



**HAL**  
open science

# Études en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo

Mickaël Bourgoïn

► **To cite this version:**

Mickaël Bourgoïn. Études en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo. Astrophysique [astro-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2003. Français. NNT : . tel-00008302

**HAL Id: tel-00008302**

**<https://theses.hal.science/tel-00008302>**

Submitted on 31 Jan 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Laboratoire de Physique

THÈSE

de

Docteur de l'École normale supérieure de Lyon

spécialité : Physique

au titre de l'école doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon

*présentée et soutenue publiquement le 7 juillet 2003 par*

**Mickaël BOURGOIN**

---

**Études en magnétohydrodynamique,  
application à l'effet dynamo**

---

Directeurs de thèse : Monsieur Jean-François PINTON  
Monsieur Philippe ODIER

Après avis de : Monsieur Marc-Étienne BRACHET, Rapporteur  
Monsieur Emmanuel DORMY, Rapporteur

Devant la Commission d'examen formée de :

Monsieur Marc-Étienne BRACHET  
Monsieur François DAVIAUD, Président  
Monsieur Emmanuel DORMY  
Monsieur Peter FRICK  
Monsieur Daniel LATHROP  
Monsieur Philippe ODIER  
Monsieur Jean-François PINTON



# Remerciements

*Dans La Biblioteca de Babel, J.L. Borges pense L'Univers comme une bibliothèque infinie, abritant sans classement apparent tous les livres imaginables dont le contenu renferme tout ce qui, d'une façon ou d'une autre, peut être écrit : le vrai, le faux, le sens et le non-sens. Les hommes parcourent les couloirs de la Bibliothèque à la recherche des ouvrages qui leur permettraient de mieux comprendre le monde dans lequel ils vivent.*

*Je remercie très vivement et très chaleureusement Jean-François Pinton et Philippe Odier. Ils m'ont ouvert les portes du couloir des Sciences de la Bibliothèque en m'invitant à travailler à leur côté sur les mystères de l'effet dynamo. Leurs compétences expérimentales et leur remarquable maîtrise du sujet ont constitué une source d'enrichissement inestimable. Je leur suis extrêmement reconnaissant d'avoir su à tout moment me guider avec enthousiasme, dynamisme et savoir-faire tant sur des terres connues que lors de l'exploration de nouveaux passages. Comme dans toute entreprise, les saisons furent plus ou moins prospères, mais la qualité des discussions scientifiques et des rapports humains resta avec eux d'une appréciable constance. Ma vocation de Bibliothécaire des Sciences n'a pu s'en trouver que renforcée.*

*Ma reconnaissance va également à Patrick Oswald et Sergio Ciliberto, Grands Bibliothécaires successifs du Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, pour l'accueil qu'ils m'ont réservé.*

*J'ai été très honoré que Marc-Étienne Brachet et Emmanuel Dormy aient accepté de rapporter mon travail de thèse, par l'intérêt qu'ils lui ont manifesté et les remarques constructives qu'ils ont apportées.*

*J'adresse mes plus sincères remerciements aux autres membres du jury : François Daviaud pour sa Présidence, Peter Frick pour s'être déplacé depuis l'est et Dan Lathrop pour s'être déplacé depuis l'ouest. Leurs commentaires et discussions ont beaucoup contribué à la finition du manuscrit.*

*J'ai eu l'occasion, au cours de cette thèse, de travailler en étroite collaboration avec Peter Frick et Stanislav Kripchenko. Au-delà de l'inestimable apport scientifique que cela a représenté, par leur grande expérience en magnétohydrodynamique, je tiens à les remercier pour leur bienveillance, leur sympathie, et l'initiation à l'art culinaire russe (je n'oublierai jamais Stas me décrivant une recette géorgienne, probablement celle des pielmienis, entre deux mesures dans VKG).*

*Alors que j'entamais ma troisième année de thèse, Romain Volk a rejoint l'équipe, d'abord comme stagiaire, puis comme thésard (Petit Bibliothécaire). Dès son arrivée j'appréciai la qualité de nos échanges et certains résultats présentés dans ce mémoire lui doivent beaucoup. Le travail expérimental à ses côtés m'a par ailleurs appris une bonne leçon : ce qui doit arriver arrivera, mais tout sera réparé à temps (ou presque) !*

*Parmi les instants privilégiés qui ont ponctué ces trois années de thèse, les séjours dans le domaine de Cadarache méritent un point d'honneur en tant que lieu de prédilection du clan VKS. Initialement fondé par Arnaud Chiffaudel, François Daviaud, Stephan Fauve, Jean-Baptiste Luciani, Philippe Odier et Jean-François Pinton, ce clan exige des nouvelles recrues le passage du rite initiatique de l'École du Sodium. Dès les premières semaines, j'ai subi l'épreuve en compagnie de Louis Marié et François Pétrélis ; ce fut le début d'une collaboration riche et sympathique. Récemment, Romain Volk et Florent Ravelet ont rejoint la grande famille VKS. Des manip en combinaison orange la journée, aux réunions dans la salle des Armures le soir, en profitant de temps à autres de quelques paysages de Provence et du Luberon, l'expérience VKS s'est avérée des plus fructueuses tant par les résultats scientifiques que par les liens humains qu'elle a tissés. Merci donc à toute l'équipe VKS pour tout cela ! Mes remerciements s'adressent également au centre de Cadarache du CEA qui héberge VKS et dont la maîtrise en matière de technologie sodium reste un atout indispensable.*

*Comme tout travail présentant une composante expérimentale forte, sans le savoir-faire et la disponibilité d'une équipe technique compétente, rien n'est réalisable. Je remercie Djamel Bouraya, Marc Moulin, Denis Le Tourneau, Franck Vittoz et Pascal Metz pour avoir toujours su TOUT rendre réalisable et pour l'avoir réalisé.*

*Merci à Bertrand Louis-Lucas pour son assistance sans faille à mes différents SOS informatiques. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant pour son implication et son efficacité lors de l'installation de Treille, Praseodyme, Meitnerium et Seaborgium, qui m'ont permis de réaliser la plupart des simulations numériques présentées dans ce mémoire.*

*La mise au point de ces simulations doit par ailleurs beaucoup à Yannick Ricard dont j'ai hérité de la première version du code. Celle-ci a beaucoup évolué depuis et les discussions avec Yannick m'ont souvent permis d'aller de l'avant et de contourner des "bugs" pernecieux. Je remercie également l'équipe du CEA de Saclay et particulièrement Louis Marié, Florent Ravelet, Arnaud Chiffaudel et François Daviaud pour les mesures LDV des champs de vitesse qui m'ont permis d'étudier en détails, à l'aide de l'outil numérique, les mécanismes d'induction dans les différentes configurations expérimentales.*

*Aucun mot ne pourrait exprimer toute ma gratitude envers Anne Garlot, Laurence Mauduit et Nadine M'tsahoua, qui ont toujours su répondre avec patience et efficacité à mes questions et demandes (souvent hors délai) concernant les commandes, missions, et autres réjouissances administratives.*

*Merci à Hervé Gayvallet pour sa constante bonne humeur et les discussions (scientifiques et autres) quasi-quotidiennes.*

*Merci à Francesca Chillà et Bernard Castaing pour les fructueuses discussions et les bons moments partagés au labo.*

*Merci à Angel, Baptiste, Julien, Nuno, Patrice, Patrick, Stéphane et Thierry pour ces trois saisons en sélection avec les Hell's Angels.*

*Merci à Nicolas, tout particulièrement pour son aide lors de la recherche de postdoc.*

*Merci à Catherine pour m'avoir accepté comme co-bureau, pour son agréable compagnie, sa bonne humeur et les conversations qui ont agrémentées ces trois années.*

*Merci à tous les autres Petits Bibliothécaires du labo et particulièrement à Cécile, Chantal (que les pauses gâteaux que tu as instaurées perdurent !), Baptiste, Bruno, François, Julien, Laurent, Lionel, Pierre, Stéphane.*

*Merci aux copains, pour les voyages, repas et joies partagés !*

*Merci à Mamie sans qui rien de tout cela n'aurait pu s'accomplir.*

*Merci à Marie-Louise, Edmond, Marie-Christine, François, Shannon et Jérôme pour leur gentillesse, leur soutien souvent opportun et toujours réconfortant. Merci à Sean pour tant de joie et pour nous rappeler que la Bibliothèque reste infinie.*

*Merci à Cécile pour la relecture minutieuse du manuscrit, pour sa patience et son appui ... mais surtout merci pour tout le reste !*

*Gracias a Mamá y a Naty que a pesar de la distancia y aunque un océano nos separe, siempre me acompañaron, apoyaron y se quedaron muy cerca.*

*Gracias a Karinne y a Jérôme por su gentileza y generosidad. Cuidense !*

*Gracias a Chanfle, Marcos y Martín, a Fer, Lili y Enrique por tanta amistad !*

*Je finirai en citant un célèbre proverbe chinois : "choisis un métier que tu aimes et tu ne travailleras pas un seul jour". Je remercie donc toutes ces personnes pour avoir contribué à faire de ces trois années de thèse un séjour inoubliable dont voici le récit ...*

*Cuando se proclamó que la Biblioteca abarcaba todos los libros, la primera impresión fue de extravagante felicidad. Todos los hombres se sintieron señores de un tesoro intacto y secreto. No había problema personal o mundial cuya elocuente solución no existiera.*

Jorge Luis Borges,  
La Biblioteca de Babel



# Table des matières

<b>I.</b>	<b>Dynamos homogènes et écoulements de von Kármán</b>	9
I.1	Nécessité d'un mécanisme d'auto-entretien magnétique	9
I.2	L'effet dynamo	11
I.2.1	Approche générale	11
I.2.2	La dynamo homopolaire : mouvement et courant contraints	13
I.2.3	La dynamo de Lowes & Wilkinson : mouvement contraint, courants non contraints	16
I.2.4	Quelques dynamos fluides <i>contraintes</i>	18
I.2.5	Les expériences de dynamo fluides non-contraintes	22
I.3	Les dynamos numériques de von Kármán	24
I.3.1	Écoulements hélicitaires et/ou contra-rotatifs axisymétriques sphériques	24
I.3.2	L'écoulement Taylor-Green	25
I.3.3	L'écoulement $s_2t_2$ en géométrie cylindrique périodique	25
I.4	L'écoulement expérimental de von Kármán	26
I.4.1	Réalisation et propriétés de l'écoulement moyen	26
I.4.2	Propriétés turbulentes de l'écoulement de von Kármán	29
I.5	Les problèmes spécifiques aux dynamos fluides non-contraintes	31
I.5.1	Existence et conditions de l'instabilité dynamo dans les écoulements non-contraints	31
I.5.2	Seuil et mode neutre de l'instabilité	32
I.5.3	La saturation de l'instabilité	32
I.5.4	Les mécanismes de l'instabilité et le rôle spécifique des fluctuations	32
I.6	Des mécanismes d'induction MHD à la dynamo	33
I.7	Étude des propriétés de symétries des expériences von Kármán d'induction MHD	35
I.7.1	Étude des symétries du champ magnétique induit pour un champ appliqué quelconque	35
I.7.2	Cas d'un champ appliqué axial	38
I.7.3	Cas d'un champ appliqué transverse	40
<b>II.</b>	<b>Les mécanismes d'induction</b>	43
II.1	Équations de la magnétohydrodynamique	44
II.1.1	Approximation MHD	44
II.1.2	Equation d'induction du champ magnétique	47
II.1.3	Equation d'évolution de l'écoulement	58
II.1.4	Le problème dynamo : de l'approche cinématique aux mécanismes d'induction	59
II.2	Approche perturbative du phénomène d'induction	61



II.2.1	Motivations . . . . .	61
II.2.2	Les expériences d'induction . . . . .	62
II.2.3	Approche perturbative . . . . .	63
II.2.4	Mise en oeuvre numérique . . . . .	67
II.2.5	Champ de vitesse numérique . . . . .	71
II.2.6	Lien formel avec la dynamo cinématique . . . . .	72
<b>III.</b>	<b>Études des mécanismes d'induction sur des écoulements modèles de von Kármán . . . . .</b>	<b>83</b>
III.1	Le terme d'induction et la géométrie cylindrique . . . . .	83
III.2	Expulsion d'un champ transverse par un conducteur en rotation solide . . . . .	86
III.2.1	Solution analytique . . . . .	86
III.2.2	Approche mécaniste qualitative . . . . .	87
III.2.3	Étude détaillée du mécanisme d'expulsion . . . . .	88
III.2.4	Validation de la solution calculée par l'approche itérative . . . . .	93
III.2.5	Conclusion . . . . .	100
III.3	Champ axial - von Kármán Contra-rotatif . . . . .	101
III.3.1	Mécanismes d'ordre 1 . . . . .	101
III.3.2	Mécanismes d'induction d'ordre 2 . . . . .	110
III.3.3	Evolution en $R_m$ . . . . .	111
III.3.4	Conclusion . . . . .	115
III.4	Champ transverse - von Kármán à un seul disque en rotation . . . . .	115
III.4.1	Mécanismes d'ordre 1 . . . . .	116
III.4.2	Ordre 2 . . . . .	121
III.4.3	Evolution en $R_m$ . . . . .	128
III.4.4	Bilan . . . . .	132
III.5	Champ transverse - von Kármán contra-rotatif . . . . .	134
III.5.1	Étude qualitative . . . . .	134
III.5.2	Étude numérique . . . . .	135
III.5.3	Évolution en $R_m$ . . . . .	138
III.5.4	Conclusion . . . . .	146
III.6	Les effets des conditions aux limites . . . . .	147
III.6.1	La nécessité de comprendre le rôle des conditions aux limites . . . . .	148
III.6.2	Étude qualitative du rôle des conditions aux limites . . . . .	150
III.6.3	Étude numérique du rôle des conditions aux limites . . . . .	150
III.6.4	Influence de la structure de l'écoulement sur l'effet-CL . . . . .	153
III.6.5	Effet d'une couche extérieure conductrice . . . . .	158
III.6.6	Rôle possible de l'effet-CL dans un cycle dynamo . . . . .	160
III.7	Conclusion . . . . .	161
<b>IV.</b>	<b>Étude expérimentale des mécanismes d'induction . . . . .</b>	<b>163</b>
IV.1	Les expériences de magnétohydrodynamique . . . . .	164
IV.1.1	Description générale du dispositif expérimental . . . . .	164
IV.1.2	Les paramètres de contrôle et la réponse magnétique . . . . .	169
IV.1.3	Bilan . . . . .	175
IV.1.4	Obtention expérimentale de hauts nombres de Reynolds magnétiques . . . . .	175
IV.2	Mesures d'induction dans VKG - $R_m < 5$ . . . . .	183

---

IV.2.1	Champ axial appliqué . . . . .	183
IV.2.2	Champ transverse appliqué . . . . .	189
IV.2.3	Conclusion . . . . .	201
IV.3	Mesures d'induction dans VKS - $R_m < 50$ . . . . .	201
IV.3.1	Les spécificités de VKS . . . . .	201
IV.3.2	Champ axial appliqué . . . . .	203
IV.3.3	Effet-“alpha” (un seul disque en rotation) . . . . .	208
IV.3.4	Effet-CL et bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$ . . . . .	212
IV.3.5	Bilan . . . . .	216
IV.4	Le rôle des fluctuations de l'écoulement sur l'induction magnétohydrodynamique . . . . .	217
IV.4.1	L'effet $\alpha$ -turbulent . . . . .	217
IV.4.2	Étude expérimentale de l'effet de la turbulence sur l'induction moyenne en présence d'un champ appliqué azimuthal. . . . .	221
IV.4.3	Étude des effets fluctuations magnétiques . . . . .	226
IV.4.4	Conclusion sur les fluctuations magnétiques . . . . .	237
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>242</b>



## Chapitre I

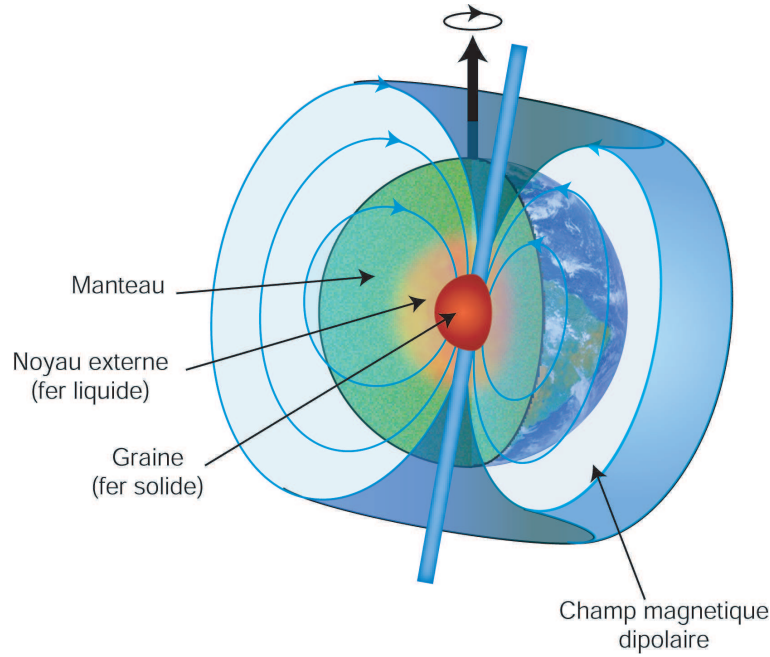
# Dynamos homogènes et écoulements de von Kármán

### I.1 Nécessité d'un mécanisme d'auto-entretien magnétique

La plupart des corps astrophysiques (planètes, étoiles, galaxies, etc.) possèdent un champ magnétique, dont l'origine physique a longtemps suscité (et suscite encore de nos jours) de nombreuses études.

L'existence du champ magnétique terrestre était déjà connue des chinois, au huitième siècle avant notre ère. Les travaux de C.F. Gauss en 1839 ont établi que le champ magnétique terrestre est essentiellement celui d'un dipôle placé au centre de la Terre et dont l'axe est légèrement décalé, d'un angle d'une dizaine de degrés, par rapport à l'axe de rotation. Ces travaux ont également permis à Gauss de conclure que l'origine de ce champ magnétique est essentiellement interne : sa source principale se trouve nécessairement au sein même de la Terre. L'idée d'un gigantesque aimant placé au coeur du noyau terrestre semble alors toute naturelle et donne une explication simple du géomagnétisme. Toutefois, une telle hypothèse se heurte au fait que les études géophysiques montrent un accroissement rapide de la température avec la profondeur sous la surface de la Terre. Au-delà de quelques dizaines de kilomètres, la température dépasse les températures de Curie de tous les corps ferromagnétiques connus. Le coeur de la Terre ne peut donc être le siège d'une aimantation permanente. En ce qui concerne les étoiles et galaxies, il est bien évident qu'elles ne peuvent être ferromagnétiques.

Une deuxième explication avancée était alors celle d'un champ magnétique fossile, résultant de la circulation de courants électriques, qui ne seraient que les vestiges d'une



**Fig. I.1:** Schéma de la structure dipolaire du champ magnétique de la Terre.

source primordiale remontant aux origines de la Terre, de l'étoile ou de la galaxie. La sismologie indique que le noyau terrestre est essentiellement constitué d'une graine de fer solide entourée d'un noyau de fer en fusion, appelé noyau externe (figure I.1) ; les étoiles et galaxies sont quant à elles essentiellement des plasmas. Il s'agit dans tous les cas de milieux conducteurs où l'existence de courants électriques est donc a priori plausible. Cependant, en l'absence d'une source électrique régénérant ces courants, ceux-ci sont contraints de s'atténuer, par dissipation due à l'effet Joule, après une durée de l'ordre du temps de diffusion électromagnétique

$$\tau_d = \frac{L^2}{\pi^2 \lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{\mu \sigma}, \quad (\text{I.1})$$

$L$  étant la taille caractéristique de l'objet considéré,  $\sigma$  la conductivité électrique du milieu et  $\mu$  sa perméabilité magnétique, sensiblement égale à celle du vide,  $\mu_0$ , pour les corps non ferromagnétiques. Pour la Terre par exemple, en prenant comme taille caractéristique le rayon du noyau conducteur, de l'ordre de  $L = 3.5 \cdot 10^6$  m dont la conductivité est environ  $4.5 \cdot 10^5 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ , on obtient un temps diffusif  $\tau_d \sim 2 \cdot 10^4$  années. Ceci signifie donc qu'en l'absence de source les courants électriques ne peuvent subsister au-delà d'une période de l'ordre de  $2 \cdot 10^4$  années. Or, le paléomagnétisme (qui permet d'étudier l'évolution du champ magnétique terrestre au fil des âges à partir de l'aimantation fossile des roches) montre que le champ magnétique terrestre existe depuis plus de 3 milliards d'années et qu'il ne peut donc résulter de courants électriques primordiaux dans le noyau. Une étude similaire réalisée pour le Soleil, conduit à un temps de diffusion de l'ordre de 10 ans [81], suggérant la nécessité d'un mécanisme rapide de régénération du champ magnétique solaire, en accord par ailleurs avec le cycle de 22 ans de la dynamique magnétique du Soleil. La possibilité d'une origine fossile ne reste plausible que dans le cadre du champ magnétique des galaxies, dont la taille *astronomique* contribue à rendre le temps de diffusion électromagnétique extrêmement grand et comparable à l'âge de l'univers.

De nombreuses autres théories ont vu le jour afin d'expliquer notamment le champ magnétique terrestre. Nous ne citerons pour clore ce bref historique que celle de Blackett [7], qui en 1947 proposait que tout astre possédât un moment magnétique proportionnel à son moment cinétique (à l'image du spin des particules quantiques.) Cette théorie rencontra un grand (mais très éphémère) succès dont le principal obstacle fut la mise en évidence par les paléomagnéticiens des inversions du champ magnétique, sans corrélation possible avec le moment cinétique terrestre. Ces inversions révèlent par ailleurs le caractère dynamique du processus à l'origine du champ magnétique terrestre.

L'échec des théories que nous venons de décrire amène à penser que le champ magnétique des astres ne peut résulter de l'existence de quelques sources magnétiques permanentes ni résiduelles, mais qu'un processus de régénération continue du champ magnétique et des courants électriques associés est indispensable. Un tel processus s'inscrit naturellement dans le cadre de la théorie de l'effet dynamo et a été proposé par Larmor dès 1919 [50].

## I.2 L'effet dynamo

L'effet dynamo est une instabilité magnétique résultant de la conversion spontanée de l'énergie mécanique d'un conducteur en mouvement en énergie magnétique. Une telle conversion trouve ses origines dans les liens étroits établis par le phénomène de l'induction et par la force de Lorentz entre un champ magnétique, une densité de courants électriques et un conducteur en mouvement.

**Avertissement.** Nous adopterons dans la suite une approche essentiellement *mécaniste* de l'instabilité dynamo, où l'origine du champ magnétique s'interprète par étapes successives de mécanismes d'induction élémentaires à partir d'une perturbation infinitésimale. Cette description est pertinente dans le cas d'une bifurcation supercritique et s'inscrit naturellement dans le cadre des dynamos dites à *champ faible*. Elle n'est donc pas à vocation de décrire le problème spécifique de la géodynamo, que l'on classe plutôt parmi les dynamos à *champ fort*, et qui résulterait d'une bifurcation sous-critique [29] (initiée par un champ magnétique d'amplitude finie, issu d'une bifurcation supercritique antérieure.) Nous nous intéresserons plus particulièrement au problème de la réalisation expérimentale de l'instabilité dans des conditions réalistes par rapport à celles qui règnent dans le noyau terrestre. Comme nous le verrons, malgré les récents succès des expériences de Riga et de Karlsruhe (que nous décrirons plus loin), ces questions représentent encore un enjeu expérimental majeur.

### I.2.1 Approche générale

Un conducteur animé d'une vitesse  $\vec{u}$  en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}_0$  sera le siège d'un champ électromoteur induit  $\vec{e}_1 = \vec{u} \times \vec{B}_0$ , lui-même à l'origine d'un courant électrique de densité  $\vec{j}_1 = \sigma \vec{e}_1$  (où  $\sigma$  est la conductivité du milieu). Ceci n'est rien d'autre que le phénomène d'induction opérant dans les générateurs électriques tels que les dynamos de vélos. D'après la relation de Maxwell-Ampère, cette distribution de courant est à son tour la source d'un champ magnétique induit  $\vec{B}_1$  tel que  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1$ . Ainsi, partant

d'un champ magnétique  $\vec{B}_0$ , nous obtenons un champ magnétique induit  $\vec{B}_1$  donné par

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \frac{1}{\lambda} (\vec{u} \times \vec{B}_0) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}. \quad (\text{I.2})$$

L'amplitude  $\mathcal{B}_1$  du champ magnétique induit peut donc être reliée à celle,  $\mathcal{B}_0$ , du champ inducteur par la relation dimensionnelle

$$\mathcal{B}_1 \propto R_m \mathcal{B}_0 \quad \text{avec} \quad R_m = \frac{UL}{\lambda} = \mu_0 \sigma UL, \quad (\text{I.3})$$

où  $U$  est la vitesse typique du conducteur et  $L$  sa taille caractéristique.  $R_m$  est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds magnétique et caractérisant l'efficacité du processus d'induction magnétique. De façon assez intuitive, l'expression de  $R_m$  montre que cette efficacité est d'autant meilleure que la vitesse du conducteur est grande (le champ électromoteur induit tend alors à être plus grand) et que la conductivité est grande (les pertes énergétiques par dissipation Joule sont ainsi diminuées au profit de la conversion en énergie magnétique.)

Ce phénomène d'induction devient remarquable si les géométries du conducteur, du mouvement et du champ initial  $\vec{B}_0$  sont telles que le champ induit  $\vec{B}_1$  se superpose à  $\vec{B}_0$  :

$$\vec{B}_1 = \gamma R_m \vec{B}_0, \quad (\text{I.4})$$

où  $\gamma$  est un facteur purement géométrique. En itérant le processus, le champ magnétique  $\vec{B}_1$  va à son tour induire un champ  $\vec{B}_2 = \gamma R_m \vec{B}_1$  et ainsi de suite, de telle sorte que le champ magnétique total s'écrit sous la forme d'une série géométrique  $\vec{B} = \vec{B}_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma R_m)^n$ . Le dispositif est alors, du point de vue magnétique, un système bouclé devenant instable dès que

$$\gamma R_m > 1. \quad (\text{I.5})$$

Une faible perturbation magnétique suffit alors pour que le mouvement du conducteur donne naissance au développement de l'instabilité magnétique et à la croissance d'un champ magnétique macroscopique. Dans ce processus, le champ magnétique induit est en permanence régénéré par le mouvement du conducteur : on parle alors de dynamo auto-entretenu ou auto-excité. La condition d'instabilité (I.5) s'écrit généralement sous la forme

$$R_m > R_m^c \quad \text{avec} \quad R_m^c = \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{I.6})$$

$R_m^c$  est le seuil, ou nombre de Reynolds magnétique critique, de l'instabilité. Son existence et sa valeur dépendent de la géométrie de l'écoulement.

La saturation de l'instabilité est assurée par la force de Lorentz  $\vec{F}_L = \vec{j} \times \vec{B}$ , agissant sur le conducteur du fait de la présence simultanée du champ magnétique auto-entretenu et des courants induits associés. Cette force est négligeable tant que l'instabilité n'est pas développée, mais lorsque la croissance du champ devient importante, la force de Lorentz tend à s'opposer au mouvement du conducteur (elle s'oppose ainsi aux sources qui l'ont créée, suivant la loi de modération de Lenz) et donc à réduire l'induction de sorte à auto-réguler le processus.

L'état final du système résulte donc d'un double équilibre : auto-entretien du champ magnétique par équilibre induction-dissipation Joule et régulation du mouvement (et donc

de l'amplitude du champ magnétique) entre la force de Lorentz résultante et les causes premières du mouvement.

Il s'agit à présent de trouver des systèmes concrets capables de développer l'instabilité dynamo et montrant la réalité physique du schéma que nous venons de décrire. Comme nous l'avons souligné, l'obtention d'un bouclage magnétique (défini par l'équation (I.4)), est soumise à des conditions sur la géométrie des courants et des mouvements. Le lecteur ne s'étonnera donc pas que les systèmes physiques présentant le plus simplement une capacité à développer l'instabilité magnétique soient des dispositifs fortement contraints dans la géométrie de leur mouvement ou de leur densité de courants électriques (contrainte de suivre un circuit électrique astucieusement dessiné.) Ceux-ci sont en grand contraste avec le problème de la dynamo astrophysique ou géophysique où le milieu conducteur est un fluide de conductivité homogène avec peu de contraintes sur le mouvement et sur la géométrie des courants.

La détermination de la géométrie d'un système favorable au développement de l'instabilité dynamo n'est pas a priori une tâche simple. On ne connaît pas de *recette* donnant une condition suffisante pour qu'un système donne une dynamo. Il existe en revanche un certain nombre de conditions que l'on peut démontrer être incompatibles avec l'auto-entretien d'un champ magnétique par effet dynamo. On les désigne habituellement sous le terme de "théorèmes anti-dynamo". Parmi les principaux, nous citerons sans démonstration (pour lesquelles nous reportons le lecteur vers l'ouvrage de K. Moffatt [62]) :

- **Théorème de Cowling** : un écoulement axisymétrique ne peut auto-entretenir un champ magnétique axisymétrique.
- **Théorème de la vitesse toroïdale** : un écoulement incompressible dans un volume sphérique, dont la composante radiale de la vitesse est nulle partout, ne peut engendrer de dynamo.
- **Théorème de Zeldovich** : un écoulement incompressible tel que  $u_z = 0$  dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  données ne peut engendrer de dynamo.
- **Théorème 2D** : un champ magnétique bidimensionnel (i.e. tel que  $\vec{B}$  soit indépendant de  $z$  dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  données) ne peut être auto-entretenu par effet dynamo.

L'ensemble de ces théorèmes est souvent résumé en disant qu'un système dynamo possède nécessairement un faible degré de symétrie. Nous présentons dans les paragraphes qui suivent quelques exemples de tels systèmes où les contraintes imposées sur la géométrie de courants et du mouvement sont progressivement relâchées.

### I.2.2 La dynamo homopolaire : mouvement et courant contraints

Nous nous intéressons à l'induction par une roue en rotation à la fréquence  $\Omega$  autour d'un axe en présence d'un champ magnétique axial uniforme  $\vec{B}_0$ . Dans cette configuration, un champ électromoteur radial  $\vec{e}_1$  est induit au niveau de la roue et si le circuit est refermé, un courant  $i_1$  peut alors circuler (figure I.2). En général, le processus ne va pas beaucoup plus loin dans la mesure où le champ magnétique  $\vec{B}_1$ , produit par  $i_1$ , n'est essentiellement à l'origine d'aucune induction et l'on a simplement produit une roue génératrice. Toutefois, il est possible d'imposer au circuit une géométrie telle que le champ magnétique  $\vec{B}_1$



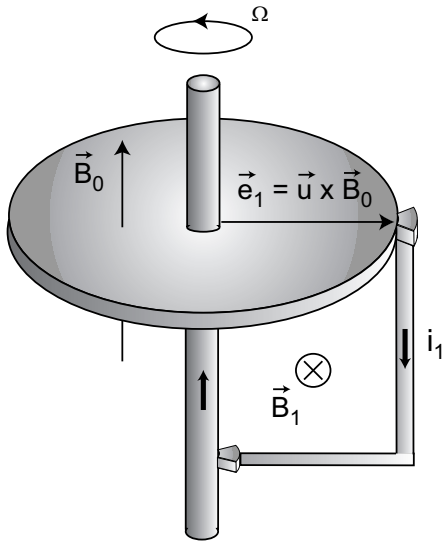


Fig. I.2: Roue génératrice

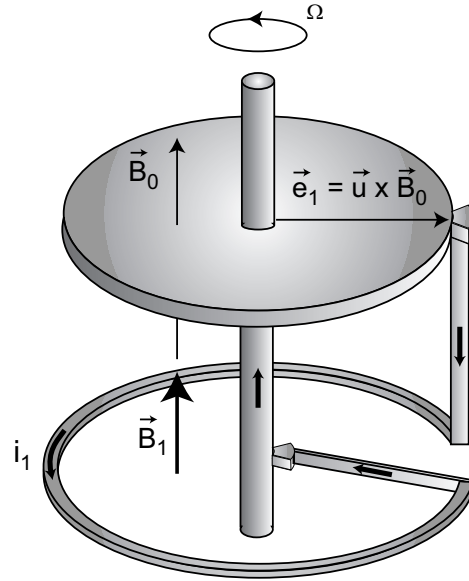


Fig. I.3: Dynamo homopolaire

ait un fort recouvrement avec le champ initial  $\vec{B}_0$ . Ceci est obtenu notamment par le montage homopolaire (figure I.3), souvent appelé dynamo du Bullard du nom de sir Edward Bullard qui en a réalisé une étude théorique détaillée [14]. La dynamo homopolaire réalise effectivement une situation de bouclage magnétique favorable à l'instabilité dynamo dont le mécanisme peut être simplement interprété par l'approche itérative de l'induction d'un champ  $\vec{B}_1$  colinéaire à  $\vec{B}_0$ . Au cours de ce processus, une partie de l'énergie mécanique de la roue (fournie par un moteur, par exemple) est en permanence convertie en énergie magnétique.

La question se pose alors de savoir si l'on peut exprimer simplement la condition (I.5) donnant le seuil de l'instabilité en fonction des paramètres du dispositif. Le montage homopolaire est essentiellement décrit par cinq paramètres : la fréquence de rotation  $\Omega$ , la résistance électrique totale du circuit  $\mathcal{R}$ , l'inductance mutuelle  $M$  entre la roue et le circuit électrique de retour (définie telle que, si le circuit est parcouru par un courant  $i$ , le flux magnétique  $\phi_B$  qu'il engendre à travers la roue s'écrit simplement  $\phi_B = Mi$ ) et son inductance propre  $L$ . On peut montrer alors que le champ  $\vec{B}_1$  induit par  $\vec{B}_0$  s'écrit simplement

$$\vec{B}_1 = \frac{M\Omega}{\mathcal{R}} \vec{B}_0. \quad (\text{I.7})$$

**Remarque** Le facteur  $\frac{M\Omega}{\mathcal{R}}$  joue ici le rôle du produit  $\gamma R_m$  et représente la compétition entre l'induction magnétique (d'autant plus grande que la roue tourne vite et que la mutuelle est grande) et les pertes par effet Joule dans la résistance du circuit. Le facteur géométrique  $\gamma$  est directement pris en compte dans la mutuelle  $M$  (qui donne le lien avec la perméabilité magnétique  $\mu_0$ ) et dans la résistance  $\mathcal{R}$  (qui donne le lien avec la conductivité  $\sigma$ .)

On déduit donc de la relation I.7 que l'instabilité démarre au-delà d'une fréquence de

rotation critique donnée par la condition  $\frac{M\Omega_c}{\mathcal{R}} = 1$  :

$$\Omega_c = \frac{\mathcal{R}}{M}. \quad (\text{I.8})$$

L'instabilité pourra donc démarrer pour des fréquences de rotation d'autant plus faibles que la mutuelle sera grande et la résistance électrique faible.

**Remarque.** La valeur du seuil de l'instabilité peut être obtenue directement en écrivant l'équation électrique du montage homopolaire [14] :

$$L\partial_t i + \mathcal{R}i = M\Omega i, \quad (\text{I.9})$$

qui admet comme solution

$$i = I_0 e^{(M\Omega - \mathcal{R})\frac{t}{L}}. \quad (\text{I.10})$$

Cette expression montre que l'intensité électrique dans le circuit tend à croître exponentiellement dès que le taux de croissance  $\eta_c = \frac{M\Omega - \mathcal{R}}{L}$  devient positif, c'est-à-dire dès que

$$\Omega > \Omega_c = \frac{\mathcal{R}}{M}. \quad (\text{I.11})$$

Nous n'avons décrit ici que le mécanisme à l'origine de l'instabilité, sans considérer la rétroaction du champ auto-entretenu sur le mouvement du disque que l'on a supposé donné une fois pour toutes. On parle dans ce cas d'une approche cinématique du problème de la dynamo, par opposition à l'approche dynamique complète qui tient compte de la force de Lorentz indispensable pour expliquer la saturation du champ auto-entretenu. Dans le cas des dynamos solides, une telle rétroaction possède peu de degrés de liberté pour agir. Elle ne peut en aucun cas modifier la géométrie du mouvement (contraint d'être une rotation solide dans le cas de la dynamo homopolaire) et ne pourra affecter que la vitesse de rotation. Le processus conduisant à la saturation est fort simple : l'action du champ magnétique auto-entretenu (essentiellement axial au niveau de la roue) et de la densité de courants qui lui est associée (essentiellement radiale) engendre une force de Lorentz  $F_L = \vec{j} \times \vec{B}$  orthoradiale et opposée à la rotation du disque ; elle tend donc à diminuer l'induction. Si la rotation des disques est régulée pour être maintenue constante, la saturation sera atteinte lorsque le couple exercé par la force de Lorentz sur le disque égalera le couple moteur maximal disponible (en négligeant toutes forces de frottements et autres pertes mécaniques.)

Enfin, Rikitake et al. [79] ont montré que le couplage de deux dynamos homopolaires pouvait donner lieu à un champ auto-entretenu, présentant la propriété remarquable de s'inverser de façon chaotique, à l'image du champ magnétique terrestre. L'effet dynamo est donc non seulement possible, mais peut même reproduire les comportements dynamiques observés pour le champ magnétique terrestre. Ceci conforte son statut de théorie pour le champ magnétique des astres. Le montage homopolaire reste par contre bien éloigné d'une description réaliste pour une dynamo astrophysique, où le conducteur est toujours un milieu homogène sans contrainte forte sur la géométrie des courants ni des mouvements.

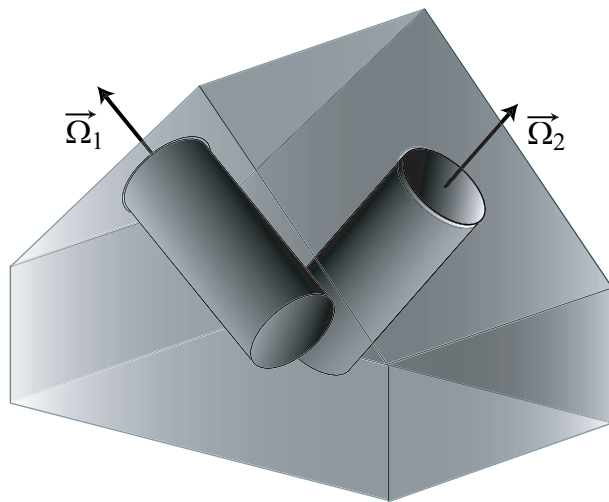


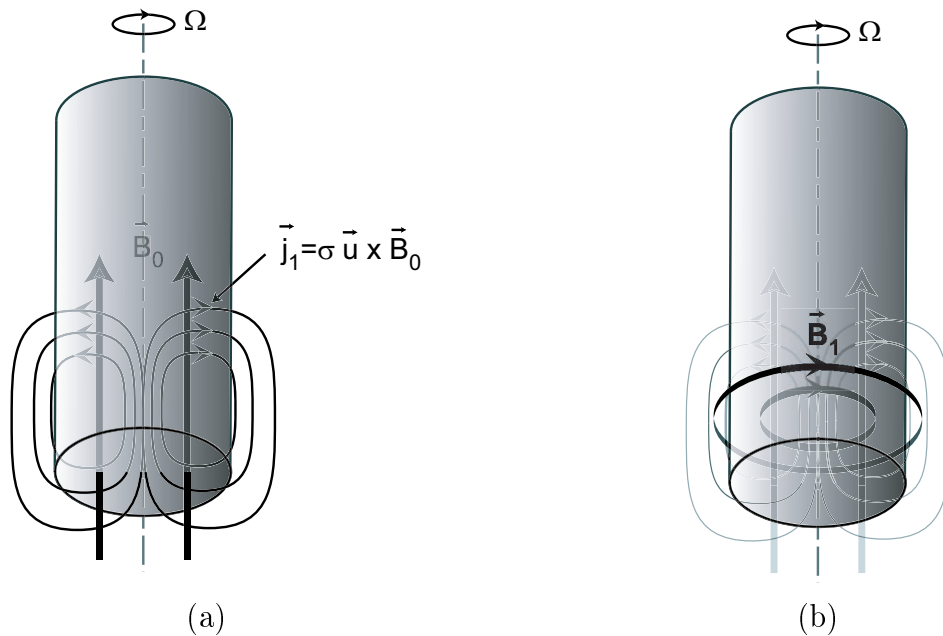
Fig. I.4: Schéma de l'expérience de Lowes & Wilkinson.

### I.2.3 La dynamo de Lowes & Wilkinson : mouvement contraint, courants non contraints

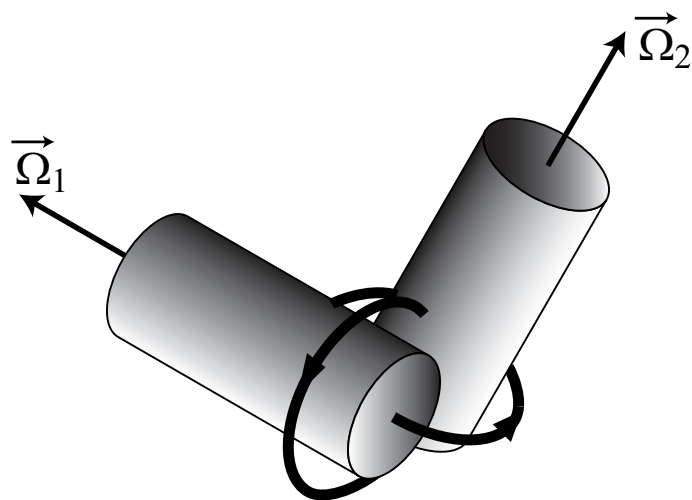
Dans les années soixante, Lowes et Wilkinson [53][55] ont construit une dynamo expérimentale constituée essentiellement de deux rotors cylindriques insérés dans un bloc de métal au repos (figure I.4.) Le contact électrique entre les rotors et le bloc métallique est assuré par un film de mercure. La configuration choisie par Lowes et Wilkinson est largement inspirée du modèle de dynamo proposé par Herzenberg [42].

Dans ce dispositif, le mouvement des conducteurs reste fortement contraint (rotation solide) mais le milieu est électriquement homogène sans qu'aucun circuit n'impose a priori la géométrie des courants induits.

L'instabilité dynamo observée dans cette géométrie peut s'interpréter en terme d'un schéma de bouclage dont le principal ingrédient est la conversion, à l'extrémité de chaque rotor, d'un champ magnétique axial en un champ azimutal induit. Le processus à l'origine d'une telle induction est décrit sur la figure I.5. En présence d'un champ axial appliqué, tout comme dans le cas de la roue génératrice, un champ électromoteur radial est induit par la rotation du cylindre conducteur. À ce champ électromoteur est associée une densité de courants radiale qui est contrainte de boucler par le milieu extérieur, de sorte à respecter la conservation de la charge électrique du milieu (une densité de courant purement radiale serait à divergence non-nulle.) Les boucles de courant ainsi produites engendrent à leur tour un champ magnétique azimutal. Cet exemple simple permet d'illustrer une propriété tout à fait générale aux processus d'induction dans les milieux homogènes : les lignes de champ magnétique tendent à être entraînées dans le mouvement des conducteurs. Cette propriété, que nous développerons en détail dans le chapitre suivant, constitue certainement l'ingrédient essentiel permettant de donner une interprétation physique simple de l'induction dans les milieux homogènes. Ainsi, dans le cas du rotor en présence d'un champ axial, les lignes de champ sont entraînées par la rotation du cylindre mais ne sont pas affectées par le conducteur extérieur au repos. Le champ azimutal induit peut donc être interprété comme résultant de la torsion, par la rotation différentielle à l'extrémité du rotor, du champ axial appliqué. Ce mécanisme associé à l'induction par rotation différentielle porte le nom d'effet  $\Omega$ .



**Fig. I.5:** Effet  $\Omega$  produit par la rotation différentielle à l'extrémité d'un rotor en présence d'un champ axial. (a) : un champ axial  $\vec{B}_0$  est à l'origine d'un courant radial induit  $\vec{j}_1$  dans le cylindre en rotation par le champ électromoteur  $\vec{u} \times \vec{B}_0$ ; la conservation de la charge contraint les courants de boucler. (b) : les boucles de courant ainsi formées produisent un champ magnétique azimutal  $\vec{B}_1$ . Tout se passe donc comme si le champ axial appliqué était entraîné par la rotation du cylindre; à l'extrémité du rotor, comme le milieu extérieur est au repos, la torsion des lignes de champs de  $\vec{B}_0$  correspond à l'apparition d'un champ azimutal.



**Fig. I.6:** Schéma de bouclage magnétique  $\Omega^2$  à l'origine de l'instabilité dynamo dans l'expérience de Lowes & Wilkinson.

Le schéma de bouclage conduisant à l'instabilité dynamo dans l'expérience de Lowes & Wilkinson est alors simple à imaginer : grâce à la disposition relative des deux rotors, une boucle magnétique azimuthale pour le rotor 1 constitue un champ axial pour le rotor 2 (et vice-versa), de telle sorte que par l'effet  $\Omega$  se produisant aux extrémités de chacun des deux cylindres, deux boucles telles que celles représentées sur la figure I.6 se convertissent l'une en l'autre et peuvent ainsi s'auto-entretenir au-delà d'un seuil de vitesse de rotation des cylindres. Comme dans le cas de la dynamo homopolaire, le champ ainsi auto-entretenu tend à s'opposer à la rotation des cylindres par l'intermédiaire de la force de Lorentz, ce qui conduit à la saturation du champ dynamo.

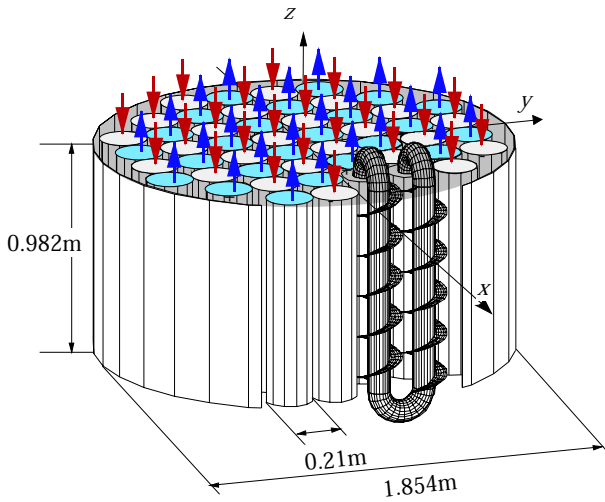
La dynamo de Lowes & Wilkinson est la première dynamo de laboratoire fonctionnant dans un milieu de conductivité homogène, sans circuit électrique imposant la géométrie des courants : on parle alors de dynamo homogène. En réalité, afin d'abaisser le seuil de l'instabilité, Lowes et Wilkinson ont légèrement contraint les courants électriques en disposant des couches isolantes aux extrémités des rotors [54] ; toutefois, leur étude suggère que même sans cette contrainte l'instabilité aurait toujours lieu, mais avec un seuil trop élevé pour pouvoir être atteint dans l'expérience. La prochaine étape dans l'optique de reproduire à l'échelle du laboratoire le mécanisme tel que celui pouvant être à l'origine de champ magnétique des planètes, consiste à considérer le cas où le conducteur n'est pas un solide, mais un fluide.

## I.2.4 Quelques dynamos fluides *contraintes*

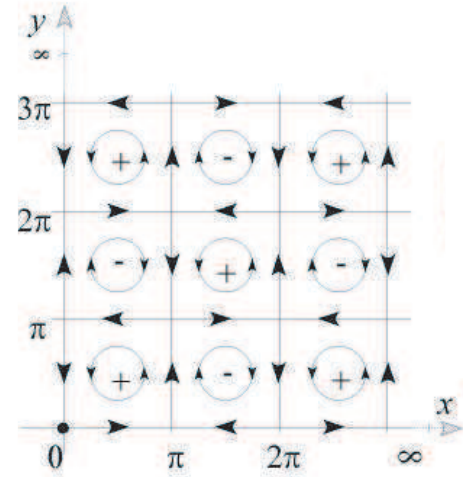
Nous nous intéressons à présent à la possibilité d'auto-entretien d'un champ magnétique par un écoulement fluide. Nous franchissons ainsi définitivement le seuil vers la magnétohydrodynamique, qui étudie l'interaction des champs magnétiques et des liquides en mouvement. Les premières dynamos auto-entretenues expérimentales utilisant un fluide comme conducteur en mouvement n'ont été obtenues que très récemment, en l'an 2000, par deux expériences menées indépendamment, l'une à Karlsruhe en Allemagne [89], l'autre à Riga en Letonie [37]. Ces deux expériences utilisent des dispositifs au sodium liquide, qui est le métal liquide le plus conducteur. Avant de décrire ces expériences, nous discutons brièvement un autre exemple simple de dynamo fluide.

### I.2.4.1 Dynamo fluide de type Lowes & Wilkinson

Une extension triviale de la dynamo de Lowes & Wilkinson consiste à remplacer les rotors par des boîtes cylindriques remplies d'un métal liquide. En-dessous du seuil le fluide est en rotation solide avec le cylindre de telle sorte que le même schéma  $\Omega^2$  décrit le processus à l'origine de l'instabilité, et le seuil de la dynamo fluide correspond exactement à celui de la dynamo solide. En revanche, la valeur du champ à saturation ne sera certainement pas la même puisque rien ne contraint, sous l'action supplémentaire de la force de Lorentz, le fluide à rester en rotation solide. Une telle dynamo n'a jamais été réalisée expérimentalement (à notre connaissance).



**Fig. I.7:** L'expérience dynamo de Karlsruhe.



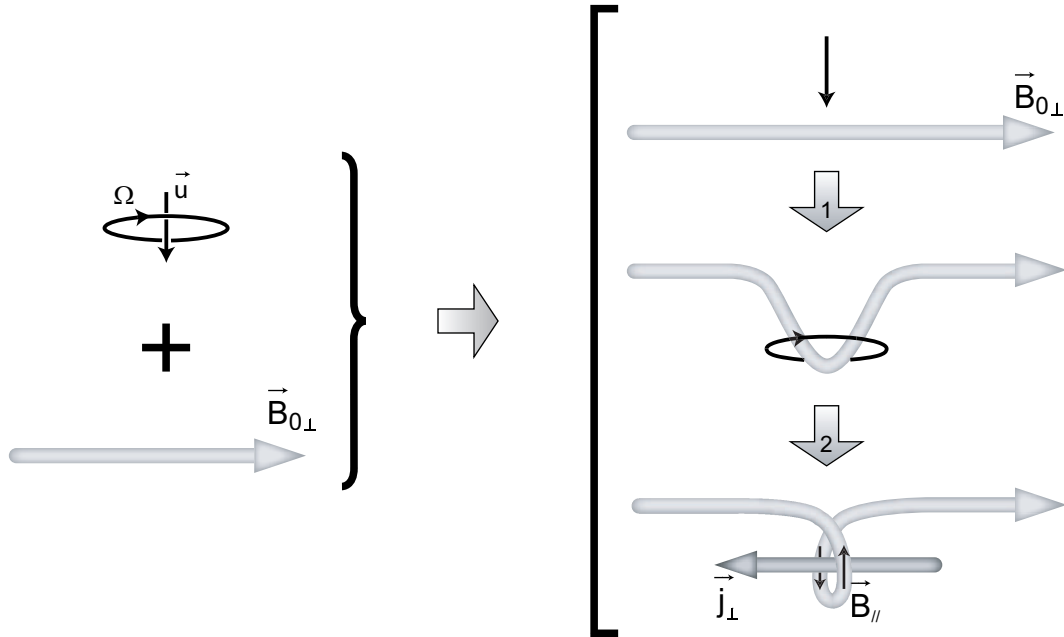
**Fig. I.8:** L'écoulement modèle de Roberts.

### I.2.4.2 La dynamo de Karlsruhe

L'idée de cette expérience fut suggérée par F. Busse [15][16]. Le dispositif expérimental est constitué d'un conteneur cylindrique de rapport d'aspect égal à un (le diamètre est égal à la hauteur du cylindre), dont le diamètre est de l'ordre de 1 m. Au sein de ce conteneur sont périodiquement disposés des canaux conducteurs assurant une circulation hélicoïdale du fluide dont la vitesse possède donc une composante translationnelle et une composante rotationnelle (figure I.7). L'écoulement ainsi produit réalise quasiment un écoulement modèle analytique proposé par G.O. Roberts (figure I.8) : il s'agit d'un réseau hélicoïdal périodique infini à 2 dimensions dont la capacité théorique à développer l'instabilité est démontrée [80].

L'expérience de Karlsruhe présente donc deux échelles de longueur caractéristiques : l'échelle intégrale du dispositif et l'échelle plus petite donnée par la taille des canaux. On dit alors que le système est à séparation d'échelle. Le champ magnétique auto-entretenu observé dans cette expérience est à grande échelle, contrairement à l'écoulement qui est caractérisé par des structures hélicitaires à l'échelle plus petite.

Le processus d'induction à l'origine de la dynamo dans ce dispositif est étroitement lié à l'existence de structures hélicitaires dans l'écoulement. Le mécanisme élémentaire, associé à un écoulement hélicoïdal élémentaire (celui produit par exemple dans un canal isolé), permet de convertir un champ appliqué transverse  $\vec{B}_{0\perp}$  (orthogonal à la composante translationnelle de la vitesse) en un champ induit  $\vec{B}_{//}$  parallèle à la translation du fluide. Ce mécanisme élémentaire, initialement proposé par E.N. Parker [69], s'interprète simplement par la tendance des lignes de champ magnétique à être entraînées par l'écoulement. Il se produit en deux étapes où les lignes de champ appliqué sont successivement déformées par la composante de translation  $\vec{u}$  de la vitesse puis par la rotation  $\Omega$  (figure I.9.) Il en résulte l'induction d'une boucle magnétique possédant une composante parallèle à  $\vec{u}$ , dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  et antisymétrique par rapport au plan défini par  $\vec{u}$  et  $\vec{B}_0$  (plan de la feuille sur le schéma de la figure I.9.) La description de ce mécanisme en termes de champ électromoteur et courants induits conduirait au même résultat par l'induction en deux étapes d'un courant  $\vec{j}_\perp$  parallèle à  $\vec{B}_{0\perp}$ . Un tel mécanisme donnant un



**Fig. I.9:** Effet  $\alpha$  de l'hélicité sur un champ appliqué.

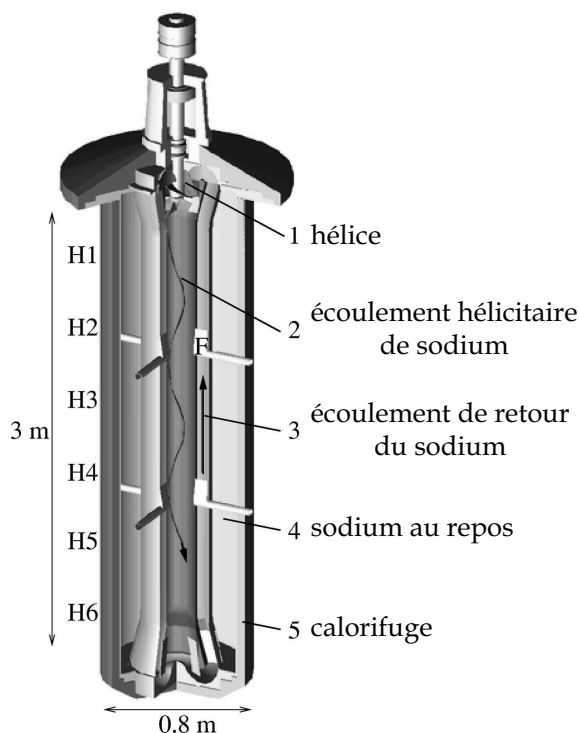
courant induit parallèle au champ magnétique porte le nom d'effet  $\alpha$ . Le sens du courant (et du champ magnétique) induit par un effet  $\alpha$  hélicitaire dépend du signe de l'hélicité. Dans la configuration de l'écoulement de Roberts, toutes les structures hélicitaires élémentaires sont de même signe. Le champ dynamo auto-entretenu résulte d'un mécanisme de bouclage faisant intervenir deux mécanismes  $\alpha$  hélicitaires successifs. On parle alors de dynamo  $\alpha^2$ . Comme l'hélicité des structures hélicoïdales à la petite échelle (définie par la taille typique d'un canal) est de même signe pour chacun des canaux, leurs effets d'induction collaborent positivement pour produire un champ magnétique à l'échelle intégrale.

**Remarque.** La description formelle de l'effet  $\alpha$  comme un effet à grande échelle, produit par la coopération des petites échelles d'un système (non nécessairement hélicitaires), s'inscrit dans le cadre de la théorie du champ moyen magnétohydrodynamique [47]. Afin de distinguer un tel effet coopératif de celui purement associé à une structure hélicitaire élémentaire (non nécessairement à petite échelle) décrit par la figure I.9, nous noterons par la suite effet  $\alpha$  le premier (selon la dénomination communément admise) et effet " $\alpha$ " le second.

### I.2.4.3 La dynamo de Riga

L'expérience de Riga est inspirée du modèle de dynamo proposé par Ponomarenko [72] dans lequel un écoulement de fluide conducteur évolue en translation et rotation solide dans un cylindre infini, immergé dans un milieu conducteur au repos. Le dispositif expérimental utilise du sodium liquide et comporte trois tubes concentriques de 3 m de longueur (figure I.10.) Dans le tube central (de 25 cm de diamètre) l'écoulement hélicoïdal est produit par une hélice en rotation. Le sodium, pompé par la même hélice, remonte ensuite dans le deuxième cylindre. Le troisième cylindre contient du sodium au repos. Contrairement à toutes les dynamos que nous avons décrites jusqu'à présent, la dynamo

de Ponomarenko n'est pas stationnaire, mais conduit à un champ auto-entretenu radial et oscillant. Le mécanisme à l'origine de l'instabilité ne peut être décrit simplement. Nous en dirons simplement qu'il fait intervenir l'hélicité de l'écoulement et la rotation différentielle à la paroi (seul le fluide dans le cylindre central est en rotation) et qu'il peut alors être interprété en terme d'un mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$ .



**Fig. I.10:** L'expérience dynamo de Riga.

#### I.2.4.4 Bilan

Ces deux expériences ont montré pour la première fois la possibilité expérimentale de produire un champ magnétique auto-entretenu par conversion de l'énergie mécanique de l'écoulement d'un fluide conducteur en énergie magnétique. La théorie de l'effet dynamo pourrait donc bien expliquer l'origine du champ magnétique de certains objets astrophysiques, comme l'avait jadis suggéré Larmor. Dans le cas de la Terre, par exemple, c'est la convection du fer en fusion dans le noyau externe qui fournirait l'énergie mécanique dont la conversion en énergie magnétique par effet dynamo donnerait naissance au champ magnétique terrestre.

Les expériences utilisant des métaux liquides, qui sont au coeur du travail présenté dans cette thèse, ne se rapportent essentiellement qu'à l'étude des dynamos planétaires, où le noyau est effectivement un métal en fusion. Les mécanismes magnétohydrodynamiques opérant dans les étoiles ou dans le milieu interstellaire sont certainement plus proches de ceux observés dans les expériences de physique des plasmas [43][44].

Les écoulements des expériences de Karlsruhe et de Riga restent fortement contraints et ne peuvent représenter un écoulement réaliste pour un noyau planétaire. Par *constraint*, il faut comprendre qu'ils réalisent quasiment les écoulements modèles qui les ont suscités et dont la capacité à développer la dynamo est démontrée analytiquement. Dans l'expérience



de Karlsruhe, la géométrie de l'écoulement est complètement contrainte par les canalisations et le régime reste largement laminaire, ne permettant a priori aucun effet *inattendu* par rapport au modèle de Roberts. Dans l'expérience de Riga, l'écoulement hélicoïdal produit est également largement laminaire dans la mesure où il se trouve intégralement dans le cône potentiel, après l'hélice qui le produit. Ceci n'est vraisemblablement pas la situation des écoulements, fortement turbulents, des noyaux planétaires (le nombre de Reynolds du noyau externe de la Terre est de l'ordre de  $10^7 - 10^8$ ) présentant donc d'intenses fluctuations par rapport au profil moyen du champ de vitesse (décrit, par exemple, en terme de colonnes convectives [17]) qui n'a qu'une réalité purement statistique, mais n'est certainement jamais réalisé à chaque instant.

L'étape suivante dans l'échelle croissante de complexité, qui va dans le sens d'une description de plus en plus réaliste de la situation planétaire, consiste alors à étudier la possibilité expérimentale d'une dynamo dans un écoulement non-contraint pouvant notamment présenter de fortes fluctuations par rapport à son profil moyen. Ces fluctuations peuvent se produire à grande échelle et/ou aux petites échelles turbulentes.

### I.2.5 Les expériences de dynamo fluides non-contraintes

À ce jour aucune dynamo expérimentale non-contrainte n'a encore jamais été observée.

L'existence de dynamos non-contraintes reste pour le moment une réalité purement basée sur des résultats de simulations numériques (de façon générale en magnétohydrodynamique, peu de problèmes admettent une solution analytique.) Glatzmaier et Roberts [39] ont notamment montré la possibilité de reproduire numériquement la structure ainsi que la dynamique (en particulier le phénomène d'inversion) du champ terrestre (on pourra se reporter à [29] pour une revue complète des modèles numériques de géodynamo.) D'autres travaux numériques sur des écoulements turbulents modèles tels que la géométrie de Taylor-Green [65] permettent également de mettre en évidence la croissance d'un champ magnétique dynamo.

Toutefois, la gamme de paramètres utilisés dans les simulations numériques diffère, souvent par plusieurs ordres de grandeurs, de celle des paramètres réels pour les écoulements de métaux liquides. Dans le cas particulier de la géodynamo (ou plus généralement des systèmes en rotation) un paramètre important est le nombre d'Ekman, comparant les effets mécaniques de la viscosité et ceux de la rotation. Il est de l'ordre de  $10^{-15}$  pour la Terre, mais des valeurs inférieures à  $10^{-6}$  sont pour le moment inenvisageables dans les simulations numériques qui ne conduisent finalement pas à une description réaliste de l'équilibre magnéto-mécanique de la Terre [28]. De façon plus générale, un paramètre important caractérisant les écoulements de métaux liquides est le nombre de Prandtl magnétique  $P_m = \frac{\nu}{\lambda}$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide et  $\lambda$  sa diffusivité magnétique. Il compare donc l'importance relative de la dissipation visqueuse et de la dissipation par effet Joule. Alors que  $P_m$  est de l'ordre de  $10^{-6}$  pour tous les métaux liquides, le problème numérique ne peut être résolu que pour  $P_m \sim 1$ . La difficulté à modéliser numériquement un problème MHD non-contraint à  $P_m \sim 10^{-6}$  vient de l'existence d'au moins deux longueurs caractéristiques très distinctes : le rapport de l'échelle des variations spatiales de l'écoulement  $l_v$  et de l'échelle  $l_m$  des variations spatiales du champ magnétique est donnée par  $\frac{l_v}{l_m} \sim \sqrt{P_m}$ . Résoudre à la fois la structure du champ magnétique et celle de l'écoulement à  $P_m \sim 10^{-6}$  requiert donc l'utilisation d'une grille numérique extrêmement fine, hors de portée des calculateurs modernes. L'utilisation d'un nombre de Prandtl magné-

tique de l'ordre de 1 permet de rendre comparables les échelles  $l_m$  et  $l_v$ , mais la dissipation Joule s'en trouve largement sous-estimée (ou de façon équivalente la viscosité du fluide est largement surestimée et donc l'effet des petites échelles turbulentes incorrectement modélisé.) Une approche par la méthode LES (Large Eddies Simulations) est actuellement en cours de développement par Y. Ponty [73] et devrait permettre d'explorer numériquement des régimes à  $P_m \sim 10^{-3}$ .

L'approche expérimentale reste donc incontournable. Différentes équipes à travers le monde travaillent sur différents projets de dynamos expérimentales non-containtes :

- **l'expérience de Perm** [34] : elle étudie la possibilité d'engendrer une dynamo dans un écoulement non-stationnaire de type Ponomarenko produit dans un tore en rotation brutalement freiné. La présence d'une hélice, fixe par rapport au tore, rend hélicitaire le mouvement inertiel du fluide après le freinage.

- **le projet de Grenoble** [20] : ce projet étudie la possibilité d'engendrer une dynamo expérimentale dans un écoulement de sodium produit entre deux sphères concentriques en rotation (la sphère externe fera 2 m de diamètre et la sphère interne 50 cm.) L'un des intérêts majeurs de ce projet réside dans l'étude du rôle de la force de Coriolis dans l'équilibre magnéto-mécanique de la dynamo terrestre.

- **le projet du Nouveau Mexique** [26] : ce projet est a vocation de décrire l'instabilité dynamo dans des conditions reproduisant celles des disques d'accrétion en astrophysique. L'expérience est notamment conçue de sorte à reproduire la déformation du champ magnétique par la rotation képlérienne du disque d'accrétion et par les collisions de ce dernier avec les étoiles. Il s'agit d'un écoulement de Couette cylindrique utilisant du sodium liquide, où des jets pulsés sont périodiquement injectés.

- **les projets von Kármán** : on désigne par von Kármán l'écoulement créé entre deux hélices ou disques coaxiaux en rotation [95]. La motivation pour l'étude des écoulements von Kármán a été suscitée notamment par une série d'études numériques que nous présenterons au §I.3. Trois projets utilisant des écoulements de ce type sont actuellement en cours :

- **le projet du Maryland** (von Kármán sphérique) : depuis la fin des années 90, une série d'expériences visant à mettre en évidence une dynamo fluide non-contrainte dans des écoulements de sodium a été réalisée à l'université du Maryland. Les premières expériences étudiaient un écoulement convectif en forte rotation [70], mais aucun effet n'a pu être décelé. Plus récemment des écoulements de sodium engendrés dans une sphère de 30 cm de diamètre par la rotation de deux hélices coaxiales ont été étudiés [83]. Des mesures de temps de décroissance d'un champ magnétique appliqué indiquent que celui-ci peut être diminué d'environ 30% par rapport au temps de diffusion en l'absence d'écoulement. Une expérience de même géométrie mais dans une sphère de 3 m de diamètre est en cours de construction.
- **le projet MDX à Madison** (von Kármán sphérique) [33] : cette expérience étudie un écoulement similaire à celui du projet du Maryland, dans une sphère d'environ 1 m de diamètre. Une étude numérique approfondie a été réalisée afin d'optimiser l'écoulement par rapport à celui initialement proposé par les travaux numériques de Dudley & James (nous les présenterons au §I.3.)
- **l'expérience VKS** (Von Kármán sodium cylindrique) [8] : ce projet résulte d'une collaboration entre les Écoles Normales Supérieures, de Paris et de Lyon, et le Commissariat à l'Énergie Atomique de Saclay et de Cadarache. L'expérience est localisée

sur le site de Cadarache possédant l'infrastructure et le savoir-faire nécessaire à la manipulation du sodium. Cette expérience étudie la possibilité d'engendrer une dynamo dans un écoulement de sodium liquide produit par deux disques coaxiaux en rotation dans une cuve cylindrique d'environ 50 cm de diamètre. Les plus hauts nombres de Reynolds magnétiques atteints dans VKS sont de l'ordre de 50. L'étude de l'induction MHD est également menée à l'ENS-Lyon dans une expérience plus petite (deux fois plus petite que VKS) et utilisant du gallium liquide à la place du sodium. Cette expérience, appelée VKG, est beaucoup plus souple d'utilisation que VKS, mais ne permet d'atteindre que des nombres de Reynolds magnétiques inférieurs à 5. Une grande partie du travail réalisé pendant cette thèse a été consacrée à ces deux expériences qui seront présentées en détails au chapitre 4.

### I.3 Les dynamos numériques de von Kármán

Les expériences de dynamo von Kármán sont largement motivées par le fait que des études numériques ont montré que les écoulements moyens qu'elles réalisent peuvent être favorables au développement d'un champ magnétique par effet dynamo. Nous présentons dans cette partie les travaux les plus marquants. Il s'agit souvent d'études cinématiques sur des écoulements modèles où le champ de vitesse est supposé donné, stationnaire et décrit uniquement par son profil moyen. De ce point de vue, ces études se classent plutôt parmi les dynamos *contraintes*. Toutefois, l'un des objectifs des expériences dynamos non-contraintes est d'étudier le problème de la survie de l'instabilité dynamo à la présence de fluctuations par rapport à l'écoulement moyen ; c'est l'une des raisons qui justifient le choix de ces écoulements.

#### I.3.1 Écoulements hélicitaires et/ou contra-rotatifs axisymétriques sphériques

Gubbins [40] et Dudley & James [31] ont montré, par des approches numériques cinématiques, qu'un certain nombre d'écoulements simples axisymétriques étaient capables de développer un champ magnétique par effet dynamo au-delà d'un seuil critique pour le nombre de Reynolds magnétique. Deux de ces écoulements sont représentés sur les figures I.11 et I.12.

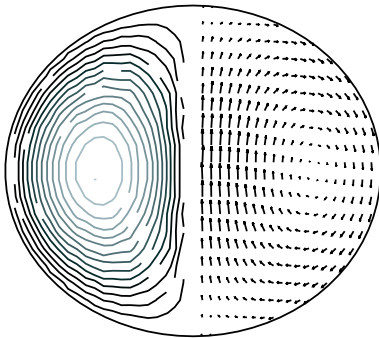


Fig. I.11: Écoulement  $s_1t_1$

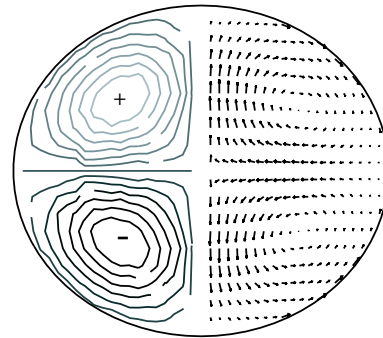


Fig. I.12: Écoulement  $s_2t_2$

**Écoulement  $s_1t_1$ .** La coupe axiale de l'écoulement  $s_1t_1$  (qui, compte tenu de l'axi-symétrie, décrit complètement l'écoulement), montre qu'il est constitué d'une rotation azimutale (nous parlerons de la composante toroïdale du champ de vitesse) et d'une boucle de recirculation que nous qualifierons de poloïdale. L'écoulement présente donc un caractère hélicitaire. Les travaux de Dudley et James suggèrent que cet écoulement développe une dynamo oscillante (non-stationnaire.) La valeur du seuil au-delà duquel l'instabilité magnétique croît est très sensible au rapport  $P/T$  de la vitesse poloïdale (superposition des contributions axiales et radiales) à la vitesse toroïdale (composante azimutale). Le seuil est minimal et de l'ordre de  $R_m \sim 150$  pour  $P/T = 0.17$ . Il est à noter que la valeur de  $R_m$  dépend de la définition précise donnée à ce paramètre. C'est une question que nous développerons en détail par la suite, et les valeurs données dans ce chapitre sont essentiellement indicatives. Les plus hauts nombres de Reynolds magnétiques que l'on sache atteindre expérimentalement sont de l'ordre de 50-100; c'est également l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds magnétique du noyau terrestre.

**Écoulement  $s_2t_2$ .** L'écoulement  $s_2t_2$  est constitué de deux cellules en contra-rotation. Les boucles de recirculation poloïdales sont dirigées du centre vers les pôles au niveau de l'axe de rotation et redescendent vers l'équateur près des parois de la sphère. Chacune de ces cellules présente donc également un caractère hélicitaire (et le signe de l'hélicité est le même pour chacune d'elle) en même temps qu'une forte couche de cisaillement due à la rotation différentielle axiale au niveau du plan médian. Contrairement à l'écoulement  $s_1t_1$ , la configuration  $s_2t_2$  développe une dynamo stationnaire (et non plus oscillante.) Le seuil de l'instabilité reste très sensible à la valeur du rapport  $P/T$ . Il est minimal et de l'ordre de  $R_m \sim 55$  pour  $P/T = 0.14$ . La configuration  $s_2t_2$  est donc plus favorable à l'instabilité magnétique que celle  $s_1t_1$ .

### I.3.2 L'écoulement Taylor-Green

La géométrie Taylor-Green décrit un écoulement modèle périodique dans les trois directions de l'espace possédant des propriétés communes avec la configuration  $s_2t_2$  de Dudley et James, dont notamment l'hélicité et la rotation différentielle. Des simulations numériques directes [65], prenant donc en compte la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement, ont montré la capacité de cet écoulement à développer l'instabilité dynamo. Dans cette simulation le champ de vitesse évolue dans le temps, tout comme le champ magnétique, et bien que le nombre de Prandtl magnétique utilisé (de l'ordre de 1) reste très grand par rapport à la valeur dans les expériences de métaux liquides ( $10^{-6}$ ), elle montre que l'auto-entretien du champ magnétique subsiste en présence des fluctuations de l'écoulement. Le seuil de l'instabilité annoncé est de l'ordre de  $R_m = 10$ .

### I.3.3 L'écoulement $s_2t_2$ en géométrie cylindrique périodique

Des simulations de dynamos cinématiques en géométrie cylindrique utilisant un écoulement similaire à la configuration  $s_2t_2$  de Dudley et James, mais périodisé dans la direction de l'axe de rotation ont montré la possibilité d'une dynamo stationnaire [57][58]. Le code est semi-spectral dans les directions axiale et orthoradiale, et utilise un schéma aux différences finies dans la direction radiale. Cette étude montre également une forte sensibilité du seuil au rapport  $P/T$  (optimal autour de  $P/T = 0.8$ ) ainsi qu'à la nature conductrice

ou isolante du milieu extérieur (un milieu extérieur de même conductivité que le fluide semble plus favorable à la dynamo qu'un milieu extérieur isolant ; le cas d'une conductivité extérieure différente de celle du fluide ne peut être étudié dans ce code dynamo.) Le seuil minimal annoncé est de l'ordre de  $R_m \sim 40$ .

## I.4 L'écoulement expérimental de von Kármán

Les travaux numériques que nous venons de décrire montrent donc que rotation différentielle et hélicité sont deux ingrédients qui, bien dosés, peuvent favoriser l'instabilité dynamo. Les seuils annoncés par ces études, de l'ordre de  $R_m = 50$ , sont proches de ceux que l'on sait atteindre de nos jours dans les dispositifs utilisant du sodium liquide. Ces deux observations sont à l'origine des expériences de magnétohydrodynamique dans les écoulements von Kármán de métaux liquides. Les premières expériences ont été réalisées dans un écoulement de gallium liquide (VKG) permettant d'atteindre des nombres de Reynolds magnétiques de l'ordre de 5. Bien que ceux-ci soient trop faibles pour envisager le développement de l'instabilité dynamo, ces expériences restent précieuses pour l'étude des mécanismes d'induction qui, comme nous le verrons plus loin, constitue une étape obligée pour la compréhension de l'effet dynamo et l'optimisation des expériences au sodium tel que le projet VKS.

### I.4.1 Réalisation et propriétés de l'écoulement moyen

L'écoulement expérimental de von Kármán est produit par l'entraînement d'un fluide entre deux disques coaxiaux en rotation dans une cuve cylindrique (figure I.13). Afin d'assurer une bonne efficacité de l'entraînement du fluide, les disques utilisés sont munis de pales (nous décrirons plus en détails ce point au chapitre IV). Différents régimes d'écoulements peuvent être atteints selon le sens et la fréquence relative de rotation de chacun des disques. Les principaux régimes que nous aurons à considérer sont les suivants :

- **Régime corotatif : rotation solide.** Ce régime est atteint lorsque les deux disques tournent dans le même sens, à la même fréquence de rotation  $\Omega$ . L'écoulement moyen est alors essentiellement une rotation solide du fluide (figure I.14a).

- **Régime à 1 disque en rotation : hélicité.** Ce régime est atteint lorsqu'un seul disque est en rotation à la fréquence  $\Omega$  et l'autre disque est maintenu fixe. L'écoulement moyen ainsi produit est voisin de la configuration  $s_1 t_1$  de Dudley & James. Il possède une composante azimutale résultant de l'entraînement du fluide par la rotation du disque et une recirculation poloïdale (figure I.14b). Cette dernière résulte de la force centrifuge qui, au niveau du disque en rotation, tend à expulser le fluide du centre vers les bords du cylindre. Dans la mesure où les régimes que nous étudierons expérimentalement sont incompressibles, cette expulsion entraîne une recirculation poloïdale avec un fort pompage du fluide vers le disque en rotation au niveau de l'axe du cylindre. La figure I.15a présente des mesures expérimentales d'un écoulement moyen de von Kármán produit par un seul disque en rotation. Elles ont été obtenues par vélocimétrie Doppler LASER (LDV) par l'équipe du CEA de Saclay dans une expérience en eau de même rapport d'aspect que les expériences VKS et VKG.

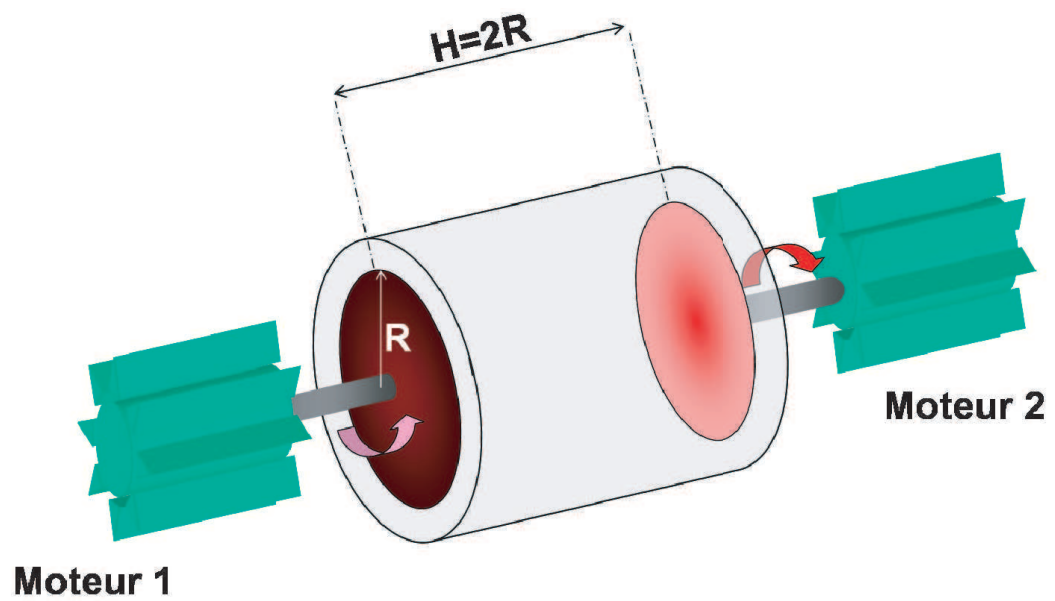


Fig. I.13: Configuration expérimentale de von Kármán

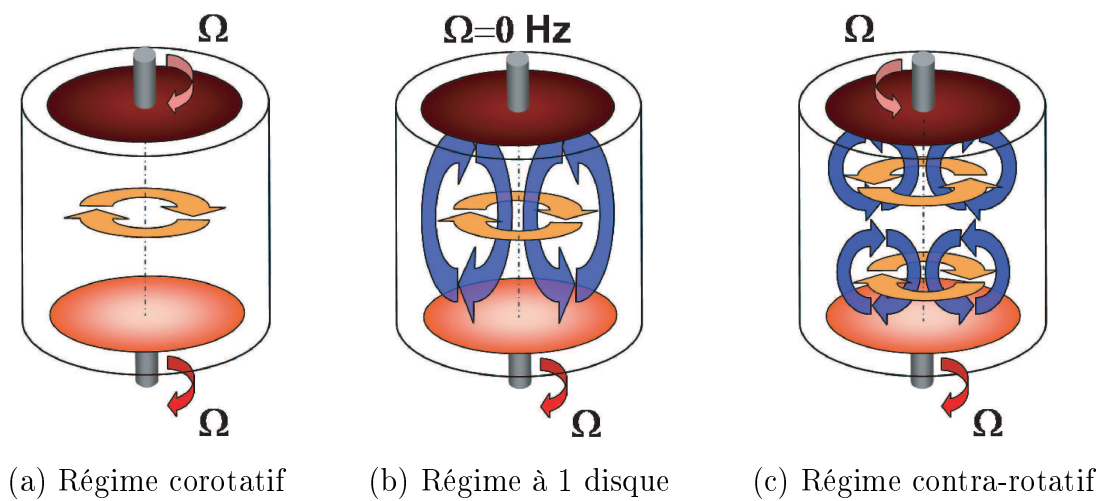
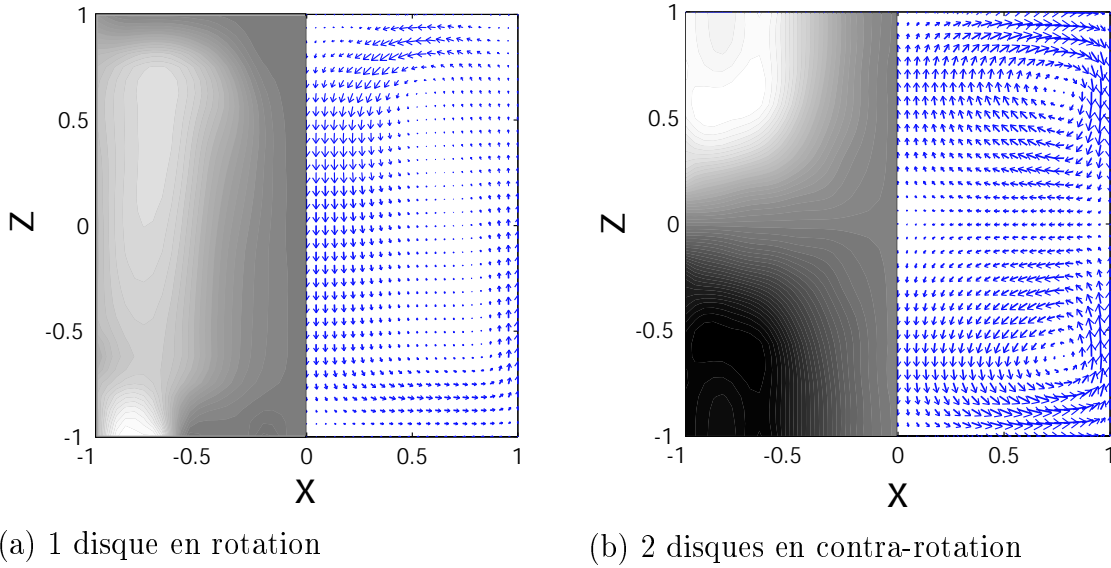


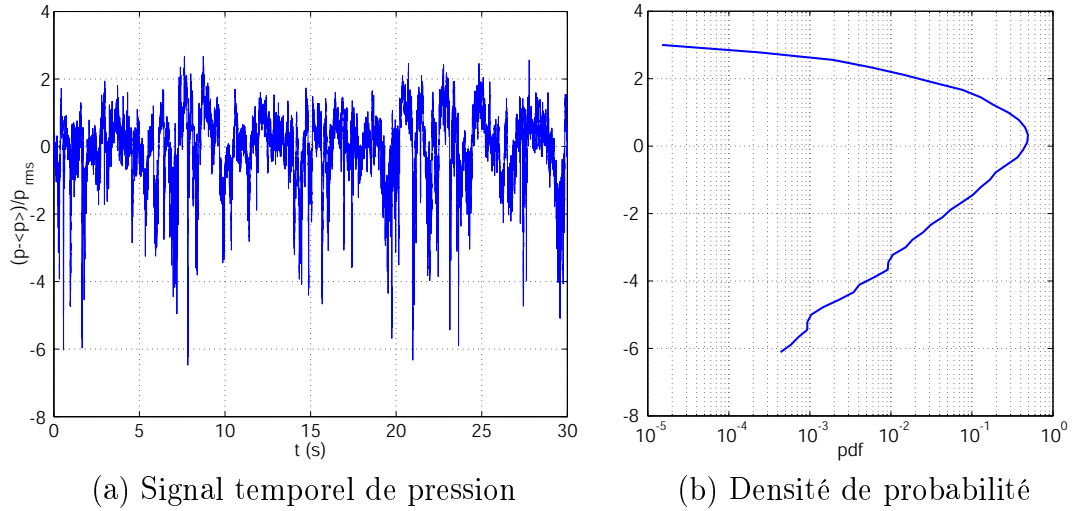
Fig. I.14: Principaux régimes de l'écoulement von Kármán



**Fig. I.15:** Profil d'un champ de vitesse expérimental moyen de von Kármán (engendré par des disques à pales courbes de types TM60, que nous décrirons au chapitre IV) obtenu par vélocimétrie LASER Doppler. Ces mesures sont réalisées par l'équipe de CEA de Saclay dans le cadre de la collaboration VKS. Les contours représentent la composante azimutale de la vitesse (nous utiliserons également le terme de composante *toroïdale*) : positive dans les régions claires et négative dans les régions sombres. Les vecteurs représentent les composantes axiale et radiale de la vitesse (nous utiliserons également le terme de composante *poloïdale*).

- **Régime contra-rotatif : hélicité + rotation différentielle.** Ce régime est atteint lorsque les disques tournent à la même fréquence  $\Omega$  mais en sens opposé l'un par rapport à l'autre. L'écoulement moyen qui en résulte est alors voisin de la configuration  $s_2t_2$  dans la classification de Dudley & James. Il est constitué de deux cellules hélicitaires en contra-rotation de part et d'autre du plan médian (figure I.14c). Le signe de l'hélicité de chacune de ces cellules est le même puisque leur rotation est renversée tout comme le sens du pompage centrifuge (toujours dirigé vers le disque en rotation.) Il en résulte une hélicité globale au coeur de l'écoulement. Une autre propriété de cet écoulement est l'existence d'une couche de fort cisaillement au niveau du plan médian. Celle-ci est associée à une forte rotation différentielle du fait du gradient axial de la rotation. La figure I.15b présente des mesures expérimentales d'un écoulement moyen de von Kármán produit par deux disques en contra-rotation.

Les écoulements moyens de von Kármán permettent ainsi de réaliser des configurations voisines de celles numériquement favorables à l'instabilité dynamo. Le régime contra-rotatif est certainement le plus riche et le plus intéressant puisqu'il possède les propriétés de rotation différentielle et d'hélicité offrant, d'après les travaux de Dudley & James, le seuil dynamo le plus bas. Dans ce cas, la dynamo est stationnaire.



**Fig. I.16:** Fluctuations turbulentes de pression. Les mesures ont été obtenues dans l'expérience VKSa utilisant des disques TM60 (voir le tableau IV.1 du chapitre 4) en contre-rotation à 12 Hz.

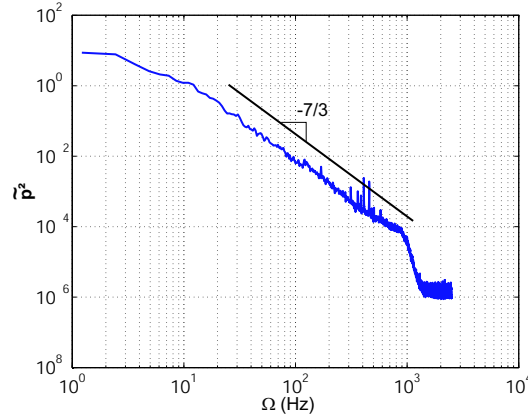
### I.4.2 Propriétés turbulentes de l'écoulement de von Kármán

Dans les régimes expérimentaux de hauts  $R_m$  (indispensables pour l'étude des phénomènes d'induction magnétohydrodynamique), du fait du très faible nombre de Prandtl magnétique des métaux liquides, les écoulements de von Kármán sont fortement turbulents (le taux de turbulence, défini à partir du rapport de l'écart type des fluctuations turbulentes à la vitesse moyenne, peut être de l'ordre de 40%.) L'étude de la turbulence développée dans les écoulements de von Kármán, pour différents types de fluides, a fait l'objet de nombreux travaux [64][48][71][84].

Aux écoulements moyens que nous venons de décrire doivent donc être superposées de fortes fluctuations spatio-temporelles. La figure I.16a représente un exemple typique de signal de pression dynamique enregistré dans l'expérience VKS. Ses fortes fluctuations sont caractéristiques de la turbulence de l'écoulement. On y décèle en particulier d'intenses dépressions correspondant au passage de vortex filamenteux au voisinage du capteur [19][32]. De telles structures peuvent être visualisées dans des expériences en eau à l'aide de bulles d'air [30]. Des mesures acoustiques, toujours dans des expériences en eau, ont montré que la taille du cœur de ces filaments est de l'ordre de l'échelle de Taylor de l'écoulement [27]. La présence de ces dépressions apparaît clairement lorsqu'on trace la densité de probabilité des fluctuations de pression (figure I.16b). Elle montre une forte dissymétrie présentant une aile exponentielle du côté des événements à basse pression, plus nombreux. Cette dissymétrie est caractéristique du régime turbulent d'un écoulement dans un volume fermé, la distribution devenant gaussienne pour un régime non-turbulent [64]. Un profil présentant une dissymétrie analogue a été également obtenu et étudié pour le signal de puissance dissipée dans un écoulement de von Kármán dans différents fluides [48]. Ce comportement présente des analogies fortes avec les fluctuations du paramètre d'ordre de certains systèmes critiques, tel que le modèle XY pour les systèmes magnétiques [9].

Les mesures LDV du champ de vitesse dans les expériences en eau de même rapport d'aspect (réalisées au CEA de Saclay) montrent que le taux de turbulence (défini comme





**Fig. I.17:** Spectre de pression typique dans l'expérience VKS

le rapport de la moyenne quadratique de la vitesse à sa vitesse caractéristique, donnée par la vitesse d'éjection au bord des disques ( $2\pi R\Omega$ ) est de l'ordre de 40%. Les propriétés hydrodynamiques du sodium à  $150^\circ$  (température typique dans l'expérience VKS) étant très voisines de celles de l'eau à température ambiante (voir §IV.1.4.4) cette valeur reflète celle des écoulements de sodium (nous verrons par ailleurs au chapitre 4 que cette valeur du taux de turbulence est en accord avec les mesures de moyenne quadratique du signal de pression dans l'expérience VKS.) Les fluctuations de vitesse sont donc effectivement très intenses par rapport à l'écoulement moyen.

Elles peuvent être mieux caractérisées par le spectre de puissance  $\tilde{p}^2$  du signal de pression (figure I.17.) Celui-ci présente pour les hautes fréquences un comportement suivant une loi de puissance

$$\tilde{p}^2 \sim f^{-\frac{7}{3}}. \quad (\text{I.12})$$

Moyennant une hypothèse de Taylor reliant l'espace des fréquences temporelles à celui des fréquences spatiales [91], cette évolution correspond au régime inertiel caractéristique de la cascade énergétique des grandes échelles (où la puissance est injectée) vers les petites échelles (jusqu'à l'échelle de dissipation visqueuse.) L'exposant  $-\frac{7}{3}$  est en bon accord avec la phénoménologie de Kolmogorov [46][56].

À ces fluctuations turbulentes viennent généralement se rajouter des fluctuations à grande échelle. Elles sont essentiellement associées à des instabilités de la couche de cisaillement et se traduisent, notamment, par la formation de vortex radiaux (instabilité de type Kelvin-Helmholtz) ou bien encore par des oscillations de la couche de cisaillement autour du plan médian.

Toutes ces fluctuations font que l'écoulement moyen de von Kármán décrit par l'une des figures I.14a à c n'a qu'une réalité purement statistique : il ne correspond qu'à la moyenne temporelle, ou à la moyenne d'ensemble de l'écoulement sur un grand nombre de réalisations, mais il n'est jamais effectivement présent tel quel dans le système réel. C'est dans ce sens que l'écoulement de von Kármán est qualifié de non-contraint.

## I.5 Les problèmes spécifiques aux dynamos fluides non-contraintes

Le succès des expériences de Karlsruhe et de Riga a ouvert la voie des dynamos fluides expérimentales en montrant que l'instabilité peut se développer dans des écoulements où les fluctuations par rapport au profil moyen du champ de vitesse restent faibles. L'obtention de l'instabilité dans des écoulements non-contraints, et en particulier dans des écoulements fortement turbulents, constitue désormais l'un des enjeux majeurs de l'approche expérimentale de la dynamo. Cette étude doit répondre à un certain nombre de problèmes qui lui sont spécifiques.

### I.5.1 Existence et conditions de l'instabilité dynamo dans les écoulements non-contraints

Comme nous l'avons déjà souligné, l'existence de l'instabilité pour les dynamos homogènes non-contraintes est uniquement basée sur des résultats numériques et sur le fait qu'aucune autre théorie ne semble en mesure de pouvoir rendre compte du champ magnétique de la plupart des corps astrophysiques. La gamme de paramètres physiques capable d'être atteinte de nos jours dans les simulations reste toutefois éloignée de celle des vrais systèmes physiques (expérimentaux comme naturels.) L'approche expérimentale reste donc essentielle et irremplaçable dans la quête d'une dynamo fluide non-contrainte.

Il semble raisonnable de s'intéresser en priorité à des configurations, telles que von Kármán, dont l'écoulement moyen possède des ingrédients favorables à la dynamo. Toutefois, nous avons déjà mentionné que les conditions précises sous lesquelles cet écoulement (même supposé contraint à son profil moyen) peut effectivement donner naissance à une dynamo sont extrêmement sensibles à certains paramètres décrivant précisément la configuration expérimentale, tel que le rapport  $P/T$  de l'écoulement ou encore les conditions aux limites électromagnétiques. S'il est simple de modifier certains de ces paramètres dans une simulation numérique, l'optimisation expérimentale de l'écoulement est beaucoup moins évidente. Il n'existe pas toujours de moyen simple permettant d'ajuster sur demande les paramètres d'un écoulement. Dans la configuration von Kármán, la topologie précise du champ de vitesse dépend fortement de la nature des disques entraînant le fluide (taille, présence de pales, forme des pales, etc.) L'obtention expérimentale d'une configuration d'écoulement précise requiert en général une longue étude préalable où différents types de disques sont testés. Les travaux de [57] et [76] constituent un apport majeur dans l'optimisation expérimentale des écoulements von Kármán en vue de produire un écoulement moyen favorable à la dynamo. Ces études couplent des mesures LDV du champ de vitesse moyen produit par des disques de différents types à un calcul numérique cinématique du taux de croissance de l'instabilité dynamo à partir du profil de vitesse expérimental.

D'autres difficultés doivent également être prises en compte. Notamment, même si l'on admet qu'un écoulement moyen numériquement favorable à la dynamo puisse être réalisé expérimentalement, la modélisation numérique correspond rarement aux conditions expérimentales réelles. Par exemple, les codes dynamo en géométrie cylindrique existant à ce jour sont périodiques dans la direction axiale, ce qui n'est bien sûr pas le cas des expériences. L'une des difficultés de l'approche numérique en général réside justement dans

la modélisation de conditions aux limites réalistes (nous discuterons en détail ce point au §II.1.2.3.) Dans la mesure où, dans les simulations, l'existence ou non de la dynamo est très sensible à certains paramètres géométriques et aux conditions aux limites électromagnétiques, on est en droit de se demander quelle est l'influence des différences entre l'écoulement moyen expérimental et la modélisation numérique du problème dynamo, et de l'induction MHD en général. La réalisation expérimentale d'un écoulement dont le profil moyen est susceptible de donner une dynamo reste donc un problème en soi.

### I.5.2 Seuil et mode neutre de l'instabilité

Les études numériques permettent de déterminer la valeur du seuil de l'instabilité et la structure du champ magnétique auto-entretenu par effet dynamo (appelé mode neutre de l'instabilité.) Dans le cas des expériences de Karlsruhe et Riga, les valeurs expérimentales du seuil, ainsi que la structure du champ observé sont en très bon accord avec les prédictions numériques des dynamos cinématiques associées.

La question se pose, pour les écoulements non-contraints, de savoir si le seuil, ainsi que la structure du mode neutre de l'instabilité prédits numériquement à partir de l'écoulement moyen décrivent correctement le vrai problème non-contraint. La réponse devra attendre les premiers succès des projets dynamos en cours.

### I.5.3 La saturation de l'instabilité

La saturation de l'instabilité se produit par la rétroaction du champ magnétique engendré par effet dynamo sur le champ de vitesse via la force de Lorentz. Il s'agit alors de déterminer le rôle précis de cette force sur l'écoulement. Affecte-t-elle plutôt la structure globale moyenne de l'écoulement ou bien les fluctuations du champ de vitesse ? On pourra remarquer à ce propos que la question semble se poser également pour les dynamos contraintes de Karlsruhe et Riga qui, malgré le caractère essentiellement laminaire de leur écoulement, pourraient présenter un champ magnétique à saturation correctement décrit en terme d'un équilibre entre la force de Lorentz et les faibles fluctuations turbulentes de vitesse [75].

### I.5.4 Les mécanismes de l'instabilité et le rôle spécifique des fluctuations

Le principal enjeu reste pour l'instant simplement l'obtention d'une dynamo expérimentale non-contrainte. Ce n'est qu'à cette condition que les questions que nous venons de soulever deviendront pertinentes et pourront être concrètement abordées.

Comme nous l'avons souligné, l'écoulement contra-rotatif de von Kármán semble un très bon candidat pour développer l'instabilité dynamo dans la mesure où la structure de son champ de vitesse moyen possède les bons ingrédients (hélicité et rotation différentielle) récurrents dans les dynamos obtenues numériquement. La compréhension du mécanisme susceptible d'être à l'origine de l'instabilité ne reste toutefois que très partielle. En effet, tous les travaux numériques sur la question (décrits dans le §I.3) se limitent à calculer le taux de croissance de l'instabilité, mais ne donnent aucune interprétation précise et rigoureuse du mécanisme assurant l'auto-entretien du champ magnétique. S'il semble

raisonnable de penser que l'effet  $\Omega$  (associé à la rotation différentielle) et l'effet " $\alpha$ " (associé à l'hélicité) ne seront pas étrangers à ce mécanisme, la nature précise et le schéma détaillé du mécanisme restent à être expliqués. L'étude et l'identification du mécanisme de bouclage magnétique ne saurait par ailleurs se limiter à une interprétation purement qualitative mais doivent être en mesure de prendre en compte une description précise et réaliste des vraies conditions expérimentales (principalement la topologie de l'écoulement et les conditions aux limites), afin de rendre compte notamment de leur influence et de la sensibilité observée dans les dynamos cinématiques pour l'apparition de l'instabilité.

Un deuxième point crucial, spécifique à la nature non-contrainte de l'écoulement, est de savoir quel rôle peuvent bien jouer dans ce mécanisme les fluctuations de l'écoulement. Vont-elles détruire le mécanisme suggéré par l'écoulement moyen ? Peut-on envisager un effet  $\alpha$  par coopération des structures aux petites échelles turbulentes de l'écoulement ? Ou bien peut-on envisager l'absence de tout effet notable des fluctuations ?

## I.6 Des mécanismes d'induction MHD à la dynamo

L'étude du mécanisme de bouclage à l'origine de l'instabilité dynamo s'inscrit dans le cadre plus général de l'étude des mécanismes d'induction MHD par un écoulement en présence d'un champ appliqué. Le mécanisme de bouclage correspond au cas particulier où le champ induit possède un fort recouvrement avec le champ inducteur. La compréhension détaillée des mécanismes d'induction constitue donc une étape obligée.

Les premières études expérimentales de l'induction MHD remontent aux travaux de Lenhart [51] en 1957. Il s'agissait de mesurer le champ magnétique induit  $\vec{B}_{ind}$  au sein d'un écoulement axisymétrique de sodium liquide produit par la rotation d'une hélice dans un récipient cylindrique en présence d'un champ axial appliqué. Lenhart a ainsi pu mettre en évidence l'induction d'un champ toroïdal et d'un champ poloïdal. À cause du théorème anti-dynamo de Cowling, la configuration axisymétrique étudiée par Lenhart ne peut cependant conduire qu'à des mécanismes isolés, mais en aucun cas à l'identification d'un ensemble complet conduisant à un bouclage magnétique. Par ailleurs ces travaux restent essentiellement qualitatifs et sans étude systématique de l'évolution de l'induction pour des  $R_m$  croissants et ne considèrent nullement la question des fluctuations de l'écoulement.

Nous nous proposons d'approfondir cette approche afin d'étudier en détail les mécanismes d'induction dans les écoulements de von Kármán. Pour cela, nous nous intéressons à la réponse magnétique des différentes configurations d'écoulement von Kármán en présence d'un champ appliqué. L'étude se fait sous les deux volets, numérique et expérimental, dont le couplage va s'avérer non-seulement riche en conséquences, mais également indispensable. En effet, les mesures d'induction expérimentales ne donnent qu'une information locale, puisque le champ induit est mesuré à l'aide d'une sonde à effet Hall en un point de l'écoulement, alors que le calcul numérique de sa structure moyenne va révéler un comportement essentiellement global (en accord avec la grande longueur de diffusion magnétique du système.)

Deux dispositifs expérimentaux sont actuellement disponibles :

- **VKG** (von Kármán gallium) utilise le gallium comme métal liquide et permet d'atteindre des nombres de Reynolds magnétiques de l'ordre de 5 dans une expérience simple et simple d'utilisation ;
- **VKS** (von Kármán sodium) utilise le sodium comme métal liquide et permet d'at-

teindre des nombres de Reynolds magnétiques de l'ordre de 50 dans une expérience plus lourde.

Les questions auxquelles nous nous efforcerons de répondre sont alors essentiellement les suivantes (déjà évoquées au paragraphe précédent) :

- **Quels mécanismes d'induction MHD peut-on identifier dans les écoulements von Kármán moyens ?** La notion de mécanisme d'induction, qui restait relativement floue jusqu'ici, devra être clairement définie. L'approche itérative de l'induction, où  $\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1 \rightarrow \vec{B}_2 \dots$  donne une interprétation qualitative intéressante et permettant de faire simplement le lien avec le problème de la dynamo par la recherche d'un schéma de bouclage. Dans la lignée de cette idée nous proposerons une définition générale et rigoureuse de la notion de mécanisme d'induction à partir du développement perturbatif en  $R_m$  de l'équation d'induction. Nous pourrons alors étendre l'aspect qualitatif de cette notion (qui reste un outil essentiel pour l'interprétation physique des expériences d'induction) à une étude numérique détaillée et rigoureuse des mécanismes d'induction et de la structure spatiale des champs magnétiques et des courants induits à partir du profil moyen des écoulements de von Kármán. Couplée à une étude expérimentale systématique de l'induction en fonction de  $R_m$ , cette approche nous permettra d'identifier clairement les mécanismes d'induction dans les écoulements réels.

- **Parmi ces mécanismes, lesquels sont susceptibles d'être à l'origine de l'instabilité suggérée par les dynamos numériques cinématiques et lesquels y sont défavorables ?** Il s'agit alors d'identifier parmi les mécanismes d'induction ceux pouvant conduire à un schéma de bouclage favorable à l'instabilité ainsi que ceux qui au contraire s'y opposent. La brisure de l'axisymétrie du système est pour cela indispensable. Elle est obtenue notamment par l'application d'un champ magnétique transverse perpendiculaire à l'axe de rotation des disques. Cette étude devra être en mesure de suggérer quels rôles jouent dans ces mécanismes les différentes composantes de l'écoulement (hécité, rotation différentielle, pompage centrifuge, etc.) et de suggérer des orientations en vue de maximiser leur efficacité à développer l'instabilité dynamo.

- **Les fluctuations de l'écoulement (et en particulier les fluctuations turbulentes) jouent-elles un rôle spécifique dans ces mécanismes ?** Il s'agira d'étudier les propriétés de l'induction spécifiques au caractère turbulent de l'écoulement et à ses éventuelles instationarités à grande échelle. L'influence de ces propriétés sur l'induction moyenne peut se faire en comparant les mesures aux prédictions numériques de l'approche perturbative (qui ne tiennent compte que du profil statistique moyen de l'écoulement.) La possibilité d'un effet  $\alpha$  turbulent sera tout particulièrement explorée. Enfin, nous nous intéresserons aux fluctuations magnétiques et à leur caractérisation, dans le cadre de la phénoménologie de Kolmogorov [41] pour la turbulence.

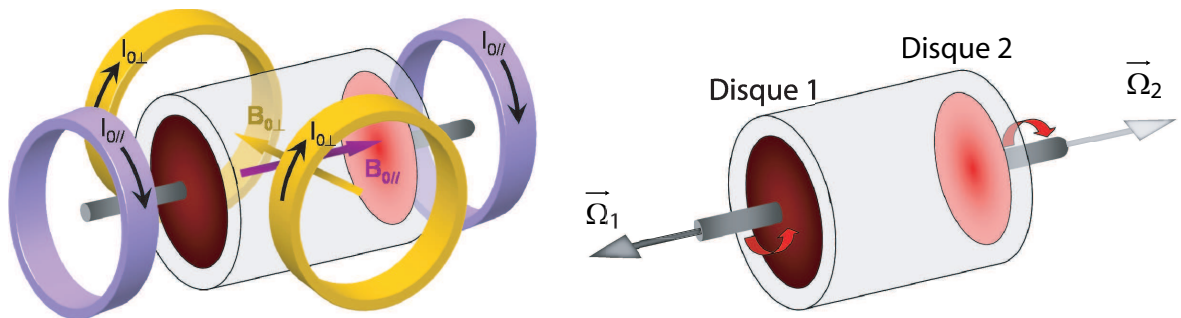
## I.7 Étude des propriétés de symétries des expériences von Kármán d'induction MHD

Nous terminons ce chapitre par une étude détaillée des principales propriétés de symétrie pour le problème de l'induction dans l'écoulement von Kármán, en présence d'un champ appliqué  $\vec{B}_0$ . Nous considérons dans un premier temps les propriétés seules de l'écoulement, pour un champ appliqué quelconque, puis nous détaillons ensuite ce qu'elles deviennent dans les cas particuliers d'un champ appliqué axial et d'un champ appliqué transverse (ce sont les deux principales configurations que nous aborderons par la suite.) Ces propriétés sont intrinsèques au dispositif expérimental et ne sont associées à aucune mise en équation ni formulation particulière du problème de l'induction (à l'exception de sa linéarité en  $\vec{B}_0$  justifiée par la limite où l'amplitude du champ magnétique reste suffisamment faible pour ne pas affecter l'écoulement.)

**Avertissement.** *Les propriétés de symétries étudiées dans ce chapitre nous seront régulièrement utiles pour discuter les résultats expérimentaux et numériques. La lecture complète et détaillée de cette section peut s'avérer relativement laborieuse et n'est certainement pas indispensable. Elle pourra en revanche être consultée aux moments requis.*

### I.7.1 Étude des symétries du champ magnétique induit pour un champ appliqué quelconque

Une configuration expérimentale donnée est entièrement définie par le régime de rotation des moteurs et le champ magnétique appliqué  $\vec{B}_0(\vec{r})$ . Nous caractériserons  $\vec{B}_0$  par la distribution de courants  $\mathcal{I}_0$  qui le crée. Par exemple, dans les expériences, le champ axial appliqué est produit par une paire de bobines de Helmholtz parcourues par le même courant  $I_{0//}$  et alignées avec l'axe  $0z$  de rotation des disques (figure I.18.) De même, le champ transverse est appliqué par circulation d'un même courant  $I_{0\perp}$  dans deux bobines



**Fig. I.18:** À gauche : le champ magnétique appliqué est obtenu par circulation d'un courant  $\mathcal{I}_0$  dans deux paires de bobines de Helmholtz disposées autour de l'écoulement. À droite : convention de signe pour le sens de rotation des disques ; les fréquences de rotation sont définies positives lorsque les vecteurs rotation de chaque disque sont sortants.

latérales identiques, dont l'axe commun définit l'axe  $Ox$ .

Le disque 1 et le disque 2 peuvent tourner a priori à des fréquences de rotation quelconques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement. Le signe de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  est pris positif lorsque les vecteurs rotation  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  sont sortants (figure I.18.) On ne parlera plus dorénavant que des amplitudes scalaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Dans la convention de signe adoptée :

- en régime contra-rotatif  $\Omega_1 = \Omega_2$  ;
- en régime co-rotatif  $\Omega_1 = -\Omega_2$  ;
- en régime à un seul disque en rotation ( $\Omega_1 = \Omega, \Omega_2 = 0$ ), l'opération "interchanger la rotation des disques" consiste à passer au régime ( $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \Omega$ ) : le sens de la rotation globale du fluide est alors renversé tout comme le sens de la recirculation centrifuge. L'opération "interchanger la rotation des disques" laisse donc inchangée l'hélicité de l'écoulement ;
- Pour un régime ( $\Omega_1 = \Omega, \Omega_2 = \Omega'$ ) quelconque, l'opération "interchanger la rotation des disques", consiste à passer au régime ( $\Omega_1 = \Omega', \Omega_2 = \Omega$ ). Cette opération laisse invariant un écoulement contra-rotatif ( $\Omega_1 = \Omega_2$ .)

D'après le principe de Curie [86], les symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La structure du champ magnétique induit dans une configuration d'écoulement et de champ appliqué donnée doit donc respecter les symétries de cette configuration.

Considérons alors la configuration définie par  $[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]$  et  $\mathcal{S}$  une transformation de symétrie quelconque (rotation, réflexion, etc.). Alors, si  $\vec{B}_{ind}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$  représente le champ magnétique induit par cette configuration, une traduction du principe de Curie est que le champ induit par la configuration symétrique s'obtient simplement par le symétrique du champ dans la configuration de départ :

$$\vec{B}_{ind}(\vec{r}; \mathcal{S}[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = \mathcal{S}\vec{B}_{ind}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.13})$$

Pour tous les points  $\vec{r}$  invariants par la transformation  $\mathcal{S}$ , cette relation impose une contrainte sur la valeur du champ induit en  $\vec{r}$ . Si on désigne par  $\text{Inv}_{\mathcal{S}}$  l'ensemble des points invariants par  $\mathcal{S}$ , alors

$$\vec{B}_{ind}(\vec{r} \in \text{Inv}_{\mathcal{S}}; \mathcal{S}[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = \mathcal{S}\vec{B}_{ind}(\vec{r} \in \text{Inv}_{\mathcal{S}}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.14})$$

Le tableau I.1 résume les principales propriétés de symétrie pertinentes dans les expériences de von Kármán. Nous détaillons à la suite uniquement le cas où  $\mathcal{S}$  est la rotation  $\mathcal{R}_{Ox}(\pi)$  d'axe  $Ox$  et d'angle  $\pi$ .

Considérons la configuration définie par  $[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]$ .

Les vecteurs rotation  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  sont échangés et renversés par  $\mathcal{R}_{Ox}$  :  $\mathcal{R}_{Ox}(\vec{\Omega}_1) = -\vec{\Omega}_2$  et  $\mathcal{R}_{Ox}(\vec{\Omega}_2) = -\vec{\Omega}_1$ . Compte tenu de la convention de signe adoptée, cela correspond donc à la transformation  $\mathcal{R}_{Ox}(\Omega_1) = \Omega_2$  et  $\mathcal{R}_{Ox}(\Omega_2) = \Omega_1$ . La distribution de courants  $\mathcal{I}_0$  devient  $\mathcal{R}_{Ox}\mathcal{I}_0$ . Les propriétés de symétrie de  $\mathcal{I}_0$  seront étudiées indépendamment par la suite, pour chaque configuration de champ appliqué.

Par ailleurs, à cause de la rotation du trièdre, tout vecteur  $(V_x, V_y, V_z)$  est transformé en  $(V_x, -V_y, -V_z)$ . Le champ induit  $(B_{ind,x}(\vec{r}), B_{ind,y}(\vec{r}), B_{ind,z}(\vec{r}))$  est donc transformé en

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{Ox}B_{ind,x}(\vec{r}) &= B_{ind,x}(\mathcal{R}_{Ox}^{-1}\vec{r}) ; \\ \mathcal{R}_{Ox}B_{ind,y}(\vec{r}) &= -B_{ind,y}(\mathcal{R}_{Ox}^{-1}\vec{r}) ; \\ \mathcal{R}_{Ox}B_{ind,z}(\vec{r}) &= -B_{ind,z}(\mathcal{R}_{Ox}^{-1}\vec{r}). \end{aligned}$$

$\mathcal{S}$	dispositif expérimental	Configuration expérimentale
$\mathbb{I}$		$[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$RO_x(\pi)$		$[\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$RO_y(\pi)$		$[\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$RO_z(\pi)$		$[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{xOy}$		$[-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{xOz}$		$[-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{yOz}$		$[-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{S}\mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$

**Tab. I.1:** Transformation de la configuration expérimentale par certaines symétries et conséquences sur le champ induit.

Les propriétés pour les autres transformations considérées dans le tableau I.1 s'obtiennent de la même façon en faisant attention, pour les transformations indirectes telles que les réflexion  $\Pi$  par rapport à un plan, au caractère pseudo-vectoriel du vecteur rotation et du vecteur champ magnétique : la transformation de leurs composantes est l'opposée de celle du trièdre de base.

Pour chaque configuration particulière de courant électrique appliqué, l'étude de ces symétries imposera des propriétés particulières du champ magnétique induit. Elle justifie notamment l'annulation de certaines composantes de  $\vec{B}_{ind}$  ainsi que leur comportement pair ou impair par les opérations "interchanger la rotation des disques" ou "inverser le sens de rotation des disques". Ces contraintes imposées par les symétries du dispositif expérimental nous seront utiles pour l'analyse des mesures d'induction.



**Remarque 1.** Tous les arguments de symétries exploités dans cette étude ne présupposent aucune hypothèse sur la mise en équation du problème. Dans une approche perturbative, les propriétés déduites sont donc valables à tout ordre.

**Remarque 2.** Pour les écoulements engendrés par des disques à pales courbes, ces arguments supposent que lorsqu'on applique une transformation, on considère l'écoulement engendré par des disques images de ceux de la configuration de base. En particulier, toute transformation menant à une configuration où le signe de la fréquence de rotation est renversé, suppose que la courbure des pales des disques est renversée. Les propriétés déduites des transformations  $\Pi_{xOz}$ ,  $\Pi_{yOz}$ ,  $\Pi_{xOy}$  ne s'appliquent donc pas aux expériences utilisant des disques à pales courbes.

## I.7.2 Cas d'un champ appliqué axial

Nous détaillons à présent les propriétés de symétrie intrinsèques pour le champ magnétique induit en y précisant les transformations  $\mathcal{ST}_0$  de la configuration de la distribution de courants appliqué  $I_{0//}$ . La distribution de courants engendrant le champ axial respecte l'axisymétrie de l'écoulement. Les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont donc équivalents (et équivalents à n'importe quel axe perpendiculaire à  $Oz$ ), de telle sorte que nous ne considérons que les transformations  $\mathcal{R}_{Ox}$ ,  $\mathcal{R}_{Oz}$ ,  $\Pi_{xOy}$  et  $\Pi_{xOz}$ .

Le tableau I.2 résume le comportement de  $\mathcal{I}_0$  lorsqu'on applique les mêmes transformation qu'au §I.7.1. La dernière colonne du tableau donne la configuration totale (régime de rotation des disques et distribution de courant appliqué) résultant de ces transformations et les contraintes conséquentes sur le champ magnétique induit. Attention, nous avons également utilisé le fait que le problème de l'induction est linéaire en  $\vec{B}_0$  (d'après II.27) et donc  $\vec{B}_{ind}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, -\mathcal{I}_0]) = -\vec{B}_{ind}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0])$ . Dans la configuration de base  $(\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0)$ , les deux bobines sont parcourues par le même courant  $I_0$ .

Les contraintes sur le champ induit imposées par chacune de ces transformations sont particulièrement intéressantes lorsqu'on les considère sur les points invariants par ces transformations (dans le cas particulier d'un champ axial appliqué, on peut se restreindre de plus aux seuls points du plan  $xOz$ , les propriétés ainsi obtenues pouvant être étendues à l'ensemble du volume par la symétrie de révolution du problème.)

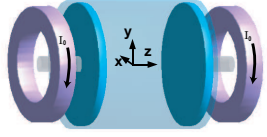
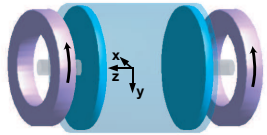
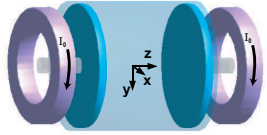
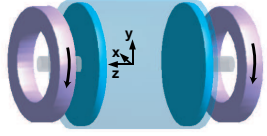
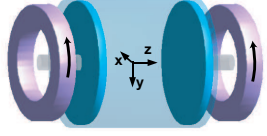
- La transformation  $\Pi_{xOz}$  impose qu'en tout point du plan  $xOz$ ,  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,z}$  doivent être pairs par rapport au sens de rotation et  $B_{ind,y}$  impair. Par symétrie de révolution, on en déduit que  $B_{ind,r}$  et  $B_{ind,z}$  sont pairs en sens de rotation en tout point du volume et que  $B_{ind,\theta}$  est impair :

$$B_{ind,r}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = B_{ind,r}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, I_0]) ; \quad (\text{I.15})$$

$$B_{ind,\theta}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = -B_{ind,\theta}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, I_0]) ; \quad (\text{I.16})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, I_0]) . \quad (\text{I.17})$$

- La transformation  $\mathcal{R}_{Ox}$  impose qu'en tout point de l'axe  $Ox$ ,  $B_{ind,x}$  est impair en changement de disque,  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  sont pairs. Par symétrie de révolution, on en déduit que  $B_{ind,r}$  est impair en changement de disque en tout point du plan  $xOy$  et que  $B_{ind,\theta}$  et

$\mathcal{S}$	dispositif expérimental	Configuration expérimentale
$\parallel$		$[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$R_{O_x}(\pi)$		$[\Omega_2, \Omega_1, -\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$R_{O_z}(\pi)$		$[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{xOy}$		$[-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{xOz}$		$[-\Omega_1, -\Omega_2, -\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$

**Tab. I.2:** Transformation de la distribution de courant appliquée par les bobines axiales et conséquences sur le champ induit

$B_{ind,z}$  y sont pairs.

$$B_{ind,r}(\vec{r} \in xOy; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = -B_{ind,r}(\vec{r} \in xOy; [\Omega_2, \Omega_1, I_0]) ; \quad (\text{I.18})$$

$$B_{ind,\theta}(\vec{r} \in xOy; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = B_{ind,\theta}(\vec{r} \in xOy; [\Omega_2, \Omega_1, I_0]) ; \quad (\text{I.19})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in xOy; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = B_{ind,z}(\vec{r} \in xOy; [\Omega_2, \Omega_1, I_0]). \quad (\text{I.20})$$

• Les contraintes imposées par la transformation  $\Pi_{xOy}$  aux points du plan  $xOy$  sont redondantes avec les deux contraintes ci-dessus.

• Enfin la transformation  $\mathcal{R}_{Oz}$ , qui ne traduit rien d'autre que l'axisymétrie du problème, impose que  $B_{ind,r}$  et  $B_{ind,\theta}$  s'annulent en tout point de l'axe  $Oz$ .

$$B_{ind,r}(\vec{r} \in Oz; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = 0 ; \quad (\text{I.21})$$

$$B_{ind,\theta}(\vec{r} \in Oz; [\Omega_1, \Omega_2, I_0]) = 0. \quad (\text{I.22})$$

**Remarque.** Dans le cas particulier d'un régime contra-rotatif ( $\Omega_1 = \Omega_2$ ), le système reste invariant par changement de disque. Toute contribution impaire par cette opération doit donc être nulle. C'est le cas notamment de la composante radiale du champ induit dans le plan  $xOy$  (I.18).

### I.7.3 Cas d'un champ appliqué transverse

Le tableau I.3 résume le comportement de la distribution de courants  $\mathcal{I}_0$  produisant le champ appliqué transverse, lorsqu'on applique les mêmes transformations qu'au §I.7.1. Dans la configuration de base ( $\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0$ ), les deux bobines sont parcourues par le même courant  $I_0$ . On déduit de ces propriétés de symétrie un certain nombre de contraintes pour le champ magnétique induit :

• La transformation  $\mathcal{R}_{Ox}$  impose qu'en tout point de l'axe  $Ox$ ,  $B_{ind,x}$  est pair en changement de disque et  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  sont impairs :

$$B_{ind,x}(\vec{r} \in Ox; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\vec{r} \in Ox; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.23})$$

$$B_{ind,y}(\vec{r} \in Ox; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\vec{r} \in Ox; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.24})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in Ox; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\vec{r} \in Ox; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.25})$$

• La transformation  $\mathcal{R}_{Oy}$  impose qu'en tout point de l'axe  $Oy$ ,  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,z}$  sont pairs en changement de disque et  $B_{ind,y}$  est impair :

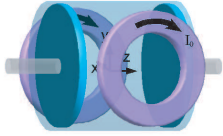
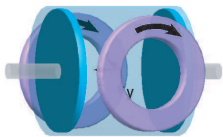
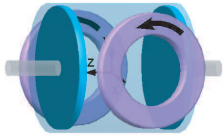
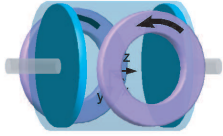
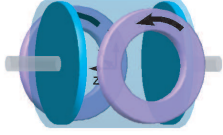
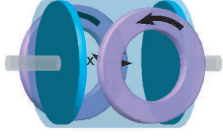
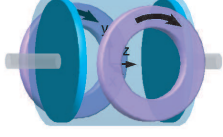
$$B_{ind,x}(\vec{r} \in Oy; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\vec{r} \in Oy; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.26})$$

$$B_{ind,y}(\vec{r} \in Oy; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\vec{r} \in Oy; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.27})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in Oy; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\vec{r} \in Oy; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.28})$$

• La transformation  $\mathcal{R}_{Oz}$  impose que  $B_{ind,z}$  s'annule en tout point de l'axe  $Oz$  :

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in Oz; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = 0. \quad (\text{I.29})$$

$\mathcal{S}$	dispositif expérimental	Configuration expérimentale
$\mathbb{1}$		$[\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$R_{Ox}(\pi)$		$[\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$R_{Oy}(\pi)$		$[\Omega_2, \Omega_1, -\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_2, \Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$R_{Oz}(\pi)$		$[\Omega_1, \Omega_2, -\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{xOy}$		$[-\Omega_2, -\Omega_1, -\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_2, -\Omega_1, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{xOz}$		$[-\Omega_1, -\Omega_2, -\mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$
$\Pi_{yOz}$		$[-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]$ $B_{ind,x}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,y}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$ $B_{ind,z}(\vec{r}; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\mathcal{S}^{-1}\vec{r}; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0])$

**Tab. I.3:** Transformation de la distribution de courant appliqué par les bobines transverses et conséquences sur le champ induit.

• La transformation  $\Pi_{xOz}$  impose qu'en tout point du plan  $xOz$ ,  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,z}$  sont pairs par rapport au sens de la rotation et  $B_{ind,y}$  est impair :

$$B_{ind,x}(\vec{r} \in xOz; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\vec{r} \in xOz; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.30})$$

$$B_{ind,y}(\vec{r} \in xOz; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\vec{r} \in xOz; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.31})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in xOz; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,z}(\vec{r} \in xOz; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.32})$$

• La transformation  $\Pi_{yOz}$  impose qu'en tout point du plan  $yOz$ ,  $B_{ind,x}$  est pair par rapport au sens de la rotation et  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  sont impairs :

$$B_{ind,x}(\vec{r} \in yOz; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\vec{r} \in yOz; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.33})$$

$$B_{ind,y}(\vec{r} \in yOz; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,y}(\vec{r} \in yOz; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.34})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in yOz; [\Omega_1, \Omega_2, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\vec{r} \in yOz; [-\Omega_1, -\Omega_2, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.35})$$

• La transformation  $\Pi_{xOy}$  impose qu'en tout point de  $xOy$ , si les composantes  $B_{ind,x}$ ,  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  sont paires en changement de disque, alors  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,y}$  sont pairs par rapport au sens de rotation et  $B_{ind,z}$  est impair (et le contraire si  $B_{ind,x}$ ,  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  sont impairs en changement de disque.) Compte tenu des relations (I.23) à (I.28), on retrouve ainsi la restriction à l'axe  $Ox$  des relations (I.30) à (I.32) et la restriction à l'axe  $Oy$  des relations (I.33) à (I.35).

**Cas contra-rotatif** ( $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ ) En régime contra-rotatif, toute contribution impaire en changement de disque est nécessairement nulle :

$$\text{d'après I.24} \quad B_{ind,y}(\vec{r} \in Ox; [\Omega, \Omega, \mathcal{I}_0]) = 0 ; \quad (\text{I.36})$$

$$\text{d'après I.25} \quad B_{ind,z}(\vec{r} \in Ox; [\Omega, \Omega, \mathcal{I}_0]) = 0 ; \quad (\text{I.37})$$

$$\text{d'après I.27} \quad B_{ind,y}(\vec{r} \in Oy; [\Omega, \Omega, \mathcal{I}_0]) = 0. \quad (\text{I.38})$$

Par ailleurs, la transformation  $\Pi_{xOy}$  impose qu'en régime contra-rotatif, en tout point du plan médian,  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,y}$  sont pairs et  $B_{ind,z}$  est impair :

$$B_{ind,x}(\vec{r} \in xOy; [\Omega, \Omega, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,x}(\vec{r} \in xOy; [-\Omega, -\Omega, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.39})$$

$$B_{ind,y}(\vec{r} \in xOy; [\Omega, \Omega, \mathcal{I}_0]) = B_{ind,y}(\vec{r} \in xOy; [-\Omega, -\Omega, \mathcal{I}_0]) ; \quad (\text{I.40})$$

$$B_{ind,z}(\vec{r} \in xOy; [\Omega, \Omega, \mathcal{I}_0]) = -B_{ind,z}(\vec{r} \in xOy; [-\Omega, -\Omega, \mathcal{I}_0]). \quad (\text{I.41})$$

## Chapitre II

# Les mécanismes d'induction

Lorsque l'écoulement d'un liquide conducteur évolue en présence d'un champ magnétique, des mécanismes d'induction complexes se produisent, où l'état final atteint par le système résulte d'un équilibre entre la création de courants électriques induits (par le mouvement du conducteur en présence du champ magnétique) et la dissipation de ces courants par effet Joule (due à la résistance non nulle du milieu.) Dans un milieu homogène, la topologie des courants induits peut être relativement complexe, dans la mesure où aucune contrainte (autre que d'inévitables conditions aux limites) ne leur est imposée. Cette complexité se retrouve naturellement dans la topologie du champ magnétique induit associé.

La situation se complique davantage lorsque l'intensité du champ magnétique est suffisante pour que les effets de la force de Lorentz viennent en retour modifier la structure de l'écoulement. L'état final résulte alors du couplage subtil entre les deux équilibres induction/dissipation en ce qui concerne les grandeurs magnétiques, et force de Lorentz/"forces hydrodynamiques" en ce qui concerne l'écoulement (selon le régime de l'écoulement, les "forces hydrodynamiques" peuvent être les forces de pression, les contraintes visqueuses, les forces d'inertie, ...) Ces deux équilibres sont régis par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$ , qui compare l'importance relative de l'induction et de la dissipation Joule, et le paramètre d'interaction  $N$ , qui compare l'importance relative de l'énergie magnétique et de l'énergie mécanique du système.

Nous nous intéressons plus particulièrement dans cette étude à la compréhension des mécanismes d'induction et à la compétition entre les phénomènes inductifs et les effets dissipatifs. Nous considérons pour cela le cas typique où un écoulement donné évolue en présence d'un champ magnétique appliqué et nous cherchons à déterminer l'état final du système (structure spatiale des courants induits et du champ magnétique associé) et à

donner une description aussi claire que possible des mécanismes conduisant à cet état final. Dans cette optique, nous développons une approche donnant une interprétation à la fois intuitive et rigoureuse des mécanismes d'induction, à l'image de la description par étapes successives de la dynamo homopolaire et de la dynamo  $\Omega^2$  de Lowes et Wilkinson. C'est donc l'équilibre induction/dissipation et la recherche d'un bouclage où le champ induit viendrait se superposer au champ initial pour engendrer une instabilité dynamo, qui sera au coeur de l'étude. Nous nous plaçons ainsi dans un régime de faible paramètre d'interaction où le champ de vitesse est donné et n'est pas perturbé par le champ magnétique. On parle alors d'approche "cinématique" où le champ magnétique se comporte comme un vecteur passif vis-à-vis de l'écoulement. Bien entendu, l'approche cinématique cesse d'être valide si l'instabilité dynamo croît. La contre-réaction du champ magnétique sur l'écoulement devient indispensable pour décrire la structure du champ de vitesse et du champ magnétique à saturation. Nous nous limiterons ici à l'étude des mécanismes d'induction et à leur éventuelle contribution au déclenchement de la croissance d'un champ magnétique par effet dynamo mais nous n'aborderons pas la question de la saturation de ce champ.

## II.1 Équations de la magnétohydrodynamique

### II.1.1 Approximation MHD

Nous nous intéressons à la mise en équation des phénomènes d'induction se produisant dans un liquide conducteur (typiquement un métal liquide) de conductivité  $\sigma$ , de perméabilité magnétique  $\mu_0$  et dont l'écoulement est décrit par le champ de vitesse  $\vec{u}$ . Le champ électromagnétique dans le milieu est régi par les lois de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (\text{II.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (\text{II.3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}, \quad (\text{II.4})$$

où  $\rho_e$  représente la densité volumique de charge dans le fluide conducteur et  $\vec{j}$  la densité volumique de courant.

Nous nous plaçons dans la limite d'une étude non-relativiste, où la vitesse typique de l'écoulement reste très inférieure à la vitesse de la lumière. Les phénomènes d'induction résultent du mouvement du liquide conducteur. Le temps caractéristique de l'évolution des champs induits reste donc de l'ordre du temps advectif caractéristique de l'évolution de l'écoulement

$$\tau_a = \frac{L}{U}, \quad (\text{II.5})$$

où  $U$  désigne la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $L$  l'échelle de longueur typique sur laquelle il évolue. Un argument dimensionnel à partir des équations de Maxwell-Faraday (II.3) et de Maxwell-Ampère (II.4), permet d'estimer l'importance relative du

terme de courant de déplacement  $\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$  par rapport à  $\vec{\nabla}\times\vec{B}$  :

$$\frac{\left|\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}\right|}{\left|\vec{\nabla}\times\vec{B}\right|}\sim\frac{U^2}{c^2}\ll 1. \quad (\text{II.6})$$

Dans la limite non-relativiste, le terme de courant de déplacement peut donc être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère (II.4), qui s'écrit alors simplement

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}. \quad (\text{II.7})$$

### II.1.1.1 Loi d'Ohm

Soit  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  les champs électrique et magnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à une particule fluide  $P$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{u}$ . Nous admettrons que le fluide conducteur vérifie la loi d'Ohm, de telle sorte que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , où  $P$  est au repos, la densité de courant électrique  $\vec{j}'$  est reliée à  $\vec{E}'$  par :

$$\vec{j}'(\vec{r},t)=\sigma\vec{E}'(\vec{r},t). \quad (\text{II.8})$$

Par ailleurs, dans la limite non-relativiste, les champs électrique et magnétique, ainsi que la densité de courant, obéissent aux lois de changement de référentiel classiques :

$$\vec{E}'=\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}, \quad \vec{B}'=\vec{B}, \quad \vec{j}'=\vec{j}.$$

On en déduit alors l'expression suivante pour la loi d'Ohm reliant  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{j}$  dans le référentiel fixe  $\mathcal{R}$

$$\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right). \quad (\text{II.9})$$

La validité de la loi d'Ohm, et notamment la définition de la conductivité comme une grandeur constante caractéristique de la structure moléculaire de fluide, restent soumises à un certain nombre de conditions. Dans un modèle simple, de type modèle de Drude, où les effets résistifs seraient décrits en terme de collisions entre les électrons libres et les ions, on peut préciser le cadre de validité de la loi d'Ohm.

L'écoulement du fluide est en fait représentatif du déplacement des ions, beaucoup plus lourds que les électrons. Cette hypothèse, dite de "fluide simple" ("single fluid") illustre le fait que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du centre de masse d'une particule fluide, seul le mouvement des électrons libres, dont la mobilité est très supérieure à celle des ions, assure la conduction électrique du milieu. Dans ce cadre, si  $\omega$  représente la fréquence typique du champ électromagnétique (c'est-à-dire la fréquence typique de l'écoulement,  $\omega=\frac{1}{\tau_a}$ ) et  $\tau_c$  le temps caractéristique entre deux collisions électron-ion, on obtient l'expression suivante pour la conductivité en l'absence de champ magnétique ([3]) :

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau_c} \quad \text{avec} \quad \sigma_0=\frac{ne^2\tau_c}{m}, \quad (\text{II.10})$$

où  $n$  est la densité électronique,  $e$  et  $m$  respectivement la charge et la masse de l'électron. Cette expression montre que  $\sigma$  peut être considérée comme indépendante de la fréquence  $\omega$  à condition que

$$\omega\tau_c\ll 1. \quad (\text{II.11})$$



Ceci signifie que l'écoulement évolue sur des temps beaucoup plus longs que l'intervalle entre deux collisions électron-ion. On parle alors d'un milieu *collisionnel*. Dans un métal liquide,  $\tau_c \sim 10^{-14}$  s de sorte que la condition (II.11) est vérifiée, même en régime fortement turbulent. En revanche, pour des plasmas astrophysiques très dilués, le temps entre collisions électron-ion peut devenir grand et la condition (II.11) peut ne plus être vérifiée.

La présence supplémentaire d'un champ magnétique  $\vec{B}$  va perturber la trajectoire des électrons, de sorte que les propriétés de transport électrique vont être modifiées. Dans ces conditions, on peut montrer que  $\sigma$  devient un tenseur anisotrope tenant compte de la magnétorésistance du milieu et de l'effet Hall. Toutefois, la conductivité du milieu pourra être supposée isotrope et indépendante de  $\vec{B}$  tant que la trajectoire des électrons entre deux collisions ne sera pas notablement modifiée par la présence du champ magnétique. La fréquence caractéristique de la perturbation du déplacement électronique par le champ magnétique est donnée par la fréquence de Larmor  $\omega_L = \frac{eB}{m}$ , et la condition que nous venons d'énoncer s'écrit :

$$\omega_L \tau_c \ll 1. \quad (\text{II.12})$$

Pour un métal liquide, cette condition est en général vérifiée (on peut estimer une limite supérieure admissible pour le champ magnétique afin d'assurer la condition (II.12) par  $B \ll \frac{m}{e\tau_c} \sim 10^3$  T!) Nous négligerons donc dans la suite les effets magnétorésistifs et nous admettrons que dans la loi d'Ohm (II.9),  $\sigma$  est une constante isotrope ne dépendant que des propriétés structurelles locales du matériau étudié.

### II.1.1.2 La conservation de la charge et le potentiel électrique

La densité de courant  $\vec{j}$  doit satisfaire à l'équation de conservation de la charge :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho_e = 0. \quad (\text{II.13})$$

En reportant la loi d'Ohm dans la relation (II.13), on obtient la loi d'évolution de la densité de charge dans le milieu :

$$\partial_t \rho_e + \sigma \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = -\sigma \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (\text{II.14})$$

Contrairement au cas d'un conducteur au repos, où la densité de charge s'annule après un court régime transitoire dont la durée est de l'ordre de  $\frac{\epsilon_0}{\sigma}$ , le mouvement du conducteur en présence d'un champ magnétique constitue une source de charge électrique dont la densité en régime stationnaire est donnée par  $-\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B})$ .

Cette densité de charge peut être interprétée en terme de création d'un potentiel électrique. En effet, le champ  $\vec{E}$  s'écrit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi + \partial_t \vec{A}, \quad (\text{II.15})$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur défini par la relation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Reportée dans la loi d'Ohm, cette relation mène à l'expression suivante pour la densité de courant :

$$\vec{j} = \sigma \left( -\vec{\nabla} \phi + \partial_t \vec{A} + \vec{u} \times \vec{B} \right). \quad (\text{II.16})$$

Sous la condition de jauge de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ), la divergence de  $\vec{j}$  s'exprime sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \sigma \left( -\Delta\phi + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \right), \quad (\text{II.17})$$

or, la relation de conservation de la charge (II.13) impose qu'en régime stationnaire la densité de courant soit à divergence nulle. Le champ électromoteur induit  $\vec{e} = \vec{u} \times \vec{B}$  n'étant pas en général à divergence nulle, la conservation de la charge requiert l'apparition d'un potentiel électrique  $\phi$ . Celui-ci est alors solution de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}. \quad (\text{II.18})$$

Lorsqu'un conducteur est en mouvement en présence d'un champ magnétique, les charges s'y répartissent de sorte à engendrer un potentiel électrique  $\phi$  assurant l'annulation de la divergence de  $\vec{j}$  par compensation de la contribution du champ électromoteur induit  $\vec{e}$ .

**Remarque.** On peut estimer l'ordre de grandeur de la densité de charge induite dans l'écoulement conducteur par

$$[\rho_e] \sim \epsilon_0 \frac{U\mathcal{B}}{L}.$$

où  $U$ ,  $L$  et  $\mathcal{B}$  sont respectivement les valeurs caractéristiques de la vitesse, de la taille et du champ magnétique du système. Dans les expériences MHD que nous étudierons :  $U \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $L \sim 10^{-1} \text{ m}$  et  $\mathcal{B} \sim 10^{-2} \text{ T}$ . La densité de charge résultante est donc de l'ordre de  $[\rho_e] \sim 10^{-10} \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ . Elle est donc extrêmement faible par rapport à la densité de charges libres dans le métal  $\rho_l \sim 10^9 \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ .

### II.1.1.3 Bilan sur les approximations MHD

Pour résumer la discussion de ce paragraphe, nous nous placerons dorénavant dans les approximations suivantes :

- **fluide non-relativiste** :  $U \ll c$ ; courants de déplacement négligés dans l'équation de Maxwell-Ampère (II.4) ;
- **fluide simple** : seuls les électrons contribuent à la conduction électrique ;
- **fluide collisionnel** :  $U \ll L/\tau_c$ ; la conductivité du milieu est alors indépendante de la vitesse du fluide ;
- **le mouvement des électrons est insensible à la présence d'un champ magnétique** :  $B \ll \frac{m}{e\tau_c}$ ; la conductivité du milieu est alors indépendante du champ magnétique.

Les trois dernières approximations assurant la validité de la loi d'Ohm sous la forme  $\vec{j} = \sigma \left( \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)$  où la conductivité  $\sigma$  est une grandeur scalaire (éventuellement inhomogène sur l'ensemble du fluide.)

### II.1.2 Equation d'induction du champ magnétique

En reportant l'expression de  $\vec{j}$  donnée par la loi d'Ohm dans l'équation de Maxwell-Ampère (II.4), et en utilisant la relation de Maxwell-Faraday (II.3), on obtient l'équation

d'induction pour le champ magnétique. Dans un milieu de conductivité uniforme elle s'écrit :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda \Delta \vec{B}. \quad (\text{II.19})$$

Cette équation régit l'évolution du champ magnétique dans le système. Le membre de droite de (II.19) montre que deux termes contribuent à l'évolution de  $\vec{B}$  :

- **L'induction** : décrite par le premier terme, elle traduit l'action du mouvement du fluide conducteur sur le champ magnétique (et par le champ magnétique).
- **La dissipation par effet Joule** : décrite par le deuxième terme, elle traduit la diffusion du champ magnétique résultant de la dissipation des courants électriques dans le conducteur. La grandeur  $\lambda = (\mu_0 \sigma)^{-1}$  est la diffusivité magnétique du milieu et doit être vue comme un coefficient de diffusion. C'est un paramètre caractéristique du conducteur étudié.

Nous supposons que l'écoulement conducteur occupe un volume borné  $\mathcal{V}$  délimité par une surface  $\mathcal{S}$ . Au-delà, le milieu extérieur est supposé au repos ; il peut être isolant ou conducteur de conductivité a priori quelconque. L'équation d'induction doit donc être complétée par la donnée des conditions aux limites que doit satisfaire le champ magnétique sur  $\mathcal{S}$ . La question des conditions aux limites magnétiques constitue une question qui mérite d'être développée en détail et que nous aborderons plus loin. Dans tous les cas, nous admettrons qu'il n'y a pas de courants électriques à l'infini et que le champ magnétique s'y annule.

**Remarque 1 : Interprétation énergétique de l'équation d'induction.**

En la multipliant scalairement par  $\vec{B}/\mu_0$  et en l'intégrant sur tout l'espace, l'équation d'induction (II.19) donne

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{E}} \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\vec{r}} &= \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{E}} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) d^3\vec{r}} + \underbrace{\frac{\lambda}{\mu_0} \int_{\mathcal{E}} \vec{B} \cdot \Delta \vec{B} d^3\vec{r}} \\ \frac{d E_m}{dt} &= \mathcal{I}_m + \mathcal{P}_J \end{aligned} \right|, \quad (\text{II.20})$$

La grandeur  $E_m = \int_{\mathcal{E}} \frac{B^2}{2\mu_0}$  représente l'énergie magnétique totale du système et la relation (II.20) n'est rien d'autre que le bilan énergétique magnétique du système.  $E_m$  évolue selon deux contributions  $\mathcal{I}_m$  et  $\mathcal{P}_J$ . La première correspond à la conversion de l'énergie mécanique de l'écoulement en énergie magnétique par induction, son signe est a priori indéterminé et dépend de la nature du champ de vitesse  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ . La seconde,  $\mathcal{P}_J$ , est toujours négative et correspond

aux pertes énergétiques par effet Joule :

$$\mathcal{P}_J = -\lambda \int_{\mathcal{E}} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}) d^3\vec{r} \quad (\text{II.21})$$

$$= -\lambda \int_{\mathcal{E}} \vec{j} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) d^3\vec{r} \quad (\text{II.22})$$

$$= -\lambda \int_{\mathcal{E}} \vec{j} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d^3\vec{r} - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_{\infty}} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} d^2\vec{r}}_{0 \text{ car } \left| \vec{B} \right| \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} 0} \quad (\text{II.23})$$

$$0 \text{ car } \left| \vec{B} \right| \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{II.24})$$

$$= - \int_{\mathcal{E}} \sigma^{-1} j^2 d^3\vec{r}. \quad (\text{II.25})$$

**Remarque 2 : Cas d'un champ appliqué  $\vec{B}_0$ .** Nous serons longuement amenés à considérer le cas d'un système évoluant en présence d'un champ magnétique extérieur appliqué  $\vec{B}_0$ . On pourra alors écrire pour le champ magnétique total

$$\vec{B} = \vec{B}_{ind} + \vec{B}_0, \quad (\text{II.26})$$

où  $\vec{B}_{ind}$  représente le champ magnétique effectivement induit par l'écoulement. En remplaçant  $\vec{B} = \vec{B}_{ind} + \vec{B}_0$  dans l'équation d'induction (II.19) on obtient l'équation suivante pour  $\vec{B}_{ind}$  :

$$\partial_t \vec{B}_{ind} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_{ind}) - \lambda \Delta \vec{B}_{ind} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) + \lambda \Delta \vec{B}_0. \quad (\text{II.27})$$

**Remarque 3 : Cas d'un milieu de conductivité inhomogène.** L'équation d'induction (II.19) est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère (II.7)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \left( \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right),$$

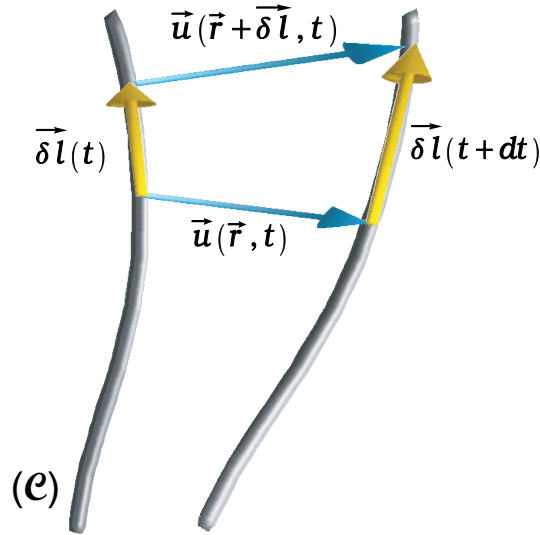
où la conductivité dans la loi d'Ohm est supposée homogène. Si l'on admet qu'elle puisse être inhomogène, le rotationnel de l'expression ci-dessus conduit, compte tenu de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , de  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  à

$$\mu_0 \sigma \partial_t \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B} + \left( \frac{\vec{\nabla} \sigma}{\sigma} \right) \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (\text{II.28})$$

qui, en termes de la diffusivité magnétique  $\lambda$ , s'écrit simplement :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda \Delta \vec{B} - \vec{\nabla} \lambda \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{II.29})$$

Par rapport à l'équation d'induction (II.19), celle-ci présente le terme supplémentaire  $-\vec{\nabla} \lambda \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$  traduisant les effets de l'inhomogénéité de la conductivité du milieu. De tels effets peuvent jouer un rôle non-négligeable



**Fig. II.1:** Évolution d'une ligne matérielle se déplaçant avec le fluide

dans les systèmes naturels tels que le noyau terrestre, où le gradient radial de température engendre nécessairement un gradient de conductivité [18]. Comme nous le verrons, ce terme permet également une formulation particulièrement utile du problème général des conditions aux limites dans la modélisation des dispositifs expérimentaux.

### II.1.2.1 Limite d'un milieu de conductivité infinie

Si l'on se place dans le cas limite où le fluide considéré est de conductivité infinie (i.e. de diffusivité magnétique nulle), l'équation d'induction se résume à

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (\text{II.30})$$

Lorsque l'écoulement est incompressible le champ de vitesse est à divergence nulle, tout comme le champ magnétique et donc  $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$ . L'équation (II.30) peut alors se mettre sous la forme équivalente

$$D_t \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}, \quad (\text{II.31})$$

où  $D_t = \partial_t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$  est la dérivée particulaire. Cette relation traduit le fait que, dans la limite de conductivité infinie, les lignes de champ magnétiques suivent parfaitement le mouvement du fluide (on décrit souvent cet effet en disant que les lignes de champ magnétique sont "gelées" dans le fluide.) Une interprétation simple de ce comportement peut être illustrée en considérant le déplacement infinitésimal d'une ligne matérielle (C) de particules de fluide (fig.II.1) :

$$D_t \vec{\delta l} = (\vec{\delta l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}. \quad (\text{II.32})$$

L'évolution d'une ligne matérielle de particules fluides est donc dictée par la même relation que pour le champ magnétique. Une ligne de champ magnétique coïncidant à

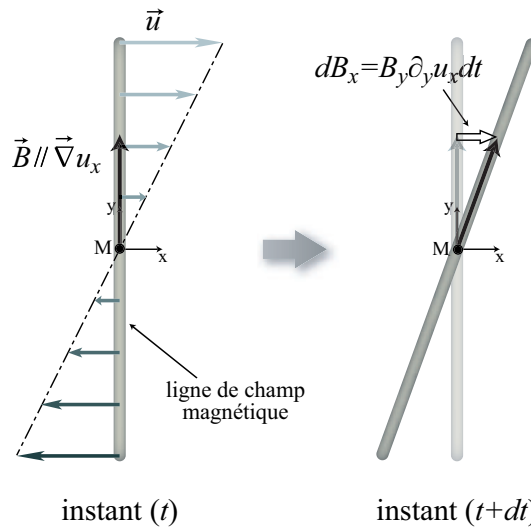
l'instant  $t = 0$  avec une ligne matérielle de particules fluide ( $\mathcal{C}$ ) évoluera donc exactement comme si elle était *accrochée* à cette ligne matérielle.

**Remarque.** Dans le cas d'un fluide compressible, ce résultat reste valable à condition de l'appliquer à la grandeur  $\frac{\vec{B}}{\rho}$  (et non plus à  $\vec{B}$ ), où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

Cette tendance du champ magnétique à suivre le mouvement du fluide constitue la base des phénomènes d'induction en magnétohydrodynamique. Elle peut être décomposée en deux contributions fondamentales de l'écoulement à l'induction, qui apparaissent explicitement en réécrivant l'équation (II.30) sous la troisième forme équivalente suivante

$$\partial_t \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (\text{II.33})$$

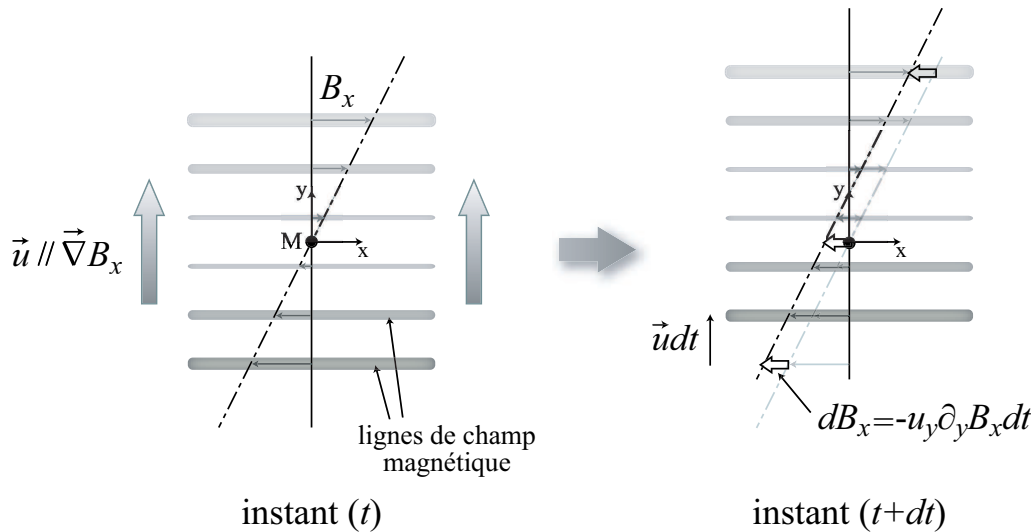
• **Déformation des lignes de champ par les gradients de vitesse.** Le premier terme du membre de droite de la relation (II.33) traduit la déformation des lignes de champ par les gradients de vitesse. Considérons l'exemple simple d'un champ de vitesse non uniforme et supposons qu'à un instant  $t$  le champ magnétique soit homogène au voisinage d'un point  $M$  dans le fluide, de telle sorte que seul le premier terme de (II.33) y soit non nul. L'évolution du champ magnétique en  $M$  s'obtient en considérant que le champ magnétique est "gelé" dans le fluide (figure II.2). Ainsi, la torsion imposée par le gradient de vitesse aux lignes de champ magnétique va induire en  $M$  à l'instant  $t + dt$  le champ  $d\vec{B}$  donné par  $d\vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \Big|_M dt$ .



**Fig. II.2:** Déformation d'un champ homogène par un gradient de vitesse

• **Transport des gradients magnétiques par l'écoulement.** Le deuxième terme traduit le transport des lignes de champ magnétiques par le champ de vitesse. Considérons le cas d'un champ de vitesse uniforme et d'un champ magnétique non uniforme au voisinage d'un point  $M$  à l'instant  $t$ . Une fois de plus l'évolution du champ magnétique

s'obtient en considérant qu'il est "gelé" dans le fluide (figure II.3). Les lignes de champ sont alors tout simplement transportées par l'écoulement induisant en  $M$  à l'instant  $t + dt$  le champ  $d\vec{B}$  donné par  $d\vec{B} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \Big|_M dt$ .



**Fig. II.3:** Transport d'un gradient de champ magnétique par un champ de vitesse uniforme

Déformation du champ magnétique par les gradients de vitesse et transport par l'écoulement sont les deux ingrédients élémentaires des mécanismes d'induction dans les fluides conducteurs. Ils conduisent tous deux à la modification de la topologie du champ magnétique et se produisent typiquement sur une échelle de temps donnée par le temps advectif  $\tau_a = \frac{U}{L}$ , caractéristique du transport par l'écoulement. Ces deux éléments de base suggèrent une description particulièrement intuitive des processus d'induction magnétohydrodynamique et offrent un outil à la fois riche et simple pour les interprétations physiques des mesures expérimentales d'induction. Ce confort atteint toutefois rapidement ses limites dans les écoulements réels (que ce soit dans le noyau terrestre ou dans les expériences) : le caractère intrinsèquement local des mécanismes décrits ci-dessus est mal adapté à la complexité topologique de ces écoulements qui se reflète inévitablement dans la structure tridimensionnelle globale des champs induits. Par ailleurs, dans les systèmes réels, deux autres effets devront être pris en compte :

1. **La diffusion magnétique** : les écoulements réels possèdent une résistivité (et donc une diffusivité magnétique  $\lambda$ ) non-nulle. La longueur de diffusion, caractéristique de l'étalement des courants électriques et du champ magnétique, est donnée par  $l_d \sim \sqrt{\lambda \tau_a}$ . Dans les écoulements de métaux liquides que nous considérons, cette longueur n'est jamais négligeable devant la taille intégrale de l'écoulement (même pour les plus grandes vitesses atteintes par le fluide,  $l_d$  reste au moins de l'ordre de quelques pour cents de la taille intégrale.) La diffusion magnétique rend donc le problème de l'induction intrinsèquement non local.
2. **La présence d'une discontinuité de conductivité** au niveau de la paroi délimitant le volume de l'écoulement est à l'origine d'effets inductifs subtils, qui n'apparaissent pas directement dans l'équation d'induction (écrite sous sa forme usuelle

II.19.) Du fait de la grande longueur de diffusion, ces effets peuvent être ressentis au sein même de l'écoulement.

Dans les écoulements de laboratoire, ces effets compliquent l'interprétation des mesures d'induction à partir des simples mécanismes de transport-déformation du champ (qui restent néanmoins les principaux responsables de l'induction). Ils méritent d'être étudiés en détail (voir §II.1.2.3).

### II.1.2.2 La diffusion magnétique et le nombre de Reynolds magnétique

Nous avons considéré dans la section précédente le cas des fluides parfaitement conducteurs. Bien entendu, les fluides réels possèdent une résistivité non-nulle à l'origine d'effets dissipatifs qui vont s'opposer aux effets inductifs décrits ci-dessus. Les champs magnétiques induits sont naturellement associés à des courants électriques induits circulant dans le fluide conducteur. Ces courants vont être dissipés par effet Joule à cause de la résistivité du milieu et le champ magnétique induit qu'ils produisent tend ainsi à diminuer. Cet effet dissipatif apparaît dans l'équation d'induction magnétique sous la forme du terme diffusif  $\lambda \Delta \vec{B}$ . Si  $L$  désigne l'échelle caractéristique du système, le temps diffusif caractéristique des effets dissipatifs est  $\tau_d \sim \frac{L^2}{\lambda}$ . Le temps caractéristique de dissipation des courants induits (et du champ magnétique induit) par effet Joule est donc d'autant plus court que la résistivité du milieu est grande. Il en résulte que l'efficacité des mécanismes d'induction par transport-déformation des lignes de champ et la description de l'évolution du champ magnétique comme étant gelé dans le fluide est d'autant moins bonne que le milieu est résistif. Dans la limite d'un milieu parfaitement isolant, le temps de dissipation devient nul, les mécanismes d'induction "n'ont pas le temps" de se manifester et l'écoulement n'a alors aucun effet magnétique : les lignes de champ magnétique restent "immobiles" et ne suivent pas l'écoulement. De même, pour un fluide au repos, tout champ magnétique éventuellement présent à un instant donné, disparaîtra, en l'absence de source extérieure, au bout d'un temps de l'ordre de  $\tau_d$ . Entre les deux limites (diffusion pure et induction pure) le système évolue selon ces deux effets antagonistes. On peut alors définir un paramètre comparant l'importance relative de l'induction par rapport à la diffusion, c'est le nombre de Reynolds magnétique,  $R_m$  :

$$R_m = \frac{\text{induction}}{\text{diffusion}} = \frac{\mathcal{O}\left(\left|\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{b})\right|\right)}{\mathcal{O}\left(\lambda \left|\Delta \vec{B}\right|\right)} = \frac{UL}{\lambda}. \quad (\text{II.34})$$

Cette expression justifie l'appellation "nombre de Reynolds" magnétique, par analogie avec le nombre de Reynolds hydrodynamique  $Re = UL/\nu$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Reynolds magnétique peut s'interpréter selon différents points de vue, associés à différentes écritures du paramètre :

$$R_m = \frac{UL}{\lambda} = \left| \frac{\mathcal{I}_m}{\mathcal{P}_J} \right| = \frac{\tau_d}{\tau_a} = \left( \frac{L}{l_d} \right)^2. \quad (\text{II.35})$$

- **Conductivité effective du milieu** : la première expression (qui est la plus utilisée), montre que le cas d'un fluide parfaitement isolant ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) ou au repos correspond à



$R_m = 0$ , alors que le cas parfaitement conducteur ( $\lambda = 0$ ) correspond à la limite  $R_m \rightarrow \infty$ . Dans ce sens, le nombre de Reynolds magnétique peut être vu comme une valeur sans dimension de la conductivité effective du milieu dans une configuration d'écoulement donnée.

- **Rapport des pertes Joule et de la conversion d'énergie mécanique en énergie magnétique** : la deuxième expression montre que  $R_m$  traduit l'efficacité de la conversion de l'énergie mécanique de l'écoulement en énergie magnétique.

- **Rapport des temps diffusif et advectif** : la troisième expression relie cette efficacité aux temps caractéristiques d'évolution de l'écoulement et de la dissipation. Pour des temps courts devant le temps de diffusion, l'évolution du champ magnétique est donc essentiellement liée à des effets inductifs : les lignes de champ ont tendance à suivre l'écoulement. Pour des temps plus longs, la diffusion opère contre cette tendance et tend à s'opposer aux phénomènes d'induction.

- **Rapport des longueurs intégrale et diffusive** : enfin, la dernière expression montre que les faibles nombres de Reynolds magnétiques correspondent aux grandes longueurs de diffusion. Le champ magnétique (et les courants électriques) induits par les mécanismes locaux de transport-déformation tendent à être *dilués* sur l'ensemble de l'écoulement.

**Remarque : forme réduite de l'équation d'induction.** L'équation d'induction (II.19) peut être écrite en terme des grandeurs réduites :

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U} \quad , \quad \vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{L} \rightarrow \vec{r} \quad , \quad t^* = \frac{t}{\tau_a} \rightarrow t, \quad (\text{II.36})$$

sous la forme :

$$\partial_{t^*} \vec{B} = \vec{\nabla}^* \times (\vec{u}^* \times \vec{B}) + \frac{1}{R_m} \Delta^* \vec{B}. \quad (\text{II.37})$$

Cette expression montre l'aspect auto-similaire du problème de l'induction : à géométrie fixée, les effets sont les mêmes dès que  $R_m$  est donné. Elle montre également de façon explicite que, dans la limite des grands nombres de Reynolds magnétiques, les effets dissipatifs tendent à diminuer et que l'évolution du champ magnétique tend à être dictée par la relation (II.30) caractéristique des milieux de conductivité infinie.

De même, le bilan énergétique (II.20) peut s'écrire sous la forme réduite

$$\frac{d E_m}{dt} = \mathcal{I}_m + \frac{1}{R_m} \mathcal{P}_J, \quad (\text{II.38})$$

et l'équation d'induction en présence d'inhomogénéités de diffusivité magnétique devient

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{1}{R_m} \frac{\lambda}{\lambda_0} \Delta \vec{B} - \frac{1}{R_m} \frac{\vec{\nabla} \lambda}{\lambda_0} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (\text{II.39})$$

où  $\lambda_0$  est alors une conductivité de référence (la conductivité moyenne du milieu par exemple) à partir de laquelle est défini  $R_m$ .

### II.1.2.3 Les conditions aux limites

Le problème de l'induction n'est que partiellement défini si l'on ne précise pas les conditions aux limites sur la surface ( $\mathcal{S}$ ) délimitant l'écoulement du fluide conducteur. Le comportement du champ magnétique à la paroi dépend des propriétés électriques du milieu extérieur à l'écoulement. Seuls les deux cas limites où le milieu extérieur est parfaitement isolant ou parfaitement conducteur offrent une formulation simple des conditions aux limites pour le champ magnétique [24]. L'étude du cas, certes plus physique, où le milieu extérieur peut avoir une conductivité finie est mieux décrit par une reformulation du problème où le milieu est considéré comme inhomogène et la surface ( $\mathcal{S}$ ) comme le lieu d'une éventuelle discontinuité de conductivité.

**Milieu extérieur isolant.** Dans le cas d'un milieu extérieur isolant, les courants électriques induits sont tenus d'évoluer au sein de l'écoulement : la composante normale des courants électriques induits doit donc s'annuler à la paroi. De la loi de Maxwell-Ampère (II.7), on déduit que la composante normale du rotationnel de  $\vec{B}$  doit donc s'annuler à la paroi. Par ailleurs, le champ magnétique doit être continu à la paroi (cette condition s'applique dès que la diffusivité magnétique du milieu extérieur conducteur est non-nulle, puisqu'alors toute éventuelle discontinuité disparaîtrait instantanément par diffusion.) Les conditions aux limites pour  $\vec{B}$  se résument alors à :

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)_n = \vec{0} \quad \text{et} \quad \left[\vec{B}\right]_{(\mathcal{S})} = \vec{0}, \quad (\text{II.40})$$

où l'indice  $(\cdot)_n$  représente la composante normale à la paroi et  $[\cdot]_{(\mathcal{S})}$  la discontinuité à la surface ( $\mathcal{S}$ ) délimitant le volume de l'écoulement.

**Milieu extérieur parfaitement conducteur** Dans le cas d'un milieu extérieur parfaitement conducteur, la continuité de  $\vec{B}$  à la paroi n'est plus imposée et seule la condition usuelle de continuité de sa composante normale à la paroi doit être respectée. Par ailleurs, la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{E}$  est continue à la paroi ; comme  $\vec{E} = \vec{0}$  dans un conducteur parfait (sinon la densité de courants y serait infinie), on en déduit que la composante tangentielle de  $\vec{E}$  est nulle à la paroi. Si par ailleurs on admet pour la vitesse du fluide une condition de non-glissement à la paroi, d'après la loi d'Ohm (II.9), la composante tangentielle de la densité de courant à la paroi est donc nulle. De telle sorte que les conditions aux limites pour  $\vec{B}$  s'écrivent alors simplement :

$$\left[\vec{B} \cdot \vec{n}\right]_{(\mathcal{S})} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \times \vec{n} = \vec{0}, \quad (\text{II.41})$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la paroi.

**De la difficulté de la gestion des conditions aux limites** Bien que leur formulation ne semble pas particulièrement complexe, les conditions aux limites énoncées ci-dessus restent difficiles à exploiter pour la résolution numérique de l'équation d'induction. En effet, les conditions de continuité des composantes de  $\vec{B}$  nécessitent la connaissance du

champ magnétique dans le milieu extérieur et les conditions sur le rotationnel de  $\vec{B}$  ne donnent que des relations scalaires où par ailleurs les dérivées spatiales des différentes composantes de  $\vec{B}$  sont croisées.

Pour surmonter ces difficultés, de nombreux calculs utilisent des conditions aux limites périodiques, peu réalistes d'un point de vue physique mais très adaptées à une résolution numérique. Elles sont d'autant plus intéressantes qu'elles permettent l'utilisation de codes spectraux particulièrement efficaces.

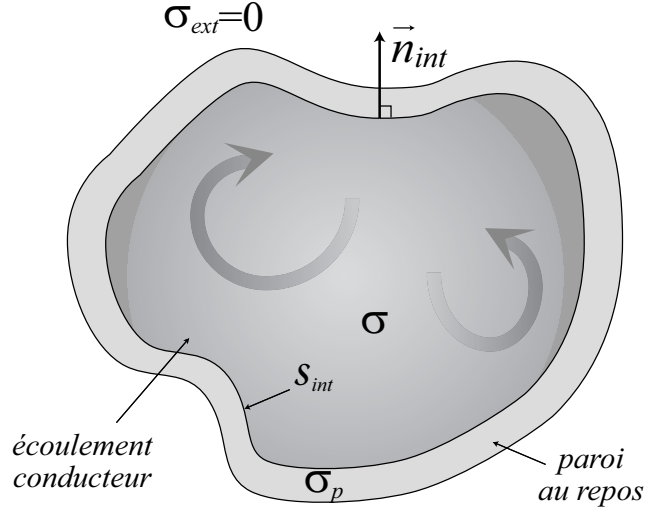
Pour certains systèmes possédant des symétries particulières il est possible d'exprimer la condition aux limites en termes de raccordement à des fonctions connues, de sorte que des conditions aux limites non-périodiques peuvent être alors utilisées. Ainsi pour des systèmes sphériques (cas d'un intérêt majeur dans le cadre de l'étude de la géodynamo), les solutions peuvent être développées sur la base des harmoniques sphériques et la condition aux limites exprimée en termes de raccordement à la paroi. Une approche similaire en géométrie cylindrique (où une décomposition du champ magnétique en polynômes de Tchebychev est pertinente) est en cours d'étude par L. Tuckerman.

Une autre possibilité consiste à étendre le domaine d'étude au-delà du volume de l'écoulement et à n'appliquer la condition aux limites qu'à l'infini, où le champ magnétique doit s'annuler. Dans ce cas, la discontinuité de conductivité à la paroi doit être prise en compte dans l'équation d'induction, comme nous le décrivons au §II.1.2.3. Dans un calcul numérique, la condition aux limites s'écrit alors  $\vec{B}(r_{lim}) = \vec{0}$ , où, tenant compte du fait que loin des sources  $B = \mathcal{O}(r^{-3})$ ,  $r_{lim}$  est choisi tel que  $(\frac{r_{lim}}{L})^3 \gg 1$ . Cette approche est notamment appliquée dans les méthodes de résolution de l'équation d'induction par éléments finis [23]. D'un point de vue numérique, cette approche présente l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de points de grille en dehors du volume d'intérêt où l'écoulement se produit (typiquement  $r_{lim} \sim 3L$  [23].)

L'approche perturbative que nous proposons dans la suite (§II.2) pour l'étude des mécanismes d'induction en général et pour la résolution numérique de l'équation d'induction en particulier, permet une gestion extrêmement simple de la condition aux limites dans le cas d'un milieu extérieur isolant, et ce quelle que soit la géométrie de l'écoulement et sans devoir étendre le calcul loin au-delà du volume de l'écoulement. Nous montrons dans le paragraphe suivant comment étendre le cas d'un milieu extérieur isolant au cas de parois de conductivité quelconque.

**Parois de conductivité quelconque** Les conditions aux limites (II.40) et (II.41) énoncées ci-dessus ne donnent pas une description physique toujours réaliste vis-à-vis des vraies conditions expérimentales où les parois ne sont en général ni parfaitement conductrices, ni parfaitement isolantes. Afin de décrire un cas intermédiaire où le milieu extérieur n'est ni parfaitement conducteur, ni parfaitement isolant, une première évolution dans la description du problème consiste à adopter des parois de même conductivité que le fluide. Il suffit alors de considérer que le volume dans lequel évolue l'écoulement est entouré d'une certaine épaisseur de fluide au repos (jouant le rôle de paroi.) Au-delà, le milieu est supposé isolant. On peut alors étudier par exemple l'influence sur l'induction (et la dynamo) de l'épaisseur de la paroi conductrice.

Pour étudier des effets plus subtils liés à l'éventuelle différence de conductivité entre le fluide et les parois, nous proposons de modéliser le problème expérimental de l'induction, en considérant les parois à l'intérieur desquelles le fluide conducteur évolue comme partie intégrante du système étudié. Ces parois sont constituées d'une certaine épaisseur de



**Fig. II.4:** Modélisation du problème expérimental pour l'induction magnétohydrodynamique. L'écoulement évolue au sein d'un récipient dont les parois ont une conductivité  $\sigma_p$ . Celles-ci sont considérées comme partie intégrante du système, et la discontinuité de conductivité qu'elles introduisent est prise en compte dans l'équation d'induction.

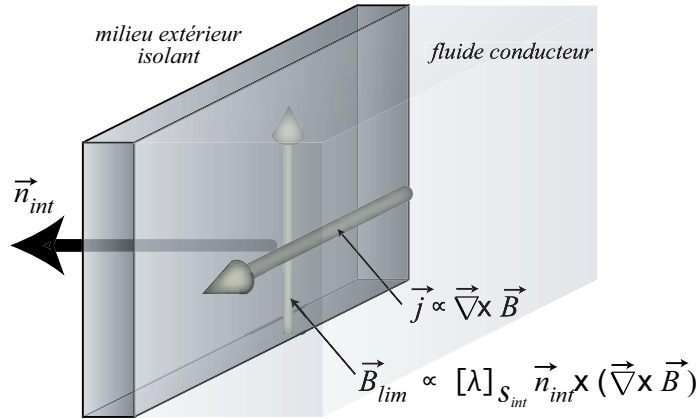
matériau (du cuivre ou de l'acier en général) possédant une conductivité  $\sigma_p$  différente (a priori non-nulle) de celle du fluide. Le système doit alors être considéré comme un milieu présentant des inhomogénéités de conductivité (modélisées par une discontinuité à la surface interne de la paroi) et le champ magnétique évolue alors selon l'équation (II.29). La surface externe des parois est quant à elle en général au contact de l'air, pour qui l'hypothèse de milieu parfaitement isolant est justifiée (figure II.4). On ramène ainsi un problème avec des conditions aux limites quelconques à l'unique cas d'une condition aux limites isolante. Pour une discontinuité de conductivité à l'interface interne, le gradient de la diffusivité magnétique se ramène à un terme purement surfacique [82] :

$$\vec{\nabla} \lambda = [\lambda]_{(S_{int})} \delta_{(S_{int})} \vec{n}_{int}, \quad (\text{II.42})$$

où  $\delta_{(S_{int})}$  est la fonction de Dirac s'annulant partout sauf à la surface intérieure  $S_{int}$  de la paroi, où la discontinuité se produit. L'équation d'induction (II.29) s'écrit alors

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda \Delta \vec{B} - [\lambda]_{S_{int}} \delta_{(S_{int})} \vec{n}_{int} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (\text{II.43})$$

Le terme  $[\lambda]_{S_{int}} \delta_{(S_{int})} \vec{n}_{int} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$  constitue une source d'évolution de  $\vec{B}$  supplémentaire, associée à des mécanismes particuliers autres que le transport-déformation des lignes de champ et la diffusion. En remarquant que  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  est parallèle à la densité de courant  $\vec{j}$ , on voit que le terme surfacique issu de la discontinuité de conductivité implique la présence d'une composante de champ magnétique  $\vec{B}_{lim}$  orthogonale à la fois au vecteur normal  $\vec{n}_{int}$  (et donc tangente à la surface) et à la densité de courants au voisinage de la surface (figure II.5) ; le signe de  $\vec{B}_{lim}$  dépend du signe de la discontinuité de diffusivité magnétique. Remarquons enfin que l'expression (II.43) reste valable pour décrire l'induction dans un écoulement conducteur parfaitement homogène et un milieu extérieur isolant. La



**Fig. II.5:** L'existence d'une discontinuité de conductivité à la paroi est associée à la présence d'une composante de champ magnétique  $\vec{B}_{lim}$  tangente à l'interface et perpendiculaire à la densité de courant. À cause de la diffusion, cette composante peut être présente au sein même de l'écoulement.

présence du terme source surfacique supplémentaire rend alors explicite la possibilité d'un mécanisme d'induction, par des effets de paroi, à l'origine du champ  $\vec{B}_{ind}^{lim}$  possédant les propriétés énoncées ci-dessus.

Comme nous le verrons par la suite, loin de rester marginaux, ces effets de parois peuvent, dans certaines conditions, être dominants et, du fait de la grande longueur de diffusion magnétique, se manifester jusqu'au coeur même de l'écoulement.

### II.1.3 Equation d'évolution de l'écoulement

La présence d'un champ magnétique au sein d'un conducteur parcouru par des courants, entraîne l'existence d'une force de Lorentz qui doit être prise en compte dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B} + \vec{f}, \quad (\text{II.44})$$

où  $P$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\nu$  sa viscosité cinématique et  $\vec{f}$  un éventuel terme de forçage volumique. Cette équation est associée à la condition aux limites hydrodynamique usuelle de non-glissement à la paroi.

Afin de mettre le fluide en mouvement, il faut une source d'énergie mécanique (toute la question de la dynamo étant d'étudier la possibilité de conversion de cette énergie mécanique en énergie magnétique.) Plusieurs solutions sont envisageables pour fournir l'énergie mécanique :

- le forçage peut se faire par une force volumique  $\vec{f}$  dont l'origine peut être de natures diverses : convection (pour une modélisation expérimentale des questions géophysiques par exemple [21][4]), forçage magnétique à l'aide d'un courant circulant dans le fluide en présence d'un champ magnétique imposé (c'est notamment le principe

de certaines pompes électromagnétiques), etc.

- le forçage peut se faire par entraînement du fluide au niveau de parois mobiles ; il n'intervient alors que dans l'expression de la condition aux limites hydrodynamiques qui impose que la vitesse du fluide à la paroi soit égale à la vitesse de la paroi. C'est le cas des expériences von Kármán où le fluide est entraîné par des turbines, ou dans l'expérience ATER [52] où le fluide est entraîné par les parois d'un cylindre en rotation/péécession.

L'écoulement doit par ailleurs obéir à la loi de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (\text{II.45})$$

Dans la suite, nous nous intéresserons particulièrement à des écoulements de métal liquide en régime incompressible, de sorte que cette relation devient simplement

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (\text{II.46})$$

### II.1.4 Le problème dynamo : de l'approche cinématique aux mécanismes d'induction

Comme nous l'avons vu, l'évolution de l'énergie magnétique totale du système est donnée sous forme réduite par le bilan (II.38)

$$\frac{d E_m}{dt} = \mathcal{I}_m + \frac{1}{R_m} \mathcal{P}_J.$$

Lorsque le fluide conducteur est au repos, la production d'énergie magnétique par induction,  $\mathcal{I}_m$ , est nulle et l'énergie magnétique totale du système est condamnée à décroître vers zéro dans la mesure où la dissipation par effet Joule  $\mathcal{P}_J$  est toujours négative. En présence d'un écoulement et d'un champ magnétique, le terme  $\mathcal{I}_m$  est en général non-nul, mais de signe a priori indéterminé. Pour certaines structures de champ magnétique et d'écoulement le terme  $\mathcal{I}_m$  peut être positif. Si le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment grand pour que les effets des pertes Joule  $\mathcal{P}_J$  dans le bilan (II.38) deviennent suffisamment faibles, l'énergie magnétique totale  $E_m$  du système peut alors spontanément croître : c'est l'instabilité dynamo. La détermination des conditions pour développer une dynamo relève donc d'un double problème : trouver une structure d'écoulement  $\vec{u}_{dyn}$  et trouver une structure de champ magnétique  $\vec{B}_{dyn}$  telles que le terme  $\mathcal{I}_{m,dyn}$  soit positif. Le seuil de l'instabilité est alors donné par  $R_m^c = \frac{\mathcal{P}_{J,dyn}}{\mathcal{I}_{m,dyn}}$ .

Le bilan énergétique (II.38) n'offre qu'une équation intégrale, ne permettant pas de déterminer les structures spatiales de l'écoulement et du champ magnétique dynamo. Celles-ci sont obtenues comme solution du problème défini par les quatre équations (II.19), (II.2), (II.44) et (II.46), complété des conditions aux limites appropriées. La résolution du problème complet relève d'une grande complexité dans la mesure où l'équation d'induction (II.19) et l'équation de Navier-Stokes (II.44) sont couplées par l'intermédiaire du terme d'induction  $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$  et de la force de Lorentz  $\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$ . Ce couplage rend non-linéaire le problème à résoudre.

Toutefois, l'étude des conditions sous lesquelles l'instabilité est susceptible de se produire peut se faire en négligeant ce couplage. On suppose alors le champ de vitesse  $\vec{u}$  donné

sans s'intéresser à la contre-réaction du champ magnétique sur l'écoulement. Il s'agit ensuite de rechercher une structure de champ magnétique (et le seuil  $R_m^c$  associé) comme solution non-nulle (auto-entretenu) de l'équation d'induction à partir de l'écoulement qu'on s'est donné. On parle alors d'une approche *cinématique* du problème dynamo. Cette approche se justifie dans la mesure où, pour un champ de vitesse donné, et en l'absence d'instabilité ( $R_m < R_m^c$ ), la solution du problème implicite pour le champ magnétique défini par l'équation II.19 n'admet que des solutions décroissant vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ . Ce n'est qu'au-delà de la valeur critique  $R_m^c$  du nombre de Reynolds magnétique, que la solution  $\vec{B} = \vec{0}$  peut devenir instable. L'instabilité va donc se développer à partir d'une situation où la force de Lorentz est réellement négligeable.

Bien entendu, une fois la croissance démarrée, lorsque le champ magnétique sera suffisamment intense, la force de Lorentz commencera à opérer. L'écoulement s'en trouvera alors modifié et par conséquent l'induction aussi et le problème couplé doit alors être considéré. On comprend alors que le couplage joue un rôle majeur pour l'étude de la saturation du champ magnétique résultant de l'instabilité dynamo, alors qu'il est a priori sans effet pour la compréhension de l'origine de l'instabilité.

Le nombre sans dimension permettant d'estimer l'importance des forces de Lorentz par rapport aux autres forces hydrodynamiques est le paramètre d'interaction  $N$ . Selon le régime considéré, les forces hydrodynamiques prédominantes seront les forces visqueuses, les fluctuations turbulentes de pression, la force de Coriolis pour les systèmes en rotation rapide (on parle généralement alors de nombre d'Elsasser au lieu de paramètre d'interaction), etc. Remarquons à ce stade que la nature du régime hydrodynamique joue un rôle essentiel pour l'étude de la saturation de la dynamo [75]. L'approche cinématique reste valable tant que  $N \ll 1$ , c'est-à-dire tant que l'énergie magnétique du système reste négligeable devant l'énergie mécanique de l'écoulement. Nous nous placerons toujours dans la suite dans le cadre de cette hypothèse. Dans le cas des écoulements turbulents de von Kármán, la principale contribution hydrodynamique provient du terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes ; nous discuterons en détail, au §IV.1.2.5, la question de l'estimation dans ces expériences du paramètre d'interaction, que nous montrerons être toujours inférieur à  $10^{-2}$ .

Dans un régime dynamo, la structure du champ magnétique est telle que l'induction par l'écoulement compense en permanence la diffusion, de sorte que le champ magnétique est ainsi auto-entretenu. Les conditions de croissance et la structure d'un champ dynamo peuvent être étudiées par une analyse de stabilité linéaire de l'équation d'induction. Pour une géométrie d'écoulement donnée, il s'agit alors de déterminer pour différentes valeurs de  $R_m$  le mode propre ayant le taux de croissance  $\eta_c(R_m)$  le plus fort. Si le taux de croissance est négatif, le champ magnétique tend à s'annuler aux temps longs. Le seuil de l'instabilité dynamo est atteint dès que le taux de croissance devient positif. Le nombre de Reynolds critique  $R_m^c$  est alors donné par la condition

$$\eta_c(R_m^c) = 0. \quad (\text{II.47})$$

Le calcul du taux de croissance et la détermination du seuil de l'instabilité constituent un exercice complexe qui n'admet pas en général de solution analytique et ne peut être mené que numériquement. Cette approche permet de tester l'efficacité d'un écoulement donné à engendrer l'instabilité dynamo, mais elle ne donne aucune interprétation des mécanismes assurant la croissance et l'auto-entretien du champ magnétique produit, en terme d'un bouclage magnétique. C'est à la compréhension de ces mécanismes et à l'étude

détaillée des conditions favorisant un schéma de bouclage magnétique qu'est dédiée une grande partie du travail réalisé dans le cadre de cette thèse. Pour cela nous considérons le problème plus général de la réponse d'un écoulement lorsqu'on le soumet à la présence d'un champ magnétique. L'étude de la réponse magnétique de l'écoulement en présence d'un champ appliqué, permet d'analyser en détail (aussi bien expérimentalement que numériquement, voire analytiquement) le fonctionnement des mécanismes d'induction et de la compétition induction-diffusion en fonction de  $R_m$ . La compréhension de ces mécanismes constitue une étape essentielle en vue notamment de dégager les effets pouvant favoriser l'instabilité dynamo. Nous proposons dans les paragraphes qui suivent une approche perturbative du problème cinématique de l'induction, permettant de définir et d'étudier rigoureusement la notion de mécanisme d'induction.

## II.2 Approche perturbative du phénomène d'induction

### II.2.1 Motivations

La brève illustration de la dynamo homopolaire que nous avons donnée au §I.2.2 montre que l'étude de l'instabilité dynamo peut se faire essentiellement selon deux approches. La première consiste à faire une étude de stabilité linéaire, de calculer le taux de croissance  $\eta_c$  de l'instabilité, le seuil dynamo étant alors atteint lorsque  $\eta_c$  devient positif. La deuxième approche, qu'on appellera *mécaniste*, consiste à étudier le détail des mécanismes d'induction en le décomposant en étapes élémentaires bien identifiées ; l'instabilité se produit alors si le champ induit par l'une de ces étapes se superpose au champ issu au cours d'une étape précédente. On obtient ainsi un effet de bouclage magnétique permettant à l'instabilité de se développer.

Dans le cadre plus complexe de la dynamo fluide, l'approche par le calcul des taux de croissance est de loin la plus répertoriée dans la littérature. Les expériences de Karlsruhe et de Riga apportent par ailleurs la preuve de la robustesse d'une telle approche dans la mesure où le seuil de l'instabilité déterminé expérimentalement est en excellent accord avec la valeur du nombre de Reynolds critique prédite numériquement. Le succès ainsi remporté par l'étude numérique des écoulements de Ponomarenko et de Roberts semblait de bonne augure pour les projets de dynamo fluide homogène de type von Kármán dont des écoulements moyens fort similaires ont été identifiés numériquement comme développant l'instabilité dynamo (voir §I.3.) La nature non-contrainte des écoulements von Kármán rend cependant le problème spécifique par rapport aux expériences de Karlsruhe et Riga, et exige une optimisation approfondie de la structure de l'écoulement en vue d'engendrer une dynamo.

Le calcul des taux de croissance constitue un outil précieux permettant de tester numériquement l'efficacité d'un écoulement moyen donné à développer l'instabilité dynamo et permet, en étudiant différents profils d'écoulement, de converger vers une configuration "optimisée" [57][76]. Un premier inconvénient de cette approche réside toutefois dans le fait que, s'attaquant directement à l'équation d'induction pour le champ magnétique, le calcul des taux de croissance est confronté à la gestion délicate des conditions aux limites magnétiques et contraint souvent à un calcul finalement peu réaliste (périodicité, géométrie particulière, ...). Mais surtout, contrairement à l'approche mécaniste, elle ne donne aucun renseignement sur le processus donnant naissance à la croissance de l'instabilité, ni



sur la compréhension des mécanismes d'induction sous-jacents. Ce manque était jusqu'à présent comblé en faisant appel à une description, essentiellement qualitative, de quelques mécanismes d'induction élémentaires associés à des propriétés locales des écoulements. On peut citer dans ce sens les deux effets  $\alpha$  (§I.2.4) et  $\Omega$  (§I.2.3) jouant un rôle majeur pour le problème de la dynamo et qui nous ont permis notamment d'interpréter le schéma de bouclage dans les expériences de Lowes & Wilkinson et de Karlsruhe et de les relier aux propriétés structurelles des écoulements, tels que l'hélicité et la rotation différentielle. Dans le cas de la dynamo de Lowes & Wilkinson, la compréhension de ces mécanismes a été déterminante pour les expérimentateurs puisqu'elle leur a permis d'abaisser considérablement le seuil de l'instabilité (qui autrement serait resté expérimentalement hors de portée) en plaçant astucieusement des isolants afin de contraindre légèrement le parcours des courants électriques induits [54].

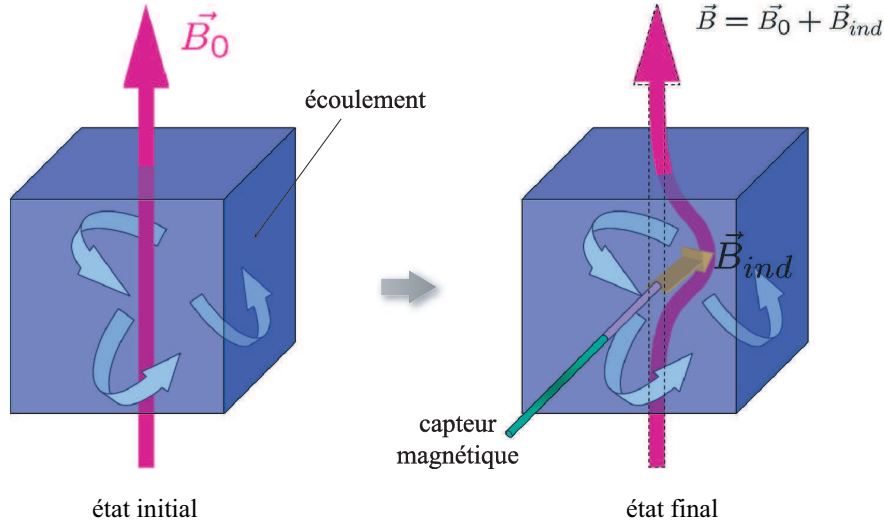
Les difficultés rencontrées jusqu'à présent dans les projets de dynamo fluides non-contraintes remettent en cause l'unique approche numérique par calcul de taux de croissance. La compréhension détaillée des mécanismes d'induction par l'écoulement moyen et du rôle spécifique joué par les fluctuations hydrodynamiques semble alors s'imposer afin d'orienter l'optimisation de l'écoulement vers une configuration favorable à un bouclage magnétique et pouvant donc développer l'instabilité dynamo. Cette étude peut se faire sous les deux volets expérimental et numérique (à défaut d'une approche analytique envisageable.) Du point de vue expérimental, il s'agit de mesurer le champ magnétique  $\vec{B}_{ind}$  induit par l'écoulement en présence d'un champ appliqué  $\vec{B}_0$ . En utilisant différentes configurations de champ appliqué et/ou d'écoulement, on peut alors identifier des mécanismes particuliers dont le détail peut être étudié numériquement. L'étude numérique de l'effet des fluctuations turbulentes requiert des techniques de pointe, telles que les LES (Large Eddies Simulation) et fait l'objet de travaux récents [73]. Nous ne l'aborderons pas ici. En revanche, nous proposons une étude numérique approfondie des mécanismes d'induction par l'écoulement moyen. Celle-ci ne doit pas se limiter à une description qualitative locale, mais doit prendre en compte de façon rigoureuse la non-localité du processus d'induction-diffusion, être capable de décrire les conditions aux limites réelles (ou du moins de façon plus réaliste) des expériences afin de préciser leur rôle dans les effets d'induction et finalement être en mesure de comprendre la sensibilité de ces mécanismes à certains paramètres tels que le rapport  $P/T$  de l'écoulement. L'étude numérique à partir de l'écoulement moyen peut alors également donner des informations sur le rôle des fluctuations du champ de vitesse sur l'induction par comparaison des prédictions numériques aux résultats expérimentaux. Nous proposons dans la suite un outil original permettant de développer une approche mécaniste rigoureuse de l'induction magnétohydrodynamique, tout en conservant le côté intuitif qui reste d'un intérêt majeur.

## II.2.2 Les expériences d'induction

Le problème auquel on s'intéresse est celui de la réponse magnétique d'un écoulement de liquide conducteur soumis à un champ magnétique extérieur. On se place dans l'approche cinématique où le champ magnétique est supposé suffisamment faible pour ne pas affecter l'écoulement (approximation de faible paramètre d'interaction) qui est donc supposé donné.

Partant d'une situation initiale définie par la donnée de l'écoulement et de  $\vec{B}_0$ , le système va évoluer jusqu'à son état final en passant par un régime transitoire (figure II.6).

Au début, pour des temps courts devant le temps de diffusion  $\tau_d$ , les effets d'induction dominant et les lignes de champ de  $\vec{B}_0$  ont tendance à se laisser entraîner par le fluide. Pour les temps plus longs, cette tendance est freinée par les effets diffusifs qui commencent à se manifester (voir le §II.1.2.2) jusqu'à ce qu'un état stationnaire final où induction et diffusion se compensent exactement soit atteint. On mesure alors le champ magnétique induit dans ce régime stationnaire et on cherche à expliquer les mécanismes ayant conduit à cet état stationnaire final.



**Fig. II.6:** Principe des expériences d'induction : l'écoulement tend à transporter et déformer un champ appliqué. L'état final traduit l'équilibre entre les processus d'induction et de diffusion magnétique.

### II.2.3 Approche perturbative

Nous nous proposons à présent de développer une approche permettant de décrire de tels processus d'induction en termes de mécanismes élémentaires se produisant successivement étape par étape et conduisant à l'état final observé.

#### II.2.3.1 Précision de la notion de mécanisme d'induction

Considérons, dans un premier temps, la limite des faibles nombres de Reynolds magnétiques. Dans le développement perturbatif du champ induit en puissance de  $R_m$

$$\vec{B}_{ind} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_k + \dots \quad \text{avec} \quad |\vec{B}_k| = \mathcal{O}(R_m^k), \quad (\text{II.48})$$

on peut alors envisager de se limiter au premier ordre. Pour les temps courts où l'induction domine, et où la diffusion magnétique peut être négligée, l'équation d'induction s'écrit simplement :

$$\partial_t \vec{B}_1 \simeq (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_0. \quad (\text{II.49})$$

On reconnaît dans le membre de droite le terme source associé au mécanisme de transport-déformation de  $\vec{B}_0$  discuté au §II.1.2.1. Ce processus va ensuite être freiné par la diffusion de sorte que les lignes de champ vont cesser progressivement de suivre l'écoulement pour atteindre leur état stationnaire final, où la diffusion et l'induction se compensent exactement. L'état final  $\vec{B}_1$  est ainsi solution de l'équation de Poisson

$$\lambda \Delta \vec{B}_1 = - \left( \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}_0, \quad (\text{II.50})$$

obtenue comme la restriction à l'ordre 1 en  $R_m$  de l'équation d'induction (II.19). Le caractère linéaire en  $R_m$  de l'équation ci-dessus apparaît explicitement lorsqu'elle est écrite à partir de la forme réduite de l'équation d'induction (II.37) :

$$\Delta^* \vec{B}_1 = -R_m \left( \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* + R_m \left( \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{B}_0, \quad (\text{II.51})$$

Si on augmente maintenant le nombre de Reynolds magnétique, la tendance des lignes de champ magnétique à évoluer comme l'écoulement va être accentuée et il faut prendre en compte les effets d'induction dont  $\vec{B}_1$  est à l'origine. Il s'agit alors de considérer les effets du deuxième ordre dans le développement perturbatif conduisant à  $\vec{B}_2$ . On montre facilement que, dans l'état stationnaire final, l'équation d'induction au deuxième ordre est identique à l'équation de Poisson (II.51) où  $\vec{B}_0$  est remplacé dans le terme source par  $\vec{B}_1$ .

$$\lambda \Delta \vec{B}_2 = - \left( \vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}_1. \quad (\text{II.52})$$

$\vec{B}_2$  résulte ainsi du transport et de la déformation de  $\vec{B}_1$  au même titre que ce dernier résultait du transport et de la déformation de  $\vec{B}_0$ . On peut alors itérer le processus afin de décrire les effets d'ordres supérieurs dont la contribution devient importante à mesure que le nombre de Reynolds magnétique augmente. Ceci nous permet de définir la notion de mécanisme d'induction comme l'itération du mécanisme élémentaire permettant de passer de  $\vec{B}_k$  à  $\vec{B}_{k+1}$  selon l'équation de Poisson

$$\lambda \Delta \vec{B}_{k+1} = - \left( \vec{B}_k \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}_k. \quad (\text{II.53})$$

Le champ induit final résulte de la superposition des champs induits aux différents ordres selon ce motif de base (le tableau II.1 résume le processus itératif, sous sa forme réduite rappelant que chaque étape est linéaire en  $R_m$ ). Le terme source associé au passage du champ induit à l'ordre  $k$  au champ induit à l'ordre suivant a toujours la même expression formelle et correspond au transport de  $\vec{B}_k$  par le champ de vitesse et à sa déformation par les gradients de vitesse. Ainsi défini, chaque maillon élémentaire (linéaire en  $R_m$ ) permet de décrire le mécanisme global conduisant à l'état final.

Dans cette approche, la solution de l'équation d'induction est donc recherchée sous la forme d'un développement en série entière de puissance de  $R_m$ . Cette série ne converge pas, a priori, pour des valeurs de  $R_m$  arbitrairement grandes. On définit le rayon de convergence  $R_m^*$  tel que la série converge pour  $|R_m| < R_m^*$  et diverge pour  $|R_m| \geq R_m^*$ . L'étude de cas concrets nous montrera qu'en général  $R_m^* \sim 5 - 30$ . Ceci est suffisant pour l'étude de l'induction dans les expériences au gallium (où  $R_m < 5$ ), mais ne suffit pas toujours à l'étude de l'induction dans les expériences au sodium (allant jusqu'à  $R_m \sim 50$ .) Nous verrons toutefois qu'il est possible d'étendre le domaine de convergence de la solution perturbative par la méthode des approximants de Padé (voir §III.2.4.2.)

$$\Delta \vec{B}_1 = -R_m (\vec{B}_0 \times \vec{\nabla}) \tilde{\vec{u}} + R_m (\tilde{\vec{u}} \times \vec{\nabla}) \vec{B}_0 \quad \vec{B}_0 \longrightarrow \vec{B}_1 \quad (\text{II.54})$$

$$\Delta \vec{B}_2 = -R_m (\vec{B}_1 \times \vec{\nabla}) \tilde{\vec{u}} + R_m (\tilde{\vec{u}} \times \vec{\nabla}) \vec{B}_1 \quad \vec{B}_1 \longrightarrow \vec{B}_2 \quad (\text{II.55})$$

... ..

$$\Delta \vec{B}_{k+1} = -R_m (\vec{B}_k \times \vec{\nabla}) \tilde{\vec{u}} + R_m (\tilde{\vec{u}} \times \vec{\nabla}) \vec{B}_k \quad \vec{B}_k \longrightarrow \vec{B}_{k+1} \quad (\text{II.56})$$

... ..

$$\vec{B}_{ind} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_k + \dots \quad \text{avec} \quad \vec{B}_k = \mathcal{O}(R_m^k)$$

**Tab. II.1:** Mécanisme d'induction

Le schéma itératif établi fournit également les bases d'un algorithme de résolution de l'équation d'induction globale.

### II.2.3.2 Décomposition du mécanisme élémentaire. Schéma de résolution avec condition aux limites isolante

Le mécanisme élémentaire, défini comme le passage de  $\vec{B}_k$  à  $\vec{B}_{k+1}$ , peut à son tour être décomposé en sous-étapes donnant une description plus détaillée du processus physique lié à l'induction du champ magnétique :

1. le mouvement d'un conducteur en présence du champ magnétique induit un champ électromoteur.
2. la densité de courant résultante devant être à flux conservatif, l'induction d'un champ électromoteur s'accompagne généralement de l'apparition d'un potentiel électrique (voir §II.1.1.2).
3. le champ électromoteur et le potentiel électrique contribuent à la création de la densité de courants induits.
4. enfin, cette densité de courants produit le champ magnétique induit

Pour la mise en équations de ce schéma physique, nous devons considérer le développement perturbatif du champ électromoteur  $\vec{e}$ , du potentiel électrique  $\phi$  et de la densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \quad \text{avec} \quad \phi_k = \mathcal{O}(R_m^k), \quad (\text{II.57})$$

$$\vec{j} = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{j}_k \quad \text{avec} \quad \vec{j}_k = \mathcal{O}(R_m^k), \quad (\text{II.58})$$

$$\vec{e} = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{e}_k \quad \text{avec} \quad \vec{e}_k = \mathcal{O}(R_m^k). \quad (\text{II.59})$$

Le champ électromoteur induit à partir de  $\vec{B}_k$  et la densité de courants associée s'écrivent alors :

$$\vec{e}_{k+1} = \vec{u} \times \vec{B}_k \quad \text{et} \quad \vec{j}_{k+1} = \sigma \left( -\vec{\nabla} \phi_{k+1} + \vec{e}_{k+1} \right), \quad (\text{II.60})$$

où le potentiel  $\phi$  est nécessaire afin d'assurer la conservation de la charge dans le milieu. Par ailleurs, dans le cas d'un milieu extérieur isolant, la densité de courant doit satisfaire la condition

$$\vec{j}_{k+1} \cdot \vec{n} = 0. \quad (\text{II.61})$$

La détermination du potentiel électrique s'obtient en écrivant l'annulation de la divergence de  $\vec{j}_{k+1}$  qui conduit à l'équation de Poisson

$$\Delta \phi_{k+1} = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \times \vec{B}_k \right). \quad (\text{II.62})$$

Cette équation, qui n'est autre que (II.18) écrite à l'ordre  $k + 1$ , est associée à la condition aux limites (II.61), qui en termes du potentiel électrique s'écrit simplement

$$\nabla_n \phi_{k+1} = \left( \vec{u} \times \vec{B}_k \right)_n. \quad (\text{II.63})$$

Une fois le potentiel résolu, on détermine la densité de courant à l'ordre  $k + 1$  par (II.60) , puis on en déduit le champ magnétique associé par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}_{k+1}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{k+1}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'. \quad (\text{II.64})$$

Le problème ainsi décomposé présente un double avantage :

- il donne une interprétation physique du mécanisme élémentaire d'induction selon le schéma usuel :

conducteur en mouvement + $\vec{B}$ $\longrightarrow$ champ électromoteur $\longrightarrow$ courants induits $\longrightarrow$ $\vec{B}_{induit}$
---

- la gestion des conditions aux limites devient extrêmement simple, puisqu'elle n'intervient qu'au niveau de la détermination du potentiel électrique comme solution d'une équation de Poisson connaissant la composante normale du gradient de la solution à la paroi. Il s'agit donc d'un problème classique de type Neumann, pour lequel des techniques usuelles de résolution par différences finies peuvent être utilisées, en respectant la géométrie du dispositif expérimental.

Le tableau (II.2) résume la description d'une étape élémentaire d'induction et sa mise en équation.

### II.2.3.3 Effet de la conductivité des parois

Comme nous l'avons souligné, il est important de pouvoir décrire aussi précisément que possible le problème des conditions aux limites. Ceci implique d'une part de respecter la

étape 1 : <b>induction</b> : champ électromoteur	$\vec{e}_{k+1} = \vec{u} \times \vec{B}_k$
étape 2 : <b>conservation de la charge</b> : pot. électrique problème de Neumann	$\Delta\phi_{k+1} = \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_{k+1}$ CL : $\nabla_n \phi_{k+1} = \vec{e}_{k+1} \cdot \vec{n}$
étape 3 : <b>loi d'Ohm</b> : courants induits	$\vec{j}_{k+1} = \sigma \left( -\vec{\nabla}\phi_{k+1} + \vec{e}_{k+1} \right)$
étape 4 : <b>Biot et Savart</b> : champ magnétique induit	$\vec{B}_{k+1}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{k+1}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} d^3\vec{r}'$

**Tab. II.2:** décomposition du mécanisme élémentaire d'induction

géométrie du volume expérimental et d'autre part de respecter si possible les conductivités des parois. Pour respecter cette deuxième condition, nous avons vu au §II.1.2.3 qu'il était intéressant de considérer les parois comme faisant partie du milieu et de se ramener ainsi au cas d'un milieu extérieur isolant. Une première approximation pour comparer l'effet de parois isolantes et de parois conductrices est de considérer une couche de fluide au repos au-delà du volume de l'écoulement. Cette approche présente l'avantage de ne pas introduire de discontinuité de conductivité et le problème reste correctement décrit par la mise en équations introduite précédemment. Si toutefois on veut étudier en détail l'influence d'une différence de conductivité entre le fluide et les parois, il faut alors prendre en compte la discontinuité de conductivité au niveau de la paroi. Dans l'approche perturbative que nous développons, cela revient à remplacer l'équation (II.53) par

$$\lambda \Delta \vec{B}_{k+1} = - \left( \vec{B}_k \times \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \left( \vec{u} \times \vec{\nabla} \right) \vec{B}_k + [\lambda]_{(S_{int})} \delta_{(S_{int})} \vec{n} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{B}_{k+1} \right). \quad (\text{II.65})$$

De façon plus générale, afin d'étudier l'influence de n'importe quel type d'inhomogénéité de la conductivité du milieu, on pourra considérer l'équation

$$\lambda \Delta \vec{B}_{k+1} = - \left( \vec{B}_k \times \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \left( \vec{u} \times \vec{\nabla} \right) \vec{B}_k + \vec{\nabla} \lambda \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{B}_{k+1} \right). \quad (\text{II.66})$$

En ce qui concerne le problème décomposé en terme de potentiel, courants associés et champ magnétique résultant, l'effet de la discontinuité de conductivité intervient au niveau de l'équation satisfaite par le potentiel. Elle s'écrit alors

$$\sigma \Delta \phi_{k+1} + [\sigma]_{S_{int}} \delta_{S_{int}} \vec{n}_{int} \cdot \vec{\nabla} \phi_{k+1} = \sigma \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \times \vec{B}_k \right) + [\sigma]_{S_{int}} \delta_{S_{int}} \vec{n}_{int} \cdot \left( \vec{u} \times \vec{B}_k \right), \quad (\text{II.67})$$

ou plus généralement

$$\sigma \Delta \phi_{k+1} + \vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{\nabla} \phi_{k+1} \cdot \vec{n}_{int} = \sigma \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \times \vec{B}_k \right) + \vec{\nabla} \sigma \cdot \left( \vec{u} \times \vec{B}_k \right). \quad (\text{II.68})$$

## II.2.4 Mise en oeuvre numérique

Il s'agit de résoudre numériquement l'algorithme itératif dont la décomposition décrite dans le tableau (II.2) constitue le motif élémentaire.

### II.2.4.1 Adimensionnalisation

La première étape indispensable au traitement numérique du problème est l'adimensionnalisation complète des grandeurs physiques mises en jeu. Soient alors  $L$  l'échelle de longueur caractéristique de l'écoulement,  $U$  la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $B_0$  l'amplitude du champ appliqué. On peut alors définir les grandeurs sans dimension suivantes :

$$\vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{L} \quad ; \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U} \quad ; \quad \vec{e}^* = \frac{\vec{e}}{UB_0} \quad ; \quad (\text{II.69})$$

$$\phi^* = \frac{\phi}{ULB_0} \quad ; \quad \vec{j}^* = \frac{\vec{j}}{B_0\sigma U} \quad ; \quad \vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_0} \quad ; \quad (\text{II.70})$$

Dans l'étude de l'induction par les écoulements von Kármán, nous prendrons  $L = R$  (où  $R$  est le rayon du cylindre) et  $U = U_{max}$  (où  $U_{max}$  est l'amplitude maximale du champ de vitesse.) Le schéma d'itération pour ces grandeurs adimensionnées est décrit dans le tableau (II.3).

étape 1 : <b>induction</b> : champ électromoteur	$\vec{e}_{k+1}^* = \vec{u}^* \times \vec{B}_k^*$
étape 2 : <b>conservation de la charge</b> : pot. électrique problème de Neumann	$\Delta^* \phi_{k+1}^* = \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_{k+1}^*$ CL : $\nabla_n^* \phi_{k+1}^* = \vec{e}_{k+1}^* \cdot \vec{n}$
étape 3 : <b>loi d'Ohm</b> : courants induits	$\vec{j}_{k+1}^* = -\vec{\nabla}^* \phi_{k+1}^* + \vec{e}_{k+1}^*$
étape 4 : <b>Biot et Savart</b> : champ magnétique induit	$\vec{B}_{k+1}^*(\vec{r}^*) = \frac{R_m}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{k+1}^*(\vec{r}'^*) \times (\vec{r}^* - \vec{r}'^*)}{ \vec{r}^* - \vec{r}'^* ^3} d^3 \vec{r}'^*$

**Tab. II.3:** décomposition du mécanisme élémentaire d'induction pour les grandeurs sans dimension.

On peut à ce stade remarquer que le nombre de Reynolds magnétique est le seul paramètre du problème et qu'il n'intervient que dans la dernière étape du schéma de sorte que les grandeurs adimensionnées  $\vec{e}_k^*$ ,  $\phi_k^*$  et  $\vec{j}_k^*$  sont en fait d'ordre  $\mathcal{O}(R_m^{k-1})$ . Les grandeurs dimensionnées associées sont en revanche bien d'ordre  $\mathcal{O}(R_m^k)$  :

$$\vec{e}_k^*(R_m) = \vec{e}_k^*(1)R_m^{k-1} \quad \text{et} \quad \vec{e}_k(R_m) = \frac{B_0\lambda}{L} \vec{e}_k^*(1)R_m^k, \quad (\text{II.71})$$

$$\phi_k^*(R_m) = \phi_k^*(1)R_m^{k-1} \quad \text{et} \quad \phi_k(R_m) = B_0\lambda\phi_k^*(1)R_m^k, \quad (\text{II.72})$$

$$\vec{j}_k^*(R_m) = \vec{j}_k^*(1)R_m^{k-1} \quad \text{et} \quad \vec{j}_k(R_m) = \frac{B_0}{\mu_0 L} \vec{j}_k^*(1)R_m^k, \quad (\text{II.73})$$

$$\vec{B}_k^*(R_m) = \vec{B}_k^*(1)R_m^k \quad \text{et} \quad \vec{B}_k(R_m) = B_0\vec{B}_k^*(1)R_m^k. \quad (\text{II.74})$$

La dépendance en  $R_m$  pour les grandeurs totales  $\vec{e}$ ,  $\phi$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{B}_{ind}$  est alors simplement donnée sous la forme d'un développement en série entière en puissances de  $R_m$

$$\vec{e}(R_m) \simeq \frac{B_0 \lambda}{L} \sum_{k=1}^n \vec{e}_k^*(1) R_m^k, \quad (\text{II.75})$$

$$\phi(R_m) \simeq B_0 \lambda \sum_{k=1}^n \phi_k^*(1) R_m^k, \quad (\text{II.76})$$

$$\vec{j}(R_m) \simeq \frac{B_0}{\mu_0 L} \sum_{k=1}^n \vec{j}_k^*(1) R_m^k, \quad (\text{II.77})$$

$$\vec{B}_{ind}(R_m) \simeq B_0 \sum_{k=1}^n \vec{B}_k^*(1) R_m^k, \quad (\text{II.78})$$

où  $n$  est l'ordre maximal auquel on aura poussé l'itération.

Ces expressions montrent que pour déterminer la dépendance en  $R_m$  des différentes grandeurs, il suffit de résoudre le problème itératif pour la seule valeur  $R_m = 1$ , ce qui revient à calculer les coefficients du développement perturbatif. L'approche typique que nous adopterons consiste à résoudre le schéma pour  $R_m = 1$ , ce qui nous permet d'étudier en détail les différentes étapes de l'induction en analysant la structure spatiale des champs induits aux différents ordres. Ensuite nous nous intéresserons à l'évolution de ces mécanismes en fonction de  $R_m$  (en se restreignant au disque de convergence  $R_m^*$ ), à partir des développements perturbatifs ci-dessus. Nous décrirons dans le chapitre suivant (§III.2.4.2) comment cette évolution peut être étendue au-delà de  $R_m^*$  grâce à l'utilisation des approximants de Padé.

### II.2.4.2 Méthode de résolution

L'étape cruciale dans l'approche numérique est la résolution de l'équation de Poisson donnant le potentiel électrique. Cette résolution est faite par un calcul aux différences finies. Nous décrirons dans la section suivante la grille de discrétisation employée. L'approximation des opérateurs différentiels est en général faite au second ordre, mais peut être poussée pour certains calculs jusqu'à l'ordre 4. L'équation aux dérivées partielles est ainsi transformée en un système linéaire d'équations. La matrice associée est obtenue puis inversée à l'aide de la bibliothèque Overture [41].

Le schéma itératif n'est résolu que pour  $R_m = 1$ . Nous résolvons typiquement une quarantaine d'itérations, conduisant à une convergence des développements perturbatifs (II.75) à (II.78) avec une précision de l'ordre de  $\epsilon = |B_{ind,n+1} - B_{ind,n}| < 10^{-5}$  sur l'ensemble du disque de convergence  $|R_m| < R_m^*$ . L'étude de la structure spatiale des champs induits à  $R_m = 1$  peut se limiter aux dix premiers termes des développements en série qui, pour  $R_m = 1$ , assurent à eux-seuls une précision suffisante, de l'ordre de  $\epsilon(R_m = 1) = |B_{ind,n+1}(R_m = 1) - B_{ind,n}(R_m = 1)| < 10^{-8}$ .

### II.2.4.3 Choix de la grille de résolution

Dans la mesure où nous souhaitons appliquer les résultats numériques aux expériences von Kármán, nous allons résoudre le problème dans un volume cylindrique. L'utilisation d'une grille numérique cylindrique, définie par des noeuds de coordonnées  $(r_j, \theta_j, z_j)$  semble alors s'imposer. Bien que très adapté à la géométrie du problème, un tel choix

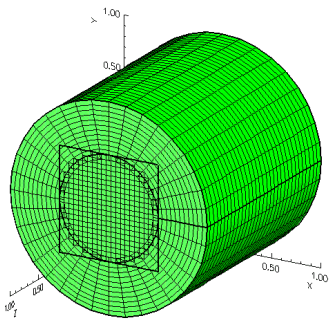


pose le problème de la singularité que représentent les points de l'axe ( $r_j = 0$ ) pour les opérateurs différentiels calculés par les différences finies. Une première solution consisterait à utiliser une grille rectangulaire, mais dans ce cas la description de la géométrie cylindrique des parois devient très médiocre (à moins d'utiliser une grille très fine, ce qui est très pénalisant du point de vue des ressources numériques.) Nous avons donc opté pour l'utilisation d'une grille composite constituée d'une grille centrale rectangulaire entourée d'une grille cylindrique, mieux adaptée à la géométrie des parois (figure II.7a). Des points d'interpolation dans la région où les deux grilles se rejoignent sont utilisés pour le calcul des opérateurs différentiels sur chaque grille. Les conditions aux limites sont définies en utilisant des points *fantômes* au-delà du volume d'intérêt.

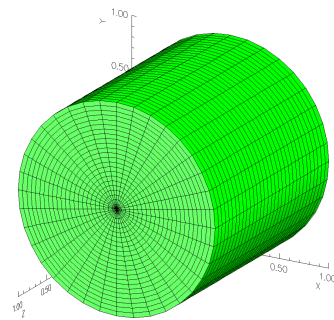
Nous travaillons essentiellement avec des maillages dont les noeuds sont régulièrement espacés, mais il est également possible d'utiliser des grilles étirées (figure II.7c) afin de mieux résoudre certaines régions présentant un intérêt particulier. C'est notamment le cas du voisinage des parois et du plan médian du cylindre.

La visualisation des résultats des simulations numériques est faite sur une grille purement cylindrique (étirée ou pas selon les cas) par interpolation à partir des champs calculés sur la grille composite (figures II.7b et d.)

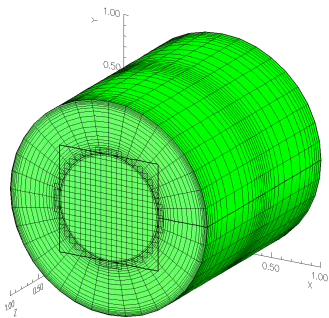
La grille utilisée le plus souvent est de rapport d'aspect égal à 1 (le diamètre est égal à la hauteur du cylindre) en accord avec les configurations expérimentales étudiées.



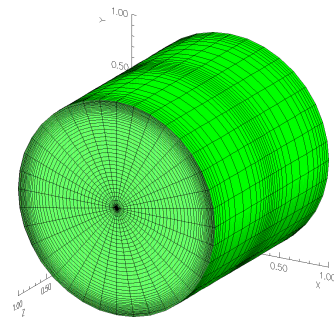
(a) grille composite (utilisée pour le calcul numérique)



(b) grille cylindrique (pour la visualisation des résultats)



(c) grille composite étirée



(d) grille cylindrique étirée

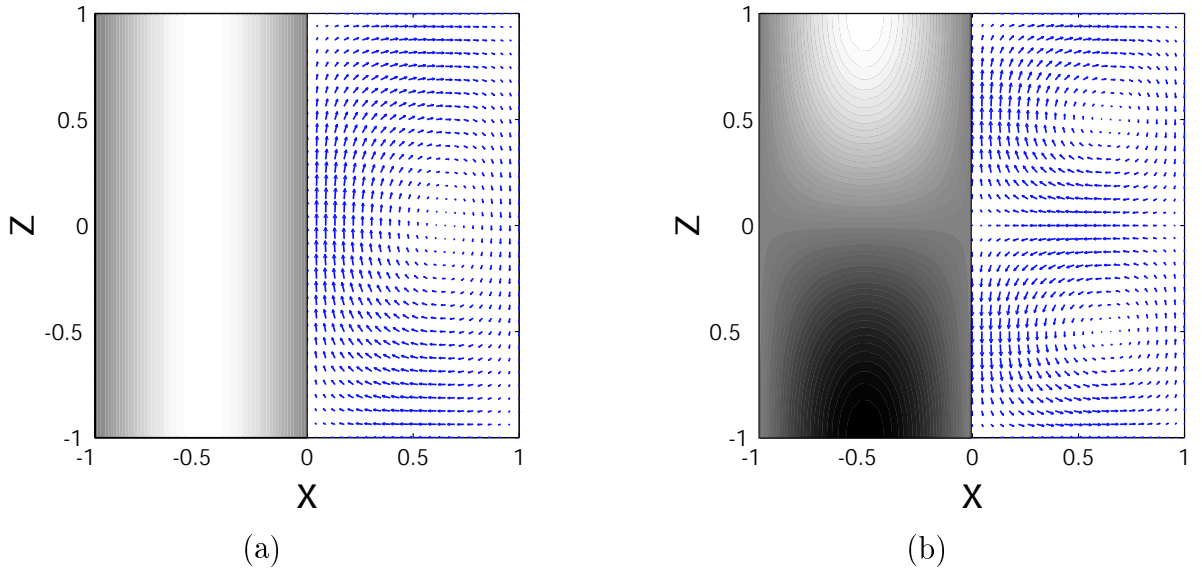
**Fig. II.7:** Différents types de grilles utilisés pour l'étude numérique des mécanismes d'induction. Les grilles composites permettent de s'affranchir des singularités en  $r = 0$  pour le calcul des opérateurs différentiels par différences finies.

### II.2.5 Champ de vitesse numérique

Le champ de vitesse utilisé dans les simulations numériques est défini point par point sur l'ensemble du maillage. Il peut être donné analytiquement pour l'étude d'écoulements modèles ou bien par des mesures expérimentales si l'on souhaite étudier les effets particuliers d'un écoulement moyen réel.

Pour l'étude générale des mécanismes d'induction élémentaires se produisant dans les écoulements de von Kármán, nous utilisons un champ de vitesse produit numériquement et possédant les principales propriétés caractéristiques des écoulements de von Kármán à un et à deux disques en rotation. La forme analytique de ce champ de vitesse est :

Un disque en rotation	Deux disques en contra-rotation
$\tilde{u}_r = -\sin \pi \tilde{r} \cos \frac{\pi(\tilde{z} + 1)}{2}$	$\tilde{u}_r = -\sin \pi \tilde{r} \cos \pi \tilde{z}$
$\tilde{u}_\theta = 2(P/T)^{-1} \sin \pi \tilde{r}$	$\tilde{u}_\theta = 2(P/T)^{-1} \sin \frac{\pi \tilde{z}}{2} \sin \pi \tilde{r}$
$\tilde{u}_z = \frac{1}{\pi \tilde{r}} \sin \frac{\pi(\tilde{z} + 1)}{2} (\pi \tilde{r} \cos \pi \tilde{r} + \sin \pi \tilde{r})$	$\tilde{u}_z = \frac{1}{\pi \tilde{r}} \sin \pi \tilde{z} (\pi \tilde{r} \cos \pi \tilde{r} + \sin \pi \tilde{r})$



**Fig. II.8:** Champ de vitesse modèle pour les écoulements de von Kármán à un disque en rotation et deux disques contra-rotatifs. Les contours représentent la composante azimutale de la vitesse (négative en sombre et positive en clair.)

L'écoulement ainsi simulé est incompressible ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ), à symétrie de révolution, hélicitaire et possède de la rotation différentielle dans le régime contra-rotatif. Les figures II.8 représentent les vues en coupe correspondantes. On y retrouve effectivement les propriétés décrites dans le chapitre précédent pour les écoulements von Kármán réels.

On peut remarquer que ce champ de vitesse ne vérifie pas la condition de non-glissement à la paroi. Ceci peut éventuellement être corrigé en appliquant sur chacune des composantes de  $\vec{u}$  un facteur multiplicatif assurant une décroissance rapide (en tangente hyperbolique) de la vitesse au voisinage de la paroi. Il est indispensable dans ce cas d'utiliser un maillage étiré afin d'avoir une résolution spatiale suffisante au voisinage des bords du cylindre. Toutefois, l'épaisseur  $\delta \sim 100 \mu\text{m}$  de la couche limite dans les

écoulements réels reste extrêmement faible devant la longueur de diffusion du champ magnétique  $l_d \sim 1$  cm, de telle sorte qu'une condition aux limites hydrodynamique glissante constitue une description acceptable de l'écoulement.

Pour une étude numérique précise des effets d'induction observés expérimentalement dans les écoulements de métal liquide, nous utiliserons un champ de vitesse mesuré expérimentalement dans un écoulement en eau identique (à un facteur d'échelle près). Ces mesures sont obtenues par vélocimétrie LASER Doppler (LDV) et nous sont fournies par l'équipe du CEA de Saclay dans le cadre de la collaboration VKS. Une étude détaillée sur ces mesures en eau peut être trouvée dans [57] et [76].

## II.2.6 Lien formel avec la dynamo cinématique

### II.2.6.1 Étude générale

L'approche itérative et la recherche d'un bouclage conduisant à l'origine de l'instabilité dynamo peuvent être reliées de façon formelle au problème de la dynamo cinématique et du calcul des taux de croissance. Rappelons que l'étude des taux de croissance se fait par une analyse de stabilité linéaire, où l'on recherche une solution de l'équation d'induction sous la forme d'un mode caractérisé par le taux de croissance  $\eta_c$  et son amplitude spatiale  $\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \vec{B} \exp(\eta_c t). \quad (\text{II.79})$$

Reportée dans l'équation d'induction réduite (II.37), cette expression conduit au problème aux valeurs propres :

$$\mathcal{L}_{R_m} \vec{B} = \eta_c \vec{B} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{R_m} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \bullet) + \frac{1}{R_m} \Delta \bullet. \quad (\text{II.80})$$

Pour une valeur de  $R_m$  donnée, le mode le plus instable correspond alors au vecteur propre de l'opérateur  $\mathcal{L}_{R_m}$  dont le taux de croissance est le plus grand : on le notera  $\eta_c^{max}(R_m)$ . Le seuil de l'instabilité correspond à la valeur  $R_m^c$  du nombre de Reynolds magnétique telle que  $\eta_c(R_m^c) = 0$ . Le mode instable vérifie alors

$$\mathcal{L}_{R_m^c} \vec{B} = \vec{0}. \quad (\text{II.81})$$

et appartient donc au noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_{R_m^c}$ .

L'approche itérative (II.56) peut être formulée à l'aide de l'opérateur  $\mathcal{L}'_{R_m}$  défini par

$$\mathcal{L}'_{R_m} = -R_m \Delta^{-1} \left[ \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \bullet) \right] = R_m \mathcal{L}'_1. \quad (\text{II.82})$$

Pour une valeur de  $R_m$  donnée, le champ magnétique  $\vec{B}_{k+1}(R_m)$  induit à l'ordre  $k+1$  est obtenu à partir de  $\vec{B}_k(R_m)$  par

$$\vec{B}_{k+1}(R_m) = \mathcal{L}'_{R_m} \vec{B}_k(R_m). \quad (\text{II.83})$$

Compte tenu de la relation  $\vec{B}_k(R_m) = \vec{B}(1) R_m^k$ , comme nous l'avons souligné plus haut, l'induction à n'importe quelle valeur de  $R_m$  peut s'obtenir simplement à partir du

calcul itératif effectué pour  $R_m = 1$ . Nous noterons dans la suite  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_1$  et  $\vec{B}_k = \vec{B}_k(1)$ . Il suffit alors de considérer l'itération élémentaire

$$\vec{B}_{k+1} = \mathcal{L}' \vec{B}_k. \quad (\text{II.84})$$

Le critère indiquant la possibilité de croissance de l'instabilité dynamo s'exprime par la condition de bouclage du champ magnétique. Cela signifie que, partant de  $\vec{B}_k$ , au bout d'un certain nombre d'itérations  $n_b$ , que nous appellerons *indice de bouclage*, le champ induit  $\vec{B}_{k+n_b}$  se superpose à  $\vec{B}_k$  :

$$\boxed{\text{Il existe un entier } n_b \text{ tel que } \vec{B}_{k+n_b} = \mathcal{L}'^{n_b} \vec{B}_k = \gamma \vec{B}_k}, \quad (\text{II.85})$$

où  $\gamma$  est une constante dépendant de  $\vec{B}_k$  et de la structure de l'écoulement qu'on appellera *facteur de bouclage*.

L'identification d'un mécanisme de bouclage revient donc à déterminer l'indice de bouclage  $n_b$  et à identifier un vecteur propre de l'opérateur  $\mathcal{L}'^{n_b}$ . Plusieurs points méritent d'être soulignés à ce stade :

- s'il existe un indice de bouclage  $n_b$  vérifiant la condition (II.85), alors tout multiple entier de  $n_b$  est aussi un indice de bouclage. Nous appellerons indice de bouclage le plus petit entier vérifiant la condition de bouclage (II.85). Par exemple,  $n_b = 1$  pour la dynamo homopolaire, et  $n_b = 2$  pour la dynamo  $\Omega^2$  de Lowes & Wilkinson ;
- la condition de bouclage (II.85) s'écrit, pour une valeur de  $R_m$  quelconque, sous la forme  $\mathcal{L}'_{R_m}^{n_b} \vec{B}_k(R_m) = \gamma R_m^{n_b} \vec{B}_k(R_m)$  ;
- l'équation (II.85) décrit un système magnétique bouclé, où  $\gamma$  joue le rôle de coefficient d'amplification. De façon intuitive, on s'attend donc à ce que le bouclage favorise a priori la croissance de l'instabilité si  $\gamma > 0$  (car  $\vec{B}_{k+n_b}$  est alors dans le même sens que  $\vec{B}_k$  et on parlera de *bouclage dynamo*), et à ce qu'en revanche, le bouclage s'oppose à la croissance de l'instabilité si  $\gamma < 0$  (car  $\vec{B}_{k+n_b}$  est alors de sens opposé à  $\vec{B}_k$  et on parlera de *bouclage anti-dynamo*) ;
- dans sa formulation présente, l'approche mécaniste que nous proposons n'est adaptée qu'à l'étude des effets d'induction stationnaires. Dans le cadre de la dynamo, et en particulier des projets von Kármán, c'est dans la configuration contra-rotative (proche de l'écoulement  $s_2 t_2$  donnant une dynamo stationnaire dans les travaux de Dudley et James) qu'un schéma de bouclage dynamo sera recherché.

On peut alors montrer que la recherche d'un mode dynamo par identification d'un schéma de bouclage (II.85) est formellement équivalente à l'étude par le calcul du de croissance de l'instabilité. Pour cela il est utile de distinguer les cas  $n_b = 1$  et  $n_b > 1$ .

**Cas  $n_b = 1$ .** Considérons le cas où l'état initial du système est tel que la structure du champ induit au bout de la première itération recouvre le champ initial, donnant ainsi lieu à un bouclage d'indice un. Le schéma élémentaire donnant le bouclage s'écrit

$$\mathcal{L}' \vec{B}_k = \gamma \vec{B}_k, \quad (\text{II.86})$$

ou

$$\mathcal{L}'_{R_m} \vec{B}_k(R_m) = \gamma R_m \vec{B}_k(R_m). \quad (\text{II.87})$$

C'est le cas notamment du montage homopolaire où l'on suppose que le champ initial possède la structure dipolaire instable; le facteur de bouclage vaut alors, d'après (I.7),  $\gamma = 1$  (si l'on définit le nombre de Reynolds magnétique pour le circuit homopolaire par  $R_m = M\Omega\mathcal{R}^{-1}$  où  $M$  est la mutuelle,  $\mathcal{R}$  la résistance et  $\Omega$  la fréquence de rotation du montage homopolaire.)

Pour que l'instabilité se développe effectivement, il faut que la condition de bouclage (II.87) conduise à une amplification du champ magnétique; autrement dit, il faut que  $\gamma R_m > 1$ . Le calcul de  $\gamma$  permet alors de déterminer le seuil de l'instabilité :

$$R_m^c = \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{II.88})$$

C'est ainsi que l'on peut déterminer le seuil de la dynamo homopolaire par  $R_m^c = \gamma^{-1} = 1$  (donnant la valeur critique de la fréquence de rotation  $\Omega_c = \frac{\mathcal{R}}{M}$ .)

Il faut remarquer que, dans le cas  $n_b = 1$ , la condition de bouclage (II.86) n'est en fait que la formulation du problème aux valeurs propres pour l'opérateur  $\mathcal{L}'$ . Il existe donc a priori plusieurs structures possibles de champ magnétique pouvant conduire à l'instabilité, données par l'ensemble des vecteurs propres  $\{\vec{B}_\alpha\}$  de  $\mathcal{L}'$ . À chacun d'eux correspond un seuil, donné par  $R_{m,\alpha}^c = \frac{1}{\gamma_\alpha}$ , où le facteur d'amplification  $\gamma_\alpha$  est alors la valeur propre associée à  $\vec{B}_\alpha$ . Il semble alors raisonnable de définir le seuil de l'instabilité comme le plus petit des  $R_{m,\alpha}^c$ . Le mode instable est donc le vecteur propre de  $\mathcal{L}'$  associé à la plus grande des valeurs propres (c'est-à-dire, celui possédant le plus grand facteur de bouclage.)

Lorsqu'on se place exactement à la limite du seuil de l'instabilité ( $R_m = R_m^c$ ), le champ magnétique  $\vec{B}$  est alors solution de l'équation

$$\mathcal{L}'_{R_m^c} \vec{B} = \vec{B}. \quad (\text{II.89})$$

Compte tenu de l'expression (II.82) pour  $\mathcal{L}'_{R_m}$ , cette relation est équivalente à celle obtenue en écrivant l'annulation du taux de croissance (II.81) et s'écrit :

$$\Delta \vec{B} + R_m^c \vec{\nabla} (\vec{u} \times \vec{B}) = \vec{0}. \quad (\text{II.90})$$

**Cas  $n_b > 1$ .** Le paragraphe précédent nous a montré l'équivalence de l'approche itérative et de l'approche par calcul des taux de croissance lorsque le bouclage dynamo s'effectue en un coup. La condition de bouclage permet alors de déterminer le seuil de l'instabilité par la relation (II.88). Si l'indice de croissance  $n_b$  est supérieur à un, l'approche itérative ne permet plus d'écrire directement la relation (II.90) donnant cette équivalence et la détermination du seuil par l'approche itérative est moins évidente. Pour l'établir, nous allons nous ramener à un bouclage en un coup.

Considérons le schéma de bouclage suivant

$$\vec{B}_k \xrightarrow{\mathcal{L}'} \vec{B}_{k+1} \xrightarrow{\mathcal{L}'} \vec{B}_{k+2} \xrightarrow{\mathcal{L}'} \dots \xrightarrow{\mathcal{L}'} \vec{B}_{k+n_b} = \gamma \vec{B}_k. \quad (\text{II.91})$$

Les vecteurs  $\{\vec{B}_k, \vec{B}_{k+1}, \dots, \vec{B}_{k+n_b-1}\}$  forment alors une famille stable par  $\mathcal{L}'$ . Si nous supposons de plus que cette famille est libre (à défaut, nous pouvons en extraire une

famille libre), elle définit alors un sous-espace  $\mathcal{E}$  stable pour l'opérateur  $\mathcal{L}'$ . On peut alors rechercher une base de  $\mathcal{E}$  de vecteurs propres de  $\mathcal{L}'$ ,  $\{\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_{n_b}\}$ , et déterminer les valeurs propres associées  $\{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{n_b}\}$  telles que :

$$\mathcal{L}'\vec{\beta}_i = \tilde{\gamma}_i\vec{\beta}_i. \quad (\text{II.92})$$

Dans le cas le plus général, les vecteurs et valeurs propres ainsi obtenues sont éventuellement complexes (le sens physique de cette situation sera discuté lors de l'étude de cas concrets.) On est ainsi ramené au problème du paragraphe précédent pour le bouclage d'indice 1, c'est-à-dire simplement au problème aux valeurs propres pour l'opérateur  $\mathcal{L}'$  qui est l'équivalent de l'annulation du taux de croissance de l'instabilité. Nous étudions, dans le paragraphe suivant, le cas de la dynamo  $\Omega^2$  de Lowes & Wilkinson, correspondant au cas  $n_b = 2$ .

**Remarque.** Pour décrire un schéma de bouclage, il est utile de définir les champs magnétiques normés  $\vec{b}_k$  par

$$\vec{b}_k = \frac{\vec{B}_{k+1}}{\int_{\text{Espace}} |\vec{B}_k|^2 d^3\vec{r}}. \quad (\text{II.93})$$

On peut alors définir des facteurs de bouclage intermédiaires  $\gamma_n$  traduisant l'efficacité de la  $n^{\text{ème}}$  étape du schéma de bouclage (II.91) qui s'écrit alors

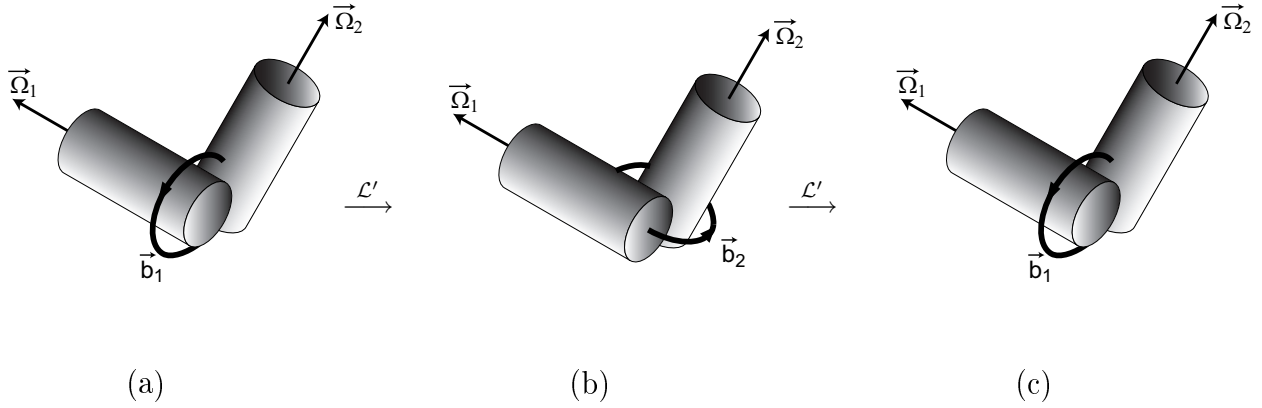
$$\vec{b}_k \xrightarrow{\mathcal{L}'} \gamma_1 \vec{b}_{k+1} \xrightarrow{\mathcal{L}'} \gamma_2 \vec{b}_{k+2} \xrightarrow{\mathcal{L}'} \dots \xrightarrow{\mathcal{L}'} \vec{b}_{k+n_b} = \gamma \vec{b}_k.$$

Le facteur de bouclage  $\gamma$  est trivialement relié aux facteurs de couplage intermédiaires par

$$\gamma = \prod_{n=1}^{n_b} \gamma_n. \quad (\text{II.94})$$

### II.2.6.2 Exemple de la dynamo de Lowes & Wilkinson

La dynamo de Lowes & Wilkinson permet d'illustrer qualitativement le cas d'un mécanisme de bouclage d'indice  $n_b > 1$ . En effet, le mécanisme à l'origine de l'instabilité dynamo peut être expliqué par un bouclage en deux étapes entre deux structures de champ magnétique schématiquement représentées sur les figures II.9a et b. La rotation différentielle entre l'extrémité du cylindre 2 et le conducteur au repos au sein duquel est plongé le dispositif déforme le champ magnétique  $\vec{b}_1$ , décrit par la figure II.9a, pour donner un champ induit  $\vec{b}_2$  dont la structure est décrite par la figure II.9b. De même, la rotation différentielle entre l'extrémité du cylindre 1 et le conducteur au repos déforme le champ magnétique  $\vec{b}_2$  pour donner un champ induit dont la structure est celle de  $\vec{b}_1$  (figure II.9c.)



**Fig. II.9:** Mécanisme de bouclage en deux étapes dans la dynamo de Lowes & Wilkinson.

Les structures de figures II.9a et b correspondent ainsi à deux modes  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  donnant un bouclage en deux étapes tel que :

$$\mathcal{L}'\vec{b}_1 = \gamma_1\vec{b}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'\vec{b}_2 = \gamma_2\vec{b}_1,$$

et donc

$$\mathcal{L}'^2\vec{b}_1 = \gamma_1\gamma_2\vec{b}_1 = \gamma\vec{b}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'^2\vec{b}_2 = \gamma_1\gamma_2\vec{b}_2 = \gamma\vec{b}_2. \quad (\text{II.95})$$

L'efficacité des conversion entre  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  est donnée par les facteurs de bouclage intermédiaires  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (si les rotors sont identiques,  $\gamma_1 = \gamma_2$ .) Leur valeur ne dépend que de la géométrie du dispositif. En particulier, le signe de  $\gamma$  dépend du sens de rotation relatif des deux cylindres. Sur la représentation des figures II.9a et b, le bouclage est positif : la configuration donne lieu à une dynamo. Si la rotation d'un des cylindres est renversée, le bouclage devient négatif (si le cylindre 1 par exemple tourne en sens opposé, le champ induit par  $\vec{b}_2$  sera de sens opposé à  $\vec{b}_1$ ) et tendra à s'opposer à la croissance d'un champ magnétique : la configuration est anti-dynamo.

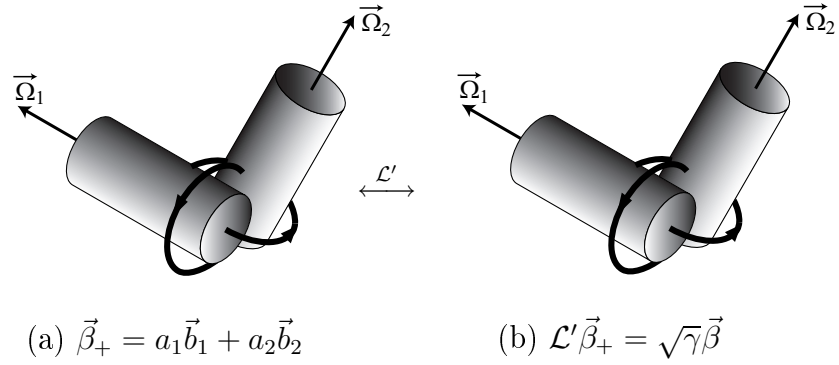
Si les modes  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  sont identifiés (par résolution du schéma perturbatif par exemple), ils peuvent alors être superposés pour former un mode propre de  $\mathcal{L}'$

$$\vec{\beta} = a_1\vec{b}_1 + a_2\vec{b}_2, \quad (\text{II.96})$$

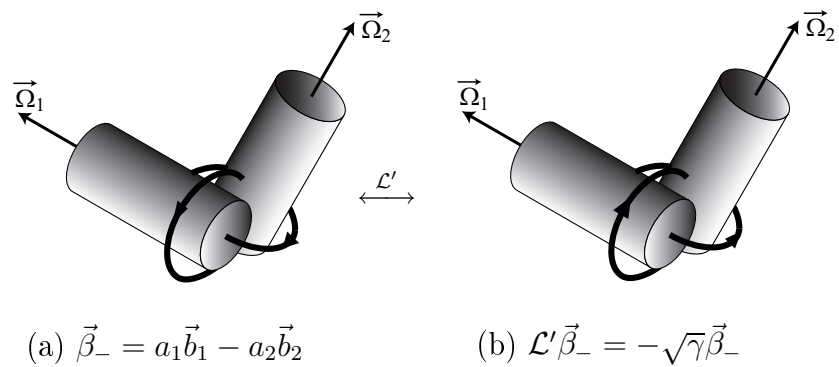
donnant lieu à un bouclage en un coup (figure II.10.) Le mode ainsi créé possède dans les bonnes proportions, définies par  $a_1$  et  $a_2$ , les propriétés structurelles à la fois de  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  permettant aux deux étapes du bouclage de se produire efficacement en une seule fois. L'importance relative des contributions de  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  dans la superposition conduisant à  $\vec{\beta}$  dépend de l'efficacité de chacune des conversion  $\vec{b}_1 \rightarrow \vec{b}_2$  et  $\vec{b}_2 \rightarrow \vec{b}_1$  (si les rotors sont identiques  $a_1 = a_2$ .)

La recherche des modes propres de  $\mathcal{L}'$  à partir d'un schéma de bouclage connu et identifié correspond simplement à définir des structures de champ magnétique possédant dans les bonnes proportions les propriétés structurelles des champs correspondant à chacune des étapes intermédiaires du bouclage, afin de pouvoir le réaliser en une seule étape.

Dans le cas simple d'un bouclage en deux étapes, on peut déterminer la forme générale des modes propres de  $\mathcal{L}'$  dans le sous-espace  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ .



**Fig. II.10:** mode propre instable de la configuration dynamo du dispositif de Lowes & Wilkinson (donnant un bouclage  $\Omega^2$  positif en deux étapes.)



**Fig. II.11:** mode propre stable de la configuration dynamo du dispositif de Lowes & Wilkinson (donnant un bouclage  $\Omega^2$  positif en deux étapes.)



Si l'on note  $\tilde{\gamma}$  la valeur propre associée à  $\vec{\beta}$ , la condition  $\mathcal{L}'\vec{\beta} = \tilde{\gamma}\vec{\beta}$  et la condition de normalisation pour  $\vec{\beta}$  permettent de déterminer  $a_1$  et  $a_2$  comme solutions du système

$$a_1\gamma_1\vec{b}_2 + a_2\gamma_2\vec{b}_1 = \tilde{\gamma}a_1\vec{b}_1 + \tilde{\gamma}a_2\vec{b}_2, \quad (\text{II.97})$$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2\text{Re}\left(a_1a_2\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2\right) = 1. \quad (\text{II.98})$$

On en déduit les deux valeurs propres :

$$\tilde{\gamma}_+ = \sqrt{\gamma_1\gamma_2} = \sqrt{\gamma}, \quad (\text{II.99})$$

$$\tilde{\gamma}_- = -\sqrt{\gamma_1\gamma_2} = -\sqrt{\gamma}, \quad (\text{II.100})$$

puis, compte-tenu du fait que  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  sont nécessairement des grandeurs réelles, on obtient (après quelques lignes de calculs) les coefficients pour les deux vecteurs propres associés,  $\vec{\beta}_+$  et  $\vec{\beta}_-$ , sous la forme

$$a_{1+} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right| + 2\gamma_1\text{Re}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_+}\right)\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}} \quad \text{et} \quad a_{2+} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}a_{1+}, \quad (\text{II.101})$$

$$a_{1-} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right| + 2\gamma_1\text{Re}\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}_-}\right)\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}} \quad \text{et} \quad a_{2-} = -\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}a_{1-}. \quad (\text{II.102})$$

$$(\text{II.103})$$

Dans le cas particulier où  $|\gamma_1| = |\gamma_2|$  et  $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$ , ces expressions se réduisent à

$$a_{1\pm} = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad a_{2\pm} = \pm \frac{\sqrt{\text{sgn}(\gamma)}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{II.104})$$

où  $\text{sgn}$  désigne la fonction "signe". On distingue alors les deux cas suivants :

- Le bouclage en deux étapes est positif ( $\gamma > 0$ ). Dans ce cas,  $\tilde{\gamma}_+$ ,  $\tilde{\gamma}_-$ ,  $\vec{\beta}_+$  et  $\vec{\beta}_-$  sont réels :

- le mode associé à  $\gamma_+$  correspond à un seuil positif de l'instabilité  $R_m^c = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  : c'est un mode instable possible pouvant être auto-entretenu par effet dynamo. La figure II.10 correspond à ce mode-ci ;
- le mode associé à  $\gamma_-$  correspond à un seuil négatif qui ne peut donc pas donner lieu à l'instabilité dynamo. C'est le mode correspondant à celui de la figure II.11.

- Le bouclage en deux étapes est négatif ( $\gamma < 0$ ). Dans ce cas,  $\tilde{\gamma}_+$  et  $\tilde{\gamma}_-$  sont imaginaires purs et les modes propres  $\vec{\beta}_+$  et  $\vec{\beta}_-$  sont des modes complexes conjugués : ils ne correspondent donc pas à des situations physiques admissibles et ne peuvent pas donner lieu à l'instabilité. C'est le cas correspondant à la configuration où le sens de rotation d'un des cylindres serait renversé par rapport aux schémas précédents.

### II.2.6.3 Discussion

- **Conditions d'instabilité.** On peut remarquer que,  $R_m^c$  devant être (par définition de  $R_m$  du nombre de Reynolds magnétique) une grandeur réelle et positive, une condition

nécessaire et suffisante pour qu'un écoulement puisse engendrer une dynamo stationnaire est que le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}'$  associé à cet écoulement possède au moins une valeur propre réelle positive. Le seuil de l'instabilité est alors donné par  $R_m^c = \frac{1}{\gamma_{dyn}}$  où  $\gamma_{dyn}$  est la plus grande valeur propre réelle positive de  $\mathcal{L}'$ . Cette remarque est essentiellement formelle et présente a priori peu d'intérêt pratique vue la complexité de l'opérateur  $\mathcal{L}'$ , faisant notamment intervenir l'inverse de l'opérateur Laplacien.

• **Identification d'un bouclage à partir d'un état initial donné.** L'approche pratique que nous adopterons par la suite consistera à se donner un écoulement et une structure initiale de champ magnétique, puis à résoudre numériquement le processus itératif. On peut alors étudier en détail les mécanismes d'induction associés à cet état initial. Au bout d'un certain nombre d'itérations, on peut en général identifier un schéma de bouclage. À partir de ce schéma on détermine les facteurs de bouclage et les modes propres associés. Un mode dynamo sera "attrapé" s'il est associé à un facteur de bouclage réel et positif. Si aucun schéma de bouclage n'est identifié, ou si les modes identifiés sont associés à des facteurs de bouclage négatifs ou complexes, ils seront dits *anti-dynamo*, dans la mesure où ils ne peuvent être à l'origine de l'instabilité. C'est le cas notamment du montage homopolaire où le circuit est bouclé dans le *mauvais* sens ou du dispositif de Lowes & Wilkinson où l'un des cylindres tourne en sens opposé par rapport aux schémas du paragraphe précédent.

• **Identification d'un bouclage dynamo : nécessité d'une projection non-nulle de l'état initial sur le mode instable.** Le champ initial peut s'écrire sous forme d'une décomposition sur la base des vecteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}'$ . Si la configuration est favorable à la dynamo et si l'on souhaite identifier le mode instable dans un bouclage du schéma itératif, il est donc indispensable que le champ initial possède une projection non-nulle sur le mode dynamo (défini comme le vecteur propre  $\vec{\beta}_{dyn}$  associé à la plus grande valeur propre réelle positive  $\gamma_{dyn}$  de  $\mathcal{L}'$ .) Ainsi, le schéma de bouclage de la dynamo homopolaire peut être obtenu à partir d'un champ initial purement axial au voisinage du disque en rotation puisque, bien qu'un tel champ initial ne corresponde pas exactement à la structure dipolaire du champ instable, il possède néanmoins une forte projection sur cette dernière. Cette nécessité de projection sur le mode instable existe également dans l'approche du problème par l'étude des taux de croissance. Des expériences cherchant à mesurer le temps de décroissance d'un champ appliqué sur un écoulement de sodium ont été réalisées [70][2] afin d'observer une éventuelle dépendance de cette décroissance avec  $R_m$ . Pour des valeurs proches du seuil de l'instabilité,  $R_m^c$ , on s'attend à voir augmenter le temps de décroissance du champ magnétique, puisqu'on se rapproche de la situation où il tend à être auto-entretenu. L'une des principales difficultés expérimentales réside dans le fait que le champ appliqué doit alors posséder une projection suffisante sur le mode instable.

• **Identification d'un bouclage dynamo : Insuffisance d'une projection non-nulle de l'état initial sur le mode instable.** Supposons que l'opérateur  $\mathcal{L}'$  possède un vecteur propre  $\vec{\beta}_{dyn}$  associé à une valeur propre réelle positive  $\gamma_{dyn}$  pouvant donner un bouclage dynamo et considérons un champ magnétique initial pour le processus itératif

possédant une projection non-nulle sur  $\vec{\beta}_{dyn}$  et donné par :

$$\vec{B}_0 = a_{dyn}\vec{\beta}_{dyn} + a_{adyn}\vec{\beta}_{adyn}, \quad (\text{II.105})$$

où  $\vec{\beta}_{adyn}$  est un vecteur propre de  $\mathcal{L}'$  associé à une valeur propre négative (anti-dynamo) de  $\mathcal{L}'$ . Les modes  $\vec{\beta}_{dyn}$  et  $\vec{\beta}_{adyn}$  sont a priori inconnus. La question se pose de savoir si le processus itératif permettra d'identifier le mode dynamo. Au bout de  $n$  itérations, le champ induit à l'ordre  $n$  s'écrira

$$\vec{B}_n = a_{dyn}\gamma_{dyn}^n\vec{\beta}_{dyn} + a_{adyn}\gamma_{adyn}^n\vec{\beta}_{adyn}. \quad (\text{II.106})$$

Le mode qui survivra aux ordres élevés ne sera donc pas nécessairement le mode dynamo, mais celui dont le module de la valeur propre est la plus grande :

- si  $|\gamma_{dyn}^n| > |\gamma_{adyn}^n|$  pour un nombre  $n$  d'itérations suffisant

$$\vec{B}_n \simeq a_{dyn}\gamma_{dyn}^n\vec{\beta}_{dyn}, \quad (\text{II.107})$$

et les itérations suivantes conduiront à un bouclage positif identifiant clairement le mode dynamo  $\vec{\beta}_{dyn}$ .

- si  $|\gamma_{adyn}^n| > |\gamma_{dyn}^n|$ , pour un nombre  $n$  d'itérations suffisant

$$\vec{B}_n \simeq a_{adyn}\gamma_{adyn}^n\vec{\beta}_{adyn}, \quad (\text{II.108})$$

et les itérations suivantes conduiront à un schéma de bouclage en un coup dont le facteur  $\gamma_{adyn}$  est négatif, alors qu'un mode dynamo existe. On s'attend donc aux ordres élevés à toujours identifier le mécanisme de bouclage associé au mode propre de  $\mathcal{L}'$  possédant la valeur propre de plus grand module. Le fait que celle-ci soit négative, et que le bouclage identifié aux ordres élevés soit négatif n'implique pas nécessairement l'absence de bouclage dynamo. Idéalement, on peut imaginer que, partant de  $\vec{B}_0$  défini par (II.105), au bout de  $n$  itérations on soit en mesure d'identifier le mode anti-dynamo  $\vec{\beta}_{adyn}$ . On peut alors identifier  $\vec{\beta}_{dyn}$  en soustrayant à  $\vec{B}_0$  la contribution de  $\vec{\beta}_{adyn}$ .

## Conclusion

L'induction magnétohydrodynamique résulte essentiellement de deux mécanismes élémentaires : le transport et la déformation des lignes de champ magnétique par l'écoulement. Ces effets sont d'autant plus intenses que la diffusion magnétique (associée à la dissipation par effet Joule des courants électriques induits) reste faible, et donc que le nombre de Reynolds magnétique est élevé. L'équilibre entre les effets diffusifs et inductifs peut être décrit par un développement perturbatif de l'équation d'induction en fonction de  $R_m$ . Cette approche permet de définir rigoureusement la notion de mécanisme d'induction comme un processus itératif en accord avec l'approche intuitive où un champ appliqué  $\vec{B}_0$  induit un champ  $\vec{B}_1$  qui induit à son tour un champ  $\vec{B}_2$  et ainsi de suite. Chaque étape d'itération peut être résolue numériquement en tenant compte d'éventuelles inhomogénéités de conductivité dans le milieu et en particulier des discontinuités de conductivité à la paroi, de sorte à décrire la structure spatiale du champ magnétique induit dans des

conditions réalistes par rapport aux situations expérimentales ou naturelles. Un mécanisme dynamo peut alors être identifié si la structure du champ induit au cours d'une itération se superpose positivement à celle du champ induit à une étape antérieure. Le seuil de l'instabilité peut être relié au facteur de bouclage entre ces deux structures. Enfin, une formulation en terme de l'opérateur  $\mathcal{L}'$  (II.82) permet d'établir un lien formel entre l'approche perturbative que nous proposons et l'approche classique du problème des dynamos cinématiques par le calcul du taux de croissance de l'instabilité : un écoulement donné peut engendrer une dynamo stationnaire si l'opérateur  $\mathcal{L}'$  associé possède au moins une valeur propre réelle positive ; le seuil de l'instabilité est alors donné par l'inverse de la plus grande valeur propre réelle positive.



## Chapitre III

# Études des mécanismes d'induction sur des écoulements modèles de von Kármán

Dans cette partie, nous appliquons à des problèmes d'induction concrets l'approche perturbative et sa résolution numérique, décrites dans le chapitre précédent. Nous pouvons ainsi donner une description rigoureuse de mécanismes suggérés par une approche intuitive, qualitative et essentiellement locale, où l'évolution du champ magnétique est décrite en termes de transport et déformation par le mouvement du conducteur. Toutes les grandeurs considérées dans ce chapitre sont adimensionnées selon les définitions du §II.2.4.1.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au cas d'un cylindre conducteur en rotation solide. Ce problème possède un double avantage : il présente une solution analytique qui nous permettra de valider l'approche perturbative et il permet d'introduire le mécanisme d'expulsion d'un champ magnétique par un conducteur en rotation. Nous aborderons ensuite la question des mécanismes d'induction dans les écoulements moyens de von Kármán.

### III.1 Le terme d'induction et la géométrie cylindrique

Les écoulements que nous allons étudier (von Kármán ou rotation solide) sont tous à symétrie de révolution. Leur champ de vitesse  $\vec{u}$  est facilement descriptible en projection sur les vecteurs de base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . En ce qui concerne le problème magnétique, la symétrie de révolution ne sera pas toujours conservée (à cause généralement de la présence d'un champ magnétique appliqué brisant cette symétrie), et les coordonnées cartésiennes sont en général plus adaptées à la description du champ magnétique

et à l'écriture de l'équation d'induction. Nous serons donc amenés à *jongler* entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes et même à les utiliser simultanément. Le but de ce paragraphe est de rappeler brièvement l'expression du terme d'induction magnétique  $\vec{I} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$  dans ces différents types de projections.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le fait que  $\vec{B}$  et  $\vec{u}$  soient à divergence nulle permet d'écrire le terme d'induction sous la forme

$$\vec{I} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (\text{III.1})$$

$$= \vec{I}^{\text{déformation}} + \vec{I}^{\text{transport}}, \quad (\text{III.2})$$

où l'on identifie dans le processus d'induction une contribution due à la déformation du champ magnétique par les gradients de vitesse (premier terme de (III.1)) et une contribution due au transport des gradients magnétiques par le champ de vitesse (second terme de (III.1)). Ces contributions peuvent être étudiées composantes par composantes en projetant la relation (III.1) sur les vecteurs de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . En coordonnées cartésiennes cela donne :

$$I_x = B_x \partial_x u_x + B_y \partial_y u_x + B_z \partial_z u_x - u_x \partial_x B_x - u_y \partial_y B_x + u_z \partial_z B_x, \quad (\text{III.3})$$

$$I_y = B_x \partial_x u_y + B_y \partial_y u_y + B_z \partial_z u_y - u_x \partial_x B_y - u_y \partial_y B_y + u_z \partial_z B_y, \quad (\text{III.4})$$

$$I_z = B_x \partial_x u_z + B_y \partial_y u_z + B_z \partial_z u_z - u_x \partial_x B_z - u_y \partial_y B_z + u_z \partial_z B_z. \quad (\text{III.5})$$

On identifie alors 18 termes pouvant contribuer à l'induction :

$$I_{xx}^{\text{transport}} = B_x \partial_x u_x, \quad I_{xy}^{\text{transport}} = B_y \partial_y u_x, \quad I_{xz}^{\text{transport}} = B_z \partial_z u_x, \quad (\text{III.6})$$

$$I_{yx}^{\text{transport}} = B_x \partial_x u_y, \quad I_{yy}^{\text{transport}} = B_y \partial_y u_y, \quad I_{yz}^{\text{transport}} = B_z \partial_z u_y,$$

$$I_{zx}^{\text{transport}} = B_x \partial_x u_z, \quad I_{zy}^{\text{transport}} = B_y \partial_y u_z, \quad I_{zz}^{\text{transport}} = B_z \partial_z u_z,$$

$$I_{xx}^{\text{déformation}} = -u_x \partial_x B_x, \quad I_{xy}^{\text{déformation}} = -u_y \partial_y B_x, \quad I_{xz}^{\text{déformation}} = -u_z \partial_z B_x, \quad (\text{III.7})$$

$$I_{yx}^{\text{déformation}} = -u_x \partial_x B_y, \quad I_{yy}^{\text{déformation}} = -u_y \partial_y B_y, \quad I_{yz}^{\text{déformation}} = -u_z \partial_z B_y,$$

$$I_{zx}^{\text{déformation}} = -u_x \partial_x B_z, \quad I_{zy}^{\text{déformation}} = -u_y \partial_y B_z, \quad I_{zz}^{\text{déformation}} = -u_z \partial_z B_z.$$

$I_{\alpha\beta}^{\text{déformation}}$  décrit l'induction d'une composante  $\alpha$  de champ magnétique résultant de la déformation de la composante  $\beta$  d'un champ initial par la composante  $\beta$  du gradient de  $u_\alpha$ . Cette description ne décrit rien d'autre que le mécanisme élémentaire de la figure II.2 du chapitre précédent. De même  $I_{\alpha\beta}^{\text{transport}}$  décrit l'induction d'une composante  $\alpha$  de champ magnétique résultant du transport par la composante  $\beta$  de la vitesse du gradient de  $B_\alpha$  dans la direction  $\vec{u}_\beta$ . C'est le mécanisme de transport décrit par la figure II.3 du chapitre précédent.

Le champ de vitesse étant à symétrie de révolution, les coordonnées et projections cylindriques sont plus adaptées pour le décrire. Les tableaux III.1 et III.2 rassemblent les expressions résultantes pour les 18 termes d'induction ci-dessus. L'obtention de ces expressions demande quelques lignes de calculs sans grande difficulté que nous ne détaillerons

$$\begin{aligned}
I_{xx}^{\text{déformation}} &= B_x \left[ (u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \frac{\sin \theta}{r} + (\cos \theta \partial_r u_r - \sin \theta \partial_r u_\theta) \cos \theta \right] \\
I_{xy}^{\text{déformation}} &= B_y \left[ (-u_r \sin \theta - u_\theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{r} + (\cos \theta \partial_r u_r - \sin \theta \partial_r u_\theta) \sin \theta \right] \\
I_{xz}^{\text{déformation}} &= B_z (\cos \theta \partial_z u_r - \sin \theta \partial_z u_\theta) \\
I_{yx}^{\text{déformation}} &= B_x \left[ (-u_r \cos \theta + u_\theta \sin \theta) \frac{\sin \theta}{r} + (\sin \theta \partial_r u_r + \cos \theta \partial_r u_\theta) \cos \theta \right] \\
I_{yy}^{\text{déformation}} &= B_y \left[ (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \frac{\cos \theta}{r} + (\sin \theta \partial_r u_r + \cos \theta \partial_r u_\theta) \sin \theta \right] \\
I_{yz}^{\text{déformation}} &= B_z (\sin \theta \partial_z u_r + \cos \theta \partial_z u_\theta) \\
I_{zx}^{\text{déformation}} &= B_x \cos \theta \partial_r u_z \\
I_{zy}^{\text{déformation}} &= B_y \sin \theta \partial_r u_z \\
I_{zz}^{\text{déformation}} &= B_z \partial_z u_z
\end{aligned}$$

**Tab. III.1:** Termes sources d'induction par déformation des lignes de champ magnétique par les gradients de vitesse (le champ de vitesse considéré est à symétrie de révolution). Le terme  $I_{\alpha\beta}^{\text{déformation}}$  est responsable de l'induction de la composante  $\alpha$  du champ magnétique, par déformation de la composante  $\beta$  des lignes de champ.

$$\begin{aligned}
I_{xx}^{\text{transport}} &= -(u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \partial_x B_x \\
I_{xy}^{\text{transport}} &= -(u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \partial_y B_x \\
I_{xz}^{\text{transport}} &= -u_z \partial_z B_x \\
I_{yx}^{\text{transport}} &= -(u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \partial_x B_y \\
I_{yy}^{\text{transport}} &= -(u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \partial_y B_y \\
I_{yz}^{\text{transport}} &= -u_z \partial_z B_y \\
I_{zx}^{\text{transport}} &= -(u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \partial_x B_z \\
I_{zy}^{\text{transport}} &= -(u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \partial_y B_z \\
I_{zz}^{\text{transport}} &= -u_z \partial_z B_z
\end{aligned}$$

**Tab. III.2:** Termes sources d'induction par transport des lignes de champ magnétique par le champ de vitesse. Le terme  $I_{\alpha\beta}^{\text{transport}}$  est responsable de l'induction de la composante  $\alpha$  du champ magnétique, par transport du gradient de champ magnétique par la composante  $\beta$  de la vitesse.

pas. Nous avons utilisé le fait que pour toute les composantes  $u_i$  du champ de vitesse,  $\partial_\theta u_i = 0$  du fait de la symétrie de révolution de l'écoulement.

Ces expressions peuvent paraître complexes de prime abord, mais permettent une exploitation optimale des propriétés et des symétries particulières aux écoulements que

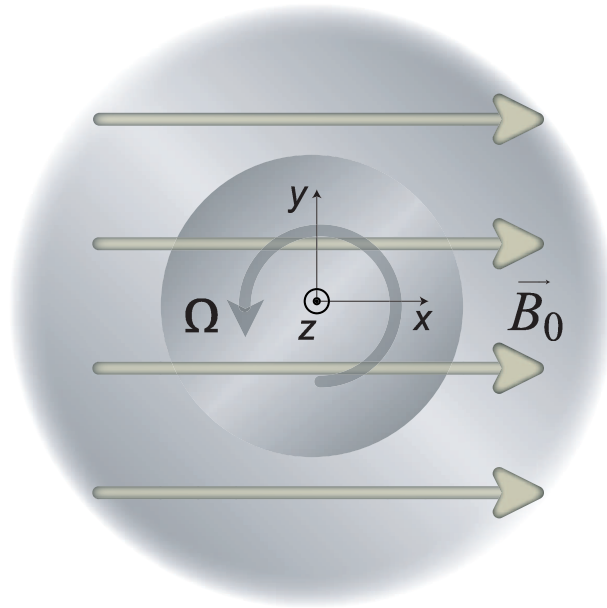


nous étudierons. La pratique montrera qu'en général seuls quelques-uns parmi ces termes ont alors des contributions non-nulles.

Les termes  $I_{\alpha\beta}$  écrits ci-dessus correspondent au terme d'induction de l'équation d'induction sous sa forme globale (non-perturbative.) Dans le cadre de l'approche perturbative, le terme source intervenant dans l'équation de Poisson donnant le champ magnétique induit  $\vec{B}_{k+1}$  à l'ordre  $k+1$  à partir de  $\vec{B}_k$  a la même forme  $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_k)$  que le terme d'induction global. Les expressions ci-dessus restent donc valables (en remplaçant les composantes de  $\vec{B}$  par celles de  $\vec{B}_k$ ) et seront très utiles pour l'interprétation des effets d'induction.

## III.2 Expulsion d'un champ transverse par un conducteur en rotation solide

Nous considérons dans cette partie les mécanismes d'induction se produisant lorsqu'un champ magnétique transverse (dont la direction définit l'axe  $Ox$ ) est appliqué sur un cylindre conducteur infini, de rayon  $R = 1$ , en rotation solide à la fréquence  $\Omega$  et plongé dans un milieu conducteur de même conductivité (figure III.1). Cette configuration modèle est voisine d'un écoulement von Kármán où les deux disques sont en corotation.



**Fig. III.1:** Champ transverse  $\vec{B}_0 = B_{0x}\vec{u}_x$  appliqué sur un cylindre conducteur infini en rotation solide dans un milieu de même conductivité.

### III.2.1 Solution analytique

Le champ induit dans l'état stationnaire final résultant de cette configuration initiale peut être calculé analytiquement. Nous reportons le lecteur vers les références [62][93] pour une description détaillée du calcul dont le résultat est :

$$B_{ind,r} = r^{-1} (Re(f(r, p)) \cos(\theta) - Im(f(r, p)) \sin(\theta)), \quad (\text{III.8})$$

$$B_{ind,\theta} = -\partial_r Im(f(r, p)), \quad (\text{III.9})$$

$$B_{ind,z} = 0, \quad (\text{III.10})$$

où

$$f(r, p) = \begin{cases} DJ_1(pr) & \text{si } r < R, \\ r + Cr^{-1} & \text{si } r > R, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{(1-i)\sqrt{R_m}}{R\sqrt{2}}, \\ D = \frac{2}{pJ_0(pR)}, \\ C = \frac{R(2J_1(pR) - pRJ_0(pR))}{pJ_0(pR)}. \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

$J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel de première espèce, respectivement d'ordre zéro et d'ordre un [1].  $Re$  et  $Im$  désignent respectivement la partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Des expressions ci-dessus on déduit simplement les projections cartésiennes de  $\vec{B}_{ind}$  par les relations

$$B_{ind,x} = B_{ind,r} \cos \theta - B_{ind,\theta} \sin \theta, \quad (\text{III.12})$$

$$B_{ind,y} = B_{ind,r} \sin \theta + B_{ind,\theta} \cos \theta. \quad (\text{III.13})$$

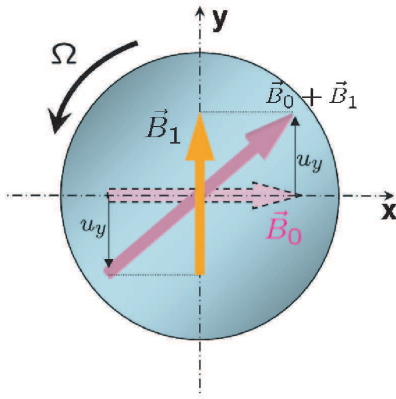
### III.2.2 Approche mécaniste qualitative

Le mécanisme d'induction stationnaire résultant de cette configuration initiale peut être intuitivement interprété en suivant le raisonnement qualitatif suggéré par l'approche itérative :

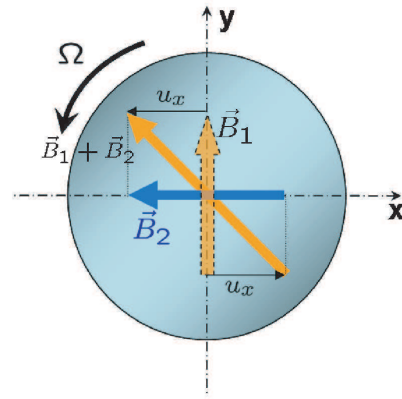
- Dans une première étape,  $\vec{B}_0$  va subir la rotation du cylindre pour induire une composante transverse au premier ordre  $\vec{B}_{1y}$  (figure III.2). Ce mécanisme peut s'interpréter simplement à l'aide des termes sources des tableaux III.1 et III.2. En effet,  $\vec{B}_0$  étant uniforme, toutes les dérivées partielles de toutes les composantes de  $\vec{B}_0$  sont nulles et les termes de transport du tableau III.2 sont tous nuls. Seuls les mécanismes de déformation de  $\vec{B}_0$  peuvent agir. Par ailleurs, compte-tenu du fait que le mouvement est une rotation solide ( $u_z = u_r = 0$  et  $u_\theta = 2\pi r\Omega$ ) et que  $B_{0y} = B_{0z} = 0$ , parmi les 9 termes sources du tableau III.1, seul  $I_{1yx}^{\text{déformation}} = B_{0x}\partial_x u_y = 2\pi B_0\Omega$  a une contribution non-nulle. Ce terme traduit la déformation de  $B_0$  par la rotation.
- À l'étape suivante, la composante  $B_{1y}$  va à son tour subir la rotation pour donner une composante transverse au deuxième ordre selon  $x$ , opposée à  $\vec{B}_0$  (figure III.3). Le terme source intervenant est alors  $I_{2xy} = B_{1y}\partial_y u_x = -2\pi B_{1y}\Omega$ .

On obtient ainsi un schéma de bouclage *néгатif* où le champ induit à l'ordre 2 vient s'opposer au champ initial. Ce mécanisme conduit à l'expulsion du champ magnétique appliqué du coeur du cylindre en rotation.

**Remarque.** Cette description ne décrit en réalité que l'induction au coeur de la rotation puisqu'elle ne prend pas en compte la discontinuité de  $u_\theta$  en  $r = R$ , qui donne d'autres contributions à l'induction (essentiellement dominantes vers  $r = R$ .)



**Fig. III.2:** Effet de la rotation sur  $\vec{B}_0$



**Fig. III.3:** Effet de la rotation sur  $\vec{B}_1$

Une autre façon de voir cet effet d'expulsion consiste à se placer dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}'$  lié au cylindre en rotation à la pulsation  $\omega$ . Vu depuis  $\mathcal{R}'$ , le champ appliqué  $\vec{B}_0$  apparaît comme un champ oscillant de pulsation  $\omega$ . Il tend donc à subir un *effet de peau* l'empêchant de pénétrer dans le conducteur. L'épaisseur caractéristique sur laquelle il pénètre est donnée par la longueur de diffusion magnétique :

$$l_d \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu_0\sigma\Omega}} = \frac{R}{\sqrt{R_m}}, \quad (\text{III.14})$$

où le nombre de Reynolds magnétique est défini à partir de l'échelle de longueur  $R$  et de l'échelle de vitesse  $U = 2\pi R\Omega$  :

$$R_m = \frac{2\pi R^2\Omega}{\lambda}. \quad (\text{III.15})$$

On s'attend donc à ce que la tendance à l'expulsion du champ magnétique augmente avec  $R_m$ .

### III.2.3 Étude détaillée du mécanisme d'expulsion

Nous appliquons à présent la résolution numérique de l'approche itérative. Comme nous l'avons déjà remarqué, l'évolution en  $R_m$  des champs induits aux différents ordres, s'obtient simplement à partir du calcul pour  $R_m = 1$  (ce qui revient à calculer les coefficients du développement perturbatif). Dans la mesure où le problème considéré est invariant par translation selon  $z$ , les champs calculés ne dépendent que des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . Le problème ne peut toutefois pas être qualifié de 2D, puisque ces champs peuvent en revanche avoir des composantes a priori non-nulles dans les trois directions de l'espace. Afin de se placer dans les conditions de la solution analytique, nous devons considérer le cas où le milieu extérieur est conducteur. Dans la mesure où seul le cas isolant est adapté à la résolution numérique (car on se ramène alors à un problème de type Neuman), nous considérerons que le milieu extérieur s'étend jusqu'à  $R_{max} = 2$  où nous appliquerons une condition aux limites isolante (nous rappelons que l'échelle de longueur est donnée par le rayon du cylindre en rotation  $R = 1$ ).

### III.2.3.1 Remarques générales

Le champ électromoteur induit à l'ordre  $k$  s'exprime à partir du champ magnétique à l'ordre  $k - 1$  par la relation  $\vec{e}_k = \vec{u} \times \vec{B}_k$ . Dans la mesure où le champ de vitesse est ici 2D et complètement contenu dans le plan  $xOy$ ,  $\vec{e}_k$  sera purement axial et dirigé selon  $z$  pour tout ordre  $k$  et il sera identiquement nul en dehors du cylindre en rotation.

### III.2.3.2 Calcul à l'ordre 1

• **Étape 1 : le champ électromoteur.** Le champ électromoteur induit à l'ordre 1,  $\vec{e}_1 = \vec{u} \times \vec{B}_0$ , s'écrit simplement

$$\vec{e}_1 = 2\pi R\Omega B_0 \cos\theta \vec{u}_z. \quad (\text{III.16})$$

Il est donc purement axial et de divergence nulle.

• **Étape 2 : Le potentiel électrique  $\phi_1$ .** Le potentiel électrique à l'ordre 1 est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \text{avec la condition aux limites} \quad \nabla_n\phi_1 = 0. \quad (\text{III.17})$$

Le potentiel est donc identiquement nul. Ce résultat peut également être obtenu en remarquant que, de façon tout à fait générale, pour un champ appliqué  $\vec{B}_0$  uniforme et un écoulement incompressible (donc en particulier un solide en rotation), on peut écrire la relation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{B}_0, \quad (\text{III.18})$$

où  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$  est le vecteur vortacité.

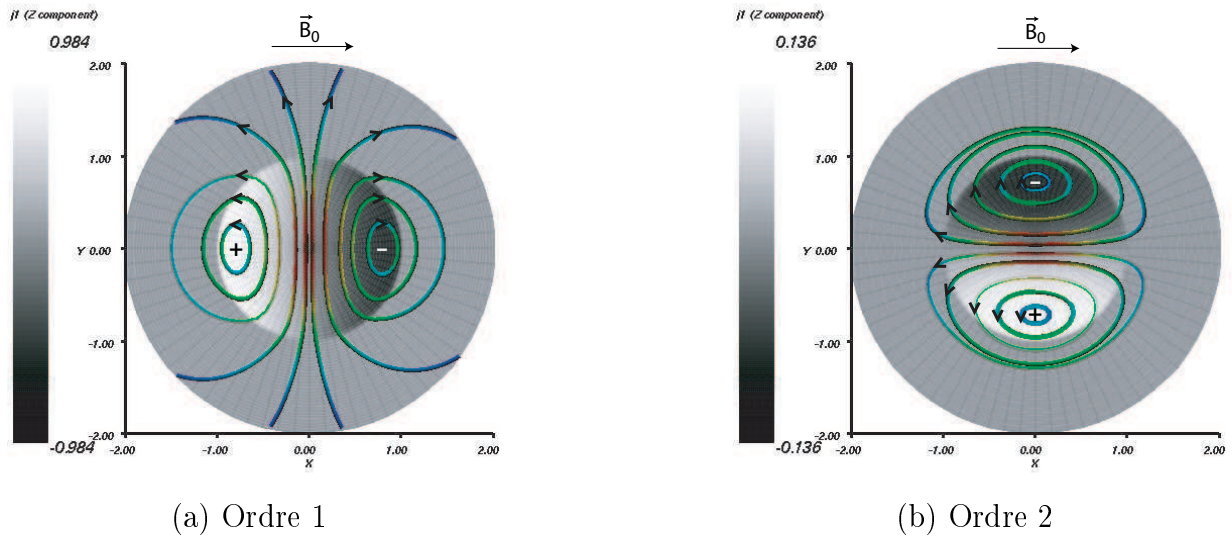
Aucune source volumique de potentiel n'existe donc lorsque la vortacité est en tout point perpendiculaire au champ appliqué. Cette condition est bien entendu vérifiée dans le cas d'un cylindre en rotation solide autour de son axe,  $\vec{\omega} // \vec{u}_z$  en présence d'un champ magnétique uniforme transverse.

Dans ce cas, le champ électromoteur induit  $\vec{e}_1$  étant lui-même à divergence nulle, aucune contribution potentielle n'est nécessaire pour assurer la conservation de la charge dans le milieu en régime stationnaire.

• **Étape 3 : densité de courant induite  $\vec{j}_1$ .** La densité de courant résulte donc ici de la seule contribution du champ électromoteur  $\vec{e}_1$  :

$$\vec{j}_1 = \vec{e}_1. \quad (\text{III.19})$$

Les courants induits sont donc purement axiaux. La figure III.4a représente les contours de cette densité de courant dans un plan  $z = \text{cte}$ . On peut également constater que  $\vec{j}_1$  s'annule sur l'axe  $Oy$  et qu'elle est d'amplitude maximale sur l'axe  $Ox$  (positive pour  $x > 0$ , négative pour  $x < 0$ .) On peut donc schématiquement la représenter comme deux nappes de courants circulant en sens opposé de part et d'autre du plan  $yOz$ .



**Fig. III.4:** Densité de courants et lignes de champ magnétique induits à l'ordre 1 (a) et à l'ordre 2 (b). Les contours représentent la composante  $z$  de la densité de courants induite (seule composante non-nulle).

• **Etape 4 : champ magnétique induit  $\vec{B}_1$ .** Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, le champ magnétique induit peut être calculé à partir de la distribution de courants  $\vec{j}_1$ , soit par intégration de la relation de Biot et Savart, soit par résolution de l'équation de Poisson

$$\Delta \vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{j}_1, \quad (\text{III.20})$$

où l'on applique une condition aux limites de Dirichlet en calculant le champ  $\vec{B}_1$  sur les bords par la relation de Biot et Savart. Cette deuxième option présente l'avantage d'être plus rapide numériquement.

La figure III.4a représente les lignes de champ calculées pour  $\vec{B}_1$ . Comme on pouvait s'y attendre,  $\vec{j}_1$  étant purement axial,  $\vec{B}_1$  n'a pas de composante selon  $z$ . On observe que le comportement prédit intuitivement est bien reproduit : dans le coeur du cylindre en rotation, le champ à l'ordre 1 peut être essentiellement vu comme l'induction d'une composante selon  $y$  sous l'effet de la rotation du champ magnétique initial. Une telle induction a été expérimentalement mise en évidence dans un écoulement von Kármán corotatif de gallium liquide [67] et dans un vortex géostrophique de gallium liquide [13] (ces deux écoulements possèdent un coeur en rotation solide.)

**Remarque sur le potentiel et les courants induits aux ordres supérieurs.** Lors de cette première étape, nous avons pu vérifier que le potentiel électrique  $\phi_1$  est identiquement nul, que  $\vec{j}_1$  se réduit alors au champ électromoteur  $\vec{e}_1$  et n'a qu'une composante axiale non-nulle et que par conséquent  $\vec{B}_1$  est entièrement contenu dans le plan  $xOy$ . On peut alors montrer, par récurrence, que ces propriétés sont vérifiées à tout ordre. Supposons en effet qu'elles le soient à l'ordre  $k$  et particulièrement que  $\vec{j}_k \times \vec{u}_z = \vec{0}$  (et par voie de conséquence que  $\vec{B}_k \cdot \vec{u}_z = 0$ ).

Le potentiel électrique à l'ordre  $k + 1$  s'obtient comme solution de

$$\Delta\phi_{k+1} = \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_{k+1} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{k+1} = \vec{u} \times \vec{B}_k, \quad (\text{III.21})$$

et avec la condition limite :  $\nabla_n \phi_{k+1} = 0$ ,

or, dans la mesure où  $\vec{u}$  et  $\vec{B}_k$  sont à flux conservatif, la divergence de  $\vec{e}_{k+1}$  se met simplement sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_{k+1} = \vec{B}_k \cdot \vec{\omega} + \vec{j}_k \cdot \vec{u}. \quad (\text{III.22})$$

Comme  $\vec{\omega}$  est dirigé selon  $\vec{u}_z$  et que  $\vec{u}$  est contenu dans le plan  $xOy$ , l'hypothèse de récurrence sur  $\vec{j}_k$  (et sur  $\vec{B}_k$ ) implique l'annulation du terme source de l'équation de Poisson ci-dessus et donc celle de  $\phi_{k+1}$ .

La densité de courant à l'ordre  $k + 1$  n'a donc pas de contribution potentielle. Elle s'identifie au champ électromoteur  $\vec{e}_{k+1}$  dont la seule composante non-nulle est dirigée selon  $\vec{u}_z$  (et donc  $\vec{B}_{k+1}$  n'a pas de composante selon  $\vec{u}_z$ .)

On montre ainsi qu'à tout ordre  $k$  :

1.  $\phi_k = 0$ ,
2.  $\vec{j}_k \times \vec{u}_z = \vec{0}$ ,
3.  $\vec{B}_k \cdot \vec{u}_z = 0$ .

Le problème pour le champ magnétique est donc vraiment 2D. Ce résultat est cohérent avec la solution analytique de l'équation d'induction et résulte de l'absence de tout terme source dans la projection sur  $Oz$  de ladite équation.

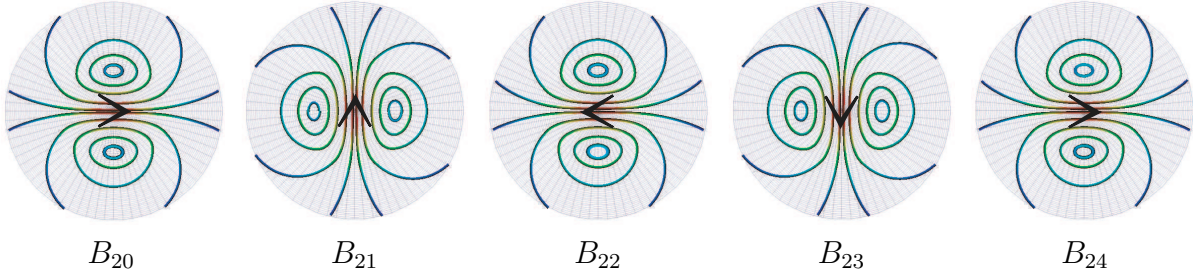
**Remarque.** Nous venons de montrer que le potentiel électrique est nécessairement nul à tous les ordres. Il en résulte que la densité de courants dans le milieu au repos ( $r > R$ ) est également nulle à tous les ordres (puisque, la vitesse du milieu étant nulle, aucun champ électromoteur n'y est induit.) Ceci montre donc, comme le fait remarquer K. Moffat [62], que la nature isolante ou conductrice du milieu extérieur (tant que sa conductivité reste finie) est sans importance pour la détermination du champ magnétique induit par la rotation solide d'un conducteur cylindrique infini.

### III.2.3.3 Calcul à l'ordre 2

Le champ électromoteur est à présent donné par  $\vec{e}_2 = \vec{u} \times \vec{B}_1$ . Tout comme  $\vec{e}_1$  il est purement axial et s'annule en dehors du cylindre en rotation. Dans la mesure où le potentiel  $\phi_2$  est nul, la densité de courants  $\vec{j}_2$  s'identifie à  $\vec{e}_2$ . Les contours de  $j_{2z}$  sont représentées sur la figure III.4b. Ils peuvent être décrits schématiquement comme deux nappes de courants circulant en sens inverse de part et d'autre du plan  $xOz$ . Le champ magnétique  $\vec{B}_2$  induit résultant est représenté sur la même figure. Sa structure se déduit de celle de  $\vec{B}_1$  essentiellement par rotation d'angle  $\pi/2$ , ce qui traduit la tendance du champ à suivre le mouvement du conducteur.

### III.2.3.4 L'expulsion

Le champ magnétique obtenu à l'ordre 2 présente, au centre, une projection dominante sur l'axe  $Ox$ , opposée au champ initial, qu'elle tend donc à *détruire*. Ce bouclage d'ordre



**Fig. III.5:** Pour les ordres élevés, un schéma de bouclage *anti-dynamo* peut être identifié. Les figures ci-dessus représentent les lignes de champs magnétiques pour les ordres 20 à 24. On constate en effet que la structure de  $\vec{B}_{22}$  est exactement opposée à celle de  $\vec{B}_{20}$ .

2 est donc négatif : il est à l'origine du phénomène d'expulsion du champ magnétique hors du coeur de la rotation solide.

Le bouclage négatif d'ordre 2 suggéré par  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  apparaît clairement lorsqu'on s'intéresse à la structure des champs induits aux ordres élevés. La figure III.5 représente la série des champs induits  $\vec{B}_{20}$ ,  $\vec{B}_{21}$ ,  $\vec{B}_{22}$ ,  $\vec{B}_{23}$  et  $\vec{B}_{24}$ . On peut clairement identifier un bouclage négatif d'ordre 2 (le produit scalaire des champs  $\vec{B}_{20}$  et  $\vec{B}_{22}$  normés donne -0.99) défini par deux structures de champs magnétiques, l'une essentiellement selon  $Ox$  au coeur de la rotation, l'autre essentiellement selon  $Oy$ . Si l'on note, par exemple,  $\vec{b}_1$  le mode ainsi décrit par  $\vec{B}_{20}$  et  $\vec{b}_2$  le mode décrit par  $\vec{B}_{21}$ , on peut définir les facteurs de bouclage,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (voir §II.2.6.1) tels que :

$$\mathcal{L}'\vec{b}_1 = \gamma_1\vec{b}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'\vec{b}_2 = \gamma_2\vec{b}_1, \quad (\text{III.23})$$

$$\mathcal{L}''\vec{b}_1 = \gamma\vec{b}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}''\vec{b}_2 = \gamma\vec{b}_2. \quad (\text{III.24})$$

Les trois facteurs de bouclage vérifient la relation  $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ . La simulation montre par ailleurs que  $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$  et donne pour les valeurs numériques des facteurs de bouclage :

$$\gamma_1 = 1.697 \cdot 10^{-1}, \quad \gamma_2 = -1.697 \cdot 10^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma = -2.879 \cdot 10^{-3}. \quad (\text{III.25})$$

Le fait que le facteur de bouclage  $\gamma$  soit négatif traduit l'expulsion du champ magnétique.

Ces deux structures ainsi identifiées définissent un espace stable par l'opérateur  $\mathcal{L}'$ . On peut donc en déduire deux vecteurs propres formant une base normée de ce sous-espace. Le calcul est en tout point identique à celui proposé pour la dynamo de Lowes & Wilkinson (§II.2.6.2) et conduit à deux vecteurs propres  $\vec{\beta}_+$  et  $\vec{\beta}_-$  définis par (d'après (II.104) et en tenant compte du fait que  $\gamma_1 = \gamma_2$  et que  $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$ ) :

$$\vec{\beta}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{b}_1 \pm \vec{b}_2), \quad (\text{III.26})$$

et aux deux valeurs propres associées

$$\tilde{\gamma}_+ = \sqrt{\gamma_1\gamma_2} = \sqrt{\gamma}, \quad (\text{III.27})$$

$$\tilde{\gamma}_- = -\sqrt{\gamma_1\gamma_2} = -\sqrt{\gamma}. \quad (\text{III.28})$$

Comme  $\gamma$  est négatif, les valeurs propres  $\tilde{\gamma}_+$  et  $\tilde{\gamma}_-$  sont imaginaires pures (de même, les structures propres de champs magnétiques associés sont définies dans l'espace complexe.)

À partir des valeurs numériques de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , on en déduit que  $\gamma_+ = 1.697 \cdot 10^{-1}i$  et  $\gamma_- = -1.697 \cdot 10^{-1}i$ . Le bouclage d'indice 1 identifié étant associé à des valeurs propres complexes, d'après la discussion du §II.2.6.3, on se trouve donc typiquement dans une configuration anti-dynamo où le champ magnétique ne peut pas être auto-entretenu. Ceci n'est pas étonnant, puisque d'après le théorème anti-dynamo de Zeldovich, un champ de vitesse incompressible dont la composante  $u_z$  est identiquement nulle ne peut engendrer de dynamo.

Cet exemple nous a permis de mettre en oeuvre sur un cas concret l'approche itérative et l'identification de modes de bouclage.

### III.2.4 Validation de la solution calculée par l'approche itérative

Nous allons à présent confronter le résultat obtenu numériquement à la solution analytique ci-dessus. Il s'agit essentiellement de s'assurer que la solution obtenue numériquement donne une description précise et correcte de la structure spatiale du champ induit et de son évolution en fonction du nombre de Reynolds magnétique du système.

#### III.2.4.1 Évolution avec $R_m$

L'évolution de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction du nombre de Reynolds magnétique s'obtient dans l'approche perturbative par le développement en série

$$\vec{B}_{ind}(R_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{B}_k(R_m = 1) R_m^k. \quad (\text{III.29})$$

Dans un calcul numérique, la série est tronquée jusqu'à un ordre  $n$  suffisant tel que l'approximation polynomiale ainsi obtenue puisse être considérée comme une solution *convergente*.

**Convergence de la solution perturbative** La figure III.6 montre l'évolution en fonction de  $R_m$  ainsi obtenue pour la composante selon  $Ox$  (dans le sens du champ appliqué) et selon  $Oy$  (perpendiculairement au champ appliqué) du champ induit au point  $(r = 0.5; \theta = \frac{\pi}{2})$  calculée à partir du développement perturbatif tronqué aux quarante premiers termes. Nous avons également représenté sur la même figure l'évolution donnée par l'expression analytique de la solution. La solution perturbative diverge pour  $R_m > R_m^* \sim 5.5$  où  $R_m^*$  détermine le rayon de convergence du développement en série (III.29).

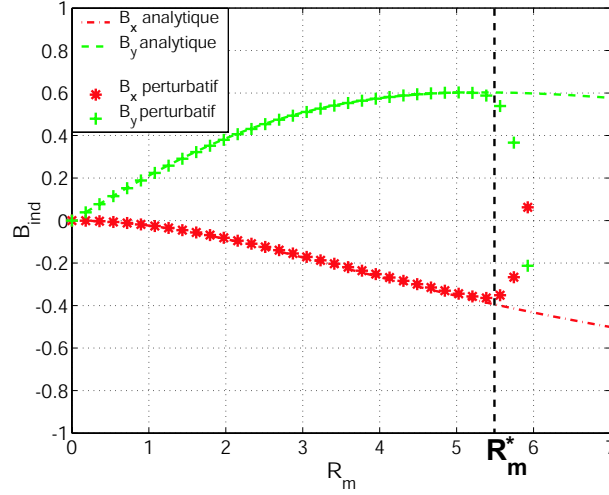
En revanche, à l'intérieur du disque de convergence, l'accord entre la solution perturbative et l'expression analytique est remarquable.

La divergence de la série, ainsi que son rayon de convergence, étaient prévisibles du moment où l'on avait identifié un schéma de bouclage dans le mécanisme d'induction. En effet, supposons que l'on parte d'une configuration initiale où le champ appliqué possède la structure du mode  $\vec{b}_1$ .

Alors, la série donnant l'évolution du champ induit en fonction du nombre de Reynolds magnétique, s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{b}_{ind} = \gamma_1 R_m \left( \vec{b}_2 + \gamma_2 R_m \vec{b}_1 \right) \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_1 \gamma_2 R_m^2)^k, \quad (\text{III.30})$$





**Fig. III.6:** Évolution des composantes selon  $Ox$  et  $Oy$  du champ magnétique induit au point ( $r = 0.5, \theta = \pi/2, z = 0$ ). Les points correspondent à la solution numérique obtenue par le développement perturbatif tronqué à l'ordre 40 et les courbes à la solution analytique.

où l'on a simplement écrit (III.29) en tenant compte du schéma de bouclage (III.23).

La série ci-dessus est une série géométrique de raison  $\gamma_1 \gamma_2 R_m^2$  qui ne converge que si  $|\gamma_1 \gamma_2 R_m^2| < 1$ . On retrouve ainsi la valeur du rayon de convergence

$$R_m^* = \frac{1}{\sqrt{|\gamma_1 \gamma_2|}} = 5.89. \quad (\text{III.31})$$

Ceci rejoint la discussion sur le lien formel entre l'approche perturbative que nous développons et le problème de l'instabilité dynamo. On se trouve ici dans le cas de deux modes propres de  $\mathcal{L}'$  identifiés,  $\vec{b}_+$  et  $\vec{b}_-$ , dont l'inverse des valeurs propres  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  définissent deux nombres de Reynolds magnétique "critiques" imaginaires (purs et conjugués l'un de l'autre)  $R_{m+} = \frac{1}{\gamma_+}$  et  $R_{m-} = \frac{1}{\gamma_-}$ .  $R_{m+}$  et  $R_{m-}$  n'étant pas réels, ils ne peuvent correspondre à de vrais nombres de Reynolds critiques : la configuration est anti-dynamo. En revanche,  $R_{m+}$  et  $R_{m-}$  définissent deux singularités de la fonction analytique définie par le développement en série de  $\vec{b}_{ind}$ . Cette série ne peut donc pas converger au-delà du disque défini par  $|R_m| < R_m^* = |R_{m+}| = |R_{m-}|$ . L'application numérique à partir des valeurs calculées obtenues pour  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  conduit à un rayon de convergence  $R_m^* = \frac{1}{1.697 \cdot 10^{-1}} = 5.89$ , en très bon accord avec celui suggéré par la figure III.6.

**Développement en série de la solution analytique.** Pour finir de valider l'approche numérique, nous nous proposons de comparer directement la solution perturbative obtenue numériquement au développement en série de la solution analytique (III.8-III.9.) Les fonctions de Bessel  $J_0$  et  $J_1$  admettent les développements en série à l'ordre 6 suivants [1] :

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{k=6} \alpha_{0,2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k} + \epsilon_0 \quad |x| < 3 \quad |\epsilon_0| < 5 \cdot 10^{-8}, \quad (\text{III.32})$$

$$x^{-1}J_1(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=6} \alpha_{1,2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k} + \epsilon_1 \quad |x| < 3 \quad |\epsilon_1| < 1.3 \cdot 10^{-8}, \quad (\text{III.33})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{0,2} &= -2.2499997, & \alpha_{0,4} &= 1.2656208, & \alpha_{0,6} &= -0.3163866, \\ \alpha_{0,8} &= 0.444479, & \alpha_{0,10} &= -0.0039444, & \alpha_{0,12} &= 0.0002100, \\ \alpha_{1,2} &= -0.56249985, & \alpha_{1,4} &= 0.21093573, & \alpha_{1,6} &= -0.03954289, \\ \alpha_{1,8} &= 0.00443319, & \alpha_{1,10} &= -0.00031761, & \alpha_{1,12} &= 0.00001109. \end{aligned}$$

La fonction  $\frac{1}{J_0}$  admet donc le développement

$$[J_0(x)]^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{k=6} \beta_{0,2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k}, \quad (\text{III.34})$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_{0,2} &= 2.2499997, & \beta_{0,4} &= 3.7968779, & \beta_{0,6} &= 6.0117142, \\ \beta_{0,8} &= 9.3883694, & \beta_{0,10} &= 14.6204958, & \beta_{0,12} &= 22.7558845. \end{aligned}$$

On en déduit le développement en série pour la fonction  $f$  intervenant dans l'expression analytique de  $\vec{B}_{ind}$  :

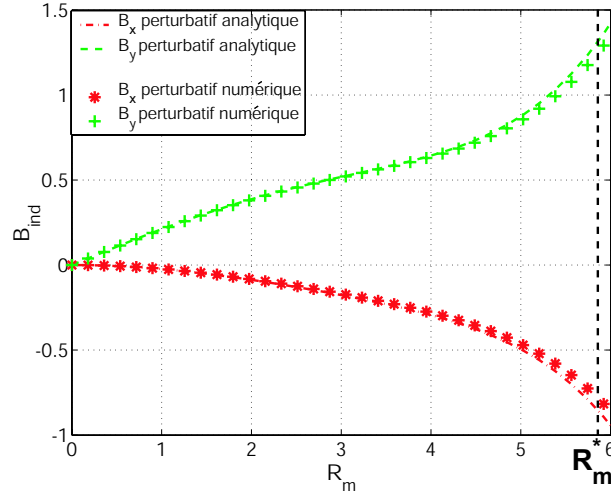
$$f(r, p) = 2s \sum_{k=0}^{k=6} \alpha_{f,2k}(r) \left(\frac{p}{3}\right)^k, \quad (\text{III.35})$$

$$\text{avec} \quad \alpha_{f,2k}(r) = \sum_{k'=0}^{k'=k} r^{2(k-k')} \alpha_{1,2(k-k')} \beta_{0,2k'}. \quad (\text{III.36})$$

Le développement ci-dessus est à l'ordre 12 en la variable  $p$ , mais seulement à l'ordre 6 en  $R_m$  compte tenu de la relation (III.11). La figure III.7 permet de comparer l'évolution en  $R_m$  prévue par l'approximation polynomiale à l'ordre 6 obtenue à partir de l'expression analytique et à partir du calcul numérique de  $\vec{B}_{ind}$ . On peut alors constater que l'approche numérique est en très bon accord avec l'approche analytique. Ceci confirme le fait que la divergence de la solution numérique est bien intrinsèquement liée au disque de convergence du développement en série de la solution exacte et non pas à une divergence numérique.

#### III.2.4.2 Extension du domaine de convergence de l'approche numérique par la méthode des approximants de Padé

L'approximation polynomiale de l'approche perturbative de l'induction ne permet donc de décrire la solution pour  $\vec{B}_{ind}$  que pour la plage  $|R_m| < R_m^*$ . Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, la divergence de la série obtenue dans l'approche perturbative résulte



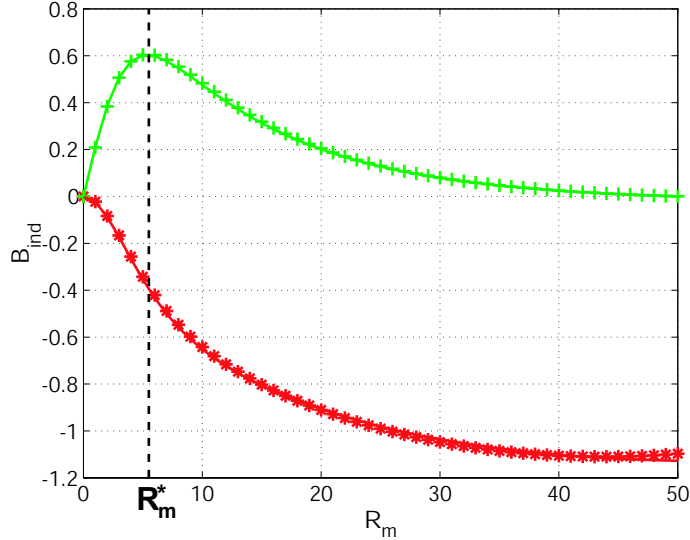
**Fig. III.7:** Comparaison des développements perturbatifs analytique et numérique tronqués à l'ordre 6 pour les composantes du champ magnétique induit au point  $(r = 0.5, \theta = \pi/2, z = 0)$ . Les points correspondent à la solution numérique et les courbes à la solution analytique.

de l'existence de singularités imaginaires de la fonction analytique décrivant le champ induit. Dans le cadre de la théorie des fonctions analytiques, l'existence d'une singularité complexe suffit à détruire la convergence de la série au-delà du rayon de convergence défini par  $R_m = R_m^*$ . Toutefois, dans la mesure où il ne s'agit donc pas d'une divergence *réelle*, décrivant une instabilité de quelque sorte, de la solution de l'équation d'induction (il suffit de considérer la solution analytique du problème pour s'en convaincre), on peut se demander, s'il n'est pas envisageable de déterminer une meilleure approximation numérique de la solution. Une réponse à ce problème consiste à rechercher la solution sous forme d'une fraction rationnelle :

$$B_{ind,i} = \frac{\sum_{k=0}^{\mu} A_{k,i} R_m^k}{\sum_k^{\xi} B_{k,i} R_m^k} \quad (\text{III.37})$$

En identifiant les coefficients du développement en série entière de cette fraction rationnelle à ceux obtenus directement par la résolution perturbative du problème de l'induction, il est possible de déterminer les coefficients  $A_{k,i}$  et  $B_{k,i}$ , tels que l'expression rationnelle ci-dessus coïncide avec le développement perturbatif de  $\vec{B}_{ind}$  sur l'ensemble du disque de convergence  $|R_m| < R_m^*$ . Une telle fraction rationnelle est appelée approximant de Padé du développement en série de  $\vec{B}_{ind}$ . La fraction rationnelle ainsi obtenue converge généralement bien au-delà de  $R_m^*$  et assure un prolongement analytique du développement en série [74]. La technique des approximants de Padé a été étudiée de façon systématique par H.E. Padé [68] à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, puis redécouverte dans les années 1960 par les physiciens G.A. Baker [5] qui l'appliqua à l'étude des transitions de phases dans le modèle d'Ising. Depuis, cette technique a fait l'objet de nombreuses applications dans différents domaines de la physique [10].

Nous nous limitons ici à la recherche d'approximants de Padé sous la forme d'une fraction rationnelle où le numérateur et le dénominateur sont de même degré ( $\mu = \nu$ .) Dans ce cas, connaissant l'approximation polynomiale à l'ordre  $2n$ , on peut déterminer les



**Fig. III.8:** Prolongement de la solution perturbative par la méthode des approximants de Padé : les points représentent la solution rationnelle obtenue calculée par les approximants de Padé et la courbe représente la solution analytique (III.8-III.9). Alors que le développement perturbatif diverge au-delà de  $R_m^* \sim 6$ , l'approximation rationnelle converge et reste en très bon accord avec la solution analytique jusqu'à  $R_m \sim 50$ .

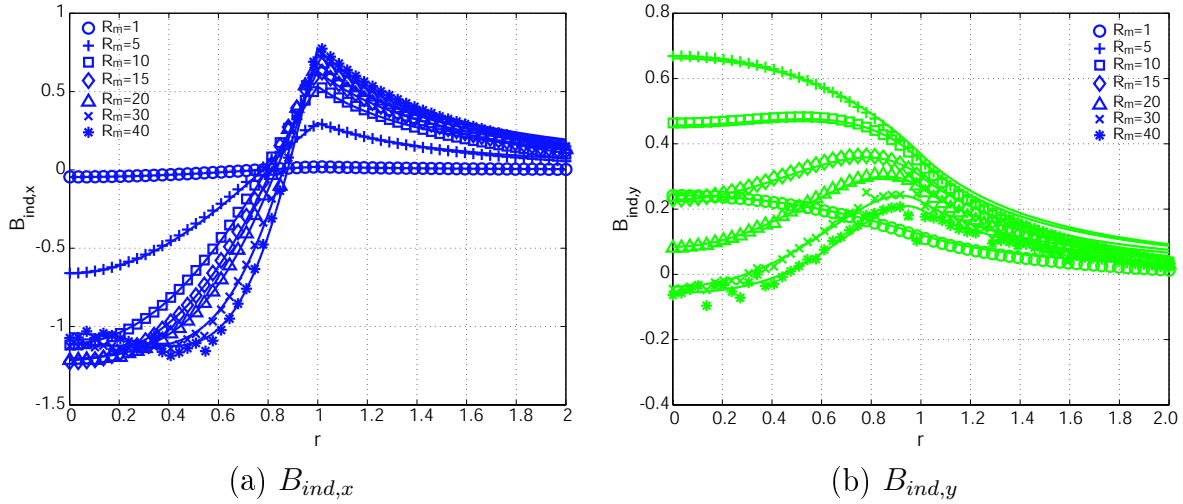
approximants de Padé sous forme d'une fraction de deux polynômes d'ordre  $k$ . Le calcul est réalisé à l'aide de la routine proposée dans [74].

Cette méthode s'est avérée particulièrement efficace pour le problème de l'induction. La figure III.8 montre en effet qu'on peut ainsi obtenir un prolongement de la solution perturbative, décrivant correctement la solution analytique jusqu'à des  $R_m$  de l'ordre de 50. La technique des approximants de Padé permet ainsi d'atteindre les régimes de  $R_m$  correspondant aux études expérimentales de l'induction dans les écoulements de sodium.

La figure III.8 est caractéristique de l'expulsion du champ magnétique par la rotation. En effet, la composante  $B_{ind,x}$  est négative et s'oppose donc au champ appliqué. La non-linéarité de  $B_{ind,x}(R_m)$  pour les faibles valeurs de  $R_m$  traduit le mécanisme quadratique d'expulsion en deux étapes décrit par les figures III.2 et III.3. Pour les grands  $R_m$ ,  $B_{ind,x}$  tend vers une valeur proche de -1, de telle sorte que la composante  $x$  du champ total  $B_{0x} + B_{ind,x}$  tend quasiment à s'annuler. La composante  $B_{ind,y}$  présente quand à elle un comportement linéaire en  $R_m$  pour les faibles valeurs de  $R_m$ . Ceci correspond au mécanisme d'ordre 1 de la figure III.2. La saturation qui suit et la décroissance à zéro pour les grands  $R_m$  est due à l'expulsion du champ appliqué qui élimine ainsi la source de l'induction de la composante  $B_{ind,y}$ .

### III.2.4.3 Structure spatiale du champ induit

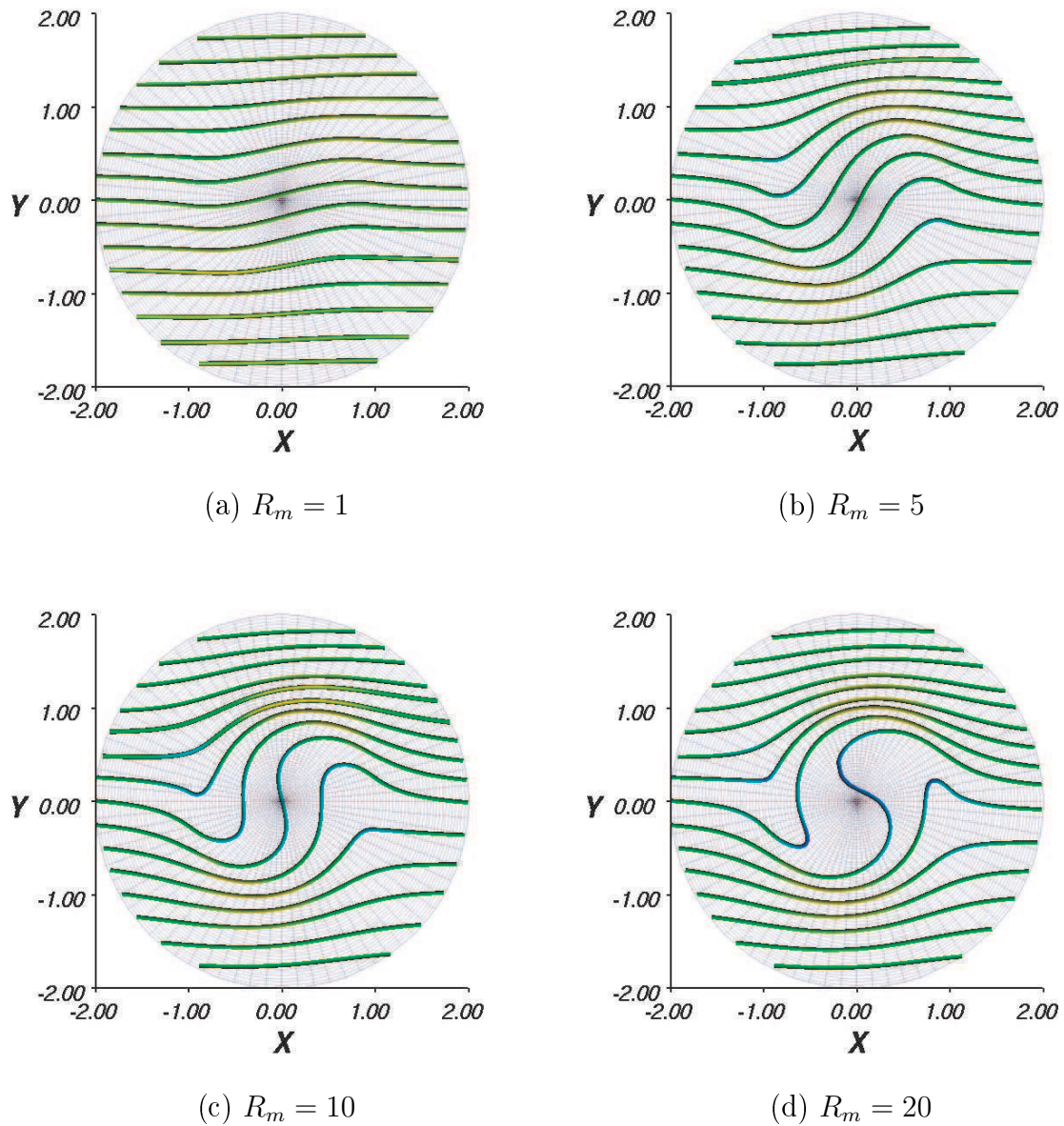
La figure III.9 montre les profils en  $r$  (pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) de  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,y}$  pour différentes valeurs de  $R_m$ . Les points numériques ont été obtenus par la méthode des approximants de Padé à partir des quarante premiers termes du développement perturbatif pour  $\vec{B}_{ind}$ . L'accord avec la solution analytique est très bon pour toutes les valeurs de  $r$  jusqu'à  $R_m$  de l'ordre de 30. Le domaine de convergence de la solution numérique peut donc être fiablement étendu jusqu'à cinq fois le rayon de convergence du développement perturbatif



**Fig. III.9:** Profil radial des composantes  $B_{ind,x}$  (à gauche) et  $B_{ind,y}$  (à droite) dans le plan  $yOz$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) pour différentes valeurs de  $R_m$ . Les points correspondent au calcul numérique étendu par les approximatifs de Padé et les courbes correspondent à la solution analytique du problème.

( $R_m^* \sim 6$ .) Pour les nombres de Reynolds magnétiques plus élevés, l'accord est bon pour la plupart des valeurs de  $r$ , mais le calcul des approximatifs de Padé semble atteindre ses limites dans la mesure où en certains points, la valeur du champ induit s'écarte notablement de la solution analytique. Il faut souligner à ce stade que, dans sa version actuelle, le calcul des approximatifs de Padé est réalisé à partir de la routine proposée dans [74] sans aucune modification ni optimisation particulière. Peut-être un effort sur ce point permettrait-il d'améliorer les performances de la méthode.

La figure III.9a reflète également l'intensification de l'expulsion du champ magnétique transverse appliqué, à mesure que  $R_m$  augmente. En effet, pour les grandes valeurs de  $R_m$  (typiquement dès  $R_m > 10$ ), la composante  $\vec{B}_{ind,x}$  vaut environ -1 dans la région centrale du cylindre ( $r < 0.5$ ) et ne devient positive qu'au voisinage de  $r \sim 1$ . Le champ magnétique total tend donc à s'annuler au centre et à être expulsé vers les bords du cylindre en rotation, où il se concentre. Cette tendance apparaît clairement sur les figures III.10a à d où nous avons représenté les lignes du champ magnétique total ( $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$ ) pour différentes valeurs de  $R_m$ . Le champ magnétique est expulsé hors du coeur de la rotation et se concentre au voisinage de  $r \sim 1$ . On pourra également remarquer que l'évolution prédite par ces figures est en excellent accord avec celle décrite dans [62][93] et avec les mesures d'induction dans un écoulement von Kármán corotatif de gallium [67].



**Fig. III.10:** Expulsion du champ magnétique par la rotation solide. Les lignes représentent le champ magnétique totale ( $\vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$ ), calculé par l'approche perturbative à partir des 40 premiers termes du développement. Le domaine de convergence est étendue par la méthode des approximants de Padé.

### III.2.5 Conclusion

L'étude de l'induction par un cylindre en rotation en présence d'un champ transverse appliqué nous a permis d'illustrer la démarche perturbative définissant la notion de mécanisme d'induction comme un processus itératif. Cette approche fournit une interprétation physique de l'expulsion du champ magnétique par un mécanisme où, au bout de deux itérations, le champ induit vient s'opposer au champ initial. Cette description peut être à la fois qualitative (par des arguments simples sur l'étude locale des termes sources de l'équation d'induction) et quantitative (par la résolution numérique de la structure spatiale du champ induit à chaque étape.) Ce bouclage négatif d'ordre 2 peut alors être clairement identifié, couplant deux structures orthogonales de champ magnétique. Deux nombres de Reynolds magnétiques critiques peuvent être associés à ce schéma de bouclage : ils sont imaginaires purs (et conjugués l'un de l'autre.) Ceci traduit la nature anti-dynamo de la configuration décrite. En revanche ces nombres de Reynolds magnétiques critiques constituent des singularités complexes de l'approximation polynomiale du champ induit et définissent le disque de convergence de la série entière associée. Une solution convergeant pour des nombres de Reynolds magnétiques en dehors de ce disque de convergence peut toutefois être obtenue par la méthode des approximants de Padé. Nous obtenons ainsi des solutions numériques décrivant la structure exacte du champ induit jusqu'à  $R_m \sim 40$ .

Cette étude préliminaire nous permet donc de valider l'approche perturbative de l'induction comme un outil potentiellement intéressant pour l'étude des mécanismes d'induction. Nous nous proposons à présent de l'appliquer au cas plus complexe où le mouvement du fluide n'est plus contraint à la simple rotation solide. Nous étudierons les mécanismes d'induction dans les écoulements de von Kármán, dans des configurations comparables à celles des expériences de métaux liquides. Nous avons décomposé cette étude afin d'illustrer certains mécanismes élémentaires associés à des propriétés spécifiques de l'écoulement (rotation différentielle, hélicité, points de stagnation, etc.) Nous serons donc amenés à isoler ces différentes caractéristiques de l'écoulement de sorte à identifier leur rôle spécifique. Il faut toutefois bien garder à l'esprit que cette décomposition reste fortement artificielle, et que, dans le processus global de l'induction, les différents effets ainsi isolés se produisent en général simultanément et peuvent même, comme nous le verrons, se coupler et collaborer pour donner des mécanismes plus complexes. C'est dans l'existence de ce couplage et dans l'impossibilité d'en isoler vraiment ses différentes composantes, que résident la complexité, mais aussi la richesse, des phénomènes d'induction en magnétohydrodynamique.

## III.3 Champ axial - von Kármán Contra-rotatif

Nous considérons à présent le cas d'un écoulement de von Kármán obtenu lorsque les deux disques sont en contra-rotation. Un tel écoulement présente une forte rotation différentielle et un point de stagnation au centre du cylindre, avec une forte compression radiale dans le plan médian et un fort étirement selon l'axe  $Oz$  (il peut être utile à ce stade de revisualiser la figure I.14c du chapitre I qui illustre schématiquement ces propriétés.) Le champ magnétique appliqué est axial :  $\vec{B}_0 // \vec{u}_z$ .

Nous étudions l'écoulement "synthétique" défini au §II.2.5, avec un rapport  $P/T \sim 0.8$ . Cette valeur correspond à celle des écoulements expérimentaux de von Kármán étudiés numériquement dans [57] et donnant le seuil d'instabilité le plus bas. Bien entendu, la configuration axisymétrique considérée dans cette section interdit tout mécanisme d'auto-entretien magnétique, mais les mécanismes d'induction qu'elle engendre restent néanmoins d'un intérêt majeur et peuvent constituer des étapes élémentaires d'un cycle dynamo plus complexe.

Nous présentons une étude approfondie des mécanismes d'induction par l'approche perturbative. L'approche est d'abord qualitative (par des considérations locales sur les termes sources d'induction) puis une résolution numérique est ensuite proposée pour identifier les principales propriétés structurelles du champ magnétique induit à  $R_m = 1$ . Nous abordons enfin la question de l'évolution de ces mécanismes en fonction de  $R_m$ . La résolution numérique est réalisée en utilisant des conditions aux limites isolantes en  $r = 1$  et en  $z = \pm 1$ .

### III.3.1 Mécanismes d'ordre 1

#### III.3.1.1 Étude qualitative des termes sources d'induction

Le système étant entièrement à symétrie de révolution, il suffit de ne considérer que les effets se produisant en  $\theta = 0$ . Comme  $\vec{B}_0$  est uniforme, aucun terme  $I_{\alpha\beta}^{\text{transport}}$  ne peut contribuer à l'induction et comme  $B_{0x} = B_{0y} = 0$ , seuls les trois termes suivants contribuent :

$$\begin{aligned} \text{Induction de } B_{1x} : I_{xz}^{\text{déformation}} &= B_0 \partial_z u_r, & \text{dominant en } z \sim \pm 0.5, \\ \text{Induction de } B_{1y} : I_{yz}^{\text{déformation}} &= B_0 \partial_z u_\theta, & \text{dominant en } z \sim 0, \\ \text{Induction de } B_{1z} : I_{zz}^{\text{déformation}} &= B_0 \partial_z u_z, & \text{dominant en } r \sim 0 \text{ et } r \sim 1, \end{aligned}$$

(la localisation des régions où ces termes sont dominant est liée à la structure de l'écoulement et peut être qualitativement déduite de la figure I.14c). Ces différents termes correspondent à des effets dus à différentes contributions des gradients de vitesse. Le premier et le dernier ne font intervenir que  $u_r$  et  $u_z$  et sont donc associés aux boucles de recirculation centrifuge de l'écoulement von Kármán. Le deuxième terme ne fait intervenir que  $u_\theta$  et traduit donc les effets de la rotation du fluide.

#### **Effet des écoulements centrifuge et centripète des boucles de recirculation.**

Sous l'effet de l'écoulement centrifuge au niveau des disques en rotation (en  $z \sim \pm 1$ , aux extrémités du cylindre), les lignes de champ magnétique de  $\vec{B}_0$  ont tendance à être éloignées du centre du cylindre. Au contraire, l'écoulement radial centripète au niveau du



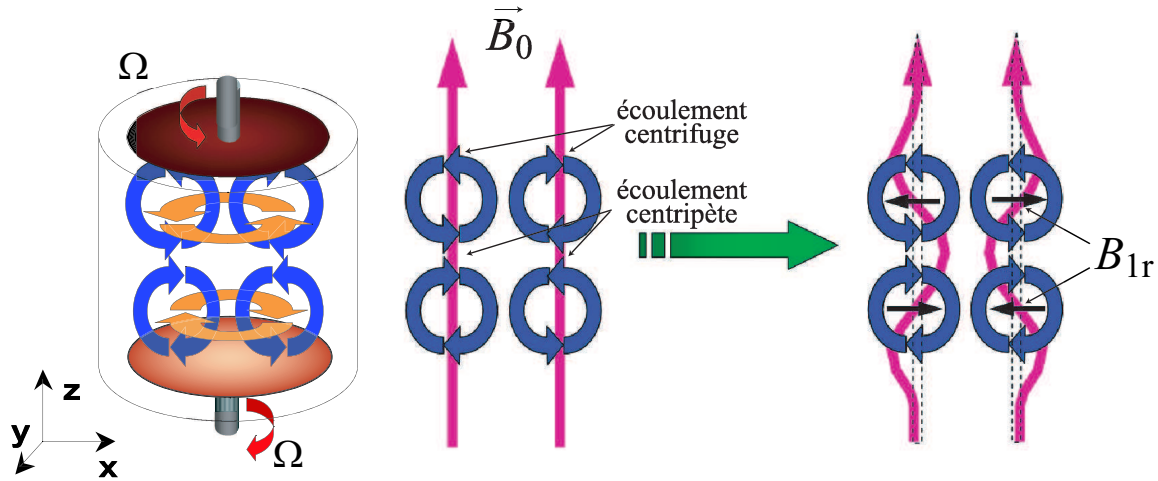
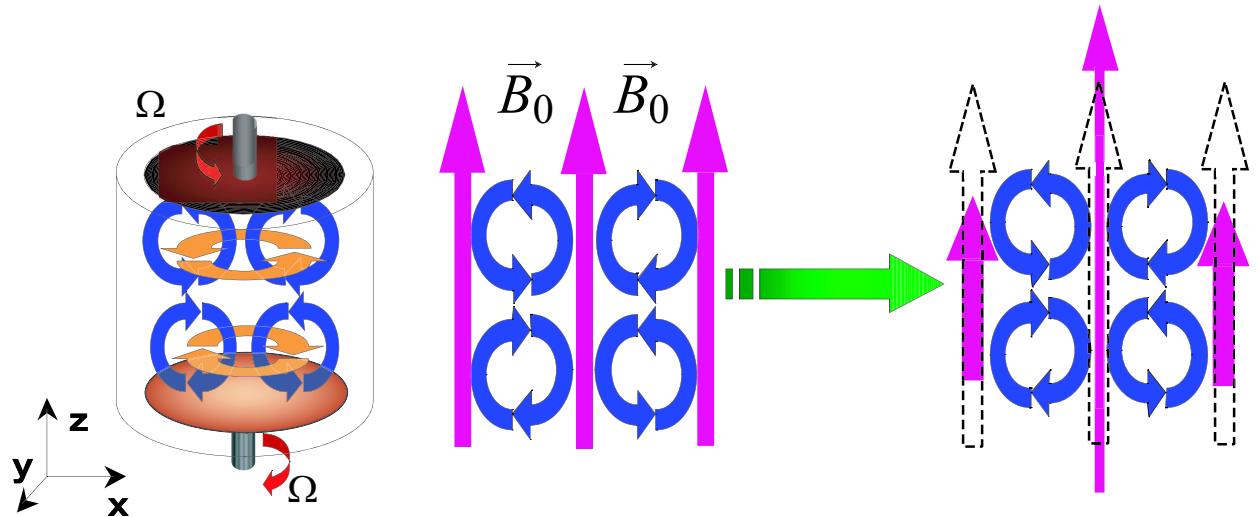


Fig. III.11: Description qualitative de l'effet des écoulements centrifuge et centripète.

plan médian (en  $z \sim 0$ ) tend à ramener les lignes de champs vers le point de stagnation central. Il en résulte une déformation des lignes de champ engendrant un champ induit radial dans la région  $z = \pm 0.5$  (figure III.11.) Cet effet est dû au terme  $I_{xz}^{\text{déformation}} = B_0 \partial_z u_x$  dans le plan  $xOz$  et plus généralement au terme  $I_{rz} = B_0 \partial_z u_r$  compte tenu de l'axisymétrie de la configuration. Il est donc associé à la déformation de  $\vec{B}_0$  par le gradient axial de la composante radiale de la vitesse. Cette contribution est nulle au niveau du plan médian et maximale au voisinage de  $z = \pm 0.5$ . Elle produit un champ magnétique radial. On peut également remarquer, que  $u_r$  étant symétrique par rapport au plan médian  $xOy$  (pair en  $z$ ),  $\partial_z u_r$  est antisymétrique par rapport à  $xOy$  (impair en  $z$ ). Il en résulte que  $B_{1x}$  doit également être antisymétrique par rapport à  $xOy$  et donc s'annuler dans le plan médian. Cette propriété découle en fait directement de la contrainte (I.18), imposée par les symétries intrinsèques de la configuration en champ axial appliqué, selon laquelle  $B_{ind,r}$  (et donc en particulier  $B_{1r}$ ) doit nécessairement être impair en tout point du plan médian lorsqu'on renverse le sens de rotation (et donc le signe de la vitesse azimuthale) ; comme le terme source  $I_{1zz}^{\text{déformation}}$  ne fait intervenir que la composante axiale de la vitesse, le champ induit  $B_{1r}$  doit forcément s'annuler en tout point de  $xOy$  de sorte à rester compatible avec la symétrie intrinsèque du système. L'antisymétrie de  $B_{1r}$  par rapport au plan médian apparaît également dans l'illustration qualitative de la figure III.11.

**Étirement-Pompage différentiel par les boucles de recirculation** Les boucles de recirculation poloïdales présentent également un fort *pompage différentiel* au voisinage du point de stagnation central. En effet le pompage centrifuge engendrant les boucles de recirculation est toujours dirigé vers les disques en rotation (au niveau de l'axe du cylindre), créant sur l'axe  $Oz$  un fort gradient axial de la vitesse axiale. Une ligne de champ magnétique axial aura donc tendance à être étirée au voisinage du centre du cylindre, de sorte à induire un champ axial de même sens que le champ initial. Dans la périphérie du cylindre, le gradient axial de vitesse axiale est renversé : l'écoulement est dirigé des disques vers le plan médian. Les lignes de champ magnétique sont alors comprimées de sorte à induire un champ axial opposé au champ initial. Ce mécanisme est décrit sur la figure III.12. Il est associé au terme  $I_{zz}^{\text{déformation}}$  traduisant l'étirement et la contraction de  $\vec{B}_0$  par le gradient axial de la vitesse axiale. Il est dominant au voisinage des points de stagnation



**Fig. III.12:** Description qualitative de l'effet du pompage différentiel de part et d'autre du plan médian : le champ initial est *étiré* au centre et *comprimé* à la périphérie du cylindre

de  $u_z$  : au voisinage de l'axe et en périphérie du cylindre. Enfin, on remarquera que vers les extrémités du cylindre (au voisinage des disques) cette tendance est renversée puisque le milieu est au repos et isolant pour  $|z| > 1$  : le champ est étiré à la périphérie du cylindre et comprimé au niveau de l'axe (cette situation n'est pas illustrée sur la figure III.12.)

**Effet de la rotation différentielle.** Sous l'effet de la rotation différentielle engendrée par la contra-rotation, les lignes de champ axiales vont être déformées de sorte à induire un champ azimuthal dans le voisinage du plan médian. Ce mécanisme, illustré par la figure III.13, est dû au terme  $I_{yz}^{\text{déformation}} = B_0 \partial_z u_y$  dans le plan  $xOz$  et plus généralement au terme  $I_{\theta z}^{\text{déformation}} = B_0 \partial_z u_\theta$  compte tenu de l'axisymétrie de la configuration. C'est donc un effet dû à la déformation de  $\vec{B}_0$  par le gradient axial de la vitesse azimuthale. Il s'agit du même mécanisme que l'effet  $\Omega$  à l'oeuvre dans la dynamo de Lowes & Wilkinson. Cet effet sera dominant au voisinage de la couche de cisaillement, dans le plan médian du cylindre.

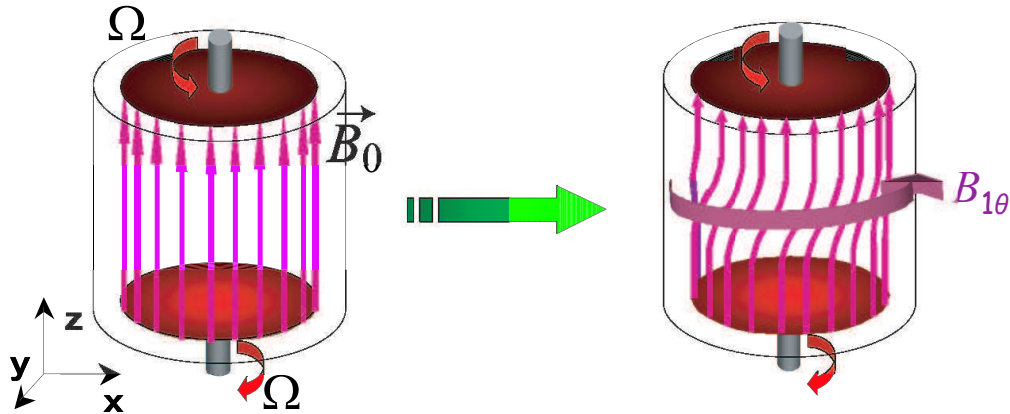


Fig. III.13: Description qualitative de l'effet de la rotation différentielle axiale (effet  $\Omega$ .)

### III.3.1.2 Résolution numérique

Nous présentons ici le résultat de la résolution numérique de la première itération du schéma perturbatif. Cette résolution est effectuée dans le cas  $R_m = 1$ ; elle permet de décrire la structure spatiale du potentiel électrique, de la densité de courants et du champ magnétique induits à l'ordre 1.

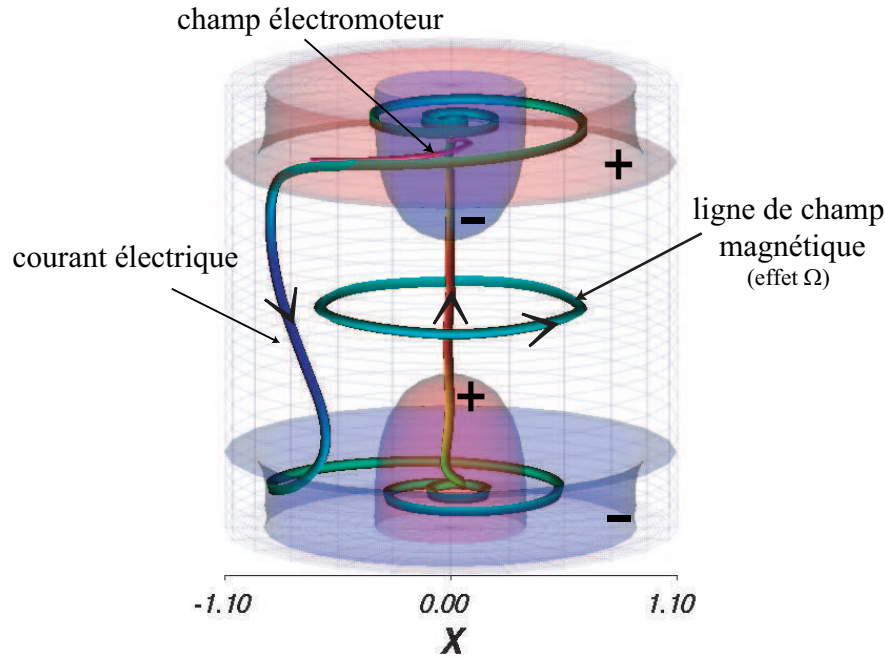
**Effet  $\Omega$ ; Rotation Différentielle.** Le champ électromoteur induit à l'ordre 1,  $\vec{e}_1 = \vec{u} \times \vec{B}_0$ , n'a pas de composante selon  $Oz$ .  $\vec{B}_0$  étant uniforme, la divergence de  $\vec{e}_1$  s'écrit toujours simplement à l'aide de la vorticité  $\vec{\omega}$  selon  $\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_1 = \vec{B}_0 \cdot \vec{\omega}$ . Contrairement au cas de la rotation solide où la vorticité est uniforme et dirigée selon l'axe de rotation, elle possède une structure bien plus complexe dans un écoulement fluide. La vorticité de l'écoulement von Kármán possède globalement la même topologie que le champ de vitesse. En ce sens, l'écoulement von Kármán est quasiment un écoulement de Beltrami (la figure III.72, à la fin de ce chapitre, représente le champ de vorticité de l'écoulement modèle contra-rotatif.)

La structure de la vorticité est donc telle que  $\vec{B}_0 \cdot \vec{\omega}$  n'est pas identiquement nul au sein de l'écoulement. Afin de vérifier la relation de conservation de la charge (et donc l'annulation de la divergence de la densité de courant  $\vec{j}_1$ ), l'induction de  $\vec{e}_1$  doit donc nécessairement s'accompagner de l'apparition d'un potentiel électrique  $\phi_1$ .

La figure III.14 représente quelques iso-surfaces de  $\phi_1$  représentatives de sa structure globale. Il est à symétrie de révolution, en accord avec la symétrie cylindrique de la configuration initiale du système. Par ailleurs, on constate que le signe de  $\phi_1$  reflète bien celui de la composante axiale de la vorticité (figure III.72); en particulier il se renverse de part et d'autre du plan médian et entre l'axe et la périphérie du cylindre. Le potentiel électrique étant directement relié à la composante axiale de la vorticité, il est représentatif des effets de la rotation de l'écoulement.

Nous avons également représenté sur la figure III.14 une boucle de courant de la densité  $\vec{j}_1 = -\vec{\nabla}\phi_1 + \vec{e}_1$ . Cette boucle contribue à l'induction d'un champ magnétique azimuthal. Elle présente deux branches axiales orientées des régions de potentiel positif vers les régions de potentiel négatif et raccordées à chaque extrémité du cylindre par une structure en spirale.

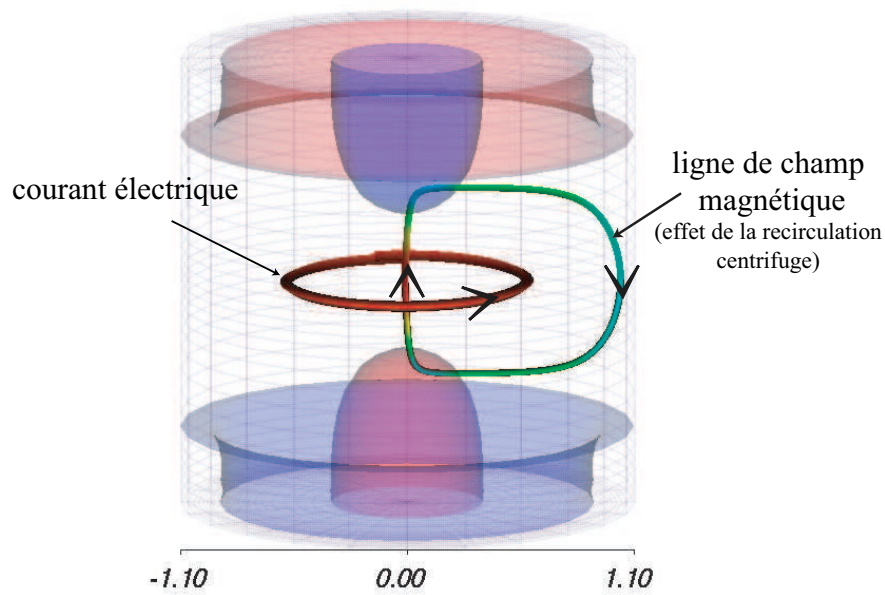
On peut facilement distinguer dans cette boucle les contributions potentielle ( $-\vec{\nabla}\phi_1$ )



**Fig. III.14:** Potentiel électrique, densité de courants et champ magnétique induits à l'ordre 1 (effet de la rotation).

et non-potentielle ( $\vec{e}_1$ ). En effet, le potentiel électrique étant à symétrie de révolution, son gradient ne possède aucune composante azimutale. D'un autre côté,  $\vec{B}_0$  étant purement axial,  $\vec{e}_1$  ne possède aucune composante selon  $Oz$ . On en déduit que toute composante axiale de la densité de courant  $\vec{j}_1$  est nécessairement purement potentielle. On interprète ainsi les branches axiales de  $\vec{j}_1$  orientées des régions de potentiel positif vers les régions de potentiel négatif : sur la figure III.14, la branche centrale est montante et la branche périphérique est descendante. Les conditions aux limites isolantes imposant au courant de ne pas sortir du cylindre, les deux branches doivent nécessairement se rejoindre. La figure III.14 montre que la composante radiale de  $\vec{j}_1$  nécessaire à ce bouclage aux extrémités du cylindre ne peut être obtenue par une contribution potentielle, puisque cette contribution, dirigée des bords vers le centre du cylindre à l'extrémité du haut et du centre vers les bords à l'extrémité du bas, s'y oppose. La jonction des deux branches est en fait assurée par le champ électromoteur  $\vec{e}_1$  (contribution non-potentielle). En l'absence du gradient radial inverse de potentiel, le bouclage serait relativement direct entre la branche potentielle centrale et la branche potentielle périphérique. Le gradient radial inverse de potentiel a un effet de *retard* conduisant à un bouclage en spirale : l'opposition du gradient radial de potentiel oblige le courant à faire plusieurs tours avant de joindre les deux branches.

Il est important de garder à l'esprit que la densité de courants reste à géométrie cylindrique et que des boucles comme celle décrite ci-dessus sont uniformément réparties de sorte à former une sorte de cage torique (à section rectangulaire.) La distribution de courants ainsi obtenue est naturellement associée à un champ magnétique essentiellement azimutal faisant une boucle à l'intérieur de cette *cage* torique de courant. C'est le champ azimutal que nous avons décrit qualitativement en terme de torsion des lignes de champ par la rotation différentielle.



**Fig. III.15:** Potentiel électrique, densité de courants et champ magnétique induits à l'ordre 1 (effet de la recirculation centrifuge.)

**Étirement-Pompage différentiel et effet des écoulements centrifuge et centripète.** La figure III.15 montre qu'une boucle de courant purement azimutale est induite dans le plan médian de cylindre. Elle correspond à une contribution purement non-potentielle de la densité de courant (puisque, comme nous l'avons souligné plus haut, du fait de l'axisymétrie, le gradient de potentiel n'a pas de composante azimutale.) Elle s'identifie au champ électromoteur induit  $\vec{e}_1$  qui, au niveau du plan médian, où l'écoulement est purement radial (et centripète), doit être purement azimutal en présence d'un champ axial. Cette ligne de courant va engendrer des boucles poloïdales de champ magnétique avec une composante axiale dans le même sens que  $\vec{B}_0$  au niveau de l'axe du cylindre (elle correspond à l'étirement de  $\vec{B}_0$ ) et de sens opposé à la périphérie (correspondant à la compression de  $\vec{B}_0$ ) (figure III.15.) Ces boucles présentent également une composante radiale, au voisinage de  $r \sim 0.5$  traduisant l'effet centrifuge de la figure III.11.

**Structure globale des champs et courants à l'ordre 1.** La distribution globale des courants induits peut être décrite comme une structure en couches toriques : le courant azimutal traduisant l'effet du pompage et l'effet centrifuge constitue la couche la plus interne, et les boucles de courants traduisant l'effet  $\Omega$  en sont l'enveloppe externe. Entre ces deux formes limites représentées sur les figures III.14 et III.15, la densité de courant prend la forme intermédiaire d'un enroulement torique (figure III.16), produisant à la fois du champ magnétique azimutal et poloïdal (figure III.17).

Ces structures étant à symétrie de révolution, une vue en coupe dans le plan  $xOz$  en donne une visualisation simple complète (figures III.18 et III.19). La figure III.18 montre bien la structure en couches toriques des courants induits. En revanche l'évolution en spirale des lignes de courants, du centre vers la périphérie, aux extrémités du cylindre, est moins clairement identifiable. La représentation du champ magnétique sur la figure

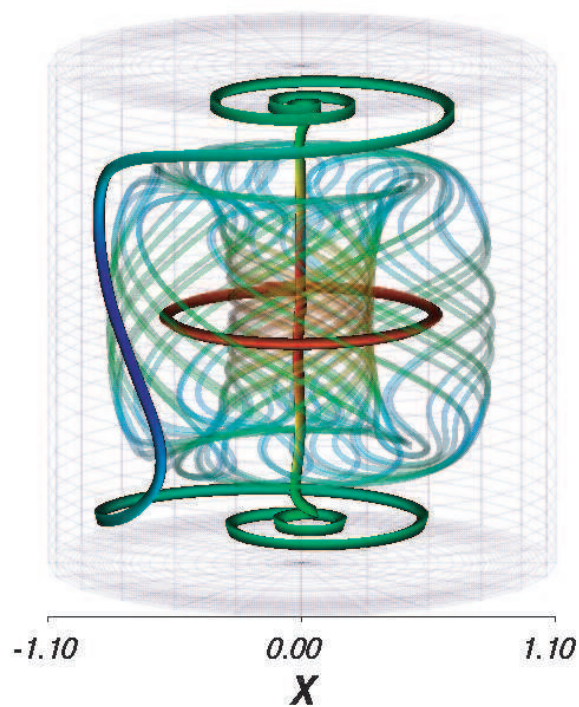


Fig. III.16: Vue d'ensemble de la structure de densité de courants induite à l'ordre 1.

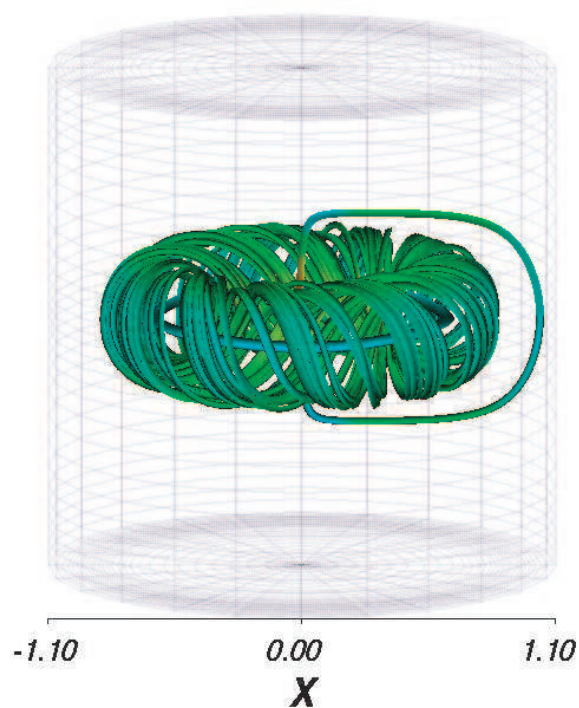
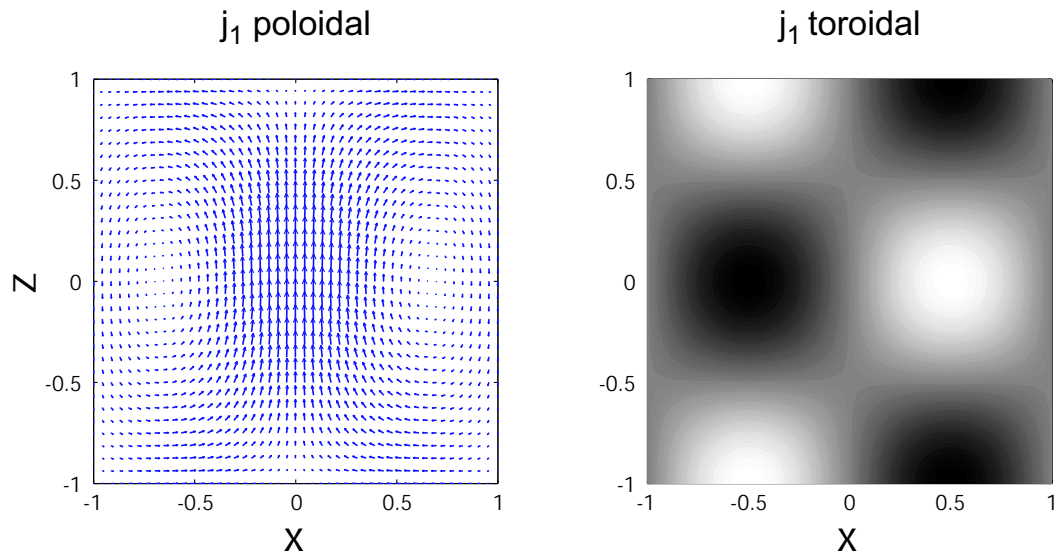
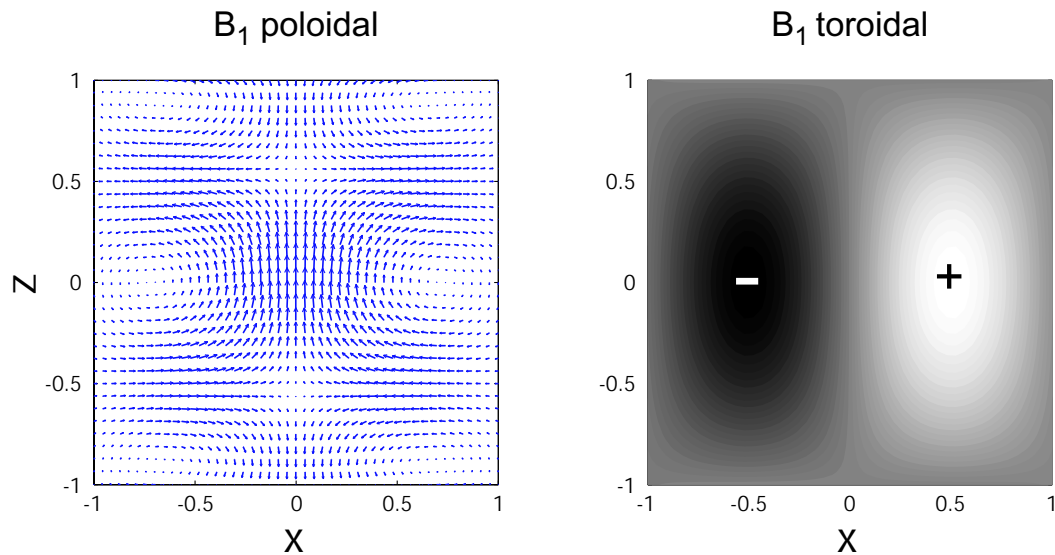


Fig. III.17: Vue d'ensemble de la structure du champ magnétique induit à l'ordre 1.

III.19 montre bien l'induction d'une forte composante toroïdale et d'une structure poloidale centrale en couches toriques. Le renversement de la composante axiale du champ magnétique induit au voisinage des extrémités du cylindre, correspondant au changement de signe du gradient axial de la vitesse axiale est clairement visible ainsi que l'antisymétrie de la composante radiale  $B_{1r}$  par rapport au plan médian.



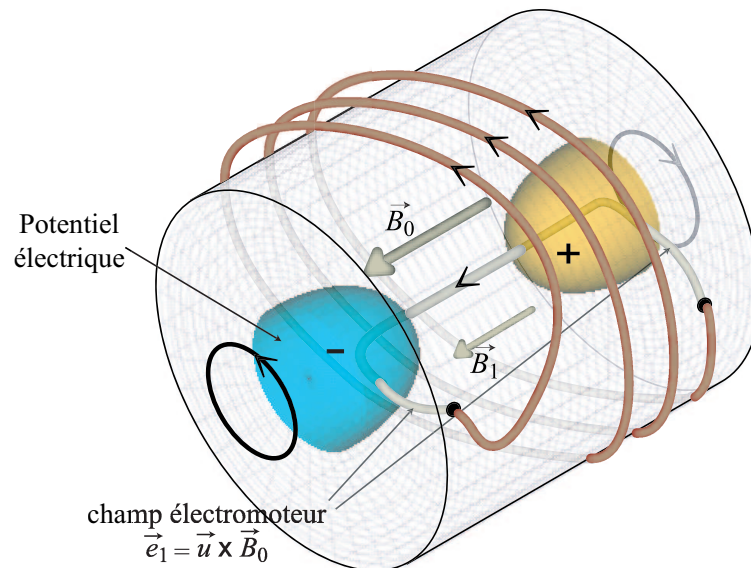
**Fig. III.18:** Vue en coupe dans le plan  $xOz$  de la structure de  $\vec{j}_1$ . Les contours (à droite) représentent la composante  $j_{1y}$  de la densité de courant (positive dans les régions claires, négative dans les régions sombres).



**Fig. III.19:** Vue en coupe dans le plan  $xOz$  de la structure de  $\vec{B}_1$

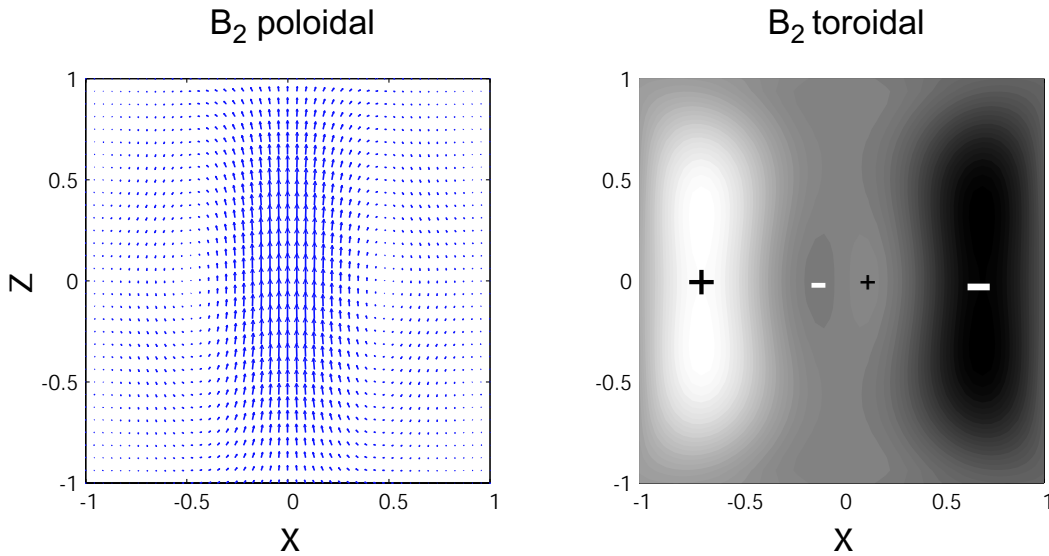
### III.3.1.3 Remarque sur la possibilité d'une dynamo fluide homopolaire

La figure III.14 nous a montré qu'en présence d'un champ axial appliqué  $\vec{B}_0$ , l'écoulement contra-rotatif de von Kármán produit un potentiel électrique à l'ordre 1 qui, à une extrémité du cylindre, est positif au voisinage de l'axe  $Oz$  et négatif vers les bords, alors qu'à l'autre extrémité il est négatif au voisinage de l'axe et positif vers les bords. Ce potentiel engendre un courant électrique axial (circulant en sens inverse au centre du cylindre et à la périphérie) assurant ainsi le bouclage du champ électromoteur et donc la conservation de la charge dans le milieu. On peut alors envisager de court-circuiter, par l'extérieur de la cuve, les régions périphériques à chaque extrémités du cylindre, de sorte que, au lieu de boucler à la périphérie du cylindre, le courant engendré par le champ électromoteur  $\vec{e}_1$  boucle à travers le circuit extérieur. Si ce dernier est correctement enroulé autour de la cuve on peut envisager de produire un champ magnétique de même sens que le champ initial  $\vec{B}_0$  (figure III.20.) On produirait ainsi un schéma de bouclage identique à celui du montage dynamo homopolaire en rotation solide. Cette idée n'a pour le moment pas encore été testée expérimentalement.



**Fig. III.20:** Proposition d'une dynamo fluide homopolaire.





**Fig. III.21:** Vue en coupe dans le plan  $xOz$  de la structure de  $\vec{B}_2$ .

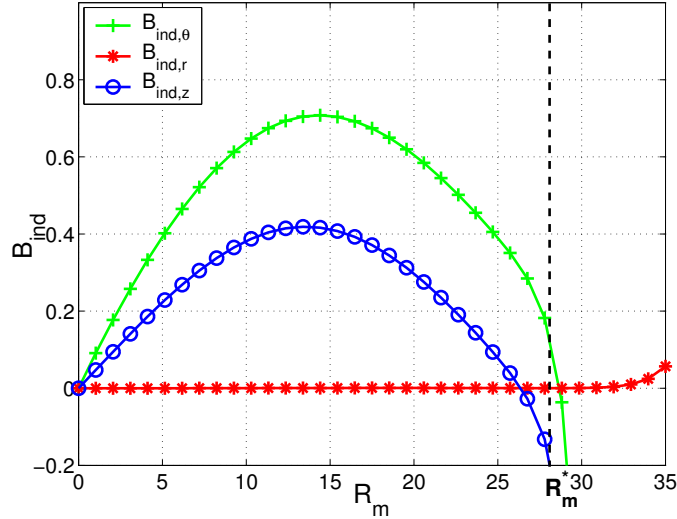
### III.3.2 Mécanismes d'induction d'ordre 2

Le théorème de Cowling interdit toute induction d'un champ poloidal à partir d'un champ toroidal par un champ de vitesse axisymétrique tel que celui de von Kármán. Les effets d'ordre supérieurs seront donc relativement mineurs quant à l'apparition de nouvelles structures de champ magnétique. La figure III.21 représente la vue en coupe dans le plan  $xOz$  calculée pour le champ magnétique  $\vec{B}_2$  induit à l'ordre 2. Elle permet d'identifier deux effets principaux à l'ordre 2 :

- induction d'une composante axiale au voisinage de l'axe
- induction d'une composante toroidale, de même signe que  $B_{1\theta}$  au centre du cylindre et de signe opposé vers les bords (comparer les composantes toroidales dans III.21 et III.19.)

Le mécanisme associé à l'induction de  $B_{2z}$  est l'étirement-compression de  $B_{1z}$  par le gradient axial de la vitesse axiale selon le même processus que celui décrit ci-dessus pour l'induction de  $B_{1z}$ . Le renversement de signe de l'induction par ce mécanisme au voisinage de l'extrémité du cylindre a donc pour effet à l'ordre 2 de produire un champ positif sur l'ensemble du cylindre. Le mécanisme associé à l'induction du champ toroidal d'ordre 2 correspond à deux contributions :

- le transport de  $B_{1\theta}$  par l'écoulement radial centripète au niveau du plan médian. Dans le plan  $xOz$ , cet effet correspond au terme source  $I_{1yx}^{transport} = -u_x \partial_x B_{1y}$  (ou  $-u_r \partial_r B_{1\theta}$  en coordonnées cylindriques.) Le changement de signe de  $B_{2\theta}$  entre le centre et le bord est dû au fait que  $B_{1\theta}$  admet un maximum vers  $r \sim 0.5$  (ceci est clair sur la figure III.19), et que son gradient change donc de signe entre le centre et le bord du cylindre.
- la déformation de  $B_{1z}$  par effet  $\Omega$ . Dans le plan  $xOz$  cet effet est associé au terme source  $I_{1yz} = B_{1z} \partial_z u_y$  (ou  $B_{1z} \partial_z u_\theta$ .) Le changement de signe vers les bords est en



**Fig. III.22:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  au point  $(x = 0.5, y = 0, z = 0)$  en fonction de  $R_m$ , calculée par le développement perturbatif.

accord avec le changement de signe de  $B_{1z}$  entre le centre et la périphérie du cylindre selon le mécanisme d'étirement-compression de  $\vec{B}_0$ .

La structure du champ induit à l'ordre 2 ne présente donc pas de *nouveauté* majeure par rapport au champ induit à l'ordre 1.

### III.3.3 Evolution en $R_m$

#### III.3.3.1 Convergence du calcul perturbatif

La figure III.22 montre l'évolution des composantes de  $B_{ind}$  en fonction de  $R_m$ , calculée à partir des quarante premiers termes du développement perturbatif, au point  $P(x = 0.5, y = 0, z = 0)$ .

Le rayon de convergence du développement perturbatif est l'ordre de  $R_m^* \sim 28$ . La divergence observée au-delà est associée à un bouclage négatif dans le schéma itératif à trois coups (figure III.23). La qualité du bouclage est donnée par le produit scalaire des structures normées de  $B_{31}$  et  $B_{34}$ , par exemple, qui vaut  $-0.99$ , et traduit un recouvrement négatif quasi parfait de ces deux structures. Le facteur de bouclage associé  $\gamma$ , tel que  $B_{34} = \gamma B_{31}$ , vaut  $\gamma = -3.87 \cdot 10^{-5}$ .  $\{\vec{B}_{31}; \vec{B}_{32}; \vec{B}_{33}\}$  forment une famille libre, au sein de laquelle on peut rechercher des vecteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}'$  donnant un bouclage d'ordre 1. En suivant la même démarche que dans le cas d'un bouclage en deux étapes (étudié pour la dynamo de Lowes et Wilkinson au §II.2.6.2 et pour le mécanisme d'expulsion par la rotation solide) on peut montrer que le sous-espace  $\{\vec{B}_{31}; \vec{B}_{32}; \vec{B}_{33}\}$  est associé à la seule valeur propre

$$\tilde{\gamma} = \gamma^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{III.38})$$

L'application numérique à partir de la valeur calculée de  $\gamma$  donne  $\tilde{\gamma} = -3.38 \cdot 10^{-2}$ . Le caractère négatif de  $\tilde{\gamma}$  traduit la nature anti-dynamo du bouclage (en accord avec le théorème de Cowling, interdisant le développement de l'instabilité à partir de la configuration axisymétrique présentement étudiée.) Le rayon de convergence du développement

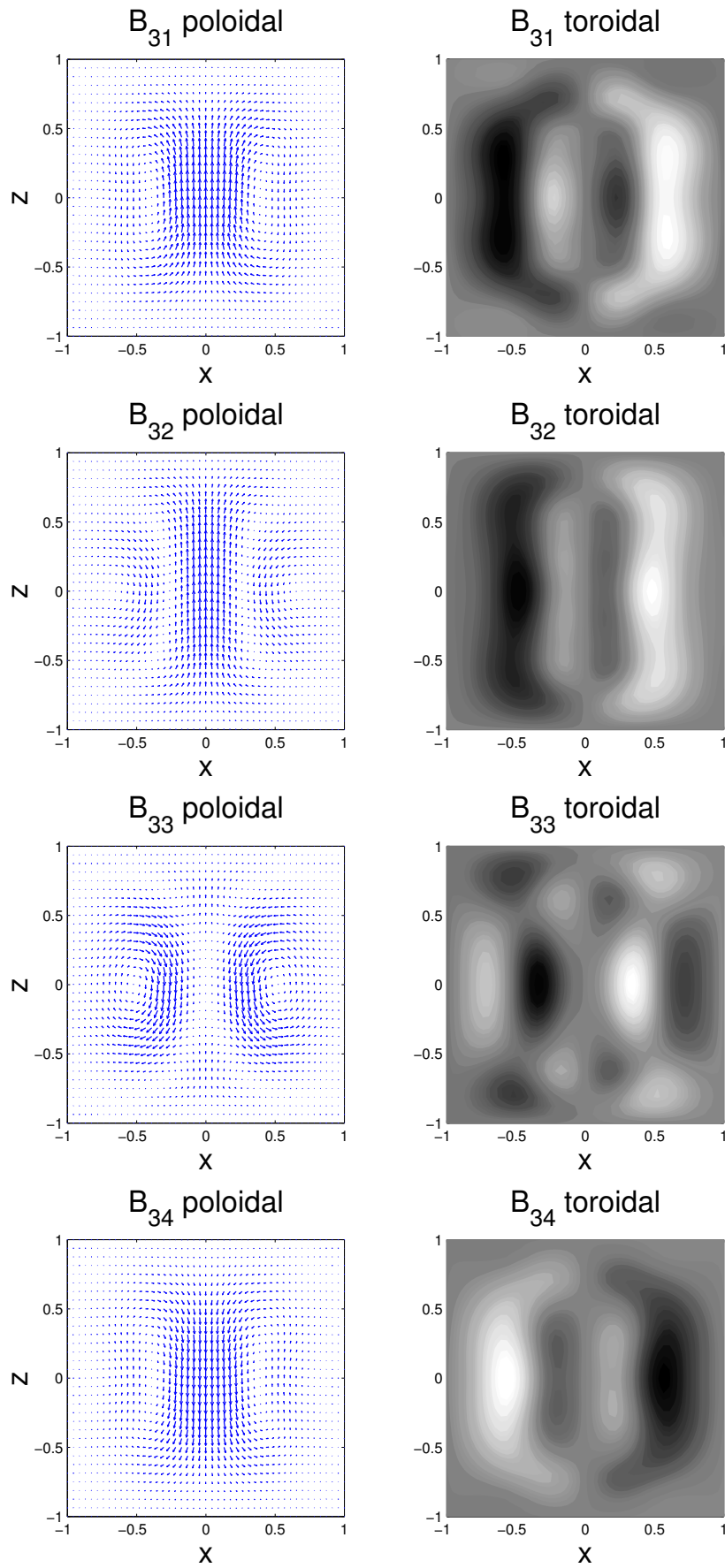
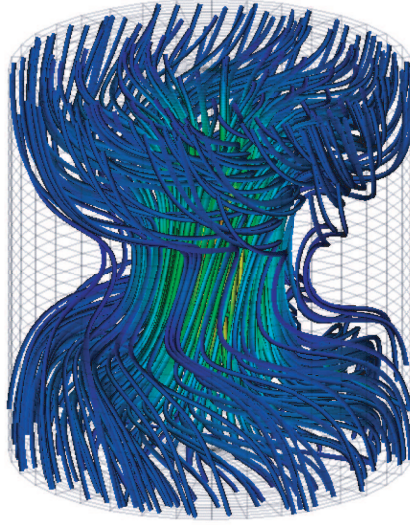


Fig. III.23: Schéma de bouclage en trois coups du calcul itératif de l'induction.



**Fig. III.24:** Champ magnétique total calculé à  $R_m = 29$ . Les lignes de champ, expulsées par la recirculation centrifuge tendent à se concentrer au centre de l'écoulement.

perturbatif peut alors être déduit par la relation

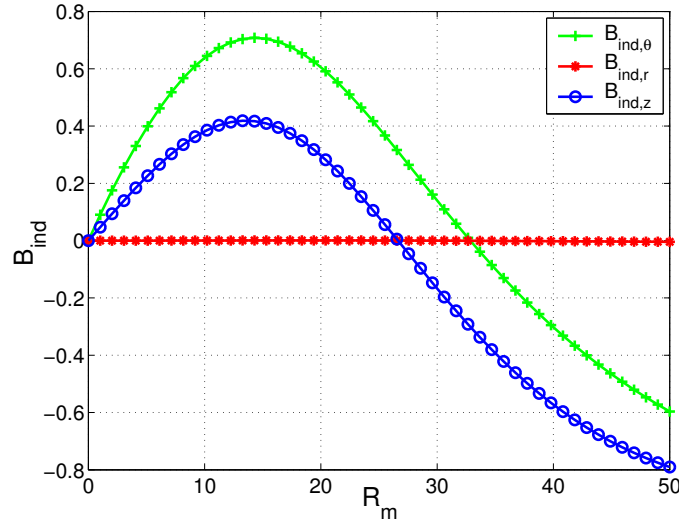
$$R_m^* = \frac{1}{|\tilde{\gamma}|} = 29.6, \quad (\text{III.39})$$

ce qui est en très bon accord avec la divergence obtenue par le calcul du développement en série de  $\vec{B}_{ind}$  de la figure III.22.

Le bouclage négatif identifié dans la configuration présente traduit l'expulsion du champ axial appliqué par les boucles de recirculation poloïdales de l'écoulement. La figure III.24 représente une vue isométrique du champ total  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$  pour  $R_m = 30$ , illustrant cette tendance. Ce mécanisme d'expulsion est comparable à celui décrit dans [93][62] pour un champ appliqué à une succession de boucles de recirculation (dans un écoulement convectif par exemple).

### III.3.3.2 Description générale de l'évolution de l'induction en fonction de $R_m$

À partir de l'approximation polynomiale obtenue pour  $\vec{B}_{ind}$  par la résolution du schéma perturbatif, nous pouvons appliquer la méthode des approximants de Padé afin d'étendre le domaine de convergence de la solution. L'évolution en  $R_m$  obtenue est alors donnée par la figure III.25. Comme prévu par les propriétés de symétrie du dispositif (et en accord avec l'anti-symétrie de  $I_{1xz}^{déformation}$  par rapport à  $xOy$ ), la composante  $B_{ind,r}$  est nulle au point  $(x = 0.5, y = 0, z = 0)$ , qui appartient au plan médian, pour toute valeur de  $R_m$ . L'évolution de  $B_x$  et  $B_z$  est essentiellement linéaire pour des valeurs de  $R_m < 10$  où l'induction est donc dominée par les effets d'ordre 1. Pour des nombres de Reynolds magnétiques plus élevés, l'induction présente une saturation puis devient décroissante. Ce changement de comportement traduit l'expulsion du champ magnétique appliqué par la recirculation centrifuge. À très haut  $R_m$ , le champ axial induit semble tendre vers une

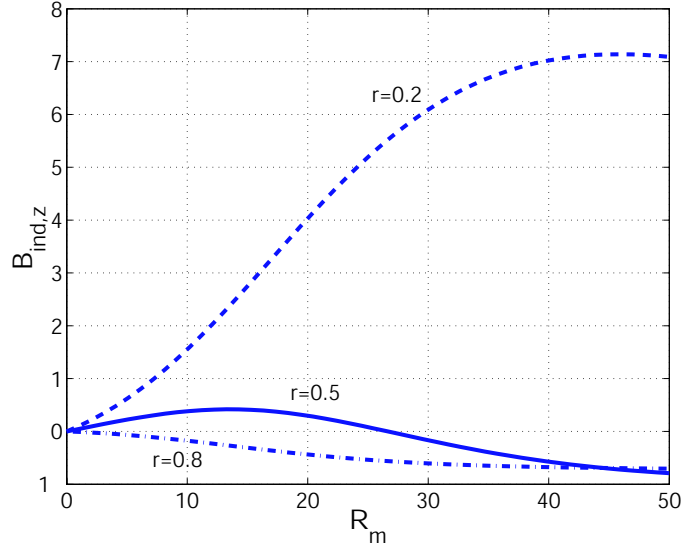


**Fig. III.25:** Évolution en fonction de  $R_m$  des composantes de  $\vec{B}_{ind}$  au point  $(x=0.5, y=0, z=0)$ , calculé par la méthode des approximants de Padé.

valeur proche de -1, de sorte à s'opposer exactement au champ appliqué qui se retrouve ainsi complètement expulsé.

Le mécanisme d'expulsion de la composante azimutale s'interprète simplement à l'aide des coupes toroïdales des figures III.19 et III.21. Pour des nombres de Reynolds magnétiques suffisamment grands pour que les effets d'ordres 2 commencent à se manifester, le champ magnétique azimutal induit par l'effet  $\Omega$  linéaire se verra opposé au champ azimutal induit à l'ordre 2 (de signe contraire).

Enfin, la figure III.26 représente l'évolution en  $R_m$  de la composante axiale induite pour différentes distances à l'axe du cylindre. Au voisinage de l'axe ( $r = 0.2$ ), l'induction peut devenir très intense et présenter un comportement non-linéaire avant de saturer. Ceci est en accord avec la tendance des lignes de champ à être concentrées au centre de la cuve (du fait de l'expulsion par les boucles de recirculation.) Le caractère non-linéaire vient du fait que l'étirement des lignes de champ au voisinage du point de stagnation central est présent à tous les ordres. Ce mécanisme produit à chaque étape du processus itératif un champ axial de même sens que celui de départ. On pourrait alors imaginer que ceci conduise à un bouclage positif et donc à une dynamo. En dehors du fait que cet argument viole le théorème de Cowling, la croissance d'un tel mécanisme ne peut pas se produire dans le mesure où le champ magnétique tend à disparaître en dehors du voisinage immédiat de l'axe, à cause de l'expulsion. En effet, l'amplification du champ axial par étirement des lignes de champ peut également s'interpréter en terme de compression d'un tube axial de ligne champ magnétique (dans l'esprit du théorème du flux gelé d'Alfvén [62]). Pour que cette compression puisse avoir lieu, il est nécessaire que le tube de champ en question s'étende au-delà de l'axe du cylindre. La disparition des lignes de champ en dehors de l'axe par l'expulsion constitue donc une limite à ce processus et est à l'origine de la saturation observée pour  $B_{ind,x}$  dans les régimes à haut  $R_m$ . La figure III.26 montre également que l'effet de l'étirement décroît quand on s'éloigne de l'axe et devient négatif au voisinage des parois, en accord avec le fait que la composante axiale de la vitesse est alors de signe opposé. Les lignes de champ sont donc comprimées et non plus étirées. On constate également que l'effet de compression est beaucoup moins intense que celui de



**Fig. III.26:** Évolution en  $R_m$  de la composante axiale de  $\vec{B}_{ind}$  à différentes distances de l'axe de rotation dans le plan médian.

l'étirement, ce qui traduit simplement le fait que la vitesse de retour de l'écoulement (au voisinage des parois) dans les boucles de recirculation est beaucoup plus faible que celle du pompage central, tout simplement à cause de l'incompressibilité de l'écoulement.

### III.3.4 Conclusion

L'induction par un écoulement von Kármán contra-rotatif en présence d'un champ axial est essentiellement dominée par des effets linéaires. Parmi ceux-ci, l'effet  $\Omega$ , associé à la torsion du champ axial appliqué par la rotation différentielle de l'écoulement, constitue un mécanisme efficace assurant la conversion d'un champ axial en un champ azimutal. Pour les régimes à haut  $R_m$ , les effets non-linéaires contribuent à expulser le champ magnétique hors des boucles de recirculation et à le concentrer au voisinage de l'axe du cylindre où une forte amplification magnétique est localement observée.

## III.4 Champ transverse - von Kármán à un seul disque en rotation

Nous considérons à présent le cas d'un écoulement de von Kármán obtenu lorsqu'un seul disque est mis en rotation. Un tel écoulement présente une forte hélicité (voir la figure I.14b du chapitre I). Le champ magnétique appliqué est transverse :  $\vec{B}_0 // \vec{u}_x$ . La présence d'un champ transverse vient briser l'axisymétrie. Toutefois, le système conserve un certain nombre de propriétés de symétrie et d'antisymétrie imposant quelques contraintes fortes sur le champ magnétique induit.

Nous étudions l'écoulement "synthétique" défini au §II.2.5, avec un rapport  $P/T \sim 0.8$ .

Comme dans la section précédente, nous présentons une étude approfondie des mécanismes d'induction à  $R_m = 1$  afin d'identifier la structure du champ magnétique induit, puis nous étudions l'évolution de ces mécanismes en fonction de  $R_m$ . L'étude numérique

Composante Induite	Contribution en $P_1 \in xOz$ ( $\theta = 0$ )	Contribution en $P_2 \in yOz$ ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )
$B_{1x} \propto I_{1xx}^{\text{déformation}}$	$B_0 \partial_r u_r \sim 0^{(1)}$	$B_0 \frac{u_r}{r} \sim 0^{(1)}$
$B_{1y} \propto I_{1yx}^{\text{déformation}}$	$B_0 \partial_r u_\theta \sim 2\pi B_0 \Omega^{(2)}$	$B_0 \frac{u_\theta}{r} = 2\pi B_0 \Omega$
$B_{1z} \propto I_{1zx}^{\text{déformation}}$	$B_0 \partial_r u_z$	0

(1) Dans le coeur hélicitaire de l'écoulement la vitesse radiale  $u_r$  et son gradient radial sont négligeables (ils sont rigoureusement nuls dans le plan médian.)

(2) Dans le coeur hélicitaire de l'écoulement la rotation est quasiment solide :  $u_\theta = 2\pi r \Omega$  (où  $\Omega$  est la fréquence de rotation de l'écoulement.)

**Tab. III.3:** Contribution des termes sources d'induction

est réalisée dans le cas de conditions aux limites isolantes en  $r = 1$  et en  $z = \pm 1$ .

### III.4.1 Mécanismes d'ordre 1

#### III.4.1.1 Étude qualitative des termes d'induction

Le champ appliqué étant uniforme et selon  $Ox$ , parmi les 18 termes d'induction possibles, seuls 3 subsistent au premier ordre dans la configuration étudiée :  $I_{xx}^{\text{déformation}}$ ,  $I_{yx}^{\text{déformation}}$  et  $I_{zx}^{\text{déformation}}$ . Du fait de la présence d'un champ magnétique transverse, l'axi-symétrie du système est brisée et l'induction dépend alors fortement de la coordonnée azimutale  $\theta$ . Afin de rendre (partiellement) compte de cette brisure de symétrie, nous donnons dans le tableau III.3 la contribution des termes d'induction en un point  $P_1$  dans le plan  $xOz$  ( $\theta = 0$ ) et en un point  $P_2$  dans le plan  $yOz$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

Le terme  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$ , seule source de  $B_{1z}$ , possède l'expression générale relativement simple (donnée dans le tableau III.1) :

$$B_{1z} \propto I_{1zx}^{\text{déformation}} = B_0 \cos \theta \partial_r u_z. \quad (\text{III.40})$$

Celle-ci peut être exploitée plus en détail pour donner quelques propriétés spécifiques de  $B_{1z}$ . La relation III.40 montre que  $I_{1zx}^{\text{déformation}} = B_0 \cos \theta \partial_r u_z$  est antisymétrique par rapport au plan  $yOz$ . En effet le symétrique d'un point  $P$  de coordonnées  $(r, \theta, z)$  est le point  $P'$  de coordonnées  $(r, \pi - \theta, z)$  donc  $I_{1zx}(P)^{\text{déformation}} = -I_{1zx}^{\text{déformation}}(P')$  (car  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  et l'écoulement étant à symétrie de révolution,  $\partial_r u_z(r, \pi - \theta, z) = \partial_r u_z(r, \theta, z)$ .) On en déduit donc que  $B_{1z}$  doit également être antisymétrique par rapport à  $yOz$  et que donc  $B_{1z}(P) = 0$  en tout point  $P \in yOz$ . Remarquons que cette propriété est plus forte que la simple annulation du terme source  $I_{1z}^{\text{déformation}}$  dans  $yOz$ , qui permet simplement de dire que l'effet de ce terme ne sera pas dominant dans le plan  $yOz$ , mais n'empêche pas rigoureusement l'existence de  $B_{1z}$ . En effet  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  n'est pas identiquement nul dans le cylindre et ces effets au voisinage du plan  $yOz$  peuvent diffuser pour donner une contribution dans le plan  $yOz$ . L'antisymétrie de  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  assure que, bien que cette diffusion se produise, ses effets se compensent dans le plan médian et aucune induction par  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  ne pourra y être observée. Toute contribution à l'induction d'un champ axial dans le plan  $yOz$  ne peut donc être due, a priori, qu'à un effet d'ordre supérieur.

**Effet de la rotation.** La rotation globale de l'écoulement va tendre à faire tourner le champ transverse initial. Dans la mesure où la rotation est essentiellement solide dans le coeur hélicitaire de l'écoulement (d'après la forme de l'écoulement modèle (II.8) elle évolue comme  $\sin \pi r$ ), l'induction attendue par la composante azimutale de la vitesse est très similaire à ce que nous avons décrit dans le cas de la rotation solide (section III.2) : partant d'un champ initial ne possédant qu'une composante selon  $Ox$ , le champ induit à l'ordre 1 présentera une composante selon  $Oy$  résultant de la rotation de  $\vec{B}_0$  (figure III.27.) Cet effet traduit la déformation de  $\vec{B}_0$  à cause de la rotation et correspond au terme  $I_{1yx}^{\text{déformation}}$ .

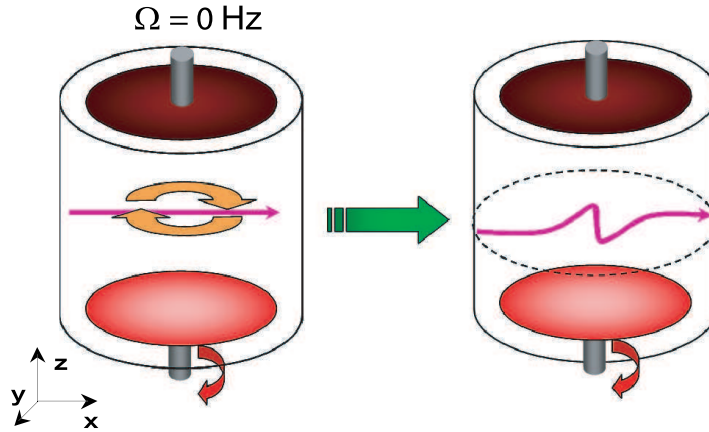


Fig. III.27: Effet de la rotation sur  $\vec{B}_0$ .

**Effet de la recirculation centrifuge.** La boucle de recirculation poloïdale est associée à un gradient radial de la vitesse axiale, qui a pour effet de pousser le champ appliqué vers le disque en rotation, au centre du cylindre et vers le disque immobile à la périphérie du cylindre. Il en résulte un champ induit dans le plan  $xOz$  avec une composante axiale orientée vers le disque en rotation pour  $x < 0$  et dans le sens opposé pour  $x > 0$  (figure III.28.) Cet effet correspond au terme  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  ; il est donc effectivement dominant dans le plan  $xOz$ . De plus, l'antisymétrie de  $B_{1z}$  impose que cet effet soit rigoureusement nul dans le plan  $yOz$ , ce qui paraît intuitif d'après la figure III.28.

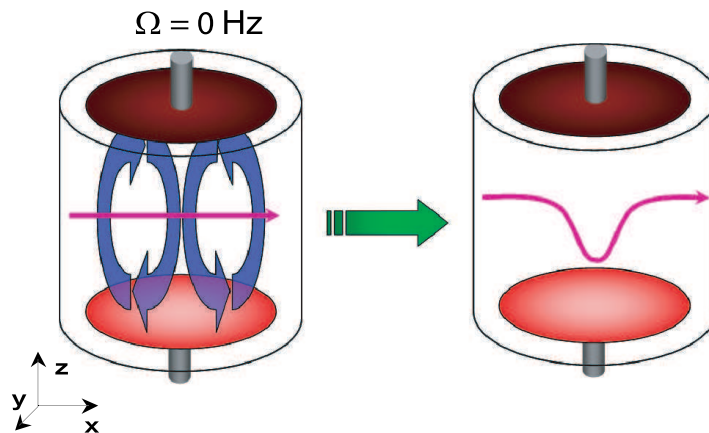
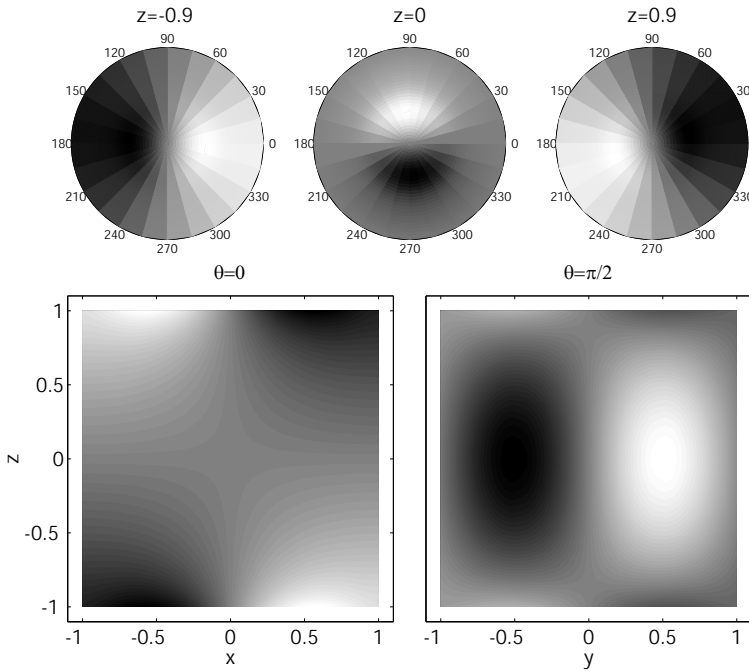
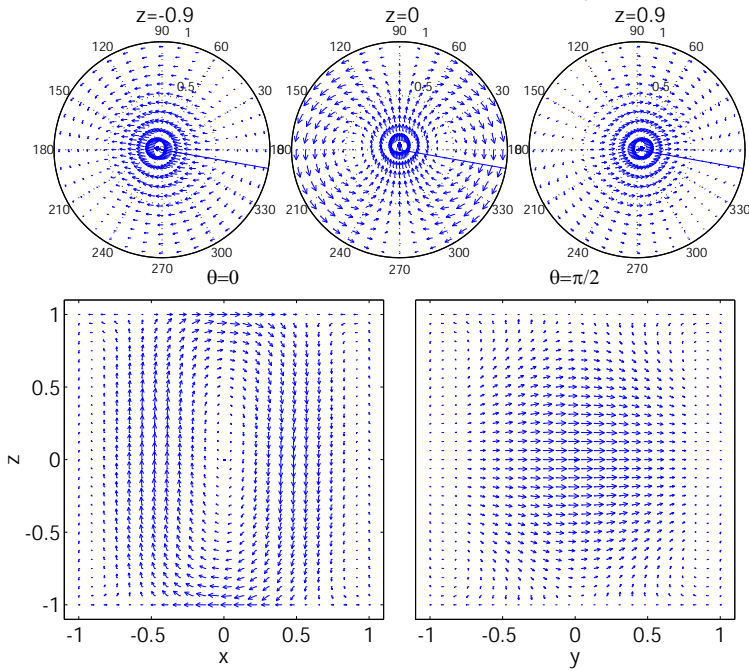


Fig. III.28: Effet de la recirculation centrifuge sur  $\vec{B}_0$ .

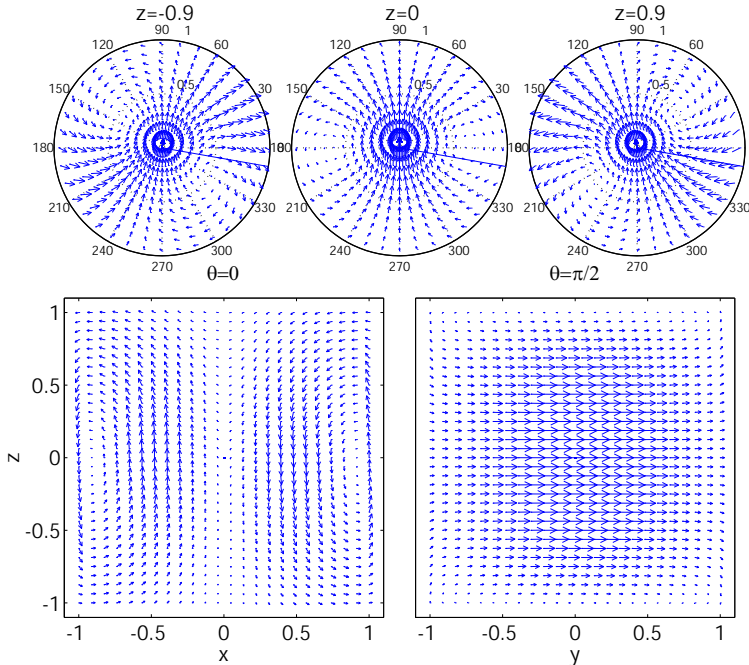




**Fig. III.29:** Contours de  $\phi_1$ . Les médaillons du haut représentent trois coupes dans le plan  $xOy$  pour trois valeurs de  $z$  (l'axe  $Ox$  est horizontal.) Les figures du bas représentent une coupe dans le plan  $xOz$  ( $\theta = 0$ ) et une coupe dans le plan  $yOz$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Les mêmes conventions seront utilisées dans la suite.



**Fig. III.30:** Vue en coupes de la structure de la densité de courants  $\vec{j}_1$ .



**Fig. III.31:** Vue en coupes de la structure du champ magnétique  $\vec{B}_1$ . Pour la lisibilité, l'amplitude du champ magnétique dans les coupes  $xOy$  à  $z = \pm 0.9$  à été multipliée par 2 (par rapport aux autres coupes de la figure.)

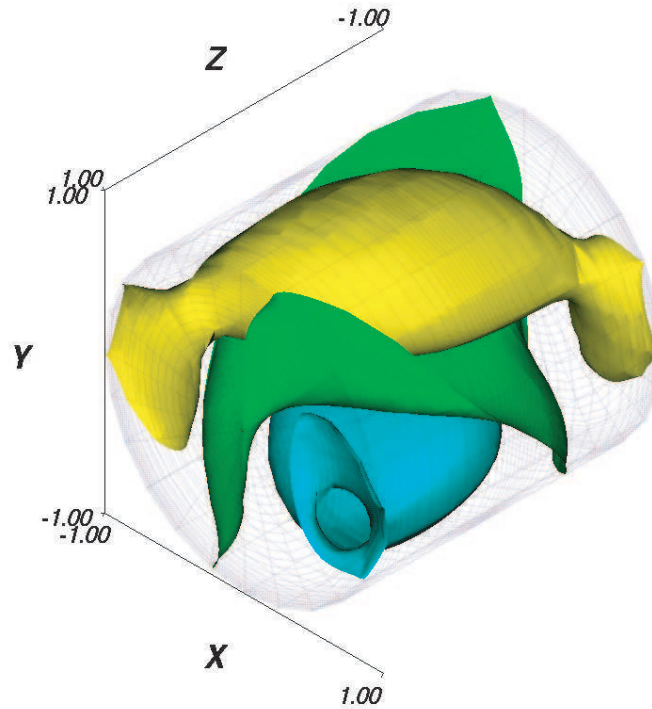


Fig. III.32: Isosurfaces du potentiel électrique.

### III.4.1.2 Étude numérique

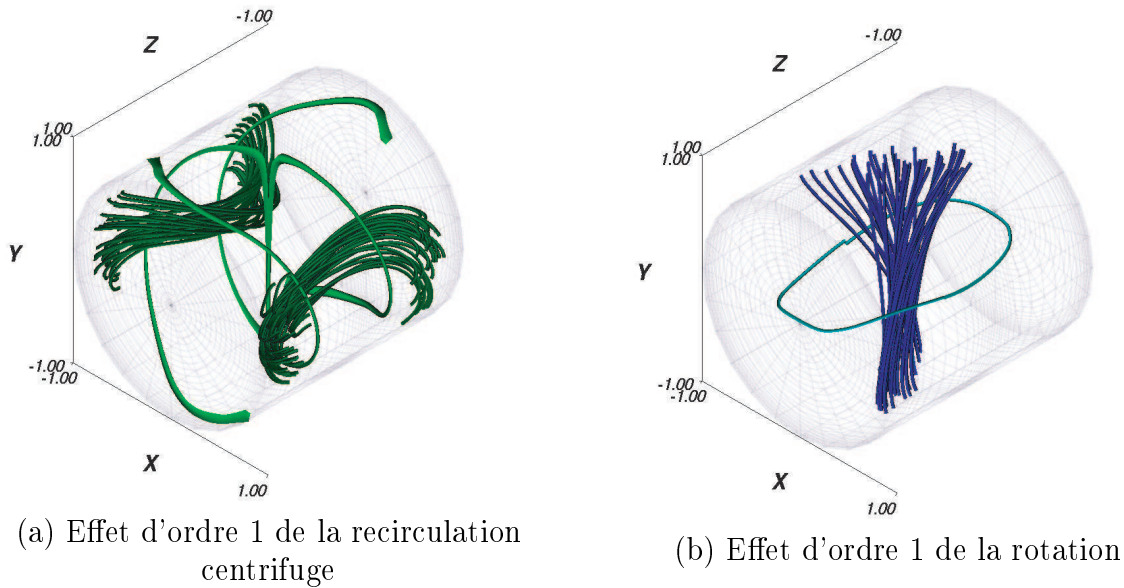
Les figures III.29 et III.30 représentent des coupes du potentiel électrique et de la densité de courant à l'ordre 1. La densité de courants vérifie bien la condition aux limites isolante et reste confinée au sein de l'écoulement conducteur. La structure des courants est essentiellement constituée de deux boucles de courant dans le plan médian avec une forte composante transverse selon  $Oy$ , orthogonale à  $\vec{B}_0$  (voir la coupe  $xOy$  en  $z = 0$  et coupe  $yOz$  de la figure III.30) et d'une boucle de courant poloïdale dans le plan  $xOz$  (coupe  $xOz$  de la figure III.30.)

Le courant transverse selon  $Oy$  est à l'origine d'un champ magnétique axial, essentiellement localisé dans le plan  $xOz$ , et dont le sens change de part et d'autre du plan  $yOz$  (figure III.31). Ce champ correspond à celui créé par la déformation de  $\vec{B}_0$  sous l'effet de la recirculation centrifuge (terme  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$ ) et décrit qualitativement par la figure III.28. Comme prévu par la symétrie de l'écoulement, cet effet s'annule dans le plan  $yOz$ .

La boucle de courant poloïdale dans le plan  $xOz$  est quant à elle à l'origine d'une nappe de champ magnétique dans le plan  $yOz$ . Elle est associée à la torsion de  $\vec{B}_0$  par la rotation globale du fluide conducteur (terme  $I_{1yx}^{\text{déformation}}$ ) et correspond au mécanisme qualitatif de la figure III.27.

On peut enfin également vérifier, sur la figure III.31, que la composante  $B_{1x}$  est négligeable dans le coeur de l'écoulement, conformément au tableau III.3.

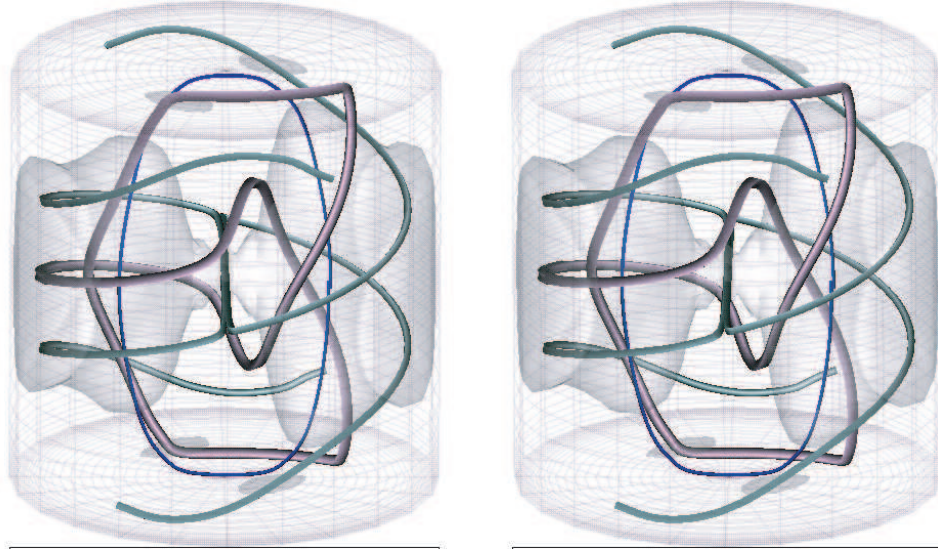
Une image plus précise de la structure spatiale du potentiel, des courants et du champ magnétique induits, peut être obtenue par une représentation tridimensionnelle. La représentation en coupe du potentiel électrique  $\phi_1$  de la figure III.29 ne donne en effet qu'une vue partielle de la structure du potentiel électrique. Il s'agit en réalité d'une structure en double hélice, faisant un demi-tour entre les deux extrémités du cylindre (figure III.32.)



**Fig. III.33:** Induction à l'ordre 1. (a) : induction d'une composante axiale de champ magnétique dans le plan  $xOz$  par la recirculation centrifuge ; elle est associée à deux "hélices" de courants de part et d'autre du plan  $yOz$ ). (b) : induction d'une composante magnétique transverse (perpendiculaire au champ appliqué) par la rotation ; elle est associée à une boucle de courant dans le plan  $xOz$ .

Les figures III.33a et b représentent quelques lignes de courants et le champ magnétique qui leur est associé. Elles illustrent les effets de la rotation et de la recirculation décrits qualitativement au paragraphe précédent et identifiés dans les vues en coupes des figures III.30 et III.31. On distingue sur la figure III.33b une boucle de courant essentiellement poloïdale, créant la composante transverse  $B_{1y}$  dans le plan  $yOz$  (par rotation de  $\vec{B}_0$ .) La figure III.33a montre une ligne de courant formée de deux hélices partageant dans le plan médian une composante transverse selon  $Oy$  ; la projection de cette ligne sur le plan médian correspond aux deux boucles de courant (de la coupe  $xOy$  à  $z = 0$  de la figure III.30) créant la composante axiale de  $\vec{B}_1$  dans le plan  $xOz$  (par pompage centrifuge de  $\vec{B}_0$ .)

Une fois de plus, nous insistons sur le côté artificiel de la décomposition en "effet de la rotation" et "effet de la recirculation". Il s'agit seulement de deux effets extrêmes associés à deux spécificités de l'écoulement. La structure globale des champs induits ne peut toutefois être comprise sans considérer l'induction comme un phénomène global où les différentes composantes de l'écoulement sont en général simultanément présentes. Ainsi, la figure III.34 représente les lignes de courant décrites précédemment, ainsi qu'une ligne de courant *intermédiaire* possédant des propriétés mixtes : tantôt axiale par endroit (et donc associée à la rotation), tantôt azimuthale-transverse (et donc associée à la recirculation.) Nous avons également représenté une iso-surface où la norme de  $\vec{j}_1$  vaut 67% du maximum de la densité de courants. Les courants les plus intenses évoluent à l'intérieur de cette surface. Sa structure peut être décrite comme étant constituée de deux lobes se rejoignant au centre du cylindre. Chacun des lobes possède une structure essentiellement axiale, vers  $r = \frac{R}{2}$  (où passent les courants produisant le champ magnétique induit par la rotation) et une structure essentiellement azimuthale vers le bord du cylindre (où passent les courants



**Fig. III.34:** Vue stéréoscopique de la structure globale de la densité de courants. *Mode d'emploi :* placer la figure à une dizaine de centimètres des yeux. Trois images floues apparaissent alors. Faire la mise au point sur celle du centre, en éloignant progressivement l'image jusqu'à une distance usuelle de lecture.

en hélice produisant la composante axiale du champ induit par la recirculation.) Une étude détaillée de la répartition des contributions potentielle et non-potentielle de la densité de courant, montrerait qu'elles sont en général simultanément présentes et qu'il est relativement compliqué d'essayer de déduire simplement la géométrie de la densité de courant par des arguments simples uniquement basés sur l'étude locale de la force électromotrice induite  $\vec{e}_1 = \vec{u} \times \vec{B}_0$ . La complexité topologique de la distribution de courant illustrée par la figure III.34, est naturellement transmise à la structure spatiale du champ magnétique qu'elle engendre.

## III.4.2 Ordre 2

### III.4.2.1 Étude qualitative des termes d'induction

Le champ induit à l'ordre 1 comporte essentiellement une composante axiale  $B_{1z}$ , fortement inhomogène (nulle dans le plan  $yOz$  et maximale dans le plan  $xOz$ ) et une composante  $B_{1y}$ , perpendiculaire au champ appliqué, relativement homogène au coeur de l'écoulement (dans le domaine où la rotation est solide, le tableau III.3 indique que  $B_{1y} \propto B_0 \Omega$  en tout point ; la figure III.31 permet par ailleurs de vérifier cette homogénéité au coeur du cylindre.) La composante  $B_{1x}$  est négligeable au coeur de l'écoulement. Les termes d'induction contribuant à l'ordre 2 sont donc a priori :

- induction de  $B_{2x}$  par déformation de  $\vec{B}_1$  :  $I_{2xy}^{\text{déformation}}$ ,  $I_{2xz}^{\text{déformation}}$
- induction de  $B_{2x}$  par transport du gradient de  $B_{1x}$  : aucune contribution majeure car  $B_{1x} \sim 0$  au coeur de l'écoulement
- induction de  $B_{2y}$  par déformation de  $\vec{B}_1$  :  $I_{2yy}^{\text{déformation}}$ ,  $I_{2yz}^{\text{déformation}}$
- induction de  $B_{2y}$  par transport du gradient de  $B_{1y}$  : aucune contribution majeure car  $B_{1y}$  est relativement homogène au coeur de l'écoulement.
- induction de  $B_{2z}$  par déformation de  $\vec{B}_1$  :  $I_{2zy}^{\text{déformation}}$ ,  $I_{2zz}^{\text{déformation}}$

Composante induite	Termes d'induction	Contribution en $P_1 \in xOz$ ( $\theta = 0$ )	Contribution en $P_2 \in yOz$ ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )
$B_{2x}$	$I_{2xy}^{\text{déformation}}$ $I_{2xz}^{\text{déformation}}$	$-B_{1y} \frac{u_\theta}{r} = -2\pi B_{1y} \Omega$ $B_{1z} \partial_z u_r$	$-B_{1y} \partial_r u_\theta \sim -2\pi B_{1y} \Omega^{(2)}$ $B_{1z} \partial_z u_r = 0^{(3)}$
$B_{2y}$	$I_{2yy}^{\text{déformation}}$ $I_{2yz}^{\text{déformation}}$	$B_{1y} \frac{u_r}{r} \sim 0^{(1)}$ $B_{1z} \partial_z u_\theta \sim 0^{(4)}$	$B_{1y} \partial_r u_r \sim 0^{(1)}$ $B_{1z} \partial_z u_r = 0^{(3)}$
$B_{2z}$	$I_{2zy}^{\text{déformation}}$ $I_{2zz}^{\text{déformation}}$ $I_{2zx}^{\text{transport}}$ $I_{2zy}^{\text{transport}}$ $I_{2zz}^{\text{transport}}$	0 $B_{1z} \partial_z u_z \sim 0^{(5)}$ $-u_r \partial_x B_{1z} \sim 0^{(1)}$ $-u_\theta \partial_y B_{1z} = 0^{(7)}$ $-u_z \partial_z B_{1z} \sim 0^{(6)}$	$B_{1y} \partial_r u_z$ $B_{1z} \partial_z u_z = 0^{(3)}$ $u_\theta \partial_x B_{1z}$ $-u_r \partial_y B_{1z} = 0^{(3,7)}$ $-u_z \partial_z B_{1z} = 0^{(3,6)}$

(1) Dans le coeur hélicitaire de l'écoulement la vitesse radiale  $u_r$  et son gradient radial sont négligeables (ils sont rigoureusement nuls dans le plan médian.)

(2) Dans le coeur hélicitaire de l'écoulement la rotation est quasiment solide :  $u_\theta = 2\pi r \Omega$  (où  $\Omega$  est la fréquence de rotation de l'écoulement.)

(3)  $B_{1z} = 0$  dans le plan  $yOz$

(4) Le coeur hélicitaire de l'écoulement de von Kármán à un disque ne possède quasiment pas de rotation différentielle axiale (contrairement à l'écoulement contra-rotatif où la rotation différentielle est dominante au coeur de l'écoulement.) Dans le plan médian  $\partial_z u_\theta = 0$  rigoureusement.

(5) Le gradient axial de  $u_z$  est nul dans le plan médian et reste faible dans le coeur hélicitaire de l'écoulement.

(6) En effet d'après (III.40),  $\partial_z B_{1z} \propto B_0 \cos \theta \partial_z u_z$  : cette expression est nulle dans  $yOz$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) et reste faible dans le coeur de l'écoulement où  $\partial_z u_z \sim 0^{(5)}$

(7) D'après (III.40)  $\partial_y B_{1z} \propto B_0 \partial_y (\cos \theta \partial_r u_z) = B_0 \sin \theta \cos \theta \left( -\frac{\partial_r u_z}{r} + \partial_{rr} u_z \right)$ . Donc,  $\partial_y B_{1z} = 0$  dans les plans  $xOz$  et  $yOz$ .

**Tab. III.4:** Contribution des termes sources d'induction à l'ordre 2

– induction de  $B_{2z}$  par transport du gradient de  $B_{1z}$  :  $I_{2zx}^{\text{transport}}$ ,  $I_{2zy}^{\text{transport}}$ ,  $I_{2zz}^{\text{transport}}$

Le tableau III.4 indique les contributions dominantes de ces termes dans les plans  $xOz$  et  $yOz$ .

**Effets de la rotation sur  $B_{1y}$ .** La composante induite au premier ordre dans la direction  $Oy$  va être à son tour entraînée à l'ordre suivant par la rotation pour induire une composante  $B_{2x}$  opposée à  $\vec{B}_0$ . Cet effet décrit la déformation de  $B_{1y}$  par la rotation et correspond au terme  $I_{2xy}^{\text{déformation}}$ . Il s'agit en fait du même mécanisme d'expulsion du champ appliqué transverse, selon un bouclage négatif à deux itérations, que celui décrit pour la rotation solide.

**Effet "α".** Sous l'effet de la recirculation centrifuge,  $B_{1y}$  va subir le gradient radial de la vitesse axiale (effet du terme  $I_{2zy}^{\text{déformation}}$ ) de sorte à être transporté vers le disque en rotation, au centre du cylindre, engendrant ainsi une boucle de champ magnétique (figure III.35.) Cette boucle correspond à l'induction d'un champ magnétique axial dans le plan  $yOz$ , dont la composante  $z$  est maximale (en valeur absolue) au voisinage de  $x = \pm 0.5$  et change de signe de part et d'autre du plan  $xOz$ .

Sous l'effet de la rotation, le champ axial  $B_{1z}$  induit à l'ordre 1 par la recirculation centrifuge dans le plan  $yOz$  (figure III.28) va être à son tour transporté pour engendrer une boucle magnétique similaire à celle décrite juste avant (figure III.36) associée à un champ induit axial dans le plan  $yOz$  similaire. Cet effet correspond au terme source de transport de  $B_{1z}$  par la rotation  $I_{2zx}^{\text{transport}} = u_\theta \partial_x B_{1z}$

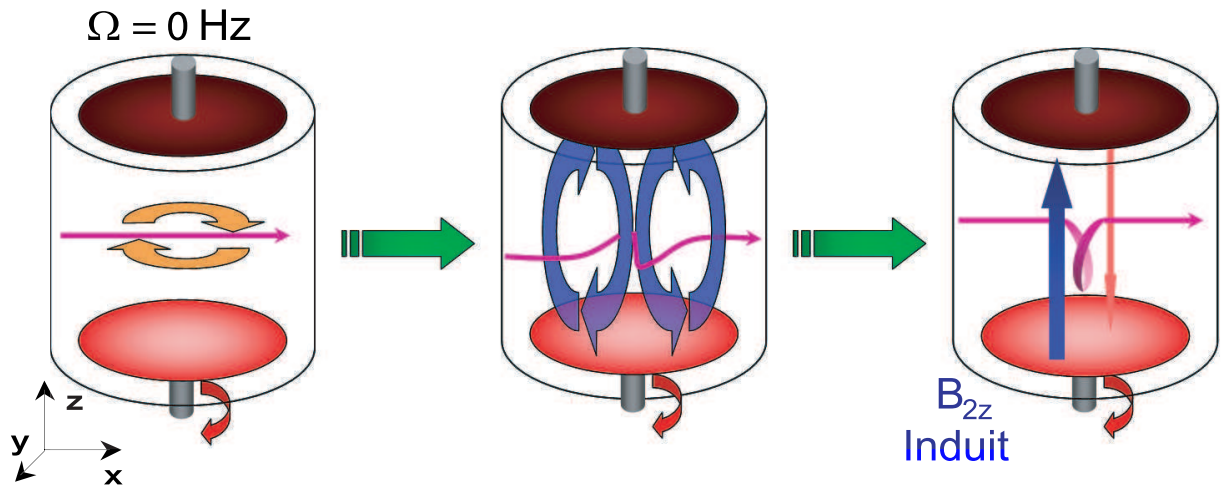


Fig. III.35: Effet de la rotation (ordre 1) puis de la recirculation centrifuge (ordre 2).

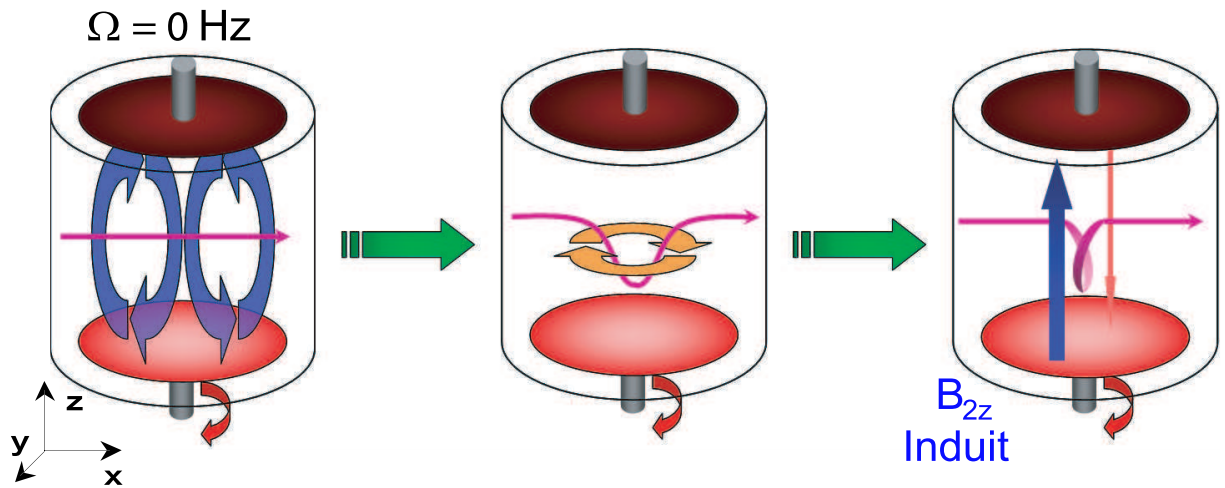


Fig. III.36: Effet de la recirculation centrifuge (ordre 1) puis de la rotation centrifuge (ordre 2).

Ainsi, on aboutit à une conversion en deux étapes d'un champ magnétique appliqué transverse selon  $Ox$  en un champ magnétique axial dans le plan  $yOz$ .

Les deux mécanismes décrits ci-dessus conduisant à cette conversion sont en fait deux visions duales d'un seul et même effet, lié à l'hélicité de l'écoulement. La décomposition de l'écoulement en rotation et recirculation est certes pratique pour appréhender les mécanismes d'induction, mais elle nous oblige à considérer séparément des effets qui sont en réalité simultanés. Ainsi, nous avons décomposé l'effet de l'hélicité selon les deux schémas :

- Les lignes de champ de  $\vec{B}_0$  sont déformées par la rotation puis ensuite par la recirculation ; c'est le mécanisme représenté sur la figure III.35 et correspondant au schéma itératif :

1. <u>Rotation</u> de $\vec{B}_0$ ( $I_{1yx}^{\text{déformation}}$ ) :	$B_{1y} \propto 2\pi B_0 \Omega$	(cf. tableau III.3)
2. <u>Pompage</u> de $B_{1y}$ ( $I_{2zy}^{\text{déformation}}$ dans $yOz$ ) :	$B_{2z} \propto B_{1y} \partial_r u_z$	(cf. tableau III.4)
	$\propto 2\pi B_0 \Omega \partial_r u_z$	

- Les lignes de champ sont déformées par la recirculation puis le gradient magnétique ainsi créé est ensuite transporté par la rotation ; c'est le mécanisme représenté sur la figure III.36 et correspondant au schéma itératif :

1. <u>Pompage</u> de $\vec{B}_0$ ( $I_{1zx}^{\text{déformation}}$ ) :	$B_{1z} \propto B_{0x} \partial_r u_z$	(cf. tableau III.1)
2. <u>Rotation</u> de $\partial_x B_{1z}$ ( $I_{2zx}^{\text{transport}}$ dans $yOz$ ) :	$B_{2z} \propto u_\theta \partial_x B_{1z}$	(cf. tableau III.4)
	$B_{2z} \propto u_\theta \left( \cos \theta \partial_r B_{1z} - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta B_{1z} \right)$	
	(cf. tableau III.2 avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ )	
	$\propto B_0 u_\theta \left( \frac{\sin^2 \theta}{r} \partial_r u_z + \cos^2 \theta \partial_{rr} u_z \right)$	
	(car $B_{0x} = B_0 \cos \theta$ et $\partial_\theta u_r = 0$ )	
	$\propto 2\pi B_0 \Omega \partial_r u_z$	dans le plan $yOz$

Les deux schémas conduisent donc au même effet :  $B_{2z} \propto 2\pi B_0 \Omega \partial_r u_z$ . Le champ axial ainsi produit est directement relié au produit  $\Omega u_z$  ce qui traduit le caractère hélicitaire de ce mécanisme.

Au bout du compte, rotation et recirculation interviennent simultanément à chaque étape, de telle sorte que finalement une seule itération suffit pour transmettre aux champs induits l'hélicité de l'écoulement.

Le mécanisme en deux étapes que nous venons de décrire n'est en fait rien d'autre que celui jadis introduit par E.N. Parker [69] pour décrire l'effet d'une structure hélicitaire élémentaire et que nous avons déjà décrit au chapitre 1 (figure I.9) sous la dénomination d'effet " $\alpha$ ". Le champ magnétique axial induit dans le plan  $yOz$  par effet " $\alpha$ " est associé à une densité de courant parallèle au champ initial  $\vec{B}_0$  (figure I.9.) C'est la raison pour laquelle il est souvent invoqué pour illustrer l'effet  $\alpha$  dans le cadre de la théorie du champ moyen [47] qui suggère la possibilité d'induire un courant de même sens que le champ magnétique dans les systèmes présentant deux échelles de longueur caractéristiques distinctes

pour l'écoulement et pour le champ magnétique. Un tel effet  $\alpha$  résulte de la collaboration des structures aux petites échelles (turbulentes par exemple), non nécessairement hélicitaires, pour induire un champ magnétique à grande échelle. C'est par analogie avec l'effet  $\alpha$ , que nous appelons " $\alpha$ " celui résultant de l'hélicité de l'écoulement von Kármán. Les guillemets rappellent que c'est l'hélicité à grande échelle de l'écoulement qui est alors à l'origine de l'induction et non pas d'éventuels effets des petites échelles.

**Effet centrifuge sur  $B_{1z}$**  La boucle de recirculation présente un écoulement centrifuge à l'une des extrémités du cylindre et centripète à l'autre. Il en résulte un gradient axial de  $u_r$  qui va déformer  $B_{1z}$  par le même mécanisme que celui décrit dans la figure III.11. Cet effet est dominant dans le plan  $xOz$ , aux extrémités du cylindre, et est associé au terme  $I_{2xz}^{\text{déformation}}$ .

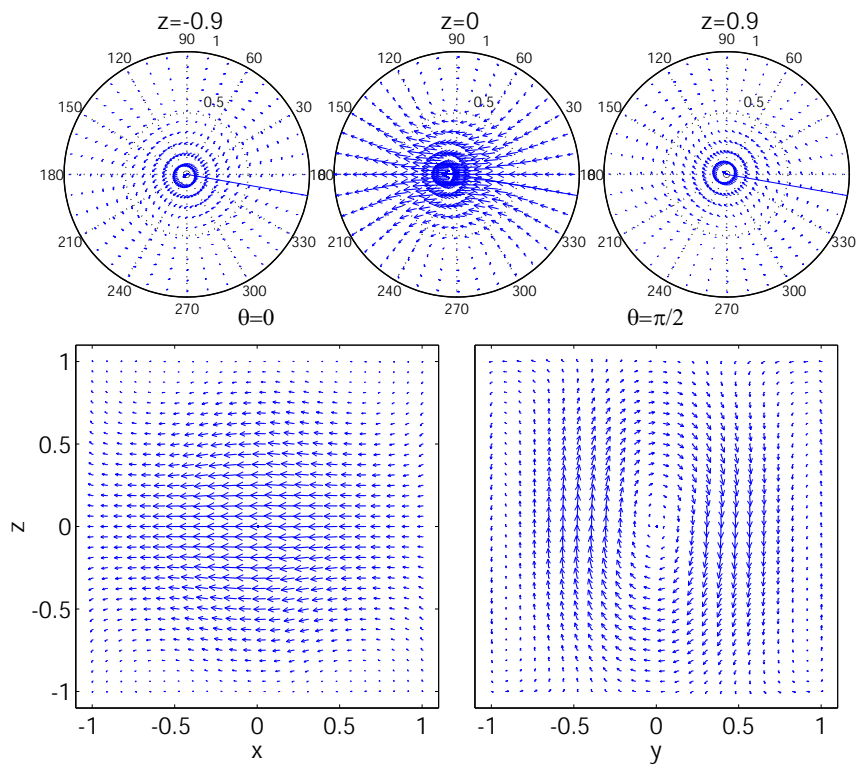
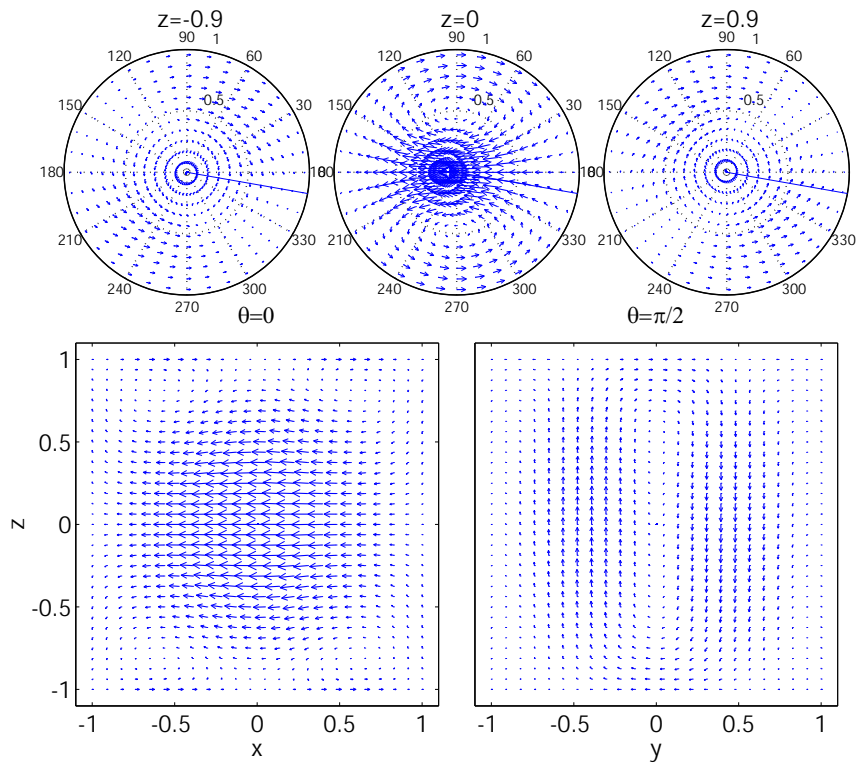
### III.4.2.2 Étude numérique

Le calcul numérique de la structure du champ induit à l'ordre 2 permet d'identifier les mécanismes que nous venons de décrire. Les figures III.38 et III.37 représentent les projections de  $\vec{j}_2$  et  $\vec{B}_2$  sur divers plans de coupe du cylindre.

On y repère facilement dans le plan  $xOz$  et dans le plan médian ( $z = 0$ ) le phénomène d'expulsion de  $\vec{B}_0$  par un champ induit de sens opposé. La coupe  $yOz$  permet d'identifier une boucle magnétique avec une forte composante axiale, de sens opposé de part et d'autre de l'axe  $Ox$ , correspondant au champ induit par effet " $\alpha$ ". On observe également que cette boucle magnétique est effectivement produite par une densité de courants parallèle à  $\vec{B}_0$ , le long de l'axe  $Ox$ , clairement repérable sur la coupe  $xOz$ .

La structure spatiale de  $\vec{B}_2$  est toutefois plus complexe que ne le laisseraient penser les projections de la figure III.37. Un exemple de lignes de champ calculées à l'ordre 2 est représenté sur la vue isométrique III.39. On y retrouve la forte composante axiale induite dans le plan  $yOz$  par effet " $\alpha$ ", mais contrairement à ce qu'on aurait pu croire d'après les vues en coupes de la figure III.37, les lignes de champ magnétique ne bouclent pas dans le plan  $yOz$ , mais peuvent adopter une géométrie relativement complexe, avec des entrelacements. Enfin, la figure III.40 montre que ces boucles de champ magnétique sont bien le produit d'une densité de courant induite colinéaire à  $\vec{B}_0$ .



Fig. III.37: Vue en coupes de  $\vec{B}_2$ Fig. III.38: Vue en coupes de  $\vec{j}_2$

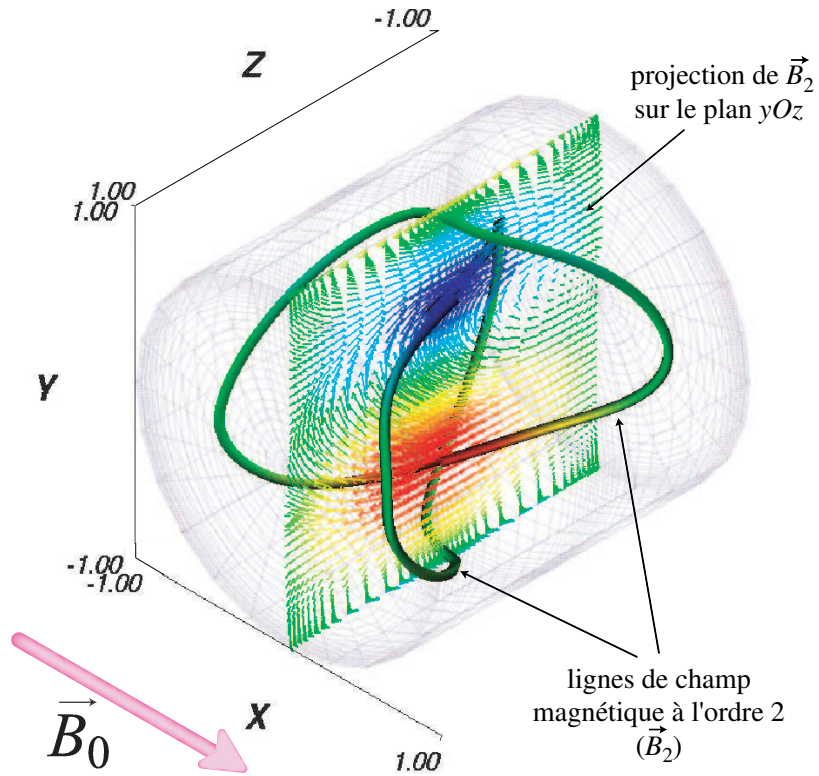


Fig. III.39: Exemple de la structure spatiale de lignes de champ magnétique à l'ordre 2.

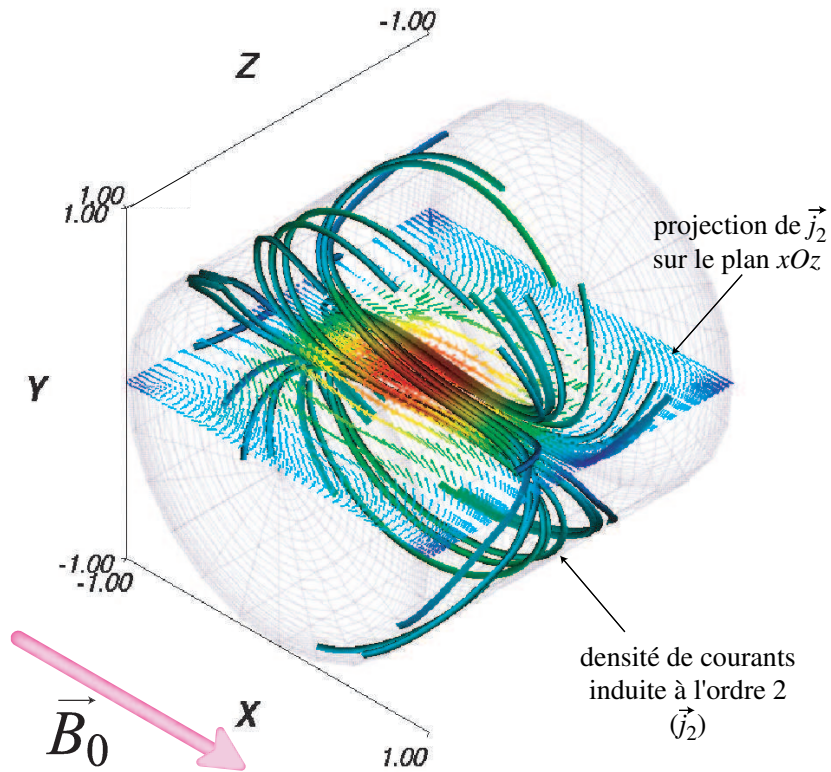
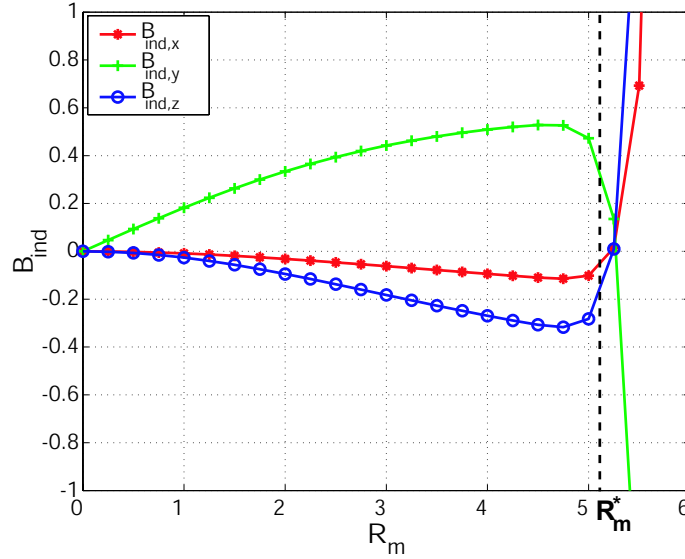


Fig. III.40: Une densité de courant parallèle à  $\vec{B}_0$  est induite par effet  $\alpha$ .



**Fig. III.41:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  en fonction de  $R_m$ , calculée par le développement perturbatif.

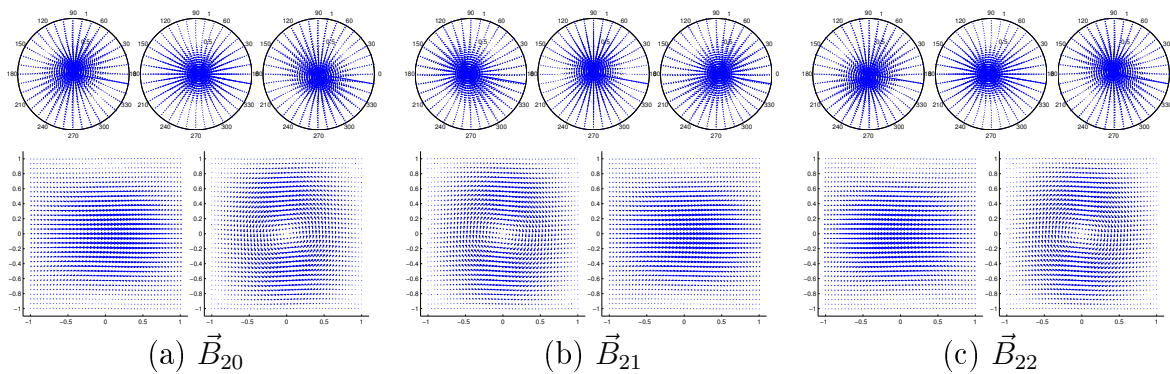
### III.4.3 Evolution en $R_m$

#### III.4.3.1 Convergence

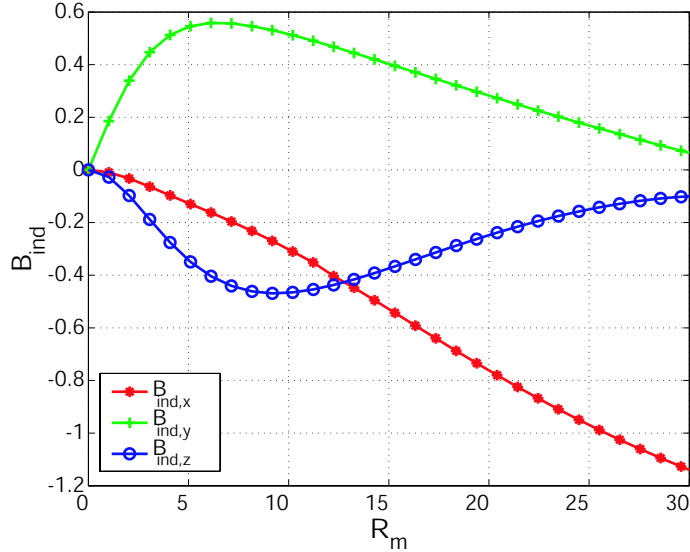
La figure III.41 représente l'évolution des composantes de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction de  $R_m$  au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  lorsque le schéma itératif est poussé à l'ordre 40. L'approche perturbative ne converge que jusqu'à  $R_m \sim 5.2$ . Cette valeur du rayon de convergence peut être retrouvée à partir de l'identification d'un bouclage dans le schéma itératif. La figure III.42 représente des vues en coupes de  $\vec{B}_{20}$ ,  $\vec{B}_{21}$ ,  $\vec{B}_{22}$ , où un bouclage d'indice 2 apparaît. Nous définissons  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  comme les champs normés proportionnels respectivement à  $\vec{B}_{20}$  et  $\vec{B}_{21}$ . Les facteurs de bouclage correspondant  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma$  tels que  $\mathcal{L}'\vec{b}_1 = \gamma_1\vec{b}_2$ ,  $\mathcal{L}'\vec{b}_2 = \gamma_2\vec{b}_1$ ,  $\mathcal{L}''\vec{b}_1 = \gamma\vec{b}_1$  et  $\mathcal{L}''\vec{b}_2 = \gamma\vec{b}_2$  valent :

$$\gamma_1 = 1.906 \cdot 10^{-1} \quad \gamma_2 = -1.906 \cdot 10^{-1} \quad \gamma = \gamma_1\gamma_2 = -3.63 \cdot 10^{-2} \quad (\text{III.41})$$

Comme précédemment, on en déduit alors deux vecteurs propres  $\{\vec{\beta}_+; \vec{\beta}_-\}$  et deux



**Fig. III.42:** Schéma de bouclage en deux étapes :  $\vec{B}_{20} \propto -\vec{B}_{22}$



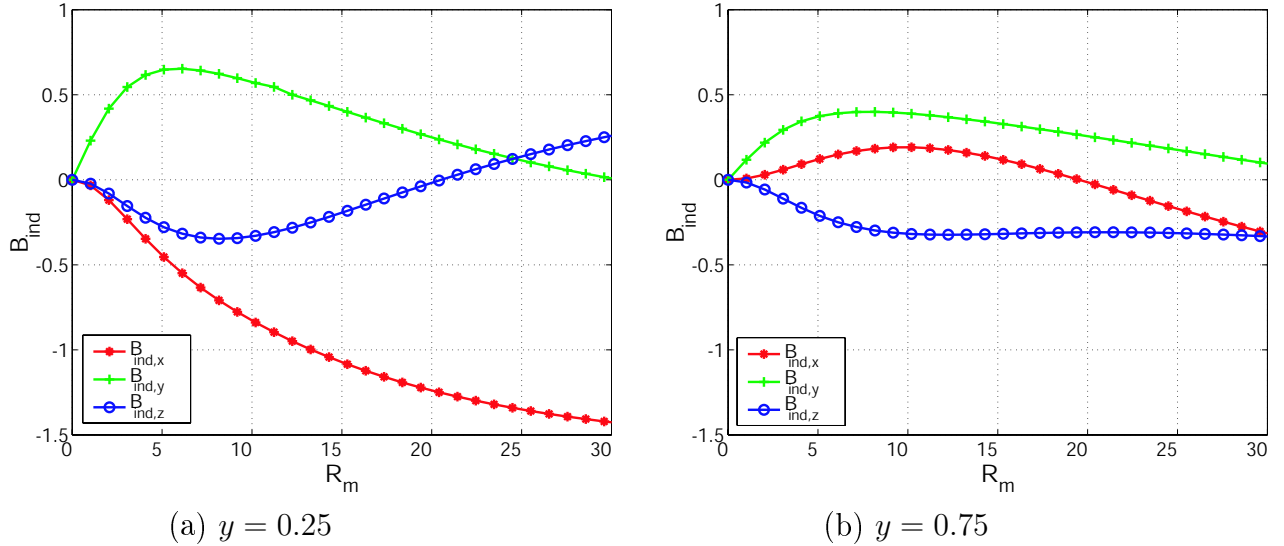
**Fig. III.43:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  au même point ( $x = 0, y = 0.5, z = 0$ ) que pour la figure III.41, prolongée au-delà de  $R_m^*$  par la méthode des approximants de Padé.

valeurs propres  $\{\gamma_+; \gamma_-\}$  de  $\mathcal{L}'$ , donnés par II.101 et III.27. Le facteur de bouclage  $\gamma$  est négatif, ce qui traduit un mécanisme *antidynamo* qui tend à s'opposer à la croissance d'un champ magnétique dans l'écoulement. Ce schéma est similaire à celui décrit pour un cylindre en rotation solide et traduit l'expulsion du champ appliqué par la rotation globale du fluide conducteur. Les valeurs propres  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  déduites de ce bouclage sont imaginaires pures, et la divergence du développement perturbatif ne correspond à aucune instabilité réelle. Les "seuils"  $R_{m+} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_+}}$  et  $R_{m-} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_-}}$  correspondants permettent alors d'obtenir le rayon de convergence du développement perturbatif par  $R_m^* = |\gamma_+| = |\gamma_-| = 5.25$ , en très bon accord avec la divergence observée sur la figure III.41.

### III.4.3.2 L'expulsion

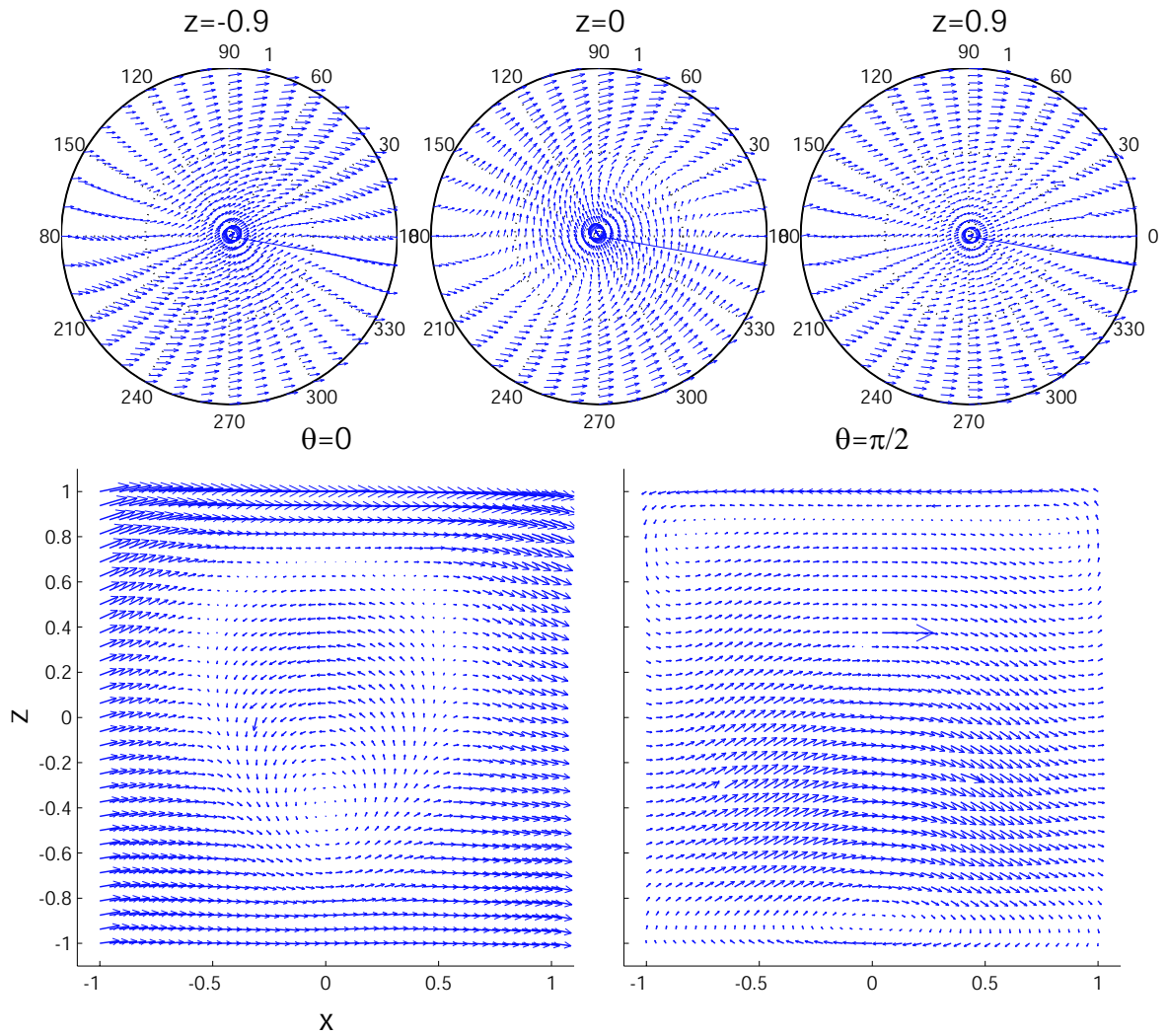
La méthode des approximants de Padé permet d'obtenir une solution de l'équation d'induction décrivant très bien le champ induit sur l'ensemble du cylindre jusqu'à  $R_m \sim 30$  (ce qui est également de l'ordre des régimes atteints dans les expériences d'induction utilisant du sodium liquide.) Sur cette plage, le calcul des approximants à partir des 40 premiers ordres du développement en série donne une erreur de convergence de l'ordre de 2% (i.e. l'écart relatif entre le calcul des approximants à partir des 40 termes et à partir des 38 termes est de l'ordre de 2%). Pour des nombres de Reynolds magnétiques supérieurs à 30, les approximants de Padé permettent de décrire le champ induit correctement en certains points du volume seulement où la méthode converge toujours avec une bonne précision. Pour les autres points, la méthode semble ne pas converger. Une étude plus détaillée mériterait probablement d'être menée sur cette question, afin de déterminer si cette divergence est d'origine numérique et peut être résolue en optimisant le calcul des approximants de Padé (rappelons que pour l'instant, nous utilisons directement l'algorithme fourni par [74] sans aucune modification), ou bien s'il s'agit d'une divergence intrinsèque à la méthode.

La figure III.43 montre l'évolution de  $\vec{B}_{ind}$  au point ( $x = 0, y = 0.5, z = 0$ ) ainsi



**Fig. III.44:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction de  $R_m$  pour des points à différentes distances à l'axe du cylindre : en  $(x = 0, y = 0.25, z = 0)$  (à gauche) et en  $(x = 0, y = 0.75, z = 0)$  (à droite). La composante  $B_{ind,x}$  est négative près de l'axe, où elle tend donc à s'opposer et à expulser  $\vec{B}_0$  et devient positive près de la périphérie du cylindre.

prolongée (par rapport à III.41.) Les composantes  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  atteignent un maximum pour une valeur de  $R_m^{max} \sim 5 - 6$ , puis décroissent ensuite vers zéro. La composante  $B_{ind,x}$  est toujours négative (et donc opposée à  $B_0$ ) et présente un point d'inflexion vers  $R_m \sim 20$  suggérant une évolution vers une saturation. Le fait que la composante  $x$  de  $\vec{B}_{ind}$  soit négative et l'évolution globale observée pour les hauts  $R_m$  traduisent l'expulsion du champ appliqué par le fluide en rotation. Les figures III.44a et b représentent l'évolution des composantes de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction de  $R_m$  pour un point de l'axe  $Oy$ , à deux autres distances à l'axe du cylindre par rapport à la figure III.43. L'expulsion se traduit par le fait que, près du centre (en  $y = 0.25$ ),  $B_{ind,x}$  est fortement négatif et s'oppose donc à  $B_0$ , alors que vers la périphérie du cylindre (en  $y = 0.75$ ),  $B_{ind,x}$  devient positif : le champ transverse appliqué tend à être éjecté vers la périphérie du cylindre. De plus, en comparant les évolutions en  $y = 0.5$  (figure III.43) et en  $y = 0.25$  (III.44a), on peut également constater que la tendance à l'expulsion est plus forte en  $y = 0.25$  où la pente de  $B_{ind,x}$  à l'origine est bien plus importante. Enfin, l'expulsion apparaît clairement dans la figure III.45 représentant une vue en coupes du champ total  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$  calculé pour  $R_m = 15$  par la méthode des approximants de Padé. La coupe en  $z = 0$  montre que le champ magnétique total au centre du cylindre est de faible amplitude et qu'il tend à se concentrer vers le bord (de manière similaire au comportement des figures III.10 dans le cas de la rotation solide.)



**Fig. III.45:** Champ magnétique total ( $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$ ) calculé pour  $R_m = 15$ . Le champ appliqué tend à être expulsé du coeur de l'écoulement.

### III.4.3.3 Induction aux $R_m$ modérés

Du fait de la brisure de l'axisymétrie par le champ  $\vec{B}_0$  transverse, l'évolution de l'induction dépend fortement du point de mesure. Ainsi, pour des nombres de Reynolds *modérés* (typiquement inférieurs à  $R_m^*$ ), dans le plan  $yOz$ , la composante  $B_{ind,y}$  (perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ ) est essentiellement linéaire, alors que les composantes  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,z}$  sont essentiellement quadratiques. Ceci apparaît clairement sur les figures III.46a et b, où l'on a représenté le champ induit obtenu en tronquant le développement perturbatif au premier ordre (figure III.46a) puis au deuxième ordre (figure III.46b) : le calcul au premier ordre rend bien compte de l'induction de  $B_{ind,y}$ , mais  $B_{ind,x}$  et  $B_{ind,z}$  ne sont correctement décrits qu'à partir du calcul à l'ordre 2 qui donne la tendance générale de l'évolution en  $R_m$ . Soulignons tout particulièrement le comportement quadratique de  $B_{ind,z}$ , sans aucune contribution linéaire (dans le plan  $yOz$ ) ; ces deux propriétés correspondant à l'effet "α" décrit au §III.4.2

La figure III.47 montre qu'en revanche, en un point du plan  $xOz$ , seule la composante  $x$  présente un comportement quadratique,  $B_{ind,z}$  et  $B_{ind,y}$  présentant une forte contribution linéaire.

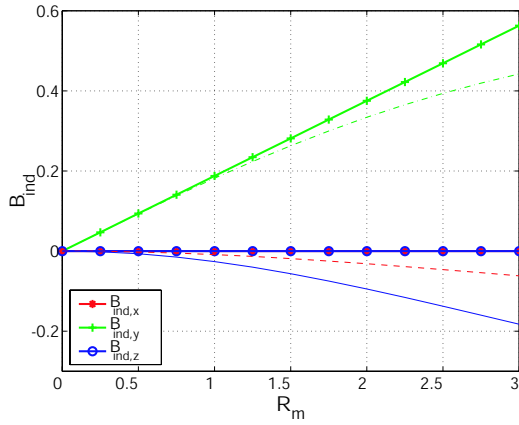
Ces comportements sont en accord avec l'étude qualitative des termes d'induction des tableaux III.3 et III.4 :

- effet linéaire de la rotation pour  $B_{1y}$  dans  $xOz$  et  $yOz$  ( $I_{1yx}^{\text{déformation}}$ )
- effet linéaire du pompage pour  $B_{1z}$  dans  $xOz$  ( $I_{1zx}^{\text{déformation}}$ )
- effet quadratique produisant  $B_{2x}$  dans  $xOz$  et  $yOz$ , résultant de la rotation de  $B_{1y}$  et correspondant au démarrage de l'expulsion de  $\vec{B}_0$  ( $I_{2xy}^{\text{déformation}}$ )
- effet "α" quadratique produisant  $B_{2z}$  dans  $yOz$  ( $I_{2zx}^{\text{transport}}$  et  $I_{2zy}^{\text{déformation}}$ )

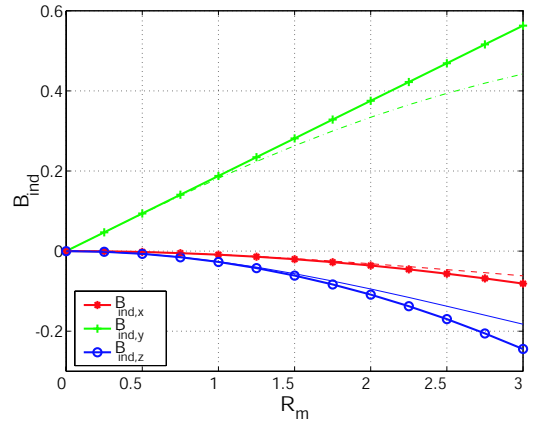
### III.4.4 Bilan

L'évolution du champ induit en fonction de  $R_m$  est dominée par le mécanisme d'expulsion pour les nombres de Reynolds magnétiques élevés. Pour des nombres de Reynolds *modérés*, les effets d'induction sont dominés par des mécanismes linéaires et quadratiques que l'on peut résumer comme suit :

- Effets linéaires
  - Induction de  $B_{1y}$  dans  $yOz$  par rotation
  - Induction de  $B_{1z}$  dans  $xOz$  par recirculation
- Effets quadratiques
  - début de l'expulsion de  $\vec{B}_0$
  - Effet "α"

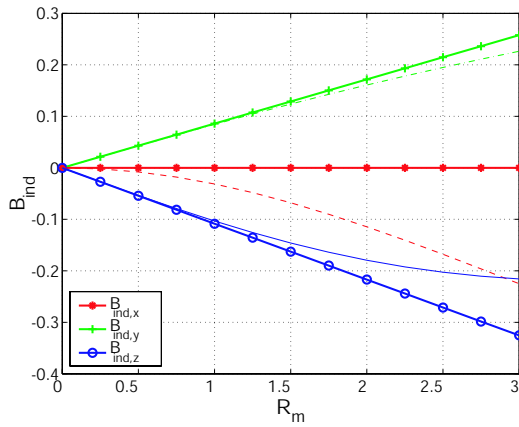


(a) ordre 1 au point  
( $x = 0, y = 0.5, z = O$ ).

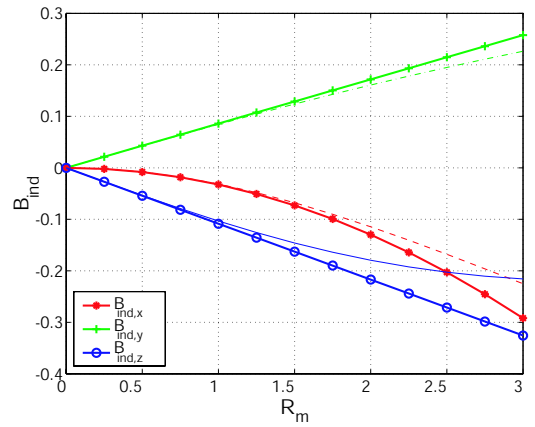


(b) ordre 1 + ordre 2 au point  
( $x = 0, y = 0.5, z = O$ ).

**Fig. III.46:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  dans le plan  $yOz$  (point ( $x = 0, y = 0.5, z = O$ )) pour un calcul du développement perturbatif tronqué à l'ordre 1 (à gauche) et à l'ordre 2 (à droite). Les courbes sans marqueurs représentent l'évolution à partir des 40 premiers termes du développement (solution convergée) :  $B_{ind,x}$  en tirets,  $B_{ind,y}$  en traits mixtes,  $B_{ind,z}$  en trait plein.



(a) ordre 1 au point  
( $x = 0.5, y = 0, z = O$ ).



(b) ordre 1 + ordre 2 au point  
( $x = 0.5, y = 0, z = O$ ).

**Fig. III.47:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  dans le plan  $xOz$  (point ( $x = 0.5, y = 0, z = O$ )) pour un calcul du développement perturbatif tronqué à l'ordre 1 (à gauche) et à l'ordre 2 (à droite). Les courbes sans marqueurs représentent l'évolution à partir des 40 premiers termes du développement (solution convergée) :  $B_{ind,x}$  en tirets,  $B_{ind,y}$  en traits mixtes,  $B_{ind,z}$  en trait plein.



## III.5 Champ transverse - von Kármán contra-rotatif

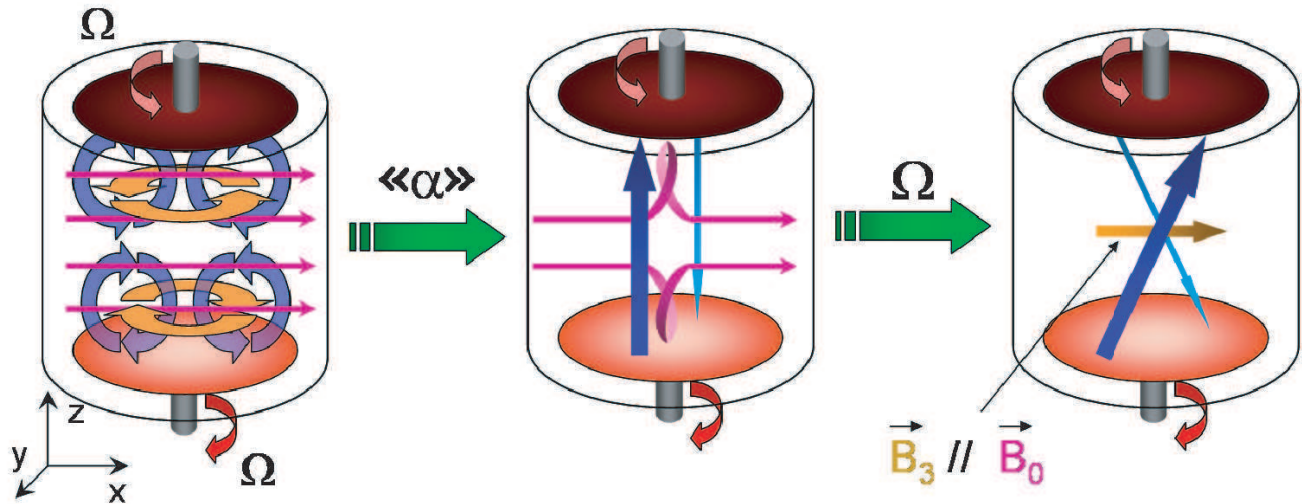
L'étude d'un écoulement contra-rotatif en présence d'un champ axial nous a permis d'identifier des effets d'induction linéaires et notamment la possibilité d'une conversion d'un champ axial en un champ azimuthal par effet  $\Omega$  (dû à la rotation différentielle.) L'étude d'un écoulement à un disque en présence d'un champ transverse appliqué nous a montré, entre autres, la possibilité d'une conversion quadratique par effet " $\alpha$ " (dû à l'hélicité) d'un champ transverse selon  $Ox$  en un champ axial dans le plan  $yOz$ . Nous considérons à présent le cas d'un écoulement de von Kármán contra-rotatif en présence d'un champ transverse appliqué  $\vec{B}_0//\vec{u}_x$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'écoulement VK contra-rotatif possède à la fois de l'hélicité et de la rotation différentielle. On s'attend donc à ce qu'un champ transverse appliqué puisse subir l'effet " $\alpha$ " pour donner un champ axial qui, à son tour, subira l'effet  $\Omega$ . Nous allons montrer que les effets " $\alpha$ " et  $\Omega$  peuvent ainsi être couplés pour donner un mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  d'ordre 3, favorable à un bouclage dynamo.

### III.5.1 Étude qualitative

L'écoulement von Kármán contra-rotatif présente deux structures hélicitaires de part et d'autre du plan médian. On est en quelque sorte ici dans un cas de séparation d'échelle, où l'écoulement global peut être vu comme étant formé de deux sous-structures, similaires chacune à l'écoulement produit par un disque seul. On peut alors imaginer que les effets inductifs associés à chacune de ces sous-structures pourront collaborer pour donner des champs induits à grande échelle. Ainsi, un champ transverse appliqué va alors donner lieu à un effet " $\alpha$ " au niveau de chacune de ces sous-structures hélicitaires. Comme nous l'avons souligné au §I.4.1, les hélicités de chacune des sous-structures sont de même signe puisque le sens de rotation de part et d'autre du plan médian est renversé et le sens des boucles de recirculation l'est également. Les champs axiaux produits par effet "*alpha*" par chacune des structures peuvent donc collaborer pour donner un champ axial dans le plan  $yOz$  sur toute la longueur du cylindre (figure III.48.) Sous l'effet de la rotation différentielle, le champ axial ainsi produit dans  $yOz$  va être transporté dans des directions opposées de part et d'autre du cylindre de sorte qu'une composante  $x$  sera alors induite. La figure III.48 montre que cette composante induite selon  $x$  est de même sens que le champ initial.

Ce mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  en trois étapes (2 étapes pour l'effet " $\alpha$ " + 1 étape pour l'effet  $\Omega$ ) suggère la possibilité d'un schéma de bouclage positif produisant un champ induit dans le même sens que le champ initial. L'itération de ce schéma pourrait alors conduire à l'instabilité dynamo.

**Remarque.** Il est important de noter que, par le même argument de symétrie déjà évoqué lors de l'étude de l'écoulement à un disque, le champ axial produit dans le plan  $yOz$  ne peut être induit, à l'ordre 1, par aucun des 18 termes sources d'induction des tableaux III.1 et III.2. En effet  $B_{1z} \propto I_{1zx}^{\text{déformation}} = B_0 \cos \theta \partial_z u_r$  (eq. III.40) est antisymétrique par rapport au plan  $yOz$  et doit donc s'annuler dans ce plan. Par ailleurs, en régime contra-rotatif,  $u_r$  est pair en  $z$  (symétrique par rapport au plan  $xOy$ ) de telle sorte que  $\partial_z u_r$  est impair en  $z$  (antisymétrique par rapport à  $xOy$ .) Les effets de  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  en régime contra-rotatif sont donc identiquement nuls dans les plans  $yOz$  et  $xOy$ .



**Fig. III.48:** Mécanisme en trois étapes suggérant la possibilité d'un bouclage magnétique favorable à l'instabilité dynamo : un champ induit dans le même sens que le champ appliqué est produit par un mécanisme "α"Ω

### III.5.2 Étude numérique

#### III.5.2.1 Mécanisme "α"Ω

Les figures III.49 à III.54 représentent des vues en coupes de la structure des courants électriques et du champ magnétique calculés pour aux trois premiers ordres pour  $R_m = 1$ .

Ces représentations montrent bien l'effet de collaboration évoqué ci-dessus : on y retrouve, pour les deux premiers ordres, globalement les structures décrites pour l'écoulement à un disque (en tenant compte du fait que de part et d'autre du plan médian, la rotation et la recirculation sont renversées.)

La coupe dans le plan  $yOz$  du champ magnétique induit à l'ordre 2, peut être décrite essentiellement comme la juxtaposition de deux fois celle obtenue pour un écoulement à un disque (figure III.37.) On voit en plus un effet coopératif tel que la composante axiale de  $\vec{B}_2$  n'est pas uniquement induite dans les régions de forte hélicité (i.e. au voisinage de  $z = \pm 0.5$ ), mais également au niveau du plan médian. Comme pour l'effet "α", cette composante axiale est maximale au voisinage de  $y = \pm 0.5$  et de signe opposé de part et d'autre du plan  $xOz$ .

La coupe dans le plan  $xOz$  et dans le plan médian (figure III.54) du champ induit à l'ordre 3, permet alors d'identifier une forte composante transverse de même sens que  $\vec{B}_0$ . Elle correspond à la torsion, par la rotation différentielle, du champ axial induit à l'ordre 2 par effet "α". On voit donc que ce mécanisme suggère effectivement la possibilité d'un bouclage positif dans la région centrale du cylindre comprise entre  $-0.5 < z < 0.5$ .

La figure III.55 représente, en vue isométrique, quelques lignes de champ magnétique calculées aux deuxième et troisième ordres, illustrant l'effet "α"Ω. On a également représenté sur la même figure les contours de la composante  $B_{3x}$  dans le plan  $yOz$ . Il y apparaît nettement une vaste région centrale où cette composante est positive (et donc de même sens que  $\vec{B}_0$ ), ce qui suggère la possibilité d'un bouclage favorable à l'instabilité dynamo.

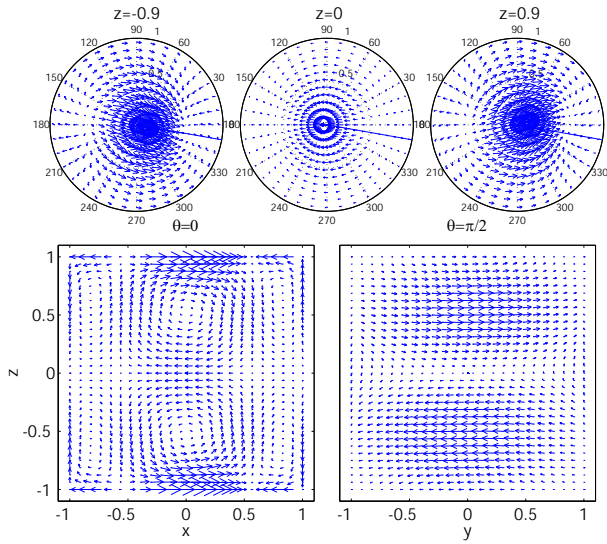


Fig. III.49: Projections de  $\vec{j}_1$

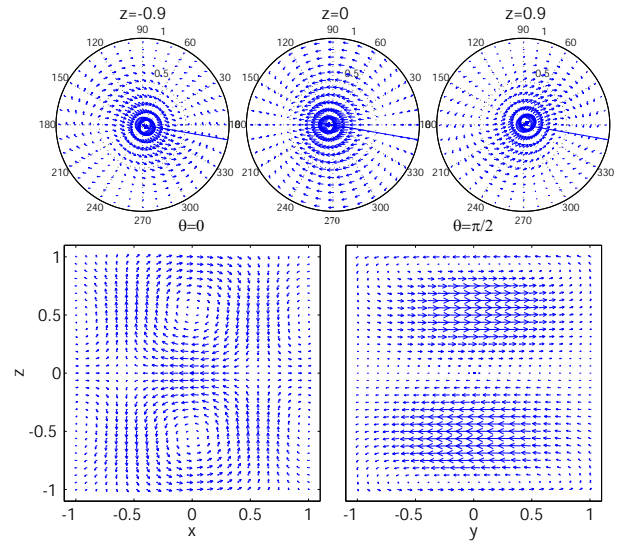


Fig. III.50: Projections de  $\vec{B}_1$

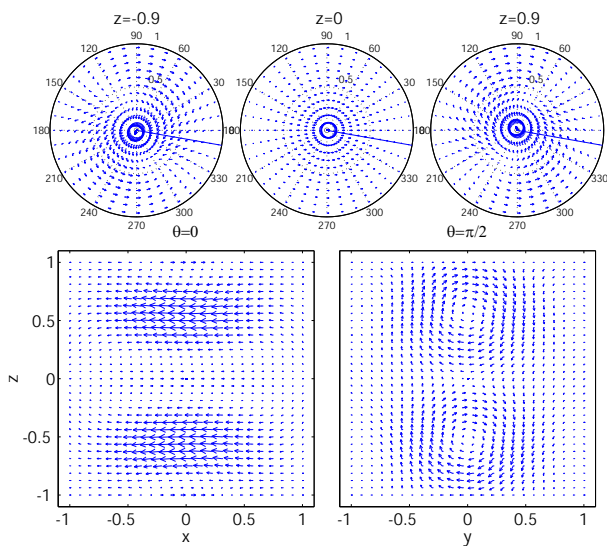


Fig. III.51: Projections de  $\vec{j}_2$

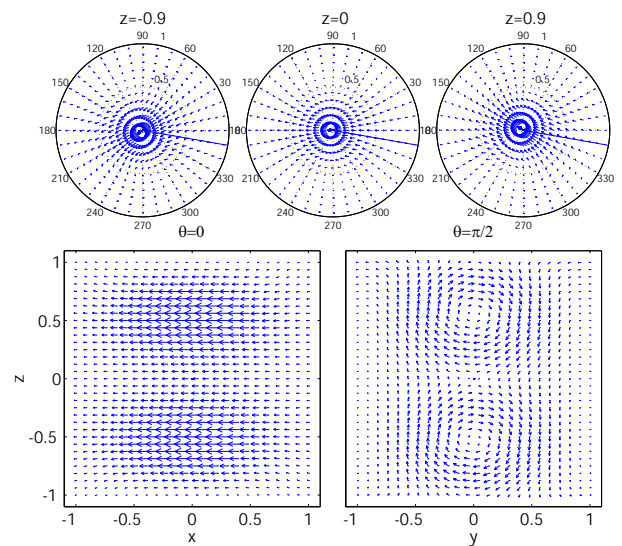


Fig. III.52: Projections de  $\vec{B}_2$

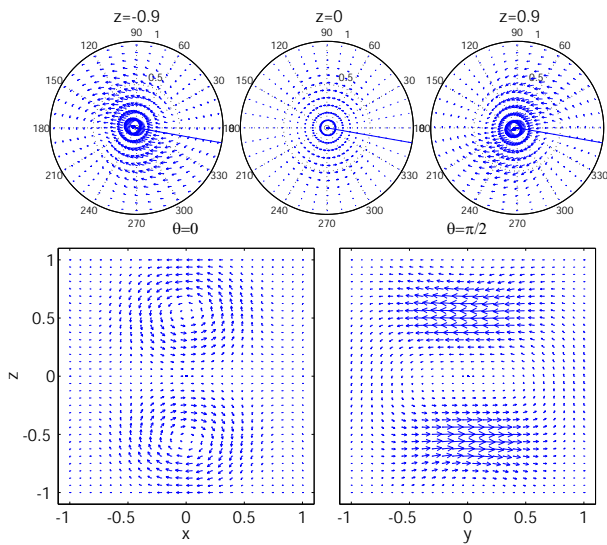


Fig. III.53: Projections de  $\vec{j}_3$

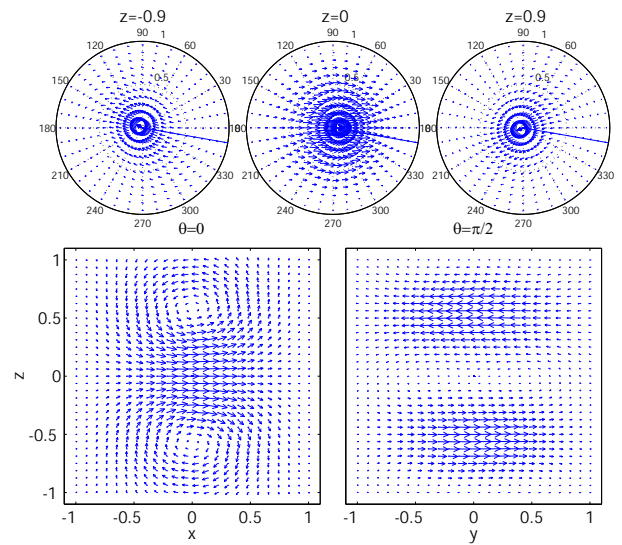
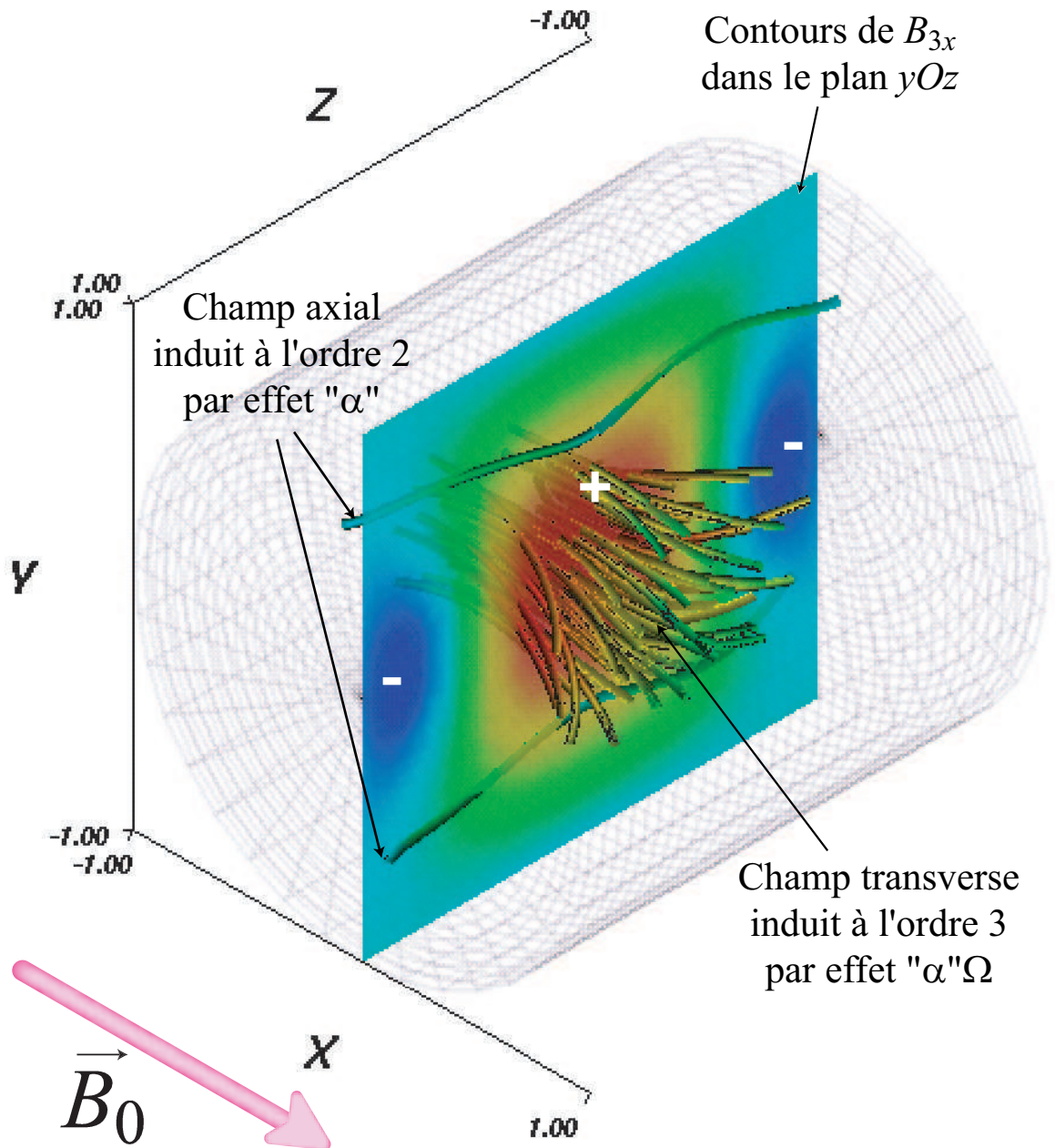
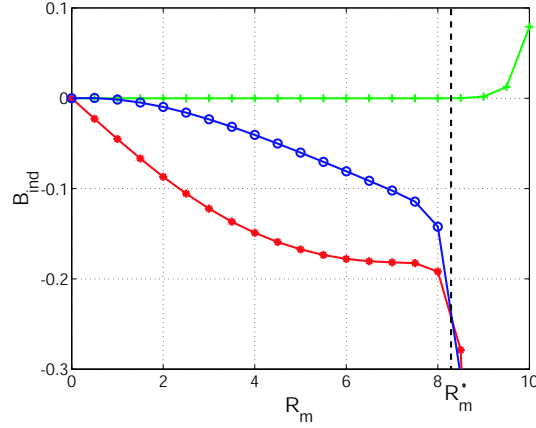


Fig. III.54: Projections de  $\vec{B}_3$



**Fig. III.55:** Mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  : les lignes de champ axiales correspondent au champ  $\vec{B}_2$  induit à l'ordre 2 par la collaboration des effets " $\alpha$ " de part et d'autre du plan médian. Leur torsion par la rotation différentielle engendre  $\vec{B}_3$  dont quelques lignes de champ sont représentées au centre du cylindre :  $\vec{B}_3$  y est parallèle à  $\vec{B}_0$  et de même sens. La coupe  $yOz$  représente les contours de la composante  $B_{3x}$  : elle est effectivement positive dans une large région au centre de la cuve.



**Fig. III.56:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  en fonction de  $R_m$ , calculée par le développement perturbatif.

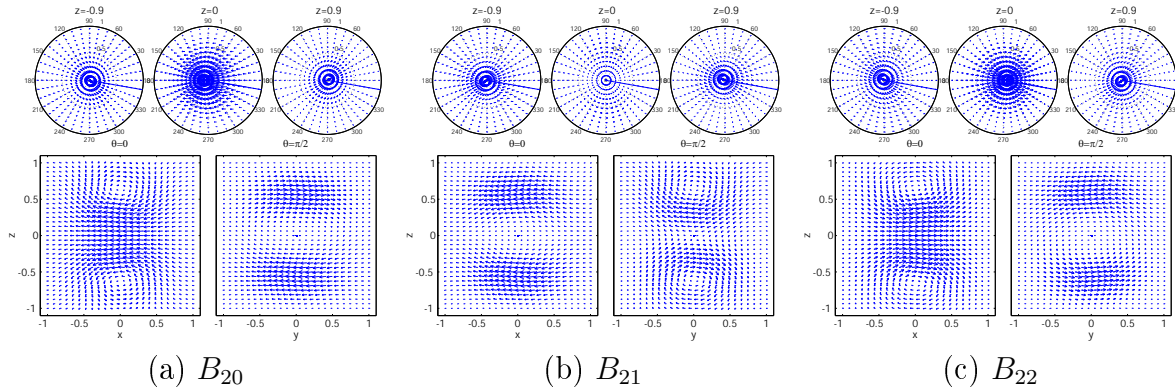
### III.5.3 Évolution en $R_m$

#### III.5.3.1 Convergence

La figure III.56 représente l'évolution du champ magnétique au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  lorsque le calcul itératif a été poussé à l'ordre 40. La solution perturbative diverge donc au-delà de  $R_m = R_m^* \sim 8.5$ . La question est de savoir si cette divergence correspond ou non à une instabilité réelle. Pour des ordres d'itération élevés, le processus itératif conduit à un bouclage d'indice 2, qui une fois de plus, s'avère négatif. La figure III.57 représente des vues en coupes de  $\vec{B}_{20}$ ,  $\vec{B}_{21}$ ,  $\vec{B}_{22}$ , illustrant ce bouclage négatif. Ce bouclage négatif à deux coups traduit l'expulsion du champ magnétique par la rotation du liquide conducteur. Comme pour les configurations précédentes, nous pouvons déterminer les facteurs de couplage correspondants :

$$\gamma_1 = 9.93 \cdot 10^{-2}, \quad \gamma_2 = -1.40 \cdot 10^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 = -1.39 \cdot 10^{-2} \quad (\text{III.42})$$

Le rayon de convergence correspondant,  $R_m^* = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} = 8.47$ , est alors en accord avec le point de divergence de la figure III.56. Le mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  identifié ne suffit donc pas à surmonter le mécanisme d'expulsion qui devient dominant aux ordres élevés.

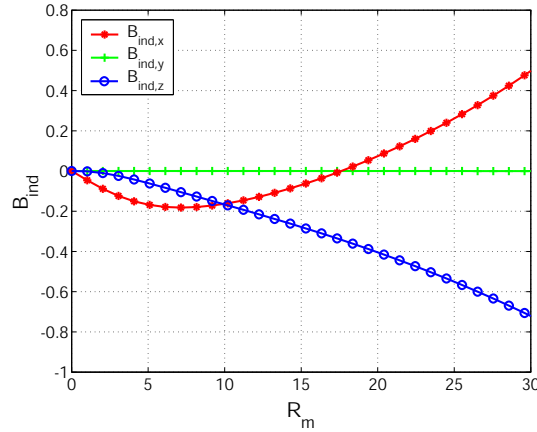


(a)  $B_{20}$

(b)  $B_{21}$

(c)  $B_{22}$

**Fig. III.57:** Schéma de bouclage en deux étapes :  $\vec{B}_{20} \propto -\vec{B}_{22}$ .

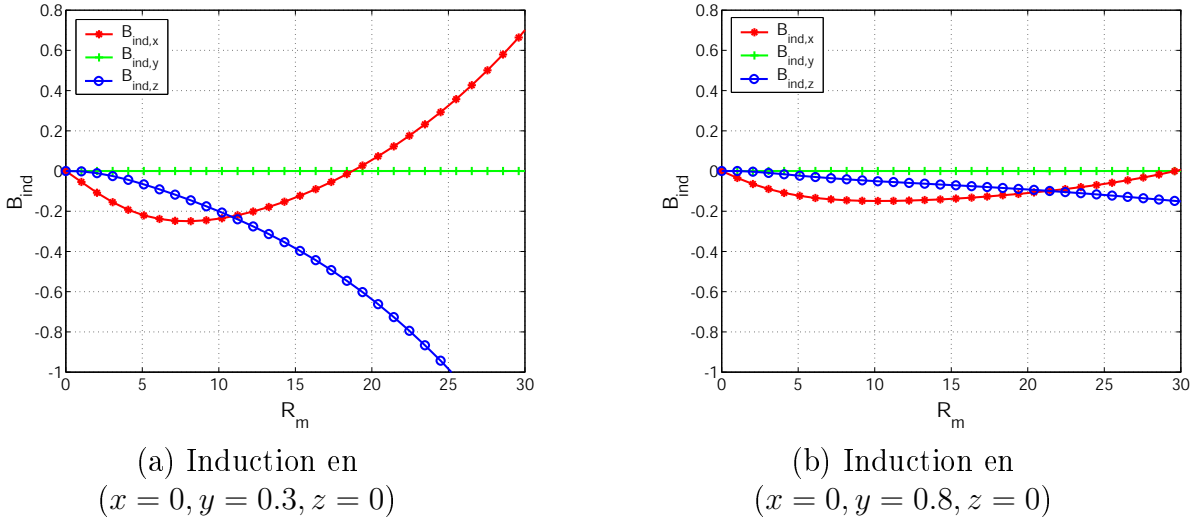


**Fig. III.58:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction de  $R_m$  au même point ( $x = 0, y = 0.5, z = 0$ ) que pour la figure III.56, prolongée au-delà de  $R_m^*$  par la méthode des approximants de Padé.

### III.5.3.2 Le mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$

La méthode des approximants de Padé permet d’obtenir une solution pour  $\vec{B}_{ind}$  convergant sur une plus vaste plage de  $R_m$ . Comme pour le cas d’un seul disque en rotation, pour certains points à l’intérieur du cylindre, la méthode du calcul des approximants de Padé ne converge pas pour les grandes valeurs de  $R_m$  (typiquement au-delà de  $R_m \sim 40$ .) Pour  $R_m < 40$ , elle converge sur presque tout le volume, avec une précision de l’ordre de 2% en se limitant à un calcul à partir des 40 premiers termes du développement perturbatif. L’évolution des composantes de  $\vec{B}_{ind}$  de la figure III.56 peut alors être prolongée (figure III.58.) La composante  $B_{ind,x}$  présente alors un comportement compatible avec le mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$  d’ordre 3 :

- pour les faibles  $R_m$  elle tend à évoluer linéairement vers les valeurs négatives. Cette contribution linéaire résulte de la *compression* de  $\vec{B}_0$  par l’écoulement radial rentrant au niveau du plan médian (terme source  $I_{1xx}^{déformation}$ ); elle apparaît clairement dans les projections sur  $xOz$  et  $xOy$  de  $\vec{B}_1$  (figure III.50).
- pour des nombres de Reynolds magnétiques plus élevés, cette tendance à évoluer vers les valeurs négatives se renverse et la composante  $B_{ind,x}$  devient positive pour  $R_m > 17$ . Le fait que cette inversion de tendance ne se produise que pour des  $R_m$  élevés est en accord avec un mécanisme d’ordre élevé tel qu’un bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$  d’ordre 3 qui reste négligeable a priori aux faibles  $R_m$ .



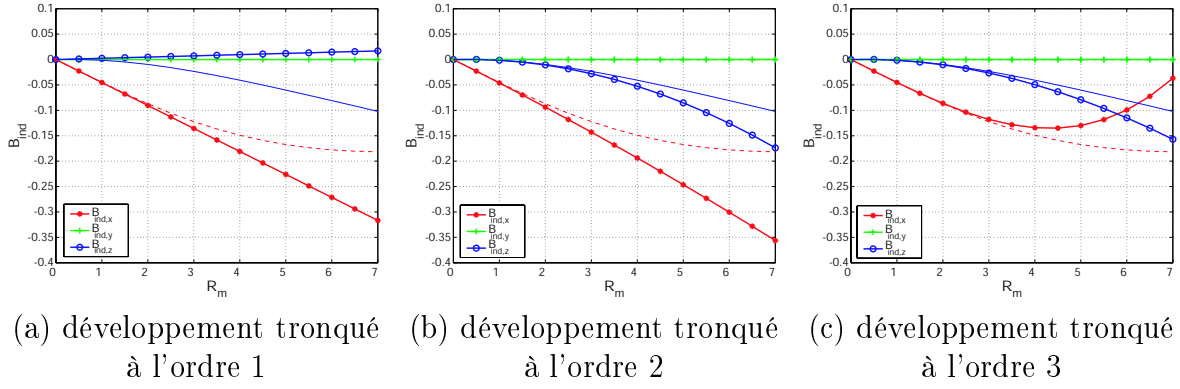
**Fig. III.59:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction de  $R_m$  pour différentes distances à l'axe du cylindre : en  $(x = 0, y = 0.3, z = 0)$  à gauche et en  $(x = 0, y = 0.8, z = 0)$  à droite. L'efficacité du mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$  augmente au voisinage du centre du cylindre.

Les figures III.59a et b montrent la dépendance de l'effet “ $\alpha$ ” $\Omega$  pour deux autres distances à l'axe par rapport à la figure III.58. Au voisinage de l'axe ( $y = 0.3$ ) le changement de signe de  $B_{ind,x}$  est légèrement retardé par rapport à la figure III.58 mais son efficacité à haut  $R_m$  est meilleure (à  $R_m = 30$ ,  $B_{ind,x} \sim 0.7$  au point  $(x = 0, y = 0.3, z = 0)$  contre  $B_{ind,x} \sim 0.5$  au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$ ). Près des bords du cylindre ( $y = 0.8$ ), l'efficacité du mécanisme est en revanche considérablement réduite, la composante  $B_{ind,x}$  reste négative sur toute la plage de nombres de Reynolds magnétiques étudiés. Ceci est en accord avec les contours de  $B_{3x}$  de la figure III.55.

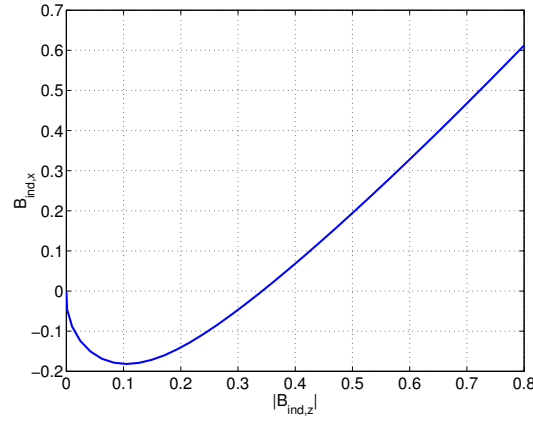
**Développement perturbatif tronqué aux trois premiers ordres.** L'étude de l'évolution des composantes de  $B_{ind}$  en fonction de  $R_m$  obtenue en tronquant le développement perturbatif successivement aux trois premiers ordres, permet de montrer clairement que la tendance à ramener la composante  $B_{ind,x}$  vers les valeurs positives (de telle sorte que  $\vec{B}_{ind}$  soit de même sens que  $\vec{B}_0$ ) n'intervient qu'à partir d'une contribution d'ordre 3 (figure III.60) :

- **Ordre 1 :** La contribution linéaire à  $B_{ind,x}$  est négative (figure III.60a) ; elle correspond à la *compression* du champ appliqué que nous avons déjà discutée. Une faible contribution linéaire axiale est également produite. Le point  $P(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  appartenant au plan  $yOz$ , l'antisymétrie du terme source pour  $B_{1z}$  interdit a priori une telle contribution. Il s'agit en fait d'un mécanisme d'induction dû à la reconnection des lignes de champ magnétique dans le plan  $yOz$  par un effet lié à la discontinuité de conductivité à la paroi isolante du cylindre. Bien que faible dans le cas de l'écoulement modèle que nous étudions à présent, cet effet est extrêmement intense dans les expériences d'induction. Le même calcul numérique effectué en utilisant un champ de vitesse expérimental nous permettra alors d'étudier en détail ce mécanisme au §III.6.

- **Ordre 2 :** La figure III.60b montre que le caractère négatif de  $B_{ind,x}$  est légèrement renforcé. C'est le début du mécanisme d'expulsion selon le processus habituel de double rotation de  $\vec{B}_0$  (que ce soit d'un côté ou de l'autre du plan médian, cette double rotation



**Fig. III.60:** Évolution de  $\vec{B}_{ind}$  dans le plan  $yOz$  (point  $(x = 0, y = 0.5, z = O)$ ) pour un calcul du développement perturbatif tronqué à l'ordre 1 (à gauche), à l'ordre 2 (au centre), puis à l'ordre 3 (à droite). Les courbes sans marqueurs représentent l'évolution obtenue à partir des 40 premiers termes du développement en série (solution convergée) :  $B_{ind,x}$  en tirets,  $B_{ind,y}$  en traits mixtes,  $B_{ind,z}$  en trait plein.



**Fig. III.61:** Évolution de  $B_{ind,x}$  en fonction de  $B_{ind,z}$ .

de  $\vec{B}_0$  conduit toujours à une contribution quadratique du champ induit opposée à  $\vec{B}_0$ .)

• **Ordre 3 :** La figure III.60c montre que l'inversion de tendance faisant évoluer  $B_{ind,x}$  vers les valeurs positives pour des  $R_m$  élevés apparaît bien par un effet d'ordre 3.

La courbe de la figure III.61 représente l'évolution de la composante  $B_{ind,x}$  en fonction de la valeur absolue de la composante axiale induite  $B_{ind,z}$ , paramétrée en  $R_m$ . Cette évolution tend à devenir linéaire lorsque  $B_{ind,z} \geq 0.2$ . Cette valeur de  $B_{ind,z}$  correspond sensiblement à celle du minimum de la courbe  $B_{ind,x}(R_m)$  et correspond donc au point de l'évolution en  $R_m$  où le mécanisme d'ordre 3 commence à se manifester. Le fait que  $B_{ind,x}$  soit linéaire en  $B_{ind,z}$  pour les hauts  $R_m$  est en accord avec le fait que  $B_{ind,x}$  est bien produit alors à partir de  $B_{ind,z}$ , comme suggéré par la troisième étape du mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$ .

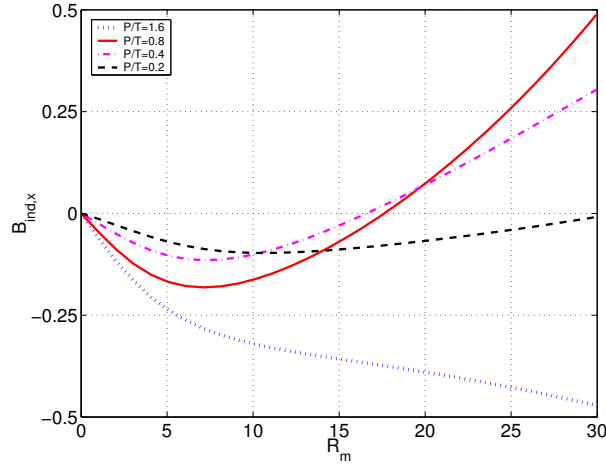


### III.5.3.3 Compétition bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$ -expulsion

Le bouclage négatif identifié (figure III.57) montre que l’expulsion reste le mécanisme dominant aux ordres élevés, empêchant ainsi la croissance de l’instabilité dynamo. Cela ne signifie pas toutefois que le mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$  ne soit pas un mécanisme possible pour une dynamo von Kármán, mais simplement qu’il n’est pas suffisamment efficace, dans la géométrie de l’écoulement modèle que nous avons étudié, pour contrecarrer l’expulsion. La raison de cette inefficacité peut être expliquée grâce à la figure III.55. La représentation des contours de  $B_{3x}$  montre que le bouclage suggéré par le mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$ , n’est en réalité positif que dans la région centrale de l’écoulement, là où la rotation différentielle, et donc l’effet  $\Omega$ , sont particulièrement intenses. En revanche  $B_{3x}$  devient négatif vers les extrémités du cylindre en s’annulant vers  $z = \pm 0.5$ , c’est-à-dire dans les régions de forte hélicité, là où l’effet  $\alpha$  est intense. Le couplage des deux effets est donc loin d’être optimal, à cause de la différence de leur localisation. C’est là que réside la cause du déclin de ce mécanisme aux ordres plus élevés où l’effet est complètement masqué par l’expulsion. Cette remarque montre une fois de plus la nécessité de considérer les mécanismes d’induction dans l’intégralité du volume, afin d’identifier la structure spatiale des champs induits (l’outil numérique devient alors indispensable) et de ne pas se limiter à une étude purement locale.

Les études numériques de dynamos cinématiques dans des géométries proches de celles étudiées ici [31][65][58], ont montré que le taux de croissance de l’instabilité dynamo est très sensible à des paramètres décrivant en détail la structure de l’écoulement, tels que le rapport du maximum de vitesse poloïdale sur le maximum de vitesse toroïdale (rapport  $P/T$ ), la position des noeuds de vitesse poloïdale, etc. Cette sensibilité traduit très probablement la compétition entre le mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$  et le mécanisme d’expulsion. Dudley et James [31] ont par exemple observé que pour une structure d’écoulement donnée, de type  $s_2t_2$ , équivalente au régime von Kármán contra-rotatif en géométrie sphérique, l’instabilité dynamo peut alors être obtenue pour une valeur du rapport  $P/T$  de l’ordre de 0.14, mais disparaît pour  $P/T=0.1$  ou 0.2. L’existence d’un rapport optimal peut se comprendre par le fait que pour une composante de vitesse toroïdale trop importante (c’est-à-dire pour une rotation trop rapide), l’expulsion va dominer et complètement masquer le bouclage (de plus si la composante poloïdale est trop faible, l’écoulement perd son caractère hélicitaire); si la composante toroïdale est faible, l’effet de l’expulsion s’atténue certes, mais l’hélicité et la rotation différentielle aussi.

L’étude présentée dans ce chapitre a été réalisée avec un écoulement de rapport  $P/T$  égal à 0.8 (c’est la valeur optimale suggérée par les dynamos cinématiques cylindriques périodiques en  $z$ .) La figure III.62 représente l’évolution de  $B_{ind,x}$  (au même point ( $x = 0, y = 0.5, z = 0$ )) que la figure III.58) pour différentes valeurs du rapport  $P/T$  de l’écoulement. Parmi les valeurs testées, 0.8 correspond effectivement à la plus grande efficacité pour le bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$ . Lorsque  $P/T = 1.6$  (la rotation est alors deux fois moins intense) le champ induit selon  $B_{ind,x}$  reste toujours négatif, et on n’observe pas le renversement de tendance le ramenant vers les valeurs positives : la rotation différentielle est alors trop faible et l’efficacité du mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$  considérablement réduite. Lorsque  $P/T = 0.4$  (la rotation est alors deux fois plus intense que pour  $P/T = 0.8$ ), l’efficacité du bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$  est également moins bonne que pour  $P/T = 0.8$  et la valeur de  $B_{ind,x}$  à  $R_m = 30$  ne vaut plus que 60% de sa valeur par rapport au cas  $P/T = 0.8$ . Si la rotation est encore plus intense ( $P/T = 0.2$ ),  $B_{ind,x}$  reste négatif dans la gamme de  $R_m$  étudiée, et



**Fig. III.62:** Efficacité du bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$  pour différentes valeurs du rapport  $P/T$  de l’écoulement.

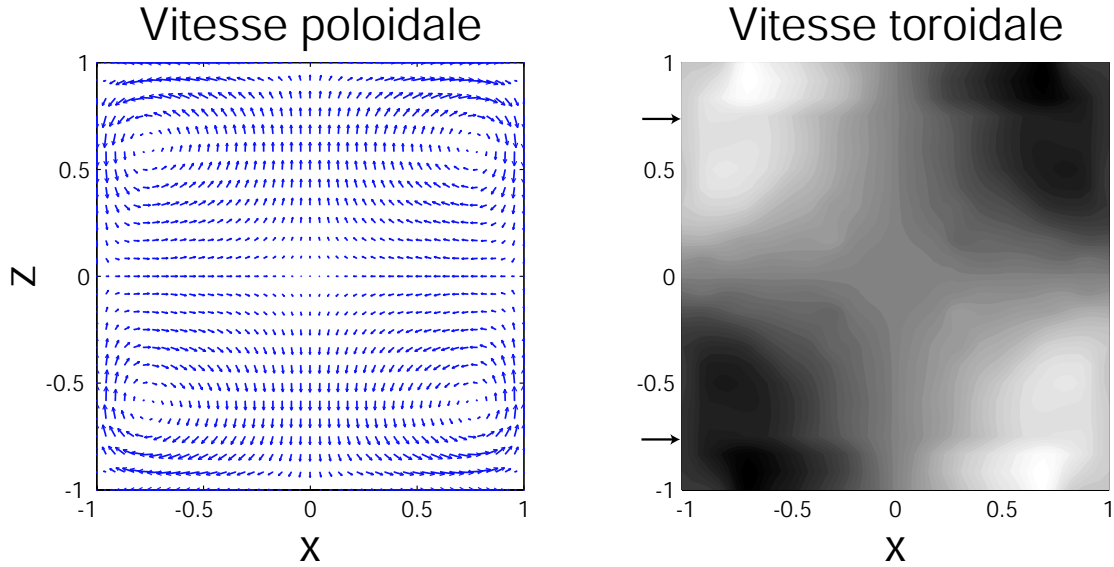
sa croissance dans le domaine des valeurs positives s’annonce très lente. L’expulsion du champ transverse par la forte rotation devient alors le mécanisme dominant.

Nous n’avons pas trouvé de valeur du rapport  $P/T$  pour laquelle l’écoulement modèle utilisé dans cette étude aboutisse, aux ordres d’itération élevés, à un schéma de bouclage positif, partant d’un champ initial transverse uniforme. D’après la discussion du §II.2.6.3, le fait que le bouclage observé aux ordres élevés soit négatif, et donc de nature à s’opposer à la croissance spontanée d’un champ magnétique, n’exclut pas pour autant l’existence éventuelle d’un mode dynamo (pouvant donner un bouclage positif). On peut simplement conclure que le mécanisme d’expulsion est toujours associé, pour les écoulements modèles considérés, à la valeur propre de l’opérateur  $\mathcal{L}'$  de plus grand module et qu’il reste donc le mécanisme de bouclage le plus efficace, dominant les effets d’induction pour les régimes à haut  $R_m$ .

### III.5.3.4 Influence de la topologie de l’écoulement

Les études de [60] et [76] montrent que la croissance ou non de l’instabilité dynamo, dans un écoulement von Kármán périodisé en  $z$ , dépend non-seulement du rapport  $P/T$ , mais également du détail de la géométrie de l’écoulement et notamment de la position des noeuds de la recirculation centrifuge.

Compte tenue des observations soulevées pour expliquer les raisons de l’inefficacité du bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$  dans l’écoulement modèle, une amélioration possible, en vue de favoriser une dynamo von Kármán, consisterait à réaliser un écoulement où les régions de forte hélicité et celles de forte rotation différentielle seraient rapprochées par rapport à leur position relative dans l’écoulement modèle étudié jusqu’à présent. Ceci peut être réalisé soit en rapprochant les régions hélicitaires vers la couche de cisaillement du plan médian, soit en modifiant le gradient axial de la vitesse azimutale de sorte à introduire une forte rotation différentielle au niveau des régions hélicitaires. Dans les champs de vitesse périodiques étudiés dans [60] et [58] conduisant numériquement à une dynamo, les régions hélicitaires sont beaucoup plus proches des extrémités du cylindre que dans l’écoulement modèle utilisé ici. La figure III.63 représente un champ de vitesse expérimental (nommé TM73), récemment étudié par A. Chiffaudel et F. Ravelet de l’équipe du CEA de Saclay,



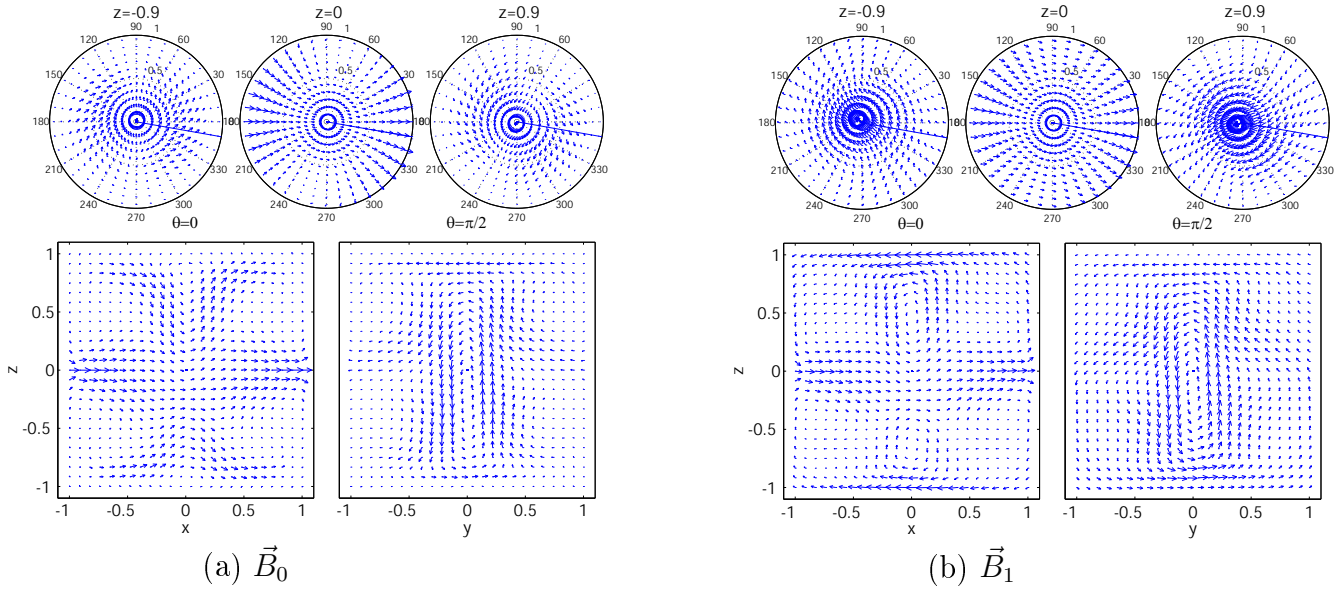
**Fig. III.63:** Champ de vitesse TM73. La vitesse toroïdale présente une discontinuité supplémentaire au voisinage de  $z = \pm 0.75$  (indiquée par les flèches), introduisant une forte rotation différentielle axiale dans les régions de forte hélicité.

possédant des propriétés similaires et qui donne lieu à une dynamo, d'après la même étude numérique. Ce champ de vitesse présente une forte rotation différentielle axiale proche des zones hélicitaires (dans les régions indiquées par les flèches sur la projection toroïdale de la figure III.63). Comme la plupart des écoulements étudiés dans les expériences d'induction von Kármán, celui-ci est produit par des disques munis de pales. La forte rotation différentielle au voisinage des disques vient probablement du fait que la rotation du fluide est quasiment solide entre les pales. En dehors des pales, le transport de quantité de mouvement n'est plus assuré que par l'entraînement visqueux, de sorte qu'il existe une quasi-discontinuité de la vitesse de rotation au voisinage des disques.

La figure III.64a représente la structure du mode magnétique instable obtenu. Nous l'avons utilisé comme champ initial dans le calcul numérique par l'approche perturbative à partir de l'écoulement TM73. Au bout d'une vingtaine d'itérations, un bouclage négatif d'ordre 2 apparaît. Les modes bouclant sont essentiellement les mêmes que ceux de la figure III.57 et le facteur de bouclage correspondant vaut  $|\tilde{\gamma}| = \sqrt{|\gamma_1 \gamma_2|} \sim 0.1$  (conduisant à un rayon de convergence du développement perturbatif de l'ordre de  $R_m^* \sim 10$ .) Toutefois, pour les premiers ordres du calcul itératif, un bouclage positif semble clairement se dessiner. En effet, les figures III.64b représentent une vue en coupes de la structure du champ  $\vec{B}_1$  obtenu au bout d'une itération. Les structures de  $\vec{B}_0$  et de  $\vec{B}_1$  sont très voisines l'une de l'autre et ne diffèrent sensiblement qu'au voisinage des extrémités du cylindre. Le recouvrement de  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$  peut être estimé en calculant le produit scalaire

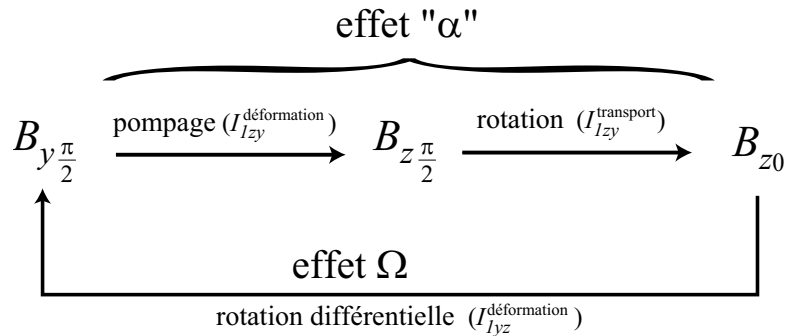
$$\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 = \frac{\int \vec{B}_0(r) \cdot \vec{B}_1(r) d^3\vec{r}}{\sqrt{\int \vec{B}_0^2(r) d^3\vec{r} \int \vec{B}_1^2(r) d^3\vec{r}}} \quad (\text{III.43})$$

On obtient une valeur de 0.8 reflétant effectivement une forte projection de  $\vec{B}_1$  sur  $\vec{B}_0$ . Le bouclage ainsi obtenu s'interprète très bien en termes d'un mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  où



**Fig. III.64:** (a) : Vue en coupes du mode instable de champ magnétique engendré dans la simulation de dynamo cinématique avec l'écoulement de la figure III.63 périodisé en  $z$  (ce champ a été fourni par l'équipe du CEA de Saclay.) (b) : Vue en coupes du champ magnétique induit au bout d'une itération, à partir du champ initial de la figure de gauche dans le schéma perturbatif utilisant le champ de vitesse réel (non-périodique) de la figure III.63

les différentes structures du champ magnétique initial s'échange entre elles en une seule étape. Si on note  $B_{z,0}$  la composante axiale du champ magnétique de la figure III.64a dans la coupe  $xOz$  ( $\theta = 0$ ),  $B_{y,\frac{\pi}{2}}$  la composante transverse visible dans la coupe  $yOz$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) et  $B_{z,\frac{\pi}{2}}$  la composante axiale dans ce même plan, le bouclage peut être schématisé selon le bouclage "α"Ω :



Ce schéma se produit dans chacune des deux cellules élémentaires de l'écoulement, de part et d'autre du plan médian. L'effet Ω est essentiellement associé à la rotation différentielle supplémentaire présente dans l'écoulement TM73 dans les régions  $z \sim \pm 0.75$ , qui sont précisément les régions de forte hélicité, où la production de  $B_{y,\frac{\pi}{2}}$  est indispensable pour que le bouclage se produise. Comme l'hélicité de chaque cellule est de même signe, leurs effets collaborent pour donner la structure globale du champ magnétique. On pourra également remarquer que la composante transverse  $B_{x0}$  dans la coupe  $xOz$  est recrée par effet Ω associé à la rotation différentielle habituelle de la couche de cisaillement à partir de la composante  $B_{z,\frac{\pi}{2}}$ .

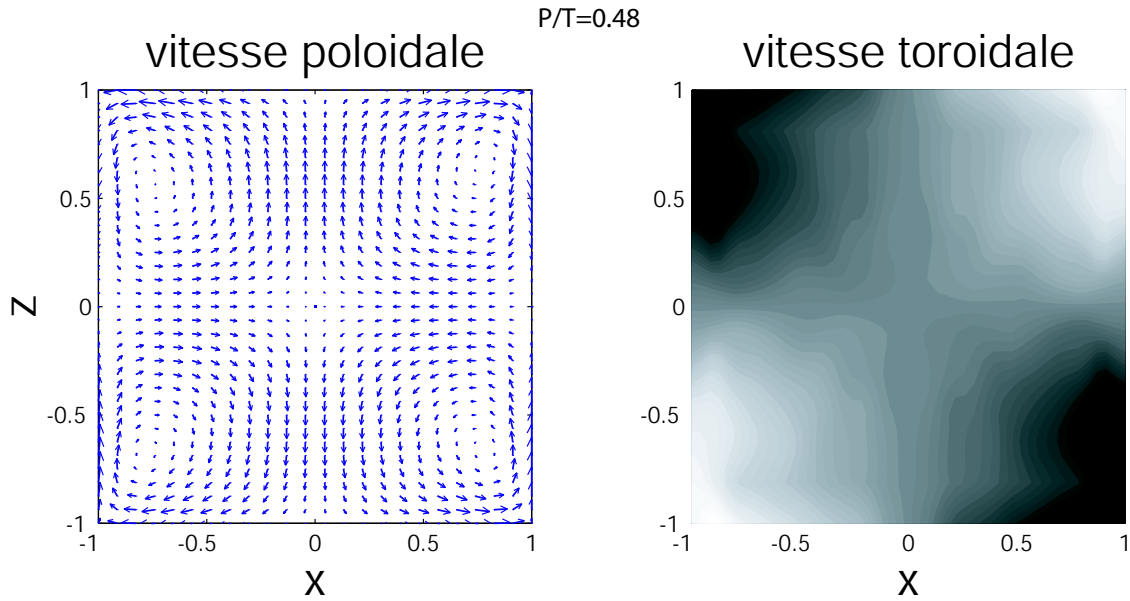
L'estimation du facteur de bouclage correspondant à la première itération du calcul perturbatif donne  $\gamma = 1.1 \cdot 10^{-2}$ , équivalant à un seuil de dynamo de l'ordre de  $R_m^c \sim 90$ , en bon accord avec la valeur prédite dans le code cinématique périodisé en  $z$  de l'équipe du CEA de Saclay.

Enfin, il est intéressant de noter que l'itération à partir du même champ initial de la figure III.64a, mais utilisant cette fois-ci le champ de vitesse de l'écoulement modèle, donne un recouvrement nettement moins bon ( $\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 \sim 0.5$ .) La structure du champ instable de la figure III.64a est donc bien caractéristique de l'écoulement TM73.

### III.5.4 Conclusion

Les mécanismes “ $\alpha$ ” (lié à l'hélicité globale de l'écoulement) et  $\Omega$  (lié à la rotation différentielle) peuvent se coupler pour donner un mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$  suggérant un schéma de bouclage positif favorable à l'instabilité dynamo. Ce mécanisme est en concurrence avec l'expulsion qui conduit à un bouclage négatif et qui reste en général le mécanisme dominant, associé au plus grand facteur de bouclage (en module.) Ceci n'est toutefois pas contradictoire avec l'existence de l'instabilité dynamo, mais traduit simplement le fait que, pour les régimes de hauts  $R_m$ , l'expulsion domine l'induction. Cette observation est en accord avec l'étude des mécanismes à l'oeuvre dans la dynamo de Karlsruhe [77] montrant que l'efficacité de l'effet  $\alpha$  (effet coopératif des structures hélicitaires à la petite échelle) finit par décroître pour les grandes valeurs de  $R_m$  à cause de l'expulsion du champ magnétique par la rotation du fluide dans chaque tuyau du dispositif expérimental. Cette domination de l'expulsion rend difficile l'identification claire d'un mode dynamo instable par la recherche d'un bouclage dans le schéma itératif perturbatif : pour les ordres élevés, seule l'expulsion (qui possède le plus grand facteur de bouclage) subsiste. Un bouclage positif ne peut être identifié que pour les ordres bas, ce qui exige de partir d'une configuration initiale relativement proche de la structure instable. La possibilité d'approfondir la recherche du mode instable en soustrayant au champ initial la contribution du mode de bouclage de l'expulsion obtenu aux ordres élevés (comme suggéré par la discussion du §II.2.6.3) n'a pas encore été explorée.

Enfin, la compétition entre l'expulsion et un bouclage dynamo éventuel (tel que le mécanisme “ $\alpha$ ” $\Omega$ ) est très probablement à l'origine de la sensibilité, observée dans les dynamos numériques cinématiques, par rapport aux paramètres décrivant la structure de l'écoulement. L'étude itérative de la structure spatiale des champs induits apporte une interprétation précise reliant l'efficacité d'un mécanisme de bouclage à la topologie de l'écoulement.



**Fig. III.65:** Écoulement expérimental contra-rotatif TM80, utilisé dans l'expérience VKG (mesure fournie par l'équipe du CEA de Saclay. )

### III.6 Les effets des conditions aux limites

L'étude de l'écoulement modèle considéré jusqu'à présent nous a permis d'identifier un certain nombre de mécanismes d'induction que nous avons pu qualitativement relier aux propriétés structurales du champ de vitesse de l'écoulement. Cette interprétation qualitative pouvait être faite en considérant simplement les termes sources  $I_{\alpha\beta}$  de l'équation d'induction traduisant les effets volumiques de transport et déformation des lignes de champ magnétique, sans prendre en compte la nature de la condition aux limites électromagnétique. L'accord entre le résultat numérique basé sur l'étude de l'écoulement modèle et l'approche qualitative à partir des termes sources volumiques laisserait penser, à tort, que la nature de la condition aux limites joue finalement un rôle mineur. Nous allons montrer dans cette section, que s'il est vrai que le rôle des conditions aux limites électromagnétiques n'est pas majeur pour l'induction par l'écoulement modèle considéré, elle peut toutefois le devenir dans les écoulements réels, pourtant fort semblables à l'écoulement modèle. Cette étude n'a en réalité été suggérée qu'à la suite des résultats expérimentaux présentés dans le chapitre suivant (§IV.2.2.4 et IV.3.4.1) mais nous présentons ici l'étude numérique correspondante afin de rassembler l'ensemble des mécanismes d'induction recensés.

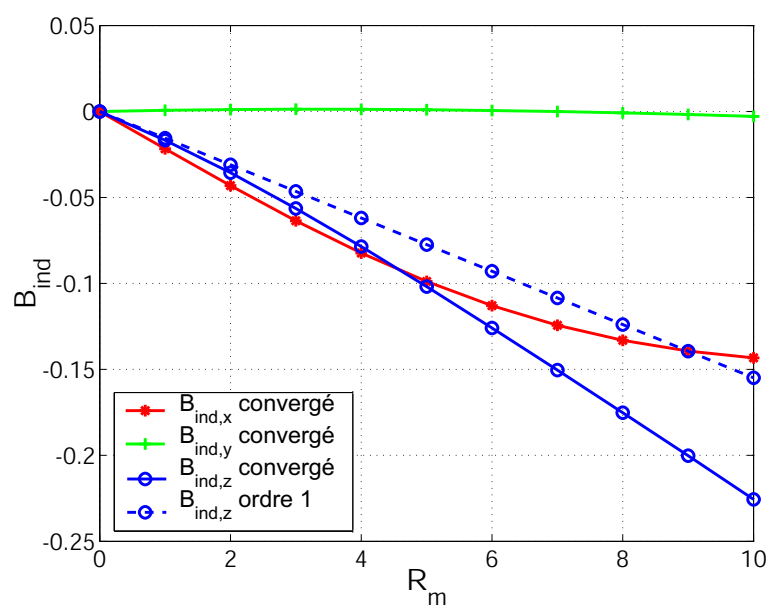
Nous utiliserons pour cette partie le champ de vitesse engendré dans les expériences VKG utilisant du gallium liquide. Il est produit par des disques (appelés TM80, d'après [57]), munis de pales droites. La figure III.65 représente le champ de vitesse mesuré en régime contra-rotatif dans une expérience en eau par l'équipe du CEA de Saclay [76] de même rapport d'aspect que les simulations numériques déjà présentées. Cet écoulement possède globalement la même structure que l'écoulement modèle étudié jusqu'à présent : deux boucles de recirculation centrifuge de part et d'autre du plan médian et une composante azimutale traduisant la rotation du fluide entraîné par les disques. Les principales différences entre les deux écoulements viennent de la position des noeuds de

la recirculation, et du fait que la vitesse azimutale ne s'annule que très près de la paroi dans l'écoulement réel (cette annulation se fait dans la couche limite, non-résolue par les mesures) alors qu'elle s'annule lentement, selon un profil sinusoïdal, dans l'écoulement modèle.

Nous ne considérons ici que le cas de l'induction en présence d'un champ transverse homogène appliqué et d'un régime contra-rotatif.

### III.6.1 La nécessité de comprendre le rôle des conditions aux limites

La figure III.66 représente la courbe d'évolution de l'induction magnétique au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$ , appartenant à l'axe  $Oy$ , donné par le développement perturbatif calculé numériquement jusqu'à l'ordre 20, avec des conditions aux limites isolantes en  $r = 1$  et  $z = \pm 1$  (nous nous sommes limités au rayon de convergence du développement qui est de l'ordre de  $R_m^* \sim 12$ .) Nous avons également représenté sur le même graphe la contribution linéaire (ordre 1 du développement perturbatif) de la composante axiale du champ magnétique induit. Contrairement au cas de l'écoulement modèle, où la contribution linéaire axiale était extrêmement faible (voir la figure III.60), elle s'avère être dominante dans le cas d'un écoulement TM80. Parmi les 18 termes sources d'induction volumique par transport-déformation, cette contribution ne pourrait résulter que du terme source  $I_{1zx}^{\text{déformation}} = B_0 \cos \theta \partial_r u_z$ , puisque le champ appliqué est homogène (et donc aucune contribution  $I_{\alpha\beta}^{\text{transport}}$  n'est possible) et que seule sa composante selon  $Ox$  est non-nulle. Or, comme nous l'avons déjà remarqué, ce terme est antisymétrique par rapport au plan  $yOz$ , de telle sorte que sa contribution à l'induction est nécessairement nulle en tout point du plan  $yOz$ . Par ailleurs, en régime contra-rotatif,  $u_z$ , et donc également  $\partial_r u_z$ , sont impairs en  $z$  (antisymétriques par rapport à  $xOy$ .) Les effets de  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  en régime contra-rotatif sont donc identiquement nuls dans les plans  $yOz$  et  $xOy$ . Il est essentiel de remarquer qu'il s'agit là d'arguments de symétrie ne portant que sur le terme source d'induction, mais qu'aucune contrainte intrinsèque aux propriétés de symétrie du système (voir §I.7.3) n'interdit l'induction d'un champ magnétique axial dans le plan  $yOz$  ni dans le plan  $xOy$  (sauf sur l'axe  $Ox$ .) Il s'agit donc de comprendre l'origine de cette induction. Dans la mesure où aucun terme source d'induction volumique ne peut l'expliquer, il ne peut s'agir que d'un effet des conditions aux limites.



**Fig. III.66:** Évolution des composantes de  $\vec{B}_{ind}$  pour l'écoulement TM80 contra-rotatif en présence d'un champ transverse appliqué. La composante axiale présente une forte contribution linéaire dont l'origine ne peut être qu'un effet dû aux conditions aux limites.



### III.6.2 Étude qualitative du rôle des conditions aux limites

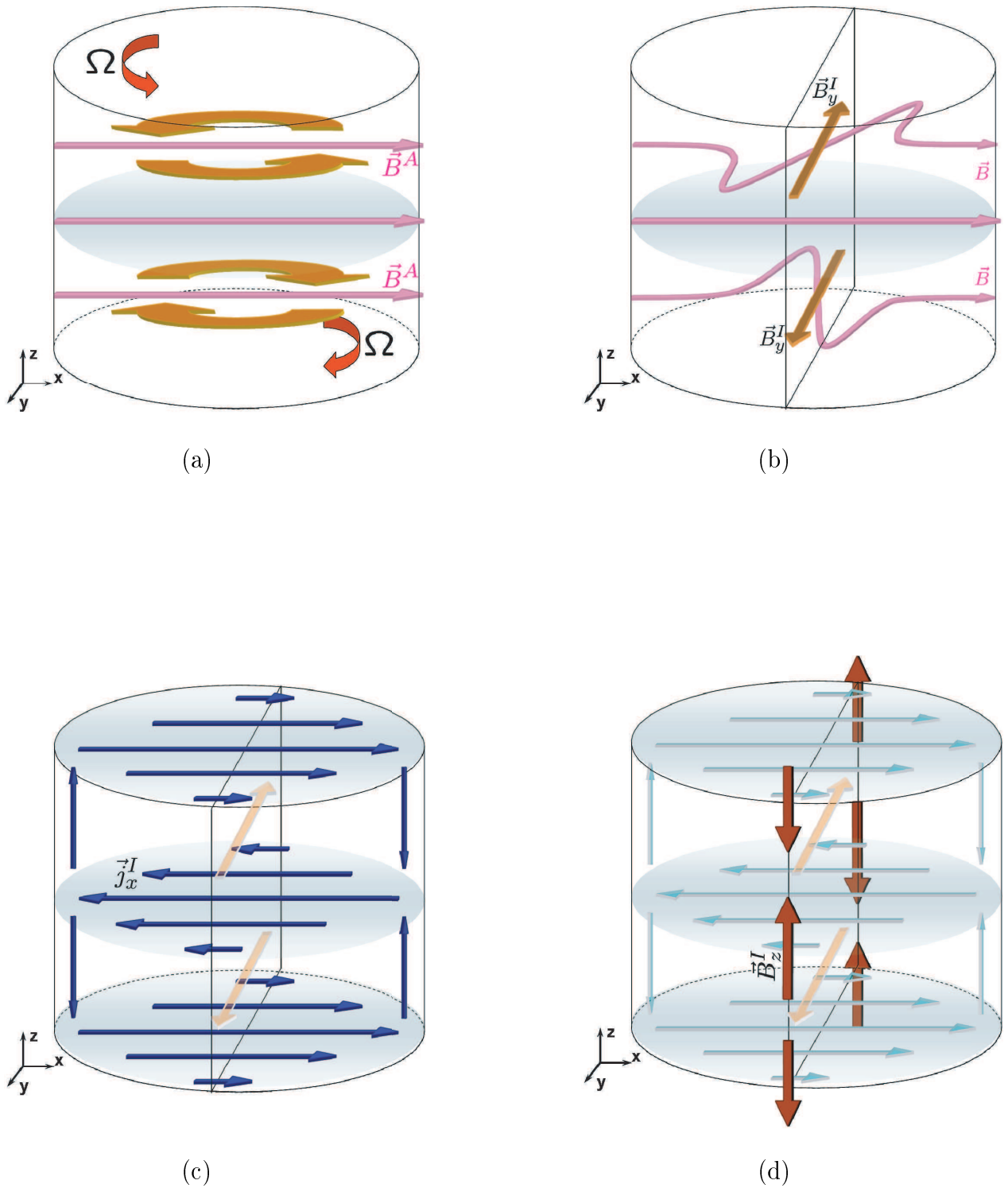
Afin de comprendre qualitativement le rôle des conditions aux limites dans le processus d'induction, il est utile de s'intéresser à la distribution de densité de courant induite dans le fluide. La condition aux limites isolante, que nous avons utilisée jusqu'à présent, s'exprime alors simplement par le fait que les courants ne peuvent traverser la paroi. Les figures III.67a à d décrivent le mécanisme conduisant à l'induction de la composante axiale linéaire,  $B_{1z}$ , dans le plan  $yOz$ . Le champ magnétique transverse appliqué est tout d'abord déformé, de part et d'autre du plan médian, par la rotation du fluide (figure III.67b). Il s'agit de la première étape de l'effet "α" se produisant dans chaque demi-cylindre, selon le mécanisme décrit par la figure III.35. Une composante de champ magnétique selon  $Oy$  est alors induite dans le plan  $yOz$  et, dans la mesure où le régime est contra-rotatif, elle est de sens opposé de part et d'autre du plan médian. Ce champ est produit par une nappe de courant  $\vec{j}_1$  circulant dans le plan médian, parallèlement à l'axe  $Ox$  (figure III.67c). Le milieu extérieur étant isolant, la densité de courant doit restée confinée à l'intérieur du cylindre. Elle est donc tangente à la paroi au niveau de l'axe  $Oy$  et boucle, dans le plan  $xOz$ , vers les extrémités du cylindre (où des nappes équivalentes circulent dans le sens opposé). Au niveau de l'intersection de l'axe  $Oy$  avec la paroi, dans la mesure où aucun courant ne circule à l'extérieur (à cause de la condition aux limites isolante), la densité de courant  $\vec{j}_1$  crée nécessairement un champ magnétique axial à l'extérieur du cylindre (figure III.67d). La continuité du champ magnétique à la paroi implique alors l'existence de ce champ magnétique à l'intérieur de l'écoulement ; de plus, la longueur de diffusion magnétique  $l_d \propto RR_m^{-\frac{1}{2}}$  n'étant jamais très inférieure à la taille intégrale du système (pour les plus hauts  $R_m$  accessibles expérimentalement, de l'ordre de 50, elle vaut toujours 15% du rayon du cylindre), cet effet peut être perçu au sein même de l'écoulement.

Le mécanisme à l'origine de l'induction axiale dans le plan  $yOz$  peut également être interprété en terme de reconnection des lignes de champs magnétiques induites selon  $Oy$  dans le plan  $yOz$  (par le terme source volumique  $I_{1yx}^{\text{déformation}}$ ). Une telle reconnection est inévitable si une discontinuité de conductivité existe à la paroi de la cuve.

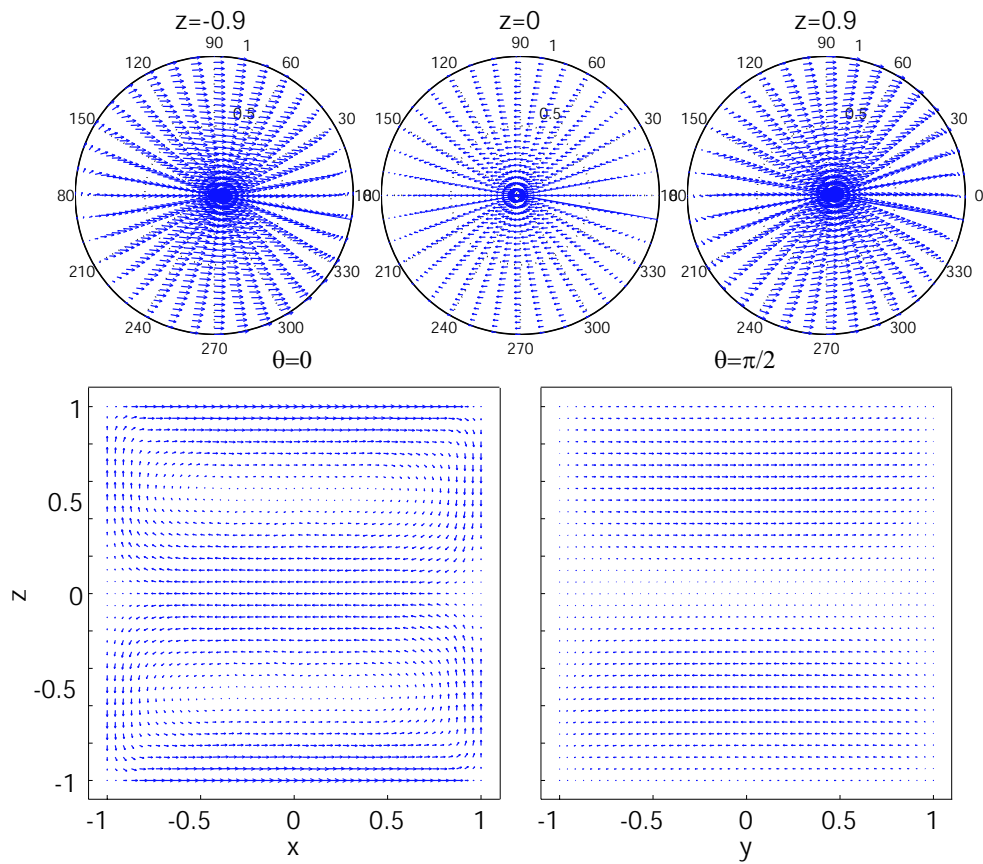
### III.6.3 Étude numérique du rôle des conditions aux limites

Les figures III.68 et III.69 montrent une vue en coupe de la densité de courants et du champ magnétique induit calculés numériquement à l'ordre 1 en utilisant le champ de vitesse TM80. Elles illustrent tout à fait le schéma qualitatif décrit ci-dessus. Les coupes dans les plan  $xOz$  et  $xOy$  montrent bien la nappe de courant dans le plan médian et son bouclage vers les extrémités du cylindre. La coupe dans le plan  $yOz$  du champ magnétique induit montre une composante axiale induite conduisant à la reconnection, au niveau du plan médian, du champ induit selon  $Oy$  dans les régions  $z \sim \pm R/2$ . Cette composante axiale change de signe au niveau des extrémités du cylindre. On peut également constater qu'elle est d'autant plus intense qu'on se rapproche de la paroi du cylindre.

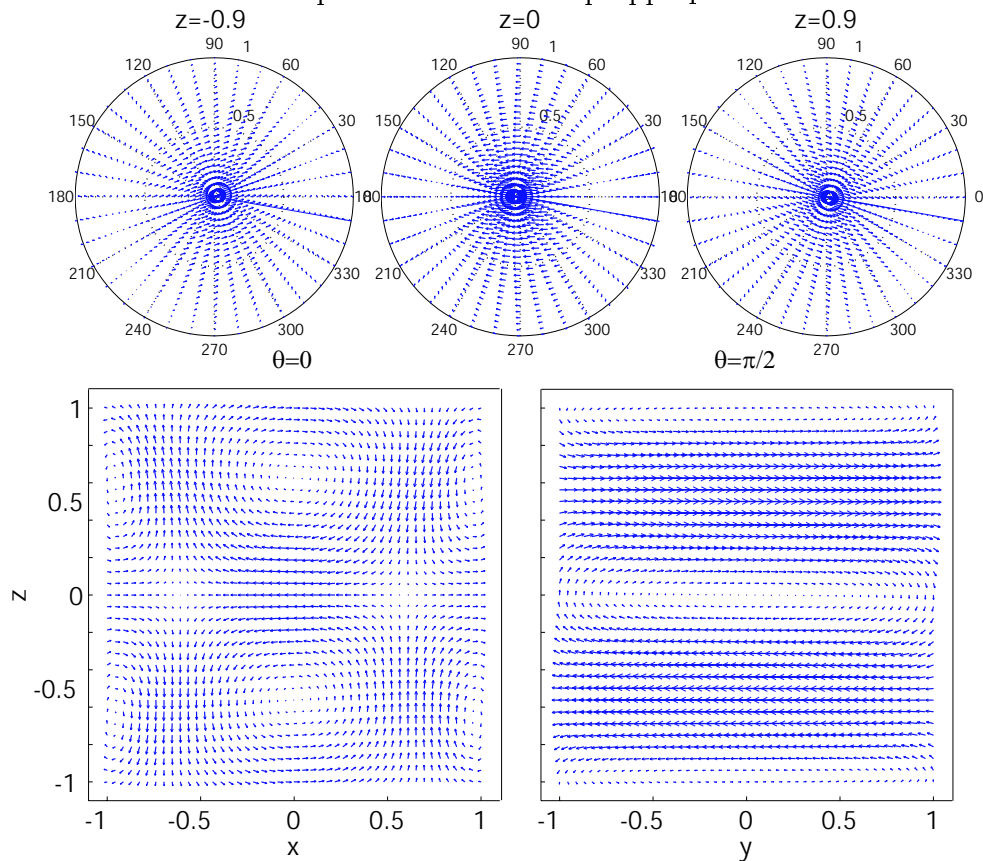
Cet effet, que nous désignerons dans la suite "effet-CL" (comme "effet des Conditions aux Limites"), est ainsi à l'origine d'un mécanisme linéaire de conversion d'un champ magnétique transverse dirigé selon  $Ox$  en un champ magnétique axial dans le plan  $yOz$ . Comme nous le verrons au chapitre suivant, cet effet jouera souvent un rôle dominant pour l'induction expérimentale dans les écoulement de von Kármán. C'est également l'effet-CL qui est à l'origine de l'induction d'un champ axial à partir d'un champ transverse appliqué



**Fig. III.67:** Description qualitative de l'effet des conditions aux limites isolantes sur l'induction magnétique au sein de l'écoulement.



**Fig. III.68:** Vue en coupes de la densité de courants  $\vec{j}_1$  induite à l'ordre 1 par un écoulement TM80 contra-rotatif en présence d'un champ appliqué transverse selon  $Ox$ .



**Fig. III.69:** Vue en coupes du champ magnétique  $\vec{B}_1$  induit à l'ordre 1 par un écoulement TM80 contra-rotatif en présence d'un champ appliqué transverse selon  $Ox$ .

observée aux extrémités d'un écoulement géostrophique de gallium liquide [13].

L'effet-CL est en fait une manifestation particulière d'un effet plus général associé à l'existence d'une conductivité non-uniforme dans le milieu. Nous avons vu dans le chapitre 2 que, dans ce cas, l'équation d'induction ne peut être écrite sous sa forme habituelle, mais qu'elle doit être complétée par le terme  $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{\nabla} \lambda$  pour prendre la forme plus générale donnée par l'expression II.29. Peu de systèmes permettent l'étude expérimentale de l'effet d'un gradient volumique de conductivité (un tel gradient existe très certainement dans le noyau terrestre et peut jouer un rôle dans un cycle dynamo [18]). En revanche le gradient de conductivité à la *paroi* est inévitable dans toute situation réelle, expérimentale ou naturelle. Dans le cas particulier d'une discontinuité de conductivité (ou de façon équivalente, de diffusivité magnétique) à la paroi, le terme de l'équation d'induction associé au gradient de conductivité, devient un terme surfacique qui s'exprime simplement sous la forme :  $[\lambda]_S \delta_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{n}$ , comme nous l'avons expliqué au §II.1.2.3 ( $S$  désigne la surface sur laquelle se produit la discontinuité de diffusivité magnétique,  $\vec{n}$  est le vecteur normal sortant à cette surface et  $\delta_{(S)}$  la fonction de Dirac s'annulant partout sauf sur la surface  $S$ .)

Le mécanisme d'induction associé à cet effet peut alors être décrit par l'approche itérative mécaniste que nous avons développée. L'effet linéaire observé ici découle de la relation (II.65) qui s'écrit à l'ordre d'induction le plus bas :

$$\lambda \Delta \vec{B}_1 = -\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) - [\lambda]_{(S_{int})} \delta_{(S_{int})} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{n}. \quad (\text{III.44})$$

La condition aux limites à la paroi de l'écoulement est alors prise en compte par le terme surfacique et la condition aux limites pour  $\vec{B}_1$  dans l'équation ci-dessus devient alors simplement son annulation à l'infini.

Comme nous l'avons remarqué, l'effet-CL devient assez intuitif en introduisant la densité de courant induite  $\vec{j}_1$ . Ceci vient du fait que le terme surfacique qui lui est associé dans l'équation d'induction est directement relié à  $\vec{j}_1$  (par la relation  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1$ ) et peut s'écrire sous la forme

$$\vec{I}_{1,CL} = -\mu_0 [\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \vec{j}_1 \times \vec{n}. \quad (\text{III.45})$$

Dans le plan  $yOz$ , le vecteur normal à la surface du cylindre  $\vec{n}$  est colinéaire au vecteur de base  $\vec{u}_y$ . Une nappe de courant colinéaire à  $\vec{u}_x$ , comme celle induite à l'ordre 1 dans la région du plan médian, donne alors un terme source axial

$$[\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} j_1 \vec{u}_x \times \vec{u}_y // \vec{u}_z, \quad (\text{III.46})$$

à l'origine de  $B_{1z}$  dans le plan  $yOz$ . Ce mécanisme d'induction est celui décrit au chapitre 2 par la figure II.5.

### III.6.4 Influence de la structure de l'écoulement sur l'effet-CL

Il est notable de constater que cet effet est très intense (et même dominant) pour l'écoulement expérimental, alors qu'il reste essentiellement marginal pour l'écoulement modèle où les effets quadratiques dominent toute induction axiale dans le plan  $yOz$ . On peut alors se demander comment relier ce mécanisme aux propriétés structurelles de l'écoulement, afin de comprendre quels sont les ingrédients qui lui sont favorables. Pour cela, il

est essentiel de comprendre que bien qu'il ne soit pas directement relié aux termes sources d'induction volumique par transport-déformation, l'effet-CL ne peut exister seul, en l'absence de contribution d'au moins l'un des 18 termes d'induction volumiques habituels. En effet, en l'absence de ces termes sources, l'équation pour  $\vec{B}_1$  s'écrit simplement

$$\lambda \Delta \vec{B}_1 = -[\lambda]_{(S_{int})} \delta_{(S_{int})} \left( \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 \right) \times \vec{n}, \quad (\text{III.47})$$

et a pour solution  $\vec{B}_1 = \vec{0}$ . Autrement dit, un gradient de diffusivité magnétique ne peut être seul à l'origine d'un champ induit dans un milieu au repos : il conduit à des mécanismes d'induction non décrits par les termes d'induction habituels, mais qui ne peuvent se manifester sans eux. On peut comprendre facilement ceci à travers l'explication qualitative de l'effet-CL donnée par les figures III.67a à d : cet effet n'existe que dans la mesure où le terme d'induction volumique  $I_{1xy}^{\text{déformation}}$  a contribué à engendrer  $B_{1y}$  (et donc la nappe de courant  $j_{1x}$ .) En particulier, on ne pourrait envisager de mécanisme dynamo ne faisant intervenir que les effets de gradient de diffusivité : le terme dans l'équation d'induction ne faisant pas intervenir la vitesse, il ne peut constituer une source de conversion d'énergie mécanique en énergie magnétique. En revanche, couplé à des mécanismes d'induction associés aux termes sources volumiques habituels, l'effet-CL fournit un mécanisme efficace de conversion entre composantes magnétiques.

Dans la relation III.46, la densité de courant  $\vec{j}_1$  à l'origine du terme source  $I_{1,CL}$  est ainsi le résultat des effets d'induction volumiques, à partir des termes sources habituels. Ces termes permettent de relier simplement les propriétés structurelles de l'écoulement (essentiellement décrites en termes du champ de vitesse et des gradients de ses composantes) à des mécanismes d'induction spécifiques, par les tableaux III.1 et III.2. Afin de relier de la même façon l'effet-CL aux propriétés structurelles de l'écoulement, il est donc nécessaire de déterminer les termes sources volumiques décrivant l'induction de la densité de courant.

À partir des termes sources volumiques d'induction magnétique à l'ordre  $k$ ,  $\vec{I}_{k,\beta}^{\text{déformation}} = \vec{B}_{k-1,\beta} \partial_\beta \vec{u}$  et  $\vec{I}_{k,\beta}^{\text{transport}} = u_\beta \partial_\beta \vec{B}_{k-1}$ , la relation de Maxwell-Ampère nous permet de définir les termes sources équivalents associés à la densité de courant  $\vec{j}_k$  par

$$\vec{j}_k^{\text{déformation}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{I}_k^{\text{déformation}}, \quad (\text{III.48})$$

$$\vec{j}_k^{\text{transport}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{I}_k^{\text{transport}}, \quad (\text{III.49})$$

tels que

$$\Delta \vec{j}_k = \vec{j}_k^{\text{déformation}} + \vec{j}_k^{\text{transport}}. \quad (\text{III.50})$$

Le terme source pour l'effet-CL peut alors s'écrire à l'ordre  $k$  sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{I}_{k,CL} &= -\mu_0 [\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \vec{j}_k \times \vec{n} \\ &= -[\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \Delta^{-1} \left( \vec{\nabla} \times \vec{I}_k^{\text{déformation}} + \vec{\nabla} \times \vec{I}_k^{\text{transport}} \right) \times \vec{n}. \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Cette relation montre bien que le mécanisme d'induction par effet-CL est en réalité étroitement lié aux termes d'induction volumique habituels et elle permet, en utilisant les expressions des tableaux III.1 et III.2 de relier l'induction par effet-CL aux propriétés structurelles de l'écoulement. Dans le cas particulier de l'effet linéaire qui nous concerne

ici, cette relation peut être exprimée de façon simple et explicite. En effet, dans la mesure où l'on se restreint au cas d'un champ appliqué homogène, seule la contribution des termes  $\vec{I}_1^{\text{déformation}} = (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$  doit être considérée. Le terme source pour la densité de courant se met alors simplement sous la forme

$$\vec{J}_1^{\text{déformation}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{I}_1^{\text{déformation}} \quad (\text{III.52})$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (\text{III.53})$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad \text{car } \vec{B}_0 \text{ est uniforme} \quad (\text{III.54})$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} \quad (\text{III.55})$$

$$(\text{III.56})$$

où  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$  est le champ de vortacité de l'écoulement. Ce terme source de  $\vec{j}_1$  est analogue au terme d'induction magnétique de  $\vec{B}_1$  par déformation de  $\vec{B}_0$  par les gradients de vitesse,  $\vec{I}_1^{\text{déformation}} = (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ , où les gradients de vitesse sont remplacés par les gradients de vortacité. L'écoulement de von Kármán possède un champ de vortacité dont la structure est voisine de celle du champ de vitesse. La figure III.70 représente le champ de vortacité de l'écoulement produit par les disques TM80 en régime contra-rotatif. Le champ de vortacité présente une composante toroïdale similaire au champ de vitesse. La composante poloïdale présente un flux radial dans le plan médian et un pompage central, comme le champ de vitesse. Cette similarité implique que le terme source de l'équation pour la densité de courant et celui pour le champ magnétique possèdent des caractéristiques structurelles voisines, ce qui explique la grande similitude de la structure spatiale de la densité de courant et du champ magnétique induits obtenus par résolution numérique (voir par exemple les figures III.49 et III.50.)

La figure III.71 représente le champ de vortacité correspondant au même écoulement que celui de la figure III.70, lorsque le sens de rotation des disques est renversé. Contrairement au champ de vitesse, la composante toroïdale de la vortacité reste alors inchangé, et sa composante poloïdale change de signe. La parité en  $\Omega$  de la densité de courant induite est donc opposée à celle du champ magnétique correspondant.

Afin de relier plus directement l'induction magnétique par effet-CL aux propriétés structurelles de l'écoulement, on peut remarquer que la structure de la densité de courant  $\vec{j}_1$  est proche de celle du terme source  $\vec{J}_1$ . On peut alors écrire

$$\vec{I}_{1,CL} \simeq -\mu_0 [\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \vec{J}_1 \times \vec{n}; \quad (\text{III.57})$$

$$\simeq -[\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} \times \vec{n}. \quad (\text{III.58})$$

Au niveau des parois périphériques du cylindre (où  $\vec{n} = \vec{u}_r$ ) l'induction par effet-CL résulte des termes sources

$$\begin{aligned}
I_{1,CLxx} &\simeq -\mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1zx}^{\text{déformation}} \sin \theta, \\
I_{1,CLxy} &\simeq -\mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1zy}^{\text{déformation}} \sin \theta, \\
I_{1,CLxz} &\simeq -\mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1zz}^{\text{déformation}} \sin \theta, \\
I_{1,CLyx} &\simeq -\mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1zx}^{\text{déformation}} \cos \theta, \\
I_{1,CLyy} &\simeq -\mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1zy}^{\text{déformation}} \cos \theta, \\
I_{1,CLyz} &\simeq -\mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1zz}^{\text{déformation}} \cos \theta, \\
I_{1,CLzx} &\simeq \mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1xx}^{\text{déformation}} \sin \theta - J_{1yx} \cos \theta, \\
I_{1,CLzy} &\simeq \mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1xy}^{\text{déformation}} \sin \theta - J_{1yy} \cos \theta, \\
I_{1,CLzz} &\simeq \mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1xz}^{\text{déformation}} \sin \theta - J_{1yz} \cos \theta,
\end{aligned}$$

où les  $J_{1\alpha\beta}$  s'expriment exactement comme les  $I_{1\alpha\beta}^{\text{déformation}}$  en remplaçant les composantes de la vitesse par celles de la vorticité. Rappelons que dans la notation  $I_{\alpha\beta}^{\text{déformation}}$  et  $J_{\alpha\beta}^{\text{déformation}}$ ,  $\alpha$  est la composante induite par le terme source et  $\beta$  la composante de  $\vec{B}_0$  déformée. Dans le cas précis considéré ici,  $\vec{B}_0/\vec{u}_x$  et seuls les termes  $J_{1\alpha x}$  peuvent alors donner une contribution non-nulle. Dans le plan  $yOz$  ( $\cos \theta = 0$ ), toute contribution à l'induction d'un champ axial résulte donc majoritairement du terme

$$I_{1,CLzx}(\theta = \frac{\pi}{2}) \simeq \mu_0[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}J_{1xx}(\theta = \pi/2) \quad (\text{III.59})$$

$$\simeq [\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}B_0\frac{\omega_r}{r} \quad (\text{III.60})$$

Ce terme source permet alors d'expliquer la composante axiale de champ induit dans le plan  $yOz$  avec le champ de vitesse TM80. En effet, le champ de vorticité engendré par les disques TM80 (figure III.70 et III.71) présente une importante composante radiale au voisinage des bords du cylindre au niveau du plan médian contribuant à l'induction d'un champ axial par effet-CL selon le terme  $I_{1,CLzx}(\theta = \frac{\pi}{2})$  ci-dessus.

Cette induction résulte d'une densité de courant dirigée selon  $u_x$  créée par la composante selon  $Ox$  du gradient de  $\omega_x$  (terme source  $J_{1xx}$ ). Cette contribution est bien impaire par rapport au sens de rotation des disques, puisqu'elle ne fait pas intervenir la composante azimutale de la vorticité, ce qui la rend compatible avec les contraintes imposées par les propriétés de symétrie intrinsèques à la géométrie du système (voir equation I.41.)

La composante radiale de la vorticité est importante non seulement au voisinage de la couche de cisaillement du plan médian mais aussi au voisinage des disques en rotation, où elle de signe opposé. Ceci explique le changement de signe, aux extrémités du cylindre, de la composante axiale induite dans le plan  $yOz$  que l'on peut observer sur la figure III.69.

**Remarque sur l'analogie de l'induction par effet-CL et par effet "α".** Tout comme l'effet "α", le champ axial induit par effet-CL est impair par rapport au sens de rotation des disques et antisymétrique par rapport au plan  $yOz$  et ces deux effets sont associés à l'induction d'une densité de courant de même direction que le champ initial. Cette similitude n'a en réalité rien de surprenant dans la mesure où ces propriétés pour l'induction d'un champ axial sont imposées par les propriétés de symétrie mêmes du système (indépendamment de tout mécanisme d'induction particulier.) Les principales différences

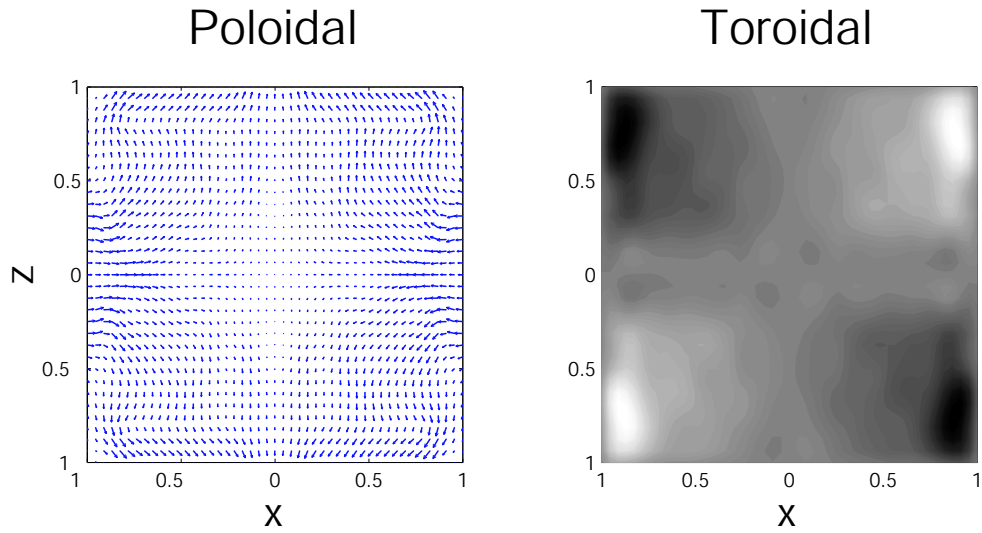


Fig. III.70: Vorticité de l'écoulement TM80 contra-rotatif pour  $\Omega > 0$ .

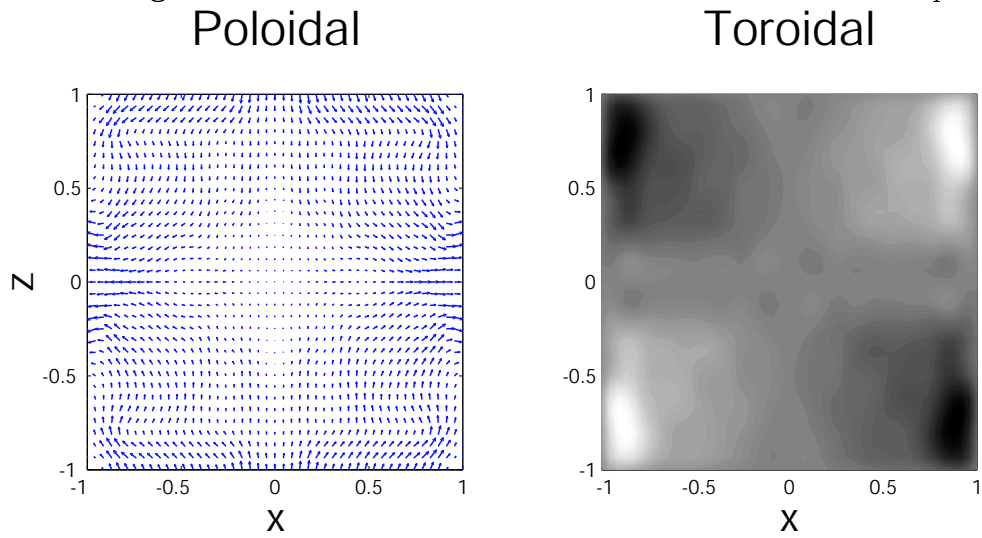


Fig. III.71: Vorticité de l'écoulement TM80 contra-rotatif pour  $\Omega < 0$ .

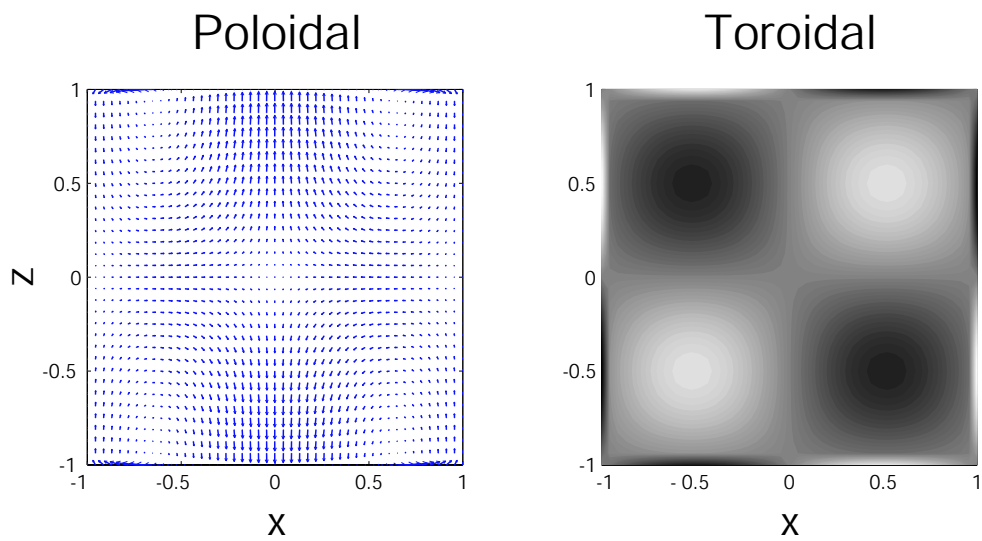


Fig. III.72: Vorticité de l'écoulement modèle contra-rotatif pour  $\Omega > 0$ .



dans la structure du champ induit par les deux effets viennent de ce que l'effet-CL est linéaire en  $R_m$ , il se renverse entre le plan médian et les extrémités du cylindre et est intense essentiellement entre les parois et  $r \sim \frac{R}{2}$ , alors que l'effet  $\alpha$  est quadratique en  $R_m$ , il ne change pas de signe entre le plan médian et les extrémités du cylindre et est intense autour de  $r \sim \frac{R}{2}$  (III.52.)

Dans le cas de l'écoulement modèle, cet effet était négligeable et le terme quadratique résultant de la collaboration des effets " $\alpha$ " de part et d'autre du plan médian dominait largement l'induction axiale dans le plan  $yOz$ . La figure III.72 représente le champ de vorticité de l'écoulement modèle. Elle montre que la composante radiale de la vorticité dans le plan médian au voisinage des bords du cylindre est alors extrêmement faible et la contribution du terme  $I_{1,CLzx}$  est alors marginale, ce qui explique la domination de l'effet " $\alpha$ ".

L'introduction des termes sources  $I_{1,CL}$  permet également de comprendre que si l'effet-CL est intense au niveau de l'axe  $Oy$ , il a en revanche peu de chance d'être observé au voisinage de l'axe  $Ox$ . En effet, le terme source qui lui est associé,  $I_{1,CLzx}$ , s'écrit pour  $\theta = 0$

$$I_{1,CLzx}(\theta = 0) = J_{1,CLxx}(0) \quad (\text{III.61})$$

$$= 2[\lambda]_{(S)}\delta_{(S)}B_0\partial_r\omega_\theta. \quad (\text{III.62})$$

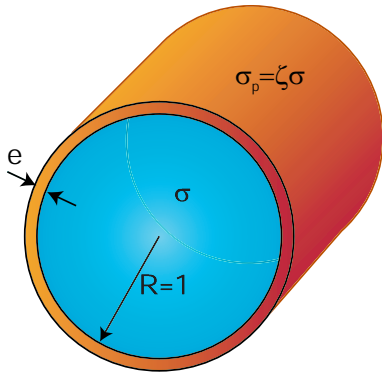
Cette contribution ne peut être que paire par rapport au sens de rotation des disques, puisqu'elle ne fait intervenir que la composante azimutale de la vorticité. Or les propriétés de symétrie intrinsèques au dispositif imposent que toute induction axiale dans le plan médian (et donc en particulier sur l'axe  $Ox$ ) soit nécessairement impaire par rapport au sens de rotation des disques. La contribution du terme  $I_{1,CLzx}$  est donc nécessairement nulle dans le plan  $xOz$ .

Nous avons ainsi identifié expérimentalement un mécanisme d'induction tout à fait particulier et entièrement dû aux propriétés des conditions aux limites électriques du dispositif. Un tel effet ne peut pas être interprété qualitativement en ne considérant que les termes sources de l'équation d'induction sous sa forme habituelle, pas plus qu'il ne peut être observé dans les approches numériques utilisant des conditions aux limites périodiques dans toutes les directions de l'espace. Dans l'approximation linéaire et en présence d'un champ appliqué uniforme, cet effet peut être relié qualitativement à la structure de l'écoulement via son champ de vorticité au voisinage des parois. Nous discutons plus loin le rôle qu'un tel mécanisme pourrait jouer pour l'effet dynamo.

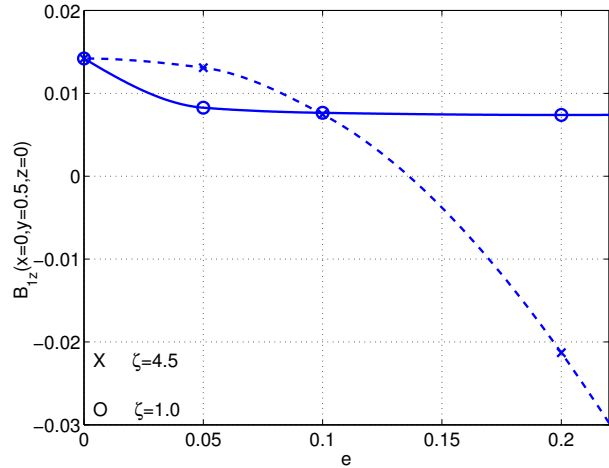
### III.6.5 Effet d'une couche extérieure conductrice

Le terme source de l'effet-CL est proportionnel à la discontinuité de conductivité à la paroi. On s'attend donc en particulier à ce que si le milieu extérieur devient plus conducteur que le fluide, le champ qu'il induit change de signe par rapport à ce qu'il est lorsque le milieu extérieur est isolant. Il est plus délicat en revanche de prédire ce qu'il en est lorsqu'une couche conductrice d'une certaine épaisseur  $e$  entoure l'écoulement, et que le milieu extérieur est isolant au-delà. Ceci constitue le cas le plus général des écoulements homogènes réels évoluant au sein de parois d'une épaisseur donnée de conductivité donnée.

Nous considérons pour cela le cas d'un écoulement de von Kármán contenu dans une enveloppe d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\sigma_p = \zeta\sigma$  où  $\sigma$  est la conductivité du fluide (figure



**Fig. III.73:** Schéma d'un écoulement de von Kármán évoluant au sein d'une enveloppe d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\sigma_p$ .



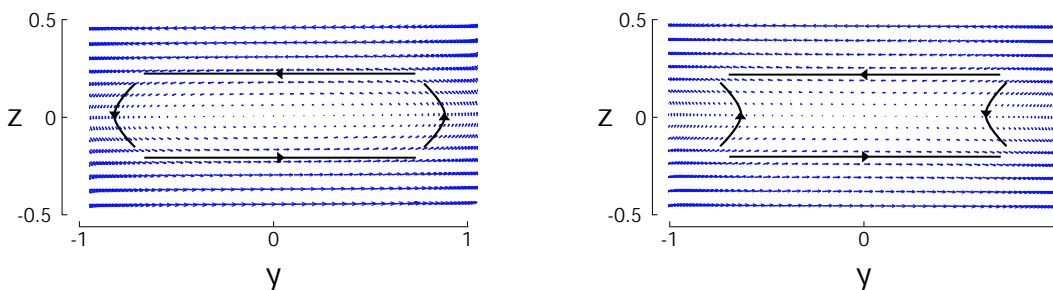
**Fig. III.74:** Induction axiale à l'ordre 1 par effet-CL au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  en fonction de l'épaisseur  $e$  d'une enveloppe de même conductivité que le fluide (o) ou 4.5 fois plus conductrice (x). Les lignes ne sont que des "guides-l'oeil" et ne correspondent à aucun ajustement.

III.73.) Nous traitons tout particulièrement les cas où  $\zeta = 1$  (l'enveloppe est de même conductivité que le fluide) et  $\zeta = 4.5$  (correspondant environ au rapport des conductivités du cuivre et du sodium à  $150^\circ$ .)

La figure III.74 représente la dépendance, par rapport à l'épaisseur  $e$  d'une couche conductrice, du champ axial induit à l'ordre 1 (par effet-CL) au point  $(x = 0, y = 0.5, z = 0)$  à  $R_m = 1$ . Cette courbe caractérise donc l'efficacité de l'effet CL selon la nature de la condition aux limites. Elle a été calculée pour une champ de vitesse expérimental, nommé TM60 (nous le présenterons plus en détails au chapitre suivant), utilisé dans l'expérience VKS utilisant sodium liquide.

- **cas  $\zeta = 1$ .** Dans le cas d'un milieu de même conductivité que le fluide, l'effet-CL décroît en restant toujours positifs. L'effet-CL doit alors a priori tendre vers zéro lorsque l'épaisseur de la couche conductrice tend vers l'infini. L'évolution observée sur la figure III.74 suggère que la décroissance de l'efficacité de l'effet-CL avec  $e$  est rapide tant que l'épaisseur de la couche conductrice reste inférieure à 5% du rayon intérieur de la cuve. Ensuite elle décroît très lentement et, avec une couche conductrice faisant 20% du rayon intérieur du cylindre, l'amplitude de l'effet-CL est encore de l'ordre de 60% par rapport au cas d'une condition aux limites parfaitement isolante.
- **cas  $\zeta = 4.5$ .** Dans le cas d'une couche extérieur plus conductrice que le fluide, l'efficacité de l'effet-CL reste sensiblement constante tend que  $e$  ne dépasse pas 5% de rayon intérieur du cylindre, puis décroît au-delà et change de signe pour une épaisseur de 13% du rayon intérieur de la cuve. La notion intuitive de milieu extérieur conducteur, prévoyant l'inversion du signe de l'effet-CL, ne commence donc à être valable que pour  $e > 0.13R$ .

**Remarque.** Le changement de signe de l'induction axiale associée au caractère conducteur de la condition aux limites conduit à un schéma de reconnection des lignes de champs magnétiques dans le plan  $yOz$ , différent par rapport au cas isolant (figure III.75.) Cette image de reconnection est très semblable à celle mesurée dans les expériences de plasmas [94].



**Fig. III.75:** Reconnection des lignes de champ magnétique dans le plan  $yOz$  sous l'effet de la discontinuité de conductivité à la paroi : la paroi est parfaitement isolante (à gauche) ; enveloppe conductrice d'épaisseur  $e=0.2$  (à droite.)

Cette étude montre qu'il n'est pas évident de prédire simplement la vraie nature des conditions aux limites. Une enveloppe conductrice ne se comportera comme une condition aux limites conductrice qu'au-delà d'une certaine épaisseur. Une autre conséquence intéressante de cette étude est qu'elle montre qu'en rajoutant une certaine épaisseur conductrice autour de l'écoulement, l'efficacité de la conversion linéaire d'un champ transverse en un champ axial reste relativement bonne si le milieu extérieur est de même conductivité que le fluide. Une enveloppe plus conductrice conduit rapidement à réduire l'efficacité du mécanisme, voire à en inverser le signe au-delà d'une certaine épaisseur.

### III.6.6 Rôle possible de l'effet-CL dans un cycle dynamo

Dans le cas d'un milieu extérieur isolant ou de même conductivité que le fluide, l'effet-CL produit en une seule étape d'induction un champ magnétique possédant des propriétés voisines de celui engendré en deux étapes par effet " $\alpha$ ". On peut alors légitimement se demander si un bouclage d'ordre 2 de type CL- $\Omega$ , plus efficace a priori qu'un bouclage " $\alpha$ " $\Omega$  d'ordre 3, ne serait pas envisageable. Un tel mécanisme se produit effectivement et conduit à l'induction en deux étapes d'un champ de même sens que le champ appliqué. Toutefois, ce mécanisme d'ordre 2 est en concurrence directe avec le mécanisme d'expulsion qui tend à produire, toujours en deux étapes, un champ induit de sens opposé au champ transverse de départ. L'efficacité d'un bouclage CL- $\Omega$  est donc considérablement réduite, et l'induction d'un champ transverse de même sens que le champ de départ est essentiellement le fruit du mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  d'ordre 3 (pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés.)

L'effet-CL peut en revanche jouer un rôle déterminant dans la compétition entre un bouclage " $\alpha$ " $\Omega$ , favorable à l'instabilité, et l'expulsion. Dans la mesure où plus l'effet-CL sera intense, plus il s'opposera au mécanisme d'expulsion d'ordre 2, qui verra ainsi ses effets réduits. L'effet-CL peut en quelque sorte jouer un rôle de *catalyseur* pour une dynamo " $\alpha$ " $\Omega$ , par sa capacité à contrecarrer l'expulsion. Nous n'avons pas étudié en détail, pour le moment, l'influence d'une couche conductrice au repos sur les autres mécanismes

que l'effet-CL. Si leur efficacité était augmentée par la présence d'une couche conductrice (ce résultat est généralement admis pour le problème de la dynamo et suggéré par l'étude numérique du seuil d'instabilité dans un écoulement von Kármán périodique en  $z$  [58]), l'étude du paragraphe précédent nous montre que l'effet-CL peut encore rester un mécanisme relativement efficace, et continuer à jouer un rôle *catalytique* (à condition que la conductivité et l'épaisseur de la couche conductrice ne soit pas trop importantes.) Par ailleurs, il a été montré par une autre étude numérique [45], que dans le cas d'une dynamo oscillante, la présence d'une couche extérieure conductrice peut au contraire augmenter le seuil de l'instabilité dynamo, car l'effet de peau dans le conducteur extérieur au repos tend à augmenter la dissipation par effet Joule. Cette étude remet donc en cause l'idée qu'un milieu extérieur conducteur augmente nécessairement l'efficacité de l'induction. La diminution (voire l'inversion) de l'efficacité de l'effet-CL, pour des milieux extérieurs très conducteurs et/ou très étendus, constitue un exemple similaire dans le cas des mécanismes stationnaires.

### III.7 Conclusion

L'approche perturbative de l'induction magnétohydrodynamique nous a permis d'étudier en détail les mécanismes d'induction dans les écoulements von Kármán. La notion intuitive du transport et de la déformation du champ magnétique par l'écoulement permet d'interpréter simplement et par étapes successives d'induction la plupart de ces mécanismes. Parmi cela, l'effet " $\alpha$ " (quadratique et associé à l'hélicité de l'écoulement) et l'effet  $\Omega$  (linéaire et associé à la rotation différentielle axiale) jouent un rôle essentiel par leur capacité à se coupler en un mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  potentiellement capable d'auto-entretenir un champ magnétique dynamo. La résolution numérique du schéma itératif montre la nature essentiellement globale de l'induction et la nécessité d'appréhender la structure spatiale des champs induits dans sa globalité. L'influence de la topologie précise de l'écoulement sur l'induction peut alors être étudiée en détails. Ceci permet notamment de comprendre l'inefficacité du bouclage " $\alpha$ " $\Omega$  dans certains écoulements et de déterminer les propriétés du champ de vitesse qui, au contraire, tendent à augmenter cette efficacité. L'expulsion du champ magnétique par la rotation et la recirculation du fluide reste dans tous les cas le mécanisme de bouclage le plus efficace. Dans les régimes à haut  $R_m$ , il domine tous les effets d'induction et s'oppose à l'auto-entretien magnétique. La compétition avec l'expulsion constitue certainement le principal obstacle au développement de l'instabilité dynamo " $\alpha$ " $\Omega$ .

L'étude perturbative de l'induction nous a par ailleurs permis d'identifier et de comprendre un nouveau mécanisme associé à la reconnection des lignes de champ magnétique à cause du gradient de conductivité à la paroi. Ce mécanisme, favorisé par une forte vorticité normale à la paroi, peut jouer un rôle important dans la compétition expulsion/" $\alpha$ " $\Omega$ , par sa capacité à s'opposer aux effets de l'expulsion. L'étude systématique de l'influence de la nature des conditions aux limites sur l'ensemble des mécanismes d'induction n'a pas encore été réalisée, mais l'étude que nous venons de présenter montre que l'approche perturbative et sa mise en oeuvre numérique constituent des outils tout à fait adaptés dans ce but.



## Chapitre IV

# Étude expérimentale des mécanismes d'induction

Nous présentons dans ce chapitre une étude détaillée des effets d'induction observés dans des expériences utilisant des écoulements de von Kármán de gallium liquide ( $R_m < 5$ ) et de sodium liquide ( $R_m < 40$ ). Nous interprétons les résultats expérimentaux à la lumière des mécanismes identifiés au chapitre précédent et des prédictions numériques obtenues par le calcul perturbatif développé précédemment, en utilisant un champ de vitesse mesuré expérimentalement dans une expérience en eau de même rapport d'aspect que les expériences de métal liquide. L'étude numérique du chapitre précédent a soulevé l'importance de considérer l'induction MHD comme un phénomène global ; or, l'approche expérimentale de l'induction ne donne en général accès qu'à des mesures locales du champ magnétique (au mieux à des mesures en quelques points isolés.) L'exploitation des données expérimentales en vue d'identifier les mécanismes d'induction requiert donc une analyse approfondie des mesures et des symétries du dispositif. La présentation de la démarche prendra donc parfois un aspect dense et besogneux.

Dans les écoulements réels, la question du rôle joué par la turbulence dans les phénomènes magnétohydrodynamiques devient primordiale. En effet, à cause du très faible nombre de Prandtl magnétique des métaux liquides, les écoulements sont fortement turbulents, dans les régimes à hauts nombres de Reynolds magnétiques considérés, et les signaux magnétiques fortement fluctuants. Certains aspects de ces fluctuations peuvent être caractérisés en considérant le champ magnétique comme un vecteur passif dans la phénoménologie de Kolmogorov <sup>41</sup> pour la turbulence.

De plus, les mécanismes d'induction étudiés au chapitre précédent ne tiennent compte que des effets du champ de vitesse moyen mais ne prennent pas en compte les petites

échelles turbulentes des écoulements. Pour cela, des expériences en présence d'un champ appliqué toroïdal (où aucun effet du champ moyen n'est attendu, comme nous le montrons au §IV.4.2.1) ont été réalisées en vue d'identifier un mécanisme de conversion d'un champ purement toroïdal en un champ poloïdal. Un tel mécanisme ne pourrait être qu'un effet coopératif des petites échelles turbulentes, tel que l'effet  $\alpha$  décrit dans le cadre de la théorie du champ moyen [47][62].

## IV.1 Les expériences de magnétohydrodynamique

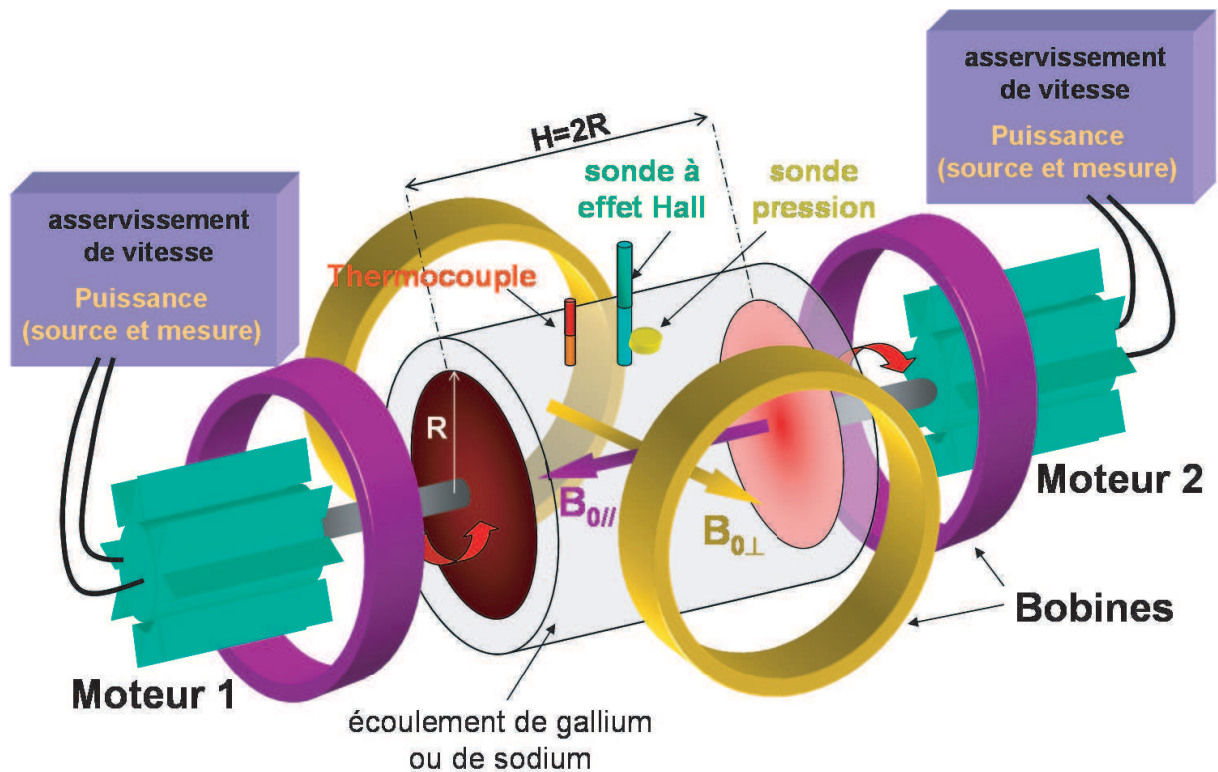
La démarche expérimentale est identique à celle que nous avons menée pour l'étude numérique : un champ magnétique extérieur est appliqué sur un écoulement de métal liquide et le champ magnétique induit au sein de l'écoulement est mesuré. Il s'agit ensuite d'identifier et de caractériser les mécanismes d'induction. Pour cela, un certain nombre de mesures hydrodynamiques et magnétiques sont réalisées.

### IV.1.1 Description générale du dispositif expérimental

L'écoulement est engendré dans une cuve cylindrique, entre deux disques coaxiaux en rotation, entraînés par deux moteurs électriques asynchrones (figure IV.1). La fréquence de rotation des moteurs,  $\Omega$ , est ajustable typiquement entre 0 et 30 Hz (la fréquence maximale que l'on puisse atteindre est reliée, pour une géométrie et un fluide donnés, à la puissance moteur disponible et à la nature des disques ; cette question sera étudiée en détails au §IV.1.4.) Les fréquences de rotation des moteurs sont commandées par deux variateurs indépendants et régulées par une boucle d'asservissement permettant de respecter la consigne à 0.1% près.

**Expérience VKG.** Dans l'expérience VKG, le rayon  $R$  de la cuve est de 9.7 cm, et sa longueur  $L$  est de 32.3 cm ; les disques utilisés sont munis de 8 pales droites à section carrée de 1 cm. Leur diamètre vaut  $2R_d=16.3$  cm et ils sont séparés d'une distance  $H=20.3$  cm. Un circuit de refroidissement, par circulation d'eau glacée dans un serpentin, est placé à l'arrière de chaque disque, ce qui explique la longueur de la cuve par rapport à la distance entre les disques. Ce refroidissement permet d'évacuer la chaleur produite par la dissipation visqueuse de l'écoulement et de réguler la température du milieu autour de 40°C. Le volume disponible pour l'écoulement, entre les disques, présente un rapport d'aspect  $H/2R \sim 1$ . Chaque moteur (modèle LSMV 160 MR) peut fournir une puissance mécanique maximale de 11 kW. Les mesures hydrodynamiques et magnétiques sont enregistrées à l'aide d'une carte d'acquisition National Instrument PXI-4472 23 bits et la fréquence d'échantillonnage est typiquement de 2 kHz.

**Expérience VKS.** L'expérience VKS est environ deux fois plus grande que VKG : le rayon  $R$  de la cuve est de 20 cm et sa longueur  $H$  est de 40 cm (elle est sensiblement égale à la distance entre les disques.) Différents types de disques, dont le rayon  $R_d$  varie de 15 cm à 18.5 cm ont été étudiés (nous les décrirons plus en détails par la suite.) Chaque moteur (modèle LSMV 280 SP) peut fournir une puissance mécanique maximale



**Fig. IV.1:** Schéma du dispositif expérimental pour les expériences von Kármán d'induction magnétohydrodynamique

de 75 kW. Les acquisitions sont réalisées à l'aide d'une carte DT3005 16 bits avec une fréquence d'échantillonnage typiquement égale à 2 kHz. Enfin, signalons que l'expérience VKS ne dispose pas encore de circuit de refroidissement. La forte dérive en température (de l'ordre de  $1 \text{ K.s}^{-1}$ ) lorsque les moteurs tournent à pleine puissance empêche alors des acquisitions plus longues qu'une trentaine de secondes. Ceci limite les possibilités pour une étude approfondie des fluctuations magnétiques dans ces régimes à très haut nombre de Reynolds magnétiques. La nouvelle génération de l'expérience est en cours de réalisation et sera munie d'un système de refroidissement par circulation d'huile (l'eau est bien sûr interdite dans tout montage au sodium) dans des canaux percés selon les génératrices de la paroi cylindrique de la cuve.

#### IV.1.1.1 Mesures hydrodynamiques

Des capteurs de pression, montés sur la paroi de la cuve, au niveau du plan médian, permettent de mesurer les pressions statique et dynamique de l'écoulement. Un exemple de mesures dynamiques a été présenté au chapitre 1 (§I.4.2) ; cette étude sera complétée au §IV.1.4.2. Le signal de pression dynamique est enregistré à l'aide d'un capteur piezo-électrique Kistler connecté à un amplificateur de charge Brüel & Kjaer. Le diamètre du capteur est de l'ordre de 5 mm, sa fréquence de coupure basse de 1 Hz et sa fréquence de coupure haute supérieure à 100 kHz. Ces mesures permettent notamment de caractériser les fluctuations turbulentes de l'écoulement (distribution des fluctuations de pression, estimation de la valeur *rms* de la vitesse du fluide, du taux de turbulence, étude du régime inertiel du spectre des fluctuations, etc.).



Un thermocouple permet d'enregistrer l'évolution de la température dans l'écoulement. La puissance mécanique injectée dans le fluide par la rotation des disques est dissipée par les pertes visqueuses aux petites échelles de l'écoulement. Il en résulte un échauffement du fluide. Le suivi de la température présente un double intérêt :

- protection de certaines pièces en contact avec le fluide risquant d'être détériorées à trop haute température.
- mesure de la puissance mécanique injectée dans l'écoulement à partir de la dérive thermique du fluide.

Une mesure secondaire de la puissance injectée est donnée par la consommation électrique des moteurs qui, moyennant un facteur d'efficacité, permet d'estimer la puissance mécanique qu'ils fournissent. Le constructeur des moteurs garantit que leur efficacité (définie comme le rapport de la puissance mécanique effectivement fournie à la puissance électrique consommée) reste sensiblement constante, et de l'ordre de 90% , dans notre gamme d'utilisation typique.

#### IV.1.1.2 Mesures magnétiques

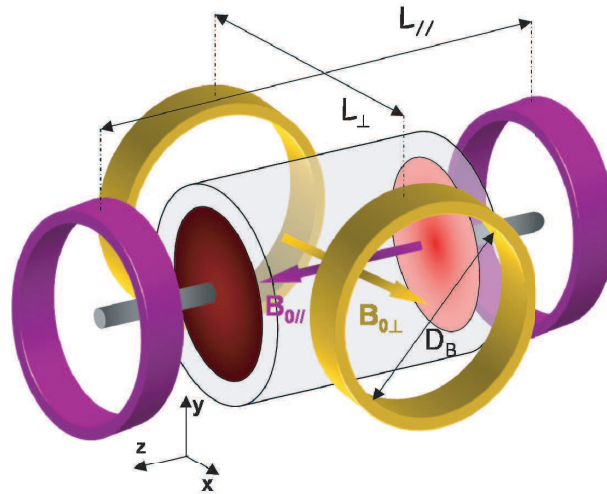
**Production d'un champ magnétique appliqué transverse ou axial.** Des bobines disposées autour de la cuve permettent d'appliquer un champ magnétique axial ou transverse (les bobines transverses sont alignées sur l'axe  $Ox$ .) Les bobines sont en configuration proche de Helmholtz (figure IV.2), de telle sorte que le champ obtenu est relativement homogène sur l'ensemble de l'écoulement. Si l'on caractérise l'inhomogénéité de  $\vec{B}_0$  comme le rapport de l'écart type de ses variations spatiales à sa valeur moyenne spatiale, elle est typiquement de l'ordre de 15%. Les bobines sont alimentées par un générateur continu KEPCO asservi en courant et capable de délivrer 8 A sous 50 V ; le tableau sous la figure IV.2 indique la valeur maximale de champ magnétique que l'on puisse produire dans le plan médian à mi-distance entre l'axe et la paroi de la cuve dans les différentes configurations.

**Production d'un champ magnétique appliqué toroïdal (VKG uniquement).** Le dispositif au gallium permet également d'appliquer un champ magnétique orthoradial en faisant circuler, au sein même du fluide conducteur, un courant électrique axial  $I_0$  amené par deux paires d'électrodes placées à l'arrière des disques (aux extrémités de la cuve), dans le plan  $xOz$ , de part et d'autre de l'axe  $Oz$  (figure IV.3). Les disques utilisés sont en acier inoxydable, 3 fois moins conducteur que le gallium, et gênent donc la circulation du courant axial. Afin de minimiser cette gêne, ils ont été percés de huit trous placés entre les pales, à hauteur des électrodes (figure IV.4.) Le courant  $I_0$  se répartit alors dans le fluide, selon une densité de courants relativement uniforme sur l'ensemble du volume :

$$\vec{j}_0 = j_0 \vec{u}_z = \frac{I_0}{\pi R^2} \vec{u}_z. \quad (\text{IV.1})$$

Le champ magnétique résultant de cette configuration est a priori purement azimutal et, dans l'approximation d'une densité de courants uniforme, s'écrit sous la forme

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = B_0(r) \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi R^2} r \vec{u}_\theta. \quad (\text{IV.2})$$



VKG		VKS	
	$D_B=30 \text{ cm}$		$D_B=43 \text{ cm}$
$L_{\perp}=50 \text{ cm}$	; $B_{\perp}^{max} \left(\frac{R}{2}\right) \sim 50 \text{ G}$	$L_{\perp}=76 \text{ cm}$	; $B_{\perp}^{max} \left(\frac{R}{2}\right) \sim 25 \text{ G}$
$L_{//}=63 \text{ cm}$	; $B_{//}^{max} \left(\frac{R}{2}\right) \sim 30 \text{ G}$	$L_{//}=86 \text{ cm}$	; $B_{//}^{max} \left(\frac{R}{2}\right) \sim 22 \text{ G}$

Fig. IV.2: Disposition des bobines autour de la cuve. Elles permettent d'engendrer un champ magnétique relativement homogène sur l'ensemble du volume de l'écoulement.

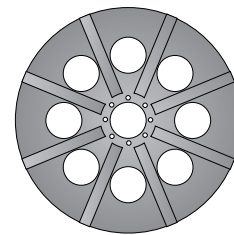
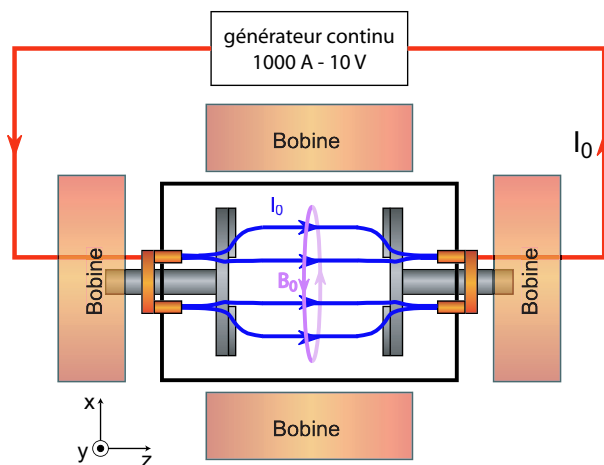
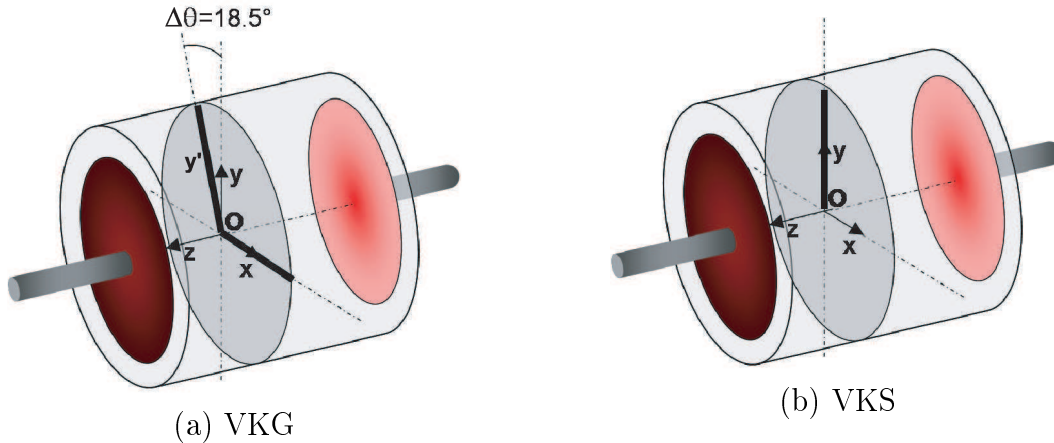


Fig. IV.4: Disque d'entraînement en champ toroïdal appliqué.

Fig. IV.3: Montage permettant de créer un champ appliqué azimuthal (vue de dessus.)



**Fig. IV.5:** Le lieu des points accessibles pour les mesures de champ magnétique induit est représenté par l'épaisse ligne noire.

La valeur maximale du champ magnétique appliqué est donc de l'ordre de  $B_0^{max} = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi R}$ . L'utilisation d'une source de courant de 10 kW capable de débiter une intensité continue de 1000 A (modèle POWER-TEN-P63D-101000) permet alors de produire un champ appliqué de l'ordre de 20 G. Compte tenu des contraintes pratiques liées à la réalisation de ce montage, le champ appliqué n'est pas rigoureusement axisymétrique. Les principales nuisances magnétiques viennent du champ magnétique terrestre et du champ parasite produit par les fils amenant le courant axial. L'ensemble de ces effets produit un champ parasite dont l'amplitude est de l'ordre de 1 G.

**Mesures du champ induit.** Pour les deux expériences, les mesures de champ magnétiques sont effectuées à l'aide de sondes à effet Hall compensées en température. Le signal qu'elles délivrent est mesuré à l'aide d'un gaussmètre FW-Bell 9953 à 3 voies dont les sorties analogiques sont reliées au système d'acquisition. La résolution spatiale des capteurs Hall est de l'ordre de 3 mm et la gamme de fréquences accessibles est de 0 Hz (continu) à 400 Hz.

Dans l'expérience VKG, les mesures peuvent être réalisées en tout point du demi-axe  $Ox$  (pour  $x > 0$ ) et en tout point d'un demi-axe  $Oy'$  faisant un angle de  $\Delta\theta=18.5^\circ$  avec l'axe  $Oy$  (figure IV.5a). Le capteur magnétique est placé dans un doigt de gant coulissant dont la profondeur peut être réglée, à 5 mm près, entre  $r=2$  cm et  $r=10$  cm (le capteur se trouve alors au niveau de la paroi). Les mesures dans VKG que nous présenterons ont été obtenues à l'aide de deux sondes à effet Hall à un axe, de telle sorte que seules deux composantes du champ induit étaient alors simultanément accessibles. Dans l'expérience VKG, des mesures de différence de potentiel électrique induit entre les deux extrémités de la cuve peuvent également être réalisées grâce aux mêmes électrodes qui servent à amener le courant axial, représentées sur la figure IV.3. Ces mesures sont faites à l'aide d'un micro-voltmètre Schlumberger 7061 donnant directement la valeur moyenne de la différence de potentielle (le signal n'est pas enregistré à l'acquisition.)

Dans l'expérience VKS, seules des mesures de champ magnétique induit sur l'axe  $Oy$  sont disponibles pour le moment (figure IV.5b). Un doigt de gant coulissant permet de régler la position de la sonde à 1 cm près entre 4 cm et 20 cm de l'axe  $Oz$ . Les mesures dans VKS ont été obtenues à l'aide d'une sonde à effet Hall à trois axes donnant simultanément

les mesures des trois composantes du champ magnétique.

**Remarque.** La question se pose de savoir dans quelle mesure la présence du doigt de gant contenant le capteur magnétique affecte l'écoulement. Des observations dans l'expérience en eau, au CEA de Saclay, indiquent qu'elle est sans effet notable en régime contra-rotatif. Cette conclusion est en revanche moins évidente dans le cas d'un régime à un disque où des différences sensibles sur les mesures de couples au niveau du disque fixe sont obtenues [59]. Nous admettrons néanmoins dans la suite que l'écoulement moyen reste correctement décrit par l'image habituelle des boucles de recirculation et de la rotation.

## IV.1.2 Les paramètres de contrôle et la réponse magnétique

### IV.1.2.1 Analyse dimensionnelle

Le problème de l'induction magnétique est décrit dans le cas général par le système d'équations

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{B}_i - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_i) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}_i &= \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}_0 + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \partial_t \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho \mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} & \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned}$$

Les grandeurs définissant le problème sont donc au nombre de 8 : la vitesse (on note  $U$  une valeur caractéristique du champ de vitesse), le champ magnétique appliqué ( $B_0$ ), le champ magnétique induit (on note  $\mathcal{B}_{ind}$  sa valeur typique), le rayon du cylindre ( $R$ , nous supposons le rapport d'aspect fixé), la viscosité du fluide ( $\nu$ ), sa densité ( $\rho$ ), sa diffusivité magnétique ( $\lambda$ ) et sa perméabilité magnétique ( $\mu_0$ ). À cause de l'incompressibilité, la pression n'est rien d'autre qu'une fonction de la vitesse et du champ magnétique et ne constitue pas à proprement parler une grandeur de plus. L'ensemble de ces grandeurs ne fait intervenir que quatre unités indépendantes : une unité de longueur, une unité de temps, une unité de masse et une unité de courant électrique. D'après le théorème Pi [6], on peut donc définir une relation entre 4 nombres sans dimension, par exemple :

$$\begin{aligned} R_m^i &= \frac{\mathcal{B}_{ind}}{B_0} && \text{nombre de Reynolds magnétique intrinsèque,} \\ R_m &= \frac{UR}{\lambda} && \text{nombre de Reynolds magnétique,} \\ N &= \frac{B_0^2 R}{\mu_0 \lambda \rho U} && \text{paramètre d'interaction,} \\ Re &= \frac{UR}{\nu} && \text{nombre de Reynolds.} \end{aligned} \tag{IV.3}$$

La plupart de ces nombres ont déjà été introduits précédemment. Dans les paragraphes suivants, nous les présentons et discutons en les replaçant dans le contexte de l'étude expérimentale de l'induction magnétohydrodynamique.

### IV.1.2.2 La réponse magnétique : le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque

La relation entre ces nombres sans dimension peut s'écrire :

$$R_m^i = f(R_m, N, Re). \quad (\text{IV.4})$$

Le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque caractérise la capacité de l'écoulement à amplifier un champ magnétique appliqué et la fonction  $f$  constitue la réponse magnétique de l'écoulement en fonction des trois autres paramètres  $(R_m, N, Re)$ , qui jouent alors le rôle de paramètres de contrôle.

Dans les expériences, nous mesurons le champ magnétique induit en un point de l'écoulement. On obtient ainsi une mesure locale du nombre de Reynolds intrinsèque où  $B_{ind}$  est défini comme la valeur mesurée du champ induit au point de l'écoulement où se trouve le capteur magnétique.

En l'absence d'instabilité dynamo,  $R_m^i$  reste en général au plus de l'ordre de 1, et  $B_{ind}$  de l'ordre de grandeur de  $B_0$ . Ceci ressort clairement de l'étude numérique du chapitre précédent et sera corroboré par l'étude expérimentale proposée dans ce chapitre. Nous allons à présent décrire les trois paramètres de contrôle, et leur importance du point de vue expérimental.

### IV.1.2.3 Le nombre de Reynolds magnétique

Comme nous l'avons signalé au chapitre 2, le nombre de Reynolds magnétique,  $R_m$ , est un nombre sans dimension comparant l'importance relative des effets inductifs et des pertes par effet Joule dans le fluide conducteur. Dans la mesure où l'on souhaite, dans nos expériences, mettre en évidence des effets d'induction, il est important de pouvoir atteindre des régimes à hauts nombres de Reynolds magnétiques.

Afin de faire du nombre de Reynolds magnétique un nombre sans dimension, directement contrôlable et ajustable par l'expérimentateur, il faut donner une définition précise de la vitesse *typique*  $U$  de l'écoulement. Nous utiliserons donc dans la suite une définition de  $R_m$  basée sur la valeur maximale  $U_{max}$  du champ de vitesse de l'écoulement :

$$R_m = \frac{U_{max} R}{\lambda}. \quad (\text{IV.5})$$

D'après [76], la valeur maximale atteinte peut s'écrire simplement en fonction de  $\Omega$ , la fréquence de rotation des disques entraînant le fluide (exprimée en hertz), sous la forme :

$$U_{max} = 2\pi \mathcal{V} R \Omega, \quad (\text{IV.6})$$

où  $\mathcal{V}$  est un nombre sans dimension, appelé *facteur de vitesse*, qui ne dépend que de la nature et de la géométrie des disques entraînant le fluide.

**Remarque.** Une façon équivalente de voir les choses consiste à définir l'efficacité des disques entraînant le fluide comme le rapport de la vitesse maximale atteinte par le fluide à la vitesse maximale des disques (ie. la vitesse au bord des disques) :  $E_f = \frac{U_{max}}{2\pi R_d \Omega}$  où  $R_d$  est le rayon des disques (qui est nécessairement inférieur au rayon  $R$  de la cuve.) Le facteur de vitesse est alors simplement

donné par  $\mathcal{V} = E_f \frac{R_d}{R}$ , il est donc directement relié à l'efficacité de l'entraînement du fluide par la rotation des disques.

Le nombre de Reynolds magnétique prend alors la forme

$$R_m = \frac{2\pi\mathcal{V}R^2\Omega}{\lambda}. \quad (\text{IV.7})$$

Le facteur  $\mathcal{V}$  dépend fortement de la nature et de la géométrie des disques utilisés pour l'entraînement du fluide. Pour des disques lisses dont le rayon vaut 92,5% du rayon de la cuve,  $\mathcal{V} = 0.25$  ([76]). L'utilisation de disques avec pales est indispensable pour un bon entraînement. La valeur précise de  $\mathcal{V}$  dépend alors de la forme et des dimensions des pales. Une étude détaillée de l'influence de la géométrie des pales des disques sur l'écoulement est proposée dans [57][76]. Comme nous le verrons plus loin, du fait de la limitation de la puissance mécanique disponible par les moteurs, le facteur de vitesse n'est pas le seul paramètre pertinent pour l'étude de l'influence de la nature des disques sur le nombre de Reynolds magnétique (voir §IV.1.4.3.)

#### IV.1.2.4 Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre purement hydrodynamique comparant la dissipation visqueuse dans l'écoulement et le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes. Il caractérise l'importance du transport d'énergie mécanique vers les petites échelles turbulentes.

Dans le cadre de l'étude des métaux liquides, une expression pertinente de  $Re$  est donnée par

$$Re = \frac{R_m}{P_m}, \quad (\text{IV.8})$$

où  $P_m$  est un autre nombre sans dimension appelé nombre de Prandtl magnétique. Il s'écrit simplement comme le rapport de la viscosité  $\nu$  à la diffusivité magnétique  $\lambda$  du milieu :

$$P_m = \frac{\nu}{\lambda}. \quad (\text{IV.9})$$

Il s'agit donc d'un paramètre intrinsèque du fluide. Une propriété commune à tous les métaux en fusion est de posséder un très faible nombre de Prandtl magnétique (de l'ordre de  $10^{-5} - 10^{-6}$ .) Ceci traduit le fait que la diffusion de quantité de mouvement dans le milieu est beaucoup plus lente que la diffusion du champ magnétique. De façon imagée, on peut dire que le champ magnétique est très visqueux et son transport par l'écoulement est beaucoup moins efficace que le transport de quantité de mouvement.

La faible valeur du nombre de Prandtl magnétique des liquides en fusion, implique que, pour des régimes de hauts  $R_m$ , nécessaires à l'observation d'effets inductifs et éventuellement de l'instabilité dynamo, le nombre de Reynolds de l'écoulement sera toujours supérieur à  $10^5 - 10^6$ , de telle sorte que le régime hydrodynamique sera a priori fortement turbulent (un autre point de vue consiste à dire que, puisque le nombre de Prandtl des liquides métalliques est si faible et que donc le transport du champ magnétique par l'écoulement est si peu efficace, il est nécessaire d'avoir un écoulement très intense pour que ce transport donne lieu à des effets d'induction importants.)

L'écoulement réel ne peut donc être décrit simplement avec le champ de vitesse moyen à grande échelle, modélisé par la rotation globale et la recirculation centrifuge. À cet écoulement moyen à grande échelle viennent se superposer de fortes fluctuations turbulentes et des structures aux petites échelles. Ces fluctuations sont naturellement transmises au champ magnétique induit et le rôle de la turbulence sur les effets d'induction doit être considéré.

Pour cela nous écrirons les champs sous la forme d'une décomposition de Reynolds en champ moyen à grande échelle et fluctuations aux petites échelles :

$$\vec{u} = \vec{u}_m + \vec{u}_f, \quad (\text{IV.10})$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m + \vec{B}_f. \quad (\text{IV.11})$$

#### IV.1.2.5 Le paramètre d'interaction

Le paramètre d'interaction  $N$  est un nombre sans dimension comparant l'importance relative de la force de Lorentz et des forces hydrodynamiques. Dans le cadre de l'étude d'écoulements turbulents, ce nombre s'écrit usuellement  $N = \frac{B_0^2 R}{\mu_0 \lambda \rho U^2}$ . Afin de bien comprendre l'origine et le sens physique de cette expression, il faut expliquer comment ce nombre est construit par un calcul d'ordre de grandeur du rapport des forces magnétiques au terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes (qui domine tous les autres termes hydrodynamiques en régime turbulent.) Ce rapport s'écrit

$$N = \frac{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu_0 \rho} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right)}{\mathcal{O}\left((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}\right)}. \quad (\text{IV.12})$$

Afin d'estimer le numérateur de cette expression, nous devons distinguer deux cas, selon que le champ appliqué  $\vec{B}_0$  est à rotationnel nul ou pas. Une estimation de l'ordre de grandeur du numérateur donne, compte tenu du fait que  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$  avec  $\mathcal{B}_{ind} = R_m^i B_0$ , et en supposant que l'échelle typique d'évolution du champ magnétique est l'échelle intégrale  $R$  :

$$N = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\mu_0 \rho} (1 + R_m^i)^2 B_0^2}{R} & \text{si } \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \neq \vec{0}, \\ \frac{\frac{1}{\mu_0 \rho} R_m^i B_0^2}{R} & \text{si } \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \vec{0}. \end{cases}$$

L'estimation du dénominateur donne simplement  $\frac{U^2}{R}$ . On en déduit les expressions suivantes pour  $N$

$$N = \begin{cases} \frac{(1 + R_m^i)^2 B_0^2}{\mu_0 \rho U^2} & \text{si } \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \neq \vec{0}, & (\text{a}) \\ \frac{R_m^i B_0^2}{\mu_0 \rho U^2} & \text{si } \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \vec{0}. & (\text{b}) \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Pour les régimes où le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment faible pour

que  $\mathcal{B}_{ind}$  reste petit devant  $B_0$  et linéaire en  $R_m$ , alors  $R_m^i \propto R_m$  et on écrira simplement

$$N = \begin{cases} \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho U^2} & \text{si } \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \neq \vec{0}, & \text{(a)} \\ R_m \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho U^2} = \frac{B_0^2 R}{\mu_0 \lambda \rho U} & \text{si } \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \vec{0}. & \text{(b)} \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

L'expression (IV.14a) s'applique notamment lorsque le champ appliqué résulte de la circulation d'un courant électrique  $\vec{j}_0$  dans le fluide conducteur, car alors  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 \neq \vec{0}$ . C'est le cas par exemple de la configuration de VKG en champ toroïdal appliqué. Dans ce cas, la force de Lorentz dominante est celle due à l'action de  $\vec{j}_0$  sur son propre champ  $\vec{B}_0$ .

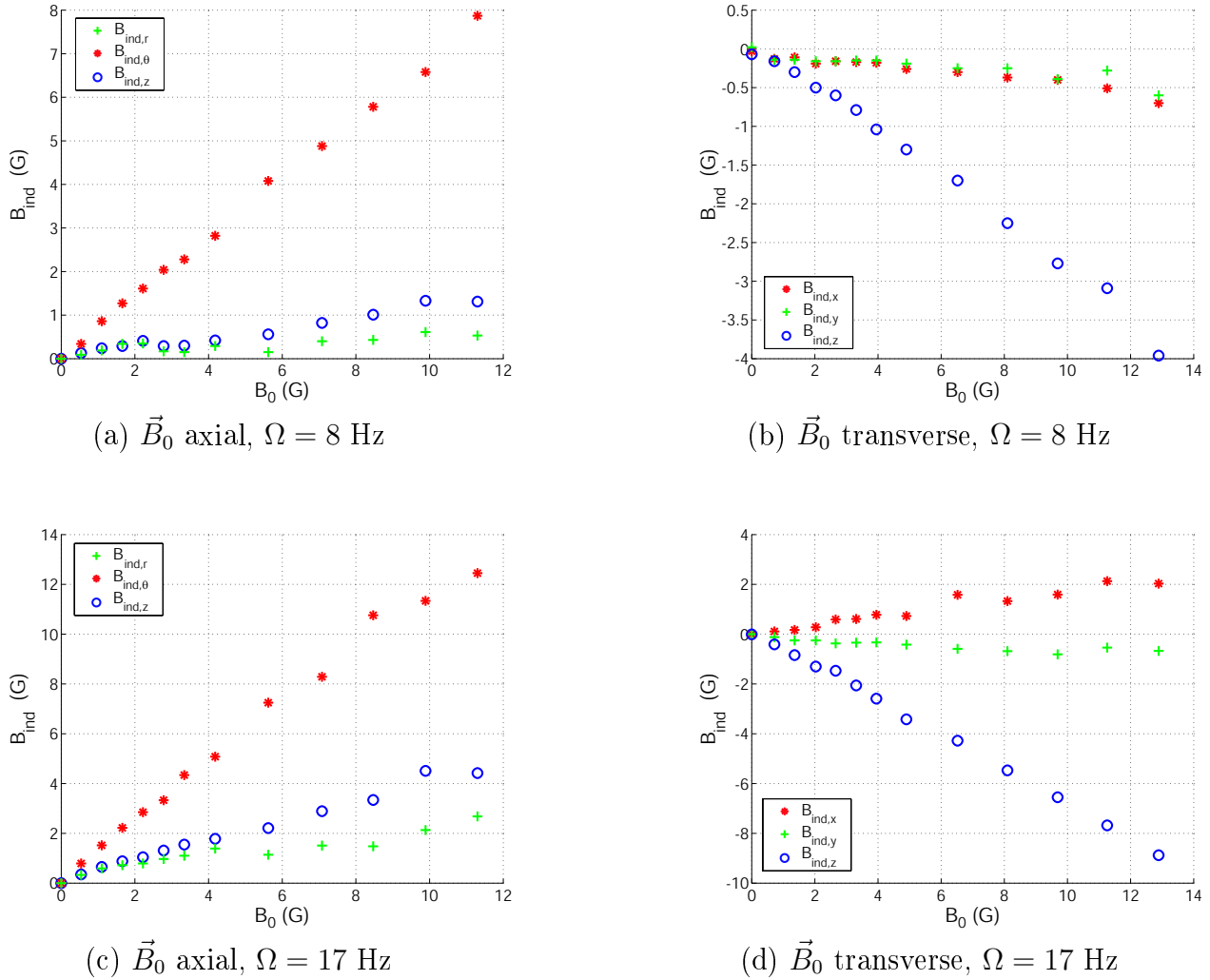
Dans tous les autres cas où les sources du champ magnétique appliqué sont extérieures à l'écoulement, l'expression (IV.14b) est la plus adaptée (c'est d'ailleurs cette expression que l'on retrouve le plus souvent dans la littérature.) C'est notamment le cas des configurations en champ axial ou transverse où  $\vec{B}_0$  est créé par des bobines extérieures à l'écoulement et n'est donc associé à aucun courant appliqué, circulant directement dans le fluide. Dans ce cas, la force de Lorentz dominante est celle due à l'action des courants électriques induits  $\vec{j}_{ind} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_{ind}$  sur  $\vec{B}_0$ .

Dans tous les cas, le paramètre d'interaction est directement relié au rapport de l'énergie magnétique injectée ( $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$ ) à l'énergie mécanique ( $\frac{\rho U^2}{2}$ ) dans le système. Comme nous le verrons par la suite, pour les expériences que nous considérerons, en champ toroïdal appliqué (cas où  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \neq \vec{0}$ )  $R_m^i \ll 1$  et en champ axial ou transverse appliqué (cas où  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \vec{0}$ )  $R_{m,max}^i \sim 1$ , de telle sorte que le paramètre d'interaction peut toujours être majoré par  $N < \frac{B_0^2}{\rho \mu_0 U^2}$ .

**Remarque.** Nous avons défini ici le paramètre d'interaction comme le nombre sans dimension comparant le terme non-linéaire  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$  de l'équation de Navier-Stokes à la force de Lorentz. Ce choix vient du fait que, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le régime d'un écoulement von Kármán pour un métal liquide à  $R_m > 1$  est forcément turbulent. Le terme non-linéaire domine alors tous les autres termes hydrodynamiques. Dans d'autres situations, il faudrait utiliser une définition adaptée du paramètre d'interaction, comparant le terme de dissipation visqueuse à la force de Lorentz, par exemple, pour un régime laminaire, ou bien encore la force de Coriolis à la force de Lorentz pour des systèmes en rotation globale (on parle alors généralement de nombre d'Elsasser) comme c'est le cas pour l'étude de la géodynamo. Cette remarque est essentielle pour l'étude de la saturation des dynamos fluides [75].

L'importance de ce nombre en tant que paramètre de contrôle expérimental, vient du fait qu'il permet de contrôler l'influence du champ magnétique sur l'écoulement. Comme nous l'avons déjà discuté au §II.1.4, ce couplage entre le champ magnétique et le champ de vitesse rend le problème complet de l'induction en général, et de l'instabilité dynamo en particulier, très complexe. Dans la mesure où l'on ne s'intéresse ici qu'à l'étude de la possibilité d'avoir une croissance dynamo à partir d'une faible perturbation (bifurcation super-critique) et non pas aux mécanismes de saturation de cette instabilité, nous nous placerons dans des régimes de faibles nombres d'interaction. Il suffit pour cela de travailler





**Fig. IV.6:** Linéarité de  $\vec{B}_{ind}$  en fonction de  $\vec{B}_0$  pour différentes configurations de champ appliqué et de fréquence de rotation  $\Omega$  en régime contra-rotatif

avec des champs appliqués suffisamment faibles. Les champs utilisés dans nos expériences varient typiquement entre quelques gauss et quelques dizaines de gauss ( $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ .) Le paramètre d'interaction résultant varie alors dans la gamme  $10^{-2} - 10^{-5}$ .

Dans ces régimes de paramètres d'interaction, le champ de vitesse  $\vec{u}$  peut être supposé donné et non perturbé par la présence du champ magnétique. C'est l'équivalent expérimental des simulations numériques cinématiques. Le champ induit est alors simplement solution de l'équation d'induction avec le terme source  $R_m \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}_0)$ . Le champ de vitesse étant alors une donnée du problème, le champ induit doit nécessairement être une fonction linéaire de  $\vec{B}_0$ . Cette propriété permet de tester la validité de l'hypothèse de faible paramètre d'interaction. Les figures IV.6a, b, c et d représentent l'évolution du champ induit en fonction du champ appliqué dans l'expérience VKS, dans les différentes configurations expérimentales étudiées. Cette évolution est bien linéaire, ce qui valide l'hypothèse cinématique de l'étude.

### IV.1.3 Bilan

Pour l'étude des effets d'induction, le seul vrai paramètre de contrôle est le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$ . Les nombres de Reynolds et le paramètre d'interaction sont, dans ces expériences, dans des limites infinies où nulles, de telle sorte que, en faisant une hypothèse de similarité de première espèce [6], la fonction  $f$  reliant le nombre de Reynolds intrinsèque  $R_m^i$  aux trois autres nombres sans dimension ne dépend que de  $R_m$  :

$$R_m^i = f(R_m, R_e \rightarrow \infty, N \rightarrow 0) = f(R_m) \quad (\text{IV.15})$$

Afin d'observer des effets inductifs intenses, il s'agit maintenant d'être capable d'atteindre dans les expériences des nombres de Reynolds magnétiques aussi élevés que possible. Le nombre de Reynolds magnétique est directement pilotable par l'expérimentateur. L'expression IV.7 montre que plusieurs grandeurs peuvent être ajustées pour augmenter le nombre de Reynolds magnétique d'une expérience :

- la fréquence de rotation des moteurs (c'est le paramètre le plus facile à changer, et il permet d'étudier facilement l'évolution de l'induction en fonction de  $R_m$ , à l'image de l'étude numérique du chapitre précédent) ;
- le facteur de vitesse  $\mathcal{V}$  : il s'agit alors d'optimiser la géométrie des disques entraînant le fluide ;
- la taille de l'expérience ;
- la diffusivité magnétique du milieu : il s'agit alors d'utiliser un fluide aussi bon conducteur que possible (c'est là tout l'intérêt du sodium, qui est le meilleur conducteur liquide).

Nous abordons dans la section suivante la question de l'optimisation d'une expérience d'induction pour l'obtention de hauts nombres de Reynolds magnétiques.

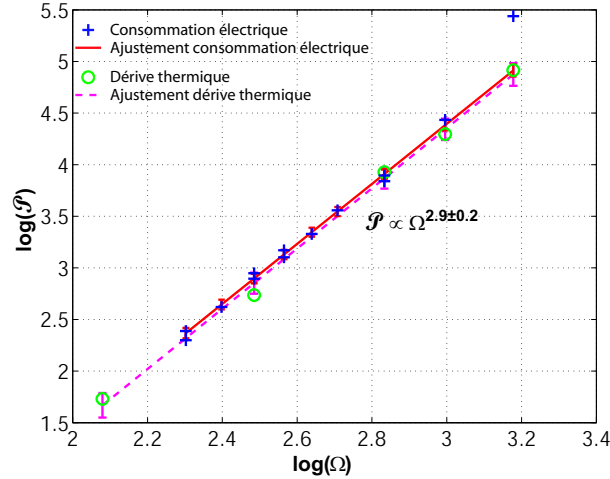
### IV.1.4 Obtention expérimentale de hauts nombres de Reynolds magnétiques

L'expression (IV.7) semble suggérer que la meilleure façon d'augmenter le nombre de Reynolds magnétique d'une expérience consiste à augmenter la taille de l'expérience et qu'il suffit de doubler la taille du système pour gagner un facteur quatre sur la plage de nombres de Reynolds magnétiques accessibles. Nous allons voir que cette conclusion est en réalité inexacte (elle ne serait vraie que si la puissance mécanique disponible au niveau des moteurs était illimitée!)

#### IV.1.4.1 Puissance dissipée dans l'écoulement-Mesures directes

Dans un écoulement turbulent, la puissance mécanique injectée à grande échelle par la rotation des disques est dissipée aux petites échelles où les effets de la viscosité deviennent importants. Par analyse dimensionnelle, on peut montrer que, dans un régime turbulent, la puissance dissipée dans l'écoulement s'écrit simplement en fonction de la fréquence de rotation des disques sous la forme

$$\mathcal{P} = f(Re)\rho R^5 \Omega^3. \quad (\text{IV.16})$$



**Fig. IV.7:** Dépendance en  $\Omega$  de la puissance dissipée dans l'écoulement de von Kármán.

Dans la limite des grands nombres de Reynolds, et pour des disques à pales, la fonction  $f(Re)$  est constante [64], on écrira alors simplement

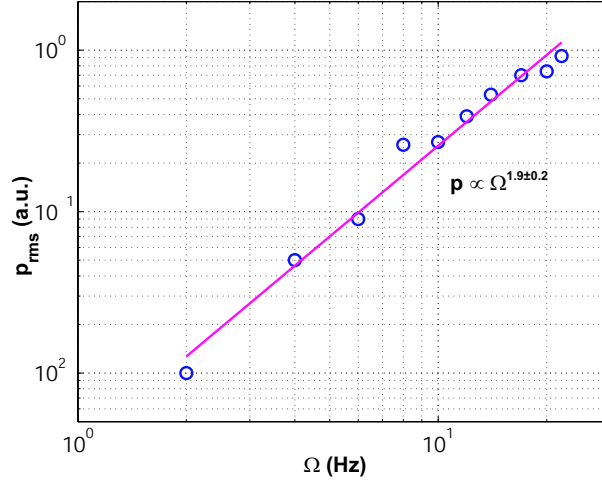
$$\mathcal{P} = K_p \rho R^5 \Omega^3, \quad (\text{IV.17})$$

où  $K_p$  est une constante, appelée *facteur de puissance*, qui dépend uniquement de la géométrie de la cuve et des disques entraînant le fluide. La figure IV.7 représente des mesures typiques de la puissance moyenne consommée dans l'expérience VKS utilisant les turbines TM60 (voir le tableau IV.1 plus loin), en fonction de la fréquence de rotation des disques. Les mesures présentées sont constituées de deux séries de points obtenues, l'une par mesure de la puissance électrique consommée par les moteurs (dans la plage d'utilisation, l'efficacité des moteurs est constante et voisine de 1), l'autre par mesure de la dérive thermique dans l'écoulement. Les deux mesures sont compatibles entre elles et en très bon accord avec la loi en  $\Omega^3$  prédite par l'analyse dimensionnelle. Par ailleurs, le facteur de puissance obtenu  $K_p = 34$ , est en très bon accord avec les mesures en eau réalisées au CEA de Saclay [76], utilisant une expérience en eau de même rapport d'aspect que l'expérience VKS et utilisant des turbines de géométrie identique (ces mesures conduisent à  $K_p = 31$ .)

#### IV.1.4.2 Fluctuations de pression et de vitesse

Une vision directe du caractère turbulent de l'écoulement est donnée par l'enregistrement du signal de pression. Nous avons déjà mentionné au §I.4.2 l'existence de fortes fluctuations de pression présentant d'intenses dépressions caractéristiques de structures filamenteuses dans l'écoulement VKS (figure I.16a et b.) Nous avons également constaté que le spectre de pression est en accord avec la phénoménologie de Kolmogorov 41 pour la turbulence et présente un régime inertiel avec une décroissance en  $f^{-7/3}$ .

Nous complétons ici l'analyse des propriétés des fluctuations de pression par l'étude de la dépendance de l'amplitude de ces fluctuations (donnée par leur moyenne quadratique) en fonction de la fréquence de rotation des disques. La figure IV.8 montre l'évolution de la valeur quadratique moyenne de la pression,  $p_{rms}$ , mesurée en fonction de la fréquence de rotation des disques dans l'expérience VKS utilisant les disques TM60. Cette évolution



**Fig. IV.8:** Dépendance en  $\Omega$  de la valeur quadratique moyenne des fluctuations de pression.

suit une loi de type  $p_{rms} \propto \Omega^2$  en accord avec des considérations dimensionnelles qui permettent d'écrire

$$u_{rms} = f(Re)R\Omega \quad (IV.18)$$

$$p_{rms} = g(Re)\frac{1}{2}\rho u_{rms}^2. \quad (IV.19)$$

L'étude d'un écoulement de von Kármán en eau [64], a montré que les fonctions  $f(Re)$  et  $g(Re)$  pouvaient être considérées comme constantes dans la limite des grands nombres de Reynolds et lorsque les disques entraînant le fluide sont munis de pales. Par ailleurs, cette étude a également montré qu'en régime turbulent, la moyenne quadratique de pression à la paroi constitue un bon indicateur du couple moyen  $\Gamma$  transmis à l'écoulement par les moteurs. Les deux grandeurs sont alors reliées selon la loi

$$\Gamma \propto R^3 p_{rms}. \quad (IV.20)$$

Ce lien provient du fait qu'en régime turbulent, le couple résistant exercé par le fluide sur les disques résulte essentiellement des fluctuations des forces de pression au niveau du disques et des pales. On en déduit alors que le couple moyen dépend quadratiquement de la vitesse de rotation des disques selon une loi de la forme

$$\Gamma \propto \rho R^5 \Omega^2. \quad (IV.21)$$

Compte-tenu de la relation  $\mathcal{P} = \Gamma\Omega$  entre le couple transmis  $\Gamma$  et la puissance mécanique  $\mathcal{P}$  injectée dans l'écoulement par les moteurs, cette mesure est en accord avec la mesure directe de puissance donnant une dépendance cubique de  $\mathcal{P}$  en fonction de  $\Omega$  (IV.17).

**Remarque.** La relation  $p_{rms} \sim \frac{1}{2}\rho u_{rms}^2$  permet d'estimer le taux de turbulence  $K_u$  de l'écoulement comme le rapport de l'écart quadratique moyen de la vitesse par la vitesse moyenne caractéristique donnée à la vitesse d'éjection du fluide au bord des disques en rotation :

$$K_u = \frac{u_{rms}}{2\pi R\Omega} \sim \frac{\sqrt{2p_{rms}/\rho}}{2\pi R\Omega} \sim 0.42. \quad (IV.22)$$

### IV.1.4.3 Conséquence sur les expériences d'induction

Il ressort donc de l'étude, purement hydrodynamique, de la consommation de puissance pour l'entraînement d'un écoulement de von Kármán turbulent, que  $\mathcal{P} = K_p \rho R^5 \Omega^3$ . Dans un dispositif expérimental, équipé de moteurs capables de délivrer une puissance maximale  $\mathcal{P}_{max}$ , la fréquence de rotation maximale qu'il est possible d'atteindre est alors

$$\Omega_{max} = \left( \frac{\mathcal{P}_{max}}{K_p \rho R^5} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{IV.23})$$

Pour une puissance mécanique maximale donnée (par le modèle du moteur utilisé), si l'on augmente la taille de la cuve, en vue d'augmenter le nombre de Reynolds magnétique comme le suggère la relation (IV.7), on diminue considérablement par la même occasion la fréquence de rotation maximale des disques, ce qui limite alors l'augmentation du nombre de Reynolds magnétique. Cette évolution antagoniste vient du fait que la relation (IV.7) ne tient pas compte de la limitation en puissance des moteurs entraînant le fluide. Une expression plus pertinente pour l'estimation du nombre de Reynolds magnétique maximal doit s'écrire non pas en fonction de  $\Omega_{max}$  mais en fonction de  $\mathcal{P}_{max}$  (qui est le vrai facteur mécanique limitant) :

$$R_m^{max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\mathcal{V}}{K_p^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{\mathcal{P}_{max} R}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{IV.24})$$

Contrairement à ce que suggérerait la relation IV.7, du fait de la limitation en puissance des moteurs, augmenter d'un facteur quatre la plage de  $R_m$  accessible, requiert de multiplier par soixante quatre la taille de l'expérience ! Sachant que le rayon de la cuve de l'expérience au gallium (VKG), permettant d'atteindre  $R_m \sim 5$ , est de 10 cm, il faudrait un dispositif de 13 m de diamètre pour atteindre  $R_m \sim 20$  (à puissance des moteurs égale) !

L'exposant  $\frac{1}{3}$  de la relation IV.24 est donc très pénalisant : il est extrêmement coûteux d'augmenter significativement le nombre de Reynolds magnétique d'une expérience en ne modifiant que sa taille ou la puissance moteur disponible. L'expression IV.24 montre que la meilleure façon d'augmenter le nombre de Reynolds consiste à :

- utiliser un fluide dont la diffusivité magnétique est la plus faible (c'est-à-dire un aussi bon conducteur que possible). Le métal liquide le plus conducteur est le sodium. C'est la raison pour laquelle toutes les expériences à hauts nombres de Reynolds magnétiques utilisent du sodium liquide. Nous présentons au §IV.1.4.4 une comparaison détaillée de l'expérience VKG (utilisant du gallium) et de l'expérience VKS (utilisant du sodium.)
- il est également avantageux d'augmenter le facteur  $\frac{\mathcal{V}}{K_p^{\frac{1}{3}}}$ . Ce nombre, appelé nombre de *MaDo* [57], dépend uniquement de la géométrie des disques et de la cuve. Il représente le rendement hydrodynamique du système cuve-turbines : plus le nombre de *MaDo* est grand, plus la turbine entraîne rapidement le fluide pour une moindre consommation de puissance [76]. Nous avons utilisé, dans les expériences présentées dans ce chapitre, les disques décrits dans le tableau IV.1. Les disques utilisés sont tous munis de pales, condition indispensable pour un bon entraînement du fluide.

TM60 (VKS)	TM28p (VKS)	TM70 (VKS)	TM80 (VKG)
$R_d=18.5$ cm (92.5% $R$ )	$R_d=15$ cm (75% $R$ )	$R_d=15$ cm (75% $R$ )	$R=8.2$ cm (84% $R$ )
pales courbes $\alpha = 72^\circ$ $h=4$ cm	pales courbes $\alpha = 57^\circ$ $h=1$ cm	pales droites $\alpha = 90^\circ$ $h=1$ cm	pales droites $\alpha = 90^\circ$ $h=1$ cm
$MaDo = 0.24$	$MaDo = ?$	$MaDo = 0.23$	$MaDo = 0.25$
$\mathcal{V} = .58$	$\mathcal{V} = ?$	$\mathcal{V} = 0.52$	$\mathcal{V} = 0.67$

**Tab. IV.1:** Différents types de turbines utilisées dans les expériences VKS et VKG (données de [76]). Les valeurs des nombres de  $MaDo$  sont telles que  $\mathcal{P}_{max}$  désigne la puissance maximale disponible pour chaque disque (11 kW dans VKG et 75 kW dans VKS).

Dans ce cas, le nombre de  $MaDo$  dépend de la géométrie et des dimensions des pales, mais il reste comparable pour toutes les turbines utilisées.

**Remarque sur le choix des turbines dans VKS et VKG.** Une étude numérique de dynamo cinématique en géométrie cylindrique périodique en  $z$  [57], avait suggéré l'utilisation d'un type de turbines, nommé TM28, dont l'écoulement moyen en régime contra-rotatif donne lieu, numériquement, à l'instabilité dynamo. Les disques TM28 devaient faire un rayon de 92.5% du rayon  $R$  de la cuve, et être munis des pales courbes (de hauteur  $0.2R$ ) faisant un angle de sortie  $\alpha=57^\circ$  (l'angle de sortie est l'angle que font les pales à l'extrémité du disque avec la tangente au disque ; pour des disques à pales droites  $\alpha=90^\circ$ ). L'utilisation de pales courbes permet en particulier d'augmenter le rapport  $P/T$  du champ de vitesse moyen. Comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, il s'agit d'un paramètre particulièrement sensible à l'existence ou non de l'instabilité. Il est de l'ordre de 0.8 pour les disques TM28. Suite à une erreur lors de la fabrication des disques TM28, l'angle de sortie des turbines effectivement utilisées dans les premières campagnes de l'expérience VKS était de  $72^\circ$  (au lieu de  $57^\circ$ ). D'après le même code cinématique périodique, l'écoulement moyen engendré par ces turbines, nommées TM60, ne conduit pas en général à une dynamo (à moins de supposer qu'une certaine épaisseur de sodium au repos entoure l'écoulement). La réalisation de turbines à pales courbes de grand diamètre étant particulièrement complexe, nous n'avons pu tester pour le moment, dans l'expérience VKS, que des turbines semblables aux TM28 initialement prévues, mais de diamètre inférieur (75% du diamètre de la cuve au lieu de 92.5%), que nous désignerons par TM28p. Enfin, des turbines à pales droites (TM70) plus simples à réaliser et offrant un bon entraînement ont également été utilisées. Parmi les turbines étudiées expérimentalement dans VKS, aucune ne correspond donc à une configuration ayant été précisément identifiée comme numériquement favorable à la dynamo. Les expériences réalisées ont en revanche permis d'étudier et d'identifier des mécanismes d'induction intéressants et potentiellement favorables à l'instabilité dynamo pour les régimes à hauts  $R_m$ . Dans l'expérience VKG, nous avons utilisé des disques à pales droites (TM80) permettant également une étude approfondie de l'induction magnétohydrodynamique dans les régimes à  $R_m$  modérés (typiquement inférieurs à 5). L'utilisation de disques à pales droites permet par ailleurs d'explorer le comportement de l'induction pour les deux sens de rotation des disques, et donc de vérifier certaines propriétés de symétrie prévues par l'étude du §I.7.1.

	Symbole (unité)	Gallium <sup>1</sup>	Sodium <sup>2</sup>
Numéro atomique	-	31	11
Masse volumique	$\rho$ (kg·m <sup>-3</sup> )	6.1·10 <sup>3</sup>	9.25·10 <sup>2</sup>
Point de fusion	$T_f$ (°C)	29.8	97.8
Viscosité cinématique	$\nu$ (m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup> )	3·10 <sup>-7</sup>	6·10 <sup>-7</sup>
Conductivité	$\sigma$ (S·m <sup>-1</sup> )	3.9·10 <sup>6</sup>	8.3·10 <sup>6</sup>
Diffusivité magnétique	$\lambda = \frac{1}{\mu_0\sigma}$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	0.21	9.5·10 <sup>-2</sup>
Prandtl magnétique	$P_m = \frac{\nu}{\lambda}$	1.4·10 <sup>-6</sup>	6.2·10 <sup>-6</sup>

(1) : données de [12]; (2) : données de [22].

**Tab. IV.2:** Principales propriétés physiques du gallium (à 30°C) et du sodium (à 150°C).

#### IV.1.4.4 Comparaison des expériences VKG et VKS

**Gallium vs sodium.** Le tableau IV.2 rappelle les principales propriétés physiques du gallium et du sodium. Outre sa très bonne conductivité, le gallium présente le grand intérêt d'avoir un point de fusion  $T_f$  relativement bas et d'être relativement inerte d'un point de vue chimique. Il permet donc une manipulation sans danger et une réalisation d'un dispositif expérimental simple et flexible. Toutefois, sa conductivité n'est pas suffisante pour permettre d'atteindre raisonnablement des nombres de Reynolds magnétiques supérieurs à 5, d'autant plus que, d'après l'expression IV.24, sa grande masse volumique est également pénalisante en ce qui concerne  $R_m$ . Par ailleurs, le gallium reste un élément extrêmement coûteux.

Le sodium présente l'énorme intérêt d'être le métal liquide connu offrant la plus grande conductivité. Il est deux fois plus conducteur que le gallium et six fois plus léger, de telle sorte que toutes choses égales par ailleurs, une expérience au sodium permet d'atteindre des nombres de Reynolds magnétiques 3.6 fois plus grands qu'une expérience identique au gallium (le même facteur serait obtenu en réalisant une expérience au gallium 48 fois plus grande!)

Un autre avantage du sodium tient à ce que d'un point de vue hydrodynamique, il possède des propriétés (à 120°C) très voisines à celles de l'eau à température ambiante. Un écoulement de sodium liquide peut donc être parfaitement caractérisé par une étude dans un dispositif en eau de même rapport d'aspect. Un tel dispositif en eau existe au CEA de Saclay et a permis de réaliser de nombreux et précieux tests en vue de la préparation de l'expérience VKS [57][60].

Enfin, le sodium étant un sous-produit de l'industrie du chlore, il est très bon marché.

Tous les avantages offerts par le sodium sont néanmoins accompagnés de quelques inconvénients. Tout d'abord, le point de fusion relativement élevé du sodium exige de travailler à haute température, typiquement de l'ordre de 120°C, avec les contraintes que cela impose (refroidissement de l'équipement sensible, utilisation de pièces mécaniques adaptées, etc.) Mais le principal inconvénient du sodium est sa très grande réactivité chimique, rendant sa manipulation extrêmement délicate et sujette à des consignes de sécurité strictes. C'est la raison pour laquelle l'expérience VKS est faite en collaboration avec le centre de Cadarache du Commissariat à l'Énergie Atomique, qui possède une

grande expérience en technologie sodium, développée notamment pour les surgénérateurs à neutrons rapides du type *Phoenix*. Le dispositif VKS n'offre donc pas la flexibilité de l'expérience au gallium.

**Les précautions d'usage liées à l'utilisation du sodium.** La grande réactivité du sodium impose que le dispositif soit en permanence sous ciel d'argon (gaz inerte). De nombreux détecteurs de fuite sont répartis en différents points sensibles de l'expérience, et peuvent déclencher instantanément la vidange du dispositif si nécessaire. Un point particulièrement délicat concerne le passage des arbres des moteurs dans la cuve. L'étanchéité dynamique requise à cet effet est assurée par des garnitures à gaz Burgmann. Ces pièces sont relativement fragiles et coûteuses et doivent être changées après chaque campagne de mesures (typiquement après 80 heures d'utilisation sur une période de 10 jours.)

Du fait de sa grande réactivité, le sodium s'oxyde rapidement ce qui a pour effet d'augmenter sa température de fusion et d'abaisser sa conductivité. Par ailleurs, la présence de particules d'oxyde risque d'endommager les garnitures à gaz assurant l'étanchéité. Une unité de purification permet de conserver en permanence la qualité du sodium en éliminant continûment, si nécessaire, les impuretés.

**Les dimensions de VKG et VKS.** Les dimensions des deux expériences (voir §IV.1.1) sont telles que VKS est deux fois plus grande que VKG, avec le même rapport d'aspect. Ceci permet encore d'augmenter de 26% la gamme de  $R_m$  accessible dans VKS.

**La puissance mécanique disponible dans VKG et VKS.** Dans VKG, l'écoulement est entraîné par deux moteurs de 11 kW chacun. Dans VKS, l'écoulement est entraîné par deux moteurs de 75 kW chacun ; cela correspond à un gain d'un facteur 1.9 sur la gamme de nombres Reynolds magnétiques.

**Bilan.** Au bout du compte, pour des disques identiques (au rapport d'aspect près), l'expérience VKS permet d'atteindre des nombres de Reynolds environ neuf fois plus élevés que l'expériences VKG. Les nombres de Reynolds magnétiques les plus élevés sont atteints dans VKS avec les disques TM60 :

$$R_m^{max}(\text{VKS}) = \frac{2\pi}{\lambda_{Na}} Ma D o_{TM60} \left( \frac{\mathcal{P}_{VKS} R_{VKS}}{\rho_{Na}} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 40 \quad (\text{IV.25})$$

Ils figurent parmi les plus élevés que l'on puisse atteindre de nos jours dans des dispositifs expérimentaux.

Dans l'expérience au gallium, nous n'avons utilisé (pour le moment) que les disques TM80, qui permettent d'atteindre des nombres de Reynolds magnétiques :

$$R_m^{max}(\text{VKG}) = \frac{2\pi}{\lambda_{Ga}} Ma D o_{TM80} \left( \frac{\mathcal{P}_{VKG} R_{VKG}}{\rho_{Ga}} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 5 \quad (\text{IV.26})$$

Le tableau IV.9 résume les principales caractéristiques des expériences VKG et VKS.



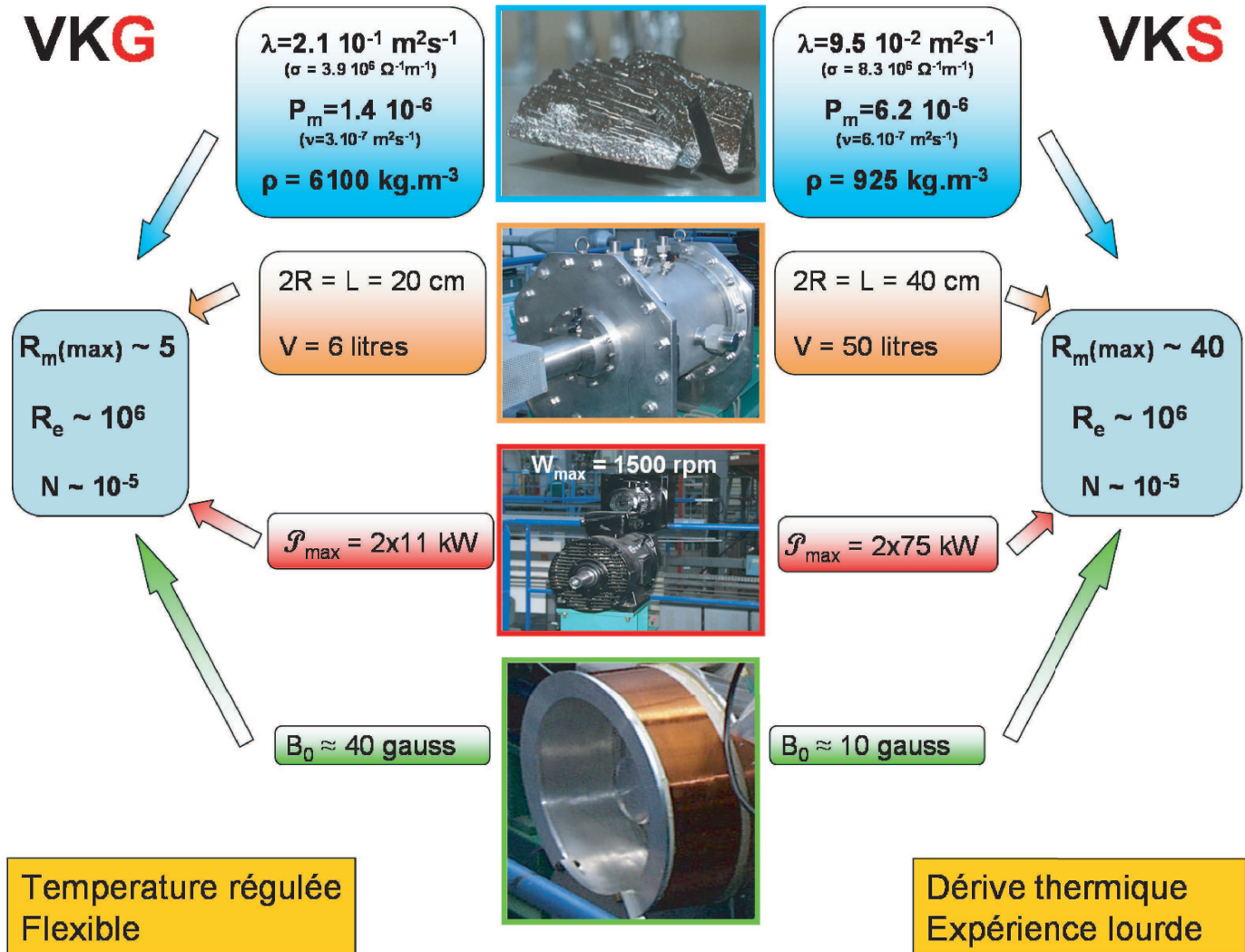


Fig. IV.9: Comparaison des principales caractéristiques des expériences VKG et VKS.

## IV.2 Mesures d'induction dans VKG - $R_m < 5$

Nous nous intéressons dans cette partie à l'induction moyenne mesurée localement en un point de l'écoulement de gallium et à son évolution en fonction du nombre de Reynolds magnétique. La valeur du nombre de Reynolds magnétique est contrôlée par la fréquence de rotation des disques à laquelle elle est reliée par la relation IV.7. Par induction moyenne nous entendons la grandeur

$$\vec{B}_{m,ind} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{B}_{ind}(t) dt, \quad (\text{IV.27})$$

où  $T$  est la durée totale du signal magnétique mesuré ( $T$  est typiquement de l'ordre de la minute.) Dans la suite et jusqu'au §IV.4, nous noterons simplement  $\vec{B}_{ind}$  pour signifier  $\vec{B}_{m,ind}$ .

### IV.2.1 Champ axial appliqué

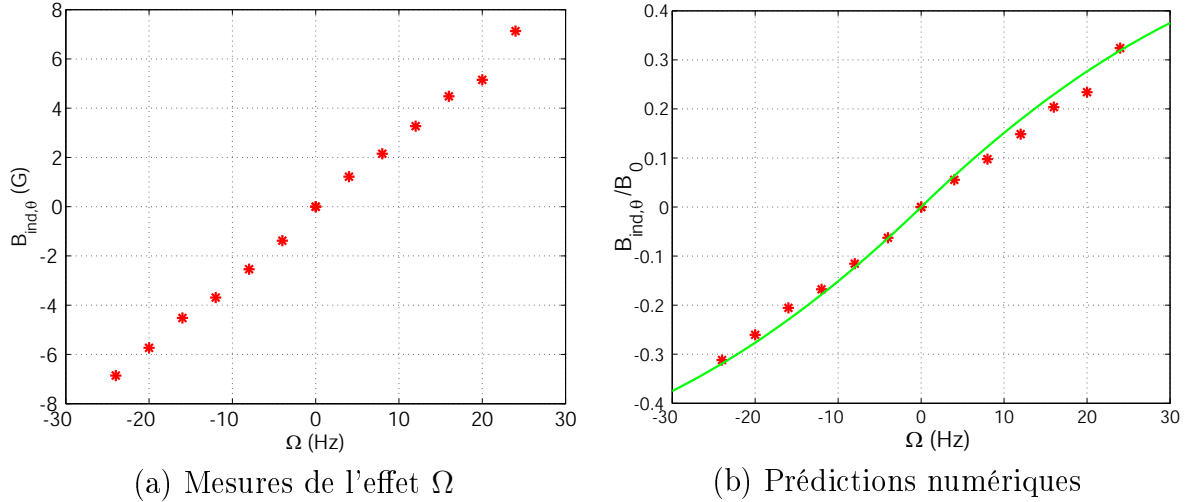
Le champ axial est appliqué à l'aide de deux bobines placées le long de l'axe de l'expérience. Les bobines ne sont pas tout à fait dans la configuration de Helmholtz et le champ qu'elles produisent n'est pas parfaitement uniforme sur l'ensemble de la cuve. Elles sont alimentées par un générateur KEPCO stabilisé en courant et produisent un champ magnétique  $B_{0z} = 24$  G (mesuré au point  $(x = 0.5R, y = 0, z = 0)$ ) lorsqu'elles sont parcourues par un courant de 6 A. L'inhomogénéité du champ appliqué est de l'ordre de 15% et ne présente pas de forts gradients au sein du volume, de telle sorte que, en première approximation, sa contribution à l'induction pourra en général être négligée.

#### IV.2.1.1 Induction azimuthale

**Régime contra-rotatif.** En régime contra-rotatif, les lignes du champ appliqué axial sont déformées par la rotation différentielle pour induire un champ azimuthal par l'effet  $\Omega$  décrit au chapitre précédent. Ce mécanisme correspond à l'approximation linéaire de l'équation d'induction et résulte du terme source  $I_{1\theta z}^{\text{déformation}} = B_0 \partial_z u_\theta$  selon

$$\Delta B_{ind,\theta} = \frac{B_0}{\lambda} \partial_z u_\theta \quad (\text{IV.28})$$

La figure IV.10a représente le champ azimuthal induit mesuré sur l'axe  $Oy'$  (proche de l'axe  $Oy$ ) à une distance  $\frac{R}{2}$  de l'axe, en fonction de la fréquence  $\Omega$  de rotation des disques (la relation (IV.7) permet d'exprimer cette évolution en termes de  $R_m$ .) Du fait de l'axisymétrie, la même induction est mesurée au niveau de l'axe  $Ox$ . L'effet observé est bien linéaire en  $\Omega$  comme prévu par la relation (IV.28.) De plus, s'agissant d'un effet linéaire ne faisant intervenir que la rotation (et non pas la recirculation centrifuge de l'écoulement), il est nécessairement impair en  $\Omega$ , ce qui est compatible avec la contrainte (I.16) imposée par les propriétés de symétrie du dispositif expérimental. Le comportement du champ azimuthal induit reste linéaire en fonction de  $\Omega$  sur toute la plage de fréquences de rotation accessibles (correspondant à un nombre de Reynolds magnétique maximal de l'ordre de  $R_m^{\text{max}} \sim 5$ .) Cette observation est en accord avec l'étude numérique du chapitre précédent montrant que l'effet de l'expulsion du champ axial par la recirculation centrifuge



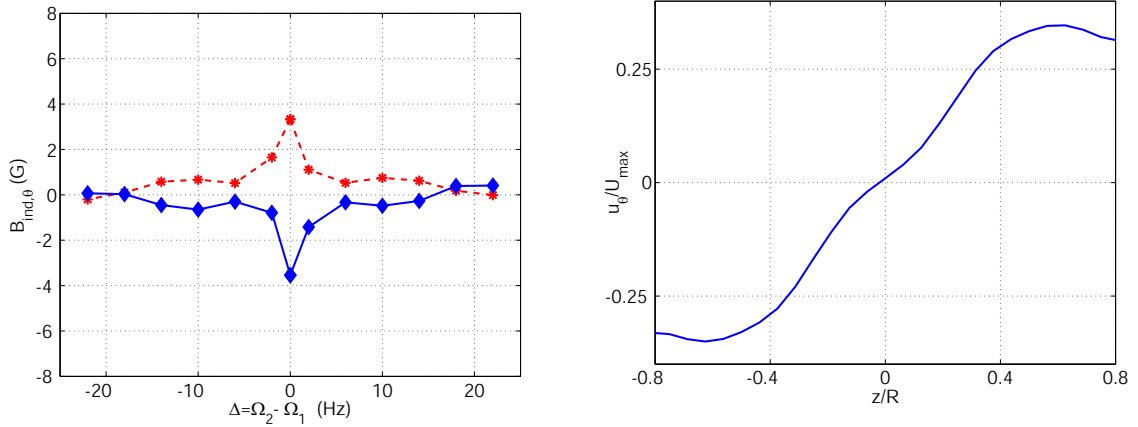
**Fig. IV.10:** Effet  $\Omega$  : mesures expérimentales et comparaison aux prédictions numériques par l'approche perturbative de l'induction d'un champ magnétique orthoradial par un écoulement contra-rotatif TM80 en présence d'un champ axial appliqué.

ne commence à se manifester que pour des nombres de Reynolds magnétiques de l'ordre de 10 (pour une mesure faite à une distance à l'axe de l'ordre de  $\frac{R}{2}$ .)

La figure IV.10b compare le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque des mesures de la figure IV.10a au résultat de la simulation numérique utilisant le champ de vitesse expérimental engendré par les disques TM80. Le calcul numérique est mené jusqu'à l'ordre 20 en  $R_m$ . Le rayon de convergence de la série perturbative obtenue est de l'ordre de  $R_m^* \sim 25$  de telle sorte que son disque de convergence englobe la totalité de la plage expérimentale de nombres de Reynolds magnétiques accessible dans VKG. La correspondance  $R_m \leftrightarrow \Omega$  est obtenue par la relation IV.7 où le facteur de vitesse  $\mathcal{V} = 0.67$  est celui mesuré dans les expériences en eau. La valeur de  $B_0$  utilisée pour déterminer le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque expérimental est celle du champ appliqué au point de la mesure (24 G). Le résultat numérique présente une faible dépendance en fonction de la distance exacte du capteur magnétique à l'axe de rotation. Le meilleur accord avec les mesures expérimentales est obtenu en supposant que le capteur se trouve à 6 cm de l'axe. Aucun autre paramètre ajustable n'est utilisé. La position réelle du capteur est à  $5 \pm 0.5$  cm de l'axe. Compte tenu des quelques différences (mineures) entre les conditions expérimentales et le calcul numérique (notamment : le champ appliqué dans l'expérience n'est pas rigoureusement homogène et le rapport d'aspect de l'expérience n'est pas rigoureusement égal à 1) la figure IV.10b révèle donc un très bon accord des mesures expérimentales avec les prédictions numériques. La prise en compte de ces différences dans le calcul numérique est en cours de mise au point ; l'accord que nous venons de constater suggère toutefois cela effets ne devraient apporter que des corrections mineures.

Les mesures de la figure IV.10a permettent de définir une valeur locale du nombre de Reynolds magnétique intrinsèque pour la conversion d'un champ axial en un champ azimuthal par effet  $\Omega$  :  $R_m^i(\Omega = 24 \text{ Hz}) = \frac{B_{ind,\theta}(\Omega=24 \text{ Hz})}{B_0} \sim 0.3$ , en accord avec des études antérieures [66].

**Passage progressif au régime à un disque.** Pour un écoulement à un seul disque en rotation, le gradient de la vitesse azimuthale est quasiment nul dans le plan médian

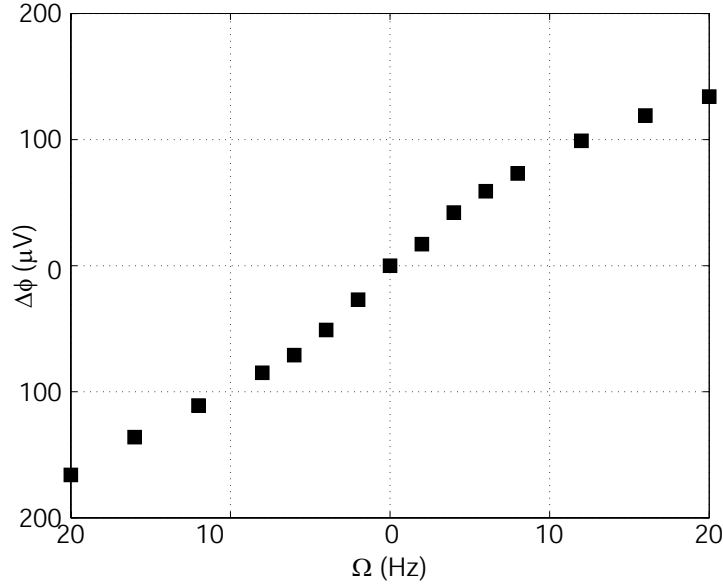


(a) Évolution de l'induction orthoradiale en fonction de  $\Delta$  à  $\Sigma = 24$  Hz. (b) Profil axial de la vitesse orthoradiale en  $r = \frac{R}{2}$  à  $\Delta = 0$  Hz.

**Fig. IV.11:** (a) Mesures de la composante magnétique orthoradiale induite en présence d'un champ appliqué axial en fonction de  $\Delta = \Omega_2 - \Omega_1$  pour  $\Omega_1 + \Omega_2 = 24$  Hz.  $\Delta = 0$  Hz correspond au régime contra-rotatif et  $\Delta = \pm 24$  Hz au régime à un seul disque en rotation. (b) Le gradient de la vitesse orthoradiale (dont l'importance détermine l'intensité de l'effet  $\Omega$ ) est sensiblement constant pour  $|z| < \frac{R}{2}$  à  $\Delta = 0$  Hz.

et l'effet  $\Omega$  doit disparaître. Nous avons étudié l'évolution de l'induction azimuthale par effet  $\Omega$  lors du passage progressif d'un régime contra-rotatif à un régime à un seul disque en rotation. Pour cela, nous définissons les paramètres  $\Delta = \Omega_2 - \Omega_1$  et  $\Sigma = \Omega_1 + \Omega_2$ , puis nous nous intéressons à l'évolution de l'induction en fonction de  $\Delta$  pour une valeur fixée de  $\Sigma$ . La figure IV.11a montre l'évolution du champ azimuthal induit en fonction de  $\Delta$ , pour  $\Sigma = 24$  Hz. Dans cette représentation, l'opération "interchanger la rotation des disques" revient simplement à changer  $\Delta$  en  $-\Delta$ . En particulier, lorsque  $\Delta = 0$  le régime est parfaitement contra-rotatif, et lorsque  $\Delta = \pm \Sigma$ , un seul disque est en rotation (celui du moteur 2 pour  $\Delta = \Sigma$  et celui du moteur 1 pour  $\Delta = -\Sigma$ .)

On observe sur la figure IV.11a, que le champ azimuthal induit en présence d'un champ axial appliqué décroît rapidement vers zéro lorsque que  $|\Delta|$  augmente. Comme prévu, pour  $\Delta = \pm 24$  Hz (un seul disque est en rotation), l'absence de rotation différentielle dans le plan médian conduit à l'annulation de  $B_{ind,\theta}$ . En revanche, l'évolution de l'induction azimuthale, fortement piquée autour de  $\Delta = 0$ , peut paraître surprenante de prime abord. En effet, la figure IV.11b représente les variations axiales de la vitesse azimuthale dans l'écoulement TM80 en régime contra-rotatif. Une large zone centrale de cisaillement, où la rotation différentielle  $\partial_z u_\theta$  reste sensiblement constante, apparaît entre  $z \sim \pm \frac{R}{2}$ . Si l'on admet qu'une variation progressive de  $\Delta$  autour de zéro se traduit par un déplacement progressif de la couche de cisaillement vers le disque 1 (si  $\Delta > 0$ ) ou vers le disque 2 (si  $\Delta < 0$ ), on s'attendrait donc à une évolution lente de l'induction azimuthale autour de  $\Delta = 0$  et non pas à un pic d'induction comme celui mesuré. En réalité, c'est l'interprétation de  $\Delta$  comme indicateur d'un déplacement progressif de la couche de cisaillement qui est fautive. Des visualisations d'un écoulement de von Kármán en eau montrent que la position de la couche de cisaillement est très instable sous l'effet de petites variations de  $\Delta$  autour de zéro. L'écoulement bifurque rapidement vers un régime comparable à celui produit par un seul disque en rotation, où la couche de cisaillement est complètement



**Fig. IV.12:** Mesure de la différence de potentiel induite entre deux points à chaque extrémité de la cuve au voisinage de l'axe du dispositif (voir figure IV.3).

déplacée vers le disque en rotation la moins rapide. Un faible écart de  $\Delta$  autour de la valeur zéro suffit donc à supprimer complètement la rotation différentielle dans le plan médian de la cuve et conduit donc à l'évolution piquée observée sur la figure IV.11a.

**Mesures de la différence de potentiel axiale induite.** L'étude numérique de l'effet  $\Omega$  sur un écoulement modèle de von Kármán en contra-rotation nous a montré que l'induction d'un champ magnétique azimuthal résulte de l'apparition dans le fluide conducteur d'une boucle de courant électrique avec une forte composante axiale le long de l'axe  $Oz$  et au voisinage de la paroi du cylindre (figure III.14.) La structure de cette densité de courants a été étudiée en détail dans le chapitre précédent. Nous avons vu en particulier que toute contribution axiale à cette densité de courants ne peut résulter que de l'apparition d'un gradient de potentiel électrique  $\phi$ . En effet, en présence d'un champ axial appliqué, le champ électromoteur induit  $\vec{e}_1 = \vec{u} \times \vec{B}_0$  à l'origine des effets d'induction linéaires, ne peut avoir de composante selon  $Oz$ . Une différence de potentiel  $\Delta\phi$  entre deux points de l'axe  $Oz$  aux deux extrémités de la cuve doit donc apparaître pour assurer la circulation de la densité de courant. Une telle différence de potentiel constitue une grandeur globale caractéristique de l'induction magnétohydrodynamique. La figure IV.12 représente l'évolution de  $\Delta\phi$  mesurée en fonction de  $\Omega$  en régime contra-rotatif.  $\Delta\phi$  présente une évolution linéaire en  $\Omega$  pour les faibles valeurs de fréquence de rotation. Un écart sensible à la linéarité apparaît pour les fréquences plus grandes, alors que la mesure locale de champ magnétique induit de la figure IV.10 reste linéaire sur toute la gamme de fréquences étudiées. Cet écart à la linéarité peut s'interpréter par le fait que la mesure de potentiel est une mesure intégrale et qu'elle est par conséquent plus sensible à l'expulsion du champ magnétique appliqué, sur l'ensemble de l'écoulement. En effet, si l'on interprète l'expulsion en termes d'épaisseur de peau  $l_d \propto RR_m^{-\frac{1}{2}}$ , on comprend bien qu'une mesure locale, à une distance  $d$  des parois, peut rester insensible à l'expulsion tant

que  $R_m < (R/d)^2$ , alors qu'une mesure globale, prenant également en compte les effets se produisant très près des parois, percevra l'expulsion même pour des faibles nombres de Reynolds magnétiques (et donc pour des faibles fréquences de rotation.)

Les valeurs de la différence de potentiel mesurée peuvent être comparées à une estimation donnée par la mesure du champ magnétique orthoradial induit en  $\frac{R}{2}$ . Ce dernier peut être estimé par le théorème d'Ampère à partir de sa circulation le long d'un contour azimuthal puis relié à la différence de potentiel  $\Delta\phi$  par la loi d'Ohm :

$$B_{ind,\theta} \left( \frac{R}{2} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{R}{2}} \quad \text{avec} \quad I \sim \left( \frac{1}{\sigma} \frac{H}{\pi \left( \frac{R}{2} \right)^2} \right)^{-1} \Delta\phi, \quad (\text{IV.29})$$

où  $\frac{1}{\sigma} \frac{H}{\pi \left( \frac{R}{2} \right)^2}$  n'est rien d'autre que la résistance équivalente de la section de fluide de rayon  $\frac{R}{2}$ , entre les deux extrémités de la cuve (distantes de  $H$ .) L'application numérique de l'expression ci-dessus conduit à la relation entre  $\Delta\phi$  (en microvolts) et  $B_{ind,\theta} \left( \frac{R}{2} \right)$  (en gauss) :

$$|\Delta\phi| [\mu\text{V}] \sim 0.4 \left| B_{ind,\theta} \left( \frac{R}{2} \right) \right| [\text{G}] \quad (\text{IV.30})$$

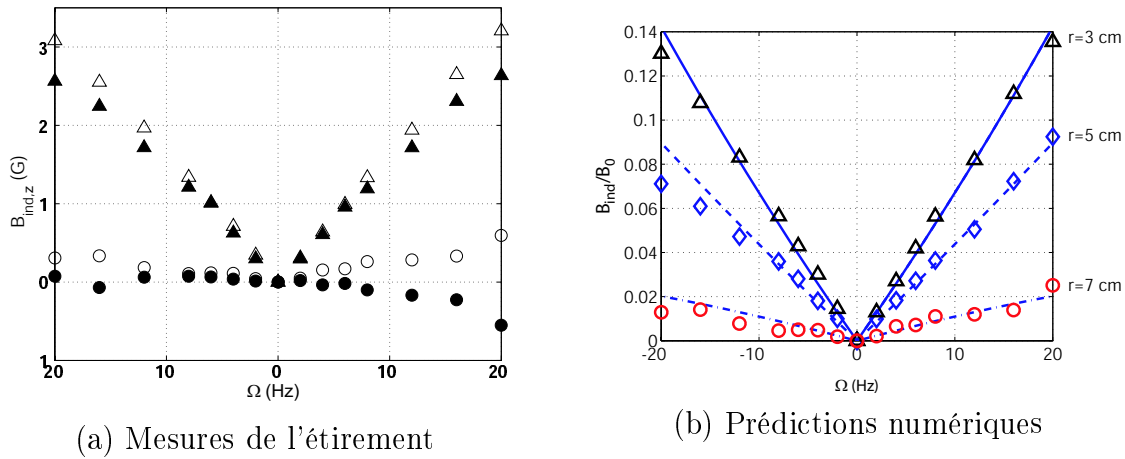
La mesure de  $B_{ind,\theta}$  à  $\Omega=10$  Hz, conduit ainsi à une estimation pour  $\Delta\phi$  de l'ordre de  $600 \mu\text{V}$ . Cette approche conduit donc à une surestimation de la différence de potentiel, puisque la valeur mesurée n'est en réalité que de  $90 \mu\text{V}$  à  $\Omega=10$  Hz (voir la figure IV.12.) Cette surestimation par rapport à la mesure s'explique probablement par le fait que les électrodes permettant de mesurer  $\Delta\phi$  se trouvent à l'arrière des disques (à environ 5 cm); chaque électrode ne perçoit donc qu'un potentiel écranté (par le fluide entre le disque et le disque lui-même qui ne participent pas, ou ne participent que faiblement, à l'induction). Des électrodes permettant de mesurer cette même différence de potentiel mais en se rapprochant le plus possible des disques ont été réalisées et devraient bientôt être testées.

#### IV.2.1.2 Induction axiale

Lors de l'étude numérique de l'induction en régime contra-rotatif et en champ axial appliqué, menée au chapitre précédent, nous avons également identifié un mécanisme produisant un champ axial au voisinage du plan médian par étirement de  $\vec{B}_0$  au niveau de l'axe  $Oz$  (au voisinage du point de stagnation au centre de la cuve) et compression de  $\vec{B}_0$  au niveau des parois de la cuve. Ce mécanisme correspond à l'approximation linéaire de la projection sur  $Oz$  de l'équation d'induction et est associé au terme source  $I_{zz}^{\text{déformation}} = B_0 \partial_z u_z$  selon

$$\Delta B_{1z} = \frac{B_0}{\lambda} \partial_z u_z \quad (\text{IV.31})$$

La figure IV.13a représente l'évolution de  $B_{ind,z}$  en fonction de  $\Omega$  pour deux profondeurs distinctes de la sonde magnétique sur l'axe  $Ox$  et sur l'axe  $Oy'$ . Le champ induit présente ici un comportement linéaire en  $\Omega$ , mais pair :  $B_{1z} \propto |\Omega|$ . Ceci est en accord avec (IV.31) dans la mesure où renverser le sens de rotation des disques n'affecte que la composante azimuthale de la vitesse et laisse inchangée la recirculation centrifuge (et en particulier la composante  $u_z$ .) Par ailleurs, cette symétrie du terme source est bien compatible avec la contrainte (I.17) imposée par les propriétés de symétrie intrinsèques du dispositif expérimental.



**Fig. IV.13:** Effet de l'étirement : mesures et comparaison aux prédictions numériques par l'approche perturbative pour l'induction axiale dans le plan médian par un écoulement contra-rotatif TM80 en présence d'un champ axial appliqué. Les mesures ont été réalisées sur l'axe  $Ox$  (symboles vides) et sur l'axe  $Oy'$  (symboles pleins); ( $\Delta$ ) : mesures à une distance à l'axe de 3 cm; ( $\circ$ ) : mesures à une distance à l'axe de 7 cm. Pour la comparaison avec les prédictions numériques, nous n'avons reporté que les mesures au niveau de l'axe  $Ox$  en y incluant une série supplémentaire correspondant à une distance à l'axe de 5 cm ( $\diamond$ ).

Les courbes à deux profondeurs distinctes montrent que cet effet est très intense au voisinage du centre, puis décroît lorsqu'on se rapproche de la paroi, en accord qualitatif avec l'étude du chapitre précédent (voir par exemple la figure III.26). Comme prévu par l'axisymétrie du dispositif, les mesures sont sensiblement les mêmes sur l'axe  $Ox$  et sur l'axe  $Oy'$ . Une légère différence entre les mesures faites sur chaque axe peut être observée lorsque la mesure est réalisée à 7 cm de l'axe (donc à 70% du rayon de la cuve.) À cette position, l'induction du champ axial est pratiquement nulle et la mesure devient particulièrement sensible à la position précise du capteur magnétique. Sa profondeur ne peut être réglée qu'avec une précision de l'ordre de 5 mm. Une légère différence de profondeur entre le point de mesure sur l'axe  $Ox$  et le point de mesure sur l'axe  $Oy$  pourrait expliquer la différence de l'induction mesurée. Par ailleurs, bien que nous ne disposions pas de mesures à des positions plus proches de la paroi de la cuve, permettant d'observer franchement l'inversion du sens du champ induit, la mesure faite sur l'axe  $Oy$  à 7 cm de l'axe, présente quelques points où, bien que faible, l'induction est de signe contraire à celle mesurée près de l'axe. Cette observation suggère que l'annulation du champ induit au voisinage de  $r \sim 7$  cm correspond bien à un changement de signe du champ induit, qui deviendrait négatif plus près de la paroi, comme cela est prévu par le changement de signe de la composante axiale du gradient de la vitesse axiale entre le centre (où les lignes de champ magnétique sont étirées) et les bords du cylindre (où les lignes de champ magnétique sont comprimées.)

Enfin, la figure IV.13b compare les mesures expérimentales au calcul numérique obtenu par l'approche perturbative. Aucun paramètre ajustable (y compris la position du point de mesure) n'est utilisé. L'accord est très bon sur toute la gamme de fréquences étudiée.

### IV.2.1.3 Induction radiale

En régime contra-rotatif, les symétries du dispositif interdisent l'induction d'une composante radiale dans le plan  $xOy$ . Un effet linéaire dû à la déformation de  $\vec{B}_0$  par le gradient axial de la vitesse radiale (dû au fait que l'écoulement est centrifuge au voisinage des disques et centripète au niveau du plan médian) est attendu dans la région  $z \sim \pm \frac{R}{2}$ . Cet effet doit également pouvoir être observé dans le plan médian lorsqu'un seul disque est mis en rotation. Malheureusement, au moment de la réalisation des expériences présentées ici, nous ne disposons pas de sonde magnétique permettant de mesurer la composante radiale du champ induit.

## IV.2.2 Champ transverse appliqué

L'étude des effets d'induction en champ transverse est particulièrement intéressante dans la mesure où l'axisymétrie du système est alors brisée, ce qui ne peut être que favorable pour des mécanismes pouvant conduire à l'instabilité dynamo. Par ailleurs, les travaux numériques de [58], suggèrent que le champ magnétique susceptible de croître par instabilité dynamo dans un écoulement de type von Kármán présente une forte composante transverse. Ceci motive l'étude des mécanismes d'induction en présence d'un champ appliqué transverse, en vue d'identifier expérimentalement la possibilité d'un bouclage favorable à la croissance d'une dynamo. L'étude numérique du chapitre précédent suggère la possibilité d'un mécanisme de bouclage de type " $\alpha$ " $\Omega$ , dont l'une des étapes essentielles permet de convertir un champ transverse en un champ axial. C'est la possibilité expérimentale d'une telle conversion que nous analysons dans cette partie. Nous nous concentrerons donc sur les mesures de  $B_{ind,z}$ .

Le champ transverse est produit par deux bobines (identiques à celles produisant le champ axial), disposées cette fois-ci latéralement de part et d'autre de la cuve et alignées selon l'axe  $Ox$ . Elles produisent un champ magnétique qui n'est pas parfaitement homogène sur l'ensemble de la cuve. Son inhomogénéité est de l'ordre de 15% et comme dans le cas du champ axial appliqué, les gradients de  $\vec{B}_0$  restent faibles sur l'ensemble de l'écoulement, de sorte que leurs effets d'induction restent a priori négligeables.

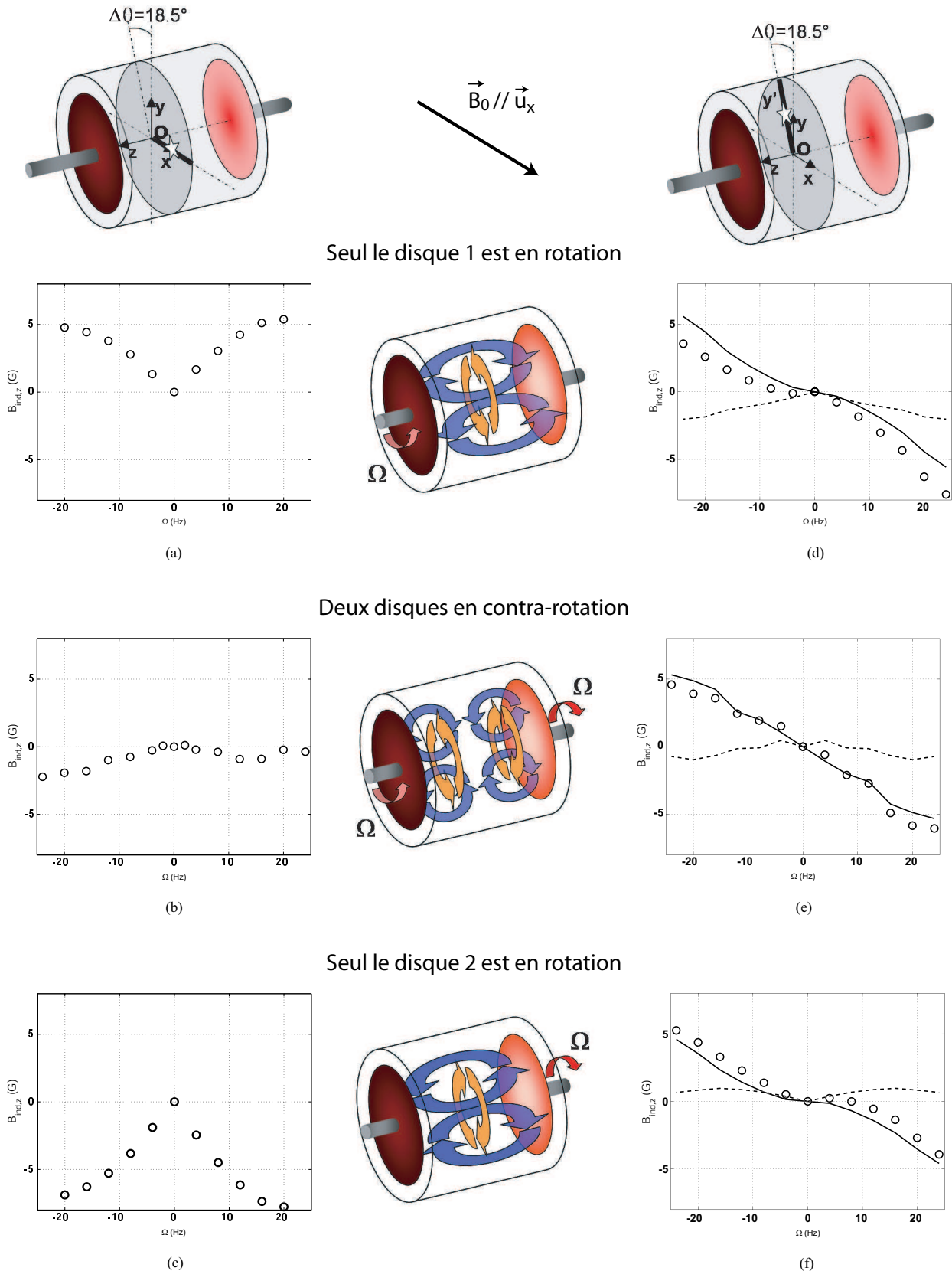
Au point  $P(x = R/2, y = 0, z = 0)$  le champ produit vaut 43 G lorsque les bobines sont parcourues par un courant stabilisé à 5 A. La plus grande amplitude de ce champ par rapport au cas du champ appliqué axial, provient simplement du fait que les bobines transverses sont plus proches l'une de l'autre que ne le sont les bobines axiales (figure IV.2.)

### IV.2.2.1 Description générale de l'induction axiale

Les figures IV.14a, b et c montrent l'évolution, en fonction de la fréquence de rotation des disques, du champ axial induit sur l'axe  $Ox$  respectivement lorsque seul le disque 1 est en rotation, en régime contra-rotatif, et lorsque seul le disque 2 est en rotation. Les figures IV.14d, e et f représentent les mesures correspondantes effectuées en un point de l'axe  $Oy'$ .

La brisure de l'axisymétrie résultant de l'application du champ transverse explique la différence notable entre l'induction au niveau des deux axes. En particulier, pour un régime à un seul disque en rotation, le champ axial induit sur l'axe  $Ox$  est pair par rapport au sens de rotation, impair par rapport au changement de disque et linéaire en  $\Omega$  (du moins





**Fig. IV.14:** Mesures d'induction magnétique axiale en présence d'un champ appliqué transverse selon l'axe  $Ox$ . Les figures a,b et c (à gauche) correspondent à des mesures faites au point  $(r = \frac{R}{2}, \theta = 0, z = 0)$  de l'axe  $Ox$  et les figures d,e et f (à droite) à des mesures au point  $(r = \frac{R}{2}, \theta = 108.5^\circ, z = 0)$  de l'axe  $Oy'$ , proche de l'axe  $Oy$ . Pour l'analyse de ces courbes, il est utile de considérer leur décomposition en partie paire et impaire par rapport à leur dépendance en  $\Omega$ ; nous les avons représentées pour les mesures au niveau de l'axe  $Oy'$ .

pour des fréquences de rotation modérées.) Au voisinage de l'axe  $Oy$ , il est au contraire essentiellement impair par rapport au sens de rotation, pair en changement de disque, et présente une dépendance non-linéaire en fonction de  $\Omega$ , même pour les faibles fréquences de rotation.

Dans le cas contra-rotatif, l'induction est essentiellement nulle sur l'axe  $Ox$  alors qu'elle est relativement intense et linéaire sur l'axe  $Oy$ .

**Analyse des symétries** La plupart des comportements pairs ou impairs observés résultent directement des symétries intrinsèques du dispositif et sont indépendants de tout mécanisme d'induction particulier.

Ainsi, en régime un disque sur l'axe  $Ox$  :

- la relation (I.25) impose le caractère impair de  $B_{ind,z}$  lorsqu'on change le disque en rotation.
- la relation (I.32) impose le caractère pair de  $B_{ind,z}$  lorsqu'on renverse le sens de rotation du disque.

En régime un disque sur l'axe  $Oy$  :

- la relation (I.28) impose le caractère pair de  $B_{ind,z}$  lorsqu'on change le disque en rotation.
- la relation (I.35) impose le caractère impair de  $B_{ind,z}$  lorsqu'on renverse le sens de rotation du disque.

Enfin, en régime contra-rotatif :

- la relation (I.35) impose le caractère impair en fonction de  $\Omega$  de  $B_{ind,z}$  en tout point du plan  $yOz$
- la relation (I.32) impose le caractère pair en  $\Omega$  de  $B_{ind,z}$  en tout point du plan  $xOz$
- la relation (I.41) impose le caractère impair en  $\Omega$  de  $B_{ind,z}$  en tout point du plan  $xOy$
- donc, sur l'axe  $Ox = (xOy) \cap (xOz)$ ,  $B_{ind,z}$  doit être nul (en accord avec la relation (I.37).)
- et sur l'axe  $Oy = (xOy) \cap (yOz)$   $B_{ind,z}$  doit bien être impair.

On peut également remarquer que les mesures sur l'axe  $Oy$  avec un seul disque en rotation ne sont pas tout à fait impaires. Leur décomposition en partie paire et impaire montre une partie impaire dominante (non-linéaire en  $\Omega$ ) et une faible contribution paire (linéaire en  $\Omega$ .) Ceci vient du fait que le point de mesure ne se trouve pas exactement sur l'axe  $Oy$ , mais sur un axe faisant un angle  $\Delta\theta = 18.5^\circ$  avec l'axe  $Oy$ . En revanche, en régime contra-rotatif, le caractère impair en  $\Omega$  de  $B_{ind,z}$  s'étend à l'ensemble du plan  $xOy$  (d'après I.41), et la dissymétrie observée dans les courbes à un disque disparaît. Nous allons décrire individuellement les différents effets observés.

#### IV.2.2.2 Effets linéaires des termes sources volumiques

Le champ appliqué est relativement homogène et essentiellement dirigé selon  $Ox$ . Les effets d'induction dominants résultent de sa déformation par les gradients de vitesse selon  $Ox$ . Dans la mesure où  $\vec{B}_0$  n'est toutefois pas rigoureusement homogène, il possède également, en dehors du plan médian, des projections (faibles) selon  $Oy$  et  $Oz$ , et son gradient n'est pas rigoureusement nul (bien qu'il reste faible sur l'ensemble de l'écoulement.) Le tableau IV.3 résume les contributions des différents termes sources pouvant donner lieu à

		Termes d'induction	Contribution dans $xOy$	
			sur $Ox$	sur $Oy$
Effet principal	déf. de $B_{0x}$	$I_{1zx}^{\text{déformation}} = B_{0x} \cos \theta \partial_r u_z$	$B_{0x} \partial_r u_z$	0
Inhomogénéité de $\vec{B}_0$	déf. de $B_{0y}$	$I_{1zy}^{\text{déformation}} = B_{0y} \sin \theta \partial_r u_z$	0	$B_{0y} \partial_r u_z$
	déf. de $B_{0z}$	$I_{1zz}^{\text{déformation}} = B_{0z} \partial_z u_z$	$0^{(1)}$	
	trans. de $\partial_x B_{0z}$	$I_{1zx}^{\text{transport}} = -(u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \partial_x B_{0z}$	$0^{(1)}$	
	trans. de $\partial_y B_{0z}$	$I_{1zy}^{\text{transport}} = -(u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \partial_y B_{0z}$	$0^{(1)}$	
	trans. de $\partial_z B_{0z}$	$I_{1zz}^{\text{transport}} = -u_z \partial_z B_{0z}$	$-u_z \partial_z B_{0z}$	$-u_z \partial_z B_{0z}$

(1) Le plan  $xOy$  est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant appliqué ; donc, en tout point de  $xOy$ ,  $\vec{B}_0 \in xOy$  et  $B_{0z}$  y est identiquement nul.

**Tab. IV.3:** Contributions axiales des termes sources volumiques à l'induction linéaire (obtenues à partir des tableaux III.1 et III.2.) Les termes faisant intervenir  $B_{0y}$  et  $B_{0z}$  résultent uniquement de l'inhomogénéité de  $\vec{B}_0$  et leur contribution reste a priori faible.

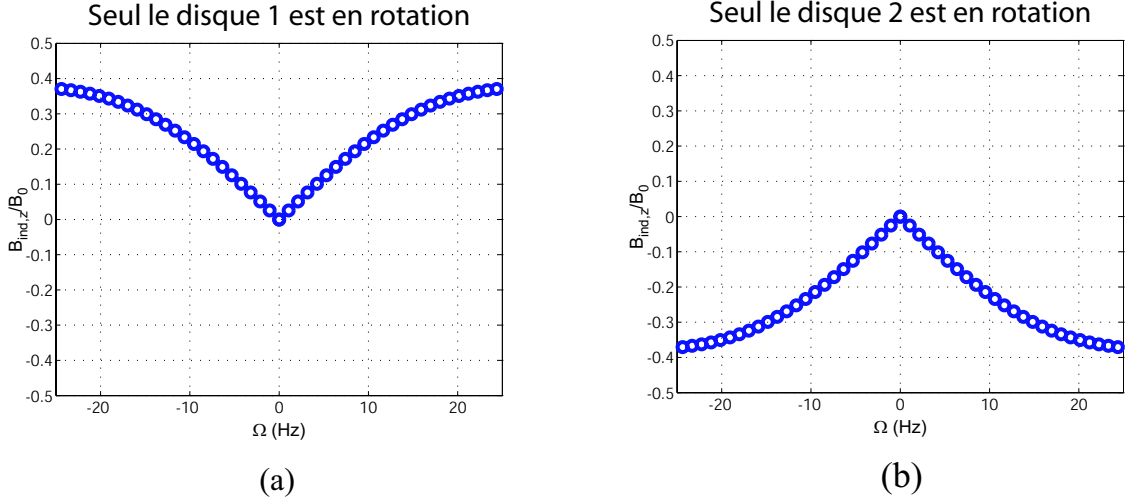
l'induction d'un champ axial à l'ordre 1 en  $R_m$  (et donc linéaire en  $\Omega$ ), y compris celles (a priori faibles) dues à l'inhomogénéité du champ. Le principal effet d'induction axiale linéaire résulte de la déformation de la composante dominante  $B_{0x}$  du champ appliqué par le gradient de la vitesse axiale dans la direction du champ appliqué, selon le terme source :

$$I_{1zx}^{\text{déformation}} = B_{0x} \cos \theta \partial_r u_z. \quad (\text{IV.32})$$

### Induction axiale linéaire sur l'axe $Ox$ en régime à un seul disque en rotation.

Le terme (IV.32) est maximal dans le plan  $xOz$  ( $\theta = 0$ ) et est à l'origine de l'induction linéaire mesurée sur l'axe  $Ox$  dans les régimes où seul un disque est en rotation. Ce terme traduit l'induction d'une composante axiale dans le plan  $xOz$  par l'effet du pompage de la boucle de recirculation centrifuge de l'écoulement von Kármán. Ce mécanisme a été décrit au chapitre précédent, notamment par le schéma qualitatif de la figure III.28. Ce mécanisme d'induction est bien compatible avec les symétries intrinsèques du dispositif. En effet, ne faisant pas intervenir la composante azimutale de la vitesse, le terme  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  est inchangé lorsqu'on renverse le sens de rotation des disques et il est donc pair en  $\Omega$  (comme l'impose la contrainte (I.32)). En revanche, il change de signe lorsqu'on change de disque en rotation (car le sens de la recirculation centrifuge, et en particulier de  $u_z$ , est alors renversé) et il est donc impair en changement de disque. Ces propriétés sont bien celles des mesures d'induction des figures IV.14a et c. La pente à l'origine de l'évolution de  $B_{ind,z}(\Omega)$  est identique pour les courbes des figures IV.14a et c à 3% près (et vaut 0.38 G/Hz). L'écart à la linéarité observé pour les fréquences de rotation plus élevées traduit le début du mécanisme d'expulsion de  $\vec{B}_0$  par la rotation globale du fluide. Cet écart était prédit par le calcul numérique de l'induction (voir la solution numérique convergée de la figure III.47) où, dans le cas d'un écoulement modèle, il était sensible dès  $R_m \sim 2$ , c'est-à-dire, compte tenu de IV.7, dès  $\Omega \sim 10$ . Le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque local maximal obtenu pour les mesures sur l'axe  $Ox$  en régime à un seul disque est de l'ordre de 0.13.

Nous ne disposons malheureusement pas de mesures expérimentales du champ de vitesse engendré par la rotation d'un seul disque de type TM80 comme celui utilisé dans ces expériences. Un champ de vitesse similaire a été mesuré en utilisant des disques TM802, similaires au TM80 [76] : ils ne diffèrent que par la hauteur de leurs pales (2 cm pour les TM802 au lieu de 1 cm pour les TM80.) Le facteur de vitesse des TM802 vaut



**Fig. IV.15:** Simulation numérique, par l'approche perturbative, pour l'induction axiale au point  $(x = 0.5R, y = 0, z = 0)$  de l'axe  $Ox$ . Le calcul a été réalisé à partir d'un champ du vitesse TM802, différant de celui utilisé dans l'expérience VKG par la hauteur des pales des disques qui l'engendrent (deux fois plus grande que pour l'écoulement TM80.) Cette simulation numérique décrit toutefois correctement la tendance générale de l'induction expérimentale des figures IV.14a et c.

$\mathcal{V}_{TM802} = 0.77$ . Il est légèrement supérieur à celui des TM80 du fait du meilleur entraînement du fluide à cause de la plus grande hauteur de leurs pales. La figure IV.15 montre l'induction obtenue à partir de la simulation numérique perturbative utilisant le champ de vitesse TM802. Le comportement qualitatif général est identique à celui mesuré expérimentalement (figures IV.14a et c). Une comparaison quantitative reste toutefois difficilement envisageable dans la mesure où le champ de vitesse expérimental ne coïncide pas avec celui du calcul numérique. On peut simplement remarquer que l'induction calculée avec le champ de vitesse TM802 est environ trois fois plus importante que celle mesurée expérimentalement. Un nombre de Reynolds magnétique intrinsèque plus important pour l'écoulement TM802 que pour l'écoulement TM80 est en accord avec l'augmentation du facteur de vitesse des disques, mais il est difficile de discuter plus en détails le résultat quantitatif du calcul sans connaître les différences précises de la structure des deux champs de vitesse.

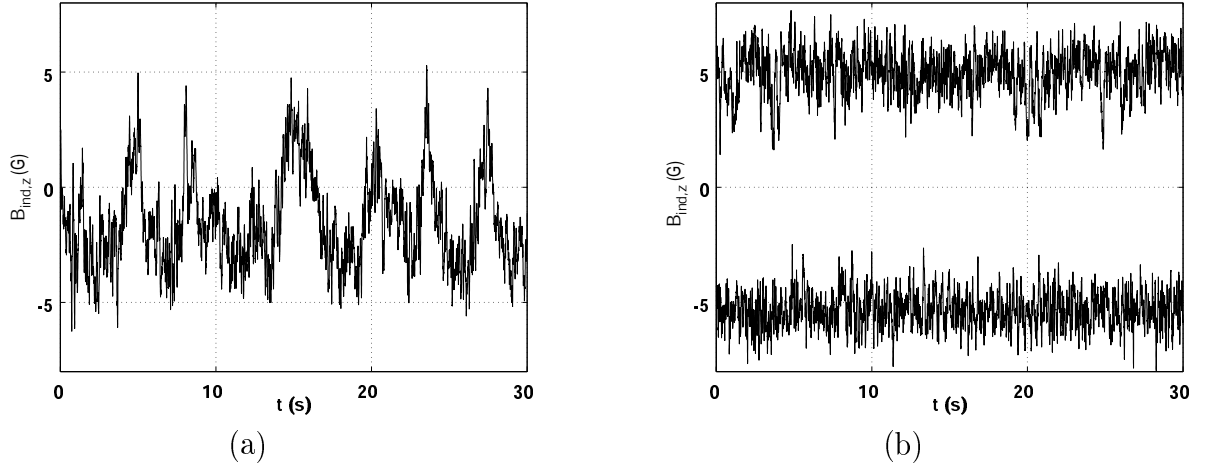
**Induction axiale sur l'axe  $Ox$  en régime contra-rotatif.** En régime contra-rotatif, en accord avec les arguments de symétrie du dispositif expérimental, l'induction axiale mesurée est essentiellement nulle sur l'axe  $Ox$  (figure IV.14b.) Une faible induction (d'au plus 5% en amplitude du champ appliqué) est mesurée, révélant probablement une légère dissymétrie du montage. La simulation numérique conduit à une induction strictement nulle.

En fait, la quasi-annulation de la composante axiale induite sur l'axe  $Ox$  en régime contra-rotatif n'est obtenue, expérimentalement, qu'à condition de moyenner le signal temporel de champ magnétique sur des temps suffisamment longs. La figure IV.16 montre le signal temporel de  $B_{ind,z}(t)$  enregistré en régime contra-rotatif lorsque les disques tournent à 12 Hz. Il est remarquable de constater que, outre les fluctuations turbulentes rapides

(que nous discuterons en détail dans la section IV.4), le signal présente des fluctuations sur des temps caractéristiques de l'ordre de quelques secondes (donc relativement lentes par rapport au temps de révolution des disques qui est inférieur à la dixième de seconde). Ces fluctuations lentes sont de très grande amplitude, typiquement entre -5 G et 5 G. Le signal est donc de moyenne nulle pour des temps de mesure suffisamment longs (plusieurs dizaines de secondes), mais peut être de moyenne non-nulle sur des échelles de temps de l'ordre de quelques secondes. Ceci révèle une brisure temporaire (de quelques secondes) de la symétrie par rapport au plan médian (qui impose l'annulation de  $B_{ind,z}$  sur l'axe  $Ox$ ) et reflète très certainement une instabilité de la couche de cisaillement oscillant de façon irrégulière autour du plan médian. Une telle instabilité lente de la couche de cisaillement a effectivement été observée dans les expériences en eau [59].

On peut essayer de mieux comprendre cet effet en étudiant l'induction axiale lorsqu'on force la dissymétrisation de l'écoulement. Comme nous l'avons signalé au §IV.2.1.1, un léger déséquilibre du régime contra-rotatif (en faisant tourner un des disques légèrement plus vite que l'autre), suffit à déplacer la couche de cisaillement brutalement vers le disque en rotation plus lente, pour donner un écoulement a priori semblable à celui engendré lorsqu'un seul disque est en rotation. La figure IV.16b montre le signal mesuré lorsque  $\Delta = \Omega_2 - \Omega_1 \neq 0$  (en maintenant  $\Sigma = \Omega_2 + \Omega_1$  fixé à 24 Hz). La courbe du haut correspond au régime ( $\Omega_1 = 13$  Hz,  $\Omega_2 = 11$  Hz) et la courbe du bas au régime ( $\Omega_1 = 11$  Hz,  $\Omega_2 = 13$  Hz). Dans ce cas, les fluctuations lentes disparaissent pour ne laisser place qu'aux fluctuations turbulentes rapides, de plus faible amplitude, et dont la moyenne temporelle n'est plus nulle (même pour des temps longs.) Dans le cas où le disque 1 tourne plus rapidement, on retrouve une valeur moyenne de l'ordre de 5 G voisine de la valeur mesurée lorsque seul le disque 1 tourne (voir les points à  $\Omega = \pm 12$  Hz de la figure IV.14a). De même, dans le cas où c'est le disque 2 qui tourne plus rapidement, on trouve une valeur moyenne de l'ordre de -5 G, voisine de celle mesurée lorsque seul le disque 2 tourne (voir les points à  $\Omega = \pm 12$  Hz de la figure IV.14c). En comparant les figures IV.16a et b, on constate que les oscillations lentes du champ induit en régime contra-rotatif sont encadrées par les valeurs moyennes du champ induit lorsqu'on déséquilibre légèrement la contra-rotation de  $|\Delta| = 2$  Hz. Ceci suggère qu'à un instant donné, l'écoulement moyen de von Kármán, n'est donc jamais réalisé, mais qu'il évolue constamment entre deux configurations où la couche de cisaillement est tantôt proche du disque 1 (et le champ induit est alors en moyenne négatif sur quelques secondes) tantôt proche du disque 2 (et le champ induit est alors en moyenne positif sur quelques secondes) de sorte qu'en moyennant sur des temps suffisamment longs, le champ induit s'annule. La solution du problème magnétohydrodynamique complet résulte donc de l'oscillation entre deux solutions ne respectant pas, chacune, la symétrie du dispositif expérimental, mais dont la superposition la respecte, de sorte à ne pas violer le principe de Curie généralisé [86].

**Remarque sur la position de la sonde.** Pour être plus précis, la figure IV.16 montre que l'induction axiale en régime contra-rotatif est globalement plus souvent négative que positive (comme cela apparaît également sur les mesures de la valeur moyenne de  $B_{ind,z}$  en fonction de  $\Omega$  sur la figure IV.14b.) Ceci ne peut être dû qu'à un défaut de symétrie du montage. La vitesse des moteurs est réglée avec une précision de 0.1%, de sorte qu'il est difficile d'envisager un déséquilibre systématique du régime contra-rotatif. La plus grande incertitude est liée à la position de la sonde magnétique dont l'étendue spatiale de l'ordre de 5 mm ne permet pas d'exclure un léger décalage systématique de



**Fig. IV.16:** Signal temporel de la mesure sur l'axe  $Ox$  de l'induction axiale pour un champ appliqué transverse selon  $Ox$  avec  $\Omega_1 + \Omega_2 = 12$  Hz. La figure (a) correspond au régime contra-rotatif ( $\Delta = 0$ ) et la figure (b) aux régimes légèrement dysymétriques  $|\Delta| = 2$  Hz.

sa position par rapport au plan médian et/ou par rapport à l'axe  $Ox$ . Le fait que l'induction mesurée sur l'axe  $Ox$  ne soit pas complètement symétrique (ni tout à fait paire ni tout à fait impaire) par rapport au signe de  $\Omega$  (figure IV.14b), indique que les deux décalages doivent exister : un décalage par rapport à  $Ox$  en restant dans le plan médian ne peut donner qu'une contribution impaire en  $\Omega$ , alors qu'un décalage par rapport à  $Ox$  en restant dans le plan  $xOz$  ne pourrait donner qu'une contribution paire en  $\Omega$ . Un autre indice d'un décalage de la sonde par rapport à l'axe  $Ox$  provient du fait que les mesures à un disque ne sont pas tout à fait symétriques non-plus. En valeur absolue, l'induction lorsque seul le moteur 2 tourne (figure IV.14c) est légèrement plus importante que lorsque seul le moteur 1 tourne (figure IV.14a). Ceci est par ailleurs en accord avec le fait que le signal temporel en régime contra-rotatif est légèrement négatif.

**Induction axiale au voisinage de l'axe  $Oy$ .** Au niveau de l'axe  $Oy'$ , l'induction mesurée est essentiellement impaire en  $\Omega$ . Les symétries propres au dispositif imposent qu'elle le soit rigoureusement sur l'axe  $Oy$  dans tous les cas, et en tout point du plan  $xOy$  en régime contra-rotatif. La contribution paire pour les mesures à un seul disque en rotation provient du fait que le capteur magnétique n'est pas exactement sur l'axe  $Oy$ , mais sur un axe décalé d'un angle de  $18.5^\circ$ . Cette contribution paire correspond au mécanisme décrit par le terme  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  responsable de l'induction axiale sur l'axe  $Ox$  (figure IV.14a et c.) Si l'on compare la partie paire de l'induction mesurée au voisinage de  $Oy$  lorsque seul le disque 1 tourne, et celle mesurée sur l'axe  $Ox$  lorsque seul le disque 2 tourne (qui sont toutes deux négatives), ou la partie paire de l'induction mesurée au voisinage de  $Oy$  lorsque seul le disque 2 tourne, et celle mesurée sur l'axe  $Ox$  lorsque seul le disque 1 tourne (qui sont toutes deux positives), on trouve un rapport de l'ordre de 0.2, en bon accord (compte tenu des incertitudes expérimentales, notamment dues au positionnement du capteur magnétique) avec le rapport  $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{18.5 \times \pi}{180}) \sim 0.3$  attendu d'après la relation (IV.32).

Les figures IV.14c,d et e montrent par ailleurs que la contribution impaire à l'induction axiale est clairement non-linéaire dans les régimes à un disque, alors qu'elle est dominée

par sa partie linéaire en régime contra-rotatif. Ce comportement linéaire en régime contra-rotatif ne peut pas résulter d'un effet du pompage, selon le terme source linéaire dominant  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$ . En effet, ce dernier ne fait intervenir que la composante  $u_z$  du champ de vitesse et dans la mesure où cette composante est inchangée lorsqu'on renverse le sens de rotation des disques (cette opération n'affecte que la composante azimutale de la vitesse), le champ magnétique produit par  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  est nécessairement pair en  $\Omega$ . Il ne peut donc être à l'origine d'aucune contribution impaire à l'induction d'un champ magnétique axial. Nous avons par ailleurs déjà mentionné le fait que ce terme est toujours antisymétrique par rapport au plan  $yOz$  et, en régime contra-rotatif, également par rapport au plan  $xOy$  (voir §III.5). En régime contra-rotatif, ses effets s'annulent donc identiquement en tout point de ces plans. Ces propriétés du terme  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  assurent sa compatibilité avec la contrainte d'imparité par rapport au sens de rotation des disques, imposées par les symétries intrinsèques du dispositif pour toute induction axiale dans les plans  $yOz$  et  $xOy$  (relations I.35 et I.41.)

Le mécanisme de déformation de  $\vec{B}_0$  par le gradient radial de  $u_z$ , décrit par le terme source  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$  permet donc de comprendre les mesures d'induction linéaire sur l'axe  $Ox$ , mais ne permet pas d'expliquer l'induction, impaire en  $\Omega$ , mesurée au voisinage de l'axe  $Oy$ . Pour expliquer ces comportements pour les mesures sur l'axe  $Oy'$  un mécanisme d'induction linéaire (différent de  $I_{1zx}^{\text{déformation}}$ ) pour le régime contra-rotatif, et un mécanisme non-linéaire pour les écoulements à un disque sont donc requis.

#### IV.2.2.3 effet “ $\alpha$ ” (non-linéaire)

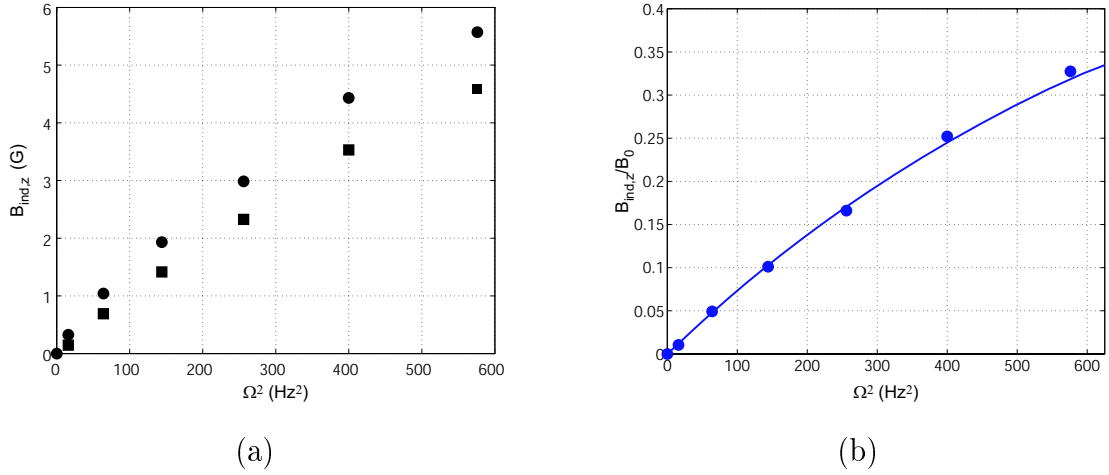
Le mécanisme conduisant à l'induction non-linéaire d'un champ axial dans le plan  $yOz$  pour un régime à un seul disque en rotation (et en particulier sur l'axe  $Oy$ ) a été décrit au chapitre précédent. Il s'agit de l'effet “ $\alpha$ ”, relié à l'hélicité globale de l'écoulement (§III.4.2.1.) Nous avons vu alors que ce mécanisme hélicitaire peut être décomposé en deux étapes selon deux mécanismes différents :

- Les lignes de champ de  $\vec{B}_0$  sont déformées par la recirculation centrifuge pour induire  $B_{1z}$  (c'est la contribution linéaire mesurée sur l'axe  $Ox$ ), puis le gradient magnétique ainsi créé est ensuite transporté par la rotation (figure III.36) pour donner un champ axial à l'ordre 2 dans le plan  $yOz$ .
- Les lignes de champ de  $\vec{B}_0$  sont déformées par la rotation pour induire un champ  $B_{1y}$  qui est ensuite déformé par la recirculation centrifuge (figure III.35) pour donner un champ à axial à l'ordre 2 dans le plan  $yOz$ .

Ces deux mécanismes conduisent finalement à un champ axial induit dans le plan  $yOz$ , quadratique en  $\Omega$  et essentiellement donné par

$$B_{2z} \propto 2\pi B_0 \Omega \partial_r u_z. \quad (\text{IV.33})$$

L'amplitude des composantes de vitesse étant proportionnelle à la fréquence de rotation des disques, l'expression ci-dessus est bien quadratique en  $\Omega$ . Cette expression montre que c'est le produit  $\Omega u_z$ , traduisant le caractère hélicitaire de l'écoulement, qui est à l'origine de ce mécanisme. L'hélicité possède les bonnes propriétés de symétrie pour que ses effets subsistent au niveau de l'axe  $Oy$  : elle est impaire en  $\Omega$ , et paire en changement de disque (l'opération "interchanger les disques" renverse le sens de la rotation globale du fluide mais également celui de la recirculation, de sorte qu'elle n'affecte pas le signe de



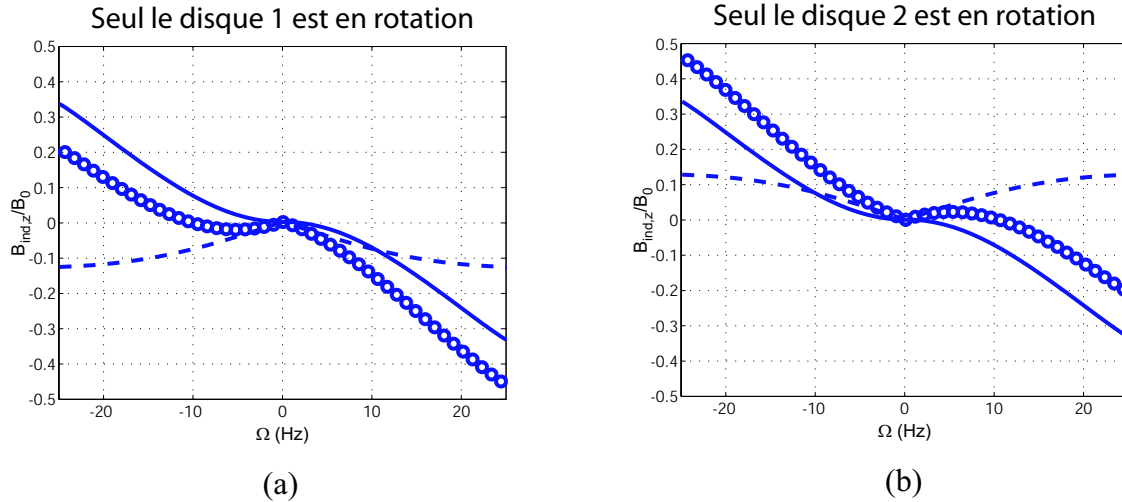
**Fig. IV.17:** Comportement quadratique du champ axial induit par effet “ $\alpha$ ”. (a) : contribution impaire des mesures expérimentales des figures IV.14d et f en fonction de  $\Omega^2$  (les carrés correspondent au cas où seul le disque 1 est en rotation et les ronds au cas où seul le disque 2 est en rotation) ; (b) : comparaison avec le résultat de la simulation numérique réalisée à partir du champ de vitesse à un seul disque en rotation engendré par une turbine TM802.

l’hélicité.) Ce mécanisme en deux étapes est quadratique en  $R_m$  (et donc en  $\Omega$ ), comme cela a été étudié au chapitre précédent, et notamment illustré par le résultat numérique de la figure III.46.

Si l’on considère le cas où seul le disque 1 est en rotation, par exemple, l’association des mesures IV.14a et IV.14d permet de valider la première des deux visions du mécanisme  $\alpha$  : le champ axial linéaire induit mesuré au niveau de l’axe  $Ox$  (IV.14a) traduit la déformation du champ appliqué par la recirculation centrifuge. Celui-ci est ensuite transporté par la rotation pour induire la composante axiale mesurée au niveau de l’axe  $Oy$  (IV.14d). La validation de la deuxième vision du mécanisme “ $\alpha$ ” aurait requis les mesures de la composante  $B_{ind,y}$  dont nous ne disposons pas. Toutefois, cette mesure a été réalisée dans l’expérience VKS et sera discutée plus loin.

La figure IV.17a représente la contribution impaire des figures IV.14c et e en fonction de  $\Omega^2$ . On constate que le champ axial induit est alors effectivement quadratique pour les fréquences de rotation modérées et qu’une saturation commence à se manifester pour les fréquences plus élevées. Ceci est en accord avec le calcul numérique (pour l’écoulement modèle) de la figure III.46 montrant que la solution perturbative tronquée à l’ordre 2 commence à dévier notablement de la solution finale convergée pour des nombres de Reynolds magnétiques supérieurs typiquement à 3 ( $\Omega \sim 15$  Hz.) Cette saturation correspond à l’expulsion du champ appliqué par le fluide en rotation qui se traduit inévitablement par une diminution des effets d’induction. Nous avons représenté sur la figure IV.17b, la courbe correspondante obtenue numériquement à partir du champ de vitesse TM802. Dans la mesure où le champ de vitesse n’est pas identique à celui utilisé dans l’expérience d’induction, l’accord est essentiellement qualitatif. Afin de comparer les comportements expérimental et numérique nous avons reporté sur la même courbe les points expérimentaux de la figure IV.14e, en les multipliant par un même facteur correctif (égal 4.3) afin de les superposer à la courbe numérique. Pour les points expérimentaux, l’écart à la qua-





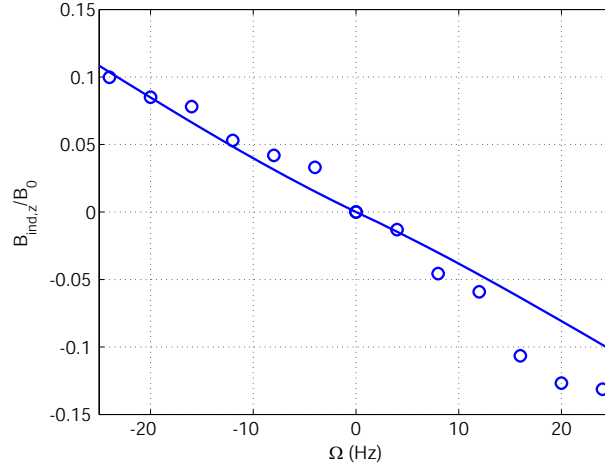
**Fig. IV.18:** Simulation numérique pour l'induction axiale au point ( $r = 0.5R, \theta = 108.5^\circ, z = 0$ ) de l'axe  $Oy'$  en présence d'un champ appliqué transverse. Les courbes en pointillés et en trait plein représentent respectivement les parties paire et impaire.

draticité lorsque la fréquence de rotation des disques augmente est alors en bon accord avec l'évolution prédite numériquement.

Les figures IV.18a et b représentent l'évolution en fonction de  $\Omega$ , ainsi que leur décomposition en partie paire et impaire, prédite numériquement (à partir du champ de vitesse TM802) pour les mesures des figures IV.14e et f. L'accord qualitatif avec les mesures expérimentales est très bon. Le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque obtenu numériquement est environ trois fois plus grand que celui obtenu expérimentalement. Comme dans le cas des effets linéaires, une comparaison quantitative des résultats expérimentaux et numériques est délicate dans la mesure où le champ de vitesse utilisé dans la simulation numérique n'est pas le même que celui utilisé dans l'expérience.

#### IV.2.2.4 Effet linéaire des conditions aux limites

L'étude numérique à partir d'un écoulement modèle suggère la possibilité, en régime contra-rotatif, d'une collaboration dans le plan médian des structures hélicitaires de l'écoulement situées de part et d'autre et donnant lieu chacune à l'induction d'un champ axial dans le plan  $yOz$  par effet " $\alpha$ ". L'hélicité de ces deux sous-structures étant la même, ces effets coopèrent positivement conduisant à un champ induit, impair et quadratique en  $\Omega$ , au niveau du plan médian, sur l'axe  $Oy$ . Cet effet coopératif est effectivement observé dans le calcul numérique à partir de l'écoulement von Kármán modèle et a été décrit, notamment par les courbes de la figure III.60. Les mesures effectuées en régime contra-rotatif montrent que le champ induit au voisinage de l'axe  $Oy$  est bien impair en  $\Omega$ , mais qu'en revanche il n'est pas quadratique, et présente une forte contribution linéaire en  $\Omega$ . La possibilité d'un tel effet linéaire a été anticipée et discutée dans le chapitre précédent (§III.6.) Elle résulte de l'effet-CL dû à la discontinuité de conductivité au niveau de la paroi du cylindre. Dans l'expérience VKG, la cuve est en acier inoxydable, et sa conductivité, trois fois inférieure à celle du gallium, justifie l'hypothèse d'une condition aux limites électromagnétique isolante.

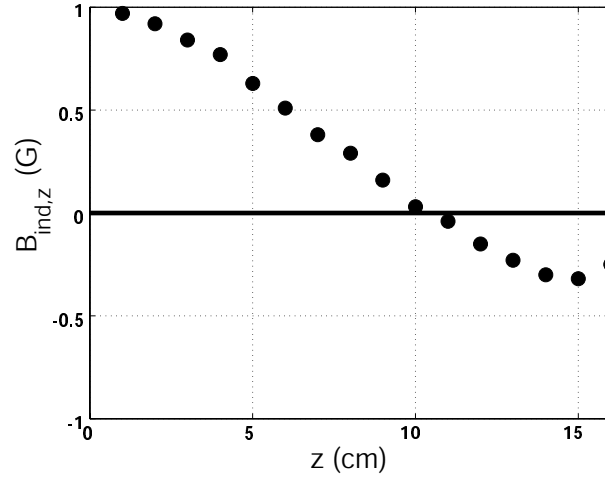


**Fig. IV.19:** Comparaison des mesures expérimentales de l'effet-CL et du résultat de la simulation numérique utilisant le champ de vitesse TM80.

**Remarque.** Avant de discuter plus en avant ces mesures, on peut remarquer que compte tenu de la faible inhomogénéité du champ appliqué, on pourrait avancer la possibilité d'un effet linéaire induisant un champ axial par le transport des gradients de  $\vec{B}_0$ . Parmi les termes sources d'induction linéaires recensés dans le tableau IV.3, seuls  $I_{1zx}^{\text{transport}}$  et  $I_{1zy}^{\text{transport}}$  pourraient alors être susceptibles de contribuer, dans la mesure où le caractère impair en  $\Omega$  requiert un terme source faisant intervenir la composante azimutale de la vitesse. Au voisinage de l'axe  $Oy$ , la contribution impaire en  $\Omega$  dominante serait donc  $u_\theta \partial_x B_{0z}$ . Cette contribution est a priori très faible dans la mesure où, comme cela est précisé dans le tableau IV.3, le champ  $B_{0z}$  est identiquement nul dans le plan médian  $xOy$  (qui est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant  $\mathcal{I}_0$  créant le champ appliqué transverse) et son gradient selon  $Ox$  l'est donc également. Les effets de l'inhomogénéité du champ appliqué ne suffisent donc certainement pas à expliquer l'intense induction linéaire observée.

La figure IV.19 compare les mesures expérimentales de la figure IV.14e aux résultats de la simulation numérique utilisant le champ de vitesse expérimental TM80 contra-rotatif (il s'agit bien dans ce cas du même champ de vitesse que celui de l'expérience d'induction), avec un champ appliqué transverse uniforme et des conditions aux limites isolantes. Le calcul est effectué à l'ordre 20 en  $R_m$  et converge sur toute la gamme explorée dans l'expérience au gallium (son rayon de convergence est de l'ordre de  $R_m^* \sim 6$ .) Il faut souligner que l'induction axiale observée résultant d'un effet des conditions aux limites, nous avons utilisé pour ce calcul une grille étirée, possédant une plus grande densité de noeuds au voisinage des parois. L'utilisation d'une grille régulière conduit à une sous-estimation de l'induction axiale par rapport aux mesures expérimentales. En revanche, l'accord devient quantitativement très bon avec la grille étirée (sans paramètre ajustable).

La figure III.67d décrivant qualitativement l'effet-CL, et la structure du champ induit calculé à l'ordre 1 avec le champ de vitesse expérimental TM80 (figure III.69) suggèrent également que, du fait du bouclage de la densité de courants vers les extrémités des parois, le champ axial induit dans le plan  $yOz$  doit changer de signe vers les extrémités



**Fig. IV.20:** Dépendance axiale du champ magnétique induit par effet-CL dans le plan  $yOz$  à  $r = 12$  cm (à l'extérieur de la cuve).

du cylindre. Afin de vérifier cette évolution, nous avons mesuré la dépendance en  $z$  du champ axial induit dans le plan  $yOz$ . Cette mesure n'a pu être faite qu'à l'extérieur de la cuve à 2 cm de la paroi, aux points ( $x = 0, y = R + 2$  cm,  $0 < z < 16$  cm). Le résultat est donné par la courbe de la figure IV.20 : le renversement du champ induit est bien observé ; il se produit au voisinage de la position des disques, en  $z \sim 10$  cm et devient négatif au-delà. Le fait que l'annulation de  $B_{ind,z}$  soit mesurée au voisinage de  $z \sim 10$  cm (c'est-à-dire au niveau de la position des disques), plutôt que vers  $z \sim \frac{R}{2}$ , comme le suggère le champ de vorticité (figure III.70) ou le résultat de la simulation numérique (figure III.69), provient du fait que dans l'expérience, la distance entre les disques est effectivement égale à  $2R$ , mais que la longueur réelle de la cuve est  $L \sim 3.3R$ , à cause du circuit de refroidissement situé à l'arrière des disques. Il en résulte que le bouclage de la densité de courant n'est pas contraint de se faire au niveau des disques, mais se produit certainement à l'arrière de ceux-ci. La nappe de courant selon  $Ox$  responsable de l'induction axiale par effet-CL aux extrémités du cylindre se trouve donc vers  $z \sim \frac{L}{2} = 16$  cm et l'annulation de  $B_{ind,z}$  peut alors se produire vers  $z \sim R = 10$  cm.

### IV.2.3 Conclusion

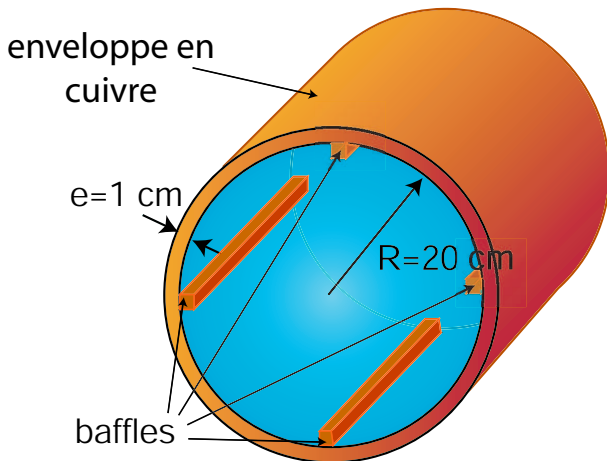
L'expérience VKG nous a ainsi permis d'identifier expérimentalement les mécanismes d'induction linéaires et quadratiques décrits dans le chapitre précédent. Cette étude peut être complétée par des travaux antérieurs utilisant le dispositif von Kármán en régime corotatif [67]. Dans ce cas, le coeur de l'écoulement est en rotation solide et le mécanisme d'expulsion est clairement observé et caractérisé. Les nombres de Reynolds magnétiques disponibles dans l'expérience VKG restent toutefois relativement faibles et ne permettent pas d'explorer la possibilité d'un couplage de ces effets et notamment la possibilité d'un mécanisme d'ordre 3 de type " $\alpha$ " $\Omega$ . D'après l'étude numérique de l'induction, cet effet cubique ne se manifeste sensiblement que pour des nombres de Reynolds magnétiques supérieurs à 10 (figure III.60.) Nous étudions dans le paragraphe suivant les mesures d'induction réalisées dans l'expérience VKS, permettant d'atteindre des nombres de Reynolds magnétiques jusqu'à 50.

## IV.3 Mesures d'induction dans VKS - $R_m < 50$

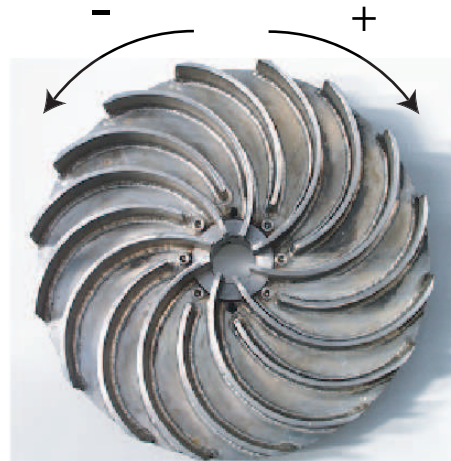
Dans l'expérience VKS, seules des mesures sur l'axe  $Oy$  sont possibles. Le point de mesure se trouve bien sur l'axe  $Oy$  et non plus sur un axe décalé de  $18.5^\circ$  comme c'était le cas dans l'expérience au gallium. L'incertitude sur la position du capteur est de l'ordre de 1 cm (2.5% du diamètre de la cuve.) Afin de maintenir le capteur en dessous de  $70^\circ$  (au-delà il serait irréversiblement endommagé), il est en permanence refroidi par un circuit d'air comprimé le maintenant à une température d'environ  $40^\circ$ . Cette température n'est toutefois pas régulée et elle peut dériver (de plus ou moins  $5^\circ\text{C}$  environ) en fonction de la configuration expérimentale (notamment lors des régimes à hautes fréquences de rotation.) Afin de s'affranchir de la dépendance en température de la réponse du capteur Hall (malgré sa compensation en température, une faible dérive, de l'ordre de  $0.03 \text{ K}\cdot\text{s}^{-1}$ , subsiste), celui-ci a été préalablement calibré de telle sorte que les mesures sont ramenées à leur valeur correspondant à une température de référence (choisie comme la température la plus fréquente sur l'ensemble d'une campagne de mesure; elle se situe généralement autour de  $40^\circ$ .)

### IV.3.1 Les spécificités de VKS

En plus des différences déjà mentionnées entre VKG et VKS, visant notamment à augmenter la gamme de nombres de Reynolds magnétiques accessible, l'expérience VKS possède quelques spécificités par rapport à l'expérience VKG, dont l'objectif premier visait à favoriser la possibilité d'instabilité dynamo. Les études numériques [58] de dynamos cinématiques cylindriques périodiques, utilisant un écoulement similaire à von Kármán, suggèrent que la présence d'une couche conductrice (dans l'étude numérique en question il s'agit d'une couche de fluide au repos) autour de l'écoulement abaisse le seuil de l'instabilité. La nécessité d'une telle couche conductrice est indispensable également pour la dynamo de Ponomarenko, et l'expérience de Riga [37]. Une enveloppe de cuivre d'épaisseur 1 cm (5% du rayon de la cuve) a donc été placée à l'intérieur de la cuve, qui est, elle, en acier inoxydable et joue un rôle de condition aux limites isolante. Afin de briser l'axi-symétrie de l'écoulement et d'augmenter son rapport  $P/T$ , quatre baffles longitudinales,



**Fig. IV.21:** Schéma de l'intérieur de la cuve VKS.



**Fig. IV.22:** Sens de rotation positif pour les disques à pales courbes (TM60 sur la figure.)

de section carrée de 2 cm de côté, peuvent être disposées sur la paroi interne de la cuve (figure IV.21.)

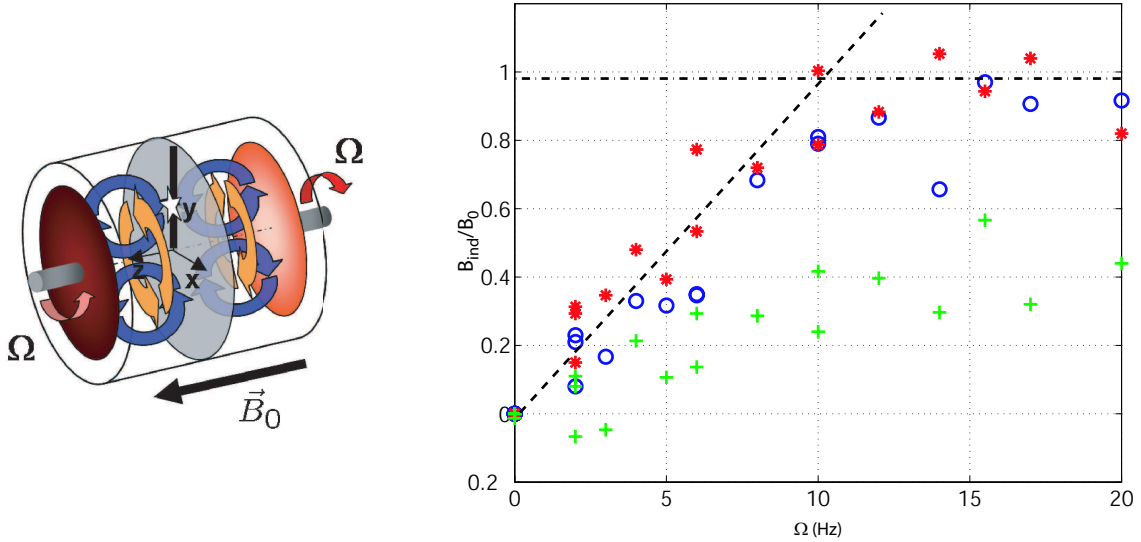
L'expérience VKS a connu 6 campagnes de mesures (VKSa à VKSf.) Diverses configurations d'écoulement ont été testées lors de ces différentes campagnes :

- VKSa et VKSb :
  - disques : TM60 (pales courbes ; angle de sortie :  $72^\circ$  ; rayon : 92.5% du rayon de la cuve)
  - pas de baffles
- VKSc :
  - disques : TM60
  - baffles
- VKSd et VKSe :
  - disques : TM70 (pales droites ; rayon : 75% du rayon de la cuve)
  - baffles
- VKSf :
  - disques : TM28p (pales courbes ; angle de sortie :  $57^\circ$  ; rayon : 75% du rayon de la cuve)
  - baffles

Les principales propriétés des différentes turbines utilisées ont déjà été discutées et sont résumées dans le tableau IV.1.

Il faut rappeler que cette expérience est soumise à un certain nombre de contraintes, notamment liés à des problèmes de sécurité concernant la manipulation du sodium. Les campagnes de mesures se réalisent typiquement sur une durée de quinze jours durant lesquels tous les moyens sont déplacés sur le centre du CEA de Cadarache. Le manque de flexibilité de cette expérience rend difficile une étude systématique de l'induction en différents points du volume. Nous ne disposons essentiellement que de mesures sur l'axe  $Oy$ , et notamment au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$ .

Selon les campagnes, l'intensité du champ appliqué n'était pas toujours la même (elle variait typiquement entre 3 G et 20 G). Afin de comparer les mesures dans les différentes configurations étudiées, et dans la mesure où l'induction est toujours linéaires en  $B_0$  (dans



**Fig. IV.23:** TM60 sans baffles. Induction au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$  en régime contra-rotatif et champ axial appliqué.  $B_0 = 3$  G ; (+) :  $B_{ind,r}$  ; (\*) :  $B_{ind,\theta}$  ; (o) :  $B_{ind,z}$ .

la condition de faible paramètre d'interaction où nous travaillons), nous les reporterons directement en terme du nombre Reynolds magnétique intrinsèque local associé ( $\frac{B_{ind}}{B_0}$ ).

**Remarque.** Pour les disques à pales courbes tels que les TM60 et les TM28p, l'écoulement est très différent selon le sens de rotation. Les plus grandes fréquences de rotation (de l'ordre de 25 Hz) sont obtenues lorsque les disques tournent avec “le dos de la cuillère” (figure IV.22) et correspondent aux fréquences positives (par convention.) Lorsque les disques tournent dans l'autre sens, l'efficacité de l'entraînement est meilleure, mais le facteur de puissance est multiplié par trois, de telle sorte que compte tenu de la puissance moteur disponible, on ne peut dépasser les fréquences de rotation de l'ordre de 10 Hz. Nous ne présenterons donc, pour les mesures faites avec les disques TM60 et TM28p, que le cas des fréquences de rotation positives.

### IV.3.2 Champ axial appliqué

**Mesures dans l'écoulement TM60 sans baffles.** La figure IV.23 présente les mesures d'induction réalisées au point  $(x = 0, y = 0.5R = 10$  cm,  $z = 0)$  pour un champ appliqué axial en régime contra-rotatif. Les disques utilisés sont les TM60 et les parois ne sont pas munies de baffles. Le champ magnétique appliqué vaut 3 G au point de la mesure. La sonde utilisée pour ces mesures donne directement les trois composantes du champ magnétique. Compte tenu du facteur de puissance  $K_p$  (reliant la consommation de puissance et la fréquence de rotation des disques) pour les disques TM60, le nombre de Reynolds magnétique maximal que l'on puisse atteindre est de l'ordre de 40, correspondant à une fréquence de rotation maximale d'environ 25 Hz.

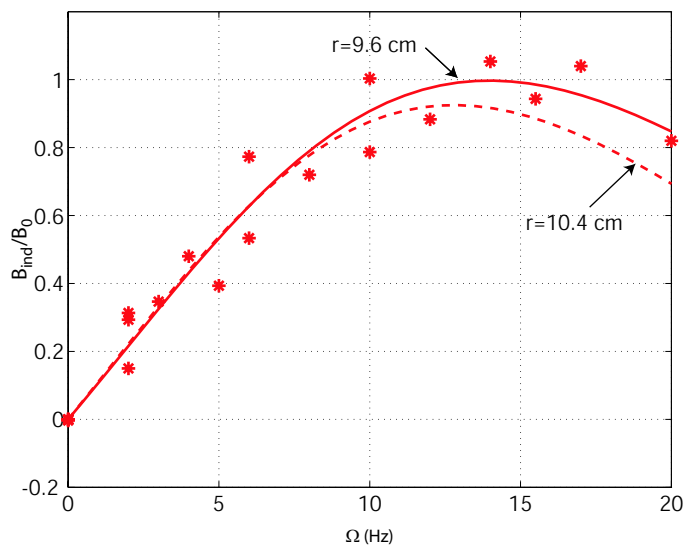
Ces mesures montrent que l'induction est essentiellement linéaire en  $\Omega$  jusqu'à des fréquences de rotation de l'ordre de 10 Hz ( $R_m \sim 15$ ) puis sature ensuite à  $B_{ind}^{max} \sim B_0$ . Le nombre de Reynolds magnétique intrinsèque maximal atteint est donc de l'ordre de 1, soit trois fois supérieur à celui obtenu dans l'expérience au gallium, avec les disques TM80.

La composante azimutale induite correspond à l'effet  $\Omega$  et la composante axiale  $B_{ind,z}$  à l'étirement de  $\vec{B}_0$  par le pompage différentiel. Au point où la mesure est réalisée, les deux effets sont sensiblement de même amplitude.

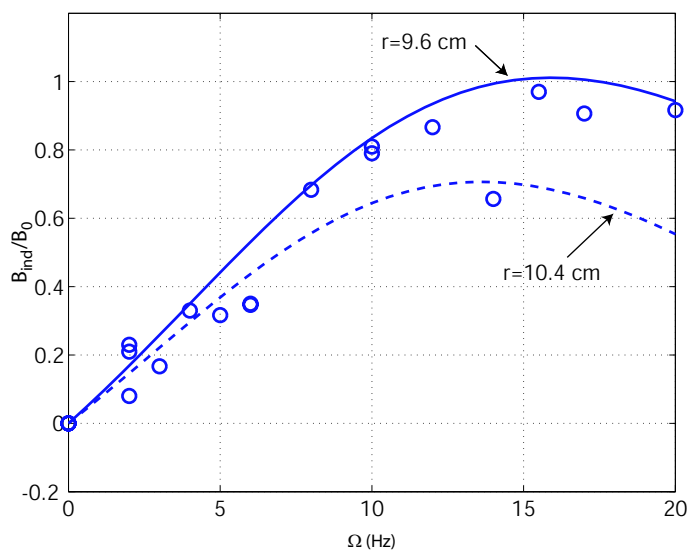
La saturation observée pour les hauts nombres de Reynolds magnétiques traduit l'expulsion du champ appliqué par les boucles de recirculation centrifuge de l'écoulement. Ceci est en accord avec l'étude réalisée au chapitre précédent (§III.3.3.2.) Les prémices de cette expulsion étaient également suggérées par la mesure de la différence de potentiel axial dans l'expérience VKG.

Les figures IV.24 et IV.25 comparent l'induction prévue par la simulation numérique aux mesures expérimentales de l'effet  $\Omega$  et de l'effet de l'étirement du champ appliqué. Nous avons reporté l'évolution prédite numériquement pour des points encadrant le point de mesure expérimental à  $\pm 4$  mm près dans la direction verticale. La simulation est effectuée par la méthode perturbative poussée jusqu'à l'ordre 30 utilisant le champ de vitesse mesuré dans l'expérience en eau [76]. Le développement perturbatif converge alors jusqu'à  $R_m \sim 27$  ( $\Omega \sim 18$  Hz). L'évolution au-delà est obtenue par les approximants de Padé. Sans utiliser aucun paramètre ajustable, l'accord entre le calcul numérique et les mesures expérimentales est très bon. En particulier, la valeur du nombre de Reynolds intrinsèque à saturation et la fréquence de saturation sont bien prédits par le calcul perturbatif. Le calcul numérique prévoit également une décroissance de l'induction après la saturation observée, l'expulsion devenant alors le mécanisme dominant. On peut également remarquer que la dépendance en fonction de la distance à l'axe du point de mesure prédite par le calcul numérique est plus importante pour l'induction axiale (par étirement) que pour l'induction azimutale (par effet  $\Omega$ ). Ceci est en accord avec le fait que  $\partial_z u_z$  (responsable de l'étirement selon le terme source d'induction  $I_{1zz}^{\text{déformation}}$ ) varie notablement dans la direction radiale (et change même de signe, passant d'un effet d'étirement des lignes de champ magnétique au centre à un effet de compression vers les parois) alors que  $\partial_z u_\theta$  (traduisant la rotation différentielle axiale responsable de l'effet  $\Omega$ ) varie peu dans la direction radiale.

Les mesures présentées sur la figure IV.23 montrent également l'induction d'une composante radiale. L'étude des symétries intrinsèques du dispositif expérimental dans la configuration présente interdit l'induction d'une telle composante dans le plan médian (d'après la relation (I.18).) La mesure d'une telle induction est en réalité assez surprenante et reste largement inexplicée. Elle pourrait résulter d'un décalage de la position de la sonde par rapport au plan médian, ou d'une dissymétrisation de l'écoulement induite par la présence même de la sonde. Nous verrons plus loin que dans les autres configurations étudiées (autres disques d'entraînement et/ou présence de baffles sur les parois de la cuve) cette composante n'est plus observée (en accord donc avec les propriétés de symétrie de l'écoulement), de telle sorte qu'une erreur dans le réglage des gains lors de l'acquisition du signal  $B_{ind,r}$  pour cette série de mesure ne peut pas être exclue.



**Fig. IV.24:** Comparaison des mesures et de la simulation numérique pour l'induction azimutale (effet  $\Omega$ ).



**Fig. IV.25:** Comparaison des mesures et de la simulation numérique pour l'induction axiale (effet d'étirement).



**Mesures dans d'autres configurations d'écoulement contra-rotatif.** La figure IV.26 représente quelques mesures réalisées dans les mêmes conditions que celles de la figure IV.23, donc toujours pour les disques TM60, à la différence près que la cuve est alors munie de baffles. Bien que nous ne disposions que de peu de mesures, on peut toutefois constater que l'allure générale de l'induction reste sensiblement inchangée, mais que l'effet  $\Omega$  est considérablement accentué, puisque des nombres de Reynolds intrinsèques de l'ordre de 2 sont atteints pour la conversion du champ axial appliqué en un champ azimutal. Ce comportement n'est pas a priori évident dans la mesure où l'on aurait pu s'attendre à une diminution des effets de la rotation par la présence des baffles. Pour des raisons techniques liées à la mesure du champ de vitesse par LDV, nous ne disposons malheureusement pas pour le moment de mesure du champ de vitesse en présence de baffles (l'interception du faisceau laser par les baffles et la brisure de l'axisymétrie de l'écoulement exigent une adaptation de la technique de mesure par rapport à sa configuration actuelle.) La nature exacte de l'écoulement en présence de baffles n'est pas bien caractérisée. Les visualisations en eau montrent l'apparition, entre les baffles, dans le plan médian, d'intenses vortex radiaux, caractéristiques d'une instabilité de type Kelvin-Helmoltz dans la couche de cisaillement. De telles structures pourraient accentuer localement l'effet du cisaillement par la rotation différentielle, ce qui expliquerait les fortes inductions mesurées. Dans cette configuration (comme dans celles que nous décrivons à la suite), la composante radiale induite est essentiellement nulle, en accord cette fois-ci avec les propriétés de symétrie de l'expérience.

Les mesures réalisées dans les configurations utilisant des disques TM70 et TM28p, plus petits et munis de plus petites pales que les TM60 sont représentées sur les figures IV.27 et IV.28a. Elles ne présentent pas d'effet nouveau, si ce n'est que l'induction axiale est considérablement réduite au point ( $x = 0, y = 10 \text{ cm}, z = 0$ ) où la mesure est réalisée et que la saturation ne se produit que pour des fréquences de rotation de l'ordre de 20 Hz (contre environ 10 Hz pour les TM60.) Le facteur de vitesse des petits disques vaut 0.39, soit environ une fois et demie plus faible que celui des TM60. Ceci implique que la valeur de  $R_m$  pour laquelle la saturation démarre pour les petits disques est de l'ordre de 20 alors qu'elle se produit pour les TM60 dès  $R_m \sim 15$ . Cette différence est probablement due au fait que la réduction de la taille des disques n'influe pas que sur le facteur de vitesse mais également sur la géométrie de l'écoulement. On peut imaginer que des disques plus petits vont produire un écoulement plus localisé au coeur de la cuve et moins intense vers les bords (cette tendance étant accentuée par la présence des baffles.) Par conséquent, pour une position donnée de la sonde, tout se passe comme si celle-ci était plus en périphérie de l'écoulement et donc moins sensible à l'expulsion. Ceci expliquerait pourquoi l'expulsion se produit à des  $R_m$  plus élevés lorsqu'on utilise des petits disques. Cela explique également la diminution relative de l'induction axiale, puisque la sonde étant placée plus en périphérie de l'écoulement, les effets mesurés pour l'étirement (dominants au centre) sont moindres.

Enfin, on peut également observer que la dispersion des mesures est réduite pour les mesures effectuées avec les disques de taille réduite. Ceci reflète probablement la diminution des fluctuations de l'écoulement, associée à un plus faible taux de turbulence dans l'écoulement engendré par les disques TM70 et TM28p.

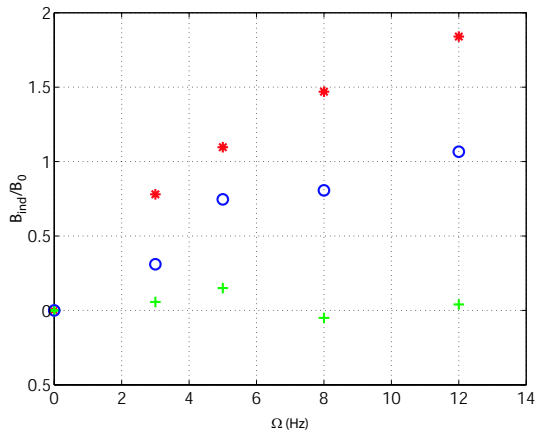


Fig. IV.26: TM60 avec baffles.

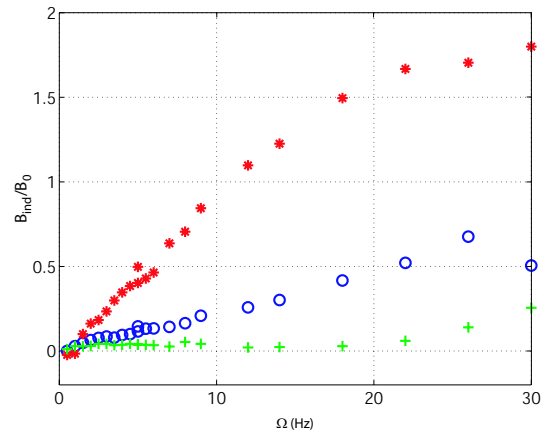
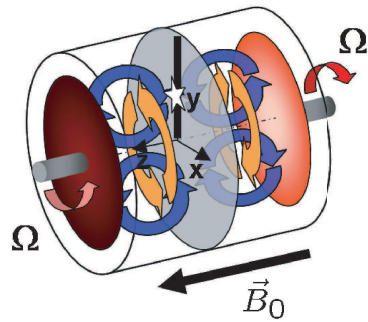
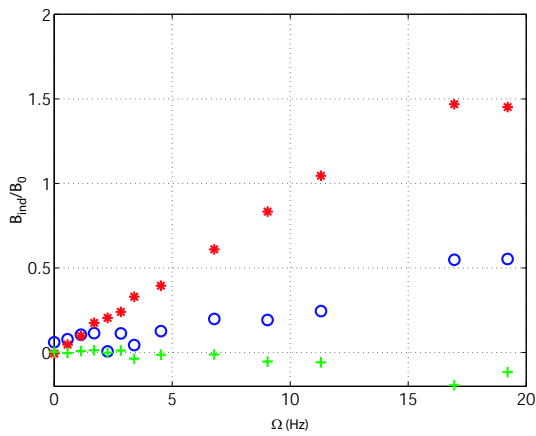


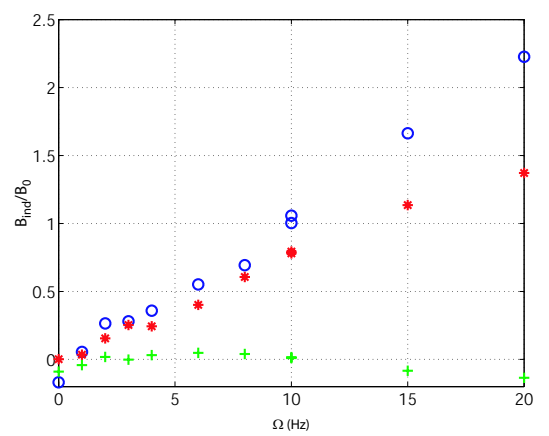
Fig. IV.27: TM70 avec baffles.



(+) :  $B_{ind,r}$  ; (\*) :  $B_{ind,\theta}$  ; (o) :  $B_{ind,z}$

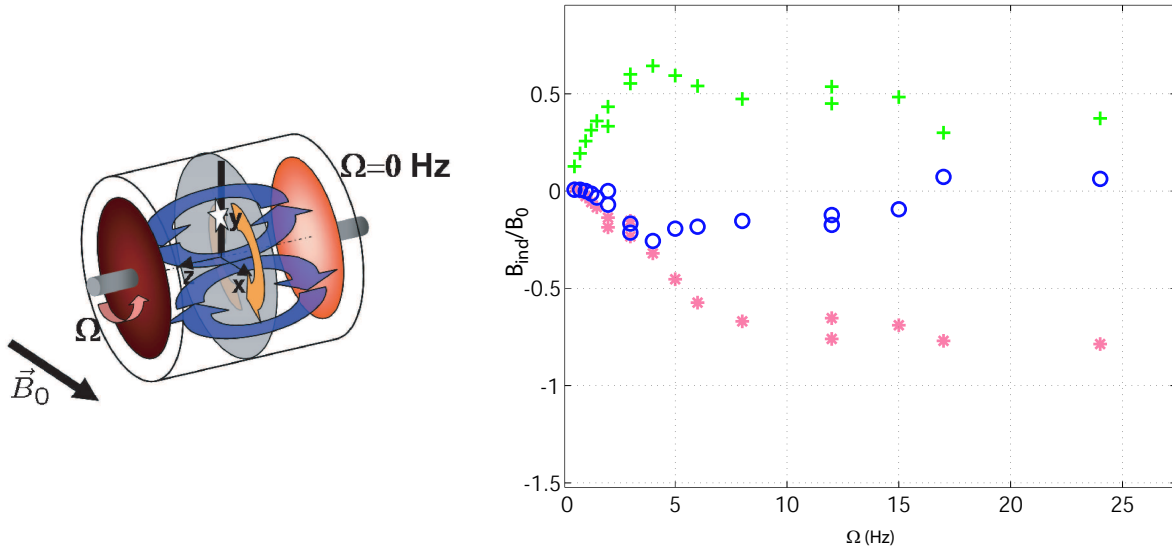


(a) mesure au point  
 $(x = 0, y = 10 \text{ cm}, z = 0)$



(b) mesure au point  
 $(x = 0, y = 4 \text{ cm}, z = 0)$

Fig. IV.28: TM28p avec baffles.

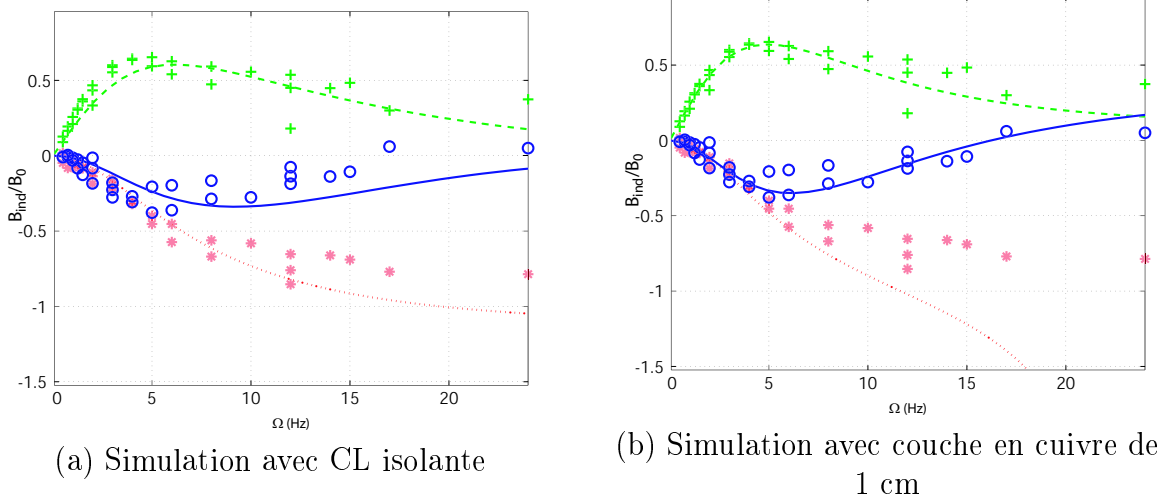


**Fig. IV.29:** TM60 sans baffles. Induction au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$  en régime à un disque en rotation et champ transverse appliqué. (\*) :  $B_{ind,x}$ ; (+) :  $B_{ind,y}$ ; (o) :  $B_{ind,z}$ .

### IV.3.3 Effet-“alpha” (un seul disque en rotation)

**Mesures dans l’écoulement TM60 sans baffles.** La figure IV.29 présente les mesures d’induction pour les trois composantes du champ magnétique au point  $(x = 0, y = 0.5R = 10 \text{ cm}, z = 0)$  en présence d’un champ transverse appliqué (d’amplitude 3 G au point de mesure), pour un écoulement produit lorsque seul le disque 1, de type TM60, est en rotation, sans baffles sur les parois de la cuve. La composante axiale  $B_{ind,z}$  montre un comportement non-linéaire aux basses fréquences de rotation en accord avec les mesures de l’expérience au gallium et correspond à l’induction hélicitaire par effet  $\alpha$ . Comme nous l’avons déjà souligné, l’effet “ $\alpha$ ” résulte de l’hélicité de l’écoulement et son mécanisme peut être expliqué selon deux visions duales faisant intervenir successivement le pompage et la rotation du fluide. Les mesures réalisées dans l’expérience au gallium nous avaient permis de valider expérimentalement l’interprétation mécaniste de l’effet  $\alpha$  en termes de pompage puis rotation, tel que suggéré par la figure III.36, en montrant l’induction linéaire d’une composante axiale dans le plan  $xOz$  (c’est ensuite la rotation de cette composante qui induit un champ axial quadratique dans le plan  $yOz$ .) Ces mesures ne nous avaient en revanche pas permis de valider la deuxième vision de ce mécanisme (en terme de rotation puis pompage) à cause de l’absence de mesure de la composante  $B_{ind,y}$ . Les mesures de l’expérience VKS montrent à présent qu’une telle composante est bien induite. Elle correspond à la première étape du mécanisme “ $\alpha$ ” décrite par la figure III.35 et traduisant l’effet de la rotation sur  $B_{0x}$ . Les mesures montrent qu’elle est bien linéaire en  $\Omega$  aux basses fréquences de rotation et sont en accord avec ce mécanisme d’ordre 1. Cette composante  $B_{ind,y}$  est ensuite déformée par le pompage centrifuge pour induire la composante axiale quadratique mesurée au même point. Le mécanisme “ $\alpha$ ” et ses deux visions duales, sont donc désormais bien identifiés expérimentalement.

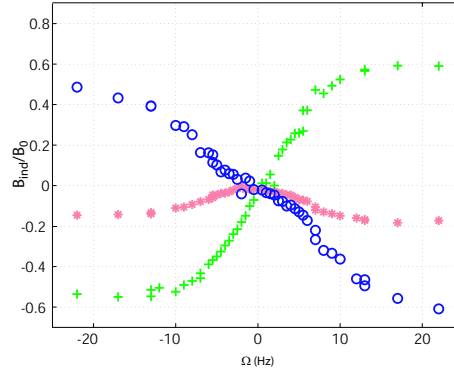
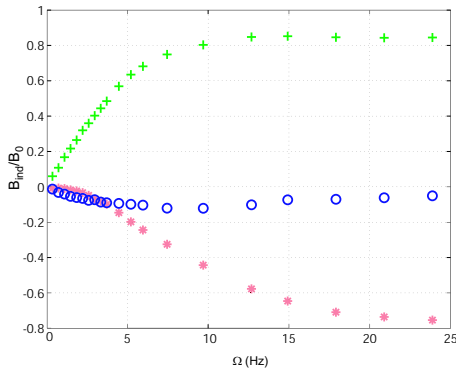
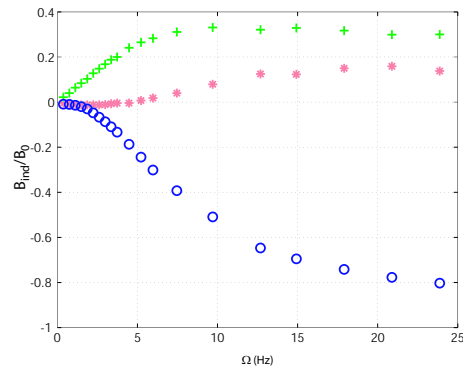
La composante transverse  $B_{ind,x}$  (dirigée selon le champ appliqué) reste toujours négative (ce qui traduit le fait qu’elle s’oppose au champ appliqué.) Par ailleurs, elle présente un comportement non-linéaire traduisant le début du mécanisme d’expulsion du champ appliqué par le fluide en rotation, décrite par le mécanisme quadratique de la figure III.3



**Fig. IV.30:** Comparaison des mesures expérimentales de l'effet  $\alpha$  et de la simulation numérique perturbative étendue par les approximants de Padé. (\*, ligne en pointillés) :  $B_{ind,x}$ ; (+, ligne en tirets) :  $B_{ind,y}$ ; (o, ligne continue) :  $B_{ind,z}$ .

pour la rotation solide.

Pour les fréquences de rotation plus élevées, on observe une saturation des composantes  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$  et un ralentissement de la décroissance de  $B_{ind,x}$ . Cette évolution est en très bon accord avec celle prédite par l'étude numérique de l'écoulement modèle de von Kármán (figure III.43.) L'accord entre l'approche perturbative numérique et les mesures expérimentales devient quantitativement très bon lorsque la simulation numérique est réalisée à partir du champ de vitesse donné par les mesures en eau avec les mêmes disques TM60. La figure IV.30 compare les résultats numériques et expérimentaux. Afin de donner une idée de la dispersion expérimentale des mesures, nous avons reporté sur cette figure deux séries de mesures effectuées au même point dans les mêmes conditions (la deuxième série ne comporte cependant que des mesures pour des fréquences de rotation inférieures à 14 Hz.) L'origine de cette dispersion est liée d'une part à l'incertitude sur la position exacte du capteur, pouvant donner lieu à un décalage systématique des mesures, et d'autre part aux fortes fluctuations de l'écoulement, affectant le processus de moyennage temporel du signal (pour les raisons de dérive thermique déjà mentionnées, les mesures ne peuvent dépasser quelques dizaines de secondes pour les plus hautes fréquences de rotation.) Le calcul numérique a été mené jusqu'à l'ordre 40 en  $R_m$ , et pour des conditions aux limites isolantes (figure IV.30a) et tenant compte de la couche conductrice de cuivre (figure IV.30b.) Le rayon de convergence du développement perturbatif ainsi obtenu n'est que de l'ordre de  $R_m^* \sim 5$  ( $\Omega \sim 3$  Hz), mais la solution correspondante peut être prolongée par la méthode des approximants de Padé. Le calcul avec des conditions aux limites parfaitement isolantes est en bon accord avec les mesures expérimentales. Ceci traduit le fait que les mécanismes d'induction en jeu ici sont essentiellement dûs aux termes volumiques du transport et de la déformation de  $\vec{B}_0$ . Le calcul tenant compte de la couche en cuivre améliore tout de même sensiblement la description de l'induction des composantes  $B_{ind,y}$  et  $B_{ind,z}$ . En revanche, la solution obtenue par les approximants de Padé pour  $B_{ind,x}$  présente une singularité au voisinage de  $\Omega = 20$  Hz. Ceci montre une des limites de la méthode des approximants de Padé, qui reste difficile à maîtriser. En dehors du voisinage de la singularité en question, la description de  $B_{ind,x}$  est toutefois en bon accord avec les

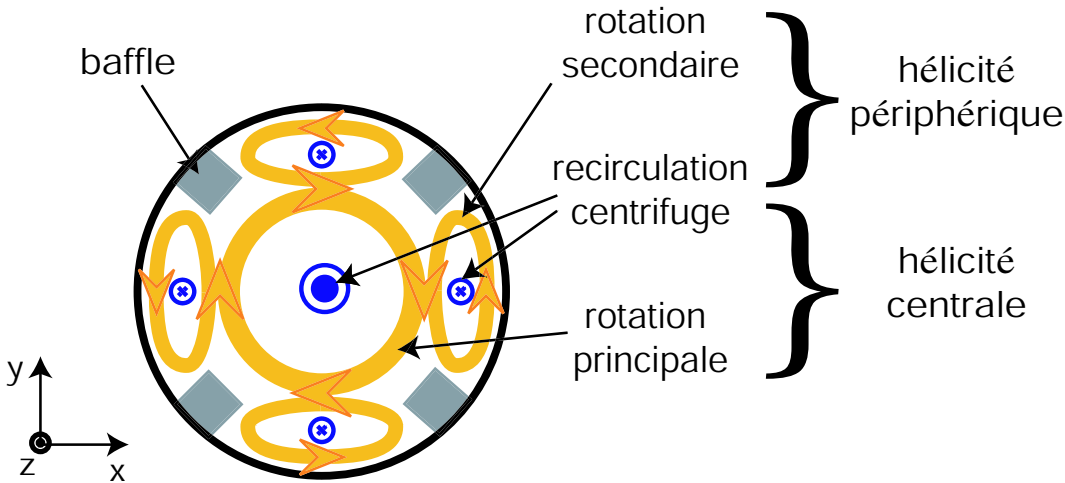
(a) Mesures au point ( $x = 0, y = 10 \text{ cm}, z = 0$ )(b) mesures au point  
( $x = 0, y = 4 \text{ cm}, z = 0$ )(c) mesures au point  
( $x = 0, y = 15 \text{ cm}, z = 0$ )

**Fig. IV.31:** TM70 avec baffles. Induction mesurée à différentes distances à l'axe, en régime à un seul disque en rotation et en champ transverse appliqué. (\*) :  $B_{ind,x}$ ; (+) :  $B_{ind,y}$ ; (o) :  $B_{ind,z}$ .

mesures.

**Mesures avec les disques TM70 et les baffles.** La figure IV.31a présente les mesures équivalentes obtenues dans la campagne VKSe utilisant les disques TM70 et les baffles. L'utilisation de disques à pales droites permet d'explorer l'induction pour les deux sens de rotation du disque. On constate alors que la composante axiale est bien impaire en  $\Omega$  (comme nous l'avons déjà vérifié dans l'expérience au gallium et en accord avec les symétries intrinsèques de l'expérience) et toujours quadratique en  $\Omega$  en accord avec le mécanisme "α" hélicitaire proposé. La composante linéaire  $B_{ind,y}$  est impaire en  $\Omega$ , en accord avec les contraintes de symétrie intrinsèques et avec la première étape du mécanisme "α" de la figure III.35 correspondant à la rotation de  $\vec{B}_0$ . Enfin, la composante  $B_{ind,x}$  est paire en  $\Omega$  (toujours en accord avec les contraintes de symétrie intrinsèques) et quadratique, en accord avec le mécanisme d'expulsion de la figure III.3 en deux étapes de rotation successives.

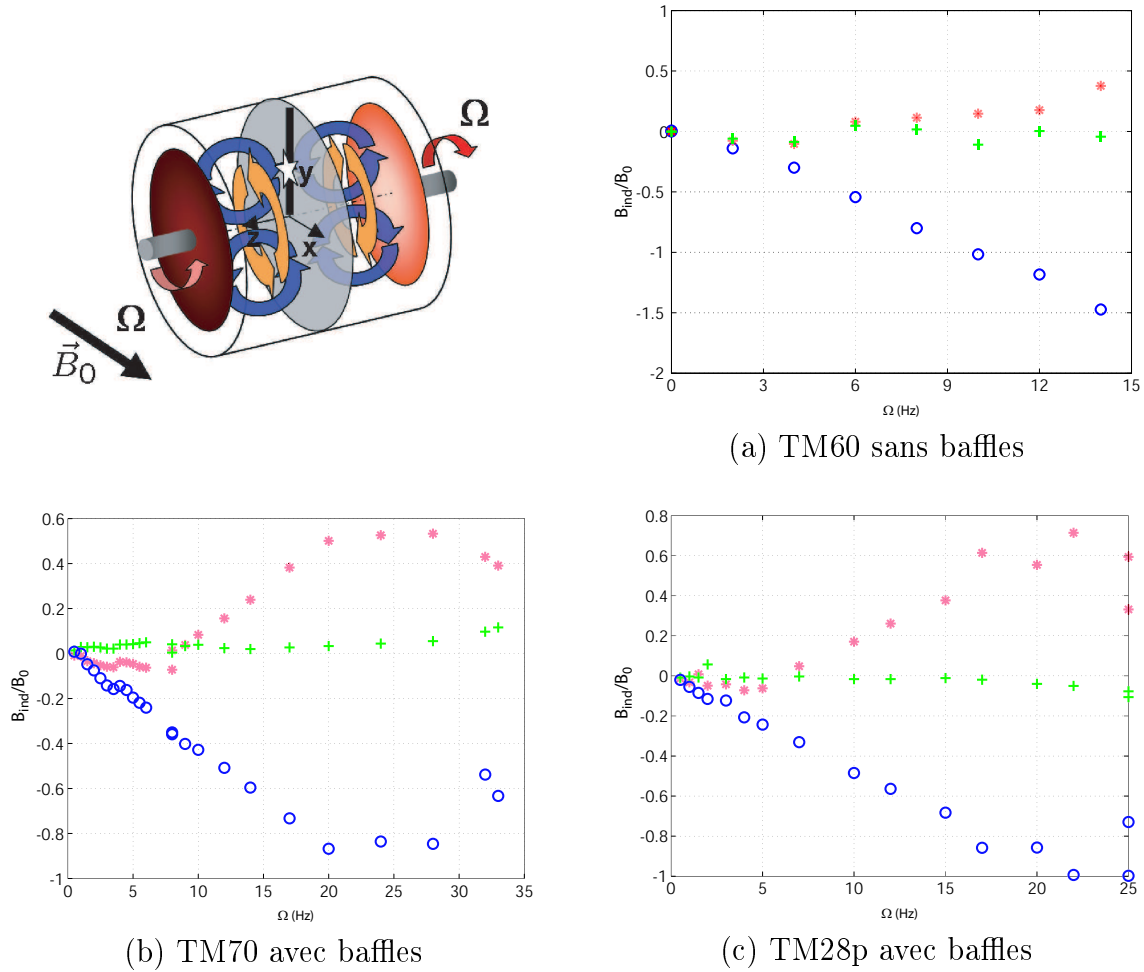
Les figures IV.31b et c présentent des mesures réalisées pour des points situés à d'autres distances à l'axe. Il y apparaît que loin du centre (à 15 cm de l'axe, donc à 5 cm du bord du cylindre), le champ induit dans la direction du champ appliqué peut devenir positif. Ceci correspond à l'expulsion du champ magnétique du coeur de la rotation, à l'image du



**Fig. IV.32:** La présence des baffles peut conduire à la formation de structures hélicitaires périphériques, où l'hélicité est de même signe que celle présente dans le coeur de l'écoulement.

mécanisme illustré pour la rotation solide par les figures ?? : le champ magnétique tend à se concentrer à la périphérie de la rotation. Au contraire, la mesure faite à 4 cm de l'axe montre que la composante  $B_{ind,x}$  est fortement négative et d'amplitude comparable au champ appliqué ( $R_m^i \sim -1$ ), auquel elle s'oppose, contribuant ainsi à son expulsion du coeur de l'écoulement. L'induction linéaire de  $B_{ind,y}$  est en accord avec cette vision de l'expulsion, puisqu'elle traduit directement l'effet de la rotation qui est la principale cause de l'expulsion. Cet effet est très intense au centre et décroît à mesure qu'on s'en éloigne. Ces comportements sont en bon accord qualitatif avec ceux prédits par l'étude numérique du chapitre précédent.

Enfin, l'effet " $\alpha$ " (induction axiale quadratique) apparaît être de plus en plus efficace au fur et à mesure qu'on se rapproche des parois. Ceci est contraire à la prédiction du calcul numérique réalisé pour les disques TM60 sans baffles, où l'intensité de l'effet  $\alpha$  décroît clairement près des bords de la cuve, ce qui semble normal dans la mesure où l'hélicité de l'écoulement est, en l'absence de baffles, surtout importante au centre de l'écoulement. L'intensification de l'effet " $\alpha$ " au voisinage de la paroi de la cuve résulte donc très probablement d'un effet dû à la présence des baffles. Une interprétation possible serait la création de structures hélicitaires entre les baffles (un schéma de principe est représenté sur la figure III.10.) Dans la mesure où les baffles tendent à s'opposer à la rotation principale, des structures où le sens de rotation est inversé peuvent apparaître entre les baffles. Par ailleurs, la composante axiale de l'écoulement, due aux boucles de recirculation centrifuge, est inversée entre le centre et la périphérie de la cuve, de telle sorte que l'hélicité des structures périphériques serait de même signe que l'hélicité du coeur de l'écoulement. L'effet " $\alpha$ " pourrait ainsi être maintenu au voisinage des parois.



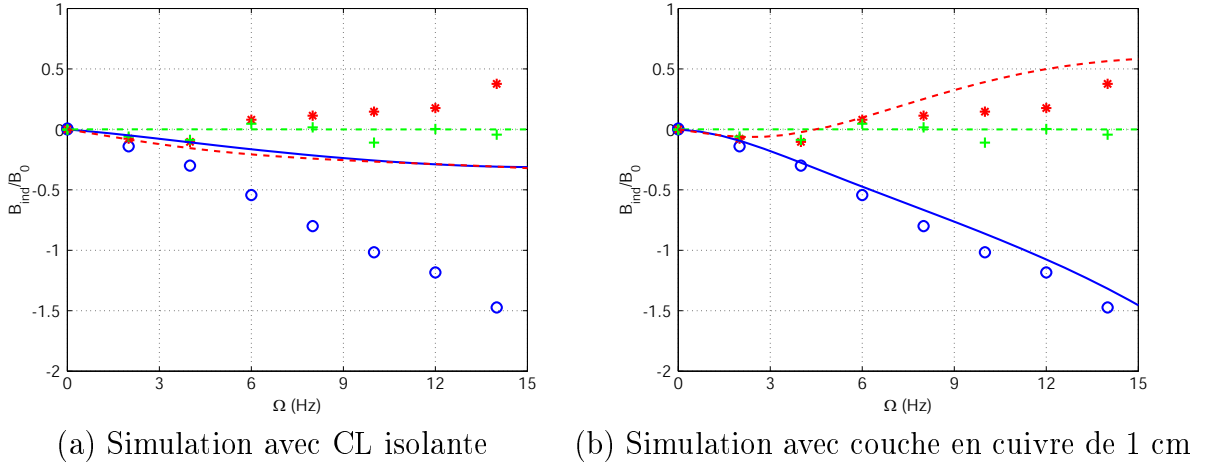
**Fig. IV.33:** Induction mesurée au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$ , en régime contra-rotatif produit dans différentes configurations et en champ transverse appliqué. (\*) :  $B_{ind,x}$ ; (+) :  $B_{ind,y}$ ; (o) :  $B_{ind,z}$ .

#### IV.3.4 Effet-CL et bouclage “ $\alpha$ ” $\Omega$

Nous considérons à présent les mesures d'induction obtenues en régime contra-rotatif et en présence d'un champ magnétique transverse dirigé selon  $Ox$ . Les figures IV.33a, b et c présentent le résultat de ces mesures au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$  respectivement pour les campagnes VKSb (TM60 sans baffles), VKSe (TM70 avec baffles) et VKSf (TM28p avec baffles.) Avant de discuter plus en détails les différents effets observés, on pourra vérifier que le comportement général de l'induction est bien celui prédit par le calcul numérique avec l'écoulement modèle (voir figure III.58 par exemple.) Par ailleurs, en accord avec les symétries intrinsèques du dispositif, aucune induction selon  $Oy$  n'est mesurée.

##### IV.3.4.1 Induction axiale : effet-CL et effet “ $\alpha$ ”

Dans tous les cas, une induction axiale très intense, avec une forte contribution linéaire en  $\Omega$ , peut être observée. Elle résulte du même effet-CL que celui observé dans l'expérience au gallium (§IV.2.2.4.) Cet effet est très intense pour les disques TM60 et conduit, à haute fréquence de rotation, à l'induction d'un champ magnétique axial dont l'intensité



**Fig. IV.34:** Comparaison des mesures expérimentales (TM60 sans baffles, en champ transverse appliqué, régime contra-rotatif) et de la simulation numérique perturbative étendue par les approximants de Padé. (\*, tirets) :  $B_{ind,x}$ ; (+, trait mixte) :  $B_{ind,y}$ ; (○, ligne continue) :  $B_{ind,z}$ .

est presque deux fois plus intense que celle du champ appliqué. On pourrait s'étonner que, en dépit de la condition aux limites conductrice introduite par l'enveloppe de cuivre, le champ induit est ici de même signe que celui mesuré dans le gallium (où la condition aux limites était isolante.) En effet, le terme source  $I_{1,CL}$ , à l'origine de l'effet-CL, est proportionnel à la discontinuité de diffusivité magnétique à la paroi, et change donc a priori de signe entre le cas où le milieu extérieur est isolant et le cas où il devient conducteur. En fait dans la mesure où l'enveloppe de cuivre entourant le sodium ne fait que 1 cm d'épaisseur (soit 5% du rayon du cylindre) et que le milieu extérieur est ensuite isolant, la condition aux limites ne peut être décrite comme purement conductrice. L'étude du §III.6.5 nous a effectivement montré que l'inversion du signe de l'induction axiale par effet-CL, attendue pour une condition aux limites conductrice, ne se produit qu'à partir d'une certaine épaisseur de l'enveloppe conductrice (de l'ordre de 15% du rayon de la cuve si elle est en cuivre, d'après l'étude du §III.6.5.) En revanche, pour une épaisseur de cuivre de 5% du rayon de la cuve, le champ axial linéaire produit par effet-CL est attendu de même signe (et sensiblement de même intensité) par rapport au cas d'une condition aux limites isolante (voir la figure III.74.)

Les figures IV.34a et b comparent les mesures expérimentales au résultat de la simulation numérique obtenu respectivement en supposant le milieu extérieur parfaitement isolant, ou en considérant la présence d'une couche de cuivre de 1 cm. Le calcul numérique a été réalisé sur une grille étirée, présentant une plus forte densité de points au voisinage des parois. La solution a été calculée à l'ordre 40 et son domaine de convergence étendu par la méthode des approximants de Padé. Lorsque la condition aux limites isolante est appliquée, la solution numérique ne décrit pas correctement les mesures expérimentales. L'accord devient en revanche très bon (sans aucun paramètre ajustable), lorsque les vraies conditions aux limites sont prises en compte. Pour les plus hautes fréquences de rotation, un léger décalage apparaît, notamment pour la composante  $B_{ind,x}$ , entre les résultats expérimentaux et numériques. Nous ne disposons malheureusement que de peu de mesures dans la configuration étudiée, et il est difficile d'avoir une bonne idée de la dispersion expérimentale des points. Par ailleurs, le calcul numérique est réalisé avec un champ ap-



pliqué homogène, or, bien que les gradients du champ appliqué dans l'expérience restent faibles et la contribution des termes d'induction par transport de ces gradients reste effectivement négligeable, la valeur du champ appliqué peut différer sensiblement entre le centre de la cuve et les parois. Dans l'expérience VKS, la valeur du champ expérimental appliqué à la paroi (en  $(x = 0, y = R, z = 0)$  est 15% plus faible que sa valeur en  $r = R/2$ , où la mesure est réalisée.) Dans la mesure où l'effet-CL est sensible à la valeur de  $B_0$  au voisinage de la paroi, une telle différence pourrait avoir des effets non négligeables, par rapport au cas idéal où  $\vec{B}_0$  est parfaitement homogène. L'étude numérique de l'induction en présence d'un champ appliqué reflétant les inhomogénéités du champ expérimental est en cours.

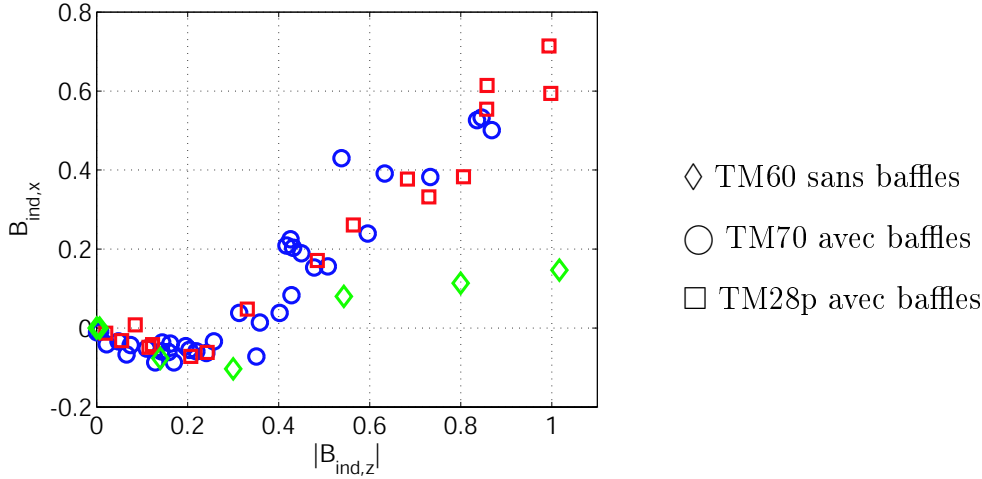
On peut enfin remarquer que la présence de l'enveloppe de cuivre accentue notablement les effets non-linéaires de l'induction axiale. En effet, l'étude du §III.6.5 (au chapitre précédent) montre que, pour l'écoulement TM60, l'amplitude de l'effet-CL (linéaire) en présence d'une enveloppe de cuivre ne faisant que 5% du rayon de la cuve est sensiblement le même que celui obtenu lorsque le milieu extérieur est isolant. L'augmentation (en valeur absolue) de l'induction axiale, observée numériquement lorsque l'enveloppe en cuivre est prise en compte, reflète donc une amélioration de l'ensemble des autres mécanismes d'induction, autre que l'effet-CL linéaire. Ces mécanismes sont nécessairement produits par des effets non-linéaires de transport-déformation du champ magnétique (termes sources  $I_{kz\alpha}^{\text{transport}}$  ou  $I_{kz\alpha}^{\text{déformation}}$  avec  $k > 1$ ), tels que la coopération des effets "α" de part et d'autre du plan médian, ou bien des effets non-linéaires des conditions aux-limites (terme source  $I_{kz\alpha,CL}$  avec  $k > 1$ ). L'induction axiale de la figure IV.33 résulte donc non-seulement de l'effet-CL linéaire, mais présente également à haut  $R_m$  une forte contribution non-linéaire, notamment par effet "α", considérablement favorisée par la présence de l'enveloppe en cuivre. Les résultats dans l'expérience VKG ont montré par ailleurs que dans une configuration analogue (écoulement contra-rotatif en champ transverse appliqué) la contribution linéaire par effet-CL était clairement dominante pour les régimes à bas  $R_m$  et pour des conditions aux limites isolantes.

Les mesures réalisées avec les disques TM70 et TM28p et avec les baffles (figures IV.33b et c) montrent que les mécanismes d'induction axiale sont moins efficaces dans ces configurations : les plus grands nombres de Reynolds magnétique intrinsèques correspondant à l'induction axiale ne dépassent pas  $|R_m^i| \sim 1$  avant de saturer (alors qu'ils valaient 1.5 avec les turbines TM60). Cette observation est en accord avec le fait que la moindre efficacité de l'entraînement du fluide par les petits disques tend globalement à diminuer les effets d'induction. Par ailleurs, les figures IV.33b et c semblent suggérer que l'induction axiale dans les configurations TM70-28p avec baffles présente une contribution linéaire plus importante relativement aux contributions non-linéaires. Ceci pourrait être dû (d'après (III.59)) à une accentuation de l'effet-CL par une augmentation de la vortacité de l'écoulement au voisinage des parois, résultant de la présence des baffles.

Pour les plus grandes fréquences de rotation, l'induction axiale présente une saturation, traduisant probablement l'expulsion du champ appliqué.

#### IV.3.4.2 Bouclage "α"Ω

Les figures IV.33a, b et c montrent également l'induction d'une composante transverse  $B_{ind,x}$  (de même direction que le champ appliqué) présentant le comportement prévu par l'étude numérique du chapitre précédent et interprétée en terme d'un mécanisme de cou-



**Fig. IV.35:** Dépendance de l'induction transverse en fonction de l'induction axiale, caractérisant l'efficacité de la contribution  $\Omega$  (troisième étape) du mécanisme " $\alpha$ "- $\Omega$ .

plage " $\alpha$ " $\Omega$  (figure III.58) : pour les faibles rotations,  $B_{ind,x}$  décroît linéairement avec  $\Omega$  (sous l'effet de la compression par l'écoulement centripète dans le plan médian) et s'oppose au champ appliqué, atteint un minimum, pour une valeur de  $\Omega \sim 5$  Hz ( $R_m$  de l'ordre de 7) puis augmente ensuite pour devenir positif pour les grandes fréquences de rotation. Cette tendance de  $B_{ind,x}$  à devenir positif à haut  $R_m$  ne pouvait être observée dans l'expérience au gallium qui ne permet pas de dépasser  $R_m \sim 5$ . L'induction d'une composante transverse de même sens que le champ appliqué est un effet spécifique aux régimes à haut nombre de Reynolds magnétique, où les effets d'ordres élevés deviennent importants. Ceci est en accord avec l'interprétation en terme d'un mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  d'ordre 3 (éventuellement facilité par un mécanisme CL- $\Omega$  d'ordre 2 tendant à s'opposer à l'expulsion), complètement masqué par les effets d'ordre inférieur à bas  $R_m$ . Cet effet reste toutefois relativement faible (par rapport à l'induction axiale) et ne conduit expérimentalement qu'à des Reynolds magnétiques intrinsèques de l'ordre de  $R_m^{i_{\alpha''\Omega}} \sim 0.5$  au maximum pour tous les types de disques étudiés. La figure IV.35 représente l'évolution de l'induction transverse  $B_{ind,x}$  en fonction de l'induction axiale  $B_{ind,z}$  pour les différentes configurations présentées. Le comportement linéaire observé lorsque  $B_{ind,x}$  est positif suggère que  $B_{ind,z}$  est bien le champ source à l'origine de  $B_{ind,x}$ , en accord avec l'interprétation du mécanisme " $\alpha$ " $\Omega$  selon lequel le champ transverse induit de même sens que  $\vec{B}_0$  résulte de l'effet de la rotation différentielle exercée sur le champ axial induit. Cette courbe montre par ailleurs que l'efficacité de la conversion du champ axial en un champ transverse est beaucoup plus grande pour les disques TM70 et TM28p en présence de baffles que pour les disques TM60 en l'absence de baffles. Ceci est en accord avec les mesures faites en champ axial appliqué qui montraient déjà l'efficacité moindre de la conversion d'un champ axial en un champ azimuthal par effet  $\Omega$  pour les disques TM60.

Le résultat des simulations numériques des figures IV.34a et b montre que, pour l'écoulement TM60, la présence de l'enveloppe de cuivre améliore notablement l'efficacité du couplage " $\alpha$ " $\Omega$ . En effet, pour une condition aux limites purement isolante (figure IV.34a), la simulation numérique conduit à un champ  $B_{ind,x}$  toujours négatif, alors que la prise en compte de l'enveloppe en cuivre (figure IV.34b) conduit à un comportement, en accord avec celui mesuré expérimentalement, où un champ de même signe que le champ appliqué

est induit par un bouclage " $\alpha$ " $\Omega$ . Cette remarque suggère que la présence d'une couche conductrice telle que celle utilisée dans VKS contribue effectivement à améliorer l'efficacité des mécanismes d'induction dans leur globalité. Ceci est en accord avec l'étude de dynamo cinématique numérique [58] montrant que la présence d'une couche conductrice au repos (de même conductivité que le fluide dans l'étude en question), autour d'un écoulement von Kármán périodique en  $z$ , abaisse le seuil de l'instabilité dynamo.

Enfin, les figures IV.33b et c montrent que l'induction atteint une saturation pour les plus hautes fréquences de rotation. Celle-ci correspond à l'expulsion du champ appliqué par le fluide en rotation.

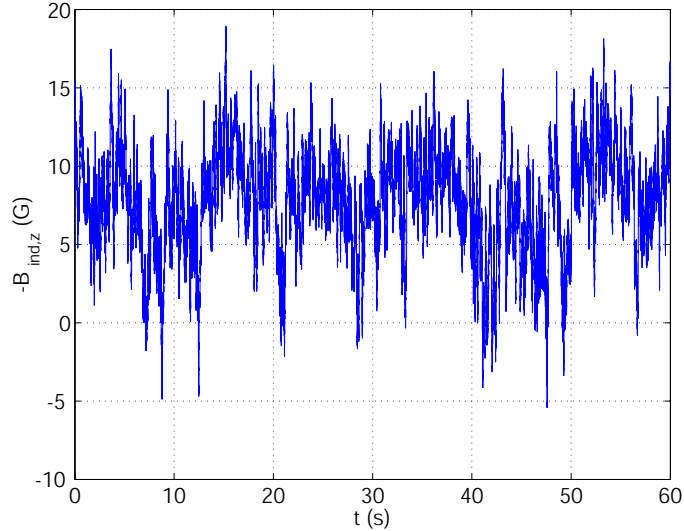
### IV.3.5 Bilan

Les mesures d'induction dans l'expérience VKS nous ont permis d'identifier tous les mécanismes déjà observés dans l'expérience au gallium ainsi que deux effets spécifiques aux régimes à hauts nombres de Reynolds magnétiques : l'expulsion et le bouclage " $\alpha$ " $\Omega$ . Le bilan de ces expériences tient essentiellement en trois points :

- un mécanisme de bouclage " $\alpha$ " $\Omega$  a bien été identifié à haut  $R_m$ . Il devient désormais le meilleur candidat en vue de l'obtention d'une dynamo homogène expérimentale von Kármán ;
- dans les configurations étudiées, l'expulsion devient toujours le mécanisme dominant et conduit à la saturation de l'induction à haut  $R_m$  : elle constitue le principal obstacle à la croissance de l'instabilité dynamo ;
- la nature des conditions aux limites est déterminante. Le couplage de l'étude numérique et de l'étude expérimentale indique que l'efficacité du bouclage " $\alpha$ " $\Omega$  est améliorée par la présence de l'enveloppe en cuivre dans VKS. Ceci rejoint l'idée suggérée au chapitre précédent selon laquelle l'effet-CL pourrait jouer un rôle décisif dans la compétition entre le bouclage " $\alpha$ " $\Omega$  et l'expulsion.

Par ailleurs, nous avons pu constater lors de cette étude que l'approche mécaniste donnant une interprétation qualitative des mécanismes d'induction étape par étape donne une très bonne description des mesures expérimentales. Cette interprétation devient quantitativement remarquable lorsque la résolution numérique du processus perturbatif est réalisée à partir du champ de vitesse moyen expérimental et en utilisant des conditions aux limites réalistes. Le rôle que peut jouer l'effet-CL comme *catalyseur* du mécanisme de bouclage " $\alpha$ " $\Omega$ , par sa capacité à s'opposer à l'expulsion, et plus généralement l'amélioration de l'efficacité des mécanismes d'induction par la présence de l'enveloppe en cuivre mise en évidence dans VKS font de la maîtrise des conditions aux limites un enjeu majeur. Dans cette optique, l'approche perturbative proposée devient un outil extrêmement intéressant par sa simplicité de mise en oeuvre et sa capacité à prendre en compte des conditions aux limites réalistes.

L'étude expérimentale de l'induction reste toutefois quelque peu frustrante dans la mesure où elle ne donne qu'une vision extrêmement locale des mécanismes. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, il est indispensable de connaître la structure spatiale des champs induits pour vraiment comprendre les mécanismes sous-jacents et orienter l'optimisation de l'écoulement en vue de favoriser un bouclage magnétique pou-



**Fig. IV.36:** Signal temporel de l'induction magnétique axiale mesurée au point ( $x = 0, y = 0.5, z = 0$ ) pour l'écoulement TM60 en régime contra-rotatif à 8 Hz pour un champ appliqué transverse de 12 G.

vant développer l'instabilité. Le couplage entre l'outil numérique et les mesures devient alors essentiel. L'accord entre les mesures locales d'induction et les prédictions numériques permet de valider l'approche mécaniste. La structure spatiale des champs induits expérimentalement peut alors être raisonnablement identifiée à celle donnée par les simulations numériques. Ceci confère à l'approche itérative de l'induction une validité certaine et consolide sa qualité d'outil pour l'étude des mécanismes d'induction, et en particulier pour la recherche d'un cycle dynamo.

Par ailleurs, l'étude numérique réalisée jusqu'à présent, ne tient compte que du champ de vitesse moyen de l'écoulement, et ne considère nullement les fluctuations et les structures turbulentes aux petites échelles. Ces propriétés sont spécifiques aux écoulements que nous avons qualifiés de *non constraints*, dont l'écoulement de von Kármán est un exemple. Le bon accord quantitatif des résultats numériques et des mesures expérimentales suggère donc que le rôle des structures turbulentes de l'écoulement sur l'induction moyenne ne peut être que marginal (dans la gamme de  $R_m$  étudiée.) La section qui suit porte sur l'étude des propriétés de l'induction liées aux fluctuations de l'écoulement von Kármán et notamment à son caractère turbulent.

## IV.4 Le rôle des fluctuations de l'écoulement sur l'induction magnétohydrodynamique

### IV.4.1 L'effet $\alpha$ -turbulent

Comme nous l'avons déjà souligné, à cause de leur très faible nombre de Prandtl magnétique, les écoulements de métaux liquides sont fortement turbulents dans les régimes de  $R_m$  que nous étudions. Du point de vue de l'induction magnétique, ceci se traduit par de fortes fluctuations dans les signaux de mesures d'induction magnétique (figure IV.36).

Il est alors pertinent de considérer le champ magnétique et le champ de vitesse comme

la superposition de leur valeur moyenne et de leur partie fluctuante  $\vec{B}_{ind}$  selon la décomposition de Reynolds :

$$\begin{aligned}\vec{B}_{ind}(t) &= \vec{B}_{m,ind} + \vec{B}_{f,ind}(t), \\ \vec{u}(t) &= \vec{u}_m + \vec{u}_f(t),\end{aligned}\tag{IV.34}$$

où les parties fluctuantes sont de moyenne nulle. L'opération de moyenne est définie, pour une grandeur  $h$  quelconque, par

$$h_m = \langle h \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt,\tag{IV.35}$$

où  $T$  est la durée totale des signaux enregistrés. L'étude de l'induction que nous avons menée jusqu'à présent ne portait que sur la moyenne temporelle  $\vec{B}_{m,ind}$  des signaux magnétiques enregistrés. En appliquant l'opération de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  à l'équation d'induction, et en admettant que la partie fluctuante du champ appliqué  $\vec{B}_0$  est nulle (ce qui est le cas dans nos expériences) on montre que les parties moyenne et fluctuante de  $\vec{B}_{ind}$  sont respectivement solution des équations :

$$\lambda \Delta \vec{B}_{m,ind} + \vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times \vec{B}_{m,ind}) + \vec{\nabla} \times \vec{\epsilon} = -\vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times \vec{B}_0) - \lambda \Delta \vec{B}_0,\tag{IV.36}$$

$$\lambda \Delta \vec{B}_{f,ind} + \vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times \vec{B}_{f,ind}) + \vec{\nabla} \times (\vec{u}_f \times \vec{B}_{m,ind}) + \vec{\nabla} \times \vec{G} - \partial_t \vec{B}_{f,ind} = -\vec{\nabla} \times (\vec{u}_f \times \vec{B}_0),\tag{IV.37}$$

où l'on a défini les grandeurs  $\vec{\epsilon}$  et  $\vec{G}$  par

$$\vec{\epsilon} = \langle \vec{u}_f \times \vec{B}_{f,ind} \rangle \quad \text{et} \quad \vec{G} = \vec{u}_f \times \vec{B}_{f,ind} - \vec{\epsilon}.\tag{IV.38}$$

L'équation (IV.36) pour la valeur moyenne du champ induit correspond à celle que l'on obtiendrait en régime stationnaire pour un écoulement simplement décrit en termes du champ de vitesse moyen  $\vec{u}_m$  (que nous avons utilisée jusque là dans l'approche mécaniste qualitative et numérique.) La seule différence vient du terme additionnel faisant intervenir le champ électromoteur effectif  $\vec{\epsilon}$ . Ce terme traduit les éventuels effets coopératifs moyens sur l'induction, engendrés par les fluctuations turbulentes. Le très bon accord qualitatif et quantitatif obtenu entre les mesures expérimentales du champ induit moyen et les résultats des simulations numériques (où seul le champ de vitesse moyen est pris en compte) indique que les effets d'induction par les fluctuations turbulentes sont essentiellement nuls, ou du moins marginaux.

La contribution de  $\vec{\epsilon}$  est l'équivalent pour l'induction magnétique du tenseur de Reynolds pour le champ de vitesse turbulent dans un cadre purement hydrodynamique. La non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes empêche en général d'exprimer simplement le tenseur de Reynolds en termes uniquement du champ de vitesse moyen  $\vec{u}_m$ . L'équation d'induction (IV.37) est au contraire linéaire en  $B_m$ . Pour les systèmes présentant une séparation d'échelle, la théorie du champ moyen [47] permet alors de relier simplement le champ électromoteur  $\vec{\epsilon}$  en termes des champs moyens  $\vec{u}_m$  et  $\vec{B}_m$ . Par séparation d'échelle, nous entendons que l'échelle typique d'évolution du champ magnétique est bien plus grande que celle des variations spatiales du champ de vitesse. On peut alors montrer que  $\vec{\epsilon}$  est, en première approximation, relié aux grandeurs moyennes par la relation [47][62] :

$$\vec{\epsilon} = \alpha \left( \vec{B}_{m,ind} + \vec{B}_0 \right) + \beta \vec{\nabla} \times \left( \vec{B}_{m,ind} + \vec{B}_0 \right). \quad (\text{IV.39})$$

La contribution  $\vec{\nabla} \times \vec{\epsilon}$  apporte donc deux termes sources supplémentaires à l'équation d'induction pour le champ induit moyen. Dans le cas général  $\alpha$  et  $\beta$  sont des tenseurs qui ne dépendent que de  $\vec{u}_m$ , des propriétés statistiques de  $\vec{u}_f$  et de la diffusivité magnétique  $\lambda$  du milieu. Ces tenseurs deviennent scalaires pour des fluctuations de vitesse isotropes.

L'effet- $\beta$ , associé au second terme de la relation (IV.39), ne contribue alors essentiellement qu'à modifier la valeur effective de la diffusivité magnétique dans l'équation (IV.36). Il a été expérimentalement observé que cet effet peut contribuer à augmenter la diffusivité magnétique effective du milieu ( $\beta > 0$ ) [78] et donc à diminuer les effets de l'induction numérique. Des travaux numériques portant sur un écoulement modèle de Taylor-Green [49] ont montré que  $\beta$  peut également être négatif. Il contribue alors à diminuer la diffusivité magnétique effective du milieu et favoriser la croissance d'un champ magnétique par effet dynamo.

Le premier terme de l'expression (IV.39) est responsable de ce qu'on appelle communément l'effet  $\alpha$  (sans guillemets) et contribue à l'induction d'un champ électromoteur effectif  $\vec{\epsilon} = \alpha \vec{B}$  parallèle au champ magnétique (contrairement au champ électromoteur habituelle  $\vec{u} \times \vec{B}$ , qui est toujours perpendiculaire au champ magnétique.)

Le terme source correspondant à l'effet  $\alpha$  dans l'équation d'induction moyenne (IV.36) fait ainsi intervenir le champ électromoteur

$$\vec{\epsilon}_\alpha = \alpha \vec{B}_0 \quad (\text{IV.40})$$

colinéaire au champ appliqué (lorsque les fluctuations de vitesse sont isotropes et donc le tenseur  $\alpha$  est scalaire.) Le terme source associé s'écrit alors

$$\vec{I}_\alpha = -\vec{\nabla} \times \vec{\epsilon}_\alpha = -\alpha \vec{\nabla} \times \vec{B}_0. \quad (\text{IV.41})$$

L'une des premières interprétations physiques de l'effet  $\alpha$  a été proposée par E.N. Parker [69] en termes d'effet coopératif de structures hélicitaires aux petites échelles. Le mécanisme élémentaire introduit par Parker décrit l'induction par chacune des petites structures hélicitaires, d'une boucle magnétique associée à une densité de courants colinéaire au champ appliqué. Cette induction résulte de la déformation des lignes de champ magnétique selon un mécanisme identique à l'effet " $\alpha$ " (figures III.35 et III.36). Le champ magnétique moyen (à grande échelle) est alors le fruit de la coopération des contributions des petites échelles (contrairement à l'effet " $\alpha$ " qui est directement associé à l'hélicité à grande échelle de l'écoulement). Cette analogie est à l'origine de la dénomination d'effet " $\alpha$ " que nous avons choisie pour désigner l'effet de l'hélicité globale dans l'écoulement de von Kármán. Toutefois, l'existence de l'effet  $\alpha$ , dans le cadre de la théorie du champ moyen, n'est pas intrinsèquement liée à l'existence d'hélicité (elle ne requiert en fait que l'absence de toute invariance par réflexion des propriétés statistiques des fluctuations de vitesse.)

L'effet  $\alpha$  joue un rôle essentiel dans la plupart des modèles de dynamo modernes. Son principal intérêt vient notamment du fait que sa présence dans l'équation d'induction moyenne rend caduc le théorème anti-dynamo de Cowling (interdisant l'induction d'un champ magnétique axisymétrique par un champ de vitesse axisymétrique) pour l'équation d'induction moyenne (IV.36). En particulier, il autorise la conversion d'un champ

azimutal appliqué en un champ axial (c'est l'impossibilité d'une telle conversion pour un écoulement axisymétrique qui constitue l'une des étapes amenant au théorème de Cowling [62].) Une telle conversion résulte simplement du fait qu'un champ magnétique azimutal va induire, par effet  $\alpha$ , un champ électromoteur azimutal (d'après la relation (IV.40)) et donc un champ magnétique axial. Il est facile de comprendre qu'un tel mécanisme est extrêmement intéressant pour un cycle dynamo. Par exemple, nous avons pu mettre en évidence dans les expériences d'induction un mécanisme très efficace de conversion d'un champ axial en un champ azimutal par effet  $\Omega$ . L'effet  $\alpha$  permettrait alors d'induire un champ axial à partir de ce champ azimutal, bouclant ainsi le cycle dynamo selon un schéma  $\alpha\Omega$ .

La possibilité de l'effet  $\alpha$  a pu être expérimentalement mise en évidence pour des systèmes présentant une nette séparation d'échelles [87]. C'est également le principal mécanisme à l'origine de l'instabilité dynamo dans l'écoulement de Roberts [80] dont l'expérience dynamo de Karlsruhe [88][89][90] a montré l'efficacité.

Le cas des écoulements turbulents est plus complexe dans la mesure où, bien qu'ils possèdent des structures aux petites échelles, dont on pourrait imaginer un effet coopératif moyen de type  $\alpha$ , ils ne possèdent pas de séparation d'échelles à proprement parler et des structures à toutes les échelles (entre l'échelle intégrale et l'échelle de Kolmogorov) sont présentes. L'existence d'un effet  $\alpha$  créé par les petites échelles turbulentes reste une idée purement théorique qui demande encore à être vérifiée d'un point de vue expérimental.

## IV.4.2 Étude expérimentale de l'effet de la turbulence sur l'induction moyenne en présence d'un champ appliqué azimutal.

Nous nous intéressons ici à l'induction magnétique par un écoulement axisymétrique (l'écoulement von Kármán par exemple), en présence d'un champ appliqué azimutal. Un tel champ peut être produit par la circulation d'une densité de courant  $\vec{j}_0$  axiale.

### IV.4.2.1 Impossibilité d'induction axiale et radiale en l'absence d'effet des fluctuations

En l'absence d'effet des petites échelles, l'équation pour le champ magnétique induit moyen s'écrirait simplement

$$\lambda \Delta \vec{B}_{m,ind} + \vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times B_{m,ind}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times \vec{B}_0) - \lambda \Delta \vec{B}_0. \quad (\text{IV.42})$$

On peut alors montrer que les composantes radiale et axiale du champ magnétique induit sont nécessairement nulles, à cause de l'axisymétrie du champ de vitesse. Le champ induit ne peut alors être que purement azimutal. Ce résultat constitue l'une des étapes possibles démontrant l'impossibilité d'une dynamo purement axisymétrique (théorème de Cowling.) On en trouvera une démonstration dans l'ouvrage de K. Moffat [62]. Nous proposons ici une démonstration basée sur l'approche mécaniste itérative.

Dans une approche perturbative, l'équation d'induction moyenne en l'absence du terme  $\vec{\nabla} \times \vec{\epsilon}$ , s'écrit à l'ordre  $k$  en  $R_m$  :

$$\Delta \vec{B}_{m,k} = \vec{I}_{k-1}^{\text{déformation}} + \vec{I}_{k-1}^{\text{transport}}, \quad (\text{IV.43})$$

où les termes sources s'expriment en terme du champ induit moyen à l'ordre  $k-1$  sous la forme habituelle donnée par les tableaux III.1 et III.2. Raisonnons alors par récurrence et supposons que le champ à l'ordre  $k-1$  ne possède ni composante radiale et ni composante axiale. Du fait de l'axisymétrie du dispositif, le champ à l'ordre  $k-1$  est donc de la forme

$$\vec{B}_{m,k-1} = B_{m,k-1}(r, z) \vec{u}_\theta \quad (\text{IV.44})$$

Cette hypothèse de récurrence est bien entendu vérifiée à l'ordre 0 puisque le champ appliqué est purement azimutal et axisymétrique. Nous allons montrer que le champ à l'ordre  $k$  est nécessairement de la même forme.

- Impossibilité d'induction axiale par les termes sources volumiques :

l'induction d'un champ axial à l'ordre  $k$  ne peut résulter que du terme source de déformation à l'ordre  $k-1$ , puisque le terme source de transport requiert l'existence d'un gradient axial de  $B_{k-1,z}$  qui est nul par l'hypothèse de récurrence. D'après le tableau III.1, le terme source associé à l'induction de  $B_{k,z}$  s'écrit :

$$I_{k,z} = I_{k,zx} + I_{k,zy} + I_{k,zz} \quad (\text{IV.45})$$

$$= B_{m,k-1,x} \cos \theta \partial_r u_z + B_{m,k-1,y} \sin \theta \partial_r u_z + B_{m,k-1,z} \partial_z u_z, \quad (\text{IV.46})$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence

$$B_{m,k-1,x} = -B_{m,k-1} \sin \theta \quad ; \quad B_{m,k-1,y} = B_{m,k-1} \cos \theta \quad ; \quad B_{m,k-1,z} = 0. \quad (\text{IV.47})$$



On en déduit donc que

$$I_{k,z} = 0, \quad (\text{IV.48})$$

et qu'aucun terme source volumique ne contribue à l'induction d'un champ axial à l'ordre  $k$ .

- Impossibilité d'induction radiale par les termes sources volumiques :

La projection radiale de l'équation d'induction peut-être associée au terme source

$$I_{k,r} = I_{k,r}^{\text{déformation}} + I_{k,r}^{\text{transport}}, \quad (\text{IV.49})$$

tel que  $\Delta B_{k,r} = I_{k,r}$ .

Ces termes peuvent être exprimés à partir du tableau III.1 et III.2, mais dans la configuration axisymétrique qui nous concerne pour le moment, il est plus simple de les écrire directement en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\begin{aligned} I_{k,r}^{\text{déformation}} &= B_{k-1,r} \partial_r u_r + \frac{B_{k-1,\theta}}{r} \partial_\theta u_r + B_{k-1,z} \partial_z u_r, \\ I_{k,r}^{\text{transport}} &= u_r \partial_r B_{k-1,r} + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta B_{k-1,r} + u_z \partial_z B_{k-1,r}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, seule la composante  $B_{k-1,\theta}$  est non-nulle. Le terme de transport ne peut donc apporter aucune contribution et parmi les termes de déformation, seul  $\frac{B_{k-1,\theta}}{r} \partial_\theta u_r$  doit être considéré. Or, ce terme est également nul, du fait de l'axisymétrie du champ de vitesse. Par conséquent aucun terme source volumique ne peut contribuer à l'induction de  $B_{k,r}$ .

- Impossibilité d'induction radiale ou axiale par des effets de conditions aux limites :  
Nous avons vu au §III.6 que l'effet des conditions aux limites à l'ordre  $k$  est associé au terme source

$$\vec{I}_{k,CL} = -[\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \left( \vec{\nabla} \times \vec{I}_k \right) \times \vec{n}, \quad (\text{IV.50})$$

où  $\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{I}_k$  n'est rien d'autre que le terme source responsable de l'induction des courants dans le fluide conducteur et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface du cylindre. Toute contribution axiale ne peut donc se produire qu'au niveau des parois cylindriques (où  $\vec{n} // \vec{u}_r$ ) et s'exprime alors sous la forme

$$I_{k,CLz} = [\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \left( \vec{\nabla} \times \vec{I}_k \right)_\theta. \quad (\text{IV.51})$$

De même, toute contribution radiale ne peut se produire qu'aux extrémités du cylindre (où  $\vec{n} // \vec{u}_z$ ) et s'exprime alors sous la forme

$$I_{k,CLr} = \pm [\lambda]_{(S)} \delta_{(S)} \left( \vec{\nabla} \times \vec{I}_k \right)_\theta. \quad (\text{IV.52})$$

Ces deux contributions sont donc proportionnelles à  $\left( \vec{\nabla} \times \vec{I}_k \right)_\theta = \partial_r I_{k,z} - \partial_z I_{k,r}$  qui est nécessairement nul puisque nous avons montré que  $I_{k,r} = I_{k,z} = 0$ .

On en conclut donc l'impossibilité de toute induction axiale ou radiale à l'ordre  $k$  et par récurrence, le champ induit total ne peut donc être que purement azimutal.

#### IV.4.2.2 Possibilité d'induction axiale par effet $\alpha$ turbulent

Le résultat du paragraphe précédent réside essentiellement dans l'absence de terme source, dans l'équation d'induction moyenne, capable de fournir une contribution axiale. L'existence de l'effet  $\alpha$  invaliderait cette conclusion, dans la mesure où il apporterait un terme source supplémentaire sous la forme

$$\vec{I}_\alpha = \alpha \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \alpha \mu_0 \vec{j}_0 // \vec{u}_z. \quad (\text{IV.53})$$

Ainsi l'effet  $\alpha$  peut être associé à un terme source donnant une contribution axiale interdite par la simple considération de l'écoulement moyen. L'origine physique d'un éventuel effet  $\alpha$  turbulent dans l'écoulement de von Kármán pourrait résulter de l'hélicité des petites échelles turbulentes. En effet, cette dernière est reliée à l'hélicité globale de l'écoulement [11][25] qui est une caractéristique même des écoulements von Kármán. On peut donc s'attendre à ce que l'hélicité des structures aux petites échelles possède les mêmes propriétés de symétrie et le même signe que l'hélicité globale, de sorte à pouvoir donner un effet coopératif pour produire un champ moyen axial non-nul. Nous avons étudié expérimentalement la possibilité d'une telle induction, ce qui permettrait de mettre en évidence un rôle véritable des petites échelles turbulentes dans l'induction d'un champ magnétique moyen à grande échelle.

#### IV.4.2.3 Mesures expérimentales de l'induction axiale en présence d'un champ appliqué azimuthal

Le champ appliqué azimuthal est produit dans l'expérience VKG en faisant circuler dans le fluide conducteur un courant électrique  $I_0$  conducteur, selon le montage expérimental décrit au §IV.1.1.2 par la figure IV.3. Comme nous l'avons signalé, un courant de 1000 A est nécessaire afin de produire un champ azimuthal appliqué de l'ordre de 20 G. Compte tenu des contraintes pratiques liées à la réalisation de ce montage, un faible champ magnétique non-axisymétrique, dû à la proximité des câbles amenant le courant, est également produit dans le volume de l'écoulement. L'amplitude de ce champ parasite est de l'ordre de 0.5 G. L'effet conjugué du champ magnétique terrestre et du champ magnétique des câbles conduit alors à la présence d'un champ magnétique parasite  $\vec{B}_{0p}$ , dont l'amplitude est de l'ordre de 1 G, brisant légèrement l'axisymétrie de la configuration. Ce champ magnétique parasite a été mesuré dans la cuve, sur les axes  $Oy'$  et  $Ox$ . Les deux mesures conduisent à des valeurs voisines :

$$B_{0p,x} \sim -0.1 \text{ G} ; B_{0p,y} \sim 0.5 \text{ G} ; B_{0p,z} \sim 0.6 \text{ G} \quad \text{en } r = \frac{R}{2}.$$

Le champ parasite présente donc essentiellement une composante transverse sensiblement dirigée selon  $Oy$  et une composante axiale. Il est par ailleurs raisonnable de penser que les composantes de  $\vec{B}_{0p}$  possèdent des forts gradients selon  $Oz$ , puisqu'au voisinage des extrémités du cylindres (à proximité immédiate des câbles amenant le courant) l'amplitude du champ parasite est très intense (de l'ordre de 50 G.)

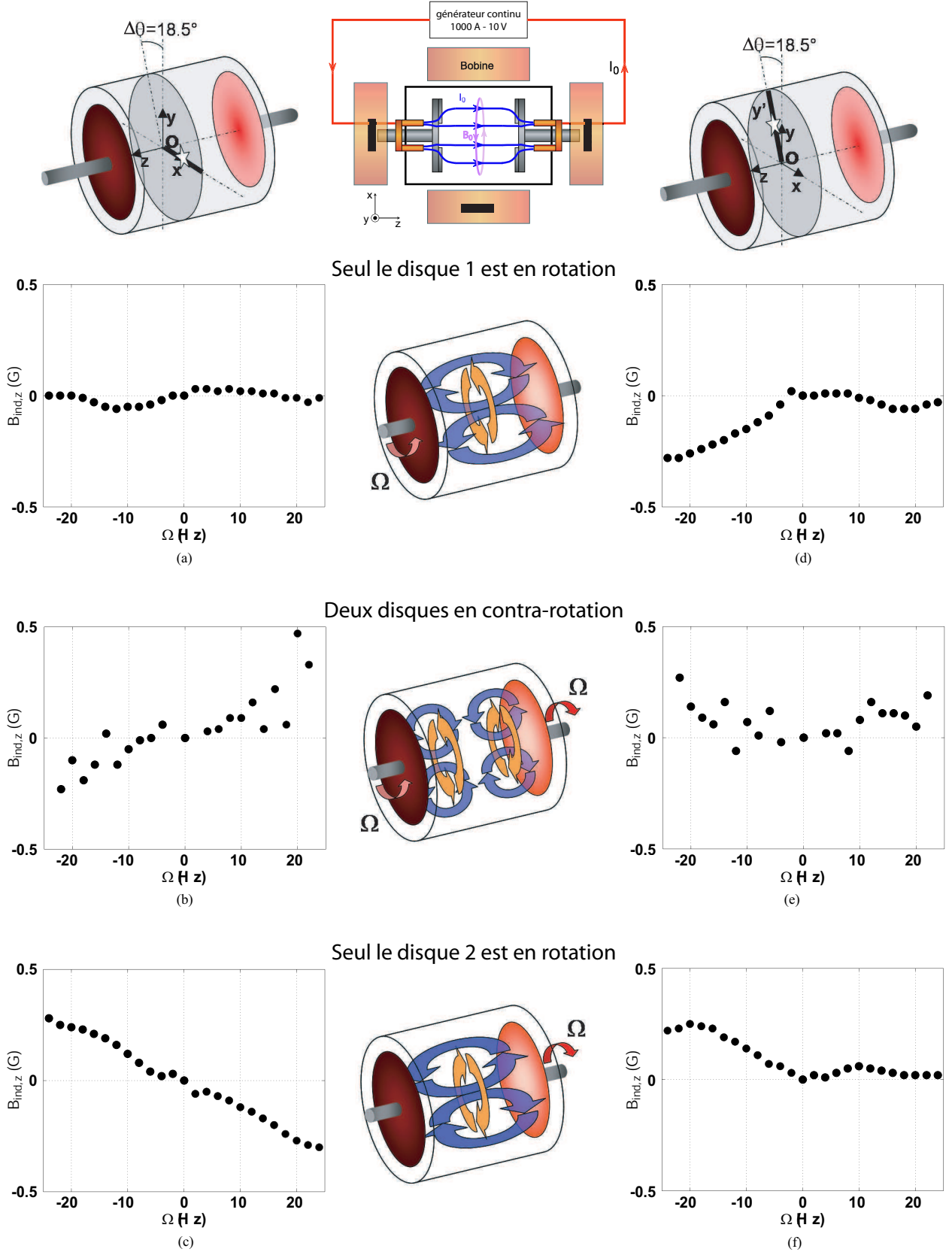
Les figures IV.37a, b et c représentent les mesures de l'induction axiale obtenue sur l'axe  $Ox$  respectivement lorsque seul le disque 1 est en rotation, en régime contra-rotatif, et lorsque seul le disque 2 est en rotation. Les figures IV.37d,e et f représentent les mesures correspondantes réalisées sur de l'axe  $Oy'$ . Il est frappant de constater que ces courbes sont dépourvues de certaines similarités qu'on aurait pu attendre compte tenu des symétrie du dispositif : le champ induit sur l'axe  $Ox$  lorsque seul le disque 2 est rotation (figure IV.37c) disparaît lorsque c'est le disque 1 qui est en rotation (figure IV.37a) ; sur l'axe  $Oy'$ , le champ induit lorsqu'un seul disque est en rotation ne présente aucune symétrie particulière par rapport au sens de rotation des disques (figures IV.37e et f). Ces observations sont contraires à ce qu'on attendrait pour l'induction par effet  $\alpha$  turbulent. Un tel mécanisme, résultant de structures hélicitaires aux petites échelles qui possèdent les propriétés de l'hélicité globale, doit nécessairement, tout comme l'effet " $\alpha$ ", être impair en  $\Omega$  et pair en changement de disque. Par ailleurs, l'effet des fluctuations turbulentes doit être identique sur l'axe  $Ox$  et sur l'axe  $Oy'$ . Aucune de ces propriétés n'est observée sur les mesures de la figure IV.37.

L'absence des symétries attendues pour un effet  $\alpha$  à partir d'un champ appliqué azimutal observée sur les mesures de la figure IV.37 suggèrent donc que l'induction mesurée résulte essentiellement du champ parasite  $\vec{B}_{0p}$ . On a vu que ce champ au voisinage possède une forte composante transverse (essentiellement alignée selon  $Oy$ ). Quelques propriétés observées peuvent ainsi être décrites à partir de l'étude faite au §IV.2.2 en présence d'un champ transverse appliqué (à ceci près que les comportements sur l'axe  $Ox$  et sur l'axe  $Oy'$  doivent être échangés puisque, dans l'étude du §IV.2.2, le champ transverse était aligné selon  $Ox$ .) Notamment, l'induction axiale, linéaire et impaire en  $\Omega$ , observée sur l'axe  $Ox$  en régime contra-rotatif (figure IV.37b), est compatible avec une induction par effet-CL à partir d'un champ transverse selon  $Oy$ . La mesure sur l'axe  $Oy'$  (au voisinage de l'axe  $Oy$ ) est alors essentiellement nulle, ce qui est en accord avec les symétries du dispositif en présence d'un champ transverse selon  $Oy$ . Lorsqu'un seul disque est en rotation, les comportements observés sont plus difficiles à interpréter de la même façon. Ceci n'est pas vraiment étonnant dans la mesure où le champ parasite est largement produit par le courant dans les fils électriques, et qu'il est donc certainement fortement inhomogène selon  $Oz$ , comme nous l'avons déjà remarqué.

Enfin, on peut également constater qu'en admettant que le champ magnétique à l'origine de l'induction observée est bien le champ transverse parasite (dont l'amplitude est de l'ordre de 1 G), les nombres de Reynolds magnétiques intrinsèques mesurés sont alors de l'ordre de  $R_{m,max}^i \sim 0.3$ , en accord avec ceux des mécanismes d'induction identifiés en présence d'un champ appliqué transverse. Si l'induction des figures IV.37a, b, c, d, e et f avait résulté du champ azimutal appliqué (dont l'amplitude est de l'ordre de 20 G), les mécanismes sous-jacents auraient été extrêmement inefficaces puisque les plus hauts nombres de Reynolds magnétiques intrinsèques ne dépasseraient pas alors  $R_{m,max}^i \sim 0.3/20 = 0.015$ .

#### IV.4.2.4 Conclusions sur le rôle des fluctuations turbulentes sur l'induction moyenne

Cette étude nous a montré qu'aucun mécanisme de conversion d'un champ azimutal en un champ moyen axial par les fluctuations turbulentes de l'écoulement ne peut être distingué des effets parasites. L'absence d'effet notable de la turbulence sur l'induction moyenne avait déjà été remarquée par le fait que les prédictions numériques de l'induction



**Fig. IV.37:** Mesures d'induction magnétique axiale en présence d'un champ appliqué azimuthal. Les figures a,b et c correspondent à des mesures faites au point  $(r = 0.5R, \theta = 0, z = 0)$  de l'axe  $Ox$  et les figures d,e et f à des mesures faites au point  $(r = 0.5R, \theta = 108.5^\circ, z = 0)$  de l'axe  $Oy'$  proche de  $Oy$ .

à partir du seul champ de vitesse moyen sont toujours en très bonne adéquation avec les mesures expérimentales. La conclusion s'impose alors que, dans la gamme de  $R_m$  et de  $Re$  explorés, aucun effet mesurable de la turbulence n'a pu être identifié. Une raison possible à l'inexistence d'un effet  $\alpha$  turbulent pourrait être l'absence d'une vraie séparation d'échelle dans le spectre spatial des fluctuations turbulentes de l'écoulement.

### IV.4.3 Étude des effets fluctuations magnétiques

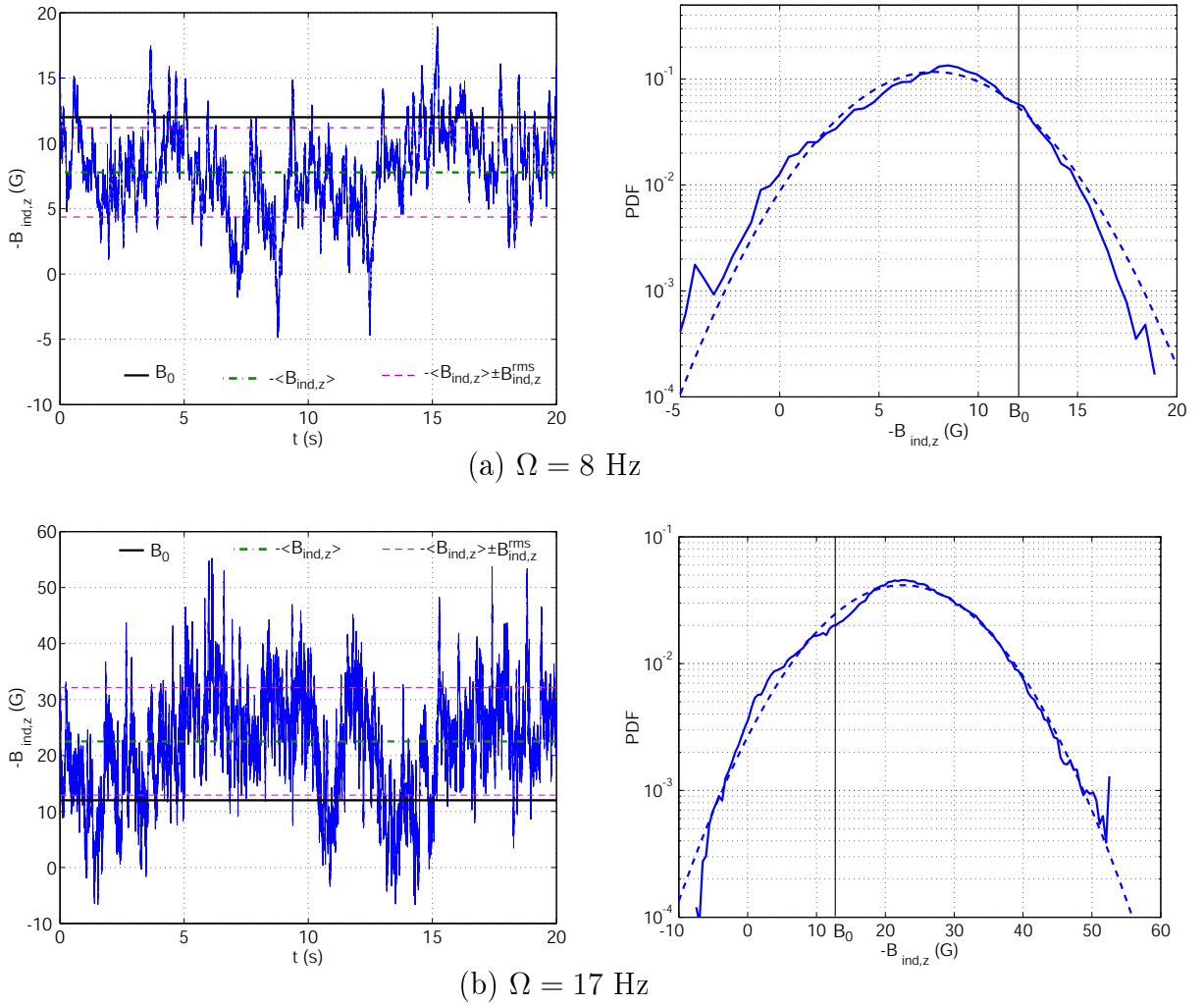
Nous nous sommes intéressés, au paragraphe précédent, au rôle que pouvaient jouer les fluctuations aux petites échelles de l'écoulement sur l'induction d'un champ magnétique moyen. Un tel effet était suggéré par le terme  $\vec{\nabla} \times \vec{\epsilon}$  de l'équation (IV.36). Nous nous intéressons à présent aux fluctuations mêmes du champ magnétique induit (contribution  $\vec{B}_{ind,f}$ ) et à la relation qu'elles présentent avec les fluctuations de l'écoulement. D'un point de vue théorique, c'est donc l'équation (IV.37) qui devra donc être désormais considérée.

Nous nous intéresserons à l'étude de ces propriétés dans les régimes à haut  $R_m$ . L'étude porte essentiellement sur des signaux de l'expérience VKSb (disques TM60, cuve sans baffles) en régime contra-rotatif et en champ transverse appliqué pour deux fréquences de rotation différentes. Les propriétés mises en évidence sont néanmoins caractéristiques de l'ensemble des mesures que nous avons analysées pour l'expérience VKS. Nous comparerons les résultats observés à ceux précédemment obtenus pour les régimes à bas  $R_m$  (inférieurs à  $R_m = 2.5$ ) dans l'expérience VKG [66] pour des configurations expérimentales similaires.

#### IV.4.3.1 Variations temporelles du signal magnétique

Les figures IV.38a et b montrent le signal de champ magnétique axial induit enregistré au point ( $x = 0, y = 0.5R, z = 0$ ) et la distribution de probabilité de ses fluctuations (l'induction axiale dans la configuration étudiée étant négative, nous avons représenté son opposé afin de faciliter la comparaison de l'amplitude du signal relativement à l'intensité du champ appliqué.) Ces mesures ont été obtenues pour une configuration typique de l'expérience VKS, en champ transverse appliqué ( $B_0 \sim 12$  G) pour un écoulement contra-rotatif des turbines TM60, sans baffles, à deux fréquences de rotation différentes :  $\Omega = 8$  Hz ( $R_m = 12$ ) et  $\Omega = 17$  Hz ( $R_m = 25$ .) Dans les deux cas, on peut observer de grandes fluctuations du champ magnétique autour de sa valeur moyenne. Lorsque les disques tournent à 8 Hz (figure IV.38a), la valeur moyenne du champ induit est inférieure (en valeur absolue) à la valeur du champ appliqué ( $|R_m^i| < 1$ ) alors que pour une fréquence de rotation de 17 Hz (figure IV.38b) l'induction devient, en moyenne, plus intense que le champ appliqué ( $|R_m^i| > 1$ .) Ce comportement pour la valeur moyenne de l'induction axiale en régime contra-rotatif correspond à celui mis en évidence au §IV.3.4.1, où la figure IV.33a montre que  $|R_m^i| \sim 1$  pour  $\Omega = 10$  Hz. Pour les deux signaux des figures IV.38a et b, les densités de probabilité des fluctuations présentent un profil gaussien. Cette propriété est vérifiée pour toutes les composantes du champ induit et dans toutes les configurations étudiées : les densités de probabilités des fluctuations magnétiques, normalisées par leur écart-type  $B_{ind,z}^{rms}$ , sont toutes proches d'une distribution gaussienne. Le même comportement est observé pour les régimes à bas  $R_m$  dans les expériences au gallium [66].

Une autre propriété spécifique des fluctuations magnétiques réside dans l'existence de



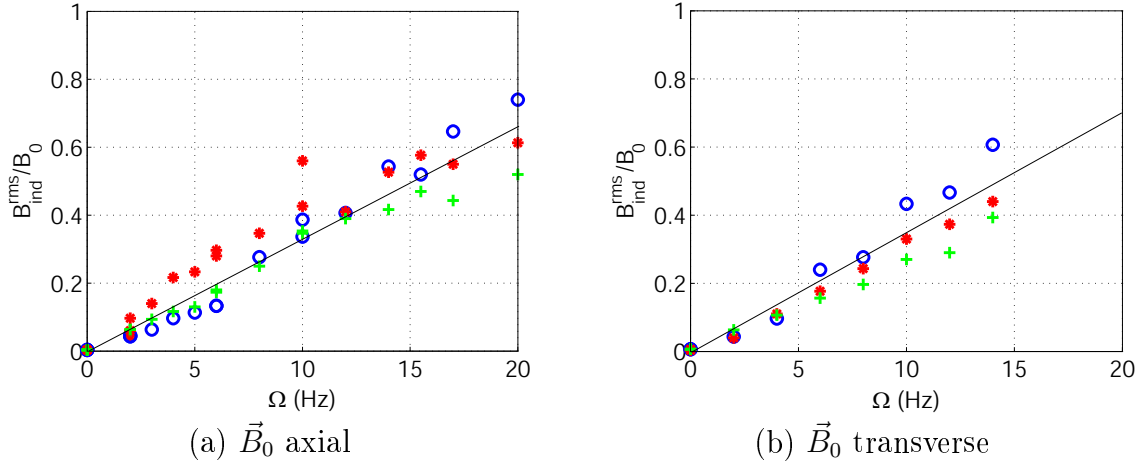
**Fig. IV.38:** Variations temporelles (à gauche), et densités de probabilité correspondantes (à droite), pour la composante axiale du champ magnétique induit au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$  dans l'expérience VKSb (disques TM60 sans baffles) en champ transverse appliqué et en régime contra-rotatif pour deux vitesses de rotation : 8 Hz (en haut) et 17 Hz (en bas). L'induction axiale dans la configuration présentée est en réalité négative (voir figure IV.33.) Nous avons représenté l'opposée de l'induction afin de mieux comparer son intensité relative par rapport à celle du champ appliqué, représentée par la ligne continue (horizontale à gauche, verticale à droite.) Nous avons également reporté, sur les signaux temporels (à gauche) la valeur moyenne  $\langle B_{ind,z} \rangle$  du champ induit (en trait mixte) et l'écart type de ses fluctuations  $B_{ind,z}^{rms} = \sqrt{\langle B_{ind,z}^2 \rangle - \langle B_{ind,z} \rangle^2}$  (en tirets). Les courbes en tirets sur les figures de droite correspondent aux distributions gaussiennes de même écart type et valeur moyenne que les signaux correspondants.

deux échelles de temps caractéristiques dans le signal (voir par exemple la figure IV.38a) : bien qu'on ne puisse pas distinguer une nette séparation d'échelle temporelle, on peut observer l'existence de fluctuations rapides de faible amplitude et de fluctuations plus lentes (évoluant sur une durée comparable au temps caractéristique de rotation des disques) et de plus grande amplitude. Ce comportement rappelle celui, déjà observé et discuté au §IV.2.2.2, des mesures de champ axial induit sur l'axe  $Ox$  dans l'expérience VKG (figure IV.16a.) Comme nous le verrons dans la suite, l'étude du spectre de ces fluctuations montrera qu'il est possible de décrire les petites fluctuations rapides par une approche à la Kolmogorov, où le champ magnétique est transporté et déformé par les petites échelles turbulentes de l'écoulement. La dynamique lente des signaux magnétiques joue un rôle important du point de vue de l'induction, puisqu'elle est la cause principale de la grande amplitude des fluctuations (la valeur de l'écart type est essentiellement inchangée lorsque le signal est filtré *passé-bas* et que seules ses composantes fréquentielles inférieures à  $\Omega$  sont conservées.) De telles fluctuations lentes peuvent être attribuées à des fluctuations *globales* de l'écoulement moyen dont l'existence a été observée dans des expériences en eau [60][71]. Si l'on définit la structure *moyenne* de l'écoulement à partir de sa moyenne temporelle sur une durée de l'ordre du temps caractéristique du forçage hydrodynamique (donné par exemple par le temps d'une révolution des disques  $\Omega^{-1}$ , de l'ordre 0.06 s à 17 Hz), on observe que celle-ci fluctue autour du profil défini par les boucles de recirculation et la rotation (obtenu par une moyenne temporelle sur des temps longs devant le temps caractéristique de forçage hydrodynamique). Les différentes réalisations de cette structure *moyenne* à des instants différents conduisent à des effets d'induction différents. Ces variations peuvent être détectées par la sonde magnétique locale dans la mesure où le temps de diffusion magnétique  $\tau_d \sim \frac{R^2}{\lambda}$  (de l'ordre de 0.5 s pour VKS) est grand devant  $\Omega^{-1}$ .

#### IV.4.3.2 Évolution de l'écart type des fluctuations magnétiques en fonction de $R_m$

Les figures IV.39a et b représentent l'évolution en fonction de  $\Omega$  de l'écart-type des signaux temporels d'induction, mesurés dans l'expérience VKSb (disques TM60 sans baffles) en régime contra-rotatif, en champ appliqué axial (figure IV.39a) et en champ transverse appliqué (figure IV.39b.) Ces figures correspondent aux mesures d'induction moyenne précédemment décrites (figures IV.23 et IV.33) et traduisent l'amplitude des fluctuations magnétiques par rapport à leur valeur moyenne. Les mesures des figures IV.39a et b montrent essentiellement trois points :

- les fluctuations évoluent linéairement avec la fréquence de rotation (et donc avec le nombre de Reynolds magnétique) sur l'ensemble de la gamme explorée ;
- contrairement à la valeur moyenne de l'induction, les fluctuations sont essentiellement isotropes : l'amplitude des fluctuations est la même pour les différentes composantes du champ magnétique induit. En particulier, aucune anisotropie systématique, liée à la direction du champ appliqué, ne peut être décelée ;
- l'amplitude des fluctuations est essentiellement indépendante de la direction du champ appliqué.



**Fig. IV.39:** Écart-type des fluctuations des composantes du champ magnétique induit en régime contra-rotatif (TM60 sans baffles) correspondant aux mesures d'induction moyenne des figures IV.23 et IV.33. (\*) :  $B_{ind,x}$ ; (+) :  $B_{ind,y}$ ; (o) :  $B_{ind,z}$

Ces comportements sont caractéristiques de l'ensemble des mesures réalisées dans VKS. Les expériences en gallium [66] montrent que pour les régimes à bas  $R_m$ , les fluctuations ne sont pas tout à fait isotropes. En particulier, il a été observé que la composante axiale induite ( $B_{ind,z}$ ), en champ axial appliqué, présente des fluctuations deux fois moins intenses que la composante azimutale induite ( $-B_{ind,x}$ ). Un comportement similaire peut en réalité également être observé sur la figure IV.39a pour les faibles fréquences de rotation. L'isotropie des fluctuations semble donc être essentiellement caractéristique des régimes à haut  $R_m$ .

#### IV.4.3.3 Étude spectrale des fluctuations

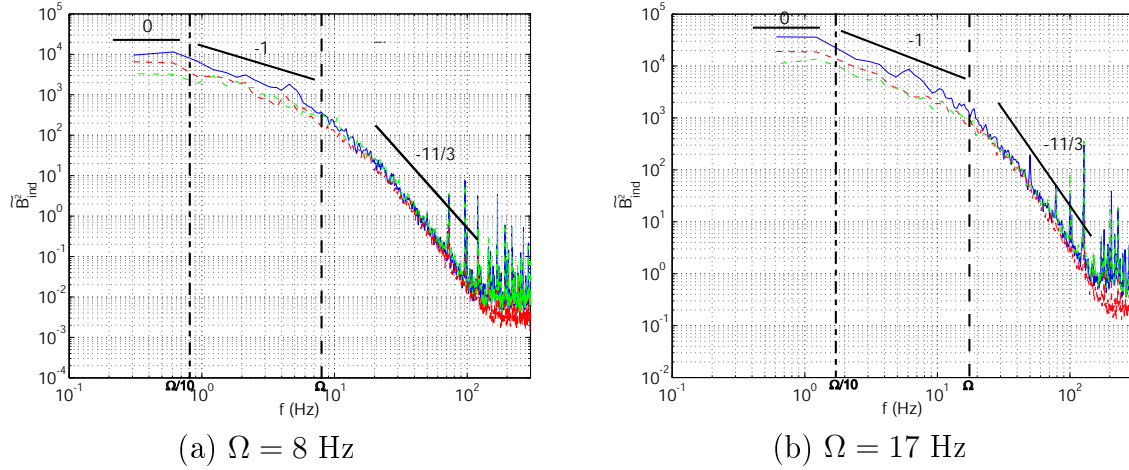
Les figures IV.40a et b représentent les spectres de puissance correspondant aux signaux temporels des figures IV.38a et b. Ces spectres présentent un comportement caractéristique, identique pour les trois composantes du champ magnétique, avec trois domaines spécifiques (que l'on retrouve pour la plupart des signaux que nous avons étudiés dans VKS) :

- $f < \frac{\Omega}{10}$  : spectre plat ;
- $\frac{\Omega}{10} < f < \Omega$  : spectre décroissant en  $f^{-1}$  ;
- $\Omega < f$  : spectre décroissant en  $f^{-\frac{11}{3}}$  ;

Pour les très hautes fréquences (typiquement  $f > 110$  Hz), les spectres tendent vers un plateau. Cette limite à haute fréquence est liée à la réponse dynamique du gaussmètre utilisé pour la mesure magnétique. Sa réponse est de 60dB. On peut en effet constater sur les spectres IV.38a et b que le rapport, en décibels, de la densité spectrale de puissance la plus élevée (dans la partie plate, à basse fréquence) à la densité spectrale de puissance la plus faible (pour le plateau à haute fréquence) vaut, pour la mesure à 17 Hz par exemple :

$$10 \log \frac{10^4}{10^{-2}} = 60 \text{ dB} \quad (\text{IV.54})$$





**Fig. IV.40:** Spectre de puissance des signaux IV.38a et b. La ligne verticale en tirets indique la fréquence de rotation des disques et celle en trait mixte le dixième de la fréquence de rotation des disques. (tirets) :  $B_{ind,x}$  ; (trait mixte) :  $B_{ind,y}$  ; (ligne continue) :  $B_{ind,z}$

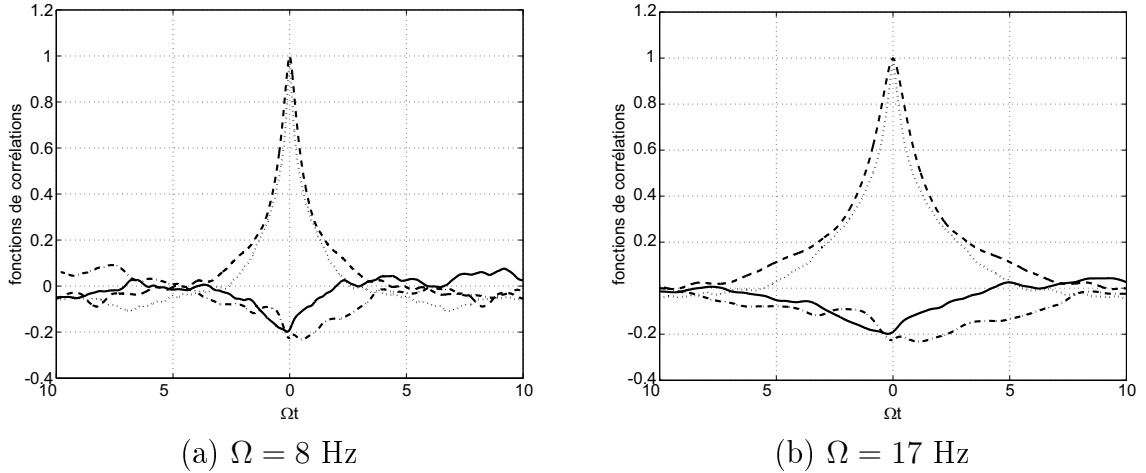
**Remarque.** On peut se demander si la fréquence de coupure à haute fréquence ne pourrait pas correspondre à l'échelle de diffusion magnétique  $f_B$ . Moyennant une hypothèse de Taylor, reliant l'espace des fréquences spatiales et temporelles,  $f_B$  peut être relié à l'échelle spatiale de coupure diffusives magnétique  $\eta_B$  par  $f_B = c^*/\eta_B$ , où  $c^*$  est une vitesse moyenne typique (que l'on prendra de l'ordre de  $U = 2\pi R\Omega$ ). Par définition, l'échelle de coupure diffusives est telle que le nombre de Reynolds magnétique, défini en prenant  $\eta_B$  comme échelle de longueur, est égale à 1 :

$$\frac{u(\eta_B) \cdot \eta_B}{\lambda} = 1,$$

où  $u(\eta_B)$  est la vitesse caractéristique des structures turbulentes de l'écoulement à l'échelle  $\eta_B$ . Dans le cadre de la phénoménologie de Kolmogorov,  $u(\eta_B)$  peut s'écrire sous la forme  $u(\eta_B) = (\epsilon\eta_B)^{\frac{1}{3}}$  [36], où  $\epsilon$  représente le taux de dissipation d'énergie cinétique par unité de masse. En reportant dans l'expression ci-dessus, on en déduit l'expression suivante pour  $\eta_B$  :

$$\eta_B = \left( \frac{\lambda^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

$\epsilon$  peut être estimé par le rapport de la puissance injectée à la masse totale de fluide. L'expérience VKS contient environ 50 kg de sodium et la puissance moteur requise pour un écoulement TM60 contra-rotatif à 17 Hz est de l'ordre de 100 kW. On en déduit donc que  $\epsilon \sim 2 \text{ kW} \cdot \text{kg}^{-1}$ . À partir de cet ordre de grandeur, on peut estimer l'échelle de coupure diffusives magnétique et la fréquence  $f_B$  correspondante :  $\eta_B \sim 3 \text{ cm}$  et  $f_B \sim 150 \text{ Hz}$  (en prenant  $U \sim 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ). La valeur de  $f_B$  ainsi obtenue donne le bon ordre de grandeur de la fréquence de coupure à haute fréquence sur les spectres IV.40. Il n'est donc pas invraisemblable d'imaginer que la coupure de diffusion magnétique soit effectivement



**Fig. IV.41:** Fonctions de corrélations des signaux magnétiques et du signal de pression correspondant aux mesures des figures IV.38a et b (champ appliqué transverse en régime contra-rotatif). La mesure du champ magnétique est effectuée au sein de l'écoulement (au point  $(x = 0, y = 0.5R, z = 0)$ ) et la mesure de pression au niveau de la paroi de la cuve, à 15 cm de la sonde magnétique. (ligne en tirets) : fonction d'auto-corrélation du champ magnétique axial induit ; (ligne en pointillés) : fonction d'auto-corrélation du signal de pression ; (ligne continue) : fonction de corrélation du champ magnétique axial induit et de la pression ; (ligne en traits mixtes) : fonction de corrélation du champ magnétique axial induit et de la composante transverse ( $B_{ind,x}$ ) induite.

atteinte dans les spectres en question. Néanmoins, comme nous l'avons souligné plus haut, l'amplitude du signal à ces fréquences élevées, atteint les limites de la dynamique de l'instrumentation. Il est donc difficile pour le moment de trancher définitivement sur la vraie nature de la coupure : diffusive ou limite de la mesure ?

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudions plus en détail les trois régimes identifiés pour les spectres.

**Régime à basse fréquence ( $f < \frac{\Omega}{10}$ ) : corrélations temporelles.** La présence d'un spectre plat pour le domaine de fréquences inférieures à  $\frac{\Omega}{10}$  traduit le fait que les signaux magnétiques enregistrés sont temporellement décorrélés pour des intervalles de temps typiquement supérieurs à 10 périodes de révolution des disques. Ceci apparaît clairement sur la fonction d'auto-corrélation du champ magnétique induit (courbes en tirets des figures IV.41a et b) qui décroît avec un temps caractéristique  $\tau_c$  de l'ordre de  $\Omega^{-1}$  et s'annule pour des intervalles de temps supérieurs à  $10\Omega^{-1}$ .

La fonction d'auto-corrélation du signal de pression (courbes en pointillés des figures IV.41a et b) présente un comportement analogue, avec notamment un temps de corrélations comparable à celui du signal magnétique. Dans la mesure où les fluctuations de pression à la paroi sont reliées aux fluctuations de la distribution des gradients de vitesse (la pression obéit à l'équation de Poisson  $\Delta p = -\rho \partial_i u_j \partial_j u_i$ ), ceci va dans le sens de la remarque faite précédemment au sujet des fluctuations lentes (sur une durée typique de l'ordre de la période de révolution des disques), identifiées sur les signaux magnétiques des figures IV.38a et b, et confirme leur lien avec une évolution lente de la structure de

l'écoulement.

Par ailleurs, l'étude de la fonction d'inter-corrélation  $\chi_{p-B_{ind,z}}$  entre le signal de pression (mesuré à la paroi de la cuve) et le signal magnétique (mesuré au sein de l'écoulement à 10 cm de la paroi) montre que la dynamique du champ magnétique est bien associée à des mécanismes à grande échelle, faisant intervenir la structure globale de l'écoulement. La fonction  $\chi_{p-B_{ind,z}}$  est représentée par la ligne continue sur les figures IV.41a et b. On peut effectivement observer que

$$|\chi_{p-B_{ind,x}}| = 0.2 \quad \text{à } t=0. \quad (\text{IV.55})$$

Cette valeur non négligeable révèle effectivement une claire corrélation entre les deux signaux, enregistrés en deux points distants de 15 cm (soit 75% du rayon de la cuve), dans un écoulement pourtant fortement turbulent ( $Re \sim 10^6$ .) Le temps de décroissance caractéristique de  $\chi_{p-B_{ind,x}}$  est également de l'ordre de  $\Omega^{-1}$  et les signaux de pression et magnétique tendent à être complètement décorrélés au-delà de  $t = 10\Omega^{-1}$ .

**Régime intermédiaire** ( $\frac{\Omega}{10} < f < \Omega$ ). Pour les fréquences comprises entre  $\frac{\Omega}{10}$  et  $\Omega$ , le spectre de puissance magnétique présente une décroissance selon une loi de puissance de la forme

$$\widetilde{B}_{ind}^2(f) \propto f^{-1} \quad (\text{IV.56})$$

Ce comportement intermédiaire n'est pas observé dans les expériences au gallium et semble caractéristique des régimes à haut  $R_m$ . Un comportement analogue est observé pour le champ magnétique dans le régime dynamo de l'expérience de Karlsruhe. Un régime intermédiaire similaire (présentant un comportement en  $f^{-\frac{5}{3}}$ ) a également été observé dans les expériences au sodium réalisées à l'université du Maryland [70][83] à partir de mesures effectuées à l'extérieur de l'écoulement.

Il est intéressant d'analyser ce régime en  $f^{-1}$  dans le domaine temporel, par le calcul des incréments du champ magnétique induit définis pour chaque composante par :

$$\delta B_{ind,\alpha}(\tau) \equiv B_{ind,\alpha}(t + \tau) - B_{ind,\alpha}(t) \quad (\alpha = x, y, z). \quad (\text{IV.57})$$

Le comportement en  $f^{-1}$  pourrait être lié à la saturation des incréments pour des intervalles de temps supérieurs à  $\Omega$ . En effet, une telle saturation peut s'écrire

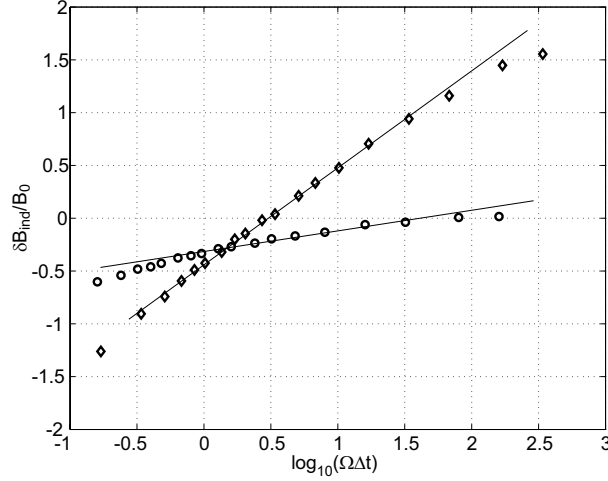
$$\delta B_{ind,\alpha}(\tau) \propto \tau^a \quad \text{avec } a \rightarrow 0, \quad (\text{IV.58})$$

un comportement en loi de puissance avec un exposant nul étant en accord avec un spectre de puissance en  $f^{-1}$ .

Cette hypothèse peut être testée en calculant la valeur pic à pic du champ magnétique induit moyennée sur des intervalles de temps  $\Delta t$  variables. La figure IV.42 représente le résultat de ce processus pour la composante axiale du champ induit, en échelle semi-logarithmique. On peut constater que les incréments magnétiques ainsi définis présentent un comportement dépendant de l'intervalle de temps  $\Delta t$  selon une loi logarithmique

$$\delta(B_{ind,z}) = \{\max(B_{ind,z}) - \min(B_{ind,z})\}_{t \in \Delta t} = B_0 \log(\Omega \Delta t) \quad (\text{IV.59})$$

pour les intervalles de temps supérieurs à  $\Delta t \sim \Omega^{-1}$ . Ce comportement est compatible avec le régime spectral en  $f^{-1}$  dans la mesure où une loi logarithmique peut être interprétée comme la limite d'une fonction algébrique avec un exposant tendant vers zéro.



**Fig. IV.42:** Évolution de la valeur pic à pic du champ magnétique induit ( $\delta B_{ind}(\Delta t) = \max(B_{ind,\alpha}) - \min(B_{ind,\alpha})$ ) calculée sur des intervalles de temps  $\Delta t$  de longueur croissante à partir des signaux de figures IV.38a et b. (○) : mesures à 8 Hz; (◇) : mesures à 17 Hz. Les lignes correspondent à l'évolution logarithmique  $\delta B_{ind}(\Delta t) \propto B_0 \log(\Omega\Delta t)$ .

**Régime à hautes fréquences ( $f > \Omega$ ) : régime inertiel.** Pour les hautes fréquences, le spectre de puissance du champ magnétique décroît selon une loi de la forme

$$\widetilde{B}_{ind}^2 \propto f^{-\frac{11}{3}} \quad (\text{IV.60})$$

Ce régime est également observé dans les expériences au gallium [66]. Il peut être interprété simplement à partir d'un développement perturbatif au premier ordre en  $R_m$  pour l'équation d'induction des fluctuations magnétiques (IV.37), en considérant le champ magnétique comme un vecteur passif transporté par l'écoulement (de façon analogue au transport du scalaire passif [63]) dans le cadre de la phénoménologie de Kolmogorov 41 pour la turbulence et moyennant une hypothèse de Taylor [91][71], reliant les fréquences spatiales et les fréquences temporelles. Nous décrivons brièvement dans ce qui suit comment cette loi peut être obtenue.

Au premier ordre en  $R_m$  (et dans la mesure où l'amplitude typique des fluctuations de vitesse dépend linéairement de  $\Omega$  [64] et donc de  $R_m$ ), l'équation pour les fluctuations  $\vec{B}_{ind,f}$  s'écrit

$$\lambda \Delta \vec{B}_{ind,f,1} - \partial_t \vec{B}_{ind,f,1} = -\vec{\nabla} \times (\vec{u}_f \times \vec{B}_0), \quad (\text{IV.61})$$

où l'on considère le développement perturbatif en  $R_m$  pour les fluctuations magnétiques :  $\vec{B}_{ind,f} = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{B}_{ind,f,k} R_m^k$ . Dans le domaine de Fourier, la relation (IV.61) devient

$$-k^2 \lambda \widetilde{\vec{B}}_{ind,f,1} + i2\pi f \widetilde{\vec{B}}_{ind,f,1} = -ik \widetilde{\vec{u}}_f \times \vec{B}_0, \quad (\text{IV.62})$$

où  $k$  désigne le nombre d'onde dans le domaine des fréquences spatiales. Moyennant une hypothèse de Taylor, les fréquences spatiales et temporelles peuvent être reliées par une loi de dispersion de la forme

$$k = 2\pi \frac{f}{c^*}, \quad (\text{IV.63})$$

où  $c^*$  est une vitesse moyenne caractéristique de l'écoulement à grande échelle.

L'équation (IV.62) se met alors sous la forme

$$-k\lambda\tilde{\vec{B}}_{ind,f,1} + ic^*\tilde{\vec{B}}_{ind,f,1} = -i\tilde{\vec{u}}_f \times \vec{B}_0. \quad (\text{IV.64})$$

Pour les régimes à grand nombre d'onde (tels que  $k\lambda > c^*$ ), le premier terme du membre de gauche est alors dominant par rapport au second et l'expression ci-dessus se ramène simplement à la relation

$$\tilde{\vec{B}}_{ind,f,1} = i\frac{k^{-1}}{\lambda}\tilde{\vec{u}}_f \times \vec{B}_0 \quad (\text{IV.65})$$

Dans le cadre de la phénoménologie de Kolmogorov 41 pour la turbulence, l'énergie mécanique du fluide se distribue selon les échelles spatiales suivant la loi

$$\tilde{u}_f^2 \propto k^{-\frac{5}{3}}. \quad (\text{IV.66})$$

Sous l'hypothèse que le champ magnétique reste un vecteur passif pour la vitesse (ceci est justifié dans la limite des faibles paramètres d'interaction où l'on suppose que la force de Lorentz reste négligeable et sans effet sur l'écoulement) cette relation reste valable en présence du champ magnétique. La transformée de Fourier de la vitesse suit donc une loi de la forme

$$\tilde{u}_f \propto k^{-\frac{4}{3}}, \quad (\text{IV.67})$$

(puisque  $\tilde{g} \propto k^{-\alpha} \Leftrightarrow \tilde{g}^2 \propto k^{-2\alpha+1}$ .) Reportée dans (IV.65), la relation (IV.67) conduit à

$$\tilde{B}_{ind,f,1} \propto k^{-\frac{7}{3}}, \quad (\text{IV.68})$$

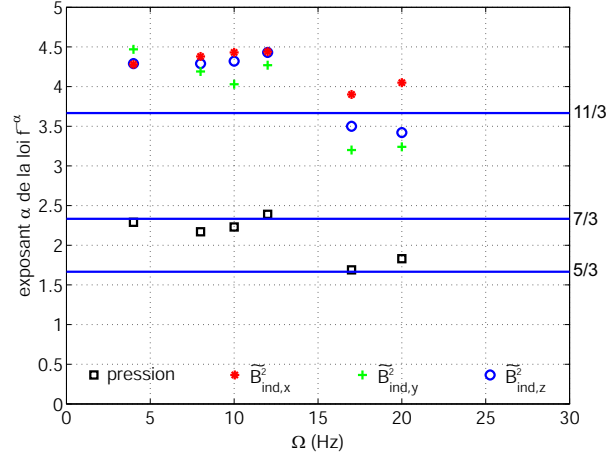
et donc

$$\tilde{B}_{ind,f,1}^2 \propto k^{-\frac{14}{3}}. \quad (\text{IV.69})$$

L'hypothèse de Taylor permet alors de retrouver la décroissance en  $f^{-\frac{11}{3}}$  pour le spectre temporel de puissance magnétique. Pour résumer la démarche, l'obtention de cette loi est soumise à quatre hypothèses :

1. approximation linéaire pour l'équation d'induction ;
2. hypothèse de Taylor ( $k = 2\pi\frac{f}{c^*}$ ) : elle assure la correspondance entre les fréquences spatiales et temporelles (dans une étude expérimentale, il est difficilement envisageable d'avoir directement accès aux fréquences spatiales du champ magnétique) ;
3. hypothèse des grands nombres d'onde ( $k > \frac{c^*}{\lambda}$ ) ou des hautes fréquences ( $f > \frac{c^{*2}}{2\pi\lambda}$ ) : elle permet de ne conserver que le terme diffusif dans le membre de droite de l'équation (IV.64) ;
4. hypothèse de vecteur passif : elle assure que les fluctuations de vitesse, et en particulier la cascade énergétique vers les petites échelles, ne sont pas affectées par la présence du champ magnétique.

**Écart à la loi en  $f^{-\frac{11}{3}}$ .** Une étude plus précise des spectres de puissance magnétique dans le domaine des hautes fréquences montre que la décroissance suit en général une loi algébrique de la forme  $f^{-\alpha}$ , mais avec un exposant  $\alpha$  légèrement supérieur à  $\frac{11}{3}$ . Cet écart à la loi en  $f^{-\frac{11}{3}}$  n'est pas observé dans les expériences au gallium [66] et semble donc



**Fig. IV.43:** Exposant  $\alpha$  du comportement à haute fréquence (décroissant en  $f^{-\alpha}$ ) pour les spectres de puissance des signaux de pression et de trois composantes magnétiques. Les lignes droites représentent les exposants attendu par la phénoménologie de Kolmogorov :  $\frac{11}{3}$  pour le champ magnétique ;  $\frac{7}{3}$  pour la pression ;  $\frac{5}{3}$  pour la pression en présence de bulles gaz dans l'écoulement.

spécifique aux régimes à haut  $R_m$ . Nous avons reporté sur la figure IV.43 les exposants obtenus en fonction de la vitesse de rotation des disques pour une série de mesures dans l'expérience VKSb, en régime contra-rotatif et en champ transverse appliqué. Nous avons également reporté l'exposant correspondant au régime inertiel du spectre de pression. Les fréquences de rotation étudiées sont comprises entre 5 Hz ( $R_m \sim 6$ ) et 20 Hz ( $R_m \sim 30$ ). On peut alors constater que, pour les faibles fréquences de rotation, l'exposant du spectre magnétique est plutôt de l'ordre de 4.3 alors que pour les mesures à 15 Hz et à 17 Hz, l'accord avec la loi en  $-\frac{11}{3}$  devient meilleur. Paradoxalement, pour cette série de mesure dans VKS, c'est donc pour les hautes fréquences de rotation que les spectres magnétiques sont le plus en accord avec ceux obtenus dans l'expérience VKG.

Un changement de comportement pour la pression est également observé à haute fréquence de rotation, son spectre passant d'une décroissance en  $f^{-\frac{7}{3}}$  pour les régimes aux faibles fréquences de rotation à une loi en  $f^{-\frac{5}{3}}$  pour les régimes à plus hautes fréquences de rotation. Ce changement de comportement pour le spectre des fluctuations de pression peut être interprété par la présence de bulles d'argon dans l'écoulement pour les grandes fréquences de rotation. En effet, le système d'étanchéité utilisé dans VKS pour le passage des arbres moteurs dans la cuve est constitué de garnitures à gaz imposant une surpression d'argon. Dans les régimes à haute vitesse de rotation, la dépression engendrée à l'arrière des disques tend donc à faciliter la pénétration de l'argon dans l'écoulement. Dans ce cas, le capteur de pression devient sensible au passage des bulles de gaz, advectées par l'écoulement, qui jouent en quelque sorte un rôle de traceur de la vitesse. Le spectre de pression est alors représentatif de celui de la vitesse et suit donc la même loi en  $f^{-\frac{5}{3}}$  prévue par la phénoménologie de Kolmogorov. La présence de bulles dans le fluide a pour effet d'abaisser la conductivité effective du milieu, et donc le nombre de Reynolds magnétique effectif de l'écoulement. L'abaissement du nombre de Reynolds magnétique effectif du milieu est également suggéré par la brusque diminution de l'induction moyenne, souvent observée pour les régimes à hautes fréquences de rotation (voir par exemple les derniers points de la figure IV.33b et c). Un autre effet contribuant à l'abaissement du  $R_m$  effectif

du milieu est le fort échauffement de l'écoulement (et la diminution sous-jacente de la conductivité) pour les régimes à hautes fréquences de rotation. Ceci pourrait expliquer que l'on retrouve alors le comportement en  $f^{-\frac{11}{3}}$  caractéristique des expériences à bas Reynolds. L'étude que nous présentons ici reste néanmoins largement préliminaire dans la mesure où, comme nous l'avons signalé, nous ne disposons pour le moment que de signaux relativement courts (ne dépassant pas une minute d'acquisition) du fait de la forte dérive thermique de l'écoulement. Cette étude mérite donc d'être approfondie (la nouvelle génération de VKS disposera d'un circuit de refroidissement), notamment par l'étude systématique des spectres à hautes fréquences et par une étude statistique des exposants du régime inertiel (et de leur dépendance en fonction de  $\Omega$ .)

Nous concluons cette partie par deux remarques au sujet de l'écart observé par rapport au comportement en  $f^{-\frac{11}{3}}$ . Pour les régimes à haut  $R_m$ , cet écart peut s'interpréter par la mise en défaut de certaines des hypothèses énoncées précédemment. Parmi celles-ci, la deuxième (hypothèse de Taylor) et la dernière (vecteur passif) ne sont pas directement liées au nombre de Reynolds magnétique (en l'absence de dynamo) et leur validité semble confirmée par les expériences à bas  $R_m$ , où l'exposant  $-\frac{11}{3}$  est clairement observé. En revanche, les deux autres hypothèses (approximation linéaire pour l'équation d'induction et hypothèse des grands nombres d'onde) sont étroitement liées à la valeur du nombre de Reynolds magnétique.

**Hypothèse des grands nombre d'onde.** Cette hypothèse peut s'écrire  $k > 2\pi \frac{f}{c^*}$  ou  $f > \frac{c^{*2}}{2\pi\lambda}$ . En admettant que la vitesse moyenne  $c^*$  intervenant dans l'hypothèse de Taylor soit proportionnelle à la vitesse caractéristique de l'écoulement définie à partir de la fréquence de rotation et du rayon des disques ( $U = 2\pi R\Omega$ ), l'hypothèse des grands nombres d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$$f > f_l \sim \Omega R_m. \quad (\text{IV.70})$$

Pour une fréquence de rotation  $\Omega$  donnée, la fréquence limite  $f_l \sim \Omega R_m$  au-delà de laquelle l'hypothèse des grands nombres d'onde s'applique croît donc avec  $R_m$ . En particulier, l'approximation est plus facilement vérifiée (i.e. pour des fréquences  $f$  plus faibles) pour les régimes à bas  $R_m$ . Ainsi, on s'attend à ce que, pour une fréquence de rotation donnée, le domaine de validité de l'approximation des grands nombres d'onde soit décalé d'une décade vers les hautes fréquences dans VKS par rapport à VKG (car à  $\Omega$  fixée,  $R_{m,VKS} \sim 10 R_{m,VKG}$ ). Par ailleurs, si l'on se place dans l'approximation opposée (où  $f \ll \Omega R_m$ ) la relation (IV.65) doit être remplacée par

$$\widetilde{\vec{B}}_{ind,f,1} = -\frac{1}{c^*} \widetilde{\vec{u}}_f \times \vec{B}_0. \quad (\text{IV.71})$$

Tant que les fréquences  $f$  considérées restent dans le domaine inertiel de la vitesse (où  $\widetilde{u}^2 \propto f^{-\frac{5}{3}}$ ) on peut montrer que la relation ci-dessus conduit à un comportement pour le spectre de puissance magnétique suivant une loi de la forme [70] :

$$\widetilde{\vec{B}}_{ind,f,1}^2 \propto k^{-\frac{5}{3}}. \quad (\text{IV.72})$$

Ces conclusions suggèrent alors que le domaine intermédiaire du spectre magnétique (que nous avons décrit comme décroissant en  $f^{-1}$ ) pourrait correspondre en réalité à un

comportement en  $f^{-\frac{5}{3}}$  et qu'il ne serait observable que dans les expériences à haut  $R_m$ . En effet, dans la mesure où, dans VKS, la largeur du régime intermédiaire est typiquement d'une décade, il disparaîtrait dans VKG car l'approximation des grands nombres d'onde serait alors valable dès le début du régime. Cette conclusion se heurte néanmoins au fait que le régime intermédiaire apparaît, dans les spectres de VKS, sur une gamme de fréquences relativement basses ( $\frac{\Omega}{10} < f < \Omega$ ) où le régime inertiel pour le spectre de vitesse n'est probablement pas encore pleinement atteint. En revanche, il est probable que la contribution en  $f^{-\frac{5}{3}}$  intervienne dans la région de *crossover* ( $f \sim \Omega$ ) entre le régime intermédiaire et le régime à haute fréquence.

**Contributions non-linéaires** La violation de l'hypothèse des grands nombres d'onde ne permet toutefois pas d'expliquer le fait que la décroissance du spectre de puissance magnétique à haute fréquence soit plus rapide que  $f^{-\frac{11}{3}}$  (puisque un comportement en  $f^{-\frac{5}{3}}$  tendrait au contraire à ralentir la décroissance.) On peut alors envisager l'effet d'éventuelles contributions non-linéaires aux fluctuations magnétiques. Si l'on se place dans l'approximation des grands nombres d'onde, on peut montrer, à partir de l'équation IV.37, que les fluctuations à l'ordre  $k+1$  et à l'ordre  $k$  sont reliées :

$$\Delta \vec{B}_{ind,f,k+1} \propto \vec{\nabla} \times (\vec{u}_f \times \vec{B}_{ind,m,k}) + \vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times \vec{B}_{ind,f,k}) + \vec{\nabla} \times (\vec{u}_f \times \vec{B}_{ind,f,k}) - \vec{\nabla} \times \langle \vec{u}_f \times \vec{B}_{ind,f,k} \rangle. \quad (\text{IV.73})$$

En se restreignant simplement à l'ordre 2 et si l'on suppose, par exemple, que le deuxième terme du membre de droite de cette relation est dominant, alors :

$$\vec{B}_{ind,f,2} \propto \vec{\nabla} \times (\vec{u}_m \times \vec{B}_{ind,f,1}). \quad (\text{IV.74})$$

Le terme de droite ne fait pas intervenir les fluctuations de vitesses, mais traduit seulement le transport des fluctuations magnétiques par l'écoulement moyen. Dans la mesure où  $\vec{B}_{ind,f,1} \propto f^{-\frac{11}{3}}$  on peut alors montrer que

$$\widetilde{B}_{ind,f,2}^2 \propto f^{-(\frac{11}{3}+2)}. \quad (\text{IV.75})$$

Le deuxième terme de la relation (IV.73) tend donc à donner une contribution dont la décroissance dans le spectre est plus rapide que  $f^{-\frac{11}{3}}$ . Cet argument se heurte toutefois au fait que le premier terme de la relation (IV.73) donne toujours une contribution en  $f^{-\frac{11}{3}}$  (puisque il ne fait pas intervenir les fluctuations de champ magnétique et peut donc être traité selon le même argument conduisant à la loi  $B_{ind,f,1} \propto f^{-\frac{11}{3}}$  à partir de  $B_0$ ) et doit donc être a priori dominant (avec la contribution linéaire des fluctuations) dans le domaine du spectre à haute fréquence. Un effet non-linéaire pourrait donc expliquer une décroissance plus rapide que  $f^{-\frac{11}{3}}$ , mais un argument justifiant son rôle dominant reste encore à trouver.

#### IV.4.4 Conclusion sur les fluctuations magnétiques

Les signaux d'induction magnétique mesurés dans les écoulements de von Kármán de métaux liquide présentent d'importantes fluctuations. Parmi celles-ci, les plus rapides



correspondent au transport du champ magnétique par les structures turbulentes de l'écoulement. Ce transport peut être correctement interprété dans le cadre de la phénoménologie de Kolmogorov bien que des écarts à cet interprétation aient pu être observés pour les régimes à haut nombre de Reynolds magnétique. Les fluctuations rapides ne contribuent néanmoins que faiblement à l'amplitude des variations temporelles de l'induction, clairement dominées par une évolution lente (se produisant typiquement sur une échelle de temps de l'ordre de la période de révolution des disques). Cette dynamique lente se produit à l'échelle intégrale de l'écoulement et peut être associées à l'instationnarité globale du champ de vitesse. Cette observation peut avoir des implications importantes quant à la possibilité de l'instabilité dynamo dans les écoulements non-contraints. En effet, bien qu'une structure particulière de l'écoulement puisse être favorable à l'auto-entretien magnétique, elle pourrait ne pas subsister suffisamment longtemps pour permettre à l'amplification d'un champ magnétique dynamo de se produire.

Du fait de la forte dérive thermique de l'écoulement (due à l'échauffement du fluide par dissipation visqueuse), l'étude des fluctuations dans les expériences d'induction de la première génération de VKS n'a été effectuée qu'à partir de signaux relativement courts (de l'ordre d'une minute dans le meilleur des cas). La nouvelle génération de l'expérience VKS disposera d'un système de refroidissement de l'écoulement de sodium. Ceci permettra d'évacuer la chaleur produite par la dissipation visqueuse et de s'affranchir de la dérive thermique, rendant ainsi possible l'acquisition de signaux sur des temps plus longs, indispensables pour une étude approfondie de la dynamique lente mise en évidence pour l'induction magnétique et des fluctuations rapides dans les régimes à haute fréquence de rotation.

## Conclusion

Nous avons développé une approche perturbative du problème de l'induction magnétohydrodynamique. Cette formulation permet de définir rigoureusement la notion de mécanisme d'induction stationnaire dans l'approximation cinématique. Elle constitue un outil intéressant pour l'étude de l'induction en général, et de la dynamo en particulier, par sa capacité à décrire de façon qualitative et quantitative le processus physique sous-jacent. Dans cette approche, une instabilité dynamo est identifiée comme un mécanisme de bouclage magnétique. L'instabilité dynamo s'interprète alors simplement comme celle d'un système bouclé présentant un facteur d'amplification réel et positif, le seuil de l'instabilité étant atteint lorsque ce facteur devient supérieur à 1. La notion de bouclage magnétique se ramène formellement à un problème aux valeurs propres pour l'opérateur  $\mathcal{L}' = \Delta^{-1} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \bullet)$ , ce qui permet d'établir l'équivalence avec l'approche traditionnelle par le calcul des taux de croissance de l'instabilité. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vitesse  $\vec{u}$  donné donne lieu à une dynamo cinématique s'obtient alors simplement par l'existence d'au moins une valeur propre réelle positive pour l'opérateur  $\mathcal{L}'$  associé à  $\vec{u}$ .

Nous avons appliqué l'approche perturbative, et sa mise en oeuvre numérique, à l'étude de l'induction dans les écoulements moyens de von Kármán en géométrie cylindrique. Ceci nous a permis d'identifier et d'expliquer clairement des mécanismes donnant lieu à des effets d'induction souvent dominés par des contributions non-linéaires en  $R_m$ . Parmi les principaux nous pouvons citer l'effet  $\Omega$  (linéaire en  $R_m$  et associé à la rotation différentielle), l'effet " $\alpha$ " (quadratique en  $R_m$  et associé à l'hélicité de l'écoulement) et l'expulsion (mécanisme conduisant à un bouclage d'ordre 2 responsable de l'expulsion du champ magnétique par la rotation du fluide). Ces mécanismes suggèrent notamment la possibilité d'une instabilité dynamo de type " $\alpha$ " $\Omega$ . Cependant, dans les configurations expérimentales actuelles, l'expulsion apparaît être le mécanisme dominant à haut  $R_m$ , empêchant le développement de l'instabilité. La compétition entre les différents mécanismes est arbitrée par la topologie de l'écoulement et la nature des conditions aux limites. En particulier, dans les configurations von Kármán étudiées, il existe une valeur optimale du rapport

$P/T$  (de l'ordre de 0.8) assurant la plus grande efficacité du bouclage " $\alpha$ " $\Omega$ .

Des mécanismes particuliers, essentiellement associés à la nature isolante ou conductrice des parois à l'intérieur desquelles évolue l'écoulement, ont été mis en évidence. Du fait de la grande longueur de diffusion magnétique du système, ces effets subsistent (et sont parfois dominants) au sein même de l'écoulement. Ce mécanisme, que nous avons appelé effet-CL, permet notamment d'expliquer des mesures expérimentales, où des champs induits violent la symétrie de l'équation d'induction (sous sa forme volumique habituelle) sont observés. L'effet-CL est directement relié à la vorticité de l'écoulement au voisinage des parois. Il pourrait jouer un rôle *catalytique* favorisant le bouclage " $\alpha$ " $\Omega$  en réduisant les effets de l'expulsion. L'approche perturbative permet d'étudier en détail l'influence de la nature des conditions aux limites électriques dans des situations réalistes par rapport à l'expérience. Cette étude montre que la présence d'une enveloppe de cuivre peut contribuer à améliorer l'efficacité des mécanismes d'induction.

La structure spatiale des champs induits, obtenue numériquement, révèle en général une certaine complexité montrant la nécessité de considérer l'induction comme un phénomène global et met en évidence les limites intrinsèques d'une approche purement locale, comme les mesures d'induction expérimentales actuellement disponibles.

Les mesures expérimentales locales d'induction moyenne sont en très bon accord qualitatif et quantitatif avec les prédictions numériques basées uniquement sur le profil moyen de l'écoulement. Ceci soulève trois remarques importantes :

- l'approche perturbative développée et la résolution numérique itérative mise au point acquièrent ainsi une validité certaine ;
- la structure spatiale du champ magnétique déterminée numériquement peut être identifiée à celle de la moyenne temporelle du champ magnétique expérimentale, ce qui permet de s'affranchir en partie de la limite due à la localité de la mesure ;
- les fluctuations de l'écoulement (fluctuations turbulentes et instationnarités à grande échelle) ne jouent pas de rôle majeur dans les mécanismes d'induction magnétohydrodynamiques moyens. En particulier aucune contribution moyenne des petites échelles turbulentes par un effet coopératif de type effet  $\alpha$  (dans l'esprit de la théorie du champ moyen) n'a pu être identifiée. Plus particulièrement dans ce but, une série de mesures d'induction axiale en présence d'un champ appliqué azimutal a été réalisée. Une telle induction n'aurait pu résulter que d'un effet des fluctuations de vitesse, dans la mesure où l'axisymétrie de l'écoulement moyen lui interdit toute contribution de ce type. Aucun signal en dehors du bruit magnétique ambiant n'a été détecté.

D'importantes fluctuations magnétiques sont néanmoins observées sur les signaux magnétiques enregistrés dans la gamme de  $R_m$  explorée. Les plus rapides résultent de l'advection du champ magnétique par les structures turbulentes de l'écoulement et sont relativement bien décrites dans le cadre de la phénoménologie de Kolmogorov suggérant notamment un spectre de puissance en  $f^{-\frac{11}{3}}$ . Ces variations rapides ne contribuent toutefois que faiblement à l'amplitude globale des fluctuations magnétiques, dominées par une évolution lente présentant une densité spectrale en  $f^{-1}$ . Cette dynamique magnétique lente correspond aux effets de l'instationnarité globale du champ de vitesse autour de son profil moyen. Elle pourrait avoir des implications fortes quant à la possibilité (ou non) d'effet dynamo dans un écoulement non-contraint. En effet, l'amplification du champ magnétique requiert le maintien d'une certaine cohérence des structures magnétiques induites

à chaque instant afin d'assurer le mécanisme de bouclage magnétique. Les fluctuations observées pourraient ainsi s'opposer à l'auto-entretien magnétique, dans la mesure où bien qu'une structure particulière de l'écoulement puisse, à un instant donné, être favorable à un bouclage magnétique, elle peut ne pas subsister suffisamment longtemps pour permettre l'amplification.

Enfin, nous finirons par quelques perspectives pouvant s'inscrire dans le prolongement du travail de cette thèse.

L'approche numérique développée dans cette étude permet d'interpréter en détails les mécanismes d'induction stationnaire à partir d'une configuration initiale donnée. La méthode itérative employée ne permet d'identifier sans ambiguïté que le mode associé à la valeur propre de  $\mathcal{L}'$  de plus grand module. Dans les exemples que nous avons abordés celle-ci était en général négative ou imaginaire et correspondait donc à un mécanisme de bouclage *anti-dynamo*. Ceci ne permet néanmoins pas d'exclure l'existence de modes dynamos, associés à des valeurs propres plus faibles (comme cela ressort notamment de l'étude de l'écoulement TM73). Il serait donc intéressant d'être en mesure de rechercher les différents modes de l'opérateur  $\mathcal{L}'$ . Ceci pourrait être réalisé par un algorithme d'Arnoldi inversé et décalé dans le sous-espace de Krylov et permettrait une étude plus précise du caractère dynamo ou non d'un écoulement donné (dans l'approximation cinématique).

Une extension de l'approche perturbative au cas non-stationnaire semble également envisageable en considérant un champ magnétique oscillant à une pulsation  $\omega$  donnée.

La méthode perturbative et sa mise en oeuvre que nous avons développée ne sont bien entendu pas spécifiques aux écoulements de von Kármán. Il pourrait être intéressant d'appliquer cette approche à d'autres écoulements. Dans un contexte plus géophysique, l'étude des mécanismes d'induction opérant sur un ensemble de colonnes de convection présente un intérêt certain.

D'un point de vue expérimental, l'obtention d'une dynamo reste le principal enjeu. La deuxième génération de l'expérience VKS est actuellement en cours de montage et devrait être opérationnelle courant 2004. Le nouveau dispositif sera muni d'un circuit de refroidissement du sodium, permettant des acquisitions plus longues et une étude plus approfondies des fluctuations magnétiques et du rôle de l'instationnarité de l'écoulement sur l'induction magnétohydrodynamique. Par ailleurs, la possibilité d'une dynamo *hybride*, de type fluide homopolaire, est actuellement en cours d'étude sur le dispositif au gallium. Bien que dans ce cas le cycle dynamo soit volontairement favorisé par un circuit électrique extérieur à l'écoulement, cette configuration devrait permettre en particulier d'étudier l'influence éventuelle de l'instationnarité de l'écoulement sur le seuil dynamo.

Nous avons souligné à plusieurs reprises le caractère non-locale de l'induction magnétohydrodynamique et la limite intrinsèque de mesures magnétiques en des points isolés. Un réseau de capteurs est actuellement en phase de développement afin de pouvoir mesurer simultanément le signal magnétique en différents points de l'expérience. Ceci permettra de mener une étude expérimentale de la structure spatiale du champ magnétique induit.



# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [2] A. Alemany, P. Marty, F. Plunian, et J. Soto. Experimental investigation of dynamo effect in the secondary pumps of the Fast Breeder Reactor Superphenix. *J. Fluid Mech.*, **403**, pp. 263–276, 2000.
- [3] N. W. Aschcroft et N. D. Mermin. *Solid State Physic*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
- [4] J. Aubert, D. Brito, H. C. Nataf, P. Cardin, et J. P. Masson. A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Int.*, **128**, pp. 51–74, 2001.
- [5] G. A. Baker. Application of the Padé approximant method to the investigation of some magnetic properties of the Ising model. *Phys. Rev.*, **124**, pp. 768–774, 1961.
- [6] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [7] P. M. S. Blackett. Rotational theory of general celestial magnetism. *Nature*, **159**, pp. 658, 1947.
- [8] M. Bourgoïn, L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guigon, J. B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, et J. F. Pinton. Magnetohydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment. *Phys. Fluids*, 2002.
- [9] S. T. Bramwell, P. Holdsworth, et J. F. Pinton. Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena. *Nature*, **396**, pp. 552, 1998.
- [10] C. Brezinski. Extrapolation algorithms and Padé approximations : a historical survey. URL : "[citeseer.nj.nec.com/452757.html](http://citeseer.nj.nec.com/452757.html)".
- [11] A. Brisseau, U. Frisch, J. Léorat, M. Lessieur, et A. Mazure. Helicity cascade in fully developed turbulence. *Phys. Fluids*, **16**, pp. 1366, 1973.
- [12] D. Brito. *Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre : tourbillon géostrophique de gallium liquide dans un champ magnétique, anisotropie et rotation de la graine, chemins d'inversion*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, Paris, 1998.
- [13] D. Brito, P. Cardin, H. C. Nataf, et G. Marolleau. Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. *Phys. Earth Planet. Int.*, **91**, pp. 77–98, 1995.
- [14] E. Bullard. The stability of a homopolar dynamo. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, pp. 744–760, 1955.

- [15] F. H. Busse. A model of geodynamo. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **42**, pp. 437, 1975.
- [16] F. H. Busse. Dynamo theory of planetary magnetism and laboratory experiments. Dans *Springer Proceedings in Physics*, tome 69, p. 197, 1992.
- [17] F. H. Busse et C. R. Carrigan. Laboratory simulation of thermal convection in rotating planets and stars. *Science*, **191**, pp. 81, 1976.
- [18] F. H. Busse et J. Wicht. A simple dynamo caused by conductivity variations. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **64**, pp. 135, 1991.
- [19] O. Cadot, S. Douady, et Y. Couder. Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow. *Phys. Fluids*, **7**, pp. 630, 1995.
- [20] P. Cardin, D. Brito, D. Jault, H. C. Nataf, et J. P. Masson. Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics*, **38**, 177, pp. 177–189, 2002.
- [21] P. Cardin et P. Olson. Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Int.*, **82**, pp. 235–259, 1994.
- [22] Centre d'Études Nucléaires de Cadarache, Commissariat à l'Énergie Atomique. *Cours de l'école du sodium*.
- [23] K. H. Chan, K. Zhang, J. Zou, et G. Schubert. A non-linear, 3-D spherical  $\alpha^2$  dynamo using a finite element method. *Phys. Earth Planet. Int.*, **128**, pp. 35, 2001.
- [24] S. Chandrashekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, New York, 1968.
- [25] Q. Chen, S. Chen, et G. L. Eyink. The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **15**, pp. 361, 2003.
- [26] S. A. Colgate, V. I. Pariev, H. F. Beckley, R. Ferrel, V. D. Romero, et J. C. Weatherall. The New Mexico  $\alpha\Omega$  dynamo experiment : modelling astrophysical dynamos. *Magnetohydrodynamics*, **38**, pp. 129, 2002.
- [27] B. Derroncourt, J. F. Pinton, et S. Fauve. Study of vorticity filaments using ultrasound scattering in turbulent swirling flows. *Physica D*, **117**, pp. 181, 1998.
- [28] E. Dormy, P. Cardin, et D. Jault. MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **160**, pp. 15, 1998.
- [29] E. Dormy, J. P. Vallet, et V. Courtillot. Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **1**, 2000GC000062, 2000.
- [30] S. Douady, Y. Couder, et M. E. Brachet. Direct observation of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, pp. 983, 1991.
- [31] N. L. Dudley et R. W. James. Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **425**, pp. 407–429, 1989.
- [32] S. Fauve, C. Laroche, et B. Castaing. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *J. Phys. II*, **3**, pp. 271, 1993.
- [33] C. B. Forest, R. A. Bayliss, R. D. Kendrick, M. D. Nornberg, R. O'Connell, et E. J. Spence. Hydrodynamic and numerical modeling of a spherical homogeneous dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics*, 2002.

- 
- [34] P. Frick, V. Noskov, S. Denisov, S. Kripchenko, D. Sokoloff, R. Stepanov, et A. Sukhanovsky. Non-stationary screw flow in a toroidal channel : way to a laboratory dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics*, **38**, pp. 143, 2002.
- [35] P. Frick, M. Reshetnyak, et D. Dokoloff. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer. *Europhys. Lett.*, 2002.
- [36] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [37] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Plactacis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, et G. Will. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility. *Phys. Rev. Lett.*, 2000.
- [38] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Plactacis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, et G. Will. Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 2001.
- [39] G. Glatzmaier et P. H. Roberts. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, **377**, pp. 203, 1995.
- [40] D. Gubbins. Numerical solutions of the kinematic dynamo problem. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A274**, pp. 493, 1973.
- [41] W. Henshaw. *A solver for steady state boundary value problems on overlapping grids*. URL : <http://www.llnl.gov/casc/Overture>, Centre for Applied Scientific Computing, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, 94551, 2002.
- [42] A. Herzenberg et F. J. Lowes. Electromagnetic induction in rotating conductors. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A249**, pp. 507, 1957.
- [43] H. Ji. Turbulent dynamos and magnetic helicity. *Phys. Rev. Lett.*, 1999.
- [44] H. Ji et S. C. Prager. The alpha dynamo Effects in laboratory plasmas. *Magnetohydrodynamics*, **38**, pp. 191, 2002.
- [45] R. Kaiser et A. Tilgner. Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor. *Phys. Rev. E*, **60**, 3, pp. 2949, September 1999.
- [46] A. N. Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, **30**, pp. 301, 1941.
- [47] F. Krause et K. H. Rädler. *Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Pergamon Press, New York, 1980.
- [48] R. Labbé, J. F. Pinton, et S. Fauve. Power fluctuations in turbulent swirling flows. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 1099, 1996.
- [49] E. Lanotte, A. Noullez, M. Vergassola, et A. Wirth. Large scale dynamo by negative eddy diffusivities. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **91**, pp. 131–146, 1999.
- [50] J. Larmor. How could a rotating body such as the sun become a magnet? *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, 1919.
- [51] Lehnert. An experiment on axisymmetric flow of liquid sodium in a magnetic field. *Arkiv Für Fysik*, **13**, pp. 109, 1957.
- [52] J. Léorat, F. Plunian, J. L. Guermond, et P. Lallemand. Is precession an efficient driving tool for an experimental fluid dynamo? Dans *MagnetoHydroDynamic at Dawn of Third Millenium*, tome 2, p. 561. Fourth International PAMIR Conference, Presqu'île de Giens, 18-22 Septembre 2000.



- [53] F. J. Lowes et I. Wilkinson. Geomagnetic Dynamo : a Laboratory model. *Nature*, **198**, pp. 1158, 1963.
- [54] F. J. Lowes et I. Wilkinson. *Laboratory investigation of geomagnetic dynamos*. Technical Report contract n° AF 61(052)-213, Physics Department, University of Newcastle upon Tyne, 1964.
- [55] F. J. Lowes et I. Wilkinson. Geomagnétique Dynamo : an improved Laboratory model. *Nature*, **219**, pp. 717, 1968.
- [56] J. Lumley et H. Panofsky.
- [57] L. Marié. *Optimisation d'une expérience de dynamo fluide*. Rapport de stage de dea, CEA Saclay, 2000.
- [58] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud, et J. Léorat. Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows. *oai :arXiv. org :physics/0301032*, 2003.
- [59] L. Marié, F. Ravelet, A. Chiffaudel, et F. Daviaud. communication privée.
- [60] L. Marié, M. Bourgoin, F. Pétrélis, J. Roy, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, et J. F. Pinton. Water experiments related to the von Kármán sodium dynamo project. Dans *AIP Conference Proceedings*, tome 602, pp. 453–464. IOP Institute of Physics Publishing LTD, 2002.
- [61] A. Martin, P. Odier, J. F. Pinton, et S. Fauve. Magnetic permeability of a diphasic flow, made of liquid gallium and iron beads. *Eur. Phys. J. B*, 2000.
- [62] K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [63] A. N. Monin et A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [64] N. Mordant, J. P. Pinton, et F. Chillà. Characterization of turbulence in a closed flow. *J. Phys. II*, 1997.
- [65] C. Nore, M. E. Brachet, H. Politano, et A. Pouquet. Dynamo action in the Taylor-Green vortex near threshold. *Phys. Plasmas*, 1997.
- [66] P. Odier, J. F. Pinton, et S. Fauve. Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow. *Phys. Rev. E*, **58**, 6A, pp. 7397, 1998.
- [67] P. Odier, J. F. Pinton, et S. Fauve. Magnetic induction by coherent vortex motion. *Eur. Phys. J. B*, **16**, pp. 373–378, 2000.
- [68] H. E. Padé. *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris, 1892.
- [69] E. N. Parker. Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.*, 1955.
- [70] N. L. Peffley, A. B. Cawthorne, et D. P. Lathrop. Toward a self generating magnetic dynamo : the role of turbulence. *Phys. Rev. E*, 2000.
- [71] J. F. Pinton et R. Labbé. Correction to Taylor hypothesis in swirling flows. *J. Phys. II*, **4**, 1461, 1994.
- [72] Y. B. Ponomarenko. Theory of the hydromagnetic generator. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **6**, pp. 755, 1973.

- 
- [73] Y. Ponty, H. Politano, et J. F. Pinton. Induction at low magnetic Prandtl number driven by Large Eddies Simulation.
- [74] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, et W. T. Vetterling. *Numerical recipes, the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [75] F. Pétrélis. *Effet Dynamo : étude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2002.
- [76] F. Ravelet. *Étude expérimentale de l'écoulement tourbillonnaire de von Kármán et application à l'effet dynamo*. Rapport de stage de dea, CEA Saclay, 2002.
- [77] K. H. Rädler, E. Apstein, M. Rheinhardt, et M. Schüler. The Karlsruhe dynamo experiment. A mean field approach. *Studia geoph. et geod.*, **42**, pp. 224, 1998.
- [78] A. B. Reighard et M. R. Brown. Turbulent conductivity measurements in a spherical liquid Sodium flow. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 13, pp. 2794, 2001.
- [79] T. Rikitake. Oscillations of a system of disk dynamos. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, pp. 89, 1958.
- [80] G. O. Roberts. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A271**, 411, 1972.
- [81] P. H. Roberts. *Fundamentals of Dynamo theory*, chapitre 1, pp. 1–57. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [82] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Ed. Hermann, Paris, 1965.
- [83] W. L. Shew, D. R. Sisan, et D. P. Lathrop. Titre. Dans P. Chossat, D. Armbruster, et I. Oprea, rédacteurs, *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, tome 26 de *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Cargèse (France)*, p. 83. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 21-26 août 2001.
- [84] C. Simand, F. Chillà, et J. F. Pinton. Inhomogeneous turbulence in the vicinity of a large coherent vortex. *Europhys. Lett.*, **49**, 3, pp. 336, 2000.
- [85] C. Simand, F. Chillà, et J. F. Pinton. Inhomogeneous turbulence in the vicinity of a large coherent vortex. *Europhys. Lett.*, **49**, 6, pp. 821, 2000.
- [86] J. Sivardière. *La symétrie en mathématiques, physique et chimie*. Presses Universitaires de Grenoble, 1995.
- [87] M. Steenbeck, I. M. Kirko, A. Gailitis, A. P. Klawina, F. Krause, I. J. Lauminis, et O. A. Lielausis. An experimental verification of the  $\alpha$ -effect. *Monats. Dt. Akad. Wiss.*, **9**, pp. 716, 1967.
- [88] R. Stieglitz et U. Müller. Can the Earth's magnetic field be simulated in the laboratory? *Naturwissenschaften*, **87**, pp. 381, 2000.
- [89] R. Stieglitz et U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, **13**, 3, 2001.
- [90] R. Stieglitz et U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Magnetohydrodynamics*, **38**, pp. 27–33, 2002.
- [91] G. I. Taylor. *Proc. R. Soc. A*, **164**, pp. 476, 1928.
- [92] A. Tilgner et F. H. Busse. Simulation of the bifurcation diagram of the Karlsruhe dynamo. *Magnetohydrodynamics*, **38**, 1-2, pp. 35–40, 2002.

- [93] N. O. Weiss. The expulsion of magnetic flux by eddies. *Proc. Roy. Soc. A*, **293**, pp. 310–328, 1966.
- [94] M. Yamada, H. Ji, S. Hsu, T. Carter, R. Kulsrud, Y. Ono, et F. Perkins. Identification of Y-Shaped and O-Shaped Diffusion Regions During magnetic reconnection in a laboratory plasma. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, pp. 3117, 1997.
- [95] P. J. Zandbergen et D. Dijkstra. von Kármán swirling flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19**, pp. 465, 1987.

## Liste des principales publications

M. Bourgoïn, L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guigon, J-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton. Magneto-hydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment. *Physics of Fluids*, **14**, pp. 3046, 2002.

F. Daviaud, M. Bourgoïn, A. Chiffaudel, S. Fauve, L. Marié, P. Odier, J.-F. Pinton. Expérience VKS : vers la dynamo turbulente. *Bulletin de la S.F.P.*, **135**, pp. 24, juillet-août 2002.

L. Marié, M. Bourgoïn, F. Pétrélis, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton. Open questions about homogeneous fluid dynamo ; the VKS experiment. *Magnetohydrodynamics*, **38**, pp. 156, 2002.

F. Pétrélis, M. Bourgoïn, L. Marié, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton. Non linear magnetic induction in a turbulent swirling flow. *Physical Review Letters*, **90**, 174501, 2003.

M. Bourgoïn, R. Volk, P. Odier, J.-F. Pinton. Mécanismes d'induction en magnétohydrodynamique. **Sixième rencontre du non-linéaire**, Paris 13-14 mars 2003. Editeurs Y. Pomeau & R. Ribotta. Non Linéaire Publications, Orsay (France), pp. 47, 2003.

M. Bourgoïn, R. Volk, P. Frick, S. Kripchenko, P. Odier, J.-F. Pinton. Induction mechanisms in a von Kármán swirling flow of liquid Gallium. À paraître dans *Magnetohydrodynamics*, 2004.

M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton, Y. Ricard. An iterative approach of magnetic induction in liquid metal flows. Soumis à *Physics of Fluids*, 2003.





## Études en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo

L'étude menée au cours de cette thèse s'intéresse à l'induction MHD et explore la faisabilité expérimentale d'une dynamo par des écoulements non-contraints de liquides conducteurs à haut nombre de Reynolds magnétique ( $R_m$ ). Nous nous intéressons plus particulièrement aux écoulements de von Kármán de gallium ( $R_m < 5$ ) ou de sodium ( $R_m < 40$ ) et nous abordons les questions suivantes :

- **Quels mécanismes d'induction MHD peuvent être identifiés ?** Des mesures locales de champ magnétique induit sont réalisées pour différentes configurations d'écoulement, de champ appliqué  $\vec{B}_0$  et pour des valeurs croissantes de  $R_m$ . Nous interprétons qualitativement et quantitativement ces mesures par une approche perturbative des équations MHD. Les mécanismes d'induction résulte alors d'une succession d'étapes élémentaires, linéaires en  $R_m$ , où  $\vec{B}_0$  induit  $\vec{B}_1$  qui induit à son tour  $\vec{B}_2$  et ainsi de suite. Moyennant l'utilisation d'approximants de Padé, la résolution numérique de ce schéma itératif donne alors accès à la structure spatiale du champ induit sur l'ensemble de la gamme de  $R_m$  expérimentalement accessible. Nous pouvons ainsi interpréter des mécanismes spécifiques tels que l'effet  $\Omega$ , l'effet " $\alpha$ " et l'expulsion.

- **Parmi ces mécanismes, lesquels sont susceptibles de favoriser une dynamo ?** Dans l'approche mécaniste développée, une dynamo correspond à un bouclage magnétique tel que le champ induit à un ordre  $k$  se superpose au champ à un ordre  $k' < k$ . Ceci se ramène formellement à un problème aux valeurs propres dont nous montrons l'équivalence avec l'approche traditionnelle par le calcul des taux de croissance. Dans les écoulements von Kármán, un bouclage de type " $\alpha$ " $\Omega$  est mis en évidence expérimentalement et numériquement. Dans les configurations étudiées, l'expulsion reste néanmoins toujours le mécanisme le plus efficace et s'oppose à l'auto-entretien magnétique. Nous montrons que la compétition " $\alpha$ " $\Omega$ -expulsion est arbitrée par la topologie précise de l'écoulement et par la nature des conditions aux limites électriques. Des mécanismes d'induction spécifiques, entièrement dus à la présence de gradient de conductivité à la paroi ont été identifiés et observés expérimentalement.

- **Les fluctuations de l'écoulement réel par rapport à son profil moyen jouent-elles un rôle particulier dans les mécanismes d'induction ?** Du fait de leur très faible nombre de Prandtl magnétique les écoulements de métaux liquides étudiés sont fortement turbulents. Les fluctuations magnétiques les plus rapides peuvent ainsi être interprétées dans le cadre de la phénoménologie Kolmogorov. Le champ magnétique moyen est en revanche toujours correctement décrit par le profil moyen de l'écoulement.

**Mots clefs :** Magnétohydrodynamique, induction, dynamo, turbulence.

---

## Magnetohydrodynamics studies, application to dynamo effect

The work presented in this thesis investigates the possibility of magnetohydrodynamic dynamo action in unconstrained flows of conducting liquids at high magnetic Reynolds number ( $R_m$ ). We focus mainly on von Kármán flows of gallium ( $R_m < 5$ ) and sodium ( $R_m < 40$ ) and consider mainly the following points :

- **What are the relevant induction mechanisms ?** Local measurements of the induced magnetic have been performed for different flow configurations, applied field  $\vec{B}_0$  and  $R_m$ 's value. We give a qualitative and quantitative interpretation of these experiments by an original perturbative approach of MHD equations. In this approach induction mechanisms result from elementary linear steps where  $\vec{B}_0$  induces a first order  $\vec{B}_1$  field which induces a second order  $\vec{B}_2$  and so forth. The numerical resolution of this iterative scheme, coupled with Padé approximants technique, gives a comprehensive description of the induced magnetic field spatial structure for the experimentally accessible range of  $R_m$ . We can therefore identify specific mechanisms such as  $\Omega$  effect, " $\alpha$ " effect and expulsion.

- **What mechanisms can be expected to sustain a dynamo ?** In the mechanistic approach adopted here, a dynamo corresponds to a magnetic loop-back mechanism where the induced field at a given order  $k$  has exactly the same structure than the induced field at a previous order  $k' < k$ . This condition can be expressed in terms of an eigenvalue problem that we show to be equivalent to the traditional growth rate approach. In von Kármán flows, an " $\alpha$ " $\Omega$  loop-back mechanism has been identified experimentally and numerically. However, in the configurations we have considered, expulsion always remains the most efficient mechanism, operating against the dynamo growth. We show that the " $\alpha$ " $\Omega$ -expulsion competition is controlled by the precise topology of the flow and by the electrical boundary conditions. New mechanisms, resulting completely from boundary effects have been identified and experimentally observed.

- **Do hydrodynamic fluctuations play any specific role in induction mechanisms ?** Because of their very low magnetic Prandtl number, liquid metal flows are highly turbulent and fluctuating. This rise rapid magnetic fluctuations that can be explained in the frame of Kolmogorov phenomenology of turbulence. The mean value of induced magnetic field does not appear to be affected by this fluctuations and is only well accounted for using the mean flow profile.

**Keywords :** Magnetohydrodynamics, induction, dynamo, turbulence.

