



HAL
open science

Polarisation du ciel micro-ondes

Simon Prunet

► **To cite this version:**

Simon Prunet. Polarisation du ciel micro-ondes. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris Sud - Paris XI, 1998. Français. NNT : . tel-00008317

HAL Id: tel-00008317

<https://theses.hal.science/tel-00008317>

Submitted on 1 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université PARIS XI
spécialité : **Physique théorique**

par
Simon Prunet

Polarisation du ciel micro-ondes

Soutenue le 27 Octobre 1998 devant le jury composé de :

M. P.	Binétruy	Président
M. R.	Juszkiewicz	Rapporteur
M. R.	Schaeffer	Rapporteur
M. J. -L.	Puget	Directeur
M. F. R.	Bouchet	Examineur
M. F. X.	Désert	Examineur

*A Snježana,
sans qui tout cela ne serait pas là*

Résumé

La mission ESA PLANCK offre une opportunité sans précédent de mesurer de manière très précise la polarisation de l'émission Galactique et extragalactique dans le domaine millimétrique et sub-millimétrique ; elle devrait notamment permettre de mesurer la polarisation du Fond Cosmique Micro-ondes (FCM). Dans le premier chapitre, nous expliquons brièvement l'intérêt scientifique d'une telle mesure, et revoyons les technologies instrumentales qui la permettent.

Dans le second chapitre, nous modélisons les caractéristiques statistiques de l'émission galactique polarisée, en particulier celle des poussières (plus particulièrement importante pour l'instrument haute fréquence -HFI- de PLANCK).

Dans le troisième chapitre, nous présentons une méthode de filtrage multi-fréquence permettant la séparation des différentes composantes astrophysiques de l'émission millimétrique et sub-millimétrique, et permettant de quantifier les erreurs de la mesure des propriétés statistiques (spectre de puissance) de ces différents processus, en particulier le FCM.

Dans le quatrième chapitre, nous estimons l'erreur commise sur la mesure des paramètres cosmologiques, conséquence des erreurs estimées au chapitre précédent.

Dans un cinquième chapitre, nous estimons la contribution aux anisotropies du FCM de l'effet de lentille gravitationnelle en mouvement, causé par une population d'amas et de groupes de galaxies.

Enfin, dans un sixième chapitre, nous présentons un modèle semi-analytique simple de formation de galaxies, où le taux de formation d'étoiles est contrôlé par la température du milieu inter-galactique.

Abstract

The ESA mission PLANCK provides us with an unprecedented opportunity to measure, in an extremely precise way, the polarisation of the millimeter and sub-millimeter, galactic and extragalactic emission ; it should enable us in particular to measure the polarisation of the Cosmic Microwave Background (CMB).

In the first chapter of this thesis, we briefly explain the scientific motivations of such a measurement, and describe the instrumental technology which will make it possible.

In the second chapter, we model the statistical behaviour of the polarised galactic emission (in particular the one generated by the dust, which is specially important for the High Frequency Instrument -HFI- aboard PLANCK).

In the third chapter, we describe a multi-frequency filtering method, allowing one to separate the different astrophysical components contributing to the microwave polarised emission, and giving also an estimate of the errors in the measurement of their statistical properties (power spectra). We estimate these errors for the CMB in particular.

In the fourth chapter, we compute the errors on the measurement of the different cosmological parameters as a consequences of the errors estimated in the last chapter.

In a fifth chapter, we compute the contribution to the anisotropies of the CMB of moving gravitational lenses, caused by a population of galaxy clusters and groups.

Finally, in a sixth chapter, we present a simple semi-analytical model of galaxy formation, where the Star Formation Rate is controlled by the temperature of the (hot) inter-galactic medium.

Remerciements

Avant d'exposer ma thèse, j'aimerais remercier tous ceux qui l'ont rendue possible. C'est avec Alain Blanchard que j'ai fait mes premiers pas en cosmologie, et c'est lui qui m'a décidé à poursuivre dans cette voie; c'est pourquoi je voudrais le remercier tout particulièrement ici. Après avoir suivi une année de DEA en physique théorique, je me trouvai propulsé dans un monde qui m'était totalement inconnu jusqu'alors: celui des observateurs et des constructeurs d'instruments. C'est François-Xavier Désert qui y fut mon guide pendant mes deux premières années de thèse. Il m'y fit découvrir beaucoup de nouvelles sources d'émerveillement, tout en étant un maître exigeant et rigoureux. Pour sa patience et son amitié, pour avoir partagé ses connaissances avec moi, je le remercie. Mais, attiré irrésistiblement vers les Alpes, il me laissa aux bons soins de Jean-Loup Puget. Dans le même temps, ma localisation spatiale se détériora. En effet je fis irruption à l'IAP, tout d'abord comme parasite, puis comme « visiteur ». Sous la conduite impétueuse et exigeante de François Bouchet, je concrétisai mon intérêt pour la polarisation du 3K. Je leur dois beaucoup à tous les deux, et je les remercie pour toute la physique qu'ils m'ont fait découvrir, pour leur gentillesse, et pour avoir su, quand il le fallait, vaincre mon inertie naturelle (!).

C'est en fait de cette délocalisation que, paradoxalement, est sortie la ligne de travail qui allait constituer le corps de ma thèse. C'est aussi grâce au soutien et à l'amitié de tous les étudiants et jeunes chercheurs que j'ai rencontrés pendant ces trois ans que ces trois années ont été si riches pour moi. Pour l'IAS, je citerai spécialement Nabila, Claire, Antonella, Thierry, Emmanuel, Guilaine, Jacques et Frédéric, Hervé et Marc-Antoine, sans oublier Olivier Forni qui me prouva qu'un planétologue n'est pas si loin de la cosmologie qu'il ne le pensait au départ. Merci à vous tous pour avoir supporté mes équations.

Pour l'IAP, un grand merci aux deux Stéphane, à Julien, François, Sergio, Barbara, Olivia, Rachida, Emmanuel, et tous les autres ...

Je voudrais d'autre part remercier particulièrement, pour leur amitié fidèle et leurs encouragements, Julien Lesgourgues, Julien Chollat-Namy, Alexei Kharlamov, Jérôme Sanchez, Anne Perrazi et Christian Jacques.

Enfin, mes remerciements vont aussi à mes frères et soeur, ainsi qu'à mes parents, pour leur soutien moral (et parfois financier!).

Table des matières

Résumé	v
Remerciements	vii
Introduction	1
1 Polarisation du FCM	3
1.1 Historique	3
1.1.1 Situation théorique	3
1.1.2 Situation observationnelle	5
1.2 Que pouvons-nous apprendre grâce à la polarisation Γ	10
1.2.1 Génération de la polarisation - Histoire de l'univers ionisé	10
1.2.2 Modes « électriques » et « magnétiques » de la polarisation	11
2 Emission galactique polarisée	15
2.1 Rayonnement synchrotron	15
2.1.1 Rayonnement d'une particule chargée accélérée	15
2.1.2 Spectre et polarisation de l'émission synchrotron galactique	19
2.1.3 Que nous disent les observations Γ	22
2.2 Emission galactique polarisée des poussières	24
2.2.1 Emission intrinsèque polarisée de la poussière	25
2.2.2 Modélisation de l'émission galactique polarisée des poussières	26
2.2.3 Comparaison avec le FCM	31
3 Filtrage multi-fréquences	45
3.1 Motivations	45
3.2 Filtrage de Wiener: deux formulations	46
3.2.1 Problème bayésien	46

3.2.2	Formulation classique	47
3.3	Application aux données polarisées	48
3.3.1	Calcul des filtres	48
3.3.2	Facteurs de qualité	50
3.3.3	Estimateurs non biaisés des spectres de puissance	53
3.3.4	Qualité de la mesure du FCM	54
3.3.5	Mesure des émissions polarisées galactiques	56
3.3.6	Mesure des modes « magnétiques » de polarisation	63
3.3.7	Remarques finales	64
4	Paramètres cosmologiques	83
4.1	Influence de la polarisation	83
4.1.1	Effet de la réionisation	83
4.1.2	Modes magnétiques et paramètres inflationnaires	84
4.1.3	Pics acoustiques et paramètres cosmologiques	85
4.2	Matrice de Fisher	85
4.2.1	Formalisme	85
4.2.2	Intervalles de confiance	86
4.3	Application au FCM	87
4.3.1	Cas du FCM seul	87
4.3.2	Cas des données filtrées	88
4.4	Résultats	89
4.4.1	Trois modèles «classiques»	89
4.4.2	Modèles BSI	92
5	Effet «papillon»	105
5.1	Introduction	105
5.2	Le cas d'une structure seule	106
5.2.1	L'effet «papillon»	106
5.2.2	Potentiel gravitationnel de la structure	107
5.3	Généralisation à un ensemble de structures	109
5.3.1	Synthèse de population	109
5.3.2	Vitesses particulières	110
5.3.3	Simulations numériques	111
5.4	Analyse des données–Résultats	111
5.4.1	Analyse des cartes de l'effet « papillon »	111
5.4.2	Interprétation des résultats	114
5.4.3	Détection et extraction de l'effet «papillon»	116

6	MIG chaud et photoionisé	135
6.1	Introduction	135
6.2	<i>Sur-Refroidissement</i>	137
6.2.1	Phénoménologie	137
6.2.2	Formalisation du problème	138
6.3	MIG réchauffé	144
6.3.1	Mécanismes de suppression	145
6.3.2	Effets de la photoionisation	146
6.4	MIG chaud et formation des galaxies	148
6.4.1	Processus de chauffage	148
6.4.2	Régulation des supernovae	150
6.4.3	Le MIG réchauffé par les SNe	150
6.4.4	MIG chaud photoionisé	154
6.5	Observations	157
6.5.1	Gaz neutre à grand z	157
6.5.2	Formation d'étoiles	161
6.5.3	Métallicité du MIG	161
6.6	Remarques finales	163
	Conclusion et perspectives	165
A	La physique du FCM	169
A.1	Les équations d'Einstein	169
A.1.1	Perturbations de la métrique	170
A.1.2	Cas du fluide parfait	171
A.1.3	Application : CDM	172
A.2	L'équation de Boltzmann	172
A.2.1	Espace des phases	172
A.2.2	Collisions Thomson	175
A.2.3	Equations de Boltzmann polarisées	178
A.3	Statistique du FCM	182
A.3.1	Harmoniques sphériques spinnées	183
A.3.2	Modes de polarisation	184
A.3.3	Spectres de puissance des perturbations scalaires	187
A.3.4	Spectres de puissance des perturbations tensorielles	189
B	Dérivées des estimateurs filtrés	193
C	Spécifications instrumentales	195
C.1	Spectres de puissance du bruit	195

Table des figures	199
Liste des tableaux	201
Bibliographie	203

Introduction

Quand on pense à la cosmologie en tant que discipline scientifique, il est frappant de constater que c'est en même temps l'une des plus vieilles et l'une des plus jeunes. C'est l'une des plus vieilles assez naturellement car elle prétend apporter des lumières ou, plus humblement, un modèle qui explique non pas pourquoi notre monde est là, mais comment il est devenu tel que nous le voyons. Ayant cotoyé pendant longtemps la métaphysique, elle s'en est séparé récemment dans la mesure où elle a acquis une assise observationnelle qui l'a promue au rang des sciences exactes. Ainsi, la cosmologie est aussi une des sciences les plus jeunes car ce n'est que très récemment que les modèles théoriques portant sur l'univers dans son ensemble ont pu être invalidés ou confirmés par les observations. Une des découvertes fondamentales de ce siècle fut l'observation par Penzias & Wilson du Fond de Rayonnement Cosmique.

Ce rayonnement est une *photographie* de l'univers tel qu'il était il y a quinze milliards d'années environ. Pensez à ce qu'un historien donnerait pour avoir une photographie de Jules César, et pourtant il vivait il y a deux mille ans seulement ! Outre le caractère sensationnel de cette découverte, la présence du FCM, prédit par le physicien russe Gamov dès 1948 (Gamov (1948)), vient apporter une preuve éclatante de la validité des modèles d'univers en expansion issus de la théorie de la Relativité Générale, au même titre que l'observation de la récession des galaxies par Hubble quelques décennies plus tôt. Par cette découverte, la cosmologie a réellement pris sa place en tant que discipline scientifique à part entière. En effet, la physique qui gouverne le FCM est relativement simple et bien connue des physiciens, ce qui la rend réellement prédictive. Ainsi, encouragés par cette découverte, les astrophysiciens ont alors cherché dans cette photo les germes des grandes structures que nous observons dans l'univers. C'est en 1992 que le satellite COBE observa de très faibles anisotropies dans ce rayonnement, apportant ainsi une confirmation que ces grandes structures sont nées par l'instabilité gravitationnelles de toute petites fluctuations du plasma primordial. Or, la physique du FCM indique que si des anisotropies sont présentes alors le rayonnement devrait également être *polarisé* (voir chapitre 1). Cependant on s'attend, vu le niveau

très faible des anisotropies détectées par COBE, que le taux de polarisation soit extrêmement petit. De nombreuses observations du FCM n'ont pu que placer des limites supérieures sur ce taux de polarisation. Nous revoyons dans le chapitre 1 la situation observationnelle actuelle, et donnons une description plus complète de la physique du FCM dans l'annexe A.

L'observation des anisotropies du FCM, ainsi que de son éventuelle polarisation, sont par ailleurs compliquées par la présence de sources d'émission contaminantes (d'origine galactique et extra-galactiques, polarisées pour certaines) qui s'ajoutent au signal du FCM. Ainsi une des tâches de l'observateur du FCM est de mesurer le plus précisément possible ces contaminants et leur comportement en fréquence de manière à pouvoir les soustraire efficacement du signal observé. Ainsi, dans le chapitre 2 tentons-nous, à défaut d'observations, de modéliser le comportement statistique des contaminants polarisés ; et dans le chapitre 3 nous montrons une des méthodes que l'on peut utiliser pour soustraire le mieux possible ces contaminants.

Enfin, la physique du FCM nous laisse penser qu'une observation précise de ce dernier nous permettrait, tout du moins dans le cadre de certains modèles, de contraindre les paramètres cosmologiques de façon inégalée. Ainsi, dans le chapitre 4 présentons-nous une méthode permettant de quantifier la qualité de la mesure de ces paramètres, dans le cas réaliste où l'observateur doit d'abord soustraire les contaminants du signal observé.

Les deux derniers chapitres de cette thèse portent sur des sujets un peu différents. Dans le chapitre 5, nous étudions l'empreinte sur le FCM du mouvement transverse des amas de galaxies par le biais d'un effet de lentille gravitationnelle sur les photons du FCM. Puis, dans le chapitre 6, nous étudions la pertinence d'un modèle de formation de galaxies auto-régulé par un Milieu InterGalactique chaud et photoionisé.

Enfin, nous discutons des résultats obtenus lors de ces différentes études, et de leurs améliorations possibles ainsi que de méthodes alternatives.

Chapitre 1

Polarisation du FCM

1.1 Historique

1.1.1 Situation théorique

Depuis la découverte du Fond Cosmique Micro-ondes (FCM) par Penzias & Wilson (1965) au début des années 60, l'intérêt pour l'étude du FCM n'a cessé d'augmenter, reflété par un nombre exponentiellement croissant de publications. En effet la découverte de ce dernier venait apporter une confirmation observationnelle éblouissante aux théories cosmologiques impliquant l'existence d'une époque où l'univers devait être chaud et ionisé; les théories dites de "Big Bang" faisant partie de ces dernières. Une deuxième découverte observationnelle fondamentale viendra compléter la première, à savoir la découverte par le satellite COBE (COsmic Background Explorer) des anisotropies du FCM à grande échelle (Smoot et al. (1992)). Voyant dans ces anisotropies la trace des fluctuations ayant donné naissance aux grandes structures de l'univers, les cosmologistes se sont intéressés de près à la physique régissant ces anisotropies, parallèlement à l'étude de la formation des grandes structures résultant de l'instabilité gravitationnelle de ces fluctuations initiales de densité.

Peu après la découverte du FCM, et bien avant la découverte de ses anisotropies, l'idée que ce rayonnement pouvait être polarisé a germé dans le milieu cosmologique. Ainsi Martin Rees fut le premier à voir dans la polarisation une contrainte possible sur l'anisotropie de l'univers, causée par exemple par l'existence d'un champ magnétique spatialement homogène (Rees (1968)). Cette étude fut reprise en 1980 par Basko & Polnarev (1980) qui refirent le calcul de manière plus générale, mais toujours dans le cadre d'un univers à expansion anisotrope. Deux conclusions importantes apparaissent dans leur

article:

- le degré de polarisation est toujours *inférieur* au degré d’anisotropie car c’est l’anisotropie elle-même qui produit la polarisation par l’intermédiaire des collisions Thomson des photons du FCM avec les électrons libres du plasma à l’époque de la recombinaison,
- une réionisation secondaire plus tardive devrait polariser le FCM de façon importante car l’anisotropie du rayonnement serait alors importante.

Ce n’est qu’en 1983 que naît l’idée que la polarisation du FCM puisse venir des anisotropies du rayonnement dues aux fluctuations de densité, et non pas seulement d’une anisotropie globale de la métrique (Kaiser (1983); Bond & Efstathiou (1984); Vittorio & Silk (1984)). Naissant, à travers les collisions Thomson, du quadrupole de l’intensité lumineuse dans le référentiel de l’électron, la polarisation est couplée à l’évolution des anisotropies de température du FCM; dans un calcul rigoureux il apparaît que les deux quantités ne peuvent être dissociées.

Si les fluctuations de densité du plasma peuvent polariser le rayonnement, il en est de même d’anisotropies locales de la métrique, à savoir des ondes gravitationnelles (Polnarev (1985, 1986)). Ce travail a été repris pour estimer la statistique des fluctuations de température et de polarisation du FCM (Crittenden et al. (1993a,b, 1995); Ng & Ng (1996)).

Ces traitements analytiques ou semi-analytiques de l’étude statistique des fonctions d’auto-corrélation de la polarisation et de corrélation température-polarisation ont été limités par la nature tensorielle de la polarisation et sa représentation sur la sphère céleste. Ainsi ces fonctions n’étaient-elles correctement calculées que dans la limite des petites échelles. S’inspirant des travaux de Thorne (Thorne (1980)) sur les représentations tensorielles sur la sphère, Kamionkowski et al. (1997b) et Zaldarriaga & Seljak (1997) utilisèrent respectivement les harmoniques sphériques tensorielles et spinnées pour définir des variables de polarisation invariantes par rotation (voir Annexe A), ce qui leur permit d’obtenir des expressions analytiques exactes des fonctions de corrélation pour tout angle.

Ces traitements statistiques permirent de distinguer deux modes de polarisation de parités différentes, dont l’un ne peut être engendré que par des perturbations vectorielles ou tensorielles. On vit alors dans la mesure de la polarisation du FCM un moyen unique de détection des ondes gravitationnelles primordiales, et ceci indépendamment de tout modèle cosmologique

(Kamionkowski et al. (1997a); Seljak & Zaldarriaga (1997); Kamionkowski & Kosowsky (1998)).

Il apparaît ainsi que la mesure de la polarisation du FCM donne des contraintes supplémentaires sur les paramètres cosmologiques. Cela fut quantifié par Kamionkowski et al. (1997b); Zaldarriaga et al. (1997) par une analyse bayésienne du problème, en particulier par l’usage du formalisme de la matrice de Fisher (voir 4).

Ces dernières analyses n’ont été possibles que grâce à l’implémentation numérique des équations de Boltzmann décrivant la physique du FCM. Un certain nombre de codes de transfert ont alors été écrits au cours des années 80-90, reposant sur la résolution d’un système d’équations différentielles couplées dans l’espace des multipôles ; l’un des plus célèbres mis à la disposition de la communauté astrophysique fut le programme COSMICS (Bertschinger (1995)). Ce type de codes, numériquement très performants, avait le désavantage cependant d’exiger des temps de calcul prohibitifs pour toute analyse Bayésienne. Un autre type de code, utilisant une approche de calcul du type “intégrale sur la ligne de visée”, a été développé récemment, obtenant une réduction des temps de calcul d’un, voire deux, ordres de grandeur: il s’agit du programme CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga (1996); Zaldarriaga & Seljak (1997); Zaldarriaga et al. (1998)). Ce code, compte tenu de sa rapidité, permet une exploration beaucoup plus vaste de l’espace des paramètres cosmologiques, et permet notamment de prédire les spectres d’anisotropies dans le cas des univers non plats. Il est à noter que le calcul des fonctions de corrélation de polarisation y a été intégré, utilisant le formalisme des harmoniques sphériques spinnées.

Il semble qu’à l’heure actuelle la physique des anisotropies du FCM (température et polarisation) soit relativement bien comprise, en ce qui concerne les effets de “premier ordre” tout du moins. En ce qui concerne la polarisation, les derniers développements théoriques ont porté sur:

- l’influence sur la polarisation d’un champ magnétique à l’époque de la recombinaison entraînant notamment une dépolarisation du FCM par rotation Faraday différentielle dans l’épaisseur de la « Surface de Dernière Diffusion » (SDD) (Kosowsky & Loeb (1996); Harari et al. (1997)).
- l’influence des lentilles gravitationnelles faibles (« weak lensing ») sur la polarisation, et notamment le fait qu’elles mélangent les modes de parités opposées (Zaldarriaga & Seljak (1998)).

1.1.2 Situation observationnelle

La recherche de polarisation dans les mesures du FCM a commencé avec la découverte de ce même FCM par Penzias & Wilson (1965)). En fait, toutes

les mesures du FCM jusqu'à un passé très récent ont été faites avec des récepteurs radiométriques sensibles à la polarisation et qui avaient donc la capacité intrinsèque sinon de mesurer, tout du moins de contraindre le niveau de polarisation du FCM. Néanmoins seules quelques équipes ont pris la peine de rendre leurs données exploitables et ont déterminé une limite supérieure à la polarisation du FCM; il faut se souvenir que la polarisation du FCM n'était pas leur priorité à ce moment-là (en effet, la priorité principale de ces expériences était la mesure des anisotropies de température). Nous allons présenter dans ce qui suit les méthodes utilisées par les différentes équipes qui apportèrent des contraintes de plus en plus serrées sur la polarisation du FCM, ainsi que les méthodes envisagées dans les missions spatiales futures.

Récepteurs radiométriques polarisés

Jusqu'à maintenant les expériences ayant apporté une contrainte sur la polarisation du FCM ont toutes utilisé le même type de récepteurs, tout en ayant des chaînes instrumentales différentes. Le schéma type de récepteur radiométrique polarisé contient les éléments suivants:

- une antenne collectrice,
- un rotateur Faraday permettant de changer par commande électrique externe le plan de polarisation de l'onde incidente,
- une chaîne d'amplificateurs radiométriques à bas bruit: Transistors à effet de champ (FET) ou plus tardivement des "HEMT" (High Electron Mobility Transistors). Ces amplificateurs sont habituellement refroidis par un système cryogénique pour diminuer leur bruit,
- un système magnétique appelé "Dicke Switch", qui permet de faire une mesure différentielle entre le signal céleste et un corps noir de référence. L'avantage de cette technique est de limiter considérablement les variations de gain des étages d'amplification,
- un détecteur, qui transforme le signal radio-fréquence en un courant continu; il s'agit d'habitude d'une diode à très faible bruit.

Il peut bien sûr y avoir des variantes par rapport à ce système de référence, mais le schéma reste essentiellement le même. Les différentes limites expérimentales sont résumées dans la table 1.1.2.

Une méthode alternative mérite cependant d'être mentionnée, c'est celle utilisant un radiomètre auto-corrélé (expérience POLAR, voir Keating et al. (1998)). Il s'agit dans cette expérience d'éviter de perdre du temps d'intégration sur le corps noir de référence, tout en gardant une mesure différentielle entre deux directions de polarisation, conservant ainsi l'avantage du "Dicke Switch" quant aux faibles variations de gain lors de l'amplification. Un autre

TAB. 1.1: *Limites expérimentales sur le degré de polarisation du FCM (95% de Confiance)*

Référence	Fréquence (GHz)	Positionnement céleste	Limite $T_{\text{pol}}/T_{\text{fcm}}$
Penzias & Wilson 1965	4.0	dispersé	0.1
Caderni <i>et al.</i> 1978	100–600	près du centre galactique	0.001–0.01
Nanos 1979	9.3	déclinaison = +40°	6×10^{-4}
Lubin & Smoot 1979	33	déclinaisons 38°, 53°, 63°	3×10^{-4}
Lubin & Smoot 1981	33	11 déclinaisons -37° to +63°	6×10^{-5}
Partridge <i>et al.</i> 1988	5	43' × 43' région, déclinaison 80°	4×10^{-5}
Wollack <i>et al.</i> 1993	26 – 36	près du pôle nord céleste	9×10^{-6}
Netterfield <i>et al.</i> 1995	26 – 46	près du pôle nord céleste	6×10^{-6}

avantage de cette méthode est qu'elle évite d'utiliser un rotateur Faraday, qui est une source non-négligeable de bruit dans le schéma classique. Les signaux provenant de deux directions de polarisation orthogonales, amplifiées dans des *voies différentes*, sont ensuite corrélés pour la mesure d'un des paramètres de Stokes (par exemple Q , voir A.2.2 pour une définition). Le système optique entier est alors tourné de 45° pour obtenir l'autre paramètre de Stokes (U). Comme dans la méthode du "Dicke Switch", l'instrument tourne sur lui-même à quelques tours par seconde, produisant ainsi un signal modulé entre Q et U à deux fois la fréquence de rotation. Cela permet de soustraire des effets systématiques dont la fréquence n'est pas liée à la fréquence de rotation de l'instrument. Un schéma instrumental de l'expérience POLAR est donné en figure 1.1.

Récepteurs bolométriques polarisés

Les détecteurs bolométriques ne sont utilisés pour des mesures millimétriques que depuis très peu de temps. Fonctionnant comme des calorimètres, ces détecteurs sont capables d'atteindre une sensibilité beaucoup plus grande que les détecteurs radiométriques, mais leur inconvénient majeur est qu'ils nécessitent un refroidissement cryogénique beaucoup plus poussé (ils fonctionnent de manière optimale entre 100 et 300 mK). Cela introduit d'autres sources de bruit qui étaient absentes des mesures radiométriques classiques (microphonie, émission thermiques des optiques), ainsi que des complications liées aux étages cryogéniques eux-mêmes (systèmes à dilution principalement).

Du fait de la très faible puissance de refroidissement de ces systèmes cryogéniques à très basse température et du principe calorimétrique de la mesure, il est impératif que les bolomètres, ainsi que les optiques froides associées, aient des capacités calorifiques très faibles. D'autre part, les mesures bolométriques sont adaptées à des mesures dans l'infrarouge lointain

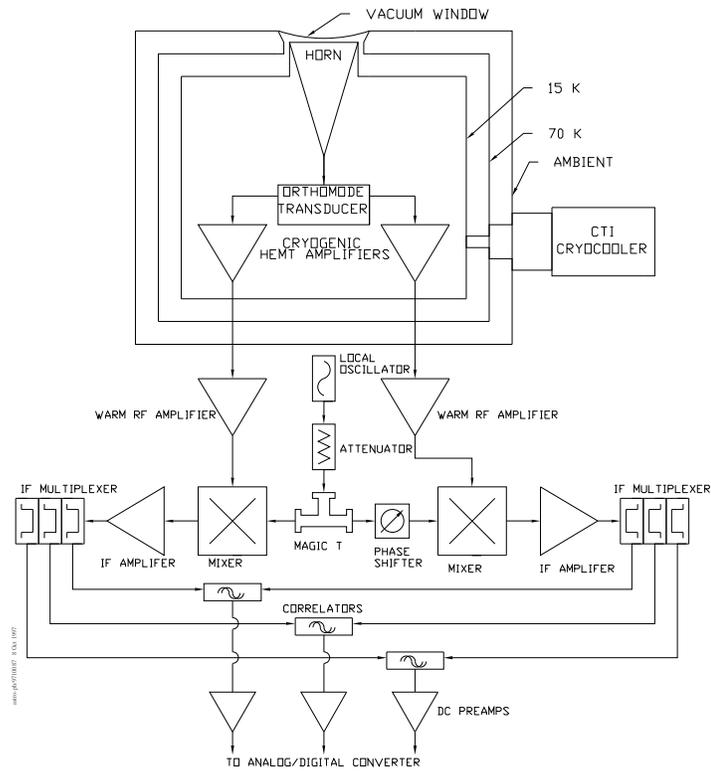


FIG. 1.1: Schéma instrumental de l'instrument POLAR (Keating et al. (1998))

et dans le submillimétrique, contrairement aux récepteurs radiométriques classiques qui sont d'autant plus sensibles que la longueur d'onde du rayonnement est grande. C'est pourquoi, outre la mesure des anisotropies du FCM, ces récepteurs ont été utilisés pour des mesures de l'effet Sunyaev-Zel'dovich (dont la signature spectrale, comportant une partie positive aux petites fréquences et une partie négative aux grandes fréquences, passe par zéro autour de 200 GHz).

En ce qui concerne les mesures de polarisation du FCM, il faut rappeler que par essence la détection bolométrique, comme son nom l'indique, n'est sensible qu'à l'énergie du rayonnement, et non à sa polarisation. Une mesure de la polarisation par une telle technique nécessite donc l'ajout de filtres polarisants dans la chaîne optique. A ma connaissance, aucune mesure de la polarisation du FCM n'a encore été réalisée avec cette technique. Il existe cependant un projet d'observation de la polarisation du FCM au sol, qui devrait être opérationnel cet hiver ; il s'agit du projet POLATRON, observant à 100 GHz avec un lobe de largeur à mi-hauteur de 2,5 minutes d'arc. Cet instrument sera monté sur le radio-télescope de 5,5 mètres d'Owens Valley (voir <http://astro.caltech.edu/lgg/polatron/pro.html>).

Missions spatiales à venir

L'intérêt croissant pour une mesure fine des fluctuations du FCM ont conduit l'Agence Spatiale Européenne (ESA) ainsi que la NASA à programmer chacune un satellite d'observation des anisotropies du FCM, respectivement *PLANCK* et *Microwave Anisotropy Probe* (MAP). Le premier devrait être lancé aux environs 2007, et portera deux instruments de technologies différentes:

- Le LFI (« Low Frequency Instrument »), instrument basse fréquence (30 – 100 GHz), est basé sur une technologie HEMT déjà testée dans l'espace par le satellite COBE. Les mesures seront polarisées pour toutes les voies.
- Le HFI (« High Frequency Instrument »), instrument haute fréquence (100 – 800 GHz), est basé sur des détecteurs bolométriques, donc non sensibles à la polarisation au départ. Il est cependant sérieusement envisagé de mesurer la polarisation dans certaines voies par le biais de filtres polarisants, quitte à perdre un peu de flux et donc de sensibilité pour la mesure de la température. J'essaierai par la suite d'apporter quelque lumière sur ce choix par le développement d'études quantita-

tives du ciel polarisé submillimétrique et des capacités spécifiques de l'instrument à mesurer la polarisation du FCM.

D'autre part MAP, dont le lancement est prévu pour l'an 2001, est basé sur la même technologie que l'instrument LFI, avec toutefois une résolution angulaire et une sensibilité plus faibles. Pour plus de détails sur les spécifications précises de ces instruments je renvoie le lecteur au chapitre 3 qui est consacré à l'étude quantitative de l'extraction du signal polarisé.

1.2 Que pouvons-nous apprendre grâce à la polarisation ?

1.2.1 Génération de la polarisation - Histoire de l'univers ionisé

Dans cette section je tenterai d'expliquer de manière intuitive pourquoi le FCM devrait être polarisé. Le lecteur intéressé par une approche plus formelle du problème peut se reporter à l'annexe (A). Pour comprendre la spécificité physique de la polarisation par rapport aux anisotropies de température, il faut tout d'abord se rappeler que la polarisation naît des interactions Thomson des électrons avec la composante quadrupolaire du rayonnement (*cf* A.2.2). Or avant la recombinaison du plasma primordial, ces interactions sont si efficaces que le libre parcours moyen des photons est négligeable devant les échelles caractéristiques des fluctuations de densité du plasma. De ce fait, si pour une raison quelconque un électron du plasma acquiert une vitesse non nulle relativement au fluide photonique, cet électron « verra », par effet Doppler, une anisotropie dipolaire du rayonnement qui aura tendance à le freiner par le biais des interactions Thomson. Les interactions Thomson agissent donc comme une force de rappel qui est proportionnelle aux mouvements relatifs des électrons par rapport aux photons ; autrement dit comme un terme de couplage entre les baryons (électrons et protons principalement, fortement couplés par les interactions coulombiennes) et les photons (*cf* A.2.3). Dans ces conditions, aucune anisotropie quadrupolaire du rayonnement ne peut se développer, et donc aucune polarisation ne peut être engendrée.

En revanche, lorsque le plasma commence à se recombiner pour former des atomes d'hydrogène neutres, le libre parcours moyen des photons augmente très rapidement et l'approximation de couplage fort entre les électrons et les photons devient caduque. Quand ce libre parcours moyen devient comparable à la taille des fluctuations de densité du plasma, alors les électrons « voient » des anisotropies quadrupolaires apparaître, et le rayonnement *de-*

vient polarisé par le biais des interactions Thomson. Il est important de noter que durant cette période l'approximation fluide pour la description des photons est invalidée, et que l'on doit avoir recours à des équations de transfert radiatif pour décrire leur comportement (*cf* A.2). Très rapidement la fraction ionisée du plasma devient faible (environ 10^{-5} , *cf* Peebles (1968)), et la probabilité d'interaction Thomson devient négligeable : les photons se propagent alors librement jusqu'à nous sans interagir avec la matière. A ce stade, on peut noter que la polarisation du FCM est engendrée pendant une période très brève de l'univers. A l'inverse des anisotropies de température du FCM, la polarisation du FCM est donc un moyen direct d'investigation de la surface de dernière diffusion, à l'exception cependant de la polarisation engendrée lors de la *réionisation* de l'univers. En effet la quantité de gaz neutre observée à un décalage vers le rouge (z dans la suite) compris entre 0 et 5 représente une fraction négligeable de la quantité totale de baryons prédite par la théorie de la nucléosynthèse primordiale (voir Gunn & Peterson (1965); Fukugita et al. (1997) pour des revues récentes); on s'attend donc à avoir une grande partie du gaz sous forme ionisée à bas z , à cause du flux UV ionisant des quasars, des galaxies et/ou des chocs engendrés par les vents galactiques (voir chapitre 6). Cette réionisation, dans la mesure où elle est suffisamment homogène, devrait cependant produire un signal polarisé aux grandes échelles (correspondant *grosso modo* à l'angle solide comprenant un volume de Hubble¹ à l'époque de la réionisation), donc bien distinct du signal engendré aux petites échelles sur la surface de dernière diffusion².

1.2.2 Modes « électriques » et « magnétiques » de la polarisation

La polarisation du FCM est donc *un traceur du quadrupole local du champ de rayonnement à la surface de dernière diffusion*. Or ce quadrupole local vient d'une variation spatiale d'anisotropies dipolaires qui sont engendrées par la vitesse relative des électrons par rapport au référentiel du FCM. Ainsi la polarisation est sensible aux *variations spatiales de la vitesse du plasma* à l'époque de la recombinaison. De la même façon la présence d'une anisotropie quadrupolaire locale engendre un gradient de vitesse dans le plasma.

1. Il s'agit d'une sphère de rayon $R_H = c/H$ où c est la vitesse de la lumière et H la constante de Hubble

2. Cette appellation est abusive dans le cas d'une réionisation dans la mesure où la dernière diffusion advient alors lors de cette même réionisation. Néanmoins pour des raisons historiques j'appellerai dans tous les cas *surface de dernière diffusion* la région de l'univers correspondant à la transition plasma - gaz neutre, advenant à un $z \simeq 1000$ indépendamment du modèle cosmologique considéré (Peebles (1968)).

Ceci étant établi, supposons qu'un électron soit au centre d'une anisotropie quadrupolaire de rayonnement, on peut se rendre compte (*cf* A.1) que la polarisation est alignée avec l'axe des lobes « froids » du quadrupole, et d'intensité maximale si la ligne de visée est perpendiculaire à l'(aux) axe(s) principal (principaux) du quadrupole. L'intensité de la polarisation est donc directement proportionnelle à l'intersection des lobes du quadrupole avec le plan perpendiculaire à la ligne de visée passant par l'origine du quadrupole.

Prenons maintenant le cas d'un mode de perturbation scalaire (ou fluctuation de densité) de vecteur d'onde donné \vec{k} . On peut imposer que l'axe polaire soit parallèle à ce vecteur. Nous avons donc une succession de plans horizontaux, alternés, de densité maximale et minimale, correspondant à des maxima et des minima de la *température effective* du plasma³. Dans un premier temps (c.-à-d. quand les effets de pression sont encore négligeables) des courants de matière naissent des régions « chaudes » vers les régions « froides », ce qui dans notre cas correspond à un quadrupole local dont le centre est situé sur les plans de températures extrémales (dont le signe varie suivant qu'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum) et symétrique de révolution ($m = 0$).

Si maintenant on imagine ces quadrupoles situés sur la surface de dernière diffusion, et que l'on définit les paramètres de Stokes conformément aux coordonnées polaires (voir A.2.2), on s'aperçoit que seul le paramètre de Stokes Q est engendré, U restant nul. La modulation de cette figure par l'onde plane associée au mode \vec{k} ne change rien à ce résultat. D'autre part, les paramètres de Stokes n'étant pas invariants par rotation, le calcul total de la carte de polarisation impliquerait de définir un référentiel fixe sur le ciel (indépendant du mode \vec{k} choisi), d'exprimer les paramètres de Stokes dans ce référentiel pour chaque mode de perturbation, et enfin d'additionner ces quantités. Cette méthode n'aboutit pas analytiquement, sauf dans l'approximation des petites échelles. Il est donc préférable de définir des modes de polarisation qui soient invariants par rotation des axes de coordonnées.

On peut en effet définir des modes de polarisation de manière non locale (à l'inverse des paramètres de Stokes) qui soient invariants par rotation. Supposons que nous ayons une certaine carte de polarisation sur le ciel; on peut alors définir deux quantités scalaires dont l'expansion en multipôles a les propriétés suivantes: sous une transformation de parité, la première voit ses multipôles multipliés par $(-1)^l$ (multipôles pairs inchangés, il s'agit

3. J'entends par température effective la combinaison suivante de la température du plasma et du potentiel gravitationnel: $(\frac{\Delta T}{T})_{eff} = \frac{\Delta T}{T} + \Psi$. C'est cette température effective qui est la source de la dynamique du plasma lorsque les forces de gravitation dominent (*cf* Sachs & Wolfe (1967))

des modes « électriques » de polarisation (E)), l'autre voit ses multipoles multipliés par $(-1)^{l+1}$ (modes « magnétiques » de polarisation (B)). De même que les champs électrique et magnétique sont respectivement de rotationnel et de divergence nulle, ces modes ont des propriétés locales liées aux dérivées secondes de l'amplitude de polarisation (dérivées secondes car ce sont des quantités de spin 2, voir A.3.1). En effet pour les modes E l'un des axes principaux de la matrice de courbure de l'amplitude de polarisation est aligné avec la direction de la polarisation, tandis que pour les modes B ces axes forment un angle de 45° avec la direction de polarisation.

Revenons maintenant au cas de la polarisation engendrée par un mode scalaire de perturbation, on a un champ Q pur, ce qui signifie que la polarisation est alignée localement avec l'un des deux vecteurs $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi})$. Or dans notre cas l'amplitude de polarisation est modulée selon l'axe (Oz), c.-à-d. parallèlement ou perpendiculairement à la direction de polarisation. On peut donc en conclure que seul un mode E est engendré par une perturbation scalaire, et comme c'est une quantité scalaire (invariante par rotation des axes de coordonnées) il en est de même pour la somme de tous les modes \vec{k} d'une perturbation scalaire quelconque.

En revanche, pour un mode de perturbation tensorielle (onde gravitationnelle plane), le quadrupole local a ses lobes dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde \vec{k} , ce qui tout d'abord introduit une dépendance azimutale de l'amplitude de polarisation (en $\cos(2\phi)$), et d'autre part produit les paramètres de Stokes Q et U en quantités comparables. L'amplitude étant toujours modulée selon l'axe (Oz) (l'axe du vecteur d'onde), on obtient en quantités comparables les modes E et B . Les modes B de la polarisation du FCM sont donc un *traceur exclusif de la présence d'ondes gravitationnelles primordiales*.⁴

Nous verrons dans le chapitre 4 comment les spectres de polarisation et de corrélation avec la température dépendent des différents paramètres cosmologiques, et quelle est l'influence des mesures de polarisation sur l'estimation de ces différents paramètres.

4. Cela est vrai dans l'hypothèse où le fluide est irrotationnel à la recombinaison, ce qui est généralement supposé dans les modèles cosmologiques où les perturbations de la métrique sont engendrées pendant une période d'inflation car en l'absence de sources ultérieures (du type défauts topologiques) les modes de vorticit e disparaissent avec l'expansion de l'univers.

Chapitre 2

Processus d'émission galactique polarisée

2.1 Rayonnement synchrotron

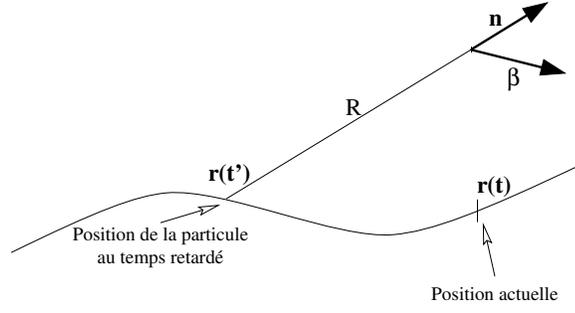
2.1.1 Rayonnement d'une particule chargée accélérée

Le rayonnement synchrotron est le processus d'émission le plus connu des radioastronomes. En effet ce rayonnement, dû à l'accélération centripète des électrons lors de leur mouvement hélicoïdal autour des lignes de champ magnétique, se situe dans les longueurs d'onde radio pour une large gamme d'énergie des électrons. A l'instar du rayonnement de freinage ou « Bremsstrahlung » dû au freinage d'une particule chargée dans son interaction coulombienne avec une autre particule, le rayonnement synchrotron est également un rayonnement de freinage et c'est pourquoi il est parfois appelé « rayonnement de freinage magnétique ». Ainsi ces deux processus d'émission galactique sont dus au rayonnement d'une particule chargée accélérée (en ce qui nous concerne des électrons) et il est bon de rappeler ici le principe de cette émission.

En partant de l'expression des potentiels retardés (ou potentiels de Liénard-Wiechert) pour une particule de charge q et de vitesse \vec{u} (voir Jackson (1975)) on trouve l'expression des champs électrique et magnétique d'une charge en mouvement :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \right] \quad (2.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

FIG. 2.1: *Particule chargée relativiste en mouvement : notations*

où $\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c}$, $\kappa = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}$, $R = \|\vec{r} - \vec{r}_0(t')\|$, $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ et les expressions entre crochets sont calculées au temps retardé $t' = t - R(t)/c$, voir figure 2.1 pour une illustration.

On reconnaît dans le premier terme du champ électrique une généralisation du champ coulombien dans le cas d'une particule en mouvement. Le second terme en revanche est un champ purement radiatif qui s'annule lorsque la vitesse de la particule est constante. L'expression de l'énergie irradiée par unité d'angle solide et par unité de pulsation s'écrit :

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \left| \int [R\vec{E}(t)] e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (2.3)$$

En notant que $R(t') \simeq r - \vec{n} \cdot \vec{r}_0$ pour $r_0 \ll r$, on peut la réécrire ainsi :

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \left(\frac{q^2 \omega^2}{4\pi c} \right) \left| \int \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) \exp \{i\omega(t' - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c)\} dt' \right|^2 \quad (2.4)$$

Formule de Larmor

Dans le cas d'une particule non relativiste ($\beta \ll 1$), on obtient :

$$\vec{E}_{rad} = \left[(q/Rc^2) \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{u}) \right] \quad (2.5)$$

$$\vec{B}_{rad} = \left[\vec{n} \times \vec{E}_{rad} \right] \quad (2.6)$$

Dans ce cas la puissance radiative par unité d'angle solide s'exprime ainsi :

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{q^2 \dot{u}^2}{4\pi c^3} \sin^2(\theta) \quad (2.7)$$

où θ est l'angle entre l'accélération et la ligne de visée. En intégrant sur les angles solides on obtient la puissance radiative totale émise par une particule

non relativiste (Formule de Larmor) :

$$P = \frac{2q^2 \dot{u}^2}{3c^3} \quad (2.8)$$

Ces résultats vont nous permettre de trouver l'émission d'une particule relativiste chargée.

Distribution angulaire de l'émission d'une particule chargée relativiste

En effet pour une particule chargée relativiste, on peut définir un référentiel inertiel (prime) où la particule est *instantanément au repos*. Evidemment la particule ne reste pas au repos dans ce référentiel car son accélération est non nulle, mais on peut supposer que sur des temps suffisamment courts son mouvement est non relativiste de sorte que la formule de Larmor s'applique. Nous savons d'autre part que la puissance totale émise est un invariant de Lorentz, donc d'après 2.8 nous avons :

$$P = P' = \frac{2q^2}{3c^3} \|\vec{a}'\|^2 \quad (2.9)$$

Or dans le référentiel prime, la composante temporelle du quadrivecteur accélération $a'_0 = 0$ (en effet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} = 0$ et dans le référentiel prime le quadrivecteur vitesse $\mathbf{U} = (c, \vec{0})$), et donc

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (2.10)$$

où \mathbf{a} est le quadrivecteur accélération ; cette expression est manifestement covariante. Si l'on écrit l'accélération de la particule sous la forme $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ ¹ on peut réécrire cette formule sous la forme :

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2) \quad (2.11)$$

Si l'on s'intéresse maintenant à la distribution angulaire de l'émission de la particule relativiste, il faut prendre garde au fait que les angles solides sont modifiés lors d'une transformation de Lorentz, ainsi si l'on prend l'axe polaire des deux référentiels colinéaire à la vitesse de la particule, et que l'on appelle dW l'énergie irradiée dans l'angle solide $d\Omega$ autour de la direction $(\mu = \cos \theta, \phi)$, on a :

$$dW = \gamma(1 + \beta\mu') dW' \quad (2.12)$$

1. Attention, il s'agit ici du *trivecteur* accélération, dans la suite \vec{x} sera toujours un trivecteur, et \mathbf{x} un quadrivecteur.

D'autre part on a $\mu = \frac{\mu' + \beta}{1 + \beta\mu'}$, ce qui nous donne $d\Omega = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1 + \beta\mu')^2}$, et donc

$$\frac{dW}{d\Omega} = \gamma^3(1 + \beta\mu')^3 \frac{dW'}{d\Omega'} \quad (2.13)$$

Nous nous intéresserons dans la suite à la puissance *reçue* par un observateur au repos dans le référentiel K par unité d'angle solide². Dans notre cas l'intervalle de temps d'arrivée de la radiation est égal à $dt_a = \gamma(1 - \beta\mu)dt'$ et donc la puissance reçue par unité d'angle solide s'exprime ainsi :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \gamma^4(1 + \beta\mu')^4 \frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{dP'}{d\Omega'} \quad (2.14)$$

En utilisant enfin l'équation 2.7 on obtient :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{(\gamma^2 a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2)}{(1 - \beta\mu)^4} \sin^2(\Theta') \quad (2.15)$$

Deux cas distincts apparaissent alors suivant que l'accélération de la particule dans le référentiel prime est parallèle ou perpendiculaire à sa vitesse.

• *Accélération parallèle* : dans ce cas $\Theta' = \theta'$ et donc $\sin^2 \Theta' = \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2(1 \pm \beta\mu)^2}$, ainsi on trouve pour la puissance émise :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a_{\parallel}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta\mu)^6} \quad (2.16)$$

• *Accélération perpendiculaire* : dans ce cas nous avons $\cos \Theta' = \sin \theta' \cos \phi'$ et donc $\sin^2 \Theta' = 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2(1 \pm \beta\mu)^2}$, ce qui nous donne :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a_{\perp}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta\mu)^4} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2(1 - \beta\mu)^2} \right) \quad (2.17)$$

Dans la limite ultrarelativiste, l'émission est concentrée dans un cône centré sur l'axe de la vitesse et de taille angulaire $\simeq 1/\gamma$. c'est ce que l'on appelle la focalisation relativiste (ou « beaming effect »). qui sera particulièrement important dans le cas de l'émission synchrotron (voir figure 2.2 pour une illustration).

2. Attention, cette puissance est différente de la puissance *émise* par unité d'angle solide du fait du mouvement de la particule, cf Jackson (1975).

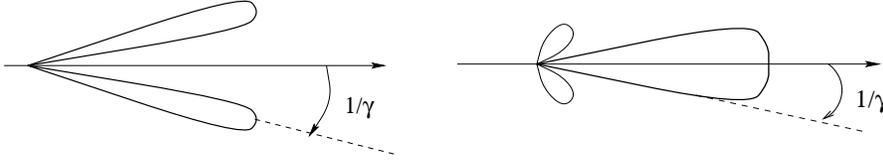


FIG. 2.2: *Distribution angulaire de l'émission d'une particule ultrarelativiste. L'accélération est parallèle à la vitesse dans le premier cas, perpendiculaire dans le second cas. On peut remarquer que l'émission est restreinte à un cône de taille angulaire $\simeq 1/\gamma$ (focalisation relativiste).*

2.1.2 Spectre et polarisation de l'émission synchrotron galactique

Emission synchrotron d'un électron ultrarelativiste

Nous allons maintenant nous intéresser plus spécifiquement aux caractéristiques de l'émission synchrotron. Considérons le mouvement hélicoïdal d'un électron autour d'un champ magnétique uniforme. L'angle que fait la vitesse de l'électron par rapport au plan perpendiculaire au champ magnétique est constant et sera dénoté α (appelé pas de l'hélice ou « pitch angle » en anglais). En effet la tangente de cet angle est le rapport des modules des vitesses parallèle et perpendiculaire au champ magnétique, or le mouvement de l'électron est uniforme parallèlement au champ, et circulaire uniforme perpendiculairement à ce dernier. On se place maintenant dans le référentiel tel que son origine coïncide avec la position de l'électron au temps retardé $t' = 0$, et tel que sa vitesse soit le long de l'axe (Ox) à ce même instant. En se donnant une ligne de visée \vec{n} , on peut définir les vecteurs de polarisation suivants :

- $\vec{\epsilon}_\perp$ est un vecteur unitaire situé le long de l'axe (Oy), et donc perpendiculaire au champ magnétique.

- $\vec{\epsilon}_\parallel = \vec{n} \times \vec{\epsilon}_\perp$

(voir figure 2.3). On a alors :

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}) = -\vec{\epsilon}_\perp \sin\left(\frac{vt'}{a}\right) + \vec{\epsilon}_\parallel \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) \sin\theta \quad (2.18)$$

où l'on a fait l'approximation $\|\vec{\beta}\| = 1$ et où a est le rayon de courbure de la trajectoire de l'électron. Ceci nous donne le premier terme de l'équation 2.4.

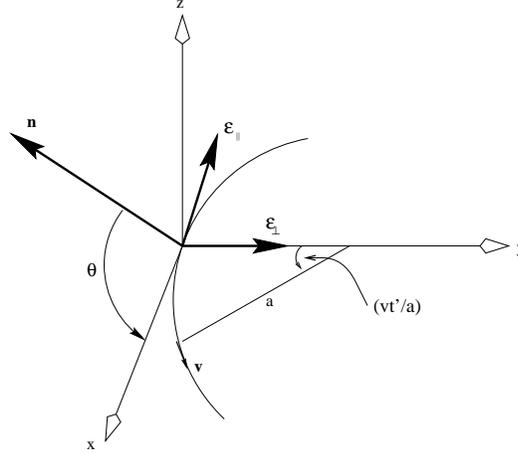


FIG. 2.3: Référentiel utilisé pour le calcul de la distribution angulaire de l'émission synchrotron polarisée d'un électron ultrarelativiste.

Le second terme peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t')}{c} &= t' - \frac{a}{c} \cos \theta \sin \left(\frac{vt'}{a} \right) \\ &\simeq \frac{1}{2\gamma^2} \left\{ (1 + \gamma^2 \theta^2) t' + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

où on a fait l'approximation $1 - v/c \simeq 1/2\gamma^2$ et $v/c \simeq 1$ partout ailleurs. D'autre part ce terme de phase devient très grand (et donc l'intégrale dans 2.4 très petite) à moins que l'on ait $\gamma\theta \lesssim 1$ et $c\gamma t'/a \lesssim 1$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega d\Omega} &\equiv \frac{dW_{\parallel}}{d\omega d\Omega} + \frac{dW_{\perp}}{d\omega d\Omega} \\ \frac{dW_{\perp}}{d\omega d\Omega} &= \frac{q^2 \omega^2}{4\pi c^2} \left| \int \frac{ct'}{a} \exp \left[\frac{i\omega}{2\gamma^2} \left(\theta_{\gamma}^2 t' + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right) \right] dt' \right|^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 \omega^2 \theta^2}{4\pi c^2} \left| \int \frac{ct'}{a} \exp \left[\frac{i\omega}{2\gamma^2} \left(\theta_{\gamma}^2 t' + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right) \right] dt' \right|^2 \quad (2.21)$$

avec $\theta_{\gamma}^2 = 1 + \gamma^2 \theta^2$. En faisant les changements de variables adéquats, et en notant que la plus grande partie de l'émission est concentrée autour de $\theta \simeq 0$, on peut montrer que les distributions spectrales respectivement parallèles et

perpendiculaires à la direction du champ magnétique projeté sur le ciel sont :

$$\frac{dW_{\perp}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma \sin \alpha}{2c}(F(x) + G(x)) \quad (2.22)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma \sin \alpha}{2c}(F(x) - G(x)) \quad (2.23)$$

où $F(x) = x \int_x^{+\infty} K_{5/3}(u)du$, $G(x) = xK_{2/3}(x)$, $x = \omega/\omega_c$ avec

$$\omega_c = \frac{3\gamma^2 q B \sin \alpha}{2mc} \quad (2.24)$$

Il est à noter également que cette émission est située dans un angle solide centré sur le cône des vitesses (cône de révolution décrit par le vecteur vitesse de l'électron, de taille angulaire α) et « d'épaisseur » $1/\gamma$. En divisant par la période orbitale de l'électron, on obtient la puissance par unité de pulsation :

$$P_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc^2}(F(x) + G(x)) \quad (2.25)$$

$$P_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc^2}(F(x) - G(x)) \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

Emission d'une distribution d'électrons relativistes

Considérons maintenant le cas où nous avons une distribution (que l'on supposera homogène et isotrope) d'électrons relativistes de spectre en loi de puissance $N(E)dE = CE^{\perp p}dE$ pour une large gamme d'énergies. Pour obtenir la puissance radiative \mathcal{P} de cette distribution, il suffit d'intégrer les équations 2.27. Si l'on s'intéresse maintenant au degré de polarisation linéaire, on a :

$$\Pi = \frac{\mathcal{P}_{\perp}(\omega) - \mathcal{P}_{\parallel}(\omega)}{\mathcal{P}_{\perp}(\omega) + \mathcal{P}_{\parallel}(\omega)} = \frac{\int x^{\frac{p-3}{2}} G(x) dx}{\int x^{\frac{p-3}{2}} F(x) dx} = \frac{p+1}{p+\frac{7}{3}} \quad (2.28)$$

Il est important de noter que ce taux de polarisation est *indépendant* de la fréquence du rayonnement. D'autre part, si l'on cherche la puissance totale de l'émission, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega) &= \int \gamma^p (P_{\perp}(\omega) + P_{\parallel}(\omega)) d\gamma \\ &= \frac{\sqrt{3}q^3 C B \sin \alpha}{2\pi mc^2(p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{mc\omega}{3qB \sin \alpha}\right)^{\perp \frac{p-1}{2}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

On remarque ainsi que l'indice spectral (α) de l'émission synchrotron d'une distribution d'électrons est relié de manière simple à l'indice spectral (p) de cette même distribution³ :

$$\alpha = \frac{p - 1}{2} \quad (2.30)$$

2.1.3 Que nous disent les observations?

Si l'on veut maintenant se faire une idée plus réaliste de l'émission synchrotron de notre Galaxie hors du disque, il faut tout d'abord préciser quel est l'origine des électrons relativistes responsables de l'émission synchrotron pour les fréquences qui nous intéressent ($\gtrsim 1\text{GHz}$). Les électrons qui contribuent principalement à cette émission ont des énergies $\gtrsim 1\text{GeV}$, et doivent donc être créés dans des sources astrophysiques très énergétiques telles que les supernovae (SNe). Ces sources sont donc locales par essence, entraînant une distribution inhomogène et anisotrope des électrons relativistes dans la Galaxie. Les supernovae engendrent d'autre part, par le biais d'ondes de choc avec le milieu interstellaire, des zones de compression des lignes de champ magnétique où l'émission synchrotron est beaucoup plus forte. En projection ces régions apparaissent comme des boucles (« loops ») de forte luminosité qui s'étendent loin en dehors du plan galactique. Enfin il faut noter qu'au cours de la diffusion des électrons relativistes le long des lignes de champ magnétique, l'indice spectral de leur distribution énergétique a tendance à changer. Ceci a été observationnellement vérifié avec la comparaison de deux cartes à 408 et 1420MHz (Reich & Reich (1988); Haslam et al. (1982); Reich & Reich (1986)) ainsi qu'en comparant ces cartes avec les observations obtenues à 10, 4GHz (Davies et al. (1996)). Ceci dit, les variations importantes de l'indice spectral apparaissent surtout entre les régions du plan galactique (ou dans les boucles) et les régions d'émission diffuse à haute latitude où l'indice spectral mesuré de l'émission synchrotron est de l'ordre de $\alpha \simeq 1$. Néanmoins la mauvaise corrélation entre les cartes basses fréquences et les observations à haute fréquence indique la nécessité, pour une mission d'observation du FCM, de posséder des canaux dédiés à la mesure de l'émission synchrotron à des fréquences relativement proches des fréquences intéressantes pour la mesure du FCM lui-même (Davies et al. (1996)), c.-à-d. du domaine centimétrique au domaine millimétrique.

Considérons maintenant le cas de l'émission polarisée. Même dans l'hypothèse où l'émission *Bremsstrahlung* polarisée est négligeable le problème

3. Ce résultat est indépendant des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de la distribution électronique

est compliqué par la dépolarisation du signal aux basses fréquences due à la rotation Faraday différentielle interne aux sources d'émission. Cet effet a tendance à transférer du signal des grandes échelles (de l'ordre de quelques degrés) aux petites (de l'ordre de quelques minutes d'arc). La présence de structures très complexes dans l'émission synchrotron polarisée à basse fréquence aux petites échelles a en effet été observée (Wieringa et al. (1993)). Dans ce cas, il apparaît encore plus nécessaire d'avoir des canaux dédiés à la mesure de l'émission synchrotron à des fréquences $\gtrsim 10\text{GHz}$ car, alors, la rotation Faraday devient négligeable⁴.

Si l'on s'intéresse cependant aux caractéristiques statistiques de l'émission synchrotron polarisée, il est possible d'obtenir quelques résultats par une approche analytique (Burn (1966)) à condition d'émettre des hypothèses quant à la distribution du champ magnétique aux échelles considérées. Il se trouve que les rares observations que nous possédons, à l'heure actuelle, de l'émission synchrotron polarisée couvrant une région suffisamment grande sur le ciel sont à basse fréquence (là où le signal est important), *cf* Cortiglioni & Spoelstra (1995). La comparaison d'observations à différentes fréquences illustre bien le phénomène de dépolarisation ; d'autre part il est important de noter que la dépolarisation est d'autant plus importante que la source d'émission est loin de l'observateur, ce qui signifie qu'aux basses fréquences (typiquement 400MHz) seules contribuent à l'émission polarisée les régions de notre voisinage proche (quelques centaines de parsecs au plus). Tout cela rend l'extrapolation de cette émission aux fréquences du FCM particulièrement difficile. En revanche, toujours dans l'hypothèse où l'émission *Bremsstrahlung* n'est pas polarisée (ou de façon négligeable), *l'observation de cette émission à une fréquence où elle est dominante sur le FCM et où la rotation Faraday est négligeable (typiquement $\simeq 20 - 30\text{GHz}$) devrait permettre une bonne soustraction de cette émission lors de mesures polarisées du FCM*. Ainsi les missions MAP et Planck (instrument LFI), avec leurs canaux respectifs à 22 et 30GHz devraient satisfaire à ces exigences. Leurs canaux intermédiaires (jusqu'à 90 GHz) devraient permettre de plus de cartographier les indices spectraux de cette émission, ce qui est important pour une soustraction rigoureuse de cette émission dans les fréquences dominées par le FCM.

En partant des degrés de polarisation observés à basse fréquences, nous en déduisons que le taux moyen de polarisation linéaire aux fréquences du FCM doit être $\gtrsim 30\%$. Devant notre ignorance de la distribution angulaire de l'émission synchrotron polarisée à ces fréquences, nous prendrons comme

4. La rotation Faraday désigne la rotation du plan de polarisation lors de la traversée d'un plasma magnétisé, cet effet est inversement proportionnel au carré de la fréquence du rayonnement.

hypothèse pour la suite que les caractéristiques statistiques de l'émission polarisée sont les mêmes que celles de l'émission non polarisée (voir 3).

2.2 Emission galactique polarisée des poussières

Dès 1949 on observa que la lumière des étoiles situées derrière des régions contenant de la poussière interstellaire était polarisée (Hiltner (1949); Hall (1949)). L'explication de ce phénomène est le dichroïsme de grains de poussière alignés de façon macroscopique. Si maintenant l'on suppose que les grains de poussière sont alignés sur les lignes de champ magnétique (Davis & Greenstein (1951)), on peut en déduire une structure générale du champ magnétique galactique qui est en accord avec celles issues de l'étude du rayonnement synchrotron galactique et de l'effet Zeeman (Manchester (1974); Greenberg (1978)). La question de l'alignement des grains (plus précisément de leur plus petit axe principal d'inertie) avec les lignes de champ magnétique est à l'heure actuelle une question encore très débattue (voir Roberge (1996) pour une bonne revue), mais les développements théoriques récents indiquent, tout du moins pour les gros grains, que l'alignement avec le champ magnétique est très bon (Lazarian & Draine (1997)).

D'autre part, si la lumière stellaire traversant les régions de poussière interstellaire devient polarisée par absorption sélective des grains de poussière (dichroïsme), alors il est raisonnable de penser que l'émission de ces mêmes grains devrait être polarisée. Cela fut observé en premier par Cudlip et al. (1982) dans l'infrarouge lointain et par Hildebrand et al. (1984) dans le submillimétrique. D'autre part il est logique de penser que si ce sont les mêmes grains qui sont responsables de l'absorption dichroïque et de l'émission polarisée, alors la direction de polarisation par absorption de la lumière stellaire (parallèle au petit axe du grain) devrait être *perpendiculaire* à la direction de polarisation en émission (parallèle au grand axe du grain), ce qui fut confirmé lors des premières observations (Hildebrand et al. (1984)). La direction de polarisation en émission des gros grains devrait donc être à peu près *perpendiculaire aux lignes de champ magnétique*.

Ainsi les caractéristiques de l'émission polarisée des gros grains, à l'instar de la polarisation en absorption de la lumière stellaire, dépendent du degré d'alignement des grains sur les lignes de champ, de la direction du champ magnétique lui-même, et enfin des propriétés diélectriques des grains. Cependant pour les régions diffuses (où l'épaisseur optique τ est faible), le degré de polarisation est *indépendant de τ* .

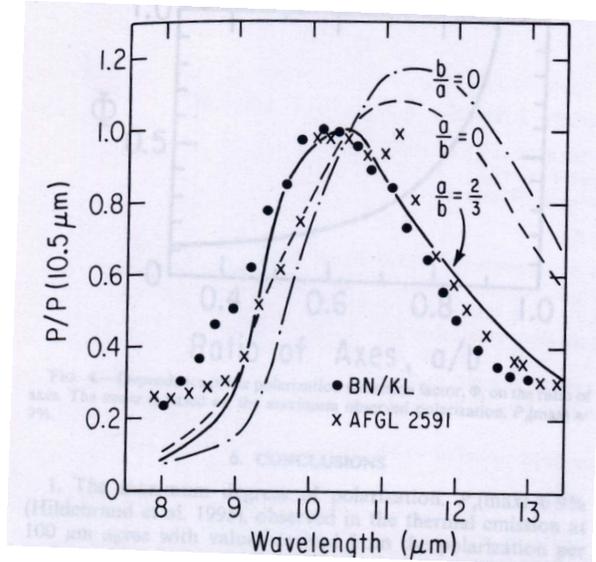


FIG. 2.4: Degré de polarisation en absorption autour de la raie des silicates à $9,7\mu\text{m}$. Les points observationnels correspondent aux données mesurées dans AFGL 2591 (croix, Aitken et al. (1988)), et dans la nébuleuse d'orion (points, Aitken et al. (1985)). Ont été superposées les courbes théoriques pour différents rapports d'axes des grains. Figure tirée de Cortiglioni & Spoelstra (1995).

2.2.1 Emission intrinsèque polarisée de la poussière

Une méthode pour contraindre la forme des grains de poussière est d'utiliser la forte dépendance du degré de polarisation en absorption, en fonction de la longueur d'onde, au voisinage des raies d'absorption. En effet, en *supposant* une forme de la fonction diélectrique du grain, on peut alors calculer le rapport du petit axe au grand axe d'un grain typique qui reproduise au mieux les observations. C'est cette méthode que Hildebrand & Dragovan (1995) ont appliqué à la raie à $9,7\mu\text{m}$ des silicates en se basant sur la fonction diélectrique de Draine (1985); et ils en ont conclu que les grains devaient être aplatis, avec un rapport d'axes de $2/3$ (voir figure 2.4). C'est cette valeur que nous adopterons par la suite. A partir de la forme des grains et de la fonction diélectrique adoptées, on peut calculer le degré de polarisation linéaire de l'émission intrinsèque des grains, c'est le degré de polarisation maximum de la poussière qui puisse être observé. Dans le cas présent ce niveau atteint $\sim 30\%$ (Hildebrand & Dragovan (1995)). Cette valeur, calculée pour une longueur d'onde de $100\mu\text{m}$, est à peu près *indépendante* de la longueur d'onde dans la mesure où cette dernière est très supérieure à la taille du grain (Hil-

debrand (1988)). C'est donc cette valeur que nous adopterons pour l'étude de l'émission polarisée des poussières dans le domaine submillimétrique.

2.2.2 Modélisation de l'émission galactique polarisée des poussières

Facteur de réduction de la polarisation

Il s'agit maintenant d'utiliser les informations que nous avons sur l'émission intrinsèque des grains pour en déduire des caractéristiques *statistiques* de la distribution spatiale de l'émission polarisée des poussières galactiques. Trois facteurs peuvent intervenir pour *diminuer* le taux de polarisation de l'émission observée par rapport à l'émission intrinsèque des grains. Ces trois facteurs, inséparables du point de vue purement observationnel, sont en général réunis en un seul, appelé *facteur de réduction de la polarisation* (Hildebrand & Dragovan (1995)) :

$$\Phi = RF \cos^2(\gamma) \quad (2.31)$$

où R désigne le facteur de réduction de Rayleigh, qui décrit la qualité de l'alignement des grains sur les lignes de champ magnétique. Pour les raisons invoquées plus haut nous supposerons ce facteur égal à 1. F est le facteur de réduction dû à l'addition de directions de polarisation différentes le long de la ligne de visée ; ce facteur sera directement calculé dans notre modélisation. Enfin $\cos^2(\gamma)$ rend compte de la projection de la direction du champ magnétique sur le plan du ciel ; de nouveau ce facteur sera calculé dans notre approche (Prunet et al. (1998)).

Modélisation de la structure tridimensionnelle des poussières

Les cartes de l'émission HI de notre Galaxie réalisées à l'aide du télescope *Dwingeloo* nous offrent un moyen unique de modéliser la structure tridimensionnelle de la distribution des poussières dans notre galaxie. Elles couvrent une bonne partie du ciel (régions de déclinaison supérieure à -30°), avec une résolution angulaire $\sim 0,5^\circ$, et une résolution spectrale de l'ordre du km/s pour 400 vitesses par spectre. En partant du constat de la bonne corrélation de l'émission HI et de l'émission infrarouge des poussières pour les nuages diffus à haute latitude galactique (Boulanger et al. (1996)), on peut faire l'hypothèse que la distribution des poussières suit celle du gaz, tout du moins pour les régions diffuses.

Le problème est maintenant de passer d'un espace bidimensionnel avec une direction de vitesses à un espace tridimensionnel. Or la relation entre

ces deux espaces n'est pas univoque car les vitesses des nuages de gaz résultent de la superposition d'une composante liée à la rotation de la galaxie (relativement bien déterminée) et d'une composante aléatoire due à la turbulence du milieu interstellaire. Tant que nous restreignons notre étude à des mesures de la statistique de la polarisation intégrée sur la ligne de visée le choix d'une relation donnée pour modéliser la structure tridimensionnelle des poussières n'influence que peu la validité de nos résultats, la plus grande incertitude de notre étude résidant dans le choix de la distribution des lignes de champ relativement aux nuages. Il n'existe en effet, à l'heure actuelle, aucune détermination observationnelle fiable de la structure du champ magnétique en dehors du disque galactique. C'est uniquement dans des régions denses (nuages moléculaires) que l'on a pu comparer la disposition des lignes de champ par rapport à la distribution du gaz, et les résultats obtenus indiquent que toutes les situations sont possibles (Goodman et al. (1990); Myers & Goodman (1991)).

Nous avons donc fait trois hypothèses très différentes quant à la distribution des lignes de champ par rapport aux nuages :

- Champ magnétique aligné avec la direction principale des nuages.
- Champ magnétique dans le plan perpendiculaire à la direction principale des nuages ; nous avons alors choisi sa direction de manière aléatoire dans ce plan. Ce cas pourrait être représentatif, par exemple, d'un champ magnétique hélicoïdal enroulé autour du nuage.
- Champ magnétique constant dans tout le volume considéré (nous avons alors choisi, pour des raisons de simplicité, $\cos^2(\gamma) = 0,5$).

Conséquences pour la distribution spatiale de la polarisation

En partant des considérations de la section précédente, nous avons pu en déduire des conséquences sur la statistique du taux de polarisation de l'émission des poussières d'une part, et sur la distribution spatiale de cette émission polarisée d'autre part. En effet, en traçant l'histogramme des taux de polarisation obtenus sur le ciel nous pouvons les comparer avec les taux observés (Hildebrand et al. (1995)). Les histogrammes obtenus pour les différentes hypothèses concernant le champ magnétique sont montrés dans la figure 2.5. En comparant avec les observations où le pic de la distribution se situe aux environs de 2%, les deux premières hypothèses sur le champ magnétique sont en accord avec les observations si l'on prend un facteur de réduction de Rayleigh de l'ordre de $R \sim 0,7 - 0,8$. Ceci dit les observations ont été faites sur un nuage moléculaire qui d'une part pourrait être optiquement épais, et d'autre part la structure du champ magnétique dans de telles régions denses n'est peut-être pas représentative de celle des milieux diffus. Il

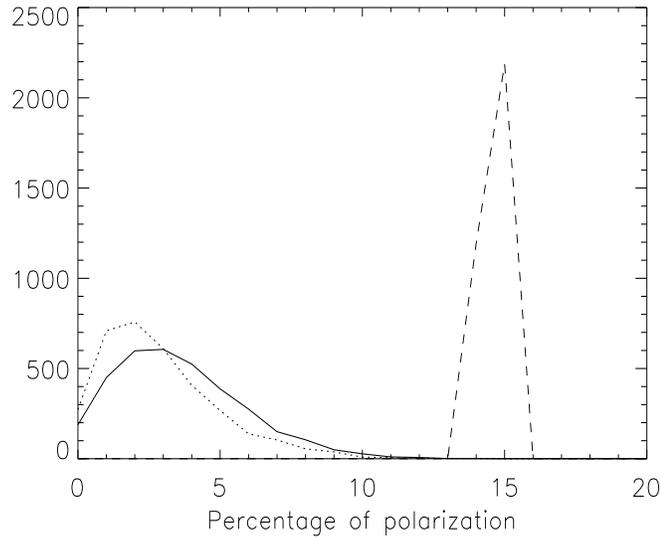


FIG. 2.5: *Histogramme des taux de polarisation obtenus dans les trois configurations du champ magnétique (respectivement trait continu pour des lignes de champ alignées avec la direction principale des nuages, pointillés pour des lignes de champ de direction aléatoire dans le plan perpendiculaire à la direction principale des nuages, et tirets pour un champ magnétique constant).*

apparaît néanmoins que le cas du champ magnétique constant est en désaccord flagrant avec les observations, ce qui était prévisible dans la mesure où cette hypothèse n'a que peu de chances d'être réaliste, à part peut-être dans certaines régions très particulières comme les boucles. Il est cependant intéressant de noter que ces histogrammes seuls permettent de discriminer les certaines hypothèses relatives à la structure du champ magnétique.

Pour avoir une idée cette fois-ci des caractéristiques statistiques de la distribution spatiale de l'émission polarisée, on peut partir des cartes de polarisation obtenues précédemment et calculer des estimateurs de leur spectre

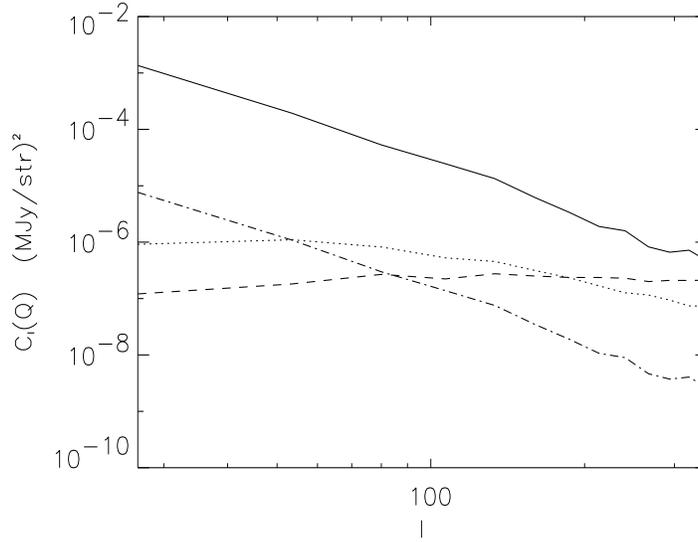


FIG. 2.6: Spectre de puissance du paramètre de Stokes Q à $100\ \mu\text{m}$. Les lignes en pointillés, tirets, et traits-pointillés correspondent respectivement aux trois cas envisagés pour le champ magnétique. Le spectre de température (trait continu) est montré pour comparaison.

de puissance de la manière suivante :

$$C_T(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N [T(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell})] \quad (2.32)$$

$$C_Q(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N [Q(\vec{\ell})Q^*(\vec{\ell})] \quad (2.33)$$

$$C_{TQ}(\ell) = \frac{1}{2N} \sum_1^N [Q(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell}) + Q^*(\vec{\ell})T(\vec{\ell})] \quad (2.34)$$

où $T(\vec{\ell})$, $Q(\vec{\ell})$ sont respectivement les transformées de Fourier des cartes d'intensité et du paramètre de Stokes Q , et N désigne le nombre de modes de Fourier pour chaque valeur de $\ell = \|\vec{\ell}\|$. Le spectre correspondant au paramètre U est défini de manière analogue. Ces spectres sont montrés dans les figures 2.6, 2.7, 2.8. En ce qui concerne le spectre de température, on retrouve le comportement $C_T(\ell) \sim \ell^{-3}$ mesuré dans les cartes d'émission infrarouge de la poussière (Gautier et al. (1992); Wright (1998)). D'autre part on peut remarquer que les spectres de Q et U sont beaucoup plus plats, sauf dans

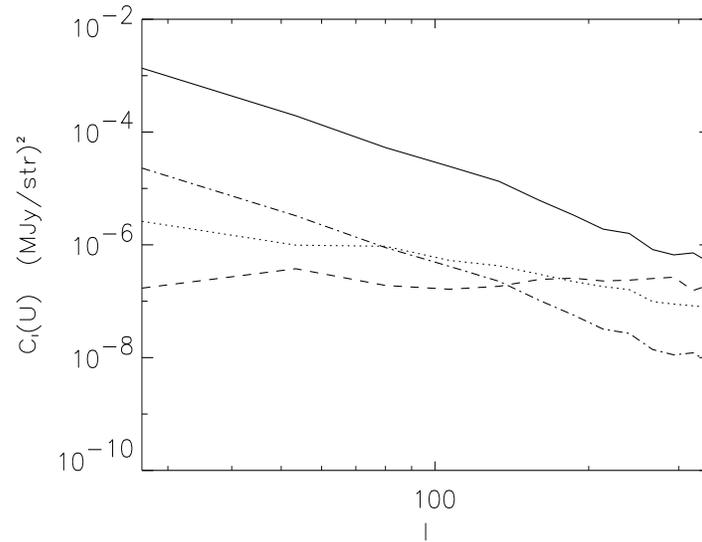


FIG. 2.7: Môme figure que la figure 2.6, pour le paramètre de Stokes U .

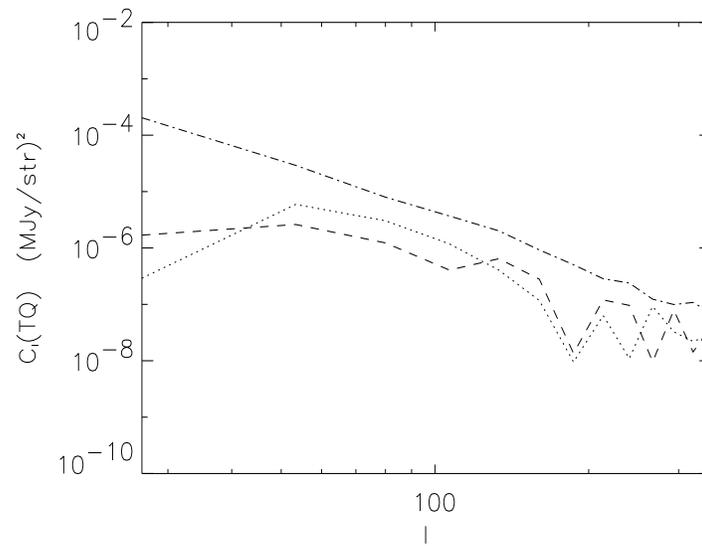


FIG. 2.8: Môme figure que la figure 2.6, pour la corrélation de T et Q .

le cas du champ magnétique constant. Alors que la distribution spatiale de l'émission non polarisée dépend uniquement de la distribution de la poussière, celle de l'émission polarisée dépend également de la distribution du champ magnétique dont la longueur de corrélation est très inférieure à celle des poussières : En effet même si par hypothèse les lignes de champ suivent les structures des nuages, l'émission de ces derniers est beaucoup plus faible aux petites échelles, tandis que l'alignement est le même à toutes les échelles. Cela a pour effet d'ajouter de la puissance aux petites échelles et ainsi de rendre les spectres de puissance des paramètres Q et U plus plats que celui de l'intensité. Ces effets sont également responsables de l'allure des spectres de corrélation de la polarisation avec l'intensité. En effet, dans le cas du champ magnétique constant, la polarisation est complètement corrélée avec l'intensité, et leur spectre de puissance suit donc une loi en ℓ^{-3} . D'autre part, dans le cas où le champ magnétique varie, la corrélation aux grandes échelles est très faible du fait de la dépolarisation due à l'addition de directions incohérentes le long de la ligne de visée, et aussi du fait de la faible longueur de cohérence du champ magnétique. En revanche, le spectre est plus plat pour les mêmes raisons que précédemment. L'un dans l'autre, les valeurs des spectres de puissance sont comparables autour de $\ell \simeq 100$, indépendamment de la structure du champ magnétique adopté.

2.2.3 Comparaison avec le FCM

L'émission polarisée des poussières de notre Galaxie sera sans aucun doute l'un des contaminants majeurs de l'émission polarisée du FCM, spécialement pour les voies polarisées à haute fréquence ($\gtrsim 100$ GHz) de la mission PLANCK. C'est pourquoi il est intéressant de comparer le niveau de ces deux signaux, échelle par échelle. La mission PLANCK, telle qu'elle est définie à l'heure actuelle, comporte deux canaux pour la mesure de la polarisation du FCM (143 et 217 GHz), ainsi qu'un canal supplémentaire à 550 GHz dédié à la mesure de la polarisation de l'émission des poussières. Nous reviendrons plus en détail sur l'importance de ce canal « moniteur » dans le chapitre concernant la séparation des diverses composantes astrophysiques (3).

Pour être capable de comparer les signaux provenant de la poussière et du FCM il nous faut exprimer les spectres de polarisation de la poussière dans les mêmes variables que celles qui sont utilisées pour le FCM. En suivant Seljak (1997), nous définissons :

$$E(\vec{\ell}) = Q(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) \quad (2.35)$$

$$B(\vec{\ell}) = -Q(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) \quad (2.36)$$

où $\phi_{\vec{\ell}}$ est l'angle polaire dans l'espace de Fourier. Il est important de noter que ces définitions sont valables dans la limite des petites échelles (pour plus de précisions voir A.3.1). Ce sont les spectres de puissances associés à ces variables que nous pourrions comparer au signal théorique du FCM pour un modèle cosmologique donné. Ces spectres de puissance sont définis de la manière suivante :

$$C_E(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N \left| Q(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) \right|^2 \quad (2.37)$$

$$C_B(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N \left| -Q(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) \right|^2 \quad (2.38)$$

$$C_{TE}(\ell) = \frac{1}{2N} \sum_1^N \left[\left(Q(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell}) + Q^*(\vec{\ell})T(\vec{\ell}) \right) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) \right. \quad (2.39)$$

$$\left. + \left(U(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell}) + U^*(\vec{\ell})T(\vec{\ell}) \right) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) \right] \quad (2.40)$$

où les différents paramètres de Stokes ont été convertis en μK . Pour le cas du champ magnétique aligné le long des nuages (que nous garderons par la suite comme un modèle générique pour la comparaison avec le FCM), on peut approximer ces spectres par des lois de puissance :

$$C_E(\ell) = 8,9 \times 10^{14} \ell^{\perp 1,3} (\mu\text{K})^2 \quad (2.41)$$

$$C_B(\ell) = 1,0 \times 10^{13} \ell^{\perp 1,4} (\mu\text{K})^2 \quad (2.42)$$

$$C_{TE}(\ell) = 1,7 \times 10^{12} \ell^{\perp 1,95} (\mu\text{K})^2 \quad (2.43)$$

Comme on pouvait s'y attendre les contributions des modes « électriques » et « magnétiques » de la polarisation des poussières sont tout à fait comparables, car une différence notable de signal dans ces deux modes résulterait d'une symétrie particulière du milieu émetteur (A.3.3) qui est absente dans le cas de la poussière.

Pour comparer ces signaux avec le FCM, nous avons choisi un modèle avec matière noire froide non invariant d'échelle (« tilted CDM »), c.-à-d. avec un spectre primordial des perturbations scalaires d'indice spectral $n_s = 0,9$. Dans le cas des modèles inflationnaires à un champ en « roulement lent » (*slow roll*), l'indice spectral des perturbations tensorielles, ainsi que le rapport des quadrupoles des deux types de perturbations sont fixés :

$$n_T = n_s - 1 = -0,1 \quad (2.44)$$

$$T/S = 7(1 - n_s) = 0,7 \quad (2.45)$$

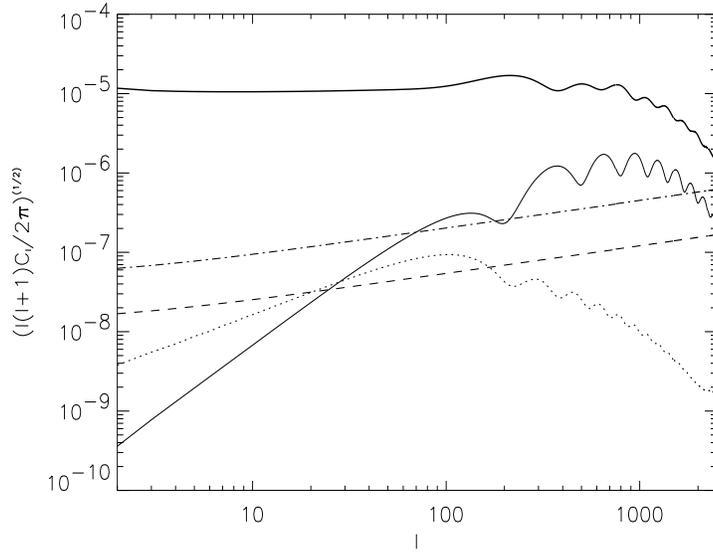


FIG. 2.9: Spectres de puissance des modes « électriques » de polarisation en unités de $\Delta T/T$. En trait continu, le signal du FCM issu des perturbations scalaires. En pointillés, le même signal issu des perturbations tensorielles. L'émission des poussières est montrée pour les deux fréquences de *PLANCK-HFI* utiles à la mesure du FCM polarisé (143GHz, traits et 217GHz, traits-pointillés). Le spectre de température du FCM est donné en comparaison (trait continu épais).

Ce modèle a l'avantage de produire du signal dans les deux modes de polarisation, qui donnent des informations très différentes quant au modèle cosmologique sous-jacent (voir A.3.3, 4). La comparaison des spectres théoriques du FCM avec ceux issus de notre modélisation de l'émission des poussières sont montrés dans les figures 2.9, 2.10, 2.11.

En ce qui concerne les mode « électriques » de polarisation, le signal du FCM, pour des $\ell \gtrsim 200$, devrait être supérieur à celui de la poussière pour les deux voies (143 et 217 GHz). En revanche les modes « magnétiques » du FCM sont, quant à eux, dominés par l'émission de la poussière. Le signal de corrélation des modes E et de la température est un ordre de grandeur supérieur au signal des poussières pour la partie scalaire (au moins pour les $\ell \gtrsim 100$), la partie tensorielle étant dominée par l'émission des poussières. Il est cependant important de noter que le FCM et les poussières diffèrent dans leurs comportements spatial et spectral. Même si le canal à 545 GHz a une sensibilité inférieure à celle des canaux à 143 et 217 GHz, le niveau de l'émission des poussières à cette fréquence devrait permettre d'en faire un traceur

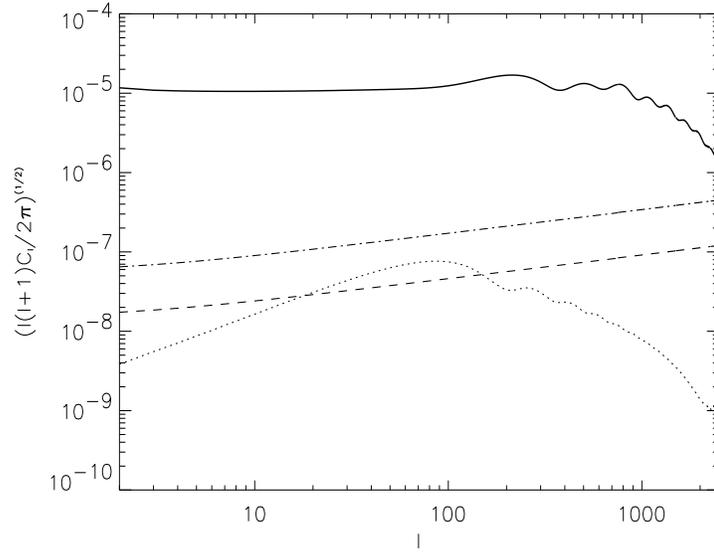


FIG. 2.10: *Même figure que 2.9 pour les modes « magnétiques » de la polarisation. Notons que le signal du FCM provenant des perturbations scalaires est identiquement nul.*

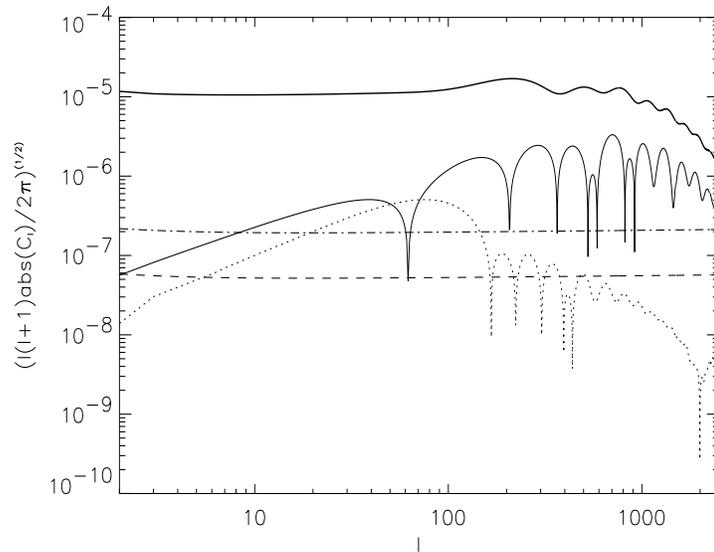


FIG. 2.11: *Même figure que 2.9 pour la corrélation de la température et des modes E.*

de cette émission, et ainsi de l'extrapoler, avec une précision suffisante, aux fréquences plus basses où domine le FCM.

En conclusion, on s'attend à ce que le niveau de contamination du FCM par l'émission polarisée des poussières reste faible pour la corrélation polarisation-température, ainsi que pour les modes « électriques » de la polarisation. Pour les modes « magnétiques » la situation est plus difficile, mais la perspective d'utiliser la voie à haute fréquence pour estimer la contamination aux fréquences plus basses devrait permettre d'améliorer notablement la situation (sous réserve d'une bonne connaissance du comportement spectral de l'émission des poussières, voir chapitre suivant).

A&A manuscript no.
(will be inserted by hand later)

Your thesaurus codes are:
missing; you have not inserted them

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

Galactic dust polarized emission at high latitudes and CMB polarization

S. Prunet¹, S.K. Sethi², F.R. Bouchet², and M. -A. Miville-Deschênes¹

¹ Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud, 91405 ORSAY, FRANCE

² Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis boulevard Arago, 75014 PARIS, FRANCE

the date of receipt and acceptance should be inserted later

Abstract. With recent instrumental advances, it might become possible to measure the polarization of the cosmic microwave background (CMB), e.g. by future space missions like MAP and Planck Surveyor. In this paper, we estimate the dust polarized emission in our galaxy which is the major foreground to cope with for measuring the CMB polarization in the Wien part of CMB spectrum. We model the dust polarized emission in the galaxy using the three-dimensional HI maps of the Leiden/Dwingeloo survey at high galactic latitudes. We use the fact that the dust emission, for a wide range of wavelengths, has a tight correlation with the HI emission maps of this survey (Boulanger *et al.* 1996). Assuming the dust grains to be oblate with axis ratio $\simeq 2/3$, which recent studies support, we determine the intrinsic dust polarized emissivity. The distribution of magnetic field with respect to the dust grain distribution is quite uncertain, we thus consider three extreme cases: (1) The magnetic field is aligned with the major axis of the dust structure, (2) the magnetic field has a random direction in the plane perpendicular to the direction of major axis of the dust structure, and (3) the magnetic field is unidirectional throughout. We further assume, as recent observations and theoretical analyses support, that the dust grains align with the magnetic field independently of its strength. The polarization reduction factor from misalignment of the direction of polarization from the plane of the sky and the differential polarization along a line of sight is calculated using these maps, to construct two-dimensional maps of dust polarized emission. We calculate the angular power spectrum of dust polarized emission from these maps and cast it in variables which allow a direct comparison with the polarized component of the CMB. Our results, at frequencies $\simeq 100$ GHz, suggest that: (a) This foreground contamination is smaller than the scalar-induced polarization of the CMB at $\ell \gtrsim 200$ while the tensor-induced polarization of CMB, which is an order of magnitude smaller than the scalar-induced polarization, lies below the foreground contamination level for $\ell \gtrsim 200$, (b) the temperature-polarization cross correlation for dust emission is more than an order of magnitude below the CMB signal for $\ell \geq 200$.

Send offprint requests to: S. Prunet

1. Introduction

The COBE-DMR discovery of CMB anisotropies at angular scales $\gtrsim 7^\circ$ signaled a watershed era in modern cosmology (Smoot *et al.* 1992, Bennett *et al.* 1996). Ever since then, the detection of CMB anisotropies has been reported by several other experiments at smaller angular scales (for details, see Bond 1996). Various theoretical studies have shown that a number of cosmological parameters (e.g. Ω_B , h , etc.) can be determined (within the context of a given model) with unprecedented accuracy if the angular power spectrum of CMB is known from a few arc minutes to a few degrees (Jungman *et al.* 1996). This will become possible with the future satellite missions like MAP and Planck Surveyor. These future missions will also open the possibility of measuring the polarization of CMB and determining its angular power spectrum. Though the fact that the CMB could be polarized was realized long back (Rees 1968), there exist only upper limits on the polarized component of the CMB from observations (Wollack *et al.* 1993, Partridge *et al.* 1988, Lubin *et al.* 1983). It has been shown that the discovery of CMB polarization, along with its angular pattern on the sky, could help determine the surface of last scattering with high precision. It will also complement the information from temperature anisotropies to better determine cosmological parameters by breaking the degeneracy between the temperature quadrupole C_2 and optical depth to the last scattering surface τ (Zaldarriaga *et al.* 1997).

A major stumbling block in accurately determining the CMB angular pattern, even with low pixel noise and all sky coverage, is the contamination of CMB signal by galactic and extragalactic foregrounds. The extragalactic foregrounds contaminate only the small angular scales which correspond to the size of the extragalactic object or the typical clustering scales of these objects; extragalactic sources can dominate the foreground at a few arc minute scales (e.g., Toffolatti *et al.* 1998, Bouchet *et al.* 1995, Tegmark & Efstathiou 1996). The galactic foregrounds, on the other hand, are present at all angular scales. This entails a detailed study of all the galactic sources—dust,

synchrotron, and free-free emission— of foreground contamination of CMB measurements. It has been shown that for the measurement of CMB temperature anisotropies, experiments operating at multiple frequencies will be successful in separating and subtracting the foreground contamination from the primary CMB signal (for details see Bouchet *et al.* 1995, Tegmark & Efstathiou 1996, Bouchet & Gispert 1998). The CMB polarization signal is 10 to 100 times weaker than the temperature anisotropies (Bond & Efstathiou 1984, Zaldarriaga *et al.* 1997). It is not a priori clear whether the polarized component of foregrounds can be subtracted as easily to determine the CMB polarization as is the case for temperature anisotropy. In this paper, we estimate the foreground contamination due to polarized component of dust emission in the galaxy—which is likely to be the dominant foreground in polarized channels of the high-frequency instrument (HFI) of Planck Surveyor—and its spatial distribution, to address this question.

Like the scalar-induced temperature anisotropies, the scalar-induced anisotropies in the CMB polarization also peak at angular scales $\simeq 1^\circ$ ($\ell \simeq 200$) (Bond & Efstathiou 1984), therefore it is of primary importance to know the foreground contamination at such angular scales. Given the level of CMB polarization, we also need to consider ‘clean’ parts of the sky at high galactic latitudes where the contamination is minimum. Unfortunately, no data, with sufficient sky coverage at high galactic latitudes, on polarized component of dust emission exist at present (for a recent review on far-infrared polarimetry, see Hildebrand 1996). However, we believe that it is possible to construct the polarized component of the dust emission because of the following reasons:

1. All sky maps of dust unpolarized emission exist which cover most of the wavelength range from the near-infrared to millimeter wavelengths (Neugebauer *et al.* 1984, Reach *et al.* 1995, Hauser *et al.* 1997). This in itself is not enough to speculate on the polarization because the polarization depends on various integrated effects along any line of sight while the measured temperature maps give information only of the projected component.
2. The Leiden/Dwingeloo Survey measured the HI emission in the galaxy with 400 velocity templates, and with a large sky coverage, along any line of sight which accurately scanned the differential rotation of the galaxy, thereby providing valuable information on the three-dimensional distribution of HI in the galaxy (Hartmann & Burton 1995). It has been shown that the dust emission at high galactic latitudes correlates extremely well with the HI distribution in our galaxy for a wide wavelength range (Boulanger *et al.* 1996) for column densities $N_{\text{HI}} \leq 5 \times 10^{20}$.

This information allows us, along with theoretical models of the dust polarized emission in the galaxy, to construct three-dimensional maps of dust emission which can be used to study the spatial distribution of dust polarized emission. In the next section we describe the method of generating polarized dust emission maps in more details. In §3 we calculate the power spectra of the dust polarization maps and compare the level

of dust polarized contamination with theoretical predictions of CMB polarization. In §4, we summarize our findings.

2. Method

The Leiden/Dwingeloo survey covers the entire sky north of $\delta \geq -30^\circ$ with a grid spacing of $\simeq 0.5^\circ$ in both longitude and latitude. Therefore it can be used to study features of foreground for angular scales $\simeq 1^\circ$ which is of special interest to CMB studies. In addition it spans the velocity range from -450 km/sec to 450 km/sec with a spectral resolution of 1.03 km/sec (Hartmann & Burton 1995). As our aim is to use the velocity information to infer distances to structures, we avoid using maps between longitude -10° and 10° because in this case one is looking too close to the galactic centre and the radial velocities from galactic rotation are nearly zero. For similar reasons, regions with longitudes $\simeq 180^\circ$ are also to be avoided. Also the correspondence between velocity and distance to a structure inverts as one passes from the inner galaxy to the outer galaxy, i.e., though a greater velocity corresponds to a greater distance in the inner galaxy, the opposite is true for the outer galaxy. We therefore avoid line of sights close to longitudes $\simeq 90^\circ$ and $\simeq 270^\circ$. It should also be pointed out that the velocity-distance relation is not single valued for lines of sights in the inner galaxy; a given velocity receives contribution from two points at different scale heights. We assume that all the contribution at a given velocity comes from the point at the smaller scale height. It is justified, especially at high galactic latitudes, because the probability of finding a structure at large scale height is exponentially smaller. We use fifteen $15^\circ \times 15^\circ$ maps from latitudes between 30° and 75° for our study.

It should be pointed out here that the turbulent velocity of the interstellar medium prevents us from accurately inferring the Galactic HI 3-dimensional structure from the velocity maps at high latitudes. But as we are interested in understanding the *statistical properties* of the dust polarization from these maps, the results should be weakly affected by this assumption. In any case, our uncertainty about the (unknown) turbulence velocity of the HI gas remains smaller than our absence of knowledge concerning the magnetic field distribution (see below).

From the HI maps of Leiden/Dwingeloo survey one can construct a model of the three-dimensional dust distribution using the relation between the optical depth for dust emission τ at $\lambda = 250 \mu\text{m}$ and the HI column density N_{HI} (Boulanger *et al.* 1996):

$$\frac{\tau}{N_{\text{HI}}} = 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (1)$$

Boulanger *et al.* (1996) also showed that the galactic dust emission spectrum can be well fitted with a Planck spectrum with temperature = 17.5 K with emissivity proportional to ν^2 . We use this spectral dependence of dust emission throughout this paper. The $N_{\text{HI}}-\tau$ correlation remains good for $N_{\text{HI}} \leq 5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$ which is typical for high galactic latitudes.

As our aim is to construct two-dimensional maps of polarized component of dust emission from these three-dimensional

maps of unpolarized emission, we need the following information: (a) the intrinsic dust polarized emissivity, which depends on the type and shape of the grain, (b) the strength and direction of magnetic field in the diffuse cloud, and (c) the polarization reduction factor.

Intrinsic polarized emissivity. The galactic distribution of dust grains can be well understood by the silicate/graphite model, with the volume fraction of graphites between 0.25 and 0.5 of the silicates in the total grain volume (Lee and Draine 1985). Assuming spheroidal grains, Hildebrand and Dragovan (1995) showed that the grains are oblate with the ratio of axis $\simeq 2/3$. Assuming no reduction of polarization, the intrinsic polarized emissivity is $\simeq 30\%$ in this case (Hildebrand and Dragovan 1995). It is also independent of wavelength for $\lambda \gg a$, a being the size of the dust grains. This condition is easily met for the entire wavelength range we consider (for details see e.g. Hildebrand 1988).

Magnetic field. The dust grains align themselves with the magnetic field. To estimate the reduction of polarization from smearing along any line of sight, one needs to know the direction and strength of the magnetic field. There is great uncertainty in the direction of the magnetic field relative to dust distribution as the observational evidence show contradictory indications (Myers & Goodman 1991, Goodman et al. 1990). For the purposes of this paper we assume three cases:

- (1) The magnetic field is aligned with the major axis of the structure. This case is relevant for dust filaments aligned with the field.
- (2) The magnetic field lies in the plane perpendicular to the major axis of the structure, with its direction random in that plane (valid e.g. for helicoidal field around filaments)
- (3) The magnetic field has the same direction throughout the three-dimensional map.

Case (2) and (3) correspond to the two extremes of magnetic field distribution. In case (2), the direction of the magnetic field varies from pixel to pixel while it remain the same throughout the map in case (3). Also we assume, as recent observations and theoretical estimates show, that the dust grains are aligned with the magnetic field independent of the strength of the magnetic field (Jones et al. 1992, Sorrell 1995).

Polarization reduction factor. The reduction of intrinsic polarized emissivity due to projection on the sky can be written as (Lee & Draine 1985):

$$\Phi = RF \cos^2 \gamma, \quad (2)$$

where R is the Rayleigh reduction factor which gives the reduction of polarization due to the inclination of grain axes about the direction of the magnetic field. As discussed above, we assume perfect alignment of the dust grains with the magnetic field and therefore take $R = 1$ throughout. The $\cos^2 \gamma$ factor accounts for the projection of the direction of polarization on the plane of the sky. Using the three-dimensional maps, we calculate this factor by first estimating, for every pixel, the direction of the structure by finding the direction of minimum gradient in the nearest 27 pixels in the four nearest velocity templates, which are taken as slices in 3-dimensional space.

After finding the direction of dust structure with respect to the plane of the velocity template, the direction of magnetic field can be fixed for Case (1) and (2) of the magnetic field distribution. The $\cos^2 \gamma$ term (γ being the angle between the direction of magnetic field and the plane of the velocity template) can then be easily computed; and by multiplying by this factor, the projected distribution of polarized emission is evaluated for every velocity template. This procedure is used to construct the projected distribution of the Stokes parameters for the first two cases of the magnetic field distribution. For the third case (the magnetic field having the same direction everywhere), we assume, for simplicity, $\cos^2 \gamma = 0.5$. F term (Eq. (2)) is the reduction of polarization from summing the contribution of different directions of polarization along any line of sight (Burn 1966). This factor is estimated directly by vectorially adding the contribution from every velocity template along a line of sight. We neglect the effect of differential polarization across the beam in our analysis. Also neglected is the differential Faraday rotation (Burn 1966). Though the differential Faraday rotation can be an important effect on depolarization for the study of radio synchrotron emission ($\nu \lesssim 1$ GHz) in the galaxy (Spoelstra 1984), it is completely negligible for the dust polarized emission at much smaller millimeter wavelengths ($\nu \gtrsim 100$ GHz) because the Faraday optical depth is proportional to λ^2 .

3. Results

An example of two-dimensional $15^\circ \times 15^\circ$ maps of Stokes parameters $Q(\vec{x})$ and $U(\vec{x})$ are shown in Fig. 1 and 2. The values of the Stokes parameters depend on the choice of the reference frame chosen to define them (Lightman and Rybicki 1979), though the net polarization $P = \sqrt{Q^2 + U^2}$ is of course independent of the reference frame. In constructing maps of Q and U , we take the frames of the square maps, for every velocity template, to be the coordinate axes.

3.1. Percentage of polarization

An important indicator to verify the correctness of our method is to compare the distribution of the polarization percentage with existing observations (Hildebrand 1996). A histogram of percentage of polarized component (number of pixels per 0.5% bin) is shown in Fig. 3, averaged over all the maps between latitudes 30° and 45° , for all the three cases of magnetic field distribution. For the first two cases of magnetic field distribution, a comparison of the expected distribution of the percentage of polarization with the results given in Hildebrand (1996) suggests a good agreement if $R \simeq 0.7-0.8$. However, it should be pointed out that the observations reported in Hildebrand (1996) pertain to molecular clouds which could be optically thick. Therefore a comparison of our results which are valid for optically thin dust emission with those results can be misleading, and it is possible that the percentage of polarized dust

4

S. Prunet et al.: Galactic dust polarized emission

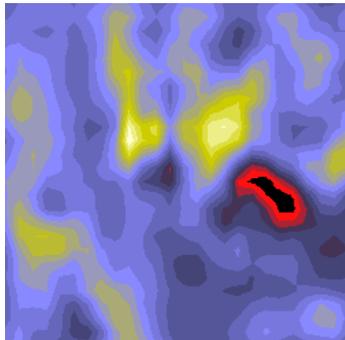


Fig. 1. A $15^\circ \times 15^\circ$ map of the Stokes parameter Q , generated using the methods described in section 2.

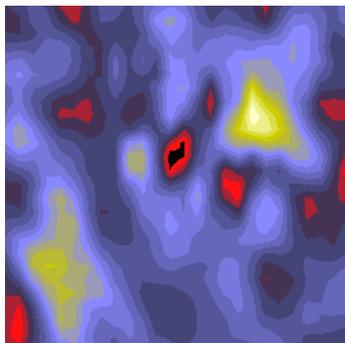


Fig. 2. A $15^\circ \times 15^\circ$ map of the Stokes parameter U

emission is higher at high galactic latitudes. However, if one assumes the magnetic field to be constant in direction throughout the map, the resulting distribution of the percentage of polarization is in violent disagreement with observations. We consider this case only as a toy model to study the effect of changing the coherence scale of the magnetic field on the spatial distribution of the dust polarized emission.

3.2. Angular distribution of dust polarized emission

The maps of $Q(\vec{x})$ and $U(\vec{x})$, constructed using the method described in the previous section, can be directly compared with simulated maps of the CMB. However, the key quantity in studying CMB anisotropies is the angular power spectra of

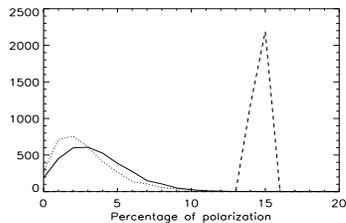


Fig. 3. Distribution of the percentage polarization, averaged over four maps of $15^\circ \times 15^\circ$ between latitudes 30° and 45° . The solid, dashed, and dotted lines correspond to Case (1), (2), (3) of the magnetic field distribution (see text), respectively.

the relevant variables and their cross-correlation. For estimating these quantities, we perform a two dimensional Fourier transform on the maps and obtain the angular power spectra of the various Stokes parameters defined as:

$$C_T(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N [T(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell})] \quad (3)$$

$$C_Q(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N [Q(\vec{\ell})Q^*(\vec{\ell})] \quad (4)$$

$$C_{TQ}(\ell) = \frac{1}{2N} \sum_1^N [(Q(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell}) + Q^*(\vec{\ell})T(\vec{\ell}))] \quad (5)$$

Here $T(\vec{\ell})$ and $Q(\vec{\ell})$ are the Fourier transforms of $T(\vec{x})$ and $Q(\vec{x})$, respectively; C_U and C_{TU} can likewise be easily defined. N is the number of discrete Fourier modes for each ℓ -bin and $*$ denotes the complex conjugate.

In Figs. 4, 5, and 6 we show the estimated power spectra and cross-correlation between various variables, averaged over all the maps of size $15^\circ \times 15^\circ$ between galactic latitudes 30° and 45° . The ℓ dependence of various power spectra does not depend much on the latitude though the normalization decreases by nearly an order from latitudes of 30° to 75° . We recover the $C_T(\ell) \propto \ell^{-3}$ behaviour discussed earlier, among others, by Bouchet *et al.* (1995), Tegmark and Efstathiou (1996), and Wright (1998). However, the power spectra of Q and U is seen to be much flatter, except in the case of a uni-directional, homogeneous magnetic field. It can be qualitatively understood as follows: the coherence scale of dust structures determine $C_T(\ell)$ while the angular pattern of the polarization variables depend both on the coherent scale of dust structures and the magnetic field; it also depends on the depolarization from smearing along a line of sight. Except in the case of uni-directional, homogeneous magnetic field, the magnetic field has a much smaller coherence scale as compared to the dust structures. An extreme example is the Case (2) of magnetic field distribution in which the magnetic field is almost completely uncorrelated. These effects make the polarization pattern more inhomogeneous, as

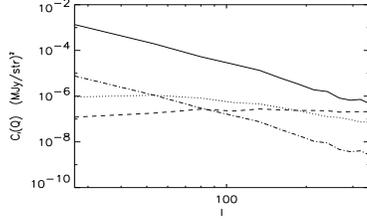


Fig. 4. The power spectra of the Stokes parameter Q are plotted for the three cases of magnetic field distribution at $100 \mu\text{m}$. The *dotted*, *dashed*, and *dot-dashed* lines correspond to Case (1), (2), and (3) of the magnetic field distribution, respectively. The temperature power spectrum (*solid* line) is shown for comparison.

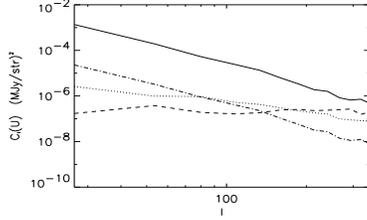


Fig. 5. Same as Fig. 4 for the Stokes parameter U .

compared to the unpolarized emission, at small scales, thereby creating more small scale power. This makes the power spectra of Q and U flatter as compared to $C_T(\ell)$.

An interesting interplay between these effects can also be seen in the cross-correlation between Q and T (Fig. 6). In the case of a uni-directional, homogeneous magnetic field, there is a total correlation between T and Q . However because in this case the cross-correlation power spectrum depends only on the coherence scale of dust structures, it falls as ℓ^{-3} . In the other two cases of magnetic field distribution, the cross-correlation is destroyed by both the depolarization and the small scale magnetic fields; this explain the lack of large scale power in these cases. However, at $\ell \simeq 100$, the values of cross-correlation power spectra are comparable in all three cases of magnetic field because of the additional small scale power generated in latter two cases. Therefore, our analysis suggests that the $C_{TQ}(\ell)$ should not be very sensitive to the distribution of magnetic field at $\ell \gtrsim 100$, the scales of interest for CMB

3.3. Comparison with CMB power spectra

The dust polarized emission will constitute an important foreground which could severely affect the extraction of CMB sig-

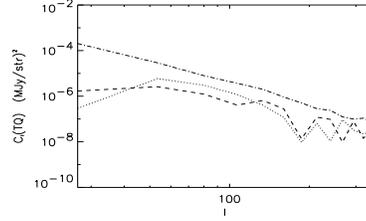


Fig. 6. Same as Fig. 4 for the absolute value of QT cross-correlation power spectrum.

nal, especially for CMB experiments operating at frequencies $\gtrsim 100$ GHz. The HFI on the future satellite CMB experiment, Planck Surveyor, will attempt to measure the CMB polarization with two channels centered at 143 GHz and 217 GHz. In addition to these channels, HFI will have a channel at 550 GHz with polarization capability. In this subsection, we discuss the feasibility of the detection of CMB polarization signal at these frequencies in the presence of galactic foregrounds.

For a comparison with the CMB polarized component, it is convenient to define (Seljak 1997):

$$E(\vec{\ell}) = Q(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) \quad (6)$$

$$B(\vec{\ell}) = -Q(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) \quad (7)$$

Here $\phi_{\vec{\ell}}$ is the Fourier transform of the polar angle. Seljak (1997) showed that these variable are better for a comparison of foreground polarization with the CMB polarization because B -mode contribution always vanishes for the scalar-induced CMB polarization. Also the cross-correlation of B -mode signal with all the other variables vanishes (for more detail analyses, see Zaldarriga & Seljak (1996), Kamionkowski *et al.* 1997). The power spectra and cross-correlations are defined as:

$$C_E(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N \left| Q(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) \right|^2 \quad (8)$$

$$C_B(\ell) = \frac{1}{N} \sum_1^N \left| -Q(\vec{\ell}) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) + U(\vec{\ell}) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) \right|^2 \quad (9)$$

$$C_{TE}(\ell) = \frac{1}{2N} \sum_1^N \left[\left(Q(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell}) + Q^*(\vec{\ell})T(\vec{\ell}) \right) \cos(2\phi_{\vec{\ell}}) + \left(U(\vec{\ell})T^*(\vec{\ell}) + U^*(\vec{\ell})T(\vec{\ell}) \right) \sin(2\phi_{\vec{\ell}}) \right] \quad (10)$$

In terms of these variables, the estimated power spectra and the cross-correlation of dust polarized emission can approximately be fitted by:

$$C_E(\ell) = 8.9 \times 10^{-4} \ell^{-1.3} (\mu\text{K})^2 \quad (11)$$

$$C_B(\ell) = 1.0 \times 10^{-3} \ell^{-1.4} (\mu\text{K})^2 \quad (12)$$

$$C_{TE}(\ell) = 1.7 \times 10^{-2} \ell^{-1.95} (\mu\text{K})^2. \quad (13)$$

The power spectra are normalized at 100 GHz and are for the maps between galactic latitudes 30° and 45° (where the level

6

S. Prunet et al.: Galactic dust polarized emission

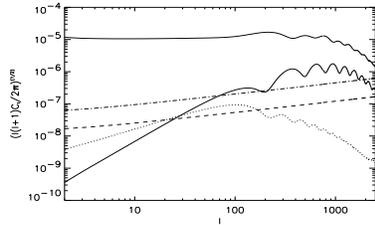


Fig. 7. The power spectra of dust polarized emission is compared with the theoretical predictions for CMB polarization. The scalar and tensor-induced E-mode power spectra (*solid* and *dotted* lines respectively) are plotted against the dust polarized power spectra at 143 GHz and 217 GHz (the *dashed* and *dot-dashed* lines, respectively). The CMB temperature power spectrum is shown for comparison (*thick solid* line). The power spectra are plotted in the units of $\Delta T/T$.

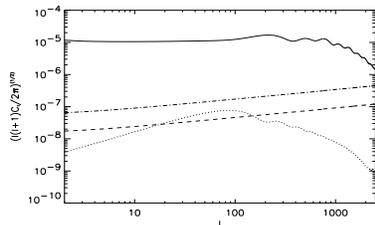


Fig. 8. Same as Fig. 7 for B-mode power spectra. The scalar-induced B-mode power spectrum is identically zero.

of contamination is the highest) for Case (1) of the magnetic field distribution.

We plot these against the scalar- and tensor-induced CMB power spectra for various variables in Fig. 7, 8, and 9. The cosmological model we adopted to compute the CMB spectra is a flat, tilted CDM model, which generates tensor-induced B-mode polarization, with scalar spectral index $n_s = 0.9$. We take the tensor spectral index $n_t = 1 - n_s = 0.1$ with scalar to tensor quadrupole ratio of $7(1 - n_s)$. The CMB power spectra were computed using the CMB Boltzmann code CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga 1996).

In Fig. 7, the scalar-induced E-mode CMB power spectrum is seen to be above the level of dust contamination for $\ell \gtrsim 200$ for the two HFI frequency channels at 143 GHz and 217 GHz. However the tensor-induced E-mode CMB fluctuations, which in any case constitute a small part of the E-mode signal, are likely to be swamped by the foreground contamination. The detection of B-mode anisotropies is more interesting as it would unambiguously determine the presence of tensor-induced component in CMB fluctuations (see Seljak 1997, Kamionkowski

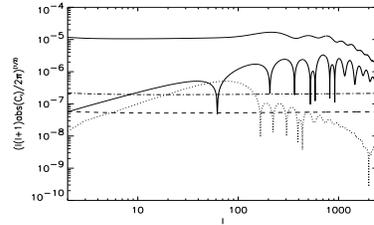


Fig. 9. Same as Fig. 7 for the absolute value of ET cross-correlation.

& Kosowsky 1997 and references therein). As seen in Fig. 8 the B-mode power spectrum is at best comparable to the foreground level in a small ℓ -range. Fig 9 shows that the CMB E-T cross-correlation power spectrum from scalar perturbations is more than an order of magnitude above the level of foreground contamination, at least for $\ell \gtrsim 100$ while the tensor-induced E-T cross-correlation remains below the foreground signal.

However, the level of foregrounds shown Fig. 7, 8, and 9 correspond to regions between latitudes 30° and 45° , which is the worst possible case studied here. At higher galactic latitudes (for maps from 60° to 75°), the galactic dust emission is smaller by nearly an order of magnitude. Therefore, it might be possible to detect the tensor-induced CMB polarization signal by deep imaging (to reduce noise) a part of the sky at high galactic latitudes, though such a measurement might be hampered by cosmic variance.

Also, it is important to note that the foregrounds differ from CMB in both ν - and ℓ -dependence. This fact can be used to reduce the level of foreground contamination substantially even in the presence of noise (for details of this multi-frequency Wiener filtering technique for extraction of CMB temperature power spectrum see Bouchet *et al.* 1995, Tegmark & Efstathiou 1996). The HFI on Planck Surveyor will have a channel at 550 GHz which will be used to study the spatial distribution of both unpolarized and polarized dust emission in the galaxy, as the dust emission is much larger than the CMB signal at this frequency. Though the instrumental noise in this channel would be higher as compared to the smaller frequency channels of HFI, it might be possible to usefully extrapolate the observations at this channel to lower frequencies, to gauge the level of dust contamination at frequencies where the CMB signal will dominate. To get quantitative estimates of errors in various power spectra in the presence of foregrounds, we are currently working on the extension of the multi-frequency Wiener filtering technique to include the CMB polarization and cross-correlation.

4. Conclusions and Discussion

The detection of CMB polarization is an important goal of future satellite missions. While such a measurement is important

in itself, the measurement of CMB polarization will give important clues on the structure of last scattering surface. Furthermore, this measurement helps in a better determination of cosmological parameters by removing the degeneracy between the temperature quadrupole and the optical depth to the last scattering surface.

The major obstacle in measuring CMB polarization is galactic polarized foregrounds. We estimated the dust polarized emission one of the major foreground—in the galaxy and compared it to the expected CMB polarization signal. This exercise is important for the future CMB experiments like Planck Surveyor's HFI which will try to detect the CMB polarization at frequencies 143 GHz and 217 GHz. Our results suggest that the expected scalar-induced E-mode signal and the E-T cross-correlation power spectrum are likely to be well above the dust contamination level for $\ell \geq 100$ at the frequencies relevant for the Planck Surveyor. This is particularly true of the CMB E-T cross correlation signal, which should be more than an order of magnitude above the dust polarized emission. The tensor-induced polarization signal, however, is less likely to be disentangled from the foregrounds.

Our analysis showed that the power spectrum of dust polarized emission at large scales (small ℓ) is sensitive to the large scale distribution of magnetic field in the galaxy. The 550 GHz channel of HFI may succeed in either detecting this signal or in putting useful upper bounds. This could help unravel the magnetic field structure of our galaxy. Such a study might also become possible with the launch of proposed satellite missions like the Polarimeter Infrared Explorer (for details, see Clemens 1996).

Though the dust polarized emission will be the main foreground for high frequency Planck channels, the foregrounds for small frequency experiments like the ground-based POLAR (Keating *et al.* 1997), satellite experiment MAP, and the low-frequency instrument on Planck Surveyor will be dominated by galactic synchrotron emission. Can we anticipate something about that foreground from the exercise in this paper? Unlike estimating the dust polarized emission, which is greatly facilitated by the dust-HI correlation and the existing three-dimensional HI map, we do not have much information about the three-dimensional structure of the synchrotron emission. This synchrotron emission is sensitive to both the spatial distribution of magnetic field (both strength and direction) and the cosmic ray particles which have to be simulated based on scanty information available about them. An alternative approach would be to work directly with the Leiden polarized maps of the Stokes parameter Q and U analysed by Spoelstra (1984). Work is in progress in this direction.

Acknowledgements

One of us (SP) would like to thank Jean-Loup Puget for several useful suggestions and encouragement. We are thankful to Nabila Aghanim for suggestions on the manuscript.

References

- Bennett, C. L., Banday, A. J., Gorski, K. M. *et al.* 1996, ApJ, 464, L1
 Bond, J. R. 1996, Observations of Large-Scale Structure in the universe, Ed. Schaeffer, R., Les Houches, Elsevier Science Publishers
 Bond, J. R. & Efstathiou, G. 1984, ApJ, 285, L45
 Burn, B. J. 1966, MNRAS, 133, 67
 Bouchet, F. R. & Gispert, R. 1998, in preparation
 Bouchet, F. R., Gispert, R., Aghanim, N. *et al.* 1995, Space Science Rev., 74, 37
 Boulanger, F., Abergel, A., Bernard, J. -P. *et al.* 1996, A & A, 312, 256
 Clemens, D. 1996, ASPC series vol. 97, ed. W. G. Roberge and D. C. B. Whittet
 Goodman, A. A., Bastien, P., Menard, F., & Myers, P. C. 1990, ApJ, 359, 363
 Hartmann, D. & Burton, W. B. 1995, Atlas of Galactic HI emission, Cambridge University Press
 Hauser, M. G., Kersall, T., Arendt, R. G. *et al.* 1997, DIRBE Explanatory Supplement, COBE Ref. Pub. No. 97-A (Greenbelt, MD: NASA/GSFC)
 Hildebrand, R. H. 1996, ASPC series vol. 97, ed. W. G. Roberge and D. C. B. Whittet
 Hildebrand, R. H. & Dragovan, M. 1995, ApJ, 450, 663
 Hildebrand, R. H. 1988, QJRAS, 29, 277
 Jones, T. J., Klebe, K., & Dickey, J. M. 1992, ApJ, 389, 602
 Jungman, G., Kamionkowski, M., Kosowsky, A., Spergel, D. N. 1996, Phys. Rev. D, 54, 1332
 Kamionkowski, M., & Kosowsky, A. 1997, astro-ph/9705219
 Kamionkowski, M., Kosowsky, A. & Stebbins A. 1997, Phys. Rev D, 55, 7368
 Keating, B., Timbie, P., Polnarev, A., Steinberger, J. 1997, astro-ph/9710087
 Lee, H. M. & Drain, B. T. 1985, ApJ, 290, 211
 Lubin, P. M., Melese, P. Smoot, G. F. 1983, ApJ, 273, L51
 Lightman, A.P., Rybicki, G.B. 1979, *Radiative Processes in Astrophysics* (Wiley-Interscience, New York)
 Myers, P. C. & Goodman, A. A. 1991, ApJ, 373, 509
 Neugebauer, G., Habing, H. J., Van Duinen, R. *et al.* 1984, ApJ, 278, L1
 Partridge, R.B., Nowakowski, J., Martin, H. M. 1988, Nature, 331, 146
 Reach, W. T., Dwek, E., Fixsen, D. J. *et al.* 1995, 451,188
 Rees, M. 1968, ApJ, 153, L1
 Seljak, U. 1997, ApJ, 482, 6
 Seljak, U. & Zaldarriaga, M. 1996, ApJ, 469, 437
 Smoot, G., Bennett, C. L., Kogut, A. *et al.* 1992, ApJ, 396, L1
 Sorrell, W. H. 1995, MNRAS, 272, 127
 Spoelstra, T. A. T. 1984, A & A, 135, 238
 Tegmark, M. & Efstathiou, G. 1996, MNRAS, 281, 1297
 Toffolatti, L., Argueso Gómez, F., De Zotti, G., Mazzei, P., Franceschini, A., Danese, L., Burigana, C. 1998, MNRAS, 297, 117
 Wollack, E. J., Jarosik, N. C., Netterfield, C. B., Page, L. A., Wilkinson, D. 1993, ApJ, 419, L49
 Wright, E. L. 1998, ApJ, 496, 1
 Zaldarriaga, M., Spergel, D. N., Seljak, U. 1997, ApJ, 488, 1
 Zaldarriaga, M. & Seljak, U. 1996, astro-ph/9609170

Chapitre 3

Filtrage multi-fréquences

3.1 Motivations

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent pour la polarisation, en plus du FCM, un certain nombre de processus astrophysiques (galactiques et extragalactiques, voir Bouchet & Gispert (1998) pour une revue des processus non polarisés) contribuent aux émissions millimétrique et submillimétrique polarisée et non polarisée. Le but du filtrage multi-fréquences est, moyennant certaines hypothèses quant aux comportements spatiaux et spectraux de ces processus, de séparer les contributions de ces derniers aux observations à différentes fréquences. La méthode que nous emploierons ici est une extension du filtrage de Wiener à des observations à plusieurs longueurs d'onde, méthode introduite indépendamment par Bouchet et al. (1996) et Tegmark & Efstathiou (1996); nous avons généralisé cette méthode à l'analyse des données polarisées ainsi qu'à leur corrélation avec les données non polarisées. Cette corrélation est importante car, en ce qui concerne le FCM, son spectre de puissance est prédit par la théorie (pour un modèle cosmologique donné) au même titre que les spectres de puissance de la température et des modes de polarisation.

Nous allons donc dans un premier temps donner un aperçu général de la méthode employée ainsi que des hypothèses qu'elle requière, puis appliquer cette méthode au problème de la séparation des composantes astrophysiques qui devraient être observées par les futures missions satellites telles que MAP et PLANCK. Nous montrerons que si cette méthode n'est qu'une étape vers une méthode d'inversion plus réaliste, elle représente néanmoins un outil de comparaison objectif entre les aptitudes des différentes missions à mesurer les processus astrophysiques émettant dans le submillimétrique. Nous commenterons enfin les résultats de cette méthode ainsi que ses limitations.

3.2 Filtrage de Wiener: deux formulations

3.2.1 Problème bayésien

Situons tout d'abord le problème dans un cadre général. Supposons que nous avons des observations de tout le ciel à différentes fréquences sous forme de cartes pixélisées. Toutes ces données peuvent être rassemblées dans un unique vecteur \vec{y} . Nous *supposons* que ces données sont *linéairement* reliées à un certain nombre de processus astrophysiques dont les cartes seront de même rassemblées dans un unique vecteur \vec{x} . Ainsi cette relation linéaire peut s'écrire en toute généralité de la manière suivante :

$$\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b} \quad (3.1)$$

où \mathbf{A} représente la matrice de réponse de l'instrument (ce qui regroupe aussi bien l'effet des lobes, les bandes passantes de taille finie ainsi que la dépendance spectrale des différents processus astrophysiques envisagés), et \vec{b} est une variable aléatoire représentant le bruit instrumental dans les différents canaux et pour les différents pixels. On supposera dans la suite que ce bruit obéit à une statistique *gaussienne* et que de plus il est *statistiquement indépendant* du signal \vec{x} ¹. Le théorème de Bayes nous permet de relier la distribution de probabilité *a posteriori* du signal conditionnellement aux données² au produit de la fonction de vraisemblance (distribution de probabilité des données conditionnellement au signal) par la distribution de probabilité que nous avons *a priori* sur le signal :

$$Pr(\vec{x} \parallel \vec{y}) \propto Pr(\vec{y} \parallel \vec{x})Pr(\vec{x}) \quad (3.2)$$

Or dans la mesure où l'on suppose que le bruit est de moyenne nulle, la fonction de vraisemblance peut s'écrire ainsi :

$$Pr(\vec{y} \parallel \vec{x}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{b}^\dagger \mathbf{N}^{-1} \vec{b}\right) \quad (3.3)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{y} - \mathbf{A}\vec{x})^\dagger \mathbf{N}^{-1} (\vec{y} - \mathbf{A}\vec{x})\right) \quad (3.4)$$

où \mathbf{N} est la matrice de covariance du bruit (voir Rybicki & Press (1992); Zaroubi et al. (1995)).

1. J'entends par là que la distribution jointe de probabilité du signal et du bruit est s'exprime comme le produit des distributions respectives du signal et du bruit.

2. Cette distribution peut être comprise comme la distribution de probabilité d'un estimateur du signal construit à partir des données.

A ce point nous devons faire un choix quant à la forme de la distribution de probabilité *a priori* du signal. Nous allons montrer que si nous choisissons une forme gaussienne pour cette fonction de distribution alors l'estimateur dit du « maximum de vraisemblance » (qui, dans notre cas, maximise en fait la distribution *a posteriori* du signal conditionnellement aux données) est l'estimateur donné par le filtrage de Wiener. Supposons en effet que la distribution de probabilité du signal s'écrit ainsi :

$$Pr(\vec{x}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{x}^\dagger \mathbf{C}^{\perp 1} \vec{x}\right) \quad (3.5)$$

où \mathbf{C} est la matrice de covariance du signal. Alors on a :

$$Pr(\vec{x} \parallel \vec{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{y} - \mathbf{A}\vec{x})^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} (\vec{y} - \mathbf{A}\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}^\dagger \mathbf{C}^{\perp 1} \vec{x}\right] \quad (3.6)$$

En définissant l'estimateur

$$\hat{x} = (\mathbf{C}^{\perp 1} + \mathbf{A}^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} \mathbf{A})^{\perp 1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} \vec{y} \equiv \mathbf{E} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} \vec{y} \quad (3.7)$$

on peut récrire cette probabilité :

$$Pr(\vec{x} \parallel \vec{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x} - \hat{x})^\dagger \mathbf{E}^{\perp 1} (\vec{x} - \hat{x})\right] \quad (3.8)$$

Ainsi \hat{x} maximise cette probabilité et en tant que tel peut être appelé estimateur de maximum de vraisemblance. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\mathbf{C}^{\perp 1} + \mathbf{A}^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} \mathbf{A})^{\perp 1} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} \vec{y} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger (\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{N})^{\perp 1} \vec{y} \equiv \mathbf{W} \vec{y} \end{aligned} \quad (3.9)$$

\mathbf{W} étant la matrice de Wiener (voir plus bas). Ainsi le filtre de Wiener apparaît comme la solution du problème bayésien dans le cas où le signal est gaussien.

3.2.2 Formulation classique

En partant des mêmes variables \vec{y} (données) et \vec{x} (signal que l'on veut estimer), et de la même relation linéaire supposée entre elles, le filtrage de Wiener est habituellement défini comme suit : Nous voulons définir un estimateur du signal qui soit linéaire dans les données, $\hat{x} = \mathbf{W} \vec{y}$, tel que la variance de l'erreur de reconstruction soit minimale :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \langle (\hat{x} - \vec{x})^2 \rangle = 0 \quad (3.10)$$

Or cette variance peut s'écrire ainsi :

$$\langle (\hat{x} - \bar{x}) \rangle = \langle (\mathbf{W} (\mathbf{A}\bar{x} + \bar{b}) - \bar{x})^2 \rangle \quad (3.11)$$

$$= (\mathbf{WA} - \mathbf{1}) \mathbf{C} (\mathbf{WA} - \mathbf{1})^\dagger + \mathbf{WNW}^\dagger \quad (3.12)$$

En utilisant la symétrie des matrices de corrélation \mathbf{C} et \mathbf{N} la dérivée de cette variance par rapport au filtre \mathbf{W} s'écrit :

$$2(\mathbf{WA} - \mathbf{1}) \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger + 2\mathbf{WN} = 0 \quad (3.13)$$

En résolvant pour \mathbf{W} on trouve :

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger (\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{N})^{-1} \quad (3.14)$$

En comparant ce résultat à l'équation 3.9 on vérifie que les deux approches conduisent au même résultat. Il faut cependant noter ici que nous n'avons fait aucune hypothèse quant au caractère gaussien des variables ; en effet par sa définition même le filtrage de Wiener est « optimal au sens des moindres carrés », et est donc construit à partir des statistiques à deux points. C'est pourquoi l'estimateur de Wiener n'est *pas optimal* dans le cas de processus non gaussiens (Hobson et al. (1998)).

3.3 Application aux données polarisées

3.3.1 Calcul des filtres

Nous allons ici expliciter la forme du filtre dans le cas plus spécifique de données polarisées dans différentes fréquences provenant d'une mission satellite telle que MAP ou PLANCK. Comme à la section précédente, nous supposons que les observations sont reliées de manière linéaire aux processus astrophysiques sous-jacents :

$$y_\nu^i = A_{\nu p}^{ij} * x_p^j \quad (3.15)$$

où les indices $\{i, j\}$ désignent le champ (température T ou mode E de polarisation) d'anisotropies, ν désigne la fréquence centrale de l'observation, et p désigne les différents processus astrophysiques contribuant à l'émission. Nous prenons les mêmes conventions que Tegmark & Efstathiou (1996) quant aux données, à savoir que

- Les données sont exprimées en fluctuations de températures (c'est à dire que les intensités sont divisées par $(\partial B_0 / \partial T)_{T=T_0}$, où B est la loi de Planck et

$T_0 = 2.726$ K est la température du FCM.

• Les parties monopolaires et dipolaires des champs sont supposées avoir été soustraites auparavant des données.

On adoptera, d'autre part, la convention de sommation d'Einstein pour toute cette section.

L'équation 3.15 est une équation de convolution (comprenant notamment les effets de lobes de l'instrument, voir Hobson et al. (1998)), et de ce fait est non locale dans l'espace direct. Cependant, en passant dans l'espace des harmoniques sphériques, cette équation devient locale :

$$y_\nu^i(\ell, m) = A_{\nu p}^{ij}(\ell, m)x_p^j(\ell, m) \quad (3.16)$$

Dans toute la suite les indices de mode ℓ, m seront sous-entendus. Comme dans la section précédentes nous définissons un estimateur linéaire dans les données :

$$\hat{x}_p^i = W_{p\nu}^{ij}y_\nu^j \quad (3.17)$$

tel que l'erreur de reconstruction soit statistiquement minimale (au sens des moindres carrés). En supposant le bruit statistiquement indépendant du signal, cela conduit à l'équation suivante sur les filtres :

$$A_{\mu p'}^{ck}W_{p\nu'}^{il}A_{\nu'p''}^{lm}\langle x_p^k x_{p''}^m \rangle + W_{p\nu'}^{ib}\langle b_\mu^c b_{\nu'}^b \rangle = A_{\mu p'}^{ck}\langle x_{p'}^k x_p^i \rangle \quad (3.18)$$

D'autre part nous supposons que les processus astrophysiques sont décorrélés (on peut toujours s'arranger pour qu'ils le soient), et que les bruits sont décorrélés entre champs (température et polarisation) et entre canaux. Définissant ainsi :

$$\begin{aligned} \langle x_{p'}^1 x_{p''}^1 \rangle &= \delta_{p'p''} C_{p'}^T = \Delta_{p'p''}^T \\ \langle x_{p'}^1 x_{p''}^2 \rangle &= \delta_{p'p''} C_{p'}^{TE} = \Delta_{p'p''}^{TE} \\ \langle x_{p'}^2 x_{p''}^2 \rangle &= \delta_{p'p''} C_{p'}^E = \Delta_{p'p''}^E \\ \langle b_{\nu'}^1 b_{\nu'}^1 \rangle &= \delta_{\nu'\nu'} B_{\nu'}^T = \mathbf{N}_{\nu'\nu'}^T \\ \langle b_{\nu'}^2 b_{\nu'}^2 \rangle &= \delta_{\nu'\nu'} B_{\nu'}^E = \mathbf{N}_{\nu'\nu'}^E \\ \langle b_{\nu'}^1 b_{\nu'}^2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

on peut réexprimer l'équation des filtres (3.18) sous la forme de quatre équations matricielles couplées, où les termes de corrélation entre la température et la polarisation apparaissent de façon évidente :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{11} (\mathbf{A}^{11} \Delta^T (\mathbf{A}^{11})^\dagger + \mathbf{N}^T) + \mathbf{W}^{12} \mathbf{A}^{22} \Delta^{TE} (\mathbf{A}^{11})^\dagger &= \Delta^T (\mathbf{A}^{11})^\dagger \\ \mathbf{W}^{12} (\mathbf{A}^{22} \Delta^E (\mathbf{A}^{22})^\dagger + \mathbf{N}^E) + \mathbf{W}^{11} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} (\mathbf{A}^{22})^\dagger &= \Delta^{TE} (\mathbf{A}^{22})^\dagger \\ \mathbf{W}^{21} (\mathbf{A}^{11} \Delta^T (\mathbf{A}^{11})^\dagger + \mathbf{N}^T) + \mathbf{W}^{22} \mathbf{A}^{22} \Delta^{TE} (\mathbf{A}^{11})^\dagger &= \Delta^{TE} (\mathbf{A}^{11})^\dagger \\ \mathbf{W}^{22} (\mathbf{A}^{22} \Delta^E (\mathbf{A}^{22})^\dagger + \mathbf{N}^E) + \mathbf{W}^{21} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} (\mathbf{A}^{22})^\dagger &= \Delta^E (\mathbf{A}^{22})^\dagger \end{aligned} \quad (3.21)$$

On peut voir que la première de ces équations se réduit au cas du filtre de Wiener précédemment introduit pour la température seule (Bouchet et al. (1996)) si le terme de corrélation est mis à zéro. A partir de l'expression des filtres, on peut définir différentes variables qui nous permettront de quantifier la qualité de l'extraction du signal.

3.3.2 Facteurs de qualité

En effet Bouchet et al. (1996) ont défini la notion de « facteur de qualité », qui est en fait une fonction fenêtre effective pour les spectres des différents processus astrophysiques mesurés après filtrage. Une généralisation de ce facteur de qualité au cas polarisé s'écrit ainsi :

$$Q_{pp'}^{ij} = \frac{\langle \hat{x}_p^i \hat{x}_{p'}^j \rangle}{\langle x_p^i x_{p'}^j \rangle} = W_{p\nu}^{ik} A_{\nu p''}^{kl} \langle x_{p''}^l x_{p'}^j \rangle \quad (3.22)$$

Ces facteurs de qualité peuvent s'exprimer de façon matricielle en fonction des filtres :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{11} &= (\Delta^T)^{\perp 1} (\mathbf{W}^{11} \mathbf{A}^{11} \Delta^T + \mathbf{W}^{12} \mathbf{A}^{22} \Delta^{TE}) \\ \mathbf{Q}^{22} &= (\Delta^E)^{\perp 1} (\mathbf{W}^{21} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} + \mathbf{W}^{22} \mathbf{A}^{22} \Delta^E) \\ \mathbf{Q}^{12} &= (\Delta^{TE})^{\perp 1} (\mathbf{W}^{11} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} + \mathbf{W}^{12} \mathbf{A}^{22} \Delta^E) \\ \mathbf{Q}^{21} &= \mathbf{Q}^{12} \end{aligned} \quad (3.23)$$

\mathbf{Q}^{11} et \mathbf{Q}^{22} peuvent directement être interprétés comme retraçant la qualité de l'extraction des spectres de température et de polarisation. Comme on peut s'y attendre dans le cas où il y a une corrélation entre les données, la reconstruction de chacun des champs en est améliorée. Si la reconstruction de la température n'est que très peu affectée par la présence des données de polarisation, celle de la polarisation est nettement améliorée par la présence des données de température, car ces dernières ont un signal sur bruit bien meilleur. En revanche, le cas de \mathbf{Q}^{12} est un peu plus compliqué. On remarque que numériquement ce dernier est très proche de \mathbf{Q}^{11} , ce qui peut s'expliquer ainsi: comme le filtrage de Wiener suppose que le spectre de la corrélation polarisation-température est connu pour chaque processus, la reconstruction optimale de la corrélation consiste à jeter les données les plus bruitées, c.-à-d. la polarisation ! Il faudra donc, pour quantifier véritablement les barres d'erreur des différents spectres, calculer des estimateurs de ces spectres à partir des données filtrées et calculer leur covariance (voir la section suivante). Les facteurs de qualité des processus polarisés sont tracés dans les figures 3.1 et 3.2 pour différentes caractéristiques instrumentales.

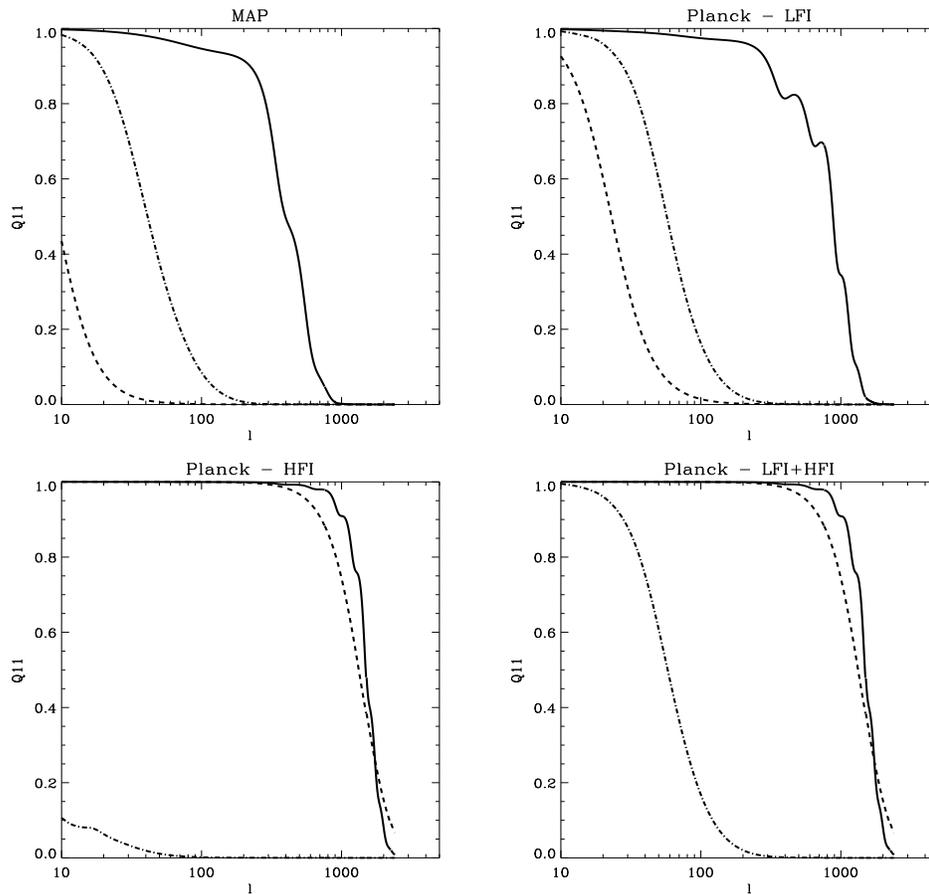


FIG. 3.1: *Facteurs de qualité des anisotropies de température. Les courbes en traits pleins, pointillés et traits-pointillés correspondent respectivement au FCM, aux poussières et au synchrotron.*

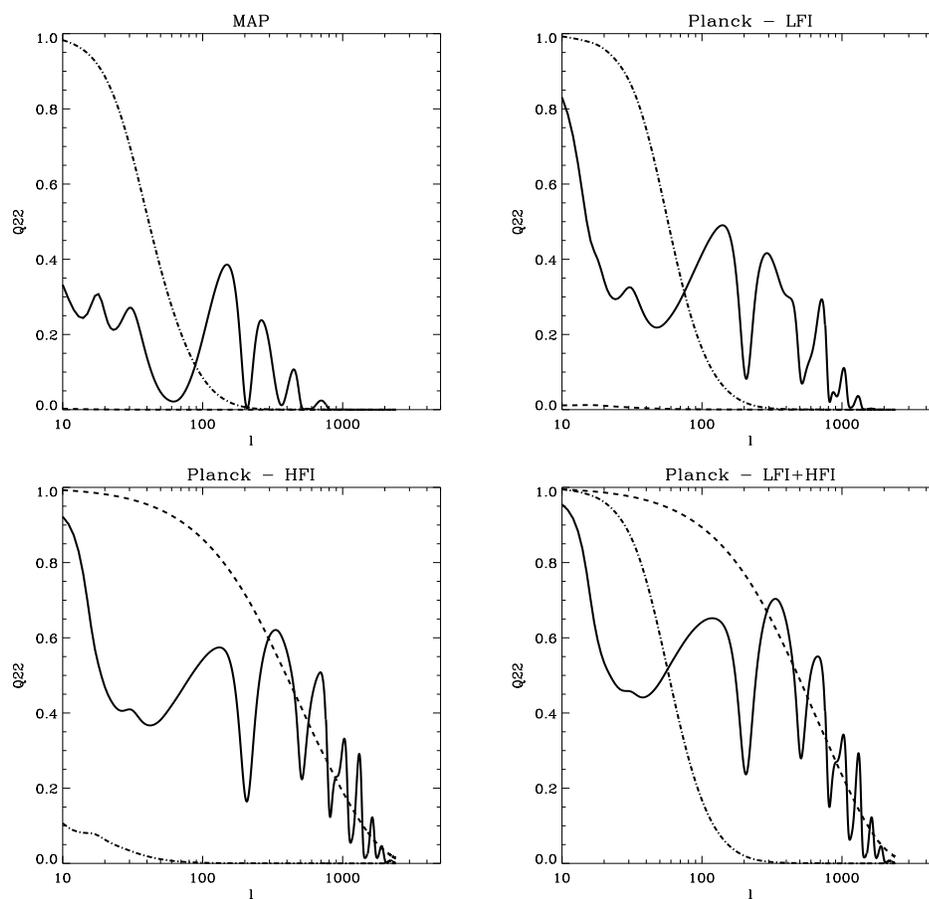


FIG. 3.2: Même figure que la figure 3.1, mais pour la polarisation.

3.3.3 Estimateurs non biaisés des spectres de puissance

Dans cette section, nous allons définir des estimateurs non biaisés des spectres de puissance, c.-à-d. des estimateurs tels que $\langle \hat{C}_p^{ij} \rangle = \langle x_p^i x_p^j \rangle$. Or, d'après les équations (3.16) et (3.17), les spectres de puissance relatifs à \hat{x}_p^i sont égaux à :

$$\langle \hat{x}_p^i \hat{x}_p^j \rangle = W_{p\nu}^{il} W_{p\nu'}^{jm} [A_{\nu p'}^{ln} A_{\nu' p''}^{mq} \langle x_p^n x_{p''}^q \rangle + \langle b_\nu^l b_{\nu'}^m \rangle] \quad (3.24)$$

et peuvent se réécrire ainsi :

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_p^1 \hat{x}_p^1 \rangle &= (Z_p^{11} C_p^T + b_p^{11}) = Q_p^{11} C_p^T \\ \langle \hat{x}_p^2 \hat{x}_p^2 \rangle &= (Z_p^{22} C_p^E + b_p^{22}) = Q_p^{22} C_p^E \\ \langle \hat{x}_p^1 \hat{x}_p^2 \rangle &= (Z_p^{12} C_p^{TE} + b_p^{12}) = Q_p^{12} C_p^{TE} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le sens de la première égalité peut facilement se comprendre. En effet le spectre de puissance, pour un processus et un champ donné³, des données filtrées est égal au spectre de puissance réel du processus, pondéré par les contaminants (c.-à-d. les autres processus) et les lobes de l'instrument, auquel on ajoute un terme de bruit. Il faut cependant noter que ce terme de « bruit », en plus du bruit instrumental proprement dit, contient la contribution résiduelle des contaminants (autres processus et autres champs). La seconde égalité vient de la définition des facteurs de qualité (3.22).

A partir de ces équations, on peut définir des estimateurs non biaisés des spectres de puissance des différents processus à partir des données filtrées :

$$\hat{C}_p^T = \frac{1}{Z_p^{11}} \left(\frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \|\hat{x}_p^1(m) \hat{x}_p^1(m)\| - b_p^{11} \right) \quad (3.26)$$

$$\hat{C}_p^E = \frac{1}{Z_p^{22}} \left(\frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \|\hat{x}_p^2(m) \hat{x}_p^2(m)\| - b_p^{22} \right) \quad (3.27)$$

$$\hat{C}_p^{TE} = \frac{1}{Z_p^{12}} \left(\frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \|\hat{x}_p^1(m) \hat{x}_p^2(m)\| - b_p^{12} \right) \quad (3.28)$$

La donnée des caractéristiques instrumentales (bruit, lobes) ainsi que du comportement spatial et spectral des contaminants, nous permet, à l'aide des équations (3.28), de quantifier la précision avec laquelle les différents

3. J'entends par « champ » la température ou la polarisation (mode E).

spectres de puissance du FCM devraient être mesurés. Cela se traduit par le calcul des covariances de ces estimateurs non biaisés :

$$\mathbf{Cov}(\hat{C}_p^T) = \frac{2}{2\ell + 1} (C_p^T Q_p^{11} / Z_p^{11})^2 \quad (3.29)$$

$$\mathbf{Cov}(\hat{C}_p^E) = \frac{2}{2\ell + 1} (C_p^E Q_p^{22} / Z_p^{22})^2 \quad (3.30)$$

$$\mathbf{Cov}(\hat{C}_p^{TE}) = \frac{1}{2\ell + 1} \frac{((Q_P^{12})^2 (C_p^{TE})^2 + Q_p^{11} Q_p^{22} C_p^T C_p^E)}{(Z_p^{12})^2} \quad (3.31)$$

Dans le calcul des covariances, nous avons fait l'hypothèse que tous les processus étaient gaussiens, ce qui n'est pas le cas pour la plupart d'entre eux. Ainsi la covariance réelle des spectres devrait être plus grande que celle qui a été calculée ici. Il faut donc considérer les covariances calculées ici comme une *limite inférieure* aux covariance réelles des spectres. Nous avons, d'autre part, supposé que la fraction du ciel observée f_{sky} , était égale à 1 dans le calcul précédent. Si l'on a une couverture du ciel incomplète une très bonne approximation pour le calcul des covariances consiste à diviser les équations (3.29, 3.30 et 3.31) par f_{sky} (voir Hobson & Magueijo (1996)).

3.3.4 Qualité de la mesure du FCM

La méthode décrite précédemment nous permet d'estimer la qualité des mesures des spectres polarisés et non polarisés des anisotropies du FCM pour différentes configurations instrumentales reportées dans l'annexe C. La figure 3.4 montre les erreurs relatives sur le spectre de température pour les quatre configurations expérimentales MAP, PLANCK-LFI seul, PLANCK-HFI seul et PLANCK en entier, ces erreurs relatives étant définies comme $\sqrt{\mathbf{Cov}(\hat{C}_\ell)} / C_\ell$ (c.-à-d. comme le rapport « bruit sur signal » pour chaque mode). Cette figure montre aussi, à titre de comparaison, les résultats pour la meilleure voie de chaque configuration, ainsi que le résultat pour une combinaison des différentes voies (Bond et al. (1997)) dans le cas où les contaminants sont négligés. On remarque que pour $\ell \lesssim 300$ les résultats sont sensiblement égaux pour toutes les configurations expérimentales, car alors le rapport signal sur bruit est très bon et la mesure est limitée par le nombre fini de modes observables (« variance cosmique »). Pour les échelles $\ell \gtrsim 300$ en revanche, la qualité de la mesure dépend de la taille des lobes et de la sensibilité de chaque instrument. Il est à noter qu'en général la courbe correspondant au filtrage de Wiener est située entre les deux autres courbes, ce qui reflète le fait que l'émission non polarisée du FCM est largement dominante sur celle des contaminants, ou bien que les contaminants sont mesurés avec un signal sur bruit suffisant pour pouvoir être efficacement soustraits.

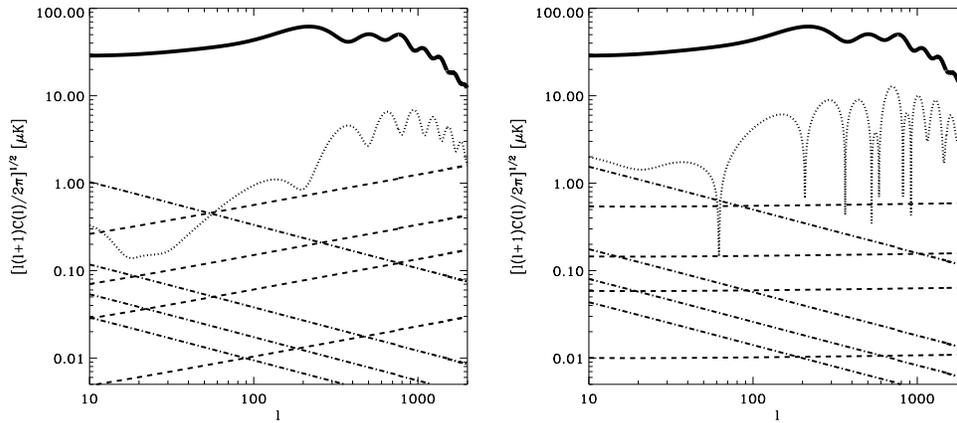


FIG. 3.3: Figure de gauche : Le spectre de puissance des modes E de polarisation est tracé (trait plein) en même temps que les spectres correspondant pour la poussière (tirets) et le synchrotron (traits-pointillés) à différentes fréquences, 44 GHz, 100 GHz, 143 GHz et 217 GHz. Les courbes correspondantes vont de haut en bas (de bas en haut) pour le synchrotron (pour la poussière). Le spectre de puissance de température est tracé en (gras) à titre de comparaison pour le même modèle (CDM standard avec $\tau = 0.1$). Figure de droite : Comme celle de gauche, mais pour la corrélation ET .

En ce qui concerne en revanche la mesure des modes E de polarisation et la mesure de la corrélation de ces modes avec l'émission non polarisée (TE), la précision obtenue est limitée pour des raisons multiples :

- Le signal mesuré étant beaucoup plus faible, le rapport signal sur bruit est d'autant moins bon (rappelons que la sensibilité de la mesure de polarisation est comparable - voir supérieure - à celle de la mesure de l'intensité), et donc la précision de la mesure en est diminuée d'autant,
- Les contaminants ne sont plus négligeables par rapport à l'émission du FCM (voir figure 3.3), et leur mesure elle-même n'est pas très précise (en raison de leur faiblesse), ce qui compromet la qualité de leur soustraction. Une façon de quantifier cet effet est de calculer l'erreur sur la mesure des spectres de ces contaminants eux-mêmes, ce qui sera fait dans la prochaine section.

Les erreurs relatives sur ces spectres sont montrées dans les figures 3.5 et 3.6. Pour les raisons invoquées ci-dessus, la courbe correspondant au filtrage de Wiener est en moyenne située au-dessus des autres, et donne donc une valeur plus réaliste de l'erreur commise dans la mesure de la polarisation.

On voit que les performances de HFI et LFI sont comparables pour des échelles $\ell \lesssim 600$ car la sensibilité de la mesure de polarisation pour la voie à 100 GHz de LFI est comparable à celle de la voie à 143 GHz de HFI. Pour de plus petites échelles les performances de HFI sont meilleures grâce à sa meilleure résolution angulaire. Quant à MAP, sa sensibilité ne devrait pas lui permettre de mesurer ces spectres pour des modes *individuels* (en effet l'erreur calculée dépasse $\sim 300\%$ pour la plupart des échelles considérées).

Si, par ailleurs, on s'intéresse à une contrainte « visuelle » des spectres une bonne manière de présenter ces résultats est sous la forme de puissance intégrée par bande logarithmique d'échelles. Ces puissances de bande correspondent en fait à des observables dans la mesure où elles constituent le résultat de mesures du spectre de puissance à une échelle donnée convoluée par une « fonction fenêtre » qui est caractéristique de la sensibilité de l'instrument à différentes échelles. Ainsi les données accessibles à l'heure actuelle sur le spectre de puissance sont exprimées sous forme de telles puissances de bande (voir Bond (1996) pour plus de détails). Nous avons pris, quant à nous, des fonctions fenêtres qui sont égales à 1 pour une bande située autour de chaque ℓ , de largeur logarithmique constante $\Delta \ln \ell = 0.2$, et égales à 0 partout ailleurs. L'effet sur les barres d'erreur est *grosso modo* de les réduire d'un facteur $\sqrt{\Delta \ell}$. Les résultats sont montrés dans les figures 3.7 et 3.8.

3.3.5 Mesure des émissions polarisées galactiques

Jusqu'ici notre connaissance des émissions galactiques en tant que contaminants du signal cosmologique sont issues d'observations de résolution angulaire parfois limitée (c'est le cas de l'émission synchrotron, voir le chapitre précédent), et de toute manière situées dans des bandes de longueurs d'onde assez éloignées des fréquences intéressantes pour la mesure du FCM. Ainsi l'extrapolation de ces contaminants aux fréquences millimétriques restent-elles à l'heure actuelle assez hasardeuse. Ainsi il apparaît comme indispensable pour toute mission spatiale d'observation du FCM de pouvoir détecter précisément le comportement spatial et spectral de ces contaminants à des longueurs d'onde proche de 100 GHz afin de pouvoir les soustraire efficacement. Le fait de détecter ces contaminants avec le même instrument qui sert à mesurer le signal cosmologique minimise également les risques d'erreurs systématiques qui sont évidemment dangereuses pour toute méthode de soustraction.

Comme on a pu le constater déjà avec les facteurs de qualité, les émissions galactiques polarisées ont de bonnes chances d'être mesurées aussi précisément que leur contrepartie cosmologique par les missions à venir. En effet, pour que ces émissions soient bien détectées, il faut que chacune d'entre elles

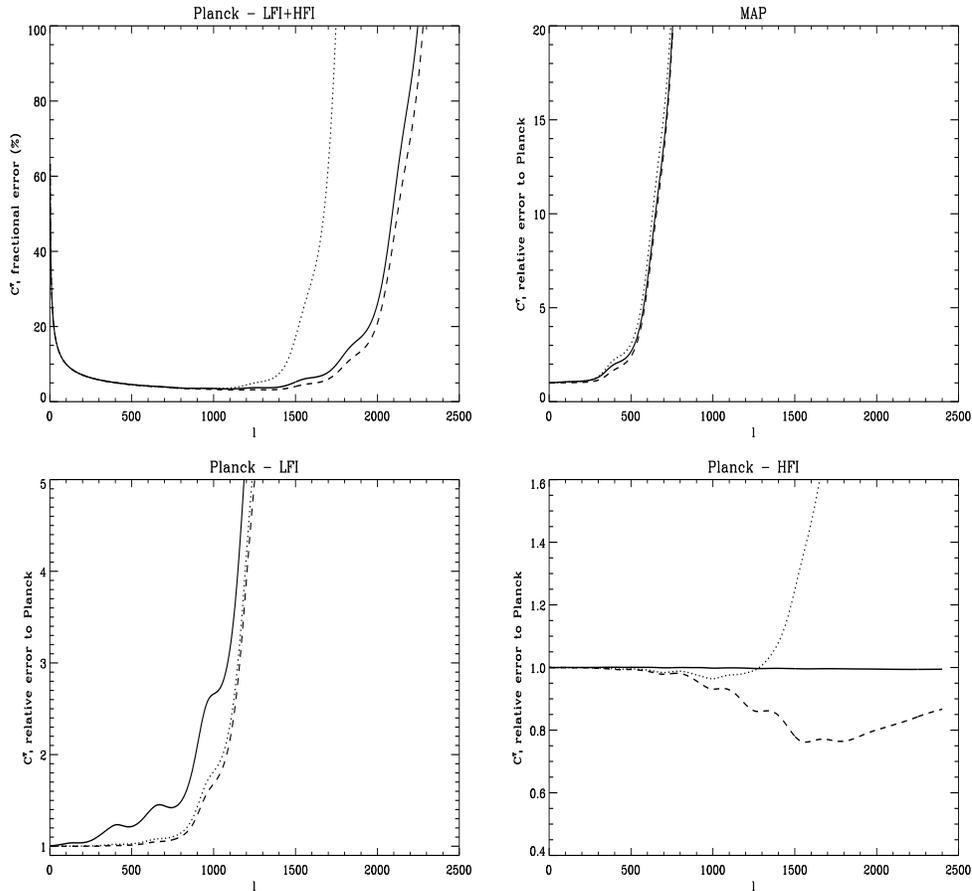


FIG. 3.4: Erreurs relatives sur les spectres de puissance de la température pour différentes configurations expérimentales. La première montre les performances de la mission PLANCK. Les trois autres figures comparent les performances des instruments HFI et LFI seuls, ainsi que celles de MAP relativement à PLANCK. La courbe du filtrage de Wiener est en traits pleins, tandis que les courbes correspondant respectivement à la meilleure voie et aux différentes voies combinées sont en pointillés et traits-pointillés.

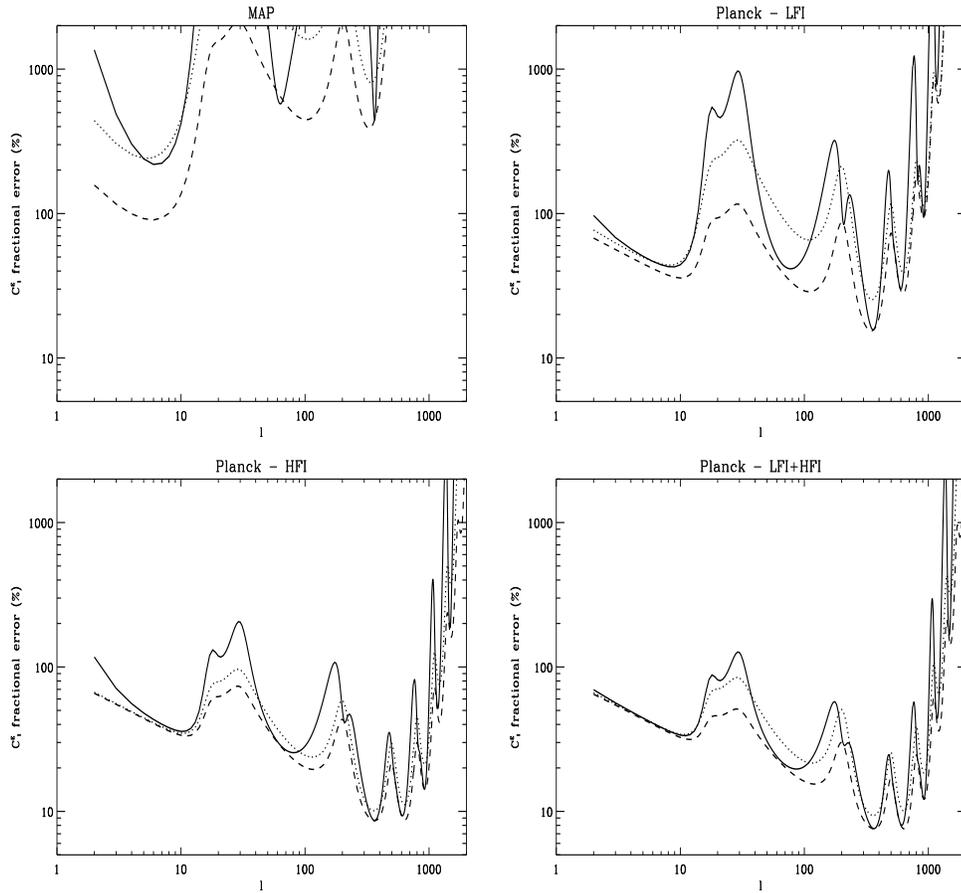


FIG. 3.5: Erreurs relatives des sur le spectre de puissance des modes E de polarisation du FCM. Les courbes en traits pleins, pointillés et traits-pointillés correspondent respectivement au cas du filtrage de Wiener, de la meilleure voie et de l'ensemble des voies combinées.

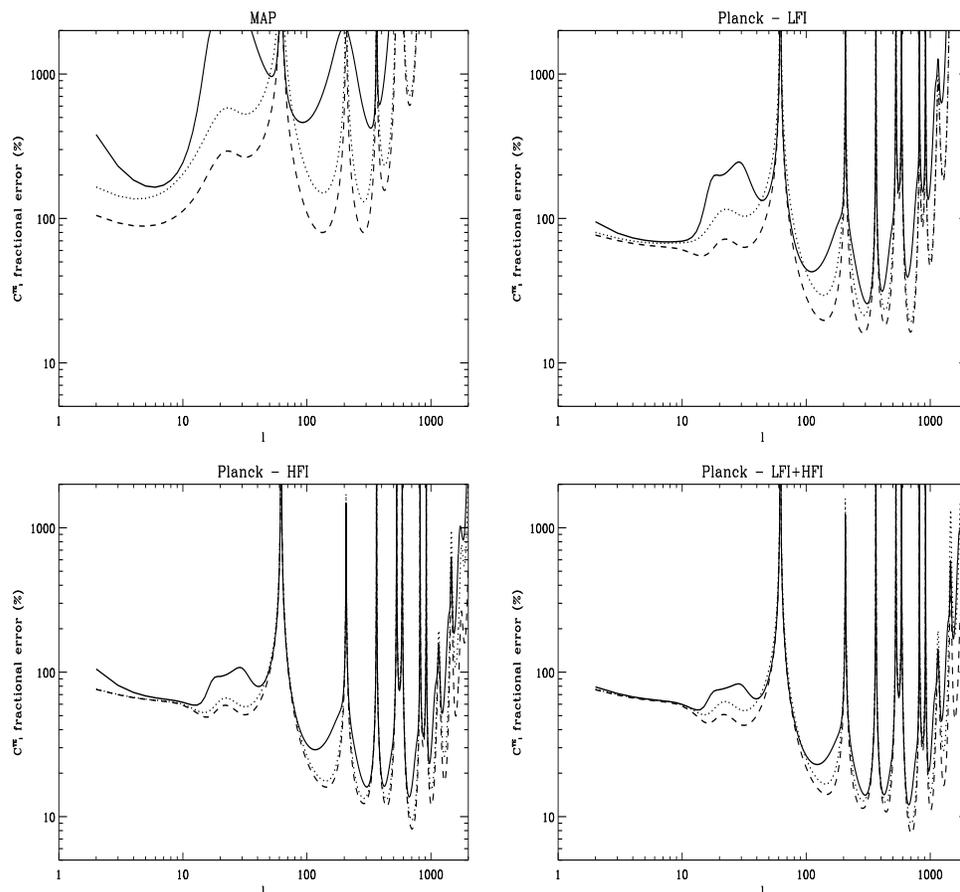


FIG. 3.6: Comme la figure 3.5 pour la corrélation TE des modes électriques de polarisation avec la température. Les grands pics qui apparaissent dans la figure révèlent seulement les endroits où le signal s'annule.

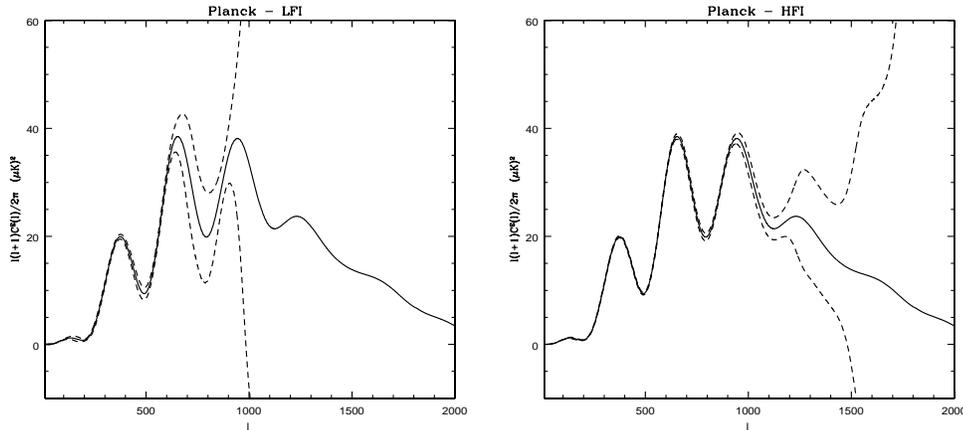


FIG. 3.7: Puissances de bande des modes E de polarisation. Sont tracés le spectre de puissance du modèle sous-jacent (trait plein) ainsi que les erreurs à 1σ (tirets) pour les instruments HFI et LFI. La largeur logarithmique de bande est prise constante et égale à $\Delta \ln l = 0.2$.

dominent les autres dans une des voies au moins. Or MAP et PLANCK satisfont tous les deux *a priori* à ces conditions. En effet les voies à 22 et 30 GHz de MAP et celle à 30 GHz de PLANCK-LFI seront vraisemblablement dominées par l'émission synchrotron polarisée (sous réserve toutefois qu'une éventuelle émission « rotationnelle » des poussières ne soit pas trop importante, ce qui reste à découvrir, cf Lazarian & Draine (1997); Draine & Lazarian (1998)). De même le canal à 545 GHz de PLANCK-HFI devrait être dominé par l'émission thermique polarisée des poussières. La figure 3.9 montre que l'émission polarisée des poussières devrait être mesurée avec une précision supérieure ou égale à la polarisation du FCM, grâce à la voie à 545 GHz de HFI. De même MAP et LFI devraient pouvoir mesurer la polarisation du synchrotron pour des échelles $l \lesssim 100$ (voir figure 3.10); en effet, dans les voies où cette émission domine, les lobes instrumentaux limitent la résolution aux petites échelles. On peut également noter que les erreurs sur la mesure de la corrélation TE de la poussière et du synchrotron sont systématiquement plus élevées que dans les cas de la polarisation. Cela peut s'expliquer par le fait que ces corrélations sont mélangées avec celle du FCM (dont le niveau est assez élevé) qui apparaît alors comme un contaminant pour leur mesure.

Il est important de noter que la précision de ces mesure dépend de façon très importante des autres processus. Par exemple, l'émission non polarisée du synchrotron n'est pas très bien mesurée parce qu'elle ne domine jamais le

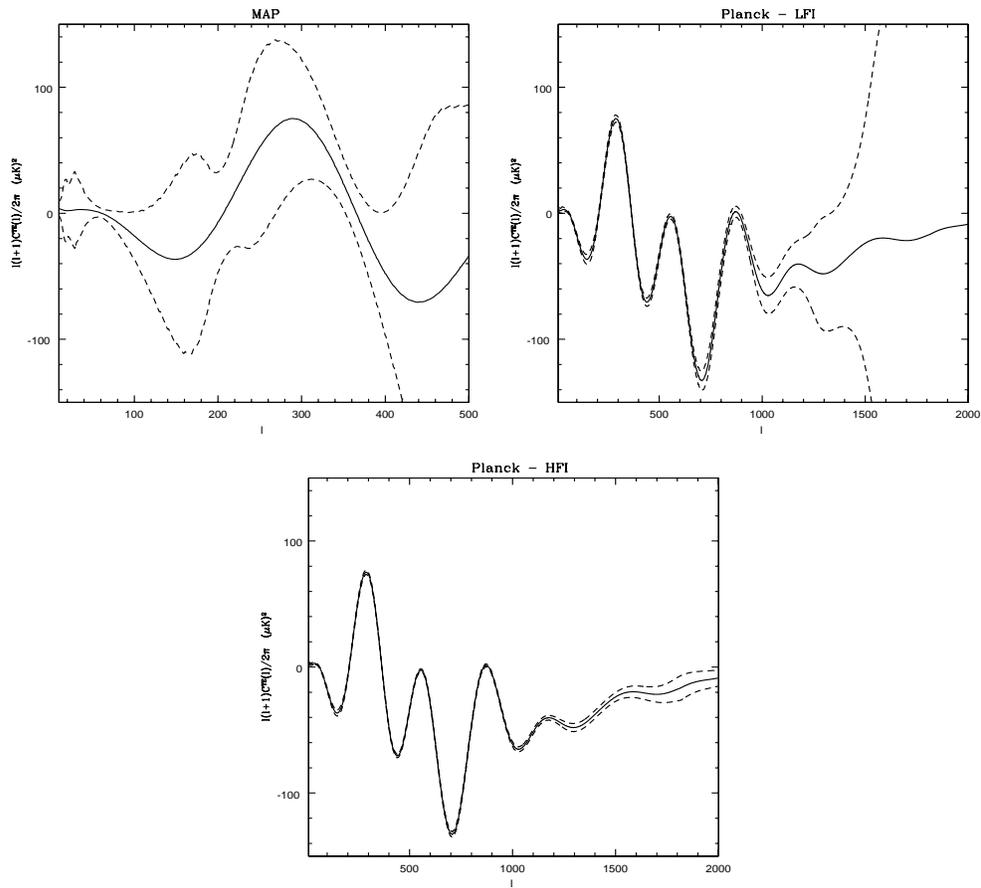


FIG. 3.8: Comme la figure 3.7 pour la corrélation TE . Les résultats sont également montrés pour MAP.

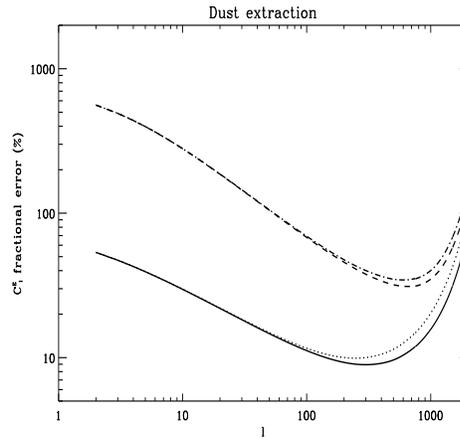


FIG. 3.9: Erreurs relative sur les spectres E et TE des poussières. Les deux courbes du bas correspondent aux modes E de polarisation (trait plein pour *PLANCK* et pointillés pour *HFI*), tandis que celles du haut correspondent à la corrélation (tirets pour *PLANCK* et traits–pointillés pour *HFI*).

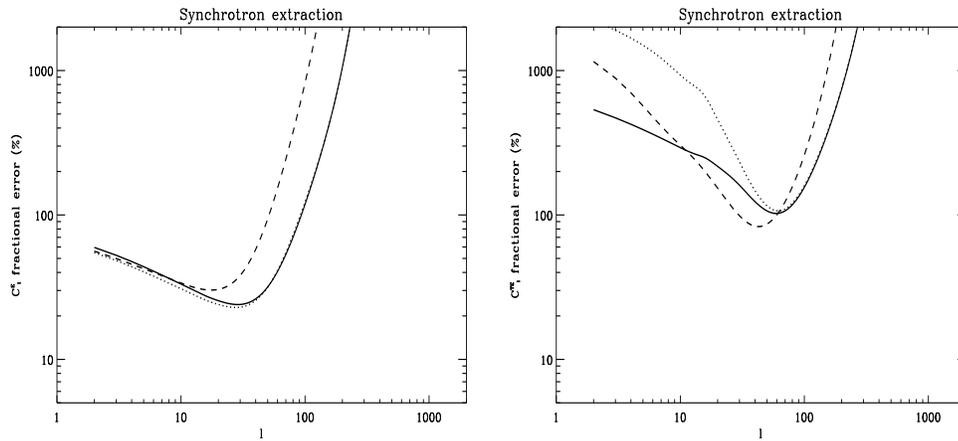


FIG. 3.10: Erreurs relatives pour les modes E du synchrotron (figure de gauche) et pour leur corrélation avec la température (figure de droite). Les courbes en trait plein, pointillés et tirets correspondent respectivement à *PLANCK*, *LFI* et *MAP*.

signal dans aucune des fréquences d'une part, et d'autre part parce que le niveau de l'émission *Bremsstrahlung* lui est souvent comparable. Ainsi la qualité de la mesure de la polarisation de l'émission synchrotron dépend beaucoup de l'éventuelle existence d'une composante polarisée de l'émission *Bremsstrahlung* galactique. Les sources d'émission polarisée extragalactique telles que les radio-sources (Toffolatti et al. (1998)) et les galaxies IR (Guiderdoni et al. (1998)) ne devraient être importantes qu'aux petites échelles (typiquement $\ell \gtrsim 1000$) où les lobes instrumentaux empêchent déjà une mesure précise de la polarisation du CMB.

3.3.6 Mesure des modes « magnétiques » de polarisation

Les modes « magnétiques » de polarisation (ou modes B) du FCM revêtent une importance particulière ; leur détection nous donnerait une preuve de la présence de modes de perturbation autres que les modes scalaires dans l'univers primordial (Seljak (1997); Seljak & Zaldarriaga (1997); Kamionkowski et al. (1997a,b), voir aussi A.3.3 pour les détails). Or les modes vectoriels de perturbation étant des modes décroissants, en l'absence de sources le plasma devrait être quasi irrotationnel à l'époque de la recombinaison à une très bonne approximation. L'éventuelle présence de modes B dans la polarisation du FCM devrait donc être un traceur de la présence d'ondes gravitationnelles primordiales, et ceci *indépendamment du modèle cosmologique considéré*. Cependant les effets de lentilles gravitationnelles sur le FCM peuvent engendrer des modes B dans la polarisation du FCM même si le signal originel ne contient que des modes E ; néanmoins cet effet est très faible, et est maximal aux petites échelles ($\ell \simeq 1000$) contrairement au signal tensoriel qui domine aux grandes échelles ($\ell \lesssim 100$) (voir Zaldarriaga & Seljak (1998)). C'est pourquoi nous négligerons cet effet par la suite.

Il convient de noter que les modes B engendrés par les ondes gravitationnelles sont d'amplitude nettement plus faible que les modes E de polarisation, et cela pour une très large gamme de modèles d'inflation compatibles avec les contraintes observationnelles provenant du satellite COBE (Smoot et al. (1992)). C'est pourquoi l'on s'attend que leur mesure soit très difficile, d'autant plus que pour les contaminants galactiques les modes B de polarisation devraient, *a priori*, être du même ordre de grandeur que les modes E (voir chapitre 2 et Prunet et al. (1998)). Pour rendre compte de manière plus quantitative des possibilités des instruments de PLANCK quant à la mesure de ces modes, nous avons pris par hypothèse un modèle cosmologique compatible avec les modèles d'inflation standards. Il s'agit d'un modèle CDM tilté, avec

un indice spectral scalaire $n_S = 0,9$, un indice spectral tensoriel $n_T = -0,1$ et le rapport des quadrupoles tensoriel et scalaire égal à $T/S = 0,7$. Comme le montre la figure 3.11, une détection marginale par modes pourrait être possible pour PLANCK aux grandes échelles. Cependant, comme le signal cosmologique est au mieux comparable avec celui des contaminants galactiques, la mesure du premier dépend de manière cruciale de la mesure du second. La figure 3.11 montre également la précision de la mesure des modes B pour la poussière et le synchrotron. On peut remarquer que pour ces deux processus, la mesure devrait être précise dans la mesure où ces deux processus sont dominants sur tous les autres pour une voie au moins, le synchrotron souffrant néanmoins d'une mauvaise détermination aux grandes échelles à cause de la largeur des lobes instrumentaux dans les voies où cette émission domine (voir 3.3.5).

D'autre part on peut remarquer que dans les cas des modes B , les résultats du filtrage de Wiener sont très proches de l'estimation donnée par la meilleure voie instrumentale en l'absence de contaminants. Cela est dû à de multiples raisons :

- d'une part les contaminants sont bien déterminés et donc leur soustraction est bonne, ce qui fait que la précision de la mesure est limitée par le bruit instrumental,
- d'autre part les modes B du FCM sont décorrélés par construction des modes E et de la température, et donc leur mesure n'est pas influencée par les contaminations résiduelles des autres champs.

Pour se faire une idée plus « visuelle » de la qualité de la mesure des modes B , on peut recourir, comme dans le cas des modes E et de la corrélation ET , à un spectre de puissance par bandes. Ce dernier est montré dans la figure 3.12 ainsi que les barres d'erreur associées. On peut noter, grâce à cette figure, la faiblesse du signal considéré (comparer avec ma figure 3.7).

3.3.7 Remarques finales

Nous avons vu dans ce chapitre que la méthode du filtrage de Wiener repose sur un certain nombre d'hypothèses concernant les propriétés statistiques des processus astrophysiques. En effet, outre l'hypothèse que ces processus sont gaussiens, nous avons dû préciser leur comportement statistique pour pouvoir écrire la fonction de probabilité *a priori* du signal. Nous allons montrer que le problème du filtrage de Wiener s'insère dans un problème bayésien plus général où l'on ne suppose plus comme données les caractéristiques statistiques des processus, mais où l'on cherche au contraire à les

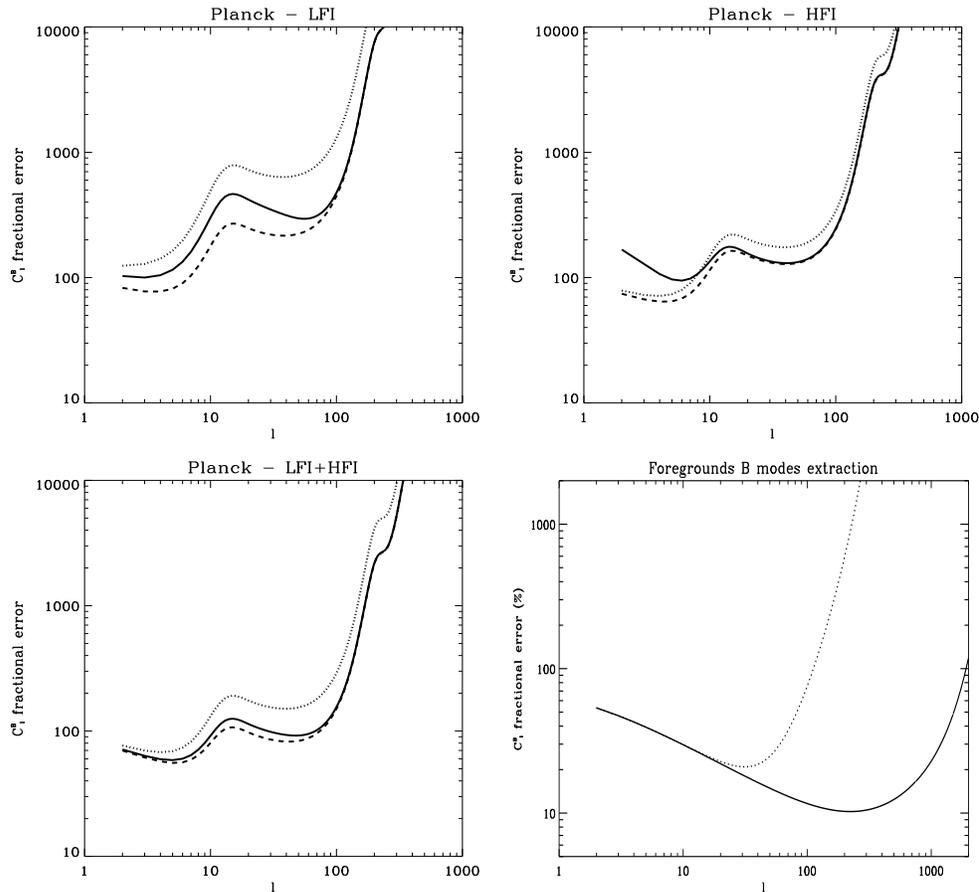


FIG. 3.11: Les erreurs relatives de la mesure du spectre de puissance des modes B sont montrées dans les trois premières figures. Les courbes en trait plein, pointillés et tirets correspondent respectivement au filtrage de Wiener, à la meilleure voie et à toutes les voies combinées. La quatrième figure montre les mêmes erreurs pour les émissions galactiques (trait plein pour les poussières et pointillés pour le synchrotron).

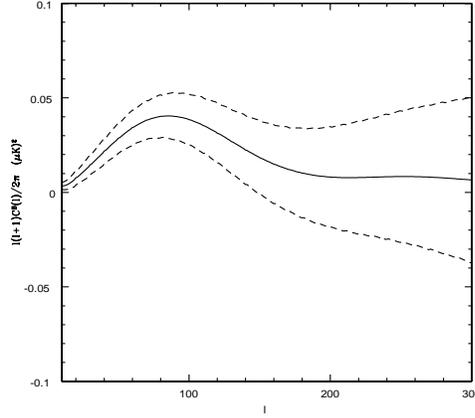


FIG. 3.12: Spectre de puissance par bandes des modes B du FCM ainsi que ses barres d'erreur à 1σ . La largeur de la fenêtre logarithmique est constante, égale à $\Delta \ln l = 0, 2$.

déterminer directement à partir des données. Nous allons montrer que le filtrage de Wiener est cohérent avec cette approche plus générale, et que sa forme *ne change pas* quand on recherche à partir des données les caractéristiques statistiques des processus les plus vraisemblables.

Pour cela, revenons aux notations de 3.2.1. Supposons que pour construire la distribution de probabilité *a priori* du signal (ou de façon équivalente sa matrice de corrélation puisque nous avons supposé que les processus étaient gaussiens) nous ayons besoin de fixer un certain nombre de paramètres, rangés dans un vecteur \vec{p} . L'approche bayésienne générale consiste alors à écrire la distribution de probabilité *a posteriori* du signal et des paramètres \vec{p} connaissant les données :

$$Pr(\vec{x}, \vec{p} \parallel \vec{y}) = \frac{Pr(\vec{x}, \vec{p})Pr(\vec{y} \parallel \vec{x}, \vec{p})}{Pr(\vec{y})} \propto Pr(\vec{x})Pr(\vec{y} \parallel \vec{x}) \quad (3.32)$$

où l'on a supposé une probabilité *a priori* uniforme sur la valeur des paramètres \vec{p} . Or en supposant que les champs considérés sont gaussiens, on peut écrire (voir 3.2.1) :

$$\begin{aligned} Pr(\vec{x}, \vec{p} \parallel \vec{y}) &\propto \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{C})}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\vec{x}^\dagger \mathbf{C}^{\perp 1} \vec{x} + [\vec{y} - \mathbf{A}\vec{x}]^\dagger \mathbf{N}^{\perp 1} [\vec{y} - \mathbf{A}\vec{x}] \right) \right] \\ &\equiv Z \exp \left(-\frac{1}{2} \theta \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec $\theta = \vec{x}^\dagger \mathbf{C}^{\perp 1} \vec{x} + \chi^2$. Il faut noter ici que seule la matrice \mathbf{C} dépend des paramètres \vec{p} . L'estimation simultanée des processus et des paramètres \vec{p} est

alors réalisée en maximisant la distribution de probabilité *a posteriori* :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) Pr(\vec{x}, \vec{p} \parallel \vec{y}) = 0 \quad (3.34)$$

Si l'on maximise cette distribution par rapport au signal, on obtient l'estimateur de Wiener du signal (qui dépend évidemment des paramètres \vec{p}). Appelons cet estimateur \vec{x}_{WF} , pour déterminer les paramètres \vec{p} il nous faut alors maximiser la distribution par rapport à \vec{p} sur l'hypersurface définie par l'ensemble des estimateurs de Wiener :

$$\left[\frac{\partial Pr(\vec{x}, \vec{p} \parallel \vec{y})}{\partial \vec{p}} \right]_{\vec{x}_{WF}} = 0 \quad (3.35)$$

D'autre part on a :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \vec{p}} \right)_{\vec{x}_{WF}} = \frac{\partial \vec{y}^\dagger (\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{N})^{-1} \vec{y}}{\partial \vec{p}} \equiv \frac{\partial \chi_{CV}^2}{\partial \vec{p}} \quad (3.36)$$

où χ_{CV}^2 est le χ^2 qui prend en compte la variance cosmique. Le problème revient donc à résoudre :

$$\frac{d}{d\vec{p}} \left(\log Z - \frac{1}{2} \chi_{CV}^2 \right) = 0 \quad (3.37)$$

Il est important de noter que la solution de cette équation est celle qui maximise la fonction de vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\vec{y} \parallel \vec{p}) = Z \exp \left(-\frac{1}{2} \chi_{CV}^2 \right) \quad (3.38)$$

Nous pouvons conclure de cette analyse que la détermination des paramètres d'entrée se fait de façon découplée de la construction du filtre de Wiener (dont la forme est « covariante » dans un changement des paramètres d'entrée \vec{p}). Ce point sera particulièrement important dans l'estimation de la matrice de Fisher des paramètres cosmologiques à partir des données filtrées (voir chapitre suivant).

Multi-frequency Wiener filtering of CMB data with polarisation

F. R. Bouchet¹, S. Prunet^{1,2}, and Shiv K. Sethi¹

¹, Institut d'Astrophysique de Paris, CNRS, 98bis Boulevard Arago F-75014 Paris France

² Institut d'Astrophysique Spatiale, Bât. 121, 91105 ORSAY, France

30 September 1998

ABSTRACT

One goal of CMB data analysis is to combine data at different frequencies, angular resolutions, and noise levels in order to best extract the component with a Plankian spectral behaviour. A multi-frequency Wiener filtering method has been proposed in this context by Bouchet, Gispert and Puget (1995) and in parallel by Tegmark and Efstathiou (1996). As shown in Bouchet and Gispert (1998a), this linear method is also convenient to estimate a priori, given a sky model and an experimental description, the residual errors on the CMB power spectrum assuming the foregrounds have been removed with this method. In this paper, we extend the method to the case when additional polarisation data is available. In particular, we derive the errors on the power spectra involving polarisation and show numerical results for the specifications of the future CMB space missions MAP and PLANCK* when it is assumed that the Galactic synchrotron and dust emission are respectively about 40% and 10% polarised. We consider two underlying models for our study: we take a standard CDM model with $\tau = 0.1$ for the extraction of *E*-mode polarisation and *ET* cross-correlation; for *B*-mode polarisation we consider a tilted CDM model with $n_s = 0.9$, $n_T = -0.1$ and $T/S = 0.7$. We find that: (1) The resulting fractional errors on *E* mode polarisation and *TE* cross-correlation power spectra are $\lesssim 10$ –30% for $50 \lesssim \ell \lesssim 1000$ for PLANCK. The fractional errors are between 50% to 150% for $\ell \leq 50$, (2) The corresponding fractional errors for MAP are $\geq 300\%$ for most of the ℓ range, (3) the Wiener filtering give extraction errors ≤ 2 times the expected performance for the combined sensitivity of all the channels of PLANCK. For MAP, the corresponding degradation is $\simeq 4$. (4) if, instead of individual modes, one considers band-power estimates with a logarithmic interval $\Delta\ell/\ell = 0.2$ then the fractional error for MAP drops to $\lesssim 100\%$ at the Doppler peak around $\ell \simeq 300$ for the *ET* signal, and (5) The fractional error for *B*-mode polarisation detection is $\lesssim 100\%$ with PLANCK for $\ell \leq 100$. A band-power estimate with $\Delta\ell/\ell = 0.2$ reduces the fractional errors to $\lesssim 25\%$ for $20 \leq \ell \leq 100$.

1 INTRODUCTION

Ever since the detection of CMB temperature anisotropies by the DMR experiment aboard the COBE satellite at angular scales $\geq 7^\circ$ (Smoot *et al.* 1992, Bennett *et al.* 1996), there has been a surge of activity on both theoretical and experimental front. Several detections at smaller angular scales have been reported (for a recent compendium, see Lineweaver and Barbosa 1998). There is great interest in the upcoming satellite projects MAP and PLANCK. These all-sky experiments, it is hoped, will determine the angular power spectrum of CMB temperature fluctuations at all scales greater than a few arc minutes. Various theoretical analyses have shown under fairly general assumptions that this could determine cosmological parameters, Ω , Ω_B , h , etc, with unprecedented precision (Jungman *et al.* 1996, Zaldarriaga *et al.* 1997, Bond *et al.* 1997). In addition, there is growing optimism that these satellite projects might detect

the very small expected signal from the polarised component of the CMB. The information from CMB polarisation could then be combined with temperature signal 1) to check the self-consistency of the predictions of the underlying theoretical model, 2) to further break the degeneracy between some cosmological parameters and 3) to help in unambiguously detecting a tensor-induced component of CMB fluctuations (Seljak & Zaldarriaga 1997, Seljak 1997, Kamionkowski & Kosowski 1997).

A major hurdle in extracting the primary CMB signal from data, apart from noise, is the presence of poorly known Galactic and extra-galactic foregrounds. However, as the foregrounds differ from the CMB emission in both frequency dependence and spatial distribution, one can reduce their level by proper combination of the multi-frequency data of a CMB experiment. Bouchet *et al.* (1995) and Tegmark & Efstathiou (1996) proposed a particular linear scheme, based

2 *Bouchet et al.*

on the traditional Wiener filtering method to take full advantage of this fact. The performance of the method has been assessed through detailed numerical simulations performed in the context of the PLANCK preparation (Gispert & Bouchet 1996, Bouchet & Gispert 1998b). It was shown that the residual contamination after cleaning the map is much smaller than the CMB primary signal, and therefore the foregrounds may not be a major obstacle in the extraction of CMB temperature angular power spectrum.

The CMB polarisation signal is expected to be one to two order of magnitudes below the temperature signal. And it is likely to be comparable to the achievable experimental noise in the current experiments. The presence of foregrounds should, of course, make this detection even more difficult. In our Galaxy, the synchrotron emission is highly polarised and would constitute a major foreground for measurements made in the Rayleigh-Jeans part of the CMB spectrum (e.g. MAP and Low-Frequency Instrument -LFI- of PLANCK). The Galactic dust emission is also observed to be polarised and it is the dominant foreground in the Wien part of the CMB spectrum (case of High-Frequency Instrument -HFI- of PLANCK). Prunet *et al.* (1998) modelled and estimated the level of dust polarised emission at high Galactic latitudes, and compared it to the polarised component of the CMB signal. They showed that the scalar-induced polarisation (E-mode) power spectrum and temperature-polarisation cross-correlation are likely to be much larger than the dust polarised emission at high Galactic latitudes. However, the tensor-induced (B-mode) signal is at best comparable to the foreground contamination level. The extraction of such a signal in the presence of comparable instrumental noise, even with small foregrounds, is trickier than the corresponding temperature case, where the signal is much bigger than the instrumental noise.

In this paper, we extend the multi-frequency Wiener filtering method to include the polarisation and temperature-polarisation cross-correlation. The goal of this exercise is to quantify errors in estimating various power spectra when Galactic polarised foregrounds are present. We describe the method in detail in next section. In § 3, we give a description of the polarised foregrounds emission which is used in § 4 to give the resultant errors on the power spectra estimates in the case of MAP and PLANCK. We summarize our results and discuss their limitations and applicability in § 5.

2 MULTI-FREQUENCY WIENER FILTERING ON CMB DATA

We present here an extension of the multi-frequency Wiener filtering technique applied earlier on CMB temperature data (Bouchet *et al.* 1995, Tegmark & Efstathiou 1996, Bouchet & Gispert 1998a, hereafter BG98). The goal of this extension is to see the effect of including polarisation data.

Let us denote the observed data at different frequencies as, y_ν^i , where ν indicates the frequency of the instrumental channel, and i the nature of the observed field (temperature or E -mode polarisation). The B mode polarisation has a vanishing cross-correlation with both T and E and therefore can be treated separately. The E and B modes are the 'divergence' and 'curl' part of the polarisation tensor and are linear combinations of the usual Stoke's parameters

Q and U . The advantage of using these variables is that the B mode polarisation vanishes for scalar-induced perturbations (for details see Seljak 1997). The data points y_ν^i , for a given i , take contributions from various Galactic and extra-galactic sources, apart from the primary CMB signal and instrumental noise. Throughout this paper, we adopt the convention of Tegmark and Efstathiou (1996) and take y_ν^i to mean the 'observed' temperature fluctuation, i.e., the monopole part is first subtracted from the observed surface brightness, which is then divided by $\partial B_0/\partial T_0$, B_0 being the surface brightness of CMB at $T = T_0$. Let us call x_p^j the contribution of the field j due to process p , this is the quantity we want to recover from the observational data y_ν^i . We assume there is a linear relation between them:

$$y_\nu^i = A_{\nu p}^{ij} * x_p^j + b_\nu^i, \quad (1)$$

where $A_{\nu p}^{ij}$ is the instrument response kernel, and b_ν^i is the detector noise level per pixel for the full mission time (all repeated indices are summed over). As discussed in BG98, it is easier to deal with the spherical harmonics transform of Eq. (1), as this non-local equation in pixel space transforms into an algebraic linear equation in multipole space. From now on, all spatially dependent variables are then expressed in multipole space. Eq. (1) translates into:

$$y_\nu^i(l, m) = A_{\nu p}^{ij}(l, m)x_p^j(l, m) + b_\nu^i(l, m) \quad (2)$$

The problem now is to construct an optimal estimator \hat{x}_p^i . We chose this estimator to be linear in the observed data:

$$\hat{x}_p^i = W_{p\nu}^{ij} y_\nu^j. \quad (3)$$

The reconstruction error for a given field and process (ε_p^i)² \equiv $[(\hat{x}_p^i - x_p^i)^2]$ can be written as:

$$(\varepsilon_p^i)^2 = (W_{p\nu}^{ij} A_{\nu p'}^{jk} - \delta_{pp'} \delta_{ik}) (W_{p\nu'}^{il} A_{\nu' p'}^{lm} - \delta_{pp'} \delta_{im}) (x_{p'}^k x_{p'}^m) + W_{p\nu}^{ia} W_{p\nu'}^{ib} (b_\nu^a b_{\nu'}^b); \quad (4)$$

$W_{p\nu}^{ij}$ is chosen so as to make the the variance of the reconstruction error minimal. The derivatives of the error with respect to the filters coefficients $W_{p\nu}^{ic}$ should then be zero. This condition can be expressed as:

$$\begin{aligned} & [(\delta_{jc} \delta_{\mu\nu} A_{\nu p'}^{jk}) (W_{p\nu'}^{il} A_{\nu' p'}^{lm} - \delta_{pp'} \delta_{im}) \\ & + (\delta_{\mu\nu'} \delta_{lc} A_{\nu' p'}^{lm}) (W_{p\nu}^{ij} A_{\nu p'}^{jk} - \delta_{pp'} \delta_{ik})] (x_{p'}^k x_{p'}^m) \\ & + (\delta_{\mu\nu} \delta_{ca} W_{p\nu'}^{ib} + \delta_{\mu\nu'} \delta_{cb} W_{p\nu}^{ia}) (b_\nu^a b_{\nu'}^b) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Rearranging terms we get the final equation on the filters:

$$A_{\mu p'}^{ck} W_{p\nu'}^{il} A_{\nu' p'}^{lm} (x_{p'}^k x_{p'}^m) + W_{p\nu'}^{ib} (b_\nu^c b_{\nu'}^b) = A_{\mu p'}^{ck} (x_{p'}^k x_{p'}^i). \quad (6)$$

2.1 Implementation of foregrounds removal

Eq. (6) is valid for the general case in which various processes, fields, and corresponding instrumental noises could be correlated. We consider here only uncorrelated processes and uncorrelated noises between different fields and channels. We allow for the correlation between the two fields T and E . These conditions can be expressed as:

$$\begin{aligned} \langle x_{p'}^1 x_{p'}^1 \rangle &= \delta_{p'p''} C_{p'}^T = \Delta_{p'p''}^T \\ \langle x_{p'}^1 x_{p'}^2 \rangle &= \delta_{p'p''} C_{p'}^{TE} = \Delta_{p'p''}^{TE} \\ \langle x_{p'}^2 x_{p'}^2 \rangle &= \delta_{p'p''} C_{p'}^E = \Delta_{p'p''}^E \end{aligned} \quad (7)$$

Multi-frequency Wiener filtering of CMB data with polarisation 3

$$\begin{aligned}
\langle b_{\nu'}^1, b_{\nu'}^1 \rangle &= \delta_{\nu'\nu'} B_{\nu'}^T = \mathbf{N}_{\nu'}^T, \\
\langle b_{\nu'}^2, b_{\nu'}^2 \rangle &= \delta_{\nu'\nu'} B_{\nu'}^E = \mathbf{N}_{\nu'}^E, \\
\langle b_{\nu'}^1, b_{\nu'}^2 \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

With these conditions, Eq. (6) can be written as a system of four matrix equations:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}^{11} (\mathbf{A}^{11} \Delta^T \text{tr}(\mathbf{A}^{11}) + \mathbf{N}^T) \\
&+ \mathbf{W}^{12} \mathbf{A}^{22} \Delta^{TE} \text{tr}(\mathbf{A}^{11}) = \Delta^T \text{tr}(\mathbf{A}^{11})
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}^{12} (\mathbf{A}^{22} \Delta^E \text{tr}(\mathbf{A}^{22}) + \mathbf{N}^E) \\
&+ \mathbf{W}^{11} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} \text{tr}(\mathbf{A}^{22}) = \Delta^{TE} \text{tr}(\mathbf{A}^{22})
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}^{21} (\mathbf{A}^{11} \Delta^T \text{tr}(\mathbf{A}^{11}) + \mathbf{N}^T) \\
&+ \mathbf{W}^{22} \mathbf{A}^{22} \Delta^{TE} \text{tr}(\mathbf{A}^{11}) = \Delta^T \text{tr}(\mathbf{A}^{11})
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}^{22} (\mathbf{A}^{22} \Delta^E \text{tr}(\mathbf{A}^{22}) + \mathbf{N}^E) \\
&+ \mathbf{W}^{21} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} \text{tr}(\mathbf{A}^{22}) = \Delta^E \text{tr}(\mathbf{A}^{22})
\end{aligned} \tag{12}$$

These equations can be solved by substitution. One can readily verify that the equation for \mathbf{W}^{11} reduces to the form earlier derived by Bouchet *et al.* (1995) and Tegmark & Efstathiou (1996) when the cross-correlation between the fields is switched off.

Bouchet *et al.* (1996) defined a quantity they termed 'quality factor' to quantify the merit of extraction of the signal corresponding to a given process. A straightforward generalization of this quality factor, valid for multiple fields, can be written as:

$$Q_{pp'}^{ij} = \frac{\langle \hat{x}_p^i \hat{x}_{p'}^j \rangle}{\langle x_p^i x_{p'}^j \rangle} = W_{pp'}^{ik} A_{\nu p'}^{kl} \langle x_{p'}^l x_{p'}^j \rangle \tag{13}$$

where we have used Eq. (6) to write the second equality. Since this is just the ratio of the spectra of the minimum-variance estimate map to the spectra of the real one, it can be viewed as the effective window function of the experiment.

Eq. 13 can be expanded to yield:

$$\mathbf{Q}^{11} = (\Delta^T)^{-1} (\mathbf{W}^{11} \mathbf{A}^{11} \Delta^T + \mathbf{W}^{12} \mathbf{A}^{22} \Delta^{TE}) \tag{14}$$

$$\mathbf{Q}^{22} = (\Delta^E)^{-1} (\mathbf{W}^{21} \mathbf{A}^{11} \Delta^{TE} + \mathbf{W}^{22} \mathbf{A}^{22} \Delta^E) \tag{15}$$

$$\mathbf{Q}^{12} = (\Delta^{TE})^{-1} (\mathbf{W}^{11} \mathbf{A}^{11} \Delta^T + \mathbf{W}^{12} \mathbf{A}^{22} \Delta^E) \tag{16}$$

$$\mathbf{Q}^{21} = \mathbf{Q}^{12} \tag{17}$$

\mathbf{Q}^{11} and \mathbf{Q}^{22} can readily be interpreted as the quality of the reconstruction of temperature and polarisation maps, respectively. As expected in the presence of cross-correlations, the quality factor of either field is better than in the case without cross-correlations. Although the reconstruction of temperature maps is only slightly changed by the cross-correlation term (the term proportional to \mathbf{W}^{12} in Eq. (14)), the quality of the polarisation reconstruction gets a big boost from the presence of temperature-polarisation cross-correlation and almost half the contribution to \mathbf{Q}^{22} comes from the \mathbf{W}^{21} term in Eq. (15). However the meaning of the term \mathbf{Q}^{21} (and \mathbf{Q}^{12}) is not apparent. Much of the contribution to \mathbf{Q}^{12} comes from the term with \mathbf{W}^{11} , and therefore it is very close to the quality factor for the extraction of temperature and is nearly independent of the polarisation noise. It is not surprising as it merely tells us that to optimally reconstruct the cross-correlation one needs to throw out the noisy data, i.e. the polarisation information!

However, the quantity of interest is the error in the extraction of the power spectrum of cross-correlation which should not be confused with \mathbf{Q}^{12} . To get a real idea of the error bars of the different spectra, we must define estimators of those power spectra from the filtered data, and compute their covariances. As we shall see, while \mathbf{Q}^{11} and \mathbf{Q}^{22} directly give the covariance of the E and T power spectra, a more complicated expression is needed for the covariance of the ET power spectrum.

2.2 Unbiased estimators of power spectra

Eq. (3) is the data obtained after performing Wiener filtering on the multi-frequency maps. Our aim in this section is to use this data to write an unbiased estimator of the power spectra, which is defined such that $\langle \hat{C}_p^{ij} \rangle = \langle x_p^i x_p^j \rangle$. From Eqs. (1) and (3), the power spectrum of \hat{x}_p^i can be written as:

$$\langle \hat{x}_p^i \hat{x}_p^j \rangle = W_{pp'}^i W_{pp'}^j [A_{\nu p'}^{in} A_{\nu p'}^{mj} \langle x_{p'}^n x_{p'}^m \rangle + \langle b_{\nu}^i b_{\nu}^j \rangle], \tag{18}$$

which can be expressed as:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_p^1 \hat{x}_p^1 \rangle &= (Z_p^{11} C_p^T + b_p^{11}) = Q_p^{11} C_p^T \\
\langle \hat{x}_p^2 \hat{x}_p^2 \rangle &= (Z_p^{22} C_p^E + b_p^{22}) = Q_p^{22} C_p^E \\
\langle \hat{x}_p^1 \hat{x}_p^2 \rangle &= (Z_p^{12} C_p^{TE} + b_p^{12}) = Q_p^{12} C_p^{TE}.
\end{aligned} \tag{19}$$

The meaning of the first equality in Eqs. (19) can be easily understood: the Wiener-filtered power spectrum for a given process can be expressed in terms of the true underlying power spectrum smeared by foregrounds (Z_p^i terms) plus the noise. However, unlike the case with no foregrounds, the 'noise' terms b_p^i have contribution not only from the instrumental noise but also from residual foregrounds from other processes and fields. The second equality comes from Eq. (13). These equations can then be used to write unbiased estimators of the power spectra:

$$\hat{C}_p^T = \frac{1}{Z_p^{11}} \left(\frac{1}{2l+1} \sum_m \|\hat{x}_p^1(m) \hat{x}_p^1(m)\| - b_p^{11} \right) \tag{20}$$

$$\hat{C}_p^E = \frac{1}{Z_p^{22}} \left(\frac{1}{2l+1} \sum_m \|\hat{x}_p^2(m) \hat{x}_p^2(m)\| - b_p^{22} \right) \tag{21}$$

$$\hat{C}_p^{TE} = \frac{1}{Z_p^{12}} \left(\frac{1}{2l+1} \sum_m \|\hat{x}_p^1(m) \hat{x}_p^2(m)\| - b_p^{12} \right) \tag{22}$$

From the unbiased estimators, one can readily compute the covariances of the various power spectra

$$\text{Cov}(\hat{C}_p^T) = \frac{2}{2l+1} (C_p^T Q_p^{11} / Z_p^{11})^2 \tag{23}$$

$$\text{Cov}(\hat{C}_p^E) = \frac{2}{2l+1} (C_p^E Q_p^{22} / Z_p^{22})^2 \tag{24}$$

$$\text{Cov}(\hat{C}_p^{TE}) = \frac{1}{2l+1} \frac{((Q_p^{12})^2 (C_p^{TE})^2 + Q_p^{11} Q_p^{22} C_p^T C_p^E)}{(Z_p^{12})^2} \tag{25}$$

Given the instrumental noise and the expected level of foregrounds, Eqs. (23), (24), and (25) can be used to estimate the precision with which the power spectra of various quantities can be determined. In the next section, we use the specifications of future experiments MAP and PLANCK to estimate the fractional errors on the power spectra. In calculating the covariances, we have assumed all the processes—

4 *Bouchet et al.*

CMB and foregrounds—to be Gaussian. If a fraction of sky, f_{sky} , is covered then the corresponding expressions for the covariances can be obtained by dividing the equations (23), (24), and (25) by f_{sky} . Throughout this paper we assume complete sky coverage, ie. $f_{sky} = 1$.

3 POLARISED FOREGROUNDS

The most dominant Galactic polarised foregrounds are expected to be the polarised components of synchrotron and dust. In addition, it is possible that the free-free emission is also polarised at 10% level, which could be a further deterrent to extracting the CMB polarisation. We neglect the possibility of polarised free-free emission in this paper (for more details see Keating *et al.* 1997).

The galactic synchrotron radiation originates from the interaction of cosmic ray particles with the galactic magnetic field and is known to dominate the galactic radio emission for frequencies ≤ 10 GHz. In theory, this radiation can be $\simeq 70\%$ polarised, for the observed energy spectrum of the cosmic ray particles (Rybicki & Lightman 1979). However, because of the cancellation due to incoherent addition of polarised component along any line of sight, Faraday depolarisation, and non-uniform magnetic fields, the true polarised percentage is observed to be $\simeq 40\%$ with a dependence on galactic latitude (Burn 1966; Spoetra 1984). The galactic emission in FIR and millimeter wavelengths is dominated by dust emission. The dust particles align themselves with the interstellar magnetic, and because the dust particles are not spherical the resulting FIR and millimeter emission is polarised (Hildebrand & Dragovan 1995).

Polarised dust : The Galactic dust is seen to be polarised at a small level ($\lesssim 10\%$). This is likely to be the major foreground at frequencies at which the PLANCK HFI will operate. Though there exist no observations of polarised dust at high Galactic latitudes, it is possible to model this emission using observations at smaller Galactic latitudes. Prunet *et al.* (1998) modelled this distribution and computed the power spectra of polarisation and temperature-polarisation cross-correlation. They showed that the relevant power spectra can be fitted as:

$$C_E^{dust}(\ell) = 8.9 \times 10^{-4} \ell^{-1.3} (\mu\text{K})^2 \quad (26)$$

$$C_B^{dust}(\ell) = 1.0 \times 10^{-3} \ell^{-1.4} (\mu\text{K})^2 \quad (27)$$

$$C_{ET}^{dust}(\ell) = 1.7 \times 10^{-2} \ell^{-1.95} (\mu\text{K})^2. \quad (28)$$

These power spectra are normalized at 100 GHz. They correspond to Galactic latitudes between 30° and 45° and are taken here as representative of the all sky average (for more details on this and other related issues, see Prunet *et al.* 1998). The dust emissivity is assumed to be proportional to ν^2 with a temperature of 17.5 K (Boulangier *et al.* 1996). For comparison, we recall that the temperature power spectrum at 100 GHz can be fitted by (BG98):

$$C_T^{dust}(\ell) = 176 \ell^{-3} (\mu\text{K})^2 \quad (29)$$

Polarised Synchrotron emission: This foreground will greatly undermine the performance of MAP and PLANCK LFI in the detection of CMB polarisation. The existing maps of polarised component of Galactic synchrotron shows this emission to be polarised at a level between 20 to 60%,

depending on the Galactic latitude, at radio frequencies ≤ 1.4 GHz (Spoetra 1984). These can be extrapolated to millimeter wavelengths using the frequency dependence of synchrotron emission (Lubin & Smoot 1981). However, such a procedure is fraught with uncertainties: (1) The synchrotron spectrum is not well known up to millimeter frequencies (for recent attempts to measure the spectrum up to 10 GHz see Platania *et al.* 1997), (2) At low frequencies (≤ 1.4 GHz) the polarised emission is not optically thin because of Faraday depolarisation. This means that the observed emission suffers from substantial depolarisation (and also the spatial distribution is affected because of the rotation of the polarisation axis). The Faraday depolarisation is proportional to ν^{-2} and becomes negligible at millimeter wavelengths. Therefore, the degree of polarisation at these frequencies is expected to be higher; in addition it will have a different spatial distribution. So the existing data needs to be corrected for these effects when an extrapolation to higher frequency is performed. It is not easy to do so with the present data. For the lack of data, we assume the synchrotron emission to be polarised at 44% level with the same spatial distribution (ℓ -dependence) as the unpolarised emission. We assume both E and B mode power spectra to correspond to this level of polarisation. It is probably justified because the modelling of dust polarised emission also shows comparable emission for these mode. Furthermore, we assume perfect cross-correlation between E -mode polarisation and temperature. This is likely to be the case because both the polarised and unpolarised emission depend on the square of the magnetic field (its component in the plane of the sky) and the emission at high Galactic latitudes is mostly dominated by one structure. We obtain:

$$C_E^{syn}(\ell) = 0.2 \times C_T^{syn}(\ell) \quad (30)$$

$$C_B^{syn}(\ell) = 0.2 \times C_T^{syn}(\ell) \quad (31)$$

$$C_{ET}^{syn}(\ell) = 0.44 \times C_T^{syn}(\ell) \quad (32)$$

where

$$C_T^{syn}(\ell) = 4.5 \ell^{-3} (\mu\text{K})^2 \quad (33)$$

at 100 GHz (BG98). One of the aims of taking high level of synchrotron polarised emission and perfect cross-correlations is to consider the 'worst possible' case for the performance of MAP and LFI. This case should be contrasted with the CMB case in which the cross-correlation is $\simeq 1/3$ of the perfect cross-correlation. And therefore the assumed perfect cross-correlation in any foreground means that the total signal is biased in favour of the foreground and would make the extraction of CMB cross-correlation more difficult. However, an important goal is also to ask how well can these foregrounds be extracted using the same experiment that attempts to measure the CMB polarisation. We address this question in a later section. As mentioned above, the free-free emission can also be polarised at a small level but for the assumed level of synchrotron emission it will be sub-dominant to it at all frequencies.

In Fig. 1, we compare the expected CMB E and ET signal with the assumed level of foregrounds. The CMB signal dominates the foregrounds for frequency channels between 44 GHz and 217 GHz. The lower frequency channels of MAP (22 and 30 GHz) and LFI (30 GHz) and the higher frequency

channels of HFI (545 GHz) will be dominated by polarised synchrotron and dust, respectively; these channels will help in an accurate determination of these foregrounds.

Recently, it was argued by Draine and Lazarian (1998) that a part of galactic foreground between 10 and 100 GHz could be contributed by non-thermal emission from rotating dust grains. If this emission is polarized at the same level as we assume in this paper (Eq. 28) then it could add to the polarised galactic emission. However, this emission is subdominant to the polarised synchrotron emission we assume in this paper. And therefore we neglect the effect of spinning dust particles in our discussion in this paper.

Apart from the polarised foreground and in addition to the Galactic unpolarised foregrounds—dust, free-free, and synchrotron—we include several other extragalactic unpolarised foregrounds in our study: The thermal Sunayev-Zeldovitch effect from clusters of galaxies, the infra-red point sources, and the radio point sources (for details see Bouchet & Gispert 1998a). We do not consider any extragalactic polarised foregrounds.

4 EXTRACTION OF POLARISED SIGNAL

Quality factors. As mentioned in the last section, a relevant quantity for determining the merit of signal extraction is the ‘quality factor’ (Eq. (13)). The quality factors for temperature and E -mode polarisation are shown in Figs. (2) and (3) for various processes. It should be noted that in these figures we only show the quality factor for unpolarised synchrotron and dust though we include several other unpolarised Galactic and extragalactic foregrounds in our analysis (see §3). Throughout this and the next subsection, we take the underlying models for calculating various power spectra to be a variant of Λ CDM model with $n_s = 1$, the ratio of scalar to tensor quadruple $T/S = 0$ (no tensor signal), and the optical depth the last scattering surface $\tau = 0.1$. Finite optical depth to the last scattering surface enhances the polarisation signal for $\ell \lesssim 10$, a part of the spectrum which is of great interest for breaking degeneracies between various cosmological parameters (for details see Zaldarriaga, Spergel, & Seljak 1997). Throughout this paper, we use the CMB Boltzmann code CMBFAST to generate CMB fluctuations (Seljak & Zaldarriaga 1996).

As expected, the temperature signal can be extracted far more cleanly than the polarised signal. The quality factor for the extraction of CMB drops exponentially as the ℓ approaches the effective beam width of the respective experiment. Another noticeable feature in temperature quality factors for various experiments is that the spatial distribution of Galactic dust emission can be discerned almost as well as the CMB signal using PLANCK HFI. This is largely owing to the presence of polarised channel at 545 GHz. The signal at these channels will be dominated by Galactic dust emission; and they have sufficiently low noise levels and high enough angular resolution to allow a good determination of the power spectra of the dust emission up to $\ell \simeq 1000$. This should be contrasted with the extraction of unpolarised synchrotron emission, which is one of the dominant contaminant for $\ell \leq 90$ GHz. Unfortunately neither MAP nor LFI can extract this signal well. It is because (a) it does not dominate the signal at any frequency of either MAP or LFI (b) the

signal is the strongest in the lowest resolution channels, and (c) the unpolarised synchrotron and Galactic free-free emission have very similar spatial distribution (assumed to be the same in this paper) and nearly the same frequency dependence, which makes it difficult to extract either of them.

The oscillating nature of quality factors for CMB polarisation attests to the fact that the signal is barely above the noise level. Another important thing to notice in the figures is the quality of extraction of processes like the polarised component of dust and synchrotron. For HFI, the polarised dust can be extracted better than the CMB for much of the ℓ -range. As in the temperature case, it is possible because of the presence of a polarised channel at 545 GHz. Equivalently, the lowest frequency channels of MAP and LFI serve as templates for polarised synchrotron. It should be noted that the synchrotron polarised component can be extracted much better than its unpolarised counterpart, because, whereas the former dominates all other signals at the lowest frequency channels of MAP and LFI, the latter, as discussed above, doesn’t dominate the total signal at any frequency, at least in our modeling.

We shall see below how the information on quality factor translates into errors on power spectra for various processes.

4.1 Errors on power spectra

We use Eqs. (23), (24), and (25) to estimate the fractional errors in the extraction of the CMB E -mode and TE cross-correlation power spectra. The results are shown in Figs.(4), (5), and (6) for the specification of various experiments. For comparison, we also plot the expected errors using the best channel (90 GHz channel for MAP, 100 GHz channel for LFI, and 143 GHz channel for HFI and full PLANCK) and the combined sensitivity of all the channels of each experiment (Bond *et al.* 1997).

For temperature signal, all the experiments give similar results for $\ell \leq 300$. It is expected as the signal of temperature fluctuation is so much above the noise level for all the experiments in this ℓ -range that additional sensitivity does not lead to additional precision in power spectrum estimation. The only source of error in this ℓ -range is cosmic variance which is obviously independent of the experiment. This information could also be gleaned from the quality factor plots. For $\ell \geq 300$, the extraction of temperature signal depends on the relative beam widths of relevant channels of various experiments. As expected, HFI performs best because it will have channels with $5'$ resolution; it is followed in performance, in that order, by LFI and MAP. It should be noted that the results using Wiener filtering generally lie between the performances of best channel and combined sensitivity.

Unlike the temperature fluctuations, the extraction of polarisation and temperature-polarisation cross-correlation depends sensitively on the pixel noise, as is evident from comparison between fractional errors on these quantities for various experiments. (The sharp spikes in ET plots is not a property of the extraction error but merely indicate that the signal vanishes at these values of ℓ in the underlying theoretical model.) The performances of LFI and HFI are similar for $\ell \lesssim 600$ largely because of comparable polarised sensitivity of the 100 GHz LFI and 143 GHz HFI channels.

6 *Bouchet et al.*

For larger ℓ , HFI performs better because of its higher angular resolution. Both these experiments should extract both the E-mode power spectrum and ET cross-correlation to 20–30% precision, i.e. signal-to-noise, $(C_\ell/\sqrt{\text{Cov}(C_\ell)})$, of 4–5, for $50 \lesssim \ell \lesssim 1000$. The signal-to-noise is much smaller at larger scales, apart from cosmic variance, because the CMB signal becomes comparable to both foregrounds and pixel noise. A comparison with the results from the combined sensitivity of all channel shows that the presence of foregrounds degrade the signal extraction by a factor ≤ 2 for much of the ℓ range.

From the figures, it is clear that MAP is hampered not only by foregrounds but also by its sensitivity. If the foregrounds were neglected the combined sensitivity of all its channels might enable a marginal detection of this signal. However, our analysis shows that the presence of foregrounds will degrade this detection by a factor $\simeq 4$, and the resultant fractional errors on E and ET cross-correlation power spectra will be $\geq 300\%$ in most of ℓ -range except $\ell \leq 10$. And therefore it seems unlikely that MAP could give a positive detection of either E and ET signal for individual modes.

Band-Power estimates: A way to reduce the 'noise' further is by considering band-power estimates around a given ℓ (see Bond 1996 for relevant definitions). Band power taken over a logarithmic interval of $\Delta\ell/\ell$ results in the reduction of errors by a factor of $\sqrt{\Delta\ell}$ around any ℓ . In Figs (7) and (8), expected 1σ measurements are plotted for various experiments, with band powers taken over a logarithmic interval of 20%, i.e. $\Delta\ell/\ell = 0.2$ for PLANCK HFI and LFI. As is clearly seen in the pictorial representation of these figures, LFI and HFI should make a fairly accurate detection of E and TE power spectra for $\ell \lesssim 750$. For MAP these estimates show that the errors for ET signal drop to $\lesssim 100\%$ near the Doppler peak at $\ell \simeq 300$.

It should be borne in mind that in the absence of any data on the power spectrum of polarised synchrotron we took the synchrotron power spectrum to have the same shape as the temperature power spectrum with 44% polarisation and a perfect cross correlation between E and T . By reducing the level of synchrotron foreground and the ET cross-correlation it should be possible to get lower errors. On the other hand, a higher level of polarised synchrotron should allow a better extraction of synchrotron itself, which might be subtracted using methods other than Wiener filtering. Therefore, there is trade-off between a small and large assumed level of foregrounds: a sub-dominant foreground will give smaller formal errors on the extraction of CMB polarisation but these foregrounds themselves will be elusive, thereby making it harder to quantify the errors; on the other hand, a larger foreground can be detected and probably subtracted more efficiently using, for instance, its non-Gaussian nature. These considerations makes it worthwhile to quantify the errors on foreground extraction.

4.2 Extraction of polarised foregrounds

One of the important goals of future multi-frequency experiments is to *detect* and subtract the foregrounds which hinder the determination of CMB signal. At present one has to extrapolate spectral information on various foregrounds from radio and FIR wavelengths to millimeter and sub-millimeter

wavelengths at which the CMB experiments operate. A similar extrapolation is required on the spatial distribution of foregrounds. For instance, the synchrotron spectrum is determined only for $\nu \lesssim 10$ GHz (Platania *et al.* 1997) while the spatial information is known for angular scales $\geq 0.5^\circ$ from the existing all-sky maps (Haslam *et al.* 1981). While dust maps are available with an angular resolution of $5'$ one needs to extrapolate the dust spectrum from $60 \mu\text{m}$ to millimeter wavelengths for a comparison with the CMB signal (Neugebauer *et al.* 1984). It has been pointed out that such an extrapolation, though useful, might result in large errors in a high-sensitivity CMB experiment (Brandt *et al.* 1994). Therefore, it is of paramount importance to determine the spectrum and spatial distribution of the foregrounds from the same experiment which attempts to measure the CMB anisotropies.

As already pointed out in the discussion on quality factors, polarised foregrounds from dust and synchrotron have a very good chance of being extracted as well as the CMB signal from future experiments. The basic requirement for extracting a process well is that it dominates the total signal at least one frequency of the experiment. Both the future experiments MAP and PLANCK will have frequency channels which fulfill this condition—MAP's two lowest frequency channels, centered at 22 and 30 GHz, and LFI's 30 GHz channel are likely to be dominated by polarised synchrotron; the 545 GHz channel of PLANCK will act as a template for polarised dust. In Figs. (9) and (10) we plot the fractional error on the power spectra of various Galactic polarised foregrounds. The polarised component of dust can be extracted even better than the CMB using HFI because of its 545 GHz channel. Similarly, the presence of the lowest frequency channel on MAP and LFI should enable one to extract the synchrotron signal for $\ell \leq 100$. It should be noticed that for all the experiments the fractional errors on ET cross-correlation are larger than the E power spectrum. It is because the ET cross-correlation of foregrounds is mixed with a relatively large CMB ET cross-correlation signal and therefore does not dominate the total signal as the E -mode foreground polarisation. Another noticeable feature of the figures is that MAP performs as well or even better than LFI and PLANCK in extracting the polarised component of synchrotron. It is because MAP has the lowest frequency channel at 22 GHz. Therefore, despite lower sensitivity, MAP has better frequency coverage at frequencies which are dominated by polarised synchrotron signal.

It should be pointed out that the precision of extraction of a given process depends crucially on the other competing processes. For instance, the unpolarised component of synchrotron cannot be extracted as well the unpolarised component not only because the unpolarised component never dominates the total signal at any frequency but also because it is very difficult to extract it from a comparable level of the free-free signal. Therefore, the quality of extraction of synchrotron polarisation shall depend quite sensitively on the presence of other sources of polarised foreground like polarised free-free emission or the extragalactic radio sources which are seen to be polarised at $\lesssim 20\%$ level (Saikia & Salter 1988). The dust polarised signal, however, is unlikely to be affected as there are no known sources of polarised foregrounds in the high frequency range covered by HFI,

Multi-frequency Wiener filtering of CMB data with polarisation 7

except infra-red point sources which might be polarised but will affect the signal only for $\ell \geq 1000$ (Toffolati *et al.* 1997).

4.3 Detection of B-mode polarisation

An unambiguous way to infer the presence of gravitational waves in the early universe is through the detection of B -mode polarisation (Seljak 1997, Kamionkowski & Kosowsky 1997, Seljak & Zaldarriaga 1997). (Gravitational lensing can generate a B -mode signal from a purely E -mode primary input. However, this signal is weak and peaks around $\ell \simeq 1000$ (Zaldarriaga & Seljak 1998, Bernardeau 1998). We neglect it in this paper.) This signal is much smaller than the E -mode polarisation and is negligible for $\ell \gtrsim 100$, but it is potentially detectable because of the high sensitivity of PLANCK. We plot the fractional errors on this quantity in Fig. (11) for the specifications of PLANCK. The base model is tilted CDM with the scalar index $n_s = 0.9$, the tensor index $n_t = -0.1$, and ratio of tensor to scalar quadrupole $T/S = 0.7$. This signal is barely above the noise level and is comparable to the foreground contamination (Prunet *et al.* 1998). However, Fig. (11) suggests that it might be possible to get a marginal detection with PLANCK at low ℓ .

A noteworthy feature of the B -mode detection is that the Wiener filtering result is quite comparable to the performance of the combined sensitivity of all the channels. This is largely because the B -mode signal does not correlate with any other signal and is therefore free of errors coming from cross-correlations with foregrounds of other fields (T and E). Our results suggest that we expect the answer to lie between the case of best channel and the combined sensitivity of all the channels. With band-power estimates with a 20% logarithmic band, the errors drop to $\leq 25\%$ for $20 \leq \ell \leq 100$. These are shown in Fig. (12).

Also, as seen in Fig. (11), the B -mode dust polarisation can be extracted with much better precision than the CMB signal. It is because though the CMB B -mode signal is more than an order of magnitude below the E -mode signal, we took them to be comparable for foregrounds. This would mean that the B -mode foregrounds will dominate the signal at most of the frequencies of the future experiments, and therefore can be extracted better than the CMB signal. The synchrotron B -mode signal, however, is seen to be much harder to extract.

5 CONCLUSION AND DISCUSSION

We devised a multi-frequency Wiener filtering method to consider the effect of Galactic polarised foregrounds on the detection of CMB E -mode polarisation and ET cross-correlation using future CMB missions. Our results can be summarized as:

(i) The foregrounds can be subtracted well enough for the LFI and HFI aboard PLANCK to detect the E and ET signal with signal-to-noise $\simeq 2-10$ for most of the ℓ -range in $50 \leq \ell \lesssim 1000$.

(ii) The foregrounds are likely to greatly undermine the performance of MAP. It seems unlikely that MAP could detect either E or ET signal for individual modes. However,

by taking band-power estimates with a 20% logarithmic interval, noise levels reduce sufficiently to allow a marginal detection of the ET signal near $\ell \simeq 300$.

(iii) The power spectra of E -mode polarised dust can be extracted for $\ell \lesssim 1000$ range using PLANCK HFI with signal-to-noise between 1 and 10. The ET cross-correlation of this contaminant can be detected with signal-to-noise ≤ 2 for $100 \leq \ell \leq 1000$. The E -mode power spectrum of polarised synchrotron, on the other hand, can only be determined by either MAP and PLANCK LFI for $\ell \leq 100$. This suggests that both MAP and PLANCK have a fairly good chance of determining the polarised foregrounds which are expected to hamper their performances in the detection of the CMB polarisation, at least for a small range of ℓ .

(iv) The B -mode polarisation, which unambiguously establishes the presence of stochastic gravitational waves from the inflationary era, can be detected with signal-to-noise $\simeq 1$ by PLANCK for $\ell \lesssim 100$. However, band-power estimates with a 20% logarithmic band will enable its detection with signal-to-noise $\simeq 2-4$ for $20 \leq \ell \leq 100$.

Another possible way to detect very small signals (E and ET signal with MAP and B signal with PLANCK) is to image a small fraction of the sky at high Galactic latitudes for longer periods. It is expected that PLANCK will image around 1% of the sky at high Galactic latitudes for periods 5–6 times the all sky average. One advantage of this approach is that foreground level at high Galactic latitudes is much smaller than the all sky average (e.g. dust emission is smaller by nearly a factor of 10 at Galactic latitudes north of 70° as compared to the all sky average we use in this paper). However, this will increase the covariance of power spectra by a factor of $\sqrt{f_{\text{sky}}}$. In light of our results one could ask whether it is preferable to deep-image a part of the sky with small foregrounds or one should decrease the covariance by covering a larger fraction of the sky, albeit with higher foreground levels. It is seen from Figs 5 and 6 that the expected errors on the power spectra of ET and E are, for $\ell \simeq 100$, a factor of 6 more than the best performance of MAP without foregrounds. It might be possible in this case to gain at least a factor of 2 (in addition to sensitivity gained by decrease in pixel noise from longer integration time) by imaging 10% of the sky at higher Galactic latitudes where the foreground level is expected to be much smaller. However, this is not the case for the detection of B -mode polarisation by PLANCK. As seen in Fig 11, Wiener filtering extracts the signal almost as well as one could get using the combined sensitivity of all the channels. This means that if 1% of the sky is integrated for a period $\simeq 5$ times more than the all sky average, the fractional error will only increase by a factor of $\simeq 4$ because a decrease in foreground level will not affect the fractional errors.

In going from Eqs. (22) to Eqs. (23), (24), and (25), we assumed the foregrounds to be Gaussian, i.e., the 4-point correlation function was assumed to be expressible as a combination of 2-point functions only. This assumption is erroneous for the foregrounds. The irreducible 4-point function from foregrounds can add to the covariances thereby enhancing the errors. We cannot quantify this increase within the framework of this work. However, as pointed out above some of the frequency channels in the future experiments will be dominated by foregrounds. A direct analysis of these maps

8 *Bouchet et al.*

is likely to reveal the non-Gaussian nature of foregrounds, which could then be used to quantify errors on CMB extraction.

Dependence on input model : The results presented in the paper obviously depend on the choice of model chosen for generating the CMB fluctuations. We used a variant of CDM model with reionization for the E and ET extractions. Reionization suppresses anisotropies at small angular scales by $\exp(-2\tau)$, which is not a major effect for $\tau = 0.1$ that we choose. The most important effect of reionization is to generate new polarisation anisotropies at $\ell \simeq 2-30$ depending on the optical depth. In the absence of reionization, the signal will be smaller by more than an order of magnitude for $\ell \lesssim 15$. Therefore, the validity of our results will be very sensitive to the underlying model for $\ell \leq 15$.

The detection of polarisation anisotropies at smaller scales should not depend so much on the choice of model, because most variants of Λ CDM models give comparable level of these anisotropies for $\ell \geq 20$. It should be true unless the optical depth to the large scattering surface is large ($\tau \simeq 1$) or that the large scale anisotropies are dominated by tensor anisotropies. However, the current data for temperature anisotropies already suggest that the first Doppler peak is even higher than predicted by Λ CDM model (Netterfield *et al.* 1997), which rules out the possibility of strong reionization and makes it difficult for the scalar anisotropies to be sub-dominant to contribution from gravitational waves. Therefore, it is safe to conclude that our predictions for $\ell \geq 20$ will not be seriously affected by a change in the underlying model.

For B -mode polarisation we considered a model with tensor to scalar quadruple ratio $T/S = 0.7$. As mentioned above, this will lower the contribution from scalar modes and therefore will reduce the signal-to-noise for the detection of E -mode polarisation. However, the B -mode signal is roughly proportional to the value of T/S within the framework of inflationary models which require $T/S \simeq -7n_T$. As shown above, the B -mode foregrounds can be subtracted quite efficiently and for this model the signal-to-noise for CMB B -mode signal is $\simeq 2-4$. Therefore, it might be possible to detect a signal with a value as small as $T/S \simeq 0.2-0.3$.

The Wiener filtering method assumes *a priori* knowledge of the power spectra of CMB and foregrounds as well as the frequency dependence of foregrounds. Therefore, the error of extraction using this method does not include the error in evaluating these input quantities. Future experiments will make multi-frequency maps with millions of pixels. This will make it difficult to apply the usual maximum likelihood technique to extract various power spectra. Fast methods for tackling this problem are currently being developed (Oh *et al.* 1998). In future, it should become feasible to quantify errors on the extraction of the power spectra from high resolution multiple frequency maps. It should then be possible to revise our estimates of the errors.

REFERENCES

- Bennett, C. L., *et al.* 1996, ApJ, 464, L1
 Bernardeau, F., private communication
 Bond, J. R., Efstathiou, G., & Tegmark, M. 1997, MNRAS, 291, 33
 Bond, J. R. 1996, Observations of Large-Scale Structure in the universe, Ed. Schaeffer, R., Les Houches, Elsevier Science Publishers
 Bouchet, F. R., Gispert, R., & Puget, J.-L. 1995, In "Unveiling the Cosmic Infrared Background", AIP Conference Proceedings 348, Baltimore, Maryland, USA, E. Dwek, editor, pages 255-268
 Bouchet, F. R. & Gispert, R. 1998a, in preparation
 Bouchet, F. R. & Gispert, R. 1998b, in preparation
 Bouchet, F. R., Gispert, R., Boulanger, F. & Puget, J. L. 1996, Proceedings of the 16th Moriond Astrophysics meeting "Microwave Background Anisotropies", Les Arcs, France, Eds. F.R. Bouchet, R. Gispert, B. Guiderdoni, & J. Trân Thanh Vân, Editions Frontières
 Boulanger, F., *et al.* 1996, A & A, 312, 256
 Brandt, W. N., *et al.* 1994, ApJ, 424, 1
 Burn, B. J. 1966, MNRAS, 133, 67
 Draine, B. & Lazarian, A. 1998, ApJ, 494, L19
 R. Gispert & Bouchet, F. R. 1996, Proceedings of the 16th Moriond Astrophysics meeting "Microwave Background Anisotropies", Les Arcs, France, Eds. F.R. Bouchet, R. Gispert, B. Guiderdoni, & J. Trân Thanh Vân, Editions Frontières
 Haslam, C. G. T., *et al.* 1981, A & A, 100, 209
 Hildebrand, R. H. & Dragovan, M. 1995, ApJ, 450, 663
 Jungman, G., Kamionkowski, M., Kosowsky, A., Spergel, D. N. 1996, Phys. Rev. D, 54, 1332
 Kamionkowski, M. & Kosowsky, A. 1997, astro-ph/9705219
 Keating, B., Timbie, P. Poinarev, A., & Steinberger, J. 1997, astro-ph/9710087
 Lineweaver, C. H. & Barbosa, 1998, ApJ, 496, 624L; see also <http://www.sns.ias.edu/max/cmb/experiments.html>
 Lubin, P. & Smoot, G. 1981, ApJ, 245, 1
 Neugebauer, G. *et al.* 1984, ApJ, 278, L1
 Netterfield, C. B., *et al.* 1997, ApJ, 474, 47
 Oh, S. P., Spergel, D. N., & Hinshaw, G. 1998, astro-ph/9805339
 Platania, P., *et al.* 1997, astro-ph/9707252
 Prunet, S., Sethi, S. K., & Bouchet, F. R., 1998, submitted for publication
 Rybicki, G. B. & Lightman, A. 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*, New York, Wiley
 Saikia, D., & Salter, C. 1988, ARA & A, 26, 93
 Seljak, U. 1997, ApJ, 482, 6
 Seljak, U. & Zaldarriaga, M. 1996, ApJ, 488, 1
 Smoot, G., *et al.* 1992, ApJ, 396, L1
 Spoelstra, T. A. T. 1984, A & A, 135, 238
 Tegmark, M. & Efstathiou 1996, MNRAS, 281, 1297
 Toffolatti, L., *et al.* 1997, MNRAS, in press (astro-ph/9711085)
 Zaldarriaga, M. & Seljak, U. 1998, astro-ph/9803150
 Zaldarriaga, M., Spergel, D. N., Seljak, U. 1997, ApJ, 488, 1
 Seljak, U. & Zaldarriaga, M. 1997, Phy. Rev. Lett. 78, 2054

Multi-frequency Wiener filtering of CMB data with polarisation 9

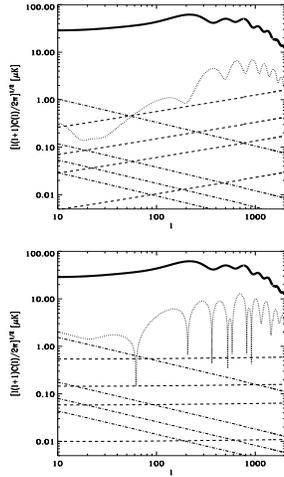


Figure 1. *First Panel* : The power spectrum of the expected E -mode CMB signal is shown along with the dust and synchrotron polarised foregrounds at different frequencies. The *dotted* line show the CMB E -mode power spectra. The *dashed* lines correspond to dust polarised emission (Eq. (28)) while the *dot-dashed* curves correspond to polarised synchrotron (Eq. (32)). The four lines for foregrounds give the expected level of contamination at 44 GHz, 100 GHz, 143 GHz and 217 GHz. The corresponding curves at these frequencies go from top to bottom (bottom to top) for synchrotron (dust) as the frequency is increased. The *thick solid* line gives the temperature power spectrum for the same underlying model, which is taken to be Λ CDM with $\tau = 0.1$. *Second Panel* : Same as the First Panel for ET cross-correlations.

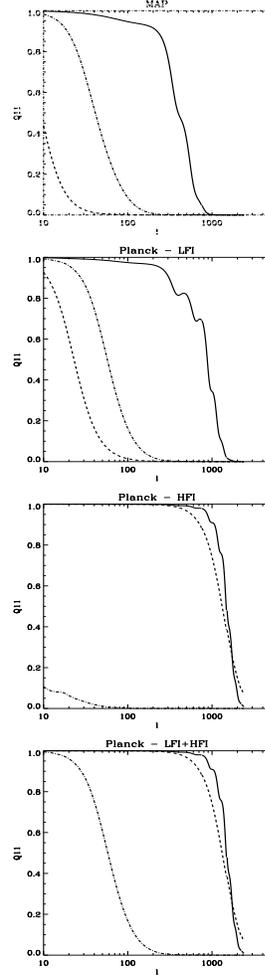


Figure 2. Quality factors for the temperature fluctuations. *Solid*, *dashed*, and *dot-dashed* lines stand for CMB, dust and synchrotron respectively. As can be seen by comparing the effective windows in the case of different experiments, despite its lower sensitivity MAP does as well as the LFI at recovering the synchrotron emission because of its larger frequency coverage; but since this emission is relatively weak, the LFI CMB transmission is better. Also note the improvement on the foreground recovery when the LFI and HFI are combined, although the CMB recovery is not improved by adding the LFI data.

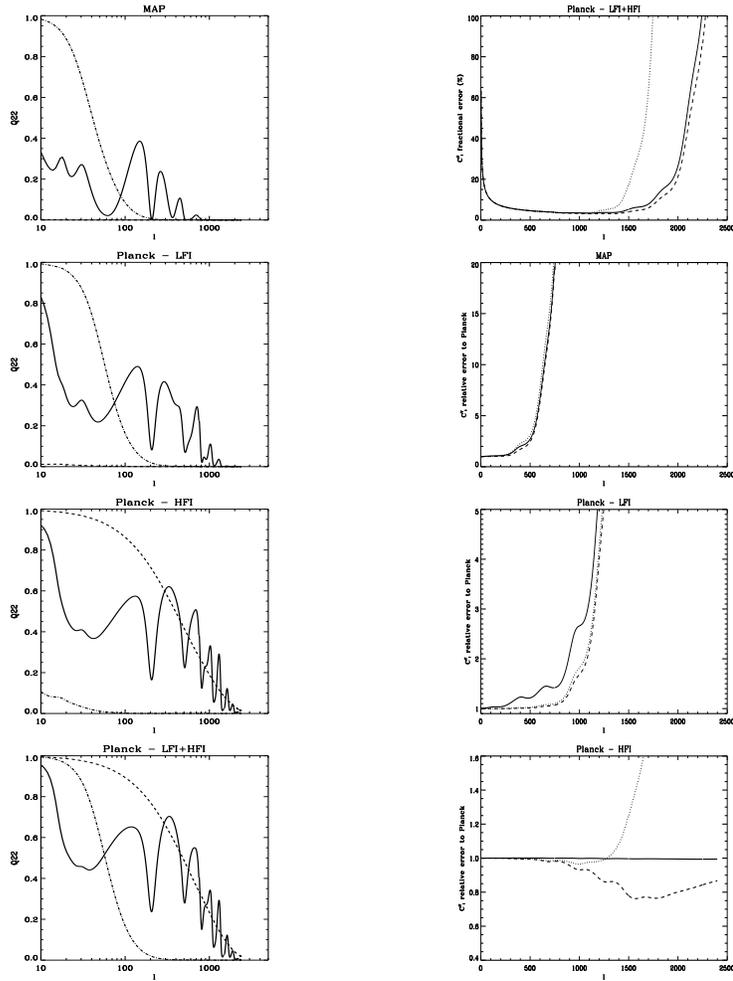
10 *Bouchet et al.*

Figure 3. Quality factors for the E -mode polarisation. *Solid*, *dashed*, and *dot-dashed* lines stand for CMB, dust and synchrotron respectively. Note that all the experiments extract the foregrounds better than the CMB for small ℓ . PLANCK HFI extracts the polarised dust better than the CMB at almost all ℓ . This suggests that polarised foregrounds are likely to be extracted as well or better than the CMB. Though this is partly due of our assumed level of foregrounds, this feature reflects the frequency coverage of these experiments

Figure 4. Relative fractional error on temperature power spectra. The first panel shows the expected performance of the full PLANCK mission in extracting this signal. The *Solid* line illustrates the Wiener filtering case, *i.e.* the foregrounds are included and subtracted using the Wiener filtering method described in the text. The *dotted* line corresponds to the case if the signal is extracted using only the best channel of PLANCK (143 GHz) neglecting all the foregrounds. The other panels show the performance of other experiments relative to the PLANCK-Wiener case (the *solid* line in the first panel). In addition to the Wiener and best channel case (the same line style as the first panel), we also show the errors using the combined sensitivity of all the channels (*dashed* line) for various experiments in the last three panels

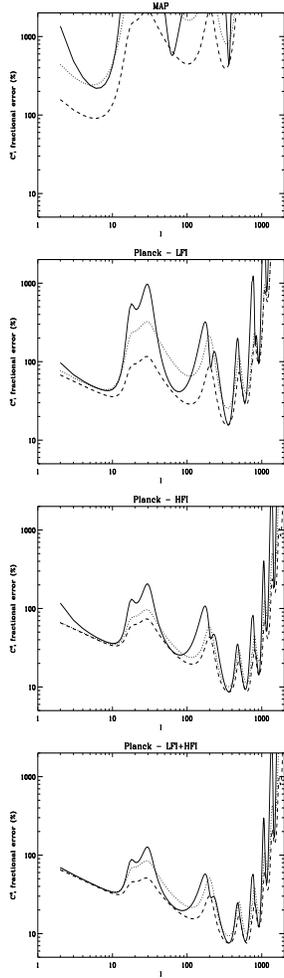


Figure 5. Fractional errors in extracting the E mode polarisation. The *solid*, *dotted*, and *dashed* lines correspond to the expected performances of Wiener filtering, best channel, and combined sensitivity of all the channels of a given experiment, respectively.

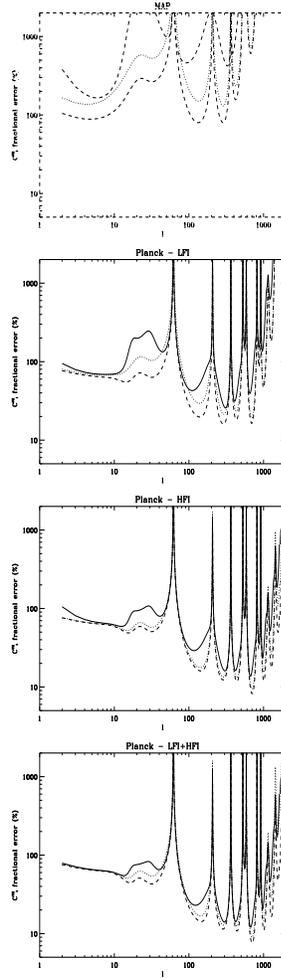


Figure 6. Same as Fig. 5 for the ET cross-correlation. The sharp spikes in the figure merely indicate the values of l at which the signal vanishes.

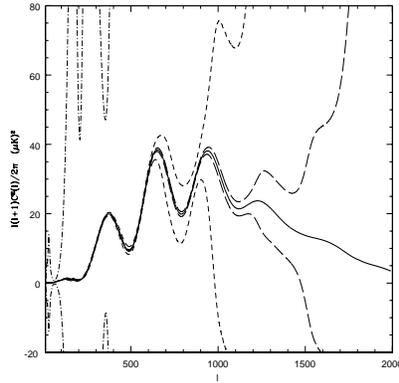
12 *Bouchet et al.*

Figure 7. *E*-mode band power estimates. We plot the *E*-mode signal for the underlying model (*solid* line) and show the expected 1σ measurements (*dashed*, *dotted* and *dot-dashed* line for HFI, LFI and MAP respectively) when band power with a logarithmic interval $\Delta\ell/\ell = 0.2$ is taken.

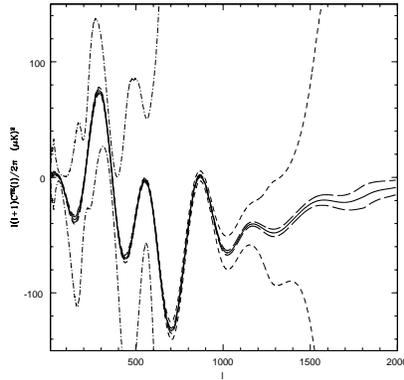


Figure 8. Same as Fig. 7 for the *ET* cross-correlation.

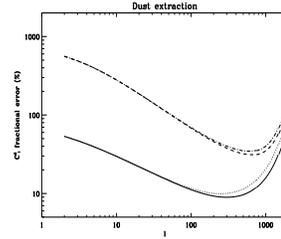


Figure 9. Fractional errors on the extraction of dust *E* and *ET* power spectra with HFI and full PLANCK. The lower two curves correspond to *E* power spectrum (*solid* and *dotted* lines are for HFI and PLANCK respectively) while the upper curves give the errors for *ET* cross-correlation, with the *dashed* line for PLANCK and the *dot-dashed* line for PLANCK HFI.

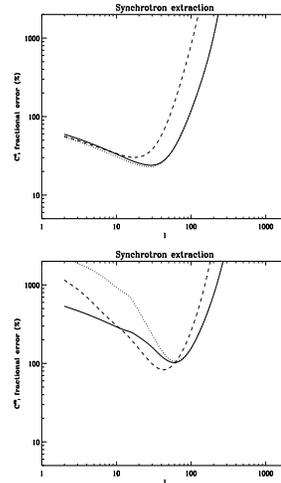


Figure 10. Extraction of synchrotron *E* (Left Panel) and *ET* (Right Panel) power spectra with LFI (*dotted* line), full PLANCK (*solid* line), and MAP (*dashed* line).

Multi-frequency Wiener filtering of CMB data with polarisation 13

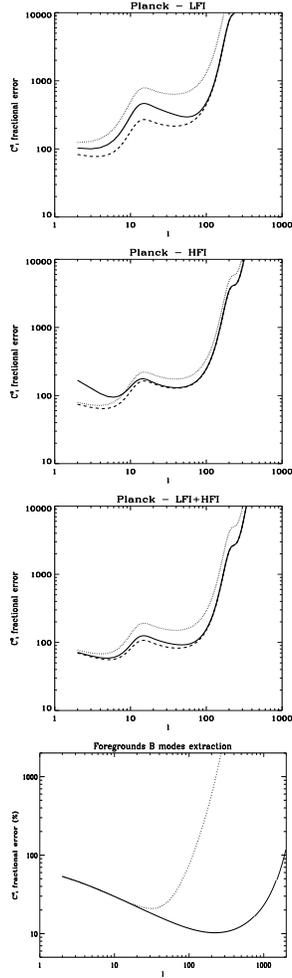


Figure 11. Fractional errors for B -mode polarisation are shown in the first three panels. The *solid*, *dotted*, and *dashed* curves correspond to Wiener, best channel, and combined sensitivity, respectively. The forth panel shows the corresponding errors in the extraction of the B -mode component of the polarised dust (*solid* line) and synchrotron (*dotted* line). The underlying model was taken to be a Λ CDM model with $n_s = 0.9$, $T/S = 0.7$, and $n_T = 0.1$.

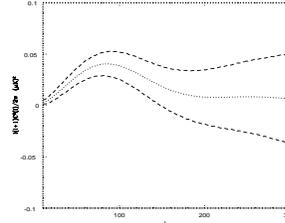


Figure 12. The CMB B -mode signal is plotted along with the expected 1σ measurements with band power taken with a logarithmic interval $\Delta\ell/\ell = 0.2$ for PLANCK.

Chapitre 4

Estimation des paramètres cosmologiques

4.1 Influence de la polarisation

4.1.1 Effet de la réionisation

L'influence des différents paramètres cosmologiques sur le spectre des anisotropies de température du FCM a été étudiée en détail dans ces dernières années (Hu et al. (1995); Hu & Sugiyama (1995); Hu & White (1996); White & Hu (1997); Hu & White (1997b)). Nous allons rappeler rapidement la façon dont les spectres de polarisation dépendent des paramètres cosmologiques (Zaldarriaga et al. (1997)). Tout d'abord il faut se souvenir que la polarisation du FCM est engendrée par les collisions Thomson des électrons avec les photons du FCM. Les spectres de polarisation sont donc très sensibles à l'histoire ionisée de l'univers. D'autre part, puisque la polarisation est engendrée par une interaction physique entre les électrons et les photons, elle est liée à un phénomène *causal* et son spectre de puissance ne peut être non nul que pour des échelles plus petites que l'horizon lors de la dernière diffusion¹. Or cette échelle angulaire, caractéristique des pics acoustiques du spectre, est approximativement de 1° . On s'attend donc à ce que toute la puissance soit concentrée dans les pics acoustiques (voir figure 4.1). En revanche, si l'univers subit une réionisation (due au flux UV des quasars ou des galaxies à grand z , voir chapitre 6), la dernière diffusion a lieu bien plus tard. L'échelle angulaire correspondant à l'horizon lors de cette dernière diffusion est alors bien plus

1. Ceci n'est qu'approximativement exact dans la mesure où des effets de projection peuvent néanmoins produire un peu de signal à des échelles plus grandes que l'horizon (en projection sur le ciel); cependant ce signal reste d'amplitude très limitée et tend rapidement vers 0 quand l'échelle augmente (voir Hu & White (1997a))

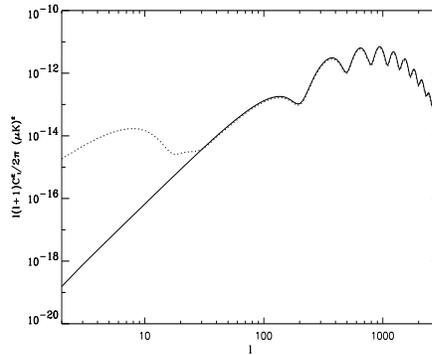


FIG. 4.1: Spectres de puissance des modes E de polarisation du FCM pour un modèle $sCDM$ standard (trait plein) et un modèle réionisé d'épaisseur optique $\tau = 0,1$ (pointillés). On peut remarquer la différence de puissance aux grandes échelles.

grande (jusqu'à une dizaine de degrés). Cela se traduit par un ajout de puissance dans le spectre de polarisation aux grandes échelles ($10 \lesssim \ell \lesssim 100$), illustré dans la figure 4.1. Cette sensibilité des spectres de polarisation à la réionisation est très importante car l'effet de la réionisation sur les spectres de température revient *grosso modo* à multiplier tout le spectre par le facteur $e^{-2\tau}$ (où τ est l'épaisseur optique Thomson à la recombinaison), et se confond donc avec un changement de normalisation globale du spectre. La mesure de polarisation devrait clairement différencier ces deux effets (Zaldarriaga et al. (1997)).

4.1.2 Modes magnétiques et paramètres inflationnaires

La levée de dégénérescence entre la normalisation du spectre des perturbations et l'épaisseur optique τ se répercute sur la précision de la mesure des paramètres inflationnaires tels que l'indice spectral des perturbations tensorielles n_T et le rapport des quadrupoles tensoriel et scalaire T/S . D'autre part, comme nous l'avons déjà mentionné dans les chapitres précédents, la présence de modes « magnétiques » de polarisation du FCM est un indicateur de la présence de perturbations tensorielles, indépendamment de tout modèle cosmologique. Leur mesure devrait ainsi contribuer à augmenter la précision de la mesure des paramètres inflationnaires tensoriels précédemment cités.

4.1.3 Pics acoustiques et paramètres cosmologiques

La mesure des spectres de polarisation devrait aussi contribuer à augmenter la précision de la mesure des paramètres cosmologiques tels que la constante de Hubble h ou bien la quantité de baryons Ω_b présente dans l'univers. En effet, à la différence des spectres de température qui résultent de l'addition de deux quantités oscillantes (reliées respectivement à la température effective et à la vitesse particulière du plasma) en quadrature de phase, les spectres de polarisation résultent uniquement des gradients de la vitesse à la surface de dernière diffusion (voir 1 et A) et présentent donc des « pics Doppler »² plus fins. Il faut néanmoins noter que le rapport signal sur bruit est nettement plus faible dans le cas de la polarisation, et l'on s'attend donc à ce que le gain de précision concernant h et Ω_b soit faible. C'est ce que nous verrons de manière plus quantitative dans la suite du chapitre.

4.2 Matrice de Fisher

4.2.1 Formalisme

Partons du problème général où l'on se donne un ensemble de données (regroupées dans un vecteur aléatoire \vec{x}) dont la distribution de probabilité $L(\vec{x}, \vec{\theta})$ dépend de manière connue d'un certain nombre de paramètres $\vec{\theta}$. Le but de l'exercice est de définir un estimateur des paramètres $\vec{\theta}$ (qui est donc une variable aléatoire puisque fonction des données) qui ait les propriétés d'être :

- non biaisé, c.-à-d. tel que $\langle \vec{\theta} \rangle = \vec{\theta}_0$ où $\vec{\theta}_0$ est la vraie valeur des paramètres,
- optimal, dans le sens où il minimise les variances $\Delta\theta_i^2 = \langle \theta_i^2 \rangle - \langle \theta_i \rangle^2$.

Malheureusement un tel estimateur n'existe pas toujours. Un certain nombre de théorèmes mettent néanmoins des contraintes sur la nature et la qualité des estimateurs des paramètres :

- i) Pour tout estimateur non biaisé on a $\Delta\theta_i \geq 1/\sqrt{F_{ii}}$,
- ii) S'il existe un estimateur non biaisé et optimal, alors il s'agit de l'estimateur qui maximise la vraisemblance $L(\vec{x}, \vec{\theta})$, ou une fonction de ce dernier,

2. Appelés également « pics de Sakharov », ils reflètent, dans le spectre de puissance, les oscillations acoustiques du plasma à la surface de dernière diffusion.

- iii) L'estimateur de maximum de vraisemblance est asymptotiquement non biaisé et optimal.

où l'on a défini

$$F_{ij} \equiv \left\langle \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle \quad (4.1)$$

qui est communément appelée matrice de Fisher ou matrice d'information. L'inverse de cette matrice est égale à la valeur moyenne de la matrice de covariance de l'estimateur de maximum de vraisemblance des paramètres, calculée au point $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$ (qui est, rappelons-le la vraie valeur des paramètres). Elle nous donne donc une idée raisonnable de la précision avec laquelle les paramètres pourront être mesurés. En réalité elle nous donne une limite inférieure de la valeur des erreurs³ commises lors de la mesure des paramètres. Il faut noter que si l'estimation de tous les paramètres θ_i se fait simultanément à partir des données, la borne inférieure sur l'erreur commise sur θ_i devient :

$$\Delta \theta_i \geq \sqrt{(F^{-1})_{ii}} \quad (4.2)$$

Les deux derniers théorèmes nous disent que dans la limite des grands ensembles de données (comme ce sera le cas pour le FCM) l'estimateur de maximum de vraisemblance apparaît comme un choix au pire quasi-optimal. C'est pourquoi les analyses bayésiennes connaissent tant de succès dans l'analyse des données du FCM (Gorski (1994); Stompor et al. (1995); Tegmark & Bunn (1995); Bunn et al. (1995) par exemple). L'avantage évident de la matrice de Fisher est qu'elle ne dépend que de la théorie sous-jacente et non pas d'une réalisation donnée.

4.2.2 Intervalles de confiance

Dans le cas où les données sont distribuées comme un champ gaussien, trouver le maximum de vraisemblance revient à minimiser le χ^2 . Supposons que la fonction de vraisemblance dépende de N paramètres, et que nous soyons situé au maximum de cette fonction. Si l'on permet aux paramètres de changer d'une quantité $\delta \vec{\theta}$ par rapport à la valeur optimale, on change le χ^2 d'une quantité égale à :

$$\Delta \chi^2 = \delta \vec{\theta}^\top \mathbf{F} \delta \vec{\theta} \quad (4.3)$$

où \mathbf{F} est la matrice de Fisher.

3. J'entends par erreur sur la mesure d'un paramètre θ_i l'écart type $\Delta \theta_i$ précédemment défini.

D'autre part un théorème (Press et al. (1986)) nous dit que si l'on fixe un sous-ensemble de $M \leq N$ paramètres et que l'on minimise la valeur du χ^2 sur les paramètres restant pour atteindre une valeur χ_M^2 , alors la fonction aléatoire $\Delta\chi_M^2 = \chi_M^2 - \chi_{min}^2$ est distribuée selon une loi de χ^2 à M degrés de liberté (χ_{min}^2 étant la valeur du χ^2 quand il est minimisé par rapport à tous les paramètres). Prenons le cas où $M = 1$, c.-à-d. que l'on fixe un des paramètres et que l'on minimise par rapport aux autres. Alors on trouve :

$$\delta\theta_1 = \pm \sqrt{\Delta\chi_1^2} \sqrt{(\mathbf{F}^{\perp 1})_{11}} \quad (4.4)$$

On trouve donc une relation entre les *intervalles de confiance* pour un paramètre et la matrice de Fisher inverse. Ceci peut se généraliser au cas de plusieurs paramètres. En effet supposons que nous fixions un sous-ensemble de $M \leq N$ paramètres, et que nous minimisons le χ^2 par rapport aux autres paramètres. Si l'on désire construire les ellipsoïdes de confiance de ces M paramètres, alors la procédure est la suivante :

- Il faut d'abord choisir une limite de confiance $p = 0,68$ ou $p = 0,95$ par exemple.
- Ensuite, il faut trouver la variation Δ du χ^2 telle que la probabilité qu'une variable aléatoire, distribuée selon une loi de χ^2 à M paramètres, soit inférieure à Δ égale p .
- Maintenant, il faut prendre parmi les éléments de la matrice inverse de Fisher ceux qui correspondent aux M paramètres sélectionnés. On définit ainsi une matrice de covariance projetée \mathbf{C}_M sur le sous-espace des paramètres que l'on veut étudier.

Alors l'équation de l'ellipsoïde de confiance (correspondant à une limite égale à p) s'écrit :

$$\delta\vec{\theta}'^{\dagger} \mathbf{C}_M^{\perp 1} \delta\vec{\theta}' = \Delta \quad (4.5)$$

où $\delta\vec{\theta}'$ correspond à une variation des paramètres sélectionnés.

4.3 Application au FCM

4.3.1 Cas du FCM seul

Considérons tout d'abord le cas où l'on a des données du FCM seul (provenant par exemple d'un canal à une fréquence est largement dominant de

sorte que l'on puisse négliger les contaminants autres que le bruit instrumental) auquel sont ajoutées un bruit instrumental gaussien. Nous considérerons alors comme les données les modes a_{lm} de l'expansion en harmoniques sphériques de la carte des anisotropies de température. Ces modes ont la propriété d'être de moyenne nulle, et de covariance diagonale :

$$C_{ij} = \delta_{ij} \left[C_\ell + w^{\perp 1} e^{\theta_b^2 \ell(\ell+1)} \right] \quad (4.6)$$

où $\theta_b = FWHM/\sqrt{8\ln 2}$ et $FWHM$ est la largeur à mi-hauteur du lobe instrumental (voir Knox (1995)). Dans l'hypothèse que la fonction de vraisemblance est gaussienne (ce qui est raisonnable à proximité de son maximum) on peut montrer que la matrice de Fisher prend la forme suivante (Tegmark et al. (1997b)) :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \text{trace}(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j) \\ \mathbf{A}_i &= C^{\perp 1} \frac{\partial C}{\partial \theta_i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dans notre cas, la matrice de Fisher prend donc la forme :

$$F_{ij} = \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \left[C_\ell + w^{\perp 1} e^{\theta_b^2 \ell(\ell+1)} \right]^{\perp 2} \frac{\partial C_\ell}{\partial \theta_i} \frac{\partial C_\ell}{\partial \theta_j} \quad (4.8)$$

dans le cas de données non polarisées.

Nous voyons dans ce cas simple que la précision de la détermination des paramètres cosmologiques dépend de la dérivée première du spectre de puissance par rapport à ces paramètres. Nous avons calculé ces dérivées numériquement en utilisant le code de Boltzmann CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga (1996)) par une méthode itérative qui permet de minimiser l'erreur numérique (une variante de la routine *dfridr* des *Numerical Recipes* - Press et al. (1986) -).

4.3.2 Cas des données filtrées

Dans cette section nous allons considérer le cas plus général de données polarisées ayant été pré-traitées par un filtrage de Wiener (voir chapitre 3). Rappelons rapidement les notations utilisées : Les données correspondant à différents champs i (température ou polarisation), mesurées à différentes fréquences ν , s'expriment dans l'espace des multipôles comme

$$y_\nu^i(\ell, m) = A_{\nu p}^{ij}(\ell, m) x_p^j(\ell, m) + b_\nu^i(\ell, m) \quad (4.9)$$

où \mathbf{A} est la matrice de réponse de l'instrument et \vec{b} correspond au bruit instrumental. L'estimateur du signal est choisi comme étant le résultat d'un filtrage linéaire des données :

$$\hat{x}_p^i = W_{p\nu}^{ij} y_\nu^j \quad (4.10)$$

Ces équations permettent de calculer le spectre de puissance de l'estimateur du signal :

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_p^i \hat{p}_{p'}^j \rangle &= (\mathbf{W}A)_{pp''}^{im} (\mathbf{W}A)_{p'p'''}^{jq} \langle x_{p''}^m x_{p'''}^q \rangle + W_{p\nu}^{il} W_{p'\nu'}^{jn} \langle b_\nu^l b_{\nu'}^n \rangle \\ &\equiv Q_{pp'}^{ij} \langle x_p^i x_{p'}^j \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

D'autre part la matrice de covariance des données polarisées s'écrit :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} Q^{11} C_T & Q^{12} C_{TE} \\ Q^{12} C_{TE} & Q^{22} C_E \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Pour le calcul de la matrice de Fisher, nous avons aussi besoin des dérivées des covariances par rapport aux paramètres cosmologiques :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta_i} = \sum_{X=T,E,ET,B} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial C(X)} \frac{\partial C(X)}{\partial \theta_i} \quad (4.13)$$

Les dérivées des covariances par rapport aux paramètres cosmologiques peuvent être calculées en utilisant l'équation 4.11. Il est très important de noter à ce stade que ces dérivées sont calculées en *laissant les filtres fixes* (voir la discussion à la fin du chapitre 3). En effet, au chapitre précédent, nous avons vu que la détermination des paramètres sous-jacents à la théorie (dans notre cas les paramètres cosmologiques) était indépendante et cependant compatible avec le filtrage de Wiener. Cela implique que dans l'hypothèse où l'on aurait calculé directement les paramètres sous-jacents les plus probables à partir des données, l'erreur sur la mesure des paramètres cosmologiques issue de cette analyse bayésienne directe serait égale à celle que l'on peut déduire des données filtrées, en prenant la valeur du filtre *au point le plus probable*⁴. Les expressions de ces dérivées sont données dans l'annexe B.

4.4 Résultats

4.4.1 Trois modèles «classiques»

Les intervalles de confiance à 68,3% (1σ) sont consignés dans les tables 4.1, 4.2 et 4.3 pour trois modèles cosmologiques «classiques», c.-à-d.

4. Le calcul de la variation des filtres par rapport aux paramètres interviendrait dans le calcul de « l'erreur sur l'erreur », autrement dit la covariance de la covariance des paramètres

TAB. 4.1: *Erreurs sur les paramètres d'un modèle CDM standard avec $\tau = 0, 1$. Les erreurs correspondantes sont montrées dans le cas de la meilleure voie seule en l'absence de contaminants.*

Paramètres	C_2	h	Ω_b	Ω_Λ	τ	n_s
Modèle	$796(\mu K)^2$	0.5	0.05	0.0	0.1	1.0
Wiener (PLANCK)	2.4 %	1.36 %	2.3 %	0.039	4.6 %	0.34 %
Meilleure voie (PLANCK)	2.1 %	1.06 %	1.82 %	0.03	3.74%	0.3 %
Wiener (HFI)	2.48 %	1.39 %	2.37 %	0.04	5.75 %	0.35 %
Meilleure voie (HFI)	2.1 %	1.06 %	1.83 %	0.03	3.75 %	0.3 %
Wiener (LFI)	3.81 %	2.26 %	3.72 %	0.067	10.3 %	0.54 %
Meilleure voie (LFI)	3.6 %	2 %	3.3 %	0.057	6.5 %	0.51 %
Wiener (MAP)	4.9 %	4 %	8.9 %	0.12	45.6 %	1.65 %
Meilleure voie (MAP)	6.3 %	4.5 %	10.7 %	0.13	43.5 %	1.76 %

trois modèles dont le spectre des perturbations initiales est invariant d'échelle. Les spécifications de ces trois modèles sont données dans ces mêmes tables. La table 4.1 donne les résultats pour un modèle CDM standard. Sont aussi donnés les résultats correspondant aux performances de la meilleure voie de chaque instrument, en l'absence de contaminants galactiques. On peut noter que les résultats sont très semblables dans les deux cas. Nous avons vu au chapitre 3 que la présence de contaminants (galactiques et extragalactiques) ne dégradait presque pas la mesure de la partie non polarisée du FCM ; ce qui semble expliquer la similitude des résultats obtenus dans le cas de la meilleure voie et du filtrage de Wiener. Néanmoins, la qualité de la mesure des paramètres C_2 et τ est intimement liée à la qualité de la mesure de la polarisation du FCM. Les résultats de la table 4.1 indiquent donc que la présence des contaminants de la composante polarisée du FCM n'affecte guère la précision de la mesure des paramètres cosmologiques. Il faut cependant ajouter que cette conclusion dépend du modèle cosmologique sous-jacent, et les deux autres modèles cosmologiques envisagés (4.2 et 4.3) permettront de la nuancer.

Dans la table 4.2 nous donnons les résultats pour un modèle cosmologique incluant la contribution des ondes gravitationnelles (modèle «tilté» d'indice spectral $n_s = 0, 9$). Nous pouvons voir que les erreurs obtenues sur la mesure de tous les paramètres ont augmenté. Cela s'explique par le fait que le paramètre additionnel T/S permet plus de liberté quant à la normalisation des spectres (voir Zaldarriaga et al. (1997)). Les erreurs obtenues pour les paramètres C_2 , h et Ω_b sont plus grandes que celles obtenues par Zaldarriaga et al. (1997) ; ceci s'explique d'une part par le fait que notre normalisation ($C_2 = C_2^S + C_2^T = 796(\mu K)^2$) soit inférieure à la leur, d'autre part par le

TAB. 4.2: *Erreurs sur les paramètres d'un modèle incluant des ondes gravitationnelles, avec ou sans les modes B de polarisation*

Paramètres	C_2	h	Ω_b	Ω_Λ	τ	n_s	n_t	T/S
Modèle	$796(\mu K)^2$	0.5	0.05	0.0	0.1	0.9	-0.1	0.7
Wiener (PLANCK)	8.7 %	1.6 %	2.7 %	0.045	5.5%	0.46 %	81 %	22.4 %
+ Modes B (PLANCK)	6.5 %	1.55 %	2.64 %	0.044	4.8%	0.43 %	57.1 %	17.5 %
Wiener (HFI)	9.4 %	1.63 %	2.8 %	0.05	7 %	0.47 %	87 %	24.1 %
+ Modes B (HFI)	7.7 %	1.6 %	2.7 %	0.05	6 %	0.45 %	70 %	20.6 %
Wiener (LFI)	9.8 %	5.3 %	8.6 %	0.15	11.3 %	1.65 %	91.6 %	32.4 %
+ Modes B (LFI)	9 %	4.6 %	7.5 %	0.13	9.6 %	1.42 %	83 %	28.2 %
Wiener (MAP)	12.3 %	22.3 %	40 %	0.67	52.5 %	7.5 %	91 %	91 %
+ Modes B (MAP)	12 %	20 %	36.5 %	0.60	46 %	7 %	90.4 %	81.6 %

fait que la présence de contaminants dégrade la mesure de la polarisation du FCM. D'autre part, la précision de la mesure des paramètres T/S , τ et n_T apparaît ici meilleure que dans Zaldarriaga et al. (1997). Ceci s'explique par le fait que nous avons pris des valeurs plus élevées de τ et T/S . Enfin, nous donnons le résultat incluant la mesure du signal de modes «magnétiques» (B) de polarisation. Bien que ce signal soit de très faible amplitude, et par conséquent très difficile à mesurer (voir chapitre 3), ce signal permet d'améliorer la précision de la mesure sur la plupart des paramètres envisagés, particulièrement les paramètres inflationnaires. En effet sa présence même est un traceur des ondes gravitationnelles dans les modèles d'inflation. D'autre part, les résultats de la table 4.2 montrent que la relation $T/S = -7n_T$, caractéristique des modèles d'inflation, peut être confirmée ou infirmée par PLANCK. En effet ces deux paramètres devraient être mesurés avec une précision $\lesssim 50\%$. Ceci dit nous insistons à nouveau sur l'influence du choix du modèle cosmologique sous-jacent sur ces résultats (comparer avec Zaldarriaga et al. (1997)).

La table 4.3 montre les résultats obtenus dans le cas où l'on ajoute le paramètre Ω_ν . Ce dernier est pris égal à 0,3 dans le modèle considéré. On peut voir que les erreurs sur la plupart des paramètres restent pratiquement inchangées par rapport à la table 4.2. Le paramètre Ω_ν lui-même devrait être mesuré avec une précision de l'ordre de $\simeq 10\%$ par PLANCK, mais semble ne pouvoir être mesuré par MAP. Ceci dit la corrélation des données du FCM avec celles des grandes structures devrait permettre une meilleure détermination de ce paramètre (Eisenstein et al. (1998)). Encore une fois j'insiste sur l'influence du modèle sous-jacent sur ces résultats. Si, par exemple, nous avons supposé que $\Omega_\nu = 0$ dans le modèle sous-jacent l'erreur sur la mesure aurait été beaucoup plus grande. De même, dans tous les modèles envisagés ici, nous avons supposé que $\Omega_\Lambda = 0$. Les erreurs sur les différents paramètres

TAB. 4.3: Erreurs sur les paramètres en incluant Ω_ν .

Paramètres	C_2	h	Ω_b	Ω_Λ	τ	n_s	n_t	T/S	Ω_ν
Modèle	$796(\mu K)^2$	0.5	0.05	0.0	0.1	0.9	-0.1	0.7	0.3
Wiener (PLANCK)	8.8 %	1.6 %	3 %	0.045	4.6%	0.95 %	82 %	24 %	10.5 %
+ Modes B (PLANCK)	6.4 %	1.45 %	2.65 %	0.04	4.3%	0.81 %	55 %	18 %	9.45 %
Wiener (HFI)	9.6 %	1.66 %	3.1 %	0.045	6 %	0.97 %	89 %	26 %	10.8 %
+ Modes B (HFI)	7.75 %	1.55 %	2.9 %	0.42	5.5 %	0.9 %	71 %	22.6 %	10 %
Wiener (LFI)	9.2 %	3.6 %	6 %	0.098	11 %	2 %	84 %	31 %	26.5 %
+ Modes B (LFI)	9.2 %	3.6 %	6 %	0.097	10.8 %	2 %	84.8 %	31 %	26.5 %
Wiener (MAP)	12.3 %	18.4 %	27 %	0.69	67.1 %	7.5 %	115 %	75 %	201 %
+ Modes B (MAP)	12 %	17 %	25.4 %	0.65	62 %	7.1 %	115 %	70 %	200 %

auraient été réduites si nous avions pris une valeur non nulle de ce paramètre (voir Zaldarriaga et al. (1997) et la section suivante).

4.4.2 Modèles BSI

Définition–Motivations

Les observations présentes des grandes structures de l'univers permettent dès à présent d'exclure le modèle CDM standard avec un spectre de puissance *Harrison–Zel'dovich* car ce dernier produirait trop de structures aux petites échelles (c.-à-d. les échelles galactiques). La variante la plus simple de ce modèle qui est actuellement favorisée par les données semble être un modèle d'univers plat avec une constante cosmologique non nulle et un spectre de puissance primordial invariant d'échelle (voire légèrement «tilté») (Kofman et al. (1993); Bagla et al. (1996); Ostriker & Steinhardt (1995); Lineweaver (1998)). Ce modèle cosmologique fut couplé (Lesgourgues et al. (1998a,b)) à un modèle d'inflation conçu par Starobinskii (1992), produisant un spectre de puissance primordial *invariant d'échelle par morceaux* («Broken Scale Invariant» ou BSI). Les motivations d'un tel spectre de puissance, couplé à une constante cosmologique non nulle, sont les suivantes :

- un meilleur accord est trouvé avec les données, pour une région plus large de l'espace des paramètres.
- D'autre part les données provenant des grandes structures (galaxies, amas de galaxies) semble indiquer la présence d'un pic dans le spectre de puissance de la matière à une échelle $k \simeq 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ (Einasto et al. (1997c,a,b); Retzlaff et al. (1997); Gaztanaga & Baugh (1998)). Les modèles BSI engendrent un tel pic dans le spectre de puissance, et seraient donc des candidats privilégiés si la présence d'un pic était confirmée par les sondages galactiques à venir.

On pourrait se demander si l'introduction d'un modèle d'inflation non classique, résultant dans l'addition de paramètres supplémentaires, n'est pas un moyen *ad hoc* d'obtenir un accord avec les données, perdant ainsi la capacité de contraindre précisément les paramètres du modèle sous-jacent. Au contraire ce type de modèles d'inflation a une signature caractéristique aux échelles intermédiaires (de l'ordre de $125 h^{-1}$ Mpc), et est également contraint aux petites et aux grandes échelles. Nous allons montrer qu'un satellite tel que PLANCK devrait :

- discriminer ce type de modèles d'autres modèles invariants d'échelle ou «tiltés»,
- permettre, en supposant qu'un tel modèle BSI soit effectivement réalisé, une mesure très précise des paramètres qui le définissent.

Caractéristiques des modèles envisagés

Les modèles que nous allons considérer dans notre analyse dépendent de trois paramètres cosmologiques ($h, \Omega_\Lambda, \Omega_b$), et de cinq paramètres liés au modèle d'inflation, qui sont décrits ainsi :

- Le spectre de puissance des perturbations scalaires a un indice spectral constant n_S pour $k < k_0$, subit une rupture à $k \geq k_0$ (dont la forme ne dépend que d'un seul paramètre p), puis devient plat aux petites échelles ($k \gg k_0$). L'amplitude du saut est donnée par $p^{\pm 2}$.
- Le spectre des ondes gravitationnelles n'a pas de rupture à k_0 , et l'indice spectral aux petites échelles ($k > k_0$) n'a pas d'influence sur le spectre dans la mesure ou la contribution des perturbations tensorielles est négligeable à ces échelles. En revanche, l'indice spectral aux grandes échelles ($k > k_0$) dépend de l'échelle, et est solution de l'équation différentielle $dn_T/d\ln k = -n_T(n_S - 1 - n_T)$. Il peut donc être calculé à toutes les échelles si n_S et $n_T(k_0)$ sont fixés.
- L'approximation de «roulement lent» (*Slow roll*) étant valable aux grandes échelles, l'amplitude du spectre de puissance des ondes gravitationnelles est normalisée à $k = k_0$ par $H_{k_0}^2 G$, et celle du spectre des perturbations scalaires par $H_{k_0}^2 G/n_T(k_0)$.

En résumé, les cinq paramètres inflationnaires utilisés sont :

- i) $H_{k_0}^2 G$, facteur de normalisation globale. Ce paramètre est complètement équivalent à la normalisation Q_{10} du 10ème multipole du spectre de température. C'est ce dernier que nous utiliserons par la suite.

- ii) k_0 , échelle de la rupture du spectre des perturbations scalaires.
- iii) p , lié à l'amplitude du saut.
- iv) n_s , indice spectral scalaire, constant pour $k < k_0$.
- v) $n_T(k_0)$, la valeur de l'indice spectral tensoriel à $k = k_0$.

Le rapport des amplitudes tensorielle et scalaire T/S n'apparaît pas de façon naturelle dans cette description. En revanche, une fois que n_s et $n_T(k_0)$ sont fixés, ce rapport l'est aussi. En suivant Lesgourgues et al. (1998a,b), nous fixons $\Omega_b h^2 = 0,015$ et $k_0 = 0,016 h \text{Mpc}^{-1}$ pour obtenir un pic dans le spectre de puissance à $k = 0,05 h \text{Mpc}^{-1}$ (Einasto et al. (1997a)). Deux possibilités sont envisagées pour l'indice spectral scalaire :

- Modèle A : $n_s \simeq 1$, ce qui implique $dn_T/d\ln k \simeq n_T^2$.
- Modèle B : $n_s \simeq 1 + n_T = cste$, ce qui implique $n_T(k) = n_T(k_0) = cste$.

D'autre part, on a normalisé le spectre de température aux grandes échelles à COBE ($Q_{10} = 18 \mu_r mK$, Bennett et al. (1996)), et le spectre de puissance de la matière aux petites échelles aux grandes structures ($\sigma_8 = 0,60 \Omega^{\pm 0,56}$, White et al. (1993)). Ainsi, il ne nous reste plus que trois paramètres à fixer pour déterminer complètement les deux modèles : $(h, \Omega_\Lambda, n_T(k_0))$, ou de façon équivalente $(h, \Omega_\Lambda, T/S)$. Nous choisissons pour les deux modèles A et B les valeurs $(h, \Omega_\Lambda, T/S) = (0,7; 0,8; 0,8)$ en accord avec les observations. Enfin, nous considérerons un troisième modèle «tilté» (T), sans rupture dans le spectre scalaire, à titre de comparaison. Les valeurs des indices spectraux et du rapport tensors-scalaires sont prises égales à celles du modèle B.

Résultats

Les incertitudes sur chaque paramètre sont présentées dans la table 4.4.2. Les lignes sans croix donnent les incertitudes dans le cas où les données de polarisation ne sont pas prises en compte. On peut remarquer tout d'abord que les paramètres des modèles BSI sont presque aussi bien contraints que ceux du modèle tilté présenté à titre de comparaison ; cela signifie que les paramètres additionnels (k_0, p) n'entrent pas dans une dégénérescence avec les paramètres $(h, \Omega_\Lambda, \Omega_b)$. Ainsi ces paramètres, dans les modèles BSI, devraient être aussi bien contraints que dans les modèles cosmologiques plus classiques.

En revanche, les paramètres $(Q_{10}, n_s, n_T(k_0))$, sont moins bien contraints dans le cadre des modèles BSI ; tandis que les paramètres (k_0, p) apparaissent

model	Param. cosmo.			Paramètres inflationnaires					relié
	h	Ω_Λ	Ω_b	Q_{10}	k_0	p	n_s	$n_T(k_0)$	C_{10}^T/C_{10}^S
A	0.7	0.7	0.03	18 μK	0.016 $h\text{Mpc}^{-1}$	0.615	1	-0.12	0.8
B	0.7	0.7	0.03	18 μK	0.016 $h\text{Mpc}^{-1}$	0.51	0.825	-0.175	0.8
T	0.7	0.65	0.03	18 μK	/	/	0.825	-0.175	0.8
Incertitude relative à 1- σ (%)									
A \times	0.72	0.94	0.86	3.2	0.82	0.097	6.0	6.3	
A	<i>0.92</i>	<i>1.2</i>	<i>1.1</i>	<i>4.5</i>	<i>1.1</i>	<i>0.57</i>	<i>15</i>	<i>18</i>	
B \times	0.65	0.85	0.79	3.2	0.75	0.088	9.3	6.0	
B	<i>0.78</i>	<i>1.0</i>	<i>0.90</i>	<i>3.7</i>	<i>0.90</i>	<i>0.80</i>	<i>44</i>	<i>29</i>	
T \times	0.72	0.93	1.0	0.19	/	/	0.29	0.60	
T	<i>0.86</i>	<i>1.11</i>	<i>1.21</i>	<i>0.24</i>	/	/	<i>0.34</i>	<i>0.70</i>	

TAB. 4.4: Dans la partie supérieure de la table sont données les valeurs des paramètres pour les trois modèles considérés: deux modèles BSI avec huit paramètres et un modèle tilté avec six paramètres. Nous donnons également les valeurs correspondantes pour C_{10}^T/C_{10}^S . Les incertitudes à 68% correspondantes sont données dans la partie inférieure de la table. Dans les lignes sans \times , la polarisation n'est pas prise en compte.

très bien contraints. En effet pour les modèles tiltés, l'indice spectral scalaire peut être précisément déterminé sur l'ensemble des ℓ , les paramètres restant (Q_{10}, n_T) ont des effets similaires aux grands ℓ (car n_T est lié au rapport T/S) mais peuvent être en partie distingués aux petits ℓ et par les mesures de polarisation. Dans les modèles BSI en revanche, l'indice spectral scalaire n_s n'a d'effet qu'aux petits ℓ car il n'est défini que pour $k < k_0$, soit essentiellement $\ell < 100$. Sa mesure est donc limitée par la variance cosmique. Ainsi l'ensemble des paramètres ($Q_{10}, n_s, n_T(k_0)$) est relativement dégénéré et ces paramètres sont donc mal contraints. Les paramètres (k_0, p) sont, quant à eux, très bien mesurés car ils ne jouent un rôle qu'aux $l > 150$. De plus, la mesure de la polarisation permet de distinguer l'effet de p , et donc de le contraindre avec une très bonne précision (voir figure 4.2).

Une autre façon de comprendre ces effets est de diagonaliser la matrice de Fisher. On obtient alors les combinaisons linéaires des paramètres qui sont les mieux contraintes (grande valeur propre) et celles qui sont les plus mal contraintes (ou directions de dégénérescence, correspondant aux petites valeurs propres). Ces combinaisons linéaires et leur contrainte associée sont montrées dans la table 4.4.2. On peut voir tout d'abord que le paramètre p n'intervient que dans les quatre combinaisons les mieux contraintes, et ne figure ainsi dans aucune direction de dégénérescence. Les cinquième et sixième combinaisons linéaires montrent qu'un petit changement dans k_0 , résultant de manière visuelle dans un changement de la position du premier pic, peut

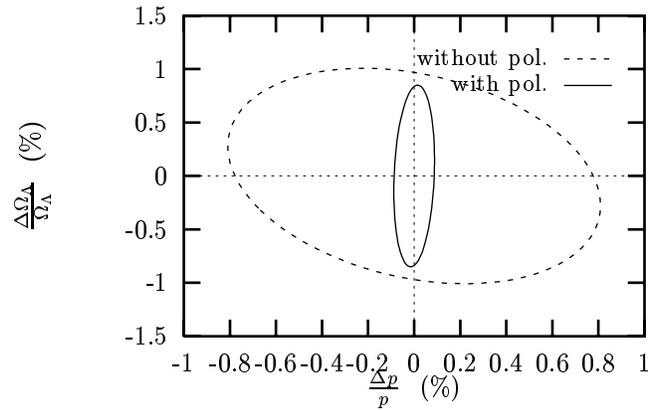


FIG. 4.2: *Ellipse de confiance à 68% sur les paramètres p et Ω_Λ . Avec la mesure de température seule le paramètre p entre dans une dégénérescence incluant Ω_Λ , qui disparaît avec la mesure de polarisation.*

être compensé par une combinaison de changements sur les paramètres cosmologiques ($h, \Omega_b, \Omega_\Lambda$) car ces derniers fixent la position et l'amplitude du premier pic, soit de manière physique en jouant sur l'horizon sonore à la recombinaison (h, Ω_b), soit sur la taille de la projection sur le ciel de cet horizon (Ω_Λ). Ceci correspond donc déjà à une petite dégénérescence. Les deux dernières combinaisons, les plus mal contraintes, exhibent la dégénérescence des paramètres ($Q_{10}, n_S, n_T(k_0)$).

Vecteurs propres								Incertitude (%)
$\frac{\Delta h}{h}$	$\frac{\Delta\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda}$	$\frac{\Delta\Omega_b}{\Omega_b}$	$\frac{\Delta Q_{10}}{Q_{10}}$	$\frac{\Delta k_0}{k_0}$	$\frac{\Delta p}{p}$	$\frac{\Delta n_s}{n_s}$	$\frac{\Delta n_T(k_0)}{n_T(k_0)}$	
-0.4	0.3	0.1	0.3	-0.1	-0.7	0.2	-0.2	0.03
-0.6	0.6	-	-0.1	0.2	-0.4	-	0.1	0.05
-0.5	-0.2	0.1	-	-0.8	0.2	-	-	0.1
0.2	-	-	0.6	0.1	0.4	0.3	-0.5	0.2
0.3	0.3	0.8	-0.1	-0.2	-	-	-	0.3
-0.4	-0.6	0.5	-	0.5	-	-	-	1.5
-	-	-	0.7	-	-	-0.2	0.7	4.5
-	-	-	-0.1	-	-	0.8	0.5	11

TAB. 4.5: Vecteurs propres de la matrice de Fisher sans dimensions $\tilde{F}_{ij} = \theta_i \theta_j F_{ij}$, ainsi que les limites de confiance à 68%. Les premières combinaisons linéaires sont les mieux contraintes, les dernières correspondent aux directions de dégénérescence.

Parameter extraction by *Planck* for a CDM model with Broken Scale Invariance and cosmological constant

Julien Lesgourgues^{1,4}, Simon Prunet² and David Polarski^{1,3}

¹ *Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique, UPRES-A 6083 CNRS Université de Tours, Parc de Grandmont, F-37200 Tours (France)*

² *Institut d'Astrophysique Spatiale, bât. 121, 91405 Orsay cedex (France)*

³ *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon cedex (France)*

⁴ *International School for Advanced Studies, SISSA-ISAS, Via Beirut 4, I-34014 Trieste (Italy)*

17 September 1998

ABSTRACT

We consider a class of spatially flat cold dark matter (CDM) models, with a cosmological constant and a broken-scale-invariant (BSI) steplike primordial spectrum of adiabatic perturbations, previously found to be in very good agreement with observations. Performing a Fisher matrix analysis, we show that some free parameters (defining the step) of our BSI model could be extracted with remarkable accuracy by the *Planck* satellite, thanks to the polarisation anisotropy measurements. Further, cosmological parameters could still be found with very good precision, despite a larger number of free parameters than in the simplest inflationary models.

Key words: cosmology:theory - early Universe - cosmic microwave background.

1 INTRODUCTION

Current observations of the large-scale structure in the Universe, and of the cosmic microwave background (CMB) anisotropies in particular, allow already a discrimination among different cosmological scenarios with increasing precision. Nevertheless, many possibilities are still viable, with different assumptions concerning e.g. the matter content of the Universe, and the primordial (initial) fluctuation power spectrum. However, most scenarios should be excluded by cross-correlating the forthcoming experiments, like, for instance, balloon and satellite measurements of the small scale CMB anisotropies, and new redshift surveys (Wang, Spergel & Strauss 1998). The most precise scheduled experiment for the measurement of the CMB anisotropies is the *Planck* satellite, whose data will very likely favour a restricted family of cosmological scenarios, hopefully with a small number of free parameters.

Since the simplest CDM model with a flat primordial power spectrum is already excluded, it is necessary to introduce some refinements either in the content of the Universe (i.e., in the transfer functions of matter and radiation), or in the generation of initial fluctuations (i.e., in the case of inflationary models, in the primordial power spectrum). By now, the simplest variant favoured by experimental data seems to be that of a flat universe with a cosmological constant, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, and a scale-invariant primordial (or slightly tilted) power spectrum (Kofman, Gnedin & Bah-

call 1993; Bagla, Padmanabhan & Narlikar 1996; Ostriker & Steinhardt 1995; Lineweaver 1998). In two recent papers (Lesgourgues, Polarski & Starobinsky 1998a, 1998b, further referred as LPS1, LPS2), the combination of this Λ CDM scenario with an inflationary model introduced by Starobinsky (1992), predicting a breaking-scale-invariant (BSI) steplike primordial power spectrum, was investigated. In LPS1, the case of adiabatic primordial fluctuations was considered when the contribution of the tensorial fluctuations to the CMB anisotropies is negligible. In LPS2, the possible contribution of gravitational waves to the CMB anisotropies was taken into account (it is a peculiarity of these models that these distinct cases are possible). Briefly, the motivations for considering steplike models are the following. First, an even better agreement with the data can be found than in the case of a flat or tilted spectrum, inside a wider region of the cosmological parameter space. Second, a few authors point out the possible observational evidence for a spike in the matter power spectrum at $k \simeq 0.05 h \text{ Mpc}^{-1}$ (Einasto et al. 1997a, 1997b, 1997c; Retzlaff et al. 1997; Gaztañaga & Baugh 1998). Since no evidence is found in other data-sets, this is still a point of debate; anyway, our BSI model predicts a similar feature, and would be an excellent remaining candidate if the spike was to be confirmed by future redshift surveys.

One could argue that BSI inflationary models, by introducing additional free parameters in the primordial power

2 *J. Lesgourgues, S. Prunet and D. Polarski*

spectrum, just increase the degeneracy among different scenarios; that instead of making real predictions, like the simplest slow-roll model, they are just introduced *ad hoc*, in order to fit any observations; and finally, that in the case of BSI primordial spectra, the prospect of extracting the cosmological parameters at the percent level with *Planck* would collapse. However, we recall that our model is based on simple assumptions concerning the inflaton potential, and cannot be tailored at will in order to fit any given observational data. On the contrary, it predicts a very peculiar observable feature in the matter power spectrum at intermediate scales ($\simeq 125 h^{-1}$ Mpc) while it makes of course predictions on all scales both for the matter and the radiation power spectrum. Even when only the radiation power spectrum is considered, we want to show in this work the following points:

- the future *Planck* results should easily discriminate our BSI model from other scale-free models.
- assuming that this model is realized in Nature, in spite of four additional degrees of freedom in the theory as compared to the simplest versions of inflation, *Planck* would still be able to measure accurately both the cosmological and the inflationary parameters. Even more, it turns out that one of the inflationary parameters, p , which defines the height and shape of the step, would be constrained with remarkably high precision, which could be of significant interest for building particle physics motivated inflationary models.

2 THE MODEL

We assume for simplicity that our universe is known to be spatially flat, and that neutrino mass and reionisation can be neglected (relaxing these assumptions would of course increase the uncertainties for all parameters). Then, our model contains three cosmological parameters ($h, \Omega_\Lambda, \Omega_b$), and five inflationary parameters, which can be understood as follows:

- the scalar power spectrum of adiabatic perturbations has a scale-invariant tilt n_s on large scale $k < k_0$, undergoes further a break at $k \geq k_0$ (whose shape is defined by one single parameter p), and is finally flat on small scale $k \gg k_0$. The ratio between the power spectrum on the small scale plateau and at k_0 is given by p^{-2} .
- the spectrum of gravitational waves (GW) has no break at k_0 , while the tensor tilt on small scale $k > k_0$ is irrelevant for our purpose, since the corresponding contribution to the C_l 's is negligible. Using the slow-roll conditions valid on large scales, the scale-dependent tilt $n_T(k)$ for $k \leq k_0$ can be found as a function of n_s and $n_T(k_0)$.
- since the slow-roll approximation is still valid for large scale perturbations, at $k = k_0$ one can relate the amplitude of the GW power spectrum to the dimensionless parameter $H_{k_0}^2 G$, and the scalar power spectrum amplitude to $H_{k_0}^2 G/n_T(k_0)$.

In summary, the five free inflationary parameters are:

1. $H_{k_0}^2 G$, the overall dimensionless normalization factor. Varying $H_{k_0}^2 G$ (all other parameters being fixed) is exactly similar to varying the commonly used Q_{l0} , the 10-th multipole of the temperature anisotropy power spectrum (Linaev & Barbosa 1998). Hence, we will further use this parameter instead of $H_{k_0}^2 G$.

2. k_0 , the scale of the break.
3. p , which defines the break's amplitude and shape.
4. n_s , the scale-invariant scalar tilt on scales $k < k_0$.
5. $n_T(k_0)$, the (effective) tensor tilt at k_0 .

The usual tensor-to-scalar ratio C_{T0}^T/C_{l0}^S does not appear naturally in this description. For fixed values of the cosmological parameters, there is a non-trivial dependence of C_{l0}^T/C_{l0}^S on $n_T(k_0)$ and n_s . Therefore, fixing the parameters $n_T(k_0)$ and n_s fixes the ratio C_{l0}^T/C_{l0}^S as well.

In previous studies (LPS1, LPS2), $\Omega_b h^2 = 0.015$ was assumed while k_0 was fixed by the Einasto et al. cluster data (the spike in the matter power spectrum at $k = 0.05 h \text{ Mpc}^{-1}$ requires $k_0 = 0.016 h \text{ Mpc}^{-1}$). Two possibilities for the scalar tilt were investigated:

- A. $n_s \approx 1$, which implies $dn_T/d \ln k \approx n_s^2$.
- B. $n_s \approx 1 + n_T = \text{constant}$, which implies $n_T(k) = n_T(k_0) = \text{constant}$.

Further, a double normalization was performed to both $Q_{l0} = 18 \mu K$ (Bennett et al. 1996) and $\sigma_8 = 0.60 \Omega^{-0.56}$ (White, Efstathiou & Frenk 1993). With these constraints, the remaining free parameter space was three-dimensional: $(h, \Omega_\Lambda, n_T(k_0))$, or equivalently $(h, \Omega_\Lambda, C_{l0}^T/C_{l0}^S)$. In both cases A and B, the preferred regions following from the current observations were found. Now, we choose two points inside these allowed regions, corresponding to $(h, \Omega_\Lambda, C_{l0}^T/C_{l0}^S) = (0.7, 0.7, 0.8)$ for both cases A and B. Assuming that each of these two points describes the "true" cosmological scenario, we perform a Fisher matrix analysis with eight free parameters ($h, \Omega_\Lambda, \Omega_b, Q_{l0}, k_0, p, n_s, n_T(k_0)$).

3 THE FISHER MATRIX

Using the CMB Boltzmann code CMBFAST (Seljak & Zaldarriaga 1996), we compute the derivative of the C_l 's with respect to each parameter $\theta_i, i=1, \dots, 8$. The Fisher matrix (Jungman et al. 1996a, 1996b; Tegmark, Taylor & Heavens 1997; see also Bond, Efstathiou & Tegmark 1997; Copeland, Grivell & Liddle 1998; Stompor & Efstathiou 1998; Eisenstein, Hu & Tegmark 1998) is then obtained by adding the derivatives, weighted by the inverse of the covariance matrix of the estimators of the polarized and unpolarized CMB power spectra for the *Planck* satellite mission, $\text{Cov}(C_l^X, C_l^Y)$:

$$F_{ij} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{X,Y} \frac{\partial C_\ell^X}{\partial \theta_i} \text{Cov}^{-1}(C_\ell^X, C_\ell^Y) \frac{\partial C_\ell^Y}{\partial \theta_j}, \quad (1)$$

where $\{X, Y\} \in \{T, E, TE\}$ (Kamionkowski, Kosowsky, & Stebbins 1997; Zaldarriaga, Spergel & Seljak 1997; Prunet, Sethi & Bouchet, 1998a, 1998b). The meaning of F_{ij} is the following. Assuming that a fit to the *Planck* data yields a maximum likelihood for the model under consideration (for which the derivatives were computed), the 1- σ confidence region in the eight-dimensional parameter space would be inside the ellipsoid (Press et al. 1989):

$$\sum_{i,j} \Delta \theta_i \Delta \theta_j F_{ij} = 9.3. \quad (2)$$

Using F_{ij} (or the dimensionless Fisher matrix $\bar{F}_{ij} \equiv \theta_i \theta_j F_{ij}$), one can also compute the allowed region in lower

dimensional cuts of the parameter space, making no assumptions on other parameters. In particular, the $1\text{-}\sigma$ uncertainty on a single parameter is just the inverse of the square root of a diagonal coefficient of the inverse Fisher matrix:

$$\Delta\theta_i = \frac{1}{\sqrt{(F^{-1})_{ii}}}. \quad (3)$$

Each multipole will be measured by Planck with a precision of the order of 1%. Since there are much more independent measurements than free parameters, one naively expects the parameter extraction to be much more precise. However, in general, the parameters are degenerate, i.e., some combinations of parameters produce a very weak change in the C_l curve. Then, even if some other combinations can be measured with an extreme precision, each parameter separately is only constrained at the percent level (unless its effect is “orthogonal” to the other’s).

A useful way to express the results of the Fisher matrix analysis, that does not depend on a particular choice of basis in the parameter space, and contains the most refined constraints that can be deduced from the experiment, is to diagonalize \bar{F}_{ij} . The eigenvectors correspond to the axes of the likelihood ellipsoid, and the inverse square root of the eigenvalues to the $1\text{-}\sigma$ relative uncertainties on each eigenvector. Eigenvectors with the smallest uncertainties are the best constrained combinations of the parameters (they generate maximal changes in the anisotropy curve). Eigenvectors with the largest uncertainties are the less constrained combinations (they generate minimal changes), and are generally called degenerate directions in parameter space.

In computing the covariance matrix of the CMB power spectra, we accounted for the presence of foregrounds (both polarized and unpolarized) in the measurement of the CMB power spectra (see Prunet, Sethi & Bouchet 1998a, 1998b and Bouchet, Prunet & Sethi 1998 for details).

4 RESULTS

The uncertainty on each parameter is presented in Table 1. A and B stand for the two models previously mentioned. T is a tilted model, with only three inflationary parameters instead of five, namely $(Q_{10}, n_S, n_T(k_0))$, with the same values as in model B. Of course, one should keep in mind that all the uncertainties quoted in Table 1 would increase if the space of free cosmological parameters was enlarged. In the lines without a \times -sign, the polarisation measurement is not taken into account. The main conclusions to be drawn from the table are the following.

First, the three cosmological parameters are constrained with almost the same precision for the tilted and for the BSI models; this means that the step parameters (k_0, p) do not “conspire” with the parameters $(h, \Omega_\Lambda, \Omega_b)$ in order to create directions of degeneracy. Hence, in general, the one percent parameter extraction proposed by *Planck* is not affected in the case of BSI steplike models.

The situation is somewhat different for the inflationary parameters. The normalization and tilts, (Q_{10}, n_S, n_T) , appear less constrained; on the other hand, the step parameters, (k_0, p) , can be predicted with excellent accuracy, up to a 0.09% $1\text{-}\sigma$ errorbar for p ! These results can be easily understood, especially if one keeps in mind that the best

Figure 1. $1\text{-}\sigma$ likelihood regions in the $(\Delta p/p, \Delta\Omega_\Lambda/\Omega_\Lambda)$ plane, with and without including polarisation measurement. The only degeneracy involving p is removed by the introduction of polarization measurement. Therefore, the ellipse appears vertical in all $(\Delta p/p, \Delta\theta_i/\theta_i)$ plots.

constraints come from high l multipoles, for which the cosmic variance can be neglected. For tilted models, the scalar tilt enters in all multipoles, and can be accurately determined from high l ’s; the two remaining inflationary parameters (Q_{10}, n_T) have a similar effect on high l ’s (since n_T is proportional to the tensor to scalar ratio), but measurements of the C_l ’s for small l ’s and polarisation measurements reduce the degeneracy. For our BSI models, the scalar tilt cannot be deduced from high l ’s (it is defined at $k < k_0$, i.e., mainly $l < 100$); the three parameters $(Q_{10}, n_S, n_T(k_0))$ combine into several degeneracy directions that can be resolved only by small l measurements, so the precision remains poor. The situation is exactly opposite for the step parameters (k_0, p) , which have the crucial property of playing a role *only* at $l > 150$. Hence, they are only marginally affected by cosmic variance. Further, p is orthogonal to the degeneracy directions, and can be extracted with great precision.

All these features can be deduced with more accuracy from the Fisher matrix diagonalization, given in Table 2. The first lines give parameter combinations that are constrained with great precision; the last lines indicate the directions of degeneracy in parameter space. It is straightforward to see that the inflationary parameter p contributes only to the first four lines. Therefore, it doesn’t suffer from any degeneracy, and is the best constrained parameter. The 5th and 6th lines show that a change in k_0 (resulting in a slight change in the location of the first acoustic peak, through the change in the primordial power spectrum), can be cancelled by a change in the cosmological parameters (i.e., in the sound horizon scale). The 6th eigenvector has a 1.5% uncertainty: this is already a small degeneracy, and $h, \Omega_\Lambda, \Omega_b, k_0$ are not as well constrained as p . The last two lines show the large degeneracy between Q_{10}, n_S and $n_T(k_0)$.

Let us compare the uncertainties when polarisation measurements are taken into account and when they are not. Usually, the polarisation is known to increase the precision by a factor of order ~ 1.2 , as can be seen e.g. for tilted models, by comparing the (T) and (Tx) data in Table 1. In our BSI model, the precision on $(n_S, n_T(k_0), p)$ increases by a much larger factor, and even up to 10 for the parameter p ! So, measuring the polarisation is even more important when one considers primordial spectra with additional free parameters (i.e., additional potential degeneracies to remove). One could be surprised by the factor 10 found for p in model B. In fact, when polarisation is not taken into account, p enters into a single combination of parameters leading to a degeneracy. When polarisation is added, this degeneracy is suppressed and, as we saw, p doesn’t enter into any degeneracy at all. This mechanism is illustrated in figure 1.

4 *J. Lesgourgues, S. Prunet and D. Polarski*

Table 1. In the upper part of the table, we give the parameter values for the chosen models: two BSI models A and B with 8 free parameters, and one tilted model T, with 6 free parameters. We also indicate the related value of C_{10}^T/C_{10}^S . The corresponding relative $1\text{-}\sigma$ uncertainties, $\Delta\theta_i/\theta_i$, are given in the lower part, in percent. In the lines without a \times -sign, the polarisation measurement is not taken into account. The uncertainty on C_{10}^T/C_{10}^S was not calculated, but it is of the same order as the one on $n_{\mathcal{T}}(k_0)$ since in a first order description, C_{10}^T/C_{10}^S is approximately proportional to $n_{\mathcal{T}}(k_0)$.

model	cosmological par.			inflationary parameters				related C_{10}^T/C_{10}^S	
	h	Ω_{Λ}	Ω_b	Q_{10}	k_0	p	n_s		$n_{\mathcal{T}}(k_0)$
A	0.7	0.7	0.03	$18 \mu K$	$0.016 h\text{Mpc}^{-1}$	0.615	1	-0.12	0.8
B	0.7	0.7	0.03	$18 \mu K$	$0.016 h\text{Mpc}^{-1}$	0.51	0.825	-0.175	0.8
T	0.7	0.65	0.03	$18 \mu K$	/	/	0.825	-0.175	0.8
relative $1\text{-}\sigma$ uncertainty (%)									
A \times	0.72	0.94	0.86	3.2	0.82	0.097	6.0	6.3	
A	0.92	1.2	1.1	4.5	1.1	0.57	15	18	
B \times	0.65	0.85	0.79	3.2	0.75	0.088	9.3	6.0	
B	0.78	1.0	0.90	3.7	0.90	0.80	44	29	
T \times	0.72	0.93	1.0	0.19	/	/	0.29	0.60	
T	0.86	1.11	1.21	0.24	/	/	0.34	0.70	

Table 2. Orthonormal eigenvectors of the dimensionless Fisher matrix \hat{F}_{ij} , with their $1\text{-}\sigma$ uncertainty (in percent). The first lines show some combinations of the parameters that can be recovered with a precision much smaller than 1 %. The last lines correspond to the directions of degeneracy in parameter space.

eigenvector									uncertainty (%)
$\frac{\Delta h}{h}$	$\frac{\Delta\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{\Lambda}}$	$\frac{\Delta\Omega_b}{\Omega_b}$	$\frac{\Delta Q_{10}}{Q_{10}}$	$\frac{\Delta k_0}{k_0}$	$\frac{\Delta p}{p}$	$\frac{\Delta n_s}{n_s}$	$\frac{\Delta n_{\mathcal{T}}(k_0)}{n_{\mathcal{T}}(k_0)}$		
-0.4	0.3	0.1	0.3	-0.1	-0.7	0.2	-0.2	0.03	
-0.6	0.6	-	-0.1	0.2	-0.4	-	0.1	0.05	
-0.5	-0.2	0.1	-	-0.8	0.2	-	-	0.1	
0.2	-	-	0.6	0.1	0.4	0.3	-0.5	0.2	
0.3	0.3	0.8	-0.1	-0.2	-	-	-	0.3	
-0.4	-0.6	0.5	-	0.5	-	-	-	1.5	
-	-	-	0.7	-	-	-0.2	0.7	4.5	
-	-	-	-0.1	-	-	0.8	0.5	11	

5 CONCLUSION

In this letter, we considered an inflationary model with BSI primordial spectrum and we investigated the precision with which the cosmological parameters and the free inflationary parameters could be extracted by the *Planck* satellite. We first conclude that in the framework of the BSI steplike models considered here, the extraction of cosmological parameters can be as precise as in the case of tilted models. The step parameters p and k_0 can be constrained with excellent accuracy, especially p , whose effect on the C_l 's can be easily distinguished from any parameter combinations. Then, there is no degeneracy with tilted models, which are special

cases of our model with respect to the CMB anisotropies whenever $k_0 \geq 0.25 h \text{Mpc}^{-1}$. Further, if ever this class of models (or some other BSI model) was confirmed by future observations, it would be reasonable to expect constraints on some of the inflaton Lagrangian parameters up to the 0.1% precision level. This is most interesting for building particle physics inspired inflationary models. On the other hand, precision is lost for the determination of the scalar and tensor tilts on large scales, as well as on the quantity C_{10}^T/C_{10}^S , related by the slow-roll equations to $n_{\mathcal{T}}(k)$. Finally, in usual inflationary models, the inclusion of polarization measurements is known to increase the precision for the parameter extraction. In our model however, polarization measure-

ments by *Planck* are shown to render the extraction of the inflationary parameters up to about 10 times more accurate.

6 ACKNOWLEDGEMENTS

We thank Alexei A. Starobinsky for illuminating discussions.

REFERENCES

- Bagla J. S., Padmanabhan T., Narlikar J. V., 1996, *Crisis in Cosmology — Observational Constraints on Ω_b and H_0* , Comments on Astrophysics 18, 275
- Bennett C. L. *et al.*, 1996, ApJ, 464, L1
- Bond J.R., Efstathiou G. and Tegmark M., 1997, MNRAS, 291, L33
- Bouchet F. R., Prunet S. and Sethi S. K., submitted to MNRAS
- Copeland E. J., Grivell I. J. and Liddle A. R., 1998, MNRAS, in press (astro-ph/9712028)
- Einasto J., Einasto M., Gottlöber S., Müller V. *et al.*, 1997a, Nature, 385, 139
- Einasto J., Einasto M., Frisch P., Gottlöber S. *et al.*, 1997b, MNRAS, 289, 801
- Einasto J., Einasto M., Frisch P., Gottlöber S. *et al.*, 1997c, MNRAS, 289, 813
- Eisenstein D. J., Hu W. and Tegmark M., 1998, submitted to ApJ (astro-ph/9807130)
- Gaztañaga E. and Baugh C. M., 1998, MNRAS 294, 229
- Jungman G., Kamionkowski M., Kosowsky A., Spergel D. L., 1996a, Phys. Rev. Lett., 76, 1007
- Jungman G., Kamionkowski M., Kosowsky A., Spergel D. L., 1996b, Phys. Rev. D, 54, 1332
- Kamionkowski M., Kosowsky A. and Stebbins A., 1997, Phys. Rev. D, 55, 7368
- Kofman L. A., Gnedin N. Y., Bahcall N. A., 1993, ApJ, 413, 1
- Lesgourgues J., Polarski D., Starobinsky A. A., 1998a, MNRAS, in press (astro-ph/9711139)
- Lesgourgues J., Polarski D., Starobinsky A. A., 1998b, submitted to MNRAS (astro-ph/9807019)
- Lineweaver C. H., 1998, submitted to ApJ Lett. (astro-ph/9805326)
- Lineweaver C. H., Barbosa D., 1998, ApJ, 496, 624
- Ostriker J. P., Steinhardt P. J., 1995, Nature, 377, 600
- Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., 1989, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press
- Prunet S., Sethi S. K., Bouchet F. R., 1998a, in Proc. *Fundamental parameters in Cosmology*, Rencontres de Moriond (astro-ph/9803160)
- Prunet S., Sethi S. K., Bouchet F. R., 1998b, in preparation
- Retzlaff J., Borgani S., Gottlöber S., Müller V., 1997, submitted to MNRAS (astro-ph/9709044)
- Seljak U., Zaldarriaga M., 1996, ApJ, 469, 7
- Starobinsky A. A., 1992, JETP Lett., 55, 489
- Stompor R. and Efstathiou G., 1998, submitted to MNRAS (astro-ph/9805294)
- Tegmark M., Taylor A., Heavens A., 1997, ApJ, 480, 22
- Wang Y., Spergel D. N., Strauss M. A., 1998, submitted to ApJ (astro-ph/9802231)
- White S. D. M., Efstathiou G., Frenk C. S., 1993, MNRAS, 262, 1023
- Zaldarriaga M., Spergel D. N., Seljak U., 1997, ApJ, 488, 1

Chapitre 5

Lentilles gravitationnelles en mouvement et leur effet sur le FCM

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons essayé de quantifier l'effet des contaminants, galactiques et extragalactiques, sur la mesure du FCM lui-même, ainsi que sur la mesure des paramètres cosmologiques issue du FCM. Il est important de noter que pour mettre des contraintes précises sur la mesure des paramètres cosmologiques, une condition nécessaire est que nos prédictions théoriques des spectres du FCM soient suffisamment précises. Cela implique en particulier d'aller au-delà de la physique linéaire du FCM revue dans l'annexe A. Or l'apparition de phénomènes non-linéaires dans la physique du FCM se situe bien après la recombinaison (où les perturbations de la métrique, de l'ordre de 10^{-5} , sont encore largement dans le régime linéaire). C'est pourquoi ces effets non-linéaires sont appelés effets *secondaires*, non pas à cause de leur amplitude.

Ces effets ont deux sources distinctes:

- L'interaction Thomson des photons du FCM avec le plasma réionisé, qui donne lieu aux effets du type Sunyaev-Zel'dovich (Sunyaev & Zel'dovich (1972, 1980)) dans les amas de galaxies, aux effets Doppler sur des nuages ionisés dans le cas d'une réionisation non homogène (Aghanim et al. (1996) par exemple), ou encore à l'effet Vishniac dans les structures réionisées (Vishniac (1987))¹.

1. Il s'agit d'un effet non linéaire des structures ionisées sur le FCM, couplant la sur-densité du plasma à sa vitesse propre

- Les effets purement gravitationnels des structures sur les photons du FCM, parmi lesquels on retrouve l'effet Rees-Sciama lié à l'évolution non-linéaire des potentiels gravitationnels liés aux grandes structures, et plus généralement les effets de lentilles gravitationnelles sur le FCM (Rees & Sciama (1968); Kaiser (1982); Nottale (1984); Martínez-González et al. (1990); Seljak & Zaldarriaga (1996)).

Parmi ces derniers, il y a l'effet des lentilles gravitationnelles en mouvement. En effet, le mouvement d'une lentille gravitationnelle engendre une variation du potentiel gravitationnel associé (dans une description eulérienne), et a donc un effet sur le FCM au même titre que la variation *intrinsèque* du potentiel gravitationnel due à l'effondrement de la structure (effet Rees-Sciama). Cet effet fut étudié pour la première fois par Birkinshaw & Gull (1983) dans le cas d'un amas de galaxies en mouvement, et par Kaiser & Stebbins (1984) dans le cas d'une corde cosmique. Des simulations ont ensuite inclus cet effet pour une population entière de ces objets (Bouchet et al. (1988) pour les cordes cosmiques, et Tuluie & Laguna (1995); Tuluie et al. (1996) pour les amas de galaxies).

Notre travail a consisté à étendre l'étude de cet effet de lentilles gravitationnelles en mouvement, entreprise par Tuluie et al. (1996), à une gamme de masses nettement plus étendue grâce à une approche semi-analytique (Press & Schechter (1974)) de la description des grandes structures de l'univers. Nous avons alors déterminé le spectre de puissance de cet effet pour différents modèles cosmologiques, et étudié l'observabilité d'un tel effet pour une population d'amas de galaxies.

5.2 Le cas d'une structure seule

5.2.1 L'effet «papillon»

Si les photons du FCM traversent un potentiel gravitationnel (dû à un amas de galaxies par exemple), qui varie entre le moment où les photons « tombent » dans le potentiel et le moment où ils en ressortent, alors ces derniers subissent un changement de fréquence qui s'ajoute au DVR dû à l'expansion de l'Univers. Cette variation du potentiel, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, peut être d'origine intrinsèque ou cinématique. Dans le cas où la structure (et donc le potentiel associé) a une vitesse non nulle transversalement à la ligne de visée, les photons qui croisent la structure en passant *devant* elle voient la profondeur du potentiel *augmenter*, et leur fréquence est ainsi diminuée. En revanche, les photons croisant

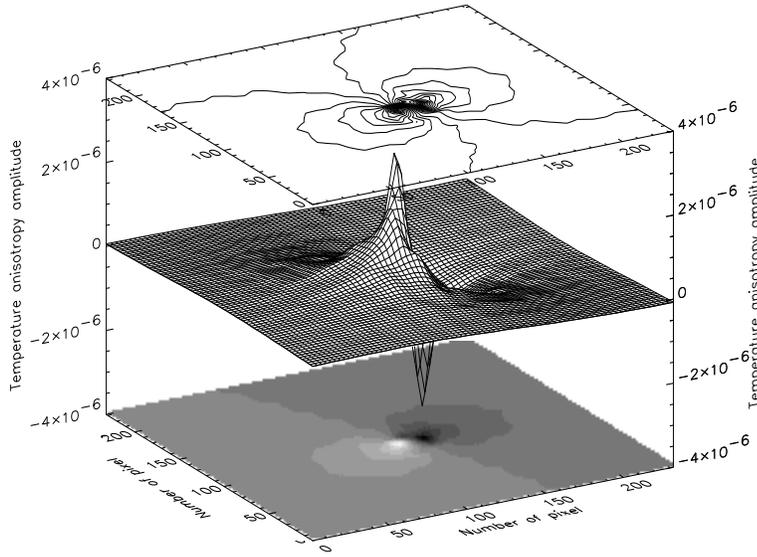


FIG. 5.1: *Anisotropie de température créée par un amas de masse $M = 10^{15} M_{\odot}$ et de vitesse particulière $v = 600$ km/s.*

cette même structure en passant *derrière* elle voient la profondeur du potentiel diminuer, et leur fréquence est augmentée. Cet effet résulte dans une anisotropie dipolaire caractéristique centrée sur la structure. Ayant la forme d'un papillon, Birkinshaw & Gull (1983) ont ainsi nommé cet effet (voir figure 5.1. Le décalage de fréquence subi par les photons est égal à (Birkinshaw & Gull (1983); Birkinshaw (1989)) :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \beta\gamma \sin\alpha \cos\phi\delta(\vec{b}) \quad (5.1)$$

Ici $\beta = v/c$ où c est la vitesse de la lumière, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz, α et ϕ sont égaux respectivement à l'angle entre la vitesse \vec{v} et la ligne de visée et à l'angle azimuthal dans le plan du ciel, centré sur la structure. Enfin $\delta(\vec{b})$ est l'angle de déviation des photons dû à l'effet de lentille gravitationnelle pour un paramètre d'impact \vec{b} . Ce changement de fréquence induit une anisotropie d'intensité, qui peut être exprimée en anisotropie de température $\delta T/T$.

5.2.2 Potentiel gravitationnel de la structure

Pour calculer l'angle de déflexion dû au potentiel gravitationnel, il faut tout d'abord spécifier la forme du potentiel gravitationnel, et donc la distri-

bution de matière sous-jacente. En nous inspirant de simulations numériques (Navarro et al. (1996, 1997)), il apparaît que la distribution de matière noire des halos peut être décrite par un profil «universel» pour une large gamme de masses. Ce profil (que nous appellerons par la suite NFW du nom de ses auteurs) s'écrit :

$$\rho(r) = \frac{\rho_c \delta_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (5.2)$$

où $r_s = r_{200}/c$ est l'échelle caractéristique du halo, δ_c sa surdensité caractéristique, ρ_c la densité critique de l'univers et c un paramètre adimensionnel appelé concentration. Le rayon r_{200} est le rayon de la sphère de densité moyenne $200 \times \rho_c$, il est souvent appelé rayon «viriel» du halo. La forme de ce profil est d'autre part indépendante du modèle cosmologique considéré, car ce dernier agit essentiellement sur l'époque de formation du halo, et donc sur les paramètres c , r_s et δ_c .

A partir du profil de densité, on peut calculer l'angle de déflexion (Blandford & Kochanek (1987)) :

$$\delta = 2 \frac{D_{ls}}{D_{os}} \nabla_r \int \Phi(\vec{r}, l) dl \quad (5.3)$$

où l'intégrale est faite sur la ligne de visée. D_{ls} et D_{os} sont respectivement les distances entre la lentille et la source et entre l'observateur et la source. Pour avoir une expression analytique de l'angle de déflexion (et donc de l'anisotropie), nous avons remplacé le profil de densité NFW par un autre qui est une bonne approximation du premier dans la partie centrale du halo :

$$\rho(r) = \rho_c \delta_c \left(\frac{r}{r_s} \right)^{\perp 1} \exp \left(\frac{-r}{r_s} \right) \quad (5.4)$$

On peut noter une différence de masse de l'ordre de 20% entre le profil exponentiel et le profil de NFW pour un rayon $R = 8r_s$ qui est de l'ordre du rayon de viriel de la structure. Cependant cette différence provient essentiellement de la partie périphérique du halo où l'anisotropie est très faible (de l'ordre de $10^{\perp 8}$), et cela ne change donc pas significativement le résultat.

5.3 Généralisation à un ensemble de structures

5.3.1 Synthèse de population

Afin d'avoir une idée de l'effet cumulé d'une population de halos, il y a deux voies possibles :

- Simulation à N corps : cette voie, étudiée par Tuluie & Laguna (1995); Tuluie et al. (1996), donne la description la plus réaliste, mais limite la gamme de masses des objets contribuant aux anisotropies.
- Approche semi-analytique : en prédisant par des arguments théoriques le nombre d'objets collapsés à chaque époque, on peut calculer numériquement les anisotropies engendrées par la population de structures. Cette approche, moins réaliste que la simulation numérique complète, a cependant l'avantage de ne pas être limitée en masse. D'autre part sa rapidité permet d'explorer une région nettement plus vaste de l'espace des paramètres.

Nous avons retenu la deuxième approche, en utilisant le formalisme de Press & Schechter (1974), pour trois modèles cosmologiques :

- un modèle CDM plat «standard»,
- un modèle CDM ouvert ($\Omega_0 = 0,3$),
- un modèle CDM plat avec constante cosmologique ($\Omega_\Lambda = 0,7$).

Nous supposons la constante de Hubble H_0 égale à $H_0 = 50 \text{ km/s/Mpc}$ dans tous nos calculs. L'expression analytique générale du nombre d'objets de masse comprise entre M et $M + dM$ à un DVR z est égal à (Press & Schechter (1974); Lacey & Cole (1993)) :

$$\frac{dn(M, z)}{dM} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}(z)}{M^2} \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \frac{\delta_{c0}(z)}{\sigma(M)} \times \exp\left(-\frac{\delta_{c0}^2(z)}{2\sigma^2(M)}\right) \quad (5.5)$$

où $\bar{\rho}(z)$ est la densité moyenne de l'univers à un DVR de z , et $\delta_{c0}(z)$ est la surdensité d'une structure calculée selon la théorie linéaire. La variance de masse $\sigma^2(M)$, filtrée à l'échelle M , est reliée au spectre des fluctuations de densité par :

$$\sigma^2(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) W^2(kR) dk \quad (5.6)$$

où W est la fonction de lissage du spectre et R est l'échelle associée à M . Dans l'hypothèse d'un spectre de puissance invariant d'échelle, d'indice spectral n , la variance à l'échelle M peut être exprimée en fonction de σ_8^2 , variance des fluctuations de densité dans une sphère de rayon $8h^{\perp 1}$ Mpc (Mathiesen & Evrard (1998)) :

$$\sigma(M) = (1, 19\Omega_0)^\alpha \sigma_8 M^{\perp \alpha} \quad (5.7)$$

où $\alpha = (n + 3)/6$. Une relation empirique concernant σ_8 fut établie à l'aide des comptages d'amas de galaxies (Viana & Liddle (1996)) :

$$\sigma_8 = A\Omega_0^B \quad (5.8)$$

avec $A = 0,6$ et $B = 0,36 + 0,31\Omega_0 - 0,28\Omega_0^2$ pour un modèle ouvert et $B = 0,59 - 0,16\Omega_0 + 0,06\Omega_0^2$ pour un univers plat de constante cosmologique non nulle. D'autre part l'indice spectral apparent à l'échelle des amas est pris égal à $n = -1$.

5.3.2 Vitesses particulières

Aux échelles des amas de galaxies (typiquement $8h^{\perp 1}$ Mpc) on peut supposer que les fluctuations de densité sont encore dans le régime linéaire. Ainsi on peut relier la variance du champ de vitesses particulière lissé à une échelle R au spectre des fluctuations de densité initial, pourvu que le fluide soit irrotationnel. Cette relation s'écrit (Peebles (1993)) :

$$v_{rms} = a(t)Hf(\Omega, \Lambda) \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k)W^2(kR)dk \right]^{\perp 1/2} \quad (5.9)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, H la constante de Hubble. La fonction $f(\Omega, \Lambda)$ est approximativement décrite par la relation $f(\Omega, \Lambda) = \Omega^{0,6}$ (Peebles (1980)), même dans le cas d'une constante cosmologique non nulle (Lahav et al. (1991)). D'autre part, dans l'hypothèse de fluctuations primordiales gaussiennes, la distribution des vitesses suit également une loi gaussienne :

$$f(v) = \frac{1}{v_{rms}\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-v^2}{2v_{rms}^2}\right) \quad (5.10)$$

ce qui est en bon accord avec les simulations numériques (Bahcall et al. (1994); Moscardini et al. (1996)). Devant la dispersion des mesures des vitesses d'amas de galaxies (Hudson (1994); Moscardini et al. (1996); Giovanelli et al. (1996)) nous prenons pour v_{rms} la valeur théorique du scénario cosmologique étudié qui, située entre 400 et 500 km/s, est en accord avec les observations.

5.3.3 Simulations numériques

Pour chaque modèle cosmologique, nous fabriquons une carte simulée de l’effet «papillon» afin d’analyser sa contribution aux anisotropies de température. Les simulations sont essentiellement basées sur le le travail de Aghanim et al. (1997). Néanmoins quelques changements y ont été apportés :

- La normalisation de la fonction de masse a été mise à jour pour être en accord avec les observations les plus récentes,
- Ces normalisations tiennent compte du modèle cosmologique sous-jacent.

Nous prenons en compte la contribution des petits groupes ($10^{13} M_{\odot}$) jusqu’aux amas riches ($10^{15} M_{\odot}$). La position des structures, ainsi que la direction de leur mouvement sont engendrées de façon aléatoire ; les corrélations ne sont pas prises en compte dans la mesure où l’effet «papillon» est centré sur chaque amas avec une extension de l’ordre de 100 kpc, tandis que la distance de corrélation se situe entre 5 et 20 Mpc. Le module de la vitesse est choisi de manière à suivre une loi gaussienne, de variance donnée par l’équation 5.9. Nous prenons en compte la contribution des structures jusqu’à un DVR de $z = 1, 5$, au-delà duquel leur contribution devient négligeable dans les modèles cosmologiques considérés ici.

En plus de l’effet de lentille en mouvement, nous calculons les anisotropies de température par les effets SZ thermique et cinématique. Afin de calculer ces derniers, nous devons supposer une forme pour la distribution des baryons dans les structures. Comme dans Aghanim et al. (1997), nous prenons pour le gaz un profil de King, donné par l’équation :

$$n_e(r) = n_{e0} \left(1 + \left(\frac{R}{R_c} \right) \right)^{-\frac{3\beta}{2}} \quad (5.11)$$

où R_c est le rayon de coeur de l’amas, et β , rapport des énergies cinétiques par unité de masse des galaxies et du gaz, est pris égal à $2/3$ (Evrard (1990); Jones & Forman (1992); Edge & Stewart (1991)). Notons que les simulations numériques matière noire plus gaz sont compatibles avec un profil NFW pour la matière noire et un profil de King pour le gaz (Navarro et al. (1996)).

5.4 Analyse des données–Résultats

5.4.1 Analyse des cartes de l’effet « papillon »

Pour avoir une première idée du comportement statistiques des cartes d’anisotropies dues à l’effet papillon, nous avons tracé un histogramme des

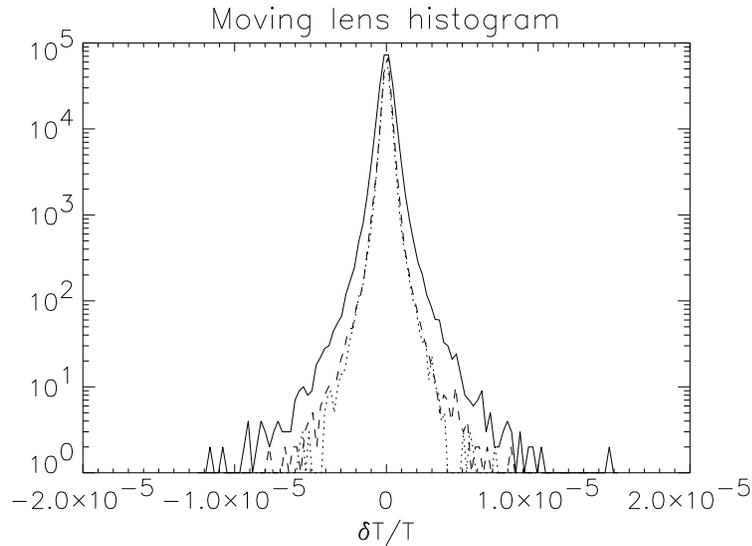


FIG. 5.2: *Histogramme des anisotropies de température engendrées par l'effet «papillon» intégré d'une population de structures pour trois modèles cosmologiques. Les courbes en trait plein, tirets et pointillés correspondent respectivement aux modèles SCDM, OCDM et Λ CDM.*

valeurs de $\delta T/T$ pour les trois modèles cosmologiques sCDM, OCDM, et Λ CDM. Ce dernier est présenté dans la figure 5.2. Dans tous les cas de figure les anisotropies de températures $\delta T/T$ sont comprises entre $-1,5 \cdot 10^{-5}$ et $1,5 \cdot 10^{-5}$. L'écart type des anisotropies varie légèrement avec le modèle cosmologique, en effet on trouve $(\delta T/T)_{rms}^{CDM} = 5,2 \cdot 10^{-7}$, $(\delta T/T)_{rms}^{OCDM} = 3,5 \cdot 10^{-7}$, et $(\delta T/T)_{rms}^{\Lambda CDM} = 3,4 \cdot 10^{-7}$. Ces résultats sont en accord avec les résultats de Tuluie et al. (1996). Il est important de noter que l'écart type des anisotropies engendrées par l'effet « papillon » est un ordre de grandeur plus petit que dans le cas de l'effet SZ cinématique, et un facteur 30 plus petit que dans le cas du CMB.

D'après la figure 5.2, on peut voir que la distribution de l'effet est non gaussienne. Une façon classique de quantifier cet effet est de calculer la « kurtosis » de l'échantillon (liée au moment d'ordre 4 de l'échantillon). Cette dernière est définie de la manière suivante. Supposons que nous ayons une

	a_p	b_p	c_p
SCDM	$4,9 \cdot 10^{+13}$	$5,5 \cdot 10^{+13}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$
OCDM	$1,8 \cdot 10^{+13}$	$7,6 \cdot 10^{+13}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$
Λ CDM	$2,1 \cdot 10^{+13}$	$2,2 \cdot 10^{+13}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$

TAB. 5.1: Coefficients de la formule analytique approchée pour les spectres de puissance de l'effet «papillon» pour trois modèles cosmologiques différents.

population \bar{x} , alors sa kurtosis est définie par :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{x_j - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 - 3 \\
\sigma &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N+1} (x_j - \bar{x})^2 \\
\bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N+1} x_j
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Cet estimateur quantifie l'écart à la forme gaussienne de la distribution. Les valeurs trouvées pour les modèles CDM, OCDM et Λ CDM sont respectivement 51, 97 et 41, ce qui signifie que les distributions sont plus « piquées » qu'une gaussienne.

Une quantité intéressante à calculer est le spectre de puissance des cartes précédentes. Ce dernier nous renseigne sur la manière dont la puissance est distribuée en fonction des échelles, ce qui sera crucial pour les tentatives d'extraction du signal provenant de l'effet « papillon ». Nous avons déduit de l'analyse des cartes correspondant aux effets «papillon» et SZ cinématique des formes analytiques approchées de leur spectre de puissance. Les spectres de puissance des anisotropies engendrées par l'effet «papillon» suivent la loi générale :

$$\ell(\ell + 1)C_\ell = a_p - b_p \exp(-c_p \ell) \tag{5.13}$$

Les valeurs des coefficients sont reportés dans la table 5.1. Dans le cas des anisotropies engendrées par l'effet SZ cinématique, nous trouvons que leurs spectres de puissance suivent la loi suivante :

$$\ell(\ell + 1)C_\ell = a_{SZ} \ell + b_{SZ} \ell^2 \tag{5.14}$$

De même, les valeurs des coefficients sont reportées dans la table 5.2 pour les différents modèles cosmologiques. Enfin, afin d'avoir une idée plus intuitive

	a_{SZ}	b_{SZ}
SCDM	$3,4 \cdot 10^{-15}$	$4,3 \cdot 10^{-18}$
OCDM	$2,3 \cdot 10^{-15}$	$6,3 \cdot 10^{-18}$
Λ CDM	$2,6 \cdot 10^{-15}$	$2,5 \cdot 10^{-18}$

TAB. 5.2: Mêmes coefficients que dans la table 5.1, mais pour l'effet SZ cinématique.

de ces différents spectres de puissance, nous les avons tracés dans la figure 5.3, où nous montrons également le spectre des anisotropies primaires à titre de comparaison.

5.4.2 Interprétation des résultats

Les spectres de puissance de l'effet SZ cinématiques suivent une loi en ℓ^{-2} , caractéristique d'un signal engendré par des sources ponctuelles. Dans les différents modèles, les spectres de puissance ont des amplitudes comparables aux grandes échelles, avec cependant un excès de puissance aux petites échelles pour le modèle OCDM. Cela vient du fait que dans les modèles à faible Ω_0 , le nombre de structures formées est plus grand que dans les modèles plats (Barbosa et al. (1996)).

Les spectres de puissance de l'effet papillon ont un comportement bien différent. Ces spectres, dans le cas des modèles CDM et Λ CDM, ont un plateau à $\ell > 500$, avec une légère décroissance aux petites échelles. En revanche, dans le cas du modèle OCDM, le spectre reste constant pour une très large gamme d'échelles. D'autre part, la puissance la plus grande est obtenue aux petites échelles dans le cas du modèle CDM, et la plus petite dans le cas du modèle OCDM. Aux grandes échelles la situation est inversée. Pour comprendre un tel comportement, il faut distinguer les «papillons» résolus de ceux qui ne le sont pas. Comme indiqué précédemment, le nombre de structures formées dans un modèle OCDM est plus grand que dans un modèle plat. Pour des structures d'extension spatiale suffisante (c.-à-d. nettement plus grande que la taille des pixels), cela résulte en un excès de puissance pour le modèle OCDM, ce qui est observé aux grandes échelles. En revanche, quand l'extension angulaire du «papillon» est inférieure ou égale à la taille du pixel, la contribution de la structure aux anisotropies est nulle du fait que le «papillon» est de moyenne nulle. Ainsi, l'effet papillon intégré rend compte uniquement des structures résolues et non pas de la population toute entière, comme c'est le cas pour l'effet SZ cinématique.

Une comparaison de ces spectres avec les spectres résultant des anisotropies *primaires* du FCM montre que ces dernières dominent l'effet papillon

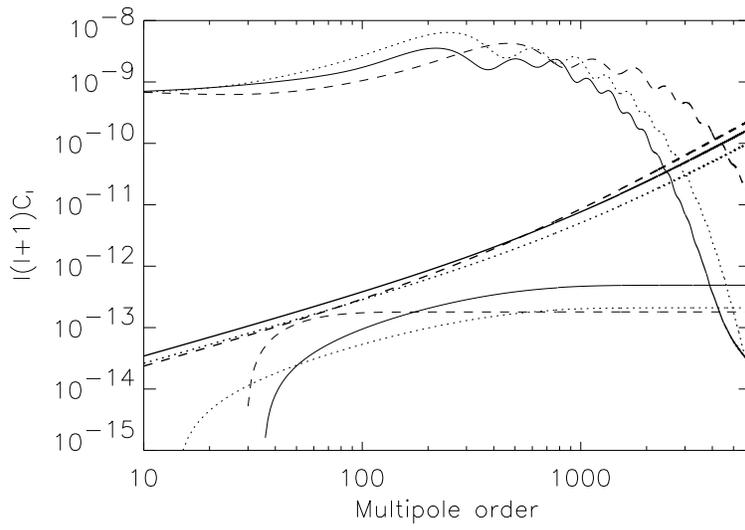


FIG. 5.3: Spectres de puissance ajustés des anisotropies de température dues respectivement à l'effet «papillon», à l'effet Sunyaev-Zeldovich cinématique et aux anisotropies primaires (en allant de bas en haut). Les courbes en trait plein, tirets et pointillés correspondent respectivement aux modèles SCDM, OCDM et Λ CDM.

jusqu'à l'échelle de diffusion («Silk Damping»), quelque soit le modèle cosmologique. Comme le montre la figure 5.3, le modèle qui offre le plus de chances pour l'observation du signal des «papillons» est le modèle CDM standard, car le spectre des anisotropies primaires tend plus vite vers 0 aux petites échelles, et que le spectre de puissance de l'effet papillon y est maximal. Cependant le signal des papillons est largement dominé par l'effet SZ cinématique aux échelles où les anisotropies primaires deviennent faibles. D'autre part, l'effet SZ cinématique, contrairement à l'effet SZ thermique, présente un spectre de corps noir à l'instar de l'effet papillon ; cela rend la séparation de ces signaux d'autant plus difficile. Ainsi, aux petites échelles, l'effet SZ cinématique est la principale source de confusion pour la mesure de l'effet papillon.

Cependant, le spectre de puissance de l'effet SZ cinématique dépend fortement de la quantité de gaz présente dans les structures. Autrement dit, les structures de petite masse tels que les petites groupes de galaxies pourraient avoir une fraction de gaz négligeable, et ainsi ne pas produire d'effet SZ, tout en produisant un effet papillon. Afin d'étudier de manière quantitative la variation du spectre de puissance de l'effet SZ en fonction des hypothèses sur le contenu en gaz des structures, nous nous sommes restreints au modèle CDM standard (celui qui offre le plus de chances pour l'extraction du signal des «papillons»), et avons calculé le spectre de l'effet SZ cinématique dans les deux cas suivants :

- Toutes les structures de masse $M > 10^{13} M_{\odot}$ ont une fraction de gaz de 20%, et présentent donc des effets SZ thermique et cinématiques.
- Seules les structures de masse $M > 10^{14} M_{\odot}$ possèdent une telle fraction de gaz.

Les spectres SZ cinématiques résultant ont été tracés dans la figure 5.4. Comme on peut le voir, l'effet SZ cinématique est encore largement dominant, et reste la source majeure de contamination du signal des papillons. Pour arriver à un niveau de contamination de l'ordre du signal des papillons eux-mêmes, il faudrait recourir à des hypothèses irréalistes concernant le contenu gazeux des structures.

5.4.3 Détection et extraction de l'effet «papillon»

Le but de cette section est de détecter l'amplitude de l'effet «papillon» associé à chaque structure en mouvement. D'après l'analyse précédente en terme de spectre de puissance, l'effet associé aux structures de petite taille angulaire sur le ciel est dominé par la confusion provenant de l'effet SZ cinématique des halos. D'autre part, le signal associé aux rares structures de

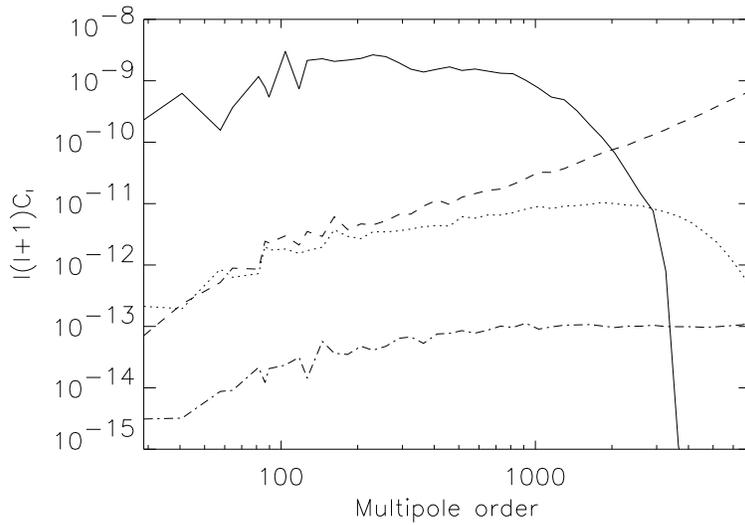


FIG. 5.4: *Spectre de puissance des fluctuations primaires du FCM (trait plein) pour un modèle CDM standard, comparé au spectre de puissance de l'effet «papillon» (traits-pointillés); le spectre de puissance de l'effet SZ cinématique est montré dans le cas où les structures présentant une fraction de gaz non nulle sont respectivement de masse $M > 10^{13} M_{\odot}$ (tirets) et $M > 10^{14} M_{\odot}$ (pointillés).*

taille angulaire plus grande est dominé par les anisotropies primaires du FCM (voir figure 5.3). Il est donc clair qu'il faut trouver un compromis entre ces deux sources de confusion, et qu'une analyse en terme d'échelles paraît appropriée. A ces difficultés vient se surajouter la confusion spectrale de l'effet que l'on cherche à détecter avec les anisotropies primaires et l'effet SZ cinématique. Néanmoins, les structures donnant lieu à un effet cinématique ont donc une fraction de gaz non nulle, et pourvu que leur masse soit suffisante elles donnent également lieu à un effet SZ thermique ayant une signature spectrale spécifique. Cette signature spectrale devrait permettre à une mission telle que PLANCK de déterminer précisément la position des structures les plus massives (Aghanim et al. (1997)). L'amplitude de cet effet thermique se caractérise numériquement par le paramètre y qui est proportionnel à l'intégrale de la pression du gaz le long de la ligne de visée. Ainsi le problème de la détection de l'effet «papillon» lié aux structures en mouvement se trouve facilité par le fait que cette détection se fait à une *position connue* dans le ciel, tout du moins pour les structures les plus massives. Nous basons notre méthode de détection sur ces informations (spectre de puissance d'une part, position connue d'autre part).

Méthode

Notre méthode de détection de l'effet «papillon» lié aux structures individuelles doit donc prendre en compte le fait que la position de ces dernières est supposée connue grâce à leur effet SZ thermique, mais doit aussi prendre en compte le fait qu'il existe une échelle optimale à laquelle ce signal doit être recherché (compromis entre les grandes échelles où les anisotropies primaires dominent et les petites où l'effet SZ cinématique domine). Une méthode prenant en compte la localisation de l'effet recherché en même temps qu'une analyse en terme d'échelles est implémentée par la *transformée en ondelettes*. Cette dernière consiste à transformer une image en une succession d'images de résolution inférieure et d'images des détails associées. A chaque niveau, l'image de référence (de basse résolution) et l'image des détails associée permet de reconstruire l'image de référence au niveau suivant de résolution. Ainsi, cette transformée garde la localisation des signaux présents dans l'image, et permet par ailleurs, à l'instar de la transformée de Fourier, de faire une analyse multi-échelles de l'image originale. Il existe cependant une grande variété d'ondelettes différentes, et nous en avons choisi une qui a une très bonne réponse impulsionnelle ainsi qu'une bonne restitution de l'amplitude du signal (Villasenor et al. (1995)). Puisque les effets «papillon» induisent des anisotropies à des échelles très petites en comparaison des anisotropies primaires, nous commençons par filtrer le signal aux

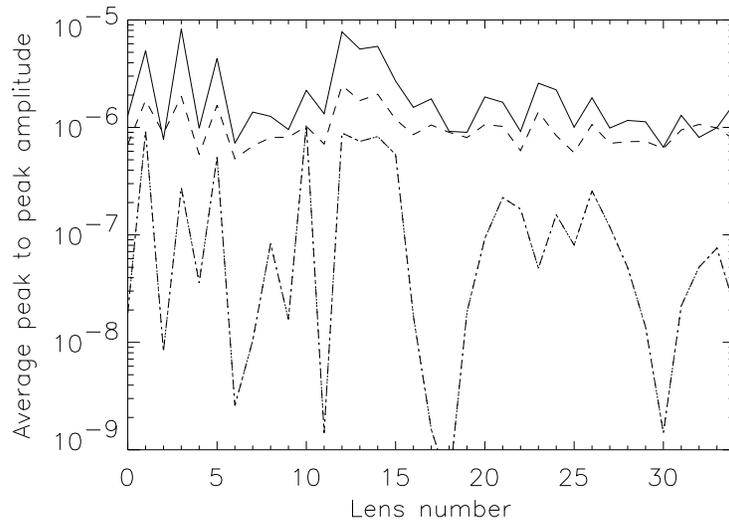


FIG. 5.5: *Amplitude moyenne crête-à-crête des anisotropies dues à l'effet «papillon» pour des structures classées par paramètre y décroissant. La ligne en trait plein représente l'amplitude du signal pour la carte d'entrée, celle en tirets représente l'amplitude correspondante pour le signal extrait après filtrage des anisotropies primaires (pas d'effet SZ cinématique). La ligne en traits-pointillés représente le signal extrait après filtrage des anisotropies primaires ainsi que l'effet SZ cinématique.*

grandes échelles pour nous débarrasser de la majeure partie des anisotropies primaires. Nous allons expliciter notre méthode dans deux cas, un cas d'école irréaliste mais pédagogique, et un cas plus réaliste.

Cas d'école

Nous partons ici d'une carte simulée contenant les anisotropies primaires du FCM, ainsi que les anisotropies dues à l'effet «papillon» (nous n'incluons pas l'effet SZ cinématique), afin de tester la robustesse de notre décomposition en ondelettes. Dans ce cas, la contamination du signal due aux anisotropies primaires est efficacement enlevée, et les anisotropies résiduelles correspondent bien aux positions des structures. De plus, l'amplitude des fluctuations associées à ces structures est très bien corrélée avec le signal d'entrée dû à l'effet papillon (voir figure 5.5). Dans le cas où nous ne prenons pas en compte l'effet SZ cinématique, nous voyons que nous pouvons extraire après filtrage des anisotropies primaires le signal associé à l'effet «papillon» avec une bonne précision, tout du moins pour les structures les plus massives

(c.-à-d. celles qui ont le plus grand paramètre y). Si cette étude nous indique que notre méthode d'extraction par ondelettes donne de bons résultats pour le filtrage des anisotropies primaires, elle ne nous dit rien quant à ses capacités à filtrer efficacement l'effet SZ cinématique qui est, comme nous l'avions dit précédemment, la principale source de confusion pour la mesure de l'effet de lentille en mouvement.

Cas réaliste

Afin d'étudier le problème de la mesure de l'effet «papillon» dans sa globalité, nous prenons en compte cette fois-ci tous les contaminants de l'effet «papillon» ne pouvant être extraits par leur signature spectrale, à savoir les anisotropies primaires et l'effet SZ cinématique. Dans ce cas notre tentative d'extraction de l'effet «papillon» a échoué, même dans le cas des plus grosses structures (voir 5.5), alors même que nous avons restreint les structures contribuant à l'effet SZ cinématique à avoir une masse $M > 10^{14} M_{\odot}$. Dans notre tentative d'utiliser la signature spatiale des effets «papillons», nous avons séparément décomposé la carte des anisotropies des lentilles en mouvement d'une part, et celle résultant de l'effet SZ cinématique et des anisotropies primaires d'autre part. En ne gardant que les coefficients d'ondelettes tels que l'amplitude du signal des «papillons» soit supérieure à celle des contaminants, nous avons pu extraire l'amplitude moyenne de l'effet «papillon» associé aux plus grosses structures (voir figure 5.6) avec une bonne fidélité. Nous avons supposé que seules les structures de masses $M > 10^{14} M_{\odot}$ contribuaient à l'effet SZ cinématique. Ce filtrage dépend évidemment d'une connaissance *a priori* de l'effet «papillon» associé aux structures et reflète seulement le fait que malgré la faiblesse du spectre de puissance de l'effet «papillon» comparé aux spectre de puissance des contaminants, les anisotropies liées à l'effet «papillon» peuvent avoir localement une contribution non négligeable aux anisotropies du FCM.

Conclusions

Nos simulations, à caractère semi-analytique, nous ont permis de quantifier la contribution aux anisotropies du FCM de l'effet «papillon» lié aux structures en mouvement orthogonal à la ligne de visée, cela pour une large gamme d'échelles. Nous concluons de cette étude que cet effet ne saurait être un contaminant important lors de la mesure des anisotropies primaires du FCM. Il apparaît de plus que leur mesure, à cause de la confusion spectrale avec l'effet SZ cinématique, semble impossible même pour les structures les plus grosses. On pourrait toutefois objecter que notre méthode de détection

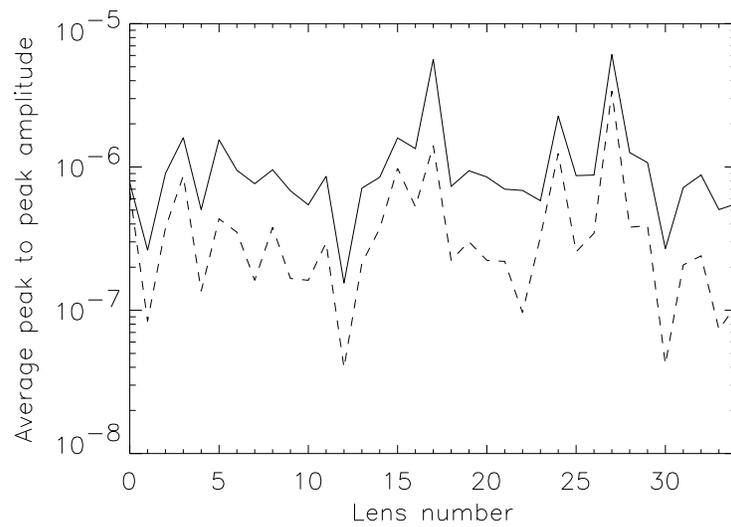


FIG. 5.6: Amplitude moyenne crête-à-crête de l'effet «papillon» pour des sources classées par paramètre y décroissant. La courbe en trait plein correspond à la carte d'entrée. La courbe en tirets correspond à la mesure après **classement des coefficients d'ondelettes** et filtrage des anisotropies primaires et de l'effet SZ cinématique.

n'est pas optimale et qu'une meilleure méthode pourrait permettre la mesure de l'effet pour quelques structures au moins. Il faut néanmoins se souvenir que nous n'avons pas pris en compte les anisotropies provenant d'effets secondaires tels que l'effet Vishniac si l'univers est réionisé, ou des effets SZ cinématiques additionnels provenant d'une éventuelle réionisation non homogène (Aghanim et al. (1996)). Ces deux contaminants supplémentaires ont également un spectre de corps noir, et ne peuvent être séparés par une analyse multi-fréquence. Nous avons donc considéré le «meilleur» des cas en omettant ces contaminants, et restons pessimistes quant à l'observabilité de l'effet «papillon».

A&A manuscript no.
(will be inserted by hand later)

Your thesaurus codes are:
12(12.03.1,12.03.3,12.07.1)

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

Moving gravitational lenses: imprints on the CMB

N. Aghanim¹, S. Prunet¹, O. Forni¹, and F. R. Bouchet²

¹ IAS-CNRS, Université Paris XI, Bâtiment 121, F-91405 Orsay Cedex

² IAP-CNRS, 98 bis, Boulevard Arago, F-75014 Paris

Received date / accepted date

Abstract. With the new generation of instruments for Cosmic Microwave Background (CMB) observations aiming at an accuracy level of a few percent in the measurement of the angular power spectrum of the anisotropies, the study of the contributions due to secondary effects has gained impetus. Furthermore, a reinvestigation of the main secondary effects is crucial in order to predict and quantify their effects on the CMB and the errors that they induce in the measurements.

In this paper, we investigate the contribution, to the CMB, of secondary anisotropies induced by the transverse motions of clusters of galaxies. This effect is similar to the Kaiser–Stebbins effect. In order to address this problem, we model the gravitational potential well of an individual structure using the Navarro, Frenk & White profile. We generalise the effect of one structure to a population of objects predicted using the Press–Schechter formalism. We simulate maps of these secondary fluctuations, compute the angular power spectrum and derive the average contributions for three cosmological models. We then investigate a simple method to separate this new contribution from the primary anisotropies and from the main secondary effect, the Sunyaev–Zel’dovich kinetic effect from the lensing clusters.

Key words: Cosmology: cosmic microwave background – gravitational lensing – secondary fluctuations – clusters of galaxies

1. Introduction

During the next decade, several experiments are planned to observe the Cosmic Microwave Background (CMB) and measure its temperature fluctuations (Planck surveyor, Map, Boomerang, ...). Their challenge is to measure the small scales anisotropies of the CMB (a few arcminutes up to ten degrees scale) with sensitivities better by a factor 10 than the COBE satellite (Smoot et al. 1992). These high sensitivity and resolution measurements will tightly constrain the value of the main cosmological parameters (Kamionkowski et al. 1994). However, the constraints

Send offprint requests to: N. Aghanim

can only be set if we are able to effectively measure the *primary* temperature fluctuations. These fluctuations, present at recombination, give an insight into the early universe since they are directly related to the initial density perturbations which are the progenitors to the cosmic structures (galaxies and galaxy clusters) in the present universe; but which are first and foremost the relics of the very early initial conditions of the universe.

Between recombination and the present time, the CMB photons could have undergone various interactions with the matter and structures present along their lines of sight. Some of these interactions can induce additional temperature fluctuations called, *secondary* anisotropies because they are generated after the recombination. Along a line of sight, one measures temperature fluctuations which are the superposition of the *primary* and *secondary* anisotropies. As a result, and in the context of the future CMB experiments, accurate analysis of the data will be needed in order to account for the foreground contributions due to the secondary fluctuations. Photon–matter interactions between recombination and the present time are due to the presence of ionised matter or to variations of the gravitational potential wells along the lines of sight.

The CMB photons interact with the ionised matter mainly through Compton interactions. In fact, after recombination the universe could have been re-ionised globally or locally. Global early re-ionisation has been widely studied (see Dodelson & Jubas 1995 for a recent review and references therein). Its main effect is to either smooth or wipe out some of the primary anisotropies; but the interactions of the photons with the matter in a fully ionised universe can also give rise to secondary anisotropies through the Vishniac effect (Vishniac 1987). This second order effect has maximum amplitudes for a very early re-ionisation. The case of a late inhomogeneous re-ionisation and its imprints on the CMB fluctuations has been investigated (Aghanim et al. 1996) and found to be rather important. In this case, the secondary anisotropies are due to the bulk motion of ionised clouds with respect to the CMB frame. When the re-ionisation is localised in hot ionised intra-cluster media the photons interact with the free electrons. The inverse Compton scattering between photons and electrons leads to the so-

called Sunyaev-Zel'dovich (hereafter SZ) effect (Sunyaev & Zel'dovich 1972, 1980). The Compton distortion due to the motion of the electrons in the gas is called the thermal SZ effect. The kinetic SZ effect is a Doppler distortion due to the peculiar bulk motion of the cluster with respect to the Hubble flow. The SZ thermal effect has the unique property of depressing the CMB brightness in the Rayleigh-Jeans region and increasing its brightness above a frequency of about 219 GHz. This frequency dependence makes it rather easy to observe and separate from the kinetic SZ effect. In fact, the latter has a black body spectrum which makes the spectral confusion between kinetic SZ and primary fluctuations a serious problem. The SZ effect has been widely studied for individual clusters and for populations of clusters. For full reviews on the subject we refer the reader to two major articles: Rephaeli 1995 and Birkinshaw 1997. These investigations have clearly shown that the SZ effect in clusters of galaxies provides a powerful tool for cosmology through measurements of the Hubble constant, the radial peculiar velocity of clusters and consequently the large scale velocity fields.

Besides the interactions with the ionised matter, some secondary effects arise when the CMB photons traverse a varying gravitational potential well. In fact, if the gravitational potential well crossed by the photons evolves between the time they enter the well and the time they leave it, the delay between entrance and exit is equivalent to a shift in frequency, which induces a temperature anisotropy on the CMB. This effect was first studied by Rees & Sciama (1968) for a potential well growing under its own gravity. Numerous authors have investigated the potential variations due to collapsing objects and their effect on the CMB (Kaiser 1982, Nottale 1984, Martínez-González, Sanz & Silk 1990, Seljak 1996). Similarly, a gravitational potential well moving across the line of sight is equivalent to a varying potential and will thus imprint secondary fluctuations on the CMB. This effect was first studied for one cluster of galaxies by Birkinshaw & Gull (1983) (Sect. 2). Kaiser & Stebbins (1984) and Bouchet, Bennett & Stebbins (1988) investigated a similar effect for moving cosmic strings. Recent work (Tuluie & Laguna 1995, Tuluie, Laguna & Anninos 1996) based on N-body simulations has pointed out this effect in a study of the effect of varying potential on rather large angular scales ($\simeq 1^\circ$). A discussion of some of these results and a comparison with ours will follow in the next sections.

In this paper, following the formalism of Birkinshaw & Gull (1983) and Birkinshaw (1989), we investigate the contribution of secondary anisotropies due to a population of collapsed objects moving across the line of sight, these objects range from small groups to rich clusters in scale (10^{13} to $10^{15} M_\odot$). In section 2., we first study in detail the case of a unique collapsed structure. We use a structure model to compute in particular the deflection angle and derive the spatial signature of the moving lens effect. We then account (Section 3.) for the contribution, to the primordial cosmological signal, of the whole population of collapsed objects using predicted counts and we simulate maps of these secondary anisotropies. In section 4.,

we analyse the simulated maps and present our results. We give our conclusions in section 5.

2. Formalism for an individual moving structure

One of the first studies of the photon-gravitational potential well interactions is related to the Sachs-Wolfe effect (Sachs & Wolfe 1967). At the recombination time ($z \simeq 1100$) the photons and matter decouple while they are in potential wells; the photons are redshifted when they leave the potential wells. This generates the large angular scale temperature fluctuations.

Other authors have investigated the effect of time varying potentials on the CMB photons after the recombination, namely the Rees-Sciama effect (Rees & Sciama 1968). If the potential well crossed by the photons evolves between the time they enter and their exit, the extra-time delay they suffer changes the temperature of the CMB and induces an additional anisotropy. The variation of the potential well can have an "intrinsic" or a "kinetic" origin. The first case describes the evolution with respect to the background density distribution. The second case is related to the bulk motion of a gravitational potential well across the line of sight which mimics a time variation of the potential. Photons crossing the leading edge of a structure will be redshifted because of the increasing depth of the potential well during their crossing time; while photons crossing the trailing edge of the same structure are blueshifted. This results in a characteristic spatial signature for the induced anisotropy: a hot-cold temperature spot.

The specific effect of a moving cluster across the sky was first studied by Birkinshaw & Gull (1983) (correction to this paper was made in Birkinshaw 1989) and it was invoked as a method to measure the transverse velocity of massive clusters of galaxies. These authors found that the transverse motion of a cluster across the line of sight induces a frequency shift given by:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \beta\gamma \sin\alpha \cos\phi \delta(b). \quad (1)$$

Here, β is the peculiar velocity in units of the speed of light ($\beta = v/c$), γ is the Lorentz factor ($\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$), α and ϕ are respectively the angle between the peculiar velocity \mathbf{v} and the line of sight of the observer and the azimuthal angle in the plane of the sky, and $\delta(b)$ is the deflection angle due to the gravitational lensing by the cluster at a distance equal to the impact parameter b . This frequency shift induces a brightness variation which in turn can be expressed as a secondary temperature fluctuation $\delta T/T$. In their paper, Birkinshaw & Gull derived an expression for $\delta T/T$ in the Rayleigh-Jeans regime, with some specific assumptions on the gravitational potential well associated with the cluster. They assumed that the matter in the galaxy cluster was homogeneously distributed in an isothermal sphere of radius R , where R is the characteristic scale of the cluster.

In our paper, we basically follow the same formalism as Birkinshaw & Gull's using the corrected expression from Birkinshaw 1989. We compute the gravitational deflection angle at the impact parameter $\delta(b)$, the corresponding frequency shift

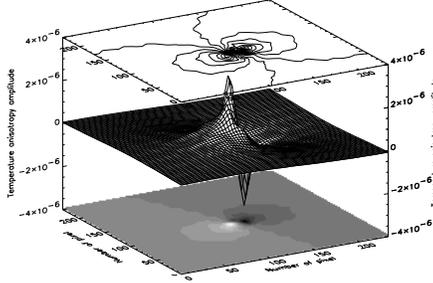


Fig. 1. Characteristic spatial signature of a temperature fluctuation due to a moving lens with mass $M = 10^{15} M_{\odot}$ and velocity $v = 600$ km/s.

and then derive the associated temperature fluctuation. The main difference between our approach in this section and the previous work concerns the physical hypothesis that we adopt to describe the distribution of matter in the structures. In fact, in order to derive the deflection angle, we find the homogeneous isothermal distribution a too simple and rather unrealistic hypothesis and choose another more realistic description. For the structures such as those we are interested in (clusters down to small groups), almost all the mass is “made” of dark matter. In order to study the gravitational lensing of a structure properly, one has to model the gravitational potential well using the best possible knowledge for the dark matter distribution. The corrections, due to the more accurate profile distribution that we introduce, will not alter the maximum amplitude of an individual moving lens effect since it is associated with the central part of the lens. However, when dealing with some average signal coming from these secondary anisotropies, the contribution from the outskirts of the structures appears important and thus a detailed model of the matter profile is needed.

In view of the numerous recent studies on the formation of dark matter halos, which are the formation sites for the individual structures such as clusters of galaxies, we now have a rather precise idea of their formation and density profiles. Specifically, the results of Navarro, Frenk & White (1996, 1997) are particularly important. In fact, these authors have used N-body simulations to investigate the structure of dark matter halos in hierarchical cosmologies; their results put stringent constraints on the dark matter profiles. Over about four orders of magnitudes in mass (ranging from the masses of dwarf galaxy halos to those of rich clusters of galaxies), they found that the density profiles can be fitted over two decades in radius by a “universal” law (hereafter NFW profile) which seems to be the best description of the structure of dark matter halos (Huss, Jain & Steinmetz 1997). The NFW profile is given by:

$$\rho(r) = \frac{\rho_{crit} \delta_c}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (2)$$

where $r_s = r_{200}/c$ is the scale radius of the halo, δ_c its characteristic overdensity, ρ_{crit} is the critical density of the universe and c is a dimensionless parameter called the concentration. The radius r_{200} is the radius of the sphere where the mean density is $200 \times \rho_{crit} = 200 \rho_{crit} (4\pi/3)r_{200}^3$.

In addition to the fact that the shape is independent of the halo mass over a wide range, the NFW profile is also independent of the cosmological model. The cosmological model intervenes essentially in the formation epoch of the dark matter halo and therefore in the parameters of the profile, namely c , r_s and δ_c .

Using the density profile, one can compute the deflection angle at the impact parameter which gives the shape of the pattern and the amplitude of the induced secondary anisotropy. In our work, we compute the deflection angle following the formalism of Blandford & Kochanek (1987), which is given by the expression:

$$\delta = 2 \frac{D_{ls}}{D_{os}} \nabla_r \int \Phi(\mathbf{r}, l) dl, \quad (3)$$

here, the integral is performed over the length element dl along the line of sight. D_{ls} and D_{os} are respectively the distances between lens and source and the observer and source. In the redshift range of the considered structures ($z < 1.5$), the distance ratios D_{ls}/D_{os} range between 1 and 0.68 for the standard CDM model, between 1 and 0.53 for the open CDM model and between 1 and 0.74 for the lambda CDM model. These cosmological models will be defined in the next section. In Eq. 3 \mathbf{r} is the position of the structure and $\Phi(\mathbf{r}, l)$ is the associated gravitational potential. In order to get an analytic expression of the deflection angle and hence of the anisotropy, we used a density profile which gives a good approximation to the NFW density profile (Eq. 2), in the central part of the structure. This density profile is given by:

$$\rho(r) = \rho_{crit} \delta_c \left(\frac{r}{r_s}\right)^{-1} \exp\left(\frac{-r}{r_s}\right). \quad (4)$$

The fitted profile leads to a diverging mass at large radii and we therefore introduce a cut-off radius R_{max} to the integral. This cut-off should correspond to some physical size of the structure. With regard to the different values of the concentration c , we set $R_{max} = 8r_s$ which is in most cases equivalent to $R_{max} \simeq r_{200}$, i.e., close to the virial radius. The integral giving the deflection angle is performed on the interval $[-R_{max}, R_{max}]$. For $R_{max} = 8r_s$, our fit gives a mass which is about 20% lower than the mass derived from NFW profile. This difference is larger for larger R_{max} , and for $R_{max} = 10r_s$ we find that the mass is about 33% lower. However, the larger radii the temperature fluctuations are at the 10^{-8} level. On the other hand, the Hernquist (1990) profile is also in agreement with the results of N-body simulations. Indeed, both NFW and Hernquist profiles have a similar dependence in the central part of the structure but differ at large radii where the NFW profile is proportional to r^{-3} and the Hernquist profile varies as r^{-4} . However, the amplitude of the anisotropy at large radii is very small and the results that we obtain does are not sensitive to the cut-off.

Given the peculiar velocity of the structure and its density profile, we can calculate the deflection angle (Eq. 3). Then one can determine the relative variation in frequency, $\delta\nu/\nu$, using equation 1 and thus evaluate the secondary distortion induced by a specific structure moving across the sky. We find that individual massive structures (rich galaxy clusters) produce anisotropies ranging between a few 10^{-6} to 10^{-3} ; but within a wider range of masses the amplitudes are smaller and these values are only upper limits for the moving lens effect.

3. Generalisation to a sample of structures

Future CMB (space and balloon born) experiments will measure the temperature fluctuations with very high accuracy (10^{-6}) at small angular scales. In our attempts to foresee what the CMB maps would look like and what would be the spurious contributions due to the various astrophysical foregrounds, we investigate the generalisation of the computations made above to a sample of structures. This is done in order to address the questions of the cumulative effect and contamination to the CMB.

Some work has already been done by Tuluie & Laguna 1995 and Tuluie, Laguna & Anninos 1996 who pointed out the moving lens effect in their study of the varying potential effects on the CMB. In their study, they used N-body simulations to evolve the matter inhomogeneities, from the decoupling time until the present, in which they propagated CMB photons. They have estimated the anisotropies generated by three sources of time-variations of the potential: intrinsic changes in the gravitational potential, decaying potential effect from the evolution of gravitational potential in $\Omega_0 \neq 1$ models, and peculiar bulk motions of the structures across the sky. They evaluated the contribution of the latter effect for rather large angular scales ($\simeq 1^\circ$) due to the lack of numerical resolution (about $2h^{-1}$ Mpc) and gave estimates of the power spectrum of these effects.

With another approach, we make a similar analysis in the case of the moving lens effect extended to angular scales down to a few tens of arcseconds. We also simulate attempts at the detection and subtraction of the moving lens effect. Our approach is quite different from that of Tuluie, Laguna & Anninos, in that it is semi-empirical and apply the formalism developed for an individual structure (Sect. 2.) to each object from a sample of structures. The predicted number of objects in the sample being derived from the Press–Schechter formalism for the structure formation (Press & Schechter 1974).

3.1. Predicted population of collapsed objects

An estimate of the cumulative effect of the moving lenses requires a knowledge of the number of objects of a given mass that will contribute to the total effect at a given epoch. We assume that this number is accurately predicted by the abundance of collapsed dark matter halos as a function of their masses and

redshifts, as derived using the Press–Schechter formalism. This approach was used in a previous paper (Aghanim et al. 1997) which predicted the SZ contribution to the CMB signal in a standard CDM model. In addition to the “traditional” standard Cold Dark Matter (CDM) model ($\Omega_0 = 1$), in this paper we also address the question of a generalised moving lens effect in other cosmological models. We extend the Press–Schechter formalism to an open CDM model (OCDM) with no cosmological constant ($\Omega_0 = 0.3$), and also a flat universe with a non zero cosmological constant (Λ CDM model) ($\Omega_0 = 0.3$ and $\Lambda = 0.7$). Here Ω_0 is the density parameter, Λ is the cosmological constant given in units of $3H_0^2$ and H_0 is the Hubble constant. We take $H_0 = 100h$ km/s/Mpc, and assume $h = 0.5$ throughout the paper.

In any case, the general analytic expression for the number density of spherical collapsed halos in the mass range $[M, M + dM]$ can be written as (Lacey & Cole 1993):

$$\frac{dn(M, z)}{dM} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}(z)}{M^2} \frac{d \ln \sigma(M)}{d \ln M} \frac{\delta_{e0}(z)}{\sigma(M)} \exp \left[-\frac{\delta_{e0}^2(z)}{2\sigma^2(M)} \right], \quad (5)$$

where $\bar{\rho}(z)$ is the mean background density at redshift z and $\delta_{e0}(z)$ is the overdensity of a linearly evolving structure. The mass variance $\sigma^2(M)$ of the fluctuation spectrum, filtered on mass scale M , is related to the linear power spectrum of the initial density fluctuations $P(k)$ through:

$$\sigma^2(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) W^2(kR) dk,$$

where W is the Fourier transform of the window function over which the variance is smoothed (Peebles 1980) and R is the scale associated with mass M . In the assumption of a scale-free initial power spectrum with spectral index n , the variance on mass scale M can be expressed in terms of σ_8 , the rms density fluctuation in sphere of $8h^{-1}$ Mpc size. The relationship between these two quantities is given by (Mathiesen & Evrard 1997):

$$\sigma(M) = (1.19\Omega_0)^\alpha \sigma_8 M^{-\alpha},$$

with $\alpha = (n + 3)/6$. It has been shown that σ_8 varies with the cosmological model and in particular with the density parameter Ω_0 . A general empirical fitting function ($\sigma_8 = A\Omega_0^{-B}$) was derived from a power spectrum normalisation to the cluster abundance with a rather good agreement in the values of the parameters A and B (White, Efstathiou & Frenk 1993, Eke, Cole & Frenk 1996, Viana & Liddle 1996). In our work, we use the “best fitting values” from Viana & Liddle (1996) which are $A = 0.6$ and $B = 0.36 + 0.31\Omega_0 - 0.28\Omega_0^2$ for an open CDM universe ($\Omega_0 < 1$ and $\Lambda = 0$) or $B = 0.59 - 0.16\Omega_0 + 0.06\Omega_0^2$ for a flat universe with a non zero cosmological constant ($\Omega_0 + \Lambda = 1$). We use $n = -1$ for the spectral index in the cluster mass regime which is the theoretically predicted value. Some local constraints on the temperature abundance of clusters favour $n = -2$ (Henry & Arnaud 1991, Oukbir, Bartlett & Blanchard 1997) but we did not investigate this case.

3.2. Peculiar velocities

On the scale of clusters of galaxies, typically $8h^{-1}$ Mpc, one can assume that the density fluctuations are in the linear regime. Therefore the fluctuations are closely related to the initial conditions from which the structures arise. In fact, in the assumption of an isotropic Gaussian distribution of the initial density perturbations, the initial power spectrum $P(k)$ gives a complete description of the velocity field through the three-dimensional *rms* velocity (v_{rms}) predicted by the linear gravitational instability for an irrotational field at a given scale R (Peebles 1993). This velocity is given by:

$$v_{rms} = a(t) H f(\Omega, \Lambda) \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) W^2(kR) dk \right]^{1/2} \quad (6)$$

where $a(t)$ is the expansion parameter, the Hubble constant H and the density parameter Ω vary with time (Carroll, Press & Turner 1992). The function $f(\Omega, \Lambda)$ is accurately approximated by $f(\Omega, \Lambda) = \Omega^{0.6}$ (Peebles 1980) even if there is a non zero cosmological constant (Lahav et al. 1991). Furthermore, under the assumptions of linear regime and Gaussian distribution of the density fluctuations, the structures move with respect to the global Hubble flow with peculiar velocities following a Gaussian distribution $f(v) = \frac{1}{v_{rms} \sqrt{(2\pi)}} \exp(-\frac{v^2}{2v_{rms}^2})$ which is fully described by v_{rms} . This prediction is in agreement with numerical simulations (Bahcall et al. 1994, Moscardini et al. 1996).

The present observational status of peculiar cluster velocities puts few constraints on the cosmological models. Results from the Hudson (1994) sample using D_n - σ and IRTF distance estimators give respectively $v_{rms} = 688 \pm 82$ and 646 ± 120 km/s, a composite sample gives $v_{rms} = 725 \pm 60$ km/s (Moscardini et al 1996). Giovanelli's (1996) sample gives a smaller value, $v_{rms} = 356 \pm 37$ km/s.

In our paper we compute the three-dimensional *rms* peculiar velocity on scale $8h^{-1}$ Mpc (typical virial radius of a galaxy cluster) using Eq. 6 for the three cosmological models. This is because large scale velocities are mostly sensitive to long wavelength density fluctuations. This smoothing allows us to get rid of the nonlinear effects on small scales but it also tends to underestimate the peculiar velocities of the smallest objects that we are interested in. Nevertheless, with regard to the rather important dispersion in the observational values ($320 < v_{rms} < 780$ km/s), we use the predicted theoretical values, which range between 400 and 500 km/s, and are hence in general agreement with the observational data.

3.3. Simulations

For each cosmological model, we generate a simulated map of the moving lens effect in order to analyse the contribution to the signal in terms of temperature fluctuations. The simulations are essentially based on the studies of Aghanim et al. (1997). In the following, we describe briefly the main hypothesis that we make in simulating the maps of the temperature fluctuations induced by the moving lens effect associated

with small groups and clusters of galaxies (10^{13} and $10^{15} M_\odot$). The predicted number of massive objects is derived from a distribution of sources using the Press–Schechter formalism normalised (Viana & Liddle 1996) using the X-ray temperature distribution function derived from Henry & Arnaud (1991) data. This normalisation has also been used by Mathiesen & Evrard (1997) for the ROSAT Brightest Clusters Sample compiled by Ebeling et al. (1997). The position and direction of motion of each object are random. Their peculiar velocities are also random within an assumed Gaussian distribution. Here again, the correlations were neglected because the effect is maximum very close to the central part of the structure (about 100 kpc) whereas the correlation length is between 5 and 20 Mpc (Bahcall 1988). The final maps account for the cumulative effect of the moving lenses with redshifts lower than $z = 1.5$. We refer the reader to Aghanim et al. (1997) for a detailed description of the simulation.

In this paper, some changes and improvements have been made to our previous study (Aghanim et al. 1997). In this paper, the predicted source counts (Eq. 5, Sect. 3.1) are in agreement with more recent data. They are also adapted to the various cosmological models that we have assumed. The standard deviation of the peculiar velocity distribution is computed using equation 6 and is in reasonable agreement with the data. The advantage of using this equation is that the variations with time and cosmology are directly handled in the expression. As we pointed out in section 2, the secondary effects we study here are associated with the whole mass of the structure, not only the gas mass. Therefore, the gas part of structures are modelled using the β -profile (as in the previous case) to simulate the SZ effect. Whereas the density profile (Eq. 4) is used to simulate the potential well of the moving lens effect. We note that the results of the N-body simulations of Navarro, Frenk & White (1996) are consistent with the assumption of an intra-cluster isothermal gas in hydrostatic equilibrium with a NFW halo.

4. Results of the data analysis

We analyse the simulated maps of secondary fluctuations due to the moving lens effect, for the three cosmological models described in Sect. 3, and we quantify their contributions. We also make attempts at detecting and extracting the secondary fluctuations from the entire signal (primary CMB, SZ kinetic effect and moving lenses).

4.1. Statistical analysis

We show the histogram of the secondary fluctuations for the moving lens effect (randomly generated) in the three cosmologies (Fig. 2). In all cases, the amplitude of anisotropies ranges roughly between $\delta T/T \simeq -1.5 \cdot 10^{-5}$ and $\delta T/T \simeq 1.5 \cdot 10^{-5}$. The *rms* value of the anisotropies varies a little with the cosmological model ($\frac{\delta T}{T}_{rms}^{CDM} \simeq 5.2 \cdot 10^{-7}$, $\frac{\delta T}{T}_{rms}^{\Lambda CDM} \simeq 3.4 \cdot 10^{-7}$ and finally $\frac{\delta T}{T}_{rms}^{OCDM} \simeq 3.5 \cdot 10^{-7}$). Our results are in general

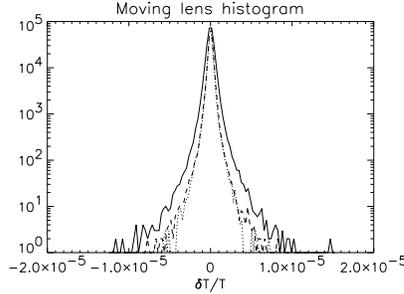


Fig. 2. Histograms showing the distributions of the secondary fluctuations in the simulated maps. The solid, dashed and dotted lines are for respectively the standard, Open and Lambda CDM model.

agreement with those of Tuluie, Laguna & Anninos (1996). In all the cosmological models, the *rms* value of the anisotropies is about a factor 10 lower than the *rms* amplitude of the fluctuations due to the SZ kinetic effect associated with the same structures, which is about $5 \cdot 10^{-6}$; and is about 30 times lower than the $(\frac{\delta T}{T})_{rms}$ of the primary fluctuations in a standard CDM model. The distribution of the temperature fluctuations induced by moving lenses exhibits a highly non Gaussian signature (Fig. 2). The fourth moment of the distribution, called the kurtosis, measures the peakedness or flatness of the distribution relative to the normal one. We find that the kurtosis for the standard CDM, OCDM and Λ CDM models are positive and respectively equal to about 51, 97 and 41. The distributions are thus peaked (leptokurtics).

In the context of our statistical analysis of the secondary anisotropies, we also compute the fitted angular power spectra (Fig. 3) of the three main sources of anisotropies: primary CMB fluctuations (in the standard CDM model) and both the predicted power spectra of the fluctuations due to the moving lenses (thin lines) and the SZ kinetic effect (thick lines). In figure 3, the solid lines are for the standard CDM model, dashed and dotted lines are respectively for the open and non zero cosmological constant models. We fit the power spectra of the secondary anisotropies due to moving lenses with the general expression:

$$l(l+1)C_l = a_{ls} - b_{ls} \exp(-c_{ls}l), \quad (7)$$

in which the fitting parameters for every cosmological model are given in table 1. The SZ kinetic anisotropies are fitted with the following expression:

$$l(l+1)C_l = a_{SZ}l + b_{SZ}l^2, \quad (8)$$

with the fitting parameters for the cosmological models gathered in table. 2.

The power spectra of the SZ kinetic effect exhibit the characteristic l^2 dependence on small angular scales for the point-like source dominated signal. All the power spectra have rather

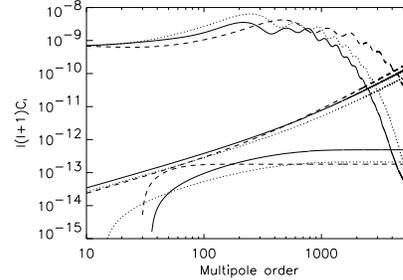


Fig. 3. Power spectra of the primary fluctuations obtained using the CMBFAST code compared to the fitted power spectra of the secondary fluctuations due to the Sunyaev-Zel'dovich kinetic effect (thick lines) and to the moving lens effect (thin lines). The power spectra for the standard CDM model (solid line), open CDM model (dashed line) and lambda CDM model (dotted line) are shown.

Table 1. Fitting parameters for the power spectrum of the fluctuations induced by moving lenses as a function of the cosmological model.

	a_{ls}	b_{ls}	c_{ls}
SCDM	$4.9 \cdot 10^{-13}$	$5.5 \cdot 10^{-13}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$
OCDM	$1.8 \cdot 10^{-13}$	$7.6 \cdot 10^{-13}$	$4.9 \cdot 10^{-2}$
Λ CDM	$2.1 \cdot 10^{-13}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$

Table 2. Fitting parameters for the power spectrum of the fluctuations induced by the Sunyaev-Zel'dovich kinetic effect as a function of the cosmological model.

	a_{SZ}	b_{SZ}
SCDM	$3.4 \cdot 10^{-15}$	$4.3 \cdot 10^{-18}$
OCDM	$2.3 \cdot 10^{-15}$	$6.3 \cdot 10^{-18}$
Λ CDM	$2.6 \cdot 10^{-15}$	$2.5 \cdot 10^{-18}$

similar amplitudes, at large scales, in particular up to $l \simeq 200$ where we notice an excess of power at small angular scales in the OCDM model. This is because low Ω_0 models produce higher counts than $\Omega_0 = 1$ models (Barbosa et al. 1996).

The moving lens power spectra, for both CDM and Λ CDM models, exhibit a plateau at $l > 500$ with a decrease at larger angular scales. For the OCDM model, the dependence is roughly constant at all scales. We also note that the highest and lowest power are obtained, at small angular scales, for respectively the standard CDM and OCDM models. At large scales, the opposite is true.

In order to interpret this behaviour, we distinguish between what we refer to as the resolved and unresolved structures. The spatial extent of the resolved structures is much greater than the pixel size (or analogously the beam size). Whereas, the unresolved objects have extents close to, or smaller than, the pixel size. At the pixel size an unresolved structure gener-

ates a SZ kinetic anisotropy which is averaged to a non-zero value. Whereas the dipolar anisotropy induced by the moving lens effect is averaged to zero (except what remains from the side effects). A pixel size anisotropy thus does not contribute to the signal in the moving lens effect; while it contributes with its $\delta T/T$ amplitude in the SZ kinetic effect. As a result, the distribution of the moving lens anisotropies does not reflect the whole population of objects, but only the distribution of the resolved ones. In the OCDM model the structures are more numerous and form earlier than in a standard CDM model. Consequently, the distribution of unresolved objects in OCDM thus shows a large excess compared with the standard CDM and there are less resolved structures in the OCDM model than in the CDM. The excess of power in the the moving lens fluctuations spectrum (Fig. 3, solid line) reflects the dependence of the size distribution upon the cosmological model.

At a given large scale and for the SZ kinetic effect, there is more power on large scales in a standard CDM model compared with the OCDM. This is because the contribution to the power comes from low redshift resolved structures, which are less numerous in an OCDM model. Consequently, in the case of the fluctuations induced by the moving lens effect at large scale, the power in the OCDM model is greater than in the standard CDM. In addition, at a given large scale the power of the moving lens effect accounts for the cumulative contribution from the massive objects, with high amplitude, and from the less massive ones, with lower amplitudes.

A comparison between the CMB and the moving lens power spectra obviously shows that primary CMB fluctuations dominate at all scales larger than the cut-off scale, whatever the cosmological model (Fig. 3). Furthermore in the OCDM and Λ CDM models the cut-off is shifted towards smaller angular scales making the CMB the dominant contribution over a larger range of scales. The most favourable configuration to study and analyse the fluctuations is therefore the CDM model since it gives the largest cut-off scale compared to the other cosmological models and since it gives the highest prediction for the power of the moving lens effect. The level of spurious additional signal associated with the moving lens effect is negligible compared to both the primary and SZ kinetic fluctuations. Below the scale of the cut-off in the CMB power spectrum, the l^2 dependence of the SZ fluctuations is dominant over the moving lens effect. Moreover, contrary to the thermal effect, the SZ kinetic, moving lens and primary fluctuations have black body spectra. This makes the spectral confusion between them a crucial problem. At small angular scales, the SZ kinetic effect represents the principal source of confusion.

Nevertheless, the contribution of the SZ kinetic effect is very dependent on the predicted number of structures that show a gas component. In other words, some objects like small groups of galaxies may not have a gas component, and therefore no SZ thermal or kinetic anisotropy is generated, but they still exhibit the anisotropy associated with their motion across the sky. We attempt to study a rather wide range of models. We therefore use two prescriptions to discriminate between “gaseous” objects and “non gaseous” ones. These prescriptions correspond

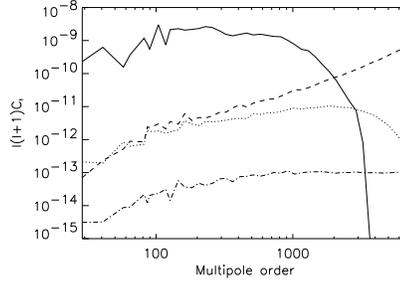


Fig. 4. Randomly generated power spectra of the primary fluctuations in the standard CDM model (solid line) compared to the secondary fluctuations due to the moving lens effect (dashed-dotted line) and the Sunyaev-Zel'dovich kinetic effect with a cut-off at $10^{13} M_{\odot}$ (dashed line) and at $10^{14} M_{\odot}$ (dotted line).

to arbitrary limits on the masses of the structures. Namely: in the first model, we assume that all the dark matter halos with masses greater than $10^{13} M_{\odot}$ have a gas fraction of 20% and exhibit SZ thermal and kinetic anisotropies; while in the second model, it is only the structures with masses $M \geq 10^{14} M_{\odot}$ which produce SZ anisotropies. We ran the simulations with both assumptions in the standard CDM model and computed the corresponding power spectra (Fig. 4). The power spectrum associated with the SZ kinetic effect shows, as expected, that the cut-off in masses induces a decrease in the power of the SZ kinetic effect on all scales, and in particular on very small scales with a cut-off at $l \simeq 4000$. The power spectrum of the SZ kinetic anisotropies can be fitted with the following expression:

$$l(l+1)C_l = -3.310^{-13} + 1.610^{-14}l \exp(6.210^{-4}l). \quad (9)$$

Despite this cut-off in mass and the decrease in power, the SZ kinetic effect remains much larger than the moving lens effect. Therefore at small angular scales, the SZ kinetic point like sources are still the major source of confusion. In order to get rid of this pollution in an effective way, one would need a very sharp but unrealistic cut-off in mass.

4.2. Detection and extraction

We analyse the simulated maps in order to estimate the amplitudes of the anisotropies associated with each individual moving structure. In such an analysis both primary CMB and SZ kinetic fluctuations represent spurious signals with regards to the moving lens. Figure 3 shows that these signals contribute at different scales and at different levels. The primary CMB contribution vanishes on scales lower than the cut-off whereas the SZ kinetic contribution shows up at all scales and its power increases as l^2 on small scales. This indicates clearly that the

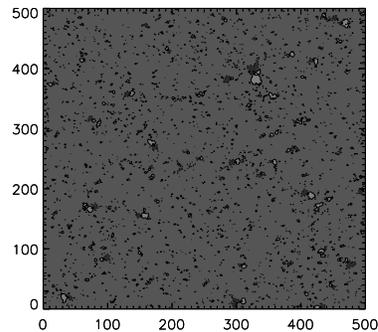


Fig. 5. Plot showing the contours superimposed over a simulated map of the fluctuations induced by moving lenses in the standard CDM model (pixel size= $1.5'$). The contour levels and grey scales shown in the plot are: $1.5 \cdot 10^{-5}$, $\pm 1 \cdot 10^{-5}$, $\pm 5 \cdot 10^{-6}$, $\pm 1 \cdot 10^{-6}$

most important problem with the analysis of the maps (extraction and detection of the moving lens anisotropy) is the confusion due to the point-like sources. This problem is made worse by spectral confusion. A compromise must be found between investigating scales smaller than the CMB cut-off, which maximises the pollution due to SZ kinetic effect, and exploring larger scales where the SZ contribution is low (but still 10 times larger than the moving lenses). The main problem here is that on these scales the primary fluctuations are 100 times larger than the moving lenses which makes their detection hopeless.

Nevertheless, the signal has two characteristics that make the attempts at detection worthy at small scales. The first advantage is that the anisotropy induced by a moving lens exhibits a particular spatial signature which is seen as the dipole-like patterns shown in figure 5. The second, and main advantage is that we know the position of the center of the structures thanks to the SZ thermal effect.

In fact, the objects giving rise to a dipole-like anisotropy are either small groups or clusters of galaxies with hot ionised gas which also exhibit SZ thermal distortions. The latter, characterised by the so-called Comptonisation parameter y , have a very specific spectral signature. It is therefore rather easy to determine the position of the center of a structure assuming that it corresponds to the maximum value of the y parameter. In the context of the Planck multi-wavelength experiment for CMB observations, it was shown (Aghanim et al. 1997) that the location of massive clusters will be well known because of the presence of the SZ thermal effect.

We based our detection strategy for the moving lens effect on these two properties (spatial signature and known location). We also assumed that the SZ thermal effect was perfectly separated

from the other contributions thanks to the spectral signature. The problem is therefore eased since it lies in the separation of moving lens, SZ kinetic and primary CMB anisotropies at known positions. Nevertheless the clusters and their gravitational potential wells are likely to be non-spherical, making the separation difficult. In the following, we will show that even in the simple spherical model we adopt the separation remains very difficult because of the spectral confusion of the moving lens, SZ kinetic and primary CMB fluctuations. Separation is even more difficult because of the numerous point-like SZ kinetic sources corresponding to weak clusters and small groups of galaxies for which we do not observe the SZ thermal effect.

4.2.1. Method

In order to clean the maps from the noise (SZ kinetic and CMB fluctuations), we filter them using a wavelet transform. Wavelet transforms have received significant attention recently due to their suitability for a number of important signal and image processing tasks. The principle behind the wavelet transform, as described by Grossmann & Morlet (1984), Daubechies (1988) and Mallat (1989) is to hierarchically decompose an input image into a series of successively lower resolution reference images and associated detail images. At each level, the reference image and detail image contain the information needed to reconstruct the reference image at the next higher resolution level. So, what makes the wavelet transform interesting in image processing is that, unlike Fourier transform, wavelets are quite localised in space. Simultaneously, like the Fourier transform, wavelets are also quite localised in frequency, or more precisely, on characteristic scales. Therefore, the multi-scale approach provides an elegant and powerful framework for our image analysis because the features of interest in an image (dipole pattern) are generally present at different characteristic scales. Furthermore, the wavelet transform performs contemporaneously a hierarchical analysis in both the space and frequency domains.

The maps are decomposed in terms of a wavelet basis that has the best impulse response and lowest shift variance among a set of wavelets that were tested for image compression (Villaseñor et al. 1995). These two characteristics are important if we want to identify the locations and the amplitudes of the moving lenses. Since the moving lenses induce very small scale anisotropies compared to the CMB, we filter the largest scales in order to separate these two contributions. We note that this also allows us to separate the contributions due to the large scale SZ kinetic sources. In the following we describe our analysis method, first applied to an unrealistic study case and then to a realistic case.

Study case

We filter the large scales of a map of CMB+moving lens fluctuations (no SZ kinetic contribution) in order to test the robustness and efficiency of the wavelet transform filtering. In this case, the noise due to the CMB is efficiently cleaned. In

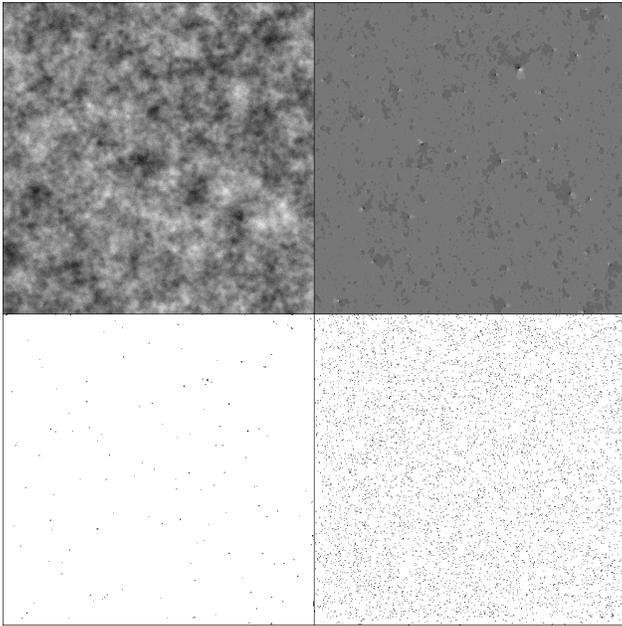


Fig. 6. The two upper panels show simulated maps: on the left, total map of the fluctuations (CMB+SZ+lens) linear scale between $1.4 \cdot 10^{-4}$ (white) and $-1.3 \cdot 10^{-4}$ (black). On the right is shown the map of the moving lenses fluctuations (linear scale between $1.5 \cdot 10^{-5}$ (white) and $-1.2 \cdot 10^{-5}$ (black)). The two lower panels are the result of the wavelet filtering process. The left panel is for a CMB+lens configuration, in which we notice that the secondary anisotropies are rather well extracted. The right panel represents the case of all contributors and shows that the moving lenses are completely dominated by the SZ kinetic noise.

fact, Figure 6 lower left panel shows a residual signal (symbolised by the dots) associated with the moving lens fluctuations, which are simulated in the upper right panel of the same figure. We have confirmed that the positions of the residual signal agree with the positions of the input structures. Moreover, we were able to successfully extract the secondary fluctuations due to the moving lenses, as well as estimate their average peak to peak $\delta T/T$ values. Figure 8 shows the average peak to peak amplitudes of the input simulated fluctuations (solid line) and the extracted values (dashed line). The main features are well-recovered, although the amplitudes suffer from the smoothing of the filtering procedure. In this study case, with no SZ kinetic contribution, we find a correlation coefficient between input and recovered values of about 0.95.

Realistic case

When this method is applied to filter a map containing all contributions (CMB+SZ kinetic+moving lenses), we are no longer able to identify or locate the moving lens fluctuations, as shown in fig.6 lower right panel. Here, the CMB which dominates at

large scales is cleaned, whereas the SZ kinetic effect, which is mainly a point-like dominated signal, at least one order of magnitude larger than the power of the moving lenses, is not cleaned and remains in the filtered signal. We have filtered at several angular scales without any positive result. On large scales the extended dipole patterns are polluted by the CMB, as mentioned above, and on small scales the SZ kinetic fluctuations are of the same scale as the moving lens anisotropies. We also tried the convolution of the total map (CMB+SZ kinetic+moving lenses) with the dipole pattern function but we were still unable to recover the moving lens fluctuations. In fact, the combination of two SZ kinetic sources, one coming forward and the other going backward, mimics a dipole-like pattern. In order to distinguish between an intrinsic dipole due to a lens and a coincidence, one needs to know a priori the direction of the motion which is of course not possible. During our analysis, we investigated two cases for the cut off in mass as describe in Sect 4.1. For the simulations with cut-off mass $10^{14} M_{\odot}$ the resulting background due to point-like SZ fluctu-

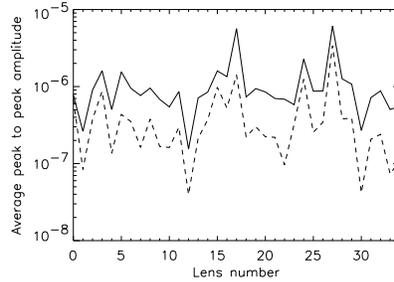


Fig. 7. Average peak to peak amplitude of the secondary anisotropies due to the moving lenses (cut-off mass $10^{14} M_{\odot}$) for lenses with a decreasing y parameter. The solid line represents the amplitudes in the original simulated lenses map. The dashed line represents the extracted amplitudes after sorting the wavelet coefficients and filtering all contributions (CMB+SZ+lenses). The correlation factor is equal to 0.9.

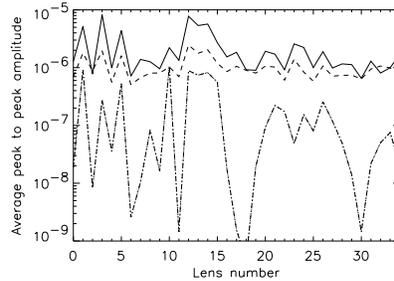


Fig. 8. Average peak to peak amplitude of the secondary anisotropies due to the moving lenses (cut-off mass $10^{13} M_{\odot}$) for lenses with decreasing y parameter. Solid line represents the amplitudes in the original simulated lens map. The dashed line represents the extracted amplitudes without sorting the wavelet coefficients and after filtering the CBM+lenses contributions (no SZ kinetic). The dotted-dashed line represents the extracted amplitudes after sorting the wavelet coefficients and filtering all contributions (CBM+lenses+SZ kinetic).

ations is lower than the cut-off at $10^{13} M_{\odot}$ case; but we were still unable to recover the moving lens fluctuations.

In our attempt at taking advantage of the spatial signature of the moving lens fluctuations, we have located the coefficients in the wavelet decomposition that are principally associated with the moving lenses and selected them from all the wavelet coefficients. Our study case procedure is the following. We make the wavelet transform for the moving lens fluctuations and, sep-

arately, we also make the transform for the remaining signals (CMB+SZ kinetic). We locate the wavelet coefficients for the moving lenses whose absolute values are higher than the absolute values of CMB+SZ kinetic coefficients. Then, we select, in the transform of the total fluctuation map (CMB+SZ+lenses), the coefficients corresponding to the previously located ones. Finally we perform the inverse transform on the map (CMB+SZ+lenses) according to the selected coefficients. When we compare the average peak to peak amplitudes of the recovered (Fig. 7: dashed line and Fig. 8: dotted-dashed line) and input (Fig. 7 and Fig. 8, solid line) lens fluctuations, we find a very good correlation between the amplitudes of the original and the reconstructed moving lens fluctuations. The correlation factor is of the order of 0.7 for CMB+SZ+lenses with a cut-off mass at $10^{13} M_{\odot}$ and higher than 0.9 with the cut-off at $10^{14} M_{\odot}$. This difference between the correlation factors is an effect of the cut-off in masses. In fact, for the $10^{14} M_{\odot}$ cut-off, the filtered maps are cleaner than for the $10^{13} M_{\odot}$ cut-off. Therefore, in the latter case some of the lenses have very little or no signature in the wavelet decomposition, hence they are not recovered and the correlation factor decreases.

The results of our study case confirm that the moving lens fluctuations have a significant spatial signature in the total signal although their amplitudes are very low compared with the CMB and SZ fluctuations. However, it is worth noting that such a “good” result is obtained only because we use sorted coefficients from two separated maps, one containing the lens signal and the other containing the polluting signals. In a real case, there is no way to separate the contributions because of the spectral confusion and therefore there is no a priori knowledge of the “right” coefficients in the wavelet decomposition. In our analysis, we tried several sorting criteria for the coefficients but we could not find a robust and trustworthy criterion to reproducibly discriminate between the wavelet coefficients belonging to the moving lens fluctuations and the coefficients belonging to the noise (SZ kinetic and CMB fluctuations). During the analysis, we could not overcome the physical limitation corresponding to the presence of sources of SZ kinetic anisotropies at the same scale and with amplitudes at least 10 times higher than the signal (moving lens fluctuations).

5. Conclusions

In our work, we investigate the secondary fluctuations induced by moving lenses with masses ranging from those of groups of galaxies to those of clusters of galaxies in a simple way, based on predicted structure counts and simulated maps. This method allows us to explore a rather wide range of scales (> 10 arcseconds) in various cosmological models. The analysis, in terms of angular power spectra, show the scales for which the primary fluctuations are dominant (Fig. 3). In the standard and lambda CDM models, the primary anisotropies are dominant respectively for scales $l < 4000$ and $l < 4500$ whereas in the Open CDM model they are dominant for $l < 6000$. In practice, it is thus impossible to detect the secondary anisotropies

due to moving lenses in the open model. The standard CDM model shows the smallest cut-off scale with an intermediate SZ kinetic pollution, compared to the other two models. It is therefore the “best case” framework for making an analysis and predicting the detection of fluctuations and the contributions that they induce. One must keep in mind that the results quoted in this particular case represent the “best” results we get from the analysis.

The results of our analysis are obtained under the assumption of a universe that never re-ionises, which is of course not the case. The re-ionisation, if it is homogeneous, is supposed to somewhat ease the task of extraction of the pattern. In fact, its main effect is to damp the angular power spectrum of the primary anisotropies on small scales, shifting the cut-off towards larger scales. In this case, the effect of moving lenses dominates over the CMB fluctuations, and the SZ kinetic is not as high as it is on very small scales. However, if the re-ionisation is late and inhomogeneous, it generates additional SZ kinetic-type secondary fluctuations (Aghanim et al. 1996) without damping the power spectrum by more than a few percent. Here, the re-ionisation might worsen the analysis at small scales. In any case, there could be some other additional secondary fluctuations principally due to the Vishniac effect, that arise in a re-ionised universe. Our work thus gives a “best case” configuration of the problem, with all other effects tending to worsen the situation.

We found that the secondary fluctuations induced by the moving gravitational lenses can be as high as $1.5 \cdot 10^{-5}$; with *rms* contributions of about 5 to $3 \cdot 10^{-7}$ in the three cosmological models. Even if the moving lens fluctuations have a particular dipolar pattern and even if they are “perfectly” located through their SZ thermal effect, the detection of the moving lens effect and its separation from the SZ kinetic and primary fluctuations are very difficult because of the very high level of confusion, on the scales of interest, with the point-like SZ kinetic anisotropies and because of spectral confusion.

We nevertheless analysed the simulated maps using an adapted wavelet technique in order to extract the moving lens fluctuations. We conclude that *the contribution of the secondary anisotropies due to the moving lenses is thus negligible whatever the cosmological model. Therefore it will not affect the future CMB measurements except as a background contribution. We have highlighted the fact that the moving lens fluctuations have a very significant spatial signature but we did not succeed in separating this contribution from the other signals.*

Acknowledgements. The authors wish to thank J.-L. Puget for many suggestions and fruitful discussions. They wish to thank the referee, M. Birkinshaw, for his helpful comments that much improved the paper. The authors thank J.F. Navarro, C. Frenk and S.D. White for kindly providing us a FORTRAN routine, computing the concentrations and the critical densities of the dark matter profiles, and J.R. Bond for providing the CMB map used in the analysis. The power spectra of the primary fluctuations were performed using the CMB-FAST code (M. Zaldarriaga & U. Seljak). In addition, we thank F. Bernardeau, F.-X. Désert, Y. Mellier and J. Silk for helpful discussions and A. Jones for his careful reading of the paper.

References

- Aghanim, N., Désert, F.-X., Puget, J.-L., Gispert, R. 1996, *A&A*, **311**, 1
- Aghanim, N., De Luca, A., Bouchet, F.R., Gispert, R., Puget, J.-L. 1997, *A&A*, **325**, 9
- Bahcall, N.A. 1988, *ARA&A*, **26**, 631
- Bahcall, N.A., Cen, R., Gramann, M. 1994, *ApJ*, **430**, 13
- Barbosa, D., Bartlett, J.G., Blanchard, A., Oukbir, J. 1996, *A&A*, **314**, 13
- Birkinshaw, M. 1989, in *Moving Gravitational lenses*, p. 59, eds. J. Moran, J. Hewitt & K.Y. Lo; Springer-Verlag, Berlin
- Birkinshaw, M. 1997, *preprint*
- Birkinshaw, M., Gull, S.F. 1983, *Nature*, **302**, 315
- Blandford, R.D., Kochanek, C.S. 1987, *ApJ*, **321**, 658
- Bouchet, F.R., Bennett, D.P., Stebbins, A. 1988, *Nature*, **335**, 410
- Carroll, S.M., Press, W.H., Turner, E.L. 1992, *ARA&A*, **30**, 499
- Daubechies, I. 1988, *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. **XLI**, 909
- Dodelson, S., & Jubas, J.M. 1995, *ApJ*, **439**, 503
- Ebeling, H., Edge, A.C., Fabian, A.C., Allen, S.W., Crawford, C.S., Böhringer, H. 1997, *ApJ Lett.*, **479**, 101
- Eke, V.R., Cole, S., Frenk, C.S. 1996, *M.N.R.A.S.*, **282**, 263
- Giovanelli, R., Haynes, M.P., Wegner, G., Da Costa, L.N., Freudling, W., Salzer, J.J. 1996, *ApJ*, **464**, 99
- Grossmann, A., Morlet, J. 1984, *SIAM J. Math. Anal.*, **15**, 723
- Henry, J.P., Arnaud, K.A. 1991, *ApJ*, **372**, 410
- Hernquist, L. 1990, *ApJ*, **356**, 359
- Hudson, M.J. 1994, *M.N.R.A.S.*, **266**, 468
- Huss, A., Jain, B., Steinmetz, M. 1997, *astro-ph/9703014*
- Kaiser, N. 1982, *M.N.R.A.S.*, **198**, 1033
- Kaiser, N., Stebbins, A. 1984, *Nature*, **310**, 391
- Kamionkowski, M., Spergel, D.N., Sugiyama, N. 1994, *ApJ Lett.*, **426**, 57
- Lacey, C., Cole, S. 1993, *M.N.R.A.S.*, **262**, 627
- Lahav, O., Rees, M.J., Lilje, P.B., Primack, J.R. 1991, *M.N.R.A.S.*, **251**, 128
- Mallat, S. 1989, *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, **7**, 674
- Martinez-González, E., Sanz, J.-L., & Silk, J. 1990, *ApJ*, **355**, L5
- Mathiesen, B., Evrard, A.E. 1997, *astro-ph/9703176*
- Moscardini, L., Branchini, E., Brunozzi, P.T., Borgani, S., Plionis, M., Coles P. 1996, *M.N.R.A.S.*, **282**, 384
- Navarro, J.F., Frenk, C.S., White, S.D.M. 1996, *ApJ*, **462**, 563
- Navarro, J.F., Frenk, C.S., White, S.D.M. 1997, *ApJ*, **490**, 493
- Oukbir, J., Bartlett, J.G., Blanchard, A. 1997, *A&A*, **320**, 365
- Peebles, P.J.E. 1980, in *The Large Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press
- Peebles, P.J.E. 1993, in *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
- Press, W., Schechter, P. 1974, *ApJ*, **187**, 425
- Rees, M.J., Sciama, D.W. 1968, *Nature*, **511**, 611
- Rephaeli, Y. 1995, *ARA&A*, **33**, 541
- Sachs, R.K., Wolfe, A.M. 1967, *ApJ*, **147**, 73
- Seljak, U. 1996, *ApJ*, **463**, 1
- Smoot, G., et al., 1992, *ApJ*, **396**, 1
- Sunyaev, R.A., Zeldovich, Ya.B. 1972, *A&A*, **20**, 189
- Sunyaev R.A., Zeldovich, Ya.B. 1980, *M.N.R.A.S.*, **190**, 413
- Tuluie, R., Laguna, P. 1995, *ApJ Lett.*, **445**, L73
- Tuluie, R., Laguna, P., Anninos, P. 1996, *ApJ*, **463**, 15
- Viana, P.T.P., Liddle, A.R. 1996, *M.N.R.A.S.*, **281**, 323
- Villasenor, J.D., Belzer, B., Liao, J. 1995, *IEEE Trans. Im. Proc.*, **8**, 1057
- Vishniac, E. T. 1987, *ApJ*, **322**, 597
- White, S.D.M., Efstathiou, G., Frenk, C.S. 1993, *M.N.R. A.S.*, **262**, 1023

Chapitre 6

Un modèle de formation de galaxies: Milieu Intergalactique chaud et photoionisé

6.1 Introduction

La formation des grandes structures de l'univers est une des questions fondamentales de la cosmologie moderne. Dans ce cadre, le mécanisme de l'instabilité gravitationnelle est celui qui explique le mieux les observations, quelque soit la physique invoquée pour engendrer les perturbations initiales. Le caractère éminemment non-linéaire de la formation des galaxies a conduit les cosmologistes à développer des simulations numériques de plus en plus performantes. Cependant la composante baryonique de la matière n'a été inclus que récemment dans ces simulations, qui restent limitées dans leur gamme de masses. Une approche analytique du problème reste néanmoins possible, à condition que certaines hypothèses soient validées par les simulations. Un exemple d'une telle approche est la fonction de masse de Press & Schechter (1974). Cette dernière a été validée par les simulations à N corps (matière noire), quoique de récents résultats montrent que ce formalisme surestime la fonction de masse d'un facteur $1,5 - 2$ aux petites masses (voir Gross et al. (1998)). La bonne prédiction analytique de la fonction de masses déduite des simulations aux petites échelles a néanmoins ouvert une voie pour explorer la formation des structures aux échelles galactique et sub-galactique, jusqu'au problème de la formation des toutes premières structures (Tegmark et al. (1997a)).

A ces échelles, le caractère dissipatif de la matière baryonique joue un rôle primordial, puisqu'il permet la formation des étoiles. Il a donc été proposé que

les processus de refroidissement du gaz soient indispensables à la formation des galaxies. L'inclusion des baryons dans les halos de matière noire soumis à une loi de Press & Schechter a été étudiée en premier par White & Rees (1978). Ils ont essayé d'en déduire la forme de la fonction de luminosité des galaxies et ont conclu que cette fonction devait être en tous les cas plus pentue que la fonction de masse aux petites masses, impliquant une fonction de luminosité beaucoup plus pentue que celle observée. Ce problème fut aussi constaté par Peacock & Heavens (1990) dans le contexte du formalisme des pics. Depuis l'article de White & Rees (1978), l'ensemble des modèles semi-analytiques de formation de galaxies ont tenté de répondre à ce problème ; Rees (1984) a noté que la photoionisation du gaz par les premières étoiles pouvait empêcher la formation ultérieure de petites galaxies. Ce problème s'est vu confirmer dans des études ultérieures, en effet White & Frenk (1991) ont construit un modèle où ce problème était résolu par l'injection d'énergie dans le gaz au centre des halos de matière noire, au prix d'une production de métaux trop large. Dekel & Silk (1986) supposent quant à eux que les supernovae sont capables d'éjecter le gaz des petites galaxies, évitant ainsi la formation ultérieure d'étoiles. Ce type de modèle a également été étudié par Cole (1991). Afin d'explicitier la réalité de ce problème en termes simples, Blanchard et al. (1992) ont étudié l'histoire du gaz intergalactique dans son ensemble. Moyennant de simples critères de refroidissement du gaz dans les halos, ils en ont conclu que la plupart du gaz aurait dû être froid à notre époque (sous forme d'étoiles ou de gaz dense), conduisant ainsi à une quantité de gaz froid dix fois plus grandes que celle observée au sein des galaxies. Ils qualifièrent ce problème de *sur-refroidissement* du gaz cosmologique.

Ce problème est difficile à appréhender lors de simulations numériques car il apparaît surtout aux très petites masses. Cependant, la très grande résolution des simulations de Navarro & Steinmetz (1997) a permis de mettre en évidence ce problème de manière numérique, et cela en bon accord avec les prédictions issues du formalisme de Press & Schechter complété d'un simple critère de refroidissement du gaz. Blanchard et al. (1992) ont proposé comme solution à ce problème que le Milieu InterGalactique (MIG) soit réchauffé par les premières structures à une température suffisante pour prévenir le collapse du gaz dans la plupart des halos de matière noire. Ce scénario sera étudié de manière quantitative dans la suite de ce chapitre. Il pose également le problème de l'éjection de l'énergie produite au sein des galaxies dans le milieu intergalactique, point qui sera brièvement discuté.

D'autre part, les observations récentes (CFRS, HDF) ont apporté de nouvelles informations sur la formation des galaxies. En effet, les données du CFRS (Lilly et al. (1995)) montrent un accroissement du taux de formation d'étoiles jusqu'à $z \simeq 1$, tandis que les données HDF montrent au contraire une

décroissance apparente de ce même taux à grand DVR. De plus, le contenu en gaz neutres des objets denses a été observé jusqu'à $z \simeq 4$. Il est donc intéressant de voir si notre modèle peut rendre compte de ces observations. Dans un premier temps, nous étudions le problème du *sur-refroidissement* du gaz, et sa sensibilité dans les différents paramètres. Nous étudions ensuite l'influence de la photoionisation du MIG et son influence sur la formation des galaxies. Nous en concluons que la photoionisation réduit sensiblement la fraction de gaz froid, mais de manière insuffisante cependant pour résoudre le problème du *sur-refroidissement*. Nous étudions ensuite le cas du MIG photoionisé, et réchauffé (probablement de manière collisionnelle) par les structures elles-mêmes. Enfin, nous résumons les principaux résultats de cette étude.

6.2 Le problème du *sur-refroidissement*

6.2.1 Phénoménologie

Une première question fondamentale que nous devons nous poser est : Qu'est-ce qui détermine physiquement la taille et la luminosité d'une galaxie typique ? Pour répondre à cette question, Gamov (1948) a recherché cette échelle typique dans la physique des perturbations linéaires avant et après la recombinaison. Or l'échelle de Jeans est, dans les deux cas, très différente de l'échelle d'une galaxie typique. D'autre part, l'échelle de diffusion (Silk (1968)) est aussi beaucoup plus grande que celle des galaxies. Un processus clé pour la compréhension de l'échelle des galaxies type est le *critère de refroidissement* : durant le collapse gravitationnel d'une structure l'énergie cinétique du gaz est transformée en énergie thermique, qui doit être évacuée d'une manière ou d'une autre pour que le gaz se contracte suffisamment afin que la formation stellaire ait une chance de commencer. C'est pourquoi les galaxies L_* ont été associées aux plus gros halos dans lesquels le gaz est susceptible de refroidir en un temps moindre que l'âge typique de l'univers (Binney (1977); Rees & Ostriker (1977); Silk (1977)).

C'est dans ce contexte que le problème du *sur-refroidissement* apparaît, et cela probablement dans tous les scénarios hiérarchiques de formation des galaxies. En effet dans ces scénarios, une bonne partie du gaz devrait se concentrer dans des halos de matière noire de vitesse circulaire comprise entre 20 et 200 km/s. La température virielle des halos est alors supérieure à 10^4 K, et le gaz est alors suffisamment chaud et dense pour que le refroidissement radiatif soit extrêmement efficace. On s'attend donc à ce qu'une grande partie du gaz soit dans une phase froide actuellement (le terme « phase froide »

comprend également les étoiles, il s'agit du gaz qui *a refroidi* au cours de son histoire). Or la nucléosynthèse standard prédit une densité baryonique de l'ordre de $\Omega_b = 0,05 h_{50}^2$, tandis que toutes les étoiles observées contribuent à une densité de $\Omega_* \simeq 0,005 - 0,01$.

On peut noter à ce stade que le critère de refroidissement est une condition nécessaire à la formation des étoiles, mais *a priori* pas forcément suffisant. Cependant ce critère donne une bonne idée de la quantité de gaz *ayant refroidi*. Or la quantité actuelle de gaz froid et dense observée dans l'univers est faible, et il est donc raisonnable de penser qu'il a été efficacement converti en étoiles. Cependant il se pourrait qu'il y ait plus de gaz froid que nous n'en voyons (Pfenniger & Combes (1994)), ou alors que ce gaz ait été transformé en étoiles que nous ne voyons pas. Dans les deux cas, on aurait alors des candidats de matière noire baryonique, et le problème du *sur-refroidissement* donnerait alors un moyen de créer de la matière noire dans les galaxies. En particulier, cela donnerait une explication pour la formation des MACHOs dans le halo Galactique. Si ces derniers sont bien présent en quantité dans le halo de notre Galaxie, et que l'on peut considérer le rapport MACHOs/étoiles est universel, alors leur densité serait de l'ordre de $\Omega_{MACHOs} \simeq 5 - 10 \Omega_*$.

On pourrait d'autre part tenter de résoudre le problème en considérant que les prédictions de la nucléosynthèse primordiale sont fausses. Cependant, les observations X des amas de galaxies montrent que plus de $80 h_{50}^{1,5}\%$ des baryons sont sous forme de gaz chaud. Ainsi la fraction de gaz ayant refroidi (sous forme d'étoiles dans ce cas précis) reste faible. Plus précisément le rapport $\frac{\text{masse baryonique dans les amas}}{\text{masse sous forme d'étoiles}}$ est de l'ordre de $7 - 10$, et en supposant que ce rapport est universel, on trouve que la densité de baryons dans l'univers, principalement sous forme de gaz intergalactique, est de l'ordre de $\Omega_{b \leftarrow \text{amas}} \simeq (1 + (7 - 10) h_{50}^{1,5})$. Il est intéressant de noter que cette estimation est en bon accord avec les prédictions de la nucléosynthèse primordiale. En effet le rapport des masses sous formes d'étoiles visibles et de la masse de baryons dans les amas est compatible avec le rapport $\Omega_*/\Omega_{bbn} \simeq 0,05 - 0,2$.

6.2.2 Formalisation du problème

Notre compréhension du comportement des baryons lors de la formation des structures a beaucoup évolué durant ces dernières années grâce aux simulations numériques. A part des phases transitoires qui peuvent être complexes, il semble maintenant bien établi que le gaz est réchauffé par les chocs qui se produisent lors du collapse, et qu'il finit dans un état proche de l'équilibre hydrostatique à la température du viriel :

$$T_v \simeq 5 \times 10^5 M_{12}^{2/3} (1 + z) \text{ K} \quad (6.1)$$

où $M_{12} = M/(10^{12}M_{\odot})$. Cependant, cet équilibre ne subsiste que tant que le gaz ne perd pas une fraction notable de son énergie interne, c.-à-d. pour une période plus courte que le temps de refroidissement. D'autre part la fonction de masse de Press & Schechter ne change significativement que pour des temps comparables au temps de Hubble, donc si le temps de refroidissement est supérieur à ce dernier le gaz entrera dans la formation d'une autre structure avant d'avoir eu le temps de refroidir. Au contraire, si le temps de refroidissement est plus court que le temps de Hubble, le gaz aura refroidi de façon significative avant que l'évolution gravitationnelle du halo n'ait pu le réchauffer. D'autre part, si le gaz commence à refroidir, il se contracte et refroidit de plus en plus vite, et cette évolution ne peut être stoppée apparemment que lorsque le gaz atteint de grandes densités où il est maintenu grâce à sa vitesse circulaire ou alors transformé en étoiles.

La fraction instantanée de gaz qui peut refroidir se calcule ainsi :

$$f_c(z) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} mN(m)w(m)dm \quad (6.2)$$

où $w(m)$ est la fraction du gaz présent dans une structure de masse m susceptible de refroidir ou ayant déjà refroidi auparavant. En pratique, $w(m)$ peut être évaluée en supposant que le gaz est initialement homogène dans la structure et en calculant son temps de refroidissement. Si ce temps de refroidissement $t_c(m)$ est plus petit qu'un certain temps dynamique d'évolution gravitationnelle de la structure (que nous prendrons égal au temps de Hubble par la suite), le refroidissement se fait sans réchauffage dû à l'évolution de la structure¹. Dans notre cas le gaz dans un halo de masse donnée est simplement capable ou incapable de refroidir, cela dans son ensemble. Ainsi la fraction instantanée de gaz susceptible de refroidir peut se récrire :

$$f_c(z) = \frac{1}{\rho} \int_{m_1}^{m_2} mN(m)\omega(m)dm \quad (6.3)$$

où $\omega(m)$ est la fraction effective des baryons qui finissent dans la phase froide, et $t_c(m_1) = t_c(m_2) = t_H$.

Le problème suivant est de calculer la fraction totale de gaz refroidi. Aussi longtemps que la fraction intégrée reste petite, on peut l'écrire ainsi :

$$F_c(z) = \int_z^{\infty} \frac{f_c(z)}{t_H} dt \quad (6.4)$$

1. Il est à noter que l'hypothèse d'homogénéité du gaz pourrait être remplacée au profit d'un modèle de la distribution du gaz et l'introduction d'un *rayon de refroidissement*, cependant cela ne changerait pas significativement nos conclusions et rendrait la présentation inutilement compliquée

Si la fraction intégrée devient grande, alors la formule précédente est invalidée dans la mesure où la probabilité que du gaz susceptible de refroidir ait déjà refroidi dans un halo précédent devient non négligeable. En principe, on devrait alors suivre l'histoire du gaz pas à pas dans les différents halos. Cependant il existe un moyen de contourner le problème. En effet on pourrait supposer d'une part que la probabilité que le gaz susceptible de refroidir ait déjà refroidi précédemment soit universelle, ce qui implique :

$$F_c(z) = 1 - \exp\left(-\int_z^\infty \frac{f_c(z)}{t_H} dt\right) \quad (6.5)$$

On peut d'autre part utiliser le fait que les halos de grande masse à bas z sont essentiellement construits à partir de halos de petites masses à grand z , qui étaient déjà dans la région de refroidissement. La fraction intégrée s'écrit alors :

$$F_c(z) = \frac{1}{\rho_b} \int_{m_1(z)}^\infty m N(m) dm \quad (6.6)$$

et nous évitons les complications liées à l'évolution des halos. Dans un scénario réaliste $F_c(z)$ reste petite cependant, et nous pouvons alors utiliser l'équation 6.4.

Nous avons évalué la fraction intégrée (6.6) pour deux modèles CDM de facteur de forme $\Gamma = 0,5$ et $\Gamma = 0,25$. avec différentes valeurs pour la normalisation du spectre. Ces résultats sont présentés dans la figure 6.1. Cette figure montre que quelque soit le spectre de fluctuations initiales envisagé, près de 80% du gaz devrait avoir refroidi à l'heure actuelle, et illustre bien le problème du *sur-refroidissement*. La figure 6.2 montre que le calcul de F_c à l'aide de l'équation 6.5 conduit à des résultats similaires, avec cependant une fraction actuelle plus faible. Elle montre également la faible dépendance des résultats dans la densité totale de baryons.

L'amplitude du problème du *sur-refroidissement* du gaz étant d'un facteur 10, il est improbable qu'il soit résolu par un ajustement des différents paramètres. Les figures 6.3 et 6.4 montrent bien que le problème est réel, en effet à certaines époques la fraction *instantanée* de gaz susceptible de refroidir est de l'ordre de 20 à 50%. Ces valeurs sont déjà supérieures à la fraction intégrée actuelle $F_* \simeq 10\%$. Il est aussi intéressant de noter que les fractions de gaz froid obtenues à haut z ($z \simeq 5$) sont suffisantes pour rendre compte de l'ensemble des étoiles observées dans l'univers à notre époque ! Or les données CFRS montrent que la formation d'étoiles depuis $z = 1$ est loin d'être négligeable, et les données HDF ont tendance à indiquer que le plus gros de la formation d'étoiles a eu lieu à relativement bas z , éventuellement aussi bas que $z = 1$.

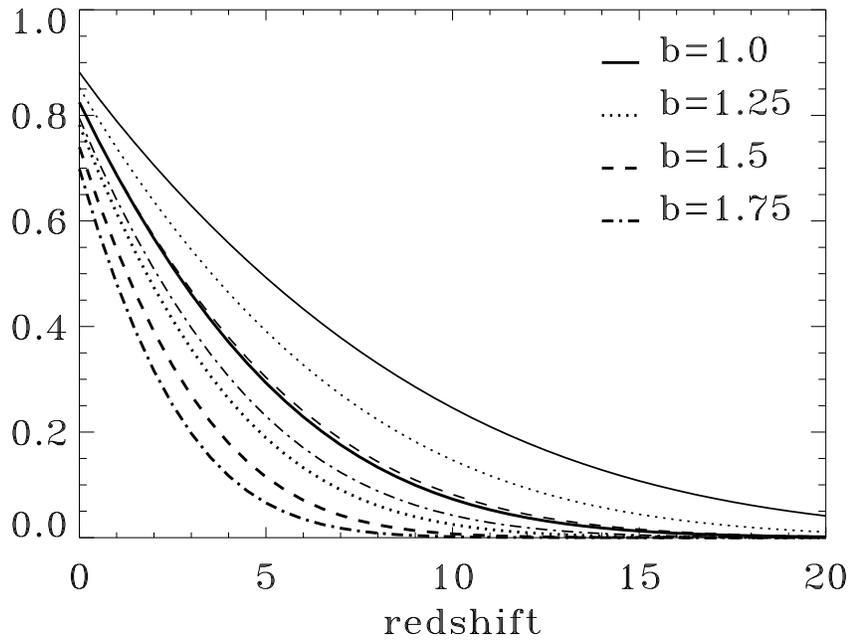


FIG. 6.1: *Fractions intégrées F_c pour deux modèles CDM avec $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais). Les fractions ont été calculées à l'aide de l'équation 6.6. La fraction actuelle de baryons ayant refroidi est relativement insensible aux paramètres, et est proche de 80%.*

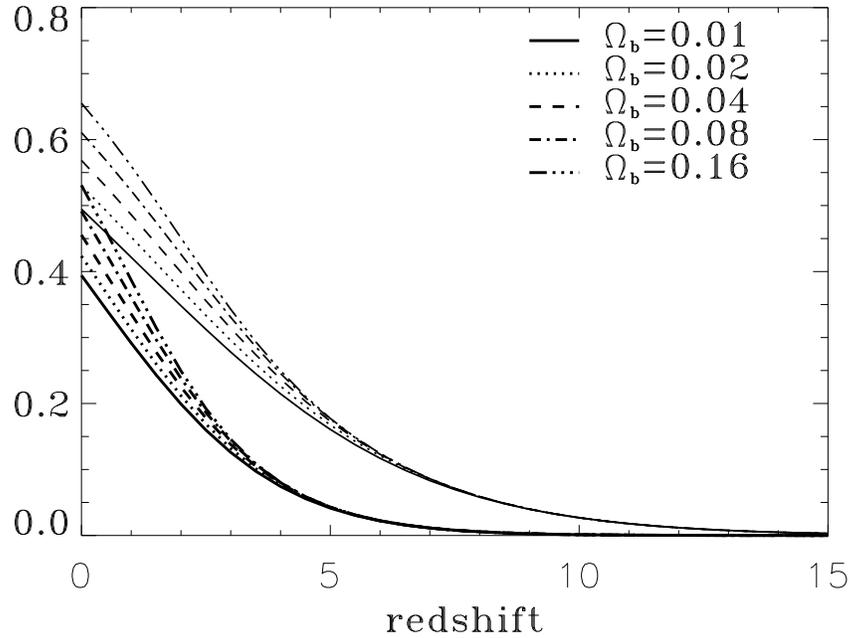


FIG. 6.2: Mêmes quantités que dans la figure 6.1, la fraction intégrée F_c (calculée à l'aide de l'équation 6.5) dans deux modèles CDM avec $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais), pour différentes valeurs de Ω_b . Le paramètre de biais vaut ici $b = 1,6$. L'équation 6.5 donne des valeurs plus faibles dans le régime des grands F_c , mais est proche de l'équation 6.6 dans le régime intéressant où F_c est petit.

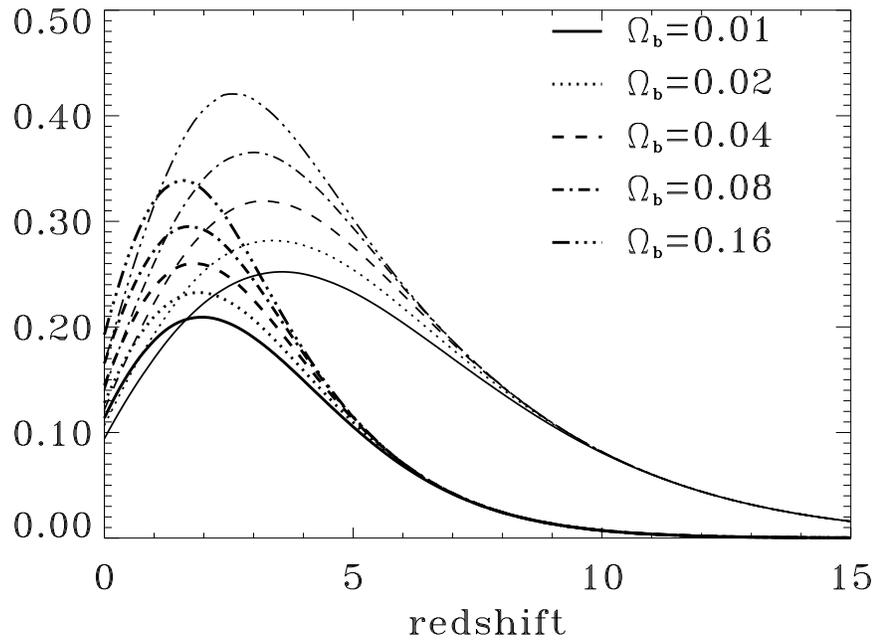


FIG. 6.3: Fractions instantanées f_c pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais), avec différents Ω_b . Le paramètre de biais vaut $b = 1,6$.

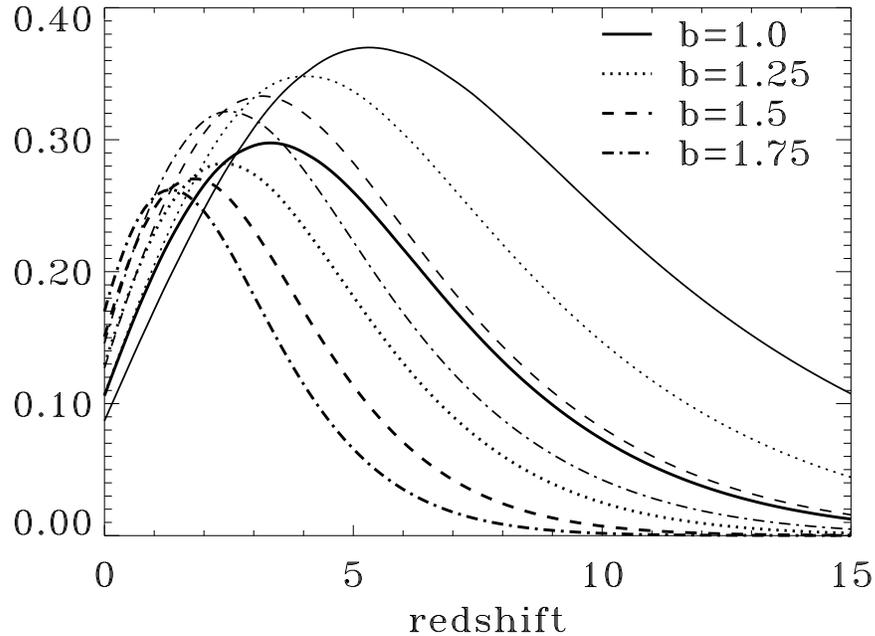


FIG. 6.4: Fractions instantanées f_c pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais), avec différentes valeurs du paramètre de biais. Ici $\Omega_b = 0,05$.

Si l'on regarde cependant la forme des courbes $f_c(z)$ représentant la fraction instantanée de gaz accessible pour la formation d'étoiles, il apparaît que le pic de formation stellaire devrait se produire à relativement bas z , ce qui semble être observé. Ainsi si la quantité de gaz devant produire des étoiles est beaucoup plus grande que le taux de formation stellaire réellement observé, la forme de leurs distributions chronologiques semble proche. Cela nous encourage à penser qu'un scénario où la formation d'étoiles serait auto-régulée apporterait une réponse satisfaisante au problème du *sur-refroidissement*, ce que nous étudierons plus en détail dans la suite de ce chapitre.

6.3 MIG réchauffé et formation des structures

S'il n'est pas difficile de se convaincre que le réchauffement du MIG joue un rôle important dans la formation des galaxies, il est cependant beaucoup plus difficile de dire quelle en est la source et quelle est précisément la physique de ce mécanisme d'auto-régulation. En suivant l'exemple de Larson

(1974), Dekel & Silk (1986) ont construit un modèle où la formation des petites galaxies était régulée par le réchauffement dû au supernovae ; dans ce modèle le gaz est réchauffé et éjecté des petites galaxies, supprimant ainsi la formation d'étoiles dans les petits potentiels gravitationnels. Le même mécanisme fut repris par Cole (1991). Plus récemment, Tegmark et al. (1993) a étudié ce type de modèles de manière plus quantitative, et en a conclu que si le MIG pouvait être ionisé par les vents de supernovae et satisfaire ainsi au test de Gunn & Peterson, une grande quantité de métaux étaient produits aussi tôt que $z = 5$.

Dans un scénario avec réchauffement, l'état physique du MIG pourrait bien être non homogène et compliqué. Dans notre modèle, nous allons faire l'hypothèse simplificatrice que le gaz est essentiellement dans deux phases, la première, condensée, consiste en du gaz froid éventuellement transformé en étoiles, et la seconde consiste en un MIG supposé homogène. A grand z , aussitôt que le MIG est ionisé, ce dernier refroidit très efficacement, et un mécanisme de régulation doit être invoqué pour le maintenir chaud

6.3.1 Mécanisme de suppression de la formation des structures

Pour que notre scénario résolve le problème du *sur-refroidissement*, il faut que deux contraintes soient satisfaites :

- la quantité totale d'étoiles produites ne doit pas être plus grande que celle observée à l'heure actuelle,
- la quantité de gaz froid ne doit pas être plus grande que celle observée dans les systèmes denses Lyman α .

Même s'il existe des moyens de circonvenir ces contraintes (voir l'introduction de ce même chapitre), nous allons nous intéresser uniquement aux modèles qui les satisfont. Pour réduire la quantité de gaz susceptible de refroidir au cours de l'histoire de la formation des structures, il y a deux mécanismes distincts auxquels on peut penser. Le premier a déjà été invoqué par Blanchard et al. (1992) ; si le MIG est chaud, de température T_{MIG} , alors la formation des galaxies sera supprimée aux échelles de masses telles que :

$$T_v \leq T_{MIG} \quad (6.7)$$

Ce critère est certainement minimal dans la mesure où la suppression pourrait affecter des masses plus grandes. En effet lors du collapse d'une structure, le gaz pourrait subir une compression adiabatique, menant à une augmentation

de sa température. La suppression interviendrait alors pour des échelles de masses telles que

$$T_v \leq \Delta^{2/3} T_{MIG} \quad (6.8)$$

Il est intéressant de noter que pour une température $T_{MIG} \simeq 10^4$ K, cela conduit à la suppression de la formation de galaxies de vitesse circulaire $V_c \leq 100$ km/s. Cependant, l'existence d'un critère de suppression à vitesse circulaire constante n'est pas particulièrement attrayant, en effet les observations montrent l'existence de petites galaxies, et la fonction de luminosité ne montre aucune particularité autour de la magnitude $M \simeq 16$. En fait, il semblerait au contraire qu'il y ait un accroissement du nombre de galaxies de faible luminosité autour de cette magnitude, plutôt qu'un décroissance comme l'on pourrait s'y attendre (Zucca et al. (1997)).

Le deuxième mécanisme auquel on peut penser pour supprimer la formation de galaxies est la photoionisation du MIG. Cette dernière ne se contente pas de réchauffer le gaz aux alentours de 10^4 K, elle change également la fonction de refroidissement du gaz. Les implications de ce second mécanisme sont discutées dans la section suivante.

6.3.2 Effets de la photoionisation

L'existence même des quasars à grand z suffit pour affirmer que la photoionisation joue un rôle important dans l'histoire cosmologique des baryons. En revanche, le fait que le flux UV à grand z soit suffisant pour expliquer les faibles densités de colonne de HI le long de la ligne de visée des QSOs est encore une question très débattue (Haardt & Madau (1996); Cooke et al. (1997)). Dans tous les cas, la photoionisation par les quasars permet aisément de réchauffer le MIG à une température de 10^4 K à $z = 5$. D'autre part, la photoionisation supprime le refroidissement de raie en supprimant les atomes neutres (Efstathiou (1992)). Nous étudions ce mécanisme en calculant la fraction *instantanée* de gaz susceptible de refroidir dans un milieu totalement photoionisé; nous utilisons pour cela la fonction de refroidissement d'un gaz complètement ionisé. Le résultat est montré dans la figure 6.5. En la comparant avec la figure 6.3 on peut voir que l'effet de la photoionisation est de supprimer efficacement le refroidissement du gaz à bas z . Cela signifie que le processus de photoionisation peut altérer substantiellement le refroidissement du gaz à bas z , mais n'est pas suffisant en soi pour résoudre le problème du *sur-refroidissement* pour des valeurs raisonnables de Ω_b . Cela vient du fait que la majeure partie du *sur-refroidissement* survient à une époque où le gaz est trop dense pour que la photoionisation empêche un re-

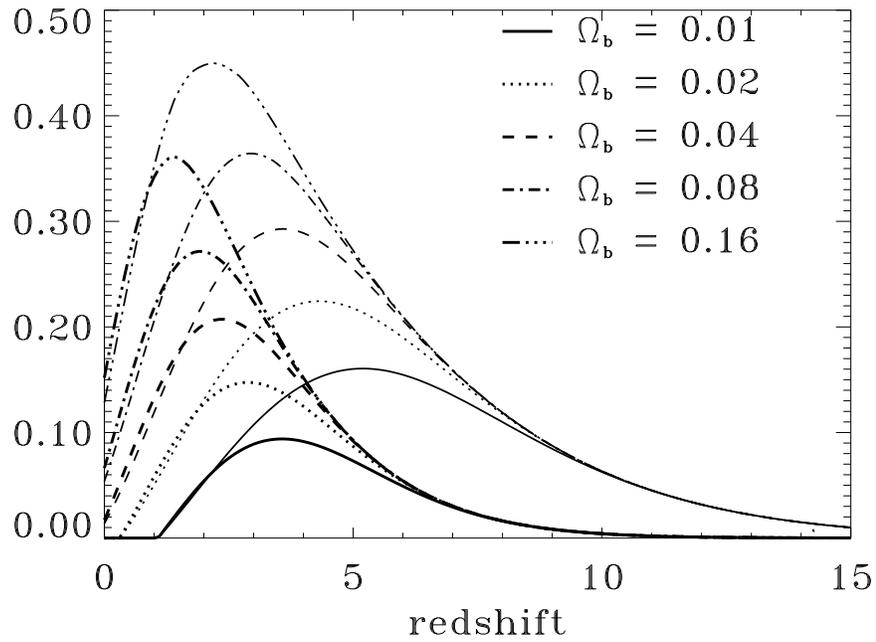


FIG. 6.5: Fractions instantanées f_c pour deux modèles CDM avec $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais) pour différentes valeurs de Ω_b , dans le cas du MIG photoionisé.

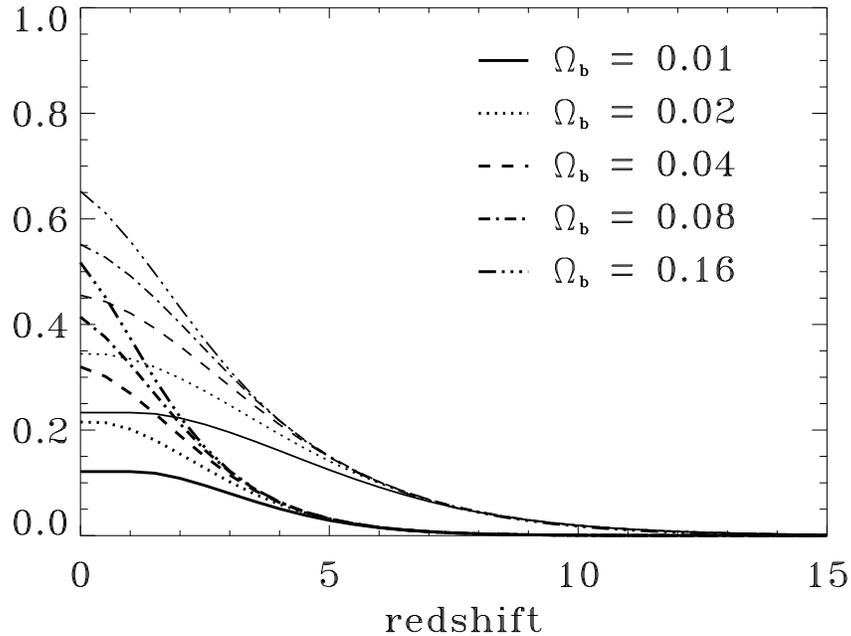


FIG. 6.6: Cette figure montre la fraction intégrée de baryons sous forme d'étoiles en fonction du temps pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0, 5$ (traits fins) et $\Gamma = 0, 25$ (traits épais), dans le cas du MIG photoionisé. Le paramètre de biais vaut ici $b = 1, 6$. La photoionisation n'empêche pas suffisamment le refroidissement du gaz pour résoudre le problème du sur-refroidissement pour des valeurs raisonnables Ω_b .

froidissement efficace du gaz. Cela est illustré par la figure 6.6 qui montre la fraction intégrée F_c des baryons sous forme d'étoiles en fonction du temps.

6.4 Formation des galaxies dans le cadre d'un MIG chaud

6.4.1 Processus de chauffage

Comme la photoionisation ne semble pas suffisante pour résoudre le problème du *sur-refroidissement*, il est nécessaire d'invoquer d'autres processus de chauffage. Or la formation stellaire ne produit pas que des photons ionisants, elle libère également beaucoup d'énergie par le biais des supernovae soit

directement de manière mécanique (réchauffage par des chocs ou des vents), soit par l'intermédiaire de rayons cosmiques. La première possibilité fut étudiée par Tegmark et al. (1993). D'autre part, des études théoriques indiquent qu'une grande partie de l'énergie des supernovae pourrait être transférée à des rayons cosmiques (Malkov & Voelk (1995)). Ceci est également suggéré par la quantité de rayons cosmiques observés dans la galaxie (Drury et al. (1989)). D'autre part, Prantzos & Casse (1994) ont étudié la possibilité que le flux de rayons cosmiques ait été beaucoup plus grand lors de la formation de notre Galaxie, en relation avec la formation stellaire elle-même, afin d'expliquer l'abondance de bore. Ces deux mécanismes peuvent aisément réchauffer le MIG. Les rayons cosmiques les plus énergétiques peuvent de plus se propager loin de leur source d'émission, fournissant ainsi un mécanisme de chauffage du MIG relativement homogène, ce qui permettrait de valider l'hypothèse prise dans notre modèle.

Dans la suite, nous allons supposer qu'une fraction de l'énergie libérée par les supernovae est transmise au MIG. Nous pouvons ainsi écrire l'énergie reçue par le MIG sous forme paramétrique :

$$\dot{U}_{MIG||+} = \epsilon \dot{\rho}_* E_{SN} \quad (6.9)$$

où $\dot{\rho}_*$ est le taux de formation stellaire par unité de volume, E_{SN} est l'énergie produite par le biais des supernovae par unité de masse d'étoile formée avec une Fonction de Masse Initiale (FMI) standard. Enfin, ϵ est un paramètre décrivant l'efficacité du transfert. En supposant que le gaz froid est « instantanément » transformé en étoiles, la source de chauffage du MIG est donc :

$$\rho_b \dot{U}_{MIG} f_c \quad \text{avec} \quad \dot{U}_{MIG} = \epsilon E_{SN} \quad (6.10)$$

En supposant une température uniforme T_{MIG} pour le MIG contenant tous les baryons (c.-à-d. en négligeant la petite fraction de baryons sous forme d'étoiles), l'équilibre thermique dans ce scénario auto-régulé s'écrit :

$$\rho_b^2 \Lambda(T) = \rho_b \dot{U}_{MIG} \frac{1}{\rho} \int_{m_1(T)}^{m_2} N(m) m dm \quad (6.11)$$

Dans cette équation $m_1 - m_2$ est l'intervalle de masses dans lequel le refroidissement du gaz est possible. La masse m_1 sera déterminée comme étant la plus masse du plus petit halo capable de former des étoiles dans un MIG chaud. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les baryons ne se concentrent pas dans des halos de température virielle inférieure à la température du MIG. En revanche, pour des halos plus gros, les barons suivront le collapse

de la matière noire (et donneront donc naissance à des étoiles) tant que le temps de refroidissement du gaz sera plus petit que le temps dynamique. Ainsi la masse m_1 est une fonction de T , et le système est *auto-régulé* : si le refroidissement est important une grande quantité d'étoiles seront formées, libérant à leur tour beaucoup d'énergie dans le MIG et supprimant la formation d'étoiles ultérieures et donc la source de chauffage ... En pratique, le système se stabilisera autour d'une position d'équilibre qui peut être calculée. Il faut cependant noter qu'un tel équilibre n'existe pas forcément si le refroidissement est trop efficace, ce qui arrive à grand z où le MIG est dense.

6.4.2 Régulation des supernovae

Dans cette section, nous allons essayer d'estimer le paramètre de transfert ϵ , et la production de métaux dans le MIG. On sait que les étoiles finissant leur vie en SNII sont des étoiles de masse plus grande que $8M_{\odot}$. Or nous devons calculer l'énergie mécanique (thermique ou cinétique) E_{SN} libérée par unité de masse d'étoile. Nous devons donc supposer une FMI que nous prendrons égale à celle de Salpeter :

$$\Psi(m) = Am^{-(1+x)} \quad (6.12)$$

avec $x = 1,35$. On peut de plus calculer le rapport p en masse des SNIIs à la masse totale des étoiles formées :

$$p = \frac{\int_8^{100} m\Psi(m)dm}{\int_{0,1}^{100} m\Psi(m)dm} = 0,21 \quad (6.13)$$

pour la FMI adoptée. D'autre part la masse moyenne d'une étoile formant une SNII est $\langle M_{SNII} \rangle \simeq 30 M_{\odot}$. L'énergie moyenne dégagée par une SNII étant $\langle E_{SNII} \rangle = 10^{51}$ ergs, on peut calculer :

$$E_{SN} = \frac{p\langle E_{SNII} \rangle}{\langle M_{SNII} \rangle} = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ ergs/g} \quad (6.14)$$

Une fraction ϵ seulement de cette énergie sera accessible pour réchauffer le MIG. Cependant, on aurait pu considérer une FMI plus plate ($x = 1$), ou bien une formation stellaire bimodale (Elbaz et al. (1995)). En conséquence nous laisserons varier ϵ dans l'intervalle $[0, 125; 2]$.

6.4.3 Le MIG réchauffé par les SNe

Dans cette section nous allons nous intéresser au cas où le MIG est réchauffé uniquement de manière thermique par les SNe (on suppose qu'il n'est

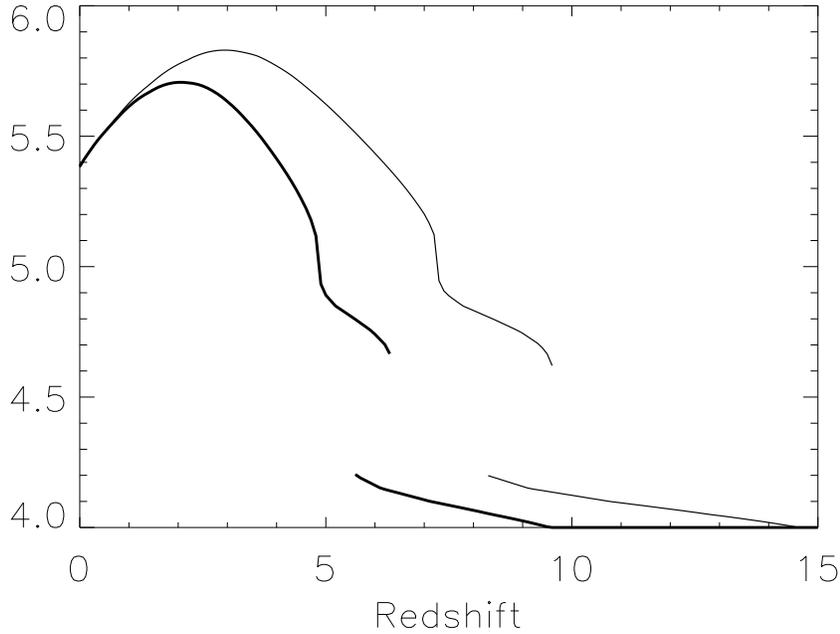


FIG. 6.7: *Un exemple des températures (échelle logarithmique) du MIG auto-régulé dans le cas d'un réchauffage collisionnel seul, pour $\epsilon = 2$ et $\Omega_b = 0,1$. Le trait fin correspond à $\Gamma = 0,5$, et le trait épais à $\Gamma = 0,25$. Le paramètre de biais vaut ici $b = 1,6$.*

pas photoionisé). Les paramètres du mécanisme de chauffage se résument alors à la seule valeur de son efficacité ϵ . La température du MIG est alors presque entièrement déterminée. Les solutions d'équilibre sont présentées dans la figure 6.7. A cause de la forme particulière de la fonction de refroidissement, plusieurs solutions d'équilibre peuvent coexister (nous n'avons montré que les solutions d'équilibre stable). On peut donc voir qu'aucune solution d'équilibre continue n'existe sur l'ensemble des z . En pratique, le gaz doit «sauter» d'une solution à l'autre, ce qui est appelé habituellement une bifurcation. Dans ce cas le comportement exact de la température du gaz ne peut être calculé que par le biais des équations hors d'équilibre, et on peut s'attendre que le résultat dépende intimement du processus de chauffage (on pourrait éventuellement avoir un milieu multiphasé). Afin de pallier ce problème, nous supposons que le MIG reste uniforme et se stabilise autour de la position d'équilibre nécessitant le plus petit échange d'énergie (et donc la plus petite formation stellaire). Ce comportement est illustré dans

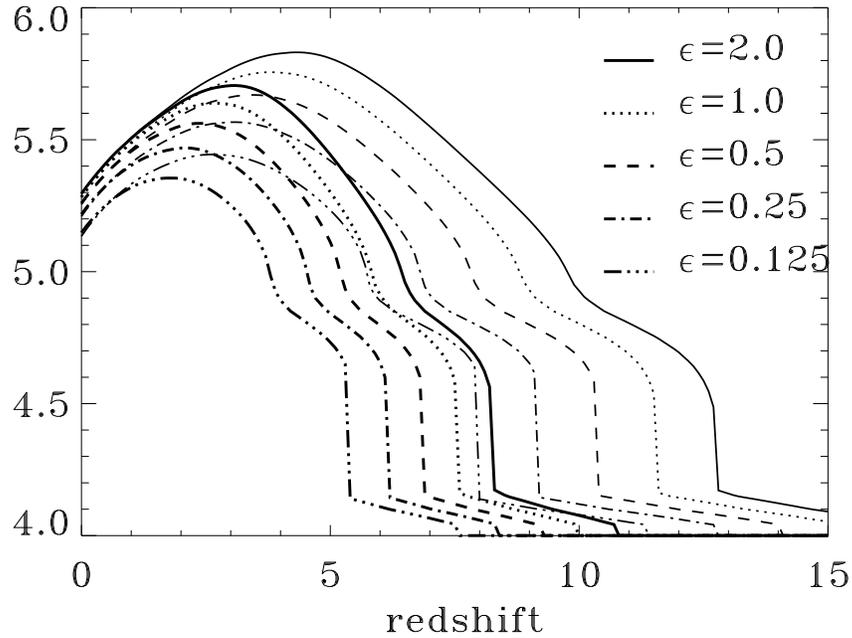


FIG. 6.8: La température du MIG auto-régulé pour un réchauffage thermique seul, pour différentes valeurs de ϵ , et pour $\Gamma = 0,5$ (traits fins), et $\Gamma = 0,25$ (traits épais). Ici $\Omega_b = 0,05$ et $b = 1,6$.

la figure 6.8. Entre les z de 15 et 5, la température croît, pour atteindre une valeur de quelques 10^5 K, satisfaisant ainsi le test de Gunn & Peterson. D'autre part, quelque soit l'efficacité du chauffage, les températures calculées restent groupées un peu au dessus de 10^5 K, ce qui indique donc que c'est une prédiction générale du scénario envisagé ici. Les fractions *instantanées* correspondantes sont montrées dans la figure 6.9. Cette figure nous montre que le maximum de formation stellaire devrait avoir lieu à grand z pour le MIG chaud non photoionisé, ce qui semble en contradiction avec les données CFRS et HDF qui favorisent un pic de formation stellaire à bas z (encore l'obscurcissement dû aux poussières puisse être plus grand que prévu, voir Guiderdoni et al. (1998) par exemple). Cependant, ce modèle a le mérite de prédire une densité totale d'étoiles (Ω_*) en accord avec les observations (voir figure 6.10). Cela signifie que le problème du *sur-refroidissement* est résolu par l'auto-régulation du MIG. Cette figure nous montre en fait que Ω_* est en accord raisonnable avec les données pour peu que 10% de l'énergie des

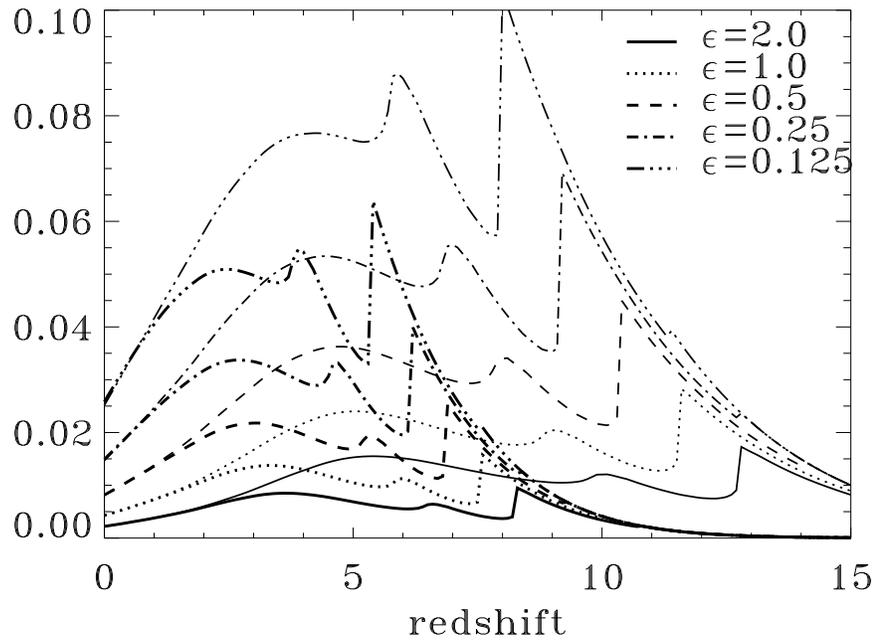


FIG. 6.9: *Fraction instantanée f_c pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais) dans le cadre du MIG chaud. On a pris $b = 1,6$ et $\Omega_b = 0,05$.*

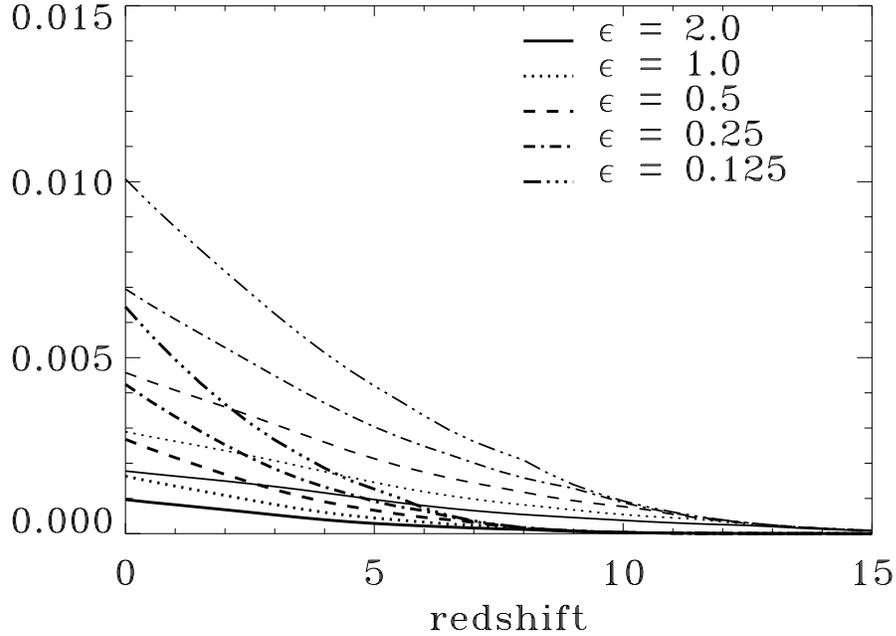


FIG. 6.10: *Densité intégrée d'étoiles pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais), pour différentes valeurs de ϵ . Les autres paramètres sont comme dans la figure 6.8.*

SNe soient réinjectés dans le MIG. Ainsi même avec une efficacité faible le problème du *sur-refroidissement* est résolu.

6.4.4 MIG chaud photoionisé

Bien que nous ayons montré auparavant que la photoionisation n'est pas suffisante à elle seule pour résoudre le problème du *sur-refroidissement*, elle devrait cependant jouer un rôle important dans l'histoire thermique du MIG (Efstathiou (1992)). D'autre part, d'un point de vue purement observationnel, la photoionisation ne peut être oubliée dans la mesure où les quasars fournissent déjà un flux ionisant UV important à haut z (même si ces derniers ne fournissent peut-être pas tout le flux nécessaire à l'ionisation du MIG). Nous avons donc étudié le cas où le MIG est photoionisé, et réchauffé en même temps par l'énergie des SNe. Notre traitement de la photoionisation a été décrit dans la section 6.3.2, il consiste à supposer que le MIG est totalement photoionisé, supprimant ainsi le refroidissement collisionnel

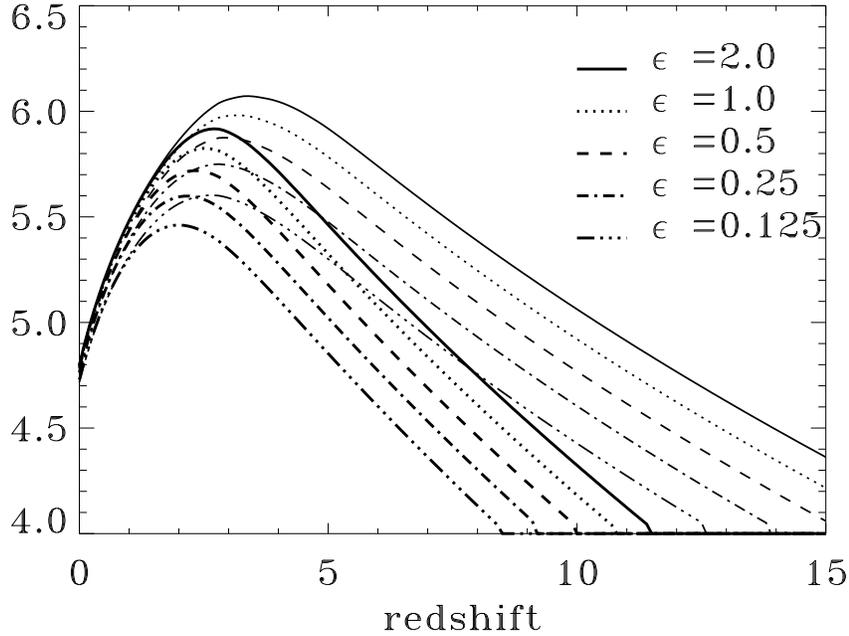


FIG. 6.11: *Températures d'équilibre pour le MIG chaud et photoionisé pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais), avec différentes valeurs du paramètre ϵ . On a pris $\Omega_b = 0,1$ et $b = 1,6$.*

avec les atomes de gaz neutre. La température du MIG a été calculée comme précédemment (voir figure 6.11). La photoionisation, en supprimant le refroidissement de raies, rend la fonction de refroidissement plus régulière et supprime les phénomènes de bifurcation. D'autre part, si la température à grand z est semblable à celle du MIG réchauffé non photoionisé (quelques 10^5 K), elle est notablement différente à bas z . En effet, cette dernière décroît plus vite, et atteint des valeurs inférieures à 10^5 K à $z = 0$. Le fait que la température décroît plus vite dans le cas photoionisé implique que *de plus petites galaxies peuvent alors se former*, contrairement aux interprétations traditionnelles. En effet, le refroidissement étant nettement moins efficace à basse température ($\sim 10^4$ K), l'équilibre se fait à plus basse température dans le cas photoionisé, conduisant à la formation (récente) de petites galaxies. La densité intégrée d'étoiles, calculée pour ce modèle de MIG chaud et photoionisé, est montrée dans la figure 6.12. On peut voir que dans ce cas également le problème du *sur-refroidissement* est résolu pour des paramètres d'entrée raisonnables. Cependant, la situation pourrait être plus compliquée que cela

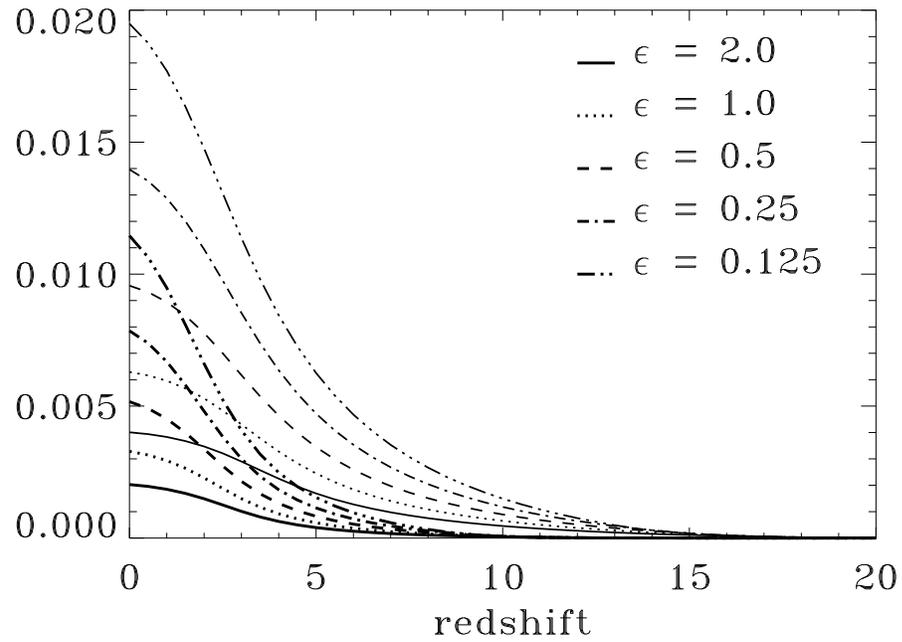


FIG. 6.12: *Densité intégrée d'étoiles pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0,5$ (traits fins) et $\Gamma = 0,25$ (traits épais). Les autres paramètres sont comme dans la figure 6.11.*

encore. En effet, à haut z , le gaz est au milieu de la zone de refroidissement, conduisant ainsi à un *collapse* quasi-isotherme. Ceci n'est plus le cas à bas z , et l'inefficacité du refroidissement devrait conduire à une compression quasi-adiabatique du gaz, provoquant alors son réchauffement lors du *collapse* de la structure. Dans ce cas le gaz ne formerait sans doute pas de petites galaxies, mais viendrait plutôt s'accréter sur les grandes déjà existantes. Seules des simulations numériques détaillées pourraient répondre à cette question.

6.5 Comparaisons avec les observations

L'essence de notre modèle consiste dans la suppression de la formation de galaxies à haut z par le chauffage du MIG, et le maintien de cette haute température grâce à l'auto-régulation du MIG par la formation d'étoiles dans les premières galaxies. Les tests les plus directs de ce modèle consisteraient en une mesure de la température du MIG à grand z , ainsi qu'une mesure de son contenu en baryons. La meilleure mesure de l'épaisseur optique Gunn & Peterson à grand z (Giallongo et al. (1994)) suggère que le MIG ne contient qu'une petite fraction des baryons prédits par la nucléosynthèse à $z = 5$, dans l'hypothèse toutefois que les quasars sont la principale source ionisante à cette époque. Les simulations numériques, cependant, suggèrent quant à elles que la majorité des baryons réside dans les systèmes Lyman α . Ainsi la situation à la fois théorique et observationnelle n'est pas claire à l'heure actuelle, et ne permet pas de conclure quant à l'état du MIG à cette époque. Les limites observationnelles issues du paramètre de «comptonisation» y mettent d'autre part des contraintes supérieures sur la pression du MIG, mais qui sont loin d'être assez restrictives pour éliminer notre modèle.

6.5.1 Gaz neutre à grand z

Les observations des quasars à grand z ont révélé la présence de systèmes Lyman α denses, qui sont vraisemblablement des nuages denses de gaz relativement froid. On pense que ce sont les progéniteurs des galaxies spirales actuelles. Ces nuages peuvent être interprétés, dans le cadre de notre modèle, comme un état transitoire du gaz avant qu'il ne forme des étoiles. Si l'on appelle t_g le temps de survie de ce gaz, et que de plus ce temps est court devant le temps de Hubble $t_H(z)$ à une époque donnée, alors la densité de gaz HI à cette même époque peut être reliée à la fraction f_c :

$$\Omega_{HI} \sim \frac{t_g}{t_H(z)} g(z) \Omega_0 \quad (6.15)$$

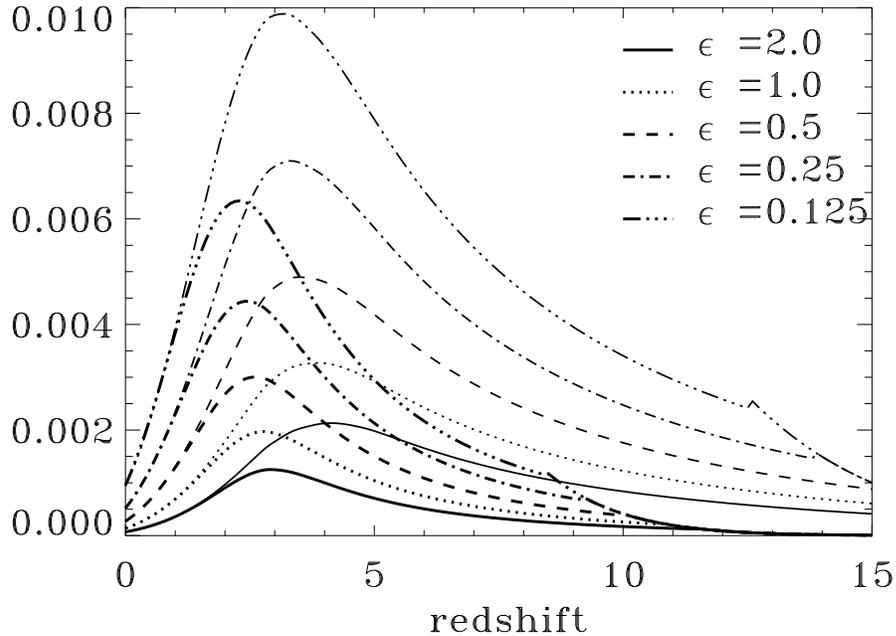


FIG. 6.13: *Densité de gaz HI pour deux modèles CDM, $\Gamma = 0, 5$ (traits fins) et $\Gamma = 0, 25$ (traits épais), avec différentes valeurs du paramètre de chauffage ϵ . Ici $\Omega_b = 0, 1$ et $b = 1, 6$.*

Dans la plupart des scénarios actuellement envisagés, la formation des étoiles à partir du gaz HI est relié à l'évolution gravitationnelle de la structure, qui se produit sur une échelle de temps typiquement égale à $t_H(z)$. Ainsi, dans notre estimation de Ω_{HI} choisissons-nous le rapport $\frac{t_q}{t_H(z)}$ de l'ordre de 1. Le résultat est montré dans la figure 6.13. Comme on peut le voir dans cette figure, l'évolution du gaz HI prédite est en accord avec les observations, croissant d'abord puis décroissant ensuite. Le modèle $\Gamma = 0, 5$ donne un pic de HI à un z supérieur à celui des observations, en revanche le modèle $\Gamma = 0, 25$ est en accord avec la position observationnelle de ce pic. Afin de construire un scénario compatible avec les observations, nous avons décidé de sélectionner les modèles qui donnaient une densité intégrée d'étoiles Ω_* compatible avec les observations. Il est intéressant de noter que ce sont ces mêmes modèles qui reproduisent de façon satisfaisante l'évolution de la densité de gaz HI. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où l'on sait que la quantité de gaz HI observé est du bon ordre de grandeur pour expliquer la quantité actuelle d'étoiles observées, et justifie également notre choix d'avoir fixé le

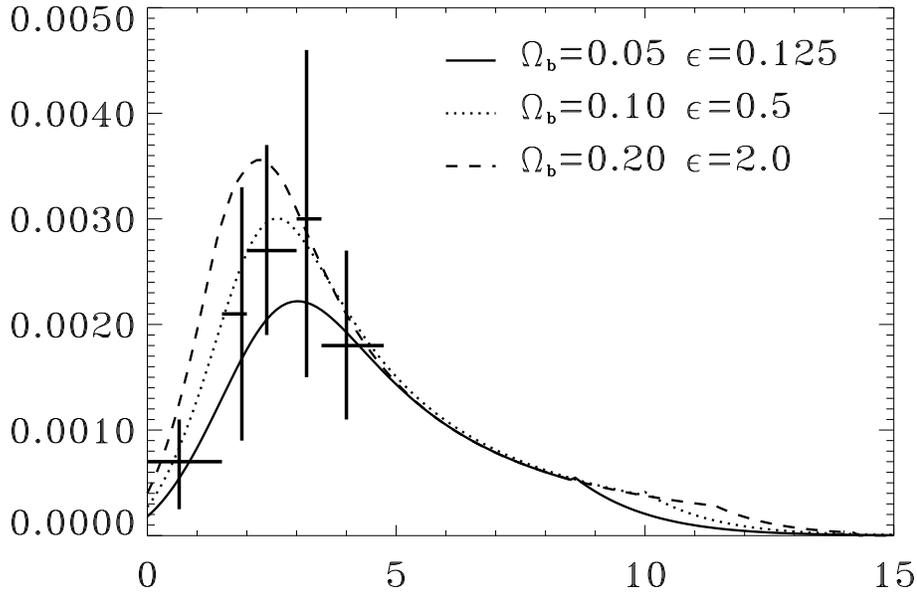


FIG. 6.14: La densité de Ω_{HI} en fonction du z dans des modèles sélectionnés pour reproduire la quantité actuelle d'étoiles observées, avec $\Gamma = 0,25$, dans le cadre d'un MIG chaud photoionisé. Les modèles $\Gamma = 0,5$ ne peuvent en aucun cas reproduire les observations.

rapport $\frac{t_q}{t_H(z)}$ à 1 ; une valeur plus petite de ce rapport aurait conduit à une surproduction artificielle d'étoiles dans la mesure où l'apport de nouveau gaz froid est contrôlé par l'évolution gravitationnelle des structures. Comme le montre la figure 6.14, le modèle $\Gamma = 0,25$ est en accord particulièrement satisfaisant avec les données, tandis que le modèle $\Gamma = 0,5$ ne s'ajuste pas aux données, quelque soient les valeurs des autres paramètres. On a ainsi une contrainte (même si elle est imprécise) sur la forme du spectre des fluctuations à une échelle beaucoup plus petite que les contraintes habituelles (amas de galaxies, FCM), qui favorise également la valeur $\Gamma = 0,25$ du paramètre de forme. D'autre part, le cas non photoionisé reproduit *grosso modo* les observations, mais pas dans les détails. En effet la quantité de HI à bas z dépasse celle observée d'un facteur 2, et à $z > 4$ ce scénario prédit une quantité importante de HI (ceci pourrait en fait ne pas être réellement un problème si l'on considère l'absence d'informations concernant le gaz neutre à cette époque, voir figure 6.15). Enfin, le fait que notre modèle reproduise

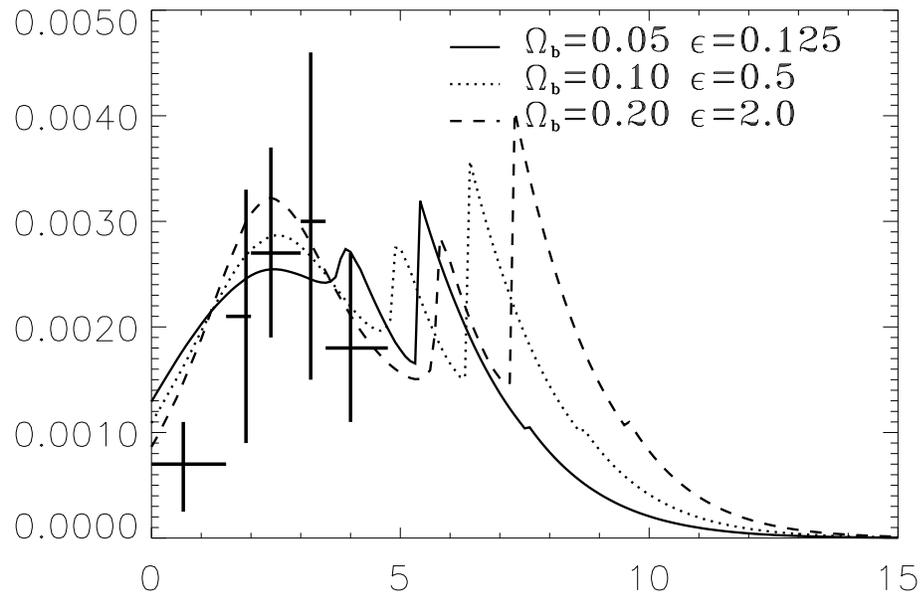


FIG. 6.15: La densité Ω_{HI} en fonction de z pour différents modèles sélectionnés de manière à reproduire la quantité actuelle d'étoiles observées, avec $\Gamma = 0,25$.

facilement les quantités de HI observées à différentes époques est sans doute son plus grand succès ; nous avons en fait trouvé qu'un scénario de MIG chaud photoionisé avec $\Gamma = 0,25$ reproduit automatiquement les observations de HI si le paramètre d'efficacité ϵ est fixé de manière à reproduire la quantité d'étoiles actuelle.

6.5.2 Formation d'étoiles

Étant donné le succès de ce modèle à reproduire la quantité de gaz neutre observé, il est tentant d'aller encore plus loin et de voir si le modèle peut reproduire d'autres aspects de l'histoire des baryons. Une des principales avancées dans les dernières années est l'estimation de la formation d'étoiles cosmique, basée sur les données du CFRS et du HDF. Bien que la formation des étoiles soit un phénomène très complexe, il est possible que quelques hypothèses simples puissent révéler une description raisonnable de la réalité. Pour étudier la formation d'étoiles cosmique dans notre modèle nous avons adopté une règle simple : la fraction de gaz accessible à la formation d'étoiles à une époque est convertie en étoiles avec un retard Δt_* . Dans cette hypothèse, le taux de formation cosmique d'étoiles s'écrit :

$$\dot{\rho}_* \sim \frac{1}{t_H(z)} \int_{t_H(z) \pm \Delta t_*}^{t_H(z)} \Omega_b g(z) dt \quad (6.16)$$

Nous avons calculé ce taux pour deux valeurs de Δt_* , 1 et 2 Gyr, et tracé les résultats dans la figure 6.16. Un bon accord avec les observations est trouvé dans le régime de bas z , pour lequel la photoionisation joue un rôle très important ; en effet le scénario non photoionisé ne reproduit pas bien les données. Il est intéressant de noter que cette modélisation très simple de la formation d'étoiles suffit à reproduire assez précisément les observations, et nous conforte dans l'idée que le processus d'auto-régulation joue un rôle fondamental dans l'histoire de la formation des galaxies.

6.5.3 Métallicité du MIG

Le problème de l'enrichissement métallique du Milieu Intra-Amas (MIA) a été étudié par de nombreux auteurs (Renzini et al. (1993); Mushotzky et al. (1996); Renzini (1997); Ishimaru & Arimoto (1997); Gibson et al. (1997); Fukazawa et al. (1998)), et il a été proposé que le MIA soit représentatif du MIG en ce qui concerne les métaux (Renzini (1998)). Le principal problème est de contraindre le rapport de la production métallique due aux SNIa et aux SNII. En effet, une SNIa moyenne produit dix fois plus de fer qu'une

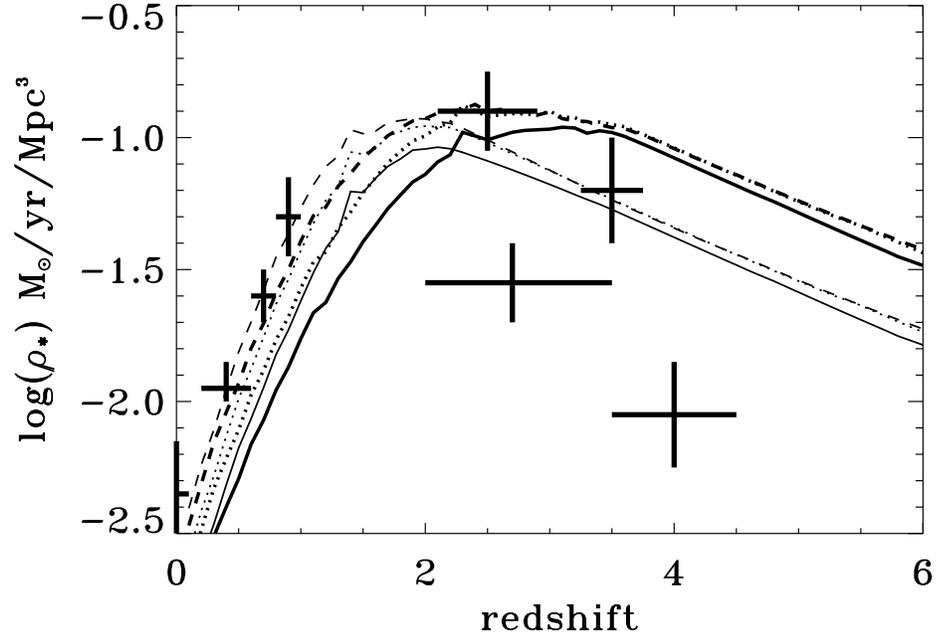


FIG. 6.16: Taux de formation d'étoiles estimé d'après l'équation 6.16, pour deux valeurs du délai $\Delta t_* = 1 \text{ Gyr}$ (traits épais) et $\Delta t_* = 2 \text{ Gyr}$ (traits fins). Les données à bas z sont celles du CFRS, tandis que celles à haut z sont celles obtenues par Madau à partir des données HDF, en tenant compte ou non de l'absorption des poussières. Les paramètres utilisés sont les mêmes que dans la figure 6.14.

SNII moyenne (Renzini et al. (1993)), mais leurs progéniteurs sont des systèmes binaires dont l'abondance est mal connue. La méthode habituelle pour contraindre ce rapport est de mesurer l'abondance du gaz en éléments α et de la comparer à l'abondance en fer, car les éléments α sont produits exclusivement par les SNII. Les échelles de temps très différentes (quelques millions d'années pour les SNII, quelques milliards pour les SNIa) ajoutent à la complexité du problème ; en effet, les populations d'étoiles jeunes et vieilles n'auront pas le même rapport d'abondance d'éléments α comparativement au fer, même si elles ont la même FMI. Comme les populations stellaires des amas sont vieilles, le MIA a été enrichi par les deux types de SNe, et le rapport α/Fe est typiquement solaire. Dans ce cas les SNIa fournissent 75% du fer du MIA (Renzini et al. (1993)). Renzini (1997, 1998) pensent que cette situation pourrait être représentative du MIG à bas z étant donné que les métallicités observées dans les galaxies de champ à bas z sont comparables à celles des galaxies des amas. En supposant que cette hypothèse soit vraie, on peut d'abord calculer l'abondance en fer produite par les SNII puisque ces dernières déterminent l'énergie libérée dans le MIG, et ensuite calculer l'abondance totale de fer en incluant les SNIa :

$$Z_{SNII}(z = 0) = 0,5 \times B_*(z = 0)p\langle M_{Fe} \rangle / \langle M_{SNII} \rangle \quad (6.17)$$

où $B_*(z = 0)$ est la fraction actuelle des baryons convertis en étoiles, $\langle M_{Fe} \rangle$ est la masse moyenne de fer produite par une SNII, et le facteur 0,5 tient compte du fait que la moitié du fer seulement est éjecté dans le MIG, le reste restant enfermé dans les étoiles. En incluant la contribution des SNIa, on obtient :

$$Z_{tot}(z = 0) = Z_{SNII} + Z_{SNIa} = 4 \times Z_{SNII}(z = 0) \quad (6.18)$$

On trouve des métallicités typiques de 0,1 solaire à $z = 0$, et de 0,05 solaire à $z = 2,5$ qui sont comparables aux récentes observations des systèmes denses Lyman α (Lu et al. (1997)).

6.6 Remarques finales

Notre modélisation simple de l'histoire cosmique des baryons a permis de souligner un certain nombre de points importants :

- La nécessité de recourir à une auto-régulation de la formation de galaxie par le biais du contrôle de la température du MIG par la formation stellaire.

- Le rôle très important de la photoionisation du gaz dans son histoire thermique récente. Cette dernière, dans le cadre de ce scénario, permet la formation récente de petites galaxies (au contraire des scénarios sans chauffage collisionnel).
- Enfin, les rayons cosmiques pourraient jouer un rôle important dans le processus d'auto-régulation en tant que vecteurs de l'énergie des SNe. Leur rôle précis demanderait une étude plus approfondie.

Il serait d'autre part assez simple de coupler ce modèle à une analyse du type «arbre de merging», pour avoir une idée plus précise de l'histoire des baryons au sein des halos. Enfin, une analyse spectro-photométrique plus complète (incluant une synthèse de population stellaire et la création de spectres galactiques étendus) pourrait être couplée à ce modèle pour avoir des contraintes plus précises sur la formation stellaire prenant en compte l'absorption par les poussières. En effet, si ces dernières absorbent la lumière visible et UV des étoiles, elles réémettent en infrarouge et sont partiellement responsables du Fond de Rayonnement Cosmique Infrarouge détecté par Puges et al. (1996) et ultérieurement confirmé par Guiderdoni et al. (1997); Fixsen et al. (1998). Une analyse précise de ce transfert de rayonnement permettrait de tester plus précisément les prédictions de ce modèle en terme de formation stellaire cosmique.

Conclusion et perspectives

Nous aimerions ici rappeler quels sont les objectifs qui ont été atteints durant ce travail de thèse, et les développements possibles de ce travail. Dans le cadre de la préparation scientifique de la mission d'observation des anisotropies du FCM PLANCK, nous avons exploré les retombées scientifiques de l'observation de la composante polarisée du FCM. Afin de quantifier de la manière la plus réaliste possible l'information que la mesure de la polarisation du FCM pourrait nous apporter, nous avons fait une modélisation de l'un des principaux contaminants de ce signal : l'émission polarisée des poussières de notre galaxie en milieu diffus. Si cette première tentative de modélisation de ce contaminant nous donne seulement un ordre de grandeur de sa contribution au signal polarisé (ce qui déjà est utile pour quantifier l'erreur que ce signal entraîne sur la mesure du FCM), il semble qu'une analyse plus poussée de ses caractéristiques nécessitent l'acquisition de données plus précises. Or, si ces données ne sont pas disponibles à l'heure actuelle, nous avons montré néanmoins que la mission PLANCK a été étudiée de manière à pouvoir mesurer cette émission par le biais de la voie à 545 GHz, et à permettre ainsi sa soustraction en tant que contaminant.

Il en est de même pour l'émission synchrotron polarisée de notre galaxie, pour laquelle il n'existe pas à ma connaissance de modélisation dans les régions de haute latitude, en particulier aux fréquences millimétriques, et cela encore une fois par manque de données sur cette émission. Une voie cependant pourrait permettre une première modélisation de cette émission ; il s'agirait d'extrapoler aux fréquences millimétriques les mesures faites par Brouw & Spoelstra (1976) de cette émission sur une assez grande partie du ciel dans la gamme de fréquences [408, 1411], MHz. Une telle extrapolation n'est cependant pas aisée à cause de la rotation Faraday ; cette dernière ne nous permet d'explorer que des régions d'émission proches aux basses fréquences. Ce travail est actuellement en cours.

En ce qui concerne les méthodes d'extraction du FCM des futures observations, nous avons généralisé la méthode du filtrage de Wiener multi-fréquences au cas du signal polarisé. Cela a permis d'obtenir une première

estimation de la qualité de la mesure de la polarisation du FCM par les futures missions satellites telles que PLANCK. Nous voudrions insister ici sur une différence majeure avec le cas de la température : le rapport signal sur bruit est ici beaucoup plus faible, et en conséquence le signal extrait après filtrage dépend beaucoup plus des hypothèses prises pour construire le filtre. C'est pourquoi une estimation la plus précise possible des contaminants polarisés du FCM, conjointement au développement d'une méthode d'inversion générale de type bayésien sont nécessaires pour quantifier la qualité de la mesure de la polarisation du FCM de manière vraiment fiable. Ainsi, les résultats obtenus dans la présente étude ne peuvent être qu'indicatifs à ce stade. D'autre part, nous avons montré la puissance d'une mission telle que PLANCK pour la mesure des paramètres constitutifs des modèles d'inflation, même quand ces derniers impliquent des formes non triviales du spectre de puissance primordial.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous avons présenté la physique de l'effet « papillon » (ou de lentille gravitationnelle en mouvement), ainsi que l'empreinte d'une population de telles lentilles sur le FCM. Nous en avons conclu que cet effet cumulé ne sera pas préjudiciable à la mesure des anisotropies primaires du FCM, et nous avons d'autre part échoué dans notre tentative de détection de cet effet dans le cas réaliste où l'on y superpose les anisotropies primaires et l'effet Sunyaev-Zel'dovich cinématique. Une comparaison simple des amplitudes des signaux aux différentes échelles, ainsi que la confusion spectrale de ces différents effets nous rendent pessimistes quant à une éventuelle détection de cet effet pour une structure individuelle.

Enfin, nous avons présenté un modèle semi-analytique de formation de galaxies, basé sur le formalisme de Press & Schechter, dans lequel le milieu intergalactique est maintenu chaud et photoionisé par la formation stellaire des galaxies. Ce modèle auto-régulé reproduit avec succès la densité actuelle d'étoiles en termes de la densité critique, ainsi que l'histoire de la densité de gaz froid, apportant ainsi une réponse au problème du *sur-refroidissement* du gaz qui est susceptible de se produire dans tout scénario hiérarchique de formation des structures. Considérant la simplicité (et donc le petit nombre de paramètres) de ce modèle et sa faculté de reproduire les observations, nous pensons que ce modèle mérite d'être couplé à des modèles spectrophotométriques qui permettraient de calculer les fonctions de luminosité dans différentes longueurs d'onde, ce qui nous donneraient un test direct de la capacité de ce modèle à reproduire les taux de formation d'étoiles récemment observés. D'autre part, le problème du *sur-refroidissement* ayant été observé dans les simulations numériques, il serait intéressant d'y appliquer les principes de base de ce modèle, où l'on pourrait tester le comportement de la

formation stellaire suivant que l'énergie est réinjectée dans le MIG de manière locale ou homogène.

Annexe A

La physique du FCM

Nous allons présenter dans cet appendice les équations fondamentales gouvernant la physique du FCM, ainsi que les outils statistiques permettant de définir les observables pertinentes pour son étude.

A.1 Les équations d'Einstein

Elles gouvernent la dynamique de l'espace-temps et incluent indistinctement toutes les contributions énergétiques (matière baryonique, non baryonique, rayonnement, énergie du vide). Dans l'approche perturbative adoptée ici, il faut distinguer les équations gouvernant la « métrique de fond » de celles gouvernant les perturbations de celle-ci. Nous supposons que la métrique de fond est de type Friedmann-Roberson-Walker (FRW), et si $\bar{\rho}(\tau)$, $\bar{P}(\tau)$ désignent respectivement la densité d'énergie et la pression de l'univers non perturbé, alors le facteur d'expansion $a(\tau)$ est donné par :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}Ga^2\bar{\rho} - \kappa \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi}{3}Ga^2(\bar{\rho} + 3\bar{P}) \quad (\text{A.2})$$

où τ désigne le temps conforme, et κ , courbure réduite de l'univers, est positive, nulle ou négative pour un univers fermé, plat et ouvert respectivement. Nous nous restreindrons ici au cas des univers plats ($\Omega = 1$), donc $\kappa = 0$. Nous rappelons que ces équations incluent la possibilité d'une constante cosmologique, qui est une forme de matière ayant l'équation d'état suivante :

$$\bar{\rho}_\Lambda = -\bar{P}_\Lambda \quad (\text{A.3})$$

L'évolution de la métrique de fond est complètement décrite par les équations ci-dessus.

A.1.1 Perturbations de la métrique

En ce qui concerne les équations gouvernant les perturbations de la métrique, un choix de jauge s'impose, nous écrirons donc toutes les équations dans la jauge synchrone qui par définition ne comporte que des perturbations d'espace. D'autre part les équations suivantes concernent des perturbations scalaires (les perturbations tensorielles seront traitées par la suite). Commençons par définir les perturbations dans la jauge synchrone. La métrique perturbée s'écrit de façon générale ainsi :

$$ds^2 = a^2(\tau) (-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j) \quad (\text{A.4})$$

Cette perturbation peut être décomposée en plusieurs parties, d'une part sa trace (au sens matriciel du terme) $h \equiv h_{ii}$, et d'autre part une partie sans trace comportant trois sous-parties. On a donc

$$h_{ij} = h\delta_{ij}/3 + h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^T \quad (\text{A.5})$$

avec les conditions suivantes :

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_l h_{lk}^{\parallel} = 0, \quad \partial^i\partial^j h_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial^i h_{ij}^T = 0 \quad (\text{A.6})$$

Les perturbations scalaires sont donc représentées par h , h^{\parallel} , tandis que h^{\perp} et h^T désignent les perturbations vectorielles et tensorielles respectivement. On peut réécrire une perturbation scalaire en terme de modes de Fourier :

$$h_{ij}(\vec{x}, \tau) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\{ \hat{k}_i \hat{k}_j h(\vec{k}, \tau) + (\vec{k}_i \vec{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij})6\eta(\vec{k}, \tau) \right\} \quad (\text{A.7})$$

avec $\vec{k} = k\hat{k}$.

Nous pouvons maintenant écrire les équations d'Einstein linéarisées pour les perturbations scalaires dans la jauge synchrone :

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = 4\pi G a^2 \delta T^0_0 \quad (\text{A.8})$$

$$k^2\dot{\eta} = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P})\theta \quad (\text{A.9})$$

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} - 2k^2\eta = -8\pi G a^2 \delta T^i_i \quad (\text{A.10})$$

$$\ddot{h} + 6\ddot{\eta} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\dot{h} + 6\dot{\eta}) - 2k^2\eta = -24\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \quad (\text{A.11})$$

où l'on définit

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \equiv ik^j \delta T^0_j, \quad (\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \equiv -(\hat{k}^i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_{ij})\Sigma^i_j \quad (\text{A.12})$$

où $\Sigma^i_j \equiv T^i_j - \delta^i_j T^k_k/3$. Ecrivons maintenant l'équation correspondante pour les perturbations tensorielles :

$$\ddot{h}^T_{ij} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}^T_{ij} + k^2 h^T_{ij} = 16\pi G \Sigma^T_{ij} \quad (\text{A.13})$$

où Σ^T_{ij} est la partie transverse sans trace et de divergence nulle (tensorielle pure) du tenseur d'énergie-impulsion. Nous remarquons qu'il s'agit, à la différence des autres équations, d'une équation d'ondes, il s'agit en effet de l'équation des *ondes gravitationnelles*.

A.1.2 Cas du fluide parfait

Un fluide parfait de densité d'énergie ρ et de pression P , le tenseur d'énergie-impulsion prend la forme suivante (par définition) :

$$T^\mu_\nu = P g^\mu_\nu + (\rho + P)U^\mu U_\nu \quad (\text{A.14})$$

où $U^\mu = dx^\mu/\sqrt{-ds^2}$ est le quadri-vecteur vitesse du fluide. Si de plus la vitesse spatiale $v^i = dx^i/d\tau$ du fluide est petite, elle peut être traitée comme une perturbation du même ordre que $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ et $\delta P = P - \bar{P}$. Donc au premier ordre de ces perturbations le tenseur d'énergie-impulsion peut s'écrire :

$$T^0_0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho) \quad (\text{A.15})$$

$$T^0_i = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i \quad (\text{A.16})$$

$$T^i_j = (\bar{P} + \delta P)\delta^i_j + \Sigma^i_j \quad (\text{A.17})$$

D'autre part, comme conséquence des équations d'Einstein, ce tenseur conservé (*i.e.* de dérivée covariante nulle). Cela nous donne :

$$\dot{\delta} = -(1+w) \left(\theta + \frac{\dot{h}}{2} \right) - 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - w \right) \delta \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{a}}{a}(1-3w)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1+w}k^2\delta - k^2\sigma \quad (\text{A.19})$$

où $w = P/\rho$ est l'équation d'état du fluide. Ces équations sont valides pour un fluide parfait isolé des autres. Nous verrons par la suite que pour la matière baryonique, le couplage avec le rayonnement introduit un terme supplémentaire correspondant au transfert d'énergie-impulsion entre les deux

composantes. D'autre part, pour des perturbations isentropiques, nous avons la relation supplémentaire $\delta P = c_s^2 \delta \rho$, où la vitesse du son adiabatique est définie par $c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = w + \rho \frac{dw}{d\rho}$. Pour les baryons et les photons, w est une constante (égale à 1/3 pour les photons, et approximativement 0 pour les baryons), ce qui implique que

$$\frac{\delta P}{\delta \rho} - w = 0. \quad (\text{A.20})$$

L'entropie engendrée par le couplage des deux composantes par collisions Thomson avant la recombinaison est incluse dans les termes de collision additionnels mentionnés plus haut.

A.1.3 Application : CDM

La matière noire froide, (en anglais « Cold Dark Mater » ou CDM), est définie comme un fluide parfait non collisionnel. Elle peut servir de référentiel de base pour la jauge synchrone (*i.e.* la vitesse particulière de cette dernière est choisie nulle). Les équations la gouvernant se simplifient alors à l'extrême :

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{2}\dot{h} \quad (\text{A.21})$$

$$\theta = \sigma = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$w = \dot{w} = 0 \quad (\text{A.23})$$

Pour les perturbations tensorielles, on obtient l'équation homogène (sans sources) pour les ondes gravitationnelles :

$$\ddot{h}_{ij}^T + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{ij}^T + k^2 h_{ij}^T = 0 \quad (\text{A.24})$$

A.2 L'équation de Boltzmann

Les composantes relativistes de la matière (neutrinos légers, photons) ne peuvent être décrits comme des fluides, et c'est pourquoi il faut recourir à une description d'espace des phases.

A.2.1 Espace des phases

L'espace des phases est habituellement défini par les trois coordonnées d'espace x^i , ainsi que par leurs moments conjugués P_i . Cependant en relativité générale il faudrait en toute rigueur inclure le temps (et son

moment conjugué) comme quatrième coordonnée. Nous allons néanmoins garder le temps comme une variable à part, au prix de briser la covariance des équations et donc de devoir spécifier en terme d'observables les variables dépendantes de la jauge choisie, et cela pour pouvoir partir de la forme de l'équation de Boltzmann que nous connaissons et l'étendre au cas général-relativiste. Les moments conjugués sont simplement égaux à $P_i = mU_i$ où $U_i = dx_i/\sqrt{-ds^2}$. Les moments propres $p_i = p^i$ mesurés par un observateur de coordonnée spatiale fixée sont reliés aux moments conjugués par :

$$P_i = a(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij})p^j \quad (\text{A.25})$$

dans la jauge synchrone. On peut alors définir la densité de particules dans l'espace des phases :

$$dN = f(x^i, P_j, \tau) dx^1 dx^2 dx^3 dP_1 dP_2 dP_3 \quad (\text{A.26})$$

où la fonction de distribution f est un scalaire invariant sous les transformations canoniques. La fonction de distribution d'équilibre s'écrit :

$$f_0(\epsilon) = \frac{g_s}{h_P^3} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T_0}} \pm 1} \quad (\text{A.27})$$

où $\epsilon = a(p^2 + m^2)^{1/2} = (P^2 + a^2 m^2)^{1/2}$, $T_0 = aT$ est la température actuelle des particules, g_s le nombre de degrés de liberté de spin, et enfin $+$ et $-$ correspondent respectivement aux fermions et aux bosons. Même si les variables x^i et P_j restent canoniquement conjuguées sous des perturbations de la métrique, on leur préférera les variables x^i et $q_j \equiv ap_j$, car ainsi les perturbations de la métrique n'interviennent plus dans la définition des impulsions; de plus on définit $q_j = qn_j$ où n_j est un vecteur unitaire. Il faut noter ici que ce jeu de variables ne *constitue plus* une ensemble de variables canoniquement conjuguées, et donc que $f d^3 q d^3 x$ ne représente pas en général la densité de particules.

L'expression générale du tenseur d'énergie-impulsion est donnée par :

$$T_{\mu\nu} = \int d^3 P \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{P_\mu P_\nu}{P^0} f(x^i, P_j, \tau) \quad (\text{A.28})$$

où g est le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$. Ecrivons maintenant la fonction de distribution de manière perturbative :

$$f(x^i, P_j, \tau) = f_0(q) (1 + f_1(x^i, q, n_j, \tau)) . \quad (\text{A.29})$$

Dans la jauge synchrone nous avons $(-g)^{1/2} = a^{1/4}(1 - h/2)$ et $d^3P = (1 + h/2)q^2 dq d\Omega$, où $d\Omega$ est l'angle solide élémentaire associé au vecteur n_i . L'équation A.28 donne alors :

$$T^0_0 = -a^{1/4} \int q^2 dq d\Omega \sqrt{q^2 + m^2 a^2} f_0(q) (1 + f_1) \quad (\text{A.30})$$

$$T^0_i = a^{1/4} \int q^2 dq d\Omega q n_i f_0(q) f_1 \quad (\text{A.31})$$

$$T^i_j = a^{1/4} \int q^2 dq d\Omega \frac{q^2 n_i n_j}{\sqrt{q^2 + m^2 a^2}} f_0(q) (1 + f_1) \quad (\text{A.32})$$

au premier ordre dans les perturbations.

L'équation de Boltzmann gouverne l'évolution de l'espace des phases :

$$\frac{Df}{D\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dn_i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial n_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_C \quad (\text{A.33})$$

où le terme de droite dépend des collisions Thomson et sera explicité ultérieurement.

L'équation géodésique des moments implique qu'on ait en jauge synchrone :

$$\frac{dq}{d\tau} = -\frac{1}{2} q \dot{h}_{ij} n_i n_j, \quad (\text{A.34})$$

et que $dn_i/d\tau$ soit d'ordre 1 dans les perturbations. Ceci implique que le terme $\frac{dn_i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial n_i}$ est d'ordre 2 dans les perturbations et peut donc être négligé par la suite. Dans l'espace de Fourier, l'équation de Boltzmann prend donc la forme suivante :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + i \frac{q}{\epsilon} (\vec{k} \cdot \hat{n}) f_1 + \frac{d \ln f_0}{d \ln q} \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{h} + 6\dot{\eta}}{2} (\hat{k} \cdot \hat{n})^2 \right) = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_C. \quad (\text{A.35})$$

Il a été supposé que la perturbation possède une symétrie axiale de sorte que la dépendance en $\vec{q} = q \hat{n}$ se traduit par une dépendance en q et en le cosinus directeur $\hat{k} \cdot \hat{n}$ uniquement. Cela n'est en revanche pas le cas pour les perturbations tensorielles. Nous expliciterons donc les dépendances angulaires ultérieurement. L'équation de Boltzmann perturbée pour les perturbations tensorielles s'écrit donc :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + i \frac{q}{\epsilon} (\vec{k} \cdot \hat{n}) f_1 - \frac{1}{2} \frac{d \ln f_0}{d \ln q} \left(\dot{h}_{ij}^T n_i n_j \right) = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_C. \quad (\text{A.36})$$

A.2.2 Collisions Thomson

Nous allons préciser dans ce qui suit la valeur du terme de droite de l'équation de Boltzmann, terme dû à l'interaction Thomson entre les électrons du plasma et les photons.

Définition des paramètres de Stokes

Une onde plane électromagnétique polarisée elliptiquement peut être décrite par la donnée des composantes (transverse) du champ électrique suivant deux axes :

$$E_x = E_x^0 \sin(\omega t - \epsilon_1) \quad (\text{A.37})$$

$$E_y = E_y^0 \sin(\omega t - \epsilon_2) \quad (\text{A.38})$$

où $E_{x,y}^0$ et $\epsilon_{1,2}$ sont des constantes. On peut alors définir les paramètres de Stokes comme suit :

$$I = (E_x^0)^2 + (E_y^0)^2 = I_x + I_y \quad (\text{A.39})$$

$$Q = (E_x^0)^2 - (E_y^0)^2 = I_x - I_y \quad (\text{A.40})$$

$$U = 2E_x^0 E_y^0 \cos(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (\text{A.41})$$

$$V = 2E_x^0 E_y^0 \sin(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (\text{A.42})$$

I est proportionnel à l'intensité de l'onde, V mesure le rapport des axes de l'ellipse tandis que Q et U donnent l'orientation de l'ellipse par rapport aux axes de référence (x, y) . Les paramètres de Stokes offrent donc une description complète de l'onde polarisée. Lors d'une rotation d'un angle ξ des axes $\{x, y\}$, le vecteur (I_x, I_y, U, V) subit l'opérateur suivant :

$$\hat{L}(\xi) = \begin{pmatrix} \cos^2(\xi) & \sin^2(\xi) & 1/2 \sin(2\xi) & 0 \\ \sin^2(\xi) & \cos^2(\xi) & -1/2 \sin(2\xi) & 0 \\ -\sin(2\xi) & \sin(2\xi) & \cos(2\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Evolution des paramètres de Stokes

Pour de la lumière diffusée faisant un angle Θ avec la direction d'incidence (cf figure A.1) on a :

$$E_x^s = \sqrt{3/2\sigma_T} E_x^0 \cos \Theta \sin(\omega t - \epsilon_1) \quad (\text{A.44})$$

$$E_y^s = \sqrt{3/2\sigma_T} E_y^0 \sin(\omega t - \epsilon_2) \quad (\text{A.45})$$

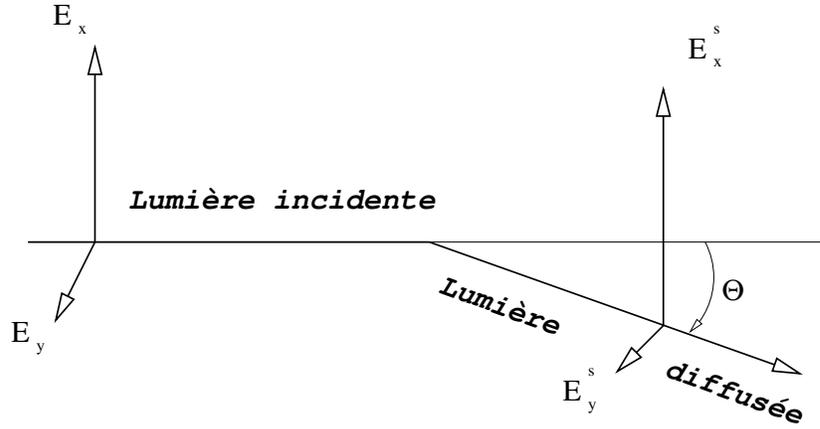


FIG. A.1: Collision Thomson entre un photon et un électron

ce qui se traduit sur les paramètres de Stokes par :

$$I_x^s = (3/2)\sigma_T I_x \cos^2 \Theta \quad (\text{A.46})$$

$$I_y^s = (3/2)\sigma_T I_y \quad (\text{A.47})$$

$$U^s = (3/2)\sigma_T U \cos \Theta \quad (\text{A.48})$$

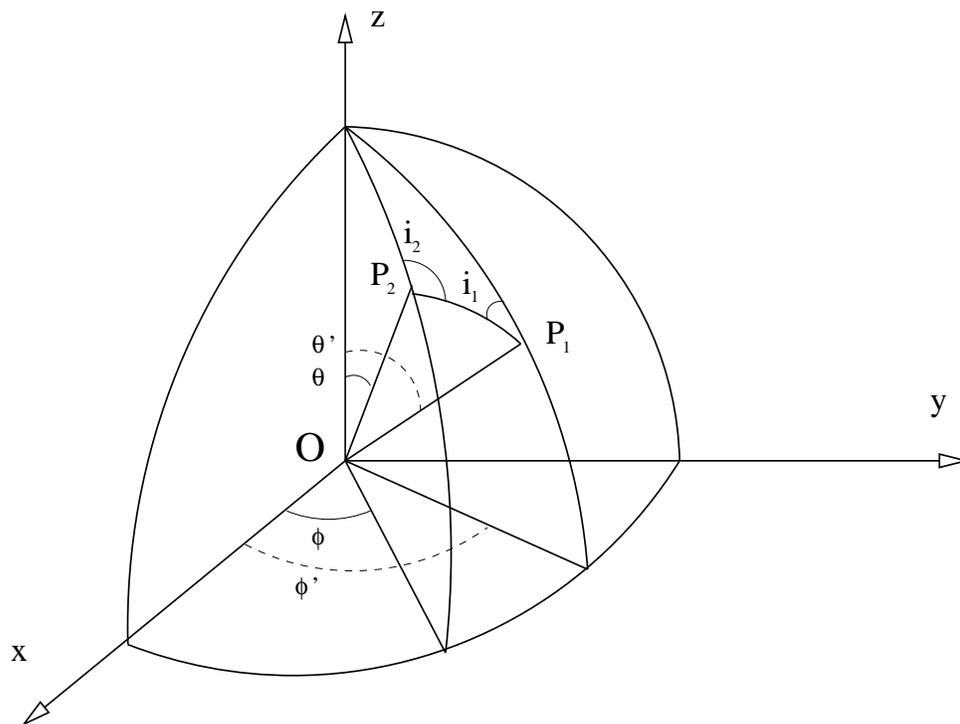
$$V^s = (3/2)\sigma_T V \cos \Theta \quad (\text{A.49})$$

Cela peut se réécrire sous forme matricielle, $\vec{I}^s = \sigma_T \hat{R} \vec{I}$ avec

$$\hat{R} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos^2 \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

Il faut noter que cette expression des paramètres de Stokes de la lumière diffusée n'est pas donnée dans le même repère que les paramètres de la lumière incidente. Pour remédier à cela regardons la figure A.2. Un rayon incident passe par P_1 , entre en collision avec l'électron situé en O , et diffuse en passant par le point P_2 . Pour exprimer la variation des paramètres de Stokes dans le référentiel de la figure A.2, il faut appliquer $\hat{L}(-i_1)$ au vecteur \vec{I} . Nous obtenons alors les paramètres de Stokes dans le référentiel du plan de collision (cf figure A.1). Il faut ensuite leur appliquer l'opérateur \vec{R} pour obtenir les paramètres de Stokes de la lumière diffusée, toujours dans le plan de la collision. Enfin, on obtient les paramètres de Stokes de la lumière diffusée dans le référentiel de départ en appliquant l'opérateur $\hat{L}(\pi - i_2)$. Résumons, nous obtenons :

$$\vec{I}^s(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int \hat{P}(\theta, \phi; \theta', \phi') \vec{I}(\theta', \phi') d\Omega' \quad (\text{A.51})$$

FIG. A.2: *Collision Thomson dans un référentiel fixé*

avec

$$\hat{P} = \hat{Q} \left[\hat{P}_0(\mu, \mu') + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \hat{P}_1(\mu, \phi, \mu', \phi') + \hat{P}_2(\mu, \phi, \mu', \phi') \right] \quad (\text{A.52})$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.53})$$

$$\hat{P}_0 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) + \mu^2 \mu'^2 & \mu^2 & 0 & 0 \\ \mu'^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \mu' \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$

$$\hat{P}_1 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 4\mu\mu' \cos(\phi - \phi') & 0 & 2\mu \sin(\phi' - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu' \sin(\phi - \phi') & 0 & \cos(\phi - \phi') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi - \phi') \end{pmatrix} \quad (\text{A.55})$$

$$\hat{P}_2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \mu^2 \mu'^2 \cos 2(\phi' - \phi) & -\mu^2 \cos 2(\phi' - \phi) & \mu^2 \mu' \sin 2(\phi' - \phi) & 0 \\ -\mu'^2 \cos 2(\phi' - \phi) & \cos 2(\phi' - \phi) & -\mu' \sin 2(\phi' - \phi) & 0 \\ -\mu'^2 \mu \sin 2(\phi' - \phi) & \mu \sin 2(\phi' - \phi) & \mu' \mu \cos 2(\phi' - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.56})$$

où μ et μ' sont respectivement égaux à $\cos \theta$ et $\cos \theta'$.

A.2.3 Equations de Boltzmann polarisées

Remarques préliminaires

A la place de la distribution totale f dans l'espace des phases, nous allons définir une variable réduite (intégrée sur les impulsions) dont la signification physique sera plus claire. Regardons les équations A.32, définissons

$$F(\vec{k}, \hat{n}, \tau) \equiv \frac{\int q^2 dq q f_0(q) f_1}{\int q^2 dq f_0(q)} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l + 1) F_l(\vec{k}, \tau) P_l(\vec{k} \cdot \hat{n}) \quad (\text{A.57})$$

où $P_l(\mu)$ est le polynôme de Legendre d'ordre l . Avec cette définition de la variable F , nous avons

$$\delta_\gamma = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega F(\vec{k}, \hat{n}, \tau) = F_0 \quad (\text{A.58})$$

$$\theta_\gamma = \frac{3i}{16\pi} \int d\Omega (\vec{k} \cdot \hat{n}) F(\vec{k}, \hat{n}, \tau) = \frac{3}{4} k F_1 \quad (\text{A.59})$$

$$\sigma_\gamma = -\frac{3}{16\pi} \int d\Omega \left[(\hat{k} \cdot \hat{n})^2 - \frac{1}{3} \right] F(\vec{k}, \hat{n}, \tau) = \frac{1}{2} F_2 \quad (\text{A.60})$$

La nouvelle variable F représente donc l'anisotropie d'intensité lumineuse. Prenons maintenant pour chaque mode \vec{k} un repère qui lui soit associé, *i.e.* dont le troisième axe soit collinéaire à \vec{k} . En définissant maintenant, dans ce repère, l'équivalent de F pour tous les paramètres de Stokes (soit F^Q, F^U, F^V), on peut écrire le terme de collision pour ce *vecteur* \vec{F} comme

$$\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} \right)_C = an_e \sigma_T \left(\vec{F}_{scat.} - \vec{F} \right) \quad (\text{A.61})$$

Perturbations scalaires

On doit tout d'abord remarquer que les perturbations scalaires, dans le repère lié au mode \vec{k} défini plus haut, sont *indépendantes de l'azimut* ϕ . Donc l'intégration sur cet angle montre que seule \hat{P}_0 donne une contribution non nulle. Ainsi dans ce repère, le paramètre de Stokes U n'a pas de source; on peut donc le prendre nul. Dans ce cas l'équation de Boltzmann pour les variables réduites F et F^Q devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} F \\ F^Q \end{pmatrix} + ik\mu \begin{pmatrix} F \\ F^Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\dot{h} + \frac{4}{3}(\dot{h} + 6\dot{\eta})P_2(\mu) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= an_e \sigma_T \left(\int_{\perp 1}^1 \hat{M}_s(\mu, \mu') \begin{pmatrix} F' \\ F'^Q \end{pmatrix} d\mu' - \begin{pmatrix} F + 4i\theta_b/k P_1(\mu) \\ F^Q \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

où \hat{M}_s correspond aux deux premières lignes et colonnes de \hat{P}_0 dans la base (I, Q, U, V) . Cette équation se traduit en deux équations pour les quantités F et F^Q :

$$\begin{aligned} \dot{F} + ik\mu F &= -\frac{2}{3}\dot{h} - \frac{4}{3}(\dot{h} + 6\dot{\eta})P_2(\mu) \\ &+ an_e \sigma_T \left[-F + F_0 - 4i\frac{\mu\theta_b}{k} + 2P_2(\mu)\Pi \right] \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\dot{F}^Q + ik\mu F^Q = an_e \sigma_T \left[-F^Q + 2(1 - P_2(\mu))\Pi \right] \quad (\text{A.64})$$

$$\Pi = F_2 + F_2^Q + F_0^Q \quad (\text{A.65})$$

En développant ces équations sur les modes de Legendre on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_\gamma &= -\frac{4}{3}\theta_\gamma - \frac{2}{3}\dot{h} \\
\dot{\theta}_\gamma &= k^2 \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma - \sigma_\gamma \right) + an_e\sigma_T(\theta_b - \theta_\gamma) \\
\dot{F}_2 &= 2\dot{\sigma}_\gamma = \frac{8}{15}\theta_\gamma - \frac{3}{5}fF_3 + \frac{4}{15}\dot{h} + \frac{8}{5}\dot{\eta} - \frac{9}{5}an_e\sigma_T\sigma_\gamma + \frac{1}{10}an_e\sigma_T(F_0^Q + F_2^Q) \\
\dot{F}_l &= \frac{k}{2l+1} [lF_{l\perp 1} - (l+1)F_{l+1}] - an_e\sigma_T F_l \\
\dot{F}_l^Q &= \frac{k}{2l+1} [lF_{l\perp 1}^Q - (l+1)F_{l+1}^Q] \\
&\quad + an_e\sigma_T \left[-F_l^Q + \frac{1}{2}(F_2 + F_0^Q + F_2^Q) \left(\delta_{l0} + \frac{\delta_{l2}}{5} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.66}$$

Ce sont ces équations de transfert radiatif qui sont résolues numériquement dans les codes de Boltzmann. Nous verrons par la suite qu'une intégration directe de l'équation de Boltzmann A.65 sur la ligne de visée est beaucoup plus rapide que la résolution complète numérique des équations de modes de Legendre couplées ci-dessus. C'est pourquoi il est important de garder les deux formes de l'équation en mémoire.

Evolution de la matière baryonique

Les baryons, comme nous l'avons mentionné précédemment se comportent comme un fluide non relativiste, et leur évolution est décrite par les équations A.19. Etant vraiment non relativiste à la période qui nous intéresse, on a $\delta P_b/\delta\rho_b = c_s^2 = w \ll 1$, et ces contributions peuvent être négligées partout sauf dans le terme acoustique $c_s^2 k^2 \delta$ qui devient non négligeables pour des grandes modes; d'autre part leur pression est négligeable devant leur densité d'énergie (de masse). Avant la recombinaison ils sont de plus couplés avec les photons, ce qui introduit un terme supplémentaire de transfert d'impulsion. Le transfert d'impulsion dans l'équation de Boltzmann pour les photons prend la forme $an_e\sigma_T(\theta_b - \theta_\gamma)$ (*cf* Eq. A.66). La conservation de l'impulsion dans les collisions Thomson implique l'addition du terme $(4\bar{\rho}_\gamma/3\bar{\rho}_b)an_e\sigma_T(\theta_\gamma - \theta_b)$ à l'équation sur $\dot{\theta}_b$. On obtient donc les équations suivantes pour l'évolution des baryons :

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b - \frac{1}{2}\dot{h} \tag{A.67}$$

$$\dot{\theta}_b = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_b + c_s^2 k^2 \delta_b + \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b} an_e\sigma_T(\theta_\gamma - \theta_b) \tag{A.68}$$

La vitesse du son est calculée comme suit :

$$c_s^2 = \frac{\dot{P}_b}{\dot{\rho}_b} = \frac{k_B T}{\mu} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{d \log T}{d \log a} \right) \quad (\text{A.69})$$

Quant à la température, le premier principe de la thermodynamique donne son évolution :

$$\dot{T}_b = -2 \frac{\dot{a}}{a} T_b + \frac{8}{3} \frac{\mu}{m_e} \frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_b} a n_e \sigma_T (T_\gamma - T_b) \quad (\text{A.70})$$

où l'on a supposé que les collisions électrons-ions sont suffisamment rapides pour assurer l'équilibre thermique entre les deux espèces.

Perturbations tensorielles

De la même façon que pour les perturbations scalaires, on peut écrire l'équation de Boltzmann pour les perturbations tensorielles :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} F \\ F^Q \\ F^U \end{pmatrix} + ik\mu \begin{pmatrix} F \\ F^Q \\ F^U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{h}_+^T (1 - \mu^2) \cos(2\phi) - \dot{h}_\times^T (1 - \mu^2) \sin(2\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a n_e \sigma_T \left(\int \hat{M}_T(\mu, \phi; \mu', \phi') \begin{pmatrix} F' \\ F'^Q \\ F'^U \end{pmatrix} \frac{d\Omega'}{4\pi} - \begin{pmatrix} F \\ F^Q \\ F^U \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

où les perturbations tensorielles de la métriques ont été décomposées sur les modes + et \times comme suit : $h_{11}^T = h_{22}^T = h_+^T$ et $h_{12}^T = h_{21}^T = h_\times^T$. La matrice \hat{M}_T est composée des trois premières lignes et colonnes de la matrice \hat{P}_2 . Nous voyons que malgré le choix du repère lié au vecteur \vec{k} , l'équation de Boltzmann A.71 dépend encore de l'azimut ϕ . Cependant le changement de variables suivant va nous permettre de nous débarrasser de cette dépendance (*cf* Polnarev (1985)). Définissons tout d'abord les variables suivantes :

$$h_1 = (h_+ - i h_\times) / \sqrt{2} \quad (\text{A.72})$$

$$h_2 = (h_+ + i h_\times) / \sqrt{2} \quad (\text{A.73})$$

On peut alors définir les nouvelles variables

$$F = [(1 - \mu^2)e^{2i\phi} h_1 + (1 - \mu^2)e^{\perp 2i\phi} h_2] \tilde{F} \quad (\text{A.74})$$

$$(F^Q + iF^U) = [(1 - \mu^2)e^{2i\phi} h_1 + (1 + \mu^2)e^{\perp 2i\phi} h_2] \tilde{F}^P \quad (\text{A.75})$$

$$(F^Q - iF^U) = [(1 + \mu^2)e^{2i\phi} h_1 + (1 - \mu^2)e^{\perp 2i\phi} h_2] \tilde{F}^P \quad (\text{A.76})$$

En suivant toujours Polnarev (1985) ces nouvelles variables \tilde{F} et \tilde{F}^P obéissent aux équations de Boltzmann suivantes :

$$\dot{\tilde{F}} + ik_\mu \tilde{F} = -4\dot{h} - an_e \sigma_T (\tilde{F} - \Xi) \quad (\text{A.77})$$

$$\dot{\tilde{F}}^P + ik_\mu \tilde{F}^P = -an_e \sigma_T (\tilde{F}^P + \Xi) \quad (\text{A.78})$$

où $h_{ij}^T = he_{ij}$ et $\Xi = \left(\frac{1}{10} \tilde{F}_0 + \frac{1}{7} \tilde{F}_2 + \frac{3}{70} \tilde{F}_4 - \frac{3}{5} \tilde{F}_0^P + \frac{6}{7} \tilde{F}_2^P - \frac{3}{70} \tilde{F}_4^P \right)$.

Intensité vs Température

Nous avons vu que des perturbations de la distribution des photons dans l'espace des phases correspondent à des fluctuations d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Comment sont définies alors les fluctuations de température (plus usuelles) du FCM ? De manière générale, elles se définissent comme suit :

$$f(x^i, q, n_j, \tau) = f_0 \left(\frac{q}{1 + \Delta_T} \right) \quad (\text{A.79})$$

où par définition $\Delta_T \equiv \Delta T/T$, et f_0 est la distribution de Bose-Einstein de masse nulle. L'équation A.29 nous donne au premier ordre en f_1 :

$$\Delta_T = - \left(\frac{d \ln f_0}{d \ln q} \right)^{\perp 1} f_1 \quad (\text{A.80})$$

Or, en regardant les équations A.35 et A.36, on voit que le terme de perturbation de la métrique ainsi que le terme de collision au premier ordre ne dépendent de q qu'à travers $\frac{d \ln f_0}{d \ln q}$, et donc Δ_T ne dépend pas de q . Ceci n'est vrai qu'au premier ordre pour le terme de collision. En effet dans le cas où la température des photons est très différente de la température des électrons, le spectre de corps noir subit une *distorsion* (un bon exemple est l'effet Sunyaev-Zel'dovich dans les amas, où la température des électrons est de l'ordre de quelques keV, alors que celle des photons n'est seulement de quelques K). Dans notre cas les anisotropies en température sont très simplement reliées aux anisotropies de la fonction de distribution intégrée, en effet $\Delta_T = F/4$.

A.3 Statistique du FCM

Nous allons ici suivre l'article de Zaldarriaga & Seljak (1997). Il s'agit tout d'abord de définir les fonctions mathématiques nécessaires à la représentation de la polarisation sur la sphère.

A.3.1 Harmoniques sphériques spinnées

Les fonctions harmoniques sphériques spinnées sont définies théoriquement comme les modes propres d'une équation de Poisson tensorielle sur la sphère. Comme les harmoniques sphériques classiques, elles constituent une représentation du groupe des rotations, mais de plus elles permettent de représenter sur la sphère non plus des quantités scalaires, mais des variables de spin non nul. Principalement appliquées dans le passé à l'étude des ondes gravitationnelles (*cf* Thorne (1980)), nous verrons que leur utilisation est tout indiquée dans le cas de la représentation sur le ciel de la polarisation du FCM.

Définissons tout d'abord ce que nous entendons par une variable de spin. Sur la sphère repérée par ses coordonnées (θ, ϕ) , on définit le vecteur radial \hat{n} , ainsi que deux vecteurs tangents (\hat{e}_1, \hat{e}_2) , définis à une rotation autour de \hat{n} près. Une fonction ${}_s f(\theta, \phi)$ est dite de spin s si, par une rotation d'un angle ψ des vecteurs (\hat{e}_1, \hat{e}_2) dans le sens des aiguilles d'une montre, elle se transforme de la façon suivante :

$${}_s f\prime(\theta, \phi) = e^{\perp is\psi} {}_s f(\theta, \phi) \quad (\text{A.81})$$

Ces fonctions peuvent être décomposées en **harmoniques spinnées** ${}_s Y_{lm}(\theta, \phi)$ qui ont les propriétés d'orthogonalité suivantes:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta {}_s Y_{lm}^*(\theta, \phi) {}_s Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll} \delta_{mm} \quad (\text{A.82})$$

$$\sum_{lm} {}_s Y_{lm}^*(\theta, \phi) {}_s Y_{lm}(\theta\prime, \phi\prime) = \delta(\phi - \phi\prime) \delta(\cos\theta - \cos\theta\prime)$$

Comme en mécanique quantiques, les harmoniques spinnées sont obtenues à partir des harmoniques scalaires par l'action d'opérateurs de spin ∂ et $\bar{\partial}$, respectivement montant et descendant. Ainsi par la rotation d'un angle ψ des vecteurs tangents on obtient :

$$(\partial {}_s f)\prime = e^{\perp i(s+1)\psi} \partial {}_s f \quad (\text{A.83})$$

$$(\bar{\partial} {}_s f)\prime = e^{\perp i(s-1)\psi} \bar{\partial} {}_s f \quad (\text{A.84})$$

Leur expression est donnée par :

$$\partial {}_s f(\theta, \phi) = \sin^s(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i \csc(\theta) \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sin^{\perp s}(\theta) {}_s f(\theta, \phi) \quad (\text{A.85})$$

$$\bar{\partial} {}_s f(\theta, \phi) = -\sin^{\perp s}(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial\theta} - i \csc(\theta) \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \sin^s(\theta) {}_s f(\theta, \phi) \quad (\text{A.86})$$

Les variables de polarisation, $Q \pm iU$ sont d'autre part de spin ± 2 . Or pour des fonctions ${}_{\pm 2}f(\mu, \phi)$ telles que $\partial_{\phi} {}_s f = im {}_s f$, on a :

$$\bar{\partial}^2 {}_2 f(\mu, \phi) = \left(-\partial\mu + \frac{m}{1-\mu^2} \right)^2 [(1-\mu^2) {}_2 f(\mu, \phi)] \quad (\text{A.87})$$

$$\partial^2 {}_{\perp 2} f(\mu, \phi) = \left(-\partial\mu - \frac{m}{1-\mu^2} \right)^2 [(1-\mu^2) {}_{\perp 2} f(\mu, \phi)] \quad (\text{A.88})$$

où $\mu = \cos\theta$. Finalement les harmoniques spinnées ${}_s Y_{lm}$ peuvent s'exprimer à partir des harmoniques scalaires :

$${}_s Y_{lm} = \left[\frac{(l-s)!}{(l+s)!} \right]^{\frac{1}{2}} \partial^s Y_{lm} \quad (\text{A.89})$$

$${}_s Y_{lm} = \left[\frac{(l-s)!}{(l+s)!} \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^s \bar{\partial}^{\perp s} Y_{lm} \quad (\text{A.90})$$

Ces fonctions spinnées ont d'autre part les propriétés suivantes :

$${}_s Y_{lm}^* = (-1)^s {}_{\perp s} Y_{l\perp m} \quad (\text{A.91})$$

$$\partial {}_s Y_{lm} = \sqrt{(l-s)(l+s+1)} {}_{s+1} Y_{lm} \quad (\text{A.92})$$

$$\bar{\partial} {}_s Y_{lm} = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)} {}_{s\perp 1} Y_{lm} \quad (\text{A.93})$$

$$\bar{\partial} \partial {}_s Y_{lm} = -(l-s)(l+s+1) {}_s Y_{lm} \quad (\text{A.94})$$

Enfin, on peut donner une forme explicite de ces fonctions :

$${}_s Y_{lm} = e^{im\phi} \left[\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+s)!(l-s)!} \frac{2l+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \sin^{2l}(\theta/2) \quad (\text{A.95})$$

$$\times \sum_r \binom{l-s}{r} \binom{l+s}{r+s-m} (-1)^{l\perp r\perp s+m} \cot^{2r+s\perp m}(\theta/2)$$

A.3.2 Modes de polarisation

A partir de maintenant nous ne considérerons plus que les anisotropies de température du FCM, et les perturbations des paramètres de Stokes associées. Nous rappelons que ces anisotropies sont très simplement reliées à la fonction de distribution perturbative intégrée par $\Delta_X = F^X$ où X désigne un des paramètres de Stokes I, Q, U . Nous rappelons que lors d'une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre des vecteurs tangents (*i.e.* perpendiculaires au vecteur de direction \hat{n}), les paramètres de Stokes se transforment ainsi :

$$Q' = Q \cos(2\psi) + U \sin(2\psi) \quad (\text{A.96})$$

$$U' = -Q \sin(2\psi) + U \cos(2\psi) \quad (\text{A.97})$$

Nous pouvons donc construire deux quantités de spin ± 2 :

$$(Q \pm iU)l = e^{\mp 2i\psi}(Q \pm iU) \quad (\text{A.98})$$

Ces quantités peuvent donc être décomposées sur la base des harmoniques spinnées :

$$\Delta_T(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{T,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (\text{A.99})$$

$$(\Delta_Q + i\Delta_U)(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{2,lm2} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (\text{A.100})$$

$$(\Delta_Q - i\Delta_U)(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{\perp 2,lm\perp 2} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (\text{A.101})$$

La difficulté principale dans le calcul des spectres de puissance de polarisation vient du fait que les paramètres de Stokes ne sont pas invariants par rotation. Or si ces derniers sont facilement calculé pour chaque mode de Fourier \vec{k} , ils doivent être recalculés dans un repère fixe lorsque l'on intègre sur ces modes de Fourier, ce qui rend le calcul analytique impossible sauf dans le cas de petites échelles où certaines approximations rendent le calcul possible. L'avantage de la décomposition en harmoniques spinnées est qu'elle permet de construire à partir de ces paramètres de Stokes des quantités *invariantes par rotation* grâce aux opérateurs de spin. En effet

$$\bar{\partial}^2 (\Delta_Q + i\Delta_U)(\hat{n}) = \sum_{lm} \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{\frac{1}{2}} a_{2,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (\text{A.102})$$

$$\partial^2 (\Delta_Q - i\Delta_U)(\hat{n}) = \sum_{lm} \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{\frac{1}{2}} a_{\perp 2,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \quad (\text{A.103})$$

sont des variables de polarisation *scalaires*. Les coefficients s'expriment donc ainsi :

$$a_{T,lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \Delta_T(\hat{n}) \quad (\text{A.104})$$

$$\begin{aligned} a_{2,lm} &= \int d\Omega_2 Y_{lm}^*(\hat{n}) (\Delta_Q + i\Delta_U)(\hat{n}) \\ &= \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \bar{\partial}^2 (\Delta_Q + i\Delta_U)(\hat{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

$$\begin{aligned} a_{\perp 2,lm} &= \int d\Omega_{\perp 2} Y_{lm}^*(\hat{n}) (\Delta_Q - i\Delta_U)(\hat{n}) \\ &= \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \partial^2 (\Delta_Q - i\Delta_U)(\hat{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

On peut alors définir les combinaisons suivantes

$$a_{E,lm} = -(a_{2,lm} + a_{\perp 2,lm})/2 \quad (\text{A.107})$$

$$a_{B,lm} = i(a_{2,lm} - a_{\perp 2,lm})/2 \quad (\text{A.108})$$

qui ont les propriétés d'être respectivement paires et impaires (au sens d'une transformation de parité). Par analogie avec les propriétés des champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{B} , ces variables seront appelées parties « électrique » et « magnétique » de la polarisation. Il est à noter que par construction même, B n'est corrélée ni avec E ni avec T car ce sont des variables de parité opposée. Nous pouvons donc définir les spectres de puissance suivants :

$$C_{Tl} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{T,lm}^* a_{T,lm} \rangle \quad (\text{A.109})$$

$$C_{El} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{E,lm}^* a_{E,lm} \rangle \quad (\text{A.110})$$

$$C_{Bl} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{B,lm}^* a_{B,lm} \rangle \quad (\text{A.111})$$

$$C_{Cl} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{T,lm}^* a_{E,lm} \rangle \quad (\text{A.112})$$

Il est important de noter que ces nouvelles variables E et B ont été définies dans l'espace des modes spinnés. Pour les calculs dans l'espace réel on peut définir les deux variables *scalaires* de polarisation :

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\hat{n}) &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\partial}^2 (\Delta_Q + i\Delta_U) + \partial^2 (\Delta_Q - i\Delta_U) \right] \\ &= \sum_{lm} \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{1/2} a_{E,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\hat{n}) &= \frac{i}{2} \left[\bar{\partial}^2 (\Delta_Q + i\Delta_U) - \partial^2 (\Delta_Q - i\Delta_U) \right] \\ &= \sum_{lm} \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{1/2} a_{B,lm} Y_{lm}(\hat{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

Ces variables sont simplement reliées à E et B dans l'espace des multipoles :

$$a_{(\tilde{E}, \tilde{B}),lm} = \left[\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \right]^{1/2} a_{(E,B),lm} \quad (\text{A.115})$$

A.3.3 Spectres de puissance des perturbations scalaires

Nous rappelons que pour un mode Fourier \vec{k} , on peut choisir le repère pour les paramètres de Stokes de telle manière que $\vec{k} \parallel z$. La symétrie azimutale du mode scalaire de perturbation implique que seul le paramètre de Stokes Q est généré dans ce repère (cf A.2.3). L'équation d'évolution pour les paramètres de Stokes est donnée par A.65. Pour obtenir les solutions du transfert radiatif, nous devons faire évoluer les variables $\Delta_T(\tau, k, \mu)$ et $\Delta_Q(\tau, k, \mu)$ jusqu'au temps présent τ_0 et intégrer sur les modes de Fourier :

$$\Delta_T^{(S)}(\hat{n}) = \int d^3\vec{k} \xi(\vec{k}) \Delta_T^{(S)}(\tau = \tau_0, k, \mu) \quad (\text{A.116})$$

$$(\Delta_Q^{(S)} + i\Delta_U^{(S)})(\hat{n}) = \int d^3\vec{k} \xi(\vec{k}) e^{\pm 2i\phi_{k,n}} \Delta_Q^{(S)}(\tau = \tau_0, k, \mu) \quad (\text{A.117})$$

$$(\Delta_Q^{(S)} - i\Delta_U^{(S)})(\hat{n}) = \int d^3\vec{k} \xi(\vec{k}) e^{2i\phi_{k,n}} \Delta_Q^{(S)}(\tau = \tau_0, k, \mu) \quad (\text{A.118})$$

où $\phi_{k,n}$ est l'angle de rotation permettant de passer du repère lié à \vec{k} , \hat{n} à un repère fixe sur le ciel ; et $\xi(\vec{k})$ est une variable aléatoire définissant la perturbation initiale dans le mode \vec{k} , telle que

$$\langle \xi^*(\vec{k}_1) \xi(\vec{k}_2) \rangle = P(k) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (\text{A.119})$$

Enfin la mention (S) précise qu'il s'agit de perturbations scalaires. Pour obtenir les spectres de puissances on intègre l'équation de Boltzmann scalaire (A.65) le long de la ligne de visée :

$$\Delta_T^{(S)}(\tau_0, k, \mu) = \int_0^{\tau_0} d\tau e^{ix\mu} S_T^{(S)}(k, \tau) \quad (\text{A.120})$$

$$\Delta_Q^{(S)}(\tau_0, k, \mu) = \frac{3}{4}(1 - \mu^2) \int_0^{\tau_0} g(\tau) \Pi(k, \tau) \quad (\text{A.121})$$

$$\begin{aligned} S_T^{(S)} &= g \left(\Delta_{T0}^{(S)} + 2\dot{\alpha} - \frac{\dot{\theta}_b}{k^2} + \frac{\Pi}{4} + \frac{3\ddot{\Pi}}{4k^2} \right) \\ &+ e^{\perp\kappa} (\dot{\eta} + \ddot{\alpha}) + \dot{g} \left(\alpha - \frac{\theta_b}{k^2} + \frac{3\dot{\Pi}}{4k^2} \right) + \frac{3\ddot{g}\Pi}{4k^2} \quad (\text{A.122}) \end{aligned}$$

$$\Pi = \Delta_{T2}^{(S)} + \Delta_{Q2}^{(S)} + \Delta_{Q0}^{(S)} \quad (\text{A.123})$$

où $\kappa = an_e\sigma_T$, $g(\tau) = \dot{\kappa}e^{-\kappa}$ est la « fonction de visibilité » ou distribution de probabilité de dernière collision, $\alpha = (\dot{h} + 6\dot{\eta})/k^2$ et enfin $x = k(\tau_0 - \tau)$. Or dans ce repère $\vec{k} \parallel z$, $U = 0$ et Q est indépendant de l'azimut donc l'équation

A.88 nous donne $\bar{\partial}^2(\Delta_Q + i\Delta_U) = \partial^2(\Delta_Q - i\Delta_U)$, soit $a_{2,lm} = a_{\perp 2,lm}$, et donc les modes B de polarisation sont *identiquement nuls* pour des perturbations scalaires. En agissant deux fois avec l'opérateur montant ∂ sur l'équation A.123 on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{E}}^{(S)}(\tau_0, k, \mu) &= -\frac{3}{4} \int_0^{\tau_0} d\tau g(\tau) \Pi(\tau, k) \partial_\mu^2 [(1 - \mu^2) e^{ix\mu}] \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\tau_0} d\tau g(\tau) \Pi(\tau, k) (1 + \partial_x^2)^2 (x^2 e^{ix\mu})\end{aligned}\quad (\text{A.124})$$

Comme les spectres de puissance définis en A.112 sont invariants par rotation, ils peuvent être calculés dans le repère où $\vec{k} \parallel z$ pour chaque mode de Fourier, et intégrés ensuite sur ces modes qui sont statistiquement indépendants. Ainsi pour la température on obtient

$$\begin{aligned}C_{Tl}^{(S)} &= \frac{1}{2l+1} \int d^3\vec{k} P(k) \sum_m \left| \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(S)}(k, \tau) e^{ix\mu} \right|^2 \\ &= (4\pi)^2 \int k^2 dk P(k) \left[\int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(S)}(k, \tau) j_l(x) \right]^2\end{aligned}\quad (\text{A.125})$$

où $j_l(x)$ est la fonction de Bessel Sphérique d'ordre l . Le calcul du spectre $C_{El}^{(S)}$ est mené de manière analogue :

$$\begin{aligned}C_{El}^{(S)} &= \frac{1}{2l+1} \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \int d^3\vec{k} P(k) \sum_m \left| \frac{3}{4} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \int_0^{\tau_0} d\tau g(\tau) \Pi(k, \tau) [1 + \partial_x^2]^2 (x^2 e^{ix\mu}) \right|^2 \\ &= (4\pi)^2 \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \int k^2 dk P(k) \left(\frac{3}{4} \int_0^{\tau_0} d\tau g(\tau) \Pi(k, \tau) [1 + \partial_x^2]^2 (x^2 j_l(x)) \right) \\ &= (4\pi)^2 \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int k^2 dk P(k) \left[\frac{3}{4} \int_0^{\tau_0} d\tau g(\tau) \Pi(k, \tau) \frac{j_l(x)}{x^2} \right]^2\end{aligned}\quad (\text{A.126})$$

où on a utilisé l'équation différentielle vérifiée par les fonctions de Bessel, $j_l'' + 2j_l'/x + [1 - l(l+1)]j_l = 0$. Si l'on définit de plus

$$\Delta_{Tl}^{(S)}(k) = \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(S)}(k, \tau) j_l(x) \quad (\text{A.127})$$

$$\Delta_{El}^{(S)}(k) = \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \int_0^{\tau_0} d\tau S_E^{(S)}(k, \tau) j_l(x) \quad (\text{A.128})$$

$$S_E^{(S)}(k, \tau) = \frac{3g(\tau)\Pi(k, \tau)}{4x^2} \quad (\text{A.129})$$

on obtient les expressions suivantes pour les spectres de puissance des perturbations scalaires :

$$C_{T,El}^{(S)} = (4\pi)^2 \int k^2 dk P(k) \left[\Delta_{T,El}^{(S)}(k) \right]^2 \quad (\text{A.130})$$

$$C_{Cl}^{(S)} = (4\pi)^{\otimes} \int k^2 dk P(k) \Delta_{Tl}^{(S)}(k) \Delta_{El}^{(S)}(k) \quad (\text{A.131})$$

A.3.4 Spectres de puissance des perturbations tensorielles

Définissons tout d'abord les variables aléatoires représentant l'amplitude des perturbations tensorielles :

$$\xi_1 = (\xi_+ - i\xi_{\times})/\sqrt{2} \quad (\text{A.132})$$

$$\xi_2 = (\xi_+ + i\xi_{\times})/\sqrt{2} \quad (\text{A.133})$$

telles que

$$\langle \xi_1^*(\vec{k}_1) \xi_1^*(\vec{k}_2) \rangle = \langle \xi_2^*(\vec{k}_1) \xi_2^*(\vec{k}_2) \rangle = \frac{P_h(k)}{2} \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (\text{A.134})$$

$$\langle \xi_1^*(\vec{k}_1) \xi_2(\vec{k}_2) \rangle = 0 \quad (\text{A.135})$$

On peut alors, comme pour les scalaires, intégrer l'équation de Boltzmann A.78 sur la ligne de visée :

$$\begin{aligned} \Delta_T^{(T)}(\tau_0, \hat{n}, \vec{k}) &= \left[(1 - \mu^2) e^{2i\phi} \xi_1(\vec{k}) + (1 - \mu^2) e^{\perp 2i\phi} \xi_2(\vec{k}) \right] \int_0^{\tau_0} d\tau e^{ix\mu} S_T^{(T)}(k, \tau) \\ (\Delta_Q^{(T)} + i\Delta_U^{(T)})(\tau_0, \hat{n}, \vec{k}) &= \left[(1 - \mu^2) e^{2i\phi} \xi_1(\vec{k}) + (1 + \mu^2) e^{\perp 2i\phi} \xi_2(\vec{k}) \right] \int_0^{\tau_0} d\tau e^{ix\mu} S_P^{(T)}(k, \tau) \\ (\Delta_Q^{(T)} - i\Delta_U^{(T)})(\tau_0, \hat{n}, \vec{k}) &= \left[(1 + \mu^2) e^{2i\phi} \xi_1(\vec{k}) + (1 - \mu^2) e^{\perp 2i\phi} \xi_2(\vec{k}) \right] \int_0^{\tau_0} d\tau e^{ix\mu} S_P^{(T)}(k, \tau) \end{aligned}$$

avec

$$S_T^{(T)}(k, \tau) = -\dot{h} e^{\perp \kappa} + g(\tau) \Xi \quad (\text{A.136})$$

$$S_P^{(T)}(k, \tau) = -g(\tau) \Xi \quad (\text{A.137})$$

En appliquant deux fois les opérateurs de spin aux termes contenant ξ_1 on obtient :

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^2(\Delta_Q^{(T)} + i\Delta_U^{(T)}) &= \xi_1(\vec{k})e^{2i\phi} \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) \left(-\partial\mu + \frac{2}{1-\mu^2}\right)^2 [(1-\mu^2)(1-\mu)^2 e^{ix\mu}] \\ &= \xi_1(\vec{k})e^{2i\phi} \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) [-\hat{\mathcal{E}}(x) - i\hat{\mathcal{B}}(x)] [(1-\mu^2)e^{ix\mu}] \quad (\text{A.138})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^2(\Delta_Q^{(T)} - i\Delta_U^{(T)}) &= \xi_1(\vec{k})e^{2i\phi} \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) \left(-\partial\mu - \frac{2}{1-\mu^2}\right)^2 [(1-\mu^2)(1+\mu)^2 e^{ix\mu}] \\ &= \xi_1(\vec{k})e^{2i\phi} \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) [-\hat{\mathcal{E}} + i\hat{\mathcal{B}}] [(1-\mu^2)e^{ix\mu}] \quad (\text{A.139})\end{aligned}$$

où nous avons introduit les opérateurs $\hat{\mathcal{E}} = -12 + x^2(1 - \partial_x^2) - 8x\partial_x$ et $\hat{\mathcal{B}} = 8x + 2x^2\partial_x$. Des expressions similaires sont obtenues de la même manière pour les termes en ξ_2 . En terme de ces opérateurs on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_T^{(T)}(\tau_0, \hat{n}, \vec{k}) &= \left[(1-\mu^2)e^{2i\phi}\xi_1(\vec{k}) + (1-\mu^2)e^{\pm 2i\phi}\xi_2(\vec{k}) \right] \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(T)}(k, \tau) e^{ix\mu} \\ \Delta_{\hat{E}}^{(T)}(\tau_0, \hat{n}, \vec{k}) &= \left[(1-\mu^2)e^{2i\phi}\xi_1(\vec{k}) + (1-\mu^2)e^{\pm 2i\phi}\xi_2(\vec{k}) \right] \hat{\mathcal{E}}(x) \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) e^{ix\mu} \\ \Delta_{\hat{B}}^{(T)}(\tau_0, \hat{n}, \vec{k}) &= \left[(1-\mu^2)e^{2i\phi}\xi_1(\vec{k}) - (1-\mu^2)e^{\pm 2i\phi}\xi_2(\vec{k}) \right] \hat{\mathcal{B}}(x) \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) e^{ix\mu}\end{aligned}$$

Le spectre de puissance de température est alors obtenu facilement dans cette formulation :

$$\begin{aligned}C_{Tl}^{(T)} &= \frac{4\pi}{2l+1} \int k^2 P_h(k) \sum_m \left| \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(T)}(k, \tau) (1-\mu^2) e^{2i\phi} e^{ix\mu} \right|^2 \\ &= 4\pi^2 \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \int k^2 dk P_h(k) \left| \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(T)}(k, \tau) \int_{\perp 1}^1 d\mu P_l^2(\mu) (1-\mu^2) e^{ix\mu} \right|^2 \\ &= (4\pi)^2 \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int k^2 dk P_h(k) \left| \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(T)}(k, \tau) \frac{j_l(x)}{x^2} \right|^2 \quad (\text{A.140})\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $Y_{lm} = [(2l+1)(l-m)!/4\pi(l+m)!]^{1/2} P_l^m(\mu)e^{im\phi}$ et que $P_l^m(\mu) = (-1)^m(1-\mu^2)^{m/2} d_\mu^m P_l(\mu)$. De la même façon on obtient :

$$C_{El}^{(T)} = (4\pi)^2 \int k^2 dk P_h(k) \left| \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) \hat{\mathcal{E}}(x) \frac{j_l(x)}{x^2} \right|^2 \quad (\text{A.141})$$

$$= (4\pi)^2 \int k^2 dk P_h(k) \left(d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) \left[-j_l(x) + j_l''(x) + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right] \right)^2$$

$$C_{Bl}^{(T)} = (4\pi)^2 \int k^2 dk P_h(k) \left| \int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) \hat{\mathcal{B}}(x) \frac{j_l(x)}{x^2} \right|^2 \quad (\text{A.142})$$

$$= (4\pi)^2 \int k^2 dk P_h(k) \left(\int_0^{\tau_0} d\tau S_P^{(T)}(k, \tau) \left[2j_l'(x) + \frac{4j_l(x)}{x} \right] \right)^2$$

En intégrant par parties les termes en j_l' et j_l'' on obtient

$$\Delta_{Tl}^{(T)} = \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \int_0^{\tau_0} d\tau S_T^{(T)}(k, \tau) \frac{j_l(x)}{x^2} \quad (\text{A.143})$$

$$\Delta_{E,Bl}^{(T)} = \int_0^{\tau_0} d\tau S_{E,B}^{(T)}(k, \tau) j_l(x) \quad (\text{A.144})$$

$$S_E^{(T)}(k, \tau) = g \left(\Xi - \frac{\ddot{\Xi}}{k^2} + \frac{2\Xi}{x^2} - \frac{\dot{\Xi}}{kx} \right) - \dot{g} \left(\frac{2\dot{\Xi}}{k^2} + \frac{4\Xi}{kx} \right) - 2\ddot{g} \frac{\Xi}{k^2}$$

$$S_B^{(T)}(k, \tau) = g \left(\frac{4\Xi}{x} + \frac{2\dot{\Xi}}{k} \right) + 2\dot{g} \frac{\Xi}{k}$$

Les spectres de puissance sont alors donnés par :

$$C_{T,E,Bl}^{(T)} = (4\pi)^2 \int k^2 dk P_h(k) \left[\Delta_{T,E,Bl}^{(T)}(k) \right]^2 \quad (\text{A.145})$$

$$C_{Cl}^{(T)} = (4\pi)62 \int k^2 dk P_h(k) \Delta_T^{(T)}(k) \Delta_E^{(T)}(k) \quad (\text{A.146})$$

Annexe B

Dérivées des estimateurs filtrés

En partant de l'équation donnant le spectre de puissance des estimateurs de Wiener

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}_p^i \hat{p}_{p'}^j \rangle &= (\mathbf{W}A)_{pp'}^{im} (\mathbf{W}A)_{p'p''}^{jq} \langle x_p^m x_{p''}^q \rangle + W_{p\nu}^{il} W_{p'\nu'}^{jn} \langle b_\nu^l b_{\nu'}^n \rangle \\ &\equiv Q_{pp'}^{ij} \langle x_p^i x_{p'}^j \rangle\end{aligned}$$

on trouve :

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^T \hat{x}_p^T \rangle}{\partial C_p^T} = (W_{p\nu}^{11} A_{\nu p}^{11})^2 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^T \hat{x}_p^T \rangle}{\partial C_p^{TE}} = 2 \times (W_{p\nu}^{11} A_{\nu p}^{11} W_{p\nu}^{12} A_{\nu p}^{22}) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^T \hat{x}_p^T \rangle}{\partial C_p^E} = (W_{p\nu}^{12} A_{\nu p}^{22})^2 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^E \hat{x}_p^E \rangle}{\partial C_p^T} = (W_{p\nu}^{21} A_{\nu p}^{11})^2 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^E \hat{x}_p^E \rangle}{\partial C_p^{TE}} = 2 \times (W_{p\nu}^{22} A_{\nu p}^{22} W_{p\nu}^{21} A_{\nu p}^{11}) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^E \hat{x}_p^E \rangle}{\partial C_p^E} = (W_{p\nu}^{22} A_{\nu p}^{22})^2 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^T \hat{x}_p^E \rangle}{\partial C_p^T} = (W_{p\nu}^{11} A_{\nu p}^{11} W_{p\nu}^{21} A_{\nu p}^{11}) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^T \hat{x}_p^E \rangle}{\partial C_p^{TE}} = (W_{p\nu}^{11} A_{\nu p}^{11} W_{p\nu}^{22} A_{\nu p}^{22}) + (W_{p\nu}^{12} A_{\nu p}^{22} W_{p\nu}^{21} A_{\nu p}^{11}) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^T \hat{x}_p^E \rangle}{\partial C_p^E} = (W_{p\nu}^{22} A_{\nu p}^{22} W_{p\nu}^{12} A_{\nu p}^{22}) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \langle \hat{x}_p^B \hat{x}_p^B \rangle}{\partial C_p^B} = (W_{p\nu}^{33} A_{\nu p}^{33})^2 \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

Spécifications instrumentales

C.1 Spectres de puissance du bruit

Nous allons montrer ici comment calculer les spectres de puissance du bruit (supposé bruit blanc gaussien) sur les modes de polarisation E, B ainsi que sur la température, à partir des spécifications instrumentales.

Appelons $\sigma_{T,P}$ les écarts type du bruit par pixel pour la température et les paramètres de Stokes Q, U respectivement. Les spectres de puissance du bruit s'expriment simplement en fonction de ces quantités (voir Knox (1995)) :

$$N_{T,P}(l) = \frac{4\pi\sigma_{T,P}}{N_{pix}} = w_{T,P}^{\perp 1} \quad (\text{C.1})$$

D'autre part, comme le montrent Zaldarriaga & Seljak (1997), on a :

$$w_{T,E} = w_P \quad (\text{C.2})$$

Il s'agit maintenant de déterminer ces quantités à partir des tables de spécifications instrumentales. Or ces dernières se contentent de donner les écarts type du bruit par récepteur polarisé et non polarisé. Le calcul de $\sigma_{T,P}$ dépend donc de la configuration instrumentale choisie pour mesurer les paramètres de Stokes. En reprenant les résultats de Couchot et al. (1998), on peut montrer qu'il existe des configurations optimales des détecteurs polarisés où la variance du bruit sur la mesure de T, Q, U sont minimisées, et où d'autre part les bruits sur leur mesure sont décorrélés. Ces configurations consistent à mesurer des directions de polarisation réparties à angle égal sur le ciel. Alors on peut montrer que pour n_T détecteurs non polarisés et n_P détecteurs

polarisés, on a :

$$\sigma_T^2 = \frac{4\sigma_{pol}^2}{n_P} \left(1 + 4 \frac{n_T}{n_P} \left(\frac{\sigma_{pol}}{\sigma_{unpol}} \right)^2 \right)^{\perp 1} \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma_P^2 = \frac{8\sigma_P^2}{n_P} \quad (\text{C.4})$$

où σ_{pol} et σ_{unpol} sont les moyennes harmoniques des variances du bruit par détecteur respectivement polarisés et non polarisés.

FIG. C.1: *Specifications instrumentales de la mission PLANCK. Voir <http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/>*

Planck instrument characteristics# (TBC)

Telescope	1.3+0.2 m. (projected aperture) Gregorian; shared focal plane; system emissivity 1%									
	Viewing direction offset 80-85° from spin axis.									
Center Frequency (GHz)	30	44	70	100	100	143	217	353	545	857
Detector Technology	HEMT radio receiver arrays				Bolometer arrays					
Detector Temperature	~20 K				0.1 K					
Cooling Requirements	H ₂ sorption cooler				H ₂ sorption cooler + 4K J-T stage + Dilution system					
Number of Detectors	4	6	12	34	4	12	12	6	8	6
Angular Resolution (')	33	23	14	<13.1	10.7	8.0	5.5	5.0	5.0	5.0
Optical Transmission	1	1	1	1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
Bandwidth ($\Delta \nu / \nu$)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
$\Delta T / T$ Sensitivity per res. element (12 months, 1σ , 10^{-6} units)*	1.6 (P)	2.4 (P)	3.6 (P)	4.3 (P)	1.7	2.0 (P3.7)	4.3 (P8.9)	14.4	147.0 (P208)	6670.

Table last updated 10/6/1998

* Sensitivity to polarized signal is marked with a P



PLANCK

MAP Instrument Description

Frequencies (GHz)	22	30	40	60	90
Wavelengths (mm)	13.6	10.0	7.5	5.0	3.3
# of channels	4	4	8	8	16
Resolution - spec. (FWHM, degrees)	0.90	0.65	0.53	0.39	0.29
Resolution - current design	0.93	0.68	0.47	0.35	0.21
Sensitivity - spec. (μK, 0.3x0.3 pixel)	35	35	35	35	35
Sensitivity - current design	26	32	27	35	35

FIG. C.2: *Spécifications instrumentales de la mission MAP. Voir <http://map.gsfc.nasa.gov/Default.html>*

Table des figures

1.1	Instrument POLAR	8
2.1	Particule chargée en mouvement: notations	16
2.2	Emission d'une particule ultrarelativiste	19
2.3	Référentiel	20
2.4	Taux de polarisation en absorption	25
2.5	Histogramme des taux de polarisation	28
2.6	Spectre de puissance du paramètre de Stokes Q	29
2.7	Même figure que la figure 2.6, pour le paramètre de Stokes U	30
2.8	Même figure que la figure 2.6, pour la corrélation de T et Q	30
2.9	Spectres de puissance des modes E	33
2.10	Même figure que 2.9 pour les modes B de la polarisation	34
2.11	Même figure que 2.9 pour la corrélation de la température et des modes E	34
3.1	Facteurs de qualité: température	51
3.2	Même figure que la figure 3.1, mais pour la polarisation.	52
3.3	Spectres de puissance polarisés à différentes fréquences	55
3.4	Erreurs relatives sur les spectres de puissance de la température	57
3.5	Erreurs relatives des sur le spectre de puissance des modes E	58
3.6	Comme la figure 3.5 pour la corrélation TE	59
3.7	Puissances de bande des modes E	60
3.8	Comme la figure 3.7 pour la corrélation TE	61
3.9	Erreurs relative sur les spectres E et TE des poussières	62
3.10	Erreurs relatives sur les spectres de puissance du synchrotron	62
3.11	Erreurs relatives sur les spectres de puissance des modes B	65
3.12	Puissances de bande des modes B	66
4.1	Spectres de puissance des modes E	84
4.2	Ellipse de confiance	96
5.1	Effet papillon pour un amas	107

5.2	Histogramme des anisotropies	112
5.3	Spectres de puissance ajustés	115
5.4	Spectres de puissance mesurés dans la simulation	117
5.5	Amplitude crête-à-crête	119
5.6	Amplitude crête-à-crête (coefficients classés)	121
6.1	Fractions intégrées (modèles CDM)	141
6.2	Mêmes quantités que dans la figure 6.1	142
6.3	Fractions intégrées pour différents biais	143
6.4	Fractions instantanées	144
6.5	Fractions instantanées (cas photoionisé)	147
6.6	Fractions intégrées (cas photoionisé)	148
6.7	Températures (instabilités)	151
6.8	Températures (car réchauffé)	152
6.9	Fractions instantanées (cas réchauffé)	153
6.10	Densité d'étoiles (cas réchauffé)	154
6.11	Températures (MIG chaud et photoionisé)	155
6.12	Densité d'étoiles (MIG chaud et photoionisé)	156
6.13	Densité de HI	158
6.14	Densité de HI (modèles retenus)	159
6.15	Densité de HI (MIG chaud)	160
6.16	Taux de formation d'étoiles	162
A.1	Collision Thomson entre un photon et un électron	176
A.2	Collision Thomson dans un référentiel fixé	177
C.1	Spécifications instrumentales de PLANCK	197
C.2	Spécifications instrumentales de MAP	198

Liste des tableaux

1.1	Limites expérimentales sur le degré de polarisation du FCM (95% de Confiance)	7
4.1	Erreurs sur les paramètres cosmologiques pour un modèle CDM	90
4.2	Erreurs sur les paramètres d'un modèle incluant des ondes gravitationnelles, avec ou sans les modes B de polarisation . .	91
4.3	Erreurs sur les paramètres en incluant Ω_ν	92
4.4	Incertitudes pour les modèles BSI	95
4.5	Vecteurs propres de la matrice de Fisher	97
5.1	Coefficients de la formule analytique approchée pour les spectres de puissance de l'effet « papillon » pour trois modèles cosmologiques différents.	113
5.2	Mêmes coefficients que dans la table 5.1, mais pour l'effet SZ cinématique.	114

Bibliographie

- Aghanim N., De Luca A., Bouchet F.R., Gispert R., Puget J.L., 1997, *A&A***325**, 9.
- Aghanim N., Désert F.X., Puget J.L., Gispert R., 1996, *A&A***311**, 1.
- Aitken D.K., Bailey J.A., Roche P.F., Hough J.M., 1985, *MNRAS***215**, 815.
- Aitken D.K., Smith C.H., James S.D., Roche P.F., Hough J.H., 1988, *MNRAS***230**, 629.
- Bagla J.S., Padmanabhan T., Narlikar J.V., 1996, *Comments on Astrophysics* **18**, 275.
- Bahcall N.A., Cen R., Gramann M., 1994, *ApJ***430**, 13.
- Barbosa D., Bartlett J.G., Blanchard A., Oukbir J., 1996, *A&A***314**, 13.
- Basko M.M., Polnarev A.G., 1980, *MNRAS***191**, 207.
- Benett C.L., Banday A.J., Gorski K.M. *et al* ., 1996, *ApJ***464**, L1.
- Bertschinger E., 1995, astro-ph/9506070 .
- Binney J.J., 1977, *ApJ***215**, 48.
- Birkinshaw M., 1989, *Moving Gravitational Lenses*, Springer-Verlag.
- Birkinshaw M., Gull S.F., 1983, *Nature* **302**, 315.
- Blanchard A., Valls-Gabaud D., Mamon G.A., 1992, *A&A***264**, 365.
- Blandford R.D., Kochanek C.S., 1987, *ApJ***321**, 658.
- Bond J.R., 1996, dans : *Cosmology and Large Scale Structure*, éd. Schaeffer R., Silk J., Spiro M., Zinn-Justin J., ELSEVIER, Les Houches, pp. 475–666.

- Bond J.R., Efstathiou G., 1984, ApJ**285**, L45.
- Bond J.R., Efstathiou G., Tegmark M., 1997, MNRAS**291**, L33.
- Bouchet F.R., Benett D.P., Stebbins A., 1988, Nature **335**, 410.
- Bouchet F.R., Gispert R., 1998, in preparation .
- Bouchet F.R., Gispert R., J.-L. P., 1996, dans: *Unveiling the Cosmic Infrared Background*, éd. Dwek E., Baltimore, Maryland, tm. 348 de *AIP Conference Proceedings*, pp. 255–268.
- Boulanger F., Abergel A., Bernard J.P., Burton W.B., Desert F.X., Hartmann D., Lagache G., Puget J.L., 1996, A&A**312**, 256.
- Brouw W.N., Spoelstra T.A.T., 1976, A&AS**26**, 129.
- Bunn E.F., Scott D., White M., 1995, ApJ**441**, L9.
- Burn B.J., 1966, MNRAS**133**, 67.
- Cole S., 1991, ApJ**367**, 45.
- Cooke A.J., Espey B., Carswell R.F., 1997, MNRAS**284**, 552.
- Cortiglioni S., Spoelstra T.A.T., 1995, A&A**302**, 1.
- Couchot F., Delabrouille J., Kaplan J., Revenu B., 1998, submitted to A&A.
- Crittenden R., Bond J.R., Davis R.L., Efstathiou G., Steinhardt P.J., 1993a, Physical Review Letters **71**, 324.
- Crittenden R., Davis R.L., Steinhardt P.J., 1993b, ApJ**417**, L13.
- Crittenden R.G., Coulson D., Turok N., 1995, Phys. Rev. D**52**, r5402.
- Cudlip W., Fruniss I., King K.J., Jennings R.E., 1982, MNRAS**200**, 1169.
- Davies R.D., Watson R.A., Gutierrez C.M., 1996, MNRAS**278**, 925.
- Davis L.J., Greenstein J.L., 1951, ApJ**114**, 206.
- Dekel A., Silk J., 1986, ApJ**303**, 39.
- Draine B.T., 1985, ApJS**57**, 587.
- Draine B.T., Lazarian A., 1998, ApJ**494**, L19.

- Drury L.O., Markiewicz W.J., Voelk H.J., 1989, *A&A***225**, 179.
- Edge A.C., Stewart G.C., 1991, *MNRAS***252**, 414.
- Efstathiou G., 1992, *MNRAS***256**, 43P.
- Einasto J., Einasto M., Frisch P., Gottlober S., Muller V., Saar V., Starobinsky A.A., Tago E., Tucker D., Andernach H., 1997a, *MNRAS***289**, 801.
- Einasto J., Einasto M., Frisch P., Gottlober S., Muller V., Saar V., Starobinsky A.A., Tucker D., 1997b, *MNRAS***289**, 813.
- Einasto J., Einasto M., Gottloeber S., Mueller V., Saar V., Starobinsky A.A., Tago E., Tucker D., Andernach H., Frisch P., 1997c, *Nature***385**, 139.
- Eisenstein D.J., Hu W., Tegmark M., 1998, dans : *Evolution of Large-Scale Structure : From Recombination to Garching*, p. E1.
- Elbaz D., Arnaud M., Vangioni-Flam E., 1995, *A&A***303**, 345.
- Evrard A.E., 1990, *Clusters of galaxies*, Cambridge University Press.
- Fixsen D.J., Dwek E., Mather J.C., Bennett C.L., Shafer R.A., 1998, *astro-ph/9803021* .
- Fukazawa Y., Makishima K., Tamura T., Ezawa H., Xu H., Ikebe Y., Kikuchi K., Ohashi T., 1998, *PASJ***50**, 187.
- Fukugita M., Hogan C.J., Peebles P.J.M., 1997, *astro-ph/9712020* .
- Gamov G., 1948, *Nature* **162**, 680.
- Gautier T. N. I., Boulanger F., Perault M., Puget J.L., 1992, *AJ***103**, 1313.
- Gaztanaga E., Baugh C.M., 1998, *MNRAS***294**, 229.
- Giallongo E., D'Odorico S., Fontana A., McMahon R.G., Savaglio S., Cristiani S., Molaro P., Trevese D., 1994, *ApJ***425**, L1.
- Gibson B.K., Loewenstein M., Mushotzky R.F., 1997, *MNRAS***290**, 623.
- Giovanelli R., Haynes M.P., Wegner G., Da Costa L.N., Freudling W., Salzer J.J., 1996, *ApJ***464**, 99.
- Goodman A.A., Bastien P., Menard F., Myers P.C., 1990, *ApJ***359**, 363.
- Gorski K.M., 1994, *ApJ***430**, L85.

- Greenberg J.M., 1978, dans : *Cosmic Dust*, éd. McDonnell J.A.M., Wiley, p. 187.
- Gross M.A.K., Somerville R.S., Primack J.R., Holtzman J., Klypin A., 1998, astro-ph/9712142, accepted in MNRAS.
- Guiderdoni B., Bouchet F.R., Puget J.L., Lagache G., Hivon E., 1997, *Nature* **390**, 257.
- Guiderdoni B., Hivon E., Bouchet F.R., Maffei B., 1998, *MNRAS***295**, 877.
- Gunn J.E., Peterson B., 1965, *ApJ***142**, 1633.
- Haardt F., Madau P., 1996, *ApJ***461**, 20.
- Hall J.S., 1949, *Science* **109**, 166.
- Harari D., Hayward J.D., Matias Z., 1997, *Phys. Rev. D***55**, 1841.
- Haslam C.G.T., Stoffel H., Salter C.J., Wilson W.E., 1982, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **47**, 1.
- Hildebrand R.H., 1988, *QJRAS* **29**, 327.
- Hildebrand R.H., Dotson J.L., Dowell C.D., Platt S.R., Schleuning D., Davidson J.A., Novak G., 1995, dans : *From Gas to Stars to Dust, ASP Conference Series #73*, pp. 97–104.
- Hildebrand R.H., Dragovan M., 1995, *ApJ***450**, 663.
- Hildebrand R.H., Dragovan M., Novak G., 1984, *ApJ***284**, L51.
- Hiltner W.A., 1949, *Science* **109**, 165.
- Hobson M.P., Jones A.W., Lasenby A.N., Bouchet F.R., 1998, accepted for publication in MNRAS.
- Hobson M.P., Magueijo J., 1996, *MNRAS***283**, 1133.
- Hu W., Scott D., Sugiyama N., White M., 1995, *Phys. Rev. D***52**, 5498.
- Hu W., Sugiyama N., 1995, *Phys. Rev. D***51**, 2599.
- Hu W., White M., 1996, *ApJ***471**, 30.
- Hu W., White M., 1997a, *New Astronomy* **2**, 323.

- Hu W., White M., 1997b, dans : *Microwave Background Anisotropies*, eds F.R. Bouchet, R. Gispert, B. Guiderdoni, & J. Tran Thanh Van, Editions Frontières, p. 333, p. 333.
- Hudson M.J., 1994, MNRAS**266**, 468.
- Ishimaru Y., Arimoto N., 1997, PASJ**49**, 1.
- Jackson J.D., 1975, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York.
- Jones C., Forman W., 1992, *Clusters and Superclusters of Galaxies*, Kluwer Academic Publishers.
- Kaiser N., 1982, MNRAS**198**, 1033.
- Kaiser N., 1983, MNRAS**202**, 1169.
- Kaiser N., Stebbins A., 1984, Nature **310**, 391.
- Kamionkowski M., Kosowsky A., 1998, Phys. Rev. D**57**, 685.
- Kamionkowski M., Kosowsky A., Albert S., 1997a, Phys. Rev. D**78**, 2058.
- Kamionkowski M., Kosowsky A., Albert S., 1997b, Phys. Rev. D**55**, 7368.
- Keating B., Timbie P., Polnarev A., Steinberger J., 1998, ApJ**495**, 580+.
- Knox L.E., 1995, *DETERMINATION OF INFLATIONARY OBSERVABLES BY COSMIC MICROWAVE BACKGROUND EXPERIMENTS.*, Thèse de doctorat, THE UNIVERSITY OF CHICAGO.
- Kofman L.A., Gnedin N.Y., Bahcall N.A., 1993, ApJ**413**, 1.
- Kosowsky A., Loeb A., 1996, ApJ**469**, 1+.
- Lacey C., Cole S., 1993, MNRAS**262**, 627.
- Lahav O., Rees M.J., Lilje P.B., Primack J.R., 1991, MNRAS**251**, 128.
- Larson R.B., 1974, MNRAS**169**, 229.
- Lazarian A., Draine B.T., 1997, ApJ**487**, 248.
- Lesgourgues J., Polarski D., Starobinskii A.A., 1998a, accepted in MNRAS.
- Lesgourgues J., Polarski D., Starobinskii A.A., 1998b, submitted to MNRAS.

- Lilly S.J., Tresse L., Hammer F., Crampton D., Le Fevre O., 1995, *ApJ***455**, 108.
- Lineweaver C.H., 1998, submitted to *ApJ*.
- Lu L., Sargent W.L.W., Barlow T.A., 1997, *ApJ***484**, 131+.
- Malkov M.A., Voelk H.J., 1995, *A&A***300**, 605.
- Manchester R.N., 1974, *ApJ***188**, 637.
- Martinez-González E., Sanz J.L., Silk J., 1990, *ApJ***355**, L5.
- Mathiesen B., Evrard A.E., 1998, *MNRAS***295**, 769.
- Moscardini L., Branchini E., Brunozzi P.T., Borgani S., Plionis M., Coles P., 1996, *MNRAS***282**, 384.
- Mushotzky R., Loewenstein M., Arnaud K.A., Tamura T., Fukazawa Y., Matsushita K., Kikuchi K., Hatsukade I., 1996, *ApJ***466**, 686.
- Myers P.C., Goodman A.A., 1991, *ApJ***373**, 509.
- Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., 1996, *ApJ***462**, 563.
- Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., 1997, *ApJ***490**, 493.
- Navarro J.F., Steinmetz M., 1997, *ApJ***478**, 13.
- Ng K.L., Ng K.W., 1996, *ApJ***473**, 573+.
- Nottale L., 1984, *MNRAS***206**, 713.
- Ostriker J.P., Steinhardt P.J., 1995, *Nature***377**, 600.
- Peacock J.A., Heavens A.F., 1990, *MNRAS***243**, 133.
- Peebles P.J.E., 1968, *ApJ***153**, 1.
- Peebles P.J.E., 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press.
- Peebles P.J.E., 1993, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press.
- Penzias A.A., Wilson R.W., 1965, *ApJ***142**, 419.
- Pfenniger D., Combes F., 1994, *A&A***285**, 94.

- Polnarev A.G., 1985, *AZh***62**, 1041.
- Polnarev A.G., 1986, *Soviet Astronomy* **29**, 607+.
- Prantzos N., Casse M., 1994, *ApJS***92**, 575.
- Press W., Schechter P., 1974, *ApJ***187**, 425.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Flannery B.P., Vetterling W.T., 1986, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Prunet S., Sethi S.K., Bouchet F.R., Miville-Deschênes M.A., 1998, submitted to *A&A*.
- Puget J.L., Abergel A., Bernard J.P., Boulanger F., Burton W.B., Désert F.X., Hartmann D., 1996, *A&A***308**, L5.
- Rees M.J., 1968, *ApJ***153**, L1.
- Rees M.J., 1984, dans : *Clusters and groups of galaxies*, éd. Mardirossian F., Giuricin G., Mezetti M., Reidel, Dordrecht.
- Rees M.J., Ostriker J.P., 1977, *MNRAS***179**, 451.
- Rees M.J., Sciama D.W., 1968, *Nature* **511**, 611.
- Reich P., Reich W., 1986, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **63**, 205.
- Reich P., Reich W., 1988, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **74**, 7.
- Renzini A., 1997, *ApJ***488**, 35.
- Renzini A., 1998, astro-ph/9801209 .
- Renzini A., Ciotti L., D'Ercole A., Pellegrini S., 1993, *ApJ***419**, 52.
- Retzlaff J., Borgani S., Gottlöber S., Müller V., 1997, submitted to *MNRAS*.
- Roberge W.G., 1996, dans : *Polarimetry of the interstellar medium*, éd. Roberge W. G. & Whittet D.C.B., San Francisco :ASP, tm. 97 de *ASP Conf. Proc*, p. 401.
- Rybicki G.B., Press W.H., 1992, *ApJ***398**, 169.
- Sachs R.K., Wolfe A.M., 1967, *ApJ***147**, 73.

- Seljak U., 1997, *ApJ***482**, 6+.
- Seljak U., Zaldarriaga M., 1996, *ApJ***469**, 437+.
- Seljak U., Zaldarriaga M., 1997, *Phys. Rev. Lett.***78**, 2054.
- Silk J., 1968, *ApJ***151**, 459.
- Silk J., 1977, *ApJ***211**, 638.
- Smoot G.F., Bennett C.L., Kogut A., Wright E.L., Aymon J., Boggess N.W., Cheng E.S., De Amici G., Gulkis S., Hauser M.G., Hinshaw G., Jackson P.D., Janssen M., Kaita E., Kelsall T., Keegstra P., Lineweaver C., Loewenstein K., Lubin P., Mather J., Meyer S.S., Moseley S.H., Murdock T., Rokke L., Silverberg R.F., Tenorio L., Weiss R., Wilkinson D.T., 1992, *ApJ***396**, L1.
- Starobinskii A.A., 1992, *Pis ma Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki* **55**, 477.
- Stompor R., Gorski K.M., Banday A.J., 1995, *MNRAS***277**, 1225.
- Sunyaev R.A., Zeldovich Y.B., 1972, *A&A***20**, 189.
- Sunyaev R.A., Zeldovich Y.B., 1980, *MNRAS***190**, 413.
- Tegmark M., Bunn E.F., 1995, *ApJ***455**, 1.
- Tegmark M., Efstathiou G., 1996, *MNRAS***281**, 1297.
- Tegmark M., Silk J., Evrard A.E., 1993, *ApJ***417**, 54.
- Tegmark M., Silk J., Rees M.J., Blanchard A., Abel T., Palla F., 1997a, *ApJ***474**, 1.
- Tegmark M., Taylor A.N., Heavens A.F., 1997b, *ApJ***480**, 22.
- Thorne K.S., 1980, *Review of Modern Physics* **52**, 299.
- Toffolatti L., Argueso Gomez F., De Zotti G., Mazzei P., Franceschini A., Danese L., Burigana C., 1998, *MNRAS***297**, 117.
- Tuluie R., Laguna P., 1995, *ApJ***445**, L73.
- Tuluie R., Laguna P., Anninos P., 1996, *ApJ***463**, 15.
- Viana P.T.P., Liddle A.R., 1996, *MNRAS***281**, 323.

- Villasenor J.D., Belzer B., Liao J., 1995, *IEEE Trans. Im. Proc.* **8**, 1057.
- Vishniac E.T., 1987, *ApJ***322**, 597.
- Vittorio N., Silk J., 1984, *ApJ***285**, L39.
- White M., Hu W., 1997, dans : *Microwave Background Anisotropies*, eds. F.R. Bouchet, R. Gispert, B. Guiderdoni, & J. Tran Thanh Van, Editions *Frontieres*, p. 339, p. 339.
- White S.D.M., Efstathiou G., Frenk C.S., 1993, *MNRAS***262**, 1023.
- White S.D.M., Frenk C.S., 1991, *ApJ***379**, 52.
- White S.D.M., Rees M.J., 1978, *MNRAS***183**, 341.
- Wieringa M.H., De Bruyn A.G., Jansen D., Brouw W.N., Katgert P., 1993, *A&A***268**, 215.
- Wright E.L., 1998, *ApJ***496**, 1.
- Zaldarriaga M., Seljak U., 1997, *Phys. Rev. D***55**, 1830.
- Zaldarriaga M., Seljak U., 1998, astro-ph/9803150 .
- Zaldarriaga M., Seljak U., Bertschinger E., 1998, *ApJ***494**, 491+.
- Zaldarriaga M., Spergel D.N., Seljak U., 1997, *ApJ***488**, 1+.
- Zaroubi S., Hoffman Y., Fisher K.B., Lahav O., 1995, *ApJ***449**, 446.
- Zucca E., Zamorani G., Vettolani G., Cappi A., Merighi R., Mignoli M., Stirpe G.M., Macgillivray H., Collins C., Balkowski C., Cayatte V., Maurogordato S., Proust D., Chincarini G., Guzzo L., Maccagni D., Scaramella R., Blanchard A., Ramella M., 1997, *A&A***326**, 477.

