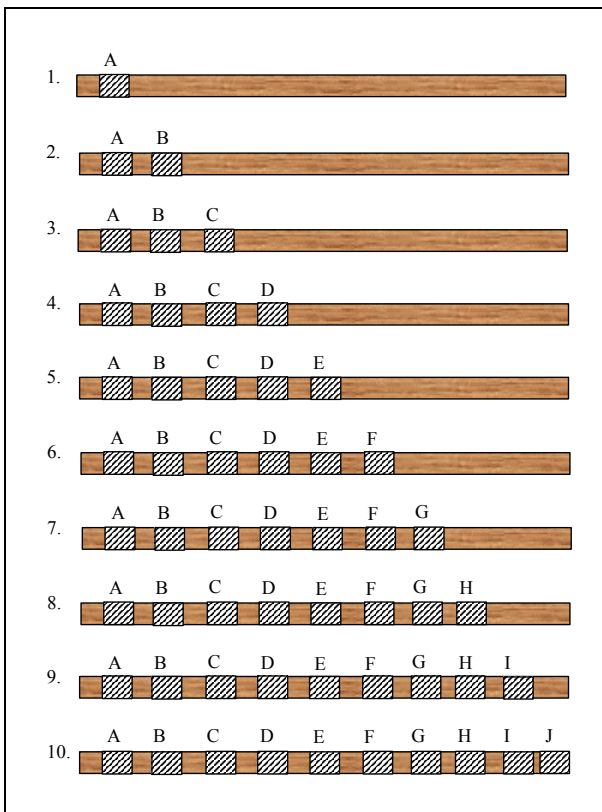


Figure 47 : Configurations testées pour une poutre comportant plusieurs éléments faibles.

$E_0 = 1440 \text{ Mpa}$	
Elément faible	Position I1 / I2 (mm)
A	5 / 105
B	110 / 190
C	195 / 255
D	260 / 300
E	305 / 325
F	330 / 340
G	345 / 375
H	380 / 430
I	435 / 505
J	510 / 600

Tableau 17 : Positions des éléments faibles dans la poutre.

Afin de comparer les résultats entre solution analytique et méthode des éléments finis, dix configurations différentes de poutre comportant de 1 à 10 éléments faibles ont été envisagées (Figure 47 et Tableau 17).

Les caractéristiques géométriques de la poutre saine sont de 20x20x600 mm, avec une densité d de 0,65 g/cm³, et un module d'élasticité E_x de 14400 Mpa.

Le module des singularités est choisi constant, et a une valeur E_0 de 1440 Mpa, soit 1/10^{ème} de E_x . Chaque élément est espacé du suivant de 5 mm, et a une taille variable allant de 10 mm jusqu'à 100 mm (Tableau 17).

Les résultats de la comparaison des valeurs des trois premières fréquences de vibration longitudinale et transversale obtenues avec la solution analytique et la méthode des éléments finis sont regroupés dans le Tableau 18.

Compression	Ecart relatif (%)			Flexion	Ecart relatif (%)		
	f1	f2	f3		f1	f2	f3
Nombre : 10				Nombre : 10			
Moyenne	$<10^{-1}$	$<10^{-1}$	$<10^{-1}$	Moyenne	-0,2	-0,8	-1,1
Ecart type	0,021	0,008	0,006	Ecart type	0,4	0,1	0,1

Tableau 18 : Ecart relatif (%) entre résultats analytiques et calculs par éléments finis concernant les trois premières fréquences en vibrations longitudinales et transversales sur 10 poutres comportant de 1 jusqu'à 10 éléments faibles de taille variable.

Les résultats du Tableau 18 montrent que les écarts de calcul sont faibles ($<10^{-1}\%$ en compression, et $<2\%$ en flexion) par rapport à la méthode des éléments finis. La solution analytique ne produit pas d'erreur significative dans le cas extrême où 10 éléments sont présents dans la poutre. Dans la configuration 10 (Figure 47), la différence relative entre première fréquence de vibration par rapport à la poutre saine associée est d'environ 67% en vibration longitudinale comme en vibration transversale.

4 CARACTERISATION D'UNE POUTRE COMPORTANT UN ELEMENT FAIBLE A PARTIR DE SA REPOSE VIBRATOIRE

4.1 Problématique

L'étude de la réponse vibratoire d'une poutre comportant un ou plusieurs éléments faibles, réalisée aux paragraphes 1.2, 2 et 3, apporte une réponse au problème suivant : connaissant les caractéristiques physiques et mécaniques en tout point d'une poutre comportant un ou plusieurs éléments faibles, est-il possible d'évaluer la valeur des fréquences naturelles de vibrations en compression ou en flexion de la poutre ?

Vouloir caractériser mécaniquement les éventuelles faiblesses locales présentes dans une poutre à partir de la mesure expérimentale de ses vibrations conduit à résoudre le problème énoncé ci-dessus dans le sens inverse, les inconnues devenant les données de départ (les fréquences de vibration), et les données physiques et mécaniques devenant les paramètres recherchés. C'est pourquoi le problème de caractérisation des faiblesses locales de la poutre est qualifié de problème inverse par opposition au problème direct d'évaluation des fréquences de vibrations (Dupuis, 1999).

Afin de résoudre correctement le problème inverse, il est nécessaire d'en expliciter la nature. Il existe en effet deux catégories de problèmes inverses :

- ✓ Les problèmes bien posés sont tels que (a) la solution existe, (b) la solution est unique, (c) une petite erreur sur les données entraîne une petite erreur sur la solution.
- ✓ Les problèmes mal posés, qui violent l'une au moins des conditions (a) à (c) définies ci-dessus (Dupuis, 1999).

Dans notre cas, si une solution existe, son unicité doit être démontrée ; il existe de plus des incertitudes aussi bien expérimentales que théoriques :

- ✓ Les données fréquentielles ont une origine expérimentale, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure. Elles sont également collectées en nombre fini, une analyse modale ne permet en générale l'accès qu'à trois ou quatre fréquences propres.
- ✓ Le modèle analytique est construit à partir d'hypothèses simplificatrices, et correspond à une idéalisation de la réalité physique. Trouver une solution au problème inverse revient à essayer de faire correspondre au mieux la réalité de la structure testée avec l'analogie mécanique du modèle à un ou plusieurs éléments faibles.

La sensibilité du problème inverse aux incertitudes conduit à modifier la notion académique de "solution" ; en effet tout vecteur de paramètres qui reproduit aux incertitudes près, via le modèle analytique, la mesure expérimentale est une réponse a priori possible au problème inverse. Un problème inverse, pour un modèle physique et une série de mesurés expérimentales données, peut n'avoir aucune solution au sens strict, mais beaucoup de solutions à "epsilon" près (Dupuis, 1999).

En vibrations longitudinales, les données du problème inverse sont les trois ou quatre premières fréquences de vibration, la longueur, la densité, et le module d'élasticité de la structure saine. En vibrations transversales, il faut ajouter aux paramètres précédents la hauteur et l'épaisseur de la poutre. Pour chaque poutre étudiée, seules quatre données expérimentales au maximum doivent permettre l'identification des caractéristiques des éléments faibles : positions des deux interfaces, et module d'élasticité, soit au total trois inconnues par élément. De ces dernières remarques on déduit que seul un élément faible peut être caractériser en utilisant les données expérimentales disponibles. Cet élément faible peut être considéré dans l'analogie mécanique de comportement comme la plus grande faiblesse de la structure physique dont le rôle sera prépondérant lors de la rupture de la poutre.

4.2 Formulation mathématique du problème

Dans les développements qui suivent, on adoptera les notations suivantes :

- Les fréquences expérimentales, notées y_k ($k \in \mathbb{N}$), sont contenues dans un vecteur Y .
- Les données géométriques, notées z_p ($p \in \mathbb{N}$), sont contenues dans un vecteur Z .
- Les caractéristiques de l'élément faible, notées x_n ($n \in \mathbb{N}$), sont contenues dans un vecteur X .
- L'ensemble des opérations qui permettent de calculer les fréquences propres à partir des données géométriques et des caractéristiques de l'élément faible sont contenues dans la fonction F . Trouver Y à partir de Z et X revient à résoudre le problème direct (Eq. 78).

$$\text{Eq. 78 } F(Z, X) = Y$$

L'optimisation paramétrique est utilisée pour trouver un vecteur de paramètres $X_{\text{opt}} = [x_1, x_2, x_3]$, caractérisant l'élément faible, qui peut être considéré comme optimal vis à vis du critère adopté. Ce critère correspond, dans le cas présent, à la

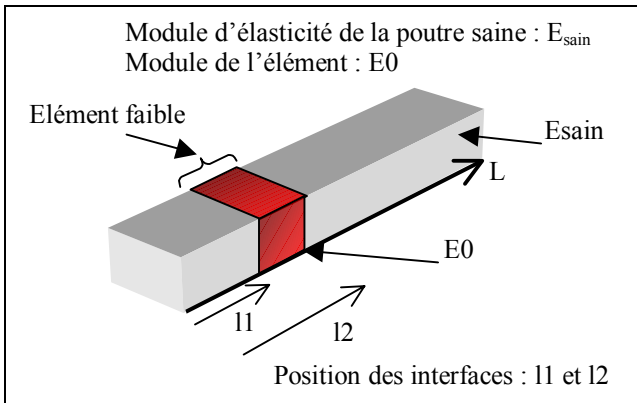
minimisation d'une fonction objectif ou fonctionnelle, notée f . Le vecteur solution recherchée X_{opt} peut être soumis à des contraintes notées G_1 ou G_2 , selon leur nature respective, on écrira (MathWorks, 1997) :

$$\text{Eq. 79 Trouver } X_{opt} \text{ tel que : } \begin{cases} f(X_{opt}) = \min\{f(X)\} \\ G_1(X_{opt}) \leq 0 \\ G_2(X_{opt}) = 0 \end{cases}, \text{ avec } \begin{cases} X \in R^n \\ f(X) : R^n \rightarrow R \end{cases}$$

La qualité de la solution trouvée dépend de la construction mathématique de la fonctionnelle (fonction f , Eq. 79), des fonctions de contraintes G_1 et G_2 , mais aussi de la méthode de résolution du problème inverse utilisée. Dans le cas présent, la fonctionnelle peut s'écrire sous la forme d'écart quadratiques (MathWorks, 1997 ; Lavelle, 2000), le problème inverse revient alors à minimiser les écarts quadratiques :

$$\text{Eq. 80 } f(X) = \sum_k (y_k - F_k(Z, X))^2$$

La fonctionnelle écrite sous la forme de l'équation (Eq. 80) ne prend pas en compte les éventuelles contraintes G_1 et G_2 de l'équation (Eq. 79). La solution que nous recherchons permet de caractériser un système physique particulier et ne peut par conséquent prendre certaines valeurs physiquement irréalistes (Figure 48, Tableau 19). Les valeurs maximales de la position de la première interface et de la taille de l'élément sont fixées à la demi-longueur de la poutre (Tableau 19). Avec un seul élément faible, le problème direct est en effet symétrique par rapport au milieu de la poutre. Des contraintes de type G_1 doivent donc être ajoutées (Tableau 19). L'existence de ces contraintes va contribuer à la régularisation du problème inverse.



Paramètre	Borne inférieure	Borne supérieure
Module E0	200 MPa	Esain
Position l1	0	L/2
Taille (l2-l1)	0	L/2

Figure 48 : Paramètres caractéristiques d'un élément faible, vecteur $X=[E0,l1,(l2-l1)]$.

Tableau 19 : Contraintes physiques sur les paramètres caractéristiques d'un élément faible.

La régularisation d'un problème inverse consiste en une reformulation de celui-ci et poursuit un objectif double (Dupuis, 1999) : (a) définir un cadre qui permette de prendre en compte, en plus du problème direct, des informations supplémentaires provenant de considérations physiques, (b) faire en sorte que la solution obtenue soit plus stable par rapport aux incertitudes du problème. Il existe de nombreuses méthodes de régularisation comme par exemple l'ajout d'une fonctionnelle stabilisatrice, la réduction du paramétrage, le filtrage, ou l'introduction de contraintes (Dupuis, 1999).

Dans le cas présent, la prise en compte de contraintes de type G_1 dans la fonctionnelle se fait par l'intermédiaire de fonctions de pénalité (MathWorks, 1997 ; Rade et Westergren, 1999). L'expression générale des fonctions de pénalité, notées R , est donnée par Rade (1999) :

$$\text{Eq. 81 } R(X) = \begin{cases} 0, X \in D \\ \rightarrow \infty, X \notin D \end{cases}, \text{ avec } D \in R^n \text{ le domaine d'étude, } R(X) : R^n \rightarrow R$$

La fonctionnelle régularisée, notée f^* , en utilisant une fonction de pénalité s'écrit alors :

$$\text{Eq. 82 } f^*(X) = f(X) + R(X)$$

D'une manière pratique, on écrit la fonction de pénalité sous la forme (Rade et Westergren, 1999) :

$$\text{Eq. 83 } R(X) = \sum_{n,m} \lambda_{n,m} g_{n,m}(x_n), \text{ avec } m : \text{ le nombre de contraintes relatives à } x_n$$

Les fonctions g_n sont convexes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et prennent en compte la distance entre le vecteur courant X et la frontière du domaine. Une fonction de pénalité peut par exemple avoir la forme représentée à la Figure 49 (MathWorks, 1997). Les nombres λ_n activent la pénalisation si une des composantes x_n est en dehors du domaine fixé (MathWorks, 1997).

Afin de mettre en œuvre la procédure d'optimisation, les fonctions de pénalité sont construites de la manière suivante :

- Les nombres λ_n sont des booléens tels que :

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & x_n \in d_n, \text{ avec } d_n \subset D \\ 1, & x_n \notin d_n \end{cases}$$

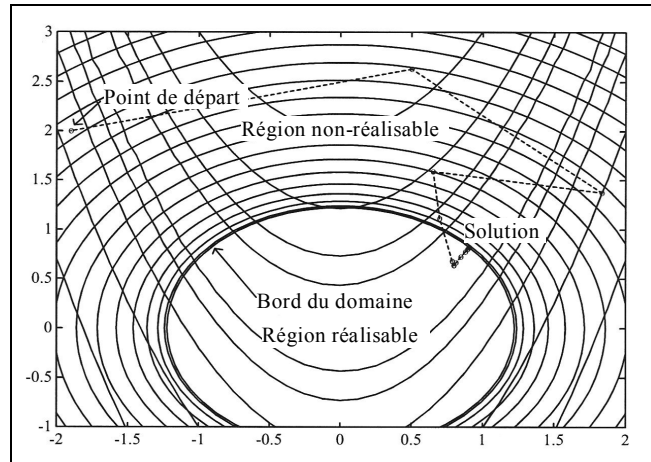


Figure 49 : Exemple de fonction de pénalité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , le vecteur courant (point de départ) est ramené dans la zone réalisable pour se placer sur la solution (MathWorks, 1997).

- Les fonctions g_n sont des fonctions polynomiales d'ordre quatre basées sur le calcul de l'écart relatif par rapport à la borne du domaine considérée. Ces fonctions assurent une divergence "douce" en l'infini afin d'éviter de dépasser trop rapidement la valeur numérique maximale de l'ordinateur (la procédure d'optimisation échoue alors, car la fonctionnelle retourne systématiquement la grandeur non numérique correspondant à l'infini) :

Eq. 84
$$\begin{cases} g_n(x_n) = \left(\frac{x_n - b}{b} * 100 \right)^4, & \text{avec } b \neq 0 \text{ et } b : \text{borne de } d_n \\ g_n(x_n) = (x_n * 100)^4, & \text{avec } b = 0 \end{cases}$$

4.3 Méthodes d'optimisation

Le choix de la méthode de minimisation dépend avant tout des propriétés de la fonctionnelle choisie et de la nature des contraintes éventuellement présentes (Dupuis, 1999). Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation et des ouvrages entiers leur sont consacrés (Neumaier, 1995 ; Pinter, 1999 ; Lavelle, 2000). Etablir une liste exhaustive de l'ensemble des méthodes existantes n'est pas aisée, d'autant plus que ce domaine des mathématiques appliqués est en constante évolution (Lavelle, 2000). Cependant les méthodes les plus classiques sont ici abordées (à l'exception des réseaux de neurones) et décrites de manière succincte. L'étude de ces différentes méthodes permet d'expliquer le choix et la mise en œuvre de la méthode d'optimisation qui a été retenue dans le cas présent.

4.3.1 Optimisation locale

Les méthodes d'optimisation locale sont utilisées lorsque la fonctionnelle à minimiser ne présente qu'un seul minimum correspondant à la solution optimale. Dans les développements qui suivent, on supposera la fonctionnelle continue et différentiable, au moins de classe C^2 . Le cas de figure où la fonctionnelle est continue et différentiable est très important en pratique, et correspond à tous les problèmes résolus par la méthode des moindres carrés, c'est à dire reposant sur la minimisation de distances entre données mesurées et calculées en norme quadratique (Dupuis, 1999).

Les algorithmes classiques de minimisation faisant appel à l'évaluation du gradient peuvent alors être utilisés. Les méthodes du gradient utilisent l'information de la pente de la fonction pour déduire une suite de directions de descente et converger ainsi vers le minimum (MathWorks, 1997). La plus simple de ces méthodes est celle de la plus grande descente, d'autres méthodes plus robustes sont nommées quasi-Newton, Gauss-Newton, et Levenberg-Marquardt (MathWorks, 1997 ; Dupuis, 1999 ; Rade et Westergren, 1999). Chaque type d'algorithme mentionné se distingue notamment par le principe de construction de la suite de directions de recherche (pour les plus évolués la matrice hessienne est évaluée).

Une autre technique de minimisation consiste à utiliser la méthode du simplexe (Delacroix et Porte, 1997). Dans cette méthode, on cherche à s'orienter vers l'optimum, par itérations successives, en choisissant la direction opposée au point de la plus mauvaise évaluation de la fonctionnelle.

La Figure 50 illustre graphiquement ce principe. En plus de l'expérience du point de base (0), deux autres tests sont effectués en (1) et (2) de façon à former une figure régulière à (k+1) sommets (k étant le nombre de variables) appelée simplexe. Dans le cas de la Figure 50, il s'agit d'un triangle équilatéral. L'ensemble des tests ayant été effectué, les réponses de la fonctionnelle sont comparées et le plus mauvais point est déterminé (0 dans le cas présent). Le principe est de s'éloigner du plus mauvais point, pour ce faire, un nouveau test est réalisé au point symétrique du plus mauvais (3). L'opération est ensuite réitérée jusqu'à ce que l'optimum soit atteint (Delacroix et Porte, 1997 ; Rade et Westergren, 1999).

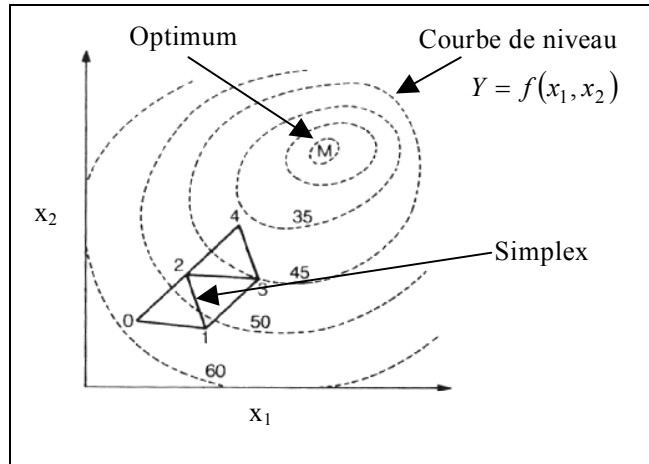


Figure 50 : Principe de la méthode simplexe (Delacroix et Porte, 1997).

Devant la facilité de mise en œuvre et la souplesse de cette méthode, de nombreux auteurs ont souhaité l'améliorer concernant sa rapidité et son efficacité. Nous présentons les principes d'une des méthodes dérivées la plus classique et très largement utilisée, la méthode de Nelder et Mead (Delacroix et Porte, 1997; MathWorks, 1997). Le principe de construction du simplexe reste le même, le symétrique du plus mauvais point du simplexe (WBN) de la Figure 51 est par exemple R. A ce moment, trois cas sont envisageables : (1) la réponse R est meilleure que celles de W, B, et N. Le simplexe est alors dilaté (expansion) de R vers le point E car la direction trouvée semble la bonne. Les réponses en R et E sont ensuite comparées et le meilleur point est retenu pour construire le nouveau simplexe. (2) la réponse en R est comprise entre celles des points B et N, une nouvelle itération a lieu sans modification par rapport à la méthode initiale. (3) la réponse en R est inférieure à celles des points B et N, afin de s'assurer que l'optimum n'est pas entre W, B, N, et R (par exemple en G) le simplexe a la possibilité de se contracter en C_R ou C_W selon que le test en R est meilleur que W ou l'inverse. Après contraction, le meilleur point parmi R, C_R ou W, C_W est conservé. Si le point R ou W est conservé, il est préférable de changer de direction et d'évoluer à partir du second plus mauvais point recensé (Delacroix et Porte, 1997).

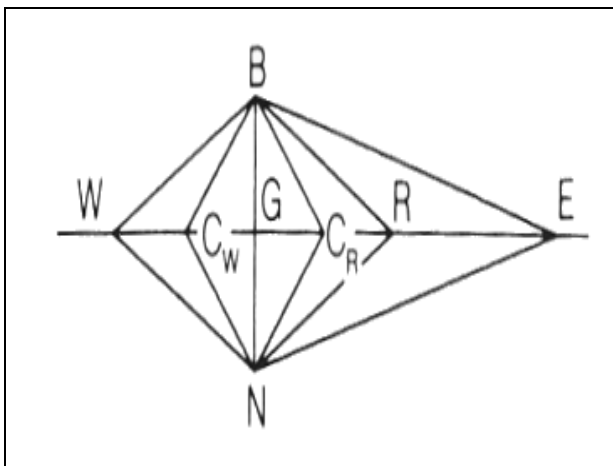


Figure 51 : Méthode de Nelder et Mead ou simplexe modifié (Delacroix et Porte, 1997).

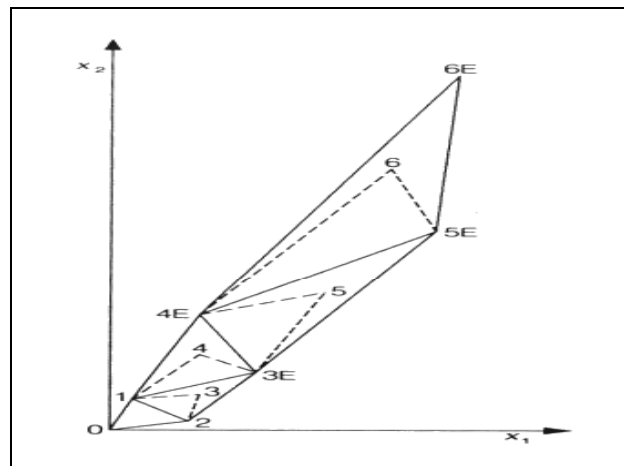


Figure 52 : Exemple d'application de la méthode du simplexe modifié (Delacroix et Porte, 1997).

La Figure 52 montre un exemple d'application du simplexe modifié de Nelder et Mead. Sur cette figure, le changement de géométrie du simplexe est nettement visible, et la rapidité de la convergence par rapport au simplexe basique se déduit aisément.

4.3.2 *Optimisation globale*

Les méthodes d'optimisation globale sont utilisées lorsque la fonctionnelle présente plusieurs minima dont un seul correspond à la solution optimale. Le nombre de ces minima est en général inconnu, de même que leur localisation même approximative (Pinter, 1999 ; Lavelle, 2000). Les approches classiques, basées sur l'existence d'un seul minimum (§ 4.3.1), ne sont par conséquent plus adaptées pour rechercher l'optimum global (Pinter, 1999).

Résoudre un problème d'optimisation globale en un sens strictement mathématique revient à trouver l'ensemble des minima de la fonctionnelle, puis de sélectionner le point optimum vis à vis du critère étudié (Pinter, 1999). Cependant en pratique, il est souvent impossible de dresser une liste complète de tous les minima présents, sauf à passer un temps très long et à utiliser des calculateurs très puissants. La méthode de résolution utilisée doit alors proposer une solution correspondant à l'optimum global sans connaître complètement la présence des autres minima. La stratégie de recherche adoptée est alors primordiale dans la réussite de l'optimisation. Nous dressons ici une liste non exhaustive des stratégies couramment adoptées (Neumaier, 1995 ; Pinter, 1999 ; Lavelle, 2000) :

4.3.2.1 *Méthodes exactes*

- a) **L'approche "naïve"** : Dans cette catégorie sont inclus les stratégies classiques de cartographie telles que la recherche par grille uniforme, par échantillonnage couvrant des sous-domaines, et la recherche purement aléatoire. Ces méthodes sont utilisables lorsque la dimension de départ n'excède pas 3 ou 4 ; pour des dimensions supérieures, ou une recherche sur un vaste domaine, la quantité de calculs devient très vite rédhibitoire.
- b) **Stratégie de recherche complète** : Basée sur un dénombrement complet des solutions possibles. Cette technique est applicable aux problèmes combinatoires, ou à certains problèmes bien structurés.
- c) **Méthode des trajectoires, et approches apparentées** : Le but est de visiter tous les points stationnaires de la fonctionnelle ($\partial f / \partial x_n = 0$). Cette méthode conduit à la liste de tous les minima de la fonctionnelle. Elle est utilisée en générale pour des modèles physiques basés sur des équations différentielles.
- d) **Recherche par approximations successives** : Le problème initial est décomposé en une série de sous problèmes qui sont plus aisés à résoudre. Plus on avance dans la résolution et plus les sous problèmes sont raffinés pour tendre vers le problème initial.
- e) **Recherche par morceaux** : Basé sur un découpage adaptatif appliqué de manière itérative à une population active de candidats à l'intérieur des différents domaines. Cette stratégie est largement utilisée et donne lieu à beaucoup de méthodes algorithmiques basées sur ce principe (Pinter, 1999).
- f) **Approche bayésienne** : L'idée est de renoncer à l'espoir d'accéder à une solution exacte à partir de données imparfaites, mais de considérer qu'il existe un ensemble de solutions admissibles et de prendre celle qui est la plus probable. L'incertitude sur la variable X est entièrement décrite avec une approche bayésienne. Le résultat est la solution du problème inverse puisqu'il fournit sous la forme d'une distribution de probabilité toute l'information disponible sur les candidats potentiels ; un choix très répandu consiste à retenir la solution qui maximise la probabilité a priori. (Dupuis, 1999).

4.3.2.2 *Méthodes heuristiques*

- a) **Extension des méthodes d'optimisation locale** : L'idée est d'appliquer au début de l'optimisation une recherche préliminaire par cartographie du domaine (ou par échantillonnage aléatoire), suivit d'une recherche par optimisation locale dans la zone où la réponse est minimale. Cette stratégie est très souvent appliquée avec succès. On citera par exemple les méthodes Multilevel Coordinate Search de Huyer (1999) et Derivative-Free Pattern Method de Dennis (1994).
- b) **Algorithmes génétiques ou évolutionnaires** : Ces méthodes imitent l'évolution biologique. Elles appliquent une recherche sélective basée sur une population qui se multiplie. A chaque itération ou génération, la population composée des points mères et des points filles est sélectionnée (décimée) vis à vis du critère, et seuls les meilleurs individus survivent pour se reproduire et diffuser dans tout le domaine à la génération suivante (Dupuis, 1999; Rahman et Herbert, 1999).
- c) **Méthode du recuit simulé** : Basée sur l'attribution au vecteur courant X d'un potentiel énergétique. Comme en optimisation locale, par exemple avec un simplex, le vecteur X explore le domaine D en s'orientant de manière à minimiser la fonctionnelle. Cependant en rencontrant un minimum local son potentiel décroît (son agitation

thermique diminue par analogie avec le phénomène physique qui a donné le nom à cette méthode) et ce d'autant plus que le critère fixé est respecté. L'explorateur X a donc la possibilité de sortir "d'un puits" dans lequel il était tombé.

- d) **Méthode du tabou** : L'idée essentielle est d'interdire l'exploration dans des zones partiellement visitée. Cette philosophie permet d'explorer un domaine très grand en un nombre relativement faible d'itérations.
- e) **Approximation de la convexité globale** : Il s'agit de trouver une approximation de la fonctionnelle à grande échelle. Une fois l'approximation décrite, le minimum de la fonctionnelle approchée est recherché. L'échelle est alors réduite au voisinage du minimum et l'opération est réitérée. La fonctionnelle est ainsi "adoucie" et le problème redevient un problème classique d'optimisation locale à chaque itération.
- f) **Méthode de prolongement** : Même philosophie que précédemment mais l'approximation de la fonctionnelle est faite par morceaux dans des sous domaines.

Remarques : Les méthodes qui n'utilisent que des évaluations de la fonctionnelle sont en générales (a) très gourmandes en temps de calcul, très souvent le rapport est de 10 fois supérieur aux méthodes de gradient ou d'approximation, (b) en revanche elle procède à l'exploration du domaine et sont susceptibles de renvoyer plusieurs minima, (c) elle converge avec un nombre d'itérations assez élevées surtout pour les algorithmes génétiques, ce qui va de paire avec une bonne exploration du domaine d'étude. (Dupuis, 1999).

4.4 Etude des fonctionnelles

4.4.1 Cartographie du domaine d'étude

Le choix de la méthode d'optimisation dépend des propriétés de la fonctionnelle choisie. Il est donc nécessaire d'étudier le comportement des fonctionnelles de vibrations longitudinales et transversales dans le domaine d'étude. A partir d'une configuration de poutre donnée, différentes représentations de la fonctionnelle de vibrations longitudinales ont été tracées (Figure 53, Figure 54, et Figure 55). En vibrations transversales, l'allure de la fonctionnelle est semblable à celle de vibrations longitudinales, c'est pourquoi les illustrations et commentaires sont données ici uniquement pour des vibrations longitudinales. Les trois représentations graphiques sont réalisées numériquement en supposant une poutre :

- de longueur 3 m
- de densité 450 kg/m³
- de module d'élasticité sain 13100 MPa

L'élément faible a :

- pour position de la première interface 1 m
- pour taille 5 cm
- pour module d'élasticité 1000 MPa

Ces paramètres ont été choisis en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques des poutres en dimensions d'emploi.

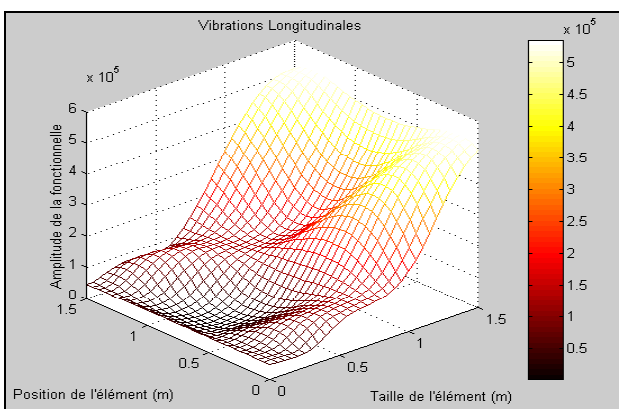


Figure 53 : Cartographie de la fonctionnelle de vibrations longitudinales, E0=5000 MPa.

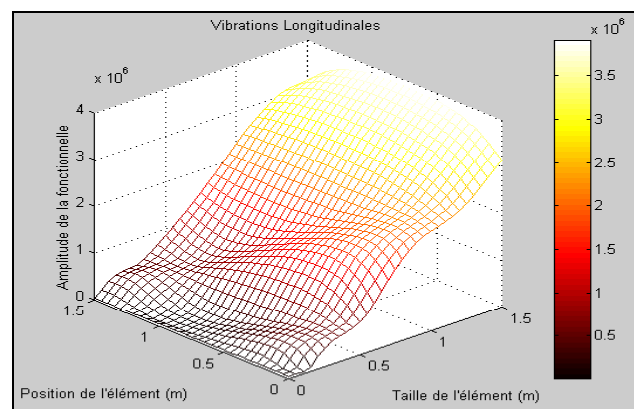


Figure 54 : Cartographie de la fonctionnelle de vibrations longitudinales, E0=1000 MPa.

Sur la Figure 53, la Figure 54, et la Figure 55, le pas de discrétisation de position et de taille de l'élément faible est de 5 cm. Pour la Figure 53, le module de l'élément est de 5000 MPa ; à la Figure 54, il est de 1000 MPa (valeur solution) ; à la Figure 55, il est de 200 MPa.

Ces trois représentations montrent une fonctionnelle apparemment continue, globalement monotone (à grande échelle), avec la présence d'ondulations nettement visibles à la Figure 53. On observe également la présence de plusieurs minima dans chacune des figures. Les méthodes d'optimisation locale sont donc exclues pour résoudre ce type de problème.

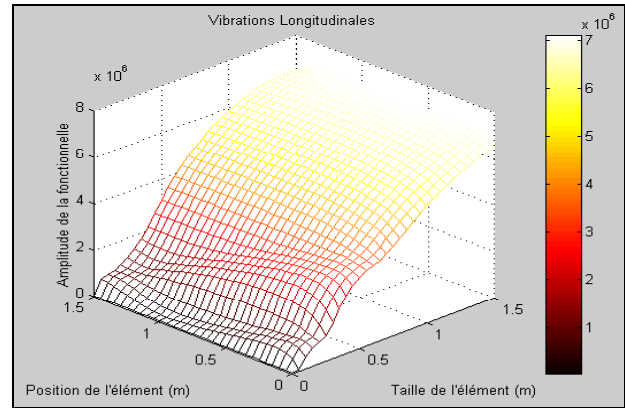


Figure 55 : Cartographie de la fonctionnelle de vibrations longitudinales, $E_0=200$ MPa.

Une évaluation de la fonctionnelle de vibrations longitudinales "coûte" environ $0,45s^6$. Le nombre d'itérations pour chaque figure est de 961, la durée de calcul moyenne est d'environ 7mn par figure. Dans la configuration de poutre fixée, une cartographie sur les trois paramètres de module, de position, et de taille de l'élément avec des pas de discrétisation respectifs de 10 MPa, 5 cm, 5 cm, aurait demandé environ $1,24 \cdot 10^6$ itérations, soit environ 6 jours et demi de temps de calcul pour une seule poutre. Compte tenu du coût d'évaluation de la fonctionnelle (ce coût est quasiment doublé en vibrations transversales, $t \approx 1s$), les approches dites "naïves" ou évolutionnaires sont à proscrire. On s'orientera plutôt vers des méthodes heuristiques simples et robustes comme une extension des méthodes d'optimisation locales, le recuit simulé, ou encore une méthode d'approximation successive de la fonctionnelle.

4.4.2 Cartographie au voisinage de la solution

Une représentation de la fonctionnelle au voisinage de la solution [$E_0=1000$; $l_1=1$; $(l_2-l_1)=0,05$] est nécessaire pour vérifier l'existence d'une solution optimale et connaître la nature de la convexité de la fonctionnelle dans ce voisinage. La configuration de poutre choisie afin de réaliser la Figure 56 et la Figure 57 est la même que celle du paragraphe précédent (§ 4.4.1). Les pas de discrétisation de la position et de la taille de l'élément sont respectivement de 2 cm et 1 cm. La Figure 56 et la Figure 57 représentent la même évolution mais de deux manières différentes. La Figure 56 montre une vue en trois dimensions, et la Figure 57 indique les courbes de niveaux et le vecteur tangent en chaque point (flèches bleues).

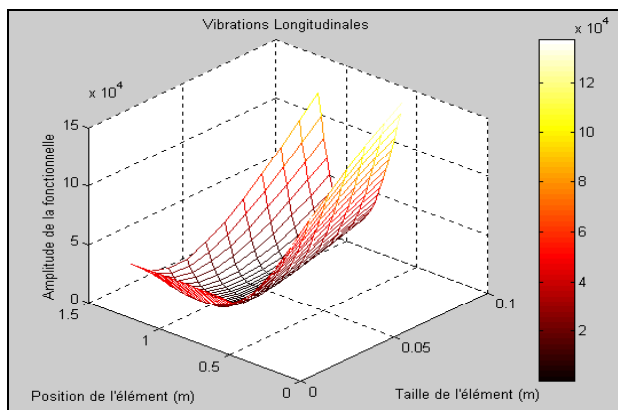


Figure 56 : Représentation en trois dimensions de la fonctionnelle de vibrations longitudinales au voisinage de l'optimum.

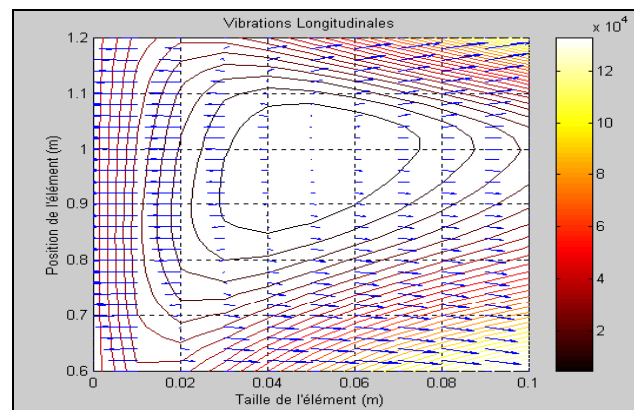


Figure 57 : Courbes de niveaux de la fonctionnelle de vibrations longitudinales au voisinage de l'optimum.

Ces figures montrent que la fonctionnelle est bien convexe au voisinage de l'optimum, et qu'il existe bien une solution optimale. La convexité de la fonctionnelle a été vérifiée par une estimation de la matrice hessienne au niveau de l'optimum. On rappelle qu'une fonction est convexe dans un domaine d'étude si et seulement si la matrice hessienne est positive semi-définie (Rade et Westergren, 1999), c'est à dire :

⁶ PC, processeur Pentium II MMX 400 MHz, RAM 128 MB

$$\text{Eq. 85 } f^*(X) \text{ convexe sur } D \Leftrightarrow H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \text{ positive semi-définie sur } D \Leftrightarrow \text{valeurs propres de } H \geq 0$$

L'estimation de la matrice hessienne fournit un autre renseignement sur la courbure de la fonctionnelle. Le conditionnement du hessien est relativement mauvais, ce qui implique dans notre cas que la courbure de f^* est plus prononcée dans une direction que dans l'autre. On se situe presque sur un cylindre dont l'axe serait colinéaire à l'axe des ordonnées de la Figure 57 (position de l'élément). Cette remarque est très importante dans le choix de la méthode d'optimisation. Une utilisation des méthodes de gradient au voisinage de la solution conduira à des problèmes de convergence du fait de la faible courbure dans l'une des deux directions de position et de taille de l'élément. De plus, une approximation correcte de la fonctionnelle sera également délicate au voisinage de la solution puisque la forme de la fonctionnelle est quasi-cylindrique.

4.5 Choix de la stratégie d'optimisation

Les paragraphes 4.4.1 et 4.4.2 ont permis l'élimination d'un certain nombre de stratégies envisagées au paragraphe 4.3. Des méthodes heuristiques simples et robustes comme une extension des méthodes d'optimisation locales avec la méthode du simplex modifié ou bien la méthode du recuit simulé semble les plus adaptées à résoudre le problème inverse. La méthode du recuit simulé n'a pas été mise en œuvre car l'attribution du potentiel énergétique au vecteur courant n'est pas chose aisée et nécessite un calage préalable de la méthode ; on ne sait pas a priori comment définir une agitation thermique initiale, ni même la manière dont on gère le refroidissement progressif du vecteur courant.

La stratégie adoptée est donc une extension des méthodes d'optimisation locales avec la méthode du simplex modifié. Afin de maximiser les chances de réussite, le départ successif de plusieurs simplex en chaque point d'une grille relativement grossière couvrant le domaine d'étude a d'abord été envisagé. Dans l'exemple de mise en œuvre du Tableau 20, la poutre a pour longueur 1 m, pour densité 500 kg/m^3 , et pour module d'élasticité sain 10000 MPa . Les caractéristiques de l'élément faible sont fixées à une position de 30 cm, une taille de 10 cm, et un module de 1000 MPa . Les fréquences déduites du problème direct (Eq. 78) ont pour valeur respective 1354 Hz, 3701 Hz, et 5944 Hz. Les paramètres du simplex sont définis comme suit : nombre maximal d'itérations 100, critère d'arrêt avec une tolérance sur X_{opt} de 1%, critère d'arrêt avec une tolérance sur la fonctionnelle de 1%. Les données fréquentielles ne sont pas bruitées. Les points du maillage et les solutions de chaque simplex dont la valeur de la fonctionnelle est faible (≤ 5) sont données au Tableau 20.

La méthode d'optimisation adoptée est coûteuse en temps, l'ensemble a demandé environ 1h30mn de temps de calcul. Dans la configuration choisie, la convergence d'un simplex modifié dure environ 1,5mn. Le Tableau 20 montre que la solution a été trouvée 32 fois sur 60 itérations (points du maillage). Les erreurs commises lors de l'optimisation sur le module, la position, et la taille de l'élément sont négligeables (inférieures à 1%). Une propriété importante se déduit des résultats du Tableau 20, il suffit de faire varier un seul paramètre et de fixer les deux autres pour qu'il y ait au moins une fois convergence vers la solution recherchée. Modifiée la stratégie retenue en ne faisant varier qu'un seul paramètre a de plus l'avantage de réduire considérablement le temps de calcul. Dans le cas présent, en définissant la position de l'élément comme unique variable sur la grille, l'ensemble des calculs aurait demandé 6mn au lieu de 1h30mn.

Coordonnées des points de maillage du domaine						
E0 (Mpa) :	500	5500	10500			
l1 (m) :	-0,1	0,1	0,3	0,5		
l2-l1 (m) :	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
Résultats						
<i>Elément faible</i>			<i>Solution</i>			<i>Valeur</i>
E0 (Mpa)	l1 (m)	l2-l1 (m)	E0_{opt} (Mpa)	l1_{opt} (m)	l2-l1_{opt} (m)	fonctionnelle
500	0,5	0,3	998	0,30	0,10	0,159
500	0,5	0,4	998	0,30	0,10	0,002
500	0,5	0,5	995	0,30	0,10	1,131
500	0,3	0,2	998	0,30	0,10	0,000
500	0,3	0,4	1000	0,30	0,10	0,814
500	0,3	0,5	998	0,30	0,10	0,000
500	0,1	0,4	998	0,30	0,10	0,006
500	-0,1	0,3	997	0,30	0,10	0,256
500	0,5	0,1	998	0,30	0,10	0,000
500	0,5	0,2	998	0,30	0,10	0,000
500	0,3	0,1	998	0,30	0,10	0,001
500	0,3	0,3	998	0,30	0,10	0,000
500	0,1	0,1	998	0,30	0,10	0,000
500	0,1	0,2	998	0,30	0,10	0,001
500	0,1	0,5	998	0,30	0,10	0,000
5500	0,5	0,1	998	0,30	0,10	0,001
5500	0,5	0,4	998	0,30	0,10	0,006
5500	0,5	0,5	1003	0,30	0,10	4,790
5500	0,3	0,1	999	0,30	0,10	0,002
5500	0,3	0,4	998	0,30	0,10	0,002
5500	0,1	0,1	997	0,30	0,10	0,132
5500	0,1	0,2	998	0,30	0,10	0,014
5500	0,5	0,2	998	0,30	0,10	0,000
5500	0,5	0,3	998	0,30	0,10	0,000
5500	0,3	0,2	998	0,30	0,10	0,000
5500	0,3	0,3	998	0,30	0,10	0,000
10500	0,5	0,1	998	0,30	0,10	0,052
10500	0,5	0,2	999	0,30	0,10	0,060
10500	0,5	0,5	999	0,30	0,10	0,009
10500	0,3	0,1	999	0,30	0,10	0,007
10500	0,3	0,2	999	0,30	0,10	0,015
10500	0,5	0,3	998	0,30	0,10	0,000

Tableau 20 : Points du maillage et solutions des simplex convergents dans le cas d'un départ successif de plusieurs simplex en chaque point d'une grille couvrant le domaine d'étude. E0 : module d'élasticité de l'élément faible. l1 : position de l'élément faible dans la longueur de la poutre. (l2-l1) : taille de l'élément faible.

4.6 Performances de la stratégie d'optimisation retenue

Ce paragraphe détaille la méthode d'optimisation choisie, ainsi que ces performances vis à vis d'essais d'optimisation sur des variables fréquentielles exactes et bruitées. Les performances sont évaluées en vibrations longitudinales et transversales. Le choix de la méthode d'optimisation est l'objet du paragraphe 4.5. Le domaine d'étude étant préalablement défini (Tableau 19), le départ successif de plusieurs simplex modifié en chaque point d'une grille relativement grossière couvrant le domaine d'étude est mis en œuvre. Le point de départ de chaque simplex est caractérisé par une taille et un module de l'élément faible constants. Seule la position de l'élément varie, et chaque simplex débute en un point défini par une position d'élément particulière. Le choix de faire varier la position parmi les

trois composantes du vecteur courant est motivé par le fait que la courbure de la fonctionnelle au voisinage de l'optimum est relativement faible dans l'axe des positions (Figure 57), le risque d'erreur d'optimisation est par conséquent minimisé en essayant de débiter le plus près possible de la position solution. Afin d'évaluer les performances de la méthode d'optimisation choisie, 4 séries de 15 tests ont été réalisées. Deux séries concernent la recherche de l'optimum en vibrations longitudinales, avec pour la première série des données fréquentielles exactes, et pour la seconde, des données fréquentielles bruitées. Les deux séries restantes concernent les vibrations transversales pour lesquelles les configurations des tests sont identiques à ceux réalisés en vibrations longitudinales.

Chaque série ne comporte que 15 tests en raison des temps de calculs (plusieurs heures par série). Le nombre de fréquences utilisées pour l'inversion est de trois. La poutre a pour longueur 3 m, pour densité 450 kg/m³, et pour module d'élasticité sain 13100 MPa. Les caractéristiques de l'élément faible sont des valeurs aléatoires équiprobables dont les bornes sont fixées à [0 ; 1,5] mètres pour la position de l'élément, [0 ; 1,5] mètres pour sa taille, et [10 ; 13090] MPa pour son module. Le vecteur de départ des méthodes simplex modifié a comme caractéristique un module d'élément fixé à la moitié du module sain, une taille de défaut fixée à 10 cm, et une position variable telle que sa plage de variation soit divisée en 4 segments identiques. Pour les séries de tests avec des valeurs fréquentielles bruitées, le nombre de segments est fixé à 10 afin de maximiser les chances de convergence. Les paramètres du simplex modifié sont les mêmes que ceux du paragraphe 4.5, excepté pour le nombre maximal d'itérations qui passe de 100 à 500.

N°	Elément faible			Solution			Ecart relatif absolu			Val.
	E0	II	T	E0 _{opt}	II _{opt}	T _{opt}	ΔE0 %	ΔII %	ΔT %	
1	12447	0,35	0,91	12447	0,35	0,91	0,0	0,0	0,0	0,000
2	5831	0,92	1,19	3272	0,71	0,53	43,8	22,9	55,4	0,000
3	1828	0,30	0,30	1828	0,30	0,30	0,0	0,0	0,0	0,000
4	12207	0,70	0,63	12207	0,70	0,63	0,0	0,0	0,0	0,000
5	11087	0,79	0,30	11087	0,79	0,30	0,0	0,0	0,0	0,000
6	8928	0,57	1,25	8928	0,57	1,25	0,0	0,0	0,0	0,000
7	6592	1,06	0,64	6561	1,30	0,64	0,4	22,2	0,9	0,000
8	3997	0,28	0,29	3997	0,28	0,29	0,0	0,0	0,0	0,000
9	8940	0,45	0,81	8940	0,45	0,81	0,0	0,0	0,0	0,000
10	1985	1,05	0,57	1985	1,39	0,57	0,0	32,3	0,0	0,000
11	4486	0,43	0,51	4486	0,43	0,51	0,0	0,0	0,0	0,000
12	7001	1,09	0,46	4065	1,20	0,18	41,9	9,8	61,4	0,000
13	10986	0,85	0,56	10986	0,85	0,56	0,0	0,0	0,0	0,000
14	9209	0,82	0,67	9209	0,82	0,67	0,0	0,0	0,0	0,000
15	12535	0,78	1,32	12057	0,82	0,69	3,8	4,2	47,8	0,000

Tableau 21 : Résultats des 15 tests d'inversion en vibrations longitudinales, données fréquentielles exactes. E0 : module d'élasticité de l'élément faible. II : position de l'élément faible dans la longueur de la poutre. T : taille de l'élément faible. Val. : valeur de la fonctionnelle.

N°	Elément faible			Solution			Ecart relatif absolu			Val.
	E0	II	T	E0 _{opt}	II _{opt}	T _{opt}	ΔE0 %	ΔII %	ΔT %	
1	3733	0,70	0,10	3733	0,70	0,10	0,0	0,0	0,0	0,000
2	12947	0,87	0,64	12947	0,87	0,64	0,0	0,0	0,0	0,000
3	6758	0,50	0,65	6758	0,50	0,65	0,0	0,0	0,0	0,000
4	6945	0,96	0,31	6945	0,96	0,31	0,0	0,0	0,0	0,000
5	4982	1,18	1,02	3006	0,79	0,56	39,6	33,1	44,7	0,000
6	6046	0,85	1,19	3141	0,77	0,52	48,0	9,3	56,4	0,000
7	785	0,90	0,08	785	0,90	0,08	0,0	0,0	0,0	0,000
8	5447	0,46	1,31	5447	0,46	1,31	0,0	0,0	0,0	0,000
9	6533	0,32	0,97	6533	0,32	0,97	0,0	0,0	0,0	0,000
10	4199	1,44	1,09	4650	0,03	1,51	10,7	98,0	38,7	18,237
11	5402	1,12	0,40	5402	1,12	0,40	0,0	0,0	0,0	0,000
12	5769	1,40	1,03	5771	0,57	1,03	0,0	58,9	0,0	0,000
13	8255	0,56	0,86	8255	0,56	0,86	0,0	0,0	0,0	0,000
14	5919	0,07	0,04	6860	0,00	0,11	15,8	99,2	170,6	0,000
15	4103	0,02	0,58	4103	0,00	0,59	0,0	96,4	3,2	0,000

Tableau 22 : Résultats des 15 tests d'inversion en vibrations transversales, données fréquentielles exactes. E0 : module d'élasticité de l'élément faible. II : position de l'élément faible dans la longueur de la poutre. T : taille de l'élément faible. Val. : valeur de la fonctionnelle.

Le Tableau 21 et le Tableau 22 regroupent de manière synthétique les résultats des inversions en vibrations longitudinales et transversales. Les données fréquentielles utilisées sont exactes. En vibrations transversales, il est nécessaire de fournir les données géométriques de la section droite. La hauteur de la poutre est fixée à 15 cm, et son épaisseur à 5 cm.

L'ensemble des tests d'inversion a demandé 1h40mn (environ 7mn par test) en vibrations longitudinales, et 3h45mn (environ 15mn par test) en vibrations transversales. La convergence d'un simplex modifié concernant la fonctionnelle de vibrations transversales coûte environ 4mn. Le temps de convergence est 2,5 fois plus long en vibrations transversales qu'en vibrations longitudinales.

Les résultats présentés dans le Tableau 21 et le Tableau 22 sont réparties en 5 groupes ; après le numéro du test viennent les caractéristiques de l'élément faible (choisies de manière aléatoire et solutions du problème inverse), la solution retournée par la méthode d'optimisation testée (E0 : module, I1 : position, T : taille de l'élément), les écarts relatifs absolus sur chacun des paramètres optimisés, et la valeur de la fonctionnelle associée au vecteur optimisé (notée Val dans les tableaux).

Les résultats présentés au Tableau 21 montrent un taux de réussite de la procédure d'optimisation d'environ 67%. Les échecs sont surlignés en jaune dans le tableau. L'observation de ces échecs amène une première remarque importante, l'optimisation peut échouer alors que le critère choisi (la valeur de la fonctionnelle) est en apparence respecté. Toutes les valeurs de la fonctionnelle sont en effet très proche de zéro, même si l'optimum retournée est erroné (Tableau 21).

Le problème inverse, même régularisé par l'existence de contraintes, est donc mal posé, ce qui implique un risque d'échec important. L'explication la plus probable concernant la nature "mal posée" du problème inverse est qu'il n'existe pas assez de données fréquentielles par rapport au nombre de paramètres à optimiser. Il est bien sûr possible dans le cadre de simulations numériques (Tableau 21, Tableau 22, Tableau 23, et Tableau 24) d'ajouter de l'information en quantité suffisante pour assurer la réussite de l'optimisation. Cependant, l'expérience montre qu'il est très difficile d'observer plus de trois fréquences en vibrations longitudinales avec les moyens métrologiques dont nous disposons. En vibrations transversales, le nombre de fréquences observables peut atteindre la dizaine, cependant l'hypothèse de Bernoulli n'est plus valable pour les modes de rang élevé (§ 1.1.7), et ajouter de l'information expérimentale à une modélisation théorique en dehors de son domaine de validité peut rapidement conduire à des résultats incertains.

Une deuxième remarque concerne plus particulièrement les tests numérotés 7 et 10 du Tableau 21. Ces deux tests montrent que les paramètres optimisés de module et de taille peuvent être considérés comme justes (erreur relative faible), alors que la position optimisée est manifestement erronée. Ce problème provient de la très faible courbure de la fonctionnelle au voisinage de la solution dans l'axe des positions (Figure 57). L'arrêt de la procédure d'optimisation, qui est basée sur un critère de stabilité du vecteur courant, sur l'optimum devient alors difficile.

Le Tableau 22, qui concerne les tests d'inversion en vibrations transversales, présente des résultats très similaires à ceux du Tableau 21. L'ensemble des remarques du Tableau 21 s'applique également au Tableau 22.

N°	Élément faible			Solution			Ecart relatif absolu		Val.
	E0	I1	T	E0 _{opt}	I1 _{opt}	T _{opt}	$\sum \Delta S \%$	$\sum \Delta f \%$	
1	1761	0,31	0,91	610	0,28	0,39	131,9	8,7	0,000
2	8255	0,56	0,86	8960	0,34	0,90	52,6	5,1	0,000
3	764	0,55	0,95	695	0,66	0,85	38,0	9,3	0,000
4	5958	0,66	0,53	4577	0,88	0,33	94,4	6,3	0,000
5	2021	1,01	1,05	336	0,42	0,23	220,2	8,9	0,000
6	9533	0,72	0,83	587	0,70	0,01	195,4	8,0	1,310
7	11341	0,35	1,21	3446	0,00	0,25	248,5	5,5	220
8	661	0,12	0,96	867	0,25	1,01	152,7	9,3	0,000
9	4461	0,47	0,55	2479	0,65	0,23	139,3	4,7	0,000
10	509	0,69	1,30	471	0,39	1,28	52,8	4,5	0,000
11	11436	0,36	0,97	6548	0,00	0,45	195,9	7,1	641
12	12667	1,00	1,31	1274	1,05	0,00	194,9	2,2	295
13	140	0,21	1,23	218	0,78	1,45	351,8	8,0	8,473
14	9007	0,52	0,25	4650	0,00	0,30	168,7	4,8	2,596
15	2047	0,29	0,63	4244	0,18	1,44	271,0	6,5	0,000

Tableau 23 : Résultats des 15 tests d'inversion en vibrations longitudinales, données fréquentielles bruitées. E0 : module d'élasticité de l'élément faible. I1 : position de l'élément faible dans la longueur de la poutre. T : taille de l'élément faible. Val. : valeur de la fonctionnelle.

N°	Elément faible			Solution			Ecart relatif absolu			Val.
	E0	l1	T	E0 _{opt}	l1 _{opt}	T _{opt}	Σ ΔS %	Σ Δf %		
1	7254	0,44	1,29	6840	0,10	1,50	100,6	6,5	31,983	
2	7373	0,92	0,17	200	1,04	0,00	208,4	6,1	38,010	
3	11768	1,13	1,19	6669	0,00	0,53	198,8	4,2	6,696	
4	10678	1,01	0,30	9258	1,32	0,63	152,7	8,3	12,129	
5	789	0,13	0,41	501	0,00	0,46	146,7	7,9	24,070	
6	5365	0,71	1,36	1635	0,72	0,42	140,2	8,5	0,000	
7	7815	0,49	0,72	8921	1,44	1,50	314,6	6,5	11,778	
8	12526	0,89	0,04	220	0,99	0,00	211,2	7,5	35,143	
9	10641	0,92	1,05	705	1,27	0,01	230,9	5,6	12,358	
10	5922	1,43	0,22	994	1,37	0,03	173,6	5,6	1,138	
11	8134	1,43	0,96	6885	0,62	0,80	88,3	5,4	0,000	
12	3248	0,53	0,28	200	0,61	0,02	202,8	9,0	2,632	
13	6433	0,61	0,70	5937	0,68	0,59	32,9	2,2	0,000	
14	8007	0,11	0,47	6694	0,00	0,55	132,9	3,9	3,053	
15	7974	0,26	0,93	5946	0,00	0,66	153,6	7,4	33,811	

Tableau 24 : Résultats des 15 tests d'inversion en vibrations transversales, données fréquentielles bruitées. E0 : module d'élasticité de l'élément faible. l1 : position de l'élément faible dans la longueur de la poutre. T : taille de l'élément faible. Val. : valeur de la fonctionnelle.

Les résultats présentés dans le Tableau 23 et le Tableau 24 concernent les tests d'inversion en utilisant des données fréquentielles bruitées. Les trois premières fréquences de vibration sont calculées à partir des données géométriques et mécaniques de la structure en résolvant le problème direct. Un bruit aléatoire gaussien est ensuite ajouté à chaque valeur de fréquence, tel que la valeur de 10% est atteinte à trois écart-types. Le bruit ajouté reste donc faible. Ces données fréquentielles bruitées ont été utilisées pour résoudre le problème inverse.

L'ensemble des tests d'inversion a demandé 2h35mn (environ 10mn par test) en vibrations longitudinales, et 20h24mn (environ 1h22mn par test) en vibrations transversales. Le temps moyen de convergence n'est pas plus long en vibrations longitudinales entre données fréquentielles exactes et bruitées, car le nombre de segments de position de l'élément est passé de 4 à 10 entre les deux séries de tests. Cependant, en vibrations transversales la durée moyenne de convergence a quasiment doublé entre données exactes et bruitées.

Le Tableau 23 et le Tableau 24 font apparaître la somme des écarts relatifs absolus pour la solution retournée ($\sum|\Delta S|\%$) et les données fréquentielles ($\sum|\Delta f|\%$). La comparaison de ces deux sommes permet de quantifier la répercussion sur la solution de la présence d'incertitudes sur les données fréquentielles. Le Tableau 23 montre que l'incertitude sur la solution retournée est en moyenne 29 fois plus importante que l'incertitude sur les données fréquentielles en vibrations longitudinales. En vibrations transversales, l'incertitude sur la solution retournée est en moyenne 27 fois plus importante que l'incertitude sur les données fréquentielles (Tableau 24). Ces résultats sont caractéristiques d'un problème mal posé, et rendent nécessaire une évaluation à partir de résultats sur les incertitudes expérimentales de l'erreur à laquelle il faudrait s'attendre dans un cas réel d'inversion. Les incertitudes expérimentales sur les valeurs des fréquences pour une petite éprouvette de bois sans défaut sont données au paragraphe 2.1.4, on retiendra la valeur maximisée de la somme des incertitudes : $\sum|\Delta f|\% = 0,76 + 0,21 + 0,11 = 1,08\%$. Cette dernière valeur conduit à une somme des incertitudes d'environ 31% pour la solution retournée par la méthode d'inversion choisie, soit 10% d'erreur en moyenne sur chaque paramètre.

BILAN DU CHAPITRE I

Les modèles analytiques développés en vibrations longitudinales ou transversales permettent de calculer avec une précision acceptable les fréquences propres d'une poutre élancée comportant un ou plusieurs éléments faibles. On parlera dans le cas du calcul des fréquences de vibrations à partir des paramètres physiques et mécaniques, nécessaires pour définir une poutre à élément faible, de problème direct.

En vibrations longitudinales ou transversales, le nombre des fréquences accessibles par l'expérience étant relativement restreint, seul un élément faible peut être caractériser, en rigidité, en position, et en taille, par des méthodes d'inversion numérique de type simplex modifié capables de résoudre les problèmes inverses. Cet élément faible peut être considéré comme la plus grande faiblesse de la structure physique vis à vis de son influence sur son comportement dynamique.

Il est important de préciser que les expressions des fonctions de déplacement en vibrations transversales sont difficiles à manipuler numériquement. Ces fonctions comportent en effet des termes circulaires, bornés entre -1 et $+1$, et des termes circulaires hyperboliques non bornés, divergeant vers l'infini assez rapidement. La nature même de ces fonctions font que les matrices générées par les modèles analytiques sont "déséquilibrées" et peuvent produire lors de la résolution numérique des résultats erronés.

Ce déséquilibre et les problèmes numériques engendrés rendent la caractérisation de la poutre comportant uniquement un élément faible à partir des fréquences propres de vibrations transversales (problème inverse) assez difficile et très coûteuse en temps de calculs.

Il apparaît d'autre part que le problème inverse, même régularisé par l'existence de contraintes lors de la convergence, est mal posé en vibrations longitudinales ou transversales. Le critère de convergence, défini par la minimisation de l'écart quadratique entre fréquences expérimentales et fréquences théoriques, peut en effet être respecté alors que la solution calculée est erronée. Ce problème provient du déficit d'informations expérimentales (fréquences de vibrations) par rapport au nombre de paramètres caractéristiques à identifier (rigidité, position, et taille de l'élément faible).

Un autre problème concerne la très faible courbure de la fonctionnelle à minimiser, au voisinage de la solution recherchée, orientée dans l'axe de la position de l'élément faible. La solution retournée peut alors être juste en rigidité et en taille, mais fautive en position.

La caractérisation d'une poutre comportant un élément faible à partir des premières fréquences de vibrations est donc un problème relativement difficile à résoudre. Afin de le surmonter, la méthode d'optimisation robuste du simplex modifié a été retenue avec un nombre possible d'itérations très important. Pour chaque poutre testée, plusieurs recherches de la solution optimale sont menées successivement à partir de différentes positions possibles de l'élément, l'effet de faible courbure de la fonctionnelle étant ainsi minimisé.

Un dernier aspect reste à être abordé, en vue de caractériser au mieux les défauts réels présents dans les poutres. La construction de modèles théoriques incluant plusieurs éléments faibles est assez aisée, et constitue une généralisation du modèle à un élément. Pratiquement, il est donc utile de "renseigner" l'algorithme de calcul sur le nombre de singularités et leur position approximative. Une fois renseigné, le programme crée alors le modèle analytique approprié, et ajuste les paramètres de position et de rigidité des éléments faibles en utilisant la réponse fréquentielle de l'éprouvette testée. Dans ce cas, un élément faible correspond à une singularité réelle présente dans la poutre testée. Cette méthode permettrait alors de pouvoir utiliser des modélisations à plusieurs éléments faibles, plus "proches" de la réalité, avec un taux de réussite important quant à la caractérisation des éléments constitutifs, le domaine de recherche des solutions étant alors un voisinage de la position et de la taille approximatives connues.

Dans le cadre de la présentation détaillée des solutions classiques de vibration de flexion, nous avons considéré des poutres dont les caractéristiques géométriques de la section droite étaient peu différentes ($e/h \leq 2$, § 1.1.7.1). En ce qui concerne les poutres à usage structurel, la condition de quasi-égalité de la base 'e' et de la hauteur 'h' n'est en général pas respectée. C'est pourquoi il apparaît nécessaire d'aborder, au chapitre suivant, le problème de l'influence de l'élanement transverse sur les fréquences propres de vibration des poutres.

Chapitre II : Influence de l'élancement transverse sur les fréquences de vibration "libre-libre" d'une poutre homogène

INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de préciser les limites de validité de la solution de Bordonné (1989) au modèle de Timoshenko (1921), pour les poutres prismatiques homogènes en vibrations transversales, lorsque les rapports entre les dimensions caractéristiques de la section transverse ne sont plus du même ordre de grandeur.

L'étude de l'influence de l'élancement transverse (rapport base / hauteur) sur les fréquences de vibration en flexion est réalisée de façon théorique à partir du facteur de forme utilisé par Timoshenko dans l'équation du mouvement. Ce facteur, dépendant de la géométrie de la section, permet de prendre en compte le champ de contrainte de cisaillement. La compréhension du comportement mécanique d'une poutre en vibration libre - libre lorsque son élancement transverse varie conduit à établir une liaison entre le modèle plaque et le modèle poutre.

Par la suite, l'objectif de l'expérimentation sera d'étudier l'influence éventuelle de la variation de l'élancement transverse uniquement sur la première fréquence de vibration, en compression comme en flexion, ce qui permet de confronter les résultats expérimentaux à ceux obtenus de manière analytique.

5 ETUDE THEORIQUE

5.1 Théorie classique en résistance des matériaux

5.1.1 Énergie de déformation élastique

Le solide se déforme élastiquement sous l'action des efforts appliqués en se comportant comme un ressort parfait. L'énergie contenu dans le ressort est l'énergie potentielle de déformation. En supposant les efforts appliqués de manière très progressive et en l'absence de flux de chaleur, cette énergie de déformation est égale au travail des efforts qui ont déformé le solide (Timoshenko, 1953 ; Kerguignas et Caignaert, 1977 ; Laroze, 1988).

La Figure 58 ci-contre montre la déformation angulaire moyenne γ_{xym} sur un élément de longueur dx d'une poutre fléchie. A la côte y , la déviation angulaire ou glissement γ_{xy} , générée par la contrainte de cisaillement σ_{xy} , est de la forme :

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}}$$

La déviation angulaire moyenne se calcule à partir de la contrainte de cisaillement moyenne :

$$\sigma_{xym} = \frac{T_y}{S} \Rightarrow \gamma_{xym} = \frac{\sigma_{xym}}{G_{xy}} = \frac{T_y}{G_{xy}S}$$

On démontre que, pour un élément de poutre de longueur dx soumis à l'effort tranchant T_y , le travail ou énergie de déformation élastique élémentaire est égal à :

$$dw = \frac{1}{2} T_y \gamma_{xym} dx$$

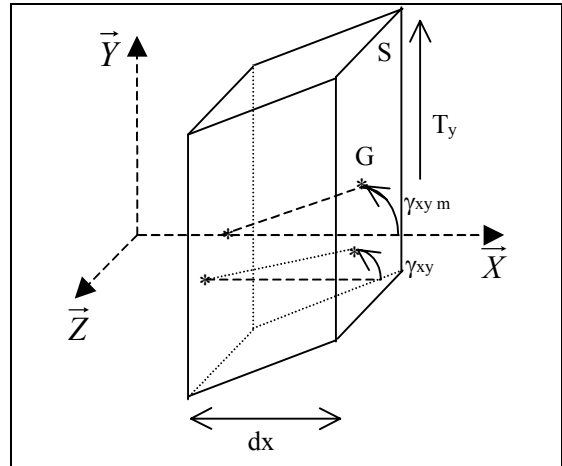


Figure 58 : Distorsion angulaire due à l'effort tranchant dans une poutre fléchie.

➤ Si la contrainte de cisaillement est constante sur la section alors :

$$\gamma_{xym} = \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}} = \frac{T_y}{G_{xy}S} \Rightarrow \text{Eq. 86 } dw = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G_{xy}S} dx$$

➤ Si la contrainte de cisaillement varie sur la section, l'expression de l'énergie élémentaire devient alors :

$$dw = \frac{1}{2} \left[\iint_S \sigma_{xy} \gamma_{xy} dS \right] dx \Rightarrow \text{Eq. 87 } dw = \frac{1}{2G_{xy}} \left[\iint_S \sigma_{xy}^2 dS \right] dx$$

5.1.2 Contrainte de cisaillement dans une section massive rectangulaire

Afin de trouver une expression de l'énergie de déformation élémentaire, il est nécessaire de connaître la variation de la contrainte de cisaillement σ_{xy} sur la section. On fait l'hypothèse d'un état plan de contrainte (OXY), ce qui implique que la contrainte σ_{xz} est nulle. Comme la longueur dx est très petite, nous pouvons admettre que les contraintes rasantes σ_{yx} sont quasiment constantes sur toute la surface de longueur dx . On suppose de plus que σ_{xy} est indépendant de z .

Dans ces conditions, en considérant l'équilibre du prisme de section S_0 (Figure 59 et Figure 60) projeté sur l'axe (OX), on obtient l'égalité suivante :

$$\iint_{S_0} \sigma(x+dx) dS - \iint_{S_0} \sigma(x) dS - \iint_{S_1} \sigma_{yx} dS = 0$$

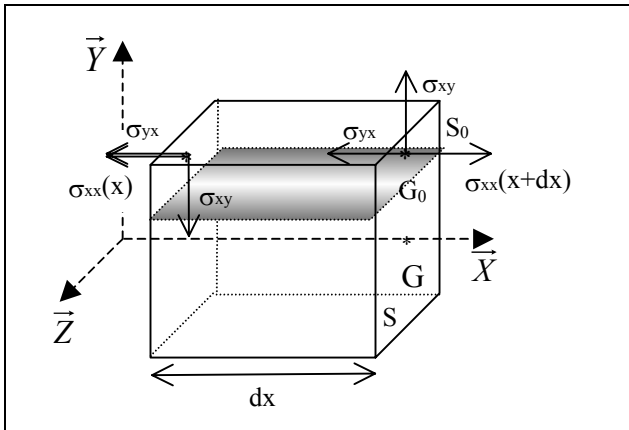


Figure 59 : Equilibre du prisme de section S_0 dans une poutre fléchie.

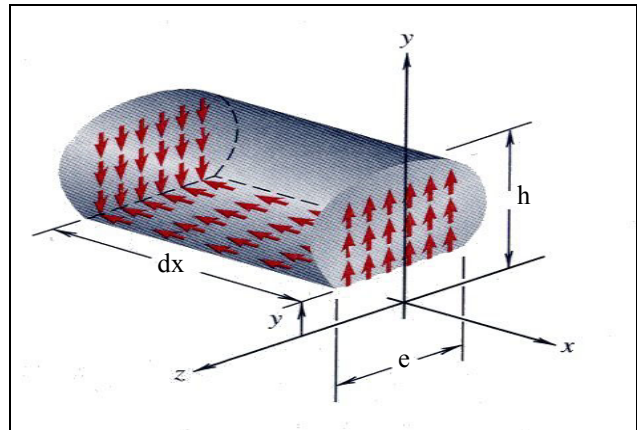


Figure 60 : Cisaillement et glissement longitudinal dans une poutre fléchie de section quelconque (Lardner et Archer, 1994).

La réciprocité des cisaillements implique que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ donc :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{e} \iint_{S_0} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} dS$$

En utilisant les relations classiques d'équilibre statique d'un morceau de poutre fléchie, il vient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{-M_z}{I_{Gz}} y \\ \frac{dM_z}{dx} = -T_y \end{cases} \Rightarrow \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{T_y}{I_{Gz}}$$

d'où :

$$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{I_{Gz}} \int_y^{\frac{h}{2}} y dy$$

$$\text{Eq. 88 } \sigma_{xy} = \frac{T_y}{2I_{Gz}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

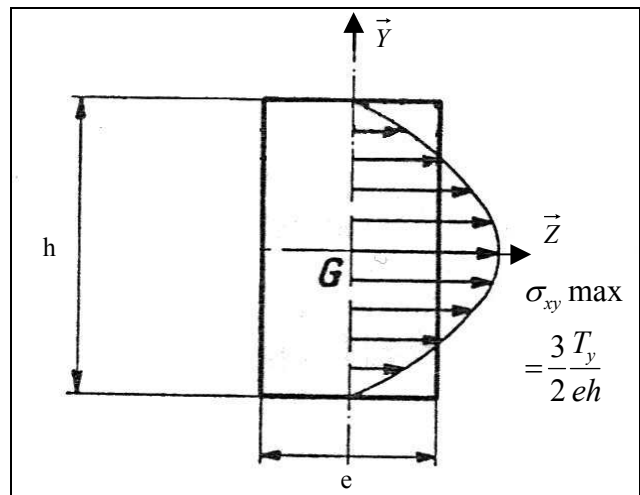


Figure 61 : Répartition des contraintes tangentielles de cisaillement dans une section rectangulaire de poutre fléchie (Giet et Géminard, 1968).

On retrouve ainsi la formulation classique de la contrainte de cisaillement. La variation de σ_{xy} est de forme parabolique en fonction de y sur la section (Figure 61).

5.1.3 Application au calcul de l'énergie de déformation dans une section massive rectangulaire

Le travail élémentaire pour la tranche dx (Eq. 87), en tenant compte de la distribution parabolique de la contrainte de cisaillement (Eq. 88) vaut :

$$dw = \frac{T_y^2}{2G_{xy}} \frac{36}{eh^6} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \right] dx \Rightarrow dw = \frac{T_y^2}{2G_{xy}} \left(\frac{5}{6} S \right) dx$$

L'expression obtenue est analogue à l'équation Eq. 86 en remplaçant la section S par la section réduite S^* définie comme suit : $S^* = KS$. Le facteur de forme K est égal à $5/6$ pour une section massive rectangulaire. Cette analogie permet de calculer l'énergie de déformation comme en cisaillement uniforme en remplaçant la section S par la section réduite S^* .

On retiendra le résultat suivant :

L'étude de l'énergie de déformation, par la théorie classique de la résistance des matériaux pour la flexion des poutres, permet d'exprimer sous la forme suivante la relation entre la déviation angulaire moyenne de cisaillement et l'effort tranchant.

$$\text{Eq. 89 } T_y = S^* G_{xy} \gamma_{xym} \quad \text{avec } S^* = KS$$

L'utilisation de cette expression permet de prendre en compte l'existence de contraintes de cisaillement non constantes dans la section en l'assimilant à un cisaillement uniforme par la substitution de la section S par la section réduite S*. Le cisaillement provoque alors une rotation des sections, d'angle γ_{xym} , autour de l'axe (GZ), les sections droites restant planes. Le facteur de forme, noté par la suite $K_{\text{classique}}$, est égal à 5/6 pour une section massive rectangulaire.

5.2 Théorie de l'élasticité

5.2.1 Prise en compte du cisaillement en flexion d'une poutre de section massive rectangulaire

5.2.1.1 Solution approchée

Guerrin et Guitard ont pris en compte l'influence du cisaillement en faisant l'hypothèse d'un état plan de contrainte (OXY) (Brancheriau, 1997). La démarche adoptée est ici détaillée.

5.2.1.1.1 Eléments de résistance des matériaux

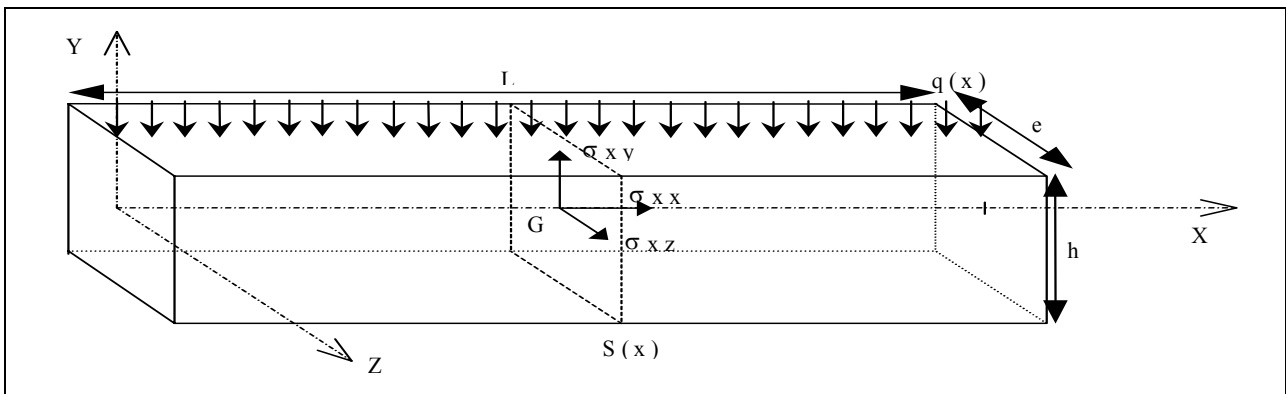
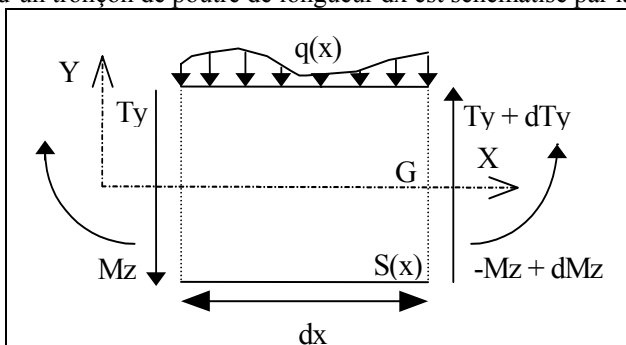


Figure 62 : Schéma d'une éprouvette, définitions géométriques et états de contrainte.

Considérons une poutre constituée par un matériau orthotrope, définie géométriquement par la Figure 62, reposant sur deux appuis simples en $x = 0$ et $x = L$. Cette poutre est soumise à un chargement transverse linéique $q(x)$. L'équilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx est schématisé par la Figure 63 ci-dessous.



Sur (OY) on a:

$$-q(x)dx - T_y + (T_y + dT_y) = 0$$

$$\Rightarrow q(x) = \frac{dT_y}{dx}$$

Sur (OZ), par rapport à G, on a:

$$T_y dx + M_z + (-M_z + dM_z) + \underbrace{(q(x)dx)dx/2}_{\text{Infiniment petit d'ordre 2 considéré comme négligeable}} = 0$$

$$\text{Eq. 90 } -T_y = \frac{dM_z}{dx}$$

Figure 63 : Equilibre d'un tronçon de poutre.

La théorie de l'élasticité montre que l'hypothèse de Bernouilli est exacte dans le cas de la flexion pure (Giet et Géminard, 1968 ; Kerguignas et Caignaert, 1977). Etudions dans ce cas (Figure 64) un tronçon de poutre de longueur dx délimité par deux sections droites S_1 et S_2 .

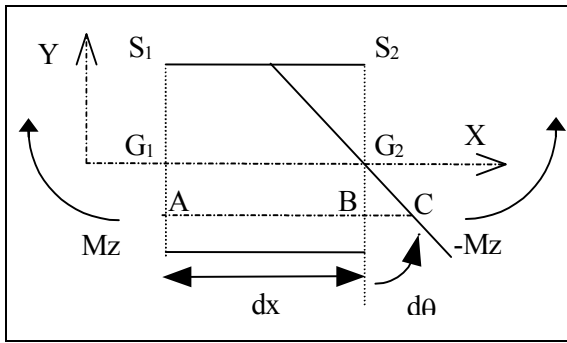


Figure 64 : Etude des déformations en flexion pure.

Après déformation S_2 a tourné de $d\theta$ par rapport à S_1 . Une fibre AB située à la coordonnée y subit un allongement BC . On a :

$$\tan d\theta = \frac{BC}{y} = d\theta$$

La loi de Hooke donne :

$$\epsilon_{xx} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} \Rightarrow$$

$$\text{Eq. 91} \quad \sigma_{xx} = y E_x \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{D'autre part: } M_z = - \iint_{S_2} \sigma_{xx} y \, dS,$$

ce qui implique, en utilisant Eq. 91 :

$$\text{Eq. 92} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{-M_z}{E_x I_{Gz}} \quad \text{avec} \quad I_{Gz} = \frac{e h^3}{12} \quad \text{et} \quad \text{Eq. 93} \quad \sigma_{xx} = \frac{-M_z}{I_{Gz}} y$$

On caractérise la déformée par son équation $y=f(x)$. Comme les déformations sont supposées petites, $\theta \approx \tan \theta$, par conséquent, $\theta = -df(x)/dx$ et $d\theta/dx = -d^2f(x)/dx^2$. De Eq. 91 et Eq. 92, on déduit que :

$$\text{Eq. 94} \quad \sigma_{xx} = -y E_x \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{et} \quad \text{Eq. 95} \quad M_z = E_x I_{Gz} \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

En flexion simple, l'effort tranchant T_y n'est pas nul et M_z n'est plus constant. L'effort tranchant génère alors des contraintes de cisaillement non uniformément réparties et des déformations angulaires variables. Les sections droites ne restent alors pas planes. Cependant, l'expérience et la théorie montre que l'on ne commet en général pas d'erreur importante en admettant l'hypothèse de Bernoulli. (Giet et Géminard, 1968 ; Kerguignas et Caignaert, 1977).

5.2.1.1.2 Prise en compte du cisaillement

L'effort tranchant se décompose comme suit,

$$\vec{T} = T_y \vec{y} + T_z \vec{z}, \quad \text{avec} \quad T_y = \iint_{S(x)} \sigma_{xy} \, dS \quad \text{et} \quad T_z = \iint_{S(x)} \sigma_{xz} \, dS = 0, \quad \text{en faisant l'hypothèse } \sigma_{xz} = 0 \text{ en tout point de } S(x).$$

D'après Eq. 90 et Eq. 95, on a :

$$\text{Eq. 96} \quad T_y = -E_x I_{Gz} \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

$$\text{Or, } \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}} \quad \text{et ceci implique donc avec Eq. 96 : } \iint_{S(x)} \gamma_{xy} \, dS = \frac{-E_x I_{Gz}}{G_{xy}} \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

Terme indépendant de la variable x . ↑ Terme fonction de x uniquement.

Il en résulte que :

$$\gamma_{xy} = \varphi(y, z) \frac{d^3f(x)}{dx^3} \quad \text{avec } \varphi(y, z) \text{ une fonction telle que, } \iint_{S(x)} \varphi(y, z) \, dS = \frac{-E_x I_{Gz}}{G_{xy}}.$$

On déduit donc l'expression :

$$\text{Eq. 97} \quad \sigma_{xy} = \varphi(y, z) G_{xy} \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

Il faut donc trouver une expression de la fonction $\varphi(y, z)$ et de la déformée $f(x)$.

5.2.1.1.3 Condition d'admissibilité statique

Les conditions pour qu'un champ de contrainte soit statiquement admissible, avec σ_{xx} défini par Eq. 94, σ_{yx} défini par Eq. 97 et toutes les autres composantes du tenseur des contraintes nulles, sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Eq. 98} \quad & \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 & \text{ implique } \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = y \frac{E_x}{G_{xy}} & (1) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 & \text{ implique } \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \text{constante} & (2) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 & \text{ est identiquement vérifiée} & (3) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

5.2.1.1.4 Condition d'admissibilité cinématique

Le champ de déformation élastique correspondant au champ de contrainte défini ci-dessus est de la forme,

$$\text{Eq. 99} \quad (\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} = -y \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{V_{xy} \sigma_{xx}}{E_x} = y V_{xy} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{V_{xz} \sigma_{xx}}{E_x} = y V_{xz} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G_{xy}} = \frac{1}{2} \varphi(y,z) \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \\ \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{zx} = 0 \end{bmatrix}$$

Pour que ce champ de déformation soit cinématiquement admissible, il doit vérifier les six équations de compatibilité suivantes,

$$\begin{aligned} \text{Eq. 100} \quad & \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & \Leftrightarrow y V_{xy} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} & (1) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} & \text{est identiquement vérifiée} & (2) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z} & \text{implique } \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 0 & (3) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} & \text{implique } -2 V_{xz} = \frac{\partial^2 \varphi(y,z)}{\partial z^2} & (4) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y \partial z} & \text{implique } \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z} = 0 & (5) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z \partial y} & \text{implique } \frac{\partial^2 \varphi(y,z)}{\partial z \partial y} = 0 & (6) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

On en conclut, en utilisant les équations Eq. 98-1 et Eq. 100-4-6, que la fonction $\varphi(y,z)$ est de la forme:

$$\varphi(y,z) = -V_{xz} z^2 + k_1 z + \frac{E_x}{2G_{xy}} y^2 + k_2 \quad \text{avec } k_1 \text{ et } k_2 \text{ des constantes d'intégration. Les équations Eq. 98-2}$$

et Eq. 100-3 permettent de proposer une équation de la déformée $f(x)$ du troisième degré en x de la forme:

$$\text{Eq. 101} \quad f(x) = \frac{a x^3}{6} + \frac{b x^2}{2} + c x + d \quad \text{avec } a, b, c, d: \text{ constantes d'intégration.}$$

5.2.1.1.5 Cas particulier d'une section droite rectangulaire

Pour une section rectangulaire de hauteur h et d'épaisseur e, libre de tout effort au contour, le vecteur cisaillement est tangent au contour extérieur (Giet et Géminard, 1968 ; Kerguignas et Caignaert, 1977).

Ceci implique que $\sigma_{xy} = 0$ en $y = \pm h/2, \forall z \in [-e/2, +e/2]$. Cette condition ne peut être satisfaite quelque soit la valeur de z. On impose alors σ_{xy} nulle en moyenne dans l'intervalle considéré. C'est à dire :

$$\int_{-e/2}^{+e/2} \varphi(\pm h/2, z) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \nu_{xz} \frac{e^2}{12} - \frac{h^2}{8} \frac{E_x}{G_{xy}}$$

k_1 reste indéterminée. Pour simplifier, on suppose que: $k_1 = 0$. Cette dernière hypothèse permet de donner l'expression de la fonction $\varphi(y,z)$ qui est déterminée au mieux, puisque satisfaisant les conditions d'admissibilités statiques et cinématiques.

Eq. 102
$$\varphi(y,z) = -\frac{E_x}{2 G_{xy}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \nu_{xz} \left(\frac{e^2}{12} - z^2 \right)$$

5.2.1.1.6 Etat mécanique correspondant

Les équations Eq. 94, Eq. 96, Eq. 99, Eq. 101, et Eq. 102 permettent de déterminer les déformations et les contraintes en tout point de l'éprouvette définie par la Figure 62.

* Champ de déformation associé,

Eq. 103
$$(\varepsilon) = \left[\begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = -y (a x + b) \\ \varepsilon_{yy} = y \nu_{xy} (a x + b) \\ \varepsilon_{zz} = y \nu_{xz} (a x + b) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{a}{2} \left[-\frac{E_x}{2 G_{xy}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \nu_{xz} \left(\frac{e^2}{12} - z^2 \right) \right] \\ \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{zx} = 0 \end{array} \right]$$

* Champ de contrainte associé,

Eq. 104
$$(\sigma) = \left[\begin{array}{l} \sigma_{xx} = -y E_x (a x + b) \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xy} = a G_{xy} \left[-\frac{E_x}{2 G_{xy}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \nu_{xz} \left(\frac{e^2}{12} - z^2 \right) \right] \\ \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zx} = 0 \end{array} \right]$$

L'expression de la contrainte de cisaillement est finalement déduite des équations Eq. 96 et Eq. 104.

On retiendra la distribution de cisaillement suivante, appelée par la suite distribution Guitard :

Hypothèses : - état de contrainte plan (OXY) $\Rightarrow \sigma_{xz}$ nulle,
 - contrainte de cisaillement fonction de y et de z uniquement.

Eq. 105
$$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{2I_{Gz}} \left[\left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) - 2 \frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \left(\frac{e^2}{12} - z^2 \right) \right]$$

5.2.1.2 Solution exacte

Timoshenko (1961), Lekhnitsikii (1963) et Laroze (1988) ont développé des modèles théoriques avec des états de contrainte tridimensionnels ($\sigma_{xz} \neq 0$). Les solutions exactes des problèmes de flexion sont données. La démarche adoptée est ici très succinctement détaillée.

Pour étudier les problèmes de flexion, on applique la méthode semi-inverse de Saint-Venant. Les contraintes de cisaillement σ_{xy} et σ_{xz} dérivent d'une fonction de contrainte $\varphi(y,z)$. On montre que, pour une section transversale rectangulaire, σ_{xy} et σ_{xz} peuvent se mettre sous la forme (Timoshenko et Goodier, 1961) :

$$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{2I_{Gz}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z} \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} = -\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

Timoshenko (1961) et Laroze (1988) montrent que la fonction de contrainte est harmonique. Cette fonction est généralement exprimée sous la forme d'une double série de Fourier. La forme de la fonction de contrainte est donnée par Timoshenko (1961) :

$$\varphi(y,z) = 2 \frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \frac{T_y}{I_{Gz}} \frac{e^3}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{h} \sin \frac{2n\pi z}{e}}{(2m+1)n \left[(2m+1)^2 \frac{e^2}{4h^2} + n^2 \right]}$$

Cette approche, bien que mathématiquement correcte, est néanmoins relativement complexe à utiliser d'un point de vue pratique. En faisant usage de la méthode de l'analogie avec une membrane, on peut établir des formules approchées, pour le calcul des contraintes de cisaillement (Timoshenko et Goodier, 1961).

On retiendra les distributions de cisaillement suivantes, appelées par la suite distributions Timoshenko (solutions approchées issues de la solution exacte de l'élasticité) :

Lorsque $h \gg e$: $\varphi(y,z) = -\frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \frac{T_y}{I_{Gz}} z \left(\frac{e^2}{12} - z^2 \right)$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{T_y}{2I_{Gz}} \left[\left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) - 2 \frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \left(\frac{e^2}{12} - z^2 \right) \right]$$

On retrouve l'expression donnée par l'équation Eq. 105.

➤ Lorsque $e \gg h$: $\varphi(y,z) = -\frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \frac{T_y}{I_{Gz}} z \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \left[1 - \exp \left(-\left(\frac{e}{2} - z \right)^m \right) \right]$ avec $m = \frac{\sqrt{10}}{h}$

$$\text{Eq. 106} \quad \sigma_{xy} = \frac{T_y}{2I_{Gz}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) - \frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \frac{T_y}{I_{Gz}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \left[1 - (1 + mz) \exp \left(-\left(\frac{e}{2} - z \right)^m \right) \right]$$

5.2.2 Application au calcul de l'énergie de déformation dans une section massive rectangulaire

5.2.2.1 Détermination du facteur de forme en utilisant la distribution Guitard

La distribution de cisaillement étant connue Eq. 105, on utilise la formule Eq. 87 pour calculer l'énergie élémentaire de déformation élastique. Le calcul est épargné au lecteur, on trouve :

$$dw = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G_{xy} KS} dx \quad \text{avec} \quad \text{Eq. 107} \quad K_{\text{Guitard}} = \frac{5}{6} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \right)^2 \left(\frac{e}{h} \right)^4} \quad \text{pour } h \gg e$$

5.2.2.2 Détermination du facteur de forme en utilisant les distributions Timoshenko

Les distributions de cisaillement étant connues Eq. 105 et Eq. 106, on utilise la formule Eq. 87 pour calculer l'énergie élémentaire de déformation élastique. Le calcul est épargné au lecteur, on trouve pour e très grand devant h , en négligeant les termes exponentiels :

$$dw = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{G_{xy} KS} dx \quad \text{avec} \quad \text{Eq. 108} \quad K_{Timoshenko} = \frac{5}{6} \frac{1}{1 - 2 \frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} + \left(\frac{\nu_{xz} G_{xy}}{E_x} \right)^2 \left(1 + \frac{h}{e\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{10} e}{2h} \right)} \quad \text{pour } e \gg h$$

5.3 Influence de l'élancement longitudinal et de l'élancement transverse sur les fréquences de vibration de flexion

5.3.1 Variation du facteur de forme en fonction de l'élancement transverse dans la plage de densité du matériau bois

En utilisant les formules Eq. 107 et Eq. 108, il est possible de déterminer l'écart entre le facteur de forme constant ($K_{classique} = 5/6$) obtenu en résistance des matériaux et les facteurs de forme obtenus en théorie de l'élasticité dans leur domaine de validité respectif. Les valeurs des facteurs de forme sont calculées pour deux densités extrêmes 0,3 g/cm³ et 1,1 g/cm³, en faisant varier l'élancement transverse de $e/h=0,04$ à 102,2 (Tableau 25) et en utilisant les ajustements fournis par Guitard (1987) qui permettent d'estimer les constantes élastiques E_x , G_{xy} et ν_{xz} en fonction de la densité. Les écarts donnés dans le Tableau 25 ont été calculés relativement au facteur de forme ' $K_{classique}$ '.

Densité : 0,3 g/cm ³					
e/h	K _{classique}	K _{Guitard} (h>>e)	K _{Timoshenko} (e>>h)	Ecart (%) / K _{classique}	
				K _{Guitard}	K _{Timoshenko}
0,04	0,83	0,83	*	<10 ⁻³	*
0,20	0,83	0,83	*	<10 ⁻³	*
0,90	0,83	0,83	0,87	2,0E-02	-4,0
12,80	0,83	*	0,86	*	-3,2
102,20	0,83	*	0,81	*	+2,4
Densité : 1,1 g/cm ³					
e/h	K _{classique}	K _{Guitard} (h>>e)	K _{Timoshenko} (e>>h)	Ecart (%) / K _{classique}	
				K _{Guitard}	K _{Timoshenko}
0,04	0,83	0,83	*	<10 ⁻³	*
0,20	0,83	0,83	*	<10 ⁻³	*
0,90	0,83	0,83	0,89	5,0E-02	-6,4
12,80	0,83	*	0,87	*	-4,4
102,2	0,83	*	0,76	*	+8,8

Tableau 25 : Ecart des valeurs du facteur de forme obtenus en résistance des matériaux et en théorie de l'élasticité.

Lorsque l'élancement transverse est faible (inférieur à l'unité), les valeurs du facteur de forme obtenues en résistance des matériaux et en théorie de l'élasticité sont quasiment identiques (écart inférieur à 0,05 % - Tableau 25). Le facteur de forme est constant et égal à 5/6. Lorsque l'élancement transverse est grand (supérieur à l'unité), le facteur ' $K_{Timoshenko}$ ' diminue en fonction de l'élancement transverse, passant de 0,87 à 0,76 ($e/h=102$, avec $e=1,533$ m et $h=15$ mm). La variation de l'écart relatif reste néanmoins faible (Tableau 25), et la valeur du facteur de forme obtenu en théorie de l'élasticité varie autour de la valeur moyenne 5/6.

5.3.2 Influence de la variation du facteur de forme et de l'élancement longitudinal sur le premier mode de vibration en flexion

Quatre configurations géométriques ont été envisagées ; la configuration 'plaque-épaisse' (élancement longitudinal $L/h=13$), la 'poutre-plaque' ($L/h=24$), la 'poutre' ($L/h=64$), et la 'plaque-mince' ($L/h=102$). Pour les trois premières configurations, l'élancement transverse varie de $e/h=0,16$ à 12,81. Dans le cas de la 'plaque-mince', l'élancement ' e/h ' varie de 0,33 à 102,20. La première fréquence de vibration est calculée selon le modèle de Timoshenko (Bordonné, 1989), en utilisant la valeur classique du facteur de forme $K=5/6$ et les facteurs obtenus en théorie de l'élasticité (Eq. 107 et Eq. 108) dans leur domaine de validité respectif. Les constantes élastiques nécessaires aux calculs des facteurs de forme et des fréquences sont estimées en fonction de deux densités extrêmes $\rho=0,3$ g/cm³ et 1,1 g/cm³ (Guitard, 1987).

Plaque-épaisse												
Densité : 1,1 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
32	5	41	13	0,16	0,83	0,83	*	876	876	*	<10 ⁻³	*
32	32	41	13	1,00	0,83	0,83	0,89	876	876	878	2,9E-03	-0,263
32	410	41	13	12,81	0,83	*	0,87	876	*	877	*	-0,183
Densité : 0,3 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
32	5	41	13	0,16	0,83	0,83	*	846	846	*	<10 ⁻³	*
32	32	41	13	1,00	0,83	0,83	0,87	846	846	848	1,5E-03	-0,222
32	410	41	13	12,81	0,83	*	0,86	846	*	848	*	-0,180
Poutre-plaque												
Densité : 1,1 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
32	5	78	24	0,16	0,83	0,83	*	252	252	*	<10 ⁻³	*
32	32	78	24	1,00	0,83	0,83	0,89	252	252	252	<10 ⁻³	-0,079
32	410	78	24	12,81	0,83	*	0,87	252	*	252	*	-0,055
Densité : 0,3 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
32	5	78	24	0,16	0,83	0,83	*	246	246	*	<10 ⁻³	*
32	32	78	24	1,00	0,83	0,83	0,87	246	246	246	<10 ⁻³	-0,068
32	410	78	24	12,81	0,83	*	0,86	246	*	246	*	-0,055
Poutre												
Densité : 1,1 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
32	5	206	64	0,16	0,83	0,83	*	37	37	*	<10 ⁻³	*
32	32	206	64	1,00	0,83	0,83	0,89	37	37	37	<10 ⁻³	-0,012
32	410	206	64	12,81	0,83	*	0,87	37	*	37	*	-0,008
Densité : 0,3 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
32	5	206	64	0,16	0,83	0,83	*	36	36	*	<10 ⁻³	*
32	32	206	64	1,00	0,83	0,83	0,87	36	36	36	<10 ⁻³	-0,010
32	410	206	64	12,81	0,83	*	0,86	36	*	36	*	-0,008
Plaque-mince												
Densité : 1,1 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
15	5	153	102	0,33	0,83	0,83	*	31	31	*	<10 ⁻³	*
15	15	153	102	1,00	0,83	0,83	0,89	31	31	31	<10 ⁻³	-0,005
15	1533	153	102	102,2	0,83	*	0,76	31	*	31	*	+0,007
Densité : 0,3 g/cm³												
h (mm)	e (mm)	L (cm)	L/h	e/h	K _{classique}	K _{Guitard}	K _{Timoshenko}	f _{1_Classique} (Hz)	f _{1_Guitard} (Hz)	f _{1_Timoshenko} (Hz)	Δf _{1_Guitard} (%)	Δf _{1_Timoshenko} (%)
15	5	153	102	0,33	0,83	0,83	*	30	30	*	<10 ⁻³	*
15	15	153	102	1,00	0,83	0,83	0,87	30	30	30	<10 ⁻³	-0,004
15	1533	153	102	102,2	0,83	*	0,81	30	*	30	*	+0,003

Tableau 26 : Influence du facteur de forme et de l'éclatement longitudinal sur le premier mode de vibration en flexion.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le Tableau 26. On observe que, quelle que soit la configuration géométrique envisagée, les fluctuations du facteur de forme en fonction de l'éclatement transverse ont une influence négligeable sur le premier mode de vibration en flexion dans la plage de densité du matériau bois. On remarque toutefois que lorsque l'éclatement longitudinal augmente, passant de L/h=13 à 102, l'influence des variations du facteur de forme sur le premier mode de vibration diminue quelle que soit la valeur de l'éclatement transverse. Ce phénomène s'explique par

le fait que la solution de Bordonné, selon le modèle de Timoshenko, tend vers le modèle de Bernoulli lorsque l'élanement longitudinal augmente. L'influence du cisaillement est alors négligeable.

Liot (1994) et Guitard (1996) ont développé une équation du mouvement des vibrations de flexion des poutres prismatiques orthotropes en prenant en compte les effets Poisson. L'équation du mouvement ainsi proposée constitue une extension de l'équation de Timoshenko et permet de prendre en compte l'influence de l'élanement transverse 'e/h' sur les fréquences de vibration de flexion. Cette formulation, introduisant des coefficients correctifs fonctions de puissances de l'élanement transverse 'e/h', suppose notamment que le cisaillement σ_{XZ} est nul. Lorsque le ratio 'e/h' devient grand, la géométrie de l'éprouvette tend vers la géométrie classique des plaques minces. Or la théorie des plaques suppose que le cisaillement σ_{XZ} est prédominant par rapport aux autres cisaillements σ_{XY} et σ_{YZ} considérés comme nuls (Linard, 1998). Les formules approchées, issues de la solution exacte au problème de flexion des poutres, (Eq. 105 et Eq. 106) développées par Timoshenko (1961) supposent également que l'hypothèse du cisaillement σ_{XZ} nul n'est plus applicable lorsque la grandeur géométrique e est supérieure à la grandeur h (cas d'une 'poutre - plaque' et d'une plaque) (Timoshenko et Goodier, 1961). De ces dernières remarques, il semble que le modèle et la formulation développés par Liot et Guitard ne soient applicables que dans le cas où l'élanement transverse 'e/h' est faible, c'est à dire voisin ou inférieur à l'unité. Dans le domaine de validité précité, les influences de l'élanement transverse et des effets Poisson sur les fréquences de vibration de flexion peuvent être considérées comme négligeables.

5.3.3 Apparition de fréquences relatives à d'autres modes de vibration

L'étude de l'influence de l'élanement transverse (ratio e/h) implique une bonne compréhension des phénomènes ou mouvements qui s'expriment lorsqu'une poutre devient plaque et inversement. Lorsque la géométrie du matériau se rapproche de celle d'une plaque (e ≈ L), des pulsations relatives à d'autres modes de déformation que le mouvement de flexion (OX) peuvent être observées. On est alors en présence des modes de vibration décrit en dynamique des plaques (Lekhnitskii, 1968 ; Berthelot, 1996 ; Linard, 1998).

D'une manière générale en dynamique des plaques, on considère un solide limité par deux plans parallèles, dont la dimension transverse h est petite en comparaison des deux autres dimensions L et e (Figure 65) (Berthelot, 1996). Cette définition géométrique s'applique bien aux plaques 'minces' (voir Tableau 26). On montre que l'équation du mouvement w(x,z,t) d'une plaque mince en vibration libre - libre s'écrit (Timoshenko, 1939 ; Lekhnitskii, 1968 ; Weaver, et al., 1990 ; Berthelot, 1996 ; Linard, 1998) :

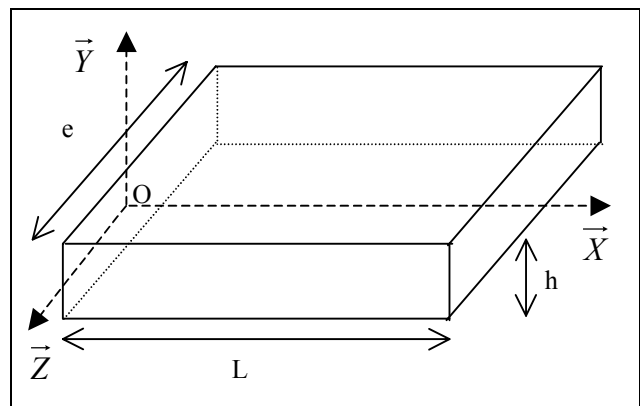


Figure 65 : Description géométrique d'une plaque.

$$\text{Eq. 109} \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$\begin{cases} D_1 = \frac{h^3}{12(1 - \nu_{ZX}\nu_{XZ})} E_X \\ D_2 = \frac{h^3}{12(1 - \nu_{ZX}\nu_{XZ})} E_Z \\ D_3 = \frac{\nu_{ZX}}{2} D_1 + \frac{\nu_{XZ}}{2} D_2 + \frac{h^3}{6} G_{XZ} \end{cases}$$

L'équation Eq. 109 se résout par la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz en considérant que la plaque mince est une combinaison surfacique de poutres dans la direction (OX) et (OZ) (Linard, 1998). L'application de cette méthode permet de trouver l'expression des trois modes de vibration de plaque.

Vibration en flexion selon (OX) :

$$\text{Eq. 110} \quad f_1(ox) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{500,6 h^2 E_X}{12(1 - \nu_{ZX}\nu_{XZ})\rho L^4}}$$

Vibration en flexion selon (OZ) :

$$\text{Eq. 111 } f_1(oz) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{500,6 h^2 E_Z}{12(1-\nu_{ZX}\nu_{XZ})\rho e^4}}$$

Vibration en rotation :

$$\text{Eq. 112 } f_1(xz) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48 h^2 G_{XZ}}{\rho L^2 e^2}}$$

Les fréquences ainsi obtenues, traduisant les trois modes de vibration de plaque, peuvent se retrouver en utilisant la théorie des poutres. On étudie alors chaque mode de vibration séparément. Considérons un mouvement de flexion selon l'axe (OX), l'équation Eq. 109 devient :

$$\frac{h^3}{12(1-\nu_{ZX}\nu_{XZ})} E_X \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

En négligeant l'influence des coefficients de Poisson, on obtient l'équation du mouvement selon le modèle de Bernoulli :

$$E_X I_{GZ} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

L'expression du premier mode de vibration de flexion en (OX), comme en (OY), correspond donc à la fréquence d'une poutre de Bernoulli. Les équations Eq. 110 et Eq. 111 peuvent s'écrire :

Vibration en flexion selon (OX)

$$\text{Eq. 113 } f_1(ox) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{GZ(ox)} X_1}{\rho S_{ox} L^4}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{ox} = eh \\ I_{GZox} = \frac{eh^3}{12} \end{cases}$$

Vibration en flexion selon (OZ)

$$\text{Eq. 114 } f_1(oz) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_Z I_{GZ(oz)} X_1}{\rho S_{oz} e^4}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{oz} = Lh \\ I_{GZoz} = \frac{Lh^3}{12} \end{cases}$$

Concernant le mode de vibration de torsion (Eq. 112), il est nécessaire de faire un bref rappel de la théorie des vibrations des poutres. L'étude de la torsion uniforme des poutres droites de section circulaire en résistance des matériaux donne l'expression de l'angle de torsion unitaire constant (Kerguignas et Caignaert, 1977) :

$$\text{Eq. 115 } \beta = -\frac{M_X}{G_{Tor} I_G}$$

avec $\begin{cases} \beta : \text{angle de torsion unitaire} \\ M_X : \text{moment de torsion} \\ G_{Tor} : \text{module de cisaillement de torsion} \\ I_G : \text{moment polaire en 'G'} \end{cases}$

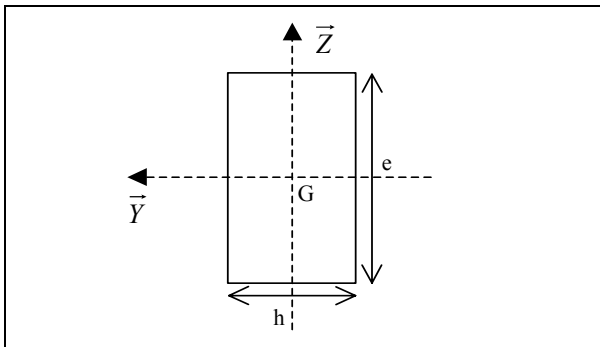


Figure 66 : Torsion des poutres prismatiques, définition géométriques.

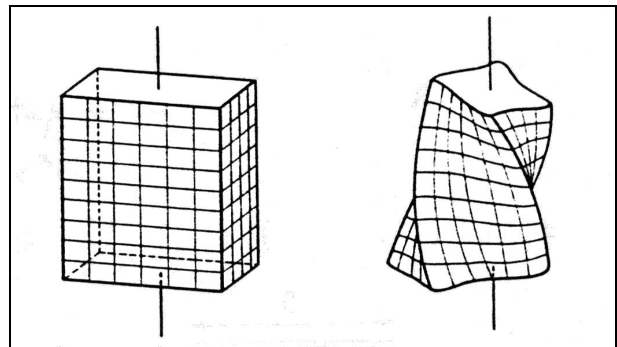


Figure 67 : Gauchissement des sections droites en torsion des poutres prismatiques.

L'absence de symétrie de révolution dans les poutres prismatiques provoque un gauchissement des sections droites (Figure 67) (Timoshenko et Goodier, 1961). L'étude de ce cas particulier en théorie de l'élasticité montre que l'utilisation de l'équation Eq. 115 est possible en remplaçant la rigidité torsionnelle $G_{Tor}I_G$ par une rigidité torsionnelle C_{Tor} dépendant de la section (Kerguignas et Caignaert, 1977). Pour une section rectangulaire (Figure 66), on a :

$$\text{Eq. 116 } \beta = -\frac{M_X}{k_{Tor}eh^3G_{Tor}}$$

La quantité k_{Tor} est appelée constante de torsion. Elle dépend de l'élançement transverse 'e/h', et ses valeurs sont données dans le Tableau 27 ci-dessous :

e/h	1	1,5	2	4	6	10	∞
k_{Tor}	0,141	0,196	0,229	0,281	0,299	0,313	0,333

Tableau 27 : Valeurs de la constante de torsion en fonction de l'élançement transverse (Kerguignas et Caignaert, 1977).

Ces résultats (Eq. 116 et Tableau 27) sont utilisés dans l'étude de la torsion dynamique des poutres. On montre que les fréquences de vibration de torsion d'une poutre prismatique s'expriment selon la formule suivante (Casagrande, 1998) :

$$\text{Eq. 117 } f_{Tor_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{k_{Tor}eh^3G_{Tor}}{\rho I_G}}$$

Le moment polaire I_G s'écrit pour une section rectangulaire :

$$\text{Eq. 118 } I_G = \frac{eh}{12}(e^2 + h^2)$$

St Venant introduit le concept d'un module de cisaillement effectif, qui tient compte de l'interaction des deux modules de cisaillement G_{XY} et G_{XZ} pour un matériau orthotrope (Casagrande, 1998).

Le module de cisaillement de torsion G_{Tor} peut s'écrire :

$$G_{Tor} = \frac{2G_{XY}G_{XZ}}{G_{XY} + G_{XZ}}$$

En supposant la quasi-égalité des modules de cisaillement transverse, on obtient alors :

$$\text{Eq. 119 } G_{Tor} = \frac{2G_{XY}G_{XZ}}{G_{XY} + G_{XZ}} \approx G_{XY} \approx G_{XZ}$$

Les équations Eq. 117, Eq. 118, et Eq. 119 permettent de conjecturer l'expression des fréquences de vibration de torsion d'une poutre prismatique :

$$\text{Eq. 120 } f_{Tor_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{12k_{Tor}G_{XZ}h^2}{\rho(e^2 + h^2)}}$$

Considérons le premier mode de vibration et supposons la dimension h très petite devant les autres dimensions L et e. La constante de torsion devient alors égal à $k_{Tor}=4/12$ (Tableau 27). On obtient alors une expression de la fréquence de torsion issue de la théorie des poutres comparable à l'équation Eq. 112 trouvée en théorie des plaques :

$$\text{Eq. 121 } f_{Tor_1} = \sqrt{\frac{h^2G_{XZ}}{\rho L^2 e^2}}$$

La théorie des plaques donne l'expression suivante (Eq. 112) :

$$f_1(xz) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{\frac{h^2G_{XZ}}{\rho L^2 e^2}} \approx 1,103 \sqrt{\frac{h^2G_{XZ}}{\rho L^2 e^2}}$$

Les équations Eq. 112 et Eq. 121 permettent d'estimer l'écart relatif entre l'expression de la fréquence de torsion écrite en théorie des poutres et en théorie des plaques :

$$\frac{\Delta f}{f} \text{ Torsion} = \frac{f_1(xz) - f_{Tor_1}}{f_1(xz)} = 9,3\%$$

L'expression des fréquences de vibration de torsion, Eq. 120, n'est valable que pour les premiers modes (deux tout au plus). Lorsque l'on considère les fréquences de rang élevé, on constate que le biais entre l'expérience et la théorie

classique des vibrations de torsion des poutres, de même que pour les plaques minces, augmentent avec le rang. Ce biais provient de la viscosité du matériau bois pour les modes de rang très élevés, mais aussi des phénomènes de gauchissement des plans (OXY) et (OZY) lors de la torsion du matériau. Les phénomènes de gauchissement précités deviennent significatifs à partir du deuxième mode de vibration. Ces résultats ont été obtenus par Nakao (1996) lors de l'étude des vibrations de torsion sur une 'poutre - plaque' en épicéa de dimensions 0,25x0,039x0,0092 m (L/h=27, e/h=4) (Nakao, 1996).

5.4 Bilan théorique de l'influence des variations géométriques sur les fréquences de vibration

L'expression de l'effort tranchant dans le modèle de vibration des poutres de Timoshenko utilise un facteur de forme K qui dépend de la géométrie de la section. Ce facteur permet de prendre en compte la variation de la contrainte de cisaillement dans la section. Classiquement, une distribution de cisaillement parabolique est utilisée pour calculer K en résistance des matériaux.

On retiendra les résultats suivant :

D'autres distributions approchées de la contrainte de cisaillement, issues de la solution exacte au problème de la flexion des poutres en théorie de l'élasticité, existent. Ces distributions approchées ont été utilisées dans le calcul du facteur de forme. Une application numérique montre que, théoriquement, l'influence de l'élanement transverse sur le calcul des premières fréquences de vibration de flexion est négligeable. Le facteur de forme est quasiment constant et égal à $K=5/6$.

Cependant, l'étude de l'influence de l'élanement transverse conduit à établir des relations entre le modèle plaque et le modèle poutre. Il est possible d'apporter une réponse à la question posée par Linard (1998) : « Quelles sont les limites entre le modèle plaque et le modèle poutre ? ». Les deux modèles sont liés ; la théorie des plaques est un prolongement de la théorie des poutres. Le modèle plaque traduit trois modes de vibration et peut se déduire du modèle poutre en considérant les trois mouvements séparément. Le modèle plaque n'est applicable qu'en considérant l'épaisseur comme très petite. On parle alors de plaque mince. L'étude du domaine de validité du modèle de Bernoulli, relatif au mouvement de flexion, montre que la théorie classique des plaques n'est applicable que pour un élanement longitudinal 'L/h' et un élanement transverse 'e/h' supérieur à 20. Les formules suivantes sont utilisées pour les plaques minces :

Vibration en flexion selon (OX) (Eq. 113)

$$f_1(ox) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{GZ(ox)} X_1}{\rho S_{ox} L^4}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{ox} = eh \\ I_{GZox} = \frac{eh^3}{12} \end{cases}$$

Vibration en flexion selon (OZ) (Eq. 114)

$$f_1(oz) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_Z I_{GZ(oz)} X_1}{\rho S_{oz} e^4}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{oz} = Lh \\ I_{GZoz} = \frac{Lh^3}{12} \end{cases}$$

Vibration en rotation (Eq. 112)

$$f_1(xz) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{\frac{h^2 G_{XZ}}{\rho L^2 e^2}} \approx 1,103 \sqrt{\frac{h^2 G_{XZ}}{\rho L^2 e^2}}$$

De ces remarques, on déduit que lorsque l'élanement longitudinal et l'élanement transverse sont compris entre 10 et 20, cas d'une plaque épaisse, le modèle de Timoshenko doit être utilisé pour calculer les fréquences de flexion. L'expression des fréquences de rotation décrite en théorie des poutres semble également plus adaptée dans le cas des plaques épaisses. Les formules suivantes devraient être utilisées :

Vibration en flexion selon (OX)

$$\text{Eq. 122 } f_1(ox) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz(ox)} X_1}{\rho S_{ox} L^4 \left[1 + \alpha_{ox} F_1(m_1) + \alpha_{ox} \frac{E_X}{KG_{XY}} F_2(m_1) \right]}} \text{ avec } \begin{cases} S_{ox} = eh \\ I_{Gzox} = \frac{eh^3}{12} \end{cases} \text{ et } \alpha_{ox} = \frac{I_{Gz(ox)}}{S_{ox} L^2}$$

Vibration en flexion selon (OZ)

$$\text{Eq. 123 } f_1(oz) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_Z I_{Gz(oz)} X_1}{\rho S_{oz} e^4 \left[1 + \alpha_{oz} F_1(m_1) + \alpha_{oz} \frac{E_Z}{KG_{ZY}} F_2(m_1) \right]}} \text{ avec } \begin{cases} S_{oz} = Lh \\ I_{Gzoz} = \frac{Lh^3}{12} \end{cases} \text{ et } \alpha_{oz} = \frac{I_{Gz(oz)}}{S_{oz} e^2}$$

Vibration en rotation

$$\text{Eq. 124 } f_{Tor-1} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{12k_{Tor} G_{Tor} h^2}{\rho(e^2 + h^2)}} \text{ avec } G_{Tor} = \frac{2G_{XY} G_{XZ}}{G_{XY} + G_{XZ}}$$

6 ETUDE EXPERIMENTALE

6.1 Matériel et méthode

6.1.1 Matériel végétal

Deux essences de forte densité ont été retenues (Tableau 28). Les éprouvettes destinées aux essais sont issues de débits en plot (planche proche de la périphérie). Un plateau pour chaque essence a été utilisé, après conditionnement jusqu'à stabilisation à une humidité théorique de 12 %, pour façonner les éprouvettes. Ces dernières ont pour dimensions finales 2060x409x32 mm pour l'éprouvette 'poutre' en jacareuba, 774x410x32 mm pour l'éprouvette 'poutre-plaque' en monghinza, et 409x408x32 mm pour l'éprouvette 'plaque' en monghinza.

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm ³)	Dimensions finales (mm)	Nombre D'éprouvettes
Jacareuba	Brésil	<i>Calophyllum brasiliense Camb.</i>	0,63	2060x409x32	1
Monghinza	R.C.A.	<i>Manilkara mabokeensis Aubr.</i>	0,98	774x410x32 409x408x32	1 1

Tableau 28 : Répertoire des essences sélectionnées.

Les éprouvettes sont, pour autant que possible, prismatiques, de droit fil, sans nœud, ni défaut. Le sens longitudinal est colinéaire à l'axe longitudinal (OX) des éprouvettes.

6.1.2 Démarche expérimentale

L'objectif de l'expérimentation est d'étudier l'influence éventuelle de la variation de l'élancement transverse (rapport e/h) sur la première fréquence de vibration, en compression comme en flexion (Figure 68). L'étude de l'évolution du premier mode de vibration obtenue à partir du dispositif BING, mis au point par le CIRAD-Forêt, en fonction de la variation de l'élancement transverse permettra de corroborer les résultats obtenus de manière analytique au chapitre 3. Afin d'atteindre ces objectifs, on se propose de réaliser les essais expérimentaux indiqués par la Figure 26. Les essais ont été réalisés en conditions industrielles, dans une menuiserie.

Pour chaque échantillon, l'élancement transverse (e/h) est progressivement modifié en diminuant sa largeur par découpe successive d'une bande latérale de 37 mm. Ce prélèvement est réalisé alternativement de part et d'autre du plan de flexion (OX,OY). Cette procédure présente l'avantage d'éviter les dispersions expérimentales, éventuellement imputables, dans le cas de plusieurs éprouvettes de largeur différentes, à la variabilité spatiale du matériau (Guitard, et al., 1996).

Lorsque la géométrie de l'échantillon se rapproche de celle d'une plaque ($e \approx L$), c'est notamment le cas pour les échantillons 'poutre-plaque' et 'plaque', des pulsations relatives à d'autres modes de déformation, en sollicitation de flexion (OX), peuvent interférer. On retrouve alors les modes de vibration décrit en dynamique des plaques (Lekhnitsikii, 1968 ; Berthelot, 1996 ; Linard, 1998).

Ajouté au mouvement de flexion longitudinal (OX), deux mouvements de flexion transversale (OZ) et de torsion apparaissent. Il est important de remarquer que la théorie classique en dynamique des plaques fait l'hypothèse d'une très faible hauteur h devant les autres grandeurs géométriques e et L . Dans le cas présent, il s'agit plutôt de plaque épaisse, d'où la difficulté d'identifier correctement chaque mode de vibration et ses harmoniques en utilisant les formules classiques des vibrations de plaque.

Les bandes latérales issues des découpes successives sont ensuite testées en vibration de flexion dans le plan (OX,OY), ainsi qu'en vibration de compression. En flexion, les trois premières fréquences de vibration sont mesurées et serviront de référence. Le module d'élasticité longitudinal et le module de cisaillement transverse est également calculé par le modèle de Timoshenko. En compression, la première fréquence de vibration est mesurée et servira de référence.

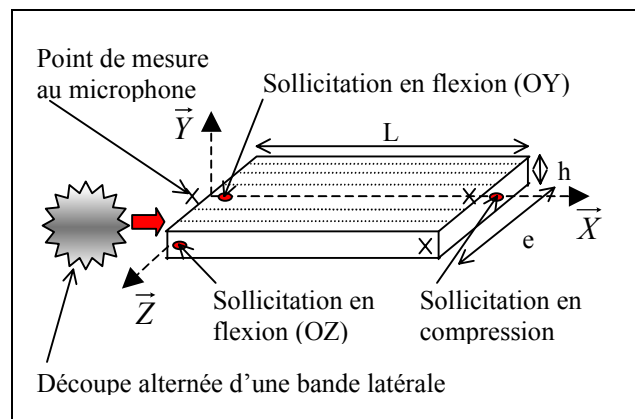


Figure 68 : Schéma des essais vibratoires en faisant varier l'élancement transverse.

Afin de tenir compte de la variabilité du matériau, les références sont prises égales aux moyennes des mesures de fréquences, ou des constantes élastiques, des bandes latérales constitutives de l'échantillon testé en vibration à un élançement transverse donné.

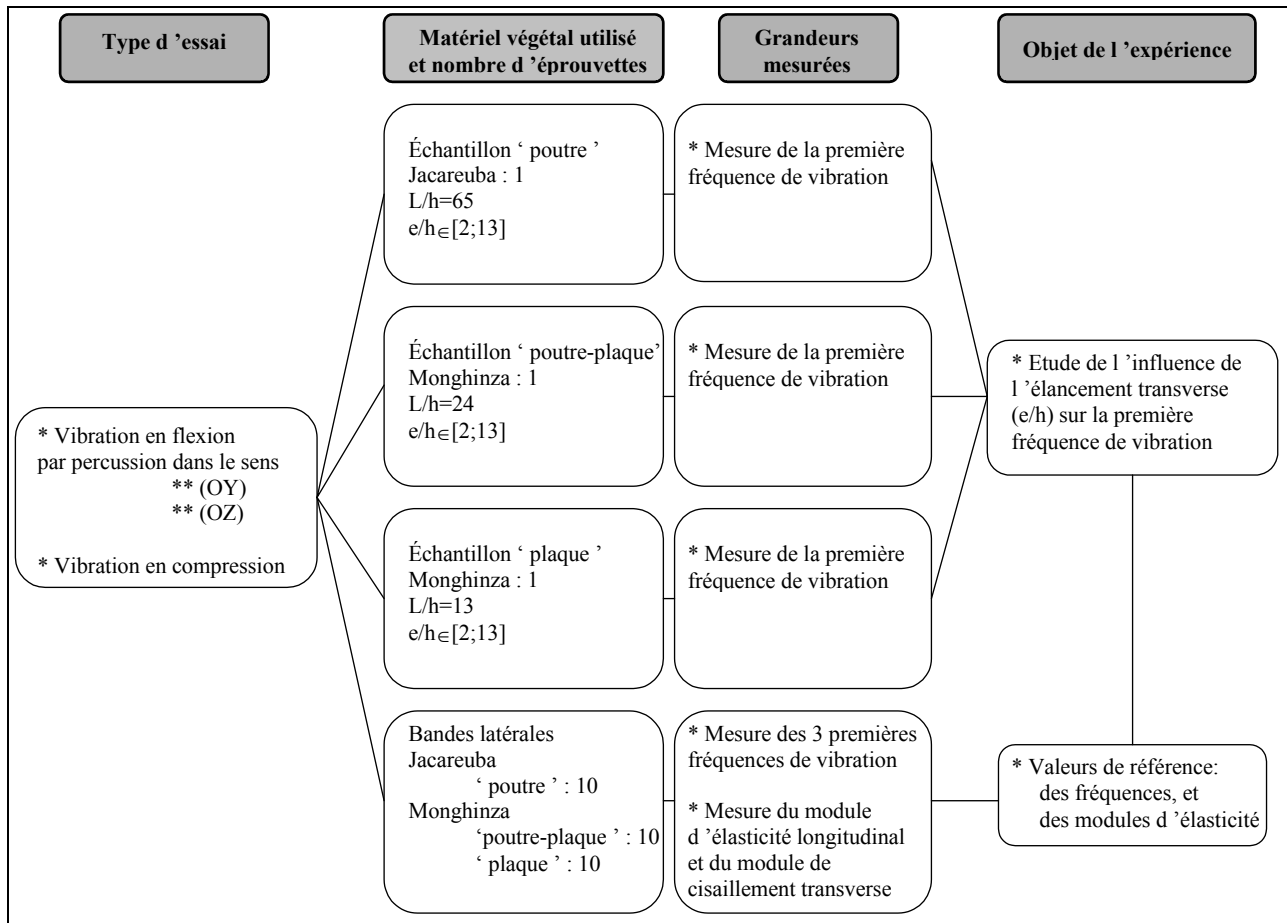


Figure 69 : Présentation des essais expérimentaux réalisés.

6.1.3 Essais vibratoire

6.1.3.1 principe

L'éprouvette repose sur des supports élastiques et la sollicitation est provoquée par percussion dans la direction tangentielle ou longitudinal du bois sur une des extrémités. Le signal temporel, capté par un microphone, est acquis puis traité par décomposition en série de Fourier (FFT). Le module d'élasticité longitudinal et le module de cisaillement transverse sont déterminés par l'analyse du spectre des fréquences des vibrations naturelles en flexion de l'éprouvette. Le principe de l'analyse modale des vibrations naturelles de flexion d'une éprouvette flottante et leur détermination par la théorie des poutres élastiques est utilisé par le logiciel d'exploitation BING V7 développé au CIRAD-Forêt.

6.1.3.2 Réglages retenus pour les essais expérimentaux

➤ En flexion sur les échantillons :

				'poutre'
Micro	Signal x 10	Durée d'acquisition	175 ms	700 ms
Seuil de déclenchement	20 mV	Largeur spectrale	5 000 Hz	5 000 Hz
Gamme	200 mV	Nombre de points	16 384 points	16 384 points
Fréquence de coupure du filtre	5 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	93 458 Hz	23 419 Hz
		Résolution ⁷	5,7 Hz	1,4 Hz

⁷ Résolution spectrale théorique = 1/Durée d'acquisition (Hz)

➤ **En compression sur les échantillons :**

Micro	Signal x 10	Durée d'acquisition	87 ms
Seuil de déclenchement	100 mV	Largeur spectrale	15 000 Hz
Gamme	1 V	Nombre de points	16 384 points
Fréquence de coupure du filtre	30 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	188 679 Hz
		Résolution	11,5 Hz

➤ **En flexion sur les bandes latérales (références) :**

Micro	Signal x 10	Durée d'acquisition	700 ms
Seuil de déclenchement	20 mV	Largeur spectrale	5 000 Hz
Gamme	200 mV	Nombre de points	16 384 points
Fréquence de coupure du filtre	5 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	23 419 Hz
		Résolution	1,4 Hz

➤ **En compression sur les bandes latérales (références) :**

Micro	Signal x 10	Durée d'acquisition	175 ms
Seuil de déclenchement	100 mV	Largeur spectrale	15 000 Hz
Gamme	1 V	Nombre de points	16 384 points
Fréquence de coupure du filtre	30 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	93 458 Hz
		Résolution	5,7 Hz

6.1.4 *Incertitudes expérimentales sur la mesure des fréquences de vibration*

➤ **Calcul théorique des erreurs expérimentales**

On rappelle que l'incertitude théorique absolue de mesure sur les fréquences se calcule en utilisant la formule suivante :

$$\frac{|\Delta f_i|}{f_i} = \frac{1 + 0,5r}{f_i}, \text{ avec } r : \text{ la résolution.}$$

Compte tenu des réglages retenus (§ 2.1.4), on obtient les incertitudes expérimentales suivantes.

* Mesures des fréquences sur les échantillons :

Echantillon 'poutre'			
Type d'essai	Flexion (ox)	Flexion (oz)	Compression
Min(Fréquences) (Hz)	34	56	1101
Incertitude (%)	5,0	3,0	0,6
Echantillon 'poutre-plaque'			
Type d'essai	Flexion (ox)	Flexion (oz)	Compression
Min(Fréquences) (Hz)	244	366	2919
Incertitude (%)	1,6	1,1	0,2
Echantillon 'plaque'			
Type d'essai	Flexion (ox)	Flexion (oz)	Compression
Min(Fréquences) (Hz)	875	1175	5689
Incertitude (%)	0,4	0,3	0,1

Tableau 29 : Incertitudes théoriques expérimentales sur la mesure des modes propres des échantillons.

* Mesures des fréquences sur les bandes latérales :

Echantillon 'poutre'							
Type d'essai	Flexion (ox)			Flexion (oz)			Compression
	f1(Hz)	f2(Hz)	f3(Hz)	f1(Hz)	f2(Hz)	f3(Hz)	
Min(Fréquences) (Hz)	31	87	173	36	99	194	998
Incertitude (%)	5,5	2,0	1,0	4,7	1,7	0,9	0,4
Echantillon 'poutre-plaque'							
Type d'essai	Flexion (ox)			Flexion (oz)			Compression
	f1(Hz)	f2(Hz)	f3(Hz)	f1(Hz)	f2(Hz)	f3(Hz)	
Min(Fréquences) (Hz)	244	613	1168	272	706	1312	2846
Incertitude (%)	0,7	0,3	0,1	0,6	0,2	0,1	0,1
Echantillon 'plaque'							
Type d'essai	Flexion (ox)			Flexion (oz)			Compression
	f1(Hz)	f2(Hz)	f3(Hz)	f1(Hz)	f2(Hz)	f3(Hz)	
Min(Fréquences) (Hz)	855	2074	3513	971	2313	3849	5630
Incertitude (%)	0,2	0,1	0,05	0,2	0,1	0,04	0,1

Tableau 30 : Incertitudes théoriques expérimentales sur la mesure des fréquences des bandes latérales.

➤ **Evaluation du module d'élasticité longitudinal et du module de cisaillement transverse**

Le calcul des constantes élastiques est effectué en appliquant la solution de Bordonné sur les modes de vibration de flexion dans le sens (OX) et (OZ). On rappelle que dans le cas d'un matériau homogène, pour un élanement variant de 10 à 40 et un ratio E_X/G_{XY} de 12 à 20 (plage du matériau bois), les formules suivantes sont applicables pour déterminer en valeur absolue l'écart maximal relatif sur E_X et G_{XY} (sans tenir compte de la régression linéaire utilisée dans la solution de Bordonné) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\Delta E_X|}{E_X} = \frac{|\Delta m|}{m} + 3 \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta e|}{e} + 3 \frac{|\Delta L|}{L} + 3 \frac{|\Delta f_1|}{f_1} + \frac{|\Delta f_2|}{f_2} \\ \frac{|\Delta G_{XY}|}{G_{XY}} = \frac{|\Delta m|}{m} + 0,8 \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta e|}{e} + 0,8 \frac{|\Delta L|}{L} + 14 \frac{|\Delta f_1|}{f_1} + 16 \frac{|\Delta f_2|}{f_2} \end{array} \right.$$

Compte tenu des caractéristiques géométriques de chaque bande latérale et des incertitudes sur la mesure des fréquences (Tableau 30), on obtient les incertitudes expérimentales suivantes.

Echantillon 'poutre'		
Type d'essai	Flexion (ox)	Flexion (oz)
Incertitude sur E_X (%)	19,9	17,1
Incertitude sur G_{XY} (%)	109,6	93,6
Echantillon 'poutre-plaque'		
Type d'essai	Flexion (ox)	Flexion (oz)
Incertitude sur E_X (%)	4,0	3,5
Incertitude sur G_{XY} (%)	15,2	12,2
Echantillon 'plaque'		
Type d'essai	Flexion (ox)	Flexion (oz)
Incertitude sur E_X (%)	2,7	2,6
Incertitude sur G_{XY} (%)	5,1	5,1

Tableau 31 : Incertitudes théoriques expérimentales sur le calcul des constantes élastiques des bandes latérales.

Dans le cas 'poutre', l'incertitude sur le module G_{XY} est due à la trop forte résolution utilisée (1,4 Hz) par rapport aux valeurs des fréquences rencontrées (Tableau 31). La valeur de G_{XY} ainsi obtenue sera à considérer avec précaution dans l'analyse des résultats expérimentaux.

6.2 Résultats synthétiques et analyses

6.2.1 Sollicitation en flexion par percussion dans le sens (OY)

➤ Essais sur les bandes latérales issues des découpes successives des échantillons

De part leur géométrie, les bandes latérales correspondent bien aux hypothèses de la théorie des poutres (Kerguignas et Caignaert, 1977). Leur élancement longitudinal 'L/h' est supérieur à 10, et leur élancement transverse 'e/h' est voisin de l'unité ; les grandeurs géométriques sont donc telles que $L \gg e \approx h$. Les essais vibratoires sur ces bandes latérales servent de référence par rapport aux valeurs expérimentales trouvées sur les échantillons. Les trois premières fréquences de vibration sont mesurées, et les modules d'élasticité et de cisaillement sont calculés d'après la solution de Bordonné au modèle de Timoshenko (Timoshenko, 1921 ; Bordonné, 1989). Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 32.

Bandes latérales de 'poutre' Essence : Jacareuba	Densité d (g/cm ³)	Ecart-type (g/cm ³) n=10	E _L (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10	G _{LR} (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10
Valeurs expérimentales	0,608	0,013	11935	818	1345 973	783 208
Réf. Bibliographique	0,630	*	12300	*	*	*
Lois Guitard	0,630	*	13944	*	1216	*
Bandes latérales de 'poutre - plaque', 'plaque' Essence : Monghinza	Densité d (g/cm ³)	Ecart-type (g/cm ³) n=10	E _L (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10	G _{LR} (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10
Val. exp. 'poutre – plaque'	0,936	0,034	19190	839	1718	283
Val. exp. 'plaque'	0,929	0,036	20757	827	1616	257
Réf. Bibliographique	0,980	*	21300	*	1950	*
Lois Guitard	0,980	*	21980	*	2012	*

Tableau 32 : Constantes élastiques expérimentales du Jacareuba et du Monghinza obtenues en vibration de flexion par percussion dans le sens (OY), comparées avec deux références bibliographiques (Guitard, 1987 ; Chichignoud, et al., 1990).

Globalement, les valeurs expérimentales sont proches de celles trouvées dans l'Atlas des bois tropicaux d'Amérique latine (Chichignoud, et al., 1990), et de celles issues des courbes de tendance moyenne fonction de la densité (Guitard, 1987) (Tableau 32). Les écarts - types calculés dans le Tableau 32 montrent que les matériaux utilisés pour l'expérience sont relativement homogènes. Il est néanmoins nécessaires de remarquer que dans l'échantillon 'poutre' deux bandes latérales (identifiées 1 et 8) ont un comportement atypique en ce qui concerne la valeur du module de cisaillement (voir valeur moyenne surlignée en jaune tenant compte des valeurs des bandes 1 et 8 et valeur moyenne non surlignée n'en tenant pas compte dans le Tableau 32). Les bandes latérales numéro 1 et 8 ne comportent pas d'anomalies visibles, cependant les valeurs atypiques du module de cisaillement transverse peuvent s'expliquer par la trop forte résolution utilisée dans la mesure des fréquences (§ 6.1.4).

➤ Essais sur les échantillons

Pour chaque échantillon, la première fréquence de vibration est mesurée au fur et à mesure que l'élancement transverse diminue par découpe successive d'une bande latérale. Les fréquences décrites en dynamique des plaques caractérisant d'autres mouvements que la flexion selon l'axe (OX) ont été soigneusement écartées de l'analyse (voir paragraphe 5.3.3). Afin de s'affranchir, autant que possible, de la variabilité du matériau, l'étude de l'influence de l'élancement transverse est faite sur le ratio de la fréquence de l'échantillon sur la fréquence de référence associée. Les résultats obtenus sont illustrés par la Figure 70, la Figure 71 et la Figure 72.

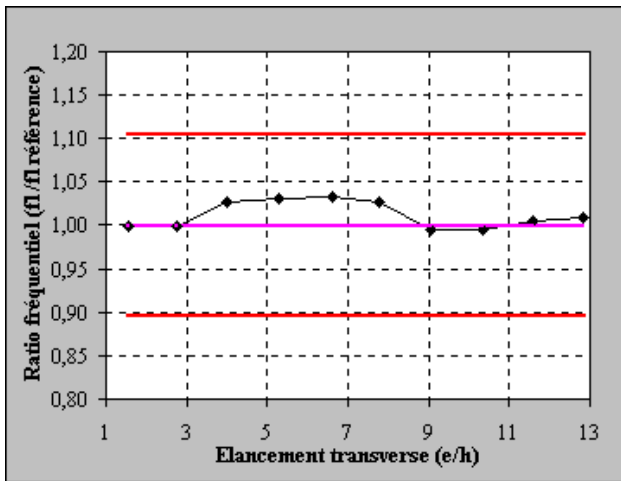


Figure 70 : Evolution du premier mode de vibration en flexion par percussion dans le sens (OY) de l'échantillon 'poutre' en fonction de l'élongement transverse.

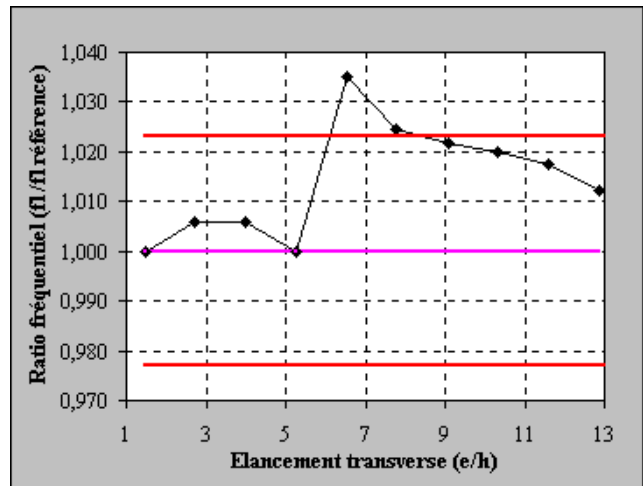


Figure 71 : Evolution du premier mode de vibration en flexion par percussion dans le sens (OY) de l'échantillon 'poutre - plaque' en fonction de l'élongement transverse.

Sur ces figures, une ligne bleue marque la valeur unité signifiant une influence nulle de l'élongement transverse sur le premier mode de vibration. Les deux lignes rouges indiquent les valeurs théoriques seuils de l'incertitude expérimentale. L'incertitude théorique sur le ratio fréquentiel s'écrit :

$$Ratio = \frac{f_1 \text{ exp}}{f_1 \text{ réf}} = \frac{f_1 \text{ échantillon}}{f_1 \text{ bandes latérales}} \Rightarrow$$

$$\frac{|\Delta Ratio|}{Ratio} = \frac{|\Delta f_1 \text{ exp}|}{f_1 \text{ exp}} + \frac{|\Delta f_1 \text{ réf}|}{f_1 \text{ réf}}$$

Les valeurs seuils sont calculées en utilisant les résultats du paragraphe 6.1.4, Tableau 29 et Tableau 30.

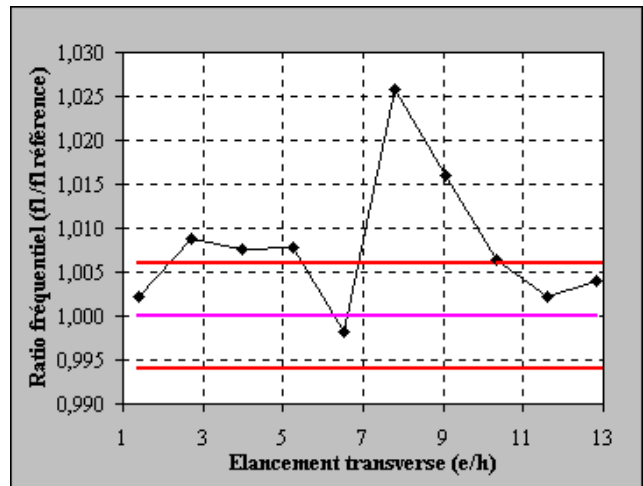


Figure 72 : Evolution du premier mode de vibration en flexion par percussion dans le sens (OY) de l'échantillon 'plaque' en fonction de l'élongement transverse.

Pour les trois types d'échantillon testés, il n'existe pas de tendance linéaire statistiquement significative⁸ (avec un risque de 5%) entre l'élongement transverse et le premier mode de vibration (Figure 70, Figure 71 et Figure 72). Cependant, les ratios fréquentiels des échantillons 'poutre - plaque' et 'plaque' dépassent les seuils acceptables d'incertitude expérimentale, notamment au niveau de l'élongement e/h=6,5 pour 'poutre - plaque', et e/h=7,8 pour 'plaque'. De plus, les courbes d'évolution illustrées dans la Figure 71 et la Figure 72 ont une allure similaire. Ce phénomène ne peut pas s'expliquer par le bruit environnant des machines de l'atelier, ni par un changement de réglage des instruments d'acquisition, ni par la variabilité spatiale du matériau ('poutre - plaque' et 'plaque' sont issus du même plateau).

Il est possible que lorsque les mouvements de vibration de plaque, autres que la flexion selon l'axe (OX), deviennent suffisamment significatifs, et que leur fréquence soit proche de la fréquence de flexion (OX), il se produise une interaction entre les deux mouvements ayant des fréquences voisines. Dans le cas de l'échantillon 'poutre - plaque', les modes de plaque deviennent significatifs lorsque e/h=6,5 et c'est au voisinage de cette valeur que le mode de torsion et le mode de flexion (OX) ont des fréquences très proches. La même remarque s'applique à l'échantillon 'plaque' lorsque e/h=7,8 mais c'est le mode de flexion (OZ) et le mode de flexion (OX) qui ont des fréquences très voisines.

L'écart entre fréquences expérimentales et fréquences de référence reste néanmoins faible. Il est au maximum de -3,3 % pour l'échantillon 'poutre', de -3,5 % pour l'échantillon 'poutre - plaque' et de -2,6 % pour l'échantillon 'plaque'. Si le phénomène d'interaction entre mouvements de fréquences voisines est vérifié, il est très peu marqué. L'influence de

⁸ Calcul du coefficient de corrélation de Pearson, et test de signification de la valeur obtenue (test de Student avec un risque de 5%).

l'élancement transverse sur le premier mode de vibration de flexion par percussion dans le sens (OY) est par conséquent négligeable.

6.2.2 Sollicitation en flexion par percussion dans le sens (OZ)

➤ Essais sur les bandes latérales issues des découpes successives des échantillons

Comme en flexion par sollicitation dans le sens (OY), les essais vibratoires sur les bandes latérales servent de référence par rapport aux valeurs expérimentales trouvées sur les échantillons. Les trois premières fréquences de vibration sont mesurées, et les modules d'élasticité et de cisaillement sont calculés d'après la solution de Bordonné au modèle de Timoshenko (Timoshenko, 1921 ; Bordonné, 1989). Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 33.

Bandes latérales de 'poutre' Essence : Jacareuba	Densité d (g/cm ³)	Ecart-type (g/cm ³) n=10	E _L (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10	G _{LT} (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10
Valeurs expérimentales	0,608	0,013	11996	930	917	175
Réf. Bibliographique	0,630	*	12300	*	*	*
Lois Guitard	0,630	*	13944	*	934	*
Bandes latérales de 'poutre - plaque', 'plaque' Essence : Monghinza	Densité d (g/cm ³)	Ecart-type (g/cm ³) n=10	E _L (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10	G _{LT} (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10
Val. exp. 'poutre - plaque'	0,936	0,034	18992	719	1546	134
Val. exp. 'plaque'	0,929	0,036	20490	896	1514	76
Réf. Bibliographique	0,980	*	21300	*	1420	*
Lois Guitard	0,980	*	21980	*	1629	*

Tableau 33 : Constantes élastiques expérimentales du Jacareuba et du Monghinza obtenues en vibration de flexion par percussion dans le sens (OZ), comparées avec deux références bibliographiques (Guitard, 1987 ; Chichignoud, et al., 1990).

Les valeurs expérimentales sont proches de celles trouvées dans l'Atlas des bois tropicaux d'Amérique latine (Chichignoud, et al., 1990), et de celles issues des courbes de tendance moyenne fonction de la densité (Guitard, 1987) (Tableau 33). Les écarts - types calculés dans le Tableau 32 montrent que les matériaux utilisés pour l'expérience sont relativement homogènes.

➤ Essais sur les échantillons

La première fréquence de vibration des échantillons est mesurée au fur et à mesure que l'élancement transverse diminue par découpe successive d'une bande latérale. Cependant, dans cette configuration d'essai, une modification de l'élancement transverse entraîne également une modification de l'élancement longitudinal. Afin de s'affranchir des variations de l'élancement longitudinal, la fréquence de référence est prise égale à la fréquence calculée par la solution de Bordonné (1989) pour chaque échantillon, à une valeur de l'élancement transverse donnée.

Les constantes élastiques nécessaires au calcul du premier mode de vibration selon Bordonné sont les moyennes des valeurs des bandes latérales constitutives de l'échantillon considéré. Le calcul du premier mode de vibration n'est valable qu'à partir d'une valeur de l'élancement longitudinal. Cette valeur critique se détermine comme suit.

Le développement théorique est valable si la relation suivante est vérifiée $X\alpha\Gamma \leq 1$ avec

$$\alpha = \frac{I_{Gz}}{SL^2}, \quad X = \frac{\omega^2 L^4 S \rho}{E_X I_{Gz}}, \quad \Gamma = \frac{E_X I_{Gz}}{KSG_{XY} L^2}$$

l'élancement longitudinal de la forme :

$$\frac{L}{h} \geq 4 \sqrt{\frac{1}{12\pi^2} \frac{E_X}{G_{XY}} X_n}$$

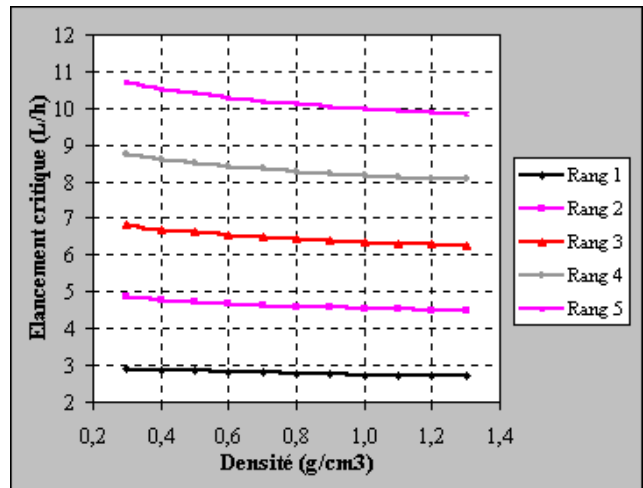


Figure 73 : Elancement longitudinal critique selon le rang de la fréquence considérée fonction de la densité pour le matériau bois.

Cette dernière équation permet de tracer l'évolution de l'élongement longitudinal critique selon le rang de la fréquence considérée en fonction de la densité du matériau (Figure 73). Le ratio E_x/G_{xy} est calculé en utilisant les lois Guitard pour les feuillus (Guitard, 1987). La Figure 73 montre que le calcul de la première fréquence de vibration selon Bordonné est théoriquement valable à partir d'un élongement longitudinal $L/h \approx 3$. Deux remarques sont toutefois nécessaires. Les résultats du calcul de premier mode de vibration doivent être considérés avec précaution lorsque l'on se situe à la limite de validité du modèle ($L/h \approx 3$). De plus, même si le calcul du module d'élasticité E_x et du module de cisaillement G_{xy} en fonction des trois premières fréquences de vibration est théoriquement possible à partir d'un élongement longitudinal $L/h \approx 7$ d'après la solution de Bordonné, il est préférable d'utiliser cette solution pour un élongement $L/h \geq 10$ car l'incertitude sur les module d'élasticité E_x et G_{xy} augmente lorsque l'élongement longitudinal diminue.

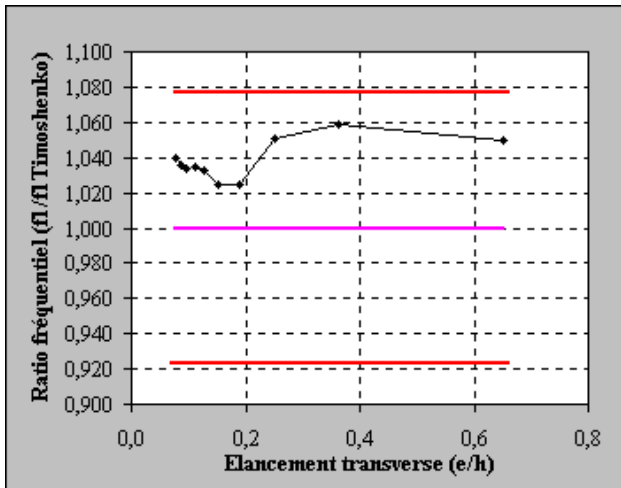


Figure 74 : Evolution du premier mode de vibration en flexion par percussion dans le sens (OZ) de l'échantillon 'poutre' en fonction de l'élongement transverse.

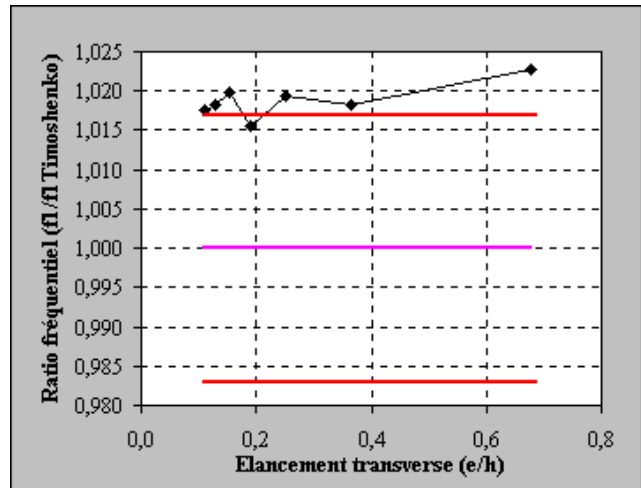


Figure 75 : Evolution du premier mode de vibration en flexion par percussion dans le sens (OZ) de l'échantillon 'poutre - plaque' en fonction de l'élongement transverse.

L'étude de l'influence de l'élongement transverse est faite sur le ratio fréquence de l'échantillon sur fréquence de référence associée. Les résultats obtenus sont illustrés par la Figure 74 et la Figure 75. L'échantillon 'plaque' n'a pas pu fournir de résultats utiles car seules deux valeurs de l'élongement longitudinal étaient supérieures au seuil critique. Sur les figures ci-dessus, comme en vibration de flexion par sollicitation dans le sens (OY), une ligne bleue marque la valeur unité signifiant une influence nulle de l'élongement transverse sur le premier mode de vibration. Les deux lignes rouges indiquent les valeurs théoriques seuils de l'incertitude expérimentale (on suppose que le calcul du premier mode selon Bordonné n'ajoute pas d'incertitude supplémentaire significative par rapport à l'incertitude expérimentale).

Pour les deux types d'échantillon testés, il existe une tendance linéaire statistiquement significative⁹ (avec un risque de 5%) entre l'élongement transverse et le premier mode de vibration (Figure 74 et Figure 75). Cependant, un ajustement linéaire montre que les pentes des droites sont quasiment nulles⁹ pour les deux échantillons (avec un risque de 5%). La liaison observée entre l'élongement transverse et le premier mode de vibration est en fait due à l'erreur croissante de la solution de Bordonné lorsque l'on se rapproche du seuil de validité. Les ratios fréquentiels des échantillons 'poutre' et 'poutre - plaque' fluctuent dans la zone acceptable d'incertitude expérimentale (le décalage par rapport à l'unité rencontrée notamment pour 'poutre - plaque' provient du biais de calcul de la solution de Bordonné sur les fréquences de référence). L'influence de l'élongement transverse sur le premier mode de vibration de flexion par percussion dans le sens (OZ) est par conséquent négligeable.

6.2.3 sollicitation en compression

➤ Essais sur les bandes latérales issues des découpes successives des échantillons

Les essais vibratoires sur les bandes latérales servent de référence par rapport aux valeurs expérimentales trouvées sur les échantillons. La première fréquence de vibration est mesurée, et le module d'élasticité est calculé. Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 34.

⁹ Calcul du coefficient de corrélation de Pearson, et test de signification de la valeur obtenue (test de Student avec un risque de 5%).

Ajustement linéaire, test de signification des coefficients de régression obtenue (test de Student avec un risque de 5%), et détermination des intervalles de confiance des coefficients.

Bandes latérales de ‘poutre’ Essence : Jacareuba	Densité d (g/cm ³)	Ecart-type (g/cm ³) n=10	E _L (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10
Valeurs expérimentales	0,608	0,013	12324	914
Bandes latérales de ‘poutre - plaque’, ‘plaque’ Essence : Monghinza	Densité d (g/cm ³)	Ecart-type (g/cm ³) n=10	E _L (Mpa)	Ecart-type (Mpa) n=10
Val. exp. ‘poutre – plaque’	0,936	0,034	19859	1037
Val. exp. ‘plaque’	0,929	0,036	21212	1108

Tableau 34 : Constantes élastiques expérimentales du Jacareuba et du Monghinza obtenues en vibration de compression.

Les valeurs expérimentales trouvées en compression sont supérieures à celles obtenues en flexion (Tableau 32 et Tableau 33). Cette constatation rejoint la remarque du paragraphe 2.1.4. La surestimation du module en vibration de compression est probablement causée par la viscoélasticité du matériau bois. Les écarts - types trouvées dans le Tableau 34 sont comparables à ceux trouvés en vibration de flexion (Tableau 32 et Tableau 33).

➤ **Essais sur les échantillons**

La première fréquence de vibration des échantillons est mesurée au fur et à mesure que l’élancement transverse diminue par découpe successive d’une bande latérale. Afin de s’affranchir, autant que possible, de la variabilité du matériau, l’étude de l’influence de l’élancement transverse est faite sur le ratio fréquence de l’échantillon sur fréquence de référence associée. Les résultats obtenus sont illustrés par la Figure 76, la Figure 77 et la Figure 78. Sur ces figures, comme en vibration de flexion par sollicitation dans le sens (OY), une ligne bleue marque la valeur unité signifiant une influence nulle de l’élancement transverse sur le premier mode de vibration. Les deux lignes rouges indiquent les valeurs théoriques seuils de l’incertitude expérimentale.

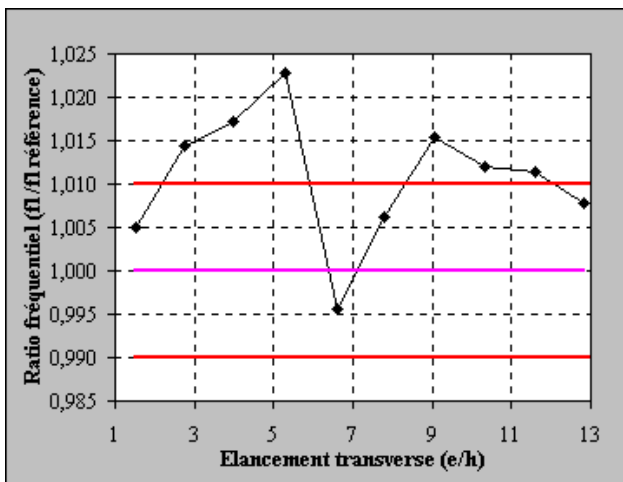


Figure 76 : Evolution du premier mode de vibration en compression de l’échantillon ‘poutre’ en fonction de l’élancement transverse.

Il n’existe pas de tendance linéaire statistiquement significative⁸ (avec un risque de 5%) entre l’élancement transverse et le premier mode de vibration pour les échantillons ‘poutre’ et ‘plaque’ (Figure 76 et Figure 78). Par contre, pour l’échantillon ‘poutre – plaque’, cette tendance existe⁹ (Figure 77). Un ajustement linéaire montre que la pente de la droite est quasiment nulle pour l’échantillon considéré⁹.

Les ratios fréquentiels des trois échantillons testés dépassent les seuils théoriques acceptables d’incertitude expérimentale (Figure 76, Figure 77 et Figure 78). Ce phénomène peut s’expliquer par le bruit environnant important dû aux machines à bois proches de la zone d’expérimentation.

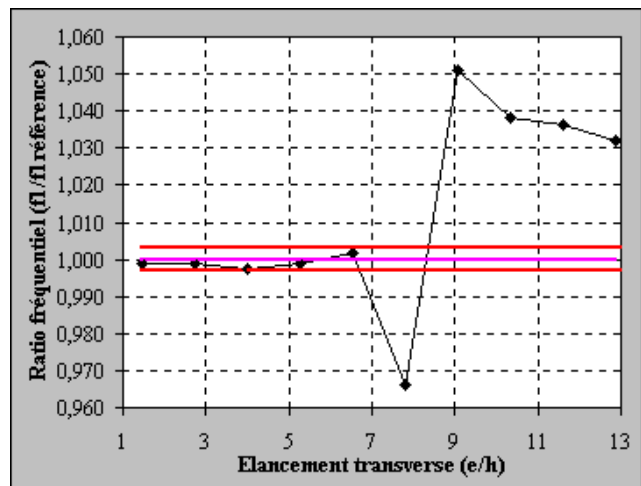


Figure 77 : Evolution du premier mode de vibration en compression de l’échantillon ‘poutre - plaque’ en fonction de l’élancement transverse.

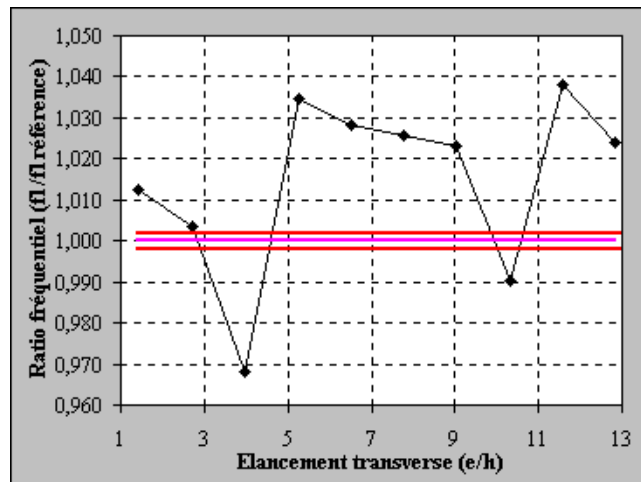


Figure 78 : Evolution du premier mode de vibration en compression de l'échantillon 'plaque' en fonction de l'élançement transverse.

En vibration de compression, la gamme de première fréquence des échantillons se situe entre 1000 Hz et 6000 Hz (elle est de 30 Hz à 900 Hz pour les essais de vibration de flexion) et correspond à la gamme de vibration des machines à bois. Ceci est particulièrement visible dans la Figure 77 où à partir d'un élançement transverse de $e/h=6,5$ les machines ont été mises en fonctionnement (une fréquence machine a pu être très nettement identifiée à 2973 Hz). Les points marquant un brusque décrochement pour les échantillons 'poutre' ($e/h=6,6$ - Figure 76) et 'plaque' ($e/h=4,0$ et $e/h=10,3$ - Figure 78) correspondent à des signaux très parasités (mode de torsion et modes de flexion significatifs).

Bien que les expériences aient été menées en conditions industrielles, les variations des premières fréquences de vibration en compression restent faibles. Il est au maximum de -2,3 % pour l'échantillon 'poutre', de -5,1 % pour l'échantillon 'poutre – plaque' et de -3,8 % pour l'échantillon 'plaque'. L'influence de l'élançement transverse sur le premier mode de vibration de compression est par conséquent négligeable.

BILAN DU CHAPITRE II

L'étude de l'influence de l'élançement transverse (rapport base / hauteur) sur les fréquences de vibrations transversales a été réalisée de façon théorique à partir du facteur de forme utilisé par la solution de Bordonné (1989). Une application numérique montre que l'influence de l'élançement transverse sur le calcul des premières fréquences de vibrations transversales est négligeable. Le facteur de forme est quasiment constant et égal à la valeur $K=5/6$.

Comprendre le comportement mécanique d'une poutre en vibration lorsque son élançement transverse varie nous a de plus conduit à établir des relations entre le modèle plaque et le modèle poutre. Les deux modèles sont liés ; la théorie des plaques est un prolongement de la théorie des poutres. Le modèle plaque traduit trois modes de vibration et peut se déduire du modèle poutre en considérant les trois mouvements séparément. Ce résultat n'est valable que pour les premières fréquences de vibration.

La réalisation des essais vibratoires en ambiance industrielle a permis de constater que la méthode de mesure dynamique est utilisable dans l'industrie. Il est recommandé d'isoler phoniquement le microphone en raison des perturbations (erreur sur la détermination des fréquences de 5% environ) provoquées par les machines.

Expérimentalement, l'influence de l'élançement transverse sur le premier mode de vibration de flexion selon l'axe (OX) par percussion dans le sens (OY), par percussion dans le sens (OZ), ainsi qu'en vibration de compression est négligeable. Il est important de remarquer que lorsque la géométrie de l'échantillon se rapproche de celle d'une plaque des pulsations relatives à d'autres modes de déformation que celui étudié, flexion selon l'axe (OX), peuvent interférer et doivent être soigneusement écartées de l'analyse.

Il est possible que lorsque les mouvements de vibration de plaque, autres que la flexion selon l'axe (OX), deviennent suffisamment significatifs, et que leur fréquence soit proche de la fréquence de flexion (OX), il se produise une interaction entre les deux mouvements ayant des fréquences voisines. Cette interaction pourrait se traduire par un décalage de fréquence qui serait néanmoins très faible en comparaison avec l'incertitude expérimentale.

Afin d'estimer au mieux les caractéristiques de rigidité et de résistance utiles au classement mécanique à partir de la réponse vibratoire des poutres testées, le chapitre suivant aborde le problème de la compréhension, et de la modélisation, des différents phénomènes physiques se produisant lorsqu'une onde se propage à travers le matériau. Dans les chapitres précédents, seule l'élasticité du matériau est utilisée pour décrire le phénomène de vibration des poutres, nous nous intéressons maintenant aux différents mécanismes d'amortissement des ondes propagatives et notamment au comportement viscoélastique du bois.

Chapitre III : Dynamique des poutres homogènes viscoélastiques

INTRODUCTION

Les modèles mécaniques unidimensionnels classiques de vibrations longitudinales ou transversales des poutres considèrent le matériau en vibrations comme étant élastique et homogène (Bernoulli, 1748 ; Timoshenko, 1921). L'utilisation de ces modèles conduit à l'expression de la déformée, ainsi qu'aux fréquences propres de vibrations par l'exploitation de l'équation du mouvement et des conditions aux limites (Bordonné, 1989 ; Laroze, 1992). La solution générale de l'équation du mouvement en vibrations transversales, ou longitudinales, s'écrit comme la somme infinie de fonctions des fréquences propres (Laroze, 1992). C'est à dire, en notant u le déplacement et n le rang de la fréquence propre :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

La connaissance de la déformée et des valeurs des fréquences propres de vibrations ne donne aucun renseignement sur la forme des pics du spectre en fréquence réellement obtenu. Pour le mécanicien travaillant en élasticité pure, le spectre se réduit à une succession de barres verticales infiniment longues dont les abscisses correspondent aux valeurs des fréquences propres. Or dans la réalité physique, les spectres en fréquence obtenus expérimentalement sont bien loin de ressembler à une modélisation purement élastique qui reste donc très restrictive.

Vouloir utiliser la solution générale du déplacement exprimée sous la forme d'une somme infinie de termes est également très difficile à manipuler, aussi bien théoriquement – dès que l'on envisage un changement de milieu de propagation, des sous systèmes oscillants, ou bien la superposition des plusieurs types de déformation – que numériquement car la notion d'infinie varie selon la puissance de calcul des machines utilisées. Utiliser les développements classiques en dynamique des poutres dans le domaine purement élastique ne permet donc qu'une compréhension très limitée des phénomènes se produisant dans le matériau lorsque celui ci est en vibrations.

Depuis une vingtaine d'années, les progrès technologiques en matière de capacité de calcul et de capacité de mémoire en informatique ont permis de développer de nouveaux instruments de musique très différents de ceux habituellement fabriqués en lutherie puisque constitués essentiellement de circuits imprimés. A l'origine, l'objectif principal d'un synthétiseur était qu'il restitue le plus fidèlement possible les sons de l'instrument de musique, comme par exemple un piano, qu'il était sensé imiter. De ce point de vue, la synthèse sonore doit permettre une reconstruction la plus parfaite possible des vibrations émises par un instrument de lutherie, et donc de sa réponse en fréquence. Plusieurs méthodes numériques de synthèse sonore ont ainsi pu être développées, comme notamment les modèles guide d'onde directement reliés aux phénomènes physiques mis en jeu dans la production des sons (Smith, 1992 ; Guillemain, et al., 1997).

Le mécanicien et l'informaticien en synthèse musicale abordent le même problème physique sous deux aspects différents et complémentaires. Il est en effet possible d'unifier les modèles de synthèse musicale et les modèles de mécanique des matériaux (Guillemain, et al., 1997 ; Ystad, 1998). Ce chapitre a pour objet le développement d'un modèle utilisant la synthèse musicale et la mécanique des matériaux dans le cadre de poutres en bois vibrant longitudinalement, ou transversalement, en considérant le matériau comme viscoélastique.

Dans une première partie, la théorie des modèles guide d'onde est abordée, ainsi que l'ensemble des développements théoriques conduisant à la modélisation des vibrations longitudinales et transversales. La deuxième partie de ce chapitre a pour objet la présentation des résultats expérimentaux relatifs à la caractérisation des propriétés viscoélastiques d'une poutre par un essai dynamique.

Les développements théoriques et expérimentaux présentés ici ont pour objectif une meilleure compréhension des phénomènes physiques se produisant lorsque le matériau est en vibration. Cette étude doit également permettre une caractérisation correcte du matériau bois en vibrations du point de vue de son élasticité mais aussi de sa viscosité à partir d'un essai dynamique impulsif. La caractérisation globale de la poutre de bois testée, du point de vue viscoélastique, pourra apporter des paramètres pertinents quant au classement mécanique des poutres. En effet, lorsqu'une poutre est dégradée par une attaque fongique, par une attaque d'insectes xylophages, ou qu'elle possède de nombreuses hétérogénéités, les phénomènes de dissipation et de dispersion des ondes propagatives dans le matériau vont être plus importants, la valeur du module d'élasticité risque par ailleurs de diminuer (Machek, et al., 2001). Ces paramètres viscoélastiques vont permettre une caractérisation mécanique globale de la pièce testée ; ils seront par exemple très utiles lorsqu'il s'agit de vérifier que la qualité mécanique d'un matériau est préservée au cours du processus de transformation (Minato, et al., 1995).

7 DYNAMIQUE DES POUTRES HOMOGENES VISCOELASTIQUES

7.1 Le concept de la synthèse sonore

Grâce aux avancées technologiques de ces dernières années dans le domaine numérique, il est devenu techniquement possible de recréer par synthèse des sons d'instruments de musique. La modélisation sonore consiste à construire des modèles de synthèse susceptibles de reproduire et de manipuler des sons naturels. Parmi les différentes voies qui se sont ouvertes, on s'intéresse notamment aux procédés basés sur le concept d'analyse - synthèse (Figure 79). Il consiste à reproduire un son à l'aide d'un modèle à partir de l'analyse d'un ou de plusieurs sons réels issus directement de l'objet source. (Ystad, 1998 ; Aramaki, 1999).

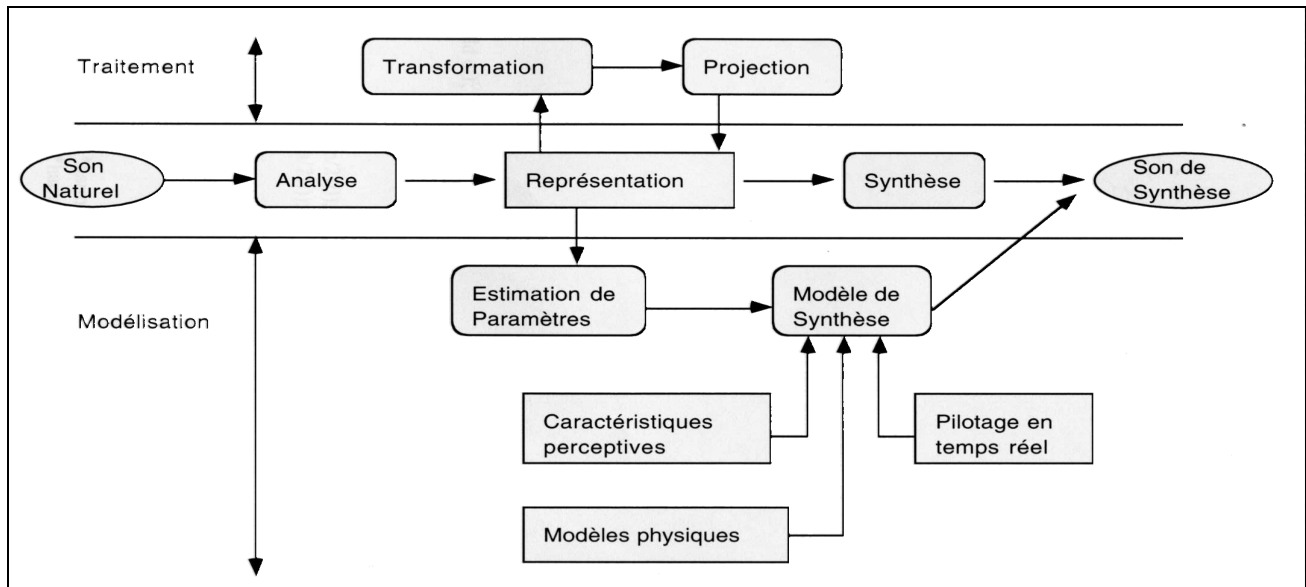


Figure 79 : Le concept d'analyse – synthèse des signaux sonores (Ystad, 1998 ; Aramaki, 1999).

Parmi les modèles de synthèse, on peut distinguer deux catégories (Aramaki, 1999) :

- les modèles de signaux qui décrivent le son sous forme d'une formule mathématique sans prendre en compte l'origine de la production. Le choix de ce modèle est dicté par des impératifs perceptifs (synthèse additive, synthèse soustractive, (Ystad, 1998)) ou par des critères de rendement numérique (exemple : modulation de fréquence).
- les modèles propagatifs, ou modèles guide d'onde, qui prennent en compte les caractéristiques mécaniques du système physique qui a produit le signal. Contrairement aux modèles dits de signaux sans référence (a), les paramètres des modèles guide d'onde sont directement reliés aux phénomènes physiques mis en jeu dans la production du son.

Dans le but de caractériser mécaniquement des poutres de structure en bois, nous nous intéresserons par la suite aux modèles propagatifs (b). Après une présentation générale de ces modèles, nous les adapterons au cas particulier des poutres en bois en vibrations longitudinales ou transversales libre – libre.

7.2 Systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT)

Considérons un système soumis à une entrée $e(t)$, il délivre une sortie $s(t)$. Ce système est dit linéaire s'il vérifie la relation suivante :

$$\text{Eq. 125} \quad \begin{aligned} e(t) &\rightarrow [\text{Système}] \rightarrow s(t) \\ \{A_1 e_1(t) + A_2 e_2(t)\} &\rightarrow [\text{Système}] \rightarrow \{A_1 s_1(t) + A_2 s_2(t)\}, \text{ avec } (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Si on décale dans le temps le signal d'entrée $e(t)$ d'une durée τ , le signal de sortie $s(t)$ est alors décalé de la même quantité (Eq. 126). Cette propriété caractérise un système invariant dans le temps, on parle également de système stationnaire.

$$\text{Eq. 126} \quad e(t + \tau) \rightarrow [\text{Système}] \rightarrow s(t + \tau), \text{ avec } \tau \in \mathbb{R}$$

A titre d'exemples, la propagation d'ondes sonores dans un milieu élastique constitue un système linéaire invariant dans le temps, mais les phénomènes d'hystérésis ne le sont pas (Smith, 1999).

Dans un tel système (SLIT), les signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ sont reliés par une équation intégro - différentielle linéaire à coefficients constants (Max et Lacoume, 2000). Afin de préciser cette notion, nous écrivons ci-dessous l'équation différentielle entrée - sortie d'un système analogique (Eq. 127) et l'équation aux différences (Eq. 128) du même système discretisé :

$$\text{Eq. 127 } s(t) + \sum_{k=1}^P a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}$$

$$\text{Eq. 128 } s(n) + \sum_{k=1}^P a_k s(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k e(n-k), (P, M) \in \mathbb{N}^2$$

Le signal de sortie est ici supposé causal, il ne peut donc faire appel à des valeurs du signal de sortie et d'entrée futures. On définit la réponse impulsionnelle (ou percussionnelle) d'un système par la sortie $h(t)$ correspondant à une entrée $\delta(t)$, où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac. Pour un système SLIT, connaissant sa réponse impulsionnelle $h(t)$, la sortie $s(t)$ relative à une entrée quelconque $e(t)$ est donnée par le produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle (Max et Lacoume, 2000) :

$$\text{Eq. 129 } s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Connaître la réponse impulsionnelle d'un SLIT permet de le caractériser complètement, et de s'affranchir de l'impulsion d'entrée. Pour un système discret, il est important de préciser la relation existante (Eq. 131 et Eq. 132) entre la convolution à temps discret (Eq. 130) et l'équation aux différences (Eq. 128), la transformée en Z est notée TZ (Bellanger, 1998) :

$$\text{Eq. 130 } s(n) = \sum_{k=0}^P h(k) e(n-k), P \in \mathbb{N}$$

$$\text{Eq. 131 } s(n) + \sum_{k=1}^P a_k s(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k e(n-k) \xrightarrow{\text{TZ}} S(Z) \left[1 + \sum_{k=1}^P a_k Z^{-k} \right] = E(Z) \sum_{k=0}^M b_k Z^{-k}$$

$$\text{Eq. 132 } h(n) \xrightarrow{\text{TZ}} H(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k Z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k Z^{-k}}$$

Les notions brièvement énoncées ci-dessus sont très utilisées en identification et resynthèse des systèmes. La transformée en Z pour les signaux discrets est analogue à la transformée de Fourier pour les signaux continus. On passe du domaine Z au domaine fréquentiel en remplaçant Z par $Z = \exp(i2\pi f n T_c)$, où f est la fréquence, n un entier, et T_c la période d'échantillonnage fixée.

7.3 Guide d'onde acoustique sans perte

On doit la théorie des guides d'onde, appliquée à la synthèse des instruments de musique au professeur J.O. Smith, de l'université de Stanford au début des années 1980. Les nouveaux synthétiseurs du commerce dits instruments virtuels (VL1 de Yamaha, Korg Prophecy, Technics WSA1 ...) sont en fait des réalisations industrielles basées sur la théorie des guides d'onde. (Smith, 1992).

Le modèle acoustique le plus simple dont les solutions exactes sont facilement accessibles correspond à la propagation du premier mode transverse d'une onde acoustique dans un tube unidimensionnel (guide d'onde acoustique) sans perte. Le système est régi par l'équation des ondes. Dans un tel système, il est toujours possible de décomposer la solution par la superposition d'une onde dite aller et d'une autre onde dite retour. Si les réflexions terminales ne sont pas prises en compte, le système se comporte comme un retard pur pour chacune des ondes aller et retour. Le retard correspond au

temps nécessaire à un paquet d'onde pour se propager d'un bout à l'autre du guide d'onde à la célérité V_T . L'implémentation pratique de ce modèle correspond au schéma de la Figure 80.

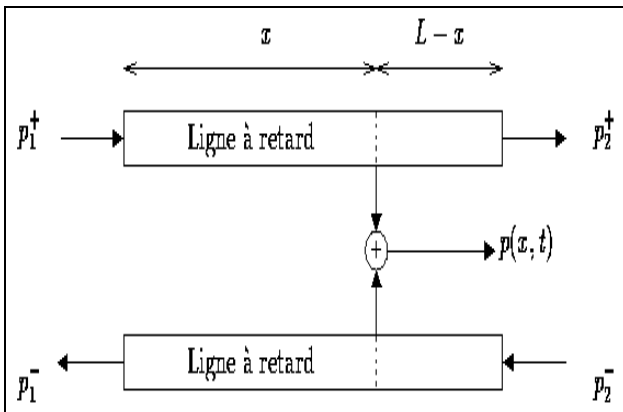


Figure 80 : Modèle de guide d'onde sans perte (Tassart, 1997).

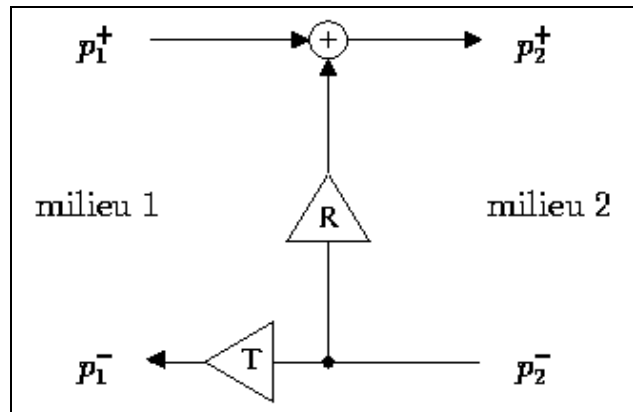


Figure 81 : Modèle de conditions aux limites (Tassart, 1997).

La prise en compte des conditions aux limites correspond à introduire des coefficients de réflexion et de transmission aux extrémités du guide d'onde. L'implémentation des conditions aux limites se fait conformément à la Figure 81 avec le coefficient R de réflexion et T de transmission. D'un point de vue numérique, quand le retard introduit par le tube est proportionnel à la période d'échantillonnage des signaux alors la solution calculée est exactement égale à la discrétisation de la solution originale. Les modèles plus complexes sont fabriqués par concaténation ou par raffinement successif du modèle de guide d'onde original. (Tassart, 1997).

7.4 Modèle de Karplus-Strong

Le modèle de Karplus-Strong est une implémentation particulière des modèles guides d'ondes sans pertes (Karjalainen, et al., 1998). Cela correspond à observer l'onde retour dans un guide d'onde acoustique avec comme conditions aux limites une réflexion totale à une extrémité du guide, et un coefficient de réflexion g à l'autre extrémité du guide (Figure 82).

Ce modèle fut utilisé à l'origine pour simuler le fonctionnement d'une corde de piano. En effet, en négligeant la constante de raideur de la corde, en ne considérant que le mode de transmission transverse des ondes - c'est-à-dire en négligeant les ondes de pression qui se propagent longitudinalement dans la corde, ainsi que le couplage des deux modes qui se propagent sur le plan transverse de la corde (Daudet, et al., 1999) - on aboutit au même système d'équations que celui qui régit la propagation des ondes acoustiques dans le milieu aérien, à l'exception de la célérité de l'onde qui dépend à présent de la tension de la corde.

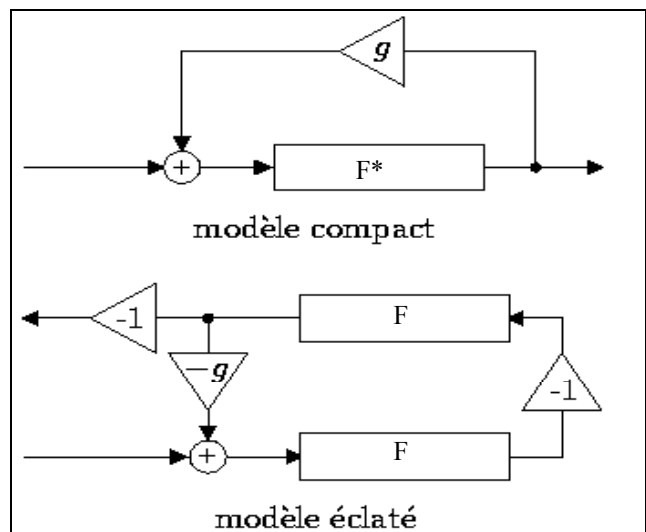


Figure 82 : Modèle de Karplus – Strong (Tassart, 1997).

Les conditions aux limites correspondent pour une extrémité à une réflexion totale c'est à dire à une fixation rigide de la corde sur le sillet et pour l'autre extrémité ($g \approx 1$) à une réflexion presque totale sur le chevalet qui n'est pas complètement rigide et qui transmet une partie de la vibration à la table d'harmonie (et réciproquement). (Tassart, 1997).

D'un point de vue numérique le système s'interprète comme un filtre linéaire appelé filtre en peigne dont les propriétés sont bien connues (Ystad, 1998). La fonction de transfert entrée-sortie du filtre est :

$$\text{Eq. 133 } H(\omega) = \frac{F^*}{1 - gF^*} = \frac{F^2}{1 - gF^2}$$

Le système physique dispose d'une infinité de modes, de fréquences multiples de la fréquence fondamentale. La limitation du nombre de mode dans le modèle numérique correspond à l'hypothèse de limitation de la bande du signal d'entrée : le signal en entrée est supposé être à bande limitée et donc ne possède pas d'énergie au - delà d'une certaine fréquence dépendant du spectre d'excitation ou d'entrée. (Tassart, 1997).

7.5 Les différents mécanismes d'amortissement dans les cordes monofilantes et les poutres

Nous nous restreignons ici au cas d'un système linéaire, en supposant de plus que les amortissements sont faibles et impliquent de petites perturbations. Les systèmes étudiés sont en vibrations longitudinales ou transversales libre – libre.

a) L'interaction entre la structure vibrante constituée par la corde ou la poutre et le fluide environnant qu'est l'air ambiant comporte, a priori, trois mécanismes dissipatifs différents : la dissipation par génération d'ondes acoustiques par la corde, le prélèvement d'énergie mécanique à la corde par déviation des lignes de flux d'air, et le prélèvement d'énergie mécanique par les frottements visqueux de l'air. (Valette et Cuesta, 1993) montrent que seul, le troisième mécanisme est prépondérant, et qu'il est extrêmement important à basse fréquence en vibrations transversales pour les cordes monofilantes. En vibrations longitudinales, l'interaction de la corde avec l'air est négligeable (Valette et Cuesta, 1993). Prendre en compte ce mécanisme revient à introduire dans l'équation différentielle du mouvement un terme Q (Guillemain, et al., 1997) :

$$\text{Eq. 134 } \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + Q \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$$

Le terme Q introduit dans l'équation (Eq. 134) traduit un comportement purement visqueux car il existe une relation bijective entre vitesse de déformation et contrainte dans le matériau (Felix, 1990). Pour les poutres de structure, l'élanement étant très inférieure à celui d'une corde, nous considérerons le phénomène de frottement visqueux de l'air comme négligeable en vibrations transversales et longitudinales.

b) Lorsqu'une corde ou une poutre est en vibration, certaines zones du matériau se trouvent comprimées donc échauffées, d'autres étirées donc refroidies. L'existence d'une conductivité thermique dans le matériau introduit alors un nouveau phénomène de dissipation du fait du transport de chaleur entre zones échauffées et refroidies : c'est la thermoélasticité (Valette et Cuesta, 1993). Ce phénomène n'est pas prépondérant dans le cas de cordes en métal (Valette, 1998) ; pour le bois, moins conducteur thermiquement que les métaux, la thermoélasticité est négligeable dans les cas traités ici.

c) Le phénomène de perte d'énergie mécanique prépondérant dans le cas des cordes en vibrations à hautes fréquences (Valette et Cuesta, 1993), et dans le cas des poutres de structure, est la viscoélasticité du matériau. Afin de prendre en compte ce phénomène, nous considérerons que, dans le cas des petites perturbations et en se situant loin de la limite élastique, le comportement visqueux du matériau est analogue à celui d'un fluide newtonien. La relation biunivoque entre contrainte et déformation est alors linéaire (Felix, 1990). Les modèles viscoélastiques utilisés sont linéaires si le matériau bois n'est pas sollicité à plus de 50% de sa charge de rupture statique (Tong et Ödeen, 1989), ce qui est le cas dans l'hypothèse des petites perturbations. Nous supposons de plus que la température et l'humidité du matériau sont constantes et homogènes pendant la vibration.

7.6 Modélisation du comportement viscoélastique du bois

La détermination par l'expérience de la loi de comportement d'un matériau est un problème complexe. La manière la plus simple de procéder est de réaliser des essais mécaniques de telle façon que dans un volume bien défini de l'éprouvette, le tenseur des déformations puissent être déterminé à partir des forces appliquées et du déplacement de certains points de l'éprouvette.

7.6.1 Les essais cycliques à oscillations forcées, frottement interne

Lorsque l'on procède à une succession de charges et de décharges entre deux niveaux de contrainte, ou entre deux niveaux de déformation de façon périodique, on est en mesure d'analyser les évolutions résultantes dans le plan contrainte – déformation.

La Figure 83 illustre un enregistrement effort – déformation à contrainte périodique imposée entre deux niveaux fixés σ_1 et σ_2 . L'évolution des premiers cycles résulte du fluage moyen de la déformation. Lorsque la contrainte maximum imposée est inférieure à une certaine valeur critique, on observe une stabilisation ou accommodation du cycle entre les déformations ϵ_1 et ϵ_2 . La surface délimitée par le cycle accommodé est une mesure de l'énergie mécanique dissipée au cours de chaque période par frottement interne. (Guitard, 1983).

Le système étant considéré comme linéaire, une sollicitation harmonique conduit à un effet harmonique avec un déphasage. On associe :

$$\text{Eq. 135} \begin{cases} \sigma(t) = \sigma \cos(\omega t) \leftrightarrow \sigma(t) = \bar{\sigma} e^{i\omega t} \\ \epsilon(t) = \epsilon \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \epsilon(t) = \bar{\epsilon} e^{i\omega t} \end{cases}$$

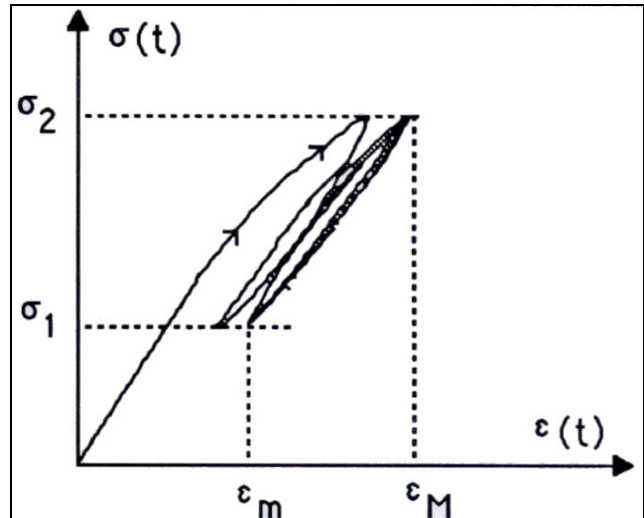


Figure 83 : Accommodation de la déformation lors d'un essai cyclique à contrainte imposée (Guitard, 1983).

Où $\bar{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}$ sont les amplitudes complexes de la contrainte et de la déformation. On définit alors une grandeur appelée module complexe, notée E'' :

$$\text{Eq. 136} \quad E'' = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = E + iE'$$

Le module dynamique E_d est le module du module complexe ; le frottement interne ($\tan \delta$) est la tangente de l'argument de E'' :

$$\text{Eq. 137} \quad E'' = E_d e^{i\delta}, \text{ avec } E_d = \sqrt{E^2 + E'^2} \text{ et } \tan \delta = \frac{E'}{E}$$

Le module complexe est une grandeur qui dépend de la fréquence de la sollicitation. Dans le plan complexe, on représente l'évolution de la partie imaginaire en fonction de la partie réelle (Huet, 1988). C'est la représentation de Cole – Cole schématisée pour le bois sur la Figure 84.

Les résultats précédents supposent que la masse de l'éprouvette est négligeable et que les forces d'inertie n'influencent pas l'allure des courbes malgré les accélérations (Felix, 1990).

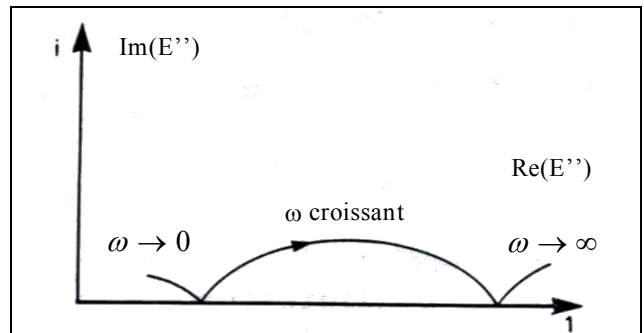


Figure 84 : Représentation Cole – Cole schématisée du module complexe (Felix, 1990).

Afin de prendre en compte le phénomène viscoélastique dans la modélisation des vibrations transversales d'une corde, Valette (1993) introduit une partie imaginaire au module d'Young, sous forme d'un angle de perte viscoélastique δ_{va} en supposant cet angle petit :

$$\text{Eq. 138} \quad E'' = E e^{-i\delta_{va}} \approx E(1 - i\delta_{va}), \text{ avec } \delta_{va} = \omega\tau_{va}$$

L'équation (Eq. 138) est analogue à l'équation (Eq. 137) ; elle suppose une élasticité retardée de la déformation par rapport à la contrainte, le paramètre τ_{va} de l'équation (Eq. 138) est homogène à un temps (Valette, 1998). Le frottement interne est ici une fonction linéaire de la pulsation ω (Eq. 138).

7.6.2 Choix d'un modèle viscoélastique linéaire

L'équation différentielle constitutive de la viscoélasticité linéaire peut s'écrire sous la forme (Tong et Ödeen, 1989) :

$$\text{Eq. 139} \quad \left[p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right] \sigma(t) = \left[q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right] \epsilon(t), \text{ avec } p_i \text{ et } q_i \text{ des constantes.}$$

Par soucis de simplicité, nous utiliserons le modèle de loi de comportement correspondant au solide de Zener (Figure 85). Le solide de Zener, dit solide viscoélastique linéaire idéal, est le modèle monodimensionnel le plus simple qui rend compte du fluage, de la relaxation et du frottement interne (Guitard, 1983). D'autres modèles viscoélastiques relativement simples, tels que ceux de Kelvin, de Maxwell, ou encore de Wiechert, ont notamment été mis en œuvre par Djoharian (1999) pour décrire le comportement de matériaux – dont le bois – utilisés en lutherie et faire la synthèse des sons musicaux dans plusieurs cas particuliers (les vibrations d'une membrane par exemple). La technique que nous développons ici est toutefois nettement moins calculatoire que celle utilisée par Djoharian (1999).

La loi de comportement d'un tel modèle peut s'écrire sous forme différentielle :

$$\text{Eq. 140} \quad \left[p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] \sigma(t) = \left[q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] \varepsilon(t), \text{ avec}$$

$$p_0 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}, \quad p_1 = \frac{\eta}{E_1 E_2}, \quad q_0 = 1, \text{ et } q_1 = \frac{\eta}{E_2}$$

La fonction de fluage s'écrit (Figure 86) :

$$\text{Eq. 141} \quad f(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right), \text{ avec } \tau_\sigma = \frac{\eta}{E_2}$$

τ_σ est appelé temps fluage à contrainte constante. La fonction de relaxation s'écrit :

$$\text{Eq. 142} \quad g(t) = E_1 - \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right), \text{ avec } \tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

τ_ε est appelé temps relaxation à déformation constante. Il est plus aisé d'utiliser la loi de comportement (Eq. 141) reformulée avec les temps de fluage et de relaxation (Guitard, 1983) :

$$\text{Eq. 143} \quad \sigma(t) + \tau_\varepsilon \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = E_R \left[\varepsilon(t) + \tau_\sigma \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \right], \text{ avec } E_R = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

E_R est appelé le module relaxé. Par la suite, nous utiliserons comme paramètres caractéristiques du modèle de Zener les grandeurs τ_σ , τ_ε , et E_R .

Il est possible de trouver une relation entre le module complexe défini au paragraphe 7.6.1 et le modèle viscoélastique que l'on se propose d'utiliser. La sollicitation est supposée cyclique de période ω . La contrainte et la déformation s'écrivent alors comme suit :

$$\text{Eq. 144} \quad \begin{cases} \sigma(t) = \bar{\sigma} e^{i\omega t} \\ \varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} e^{i\omega t} \end{cases}$$

En remplaçant l'expression de la contrainte et de la déformation dans l'équation (Eq. 143), on obtient une expression du module complexe E^* :

$$\text{Eq. 145} \quad E^* = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} = E_R \left[\frac{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2} + i \frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \omega}{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2} \right]$$

Le module dynamique E_d et le frottement interne $\tan \delta$ s'écrivent alors :

$$\text{Eq. 146} \quad E_d = E_R \sqrt{\frac{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}}, \text{ et } \tan \delta = \frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2}$$

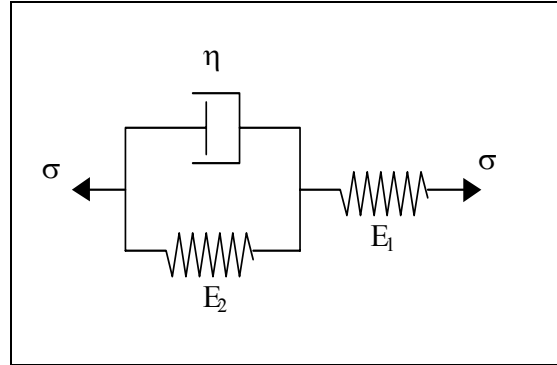


Figure 85 : Solide de Zener.

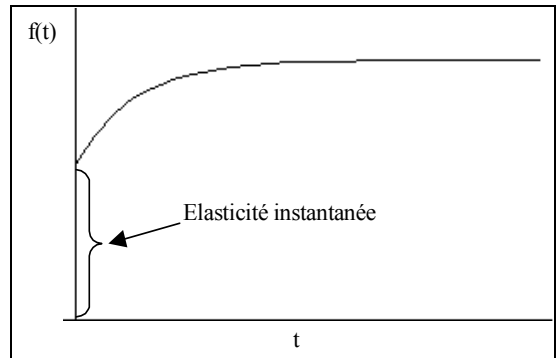


Figure 86 : Fonction de fluage $f(t)$ du modèle de Zener.

Le module dynamique et le frottement interne sont représentés à la Figure 87 en fonction de la pulsation. Pour ce modèle particulier, il n'existe qu'une seule transition (modèle mono-transition). L'évolution du frottement interne $\tan(\delta)$ est quasiment linéaire, de pente $(\tau_\sigma - \tau_\epsilon)$, pour des pulsations inférieures à ω_0 (Figure 87). A partir de ω_0 , le frottement interne décroît en fonction de la pulsation. La valeur du module dynamique E_d croît en fonction de la pulsation, ce qui correspond à une rigidification du matériau quand la pulsation augmente ($\tau_\sigma > \tau_\epsilon$ par expérience, Guitard, 1983). Cette valeur est égale au module relaxé E_R lorsque la pulsation est nulle, et tend vers une limite égale à $E_R \tau_\sigma / \tau_\epsilon$ lorsque la pulsation tend vers l'infini.

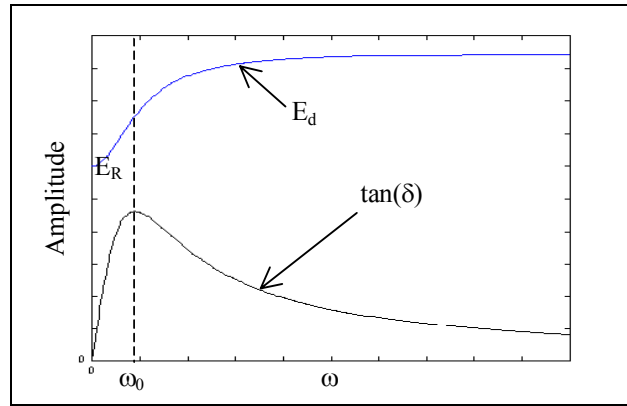


Figure 87 : Evolutions du module dynamique et du frottement interne en fonction de la pulsation, modèle de Zener.

L'étude de l'évolution du frottement interne en fonction de la fréquence a notamment été menée par Ono (1983), (Figure 88). La Figure 88, ci-contre, montre que le frottement interne est une fonction croissante de la fréquence. Ce résultat a également été obtenu par Aoki (1972). En comparant ces courbes expérimentales avec l'évolution théorique de la Figure 87, il semblerait que le modèle viscoélastique de Zener puisse s'appliquer pour une plage de fréquence allant de 1 Hz à environ 7 kHz. A partir de 7 kHz, il se produit une inflexion avec une forte augmentation du frottement interne (Figure 88).

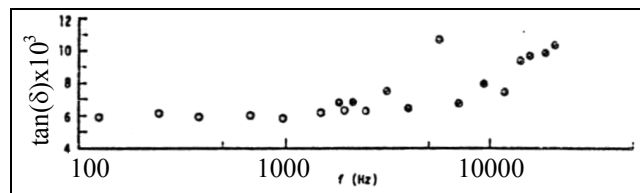


Figure 88 : Evolution du frottement interne en fonction de la fréquence, mesurée en vibrations longitudinales (*Picea Sitchensis*) (Ono et Norimoto, 1985).

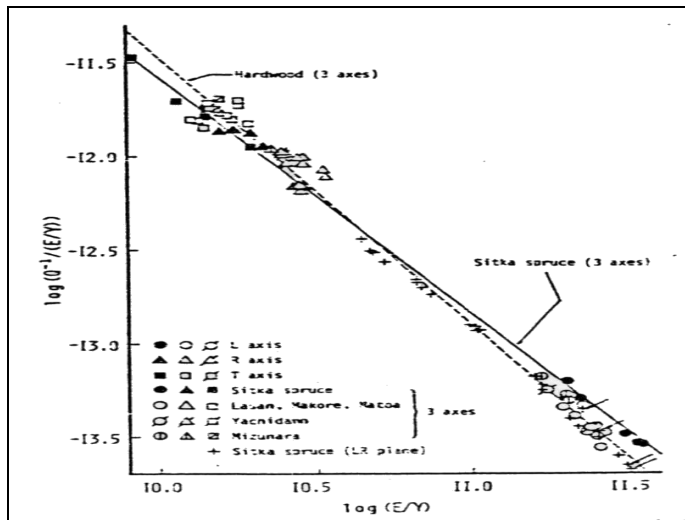


Figure 89 : Evolution du logarithme du ratio frottement interne sur module spécifique en fonction du logarithme du module spécifique dans les trois directions principales pour six essences de bois (Ono et Norimoto, 1985).

Wood species	r	A*	B*	No. of specimen	Frequency range (kHz)
Sitka spruce (3 axes) ^{ab}	-0.999	-1.26	1.05	15	ca. 4-21
Hardwood (3 axes) ^{ab}	-0.994	-1.47	2.77	45	5-10
Sitka spruce (LR plane) ^{ab}	-0.997	-1.41	2.54	24	0.2-0.6
Softwood (L axes) ^{ab}	-0.953	-1.68	5.57	1227	0.2-0.7
Hardwood (L axes) ^{cd}	-0.914	-1.62	4.86	118	0.3-0.7

*log[Q⁻¹/(E'γ)] = A log(E'γ) - B.

Tableau 35 : Coefficients de corrélation et équations de régression relatifs à la Figure 89 (Ono et Norimoto, 1985).

Ce phénomène a également été observé par Holz (1996) pour du sapin. De cette constatation expérimentale, nous pouvons déduire qu'un modèle viscoélastique multi-transition serait plus adapté à la description du comportement du matériau bois dans une large gamme de fréquence. Ce type de modèle a été préconisé et employé par Huet (1990). Cependant la complexité des modèles viscoélastiques est souvent liée au nombre croissant de constantes caractéristiques à identifier, de plus la gamme utile en fréquence n'excède pas 5 kHz pour la classe de problèmes que nous nous proposons d'étudier.

Nous limiterons donc notre étude à des fréquences inférieures à 7 kHz, les fréquences supérieures à ce seuil étant difficilement excitable à partir d'un choc.

Certains auteurs ont montré la relation existante entre le frottement interne et le module spécifique (Ono et Norimoto, 1983 ; Yano, 1994) (Figure 89 et Tableau 35).

Considérons une éprouvette de bois en vibrations longitudinales libre - libre, ses pulsations sont données par :

$$\text{Eq. 147 } \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

En remplaçant la pulsation dans (Eq. 146) par l'expression de l'équation (Eq. 147), on obtient alors :

$$\text{Eq. 148 } \text{Log}\left(\frac{\tan \delta}{E/\rho}\right) = \text{Log}\left(\frac{\frac{n\pi}{L}(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{\sqrt{E/\rho}\left(1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho)\right)}\right)$$

Le développement de l'équation (Eq. 148) donne :

$$\text{Eq. 149 } \text{Log}\left(\frac{\tan \delta}{E/\rho}\right) = -\frac{1}{2}\text{Log}(E/\rho) - \text{Log}\left(1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho)\right) + \text{Log}\left(\frac{n\pi}{L}(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)\right)$$

En supposant que $1 \ll \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho)$, on obtient alors :

$$\text{Eq. 150 } \text{Log}\left(\frac{\tan \delta}{E/\rho}\right) = -1,5.\text{Log}(E/\rho) + \text{Log}\left(\frac{L}{n\pi}\left(\frac{1}{\tau_\varepsilon} - \frac{1}{\tau_\sigma}\right)\right)$$

On retrouve ainsi de manière analytique la relation linéaire donnée au Tableau 35, avec une pente expérimentale voisine de la pente théorique égale à $-1,5$. Ce résultat montre que l'approche proposée est cohérente avec les résultats expérimentaux de la littérature dans la gamme de fréquences étudiée.

7.7 Vibrations des poutres homogènes viscoélastiques

7.7.1 Modèle guide d'onde acoustique avec perte

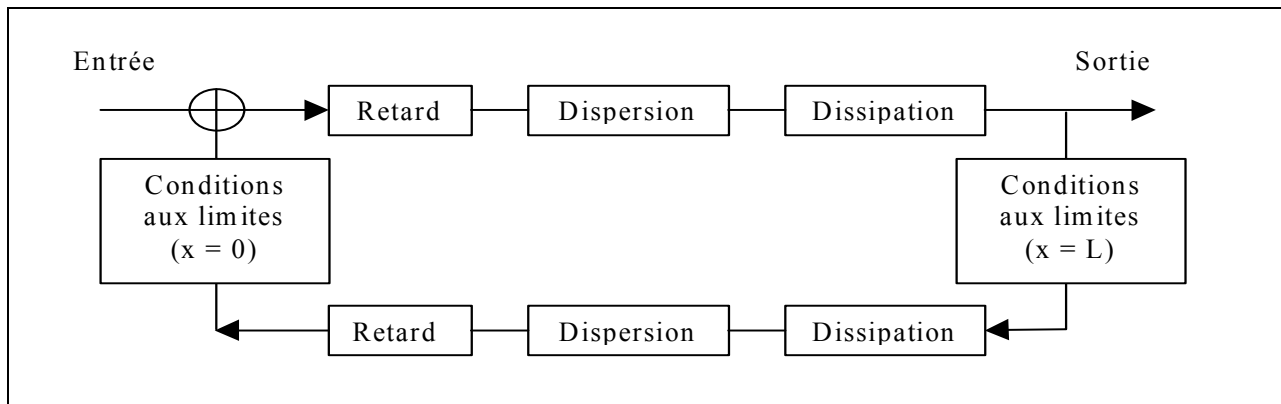


Figure 90 : Modèle propagatif modélisant la vibration d'une poutre (Ystad, 1997).

La Figure 90 représente un modèle propagatif qui traduit le comportement d'une onde se propageant à travers un milieu borné. Les vibrations envisagées sont des petites perturbations du milieu considéré au voisinage de son état naturel. La propagation de l'onde d'une extrémité à l'autre du milieu peut alors être modélisée sous la forme de filtres linéaires (Smith, 1992 ; Tassart, 1997 ; Karjalainen, et al., 1998) (Figure 90). L'élément nommé "Retard" représente la durée de propagation de l'onde d'une extrémité à l'autre du milieu. Les éléments nommés "Dispersion" et "Dissipation" sont les filtres linéaires modélisant les transformations subies par l'onde au cours de sa propagation. La dissipation traduit le phénomène d'absorption par le milieu d'une partie de l'énergie de l'onde (Valette et Cuesta, 1993). La dispersion exprime le fait que toutes les fréquences peuvent ne pas se propager dans le milieu à la même célérité (Guillemain et White, 1995). La dispersion et la dissipation sont généralement dépendantes de la fréquence (Guillemain, et al., 1997).

Afin de simplifier les expressions mathématiques, nous adoptons les notations suivantes : C représente le filtre des conditions aux limites, R représente le filtre de retard, D le filtre de dispersion, et A le filtre de dissipation. Les expressions des filtres R, D, et A, se déduisent de la relation de dispersion, entre le nombre d'onde k'' et la pulsation ω . Nous détaillons dans les paragraphes suivants le raisonnement et la méthode utilisés.

Dans le cas des systèmes dissipatifs, le nombre d'onde est complexe (Kolsky, 1953) ; pour un système conservatif, en élasticité linéaire pure, ce nombre est réel. Le nombre d'onde peut donc s'écrire :

Eq. 151 $k''(\omega) = k(\omega) - ik'(\omega)$, avec $k' \in \mathbb{R}^+$

Une onde plane progressive de pulsation ω_1 s'écrit :

Eq. 152 $u(x,t) = U_0 \exp[i(\omega t - k''x)]$

Cette onde se propage selon \vec{OX} , par exemple dans une poutre de longueur L (Figure 91).

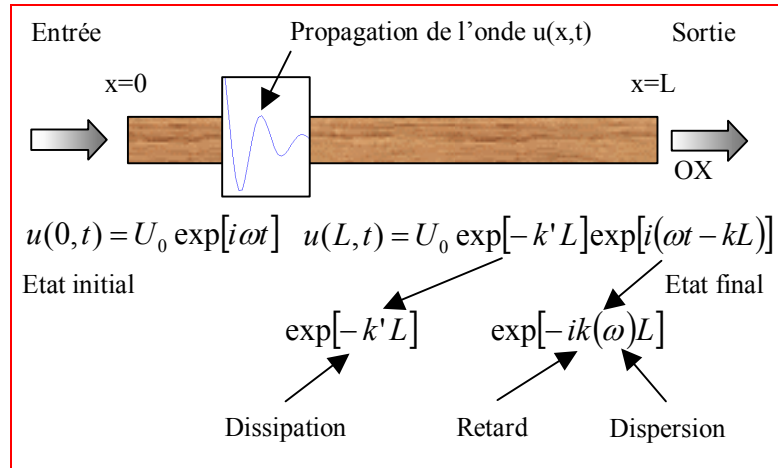


Figure 91 : Modélisation des phénomènes de retard, de dispersion, et de dissipation dans un milieu pour une onde plane progressive.

En utilisant l'équation (Eq. 151) dans (Eq. 152), on obtient l'expression d'un onde qui se propage – terme en $k(\omega)x$ – et qui est également amortie – terme en $k'(\omega)x$ – de l'équation (Eq. 153).

Eq. 153 $u(x,t) = U_0 \exp[-k'(\omega)x] \exp[i(\omega t - k(\omega)x)]$

Les paramètres k et k' sont fonctions de la pulsation ω , ce qui implique que la vitesse de propagation (ou le retard) et l'amortissement de l'onde ne sont pas les mêmes selon la pulsation considérée. Une vitesse non constante dans le milieu traduit le phénomène de dispersion, et une atténuation de l'onde traduit le phénomène de dissipation. En prenant comme référence la première pulsation propre du système étudié, notée ω_1 , les filtres R et D peuvent alors s'écrire :

Eq. 154 $R(\omega) = e^{-ik(\omega_1)L}$ et $D(\omega) = e^{-i[k(\omega) - k(\omega_1)]L}$

D'après l'équation (Eq. 154), si k est indépendant de ω , R est constant et D est égal à un, ce qui implique un phénomène de dispersion nul. Le filtre de dissipation A s'écrit :

Eq. 155 $A(\omega) = e^{-k'(\omega)L}$

La fonction de transfert du modèle s'exprime alors :

Eq. 156 $T(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{A(\omega)R(\omega)D(\omega)}{1 - C_0(\omega)C_L(\omega)[A(\omega)R(\omega)D(\omega)]^2}$

Eq. 157 $T(\omega) = \frac{e^{-ik''L}}{1 - C_0(\omega)C_L(\omega)e^{-2ik''L}}$

La fonction de transfert (Eq. 157) ainsi définie engendre des résonances de pulsation ω_n comme le montre la Figure 92 (Guillemain, et al., 1997 ; Ystad, 1998 ; Aramaki, 1999). Afin d'exploiter la fonction de transfert pour trouver l'expression des fréquences de vibration longitudinale et transversale d'une poutre viscoélastique, il est nécessaire de trouver, à partir de l'équation du mouvement, la relation de dispersion, et l'expression des filtres $C_0(\omega)$ et $C_L(\omega)$ en fonction des conditions aux limites.

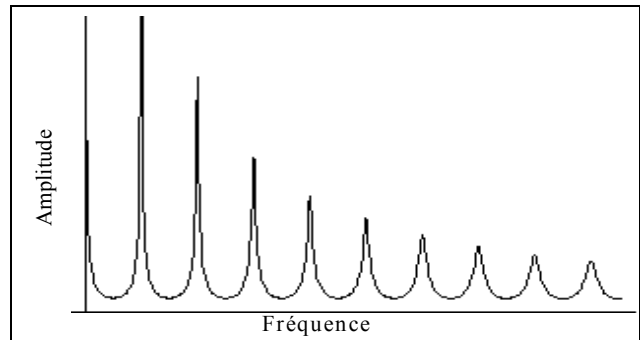


Figure 92 : Spectre fréquentiel d'un modèle guide d'onde représentant la propagation d'une onde plane dans un milieu borné dissipatif.

7.7.2 Vibrations longitudinales

(a) Relation de dispersion :

➤ Modélisation classique

L'influence de l'inertie des sections droites est ici négligé. L'équation du mouvement s'écrit alors :

Eq. 158 $\frac{\partial N}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, avec N l'effort normal dans la poutre.

Le système considéré est en vibrations ; les contraintes et déformations peuvent s'écrire comme l'équation (Eq. 144). On écrit alors l'équation du mouvement comme suit, en utilisant l'équation (Eq. 145) :

$$\text{Eq. 159 } E_X'' \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$$

En cherchant les solutions de (Eq. 159) sous la forme d'une onde sinusoïdale progressive $\bar{u}(x,t) = U_0 \exp[i(\omega t - k''x)]$, on obtient la relation de dispersion suivante (Graff, 1975) :

$$\text{Eq. 160 } k'' = \pm \sqrt{\frac{\rho}{E_X''}} \omega$$

➤ **Prise en compte de la viscoélasticité du matériau**

La solution positive de (Eq. 160) correspond à une onde se propageant suivant les valeurs croissantes de x, la solution négative correspond à une onde qui se propage dans le sens des x décroissantes. Le module complexe E_X'' est fonction de la pulsation ω . En utilisant le modèle viscoélastique de Zener (Eq. 146), on obtient l'expression de la relation de dispersion pour un système dissipatif :

$$\text{Eq. 161 } k'' = \sqrt{\frac{\rho}{E_{R-X}}} \omega \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}} e^{-\frac{i}{2} \text{Arc tan} \left[\frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2} \right]}$$

Des équations (Eq. 161) et (Eq. 151) se déduit la vitesse de propagation de l'onde longitudinale :

$$\text{Eq. 162 } V_L = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E_{R-X}}{\rho}} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}} \frac{1}{\cos \left[-\frac{1}{2} \text{Arc tan} \left[\frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2} \right] \right]}$$

L'équation (Eq. 162) montre que la vitesse de propagation longitudinale V_L est une fonction de la pulsation ω . La viscosité du matériau, cause de la dissipation, produit également le phénomène de dispersion (Guillemain et White, 1995). L'évolution de la vitesse de propagation longitudinale en fonction de la fréquence est représentée à la Figure 93. Cette figure montre que le modèle théorique utilisé implique une évolution croissante de la vitesse de propagation lorsque la fréquence augmente ($\tau_\sigma > \tau_\varepsilon$ par expérience, Guitard, 1983). La vitesse converge vers la valeur ci-dessous :

$$\text{Eq. 163 } V_{L\infty} = \sqrt{\frac{E_{R-X}}{\rho}} \sqrt{\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}}$$

L'évolution croissante de la vitesse de propagation longitudinale correspond à une rigidification du matériau quand la pulsation augmente (Figure 93). De cette remarque, on déduit que l'inharmonicité des fréquences propres doit se traduire par un décalage vers les hautes fréquences des modes propres par rapport à la formulation classique (Eq. 147).

Vérifions cette tendance sur un exemple expérimental. Une poutre de pin de parana (*Araucaria Angustifolia*) de dimension 4,26x0,27x0,05 m, de masse volumique 554 kg/m³, sans défauts visibles et de droit fil, est testée en vibrations longitudinales libre - libre. Le spectre en fréquence des vibrations obtenu est représenté à la Figure 94. Sur cette figure sont clairement visibles les trois premiers modes en vibrations longitudinales ($f_1=542$ Hz, $f_2=1078$ Hz, $f_3=1611$ Hz).

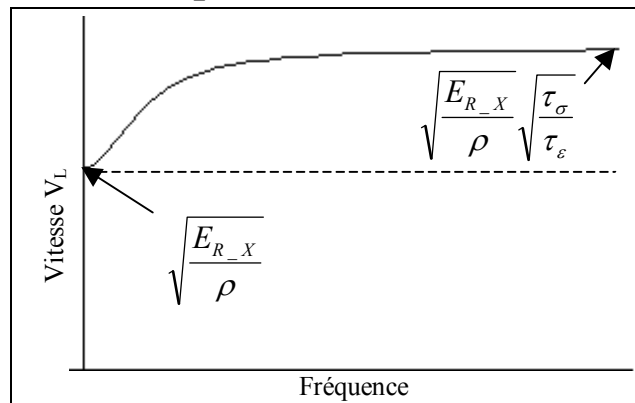


Figure 93 : Evolution de la vitesse de propagation longitudinale en fonction de la fréquence, (Eq. 162).

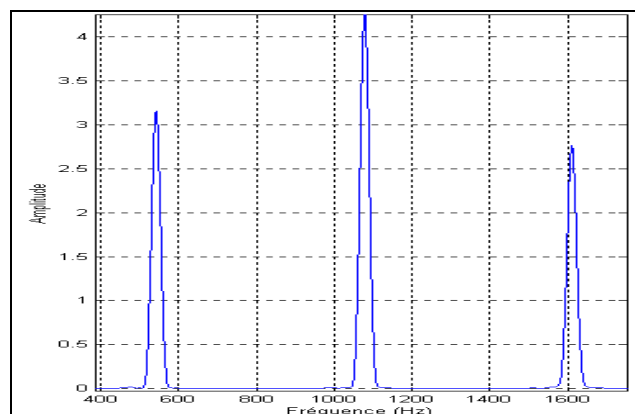


Figure 94 : Spectre expérimental d'une poutre en vibrations longitudinales (Pin de Parana).

En utilisant la formulation classique (Eq. 147) en élasticité linéaire pure, on estime la valeur des vitesses de propagation pour les trois premiers modes de vibration (Tableau 36).

	f_1	f_2	f_3
Valeur (Hz)	542	1078	1611
Vitesse de propagation (m/s)	4618	4592	4575
Module d'élasticité (Mpa)	11815	11682	11596

Tableau 36 : Calcul des vitesses de propagation et des modules dynamiques associés pour les trois premières fréquences de vibration longitudinale d'une poutre de parana.

Contrairement à la tendance prévue par l'équation (Eq. 162), le Tableau 36 montre que la vitesse de propagation et le module d'élasticité apparent du matériau décroissent lorsque la fréquence augmente. Le phénomène de dispersion des ondes est également causé par l'influence des mouvements de matière perpendiculairement à la direction de propagation (Rayleigh, 1877).

➤ **Prise en compte de l'influence des déplacements latéraux de matière**

Tenir compte de l'influence des effets Poisson en vibrations longitudinales revient à résoudre un problème d'élasticité tridimensionnelle. Les solutions exactes de ce problème pour un cylindre ont été notamment données par Love (1892). Nous donnons ici la solution approchée trouvée par Rayleigh (1877) pour un cylindre isotrope ; puis en utilisant la méthode énergétique proposée par Rayleigh, nous exprimerons la solution approchée pour une poutre prismatique orthotrope en vibrations longitudinales (chapitre 1, § 1.1.5.2) :

Eq. 164 $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E_X}{\rho} \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \nu^2}{4} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right)}$, avec ν : coefficient de Poisson, r : rayon du cylindre

Eq. 165 $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E_X}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{n^2 \pi^2}{S L^2} (\nu_{XY}^2 I_{GZ} + \nu_{XZ}^2 I_{GY})}}$, avec une propagation selon l'axe (OX)

Ces deux dernières équations sont obtenues en supposant le matériau parfaitement élastique. Dans le cas d'une poutre prismatique, l'équation (Eq. 165) permet d'écrire l'expression de la vitesse de propagation en fonction de la pulsation :

Eq. 166 $V_L = \sqrt{\frac{E_X}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{\rho \omega^2}{E_X S} (\nu_{XY}^2 I_{GZ} + \nu_{XZ}^2 I_{GY})}}$

La Figure 95 représente l'évolution de la vitesse de propagation formulée par l'équation (Eq. 166). Sur cette figure on observe une diminution de la vitesse, et donc une diminution de la rigidité du matériau, lorsque la fréquence augmente.

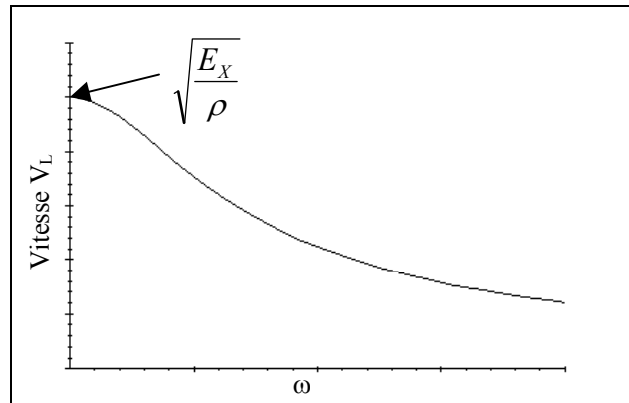


Figure 95 : Evolution de la vitesse de propagation longitudinale en fonction de la fréquence, (Eq. 166).

De cette dernière remarque, et des résultats expérimentaux du Tableau 36, on déduit que la viscosité du matériau et les déplacements latéraux de matière se produisant en vibrations longitudinales ont des effets opposés sur la vitesse de propagation, et sur les fréquences propres de vibration. Les effets Poisson devraient être supérieurs à l'effet de la viscosité du matériau par rapport à la vitesse de propagation (Tableau 36). Pour décrire correctement les phénomènes se produisant dans une poutre en vibrations longitudinales, il apparaît donc nécessaire de prendre en compte la viscosité du matériau, mais aussi les effets Poisson. Pour cela nous introduisons un terme correctif dans le module relaxé E_R du modèle viscoélastique de Zener (Eq. 146) de la forme :

Eq. 167 $E_{R_Zener} = E_R \frac{1}{1 + \beta \omega^2}$, avec $\beta = \frac{\rho}{E_R S} (\nu_{XY}^2 I_{GZ} + \nu_{XZ}^2 I_{GY}) = \text{constante}$

Le passage de l'équation (Eq. 158) à l'équation (Eq. 159) suppose des valeurs négligeables des coefficients de Poisson. En effet, dans le cas d'une répartition uniforme de la contrainte normale, on écrit :

$$\text{Eq. 168 } \sigma_{XX} = C_{XX} \varepsilon_{XX} \Leftrightarrow \frac{N}{S} = C_{XX} \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow N = E_X S \frac{\partial u}{\partial x} \text{ avec } \nu_{ij} = 0 \forall (i, j) \in (X, Y, Z)^2$$

Tenir compte du phénomène de dispersion provoqué par les effets Poisson implique des valeurs non nuls des coefficients ν_{ij} avec $(i,j) \in (X, Y, Z)^2$. L'équation (Eq. 159) doit donc être reformulée en utilisant l'expression exacte du premier terme de la matrice de rigidité C_{XX} (Guitard, 1987), on obtient alors :

$$\text{Eq. 169 } aE_X \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right] = 0, \text{ avec } a = \frac{1 - \nu_{YZ}\nu_{ZY}}{1 - \nu_{YZ}\nu_{ZY} - \nu_{YX}\nu_{XY} - \nu_{ZX}\nu_{XZ} - \nu_{XY}\nu_{YZ}\nu_{ZX} - \nu_{YX}\nu_{XZ}\nu_{ZY}}$$

La relation de dispersion, tenant compte de la viscosité du matériau et des effets Poisson, s'écrit finalement :

$$\text{Eq. 170 } k'' = \sqrt{\frac{\rho}{aE_{R_X}}} \omega \sqrt{1 + \beta \omega^2} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}} e^{-\frac{i}{2} \text{Arc tan} \left[\frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2} \right]}$$

Il est possible d'estimer la valeur du coefficient a en utilisant les ordres de grandeur des coefficients de Poisson donnés par (Guitard, 1987) pour les résineux :

	$\nu_{LT} = \nu_{XY}$	$\nu_{TL} = \nu_{YX}$	$\nu_{LR} = \nu_{XZ}$	$\nu_{RL} = \nu_{ZX}$	$\nu_{TR} = \nu_{YZ}$	$\nu_{RT} = \nu_{ZY}$
Résineux	0,43	0,02	0,39	0,03	0,31	0,51

Tableau 37 : Ordre de grandeur des coefficients de Poisson pour les essences résineuses (Guitard, 1987).

On trouve après calcul la valeur (ordre de grandeur) : **a=1,04**

Remarque :

En supposant le milieu isotrope semi-infini parfaitement élastique (Figure 96), les mouvements de matière perpendiculairement à la direction de propagation n'ont pas d'influence sur les vibrations. La vitesse de propagation d'une onde dans le milieu s'écrit alors :

$$\text{Eq. 171 } V_L = \sqrt{\frac{aE}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$$

On retrouve la formulation classique de la vitesse de propagation d'une onde élastique plane dans un milieu continu solide (Laroze, 1992).

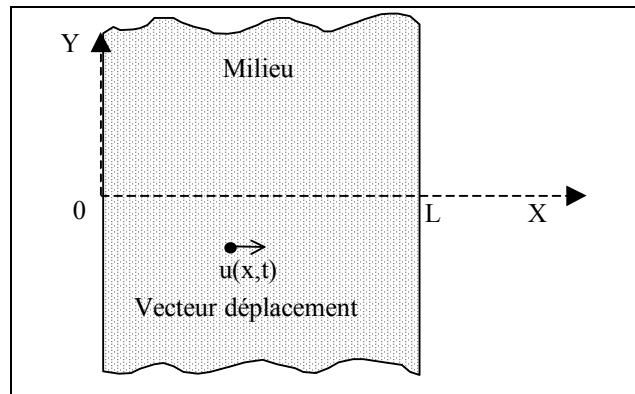


Figure 96 : Le milieu élastique occupe tout l'espace entre les plans (x=0) et (x=L) ; il est supposé isotrope.

(b) Conditions aux limites :

En considérant le cas d'une vibration libre – libre, l'ensemble des solutions progressives de l'équation (Eq. 159) est de la forme :

$$\text{Eq. 172 } \overline{u(x, t)} = \underbrace{C_1 e^{-k'x} e^{i(\omega t - kx)}}_{\overline{u^+(x, t)}} + \underbrace{C_2 e^{-k'x} e^{i(\omega t + kx)}}_{\overline{u^-(x, t)}}, \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

La relation entre les deux ondes progressives $u^+(x,t)$ et $u^-(x,t)$, à une extrémité de la poutre (Figure 97), peut s'écrire :

$$\text{Eq. 173 } \overline{u^-(0,t)} C_0(\omega) = \overline{u^+(0,t)}$$

En utilisant l'équation (Eq. 172), on obtient :

$$\text{Eq. 174 } C_0(\omega) = \frac{\overline{u^+(0,t)}}{\overline{u^-(0,t)}} = \frac{C_1}{C_2}$$

A chaque extrémité de la poutre l'effort normal $N(x,t)$ est nul : $N(0,t)=0$ et $N(L,t)=0$ à chaque instant t . La condition en $x=0$ permet de trouver l'expression du filtre $C_0(\omega)$ du modèle guide d'onde (Figure 90).

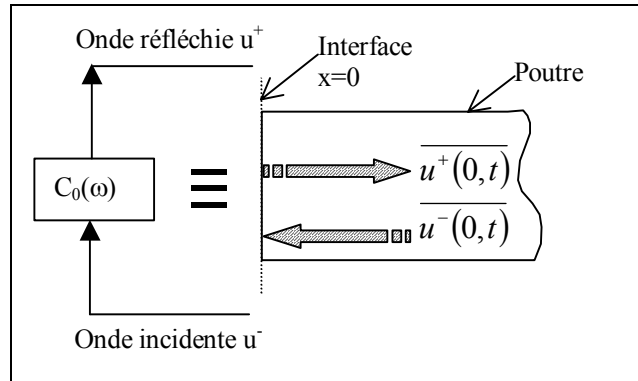


Figure 97 : Réflexion totale d'une onde progressive à une extrémité d'une poutre en vibration libre – libre.

Un effort normal nul à une extrémité est équivalent à :

$$\text{Eq. 175 } \overline{N}(0,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \overline{u}(0,t)}{\partial x} = 0$$

En utilisant l'équation (Eq. 172), on obtient :

$$\text{Eq. 176 } \frac{\partial \overline{u}(0,t)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -(k'+ik)C_1 + (-k'+ik)C_2 = 0$$

Des équations (Eq. 174) et (Eq. 176), on déduit l'expression du filtre $C_0(\omega)$ en supposant une faible dissipation du matériau ($k' \approx 0$) :

$$\text{Eq. 177 } C_0(\omega) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{-k'+ik}{k'+ik} \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{C_1}{C_2} \right| = 1 \\ \text{Arg} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) = \text{Arc tan} \left(\frac{2kk'}{k^2 - k'^2} \right) \approx 0 \end{cases} \Rightarrow C_0(\omega) \approx 1$$

Le filtre des conditions aux limites $C_1(\omega)$ se déduit des équations ci-dessus en changeant le nombre d'onde k en $-k$. On obtient alors :

$$\text{Eq. 178 } C_L(\omega) \approx 1$$

Ce résultat se retrouve de manière intuitive, les extrémités de la poutre sont identiques et possèdent la même condition libre – libre, une onde se propageant dans le matériau se réfléchira de la même manière quelque soit l'extrémité considérée, d'où l'égalité $C_0(\omega)=C_1(\omega)$.

(c) Fonction de transfert, et fréquences de vibration longitudinale :

D'après les équations (Eq. 151), (Eq. 157), (Eq. 177), et (Eq. 178), la fonction de transfert du modèle guide d'onde peut s'exprimer comme suit :

$$\text{Eq. 179 } T(\omega) = \frac{e^{-k'L} e^{-ikL}}{1 - e^{-2k'L} e^{-2ikL}}$$

Le module de la fonction de transfert (Eq. 179) s'écrit alors :

$$\text{Eq. 180 } |T(\omega)| = \frac{e^{k'L}}{\sqrt{1 + 2e^{2k'L} + e^{4k'L} - 4\cos^2(kL)e^{2k'L}}}$$

➤ Si l'on néglige la viscosité du matériau, on obtient l'expression :

$$\text{Eq. 181 } |T(\omega)| = \frac{1}{2 \sin(kL)}$$

L'expression des pulsations propres du système purement élastique en supposant les coefficients de Poisson nuls se déduit de l'équation (Eq. 181) :

$$\text{Eq. 182 } k(\omega_n)L = n\pi \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E_{R-X}}{\rho}}, n \in \mathbb{N}^*$$

On retrouve ainsi très simplement l'expression classique des fréquences de vibration (Timoshenko, 1939).

(d) Hypothèses simplificatrices :

Les équations (Eq. 170) et (Eq. 180) sont difficilement manipulables. Afin de pouvoir les exploiter et permettre ainsi de caractériser le matériau bois avec des grandeurs issues du modèle viscoélastique choisi, il est nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices. Nous supposons que le frottement interne du matériau est faiblement marquée dans la gamme de fréquences étudiées (Ono et Norimoto, 1985) :

$$\text{Eq. 183 } \tan \delta \approx 0$$

Le module complexe s'écrit alors :

$$\text{Eq. 184 } E'' \approx aE_R \frac{1}{1 + \beta\omega^2} \sqrt{\frac{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}} (1 + i\delta), \text{ avec } \delta \approx \frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)\omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2} \approx 0$$

On retrouve ainsi une forme analogue à l'équation (Eq. 138) donnée par Valette (1993) pour des cordes métalliques. La différence entre les deux formulations provient du fait que le module dynamique dépend de la pulsation et que l'angle de perte est positif dans (Eq. 184) alors qu'il est négatif dans (Eq. 138).

La relation de dispersion (Eq. 161) devient alors :

$$\text{Eq. 185 } k'' \approx k \left(1 - i \frac{\delta}{2} \right), \text{ avec } k \approx \sqrt{\frac{\rho}{aE_{R-X}}} \omega \sqrt{1 + \beta\omega^2} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}} \text{ et } k' \approx k \frac{\delta}{2} \approx 0$$

Le module de la fonction de transfert (Eq. 156) s'écrit alors :

$$\text{Eq. 186 } |T(\omega)| = \frac{e^{k'L}}{\sqrt{1 + 2e^{2k'L} + e^{4k'L} - 4 \cos^2(kL) e^{2k'L}}} \approx \frac{1}{2 \sin(kL)}$$

L'expression des pulsations propres du système viscoélastique se déduit des équations (Eq. 185) et (Eq. 186) :

$$\text{Eq. 187 } k(\omega_n)L = n\pi \Leftrightarrow \omega_n \approx \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{aE_{R-X}}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 + \beta\omega^2}} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}}$$

L'équation (Eq. 187) met en évidence le fait que la dispersion de l'onde dans le matériau, principalement causée par les effets antagonistes de la viscosité et des déplacements latéraux de matière (effets Poisson), provoque l'inharmonicité des fréquences propres de vibration (Ystad, et al., 1996). Cette inharmonicité est d'autant plus marquée que la fréquence considérée est grande.

Il est possible d'estimer les grandeurs E_{R-X} , τ_σ , τ_ε , et β à partir de la réponse vibratoire expérimentale (Ystad, et al., 1996 ; Guillemain, et al., 1997). Les fondements théoriques et la mise en application sont abordés au paragraphe 7.8.

7.7.3 Vibrations transversales

(a) Relation de dispersion :

L'équation du mouvement proposée par Bernoulli (1748) s'écrit :

$$\text{Eq. 188 } E_X'' I_{Gz} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = 0$$

En cherchant les solutions de (Eq. 188) sous la forme d'une onde sinusoïdale progressive $\bar{v}(x,t) = V_0 \exp[i(\omega t - k''x)]$, on obtient la relation de dispersion suivante (Graff, 1975 ; Pines, 1997) :

$$\text{Eq. 189 } k'' = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho S}{E_X'' I_{Gz}}} \sqrt{\omega}, \text{ et } k'' = \pm i \sqrt[4]{\frac{\rho S}{E_X'' I_{Gz}}} \sqrt{\omega}$$

La relation de dispersion ainsi obtenue (Eq. 189) montre que le nombre d'onde k'' peut être réel ou imaginaire. La solution réelle positive, ou négative, du nombre d'onde correspond à une onde se propageant suivant les valeurs croissantes, ou décroissantes, de x . Les ondes qui correspondent aux solutions imaginaires de k'' sont qualifiées d'ondes évanescentes par Pines (1997). Ces types d'ondes ne se propagent pas (Graff, 1975). Dans le cas d'une poutre en vibrations transversales, la cause principale du phénomène de dispersion est la nature même de la vibration, et non la viscosité du matériau associée aux effets Poisson comme en vibrations longitudinales.

L'équation (Eq. 189) permet en effet de trouver l'expression de la vitesse de propagation de l'onde transverse (Figure 98) :

$$\text{Eq. 190 } V_T = \frac{\omega}{k} = \sqrt[4]{\frac{E_{R-X} I_{Gz}}{\rho S}} \sqrt{\omega}, \text{ la viscosité du matériau est ici négligée.}$$

Cette dernière équation et la Figure 98 associée montrent que la vitesse de propagation V_T de l'onde transverse est différente selon la pulsation considérée. Cette propriété est caractéristique d'un milieu dispersif.

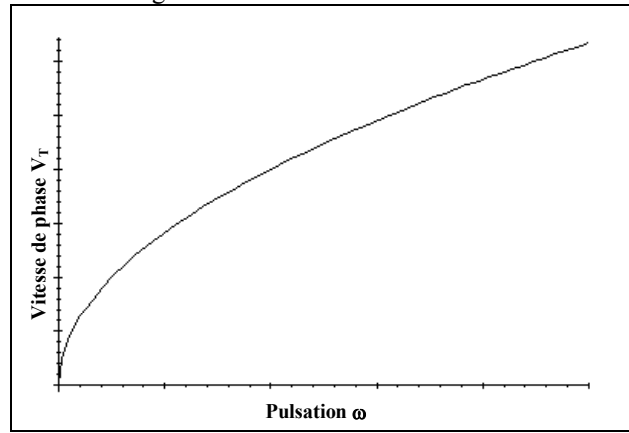


Figure 98 : Evolution de la vitesse de propagation V_T d'une onde transversale en fonction de la pulsation ω pour une poutre de grand élanement et de viscosité nulle.

En utilisant les hypothèses simplificatrices du chapitre (7.7.2) – frottement interne du matériau faiblement marquée dans la gamme de fréquences étudiées (Eq. 183) - et l'équation (Eq. 146), on obtient la relation de dispersion suivante pour les ondes progressives :

$$\text{Eq. 191 } k'' = k - ik', \text{ avec } k \approx \sqrt[4]{\frac{\rho S}{E_{R-X} I_{Gz}}} \sqrt{\omega} \sqrt[8]{\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}} \text{ et } k' \approx k \frac{\delta}{4} \approx 0$$

(b) Conditions aux limites :

En considérant le cas d'une vibration libre – libre, l'ensemble des solutions de l'équation (Eq. 188) est de la forme :

$$\text{Eq. 192 } \bar{v}(x,t) = \underbrace{C_1 e^{-k'x} e^{i(\omega t - kx)}}_{\bar{v}^+(x,t)} + \underbrace{C_2 e^{-k'x} e^{i(\omega t + kx)}}_{\bar{v}^-(x,t)} + \underbrace{C_3 e^{-(k'+k)x} e^{i\omega t}}_{\bar{v}e^-(x,t)} + \underbrace{C_4 e^{-(k'-k)x} e^{i\omega t}}_{\bar{v}e^+(x,t)}, \text{ avec } (C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$$

Afin de simplifier les calculs, nous supposons la viscosité du matériau négligeable ($k' \approx 0$). Le coefficient C_4 du quatrième terme de l'équation (Eq. 192) est imposé nul car il diverge vers l'infini lorsque la longueur de la poutre est très grande (Graff, 1975). L'équation (Eq. 192) devient alors :

$$\text{Eq. 193 } \bar{v}(x,t) \approx \underbrace{C_1 e^{i(\omega t - kx)}}_{\bar{v}^+(x,t)} + \underbrace{C_2 e^{i(\omega t + kx)}}_{\bar{v}^-(x,t)} + \underbrace{C_3 e^{-kx} e^{i\omega t}}_{\bar{v}e^-(x,t)}$$

L'expression du déplacement $\bar{v}(x,t)$ écrite sous cette forme particulière (Eq. 193) a été utilisée par Graff (1975). La valeur du ratio C_1/C_2 trouvée ci-dessous est identique à celle déjà explicitée par Graff (1975).

La relation entre les deux ondes progressives $\bar{v}^+(x,t)$ et $\bar{v}^-(x,t)$, à une extrémité de la poutre, peut s'écrire :

$$\text{Eq. 194 } \overline{v^-(0,t)C_0(\omega)} = \overline{v^+(0,t)}$$

En utilisant l'équation (Eq. 193), on obtient :

$$\text{Eq. 195 } C_0(\omega) = \frac{\overline{v^+(0,t)}}{\overline{v^-(0,t)}} = \frac{C_1}{C_2}$$

A chaque extrémité de la poutre le moment de flexion $M(x,t)$ et l'effort tranchant $T(x,t)$ sont nuls : $M(0,t)=0$, $T(0,t)=0$, et $M(L,t)=0$, $T(L,t)=0$ à chaque instant t . Les deux conditions en $x=0$ permettent de trouver l'expression du filtre $C_0(\omega)$ du modèle guide d'onde (Figure 90). Un moment de flexion, un effort tranchant, nul à l'extrémité est équivalent à :

$$\text{Eq. 196 } \begin{cases} \overline{M}(0,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{v}(0,t) = 0 \\ \overline{T}(0,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} \overline{v}(0,t) = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'équation (Eq. 193), on obtient :

$$\text{Eq. 197 } \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{v}(0,t) = 0 \Leftrightarrow -C_1 - C_2 + C_3 = 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \overline{v}(0,t) = 0 \Leftrightarrow iC_1 - iC_2 - C_3 = 0 \end{cases}$$

Des équations (Eq. 195) et (Eq. 197), on déduit l'expression du filtre $C_0(\omega)$:

$$\text{Eq. 198 } C_0(\omega) = \frac{C_1}{C_2} = -i$$

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe (7.7.2-b), on aboutit à l'égalité :

$$\text{Eq. 199 } C_L(\omega) = C_0(\omega) \Rightarrow C_0(\omega)C_L(\omega) = -1$$

(c) Fonction de transfert, et fréquences de vibration longitudinale :

D'après les équations (Eq. 151), (Eq. 157), et (Eq. 199), la fonction de transfert du modèle guide d'onde peut s'exprimer comme suit :

$$\text{Eq. 200 } T(\omega) = \frac{e^{-k'L} e^{-ikL}}{1 + e^{-2k'L} e^{-2ikL}}$$

Le module de la fonction de transfert (Eq. 200) s'écrit alors :

$$\text{Eq. 201 } |T(\omega)| = \frac{e^{k'L}}{\sqrt{1 - 2e^{2k'L} + e^{4k'L} + 4 \cos^2(kL)e^{2k'L}}}$$

➤ Si l'on néglige la viscosité du matériau, on obtient l'expression :

$$\text{Eq. 202 } |T(\omega)| = \frac{1}{2 \cos(kL)}$$

L'expression des pulsations propres du système purement élastique se déduit de l'équation (Eq. 202) :

$$\text{Eq. 203 } k(\omega_n)L = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{E_{R-X} I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4}}, \text{ avec } \sqrt[4]{X_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

On retrouve ainsi très simplement l'expression classique des fréquences de vibration (Timoshenko, 1939).

(d) Hypothèses simplificatrices :

Afin de tenir compte de la viscosité du matériau, on utilise les équations (Eq. 191) et (Eq. 203). Les pulsations propres du système s'écrivent alors :

$$\text{Eq. 204 } k(\omega_n)L = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{E_{R-X}I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4}} \sqrt[4]{\frac{1+\tau_\sigma^2\omega^2}{1+\tau_\varepsilon^2\omega^2}}, \text{ avec } \sqrt[4]{X_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

(e) Application au modèle de Timoshenko :

On ne tient pas compte ici de la viscosité du matériau. L'équation du mouvement proposée par Timoshenko (1921) s'écrit :

$$\text{Eq. 205 } E_X I_{Gz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho I_{Gz} \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}}\right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_{Gz}}{KG_{XY}} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation permet d'obtenir une nouvelle relation de dispersion.

$$\text{Eq. 206 } k = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2E_X}} \sqrt{\sqrt{\omega^2 \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}}\right)^2 - 4 \left(\frac{E_X}{KG_{XY}}\omega^2 - \frac{E_X S}{\rho I_{Gz}}\right)} + \omega \left(1 + \frac{E_X}{KG_{XY}}\right)}$$

En conservant la même valeur du filtre $C(\omega)$ des conditions aux limites (Eq. 198), cette nouvelle expression de k implique que les pulsations propres du système ω_n soient solution de l'équation :

$$\text{Eq. 207 } k(\omega_n) = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$$

➤ **Utilisation de l'hypothèse de Bernoulli**

Pour le matériau bois, l'ordre de grandeur du ratio $E_X/(KG_{XY})$ permet de faire l'approximation suivante (Guitard, 1987) :

$$\text{Eq. 208 } \frac{E_X}{KG_{XY}} \approx 15 \Rightarrow \frac{E_X}{KG_{XY}} \gg 1$$

En utilisant l'équation (Eq. 208) et les équations (Eq. 206) et (Eq. 207), on obtient la formulation simplifiée :

$$\text{Eq. 209 } \sqrt{\frac{X_n}{L^4}} \approx \frac{\rho\omega^2}{2E_X} \left(\sqrt{\left(\frac{E_X}{KG_{XY}}\right)^2 - 4 \left(\frac{E_X}{KG_{XY}} - \frac{E_X}{\rho\alpha L^2 \omega^2}\right)} + \frac{E_X}{KG_{XY}} \right), \text{ avec } \sqrt[4]{X_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha = \frac{I_{Gz}}{SL^2}$$

Le modèle de Bernoulli suppose que l'élanement de la poutre est très grand ($L/h \gg 1$). La poutre est alors considérée comme un fil mince. Cette hypothèse implique que le paramètre α de l'équation (Eq. 209) est très peu différent de zéro ($\alpha \approx 0$). L'expression des fréquences propres de vibration se déduit alors de l'équation (Eq. 209) en utilisant l'hypothèse de Bernoulli :

$$\text{Eq. 210 } \sqrt{\frac{X_n}{L^4}} \approx \omega \sqrt{\frac{\rho}{E_X \alpha L^2}} \Leftrightarrow f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_X I_{Gz}}{\rho S} \frac{X_n}{L^4}}$$

On retrouve ainsi la solution proposée par Bernoulli (1748) à partir de l'exploitation des modèles guide d'onde appliqués à la modélisation de Timoshenko (1921).

➤ **Etude du comportement vibratoire en haute fréquence**

L'équation (Eq. 206) est obtenue sans faire d'hypothèse sur la pulsation. Dans le cas où la valeur de la pulsation tend vers l'infini, l'équation (Eq. 206) devient alors :

$$\text{Eq. 211} \quad \begin{cases} k = f(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{f(\omega)\} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{KG_{XY}}} \end{cases}$$

Des équations (Eq. 207) et (Eq. 211) on déduit l'expression des fréquences propres de vibrations transversales à haute fréquence :

$$\text{Eq. 212} \quad \sqrt[4]{\frac{X_n}{L^4}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{KG_{XY}}} \Leftrightarrow f_n = \frac{\sqrt{K} \sqrt[4]{X_n}}{\pi} \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{G_{XY}}{\rho}}$$

Cette dernière expression est à comparer avec la formulation classique des ondes de cisaillement (Love, 1892 ; Perdijon, 1993 ; Sansalone, 1997) :

$$\text{Eq. 213} \quad f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{G_{XY}}{\rho}}$$

Ces deux dernières équations montrent qu'à haute fréquence, les ondes transversales d'une poutre sont analogues à des ondes de cisaillement de célérité $\sqrt{G_{XY}/\rho}$. Cependant en vibration transversale, la valeur des fréquences est moins élevée qu'en vibration de cisaillement pure Figure 99.

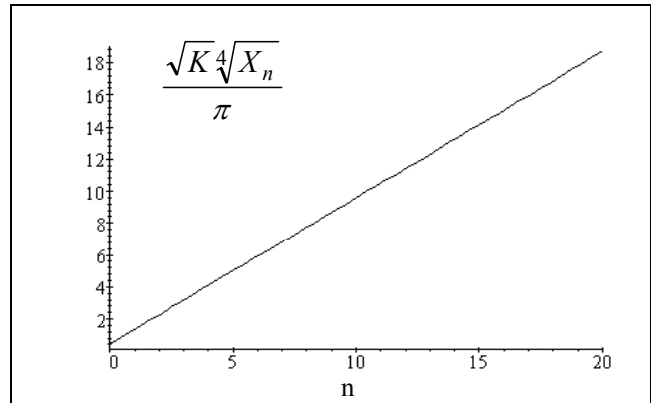


Figure 99 : Coefficient de rang en vibrations transversales à haute fréquence fonction du coefficient de rang en vibrations de cisaillement.

7.7.4 Comparaison entre la solution guide d'onde au modèle de Timoshenko et la solution mécanique en vibrations de flexion

Afin de confronter les équations (Eq. 206) et (Eq. 207) avec l'expérience, des essais dynamiques ont été réalisés sur 23 petites éprouvettes de bois sans défaut. L'essence choisie est l'ébène verte (*Tabebuia spp.*) de densité moyenne $d_{12}=1,10 \text{ g/cm}^3$. Les éprouvettes ont pour dimensions 20x20x400 mm.

L'élément de bois à tester repose sur deux supports élastiques afin que la propagation des vibrations soit la plus libre possible et puisse être provoquée par une simple percussion sur une des extrémités (Figure 100). A l'autre extrémité, un microphone enregistre les fréquences émises et les transmet via un filtre « passe-bas » à une carte d'acquisition sur micro-ordinateur pour une analyse par « transformée de Fourier rapide » (F.F.T.). Le traitement mathématique du signal (calcul et régression linéaire) est effectué par un programme qui intègre les caractéristiques géométriques et le poids de l'éprouvette.

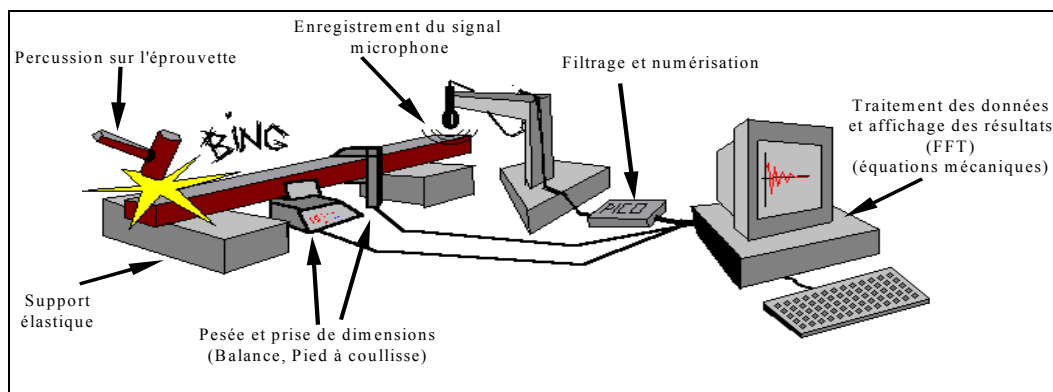


Figure 100 : Principe de la mesure dynamique.

Les trois premières fréquences de vibration de flexion sont ainsi mesurées. Le module d'élasticité longitudinal et le module de cisaillement sont calculés en utilisant la solution de Bordonné (1989). Ces valeurs ont été utilisées dans l'équation (Eq. 206), ce qui a permis de vérifier expérimentalement l'équation (Eq. 207). Le Tableau 38 montre les écarts obtenus entre le premier et le second membre de l'équation (Eq. 207).

Effectif 23	Ecart relatif (%)		
	n=1	n=2	n=3
Moyenne	-1,2	-1,0	-1,4
Ecart type	0,1	0,4	0,2

Tableau 38 : Ecart relatif entre la valeur de $k(\omega_n)$ calculée d'après des données expérimentales et le second membre de l'équation (Eq. 207).

Pour les trois premiers fréquences de vibration en flexion les écarts, entre la solution par le modèle guide d'onde et la solution classique en mécanique, sont faibles (1%, Tableau 38). Ces résultats montrent la cohérence existante entre le modèle guide d'onde et le modèle purement mécanique. L'utilisation des modèles guide d'onde est plus aisée que les méthodes classiques de résolution en mécanique. La solution "guide d'onde" au modèle de Timoshenko (1921), bien que non linéaire (Eq. 206 et Eq. 207), peut être utilisée pour le calcul des constantes élastiques, module d'élasticité et module de cisaillement, à partir des fréquences de vibration de la poutre.

7.7.5 Effet du phénomène de dispersion sur le calcul du module d'élasticité

(a) En vibrations longitudinales :

Le module d'élasticité E_{Longi} est évalué en utilisant l'équation classique (Eq. 182) :

$$\text{Eq. 214 } E_{Longi} = 4\rho L^2 \frac{f_{Longi_n}^2}{n^2}$$

L'équation (Eq. 187) conduit à :

$$\text{Eq. 215 } E_{R_X} = \frac{E_{Longi}}{a} (1 + 4\pi^2 \beta f_{Longi_n}^2) \sqrt[2]{\frac{1 + 4\pi^2 \tau_\epsilon^2 f_{Longi_n}^2}{1 + 4\pi^2 \tau_\sigma^2 f_{Longi_n}^2}}$$

On rappelle ici que l'ordre de grandeur de a est $a \approx 1,035$ pour le matériau bois. L'utilisation de la relation classique liant le module et la fréquence (Eq. 214) conduit donc à une sur - estimation du module d'élasticité longitudinal d'environ 3,5% pour les basses fréquences (Figure 101).

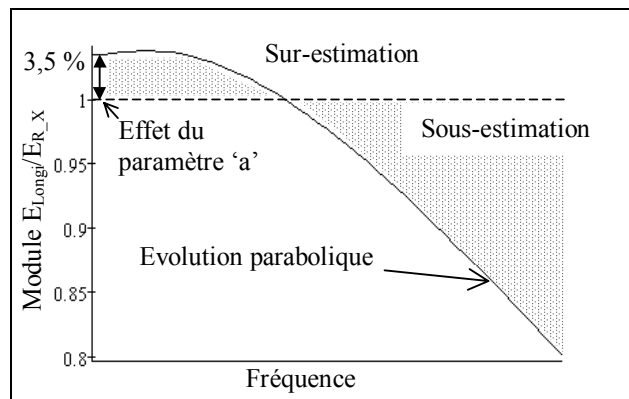


Figure 101 : Evolution du ratio E_{Longi}/E_{R_X} en fonction de la fréquence (simulation numérique).

Calculer le module d'élasticité à partir de fréquences plus hautes revient au contraire à sous - estimer sa valeur (Figure 101). L'erreur relative sur le calcul du module à partir de l'équation (Eq. 214) peut se mettre sous la forme :

$$\text{Eq. 216 } \frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{Longi} - E_{R_X}}{E_{Longi}} = 1 - \left(\frac{1 + 4\pi^2 \beta f_{Longi_n}^2}{a} \right) \sqrt[2]{\frac{1 + 4\pi^2 \tau_\epsilon^2 f_{Longi_n}^2}{1 + 4\pi^2 \tau_\sigma^2 f_{Longi_n}^2}}$$

L'équation (Eq. 216) suggère de plus que l'erreur commise sur la valeur du module d'élasticité, calculée en vibrations longitudinales, augmente avec le carré de la fréquence considérée. Cette remarque est d'autant plus vraie que la fréquence considérée est élevée (évolution parabolique de la Figure 101).

(b) En vibrations transversales :

Le module d'élasticité E_{Trans} est évalué en utilisant l'équation classique (Eq. 203) :

$$\text{Eq. 217 } E_{Trans} = 4\pi^2 \frac{\rho S L^4}{I_{Gz}} \frac{f_{Trans_n}^2}{X_n}$$

L'équation (Eq. 204) conduit à :

$$\text{Eq. 218 } E_{R_X} = E_{Trans} \sqrt[2]{\frac{1 + 4\pi^2 \tau_\epsilon^2 f_{Trans_n}^2}{1 + 4\pi^2 \tau_\sigma^2 f_{Trans_n}^2}}$$

L'utilisation de la relation classique liant le module et la fréquence (Eq. 217) conduit donc à une surestimation du module d'élasticité longitudinal (Figure 102) de :

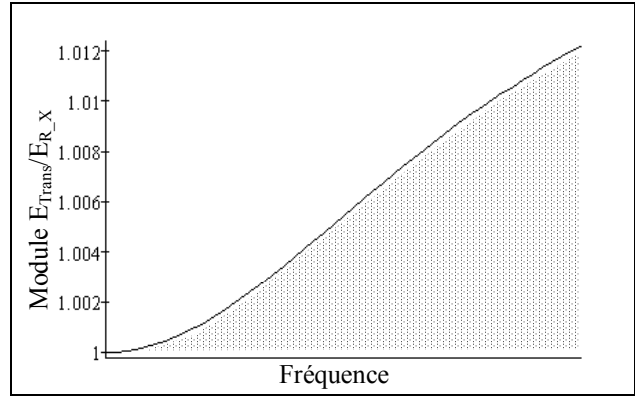


Figure 102 : Evolution du ratio E_{Trans}/E_{R_X} en fonction de la fréquence (simulation numérique).

$$\text{Eq. 219 } \frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{Trans} - E_{R_X}}{E_{Trans}} = 1 - \sqrt[2]{\frac{1 + 4\pi^2 \tau_\epsilon^2 f_{Trans_n}^2}{1 + 4\pi^2 \tau_\sigma^2 f_{Trans_n}^2}} \geq 0$$

La contribution de la viscosité du matériau dans les équations (Eq. 216) et (Eq. 219) est identique dans la formulation, cependant pour une géométrie fixée, les fréquences propres de vibration longitudinale sont supérieures aux fréquences de vibration transversale. Cette dernière remarque implique que l'effet de la viscosité sera plus marqué en vibrations longitudinales qu'en vibrations transversales.

7.8 Synthèse inverse, caractérisation des poutres viscoélastiques en vibrations longitudinales

Faire la synthèse inverse d'un système revient à identifier, à partir d'un signal sonore réel, les filtres linéaires du modèle guide d'onde approprié (Figure 90). Ces filtres linéaires ne sont pas identifiés directement à partir du signal, mais calculés en utilisant les grandeurs (aE_{R_X}), τ_σ , τ_ϵ et β du modèle mécanique retenu (Eq. 170). En considérant les valeurs des premières fréquences propres de vibration du système réel, mais aussi les atténuations temporelles associées aux premières fréquences, il est possible de quantifier les grandeurs mécaniques du modèle choisi.

7.8.1 Du décrétement logarithmique au frottement interne

Il est d'usage de caractériser le phénomène de dissipation dans le matériau bois en vibrations longitudinales ou transversales par le calcul du décrétement logarithmique (Pellerin, 1965 ; Bordonné, 1989 ; Ouis, 1999). L'expérience consiste à exciter (oscillations forcées) le matériau à sa $n^{\text{ième}}$ fréquence de résonance, déterminée en vibrations libre – libre, puis d'arrêter l'excitation et d'enregistrer au cours du temps les oscillations amorties produites (Bordonné, 1989 ; Chang, et al., 2000). Le décrétement logarithmique est ensuite estimé entre deux périodes consécutives. L'exploitation de cette valeur, relative à une fréquence de vibration libre – libre du matériau, provient de la généralisation du comportement vibratoire d'un système dissipatif à un degré de liberté et de sa transposition directe à des systèmes complexes dissipatifs (Ouis, 2000).

7.8.1.1 *Structure linéaire dissipative à un degré de liberté (Laroze, 1992)*

Une telle structure peut être modéliser le système masse – ressort – amortisseur de la Figure 103. Un amortisseur visqueux linéaire, de coefficient R, exerce une réaction proportionnelle à la vitesse (comportement Newtonien). Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre de gravité de l'objet de masse M donne l'équation du mouvement :

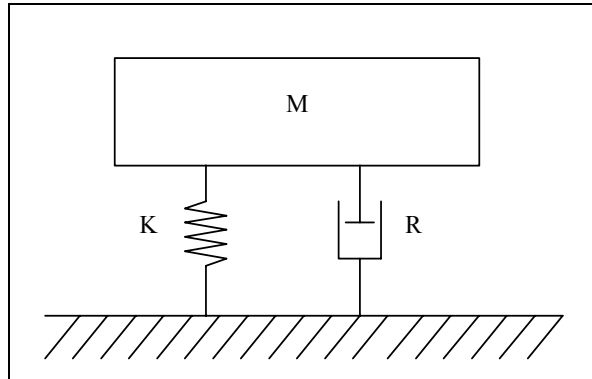


Figure 103 : Exemple d'un système dissipatif à un degré de liberté.

$$\text{Eq. 220 } M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R \frac{\partial u}{\partial t} + Ku = 0$$

La solution de l'équation (Eq. 220) est une combinaison linéaire de deux solutions indépendantes ; si l'on cherche des solutions de la forme $u(t)=U_0 \exp(zt)$, on trouve que z satisfait à l'équation caractéristique associée :

$$\text{Eq. 221 } Mz^2 + Rz + K = 0$$

Posons $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ la pulsation naturelle, et $\lambda = \frac{R}{2\sqrt{KM}}$ le taux d'amortissement. Trois cas doivent être envisagés

suitant que le discriminant de (Eq. 221) $\Delta = R^2 - 4MK$ est positif, nul, ou négatif. Cependant un seul cas engendre des solutions sinusoïdales ; nous considérerons donc ce cas particulier où l'amortissement est faible, c'est à dire $\lambda < 1$.

Si l'on pose $\Omega = \omega\sqrt{1 - \lambda^2}$, la fonction $u(t)$, solution générale de (Eq. 220), peut se mettre sous la forme :

$$\text{Eq. 222 } u(t) = U_0 e^{-\lambda\omega t} \sin(\Omega t + \varphi)$$

Le mouvement est oscillatoire d'amplitude décroissante vers zéro (Figure 104). Parmi les paramètres associés à un tel mouvement oscillatoire amorti, le décrément logarithmique est communément employé pour caractériser le phénomène de dissipation du matériau :

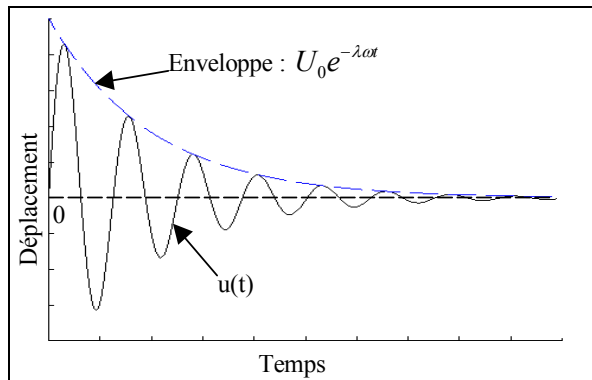


Figure 104 : Réponse vibratoire d'un système dissipatif à un degré de liberté.

$$\text{Eq. 223 } \delta_{Log} = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

Lorsque le taux d'amortissement λ est très inférieur à 1, le décrément logarithmique est alors proportionnel au taux d'amortissement (Bordonné, 1989) :

$$\text{Eq. 224 } \lambda \ll 1 \Rightarrow \delta_{Log} \approx 2\pi\lambda$$

L'étude du décrément logarithmique a notamment était menée par Kollmann (1968), Bordonné (1989), et Holz (1996). Une absence de relation entre la masse volumique ρ et le décrément logarithmique δ_{Log} a été observée expérimentalement par Kollmann (1968) sur du chêne et de l'épicéa, et par Bordonné (1989) sur des essences tropicales. Cependant Bordonné (1989) observe une croissance régulière du décrément logarithmique avec la fréquence qui lui est associée sur un résineux, le Kaori (Figure 105). Ce type d'évolution a également été observée par Holz (1996) sur de l'épicéa (Figure 106).

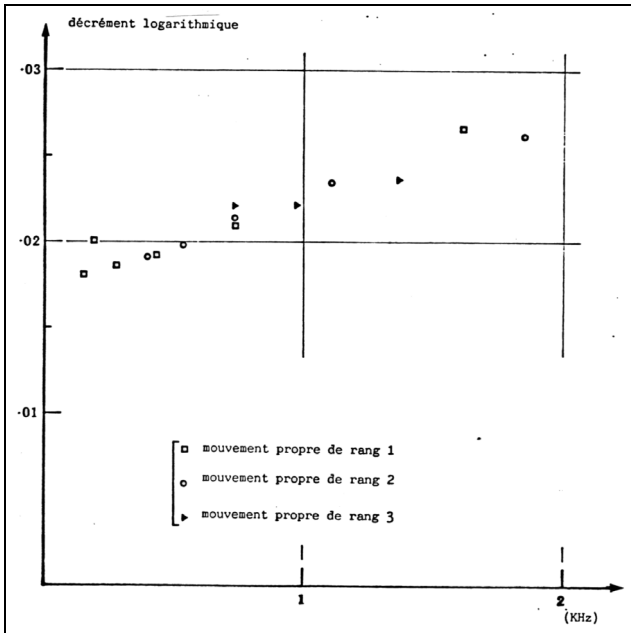


Figure 105 : Evolution du décrément logarithmique en fonction de la fréquence, mesurée en vibrations transversales (*Agathis laureolata*) (Bordonné, 1989).

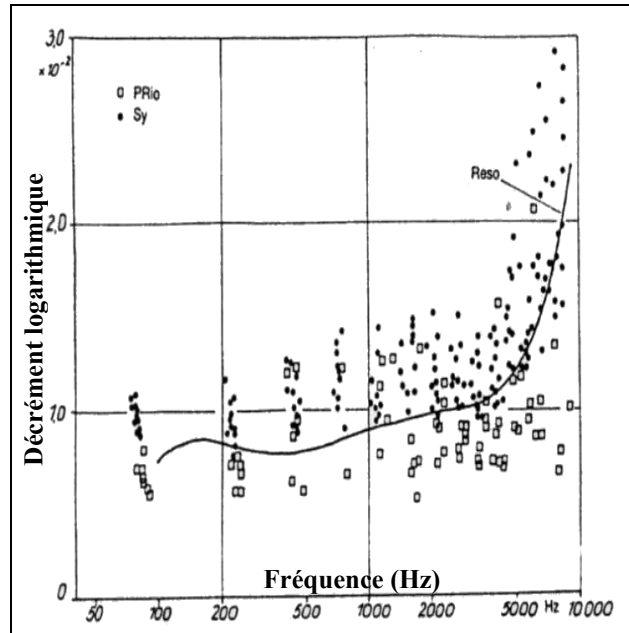


Figure 106 : Evolution du décrément logarithmique en fonction de la fréquence (Holz, 1996).

La Figure 106 montre une évolution régulièrement croissante du décrément logarithmique en fonction de la fréquence jusqu'à 5 kHz environ où il se produit une inflexion avec une forte augmentation du décrément logarithmique. On retrouve ici un phénomène déjà observé à la Figure 88.

7.8.1.2 *De la synthèse additive au modèle guide d'onde*

Afin d'exploiter les notions relativement simples développées au paragraphe 7.8.1.1 pour des systèmes à un degré de liberté, montrons que la modélisation du système physique – poutre en vibrations longitudinales – par un modèle guide d'onde est équivalent, au voisinage des résonances, à une superposition infinie de structure linéaire dissipative à un degré de liberté (synthèse additive d'un signal).

La synthèse additive d'un signal réel, par exemple les vibrations d'une poutre sollicitée par un choc, suppose que le signal est composé d'une somme de sinusoides exponentiellement amorties (Guillemain, et al., 1997) :

$$\text{Eq. 225 } \overline{s(t)} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{(i\omega_p - \alpha_p)t}$$

Pour une pulsation propre particulière ω_p , le paramètre A_p est l'amplitude maximale, à l'instant initial, de l'enveloppe du signal associé à cette pulsation. Le paramètre α_p caractérise l'amortissement temporel du signal associé. En se référant à l'équation (Eq. 222), on identifie les coefficients de l'équation (Eq. 225) à ω_p fixée : $A_p = U_0$ et $\alpha_p = \lambda\omega$.

La transformée de Fourier d'un tel signal (Eq. 225) donne une somme de Lorentziennes (Aramaki, 1999) :

$$\text{Eq. 226 } S(\omega) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p + i(\omega - \omega_p)}$$

Les paramètres A_p et α_p sont facilement accessibles à partir d'un spectre réel (Figure 107). Afin d'obtenir les paramètres du modèle guide d'onde, on identifie la somme de lorentziennes (Eq. 226) avec la fonction de transfert du modèle (Ystad, et al., 1996 ; Guillemain, et al., 1997) :

$$\text{Eq. 227 } T(\omega) = \frac{e^{-k'L} e^{-ikL}}{1 - e^{-2k'L} e^{-2ikL}} \approx \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p + i(\omega - \omega_p)}$$

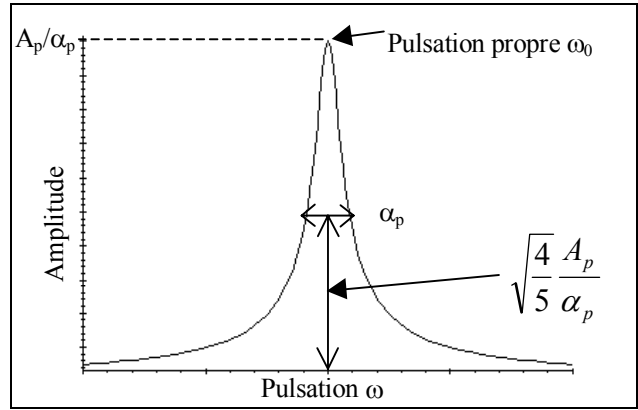


Figure 107 : Représentation spectrale d'une Lorentzienne centrée sur la pulsation ω_0 .

Pour étudier le comportement de $T(\omega)$ au voisinage des pulsations propres, nous supposons que les modes étudiés sont marqués, et qu'ils ne se recouvrent pas (Guillemain, et al., 1997). Au voisinage des pulsations propres, on écrit $\omega = \omega_p + \varepsilon$, avec $\varepsilon \approx 0$. Deux relations importantes sont rappelées ici :

$$\text{Eq. 228 } \begin{cases} k_p L = \omega_p D_p \\ \omega_p D_p = n\pi \end{cases}, \text{ avec } D_p \text{ le temps de propagation de l'onde de pulsation propre } \omega_p.$$

$$\text{Eq. 229 } T(\omega \approx \omega_p) = \frac{\pm e^{-k_p'L} e^{-i\varepsilon D_p}}{1 - e^{-2k_p'L} e^{-2i\varepsilon D_p}}$$

Après un développement limité à l'ordre 0 de l'exponentielle au numérateur, et à l'ordre 1 au dénominateur, autour de $\varepsilon \approx 0$, on obtient :

$$\text{Eq. 230 } T(\omega \approx \omega_p) \approx \frac{1}{\frac{2D_p e^{-k_p'L}}{1 - e^{-2k_p'L}} + i\varepsilon}, \text{ à identifier avec : } T(\omega \approx \omega_p) \approx \frac{A_p}{\alpha_p + i\varepsilon}$$

Par conséquent, la fonction de transfert du modèle guide d'onde est assimilable à une somme de lorentziennes (Ystad, et al., 1996 ; Guillemain, et al., 1997 ; Aramaki, 1999). Les paramètres A_p et α_p des lorentziennes sont reliés aux paramètres du modèle guide d'onde par les formules suivantes :

$$\text{Eq. 231 } \begin{cases} A_p = \frac{1}{2D_p e^{-k_p'L}} \\ \alpha_p = \frac{1 - e^{-2k_p'L}}{2D_p e^{-2k_p'L}} \end{cases}$$

7.8.1.3 Une nouvelle expression du décrément logarithmique

En utilisant les hypothèses simplificatrices du paragraphe 7.7.2 – le frottement interne du matériau est faiblement marqué dans la gamme de fréquences étudiées – l'expression qui en découle ($k' \approx k\delta/2$, Eq. 185) et les relations de (Eq. 228), on obtient l'expression simplifiée liant le paramètre d'amortissement α_p de la $p^{\text{ième}}$ lorentzienne aux paramètres du modèle guide d'onde à la pulsation ω_p :

$$\text{Eq. 232 } \alpha_p = \frac{e^{2k_p'L} - 1}{2D_p} \Rightarrow \alpha_p \approx \frac{\delta \omega_p}{2}, \text{ avec } \delta \text{ le frottement interne du matériau}$$

Connaissant la relation $\alpha_p = \lambda_p \omega_p$, les équations (Eq. 224) et (Eq. 232) permettent de donner une nouvelle expression du décrément logarithmique fonction des paramètres mécaniques du modèle de Zener :

$$\text{Eq. 233 } \delta_{\text{Log}_p} = 2\pi\lambda_p = 2\pi \frac{\alpha_p}{\omega_p} = \frac{\pi(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)\omega_p}{1 + \tau_\sigma\tau_\varepsilon\omega_p^2}$$

L'équation (Eq. 233) suggère que le décrement logarithmique est une fonction linéaire de la pulsation pour des pulsations telles que $1 \gg \tau_\sigma\tau_\varepsilon\omega_p^2$. Dans ce cas, on retrouve de manière théorique la croissance régulière du décrement logarithmique avec la fréquence observée par Bordonné (1989) et par Holz (1996) pour des fréquences inférieures à 7 kHz. En remplaçant la pulsation ω_p par son expression approchée (Eq. 203) dans le cas des vibrations transversales, on obtient :

$$\text{Eq. 234 } \delta_{\text{Log}} \approx \pi(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \sqrt{\frac{E_{R-X} I_{Gz} X_1}{\rho S L^4}}$$

Cette dernière équation correspond au cas expérimental traité par Bordonné (1989). L'équation (Eq. 234) montre qu'il n'existe pas de relation entre le décrement logarithmique δ_{Log} et la masse volumique ρ si les temps caractéristiques τ_σ et τ_ε (différents entre chaque éprouvette et entre chaque essence) ne dépendent pas de la masse volumique. La Figure 105 permet de trouver un ordre de grandeur de la différence entre les temps caractéristiques :

$$\text{Eq. 235 } \delta_{\text{Log}} \approx 0,023 \text{ pour } f = 1000 \text{ Hz} \Rightarrow (\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \approx 1,2 \cdot 10^{-6}$$

Remarque :

L'évolution linéaire observée à la Figure 105 et le résultat de l'équation (Eq. 233) montrent que la grandeur α_p / ω_p^2 permet de caractériser la viscosité du matériau dans une gamme de fréquence au moins égale à 2 kHz (Figure 105). Cette grandeur est facilement accessible par l'expérience, et son calcul est seulement entaché des erreurs expérimentales car théoriquement, la détermination de α_p ne comporte aucun biais. Le paragraphe suivant décrit notamment une méthode d'extraction de l'amortissement temporel associé à une fréquence particulière d'un signal réel.

7.8.2 Exploitation des amortissements temporels des vibrations

7.8.2.1 Extraction de l'amortissement temporel associé à une pulsation d'un signal réel

Soit $s(t)$ un signal réel provenant d'une poutre, sollicitée par un choc, en vibrations longitudinales libre – libre. Nous adoptons une représentation du signal par synthèse additive. Le signal réel est donc considéré comme étant la somme de plusieurs sinusoides exponentiellement amorties (Eq. 225). Afin d'extraire l'ensemble des amortissements temporels associés aux pulsations propres du système, il est nécessaire que les pulsations étudiées soient marquées, et qu'elles ne se recouvrent pas (Guillemain, et al., 1997).

La transformée de Fourier du signal temporel est calculée en utilisant une fenêtre rectangulaire, de façon à pouvoir retrouver les vibrations produites par chaque mode propre en utilisant le signal analytique (voir Annexe 1). La fréquence étudiée est repérée sur le spectre, puis la forme du pic associée est isolée de l'ensemble des autres pics du spectre. Pour cela une fenêtre gaussienne (Annexe I), centrée sur la fréquence étudiée, est appliquée sur le spectre du signal. Les opérations suivantes sont donc réalisées :

$$\text{Eq. 236 } \overline{s(t)} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{(i\omega_p - \alpha_p)t} \xrightarrow{FT} S(f) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\alpha_p + i(\omega - \omega_p)}, \text{ transformée de Fourier du signal}$$

$$\text{Eq. 237 } S_p(f) = S(f)G(f) = \sqrt{\frac{\pi}{g}} e^{-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{4g}} \frac{A_p}{\alpha_p + i(\omega - \omega_p)}, \text{ application de la fenêtre gaussienne (g>0)}$$

$$\text{Eq. 238 } s_p'(t) = s(t) * g(t) = \int_0^{+\infty} A_p e^{(i\omega_p - \alpha_p)(t-\tau) - g\tau^2 + i\omega_p\tau} d\tau, \text{ signal analytique associé au mode propre en } \omega_p$$

On obtient finalement l'expression analytiques des vibrations associées au mode propre de pulsation ω_p :

$$\text{Eq. 239 } s_p'(t) = A_p e^{(i\omega_p - \alpha_p)t} \int_0^{+\infty} e^{(\alpha_p - g\tau)\tau} d\tau$$

Le terme intégral de l'équation (Eq. 239) est une constante qui a pour valeur :

$$\text{Eq. 240 } \int_0^{+\infty} e^{(\alpha_p - g\tau)\tau} d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{g}} e^{\frac{\alpha_p^2}{4g}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_p}{2\sqrt{g}}\right) \right]$$

Les équations (Eq. 239) et (Eq. 240) montrent que le signal analytique obtenu, en utilisant la méthode proposée ci-dessus, permet d'obtenir le paramètre d'amortissement α_p associé à la pulsation ω_p , mais biaise le paramètre d'amplitude A_p d'une constante donnée à l'équation (Eq. 240). Le paramètre d'amortissement est estimé par régression linéaire sur le logarithme népérien de l'enveloppe du signal analytique.

7.8.2.2 Calcul des temps caractéristiques du modèle de Zener

Expérimentalement, il est difficile d'observer un nombre important de fréquences propres de vibrations longitudinales, la longueur des échantillons testés étant en effet relativement faible. Nous considérerons donc le cas où au moins trois fréquences propres sont discernables. Cette contrainte implique néanmoins une longueur minimale d'échantillon de l'ordre de trois mètres pour du bois si la valeur limite de la gamme de fréquence étudiée est de 2500 Hz.

L'amortissement temporel s'écrit en fonction de la pulsation et des temps caractéristiques comme suit (Eq. 184 et Eq. 232) :

$$\text{Eq. 241 } \alpha_p = \frac{\Delta \omega_p^2}{2(1 + \Omega \omega_p^2)}, \text{ avec } \Delta = \tau_\sigma - \tau_\varepsilon, \text{ et } \Omega = \tau_\sigma \tau_\varepsilon$$

Il est possible de se ramener à une fonction d'une seule variable en Ω en effectuant le ratio de deux amortissements :

$$\text{Eq. 242 } \frac{\alpha_p}{\alpha_q} = \frac{\omega_p^2}{\omega_q^2} \left(\frac{1 + \Omega \omega_q^2}{1 + \Omega \omega_p^2} \right)$$

Une minimisation de l'écart quadratique donné à l'équation (Eq. 243) avec $(p,q) \in \{1,2,3\}^2$, permet d'obtenir la solution

$$\Omega_0, \text{ telle que } \sum_{p,q=1}^3 F_{pq}(\Omega_0) = 0.$$

$$\text{Eq. 243 } F_{pq}(\Omega) = \left[\frac{\alpha_p}{\alpha_q} - \frac{\omega_p^2}{\omega_q^2} \left(\frac{1 + \Omega \omega_q^2}{1 + \Omega \omega_p^2} \right) \right]^2$$

Le paramètre Δ_0 moyen associé à Ω_0 est déduit de l'équation (Eq. 241) pour $p=\{1,2,3\}$. La méthode d'optimisation proposée ici propage l'erreur de Ω_0 vers Δ_0 ; cependant l'emploi de méthodes plus classiques (méthode du simplexe, Ciarlet, 1998; Delacroix, 1997) conduit à des valeurs de convergence erronées car le très petit nombre de points expérimentaux utilisés ne permet pas de rendre le problème d'inversion convexe (voir notamment le chapitre optimisation de Rade, 1999). A partir des valeurs de Δ_0 et de Ω_0 , on déduit aisément les valeurs des temps caractéristiques recherchées :

$$\text{Eq. 244 } \begin{cases} \Delta = \tau_\sigma - \tau_\varepsilon \\ \Omega = \tau_\sigma \tau_\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_\sigma = X_0 \text{ solution de:} \\ \tau_\varepsilon = \frac{\Omega}{\tau_\sigma} \end{cases} \quad X_0^2 - \Delta X_0 - \Omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau_\sigma = \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega}}{2} \geq 0 \\ \tau_\varepsilon = \frac{\Omega}{\tau_\sigma} \end{cases}$$

7.8.3 Exploitation des fréquences propres de vibration

La mesure expérimentale des trois premières fréquences propres de vibrations longitudinales, ainsi que la connaissance des deux temps caractéristiques du modèle théorique retenu permettent, à partir de l'équation (Eq. 187), de déterminer le paramètre β des effets Poisson (eq.43) et le produit (aE_{R_X}) associé au module relaxé. On rappelle l'expression des fréquences propres du système viscoélastique étudié :

$$\text{Eq. 245 } f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{aE_{R_X}}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 + \beta(2\pi f_n)^2}} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\sigma^2 (2\pi f_n)^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 (2\pi f_n)^2}}$$

Comme au paragraphe 7.8.2.2, on se ramène à une fonction d'une seule variable en β en effectuant le ratio de deux fréquences :

$$\text{Eq. 246 } \frac{f_p}{f_q} = \frac{p}{q} \sqrt{\frac{1 + \beta(2\pi f_q)^2}{1 + \beta(2\pi f_p)^2}} \sqrt[4]{\underbrace{\left(\frac{1 + \tau_\sigma^2 (2\pi f_p)^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 (2\pi f_p)^2} \right) \left(\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 (2\pi f_q)^2}{1 + \tau_\sigma^2 (2\pi f_q)^2} \right)}_{\tau_\sigma \text{ et } \tau_\varepsilon \text{ sont connus}}}$$

Une minimisation de l'écart quadratique donné à l'équation (Eq. 247) avec $(p,q) \in \{1,2,3\}^2$, permet d'obtenir la solution

β_0 , telle que $\sum_{p,q=1}^3 F_{pq}(\beta_0) = 0$.

$$\text{Eq. 247 } F_{pq}(\beta) = \left[\frac{f_p}{f_q} - \frac{p}{q} \sqrt{\frac{1 + \beta(2\pi f_q)^2}{1 + \beta(2\pi f_p)^2}} \sqrt[4]{\left(\frac{1 + \tau_\sigma^2 (2\pi f_p)^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 (2\pi f_p)^2} \right) \left(\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 (2\pi f_q)^2}{1 + \tau_\sigma^2 (2\pi f_q)^2} \right)} \right]^2$$

Le produit (aE_{R_X})₀ moyen associé à β_0 est déduit de l'équation (Eq. 245) pour $p=\{1,2,3\}$. Les méthodes d'optimisation proposées dans ce paragraphe et au paragraphe 7.8.2.2 sont similaires, le problème de la propagation de l'erreur d'une variable solution vers la suivante (§ 7.8.2.2) devient négligeable si les grandeurs physiques servant aux calculs – fréquences et amortissements temporels associés – sont entachées d'une très faible erreur. La détermination des fréquences propres de vibrations longitudinales et des amortissements temporels associés doit donc être réalisée avec le plus de soin possible.

7.9 Caractérisation du phénomène de dispersion

7.9.1 Retard et vitesse de phase

Il est très utile dans l'étude des systèmes dissipatifs et dispersifs de représenter l'évolution fréquentielle du temps de propagation de l'onde de pulsation ω (retard de phase), mais aussi l'évolution de la vitesse de propagation de cette onde (vitesse de phase). Ces évolutions sont directement reliées, dans le cas d'une vibration longitudinale pour une poutre de grand élanement, aux grandeurs viscoélastiques (τ_σ , τ_ε , β , aE_{R_X}) déjà déterminées au paragraphe 7.8. La relation entre le temps de propagation, noté D , et la pulsation ω est donnée à l'équation (Eq. 228). Cette relation, associée à l'équation (Eq. 185), permet d'écrire :

$$\text{Eq. 248 } D = L \sqrt{\frac{\rho}{aE_{R_X}}} \sqrt{1 + \beta\omega^2} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_\varepsilon^2 \omega^2}{1 + \tau_\sigma^2 \omega^2}}$$

L'expression du temps de propagation ainsi obtenue implique que l'évolution de ce dernier devient quasiment linéaire lorsque la pulsation tend vers l'infini, par contre l'évolution du temps de propagation est parabolique lorsque la pulsation devient faible :

$$\text{Eq. 249} \left\{ \begin{array}{l} D \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} D = \left(L \sqrt{\frac{\rho}{aE_{R_X}}} \sqrt{\beta \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}} \right) \omega \\ D \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} D = L \sqrt{\frac{\rho}{aE_{R_X}}} \left[1 + \left(\frac{\beta}{2} - \left(\frac{\tau_\sigma^2 - \tau_\varepsilon^2}{4} \right) \right) \omega^2 \right] \end{array} \right.$$

Les phases des ondes, se propageant dans le matériau, et captées à l'une des extrémités de la poutre, ont pour expression $\varphi(\omega) = -kL$ (Figure 91). L'étude de la phase de la transformée de Fourier du signal sonore expérimental permet alors d'estimer le retard de phase (Eq. 248). La vitesse de phase V_L s'obtient directement en écrivant $V_L = L/D$.

7.9.2 Retard et vitesse de groupe

Lorsque la poutre est en vibrations, des ensembles d'ondes, ou paquets d'ondes, centrés autour des modes propres ω_p se propagent à travers le matériau (Valette, 1998). Le spectre fréquentiel de la réponse vibratoire de la poutre n'est en effet pas constitué de raies (peigne de Dirac), mais de pics plus ou moins évasés. On démontre qu'un paquet d'ondes centré autour de la pulsation ω_p voyage à la vitesse :

$$\text{Eq. 250} \left\{ \begin{array}{l} D_G = L \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_p} \\ V_{L_G} = \frac{L}{D_G} \end{array} \right.$$

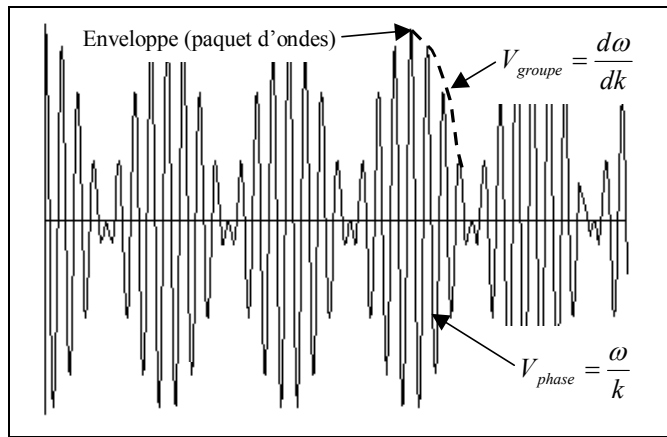


Figure 108 : Propagation d'un paquet d'ondes, vitesse de phase, vitesse de groupe.

V_{L_G} est appelé vitesse de groupe ; l'énergie du mode de vibration correspondant à ω_p se propage à la vitesse de groupe (Auger, et al., 1996 ; Valette, 1998). L'expression de D_G n'est pas donnée ici car la dérivée du nombre d'onde k ne peut s'écrire simplement. Expérimentalement, le retard de groupe s'obtient en estimant numériquement la dérivée de la phase $\varphi(\omega)$ de la transformée de Fourier du signal sonore (Auger, et al., 1996).

8 ETUDE EXPERIMENTALE

8.1 Matériel et méthode

8.1.1 Matériel végétal

Une essence de densité moyenne a été retenue (Tableau 39). La poutre destinée aux essais est issue de débits en plot (planche proche de la périphérie). Un plateau a été utilisé, après conditionnement jusqu'à stabilisation à une humidité théorique de 12%, pour façonner la poutre qui a pour dimensions finales 4257x269x45 mm. La poutre est, pour autant que possible, prismatique, de droit fil, sans nœud, ni défaut. Le sens longitudinal est colinéaire à l'axe longitudinal (OX) de la poutre.

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm ³)	Dimensions finales (mm)	Nombre d'éprouvettes
Pin de Parana	Brésil	<i>Araucaria angustifolia</i>	0,54	4257x269x45	1

Tableau 39 : Caractéristiques de l'essence sélectionnée.

8.1.2 Démarche expérimentale

L'objectif de l'expérimentation est de déterminer les paramètres viscoélastiques du modèle théorique, développé au paragraphe 7.7.2, dans le cas de vibrations longitudinales. La connaissance des ordres de grandeur de l'ensemble des paramètres du modèle permettra de valider les hypothèses simplificatrices utilisées au paragraphe 7.7. Ces paramètres sont utiles pour décrire la propagation des ondes de compression dans le matériau, à partir de leur détermination quantitative une resynthèse des vibrations produites par la poutre lors d'un choc et la comparaison entre vibrations réelles et synthétiques seront effectuées. L'influence du phénomène de dispersion sur le calcul du module d'élasticité dynamique pourra également être mise en évidence.

La répétition des essais dynamiques, 10 mesures pour chaque configuration d'essai, doit permettre d'apprécier quantitativement la répétabilité de la détermination des grandeurs physiques et mécaniques : fréquences de vibration, amortissements temporels associés, module d'élasticité longitudinal relaxé, temps caractéristiques de fluage et de relaxation, coefficient β caractérisant les effets Poisson en vibrations longitudinales.

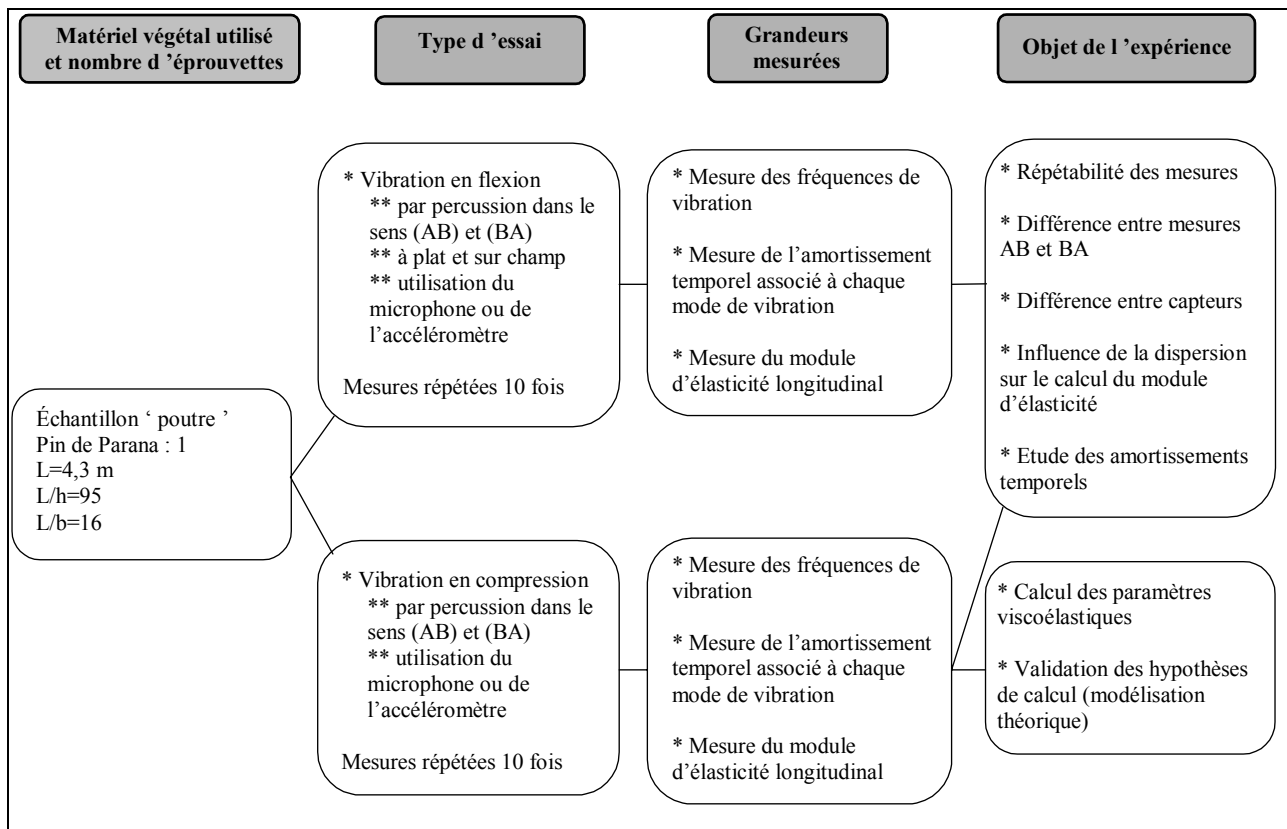


Figure 109 : Présentation des essais expérimentaux réalisés.

Ces grandeurs, caractéristiques de l'échantillon testé, sont déterminées à partir des signaux temporels captés par un microphone et par un accéléromètre. L'utilisation de ces deux capteurs mettra en évidence les différences ou l'absence de différences existantes dans la détermination des grandeurs caractéristiques.

Les essais sont effectués avec deux orientations possibles AB ou BA selon le sens de propagation des ondes dans le matériau (Figure 110). La comparaison des résultats obtenus selon l'orientation de l'essai rendra également possible l'observation des différences existantes dans la détermination des grandeurs caractéristiques.

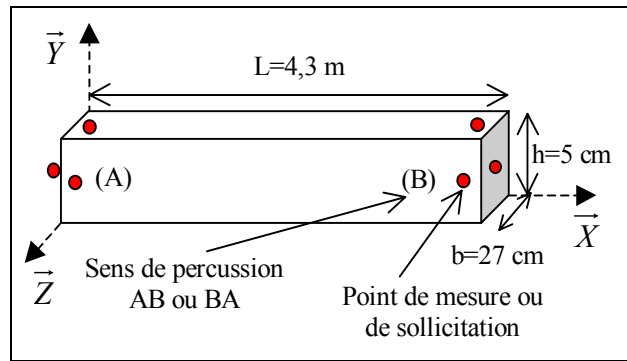


Figure 110 : Schéma des essais vibratoires.

Deux types de vibrations sont envisagés, l'échantillon est sollicité en vibrations longitudinales dans le sens (OX), mais également en vibrations transversales dans le sens (OY) "à plat" et (OZ) "sur champ" (Figure 110). La détermination des amortissements temporels associés aux fréquences propres de vibrations en compression et en flexion permettra l'étude de l'évolution des amortissements en fonction de la fréquence selon le type de vibrations considéré. Afin d'atteindre ces objectifs, on se propose de réaliser les essais expérimentaux indiqués à la Figure 109.

8.1.3 Essais vibratoires

8.1.3.1 Principe de la mesure

Les fréquences propres de vibrations et les amortissements temporels associés à chacun des modes propres sont déterminés par l'analyse du spectre des fréquences de la réponse impulsionnelle d'une poutre en vibrations naturelles longitudinales ou transversales. Le module d'élasticité longitudinal dynamique est ensuite calculé pour les deux types de vibrations envisagées. Les paramètres viscoélastiques tels que le module d'élasticité longitudinal relaxé et les temps caractéristiques du modèle théorique de Zener sont également calculés à partir des amortissements temporels et des fréquences de vibrations longitudinales.

8.1.3.2 Mode opératoire

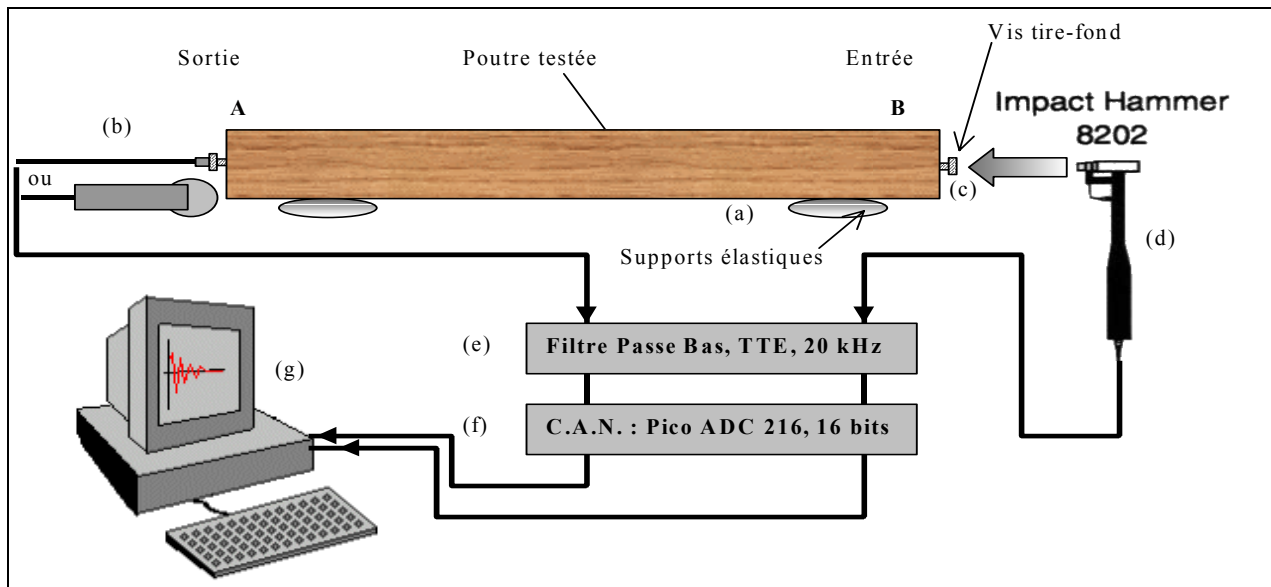


Figure 111 : Schéma du dispositif expérimental configuré pour un essai en vibrations longitudinales.

La poutre est pesée et mesurée. Pour la hauteur et la largeur, une moyenne sur trois positions équidistante est effectuée. Puis la poutre est mise en place sur les deux supports élastiques (a) (Figure 111). Le microphone, ou l'accéléromètre, (b) est ensuite placé à l'une des extrémités. L'accéléromètre, à fixation magnétique, est rendu solidaire de la poutre par l'intermédiaire d'une vis tire-fond (c).

Une percussion est donnée avec le marteau – force (d) sur l’extrémité libre de l’éprouvette, par l’intermédiaire d’une vis tire-fond solidaire de la structure testée (voir détail Figure 112), en veillant à ce que les vibrations soient le plus libre possible et dans le plan de sollicitation (longitudinal ou transversal à plat et sur champ). On vérifie à l’écran (g) que les amplitudes des signaux d’entrée et de sortie correspondent bien aux gammes d’acquisition choisies.



Figure 112 : Détail du support de l’accéléromètre et du support d’impact, vis tire-fond (\varnothing 6 mm, longueur 4 cm).

On vérifie également à l’écran la qualité du spectre et la gamme de fréquence sollicitée en entrée, qui doit être voisine de 7 kHz pour une percussion métal - métal. On vérifie également la qualité du spectre et des pics de fréquences obtenus, qui doivent être suffisamment nets et distincts, pour la sortie. La mesure est réitérée 10 fois pour chaque configuration testée (Figure 109). Au total 120 mesures ont été réalisées.

8.1.3.3 *Appareillage*

La photographie de la Figure 113 illustre en détail les appareils utilisés pour l’expérimentation (Figure 111). Les lettres identifiant chaque appareil ne correspondent cependant pas à celles utilisées dans la Figure 111.

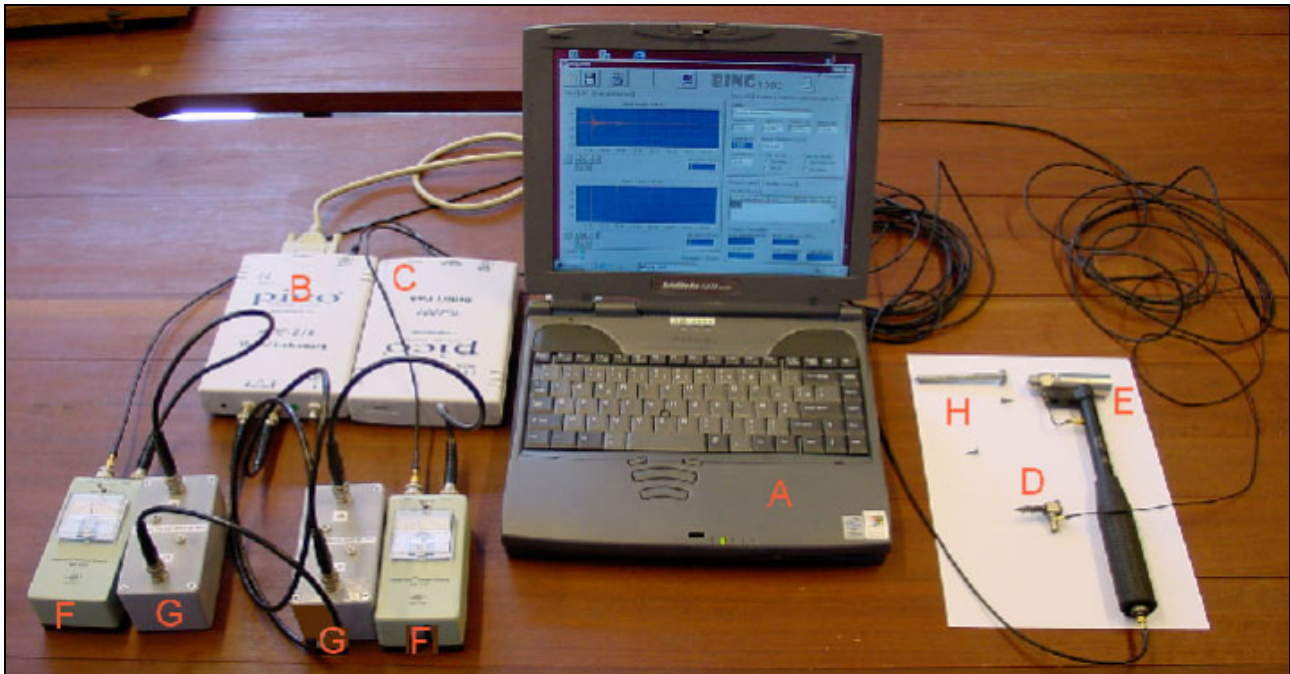


Figure 113 : Détail de l’appareillage utilisé pour l’acquisition des signaux acoustiques.

- (a) Micro ordinateur portable PC Toshiba Satellite 4030 CDS, processeur Celeron 300 MHz. Logiciels d’acquisition et d’exploitation : logiciel Bing 2000 et programmes de traitement Matlab.
- (b) Carte d’acquisition analogique – numérique deux voies PicoTechnology ADC216 / 16 bits.
- (c) Alimentation autonome de la carte d’acquisition PicoTechnology.
- (d) Accéléromètre Brüel & Kjaer Delta Tron de type 4397 unidirectionnel (fixé sur une vis). Microphone à condensateur LEM Industries de type EMU 4535 (effet électret) unidirectionnel (n’apparaît pas sur la photographie).
- (e) Marteau – Force Brüel & Kjaer de type 8202 avec un embout en métal.
- (f) Blocs autonomes de conditionnement Brüel & Kjaer de l’accéléromètre et du marteau – force.
- (g) Filtre anti-repliement passif, passe bas TTE Incorporated (80dB/Octave), de fréquence de coupure 20 kHz.
- (h) Vis tire-fond utilisée comme support de l’accéléromètre et support d’impact.

8.1.3.4 *Réglages retenus pour l'acquisition du signal***Entrée :**

Marteau - Force	Signal x 1	Durée d'acquisition	190,25 ms
Seuil de déclenchement	-2 mV	Largeur spectrale	≥ 6000 Hz
Gamme	1 000 mV	Nombre de points	15 854 points
Fréquence de coupure du filtre	20 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	83 333 Hz
		Résolution	5,3 Hz
		Résolution après sur – échantillonnage	0,6 Hz
		Nombre de points	131 072 points

Sortie :

Accéléromètre	Signal x 1	Durée d'acquisition	190,25 ms
Seuil de déclenchement	Sur le marteau	Largeur spectrale	≥ 6000 Hz
Gamme	1 000 mV	Nombre de points	15 854 points
Fréquence de coupure du filtre	20 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	83 333 Hz
		Résolution	5,3 Hz
		Résolution après sur – échantillonnage	0,6 Hz
		Nombre de points	131 072 points

Microphone	Signal x 1	Durée d'acquisition	190,25 ms
Seuil de déclenchement	Sur le marteau	Largeur spectrale	≥ 6000 Hz
Gamme	20 mV	Nombre de points	15 854 points
Fréquence de coupure du filtre	20 000 Hz	Fréquence d'échantillonnage	83 333 Hz
		Résolution	5,3 Hz
		Résolution après sur – échantillonnage	0,6 Hz
		Nombre de points	131 072 points

8.2 Résultats synthétiques et analyses8.2.1 *Répétabilité des mesures*

Des essais de répétabilité des mesures expérimentales ont été effectués en vibrations longitudinales et transversales. Le Tableau 40 et le Tableau 41 montrent la synthèse des analyses réalisées sur 10 répétitions par configuration d'essai (Figure 109) pour des vibrations longitudinales.

Longitudinal	Essai AB N=10			Essai BA N=10		
	Moyenne	Ecart-type	Max Δ %	Moyenne	Ecart-type	Max Δ %
α_1	18,8	0,08	0,66	18,7	0,09	0,79
α_2	25,1	0,02	0,14	25,1	0,03	0,20
α_3	58,5	0,28	0,76	59,0	0,40	1,16
(a _{ERX})	15114	2	0,02	15087	1	0,01
τ_σ	0,000115	1,1E-06	1,84	0,000113	1,4E-06	2,43
τ_ϵ	0,000113	1,1E-06	1,86	0,000111	1,4E-06	2,50
β	6,8E-10	3,9E-12	0,70	6,8E-10	2,8E-13	0,08

Tableau 40 : Essais de vibrations longitudinales avec accéléromètre, répétabilité des mesures.

Longitudinal	Essai AB N=9			Essai BA N=10		
	Moyenne	Ecart-type	Max Δ %	Moyenne	Ecart-type	Max Δ %
α_1	18,3	0,19	2,00	18,4	0,24	2,30
α_2	24,7	0,46	4,32	25,1	0,25	1,53
α_3	66,6	2,10	6,44	52,9	1,06	2,66
(a _{ERX})	15106	2	0,03	15076	4	0,05
τ_σ	0,000087	4,0E-06	9,22	0,000133	4,1E-06	6,04
τ_ϵ	0,000085	4,0E-06	9,39	0,000131	4,0E-06	6,04
β	6,9E-10	8,1E-13	0,20	6,8E-10	5,4E-12	1,28

Tableau 41 : Essais de vibrations longitudinales avec microphone, répétabilité des mesures.

Dans le cas des vibrations longitudinales, la mesure directe des trois premières fréquences de vibration, en utilisant un accéléromètre ou un microphone, donne des valeurs dont l'écart par rapport à la moyenne ne diffèrent pas plus de la résolution fréquentielle utilisée, $|\Delta f| = \pm 0,6$ Hz. Les valeurs moyennes des trois premières fréquences sont respectivement de 620 Hz, 1228 Hz, et 1802 Hz. La détermination directe des fréquences de vibrations longitudinales, en utilisant un accéléromètre ou un microphone, est donc répétable.

Considérons les résultats illustrés au Tableau 40 obtenus avec un accéléromètre. Les paramètres α_1 , α_2 , et α_3 sont les amortissements temporels associés aux trois premières fréquences propres de vibrations. Ces paramètres sont définis au paragraphe 7.8.2.1 par décomposition du signal réel en une somme de sinusoides exponentiellement amorties (Eq. 225). Les amortissements temporels sont issus d'une détermination directe. Les paramètres (aE_{RX}) , τ_σ , τ_ϵ , et β , sont les grandeurs caractéristiques du modèle théorique défini au paragraphe 7.7.2, équations (Eq. 184) et (Eq. 185), dans le cas des vibrations longitudinales. Ces grandeurs sont déterminées de manière indirecte à partir des fréquences propres de vibrations et des amortissements temporels associés (voir paragraphes 7.8.2 et 7.8.3). La colonne du Tableau 40 identifiée par Max $|\Delta|$ % donne la variation absolue maximale expérimentale du paramètre considéré relativement à sa moyenne estimée, c'est à dire $|\text{Max}(X) - \text{Moy}(X)| / \text{Moy}(X)$ %.

Le Tableau 40 montre que la variation relative de la détermination directe des trois amortissements temporels est d'environ 1% quel que soit le sens d'entrée - sortie AB ou BA. La variation relative du paramètre (aE_{RX}) est inférieure à 1%. Les variations des valeurs des temps caractéristiques du modèle de Zener τ_σ et τ_ϵ sont de l'ordre de 2%. La détermination de β , prenant en compte les effets Poisson, est précise à moins de 1% près (Tableau 40). Ces constatations expérimentales, réalisées à partir de 10 répétitions, indiquent que l'utilisation d'un accéléromètre, et les méthodes de traitement algorithmiques mises en œuvre confèrent une bonne répétabilité à la détermination des paramètres ; l'erreur absolue maximale relevée est de 2,5 % sur le calcul de τ_ϵ .

Le Tableau 41 illustre les résultats des analyses obtenus en utilisant un microphone. Concernant l'évaluation des amortissements temporels, la variation relative maximale, de l'ordre de 3%, est nettement plus forte que pour un accéléromètre. La valeur de l'écart relatif sur α_3 de 6 % s'explique par la présence de modes de vibrations superposés visibles sur le spectre en fréquence au niveau du mode longitudinal de rang 3 dans le sens AB. On rappelle que la détermination d'un amortissement temporel n'est théoriquement valable que si le mode considéré est marqué, possède une grande énergie spectrale, et ne se recouvre pas avec un autre mode (paragraphe 7.8.1.2). Le non-respect de ces conditions peut entraîner des erreurs considérables sur la valeur de l'amortissement obtenu. Les paramètres (aE_{RX}) , τ_σ , τ_ϵ , et β , étant à détermination indirecte, l'erreur sur a va se répercuter et être amplifiée. On obtient pour (aE_{RX}) et β des variations relatives semblables à celles observées avec un accéléromètre, respectivement inférieure à 1% et de 1%, cependant pour les temps caractéristiques τ_σ et τ_ϵ , la variation relative atteint les 8% environ (Tableau 41). De ces dernières remarques, on déduit que l'utilisation d'un accéléromètre est préférable au microphone pour la détermination des amortissements temporels et des paramètres viscoélastiques. Les valeurs des temps caractéristiques du modèle de Zener sont en effet calculées avec une erreur voisine de 2% avec un accéléromètre, et 8% avec un microphone. Il est important de remarquer que les variations relatives expérimentales obtenues restent néanmoins acceptables, car inférieures à 10%.

Transversal à plat	Essai AB N=10				Essai BA N=10			
	Rang	Fréquence	Alpha	Ecart-type	Max Δ %	Alpha	Ecart-type	Max Δ %
	3	71	2,4	0,01	1,2	2,3	0,02	1,1
	4	116	4,8	0,03	1,3	4,7	0,03	1,2
	5	172	5,7	0,04	1,0	5,7	0,03	1,0
	6	238	5,1	0,00	0,2	5,2	0,01	0,2
	7	313	8,3	0,01	0,1	8,3	0,01	0,2
	8	397	14,0	0,04	0,4	13,8	0,05	0,5
	9	490	22,0	0,04	0,3	X	X	X

Tableau 42 : Essais de vibrations transversales "à plat" avec accéléromètre, répétabilité des mesures.

Les résultats des essais de répétabilité en vibrations transversales "à plat" sont illustrés au Tableau 42 pour des mesures avec accéléromètre, et au Tableau 43 pour des mesures avec microphone. Pour ce type d'essai, le nombre des fréquences propres de vibrations discernables dans le spectre est de 9 ; les valeurs moyennes de ces fréquences sont indiquées au Tableau 42 sauf pour les deux premières ($f_1=14$ Hz, $f_2=37$ Hz) où les valeurs des amortissements n'ont pas pu être déterminées. L'échec de l'extraction des deux premiers amortissements temporels s'explique par le fait que l'on se trouve proche de la valeur seuil d'utilisation de l'accéléromètre (20 Hz à 25 kHz) ou en dessous de la valeur seuil pour le microphone (gamme 30 Hz à 20 kHz). L'amortissement associé au mode 9 n'a pas pu être déterminé dans le sens entrée - sortie BA (Tableau 42) et AB, BA (Tableau 43) en raison de la trop faible énergie le caractérisant.

Transversal à plat	Essai AB N=10					Essai BA N=10				
	Rang	Fréquence	Alpha	Ecart-type	Max Δ %	Alpha	Ecart-type	Max Δ %	Max Δ %	%
	3	71	2,3	0,03	2,5	2,3	0,05	5,0		
	4	115	3,6	0,25	9,1	3,7	1,01	49,2		
	5	172	4,2	0,38	10,8	3,0	0,82	43,1		
	6	238	5,3	0,03	1,3	5,1	0,33	11,5		
	7	313	9,3	0,31	8,6	8,4	0,17	3,2		
	8	397	14,7	0,34	3,0	12,6	0,24	2,9		

Tableau 43 : Essais de vibrations transversales "à plat" avec microphone, répétabilité des mesures.

Dans le cas des vibrations transversales "à plat", la mesure directe des premières fréquences de vibration, en utilisant un accéléromètre ou un microphone, donne des valeurs dont l'écart par rapport à la moyenne ne diffèrent pas plus de la résolution fréquentielle utilisée, $|\Delta f| = \pm 0,6$ Hz. Le Tableau 42 montre que la variation relative sur la détermination des amortissements temporels associés aux modes 3 à 8 est de l'ordre de 1% en utilisant un accéléromètre. On retrouve dans ce cas l'ordre de grandeur indiqué au Tableau 40. La détermination des amortissements avec un accéléromètre est expérimentalement précise à 1% près.

Le Tableau 43 montre des niveaux de variations importants de 49% pour le mode 4 et de 43% pour le mode 5. Lors de l'expérience, ces modes étaient marqués, suffisamment énergétiques et ne semblaient pas se recouvrir (voir "pouvoir de séparation d'une fenêtre de pondération", Annexe 1). La Figure 114 et la Figure 115 représente le logarithme népérien de l'enveloppe du signal analytique associé au mode 4 et 5. Sur ces figures on distingue nettement deux parties linéaires, la première de pente est plus forte que la seconde. L'algorithme de traitement informatique prend systématiquement la partie linéaire la plus significative et la plus étendue, dans la Figure 114 la première pente a été retenue, alors que dans la Figure 115 c'est la deuxième pente qui a été déterminée. La présence de deux parties linéaires dans ces deux cas provient en fait de la superposition de deux modes de vibrations de nature différente, probablement des vibrations en flexion et en torsion. Ces deux exemples mettent en évidence l'importance du non - recouvrement des modes dans la détermination des amortissements temporels.

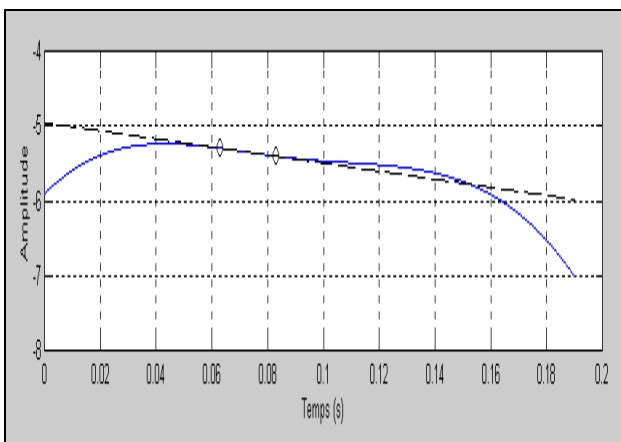


Figure 114 : Logarithme népérien de l'enveloppe du signal associé au rang 4 en vibrations transversales "à plat", essai BA avec un microphone.

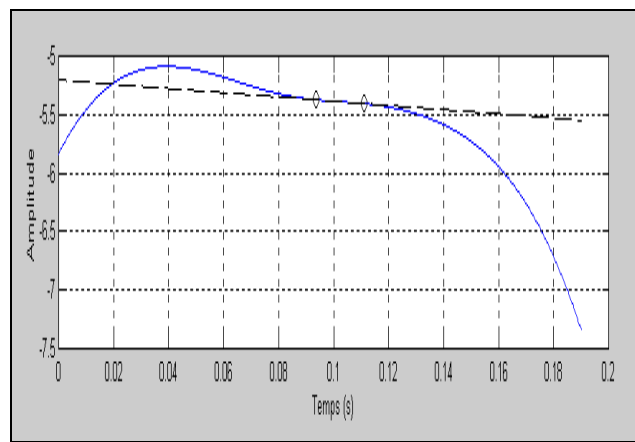


Figure 115 : Logarithme népérien de l'enveloppe du signal associé au rang 5 en vibrations transversales "à plat", essai BA avec un microphone.

En considérant les variations relatives du Tableau 43 données pour les modes 3, 6, 7 et 8, on constate que les variations sur la détermination des amortissements sont de l'ordre de 5%. On trouve dans ce cas une valeur légèrement plus forte que celle de 3% indiquée au Tableau 41.

Le Tableau 44 et le Tableau 45 montrent les résultats obtenus pour des essais de vibrations transversales "sur champ" en utilisant un accéléromètre et un microphone. Les amortissements temporels ont pu être déterminés pour les 11 premiers modes de vibration de flexion avec un accéléromètre, la gamme de fréquences étudiée va de 76 Hz à 1656 Hz (Tableau 44). L'utilisation d'un microphone ne permet pas de couvrir une gamme de fréquences aussi importante ; les amortissements ont en effet pu être déterminés pour les 6 premiers modes, la fréquence du sixième mode étant de 820 Hz (Tableau 45). Par comparaison entre les réponses impulsionnelles spectrales déduites en utilisant un accéléromètre et en utilisant un microphone, on observe que les pics de fréquence sont atténués plus rapidement pour le microphone, ce qui explique le fait que certains pics de "haute fréquence" ne puissent être exploités comme avec un accéléromètre. Il est important de garder à l'esprit que la lame d'air placée entre le matériau en vibrations et le microphone constitue un

filtre par lequel sont transformées les ondes, retardées, *dissipées* et dispersées, avant d'arriver jusqu'au capteur (Perdijon, 1993). Cette dernière remarque conduit à penser que l'utilisation d'un microphone va surestimer les amortissements temporels ; le biais induit sera néanmoins minime si le microphone est positionné près du matériau vibrant, ce qui est le cas ici.

Transversal sur champ	Essai AB N=10						Essai BA N=10					
	Rang	Fréquence	Alpha	Ecart-type	Max	Δ %	Alpha	Ecart-type	Max	Δ	%	
1	76	1,7	0,01	1,0			1,7	0,02	2,0			
2	189	5,8	0,01	0,3			5,8	0,00	0,1			
3	333	16,8	0,17	1,9			16,4	0,08	1,0			
4	490	27,4	0,16	1,4			27,9	0,08	0,5			
5	655	28,0	0,18	1,1			28,5	0,12	0,8			
6	821	30,3	0,04	0,2			31,2	0,07	0,4			
7	987	56,1	1,56	6,2			61,3	3,05	11,2			
8	1156	50,4	0,47	1,7			52,3	0,24	1,0			
9	1324	62,6	0,40	1,1			62,9	0,20	0,6			
10	1491	74,0	1,39	3,3			73,5	0,96	2,3			
11	1656	70,9	1,43	3,4			72,3	0,53	1,2			

Tableau 44 : Essais de vibrations transversales "sur champ" avec accéléromètre, répétabilité des mesures.

Transversal sur champ	Essai AB N=10						Essai BA N=10					
	Rang	Fréquence	Alpha	Ecart-type	Max	Δ %	Alpha	Ecart-type	Max	Δ	%	
1	76	1,8	0,24	30,4			2,4	0,30	24,0			
2	189	5,9	0,09	3,4			6,2	0,16	3,6			
3	332	17,0	0,69	7,5			17,5	0,28	2,6			
4	490	25,7	0,76	6,4			28,1	0,56	3,8			
5	654	25,7	2,56	18,0			27,6	2,66	16,6			
6	820	30,6	0,89	6,3			32,7	0,88	4,5			

Tableau 45 : Essais de vibrations transversales "sur champ" avec microphone, répétabilité des mesures.

Dans le cas des vibrations transversales "sur champ", la mesure directe des premières fréquences de vibration, en utilisant un accéléromètre ou un microphone, donne des valeurs dont l'écart par rapport à la moyenne ne diffèrent pas plus de la résolution fréquentielle utilisée, $|\Delta f| = \pm 0,6$ Hz.

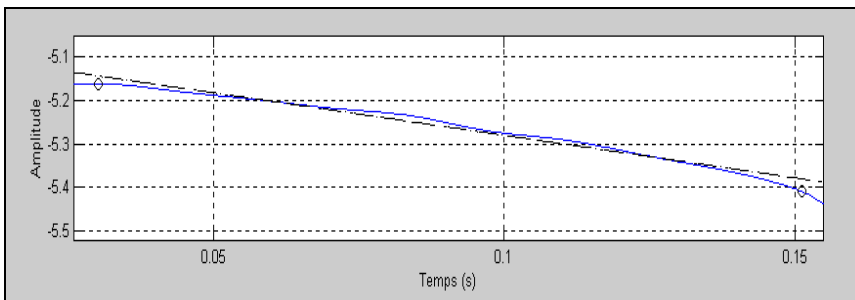


Figure 116 : Logarithme népérien de l'enveloppe du signal associé au rang 1 en vibrations transversales "sur champ", essai AB avec un microphone.

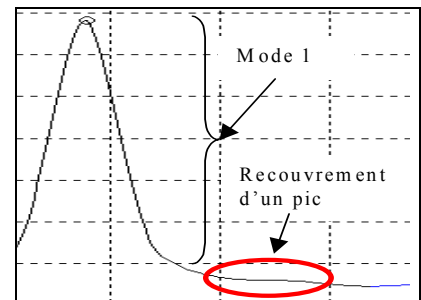


Figure 117 : Spectre de la réponse impulsionnelle au voisinage du premier mode en vibrations transversales "sur champ", essai AB avec un microphone.

La variation relative de la détermination des amortissements temporels est d'environ 2% en utilisant un accéléromètre (Tableau 44). L'importante valeur de 11,2 % concernant la variation sur le calcul de l'amortissement associé au septième mode dans le sens BA est due au problème de recouvrement des modes. Le Tableau 45 montre que la variation de la détermination des amortissements est d'environ 5% pour les modes 2,3,4 et 6. Les amortissements associés aux modes 1 et 5 ont des variations respectives de 30,4% et 18% dans le sens AB.

Ces importants niveaux de variation s'explique par le recouvrement de mode. Ce recouvrement est illustré, pour le mode 1, à la Figure 116 où des ondulations dans la partie "linéaire" du logarithme népérien de l'enveloppe sont

observables, et à la Figure 117 où il est possible de voir sur le spectre, au voisinage du mode 1, un épaulement traduisant la présence d'un autre pic de fréquence.

8.2.2 Différence entre les deux orientations possibles de l'essai

Les essais vibratoires longitudinaux ou transversaux peuvent être réalisés selon deux orientations possibles AB ou BA (Figure 110). L'étude des différences pouvant exister entre ces orientations a été réalisée sur les paramètres à détermination directe, les fréquences propres et les amortissements associés, et sur les paramètres déterminés indirectement, produit (aE_{RX}) et temps de relaxation, en considérant les essais avec accéléromètre et avec microphone (Figure 109).

Pour chaque type d'essai, une grandeur physique, notée X, comme par exemple l'amortissement, est mesurée 10 fois dans chaque sens, AB et BA. Afin de savoir s'il existe une différence significative entre les mesures de X réalisées dans chaque sens, l'intervalle de confiance de la différence des deux moyennes de la grandeur X en AB et BA est calculé avec un risque fixé à 5%. A partir des bornes de l'intervalle calculé, l'écart relatif par rapport à la moyenne AB est déterminé [$\text{borne-MoyAB}(X)$]/ $\text{MoyAB}(X)$ %. On obtient alors un intervalle d'écart relatifs dont la valeur absolue ne peut pas dépasser une valeur seuil déduite des variations expérimentales de X_{AB} et X_{BA} :

$$\text{Eq. 251} \quad \begin{cases} \theta_{AB} = \frac{|\Delta X_{AB}|}{X_{AB}} \\ \theta_{BA} = \frac{|\Delta X_{BA}|}{X_{BA}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\text{Max}|X_{AB} - X_{BA}|}{X_{AB}} = \begin{cases} 1 + \theta_{AB} - \frac{X_{BA}}{X_{AB}} + \frac{X_{BA}}{X_{AB}} \theta_{BA} & \text{si } X_{AB} \geq X_{BA} \\ -1 + \theta_{AB} + \frac{X_{BA}}{X_{AB}} + \frac{X_{BA}}{X_{AB}} \theta_{BA} & \text{si } X_{AB} \leq X_{BA} \end{cases}$$

$$\text{Eq. 252} \quad \frac{\text{Max}|X_{AB} - X_{BA}|}{X_{AB}} \approx \begin{cases} \theta_{AB} + \theta_{BA} & \text{si } X_{AB} \geq X_{BA} \text{ et } X_{AB} \approx X_{BA} \\ \theta_{AB} + \theta_{BA} & \text{si } X_{AB} \leq X_{BA} \text{ et } X_{AB} \approx X_{BA} \end{cases} \Rightarrow \frac{|X_{AB} - X_{BA}|}{X_{AB}} \leq \theta_{AB} + \theta_{BA}$$

La condition $X_{AB} \approx X_{BA}$ de l'équation (Eq. 252) est très souvent respectée (Tableau 40, Tableau 41, Tableau 42, Tableau 43, Tableau 44, Tableau 45), dans le cas où elle ne l'est pas (variation relative importante), la valeur seuil est déterminée à partir de la formulation exacte de l'équation (Eq. 251). Cette valeur seuil indique l'écart relatif absolu maximum pouvant être observé expérimentalement entre deux moyennes de la grandeur X évaluée en AB et BA. Si l'intervalle des écarts relatifs calculé contient la valeur nulle, on peut considérer les deux moyennes comme égales avec un risque de 5%.

Dans toutes les configurations d'essai envisagées, il n'existe pas de différence statistiquement significative entre les fréquences de vibrations longitudinales, ou transversales, mesurées dans les sens AB et BA.

Longitudinal	Accéléromètre			Microphone		
	Ecart relatif / moyenne (référence AB)		Seuil (%)	Ecart relatif / moyenne (référence AB)		Seuil (%)
	Inf (%)	Sup (%)		Inf (%)	Sup (%)	
α_1	-1,0	-0,2	2,0	-0,7	1,6	*
α_2	-0,2	0,0	*	0,0	3,0	*
α_3	0,2	1,3	2,7	-23,2	-18,1	29,2
(aE_{RX})	-0,2	-0,2	0,2	-0,2	-0,2	0,3
τ_σ	-2,9	-0,8	6,1	31,4	37,3	70,7
τ_ϵ	-2,9	-0,8	6,2	31,6	37,5	71,5
β	0,3	1,2	1,5	-1,6	-0,5	2,54

Tableau 46 : Essais de vibrations longitudinales avec accéléromètre et microphone, différence entre les deux orientations possibles de l'essai. Seuil * : la valeur zéro se trouve dans l'intervalle de confiance, les moyennes sont identiques.

Le tableau ci-dessus montre les résultats synthétiques obtenus dans le cas de vibrations longitudinales en utilisant un accéléromètre et un microphone. Les amortissements temporels déterminés avec un accéléromètre selon les deux orientations possibles de l'essai ne peuvent être considérés comme identiques avec un risque de 5%, excepté l'amortissement 2 (Tableau 46). L'écart relatif entre amortissements issus d'essais orientés AB et BA, de l'ordre de 1% à 2%, est néanmoins assez faible. Il existe également une différence dans le cas du produit (aE_{RX}) et du coefficient β selon le sens de l'essai. Ces différences sont minimales, respectivement de 0,2% pour (aE_{RX}), ce qui implique une différence entre les moyennes de 27 Mpa, et de 1,2% pour β . Les temps caractéristiques diffèrent d'environ 3% selon l'orientation de l'essai considérée (Tableau 46).

Les moyennes des grandeurs physiques déterminées avec le microphone sont différentes selon l'orientation de l'essai sauf pour les amortissements 1 et 2 (Tableau 46). Les remarques faites concernant le produit (aE_{RX}) et le coefficient β pour l'accéléromètre restent valables pour le microphone. Cependant la non cohérence des résultats obtenus au niveau de l'amortissement 3 et des temps caractéristiques est très importante, avec 23% d'écart relatif pour l'amortissement α et près de 38% d'écart pour les temps τ_σ et τ_ϵ . Les temps caractéristiques étant des paramètres à détermination indirecte, la différence observée entre les sens AB et BA pour l'amortissement 3 s'est répercutée sur le calcul des temps. Le problème réside ici dans la détermination de l'amortissement temporel du mode 3 ; au paragraphe 8.2.1, Tableau 41, la présence d'un recouvrement pour ce mode est mise en valeur, ce qui explique l'instabilité dans l'extraction de l'amortissement associé.

Il n'existe a priori pas de raison physique qui explique la différence observée entre des mesures de l'amortissement temporel effectuées dans l'un sens et l'autre sens possible de l'essai. La matière subit en effet une suite de contractions et d'extensions équivalentes quel que soit le sens d'entrée - sortie considéré. Cependant des effets imputables aux techniques métrologiques mises en œuvre peuvent induire des biais dans les mesures (par exemple une mauvaise fixation de l'accéléromètre).

Transversal à plat	Accéléromètre			Microphone		
	Ecart relatif / moyenne (référence AB)		Seuil (%)	Ecart relatif / moyenne (référence AB)		Seuil (%)
	Inf (%)	Sup (%)		Inf (%)	Sup (%)	
α_3	-1,3	-0,1	3,0	-1,6	1,7	*
α_4	-2,5	-1,1	4,2	-18,9	25,0	*
α_5	-0,9	0,2	*	-43,9	-14,3	70,5
α_6	0,5	0,6	1,0	-9,8	-1,0	17,6
α_7	-0,6	-0,4	0,8	-11,9	-6,8	20,9
α_8	-1,8	-1,2	2,4	-16,4	-12,7	20,0

Tableau 47 : Essais de vibrations transversales "à plat" avec accéléromètre et microphone, différence entre les deux orientations possibles de l'essai.

Transversal sur champ	Accéléromètre			Microphone		
	Ecart relatif / moyenne (référence AB)		Seuil (%)	Ecart relatif / moyenne (référence AB)		Seuil (%)
	Inf (%)	Sup (%)		Inf (%)	Sup (%)	
α_1	-1,5	0,5	*	15,2	43,1	90,5
α_2	0,0	0,2	*	3,3	7,5	12,6
α_3	-3,1	-1,6	5,2	-0,2	6,2	*
α_4	1,6	2,5	3,9	7,1	12,0	20,1
α_5	1,2	2,3	3,7	-2,1	15,7	*
α_6	2,7	3,0	3,5	4,0	9,1	18,1
α_7	5,1	<u>13,4</u>	27,7	X	X	X
α_8	3,0	4,4	6,5	X	X	X
α_9	0,0	1,0	*	X	X	X
α_{10}	-2,2	0,8	*	X	X	X
α_{11}	0,4	3,3	6,5	X	X	X

Tableau 48 : Essais de vibrations transversales "sur champ" avec accéléromètre et microphone, différence entre les deux orientations possibles de l'essai.

Concernant les essais avec accéléromètre de vibrations transversales "à plat" et "sur champ", quasiment aucun des intervalles de confiance de la différence des amortissements temporels moyens en AB et BA ne contient la valeur nulle, au risque de 5% (Tableau 47 et Tableau 48). Seuls les amortissements associés aux modes 1,2,9, et 10 peuvent être considéré comme identiques quelle que soit l'orientation de l'essai considérée. Lorsque les moyennes sont différentes, l'écart relatif le plus élevé observé dans le Tableau 47 et le Tableau 48 est de 13,4% (valeur soulignée, Tableau 48). Ces résultats montrent que même si la différence expérimentale entre les deux orientations possibles de l'essai sur la détermination des amortissements temporels reste faible, en moyenne de 3%, il est nécessaire de réaliser les mesures dans les deux sens AB et BA pour obtenir une bonne évaluation de ces amortissements.

Les remarques faites pour les essais avec accéléromètre sont également valables pour les essais réalisés en utilisant un microphone (Tableau 47 et Tableau 48). Cependant les écarts observés entre les sens AB et BA, de 10% en moyenne, sont nettement plus importants dans le cas du microphone. On retiendra l'écart relatif le plus élevé observé dans le Tableau 47 et le Tableau 48 de 43,9% dans le cas où les moyennes sont différentes, (valeur soulignée, Tableau 47).

8.2.3 Différence entre les deux capteurs utilisés

Les essais de vibrations longitudinales et transversales ont été réalisés en utilisant un accéléromètre et un microphone (Figure 110). L'étude des différences pouvant exister sur la détermination des paramètres à détermination directe, les fréquences propres et les amortissements associés, et sur les paramètres déterminés indirectement, produit ($a_{E_{RX}}$) et temps de relaxation, a été réalisée en effectuant des essais dans les deux orientations possibles, AB et BA (Figure 109). La méthode d'analyse décrite au paragraphe 8.2.2 est utilisée dans cette étude. Dans toutes les configurations d'essai envisagées, il n'existe pas de différence statistiquement significative entre les fréquences de vibrations longitudinales, ou transversales, mesurées avec un microphone et un accéléromètre.

Longitudinal Paramètres	Essai AB			Essai BA		
	Ecart relatif absolu / moyenne (référence A)		Seuil (%)	Ecart relatif absolu / moyenne (référence A)		Seuil (%)
	Inf (%)	Sup (%)		Inf (%)	Sup (%)	
α_1	-3,5	-1,9	5,3	-2,7	-0,8	4,8
α_2	-3,1	-0,3	6,1	-0,9	0,6	*
α_3	11,1	<u>16,6</u>	21,9	-11,7	-9,0	13,9
($a_{E_{RX}}$)	-0,07	-0,04	0,1	-0,09	-0,05	0,1
τ_σ	-26,6	-21,2	32,8	15,4	20,7	27,6
τ_ε	<u>-26,9</u>	-21,4	33,1	15,6	20,9	27,8
β	0,9	1,8	2,3	-1,0	0,1	*

Tableau 49 : Essais de vibrations longitudinales selon les orientations AB et BA, différence entre les deux capteurs utilisés.

La comparaison des résultats expérimentaux obtenus en utilisant un accéléromètre et un microphone montre qu'il existe des différences significatives au seuil de 5% dans la détermination de l'ensemble des paramètres en vibrations longitudinales (Tableau 49). Concernant les amortissements temporels, la différence entre capteur est de l'ordre de 3% sans prendre en compte les écarts trouvés pour α_3 où un recouvrement de mode a été mis en évidence au paragraphe 8.2.1. L'écart relatif de 3% observé entre capteur reste néanmoins faible, d'autant plus que les amortissements de rang 2 déterminés dans le sens BA peuvent être considérés comme égaux (Tableau 49). Le recouvrement de mode au niveau du rang 3, plus prononcé pour le microphone que pour l'accéléromètre, provoque une instabilité de la détermination de l'amortissement (paragraphe 8.2.1) qui se traduit par un écart maximum, au seuil de 5%, entre capteur de 16,6%. La remarque faite au paragraphe 8.2.2 reste valable, l'importante différence sur l'amortissement 3 induit une différence sur le calcul des temps caractéristiques dont l'écart relatif maximum, au seuil de 5%, entre capteur est de 26,9%. Les différences observées concernant le produit ($a_{E_{RX}}$) et le coefficient β restent minimales, respectivement de moins de 1% pour ($a_{E_{RX}}$) et au maximum de 1,8% pour β .

Transversal à plat Paramètres	Essai AB			Essai BA		
	Ecart relatif absolu / moyenne (référence A)		Seuil (%)	Ecart relatif absolu / moyenne (référence A)		Seuil (%)
	Inf (%)	Sup (%)		Inf (%)	Sup (%)	
α_3	-3,2	-1,2	5,8	-2,9	0,0	*
α_4	-28,8	-21,3	33,2	-38,0	-4,8	61,3
α_5	-31,9	-22,5	36,1	<u>-58,5</u>	-37,9	71,5
α_6	3,3	4,2	5,3	-6,9	2,1	*
α_7	9,0	14,3	21,3	0,2	3,2	5,2
α_8	3,7	7,2	9,0	-9,8	-7,3	11,7

Tableau 50 : Essais de vibrations transversales "à plat" selon les orientations AB et BA, différence entre les deux capteurs utilisés.

L'étude des différences sur la détermination des amortissements en vibrations transversales "à plat" met en évidence un écart de l'ordre de 6% entre capteur (Tableau 50). Les valeurs des amortissements des rangs 4 et 5 n'ont pas été prises en compte. Les importants écarts observés pour ces rangs, le maximum observé est de 58,5% pour l'amortissement 5 dans le sens BA, sont la conséquence du problème de répétabilité de la mesure observé en utilisant un microphone

(Figure 114 et Figure 115). On retrouve également ce problème au Tableau 47 dans le cadre de l'étude des différences entre les deux orientations possibles de l'essai pour l'amortissement 5.

Transversal sur champ	Essai AB			Essai BA		
	Ecart relatif absolu / moyenne (référence A)		Seuil (%)	Ecart relatif absolu / moyenne (référence A)		Seuil (%)
	Inf (%)	Sup (%)		Inf (%)	Sup (%)	
α_1	-4,1	16,0	*	25,1	49,9	72,5
α_2	0,4	2,7	5,3	5,0	8,9	10,9
α_3	-2,4	3,9	*	5,0	7,5	10,0
α_4	-8,2	-4,2	13,6	-0,7	2,2	*
α_5	-14,9	-1,8	25,9	-10,1	3,3	*
α_6	-1,2	3,0	*	2,9	7,0	10,1

Tableau 51 : Essais de vibrations transversales "sur champ" selon les orientations AB et BA, différence entre les deux capteurs utilisés.

Les résultats obtenus au Tableau 51, concernant les différences existantes entre capteur pour les essais de vibrations transversales "sur champ", montrent des écarts significatifs, au seuil de 5%, de l'ordre de 8% environ sur la détermination des amortissements temporels. L'écart sur le rang 1, de 49,9% dans le sens BA, n'a pas été pris en compte. Les remarques faites au Tableau 50 sont également valables pour le cas présent, Tableau 51.

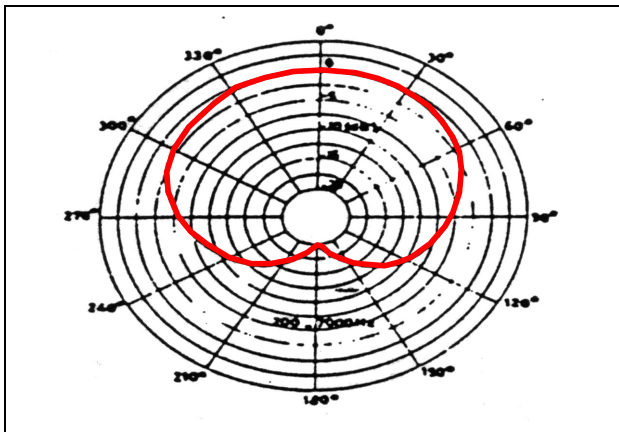


Figure 118 : Diagramme de directivité du microphone.

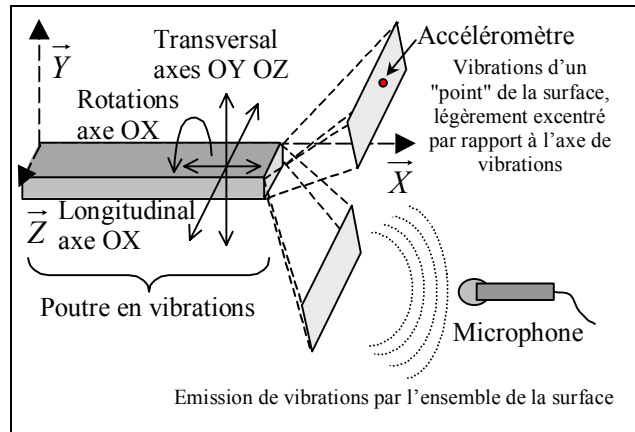


Figure 119 : Vibrations couplées dues au transfert d'énergie, enregistrement des vibrations par accéléromètre ou microphone.

Les remarques des paragraphes 8.2.1, 8.2.2, et 8.2.3 ont permis de montrer que le problème majeur rencontré pour extraire les amortissements temporels, à partir de la réponse impulsionnelle, est le recouvrement des modes. Ce phénomène, source notamment d'une grande imprécision sur la détermination, est très marqué pour le microphone. Les différences observées entre accéléromètre et microphone s'expliquent d'une part par la présence d'une lame d'air entre le matériau vibrant et le microphone, cette lame filtre le signal émis par le matériau (voir paragraphe 8.2.1), et d'autre part par la directivité du microphone utilisé (les mouvements hors axe du microphone sont également captés, Figure 118 et Figure 119).

Remarque : Il est possible d'observer des vibrations couplées, comme par exemple des vibrations transversales, avec un accéléromètre unidirectionnel placé dans l'axe des vibrations principales d'une poutre (sens longitudinal, Figure 119). L'accéléromètre n'est pas parfaitement directif du fait de sa fixation sur la surface vibrante, mais les amplitudes des vibrations "parasites" observées restent très inférieures à celles observées avec un microphone qui capte les vibrations de l'ensemble de la surface de l'objet (Figure 119).

Paramètres	Répétabilité des mesures		Orientations de l'essai		Capteurs utilisés(*)
	Ecart relatif absolu		Ecart relatif absolu		Ecart relatif absolu
Vibrations Longitudinales	A	M	A	M	Sens AB et BA
Amortissements	1 %	3 %	1 %	*	3 %
Module relaxé	≤ 1 %	≤ 1 %	≤ 1 %	≤ 1 %	≤ 1 %
Temps caractéristiques	2 %	8 %	3 %	38 %	27 %
Coefficient β	≤ 1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
Vibrations Transversales					
Amortissements "à plat"	1 %	5 %	3 %	10 %	6 %
"sur champ"	2 %	5 %	3 %	9 %	8 %

* A : accéléromètre et M : microphone

Tableau 52 : Synthèse des résultats obtenus concernant la répétabilité des mesures, les deux orientations possibles des essais, et les deux capteurs utilisés ; ordre de grandeur des écarts relatifs absolus (référence accéléromètre ou sens AB).

➤ **Conclusions pratiques**

Les résultats présentés dans les tableaux des paragraphes 8.2.1, 8.2.2, et 8.2.3 sont résumés au Tableau 52. L'ensemble des commentaires et remarques de ces chapitres permet de déduire la meilleure manière de réaliser ce type particulier de mesure longitudinale ou transversale. Le plus délicat est la détermination des amortissements temporels. Pour cela, il est préférable (a) d'utiliser un accéléromètre plutôt qu'un microphone, (b) de positionner l'accéléromètre sur l'axe principal des vibrations à étudiées, au niveau du centre de gravité de la surface, (c) de répéter la mesure 3 à 4 fois, (d) d'effectuer la mesure en orientant AB puis BA, (e) lors de l'extraction des amortissements, il est de plus nécessaire de bien vérifier que les modes sont marqués et qu'ils ne se recouvrent pas.

8.2.4 Essais de vibrations longitudinales

8.2.4.1 Identification des paramètres viscoélastiques

Ce paragraphe traite, sur un exemple particulier, des résultats de l'identification des grandeurs viscoélastiques du modèle théorique (§ 7.7.2) développé pour les vibrations longitudinales. L'exemple analysé ci-dessous consiste en une mesure des vibrations longitudinales de la poutre en pin de parana avec un accéléromètre. La méthode d'identification utilisée est décrite au paragraphe 7.8. La première étape pour caractériser une poutre en vibrations, assimilée à un système linéaire invariant dans le temps (§ 7.2 et § 7.5), consiste à estimer sa fonction de transfert (Annexe 2).

La Figure 120 montre la fonction de transfert estimée. Sur cette figure, les quatre premières fréquences propres de vibrations longitudinales sont identifiées par un cercle noir. Ces fréquences propres ont respectivement pour valeurs 621 Hz, 1228 Hz, 1804 Hz et 2489 Hz.

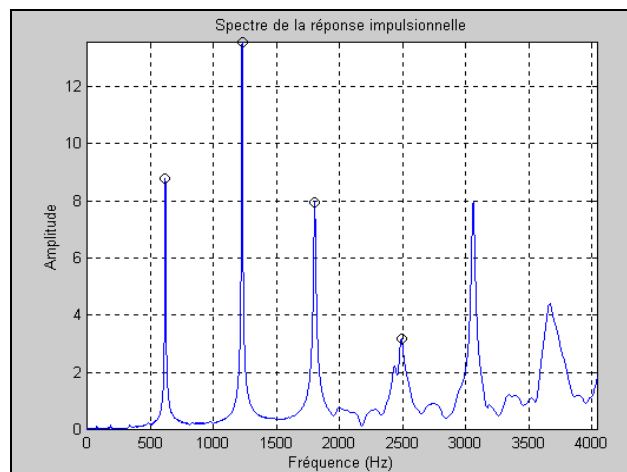


Figure 120 : Fonction de transfert de la poutre en vibrations longitudinales, vibrations de sortie captées avec un accéléromètre.

Une fois les pics de résonances identifiés, la deuxième étape consiste, pour chaque mode propre de vibration, à extraire de la fonction de transfert l'ensemble du pic considéré. On rappelle qu'un pic est assimilable à une Lorentzienne centrée sur la fréquence propre de vibration (§ 7.8.1.2), il s'agit donc d'identifier au mieux la forme du pic, marquée en noir sur la Figure 121. Cette méthode est surtout sensible au phénomène de recouvrement de mode qui ne permet pas d'avoir directement accès à l'ensemble du pic analysé. La partie de la fonction de transfert appartenant au pic de vibration considéré est ensuite extraite par application d'une fenêtre de pondération gaussienne (§ 7.8.2.1). Le signal analytique associé au pic de vibration peut alors être construit (Figure 122, b). Un ajustement linéaire, par la méthode des moindres carrés, sur la partie linéaire du logarithme népérien de l'enveloppe du signal temporel associé au pic considéré est réalisé (Figure 122, c). Le coefficient directeur de la droite correspond à l'amortissement temporel de la vibration (§ 7.8.2.1).

Pour les trois premières fréquences propres de vibration, les valeurs des amortissements temporels sont respectivement de $\alpha_1=18,7$; $\alpha_2=25,1$; $\alpha_3=58,5$ et les coefficients de détermination sont de $R_1^2=0,99984$; $R_2^2=0,99998$; $R_3^2=0,99974$. Le nombre de points utilisés pour la régression concernant le premier amortissement est de 12314 pour ce cas particulier (le nombre de points du signal étant de 15855). Les valeurs des coefficients de détermination, très voisines

de l'unité, sont la conséquence du critère appliqué dans la recherche de la partie linéaire du logarithme de l'enveloppe (Figure 122, c). Lorsqu'il se produit un recouvrement de mode, où lorsque les signaux sont très bruités, la rigueur du critère utilisé réduit considérablement le nombre de points nécessaires à la régression (Figure 114). Un indice de qualité, caractérisant la pertinence de la valeur d'amortissement temporel calculée, serait alors le ratio nombre de points de régression divisé par nombre de points du signal. Dans le cas présent les indices de qualité sont respectivement de $Q_1=0,78$; $Q_2=0,84$; $Q_3=0,15$.

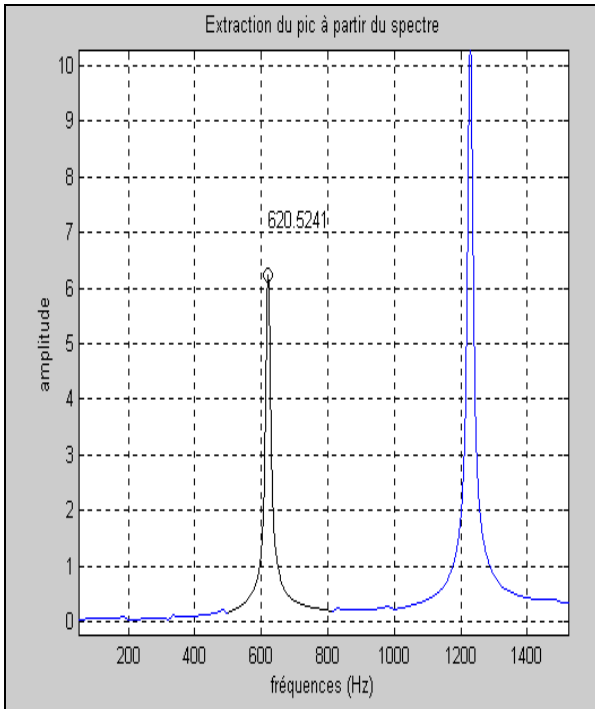


Figure 121 : Identification du premier pic de vibrations longitudinales et extraction.

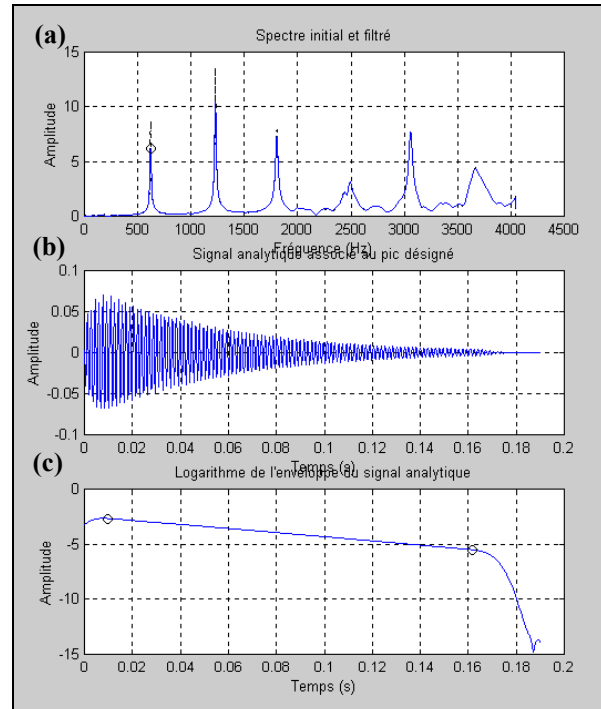


Figure 122 : Identification du premier pic de vibrations (a), signal temporel associé au premier pic en fréquence (b), logarithme népérien de l'enveloppe du signal temporel associé (c).

L'indice de qualité Q_3 est très faible. La régression linéaire a été effectuée sur 2312 points pour déterminer le troisième amortissement temporel. Un des commentaires du Tableau 41 fait état d'un recouvrement de mode au niveau du mode 3. Ce phénomène, mis en évidence en utilisant un microphone (Tableau 41), n'est pas décelable avec un accéléromètre (Tableau 40). Le logarithme de l'enveloppe semble en effet bien linéaire pour ce mode en utilisant un accéléromètre. Or la faible valeur de l'indice de qualité de rang 3 met en évidence une anomalie pour ce mode en particulier, il semble donc que la connaissance de cet indice soit un indicateur pertinent de la validité de l'amortissement temporel calculé. Connaissant les valeurs de l'amortissement temporel pour les trois premiers modes, on vérifie l'hypothèse formulée à l'équation (Eq. 224) :

$$\text{Eq. 253 } \lambda_p = \frac{\alpha_p}{\omega_p} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5.10^{-3} \\ \lambda_2 = 3.10^{-3} \\ \lambda_3 = 5.10^{-3} \end{cases} \Rightarrow \lambda_p \ll 1$$

A partir des trois premières fréquences propres de vibration et des amortissements temporels associés, il est possible de déterminer les paramètres viscoélastiques du modèle théorique (§ 7.8.2 et § 7.8.3). Le coefficient β est égal à $6,7.10^{-10}$; les temps caractéristiques ont pour valeur $\tau_\sigma = 0,115$ ms et $\tau_\varepsilon = 0,112$ ms ; le produit (aE_{RX}) a pour valeur 15112 Mpa. On vérifie que $\tau_\sigma > \tau_\varepsilon$ (§ 7.6.2) et que la différence des temps caractéristiques $(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)$, égale à $2,3.10^{-6}$, est bien de l'ordre de grandeur de $1,2.10^{-6}$ déduite au paragraphe 7.8.1.3 (Eq. 235). Il est également nécessaire de vérifier l'hypothèse formulée ci-dessous conduisant à l'équation (Eq. 150) :

$$\text{Eq. 254 } \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho) \gg 1$$

Afin de vérifier cette relation, la longueur L , le module E , et la masse volumique ρ sont issus de l'article de Ono et Norimoto (1985). La longueur des échantillons utilisés varie entre 130 et 140 mm ; le module d'élasticité longitudinal

dynamique, mesuré en vibrations longitudinales avec la première fréquence propre, est en moyenne de 12800 Mpa pour l'épicéa de Sitka ; la masse volumique moyenne est de 460 kg/m³. Les valeurs de τ_σ et τ_ε étant inconnues dans le cas présent, on se réfère à leur ordre de grandeur (10⁻⁴). On obtient alors, en considérant le premier mode de vibration :

$$\text{Eq. 255} \quad \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho) = 163 \gg 1$$

Ce résultat conduit à penser que la formulation de l'équation (Eq. 150) est valable dans le cadre de l'article concerné (Ono et Norimoto, 1985). En réutilisant les mêmes données numériques, il est possible d'estimer à partir de quelle longueur les corrélations de la Figure 89 et du Tableau 35 ne devraient plus être valables :

$$\text{Eq. 256} \quad \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho) = 1 \Leftrightarrow L = \pi \sqrt{\tau_\sigma \tau_\varepsilon (E/\rho)} = 1,7 \text{ m}$$

Remarque : Les valeurs des temps caractéristiques identifiées ne sont valables que pour les dimensions d'éprouvette sur laquelle elles ont été calculées. Ces valeurs risquent de différer notablement au changement d'échelle.

8.2.4.2 Validation des hypothèses simplificatrices

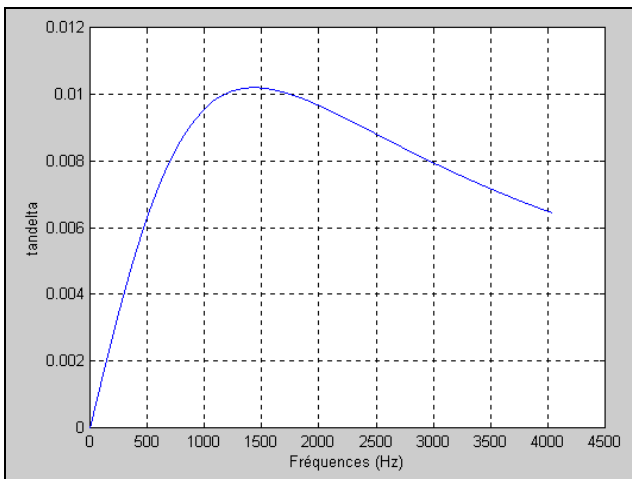


Figure 123 : Evolution de $\tan(\delta)$ en fonction de la fréquence, d'après l'équation (Eq. 146).

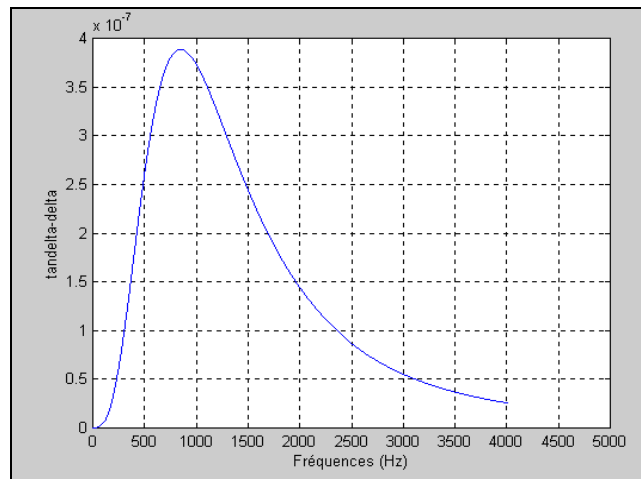


Figure 124 : Evolution de la différence $\tan(\delta) - \delta$ en fonction de la fréquence.

La prise en compte de la viscosité du matériau dans les modèles théoriques en vibrations longitudinales (§ 7.7.2, Eq. 187), mais aussi transversales (§ 7.7.3, Eq. 204), suppose que le frottement interne est faiblement marqué dans la gamme de fréquences étudiée. Cette hypothèse a une conséquence importante sur la formulation de la relation de dispersion en vibrations longitudinales (Eq. 185) :

$$\text{Eq. 257} \quad \delta \approx 0 \Rightarrow \tan \delta \approx \delta \Rightarrow \begin{cases} k'' = k \left(1 - i \frac{\delta}{2}\right) \\ \text{avec } \delta = \frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)\omega}{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon \omega^2} \end{cases}$$

La connaissance des temps caractéristiques du modèle de Zener (§ 8.2.4.1) nous permet de vérifier l'hypothèse d'un frottement interne faible en calculant de manière exacte $\tan(\delta)$ à partir de l'équation (Eq. 146), puis δ en utilisant la fonction inverse arctan. La Figure 123 et la Figure 124 montrent les évolutions du frottement interne $\tan(\delta)$ et de la différence $\tan(\delta) - \delta$ dans la gamme de fréquences étudiée allant de 1 Hz à 4000 Hz environ. Ces figures montrent que l'hypothèse d'un frottement interne faible est vérifiée, le maximum atteint par le frottement interne est en effet de l'ordre de 10⁻², celui atteint par la différence $\tan(\delta) - \delta$ étant de l'ordre de 10⁻⁷.

8.2.4.3 Resynthèse des vibrations produites

L'emploi des modèles guide d'onde ont l'avantage de permettre une resynthèse des vibrations sonores émises par la poutre à partir d'une sollicitation longitudinale en utilisant les paramètres de longueur, de masse volumique, du produit module relaxé par terme Poisson ($a_{E_{RX}}$), du coefficient β des effets Poisson, et des temps caractéristiques de fluage et de relaxation. Ces vibrations synthétiques peuvent alors être écoutées, en ce sens la synthèse sonore des instruments de

musique ne diffère pas de celle utilisée pour des poutres de structure (§ 7.1). Différentes figures illustrent graphiquement les étapes de la resynthèse et permettent de mettre en évidence les avantages d'utilisation d'une modélisation théorique qui reste relativement simple, mais aussi ces lacunes.

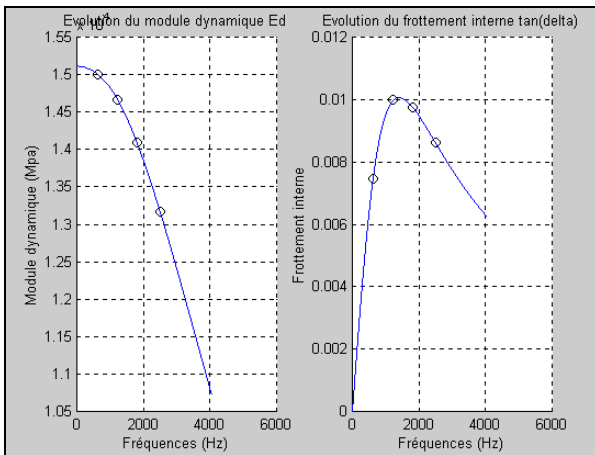


Figure 125 : Evolution du module dynamique E_d et du frottement interne $\tan(\delta)$ en fonction de la fréquence.

La resynthèse des vibrations est ici faite en reprenant l'exemple du paragraphe 8.2.4.1. La première étape consiste à calculer le module complexe E'' par l'intermédiaire du module dynamique (Eq. 167) et du frottement interne (Eq. 146). Dans le cas présent, aucune simplification n'est nécessaire, $\tan(\delta)$ pourrait être important. La Figure 125 montre les évolutions de ces grandeurs physiques en fonction de la fréquence, les valeurs correspondant aux premières fréquences propres de vibration sont marquées par un cercle noir. La Figure 126 montre l'évolution du décrétement logarithmique déduite du calcul du frottement interne (§ 7.8.1). Ces figures montrent d'une part que le module dynamique décroît lorsque la fréquence augmente, on retrouve dans cet exemple la tendance mise en évidence au Tableau 36, et d'autre part que la transition du modèle viscoélastique se produit entre la deuxième et la troisième fréquence propre de vibration (Figure 126).

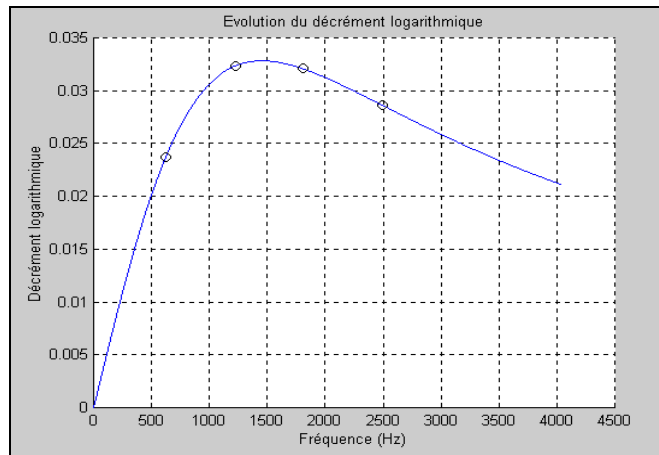


Figure 126 : Evolution du décrétement logarithmique en fonction de la fréquence.

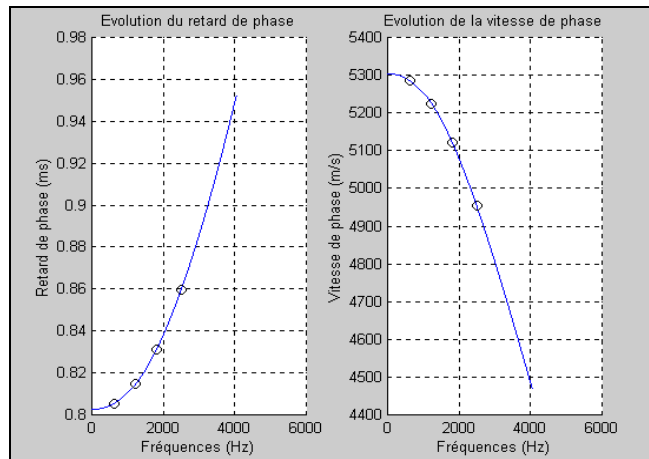


Figure 127 : Evolution du retard de phase et de la vitesse de phase en fonction de la fréquence.

Les valeurs du module dynamique, associées aux fréquences propres de vibration, issues de la resynthèse sont données au Tableau 53 à la deuxième ligne. La première ligne du tableau donne les valeurs des modules apparents directement calculées à partir de l'expérience en utilisant la formule classique reliant module d'élasticité et fréquence de vibrations longitudinales :

$$\text{Eq. 258 } E_L = 4L^2 \rho \frac{f_n^2}{n^2}$$

	f_1	f_2	f_3	f_4
Module apparent (Mpa)	14992	14686	14074	15076
Module apparent synthèse (Mpa)	15009	14658	14086	13176
Ecart relatif absolu (%)	0,1	0,2	0,1	12,6

Tableau 53 : Valeurs et écarts entre module d'élasticité longitudinal apparent et module d'élasticité calculé à partir du modèle théorique.

Le Tableau 53 montre une bonne cohérence, avec des écarts inférieurs à 1%, entre valeurs issues directement de l'expérience et valeurs recalculées en utilisant le modèle théorique. L'écart de 12,6% observé pour le mode 4 provient du fait que la fréquence identifiée comme étant la quatrième fréquence de vibrations longitudinales ne l'est pas. Il y a en effet deux modes superposés à ce niveau (Figure 120).

La deuxième remarque faite à la Figure 126 concernant la transition du modèle de Zener conduit à penser que la modélisation théorique des vibrations longitudinales, et la resynthèse de ces vibrations, n'est valable dans ce cas que pour les trois premières fréquences propres. Au-delà de cette limite de validité, la viscosité du matériau sera sous évaluée d'autant plus que la fréquence considérée sera grande.

La deuxième étape de la resynthèse consiste à calculer le nombre d'onde k'' à partir du module complexe E'' et de la relation de dispersion (Eq. 160). Connaissant la partie réelle k du nombre d'onde, il est possible de calculer le retard de phase, la vitesse de phase, et le retard de groupe, la vitesse de groupe caractérisant respectivement la propagation individuelle de chaque onde et la propagation de l'ensemble des paquets d'ondes envoyé dans le matériau lors du choc (§ 7.9). On rappelle les notions élémentaires à connaître :

$$\text{Eq. 259} \left\{ \begin{array}{l} \text{Retard de phase } D = \frac{kL}{\omega} \\ \text{Vitesse de phase } V_L = \frac{L}{D} \end{array} \right. , \text{ avec } D \text{ le temps de propagation de l'onde de pulsation } \omega.$$

$$\text{Eq. 260} \left\{ \begin{array}{l} \text{Retard de groupe } D_G = L \frac{dk}{d\omega} \\ \text{Vitesse de groupe } V_{L-G} = \frac{L}{D_G} \end{array} \right.$$

Les ondes se propageant dans le matériau sont d'autant plus freinées (vitesse de phase, Figure 127) que la pulsation propre est grande. Cet exemple est une illustration du phénomène de dispersion des ondes longitudinales libre - libre dans le matériau.

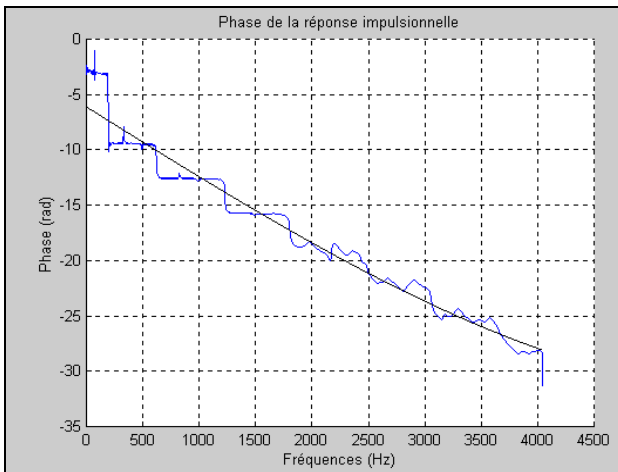


Figure 128 : Ajustement de la phase de la fonction de transfert par un polynôme d'ordre deux.

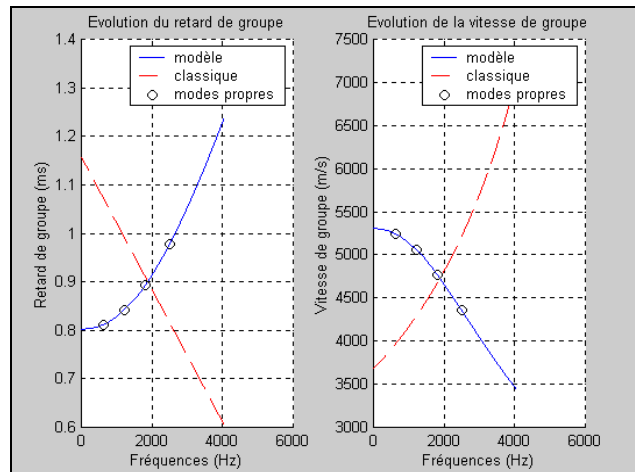


Figure 129 : Evolution du retard de groupe et de la vitesse de groupe en fonction de la fréquence, ordre deux pour la méthode classique.

La définition généralement donnée pour définir le retard de groupe est formulée à l'équation (Eq. 261) (Auger, et al., 1996). Cette définition est analogue à l'équation (Eq. 260) mais indique une manière directe de calculer le retard D_G .

$$\text{Eq. 261} \quad D_G = -\frac{1}{2\pi} \frac{d \arg(H)}{df}, \text{ où } H \text{ correspond à la fonction de transfert du système étudié.}$$

La méthode la plus directe pour calculer le retard de groupe est de dériver la phase de la fonction de transfert par rapport à la fréquence (Eq. 261). On considère l'ensemble des points de phase ; un ajustement par un polynôme d'ordre deux est réalisé (Figure 128) de manière à pouvoir observer de la dispersion (Figure 129). La Figure 129 représente les évolutions du retard de groupe et de la vitesse de groupe calculées en utilisant le modèle théorique développé (Eq. 260) – courbe bleue, avec les fréquences propres marquées par un cercle noir – et en utilisant la méthode classique (Eq. 261) sur un ajustement d'ordre deux des points de phase – courbe en pointillé.

Les deux évolutions obtenues à la Figure 129 sont totalement différentes et montrent des comportements physiques opposés. Si on considère le résultat que donne l'application du modèle théorique, on déduit que les paquets d'ondes, constitutifs des pics de vibrations longitudinales centrés sur chaque fréquence propre, formant le train d'onde envoyé, sont d'autant plus freinées dans le matériau (courbe bleue, Figure 129) que la pulsation propre est grande. En considérant une application directe de l'équation (Eq. 261), les paquets d'ondes se déplacent alors d'autant plus vite que la fréquence augmente (courbe rouge pointillée, Figure 129).

Les remarques et analyses du Tableau 36 indiquent que le résultat de l'application directe est erroné car contraire à l'observation expérimentale. L'effet de la dispersion sur la vitesse de propagation des paquets d'onde se traduit par un ralentissement de ces derniers d'autant plus important que la pulsation est grande.

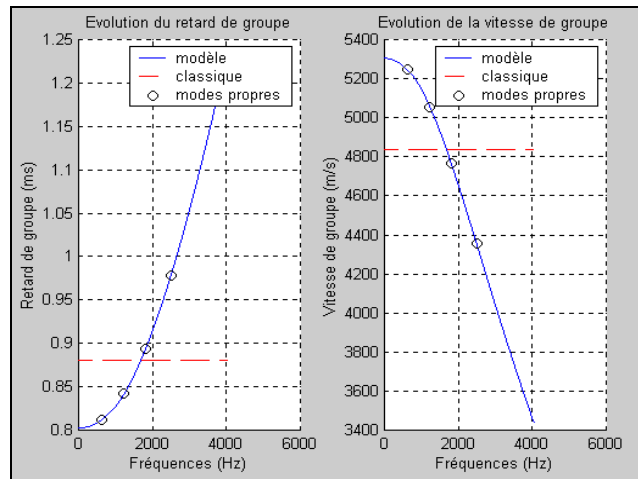


Figure 130 : Evolution du retard de groupe et de la vitesse de groupe en fonction de la fréquence, ordre un pour la méthode classique.

Cet exemple montre les problèmes posés par la détermination directe du retard de groupe : (a) les vibrations n'étant pas le résultat d'un seul mouvement mais la superposition de mouvements couplés, les seuls points de phase valables (peu entachés d'erreur) pour une application directe sont les points de fréquences propres au nombre de trois dans le cas présent, (b) l'accéléromètre utilisé ne permet une analyse de phase que dans la gamme [4 Hz, 2500 Hz], (c) le phénomène de dispersion étant très peu marqué, l'ensemble de la courbe bleue à la Figure 128 est quasiment linéaire, le coefficient d'ordre deux sera donc fortement entaché d'erreur. La Figure 130 montre le résultat obtenu avec un lissage de l'ensemble des points de phase à l'ordre un (courbe rouge pointillée). Sur cette figure la valeur constante de la vitesse est de l'ordre de 4837 m/s, rappelons qu'en lissant la phase par une droite on se ramène au cas où le matériau est considéré comme purement élastique avec $k'' = k = \omega \sqrt{\rho/E}$. Le module d'élasticité longitudinal déduit est alors de 12567 Mpa au lieu de 14992 Mpa déduit avec les mêmes hypothèses de l'analyse spectrale (Tableau 53), soit une erreur relative de 16%. L'ensemble de ces remarques montre que malgré sa simplicité, tenter de faire une analyse directe de la phase peut être source d'erreur sur la détermination du module d'élasticité, mais aussi sur l'évaluation du phénomène de dispersion dans le matériau.

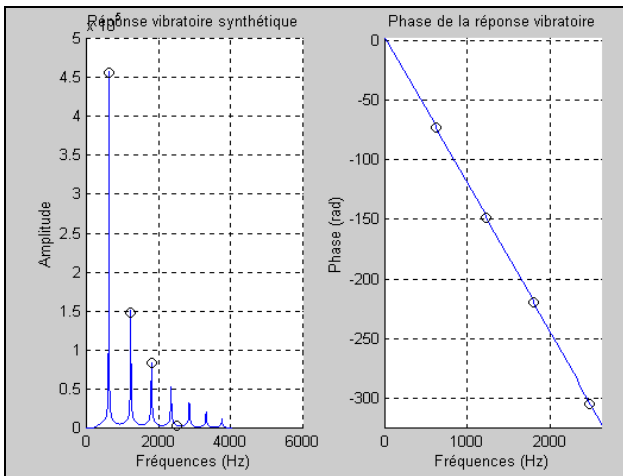


Figure 131 : Module et phase de la transformée de Fourier de la réponse vibratoire synthétique.

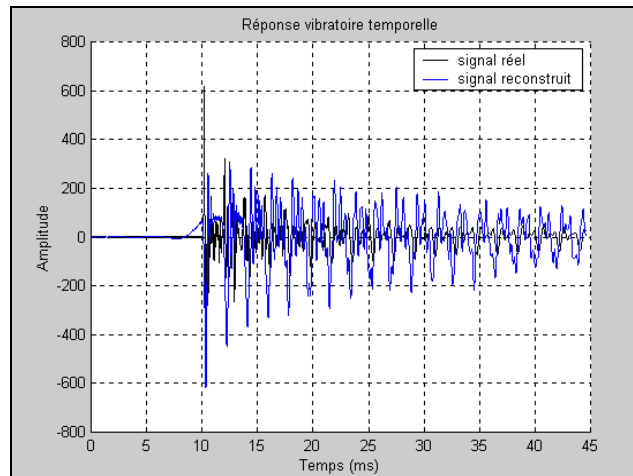


Figure 132 : Réponse vibratoire de la poutre à un choc dans son sens longitudinal.

La troisième et dernière étape de resynthèse consiste à calculer la fonction de transfert théorique du système, en vibrations longitudinales libre – libre, à partir de la longueur de la poutre et du nombre d'onde k'' (Eq. 179). La transformée de Fourier de l'excitation d'entrée étant connue, car mesurée avec le marteau – force (§ 8.1.3), il suffit de faire le produit de la fonction de transfert par la transformée de Fourier de l'entrée pour obtenir le spectre de la réponse vibratoire de la poutre (propriété des systèmes linéaires invariants dans le temps et théorème de Plancharel, Annexe 1). La Figure 131 montre le module et la phase de la transformée de Fourier de la réponse vibratoire ainsi obtenue dans la gamme de fréquences étudiée ; les points correspondant aux fréquences propres expérimentales sont marqués par un cercle noir.

	$f1$	$f2$	$f3$	$f4$
Expérimentales (Hz)	621	1228	1804	2489
Calculées (Hz)	621	1227	1805	2327
Ecart relatif absolu (%)	<1	<1	<1	6,5

Tableau 54 : Valeurs et écarts entre les quatre premières fréquences de vibrations expérimentales et les fréquences recalculées à partir du modèle théorique.

A partir du spectre de la réponse vibratoire synthétique obtenu (Figure 131), les fréquences propres synthétiques sont déterminées puis comparées aux fréquences déduites expérimentalement du spectre réel (Tableau 54). Ce tableau montre des écarts inférieurs à 1% entre fréquences expérimentales et fréquences recalculées, sauf pour le rang 4 où une erreur d'identification sur le spectre réel s'est produite (voir remarques, Tableau 53).

La Figure 132 montre une grande différence entre le signal temporel réellement enregistré et le signal temporel synthétique. En écoutant le signal temporel synthétique, il semble que ce dernier soit plus long dans le temps que le signal réel, par contre les sons entendus sont très similaires entre signal de synthèse et signal réel. Ces deux impressions subjectives sont la conséquence d'une part du très faible écart entre fréquences propres de synthèse et fréquences propres déduites directement de l'expérience (Tableau 54) qui explique la similarité des sons perçus, et d'autre part du modèle viscoélastique, dont la transition se produit entre la deuxième et la troisième fréquence propre, qui sous estime l'effet de la viscosité du matériau pour des fréquences propres de rang supérieur à trois. Cette sous estimation de l'effet de viscosité a une conséquence directe sur la "durée de vie" du signal resynthétisé.

8.2.5 Essais de vibrations transversales

8.2.5.1 Etude des amortissements temporels

Les amortissements temporels, déterminés à partir des fréquences propres de vibrations transversales "à plat" et "sur champ", mais également à partir des fréquences propres de vibrations longitudinales, sont représentés graphiquement en fonction des fréquences associées (Figure 133). Le capteur utilisé est ici l'accéléromètre. La figure ci-contre indique aussi par ronds de couleur les ajustements expérimentaux réalisés à partir de la formule théorique (Eq. 232). On rappelle ici la formulation de l'amortissement :

$$\text{Eq. 262 } \alpha_p = \frac{(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)\omega^2}{2(1 + \tau_\sigma\tau_\varepsilon\omega^2)}$$

Dans le cas des vibrations longitudinales, les valeurs des temps caractéristiques du modèle sont celles trouvées au paragraphe 8.2.4.1. La Figure 133 illustre la difficulté d'effectuer la détermination des temps caractéristiques du modèle à partir de seulement trois points expérimentaux. La pertinence des valeurs de temps obtenues est directement liée à l'erreur associée à l'extraction des amortissements temporels. Il est donc nécessaire d'obtenir une estimation la moins biaisée possible de ces trois points d'ajustement (voir synthèse du Tableau 52).

Le modèle d'ajustement utilisé (Eq. 262), concernant les vibrations longitudinales, conduit à des valeurs de temps $\tau_\sigma=0,172$ ms et $\tau_\varepsilon=0,167$ ms. Le coefficient de détermination associé est de $R^2=0,97$ sur 380 points (Figure 133).

Pour les vibrations transversales, le nombre de modes propres pris en compte est de 18, contre 3 pour les vibrations longitudinales. Dans ce cas, "le poids" de chaque point dans l'ajustement est moins important que dans le cas des vibrations longitudinales. On remarque néanmoins que les amortissements temporels en vibrations transversales sont plus forts que ceux obtenus en longitudinal (Figure 133). Ce phénomène s'explique par l'influence de la viscosité du matériau dans le cisaillement qui n'est pas négligeable en configuration "sur champ", il faudrait alors tenir compte dans

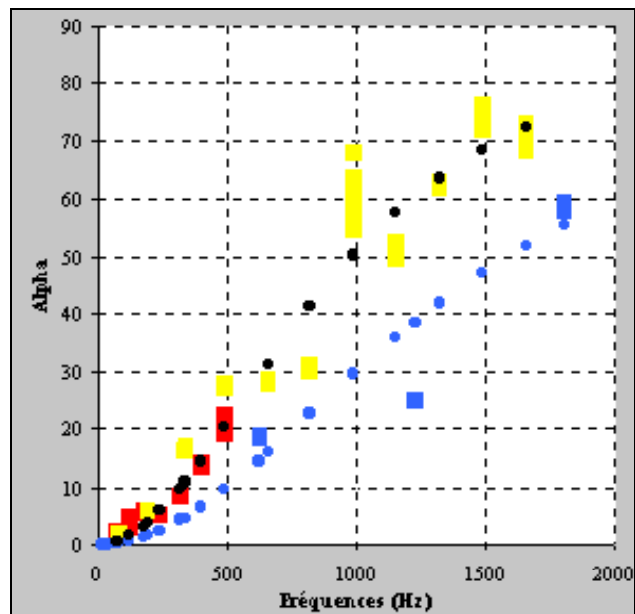


Figure 133 : Amortissements temporels déterminés avec un accéléromètre en vibrations transversales "à plat" (■), "sur champ" (■) et en vibrations longitudinales (■). Ajustement en vibrations transversales sur 380 points (●), en vibrations longitudinales sur 60 points (●).

la modélisation théorique du paragraphe 7.7.3, modèle de Timoshenko, d'un comportement viscoélastique au niveau du cisaillement. Cette remarque implique qu'en toute rigueur, il aurait fallu faire deux ajustements en vibrations transversales correspondant aux configurations "à plat" et sur "sur champ". Dans le cas présent, faire un seul ajustement est une manière détournée de prendre en compte et de reporter la viscosité associée au cisaillement sur celle associée au déplacement de matière dans l'axe longitudinal du matériau (Eq. 262).

8.2.5.2 *Calcul du module d'élasticité*

La connaissance des trois premières fréquences propres de vibrations transversales "à plat" et "sur champ" permet d'évaluer la valeur du module d'élasticité longitudinale en utilisant le modèle de Bernoulli (1748) et de Timoshenko (1921) (Tableau 55). Sur le tableau ci-contre, on observe un écart très faible, inférieur à 1%, entre les deux valeurs de module déterminées en configuration "à plat" qui s'explique par le fait que le modèle de Timoshenko tend vers celui de Bernoulli lorsque l'élanement de la poutre devient très important, pratiquement pour L/h supérieur à 25 (dans le cas présent, il est de 95). Pour un élanement de 16, l'écart entre les deux modules associés aux modèles utilisés est significatif. En vibrations "sur champ", on retiendra donc la valeur la plus pertinente donnée par le modèle de Timoshenko (Tableau 55).

Vibrations	Elancement L/h	Module E _L (Mpa)	R ²
Transversales "à plat"			
Modèle de Bernoulli	95	15924	X
Modèle de Timoshenko	95	15932	0,82
Transversales "sur champ"			
Modèle de Bernoulli	16	13236	X
Modèle de Timoshenko	16	14376	1,00
Longitudinales	X	14992	X

Tableau 55 : Module d'élasticité longitudinal calculé en vibrations transversales et longitudinales (A partir des moyennes des trois premières fréquences propres sur 20 essais expérimentaux par configuration).

Compte tenu des intervalles de fréquences considérés, de 14 Hz à 71 Hz pour une configuration "à plat", et de 76 Hz à 332 Hz pour une configuration "sur champ", ainsi que des coefficients de détermination obtenus par l'utilisation de la solution de Bordonné (1989) au modèle de Timoshenko, la valeur du module d'élasticité longitudinal à retenir est celle déterminée par l'essai "sur champ" de 14376 Mpa. La première fréquence propre de 14 Hz en configuration "à plat" est en effet trop proche du seuil de la gamme d'utilisation de l'accéléromètre pour donner un point du plan de régression faiblement entaché d'erreur.

L'équation (Eq. 219) du paragraphe 7.7.5 permet de quantifier l'effet de la viscosité sur la détermination du module d'élasticité en vibrations transversales, configuration "à plat", avec le modèle de Bernoulli. La première fréquence propre, ainsi que les temps caractéristiques déduits de l'ajustement de la Figure 133 pour les vibrations transversales sont utilisés dans le calcul :

$$\text{Eq. 263} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta E_L}{E_L} = 1 - \sqrt[2]{\frac{1 + 4\pi^2 \tau_\varepsilon^2 f_{Trans_n}^2}{1 + 4\pi^2 \tau_\sigma^2 f_{Trans_n}^2}} \\ f_1 = 14 \text{ Hz} \\ \tau_\sigma = 0,172 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \tau_\varepsilon = 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\Delta E_L}{E_L} = 7 \cdot 10^{-6}$$

L'écart relatif obtenu à l'équation (Eq. 263) montre que l'effet de la viscosité sur la détermination du module d'élasticité est négligeable en configuration "à plat" car très inférieur à l'incertitude expérimentale de 12% sur le calcul du module (Eq. 264). L'équation (Eq. 219) indique de plus que la surestimation à laquelle conduit l'utilisation du modèle de Bernoulli (Eq. 217) pour déterminer le module d'élasticité tend vers une valeur finie, de l'ordre de 3%, lorsque la fréquence tend vers l'infini. Le modèle viscoélastique utilisé ayant été ajusté dans la gamme [14 Hz ; 1656 Hz], il est préférable de considérer l'écart de 2,4% associé à la borne supérieure de l'intervalle considéré plutôt que la valeur limite de 3% précédemment évoquée. L'erreur maximale de 2,4% sur la détermination du module d'élasticité, causée par la viscosité du matériau, est quasiment égale à l'incertitude expérimentale de 2,2% à cette fréquence (en supposant applicable le modèle de Bernoulli). Même dans ce cas limite, l'effet de la viscosité sur le calcul du module d'élasticité en vibrations transversales serait donc très difficile à mettre en évidence expérimentalement.

➤ Calcul de l'incertitude expérimentale sur le module d'élasticité longitudinal en utilisant le modèle de Bernoulli :

$$\text{Eq. 264} \left\{ \begin{array}{l} \frac{|\Delta E_L|}{E_L} = \frac{|\Delta m|}{m} + 3 \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta e|}{e} + 3 \frac{|\Delta L|}{L} + 2 \frac{|\Delta f_1|}{f_1} \\ \frac{|\Delta m|}{m} = \frac{0,1}{27,7} = 0,4\%; \quad \frac{|\Delta h|}{h} = \frac{0,1}{45,1} = 0,2\%; \quad \frac{|\Delta e|}{e} = \frac{0,1}{26,9} = 0,4\% \Rightarrow \frac{|\Delta E_L|}{E_L} = 12\% \\ \frac{|\Delta L|}{L} = \frac{0,01}{4,26} = 0,2\%; \quad \frac{|\Delta f_1|}{f_1} = \frac{0,65}{14} = 4,6\% \end{array} \right.$$

L'ensemble des remarques relatives à l'effet de la viscosité sur la détermination du module d'élasticité en vibrations transversales conduit à penser que négliger cet effet dans le calcul du module n'apporte pas un biais important sur la valeur obtenue. La valeur du module d'élasticité longitudinal retenue, $E_{Trans}=14376$ Mpa, déterminée avec le modèle de Timoshenko en configuration "sur champ" pour des fréquences de 76 Hz, 189 Hz et 332 Hz, est entachée d'une erreur négligeable (<1%) due à la viscosité. Dans ce cas, il est possible d'identifier module dynamique E_{Trans} et module relaxé E_{R_X} (Eq. 219), c'est à dire identifier module dynamique et module statique.

Il est important de garder à l'esprit que l'effet de la viscosité augmente avec la fréquence considérée. D'une manière générale, la valeur du module d'élasticité déterminée par un essai vibratoire est plus élevée que celle obtenue par un essai de flexion statique (Kollmann et Côté, 1968 ; Haines, et al., 1996). La relation d'ordre entre valeurs de module est la suivante : Valeur statique ≤ Valeur dynamique en vibrations transversales ≤ Valeur dynamique en vibrations longitudinales. Identifier le module dynamique en vibrations transversales et module statique n'est donc plus possible lorsque les fréquences de vibrations deviennent importantes (c'est notamment le cas de petites éprouvettes sans défaut). Afin d'illustrer ce propos, considérons l'exemple fourni par des résultats expérimentaux ultérieurs (Brancheriau, 1997) visant à comparer les valeurs des modules d'élasticité obtenues par des essais dynamiques (vibrations transversales, solution de Bordonné, 1989) et par des essais statiques de flexion 4 points (Figure 134).

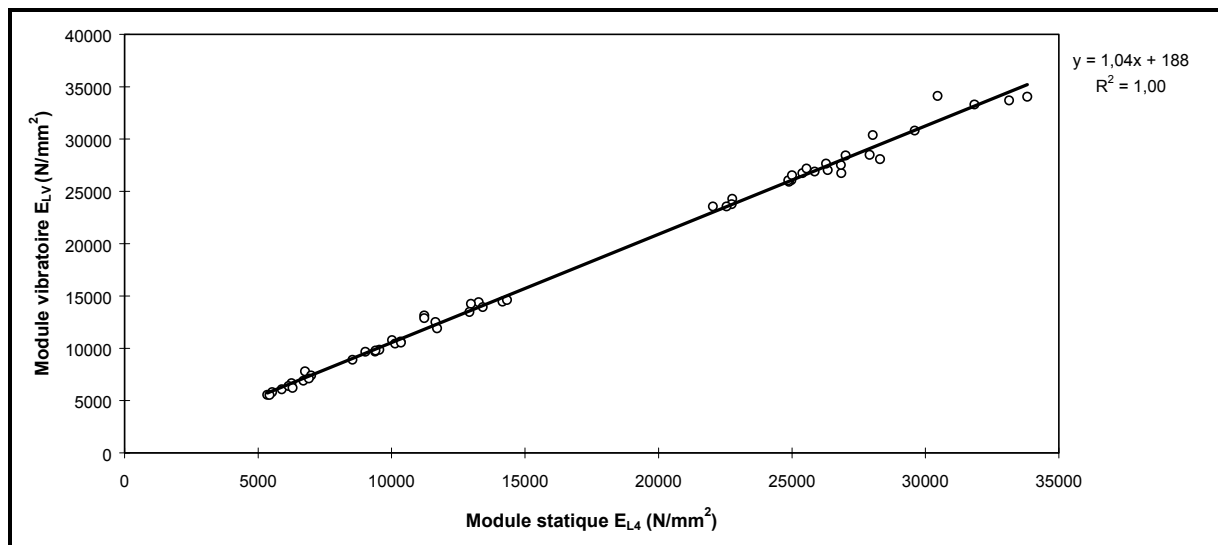


Figure 134 : Comparaison entre essais de flexion statique quatre points et essais vibratoires sur six essences de bois tropicaux (0,35 à 1,20 g/cm³), mesure du module d'élasticité longitudinal (N=54). (Brancheriau, 1997)

L'ordonnée à l'origine (b=188) de l'ajustement linéaire est statistiquement négligeable au seuil de 1% (Figure 134). Le coefficient directeur (a=1,04) indique par contre un écart de 4% entre essais de vibrations transversales et essais de flexion statique. On observe donc un écart relativement faible mais non négligeable de 4% sur des petites éprouvettes sans défaut pour des fréquences de l'ordre de 750 Hz et 2000 Hz (Brancheriau, 1997).

Le Tableau 55 indique également la valeur du module d'élasticité longitudinal déterminée à partir de la première fréquence propre, $f_1=621$ Hz (Eq. 214). L'écart relatif entre module obtenu en vibrations transversales (modèle de Timoshenko) et en vibrations longitudinales est égal à $(E_{Longi}-E_{Trans})/E_{Trans}=4,3\%$. Comme E_{Trans} est assimilable au module relaxé, l'écart de 4,3% trouvé expérimentalement permet d'évaluer le paramètre Poisson noté 'a' (Eq. 169 et Figure 101). Au paragraphe 8.2.4.1, la valeur expérimentale du produit (aE_{RX}), déterminée à partir de la modélisation théorique, est de 15112 Mpa, d'où $a=1,05$. Le paramètre Poisson ainsi déterminé correspond à celui calculé en utilisant les ordres de grandeur des coefficients de Poisson au paragraphe 7.7.2 dont la valeur est de $a=1,035$.

8.2.5.3 *Pertinence de l'utilisation d'un modèle viscoélastique linéaire généralisé*

Le modèle viscoélastique de Zener, choisi pour le développement théorique § 7.6.2, n'est en général pas celui "conseillé" dans le cas du matériau bois. Le modèle de Burgers est cité, et utilisé, comme étant le modèle mécanique le plus simple adapté au bois (Kollmann et Côté, 1968 ; Tong et Ödeen, 1989 ; Felix, 1990). Ce modèle (Figure 135) a pour équation différentielle constitutive :

$$\text{Eq. 265} \quad \left(1 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \sigma(t) = \left(q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varepsilon(t)$$

Il possède un temps caractéristique de fluage et deux temps caractéristiques de relaxation. Les relations entre coefficients de l'équation (Eq. 265) et coefficients de la Figure 135 sont données à l'équation suivante :

$$\text{Eq. 266} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{E_1 \eta_1 + E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 E_2} & p_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \\ q_1 = 1 & q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \end{cases}$$

Afin de conserver une écriture simple, les équations suivantes sont écrites avec les p_i et q_i de l'équation (Eq. 265). Le module complexe s'écrit alors :

$$\text{Eq. 267} \quad E'' = \frac{-q_2 \omega^2 + i q_1 \omega}{1 - p_2 \omega^2 + i p_1 \omega}$$

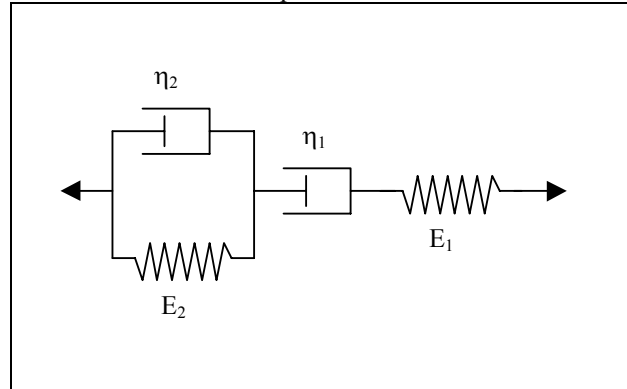


Figure 135 : Solide de Burgers.

L'équation (Eq. 267) permet de trouver les expressions du module dynamique E_d et du frottement interne $\tan \delta$:

$$\text{Eq. 268} \quad E_d = \omega \sqrt{\frac{q_1^2 + q_2^2 \omega^2}{1 + \omega^2 (p_1^2 - 2p_2 + p_2^2 \omega^2)}}, \text{ et } \tan \delta = \frac{q_1 + (p_1 q_2 - q_1 p_2) \omega^2}{(q_1 p_1 - q_2 + q_2 p_2 \omega^2) \omega}$$

Les expressions trouvées ci-dessus sont plus difficiles à manipuler que celles obtenues pour le modèle de Zener (Eq. 146). Les évolutions du module dynamique et du frottement interne, issues du modèle de Burgers, sont représentées à la Figure 136 en fonction de la pulsation. Lorsque la pulsation est nulle, le module dynamique ne tend pas vers une valeur de module relaxé mais vers zéro. Le modèle de Burgers ne possède donc pas d'élasticité instantanée. Par contre, le frottement interne tend vers l'infini lorsque la pulsation devient très petite (Figure 136).

Ces remarques montrent que ce modèle n'est pas applicable pour des faibles pulsations. Cependant, en ne considérant que des fortes pulsations (à partir de la pulsation ω_0 sur la Figure 136), on observe que le module dynamique n'évolue quasiment plus et que le frottement interne décroît, ce qui est contraire aux constatations expérimentales. L'amortissement temporel, directement relié au frottement interne (Eq. 232), est en effet une fonction croissante de la pulsation (Figure 88, Figure 105, Figure 106). Bien que régulièrement cité, la présence d'une singularité lorsque la pulsation est nulle (Figure 136) conduit à penser que le modèle de Burgers ne devrait pas être appliqué pour décrire le comportement en vibrations, ou en sollicitations cycliques, d'un matériau viscoélastique comme le bois.

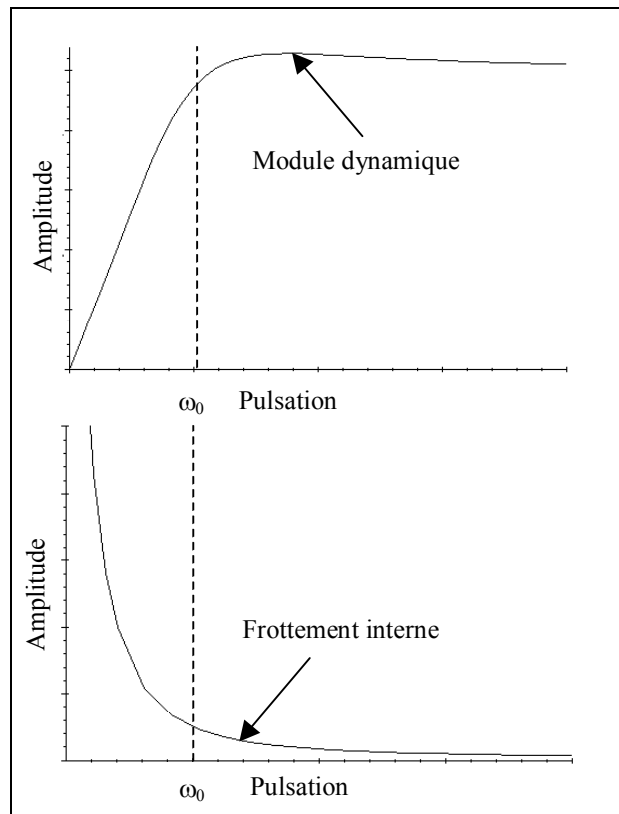


Figure 136 : Evolutions du module dynamique et du frottement interne en fonction de la pulsation, modèle de Burgers.

Afin de proposer un modèle viscoélastique linéaire généralisé, et pour éviter la présence de singularités lorsque la pulsation tend vers zéro ou vers l'infini, nous supposons que pour chaque temps caractéristique de fluage, il existe un temps caractéristique de relaxation. Le modèle généralisé envisagé dans ce paragraphe n'est pas issu de considérations structurales sur le matériau bois (un récapitulatif des modèles anatomiques pour le comportement élastique et viscoélastique du bois est notamment présenté par Tong et Ödeen, 1989), il n'est donc pas possible de présager du nombre de temps caractéristiques nécessaire.

L'équation différentielle constitutive peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Eq. 269} \quad \left[\sum_{a=0}^n p_a \frac{\partial^a}{\partial t^a} \right] \sigma(t) = \left[\sum_{b=0}^n q_b \frac{\partial^b}{\partial t^b} \right] \varepsilon(t)$$

En utilisant les écritures de contrainte et de déformation données à l'équation (Eq.20), on obtient l'expression du module complexe :

$$\text{Eq. 270} \quad E'' = \frac{\sum_{b=0}^n q_b (i\omega)^b}{\sum_{a=0}^n p_a (i\omega)^a}$$

Calculer le module complexe du modèle généralisé revient à diviser deux polynômes en $z=i\omega$ de même degré. En notant B_b les racines du polynôme au dénominateur et A_a les racines du polynôme au numérateur, le module complexe s'écrit alors :

$$\text{Eq. 271} \quad E'' = \frac{q_n \prod_{b=1}^n B_b \left(1 - \frac{z}{B_b}\right)}{p_n \prod_{a=1}^n A_a \left(1 - \frac{z}{A_a}\right)}$$

$$\text{Eq. 272} \quad E'' = E_R \frac{\prod_{b=1}^n (1 + \tau_{\sigma b} z)}{\prod_{a=1}^n (1 + \tau_{\varepsilon a} z)}$$

$$\text{avec } E_R = \frac{q_n \prod_{b=1}^n B_b}{p_n \prod_{a=1}^n A_a} \text{ et } \tau_{\sigma b} = -\frac{1}{B_b}, \tau_{\varepsilon a} = -\frac{1}{A_a}$$

Le paramètre E_R correspond au module relaxé, et les $(\tau_{\sigma}, \tau_{\varepsilon})_a$ correspondent à l'ensemble des couples des temps caractéristiques de fluage et de relaxation du modèle généralisé. L'élément de base constitutif du modèle généralisé développé ici est en fait le solide de Zener. On déduit de l'équation (Eq. 272) le module dynamique E_d et le frottement interne $\tan \delta$:

$$\text{Eq. 273} \quad E'' = \prod_{a=1}^n E_a'' \Rightarrow \begin{cases} E_d = \prod_{a=1}^n E_{da} = E_R \prod_{a=1}^n \sqrt{\frac{1 + \tau_{\sigma a} \omega^2}{1 + \tau_{\varepsilon a} \omega^2}} \\ \tan \delta = \tan \left(\sum_{a=1}^n \arctan \left(\frac{(\tau_{\sigma a} - \tau_{\varepsilon a}) \omega}{1 + \tau_{\sigma a} \tau_{\varepsilon a} \omega^2} \right) \right) \end{cases}$$

Les évolutions du module dynamique et du frottement interne sont représentées à la Figure 137 en fonction de la pulsation pour $n=3$ (Eq. 273), ce qui correspond à trois transitions. Sur cette figure, les trois transitions sont identifiées

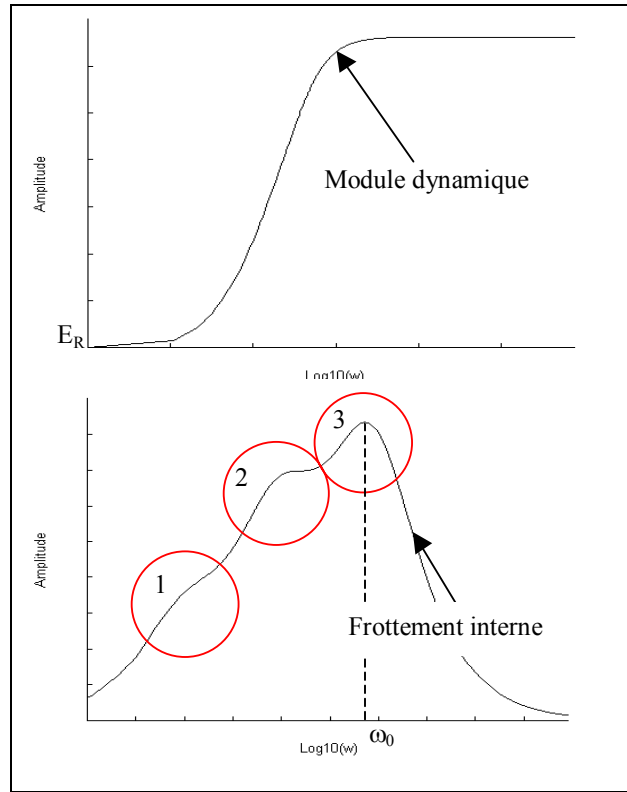


Figure 137 : Evolutions du module dynamique et du frottement interne en fonction de la pulsation, modèle généralisé.

par des cercles rouges, et sont nettement visibles au niveau du frottement interne. Dans une gamme de fréquence limitée par la pulsation ω_0 sur la Figure 137, on observe que le frottement interne est une fonction croissante de la pulsation. Cette fonction est marquée par des échelonnements dus aux multiples transitions. Le passage d'une transition à l'autre est par contre très peu marqué en ce qui concerne l'évolution du module dynamique (Figure 137).

A partir des amortissements temporels expérimentaux obtenus en vibrations transversales "à plat" et "sur champ" avec un accéléromètre, les temps caractéristiques du modèle généralisés (Eq. 273) ont été déterminés pour des transitions allant de 1 à 10. L'ajustement du modèle mono transition est représenté à la Figure 133, le couple des temps caractéristiques trouvés étant de $\tau_\sigma=0,172$ ms et de $\tau_\varepsilon=0,167$ ms (§ 8.2.5.1). La méthode mathématique d'optimisation utilisée est la méthode du simplex modifiée, utilisant la technique de Nelder et Mead (Delacroix et Porte, 1997 ; Ciarlet, 1998). Le nombre maximum d'itérations est fixé à 1000, le seuil de stabilité de la solution est fixé à 1%. Dans ces conditions, la méthode converge vers une solution pour une et pour trois transitions. Cependant la solution obtenue pour un modèle à trois transitions n'est pas admissible physiquement, car le temps de fluage étant inférieur au temps de relaxation au niveau de la transition deux, le frottement interne décroît lorsque la fréquence augmente pour cette transition. L'analyse des résidus montre de plus que statistiquement le modèle à trois transitions n'apporte pas d'explication supplémentaire sur la dispersion des valeurs d'amortissement. L'ensemble de ces remarques montre que, dans le cas présent, la pertinence de l'utilisation d'un modèle généralisé ne peut pas être démontrée. L'utilisation d'un tel modèle pourrait être envisagée sur une gamme de fréquence plus importante que celle considérée dans le cas présent, ainsi que sur un nombre important d'amortissements temporels (amortissements mesurés tous les 10 Hz par exemple).

BILAN DU CHAPITRE III

Ce chapitre a permis le développement de modèles utilisant à la fois la synthèse musicale et la mécanique des matériaux dans le cadre de poutres en bois libre – libre vibrant longitudinalement, ou transversalement, en considérant le matériau comme viscoélastique. Le modèle de comportement viscoélastique du bois retenu est un modèle linéaire : le solide de Zener. L'ensemble des phénomènes, le retard, la dispersion, et la dispersion, qui transforment les ondes au cours de leur propagation ont pu être pris en compte.

En vibrations longitudinales, la viscosité, source du phénomène de dissipation, provoque également la dispersion des ondes propagatives. Le phénomène de dispersion est également causé par l'influence des mouvements de matière perpendiculairement à la direction de propagation (effet Poisson). La viscosité du matériau et les mouvements de matière perpendiculairement au sens de vibrations ont des effets antagonistes sur le phénomène de dispersion. La viscosité a tendance à augmenter la vitesse de propagation, alors que l'effet Poisson a tendance à ralentir la propagation des ondes lorsque la fréquence considérée augmente.

L'existence du phénomène de dispersion en vibrations longitudinales biaise la valeur du module d'élasticité dynamique par rapport au module d'élasticité statique. On observe que la valeur du module dynamique décroît en fonction du rang considéré. Le biais moyen théorique sur le module d'élasticité est de 4% entre un module statique et un module dynamique calculé avec la première fréquence propre de vibrations longitudinales (cas d'une faible viscosité). En vibrations transversales, le modèle théorique viscoélastique développé correspond aux hypothèses de Bernoulli (1748) (l'inertie de rotation des sections et l'influence du cisaillement ont été négligées). Par rapport au module statique, la viscosité implique une valeur du module dynamique obtenue en vibrations transversales supérieure à la valeur statique, et ce d'autant plus que la fréquence considérée est grande.

D'une manière générale, la valeur du module d'élasticité déterminée par un essai vibratoire est plus élevée que celle obtenue par un essai de flexion statique (Kollmann et Côté, 1968 ; Haines, et al., 1996). La relation d'ordre entre valeurs de module est la suivante : Valeur statique \leq Valeur dynamique en vibrations transversales \leq Valeur dynamique en vibrations longitudinales. Identifier module dynamique en vibrations transversales et module statique n'est donc plus possible lorsque les fréquences de vibrations deviennent importantes (c'est notamment le cas de petites éprouvettes sans défaut en vibrations longitudinales ou transversales).

L'emploi des modèles guide onde, en faisant l'hypothèse d'un matériau purement élastique, permet de retrouver les expressions classiques des fréquences de vibrations obtenues en mécanique (Bordonné, 1989). L'hypothèse d'un matériau viscoélastique a permis de proposer une nouvelle expression des fréquences propres ainsi qu'une formulation de la fonction de transfert du système linéaire poutre en vibrations longitudinales ou transversales. La fonction de transfert permet une description complète des transformations subies par les ondes se propageant dans le matériau et donc une complète caractérisation de ces ondes dans une certaine gamme de fréquences. La synthèse des vibrations sonores est rendue possible.

Une nouvelle solution, alternative à la solution de Bordonné (1989), au modèle de Timoshenko (1921) a également été proposée. Cette solution, validée expérimentalement, a néanmoins un caractère fortement non linéaire et ne peut être inverser simplement afin de trouver les valeurs du module d'élasticité et du module de cisaillement. Identifier les paramètres élastiques de cette solution devrait être possible, à partir des trois premières fréquences propres, en utilisant les techniques d'optimisation classiques comme par exemple la méthode du simplex (Delacroix et Porte, 1997). La nouvelle solution n'étant pas issue d'un développement limité au voisinage de la solution de Bernoulli, il serait nécessaire de préciser son domaine de validité de façon expérimentale, son domaine de validité devrait en effet être plus large que les solutions classiques (Bordonné, 1989).

Les modèles théoriques développés, utilisant le solide de Zener, ont permis d'écrire une nouvelle expression du décrement logarithmique. A partir d'un seul essai vibratoire, l'étude expérimentale des amortissements temporels (relié au frottement interne) associés à chaque pic de vibration observable est possible. La connaissance des trois premières fréquences propres de vibration et des amortissement temporels associés permettent de calculer les grandeurs viscoélastiques du modèle théorique développé en vibrations longitudinales libre - libre. L'expérience consiste en un essai classique de vibrations longitudinales d'une poutre de bois suffisamment longue pour pouvoir observer trois fréquences propres. Compte tenu de l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus, il est préférable (a) d'utiliser un accéléromètre plutôt qu'un microphone, (b) de positionner l'accéléromètre sur l'axe principal des vibrations à étudiées, au niveau du centre de gravité de la surface, (c) de répéter la mesure 3 à 4 fois, (d) d'effectuer la mesure en orientant AB puis BA. Lors de l'extraction des amortissements, il est de plus nécessaire de bien vérifier que les modes sont

marqués et qu'ils ne se recouvrent pas. Dans ces conditions, la répétabilité sur la détermination du paramètre élastique est précise à moins de 1% près, et sur la détermination des paramètres de viscosité de l'ordre de 2%.

La pertinence de l'emploi d'un modèle viscoélastique linéaire généralisé n'a pas pu être démontré en considérant 380 points de mesures et 18 modes propres de vibrations transversales dans une gamme allant de 71Hz à 1656 Hz. L'utilisation d'un tel modèle pourrait être envisagée sur une gamme de fréquence plus importante que celle considérée dans le cas présent, ainsi que sur un nombre important d'amortissements temporels.

La compréhension des phénomènes physiques altérant les ondes qui se propagent dans le matériau, et les notions acquises par l'emploi des modèles guide d'onde vont être utilisées au chapitre suivant afin de détecter les éventuels échos produits par la réflexion des ondes propagatives sur les interfaces des hétérogénéités présentes dans les poutres. Comprendre comment les échos "naissent" et interfèrent avec les vibrations propres de la structure, savoir les identifier et les associer à la présence d'hétérogénéités permet de connaître le nombre et les localisations de ces dernières, mais également de quantifier les zones de faiblesse mécanique par l'intermédiaire des éléments faibles (chapitre 1).

**Chapitre IV : Détection des éléments faibles mécaniquement
prépondérants dans les poutres en bois**

INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est l'identification du nombre d'hétérogénéités majeures présentes dans une poutre, et de leurs positions associées dans le sens de la longueur. La connaissance du nombre et des positions des hétérogénéités réelles est susceptible d'apporter une information directement utilisable pour identifier les caractéristiques de la poutre mécaniquement analogue comportant un élément faible à partir d'un ou plusieurs essais vibratoires (chapitre I). Les algorithmes d'inversion, identifiant au mieux les caractéristiques physico-mécaniques de la poutre analogue, peuvent en effet rechercher les solutions au voisinage des positions correspondant aux hétérogénéités réelles. Une précision doit être apportée sur la relation faite ici entre un élément faible, résultant d'une analogie mécanique de comportement, et la présence d'une ou plusieurs hétérogénéités réelles dans le matériau. Le type d'hétérogénéité envisagé est qualifié "d'hétérogénéité majeure", aisément identifiable visuellement sur les avivés et localisée dans une région de l'espace bien délimitée, par opposition à la présence d'un défaut de fil ou à la présence diffuse de nœuds de petites tailles réparties sur toute la longueur de la poutre. Dans ces conditions, un élément faible peut être associé à une hétérogénéité locale réelle de la poutre.

La méthode proposée est basée sur le principe de l'impact – écho. Elle doit permettre, à partir d'une analyse du spectre en fréquence d'un essai en vibrations longitudinales, de détecter les éventuels échos produits par la réflexion des ondes de compression sur les interfaces des hétérogénéités. Le principe de la méthode "d'écholocation" envisagée est dans un premier temps détaillé, ainsi que les algorithmes informatiques de traitement des signaux vibratoires. Dans un second temps, une étude expérimentale est réalisée afin de mettre en évidence la présence d'échos dans deux poutres comportant un défaut artificiellement créé. L'étude de l'évolution de la réponse fréquentielle, lorsque la taille du défaut artificielle augmente dans le sens de la largeur ou de la longueur, permet de plus une meilleure compréhension des phénomènes intervenant lorsque la poutre est en vibrations. L'étude expérimentale doit également permettre d'évaluer l'efficacité de la méthode d'écholocation proposée sur deux poutres sans défaut apparent et sur trois poutres comportant un petit nombre de singularités très marquées.

9 PRINCIPE ET MISE EN ŒUVRE DE L'ECHOLOCATION

9.1 Echolocation, une définition

Certains mammifères, en particulier les dauphins et les chauve-souris, ont développé une utilisation très particulière des ondes sonores : l'écholocation.

L'écholocation est un processus physiologique permettant de localiser des objets éloignés ou invisibles, tels que des proies, par l'utilisation des ondes réfléchies par l'objet vers l'émetteur, par exemple un dauphin (Figure 138).

L'écholocation est permise par l'émission brève (battement) d'ondes couvrant une gamme de fréquence allant de 1 kHz chez certains oiseaux à moins de 200 kHz chez les baleines.

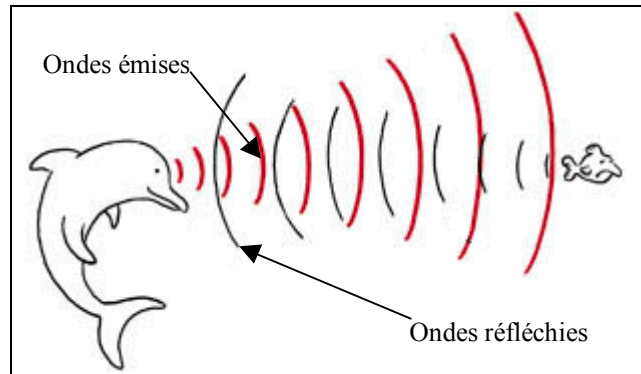


Figure 138 : Principe de l'écholocation chez le dauphin (Gérard, 1999).

Les chauve-souris emploient des fréquences de 30 à 120 kHz ; les battements peuvent être modulés selon la situation de l'animal, en commençant à environ 1 Hz. Les battements peuvent se répéter plusieurs centaines de fois par seconde dans le cas où l'animal est proche de sa proie. Ce système d'orientation, développé depuis quelques dizaines de millions d'années dans le monde animal, a été mis en évidence seulement à la fin des années trente. Il y a à peine un demi-siècle, l'homme a inventé des outils similaires, le "radar" et le "sonar". (Gérard, 1999 ; Britannica, 2000).

9.2 Théorie de l'impact – écho

L'impact - écho est une technique de contrôle non destructif. Le contrôle non destructif est fondée sur la déformation du champ d'une grandeur physique par une discontinuité ou hétérogénéité dans la structure. L'étude de la déformation produite renseigne sur les propriétés physiques et géométriques de la discontinuité qui en est la cause. (Krautkrämer et Krautkrämer, 1990; Perdijs, 1993).

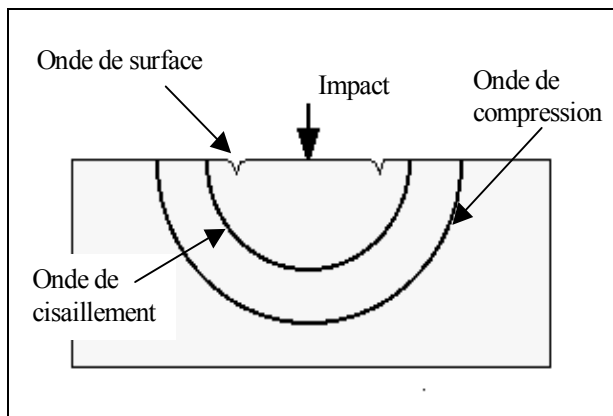


Figure 139 : Ondes produites par un impact sur la surface d'un matériau (Carino, 2000).

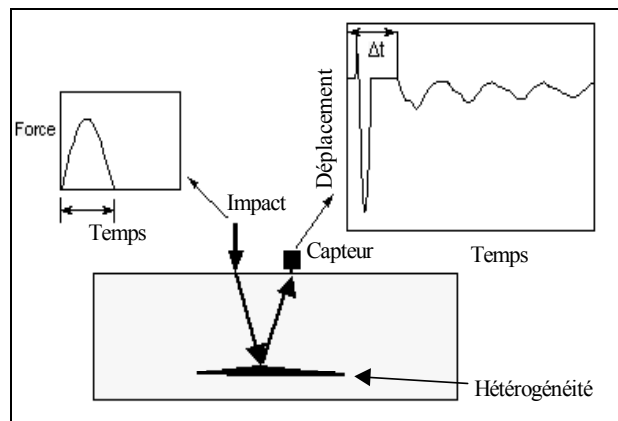


Figure 140 : Etude de la partie réfléchie des ondes produite par une hétérogénéité dans la structure (Carino, 2000).

Le principe de l'impact – écho est illustré à la Figure 140. Des ondes élastiques sont produites par un choc sur la surface du matériau à sonder (Figure 139). Ces ondes se propagent ensuite librement dans le matériau. On distingue l'onde de compression (déplacement longitudinale), l'onde de cisaillement (déplacement transversale, distorsion), et l'onde de surface (onde de Rayleigh, polarisation elliptique) (Perdijs, 1993 ; Sansalone et Streett, 1997 ; Carino, 2000). Les ondes de compression et de cisaillement ont des fronts sphériques (Figure 139). Chacune de ces ondes ont des célérités différentes (Eq. 274), fonctions des propriétés élastiques du milieu traversé.

$$\text{Eq. 274 } V_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} ; \quad V_C = \sqrt{\frac{G}{\rho}} ; \quad V_S = f(\nu) \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \text{ avec } f \text{ fonction du coefficient de Poisson (milieu isotrope)}$$

V_L : célérité de l'onde de compression ; V_C : célérité de l'onde de cisaillement ; V_S : célérité de l'onde de surface

Les célérités des différentes ondes se propageant dans le matériau (Eq. 274) sont calculées en supposant ce dernier parfaitement élastique, et non dispersif. Une partie des ondes de compression et de cisaillement, se propageant à l'intérieur du matériau, sont réfléchies à l'interface entre le milieu et l'hétérogénéité (Figure 140). L'arrivée à la surface du matériau de la partie réfléchie des ondes est enregistrée par un capteur piézoélectrique (Serridge et Licht, 1987 ; Sansalone et Streett, 1997).

La vitesse de propagation de l'onde de cisaillement est toujours inférieure à la vitesse de propagation de l'onde de compression. Ces vitesses sont de l'ordre de quelques milliers de mètre par seconde (pour le bois $V_L=5000$ m/s et $V_C=1200$ m/s). La vitesse de l'onde de surface est légèrement inférieure à celle de l'onde de cisaillement. L'onde dominante dans la direction de sollicitation (impact) est celle qui se propage le plus rapidement dans la matière (onde de compression). Par la suite nous négligerons l'influence des ondes de cisaillement. (Sansalone et Streett, 1997).

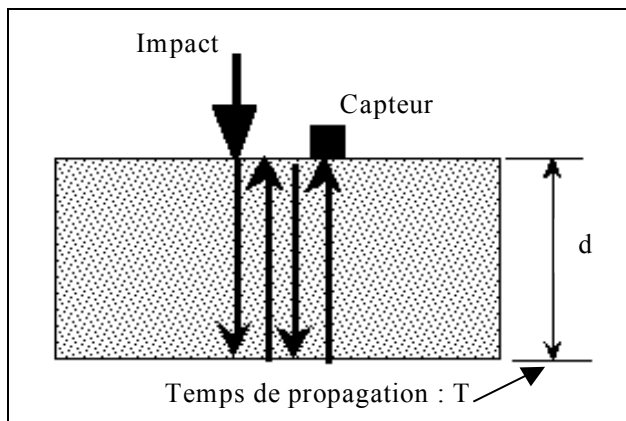


Figure 141 : Réflexion de l'onde dans un milieu borné (Carino, 2000).

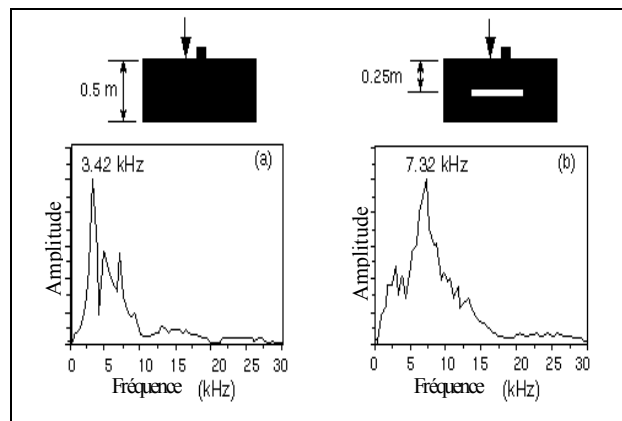


Figure 142 : Exemple de détection d'une cavité dans un béton (Carino, 2000).

Lorsque le milieu est borné (Figure 141), l'onde se réfléchit entre les deux frontières. On considère généralement que la réflexion est totale du fait de la différence d'impédance acoustique entre l'air et les matériaux de construction usuels (Sapriel, 1994). Ces réflexions successives engendrent des ondes stationnaires harmoniques, de fréquences (Grosse et Reinhardt, 2000) :

$$\text{Eq. 275 } f_n = \frac{n}{2d} V_L \text{ avec } V_L = \frac{d}{T}$$

La connaissance de la durée de propagation de l'onde de compression, et de sa vitesse dans le milieu considéré, permet de conjecturer l'épaisseur d'une couche de matériau (Figure 141), ou bien de détecter et de trouver la position d'une éventuelle hétérogénéité (Figure 142). (Perdijon, 1993 ; Sansalone et Streett, 1997 ; Carino, 2000).

9.3 De l'impact – écho à l'écholocalion

L'utilisation des propriétés réflexives des hétérogénéités d'une structure afin de qualifier ces irrégularités peut être appliquée au cas de poutres en bois. Une onde longitudinale est produite par un choc à l'une des extrémités de la poutre (Figure 143). Cette onde se propageant dans un milieu borné engendre des ondes stationnaires de fréquence :

$$\text{Eq. 276 } f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}}$$

La réflexion de l'onde entre l'hétérogénéité et les extrémités l_1 ou l_2 engendre également des ondes écho stationnaires de fréquence :

$$\text{Eq. 277 } f_{1n} = \frac{n}{2l_1} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}} \text{ et } f_{2n} = \frac{n}{2l_2} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}}$$

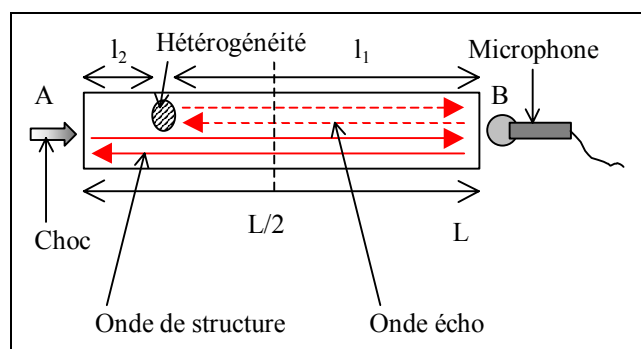


Figure 143 : Principe de l'écholocalion d'une hétérogénéité dans une poutre.

Il existe également une réflexion de l'onde dans l'hétérogénéité elle-même ; cependant, la taille de cette dernière est très petite, ce qui implique des fréquences de l'ordre de 100 kHz. Limiter la gamme de fréquence observée permet de s'affranchir de ce type d'écho.

Les ondes écho relatives aux distances l_1 et l_2 ont des fréquences qui tendent vers l'infini lorsque la distance associée l_i devient nulle (Figure 144). Un autre problème se pose concernant l'analyse des fréquences écho. Une hétérogénéité produit deux séries d'harmoniques, ce qui rend l'analyse très complexe dans le cas où plusieurs singularités sont présentes.

Les deux contraintes évoquées ci-dessus peuvent être surmontée en même temps en choisissant de restreindre l'analyse aux distances comprises dans l'intervalle $[L/2, L]$. Le choix de travailler en demi - poutre permet de faire correspondre une série d'harmonique à une hétérogénéité, et de réduire l'intervalle fréquentiel d'étude entre les deux premières fréquences de la structure :

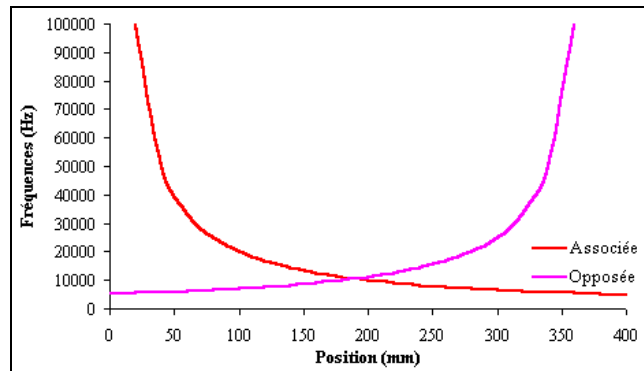


Figure 144 : Evolution des fréquences de l'onde écho associée (l_2) et opposée (l_1) en fonction de la position de l'hétérogénéité, avec une vitesse de propagation 4000 m/s, et une longueur de la poutre $L=400$ mm.

$$\text{Eq. 278 } f_{echo_n} \in \left[\frac{n}{2(L)} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}}, \frac{n}{2\left(\frac{L}{2}\right)} \sqrt{\frac{E_X}{\rho}} \right] = [f_1, f_2]$$

Le fait de travailler en demi – poutre ne signifie pas que les singularités détectées ne sont présentes que dans une moitié de poutre. Cette méthode permet de détecter toutes les singularités présentes, car la réponse vibratoire d'une structure est la même en fréquence quelque soit le sens de sollicitation – réception AB ou BA (Figure 143), mais la position de ces singularités est ambiguë : 1^{ère} moitié de poutre ou 2^{ème} moitié de poutre (Figure 145).

Afin de conserver une vision unidimensionnelle du problème, et parce que la gamme de fréquence utile se situe dans le domaine de l'audible, nous avons choisi de capter les vibrations à l'aide d'un microphone (Figure 143).

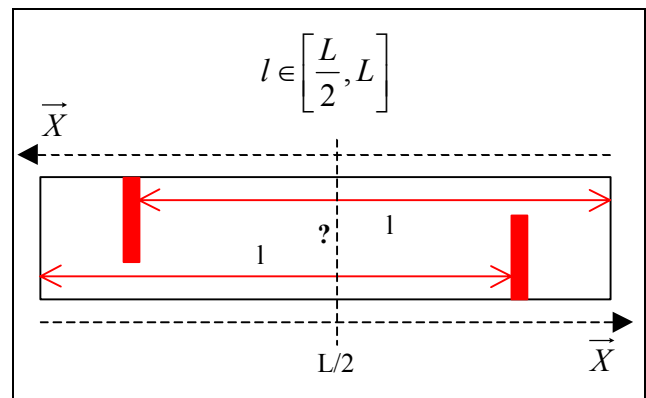


Figure 145 : illustration de l'ambiguïté de position d'une hétérogénéité écholocalisée.

9.4 Principe théorique de l'écholocation

9.4.1 Etude du choc et du temps de contact

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement d'une poutre impactée avec un marteau pendant la durée du contact. La tête d'impact du marteau est généralement de forme sphérique, ou légèrement arrondie. Dans notre approche, nous nous limiterons au cas d'une tête d'impact à contact plan. Les résultats obtenus avec cette hypothèse ont l'avantage d'être facilement manipulables et exploitables. Ils sont de plus transposables au cas d'un contact non plan en introduisant une surface de contact équivalente pour caractériser l'impacteur (Sansalone et Streett, 1997). L'étude complète de l'impact d'une sphère sur une poutre en élasticité linéaire a été notamment réalisée par Graff (1975). L'équation différentielle trouvée par Graff est non linéaire ; elle comporte des termes de déformation à la puissance 3/2 déduits de la théorie du contact de Hertz. Cette équation n'a pas de solution exacte et doit être résolue numériquement (Graff, 1975). La forme particulière de la solution numérique, évolution force – temps, ainsi calculée est analogue à celle trouvée expérimentalement par Bennani (1999).

On considère un impacteur indéformable de section droite constante S^* , de hauteur H , et de densité δ (Figure 146). L'impacteur est projeté contre une poutre dans une direction colinéaire à son sens longitudinal. La poutre, supposée parfaitement élastique, de section droite constante S , a un module d'élasticité longitudinal notée E_x . Le théorème fondamental de la dynamique, appliqué au centre de gravité G de l'impacteur, permet de déduire l'équation différentielle du mouvement (Graff, 1975) :

$$\text{Eq. 279 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega_0^2 u = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{\delta H} \frac{S}{LS^*}}$$

L'équation (Eq. 279) est valable si $S^* \geq S$ ou $S^* \approx S$, et si $m_i/m < 4/\pi^2$ (avec m_i la masse de l'impacteur et m la masse de la poutre). Cette dernière condition, impose une longueur critique à la poutre, et traduit le fait que le temps de contact doit être inférieur au temps d'un aller et retour de l'onde longitudinale. La solution de l'équation (Eq. 279) est de la forme :

$$\text{Eq. 280 } u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

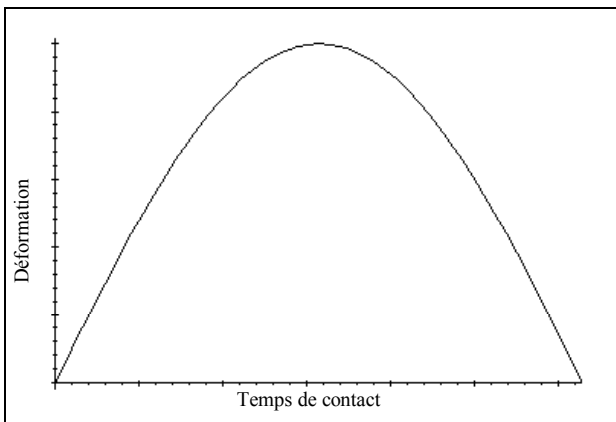


Figure 147 : Evolution théorique, en fonction du temps, de la déformation de l'extrémité d'une poutre lors d'un choc.

Le temps de contact entre l'impacteur et la poutre s'écrit alors (Graff, 1975) :

$$\text{Eq. 281 } \tau = \pi \sqrt{\frac{\delta H}{E} \frac{LS^*}{S}}$$

L'équation (Eq. 281) permet de déduire que le temps de contact sera d'autant plus faible que (a) l'objet impacté aura un module élastique élevé, (b) l'impacteur aura une masse faible, (c) la dimension de la surface d'impact sera faible par rapport à la dimension de la surface impactée pondérée par sa longueur. La vitesse avec laquelle l'impacteur est projeté détermine l'amplitude maximale de la force d'impact, mais a une très faible influence sur le temps de contact (Sansalone et Streett, 1997).

La Figure 147 représente l'évolution théorique de la déformation (Eq. 280) au cours du temps lorsque l'impacteur est en contact avec la poutre (Sansalone et Streett, 1997). Cette courbe théorique est à comparer avec la Figure 148 qui représente l'évolution expérimentale globale de la déformation de l'extrémité d'une poutre lors d'un choc. L'expérience a été réalisée en utilisant un marteau – force Brüel & Kjaer de type 8202 (Figure 149) avec un choc métal – métal. Le contact impacteur – poutre débute en (a) et se termine en (b) (Figure 148). L'intervalle de temps (ab) correspond au temps de contact τ (Eq. 281), expérimentalement il est de l'ordre de 0,2 ms pour un contact métal - métal. Pendant le contact, on constate que l'évolution ne décrit pas exactement un arc de sinus. Ce phénomène s'explique par le fait que l'impacteur est en réalité un solide déformable, et que la surface d'impact réelle n'est pas plane (Figure 146) mais semi – sphérique. Lorsque l'impact est fort, il se produit de plus une déformation plastique induisant une indentation du matériau impacté. Après la fin du contact (b), l'impacteur vibre librement.

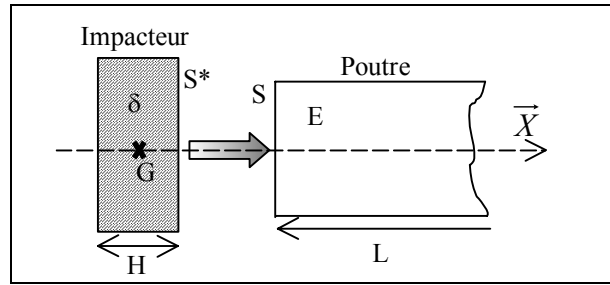


Figure 146 : Déformation d'une poutre par un choc dans le sens longitudinal.

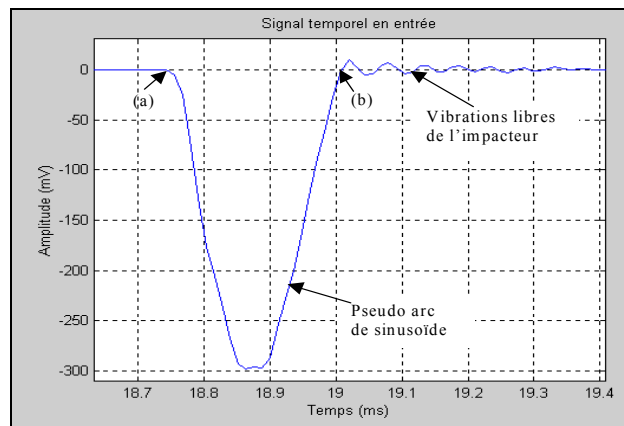


Figure 148 : Enregistrement expérimental de la déformation de l'extrémité d'une poutre lors d'un choc.



Figure 149 : Marteau – force Brüel & Kjaer de type 8202 avec les trois têtes d'impact en acier, plastique, et caoutchouc.

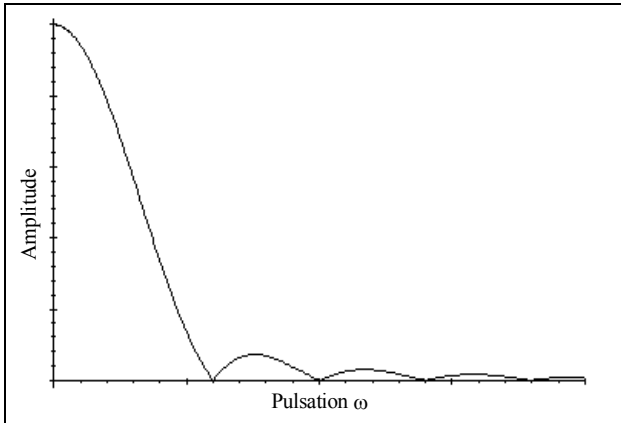


Figure 150 : Spectre théorique d'un choc.

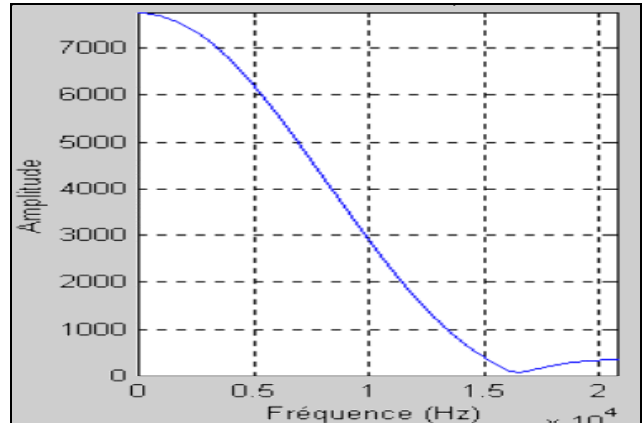


Figure 151 : Spectre expérimental d'un choc.

L'équation de la déformation pendant le contact impacteur – poutre (Eq. 280) permet de trouver la gamme de fréquence sollicitée lors d'un choc. On note TF la transformée de Fourier, et $E(\omega)$ le spectre fréquentielle de la déformée (Broch, 1984) :

$$\text{Eq. 282 } TF \{u(t)\} = E(\omega) = \int_0^{\tau} u(t)e^{-i\omega t} dt = U_0 \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi\omega}{\omega_0}\right)}$$

L'équation (Eq. 282) est représentée à la Figure 150. La forme théorique obtenue est très similaire au spectre expérimental obtenu (Figure 151) en utilisant le marteau – force. La Figure 152 est issue de la documentation technique de l'impacteur, elle représente également le spectre d'un choc métal – métal.

Ces trois figures montrent que la gamme de fréquence sollicitée lors d'un impact métal – métal est de l'ordre de 7 à 10 kHz. La gamme de fréquence sollicitée est fonction de la nature de l'impacteur, mais aussi de la poutre impactée (Eq. 282). Dans le cas d'un choc métal – bois longitudinal, la gamme sollicitée est de l'ordre de 3 à 5 kHz. Si le choc avec un embout en métal est donné dans le sens transverse du bois, la gamme sollicitée est de l'ordre de 1 à 2 kHz.

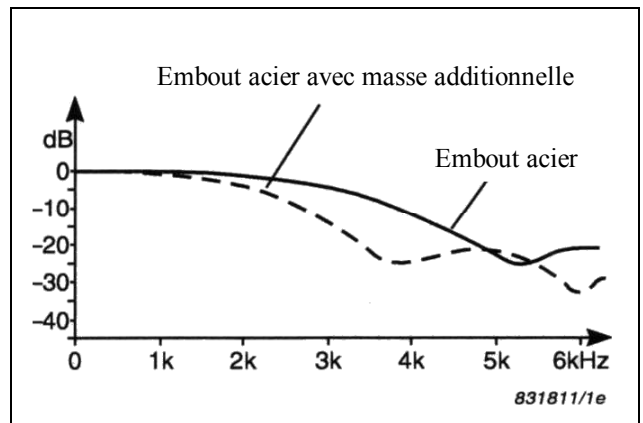


Figure 152 : Documentation technique, marteau – force Brüel & Kjaer type 8202, spectre d'un choc métal – métal.

9.4.2 Transmission et réflexion à travers une double interface sous incidence normale

(a) Considérons une onde plane progressive longitudinale rencontrant l'interface de séparation entre deux milieux matériels différents sous incidence normale (Figure 153). L'onde incidente va donner naissance à une onde réfléchiée dans la direction de propagation inverse et à une onde transmise dans la même direction. Onde réfléchiée et onde transmise sont de même nature que l'onde incidente. On note U_I l'onde incidente, U_R l'onde réfléchiée, et U_T l'onde transmise :

$$\text{Eq. 283 } \begin{cases} U_I = U_0 e^{i(\omega t - k_1 x)} \\ U_R = R U_0 e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ U_T = T U_0 e^{i(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$

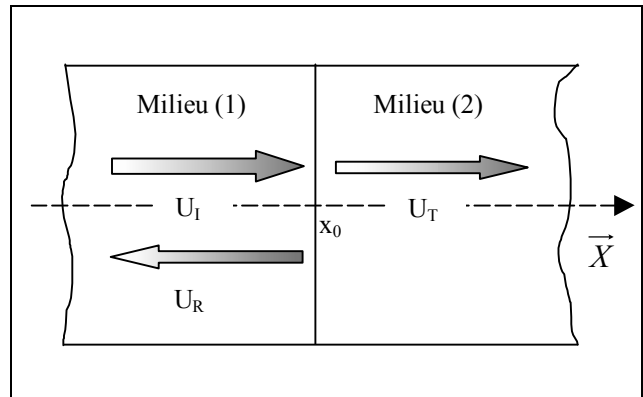


Figure 153 : Propagation d'une onde plane progressive à travers deux milieux différents.

Les coefficients R et T sont les coefficients de réflexion et de transmissions de l'interface considérée.

Quand on passe d'un milieu à l'autre, les conditions à l'interface doivent exprimer la continuité des déplacements et de l'effort normal, notée N :

$$\text{Eq. 284} \begin{cases} U_I(x_0) + U_R(x_0) = U_T(x_0) \\ E_1 \frac{\partial U_I(x_0)}{\partial x} + E_1 \frac{\partial U_R(x_0)}{\partial x} = E_2 \frac{\partial U_T(x_0)}{\partial x} \end{cases}$$

Les équations (Eq. 283) et (Eq. 284) permettent de déterminer les expressions des coefficients de réflexion et de transmission (Perdijon, 1993 ; Sansalone et Streett, 1997 ; Valette, 1998) :

$$\text{Eq. 285} \begin{cases} R = \frac{k_1 E_1 - k_2 E_2}{k_1 E_1 + k_2 E_2} e^{i2k_1 x_0} \\ T = \frac{2k_1 E_1}{k_1 E_1 + k_2 E_2} e^{i(k_1 - k_2)x_0} \end{cases} \text{ en posant : } Z_i = \rho_i V_i, \text{ on obtient : } \begin{cases} R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{i2k_1 x_0} \\ T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} e^{i(k_1 - k_2)x_0} \end{cases}$$

Le paramètre Z est appelé impédance acoustique spécifique du milieu considéré. Pour l'air $Z=430 \text{ N.s.m}^{-3}$, le bois $Z \approx 2.10^6 \text{ N.s.m}^{-3}$, l'acier doux (Fe 360) $Z=40.10^6 \text{ N.s.m}^{-3}$ (Perdijon, 1993). Le carré des modules des coefficients de réflexion et de transmission est respectivement égal au rapport puissance réfléchie sur puissance incidente et puissance transmise sur puissance incidente, on a alors la relation de conservation de l'énergie suivante (Perdijon, 1993) :

$$\text{Eq. 286} \quad |R|^2 + |T|^2 = 1$$

(b) Considérons une onde plane progressive longitudinale se propageant à travers un milieu (1) possédant une inclusion, le milieu (2), d'impédance acoustique différente (Figure 154). La démarche analytique est la même que dans le cas (a) précédemment traité.

Le module du coefficient de transmission global de l'élément faible a pour expression (Sapriel, 1994) :

$$\text{Eq. 287} \quad |T|^2 = \frac{4Z_1^2}{4Z_1^2 \cos^2(k_2 d) + \left(Z_2 + \frac{Z_1^2}{Z_2}\right)^2 \sin^2(k_2 d)}$$

On vérifie bien que si $d=0$ où $Z_1=Z_2$, $|T|=1$. Le coefficient de réflexion se déduit de l'équation (Eq. 286).

Il existe des valeurs particulières de d pour lesquelles $|T|=1$. L'élément faible est alors transparent, et le coefficient de réflexion R est nul. Ce phénomène est appelé adaptation d'impédance (Sapriel, 1994). Ces valeurs particulières de d ont pour expression :

$$\text{Eq. 288} \quad |T|^2 = 1 \Leftrightarrow \cos(k_2 d) = \pm 1 \Leftrightarrow d = \frac{n\pi}{k_2} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

9.4.3 Dimension critique de singularité détectable par écholocation

L'équation (Eq. 287) peut se mettre sous la forme :

$$\text{Eq. 289} \quad |T|^2 = \left[\Gamma + (1 - \Gamma) \cos^2 \Omega \right]^{-1} \text{ avec } \Gamma = \frac{1}{4} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{Z_2}{Z_1}, \text{ et } \Omega = k_2 d = 2\pi \frac{d}{\lambda_2}$$

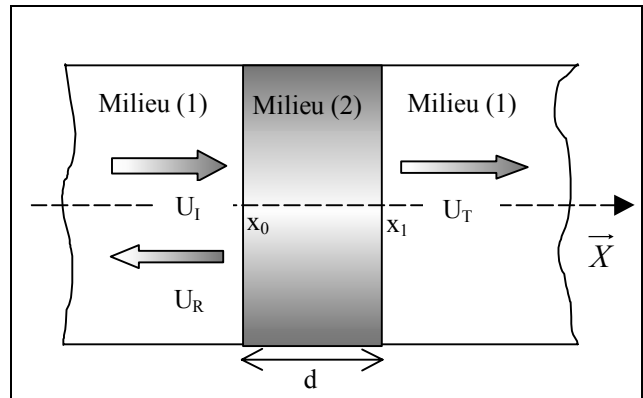


Figure 154 : Transmission normale d'une onde plane progressive à travers un élément faible.

Les évolutions des carrés des modules des coefficients de réflexion et de transmission global de l'élément faible (Eq. 289) sont représentés à la Figure 154 en fonction du paramètre Ω , pour $\beta=1/\sqrt{10}$.

Les valeurs particulières de la taille d de l'élément faible pour lesquelles le coefficient de réflexion $|R|^2$ est maximal sont alors :

$$\text{Eq. 290 } \cos(\Omega) = 0 \Leftrightarrow d = (2n + 1) \frac{\lambda_2}{4} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

L'expression de la longueur d'onde λ_2 dans le milieu (2), l'élément faible, se déduit en supposant que la dimension de l'hétérogénéité est petite par rapport à la dimension du matériau, le milieu (1). La célérité moyenne de l'onde est alors peu différente de la célérité dans le milieu (1), le bois sans défaut dans le cas présent :

$$\text{Eq. 291 } \lambda_2 = \frac{V_2}{f_m} \approx \frac{2L}{m} \frac{V_2}{V_1} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

➤ **Application au matériau bois :**

En supposant que le module d'élasticité E_2 de l'élément faible a une valeur 10 fois inférieure au module du bois sans défaut E_1 , ce qui correspond à l'ordre de grandeur du rapport entre module longitudinal et module transverse pour le bois (Guitard, 1987), on obtient les relations suivantes pour R nul, élément transparent (Eq. 288), et R maximal (Eq. 290) :

$$\text{Eq. 292 } \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} |R|^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{L} = \frac{n}{m} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ |R|^2 \text{ max} \Leftrightarrow \frac{d}{L} = \frac{(2n+1)}{2m} \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases} \text{ avec } n \in \mathbb{N}, \text{ et } m \in \mathbb{N}^*$$

En considérant des poutres de structure en bois, et les trois premiers modes de vibration (la majeure partie de l'énergie de vibration est contenue dans ces modes), l'intervalle des dimensions physiquement admissibles pour d correspond à $n=0$ (ligne en jaune du Tableau 56). La dimension d maximale envisageable d'un élément faible, représentant la présence physique d'une singularité locale (un nœud par exemple), dans le cas d'une poutre de structure en bois massive d'environ 3000x150x50 mm, est en effet de l'ordre de 25 cm, ce qui correspond au ratio $d/L \leq 0,08$ pour $n=0$ et $m=2$ (Tableau 56). On obtient alors une évolution croissante monotone du coefficient de réflexion de la valeur nulle, pour $d=0$ avec $m=\{1,2,3\}$, jusqu'à une valeur proche de la valeur maximale, pour $d \approx 48\text{cm}$ avec $m=1$, et jusqu'à la valeur maximale, pour $d \approx 24\text{cm}$ avec $m=2$, et pour $d \approx 15\text{cm}$ avec $m=3$, en considérant une poutre de longueur 3m.

$ R ^2=0$				$ R ^2\text{max}$			
n	Rang m du mode			n	Rang m du mode		
	1	2	3		1	2	3
0	0,00	0,00	0,00	0	0,16	0,08	0,05
1	0,32	0,16	0,11	1	0,47	0,24	0,16
2	0,63	0,32	0,21	2	0,79	0,40	0,26

Tableau 56 : Valeurs du ratio d/L en fonction des entiers n et m d'après (Eq. 292).

Afin de mieux illustrer l'évolution croissante monotone du coefficient de réflexion, égal au rapport puissance réfléchi sur puissance incidente, on considère une poutre en "résineux standard" de longueur 4m (Guitard, 1987). L'analyse porte sur la réflexion de l'onde de première pulsation propre en vibrations longitudinales. Le paramètre β de l'équation (Eq. 289) est pris égal à $1/\sqrt{10}$. La courbe d'évolution du coefficient de réflexion est représentée à la Figure 156.

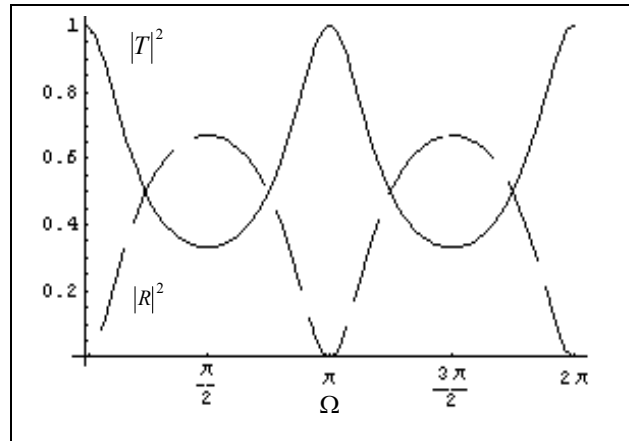


Figure 155 : Evolution du coefficient de transmission de l'élément faible en fonction de Ω (Eq. 289).

Pour une poutre de 4 m de longueur, la Figure 156 montre que le phénomène de réflexion serait maximal si le paramètre de taille de l'élément pouvait avoir la valeur d'environ 7 m. Ce cas de figure est physiquement impossible, cependant on déduit que la taille optimale pour une forte réflexion est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde incidente.

La propriété déduite de la Figure 156 est connue et utilisée dans la majorité des applications de détection ou de cartographie comme les sonars, les radars, ou l'échographie par exemple. D'une manière générale, l'interaction d'une onde se propageant dans un matériau avec une hétérogénéité interne dépend du rapport entre la longueur d'onde et taille de l'hétérogénéité considérée. Une onde sera en effet réfléchi par une hétérogénéité de taille approximativement égale à la longueur d'onde considérée (Sansalone et Streett, 1997 ; Niemz et Kucera, 1998).

La palette de longueur d'onde pour le matériau bois est illustrée au Tableau 57. Ce tableau montre que la longueur d'onde va de quelques centimètres à plusieurs mètres. En suivant scrupuleusement la règle de l'égalité longueur d'onde – taille de l'hétérogénéité détectable, on déduit qu'il n'est pas possible de détecter des irrégularités physiques de structure en utilisant des fréquences propres de vibration de l'ordre de 1 à 3 kHz (Tableau 57). Il est cependant important de remarquer que le but poursuivi ici n'est pas de faire de l'imagerie, ni de détecter avec précision toutes les imperfections d'une poutre en bois.

La Figure 156 montre en effet que si la dimension du défaut est de taille inférieure à la taille optimale, il se produit quand même un phénomène de réflexion d'énergie plus faible que dans le cas optimal. De plus, l'utilisateur d'ultrasons dans le bois se heurte au phénomène d'absorption qui est important à haute fréquence. Les fréquences utilisées en détection résultent d'un compromis entre pouvoir de résolution et pouvoir de pénétration. Plus la fréquence est élevée et meilleure est la résolution (longueur d'onde petite), mais moins la pénétration est importante (l'absorption est forte) (Claudon, 2000).

L'emploi des fréquences audibles pour détecter des hétérogénéités ne semble donc pas impossible. L'amplitude des échos reçus par réflexion risque d'être très faible (Figure 156). Cependant, si une interface faiblement réfléchissante peut être un inconvénient, l'avantage est que cette dernière possède un coefficient de transmission élevé et laisse ainsi passer suffisamment d'énergie pour que de nouvelles hétérogénéités situées plus en profondeur puissent subir le phénomène de réflexion et ainsi être détectées (Claudon, 2000).

Dans le cas où la taille de l'hétérogénéité est très inférieure à la longueur d'onde, le phénomène de diffusion se produit également. L'hétérogénéité se comprime et se dilate, et d'autre part, oscille dans le sens de l'onde. Celle-ci se comporte alors comme une source secondaire qui réémet une petite fraction de l'énergie acoustique incidente. Les ondes diffusées ont alors la même fréquence que l'onde incidente. Il est donc possible de déceler la présence d'objet bien que leurs dimensions soient inférieures à la longueur d'onde (Claudon, 2000).

Ce chapitre a mis en évidence les différents phénomènes impliqués dans la formation des échos. Il démontre également que dans le cas présent, la détection d'hétérogénéités sera relativement difficile car l'énergie réfléchi et diffusée risque d'être très faible. La mise en évidence expérimentale des échos doit donc être menée afin de vérifier s'ils sont discernables en plus de la présence des modes propres de vibration et de mieux comprendre leur nature.

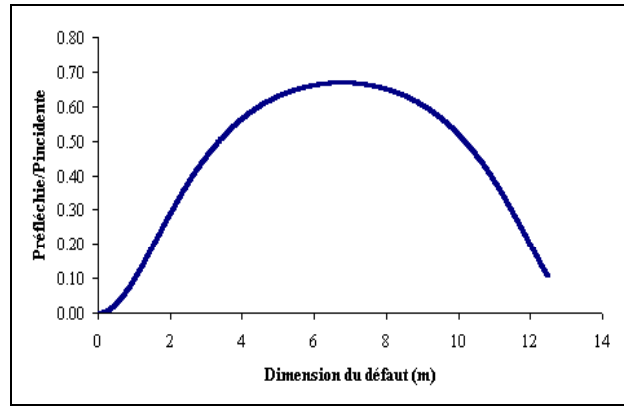


Figure 156 : Evolution du coefficient de réflexion en fonction de la taille de l'élément pour une poutre de longueur 4m ($f_1=630$ Hz, $\lambda_{\text{Onde } f_1}=8,60$ m).

Fréquence f (Hz)	λ (m)
500	10
1000	5
5000	1
10000	0,5
50000	0,1
100000	0,05

Tableau 57 : Fréquences et longueurs d'onde pour une célérité longitudinale moyenne dans le bois de 5000 m/s.

9.4.4 *Modélisation des échos par les modèles guide d'onde*

(a) En reprenant les mêmes notations et modélisation qu'au chapitre I, un élément faible peut être assimilé à un ensemble milieu élément (2) - milieu de propagation (1) (Figure 154). Le milieu "élément faible" provoque d'une part l'entretien d'ondes stationnaires dans le premier milieu de propagation grâce à ses capacités réfléchissantes et d'autre part le transfert d'une partie de l'énergie de l'onde vers le deuxième milieu de propagation grâce à ses capacités de transmission. Dans le cas des modèles propagatifs couplés (Figure 157), l'élément faible est représenté par un ensemble de filtres linéaires modélisant d'abord la réflexion [RE], prenant en considération l'impédance acoustique non infinie au niveau de l'élément, ensuite un filtre modélisant la propagation de l'onde au sein du défaut [TR].

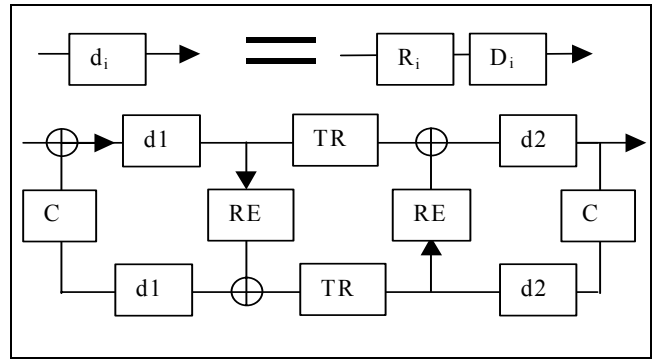


Figure 157 : Modèle propagatif modélisant la vibration d'une poutre avec un élément faible en élasticité linéaire pure.

La fonction de transfert du modèle propagatif décrit à la Figure 157 est donnée par l'équation suivante (Aramaki, et al., 2000) :

$$\text{Eq. 293 } \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{[TR]d_1d_2}{(1 - [RE]Cd_1^2)(1 - [RE]Cd_2^2) - ([TR]d_1d_2C)^2}$$

Afin de simplifier la simulation numérique, les filtres de réflexion [RE] et de transmission [TR] sont supposés ne pas produire de déphasage significatif. La poutre est en vibration longitudinale libre – libre, $C(\omega)=1$ (§ 7.7.2).

La Figure 158 montre que quelque soit la valeur du coefficient de transmission de l'élément faible, l'équation (Eq. 293) ne produit qu'une série de pôles correspondant aux fréquences propres de la structure comportant l'élément faible. Ce modèle est insuffisant car il ne permet pas de rendre compte des fréquences engendrées par les échos successifs. Lorsque l'élément faible devient de plus en plus réfléchissant, le coefficient de transmission décroît, le modèle (Eq. 293) suggère un glissement des fréquences propres de vibration (Figure 158), et non une émergence progressive des fréquences échos au détriment des fréquences de la structure (Figure 159). La Figure 159 montre que dans un cas réel, il se produit une superposition de deux séries de pôles ou plus, selon la nature et la géométrie de l'hétérogénéité mais aussi de la géométrie du milieu de propagation (Sansalone et Streett, 1997).

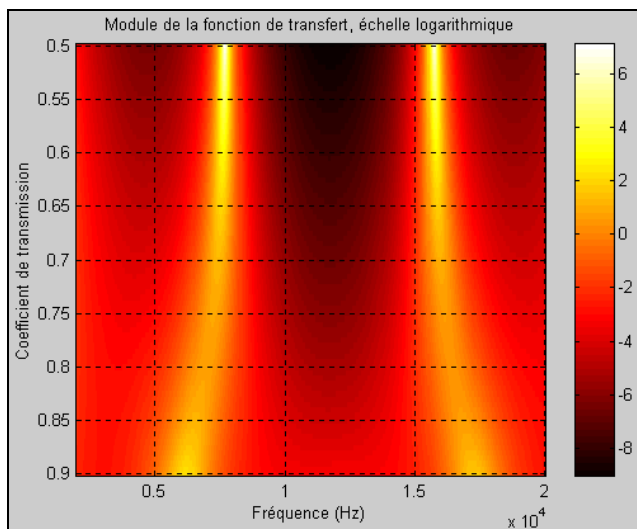


Figure 158 : Evolution des deux premiers modes du spectre en fréquence du modèle guide d'onde d'une poutre comportant un élément faible en fonction du coefficient de transmission de l'élément.

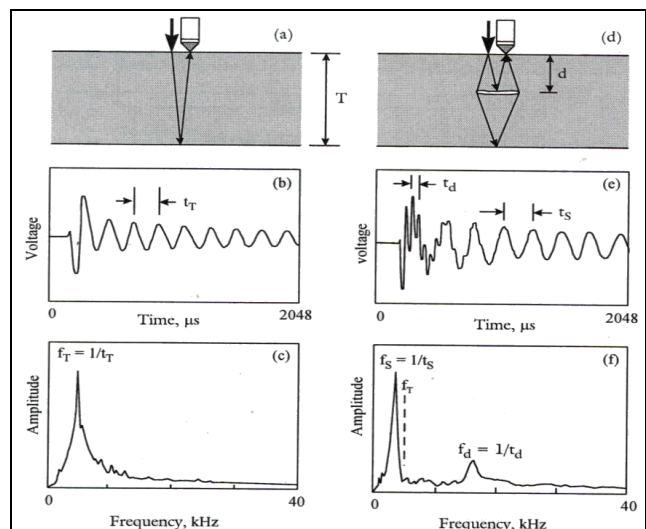


Figure 159 : Comparaison de la réponse vibratoire à un choc d'une plaque épaisse (a, b, c) avec la réponse d'une plaque comportant une petite imperfection (d, e, f) (Sansalone et Streett, 1997).

(b) Afin de développer un modèle guide d'onde permettant d'obtenir la série de pôles correspondant aux réflexions successives de l'onde incidente, on se propose d'étudier un cas théorique plus simple que celui de la Figure 157. On suppose que l'élément faible ne produit pas de réflexion dans le sens sortie - entrée (Figure 160). La fonction de transfert de ce modèle s'écrit :

$$\text{Eq. 294 } \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \frac{[TR]d_1d_2}{(1 - [RE]Cd_1^2) - ([TR]d_1d_2C)^2}$$

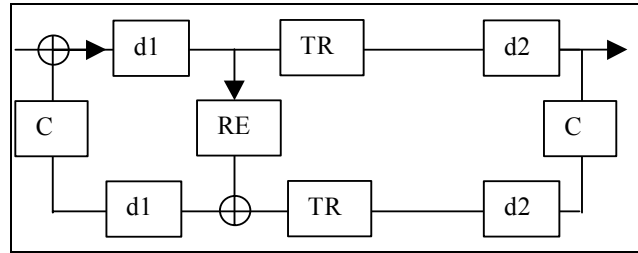


Figure 160 : modèle guide d'onde de poutre à élément faible mono - réflexif.

Comme le modèle précédant, l'équation (Eq. 294) n'engendre qu'une seule série de pôles (Figure 162).

En reprenant le cas de la Figure 160, il est possible d'obtenir un modèle possédant deux séries de pôles distinctes (Figure 161). La fonction de transfert du modèle a pour expression :

$$\text{Eq. 295 } S_2(\omega) = \frac{[RE]Cd_1^2}{1 - [RE]Cd_1^2} S_1(\omega)$$

$$\text{Eq. 296 } \frac{S_1(\omega) + S_2(\omega)}{E(\omega)} = \frac{S_1(\omega)}{E(\omega)} \left(\frac{1}{1 - [RE]Cd_1^2} \right)$$

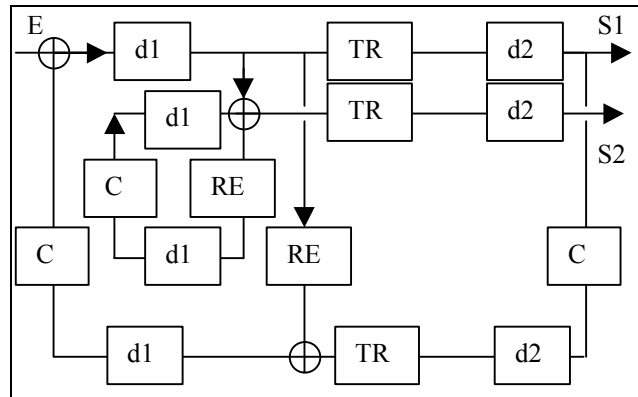


Figure 161 : modèle guide d'onde étagé de poutre à élément faible mono - réflexif.

Le rapport $S_1(\omega)/E(\omega)$ est donné par l'équation (Eq. 294), et correspond à la fonction de transfert de la structure complète. Le second membre de l'équation (Eq. 296) traduit la présence d'un sous système oscillant à ses fréquences propres et engendré par les réflexions successives des ondes au niveau de l'interface.

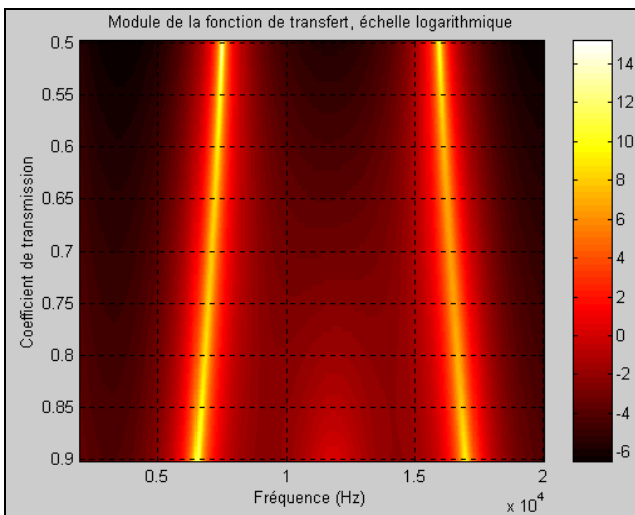


Figure 162 : Evolution du spectre en fréquence du modèle guide d'onde simple d'une poutre comportant un élément faible mono - réflexif en fonction du coefficient de transmission de l'élément, équation (Eq. 294).

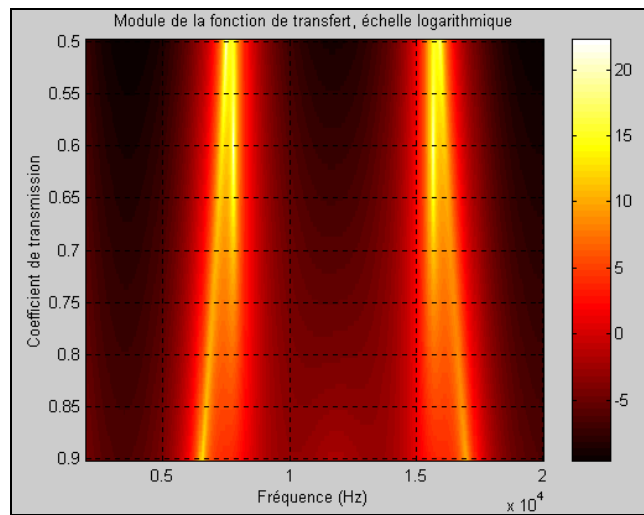
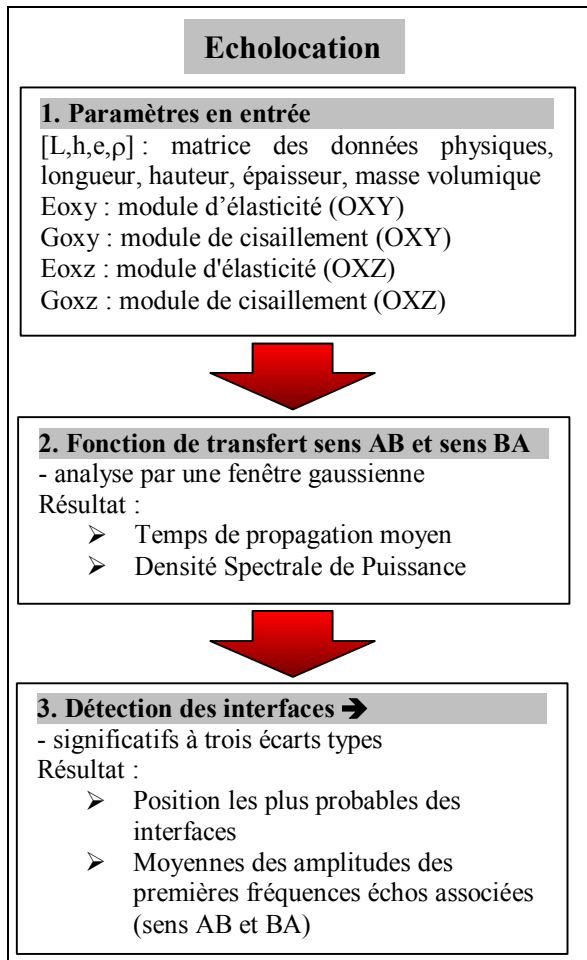


Figure 163 : Evolution du spectre en fréquence du modèle guide d'onde étagé d'une poutre comportant un élément faible mono - réflexif en fonction du coefficient de transmission de l'élément, équation (Eq. 296).

La Figure 163 montre que lorsque le coefficient de transmission de l'élément faible diminue, les fréquences échos, déjà présentes avec une amplitude très faible quand la transmission est quasi-totale, deviennent progressivement prépondérants au détriment des harmoniques de structure. La coexistence de deux séries de pôles est nettement visible lorsque le coefficient de transmission est voisin de 0,7 la (Figure 163).

9.5 Traitement du signal et algorithmes utilisés en écholocation

L'objectif de l'écholocation est de déterminer les positions associées aux interfaces les plus réfléchissantes présentes dans une poutre (§ 9.3). Afin d'atteindre cet objectif, un ensemble de programmes informatiques analysent les signaux temporels enregistrés au microphone à partir d'essais en vibrations longitudinales libre-libre. Chaque extrémité de la poutre est identifiée par la lettre A ou B (Figure 143). On supposera que plusieurs essais sont réalisés dans le sens AB et dans le sens BA. Ce chapitre décrit de manière succincte l'ensemble des algorithmes informatiques développés. Le Cadre 1, Cadre 2, et Cadre 3, résument les principales étapes de la démarche adoptée. Dans certains cadres, une étape peut être suivie du symbole → qui indique que le prochain cadre détaillera plus précisément l'étape marquée.



Cadre 1 : Synopsis du traitement informatique en écholocation.

La méthode d'analyse retenue pour l'écholocation peut se décomposer en trois étapes principales (Cadre 1). La première étape consiste à donner les caractéristiques physiques telles que la longueur, la hauteur, l'épaisseur, et la masse volumique, mais aussi les caractéristiques mécaniques de la poutre testée constituées par les modules d'élasticité et les modules de cisaillement. Ces paramètres mécaniques sont préalablement évalués en vibrations transversales par la solution de Bordonné au modèle de Timoshenko (Chapitre I). Les différents types de vibrations, et les axes d'orientation de la poutre sont représentés à la Figure 164.

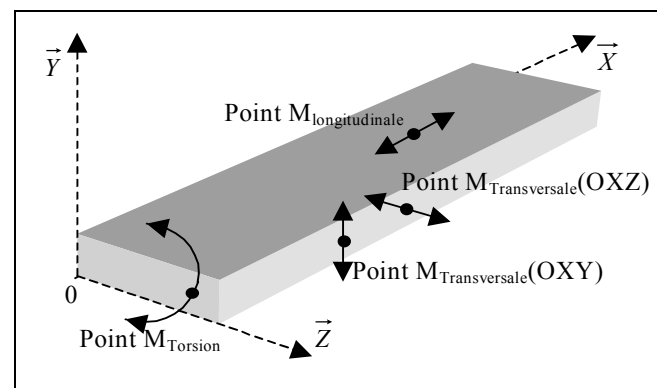


Figure 164 : Définition géométrique, et différentes catégories de déformations d'une poutre en vibrations.

Pour chaque essai en vibrations longitudinales, la fonction de transfert de la poutre, et le temps de propagation sont calculés (étape 2, Cadre 1). Afin d'évaluer la fonction de transfert, les signaux d'entrée et de sortie sont multipliés par une fenêtre gaussienne pour éviter la présence de lobes secondaires dans le spectre en fréquence (Annexe 1).

Des zéros temporels sont également ajoutés de telle façon que le nombre final de points (a) soit une puissance de 2, (b) la résolution fréquentielle soit inférieure à 1Hz, (c) le nombre de valeurs nulles soit au moins égales au nombre de valeurs non nulles du signal (Annexe 1). Une opération de déconvolution est ensuite effectuée pour calculer la fonction de transfert (Annexes 1 et 2). La gamme spectrale est réduite de manière à ce que le rapport d'amplitude soit supérieur ou égal à 30dB afin de pouvoir déconvoluer. La densité spectrale de puissance (DSP) s'obtient en prenant le carré du module de la fonction de transfert (Annexe 1).

Le temps de propagation est calculé en faisant la différence entre le début de l'impact dans le signal d'entrée et le début de la réponse vibratoire dans le signal de sortie. Le début de chaque signal est recherché de la même manière ; lorsqu'un essai est réalisé, l'acquisition des signaux est réglée pour avoir en début du signal discrétisé un échantillon de bruit de l'ensemble de la chaîne d'acquisition (Figure 165). Après avoir vérifié que la distribution des échantillons temporels suit une loi normale, la moyenne temporelle et l'écart - type du bruit sont calculés. Une limite est alors fixée à 10 écart - types, et la première intersection entre ce seuil et la courbe du signal d'entrée ou de sortie donne une première approximation du temps de départ. A partir de ce point approximatif, la courbe du signal est ensuite parcourue à gauche jusqu'à ce que la première dérivée à gauche change de signe. Le nouveau point ainsi obtenu est alors considéré comme le début du signal d'entrée ou de sortie (Figure 166).

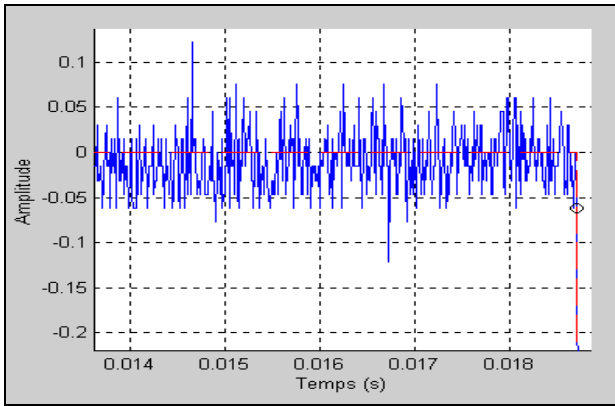


Figure 165 : Début du signal temporel en entrée, le cercle noir indique le début du choc marteau – poutre.

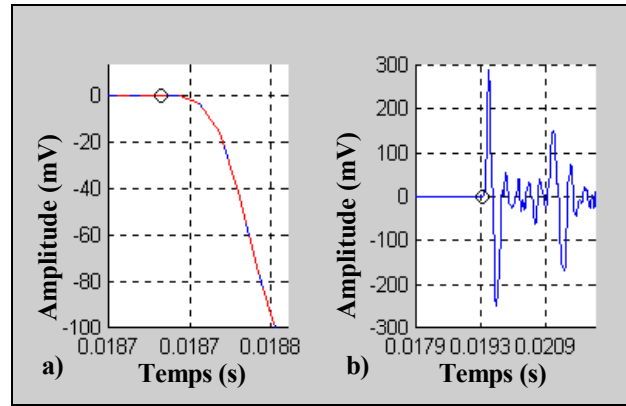
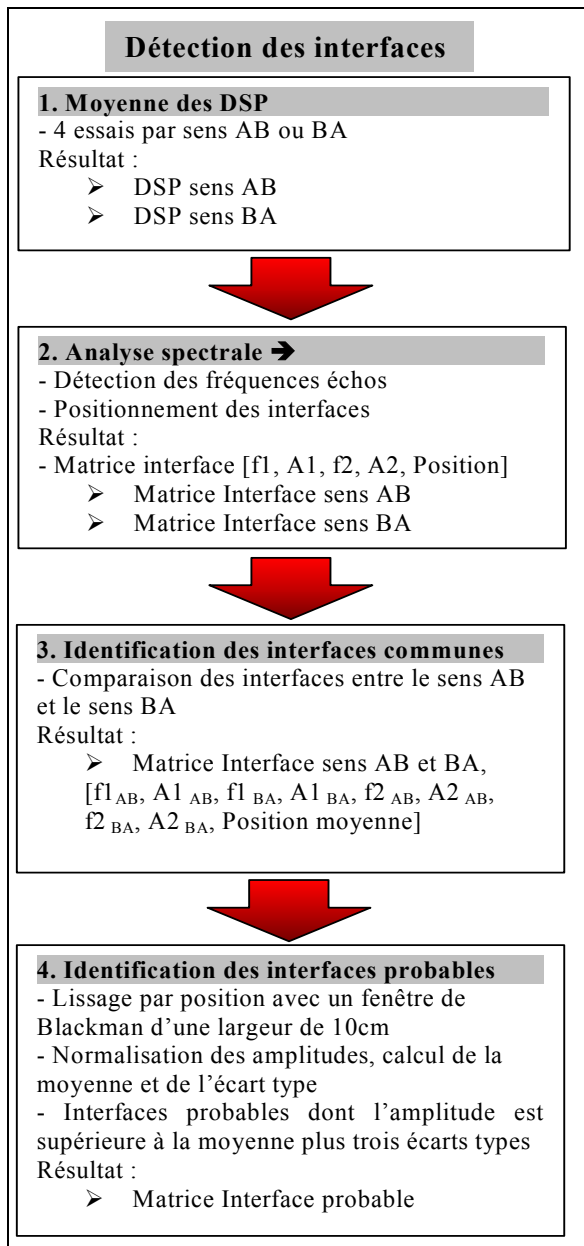


Figure 166 : Début du signal en entrée (cercle noir, a) et du signal de sortie (cercle noir, b).



Cadre 2 : Synopsis de la détection des interfaces présentes dans une poutre délimitant deux milieux différents.

La troisième étape de la méthode retenue consiste à identifier les interfaces à partir des fréquences échos détectées dans le spectre de puissance (Cadre 1). Cette étape est plus précisément détaillée dans le Cadre 2.

Une fois les DSP calculées pour chaque essai, il est nécessaire de moyenner les spectres par sens afin de diminuer les incertitudes sur l'évaluation de la DSP en AB et BA (étape 1, Cadre 2). Deux spectres de puissance sont alors obtenus.

Chacun de ces spectres sont analysés indépendamment (étape 2, Cadre 2). Les fréquences échos sont détectées et les interfaces les plus réfléchissantes sont retenues (cette étape est détaillée dans le Cadre 3). La position de ces interfaces est calculée en utilisant la première fréquences écho. Le résultat de cette étape est contenu dans deux matrices des interfaces selon le sens considéré. Chaque ligne correspond à une interface ; les colonnes sont constituées par les deux premières fréquences échos (f1, f2) et leur amplitude respective (A1, A2), suivi par la position de l'interface. On rappelle que cette position est ambiguë et que l'interface peut se trouver dans la première ou la deuxième demi-poutre (§ 9.3).

Les deux matrices des interfaces sont ensuite comparées afin de ne garder que les interfaces communes (étape 3, Cadre 2). La réponse impulsionnelle de la poutre est identique quelque soit le sens de l'essai, la matière étant sollicitée par les ondes progressives dans le sens AB et BA quelque soit le sens de percussion. Les interfaces non communes aux deux matrices sont alors des artefacts dus au bruit de la chaîne d'acquisition et au traitement numérique. Le résultat de cette étape est une matrice où toutes les fréquences échos associées sont écrites et où la position de l'interface est une moyenne entre les deux positions précédemment calculées dans le sens AB et BA.

La dernière étape du Cadre 2 permet de trouver les interfaces les plus réfléchissantes. On utilise pour cela les couples [position, amplitude] de la matrice des interfaces communes. En abscisse, sont reportées les positions, et en ordonnées, les amplitudes spectrales associées et moyennées. On obtient ainsi une représentation graphique où chaque interface est représentée par un pic d'amplitude plus ou moins marquée (Figure 167).

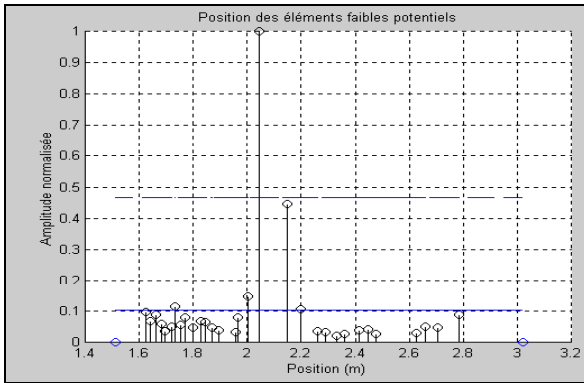
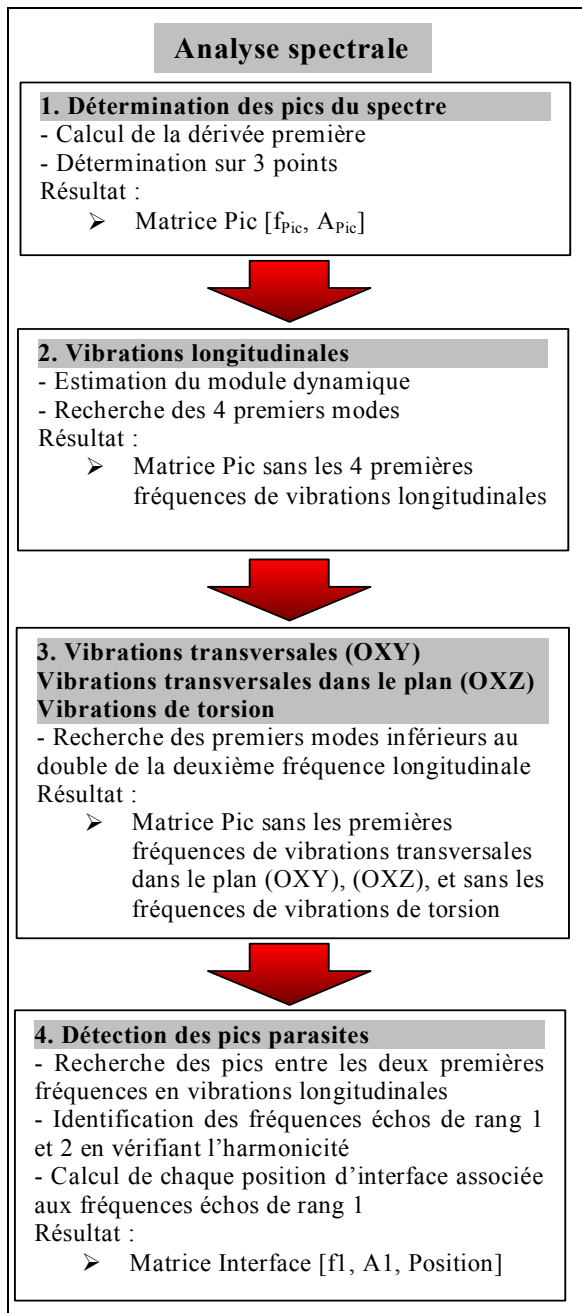


Figure 167 : Profil de réflexion des ondes propagatives, cas d'une poutre en dimensions d'emploi.

La Figure 167 illustre graphiquement un cas réel d'une poutre de pin sylvestre de longueur 3m. Sur cette figure sont représentés par des cercles noirs les interfaces probables détectées (communes aux deux sens de l'essai), les cercles bleus à 1,5m et 3m indiquent les bornes physiques de l'analyse (la demi-poutre).

La moyenne et l'écart type des amplitudes sont ensuite calculés afin de déterminer les endroits où la réflexion des ondes est la plus intense, le seuil est ici fixé à 3 écarts types (ligne continue bleue : moyenne, ligne pointillée bleue : écart type, Figure 167). L'algorithme indique également les interfaces dont l'amplitude est supérieure à la moyenne calculée.



Cadre 3 : Synopsis de l'analyse spectrale.

L'analyse spectrale détaillée au Cadre 3 constitue l'étape la plus importante de la méthode d'analyse retenue. A partir d'un spectre de puissance, des données physiques et mécaniques de la poutre testée, cette étape doit permettre d'identifier les fréquences "parasites" présentes dans le spectre ; une partie de ces fréquences "parasites" étant des fréquences échos issues d'hétérogénéités réelles.

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer l'ensemble des pics du spectre fréquentiel (étape 1, Cadre 3). Nous adopterons la définition suivante : un pic est ici caractérisé uniquement par son sommet, mathématiquement il est donc défini par un maximum local de la courbe (spectre fréquentiel). La recherche des extrema locaux est réalisée en étudiant le signe de la dérivée première à droite (Rade et Westergren, 1999).

La deuxième et la troisième étape du Cadre 3 ont pour objet l'identification des fréquences propres de la structure selon ces principaux modes de déformations (compression, flexion, et torsion). L'essai vibratoire est réalisé en vibrations longitudinales, cependant il est par exemple possible d'observer des vibrations transversales avec un microphone ou un accéléromètre (chapitre III). La structure vibre selon tous ces modes de déformation, mais avec une grande partie de l'énergie associée aux vibrations longitudinales. L'emploi d'un microphone apparaît ici comme nécessaire car il est moins directionnel que l'accéléromètre et permet donc de mieux observer l'ensemble des modes de déformation. Ces modes sont alors plus facilement identifiables.

L'identification des fréquences de vibrations en compression, flexion, et torsion se fait de la même manière. En vibrations longitudinales, le module dynamique est estimé à partir du temps de propagation. Cette valeur approchée permet de conjecturer les valeurs de référence des fréquences de vibration. L'intervalle de recherche de ces fréquences se déduit en supposant une erreur sur le module dynamique de $\pm 50\%$. Dans chaque intervalle de recherche, tous les pics présents sont listés, puis les écarts quadratiques par rapport à la valeur de référence sont calculés et normalisés entre 1 et 2.

Les amplitudes associées aux pics sont également normalisées entre 1 et 2. En calculant le ratio écart-quadratique sur amplitude, on obtient une grandeur qui est minimale pour la fréquence réelle recherchée. Cette méthode est un moyen simple de prendre en compte à la fois la distance en fréquence, mais aussi l'amplitude des pics dans la recherche des fréquences propres de vibration.

Lorsque la première fréquence de vibrations longitudinales est trouvée, la valeur du module dynamique est calculée. C'est cette valeur qui servira à la recherche des 3 autres fréquences de vibration. La recherche porte seulement sur 4 fréquences car les fréquences échos de rang 1 sont identifiées entre la première et la deuxième fréquence propre, en supposant l'harmonicité des fréquences respectée selon la relation $f_n = n \times f_1$ (chapitre I), les fréquences échos de rang 2 doivent donc se trouver entre f_2 et $2 \times f_2 = f_4$.

En vibrations transversales, les valeurs mécaniques des modules d'élasticité et de cisaillement sont utilisées pour conjecturer les valeurs de référence des fréquences vibration en utilisant la solution de Bordonné au modèle de Timoshenko (chapitre I). Les 50 premières fréquences sont calculées puis la population est décimée de façon à ce que la fréquence maximale soit inférieure à la quatrième fréquence de vibrations longitudinales (il reste pour une poutre de 3000x150x50 environ 10 fréquences à rechercher). Les fréquences de vibrations transversales sont recherchées de la même manière que les fréquences longitudinales.

En vibrations de torsion, le module de cisaillement de torsion est pris égal à la moyenne des modules de cisaillement déduit des deux essais en vibrations transversales. La constante de torsion est calculée par interpolation de type spline cubique (Harris et Stocker, 1998) sur les valeurs du Tableau 27 au chapitre II. Les fréquences de vibrations de torsion sont ensuite recherchées de la même manière que les fréquences transversales.

Une fois l'ensemble des fréquences de vibration de structure identifiées, les pics "parasites" restant entre la première et la deuxième fréquence longitudinale sont listés. Parmi ces pics se trouvent les fréquences échos de rang 1 que l'on souhaite identifier. On fait l'hypothèse que la relation entre les fréquences de vibrations longitudinales est applicable aux fréquences échos pour les rangs 1 et 2, la fréquence écho de rang 2 est alors égale à 2 fois la valeur de la fréquence écho de rang 1. Les valeurs des fréquences échos de rang 2 sont ainsi évaluées, puis ces fréquences sont recherchées dans le spectre entre la deuxième fréquence longitudinale et le double de cette fréquence avec une tolérance fixée à 1%. On obtient ainsi un ensemble de couple de fréquences échos traduisant la présence probable d'interfaces dans la poutre. Les positions l_1 de ces interfaces sont calculées en utilisant la relation suivante :

$$\text{Eq. 297 } l_1 = \frac{V_{f1}}{2f_{1\text{echo}}}$$

Avec $f_{1\text{echo}}$: fréquence écho de rang 1, V_{f1} : vitesse de propagation associée à la première fréquence longitudinale.

L'ensemble des illustrations du Cadre 1, Cadre 2, et Cadre 3, donne une vue d'ensemble de la démarche d'analyse utilisée. L'objectif de l'écholocalisation n'est pas de faire de la cartographie, ni d'établir de manière précise la position des interfaces entre les différents milieux traversés par les ondes propagatives. En raison de l'ambiguïté de position de la méthode, de la très faible influence du phénomène "écho" dans le spectre par rapport aux fréquences de vibration de la structure (§ 9.4.3), de la possibilité d'erreurs dans l'identification des fréquences de vibrations, le résultat de l'écholocalisation pourra s'énoncer ainsi : « compte tenu de la lecture des différents spectres des essais effectués, la présence d'une hétérogénéité est probable dans une zone de la demi-poutre considérée, avec une incertitude sur la distance de l'ordre de 10 cm ».

10 VALIDATION EXPERIMENTALE

10.1 Matériel et méthode

10.1.1 Matériel végétal

Deux essences de densité moyenne ont été sélectionnées (Tableau 58). Les éprouvettes de pin de Parana destinées aux essais sont issues de débits en plot (planche proche de la périphérie). Ces éprouvettes sont, pour autant que possible, prismatiques, de droit fil, sans nœud, ni défaut. Elles sont prélevées de telle manière que les cernes d'accroissement aient une courbure négligeable et soient, pour autant que possible, parallèles à la direction tangentielle du bois. Le sens longitudinal est colinéaire à l'axe longitudinal des éprouvettes. Les dimensions finales des éprouvettes de pin de Parana sont 4260x270x45 mm et 2130x270x45 mm, après conditionnement jusqu'à stabilisation à une humidité théorique de 12 %. Une de ces éprouvettes a précédemment été utilisée pour l'étude expérimentale du chapitre III.

Les éprouvettes de pin sylvestre font partie d'un lot de 20 poutres en dimensions d'emploi de qualité "tout venant". Elles ont été choisies en fonction de la présence d'hétérogénéités (principalement des nœuds) en faible nombre et très marquées, telles que des nœuds non adhérents de dimensions importantes se retrouvant sur les deux faces. Les dimensions finales des poutres de pin sylvestre sont 3000x150x50 mm, après conditionnement aux valeurs standards de $(20 \pm 2)^\circ\text{C}$ et $(65 \pm 5)\%$ d'humidité relative, jusqu'à stabilisation à une humidité proche de l'humidité de référence de 12%. Le sens longitudinal est colinéaire à l'axe longitudinal des poutres.

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm^3)	Dimensions finales (mm)	Nombre d'éprouvettes
Pin de Parana	Brésil	<i>Araucaria angustifolia</i>	0,54	4260x270x45 2130x270x45	1 1
Pin sylvestre	France	<i>Pinus sylvestris</i>	0,52	3000x150x50	3

Tableau 58 : Caractéristiques des essences sélectionnées.

10.1.2 Démarche expérimentale

L'objectif de l'expérimentation est double. Il s'agit dans un premier temps de mettre en évidence la présence d'échos et de mieux comprendre leur nature (§ 9.4.3). Dans un second temps, il s'agit de tester l'efficacité de la méthode d'analyse retenue et décrite au paragraphe 9.5. Les deux poutres de pin de Parana, sans défaut apparent, sont utilisées pour observer la présence d'échos causés par une absence de matière. Ces deux poutres ajoutées aux trois poutres de pin sylvestre servent ensuite à tester la méthode d'analyse par écholocation. Concernant le pin de Parana, les essais destinés à l'écholocation sont réalisés avant le perçage des cavités sur des poutres sans défaut apparent.

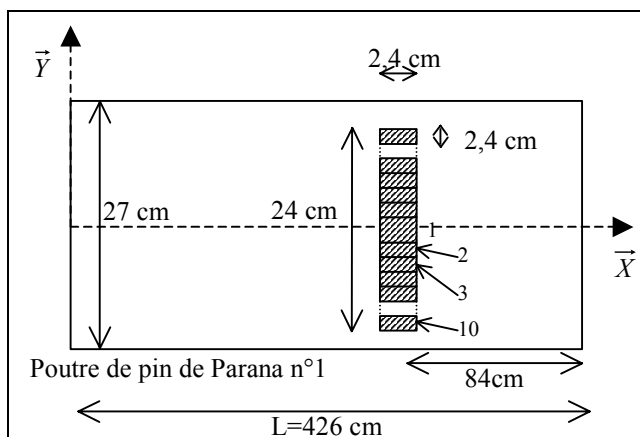


Figure 168 : Plan de découpe des cavités dans la poutre de pin de Parana n°1.

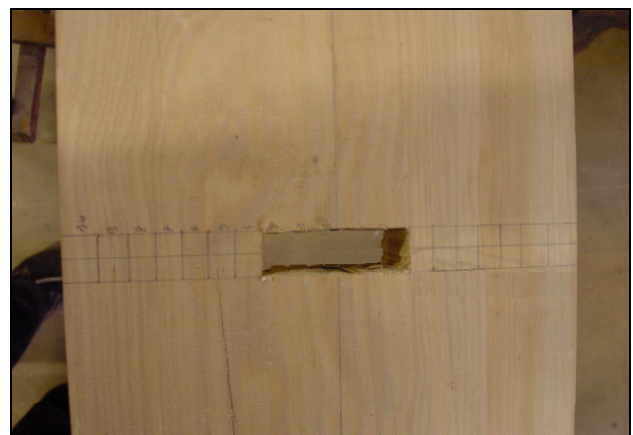


Figure 169 : Détail des découpes réalisées, poutre de pin de Parana n°1.

Dans la première poutre de pin de Parana, d'environ 4 m de long, une cavité est percée. Les dimensions de la cavité sont de 2,4x2,4 cm et sa position est de 84 cm par rapport à l'extrémité de la poutre. La cavité est ensuite progressivement agrandie par pas de 2,4 cm dans le sens de la largeur de la poutre (Figure 168). L'opération de perçage est renouvelée 9 fois alternativement de part et d'autre de la cavité précédente. La taille finale de la cavité est de 24 cm environ. Le choix d'une cavité pour observer la présence d'échos s'explique par le fait que l'interface air-bois est très réflexive, les impédances acoustiques des deux milieux étant très différentes (Sapriel, 1994). La Figure 169 montre la première poutre en cours d'expérience.

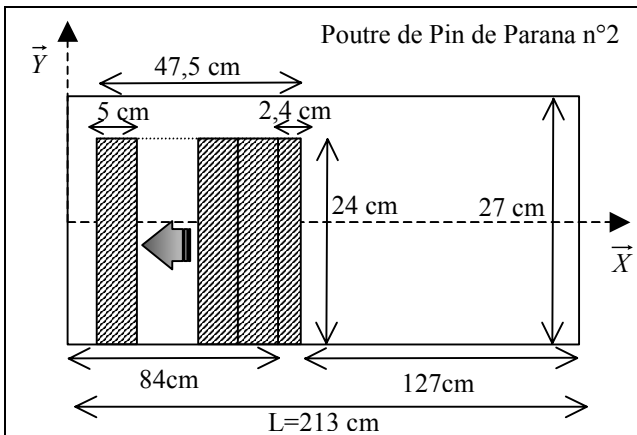


Figure 170 : Plan de découpe dans la poutre de pin de Parana n°2.

Dans la deuxième poutre de pin de Parana, d'environ 2 m de long, une cavité est percée dans le sens de la largeur. Elle a pour dimensions 24x2,4 cm, sa position est de 84 cm par rapport à l'extrémité, et sépare la poutre en deux morceaux couplés par une unique liaison (Figure 170). La deuxième poutre est environ deux fois moins longue que la première afin de mieux observer la présence éventuelle des échos. Les fréquences propres de la poutre n°2 sont effets deux fois plus élevées que celles de la poutre n°1, d'où une énergie réfléchie plus importante pour les hétérogénéités considérées (§ 9.4.3). La cavité est ensuite progressivement agrandie par pas de 5 cm dans le sens de la longueur de la poutre (Figure 170). L'opération de perçage est renouvelée 9 dans le sens du morceau le plus long. La taille finale de la cavité est de 47,5 cm environ. La Figure 171 et la Figure 172 montrent la deuxième poutre à l'état final, en fin de perçage.

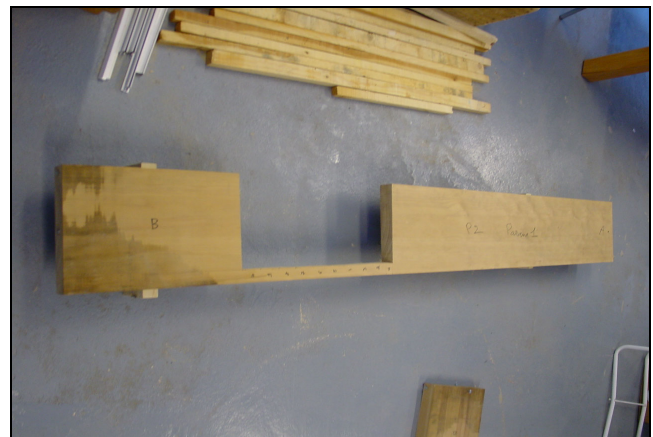


Figure 171 : Vue d'ensemble de la poutre de pin de Parana n°2 après découpe.

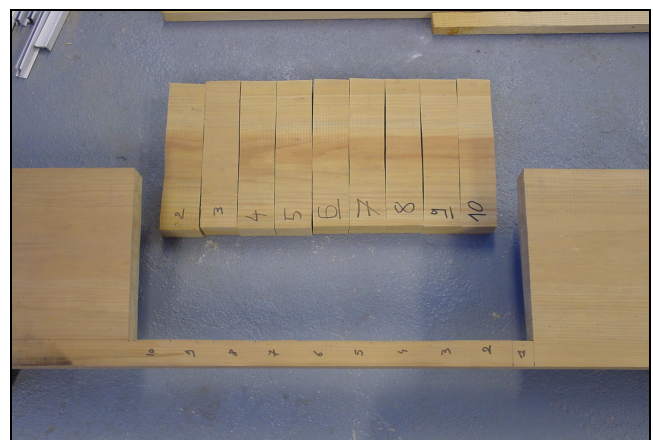


Figure 172 : Détail des découpes réalisées, poutre de pin de Parana n°2.

Les poutres de pin sylvestre et de pin de Parana sont testées en vibrations longitudinales. La réponse vibratoire de chaque poutre est captée par un microphone. Les essais sont réalisés avec deux orientations possibles AB ou BA selon le sens de percussion donnée avec le marteau – force. Pour chaque orientation d'essai, AB ou BA, 4 répétitions de la mesure vibratoire sont effectuées. Concernant les deux poutres de pin de Parana, les 8 mesures vibratoires sont renouvelées après chaque perçage. L'ensemble des essais expérimentaux est présenté de manière synthétique à la Figure 173.

10.1.3 Essais vibratoires

La méthode d'écholocation est basée sur l'analyse des signaux d'entrée et de sortie des essais de vibrations longitudinales. Ces essais sont réalisés de la même manière qu'au chapitre III. Le mode opératoire est ici brièvement rappelé. La poutre est pesée et mesurée. Pour la hauteur et la largeur, une moyenne sur trois positions équidistante est effectuée. Puis la poutre est mise en place sur les deux supports élastiques. Le microphone est ensuite placé à l'une des extrémités. Une percussion est donnée avec le marteau – force sur l'extrémité libre de l'éprouvette, par l'intermédiaire d'une vis tire-fond solidaire de la structure testée, en veillant à ce que les vibrations soient le plus libre possible. La mesure est réitérée 4 fois pour chaque configuration testée (sens AB et BA). Au total 8 essais par poutre sont réalisés.

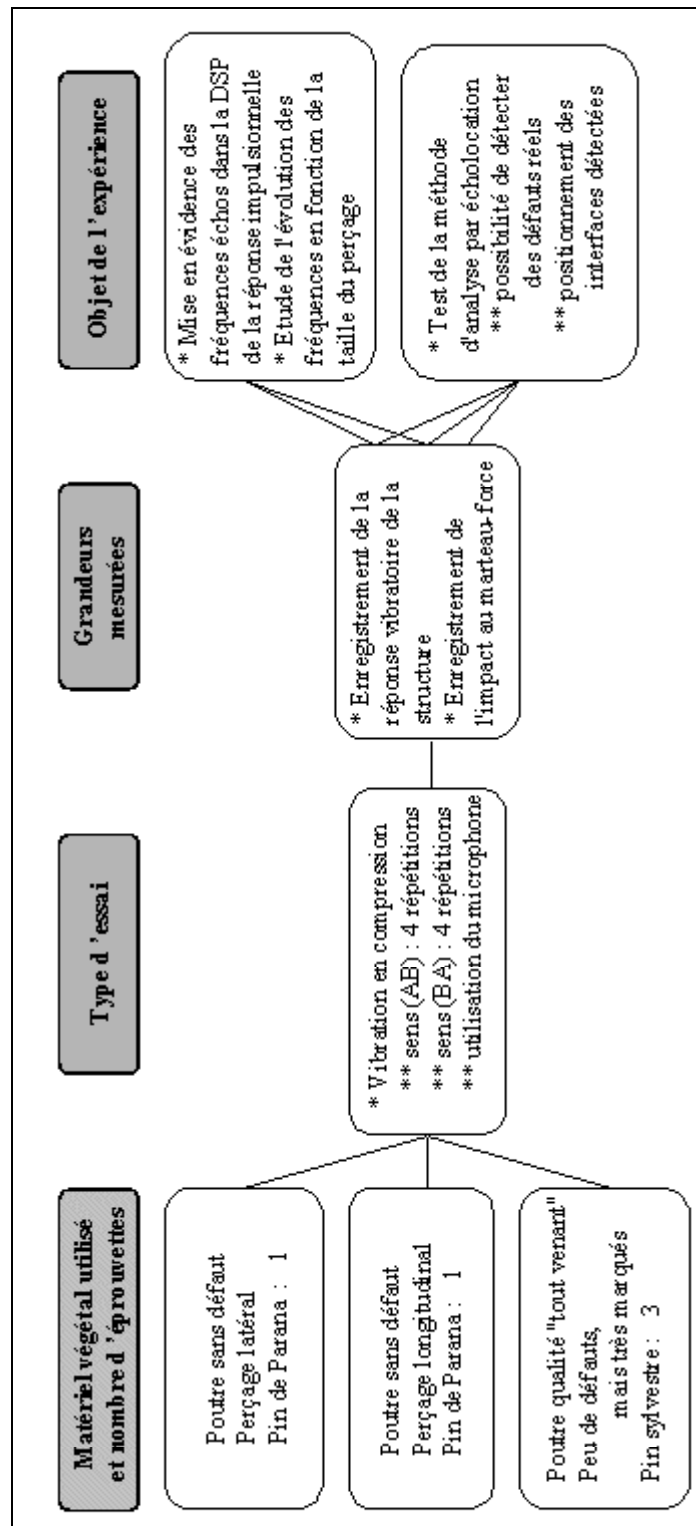


Figure 173 : Présentations des essais expérimentaux réalisés.

10.2 Résultats synthétiques et analyses

10.2.1 Etude phénoménologique des échos

L'objet de ce chapitre est la mise en évidence expérimentale des fréquences échos causées par la présence d'un défaut artificiellement crée dans une poutre. Ce défaut est caractérisé par des interfaces très réfléchissantes car il est constitué par une absence de matière (perçage dans la poutre). Plusieurs perçages ont été réalisés (§ 10.1), suivis par des essais vibratoires par percussion dans le sens longitudinal de la poutre. Connaissant le signal d'entrée, percussion du marteau - force, et de sortie, réponse vibratoire de la poutre, la fonction de transfert du système "poutre" est évaluée par déconvolution (Annexe 2). Le module de la fonction de transfert est élevé au carré pour obtenir la densité spectrale de puissance DSP (Annexe 1). L'étude phénoménologique que l'on se propose de réaliser porte sur l'analyse de l'évolution de la DSP lorsque la taille de la cavité augmente. Les amplitudes des courbes d'évolution sont représentées en échelle logarithmique (Figure 174, Figure 176, Figure 177, Figure 184, et Figure 185).

10.2.1.1 Absence de matière dans le sens de la largeur de la poutre

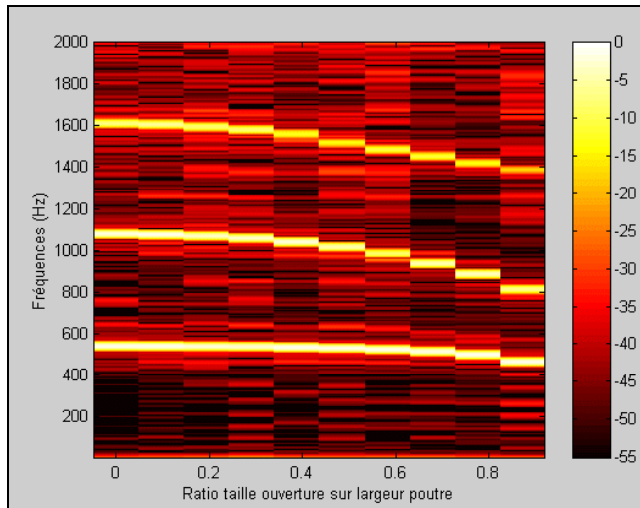


Figure 174 : Evolution de la densité spectrale de puissance de la réponse impulsionnelle d'une poutre de pin de Parana caractérisée par la présence d'une cavité dont la taille augmente dans le sens de la largeur, amplitude en échelle logarithmique, capteur microphone.

La Figure 174 représente l'évolution de la DSP de la réponse impulsionnelle de la poutre en pin de Parana dont la cavité est orientée dans le sens de la largeur. Sur cette figure, se distinguent nettement les trois premières fréquences en vibrations longitudinales. Lorsque la cavité est absente, les trois fréquences ont pour valeur respective : $f_1=542$ Hz, $f_2=1078$ Hz, et $f_3=1610$ Hz (Figure 174). Le module d'élasticité dynamique en vibrations longitudinales se déduit de la première fréquence propre (Eq. 12), et a pour valeur : 11777 MPa.

Lorsque la taille de la cavité augmente, on observe un glissement de ces fréquences de vibration jusqu'à atteindre les valeurs : $f_1=466$ Hz, $f_2=813$ Hz, et $f_3=1388$ Hz. Le glissement des fréquences propres de vibration s'explique en considérant la cavité comme l'élément faible de la poutre. On trouve en effet des décalages de fréquences similaires au paragraphe 2.2.2 du chapitre I.

Connaissant la vitesse de propagation de l'onde de pulsation f_1 dans la poutre sans défaut et la position de la cavité, la valeur de la première fréquence écho peut être évaluée à environ 680 Hz lorsque la cavité est de petite taille, la valeur de f_1 étant voisine de celle de f_1 sans défaut (Eq. 277). La valeur de la deuxième fréquence écho est évaluée de la même manière à environ 1360 Hz. Il est cependant impossible d'observer de manière distincte des pics échos au voisinage des valeurs calculées dans les spectres de la Figure 174.

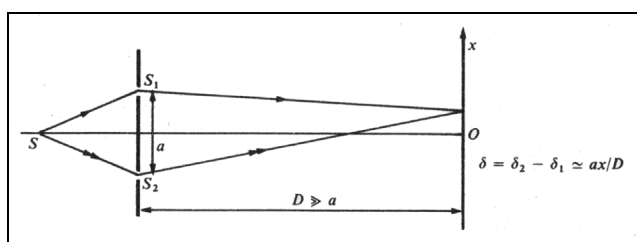


Figure 175 : Dispositif des fentes d'Young (Renault, 1985).

Deux hypothèses permettent d'expliquer ce phénomène : (1) Compte tenu de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde associées aux deux premières fréquences propres (de 5m à 10m, Tableau 57) et des résultats illustrés à la Figure 156, la partie réfléchie de l'onde incidente par l'interface de la cavité est trop faible pour pouvoir être observée avec les moyens métrologiques mis en oeuvre. (2) La cavité est symétrique par rapport au grand axe de la poutre (axe OX, Figure 168), ce qui laisse deux ouvertures par lesquelles les mouvements de matière sont transmis. L'essai est alors analogue à l'expérience des fentes d'Young en optique (Figure 175).

Le dispositif des fentes d'Young est conçu pour pouvoir observer des franges brillantes d'interférence distantes de Δl telle que : $\Delta l = \lambda D/a$. Sur le grand axe SO, les ondes issues de S_1 et S_2 se superposent et des franges brillantes sont observées au point O. Dans le cas présent, aux échos de très faibles amplitudes provenant de l'interface s'ajoutent les deux paquets d'ondes, de fortes amplitudes, provenant des deux ouvertures (analogues de S_1 et S_2 à la Figure 175). Les échos ne peuvent alors être observés car ils sont d'amplitude trop faible par rapport à la somme des amplitudes de l'onde de fréquence f_1 par exemple.

10.2.1.2 Absence de matière dans le sens de la longueur de la poutre

Afin de compléter les observations du paragraphe 10.2.1.1, et si possible de palier aux lacunes de l'expérience précédente (longueur d'onde incidente trop grande et phénomène d'interférence), des essais vibratoires ont été réalisés sur la poutre de pin de Parana dont la cavité est orientée dans le sens de la longueur. La Figure 176 et la Figure 184 représentent les évolutions spectrales ainsi obtenues. Ces évolutions sont très différentes de celles obtenues à la Figure 174, même lorsque la cavité de la poutre 2 a la même taille qu'à la poutre 1 (24x2,4cm). Les évolutions des pics de fréquence sont nettement marquées jusqu'à environ 2000 Hz (Figure 184). A partir de cette valeur les modes de vibration se recouvrent et la lecture des spectres devient très difficile.

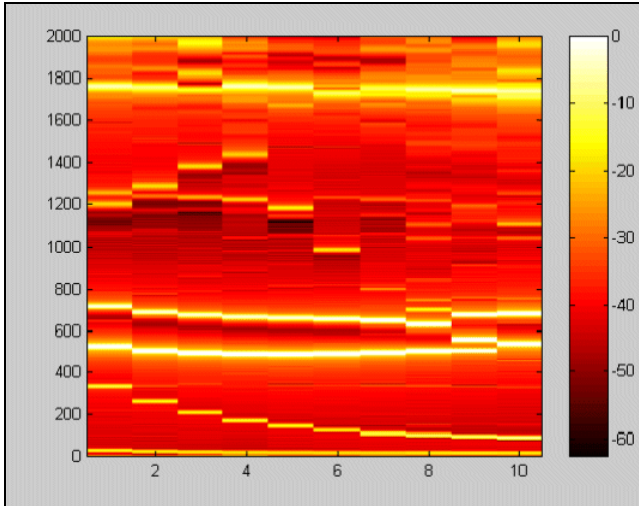


Figure 176 : Evolution de la densité spectrale de puissance de la réponse impulsionnelle de la poutre n°2 dans la gamme 1Hz - 2000 Hz, échelle logarithmique, capteur microphone.

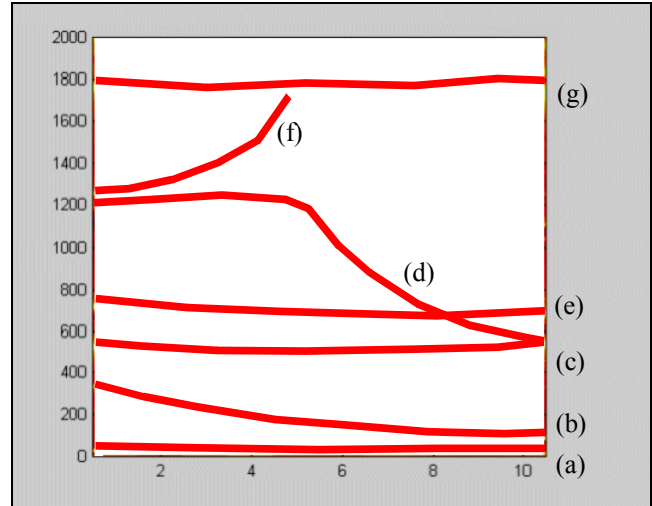


Figure 177 : Evolutions schématiques des pics de fréquence les plus marqués de la Figure 176.

La Figure 177 représente schématiquement les évolutions des pics de fréquence les plus marqués qui se trouvent dans les spectres réels de la Figure 176. Ces évolutions constituent une lecture des différents essais réalisés. L'essai n°1 correspond à la présence du premier perçage, et l'essai n°10 correspond au perçage final de la cavité. Sur la Figure 177, on distingue 7 évolutions distinctes dont les pics en fréquence sont identifiés par des lettres allant de (a) à (g).

La première fréquence de vibrations longitudinales est identifiée comme étant le pic de plus haute amplitude et correspond à la lettre (c) avec une valeur de 526 Hz (essai n°1). La deuxième et troisième fréquence sont identifiées aux lettres (d) et (g) avec des valeurs de 1203 Hz et 1761 Hz (essai n°1). Cette hypothèse est confirmée en considérant les décalages en fréquence prévus (§ 1.2.6). Avec un défaut situé à 40% de la longueur totale, la première fréquence est plus décalée que les fréquences deux et trois dont les décalages respectifs sont équivalents (Figure 18, chapitre I). Les trois premières fréquences de vibration de la poutre sans cavité ont été mesurées et ont pour valeur $f_1=1082$ Hz, $f_2=2165$ Hz et $f_3=3247$ Hz. Les ratios fréquence avec cavité sur fréquence saine sont alors de 0,49 pour le premier mode, 0,56 pour le second, et 0,54 pour le troisième. On retrouve bien les relations d'ordre attendues dans les décalages en fréquence.

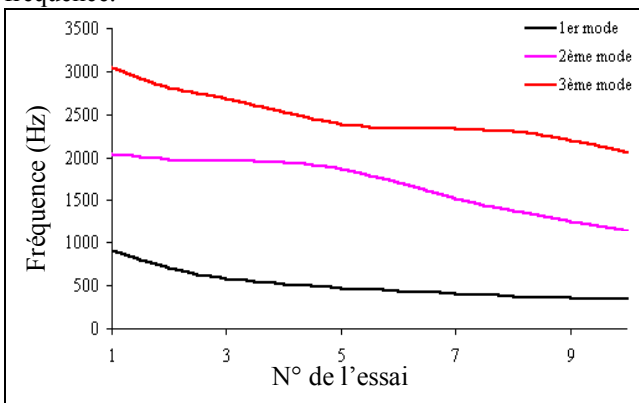


Figure 178 : Simulation numérique de l'évolution des trois premières fréquences de vibrations longitudinales d'une poutre en fonction de la taille de l'élément faible.

Les évolutions des fréquences de rang 1 et 3 de vibrations longitudinales identifiées (c et g, Figure 177) ne correspondent pas aux résultats obtenus par simulation numérique (Figure 178). Pour réaliser la simulation, le modèle analytique avec un élément faible en vibrations de compression précédemment développé est utilisé (§1.2.6). La longueur est de 2,13 m, le module sain est de 11777 MPa, le module de l'élément faible est fixé arbitrairement à 600 MPa. Les positions de l'élément sont identiques à celles de l'expérience réalisée, la première position est de 84 cm, la deuxième position va de 86,4 cm à 131,4 cm par pas de 5 cm. En comparant la Figure 177 et la Figure 178, on observe en effet que seule la fréquence de rang 2, identifiée (d), suit une évolution explicable par le modèle analytique.

Les fréquences de rang 1 et 2 décroissent en début d'expérience, mais la tendance s'inverse pour terminer à des valeurs quasiment inchangées par rapport à celles de l'essai n°1 (Figure 177). Ce phénomène est difficilement explicable, une hypothèse probable est qu'en continuant le perçage dans le sens longitudinal, la poutre ne sera plus constituée que d'un morceau relativement massif dont émerge à une extrémité un morceau de petite section ; les fréquences vont par conséquent tendre vers les fréquences de cette structure particulière.

Les évolutions décroissantes des pics de fréquences (a) et (b) de la Figure 177 sont constituées par le premier mode de vibration de flexion à plat pour (a), et de vibration sur champ pour (b). En se référant à l'essai n°1, la fréquence (a) est de 30 Hz, et la fréquence (b) de 335 Hz. Ces valeurs correspondent aux ordres de grandeur rencontrée avec la poutre sans cavité. En vibrations de flexion à plat, l'ordre de grandeur du premier mode est en effet de 50 Hz. En vibrations de flexion sur champ, le premier mode est de l'ordre de 300Hz, alors qu'il est de 140 Hz environ pour le premier mode de torsion. La fréquence de rang 1 de torsion ne peut alors correspondre au pic (b), cependant l'harmonique de rang 2 est de l'ordre de 300 Hz et peut se superposer avec le rang 1 en flexion sur champ.

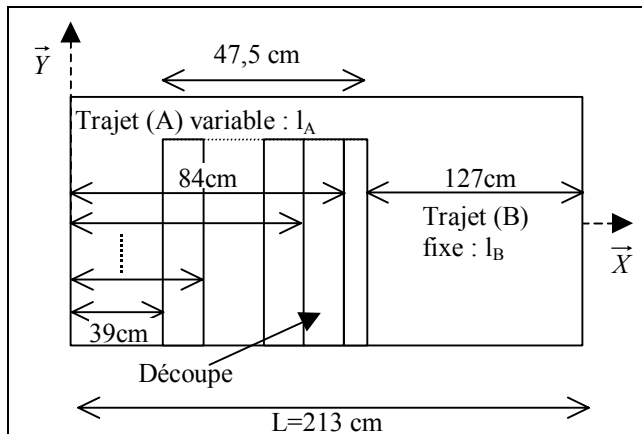


Figure 179 : Schématisation des trajets parcourus par les ondes propagatives longitudinales dans la poutre de pin de Parana n°2.

Sur la Figure 177, les pics de fréquence (e) et (f) restent à être identifier. L'évolution du pic (f) se caractérise par une forte croissance, allant de 1257 Hz pour l'essai n°1 à plus de 1400 Hz pour l'essai n°4. A partir du quatrième essai, le pic (f) devient difficilement observable. Cette évolution croissante correspond bien à une fréquence écho de rang 1 dans le sens où la cavité s'allonge, le trajet de l'onde provoquant ce type d'écho est marqué par un (A) sur la Figure 179. En utilisant la formule classique (Eq. 277), qui reste cependant très approximative dans notre cas (les phénomènes de couplage des différentes vibrations ne sont en effet pas pris en compte), on s'attend bien à une augmentation de la fréquence qui dépend de l'inverse de la distance parcourue par l'onde dans le matériau.

Le pic de fréquence (e) suit une évolution parallèle à celle de la première fréquence de vibrations longitudinales de la structure (c, Figure 177). En se référant à l'essai n°1, la valeur de ce pic de fréquence est de 717 Hz. Le pic (e) correspond à une fréquence écho de rang 1 pour le trajet (B) sur la Figure 179. Comme pour le pic (f), la valeur en fréquence de ce pic peut en effet être estimée en utilisant l'équation (Eq. 277), le calcul est ici détaillé pour les pics (e) et (f) dans le cas de l'essai n°1 :

$$\text{Eq. 298} \quad \left. \begin{array}{l} f_1 = 526 \text{ Hz} \Rightarrow V_{f_1} = 2240 \text{ m/s} \\ l_B = 1,27 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow f_{\text{echo}(B)1} \approx \frac{V_{f_1}}{2l_B} = 882 \text{ Hz}$$

$$\left. \begin{array}{l} V \approx 2240 \text{ m/s} \\ l_A = 0,84 \end{array} \right\} \Rightarrow f_{\text{echo}(A)1} \approx \frac{V}{2l_A} = 1333 \text{ Hz}$$

Les valeurs des fréquences obtenues à l'équation (Eq. 298), (e) : 882 Hz et (f) : 1333 Hz, sont voisines des valeurs réellement observées (e) : 717 Hz et (f) : 1460 Hz. Il est important de rappeler que la formulation classique utilisée n'est qu'approximative dans notre cas. Une modélisation plus précise doit en effet tenir compte des mécanismes de couplage existant entre les différentes vibrations.

Afin de décrire physiquement le couplage, il convient ici de faire une analogie de comportement avec les cordes d'un piano. Nous prendrons le cas particulier de deux cordes de piano couplées par l'intermédiaire du chevalet qui est lui-même fixé à la table d'harmonie (Figure 180). Les caractéristiques mécaniques et géométriques de ces cordes sont quasiment identiques. De manière générale, il est possible de représenter les pertes et transferts d'énergie qui se produisent dans la structure composée des cordes, du chevalet, et de la table d'harmonie par la Figure 181.

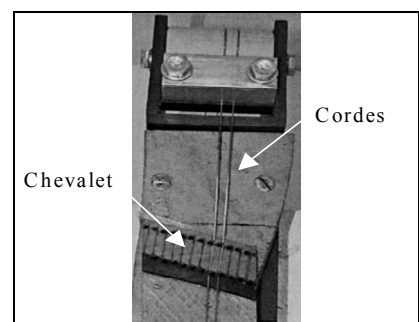


Figure 180 : Fixation des cordes au niveau du chevalet (Aramaki, 1999).

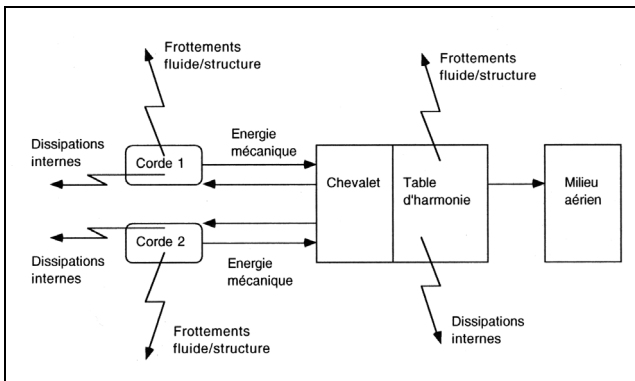


Figure 181 : Transferts et dissipation d'énergie dans le système cordes / chevalet / table d'harmonie (Aramaki, 1999).

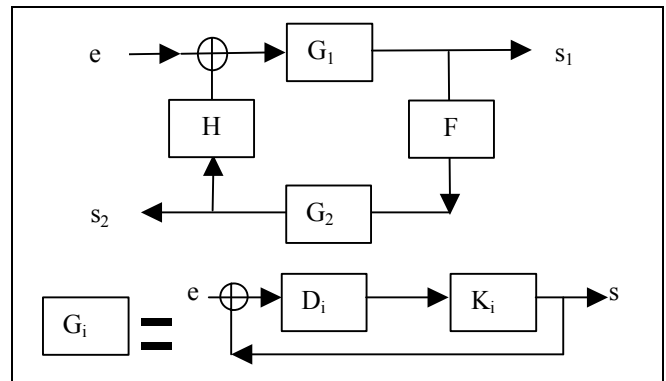


Figure 182 : Modèle propagatif pour le système couplé (Aramaki, 1999).

Les vibrations transversales de la structure cordes / chevalet / table d'harmonie sont modélisées en utilisant les modèles guide d'onde (Figure 182). Sur cette figure, les éléments G_1 et G_2 représentent les deux cordes. Ces cordes forment des sous structures, ou sous systèmes vibrants, qui possèdent leurs vibrations propres (schéma des G_i , Figure 182). Les éléments F et H , fonctions de la fréquence, décrivent les phénomènes de couplage et prennent en compte les réflexions des ondes aux extrémités. Ainsi le filtre F traduit la quantité d'énergie qui passe dans la corde excitée (G_1) à la corde non excitée (G_2) par l'intermédiaire du chevalet tandis que le filtre H traduit l'énergie qui est transférée de la corde 2 à la corde 1, en supposant que le couplage ne s'effectue que par l'extrémité des deux cordes au niveau du chevalet. (Aramaki, 1999).

Les vibrations engendrées par le modèle ainsi défini sont équivalentes à une superposition de deux séries de fréquences harmoniques (Figure 183). Il est important de préciser que les pulsations propres du système couplé sont différentes de celles d'une corde seule. (Aramaki, 1999).

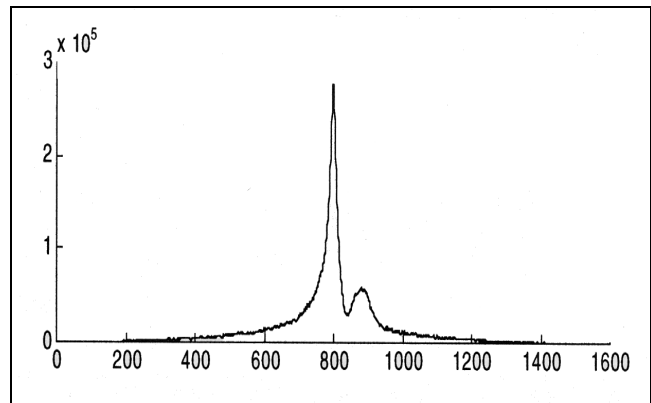


Figure 183 : Sélection du 23^{ème} doublet de raies dans le spectre de vibration de deux cordes couplées (Aramaki, 1999).

Dans le cas de la poutre en pin de Parana, les vibrations sont de type longitudinal. Cependant dans les cas d'une propagation longitudinale ou transversale, on considère des ondes plane progressive. Les observations et modèles réalisés dans le cas de cordes couplées restent par conséquent valable dans le cas d'une poutre en vibrations longitudinales. Les deux morceaux les plus massifs de la poutre sont analogues aux cordes, et le morceau de petite section reliant les morceaux massifs joue le rôle du chevalet. L'analogie entre les deux cas exemples physiques présentés ici n'est cependant pas total.

Le morceau de petite section de la poutre n'a pas seulement un rôle "d'échangeur" d'énergie de vibration. Cette petite section est partie intégrante de la poutre et n'est pas reliée à la table d'harmonie comme l'est le chevalet. Nous avons volontairement réduit notre approche au seul cas unidimensionnel, cependant dans le cas présent cette restriction ne permet plus de modéliser les vibrations de la structure "poutre" décomposable schématiquement en un système "poutre" auquel vient s'ajouter deux sous systèmes vibrants composés par les deux morceaux massifs. Dans le cas réel d'une hétérogénéité telle qu'un nœud, cette dernière va constituer un troisième sous système vibrant. D'une manière générale une poutre en dimension d'emploi comporte plusieurs hétérogénéités, d'où la difficulté d'une modélisation précise rendant compte de l'ensemble des phénomènes physiques intervenant pendant la vibration.

La Figure 176 ne permet d'observer que les fréquences échos de rang 1 des deux sous systèmes. En choisissant une représentation de l'évolution des spectres dans la gamme 1500 Hz – 3000 Hz (Figure 184), il est possible d'observer la fréquence écho du sous système de trajet (B) sur la Figure 179. Cette observation est cependant relativement difficile car à partir de 2000 Hz environ les modes de vibration se recouvrent (Figure 184). Sur cette figure seulement trois tendances peuvent être commentées. Les évolutions sont représentées schématiquement à la Figure 185 et identifiées par les lettres (g, h, i). Les pics de fréquences (g, h, i), avec des valeurs respectives de 1761 Hz, 2026 Hz, et 2350 Hz pour l'essai n°1, sont relativement stables tout au long de l'expérience. Le pic (g) a déjà été étudié et correspond à la fréquence propre de rang 3 de la poutre (Figure 177).

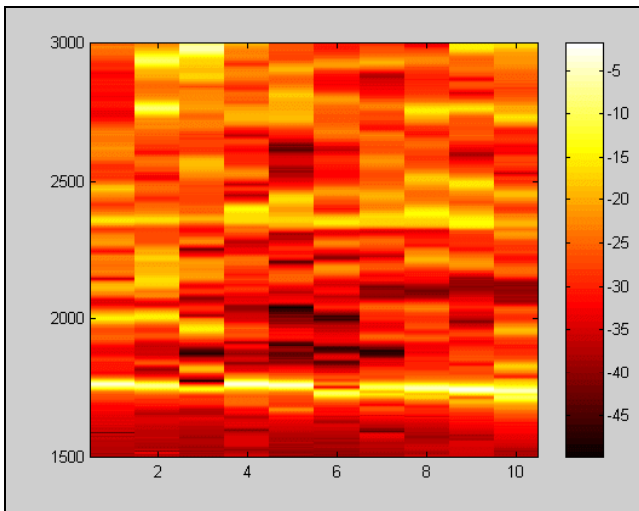


Figure 184 : Evolution de la densité spectrale de puissance de la réponse impulsionnelle de la poutre n°2 dans la gamme 1500 Hz – 3000 Hz, échelle logarithmique, capteur microphone.

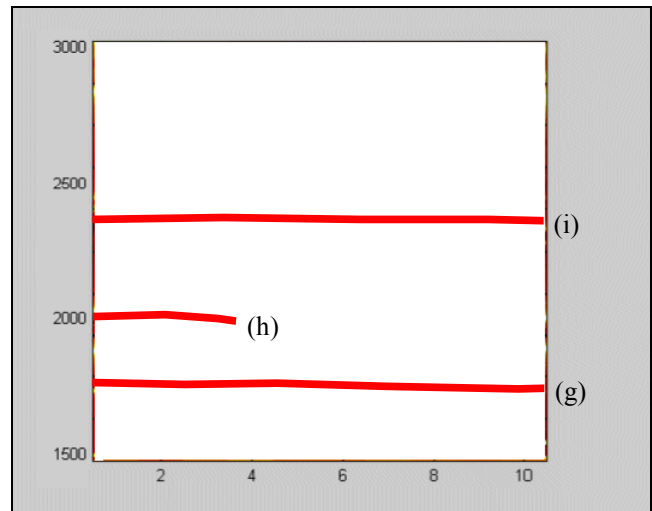


Figure 185 : Evolutions schématiques des pics de fréquence les plus marqués de la Figure 184.

Le pic (i) de la Figure 185 correspond au quatrième mode de la poutre. La valeur attendue de 2348 Hz est en effet très proche de la valeur réelle de 2350 Hz ; cette valeur "théorique" se déduit très simplement en prenant les 4/3 de la fréquence de rang 3. Le pic (h) bien que très peu lisible sur la Figure 184 semble correspondre à la fréquence écho de rang 2 du sous système de trajet (B). Un calcul approché permet de trouver la valeur théorique :

$$\text{Eq. 299} \quad \left. \begin{matrix} f_2 = 1203 \text{ Hz} \Rightarrow V_{f_2} = 2561 \text{ m/s} \\ l_B = 1,27 \text{ m} \end{matrix} \right\} \Rightarrow f_{\text{echo}(B)1} \approx \frac{V_{f_2}}{l_B} = 2017 \text{ Hz}$$

La valeur obtenue à l'équation (Eq. 299) est très voisine de la valeur réelle supposée de 2026 Hz. Il est important de remarquer que doubler la valeur de la première fréquence écho conduit à un résultat erroné de 1434 Hz. De manière empirique, on s'aperçoit qu'il est plus juste d'utiliser les valeurs de vitesse de propagation de la fréquence de rang inférieure à celle dont on souhaite avoir une valeur approchée (c'est un moyen de prendre en compte le phénomène de dispersion).

10.2.2 Application de l'écholocation sur un lot de poutres en dimensions d'emploi

10.2.2.1 Repérage des hétérogénéités, profil densimétrique

Afin de savoir si la méthode d'écholocation que nous proposons peut fournir une information utile sur la position approximative des principales hétérogénéités des structures testées, trois poutres de pin sylvestre et les deux poutres de pin de Parana précédemment testées (§ 10.2.1) ont été choisies pour l'étude. Les poutres de pin de Parana ne comportent pas d'hétérogénéité apparente. La présence de nœuds est par contre fréquemment rencontrée dans les poutres de pin sylvestre (Figure 186). Le profil de densité de chaque poutre de pin sylvestre a été obtenu en utilisant la technique de mesure par rayons X (Faust, et al., 1996 ; Adjanohoun, et al., 1998). Les mesures ont été réalisées au Centre Technique du Bois et de l'Ameublement – Pôle Construction, et consistent en un balayage en longueur des poutres par un peigne de 24 émetteurs / récepteurs, orienté perpendiculairement à l'axe de défilement de la poutre. La distance entre les capteurs du peigne est de 7 mm. Une mesure est réalisée tous les 5 mm en longueur. La Figure 187 représente un exemple de profil de densité obtenu par rayons X. La cartographie ainsi obtenue (Figure 187) ne peut cependant pas être exploitée telle quelle. Pour repérer les hétérogénéités dans le sens de la longueur des poutres, et ainsi obtenir des résultats de référence pour évaluer l'efficacité de l'écholocation, il est nécessaire de moyennner les information de densité en largeur, puis de lisser la



Figure 186 : Poutre de pin sylvestre testée par écholocation..

courbe obtenue (la fenêtre de lissage est de type Blackman d'une largeur de 10 cm). Le résultat est un profil unidimensionnel de densité (courbe noire, Figure 188) dont il est aisé de déterminer les pics (cercles rouges pleins, Figure 188). Seuls les pics d'amplitude supérieure à la densité moyenne sont retenus (seuil de la moyenne : ligne pointillée rouge, Figure 188). Les positions dans le sens de la longueur des pics ainsi obtenues constituent l'information

utile ; une constatation visuelle a de plus permis de vérifier ces positions qui correspondent à la présence de nœuds dans les poutres. Les caractéristiques physiques et les profils densimétriques des poutres de pin sylvestre testées sont regroupés à l'annexe 3.

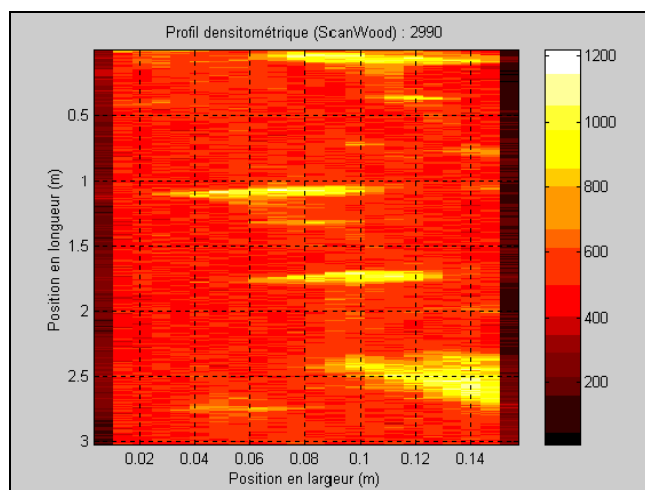


Figure 187 : Profil de densité bidimensionnel d'une poutre de pin sylvestre obtenu par mesure aux rayons X.

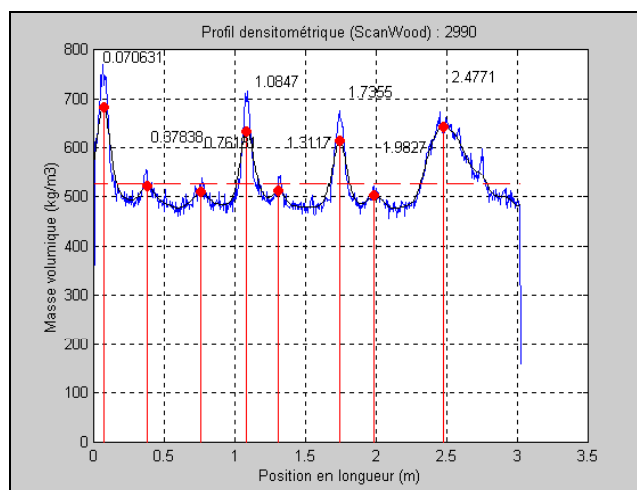


Figure 188 : Profil de densité unidimensionnel issu de la Figure 187 par moyenne en largeur (courbe bleue), puis lissage (courbe noire). Cercle rouge plein : pic de densité. Ligne pointillée rouge : seuil de densité moyenne.

10.2.2.2 Détection des interfaces par écholocation

Le Tableau 59 montre les résultats obtenus par écholocation et rayons X. Dans ce tableau, les poutres numérotées 2990, 3016, et 3020 sont en pin sylvestre. Les colonnes intitulées P_1 (m) sont les positions des hétérogénéités en mètre (à ± 10 cm près). Les positions par rayons X sont présentées ici en demi-poutre pour pouvoir être comparées à celles issues de l'écholocation (Figure 145). Les résultats détaillés des tests d'écholocation sont présentés à l'annexe 4.

N° Poutre	Analyse	P_1 (m)	P_2 (m)	P_3 (m)	P_4 (m)	P_5 (m)
Parana n°1	Echolocation	*	*	*	*	*
Parana n°2	Echolocation	1,1	1,2	1,3	*	*
2990	Rayons X	1,7	1,9	2,5	3,0	*
	Echolocation	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1
3016	Rayons X	1,5	2,2	2,4	2,5	*
	Echolocation	1,7	2,0	2,1	2,2	*
3020	Rayons X	1,6	2,2	2,4	2,5	*
	Echolocation	1,5	1,6	1,9	2,1	*

Tableau 59 : Positions des hétérogénéités en demi-poutre obtenues par écholocation et par rayons X.

Les résultats obtenus au Tableau 59 démontrent que la méthode d'écholocation n'est pas fiable même si les positions et nombre d'hétérogénéités trouvées sont souvent proches des hétérogénéités réelles. Il est important de préciser que les positions données par écholocation et par rayons X ne sont pas tout à fait comparable. L'écholocation renvoie en effet la ou les positions des interfaces bois sain / hétérogénéité, alors que l'exploitation des rayons X donne une position entre les deux interfaces (densité la plus forte). Concernant la poutre de pin de Parana n°1, le diagnostic de l'écholocation est correct puisqu'il n'y a en effet aucune hétérogénéité importante constatée visuellement (Tableau 59). En revanche, l'écholocation indique la présence de 3 interfaces alors qu'il n'existe pas d'hétérogénéité importante dans la poutre de pin de Parana n°2. Pour les trois poutres de pin sylvestre, qui ont toutes 4 hétérogénéités réelles (détectées aux rayons X), des erreurs de diagnostic sont systématiquement présentes. Concernant la poutre 2990, l'hétérogénéité positionnée à 3 m (rayons X) n'est pas détectée par écholocation et un doute existe sur l'identification de la position à 2,5 m (rayons X). Concernant la poutre 3016, les positions 2,4 m et 2,5 m (rayons X) ne semblent pas être détectées ; il en est de même pour la poutre 3020.

Les tests réalisés pour évaluer les performances de l'écholocation se sont révélés négatifs quant à l'utilisation de cette méthode pour obtenir le nombre des hétérogénéités importantes présentes dans les poutres, ainsi que leur position approximative. Plusieurs remarques permettent de comprendre pourquoi la méthode proposée ici n'est pas utilisable. Les fréquences de vibration de structure, comme par exemple les vibrations de flexion, qui possèdent peu d'énergie sont difficilement identifiables, d'autant plus que les modèles théoriques utilisés ne sont plus valables pour les harmoniques de rang élevé. Hormis les fréquences de vibrations longitudinales, la lecture du spectre obtenu est très délicate et source d'erreurs. De plus les fréquences échos ont également une énergie très faible, et le modèle théorique employé est trop simpliste au regard de l'ensemble des phénomènes de couplage se produisant réellement (§ 10.2.1.2).

BILAN DU CHAPITRE IV

La méthode d'écholocalisation développée utilise les propriétés réflexives des hétérogénéités présentes dans une poutre afin d'identifier leur nombre ainsi que leurs positions associées. Les ondes propagatives longitudinales produites par un choc à l'une des extrémités de la poutre engendrent des ondes stationnaires à l'origine des fréquences propres de la structure, mais aussi des ondes écho produisant des fréquences échos qui s'ajoutent aux fréquences propres de vibration. Cependant les fréquences propres de vibration relativement basses, de l'ordre de 1 kHz, impliquent de manière théorique que l'énergie réfléchie par les hétérogénéités est très faible comparée à l'énergie des modes propres de vibration.

L'objectif de l'écholocalisation n'est pas de faire de la cartographie, ni d'établir de manière précise la position des interfaces entre les différents milieux traversés par les ondes propagatives. En raison de l'ambiguïté de position de la méthode en demi-poutre, de la très faible influence du phénomène "écho" dans le spectre par rapport aux fréquences de vibration de la structure, et de la possibilité d'erreurs dans l'identification des fréquences de vibrations, le résultat de l'écholocalisation pourra s'énoncer ainsi : « compte tenu de la lecture des différents spectres des essais effectués, la présence d'une hétérogénéité est probable dans une zone de la demi-poutre considérée ».

Expérimentalement, la présence de fréquences échos n'a pu être mise en évidence même lorsque la cavité, orientée dans le sens de la largeur et d'une taille de 2,4 cm, sépare quasiment en deux la première poutre testée. Deux hypothèses permettent d'expliquer ce phénomène : (1) compte tenu de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde associées aux deux premières fréquences propres la partie réfléchie de l'onde incidente par l'interface de la cavité est trop faible pour pouvoir être observée, (2) la cavité est symétrique par rapport au grand axe de la poutre, ce qui peut entraîner un phénomène d'interférence, et par conséquent fortement masquer les phénomènes que l'on souhaite observer.

A partir des essais réalisés sur la deuxième poutre dont la cavité est orientée dans le sens de la longueur, la présence de fréquences échos a pu être observée. La formulation classique utilisée en écholocalisation n'est cependant qu'approximative, car elle ne tient pas compte des mécanismes de couplage existant entre les différentes vibrations. Dans le cas présent, une approche unidimensionnelle des vibrations d'une poutre ne permet plus de modéliser les vibrations de la structure décomposable schématiquement en un système poutre auquel vient s'ajouter deux sous systèmes vibrants composés par les deux morceaux de part et d'autre de la cavité.

Afin de savoir si la méthode d'écholocalisation que nous proposons peut fournir une information utile sur la position approximative des principales hétérogénéités des structures testées, trois poutres de pin sylvestre et deux poutres de pin de Parana ont été testées. Les poutres de pin de Parana ne comportent pas d'hétérogénéité apparente. La présence de nœuds est par contre fréquemment rencontrée dans les poutres de pin sylvestre. Ces tests se sont révélés négatifs. Plusieurs remarques permettent de comprendre pourquoi la méthode proposée ici n'est pas utilisable. En excitation longitudinale, les fréquences de vibration de structure, comme par exemple les vibrations de flexion, qui possèdent peu d'énergie sont difficilement identifiables, d'autant plus que les modèles théoriques utilisés ne sont plus valables pour les harmoniques de rang élevé. Hormis les fréquences de vibrations longitudinales, la lecture du spectre obtenu est très délicate et source d'erreurs. De plus les fréquences échos ont également une énergie très faible, et le modèle théorique employé est trop simpliste au regard de l'ensemble des phénomènes de couplage se produisant réellement.

Au cours des différents chapitres, des modèles analytiques associés à des techniques d'analyse vibratoire ont été développés. Ces techniques fournissent un ensemble de paramètres qui permettent de caractériser le comportement dynamique des poutres testées. Dans le chapitre suivant, ces techniques sont appliquées à l'étude de plusieurs lots de poutres afin de calibrer des modèles d'estimation de la rigidité et de la résistance à partir des paramètres non destructifs issus des analyses vibratoires. Les techniques développées et les modèles d'estimation ainsi calibrés forment une méthode d'évaluation non destructive des propriétés mécaniques statiques de référence nécessaires au classement des poutres en structure.

Chapitre V : De la théorie à la pratique, études expérimentales sur des lots représentatifs

11 INVESTIGATION SUR LE CLASSEMENT DES BOIS DE STRUCTURE AU MOYEN D'UN PROTOTYPE DE CLASSEMENT BASE SUR UNE METHODE D'ANALYSE VIBRATOIRE

11.1 Contexte

Le paragraphe 11 présente des travaux réalisés au Centre Technique du Bois et de l'Ameublement (CTBA), dans le cadre du projet « Expertise mécanique non destructive de sciages par analyse des vibrations transverses » financé par la Direction de l'Espace Rural et de la Forêt (convention DERF n°01.40.38/98) réunissant le CTBA, le CNRS-LMA, et le CIRAD-Forêt, afin d'évaluer les performances d'une technique d'analyse vibratoire développée au CIRAD-Forêt (Bordonné, 1989) en tant qu'outil de classement mécanique des sciages utilisés en structure. La méthode d'analyse testée utilise uniquement une valeur de module dynamique comme paramètre prédictif de la résistance en flexion. Un prototype industriel a notamment pu voir le jour pour démontrer la pertinence et la qualité des mesures en continu sur les produits en bois. Il nous a semblé utile de présenter ici, de manière synthétique, les résultats de ces travaux qui, d'une part, mettent en valeur la pertinence de cette méthode relativement simple et qui, d'autre part, laissent présager un potentiel de développement des techniques vibratoires par une exploitation plus poussée des signaux temporels enregistrés.

11.2 Matériel et méthode

11.2.1 Matériel végétal

Deux essences résineuses, de grande culture et de densité moyenne, ont été retenues (Tableau 60). Les poutres sont issues de sciages destinés à être utilisés comme bois de structure pour la fabrication de fermes et de fermettes. Elles ont pour dimensions 3000x150x50 mm. Les poutres de mélèze proviennent de 160 arbres dans la région Provence-Alpes-Côte-d'Azur sur 7 régions forestières différentes. Ces 160 arbres ont donné 1820 avivés en dimensions commerciales qui ont permis de réaliser les essais mécaniques. Les poutres sont conditionnées aux valeurs standards de $(20\pm 2)^\circ\text{C}$ et $(65\pm 5)\%$ d'humidité relative (EN 408, 1995), jusqu'à stabilisation à une humidité proche de l'humidité de référence de 12%.

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm ³)	Dimensions finales (mm)	Nombre d'éprouvettes
Epicéa	France	<i>Picea excelsa</i>	0,46	3000x150x50	376
Mélèze	France	<i>Larix europeae</i>	0,59	3000x150x50	1820

Tableau 60 : Caractéristiques des essences sélectionnées.

11.2.2 Démarche expérimentale

L'objectif de l'expérimentation est d'évaluer le potentiel de classement des bois de structure par une méthode vibratoire. La réglementation européenne pour la conception des structures bois, dénommée Eurocode 5 (ENV 1995 1-1 et 1995 1-2), indique les exigences de conception des structures sans fournir de données sur les propriétés de résistance et de rigidité des matériaux (Racher, et al., 2000). L'Eurocode 5 ne statue que sur les règles qui sont appropriées pour la détermination de ces valeurs. Les exigences suivantes s'appliquent aux bois de structure (Racher, et al., 2000) :

- Il doit être classer selon sa résistance, soit visuellement, soit par machine (Annexe 5).
- Le classement visuel doit être effectué selon la norme (EN 518, 1995).
- Le classement par machine doit être effectué selon la norme (EN 519, 1995).

Le système de classes de résistance établi par la norme (EN 338, 1995) donne des propriétés caractéristiques de résistance, de rigidité, et de masse volumique pour chaque classe de résistance. Les données expérimentales montrent que toutes les propriétés caractéristiques de résistance et de rigidité peuvent être calculées à partir de la résistance en flexion, du module d'élasticité longitudinal, et de la masse volumique (Racher, et al., 2000). Cette dernière remarque implique que l'affectation à une classe de résistance spécifique peut être réalisée sur la base des valeurs caractéristiques de la résistance en flexion, du module d'élasticité longitudinal, et de la masse volumique (Racher, et al., 2000). Une synthèse des démarches de classement par la méthode visuelle et par la méthode machine est présentée à l'annexe I.

Afin d'atteindre l'objectif fixé, les poutres sont préalablement testées par méthode vibratoire. Un classement visuel est ensuite réalisé, puis la résistance à la flexion et le module d'élasticité longitudinal sont déterminés en flexion statique 4 points (EN 408, 1995). Les caractéristiques mécaniques issues de l'essai de flexion 4 points constituent les valeurs de référence. A partir de ces valeurs un classement dit "optimal" correspondant au vrai potentiel mécanique des pièces peut être établi. La Figure 189 récapitule l'enchaînement des différents essais réalisés.

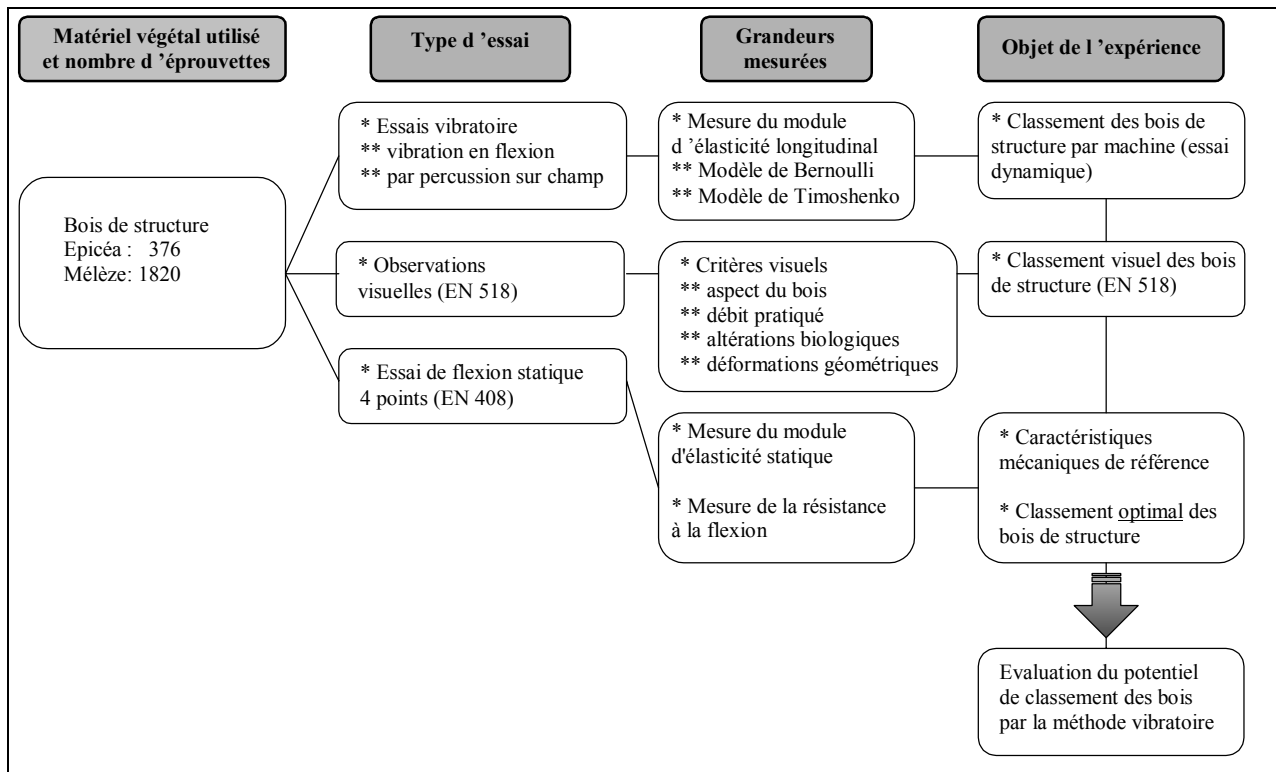


Figure 189 : Présentation des essais expérimentaux réalisés.

11.2.3 Essai de flexion statique 4 points (EN 408)

Les dimensions, la masse volumique, et l'humidité de l'éprouvette sont préalablement déterminées. L'éprouvette repose librement (Figure 190) sur 2 appuis cylindriques rotulés (2 axes). La distance entre ces appuis est égale à 18 fois la hauteur fléchie, soit 2,7 mètres. Une force est appliquée par deux têtes de chargement, également au moyen d'appuis cylindriques, situés au tiers et au deux tiers de la portée. Des plaquettes sont insérées sur chaque appui de la pièce afin de réduire les risques de poinçonnement des appuis. La dimension des plaquettes est au moins égale à la largeur de l'éprouvette.

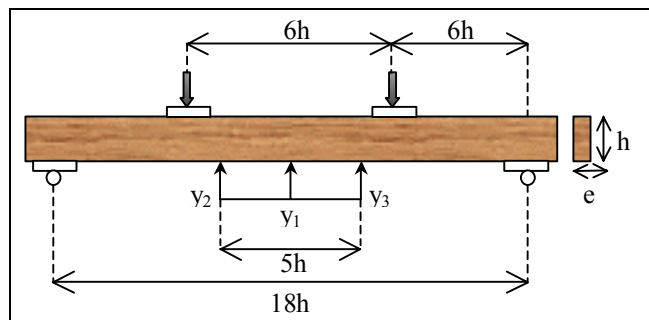


Figure 190 : Schéma du dispositif expérimental du banc de flexion statique (Annexe 6).

Un système d'antidéversement est placé au niveau des points d'appuis intérieurs. La vitesse de chargement est telle que la valeur du temps moyen jusqu'à la rupture de la pièce soit égale à 180 ± 120 s, soit $V=0,22$ mn/s pour une section de 150×50 mm². Un dispositif, formé de trois capteurs lasers (centrés entre les appuis intérieurs et séparés par 2,5 fois la hauteur, Figure 190), permet de mesurer la flèche de l'arc central, sur la face tendue de l'éprouvette, à partir de la relation suivante :

$$\text{Eq. 300 } y = y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Avec y_1 : la mesure du capteur central, y_2 et y_3 : la mesure des capteurs situés à 2,5 fois la hauteur de part et d'autre du point central.

Le module d'élasticité statique en flexion statique est calculé par régression linéaire de la courbe force appliquée – flèche y mesurée par la relation suivante :

$$\text{Eq. 301 } E_{stat} = \frac{25}{1296} \frac{D^3}{eh^3} \frac{\Delta P}{\Delta y}$$

Avec D : distance entre appuis extérieurs, e : largeur de la poutre, h : hauteur de la poutre, P : charge appliquée.

Pour une meilleure détermination, les valeurs limites des flèches prises en compte pour la régression linéaire (courbe force – déplacement) sont égales à 10% et 40% de la force maximale. Une description détaillée des matériels et de la méthode de flexion statique (EN 408) mises en oeuvre au CTBA est présentée à l'annexe 6.

$$\text{Eq. 302 } E_{stat} = \frac{3(D-a)m^2}{8eh^3} \frac{\Delta P}{\Delta y}$$

L'équation (Eq. 301), utilisée pour calculer le module d'élasticité statique, est déduite de l'équation (Eq. 302), obtenue à partir des relations classiques en résistances des matériaux, lorsque la distance entre les rouleaux de chargement est de $a=6h$, la distance entre les appuis est de $D=18h$, et lorsque la distance entre les deux capteurs inductifs opposés est de $m=5h$ (Figure 190). L'équation (Eq. 302) permet alors de calculer l'erreur relative maximisée sur le calcul du module statique (Brancheriau, 1997) :

$$\text{Eq. 303 } \frac{|\Delta E_{stat}|}{E_{stat}} = \frac{|\Delta e|}{e} + 3 \frac{|\Delta h|}{h} + 2 \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta D| + |\Delta a|}{D-a} + \frac{|\Delta k|}{k}, \text{ avec } k = \frac{\Delta P}{\Delta y}$$

Les erreurs relatives sur les paramètres du calcul sont données par les relations suivantes (source CTBA) :

$$\text{Eq. 304 } \begin{cases} \Delta e = \Delta h = \pm 0,1 \text{ mm} \\ \Delta D = \Delta a = \pm 5 \text{ mm} \\ \Delta m = \pm 1 \text{ mm} \end{cases}$$

Le coefficient directeur k, obtenu par régression linéaire dans le plan force appliquée – flèche mesurée, est connu à $\pm 2,9\%$ (moyenne obtenue sur l'ensemble des essais réalisés, issue de l'intervalle de confiance à 95% du coefficient directeur). On obtient alors l'erreur relative maximisée sur le calcul du module statique en utilisant les équations (Eq. 303) et (Eq. 304) :

$$\text{Eq. 305 } \frac{|\Delta E_{stat}|}{E_{stat}} = 4,1\%$$

L'essai de rupture s'arrête lorsqu'il se produit une chute brutale de 25% de la charge appliquée. La résistance à la flexion f_m est alors donnée par la formule suivante :

$$\text{Eq. 306 } f_m = \frac{DP_r}{eh^2}$$

Avec D : distance entre appuis extérieurs, e : largeur de la poutre, h : hauteur de la poutre, Pr : force maximale supportée par l'échantillon.

$$\text{Eq. 307 } f_m = \frac{3P_r(D-a)}{2eh^2}$$

Comme pour le calcul du module statique, l'équation (Eq. 306) est déduite de l'équation (Eq. 307) lorsque les distances a et D sont respectivement égales à 6h et 18h. L'équation (Eq. 307) permet de calculer l'erreur relative maximisée sur le calcul de la contrainte à la rupture (Brancheriau, 1997) :

$$\text{Eq. 308 } \frac{|\Delta f_m|}{f_m} = \frac{|\Delta e|}{e} + 2 \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta D| + |\Delta a|}{D-a} + \frac{|\Delta P_r|}{P_r}$$

Connaissant l'erreur relative sur la mesure de la force appliquée (1% près, source CTBA), l'utilisation des équations (Eq. 304) et (Eq. 308) permet d'obtenir l'erreur sur le calcul de la contrainte à la rupture :

$$\text{Eq. 309 } \frac{|\Delta f_m|}{f_m} = 1,9\%$$

Remarque : La masse volumique est déterminée par pesée. Les valeurs du module et de la masse volumique sont ramenées à 12 % d'humidité en application des directives de la norme EN 384. Le module est majoré de 2 % par % d'humidité quand celle-ci est inférieure à 12 %. Il est diminué dans le cas inverse. Une correction de 0,5 % d'humidité s'applique également pour la masse volumique. Au-delà de 12 %, la masse volumique est majorée et en deçà, elle est diminuée du produit de ce coefficient multiplié par l'écart d'humidité.

11.2.4 Essai vibratoire

Un prototype industriel de machine de classement des bois par méthode vibratoire a été réalisé au CTBA sur la base des travaux réalisés au CIRAD-Forêt (Figure 191). Cet appareil mesure le module d'élasticité dynamique par l'analyse du spectre des fréquences des vibrations naturelles transverses (Bordonné, 1989). Trois valeurs de module sont calculées : (1) La première valeur est déduite de la première fréquence de vibration en utilisant le modèle de Bernoulli (1748). (2) La seconde valeur est une moyenne des trois modules obtenus avec les trois premières fréquences de vibration en utilisant le modèle de Bernoulli. (3) La troisième valeur est déduite des trois premières fréquences de vibration en utilisant la solution de Bordonné (1989) au modèle de Timoshenko (1921). Les bases théoriques ainsi que le principe de l'essai dynamique sont expliqués en détail au chapitre I.

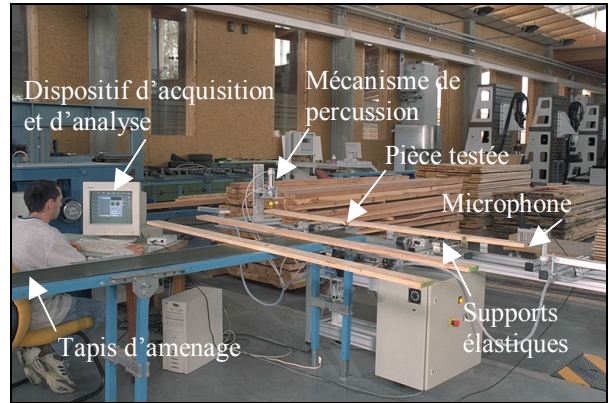


Figure 191 : Prototype industriel de mesure du module d'élasticité dynamique en vibration de flexion (source CTBA).

11.3 Résultats synthétiques et analyses

11.3.1 Cas de l'épicéa

La ruine de chaque éprouvette a été mesurée en flexion statique 4 points dont le Tableau 61 rassemble les caractéristiques mécaniques moyennes du lot. Ces caractéristiques constituent les valeurs mécaniques de référence et permettent d'établir le classement optimal des bois d'épicéa (§ 11.2.2).

<i>Epicéa</i> <i>N=376</i>	f_m (MPa)	E_{stat} (MPa)	Densité (kg/m ³)
Moyenne	39,1	11071	458
Ecart type	10,8	2617	37,1

Tableau 61 : Caractéristiques mécaniques du lot d'épicéa.

Le Tableau 62 indique les différents classements obtenus en utilisant de manière indépendante les trois valeurs de module fournies par la méthode vibratoire utilisée. Le module (EB1) est déduit de la première fréquence de vibration en flexion en utilisant le modèle de Bernoulli. Le module (EBm) correspond à la moyenne des modules obtenus en utilisant le modèle de Bernoulli sur les trois premières fréquences. Le module (ET) est la valeur obtenue d'après la solution de Bordonné au modèle de Timoshenko. Le Tableau 62 et le Tableau 63 montrent que la prise en compte du module (EBm) permet la meilleure prédiction de la qualité mécanique des bois du lot d'épicéa testé pour la méthode vibratoire. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que le module (EBm) est très influencé par les éventuels glissements en fréquence des modes propres de vibration, ces glissements résultant de la présence de singularités dans le matériau testé.

<i>Epicéa</i> <i>N=376</i>	EB1	EBm	ET
C 30	47%	56%	50%
C 24	12%		
C 18	40%	42%	49%
Rejet	1%	2%	1%

Tableau 62 : Validation croisée à partir des paramètres de la méthode vibratoire utilisée (source : CTBA).

<i>Epicéa</i> <i>N=376</i>	Optimal	Visuel	EBm	Rayons X
C 30	68%	11%	56%	56%
C 24		14%		
C 18	27%	75%	42%	41%
Rejet	5%	0%	2%	3%

Tableau 63 : Rendement des différentes méthodes de classement (source : CTBA).

Le Tableau 63 permet de comparer les rendements par méthode de classement en fonction des trois classes d'utilisation des bois en structure. Dans ce tableau une colonne grisée intitulée "Rayons X" a été ajoutée et indique le classement obtenu par une machine utilisant la technologie des rayons X (basée sur une relation entre la contrainte à la rupture et des paramètres extraits du profil de masse volumique). On rappelle ici que l'objectif du paragraphe 11 n'est pas de démontrer qu'une machine de classement est meilleure qu'une autre, mais simplement de vérifier l'aptitude d'une méthode vibratoire simple au classement des bois de structure. Le Tableau 63 permet alors d'observer que sur le lot de bois d'épicéa testé, le classement obtenu par la méthode vibratoire est très proche du classement optimal. On constate également que les classements obtenus par méthode vibratoire et méthode rayons X sont très similaires.

11.3.2 Cas du mélèze

Dans le cas de l'essai de flexion statique, les pièces n'ayant pas cassé dans leur partie médiane sont éliminées. Ainsi, sur les 1820 avivés testés en flexion, 1576 ont cassé dans leur partie médiane. Le Tableau 64 présente les résultats obtenus.

Mélèze N=1576	f_m (MPa)	E_{stat} (MPa)	Densité (kg/m ³)
Moyenne	50,0	10900	591
Ecart type	17,5	2300	50

Tableau 64 : Caractéristiques mécaniques du lot de mélèze.

Pour la méthode vibratoire et contrairement au lot d'épicéa, le meilleur prédicteur de la résistance en flexion du lot de mélèze est le module d'élasticité (ET). Cette valeur de module a donc été utilisée comme paramètre de classement. Les résultats de classement obtenus avec les différentes méthodes sont présentés au Tableau 65. Dans ce tableau, deux colonnes grisées ont été ajoutées. Ces colonnes correspondent aux classements donnés par la méthode utilisant les rayons X et par une machine de classement industriel (stress grader, flexion 3 points en continu). La Figure 192 représente graphiquement les résultats obtenus pour un classement uniquement en deux classes C24 et C18.

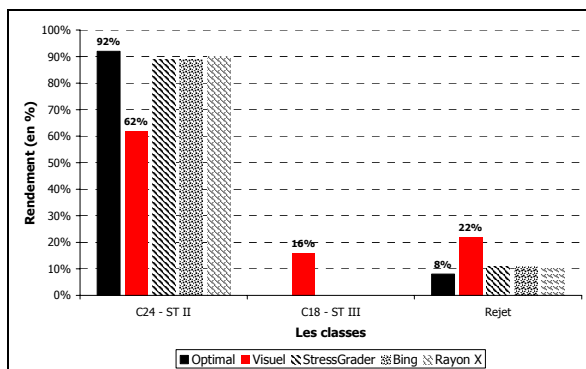


Figure 192 : Rendement des classements sur deux classes (C24-ST II ; C18-ST III).

Mélèze N=1576	Optimal	Visuel	ET	Rayons X	Stress Grader
C30	61%	13%	51%	49%	49%
C24		49%			
C18	35%	16%	48%	50%	50%
Rejet	4%	22%	1%	1%	1%

Tableau 65 : Rappel des rendements via les différentes techniques de classement (source : CTBA).

Le Tableau 65 et la Figure 192 montrent que les rendements obtenus avec les différentes méthodes de classement sont similaires aux rendements optimaux. On remarque que quelle que soit la méthode de classement utilisée la valorisation des sciages à forts potentiels mécaniques est supérieure au classement visuel. Le classement par machine semble être le plus intéressant en terme de valorisation des produits de sciage du lot testé.

11.4 Bilan du paragraphe 11

Une méthode vibratoire, par analyse modale en configuration libre-libre, a été utilisée afin de classer en résistance deux lots de bois de structure d'épicéa (376 pièces) et de mélèze (1576 pièces). Les analyses démontrent la bonne performance de cette méthode simple pour classer les bois de structure par la prise en compte des trois premières fréquences de vibration de flexion. Comparativement aux autres machines de classement, utilisant les rayons X ou la flexion statique 3 points, la méthode vibratoire donne des résultats de classement similaires.

A partir des fréquences de vibration, trois valeurs de module d'élasticité dynamique sont calculées et constituent les paramètres prédicteurs de la résistance en flexion. Chacun de ces paramètres est utilisé indépendamment des deux autres dans la prédiction. Il semble que le module dynamique moyen (modèle de Bernoulli) et le module dynamique de la solution de Bordonné (modèle de Timoshenko) soient les meilleurs estimateurs de la résistance à la flexion. D'autres investigations non présentées ici ont montré que seul le module moyen déduit du modèle de Bernoulli suffisait à obtenir

un classement acceptable au regard du classement optimal et des résultats obtenus par les machines utilisées dans l'industrie. Une remarque permet d'expliquer la pertinence du module moyen : les singularités présentes dans une poutre perturbent de manière différente selon leur rang les fréquences de vibration. Faire la moyenne des modules déduit de chaque fréquence prise individuellement revient alors à prendre en compte l'ensemble des perturbations dues à la présence de singularité dans la poutre.

Au vue des résultats, l'outil vibratoire, conçu et utilisé pour le laboratoire, peut devenir un outil de pronostic industriel de la qualité mécanique des produits testés. Ces travaux d'investigation, réalisés par le CTBA, doivent se poursuivre par une campagne d'essais sur le douglas. Cette campagne a pour but d'étalonner la machine en terme de démarche qualité en lui faisant faire l' "Initial Type Testing" (CEN/TC 124 N 338, 2000, future norme EN 519) sur la base de 1000 planches (au moins trois sections).

12 STRATEGIE D'ANALYSES MECANIQUES DES STRUCTURES ANCIENNES EN BOIS

12.1 Contexte

Dans le cadre du projet « Stratégie d'Analyse Mécanique des Structures Anciennes en Bois » présenté par le Réseau des Laboratoires Génie Civil Bois, phase 1 : validation d'outils d'estimation non destructive (END) du matériau bois à l'élément de structure, la méthode d'analyse présentée au chapitre III a pu être mise en œuvre sur un lot de poutres issues de monuments historiques au Centre Technique du Bois et de l'Ameublement de Bordeaux (CTBA). L'objectif de la phase 1 était de comparer l'efficacité de différentes méthodes d'évaluation non destructives afin d'estimer au mieux le module d'élasticité statique et la contrainte à la rupture sur des pièces en dehors de leur structure d'origine. Dans ce but, plusieurs méthodes vibratoires ont été testées.

Ce paragraphe présente les résultats obtenus, ainsi qu'un comparatif des différentes méthodes vibratoires utilisées quant à la pertinence de l'estimation de la contrainte à la rupture et du module d'élasticité longitudinal statique. Les données de référence nécessaires à l'analyse, valeurs de contrainte et de module statique, ainsi que les paramètres prédictifs issus des différentes méthodes non destructives vibratoires, ont été communiquées par le CTBA. Les résultats ainsi obtenus permettent, d'une part, de vérifier sur un cas réel et extrême du point de vue de la complexité géométrique et mécanique si la méthode présentée au chapitre III donne des résultats pertinents quant à l'estimation de la contrainte et du module statique, et d'autre part, de tenter d'apporter une explication aux différences observées entre les méthodes utilisées. Il ne s'agit pas de faire la promotion d'une méthode au détriment des autres, le cas traité ici étant très particulier.

12.2 Matériel et méthode

12.2.1 Matériel végétal



Figure 193 : Détail d'une poutre de section et de terminaison irrégulières.



Figure 194 : Détail d'une poutre comportant des sous sections pour permettre son assemblage dans une charpente.

Un lot de 53 poutres provenant de monuments historiques français a été testé. Leur origine géographique, ainsi que leur fonction en tant qu'élément de charpente, sont indéterminées. L'essence de bois dominante est le chêne (Tableau 66).

Les longueurs et sections des poutres sont variables, le lot est fortement hétérogène (Figure 193 et Figure 194). Les longueurs dominantes se situent aux environs de 2,50 m (13%) ; 3,75 m (7%) ; 5,00 m (5%). L'aire des sections droites se concentre autour de 100 cm² (14%) et varie de 75 cm² à 500 cm², la distribution ne suit pas une loi normale et est très étalée de 150 cm² à 500 cm². La masse volumique moyenne est de 620 kg/m³, variant de 475 kg/m³ à 925 kg/m³. L'estimation de la masse volumique est très fortement biaisée par la géométrie des échantillons, c'est pourquoi nous associerons par la suite tout module dynamique à son module dynamique spécifique. La distribution de l'humidité des poutres suit une loi normale centrée sur 17%, avec un écart type de 3,6%.

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm ³)	Dimensions moyennes (mm)	Nombre d'éprouvettes
Chêne	France	<i>Quercus Sp.</i>	0,62	3700x140x135	53

Tableau 66 : Caractéristiques de l'essence dominante du lot de bois testé.

12.2.2 Démarche expérimentale

Les expériences menées sur le lot de 53 poutres ont plusieurs objectifs. Il s'agit d'une part d'identifier les paramètres prédictifs, issus d'analyses vibratoires, les plus pertinents pour évaluer la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique. D'autre part d'évaluer la robustesse de la méthode d'analyse proposée au chapitre III dans le cas extrême d'un lot de bois très hétérogène, comportant de nombreuses hétérogénéités, et dont la géométrie est fortement irrégulière.

Afin d'atteindre les objectifs fixés, les poutres sont testées successivement par différentes méthodes vibratoires d'évaluation non destructive. Ces méthodes sont groupées en deux catégories. La première correspond aux calculs de vitesse de propagation. Dans ce cas, plusieurs appareils commercialisés ont été utilisés : Le Sylvatest¹⁰, le Fakopp¹¹, et l'AU2000¹². La deuxième catégorie correspond aux méthodes de détermination du module dynamique par analyse modale. Dans ce dernier cas, des essais en vibrations transversales et longitudinales ont été réalisés. Concernant les vibrations longitudinales, plusieurs paramètres susceptibles d'évaluer la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique, dont le module dynamique, sont extraits (chapitre III).

Les poutres sont ensuite testées en flexion statique 4 points afin de déterminer les valeurs de référence de contrainte à la rupture et de module d'élasticité statique (voir description détaillée de l'essai au § 11.2.3). Ces valeurs constituent les valeurs de référence que l'on cherche à évaluer au mieux par les paramètres prédictifs issus des essais non destructifs. Il est important de remarquer que les valeurs de référence sont issues d'un essai semblable à l'essai normalisé (EN 408). En raison des géométries non régulières et de la présence d'entailles dans les poutres testées, l'essai statique mise en œuvre ici fournit des valeurs hors normes dont l'interprétation pose problème. Les valeurs fournies sont de plus difficilement comparables entre elles car la géométrie des échantillons et la répartition des contraintes dans le matériau pendant l'essai diffèrent très fortement d'une pièce à l'autre.

Les différentes étapes du protocole expérimental sont synthétisées à la Figure 195. Les essais de mesure de vitesse, d'évaluation du module dynamique en vibrations transversales, et les essais statiques de référence ont été réalisés par le CTBA. Les essais de vibrations longitudinales, les analyses et la synthèse des résultats obtenus ont été réalisés par nos soins.

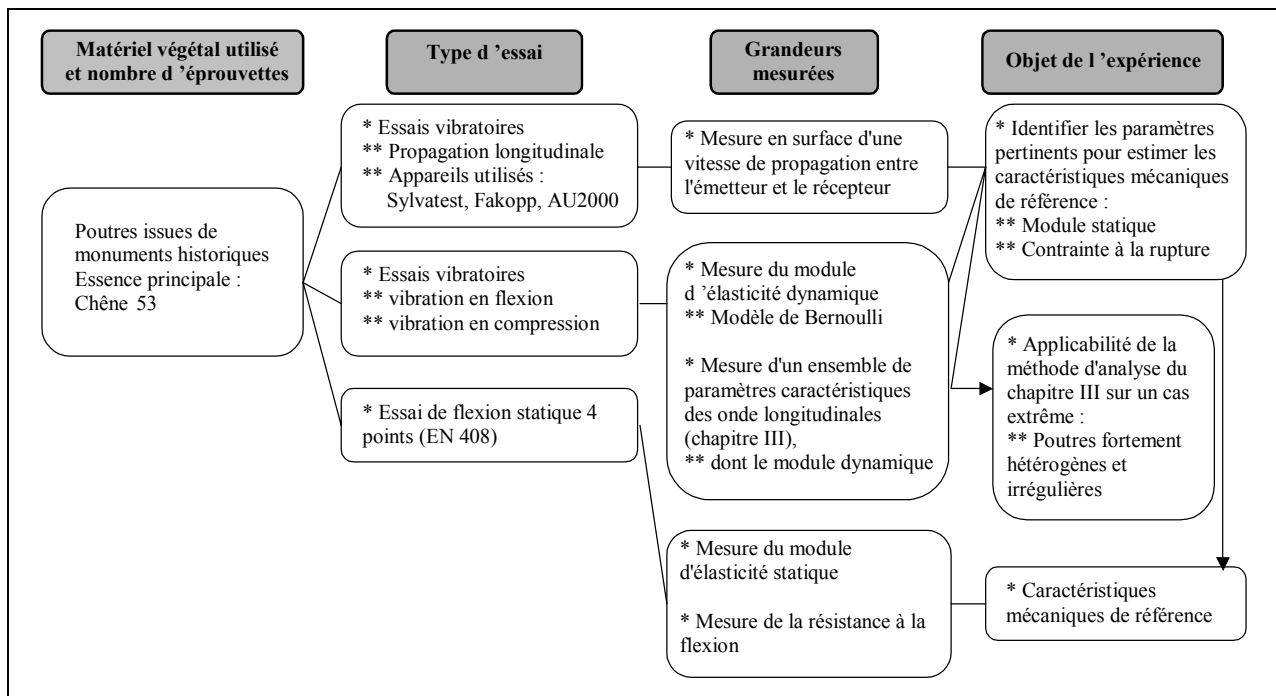


Figure 195 : Présentation des essais expérimentaux réalisés.

12.2.3 *Essais d'évaluation non destructive*

12.2.3.1 *Mesure d'une vitesse de propagation*

Trois appareils différents, le Sylvatest¹⁰, le Fakopp¹¹, et l'AU2000¹², ont été utilisés pour mesurer une vitesse de propagation dans les poutres. Ces appareils sont tous munis d'un émetteur et d'un récepteur à partir desquels un temps de propagation est calculé (Figure 196). Dans le cadre de cette étude, en raison des terminaisons des pièces très irrégulières, toutes les mesures ont été réalisées en surface. Une impulsion est envoyée par l'émetteur, et le temps de propagation τ entre l'émetteur et le récepteur est déterminé (Sandoz, 1996 ; Zombori, 2001). En connaissant la distance d parcourue par le paquet d'ondes émis, une vitesse de propagation V peut être calculée comme suit :

$$\text{Eq. 310 } V = \frac{d}{\tau}$$

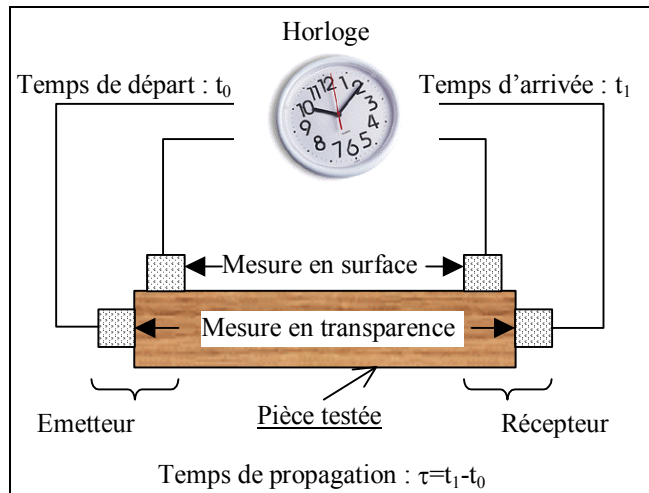


Figure 196 : Principe de mesure du temps de propagation.



Figure 197 : Photographie de l'AU2000 (source : site internet CEBTP¹²).



Figure 198 : Photographie du Fakopp (source : site internet Fakopp¹¹).

La Figure 197, la Figure 198, et la Figure 199 sont des photographies des appareils utilisés pour la mesure des vitesses de propagation. Bien que tous basés sur le même principe (Figure 196), il est possible de déduire les différences entre appareils à partir des photographies. L'impulsion est donnée par un marteau pour le Fakopp, alors que pour l'AU2000 et le Sylvatest, elle est automatique. Cette dernière remarque implique que la gamme de fréquence utilisée par le Fakopp n'excède pas 5kHz à 6kHz (chapitre IV, § 9.4.1).

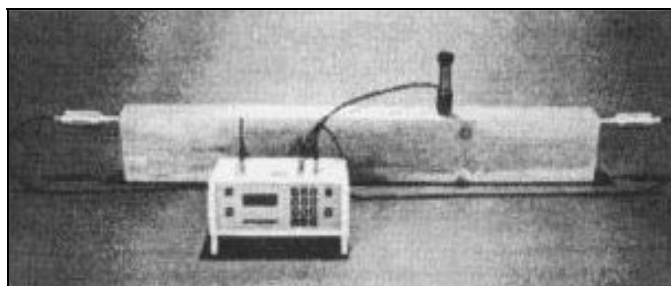


Figure 199 : Photographie du Sylvatest (Zombori, 2001).

Concernant le Sylvatest, la gamme de fréquence utilisée correspond à celle des ultrasons (Sandoz, 1996) ; il en est de même pour l'AU2000. Cependant les fréquences employées, voisines de 20kHz, sont à la limite de la gamme considérée – les ultrasons couvrant la gamme de 20kHz à 200MHz (Claudon, 2000). Ce choix de fréquence s'explique par le phénomène de dissipation très important pour les ultrasons dans le cas du matériau bois (Zombori, 2001).

¹⁰ Sylvatest : appareil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (<http://www.cbs-cbt.com/Sylvatest.htm>).

¹¹ Fakopp : appareil développé par l'"University of Westren Hungary" (<http://www.fakopp.com/fakopp.html>).

¹² AU2000 : appareil développé par le CEBTP (http://www.cebtp.fr/vente/au2000/au2000_fr.html).

12.2.3.2 *Analyse modale*

- a) **Vibrations transversales :** Le module d'élasticité dynamique est déterminé par analyse spectrale des vibrations naturelles de flexion des poutres. L'élément de bois à tester repose sur deux appuis élastiques afin que la vibration soit la plus libre possible. Une percussion est donnée à une extrémité, et la réponse vibratoire de la poutre est enregistrée par un microphone situé à l'autre extrémité. Le modèle et la solution de Bernoulli sont appliqués sur la première fréquence de vibration pour calculer le module dynamique E_B (Eq. 311). Le principe et le mode opératoire de ce type d'essai sont détaillés au chapitre I.

Eq. 311
$$E_B = 4\pi^2 \frac{\rho S L^4}{I_{Gz}} \frac{f_1^2}{X_1}$$

- b) **Vibrations longitudinales :** Ces essais de vibrations correspondent à une application directe de la méthode d'analyse développée au chapitre III. La poutre est placée sur des appuis souples. Deux vis tire-fond sont insérées, et rendues solidaires de la poutre, à chaque extrémités. La longueur de l'échantillon est mesurée entre les deux vis tire-fonds. La poutre est ensuite sollicitée en vibrations longitudinales, à l'aide d'un marteau instrumenté, par impact sur une des vis. Le signal de sortie est capté par un accéléromètre fixé sur l'autre vis. Les signaux d'entrée et de sortie sont numérisés par un convertisseur analogique numérique puis enregistrés et analysés par l'ordinateur. La mesure est répétée quatre fois pour chaque poutre, soit deux mesures par extrémité. Au total 212 essais ont été réalisés.

12.3 Résultats synthétiques et analyses

12.3.1 *Relations entre les différentes mesures de vitesse*

Les mesures de vitesse ont été réalisées sur 51 poutres. Pour 2 poutres ces mesures n'ont pu être effectuée car l'état de la matière ligneuse ne permettait pas le positionnement correct des sondes. Les trois appareils utilisés ont fourni trois vitesses distinctes par échantillon testé. La Figure 200 et la Figure 201 présentent les relations linéaires existantes entre ces vitesses en prenant arbitrairement la vitesse du Sylvastest comme variable explicative. La Figure 200 montre une liaison linéaire très significative ($R^2=0,90$) entre la vitesse du Sylvastest et celle de l'AU2000 ; le coefficient directeur est voisin de l'unité et la constante n'est pas significative (au risque de 5%). Les mesures de vitesse données par le Sylvastest et l'AU2000 sont donc statistiquement équivalentes. La Figure 201 montre également une liaison linéaire très significative ($R^2=0,94$) entre la vitesse du Sylvastest et celle du Fakopp ; le coefficient directeur est différent de l'unité ($a=0,89$) et la constante n'est pas significative (au risque de 5%). Il existe donc un biais d'environ 10% entre les vitesses données par le Sylvastest et le Fakopp. Cette observation s'explique par la différence dans les fréquences utilisées, le Sylvastest utilise des fréquences voisines de 20kHz alors que le Fakopp travaille dans une gamme de 5kHz à 6kHz.

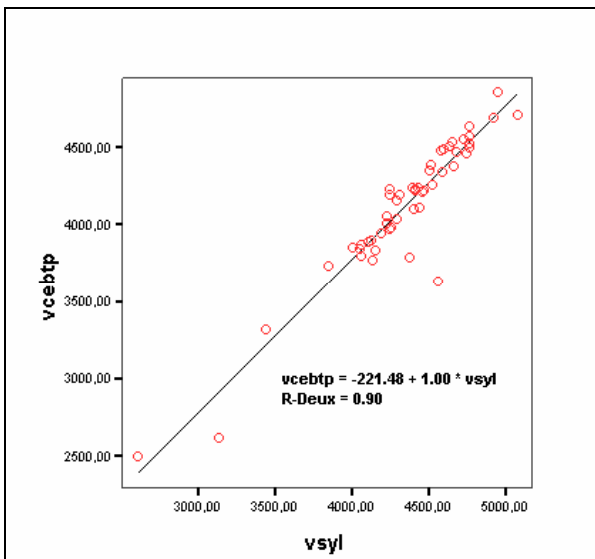


Figure 200 : Relation entre mesure de vitesse Sylvastest vsyl et AU2000 vcebt (effectif, N=51).

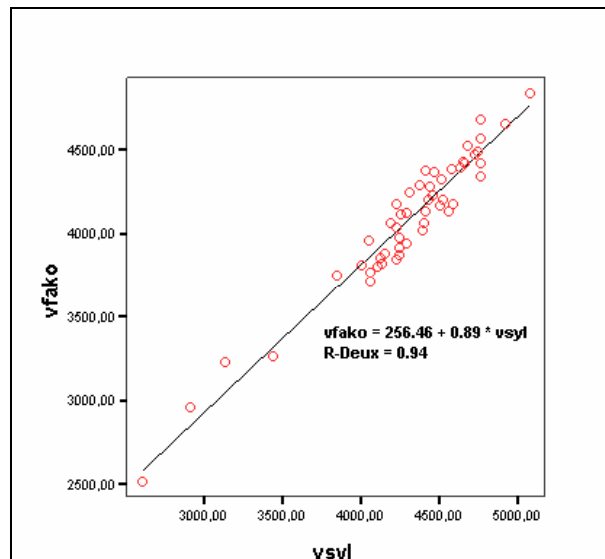


Figure 201 : Relation entre mesure de vitesse Sylvastest vsyl et Fakopp vfako (effectif, N=51).

Remarque : la Figure 201 montre que la vitesse du Sylvatest est supérieure à celle du Fakopp. On déduit alors la relation d'ordre : vitesse(20kHz) > vitesse(5kHz). L'étude théorique et expérimentale du chapitre III suggère cependant que la vitesse de propagation décroît en fonction de la fréquence, dans la gamme [1Hz, 2500Hz], et met en évidence la compétition entre, d'une part, la viscosité du matériau qui a tendance à faire augmenter la vitesse de propagation en fonction de la fréquence, et d'autre part, l'influence des "effets Poisson" qui ont tendance à faire diminuer la vitesse de propagation. Compte tenu de l'ensemble des résultats expérimentaux, il semblerait qu'à basse fréquence dans le domaine acoustique les effets Poisson l'emporte sur le phénomène de viscosité, alors qu'à haute fréquence dans le domaine acoustique le phénomène inverse se produise.

12.3.2 Relations entre les paramètres déduits des vibrations longitudinales

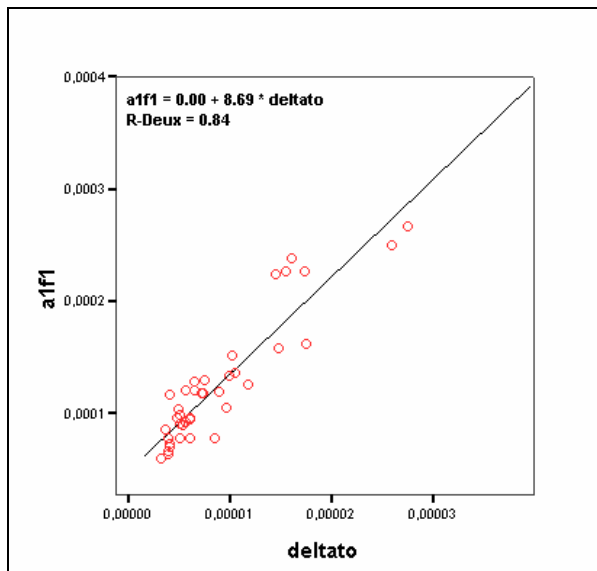


Figure 202 : Relation entre le ratio amortissement du mode 1 sur fréquence au carré a1f1 et la différence des temps caractéristiques en vibrations longitudinales deltato (effectif, N=39).

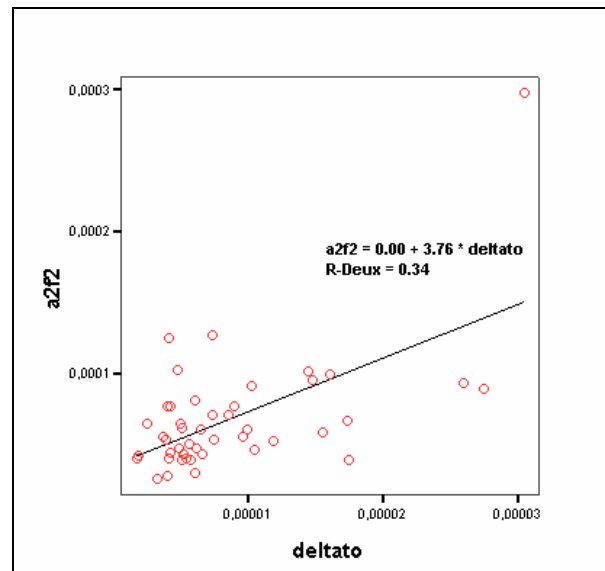


Figure 203 : Relation entre le ratio amortissement du mode 2 sur fréquence au carré a2f2 et la différence des temps caractéristiques en vibrations longitudinales deltato (effectif, N=45).

Ce paragraphe a pour but de vérifier la cohérence de certains résultats théoriques du chapitre III avec l'expérience, et d'observer d'éventuelles relations existantes entre paramètres caractéristiques des ondes propagatives longitudinales. Un des paramètres directement déduit de l'analyse des signaux vibratoires est l'amortissement associé à la fréquence propre de vibration considérée (chapitre III). Aux trois premières fréquences propres analysées, on associe les amortissements respectifs α_1 , α_2 , et α_3 . On rappelle qu'en synthèse additive, le signal réel est décomposé en une somme de sinusoides exponentiellement amorties :

$$\text{Eq. 312 } \overline{s(t)} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{(i\omega_p - \alpha_p)t}$$

En supposant que le frottement interne du matériau est faiblement marqué dans la gamme de fréquence considérée, on obtient la formulation de l'amortissement temporel suivante (chapitre III) :

$$\text{Eq. 313 } \alpha_p = \frac{(\tau_{\sigma} - \tau_{\varepsilon})\omega_p^2}{2(1 + \tau_{\sigma}\tau_{\varepsilon}\omega_p^2)}$$

L'équation (Eq. 313) suggère que le ratio amortissement sur fréquence au carré est quasiment une fonction linéaire de la différence des temps caractéristiques à basse fréquence. La Figure 202, la Figure 203, et la Figure 204 représentent les relations expérimentales entre ratio amortissement sur fréquence au carré et différence des temps caractéristiques. Concernant le mode 1 (Figure 202), la liaison linéaire est vérifiée puisque très significative ($R^2=0,84$). Cependant pour les modes 2 et 3 (Figure 203 et Figure 204), la liaison linéaire entre variables devient très faible ($R^2=0,27$ pour le mode 2 et $R^2=0,34$ pour le mode 3).

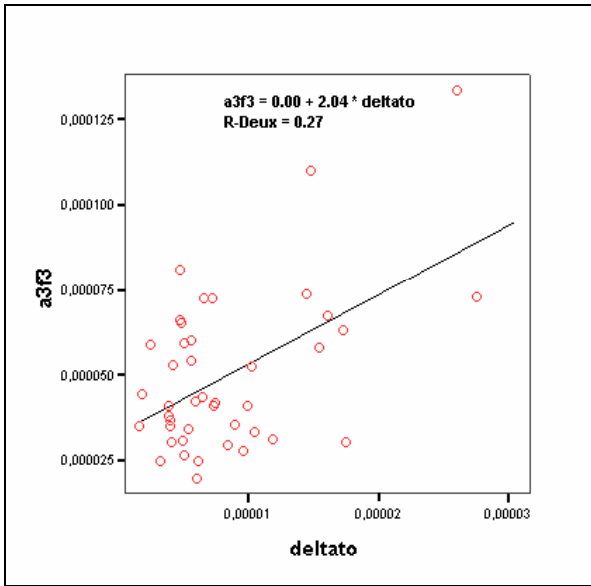


Figure 204 : Relation entre le ratio amortissement du mode 3 sur fréquence au carré a3f3 et la différence des temps caractéristiques en vibrations longitudinales deltato (effectif, N=42).

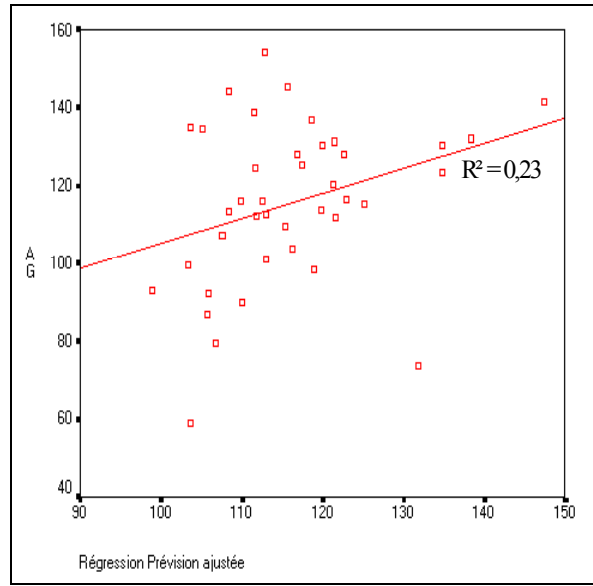


Figure 205 : Régression linéaire multiple avec pour variable dépendante l'amortissement global ag et les amortissements des modes 1, 2, et 3 comme variables prédictives (effectif, N=40).

L'amortissement temporel global et l'énergie en sous bande dans la gamme fixe de fréquence [1Hz, 2500Hz] sont également des paramètres directement déduits de l'analyse des signaux vibratoires. Il est intéressant d'observer si l'amortissement global est une combinaison linéaire des amortissements temporels associés aux trois premiers modes (Figure 205). La Figure 205 montre les couples de points (amortissement global AG, amortissement estimé) obtenu par régression linéaire multiple. Ce type d'analyse montre que les amortissements temporels sont faiblement liés par combinaison linéaire ($R^2=0,23$ avec en corrélation partielle $C_1=0,15$; $C_2=0,42$; $C_3=-0,18$).

La Figure 206 montre l'absence de relation linéaire entre amortissement global et énergie en sous bande ($R^2=0,04$). La Figure 207 montre au contraire une relation très significative ($R^2=0,94$), attendue au regard des développements théoriques, entre le module dynamique déduit de la première fréquence de vibration et le module relaxé (produit aE_{R_X} moyen, chapitre III). La présence de liaison linéaire éventuelle entre les paramètres issus de l'analyse des vibrations longitudinales sera exploitée lors de la construction d'un modèle linéaire multiple afin d'estimer la contrainte ou le module d'élasticité statique.

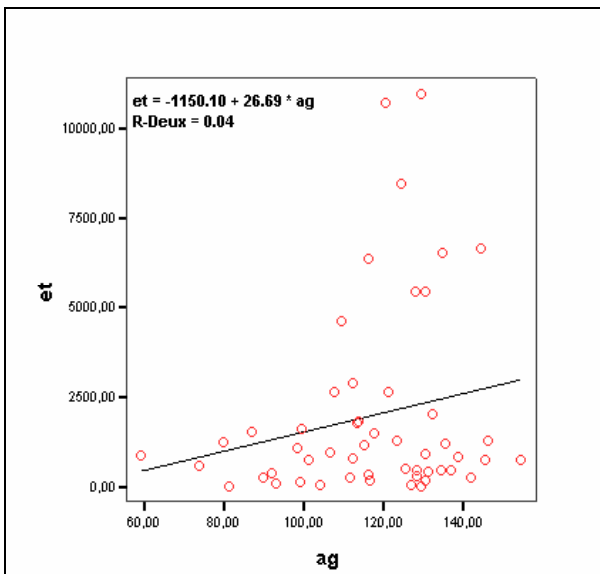


Figure 206 : Relation entre l'amortissement global ag et l'énergie dans la gamme [1Hz, 2500Hz] 'et' (effectif : N=52).

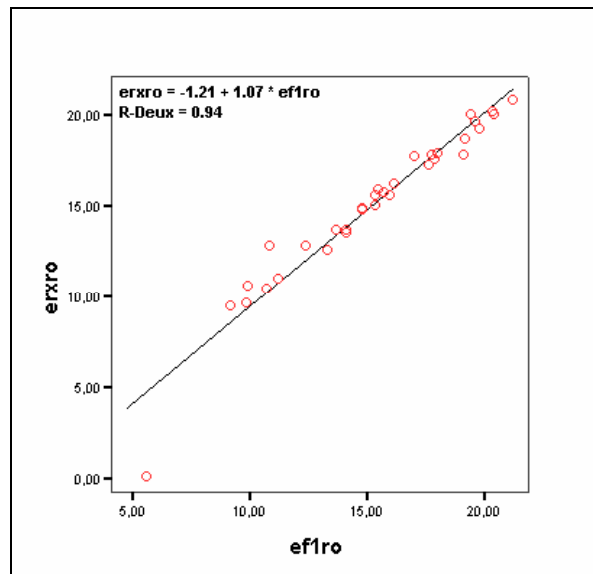


Figure 207 : Relation entre module dynamique déduit du mode 1 ef1ro et module dynamique relaxé erxro défini au chapitre III (effectif : N=33).

12.3.3 Relation entre module statique et contrainte à la rupture

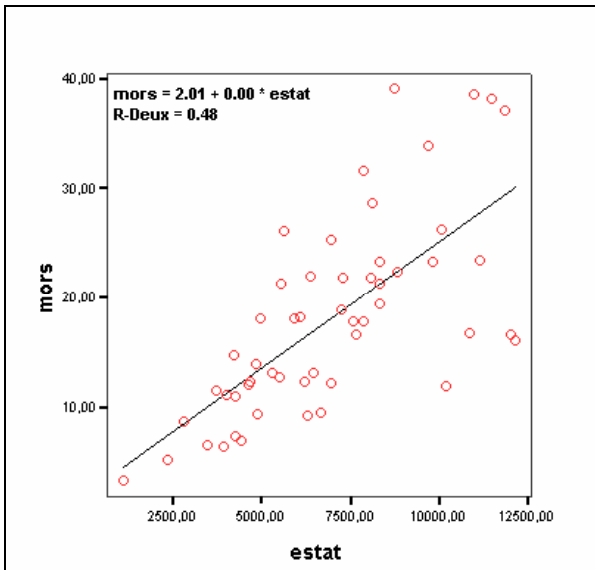


Figure 208 : Relation entre module d'élasticité statique estat et contrainte à la rupture mors (effectif, N=53).

Effectif N=53	f_m (MPa)	E_{stat} (MPa)
Moyenne	18	6921
Ecart type	9	2695

Tableau 67 : Caractéristiques mécaniques du lot de poutres anciennes.

Le Tableau 67 présente les valeurs moyennes et écarts types de la contrainte à la rupture et du module d'élasticité obtenues par les essais normalisés (EN 408). Les variations des valeurs de contrainte et de module sont grandes, dans des plages respectives de 3MPa à 39MPa et de 1080MPa à 12160MPa. Ces importantes variations s'expliquent par la nature même du lot testé, composé d'anciennes pièces de charpentes très différentes entre elles.

La Figure 208 montre la relation linéaire significative ($R^2=0,48$) existante entre la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique. Le coefficient directeur ($a=0,0023$) est significativement différent de zéro, mais la constante ne l'est pas (au risque de 5%).

Il est important de remarquer que les incertitudes expérimentales sur l'évaluation de la contrainte et du module ne sont pas connues du fait de la géométrie très particulière des pièces testées. Le coefficient de détermination obtenu à la Figure 208 est relativement faible comparé à ceux trouvés dans la littérature pour des bois de structure. A titre d'exemples, Boström (1994) a obtenu, pour des relations avec des poutres d'épicéa de sections 45x195mm² (N=121), 70x170mm² (N=124), et 45x120mm² (N=170), de longueur allant de 4m à 6m, des coefficients respectivement égaux à $R^2=0,77$ (45x195), $R^2=0,68$ (70x170), et $R^2=0,52$ (45x120). Divos (1997) a obtenu avec 100 poutres de pin et d'épicéa de dimensions 38x88x2130mm³ un coefficient $R^2=0,80$.

Le faible degré de liaison entre contrainte à la rupture et module statique, obtenu dans le cas présent, s'explique par la présence importante de singularités dans les poutres testées. Ces singularités influent en effet fortement sur la résistance mécanique des pièces de bois (Kollmann et Côté, 1968). Baillères (1999) a obtenu sur 77 poutres d'angélique et 86 poutres de gonfolo de dimensions 55x138x3000mm³ des coefficients respectifs de $R^2=0,20$ et $R^2=0,40$. En analysant les défauts sur les avivés, Baillères (1999) a observé la présence de coups de vent au niveau de la zone de rupture. Il a de plus été constaté que les coups de vent, entraînant une ruine à faible charge des poutres, se situaient en majorité dans la zone tendue de la pièce fléchie (Baillères, et al., 1999). Ces dernières remarques sont en accord avec le fait que la présence d'hétérogénéités a une grande influence sur la résistance mécanique des pièces de bois, mais soulignent également le fait que l'essai statique normalisé est un essai orienté. La position des hétérogénéités par rapport à l'axe neutre (dans la hauteur de la pièce fléchie) influe directement sur la valeur de la charge à rupture mesurée pour chaque pièce. La contrainte à la rupture calculée sera alors différente selon que la pièce est fléchie dans un sens ou dans l'autre de sa hauteur. Ce phénomène ajoute une incertitude supplémentaire aux valeurs mécaniques de référence.

Divos (1997) montre d'autre part que le paramètre prédicteur de la contrainte à la rupture le plus pertinent est le module d'élasticité statique. Ces deux paramètres mécaniques sont en effet issus de mesures réalisées au cours d'un même essai, donc dans une configuration identique.

12.3.4 Estimation du module statique et de la contrainte à la rupture

12.3.4.1 Effet des caractéristiques physiques

Les résultats d'analyses statistiques, non présentées ici, montrent qu'ils n'existent pas de liaison linéaire significative entre les caractéristiques géométriques des poutres (hauteur, base, longueur, surface moyenne de la section droite) et la contrainte à la rupture ou le module d'élasticité statique.

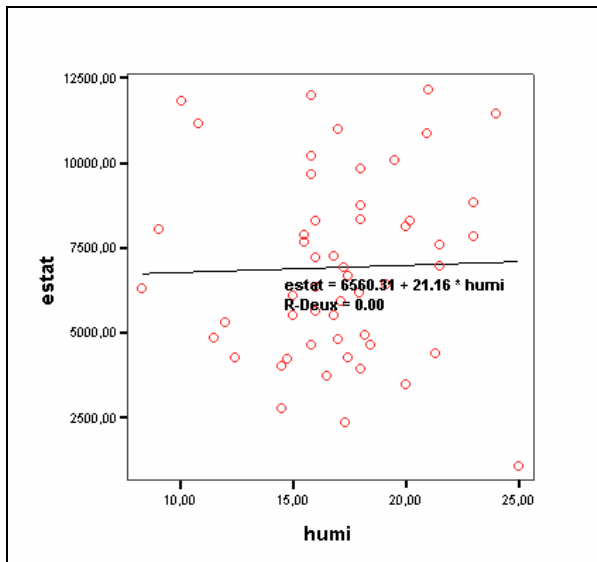


Figure 209 : Relation entre module d'élasticité statique estat et teneur en humidité (%) humi (effectif, N=53).

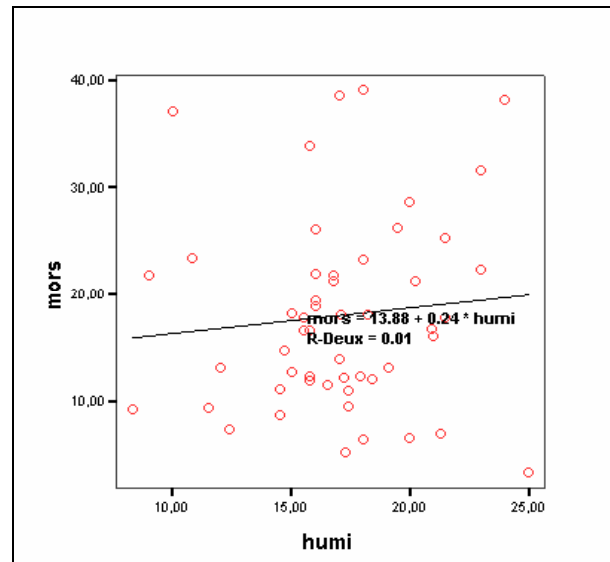


Figure 210 : Relation entre contrainte à la rupture mors et teneur en humidité (%) humi (effectif, N=53).

La Figure 209 et la Figure 210 montrent également l'absence de liaison linéaire significative entre le taux d'humidité et la contrainte ou le module statique. Le bois étant un matériau hygroscopique, qui échange en permanence de l'humidité avec son environnement, et dont la structure moléculaire des parois des cellules est de plus modifiée par l'absorption des molécules d'eau, ses propriétés mécaniques dépendent fortement de son taux d'humidité. Une augmentation de la teneur en eau se traduit par une réduction de la résistance et de la rigidité du bois (Kollmann et Côté, 1968 ; Guitard, 1987 ; Racher, et al., 2000). L'absence de relation significative observée à la Figure 209 et à la Figure 210 s'explique par la forte incertitude existante sur les mesures du taux d'humidité. De part leur géométrie, les poutres ne pouvaient être passées en long dans un humidimètre à mesure capacitive. Une mesure ponctuelle du taux d'humidité a alors été réalisée avec un appareil à mesure résistive, cependant l'importante hétérogénéité des poutres (présence de cavités, de clous, de produits de traitement) rend cette mesure ponctuelle très peu précise et peu représentative de l'humidité moyenne de la poutre testée.

Dans le cas particulier du lot de poutres anciennes, la Figure 211 ne montrent pas une relation linéaire significative entre masse volumique et module statique. Concernant la Figure 212, le degré de liaison est très faible ($R^2=0,14$) entre masse volumique et contrainte à la rupture. On observe généralement une forte liaison croissante, pas forcément linéaire, entre masse volumique et module d'élasticité ou contrainte à la rupture (Kollmann et Côté, 1968 ; Guitard, 1987 ; Divos et Tanaka, 1997). La masse volumique caractérise la quantité de matière ligneuse contenue dans un volume donné de bois. Plus la quantité de matière ligneuse est importante dans un volume donné de bois et plus la rigidité et la résistance de la pièce considérée sont importantes. Cette absence de relation forte entre masse volumique et caractéristiques mécaniques s'explique par la mesure de la masse volumique fortement entachée d'erreur en raison de la géométrie irrégulière des pièces de bois. Cette dernière remarque conduit à penser qu'il est plus raisonnable d'utiliser le module spécifique comme paramètre prédictif plutôt qu'un module d'élasticité déduit d'une masse volumique dont la valeur est très incertaine.

Remarque : Il aurait été intéressant d'observer l'importance de la liaison entre la durée de mise en service des pièces et la contrainte à la rupture ou le module statique dans le cas présent. L'information de durée de service n'était cependant pas disponible. Dans le cas de poteaux de ligne, l'importance de ce paramètre sur la contrainte à la rupture a pu être mis en évidence (Renforth, et al., 2000; Taras, et al., 2000). Une liaison significative ($R^2=0,39$) a en effet été observée sur 152 poteaux représentatifs du parc considéré (Taras, et al., 2000). Les mesures se sont échelonnées entre des poteaux en service depuis quelques années jusqu'à plus de 45 ans. En utilisant la relation linéaire précédemment évoquée, la contrainte à la rupture, pour le lot de poteaux considéré, décroît d'environ 0,4MPa par année de service (Taras, et al., 2000).

Il convient de rester prudent dans ce type de parallèle entre poutres anciennes et poteaux de ligne. Les poutres étudiées étaient en effet dans des situations de chargement et d'ambiance probablement très différentes les unes des autres, ce qui n'est pas le cas des poteaux de ligne dont les conditions de service sont quasi identiques dans une région donnée.

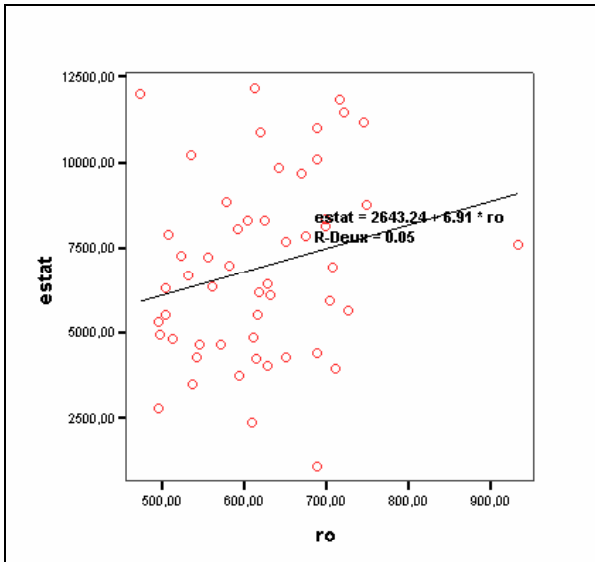


Figure 211 : Relation entre module d'élasticité statique estat et masse volumique ro (effectif, N=53).

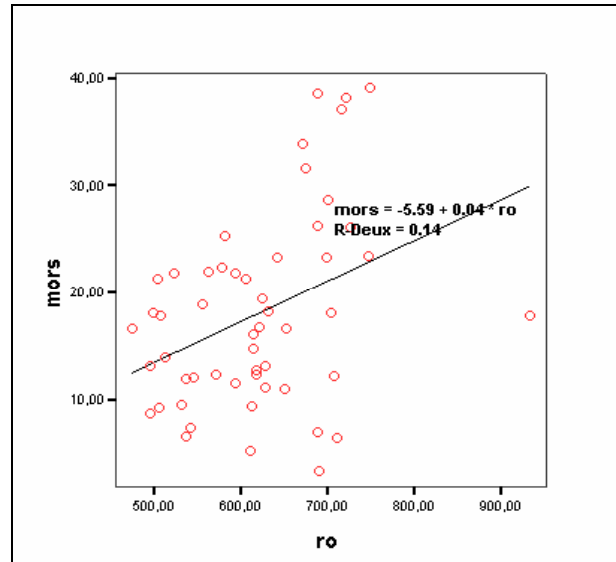


Figure 212 : Relation entre contrainte à la rupture mors et masse volumique ro (effectif, N=53).

12.3.4.2 *Mesure des vitesses de propagation*

Coefficient R ²	Sylvatest	Fakopp	AU2000
Module statique	0,34	0,25	0,24
Contrainte à rupture	0,19	0,17	0,18

Tableau 68 : Coefficient de détermination entre module statique, contrainte à la rupture, et mesures de vitesse des trois appareils utilisés (effectif, N=53 Sylvatest, N=51, Fakopp et AU2000).

Le Tableau 68, la Figure 213, et la Figure 214 montrent, d'une part, les valeurs des coefficients de détermination obtenus entre mesures de vitesse et caractéristiques mécaniques, et d'autre part, la dispersion des points de régression pour le Sylvatest (la dispersion est analogue pour les autres appareils). Les résultats ainsi obtenus font état d'un faible degré de liaison ($R^2 \approx 0,20$) pour la contrainte à la rupture (Tableau 68).

La part de la dispersion expliquée par la liaison linéaire ($R^2 \approx 0,30$) est plus importante pour le module d'élasticité mais reste néanmoins faible (Tableau 68). Ces ordres de grandeurs se retrouvent dans la littérature, Boström (1994) obtient par exemple des coefficients égaux à $R^2 \approx 0,20$ et $R^2 \approx 0,50$ selon la section considérée pour la contrainte. Il est important de remarquer qu'en calculant un module dynamique à partir de la valeur de la masse volumique, Boström (1994) observe une nette amélioration des coefficients de détermination qui deviennent respectivement égaux à $R^2 \approx 0,30$ et $R^2 \approx 0,60$ pour la contrainte.

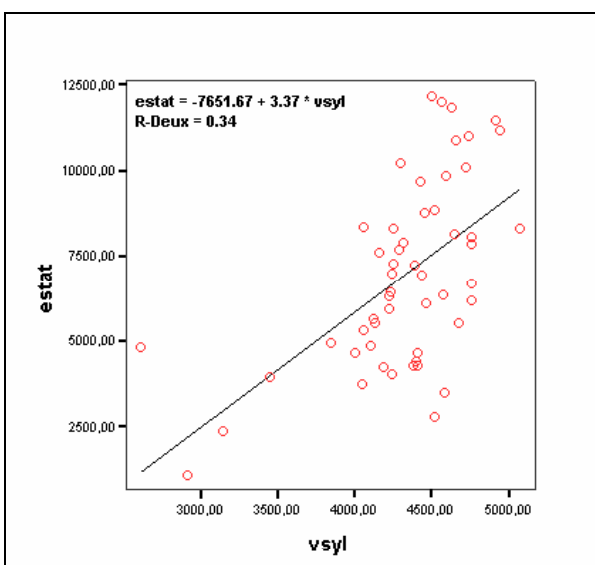


Figure 213 : Relation entre module statique estat et vitesse Sylvatest vsyl (effectif, N=53).

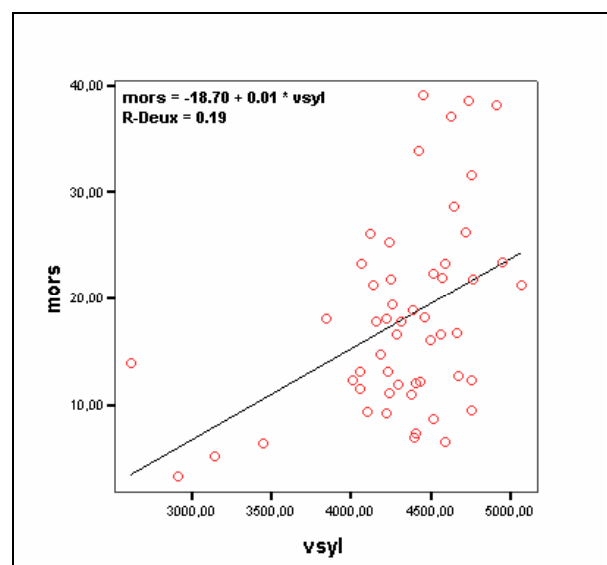


Figure 214 : Relation entre contrainte à la rupture mors et vitesse Sylvatest vsyl (effectif, N=53).

Une autre remarque doit être prise en considération dans le cas des poutres anciennes et concerne la mise en œuvre des appareils de mesure. La totalité des mesures de vitesse a été réalisée en surface (Figure 196), et le principe de calcul de la vitesse prend seulement en considération la vitesse de l'onde la plus rapide se propageant dans le matériau. Dans ce cas le trajet le plus rapide est la ligne droite la plus proche de la surface où sont situés émetteur et récepteur. Les hétérogénéités présentes plus en profondeur dans le matériau n'ont alors qu'une très faible influence sur l'onde effectuant le trajet le plus court. Ces considérations permettent d'apporter une explication aux faibles degrés de liaison observés entre vitesse et caractéristiques mécaniques, le matériau étant caractérisé seulement sur une des faces et non dans son ensemble. Dans notre cas ce ne sont alors pas les appareils qui sont en cause, mais seulement la méthode de mesure qui n'est pas adaptée au problème traité.

12.3.4.3 *Mesure des modules dynamiques par analyse modale en vibrations transversales*

La Figure 215 montre une liaison linéaire significative ($R^2=0,37$) entre le module statique et le module dynamique issu de la solution de Bernoulli. Le module dynamique est également significativement lié à la contrainte à la rupture avec un coefficient de détermination ($R^2=0,41$) proche de celui trouvé ($R^2=0,48$) entre module statique et contrainte (Figure 208). Les bonnes corrélations observées entre valeurs dynamiques et statiques peuvent s'expliquer par le fait que le module dynamique est une valeur globale, caractérisant le comportement vibratoire en flexion de la pièce testée, et non une valeur locale comme peut l'être une des vitesses précédemment étudiées (§ 12.3.4.2). Il est toutefois important de rappeler ici que le module d'élasticité statique est évalué seulement sur la partie centrale de la pièce testée (EN 408, 1995).

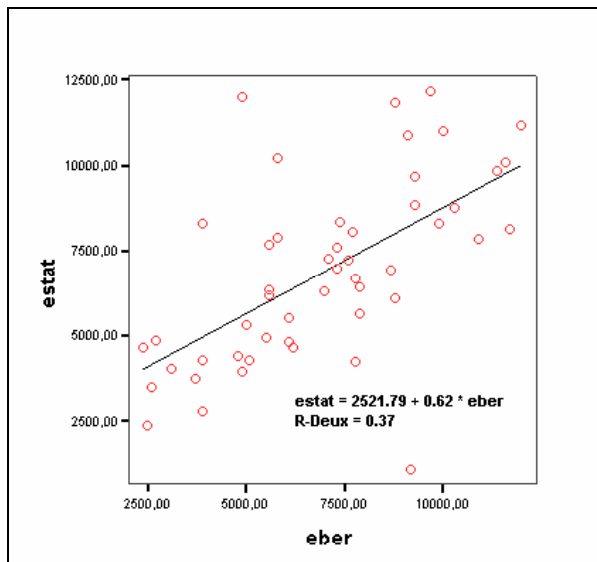


Figure 215 : Relation entre module d'élasticité statique estat et module dynamique d'après la solution de Bernoulli eber (effectif, N=50).

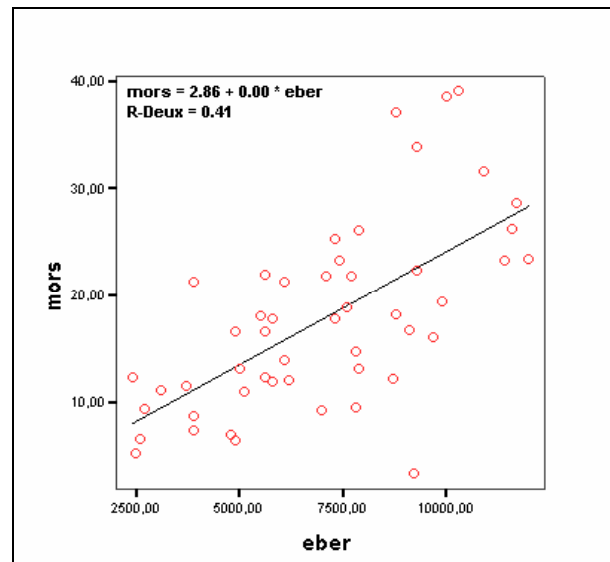


Figure 216 : Relation entre contrainte à la rupture mors et module dynamique d'après la solution de Bernoulli eber (effectif, N=50).

On peut néanmoins remarquer que le calcul du module dynamique en vibrations transversales nécessite notamment la connaissance des hauteurs, épaisseurs, et masses volumiques (Eq. 311). Ces valeurs étant fortement entachées d'erreur, les valeurs de module obtenues sont alors très incertaines. Il est préférable, dans ce cas, d'utiliser un module spécifique dynamique déduit des vibrations longitudinales qui ne nécessite que la connaissance de la longueur.

12.3.4.4 *Modèle multi – paramètres déduits des vibrations longitudinales*

➤ Convergence de la méthode d'analyse :

La méthode d'analyse des vibrations longitudinales, détaillée au chapitre III, suppose que les pièces testées sont homogènes et suffisamment élancées. Le calcul des temps caractéristiques est dans une première étape effectué, notamment à partir des trois premiers amortissements temporels extraits des signaux, en utilisant une procédure d'optimisation. Dans le cas où la première optimisation a convergé, une deuxième optimisation est réalisée pour calculer la valeur du terme β caractérisant les effets "Poisson", et la valeur du produit (aE_{R_x}) que nous nommerons abusivement ici module relaxé.

Par rapport aux hypothèses qui ont servi au chapitre III, le lot de poutres anciennes constitue un cas extrême. L'exploitation des signaux vibratoires dans ce cas par la méthode d'analyse a pleinement réussi (convergence des deux procédures d'optimisation et calcul de l'ensemble des paramètres descriptifs) pour 33 poutres sur un total de 52. La deuxième optimisation a échoué dans 15 cas, ne permettant pas le calcul des termes β et (aE_{R_X}) . Dans 4 cas seulement la procédure d'analyse a totalement échoué, ne renvoyant que le module dynamique spécifique déduit de la première fréquence, les trois premiers amortissements temporels associés aux fréquences propres, l'amortissement temporel global de la réponse impulsionnelle, et l'énergie spectrale de la réponse impulsionnelle dans la gamme fixe [1Hz, 2500Hz].

Un examen attentif des trois groupes définis par la convergence des deux optimisations (33 poutres – groupe A), la convergence d'une optimisation (15 poutres – groupe B), et l'échec des deux optimisations (4 poutres – groupe C), montre que les groupes A et B se recouvrent entièrement. Par contre le groupe C est constitué de 4 poutres ayant des contraintes à la rupture et des modules les plus faibles de l'ensemble du lot. Bien que l'effectif du groupe C soit petit, il semblerait que lorsqu'il se produit un échec total de la procédure d'analyse, la pièce testée possède des caractéristiques mécaniques très faibles. Pour ces 4 poutres, l'important décalage des fréquences, principalement fonction de la position des singularités majeures, sont à l'origine de l'échec des procédures d'optimisation (§ 7.8.2.2 et § 7.8.3).

➤ Relation entre module dynamique spécifique et caractéristiques mécaniques :

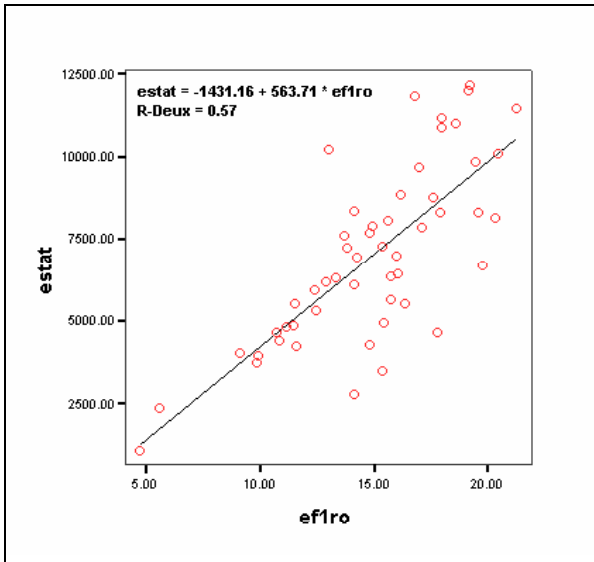


Figure 217 : Relation entre module statique estat et module dynamique spécifique en vibrations longitudinales ef1ro (effectif, N=52).

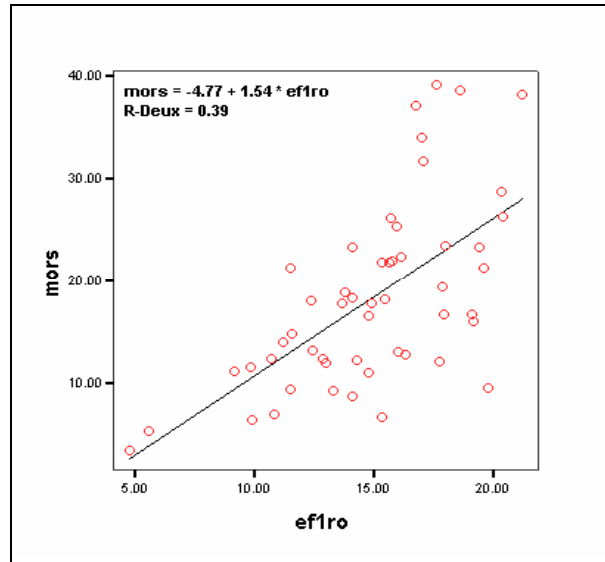


Figure 218 : Relation entre contrainte à la rupture mors et module dynamique spécifique en vibrations longitudinales ef1ro (effectif, N=52).

Par rapport aux résultats obtenus au paragraphe 12.3.4.3 concernant l'exploitation des vibrations transversales par l'intermédiaire du module dynamique issu de la solution de Bernoulli, il est intéressant d'observer les relations existantes entre le module dynamique spécifique déduit de la première fréquence de vibration longitudinale et les caractéristiques statiques des poutres (Figure 217 et Figure 218). La Figure 217 montre une liaison linéaire significative ($R^2=0,57$) entre module statique et module dynamique. Le degré de liaison est dans ce cas nettement plus important que celui trouvé avec le module dynamique de Bernoulli ($R^2=0,37$ - Figure 215), ce qui conforte la remarque faite en fin de paragraphe 12.3.4.3. Par contre la Figure 218 ne montre pas une amélioration du coefficient de détermination ($R^2=0,39$) par rapport à celui obtenu en vibrations transversales ($R^2=0,41$ - Figure 216).

➤ Modèles linéaires multi – paramètres :

L'ensemble des paramètres déduit de l'analyse des vibrations longitudinales a servi de base pour élaborer deux modèles linéaires multiples susceptibles d'estimer la contrainte à la rupture et le module statique (Tableau 69). Dans ce cas, les caractéristiques mécaniques de référence sont estimées par combinaison linéaire de plusieurs variables prédictives parmi les paramètres du Tableau 69. Les paramètres, issus de la méthode d'analyse proposée au chapitre III, les plus pertinents pour évaluer la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique pourront ainsi être déterminés.

Nomenclature N=14	Signification
Et	Energie spectrale, gamme fixe [0,2500 Hz]
Ag	Amortissement temporel global de la réponse impulsionnelle
A1f1	Ratio de l'amortissement temporel du premier mode de vibration sur la fréquence au carré
A1	Amortissement temporel du premier mode de vibration
A2f2	Ratio de l'amortissement temporel du second mode de vibration sur la fréquence au carré
A2	Amortissement temporel du second mode de vibration
A3f3	Ratio de l'amortissement temporel du troisième mode de vibration sur la fréquence au carré
A3	Amortissement temporel du troisième mode de vibration
Ef1ro	Module spécifique calculé à partir de la première fréquence de vibration
Erxro	Module spécifique relaxé, produit (aE_{R_X})
τ_{σ}	Temps caractéristique de fluage à contrainte constante
τ_{ϵ}	Temps caractéristique de relaxation à déformation constante
$\Delta\tau$	Différence des temps caractéristiques
β	Effet Poisson, coefficient Beta

Tableau 69 : Liste des paramètres déduits de l'analyse des vibrations longitudinales.

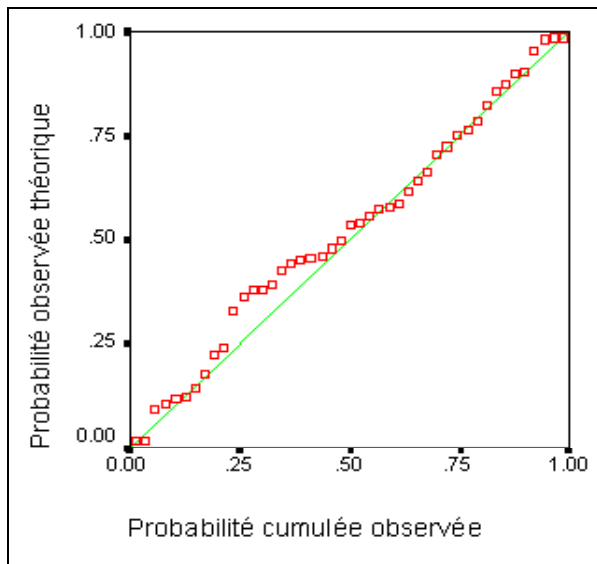


Figure 219 : Diagramme probit de régression des résidus standardisés, variable dépendante module statique (effectif, N=45).

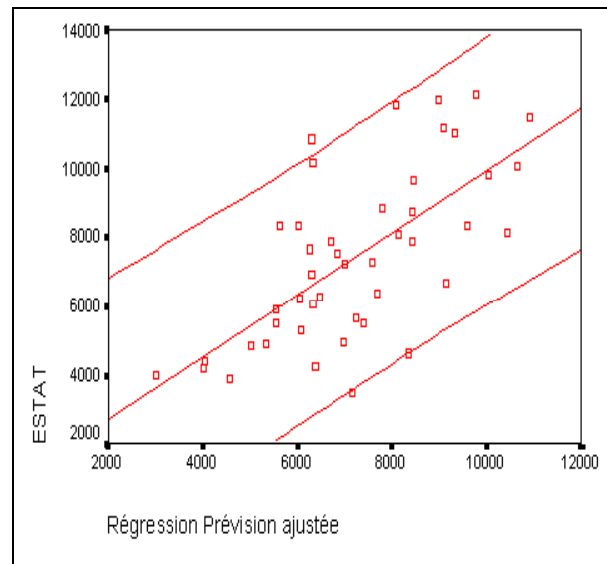


Figure 220 : Relation entre module statique estat et valeurs prédites ajustées par le modèle linéaire multi-paramètres avec l'intervalle de confiance à 95%, variables prédictives Ef1ro et a3f3 (effectif, N=45).

Concernant l'estimation du module d'élasticité statique, sur les 14 paramètres susceptibles de faire partie du modèle de régression, seulement 2 sont pertinents. Une analyse des corrélations simples entre l'ensemble des paramètres prédicteurs ajouté aux valeurs du module statique a permis de mettre en évidence les liaisons entre paramètres et ainsi

de dégager un ensemble de variables prédictives indépendantes. Plusieurs modèles de régression ont ensuite été testés par entrée directe des variables (les méthodes ascendantes ou descendantes n'ont pas été utilisées). La population des variables est décimée en prenant en compte le test de signification (test de Student) sur les coefficients de régression.

Parmi les modèles possibles, le modèle finalement retenu a les caractéristiques suivantes (A) : les variables prédictives sont indépendantes, le coefficient de détermination est très proche du coefficient de détermination ajusté, l'erreur standard de l'estimation est minimale, la matrice servant à calculer les coefficients (notée classiquement $X^T X$) est bien conditionnée, les coefficients de régression déterminés sont tous significatifs, de même que le test de variance, la distribution des résidus est quasi normale (Figure 219).

Le modèle final a pour variable prédictive le module spécifique dynamique E_{flro} et le ratio de l'amortissement temporel du troisième mode de vibration sur la fréquence au carré A_{3f3} . Le coefficient de détermination est de $R^2=0,62$ avec un coefficient ajusté de $R^2_a=0,60$. Les coefficients de corrélation partielle sont respectivement de $C_{E_{flro}}=+0,78$ et $C_{A_{3f3}}=-0,34$. La variable la plus pertinente dans l'estimation du module statique est le module dynamique spécifique. La Figure 220 montre le diagramme de dispersion entre module statique et valeurs prédites ajustées. Dans le cas d'une estimation individuelle, les valeurs de module calculées sont connues à $\pm 3400\text{MPa}$ près (intervalle de confiance de l'estimation au risque de 5%).

Afin de compléter cette analyse, l'information de masse volumique a été entrée comme variable prédictive avec le module dynamique et le ratio de l'amortissement temporel. Les caractéristiques requises du nouveau model vérifient toujours les conditions d'exploitation précédemment énoncées^(A). On obtient alors un coefficient de détermination de $R^2=0,64$ associé à un coefficient ajusté de $R^2_a=0,62$. Le coefficient de corrélation partielle de la variable masse volumique est de $C_{\rho}=+0,25$. Dans le cas d'une estimation individuelle, les valeurs de module calculées sont alors connues à $\pm 3350\text{MPa}$ près (intervalle de confiance de l'estimation au risque de 5%). L'information de masse volumique n'apporte donc pas une amélioration importante du modèle précédent.

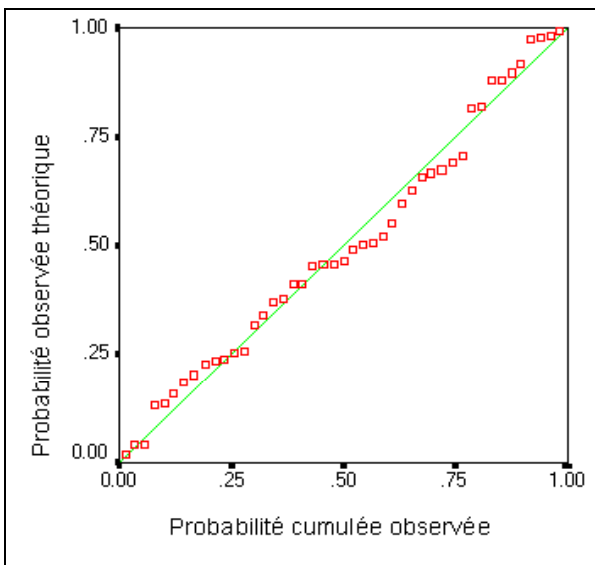


Figure 221 : Diagramme probit de régression des résidus standardisés, variable dépendante contrainte à la rupture (effectif, N=45).

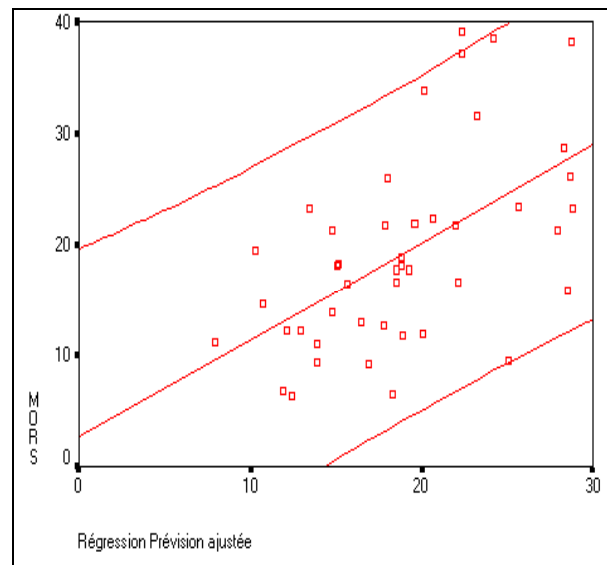


Figure 222 : Relation entre contrainte à la rupture mors et valeurs prédites ajustées par le modèle linéaire multi-paramètres avec l'intervalle de confiance à 95%, variables prédictives E_{flro} , a_{3f3} , et ag (effectif, N=45).

Trois paramètres du Tableau 69 sont utiles pour estimer la contrainte à la rupture parmi les 14 paramètres de départ. Le modèle final a pour variable prédictive le module spécifique dynamique E_{flro} , le ratio de l'amortissement temporel du troisième mode de vibration sur la fréquence au carré A_{3f3} , et l'amortissement temporel global Ag . Les caractéristiques requises du model linéaire multiple vérifient les conditions d'exploitation^(A). La distribution des résidus est quasi normale (Figure 221). Le coefficient de détermination obtenu est de $R^2=0,48$ avec un coefficient ajusté de $R^2_a=0,44$. Les coefficients de corrélation partielle sont respectivement de $C_{E_{flro}}=+0,67$; $C_{A_{3f3}}=-0,34$; et $C_{A_g}=+0,21$. Comme pour le module statique, la variable la plus pertinente dans l'estimation de la contrainte à la rupture est le module dynamique spécifique. La Figure 222 montre le diagramme de dispersion entre contrainte et valeurs prédites ajustées. Dans le cas d'une estimation individuelle, les valeurs de contrainte calculées sont connues à $\pm 13,4\text{MPa}$ près (intervalle de confiance de l'estimation au risque de 5%).

Comme pour le module statique, la variable masse volumique a été incluse dans le modèle multi – paramètres. Les caractéristiques requises du nouveau model vérifient toujours les exigences précédemment énoncées^(A). On obtient alors un coefficient de détermination de $R^2=0,57$ associé à un coefficient ajusté de $R^2_a=0,53$. Le coefficient de corrélation partielle de la variable masse volumique est de $C_{ro}=+0,42$. Dans le cas d'une estimation individuelle, les valeurs de contrainte calculées sont alors connues à $\pm 12,4\text{MPa}$ près (intervalle de confiance de l'estimation au risque de 5%). L'information de masse volumique apporte donc, dans le cas de l'estimation de la contrainte, une nette amélioration du modèle précédent (10% de la variabilité est ainsi prise en compte en ajoutant l'information de masse volumique).

12.4 Bilan du paragraphe 12

Différentes méthodes vibratoires d'estimation non destructives ont été utilisées sur un lot de 53 poutres provenant de monuments historiques. Ces poutres sont principalement en chêne, et leur géométrie, très irrégulière, est de plus variable d'une pièce à l'autre. La présence de sous sections, de cavités, de nombreux clous et pointes en métal, de pourritures, et de galeries d'insectes a été constatée. Les mesures non destructives ont été suivies d'essais statiques normalisés (EN 408, 1995) qui ont permis d'associer à chaque poutre des valeurs mécaniques de référence, contrainte à la rupture et module statique. Ces expériences ont pour but d'identifier les paramètres prédicteurs les plus pertinents des valeurs mécaniques de référence, et d'évaluer la robustesse de la méthode d'analyse proposée au chapitre III.

La méthode d'analyse des vibrations longitudinales, détaillée au chapitre III, suppose que les pièces testées sont homogènes et suffisamment élancées. Par rapport aux hypothèses qui ont servi à élaborer la méthode, le lot de poutres anciennes constitue un cas extrême. Expérimentalement la méthode a pu fournir la totalité des paramètres caractéristiques des signaux analysés dans 63% des cas. Dans 8% des cas, les deux algorithmes d'optimisation n'ont pas convergé, et seulement une petite partie des paramètres a pu être extrait. L'échec des optimisations est associé à des caractéristiques mécaniques les plus faibles du lot de poutres testé. De ces remarques, on déduit que la méthode d'analyse proposée au chapitre III peut être appliquée sur des poutres très hétérogènes dont la géométrie est irrégulière.

<i>Variables prédictives</i>	<i>Effectif N</i>	<i>R²</i>	<i>R² ajusté</i>	<i>ESE (MPa)</i>	<i>IC95 (MPa)</i>	<i>ER (%)</i>
$V_{Sylvatest}$	53	0,34	0,32	2219	4438	64
V_{Fakopp}	51	0,25	0,24	2353	4706	68
V_{AU2000}	51	0,24	0,22	2375	4750	69
$E_{Bernoulli}$	50	0,37	0,36	2154	4308	62
E_{f1ro}	52	0,57	0,56	1785	3570	52
$E_{f1ro/a3f3/ro}$	45	0,64	0,62	1668	3336	48

Tableau 70 : Synthèse des résultats de l'estimation du module d'élasticité statique. ESE : erreur standard de l'estimation. IC95 : intervalle de confiance à 95%. ER : erreur relative (%) par rapport à la moyenne de la population.

<i>Variables prédictives</i>	<i>Effectif N</i>	<i>R²</i>	<i>R² ajusté</i>	<i>ESE (MPa)</i>	<i>IC95 (MPa)</i>	<i>ER (%)</i>
$V_{Sylvatest}$	53	0,19	0,18	8,1	16,2	90
V_{Fakopp}	51	0,17	0,16	8,2	16,4	91
V_{AU2000}	51	0,18	0,16	8,2	16,4	91
$E_{Bernoulli}$	50	0,41	0,40	6,9	13,8	77
E_{f1ro}	52	0,40	0,38	7,1	14,2	79
$E_{f1ro/a3f3/ag/ro}$	45	0,57	0,53	6,2	12,4	69

Tableau 71 : Synthèse des résultats de l'estimation de la contrainte à la rupture. ESE : erreur standard de l'estimation. IC95 : intervalle de confiance à 95%. ER : erreur relative (%) par rapport à la moyenne de la population.

La totalité des paramètres issus des essais non destructifs ont servi à élaborer plusieurs modèles linéaires simples ou multiples afin d'estimer au mieux le module statique et la contrainte à la rupture. Le Tableau 70 et le Tableau 71 regroupent de manière synthétique les résultats obtenus. Ces tableaux montrent que les mesures de vitesse de propagation, $V_{Sylvatest}$, V_{Fakopp} , V_{AU2000} , sont faiblement liées aux valeurs mécaniques de référence ($R^2 \approx 0,30$ pour le module statique, et $R^2 \approx 0,20$ pour la contrainte). La totalité des mesures de vitesse a été réalisée en surface, et il semblerait que pour cette raison, la méthode de mesure ne soit pas adaptée au problème traité. Il aurait été intéressant de réaliser des mesures de vitesse en transparence (Figure 196), longitudinalement ou radialement.

Les meilleurs prédicteurs individuels des valeurs mécaniques de référence sont les modules d'élasticité dynamiques calculés en vibrations transversales $E_{\text{Bernoulli}}$ et longitudinales E_{Iro} (Tableau 70 et Tableau 71). Ces modules caractérisent le comportement élastique global de la pièce testée en vibrations. Le module $E_{\text{Bernoulli}}$ est cependant entaché d'incertitudes beaucoup plus fortes que le module E_{Iro} car il nécessite un nombre important de données, notamment des données géométriques.

Les modèles permettant d'estimer au mieux les valeurs mécaniques de référence sont les modèles multi – paramètres basés sur les variables de la méthode d'analyse du chapitre III. La masse volumique, bien qu'entachée de fortes incertitudes, a été incluse dans les modèles car elle est une variable prédictive importante de la contrainte à la rupture. Il est important de remarquer que l'on retrouve dans l'estimation du module statique et de la contrainte les mêmes variables prédictives : le module dynamique spécifique E_{Iro} traduisant le comportement élastique du matériau, et le ratio de l'amortissement temporel du troisième mode de vibration sur la fréquence au carré $A3f_3$ qui traduit la non élasticité du matériau (les phénomènes dissipatifs). En considérant le fait que les phénomènes dissipatifs, comme la viscosité, sont très intenses à haute fréquence du domaine acoustique, on peut s'attendre à ce que le ratio d'amortissement associé à la fréquence propre observable de rang le plus élevé aura probablement toujours une importance plus grande sur l'évaluation des valeurs mécaniques statiques que les autres ratios pris en compte.

Un dernier point doit être souligné et concerne l'utilisation des modèles pour prédire le module statique ou la contrainte à la rupture. Dans les meilleurs cas, le module est calculé à $\pm 3400\text{MPa}$, la valeur moyenne du lot étant de 6921MPa , et la contrainte à la rupture est calculée à $\pm 12\text{MPa}$, la valeur moyenne étant de 18MPa . Ces incertitudes sont importantes et conduisent à des erreurs relatives moyennes d'environ 50% sur les valeurs calculées. Les erreurs sur les valeurs de référence sont inconnues, mais certainement importantes du fait de la géométrie même des pièces testées. Dans ces conditions il est illusoire de chercher à obtenir une estimation précise des valeurs de mécaniques de module et de contrainte.

13 QUALIFICATION DES AVIVES PAR ANALYSE DES VIBRATIONS DANS LE DOMAINE ACOUSTIQUE

13.1 Contexte

Au cours des différents chapitres, des modèles analytiques associés à des techniques d'estimation des paramètres caractérisant le comportement dynamique des poutres ont été développés. Le premier chapitre concerne l'estimation des modules dynamiques en appliquant les théories et modèles classiques d'analyses vibratoires des poutres homogènes. Ce chapitre apporte également une méthode de modélisation et de caractérisation du comportement vibratoire des poutres dans lesquelles sont présentes des singularités. Le troisième chapitre concerne la caractérisation de la viscoélasticité, impliquant la possibilité de synthèse sonore des vibrations de poutres homogènes.

Dans le paragraphe 13, ces techniques d'analyses vibratoires sont utilisées ensemble. Les résultats issus d'une technique particulière, comme l'estimation de modules dynamiques, sont alors utilisés par d'autres techniques, comme la caractérisation des poutres comportant un élément faible. La synthèse de l'ensemble de ces techniques d'analyse permet notamment d'arriver à une prise en compte, dans le calcul d'un "module statique simulé", des singularités présentes dans chaque poutre et de la géométrie particulière de l'essai de flexion statique normalisé. Les paramètres caractéristiques fournis par les analyses vibratoires constituent alors des variables prédictives qui sont utilisés pour construire des modèles d'estimation des valeurs mécaniques de référence, le module d'élasticité statique et la contrainte à la rupture.

Les modèles de prédiction sont réalisés à partir d'essais expérimentaux vibratoires et statiques sur un lot d'avivés de mélèze destiné à être utilisé en structure. Les outils statistiques employés dans l'élaboration des modèles de prédiction sont la régression linéaire multiple, mais également des outils de chimiométrie comme la régression en composantes principales et la régression par les moindres carrés partiels qui ont l'avantage de prendre en compte la totalité de l'information disponible, et utile à la prédiction, dans les variables prédictives. Ces outils chimiométriques rendent également possible une prédiction des valeurs mécaniques de référence directement à partir des spectres de vibrations. Les modèles de prédiction ainsi constitués permettront un classement pour une utilisation en structure des avivés par analyses vibratoires.

13.2 Matériel et méthode

13.2.1 Matériel végétal

Une essence résineuse de densité moyenne a été retenue (Tableau 72). Le lot de bois est constitué par 96 avivés qui ont pour dimensions 3000x150x50 mm³. Les avivés sont conditionnés aux valeurs standards de (20±2)°C et (65±5)% d'humidité relative (EN 408, 1995), jusqu'à stabilisation à une humidité proche de l'humidité de référence de 12%. Les poutres ont été choisies, de manière visuelle, en fonction de la présence assez importante de singularités (Figure 223). Le lot de bois ainsi constitué n'est donc pas représentatif, en terme d'aspect, de l'ensemble de la production d'avivés de mélèze. Ce constat s'applique également en terme d'emploi structurel. Le lot de bois devrait en effet comporter un nombre important de pièces de faible résistance mécanique du fait de la présence de singularités (Kollmann et Côté, 1968).

Le choix d'étudier des poutres comportant de nombreuses singularités, en particulier des nœuds dans le cas présent, est motivé par le fait qu'il est difficile d'estimer la résistance mécanique de poutres très hétérogènes. La difficulté réside dans la manière de prendre en compte la présence des singularités, car le nombre, les tailles, et positions des singularités influent fortement sur la résistance mécanique des pièces de bois (Kollmann et Côté, 1968 ; Racher, et al., 2000).

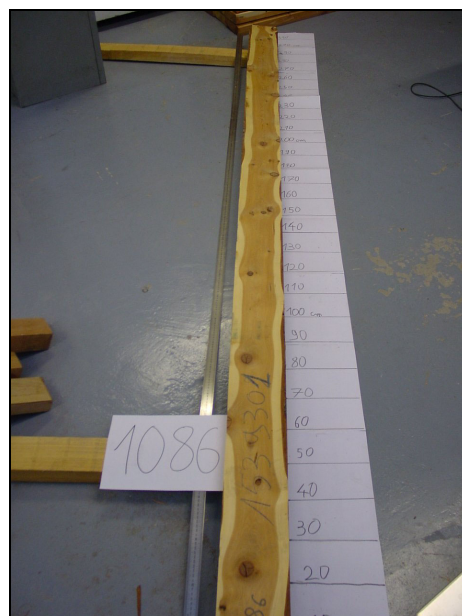


Figure 223 : Exemple de poutre choisie pour constituer le lot de bois.

Le paramètre généralement utilisé pour prendre en compte l'influence des nœuds est le KAR (knot area ratio) déduit de mesures directes de la taille des nœuds (Renaudin, 1997). Cependant, d'autres paramètres similaires au KAR peuvent être employés dans des modèles estimant la résistance mécanique (Boström, 1994 ; Divos et Tanaka, 1997). Choisir des poutres très hétérogènes conduit notamment à répondre à deux questions : quelle méthode de mesure utiliser pour

prendre en compte la présence de nœuds, mais également d'autres types de singularités ?, comment calculer un paramètre susceptible d'estimer la contrainte à la rupture, mais aussi le module d'élasticité statique, à partir de la méthode de mesure retenue ?

Nom commun	Pays	Nom botanique	Densité (g/cm ³)	Dimensions finales (mm)	Nombre d'éprouvettes
Mélèze	France	<i>Larix europae D.C.</i>	0,62	3000x150x50	96

Tableau 72 : Caractéristiques de l'essence du lot de bois testé.

13.2.2 Démarche expérimentale

L'objectif des expériences menées sur le lot de 96 poutres de mélèze est d'identifier les paramètres prédictifs, issus des méthodes d'analyses vibratoires développées dans les différents chapitres, les plus pertinents pour évaluer la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique. Ces paramètres doivent être associés à un modèle mathématique d'estimation des caractéristiques mécaniques – par régression linéaire simple, régression linéaire multiple, régression linéaire en composantes principales, ou encore en utilisant des méthodes de type PLS (partial least square) – pour permettre le classement des avivés pour une utilisation en structure.

Il ne s'agit pas ici de fournir les coefficients du modèle mathématique, car la population de pièces testées n'est pas représentative de l'ensemble de la production, mais d'indiquer la technique de mesure, les paramètres utiles, et le type de modèle à mettre en œuvre afin d'obtenir une estimation convenable des propriétés mécaniques. Dans une perspective de classement en structure, le développement et la calibration d'une machine de classement, basée sur l'analyse des vibrations dans le domaine acoustique, doivent être menés dans le cadre des nouvelles propositions du Comité Européen de Normalisation (CEN/TC 124 N 338, 2000).

Afin d'atteindre l'objectif fixé, les poutres sont dans un premier temps testées par différentes méthodes vibratoires d'évaluation non destructive. Les vibrations de flexion en conditions aux limites libre – libre sont enregistrées puis analysées en utilisant la solution de Bordonné (1989) au modèle de Timoshenko (1939). Les aspects théoriques et la mise en œuvre des essais sont détaillés au chapitre I. Les quatre premières fréquences en vibrations de flexion sont mesurées, le module d'élasticité dynamique est calculé dans les cas où la poutre est posée à plat (OXY) et sur champ (OXZ).

Les vibrations longitudinales sont également enregistrées puis analysées en utilisant la méthode développée au chapitre III et déjà employée au § 12 pour des poutres anciennes. Les trois premières fréquences en vibrations longitudinales sont mesurées, et plusieurs paramètres susceptibles d'évaluer la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique, dont le module dynamique, sont extraits (§ 12). L'étude des vibrations longitudinales a aussi permis d'obtenir directement le temps de propagation dans le matériau d'une des ondes les plus rapides et d'estimer ainsi une valeur du module dynamique.

A partir des valeurs des fréquences en vibrations de flexion et de compression, les caractéristiques de la poutre comportant un élément faible, dont le comportement vibratoire est analogue à la poutre réelle (chapitre I), ont été estimées en utilisant les résultats du § 4. Cette poutre équivalente, ainsi caractérisée, a ensuite été testée en flexion statique 4 points par simulation numérique afin d'obtenir une valeur de module statique simulée et de calculer la plus grande valeur de la déformation sur les faces à charge imposée (les équations classiques en résistance des matériaux sont utilisées, Kerguignas et Caignaert, 1977). Ces deux dernières grandeurs prennent en compte une éventuelle faiblesse locale de la poutre, sa position, ainsi que la configuration particulière de l'essai de flexion statique.

Les poutres sont dans un second temps testées en flexion statique 4 points afin de déterminer les valeurs de référence de contrainte à la rupture et de module d'élasticité statique (voir description détaillée de l'essai au § 11.2.3). Ces valeurs constituent les valeurs de référence que l'on cherche à évaluer au mieux par les paramètres prédictifs issus des essais non destructifs.

Les différentes étapes du protocole expérimental sont synthétisées à la Figure 224. Les essais statiques de référence ont été réalisés par le CTBA. L'ensemble des essais vibratoires, les analyses et la synthèse des résultats obtenus ont été réalisés par nos soins.

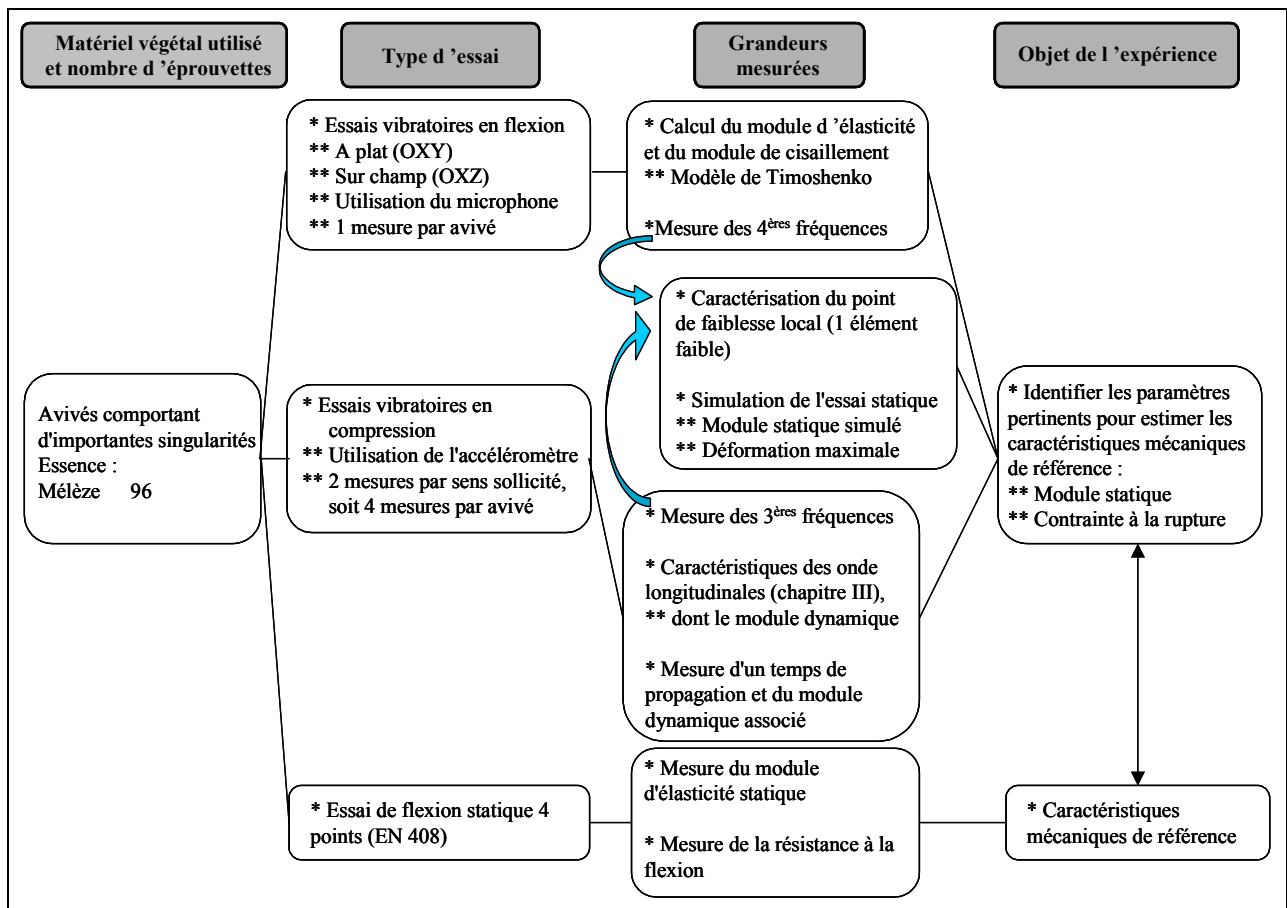


Figure 224 : Présentation des essais expérimentaux réalisés.

13.2.3 Méthodes d'analyse des essais vibratoires

Ce paragraphe détaille plusieurs points abordés dans la démarche expérimentale (§ 13.2.2) au sujet des méthodes d'analyse des essais vibratoires. Dans un premier temps, l'emploi d'une méthode particulière de détermination du temps de propagation est détaillé et justifié. Un complément sur la méthode d'identification des caractéristiques de la poutre comportant un élément faible (chapitre I) est donné dans un second temps. Les principes et la conduite de la simulation de l'essai de flexion statique 4 points pour une poutre comportant un élément faible sont ensuite expliqués et détaillés dans un troisième et dernier temps.

13.2.3.1 Mesure d'un temps de propagation et du module dynamique associé

Il existe plusieurs manières de mesurer pratiquement un temps de propagation. Nous présentons ici les trois méthodes les plus utilisées (Schneider, 1998) en justifiant notre choix sur celle employée pour analyser les essais vibratoires.

La méthode classique en traitement du signal pour mesurer un retard consiste à employer l'intercorrélation. La corrélation réalise une comparaison entre un signal et ses copies retardées (Max et Lacoume, 2000). L'intercorrélation de deux signaux transitoires, d'énergie finie, $x(t)$ et $y(t)$ est définie comme suit (Annexe 1) :

$$\text{Eq. 314 } C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

L'intercorrélation compare le signal $x(t)$ et le signal $y(t)$ retardé de τ (Eq. 314). C'est un moyen permettant de mesurer un retard entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$ (Max et Lacoume, 2000). Plus précisément, si :

$$\text{Eq. 315 } y(t) = Ax(t - \tau_0) + \text{Bruit} \Rightarrow C_{xy}(\tau) = AC_{xx}(\tau - \tau_0), \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Le maximum de la fonction $C_{xy}(\tau)$ est atteint pour $\tau = \tau_0$ (Eq. 315), le maximum de ressemblance d'un signal avec lui-même étant atteint lorsque le décalage temporel est nul (Max et Lacoume, 2000). Ce maximum indique alors le retard τ_0 entre $x(t)$ et $y(t)$.

Pratiquement, en intercorrélant le signal d'entrée avec le signal de sortie, on effectue une mesure du décalage de temps entre la totalité du signal émis et le signal reçu. On obtient ainsi une estimation du retard de groupe de l'impulsion

envoyée (Schneider, 1998). Afin de calculer une valeur de module dynamique qui soit cohérente avec la valeur classiquement calculée à partir de la relation $V_x = \sqrt{E_x/\rho}$ et de la première fréquence propre de vibration (chapitre I), il est plus judicieux d'estimer un retard de phase par les méthodes suivantes.

La Figure 225 illustre par exemple la méthode utilisée par le Sylvatest (Sandoz, 1996). Sur cette figure, le temps de départ t_0 correspond au temps pour lequel l'amplitude du signal d'entrée est maximale, et le temps d'arrivée t_1 correspond au temps pour lequel l'amplitude du signal de sortie dépasse un certain seuil de "détection" (Figure 225). Cette technique est très répandue dans les appareils similaires au Sylvatest et ne nécessite pas de calculs lourds, par opposition à l'intercorrélation (Schneider, 1998). Cependant la détermination d'un seuil de détection est assez délicate, de plus le temps de propagation ainsi calculé est biaisé car l'impulsion envoyée n'est pas réellement un Dirac (Figure 225).

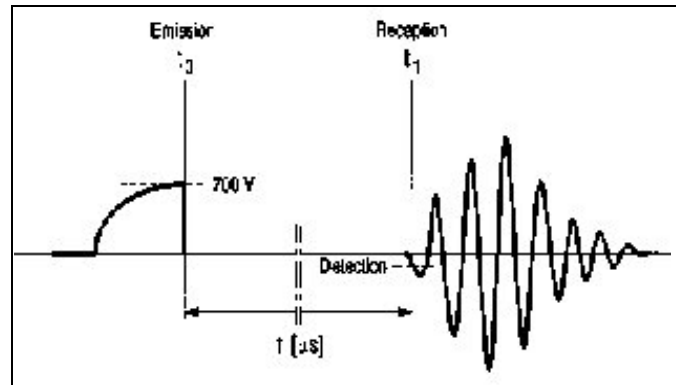


Figure 225 : Principe de mesure du temps de propagation pour le Sylvatest (Sandoz, 1996).

Dans ce cas, il serait plus judicieux de mesurer l'intervalle de temps entre l'amplitude maximale du signal d'entrée et l'amplitude maximale de la première oscillation du signal de sortie, en supposant toujours que le milieu traversé est très peu dispersif et donc que la forme de l'impulsion n'est pas trop déformée par le milieu.

Une autre méthode consiste à mesurer l'intervalle de temps entre une partie spécifique du signal d'entrée et la partie similaire correspondante du signal de sortie (Schneider, 1998). C'est cette dernière méthode qui est utilisée pour mesurer les temps de propagation en vibrations longitudinales. Afin de calculer la durée de propagation d'une des ondes les plus rapides dans le matériau testé, le début du signal d'entrée doit être déterminé et associé au début du signal de sortie. La méthode de détermination du début des signaux d'entrée et de sortie est détaillée au chapitre IV (§ 9.5). Calculer la durée de propagation d'une des ondes les plus rapides dans le matériau permet d'obtenir une valeur de vitesse de phase très voisine de la vitesse de propagation de l'onde de première fréquence propre. L'étude expérimentale du chapitre III (Figure 127) a en effet montré qu'à basse fréquence, la variation de la vitesse de propagation est très faible en fonction de la fréquence de vibration. La méthode de détermination du temps de propagation utilisée permet alors d'obtenir une valeur du module dynamique qui soit cohérente avec la valeur classiquement calculée à partir de la relation $V_x = \sqrt{E_x/\rho}$ et de la première fréquence propre de vibration.

13.2.3.2 *Caractérisation de la poutre comportant un élément faible*

A partir des valeurs des fréquences en vibrations, les caractéristiques de la poutre comportant un élément faible, dont le comportement vibratoire est analogue à la poutre réelle, ont été estimées. La stratégie d'optimisation adoptée est une extension des méthodes d'optimisation locales avec la méthode du simplexe modifié (chapitre I, § 4.3). Le départ successif de plusieurs simplexe modifié en chaque point d'une grille relativement grossière couvrant le domaine d'étude est mis en œuvre. Le point de départ de chaque simplexe est caractérisé par la taille et le module de l'élément faible constants. Seule la position de l'élément varie, et chaque simplexe débute en un point défini par une position de l'élément faible particulière.

Les résultats du chapitre I, § 4, supposent que le module du bois sans défaut est connu et exploitent les trois premières fréquences propres de vibrations transversales ou longitudinales pour estimer les trois inconnues du problème inverse : la position, la taille, et le module de l'élément faible. Dans le cas du lot de 96 poutres de mélèze, il n'est pas possible de connaître le module d'élasticité du bois sans défaut associé à chaque poutre. Une solution consisterait à prélever dans chaque poutre plusieurs échantillons de bois sans défaut apparent et de déterminer par essais vibratoires une valeur moyenne du module dynamique recherchée. Cette solution n'est cependant pas envisageable car elle conduirait à la destruction des poutres, or la méthode d'estimation de la contrainte à la rupture et du module d'élasticité statique envisagée ici doit être non destructive.

Une solution alternative simple consiste à utiliser une valeur du module longitudinal, constante pour l'ensemble des poutres, issue des caractéristiques mécaniques moyennes référencées dans la littérature. En choisissant cette alternative, on prend cependant le risque de donner une valeur trop éloignée de celle de l'optimum cherchée. La convergence de l'algorithme sera alors longue avec un risque d'échec très important. Afin de favoriser la réussite de l'optimisation, il est nécessaire de fournir une valeur approchée du module d'élasticité longitudinal du bois sans défaut pour chaque pièce testée, et donc de déduire parmi les différentes valeurs de modules dynamiques calculées expérimentalement (Figure 224) laquelle est la moins influencée par la présence d'hétérogénéités.

Une première approche intuitive conduit à penser que la détermination du temps de propagation (§ 13.2.3.1) est peu influencée par les hétérogénéités de dimension très inférieure à la distance totale parcourue par une onde en trajet direct. Cette déduction expliquerait d'une part les faibles relations linéaires obtenues entre vitesses de propagation et contrainte à la rupture dans le cas des poutres anciennes (§ 12), et d'autre part l'emploi fréquent des mesures de vitesse dans l'inspection des sections transverses de poutres d'ouvrages d'arts (Kim et Renn, 1999; Ross, et al., 1999), de poteaux de ligne (Ouis, 1999), ou encore d'arbres sur pied (Sandoz, 1996).

Une deuxième approche théorique permet d'évaluer l'écart entre le temps de propagation pour une poutre de bois sans défaut, de dimensions identiques à celles du lot de bois testé, et le temps de propagation maximal d'une poutre similaire entaillée par un trait de scie dans la largeur (Figure 226). Le trait de scie, d'épaisseur supposée négligeable, correspond ici à une hétérogénéité majeure d'une poutre réelle du lot de bois.

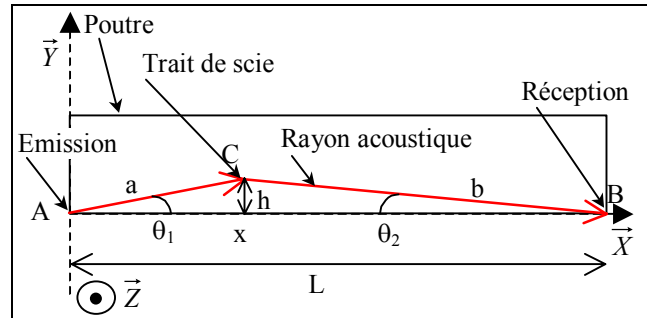


Figure 226 : Temps de propagation le plus court, trajet ACB, d'une onde longitudinale pour une poutre entaillée par un trait de scie, d'abscisse x et de hauteur h, dans le sens de la largeur.

Le trait de scie est caractérisé par sa hauteur h et sa position x par rapport à l'axe (OX) passant par les points A et B représentant respectivement le point de départ de l'impulsion et le point de réception à l'autre extrémité de la poutre testée (Figure 226). Le trajet le plus court parcouru par le train d'ondes, noté d, a pour expression :

$$\text{Eq. 316 } d = \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{(L-x)^2 + h^2}$$

En notant u le déplacement longitudinal des points matériels, et en négligeant les coefficients de Poisson, on écrit l'équation de propagation d'une onde plane progressive (chapitre I) dans la direction (AC) puis (CB) :

$$\text{Eq. 317 } \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\rho}{C_{11}^*} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } l \text{ abscisse selon (AC) puis (CB).}$$

La grandeur C_{11}^* correspond au premier terme de la matrice de rigidité dans le repère orienté d'un angle $+\theta_1$ par rapport aux axes principaux (X,Y) lorsque l'onde parcourt le trajet (AC), puis tourné de $-\theta_2$ pendant le trajet (CB). En notant T_r la matrice de rotation d'un angle θ du repère principal (X,Y) autour de l'axe Z, la matrice de rigidité dans le nouveau repère (X^*, Y^*) s'écrit (Berthelot, 1996) :

$$\text{Eq. 318 } C^* = T_r C T_r^{-1}, \text{ avec : } T_r = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Avec C : matrice de rigidité dans le repère (X,Y).

De l'équation (Eq. 318), on déduit l'expression de C_{11}^* en fonction de l'angle θ et des propriétés élastiques du matériau :

$$\text{Eq. 319 } C_{11}^* = \cos^4(\theta)E_X + \sin^4(\theta)E_Y + 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)G_{XY}$$

En utilisant les équations (Eq. 317) et (Eq. 319), la vitesse de propagation d'une onde plane progressive dans la direction (AC) puis (BC) s'écrit alors :

$$\text{Eq. 320 } V_\theta = \sqrt{\frac{\cos^4(\theta)E_X + \sin^4(\theta)E_Y + 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)G_{XY}}{\rho}}, \text{ avec } \theta = +\theta_1 \text{ selon (AC) et } \theta = -\theta_2 \text{ selon (BC).}$$

On vérifie bien que lorsque θ est nul, $V_\theta = V_X$, et lorsque θ est égal à $\pi/2$, $V_\theta = V_Y$. Il est également intéressant de tracer l'évolution du temps de propagation associé à la vitesse V_θ lorsque l'angle d'orientation θ varie de 0 à $\pi/2$, dans le plan radial-tangentiel, pour un trajet de 1 m (Figure 227). La Figure 227 est obtenue en prenant, à titre d'exemple, certains paramètres élastiques du résineux standard, $E_X = E_R = 1000$ MPa, $E_Y = E_T = 636$ MPa, et $G_{XY} = G_{RT} = 83,6$ MPa (Guitard, 1987). L'évolution ainsi obtenue par simulation numérique (Figure 227) est très semblable à celle de la Figure 228 donnée par Ross (1999). La position du maximum de la courbe d'évolution, associée à la plus faible vitesse de propagation, est située au voisinage d'un angle de $\pi/4$ (Figure 227 et Figure 228). La position du maximum est en effet

fonction de l'écart entre module radial et module tangentiel, pour le bois le ratio E_R/E_T est en moyenne de l'ordre de 1,6 (Guitard, 1987).

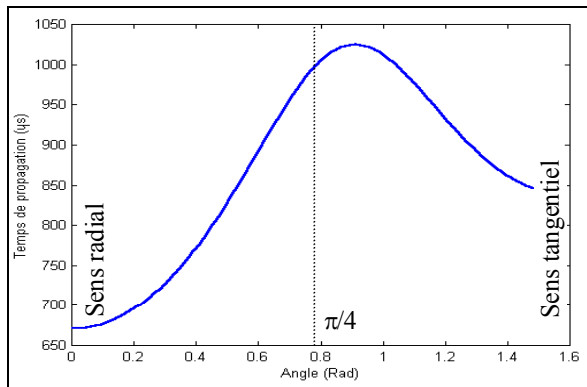


Figure 227 : Evolution du temps de propagation par mètre en fonction de l'orientation du sens de propagation par rapport à l'axe radial, simulation numérique.

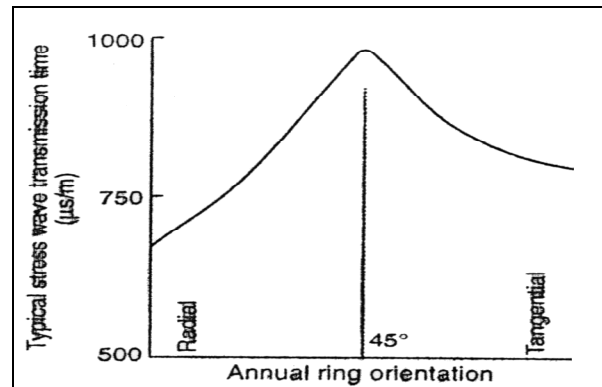


Figure 228 : Evolution du temps de propagation par mètre en fonction de l'orientation du sens de propagation par rapport à l'axe radial (Ross, et al., 1999).

On vérifie aussi les résultats de l'équation (Eq. 320) dans le plan longitudinal-tangentiel en traçant l'évolution de la vitesse de propagation V_θ lorsque l'angle d'orientation θ varie de 0 à $\pi/2$ (Figure 229). La Figure 229 est obtenue à partir des paramètres élastiques du résineux standard, $E_X=E_L=13100$ MPa, $E_Y=E_T=636$ MPa, et $G_{XY}=G_{LT}=745$ MPa (Guitard, 1987). Comme dans le cas précédant l'évolution obtenue par simulation numérique (Figure 229) est très semblable à celle de la Figure 230 donnée par Armstrong (1991).

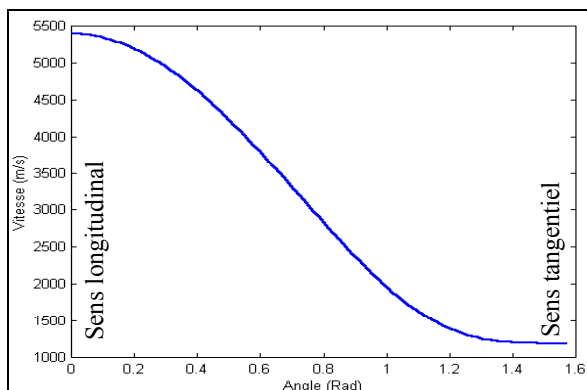


Figure 229 : Evolution de la vitesse de propagation en fonction de l'orientation du sens de propagation par rapport à l'axe longitudinal, simulation numérique.

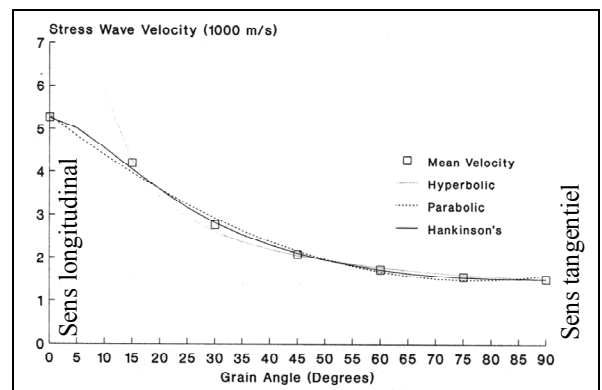


Figure 230 : Evolution de la vitesse de propagation en fonction de l'orientation du sens de propagation par rapport à l'axe longitudinal (Armstrong et Patterson, 1991).

Les équations (Eq. 316) et (Eq. 320) conduisent finalement à la formulation théorique du temps de propagation τ d'une onde plane dans la poutre entaillée d'un trait de scie dans le sens de la largeur :

$$\text{Eq. 321 } \tau = \frac{a}{V_{01}} + \frac{b}{V_{02}} = \sqrt{\rho} \left[\frac{a^2 \sqrt{h^2 + x^2}}{\sqrt{x^4 E_X + h^4 E_Y + 2x^2 h^2 G_{XY}}} + \frac{b^2 \sqrt{(L-x)^2 + h^2}}{\sqrt{(L-x)^4 E_X + h^4 E_Y + 2(L-x)^2 h^2 G_{XY}}} \right]$$

La fonction $\tau(h,x)$ définie par l'équation (Eq. 321) est maximale lorsque h est voisin de la largeur de la poutre et lorsque x est voisin de l'une des extrémités, la fonction τ étant symétrique par rapport au milieu de la poutre à h constant. En utilisant les données géométriques des poutres du lot testé, et les caractéristiques mécaniques moyennes du mélèze (Guitard, 1987), on obtient un écart moyen de 3% environ sur le temps de propagation par rapport à la poutre sans défaut, lorsque x varie de zéro à la longueur totale et lorsque h est voisin de 15 cm. Cet écart atteint un maximum de 18% lorsque x tend vers l'une des extrémités. L'écart moyen théorique sur le temps de propagation obtenu par la deuxième approche correspond à un écart moyen entre module d'élasticité de 6% environ.

Ces valeurs d'écarts sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par Sandoz (1994) et Niemz (1998) pour des configurations d'essai similaires en utilisant des fréquences ultrasonores voisines de 25kHz. L'écart moyen de temps de

propagation obtenu reste néanmoins très faibles comparativement au glissement fréquentiel observé par exemple sur la deuxième poutre de pin de Parana testée au chapitre IV ; dans cette expérience, analogue au schéma de la Figure 226, on observe en effet un écart en fréquence de 51%, induisant un écart de module de 76%, entre la poutre sans et avec la première cavité en largeur. L'écart sur les temps de propagation correspondant déterminés expérimentalement est de 3% environ ce qui correspond à un écart de module de 6% pour la configuration particulière de l'essai considéré (chapitre IV, § 10.1.2).

Dans une troisième approche, le module en vibrations longitudinales, le module en vibrations transversales sur champ, et le module déduit du temps de propagation (temps de vol) ont été calculés pour 11 poutres du lot de mélèze comportant des hétérogénéités très importantes (principalement des nœuds de gros diamètres, parfois non adhérents) et 11 poutres du même lot ne comportant pas en apparence de fortes hétérogénéités (petits nœuds ou fentes de petites dimensions). A partir des valeurs des modules dynamiques deux écarts relatifs, module longitudinal avec module temps de propagation et module transversal avec module temps de propagation, ont été calculés (Tableau 73).

Numéro	<i>Compression</i> Efl (MPa)	<i>Flexion</i> Eoxz (MPa)	<i>Temps de vol</i> Eto (MPa)	<i>Ecart (%)</i> Eto et Efl	<i>Ecart(%)</i> Eto et Eoxz
Faiblement hétérogène					
3273	15603	16396	17137	-9,8	-4,5
172	21427	21212	22227	-3,7	-4,8
377	14053	15671	15677	-11,6	0,0
405	16231	17823	19427	-19,7	-9,0
661	9683	10591	11598	-19,8	-9,5
1231	15773	16553	18128	-14,9	-9,5
1683	14257	14578	14936	-4,8	-2,5
1758	13125	14150	13797	-5,1	2,5
746	19734	19966	21201	-7,4	-6,2
1379	15789	16410	17058	-8,0	-3,9
1386	14799	15687	16544	-11,8	-5,5
Fortement hétérogène					
762	8163	7884	12006	-47,1	-52,3
827	10188	10623	15319	-50,4	-44,2
1495	11212	9963	14113	-25,9	-41,6
1726	10771	10308	14615	-35,7	-41,8
1732	10750	10597	15001	-39,6	-41,6
3	10752	10237	14552	-35,3	-42,2
50	10198	8783	12324	-20,8	-40,3
968	11828	11190	15819	-33,7	-41,4
1365	11622	11113	16308	-40,3	-46,8
1418	11611	10726	15122	-30,2	-41,0
1798	10487	9928	13936	-32,9	-40,4

Tableau 73 : Ecart entre modules dynamiques déduits d'analyses modales et du temps de propagation pour 22 poutres du lot de mélèze séparées visuellement en deux groupes "faiblement hétérogène" et "fortement hétérogène".

Le Tableau 73 montre expérimentalement que le module dynamique déduit de la détermination du temps de propagation est beaucoup moins influencé par la présence d'hétérogénéités que les valeurs de module issues des analyses modales en vibrations longitudinales ou transversales. Les trois approches présentées ici justifient l'emploi du module déduit du temps de propagation dans la procédure d'optimisation comme paramètre de départ des simplex modifiés caractérisant au mieux, et pour chaque poutre, le module d'élasticité longitudinal du bois sans défaut.

Trois procédures d'optimisation différentes ont été appliquées à partir des données fréquentielles disponibles. Dans un premier temps, les trois premières fréquences de vibrations longitudinales sont utilisées (avec le module déduit du temps de propagation comme module du bois sans défaut) afin de caractériser l'élément faible. Les réglages de chaque simplex modifié sont constitués par le nombre maximal d'itérations fixé à 500, le critère d'arrêt avec une tolérance sur les caractéristiques optimisées de 1%, la taille de l'élément faible fixée au départ de 10 cm, la position de l'élément variable avec un départ du simplex modifié en 11 positions correspondant à la division de l'intervalle $[0, L/2]$ en 10 segments identiques. La fonctionnelle dont on cherche à minimiser l'amplitude (somme des écarts quadratiques) est pénalisée lorsque le module du bois sans défaut devient inférieur à sa valeur de départ, lorsque le module de l'élément faible est supérieur au module du bois sans défaut ou inférieur au $1/20^{\text{ème}}$ du module du bois sans défaut, et lorsque la

taille et la position de l'élément sont en dehors de l'intervalle $[0, L/2]$. Dans un deuxième temps, les trois premières fréquences de vibrations transversales sur champ sont utilisées avec les mêmes réglages que précédemment pour la procédure d'optimisation.

Dans un troisième temps, les trois premières fréquences de vibrations longitudinales et transversales sont utilisées pour caractériser l'élément faible, mais aussi le module du bois sans défaut. La fonctionnelle à minimiser est la somme des fonctionnelles en vibrations longitudinales et transversales. Les réglages des simplex modifiés restent les mêmes excepté le nombre maximal d'itérations qui passe de 500 à 1000.

Il est important de rappeler les différences de point de vue existantes dans la mise en œuvre de ces trois procédures d'optimisation. On cherche d'abord à identifier au mieux la poutre comportant un élément faible dont le comportement dynamique en vibrations longitudinales est analogue à celui de la poutre réelle pour les trois premières fréquences propres. On cherche ensuite à caractériser une autre poutre avec un élément faible de comportement dynamique en vibrations transversales analogue à celui de la poutre réelle. On cherche enfin à caractériser une troisième poutre avec un élément faible analogue à la poutre réelle par son comportement dynamique à la fois en vibrations longitudinales et transversales.

13.2.3.3 Simulation de l'essai statique

La poutre comportant un élément faible, de comportement dynamique analogue à la poutre réelle, est testée en flexion statique 4 points par simulation numérique afin notamment d'obtenir une valeur estimée du module d'élasticité statique. Cette grandeur estimée prend en compte la position, la taille, et la baisse de rigidité locale induit par l'élément faible dans la poutre, mais aussi la configuration particulière de l'essai de flexion statique.

L'expression analytique du module d'élasticité utilisée dans l'essai normalisé de flexion 4 points (§ 11.2.3) est déduite d'un calcul classique de la théorie des poutres en résistance des matériaux (Brancheriau, 1997). On applique ici les mêmes hypothèses qu'en théorie des poutres en tenant compte de la présence de l'élément faible.

La Figure 231 représente schématiquement l'essai de flexion statique 4 points pour une poutre comportant un élément faible. Sur cette figure, l'élément est représenté en bleu et est repéré par deux points E et F d'abscisses respectives l_1 et l_2 . La distance entre les deux points d'appui de la poutre A et D est notée l . Les points d'application B et C de la charge P sont espacés d'une distance a .

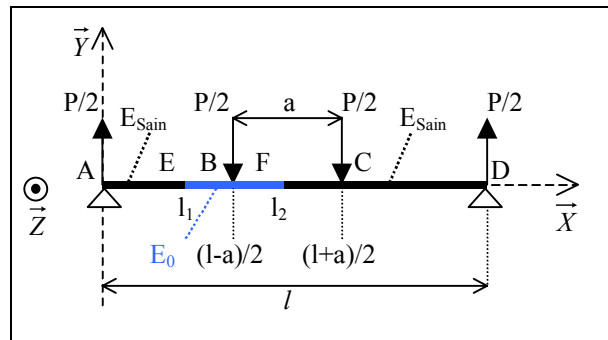


Figure 231 : Schématisation de l'essai de flexion statique 4 points pour une poutre comportant un élément faible.

Le calcul du module d'élasticité se déduit de la déformée de la poutre notée y en trois points de mesure lorsqu'une charge est progressivement appliquée (§ 11.2.3). La déformée d'une poutre droite en flexion simple est caractérisée essentiellement par la déformée de la ligne moyenne de la poutre (Kerguignas et Caignaert, 1977). La ligne moyenne est représentée par le segment [AD] sur la Figure 231. Les effets de l'effort tranchant et du poinçonnement des appuis sont négligés (Brancheriau, 1997), l'hypothèse de Bernoulli est alors vérifiée¹³. La déformée y est par conséquent caractérisée par l'équation suivante (Kerguignas et Caignaert, 1977) :

$$\text{Eq. 322} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) = \frac{-M_Z}{E_X I_{Gz}}$$

Avec M_Z : moment fléchissant selon (OZ), et I_{Gz} : moment quadratique selon (GZ), G : centre d'inertie des sections droites.

Le moment fléchissant M_Z et le module d'élasticité E_X de l'équation (Eq. 322) sont des fonctions de l'abscisse x , ces fonctions sont explicitées au Tableau 74. L'équation différentielle (Eq. 322) doit alors être résolue pour chacun des 5 tronçons de poutres délimités par 4 bornes fixes {A,B,C,D} définies par la géométrie de l'essai, et 2 bornes variables {E,F} définies par la position et la taille de l'élément faible (Figure 231).

¹³ Hypothèse de Bernoulli : la déformation provoquée par un moment d'axe (OZ) est caractérisée par une rotation autour de leur axe (GZ) des sections droites, qui restent planes et par conséquent perpendiculaires à la ligne moyenne.

Une intégration numérique de l'équation (Eq. 322) a donc été réalisée, au détriment d'une résolution purement analytique, en raison du nombre important de cas possibles selon les positions des points E et F.

La méthode de résolution numérique employée est celle de Runge-Kutta au quatrième ordre (Harris et Stocker, 1998 ; Rade et Westergren, 1999). Cette méthode n'utilise, pour calculer $y(x_k)$, que le point solution immédiatement précédent $y(x_{k-1})$; elle a pour avantage de réaliser le meilleur compromis entre le temps de calcul et la précision du résultat (Harris et Stocker, 1998).

Résoudre numériquement une équation différentielle revient à poser le problème de la manière suivante (Rade et Westergren, 1999) :

Trouver $y = y(x)$ tel que

Eq. 323
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = g(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Appliquer au cas présent de la Figure 231, la résolution se fera de proche en proche dans le sens des x croissants par tronçon successif en posant :

Eq. 324
$$\begin{cases} \frac{d^2 y_k}{dx^2}(x_k) = \varphi(x_k) & x \in [b_k, b_{k+1}] \\ \frac{dy_k}{dx}(b_k) = \frac{dy_k}{dx}(b_{k-1}) \\ y_k(b_k) = y_k(b_{k-1}) \end{cases}, \text{ avec } b_i \in \{A, B, C, D, E, F\}.$$

Le premier et le dernier tronçon seront notamment caractérisés par une condition de déplacement nul aux points A et D. Pour démarrer la résolution numérique, on ne connaît cependant pas a priori la condition sur la dérivée première au point A (Eq. 324). Ce problème est surmonté en construisant une fonctionnelle qui renvoie le déplacement au point D à partir de la variable donnée : condition sur la dérivée première au point A. Une procédure d'optimisation en dimension 1 identifie ensuite la valeur de la dérivée première en A pour que le déplacement en D soit nul (la fonctionnelle ainsi construite n'admet qu'un seul zéro dans le domaine d'étude). Une fois l'optimum identifié la déformée y de la poutre est connue en tout point.

L'essai statique de flexion 4 points peut alors être simulé en calculant la déformée de la poutre comportant un élément faible lorsque la force appliquée varie par exemple de la valeur 500daN à la valeur de 2000daN (Figure 232). A chaque valeur de charge, incrémentée par pas de 500daN, la déformée est déterminée en trois points de mesure, centrés entre les appuis intérieurs et séparés par 2,5 fois la hauteur de la poutre, comme dans l'essai réel (§11.2.3). La flèche de l'arc central est calculée à partir de la relation (Eq. 300), et le module d'élasticité est obtenu à partir de l'équation (Eq. 301).

<p>Moment fléchissant M_Z :</p> <ul style="list-style-type: none"> * Pour $x \in [0, (l-a)/2]$, $M_Z = \frac{-P}{2}x$ * Pour $x \in [(l-a)/2, (l+a)/2]$, $M_Z = \frac{-P(l-a)}{4}$ * Pour $x \in [(l+a)/2, l]$, $M_Z = \frac{P}{2}x - \frac{Pl}{2}$
<p>Module d'élasticité longitudinal E_X :</p> <ul style="list-style-type: none"> * Pour $x \in [0, l_1[$, $E_X = E_{Sain}$ * Pour $x \in [l_1, l_2]$, $E_X = E_0$ * Pour $x \in]l_2, l]$, $E_X = E_{Sain}$

Tableau 74 : Expressions du moment fléchissant et du module d'élasticité local.

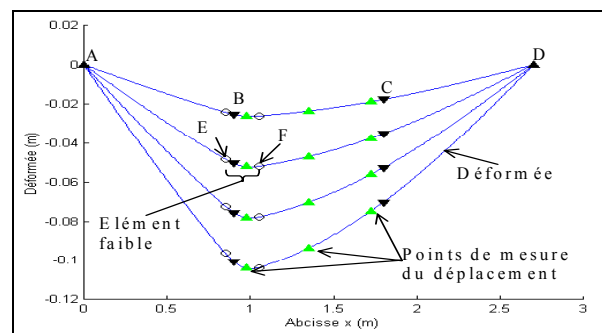


Figure 232 : Simulation numérique de l'essai de flexion statique 4 points pour une poutre comportant un élément faible.

La Figure 232 illustre graphiquement sur un exemple les déformées successives obtenues lorsque la charge augmente. Dans cet exemple la poutre a pour dimensions $3000 \times 150 \times 50 \text{mm}^3$, le module d'élasticité du bois sans défaut est de 13100MPa. L'élément faible a pour module 1000MPa, et pour positions ($l_1=1\text{m}$; $l_2=1,2\text{m}$). La valeur du module d'élasticité statique obtenue par simulation numérique sur cet exemple est alors de 10561MPa.

13.3 Résultats synthétiques et analyses

13.3.1 Essais statiques, mesure des caractéristiques mécaniques de référence

Le lot de 96 avivés de mélèze a été testé en flexion statique 4 points (EN 408, 1995). Pour 14 avivés, l'essai statique n'a pu être mené jusqu'à son terme en raison d'une défaillance de la machine. Les résultats présentés au Tableau 75 et à la Figure 234, concernant le calcul de la contrainte à la rupture, ont été établis à partir d'un effectif de 82 poutres. Pour 2 avivés, les capteurs de déformation ont fourni une information de déplacement erronée due au mauvais calage des pièces lors de l'essai. Les résultats du Tableau 75 et de la Figure 233, concernant le module d'élasticité, ont été établis à partir d'un effectif de 80 poutres.

	f_m (MPa)	E_{stat} (MPa)
Effectif	82	80
Moyenne	41	11297
Ecart type	21	2863

Tableau 75 : Caractéristiques mécaniques du lot de poutres de mélèze.

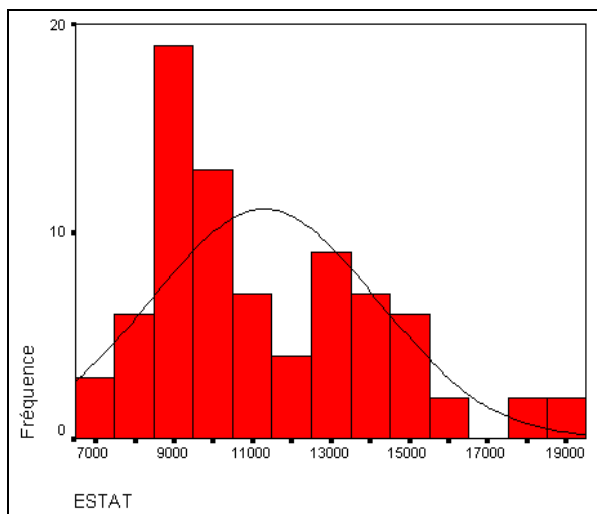


Figure 233 : Histogramme des distributions de fréquences du module d'élasticité statique (N=80).

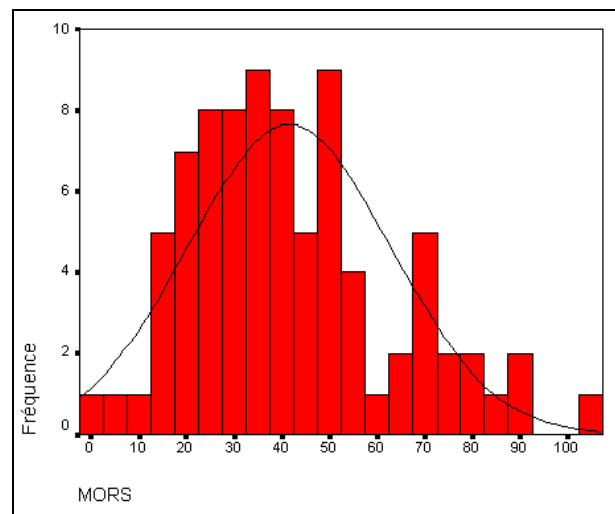


Figure 234 : Histogramme des distributions de fréquences de la contrainte à la rupture mors (N=82).

Le Tableau 75 présente les valeurs moyennes et écarts types de la contrainte à la rupture et du module d'élasticité obtenues par les essais normalisés. On rappelle que l'erreur estimée sur le calcul de la contrainte est de $\pm 2\%$ et que l'erreur estimée sur le module d'élasticité est de $\pm 4\%$ (§ 11). La contrainte à la rupture moyenne (41 MPa) est inférieure à celle obtenue (50 MPa) au § 11 (Tableau 64) sur 1576 poutres représentatives de la production d'avivés commercialisés. L'histogramme de répartition des valeurs de contrainte n'est de plus pas symétrique avec un nombre important de faibles valeurs (Figure 234). Ces constatations s'expliquent par le fait que les poutres du lot sélectionné comportent de nombreuses singularités apparentes (§ 13.2.1).

Le module d'élasticité moyen du Tableau 75 (11297 MPa) est par contre équivalent à celui obtenu (10900 MPa) au § 11 (Tableau 64). L'histogramme de répartition des valeurs de module fait apparaître une distribution non symétrique avec un nombre important de faibles valeurs (Figure 233). Ces constatations s'expliquent par le fait que les poutres sélectionnées comportent de nombreuses singularités, mais aussi par la présence d'un nombre assez important de poutres ayant un fort module d'élasticité. La distribution de la Figure 233 s'étire en effet vers les forts modules, alors que la classe modale n'est que de 9000 MPa.

La Figure 235 montre la relation linéaire significative ($R^2=0,44$) existante entre la contrainte à la rupture et le module d'élasticité statique. Le coefficient directeur ($a=0,0049$) est significativement différent de zéro, mais la constante ne l'est pas (au risque de 5%).

Le degré de liaison entre contrainte et module statique ainsi obtenu est équivalent à celui ($R^2=0,48$) trouvé pour les "poutres anciennes" (Figure 208). Concernant le lot d'avivés testé, ce degré de liaison est relativement faible par rapport aux relations généralement trouvées ($R^2 \approx 0,70$) pour de l'épicéa (Racher, et al., 2000). Ce phénomène s'explique par la présence de nombreuses hétérogénéités dans les avivés choisis pour l'étude expérimentale, le module statique et la contrainte étant des grandeurs calculées en supposant le matériau homogène (Brancheriau, 1997).

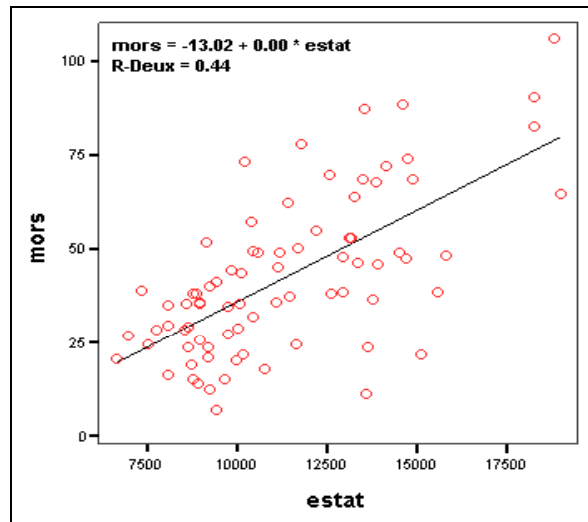


Figure 235 : Relation entre module d'élasticité statique estat et contrainte à la rupture mors (effectif, N=80).

13.3.2 Estimation du module statique et de la contrainte à la rupture

13.3.2.1 Effet des caractéristiques physiques

Les résultats des analyses statistiques, non présentées ici, montrent qu'il n'existe pas de relation linéaire significative entre les caractéristiques géométriques des poutres (hauteur, base, et longueur) et la contrainte à la rupture, ou le module d'élasticité statique.

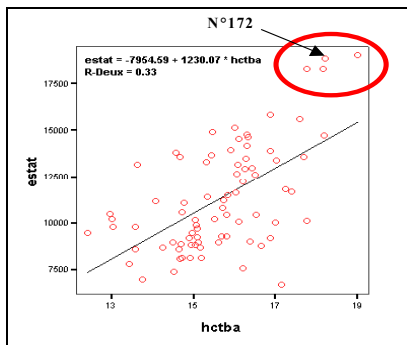


Figure 236 : Relation entre module d'élasticité statique estat et teneur en humidité hctba (effectif, N=80).

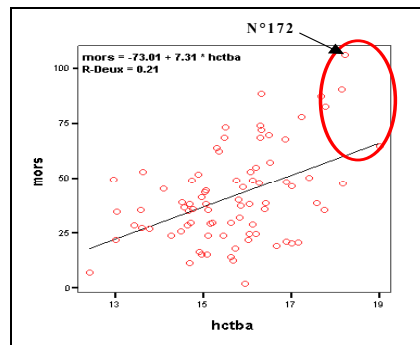


Figure 237 : Relation entre contrainte à la rupture mors et teneur en humidité hctba (effectif, N=82).

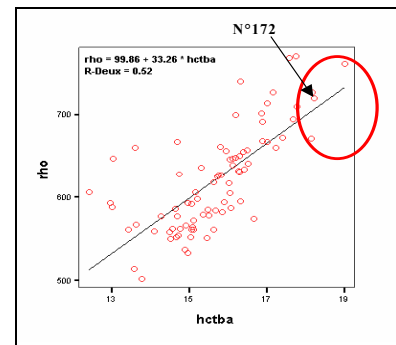


Figure 238 : Relation entre masse volumique rho et teneur en humidité hctba (effectif, N=82).

Le taux d'humidité de chaque poutre a été déterminé en continu par un humidimètre capacitif avant que l'essai statique soit réalisé. Les valeurs moyennes dans la longueur des poutres ont ensuite été calculées, ce sont ces valeurs qui sont utilisées dans les régressions linéaires simples (Figure 236, Figure 237). La Figure 236 et la Figure 237 montrent l'existence de relations linéaires significatives entre les caractéristiques mécaniques de référence et le taux d'humidité ($R^2=0,33$ pour le module et $R^2=0,21$ pour la contrainte). On observe cependant que le module d'élasticité et la contrainte à la rupture ont tendance à augmenter avec le taux d'humidité. Ceci pose un problème car ces grandeurs mécaniques diminuent lorsque l'humidité augmente (Kollmann et Côté, 1968). L'explication des tendances observées (Figure 236, Figure 237, et Figure 238) est que les poutres les plus humides sont également les plus denses (cerclees en rouge Figure 236, Figure 237, et Figure 238) et celles qui ont les moins de nœuds (exemple Figure 239). En conséquence, le taux d'humidité ne peut être retenu parmi les variables prédictives des caractéristiques mécaniques de référence.

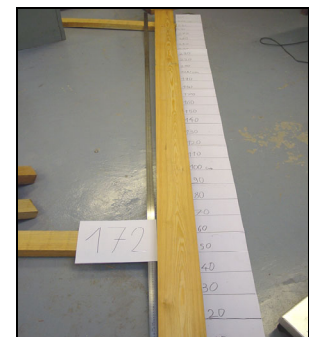


Figure 239 : photographie d'une poutre humide et dense (poutre n°172).

La Figure 240 et la Figure 241 montrent également des relations linéaires significatives entre les caractéristiques mécaniques de référence et la masse volumique ($R^2=0,26$ pour le module et $R^2=0,12$ pour la contrainte). On observe généralement une forte influence de la masse volumique et du taux d'humidité sur le module d'élasticité et la contrainte

à la rupture (Kollmann et Côté, 1968 ; Guitard, 1987). Dans le cas présent, cette relation linéaire, bien que significative, entre masse volumique et caractéristiques mécaniques reste relativement faible. Ce phénomène s'explique par le fait que la plage de variation de la masse volumique est très étroite pour le lot de poutres testé. La masse volumique fait néanmoins parti des variables prédictives retenues pour élaborer les modèles multi paramètres d'évaluation du module d'élasticité statique et de la contrainte à la rupture.

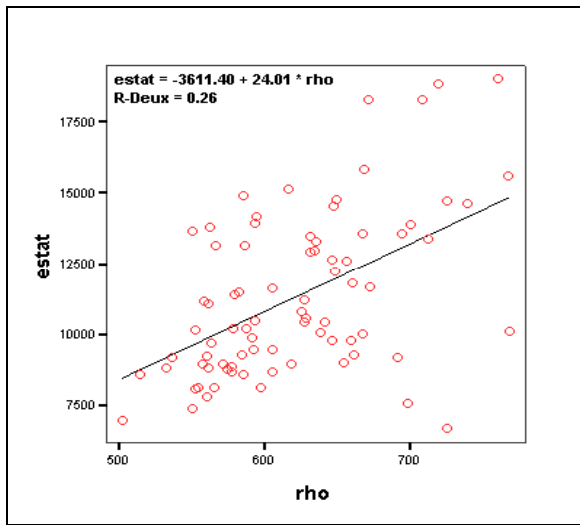


Figure 240 : Relation entre module d'élasticité statique estat et masse volumique rho (effectif, N=80).

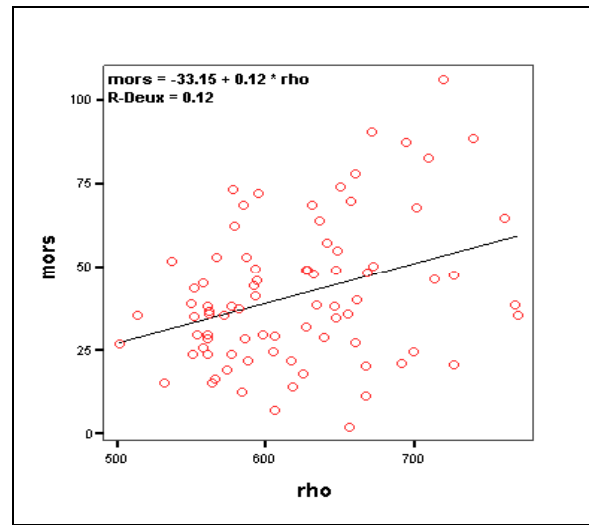


Figure 241 : Relation entre contrainte à la rupture mors et masse volumique rho (effectif, N=82).

13.3.2.2 Description des variables prédictives utilisées

Les variables prédictives, au nombre de 38, sont présentées et définies succinctement au Tableau 76. Dans la première zone de ce tableau, quatre catégories de variables se trouvent regroupées. Ces quatre catégories correspondent à quatre types distincts d'analyse. La première catégorie est formée par la caractéristique physique qu'est la masse volumique. La deuxième catégorie est formée par les variables issues de l'analyse des vibrations longitudinales des poutres (méthode proposée au Chapitre III). Parmi ces variables (allant de R_{gje} à β au Tableau 76), le produit $aE_{R,X}$, qui correspond au module relaxé du solide de Zener, a été enlevé en raison de sa très forte colinéarité avec le module E_{f1} ($R^2=0,99$ avec un effectif $N=63$). La troisième catégorie de variables correspond à l'analyse des vibrations transversales à plat (OXY) et sur champ (OXZ) en utilisant la solution de Bordonné (1989). Les coefficients de détermination R_{oxy} et R_{oxz} constituent une manière de prendre en compte l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre. Expérimentalement, on observe en effet que l'alignement des points du plan de régression de Bordonné est très perturbé lorsque la poutre testée comporte d'importantes singularités. La quatrième catégorie est formée par les variables issues de la détermination de la durée de propagation (temps de vol). Le ratio Et_{voxz} quantifie l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre du point de vue de l'élasticité (Tableau 76).

Les zones deux et trois du Tableau 76 font référence aux procédures d'optimisation appliquées afin de caractériser la poutre comportant un élément faible dont le comportement dynamique est équivalent à celui de l'échantillon testé (§13.2.3.2). Les variables issues de la simulation de l'essai statique à partir de la poutre comportant un élément faible sont également incluses dans ces zones (§13.2.3.3). Les variables de la zone 2 sont obtenues à partir des premières fréquences de vibrations longitudinales et transversales. Celles de la zone 3 sont uniquement obtenues à partir des fréquences de vibrations longitudinales. Les variables issues de l'optimisation utilisant uniquement les fréquences de vibrations transversales n'ont pas été incluses dans la liste des prédicteurs. Dans la plupart des cas expérimentaux, cette optimisation a échoué en raison du nombre trop élevé d'itérations nécessaires (supérieur à 1000 itérations par simplex) demandant des temps de calcul de plus d'une journée par poutre. Dans les variables des zones 2 et 3 plusieurs ratios ont été calculés permettant de prendre en compte l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre en terme d'élasticité (Esain / Eélément), mais aussi en terme de dimension (taille élément / longueur poutre et position élément / demi longueur poutre).

	Nomenclature N=38	Signification
Zone 1	Rho	Masse volumique
	Rgie	Energie spectrale en sous bande [1, 2500] Hz de la fonction de transfert
	Dglob	Amortissement temporel global de la réponse impulsionnelle
	A1	Amortissement temporel associé au 1er mode
	A1f1	Ratio amortissement mode 1 / fréquence ² mode 1
	A2	Amortissement temporel associé au 2ème mode
	A2f2	Ratio amortissement mode 2 / fréquence ² mode 2
	A3	Amortissement temporel associé au 3ème mode
	A3f3	Ratio amortissement mode 3 / fréquence ² mode 3
	Ef1	Module dynamique en vibrations longitudinales
	τ	Temps de fluage à contrainte constante du solide de Zener
	τe	Temps de relaxation à déformation constante du solide de Zener
	Δτ	Différence des temps caractéristiques
	β	Coefficient caractéristique des effets "Poisson"
	Eoxy	Module dynamique en vibrations transversales dans le plan OXY, solution de Bordonné
	Roxy	Coefficient de détermination dans le plan OXY, solution de Bordonné
Eoxz	Module dynamique en vibrations transversales dans le plan OXZ, solution de Bordonné	
Roxyz	Coefficient de détermination dans le plan OXZ, solution de Bordonné	
Vivol	Vitesse de propagation longitudinale déduite du temps de vol	
Etvol	Module dynamique en vibrations longitudinales déduit du temps de vol	
Etvolz	Ratio Etempvol / Eoxz	
Zone 2	Esoptfc	Module dynamique sain de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales et transversales
	E0optfc	Module dynamique de l'élément de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales et transversales
	lloptfc	Position de l'élément en 1/2 poutre de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales et transversales
	Aoptfc	Taille de l'élément de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales et transversales
	Eseofc	Ratio Esain / Eélément déduit des fréquences longitudinales et transversales
	Lafc	Ratio taille déduit des fréquences longitudinales et transversales / longueur
	Ll1fc	Ratio 2*position déduit des fréquences longitudinales et transversales / longueur
	Estfc	Module statique simulé à partir de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales et transversales
exxfc	Déformation maximale sur les faces calculée pendant la simulation de l'essai statique (Estfc) à charge constante	
Zone 3	E0optco	Module dynamique de l'élément de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales, le module sain est Etvol
	lloptco	Position de l'élément en 1/2 poutre de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales
	Aoptco	Taille de l'élément de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales
	Evoleoco	Ratio Esain / Eélément déduit des fréquences longitudinales
	Laco	Ratio taille déduit des fréquences longitudinales / longueur
	Ll1co	Ratio 2*position déduit des fréquences longitudinales / longueur
	Estco	Module statique simulé à partir de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales
	exxco	Déformation maximale sur les faces calculée pendant la simulation de l'essai statique (Estco) à charge constante

Tableau 76 : Liste et définition des variables prédictives.

La Figure 242 et la Figure 243 représentent graphiquement les relations linéaires existantes entre d'une part le module statique simulé déduit des fréquences longitudinales-transversales et le module d'élasticité statique, et d'autre part le module statique simulé déduit des fréquences longitudinales et le module d'élasticité statique. Ces relations très significatives ($R^2=0,76$ pour la Figure 242 et $R^2=0,65$ pour la Figure 243) montrent que les résultats successifs obtenus par optimisation puis par simulation de l'essai statique sont cohérents avec les valeurs de référence.

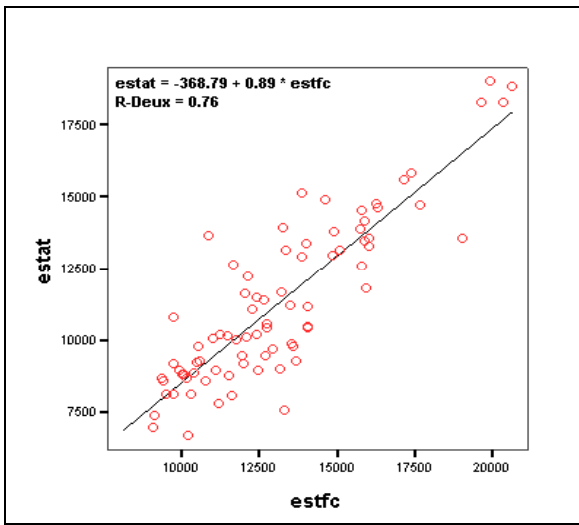


Figure 242 : Relation entre module d'élasticité statique estat et module statique simulé à partir de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales et transversales estfc (N=80).

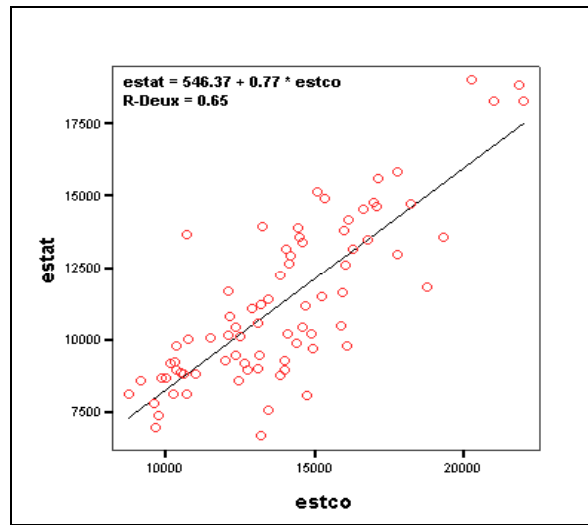


Figure 243 : Relation entre module d'élasticité statique estat et Module statique simulé à partir de la poutre analogue à élément faible déduit des fréquences longitudinales estco (N=79).

13.3.2.3 Modèles linéaires multi - paramètres

➤ Régression linéaire multiple :

Les variables prédictives définies au Tableau 76 sont utilisées pour élaborer les modèles multi paramètres d'évaluation du module d'élasticité statique et de la contrainte à la rupture. Une analyse préalable des corrélations simples permet de mettre en évidence les relations linéaires significatives entre variables prédictives et caractéristiques mécaniques de référence (Tableau 77).

A partir des 23 variables ainsi mises en évidence (Tableau 77), un ensemble de 7 variables ou groupes de variables prédictives relativement indépendantes est retenu pour constituer les modèles linéaires multi paramètres. Ces 7 groupes de variables sont constitués par :

- (1) la masse volumique ρ , les déformations maximales ϵ_{xx} , les modules d'élasticité E .
- (2) l'amortissement temporel global D_{glob} .
- (3) les ratios d'amortissement $A_i f_i$.
- (4) les temps caractéristiques τ , la différence des temps $\Delta\tau$.
- (5) les coefficients de détermination du plan de régression de Bordonné R_{oxy} et R_{oxz} .
- (6) le ratio E_{tvoxz} .
- (7) le ratio $E_{voleoco}$.

Variable	f_m	Estat
Rho	0,34	0,51
Dglob	-0,27	X
A1f1	-0,51	-0,40
A2f2	-0,46	-0,32
A3f3	-0,34	X
Ef1	0,74	0,87
τ_σ	-0,30	-0,43
τ_ϵ	-0,30	-0,43
$\Delta\tau$	-0,41	-0,38
Eoxy	0,73	0,85
Roxy	0,45	0,42
Eoxz	0,73	0,86
Roxz	0,38	0,35
Vivol	0,49	0,65
Etvol	0,62	0,84
Etvoxz	-0,34	X
Esoptfc	0,73	0,87
Estfc	0,72	0,87
ϵ_{xxfc}	-0,20	-0,27
E0optco	0,70	0,76
Evoleoco	-0,37	-0,23
Estco	0,66	0,81
ϵ_{xxco}	-0,72	-0,78

Tableau 77 : Liste des variables significativement reliées (au seuil de 5%) au module statique ou à la contrainte à la rupture (corrélation bivariée de Pearson).

Dans chacun des groupes ainsi définis, les variables sont colinéaires entre elles. Un modèle multi paramètre ne pourra alors inclure qu'une seule variable par groupe. Concernant l'estimation du module d'élasticité statique, sur les 7 groupes de variables susceptibles de faire partie du modèle de régression, seulement les variables de modules élastiques sont pertinentes. Cette constatation implique qu'un modèle multi paramètres n'améliore pas la qualité de l'estimation du

module statique par rapport à un modèle simple avec comme variable prédictive un module d'élasticité déduit des analyses vibratoires.

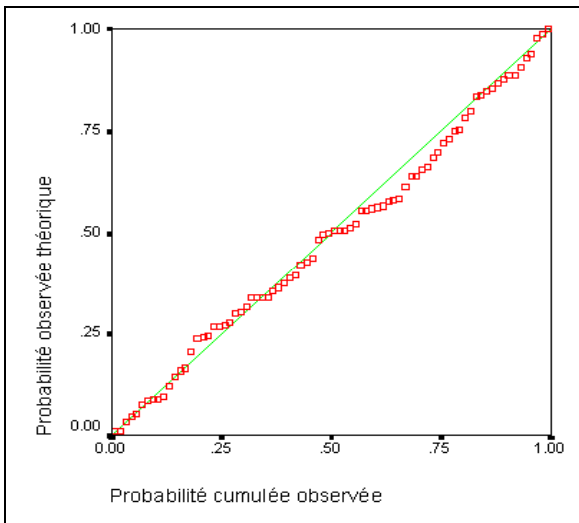


Figure 244 : Diagramme probit de régression des résidus standardisés, variable dépendante module statique (effectif, N=80).

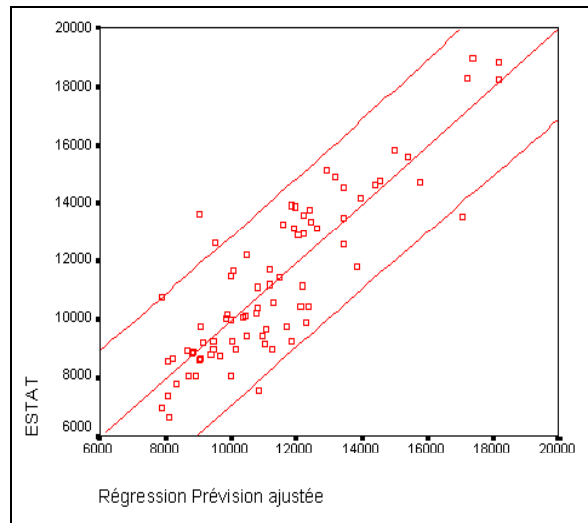


Figure 245 : Relation entre module statique estat et valeurs prédites ajustées par le modèle linéaire simple, variable prédictive Efl (effectif, N=80).

Le Tableau 77 indique qu'en prenant par exemple le module d'élasticité dynamique en vibrations longitudinales Efl, on obtient un coefficient de détermination de $R^2=0,76$ (Figure 245). La relation linéaire est très significative avec un effectif de 80 poutres. La distribution des résidus est quasi normale (Figure 244). La constante du modèle n'est pas significative au risque de 5%. Les valeurs individuelles du module statique sont alors estimées par le modèle simple à ± 2735 MPa (intervalle de confiance à 95%).

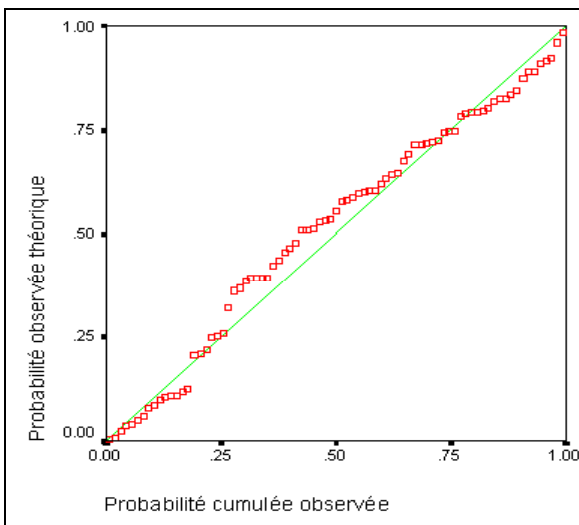


Figure 246 : Diagramme probit de régression des résidus standardisés, variable dépendante contrainte à la rupture (effectif, N=81).

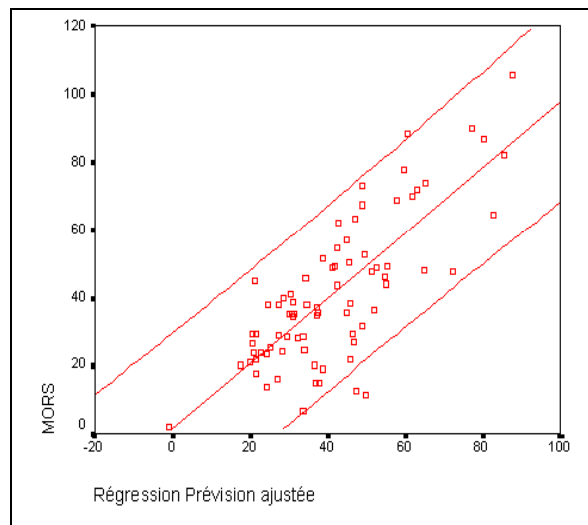


Figure 247 : Relation entre contrainte à la rupture mors et valeurs prédites ajustées par le modèle multi-paramètres, variables prédictives Eoxy, Etvoxz, A3f3, et Roxy (effectif, N=81).

Concernant l'estimation de la contrainte à la rupture, le modèle finalement retenu a pour variables prédictives le module d'élasticité en vibrations transversales Eoxy, le ratio Etvoxz, l'amortissement associé au troisième mode de vibrations longitudinales A3f3, et le coefficient de détermination du plan de régression de Bordonné Roxy. La distribution des résidus est quasi normale (Figure 246). Le coefficient de détermination obtenu est de $R^2=0,64$ avec un coefficient ajusté de $R^2_a=0,63$. Les coefficients de corrélation partielle sont respectivement de $C_{Eoxy}=+0,67$; $C_{Etvoxz}=-0,32$; $C_{A3f3}=-0,26$; $C_{Roxy}=+0,26$. La variable la plus pertinente dans l'estimation de la contrainte à la rupture est donc le module dynamique Eoxy. La Figure 247 montre le diagramme de dispersion entre contrainte et valeurs prédites ajustées. Dans le cas d'une estimation individuelle, les valeurs de contrainte sont connues à $\pm 28,8$ MPa près (intervalle de confiance à 95%).

Le modèle linéaire multi paramètres proposé pour estimer la contrainte à la rupture n'est cependant pas unique. L'existence de colinéarités entre les variables prédictives contraint à faire un choix préalable entre les variables des 7 groupes précédemment définis. Il existe alors plusieurs combinaisons de variables selon les choix retenus donnant des qualités identiques d'estimation de la contrainte. Les colinéarités entre variables sont nettement visibles à la Figure 248. Cette figure représente, en valeur absolue, la matrice des corrélations simples des 38 variables prédictives recensées au Tableau 76. La présence de points clairs marque sur la figure les fortes relations linéaires existantes notamment entre variables élastiques, caractéristiques physiques, mais aussi entre temps caractéristiques, et entre amortissements.

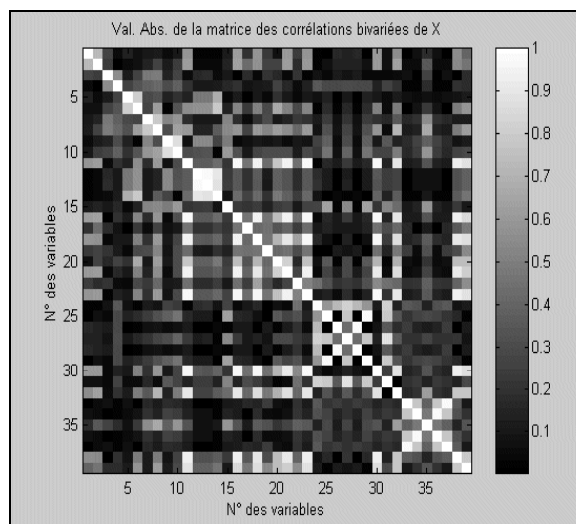


Figure 248 : Représentation graphique de la matrice des corrélations bivariées des 38 variables prédictives (N=61).

Ces dernières remarques mettent en exergue le problème spécifique de la régression linéaire multiple (MLR). On notera par la suite la matrice des variables prédictives X (chaque colonne de X correspond à une variable prédictive, chaque ligne à une pièce testée) et Y le vecteur des variables à prédire (module d'élasticité statique ou contrainte à la rupture). En notations matricielles, le modèle linéaire (MLR) s'écrit (Dagnelie, 1975) :

$$\text{Eq. 325 } Y = X\beta + \varepsilon$$

Les coefficients du modèle sont contenus dans le vecteur β , et sont généralement appelés β -valeurs. Le vecteur ε dans l'équation (Eq. 325) est le vecteur des résidus. La résolution de ce système (Eq. 325) conduit à la formulation suivante des β -valeurs, la solution étant optimale selon le critère des moindres carrés (Dagnelie, 1975 ; Tomassone, et al., 1993 ; Bertrand et Dufour, 2000) :

$$\text{Eq. 326 } \beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

La matrice $(X^T X)^{-1} X^T$ est appelé le pseudo inverse de X . Dans le cas où il existe des pseudo colinéarités entre certaines variables de X , l'inversion de la matrice $X^T X$ devient très risquée dans le sens où les résultats obtenus sont instables et très peu précis (Tomassone, et al., 1993). Un choix parmi les variables prédictives est alors rendu nécessaire afin d'éviter que la matrice X soit quasi singulière. Deux problèmes majeurs se posent alors : il n'existe pas une méthode parfaite qui permette de choisir les variables ; une partie de l'information disponible est perdue en choisissant une variable plutôt qu'une autre (Tomassone, et al., 1993 ; Bertrand et Dufour, 2000).

Il existe cependant des parades à cette situation. On considère généralement non pas directement la matrice X mais une nouvelle matrice X^* issue de décompositions particulières de X (Tomassone, et al., 1993). Toutes ces méthodes rentrent dans le cadre de la régression biaisée dont le principe est de proposer un estimateur biaisé pour estimer les β -valeurs. En contrepartie du (faible) biais introduit, ces méthodes produisent des modèles non perturbés par des problèmes d'instabilité numérique tout en prenant en compte l'ensemble de l'information disponible, ce qui compense très largement le biais introduit (Bertrand et Dufour, 2000).

Les méthodes de régression biaisée sont très fréquemment utilisées en chimiométrie¹⁴, dont les deux principaux domaines sont la description des données expérimentales sous une forme synthétique et la prédiction (Bertrand et Dufour, 2000). Dans le cas présent nous utiliserons, comme alternative à la régression linéaire multiple (MLR), les deux méthodes relativement classiques en chimiométrie : la régression en composantes principales (PCR) et la régression des moindres carrés partiels (PLS) (Wise et Gallagher, 2000).

➤ Régression en composantes principales :

La régression en composantes principales revient à considérer un modèle de régression linéaire dans lequel les variables prédictives sont les composantes principales de la matrice X . Les composantes principales sont issues de l'analyse en composantes principales (PCA). Ce type d'analyse permet de remplacer les variables originales X par des variables synthétiques, les composantes principales, qui contiennent la quasi totalité de l'information de départ, et qui ont l'avantage d'être non corrélées entre elles. (Bertrand et Dufour, 2000).

¹⁴ La chimiométrie est la science de l'utilisation des méthodes mathématiques, statistiques, et informatiques qui visent à extraire l'information utile présente dans des données de mesure chimique (Bertrand, 2000).

Pour obtenir les composantes principales, deux étapes sont nécessaires. La première consiste à élaborer la matrice des corrélations bilatérales (au sens de Pearson) ou la matrice de variance-covariance (Figure 249). La matrice de variance-covariance correspond au produit matriciel $X^T X$ divisé par le nombre des observations moins un. Dans le cas où les variables prédictives sont centrées réduites, on obtient en appliquant la définition précédente la matrice des corrélations bilatérales de X . (Wise et Gallagher, 2000).

La deuxième étape consiste à diagonaliser la matrice des corrélations bilatérales. Cette opération fournit deux matrices, une première matrice de vecteurs propres, et une matrice diagonale de valeurs propres. Ces valeurs propres représentent les variances des observations sur les axes définis par les vecteurs propres correspondants. Les valeurs propres permettent ainsi d'accéder, selon l'axe considéré, à la part de l'information initiale « visible sur chaque axe ». (Tomassone, et al., 1993).

Le problème essentiel consiste à choisir le nombre d'axes principaux à conserver pour interpréter les résultats dans le nouveau repère. Le nouveau repère étant de dimension inférieure au repère origine, il définit ainsi un sous espace dans lequel on projette les variables prédictives. Les axes principaux à retenir sont ceux qui expliquent au moins une part de variation du même ordre de grandeur que celle d'une seule variable initiale. Cela revient à conserver les axes dont la valeur propre associée est supérieure ou égale à l'unité (Figure 250). (Bertrand et Dufour, 2000).

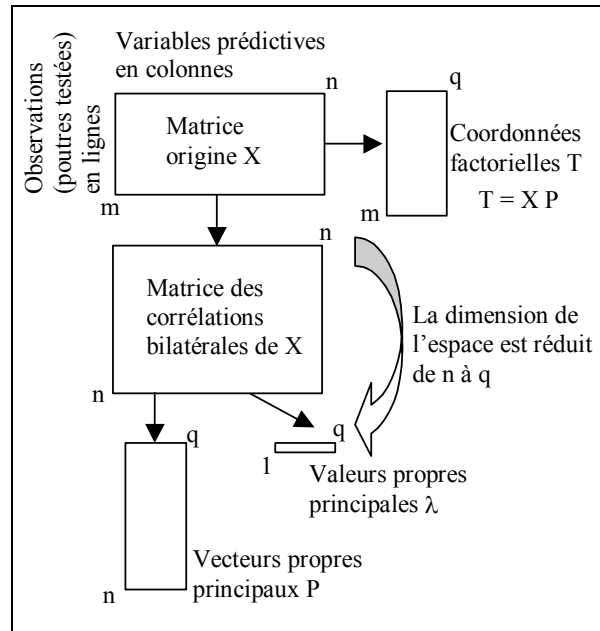


Figure 249 : Relations entre données expérimentales et résultats de l'analyse en composantes principales.

Les coordonnées du nouveau repère dans le repère origine constituent la matrice de vecteurs propres P (Figure 249). Après le changement de base, les coordonnées factorielles de chaque observation s'écrivent : $T = X P$. Avec l'ensemble des vecteurs propres, la matrice origine X est reconstituée exactement. En ne conservant que quelques facteurs, la matrice X est partiellement reconstituée : $X \approx T P^T$. La matrice $T P^T$ "résume" ainsi la plus grande part de l'information initialement contenue dans X , elle correspond à T dans le repère origine.

Une fois les coordonnées factorielles T obtenues, on effectue une régression linéaire multiple avec ces nouvelles coordonnées. L'orthogonalité des nouvelles variables T rend alors les calculs numériques très simples et fiables. Lorsque les β^* -valeurs issues de la matrice associée T sont estimées par la méthode des moindres carrés, il est aisé d'en déduire les β -valeurs dans la base origine à l'aide de la relation : $\beta = P \beta^*$. (Bertrand et Dufour, 2000).

La méthode PCR a été utilisée pour estimer les caractéristiques mécaniques de référence à partir des 38 variables prédictives précédemment définies. Les résultats obtenus concernant l'estimation du module d'élasticité statique sont présentés de manière synthétique au Tableau 78. Dans ce tableau, les analyses statistiques ont été effectuées sur une population de 59 poutres. Pour cette population, il n'existe aucune donnée manquante parmi les 38 variables prédictives.

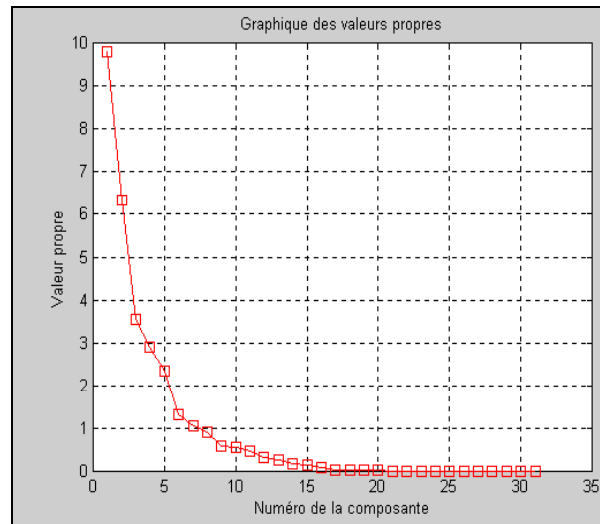


Figure 250 : Exemple de graphique des valeurs propres de la matrice des corrélations bivariées associée aux variables prédictives (choix 2).

Plusieurs choix de variables ont été testés avec la méthode PCR (Tableau 78). Le choix 1 prend en compte l'ensemble des variables prédictives (38 au total). Le choix 2 ne prend pas en compte les variables issues de l'optimisation avec les fréquences de vibrations longitudinales (la zone 3 du Tableau 76). Le choix 3 ne prend pas en compte les variables issues de l'optimisation avec les fréquences de vibrations longitudinales et transversales (la zone 2 du Tableau 76). Le dernier choix ne prend pas en compte les variables issues des différentes optimisations.

Plus le numéro du choix de variables est élevé est plus le délai entre la mesure expérimentale et l'obtention des variables prédictives est court. A titre d'exemple, le calcul de l'ensemble des variables (choix 1) pour une poutre prend 30 minutes environ avec un matériel informatique de performances moyennes¹⁵. Les variables du dernier choix s'obtiennent en moins d'une minute, ce qui rend le choix 4 plus intéressant pour une implémentation des algorithmes de calcul dans une machine industrielle de classement.

Modalité Effectif = 59	Variables	Composantes significatives	R ²	R ² ajusté	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	Validation croisée
Choix 1	38	3	0,83	0,83	1221	2527	0,90
Choix 2	30	4	0,84	0,83	1210	2524	1,05
Choix 3	29	3	0,82	0,81	1269	2625	0,92
Choix 4	21	3	0,82	0,81	1273	2634	0,79

Tableau 78 : Résultats synthétiques d'ajustement en composantes principales obtenus selon 4 modalités choisies pour estimer le module d'élasticité statique.

Le Tableau 78 montre que la quasi totalité de l'information utile à l'estimation du module d'élasticité est portée par 4 directions. La Figure 250 indique, sur l'exemple du choix 2, que 7 composantes sont nécessaires pour reconstruire convenablement l'information contenue dans la matrice X des prédicteurs. Sur ces 7 composantes, seulement 4 sont utiles pour estimer le module d'élasticité statique (Tableau 78). Ces composantes permettent d'obtenir des ajustements significatifs avec un coefficient de détermination ajusté moyen de R²_a=0,82 (Tableau 78). Dans le meilleur des cas, les valeurs de module sont estimées à ± 2524 MPa près (intervalle de confiance à 95%, choix 2, Tableau 78). En se référant au résultat de la Figure 245 (R²=0,76) on obtient une amélioration de la qualité de l'estimation du module statique de 7% environ avec la méthode PCR.

Dix validations croisées ont été effectuées afin de vérifier la stabilité des modèles de régression développés. Au cours d'une validation croisée, la population est d'abord divisée, de manière aléatoire, en deux sous populations. La première sous population, d'un effectif de 49 poutres, est appelée collection d'étalonnage. C'est à partir de la collection d'étalonnage qu'un modèle de régression PCR est établi en respectant exactement les mêmes critères de construction que pour le modèle global (modèle élaboré avec l'ensemble des observations). La deuxième sous population, d'un effectif de 10 poutres, est appelée collection de validation. Le modèle établi à partir de la collection d'étalonnage est utilisé sur la celle de validation afin d'en estimer les caractéristiques mécaniques de référence. Sur la collection d'étalonnage, la qualité de l'ajustement est caractérisée par l'erreur standard d'étalonnage (ESE), donnée par Bertrand (2000) :

$$\text{Eq. 327 } ESE = \sqrt{\frac{1}{m-k-1} \sum_{p=1}^m (y_p - \bar{y})^2}$$

Le paramètre m désigne le nombre des observations d'étalonnage, et k désigne le nombre de variables prédictives introduites dans le modèle (dans le cas présent, il s'agit du nombre de composantes principales). De la même manière, sur les échantillons de validation, l'erreur quadratique de prédiction (RMSEP) est estimée :

$$\text{Eq. 328 } RMSEP = \sqrt{\frac{1}{m^*} \sum_{p=1}^{m^*} (y_p - \bar{y})^2}$$

Le paramètre m* désigne ici le nombre des observations de validation. Si les sous populations d'étalonnage et de validation appartiennent bien à une population homogène, et si le modèle de régression est stable, l'erreur standard d'étalonnage et l'erreur quadratique de prédiction doivent avoir des valeurs voisines. Il n'existe malheureusement pas de règle définitive sur l'écart admissible entre ces deux valeurs (Bertrand et Dufour, 2000), c'est pourquoi le ratio moyen de ces deux valeurs est seulement indiqué au Tableau 78. Dans ce tableau, quelque soit le choix considéré, le ratio de validation croisée est proche de l'unité. Les modèles de régression PCR développés sur la population de 59 poutres sont donc stables.

¹⁵ Ordinateur PC, processeur Pentium II MMX 400 MHz, RAM 128 MB.

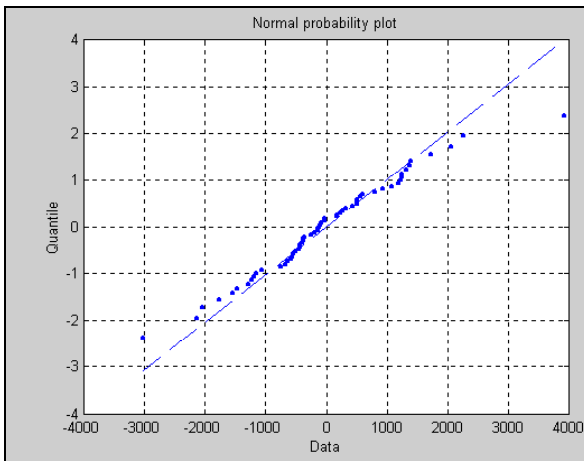


Figure 251 : Diagramme probit de régression des résidus, variable dépendante module d'élasticité statique, choix 2 (effectif, N=59).

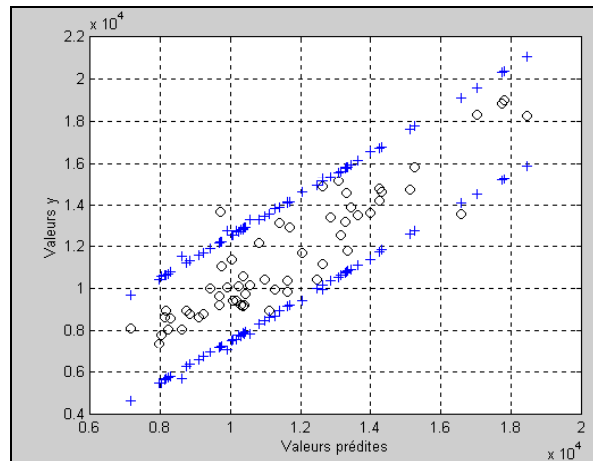


Figure 252 : Relation entre module d'élasticité statique et valeurs prédites ajustées par le modèle de régression en composantes principales, 4 composantes prédictives, choix 2 (effectif, N=59).

La Figure 251 et la Figure 252 illustrent graphiquement les résultats du meilleur ajustement par méthode PCR pour estimer le module d'élasticité statique ($R^2_a=0,83$ avec le choix 2). On observe sur la Figure 251 que la distribution des résidus est quasi normale.

Modalité Effectif = 61	Variabes	Composantes significatives	R^2	$R^2_{ajusté}$	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	Validation croisée
Choix 1	38	1	0,61	0,61	14,3	29,0	1,03
Choix 2	30	1	0,60	0,60	14,4	29,3	1,17
Choix 3	29	2	0,66	0,65	13,5	27,7	1,11
Choix 4	21	2	0,64	0,62	14,0	28,6	0,90

Tableau 79 : Résultats synthétiques d'ajustement en composantes principales obtenus selon 4 modalités choisies pour estimer la contrainte à la rupture.

Les résultats obtenus concernant l'estimation de la contrainte à la rupture sont présentés de manière synthétique au Tableau 79. Les analyses statistiques ont été effectuées sur une population de 61 poutres. Le Tableau 79 montre que l'information utile à l'estimation de la contrainte à la rupture est portée par au maximum 2 directions. Ces composantes permettent d'obtenir des ajustements significatifs avec un coefficient de détermination ajusté moyen de $R^2_a=0,62$. Dans le meilleur des cas, les valeurs de module sont estimées à $\pm 27,7$ MPa près (intervalle de confiance à 95%, choix 2, Tableau 78). En se référant au résultat obtenu en régression MLR ($R^2_a=0,63$ - Figure 247), on déduit que l'emploi de la méthode PCR n'apporte pas d'amélioration de la qualité de l'estimation de la contrainte à la rupture. La Figure 253 et la Figure 254 illustrent graphiquement les résultats du meilleur ajustement par méthode PCR ($R^2_a=0,65$ avec le choix 3). La Figure 253 montre que la distribution des résidus ne peut être considérée comme suivant une loi normale, et que le modèle associé n'est par conséquent pas approprié pour estimer correctement la contrainte à la rupture.

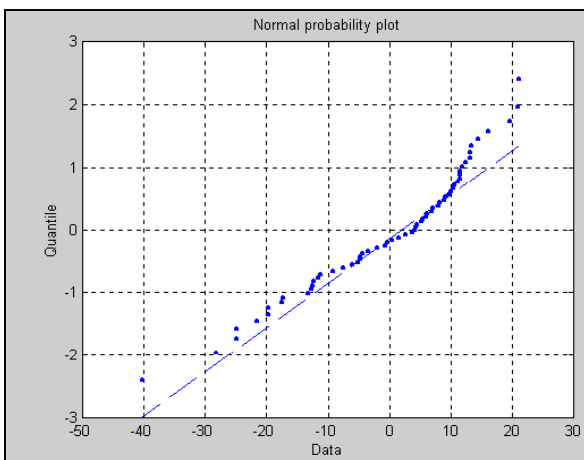


Figure 253 : Diagramme probit de régression des résidus, variable dépendante contrainte à la rupture, choix 3 (effectif, N=61).

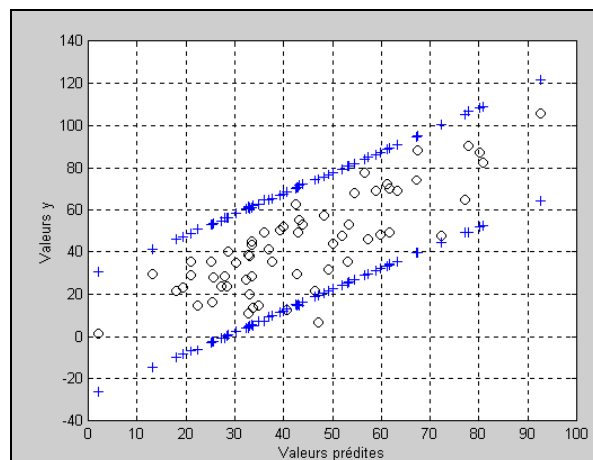


Figure 254 : Relation entre contrainte à la rupture et valeurs prédites ajustées par le modèle de régression en composantes principales, 2 composantes prédictives, choix 3 (effectif, N=61).

➤ Régression par les moindres carrés partiels :

La méthode de régression par les moindres carrés partiels (PLS) a été introduite par Wold en 1966 et a fait l'objet de nombreuses adaptations et développements (Bertrand et Dufour, 2000). Comme dans la régression en composantes principales, la méthode PLS consiste en une régression de la variable à prédire Y sur des variables T dites variables latentes (combinaisons linéaires de X). Cependant dans la méthode PLS, les variables latentes sont déterminées en tenant compte de la variable à prédire Y et des variables prédictives X, alors que dans la méthode de régression en composantes principales, les variables latentes (les composantes principales elles-mêmes) sont déterminées en tenant compte de la seule information qui provient des variables prédictives. (Chin, 1997 ; Bertrand et Dufour, 2000 ; Wise et Gallagher, 2000).

Il existe différentes manières d'effectuer une PLS. Une méthode relativement simple, ne nécessitant pas de calculs lourds, est appelée procédure NIPALS (Non - Iterative Partial Least Squares) (Wise et Gallagher, 2000). C'est cette procédure qui est utilisée dans le cas présent. La procédure NIPALS construit, à partir des matrices des prédicteurs X et de référence Y, la matrice des coordonnées factorielles T et la matrice des composantes P (on retrouve ici une analogie avec la méthode PCR). Une autre matrice W, appelée matrice de pondération, est également construite. Elle a pour fonction de pondérer P afin que la nouvelle base de projection soit orthogonale.

Méthodes	Equation constitutive	Matrice chapeau	Matrice de projection
MLR	$\beta = H Y$	$H = (X^T X)^{-1} X^T$	I (identité)
PCR	$\beta = H Y$	$H = P (T^T T)^{-1} T^T$	P
PLS	$\beta = H Y$	$H = W (P^T W)^{-1} (T^T T)^{-1} T^T$	$W (P^T W)^{-1}$

Tableau 80 : Principe de construction des modèles de régression MLR, PCR, et PLS.

Le Tableau 80 résume les principes de construction des différentes méthodes de régression employées. Ces méthodes sont toutes basées sur la même équation constitutive. Ce qui différencie la MLR des deux autres méthodes, est qu'en MLR la régression est effectuée dans l'espace origine formé par les variables prédictives. En PCR et PLS, la régression est effectuée dans un sous espace définie par une base orthogonale issue des variables prédictives. Concernant ces deux méthodes, il est alors nécessaire de revenir dans l'espace d'origine une fois la régression effectuée.

Le grand avantage de la méthode PLS réside dans le fait que les variables latentes sont calculées en tenant compte de la variable à prédire Y et des variables prédictives X. La procédure classique pour sélectionner les variables latentes est de considérer l'évolution de la somme des carrés des erreurs de prédiction (PRESS) en fonction du nombre de variables latentes (VL) introduites dans un modèle PLS pour la prédiction (Bertrand et Dufour, 2000 ; Wise et Gallagher, 2000).

N°VL	Matrice X		Matrice Y	
	Variance (%)	Cumulée (%)	Variance (%)	Cumulée (%)
1	31,5	31,5	80,3	80,3
2	15,3	46,9	4,1	84,4
3	12,2	59,1	1,2	85,6
4	3,3	62,4	1,2	86,8
5	3,6	66,0	0,9	87,7
6	5,1	71,2	0,6	88,3
7	0,0	71,2	0,5	88,8

Tableau 81 : Exemple d'analyse de la variance totale expliquée (choix 1).

Cette procédure de sélection possède l'inconvénient d'être très lourde du point de vue du calcul, elle est de plus subjective car l'allure de la courbe PRESS – VL "indique" en principe le nombre de variables latentes à sélectionner. On se propose d'utiliser une méthode alternative qui consiste à sélectionner les variables latentes à partir du tableau d'analyse de la variance totale expliquée. Un extrait d'analyse de variance est donné au Tableau 81. Dans ce type de tableau, les pourcentages de variance expliquée des matrices X et Y par chaque variable latente sont indiqués. L'analyse de variance complète du Tableau 81 comporte 38 lignes, or on observe qu'à partir de la ligne 7, l'apport d'information portée par l'axe considéré est négligeable vis à vis de X, et qu'à partir de la ligne 5, l'apport des variables latentes dans l'estimation de Y devient négligeable. Le critère retenu pour sélectionner les variables latentes s'inspire de celui utilisé en PCA, les variables retenues sont celles qui expliquent au moins 1% de la variance totale de X et 1% de la variance totale de Y.

Modalité Effectif = 59	Variabes	Composantes significatives	R ²	R ² ajusté	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	Validation croisée
Choix 1	38	4	0,87	0,86	1100	2296	1,37
Choix 2	30	3	0,86	0,85	1124	2327	1,39
Choix 3	29	2	0,83	0,83	1217	2498	0,82
Choix 4	21	2	0,84	0,83	1207	2478	1,23

Tableau 82 : Résultats synthétiques d’ajustement par les moindres carrés partiels obtenus selon 4 modalités choisies pour estimer le module d’élasticité statique.

Le Tableau 82 résume les résultats obtenus par la méthode d’ajustement PLS pour estimer le module d’élasticité statique. Comme pour la méthode PCR (Tableau 78), quatre choix de variables ont été testés, et une validation croisée a été effectuée afin de vérifier la stabilité de chaque modèle de régression. Les résultats obtenus montrent que 4 composantes au maximum (choix 1), issues de combinaisons linéaires des variables prédictives, sont utiles pour estimer le module d’élasticité statique (Tableau 82). Ces composantes permettent d’obtenir des ajustements significatifs, stables car les ratios de validation croisée sont voisins de l’unité, dont le coefficient de détermination ajusté moyen est de $R^2_a=0,84$. Dans le meilleur des cas, les valeurs de module sont estimées à ± 2296 MPa près (intervalle de confiance à 95%, choix 1, Tableau 82). En se référant aux résultats fournis par la méthode PCR ($R^2_a=0,83$ avec le choix 2, Tableau 78), on obtient une amélioration de la qualité de l’estimation du module statique de 3% environ avec la méthode PLS.

La Figure 255 et la Figure 256 illustrent graphiquement les résultats du meilleur ajustement par méthode PLS pour estimer le module d’élasticité statique ($R^2_a=0,86$ avec le choix 1). On observe sur la Figure 255 que la distribution des résidus est quasi normale.

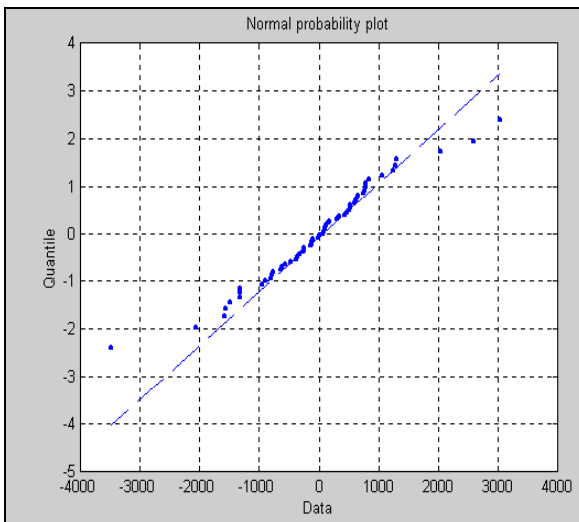


Figure 255 : Diagramme probit de régression des résidus, variable dépendante module d’élasticité statique, choix 1 (effectif, N=59).

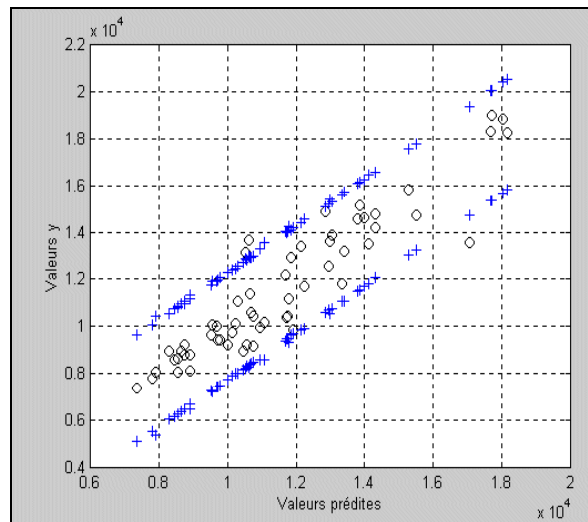


Figure 256 : Relation entre module d’élasticité statique et valeurs prédites ajustées par le modèle de régression des moindres carrés partiels, 4 composantes prédictives, choix 1 (effectif, N=59).

Parce que les variables latentes sont calculées en tenant compte de la variable à prédire Y et des variables prédictives X, la méthode PLS donne d’une manière générale une meilleure qualité d’ajustement que la méthode PCR. Cette remarque est ici vérifiée dans le cas du lot de poutres testé. La Figure 257, la Figure 258, et la Figure 259 représentent graphiquement, dans le cas de la régression PLS sur le choix 1, le détail des informations portées par chaque variable latente. Le graphique de la dernière variable latente n’est pas ici représenté car seul le coefficient de détermination $Roxz$ est significativement porté par cette variable ($R^2_{bilatéral}=0,25$).

La première variable latente a pour coefficient de corrélation partiel $C_{VL1}=0,93$ dans le modèle PLS. Cette variable est principalement constituée par l’information tenant compte de l’élasticité du matériau testé (des variables Efl à Vivol, Figure 257), vient ensuite avec une part beaucoup plus faible l’information du comportement non élastique du matériau (A1f1, A2f2, Tosig : τ_σ , Toeps : τ_ϵ , Deltato : $\Delta\tau$), la masse volumique (Rho), puis les paramètres (Etvoxz, Roxy, Roxz) qui permettent de prendre en compte l’importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre.

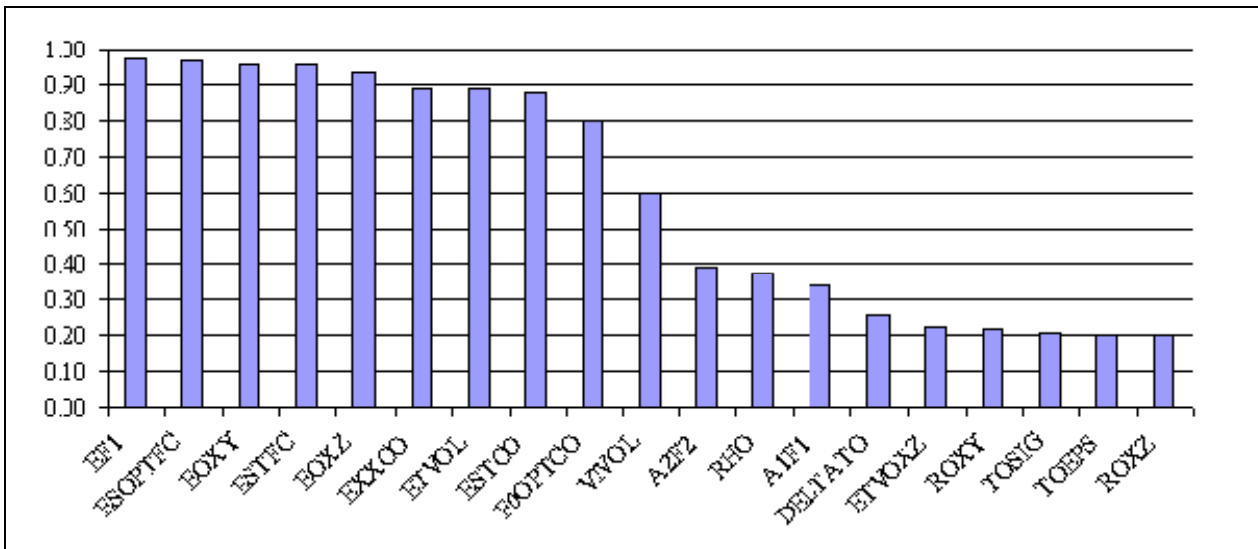


Figure 257 : Coefficients de détermination bilatéraux significatifs entre les variables prédictives et la première valeur latente du modèle des moindres carrés partiels, variable module d'élasticité statique, choix 1 (effectif, N=59).

La deuxième variable latente a pour coefficient de corrélation partiel $C_{VL2}=0,49$ dans le modèle PLS. Cette variable est principalement constituée par l'information tenant compte de la position de l'élément faible de la poutre mécaniquement analogue déduite des fréquences de vibrations longitudinales et transversales (L1lfc, L1optfc à la Figure 258). La troisième variable latente a pour coefficient de corrélation partiel $C_{VL3}=0,29$ dans le modèle PLS. Cette variable est principalement constituée par l'information tenant compte de la taille de l'élément faible déduite des fréquences de vibrations longitudinales uniquement (Aoptco, Laco à la Figure 259).

Il est important de remarquer qu'il est relativement difficile d'expliquer totalement les liaisons entre les variables prédictives et les variables latentes car d'une part, l'information contenue dans une variable prédictive peut se trouver partager entre plusieurs variables latentes (Eoptfc par exemple) et d'autre part, une variable n'ayant a priori pas de liaisons évidentes avec d'autres peut se trouver regrouper avec ces dernières dans une variable latente (les variables qui suivent L1lfc et L1optfc à la Figure 258 par exemple). Ces phénomènes de partage d'information entre variables latentes ou au contraire de regroupement d'information proviennent du principe même de la méthode PLS dont l'objectif est de résumer la plus grande partie de l'information disponible dans un petit nombre de variables latentes qui doivent de plus permettre d'estimer au mieux la variable à prédire.

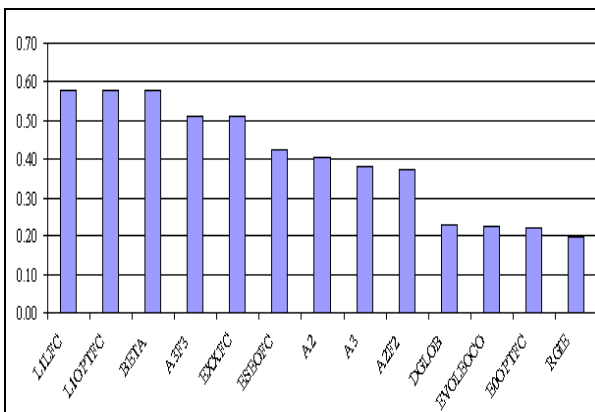


Figure 258 : Coefficients de détermination bilatéraux significatifs entre les variables prédictives et la deuxième valeur latente du modèle des moindres carrés partiels, variable module d'élasticité statique, choix 1 (effectif, N=59).

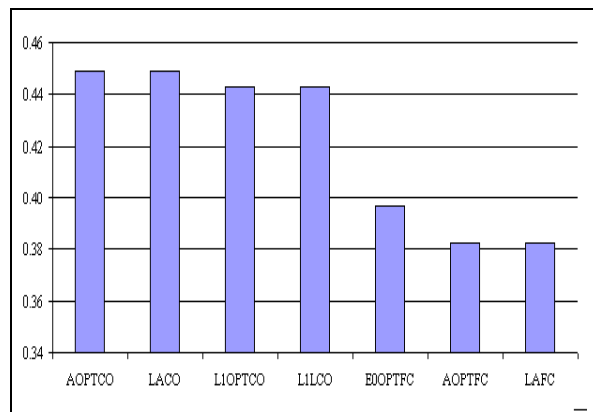


Figure 259 : Coefficients de détermination bilatéraux significatifs entre les variables prédictives et la troisième valeur latente du modèle des moindres carrés partiels, variable module d'élasticité statique, choix 1 (effectif, N=59).

Les résultats obtenus concernant l'estimation de la contrainte à la rupture sont présentés au Tableau 83. Ce tableau montre que l'information utile à l'estimation de la contrainte à la rupture est portée par au maximum 3 directions. Ces composantes permettent d'obtenir des ajustements significatifs et stables avec un coefficient de détermination ajusté moyen de $R^2_a=0,68$. Dans le meilleur des cas, les valeurs de module sont estimées à $\pm 25,6$ MPa près (intervalle de confiance à 95%, choix 3, Tableau 83). En se référant au résultat obtenu par la méthode MLR ($R^2_a=0,63$ - Figure 247),

on déduit que l'emploi de la méthode PLS apporte une amélioration de la qualité de l'estimation de la contrainte à la rupture de 7% environ.

La Figure 260 et la Figure 261 illustrent graphiquement les résultats du meilleur ajustement par méthode PLS ($R^2_a=0,70$ avec le choix 3). La Figure 260 montre que la distribution des résidus est quasi normale sauf pour les fortes valeurs où le modèle a tendance à sous évaluer les valeurs de contrainte à la rupture.

Modalité Effectif = 61	Variables	Composantes significatives	R^2	$R^2_{ajusté}$	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	Validation croisée
Choix 1	38	3	0,70	0,69	12,7	26,2	1,42
Choix 2	30	2	0,66	0,65	13,4	27,5	1,07
Choix 3	29	3	0,72	0,70	12,4	25,6	1,41
Choix 4	21	2	0,67	0,66	13,2	27,1	1,19

Tableau 83 : Résultats synthétiques d'ajustement par les moindres carrés partiels obtenus selon 4 modalités choisies pour estimer la contrainte à la rupture.

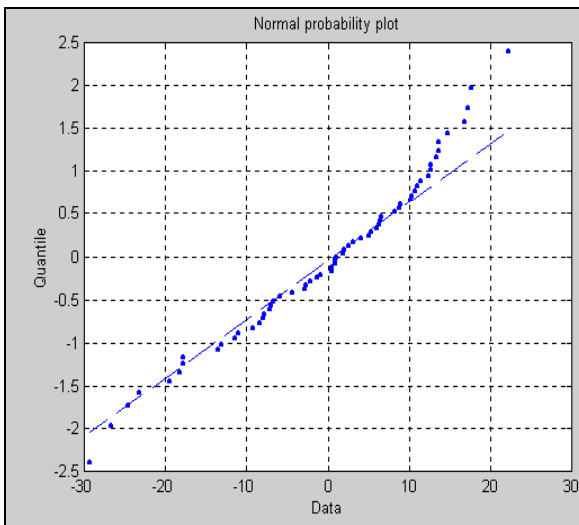


Figure 260 : Diagramme probit de régression des résidus, variable dépendante contrainte à la rupture, choix 3 (effectif, N=61).

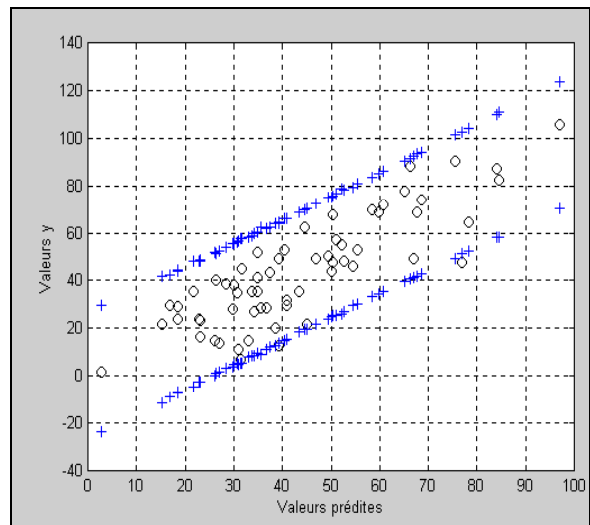


Figure 261 : Relation entre contrainte à la rupture et valeurs prédites ajustées par le modèle de régression des moindres carrés partiels, 3 composantes prédictives, choix 3 (effectif, N=61).

Comme pour l'estimation du module d'élasticité statique, il est intéressant d'examiner le détail des informations portées par chaque variable latente dans le cas de la régression PLS sur le choix 3 pour la contrainte à la rupture. La première variable latente a pour coefficient de corrélation partielle $C_{VL1}=0,83$ dans le modèle d'ajustement. Cette variable est principalement constituée par l'information tenant compte de l'élasticité du matériau testé (des variables Ef1 à Vivol, Figure 262), vient ensuite avec une part beaucoup plus faible l'information du comportement non élastique du matériau (A1f1, A2f2, Deltato : $\Delta\tau$), la masse volumique (Rho), puis les paramètres (Etvoxz, Evoleoco, Roxz, Roxy) qui permettent de prendre en compte l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre.

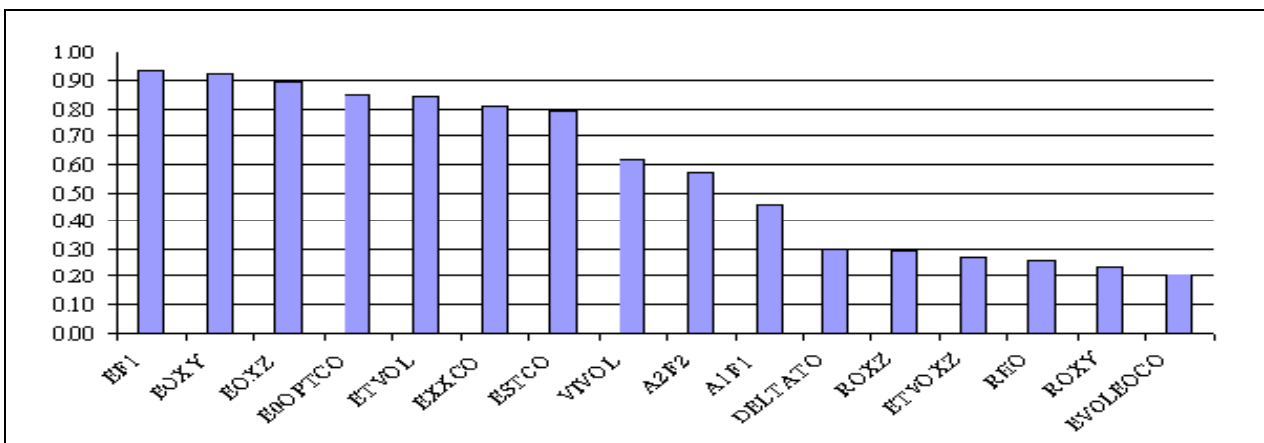


Figure 262 : Coefficients de détermination bilatéraux significatifs entre les variables prédictives et la première valeur latente du modèle des moindres carrés partiels, variable dépendante contrainte à la rupture, choix 3 (effectif, N=61).

La deuxième variable latente a pour coefficient de corrélation partiel $C_{VL2}=0,40$ dans le modèle PLS. Cette variable est principalement constituée par l'information tenant compte de la position de l'élément faible de la poutre mécaniquement analogue déduite des fréquences de vibrations longitudinales (L1optco, L1lco à la Figure 263). La troisième variable latente a pour coefficient de corrélation partiel $C_{VL3}=0,28$. Cette variable est principalement constituée par l'information tenant compte de la taille de l'élément faible déduite des fréquences de vibrations longitudinales (Laco, Aoptco à la Figure 264).

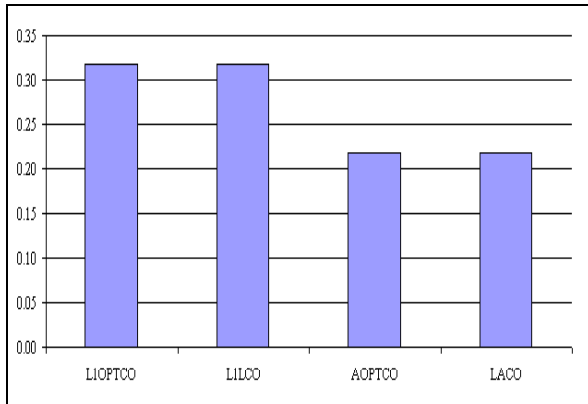


Figure 263 : Coefficients de détermination bilatéraux significatifs entre les variables prédictives et la deuxième valeur latente du modèle des moindres carrés partiels, variable dépendante contrainte à la rupture, choix 3 (effectif, N=61).

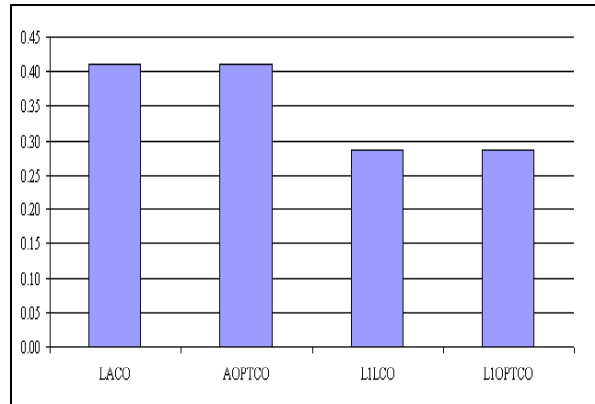


Figure 264 : Coefficients de détermination bilatéraux significatifs entre les variables prédictives et la troisième valeur latente du modèle des moindres carrés partiels, variable dépendante contrainte à la rupture, choix 3 (effectif, N=61).

Plusieurs remarques doivent être faites concernant la répartition de l'information des variables prédictives dans les variables latentes d'estimation de la contrainte à la rupture. La première valeur latente regroupe d'une part principalement une information d'élasticité du matériau, ce qui est cohérent avec le fait que les grandeurs homogènes au module d'élasticité longitudinal sont les meilleurs prédicteurs de la contrainte à la rupture (Divos et Tanaka, 1997 ; Racher, et al., 2000). Les variables prédictives qui caractérisent l'importance des hétérogénéités de chaque poutre (Roxz, Roxy, Etvoxz, Evoleoco) sont d'autre part mieux représentées dans la première valeur latente pour estimer la contrainte à la rupture (Figure 262) que pour estimer le module d'élasticité statique (Figure 257). Cette dernière remarque est en accord avec le fait que la présence d'hétérogénéités et leur importance dans les poutres ont une grande influence sur la contrainte à la rupture (Baillères, et al., 1999 ; Racher, et al., 2000). La répartition de l'information entre les variables prédictives et les variables latentes est plus claire dans le cas de l'estimation de la contrainte à la rupture que dans le cas de l'estimation du module d'élasticité statique, notamment pour les valeurs latentes deux et trois (Figure 263, Figure 264) où les caractéristiques de taille et de position de l'élément faible définissent de manière quasi symétrique ces deux valeurs latentes.

➤ Régression par les moindres carrés partiels sur les spectres fréquentiels :

D'une manière générale, les spectres de vibrations longitudinales ou transversales sont utilisés pour estimer les caractéristiques mécaniques de référence parce qu'ils contiennent des informations qui présentent un intérêt analytique. A partir d'un modèle théorique, il est en effet possible de calculer une valeur de module d'élasticité dynamique (Chapitre I) et d'estimer ainsi le module statique (Figure 245) ou la contrainte à la rupture par une relation linéaire simple.

Les lacunes de la modélisation théorique, qui ne représente la réalité qu'à travers un certain nombre d'hypothèses pas toujours vérifiées, rendent l'approche purement expérimentale intéressante à examiner. Dans ce type d'approche, les amplitudes des spectres de vibrations sont les variables du modèle de prédiction des caractéristiques mécaniques (Figure 265). Les méthodes chimiométriques, et en particulier la méthode PLS, ont été développées pour répondre à ce genre de problème.

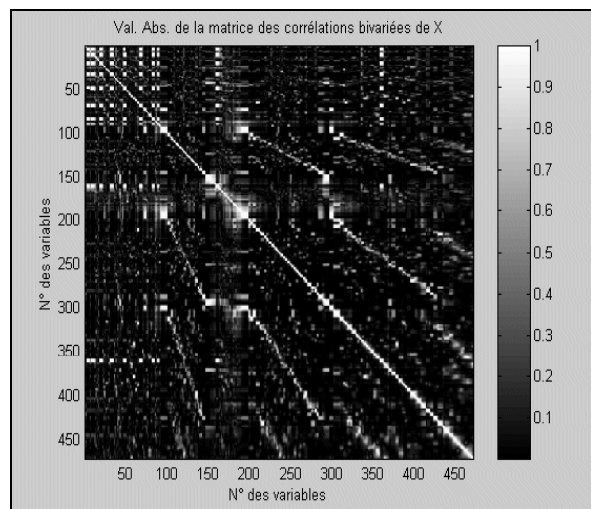


Figure 265 : Représentation graphique de la matrice des corrélations bivariées de la dérivée seconde des spectres de vibrations longitudinales (N=82).

Les données spectrales brutes, directement enregistrées par le microphone ou l'accéléromètre, sont inévitablement entachées de bruit. De plus, lorsque le signal d'entrée devient trop faible, l'estimation de la fonction de transfert peut être déformée par la présence d'une ligne de base (courbe pointillée, Figure 266). Il est donc nécessaire d'appliquer un prétraitement aux données avant leur exploitation par la méthode PLS (Bertrand et Dufour, 2000).

Parmi les méthodes de prétraitement existantes, les plus utilisées sont le filtrage des signaux qui diminue le niveau de bruit, et la dérivation du spectre en fréquence qui permet de s'affranchir d'une éventuelle déformation de la ligne de base (Bertrand et Dufour, 2000). Ce sont ces deux méthodes qui sont appliquées comme prétraitement avant l'emploi de la méthode PLS dans le cas présent.

Les paramètres d'acquisition des signaux vibratoires de compression ou de flexion sont ceux utilisés au chapitre III. La fréquence d'acquisition est de 8333Hz, le nombre de points est de 15854.

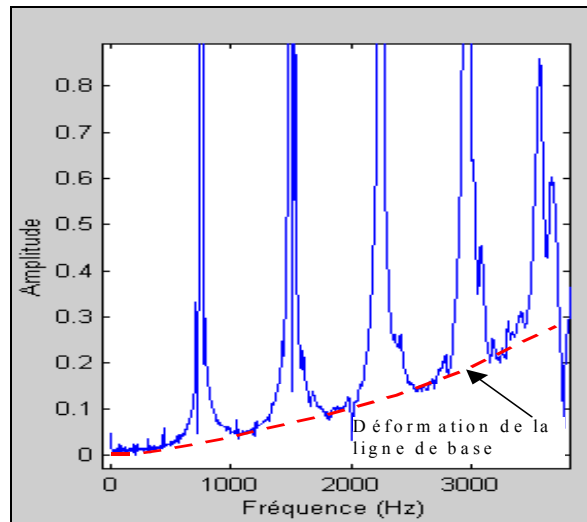


Figure 266 : Exemple de représentation du module d'une fonction de transfert en fonction de la fréquence pour un signal en vibrations longitudinales (capteur accéléromètre).

La fonction de transfert de chaque poutre testée est déterminée à partir des signaux d'entrée et de sortie. La gamme des spectres ainsi déterminés est ensuite réduite à 3000Hz pour les vibrations longitudinales et à 1000Hz pour les vibrations transversales (les premiers modes de vibration sont présents et bien nets, on se situe de plus dans une gamme de fréquences où l'énergie du signal d'entrée est forte). Les spectres sont filtrés par moyenne simple d'une largeur de 25Hz environ (moyenne sur 5 points), puis la dérivée seconde est estimée en utilisant la formule suivante (Rade et Westergren, 1999) :

$$\text{Eq. 329} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_k = y(x + kh), h > 0, k \in N \\ \frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy_0}{dx} \right), \frac{dy_0}{dx} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \end{array} \right.$$

Le prétraitement effectué est donc très simple, et ne nécessite pas de calculs importants.

Modalité Effectif = 80	Variables	Composantes significatives	R ²	R ² ajusté	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	Validation croisée
Longi.	571	7	0,76	0,73	1467	3063	2,8
Trans. OXY	190	6	0,68	0,66	1665	3457	2,5
Trans. OXZ	190	5	0,62	0,59	1811	3737	2,1

Tableau 84 : Résultats synthétiques d'ajustement par les moindres carrés partiels obtenus en utilisant la dérivée seconde des spectres de vibrations longitudinales et transversales pour estimer le module d'élasticité statique.

Le Tableau 84 présente les résultats d'ajustement obtenus en utilisant la méthode PLS sur les spectres de vibrations longitudinales (Longi.), et sur les spectres de vibrations transversales (Trans. OXY : poutre à plat, Trans. OXZ : poutre sur champ), afin d'estimer le module d'élasticité statique. Le meilleur ajustement est celui obtenu avec les spectres en vibrations longitudinales. Ce résultat s'explique par le fait que les spectres de vibrations longitudinales ont été calculés sur une gamme plus importante que pour le spectre de vibrations transversales ; les modes de vibrations transversales sont de plus présents dans les spectres de vibrations longitudinales (avec néanmoins une énergie très faible). Pour le meilleur ajustement, 7 composantes utiles à l'estimation sont construites à partir de spectres comportant 571 points. Le coefficient de détermination ajusté du modèle est de R²_a=0,73. Les valeurs de module sont estimées à ±3063 MPa près (intervalle de confiance à 95%, Tableau 84). Les modèles d'ajustement développés sont cependant instables, les ratios de validation croisée étant assez éloignés de l'unité. Ce phénomène s'explique par le fait que l'application de ce type de méthode directement sur des spectres doit être effectuée en présence d'une collection spectrale très importante (Bertrand et Dufour, 2000). Le nombre d'observations est ici trop faible pour pouvoir développer un modèle stable.

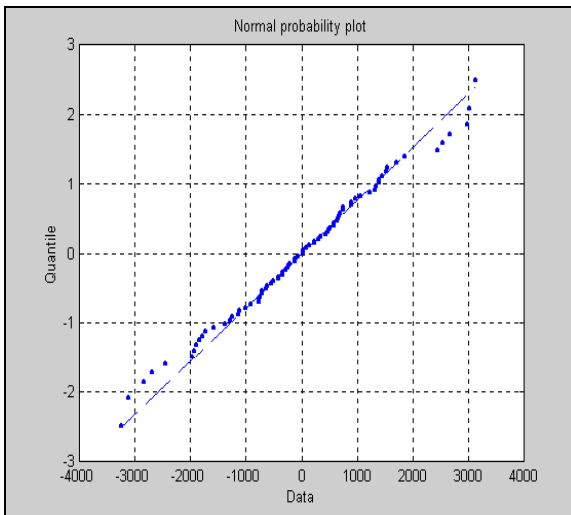


Figure 267 : Diagramme probit de régression des résidus, variable dépendante module d'élasticité statique, variable prédictive dérivée seconde du spectre de vibrations longitudinales (effectif, N=80).

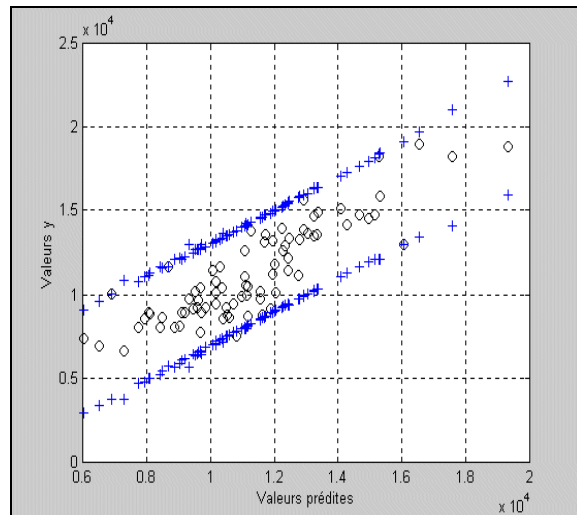


Figure 268 : Relation entre module d'élasticité statique et valeurs prédites ajustées par le modèle de régression des moindres carrés partiels, 7 composantes prédictives, variable prédictive dérivée seconde du spectre de vibrations longitudinales (effectif, N=80).

La Figure 267 et la Figure 268 illustrent graphiquement les résultats du meilleur ajustement par méthode PLS ($R^2_a=0,73$ - Tableau 84). La Figure 267 montre que la distribution des résidus est quasi normale. En se référant au résultat obtenu par la méthode de régression linéaire simple ($R^2_a=0,76$ - Figure 245), on déduit que l'emploi de la méthode PLS directement sur spectres n'apporte pas une amélioration de la qualité de l'estimation du module d'élasticité statique.

Modalité Effectif = 82	Variables	Composantes significatives	R^2	$R^2_{ajusté}$	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	Validation croisée
Longi.	571	10	0,85	0,83	8,6	18,3	3,4
Trans. OXY	190	9	0,80	0,77	10,1	21,2	2,4
Trans. OXZ	190	7	0,72	0,70	11,7	24,4	2,1

Tableau 85 : Résultats synthétiques d'ajustement par les moindres carrés partiels obtenus en utilisant la dérivée seconde des spectres de vibrations longitudinales et transversales pour estimer la contrainte à la rupture.

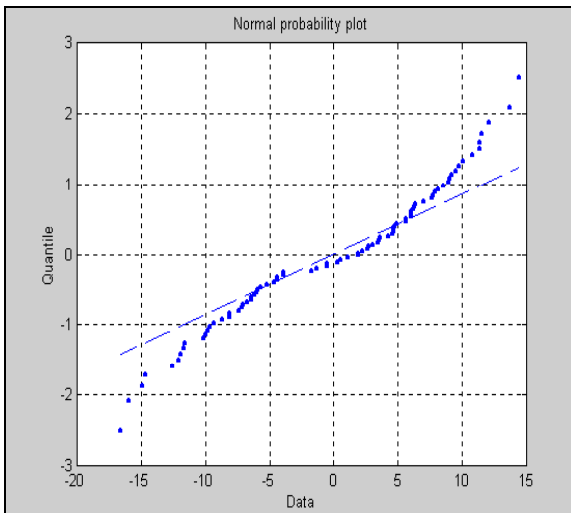


Figure 269 : Diagramme probit de régression des résidus, variable dépendante contrainte à la rupture, variable prédictive dérivée seconde du spectre de vibrations longitudinales (effectif, N=82).

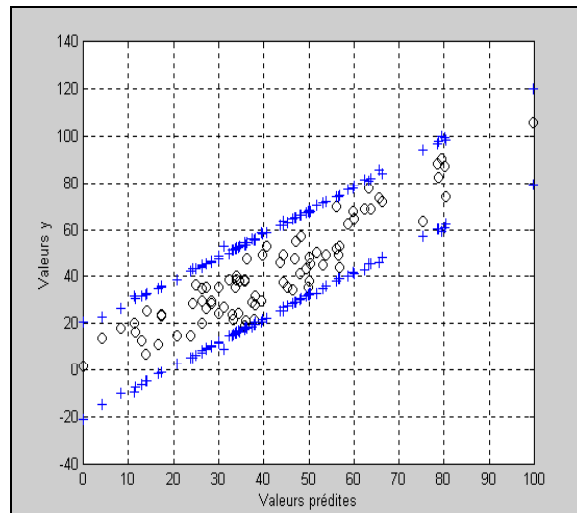


Figure 270 : Relation entre contrainte à la rupture et valeurs prédites ajustées par le modèle de régression des moindres carrés partiels, 10 composantes prédictives, variable prédictive dérivée seconde du spectre de vibrations longitudinales (effectif, N=82).

Le Tableau 85 fournit les résultats synthétiques d'ajustement obtenus en utilisant la méthode PLS sur les spectres en fréquence afin d'estimer la contrainte à la rupture. Comme pour l'estimation du module d'élasticité statique, le meilleur ajustement est celui obtenu avec les spectres de vibrations longitudinales. Dans ce cas, 10 composantes sont utiles à

l'estimation. Le coefficient de détermination ajusté du modèle est de $R^2_a=0,83$. Les valeurs de module statique sont estimées à $\pm 18,3$ MPa près (intervalle de confiance à 95%, Tableau 85). Les modèles d'ajustement développés sont instables, le nombre des observations étant ici trop faible.

La Figure 269 et la Figure 270 illustrent graphiquement les résultats du meilleur ajustement par méthode PLS ($R^2_a=0,83$ - Tableau 85). La Figure 269 montre que la distribution des résidus ne suit pas une loi normale. Le modèle développé a en effet tendance à sur évaluer les valeurs de contrainte lorsque ces dernières sont faibles. Pour les fortes valeurs, la tendance est inverse, le modèle sous évalue les valeurs de contrainte (Figure 269).

En se référant au résultat obtenu par la méthode PLS sur des variables prédictives analytiques ($R^2_a=0,70$ - Tableau 83), on déduit que l'emploi de cette méthode directement sur spectres apporte une amélioration importante de la qualité de l'estimation de la contrainte à la rupture. Cependant, la bonne qualité des ajustements obtenue en utilisant directement les spectres de vibrations doit être vérifiée sur un nombre d'observations beaucoup plus important que dans le cas présent. Il est en effet possible que l'instabilité des modèles et la non-normalité de la distribution des résidus observées soient les conséquences de l'utilisation d'un nombre insuffisant d'observations dans les ajustements.

13.4 Bilan du paragraphe 13

Les techniques d'analyses vibratoires développées dans les précédant chapitres ont été utilisées sur un lot de 96 avivés de mélèze, comportant de nombreuses singularités, afin d'estimer les caractéristiques mécaniques statiques de référence (EN 408, 1995) nécessaires au classement des poutres en résistance (EN 338, 1995). Le choix d'étudier des poutres comportant de nombreuses singularités, en particulier des nœuds, est motivé par le fait qu'il est difficile d'estimer la résistance mécanique de poutres très hétérogènes car le nombre, les tailles, et positions des singularités influent fortement sur la résistance mécanique des pièces de bois.

Le lot d'avivés a tout d'abord été testé par des méthodes non destructives d'analyses vibratoires, puis testé en flexion statique (EN 408, 1995) pour obtenir les valeurs de module d'élasticité et de contrainte à la rupture servant de référence. Les essais non destructifs ont fourni un ensemble de variables susceptibles d'estimer les valeurs mécaniques statiques, et notamment la contrainte à la rupture dont la détermination conduit à la destruction de la pièce testée.

Les variables issues de l'ensemble des essais vibratoires, au nombre de 38, peuvent être ordonnées en 6 groupes. La caractéristique physique de masse volumique forme le premier groupe. Le deuxième groupe de variables correspond à l'analyse des vibrations transversales à plat et sur champ. Dans ce cas, seule l'élasticité du matériau est caractérisée. La troisième groupe est formé par les variables issues de la détermination d'une durée de propagation (temps de vol) des ondes longitudinales. L'élasticité est caractérisée, mais également l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre en associant les informations de plusieurs types d'analyses vibratoires. La quatrième groupe est formée par les variables issues de l'analyse des vibrations longitudinales des poutres qui caractérisent notamment l'élasticité et la viscosité du matériau. Les deux derniers groupes sont issus de l'association des informations des analyses spectrales des vibrations longitudinales et transversales, les variables obtenues permettent d'une part de prendre en compte l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre, et d'autre part de tenir compte de la géométrie particulière de l'essai statique de référence.

Type d'analyse	Effectif	Variables	Composantes significatives	R^2	$R^2_{ajusté}$	ESE (MPa)	IC95 (MPa)	ER (%)
Module d'élasticité statique								
MLR - Efl	80	1	1	0,76	0,76	1356	2735	24
PCR - Choix 2	59	30	4	0,84	0,83	1210	2524	22
PLS - Choix 1	59	38	4	0,87	0,86	1100	2296	20
PLS - Longi.	80	571	7	0,76	0,73	1467	3063	27
Contrainte à la rupture								
LR - Efl	82	1	1	0,55	0,54	14,8	29,9	73
MLR - *	81	4	4	0,64	0,63	14,0	28,8	70
PCR - Choix 3	61	29	2	0,66	0,65	13,5	27,7	68
PLS - Choix 3	61	29	3	0,72	0,70	12,4	25,6	62
PLS - Longi.	82	571	10	0,85	0,83	8,6	18,3	45

(* : Eoxy, Etvoxz, A3f3, Roxy)

Tableau 86 : Synthèse des résultats de l'estimation du module d'élasticité statique et de la contrainte à la rupture. ESE : erreur standard de l'estimation. IC95 : intervalle de confiance à 95%. ER : erreur relative (%) par rapport à la moyenne de la population.

Les méthodes statistiques classiques, telles que la régression linéaire simple (LR) et multiple (MLR), ont été employées afin de prédire au mieux les valeurs mécaniques obtenues par essais statiques. D'autres méthodes, appartenant à la régression linéaire biaisée, telles que la régression en composantes principales (PCR) et la régression par les moindres carrés partiels (PLS), ont également été utilisées afin de prendre en compte la totalité de l'information contenue dans les 38 variables prédictives. Parmi ces 38 variables, plusieurs groupements possibles, choisis en fonction de la complexité des algorithmes de calcul et du temps nécessaire à leur mise en oeuvre, ont été testés.

Le Tableau 86 montre les meilleurs résultats d'ajustement obtenus pour les différents choix de variables testées. La première colonne du tableau indique la méthode statistique utilisée et les choix de variables les plus pertinents mises en oeuvre pour construire les modèles de prédiction. Dans le cas de l'estimation du module d'élasticité statique, comme dans celui de l'estimation de la contrainte à la rupture, la méthode PLS fournit les meilleurs modèles en terme de qualité d'ajustement. L'utilisation de ce type de méthode permet d'améliorer de 10% l'estimation du module statique (PLS – choix 1, Tableau 86), et de 16% celle de la contrainte à la rupture (PLS – choix 3, Tableau 86), par rapport à l'emploi plus classique d'une régression linéaire simple (avec E_{f1} comme variable prédictive).

Bien que la régression PLS soit une méthode d'analyse statistique lourde en terme de calibration du modèle linéaire, l'emploi des coefficients du modèle réalisé pour une estimation des valeurs mécaniques est analogue à celui de la régression linéaire multiple.

Cette méthode permet de plus une estimation directe des valeurs de référence à partir des spectres de vibrations, chaque fréquence étant alors considérée comme une variable prédictive. Les modèles construits directement à partir des spectres permettent une bonne prédiction, la qualité de l'estimation est notamment très bonne pour la contrainte à la rupture ($R^2_a=0,83$ avec PLS – Longi., Tableau 86). Cependant le faible effectif de la population testée n'a pas permis d'obtenir des ajustements stables. Compte tenu du fort potentiel en terme de qualité d'ajustement de la méthode PLS sur spectres de vibration, il serait intéressant de calibrer un modèle de régression à partir d'observations beaucoup plus nombreuses que dans le cas présent. L'avantage majeur de l'application de la méthode PLS sur spectre est qu'une fois le modèle calibré, la mise en oeuvre des algorithmes de calcul dans une machine de classement industriel est réduite au minimum (transformée de Fourier rapide, filtrage, dérivée seconde, application des coefficients de calibration), ce qui rend le processus de classement quasi instantané.

Par ailleurs, chaque poutre peut être testée, avant d'être classée, afin de déterminer son appartenance ou non au domaine de validité de la calibration (par exemple en utilisant la notion de distance généralisée au sens de Mahalanobis, Dagnelie, 1975). Dans le cas où la pièce n'appartient pas au domaine de validité de la calibration, il est alors plus prudent d'éviter de la classer et d'indiquer que cette pièce présente un comportement atypique, ce qui rend la procédure de classement plus fiable et évite ainsi toute dérive.

Afin d'essayer de juger de la pertinence des méthodes d'analyses développées pour faire du classement structurel, les modèles PLS sur choix 3 d'estimation du module statique et de la contrainte à la rupture ont été utilisés pour classer 59 avivés en 9 classes allant de C14 à C40 (EN 338, 1995). Le choix de variables n°3 est retenu pour les deux valeurs mécaniques de référence car il permet la meilleure estimation de la contrainte à la rupture (Tableau 86). Les rendements de classement obtenus sont présentés à la Figure 271.

Cette figure montre des différences relativement importantes entre classement optimal (connaissant les valeurs statiques réelles) et classement attribué (valeurs mécaniques estimées). Le Tableau 87 a été réalisé en suivant les recommandations de la proposition de norme européenne (CEN/TC 124 N 338, 2000) qui remplacerait les normes actuelles (EN 518, 1995) et (EN 519, 1995). Cette proposition indique notamment une procédure (Initial Type Testing) permettant de qualifier les machines de classement.

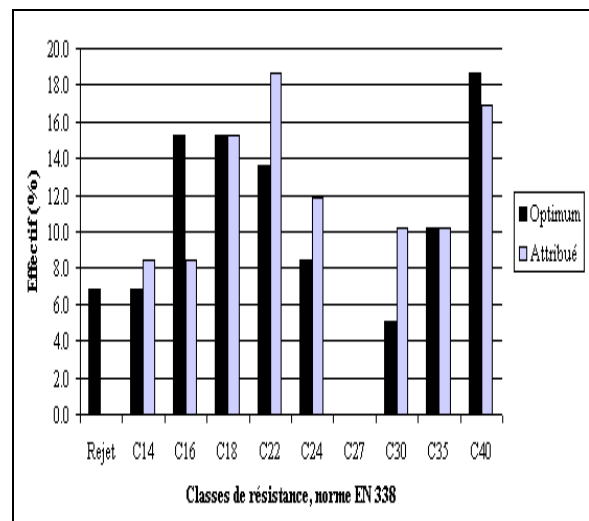


Figure 271 : Rendement optimal et attribué, en utilisant le modèle PLS – choix 3, du classement de 59 avivés sur 9 classes (C14 à C40, selon EN 338).

Global Cost Matrix		Classement attribué								
		C40	C35	C30	C27	C24	C22	C18	C16	C14
Classement optimum	C40	0,00	0,04	0,09	X	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	C35	0,05	0,00	0,09	X	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00
	C30	0,00	0,09	0,00	X	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00
	C27	0,00	0,00	0,00	X	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	C24	0,00	0,26	0,14	X	0,00	0,00	0,15	0,00	0,00
	C22	0,00	0,00	0,20	X	0,09	0,00	0,12	0,00	0,00
	C18	0,00	0,53	0,00	X	0,16	0,34	0,00	0,00	0,00
	C16	0,00	0,00	0,00	X	0,00	0,23	0,05	0,00	0,28
	C14	0,00	0,00	0,00	X	0,00	0,00	0,11	0,10	0,00

Tableau 87 : Matrice global de coût du classement sur 9 classes (C14 à C40, selon EN 338), en utilisant le modèle PLS – choix 3, effectif N=59 (CEN/TC 124 N 338, 2000).

Une matrice indiquant le nombre de pièces classés est construite avec en ligne, les classement optimum et en colonne, le classement attribué (CEN/TC 124 N 338, 2000). En utilisant les coefficients de pondération regroupés dans une matrice de coût élémentaire, la matrice globale de coût (Tableau 87) est construite en pondérant chaque cellule de la matrice du nombre de pièces classés par la cellule associée de la matrice de coût élémentaire divisé par le nombre total de pièces de la colonne correspondant à la classe attribuée. Si tous les éléments de la matrice global de coût sont inférieurs ou égaux à 0,2 et que les résultats sont répétables, la machine remplit alors les conditions pour classer les avivés en structure (CEN/TC 124 N 338, 2000). Un minimum de 900 pièces est recommandé pour effectuer cette procédure. Dans le cas présent, le Tableau 87 possède plusieurs éléments supérieurs à la limite de validité fixée, ce qui va de paire avec les différences importantes remarquées à la Figure 271.

En raison du faible nombre de pièces, Il est donc difficile de savoir si les méthodes développés sont acceptables pour le classement en structure. Même si les méthodes d'analyses développées permettent une amélioration significative de l'estimation des valeurs mécaniques issues de l'essai normalisé (Tableau 86), une procédure de validation (Initial Type Testing) devra alors être réalisée sur un lot d'avivés représentatif de la production industrielle commercialisée afin de connaître les performances de ces méthodes d'analyses en terme de classement structurel.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

L'industrie du bois porte un intérêt majeur sur les techniques qui améliorent et aident à accroître l'utilisation du bois en emplois structurels. Deux raisons essentielles sont à l'origine de cette attention. D'une part les qualités mécaniques et physiques intrinsèques du matériau bois, comme par exemple un très bon rapport module d'élasticité longitudinal sur masse volumique, lui permettent de concurrencer avantageusement d'autres matériaux pour l'ossature de divers type de construction. Les caractéristiques physiques et mécaniques des bois présentent cependant des variations intra et inter arbre très prononcées. D'autre part, dans le cadre de la réglementation européenne, les pièces de bois à usage structurel doivent suivre les exigences des normes de l'Eurocode 5 (1995). Pour les bois de structure utilisés en flexion (utilisation majoritaire), deux caractéristiques mécaniques, la rigidité (module d'élasticité longitudinal) et la résistance (contrainte à la rupture), ajoutées à la masse volumique, permettent d'établir le classement requis (EN 338, 1995). Les calculs de la rigidité et de la résistance sont définis par la norme EN 408 (1995) et nécessitent un essai de flexion statique 4 points.

En raison du caractère destructif de l'essai de référence, la résistance mécanique des pièces de bois ne peut être déterminée qu'indirectement par des critères visuels (EN 518, 1995) ou par machine (EN 519, 1995). Les méthodes de classement visuel sont basées principalement sur la proportion de nœuds et les largeurs de cernes. Ces caractéristiques ne sont cependant pas fiablement corrélées à la résistance mécanique. Les méthodes de classement par machine sont dans une large majorité fondées sur le calcul d'un module d'élasticité qui s'est avéré être un bon estimateur de la résistance. L'emploi des machines de classement a largement augmenté le rendement et le niveau de résistance du produit classé. Le processus de classement par machine est néanmoins loin d'être optimal. D'autres méthodes de contrôle non destructif ont été étudiées par le passé. Ces méthodes font appel à des techniques relativement variées, telles que les ultrasons, l'analyse modale, les micro-ondes, les rayons X ou γ et la vision par exemples. Pour certaines de ces techniques, une très bonne efficacité a été observée, en particulier lorsqu'elles sont couplées (la vision et le rayonnement X par exemple). Ces "nouvelles" méthodes de classement non destructif ont souvent l'inconvénient, lorsqu'elles sont performantes, d'être très coûteuses, relativement difficiles à mettre en œuvre et à entretenir.

Afin d'améliorer le processus de classement par machine, l'objectif de ce travail consistait à imaginer et mettre en œuvre un système de mesure capable d'estimer de manière non destructive et fiable le module d'élasticité longitudinal et la contrainte à la rupture d'avivés destinés à un usage structurel. Cette problématique incluait la possibilité de détecter et de quantifier le ou les défauts présents dans les avivés.

A la suite des travaux entrepris par P.A. Bordonné (thèse effectuée au CTFT¹⁶ en 1989), le CIRAD-Forêt a acquis des compétences importantes sur l'analyse modale, technique permettant grâce à l'analyse des vibrations transversales, obtenues à partir d'une simple percussion, d'estimer notamment le module d'élasticité longitudinal des pièces testées. Depuis lors, les travaux et les essais basés sur cette technique se sont amplifiés, et ont montré la simplicité, le faible coût de mise en œuvre, la fiabilité, la robustesse et la justesse des résultats obtenus en particulier pour des petites éprouvettes de bois sans défaut. Concernant l'application de cette technique à des pièces de bois en dimensions d'emploi, plusieurs indices, comme par exemple le décalage des fréquences propres en présence de singularités, laissaient présager du potentiel encore inexploité de l'emploi des vibrations pour le classement des bois.

Pour atteindre l'objectif fixé, plusieurs étapes, qui ont constitué par les suites les chapitres du présent mémoire, ont été nécessaires. Ces différentes étapes ont été présentées en détails dans l'ordre logique, et chronologique, pour des raisons de clarté. La première étape a permis d'exposer les modèles classiques, utilisés en analyse modale, sur la base des travaux de Bordonné (1989), d'en préciser les limites de validité, puis d'établir une nouvelle approche théorique permettant de prendre en compte et de caractériser la présence de singularités dans les poutres en vibrations. La deuxième étape a permis d'établir la liaison entre la théorie des vibrations de plaque et celle de poutre. Cette étape précisait ainsi la limite de validité des modèles classiques de poutre en vibrations lorsque les dimensions de la section transverse sont différentes, ce qui est généralement le cas des poutres à usage structurel. La troisième partie a permis de caractériser dans la gamme de fréquence concernée, par le biais d'une modélisation viscoélastique du comportement dynamique du matériau, l'ensemble des transformations subies par les ondes se propageant dans les poutres en vibrations. La quatrième partie a posé le problème de la détection du nombre des singularités et de leur position à partir d'une méthode basée sur l'impact – echo, analysant les réflexions des ondes propagatives à l'interface entre différents milieux. La cinquième et dernière partie a permis de juger de l'efficacité de l'ensemble des méthodes non destructives, développées au cours des précédents chapitres, à partir d'essais expérimentaux sur plusieurs lots de bois à usage structurel, quant à l'estimation des valeurs mécaniques de référence par des traitements statistiques appropriés.

¹⁶ CTFT : Centre Technique Forestier Tropical, fera partie intégrante du CIRAD en 1984 (CIRAD-Forêt).

Nous récapitulons, dans les paragraphes suivants, les principaux résultats obtenus au cours de ces différentes étapes, en y incluant, pour chaque thème abordé, les orientations possibles de futurs travaux :

1. Vibrations "libre - libre" d'une poutre comportant un ou plusieurs éléments faibles

Une nouvelle approche théorique prenant en compte la présence de singularités dans les poutres a été développée. Cette approche permet de décrire le comportement d'une poutre de grand élançement, comportant un ou plusieurs éléments faibles, en vibrations longitudinales ou transversales. Un élément faible est défini physiquement par deux paramètres de position et par son module d'élasticité. Une "poutre à éléments faibles" correspond à une analogie mécanique de comportement, ces premières fréquences propres étant alors identiques à la poutre réelle dont elle est issue.

Les modèles analytiques ainsi développés permettent de calculer avec une précision acceptable les fréquences propres d'une poutre élançée comportant des éléments faibles. Cependant, le nombre des fréquences accessibles par l'expérience étant relativement restreint, seulement un élément peut être caractérisé, en rigidité, en position, et en taille. Cet élément est considéré comme la plus grande faiblesse de la structure physique vis à vis de son influence sur son comportement dynamique.

Il apparaît d'autre part que la caractérisation d'une poutre comportant un élément faible à partir des premières fréquences de vibrations est un problème difficile à résoudre. Afin de le surmonter, la méthode du simplexe modifié, recherchant la solution optimale vis à vis de l'information expérimentale disponible, a été retenue. La méthode choisie est néanmoins coûteuse en temps de calcul, et ne produit pas toujours des solutions correctes.

Un important travail reste à faire afin d'améliorer la résolution numérique du problème de la caractérisation des "poutres à élément faible" à partir des premières fréquences propres. Ce problème relève directement du domaine des mathématiques appliquées, et nécessite, pour être correctement surmonté, une amélioration significative des temps d'évaluation de la fonctionnelle à minimiser, ainsi que la construction de critères de régularisation beaucoup plus efficaces permettant des convergences rapides et correctes vers la solution recherchée.

2. Influence de l'élançement transverse sur les fréquences de vibration "libre-libre" d'une poutre homogène

L'étude de l'influence de l'élançement transverse (rapport base / hauteur) sur les fréquences de vibrations transversales a été réalisée de façon théorique à partir du facteur de forme utilisé par la solution de Bordonné (1989). Une application numérique montre que l'influence de l'élançement transverse sur le calcul des premières fréquences de vibrations transversales est négligeable. Le facteur de forme est quasiment constant et égal à la valeur $K=5/6$. Ce résultat a été confirmé, de manière expérimentale, sur le premier mode en vibrations transversales à plat et sur champ.

Comprendre le comportement mécanique d'une poutre en vibration lorsque son élançement transverse varie nous a de plus conduit à établir des relations entre le modèle plaque et le modèle poutre. Les deux modèles sont liés ; la théorie des plaques est un prolongement de la théorie des poutres. Le modèle plaque traduit trois modes de vibration et peut se déduire du modèle poutre en considérant les trois mouvements séparément. Ce résultat n'est valable que pour les premières fréquences de vibration. Un prolongement de ce travail pourrait alors être l'étude expérimentale et théorique de l'influence de l'élançement transverse sur les fréquences de rang élevé en vibrations transversales.

3. Dynamique des poutres homogènes viscoélastiques

Des modèles de comportement de poutres en vibrations longitudinales ou transversales, utilisant à la fois les principes de la synthèse musicale et de la mécanique des matériaux, ont été développés en considérant le matériau comme viscoélastique. L'ensemble des phénomènes, tel que le retard, la dispersion, et la dissipation, qui transforment les ondes au cours de leur propagation ont pu être pris en compte.

Ces modèles théoriques ont permis d'écrire une nouvelle expression du décrétement logarithmique. A partir d'un seul essai vibratoire, l'étude expérimentale des amortissements temporels (relié au frottement interne) associés à chaque pic de vibration observable est possible. La connaissance des trois premières fréquences propres de vibration et des amortissements temporels associés permettent de calculer les grandeurs viscoélastiques du modèle théorique développé en vibrations longitudinales libre - libre. L'expérience consiste en un essai classique de vibrations longitudinales d'une poutre de bois suffisamment longue pour pouvoir observer trois fréquences propres.

La pertinence de l'emploi d'un modèle viscoélastique linéaire généralisé n'a pas pu être démontré. L'utilisation d'un tel modèle pourrait être envisagée sur une gamme de fréquence plus importante que celle considérée dans le cas présent, ainsi que sur un nombre important d'amortissements temporels.

Une nouvelle solution, alternative à la solution de Bordonné (1989), au modèle de Timoshenko (1921) a également été proposée. Cette solution, validée expérimentalement, a néanmoins un caractère fortement non linéaire et ne peut être inverser simplement afin de trouver les valeurs du module d'élasticité et du module de cisaillement. Identifier les paramètres élastiques de cette solution à partir des trois premières fréquences propres est un travail qui reste à faire. La nouvelle solution n'étant pas issue d'un développement limité au voisinage de la solution de Bernoulli, il serait de plus nécessaire de préciser son domaine de validité de façon expérimentale.

4. Détection des éléments faibles mécaniquement prépondérants dans les poutres en bois

Cette étape devait permettre l'identification du nombre d'hétérogénéités majeures présentes dans une poutre, et de leurs positions associées dans le sens de la longueur. La connaissance du nombre et des positions des hétérogénéités réelles était d'autre part susceptible d'apporter une information directement utilisable pour identifier les caractéristiques de la poutre mécaniquement analogue comportant un ou plusieurs éléments faibles (étape 1).

La méthode d' "écholocation" qui a été mise en œuvre, basée sur le principe de l'impact-écho, utilise les propriétés réflexives des hétérogénéités présentes dans une poutre afin de les identifier. Les essais de validation expérimentale n'ont cependant pas pu démontrer la pertinence de cette méthode vis à vis de l'objectif fixé.

Plusieurs remarques permettent de comprendre pourquoi la méthode proposée ici n'est pas utilisable. En excitation longitudinale, les fréquences de vibration de structure, comme par exemple les vibrations de flexion, qui possèdent peu d'énergie sont difficilement identifiables, d'autant plus que les modèles théoriques utilisés ne sont plus valables pour les harmoniques de rang élevé. Hormis les fréquences de vibrations longitudinales, la lecture du spectre obtenu est très délicate et source d'erreurs. De plus les fréquences échos ont également une énergie très faible, et le modèle théorique employé est trop simpliste au regard de l'ensemble des phénomènes de couplage se produisant réellement.

Pour atteindre l'objectif fixé, des techniques échographiques à basse fréquence pourraient être mises en œuvre, et permettraient d'obtenir une cartographie précise de la poutre avec ses singularités. Une autre alternative, prolongeant les travaux entrepris en écholocation, consisterait à employer un signal d'entrée contrôlé et modulé, comme par exemple des paquets d'ondes à bande étroite centrés sur une haute fréquence différente des fréquences de résonance de la structure testée.

5. De la théorie à la pratique, études expérimentales sur des lots représentatifs

a) Une méthode vibratoire, par analyse modale en configuration libre-libre, a été utilisée afin de classer en résistance deux lots de bois de structure d'épicéa (376 pièces) et de mélèze (1576 pièces). Les analyses, réalisées par le CTBA, démontrent la bonne performance de cette méthode simple pour classer les bois de structure par la prise en compte des trois premières fréquences de vibration de flexion. Comparativement aux autres méthodes de classement, utilisant des critères visuels ou les rayons X, la méthode vibratoire donne des résultats de classement similaires et très proches du classement optimal, défini en utilisant les paramètres mécaniques normalisés (EN 408, 1995).

D'autres investigations ont montré que seul le module dynamique moyen (modèle de Bernoulli) suffisait à obtenir un classement acceptable au regard du classement optimal et des résultats obtenus par les machines utilisées dans l'industrie. Une remarque permet d'expliquer la pertinence du module moyen : les singularités présentes dans une poutre perturbent de manière différente selon leur rang les fréquences de vibration. Faire la moyenne des modules déduit de chaque fréquence prise individuellement revient alors à prendre en compte l'ensemble des perturbations dues à la présence de singularité dans la poutre. Les résultats obtenus dans cette première étude expérimentale ont montré que, l'outil vibratoire, conçu pour le laboratoire (Bordonné, 1989), pourrait devenir un outil de diagnostic industriel de la qualité mécanique des produits testés.

b) Plusieurs méthodes vibratoires d'estimation non destructives ont été utilisées sur un lot de 53 poutres provenant de monuments historiques. La mesure de vitesses de propagation d'ondes ultrasonores, de vitesse d'ondes acoustiques, le calcul du module dynamique à partir de la première fréquence propre (modèle de Bernoulli), et la méthode d'analyse proposée au chapitre III constituaient l'ensemble des méthodes mises en œuvre. Ces expériences avaient pour objectifs d'identifier les paramètres prédictifs les plus pertinents des valeurs mécaniques de référence, et d'évaluer la robustesse de la méthode d'analyse proposée au chapitre III.

Les poutres étaient principalement en chêne, et leur géométrie, très irrégulière, était de plus variable d'une pièce à l'autre. La présence de sous sections, de cavités, de nombreux clous et pointes en métal, de pourritures, et de galeries

d'insectes a été constatée. Ce lot de poutres anciennes, très hétérogène, constituait donc un cas extrême quant à l'évaluation non destructive de la rigidité et de la résistance.

La totalité des paramètres issus des essais non destructifs ont servi à élaborer plusieurs modèles d'estimation linéaires simples ou multiples. Les résultats obtenus ont montré que les mesures de vitesse de propagation constituaient les moins bons estimateurs des valeurs mécaniques de référence. Les mesures de vitesse ayant été réalisées en surface, et il semblerait que pour cette raison, ces mesures ne soient pas adaptées au problème traité. Il aurait été intéressant de réaliser des mesures de vitesse en transparence, longitudinalement ou radialement.

Les meilleurs prédicteurs individuels des valeurs mécaniques de référence étaient les modules d'élasticité dynamiques calculés en vibrations transversales ou longitudinales. Ces modules caractérisent le comportement élastique global de la pièce testée en vibrations. Le module de vibrations transversales était cependant entaché d'incertitudes beaucoup plus fortes que le module de vibrations longitudinales car il nécessitait un nombre important de données, notamment des données géométriques.

Les modèles permettant d'estimer au mieux les valeurs mécaniques de référence étaient les modèles multi – paramètres basés sur les variables de la méthode d'analyse du chapitre III. La masse volumique, bien qu'entachée de fortes incertitudes, a été incluse dans les modèles car elle était une variable prédictive importante de la contrainte à la rupture.

Il convient de remarquer que l'on retrouve dans l'estimation du module statique et de la contrainte les mêmes variables prédictives : le module dynamique vibrations longitudinales traduisant le comportement élastique du matériau, et le ratio de l'amortissement temporel du troisième mode de vibration sur la fréquence au carré qui traduit la non élasticité du matériau (les phénomènes dissipatifs). En considérant le fait que les phénomènes dissipatifs, comme la viscosité, sont très intenses à haute fréquence du domaine acoustique, on peut s'attendre à ce que le ratio d'amortissement associé à la fréquence propre observable de rang le plus élevé aura probablement toujours une importance plus grande sur l'évaluation des valeurs mécaniques statiques que les autres ratios pris en compte.

c) Les techniques d'analyses vibratoires développées dans les chapitres précédents ont été utilisées sur un lot de 96 avivés de mélèze issus d'une production de bois de structure, comportant de nombreuses singularités, afin d'estimer les caractéristiques mécaniques statiques de référence (EN 408, 1995) nécessaires au classement des poutres en résistance (EN 338, 1995). Le choix d'étudier des poutres comportant de nombreuses singularités, en particulier des nœuds, est motivé par le fait qu'il est difficile d'estimer la résistance mécanique de poutres très hétérogènes car le nombre, les tailles, et les positions des singularités influent fortement sur la résistance mécanique.

Les variables issues de l'ensemble des essais vibratoires, au nombre de 38, peuvent être classées en 6 groupes. La caractéristique physique de masse volumique forme le premier groupe. Le deuxième groupe de variables correspond à l'analyse des vibrations transverses à plat et sur champ. Dans ce cas, seule l'élasticité du matériau est caractérisée. La troisième groupe est formé par les variables issues de la détermination d'une durée de propagation (temps de vol) des ondes longitudinales. L'élasticité est caractérisée, mais également l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre en associant les informations de plusieurs types d'analyses vibratoires. La quatrième groupe est formée par les variables issues de l'analyse des vibrations longitudinales des poutres qui caractérisent notamment l'élasticité et la viscosité du matériau. Les deux derniers groupes sont issus de l'association des informations des analyses spectrales des vibrations longitudinales et transversales, les variables obtenues permettent d'une part de prendre en compte l'importance des hétérogénéités présentes dans chaque poutre, et d'autre part de tenir compte de la géométrie particulière de l'essai statique de référence.

Les méthodes statistiques classiques, telles que la régression linéaire simple et multiple, ont été employées afin de prédire au mieux les valeurs mécaniques de référence. D'autres méthodes, rentrant dans le cadre de la régression linéaire biaisée, telles que la régression en composantes principales et la régression par les moindres carrés partiels (PLS), ont également été utilisées afin de prendre en compte la totalité de l'information contenue dans les 38 variables prédictives.

Dans le cas de l'estimation du module d'élasticité statique, comme dans celui de l'estimation de la contrainte à la rupture, la méthode PLS fournit les meilleurs modèles en terme de qualité d'ajustement. L'utilisation de ce type de méthode permet d'améliorer de 7 % l'estimation du module statique ($R^2_a=0,83$), et de 15 % celle de la contrainte à la rupture ($R^2_a=0,70$), par rapport à l'emploi plus classique d'une régression linéaire simple (avec un module dynamique comme variable prédictive, $R^2_a=0,76$ pour la rigidité et $R^2_a=0,55$ pour la résistance).

Cette méthode permet de plus une estimation directe des valeurs de référence à partir des spectres de vibrations, chaque fréquence étant alors considérée comme une variable prédictive. Les modèles construits directement à partir des spectres

permettent une bonne prédiction, la qualité de l'estimation est notamment très bonne pour la contrainte à la rupture ($R_a^2=0,83$). Cependant le faible effectif de la population testée n'a pas permis d'obtenir des ajustements stables. Compte tenu du fort potentiel en terme de qualité d'ajustement de la méthode PLS sur spectres de vibration, il serait intéressant de calibrer un modèle de régression à partir d'observations beaucoup plus nombreuses que dans le cas présent. L'avantage majeur de l'application de la méthode PLS sur spectre est qu'une fois le modèle calibré, la mise en œuvre des algorithmes de calcul dans une machine de classement industriel est réduite au minimum, ce qui rend le processus de classement quasi instantané.

En raison du faible nombre de pièces, il est néanmoins difficile de savoir si les méthodes développés sont acceptables pour le classement en structure. Même si ces méthodes d'analyses permettent une amélioration significative de l'estimation des valeurs mécaniques, une procédure de validation (Initial Type Testing, CEN/TC 124 N 338, 2000) devra alors être réalisée sur un lot d'avivés représentatif de la production industrielle commercialisée afin de connaître les performances de ces méthodes en terme de classement structurel.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Adjanohoun G., Guillot J.L., Lanvin J.D. et Cholat R. (1998)** *Small roundwood grading by non destructive X-rays and ultrasonic waves methods*. 5th World Conference on Timber Engineering. Montreaux, Suisse. Lausanne Presses Polytechniques Et Universitaires Romandes, Suisse. www.ndt.net, Nov.1999, Vol.4, N°11.
- Aoki T. et Yamada T. (1972)** *The viscoelastic properties of wood used for the musical instruments I*. Wood Research. 52: 13-30
- Aramaki M. (1999)** *Etude et modélisation du couplage entre deux cordes vibrantes : application à la synthèse du piano*. DEA Mécanique, Filère acoustique et dynamique des vibrations. Aix-Marseille II. Marseille. p. 49
- Aramaki M., Brancheriau L., Baillères H., Guillemain P., Kronland R. et Lanvin J.D. (2000)** *Modeling vibrations response of wooden beams with singularities using sound synthesis models*. 12th International Symposium on Nondestructive Testing of Wood. Hungary, Sopron. University of Western Hungary. pp. 113-121
- Armstrong J.P. et Patterson D.W. (1991)** *Comparison of three equations for predicting stress wave velocity as a function of grain angle*. Wood and Fiber Science. 23 (1): 32-43
- Auger F., Flandrin P., Gonçalvès P. et Lemoine O. (1996)** *Time-frequency toolbox for use with matlab, tutorial*. CNRS (France), Rice University (USA). www-isis.enst.fr/ (http://).
- Baillères H. et Cassan P. (1997)** *Mechanical characterization by a transverse vibration technique : a perspective for grading*. IUFRO Division 5 Conference " Forest Products for Sustainable Forestry ". Pullman, USA.
- Baillères H., Demay L., Calchera G. et Vernay M. (1999)** *Classement mécanique des bois guyanais de structure selon trois techniques non destructives*. Bois et Forêts des Tropiques. 257 (3): 47-61
- Bary-Lenger A., Pierson J. et Poncelet J. (1999)** *Transformation, utilisation et industries du bois en Europe*. Editions Du Perron (Ed.). Liège. pp. 15-185
- Bodig J. (2000)** *The process of NDE research for wood and wood composites*. 12th International Symposium on Non destructive Testing of Wood. Sopron, Hungary. University of Western Hungary. pp. 7-22
- Bellanger M. (1998)** *Traitement numérique du signal, théorie et pratique*. Dunod (Ed.). Paris. p. 476
- Bennani A., Jacquelin E., Lagarde G. et Hamelin P. (1999)** *Comparaison des différentes méthodes d'identification d'une force d'impact*. 14ème Congrès Français de Mécanique. Toulouse. pp. R960
- Bernoulli D. (1748)** *Réflexion et Eclaircissement sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Académie*. Royal Academy of Berlin. p. 1750
- Berthelot J.M. (1996)** *Matériaux Composites, Comportement Mécanique et Analyse des Structures*. Masson (Ed.). Paris. pp. 533-560
- Bertrand D. et Dufour E. (2000)** *La spectroscopie infrarouge et ses applications analytiques*. Technique & Documentation (Ed.). Paris. p. 566
- Blay M., Bourgain et Samson (1971)** *Application des Techniques Electro-Acoustiques à la Détermination du Module d'Elasticité par un Procédé Non-Destructif*. 4 pp. 3-19
- Bordonné P.A. (1989)** *Module Dynamique et Frottement Intérieur dans le Bois, Mesures sur Poutres Flottantes en Vibrations Naturelles*. Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine. p. 109
- Boström L. (1994)** *Machine strength grading, comparison of four different systems*. Swedish National Testing and Research Institute. p. 57
- Brancheriau L. (1997)** *Etude des relations entre les caractéristiques mécaniques obtenues en flexion trois et quatre points*. DEA en Sciences du Bois. Université de Bordeaux I. p. 64

- Britannica (2000)** *Encyclopédie Britannica, Echolocation*. www.britannica.com (<http://>).
- Broch J.T. (1984)** *Mechanical vibration and shock measurements*. Brüel & Kjaer (Ed.). p. 370
- Carino N.J. (2000)** *Impact-echo principle*. ciks.cbt.nist.gov/~carino/ieprin.html (<http://>).
- Casagrande S. (1998)** *Evaluation Non Destructive par une Analyse Vibratoire des Performances Mécaniques de Bois Reconstitués*. Thèse, Université de Bordeaux I. p. 175
- CEN/TC 124 N 338 (2000)** *Timber structures - Strength graded structural timber with rectangular cross section - Part 2 : Machine grading - Additional requirements for initial type testing*. European Committee for Standardization (Ed.). p. 26
- Chang S.T., Chang H.T., Huang Y.S. et Hsu F.L. (2000)** *Effects of chemical modification reagents on acoustic properties of wood*. *Holzforschung*. 54 (6): 669-675
- Chichignoud M., Déon G., Détienne P., Parant B. et Vantomme P. (1990)** *Tropical Timber Atlas of Latin America*. Centre Technique Forestier Tropical et International Tropical Timber Organization (Ed.).
- Chin W.W. (1997)** *Overview of the partial least square method*. University of Houston (USA). discnt.cba.uh.edu/chin/PLSINTRO.htm (<http://>).
- Chui Y.H. (1991)** *Simultaneous Evaluation of Bending and Shear Moduli of Wood and the Influence of Knots on These Parameters*. *Wood Science and Technology*. 25: 125-134
- Chui Y.H. et Smith I. (1990)** *Influence of Rotatory Inertia, Shear Deformation and Support Condition on Natural Frequencies of Wooden Beams*. *Wood Science and Technology*. 24: 233-245
- Ciarlet P.G. (1998)** *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod (Ed.). Paris. p. 279
- Claudon M. (2000)** *Bases physiques et techniques de l'échographie*. u40076.citi2.fr/diue/polys/basephysique/index.shtml (<http://>).
- Dagnelie P. (1975)** *Analyse statistique à plusieurs variables*. Les Presses Agronomiques De Gembloux (Ed.). Gembloux. p. 362
- Dagnelie P. (1992)** *Statistique Théorique et Appliquée, Tome I*. Les Presses Agronomiques De Gembloux (Ed.). pp. 109-174, 239-311
- Dagnelie P. (1975)** *Théorie et Méthodes Statistiques, Tome II*. Les Presses Agronomiques De Gembloux (Ed.). pp. 263-325
- Daudet L., Guillemain P. et Kronland-Martinet R. (1999)** *Resynthesis of piano strings vibrations based on physical modeling*. ICMC Conference. Pekin, 22/27 Oct. pp. 48-51
- Delacroix A. et Porte C. (1997)** *Méthodes d'optimisation en chimie analytique*. Techniques De L'ingénieur (Ed.). Paris. Vol. P1. pp. 225-221:222
- Dennis J.E. et Torczon V.J. (1994)** *Derivative-free pattern search methods for multidisciplinary design problems*. Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Panama City Beach, Florida. Aiaa-94-4349-Cp American Institute of Aeronautics and Astronautics. pp. 11
- Divos F. et Tanaka T. (1997)** *Lumber strength estimation by multiple regression*. *Holzforschung*. 51 (5): 467-471
- Djoharian P. (1999)** *Material design in physical modelling sound synthesis*. IInd COST G-6 Workshop on Digital Audio Effects (DAFx99). Trondheim, 9-11 décembre. pp. 131-134
- Dupuis M. (1999)** *Problèmes inverses, de l'expérimentation à la modélisation*. Observatoire Français Des Techniques Avancées (Ed.). Paris. p. 231

- Faust T.D., Tang M., Bhandarkar S., Smith J.W. et Tollner E.W. (1996)** *Evaluation of growth related features in selected logs using X-rays computed tomography and image analysis*. 10th International Symposium on Nondestructive Testing of Wood. Lausanne, Suisse. Lausanne Presses Polytechniques Et Universitaires Romandes, Suisse. pp. 201-208
- Felix B. (1990)** *Eléments de rhéologie du bois*. Ctba (Ed.). Paris. p. 143
- Fletcher N.H. et Rossing T.D. (1991)** *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag (Ed.). Berlin. pp. 533-554
- Fournier M. (1989)** *Mécanique de l'arbre sur pied : maturation, poids propre, contraintes climatiques dans la tige standard*. Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine. p. 258
- Gérard S. (1999)** *L'écholocation, le 6ème sens des dauphins, d'après 'Dauphins en liberté'*. Nathan. www.reseau.presse.fr/reseau/f0152016.htm (<http://>).
- Giet A. et Géminard L. (1968)** *Résistance des Matériaux, Tome I*. Dunod (Ed.). Paris. pp. 210-223,249-253
- Goens E. (1931)** *Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen*. Ann. D. Phys. Ser 7, 11: 649-678
- Graff K.F. (1975)** *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press (Ed.). p. 75-212
- Grosse C.U. et Reinhardt H.W. (2000)** *The resonance method*. www.ndt.net/cgi-bin/htsearch (<http://>).
- Guerrin G.M. (1990)** *Caractérisation en Flexion Quasi-Statique d'un Matériau Thermohygroviscoélastique : le Bois*. Thèse, Université de Nancy I. p. 230
- Guillemain P., Kronland-Martinet R. et Ystad S. (1997)** *Physical modelling based on the analysis of natural sounds*. International Symposium on Musical Acoustics. Edinburgh. pp. 445-450
- Guillemain P. et White P. (1995)** *Wavelet transforms for the analysis of dispersive systems*. IEEE Conference, Time Frequency and Time Scale 95. Warwick. pp. 32-39
- Guitard D. (1983)** *Propriétés mécaniques - Comportement différé*. In: Le matériau bois, propriétés, technologie, mise en oeuvre - Recueil des cours Ecole Hiver sur le Bois (ALBE 68). Association Pour La Recherche Sur Le Bois En Lorraine (Ed.). pp. B1-93/116
- Guitard D. (1987)** *Mécanique du Matériau Bois et Composites*. Cepadues (Ed.). pp. 108-127
- Guitard D., Liot F. et Foudjet A. (1996)** *Utilisation des Vibrations Transversales pour la Caractérisation Mécanique de Poutres Anisotropes*. Colloque Sciences et Industries du Bois, Nancy.
- Haines D.W., Leban J.M. et Herbé C. (1996)** *Determination of Young's modulus for spruce, fir and isotropic materials by the resonance flexure method with comparisons to static flexure and other dynamic methods*. Wood Science and Technology. 30: 253-263
- Harris J.W. et Stocker H. (1998)** *Handbook of mathematics and computational science*. Springer-Verlag (Ed.). New York. p. 1028
- Hearmon R.F.S. (1966)** *Theory of the Vibration Testing of Wood*. Forest Products Journal. 16 (8): 29-40
- Hearmon R.F.S. (1958)** *The Influence of Shear and Rotatory Inertia on the Free Flexural Vibrations of Wooden Beams*. Brit. J. Appl. Phys. 9: 381-388
- Holz D. (1996)** *Tropical hardwoods used in musical instruments - can we substitute them by temperate zone species ?* Holzforschung. 50 (2): 121-129
- Hu L.J. et Hsu W.E. (1996)** *Implementation of Transverse Simple Beam Vibration Technique to Determine MOE for Wood Based Materials : Accuracy, Comparability, and Limitations*. 10th International Symposium on Non-Destructive Testing of Wood. Lausanne. J.L. Sandoz. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. pp. 227-235

- Huet C. (1988)** *Le fluage du bois en flexion : rôles de la température et de l'humidité*. Le bois et la construction, le bois en structure, son comportement différé. N°469 Institut Technique Du Bâtiment Et Des Travaux Publics. pp. 35-53
- Huet C. et Navi P. (1990)** *Multiparabolic multitransition model for thermo-viscoelastic behavior of wood*. Mechanics of wood and paper materials. Dallas, Texas. pp. 17-24
- Huyer W. et Neumaier A. (1999)** *Global optimization by multilevel coordinate search*. Journal of Global Optimization. (14): 331-355
- Imbert J.F. (1991)** *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues (Ed.). Toulouse. p. 506
- Karjalainen M., Välimäki V. et Tolonen T. (1998)** *Plucked-string models : from the Karplus-Strong algorithm to digital waveguides and beyond*. Computer Music Journal. 22 (3): 17-32
- Kerguignas M. et Caignaert G. (1977)** *Résistance des Matériaux*. Dunod Université (Ed.). Paris. pp. 91-98, 126-144, 196-272
- Kim J.B. et Renn R.J. (1999)** *Nondestructive evaluation of the stiffness and strength of in-situ timber structural members*. First RILEM Symposium on Timber Engineering. Stockholm, Sweden. L. Boström, Swedish National Testing and Research Institute. International Union of Testing and Research Laboratories for Materials and Structures (RILEM). pp. 275-284
- Kollmann F.F.P. et Côté W.A.J. (1968)** *Principles of wood science and technology*. Springer-Verlag (Ed.). Berlin. p. 274-281
- Kolsky H. (1953)** *Stress waves in solids*. Oxford University Press (Ed.). Londre. p. 211
- Krautkrämer J. et Krautkrämer H. (1990)** *Ultrasonic testing of materials*. Springer Verlag (Ed.). Berlin. p. 93-107/167-169/279-291/319-327/401-403/524-525
- Kubojima Y., Yoshihara H., Ohta M. et Okano T. (1996)** *Examination of the Method of Measuring the Shear Modulus of Wood Based on the Timoshenko Theory of Bending*. Mokuzai Gakkaishi. 42 (12): 1170-1176
- Kubojima Y., Yoshihara H., Ohta M. et Okano T. (1997)** *Accuracy of the Shear Modulus of Wood Obtained by the Timoshenko's Theory of Bending*. Mokuzai Gakkaishi. 43 (5): 439-443
- Lardner T.J. et Archer R.R. (1994)** *Mechanics of Solids*. McGraw-Hill (Ed.). New York. pp. 285
- Laroze S. (1988)** *Mécanique des Structures, Tome II, Poutres*. Eyrolles Masson (Ed.). Paris. pp. 125-142
- Laroze S. (1992)** *Mécanique des Structures, Tome III, Thermique des Structures, Dynamique des Structures*. Masson (Ed.). Paris. pp. 195-272
- Lavelle J.R. (2000)** *Optimization technology center*.
- Lekhnitskii S.G. (1968)** *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach (Ed.). New York. pp. 420-436
- Lekhnitskii S.G. (1963)** *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. Holden-Day (Ed.). pp. 89-94, 275-289, 304-308
- Linard L. (1998)** *Caractérisation d'un Panneau à Base de Bois par Analyse Vibratoire*. D.E.A., Université des Sciences et Techniques de Montpellier. p. 75
- Liot F., Guitard D. et Morlier P. (1994)** *Non Destructive Evaluation of Wooden Elements in Bending : Beams, Poles or Logs*. European Non Destructive, Hongrie.
- Locatelli T. (1999)** *Communauté des utilisateurs et développeurs du logiciel CASTEM 2000*. Laboratoire de Mécanique Systèmes et Simulation, CEA Saclay, GIF-SUR-YVETTE, France. www.castem.org:8001/HomePage.html (<http://>).

- Love A.E.H. (1892)** *A treatise on the mathematical theory of elasticity (edition of 1944)*. Dover Publications (Ed.). New York. p. 643
- Machek L., Militz H. et Sierra-Alvarez R. (2001)** *The use of an acoustic technique to assess wood decay in laboratory soil-bed tests*. Wood Science and Technology. (34): 467-472
- MathWorks (1997)** *Introduction to optimization algorithms*. In: Optimization toolbox user's guide, v1 for Matlab5. The Mathworks (Ed.). pp. 2-39
- Max J. et Lacoume J.L. (2000)** *Méthodes et techniques de traitement du signal*. Dunod (Ed.). Paris. p. 355
- Minato K., Akiyama T., Yasuda R. et Yano H. (1995)** *Dependence of vibrational properties of wood on varnishing during its drying process in violin manufacturing*. Holzforschung. (49): 222-226
- Nakao T. (1996)** *Experimental Study of Torsional Vibration of Wooden Bars by Plate Theories*. Mokusai Gakkaishi. 42 (1): 10-15
- Neumaier A. (1995)** *Global optimization*.
- NF EN 338 (1995)** *Bois de structure, classes de résistance*. Afnor (Ed.). France.
- NF EN 408 (1995)** *Structures en bois, Bois massif et bois lamellé-collé, Détermination de certaines propriétés physiques et mécaniques*. Afnor (Ed.). France.
- NF EN 518 (1995)** *Bois de structure, Classement, Exigences pour les normes de classement visuel de résistance*. Afnor (Ed.). France.
- NF EN 519 (1995)** *Bois de structure, Classement, Spécifications pour le bois classé par machine pour sa résistance et les machines à classer*. Afnor (Ed.). France.
- Niemz P. et Kucera L.J. (1998)** *Possibility of defect detection in wood with ultrasound*. Eleventh International Symposium on Nondestructive Testing of Wood. Madison, Wisconsin, USA. Forest Products Society. pp. 27-32
- Ohlsson S. et Perstorper M. (1992)** *Elastic Wood Properties from Dynamic Tests and Computer Modeling*. Journal of Structural Engineering. 118 (10): 2677-2690
- Ono T. et Norimoto M. (1983)** *Study on Young's modulus and internal friction of wood in relation to the evaluation of wood for musical instruments*. Japanese Journal of Applied Physics. 22 (4): 611-614
- Ono T. et Norimoto M. (1985)** *Anisotropy of dynamic Young's modulus and internal friction in wood*. Japanese Journal of Applied Physics. 24 (8): 960-964
- Ouis D. (1999)** *Vibrotational and acoustical experiments on logs of spruce*. Wood Science and Technology. 33: 151-184
- Ouis D. (2000)** *Detection of decay in logs through measuring the dampening of bending vibrations by means of a room acoustical technique*. Wood Science and Technology. 34: 221-236
- Pellerin R.F. (1965)** *Vibrational approach to nondestructive testing of structural lumber*. Forest Products Journal. 15 (3): 93-101
- Perdijon J. (1993)** *Le contrôle non destructif par ultrasons*. Hermès (Ed.). Paris. p. 168
- Perstorper M. (1994)** *Dynamic Modal Tests of Timber Evaluation According to the Euler and Timoshenko Theories*. 9th International Symposium on Non-Destructive Testing of Wood.
- Pines D.J. (1997)** *Detection of utility pole rot damage by measuring the reflection coefficient*. Journal of Nondestructive Evaluation. 16 (1): 43-56
- Pinter J.D. (1999)** *Continuous global optimization : an introduction to models, solution approaches, tests and applications*.

- Racher P., Biger J.P., Rouger F., Sagot G. et Vidon G. (2000)** *Structures en bois aux états limites, introduction à l'Eurocode 5, Step1 matériaux et bases de calcul, Deuxième édition*. Sedibois (Ed.). Paris, France. pp. CIII, 1,2,3
- Rade L. et Westergren B. (1999)** *Mathematics handbook*. Springer (Ed.). Berlin. p. 546
- Rahman J. et Herbert P. (1999)** *Labview and genetic algorithms*. In: Labview, applications and solutions. Prentice-Hall Ptr (Ed.). London. pp. 211-220
- Rayleigh J.W.S. (1877)** *The Theory of Sound (edition of 1945)*. New York. pp. 243-305
- Renaudin P. (1997)** *Approche probabiliste du comportement mécanique du bois de structure, prise en compte de la variabilité biologique*. Laboratoire de Mécanique et Technologie. Thèse, Ecole Normale Supérieure. Cachan. p. 225
- Renault J. (1985)** *Optique physique, Notions générales sur les ondes*. In: Formulaire de physique. Dunod Université (Ed.). Paris. pp. 188-198
- Renforth L., White J.P. et Nelson R.F. (2000)** *The economic case for RCM of orerhead lines in the UK*. International conference on utility line structures. Fort Collins, Colorado, USA. pp. 7-12
- Ross J., Pellerin R.F., Volny N., Salsig W.W. et Falk R.H. (1999)** *Inspection of timber bridges using stress wave timing nondestructive evaluation tools*. United States Department of Agriculture, Forest Products Laboratory. p. 15
- Sandoz J.L. (1996)** *Ultrasonic solid wood evaluation in industrial applications*. 10th International Symposium on Nondestructive Testing of Wood. Lausanne, Suisse. Presses Polytechniques & Universitaires Romandes. pp. 147-153
- Sandoz J.L. et Dirand T. (1994)** *Wood testing using acousto-ultrasonic*. First European Symposium on Nondestructive Evaluation of Wood. University of Sopron, Hungary. Vol. 1. pp. 232-239
- Sansalone M.J. et Streett W.B. (1997)** *Impact-echo, Nondestructive evaluation of concrete masonry*. Bullbrier Press (Ed.). New York. p. 339
- Sapriel J. (1994)** *Ultrasons*. Sciences et Techniques de l'Ingénieur. Article E1910 Volume E 1. www.techniques-ingenieur.fr/ (<http://>).
- Schneider E. (1998)** *Young's modulus and time of flight measurement*. www.ndt.net. 3 (11): 2
- Serridge M. et Licht T.R. (1987)** *Piezoelectric accelerometer and vibration preamplifier handbook*. Brüel&Kjaer (Ed.). p. 150
- Sinclair A.N. et Farshad M. (1987)** *A Comparison of Three Methods for Determining Elastic Constants of Wood*. Journal of Testing and Evaluation. 15 (2): 77-86
- Smith J.O.I. (1992)** *Physical modelling using digital waveguides*. Computer Music Journal. 16 (4): 74-87
- Smith W.S. (1999)** *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California Technical Publishing (Ed.). San Diego. p. 650
- Sobue N. (1986)** *Instantaneous Measurement of Elastic Constants by Analysis of the Tap Tone of Wood, Application to Flexural Vibration of Beams*. Mokuzai Gakkaishi. 32 (4): 274-279
- Sobue N. (1988)** *Simultaneous Determination of Young's Modulus and Shear Modulus of Structural Lumber by Complex Vibrations of Bending and Twisting*. Mokuzai Gakkaishi. 34 (8): 652-657
- Taras A.R., Chouinard L. et Iordanescu M. (2000)** *Integrated evaluation method for inspecting wood utility poles*. International conference on utility line structures. Fort Collins, Colorado, USA. pp. 85-94
- Tassart S. (1997)** *Notes de cours ISEN, Synthèse sonore*. www.ircam.fr/equipes/analyse-synthese/tassart/ (<http://>).

- Timoshenko S. (1921)** *On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars*. Philosophical Magazine and Journal of Science. XLI - Sixth Series: 744-746
- Timoshenko S. (1953)** *Résistance des Matériaux, Partie I, Théorie Elémentaire et Problèmes*. Librairie Polytechnique Béranger (Ed.). Paris. pp. 284-288
- Timoshenko S. (1922)** *On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section*. Philosophical Magazine and Journal of Science. XLIII - Sixth Series: 125-131
- Timoshenko S. (1939)** *Théorie des Vibrations à l'Usage des Ingénieurs*. Librairie Polytechnique Béranger (Ed.). Paris. pp. 432-446
- Timoshenko S. (1953)** *Résistance des Matériaux, Partie I : Théorie Elémentaire et Problèmes*. Librairie Polytechnique Béranger (Ed.). Paris et Liège. pp. 284-288
- Timoshenko S. et Goodier J.N. (1961)** *Théorie de l'Elasticité*. Librairie Polytechnique Béranger (Ed.). Paris. pp. 279-284, 341-368
- Timoshenko S. et Young D.H. (1950)** *Dynamique supérieure*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger (Ed.). Paris. p. 459
- Tomassone R., Dervin C. et Masson J.P. (1993)** *Biométrie, modélisation de phénomènes biologiques*. Masson (Ed.). Paris. p. 553
- Tong L. et Ödeen K. (1989)** *Rheological behaviour of wood and wood structures*. The Royal Institute of Technology Department of Building Materials (Ed.). Stockholm. p. 145
- Valette C. (1998)** *Oscillateurs mécaniques simples, Ondes et vibrations, Mécanique des vibrations*. U.M.R. N° 7604 Laboratoire D'acoustique Musicale, Dea Atiam (Ed.). p. 259
- Valette C. et Cuesta C. (1993)** *Mécanique de la corde vibrante*. Hermès (Ed.). Paris. p. 83-132
- Weaver W., Timoshenko S. et Young D.H. (1990)** *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley and Sons (Ed.). New York. pp. 495-505
- Wise B.M. et Gallagher N.B. (2000)** *Partial Least Square Toolbox 2.1 for Matlab, tutorial and theory*. Eigenvector Research Inc. (Ed.). Manson (USA). p. 165
- Yano H. (1994)** *The changes in the acoustic properties of western red cedar due to methanol extraction*. *Holzforschung*. 48 (6): 491-495
- Ystad S. (1998)** *Sound modeling using a combination of physical and signal models*. Acoustique, traitement du signal, et informatique appliqués à la musique. Université de la méditerranée, Aix-Marseille II, Faculté des sciences de Luminy. Marseille. p. 130
- Ystad S. (1997)** *De la facture informatique au jeu instrumental*. Colloque international sur les nouveaux gestes de la musique. Marseille.
- Ystad S., Guillemain P. et Kronland-Martinet R. (1996)** *Estimation of parameters corresponding to a propagative synthesis model through the analysis of real sounds*. International Computer Music Conference. Hong Kong. pp. 32-35
- Zobel B.J., Buijtenen J.P. (1989)** *Wood variation, its causes and control*. Springer Verlag (Ed.). Berlin. p. 363
- Zombori B. (2001)** *"In situ" nondestructive testing of built in wooden members*. www.ndt.net. Mars 2001 (Vol. 6, N°3): 10

ANNEXES

1 NOTIONS ET DEFINITIONS EN TRAITEMENT DU SIGNAL

1.1 Transformée de Fourier

On note t la variable de temps et f la variable de fréquence. Soit $x(t)$ un signal temporel défini sur $]-\infty, +\infty[$, la transformée de Fourier de $x(t)$, notée $X(f)$ est définie comme suit :

$$\text{Eq. 330 } x(t) \xrightarrow{FT} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \text{ avec } j = \sqrt{-1}$$

$$\text{Eq. 331 } X(f) \xrightarrow{IFT} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$$

1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

PARITE :

$x(t)$	$X(f)$
Réelle et paire	Réelle et paire
Réelle et impaire	Imaginaire et impaire
Imaginaire et paire	Imaginaire et paire
Imaginaire et impaire	Réelle et impaire
Complexe et paire	Complexe et paire
Complexe et impaire	Complexe et impaire
Partie réelle paire et partie imaginaire impaire	Réelle
Partie réelle impaire et partie imaginaire paire	Imaginaire

Tableau 88 : propriétés de parité de la transformée de Fourier.

➤ **Linéarité :**

$$\text{Eq. 332 } ax(t) + by(t) \xrightarrow{FT} aX(f) + bY(f) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

➤ **Translation ou retard :**

$$\text{Eq. 333 } x(t - a) \xrightarrow{FT} X(f) e^{-j2\pi fa}$$

➤ **Homothétie ou similitude :**

$$\text{Eq. 334 } x(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

➤ **Dérivation :**

$$\text{Eq. 335 } x^{(n)}(t) = \frac{d^n x}{dt^n} \xrightarrow{FT} (j2\pi f)^n X(f)$$

➤ **Conjugué :**

$$\text{Eq. 336 } x^*(t) \xrightarrow{FT} X^*(-f)$$

➤ **Produit de convolution :**

L'opération de convolution, notée *, est définie comme suit :

$$\text{Eq. 337 } y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-a)h(a)da$$

La convolution est commutative, distributive, associative, et possède un élément neutre (la distribution de Dirac notée δ).

Théorème de Plancharel :

$$\text{Eq. 338 } y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Y(f) = X(f).H(f)$$

$$\text{Eq. 339 } y(t) = x(t).h(t) \xrightarrow{FT} Y(f) = X(f) * H(f)$$

Théorème de Parseval :

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie (temporelle ou fréquentielle).

$$\text{Eq. 340 } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

1.3 Signal analytique

On associe au signal réel $x(t)$, une grandeur complexe $x'(t)$ définie comme suit :

$$\text{Eq. 341 } \begin{cases} X'(f) = 0, & \text{pour } f < 0 \\ X'(f) = 2X(f), & \text{pour } f \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Eq. 342 } x'(t) = x(t) + j \underbrace{\left(\frac{1}{\pi t} * x(t) \right)}_{\text{Hilbert}\{x(t)\}}$$

Les relations suivantes sont très utiles :

$$\text{Eq. 343 } \text{Re}\{x'(t)\} = x(t) : \text{le signal est la partie réelle du signal analytique}$$

$$\text{Eq. 344 } |x'(t)| : \text{le module du signal analytique est l'enveloppe du signal}$$

$$\text{Eq. 345 } |x'(t)|^2 : \text{le carré du module du signal analytique est la puissance instantanée du signal}$$

$$\text{Eq. 346 } \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt : \text{l'intégrale du module au carré du signal analytique est l'énergie du signal}$$

Fréquence instantanée :

Un moyen de décrire un signal simultanément en temps et en fréquence est de considérer sa fréquence instantanée. Le signal analytique $x'(t)$ est construit à partir du signal réel $x(t)$. On définit alors l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée du signal par :

$$\text{Eq. 347 } a(t) = |x'(t)|, \text{ qui n'est autre que l'enveloppe du signal}$$

$$\text{Eq. 348 } f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \{ \text{Arg}(x'(t)) \}, \text{ fréquence instantanée}$$

1.4 Transformée de Fourier discrète

On appelle transformée de Fourier discrète, notée TFD, d'un signal discret défini par N échantillons, la suite de N termes définie par :

$$\text{Eq. 349 } x(n) \xrightarrow{\text{TFD}} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$\text{Eq. 350 } X(k) \xrightarrow{\text{ITFD}} x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j2\pi \frac{nk}{N}}$$

La relation entre la TFD et les coefficients de la série de Fourier, définie ci-dessous, sont données par l'équation (Eq. 352).

Série de Fourier : Si $x(t)$ est une fonction de t périodique de période T_0 , elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences f multiples de la fréquence $F_0=1/T_0$, dite fondamentale. Soit :

$$\text{Eq. 351 } x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi F_0 n t) + b_n \sin(2\pi F_0 n t))$$

$$\text{Eq. 352 } \begin{cases} a_0 = \frac{X(0)}{N} \\ a_n = \frac{2 \operatorname{Re}\{X(n)\}}{N} \\ b_n = \frac{-2 \operatorname{Im}\{X(n)\}}{N} \end{cases}$$

Théorème de Parseval :

$$\text{Eq. 353 } \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Convolution discrète :

$$\text{Eq. 354 } y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{p=0}^{N-1} x(n-p)h(p)$$

La transformée de Fourier pour les signaux à temps continus établit une correspondance entre produit simple et produit de convolution (théorème de Plancherel). Cette propriété importante se généralise pour des signaux échantillonnés à condition d'introduire la notion de translation circulaire. Lorsque l'on veut translater en temps vers la droite un signal discret défini sur $[0, N-1]$ il suffit de faire rentrer à gauche les échantillons sortant à droite du domaine de définition, car le signal continu est défini sur tout l'axe du temps comme un signal périodique. Ce phénomène est appelé translation circulaire, il a un effet direct sur la convolution : la convolution circulaire.

Le nombre p modulo N est tel que : $[p]_N = p + kN \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq p < N$

$$\text{Eq. 355 } y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{p=0}^{N-1} x([n-p]_N)h(p)$$

1.5 Fenêtres de pondération, filtrage

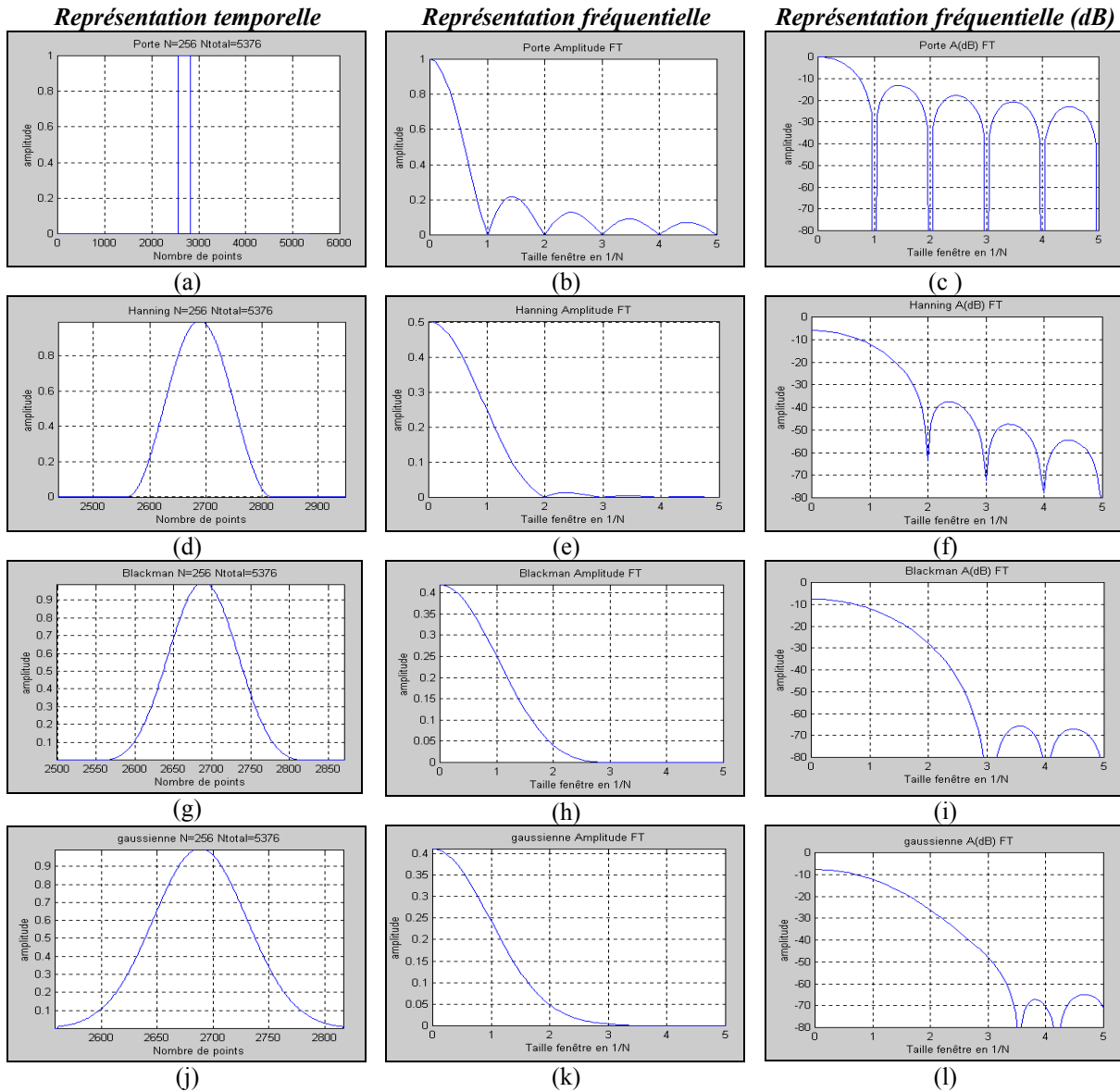
L'enregistrement par un appareil ou le traitement par ordinateur d'un signal impose un temps fini au signal qu'il soit analogique ou échantillonné. Cette troncature temporelle va apporter des modifications sur le spectre d'autant plus importantes que la durée d'observations D_a sera petite par rapport à la période la plus élevée du signal étudié. Plus l'observation du signal sera longue et plus le spectre du signal sera précis, c'est à dire peu perturbé par cette fenêtre temporelle physiquement inévitable.

On note $b(t)$ la fenêtre de pondération utilisée, et $x_{Vrai}(t)$ le signal que l'on désire observé. L'enregistrement du signal $x_{Vrai}(t)$ donne un signal tronqué $x(t)$:

$$\text{Eq. 356 } x(t) = x_{Vrai}(t) \cdot b(t) \xrightarrow{FT} X(f) = X_{Vrai}(f) * B(f)$$

Le spectre du signal observé est donc égal au produit de convolution de la transformée de Fourier du signal par la transformée de Fourier de la fenêtre de pondération.

Les principales fenêtres de pondération :



NATURELLE OU RECTANGULAIRE (figures a, b, c) :

$$\text{Eq. 357 } \begin{cases} b(t) = 1 & \forall |t| \leq \tau \\ b(t) = 0 & \forall |t| > \tau \end{cases}$$

$$\text{Eq. 358 } B_0(f) = 2\tau \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f\tau}$$

FENÊTRE DE HANNING (figures d, e, f) :

$$\text{Eq. 359 } b(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \quad \forall |t| \leq \tau$$

$$\text{Eq. 360 } B(f) = 0,5B_0(f) + 0,25B_0\left(f + \frac{1}{2\tau}\right) + 0,25B_0\left(f - \frac{1}{2\tau}\right)$$

FENÊTRE DE BLACKMAN (figures g, h, i) :

$$\text{Eq. 361 } b(t) = 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad \forall |t| \leq \tau$$

$$\text{Eq. 362 } B(f) = 0,42B_0(f) + 0,25B_0\left(f + \frac{1}{2\tau}\right) + 0,25B_0\left(f - \frac{1}{2\tau}\right) + 0,04B_0\left(f + \frac{1}{\tau}\right) + 0,04B_0\left(f - \frac{1}{\tau}\right)$$

FENÊTRE GAUSSIENNE (figures j, k, l) :

$$\text{Eq. 363 } b(t) = \exp(-gt^2) \quad \forall t$$

$$\text{Eq. 364 } B(f) = \sqrt{\frac{\pi}{g}} \exp\left(\frac{-\pi^2 f^2}{g}\right)$$

Remarque : La transformée de Fourier d'une fenêtre gaussienne est une gaussienne, cependant la figure l montre la présence de lobes secondaires dans le domaine fréquentiel. Ce phénomène provient du fait que la fenêtre utilisée ici est tronquée aux extrémités (l'amplitude est égal à $1/100^{\text{ème}}$ du sommet).

Pouvoir de séparation d'une fenêtre de pondération :

Le pouvoir de séparation est la capacité à distinguer deux fréquences voisines dans le signal. Il est commode de définir cette notion par l'écart minimum en fréquence qu'il faut mettre entre deux sinusoïdes d'amplitudes différentes pour observer sur le spectre de leur somme un creux de plus de 3dB entre les deux maxima. Cette définition correspond à celle donnée par Lord Rayleigh en optique, elle correspond à la bande passante à 3 dB.

La fenêtre de pondération la plus simple est la fenêtre rectangulaire. Cependant, si elle possède un bon pouvoir de séparation (lobes étroits), elle possède malheureusement des lobes secondaires dont l'amplitude (par rapport au lobe principal) est relativement élevée. D'autres fenêtres présentent des lobes secondaires qui s'atténuent très fortement et plus vite que la fenêtre rectangulaire (cas de Blackman), mais cette amélioration est compensée par un élargissement des lobes et en particulier du lobe principal (le pouvoir de séparation est alors relativement faible). L'ensemble des fenêtres de pondération réalise un compromis entre la largeur du lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires :

Fenêtre	Amplitude 1 ^{er} lobe secondaire A_1/A_0 (dB)	Amplitude 1 ^{er} lobe secondaire A_1/A_0	Largeur lobe principal N : largeur fenêtre	Pouvoir de séparation N : largeur fenêtre
Naturelle	-13,2	0,218	2/N	0,5/N
Hanning	-31,5	0,026	4/N	0,8/N
Blackman	-58,0	0,0013	6/N	0,9/N
Gaussienne tronquée	-59,0	0,0011	7/N	0,9/N

Tableau 89 : Caractéristiques de quelques fenêtres de pondération.

1.6 Energie des signaux

<p>PUISSANCE TEMPORELLE</p> <p>➤ Instantanée :</p> <p>Eq. 365 $p(t) = x(t)x^*(t) = x(t) ^2$</p> <p>➤ Moyenne :</p> <p>Eq. 366 $p(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) ^2 dt$</p> <p>➤ Energie :</p> <p>Eq. 367 $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$</p> <p>➤ Instantanée d'interaction :</p> <p>Eq. 368 $p_{xy}(t) = x(t)y^*(t)$</p> <p>Si $x(t)$ et $y(t)$ sont réels, on a : $p_{xy}(t) = p_{yx}(t)$</p> <p>MOYENNE D'INTERACTION :</p> <p>Eq. 369 $p_{xy}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t)y^*(t) dt$</p>	<p>PUISSANCE FREQUENTIELLE</p> <p>➤ Densité spectrale de puissance (DSP) :</p> <p>Eq. 370 $DSP(f) = X(f) ^2$</p> <p>➤ Energie bande :</p> <p>Eq. 371 $E_{Bande}(\Delta f, f_0) = \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} DSP(f) df$</p> <p>ENERGIE :</p> <p>Eq. 372 $E = \int_{-\infty}^{+\infty} DSP(f) df$</p> <p>DSP D'INTERACTION :</p> <p>Eq. 373 $DSP_{XY}(f) = X(f)Y^*(f)$</p>
---	--

Théorème de Parseval :

Eq. 374

$$E_{Temporelle} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_{Fréquentielle}$$

ou bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) df$$

Corrélation, processus de comparaison ou similitude

<p>➤ Autocorrélation :</p> <p>Eq. 375 $C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt$</p>	<p>➤ Intercorrélation :</p> <p>Eq. 376 $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt$</p>
--	---

La fonction $C_{xx}(\tau)$ est maximale pour $\tau=0$, c'est à dire que la comparaison est maximale lorsque que le signal n'est pas décalé dans le temps. Dans le cas de la fonction d'autocorrélation, il s'agit de l'étude de la ressemblance du signal avec lui même ; par conséquent si le signal est périodique, la fonction d'autocorrélation permettra de détecter cette périodicité (application au débruitage des signaux).

Relation avec la DSP (Wiener-Khintchine) :

La transformée de Fourier de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie, c'est à dire la redistribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences :

Eq. 377 $FT\{C_{xx}(\tau)\} = DSP_X(f)$

$$\text{Eq. 378 } FT\{C_{xy}(\tau)\} = DSP_{XY}(f)$$

1.7 Echantillonnage

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu $x_C(t)$ par un ensemble de valeurs discrètes $x_D(n+1)$ avec $n \in [0, N-1]$. En général, on réalise un échantillonnage régulier qui associe au signal à temps continu la suite de ses valeurs aux instants nT_e , T_e étant la période d'échantillonnage. On donne ici quelques définitions importantes à retenir :

$$\text{Eq. 379 } x_C(t) \xrightarrow{\text{Echantillonnage}} x_D(n+1) = x_C(nT_e) \quad n \in [0, N-1]$$

$$\text{Fréquence d'échantillonnage : } Fe = \frac{1}{T_e}$$

$$\text{Durée d'acquisition : } D_a = (N-1)T_e$$

$$\text{Résolution temporelle : } \Delta t = T_e \quad \Rightarrow \quad t_D(n+1) = nT_e \quad n \in [0, N-1]$$

$$\text{Résolution fréquentielle : } \Delta f = \frac{F_e}{N} \quad \Rightarrow \quad f_D(n+1) = n \frac{F_e}{N} \quad n \in [0, N-1]$$

Théorème d'échantillonnage de Shanon :

Il est possible de reconstruire un signal à temps continu $x_C(t)$ à partir du signal échantillonné $x_D(n+1)$ avec $n \in [0, N-1]$ si le signal à temps continu est à bande passante limitée et si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal à temps continu :

$$\text{Eq. 380 } \begin{cases} X_C(f) = 0 & \forall |f| > f_{Max} \\ F_e > 2f_{Max} \end{cases}$$

Théorème de reconstruction de Shanon :

Lorsque les conditions du théorème d'échantillonnage sont remplies, on a l'égalité suivante :

$$\text{Eq. 381 } x_C(t) = \sin c\left(\frac{\pi t}{T_e}\right) * x_E(t) \quad \text{avec} \quad x_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_D(n) \delta(t - nT_e)$$

$$\text{ie : } x_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_D(n) \sin c\left(\frac{\pi(t - nT_e)}{T_e}\right)$$

En pratique, cette procédure de reconstruction est soumise à des limitations. La principale limitation est que la sommation infinie de termes est irréalisables en pratique : on doit tronquer la série.

Densité spectrale de puissance des signaux transitoires échantillonnés

L'échantillonnage du signal $x_C(t)$ donne un signal échantillonné $x_D(n+1)$, avec $n \in [0, N-1]$, de N points. En général on calcule la transformée de Fourier discrète (TFD) par un algorithme nécessitant un nombre de points égal à une puissance de deux. On ajoute alors des 0 au signal $x_D(n)$ pour obtenir $N=2^p$ points. Cette méthode a de plus l'avantage de diminuer la résolution fréquentielle. On calcule alors la DSP en utilisant l'équation (Eq. 370).

Cependant, il est nécessaire de prendre en compte le phénomène de 'circularisation' des opérations introduites par la TFD (voir convolution - Eq. 355). Pour rendre la fonction de corrélation circulaire identique à la fonction de corrélation linéaire il faut que le signal échantillonné comporte au moins autant de valeurs nulles que de valeurs non nulles.

Quantification du signal échantillonné

Dynamique du système de numérisation par rapport au bruit de quantification :

$$\text{Eq. 382 } Dyna = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{B} \right), \text{ avec}$$

S : puissance de la sinusoïde d'amplitude maximale codable

B : puissance du bruit de quantification

Pour un système de codage sur N bits (valeur maximale de codage de 2^N-1), la dynamique a pour valeur :

$$\text{Eq. 383 } Dyna = 6,02.N + 1,76$$

Transformée de Fourier, distribution de l'énergie

Pour des fréquences qui ne sont pas égales à un multiple de la résolution (F_c/N), une sinusoïde pure apparaît, dans son domaine spectral, sous forme de plusieurs valeurs non nulles dont la plus importante est proche de la vraie fréquence. Ce phénomène est appelé phénomène de distribution de l'énergie.

1.8 Bruit

Bruit blanc : La DSP est constante quelque soit la fréquence considérée. La fonction d'autocorrélation s'écrit $C_{bb}(\tau) = B_0 \delta(\tau)$.

Bruit rose : La DSP est constante sur un intervalle de fréquence centré sur zéro. La fonction d'autocorrélation s'écrit $C_{rr}(\tau) = B_0$ pour $\tau \in [-\tau_0, +\tau_0]$ intervalle de temps très étroit.

Bruit gaussien : Loi de répartition de la DSP de type gaussien.

Bruit poissonien : Loi de répartition de la DSP de type Poisson.

Bruit périodique : Somme de signaux sinusoïdaux.

Rapport signal sur bruit (dB) :

$$\text{Eq. 384 } R_{SB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_B} \right), \text{ avec}$$

P_S : puissance moyenne du signal

P_B : puissance moyenne du bruit

Détection par autocorrélation d'un signal noyé dans le bruit :

Soient un signal réel $x(t)$ et signal de bruit $b(t)$, indépendant de $x(t)$. Le signal complet est donné par la somme de ces deux signaux : $s(t) = x(t) + b(t)$. Dans le cas d'un bruit blanc ou d'un bruit rose, on a la relation suivante :

$$\text{Eq. 385 } C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau), \text{ et } FT\{C_{xx}(\tau)\} = DSP_X(f)$$

Cette méthode permet ainsi de détecter la présence d'un signal même lorsque celui-ci est faible devant le bruit. Il suffit pour cela de calculer la densité spectrale de puissance du signal (Eq. 385). Si l'information de fréquence est conservée, cette méthode ne permet cependant pas de conserver l'information de phase.

1.9 Signaux déterministes, systèmes de transmission

Un signal est dit déterministe (par opposition aux signaux aléatoires) si ils sont définis par une fonction du temps. Exemple : $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$. Si le signal est issu d'un système linéaire, continu et stationnaire (Figure 272), ce système peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle ou fonction de transfert.

$$\text{Système linéaire : } Ae_1(t) + Be_2(t) \xrightarrow{\text{Système}} As_1(t) + Bs_2(t), \quad (A, B) \in R^2$$

$$\text{Système stationnaire : } e(t - \tau) \xrightarrow{\text{Système}} s(t - \tau)$$

$$\text{Gain en puissance : } G_P = 10 \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_E} \right), \text{ } P_S \text{ et } P_E : \text{ puissances des signaux de sortie et d'entrée}$$

$$\text{Gain en tension : } G_V = 20 \log_{10} \left(\frac{V_S}{V_E} \right), \text{ } V_S \text{ et } V_E : \text{ tension des signaux de sortie et d'entrée}$$

On note $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système, on a alors la relation suivante entre le signal d'entrée et le signal de sortie :

$$\text{Eq. 386 } s(t) = e(t) * h(t) \Rightarrow S(f) = E(f)H(f)$$

L'opération de déconvolution peut s'écrire dans le domaine fréquentiel :

$$\text{Eq. 387 } H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}, \text{ si } E(f) \gg 0$$

La réponse impulsionnelle s'écrit classiquement :

$$\text{Eq. 388 } H(f) = |H(f)|e^{-j\varphi(f)}$$

Le retard de groupe est alors défini comme suit :

$$\text{Eq. 389 } \tau_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(f)}{\partial f}$$

1.10 Transformées en Z pour les systèmes discrets

La transformée en Z de la suite $x(n)$ est définie par la relation suivante :

$$\text{Eq. 390 } X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)Z^{-n}, \quad Z \in \mathbb{C}$$

Si $x(n)$ est la suite des échantillons d'un signal prélevé avec la période T_e , on a alors :

$$\text{Eq. 391 } FT\{x(n)\} = X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi f n T_e}$$

Pour $Z = e^{j2\pi f T_e}$ la transformée en Z est égal à la transformée de Fourier : $FT\{x(n)\} = ZT\{x(n)\}$

L'analyse d'un système discret peut donc se faire avec sa transformée en Z. Pour connaître sa réponse en fréquence, il suffit de remplacer Z par $Z = e^{j2\pi f T_e}$.

La transformée en Z possède la propriété de linéarité, d'autre part la transformée de la suite retardée $x(n-n_0)$ s'écrit :

$$\text{Eq. 392 } ZT\{x(n-n_0)\} = Z^{-n_0} ZT\{x(n)\}$$

Convolution :

$$\text{Eq. 393 } y(n) = x(n) * h(n) \xrightarrow{ZT} Y(Z) = X(Z)H(Z)$$

On utilise généralement la transformée en Z mono - latérale définie uniquement pour n positif ou nul. Dans ce cas les propriétés énoncées ci dessus sont toujours valables sauf pour la suite retardée (Eq. 392).

1.11 Systèmes linéaires discrets invariants dans le temps, cas des modèles ARMA

Ces systèmes constituent un domaine très important du traitement numérique du signal, qui est celui des filtres numériques à coefficients fixes. Ils sont régis par une équation de convolution (analogue à Eq. 386), et l'analyse de leurs propriétés se fait à l'aide de la transformée en Z. La transformée en Z joue pour les systèmes discrets le même rôle que la transformée de Fourier pour les systèmes continus.

Nous nous intéressons ici au cas particulier des systèmes définis par une équation aux différences. Dans ce cas les suites numériques d'entrée et de sortie sont liées par une équation aux différences linéaires à coefficients constant :

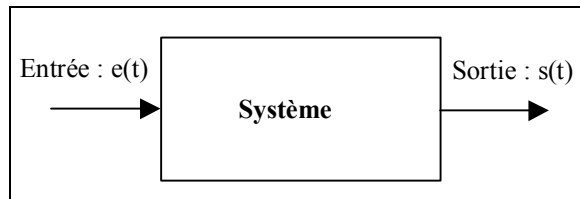


Figure 272 : Schéma d'un système de transmission.

$$\text{Eq. 394 } y(n) = \sum_{p=0}^N A_p x(n-p) - \sum_{p=1}^N B_p y(n-p)$$

$$\text{Eq. 395 } Y(Z) = X(Z) \sum_{p=0}^N A_p Z^{-p} - Y(Z) \sum_{p=1}^N B_p Z^{-p}$$

En notant comme précédemment H la réponse impulsionnelle du système, on obtient l'expression suivante :

$$\text{Eq. 396 } Y(Z) = X(Z)H(Z) \quad \Rightarrow \quad H(Z) = \frac{A_0 + A_1 Z^{-1} + \dots + A_N Z^{-N}}{1 + B_1 Z^{-1} + \dots + B_N Z^{-N}}$$

La réponse en fréquence du système s'obtient en remplaçant Z par $Z = e^{j2\pi f T_e}$. La fonction H(Z) s'écrit sous la forme d'un quotient de deux polynômes $P_A(Z)$ et $P_B(Z)$, les valeurs d'annulation du numérateur P_{Ap} sont les zéros de H(Z), les valeurs d'annulation du dénominateur P_{Bp} sont les pôles de H(Z) :

$$\text{Eq. 397 } H(Z) = \frac{P_A(Z)}{P_B(Z)} = A_0 \frac{\prod_{p=1}^N (1 - P_{Ap} Z^{-1})}{\prod_{p=1}^N (1 - P_{Bp} Z^{-1})} = A_0 \frac{\prod_{p=1}^N (Z - P_{Ap})}{\prod_{p=1}^N (Z - P_{Bp})}$$

Relation entre modèles continus et modèles discrets

➤ Exemple :

Soit un système défini par l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = s(t) + B_1 \frac{ds}{dt} + B_2 \frac{d^2s}{dt^2}$$

Pour un signal échantillonné, on a un filtre de type AR2 dont l'expression est la suivante :

$$e(n) = s(n) + B_1 s(n-1) + B_2 s(n-2) \Rightarrow H(Z) = \frac{1}{1 + B_1 Z^{-1} + B_2 Z^{-2}} \quad \text{et} \quad H(f) = \frac{1}{1 + B_1 e^{-j2\pi f T_e} + B_2 e^{-j4\pi f T_e}}$$

Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou moyenne ajustée (MA)

Relation de définition :

$$\text{Eq. 398 } y(n) = \sum_{p=0}^N A_p x(n-p)$$

$$\text{Eq. 399 } H(Z) = \sum_{p=0}^N A_p Z^{-p} \quad \Rightarrow \quad H(f) = \sum_{p=0}^N A_p e^{-j2\pi f p T_e}$$

Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Ordre 1 : $x(n) = y(n) + B_1 y(n-1)$

Ordre 2 : apparition du terme en (n-2)

Relation de définition (Eq. 394) :

$$y(n) = \sum_{p=0}^N A_p x(n-p) - \sum_{p=1}^N B_p y(n-p)$$

Filtres auto - régressifs (AR)

Cas particulier de filtre RII qui ne comporte pas de zéro :

$$\text{Eq. 400 } y(n) + \sum_{p=1}^N B_p y(n-p) = A_n x(n)$$

2 IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES

Dans ce paragraphe, on s'intéresse exclusivement aux systèmes linéaires continus et invariants dans le temps. Nous reprendrons brièvement leur définition pour nous intéresser tout particulièrement au problème de leur identification par l'expérience.

2.1 Systèmes linéaires

2.1.1 Définition

Un système est dit continu si tous les signaux accessibles en différents points du processus sont des fonctions de la variable temporelle continue t . Un système est linéaire si le principe de superposition lui est applicable :

$$\text{Eq. 401 } Ae_1(t) + Be_2(t) \xrightarrow{\text{Système}} As_1(t) + Bs_2(t), \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Un système est dit invariant dans le temps si les paramètres qui le caractérisent sont stationnaires (constants) pendant toute la durée de vie du processus. C'est à dire que si l'on fait une expérience à un instant t , sur le système, donnant certains résultats, la même expérience reconduite le lendemain ou un an plus tard doit toujours conduire au même résultat :

$$\text{Eq. 402 } e(t - \tau) \xrightarrow{\text{Système}} s(t - \tau)$$

En pratique, par exemple dans le cas d'une petite baguette de bois en vibrations, considérer la baguette de bois comme un système linéaire invariant dans le temps n'est qu'une approximation. Le bois étant un matériau hygroscopique, faire la même expérience vibratoire à différentes époques de l'année (été et hiver) ou en différents endroits (région sèche et humide) ne donnera pas les mêmes résultats. Lorsque la sollicitation mécanique en entrée est très intense, comme par exemple le choc d'un marteau sur un poteau de ligne planté dans le sol, à l'endroit du choc la zone plastique dans le plan contrainte - déformation est rapidement atteinte, le système constitué par le poteau ne se comportera pas comme un système linéaire tant que la concentration de contrainte au niveau de l'impact ne s'est pas suffisamment atténuée.

2.1.2 Représentation temporelle

On peut représenter la sortie de tout système linéaire à partir de l'expression du signal d'entrée qui lui est appliqué et de sa réponse impulsionnelle, notée $h(t)$. Par définition, la réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à une impulsion de Dirac placée à l'origine des temps ($t=0$). La relation entre un signal d'entrée quelconque et la sortie qui lui est associée s'exprime à l'aide d'un produit de convolution :

$$\text{Eq. 403 } s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Comme les systèmes considérés ici (poutres de bois en vibrations) sont des systèmes physiques, la notion de causalité s'impose. Un système est dit causal si l'effet ne peut précéder la cause. La causalité nous impose mathématiquement $h(t)=0 \forall t < 0$. En effet, par définition, $h(t)$ est la réponse du système à une entrée de Dirac intervenant à l'origine.

La sortie d'un système ne peut être définie à partir de sa réponse impulsionnelle et du signal d'entrée si le produit de convolution (Eq. 403) est défini. Cela impose d'une part que le signal d'entrée soit d'une durée finie dans le temps et borné en amplitude - ce qui semble logique d'un point de vue physique - et d'autre part que :

$$\text{Eq. 404 } \int_0^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Cette dernière condition est déterminante sur la stabilité du système. Là encore cette condition semble logique d'un point de vue physique, car il est difficile d'imaginer que des oscillations d'amplitudes infinies, provoquant la destruction du matériau, soit la conséquence d'une petite percussion avec un marteau.

2.1.3 Représentation fréquentielle

Nous avons vu qu'il était possible d'écrire la sortie d'un système en réponse à une entrée dès que l'on connaissait sa réponse impulsionnelle. Il est également possible de relier l'entrée d'un système à sa sortie par l'intermédiaire de sa

fonction de transfert. La fonction de transfert d'un système linéaire continu et stationnaire est obtenue en effectuant la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle :

$$\text{Eq. 405 } H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{j2\pi ft} dt$$

Par application du théorème de Plancharel, on obtient directement la relation entre l'entrée et la sortie du système dans le plan fréquentiel :

$$\text{Eq. 406 } s(t) = e(t) * h(t) \Rightarrow S(f) = E(f).H(f)$$

La fonction de transfert, comme la réponse impulsionnelle, ne dépend pas de l'entrée appliquée au système. Identifier la fonction de transfert ou la réponse impulsionnelle permet alors de caractériser le système considéré. Ce qui suit traite des méthodes d'identification des systèmes linéaires continus et stationnaires.

2.2 Identification des systèmes linéaires

2.2.1 Problématiques

Améliorer la connaissance d'un système physique et la compréhension de son fonctionnement passe par la collecte et l'exploitation de données expérimentales. Dans ce cas, les informations recherchées ne sont pas directement mesurables, mais sont physiquement reliées à d'autres grandeurs accessibles à la mesure : on est en situation de mesure indirecte. Les lois physiques reliant les observations expérimentales aux grandeurs caractéristiques recherchées sont en général mathématiquement complexes. Les formulations mathématiques permettent le calcul des valeurs expérimentales en fonction des grandeurs caractéristiques inconnues, le problème est alors qualifié de problème direct, de sorte que l'obtention des grandeurs cachées à partir de l'expérience conduit à résoudre le problème inverse. Les problèmes inverses sont comparativement beaucoup plus difficiles à résoudre que les problèmes directs.

Les problèmes inverses peuvent être répartis en deux classes :

- Les problèmes bien posés, tels que (a) la solution recherchée existe, (b) soit unique, (c) soit continue par rapport aux variables d'inversion, c'est à dire qu'une petite erreur d'une variable d'inversion entraîne une petite erreur sur la solution.
- Les problèmes mal posés, qui ne vérifient pas une ou plusieurs conditions (a, b, c) énoncées ci-dessus.

Il est possible de reformuler les notions de problème direct et de problème inverse en introduisant le concept de système. La résolution mathématique d'un problème physique peut être vue sous l'angle du calcul de la réponse d'un objet appelé système qui transforme des sollicitations. Le problème direct consiste à calculer la réponse du système à partir de la donnée des sollicitations (Figure 273).

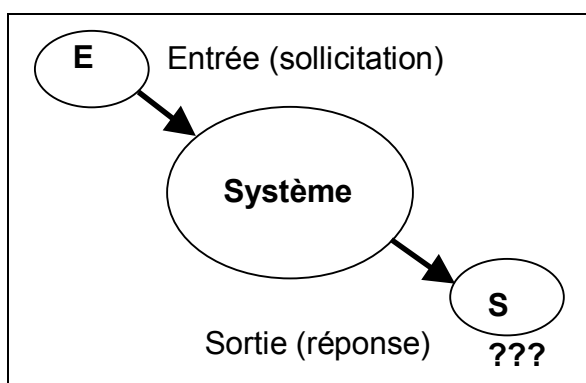


Figure 273 : Schématisation d'un problème direct.

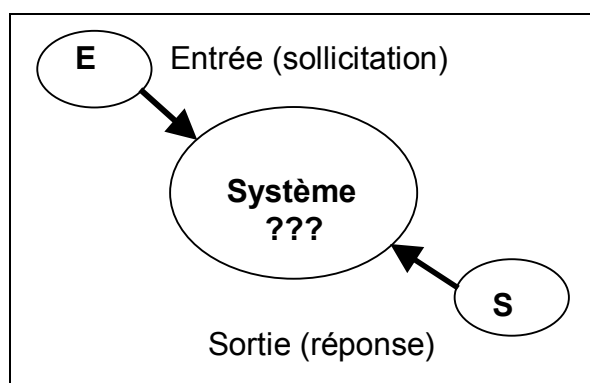


Figure 274 : Schématisation d'un problème inverse.

Dans le problème inverse, tout ou une partie du système étudiée est inconnue. On dispose uniquement des informations, éventuellement partielles, sur l'entrée et la réponse du système (Figure 274).

Le résultat de l'opération de convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle d'un système linéaire continu et stationnaire permet de répondre au problème direct : connaissant un système linéaire caractérisé par sa

réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'histoire du signal d'entrée $e(t)$, peut-on calculer le signal de sortie $s(t)$? La solution est donnée par l'équation de convolution (Eq. 403).

Cependant identifier un système linéaire revient à poser la question : connaissant le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$, peut-on déduire sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa fonction de transfert $H(f)$? Répondre à cette question revient à résoudre un problème inverse, c'est à dire résoudre l'équation inverse de convolution. On pourrait croire que la solution de ce problème est très simple en utilisant le théorème de Plancharel (Eq. 406) :

$$\text{Eq. 407 } S(f) = E(f).H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$$

Cette solution est en générale inacceptable sans prendre certaines précautions [Max, 2000 #9]. La solution obtenue doit correspondre à la description d'un système causal $h(t)=0 \forall t < 0$. La réponse impulsionnelle calculée à partir de $H(f)$ n'est définie que pour $t \geq 0$. Il faut de plus que la réponse impulsionnelle calculée ne présente pas de divergence temporelle.

L'équation (Eq. 407) correspond à un problème mal posé. La solution $H(f)$ trouvée n'est en général pas unique, de plus en des points particuliers, de petites incertitudes sur le signal d'entrée provoquent l'apparition de singularité, d'où l'instabilité du système :

$$\text{Eq. 408 } |E(f)| \approx 0 \Rightarrow |H(f)| \rightarrow \infty$$

Lorsque le spectre du signal d'entrée $E(f)$ devient très faible en amplitude, une petite erreur sur $E(f)$ provoque des erreurs très importantes sur la solution trouvée. C'est le problème de la division de $S(f)$ par $E(f)$ au voisinage de zéro (Eq. 408).

Le signal d'entrée est connu sur une durée finie d'échantillons de même pour le signal de sortie. Il est illusoire de chercher à retrouver la suite infinie des échantillons de H à partir des suites finies de l'entrée et de la sortie. La fonction de transfert $H(f)$ n'est alors connue que pour certaines valeurs de fréquence dans une gamme limitée.

2.2.2 Les méthodes d'identification

L'identification des systèmes comporte nécessairement une étape expérimentale et on a l'habitude de décomposer un travail d'identification en quatre phases distinctes :

- Envoi de signaux tests sur le système et acquisition de la réponse,
- calcul de la réponse impulsionnelle ou de la fonction de transfert,
- vérification de la stabilité, de la linéarité (et des autres hypothèses faites sur le système) de la fonction caractéristique temporelle ou fréquentielle,
- comparaison de la réponse expérimentale à la réponse recalculée pour validation.

Il existe un grand nombre de méthodes d'identification et des ouvrages entiers leur sont consacrées. Cela dépasse donc très largement le cadre d'une annexe ; seules quelques méthodes les plus communément citées sont exposées dans ce paragraphe.

2.2.2.1 Identification par réponse harmonique (méthode harmonique)

Cette méthode consiste à exciter le système à identifier par un signal sinusoïdal dont on va faire varier la fréquence. Pour une fréquence donnée, on relève le gain du système - l'amplitude du signal de sortie divisée par l'amplitude du signal d'entrée - et le déphasage du signal de sortie par rapport à l'entrée. On répète cette opération pour un certain nombre de valeurs de la fréquence, ces valeurs étant réparties dans une plage pour laquelle on souhaite faire l'analyse du système.

En final, on dispose d'une série de valeurs numériques (gain, déphasage)_p associées à la fréquence f_p avec $p \in \{1, \dots, N\}$. Le module et la phase de la fonction de transfert se déduit alors directement :

$$\text{Eq. 409 } \begin{cases} e(t) = E_{0-p} e^{j2\pi f_p t} \\ s(t) = S_{0-p} e^{-j\varphi_p} e^{j2\pi f_p t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H(f_p)| = \frac{S_{0-p}}{E_{0-p}} \\ \text{Arg}\{H(f_p)\} = -\varphi_p \end{cases}$$

Il suffit donc pour chaque fréquence de mesurer le rapport des amplitudes crêtes du signal d'entrée et du signal de sortie, ainsi que le déphasage pour avoir, point par point, un relevé de la fonction de transfert. La méthode harmonique

nécessite un très grand nombre de mesures pour permettre une détermination fine de la fonction de transfert. Par exemple, une identification sur la gamme [1, 4000] Hz avec une résolution voisine du Hertz (0,65 Hz) nécessiterai 6154 points de mesure. Cet exemple illustre l'inconvénient majeur de cette méthode au niveau de sa mise en œuvre.

2.2.2.2 Identification par réponse à un signal aléatoire blanc (méthode stochastique)

➤ Mesure en temps

En considérant la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée $C_{ee}(\tau)$ et la fonction d'intercorrélation entre signal d'entrée et signal de sortie $C_{se}(\tau)$, il existe une relation de convolution analogue à l'équation (Eq. 403) entre $C_{ee}(\tau)$ et $C_{se}(\tau)$:

$$\text{Eq. 410 } C_{se}(\tau) = C_{ee}(\tau) * h(\tau)$$

Si la fonction d'autocorrélation $C_{ee}(\tau)$ est assimilable à une impulsion de Dirac, la relation précédente devient :

$$\text{Eq. 411 } C_{se}(\tau) = h(\tau)$$

La fonction d'intercorrélation entre signal d'entrée et signal de sortie est alors la réponse impulsionnelle du système. Le signal dont la fonction d'autocorrélation est une impulsion de Dirac correspond à un signal aléatoire (bruit blanc) ou pseudo - aléatoire.

➤ Mesure en fréquence

Le système est supposé excité par un signal assimilable à un bruit blanc. Les mesures étant entachées d'erreurs (bruit rose), il est cependant possible d'obtenir une estimation correcte de la fonction de transfert. L'équation (Eq. 410) devient dans le domaine fréquentiel :

$$\text{Eq. 412 } S_{se}(f) = S_{ee}(f) \cdot H(f)$$

On obtient alors la fonction de transfert à partir de la densité spectrale de puissance du signal d'entrée $S_{ee}(f)$ et de la densité spectrale de puissance d'interaction entre signal d'entrée et signal de sortie $S_{se}(f)$:

$$\text{Eq. 413 } H(f) = \frac{S_{se}(f)}{S_{ee}(f)}$$

2.2.2.3 Identification par réponse indicielle (méthode impulsionnelle)

➤ Mesure en temps

Il s'agit d'envoyer dans le système étudié une impulsion temporelle $\delta(t)$ assimilable à un Dirac. On obtient alors directement en utilisant l'équation (Eq. 403) la réponse impulsionnelle du système :

$$\text{Eq. 414 } s(t) = \delta(t) * h(t) \Rightarrow s(t) = h(t)$$

En pratique, une impulsion de Dirac n'est pas réalisable, l'impulsion réelle envoyée a toujours une durée τ_0 ce qui biaise l'égalité entre le signal de sortie et la réponse impulsionnelle (Eq. 414). Dans le cas d'une sollicitation par un choc, l'énergie envoyée doit être importante pour obtenir un signal de sortie dont l'amplitude est très supérieure au bruit de fond. La réponse impulsionnelle pourra alors être déterminée avec précision. Cependant l'énergie envoyée, correspondant à la force du choc, doit être limitée pour que l'hypothèse de linéarité du système soit valable.

➤ Mesure en fréquence

Le système est sollicité par un choc très bref dans le temps. Connaissant le signal d'entrée et de sortie, la fonction de transfert se déduit en utilisant l'équation (Eq. 407) :

$$\text{Eq. 415 } H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$$

Nous avons vu au paragraphe 2.2.1 que la solution ainsi obtenue (Eq. 415) est en général inacceptable sans prendre quelques précautions. Les principaux problèmes de cette méthode sont constitués par la présence inévitable de bruit de fond dans les signaux enregistrés, qui biaise la solution obtenue, et par la division de $S(f)$ par $E(f)$ au voisinage de zéro, qui rend la solution très instable et non unique. Il est donc nécessaire de vérifier que le bruit de fond reste très faible par rapport aux signaux enregistrés. Il est également important d'effectuer la division de $S(f)$ par $E(f)$ en se plaçant relativement "loin" des valeurs d'annulation du module de $E(f)$.

La fonction de transfert $H(f)$ n'est connue que pour certaines valeurs de fréquence dans une gamme limitée. Pour éviter le phénomène de translation circulaire en effectuant la transformée de Fourier, il est nécessaire de d'ajouter aux signaux un nombre de zéro au moins égal au nombre de points initial du signal. Pour avoir une résolution fréquentielle voisine du Hertz, il faut également veiller à ce que l'ajout de zéro aux signaux implique que le nombre total de points soit au moins égal à la valeur de la fréquence d'échantillonnage.

L'effet du fenêtrage sur les signaux d'entrée et de sortie doit être limité. Nous avons vu que les signaux enregistrés sont perturbés par une fenêtre temporelle physiquement inévitable. Dans le domaine fréquentiel, on obtient alors :

$$\text{Eq. 416} \quad \begin{cases} e(t) = e_{\text{vrai}}(t) b_e(t) \Rightarrow E(f) = E_{\text{vrai}}(f) * B_e(f) \\ s(t) = s_{\text{vrai}}(t) b_s(t) \Rightarrow S(f) = S_{\text{vrai}}(f) * B_s(f) \end{cases} \Rightarrow H(f) \neq \frac{S(f)}{E(f)}$$

Dans le cas d'un signal transitoire, il existe un intervalle de temps fini pendant lequel le signal a une amplitude non nulle. Si l'on observe ce signal pendant une durée supérieure à cet intervalle de temps, la perturbation engendrée par la fenêtre temporelle sera quasiment négligeable. On obtiendra alors en utilisant l'équation (Eq. 415) une bonne estimation de la fonction de transfert.

Dans certains cas le signal de sortie n'est pas échantillonné en même temps que le signal d'entrée. il existe donc un décalage de phase entre ces deux signaux. Afin de remédier à ce problème dans l'estimation de la fonction de transfert, on utilise la propriété de translation de la transformée de Fourier pour recalibrer la phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Si le décalage entre les deux canaux est de τ , on effectue alors le recalage comme suit :

$$\text{Eq. 417} \quad \begin{cases} e(t) \xrightarrow{FT} E(f) \\ s(t - \tau) \xrightarrow{FT} S(f) e^{-j2\pi f\tau} \end{cases} \Rightarrow H(f) = \left(\frac{S(f) e^{-j2\pi f\tau}}{E(f)} \right) e^{+j2\pi f\tau}$$

La méthode présentée dans ce paragraphe est celle que nous mettons en œuvre du fait de la bonne estimation de la fonction de transfert du système et de la simplicité dans la réalisation d'un essai expérimental : un choc suffit.

2.2.2.4 Signaux bruités, fonction de cohérence

Le calcul de la fonction de cohérence est très important car elle est un indicateur de l'existence d'une liaison linéaire et stationnaire entre deux signaux. La cohérence est une mesure statistique, elle n'a de sens que si une opération de moyennage a été effectuée. On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un filtrage linéaire et stationnaire faisant passer du signal $e(t)$ au signal $s(t)$ est que la cohérence vérifie :

$$\text{Eq. 418} \quad |C_{o_{se}}(f)|^2 = \frac{|S_{se}(f)|^2}{S_{ee}(f) S_{ss}(f)} = 1 \quad \forall f$$

La cohérence nous donne donc un moyen de vérifier, à partir des signaux observés, la linéarité et la stationnarité du système.

3 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES ET PROFILS DENSIMETRIQUES DES POUTRES DE PIN SYLVESTRE

Nom	Masse (kg)	Longueur (m)	Hauteur (cm)	Epaisseur (cm)	Densité (kg/m ³)
2990	12,046	3,02	5,1	14,6	546
3016	10,280	3,02	4,9	14,6	467
3020	10,461	3,02	4,8	14,7	472

Tableau 90 : Caractéristiques physiques des poutres de pin sylvestre.

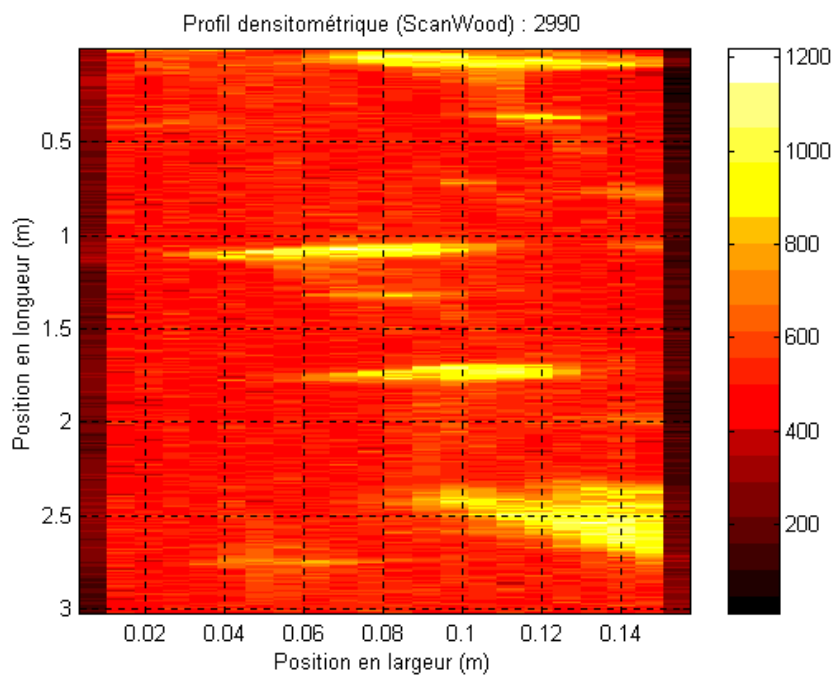
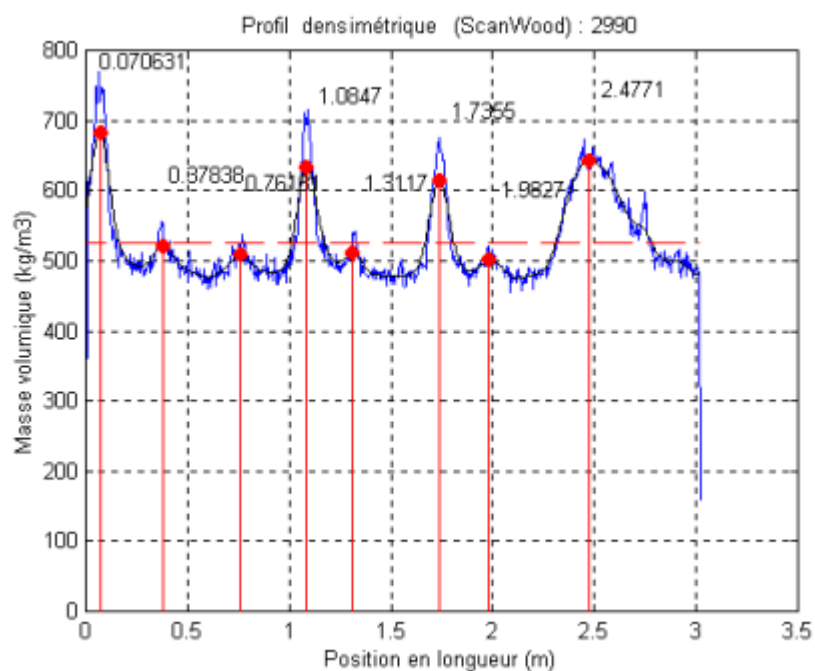


Figure 275 : Profils densimétriques de la poutre 2990.

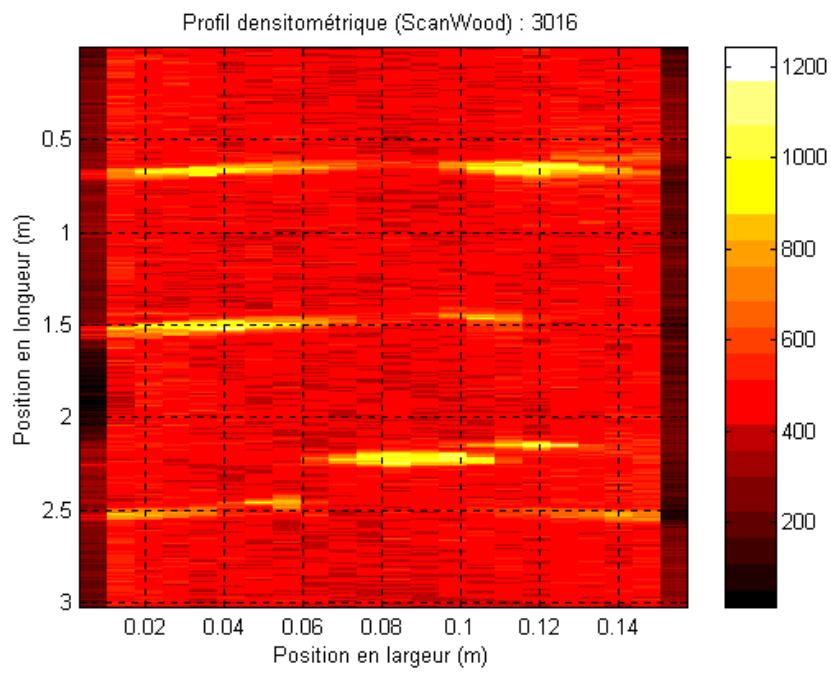
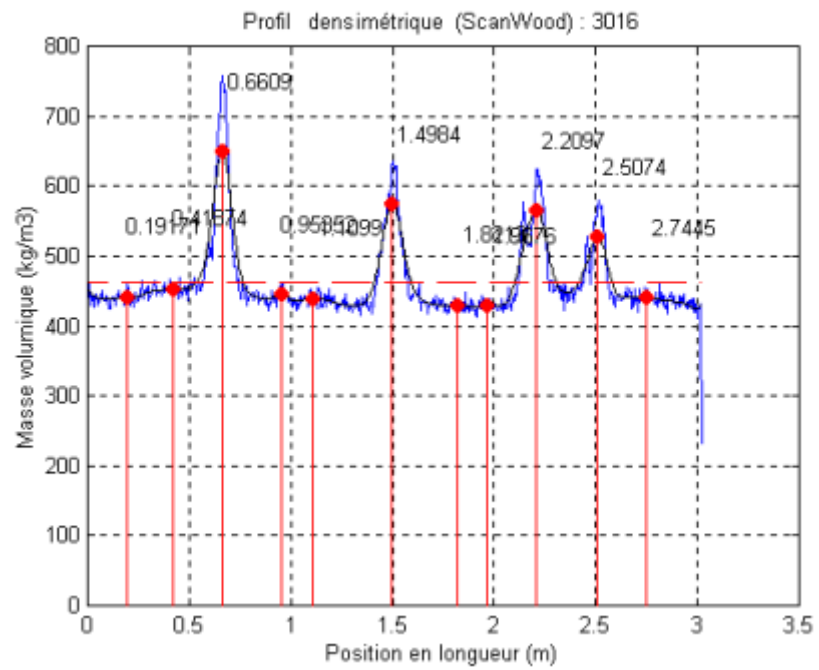


Figure 276 : Profils densimétriques de la poutre 3016.

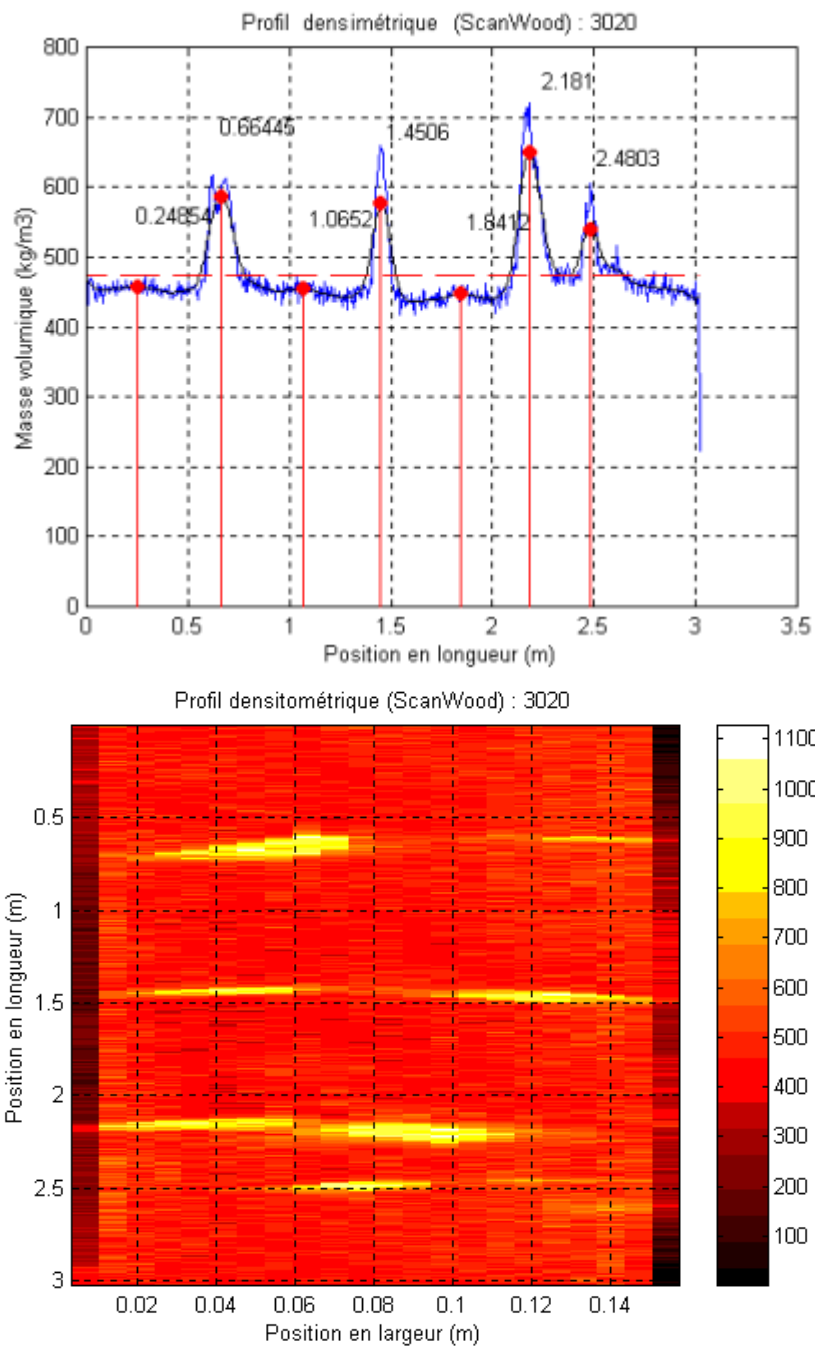
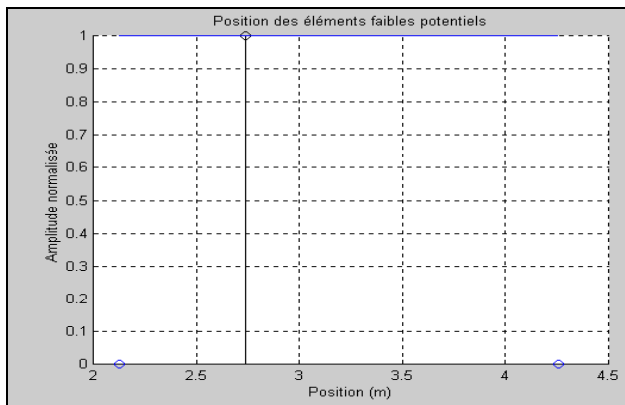


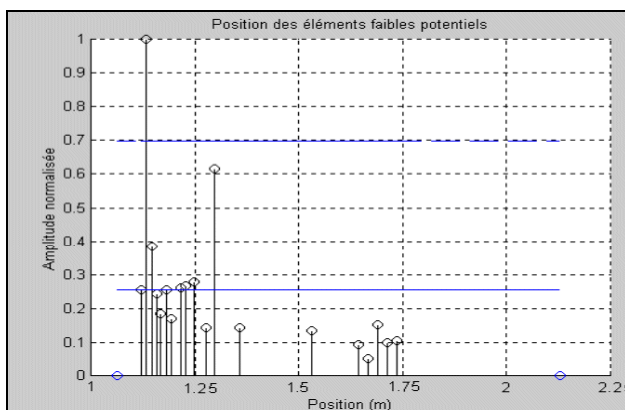
Figure 277 : Profils densimétriques de la poutre 3020.

4 RESULTATS DES TESTS D'ECHOLOCATION



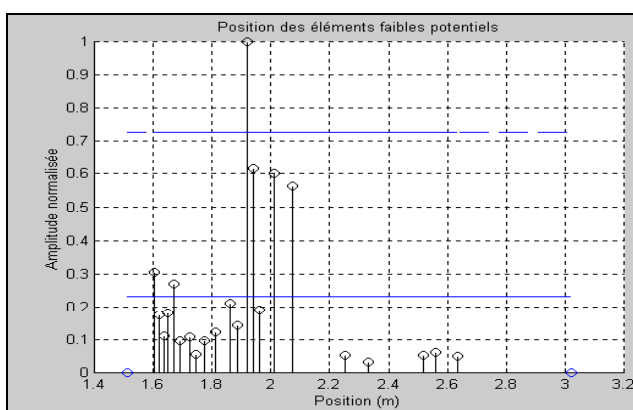
Position (m)	Amplitude
*	*

Figure 278 : Résultats d'écholocation de la poutre de pin de Parana n°1.



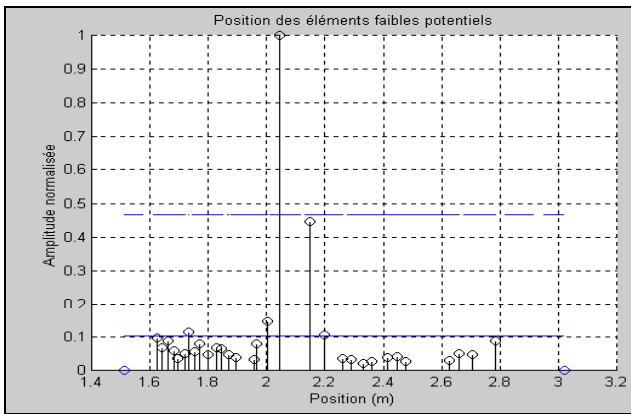
Position (m)	Amplitude
1,13	1,00
1,15	0,38
1,18	0,26
1,22	0,26
1,23	0,27
1,25	0,28
1,30	0,62

Figure 279 : Résultats d'écholocation de la poutre de pin de Parana n°2.



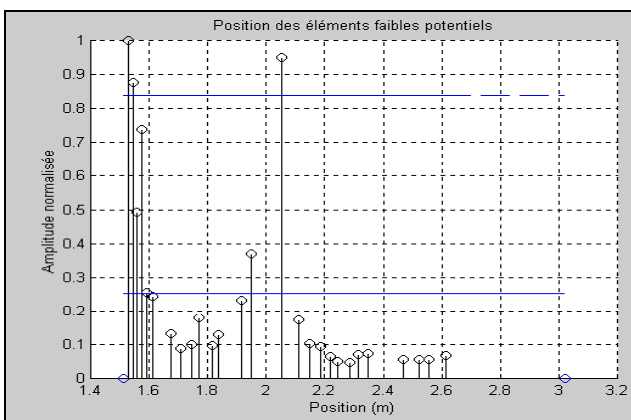
Position (m)	Amplitude
1,60	0,31
1,67	0,27
1,92	1,00
1,94	0,62
2,01	0,60
2,07	0,56

Figure 280 : Résultats d'écholocation de la poutre de pin de sylvestre 2990.



Position (m)	Amplitude
1,73	0,12
2,00	0,15
2,04	1,00
2,15	0,45
2,20	0,11

Figure 281 : Résultats d'écholocalion de la poutre de pin de sylvestre 3016.



Position (m)	Amplitude
1,53	1,00
1,54	0,88
1,56	0,49
1,57	0,74
1,59	0,26
1,95	0,37
2,05	0,95

Figure 282 : Résultats d'écholocalion de la poutre de pin de sylvestre 3020.

5 LE CLASSEMENT EN STRUCTURE DES BOIS RESINEUX (SOURCE CTBA)

5.1 Rappel de l'objectif

L'utilisation d'un bois en usage structurel est conditionnée à la connaissance de ses propriétés mécaniques. Ainsi le classement en structure a pour but de proposer différentes classes où les bois seront triés en lots homogènes de même résistance en vue d'optimiser leur utilisation en construction. Pour réaliser ce classement, deux méthodes existent : la méthode visuelle et la méthode par machine (Figure 283).

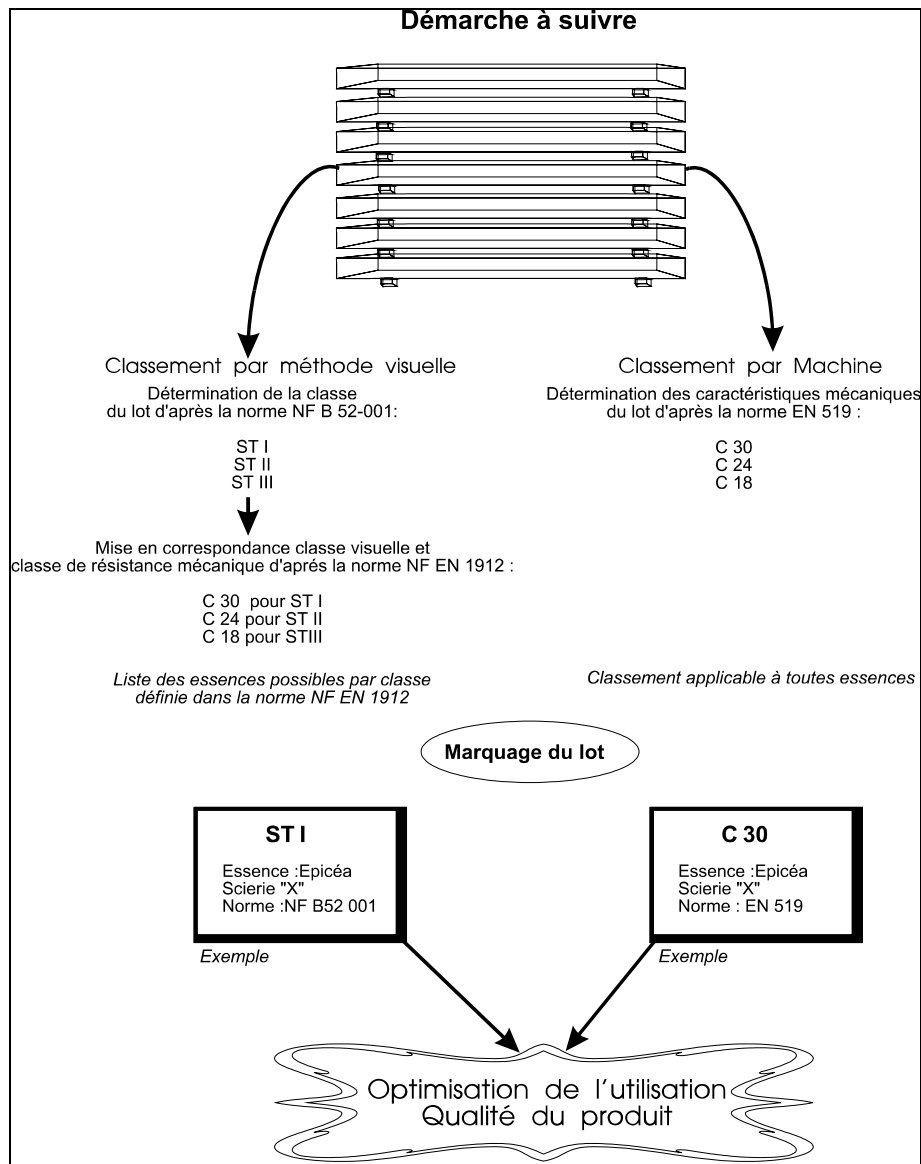


Figure 283 : Démarche de classement des bois en structure.

5.1.1 Méthode visuelle

Il s'agit de définir une classe de résistance des sciages destinés à des emplois en structure de façon simple et utilisable sans appareillage spécifique. Ainsi, des critères visuels basés sur l'aspect du bois, le débit pratiqué, les altérations biologiques et les déformations géométriques des sciages ont été mis en correspondance avec des classes de résistances. Trois classes visuelles ont été retenues (ST-I, ST-II ou ST-III) et définies dans la norme NF B 52-001 (1998). Chacune de ces classes est associée à une classe de résistance.

5.1.2 Méthode par machine

Il s'agit de produire directement les classes de résistances (norme EN 338 de 1995) en mesurant des caractéristiques mécaniques par contrôle non destructif. Le classement s'en trouve optimisé vers les qualités supérieures. En effet, un sciage déclassé en ST-II suivant des critères visuels de nodosité ne correspond pas forcément à sa véritable valeur en résistance mécanique. Cette approche est étudiée au CTBA, et montre des différences significatives entre les deux classements.

5.2 Les avantages et inconvénients des deux méthodes

Le Tableau 91 présente une synthèse des principaux avantages et inconvénients de la méthode de classement visuelle et de la méthode de classement par machine.

	Classement en structure	
	<i>Visuel</i>	<i>machine</i>
Rapidité d'exécution	+	++
Optimisation du classement	-	++
Coût du matériel de classement	++	-
Coût du classement	+	+
Homogénéisation des mesures	-	++

Tableau 91 : Avantages et inconvénients des deux méthodes de classement.

5.3 Le classement en structure des bois par la méthode visuelle

(d'après la norme NF B 52-001 de décembre 1998)

5.3.1 Les mesures du classement visuel

Ce paragraphe rappelle les principales règles pour mesurer les nœuds et la largeur de cernes.

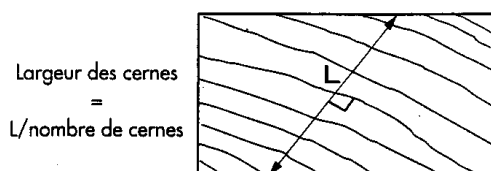


Figure 284 : Mesure de la largeur des cernes.

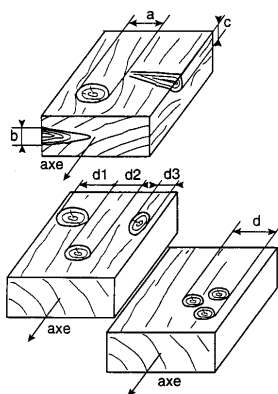


Figure 285 : Mesure des nœuds.

Mesure de la largeur des cernes

La largeur des cernes est mesurée aux deux extrémités de la pièce. La valeur retenue est la moyenne de ces deux mesures qui s'effectue selon le schéma de la Figure 284.

Mesure des nœuds

Le diamètre des nœuds est mesuré perpendiculairement à l'axe de la pièce (Figure 285).

Nœuds groupés :

Les nœuds sont dits groupés si la distance d'entraxes entre deux ou plusieurs nœuds est inférieure à 15 cm. Dans ce cas, on additionne les diamètres de chacun des nœuds de la même façon, perpendiculairement à l'axe de la pièce et en tenant compte de la pente du fil.

5.3.2 Mesures et critères à prendre en compte pour le classement visuel

Le Tableau 92 suivant reprend les mesures et des critères à prendre en compte pour classer le sciage (le principe des mesures des critères est décrit dans la norme EN 1310) :

Classes		ST-I ⁽¹⁾	ST-II	ST-III
Essences	CRITERES			
		Largeur des cernes d'accroissement (mm)		
Sapin – Epicéa – Pins		≤ 6	≤ 8	≤ 10
Douglas		≤ 8	≤ 10	≤ 12
		Diamètre des nœuds		
Sapin – Epicéa – Douglas	Sur la face ⁽²⁾	$\varnothing \leq 1/6$ de l et ≤ 30 mm	$\varnothing \leq 1/2$ de l et ≤ 50 mm	$\varnothing \leq 3/4$ de l et ≤ 100 mm
	sur la rive	$\varnothing \leq 2/3$ de l'épaisseur de la rive $\varnothing \leq 40$ mm		
Pins	sur la face ⁽²⁾	$\varnothing \leq 1/10$ de l et $\varnothing \leq 15$ mm	$\varnothing \leq 1/3$ de l et $\varnothing \leq 50$ mm	$\varnothing \leq 2/3$ de l et $\varnothing \leq 100$ mm
	sur la rive ⁽³⁾	$\varnothing \leq 1/3$ de e et $\varnothing \leq 15$ mm	$\varnothing \leq 1/2$ de e et $\varnothing \leq 30$ mm	$\varnothing \leq 1/2$ de e et $\varnothing \leq 30$ mm
		Fentes ⁽⁴⁾		
Toutes essences	traversantes	longueur ≤ deux fois la largeur de la pièce		longueur ≤ 600 mm
	non traversantes	longueur ≤ moitié de la longueur de la pièce		non limitée
Toutes essences		non admise	Grosse poche de résine admise si < 80 mm	
Toutes essences		Entre- écorce non admise		
Toutes essences		Pente de fil (en fraction)		
Toutes essences	locale	1:10	1:4	
	générale	1:14	1:6	
		Flaches		
Toutes essences	longueur	non admises	< 1/3 de la longueur de la pièce et < 100 cm	
	largeur		< 1/3 de l'épaisseur de la rive	
		Altérations biologiques		
Toutes essences	bleu - traces de gui	Admis		
	piqûres noires	Admises si elles apparaissent sur une seule face		
	échauffure	Non admise		
		Déformation maximale en mm pour une longueur de 2 m		
Toutes essences	flèche de face (mm)	< 10		< 20
	flèche de rive (mm)	< 8		< 12
	Gauchissement	1 mm / 25 mm large		2 mm / 25 mm large
	Tuilage	pas de restrictions		

(1) Pour le Douglas uniquement dans les sections inférieures à 50*150 mm, les pièces contenant de la moelle sont exclues et donc déclassées en ST II. Cette mesure tient compte de la relative jeunesse du massif de cette essence, et pourra donc être révisée lorsque des éléments nouveaux le permettront,

(2) l = largeur de la pièce,

(3) e = épaisseur de la rive,

(4) La longueur des fentes est liée à l'humidité et par conséquent, les limites données au tableau sont seulement applicables au moment du classement.

Tableau 92 : Mesures et critères pour classer par la méthode visuelle.

5.4 Le classement en structure des bois par la méthode machine

(d'après la norme EN 519 de mars 1998)

L'importance grandissante de l'assurance qualité et la demande croissante d'un matériau bois de haute qualité ont conduit à un intérêt accru pour le classement par machine et favorisé le développement de nouvelles machines ayant des précisions de prédiction plus importante.

La plupart des machines de classement en service à ce jour sont aussi appelées machines de flexion. Elles déterminent un module d'élasticité moyen en flexion 3 points sur de faibles portées. La détermination du module d'élasticité est également possible par des méthodes autres que la flexion, telles que les vibrations et les ultrasons.

Dans les techniques optiques, les quatre faces du bois sont examinées simultanément par caméra vidéo. Les nœuds sont détectés via les variations de couleurs et l'analyse de la texture environnante permet de les différencier des autres caractéristiques qui ne sont pas corrélées à la résistance, telles que la saleté ou les tâches. La détermination des proportions en surface des nœuds s'effectue par des techniques d'analyse d'image.

L'utilisation de la technologie des rayons X dans les machines de classement est intéressante car elle présente l'avantage d'augmenter considérablement la vitesse de défilement des bois. Chaque information obtenue correspond à une mesure de masse surfacique qu'il est facile de traduire en masse volumique. Les nœuds peuvent ainsi être déterminés par les techniques de rayonnement dans la mesure où la masse volumique du nœud est en moyenne 2,5 fois supérieure à celle du bois normal.

Naturellement, plus l'efficacité d'une machine de classement est importante, plus son coût est élevé. La comparaison de différentes machines de classement avec le classement visuel doit prendre en compte le coût, le rendement matière, la performance et la vitesse de classement.

5.5 Classes de résistances et classes visuelles

Les seules correspondances entre classes mécaniques et visuelles sont assemblées dans le tableau suivant (EN 1912 de septembre 1998) :

Classe de résistances mécaniques selon l'EN 338	Classe visuelle
C 30	ST –I
C 24	ST –II
C 18	ST –III

Tableau 93 : Correspondances entre classes mécaniques et classes visuelles.

Les principales essences résineuses en France ont été affectées dans les trois classes de résistances après description suivant les modalités visuelles (Tableau 93). Quelques-unes sont en cours de classement (Epicéa de Sitka, Mélèze d'Europe). Le tableau ci-dessous résume le classement actuel des essences :

Essences	ST –I	ST –II	ST –III
Sapin – Epicéa	X	X	X
Douglas		X	X
Pins ⁽¹⁾		X	X

⁽¹⁾ Pin sylvestre, Pin maritime, Pin noir, Pin laricio

Tableau 94 : Classement actuel des essences résineuses.

5.6 Les caractéristiques mécaniques des classes de résistance (EN 338 de 1995)

Les valeurs des contraintes et des modules sont rassemblées dans la norme EN 338. Les valeurs de contraintes admissibles utilisables pour le calcul des structures sont calculées à partir d'un coefficient (2,275) en attendant la future norme NF P 21-400. Les valeurs présentées dans le Tableau 95 ci-dessous proviennent du cahier « Règles professionnelles bois lamellé collé » édité par IRABOIS :

Caractéristiques mécaniques ⁽¹⁾	C 30	C 24	C 18
	Contraintes admissibles (MPa ⁽²⁾)		
Flexion parallèle	13,2	11,0	8,0
Compression axiale	10,5	9,0	8,5
Traction axiale	8,0	6,0	5,0
Cisaillement longitudinal	1,3	1,1	0,9
Compression transversale	2,5	2,3	2,1
Traction transversale	0,20	0,20	0,13
	Modules conventionnels de déformation (MPa)		
Cisaillement	750	680	560
Longitudinal, effort tranchant inclus	12 000	11 000	9 000

(1) Les valeurs données correspondent à une humidité de bois de 12% qui est la référence européenne

(2) MPa : 1 MégaPascal \approx 10 kgf/cm²

Tableau 95 : Caractéristiques mécaniques des classes de résistance.

5.7 Les évolutions liées au classement structure des bois

5.7.1 Les obligations liées à la norme NF B 52-001

Chaque pièce de bois structurel classée et devant circuler au sein de l'Europe doit être marquée obligatoirement. Le marquage comportera au minimum les informations suivantes :

- La classe visuelle (ST-I, ST-II ou ST-III) ou la classe mécanique (C 40, C 35, C 30, C 24 et C 18) selon l'utilisation de la méthode de classement (visuelle ou machine)
- L'essence ou le groupe d'essences
- Le producteur
- La norme de référence du classement effectué (**NF B 52-001, EN 519...**)
- Les utilisations possibles du bois en fonction des classes

Afin d'optimiser l'utilisation des sciages classés, les utilisations possibles en structure des différentes classes sont indiquées dans le tableau ci-après :

	CLASSES	ST-I – C 30	ST-II – C 24	ST-III – C 18
Type de charpente				
Traditionnelle (grosses sections)				X
Industrielle (fermettes)			X	
Lamellé collé		X	X	

Tableau 96 : Utilisations possibles en structure des différentes classes.

5.7.2 Intérêts du classement et les évolutions actuelles et à venir

Le classement visuel ou machine qualifiant la résistance des sciages pour une utilisation en structure présente plusieurs avantages. Ainsi le fait de qualifier et de certifier le produit de la même manière au sein de l'union européenne ouvre une opportunité aux scieries de développer leur marché à l'exportation. Pour les utilisateurs, le choix du produit à acheter est conditionné à l'utilisation qu'ils veulent en faire. De plus, le classement assure un suivi au niveau qualité du produit. L'évolution majeure qui accompagne l'opération de classement concerne le marquage des pièces. Ainsi chaque pièce destinée à la construction au sein de l'union européenne devra être marquée obligatoirement (comme décrit précédemment).

6 ESSAIS DE FLEXION SUR PIÈCES EN DIMENSIONS COMMERCIALES (SOURCE CTBA)

6.1 Objectifs et définition de la méthode d'essai

Il s'agit de déterminer le module d'élasticité longitudinal et la contrainte à la rupture des éprouvettes en dimensions commerciales selon une sollicitation de flexion quatre points. Les essais de flexion quatre points effectués sont réalisés suivant le norme EN 408 (1995).

6.2 Fonctionnalités

L'équipement disponible au CTBA permet de solliciter en flexion des éprouvettes de bois en dimensions commerciales. Il est constitué des quatre modules suivants :

- Un convoyeur (C) assurant le transfert des éprouvettes entre les différents modules
- Un contrôleur de dimensions (MCD) permettant la mesure des côtes réelles des éprouvettes
- Un contrôleur d'humidité (LIGNOMAT)
- Un banc de flexion permettant de solliciter les éprouvettes en flexion 4 points

La gestion de ces différents modules est pilotée par une centrale de mesure (micro-ordinateur via un automate pour les séquences d'automatisme) :

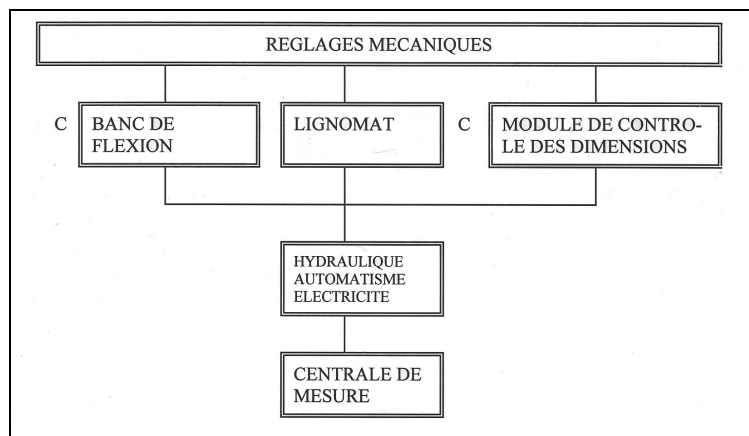


Figure 286 : Description des différents appareils constituant la chaîne de mesure des caractéristiques mécaniques.

Après réglage mécanique (fonction des dimensions des pièces à tester), la centrale de mesure étalonne tous les composants et les essais en semi-automatique sont lancés (mesure du module d'élasticité et de la contrainte à la rupture).

6.3 Principe

L'éprouvette est placée sur champ et repose librement sur deux appuis cylindriques non fixes (Figure 287). La distance entre-axe de ces appuis est égale à 18 fois la hauteur fléchie. La charge (P) est appliquée au tiers et au deux tiers de la portée, également au moyen de deux appuis cylindriques. Des plaquettes peuvent être insérées entre chaque appui et la pièce pour diminuer le risque d'écrasement. La dimension des plaquettes est au moins égale à la largeur de l'éprouvette. Un système d'antidéversement est placé au niveau des points d'appuis intérieurs. Un dispositif permet de mesurer la flèche (y) de l'éprouvette déformée au milieu d'une base de mesure égale à 5 fois la hauteur de l'éprouvette et disposée symétriquement dans le tiers central.

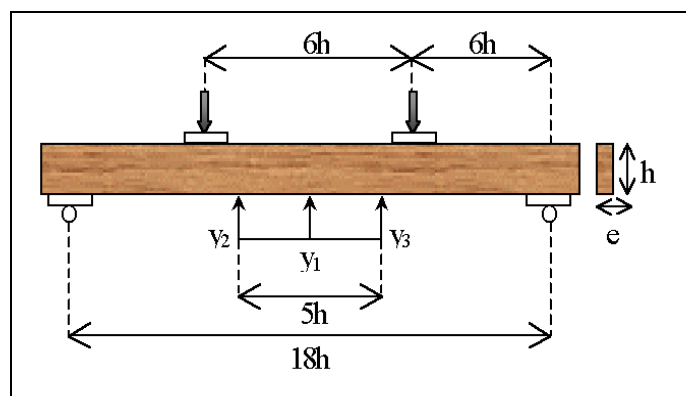


Figure 287 : Schéma du dispositif expérimental du banc de flexion.

La vitesse de chargement est telle que la valeur moyenne du temps à la rupture soit égale à $180s \pm 120s$, soit pour les sections suivantes :

- $40 \times 100 \text{ mm}^2$: $V=0,15 \text{ mm/s}$
- $50 \times 150 \text{ mm}^2$: $V=0,22 \text{ mm/s}$
- $65 \times 200 \text{ mm}^2$: $V=0,30 \text{ mm/s}$

6.4 Description des paramètres mesurés

L'équipement de contrôle permet de mesurer les caractéristiques suivantes :

CARACTÉRISTIQUES	GRANDEURS MESURÉES	UNITES
<u>dimensionnelles</u>	- longueur - hauteur - épaisseur	mm mm mm
<u>physiques</u>	- humidité - masse - masse volumique	% Kg Kg/m ³
<u>mécaniques</u>	- module d'élasticité - force maximale P_R - flèche à la rupture - contrainte à la rupture	GPa N mm MPa

Tableau 97 : Description des paramètres mesurés et calculés lors de l'essai de flexion.

Le Tableau 98 permet de connaître la précision de mesure des différents appareils utilisés par le banc de flexion.

CAPTEURS	GRANDEURS MESUREES	ETENDUE DE MESURE	PRECISION DU CAPTEUR	limite de la machine
appuis de chargement	Distance appuis extérieurs	réglable par position	$\pm 5 \text{ mm}$	4.5 m
Force	charge P (2 pentes)	0-2000 & 2000 - 5000 daN	1%	20000 daN
capteur de déplacement	Epaisseur de l'éprouvette	20 mm	$\pm 12 \text{ }\mu\text{m}$	25-95 mm
capteur de déplacement	Hauteur de l'éprouvette	20 mm	$\pm 12 \text{ }\mu\text{m}$	55-245 mm
capteur de déplacement	Flèche centrale de l'éprouvette	35 mm	$\pm 18 \text{ }\mu\text{m}$	Réglage machine

Tableau 98 : Définition des capteurs utilisés et précisions instrumentales.

6.5 Calcul du module d'élasticité

La flèche de l'arc central est mesurée entre les appuis intérieurs (distance entre appuis $6h$) par trois capteurs inductifs (centrés entre les appuis intérieurs et séparés de $2,5h$). La flèche (y) est calculée à partir de la relation suivante :

$$\text{Eq. 419 } y = y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Avec y_1 : la mesure du capteur central, y_2 et y_3 : la mesure des capteurs situés à $2,5$ fois la hauteur de part et d'autre du point central.

Le module d'élasticité statique en flexion statique est calculé par régression linéaire de la courbe force appliquée – flèche y mesurée par la relation suivante :

$$\text{Eq. 420 } E_{stat} = \frac{25}{1296} \frac{D^3}{eh^3} \frac{\Delta P}{\Delta y}$$

Avec D : distance entre appuis extérieurs, e : largeur de la poutre, h : hauteur de la poutre, P : charge appliquée.

Les valeurs limites des flèches prises en compte pour la régression linéaire (courbe force - déplacement) sont égales à 10% et 40% de la force maximale.

6.6 Calcul de la contrainte à la rupture

L'essai de rupture s'arrête Lorsqu'il se produit une chute brutale de 25% de la charge appliquée. La résistance à la flexion f_m est alors donnée par la formule suivante :

$$\text{Eq. 421 } f_m = \frac{DP_r}{eh^2}$$

Avec D : distance entre appuis extérieurs, e : largeur de la poutre, h : hauteur de la poutre, P_r : force maximale supportée par l'échantillon.

L'essai s'arrête sur un critère de rupture basé sur une chute brutale de 25% de la force appliquée.

6.7 Correction des valeurs expérimentales

La contrainte à la rupture doit être corrigée en fonction de la hauteur fléchie :

$$\text{Eq. 422 } f_m(150mm) = f_m(h \text{ mm}) \times \left(\frac{h}{150} \right)^{0,2} \quad \text{EN 384}$$

La masse volumique et le module d'élasticité sont corrigés en fonction de l'humidité en appliquant les relations suivantes :

$$\text{Eq. 423 } \rho(12\%) = \rho(H\%) \times \left(\frac{112}{100 + H} \right) \times \left(\frac{100 - Rv(H_s - H)}{100 - Rv(H_s - 12)} \right) \quad \text{NF B 51-005}$$

$$\text{Eq. 424 } E(12\%) = E(H\%) \times \left(1 + 2 \frac{H - 12}{100} \right) \quad \text{EN 384}$$

Avec Rv : coefficient de retrait volumique (NF B 51-006),
 H_s : humidité au point de saturation (à défaut, la valeur est fixée à 30%)

RESUME

Afin d'améliorer le processus de classement des poutres en bois à usage structurel, l'objectif de ce travail consiste à imaginer et mettre en œuvre un système de mesure capable d'estimer de manière non destructive et fiable le module d'élasticité longitudinal et la contrainte à la rupture des avivés. Cette problématique inclut la possibilité de détecter et de quantifier le ou les défauts présents dans les pièces de bois.

Pour atteindre l'objectif fixé, plusieurs étapes sont nécessaires. Ces différentes étapes sont présentées en détails dans l'ordre logique, et chronologique, pour des raisons de clarté. La première étape expose les modèles classiques, utilisés en analyse modale, en précise les limites de validité, puis établit une nouvelle approche théorique permettant de prendre en compte et de caractériser la présence de singularités dans les poutres en vibrations.

La deuxième étape permet d'établir la liaison entre la théorie des vibrations de plaque et celle de poutre. Cette étape précise ainsi la limite de validité des modèles classiques de poutre en vibrations lorsque les dimensions de la section transversale sont différentes, ce qui est généralement le cas des poutres à usage structurel.

La troisième partie permet de caractériser dans la gamme de fréquence concernée, par le biais d'une modélisation viscoélastique du comportement dynamique du matériau, l'ensemble des transformations subies par les ondes se propageant dans les poutres en vibrations.

La quatrième partie pose le problème de la détection du nombre des singularités et de leur position à partir d'une méthode basée sur l'impact – echo, analysant les réflexions des ondes propagatives à l'interface entre différents milieux.

La cinquième et dernière partie permet de juger de l'efficacité de l'ensemble des méthodes non destructives, développées au cours des précédentes étapes, à partir d'essais expérimentaux sur plusieurs lots de bois à usage structurel, quant à l'estimation des valeurs mécaniques de référence par des traitements statistiques appropriés.

MOTS CLEFS :

Bois, classement, contrôle non destructif (CND), propriétés mécaniques, vibrations, synthèse sonore.

SUMMARY

In order to improve strength grading methods for building timbers, the aim of this work is to design and to test a system which allows to evaluate, in a non destructive manner and in a reliable way, the longitudinal modulus of elasticity and the bending strength of sawn timbers. This goal also includes the possibility to detect and quantify the presence of wood defects.

Several steps are required to reach this aim. For a better understanding, these steps are described both in the logical and chronological way. The first step reviews the classic theories, used in modal analysis, clarifying their validity domain, and then establishes a new theoretical approach allowing to take into account and to characterize the presence of defects in timber beams.

The second step allows to establish the link between the vibrations theory of plates and the one of beams. Consequently this step clarifies the validity domain of classic theories concerning vibration beams when the cross section dimensions are very different, which generally happens for the case of structural timbers.

The third step allows to characterize, in a specific frequency range, by the way of a viscoelastic modeling in the dynamic behavior, all the waves transformations occurring during their propagation through the material.

The fourth step deals with the problem of the detection of the singularities number and their location using a method derived from the impact – echo technique, analyzing the propagative waves reflexions at the bound between different mediums.

The fifth and last step allows to evaluate the efficiency of all of the non destructive methods developed in the previous steps. Experimental tests are performed on several structural timber batches, in order to estimate their mechanical properties using specific statistic techniques.

KEYWORDS :

Wood, timber grading, non destructive testing (NDT), mechanical properties, vibrations, sound synthesis.