La localisation de la déformation dans les milieux granulaires

Jacques Desrues

▶ **To cite this version:**

Jacques Desrues. La localisation de la déformation dans les milieux granulaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1984. Français. NNT : . tel-00008343

HAL Id: tel-00008343
https://theses.hal.science/tel-00008343

Submitted on 3 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES

par

Jacques DESRUES

Ingénieur INSA

SUJET

LA LOCALISATION DE LA DÉFORMATION DANS LES MATÉRIAUX GRANULAIRES

Soutenue le 29 Juin 1984 devant la Commission d'Examen

M. J.P. GERMAIN	Président
M. J.L. AURIAULT M. R. CHAMBON M. J. SALENÇON M. I. VARDOULAKIS	Rapporteurs
M. F. DARVE M. M.P. LUONG	Examinateurs

GRENOBLE

THESE de DOCTORAT D'ÉTAT

Titre de l'ouvrage :

LA LOCALISATION DE LA DEFORMATION DANS LES MATÉRIAUX GRANULAIRES

Nom de l'auteur : Jacques DESRUES

Établissement : Institut de Mécanique de Grenoble

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une étude expérimentale et théorique de la localisation dans les matériaux granulaires (sols).

La première partie se présente comme une revue des méthodes et théories de la mécanique des sols (ou plus généralement, des solides) qui ont trait, de près ou de loin, à la rupture localisée. Les différentes approches sont examinées sous l'angle du rôle joué par la notion de déformation localisée. Les concepts de base de l'analyse de bifurcation par localisation sont exposés, et les principaux travaux discutés.

La seconde partie rend compte d'une étude expérimentale réalisée à l'essai biaxial, avec visualisation quantitative de l'apparition et du développement de la localisation au cours de l'essai. La méthode stéréophotogrammétrique est exposée en détail. Les résultats discutés concernent la naissance de la localisation, la façon dont elle se propage, les variations de volume au sein de la bande de cisaillement, le rôle des imperfections de l'essai.

La partie théorique concerne l'analyse de bifurcation par localisation. Après avoir rapproché quelques études concernant le matériau élastoplastique non standard, et discuté le rôle de l'angle de dilatance dans ces prévisions, on s'intéresse à l'application du cadre classique aux lois incrémentalement non linéaires ; la nécessité d'une extension de ce cadre est avancée, et la mise en œuvre du cadre élargi sur une loi heuristique permet d'illustrer la pertinence de cette approche générale.

MOTS-CLÉS

Localisation de la déformation ; Bandes de cisaillement ; Matériaux granulaires ; Rupture ; Essai biaxial ; Déformation plane ; Stéréophotogrammétrie ; Lois de comportement ; Non linéarité incrémentale ; Théorie de la bifurcation ; Mécanique des sols.

A Sylvie, ma femme

à François et Tristan, mes fils

et à la mémoire de Louise,

ma fille.

Avant Propos

L'environnement scientifique essentiel sur lequel a germé la recherche dont j'expose ici les fruits a été constitué par mes cinq collègues de l'équipe MASTEC : Marc Boulon, René Chambon, Félix Darve, Etienne Flavigny et Pierre Foray. Riche, diverse et en perpétuelle évolution, cette équipe m'a offert chaque jour la palette de ses compétences et de ses tempéraments.

Au sein de cet environnement, c'est à René Chambon que ce travail doit le plus, pour des années de collaboration sur le plan théorique. Plusieurs chapitres de ce mémoire sont les fruits de cette collaboration dont c'est peu dire qu'elle me fut précieuse.

Félix Darve a été l'initiateur des travaux sur la localisation à Grenoble, et dans l'équipe ; il a été au premier rang pour la définition de sujet de recherche. Le soutien de son allant et de son inébranlable optimisme ne m'ont jamais fait défaut.

Benjamin de cette équipe, je soutiens ma thèse avant d'autres de ses membres. C'est que talonné par les exigences du statut CNRS, j'y ai consacré l'essentiel de mon temps pendant que d'autres assumaient, au détriment de leur recherche propre, une part plus grande des tâches collectives et contractuelles. Qu'on me permette ici d'en faire état, et de les en remercier.

En cette dernière phase de mon travail, celle du mémoire et de la soutenance, deux professeurs extérieurs au laboratoire Messieurs Salençon et Vardoulakis, m'ont fait l'honneur et le plaisir d'accepter d'en être les rapporteurs extérieurs. Leurs remarques ont été précieuses et m'ont permis de reprendre quelques unes des imperfections de ce mémoire. Monsieur Luong, ayant assuré la mission de parrain que lui avait confié le CNRS à mon égard, a eu connaissance de mes travaux dès l'origine ; il m'a toujours prodigué ses conseils judicieux et ses encouragements bienveillants. Monsieur Auriault, mon directeur de recherche, n'a jamais manqué à me manifester sa confiance dans l'avancée de mes recherches, précieux soutien dans la traversée du désert que constitue souvent le montage d'une expérience nouvelle. Monsieur Germain a accepté à la fois d'assurer la présidence du jury, et d'apporter le point de vue d'un scientifique non directement impliqué dans la spécialité en cause.

En dehors de mes collègues de l'équipe MASTEC, et des membres de ce jury, bien d'autres personnes ont contribué à ce travail. Je ne peux malheureusement pas les citer toutes, et c'est bien ici que se manifeste l'échec inévitable de la tentative de donner à chacun des nombreux acteurs d'une si longue entreprise la place qui lui revient. Je ne terminerai pas cependant sans remercier quelques uns d'entre ces acteurs : Jack Lanier, pour les expériences faites ensemble sur le "tri-tri", et nos nombreuses discussions ; le Professeur Sawczuk, disparu brutalement voici quelques semaines à Grenoble, qui m'a permis d'effectuer quelques expériences prometteuses de tomodensitométrie à Marseille, avec le concours de M. Cagnasso ; Messieurs Gaveriaux et Weloff, du STU de Paris, pour m'avoir permis d'utiliser le stéréocomparateur Traster de leur service, et m'avoir initié à son maniement ; les jeunes chercheurs avec qui j'ai collaboré, dont notamment Bertrand Duthilleul, avec qui j'ai conçu la chaîne de traitement stéréophotogrammétrique ; et enfin les personnels du laboratoire, depuis ceux avec qui a été conçue et réalisée la machine d'essai, jusqu'à ceux qui ont développé mes plaques photographiques, sans oublier celles qui se sont occupé des factures et des courriers.

S O M M A I R E

INTRODUCTION 7

PREMIERE PARTIE : POINTS DE VUE SUR LA LOCALISATION DE LA DEFORMATION 13

CHAPITRE I - Les surfaces de rupture et le calcul des ouvrages. 15

I.1 - Le coin de Coulomb 16

I.2 - Les caractéristiques statiques et cinématiques 17

I.3 - Les calculs à la rupture avec surface spécifiée 21

I.4 - Le calcul à la rupture 22

I.5 - Les méthodes numériques avec surface de rupture 24

CHAPITRE II - Localisation et modélisation du milieu granulaire 26

II.1 - L'orientation des bandes de cisaillement..... 28

II.2 - Le débat sur la coincidence des directions principales 29

II.3 - Les modèles : quelle coincidence ? 30

CHAPITRE III - La localisation vue comme phénomène de bifurcation 34

III.1 - Généralités 34

III.2 - La propagation des ondes d'accélération dans les solides 37

III.3 - La localisation en bande de cisaillement : les équations de base 41

III.4 - La théorie de la bifurcation de Hill 44

III.5 - Principaux travaux sur la bifurcation dans les sols 47

DEUXIEME PARTIE : LA LOCALISATION A L'ESSAI BIAXIAL : ETUDE EXPERIMENTALE..... 55

CHAPITRE IV - L'essai biaxial 58

IV.1 - Généralités 58

IV.2 - Conception de l'appareil 61

2.1 - Le dispositif de D.P. 61

2.2 - Les têtes 65

2.3 - La lubrification des faces de D.P..... 68

IV.3 - L'échantillon 71

3.1 - Le matériau 71

3.2 - La préparation de l'échantillon 71

3.3 - Adhésion sable-membrane 74

IV.4 - Techniques de mesure (autres que stéréophotogrammétrie) 75

4.1 - La planimétrie 75

4.2 - La gammamétrie 75

4.3 - La tomodensitométrie 76

CHAPITRE V - La méthode stéréophotogrammétrique 78

CHAPITRE VI - Synthèse expérimentale 105

VI.1 - La base expérimentale 105

VI.2 - Un exemple 109

VI.3 - Dans quel cas la localisation apparaît-elle ? 120

VI.4 - Initiation et propagation 158

4.1 - Localisation et pic 158

4.2 - Naissance et développement 160

4.3 - Réflexion des bandes de cisaillement 162

VI.5 - Cinématique de la bande de cisaillement 165

5.1 - Les lignes d'extension nulle 165

5.2 - Déformation localisée 168

5.3 - Trois remarques 169

VI.6 - Direction des bandes de cisaillement 173

VI.7 - Variations de volume 177

7.1 - Mesures globales 177

7.2 - Mesures locales 178

7.3 - Evolution des variations de volume 180

7.4 - Densités en fin d'essai 183

VI.8 - L'influence des perturbations 189

VI.9 - Comportement après pic 190

VI.10 - Largeur des bandes de cisaillement 194

VI.11 - Observations microstructurelles 197

VI.12 - Conclusion 200

TROISIEME PARTIE : ANALYSE DE LA LOCALISATION COMME PHENOMENE DE BIFURCATION 207

CHAPITRE VII - Bifurcation par localisation de la déformation : prévisions de l'élastoplasticité non standard à un potentiel 209

VII.1 - Le matériau rigide plastique 209

VII.2 - Le matériau élastoplastique 211

VII.3 - Conclusion 219

CHAPITRE VIII - L'analyse de bifurcation par localisation appliquée aux lois incrémentalement non linéaires 221

VIII.1 - Introduction 223

VIII.2 - Rappels sur la théorie classique 224

VIII.3 - Introduction de la loi rhéologique 225

3.1 - Loi linéaire 225

3.2 - Lois "multi linéaires " 226

3.3 - Lois non "multi-linéaires" 227

VIII.4 - Etude synthétique du problème 228

VIII.5 - Conclusion 229

CHAPITRE IX - Application du critère élargi à une loi non linéaire heuristique 232

IX.1 - Introduction 232

IX.2 - La loi 233

2.1 - Formulation 233

2.2 - Non linéarité de la loi 235

2.3 - La loi tangente 236

IX.3 - Analyse de bifurcation par localisation 239

3.1 - Etablissement de l'équation générale 239

3.2 - Discussion de l'équation générale 243

3.3 - La solution tangente 245

3.4 - La solution générale 247

3.5 - Bifurcation tangente ou bifurcation générale ? .. 252

3.6 - Comparaison avec l'analyse du Hill et Hutchinson 253

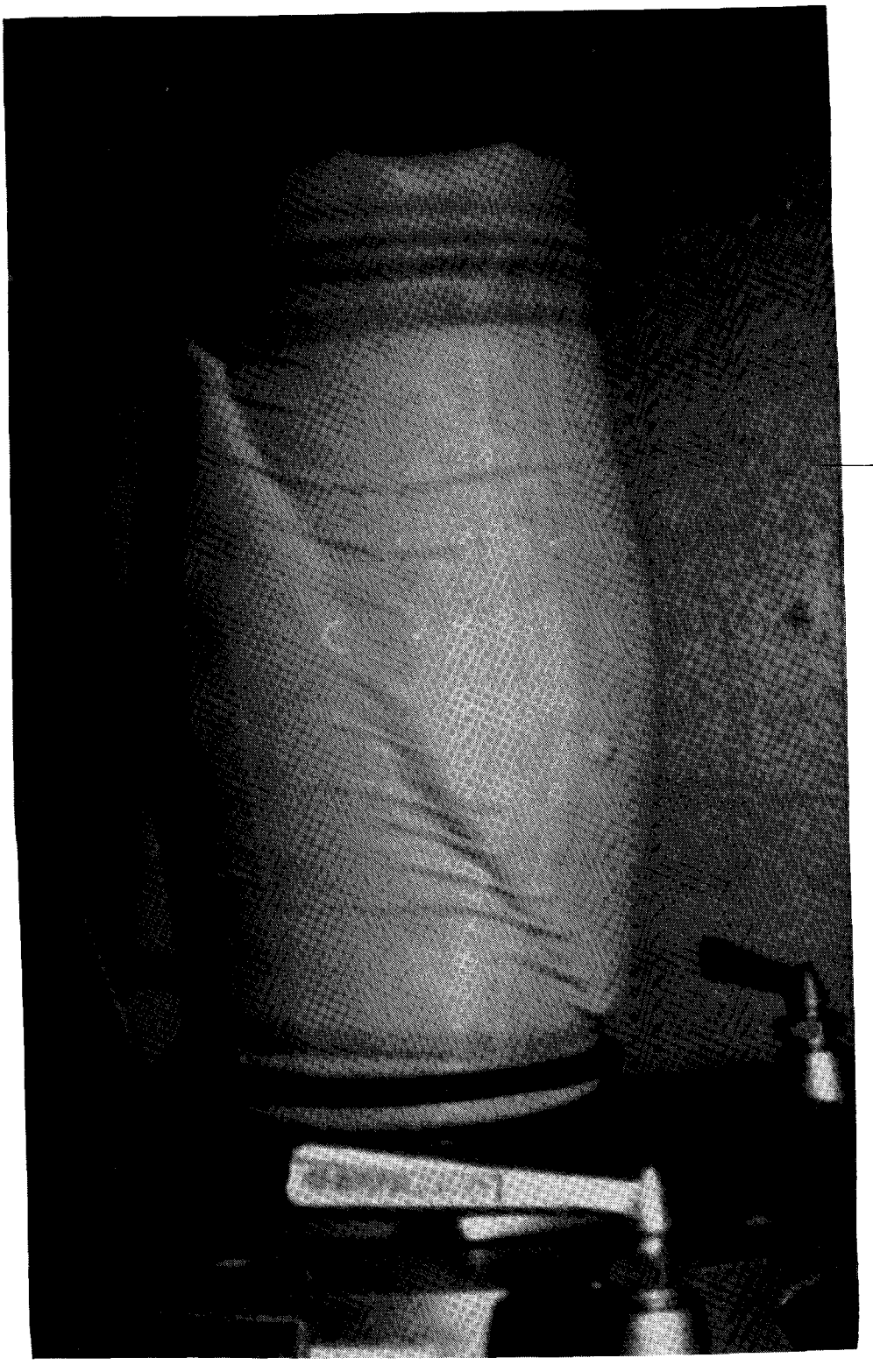
3.7 - Influence des termes corrotationnels 255

IX.4 - Conclusion 257

CONCLUSION GENERALE 259

ANNEXE 263

REFERENCES 277



Déformation localisée

à l'essai triaxial axisymétrique :

un exemple typique.

INTRODUCTION

La localisation de la déformation est un phénomène à la fois banal et fascinant.

Banal, parce qu'il apparaît dans un large éventail de situations et de matériaux. Il est bien connu dans les matériaux qui relèvent de la mécanique des sols (sables, argiles), ainsi que dans des matériaux granulaires artificiels, comme les poudres, ou naturels, comme les céréales ensilées. C'est aussi un phénomène majeur du comportement des roches, et de celui des métaux, pour lesquels il constitue un domaine de recherche extrêmement actif depuis une dizaine d'années.

Fascinant, il l'est en ceci que la localisation fait apparaître brutalement, dans un champ de déformation homogène ou à hétérogénéité douce, une structure géométriquement très typée, connue sous le nom de **bande de cisaillement**, et que cette apparition prend dans un certain nombre de cas une dimension catastrophique par incapacité soudaine de la structure considérée à soutenir le chargement appliqué lors des étapes antérieures. Par ailleurs, l'endroit où s'initialise la localisation, s'il peut parfois être prévu en

raison de discontinuités évidentes des conditions aux limites du problème envisagé, apparaît souvent comme a priori aléatoire, et seule une analyse très fine des hétérogénéités (de structure, de sollicitation) peut alors permettre de discerner quelle petite cause a entraîné la matérialisation du phénomène ici plutôt que là. On assiste à la naissance d'une forme, dotée de certaines caractéristiques typiques, non spécifiques du matériau, et l'on s'interroge sur les mécanismes sous-jacents.

Les relations entre les équations qui régissent la modélisation d'un processus physique et les formes qui naissent au cours de ce processus ont fait l'objet de travaux connus de René Thom (Stabilité structurelle et morphogénèse <92>); cette référence constitue plus, pour le travail présenté ici, un cadre de pensée qu'un outil , car la théorie des catastrophes restreinte est fondée sur l'existence d'un potentiel régissant le système étudié, condition que ne vérifient généralement pas les problémes impliquant un matériau granulaire.

Une application de cette théorie à un domaine relevant de la mécanique des solides a bien été faite par Thompson et Hunt <95> dans le but d'établir une classification comparative des types de "catastrophes" répertoriées respectivement par Thom et par eux-mêmes dans leur ouvrage intitulé "A General Theory of Elastic Stability" <94>, mais cette application concerne exclusivement des problèmes élastiques, pour lesquels la condition d'existence d'un potentiel se trouve vérifiée par définition.

Revenons donc à la localisation de la déformation et tout d'abord définissons précisement ce que l'on entend par là.

Si l'on suppose un solide soumis à une certaine histoire de chargement, la réponse banale de ce solide consiste a priori en un champ de déformation diffuse dans tout le solide : c'est le mode global. Alternativement, il peut

se produire, dans certaines conditions, qu'à ce mode fondamental se substitue, ou se superpose, un mode différent, qui met en jeu une zone étroite de déformation intense (la bande de cisaillement), associée à des blocs sensiblement rigides : c'est le mode localisé.

Le champ d'action du mécanicien des sols est fertile en ce dernier type de phénomène :

Sur le terrain, la rupture des pentes naturelles, ou celles des ouvrages construits de main d'homme, met fréquemment en évidence un glissement en bloc, de zones plus ou moins vastes, par le jeu de ce qu'on appelle dans ce contexte des "surfaces de rupture".

Au laboratoire, c'est au cours des essais élémentaires, voulus homogènes en vue d'établir les relations constitutives du matériau étudié, que surgit la localisation, sous la forme de "plans de rupture", qui viennent traverser l'échantillon testé suivant une certaine inclinaison par rapport aux axes de l'essai (voir la photo en page de garde). Cette situation laisse l'expérimentateur dans la perplexité quant à l'interprétation de ses résultats en terme de caractéristiques élémentaires; elle a induit un nombre important de travaux de recherche qui visaient à éliminer cette localisation, au prix de raffinements des conditions d'essai. Et, de fait, il est apparu qu'au triaxial axisymétrique, l'élimination des plus grosses causes de perturbation de l'essai (principalement le frettage dû au frottement du matériau sur les têtes) permettaient d'obtenir des champs de déformation apparemment plus homogènes, jusqu'à des déformations importantes, sans toutefois permettre la suppression complète du phénomème de localisation.

Dans le cadre de la conception des ouvrages de sol, l'évidence du phénomène de rupture localisée a, depuis longtemps, conduit les concepteurs à développer des méthodes de calcul qui prennent en compte, de façon empirique, ce mode de rupture, en étudiant la stabilité par rapport à des surfaces de

rupture spécifiées à l'avance. Ce sont les méthodes de cercles de glissement, les méthodes des tranches, etc, encore appréciées dans la pratique de bureau d'étude.

Les nouveaux outils de conception que constituent les méthodes numériques ont permis une avancée considérable en donnant les moyens de résoudre les problèmes aux limites représentatifs de cas concrets avec des lois de comportement plus conformes à la réalité des sols que ne le sont l'élasticité linéaire ou la plasticité parfaite. Toutefois, ces méthodes, au moins jusqu'à présent, ont le défaut de ne pas faire apparaître de localisation de la déformation, pourtant reconnue comme un phénomène majeur. Des progrès signicatifs dans ce domaine peuvent cependant être attendus, soit par prise en compte des grandes déformations (c'est à dire des non-linéarités qui résultent des grandes déformations) dans l'analyse théorique du problème, soit par l'établissement d'algorithmes qui permettent le développement de discontinuités cinématiques (glissements relatifs) non pré-spécifiés au sein du domaine. Ces deux voies sont explorées dans l'équipe MASTEC à laquelle j'appartiens, respectivement par R. Chambon et M. Boulon; la seconde approche a fait l'objet d'une thèse récente présentée par B. Duthilleul <43>.

La théorie de la bifurcation, apparue dans la dernière décennie, a ouvert une nouvelle perspective de prise en compte théorique de la localisation de la déformation. En peu d'années, elle est devenue un champ de recherche intensif, qui réunit des chercheurs intéréssés par toutes sortes de matériaux, des sols aux métaux.

Dans cette théorie, la localisation de la déformation est vue comme une perte d'unicité de la solution du problème aux limites posé. Dans le cas particulier du problème élémentaire, la loi de comportement intervient de façon cruciale dans la condition de perte d'unicité. L'étude de localisation est, de ce fait, vue de plus en plus comme un élément de test pour les lois,

et même pourrait devenir un élément de calage de celles-ci, c'est à dire intervenir au niveau même de leur conception et de leur ajustement. Les premières études de bifurcation entreprises en France dans le domaine des sols l'ont été par Félix Darve, chercheur de l'équipe MASTEC, dans le cadre de sa thèse d'état, en 1978 <29>.

Les motivations de l'étude présentée dans ces pages peuvent être regroupées en trois points, qui sont les suivants :

- l'importance pratique de la localisation, sur laquelle il est inutile de revenir.

- l'interrogation fondamentale que suscite le phénomène, centrée autour de la phénomènologie et résumée par la question : Pourquoi ?

- l'interaction étroite avec l'étude des lois de comportement, et ceci à deux niveaux. Le premier concerne le problème fondamental posé au concepteur de lois par le fait que les essais élémentaires sont susceptibles d'être en réalité hétérogènes : jusqu'à quand peut-on se baser sur un essai donné ? Le second offre peut-être une solution partielle au problème en question, par la prise en compte dans l'élaboration des lois des aspects de comportement identifiés comme inducteurs de la localisation.

Les moyens mis en oeuvre dans le cadre de ce travail, pour tenter d'apporter des éléments de réponse aux questions soulevées ci-dessus, sont de deux ordres: expérimental et théorique.

Sur le plan expérimental, on s'est attaché à réaliser une visualisation quantitative de la localisation naissante, de façon à en observer les stades précoces puis le développement progressif, à mettre en évidence le rôle des imperfections, et à dégager les phénomènes physiques majeurs qui s'y déroulent. Cette visualisation quantitative fait appel à la méthode stéréophotogrammétrique de faux relief, que nous avons mise en oeuvre et développée pour l'occasion, de façon à permettre la mesure des champs de

déformation incrémentale au cours de l'essai.

Sur le plan théorique, nous avons travaillé dans le cadre de l'analyse de la bifurcation par localisation en bande de cisaillement; la réflexion menée aboutit à suggérer une extension du cadre théorique actuel pour son adaptation à l'étude de lois incrémentalement non linéaires, dont des travaux récents (Chambon <18>, <19>, <20>, Darve <31>, <32>) ont montré qu'elles permettaient une description améliorée du comportement des sols. Cette extension est mise en oeuvre sur une loi heuristique, et le résultat montre l'intérêt de la démarche proposée.

Le plan de ce mémoire s'organise en trois parties, dont la première donne un aperçu des points de vue historiques et actuels sur la localisation de la déformation . La seconde concerne l'expérience, depuis la méthode de visualisation jusqu'à la synthèse phénoménologique. La troisième, enfin, expose les éléments théoriques de ce travail, qui relèvent de la théorie de la bifurcation.

Première Partie

POINTS DE VUE SUR LA LOCALISATION DE LA DEFORMATION

Chapitre I

LES SURFACES DE RUPTURE ET LE CALCUL DES OUVRAGES

Le point de vue le plus ancien sur la localisation de la déformation est celui du praticien des ouvrages. On a construit des digues, des soutènements, creusé des tranchées et fondé des bâtiments bien avant d'avoir inventé l'appareil triaxial ou la boîte de cisaillement. Des siècles se sont écoulés, au cours desquels la conception des ouvrages a relevé essentiellement de l'empirisme, dont l'efficacité est attestée par la pérennité d'un certain nombre d'oeuvres du passé. Toutefois le souci d'une rationnalisation et d'une économie de moyens a conduit à la recherche de méthodes de conception fondées sur le calcul.

Le propos de ce bref chapitre est d'évoquer quelques-unes des méthodes de calcul d'ouvrage à la rupture, pour discuter la nature et le rôle des lignes, plans, surfaces particulières qu'elles introduisent et qui évoquent, à juste titre ou non, les phénomènes de localisation.

chapitre I

I-1. Le coin de coulomb.

Coulomb , dans son célèbre essai de 1773 intitulé "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture" <23>, s'intéresse au problème de la poussée d'un massif de sol sur un mur de soutènement. La cinématique de rupture qu'il envisage consiste dans le glissement d'un prisme triangulaire rectangle rigide sur son hypoténuse. Le matériau est caractérisé uniquement par sa résistance ultime, c'est à dire par ses caractéristiques de cohésion et de frottement. L'équilibre statique du prisme sous l'action de son poids propre, de la résultante des forces de cohésion et de frottement sur l'hypoténuse, et de la force supposée horizontale exercée par le mur de soutènement sur la paroi verticale permet de calculer cette dernière force. Coulomb indique qu'il faut alors rechercher, en faisant varier l'angle de l'hypoténuse sur la verticale, le maximum de cette réaction minimum à exercer pour contenir la poussée des terres. Inversement, dans le cas de la butée, on obtient pour un angle donné un maximum de la force susceptible d'être exercée par l'écran, qu'il convient de minimiser en fonction de l'angle de la surface.

On doit remarquer, à la suite de Salençon <86>, que cette démarche procède par énoncé d'une condition suffisante de rupture (et non pas une condition suffisante de stabilité) et qu'en outre, cette condition est affaiblie par le fait qu'elle porte sur les résultantes et non pas sur les contraintes en tout point de la surface envisagée. On obtient une estimation par excès du chargement de rupture certaine, estimation qu'il serait possible d'affiner en envisageant d'autres géométries pour la surface de rupture.

Il ne s'agit donc pas ici d'un calcul qui établirait que la rupture se produit par localisation le long d'un plan ; Coulomb voit seulement la rupture localisée suivant un tel mode comme une hypothèse de travail raisonnablement conforme à l'expérience.

Moins célèbre, mais tout aussi importante pour la génèse du "critère de Coulomb", est la première partie de son étude, qui porte sur la rupture en compression simple d'un pilier de maçonnerie. L'auteur y exprime, en résultantes sur une section plane inclinée du pilier, la loi de frottement-cohésion, qui lui permet de calculer la charge axiale de rupture. L'angle de la facette critique est donné, et Coulomb indique que la rupture se produira par glissement sur cette facette. C'est, une fois reformulée en notations actuelles, la classique orientation à $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ des axes principaux de l'essai, dont la désignation fréquente comme "solution de Coulomb" (pour l'orientation des bandes de cisaillement) est donc tout à fait fondée.

I-2 Les caractéristiques statiques et les caractéristiques cinématiques.

Une fois la loi de Coulomb établie comme critère de rupture pour les sols, un nombre important de travaux se sont succédés, dans lesquels le domaine de contraintes admissibles est spécifié sur la base de ce critère.

Rankine pose par hypothèse une certaine répartition des contraintes dans le massif; associée au critère de Coulomb, cette hypothèse permet d'évaluer la poussée sur le mur. Les lignes tangentes aux facettes critiques au sens de Coulomb sont rectilignes.

Boussinesq, et Sokolovsky par des voies différentes, combinent les équations d'équilibre avec le critère de plasticité; ceci conduit à un système d'équations aux dérivées partielles. Les lignes caractéristiques de ce système sont celles le long desquelles le vecteur contrainte s'exerçant sur une facette parallèle à la ligne atteint l'inclinaison maximum autorisée par le critère. Ces lignes ne sont plus des droites, mais des courbes. Les schémas

les plus élaborés dans ce cadre de travail font appel à des juxtapositions de zones à caractéristiques droites (dites zones de Rankine) et de zones à caractéristiques courbes par des lignes de discontinuité en contrainte.

L'exploitation des solutions obtenues par ces méthodes a permis d'établir des tables de coefficients de poussée et de butée, pour les problèmes de soutenèment, et des tables de coefficients (N_γ) pour la capacité portante des fondations superficielles. Habib, dans un article paru récemment <49>, propose des corrections à apporter à ces coefficients pour tenir compte des erreurs, dues à la localisation, dans l'évaluation des angles de frottement d'après les essais de laboratoire.

L'étude du problème cinématique associé au problème, exclusivement statique, évoqué jusqu'à présent, a introduit une nouvelle famille de lignes : les caractéristiques cinématiques.

Avec le développement de la théorie du potentiel plastique apparaît la possibilité de déterminer le champ de déformation associé à une situation où le matériau atteint le seuil (statique) d'écoulement plastique, spécifié en terme de contraintes totales. Cette théorie stipule que les vitesses de déformation plastique dérivent d'un potentiel, et que ce potentiel coïncide, dans le cas dit standard, avec l'équation de la surface de plasticité dans l'espace des contraintes. La coïncidence découle d'un postulat fondamental, le postulat de Drucker <40>, <42>, qui entraîne la normalité du vecteur vitesse de déformation à la surface de plasticité. Le Principe du travail maximal, de Hill, conduit aux mêmes conclusions.

Appliquée avec succès pour les métaux avec les critères de Tresca et de Von Misès, cette théorie est étendue pour les sols par Drucker et Prager <41>, en substituant à ces critères indépendants de la pression moyenne, le critère de Coulomb. Malheureusement, il apparaît vite que certaines conséquences de cette théorie sont irréalistes : elle entraîne, d'une part, une augmentation de volume indéfinie, ce qui est inconcevable, et d'autre part elle prédit un

cisaillement sans dépense de travail mécanique. En outre, le postulat de Drucker apparaît être, pour les matériaux à frottement interne, une condition suffisante mais non nécessaire : Mandel <67> discute ce point et propose une condition nécessaire en terme de propagation d'ondes d'accélération, sur laquelle nous reviendrons parce qu'elle rejoint directement le problème de la localisation de la déformation .

L'idée de plasticité non-standard est alors introduite : le potentiel dont dérivent les vitesses de déformation n'est plus l'équation de la surface qui représente le critère de Coulomb, mais celle d'une surface différente. Bent Hansen <51> propose d'utiliser comme fonction potentiel le critère de Coulomb modifié par un changement de l'angle de frottement ϕ au profit d'un nouvel angle ν . Cet angle est défini à partir des vitesses de déformation en déformation plane, par :

$$\sin\nu = -\frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}$$

Il a reçu par la suite la dénomination généralement admise d' "angle de dilatance".

A partir de ce potentiel, et moyennant l'hypothèse de coïncidence des directions principales du tenseur de vitesse de déformation avec celles du tenseur de contrainte totale, on établit un nouveau système d'équations aux dérivées partielles hyperbolique, dont les lignes caractéristiques sont dénommées les caractéristiques cinématiques.

Parmi les travaux consacrés aux conséquences de l'abandon du potentiel associé au profit d'un potentiel non associé (matériau non standard), on doit noter ceux de Radenkovic, qui a établi un ensemble de théorèmes limites qui permettent de déterminer des bornes des chargements limites pour des problèmes aux limites <75>.

Dans le cadre de ces méthodes de calcul fondées sur l'application du schéma rigide-plastique et d'une loi d'écoulement dérivée du potentiel plastique, on obtient donc un **double réseau de courbes caractéristiques, respective-**

ment statiques et cinématiques. Ces deux réseaux sont non-coïncidents, sauf dans le cas standard, dont on sait qu'il est irréaliste en dehors du cas du matériau purement cohérent incompressible.

Si on s'intéresse aux rapports entre la rupture localisée telle qu'on l'observe et ces réseaux de caractéristiques, quelques remarques sont à faire.

En premier lieu, il n'y a aucun lien direct entre la déformation localisée (un fait cinématique) et le système d'équations différentielles statique : le rapprochement éventuel des lignes de rupture localisée avec les caractéristiques statiques constitue une conjecture, fondée sur le fait que les facettes tangentes à ces caractéristiques sont celles subissant l'obliquité maximale du vecteur contrainte.

En revanche, les caractéristiques cinématiques constituent effectivement, pour un matériau qui obéirait aux lois de la plasticité, des lignes de rupture localisée possible. En effet, la rupture localisée se caractérise par une discontinuité du champ de vitesse au travers de la ligne de rupture. Or, le champ de vitesse étant décrit par un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, les seules lignes du domaine pour lesquelles des discontinuités de la solution peuvent exister sont les lignes caractéristiques de ce système, les caractéristiques cinématiques. On montre que ces lignes sont inclinées à $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}$ des directions principales du taux de déformation, c'est à dire que ce sont des lignes d'extension nulle (comme on peut s'en assurer en construisant le cercle de Mohr des taux de déformation).

On reviendra sur les notion de ligne d'obliquité maximum du vecteur contrainte et de ligne d'extension nulle aux chapitre II .

I-3 Les calculs à la rupture avec surface spécifiée.

Dans la lignée de l'oeuvre de Coulomb, de nombreuses méthodes de calcul à la rupture impliquant un glissement sur une surface spécifiée à l'avance, non nécessairement rectiligne, ont été développées. Toutes ces méthodes se réfèrent uniquement à la notion de résistance, à l'exclusion de toute autre spécification de comportement. Ainsi, le matériau est simplement caractérisé par un angle de frottement et une cohésion (critère de Coulomb). L'application au cas cohérent, avec des surfaces spécifiées sous forme de cercles, permet de définir des coefficients de sécurité par rapport à la rupture, pour chaque cercle envisagé. On cherche alors le cercle le plus critique. Si l'on s'intéresse au cas frottant, de nouveaux problèmes se posent, que divers auteurs ont tenté de résoudre en ajoutant à l'hypothèse de surface de rupture des hypothèses concernant la répartition des contraintes le long de la surface, ou bien l'état d'équilibre au sein du bloc en mouvement (voir Coussy et Salençon <24> et les références citées par ces auteurs).

Une surface de rupture hypothétique étant donnée, l'application de la condition de Coulomb le long de cette surface pose en effet divers problèmes, dont le premier est d'estimer en tout point de la surface les contraintes normales et tangentielles à la facette cisaillée; en outre, il est restrictif de supposer a priori la condition vérifiée simultanément en tous les points de la surface. Par ailleurs, lorsque la surface spécifiée n'est pas circulaire (ou plane), il doit être tenu compte des déformations nécessaires à l'intérieur du bloc en mouvement; ceci introduit de nouvelles hypothèses, telles par exemple des répartitions de contraintes le long de frontières verticales de tranches arbitrairement définies.

I-4 Le calcul à la rupture.

La théorie du calcul à la rupture, due à Salençon <86>, permet d'éclairer la signification réelle des chargements obtenus par ces méthodes et des champs de contrainte et de déformation qui y sont associés. Il sortirait du propos de ce mémoire d'exposer cette théorie in extenso, mais quelques-unes de ses conclusions méritent d'être énoncées en raison de la clarification qu'elles apportent.

Le **calcul à la rupture** et l'**analyse limite** s'appliquent tous deux à des matériaux caractérisés par un domaine admissible convexe pour les contraintes (critère), mais la seconde incorpore en outre une règle d'écoulement : elle concerne exclusivement les matériaux pour lesquels s'applique la règle de normalité (de la vitesse de déformation à la surface définissant la frontière du domaine des contraintes admissibles).

Dans le cadre du calcul à la rupture, on peut montrer grâce au théorème des puissances virtuelles qu'il existe un domaine de chargements "potentiellement supportables", lui aussi convexe, correspondant à des champs de contrainte statiquement admissibles (ils vérifient les conditions aux limites) et ne violant pas le critère. Du fait de la convexité de ce domaine, on peut en approcher la frontière "par l'intérieur", en construisant des chargements qui vérifient les conditions énoncées. Toutefois on n'est pas assuré que ces chargements seront stables. Le calcul à la rupture permet par ailleurs une approche "par l'extérieur", du domaine des chargements potentiellement supportables, au moyen de la spécification de champs de déformation cinématiquement admissibles et de la connaissance de la **fonction d'appui**, qui constitue le dual dans l'espace des taux de déformation du critère de plasticité dans l'espace des contraintes. On montre (voir la référence <86>) que les chargements obtenus par minimisation de l'intégrale de la fonction d'appui sur le

volume sont nécessairement extérieurs au domaine des chargements potentiellement supportables, ce qui permet l'approche par l'extérieur de ce domaine. On est ainsi assuré que les chargements excédant les valeurs obtenues, pour la cinématique donnée, provoqueront la rupture de l'ouvrage. En revanche, on ne sait rien sur les chargements réellement stables, et de plus les champs de déformation construits dans cette approche par l'extérieur n'ont pas de signification précise; en particulier on n'est en rien assuré qu'ils sont ceux qui prévaudront à la rupture.

L'analyse limite, grâce à la propriété de normalité stipulée, permet d'obtenir des résultats plus fins. On peut montrer que les chargements appartenant au domaine convexe défini antérieurement seront effectivement supportés par la structure considérée; les champs de contrainte et de déformation associés aux approches statiques et cinématiques ont alors une signification mécanique.

En revenant maintenant aux différentes méthodes de calcul d'ouvrage avec surface de rupture spécifiée, on observe qu'elle s'apparentent à l'approche par l'extérieur, comme le montre Salençon dans le cas du problème du coin de Coulomb <86>. En outre, dans le cas du matériau à frottement de Coulomb, la règle de normalité est violée, si bien qu'on ne dispose pas de résultats prouvant que les chargements inférieurs au chargement obtenu par une approche par l'intérieur (calcul à la rupture) seront effectivement supportés. Enfin, les schémas cinématiques spécifiés pour le calcul ne sont pas prouvés être ceux qui conduiront à la rupture réelle.

On notera enfin que la méthode des caractéristiques, appliquée à la plasticité, entre dans le cadre qui vient d'être évoqué puisqu'elle constitue une méthode qui permet la construction de champs de contrainte statiquement admissibles (approche par l'intérieur) ou de champs de déformations cinématiquement admissibles (approche par l'extérieur). A ce titre, elle appelle les mêmes remarques que celles qui viennent d'être exprimées concernant les relations entre la cinématique envisagée et la localisation réelle.

I-5 Les méthodes numériques avec surface de rupture.

Les méthodes numériques constituent un champ d'activité de plus en plus vaste, dont l'investigation, même réduite aux modèles présentant une prise en compte de la rupture localisée n'est pas l'objet de ces pages. On se propose simplement de faire mention ici de quelques directions de travail développées ou en cours de développement.

Dans beaucoup d'applications en mécanique des solides, les méthodes numériques sont employées pour permettre l'introduction, dans l'étude de problèmes aux limites, de lois rhéologiques plus réalistes quant à la description du comportement du matériau. Toutefois, dans l'état actuel, ces méthodes ne permettent pas le développement "spontané" de localisations de la déformation comparables à ce que l'on observe expérimentalement; par spontané on entend : en l'absence d'algorithmes supplémentaires.

Des procédés numériques ont donc été incorporés à certaines méthodes , de façon à permettre la rupture localisée. On peut citer en premier lieu les éléments joints, dont l'initiateur a été Goodman <45>, qui sont des éléments particuliers insérés au sein d'un maillage d'éléments finis; ces éléments de faible épaisseur autorisent un découplage local le long d'une ligne dont il est clair qu'elle doit être spécifiée à l'avance (pour plus de détails, voir Boulon <11>).

Dans le même but, mais par des voies radicalement différentes, Boulon <9> a défini et développé des algorithmes de frottement-glissement, qui permettent la prise en compte d'une localisation de la déformation le long d'un interface spécifié à l'avance. Le glissement est calculé; il peut n'intéresser qu'une partie de l'interface et se propager au cours des incréments successifs. Ces algorithmes ont été appliqués à l'étude du comportement des pieux de fondation soumis à divers types de chargement axiaux, ou encore au phénomène de "frottement négatif" (Desrues, Thèse de Docteur-Ingénieur <34>). De nouveaux

développements sont menés par Boulon, en vue d'une meilleure prise en compte des phénomènes d'interaction entre l'interface et le comportement du massif (Boulon, Thèse de Docteur es Sciences, <11>.

Plus générale encore est une méthode de la même inspiration, en cours de développement (Boulon <10>), qui permet le déclenchement et le développement d'une rupture localisée non pré-spécifiée, en des points quelconques du massif, et dans une direction quelconque. La base du traitement numérique reste la méthode des éléments finis, complétée par une méthode de "coefficients d'influence". Le critère de rupture local est le critère de Coulomb. Duthilleul a présenté dans sa thèse de docteur-ingénieur <43> un développement complet de la méthode et les premiers exemples de mise en oeuvre. Les résultats sont prometteurs, et des développements ultérieurs seront entrepris.

Il faut mentionner enfin, parmi les méthodes numériques, celles qui se situent dans le cadre de l'analyse limite, évoquée au paragraphe I-4. La démarche numérique est substituée à la démarche analytique pour construire des champs statiques et cinématiques plastiquement admissibles. Pastor <74> et Turgeman <99> à Grenoble ont ainsi pu obtenir des majorations et minorations améliorées des chargements admissibles sur divers problèmes.

Chapitre II

LOCALISATION ET MODELISATION DU MATERIAU GRANULAIRE

Les matériaux granulaires les plus courants, comme les sables, sont constitués de grains visibles à l'oeil nu. Les travaux développés pour modéliser leur comportement mécanique sont ainsi naturellement situés à la frontière de deux démarches de pensée : l'approche microstructurelle, et l'approche macrostructurelle. Sans doute ces deux approches existent-elles pour tous les matériaux, mais la particularité ici tient au fait que, dans le même temps où la pensée manie les concepts de la mécanique des milieux continus, l'oeil ne peut ignorer l'évidente structure discrète du matériau intéressé.

Il est clair que la prise en compte exhaustive des interactions de tous les grains d'un échantillon donné permettrait la prévision du comportement de cet échantillon sous des sollicitations quelconques, mais ce point de vue est évidemment irréaliste, non seulement en raison du volume des calculs à mettre en oeuvre, mais aussi - et peut-être surtout? - en raison de l'énormité de la tâche qui consisterait à caractériser chacun des grains et leurs positions

relatives initiales. Les recherches qui sont menées au niveau microstructurel ne se donnent donc pas pour but un tel passage continu du micro au macro, mais la mise en évidence et la compréhension de phénomènes fondamentaux, à prendre en compte sous forme de caractéristiques continues au niveau de la description rhéologique du matériau. C'est dans cet esprit qu'ont été et sont réalisées des recherches sur les assemblages de grains, tant au niveau expérimental (par exemple, Dantu <27>, Drescher et de Josselin de Jong <38> ont étudié l'état de contrainte dans des assemblages de grains, Wiendieck <108>, à Grenoble, s'est attaché à caractériser l'évolution des distributions de contacts au cours de la déformation) qu'analytiquement (Dantu <28>, Thornton <96>), ou encore, plus récemment, par des moyens numériques (modèles de particules discrètes, développés par Cundall <25>,<26>, Cambou <15>, Trollope < 98>).

Les chercheurs dans le domaine des matériaux granulaires ont tous en tête, avec des priorités diverses, ces deux niveaux de connaissance. Il n'est pas possible de classer les travaux complètement d'un côté, ou de l'autre; ce n'est d'ailleurs pas mon propos. On a tenté de synthétiser, dans ce chapitre, les points de vue, éventuellement divergents, développés sur la localisation de la déformation à partir de considérations plutôt phénoménologiques, parfois théoriques, à la fois micro et macrostructurelles. Leurs point commun réside dans une recherche d'un lien phénoménologique entre la localisation et les glissements élémentaires au sein du matériau, de façon à dégager une explication, et à prédire l'orientation des surfaces de rupture.

II-1 L'orientation des bandes de cisaillement.

L'orientation de la bande de cisaillement, au sein de laquelle se produit la localisation, est la première "prise" de l'expérimentateur sur le phénomène. Et, d'emblée, se présente une interprétation: selon celle-ci, la bande de cisaillement doit être une ligne en tout point tangente aux facettes sur lesquelles le critère de coulomb est vérifié. Elle doit donc être inclinée à $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2}$ des directions principales de la contrainte totale. Compte tenu de l'autorité acquise par le critère de coulomb, ce postulat est très répandu. Une telle ligne est aussi une caractéristique statique (cf chapitre I). En d'autres termes, il s'agit d'une ligne d'obliquité maximum du vecteur contrainte (LOM), et c'est par ce terme qu'elle sera désignée ici.

Cependant, la comparaison des directions de bandes de cisaillement mesurées à l'essai triaxial au laboratoire avec la direction déduite de ce postulat, appliqué avec l'angle de frottement mesuré, conduit à un désaccord dans bien des cas, comme l'ont noté, parmi d'autres, Rowe et Barden <84> ou Habib <48> pour des essais sur des sables et plus récemment, Jacquet <30> et aussi Duthilleul <43> sur le matériau analogique de Schneebeli.

Par ailleurs, la cinématique du phénomène de localisation, mise en évidence, au stade de son plein développement, par des expériences de déformation plane (parmi d'autres, Roscoe <82>) indique que les surfaces de rupture sont des lignes d'extension nulle, c'est à dire des lignes perpendiculaires à des facettes qui subissent une déformation normale incrémentale nulle, associée à un cisaillement non nul (et même considérable en l'occurence). Compte tenu de la définition, donnée par Hansen (voir chapitre I), de l'angle de dilatance :

$$\sin\nu = - \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}$$

on montre aisément à l'aide du cercle de Mohr des vitesses de déformation que ces lignes d'extension nulle (LEN ultérieurement) sont inclinées à $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\nu}{2}$

des directions principales de la vitesse de déformation. Elles coïncident avec les caractéristiques cinématiques, définies au chapitre I.

On notera qu'il ne s'agit pas là d'une conjecture, mais d'une évidence qui résulte de la définition même de l'angle de dilatance; en d'autres termes, les surfaces de rupture ne peuvent pas ne pas être inclinées à $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}$ par rapport aux directions principales de $\dot{\varepsilon}$, et si ces directions coïncident avec celles de la contrainte, il faut bien abandonner le premier postulat (sauf dans le cas, dit standard, pour lequel on a $\nu = \emptyset$: loi d'écoulement associée, Drucker-Prager). Le problème de la coïncidence des directions principales de σ et $\dot{\varepsilon}$ est donc posé.

II-2 Le débat sur la coïncidence des directions principales.

Les opinions sont partagées quant à ce problème. Le principe de Saint-Venant postule la coaxialité, et celle-ci est bien vérifiée pour des matériaux qui obéissent à des lois d'écoulement associées (i.e. quant la normalité s'applique). Si on considère un matériau isotrope décrit par la plasticité classique, on peut penser a priori que la coïncidence des directions principales des tenseurs contrainte et taux de déformation (plastique) est nécessaire; cependant, Mandl et Fernandez Luque <68>, dans une étude synthétique concernant l'écoulement plastique des matériaux granulaires, examinent les fondements de ce postulat et établissent que , même dans le cas restrictif envisagé, la non-coaxialité est compatible avec l'isotropie matérielle, pour les matériaux granulaires soumis à un cisaillement plan.

Sur le plan expérimental, on a cherché à établir le bien-fondé de l'une ou l'autre proposition. En 1967, Roscoe <82> a utilisé un appareil connu sous le nom de boîte de cisaillement simple (SSP, pour simple shear apparatus), qui diffère de la boîte classique en ceci qu'il est conçu pour permettre un cisaillement homogène et non nécessairement localisé. Il faut d'ailleurs noter

que, en dépit de cette conception, Roscoe met en évidence une localisation de la déformation dans cet appareil. L'utilisation conjointe de mesures de contraintes aux limites et de mesures de déplacement au sein du matériau par radiographie permet de caractériser les directions principales des tenseurs σ et $\dot{\varepsilon}$. Roscoe conclut que la coïncidence est effective (en chargement seulement). En 1971, Stroud <91> confirme ce résultat sur un appareil du même type.

Reprenant la question en 1976, Drescher <39> aboutit à la conclusion opposée. Cet auteur a utilisé des techniques différentes, notamment en ce qui concerne les mesures de contraintes, pour laquelle il fait appel à la photoélasticimétrie. Les conclusions de Drescher paraissent aujourd'hui faire autorité dans ce débat.

II-3 Les modèles : quelle coïncidence?

Dans la dixième Rankine Lecture (1970), Roscoe synthétise les résultats de vingt ans de recherche au laboratoire de Cambridge (UK). L'un des principaux fruits de cette recherche concerne les problèmes de soutènement, pour lesquels l'auteur propose une méthode d'approche originale, fondée sur la construction préalable d'un réseau de LEN (lignes d'extension nulle), à partir duquel, par calcul inverse, on détermine un champ de contrainte et enfin les efforts aux limites. Ce qui nous intérèsse ici est que Roscoe indique que le réseau de LEN est contruit à partir d'une hypothèse sur la forme des surfaces de rupture, et de l'identification de ces surfaces avec les LEN. En revanche, les surfaces ne sont pas des LOM (lignes d'obliquité maxi du vecteur contrainte). Ceci est cohérent avec la position prise vis à vis de la coïncidence des directions principales des tenseurs σ et $\dot{\varepsilon}$: la coïncidence est vérifiée, celle des LOM et des LEN est donc impossible sauf matériau standard. Roscoe propose donc une reformulation du critère de Coulomb, sous la forme :

"dans un élément d'un massif de sol, une surface de rupture se développe, le

long d'un plan qui est une direction d'extension nulle, à l'instant où le rapport de contrainte τ/σ_n sur n'importe quel autre plan en cet élément atteint une valeur correspondant à un point sur l'enveloppe de Mohr-Coulomb" (Roscoe, <82>, p165).

On ne peut être plus clair : le plan réellement cisaillé n'a pas de raison de coïncider avec la facette d'obliquité maximum du vecteur contrainte.

Cet avis n'est pas partagé par tous les auteurs. Bien au contraire, la majorité d'entre eux conviennent de "conserver le postulat de Coulomb", c'est à dire de considérer qu'une surface de rupture est nécessairement coïncidente avec une LOM. La non-coïncidence des directions principales de σ et $\dot{\varepsilon}$ est, par ailleurs, généralement admise. La notion d'incertitude sur les directions respectives des axes principaux des tenseurs apparaît, ainsi que la distinction entre directions "locales" et "globales" de ces mêmes axes. Une large gamme de combinaisons devient possible, qui a été largement exploitée.

Ainsi, de Josselin de Jong a proposé un "modèle à double glissement et à rotation libre" dont les assertions de base sont:

- la déformation se produit par cisaillement le long des LOM;
- elle résulte de déplacements à extension nulle successivement le long de deux directions conjuguées.
- les éléments cisaillés sont soumis à une rotation matérielle (i.e rigide) qui dépend non seulement des conditions locales, mais aussi de la déformation de l'ensemble du domaine, et qui est de ce fait indéterminée localement.

Il en découle que la déviation des axes principaux des tenseurs σ et $\dot{\varepsilon}$ est libre, à l'intérieur de l'éventail $+\Phi/2,-\Phi/2$, avec Φ angle de frottement du matériau.

De Josselin de Jong a présenté diverses versions de son modèle, d'abord en supposant l'incompressibilité, puis en prenant en compte les variations de volume (références <58>,<59>,<60>).

Le résultat, en ce qui concerne la localisation , est que la direction

des caractéristiques cinématiques est indéterminée, à l'intérieur d'une certaine plage de variation.

Mandl et Luque <68> fixent la déviation des directions principales des tenseurs, considérée comme une caractéristique matérielle, à $\emptyset/2$ (comme l'avait fait antérieurement Geniev). Il en résulte qu'une LEN coïncide avec une LOM, alors que les deux autres LEN et LOM ne coïncident pas. La direction de coïncidence est dite "active", et elle est identifiée à une surface de rupture (flow line).

Un certain nombre d'autres auteurs ont construit des modèles sur la base des idées de J. de Jong, en introduisant diverses modifications (Spencer <90>, Mehrabadi et Cowin <70>, <71>, <72>). La coïncidence des LOM et des LEN est généralement supposée.

Arthur et ses collaborateurs <2> introduisent la distinction entre les grandeurs locales et globales. L'angle de dilatance ν, largement impliqué dans les discussions de direction de surfaces de rupture, est une grandeur définie en vitesse de déformation, et de ce fait très sensible aux variations spatiales; sa valeur locale peut différer notablement de la valeur globale, comme le montrent les essais décrits par Roscoe (référence < 82 >, p136, figure 12b).

Arthur suppose donc que le cisaillement se produit le long d'une LEN locale, coïncidente avec une LOM globale. La rotation matérielle est supposée être telle que soit maintenue cette coïncidence au cours de la déformation. De plus, la LEN locale complémentaire doit coïncider avec une LEN globale.

Dans ces conditions, les directions principales des tenseurs σ et $\dot{\varepsilon}$ locaux ne coïncident pas; cependant, si les conditions aux limites ou la structure de l'assemblage des grains n'imposent pas de déviation particulière, la somme des déviations locales peut résulter en une coïncidence de ces directions au niveau global.

Le modèle prévoit ainsi une large gamme de situations, qui découlent de

la non symétrie au niveau local. L'orientation des surfaces de rupture dépend de la distribution plus ou moins symétrique ou indifférente des cisaillements locaux, laquelle est elle-même fonction des conditions aux limites et des contraintes internes. Arthur ne dénombre pas moins de six cas différents; les orientations des surfces de rupture varient suivant les cas, de $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ à $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}$, avec une valeur $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\phi + \nu)$ dans le cas de distribution symétrique des cisaillements locaux, suite à des déformations avant rupture très homogènes. Dans le cas général, l'orientation est comprise entre les valeurs $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}$.

En résumé, le recensement des orientations de surfaces de rupture proposées sur la base de considérations physiques conduit à un large éventail de possibilités, depuis les lignes d'obliquité maximum du vecteur contrainte, ou caractéristiques statiques, jusqu'aux lignes d'extension nulle, ou caractéristiques cinématiques.

Chapitre III

LA LOCALISATION VUE COMME PHENOMENE DE BIFURCATION

III-1 Généralités.

Qu'entend-on par bifurcation ? Au sens commun, le mot réfère à la notion de changement de direction, ou plus généralement, à une situation où se présente une alternative entre deux routes possibles.

Le sens attribué à ce mot dans le cadre de la théorie de la bifurcation ne s'éloigne guère de ce sens ordinaire : il s'applique, au cours de l'évolution d'un processus physique, à ce que l'on considère comme une transition d'un chemin fondamental de comportement à un chemin alternatif.

Prenons deux exemples, de façon à illustrer cette idée de bifurcation dans l'évolution d'un processus physique.

Un premier exemple, classique, est celui de l'ébullition. L'échauffement d'un liquide est un processus connu, susceptible d'être décrit

mathématiquement. On n'envisage pas ici les phénomènes d'écoulement engendrés au sein d'une masse de liquide donnée, soumise à un gradient de température (rouleaux de Rayleigh-Bénard). Une fois atteinte une température critique, qui dépend des conditions expérimentales (pression), l'ébullition apparaît, qui traduit le changement de phase de la matière en cause, de l'état liquide à l'état gazeux. Le processus d'échauffement est stoppé, jusqu'à complète disparition de la phase liquide. L'apport de chaleur est consommé intrégralement par le changement de phase. On sait, par ailleurs, que la transition entre ces deux mécanismes est sensible à la présence d'impuretés dans le milieu : au changement de phase liquide-solide, il est possible, dans des conditions de grande pureté du liquide, d'obtenir des états de surfusion (par exemple, de l'eau liquide à moins de 0°C dans les conditions normales de pression). Ceci introduit un autre problème, celui du rôle des imperfections dans les phénomènes de bifurcation.

Le deuxième exemple nous rapproche de la mécanique des solides: il s'agit du phénomène du flambage élastique d'un élément linéaire soumis à une compression axiale. Le chemin fondamental consiste en un raccourcissement élastique de l'élément. Il est bien connu que, le chargement augmentant, il se produit une déviation latérale de l'élément, qui se trouve dès lors soumis à une combinaison de compression axiale et de flexion latérale. Le rôle des imperfections initiales, ici les imperfections géométriques de l'élément, est là aussi crucial.

On remarquera que, si les deux phénomènes peuvent s'envisager sous l'éclairage du concept de bifurcation, ils sont pourtant très différents quant à la nature des causes sous-jacentes. Dans le cas de l'ébullition, on assiste à l'activation d'un nouveau phénomène, le changement de phase, décrit par une équation constitutive propre tout à fait distincte de celles régissant l'échauffement du liquide. Dans le cas du flambage au contraire, les équations constitutives du matériau restent les mêmes, alors que le facteur de changement de chemin est de nature géométrique.

La localisation de la déformation plastique fait l'objet depuis une dizaine d'années d'études intensives dans le cadre de la théorie de la bifurcation. Ce phénomène pourrait être envisagé comme le résultat d'hétérogénéités locales, de concentrations de contraintes ou de l'entrée en action d'un phénomène physique qui modifie brutalement les caractéristiques du matériau. Ce n'est pas le point de vue qui est développé dans les études de bifurcation par localisation en bande de cisaillement. L'approche généralement adoptée consiste à rechercher si la description rhéologique de la loi de comportement du matériau permet l'émergence d'une solution, compatible avec les conditions aux limites, comportant un mode de déformation localisée (Rice et Rudnicki <80>). Les idées de base concernant cette approche ont été exprimées dans des travaux relevant du domaine de la dynamique des solides, par Hadamard en 1903 <50>, puis par Thomas <93>, Hill <53>, et Mandel <67>. Après une période de mise en sommeil, un regain d'activité sur ce sujet s'est manifesté à partir de 1973, sur la base d'une formulation directe, non plus dynamique mais quasi-statique, donnée par Rice <78>, <85>, <79>. L'évolution rapide des lois de comportement dans les années 70 a donné lieu à l'éclosion d'un grand nombre d'études, qui ont montré la grande sensibilité des prévisions de bifurcation au détail de la description rhéologique adoptée (Rice <79>). Il est apparu en particulier que les déviations par rapport à la règle de normalité (règle généralement admise pour les métaux), ainsi que l'apparition d'irrégularités dans la surface de charge entraînaient une localisation plus précoce. Ceci est particulièrement important pour les sols, et les matériaux granulaires en général, qui sont connus pour présenter ce genre de déviation et d'irrégularités.

Dans ces pages, on expose d'abord les points de vue dynamique et quasi-statique, avant de donner quelques éléments de la théorie générale de la bifurcation de Hill, prolongée récemment par Raniecki et Bruhns pour les matériaux non standard. Enfin je passe en revue les principaux travaux sur la bifurcation dans les matériaux du type des sols.

III-2 La propagation des ondes d'accélération dans les solides

Il peut paraître surprenant a priori de voir introduire des considérations de dynamique des solides au sujet de la localisation de la déformation, qui semble relever purement de la statique. La raison en est qu'il existe une connexion générale entre les phénomènes dynamiques et statiques en mécanique. Cette connexion est complexe, et elle dépend du comportement rhéologique du matériau. Toutefois , un exemple simple peut en être donné, une fois encore celui du flambage élastique.

La charge critique d'Euler définit la charge en deçà de laquelle le chemin de compression axiale est stable; au-delà, c'est le chemin alternatif, i.e compression plus flexion, qui est stable. La méthode d'Euler pour calculer cette charge est purement statique : elle consiste à écrire l'équilibre des moments dans une section de la poutre supposée fléchie. L'équilibre trivial correspond à la flexion nulle, mais l'équilibre non trivial est possible moyennant une condition qui, compte tenu des conditions aux limites, fournit une expression de P, la charge critique. Dans le cas de la poutre simplement appuyée de longueur l, d'inertie I et de module d'Young E, la solution est:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Le même résultat peut être obtenu en étudiant la flexion dynamique d'une poutre de masse linéique m , soumise de surcroît à une charge axiale P. La

solution de l'équation du mouvement s'écrit (d'après Clough et Penzien, "dynamique des structures", page 318 <22>) :

$$v(x,t) = \phi(x)Y(t)$$

avec v déplacement transversal

x abscisse longitudinale

t le temps

ϕ et Y s'explicitent de la façon suivante:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{w} \sin wt + Y(0)\cos wt$$

$$\phi(x) = D1 \sin\delta x + D2 \cos\delta x + D3 \operatorname{sh}\varepsilon x + D4 \operatorname{ch}\varepsilon x$$

avec :

$$\delta = \sqrt{(a^4 + g^4/4)^{1/2} + g^2/2} \qquad \varepsilon = \sqrt{(a^4 + g^4/4)^{1/2} - g^2/2}$$

où $a^4 = \frac{mw^2}{EI}$ et $g^2 = \frac{P}{EI}$ w étant la pulsation.

L'application des conditions aux limites permet de déterminer trois des constantes, et fournit une équation :

$$D2=D3=D4= 0$$

$$D1 \sin \delta l = 0$$

En dehors du cas trivial D1 = 0 (pas de mouvement), on a donc la solution vibratoire :

$$\phi(x) = D1 \sin\delta x$$

si la condition $\delta l = k\pi$ est vérifiée.

En explicitant δ , on obtient la condition sur la pulsation w :

$$w^2 = \frac{EI}{m} \frac{k^2\pi^2}{l^2} \left(\frac{k^2\pi^2}{l^2} - \frac{P}{EI} \right)$$

Il apparaît que, lorsque P augmente, la pulsation diminue.

Elle s'annulle en premier lieu pour k = 1 avec :

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

où l'on retrouve la charge critique d'Euler.

Ainsi, la solution du problème statique peut être obtenue comme le cas particulier d'un régime d'onde établi à pulsation nulle.

La propagation des ondes d'accélération a été étudiée en premier lieu par Hadamard en 1903 <50>. L'onde envisagée désigne une surface géométrique qui se déplace par rapport à la matière, et de part et d'autre de laquelle on observe une discontinuité d'un certain nombre de variables, dont l'accélération, les gradients des vitesses, ceux des taux de déformation et de contrainte.

Le tenseur gradient des vitesses, qu'on note aujourd'hui $\dot{F}$, s'écrit dans ce cas : $\dot{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} = n_\alpha . g_\beta$ (notations actuelles)

avec n vecteur normal à la surface

et g dérivée de la vitesse dans la direction n.

Le matériau considéré est élastique linéaire.

Hadamard montre que la propagation de l'onde est décrite par une équation qui relie la vitesse de propagation à une forme quadratique C dans laquelle apparaissent les dérivées du potentiel élastique, c'est à dire les modules, et le vecteur n. Tant que la forme quadratique est définie positive pour toute orientation n, trois ondes indépendantes peuvent se propager. Dans le cas où une valeur propre de C s'annulle, l'une des ondes ne se propage plus; on a alors une "discontinuité stationnaire", suivant le mot de Hadamard. Ceci survient lorsque le déterminant de C s'annulle.

Hill, en 1962, <53> reprend le point de vue de Hadamard et le généralise au cas des lois incrémentalement linéaires, voire même multi-linéaires par zones (piecewise linear). Il s'intérèsse aux relations entre la propagation des ondes, la stabilité et l'unicité. Il définit une "expérience mentale",

quasi-statique, qui montre la similarité entre un cisaillement localisé et l'onde d'accélération, et permet d'interpréter l'existence d'une racine négative comme une instabilité intrinsèque du matériau. Il donne ainsi une condition nécéssaire et suffisante de stabilité par rapport au développement de bandes de Lüders (bande de cisaillement) , qui est l'existence de trois ondes réelles pour toute direction. Considérant un problème aux limites quelconque, il indique que l'unicité de la solution est garantie si la condition ci-dessus est vérifiée dans un solide homogène, et dans certaines limites, dans le cas hétérogène. Cependant il est clair que la vitesse de propagation des ondes n'est pas déterminée seulement localement, mais par le problème aux limites dans son ensemble (Hill <53> page 11).

Mandel <67>, en 1964, présente, dans le cadre plus précis de la mécanique des sols, une étude dans le même esprit, dans laquelle il discute les conditions de stabilité et le postulat de Drucker. Il montre que ce postulat n'est pas une condition nécessaire de stabilité, lorsqu'il existe des frottements internes à la Coulomb, et il propose une condition nécessaire qui est la propagation (par ondes) d'une petite perturbation par rapport à un état d'équilibre stable. Comme pour Hadamard et Hill, l'équation s'écrit :

$$B_{il}\,\gamma_l = \rho\Omega^2\gamma_i$$

donnée ici avec les notations de Mandel, c'est à dire:

$$B_{il} = A_{ijkl}\,\alpha_j\,\alpha_k$$

forme quadratique dans laquelle les α sont les cosinus directeurs de la normale au plan d'onde, et A_{ijkl} la matrice des modules incrémentaux définie par :

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl} : \dot{\varepsilon}_{kl}$$

ρ est la densité,

Ω la célérité de l'onde,

et le vecteur γ le gradient de vitesse dans la direction de la normale.

La propagation de la perturbation devient impossible lorsque $\Omega = 0$, c'est

à dire lorsque une valeur propre de B s'annulle. L'équation s'écrit alors :

$$B_{il}\,\gamma_l = 0$$

ou encore

$$A_{ijkl}\,\alpha_j\,\alpha_k\,\gamma_l = 0$$

qui entraîne :

$$\det\left(\alpha_j\, A_{ijkl}\, \alpha_k\right) = 0 \qquad (1)$$

Concernant la connexion entre le problème élémentaire et le problème aux limites, Mandel souligne qu'un élément qui serait instable si l'on suppose ses déformations libres (c'est à dire dans un problème élémentaire défini en contraintes) peut être stable au sein d'un massif. Son point de vue et celui de Hill se rejoignent donc, et peuvent s'énoncer sous la forme: L'instabilité élémentaire n'est pas une condition suffisante de l'instabilité globale, et qui plus est elle ne peut pas être étudiée indépendamment du problème dans son ensemble.

III-3 La localisation en bande de cisaillement :

les équations de base.

La formulation quasi-statique directe a été donnée par Rice; l'énoncé le plus général peut être trouvé dans la référence <79>. On en reprend ici les grandes lignes.

On s'intéresse à une transformation d'un solide, définie par les coordonnées actuelles x_i des points dont les coordonnées dans l'état de référence sont X_i. Le gradient de déformation est défini , classiquement, par $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$. Le tenseur de contrainte s_{ij} que Rice adopte pour son analyse est le tenseur nominal de Hill (voir par exemple <55>), qui est le transposé du tenseur de Piola-Lagrange. Il est défini comme le tenseur $\mathbf{s}$ tel que $\mathbf{n}.\mathbf{s}$ soit la force agissant par unité de surface de référence, sur une facette de normale $\mathbf{n}$ dans l'état de référence. Il faut noter que, pour le mode de bifur-

cation envisagé, les équations seront tout à fait identiques si l'on utilise simplement la contrainte de Cauchy, en raison d'une particularité du mode de déformation envisagé (discuté par Rice et Rudnicki en 80 <80>).

On considère le solide homogène, déformé de façon homogène, soumis à l'instant actuel à un incrément de chargement qui pourrait donner lieu (chemin fondamental) à une vitesse de transformation $\dot{\mathbf{F}}^0$ et à un taux de contrainte $\dot{\mathbf{s}}^0$.

Le problème posé est de savoir si un mode de déformation localisée est possible (chemin alternatif). Dans ce mode, la déformation dans la bande est la somme du champ courant $\dot{\mathbf{F}}^0$, celui qui prévaut à l'extérieur, et d'un champ additionnel qui est le produit tensoriel d'un vecteur **g** avec le vecteur **n** normal à la bande de cisaillement :

$$\dot{\mathbf{F}}^1 = \dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \qquad (2)$$

Le vecteur **g** représente le gradient de la vitesse dans la direction **n**. Cette condition cinématique est cohérente avec la réalité expérimentale, comme je le discuterai dans la partie expérimentale de ce mémoire (cf chapitre VI).

Une deuxième condition, statique celle-là, doit être vérifiée : le vecteur contrainte incrémental sur la facette parallèle à la bande doit être continu au passage de la frontière entre la bande et le milieu courant :

$$\mathbf{n}.\dot{\mathbf{s}}^1 = \mathbf{n}.\dot{\mathbf{s}}^0 \qquad (3)$$

Cette condition s'impose en raison du fait que l'état de contrainte est uniforme en dehors de la bande, et ne varie pas non plus, en son sein, dans la direction paralléle à celle-ci, mais seulement dans la direction perpendiculaire.

Ces deux conditions posées, reste à spécifier le comportement du matériau. Rice envisage une loi de comportement incrémentalement multi-linéaire par zones :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = C_{ijkl} : D_{kl}$$

où $\overset{\nabla}{s}$ désigne une vitesse de contrainte objective et D la vitesse de

déformation. Si on adopte la dérivation de Jaumann, on a alors :

$$\dot{s}_{ij} = L_{ijkl} : \dot{F}_{kl} = C_{ijkl} : D_{kl} - s_{ik}\,\Omega_{kj} + \Omega_{ik}\,s_{kj}$$

où Ω est la partie antisymétrique de $\dot{F}$, c'est à dire la vitesse de rotation matérielle. L'état actuel est pris pour configuration de référence.

On a alors, de la manière la plus générale :

$$\dot{s}^o = L^o : \dot{F}^o$$

$$\dot{s}^1 = L^1 : \dot{F}^1$$

et, en appliquant (2) :

$$\dot{F}^1_{kl} = L^1_{ijkl} : (\dot{F}^o_{kl} + g_k\, n_l)$$

La condition (3) s'écrit alors :

$$(n_i\, L^1_{ijkl}\, n_l)\, g_k = n_i\, (L^o_{ijkl} - L^1_{ijkl})\, \dot{F}^o_{kl} \qquad (4)$$

On a toujours la solution triviale $g = 0$ (qui entraîne $L^o = L^1$).

La localisation apparaît lorsqu'une solution non triviale existe.

Dans la généralité envisagée jusqu'ici, le problème ne peut pas se traiter simplement. Si par contre on pose l'hypothèse que le comportement dans la bande et à l'extérieur est décrite par le même cône constitutif (ou, suivant un autre vocabulaire, la même zone tensorielle), on a :

$$L^o = L^1 \qquad (5)$$

ce qui entraîne la condition classique :

$$(n_i\, L_{ijkl}\, n_l)\, g_k = 0 \qquad (6)$$

dont la solution non triviale apparaît lorsque le déterminant de la forme quadratrique (nLn) s'annulle, le vecteur g étant alors vecteur propre. On a ainsi la condition classique :

$$\det (nLn) = 0 \qquad (7)$$

On peut constater que le critére de localisation ainsi obtenu coïncide tout à fait avec la condition à laquelle conduit l'étude dynamique pour l'existence d'une discontinuité stationnaire (voir paragraphe

précédent,équation (1)).

Le problème, plus général, correspondant à l'équation (4) a été peu traité jusqu'à présent. Quelques auteurs, dont Rice et Rudnicki <80>, et Kolymbas <62> l'ont abordé, les premiers dans le cadre de l'élastoplasticité incrémentale classique, dont les lois présentent deux zones linéaires (charge-décharge), et le second pour une loi à non linéarité généralisée (qui ne comporte plus de zones linéaires). Une autre étude, qui se veut synthétique, a été effectuée par Chambon et moi-même, et se trouve présentée dans la partie théorique de ce mémoire. Je renvoie donc à cette partie pour une discussion complète des travaux concernant le problème général.

III-4 La théorie de la bifurcation de Hill

La simplification de l'analyse n'est pas la seule raison qui a motivé un grand nombre de chercheurs à travailler dans le cadre de l'hypothèse (5), que Rice désigne sous le nom de "bifurcation continue" <80>. Il existe en effet des théorèmes fondamentaux, dans le cadre de l'élastoplasticité, qui indiquent qu'une telle bifurcation est nécéssairement la plus précoce, sous réserve d'hypothèses restrictives. Cette théorie est due à Hill < 52>, et a été récemment élargie par Raniecki et Bruhns <76>. J'en présente maintenant les principaux résultats.

La théorie de la bifurcation de Hill a été formulée en 1958. Elle s'applique aux matériaux élastoplastiques standards, c'est à dire à ceux qui vérifient la condition de normalité. Hill s'intéresse à la perte d'unicité d'un problème aux limites, et de ce fait les phénomènes de bifurcation envisagés couvrent une gamme de modes de déformation plus large que la seule localisation en bande de cisaillement; les modes diffus, comme le flambage ou

le cloquage, et divers modes symétriques et antisymétriques appartiennent à cette gamme.

Hill introduit la notion de solide linéaire de comparaison. Soit un solide réel élastoplastique standard, dont le comportement serait fidèlement décrit par une loi incrémentalement linéaire par zones (donc multi-linéaire); ceci signifie que l'on peut définir des zones dans l'espace des contraintes, à l'intérieur desquelles, au voisinage de l'état actuel, les incréments de contraintes et de déformation sont en relation linéaire. Le solide linéaire de comparaison, c'est un solide dont la loi est spécifiée par le tenseur de modules associé à la zone qui correspond à la poursuite du chargement le long du chemin sans bifurcation. Dans la plupart des cas, cette réponse est la moins "raide" (Needleman <73>).

Le résultat est le suivant : la bifurcation pour le solide réel n'est en aucun cas possible avant que le solide linéaire de comparaison n'admette une bifurcation.

La limitation aux matériaux standards est malheureusement sévère. En effet, elle exclut a priori toute application aux sols et matériaux granulaires; mais de plus, elle exclut aussi toutes les lois développées récemment pour les métaux, depuis que les études de localisation ont montré que l'abandon de l'hypothèse de normalité permettait des prévisions de bifurcation plus réalistes quant au niveau de déformation critique. On prend ainsi en compte maintenant, dans les métaux ductiles, la nucléation et le développement de vides microscopiques comme une dilatance, et on s'intéresse aussi à la sensibilité à la contrainte moyenne (entre autres exemples, Rudnicki et Rice <85>, Needleman <73>, Tvergaard <100>).

L'intérêt d'une extension de la théorie aux matériaux non standard est donc évident.

Une telle extension a été réalisée par Raniecki et Bruhns. Elle s'applique à l'élastoplasticité non standard à un potentiel. Cette théorie

introduit de nouveaux solides linéaires de comparaison (qui sont des matériaux élastoplastiques standard), sous la forme d'une famille à un paramètre scalaire, qui vérifient la même propriété que celui de Hill, à savoir que ces solides présentent nécessairement une perte d'unicité avant le solide réel. Ceci permet de définir des bornes inférieures du chargement qui provoquera la bifurcation.

De plus, un second solide linéaire, dont la loi est (comme pour le solide de comparaison de Hill) celle du solide élastoplastique réel sur un chemin de poursuite de chargement, peut être introduit, qui fournit une borne supérieure du chargement de bifurcation.

Cette théorie fournit donc un moyen d'encadrer le chargement critique, pour un mode donné, entre deux bornes. Elle devrait permettre des progrès significatifs dans le cadre de l'élastoplasticité non-standard définie classiquement par un critère de plasticité et une fonction potentiel des vitesses de déformation. Une telle application a déjà été effectuée par Tvergaard en 82, sur la base du modèle non standard de Gurson, pour les matériaux ductiles <100>. L'application à des lois qui ne sont pas fondées directement sur les concepts de la plasticité ne paraît cependant pas possible. Tout au plus peut-on inférer pour de telles lois que, de même que pour le second solide linéaire de Raniecki et Bruhns, le chargement de bifurcation prédit en posant l'hypothèse (5) (c'est à dire même cône constitutif, à l'intérieur et à l'extérieur de la bande, que dans le cas sans bifurcation) est un majorant du chargement de bifurcation du solide réel; c'est un encouragement à rechercher d'autres solutions, comme je l'exposerai dans la troisième partie de ce mémoire.

III-5 Principaux travaux sur la bifurcation dans les sols.

Une revue générale des travaux concernant la bifurcation dans les solides serait trop vaste; les principaux aspects de ces études ont été mis en valeur dans les paragraphes précédents, et je me limiterai ici à détailler un peu plus les travaux centrés sur les matériaux du type des sols.

J'ai déjà fait mention au paragraphe III-2 de l'étude présentée en 1964 par Mandel concernant les rapports entre stabilité et postulat de Drucker. Mandel s'intéresse dans cette étude à des matériaux élastoplastiques ne vérifiant pas la normalité, et il propose une condition nécessaire de stabilité en terme de propagation d'ondes. On a vu que cette optique rejoignait la formulation statique du problème de la bifurcation en bande de cisaillement, telle qu'elle est donnée par Rice en 1976.

Les premiers développements de la formulation directe ont été effectués dans le cadre de la mécanique des sols. Les prémisses en ont été exposées par Rice en 1973 lors d'un symposium sur la plasticité et la mécanique des sols, à Cambridge <78>. Une première application en est faite par Rudnicki et Rice en 1975 <85>, dans le cadre des roches fragiles, qui sont des matériaux dilatants et sensibles à la contrainte moyenne (comme le sont en général les sols denses). La loi étudiée est une loi élastoplastique non standard, à écrouissage isotrope. Une version modifiée est proposée en second lieu, qui permet la modélisation du développement d'angularités dans la surface de plasticité (vertex). L'étude de bifurcation par localisation montre que, si les paramètres de la loi sont choisis tels que la normalité soit vérifiée, la bifurcation n'est possible qu'avec un taux d'écrouissage nul; en revanche, dans le cas non standard, la première bifurcation a lieu soit en écrouissage positif , soit en écrouissage négatif, suivant les valeurs des paramètres de la loi et suivant le chemin envisagé. L'étude du modèle à vertex montre des prévisions améliorées, en ce sens que le taux d'écrouissage critique est augmenté (ce qui

correspond à une bifurcation plus précoce, considérée comme plus réaliste). Cependant, la bifurcation en régime de durcissement reste exclue, en particulier, dans le cas de la compression axisymétrique (tables 1,2 et 3 de la référence <85>). Les auteurs concluent que les prévisions dépendent considérablement des subtilités de la description rhéologique incrémentale, elles-mêmes encore mal comprises.

Vardoulakis a consacré de nombreux articles à la bifurcation dans les sols, à partir de 1978. Les modes de bifurcation envisagés sont la localisation en bande de cisaillement (références <101>,<103>), mais aussi la perte d'homogénéité diffuse, au cours de laquelle l'échantillon se déforme en un mode caractérisé par une géométrie périodique, symétrique ou antisymétrique (en axisymétrie <102> ou en déformation plane <104>). Le comportement du sol est décrit par une loi partielle, écrite en composantes principales; elle est fondée sur un frottement à la Coulomb, avec écrouissage à la déformation, l'angle de frottement mobilisé évoluant en fonction du cisaillement total (pas d'adoucissement). La dilatance est introduite comme une contrainte interne, et spécifiée sur la base de la théorie de la dilatance de Rowe <83>. En outre, l'hypothèse est faite que la localisation prend place au pic, c'est à dire pour l'angle de frottement maximum.

Dans l'article de 1978 <101>, une déviation d'angle α est introduite entre les directions des tenseurs contrainte et vitesse de déformation. Les angles de localisation prévus par l'analyse de bande sont alors, suivant les conditions aux limites (chargement par des poids, ou par contraintes imposées), $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2}$ (solution type coulomb), avec déviation maximum des directions principales des tenseurs, ou bien $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\nu}{2}$ (solution type roscoe), avec déviation nulle . Ces résultats sont en bon accord avec les mesures d'orientation effectuées par l'auteur.

Dans l'article de 1980, l'analyse de bande est reprise en incorporant à la loi des modules de cisaillement en axes principaux, et en abandonnant

l'hypothèse d'angle mobilisé maximum, qui introduisait une restriction à un état limite plastique. Cette analyse conduit à l'équation du quatrième degré en tangente de l'angle de la bande :

$$t^4 + at^2 + b = 0$$

Cette équation est classique depuis l'étude de Hill et Hutchinson <54>, consacrée à la bifurcation sous divers modes diffus et localisés, d'un bloc rectangulaire soumis à un essai de traction en déformation plane. Dans tous les modes étudiés, la discussion se ramène à celle de l'existence de racines réelles à une équation de ce type; Hill et Hutchinson ont utilisé une terminologie désormais classique, qui permet de classifier les régimes en trois classes :

Elliptique avec aucune racine réelle (aucun t2 >0)

Hyperbolique 4 racines réelles (deux t2 >0, éventuellement double)

Parabolique 2 racines réelles (un seul t2 >0)

La bifurcation est en premier lieu possible à la frontière Elliptique/Hyperbolique (qu'il ne faut confondre avec le régime parabolique), ou Elliptique/parabolique.

La discussion des divers régimes pour l'équation résultant de l'analyse de Vardoulakis permet de tirer un certain nombre de conclusions physiques parmi lesquelles on relève les suivantes:

- la localisation apparaît en phase d'écrouissage, c'est à dire avant le pic.

- l'angle $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2}$ n'est jamais atteint; c'est une borne supérieure.

- l'angle de la bande est approximativement $\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{4}(\phi_p + \psi_p)$, l'indice p signifiant "pic"; on retrouve ici l'angle proposé par Arthur et al. <3>, à partir de considérations microstructurales (voir chapitre II), et corroboré par des résultats expérimentaux.

Dans un article ultérieur <106>, Vardoulakis introduit un paramètre

d'imperfection dans l'analyse classique en bande de cisaillement. Le matériau au sein de la bande est supposé légèrement plus faible, à un instant donné spécifié par la déformation déviatoire totale. La faiblesse relative est traduite par un angle de frottement asymptotique diminué au sein de la bande. Le résultat est remarquable, car il indique que, suivant l'état (plus ou moins précoce) où on considère l'imperfection activée, elle peut se résorber ou s'amplifier; dans ce dernier cas, l'angle de frottement mobilisé dans la bande au moment de la bifurcation est plus grand qu'à l'extérieur, en raison de la plus grande déformation (ce qui est en apparence paradoxal).

Les articles consacrés à la bifurcation en mode diffus touchent à un problème un peu différent de celui de la localisation, mais tout aussi important pour la compréhension des phénomènes observés lors des essais élémentaires pour les sols. Le raffinement des conditions expérimentales de l'essai triaxial (suppression du frettage au niveau des têtes) a permis en effet de constater que la perte d'homogénéité en mode diffus (par exemple, le classique tonneau) n'était pas seulement dûe aux frottements aux extrémités, mais pouvait être liée au comportement du matériau. Les études faites par Vardoulakis sont à ma connaissance les premières du genre en ce qui concerne les sols; d'autres travaux sont en cours, dont notamment, en France, ceux de Loret à l'école polytechnique.

Vardoulakis utilise une loi du même type que dans ses références précédemment citées, et formule la condition d'un mode diffus alternatif superposé au mode homogène fondamental. Dans le cas du triaxial axisymétrique, le calcul montre que, pour la loi considérée, la bifurcation apparaît toujours dans la phase d'écrouissage, et qu'au-delà d'une certaine valeur critique de la pression de cellule, la déformation homogène est impossible <102>. Au contraire, dans le cas du biaxial en déformation plane, le mode diffus n'apparaît possible, pour des échantillons d'élancement courant, qu'au voisinage de la frontière E/H des régimes définis par l'équation qui gouverne la localisa-

tion; le mode diffus n'apparaîtra donc pas, car son développement est interrompu immédiatement par la localisation.

Darve, en 1978, a présenté dans sa thèse <29> une étude de localisation appliquée à la loi incrémentale développée dans le même travail. L'analyse est faite suivant la formulation classique de Rice; la loi est multi-linéaire à huit zones, mais l'hypothèse d'une même zone constitutive à l'intérieur et à l'extérieur de la bande (cf paragraphe III-3) permet d'aboutir à la condition classique det(nLn) = 0, à laquelle Darve ajoute une condition portant sur la proximité de la surface limite de plasticité. Le développement de ces conditions avec les expressions de la loi aboutit au résultat que l'angle des bandes de cisaillement avec les directions principales est donné par $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\nu}{2}$, avec ν l'angle de dilatance.

Dans un article récent <32>, Darve applique l'analyse de localisation à une loi incrémentalement non linéaire qui généralise la notion de zone tensorielle par passage à une infinité de zones. La condition de proximité de la surface limite n'est plus imposée, et les termes correctifs de la dérivation corrotationnelle de Jaumann sont introduits. La condition en déterminant nul fait intervenir la matrice tangente, définie par une linéarisation de la loi au voisinage du chemin homogène (non bifurqué). L'étude est effectuée pour une argile structurée du Québec; la condition de localisation est testée à chaque pas lors de l'intégration de la loi sur un chemin élémentaire de compression triaxiale, dont la poursuite est interrompue lorsque la condition est vérifiée. Les prévisions de localisation obtenues sont en bon accord avec les expériences .

On doit aussi noter les travaux de Vermeer <107>, qui a présenté au symposium sur les matériaux granulaires de Delft (82) une étude de localisation pour une loi élastoplastique non standard de type classique, avec critère de Mohr-Coulomb. L'originalité de la présentation réside dans une certaine

économie de moyens au niveau mathématique, sans préjudice de la généralité. Vermeer retrouve ainsi les résultats énoncés par Mandel quant à l'écrouissage critique, et par Vardoulakis quant à l'angle de la bande.

D'autres auteurs ont étudié des modèles plus grossiers, appartenant à la classe des modèles rigides plastiques. Il s'agit notamment de Mehrabadi et Cowin <71> et de Anand <1>. Les modèles envisagés sont de type non standard et frottant (pressure sensitive), à écrouissage; leur trait commun est le rejet de l'hypothèse de coaxialité (de la vitesse de déformation avec la contrainte totale), au profit d'une déviation soit postulée, soit spécifiée par la coïncidence des len et des lom, ex-caractéristiques cinématiques et statiques. La localisation apparaît possible en régime d'écrouissage, avec l'orientation critique $\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{4} (\emptyset + V)$.

Une dernière référence complètera ce tour d'horizon des études de bifurcation appliquées aux sols. Il s'agit d'une étude de Kolymbas <62>, qui introduit une modification significative de l'analyse de localisation, en posant simplement l'hypothèse de rigidité complète du matériau dans les zones autres que la bande de cisaillement. Il ne faut pas confondre ceci avec l'approximation rigide-plastique, car l'hypothèse porte sur le problème étudié et non pas sur la loi.

Cette hypothèse ramène l'équation (3) à la forme suivante :

$$n.\dot{s} = 0 \qquad (8)$$

(en effet, $\dot{F}^o=0$ et donc $\dot{s}^o=0$).

La loi de Kolymbas est une loi incrémentale non linéaire généralisée, du même type que celles proposées par Chambon <18> et Darve <30>. L'équation qui découle de (8) est alors complètement non linéaire :

$$n.(L:g \otimes n) = 0 \qquad (9)$$

puisque L n'est pas spécifié si g et n ne le sont pas. Kolymbas procède numériquement; la condition est testée à chaque pas d'intégration de la loi sur un chemin donné; les résultats montrent une bifurcation en régime

d'écrouissage, plus précoce au triaxial axisymétrique qu'en déformation plane.

L'hypothèse introduite par Kolymbas est certes restrictive, mais elle ne l'est pas plus que celle faite par tous les autres auteurs dans le domaine des sols, à savoir la poursuite dans la bande du même chemin qu'à l'extérieur (cf paragraphe III-3, équation 5). De plus elle a le mérite d'être plus immédiatement suggérée par l'expérience.

Il apparaît souhaitable, et possible, dans le cadre de l'application aux lois incrémentales non-linéaires, de s'affranchir à la fois de l'une et de l'autre hypothèses, et de traiter le cas général. C'est le sens des développements qui sont présentés dans la partie théorique de ce travail (chapitres VIII et IX) .

Deuxième partie

LA LOCALISATION A L'ESSAI BIAXIAL

ETUDE EXPERIMENTALE

La localisation de la déformation n'est évidente, dans un essai de laboratoire comme sur le terrain, qu'à des stades avancés de son évolution, lorsqu'elle apparaît comme une surface de rupture (telle que celle qu'on peut observer sur la photo de la page de garde de ce mémoire). Les analyses théoriques de ce phénomène au contraire, concernent avant tout le premier stade, celui de la localisation naissante, à l'instant où l'on quitte le chemin de réponse quasi-homogène.

C'est la raison pour laquelle j'ai consacré quelques efforts à la mise au point d'une installation expérimentale permettant d'aller observer et mesurer la naissance de la localisation et son développement ultérieur, en présence éventuellement d'imperfections délibérées et contrôlées. L'étude expérimentale consiste donc en une visualisation quantitative de la localisation dont le moyen est fourni par la méthode stéréophotogrammétrique de faux relief.

Cette méthode n'est pas nouvelle, ni la caractérisation expérimentale de champs de déformation en déformation plane. La méthode stéréophotogrammétrique a été développée notamment en Angleterre par Butterfield, Harkness et Andrawes en 1970. D'un autre côté, des champs de déformation incrémentale ont été obtenus sur des modèles en déformation plane, à partir des déplacements de billes de plomb réparties dans le modèle ; ces déplacements étaient mesurés sur des radiographies obtenues par rayons X. Cette technique a été développée à Cambridge par Roscoe et ses collaborateurs et elle a reçu de nombreuses applications, notamment par James et Bransby <57>. Le calcul des déformations à partir de ces déplacements a été effectué suivant une méthode définie par Roscoe, Arthur et James <81>, utilisant une triangulation sur la base des billes de plomb dont le déplacement est connu. Il est évidemment tentant d'utiliser conjointement la stéréophotogrammétrie et le calcul des déforma-

tions ; ceci a été fait par quelques auteurs, dont notamment Mc Gown, Andrawes et Al Hasani en 1978 <69>. La méthode que j'ai employée, fondée sur les mêmes bases, est conçue dans un esprit de généralité maximum ; elle présente en particulier l'avantage de s'accomoder d'un réseau de points de mesure absolument quelconque et non pas régulier, ce qui lui confère une grande souplesse, nécessaire pour une utilisation extensive.

Les résultats qui vont être présentés ont été obtenus sur un appareil biaxial en déformation plane. Il ne s'agit pas là d'un terrain vierge, sur lequel on pourrait faire oeuvre de pionnier. Dans la plupart des cas, les résultats recoupent ceux publiés par d'autres expérimentateurs, les confirmant ou les infirmant, ou encore les complétant. Dans l'exposé qui en sera fait, les travaux antérieurs concourant seront évoqués au fur et à mesure. L'aspect le plus novateur des travaux présentés ici consiste dans le fait que l'accent est mis essentiellement sur l'apparition et le développement de la localisation et non pas seulement sur son stade final. Ceci a été possible grâce à la méthode stéréophotogrammétrique.

Cette seconde partie comporte trois chapitres, consacrés respectivement à l'installation expérimentale, à la méthode stéréophotogrammétrique et enfin à la synthèse des résultats obtenus.

Chapitre IV

L'ESSAI BIAXIAL

IV.1. Généralités

L'essai concerné par cette étude expérimentale est un essai élémentaire en déformation plane, sur sable. J'entends par essai élémentaire un essai dans lequel l'échantillon est considéré comme un élément de matériau caractérisé à chaque instant par une seule détermination des tenseurs contrainte, déformation, de leurs vitesses et de toutes les variables d'état en général. En d'autres termes, il est voulu homogène, mais comme cette notion d'homogénéité recouvre par ailleurs une appréciation de la bonne qualité de l'essai, nous dirons plutôt un essai élémentaire (type d'essai), aussi homogène que possible.

Cet essai particulier a déjà été utilisé dans l'équipe MASTEC à laquelle j'appartiens, mais toujours sur le «sable» bidimensionnel de Schneebeli, un matériau qui par nature ne connaît que la déformation plane. Tratapel <97> puis Duthilleul <43> ont effectué un grand nombre d'essais

élémentaires ou de simulation sur ce matériau. Le premier avait pour projet essentiellement le calage d'une loi rhéologique pour ce matériau, mais ses observations concernant la localisation l'amènent à faire de nombreuses remarques sur cet aspect des phénomènes et ses travaux, conjointement à ceux de Darve sur le plan théorique, ne sont pas étrangers à l'émergence de ce thème de recherche au laboratoire de Grenoble.

La déformation plane a été choisie pour la raison que seule cette configuration permet la détermination complète du champ de déformation à partir des données mesurables en surface de l'échantillon. Toute déformation étant interdite dans la direction perpendiculaire à un plan, on sait en effet que la cinématique se reproduit par translation de vecteur parallèle à cette direction. Les déplacements des points de la face avant sont donc représentatifs de la cinématique de tout l'échantillon. L'appareillage doit permettre une visualisation parfaite de cette face avant, pour prise de vue et exploitation ultérieure.

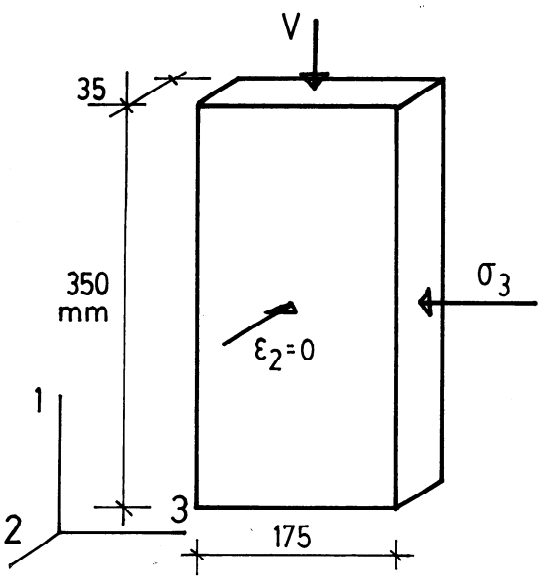


Figure 1. Essai biaxial : Géométrie et conditions aux limites.

La figure 1 présente la géométrie de l'échantillon ainsi que les conditions aux limites appliquées. L'échantillon est parallèlépipédique, de dimensions variables mais généralement nettement moins épais que haut et large. La déformation nulle est imposée dans le sens de l'épaisseur, le plan de déformation

plane est ainsi la grande face de l'échantillon. Les deux autres faces verticales reçoivent une pression imposée, notée σ_3. L'échantillon est enveloppé dès sa fabrication dans une membrane de latex de 0,4 millimètres d'épaisseur. L'écrasement axial est obtenu par mouvement relatif des faces horizontales supérieure et inférieure l'une vers l'autre.

Tel que défini jusqu'ici, un tel essai peut être parfaitement homogène : il suffit pour cela que l'état initial de l'essai soit tel (fabrication de l'échantillon) et que le chargement n'introduise pas d'hétérogénéité : en particulier, les frottements au contact sol-tête doivent être éliminés (anti-frettage) , de même qu'au contact entre la face avant (et arrière) de l'échantillon et le dispositif qui impose la déformation plane. Ces conditions parfaites ne peuvent être qu'approchées asymptotiquement ; mais on peut aussi les violer délibérément de façon à mettre en évidence l'effet des perturbations résultantes sur l'essai. D'autres types de perturbations sont aussi envisagées, comme par exemple l'application d'une force horizontale sur l'une des têtes (direction 3 sur la figure 1). Ces diverses exigences ont conduit à la conception d'un appareil dont les principales caractéristiques sont détaillées maintenant.

IV-2. Conception de l'appareil

La photo 1 montre une vue d'ensemble de l'installation. Il s'agit principalement d'une grosse enceinte pressurisable à 2 000 kPa, perçée de larges hublots, à l'intérieur de laquelle est placé le dispositif de déformation plane qui reçoit l'échantillon et le maintient à déformation nulle dans la direction frontale sur la photo. La photo 2 permet une meilleure vue de ce dispositif, ici présenté avec un échantillon à la fin d'un essai. On observe aussi sur ce cliché les têtes d'échantillon et le vérin supérieur (vérin mécanique).

2.1 Le dispositif de déformation plane

Sur la figure 2 est représentée la partie fixe de l'appareil, c'est à dire celle qui reste solidaire du socle. Du dispositif de DP (pour Déformation Plane dans cette partie), n'apparaît que la partie située derrière l'échantillon, c'est à dire une bride métallique portant une plaque de verre rectangulaire (hachurée sur le dessin). Pour garantir une déflexion négligeable de ces plaques sous la contrainte σ_3 exercée par l'échantillon au cours de l'essai, une épaisseur de 50 millimètres a été jugée suffisante. Les deux parties du dispositif sont assemblées par des entretoises vissées, qu'on peut voir sur la photo 3; l'ensemble est solidaire du socle, comme il apparaît sur la photo 4.

La figure 2 présente l'échantillon en place, entre les têtes supérieure et inférieure. On notera que l'appareil offre la possibilité d'appliquer le chargement axial soit par le bas (par le jeu du vérin hydraulique représenté figure 2 et dont on voit la queue sur la photo 4), soit par le haut

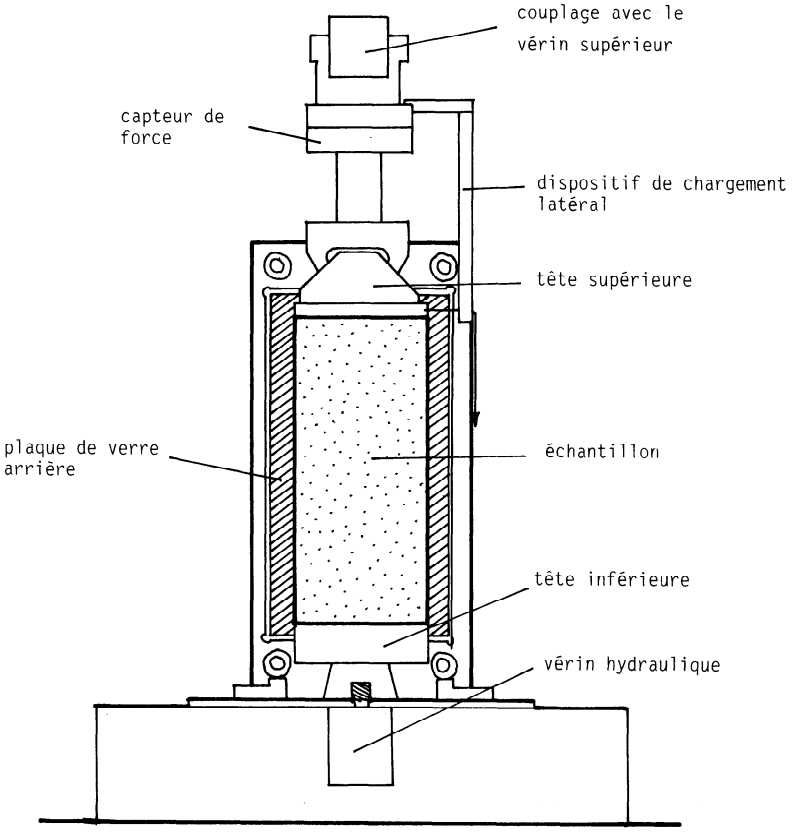


Figure 2. Appareil. Partie fixe.

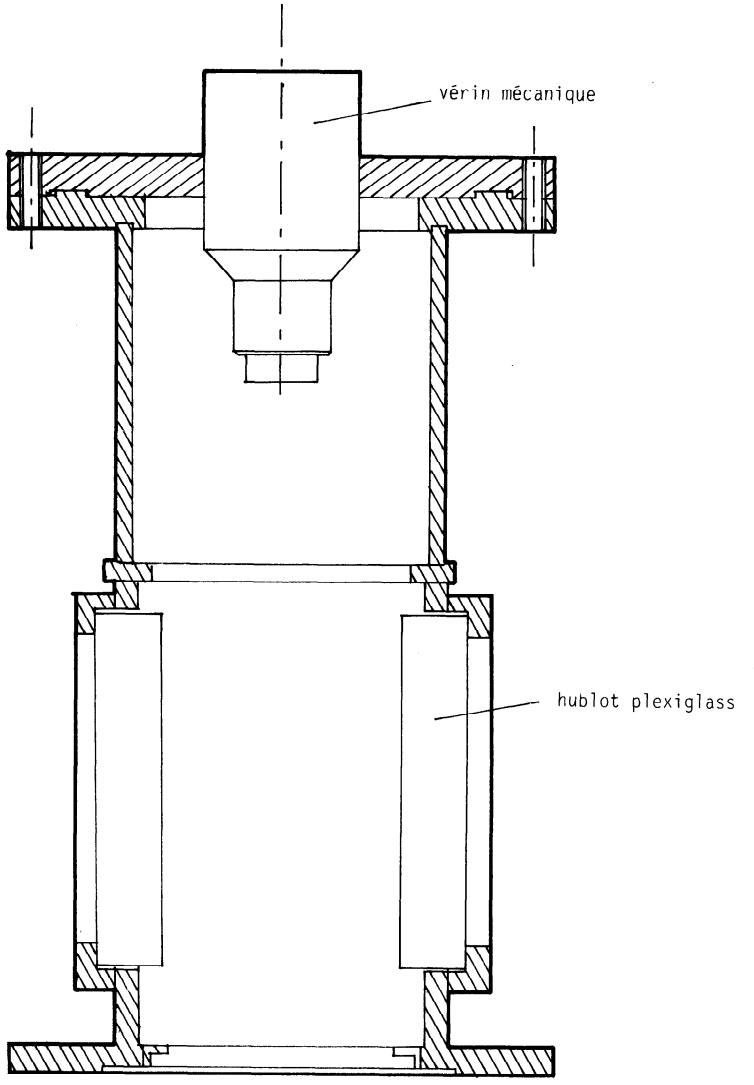


Figure 3. Appareil. Partie amovible.

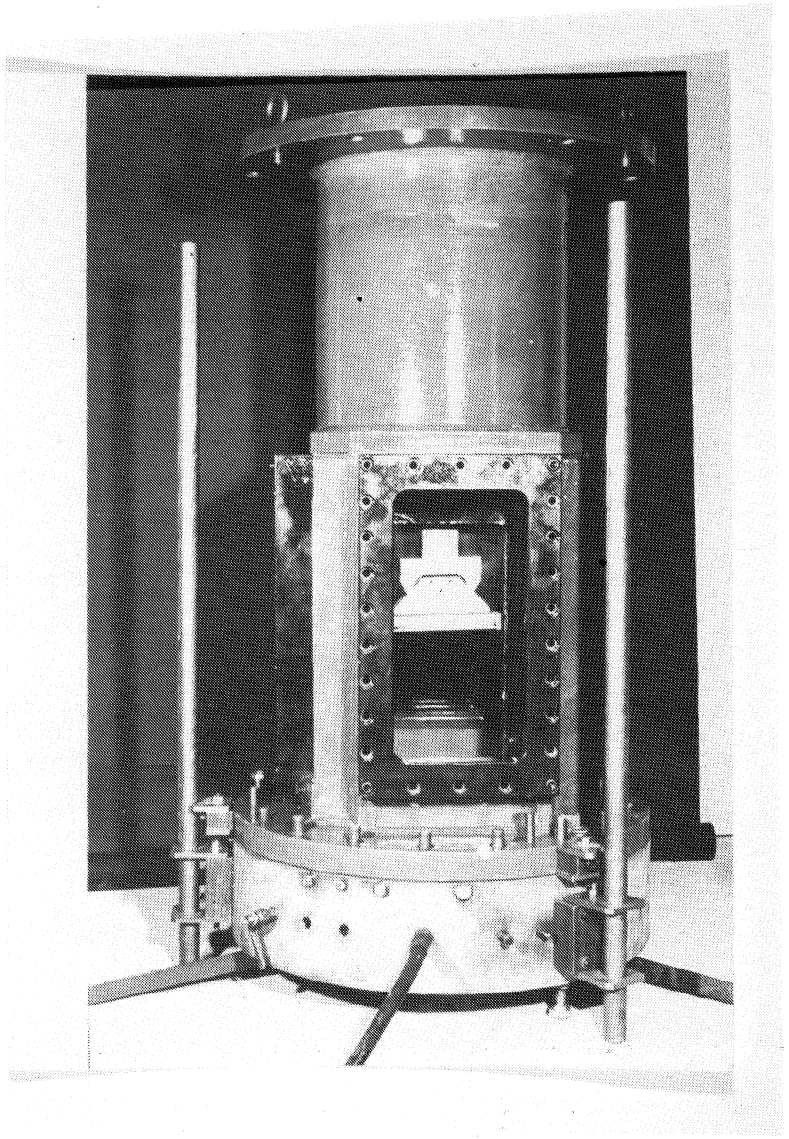


Photo 1. Vue d'ensemble.

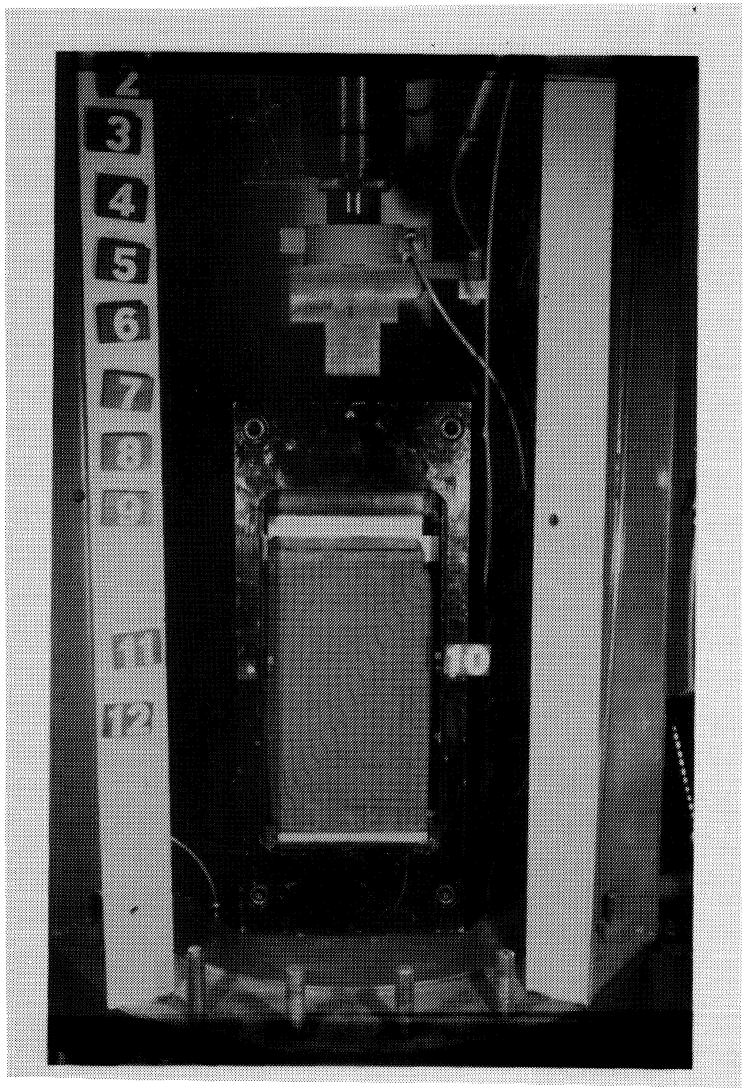


Photo 2. Dispositif de DP et échantillon.

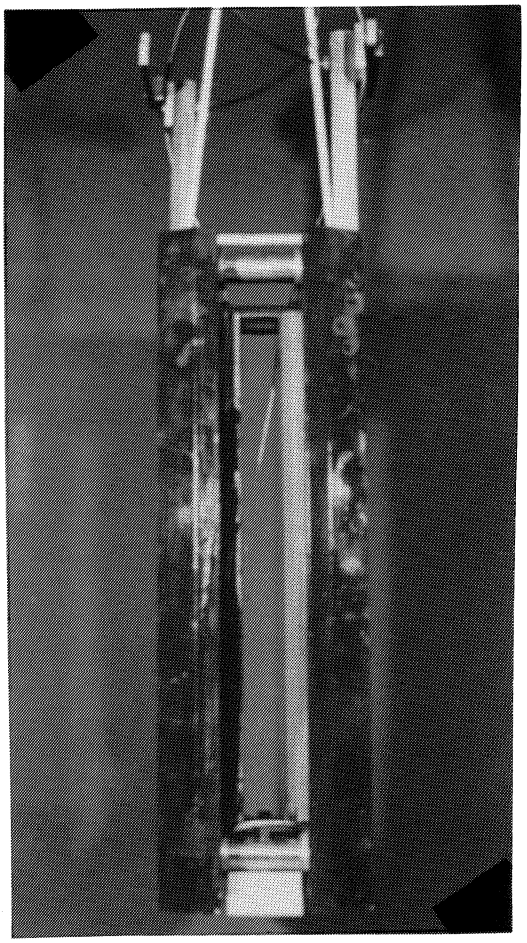
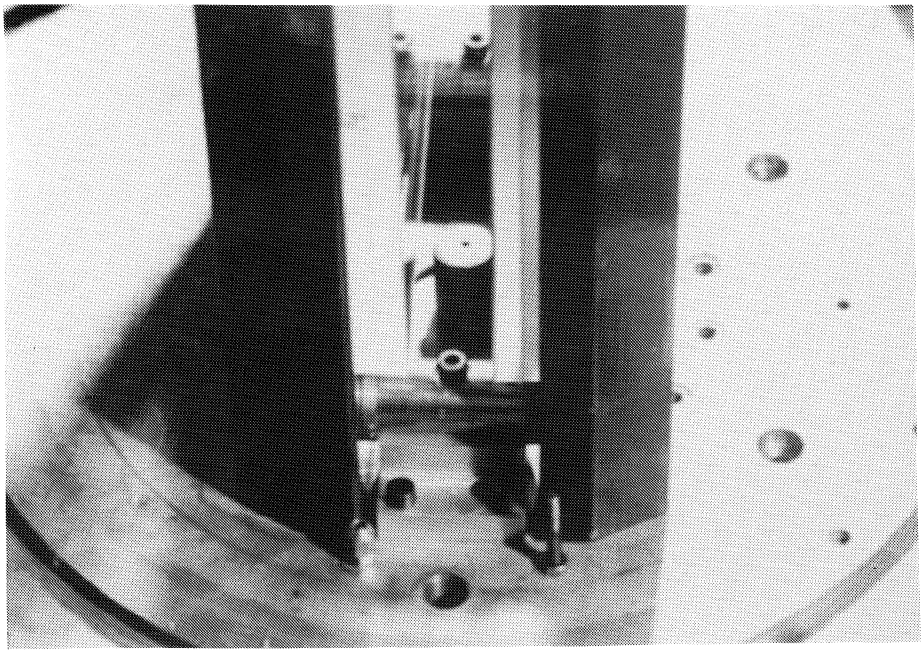


Photo 3.
Dispositif de DP.
Vue latérale.

Photo 4.
Dispositif de DP. Détail
de la partie inférieure.



(vérin mécanique, porté par le chapeau de la cellule, couplé à la tête supérieure lors de l'essai). Ces deux chargements diffèrent par le type de contrôle exercé. Dans un cas c'est une force qui est imposée et dans l'autre c'est un déplacement. La force axiale exercée par le vérin est mésurée par un capteur de force situé entre la tête supérieure et le vérin supérieur.

La figure 3 montre la partie amovible de la machine d'essai, qui constitue l'enceinte et porte le vérin mécanique supérieur.

Pour les essais à faible contrainte latérale, il est possible et plus avantageux du point de vue photographique de s'affranchir de l'enceinte en appliquant la contrainte isotrope par le moyen d'une mise en dépression contrôlée de l'échantillon. C'est le procédé qui a été utilisé pour les essais présentés dans ce mémoire.

2.2 Les têtes

De façon à permettre l'étude des perturbations des conditions aux limites sur la localisation, les têtes de la machine ont été conçues de manière à rendre possible diverses conditions d'essai :

- rotation libre des têtes dans le plan de DP, autour d'un axe situé à l'interface échantillon-tête. Dans cette configuration, aucun moment de réaction n'est développé par les têtes.

- Rotation empêchée : les faces horizontales restent telles tout au long de l'essai.

- Translation libre de la tête supérieure dans le plan de DP : aucune force de réaction horizontale n'est développée.

- Translation empêchée : la coaxialité des têtes est imposée.

- Essais frettés ou antifrettés, par lubrification de l'interface sable/tête. Les dispositions adoptées pour l'antifrettage sont du même type que celles décrites plus loin concernant la lubrification de la face de DP. Il

faut noter cependant que, dans le cas des essais antifrettés, le glissement d'ensemble de l'échantillon par rapport à la tête est empêché par la présence d'une pastille de bronze fritté, légèrement saillante (2 mm), disposée au centre de la face antifrettée.

- La glissière de la tête supérieure permet en outre d'effectuer des essais perturbés par l'application d'une force latérale sur la tête.

- Enfin, cette même glissière a permis de mesurer l'effort de réaction horizontal développé par la structure en cours d'essai, spécialement lors d'une localisation.

La photo 5 montre l'ensemble échantillon + têtes avant un essai. La plaque de verre avant n'a pas encore été posée. On observe que l'échantillon repose sur la tête inférieure, alors que la tête supérieure est encore désolidarisée en deux parties, l'une solidaire de l'échantillon et l'autre du vérin. Les pieds de centrage qui vont réaliser l'accouplement sont visibles. La photo 6 illustre les possibilités de rotation et translation des têtes.

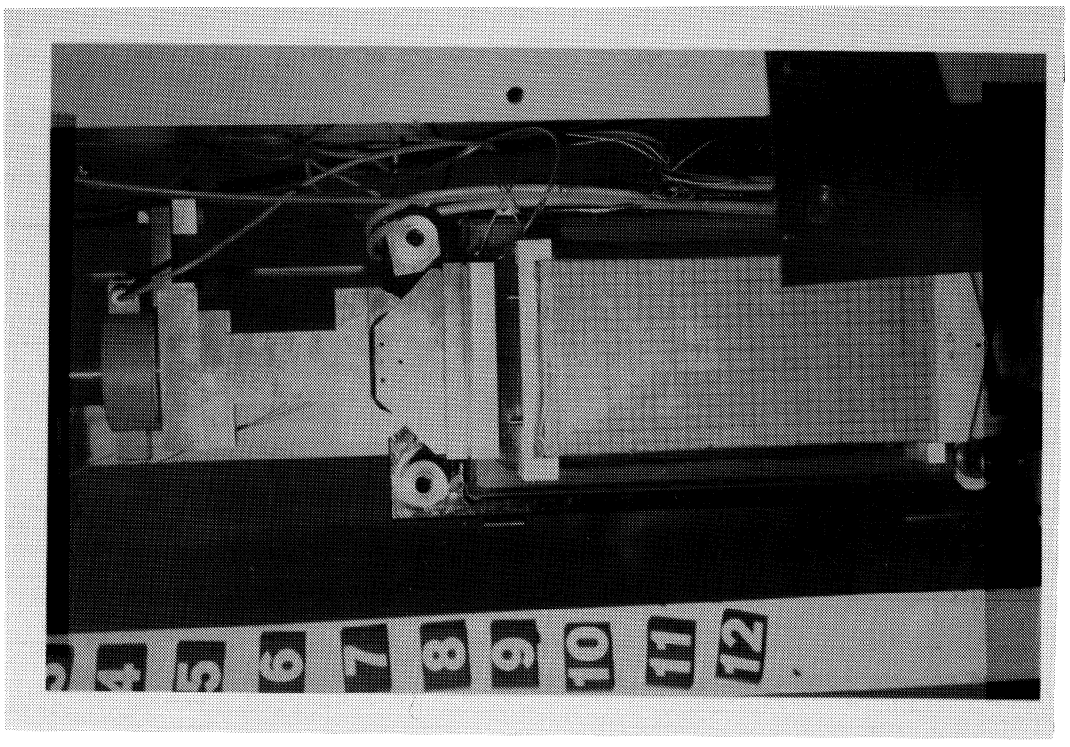


Photo 5. Echantillon et têtes avant essai.

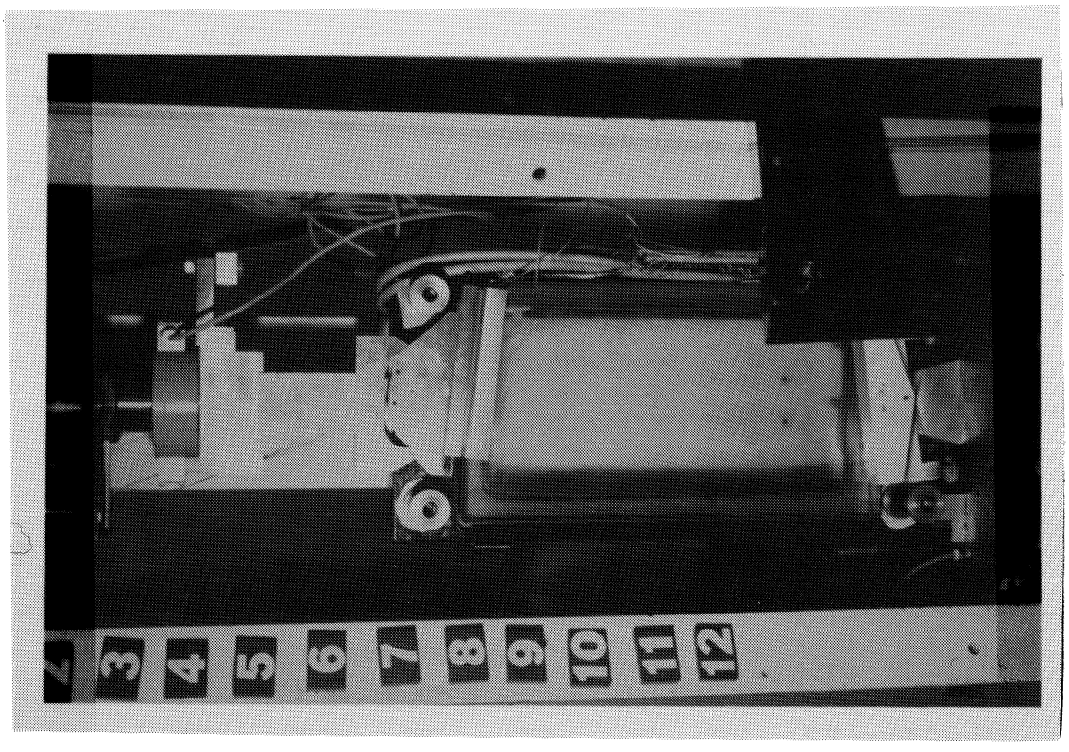


Photo 6. Rotation et translation des têtes.

2.3 La lubrification des faces de D.P.

La D.P. exige une absence totale de frottement au contact des faces de l'échantillon avec les plaques de verre du dispositif. C'est une des difficultés de ce type d'essai ; on notera d'ailleurs que tous les essais effectués sur des machines dans lesquelles le matériau frotte directement sur le dispositif, fût-il en verre, sont critiquables de ce point de vue.

Dans notre cas, le contact à lubrifier est un contact latex/verre, puisqu'il a été choisi en raison de divers impératifs dont celui de la lubrification, de travailler avec un échantillon enveloppé d'une membrane. Pour définir la meilleure solution de lubrification, j'ai réalisé une série d'essais dans une boîte de cisaillement modifiée, comme illustré par la figure 4. Dans la partie inférieure de la boîte, le sol est remplacé par une plaque de verre. Dans la partie supérieure, on dispose le sable considéré, enveloppé dans la membrane choisie. Le sable étant disposé à densité maximum, on applique la contrainte normale (35, 70, 106 et 141 kPa), et on mesure la contrainte tangentielle. On a fait varier divers paramètres : le lubrifiant, le matériau

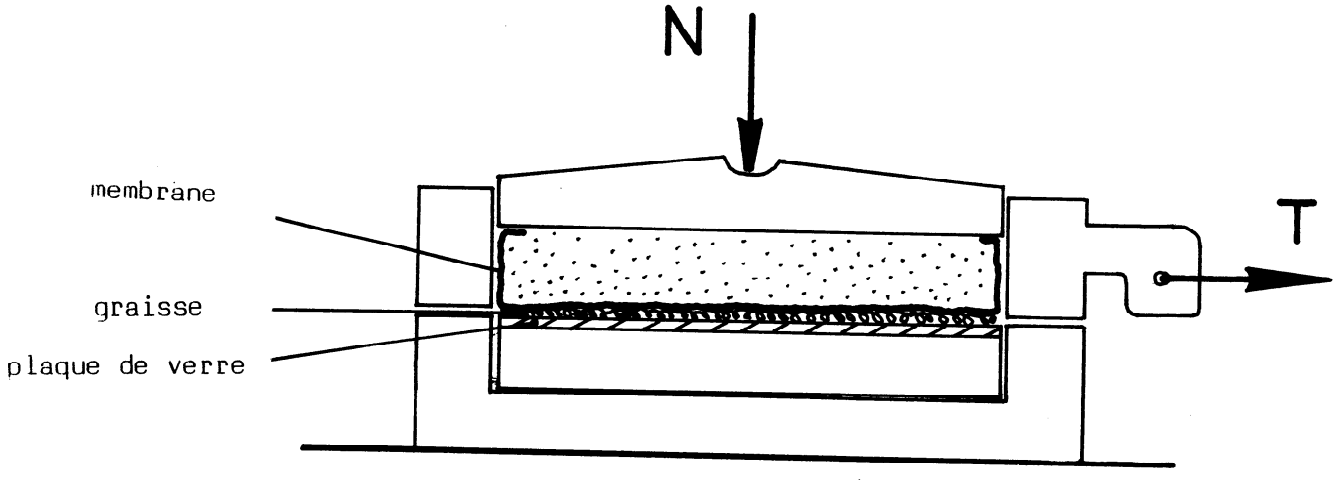


Figure 4. Boite de cisaillement modifiée pour étude de lubrification d'interface.

de la membrane, son épaisseur, la granulométrie du sable. Il apparaît que, avec la graisse au silicone Unisilkon TK44N2 de Klür, le latex permet une meilleure lubrification que le néoprène. Le tableau 1 résume les résultats des essais. Chaque essai a été répété de quatre à dix fois. Le coefficient de friction f consigné dans le tableau est le maximum observé.

Tableau 1

Essais de lubrification

e mm	matériau	f ± 0.01	Comportement
0.2	Shf	0.045	frottant
0.4	Shf	<0.01	cohérent max = 0.08 KPa
0.2	Shg	0.16	frottant
0.4	Shg	0.04	frottant
1.4	Shg	<0.01	cohérent, max = 0.08 KPa

Les deux sables utilisés diffèrent par leur granulométrie : uniforme dans les deux cas, mais beaucoup plus grossière pour le sable Shg (on reviendra plus loin sur les caractéristiques des sables). On distingue deux types de comportement : le cas frottant, pour lequel on a $\tau = f \times \sigma_n$ et le cas cohérent, pour lequel atteint une valeur indépendante de la charge normale appliquée.

Le résultat important est que la qualité de la lubrification dépend considérablement du rapport de l'épaisseur de la membrane à la taille des grains de sable. Pour un sable à granulométrie ressérrée, le comportement cohérent paraît être atteint pour une épaisseur de membrane égale au diamètre moyen des grains.

Dans leur note sur la lubrification des latex, Arthur et Dalili <3> recommandent l'addition d'une charge à la graisse, en l'occurence une poudre

de polytetrafluoroéthylène (téflon). Il ressort des résultats publiés que l'amélioration due à la charge concerne principalement l'évolution de la lubrification pour des temps importants (fluage de la graisse). Cette amélioration serait insensible pour mes essais, qui durent moins d'une heure en phase d'écrasement.

Les dispositions adoptées sont donc : graisse au silicone, membrane d'épaisseur adaptée au matériau.

Dans le but de contrôler "en place" l'efficacité de ces dispositions, j'ai réalisé deux essais comparatifs dans la machine de déformation plane, en appliquant la charge axiale par le vérin inférieur dans un cas, et par le vérin supérieur dans l'autre. La force axiale était mesurée dans les deux cas, par le capteur situé en partie haute (voir figure 2). Les courbes force axiale-déplacement obtenues ayant été comparées, il ressort que les différences ne sont pas supérieures aux écarts de répétabilité de l'essai courant. Il est ainsi confirmé que le frottement sur les plaques de verre qui est intégré ici sur tout l'échantillon est réellement négligeable.

IV-3. L'échantillon

3.1 Le matériau

Divers matériaux ont été testés, deux sables et des billes de verre. La majeure partie des essais a été réalisée sur le sable d'Hostun fin, désigné dans ces pages par le sigle Shf. C'est un sable siliceux, à grains anguleux, mais peu fragiles. La granulométrie est très uniforme (de 0,125 à 0,500 mm). Aux contraintes envisagées dans cette étude, il ne se produit pas de ruptures de grains. Les densités maximum et minimum sont 1,63 et 1,35, correspondant à des indices des vides de 0,65 et 1,00.

Le second sable est le sable d'Hostun gros (Shg). Il ne diffère du précédent que par sa granulométrie, très uniforme aussi, mais comprise entre 0,8 et 1,8 mm.

Les billes de verre, quant à elles, sont de taille uniforme (0,1 mm).

3.2 La préparation de l'échantillon

La forme parallèlépipédique de l'échantillon a rendu nécessaire la fabrication d'un moule spécial, dans lequel la membrane est mise en place et maintenue à la forme désirée par application d'une dépression à l'extérieur du volume à occuper par le sable. La photo 7 montre ce moule, vu ici en cours de démontage à la fin de l'opération.

La mise en place du sable dans le volume ainsi défini est effectué par dépôt à hauteur de chute constante, avec quelques particularités qui sont illustrées par la figure 5 : le sable est déversé depuis un entonnoir, à travers un étranglement de petit diamètre, et tombe en pluie à l'intérieur d'un tube large, dont la longueur spécifie la hauteur de chute libre des grains. L'état le plus dense est obtenu, pour le sable Shf, avec un goulot de

diamètre Ø = 4 mm et une hauteur de chute h de 950 mm ; l'état le plus lâche avec Ø = 15 mm et h = 0.

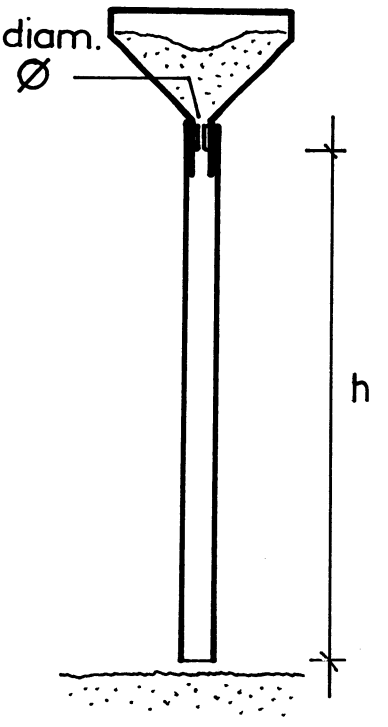


Figure 5. Dépôt du sable.

Il faut impérativement éviter que se forme, lors du dépôt, un monticule le long duquel le sable roulerait, conduisant à de fortes hétérogénéités. La surface du dépôt doit rester plane, et ceci est obtenu par un déplacement manuel continu du dispositif sur toute la section de l'échantillon au cours de l'opération de dépôt.

Le procédé a été retenu après une étude expérimentale assez vaste, englobant divers autres modes de préparation. Il est apparu qu'il était supérieur à tous les autres sur le plan d'une part de la reproductibilité, même en changeant d'opérateur, et d'autre part de l'homogénéité. Les procédés de damage et de piquage ou de vibration sont particulièrement critiquables de ces deux points de vue.

L'homogénéité de l'état initial de l'échantillon a été vérifiée par gammamétrie. La technique en question est décrite plus loin ; elle permet d'obtenir des mesures de densité locale, en divers points. A titre d'exemple, voici les mesures obtenues dans un cas : pour 80 points de mesure, la densité moyenne était de 1,62 et l'écart type 0,04.

Quant à la répétabilité de la densité globale, le résultat suivant peut être annoncé : pour 12 échantillons préparés de la même façon, la densité moyenne est 1,62 et l'écart type 0,01.

Photo 7. Le moule à échantillon.

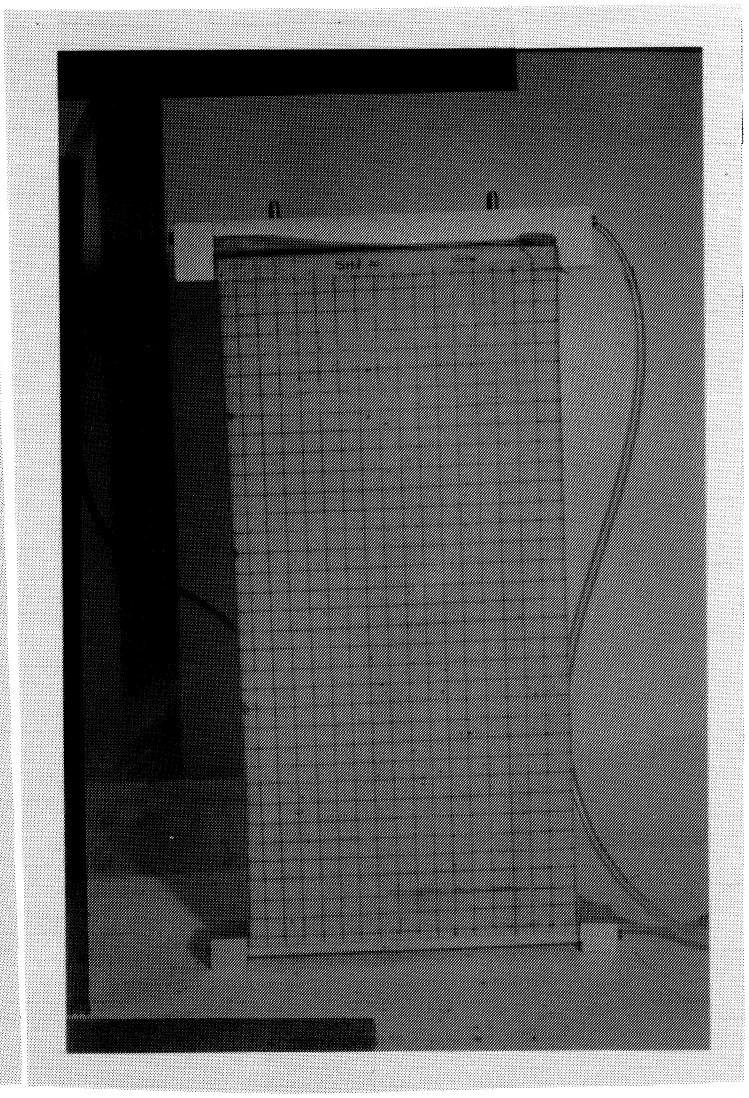


Photo 8. L'échantillon est prêt.

Après remplissage par excès du volume prévu, le matériau en excès est enlevé par aspiration, jusqu'à obtenir une surface supérieure parfaitement plane. Ceci est facilité par l'usage d'une surface de référence sur laquelle glisse la tête d'aspiration. Il est même possible de cette façon, d'obtenir une surface supérieure inclinée d'un petit angle voulu par rapport à l'axe de l'échantillon (perturbations).

La tête supérieure est alors placée et l'étanchéité faite. L'échantillon est mis en dépression à - 80 KPa, par l'intermédiaire d'un manodétendeur à vide. On peut démonter le moule : c'est l'état montré photo 7.

La préparation est menée à terme avec le marquage de l'échantillon. Un maillage rectangulaire est tracé à la main, qui ne sert que de visualisation grossière en cours d'essai. Le marquage essentiel est celui obtenu par projection de peinture sur la membrane, qui confère un aspect granulaire et permet la visualisation du relief fictif en stéréoscopie (voir chapitre V). La photo 8 montre l'échantillon à ce stade, prêt à être placé dans la machine.

3.3 Adhésion sable-membrane

Les mesures de déplacement qui vont être faites sont, comme on le voit, relatives aux déplacements de la membrane. Il est donc essentiel d'obtenir au préalable l'assurance que ces déplacements sont représentatifs de ceux du sable à l'intérieur. Deux contrôles différents ont été effectués.

Le premier a consisté à coller une couche de sable sur la face interne de la membrane. Il était envisagé de généraliser ce procédé si nécessaire. En réalité, aucune différence n'a été observée sur les déplacements mesurés. Le second contrôle est plus démonstratif encore. Grâce à la relative transparence des membranes de latex, il a été possible de suivre le déplacement de fines couches de sable préalablement coloré. On n'a pas observé de déplacement relatif de la membrane par rapport à ces couches, bien que dans ce cas, aucune disposition du type de celles décrites au paragraphe précédent n'avait été employée. On peut donc considérer comme fidèles les mesures de déplacements effectuées directement sur la membrane.

IV-4. Techniques de mesure

La principale technique de mesure dans ces essais est la stéréophotogrammétrie, dont la description est un peu longue et m'a semblé mériter un chapitre à elle seule (chapitre V).

Mais outre la stéréo, d'autres techniques ont été mises en oeuvre, certaines non moins complexes ; n'ayant eu aucune part à leur développement, même local, je me contente d'en mentionner le principe et d'indiquer l'application que j'en ai faite.

4.1 La planimétrie

Cette technique très simple a été utilisée pour mesurer, d'après les clichés pris en cours d'essai et destinés à l'exploitation stéréophotogrammétrique, les variations de volume globales de l'échantillon. Le planimètre est un appareil mécanique bien connu, d'utilisation manuelle, qui permet de mesurer l'aire définie comme l'intérieur d'un contour fermé. La précision est raisonnable (l'erreur absolue sur les déformations volumiques se chiffre environ à 0,01) et par ailleurs, la méthode permet de mesurer la variation de volume intégrée sur n'importe quel contour au sein de l'échantillon (échantillon complet, tronçon de bande de cisaillement, autres zones typiques).

4.2 La gammamétrie

La gammamétrie est une méthode de mesure fondée sur l'atténuation d'un rayon gamma au cours de sa traversée d'un corps. Il est possible d'étalonner cette atténuation de manière à en déduire une densité moyenne le long du trajet du rayon. Cette méthode a été développée à l'IMG par Bernard Wack <47>, avec application en particulier à l'essai triaxial axisymétrique ; la

machine "phogadense" a été l'outil des recherches de Jean-Michel Terriez , Safwan Labanieh <63>, Didier Bouvard <12> et récemment Eric Degny <33>. L'utilisation que j'en ai eue était un peu particulière; elle consistait, comme illustré par la figure 6, à mesurer des densités ponctuelles par traversée de mon échantillon dans sa petite dimension. Ceci était effectué avant et après essai et permettait de comparer les variations de densité obtenues avec celles données par les autres méthodes. L'erreur absolue sur la densité a été évaluée à 0,02 kg/dm3.

4.3 La tomodensitométrie

La tomodensitométrie, mieux connue sous son appellation médicale de Scanner, est une méthode qui généralise la précédente. Le rayonnement est ici X, et l'objet est irradié suivant un grand nombre d'incidences. A partir des images obtenues en transmission pour chaque incidence, il est possible mathématiquement (sauf cas particuliers) de calculer une coupe de l'objet, en terme d'absorbance locale des X. La méthode est bien développée dans le domaine

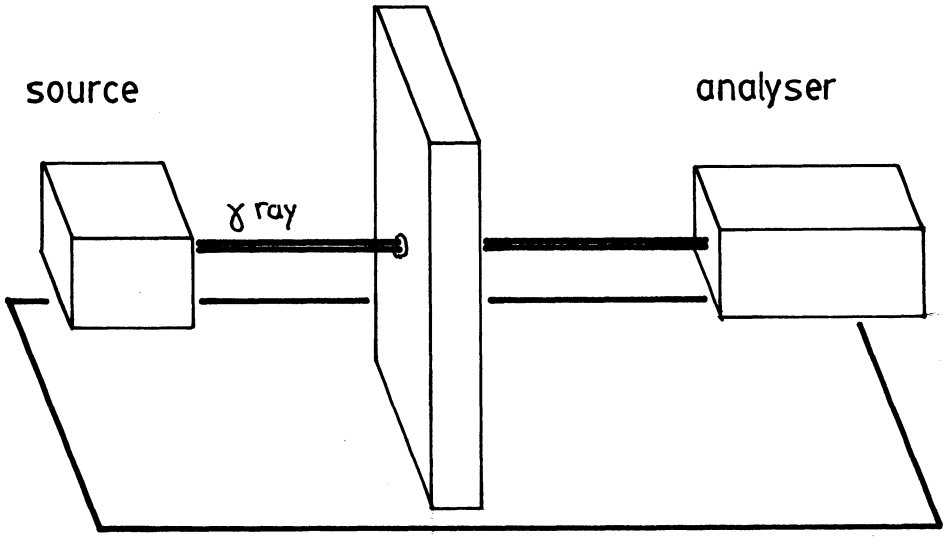


Figure 6. Gammamétrie : Principe.

médical. A. Sawczuk <87> a présenté au symposium "plasticity today" à Udine en Juin 83 une communication portant sur l'application de cette technique à la mécanique des solides. Suite à des contacts pris à cette occasion, j'ai eu la chance de pouvoir, grâce à MM Sawczuk et Cagnasso, du LMA de Marseille et à la Direction de la clinique Clairval de Marseille, avoir accès à un tel appareil et d'y tester un échantillon issu de mes essais, injecté de résine après écrasement. Les essais de déformation plane ayant été conçus précisément dans l'optique de permettre, par diverses méthodes décrites plus haut, la mesure (entre autres choses) des densités locales, la tomodensitométrie ne m'a pas apporté, sur cette application, de résultats inédits. En revanche, j'ai pu corroborer ces résultats et apprécier la puissance d'un tel outil, notamment pour des applications à la déformation tridimensionnelle. Cette application est actuellement à l'étude.

Les principales spécifications de l'essai biaxial, et les différentes techniques utilisées ayant été présentées, il reste à expliciter maintenant l'usage qui a été fait de la stéréophotogrammétrie pour obtenir la visualisation quantificative des déformations. C'est l'objet du chapitre V.

Chapitre V

LA METHODE STEREOPHOTOGRAMMETRIQUE

Ayant déjà été amené au cours de la rédaction de publications sur la méthode stéréophotogrammétrique et son application au calcul des déformations, à réfléchir et à trancher sur la meilleure façon de présenter la chose, je pense qu'il n'est pas utile d'en mettre en chantier ici une autre version. Sans doute subsiste-il toujours quelques petits regrets lorsqu'un papier se trouve figé dans son état définif. Mais la cohérence d'un texte souffre souvent de retouches faites a posteriori. J'ai donc préféré donner à ce chapitre la forme exacte d'un article récent publié dans le Journal de Mécanique Théorique et Appliquée.

Quelques remarques seront faites après l'article, en fin de chapitre.

Journal de Mécanique théorique et appliquée,
Vol. 3, N° 1, 1984, p. 79-103.

Mesure du champ de déformation d'un objet plan par la méthode stéréophotogrammétrique de faux relief

Stereophotogrametric method applied to the determination of plane strain fields

par

J. DESRUES * et B. DUTHILLEUL **

RÉSUMÉ. — La méthode stéréophotogrammétrique de faux relief permet de mesurer, avec une précision remarquable, les déplacements incrémentaux d'un nombre quelconque de points d'un objet plan soumis à une transformation. Les développements décrits dans l'article permettent, par un traitement numérique approprié de définir le champ de déformation associé. L'intérêt dans l'étude expérimentale de la localisation de la déformation plastique est mis en évidence par des exemples d'application.

ABSTRACT. — The false relief stereophotogrammetric method is a powerful method allowing one to obtain incremental displacements for any point of a plane object subjected to a transformation. In the paper we describe a numerical procedure which gives the associated strain field. This is of great interest in the domain of experimental investigation of the localization of plastic deformation, as can be seen from the examples given.

1. Introduction

La méthode présentée est une méthode de visualisation quantitative du champ de déformation d'un objet plan; elle a été conçue dans l'idée d'une application à des champs de déformation non-infinitésimale, éventuellement très hétérogènes, affectant des matériaux non élastiques. C'est la méthode la plus directe dans son principe, puisqu'elle consiste à mesurer le champ de déplacement et à en déduire les déformations par dérivation spatiale; toutefois la mise en œuvre de ce schéma n'est pas sans soulever quelques problèmes, expérimentaux et numériques, qui sont discutés ici.

La méthode a été élaborée dans le cadre d'une étude portant sur la localisation de la déformation plastique des matériaux granulaires. Dans ces matériaux, comme dans bon

* Attaché de recherche au C.N.R.S., Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex.

** Chercheur 3e cycle, Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. n° 68, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex.

0750-7240/84/01 079 25/$ 4.50/© Gauthier-Villars

nombre d'autres solides, apparaissent à partir d'un certain stade de déformation, des zones de concentration de la déformation, appelées bande de cisaillement. Dans le cadre de la théorie de la bifurcation, cette localisation peut être vue comme résultant d'une instabilité propre du matériau; les études dans ce domaine s'attachent à rechercher dans la description rhéologique du matériau (loi de comportement) les conditions d'apparition d'un tel phénomène. Le manque de données expérimentales concernant la transition de la déformation non localisée à la déformation localisée nous ont conduit à mettre au point des installations expérimentales et des techniques de mesures capables de caractériser le champ de vitesse de déformation d'un échantillon soumis à un essai élémentaire (contrainte et déformation supposées homogènes). Ces techniques s'appliquent aussi à des essais sur modèle en déformation plane.

La stéréophotogrammétrie de faux relief est une technique qui permet de mesurer le champ de déplacement d'un objet plan. Elle constitue une branche particulière de la stéréophotogrammétrie, dont les applications dans le domaine de la cartographie aérienne sont bien connues, et ont donné lieu à des développements considérables sur le plan des matériels comme sur celui des méthodes d'analyse. Il existe aussi un champ d'application non topographique qui comporte notamment dans le domaine industriel, le contrôle de structures ou d'ouvrages d'arts (réflecteur d'ondes centimétriques, barrages en terre, tunnels...), ou bien encore la mesure de l'écoulement des glaciers (Laboratoire de Glaciologie, Grenoble). Dans tous ces cas on s'intéresse à des déplacements entre deux instants, que l'on obtient soit par comparaison des trois coordonnées spatiales de points homologues, soit, directement, par la méthode de faux relief, dans le cas de déplacements contenus dans un plan : la précision est alors considérablement améliorée. La mesure des déplacements d'un objet plan subissant une déformation relève de ce dernier cas. Elle a été mise en œuvre par divers auteurs dans le courant des années 1970 dont notamment, en Angleterre, Butterfield, Harkness et Andrawes [4], en Pologne et en France, Beynet et Trampczynski [5], Bénéfice et Boehler [6]. Ces différents auteurs ont ainsi obtenus sur des échantillons ou des modèles plans, les champs de déplacement, par restitution analogique avec une résolution de l'ordre de 0,01 mm. L'originalité du travail présenté ici tient au fait qu'il décrit une méthode, fondée sur la restitution analytique simultanée des deux composantes de la parallaxe, qui permet d'accéder non seulement aux champs de déplacement mais aussi à la détermination complète, en grandes déformations, du champ de déformation; c'est bien là, en définitive, l'aboutissement de la méthode, dans la mesure où l'interprétation directe des cartes d'isovaleurs conjuguées des composantes du déplacement se révèle difficile; elle ne donne aucune information par exemple, sur les variations de volume.

Cet article présente le principe de la méthode, les détails de sa mise en œuvre, et discute l'application à quelques exemples.

2. Principe

Soit un objet *plan* soumis à une transformation (non nécessairement homogène) *plane*. Les déplacements des points de l'objet dans le plan caractérisent entièrement la transformation; toute l'information relative à un état peut donc être mémorisée par un cliché pris à

l'instant correspondant à cet état. L'histoire de la transformation peut être enregistrée sous la forme (discrétisée sur le temps) d'une série de tels clichés, obtenus d'un point de vue fixé dans l'espace. La stéréophotogrammétrie permet de restituer et d'exploiter cette information.

Il n'est pas possible, dans le cadre de cet article, d'entreprendre une discussion générale de la photogrammétrie, et de ses méthodes. L'application qui nous intéresse ici constitue un sous-ensemble bien particulier de cette discipline; un certain nombre de simplifications découlent du fait que l'on se situe d'emblée dans le cas dit « normal », la prise de vue étant faite perpendiculairement au plan de l'objet; en outre, le point de vue étant unique et l'angle de visée fixe, le problème de l'orientation des gerbes perspectives se simplifie considérablement. Nous nous limiterons donc à l'énoncé de quelques éléments fondamentaux concernant le lien entre la vision du relief et les différences géométriques existant entre les deux images observées. Le principe de nos mesures, quant à lui, peut être entièrement explicité sans faire appel à la notion de relief, phénomène qui n'intervient dans le présent cas que dans la pratique de l'opérateur qui manœuvre le stéréocomparateur. Pour plus de détails sur la photogrammétrie, on pourra se reporter à l'ouvrage de H. Bonneval, « Photogrammétrie générale » [7].

La perception du relief est un phénomène physiologique, fruit de la vision binoculaire et du décodage effectué par le cerveau. Considérons (*fig.* 1) un segment AB appartenant à un plan horizontal passant par la ligne des yeux de l'observateur. Ce segment est vu sous deux angles différents, θ_1 et θ_2, par chaque œil. La différence des segments $A'_1 B'_1$ et $A'_2 B'_2$, proportionnelle à la différence de profondeur Δp, est perçue physiquement et produit la sensation de relief.

Si l'on intercale sur le trajet des rayons lumineux deux écrans P_1 et P_2, et que l'on matérialise sur ces écrans les traces des rayons, on peut enlever l'objet AB sans introduire de modification dans la perception. Les écrans peuvent être des photographies, on a alors défini un couple stéréoscopique.

Il s'agit là d'une simplification, dans la mesure où nous faisons abstraction de la relation entre convergence des yeux et accomodation, phénomène qui rend nécessaire l'utilisation d'appareils adéquats, les stéréoscopes. Mais ceci suffit à expliquer qu'une déformation d'un objet plan puisse être source, en vision stéréoscopique, d'une impression de relief : si P_1 et P_2 sont deux clichés successifs d'un même objet subissant une déformation, l'élongation du segment $a_1 b_1$ en son homologue $a_2 b_2$ se traduira par la différence de profondeur fictive Δp.

Supposons maintenant que les points b_1 et b_2 n'appartiennent plus aux photos P_1 et P_2, mais au système optique de l'appareil d'observation des couples de clichés, et qu'on puisse déplacer ces points par rapport aux photos, dans un mouvement soit couplé, soit découplé. Soit d'abord un mouvement couplé amenant b_1 en coïncidence avec a_1; le point b_2 ne coïncide pas avec a_2, donc le point B apparaît toujours en arrière de A. Soit ensuite un mouvement découplé qui amène b_2 en coïncidence avec a_2; les points A et B paraissent alors confondus. La mesure des mouvements couplés donne la coordonnée de a_1 sur P_1, et la mesure des mouvements découplés relatifs, la profondeur sous forme d'une parallaxe, qui est donc une différence de coordonnées. Ceci illustre à la fois le procédé de mesure, que l'on appelle le pointé stéréoscopique, et la relation directe que l'on peut établir avec les déplacements de points matériels homologues, lorsque l'on

s'intéresse à un objet subissant une déformation, au lieu d'un objet rigide vu sous deux angles différents.

Il reste à éclaircir un point, qui est celui de la mesure des parallaxes dans la direction perpendiculaire à la ligne des yeux. Ces parallaxes ne donnent pas lieu à une impression de relief; elles produisent une gêne visuelle, par rapport à laquelle la vue dispose d'une certaine tolérance. Toutefois, il est possible pratiquement lorsque l'on opère sur un stéréocomparateur, d'ajuster la parallaxe « y » tout en pratiquant le pointé stéréoscopique, et ceci avec une précision comparable à celle du pointé (d'après nos mesures, à défaut d'études connues).

Quantification

Deux voies s'ouvrent, connaissant les principes de base, pour quantifier le relief observé, vrai ou fictif. La plus immédiate consiste en des séries de pointés ponctuels, suivis d'une exploitation numérique des mesures obtenues : c'est la restitution analytique. Une autre voie est celle de la restitution analogique, qui consiste à déplacer continûment le point fictif à la surface de l'objet, en entraînant un dispositif, mécanique ou autre, capable de tracer simultanément la courbe de niveau ainsi définie. Ce procédé a été le plus utilisé, en raison de la solution élégante et efficace qu'il apporte aux nombreux problèmes de redressement, orientation des faisceaux perspectifs, que nous avons passés sous silence ici pour la raison qu'il n'apparaissent pas dans l'application envisagée, et qu'ils nécessiteraient des développements considérables. La voie analytique, source de calculs fastidieux, connaît maintenant un nouvel essor grâce à l'apparition des ordinateurs.

Jusqu'à présent, les auteurs qui ont mis en application la méthode de faux relief pour la mesure des champs de déplacement ont en général utilisé la méthode analogique. Elle présente cependant de nombreux inconvénients :

– nécessité de deux opérations complètes pour chaque couple : une pour les parallaxes horizontales, une pour les verticales, avec en outre la nécessité de corriger, sans pour autant la mesurer, la parallaxe perpendiculaire à celle que l'on mesure;

– difficulté technique de l'opération, nécessitant une formation professionnelle et un entraînement très poussé;

– impossibilité de poursuivre le traitement des données au-delà de ce résultat graphique. En particulier, le calcul des déformations est impossible.

En revanche, la voie analytique comporte des avantages, dont le prix est la conception et la mise au point de la chaîne de traitement. Parmi ces avantages :

– la précision est améliorée (rapport 5/1 cité par Ph. Hottier dans l'ouvrage référencé [7]);

– l'appareillage nécessaire se ramène à un simple stéréocomparateur;

– les deux champs de parallaxe x et y sont obtenus en une seule opération;

– la formation de l'opérateur est plus rapide;

– il est possible d'ajuster la densité du semis de points de mesure aux gradients observés en éclaircissant le semis sur les « plateaux »;

– enfin toute possibilité reste ouverte concernant le traitement numérique ultérieur, qui fournira non seulement des courbes de niveau d'iso-déplacement mais aussi des cartes des différentes composantes de la déformation.

C'est le second procédé, qui est décrit ici. L'appareil de mesure à utiliser est un stéréocomparateur; nous avons utilisé notamment un appareil assez simple, le steko 18×18 de Zeiss Iena, mais aussi une machine de la dernière génération, le traster de Matra.

Résultats cherchés

On cherche à obtenir quantitativement les résultats suivants :

– champs de déplacements totaux et incrémentaux dans deux directions orthogonales;

– champs de déformation pure finie, totaux et incrémentaux (ou champs de vitesse de déformation) et champs de rotation matérielle associés.

Qualitativement, on s'intéresse à l'observation de structures complexes qui défient la quantification : gradients extrêmes confinant à la discontinuité, par exemple.

3. Technique photographique

Le sujet doit présenter un aspect visuel permettant l'identification par contexte des points homologues; suivant les cas, un simple « grain » visuel de l'objet pourra suffire ou au contraire il faudra matérialiser des points, voire même des marques d'identification. Nous n'aborderons pas ici les techniques de marquage.

Les clichés destinés à l'exploitation stéréophotogrammétrique doivent satisfaire à un certain nombre de conditions, qui sont les suivantes :

– qualité de l'image projetée sur la surface sensible : l'absence de distorsion (qui peut cependant être étalonnée), la définition, la netteté dépendent essentiellement de l'objectif et du boitier ou banc utilisés. En ce qui nous concerne nous utilisons une chambre Linhoff équipée d'un objectif de la même firme.

– stabilité dimensionnelle du cliché : le support et l'émulsion ne doivent pas être sujets à des déformations, au moment du développement notamment. L'usage de plaques photographiques à support de verre fournit de bonnes garanties à cet égard;

– contraste et définition de l'image obtenue : dépendent du traitement chimique et de la qualité de l'émulsion;

– la taille de l'image sera aussi grande que possible, sous réserve de la conservation d'une finesse de détail indispensable à l'opération de stéréorestitution. Nous utilisons des plaques au format standard 4×5 inch ($10 \times 12{,}7$ cm);

– le référentiel doit être matérialisé par des points parfaitement définis, placés dans le plan du sujet.

Remarque : l'utilisation d'un appareil de prise de vue Hasselblad au format 6×6 sur film ordinaire a conduit à des résultats de qualité raisonnable.

4. Mesure des déplacements

Que cherche-t-on ?

Définissons quelques notations, soient :

x_i coordonnées dans le repère du labo (référentiel) au temps t_2;

X_i coordonnées dans le repère du labo (référentiel) au temps t_1;

X état de référence, $i = 1, 2$.

Les déplacements relatifs : $x_i - X_i = U_i$ sont les déplacements cherchés. Ils incluent toute la transformation matérielle subie entre t_1 et t_2, c'est-à-dire la combinaison translation-rotation-déformation.

Que mesure-t-on ?

Sur l'appareil, on mesure :

X_i^* coordonnées du point sur la photo 1 dans les axes de l'appareil de stéréocomparaison;

pX_i^* parallaxes, c'est-à-dire différence des coordonnées des points homologues entre les deux clichés tels qu'ils sont positionnés dans l'appareil (de stéréocomparaison) dans les axes de cet appareil.

Sur d'autres appareils (Traster, par exemple), on obtiendra X_{iG}^* et X_{iD}^* (G et D pour gauche et droite), c'est-à-dire les coordonnées respectives des points homologues des clichés 1 et 2, placés 1 à gauche et 2 à droite, dans les axes de l'appareil. Les parallaxes s'en déduisent directement.

Les points homologues sont les points-image d'un même point matériel; l'identification sans ambiguïté, par contexte, de ces points homologues n'est pas le moindre avantage de la méthode.

Transformation rigide surajoutée

Il n'est pas nécessaire de positionner les clichés de telle façon que les parallaxes des points fixes du sujet (le référentiel matérialisé par des marques fixes liées à la machine d'essai) soient strictement nulles : ce réglage doit être effectué grosso modo pour faciliter les mesures, mais la méthode décrite ci-après permet de corriger numériquement l'écart résiduel. On doit donc considérer que les mesures obtenues résultent de la superposition de deux transformations :

– une transformation rigide, opératoire, qui n'est pas physique et qu'il convient d'éliminer;

– la transformation effective, qui est celle qui nous intéresse, et qui peut comprendre une translation et une rotation, physiques celles-là, en plus de la déformation.

Référentiel

Il est donc nécessaire de disposer sur les clichés d'un *référentiel* indéformable, matérialisé par des points visibles situés dans le plan de mise au point de l'appareil de prise de vue, c'est-à-dire dans le plan de la face avant de l'échantillon. On peut alors déduire de la transformation mesurée la transformation rigide du référentiel, par une opération qui doit annuler les parallaxes des points du référentiel. En outre, la mesure des distances relatives de ces points sur le cliché de gauche fournit l'échelle.

Présentation en axes fixes et à l'échelle

Après déduction de la transformation rigide, il convient d'effectuer une rotation sur la partie restante, de façon à présenter les mesures dans des axes liés au référentiel et non pas dans les axes de l'appareil de stéréocomparaison. Ceci est nécessaire pour pouvoir comparer les incréments successifs. En outre, on doit remettre à l'échelle les mesures obtenues par une homothétie de rapport défini d'après le référentiel.

Traitement numérique

Ces tâches sont effectuées, à partir des mesures brutes X_1^*, X_2^*, PX_1^*, PX_2^* par un programme auquel il faut fournir, outre les mesures, l'angle θ de la rotation rigide, à déduire, l'angle α de la rotation à effectuer pour présentation en axes fixes, et le coefficient d'échelle.

Opération 1 : Déduction de la transformation rigide du sujet par rotation θ et translation annulant strictement les parallaxes du point 1 du référentiel.

Opération 2 : Rotation d'angle α.

Opération 3 : Mise à l'échelle de X_1, X_2, PX_1, PX_2.

L'angle têta peut être déterminé en calculant la valeur de cet angle pour chaque couple de vecteurs homologues (cliché 1, cliché 2) définis à partir des points du référentiel pris 2 à 2; on prend ensuite la valeur moyenne de l'angle; l'écart-type donne une indication de la qualité des mesures.

Le semis

Une fois effectuées les opérations 1, 2, 3 ci-dessus décrites, on a obtenu un ensemble de mesures de déplacements incrémentaux en x et y, associés à des points de coordonnées X_i sur le cliché 1. Appelons cet ensemble de quadruplets le *« semis »*.

La densité du semis dépend de la façon dont l'opérateur a pris les mesures lors de l'opération de restitution. En particulier, il peut tirer bénéfice de la vision stéréoscopique pour repérer les zones de fort gradient de déplacement (qui seront vues comme des « talus », voire des « falaises »), et densifier le semis dans ces zones en prenant des mesures en des points proches.

La représentation des vecteurs déplacement aux points du semis fournit une première visualisation de l'écoulement. Mais une exploitation plus poussée est nécessaire pour donner une mesure de l'homogénéité ou hétérogénéité des champs de déformation. Cette exploitation rend nécessaire l'interpolation.

5. Interpolation de la fonction déplacement

Soit U_i (X_j), i, $j=1$, 2, la fonction vectorielle de deux variables des déplacements associés à un point de coordonnées X_1 et X_2. Le problème de l'obtention de cette fonction à partir des valeurs connues, en nombre fini, aux points du semis, est un problème d'interpolation.

Interpolation linéaire

La méthode d'interpolation retenue est la plus simple : la fonction U_i est approchée par une fonction linéaire par morceaux, définie sur une partition en triangles du domaine étudié. Les sommets des triangles sont les points du semis, et les données en ces sommets déterminent entièrement la fonction continue : les dérivées en revanche ne sont pas continues.

Le maillage

L'opération d'interpolation permet de calculer les valeurs de la fonction approchée en un nombre fini de points, répartis régulièrement sur le domaine étudié, aux nœuds d'un maillage dont on définit la taille approximative de la maille. Il va de soi qu'aucun avantage ne sera obtenu d'un resserrement de la maille au-delà de l'espacement minimal des points de mesure, mais en revanche, un maillage trop lâche ne permettra pas de tirer profit de mesures effectuées en des zones de fort gradient, si les distances d'un point à l'autre sont plus petites que la maille.

Représentations

La représentation de la fonction approchée permet d'étudier les caractéristiques du champ de déplacement et en particulier ses variations de gradient. Parmi les représentations possibles, les isovaleurs des composantes verticale et horizontale (axes de l'espace physique) de la fonction sont particulièrement intéressantes; les représentations en perspective (bloc diagrammes) peuvent aussi être jugées utiles quant à la visualisation.

Influence de la triangulation sur les résultats

Quelques remarques peuvent être faites concernant la précision et la fiabilité de la méthode.

On a déjà noté, quant à la précision, que celle-ci sera aussi bonne que celle des mesures dès que le maillage sera pris aussi fin que le semis dans ses zones les plus denses. Sous le terme « fiabilité » on vise la réponse à la question suivante : de combien s'écarte la fonction approchée de la réalité ?

Cette question appelle une réponse en plusieurs points. Remarquons d'abord que, contrairement à beaucoup de méthodes d'interpolation, celle retenue offre l'avantage de respecter rigoureusement les valeurs expérimentales : si l'on cherche la valeur de U_i en un point du semis, celle-ci est égale à la donnée expérimentale. Ceci est un avantage décisif dans notre cas, dans la mesure où les gradients de la fonction sont extrêmement grands par endroits : une interpolation « adoucissante » obérerait le résultat dans ce qu'il a de plus caractéristique.

En revanche, il apparaît très vite que le résultat n'est pas indépendant de la partition en triangle adoptée. Il existe un grand nombre de façons « raisonnables » de partitionner le domaine sur la base du semis expérimental. Aucune n'est strictement équivalente quant aux valeurs résultantes aux nœuds du maillage et certaines peuvent être très différentes. Cette difficulté ruinerait la méthode si elle ne pouvait être contournée de la manière décrite ci-dessous :

Le choix de la triangulation

L'idée de base est de respecter les forts gradients détectés expérimentalement. Rappellons que la technique stéréophotogrammétrique permet de visionner les gradients sous l'aspect d'un relief fictif. L'appréciation plus ou moins bonne de ce relief fait partie des qualités d'expérimentateur de l'opérateur et doit se traduire par une densification locale du semis. Une telle densification, le long d'une bande de cisaillement par exemple, est donc, en bon usage de la méthode, liée à un gradient fort des déplacements. Le choix des triangles devra alors être fait de façon telle qu'aucun triangle ne couvre pour partie une zone de semis dense et pour partie une zone de semis lâche; on sait en effet que, les gradients étant très différents, entre ces zones, l'approximation linéaire sur le triangle à cheval sera très mauvaise. Au contraire, on cherchera à réaliser une partition en triangles telle que la direction de plus grand allongement des triangles soit parallèle à la direction générale d'allongement de la zone de densification du semis (si une telle zone existe et si elle présente un allongement). Dans les zones de faible variation des gradients, les modifications de la partition n'entraînent que des modifications négligeables de l'interpolation. Ceci permet de lever l'objection d'arbitraire qu'on pourrait opposer à la méthode, en replaçant l'opération de partition du domaine, opération volontairement manuelle, dans le domaine de l'initiative de l'expérimentateur, éclairée par l'observation.

6. Calcul des déformations finies entre deux états

(*a*) *Transformation finie, transformation linéaire tangente, déformation et rotation pures*

Une transformation finie $\mathscr{T}$ est définie par la donnée d'une fonction vectorielle $x_i\,(X_j)$ $i, j=1,3$ qui définit les coordonnées actuelles x_i des points matériels de coordonnées X_j dans l'état de référence. La transformation est « finie » si les $x_i - X_i$ ne sont pas infinitésimaux.

On définit la *transformation linéaire tangente* à la transformation réelle (tlt) comme l'application linéaire liant les vecteurs **dx** aux vecteurs **dX** :

$$\mathbf{dx} = \mathbf{F}\,\mathbf{dX}, \tag{1}$$

avec :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ou} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \tag{2}$$

(Germain, 73, p. 92). Le tenseur F est aussi connu sous le nom de gradient de la transformation.

La transformation $\mathscr{T}$ peut toujours être considérée comme le produit d'une rotation R et d'une extension W ou bien d'une extension V et d'une rotation R. Pour la tlt on a :

$$\mathrm{F} = \mathrm{RW} = \mathrm{VR}. \tag{3}$$

On appelle W le tenseur de déformation pure à droite (Germain [1], p. 87).

Les résultats finaux seront exprimés par le tenseur de Hencky, qui se définit à partir de W de la façon suivante :

– il a mêmes axes principaux,

– ses valeurs propres sont les logarithmiques naturels des valeurs propres de W. Le critère de tensorialité définit les composantes du tenseur dans les axes principaux.

Nous intéressant à la déformation plane, nous nous plaçons en dimension 2.

Notons :

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix};$$

de (3) on déduit :

$$\mathbf{W}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}, \tag{4}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{yx} & W_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

d'où un système de 4 équations à 4 inconnues : W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}, θ puisque $W_{xy}=W_{yx}$ (le tenseur de déformation pure est symétrique).

On obtient :

$$\begin{cases} \theta=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{F_{yx}-F_{xy}}{F_{xx}+F_{yy}}\right), \\ W_{xx}=F_{xx}\cos\theta+F_{yx}\sin\theta, \\ W_{xy}=F_{yx}\cos\theta-F_{xx}\sin\theta, \\ W_{yy}=F_{yy}\cos\theta-F_{xy}\sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

On peut alors calculer les valeurs propres λ_1, et λ_2 de W, et de là, celles du tenseur de Hencky $l_i=\operatorname{Log}\lambda_i$, ainsi que les différents invariants de ces tenseurs.

(*b*) *Déformation entre deux états*

Supposons donc que nous disposions de clichés de deux états distincts d'un même corps (à deux dimensions). La méthode stéréophotogrammétrique de faux relief nous fournit les données suivantes pour chaque paire de points homologues :

coordonnées du point sur le cliché de gauche X_1, X_2,

déplacement relatif entre les deux clichés U_1, U_2.

Si l'on adopte pour configuration de référence la configuration de l'état 1, la transformation $\mathscr{T}$ d'un état dans l'autre est définie par :

$$\mathbf{x}=\mathscr{T}(\mathbf{X})=\mathbf{X}+\mathbf{U},$$

ou :

$$x_i=X_i+U_i. \tag{7}$$

Le calcul du champ de déformation pure auquel a été soumis le corps entre ces deux états nécessite la détermination du champ de gradient de la transformation F défini plus haut (2).

De (2) et de (7) il découle :

$$F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j}, \tag{8}$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j}, \tag{9}$$

avec δ_{ij} symbole de Kroneker $= 1$ si $i=j$; 0 si $i \neq j$.

On a donc besoin des dérivées partielles de la fonction vectorielle U.

(c) Dérivation spatiale

Cette fonction est connue par ses valeurs aux nœuds d'un maillage régulier, elles mêmes obtenues comme on l'a vu par interpolation à partir des mesures expérimentales aux points de ce que nous avons appelé le semis.

Bien que régulier, au sens que chaque ligne du maillage comporte le même nombre de points, le maillage n'est pas strictement orthogonal et équidistant. Il est obtenu, dans le cas de domaines d'étude non rectangulaires, par transformation conforme, suivant la méthode mise en œuvre par Chambon (Chambon [2], p. 57-69). Les mailles sont alors non pas rectangulaires mais simplement quadrilatérales. Il n'est donc pas possible de définir simplement les dérivées partielles par rapport aux variables d'espace X_i.

La solution à ce problème consiste à utiliser une technique d'éléments finis quadrilatéraux isoparamétriques à quatre nœuds (Chambon [2], p. 82-83). L'interpolation des déplacements sur l'élément est quadratique incomplète; les déplacements sont linéaires sur les frontières de l'élément. La mise en œuvre de cette technique nous permet d'obtenir les gradients de la fonction $U_i(X_j)$ au centre de gravité de l'élément quadrilatéral dont les sommets sont quatre points du maillage, soit les $\partial U_i/\partial X_j$ cherchés.

Les composantes de F_{ij} au centre de gravité de l'élément considéré sont donc obtenues immédiatement à partir du champ de déplacement, moyennant une technique de dérivation faisant appel aux éléments finis. Pour plus de détails concernant ces techniques, *voir* par exemple Zienkiewicz [3].

$F_{ij}(X_k)$ étant désormais connu, il est possible d'appliquer les résultats (6) et de calculer les champs de rotation, et de déformation pure.

7. Caractérisation complète : histoire des champs de déformation totale et de vitesse de déformation

Dans le paragraphe 4 on a décrit la méthode permettant de calculer le champ de déformation finie entre deux états d'un échantillon matérialisés par deux clichés; le premier de ces états était défini comme état de référence.

Au cours d'un processus expérimental concernant un domaine sur lequel on désire mesurer l'évolution de la déformation, supposons que l'on ait réalisé n clichés à n états

successifs correspondant à n valeurs d'un paramètre d'avancement ξ (qui peut être le temps).

L'application de la méthode décrite ci-dessus à un couple de clichés successifs $(k, k+1)$ fournira un champ de déformation incrémentale, à partir duquel on peut définir une vitesse si les états sont suffisamment proches. L'état de référence étant pris coïncident avec l'état k, le champ de gradient de transformation obtenu, que nous notons désormais f_{ij}, s'écrit :

$$f_{ij}(k) = \frac{\partial x_i(k+1)}{\partial x_j(k)} = \delta_{ij} + \frac{\partial (x_i(k+1) - r_i(k))}{\partial x_j(k)}.$$

Nous notons à partir d'ici les coordonnées d'un point dans l'état correspondant au cliché k : $x_i(\xi_k)$ ou encore $x_i(k)$. Il en est de même pour les divers tenseurs. Comment s'écrit la vitesse de transformation $\partial F_{ij}/\partial \xi$? Rappelons la relation (9) :

$$F_{ij}(k) = \delta_{ij} + \frac{\partial x_i(k)}{\partial X_j},$$

où X_j représente l'état de référence et peut s'écrire avec les notations introduites ici $X_j = x_j(1)$. On aura donc :

$$\frac{\partial F_{ij}(k)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial x_i(k)}{\partial \xi}\right)$$

$$= \frac{1}{\xi_{k+1} - \xi_k} \frac{\partial}{\partial X_j}(x_i(k+1) - x_i(k)),$$

$$\dot{F}_{ij}(k)\, d\xi = \frac{\partial}{\partial X_j}(x_i(k+1) - x_i(k)).$$

Il apparaît clairement que $f_{ij}(k) - \delta_{ij}$ n'est pas la vitesse de transformation $F_{ij}(k)$, et qu'en conséquence il n'est pas possible de sommer les $f_{ij}(k)$ obtenus à partir des couples $(k, k+1)$ pour avoir la déformation totale $F_{ij}(k)$. Il est donc nécessaire d'effectuer les opérations de mesure sur les couples $(1, k)$ pour obtenir l'histoire de la déformation totale.

Si au cours d'un processus expérimental on s'intéresse à la fois aux champs incrémentaux et cumulés, ceci conduit à un double jeu d'opérations de stéréocomparaison : l'ensemble des couples $(1, k)$ et l'ensemble des couples $(k, k+1)$ doivent être exploités. On peut cependant réduire à un seul jeu ces opérations en employant la méthode décrite ci-après.

La vitesse de déformation $\mathscr{D}$ se définit comme la partie symétrique du gradient des vitesses par rapport à l'état actuel, $\mathscr{U}$:

$$\mathscr{D} = \frac{1}{2}(\mathscr{U} + \mathscr{U}^{\mathrm{T}}), \tag{10}$$

ou encore :

$$\mathscr{D}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathscr{U}_{ij} + \mathscr{U}_{ji}),$$

avec :

$$\mathscr{U}_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}; \tag{11}$$

la relation entre $\mathscr{U}$ et F s'écrit :

$$\mathscr{U} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \tag{12}$$

L'opération d'interpolation de la fonction déplacement U_i nous ayant fourni les déplacements, $U_i(\xi_k)$ et $U_i(\xi_{k+1})$, on peut calculer l'incrément de déplacement :

$$\dot{x}_i \, d\xi = U_i(\xi_{k+1}) - U_i(\xi_k), \tag{13}$$

et on a donc $\dot{F}_{ij}(\xi_k)$:

$$\dot{F}_{ij}(\xi_k) \, d\xi = \frac{\partial}{\partial X_j}(U_i(\xi_{k+1}) - U_i(\xi_k)); \tag{14}$$

on a en outre $F_{ij}(\xi_k)$:

$$F_{ij}(\xi_k) = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i(\xi_k)}{\partial X_j}, \tag{15}$$

qui seront évalués en utilisant la technique de dérivation spatiale décrite en 2.4.*c*.

Il est alors aisé d'obtenir $\mathscr{D}$ par application de (12) et de (10).

Comme nous venons de le décrire ci-dessus, à l'aide d'une série de restitutions de couples (1, *i*), il est possible de déduire la définition des tenseurs W et $\mathscr{D}$ pour chaque couple incrémental (k, $k+1$). Ceci nous permet de n'envisager qu'un nombre de mesures stéréoscopiques nécessaires à la restitution des couples (1, *i*), donc une simplification importante des opérations de mesures, longues et délicates.

8. Exemples d'application

Les exemples présentés relèvent du domaine de la mécanique des sols, avec le but à la fois d'illustrer la démarche exposée dans les paragraphes précédents et montrer les possibilités de la méthode. Dans le cadre d'application qui est le nôtre, l'objectif est de mettre en évidence et de caractériser l'apparition de la déformation localisée. Les cas décrits ici sont d'une part un essai élémentaire de déformation plane (sollicitation homogène d'un échantillon homogène à l'appareil biaxial) et d'autre part, une modélisation sur matériau analogique du comportement d'un mur de soutènement.

8.1. *Déplacements et déformations au cours de la localisation à l'appareil biaxial*

L'essai est réalisé sur un échantillon parallélépipédique, de dimension $330 \times 165 \times 60$ mm. Il est constitué d'un empilement de rouleaux parallèles, de diamètres variés (matériaux granulaires analogiques de Schneebeli). La condition de déformation plane se trouve naturellement vérifiée dans le plan perpendiculaire aux génératrices des

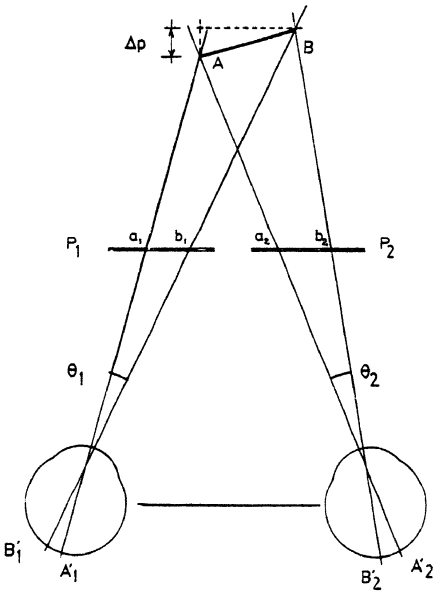


Fig. 1

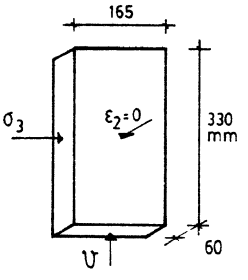


Fig. 2

Fig. 1. – Principe.

Fig. 1. – Principle.

Fig. 2. – Géométrie de l'essai.

Fig. 2. – Test specifications.

rouleaux. Les conditions aux limites sont définies sur la figure 2 : contrainte imposée σ_3 sur la face latérale verticale, vitesse imposée $\mathcal{V}$ sur la face inférieure. Les têtes supérieure et inférieure sont libres en rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de DP et situé dans le plan de la face. On considère l'incrément au cours duquel apparaît la localisation. Le déplacement imposé au cours de cet incrément est de 3.5 mm, ce qui fait une déformation axiale globale voisine de 0,01. A l'observation en stéréoscopie, le faux relief fait apparaître deux plateaux séparés par une forte pente. L'opérateur a judicieusement densifié les mesures dans cette zone, ainsi qu'il apparaît sur la figure 3 qui présente le champ de vecteurs déplacements obtenus (le « semis »). Un maillage régulier de 18×37 points étant défini, l'interpolation permet de calculer la fonction déplacement approchée, sur la base d'une partition en triangles représentée à la figure 4. Le parti pris quant à la définition des triangles, justifié plus haut, apparaît clairement. La représentation des composantes du champ de déplacement sous la forme des isovaleurs de ces composantes, figures 5 et 6, révèle un champ fortement structuré, avec en particulier une zone allongée présentant un très fort gradient perpendiculaire à la direction d'allongement : c'est une bande de cisaillement, qui sépare deux blocs quasi rigides soumis à une rotation et un déplacement relatif.

Le calcul du champ de déformation permet de préciser les phénomènes. En chaque point du domaine on obtient les composantes de la rotation matérielle, et de la déformation pure. Parmi les nombreuses représentations possibles, les isovaleurs de composantes, et les courbes de symboles de taille proportionnelle à la valeur locale d'une composante sont particulièrement parlantes. On présente ici, à l'aide des isovaleurs, le champ de

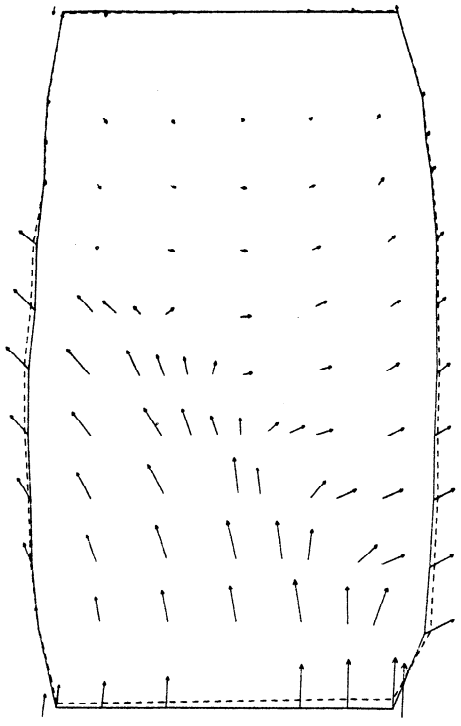


Fig. 3

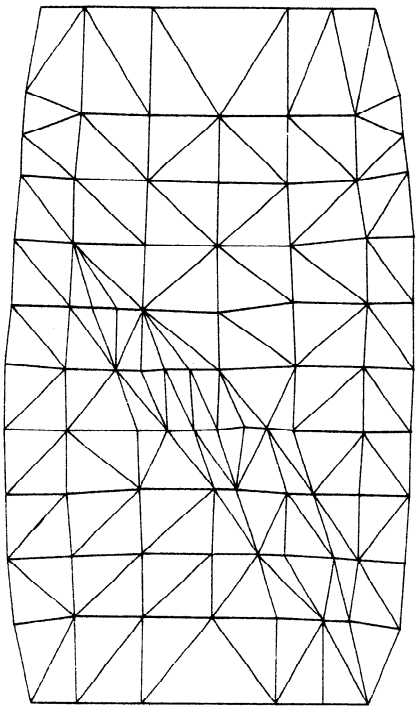


Fig. 4

Fig. 3. — Vecteurs déplacements aux points de mesure.

Fig. 3. — Measured displacement vectors.

Fig. 4. — Partition du domaine en triangles d'interpolation.

Fig. 4. — Partition into triangles for interpolation.

distorsion au sein de l'échantillon (*fig.* 7), et sous forme de cartes de symboles ce même champ de distorsion (*fig.* 8), ainsi que les champs de variation de volume (*fig.* 9) et de rotation matérielle (*fig.* 10). Les valeurs numériques indiquées réfèrent à la déformation logarithmique (sans unité) et à la rotation (en radians). Ces figures montrent la complète localisation de la déformation incrémentale; le matériau ne connaît aucune déformation sensible en dehors de la zone de rupture. Les variations de volume, bien que très faibles sur ce matériau, révèlent une tendance à la dilatance dans la zone de forte distorsion (*fig.* 9); cette même zone est marquée en outre par des rotations importantes et organisées (*fig.* 10).

8.2. *Cas d'un modèle de mur de soutènement*

Le modèle physique est constitué d'un massif (bidimensionnel par nature) de matériau analogique décrit plus haut, dont la géométrie et les dimensions sont présentées par la figure 11. Le mur est assujetti à une translation horizontale vers le massif (butée) ou vers l'extérieur du massif (poussée). On notera u ce déplacement au début du pas actuel, et Δu l'incrément de ce déplacement.

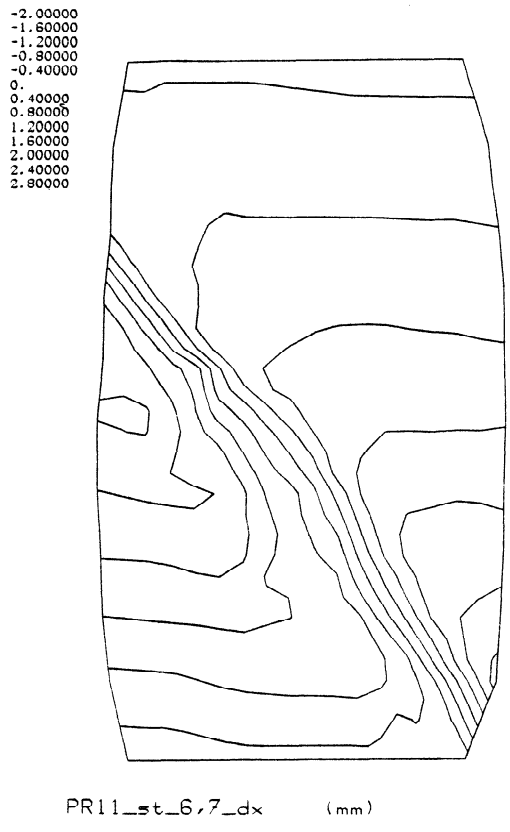


Fig. 5

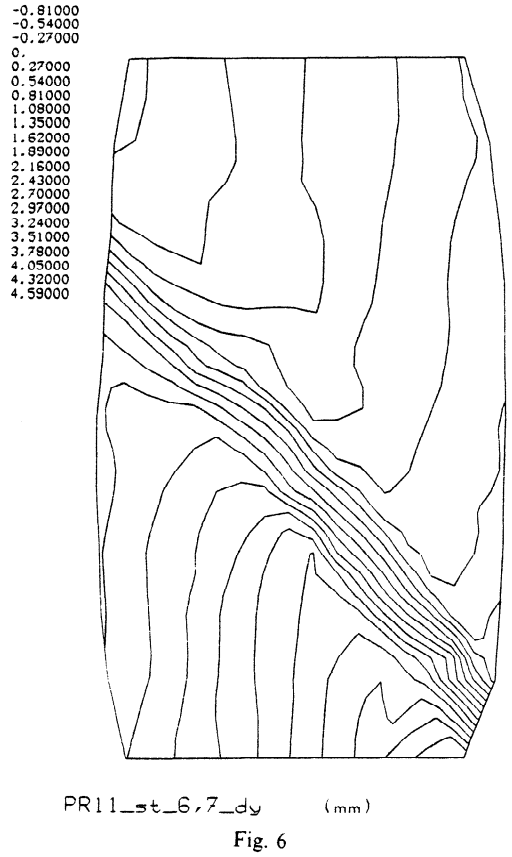


Fig. 6

Fig. 5. — Isovaleurs de déplacements horizontaux.

Fig. 5. — Horizontal displacement isovalue curves.

Fig. 6. — Isovaleurs de déplacements verticaux.

Fig. 6. — Vertical displacement isovalue curves.

Il n'est pas possible de présenter l'ensemble des figures relatives à tous les incréments; les figures 12 à 17 mettent en valeur, à partir des cartes d'isovaleurs de déplacements incrémentaux, les phénomènes importants. Le champ de déplacement de la figure 12 montre qu'une partie du massif est entraînée par le mur, l'autre partie demeurant sensiblement immobile; les figures 14 et 15, relatives au même pas, révèlent la présence d'une forte localisation de la déformation, caractérisée par des gradients très importants des deux composantes du déplacement le long d'une même zone : il s'agit d'une bande de cisaillement, siège de distorsions variations de volume (dilatantes) et de rotations importantes. Le caractère propagatoire de cette structure apparaît par comparaison des figures 13 et 15, relatives à deux pas pris l'un en début d'essai et l'autre à localisation complète. Enfin, l'examen des figures 16 et 17, obtenues à localisation complète lors d'un essai en poussée, montre la grande différence de comportement du massif suivant le sens de sollicitation : alors que dans ce dernier cas on peut distinguer un bloc quasi rigide en mouvement vers le bas, dans le premier cas en revanche la partie du massif qui accompagne le mur se scinde en deux blocs dont l'un (proche du mur) connaît un déplacement principalement horizontal.

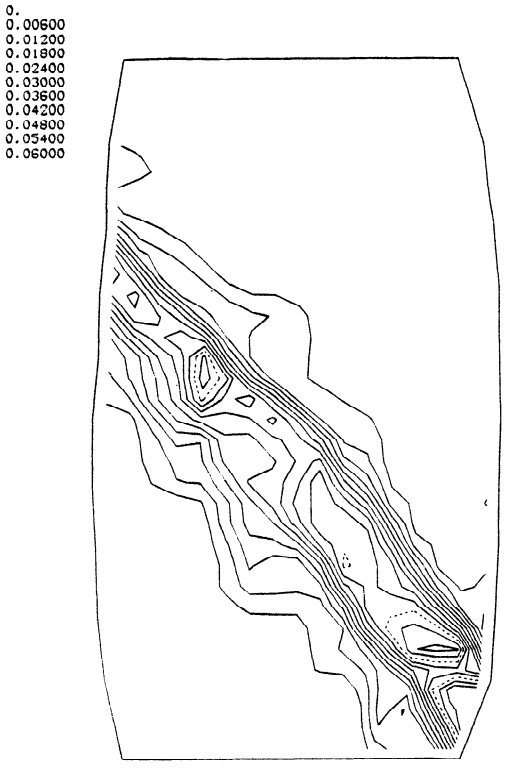


Fig. 7

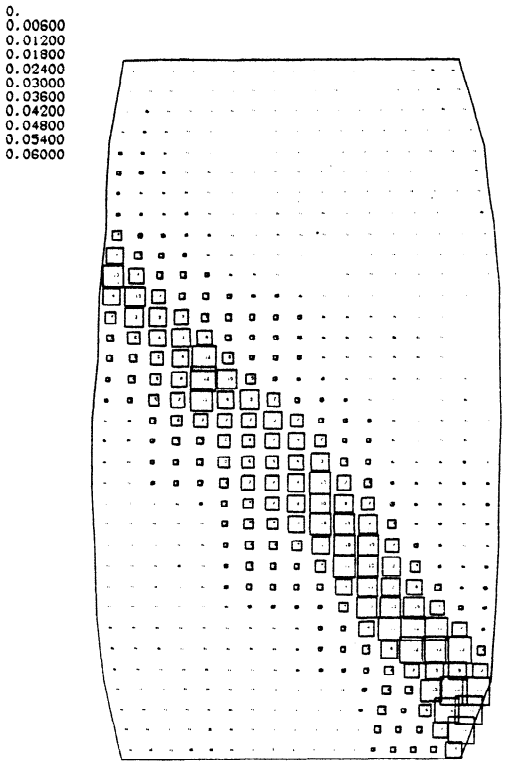


Fig. 8

Fig. 7. — Isovaleurs de la distorsion.

Fig. 7. — Distortion isovalue curves.

Fig. 8. — Carte des distorsions.

Fig. 8. — Distortion map.

9. Précision des résultats

La précision des mesures est bien entendu déterminante pour juger de l'intérêt de la méthode. Nous présentons ici les résultats de tests de précision réalisés sur nos essais. Il convient de remarquer que la méthode s'applique à la mesure de champs (de déplacement, de déformation), ce qui rend nécessaire, pour discuter la précision, de prendre en compte non seulement la résolution brute de la valeur en un point donné mais aussi la cohérence du champ, qui permet d'affiner l'appréciation du résultat.

Les essais de répétabilité des mesures effectuées par nos soins ont révélé une erreur moyenne (écart-type) de 10 μ sur l'image. L'incidence sur le sujet dépend de l'échelle. Une autre mesure de la résolution, accessible pour chaque couple de clichés exploité par stéréorestitution, est fournie par les parallaxes finales des points du référentiel, qui idéalement devraient être nulles. Pour des sujets de dimension 350 × 175 mm, les parallaxes résiduelles des points du référentiel ont été trouvées inférieures à 0,10 mm.

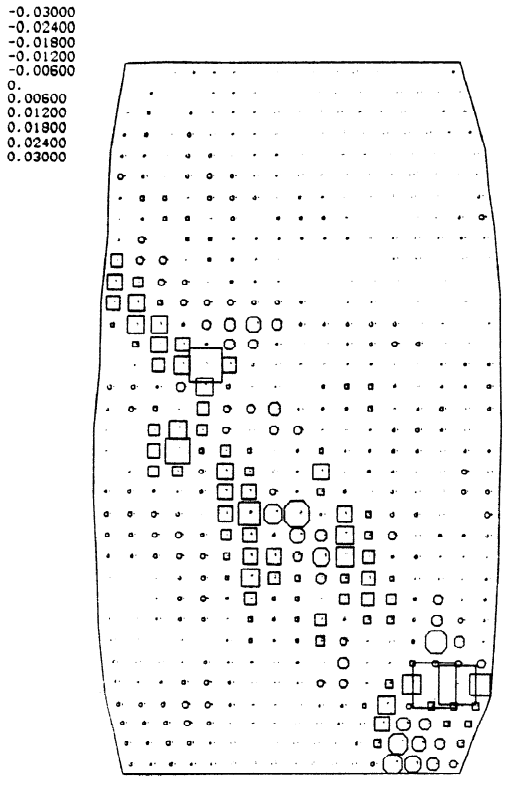


Fig. 9

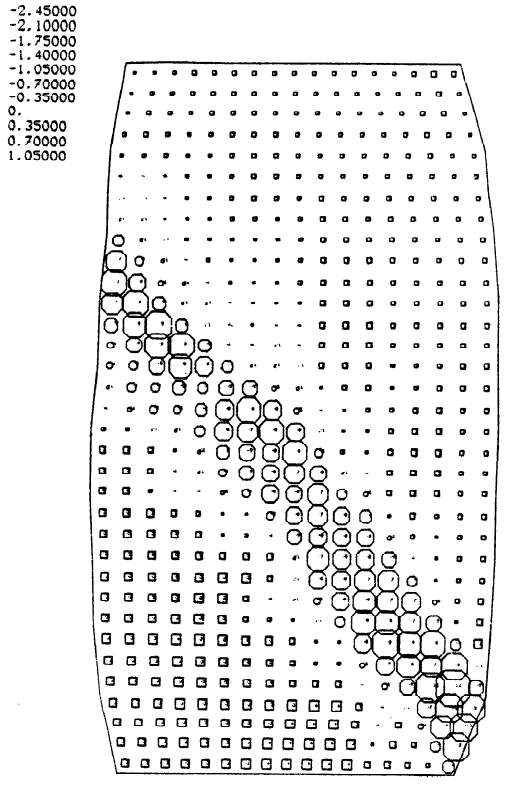


Fig. 10

Fig. 9. – Carte des variations de volume.

Fig. 9. – Volume change map.

Fig. 10. – Carte des angles de rotation.

Fig. 10. – Material rotation map.

Discutons en premier lieu la précision des mesures de déplacement.

Lors de l'utilisation d'un stéréocomparateur, le facteur personnel est très fort. Un opérateur professionnel, dûment formé et entraîné, est capable d'obtenir une répétabilité des mesures de l'ordre de 1 μ. Un opérateur occasionnel devra se contenter d'une précision plus modeste.

L'autre facteur déterminant de la précision des mesures est la qualité de l'image : la netteté, qui dépend de la prise de vue mais aussi la finesse de détail, qui quant à elle dépend de l'aspect visuel de l'objet photographié.

L'un et l'autre facteurs sont susceptibles d'amélioration importante. La taille du maillage de mesure, en revanche, n'intervient en rien dans cette résolution.

Quelle est l'incidence de telles erreurs sur les champs de déformation calculés ?

Le calcul des déformations comporte des dérivations par rapport aux variables d'espace. Si l'on considère des points de mesure espacés de 10 mm, ce qui est le cas courant dans notre application, l'erreur absolue sur les déformations avoisinera 0,01. L'espacement des

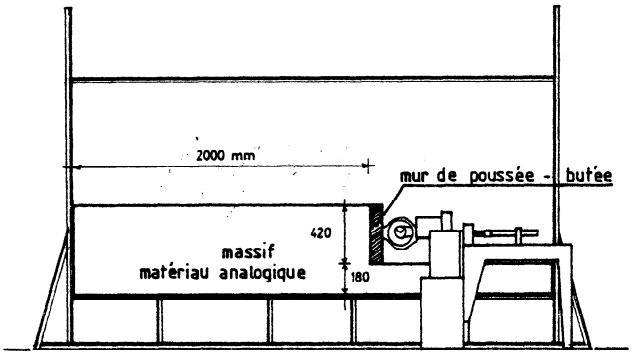


Fig. 11. – Géométrie du modèle de mur de soutènement.
Fig. 11. – Geometry of the retaining wall.

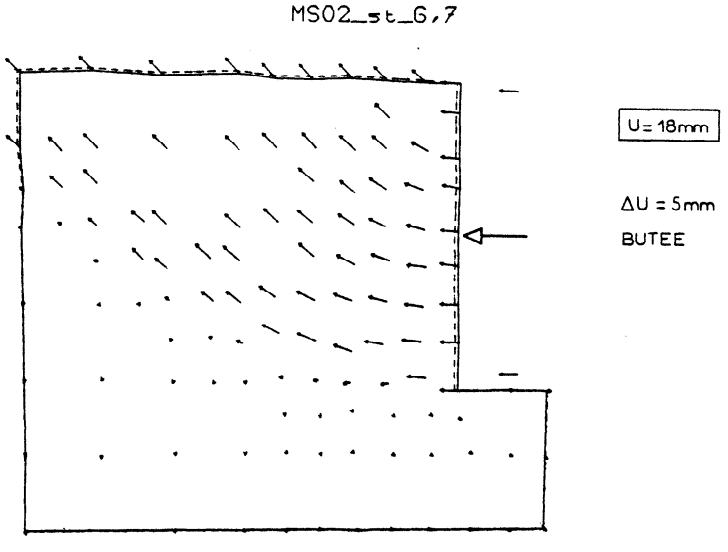


Fig. 12. – Champ de déplacements incrémentaux.
Fig. 12. – Measured displacement vectors.

points de mesure joue ici un rôle capital : si l'on resserre le maillage de mesure sans améliorer la résolution sur les déplacements, la résolution sur les déformations s'en trouvera, paradoxalement, diminuée. A moins bien sûr que l'on ne mette en œuvre une méthode de lissage, au niveau par exemple de l'interpolation; dans ce cas l'augmentation de la densité de mesure se traduira, ce qui est naturel, par une amélioration de la résolution. Il convient cependant de remarquer que, en bon usage de la méthode, la densité du semis de point est ajustée par l'opérateur en fonction du relief observé. Dans les zones de faible gradient, les points seront espacés, ce qui, pour une même résolution sur le déplacement, améliore la résolution sur les déformations. Dans les zones de forts gradients, par contre, les différences de déplacement sont grandes, et la précision des mesures de déformation est peu affectée par des résolutions de l'ordre de 0,01, comparées à des grandes déformations.

Une mesure directe de la résolution a été effectuée de la façon suivante : disposant de deux clichés pris au « même » instant, donc en principe identiques bien que physiquement distincts, nous avons procédé à un dépouillement complet de ce couple. Les déformations obtenues, sont données dans le tableau ci-dessous, en terme de moyenne et écart-type.

TABLEAU

Composante	Valeur moyenne	Ecart-type
e_{xx} .	1,000 58	0,006
e_{yy} .	1 − 0,000 17	0,002
e_{xy} .	− 0,000 74	0,004
Distorsion .	0,004 55 (*)	0,002
Var. volume.	0,000 39	0,007

(*) La courbe de fréquence de la distorsion est non symétrique, du fait de la valeur absolue qui intervient dans le calcul; on a en réalité une demi courbe de Gauss, la partie négative étant supprimée. La valeur moyenne ne peut donc pas être comparée aux autres valeurs du tableau.

L'erreur absolue sur une mesure isolée de la déformation a donc une probabilité de 70 % d'être inférieure à 0,005 (0,007 pour les variations de volume) : ceci donne la résolution pour un point de mesure, dans le cas considéré (dont il faut signaler qu'il est le plus défavorable car les clichés utilisés pour ce test ont été réalisés avec un appareil Hasselblad 6 × 6 sur film ordinaire).

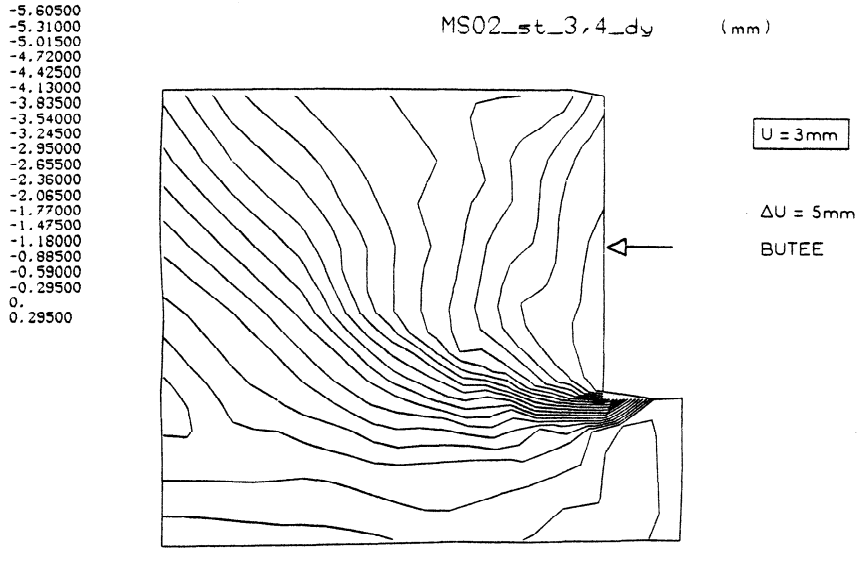


Fig. 13. – Déplacements horizontaux, $u = 3$ mm, $\Delta u = 5$ mm. Butée.

Fig. 13. – Horizontal displacements, $u = 3$ mm, $\Delta u = 5$ mm. Passive state.

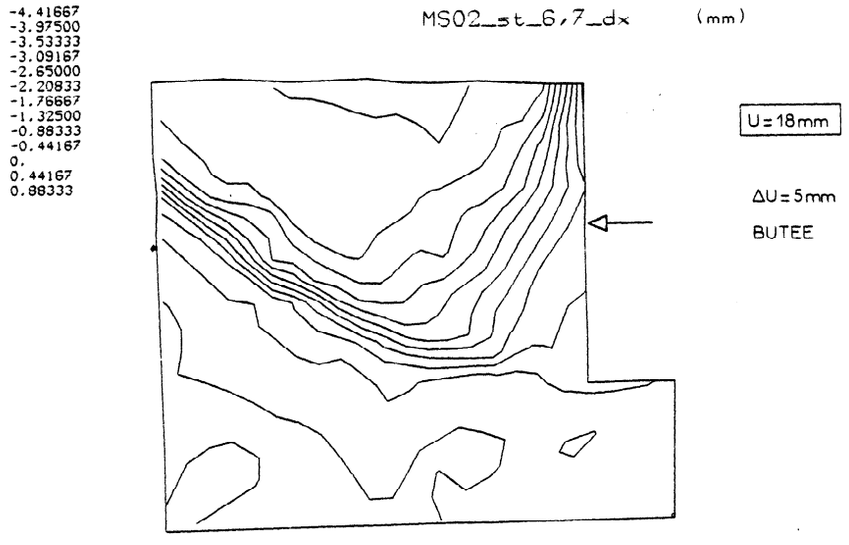


Fig. 14. – Déplacements verticaux, $u = 18$ mm, $\Delta u = 5$ mm. Butée.

Fig. 14. – Vertical displacements, $u = 18$ mm, $\Delta u = 5$ mm. Passive state.

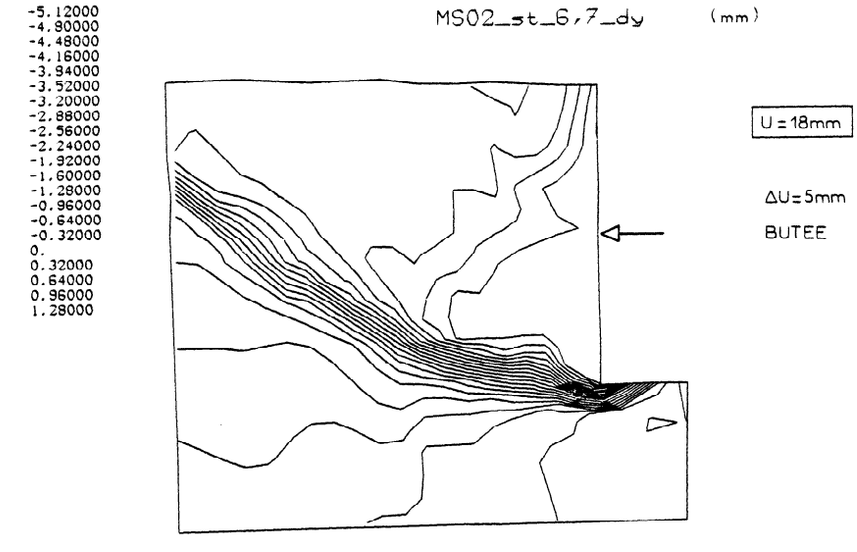


Fig. 15. – Déplacements horizontaux, $u = 18$ mm, $\Delta u = 5$ mm. Butée.

Fig. 15. – Horizontal displacements, $u = 18$ mm, $\Delta u = 5$ mm. Passive state.

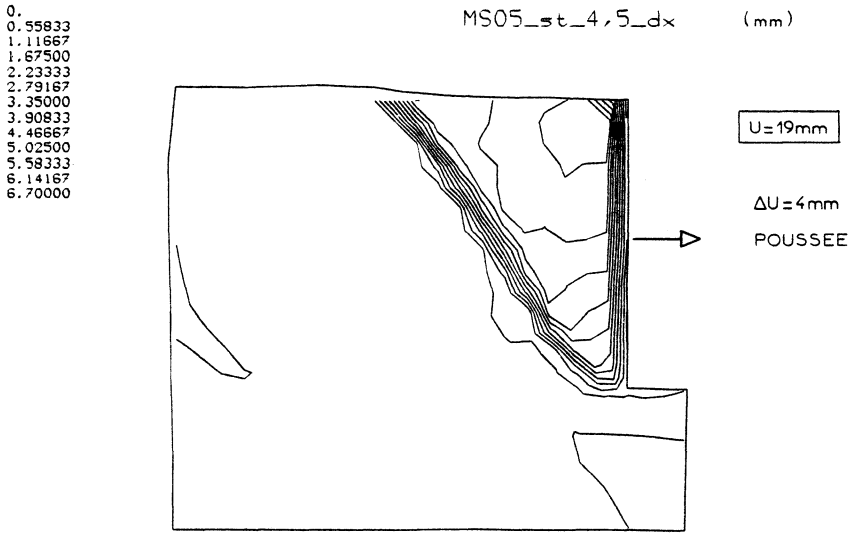


Fig. 16. – Déplacements verticaux, $u = 19$ mm, $\Delta u = 4$ mm. Poussée.

Fig. 16. – Vertical displacements, $u = 19$ mm, $\Delta u = 4$ mm. Active state.

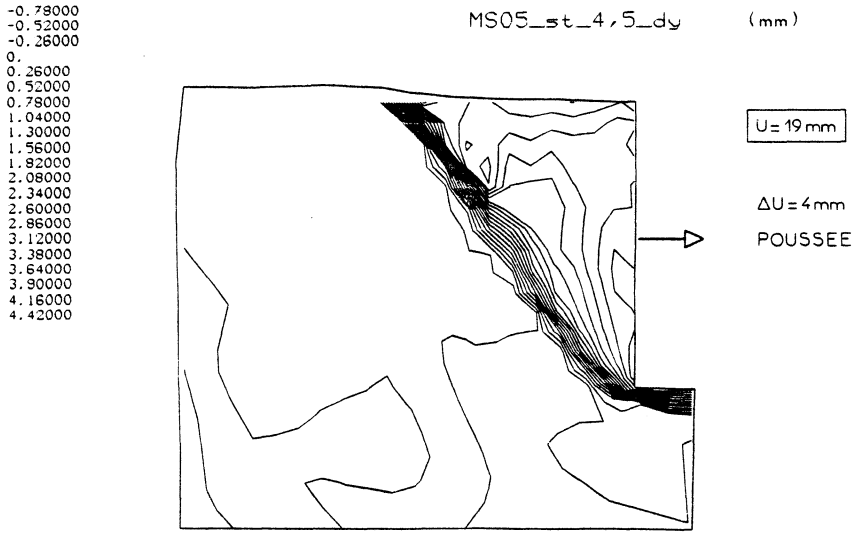


Fig. 17. – Déplacements horizontaux, $u = 19$ mm, $\Delta u = 4$ mm. Poussée.

Fig. 17. – Horizontal displacements, $u = 19$ mm, $\Delta u = 4$ mm. Active state.

Cette mesure de la précision (ponctuelle) rend mal compte de la fiabilité réelle de la méthode. Il est frappant en effet de constater sur les cartes de déformation la grande cohérence des résultats, alors que les déformations globales sont de l'ordre de 0,01 (voir *fig.* 7 et 8). En réalité, le calcul des déformations fournit une grande densité de mesures, et c'est la moyenne des mesures dans une zone donnée qui caractérise la déformation de cette zone dans l'appréciation des résultats. La statistique enseigne que l'écart-type des

mesures obtenues comme les moyennes de séries de n tirages est égale à l'écart-type des mesures isolées divisé par $\sqrt{n}$. Les erreurs indiquées ici sont donc à diviser par ce facteur lorsque l'on s'intéresse à la déformation moyenne dans une zone homogène.

On notera enfin que, contrairement à l'usage qui consiste à évaluer la précision d'une méthode a priori à partir de la résolution théorique des appareils utilisés, l'évaluation donnée ici résulte d'un véritable test de fiabilité, qui incorpore toutes les sources d'erreurs possibles. A titre d'exemple un stéréocomparateur Traster a une résolution de 1 μm... ce qui signifie que la précision obtenue sur notre application est susceptible d'amélioration, et ne doit pas être vue comme la précision ultime de la méthode.

La conclusion de ces mesures de précision est la suivante : la méthode développée, est tout à fait satisfaisante dans son application aux grandes déformations, en particulier dans le cas de fortes hétérogénéités. Son application à des champs de déformation peu contrastés pourrait tirer profit de la mise en œuvre de techniques de lissage, exclues pour les forts contrastes. Enfin, dans le cas de déformations très petites (inférieures à 10^{-3}) la méthode fournira des résultats qualitativement satisfaisants concernant la morphologie du champ de déformation. Comme il a été dit plus haut, la précision est notablement fonction de la formation de l'opérateur de stéréorestitution, et l'amélioration à ce niveau peut être significative.

10. Comparaison avec les méthodes d'analyse des contraintes

L'analyse des déformations est un vocable peu usité; on lui préfère généralement celui d'analyse des contraintes. La plupart des méthodes expérimentales regroupées sous cette appellation ont en effet pour but de visualiser et de quantifier les répartitions de contrainte dans des structures, des assemblages mécaniques ou des pièces isolées. Il est clair cependant que les diverses méthodes disponibles mesurent en réalité des déformations, ou des phénomènes liés directement aux déformations, alors que le passage aux contraintes ne peut se faire que dans le cas restrictif de matériaux élastiques linéaires, pour lesquels existe une relation bijective entre état de contrainte et état de déformation.

La méthode décrite dans ces pages consiste en une application d'une technique photogrammétrique à l'analyse des déformations d'un objet subissant un processus d'écoulement en grandes déformations hétérogènes. Elle s'applique avec succès au cas de matériaux granulaires, pour lesquels il n'existe pas d'autre méthode de mesure des déformations. Comment se situe-t-elle par rapport aux méthodes d'analyse des contraintes ? Elle ne prétend pas à la précision remarquable (10^{-6}) qu'il est possible d'obtenir, dans des conditions idéales, sur la mesure d'une élongation locale en extensométrie; ni même à la précision des mesures réalisées, sur des pièces peu déformables, par photoélasticimétrie ou par les méthodes de moiré (résolutions théoriques voisines de 10^{-5}). Le domaine d'application de ces méthodes est tout autre : dans le cas de structures ou pièces subissant des charges telles que le matériau reste élastique, il est possible de construire des modèles en matériau biréfringent, et d'effectuer une analyse de contraintes par photoélasticimétrie de transmission; on peut aussi opérer sur la structure réelle, par photoélasticimétrie de réflexion; il faut cependant que la structure soit suffisamment rigide pour que les revêtements photoélastiques ne perturbent pas les mesures. De même, les méthodes de

moiré sont bien adaptées à des déformations petites de structures peu déformables; leur mise en œuvre dans le cas de l'écoulement plastique de matériaux très déformables paraît délicat; en outre, l'enregistrement photographique de réseaux de lignes à 40 ou 80 traits au millimètre, sur un objet de plusieurs dizaines de centimètres n'est pas sans poser des difficultés. Une autre méthode applicable dans le domaine de l'analyse des contraintes est l'interférométrie holographique (Caussignac [8]). C'est une méthode très prometteuse, dont la résolution dépasse en théorie celle de toutes les autres. Cependant, son application reste actuellement difficile, et souvent limitée à la mesure d'une seule composante de déplacement. En outre, elle nécessite des investissements considérables en matériel et en savoir faire, qui ne peuvent être envisagés que dans des services spécialisés.

11. Conclusion

La méthode stéréophotogrammétrique de faux relief, décrite dans ces pages, a été développée dans le but de permettre l'observation et la quantification de structures de localisation de la déformation, dans les matériaux granulaires du type des sols (matériaux géotechniques). Elle a permis de caractériser expérimentalement de telles structures, à des stades de développement inappréciables par observation directe. La prise de vue et l'exploitation des clichés nécessitent quelques soins, mais la formation nécessaire s'acquiert aisément. Le choix de la voie analytique pour la restitution des déplacements et les calculs de déformation confère à la méthode un bon rendement, et permet ainsi la réalisation d'un grand nombre de couples. Telle qu'elle a été développée pour cette application, la méthode n'est pas destinée au domaine des très petites déformations, pour lesquelles les méthodes classiques d'analyse de contrainte sont mieux adaptées. En revanche, elle est la seule disponible en grandes déformations, et pour tous les matériaux sur lesquels les techniques de collage de revêtements (photoélastique, moiré) sont inapplicables.

Remerciements

Les auteurs expriment leur reconnaissance à MM. Weloff et Gaveriaux, du Service Technique de l'Urbanisme (Paris), pour leur avoir permis d'utiliser leur stéréocomparateur Traster et les avoir initiés à son utilisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GERMAIN, 73, *Cours de Mécanique des milieux continus*, t. 1, Masson, Paris, 1973.

[2] CHAMBON, *Application de la méthode des éléments finis et d'une loi rhéologique incrémentale aux calculs de mécanique des sols* (*Thèse de Docteur-Ingénieur*, Université de Grenoble, 1975).

[3] ZIENKIEWICZ, 73, *La méthode des éléments finis*, Ediscience, Paris, 1975).

[4] BUTTERFIELD R., HARKNESS R. M. et ANDRAWES K. Z., *A Stereo-photogrammetric Method for Measuring Displacements Fields* (*Géotechnique*, vol. 20, n° 3, 1970, p. 308-314).

[5] BEYNET J. M. et TRAMPCZYNSKI W., *Application de la stéréophotogrammétrie à la mesure des déplacements et à l'étude de l'écoulement des matériaux* (*Matériaux et Constructions*, vol. 10, n° 59, 1977, p. 281-288).

[6] BÉNÉFICE P. et BOEHLER J. P., *The Application of Stereophotogrammetry to the Analysis of Displacement Fields in Solid Mechanics* (*Proc. of the I.U.T.A.M. Symposium on Optical Methods in Mechanics of Solids*, A. LAGARDE, éd., Poitiers, 1979).

[7] BONNEVAL H., *Photogrammetrie Generale*, Eyrolles, Paris, 1972.

[8] CAUSSIGNAC J. M., *Application de l'holographie à l'analyse des contraintes* (*Rapport de recherche L.C.P.C.*, n° 84, 1978).

(Manuscrit reçu le 11 octobre 1982,
accepté le 17 mai 1983).

Quelques remarques doivent être faites sur cet article. D'abord, je dois noter que cette application de la stéréophotogrammétrie poussée jusqu'au calcul des déformations n'est pas la première. Mc Gown et al <69> ont présenté en 78 des mesures de champs de déformation d'échantillons plans contenant des inclusions de nappes (métalliques ou textiles). Les déplacements sont mesurés en tous les noeuds d'un maillage régulier, et la déformation au centre de chaque carré est calculée. Ce procédé semble bien adapté tant que l'hétérogénéité est légère et tant que les carrés élémentaires restent à peu près des carrés. La méthode que j'ai utilisée se prête mieux à une utilisation intensive, sur des champs franchement hétérogènes, puisqu'elle permet de moduler à volonté la densité du semis de points ; en outre, elle est rigoureuse et générale puisqu'elle n'introduit aucune hypothèse sur la géométrie initiale des points mesurés. Cette souplesse et cette généralité n'ont pu être acquises qu'au prix d'une certaine complexité du traitement numérique.

Par ailleurs, on a pu s'interroger à la lecture de l'article sur les raisons qui rendent nécessaire le calcul, par interpolation, des valeurs de la fonction déplacement aux noeuds d'un maillage régulier beaucoup plus dense que le semis des mesures. La réponse est donnée dans un autre article (Desrues <37>). En quelques mots, l'interpolation est nécessaire (il faut une fonction pour en définir les dérivées) mais le re-maillage du domaine n'est qu'une procédure adoptée pour ses avantages importants au niveau de l'organisation informatique du traitement. C'est d'ailleurs le principe adopté dans un certain nombre d'autres logiciels de cartographie (cartolab, uniras...).

Enfin, un algorithme de triangulation automatique, mais respectueux de consignes adéquates, a été construit après la rédaction de l'article présenté ci-dessus et décrit dans la référence <37>.

Chapitre VI

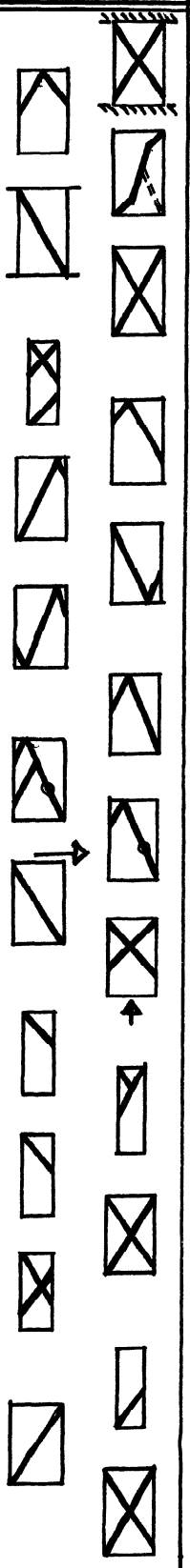
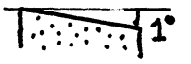
SYNTHESE EXPERIMENTALE

VI.1 La base expérimentale

La synthèse présentée ici est fondée sur un ensemble d'essais réalisés par moi-même sur divers matériaux, au moyen de l'installation de déformation plane et des méthodes décrites aux chapitres IV et V. J'utiliserai en outre les essais sur matériau de Schneebeli (un "sable bidimensionnel" constitué de rouleaux empilés), effectués par B. Duthilleul dans le cadre de sa thèse de Docteur Ingénieur. Il sera aussi fait référence au fur et à mesure de la discussion aux travaux publiés par d'autres chercheurs dans ce domaine.

Cette base expérimentale comporte quelques limitations compte tenu de divers impératifs de moyens et de temps et de la priorité donnée à la visualisation et à l'étude des perturbations. La principale limitation est le niveau de contrainte envisagé : la contrainte latérale, (notée σ_3 dans ces pages) est inférieure à 100 KPa, ce qui interdit, pour les matériaux utilisés, l'étude du domaine de contrainte pour lequel on observe une rupture des grains (attri-

ESSAI	$\sigma 3$ (kPa)	e indice des vides	H/D	antifrettage	tetes B bloquées R rotulées G gliss.sup	ϕ pic (degrés)
SH00	80	0.65	2	non	B	42
shf00	90	0.74	2	oui	B	45
shf01	90	0.74	2	oui	B	45
shf02	85	0.90	2.2	non	G	36
shf03	90	0.85	2.2	oui	B	34
shf04	80	0.90	3.6	non	B	35
shf05	80	0.66	2	oui	B	49
shf06	80	0.66	2	oui	G	48
shf07	80	0.66	2	oui	B	49
shf08	80	0.66	2	oui	R	48
shf09	80	0.66	2	oui	B	48
shf10	80	0.66	2	oui	B	48
shf11	80	0.68	2	oui	B	48
shf12	80	0.66	2	oui	G + T	48
shf13	80	0.66	2	oui	B	48
shf14	80	0.66	3.55	oui	B + T	47
shf15	80	0.66	3.55	oui	B + T	46
shf16	80	0.66	3.55	non	B	48
shf17	80	0.66	2	non	B	48
shf18	80	0.66	3.55	non	B + T	48
shf19	80	0.66	3.55	oui	R + G	48
shf20	80	0.86	2	oui	R + G	39
bv01	80	0.39	2	oui	B	37

Localisation observée	angle surface (degré)	largeur surface (mm)	angle de dil. global avant loc. (degré)	angle de dil. local ds bande (degré)	remarques, perturbations
	32	> 10	4	5	frottements
	26	6	10	11	hétér. haut
	21	6	14	23	hétér. bas
	26	8	-10	8	
	32	4 à 7	-10	10	
	32	5			
	22	5	9		
	25	5	10	30	
	23	5	13		
	23	5	15		
	20	5	14		bis 05
	20	5	11	20	point mou
	20	5	10	15	point dur
	26	5	13		force latérale
	26	5	13		
	20	5	14		
	21	5	14		
	21	5	16		
	28	5			
	22	5	11	25	
	20	5	15		
	28	5	0		
	30	5	22	22	

tion), accompagnée d'une forte contractance. Les phénomènes de variation de volume observés dans nos essais seront donc exclusivement dus au réarrangement du squelette granulaire ; dans les gammes de contraintes étudiées, on observe toujours, sur chemin triaxial axisymétrique, un comportement légèrement dilatant en phase finale de l'essai (tant que la localisation n'est pas apparue).

Concernant la précision des mesures effectuées, je renvoie au chapitre précédent, en rappellant qu'au terme de l'étude présentée, la résolution des mesures de déformation peut être estimée dans le pire des cas à 0,01. Il s'agit là d'un chiffre pessimiste, comme le montre la grande cohérence des champs de déformations incrémentales qui vont être présentés.

Une vue synthétique des essais réalisés est donnée par le tableau 2 (pages 106-107), dans lequel sont consignés pour chaque essai, les paramètres globaux significatifs (contrainte latérale σ_3, indice des vides initial e_o, rapport d'élancement hauteur sur largeur H/D), les particularités de l'essai (antifrettage, têtes, perturbations), l'angle de frottement de pic Ø pic, l'angle de dilatance global avant localisation, ainsi que des indications sur le faciès de localisation observé en phase ultime (croquis, angle des surfaces, largeur). Le type de matériau est indiqué par l'identificateur de l'essai (Shf pour sable d'Hostun fin, Shg pour sable gros, bv pour billes de verre).

L'exposé des résultats obtenus est organisé en un certain nombre de paragraphes, dont les thèmes sont les suivants : dans quel cas la localisation apparaît-elle ? Initialisation et propagation, cinématique de la bande de cisaillement, direction des bandes de cisaillement, variations du volume, influence des perturbations de l'essai, comportement après pic, épaisseur des surfaces.

Mais avant d'aborder cet exposé, il convient de présenter, à partir d'un exemple, les phénomènes observés et la façon dont ils apparaissent.

VI-2 Un exemple

La figure 7 montre les états successifs de l'échantillon de l'essai Shf06, au cours de son écrasement. Les clichés ont été pris aux instants répérés par les numéros correspondants sur la courbe force-déplacement axial de la figure 8. Cette courbe est celle obtenue directement en cours d'essai au moyen d'une table traçante analogique, ce qui explique l'absence de points de mesure discrets. Les variations de volume globales, également portées sur la figure, ont été obtenues par planimétrie à partir des clichés originaux ; les points expérimentaux correspondent aux clichés.

Le maillage matérialisé sur la membrane qui enveloppe l'échantillon permet de juger grossièrement de l'homogénéité du champ de déformation et d'observer le faciès de localisation lorsque celle-ci est pleinement développée. Lors du cliché 1, la pièce d'appui supportée par le vérin supérieur n'est pas encore entrée en contact avec la tête d'échantillon. Les clichés 2, 3 et 4 montrent une déformation apparemment peu hétérogène; on peut aussi observer, bien qu'un rapport d'agrandissement plus important eût été mieux indiqué pour une observation détaillée, une distorsion importante de la membrane au niveau des contacts tête-échantillon ; c'est la preuve d'un fonctionnement satisfaisant de l'antifrettage. Un oeil exercé décèlera, dès les clichés 4 et 5 une certaine distorsion du maillage au centre de l'échantillon. C'est toutefois sur le cliché 6 que la localisation en bande de cisaillement se révèle tout à fait, pour devenir de plus en plus intense sur les clichés 7 et 8. On peut remarquer sur ce dernier cliché une bande de cisaillement annexe dans le coin droit de l'échantillon, issue du point où la bande principale rencontre la tête rigide supérieure ; on reviendra sur ce phénomène, couramment observé dans les essais, qu'on peut voir comme une réflexion de la bande de cisaillement.

La méthode stéréophotogrammétrique permet, à partir des clichés, de mesurer le champ de déplacement incrémental entre deux états successifs, et de

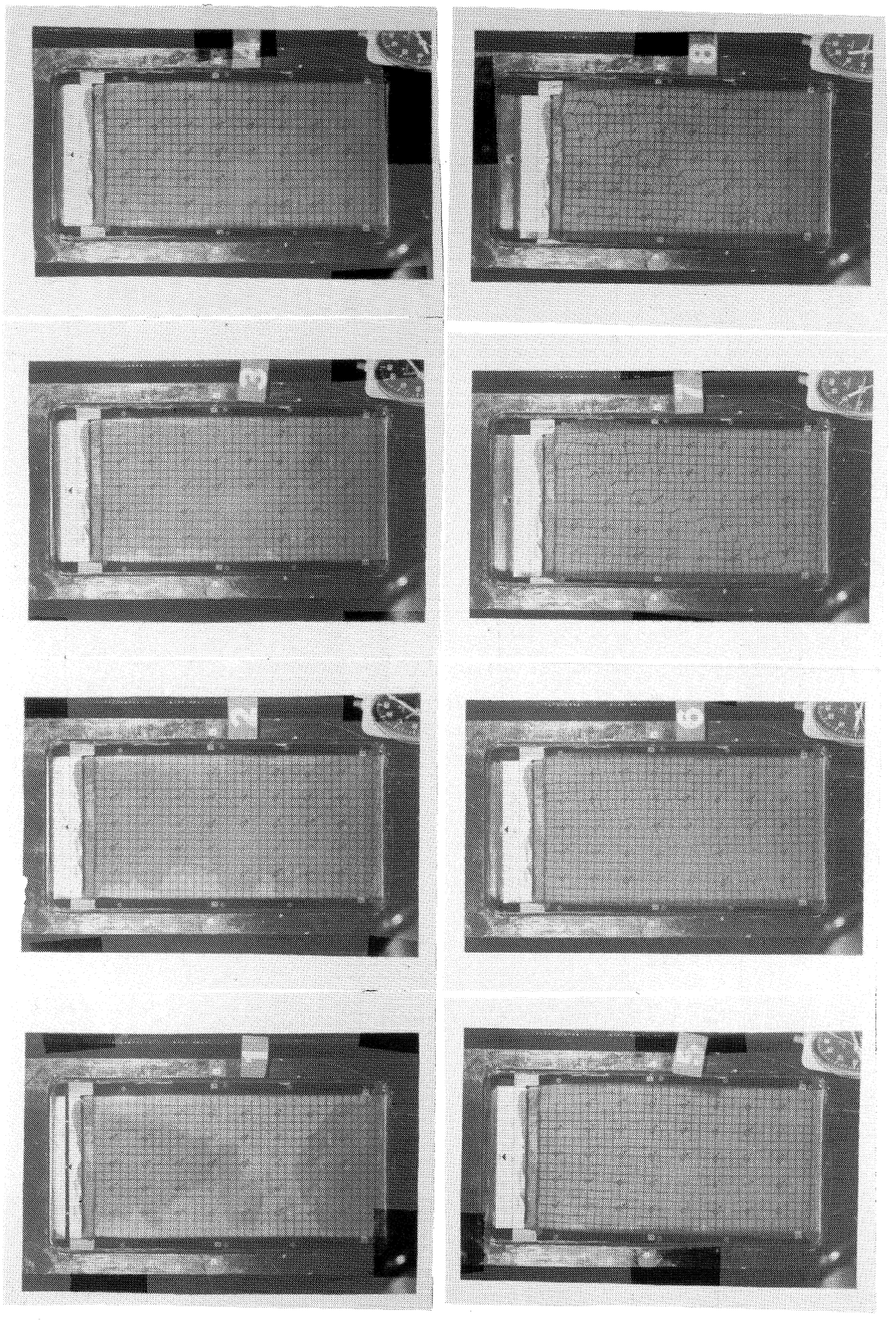


Figure 7. Etats successifs de l'échantillon. Essai shf06.

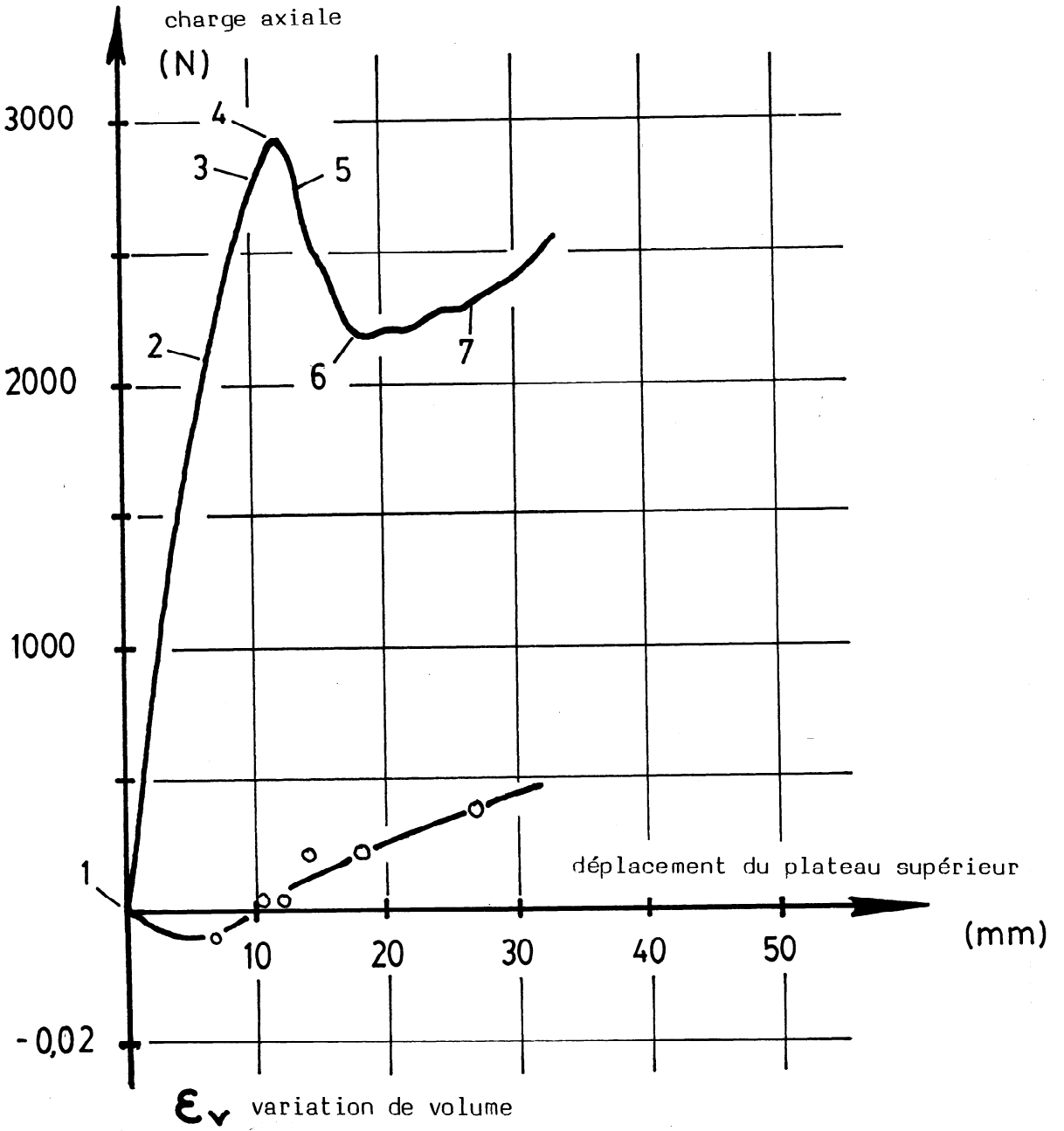


Figure 8. Courbe force axiale - déplacement axial. Essai shf06.

calculer le champ de déformation associé. Les figures 9 à 12 présentent les résultats de l'exploitation stéréophotogrammétrique, pour les incréments successifs 1,2 2,3 3,4 4,5 et 5,6. La partie supérieure de la figure 9 montre les champs de vecteurs déplacements mesurés, qui révèlent des perturbations à partir de l'incrément 3,4 et un évident mécanisme de glissement bloc sur bloc

dès l'incrément 5,6. L'échelle des vecteurs est cinq fois l'échelle de la géométrie. Le contour pointillé est celui de l'échantillon après déformation. La partie inférieure de la figure donne une représentation synthétique du champ de déformation, sous la forme de croix flêchées dont les branches sont de longueur proportionnelle à la grandeur des déformations principales et en indiquent le signe et la direction. On remarque notamment, la rotation des directions principales dans la zone de cisaillement au cours de l'incrément 5,6.

La figure 10 représente les cartes d'isovaleurs des composantes verticales (en haut) et horizontales (en bas) du champ de déplacement. Si l'échantillon subissait une translation rigide, on n'observerait aucune isovaleur. Si, en revanche, il était soumis à une déformation strictement homogène de directions principales parallèles aux axes de l'essai, les isovaleurs des déplacements verticaux seraient des droites horizontales régulièrement espacées et pour les déplacements horizontaux des droites verticales. Si enfin la transformation était une rotation rigide, les isovaleurs des déplacements verticaux seraient des droites verticales et pour les déplacements horizontaux, horizontales. Un exemple de ce dernier cas est donné par les figures 3,5 et 6 de l'article inséré au chapitre V : dans le cas envisagé, une forte localisation (observée dans un essai sur le matériau analogique de Schneebeli par B. Duthilleul) détermine une cinématique de blocs rigides qui subissent chacun une rotation doublée d'une translation (figure 3), ce qui entraine des isovaleurs horizontales pour les déplacements horizontaux notés "dx" (figure 5) et respectivement pour les "dy".

Revenant à l'essai ShfO6, la figure 10 permet de constater que dès l'incrément 3,4, le champ de déplacement est sévèrement perturbé, par contraste avec les incréments précédents. La complète localisation est évidente à l'incrément 5,6.

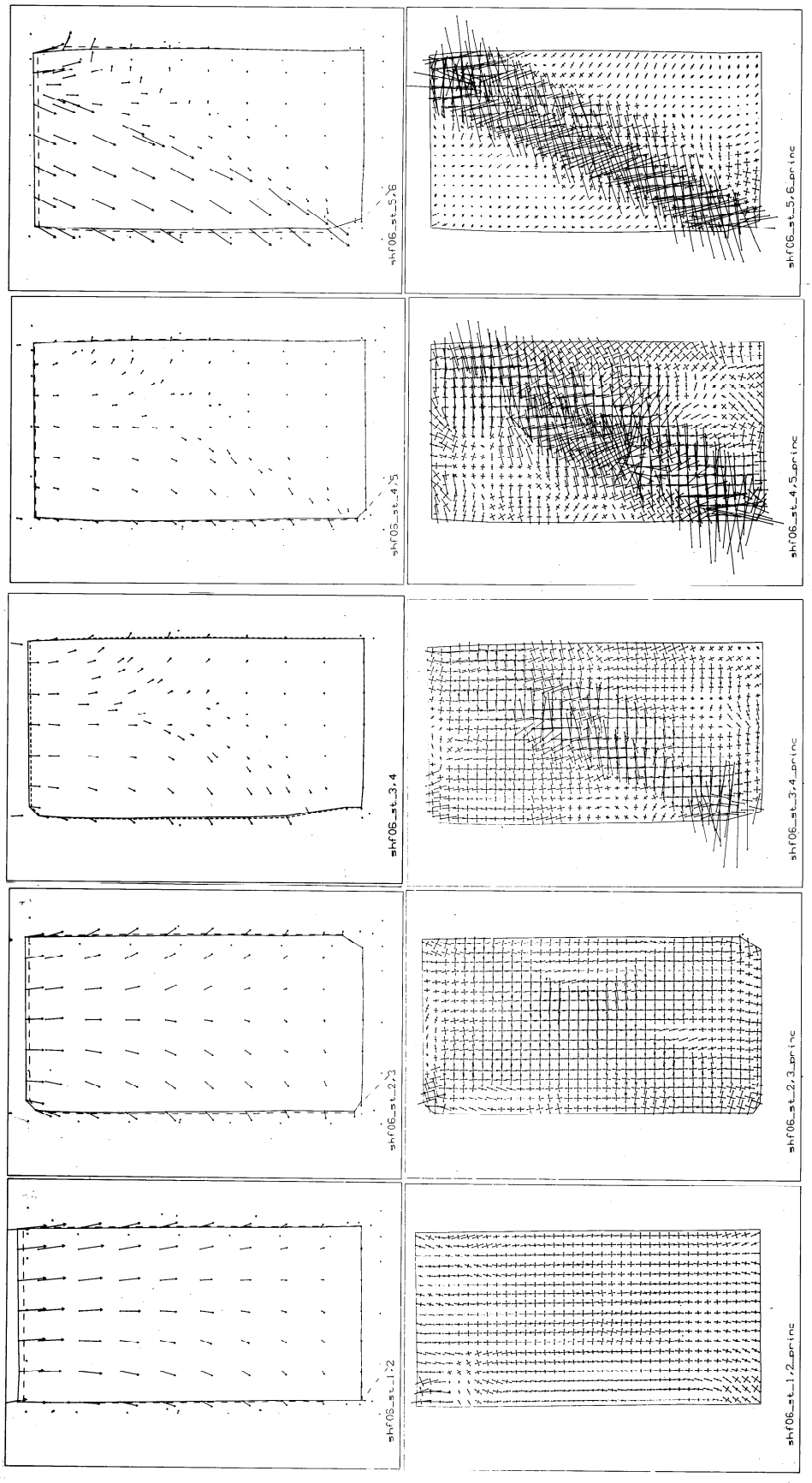


Figure 9. Essai shf06 : vecteurs déplacement et représentation du tenseur de déformation (plane) .

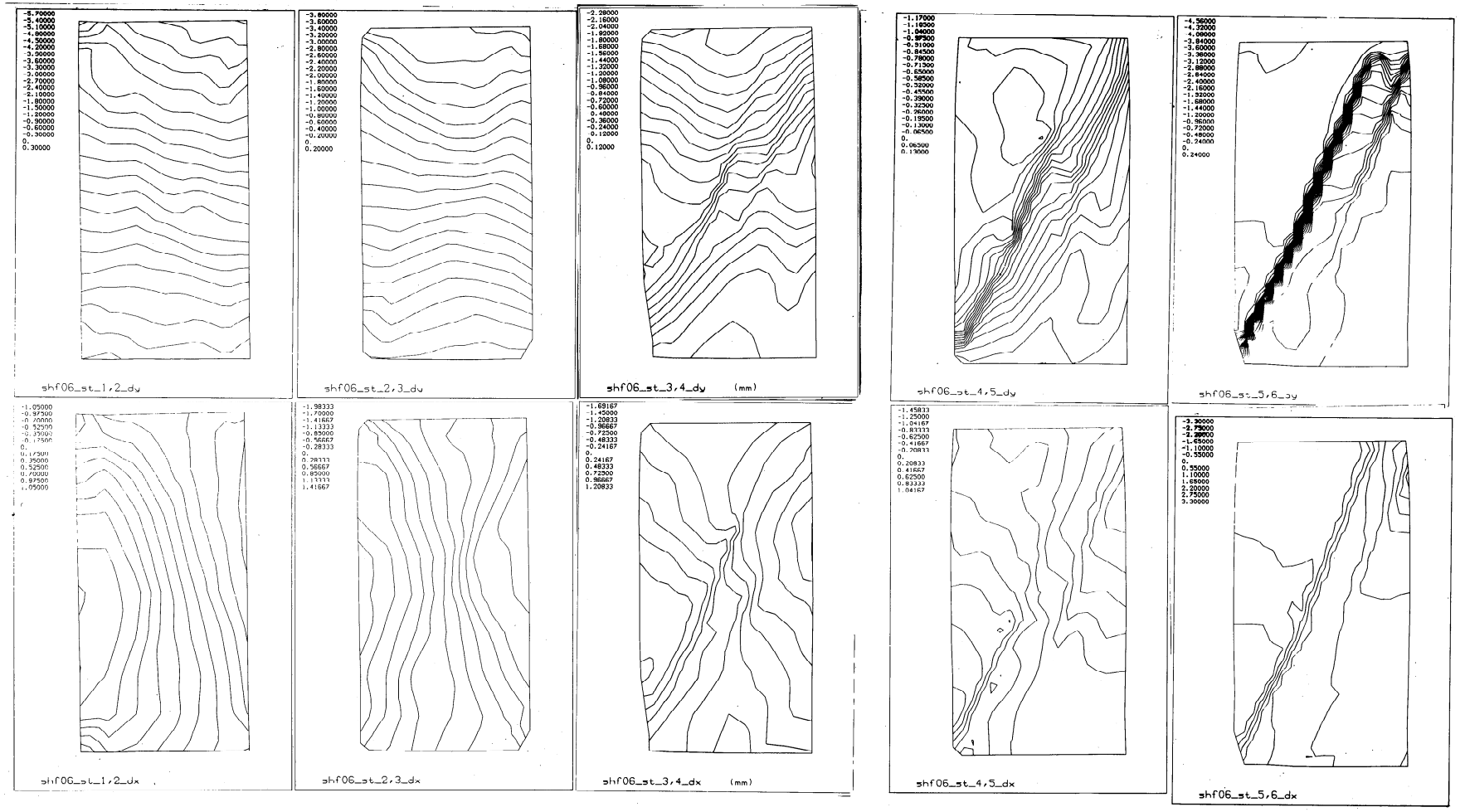


Figure 10. Essai shf06 : isovaleurs des déplacements verticaux (haut) et horizontaux (bas).

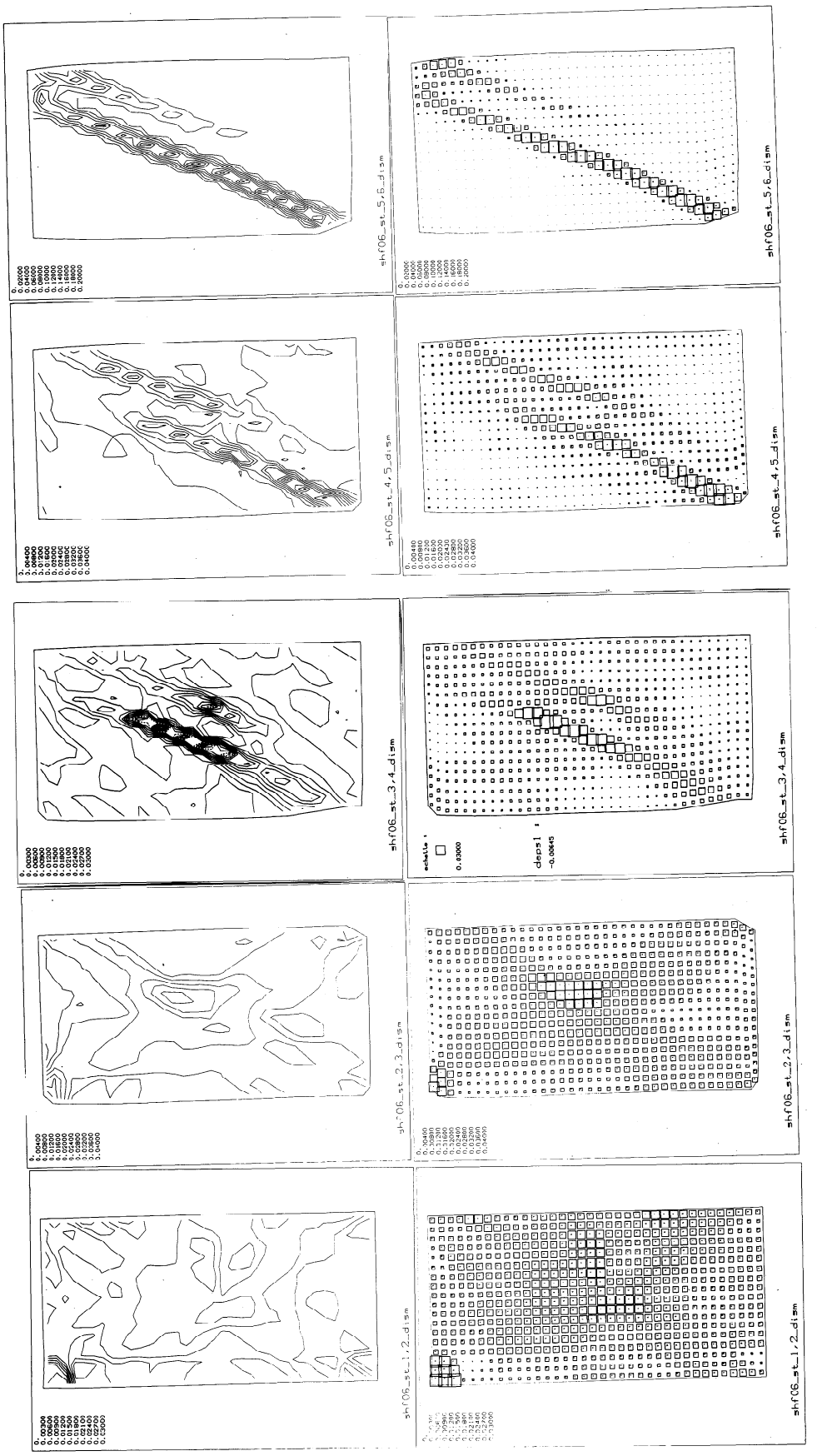


Figure 11. Essai shf06 : isovaleurs et cartes de symboles de la distortion Maximum.

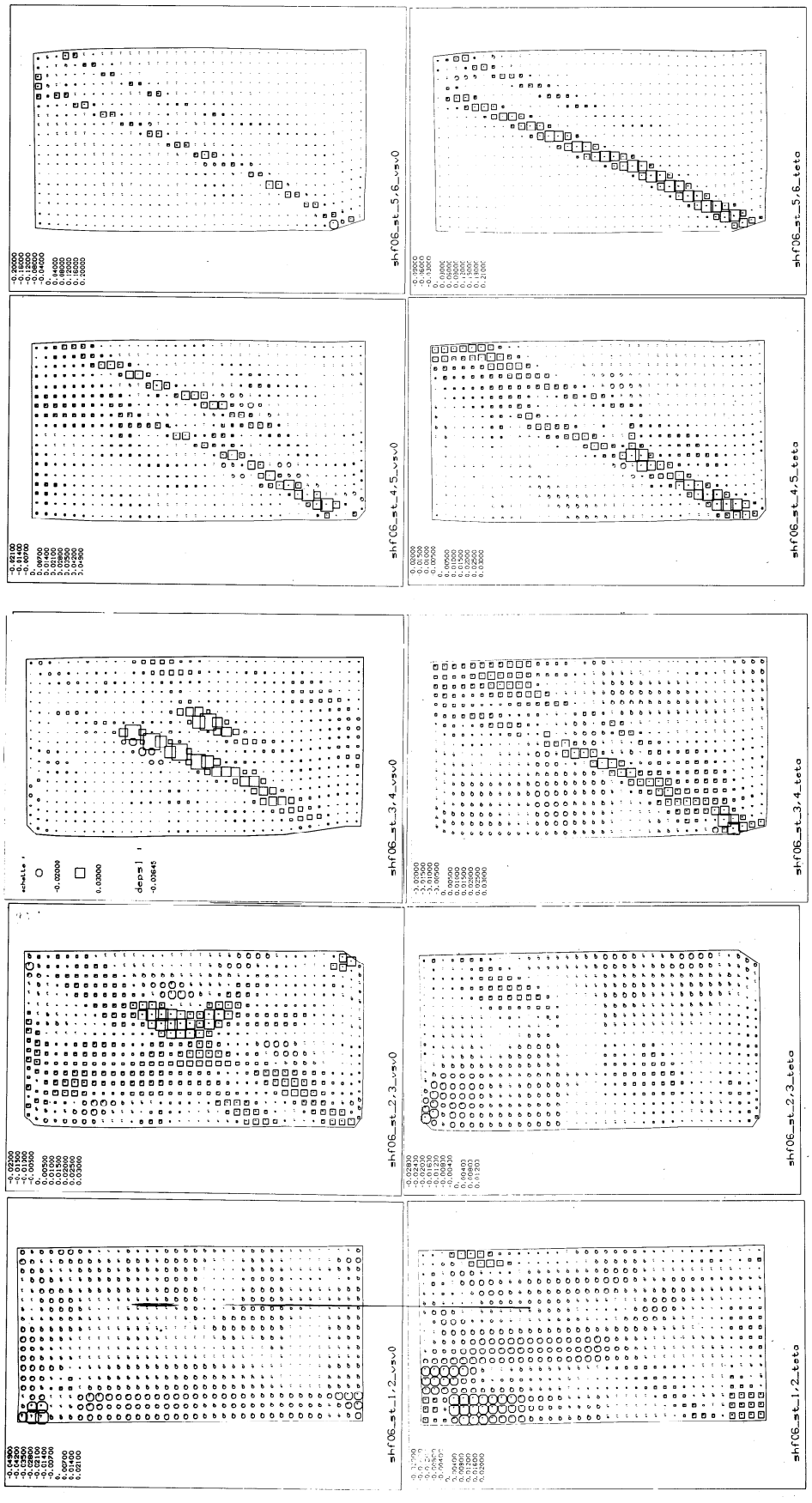


Figure 12. Essai shf06 : cartes de symboles de la variation de volume (haut) et de la rotation matérielle (bas).

La représentation des déformations est plus instructive encore : la figure 11 donne deux représentations du champ de la distorsion maximum $d\gamma = 1/2\ (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)$, l'une en isovaleurs et l'autre en symboles de taille proportionnelle à la valeur locale. Cette figure montre clairement l'initialisation de la bande de cisaillement à l'incrément 3,4 , et son évolution ultérieure. On peut observer dès l'incrément 2,3 une hétérogénéité diffuse de la déformation, dont le maximum coïncide à peu près avec le point d'initialisation de la localisation à l'incrément suivant. Les conventions de signe adoptées pour les déformations dans tout ce chapitre sont : compression négative, extension positive.

La figure 12 enfin, présente en partie haute, le champ de variation de volume incrémentale et en partie basse la rotation matérielle associée à la déformation incrémentale. Les variations de volume révèlent une dilatance importante dans les zones de localisation.

Les signes sont indiqués par la forme du symbole (carré pour les valeurs positives, hexagonal pour les valeurs négatives). Dans bon nombre de cas, les échelles des symboles sont indiquées dans la marge droite du dessin ; lorsqu'elle est donnée, la mention "depsl = ..." indique la valeur de l'incrément de la déformation axiale globale de l'échantillon.

Remarques

1) Lorsque les échelles des symboles ne sont pas indiquées explicitement sur les dessins, on peut en avoir une estimation de la manière suivante: la plus grande des valeurs d'isovaleur reportées dans la marge gauche du dessin correspond à un symbole dont la taille serait égale à l'écartement moyen entre le centre de deux symboles sur le dessin.

2) Dans les cartes d'isovaleurs, la répartition (à pas constant) des isovaleurs est optimisée de façon à offrir une bonne couverture du domaine et non pas seulement calculée comme une fonction de l'écart des valeurs extrêmes. De ce fait, il peut se trouver dans les cas de forte localisation, que cer-

taines zones soient hors de l'échelle de valeurs indiquées en haut à gauche. Dans ce cas, on a dû prolonger l'échelle dans ces zones en gardant le même pas. L'isovaleur correspondant à la dernière valeur sur la liste est alors tracée en pointillé. (Exemple Shf06-st-3,4-dism , figure 11).

Les résultats des exploitations stéréophotogrammétriques des autres essais seront présentés dans la suite de ce mémoire, et discutés par thème dans les paragraphes qui suivent. Le tableau 3 indique les numéros des figures se rapportant à chaque essai. Sur chaque figure apparaît, dans le coin inférieur gauche, un identificateur de la forme "nom-d'essai" - st - "numéro de couple" - "élément représenté". Le dernier champ comporte les mentions **"dx", "dy", "dism"** etc... dont les significations sont les suivantes :

dx déplacement incrémental horizontal

dy déplacement incrémental vertical

dism incrément de distorsion d = 1/2 (d 1 - d 2)

VSVO incrément de déformation volumique

teta incrément de rotation matérielle.

Dans la forme réduite adoptée, la lisibilité des figures est médiocre mais la présentation sous la forme originale (21 x 30 cm) n'est pas possible pour des raisons évidentes d'encombrement.

Tableau 3

ESSAI	incréments	dx,dy	dism // □	vsv0,teta	σ_1/σ_3
SH00	0,3 à 7,8	16	18	20	A-1
"	8,9 à 0,11	17	19	21	
shf00	1,3 à 5,6	22	23	24	A-2
shf01	dy,dism 1,3 à 5,6 : 25 ; tout 5,6 : 26				A-3
shf02	4,5 à 8,9	27	28		A-19
shf03	1,2 à 4,5	29	30	31	A-20
shf06	1,2 à 5,6	10	11	12	A-5
shf10	1,2 à 7,8	33	34		A-9
shf11	tout 7,8 : 32				A-10
shf18	1,2 à 4,5	35	36		A-17
"	5,6 à 8,9	37	38		
"	9,10 à 11,12	39	40		
bv01	1,2 à 4,5	41	42	43	A-23
pr17		44			

Tableau des figures.

VI.3 Dans quel cas la localisation apparaît-elle ?

Sur la base des essais effectués, la localisation se révèle être absolument systématique en déformation plane dans la gamme de contraintes étudiée. Comme il a été dit plus haut, cette gamme exclut (pour des raisons pratiques) les fortes contraintes, celles pour lesquelles on observerait une contractance poursuivie tout au long de l'essai. Des essais concernant ce domaine de comportement sont en préparation . Malgré cette restriction, les essais présentés ici décrivent le cas globalement contractant (essais lâches) et le cas globalement dilatant (essais denses) et on peut constater que la localisation a été observée dans tous les cas, (cf tableau 2, localisation observée). On notera en même temps que la localisation s'est produite quelles que soient les conditions d'essais, telles que la liberté ou le blocage de la rotation des têtes, de la translation de celles-ci, le frettage ou l'antifrettage, l'élancement. Concernant la nature du matériau, on obtient le même type de phénomène sur le sable d'Hostun fin, sur le sable d'Hostun gros, sur les billes de verre et aussi sur le "sable" bidimensionnel de Schneebeli comme le montrent les essais de B. Duthilleul <43>.

Mais outre ce caractère systématique, il apparaît d'après les courbes du rapport des contraintes majeure et mineure rapportées à la déformation axiale globale, relatives aux différents essais, que l'occurence de la localisation, qui se traduit dans le cas dense par un pic extrêmement marqué, est singulièrement insensible aux raffinements ou aux perturbations de l'essai. On trouvera en annexe l'ensemble des courbes en question, mais ce résultat est mieux mis en évidence par la figure 13, qui présente l'enveloppe des courbes dans les cas dense et lâche. Les points reportés sur la figure indiquent la position du pic pour les divers essais. Parmi les essais présentés figurent aussi bien les essais "parfaits" que les essais affectés de perturbations contrôlées : par exemple, l'essai Shf10 qui comporte un point mou (un cylindre

constitué d'un matériau de résistance mécanique négligeable, de 8 millimètres de diamètre, disposé perpendiculairement au plan de DP), l'essai Shf11 avec point dur (une cheville de bois rugueuse de 8 mm de diamètre, même disposition), l'essai Shf12 au cours duquel la tête supérieure de l'échantillon était soumise à une force latérale horizontale, dans le plan de DP, égale à 10% de la valeur du pic de la force axiale, les essais Shf06 et Shf07 dont la face supérieure était inclinée par rapport à l'axe de l'échantillon (avec rotation interdite). En outre, les essais relatifs à des échantillons de rapport d'élancement H/L de 2 et de 3,5 sont ici confondus. On constate qu'en dépit de ces conditions volontairement hétéroclites, les courbes globales sont confinées dans un domaine relativement étroit, pour une densité initiale donnée. On observe un fort pic dans les essais denses; dans les essais lâches au contraire, les courbes ne montrent pas de pic marqué, mais cependant, la localisation est à l'oeuvre, comme on le verra plus loin.

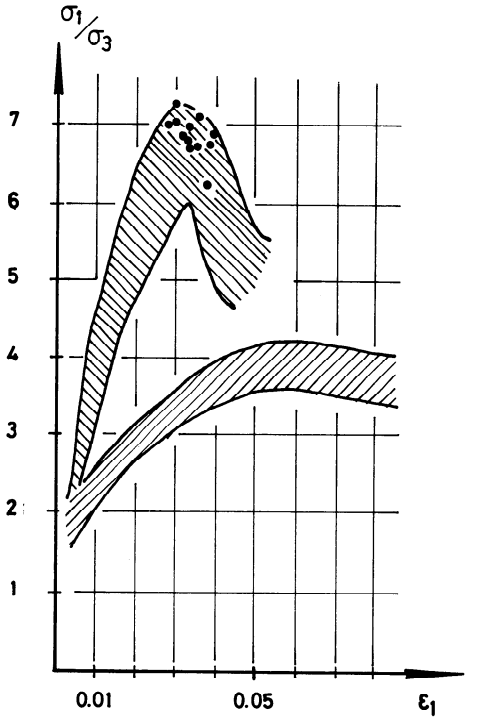


Figure 13. Enveloppe des courbes $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$. Essai biaxial.

A l'inverse de cette relative unicité des phénomènes globaux (localisation systématique, courbes peu variées) l'apparition de la localisation revêt dans le détail un aspect très diversifié, en particulier en ce qui concerne l'emplacement de la bande de cisaillement. Pour ce qui est du schéma final de localisation, tel qu'on l'observe aux environs de $\varepsilon_1 = 0{,}10$ à $0{,}15$

(déformation axiale), il met en jeu suivant les cas une bande de cisaillement ou deux bandes croisées, parfois plus. Les croquis adjoints au tableau 2 rendent compte, pour chaque essai de ce faciès final. On a le plus souvent une seule surface dans le cas des essais denses, mais deux (ou plus) pour les essais lâches. Toutefois, lorsque le plateau supérieur est libre en translation, on n'observe qu'une surface (Shf20). Il est clair cependant que si l'écrasement était poursuivi bien au delà de ε_1 = 0,15, de nouvelles bandes apparaîtraient lorsque la géométrie des blocs rigides deviendrait incompatible avec l'évolution de l'essai.

Il est intéressant d'établir une comparaison entre cette localisation systématique en déformation plane et ce que l'on peut observer en conditions axisymétriques, au triaxial de révolution classique. Dans ce but, un certain nombre d'essais de compression triaxiale ont été réalisés sur le sable fin, aux mêmes densités initiales et sous la même contrainte latérale σ_3 par J.L. Colliat-Dangus et moi-même. Diverses conditions d'essai ont été adoptées, avec notamment des rapports d'élancement hauteur/diamètre de 2 et 1, et des têtes rugueuses ou antifrettées. Les conclusions de ces essais concernant la localisation sont les suivantes :

- Dans le cas des échantillons initialement lâches, on n'a jamais observé de localisation, quelque soient les conditions d'essai. L'échantillon subit une déformation en tonneau lorsque les têtes sont rugueuses, mais lorsqu'un antifrettage efficace est utilisé, la déformation conduit à une forme sensiblement cylindrique, jusqu'à des déformations axiales importantes (ε_1 = 0,30).

- Dans le cas des échantillons initialement denses, la situation est plus compliquée. On trouve à la figure 14 une comparaison, pour des essais effectués sous diverses conditions d'élancement et d'antifrettage, des courbes du rapport des contraintes et de la variation de volume rapportés à la déformation axiale.

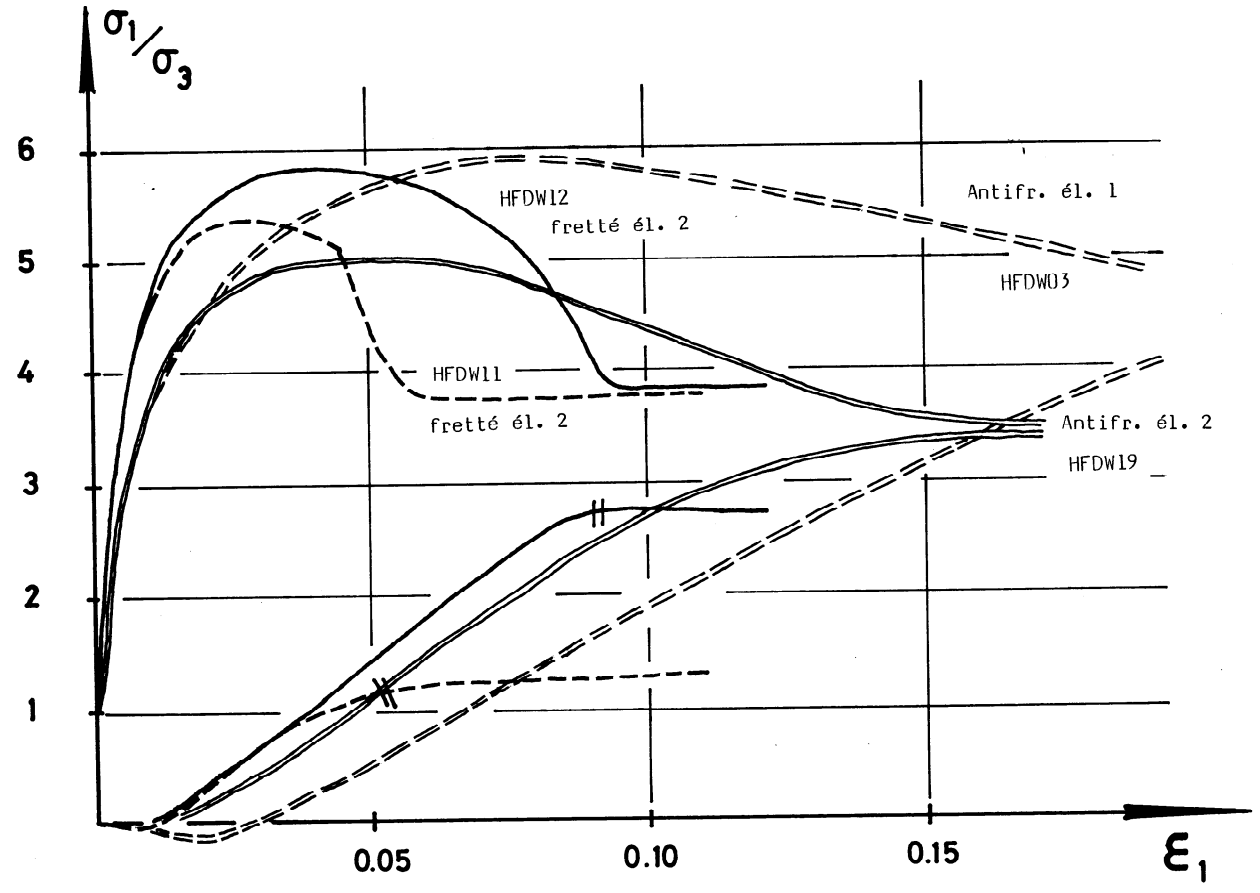


Figure 14. Essai triaxial axisymétrique : comparaison de diverses conditions d'essai.

En l'absence de dispositif d'antifrettage, la localisation survient dans tous les cas, attestée par une forte distorsion de la membrane au niveau de la trace du plan de localisation ; sur la courbe contraintes-déformation, on observe un pic marqué, pendant que le taux de variation de volume s'annulle brusquement : c'est le cas des essais HFDW11 et HFDW12 représentés sur la figure 14. En outre, l'apparition de ces phénomènes conjugués est très sensible aux imperfections de l'essai : la seule différence entre les deux essais en question tient à un léger excentrement de l'échantillon de l'essai HFDW12 dans l'appareil en début d'essai.

Lorsque l'essai est antifretté, on n'observe pas de bandes de cisaillement avant de très fortes déformations ; avant ce stade, la déformation peut être cylindrique, mais dans bon nombre de cas, on observe une hétérogénéité diffuse sous la forme d'une déformation axisymétrique conique non localisée superposée à une déformation cylindrique.

Si l'échantillon est élancé (H/R = 2), ce mode diffus peut se développer sur une partie seulement de l'échantillon, laissant alors une grande partie pratiquement rigide au cours de l'évolution ultérieure de l'essai : c'est le cas de l'essai HFDW19. La photo présentée à la figure 15 montre pour un essai antifretté dense (HFDW21) l'état de déformation final : on observe, en partie haute de l'échantillon, le mode diffus décrit ci-dessus, auquel vient encore se superposer une déformation localisée ultérieure sous forme de deux bandes de cisaillement concourantes. Il apparaît nettement qu'à partir du développement du mode diffus, une partie importante de l'échantillon a cessé de se déformer. Lorsque l'élancement est plus faible (H/R = 1), la déformation, même affectée d'hétérogénéité diffuse, intéresse pratiquement tout l'échantillon, ce qui conduit à une meilleure représentativité des mesures obtenues (essai HFDW03). La comparaison des courbes montre que plus faible est le rapport d'élancement, moins

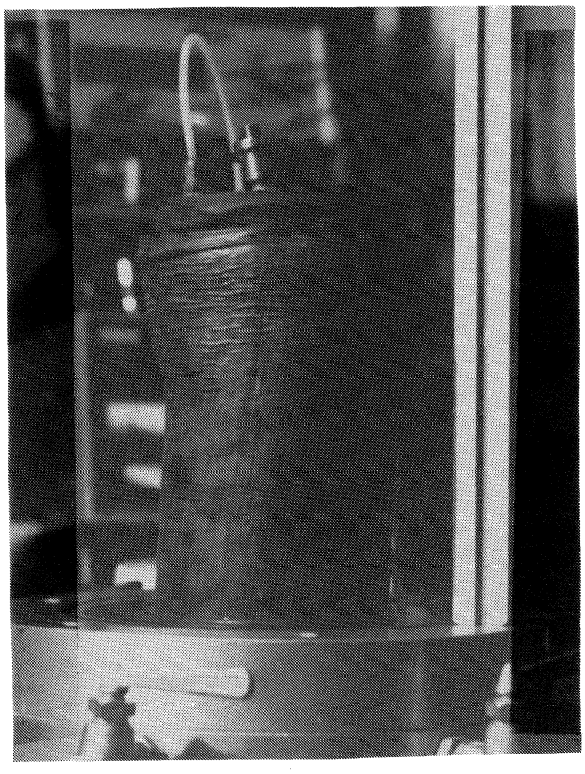


Figure 15. Essai triaxial axisymétrique antifretté élancement 2
Hétérogénéité de déformation en fin d'essai.

marqué est le pic de la courbe $\sigma_1/\sigma_3 - \varepsilon_1$, et plus forte la variation de volume en phase finale.

Ces résultats concernant l'essai triaxial, menés ici, pour comparaison, sur le même matériau que celui de nos essais de déformation plane, rejoignent ceux rapportés par divers chercheurs. L'amélioration significative de l'homogénéité au triaxial axisymétrique grâce aux dispositifs d'antifrettage et/ou à la diminution de l'élancement a été décrite notamment par Rowe et Barden <84>, Bishop et Green <7> ou encore par Kirpatrick <61>, qui a utilisé une méthode de radiographie pour mettre en évidence l'homogénéité accrue.

Dans le cadre d'une vaste campagne d'essais triaxiaux très soignés destinés au calage des lois rhéologiques incrémentales, S. Labanieh au laboratoire de Grenoble, a pu obtenir des essais triaxiaux axisymétriques pratiquement exempts de plans de rupture et sensiblement cylindriques jusqu'à des déformations axiales de 0,25.

Vardoulakis, sur un appareil triaxial antifretté d'élancement faible (0,6), a montré l'apparition de modes de bifurcation diffuse axisymétrique similaires à ceux décrits ici (figure 1 de l'article référencé <102>). L'étude de bifurcation en mode diffus présentée dans le même article montre l'émergence possible de ce comportement. Au contraire, la même étude menée en déformation plane <104> indique que, dans le cadre des hypothèses rhéologiques faites, le mode localisé apparaît plus vite qu'un éventuel mode diffus. Les essais présentés ici corroborent ces résultats; en effet, il a été souligné qu'en déformation plane, la localisation survient systématiquement avant qu'une hétérogénéité diffuse d'une amplitude notable ait pu se développer.

D'autres résultats, obtenus sur des appareils triaxiaux "vrais", c'est à dire capables d'appliquer trois contraintes principales indépendantes à un échantillon cubique, sont à rapprocher de nos observations. Reades et Green <77> ont effectué des séries d'essais en faisant varier la contrainte intermédiaire σ_2 entre la majeure σ_1 et la mineure σ_3 , ce qui fait varier

entre 0 et 1 le paramètre b défini par :

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

Ces auteurs ont observé qu'à partir de b > 0,15, il se produit une rupture avec localisation le long d'un plan perpendiculaire à la face soumise à la contrainte intermédiaire.

Arthur et Dunstan <4> rapportent des résultats similaires obtenus sur un vrai triaxial à frontière flexible ; leur figure 4 montre l'orientation, d'ailleurs constante, des bandes de cisaillement en fonction du paramètre b défini plus haut, ce qui indique l'existence de ruptures localisées pour tous ces chemins de chargement (parmi lesquels certains se rapprochent de la déformation plane). A contrario, les auteurs désignent l'essai triaxial axisymétrique en compression comme l'un des cas où la rupture non localisée reste possible, au prix des soins dont il a été question plus haut.

Ainsi, la localisation apparaît dans une gamme extrêmement large de chemins de chargement et se révèle en particulier inévitable, dès 3 à 6 pour cent de déformation globale, en situation de déformation plane, quelque soit l'état initial du matériau. Le triaxial de révolution quant à lui, peut, jusqu'à des déformations importantes, en être exempt. Par contre, la réponse obtenue avec cet appareil est hautement sensible aux imperfections de l'essai, à l'opposé des résultats présentés ici pour la déformation plane.

Suite du texte en page 158 .

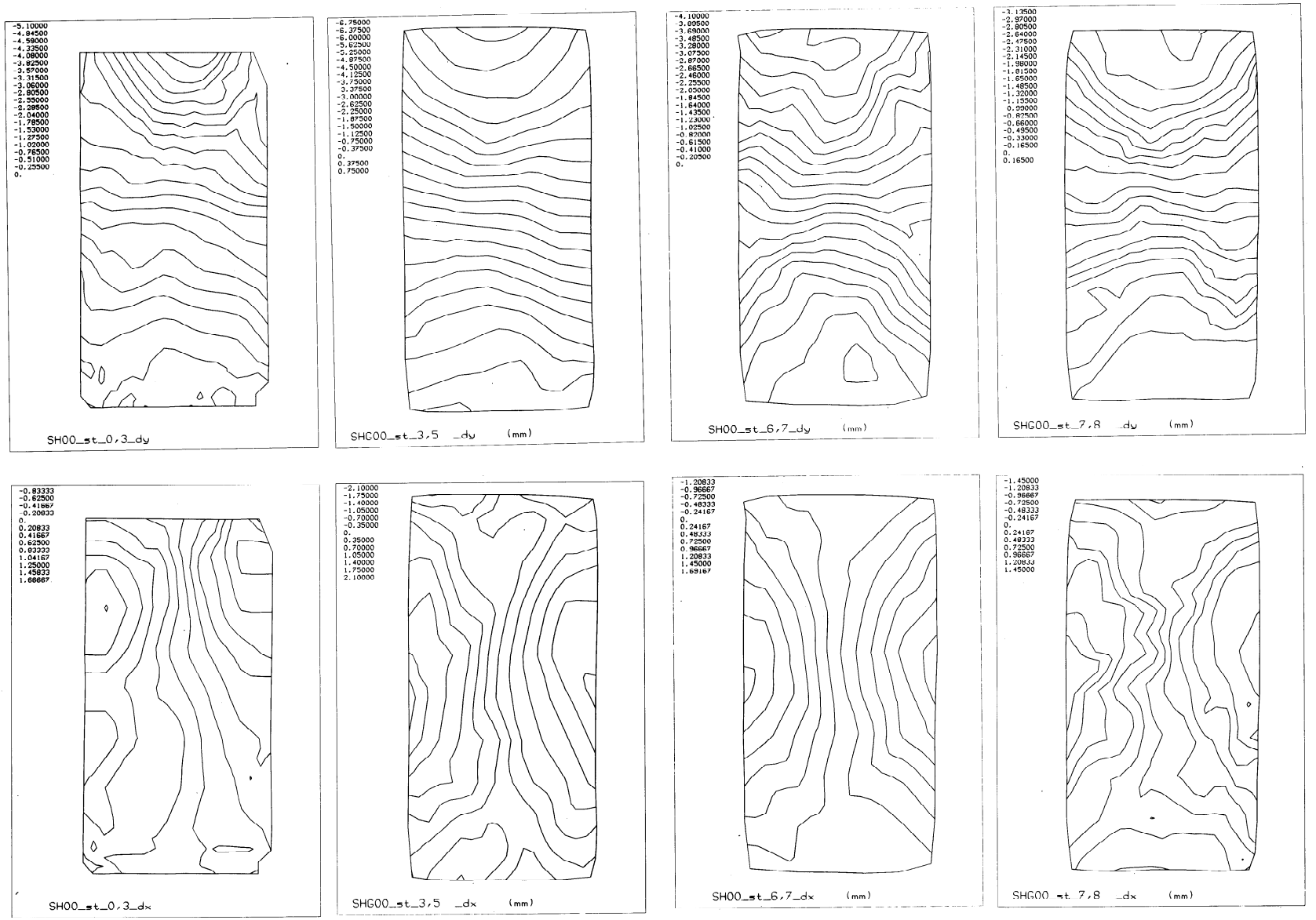


Figure 16. Essai SH00. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

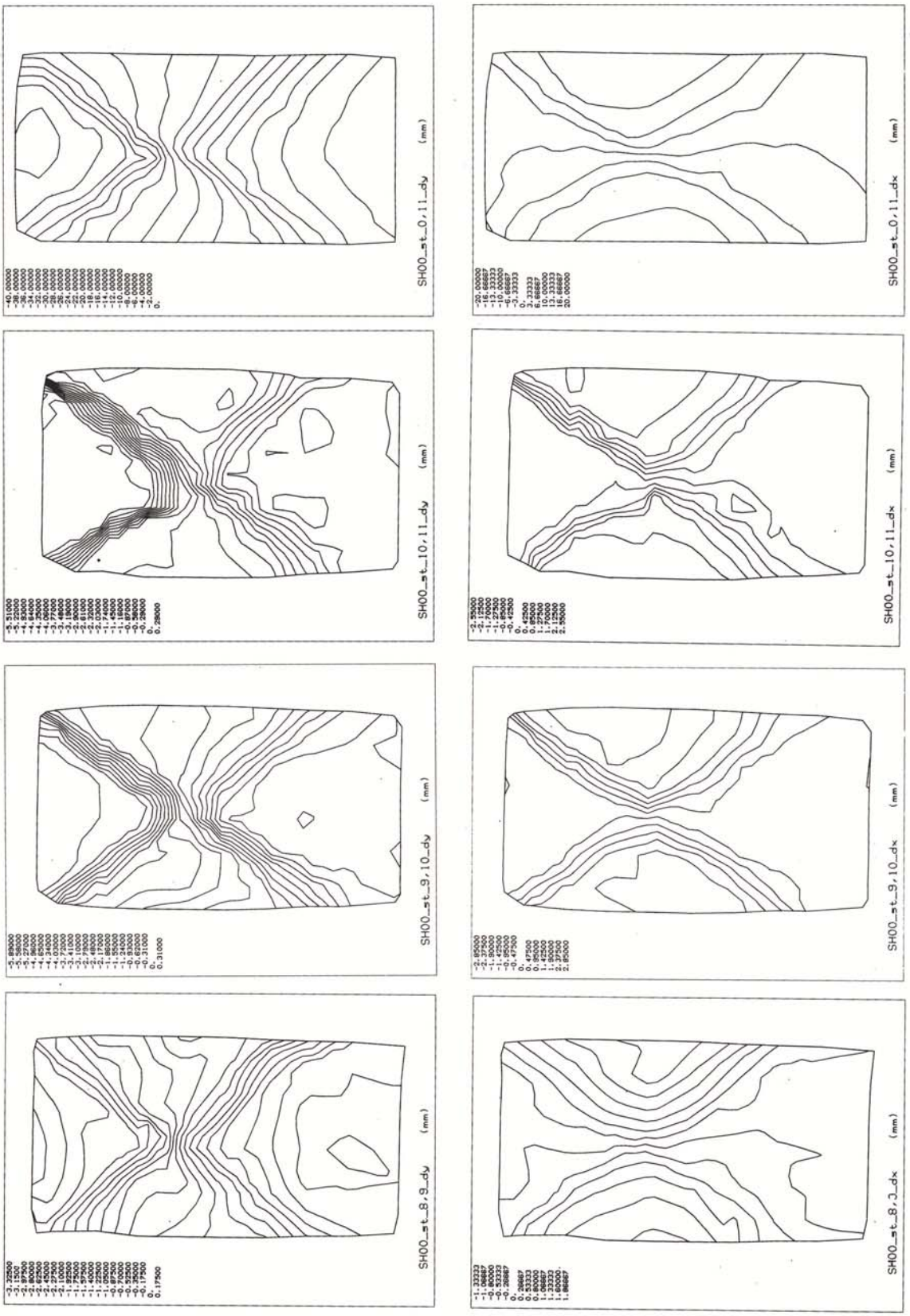


Figure 17. Essai SH00. Isovaleurs du déplacement vertical (haut) et horizontal (bas).

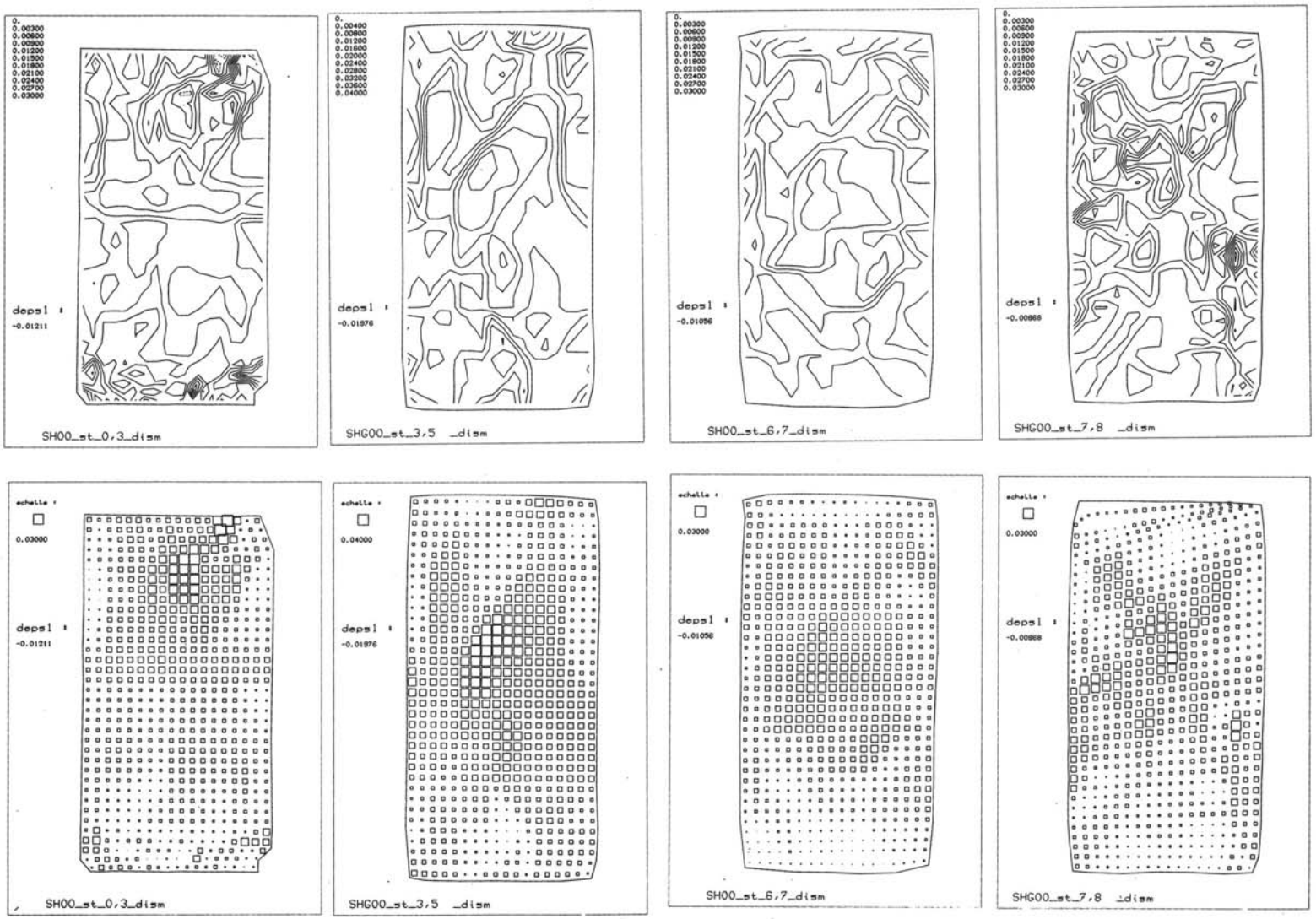


Figure 18. Essai SH00. **Distortion :** isovaleurs et cartes de symboles.

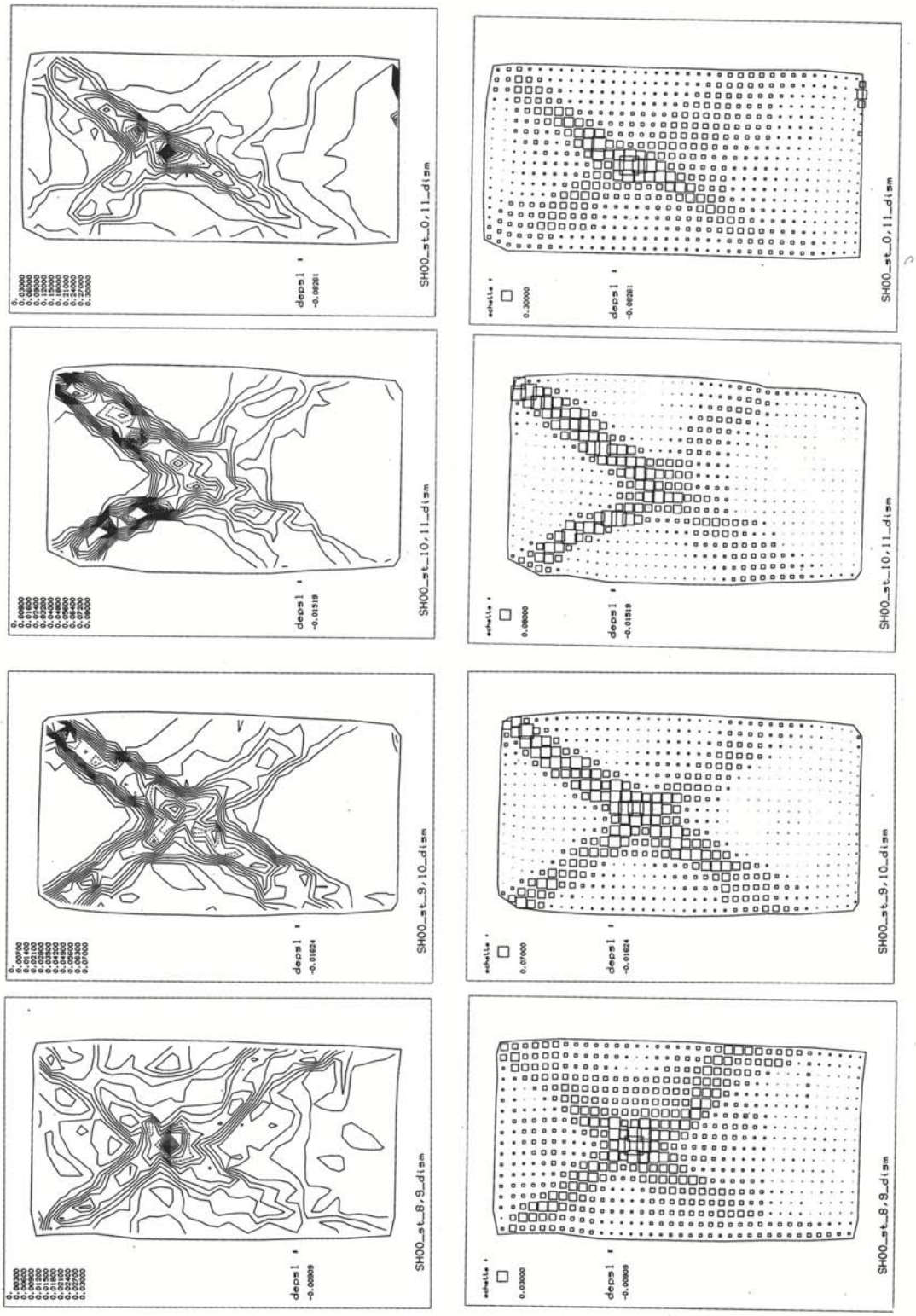


Figure 19. Essai SH00. **Distortion** : isovaleurs et cartes de symboles.

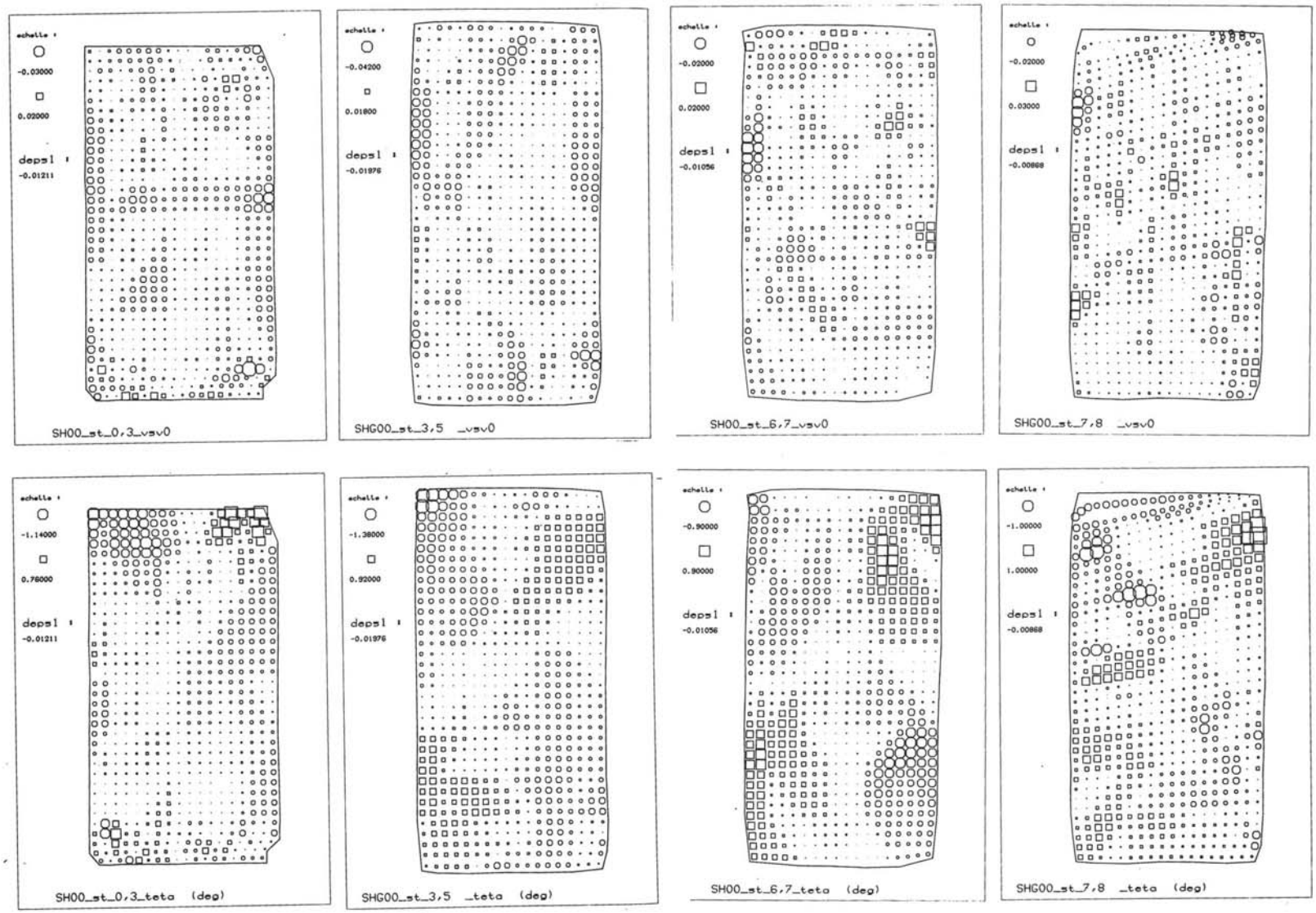


Figure 20. Essai SH00. **Variation de volume** (haut) et **rotation matérielle** (bas).

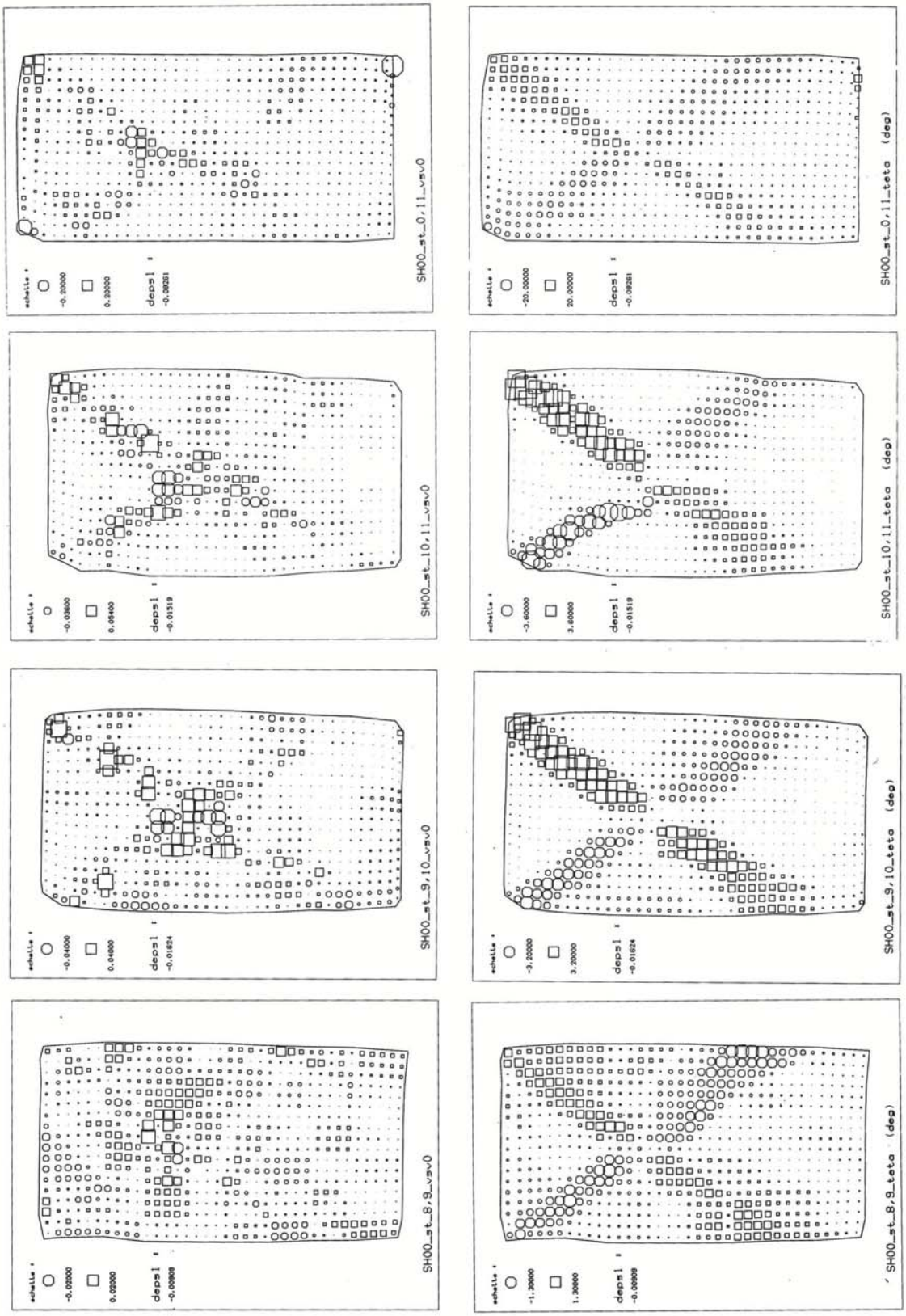


Figure 21. Essai SH00. **Variation de volume** (haut) et **rotation matérielle** (bas).

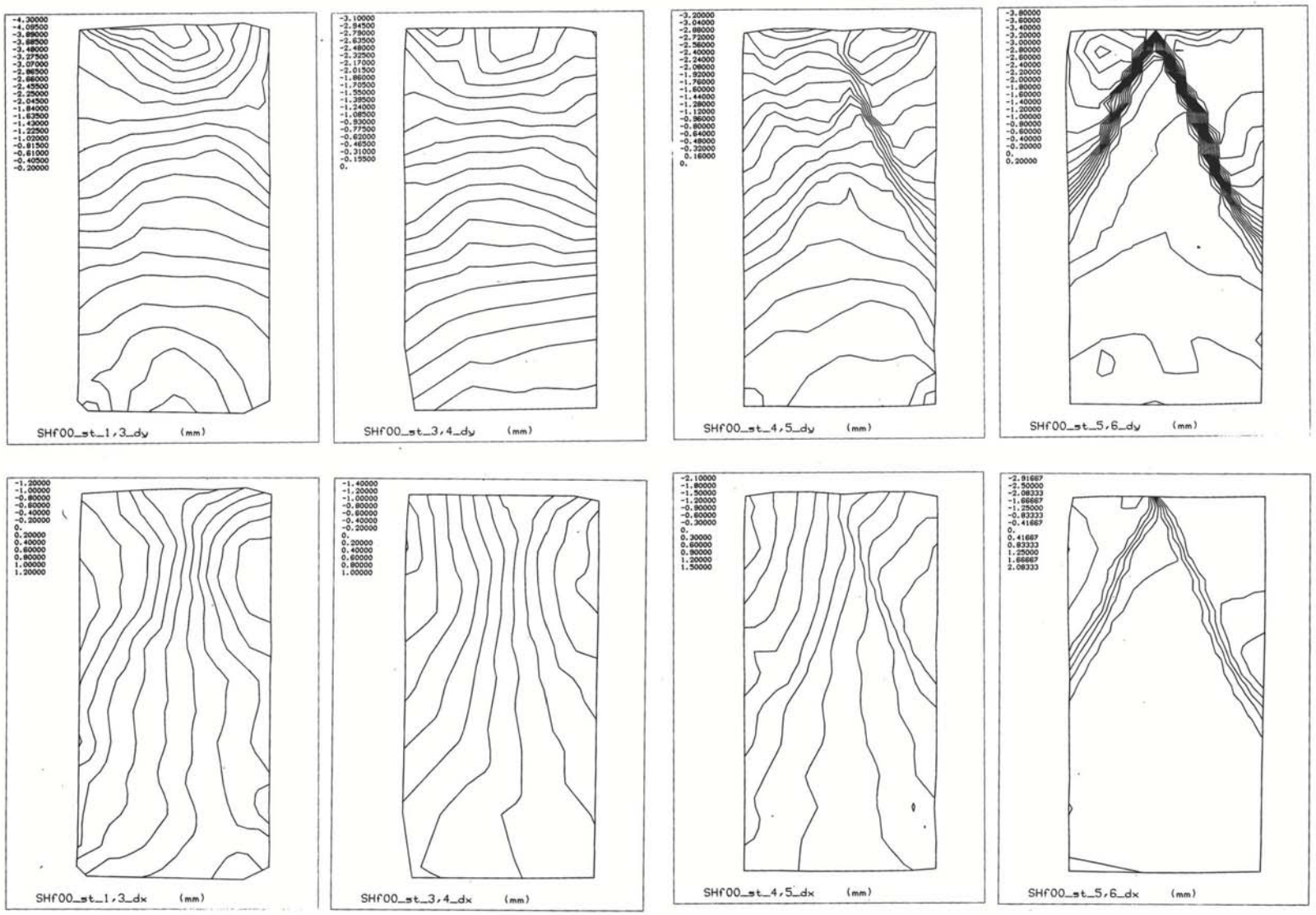


Figure 22. Essai shf00. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

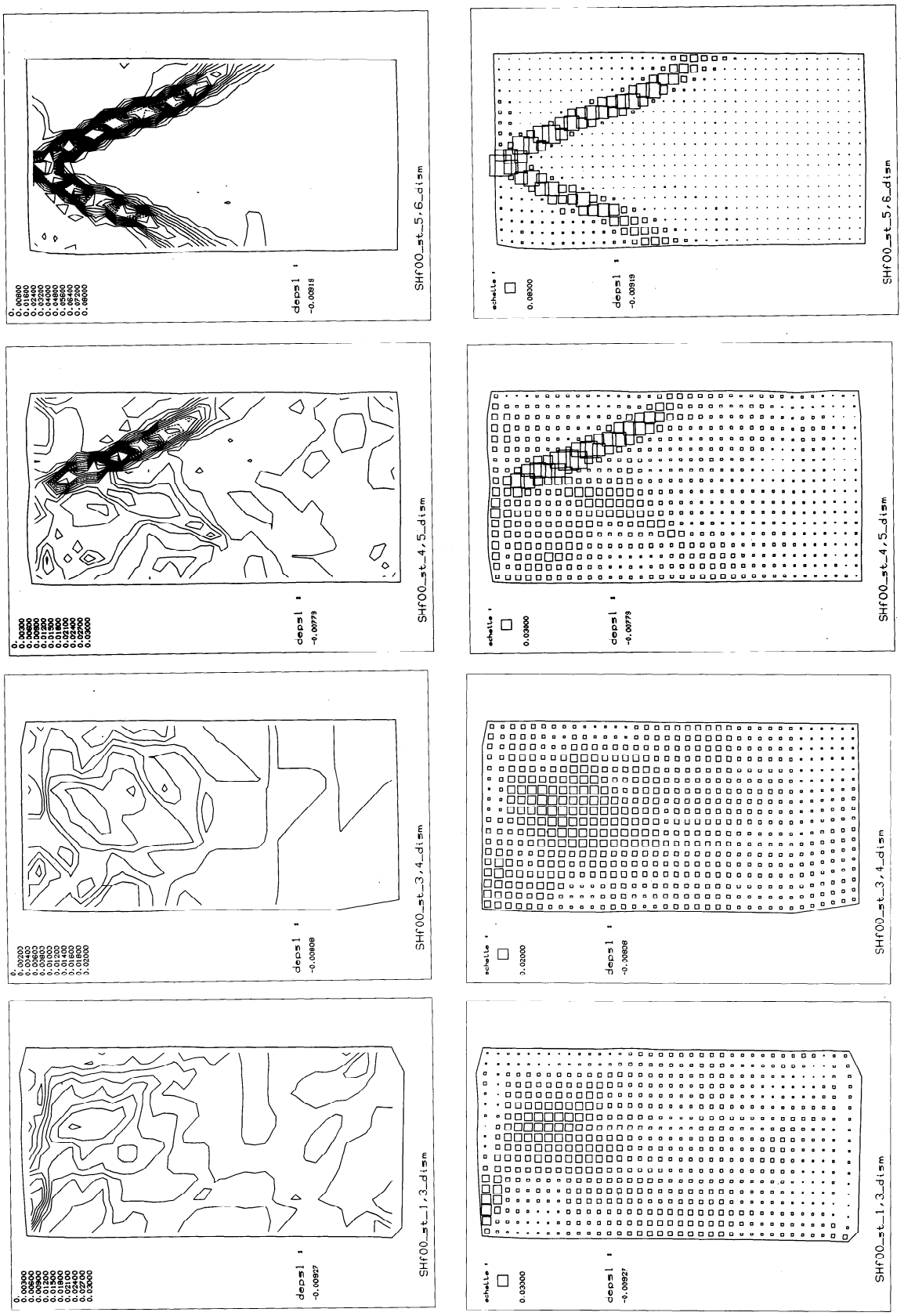


Figure 23. Essai shf00. Distortion : isovaleurs et cartes de symboles.

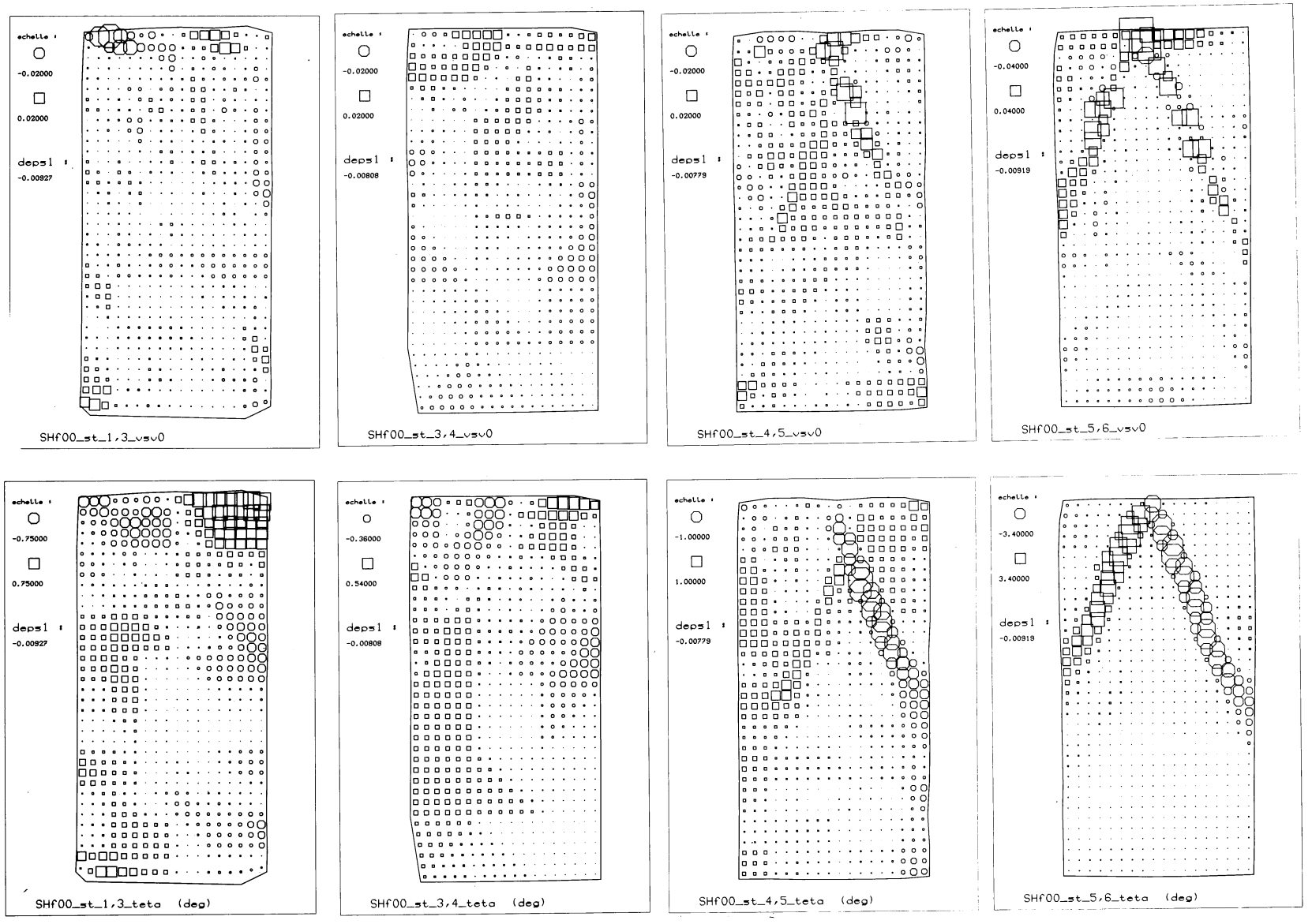
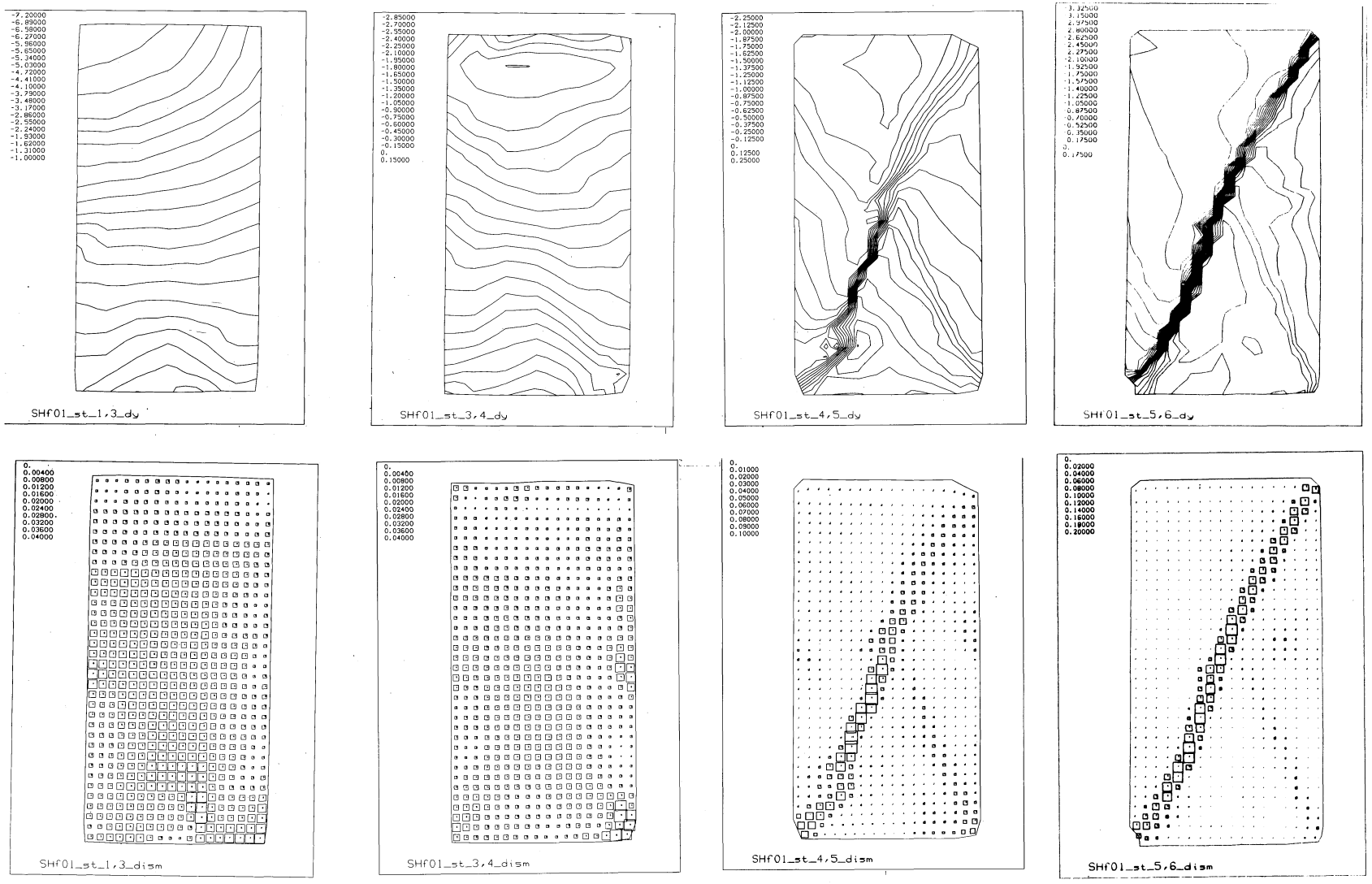


Figure 24. Essai shf00. **Variation de volume** (haut) et **rotation matérielle** (bas).

Figure 25. Essai shf01. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et carte de **distortion**



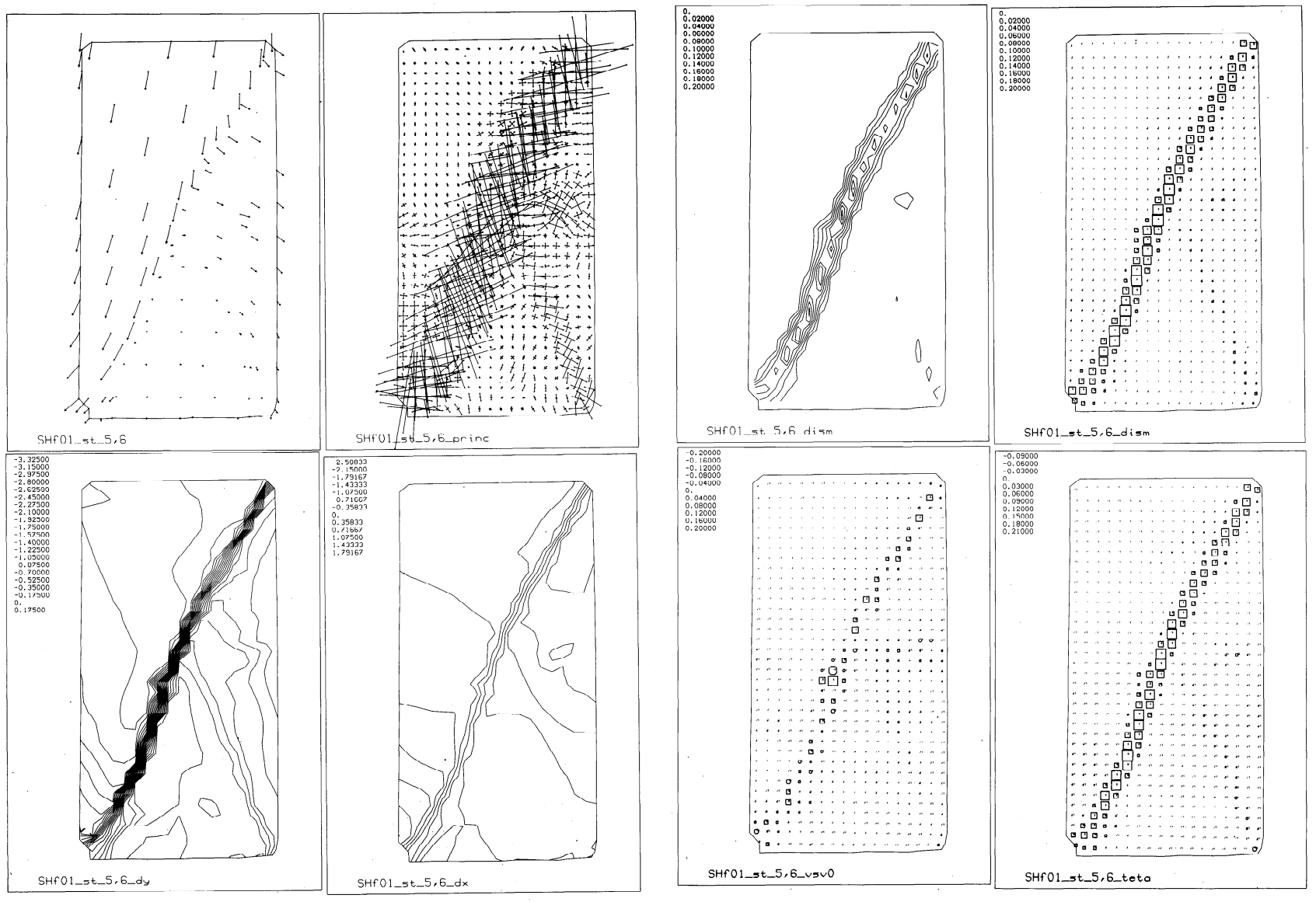


Figure 26. Essai shf01. Incrément 5,6 : **déplacements et déformations.**

Figure 26.

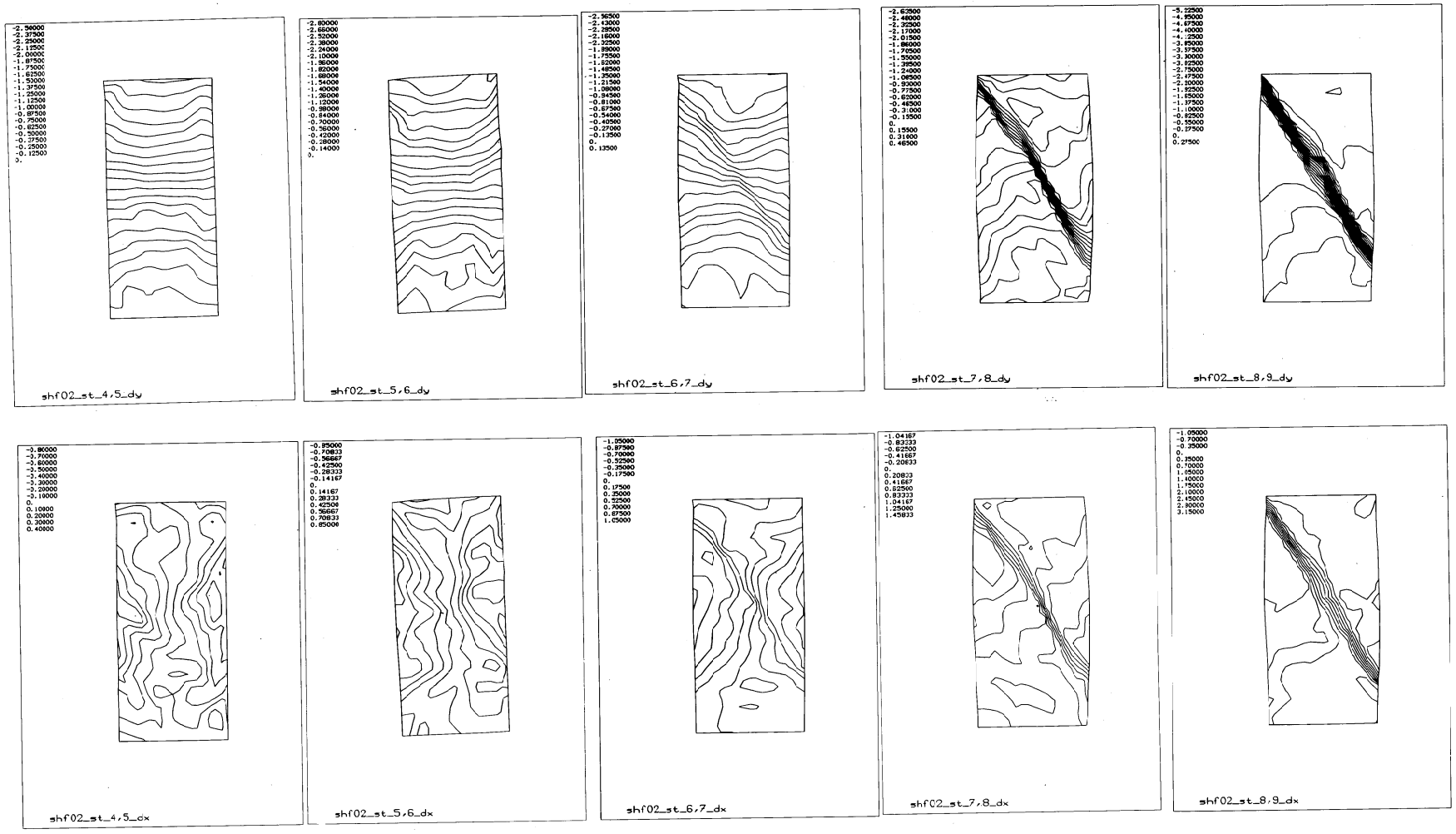


Figure 27. Essai shf02. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

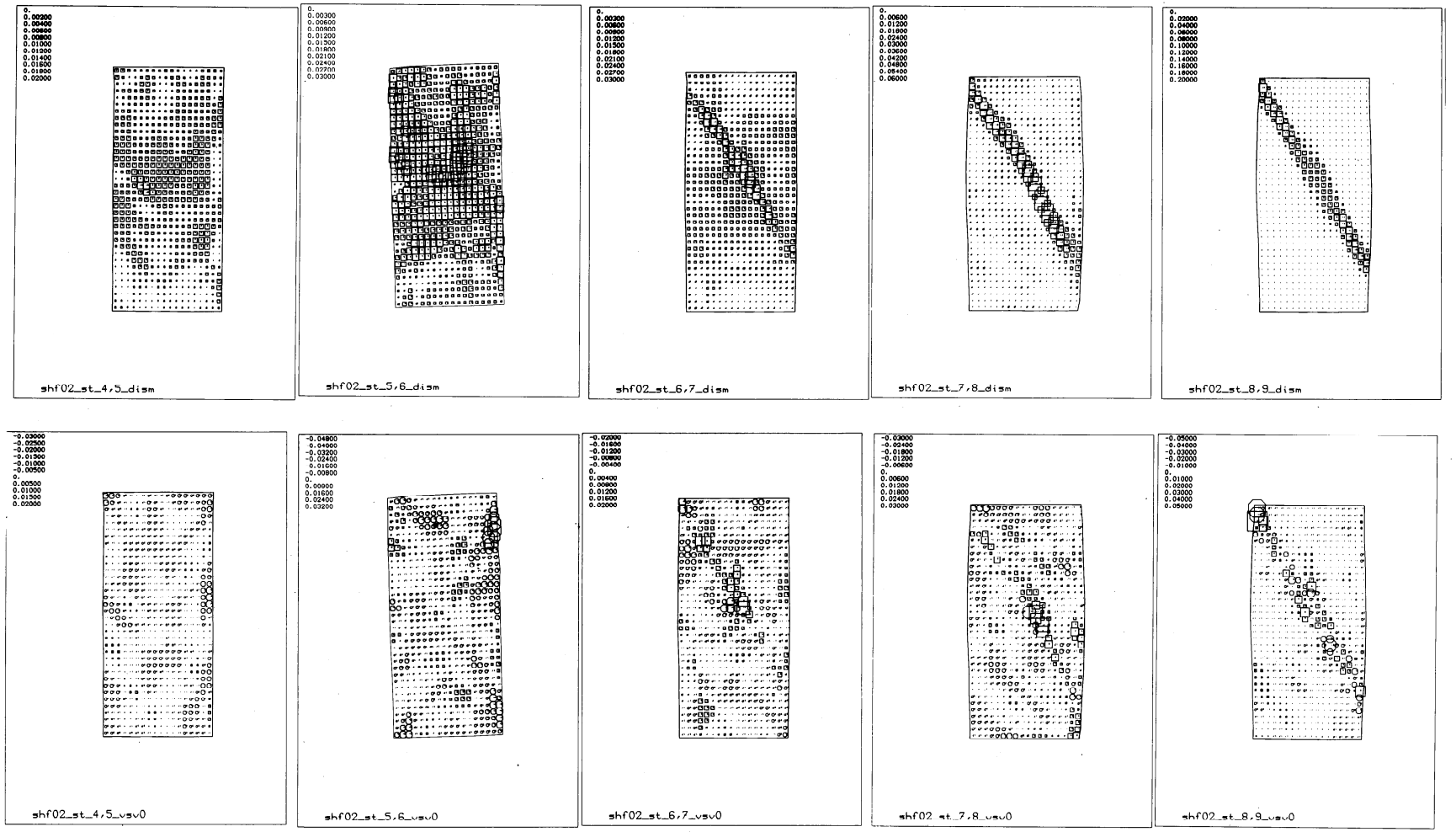


Figure 28. Essai shf02. Cartes de symboles : **distortion** (haut) et **variation de volume** (bas).

Figure 28.

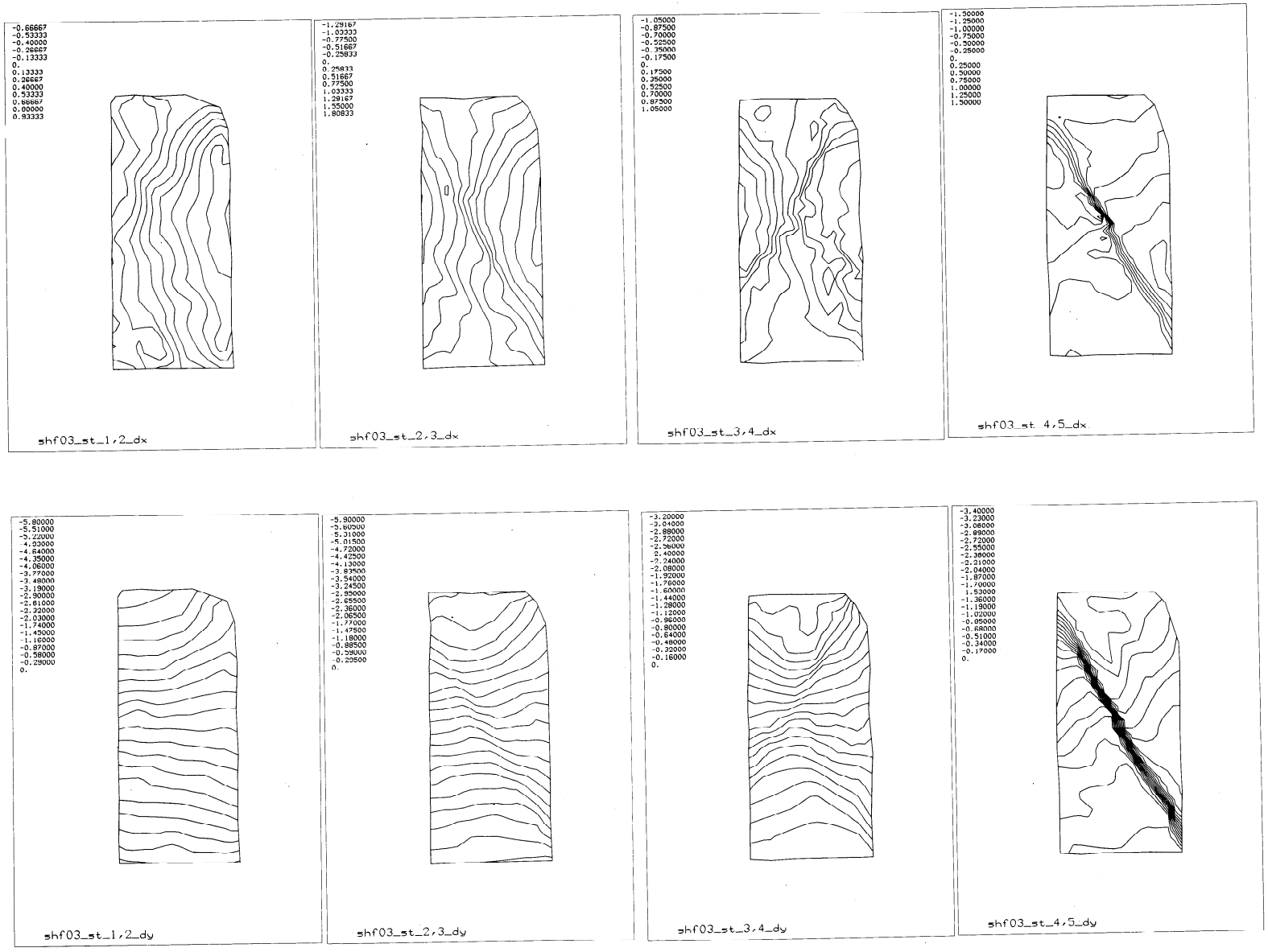


Figure 29. Essai shf03. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

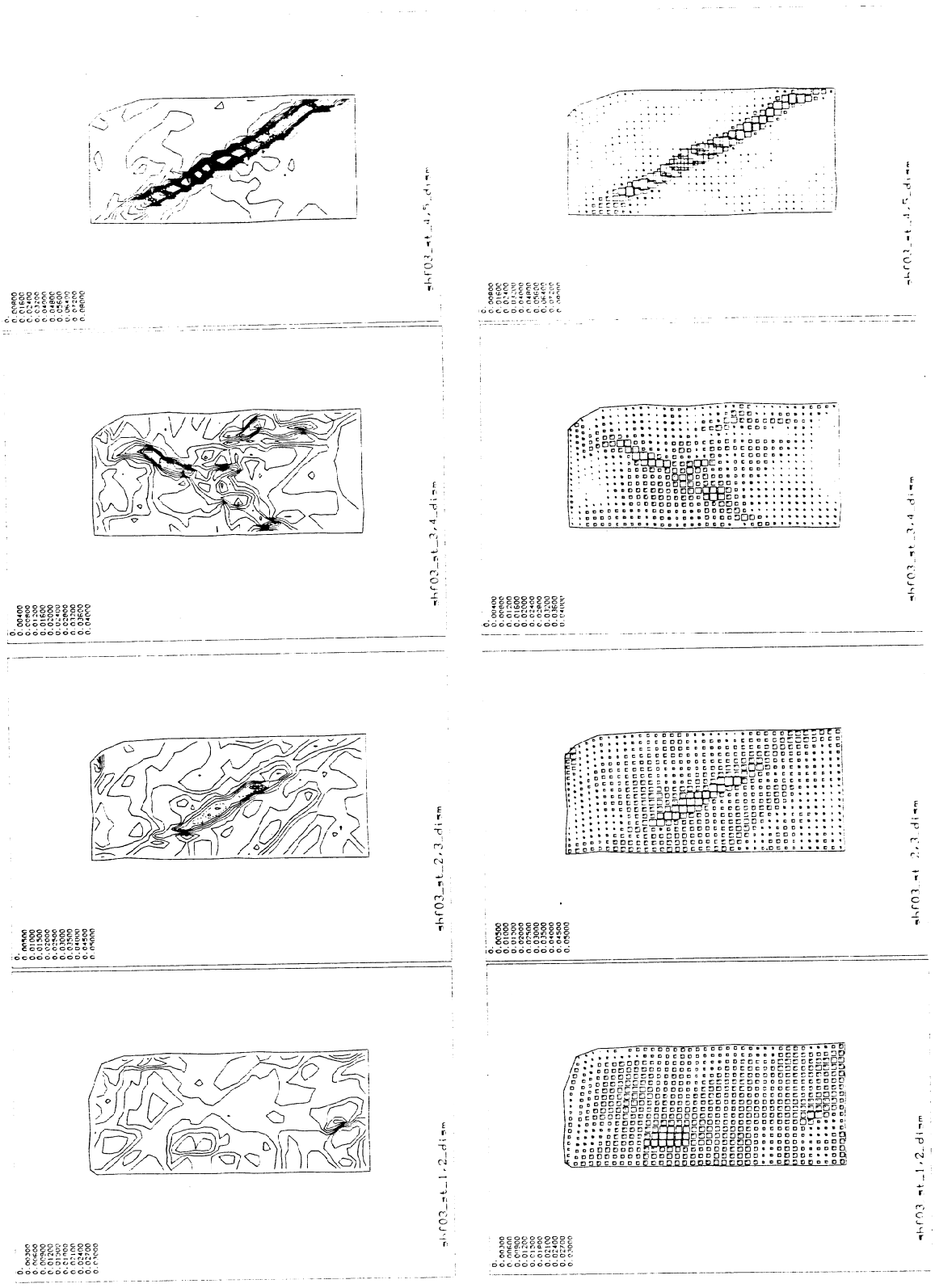


Figure 30. Essai shf03. **Distortion :** isovaleurs et cartes de symboles.

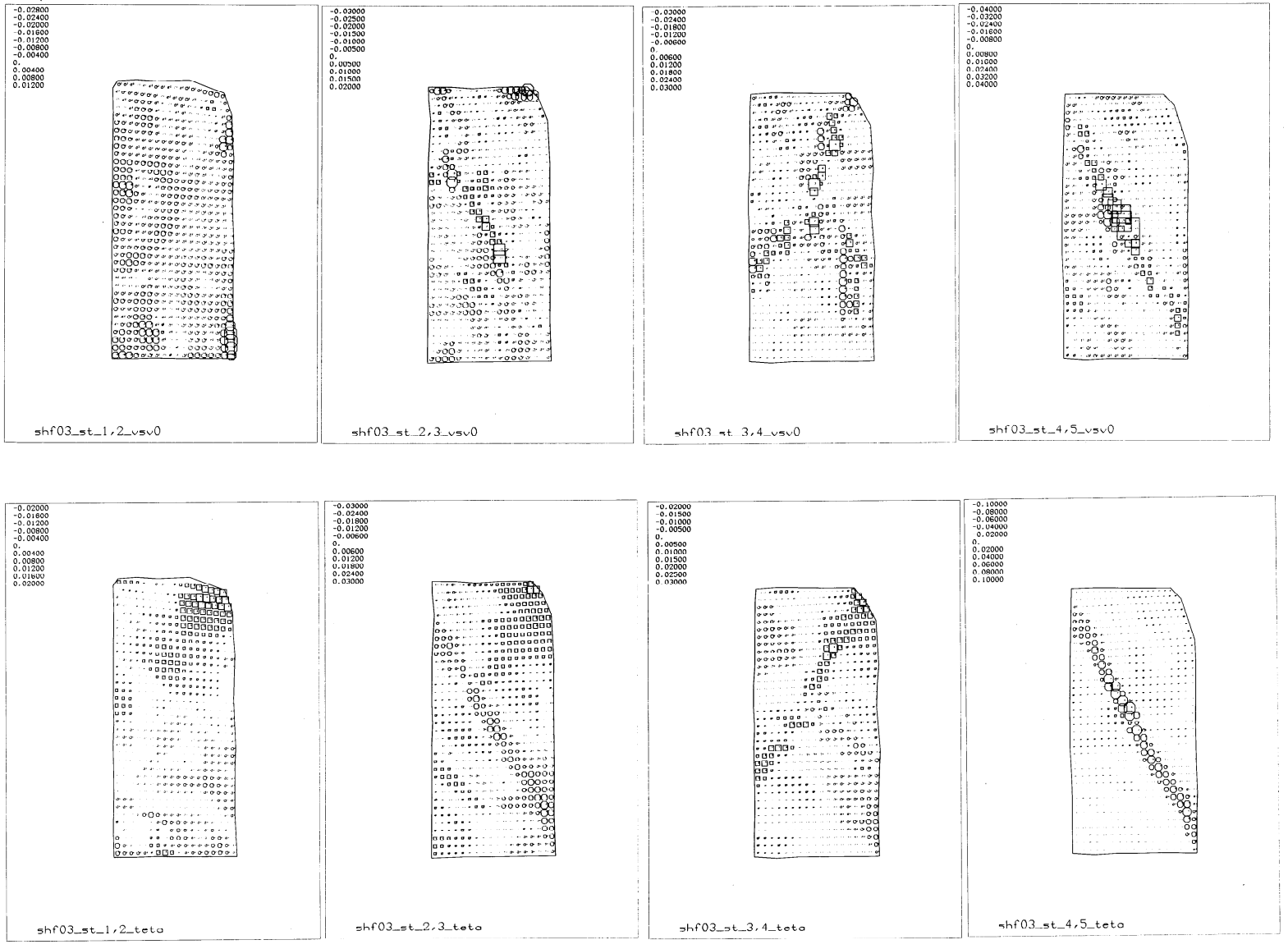
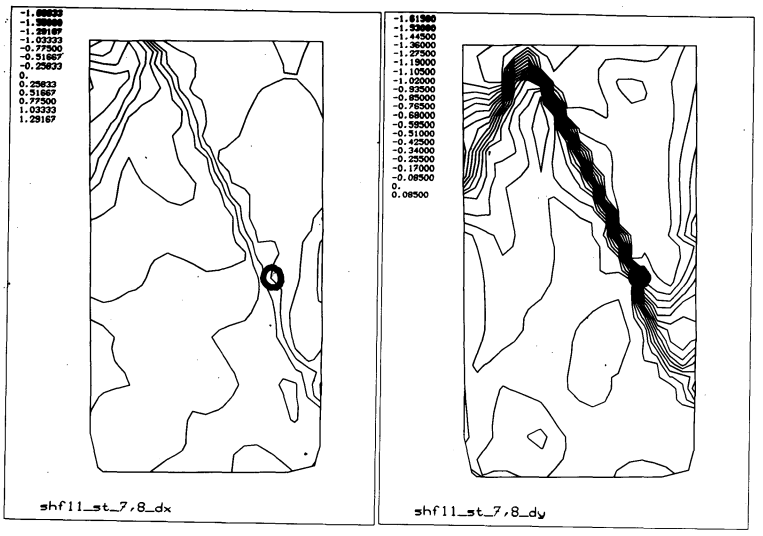
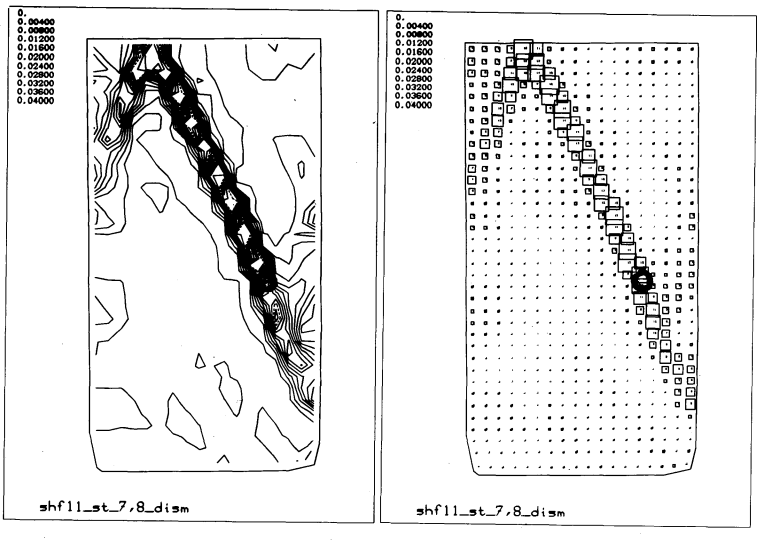
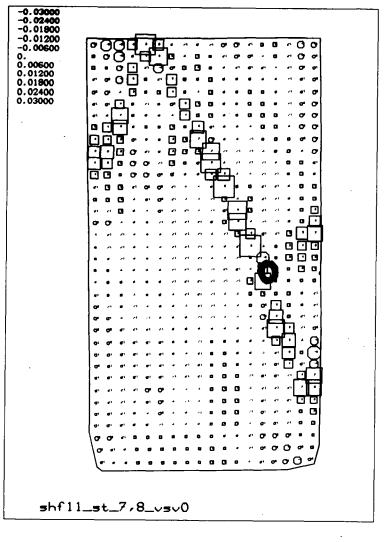


Figure 31. Essai shf03. **Variation de volume** (haut) et **rotation matérielle** (bas).

Figure 32. Essai shfll. Incrément 7,8.







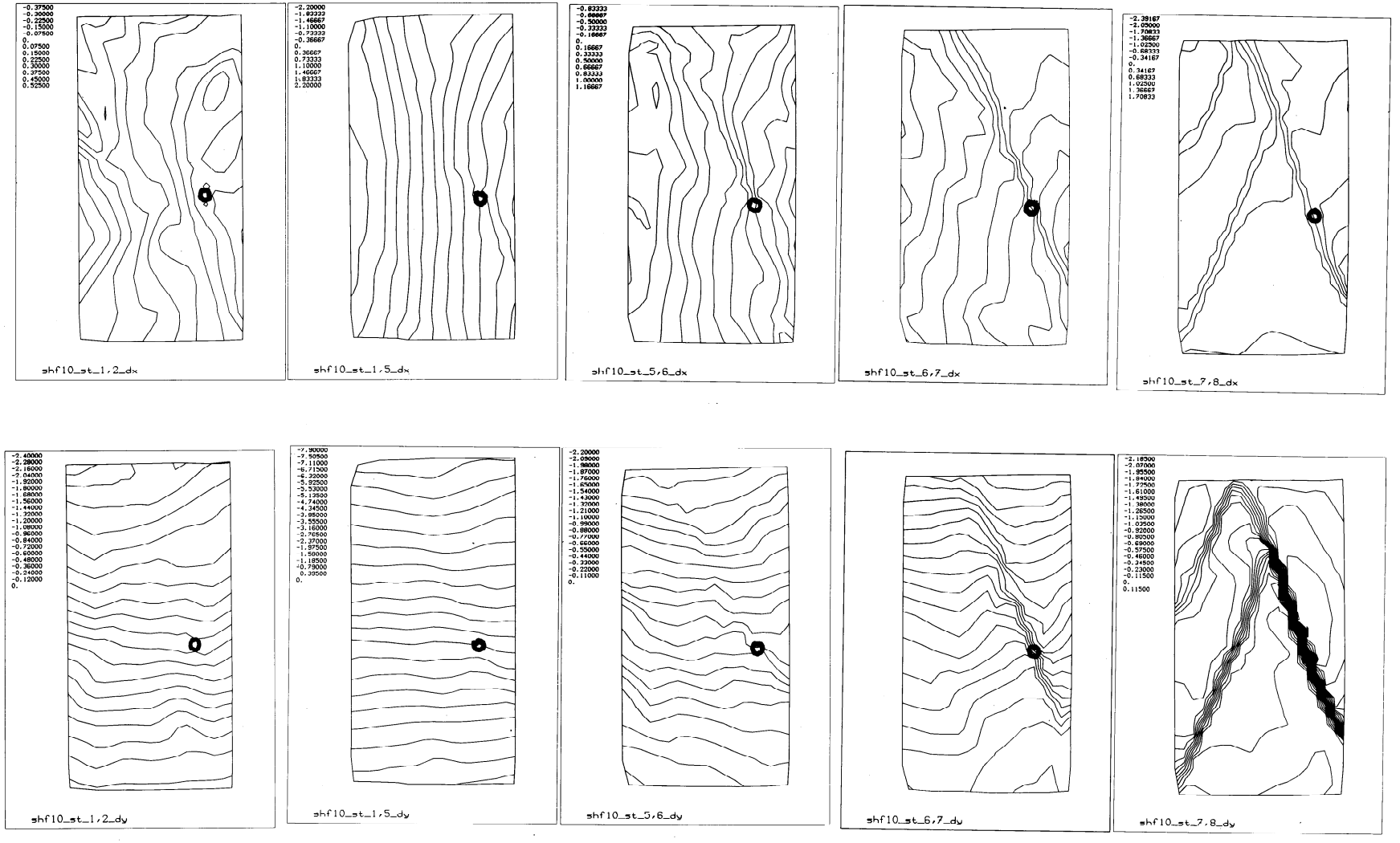


Figure 33. Essai shf10. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

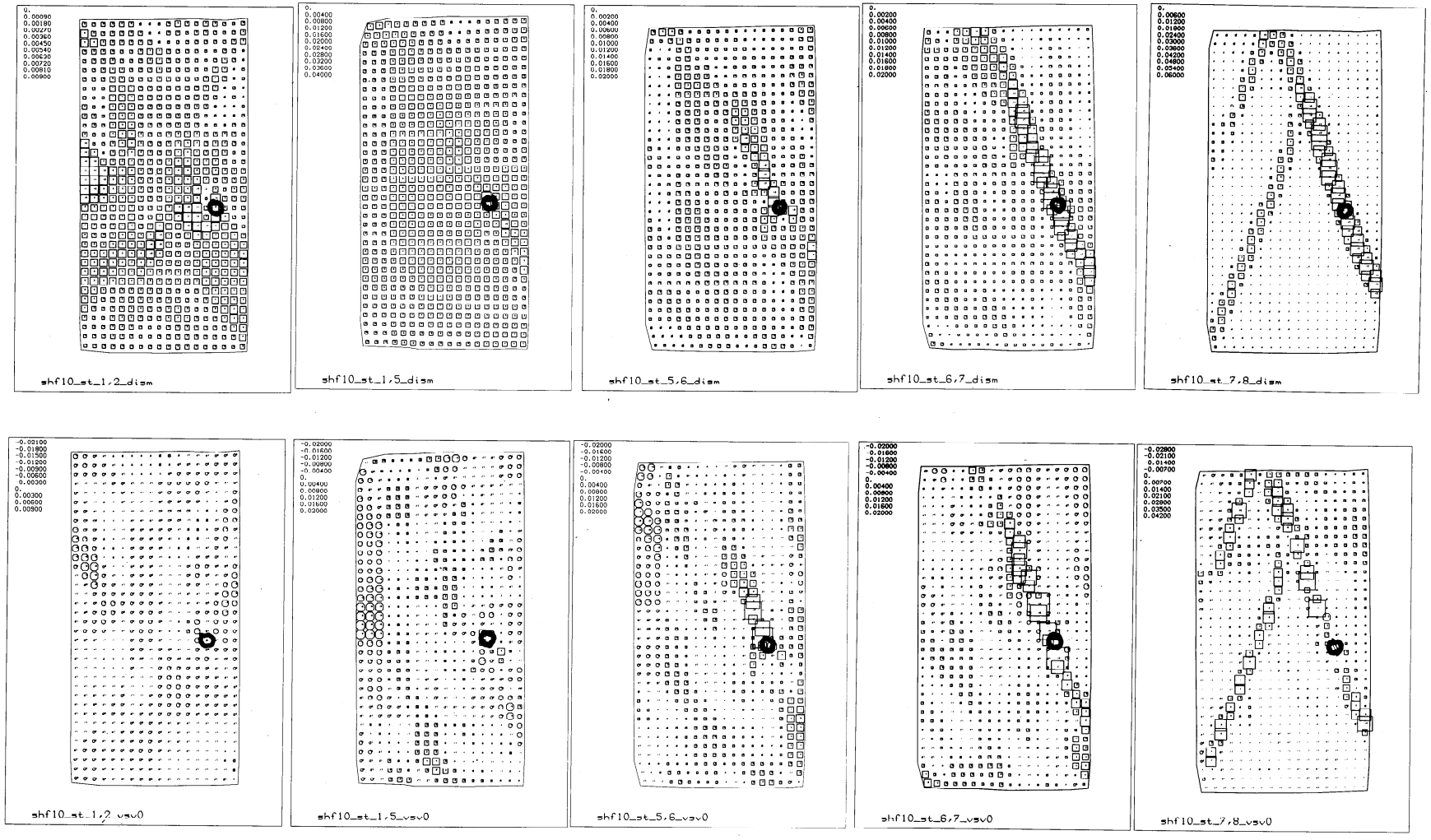


Figure 34. Essai shf10. Cartes de symboles : **distortion** (haut) et **variation de volume** (bas).

Figure 34.

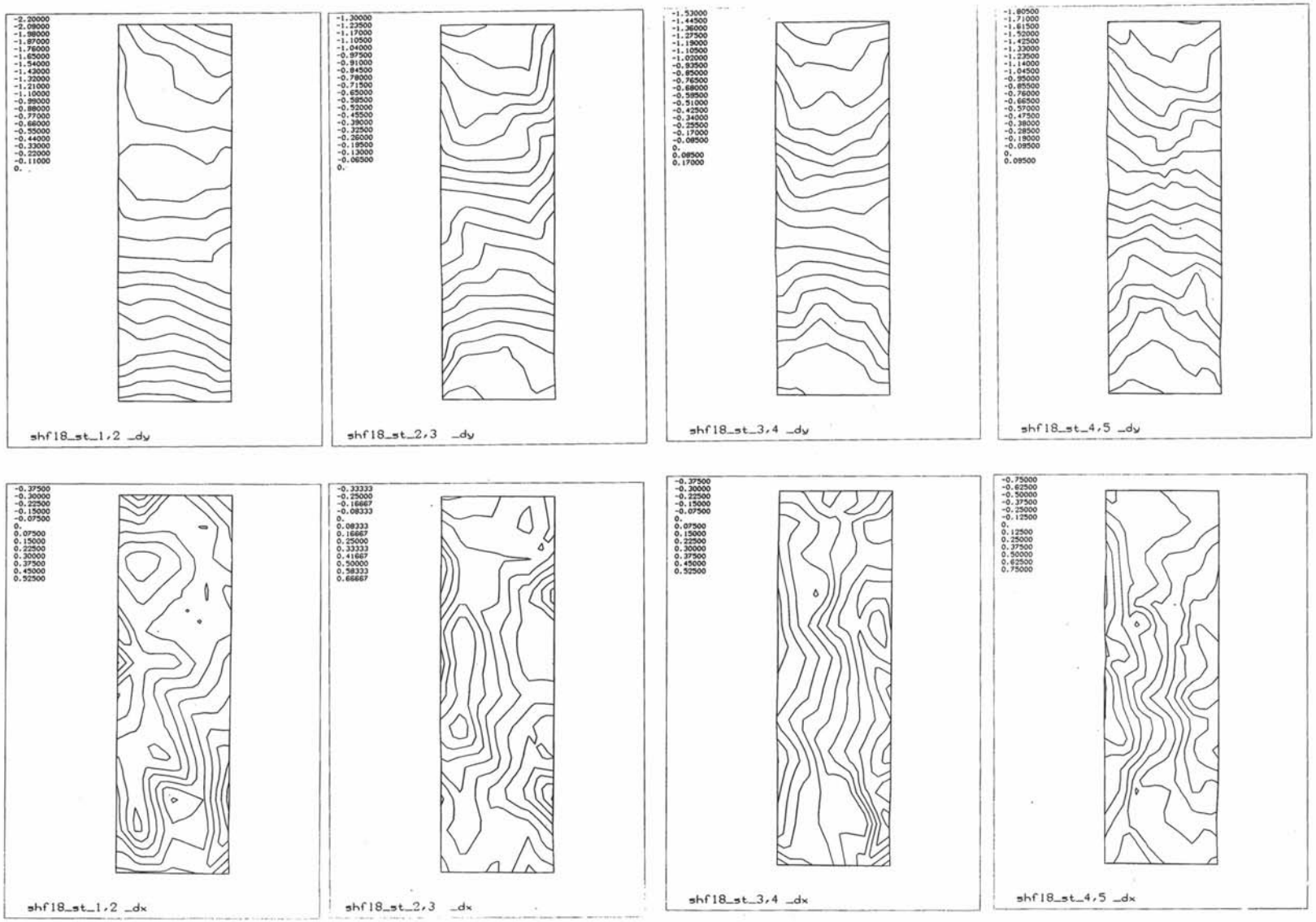


Figure 35. Essai shf18. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

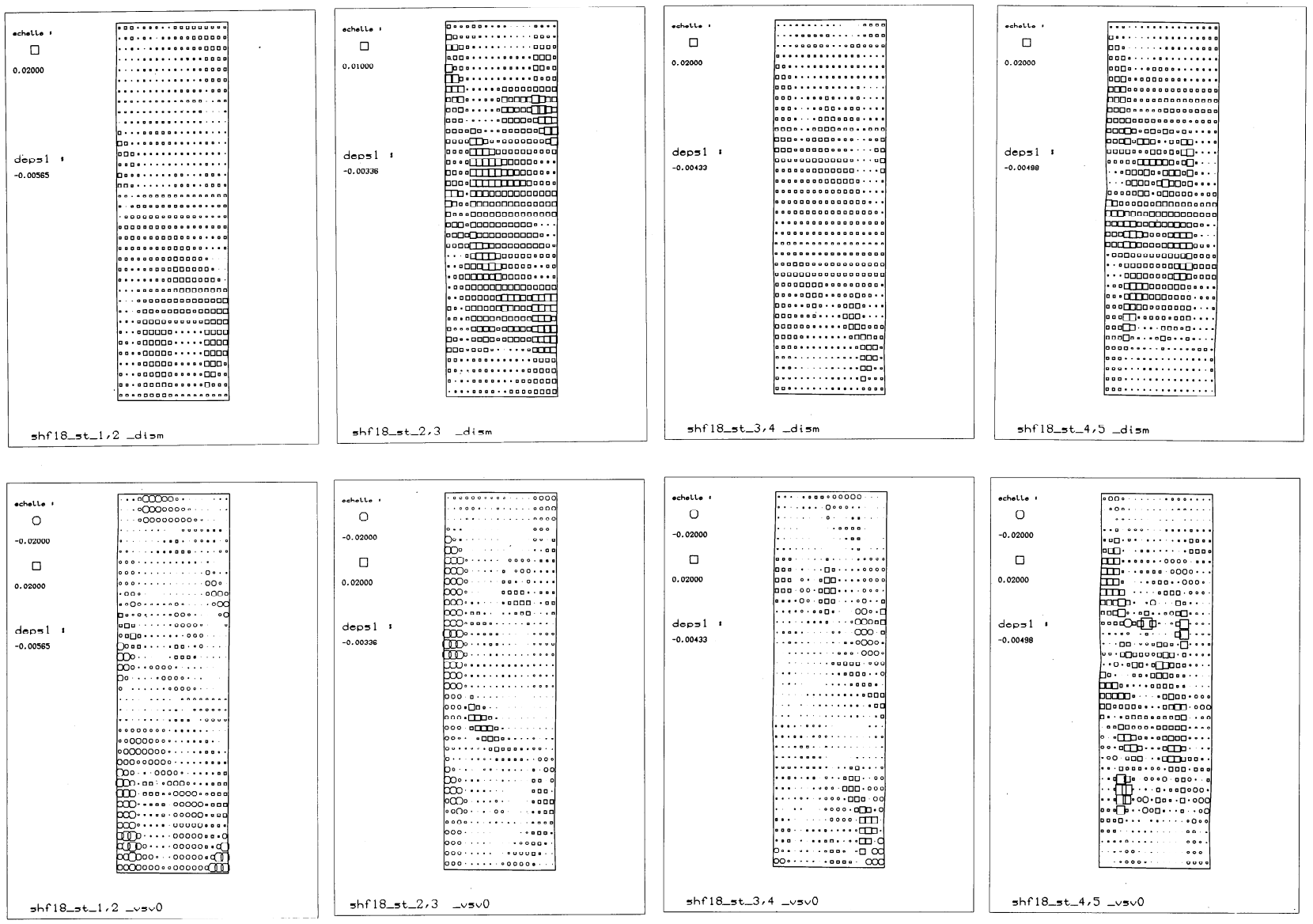


Figure 36. Essai shf18. Cartes de symboles : **distortion** (haut) et **variation de volume** (bas).

Figure 36.

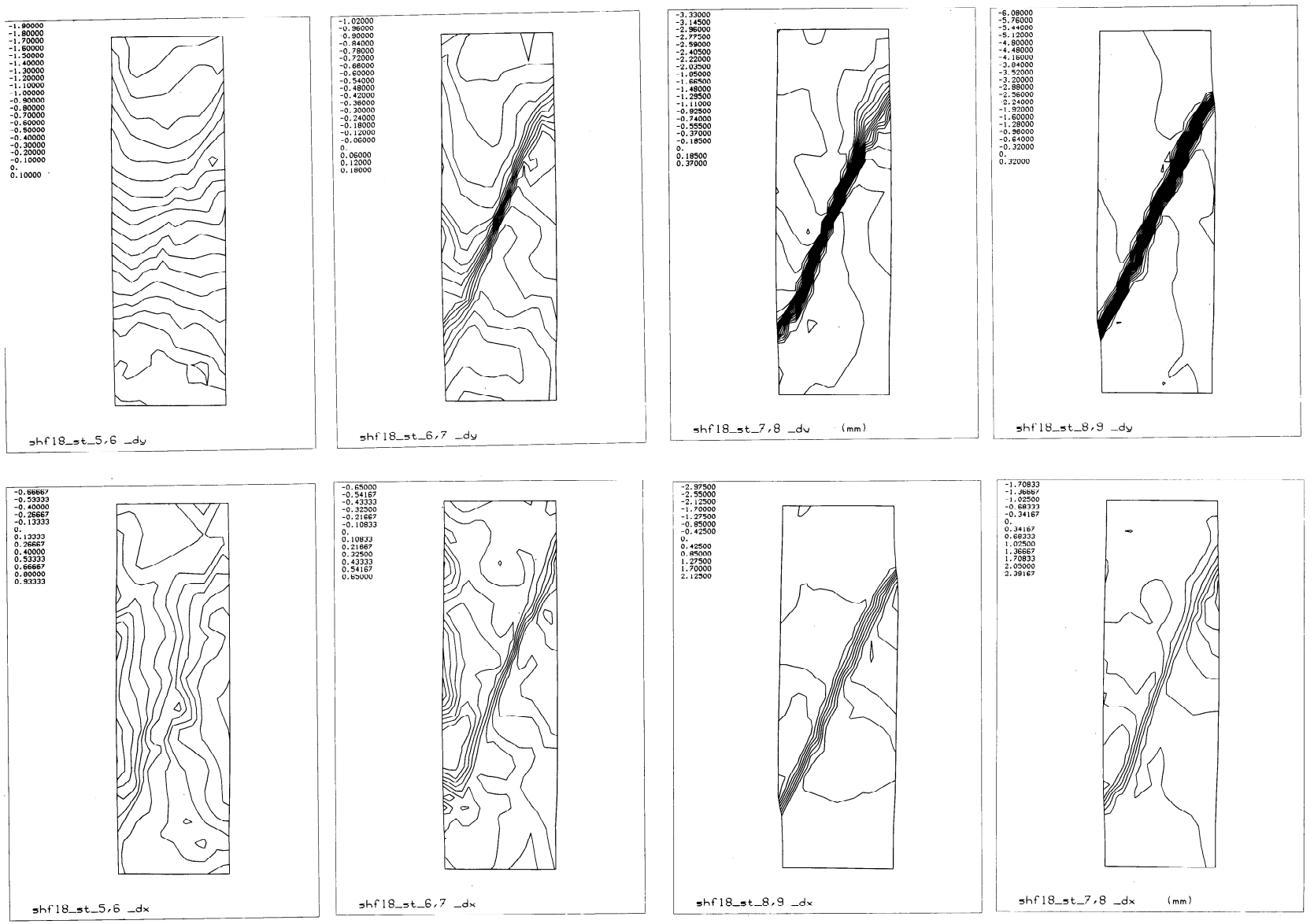


Figure 37. Essai shf18. Isovaleurs du déplacement vertical (haut) et horizontal (bas).

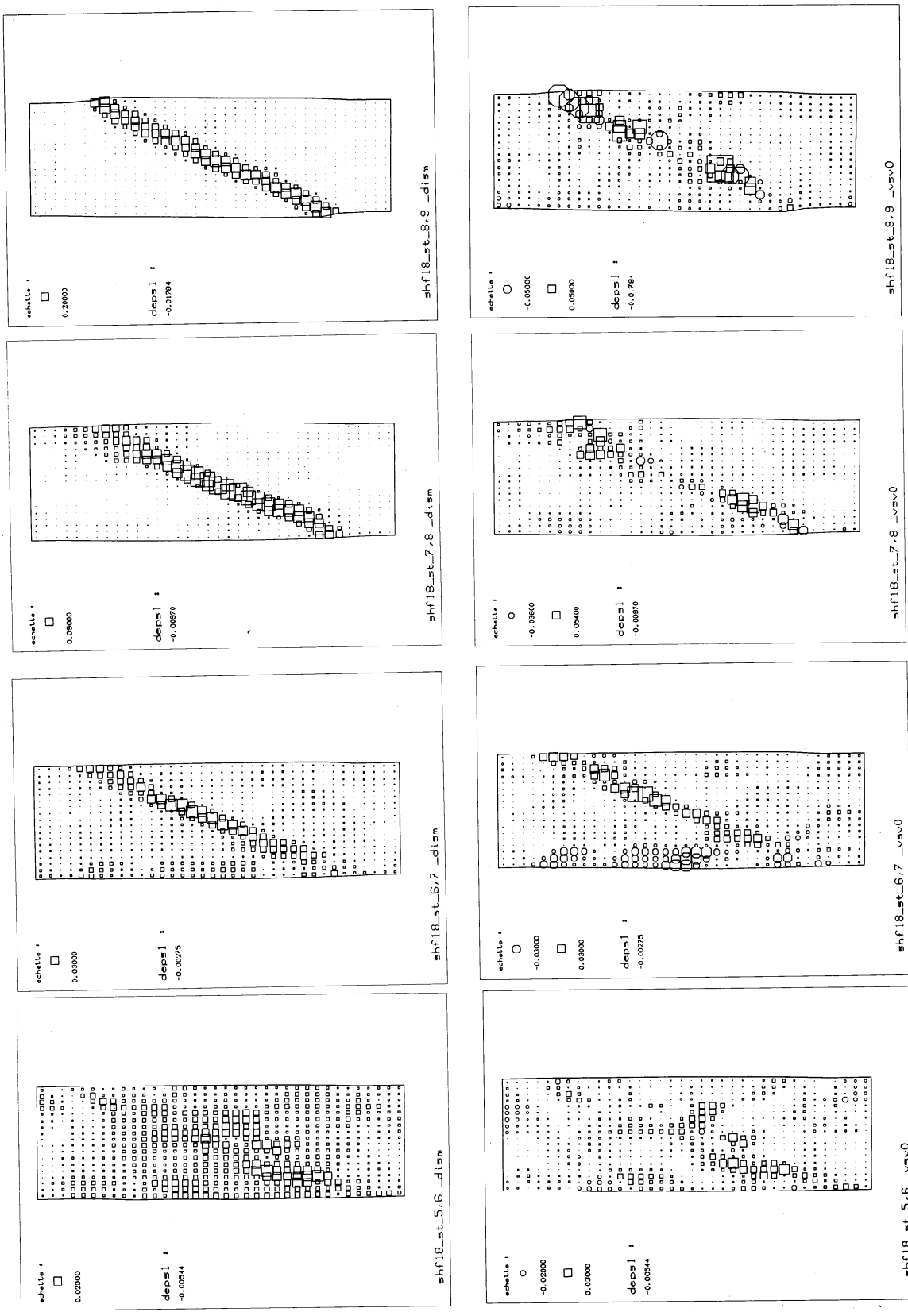


Figure 38. Essai shf18. Cartes de symboles : **distortion** (haut) et **variation de volume** (bas).

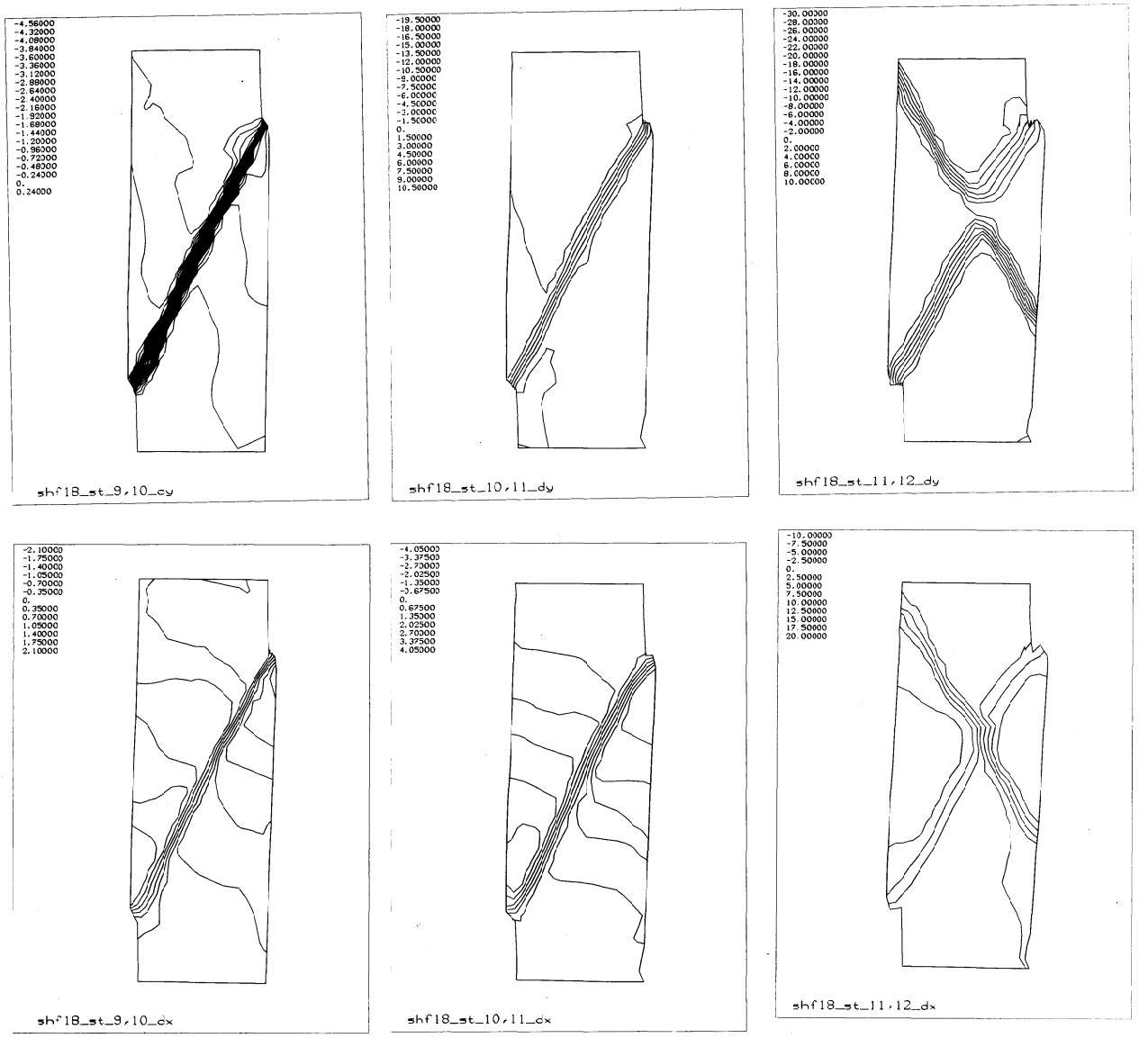


Figure 39. Essai shf18. Isovaleurs du déplacement vertical (haut) et horizontal (bas).

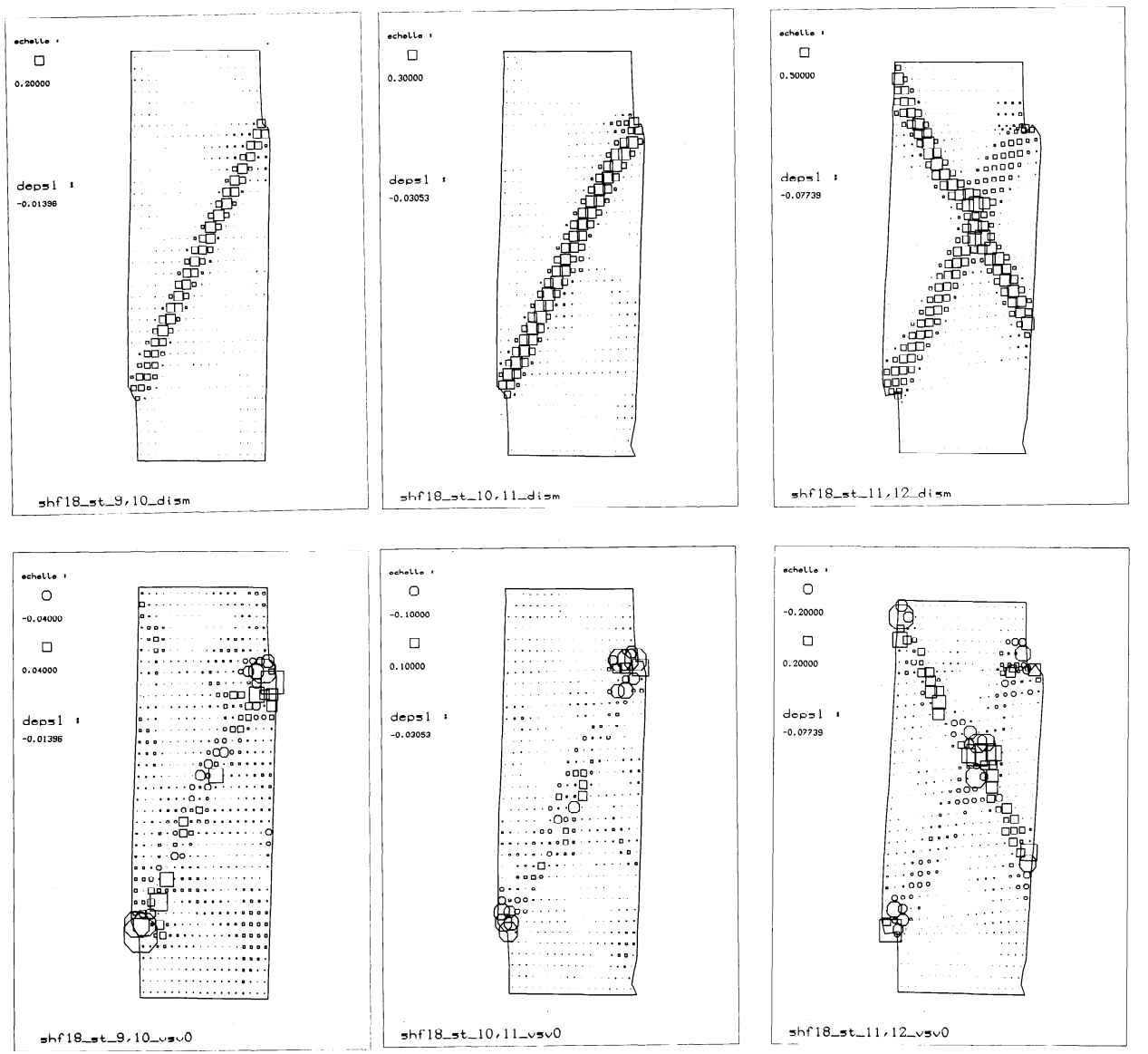


Figure 40. Essai shf18. Cartes de symboles : **distortion** (haut) et **variation de volume** (bas).

Figure 40.

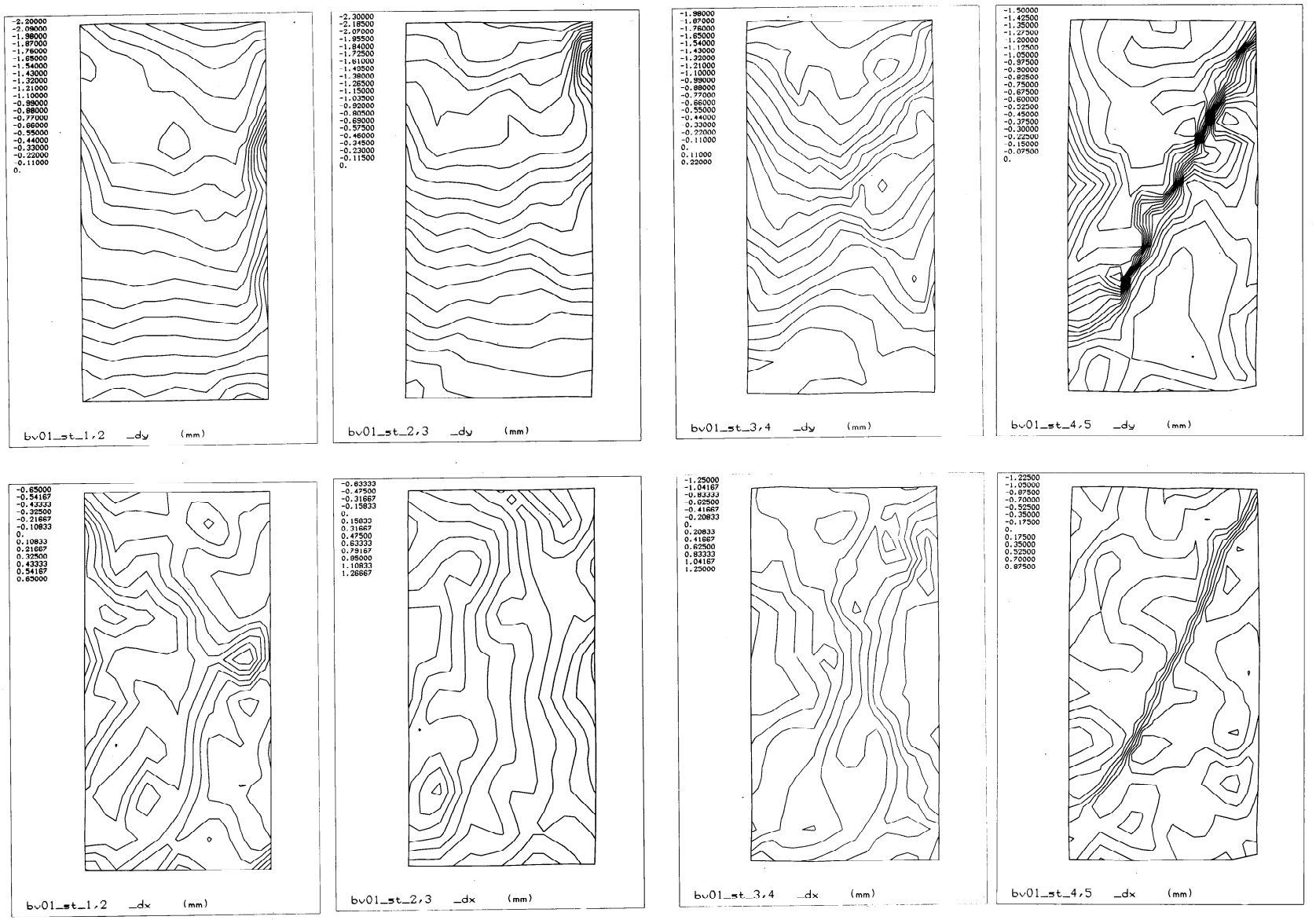


Figure 41. Essai BV01. Isovaleurs du **déplacement** vertical (haut) et horizontal (bas).

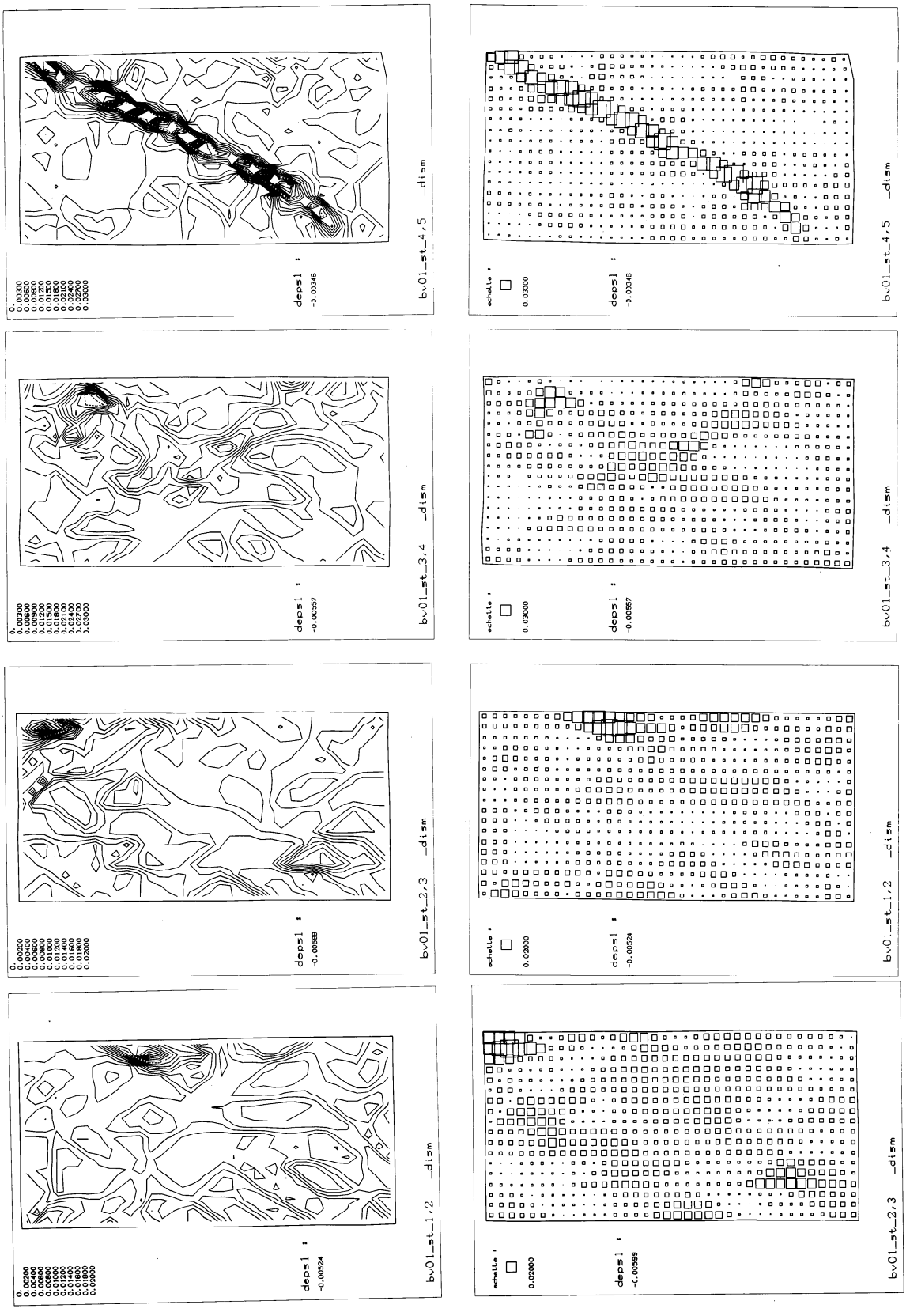
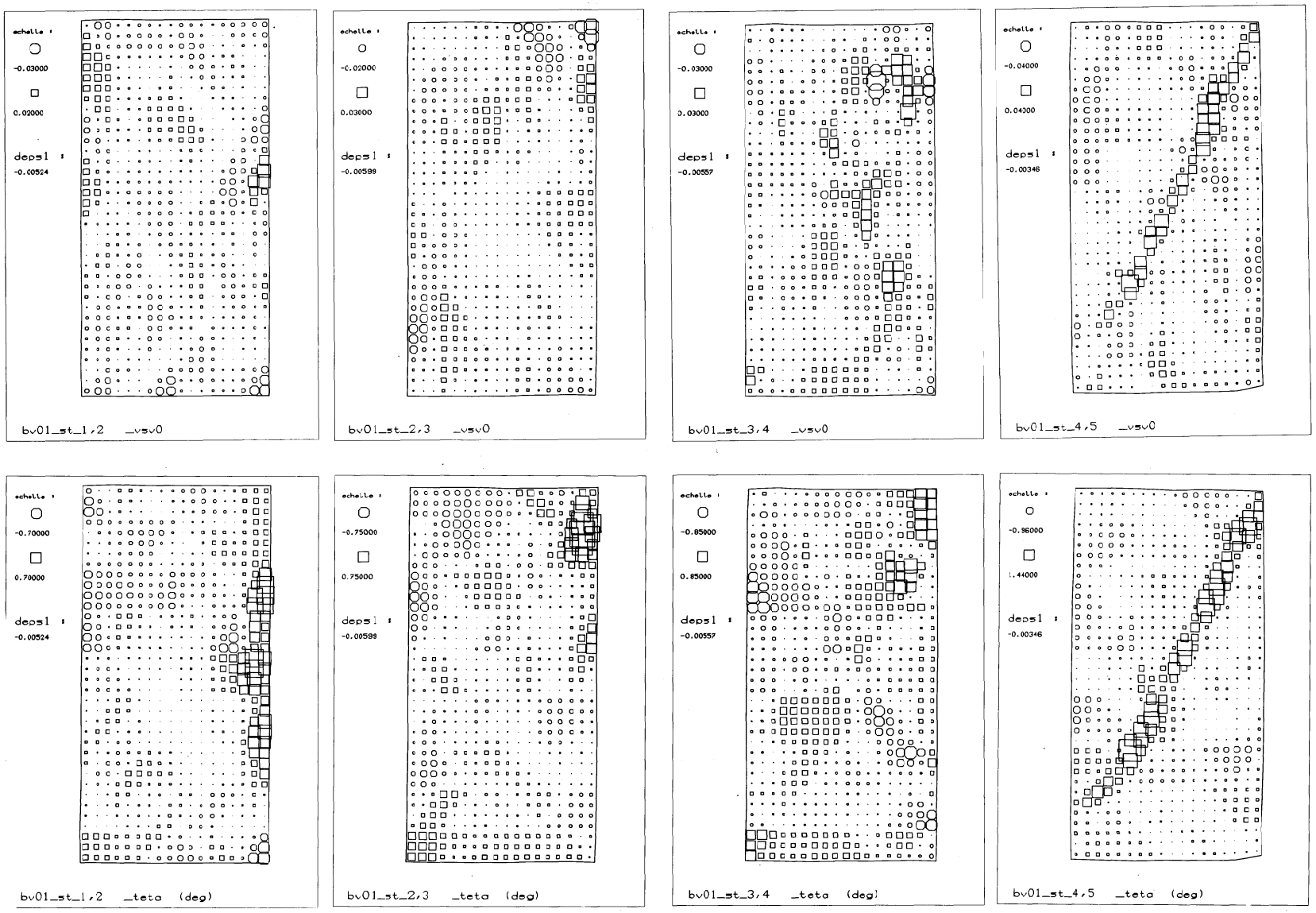


Figure 42. Essai BV01. **Distortion** : isovaleurs et cartes de symboles.

Figure 43. Essai BV01. **Variation de volume** (haut) et **rotation matérielle** (bas).



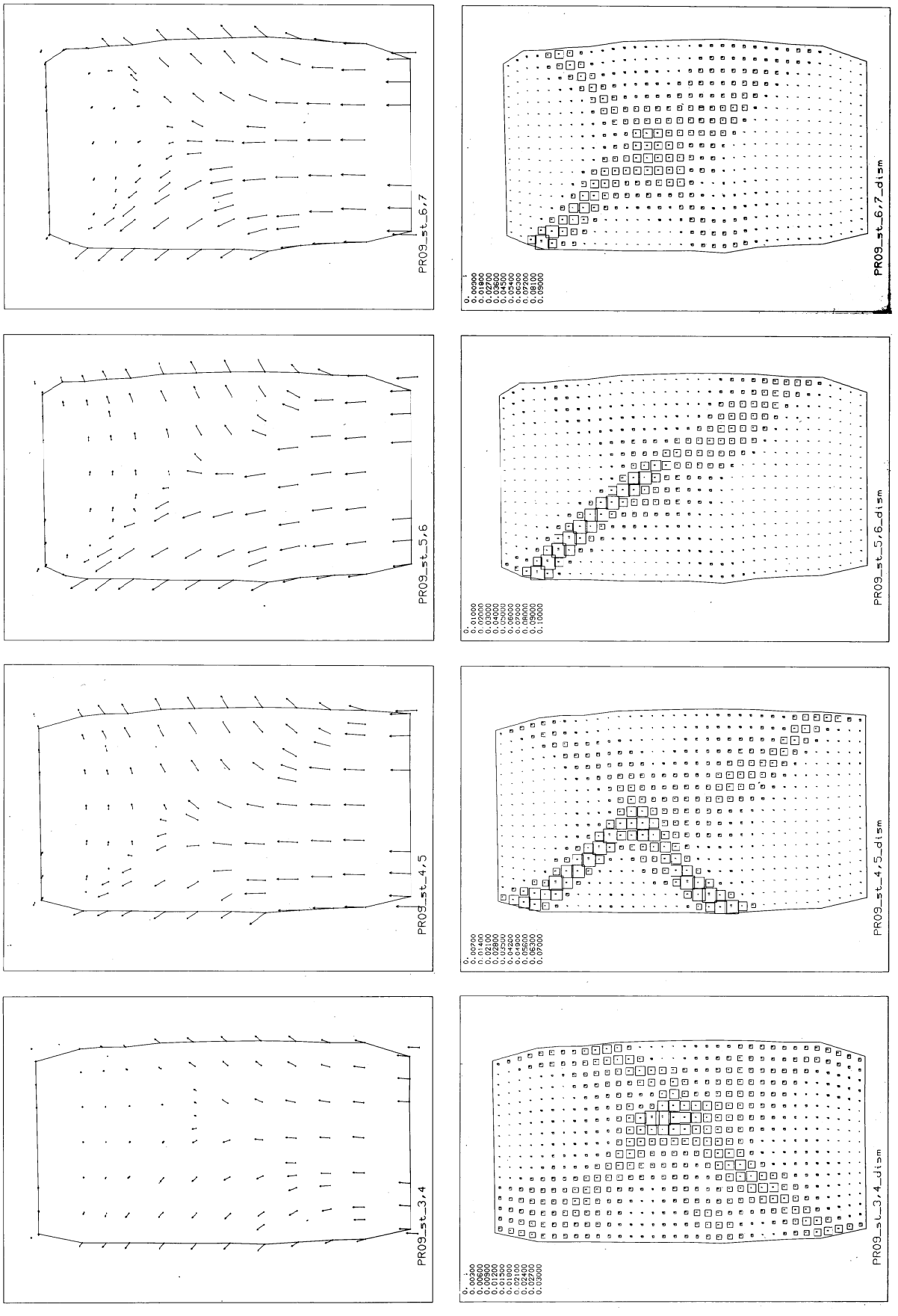


Figure 44. Essai PR09. Déplacements et distortion.

VI.4 Initiation et propagation

4.1 Localisation et pic

Qu'il y ait une certaine relation entre le pic qu'on observe sur la courbe contrainte-déformation et la localisation paraît clair, expérimentalement tout au moins. Vardoulakis, à la suite de ses expériences de déformation plane, note que l'échantillon se rompt **au pic**, le long des bandes de cisaillement apparaissant spontanément <101 ,page 113>. Nos résultats, obtenus par la méthode stéréophotogrammétrique, permettent d'apporter quelques précisions sur cette relation.

Il apparaît à la lumière de nos essais, que la localisation peut s'initialiser sensiblement avant le pic pour les essais denses et plus encore pour les essais lâches.

Essais denses

- un essai dense typique est l'essai Shf06. Si l'on considère la figure 11, qui donne l'évolution des champs de distorsion incrémentale pour cet essai, on observe que la localisation est déjà nettement apparue dès l'incrément 3,4, dont on peut constater sur la figure 8 qu'il est situé avant le pic.

- L'essai Shf10 est un essai dense perturbé par un point mou. La courbe rapport des contraintes-déformation est donnée en annexe à la figure A.9. A l'examen de la figure 34, on constate que le champ de distorsion incrémentale présente une localisation notable dès les incréments 5,6 et 6,7 tous deux placés avant le pic.

- Dans le cas de l'essai Shf18, dense à élancement H/L = 3,5, le cliché n° 6 (pris au pic, comme le montre la figure A.17), semble marquer l'instant d'apparition de la localisation, peu avancée à l'incrément 5,6 (figure 38 haut) mais évidente à l'incrément 6,7.

- L'essai Shf00, est comme l'essai Shf01, réalisé à densité moyenne. Dans le cas de Shf00, la localisation apparaît (figure 23) au cours de l'incrément 4,5 alors que le pic est sensiblement contemporain du cliché 5 (figure A.2).

- L'essai Shf01, quant à lui, montre plutôt une localisation au pic, puisqu'on peut constater en examinant les figures 25 et A.3 que l'incrément 3,4 situé avant le pic ne revèle pas de localisation franche, au contraire de l'incrément 4,5.

Essais lâches

- L'essai Shf02 est un essai lâche, effectué sur un échantillon de dimensions plus réduites que les essais habituels (113 x 250 mm). Les cartes de déformation (figures 27 et 28) sont tracées à la même échelle que pour les autres essais. On constate sur la figure 28 haut que la localisation est à l'oeuvre dès l'incrément 6,7 qui correspond sur la courbe de la figure A.19 à la fin de la phase d'écrouissage.

- L'essai Shf03 montre quant à lui (figure 30) une première localisation au cours de l'incrément 2,3 qui se situe en pleine phase d'écrouissage (figure A.20).

Autres matériaux

- L'essai sur billes de verre présenté par les figures 41, 42, 43 et A.23 montre (figure 42) que la localisation se produit à partir du pic au cours de l'incrément 4,5.

- Concernant le "sable" bidimensionnel de Schneebeli, les essais de B. Duthilleul rapportés dans sa thèse de docteur Ingénieur <43>, montrent le même type de résultat. La figure 44 tirée de ces travaux montre que la localisation est présente dès les premiers incréments de l'essai PR09 dont la courbe, dénuée de pic est typique de ce matériau aux variations de volume très faibles.

Ainsi, il peut être conclu que le pic qu'on observe dans les courbes contrainte/déformation (ou l'apparition d'un palier dans le cas lâche) traduit en réalité, en déformation plane, le plein développement d'une localisation dont l'initialisation s'est produite antérieurement; on peut ajouter que le pic suivra d'autant plus vite l'apparition de la localisation que le matériau est plus dense, et l'échantillon plus élancé (Shf18). La première conclusion peut s'expliquer par le fait que l'endommagement local du matériau, conséquence de la dilatance, est d'autant plus intense que ce dernier est dense; quant à la seconde, on peut y voir le résultat du fait que, dans un échantillon plus étroit, la propagation de la localisation produit plus rapidement le plein développement du mécanisme de glissement de blocs rigides auxquels correspond le pic.

4.2 Naissance et développement

Ceci introduit le deuxième point de ce paragraphe, c'est à dire la propagation de la localisation. On peut constater d'après les résultats présentés, que la localisation n'apparaît pas simultanément en tous les points de ce qui sera la bande de cisaillement, mais s'initialise en un point puis se propage rectilignement à partir de ce point. Ceci apparaît particulièrement clairement dans le cas de l'essai Shf06, à la figure 11 : la localisation prend naissance à l'incrément 3,4, en plein coeur de l'échantillon, et se propage à travers celui-ci aux incréments suivants, pour aboutir à un mécanisme complet (incrément 5,6) avec deux blocs quasi-rigides, ce mécanisme deve-

nant stable pour la suite de l'essai.

Les mêmes phénomènes s'observent pour les essais ShfOO (figures 22 à 24), ShfOl (figure 25), Shf10 (figures 33 et 34), Shf18 (figures 37 et 38). Il faut noter par ailleurs que l'initialisation de la localisation, contrairement à une idée répandue, ne se produit pas nécessairement au coin de l'échantillon. Bien au contraire, on peut voir à la figure 11 que le point où elle prend naissance est situé au milieu de l'échantillon, dans une zone où à l'incrément précédent (2,3) on enregistrait le maximum de distorsion. Les figures 23, 28 et 30 en donnent d'autres exemples. Dans le cas de l'essai Shf10 (figure 18), l'initialisation se produit précisément au niveau du point mou inséré dans l'échantillon; il en est de même lorsque la perturbation est un point dur (essai Shf11).

Vardoulakis <106> a présenté récemment des résultats expérimentaux sur le même sujet, en utilisant la technique de radiographie pour observer le développement de la localisation dans un échantillon de sable à l'essai biaxial, perturbé par une inclusion dure : les clichés produits montrent que les bandes de cisaillement , repérables aux X par leur compacité amoindrie, apparaissent au voisinage de l'imperfection et se propagent à travers l'échantillon.

Dans le même ordre d'idées, il faut noter les essais de Scarpelli et Wood <88>, réalisés à la boîte de cisaillement sur sable, et utilisant aussi la radiographie comme technique de visualisation de la localisation. Ces essais montrent que l'initialisation de la localisation dans un tel appareil se produit au point de discontinuité des vitesses aux limites, c'est à dire à la jonction des deux demi-boîtes. La localisation se propage ensuite à travers l'échantillon.

Dans le cas de nos essais lâches, un nouveau phénomène apparaît, concernant le développement de la localisation : si la propagation paraît plus immédiate (essais ShfO2, figures 27 et 28, essai ShfO3, figures 29 à 31), en revanche, on assiste dans certains cas, au développement successif ou alterné

de plusieurs bandes de cisaillement différentes, croisées ou parallèles, l'une pouvant devenir inactive pendant qu'une autre entre en action. Ce comportement est particulièrement bien mis en évidence par les incréments 2,3 ; 3,4 et 4,5 de l'essai Shf03, figure 30. On le retrouve aussi de façon quasi-systématique dans les essais de Duthilleul <43> sur le sable bidimensionnel (voir par exemple la figure 39 de cette référence).

4.3 Réflexion des bandes de cisaillement

Le point d'initialisation de la localisation dépend grandement, comme mentionné plus haut, des imperfections de l'essai. Dans certains cas, le développement de la bande de cisaillement conduit celle-ci à rencontrer la surface rigide de l'une des têtes. Un exemple typique est donné par l'essai Shf00 (figures 22 et 23) : la bande de cisaillement, évidente à l'incrément 4,5, rencontre la tête supérieure et ceci donne lieu à l'incrément suivant à une figure de localisation bien particulière, résultant d'une sorte de réflexion de la bande sur la frontière rigide.

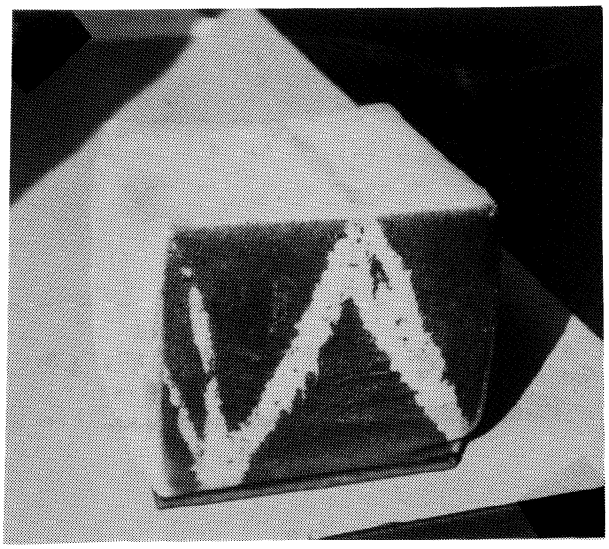
Cette observation se retrouve dans de nombreux essais, dont notamment Shf10 et Shf11 (figures 32 et 33). On peut se reporter aussi au tableau 2 (page 106) (localisation observée) pour constater la fréquence de phénomène. D'autres auteurs ont fait état de telles observations : c'est le cas notamment de Vardoulakis <101> qui décrit, à l'essai biaxial, un mécanisme comportant des bandes opposées et trois corps rigides, survenant dans bon nombre de ses

essais. On en retrouve trace aussi à l'essai triaxial, sur des clichés publiés par Rowe et Barden <84>, figure 7 ; ou par Vardoulakis <102> figure 1d. Les essais triaxiaux rapportés au paragraphe VI.3, réalisés par J.L. Colliat-Dangus et moi-même, en ont fourni aussi de nombreux exemples tel que celui présenté à la figure 15 (essai HFDW 21).

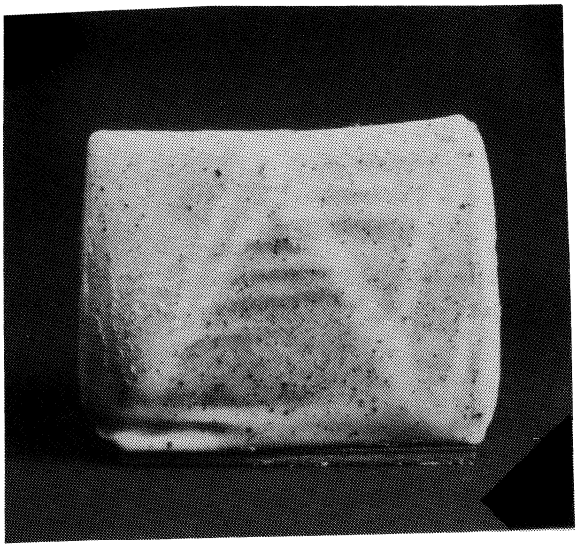
Il convient toutefois de remarquer que les résultats présentés ici, obtenus en déformation plane grâce à la méthode stéréophotogrammétrique, permettent d'établir que la configuration finale, décrite ci-dessus, résulte non pas d'un développement simultané de deux surfaces conjuguées à partir de leur point commun (un mécanisme concevable) mais plutôt d'une propagation par réflexion d'une bande de cisaillement unique, dont la géométrie de l'essai a fait qu'elle rencontre une frontière rigide : c'est ce que montrent par exemple les figures 22 et 23.

Ce mode de rupture localisée, s'il n'est pas inédit, n'est pas non plus si universellement reconnu qu'on pourrait le penser : selon Lade <64> dans les compte-rendus du symposium IUTAM (1982), on pourrait empêcher la localisation grâce à des dispositions géométriques (élancement) telles que "les plans de rupture potentiels devraient couper la frontière" (rigide). L'idée est répandue aussi, selon laquelle, pour les mêmes raisons, la localisation serait impossible dans les appareils véritablement triaxiaux dans lesquels les conditions aux limites sont imposées par le jeu de plaques rigides (Jacobsen) <56>. Dans ce type d'appareil, l'échantillon en cours d'essai n'est pas accessible au regard; quant à l'état après sortie de l'appareil, il ne garde généralement pas trace d'une éventuelle localisation.

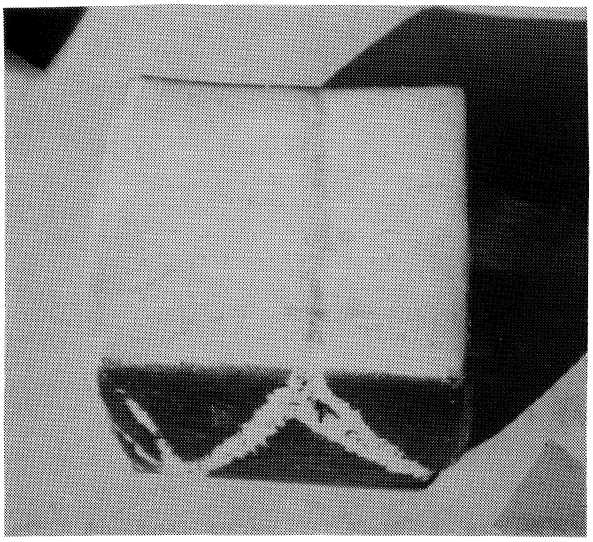
Des essais spécifiques ont été effectués en collaboration avec J. Lanier, sur son appareil véritablement triaxial, avec le but de vérifier si la localisation, observée systématiquement en déformation plane dans mes essais,



face avant



face arrière



face supérieure

Photo 9.
Localisation
au triaxial cubique :
faces avant, arriere
et supérieure .

existait aussi, en déformation plane, dans cet appareil. La technique de mémorisation d'une éventuelle localisation était inspirée par une constatation expérimentale faite sur mon installation de DP : si une mince couche de peinture est déposée par projection sur la membrane de l'échantillon avant essai, cette couche conservera la trace d'une bande de cisaillement sous la forme d'une bande dénudée par la distorsion locale de la membrane. Ces essais ont effectivement mis en évidence, pour la première fois à ma connaissance, une localisation typique, qui met en jeu une bande de cisaillement plusieurs fois réfléchie sur les plaques rigides (photo 9).

On peut constater sur les figures que les traces laissées sur la membrane sur la face arrière et sur la face avant de l'échantillon se correspondent, ce qui prouve qu'on a affaire à des plans de rupture perpendiculaires à ces faces. On remarque aussi sur la face supérieure, la marque laissée par l'extension intense de la membrane à l'emplacement de la réflexion.

J. Lanier et E. Degny ont donné suite à ces premiers résultats en réalisant une vaste campagne d'essais au triaxial cubique, sur divers chemins de chargement, notamment en symétrie de révolution. Ces essais très nombreux sont décrits dans la thèse de docteur ingénieur de Degny <33>; les principaux mécanismes de localisation observés, qui se ramènent toujours à des combinaisons de déformation plane, ont été commentés dans un article à paraître (Desrues, Lanier, Stutz <36>).

VI-5 Cinématique de la bande de cisaillement

Les mesures stéréophotogrammétriques permettent d'obtenir des informations précises sur la cinématique de l'essai biaxial et de la localisation qui survient au cours de cet essai. Il est intéressant en particulier de comparer les observations faites avec la notion de ligne d'extension nulle d'une part, et avec les hypothèses cinématiques classiquement adoptées dans les études de bifurcation par localisation d'autre part.

5.1 Les lignes d'extension nulle

Les bandes de cisaillement sont des lignes d'extension : cette observation a été faite de longue date, notamment à Cambridge par Roscoe et son équipe <82>. Les résultats de mes essais vérifient cette proposition, mais suggèrent cependant quelques commentaires et précisions.

Les cartes d'isovaleurs de composantes du déplacement incrémental pour les différents essais produits montrent que la localisation développée se traduit typiquement par un réseau très reserré d'isovaleurs parallèles à la direction de la bande de cisaillement : ceci s'observe sur toutes les figures présentées. Les composantes de déplacement mesurées sont **dx** et **dy**, définies dans les axes de l'essai. Soit un repère **OXY**, tel que **OX** coïncide avec la normale à la bande de cisaillement (figure 45). Le gradient de la vitesse, $\mathcal{U}$, est défini par :

$$\mathcal{U}_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \qquad i,j = 1,2 \text{ en DP.}$$

On peut définir les composantes de vitesse $\dot{x}_i$ à partir de nos mesures

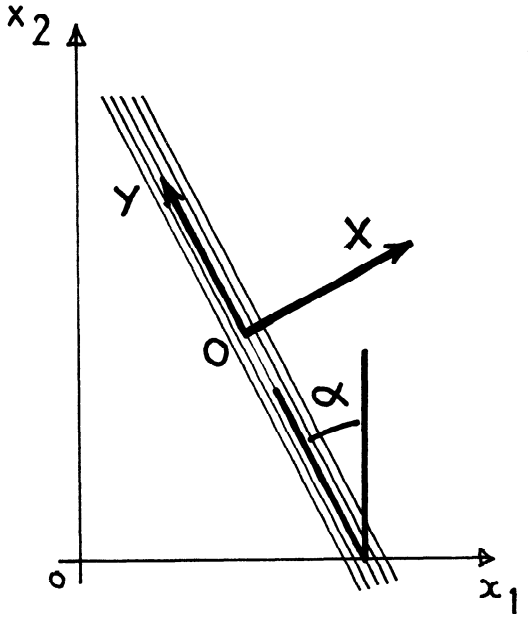


Figure 45. Cinématique de bande de cisaillement.

par :

$$\dot{x}_1 \, dt = dx$$

$$\dot{x}_2 \, dt = dy$$

Dans les axes **OXY** , $\mathcal{U}$ s'écrit :

$$\mathcal{U}_{/OXY} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} \end{bmatrix}$$

et on a par ailleurs

$$\dot{X} = \dot{x}_1 . n_1 + \dot{x}_2 . n_2$$

$$\dot{Y} = -\dot{x}_1 . n_2 + \dot{x}_2 . n_1$$

avec $n_1 = \cos \alpha$, $n_2 = \sin \alpha$, α étant l'angle (ox_1, OX) de la fig. 45.

On peut écrire, en omettant **dt** qu'on peut prendre égal à l'unité :

(car le temps est ici arbitraire, puisque le comportement du sable est indépendant de la vitesse de sollicitation en première approximation)

$$\dot{X} = dx . n_1 + dy . n_2$$

$$\dot{Y} = -dx . n_1 + dy . n_2$$

Puisque les isovaleurs de **dx** et **dy** sont parallèles à la bande, les dérivées par rapport à Y sont nulles. Le tenseur $\mathcal{U}$ s'écrit donc :

$$\mathcal{U}_{/OXY} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & 0 \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & 0 \end{bmatrix}$$

D'où la vitesse de déformation, définie par $\mathcal{D} = 1/2 \, (\mathcal{U} + \mathcal{U}^t)$:

$$\mathcal{D}_{/OXY} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & {}^1/_2 \, \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} \\ {}^1/_2 \, \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci montre que $\mathcal{D}_{YY}$ est nul, et donc que la direction **OY** est une direction d'extension nulle.

5.2 Déformation localisée

On peut exprimer le tenseur $\mathcal{U}$ en fonction des $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$:

$$\mathcal{U}_{/OXY} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial X} n_1 + \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial X} n_2 & 0 \\ -\dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial X} n_1 + \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial X} n_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est aisé de vérifier, par un changement de base, que l'expression de $\mathcal{U}$ dans le repère $\mathbf{ox_1x_2}$ s'écrit :

$$\mathcal{U}_{/0x_1x_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial X} n_1 & \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial X} n_2 \\ -\dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial X} n_1 & \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial X} n_2 \end{bmatrix}$$

soit encore, en posant $g_i = \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial X}$:

$$\mathcal{U}_{ij/0x_1x_2} = g_i n_j$$

Ajoutons que le gradient de la vitesse, $\mathcal{U}$, et le taux du gradient de la transformation, $\dot{F}$, sont reliés classiquement par la relation :

$$\mathcal{U} = \dot{F} F^{-1}$$

En conséquence, si l'état de référence est pris coincident avec l'état actuel, on a $F^{-1} = I$, tenseur identité, d'où :

$$\dot{F} = \mathcal{U} = g \otimes n$$

On retrouve ici l'expression de $\dot{F}$ classiquement adoptée comme hypothèse cinématique dans les études de bifurcation par localisation de la déformation (cf III-3) .

5.3 Trois remarques

Il convient de faire maintenant quelques remarques concernant la cinématique observée.

La première remarque porte sur l'assertion faite plus haut, selon laquelle la dérivée de la vitesse dans la direction longitudinale de la bande (OY) est nulle. On doit noter que cette dérivée n'est réellement nulle ou négligeable devant celle dans la direction OX que lorsque la localisation est pleinement développée. Cela n'est pas nécessairement vrai dès le début du phénomène. Au cours de l'incrément qui voit apparaître la localisation, on peut effectivement considérer, pour les essais denses, qu'on a : $\left|\frac{\partial \dot{x}}{\partial X}\right| \ll \left|\frac{\partial \dot{x}}{\partial Y}\right|$; en revanche, dans le cas des essais lâches, on peut observer des cas où cette approximation ne décrit pas fidèlement la réalité : c'est le cas de l'incrément 2,3 de l'essai shf03, à la figure 29.

Cette remarque n'infirme pas les conclusions des paragraphes 5.1 et 5.2 ; elle nécéssite cependant que soient introduites quelques précisions supplémentaires.

Dans les études de bifurcation par localisation, on convient de considérer le champ de déformation actuel comme la superposition de deux champs, l'un homogène ($\mathbf{F}^0$) et l'autre, localisé, décrit par $\mathbf{F} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{n}$.

L'idéalisation décrite plus haut (dérivée par rapport à **OY** nulle), qui conduit à l'extension nulle pour la bande et à l'hypothèse cinématique classique, vaut strictement pour le champ localisé. Les déviations par rapport à cette idéalisation sont à imputer à l'existence d'un champ homogène, de grandeur non négligeable devant le champ localisé.

Cette discussion permet donc d'apporter quelques précisions concernant l'hypothèse classique :

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$$

Il apparaît que, dans le cas d'un matériau lâche, l'ordre de grandeur du terme localisé $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ au moment de l'apparition du phénomène n'est pas nécessairement

supérieur à celui du terme homogène $\dot{\mathbf{F}}^{\bullet}$.

Dans le cas du matériau dense, les divers essais présentés montrent, dès l'apparition de la localisation, une prépondérance du terme localisé. Certes il faut considérer ce résultat avec prudence, car pour statuer avec certitude sur cette prépondérance il faudrait pouvoir saisir, dans un incrément tendant vers zéro, l'instant de la localisation; toutefois certains incréments extrêment brefs, comme l'incrément 6,7 de l'essai shf18, figures 37 et 38 (moins de 0,003 de déformation axiale globale), attestent un déclenchement très brutal au cours duquel, manifestement, le terme localisé l'emporte largement sur le terme homogène.

Cette discussion sur la grandeur relative des champs homogène et localisé peut sembler a priori un peu spéculative; son intérêt apparaîtra mieux à la lumière du chapitre VIII, consacré à l'étude théorique du problème de la localisation, dans lequel l'importance de cette question sera mise en valeur.

La seconde remarque porte sur les conséquences de l'équation cinématique $\mathbf{F} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{n}$, dont on vient de voir qu'elle est conforme aux résultats de l'expérience en déformation plane. On doit observer que cette équation décrit a priori une cinématique de déformation plane : les composantes de F, correspondant à une déformation non contenue dans le plan défini par les vecteurs $\mathbf{g}$ et $\mathbf{n}$, sont nulles. Le plan de normale $\mathbf{n}$ est nécéssairement un plan non déformé pour le champ localisé (ce qu'on voit en exprimant F dans les axes de la bande, avec $\mathbf{n} = (1,0,0)$).

Ainsi, quelques soient par ailleurs les conditions aux limites du problème, l'émergence d'une localisation, telle que décrite par cette équation, se traduit, lorsque le champ localisé devient prépondérant, par un passage à la déformation plane et par l'existence d'un plan non déformé.

La dernière remarque concerne les lignes d'extension nulle. On a montré

plus haut que les bandes de cisaillement étaient bien des LEN. On sait par ailleurs que les LEN ont une orientation bien définie par rapport aux directions principales du tenseur vitesse de déformation, à savoir $\beta = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\nu}{2}$, ν étant l'angle de dilatance défini plus haut (cf II-1). Il serait erroné cependant de confondre cet angle β avec l'angle α de la figure 45, qui définit l'orientation par rapport aux axes de l'essai; en effet, les directions principales de la vitesse de déformation (localisée, suivant la remarque 1) n'ont aucune raison de coïncider avec les axes de l'essai, aussi petit que soit d'ailleurs l'incrément considéré. De plus, l'angle ν à prendre en compte ici est l'angle local, qui peut différer signicativement de l'angle global défini sur tout l'échantillon, et ceci d'autant plus que cet angle est défini en vitesse. Ainsi, les bandes de cisaillement sont effectivement des lignes d'extension nulle, pour le champ localisé, mais cette certitude ne renseigne nullement sur leur orientation par rapport aux axes de l'essai.

La figure 46 illustre ces propos : elle présente, pour l'essai shf03, les directions des lignes d'extension nulle (en haut) et les directions principales de la vitesse de déformation (en bas) au cours des incréments successifs. Les directions d'extension nulle sont figurées par des traits dont la longueur est proportionnelle à la distorsion locale. On peut constater, à l'incrément 4,5, que l'une des deux directions d'extension nulle coïncide effectivement avec la bande de cisaillement; mais aussi, en regardant le dessin situé immédiatement au-dessous, que les directions principales de la vitesse de déformation dans la bande de cisaillement sont inclinées par rapport aux axes de l'essai.

On peut donc conclure, d'une part, qu'il est a priori faux que les bandes de cisaillement soient inclinées à $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\nu}{2}$local des axes de l'essai, sauf si la rotation locale des directions principales se trouve être nulle; et d'autre part, que rien n'indique ni n'exclut que ces bandes soient orientées à $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\nu}{2}$global des axes, ν global étant défini, à l'instant de la naissance de la bande, comme une moyenne sur l'échantillon.

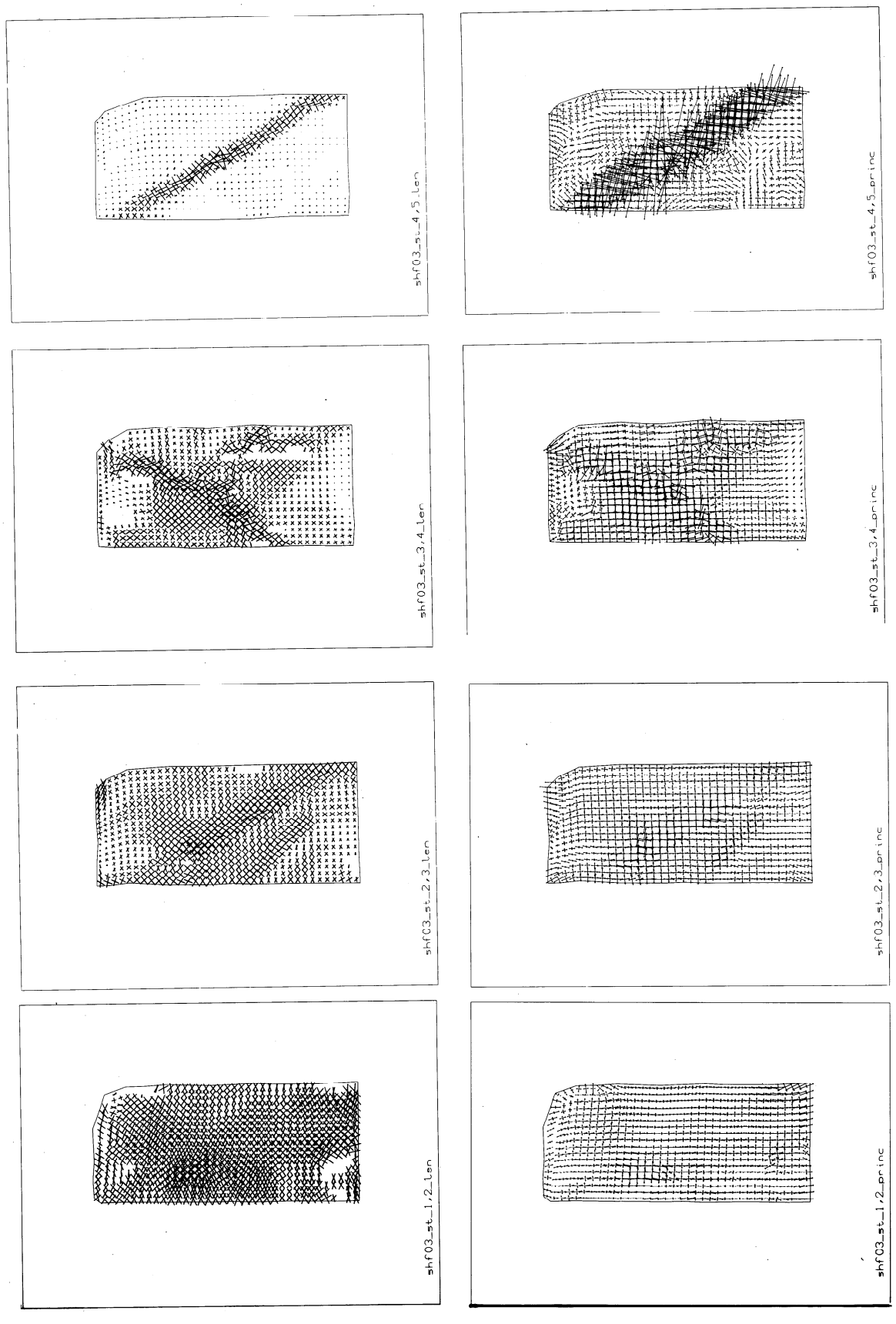


Figure 46. Directions d'extension nulle et directions principales au cours de l'essai shf03.

VI-6 Direction des bandes de cisaillement

La question de la direction des bandes de cisaillement est une question importante : d'un point de vue pratique, mais aussi d'un point de vue théorique, puisque les analyses de bifurcation en bande de cisaillement prévoient une orientation déterminée. J'ai exposé (chapitre II) divers points de vue sur la question, dont il ressort que les directions proposées généralement sont liées aux valeurs globales de l'angle de frottement interne $\emptyset$ et de l'angle de dilatance ψ.

La première question à envisager est la suivante : les essais permettent-ils de définir une telle direction "propre", ou bien le système de blocs et de surfaces observés est-il exclusivement fonction de la géométrie de l'échantillon et des restrictions cinématiques imposées ? On a vu dans les paragraphes précédents que les bandes de cisaillement ne passaient pas nécessairement par les coins de l'échantillon, et se développaient malgré les restrictions dues aux frontières rigides. De plus, on peut constater sur les figures présentées que ces bandes sont généralement rectilignes, même dans des cas où une légère inflexion suffirait pour rejoindre le coin de l'échantillon (essai Shf06, figure 11). Plus encore, on voit sur cette figure que les deux localisations indépendantes, initialisées en même temps au cours de l'incrément 3,4, se développent parallèlement sans se confondre en une seule bande diagonale, comme on pourrait s'y attendre après l'incrément 4,5 : la direction de la bande est donc un phénomène "fort" qui mérite étude.

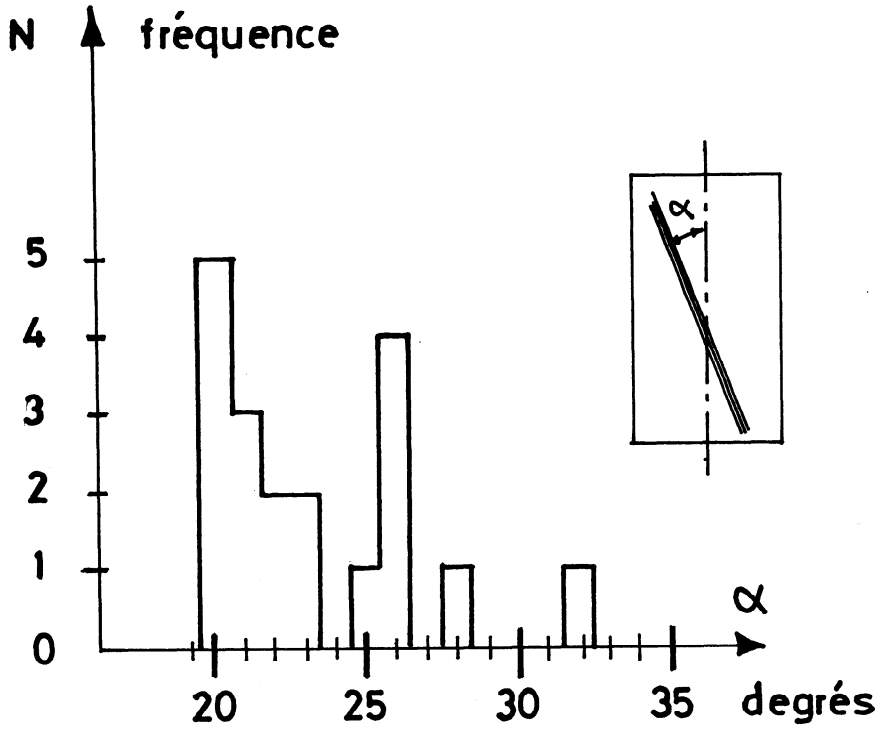


Figure 47. Histogramme des orientations de bandes. Essais denses.

La figure 47 présente l'histogramme des orientations des bandes de cisaillement observées au cours des essais denses, mesurées par rapport à l'axe vertical de la machine d'essai. La dispersion dans les résultats, traduit un éventail réel et non pas des imprécisions de la mesure (laquelle est obtenue à 1° près). On observe pour l'essentiel deux pics, aux environs de 21 et 25 degrés.

Pour les essais lâches, (moins nombreux), on obtient aussi un éventail de valeurs de 26 à 33 degrés : une différence significative par rapport aux essais denses.

Tableau 4. Orientation des bandes de cisaillement.

Matériau	α (degrés)	$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\nu_g}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\phi+\nu_g)$
Shf dense	21 - 25	21	39	30
Shf lache	26 - 33	27	45	36
Billes de verre	28	30	34	32

Le tableau 4 synthétise les résultats et présente la comparaison des orientations avec les orientations classiques, reliées aux angles ϕ et ν. Les valeurs de α, ϕ et ν pour chaque essai peuvent être trouvées dans le tableau 1.

Ce qui ressort de cette comparaison est que, pour les matériaux testés ici à l'essai biaxial, la direction $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ concorde bien avec la borne inférieure de la plage de variation des orientations de bande. Les directions $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu_g}{2}$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\phi + \nu_g)$ par contre, sont en dehors de la plage expérimentale.

Il faut noter que Duthilleul <43>, sur le matériau bidimensionnel de Schneebeli, a observé, au contraire, une bonne concordance avec la direction $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu_g}{2}$.

Vardoulakis <103> a observé des orientations plutôt centrées autour de $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\phi + V_g)$; cette orientation corrobore son analyse de bifurcation et rejoint par ailleurs une des orientations envisagées par Arthur au terme d'une analyse physique de la localisation (cf II.3). Expérimentalement, Arthur observe une plage assez large d'orientations, de $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ à $\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}$ (Arthur et al <4>).

Scarpelli et Wood, à la boîte de cisaillement, ont mesuré des orientations de l'ordre de celles indiquées par Vardoulakis; la mesure est cepen-

dant indirecte, en ceci qu'elle nécessite l'hypothèse de coïncidence des directions principales de σ et $\dot{\varepsilon}$.

L'éventail des mesures d'orientation observé dans mes essais n'est pas l'expression de mon point de vue, d'une indétermination physique, mais plutôt traduit le fait que l'orientation dépend non seulement des paramètres globaux de l'essai mais aussi de la situation locale qui prévaut au point d'initialisation de la localisation ; une fois initialisée avec une certaine orientation, la bande se propage essentiellement en ligne droite, si bien que la direction déterminée localement est conservée au niveau de l'échantillon entier. A contrario, l'apparition simultanée, au cours de l'essai Shf06 (figure 11), d'une localisation en deux points différents de l'échantillon, avec la même orientation indique qu'une influence des conditions globales n'est pas exclue.

VI-7. Variations de volume

Depuis les expériences sur modèles en déformation plane menées à Cambridge dans les années 60, on sait que la rupture localisée dans les sables denses provoque des variations de volume importantes ; elles apparaissent clairement sur les radiographies de massifs déformés, comme des zones moins opaques aux rayons X, donc plus lâches (voir les essais rapportés par Roscoe <82>, notamment la figure 23). Plus récemment, Vardoulakis a appliqué cette méthode pour mettre en évidence la localisation dans un essai biaxial perturbé par un point dur <106>.

Les résultats présentés ici permettent d'apporter quelques précisions inaccessibles à la radiographie classique. La stéréophotogrammétrie permet de saisir l'évolution de la déformation, en fournissant des images non pas cumulatives mais incrémentales. La gammamétrie, quant à elle, utilise des mesures ponctuelles, quantitatives. Enfin, j'ai utilisé, à titre exploratoire, la tomodensitométrie, méthode fondée elle aussi sur la radiographie et dont les perspectives d'application sont prometteuses.

7.1 Mesures globales

Globalement, les variations de volume à la rupture pour un essai biaxial sont faibles. Qualitativement, on observe (sur les courbes de variation de volume global rapportée à la déformation axiale, en annexe), les mêmes phénomènes qu'au triaxial axisymétrique : contractance légère en début d'essai, suivie par une phase de dilatance, bientôt interrompue par le développement de la localisation (essais denses). L'apparition rapide de ce phénomène explique que les variations de volume globales deviennent sensiblement nulles à la rupture. Les pentes des courbes $\varepsilon_v, \varepsilon_1$ dans la partie de dilatance maximale

se tiennent dans un éventail de 0,5 à 0,7 ; il est remarquable que cet éventail coïncide avec celui des pentes mesurées, dans les mêmes axes, pour les essais axisymétriques à mêmes compacité initiale et contrainte latérale. Cette coïncidence des pentes mériterait d'être confirmée sur d'autres matériaux et dans d'autres plages de contrainte car si elle s'avérait générale, cela fournirait un moyen d'estimer l'angle de dilatance classique (défini en DP seulement) à partir d'essais axisymétriques ordinaires.

On dispose malheureusement d'assez peu de données sur les variations de volume en déformation plane, réputées difficiles à mesurer. Une synthèse a été présentée en 1970 par K.Lee <65>. Les résultats présentés par cet auteur montrent que tant que le pic n'est pas atteint, les courbes de variation de volume au biaxial et au triaxial classique ne diffèrent qu'assez peu. Malheureusement, aucune donnée n'est fournie concernant la localisation. Les pentes, dans le cas dense, sont de l'ordre de 0,5 (figures 3 et 5). Lee présente en comparaison une étude théorique sur le comportement d'un assemblage de sphères rigides frottantes, dont les prévisions, bien qu'assez éloignées quantitativement des résultats obtenus sur des matériaux granulaires réels, sont intéressantes sur le plan qualitatif. On note en particulier d'après ses figures 2b et 2c que les pentes des courbes $\varepsilon_v, \varepsilon_1$ théoriques, diffèrent assez peu entre la déformation plane et la symétrie de révolution : 1 au triaxial contre 0,8 en DP (environ) dans le cas de l'arrangement cubique à force centrée, 3 et 2,5 respectivement pour l'arrangement hexagonal.

7.2 Mesures locales

En ce qui concerne les variations de volume locales, les résultats confirment l'existence d'une dilatance importante dans les bandes de cisaillement, conformément aux observations radiographiques mentionnées plus haut. Il suffit pour s'en convaincre de comparer les cartes de distorsion incrémentale et les courbes de variation de volume incrémentale associée, pour les divers

essais présentés. Rappelons que les symboles carrés indiquent la dilatance et les symboles hexagonaux la contractance. On peut voir, à titre d'exemple sur la figure 12, la dilatance spectaculaire de la zone de la bande de cisaillement naissante au cours de l'incrément 3,4 de l'essai dense Shf06. On observe la même chose figure 34, incréments 5,6 et 6,7, alors que l'essai dense en question est perturbé par un point "mou" extrêmement compressible. Les figures 32 puis 38 montrent elles aussi la forte dilatance dans la bande naissante : dans le dernier cas (figure 38 incrément 6,7), on observe des variations de volume $\dot{\varepsilon}_v$ plus de 10 fois supérieures à la déformation $\dot{\varepsilon}_1$ globale (0,0027).

Les essais lâches fournissent des cartes plus difficiles à interpréter. Ces essais sont globalement contractants, comme le montrent les courbes de variation de volume moyennée sur l'échantillon, A19 à A22. On note toutefois une tendance à la non variation de volume en fin d'essai, voire même une légère dilatance. De l'examen des cartes de variation de volume locale, il ressort qu'une légère dilatance se produit dans les bandes : on peut observer une prédominance de symboles carrés dans les zones de cisaillement, figure 28 (bas) incréments 6,7 à 8,9, et figure 31 (haut) incréments 2,3 à 4,5. Dans les zones hors des bandes, la variation de volume est essentiellement contractante. La dilatance légère observée dans les bandes n'est pas surprenante car les essais effectués sur le même matériau dans les mêmes conditions de densité initiale et de contrainte latérale au triaxial axisymétrique, ont montré une légère dilatance en grande déformation ; en d'autres termes, l'indice des vides critique à la pression considérée est plus grand que l'indice des vides réalisé au cours de la préparation des échantillons.

7.3 Evolution des variations de volume

L'évolution des variations de volume dans la bande de cisaillement est bien illustrée par l'essai Shf18, figures 36 à 40 (bas). Les trois premiers incréments montrent des variations de volume faibles, légèrement contractantes ; les incréments 4,5 et 5,6 voient l'apparition d'une dilatance répartie, qui se localise nettement en prenant de l'ampleur à l'incrément 6,7. Au cours des incréments 8,9 à 10,11, la bande de cisaillement connaît de très grandes distorsions (0,05 à 0,30) ; la variation de volume révèle quant à elle une diminution progressive de l'intensité de la dilatance. L'incrément 11,12 voit l'apparition d'une deuxième bande de cisaillement superposée à la première, qui demeure active (carte de distorsion, en haut). La carte de variation de volume incrémentale montre clairement le fait que la nouvelle bande est le siège d'une dilatance importante, alors que l'ancienne bien qu'active, ne connaît plus de variations de volume significatives. On retrouve ainsi au niveau local les indices de l'existence d'un indice des vides critique, atteint en grande déformation, avec un écoulement plastique sans variation de volume.

Cette évolution des variations de volume locales a pu être confirmée par une autre voie, en utilisant la planimétrie sur des agrandissements réalisés à partir des clichés pris en cours d'essais. Au prix d'une répétition des mesures, on obtient une précision satisfaisante (erreur absolue de l'ordre de 0,01). La figure 48 présente, en traits pleins, les mesures de planimétrie globale, locale dans la bande, et locale juste à côté de la bande. On peut ainsi constater que la zone adjacente à la bande connaît des variations de volume peu différentes de celles enregistrées au niveau global alors qu'au contraire, l'intérieur de la bande subit une dilatation très forte ; mais aussi que cette dilatation prend rapidement fin après la localisation, ce qui confirme les résultats énoncés plus haut.

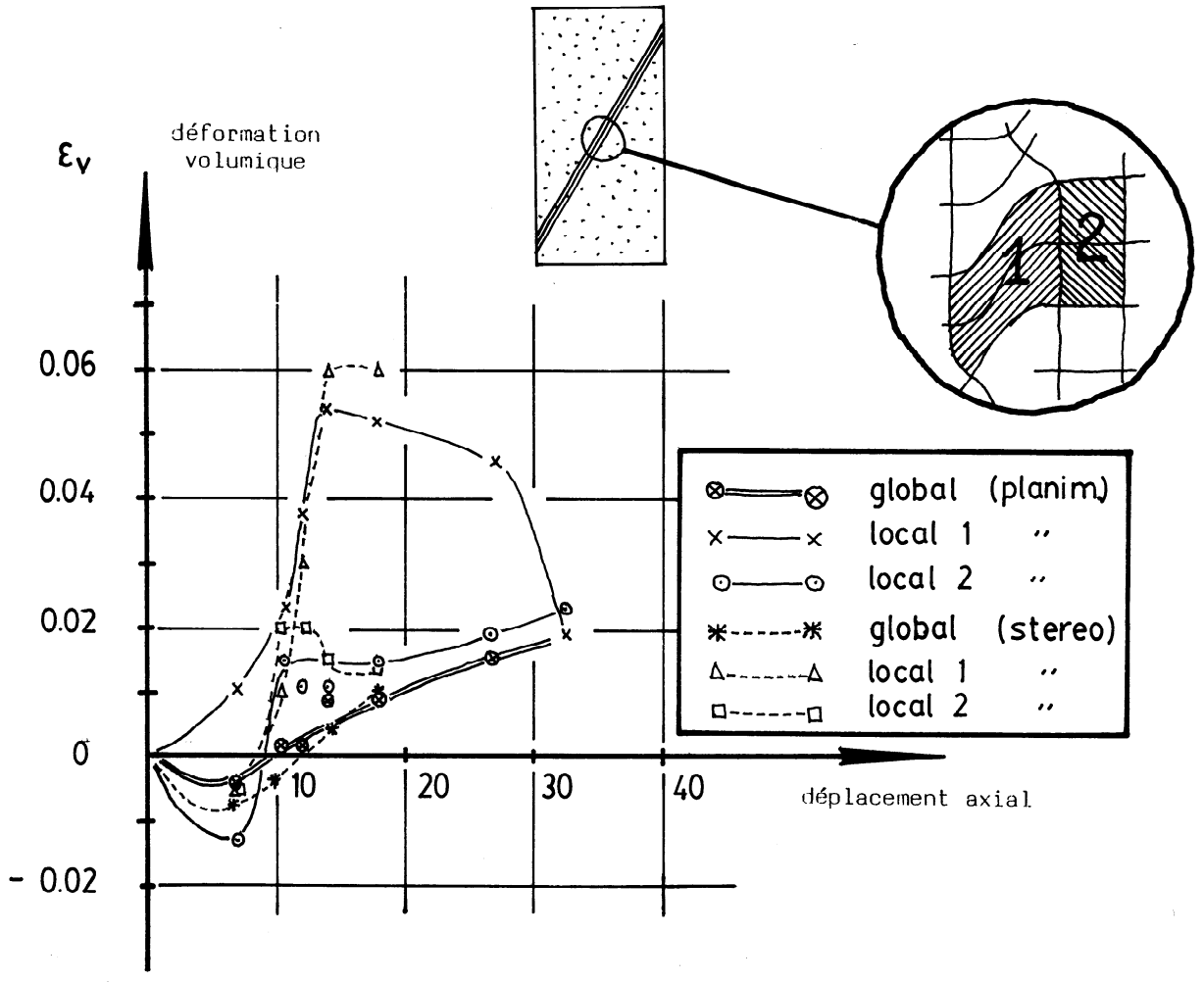


Figure 48. Variations de volume locales et globales. Essai shf06.

Accessoirement, on notera sur cette figure l'excellente concordance entre les mesures planimétriques et celles déduites des exploitations stéréophotogrammétriques des clichés (traits pointillés).

Pour préciser cette analyse, il est intéressant de considérer non plus les variations de volume elle-mêmes mais les angles de dilatance qui donnent une mesure du rapport entre variation de volume et distorsion.

La figure 49 montre l'évolution de l'angle de dilatance global en pointillé et local en trait plein en fonction de la déformation axiale globale, au cours de l'essai Shf18. L'angle local est défini comme les

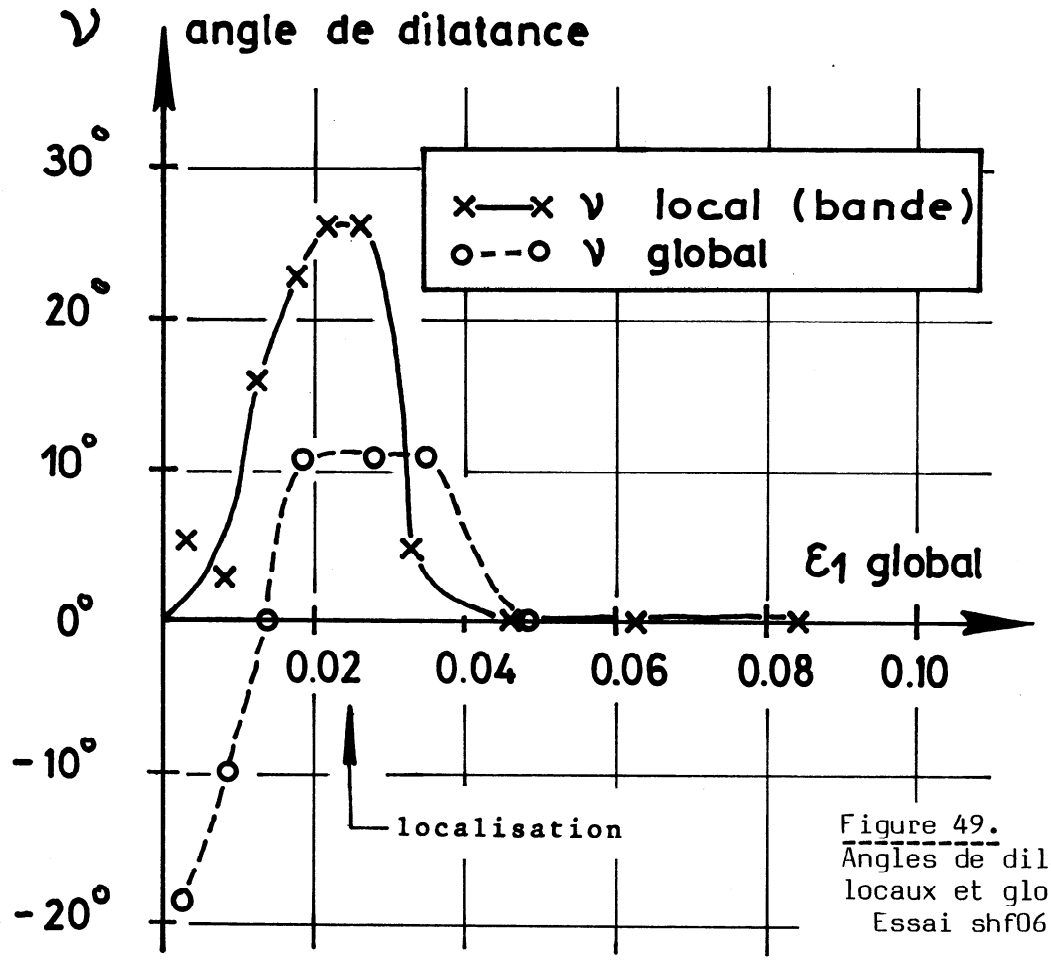


Figure 49.
Angles de dilatance locaux et globaux.
Essai shf06.

moyennes sur les zones subissant la plus forte distorsion.

L'angle de dilatance étant défini en vitesse, il n'est pas surprenant qu'il présente un pic comme on le voit ici. Cependant, ce que l'on observe sur cette figure révèle l'annulation complète de l'angle de dilatance, dès la localisation développée, à $\varepsilon_1 = 0{,}025$. L'angle dans la bande est plus fort que l'angle global au moment de la localisation et chute plus vite que ce dernier.

Ainsi, l'évolution des variations de volume au cours de la localisation indique l'existence d'un indice des vides critique atteint localement dans la bande.

7.4 Densités en fin d'essai

Dans un certain nombre de cas, les échantillons ont été soumis après essai à des mesures de densité locale par gammamétrie. Les échantillons étaient alors conservés sous vide à l'issue de l'essai, et transportés sur l'installation "phogadense". La mesure de cartes de densité complètes s'est révélée quasi-impossible en raison de la durée prohibitive des mesures ; en revanche, quelques profils de densité ont pu être réalisés, le long de droites coupant les zones de localisation.

La figure 50 présente les profils obtenus avant et après essai, sur une zone restreinte de l'échantillon Shf06, au niveau d'une bande de cisaillement. L'évolution de l'indice des vides est évidente, et coïncide avec la trace de la bande dans l'état final.

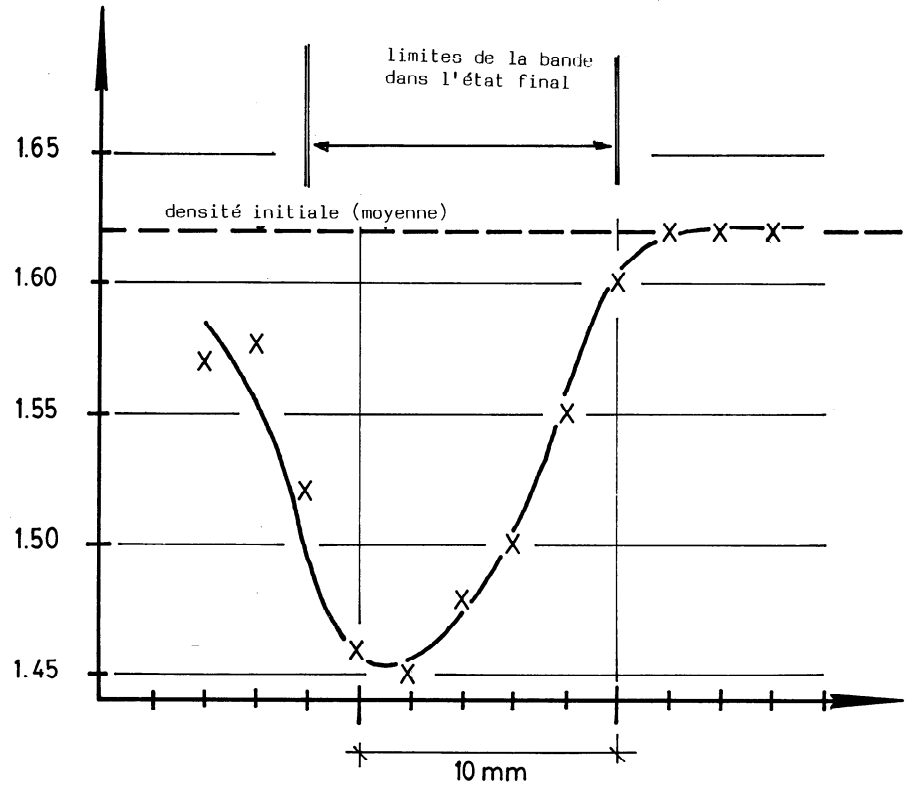


Figure 50. Profils de densité au travers d'une bande de cisaillement. shf06.

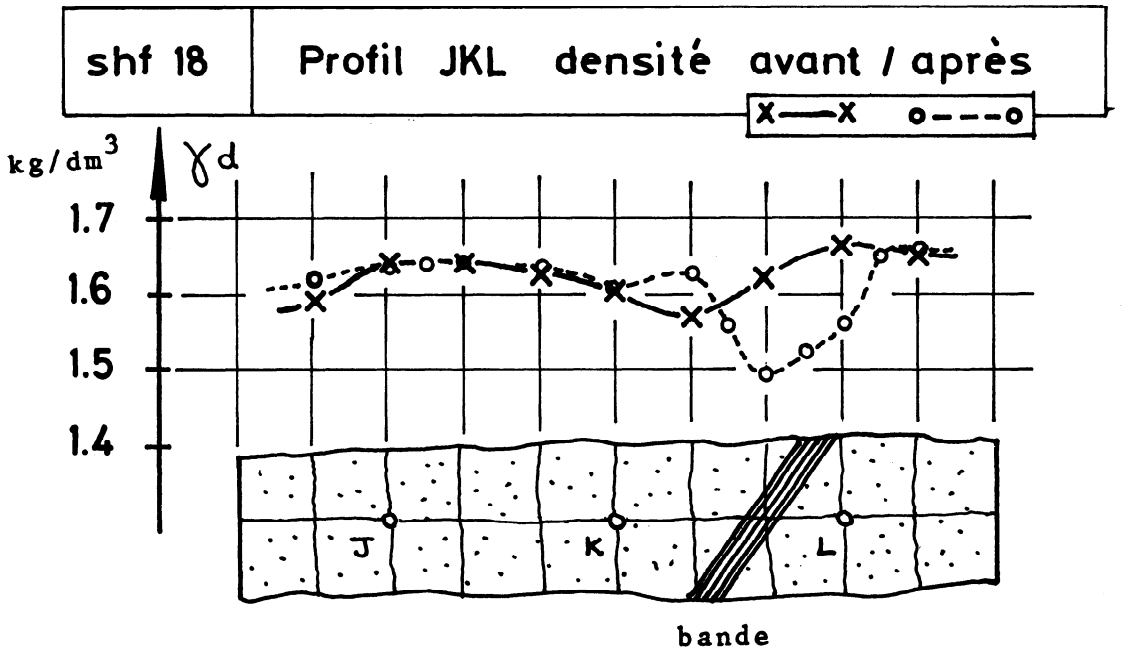


Figure 51. Profil de densité dans une section de l'échantillon. Essai shf18.

La figure 51 montre un profil complet en travers de l'échantillon dense Shf18, avec à nouveau un "fossé" sensible au niveau de la bande relevé au cours d'essai.

La figure 52 donne deux profils complets en travers de l'échantillon lâche Shf20. On n'observe pas d'évolution significative de la densité, sinon une légère augmentation (contractance) générale pour le profil A. Les traces des bandes de cisaillement indiquées sur la figure, ne semblent pas corrélées avec une variation de la densité.

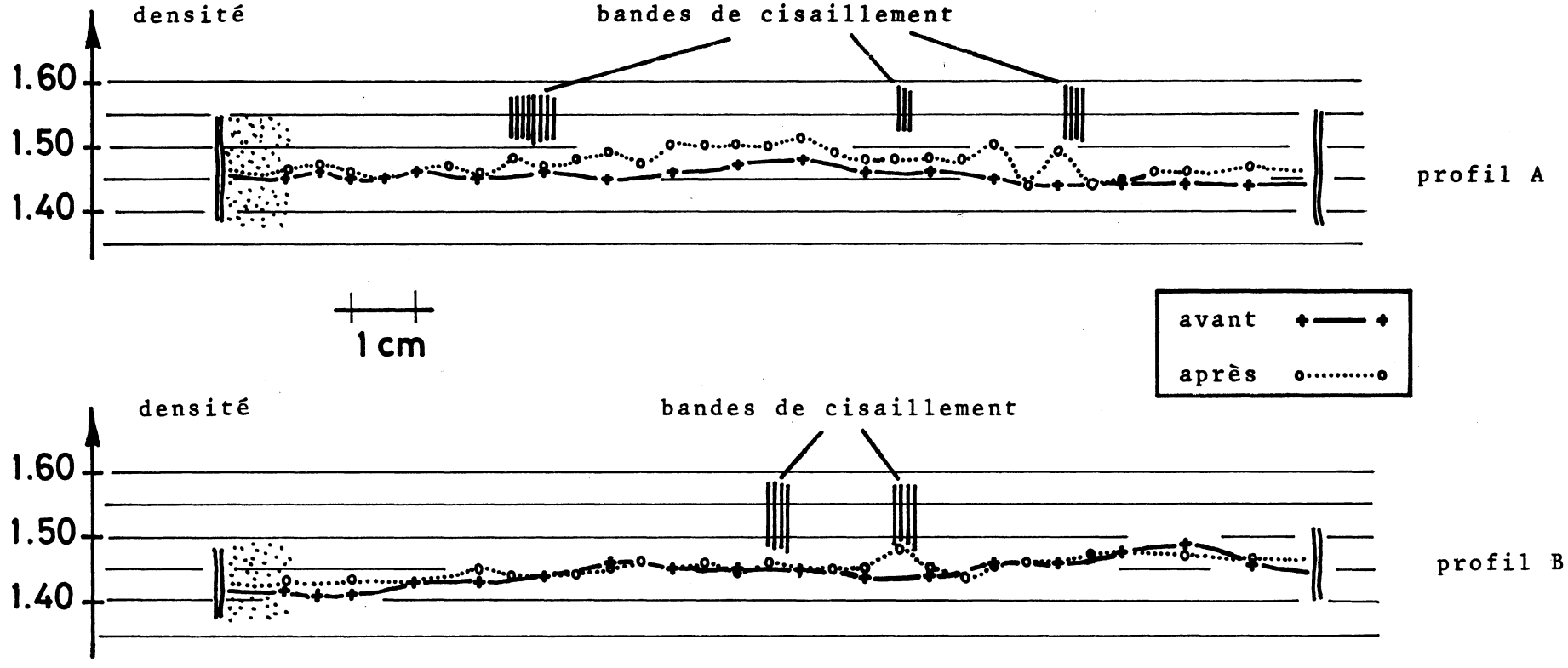


Figure 52. Profils de densité dans une section de l'échantillon. Essai shf20.

Sur le plan quantitatif, la comparaison des densités mesurées en fin d'essai dans les bandes de cisaillement par gammamétrie avec les densités critiques mesurées au triaxial axisymétrique, ne concordent pas. Ce résultat négatif doit toutefois être considéré avec prudence, car il serait nécessaire pour le confirmer d'entreprendre une campagne d'essais spécifique, d'une plus grande ampleur que les quelques résultats présentés ici. Les seuls résultats comparables à ma connaissance sont ceux de Lee <65> qui présente sur sa figure 10 les diagrammes critiques comparés au triaxial et au biaxial : on observe sur cette figure une différence sensible entre les deux courbes : pour une pression latérale de 200 kPa, la différence est de plus de 25 % de la plage de variation des indices de vides pour le matériau considéré, résultat qui corrobore la discordance notée plus haut.

Un échantillon a été soumis, à titre exploratoire, à des mesures de densité par tomodensitométrie, sur un appareil médical (grâce au concours de Mr Sawczuk et de Mr Cagnasso du LMA, et de la clinique Clairval de Marseille). L'échantillon avait été injecté après essai avec une résine, et ainsi figé dans sa configuration déformée (essai Shf01). La photo 10 présente trois coupes verticales parallèles dans l'épaisseur de l'échantillon, reconstruites par calcul à partir de onze coupes horizontales réalisées dans le tiers central de l'échantillon. On distingue nettement la bande de cisaillement principale, ainsi que deux bandes annexes sur la partie gauche.

Ces résultats corroborent ce qui a été dit antérieurement sur la dilatance dans les bandes de cisaillement ; dans le cas de la déformation plane, ils n'apportent pas d'éléments nouveaux par rapport aux autres moyens d'investigation (stéréogrammétrie, planimétrie, gammamétrie). En revanche, cette technique est la seule qui pourrait permettre une mise en évidence de la localisation dans un essai tridimensionnel. Les résultats présentés ici laissent espérer une application fructueuse dans ce domaine. Il a été constaté

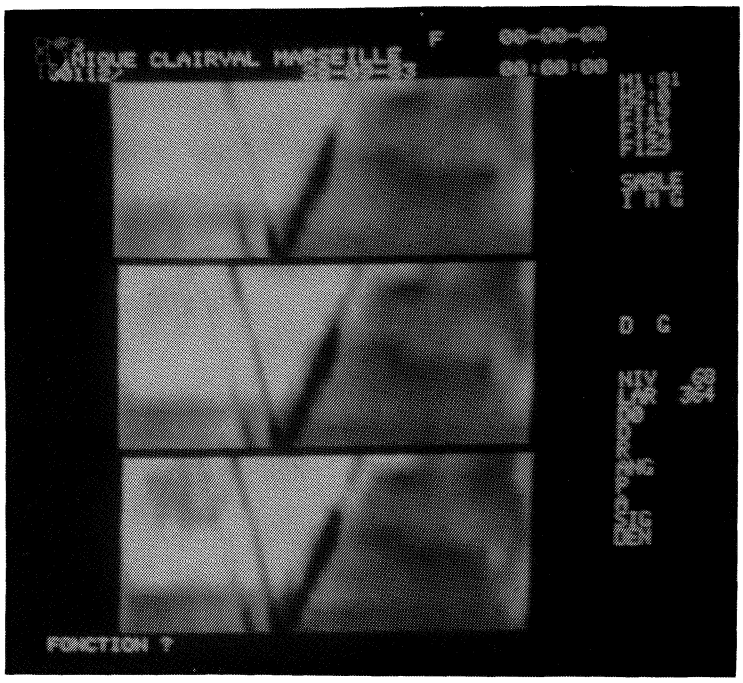


Photo 10. Densités dans trois coupes parallèles verticales de l'échantillon shf01, apres essai, par **tomodensitométrie.**

cependant des difficultés sérieuses liées à l'utilisation d'une injection de résine : d'une part il est inévitable qu'il se produise des variations de volume lors de la polymérisation ; mais surtout il est très difficile d'obtenir une saturation satisfaisante des vides de l'échantillon, comme l'a révélé le découpage de l'échantillon testé en tomodensitométrie. Dans ces conditions, l'interprétation quantitative en terme d'indice des vides est impossible. La meilleure voie pour une étude quantitative paraît être de réaliser l'essai dans le champ de mesure du tomodensitomètre, ou d'y transporter l'échantillon sous vide, de façon à s'affranchir de l'utilisation de la résine. Cette étude est en cours et des résultats sont attendus prochainement.

En conclusion, ces mesures de variation de volume confirment le résultat connu, suivant lequel la localisation dans les matériaux denses donne lieu à d'intenses variations de volume ; mais elles fournissent aussi des résultats nouveaux concernant l'évolution des phénomènes. On a observé que la variation de volume locale prend fin rapidement après la localisation, le taux de dilatance locale revenant à zéro lorsque le matériau dans la bande atteint une compacité limite. La variation de volume globale s'arrête aussi après localisation, en raison du fait que les zones non distordues ne contribuent plus à cette variation ; cependant ces zones demeurent dans l'état de compacité d'avant la localisation, d'où il ressort que la densité globale de l'échantillon n'est pas représentative d'un état limite en densité.

Dans les matériaux lâches, au niveau de contraintes envisagé, la variation de volume en grande déformation est légèrement dilatante après une longue phase de contractance ; ainsi, on observe dans les bandes de cisaillement des vitesses de variation de volume dilatantes au moment de la localisation; toutefois, les variations de densité résultantes restent modestes.

VI-8. L'influence des perturbations

Le tableau 2 (page 107), qui récapitule les essais, comporte une colonne dans laquelle ont été indiquées les diverses perturbations délibérées appliquées à l'échantillon. Il a déjà été discuté (cf VI.3) de l'influence de ces perturbations sur l'existence d'une localisation et l'on a vu qu'elle n'était pas significative puisque les bandes de cisaillement se sont toujours manifestées, quelles que soient les conditions d'essai (en déformation plane). On a vu aussi que les perturbations n'affectaient pas plus la courbe contrainte-déformation, ce qui indique une certaine insensibilité, aussi bien du niveau de contrainte que du niveau de déformation critique aux imperfections (légères) de l'essai.

En revanche, le point de l'échantillon où apparaît l'amorce de la localisation, et le sens dans lequel se développe la bande de cisaillement sont sensibles aux imperfections. En voici quelques exemples :

- La technique de dépot de sable étant encore mal rodée lors des essais Shf00 et Shf01, la partie supérieure de l'échantillon était légèrement moins homogène en densité que le bas ; en outre, la face supérieure était un peu irrégulière. Les deux essais ont donc été effectués, l'un normalement (Shf00) et l'autre après retournement de l'échantillon (Shf01), de façon que la face supérieure lors du dépot soit posée sur la tête inférieure. Le résultat est que la localisation s'est déclenchée en partie haute dans le premier cas, et basse dans le second, c'est à dire du côté le plus perturbé dans chacun des cas.

- Les essais Shf06 et Shf07 ont été effectués sur des échantillons affectés d'une inclinaison légère (environ 1 degré) de la face supérieure par rapport à l'axe de l'essai, l'un à droite, l'autre à gauche ; la rotule étant bloquée, ces deux essais ont donné lieu à des bandes de cisaillement de

directions opposées (voir les croquis du tableau 2).

- Les essais Shf10 et Shf11, qui comportaient des imperfections sous la forme d'un point mou ou dur disposé dans l'échantillon (diamètre 8 mm) ont clairement montré que la localisation apparaissait au niveau de ce point.

- L'essai Shf12 a été perturbé par l'application d'une force latérale égale à un dixième de l'excédent de force axiale au pic; cette force latérale a été appliquée à la tête supérieure, dès l'instant où la force axiale a elle-même atteint la valeur de la force perturbatrice. La courbe globale de l'essai n'a pas révélé d'effet significatif, mais par contre, le mécanisme de blocs et surface résultant s'est mis en place dans le sens de l'action de perturbation (voir croquis du tableau 2).

VI-9. Comportement après pic

Les essais effectués visaient principalement la mise en évidence de la localisation naissante ; l'attention a donc été portée essentiellement sur cette première phase. En particulier, les clichés n'étaient pris que jusqu'à la redescente du pic et rarement après (sauf en fin de la campagne, cf Shf18). On dispose de ce fait de moins d'éléments pour discuter le comportement après le pic. Cependant, quelques observations ont été faites et un essai a été réalisé spécialement pour cette phase.

Une première constatation faite par comparaison des courbes expérimentales "brutes", telles qu'enregistrées directement en cours d'essai (pour des essais comparables), est que la chute de force axiale après pic s'arrête à peu près toujours au même niveau, comme le montre la figure 53. Cette figure présente la superposition d'un certain nombre de courbes brutes force-déplacement enregistrées au cours d'essai (enregistrement analogique). Les deux faisceaux distincts correspondent chacun à une largeur initiale d'échantillon

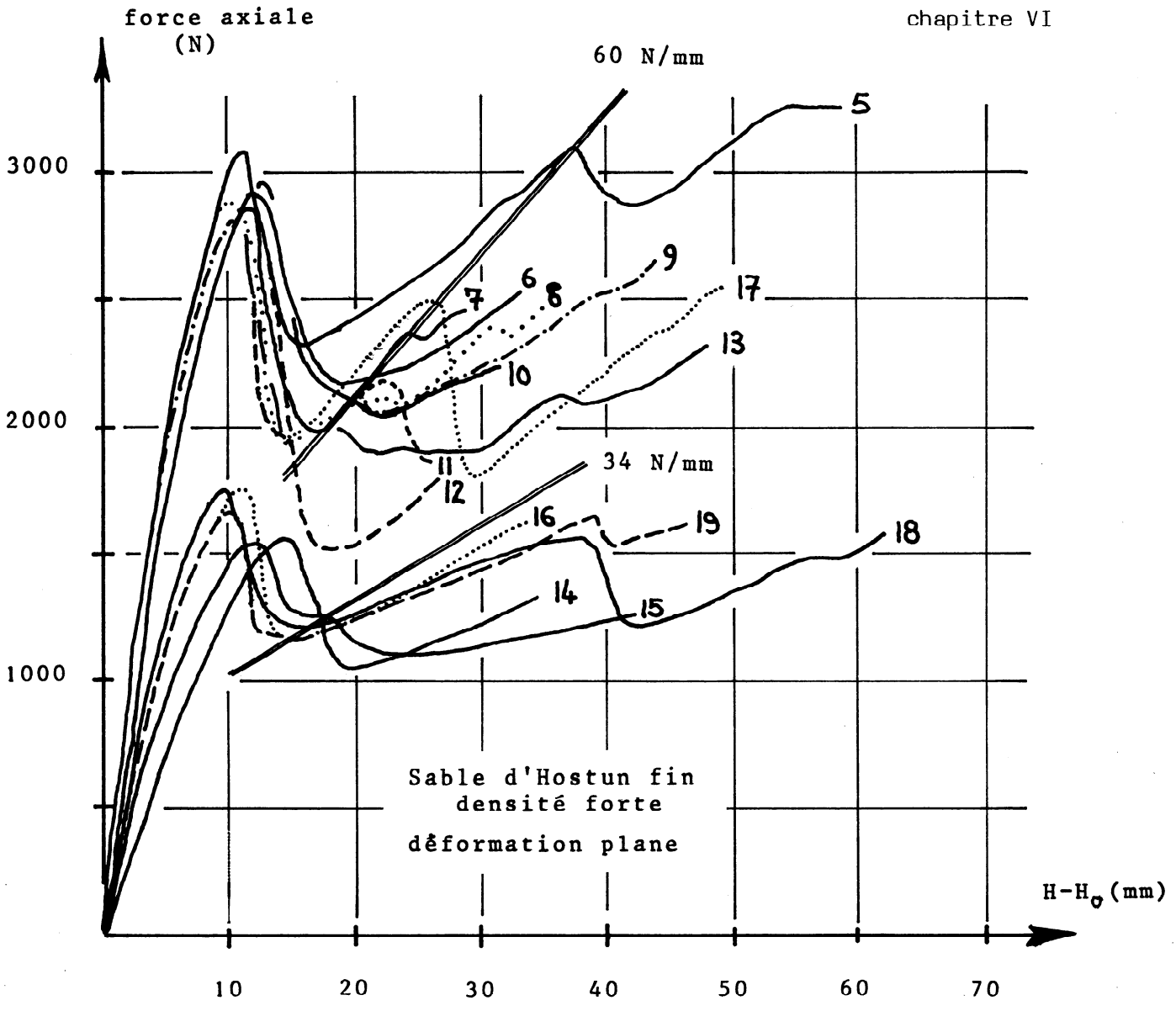


Figure 53. Courbes force-déplacement : comparaison de quelques essais.

(175 mm pour élancement 2, 100 mm pour élancement 3,5). Seuls se distinguent dans le groupe supérieur, l'essai Shf05 (sans raison connue), et l'essai Shf12, ce dernier en raison de la force latérale perturbatrice. Les essais à élancement 3,5 plus étroits, ne peuvent pas se comparer en force aux premiers, mais leur regroupement donne lieu à la même constatation.

On observe par ailleurs sur cette figure que toutes les courbes présentent après ce point bas une remontée sensiblement linéaire, avec une pente comparable. La déformation étant largement localisée depuis le pic, il

serait de peu de sens de calculer une contrainte axiale, c'est pourquoi je donne ici des courbes brutes. De toutes façons, la pente observée ne peut pas être expliquée par un accroissement de section de l'échantillon.

En revanche, il semble que cette remontée de la force soit due à l'influence de la membrane de latex, qui entoure l'échantillon. Cette membrane se trouve soumise à des déformations très importantes dans la zone de cisaillement, il en résulte une résistance qui peut se traduire, aux limites, par une composante de force axiale. Compte tenu de l'épaisseur de la membrane, de sa raideur, de l'angle de la bande de cisaillement et de l'épaisseur de cette bande, il est possible en supposant la membrane élastique linéaire, de calculer la contribution de la membrane à la force axiale, à partir du moment où l'on a localisation. Ce calcul aboutit, dans le cas considéré, à environ 60 N par millimètre de déplacement de la tête supérieure pour le premier groupe, et 35 N/mm pour le second. Les droites correspondantes sont tracées sur la figure 53 ; on peut constater que l'hypothèse de cette action de membrane donne lieu à des prévisions assez conformes à la réalité.

En conséquence, il est prudent de ne pas considérer le point bas comme une fidèle mesure d'un frottement résiduel ; cette remarque mérite d'être prise en considération lors d'éventuels essais de déformation plane menés à des fins pratiques.

Lorsque les essais sont menés suffisamment loin, il est fréquent d'observer un second pic dans la courbe face-déplacement, aussi marqué que le premier; ce nouveau pic coïncide avec l'apparition d'une seconde bande de cisaillement, qui recoupe la première. Il semble donc que le premier mécanisme de glissement bloc sur bloc se trouve peu à peu empêché et cède le pas à un second. Le facteur de blocage peut être l'action de la membrane, discutée ci-dessus. On peut aussi s'attendre à ce que se développent des effets de réaction de la machine d'essai, lorsque les liaisons sont incompatibles avec la cinématique de bloc.

La force de liaison horizontale au niveau de la tête supérieure a été enregistrée au long de l'essai Shf18. La figure 54 montre la mobilisation progressive de la réaction horizontale T, en fonction de l'écrasement. La courbe de la force axiale, en surimpression, permet de relier cette évolution

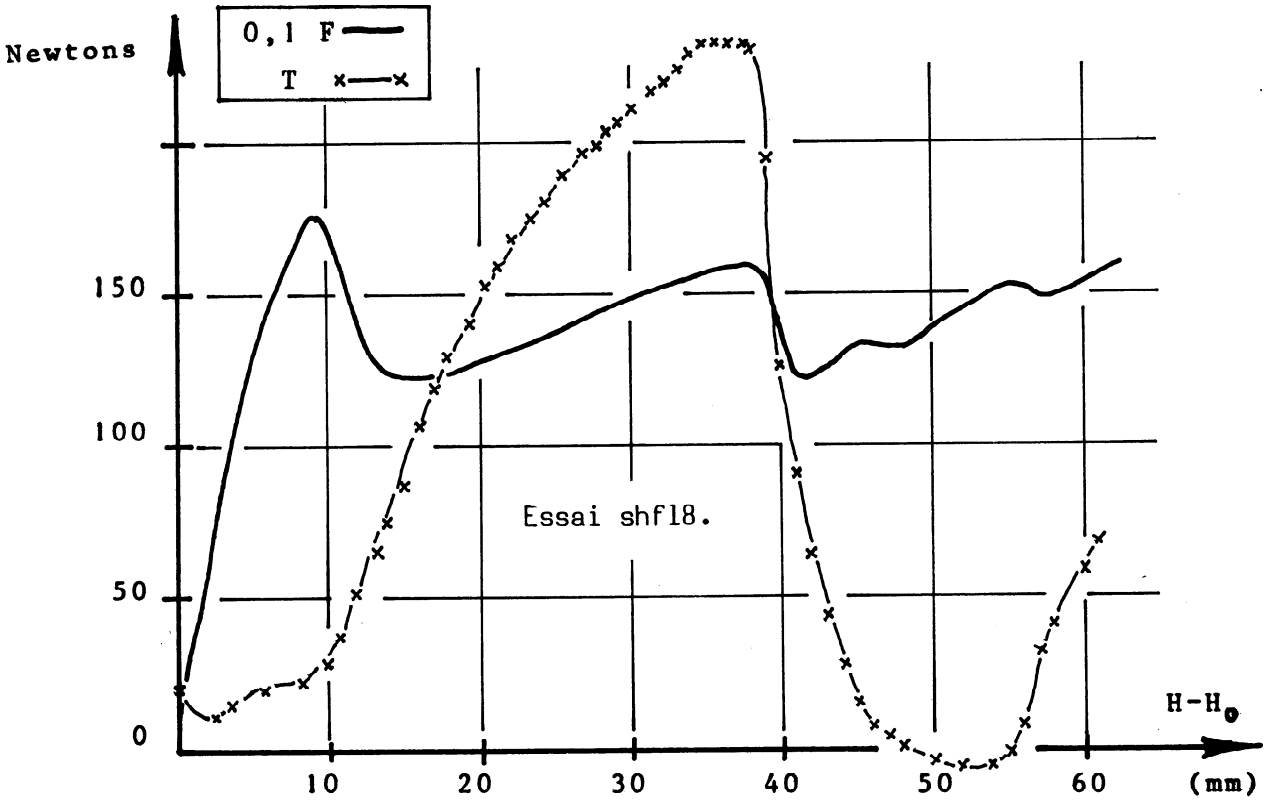


Figure 54. Mobilisation d'une réaction horizontale de la machine d'essai.

aux pics mentionnés plus haut. On peut constater que la force T est sensiblement nulle jusqu'au premier pic de la force axiale ; elle augmente alors rapidement pour chuter tout à coup lors du second pic de force axiale qui correspond à l'apparition d'une deuxième bande de cisaillement (voir les aussi les figures du dépouillement stéréo de l'essai Shf18, incrément 11,12 , figures 39 et 40).

L'apparition d'une seconde localisation peut donc être considérée comme la conséquence du développement de résistances au premier mécanisme, au niveau de la membrane mais aussi au niveau des liaisons de la machine d'essai.

VI-10 Largeur des bandes de cisaillement

De nombreux auteurs ont indiqué que la largeur des bandes de cisaillement peut être considérée comme liée à la taille des grains qui constituent le matériau. Des chiffres ont été avancés, de l'ordre de la dizaine de grains (Vardoulakis <103>, Roscoe <82>, Scarpelli et Wood <88>). Les essais présentés dans ce mémoire ont été effectués sur des grains de tailles très différentes, et confirment tout à fait la dépendance en question. On constate aisément, en effet, que les bandes de cisaillement observées sur le sable d'Hostun gros (0,8 à 1,8 mm) sont nettement plus larges que celles observées sur le sable fin (0,125 à 0,5 mm) : figure 19 et figure 11 par exemple. Le sable bidimensionnel de Schneebeli étudié par B. Duthilleul, donne un exemple de grains encore plus gros ; les bandes de cisaillement sont d'autant plus larges (figure 44).

Il faut noter, cependant, que les cartes obtenues par stéréophotogrammétrie ne donnent qu'un majorant de cette épaisseur, dans la mesure où leur finesse de description est limitée par la taille du maillage adopté. Ainsi, la largeur des bandes plus fines que 10 mm est-elle surestimée par la représentation. On peut aussi mesurer la largeur des bandes sur l'échantillon en fin d'essai ; cependant, les très grandes distorsions conduisent aussi à des largeurs probablement surestimées par rapport à la bande réellement active dans les premiers stades de développement. La photo 11 montre un détail de bande de cisaillement obtenu par agrandissement du cliché final de l'essai ShfO1 ; on peut constater l'énorme distorsion du motif, initialement circulaire, traversé par la bande et apprécier la rotation matérielle considérable (lignes du maillage). La largeur a été estimée à 6 mm (la maille est de 10 mm)

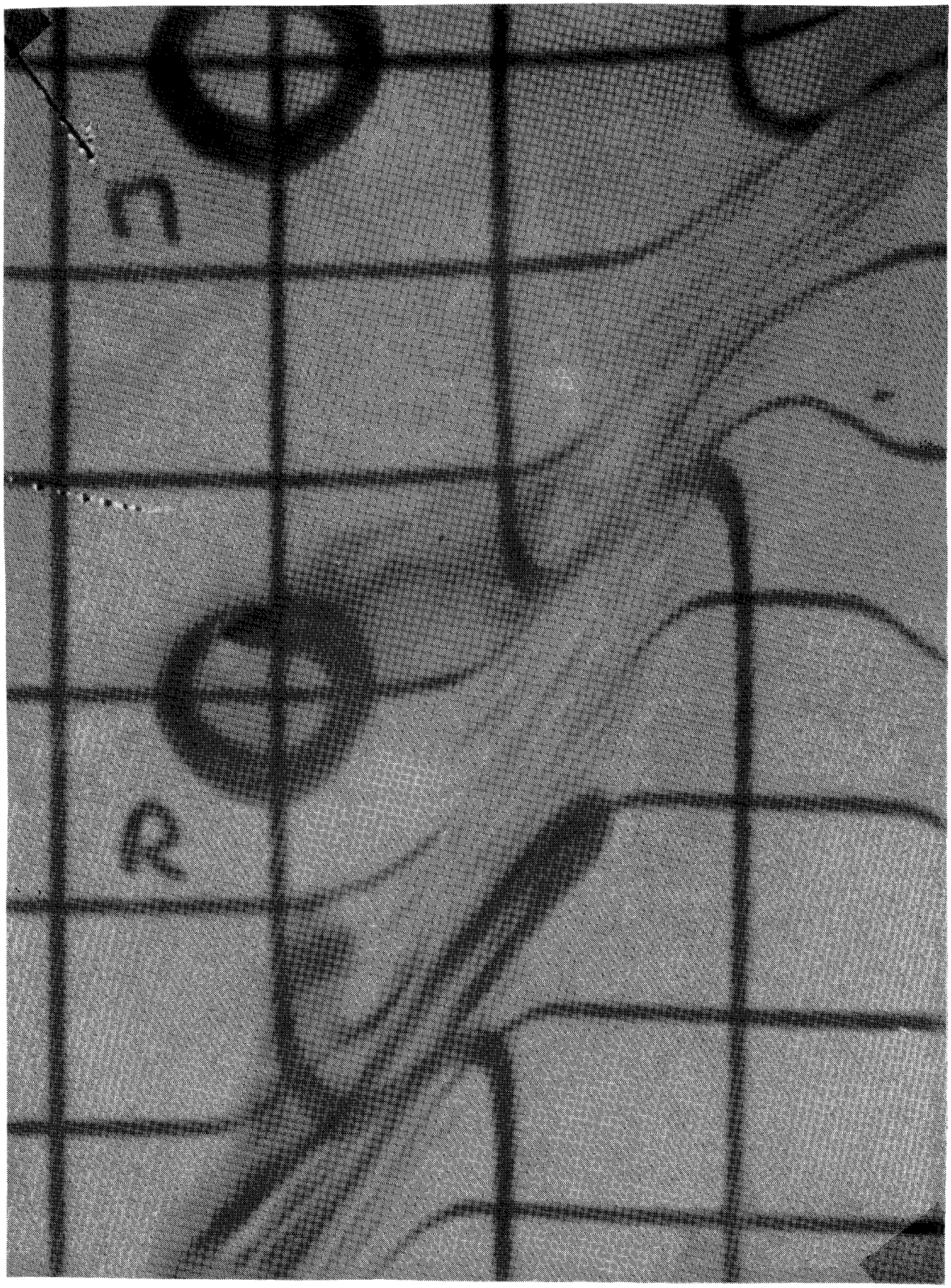


Photo 11. Détail de bande de cisaillement. essai shf01.

mais il y a tout lieu de penser que ce chiffre est une borne supérieure. Au bilan les chiffres de 10 à 30 fois le diamètre moyen des grains paraissent donner une bonne estimation de la réalité.

Cette dépendance de la largeur des bandes de cisaillement par rapport à la taille des grains appelle une remarque, qui a déjà été formulée par d'autres auteurs (par exemple Scarpelli et Wood <88>) mais qui mérite d'être faite ici : l'existence d'une épaisseur caractéristique de la bande pose un problème pour les essais sur modèles réduits, en centrifugeuse par exemple, car elle viole les règles de similitude. Si l'on utilise le matériau réel dans des essais à échelle réduite, les éventuelles bandes de cisaillement auront une épaisseur indépendante de l'échelle. De ce fait, les déformations localisées pour des déplacements relatifs homologues, seront beaucoup moins grandes dans le modèle que dans la réalité. L'évolution du comportement du matériau dans les zones localisées sera donc différente et ceci peut conduire jusqu'à des divergences qualitatives entre modèle et réalité.

VI.11 Observations microstructurelles

L'injection d'échantillons de sol pour les figer dans un état donné et en observer ultérieurement la structure est une technique séduisante. Quelques auteurs ont proposé des méthodes : on notera en particulier Windisch et Soulié <109>, ainsi que Luong, Gandais et Allemand en France <66>. Pour ma part, j'ai réalisé quelques injections d'échantillons après essai biaxial, au moyen d'une résine epoxy (Escil Sody 33).

A partir de ces échantillons, j'ai pu réaliser des lames minces, suivant les techniques utilisées en pétrographie, dans le but d'observer les modifications de la microstructure dans les zones de cisaillement. Le résultat est étonnant : l'assemblage des grains dans les bandes de cisaillement n'apparaît, à l'observation à l'oeil nu comme à divers grossissements, que peu modifié par rapport aux zones appartenant aux blocs rigides. Les photos 12 et 13 présentent une lame typique, taillée dans le plan perpendiculaire à la direction de déformation plane, dans une zone affectée par une bande de cisaillement. Les flèches indiquent deux points de la bande, qui est rectiligne; sa position est connue par un repérage indépendant. La photo 13 montre un agrandissement de la zone située à la pointe de la flèche supérieure.

Il est difficile de discerner l'emplacement des bandes sur les lames, et c'est seulement lorsqu'on connait cet emplacement qu'on peut distinguer, avec peu de certitude, un léger relachement de la structure, et, peut être, une orientation un peu modifiée des grains.

Ce qu'on peut conclure de ces examens, est qu'il suffit dans les matériaux grannulaires, de modifications structurelles très ténues pour produire les effets macroscopiques considérables qu'on constate lors de la loca-

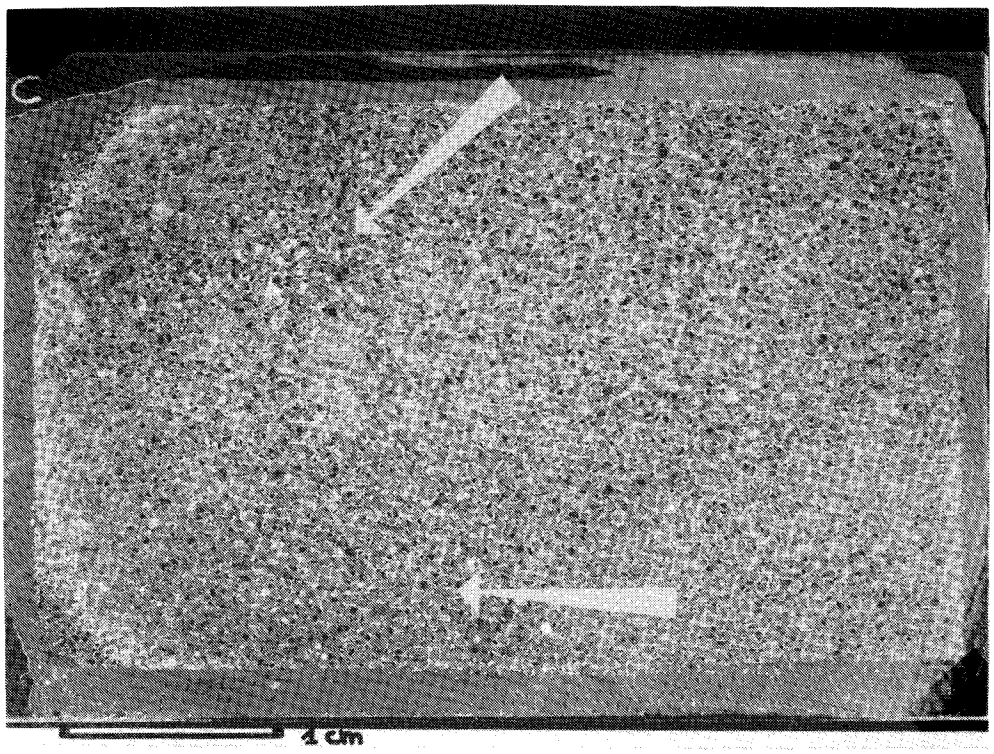


Photo 12. Lame mince "C", taillée parallèlement au plan de DP, dans la zone affectée par la localisation.

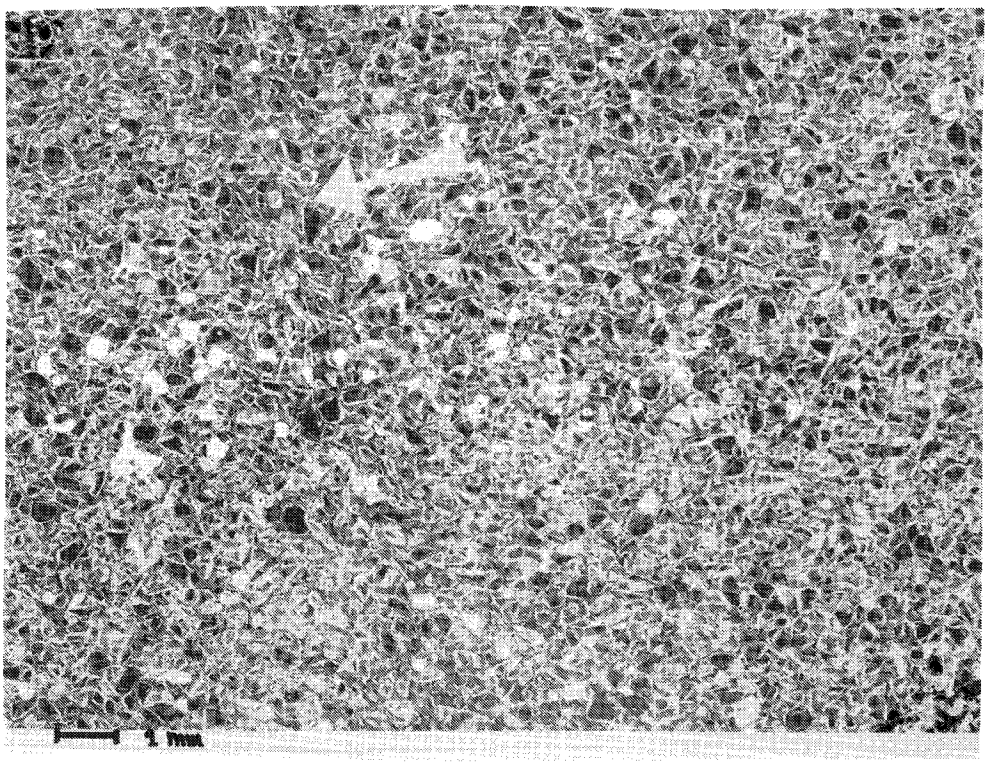


Photo 13. Détail de la lame "C".

lisation de la déformation ; peut être serait-il possible, grâce à l'analyse d'image, et plus précisément à l'aide des outils spécifiques de l'analyse de texture (morphologie mathématique) développée à l'Ecole des Mines de Paris par J. Serra et ses collaborateurs <89> de mettre en évidence ces modifications. En l'absence (provisoire ?) de ces moyens , il est difficile d'approfondir l'analyse des lames qui ont été réalisées.

VI-12. Conclusion

Il ressort de ce chapitre consacré aux résultats expérimentaux, que les matériaux granulaires soumis à des sollicitations en déformation plane sont particulièrement sensibles à la localisation en bande de cisaillement. Ce phénomène apparaît systématiquement à l'essai biaxial, avec peu d'influence des imperfections de l'essai, si ce n'est sur l'emplacement et peut être l'orientation des bandes. Cette situation est assez différente de celle qui prévaut dans les essais axisymétriques, au cours desquels la localisation ne se manifeste pas systématiquement, et se révèle très sensible aux imperfections.

Les expériences ont permis de montrer que la localisation ne s'établit pas d'un coup mais se propage à partir d'un point d'initialisation et que cette propagation s'accommode de la rencontre de frontières rigides ; des essais au vrai triaxial ont révélé qu'on y rencontrait aussi ce type de phénomène. Le point d'initialisation est particulièrement sensible aux imperfections. L'examen de la cinématique dans la bande confirme le fait qu'il s'agit d'une ligne d'extension nulle et corrobore les hypothèses cinématiques classiques dans les analyses de localisation ; on a vu que ceci ne permet cependant pas d'établir une relation a priori entre l'angle de dilatance global et l'inclinaison de la bande, car les directions de la vitesse de déformation locale, et l'angle de dilatance local, peuvent différer notablement des valeurs globales. L'examen statistique des orientations des bandes, relevées dans des conditions comparables, montre une certaine dispersion, qu'on peut supposer liée aux particularités de chaque essai (perturbations) ; un pic se dégage cependant, qui correspond à l'orientation à $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ des directions principales de l'essai.

Une attention particulière a été portée aux variations de volume au cours de la localisation. Divers moyens d'investigation ont été mis en oeuvre,

et tous concordent sur le point d'une dilatance importante localisée dans les bandes de cisaillement (essais denses). Les mesures stéréophotogrammétriques indiquent que l'angle de dilatance local, dans les bandes, est très fort au moment de la localisation, mais chute rapidement ensuite : ainsi le matériau semble atteindre un état de compacité critique dans les zones de forte déformation. Les essais lâches réalisés donnent lieu à des variations de volume peu importantes mais légèrement dilatantes cependant dans les bandes naissantes.

Une tentative de caractérisation microstructurale de la zone de localisation met en évidence une difficulté certaine à dégager à ce niveau, des indices significatifs d'une modification typique. Il faut se garder, sans doute, de généraliser hâtivement ces observations, puisqu'il s'agit dans le cas présenté d'un matériau bien particulier, testé à densité moyenne, et que d'autre part, il n'est pas évident que l'observation directe soit adaptée pour la mise en évidence de variations, somme toute légères, de la morphologie d'un assemblage de grains aléatoire.

A l'issue de ces observations diverses, qui éclairent de diverses façons les questions "où ?", "quand ?" et "comment ?", il reste le "pourquoi ?". Sans doute les analyses théoriques, sur lesquelles je vais m'étendre un peu plus dans les chapitres suivants, offrent-elles des descriptions du phénomène. La question n'en reste pas moins posée, au niveau phénoménologique.

Des réponses, sur ce terrain, ont été proposées. Arthur et Dunstan <4> en ont suggéré une très séduisante, qui fait appel à un principe de minimum d'énergie : le mode de déformation, localisée ou diffuse, qui prévaut est celui qui produit la plus forte dissipation de travail interne. Il est malheureusement impossible de prouver théoriquement un tel postulat, et d'ailleurs, on imagine tout aussi bien que le mode effectif soit, au contraire, celui qui satisfait aux conditions aux limites tout en produisant la dissipation minimale. L'expérience qui permettrait d'infirmer l'un ou

l'autre postulat, - voire les deux ! - n'est pas encore conçue.

Le schéma explicatif le plus répandu dans le domaine des sols voit dans la dilatance le facteur essentiel de la localisation (Arthur et al <4>, Lade <64>, et d'autres auteurs). Il s'agit là, assurément, d'une conception intéressante et riche de conséquences sur le plan phénoménologique.

On sait que la résistance au cisaillement des matériaux granulaires dépend de façon cruciale de la compacité de l'arrangement des grains : un même matériau, déposé à diverses compacités, montre des comportements nettement différenciés. On sait par ailleurs qu'un des traits typiques du comportement de ces matériaux est l'évolution de leur compacité au cours d'une déformation déviatoire. On sait enfin que ces matériaux connaissent des déformations irréversibles dès les plus petites charges, mais qu'ils s'écrouissent à la déformation, devenant susceptibles de résister sans déformation irréversible notable à une charge déjà appliquée sur le même chemin de chargement. Ce comportement d'écrouissage s'observe, entre autre, dans le cas où, à l'essai triaxial, la contrainte moyenne est telle que le cisaillement se produit sans variation de volume (pression critique, liée à un indice des vides initial donné).

Ainsi, on peut isoler par la pensée un premier écrouissage isochorique, auquel s'ajoute éventuellement un second (positif ou négatif) lié à la variation de volume : ce second mécanisme conduit à faire s'augmenter la résistance lorsque le cisaillement produit une contraction de l'assemblage (cas lâche) et réciproquement diminuer celle-ci lorsqu'on observe une dilatation (cas dense). On a alors un écrouissage à deux mécanismes, éventuellement antagonistes. Lorsque les mécanismes entrent en compétition (cas dense), on peut s'attendre, même dans l'hypothèse d'une homogénéité indéfiniment conservée, à ce qu'un essai de type triaxial présente un pic. On peut aisément mettre sur pied à titre heuristique, une formulation analytique simple de cette compétition, sur chemin triaxial, et caler celle-ci sur des essais ; on obtient effectivement, sur chemin triaxial, une prévision de réponse compor-

tant un pic dans le cas dense (J.Desrues, communication aux journées universitaires de Génie Civil, Lyon 1980).

En quoi ceci permet-il d'expliquer la localisation ? En ceci que le second processus d'écrouissage envisagé, qui peut conduire à un adoucissement sur chemin monotone, introduit une processus d'endommagement (dont le paramètre est l'indice des vides). Un tel processus est, par nature, favorable à la concentration, au sens d'accumulation dans une partie par opposition à une diffusion dans le tout : dans le cas de l'endommagement lié à l'augmentation de l'indice des vides, on conçoit bien qu'une zone d'un échantillon (dense), qui se trouverait pour une raison quelconque un peu plus déformée que les autres, aurait subi de ce fait plus de dilatance, serait donc moins compacte, potentiellement moins résistante, et donc exposée à être, par la suite, le phénomène s'amplifiant de lui-même, le siège d'une déformation localisée. Ceci ne peut se produire cependant que sous certaines conditions, la première étant que la déformation localisée satisfasse les conditions aux limites imposées; elle ne peut donc pas être "contenue" , mais doit traverser l'échantillon. C'est le cas d'une bande de cisaillement, c'est le cas aussi de l'hétérogénéité diffuse symétrique ou asymétrique, dans laquelle certaines parties de l'échantillon se déforment sensiblement plus que d'autres. Une autre condition est que le taux d'adoucissement lié à l'endommagement soit supérieur au taux de durcissement lié au premier mécanisme d'écrouissage. Cette condition limite l'apparition de la localisation au voisinage du pic, ce qui est à peu près satisfaisant pour le cas des échantillons denses.

Ce schéma de pensée est intéressant dans la mesure où il s'appuie sur des observations bien établies concernant la forte dilatance des zones de localisation. De plus, il permet d'expliquer les différences entre biaxial et triaxial par les considérations suivantes : on sait qu'au biaxial, l'échantillon développe sur les plaques qui le contiennent une contrainte supérieure à

la pression latérale σ_3. Dans cet appareil, la variation de volume locale liée à un cisaillement (local) se traduit intégralement par une extension dans la direction située dans le plan de DP, et perpendiculaire à la direction d'extension nulle. Au triaxial, au contraire, rien n'empêche la variation de volume de se distribuer de façon quelconque entre la direction 2 normale à la facette cisaillée et la direction 3 contenue dans cette facette et normale à la direction d'extension nulle 1 (figure 55). La déformation d'extension dans la direction 2 est donc a priori plus faible qu'au biaxial. (Rappellons qu'on observe (cf VI.7.1) que les variations de volume globales sont peu différentes dans ces deux appareils). On sait d'après les travaux sur les assemblages de grains (notamment Wiendieck à Grenoble <108>) que dans un tel assemblage soumis à une déformation, le nombre de contacts (entre grains) de normale parallèle à une direction de compression augmente, pendant que celui des contacts de normale parallèle à une direction d'extension diminue. On en déduit que l'évolution de l'élément envisagé, en déformation plane, est plus "affaiblissante" qu'en déformation axisymétrique et l'expose donc plus à une localisation, ce qui est conforme à l'expérience.

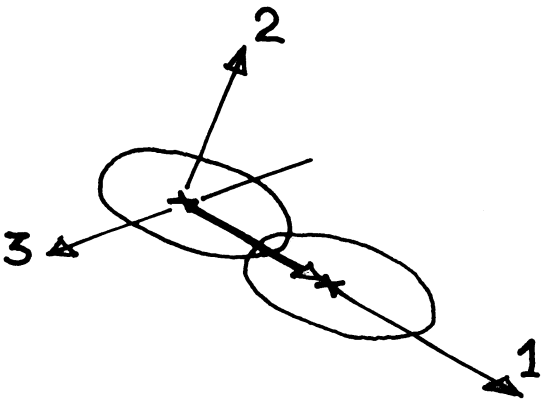


Figure 55.

Bien qu'elle soit fructueuse sur certains plans, l'idée de la dilatance facteur de localisation, formalisée ici en un concept de double écrouissage, comporte des faiblesses. Comme on l'a vu, elle explique une localisation au pic pour les matériaux denses ; en revanche elle n'explique pas des localisations observées bien avant le pic, telles que celle de l'essai Shf03. Elle ne prévoit pas non plus qu'une localisation apparaisse dans un matériau contractant. Sur ce dernier point, l'expérience n'est pas encore parfaitement claire, car mes essais lâches (Shf02, Shf03, Shf04 et Shf20) n'étaient pas suffisamment contractants pour trancher nettement la question de

savoir si la localisation apparaît ou non dans le domaine contractant. Certaines expériences préliminaires pour une nouvelle phase de travaux laissent pourtant penser que la réponse est oui.

Si la dilatance est un bon candidat comme paramètre d'endommagement, ce n'est cependant pas nécessairement le seul; l'attrition (rupture des aspérités des grains), le réarrangement des grains suivant des directions de glissement peuvent en constituer d'autres. On rejoint là l'approche microstructurelle, dont on a vu plus haut (VI.11) qu'elle ne livrerait pas ses secrets au premier coup de microscope.

La question de l'interprétation phénoménologique de la localisation reste donc en partie ouverte; sans doute faudra-t-il, pour avancer encore dans cette direction, enrichir et élargir la base expérimentale, notamment dans le domaine contractant, et approfondir la connaissance des phénomènes microstructuraux qui président à l'écrouissage dans les matériaux granulaires.

---oooOOooo---

chapitre VII

Troisième Partie

ANALYSE DE LA LOCALISATION COMME PHENOMENE DE BIFURCATION : Quelques résultats généraux, étude du cas des lois non linéaires, et une application.

Dans la première partie de ce mémoire, j'ai présenté, parmi divers points de vue sur la localisation de la déformation, le cadre théorique dans lequel ce phénomène peut être étudié comme un phénomène de bifurcation. J'ai passé en revue les travaux qui relèvent de cette approche, dans le domaine des matériaux granulaires. Dans cette troisième partie, j'expose quelques résultats, obtenus en collaboration avec René Chambon, qui nous conduisent à montrer que, dans ce cadre théorique, la plus grande généralité est nécessaire lorsqu'on envisage l'étude de la bifurcation pour des lois incrémentalement non linéaires, un élargissement dont dès 1976 Rice signalait qu'il serait intéressant de l'entreprendre <79>.

Mais au préalable j'aimerais revenir sur les analyses de bifurcation présentées plus haut, notamment celles effectuées sur des lois relevant de la plasticité classique, afin de dégager quelques liens entre ces études et entre leurs résultats.

Cette troisième partie comporte trois chapitres, qui sont les suivants :

Le chapitre VII présente une synthèse des travaux, anciens et récents, qui relèvent de l'analyse de bifurcation par localisation pour des matériaux élastoplastiques;

le chapitre VIII pose le problème de l'application de l'analyse de bifurcation par localisation aux lois incrémentalement non linéaires, et propose une démarche dont

le chapitre IX expose la mise en oeuvre analytique complète sur une loi non linéaire heuristique, ce qui permet de montrer sur cet exemple qu'on ne peut pas faire l'économie de la généralisation proposée.

Chapitre VII

BIFURCATION PAR LOCALISATION DE LA DEFORMATION :

PREVISIONS DE L'ELASTOPLASTICITE NON STANDARD A UN POTENTIEL.

Les prévisions élastoplastiques à comparer concernent le "moment" d'apparition de la localisation, en terme de taux d'écrouissage critique pour la première bifurcation possible ; l'angle de la bande de cisaillement prédite ; et aussi l'influence, sur ces résultats, du comportement dilatant du matériau, dont l'expérience montre les manifestations remarquables au cours de la localisation. L'avantage de lois issues de la plasticité pour une telle étude paramétrique est qu'elles font apparaître explicitement des paramètres comme l'angle de dilatance et l'angle de frottement interne. En revanche on sait bien que, du moins pour les lois à simple potentiel, elles ne décrivent que partiellement la réalité du comportement des matériaux granulaires.

VII-1 Le matériau rigide plastique.

Considérons en premier lieu le "matériau" rigide plastique : son comportement est rigide pour des chargements situés à l'intérieur de la

surface de charge, et plastique lorsque le point représentatif des contraintes atteint cette surface, dont l'équation est la fonction de charge, et que l'incrément de contrainte est dirigé vers l'extérieur. Si le matériau est rigide - parfaitement plastique, seule la direction de la déformation plastique est donnée mais dans le cas du matériau écrouissable, la vitesse de déformation plastique $\underline{D}$ est donnée par :

$$D^p_{ij} = \frac{1}{h} P_{ij} Q_{kl} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \qquad (1)$$

où, suivant les notations de Rice <79> $\underline{P}$ donne la direction de la déformation plastique et $\underline{Q}$ la direction de la normale extérieure à la surface de charge, tandis que $\overset{\nabla}{\sigma}$ est la vitesse de contrainte corotationnelle. Si le matériau est standard, $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ coïncident; leurs composantes sont les dérivées partielles de la fonction de charge, soit $f(\sigma_{ij})$:

$$Q_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (2)$$

Si le matériau est non standard, $\underline{P}$ ne coincident plus avec $\underline{Q}$; les composantes de $\underline{P}$ sont les dérivées partielles d'une fonction $g(\sigma_{ij})$, homologue de f, appellée potentiel plastique :

$$P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (3)$$

Rice a présenté <79> l'analyse générale de bifurcation pour un tel modèle. Il a montré que, compte tenu des hypothèses classiques (statique et cinématique, cf III-3) qui décrivent l'apparition d'une localisation, $\underline{P}$ doit nécessairement avoir une forme bien définie, qui correspond à l'existence d'un plan non déformé dans l'élément (l'existence de ce plan est contenue dans l'hypothèse cinématique, cf VI-5.3). Ainsi, la localisation n'est possible que si la valeur propre intermédiaire de $\underline{P}$ est nulle, ce qui impose une restriction au niveau du modèle rhéologique lui-même. Lorsque cette restriction est satisfaite ($P_{II} = 0$), la bifurcation ne peut se produire, pour le matériau standard ($\underline{P}=\underline{Q}$), qu'avec un taux d'écrouissage nul : $h_c = 0$.

En revanche, le matériau non standard permet la localisation pour toute valeur de h , pour peu que la condition sur $\underline{P}$ soit vérifiée.

Les études faites pour les sols avec des modèles rigides-plastiques écrouissables corroborent en général cette analyse; on note en particulier la bifurcation possible, en non-standard, quelque soit h positif dans l'article de Mehrabadi et Cowin <71>; il n'est pas clair cependant, dans cette référence, et non plus dans un article de Anand sur le même type de modèle <1>, que la normalité impose h = 0 comme condition de bifurcation.

Il faut noter ici que la restriction sur $\underline{P}$, soulignée par Rice, n'en est plus une dès lors qu'on adopte pour potentiel plastique une fonction homologue à un critère de Mohr-Coulomb; en effet, on sait que la contrainte intermédiaire n'intervient pas dans ce critère, universellement admis comme une approximation raisonnable pour les matériaux granulaires. On a donc:

$$g\ (\ \sigma_{ij}) = g(\ \sigma_I,\ \sigma_{III}) \qquad (4)$$

d'où il découle :

$$P_{II} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{II}} = 0 \qquad (5)$$

La restriction sur $\underline{P}$ est donc automatiquement satisfaite pour ce type de critère.

En conclusion, l'analyse pour le matériau rigide-plastique écrouissable aboutit à des résultats assez tranchés et peu réalistes : la bifurcation, d'impossible en dehors du pic pour le matériau standard, devient possible quelque soit le taux d'écrouissage en non standard, sous réserve d'une restriction sur la loi dont il faut noter qu'elle est automatiquement vérifiée pour le matériau à critère de Mohr-Coulomb.

VII-2 Le matériau élastoplastique.

Voyons maintenant le cas du matériau élastoplastique. Mandel <67>, en 1964, a présenté une analyse de la bifurcation de ce matériau, dans le cas

d'un critère de Mohr-Coulomb (sous l'angle de l'étude de propagation d'onde, dont on a vu qu'elle est équivalente à l'analyse de localisation). Plus récemment, Vermeer <107> a donné une analyse parallèle, par des voies différentes. On relève aussi l'étude faite par Rudnicki et Rice <85>, dans laquelle le critère n'est plus un Mohr-Coulomb, mais un Drucker-Prager (critére de Mises généralisé). Toutes ces études s'inscrivent dans le cadre plus général de l'analyse donnée par Rice <79>.

Dans cette analyse, le matériau est décrit par une loi de comportement de la forme suivante :

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \left(D_{kl} - \frac{1}{h} P_{kl} Q_{rs} \overset{\nabla}{\sigma}_{rs} \right) \qquad (6)$$

dans laquelle $\underline{D}$ est la vitesse de déformation (élastique et plastique), $\underline{\underline{E}}$ le tenseur de modules élastiques, les autres variables étant définies comme plus haut.

Cette équation peut aussi s'écrire :

$$\overset{\cdot}{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}}:\underline{D} - \frac{1}{h + \underline{Q}:\underline{\underline{E}}:\underline{P}} \underline{\underline{E}}:\underline{D} \; (\underline{Q}:\underline{\underline{E}}:\underline{P}) - \underline{\sigma}.\underline{\Omega} + \underline{\Omega}.\underline{\sigma} \qquad (7)$$

où $\overset{\cdot}{\underline{\sigma}}$ est le taux de contrainte de Cauchy, et les termes en $\underline{\sigma}.\underline{\Omega}$ sont les termes additifs introduits par la dérivation de Jaumann ($\underline{\Omega}$ vitesse de rotation (spin)).

La notation $\underline{A}:\underline{B}$ indique un produit doublement contracté de tenseurs, alors que $\underline{A}.\underline{B}$ note un produit simplement contracté; Enfin, on écrira $\underline{A} \otimes \underline{B}$ pour le produit tensoriel.

Rice montre que, dans le cas où la partie élastique est isotrope, le critère de bifurcation peut s'écrire :

$$\frac{h}{G} = -2 P_{ab} Q_{ab} - 2\lambda P_{aa} Q_{bb} / (\lambda + 2G) \qquad (8)$$

où P_{ab} et Q_{ab} sont les composantes de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ exprimées dans des axes contenus dans le plan de localisation (le plan non déformé dont l'existence a été discutée plus haut en VII-1, et non pas dans le plan de déformation plane) : a et b prenant les valeurs 1 et 2. λ et G sont les coefficients de Lamé.

Cette équation exprime de façon très générale le critère d'apparition de

la localisation; elle donne le taux d'écrouissage pour lequel, pour une orientation donnée de la bande (le paramètre d'orientation est inclus dans les expressions de P_{ab} et Q_{ab}), la localisation est possible. En revanche, elle ne donne pas l'orientation critique et le taux d'écrouissage critique.

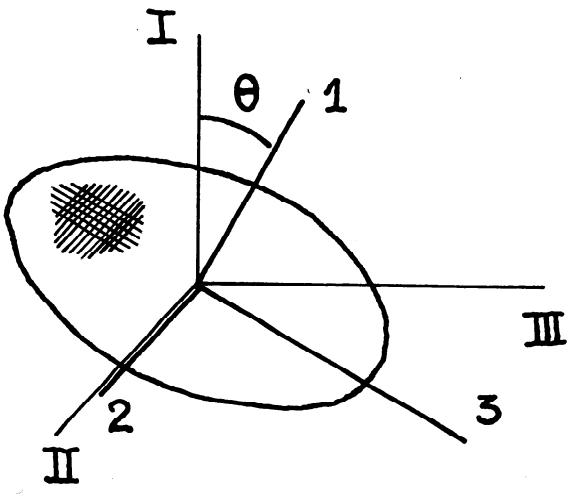
Rappelons que, sur un chemin de chargement, le taux d'écrouissage diminue continûment depuis l'instant initial. Le taux critique sera donc le premier rencontré (qui satisfasse (8)), c'est à dire le plus fort.

Mandel et Vermeer ont donné l'un et l'autre une expression du taux d'écrouissage critique; leurs résultats doivent concorder, puisque tous les deux étudient le matériau élastoplastique non standard défini à partir du critère de Coulomb. C'est effectivement le cas, comme le montre Vermeer, si l'on tient compte d'une différence dans l'expression de la fonction de charge, qui rend nécessaire l'introduction de facteurs de correction pour comparer les expressions des taux d'écrouissage. Vermeer explicite en outre l'angle d'inclinaison critique.

Avant de discuter l'influence des paramètres angle de frottement et angle de dilatance sur ces prévisions, il semble intéressant de tenter de relier le critère donné par Rice (équation 8) avec ces résultats. Le principe consiste à rechercher l'angle d'orientation θ qui maximise le taux d'écrouissage h donné (8), et de reporter cet angle dans (8).

Considérons un état de contrainte défini par les valeurs principales $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ (positives en compression).

La localisation se produit avec le passage à la déformation plane de telle façon que la direction de contrainte intermédiaire est perpendiculaire au plan de déformation plane (figure ci-contre). La normale à la bande de cisaillement appartient au plan I,III et fait un angle θ avec la direction I (contrainte principale majeure).



Soient la fonction de charge et le potentiel de déformation définis respectivement par f et g :

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_I + q\ \sigma_{III} \tag{9.1}$$

$$g(\sigma_{ij}) = \sigma_I + p\ \sigma_{III} \tag{9.2}$$

Ce choix correspond à un matériau obéissant à un critère de Mohr-Coulomb, doté d'un potentiel plastique non associé, et entraîne la coaxialité de $\underline{\sigma}$ et de la partie plastique de $\underline{D}$ puisque f et g sont des fonctions isotropes de $\underline{\sigma}$.

Soient $\underline{P}^*$ et $\underline{Q}^*$ définis par :

$$P^*_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad Q^*_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{10}$$

exprimés dans les axes I,II,III par :

$$P^*_I = Q^*_I = 1 \ , \ P^*_{II} = Q^*_{II} = 0 \ , \ P^*_{III} = p \ , \ Q^*_{III} = q \tag{11}$$

avec :

$$p = -\frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \tag{12}$$

$$q = -\frac{1 + \sin\nu}{1 - \sin\nu} \tag{13}$$

où ϕ et ν sont respectivement l'angle de frottement et l'angle de dilatance. Il faut noter que $\underline{P}^*$ et $\underline{Q}^*$ ainsi définis diffèrent de $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ utilisés par Rice, en ceci que ces derniers tenseurs sont normés alors que les premiers ne

le sont pas ($\|\underline{P}\| = \|\underline{Q}\| = 1$). On a :

$$\underline{P} = \frac{\underline{P}^*}{\|\underline{P}^*\|} \qquad \underline{Q} = \frac{\underline{Q}^*}{\|\underline{Q}^*\|}$$

Le taux d'écrouissage h^* défini par (8) à partir de $\underline{P}^*$ et $\underline{Q}^*$ est donc relié à h par la formule :

$$h^* = h \times \frac{2\sqrt{(1+\sin^2\phi)(1+\sin^2\nu)}}{(1-\sin\phi)(1-\sin\nu)} \tag{14}$$

où n'interviennent que des quantités indépendantes de θ.

Si on exprime les composantes de $\underline{P}^*$ et $\underline{Q}^*$ dans le plan 2,3 , on constate qu'elles sont alors toutes nulles, sauf P^*_{33} et Q^*_{33} :

$$\begin{aligned} P^*_{33} &= \sin^2\theta + p\cos^2\theta \\ Q^*_{33} &= \sin^2\theta + q\cos^2\theta \end{aligned} \tag{15}$$

L'équation (8) conduit alors à :

$$\frac{h^*}{G} = -4\frac{\lambda + G}{\lambda + 2G}\left(\sin^4\theta + pq\cos^4\theta + (p+q)\sin^2\theta\cos^2\theta\right) \tag{16}$$

On recherche les valeurs de θ qui annullent la dérivée $\frac{\partial h^*}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial h^*}{\partial\theta} \propto \sin\theta\cos^3\theta\left(\mathrm{tg}^2\theta\,(2-p-q) - (2pq-p-q)\right) \tag{17}$$

en dehors de $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\mathrm{tg}^2\theta = \frac{2pq-p-q}{2-p-q} \tag{18}$$

en reportant (12) et (13) dans (18), on obtient :

$$\mathrm{tg}^2\theta = \frac{1 + \frac{\sin\phi + \sin\nu}{2}}{1 - \frac{\sin\phi + \sin\nu}{2}} \tag{19}$$

d'où il vient :

$$\cos 2\theta = -\frac{\sin\phi + \sin\nu}{2} \tag{20}$$

L'orientation ainsi définie est l'orientation critique, pour laquelle en

premier lieu le taux d'écrouissage atteint la valeur critique permettant la localisation.

C'est effectivement l'orientation obtenue par Vermeer, qui reprend ensuite l'argumentation de Vardoulakis <103> pour montrer que, compte tenu des valeurs courantes de ϕ et ν, on a à partir de (20) une bonne approximation de θ_c par :

$$\theta_c \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\phi + \nu) \qquad (21)$$

En reportant (20) dans (16), on a finalement :

$$h^*_{cr} = \frac{G(\Lambda + G)}{\Lambda + 2G} \cdot \frac{(\sin\phi - \sin\nu)^2}{(1 - \sin\phi)(1 - \sin\nu)} \qquad (22)$$

Ce résultat confirme exactement celui de Mandel <67>, page 66, avec les changements de notation suivants :

$$M = h^*_{cr} \times \frac{(1-\sin\phi)(1-\sin\nu)}{(1+\sin\phi)(1+\sin\nu)}$$

$$\mu = G$$

$$\nu = \frac{\Lambda}{2(\Lambda + G)} \text{ (coefficient de poisson) d'où } \frac{\Lambda + G}{\Lambda + 2G} = \frac{1}{2(1-\nu)}$$

$$j = -1/p = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$$

$$k = -1/q = \frac{1 - \sin\nu}{1 + \sin\nu}$$

Il confirme aussi celui de Vermeer, compte tenu d'un facteur à introduire suite à la définition de f et g adoptée par ce dernier :

$$f = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi \quad \text{, idem g}$$

d'où $h^{\nu} = h^* \dfrac{(1 + \sin\phi)(1 + \sin\nu)}{4}$

L'expression la plus intéressante du taux critique est celle qui correspond à des tenseurs $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ normalisés ; en utilisant (14), on a :

$$h_{cr} = \frac{1}{2} \frac{G(\Lambda + G)}{\Lambda + 2G} \frac{(\sin\phi - \sin\nu)^2}{\sqrt{(1 + \sin^2\phi)(1 + \sin^2\nu)}} \qquad (23)$$

Le taux d'écrouissage critique exprimé par l'équation (23), et l'orientation critique définie par (20), apparaissent donc bien établis, par différentes études concourantes bien qu'assez diverses dans le détail de leur approche, comme étant les prévisions typiques de l'élastoplasticité à partie élastique isotrope, et à plasticité non standard à un potentiel défini sur la base du critère de Mohr-Coulomb (coïncidence des directions principales) .

Il est intéressant d'examiner les variations du taux d'écrouissage critique avec les angles ϕ et ν , qui évoluent eux-mêmes au cours du chargement (ϕ et ν "mobilisés"). Le tableau 5 présente une tabulation de la fonction $\hat{h}(\phi,\nu)$, définie par :

$$\hat{h}(\phi,\nu) = \frac{(\sin\phi - \sin\nu)^2}{\sqrt{(1 + \sin^2\phi)(1 + \sin^2\nu)}}$$

On constate immédiatement que, dans le domaine défini par $|\nu| < \phi$, la fonction croît avec ϕ et décroît avec ν de façon monotone. Ainsi, si on suppose constant le facteur $\frac{G(\Lambda+G)}{\Lambda + 2G}$, qui s'exprime en fonction du coefficient de Poisson η par $\frac{G}{2(1-\eta)}$, on observe que le taux critique prédit par le modèle élastoplastique à critère de Mohr-Coulomb est d'autant plus fort que ν est petit (algébriquement). La conséquence de ceci est qu'on peut s'attendre (suivant ce modèle) à des bifurcations tout à la fin de la phase d'écrouissage pour des essais sur sable dense, puisque d'une part le

taux décrouissage critique est faible et d'autre part le taux en phase d'écrouissage est fort; dans le cas des essais sur sable lâche au contraire, l'angle de dilatance est négatif à nul . D'où un taux critique élevé, alors que le taux d'écrouissage courant est relativement plus faible qu'en dense . On aurait ainsi une localisation plus "précoce" pour ces essais . (La "précocité" doit être comprise en terme de degré d'avancement de l'essai, mesuré par un paramètre indépendant du temps réel) .

Ce résultat est en bon accord avec les résultats rapportés dans ce mémoire; en effet, la localisation a été obtenue généralement peu avant le pic dans les essais denses, alors qu'elle s'est manifestée nettement plus tôt (vers la moitié de la phase d'écrouissage) dans certains essais effectués sur le matériau lâche (cf essai shf03) .

Il faut toutefois se garder de voir dans cette concordance une confirmation de l'élastoplasticité classique comme description réaliste du comportement des matériaux granulaires : dans le cas des essais denses, on peut observer en effet qu'à l'instant où apparaît la première amorce de localisation, la pente de la courbe σ_1 / σ_3 en fonction de la déformation axiale est loin d'être nulle, et que c'est au cours du développement de la localisation que cette pente varie brusquement et s'annulle (pic). Le pic observé semble donc plutôt une conséquence du plein développement du mécanisme de déformation localisée (cf paragraphe VI-4.1), et rien ne garantit qu'on se trouve, au moment de la localisation, à la fin d'une hypothétique phase d'écrouissage intrinsèque. Dans le cas lâche, au contraire, l'écrouissage se poursuit après la localisation, qui d'ailleurs apparaît comme moins "stable" que dans le cas dense : en ce sens que plusieurs surfaces peuvent apparaître puis cesser leur activité pendant que le rapport de contrainte continue à augmenter (essai shf03). La convergence relevée ici entre l'analyse élastoplastique et l'expérience est donc limitée à la prévision - non discutée

jusqu'ici à ma connaissance - d'une localisation plus "précoce" dans les essais sur matériau contractant . Encore faudrait-il pour conclure élargir les données expérimentales au domaine des matériaux fortement contractants.

Il est difficile de mener une étude parallèle pour les autres analyses de bifurcation présentées à ce jour, lorsqu'elles n'utilisent pas une formulation élastoplastique classique. Les prévisions ne sont pas toujours exprimées en taux d'écrouissage critique, et ne font pas toujours apparaître des paramètres simples comme angle de frottement et angle de dilatance mobilisés. Tous les auteurs s'accordent sur le fait que la localisation est possible en phase d'écrouissage, ce qui est aussi prédit par l'élastoplasticité dès lors que le matériau est non standard; on ne sait pas, en revanche, quel est le degré de précocité par rapport à l'écrouissage nul (pic), et comment il varie avec l'état initial.

VII-3 Conclusion

Ces quelques pages consacrées à l'analyse de bifurcation pour le matériau élastoplastique non-standard à un potentiel ont permis de mettre en évidence les liens entre les diverses approches qui en avaient été présentées, à différentes époques, et de confirmer la généralité des résultats concernant le taux d'écrouissage et l'orientation critiques. En raison de la simplicité du modèle, il est possible de faire une étude paramétrique de ces résultats; les conclusions qu'on peut en tirer, notamment sur l'influence de la dilatance, n'ont qu'une valeur indicative, mais elles supportent la confrontation à l'expérience. La prévision d'une bifurcation possible pour le matériau contractant, en particulier, est stimulante car, bien qu'inattendue, elle vient conforter certaines observations rapportées dans la partie expérimentale de ce travail. C'est une incitation à étendre dans cette direction la base expérimentale actuelle.

Tableau 5. Variations de $\hat{n}$ avec ϕ et .

ϕ / ν	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25
50	1,033	0,922	0,807	0,691	0,575	0,470	0,360	0,274	0,198	0,135	0,086
45	0,960	0,850	0,738	0,624	0,513	0,410	0,310	0,229	0,159	0,103	0,061
40	0,880	0,772	0662	0,552	0,447	0,350	0,250	0,182	0,120	0,072	0,038
35	0,793	0,688	0,582	0,477	0,377	0,280	0,200	0,137	0,083	0,044	0,018
30	0,701	0,600	0,499	0,400	0,307	0,220	0,150	0,094	0,050	0,021	0,005
25	0,606	0,510	0,414	0,323	0,238	0,160	0,103	0,056	0,024	0,006	0
20	0,510	0,419	0,331	0,248	0,174	0,110	0,061	0,026	0,006	0	0,006
15	0,414	0,331	0,251	0,178	0,115	0,065	0,028	0,007	0	0,006	0,024
10	0,323	0,248	0,178	0,117	0,067	0,030	0,007	0	0,007	0,026	0,056
5	0,238	0,174	0,115	0,067	0,030	0,007	0	0,007	0,028	0,061	0,103

Chapitre VIII

L'ANALYSE DE BIFURCATION PAR LOCALISATION

APPLIQUEE AUX LOIS INCREMENTALEMENT NON LINEAIRES

Toutes les modélisations actuelles du comportement des matériaux granulaires peuvent être mises sous la forme d'une description incrémentale, c'est à dire d'une relation entre vitesses de contrainte et de déformation. Parmi les différences entre les lois, on relève celles qui ont trait à la non linéarité de la description incrémentale : certaines formulations envisagent seulement deux zones linéaires, l'une correspondant à la charge et l'autre à la décharge (élastique) ; d'autres distinguent un plus grand nombre de zones

linéaires : par exemple, on en dénombre huit dans la loi proposée par Darve dans sa thèse d'état <29>, et 2^n au plus dans les lois élastoplastiques à n potentiels . Le cas le plus général est celui où il n'existe plus de zones linéaires, mais une non-linéarité continue : à cette classe de lois appartiennent notamment celles proposées par Chambon <18>, Kolymbas <46>, et Darve <31>.

Dans le cas de l'analyse de bifurcation par localisation en bande de cisaillement, la non linéarité de la loi pose un problème de fond, dont quelques aspects ont été évoqués en première partie de ce mémoire, et qui généralise le problème du choix de la zone linéaire prise en considération respectivement dans la bande, et à l'extérieur. La théorie de Hill pour les lois élastoplastiques standard, prolongée à certains égards par celle de Raniecki et Bruhns pour les lois élastoplastiques non-standard à simple potentiel, apporte des éléments de réponse à ce problème. Toutefois, pour toutes les autres classes de lois, le choix opéré relève de l'hypothèse, pas toujours discutée. Le chapitre VIII présente une discussion de ce problème, et propose une extension de la démarche classique, valable dans le cadre le plus général. Il s'agit d'un article paru dans le journal "Mechanical Research Communication" <21>, que je présente ici dans sa forme publiée.

QUELQUES REMARQUES SUR LE PROBLEME DE LA LOCALISATION EN BANDE DE CISAILLEMENT

René Chambon et Jacques Desrues
Institut de Mécanique de Grenoble, LA 6 CNRS, B.P. 68
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX, FRANCE

1. Introduction

Un certain nombre de résultats expérimentaux relatifs à des expériences de laboratoire, voulues comme homogènes pour la contrainte et la déformation des matériaux étudiés, montrent une perte d'homogénéité plus ou moins brutale. Les expériences peuvent être considérées comme unidimensionnelles et la perte d'homogénéité a lieu par création d'une bande de cisaillement localisée. On peut citer les expériences de traction sur des éprouvettes métalliques, sur des tôles minces, et en mécanique des sols les expériences de compression et d'extension à l'appareil triaxial ou en déformation plane.

Deux approches théoriques ont été avancées pour modéliser ce phénomène. La première l'associe à l'annulation de la célérité d'une onde d'accélération (Hadamard (1), Mandel (2), Hill (3)). La seconde, que l'on peut qualifier d'approche statique repose sur l'écriture de la perte d'unicité du problème statique en vitesse (ou plutôt en incrément). Il convient de noter que l'ensemble des conditions aux limites n'est pas pris en compte, et sur le plan des conditions limites le problème est ainsi unidimensionnel. Cette dernière approche est celle de Rice (4) qui montre par ailleurs que l'approche "dynamique" conduit aux mêmes équations de base. Naturellement la loi rhéologique adoptée pour le matériau devient cruciale. L'utilisation de ces théories avec des lois de comportement de plus en plus complexes et notamment incrémentalement non linéaires pose des problèmes, le plus souvent non complètement discutés, que nous essayons de clarifier dans la suite. Nous limitons le cadre de notre étude aux matériaux non visqueux.

2.Rappels sur la théorie classique

On considère un échantillon supposé homogène quant à son état de contrainte, de déformation, et à ses variables d'état d'une façon générale. La transformation par rapport à un état de référence est notée $\underset{\sim}{F}$, la contrainte nominale de Hill (5) $\underset{\sim}{s}$ (le transposé du tenseur de Piola-Lagrange).

2.1 Condition cinématique.

Guidé par l'expérience, on suppose que, tandis que l'ensemble de l'échantillon est soumis à une vitesse de transformation $\dot{\underset{\sim}{F}}^{0}$, dans une bande perpendiculaire à un vecteur unitaire $\vec{n}$, la vitesse de transformation est :

$$\dot{\underset{\sim}{F}}^{1} = \dot{\underset{\sim}{F}}^{0} + \vec{g} \otimes \vec{n} \qquad (1)$$

$\vec{g}$ étant un vecteur quelconque. Cela revient à dire qu'à la vitesse de transformation $\dot{\underset{\sim}{F}}^{0}$ se superpose dans la bande une vitesse additionnelle de cisaillement de telle sorte que pour ce champ additionnel les directions du plan de cisaillement (perpendiculaire à $\vec{n}$) soient toutes des lignes d'extension nulle.

2.2 Condition statique

L'écriture de l'équilibre du milieu continu à tout instant permet de donner l'équation d'équilibre incrémental :

$$\vec{n}.\dot{\underset{\sim}{s}}^{1} = \vec{n}.\dot{\underset{\sim}{s}}^{0}$$

avec $\dot{\underset{\sim}{s}}^{0}$ la vitesse de contrainte à l'extérieur de la bande et $\dot{\underset{\sim}{s}}^{1}$ à l'intérieur. Ces deux conditions étant posées, il reste à introduire la description du comportement du matériau, modélisé par une loi rhéologique. Compte tenu du fait que l'état avant bifurcation est homogène, la loi pourra s'écrire d'une

façon générale :

$$\dot{\underset{\sim}{s}} = \underset{\sim}{f}(\dot{\underset{\sim}{F}})$$

où $\underset{\sim}{f}$ est une fonction tensorielle de tenseur, homogène, dépendant de l'état. On pourra l'appliquer au matériau intérieur à la bande comme au matériau extérieur :

$$\dot{\underset{\sim}{s}}^0 = \underset{\sim}{f}(\dot{\underset{\sim}{F}}^0) \qquad\qquad \dot{\underset{\sim}{s}}^1 = \underset{\sim}{f}(\dot{\underset{\sim}{F}}^1)$$

Dans le paragraphe suivant nous allons examiner cette introduction de la loi rhéologique.

3. Introduction de la loi rhéologique

3.1 Loi linéaire.

Supposons que $\underset{\sim}{f}$ soit une fonction linéaire, alors il existe un tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{L}}$ tel que :

$$\dot{\underset{\sim}{s}} = \underline{\underline{L}} : \dot{\underset{\sim}{F}} \qquad (3)$$

Des équations (1),(2), et (3) on tire alors :

$$(\vec{n}.\underline{\underline{L}}.\vec{n}).\vec{g} = 0 \qquad (4)$$

dont la solution triviale est $\vec{g}=\vec{0}$ qui correspond à l'homogénéité. Si $\vec{g}=\vec{0}$ est seule solution, il ne peut pas y avoir perte d'unicité par apparition de bande de cisaillement.
Si $\vec{g}=\vec{0}$ n'est pas seule solution, c'est à dire si :

$$\det\,(\vec{n}.\underline{\underline{L}}.\vec{n}) = 0 \qquad (5)$$

alors il y a une infinité d'autres solutions qui correspondent à l'apparition

de bandes de cisaillement avec des déformations plus ou moins grandes dans la bande.

Une loi incrémentalement linéaire décrit le comportement comme réversible, ce que ne vérifient pas en général les matériaux réels, en particulier dans des états voisins de ceux où la localisation apparaît.

Il est donc intéressant de tenter de généraliser ce qui précède à des lois incrémentalement non linéaires. Les plus simples à cet égard sont les lois issues des théories classiques de l'élastoplasticité incrémentale.

3.2 Lois "multi-linéaires".

Supposons que dans une zone non infiniment petite de l'espace des $\dot{\underset{\sim}{F}}$, zone contenant $\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}$, la loi ait une expression linéaire du type (3). Pour une certaine classe de $\vec{g}$, la vitesse $\dot{\underset{\sim}{F}}^{1} = \dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ} + \vec{g} \otimes \vec{n}$ appartient a cette zone ; on est alors ramené au cas précédent, mais il convient de faire deux remarques de fond :

i) La perte d'unicité éventuelle se produit par apparition d'une infinité de solutions, mais contrairement au cas précédent l'ensemble des solutions ne pourra pas s'écrire $\lambda\vec{g}$, $\lambda \in R$ ($\vec{g}$ étant le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de $\vec{n}.\underline{\underline{L}}.\vec{n}$) car λ sera borné par la condition d'appartenance de $\dot{F}^{\circ} + \vec{g} \otimes \vec{n}$ à la zone linéaire précédemment définie.

ii) Il convient d'étudier aussi si cette perte d'unicité ne peut pas se produire avec $\dot{\underset{\sim}{F}}^{1}$ et $\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}$ n'appartenant pas à la même zone. En particulier, il n'est pas évident a priori qu'une telle perte d'unicité n'intervienne pas avant une perte d'unicité "monozonale" au cours de l'évolution d'une expérience modélisée. Dans le cadre de l'élastoplasticité incrémentale classique, Rice et Rudnicki (6) ont ainsi étudié la perte d'unicité par décharge élastique à l'extérieur de la bande, alors que l'intérieur poursuit une charge plastique ; dans le cas considéré, ils ont montré que cette perte d'unicité est nécéssairement postérieure à celle correspondant à une zone unique.

3.3 Lois non "multi-linéaires".

Les lois envisagées dans le paragraphe précédent (3.2) se révèlent, au moins pour les sols, ne pas traduire correctement la réalité (Gudehus (7)) en stipulant l'existence de zones linéaires. C'est pourquoi récemment un certain nombre de lois non-linéaires ont été développées pour tenter de décrire le comportement des sols. Comment généraliser alors l'étude précédente pour de telles lois ?

Deux types de réponses ont jusqu'à ce jour été données à ce problème.

3.3.1 Approches conduisant à une solution double.

(Rudnicki et Rice (8), Vardoulakis (9), Darve (10)). Elles reposent sur deux hypothèses. La première concerne le phénomène étudié : on suppose que ce qui se passe dans la bande n'est qu'une perturbation par rapport à l'extérieur.

On en déduit que : $\|\vec{g} \otimes \vec{n}\| \ll \|\dot{F}^{\circ}\|$

La seconde hypothèse porte sur la loi. Les lois utilisées sont supposées être directionnellement linéarisables, c'est à dire telles que pour une direction donnée, en posant $\underset{\sim}{dir}(\dot{\underset{\sim}{F}}) = \dot{\underset{\sim}{F}} / \|\dot{\underset{\sim}{F}}\|$

on ait : $$\dot{\underset{\sim}{s}} = \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}(\underset{\sim}{dir}(\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ})) : \dot{\underset{\sim}{F}} + \dot{\underset{\sim}{t}}$$

avec : $$\lim_{\underset{\sim}{dir}(\dot{\underset{\sim}{F}}) \to \underset{\sim}{dir}(\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ})} \frac{\dot{\underset{\sim}{t}}}{\|\underset{\sim}{dir}(\dot{\underset{\sim}{F}}) - \underset{\sim}{dir}(\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ})\|} = 0$$

Cette notion a été introduite par Chambon (11) en vue de réaliser des algorithmes d'utilisation de lois non-linéaires dans des calculs aux éléments finis. Elle est identique à la notion de linéarisation tangentielle de Bazant (12) pour les lois endochroniques.

Moyennant ces deux hypothèses et ne retenant que le premier terme du développement de s on se ramène encore au problème linéaire. Mais comme l'approximation de la loi n'est valable que pour $\vec{g}$ infiniment petit la perte

d'unicité trouvée correspond en fait à l'apparition d'une solution double $\vec{g}=\vec{0}$.

3.3.2 Approche non-linéaire homogène (en $\vec{g}$)

Kolymbas (13) suppose qu'en dehors de la bande le matériau ne se déforme pas ; outre le repos ($\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}=0$, $\dot{\underset{\sim}{s}}^{\circ}=0$, $\vec{g}=\vec{0}$), on suppose donc qu'il existe d'autres solutions $\vec{g} \neq \vec{0}$.

Le système d'équation devient :

$$\underset{\sim}{f}(\vec{g}\otimes\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad (6)$$

Il est clair qu'il est non linéaire à cause de $\underset{\sim}{f}$ mais homogène en $\vec{g}$. Une perte d'unicité de ce type conduit là encore à une infinité de solutions, contrairement à l'approche du paragraphe 3.3.1. On peut encore considérer cette étude comme une approche dans laquelle on suppose $\|\vec{g}\otimes\vec{n}\| >> \|\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}\|$.

4. Etude synthétique du problème

De façon générale, il n'y a aucune raison de supposer une différence d'ordre de grandeur entre $\|\vec{g}\otimes\vec{n}\|$ et $\|\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}\|$. Il convient donc d'étudier le problème général et alors le fait que la loi soit directionnellement linéarisable n'est d'aucune utilité. L'équation à résoudre est :

$$\underset{\sim}{f}(\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}).\vec{n} = \underset{\sim}{f}(\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ}+\vec{g}\otimes\vec{n}).\vec{n} \qquad (7)$$

qui est homogène pour l'ensemble ($\dot{\underset{\sim}{F}}^{\circ},\vec{g}$) . Si une telle équation a une autre solution que $\vec{g}=\vec{0}$, cela signifie que l'orientation du chemin de contrainte (ou de déformation) dans la bande devient brusquement différente de l'orientation du chemin analogue à l'extérieur (figure 1.a). Si l'équation (7) a une solution double $\vec{g}=\vec{0}$ cela signifie que si la loi est directionnellement linéarisable l'approche du paragraphe 3.3.1 nous donnerait une solution. Une

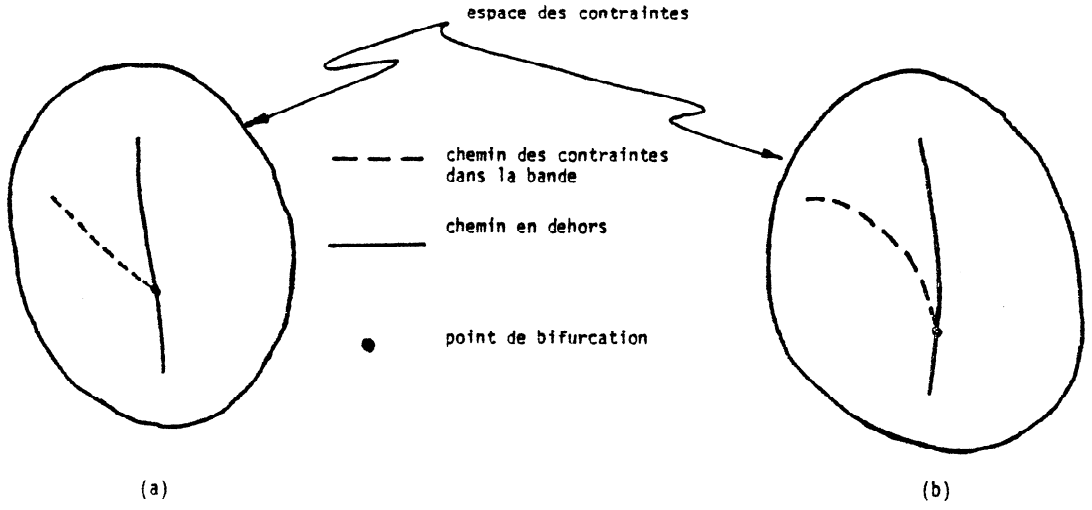


Figure 1

représentation graphique de ce qui se passe alors est schématisée à la figure 1.b .

Remarques : i) dans le cas où la loi est linéaire, ou bien fait apparaître une vaste zone linéaire (cf paragraphes 3.1 et 3.2), la représentation graphique du phénomène pourra se faire selon l'un ou l'autre schéma.

ii) dans le cas des matériaux granulaires, les résultats expérimentaux (Desrues (14)) indiquent qu'aucune des approches décrites n'est à rejeter a priori. En effet, suivant les conditions d'essai, (en particulier celles qui gouvernent les variations de volume : densité initiale et contrainte moyenne) on observe soit une superposition de champs (global et localisé) d'intensités comparables, soit une prépondérance du champ localisé. La première situation apparaît dans les matériaux peu dilatants, la seconde dans les matériaux très dilatants. Dans ce dernier cas, on ne peut cependant pas conclure avec certitude à la prépondérance exclusive du champ localisé en terme de vitesse, à l'instant d'apparition, en raison de la difficulté à définir un incrément petit qui soit à coup sûr postérieur à cet instant.

5. Conclusion

Il nous semble indispensable de tenter de résoudre l'équation (7) puisque les équations (5) et (6) n'en sont que des cas particuliers. Il est en particulier vraisemblable que si la loi rhéologique est directionnellement linéarisable l'équation (7) fasse apparaître des solutions avant (dans le cours de l'essai) qu'il n'en soit de même pour l'équation (5) car la première est plus générale que la seconde. L'étude complète de la bifurcation proposée doit permettre d'obtenir des renseignements cruciaux quant à la forme de la non-linéarité incrémentale de la loi rhéologique des matériaux.

Références

(1) Hadamard J. "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", Paris, 1903.
(2) Mandel J.,"Conditions de stabilité et postulat de Drucker", Rhéologie and Soil Mechanics, J. Kravtchenko et P.Sirieys ed. Springer-Verlag, p.58-68,1966.
(3) Hill R., "Acceleration waves in solids", J. Mech. Phys. Solids, vol 10, pp 1-16, 1962
(4) Rice J., "The localization of plastic deformation", Theoretical and Applied Mechanics, W.T. Koiter Ed., North Holland Publishing Comp., 1976.
(5) Hill R., "Aspects of invariance in Solids Mechanics", Advances in Applied Mechanics, vol 18, pp 1-75, 1978.
(6) Rice and Rudnicki,"A Note on some Features of the Theory of Localization of Deformation", Int. J. of Sol. Struct., vol. 16, pp 597-605, 1980.
(7) Gudehus G., Goldscheider M., and Winter M., "Mechanical properties of sand and numerical integration methods : some sources of errors and bounds of accuracy", Finite Element in Geomechanics, pp 121-151, G. Gudehus Ed., J. Wiley and Sons, 1977.
(8) Rudnicki and Rice,"Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant material" J. Mech. Phys. Solids, vol. 23, pp 371-394, 1975
(9) Vardoulakis Y., "Rigid granular constitutive model for sand and the influence of the deviatoric flow rule", Mech. Res. Comm., 8, pp 275-280, 1981.
(10) Darve F., "An incrementally non linear constitutive law of second order and its application to localization", Int. Conf. on Const. Laws for Eng. Mat., Tucson, 1983.
(11) Chambon R., Renoud-Lias B., "Incremental non linear stress-strain relation-

ship for soils and integration by F.E.M", Num. Meth. in Geom., vol 1, pp 405-413, W.Wittke Ed., A. A. Balkema Rotterdam, 1979.
(12) Bazant Z., "Endochronic ineslaticity and incremental plasticity", Int. J. Solids and Struct., vol 14, pp 691-714, 1978.
(13) Kolymbas D., "Bifurcation analysis for sand sample with non linear constitutive equation", Ingenieur-Archiv 50 pp 131-140, 1981.
(14) Desrues J. "Localisation de la déformation plastique dans les matériaux granulaires", Thèse d'état, Univ. de Grenoble, (à paraître).

CHAPITRE IX

APPLICATION DU CRITERE ELARGI A UNE LOI NON LINEAIRE HEURISTIQUE

IX -1 Introduction

Le présent chapitre a pour objet la mise en oeuvre, sur un exemple, de l'analyse de bifurcation générale définie au chapitre VIII. L'exemple choisi concerne une loi non linéaire heuristique, très simple dans sa formulation mais appartenant cependant à la classe des lois désignées comme "non multi-linéaires" au paragraphe VIII-3.3 ; c'est-à-dire qu'elle ne comporte pas de zone linéaire. Elle est cependant directionnellement linéarisable, de telle sorte que l'approche du paragraphe VIII-3.3.1 (approche conduisant à une solution double) pourra être envisagée, parallèlement à l'étude synthétique proposée au paragraphe VIII-4. Grâce à la simplicité de la loi, il sera possible de mener à terme les calculs par la voie analytique. En revanche,

cette loi ne cherche pas à modéliser le comportement d'un matériau granulaire donné; tel n'est pas le but poursuivi dans ce chapitre. Il s'agit plutôt de montrer, de façon manifeste puisque tous les calculs se font à la main, que le cadre d'étude élargi défini pour les lois non linéaires au chapitre précédent conduit effectivement à des résultats nouveaux, et pertinents, par rapport au cadre restreint.

IX - 2 La loi

2.1 formulation.

la loi envisagée ici décrit un matériau incompressible, non sensible à la contrainte moyenne. C'est une loi définie de la façon suivante :

$$\overset{\nabla}{\underline{s}} = \mu \underline{e} - \lambda \|\underline{e}\| \underline{s} \qquad (1)$$

avec $\underline{s}$ le déviateur de la contrainte de cauchy $\underline{\sigma}$

$\underline{e}$ le déviateur de la vitesse de déformation $\underline{D}$

$\overset{\nabla}{\underline{s}}$ note la dérivée de Jaumann de $\underline{s}$

et $\|\underline{e}\|$ la norme de $\underline{e}$, c'est à dire :

$$\|\underline{e}\| = \sqrt{e_{ij}\, e_{ij}} \qquad (2)$$

Par le biais d'un changement d'unité de contrainte, il est possible de simplifier l'expression (1) en choisissant une référence telle que μ soit égal à l'unité. On a ainsi :

$$\overset{\nabla}{\underline{s}} = \underline{e} - \lambda \|\underline{e}\| \underline{s} \qquad (3)$$

l'incompressibilité s'écrit :

$$D_{ii} = 0 \qquad (4)$$

La contrainte moyenne n'intervenant pas, la surface de plasticité dans l'espace des contraintes sera à génératrices parallèles à la trissectrice. Il s'agit là non pas d'une surface de charge au sens de l'élastoplasticité, mais

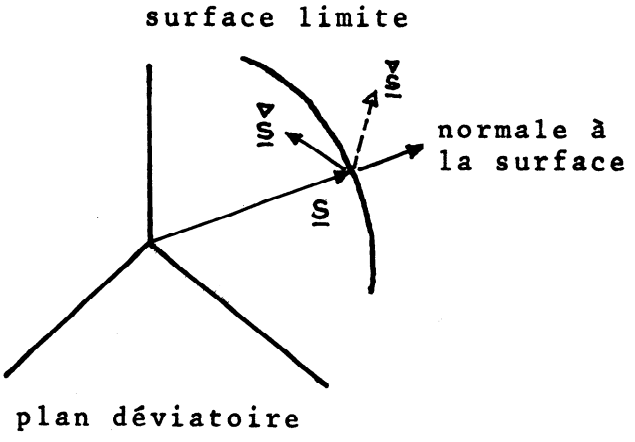
de la surface limite qui borne le domaine des états physiquement accessibles.

Etant donnée la loi (3), on peut préciser la surface de plasticité. Soit la surface définie par l'équation :

$$\| \underline{s} \| = \frac{1}{\lambda} \qquad (5)$$

Cette surface est un cylindre de section circulaire, de génératrices parallèles à la trissectrice, et de rayon $\frac{1}{\lambda}$ dans le plan déviatoire.

Montrons que cette surface borne les états accessibles. Soit un état $\underline{s}$ tel que l'équation (5) soit vérifiée. Calculons le produit $\overset{\nabla}{\underline{s}} : \underline{s}$, dont le signe est négatif si la vitesse $\overset{\nabla}{\underline{s}}$ est dirigée vers l'intérieur de la surface (l'intérieur, qui contient la trissectrice, correspond à $\| \underline{s} \| < \frac{1}{\lambda}$) .



En exprimant la loi (3), on a:

$$\overset{\nabla}{\underline{s}} : \underline{s} = \underline{e} : \underline{s} - \lambda \| \underline{e} \| \ \underline{s}^{\,2}$$

De (5) on déduit, pour un état de contrainte s situé sur la surface :

$$\overset{\nabla}{\underline{s}} : \underline{s} = \underline{e} : \underline{s} - \| \underline{e} \| \| \underline{s} \|$$

Le théorème de Schwartz sur les produits scalaires dans R^n indique que :

$$\underline{e} : \underline{s} \leqslant \| \underline{e} \| \| \underline{s} \|$$

d'où il vient :

$$\overset{\nabla}{\underline{s}} : \underline{s} \leqslant 0$$

Ainsi il est montré que , quelque soit $\underline{e}$, le taux de contrainte déviatoire $\overset{\nabla}{\underline{s}}$ est dirigé vers l'intérieur de (ou tangent à) la surface définie par $\| \underline{s} \| = \frac{1}{\lambda}$, qui de ce fait est bien la frontière des états accessibles. La loi admet donc pour surface limite une surface de Von Mises, de rayon égal à $\frac{1}{\lambda}$.

2.2 Non linéarité de la loi.

La loi envisagée est positivement homogène d'ordre 1 (ce qui correspond à la description d'un matériau insensible à la vitesse de sollicitation). On peut illustrer ceci en remarquant que la réponse à une déformation $\underline{e}^* = \alpha\, \underline{e}$ est :

$$\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^* = \alpha\, \underline{e} - \lambda \| \alpha\, \underline{e} \|\, \underline{s}$$

$$\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^* = \alpha\, \underline{e} - \lambda |\alpha| \| \underline{e} \|\, \underline{s}$$

si α est positif, on a :

$$\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^* = \alpha\, \overset{\nabla}{\underline{s}}$$

en revanche, si α est négatif, la réponse $\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^*$ n'est pas proportionnelle à $\overset{\nabla}{\underline{s}}$.

La non linéarité de la loi se manifeste lorsqu'on envisage la réponse à la déformation $\underline{e}^* = \underline{e}^1 + \underline{e}^2$:

$$\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^* = \underline{e}^1 + \underline{e}^2 - \lambda \| \underline{e}^1 + \underline{e}^2 \|\, \underline{s}$$

qui diffère de la somme $\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^1 + \overset{\nabla}{\underline{s}}{}^2$:

$$\overset{\nabla}{\underline{s}}{}^1 + \overset{\nabla}{\underline{s}}{}^2 = \underline{e}^1 + \underline{e}^2 - \lambda \left(\| \underline{e}^1 \| + \| \underline{e}^2 \| \right) \underline{s}$$

sauf si $\underline{e}^1$ et $\underline{e}^2$ sont colinéaires (et de même sens).

2.3 La loi tangente

La loi tangente à une loi non linéaire au voisinage d'une direction a été définie au chapitre précédent (paragraphe VIII-3.3.1). La loi étudiée ici s'écrit, en composantes :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = e_{ij} - \lambda \|\underline{e}\| s_{ij} \qquad (6)$$

La loi tangente, qui constitue une linéarisation au voisinage de $\underline{e} = \underline{e}^o$, est définie par :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = \left(\frac{\partial \overset{\nabla}{s}_{ij}}{\partial e_{kl}}\right)_{e_{kl}=e^o_{kl}} \times e_{kl}$$

c'est à dire :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial e_{kl}} - \lambda \frac{\partial \|\underline{e}\|}{\partial e_{kl}} s_{ij}\right)_{e_{kl}=e^o_{kl}} \times e_{kl}$$

d'où, en développant $\|e\| = \sqrt{e_{pq}e_{pq}}$: (avec δ_{ij} symbole de Kronecker)

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = \left(\delta_{ik}\delta_{il} - \lambda \frac{e^o_{kl}}{\|\underline{e}^o\|} s_{ij}\right) e_{kl} \qquad (7)$$

Considérons un chemin en déformation plane suivant la direction 3 ($D_{i3} = D_{3i} = 0$), suivi depuis un état de contrainte nulle jusqu'à l'état actuel avec :

$$e^o_{11} = D^o_{11} = a \;,\; e^o_{22} = D^o_{22} = -a \;,\; e^o_{12} = D^o_{12} = 0 \qquad (8)$$

conditions qui satisfont à l'incompressibilité.

En vertu de la loi non linéaire (6), on a à l'instant actuel :

$$s_{11} = -s_{22} = s \quad ; \quad s_{12} = 0 \qquad (9)$$

Sans préjuger du taux de déformation e_{ij} et de la contrainte s_{ij} (soumis seulement aux exigences d'incompressibilité et de déformation plane), la loi (6) s'écrit :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{s}_{11} &= e_{11} - \lambda \|e\| s \\ \overset{\nabla}{s}_{22} &= e_{22} + \lambda \|e\| s \\ \overset{\nabla}{s}_{12} &= e_{12} \end{aligned} \qquad (10)$$

La loi tangente au voisinage de la poursuite du chemin antérieur s'écrit, d'après (7) et (8) :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{s}_{11} &= e_{11} - \frac{\lambda s}{\sqrt{2}}\,(e_{11} - e_{22}) \\ \overset{\nabla}{s}_{22} &= e_{22} + \frac{\lambda s}{\sqrt{2}}\,(e_{11} - e_{22}) \\ \overset{\nabla}{s}_{12} &= e_{12} \end{aligned} \qquad (11)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{s}_{11} - \overset{\nabla}{s}_{22} &= \left(1 - \frac{2\lambda s}{\sqrt{2}}\right)(e_{11} - e_{22}) \\ \overset{\nabla}{s}_{12} &= e_{12} \end{aligned} \qquad (12)$$

Sous cette forme, il est intéressant de rapprocher les équations obtenues de celles qui définissent la loi envisagée par Hill et Hutchinson <54> dans leur étude de bifurcation pour un bloc rectangulaire soumis à une traction en déformation plane. Le matériau, incompressible et insensible à la contrainte moyenne, est décrit par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} &= 2\mu^{*}(D_{11} - D_{22}) \\ \dot{\sigma}_{12} &= 2\mu D_{12} \end{aligned} \qquad (13)$$

Les modules μ et μ^{*} sont des modules instantanés qui dépendent de l'histoire antérieure, en l'occurence sur un chemin d'extension homogène en déformation plane. Les relations entre ces modules et les variables d'état ne sont pas spécifiées, alors que dans notre loi tangente (12) ces relations sont explicites.

Par comparaison des équations (12) et (13), on peut observer que le matériau de Hill et Hutchinson correspond à celui décrit par la loi tangente à notre loi non linéaire, au voisinage du chemin explicité plus haut, avec les correspondances suivantes:

$$\begin{aligned} 2\mu_{HH} &= 1 \\ 2\mu^{*}_{HH} &= 1 - \frac{2\lambda s}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Notre loi tangente comporte trois paramètres, qui sont :

deux constantes : λ , et μ =1 (par changement de l'unité de contrainte)

et une variable d'état : s .

La loi (13) n'en comporte que deux, mais cette différence tient simplement au fait, mentionné plus haut, que les relations entre μ et μ^* et les variables d'état ne sont pas explicitées.

La loi tangente (12) (définie sur le chemin envisagé) peut donc être comparée à la loi (13), et nous reviendrons à cette comparaison lors de la discussion des résultats de l'analyse de bifurcation.

IX-3 Analyse de bifurcation par localisation

3.1 Etablissement de l'équation générale

La bifurcation par localisation de la déformation est envisagée sur le chemin de déformation plane défini au paragraphe précédent par :

$$e^{o}_{11} = a \quad , \quad e^{o}_{22} = -a \quad , \quad e^{o}_{12} = 0 \tag{15}$$

La localisation introduit une perte d'homogénéité sous la forme d'une bande de cisaillement de normale **n** , telle que sont vérifiées les conditions statique et cinématique classiques :

$$(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^{o}_{ij})\, n_j = 0 \tag{16}$$

$$e_{ij} = e^{o}_{ij} + \frac{1}{2} (g_i n_j + g_j n_i) \tag{17}$$

où les indices $.^{o}$ indiquent le champ homogène fondamental.

Je ne reviens pas ici sur le bien fondé de ces conditions, qui a été discuté antérieurement (III-3 , VI-5 , VIII-2).

Explicitons le taux de la contrainte de Cauchy $\dot{\sigma}_{ij}$:

La contrainte peut s'écrire :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\, \delta_{ij}$$

avec p contrainte moyenne et $\underline{s}$ le déviateur de $\underline{\sigma}$.

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \overset{\nabla}{s}_{ij} + \dot{p}\, \delta_{ij} \tag{18}$$

et

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + w_{ik}\sigma_{kj} + w_{jk}\sigma_{ik} \tag{19}$$

suivant la dérivation de Jaumann, où $\underline{w}$ est la vitesse de rotation matérielle, reliée au taux du gradient de déformation $\dot{\underline{F}}$ par :

$$\underline{w} = {}^{1}/_{2} (\dot{\underline{F}} + \dot{\underline{F}}^{t}) \tag{20}$$

Conformément au cadre le plus général défini au chapitre précédent, il convient d'introduire, dans les conditions (16) et (17), la loi complète sans aucune restriction sur le champ localisé $\underline{e}$.

Le taux de contrainte $\dot{\underline{\sigma}}^o$ correspondant au champ homogène $\underline{e}^o$ s'écrit, en combinant (6), (18), (19) et (20) :

$$\dot{\sigma}_{ij} = e^o_{ij} - \lambda \|\underline{e}^o\| \; s_{ij} + \dot{p}^o \delta_{ij} + B_{ij} \dot{F}^o_{kl} \tag{21}$$

avec $$B_{ij} = {}^1/_2 \; (\delta_{ik}s_{lj} - \delta_{il}s_{kj} + \delta_{jk}s_{il} - \delta_{jl}s_{ik})$$

Compte tenu de (15), on a :

$$\| \underline{e}^o \| = a\sqrt{2}$$

d'où finalement :

$$\dot{\sigma}^o_{ij} = e^o_{ij} - \lambda a\sqrt{2} \; s_{ij} + \dot{p}^o \delta_{ij} + B_{ij} \dot{F}_{kl} \tag{22}$$

Pour le champ localisé, la condition cinématique (17) donne :

$$\begin{aligned} e_{11} &= a + g_1 n_1 \\ e_{22} &= -a + g_2 n_2 \\ e_{12} &= {}^1/_2 \; (g_1 n_2 + g_2 n_1) \end{aligned} \tag{23}$$

avec $$g_1 n_1 + g_2 n_2 = 0$$

cette dernière équation résultant de l'incompressibilité.

On en déduit : $$\| \underline{e} \| = \sqrt{A} \tag{24.1}$$

avec $$A = 2a^2 + 2a \; (g_1 n_1 - g_2 n_2) + g_1^2 n_1^2 + g_2^2 n_2^2 + {}^1/_2 \; (g_1^2 n_2^2 + g_2^2 n_1^2 + 2 g_1 g_2 n_1 n_2) \tag{24.2}$$

Pour le champ localisé, le taux du gradient de déformation devient, par la condition cinématique exprimée en $\dot{F}$:

$$\dot{F}_{ij} = \dot{F}^o_{ij} + g_i n_j \tag{25}$$

Pour ce même champ, L'expression du taux de contrainte est alors, par (6), (18),(19),(20),(23),(24),(25) :

$$\dot{\sigma}_{ij} = e^{o}_{ij} + {}^{1}/_{2}\,(g_i n_j + g_j n_i) - \lambda\sqrt{A}\, s_{ij} + \dot{p}\,\delta_{ij} + B_{ij}\,(F^{o}_{kl} + g_k n_l) \qquad (26)$$

En reportant les expressions de $\dot{\sigma}_{ij}$ et $\dot{\sigma}^{o}_{ij}$ dans la condition cinématique (7), on obtient : (i,j,k,l = 1,2)

$${}^{1}/_{2}\,(g_i n_j n_j + g_j n_i n_j) + \lambda(a\sqrt{2} - \sqrt{A})\, s_{ij} n_j + (\dot{p}-\dot{p}^{o})\,\delta_{ij} n_j + B_{ij} g_k n_l n_j = 0 \qquad (27)$$

A partir de (27) , on a ainsi deux équations, dans lesquelles on peut expliciter s_{ij} par (9) :

$${}^{1}/_{2}\, g_1 - s\,(g_1 n_2 n_2 - g_2 n_1 n_2) + \lambda(a\sqrt{2} - \sqrt{A})\, s\, n_1 + \Delta\dot{p}\, n_1 = 0 \qquad (28)$$

$${}^{1}/_{2}\, g_2 - s\,(g_2 n_1 n_1 - g_1 n_1 n_2) + \lambda(a\sqrt{2} - \sqrt{A})\, s\, n_2 + \Delta\dot{p}\, n_2 = 0 \qquad (29)$$

En posant ${}^{n_1}/_{n_2} = \cotg\,\alpha$; $g_1 = g$

et en utilisant en outre (23.4), qui exprime l'incompressibilité, on a :

$$g\,({}^{1}/_{2} - s) + \lambda(a\sqrt{2} - \sqrt{A})\, s\cos\alpha + \Delta\dot{p}\cos\alpha = 0 \qquad (31.1)$$

$$-g\cotg\alpha\,({}^{1}/_{2} + s) - \lambda(a\sqrt{2} - \sqrt{A})\, s\sin\alpha + \Delta\dot{p}\sin\alpha = 0 \qquad (31.1)$$

Pour éliminer $\Delta\dot{p}$, opérons d'abord une combinaison des deux équations; en multipliant la première par $\sin\alpha$ et la seconde par $\cos\alpha$, leur soustraction donne :

$$g \times \frac{1 + 2s(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha\cos\alpha} + \lambda s a\sqrt{2} = \lambda s\sqrt{A} \qquad (32)$$

Cette équation exprime une condition nécessaire de localisation; elle est vérifiée de façon triviale lorsque **g** est nul; en effet on a alors $\sqrt{A} = a\sqrt{2}$ (d'après 24.2).

Une localisation est donc possible si il existe **g** et α tels que l'équation (32) est vérifiée. Mais il faut remarquer que A est fonction de **g**, et qu'il n'est donc pas possible d'expliciter directement la solution non triviale **g**.

En effet, on peut transformer (24.2) en :

$$A = 2a^2 + 4ag\cos\alpha + {}^1/_2 \; {}^{g^2}/_{\sin^2\alpha} \qquad (33)$$

mais il n'est pas possible en général d'éliminer le radical $\sqrt{A}$.

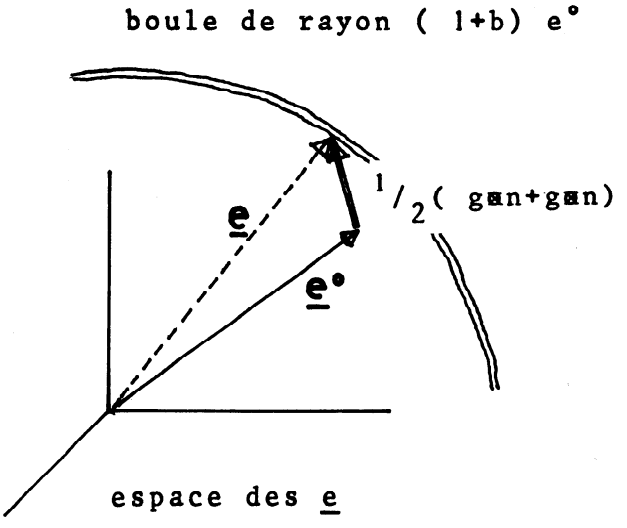
Il est possible en revanche, sans perte de généralité, de rechercher une solution telle que :

$$\| \underline{e} \| = (1+b) \| \underline{e}^o \| \qquad (34)$$

avec la restriction :

$$1+b \geqslant 0 \qquad (35)$$

En d'autres termes, on recherche $\underline{e}$ sur une boule de rayon $(1+b)\|\underline{e}^o\|$ dans l'hyperespace des vitesses de déformation déviatoire (figure ci-contre). L'intérêt d'un tel choix est de permettre d'expliciter la différence $\sqrt{A} - a\sqrt{2}$: on a en effet (par 15 et 24.1) :



$$\sqrt{A} - a\sqrt{2} = \| \underline{e} \| - \| \underline{e}^o \|$$

d'ou par (34) :

$$\sqrt{A} - a\sqrt{2} = b \| \underline{e}^o \| = ba\sqrt{2}$$

l'équation (32) s'écrit alors :

$$g \times \frac{1 + 2s(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{4 \sin^2\alpha \cos\alpha} = \lambda sba\sqrt{2}$$

d'où **g** :

$$g = \frac{4\lambda sba\sqrt{2} \sin^2\alpha \cos\alpha}{1 + 2s \cos 2\alpha} \qquad (36)$$

La condition générale de localisation est maintenant la suivante : "existe-t-il une orientation α telle que la vitesse de déformation déviatoire $\underline{e}$ définie par :

$$\underline{e} = \underline{e}^{o} + {}^{1}/_{2}\,(g \otimes n + n \otimes g)$$

avec g vecteur spécifié par sa composante $g_1 = g$ donnée par (36), et l'équation d'incompressibilité (23.4), vérifie la condition préalable (34) ?"

Cette équation peut s'expliciter en reportant (36) dans (34) via (33) :

(34) donne $\sqrt{A} = (1+b)\, a\sqrt{2}$

soit, par (33) : $\sqrt{2a^2 + 4ag\cos\alpha + {}^{1}/_{2}\, g^2 \sin^2\alpha} = (1+b)\, a\sqrt{2}$

qu'on peut élever au carré puisque $1+b \geqslant 0$ (d'après 35).

La substitution de g, et l'introduction de la variable t telle que :

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad (37.1)$$

c'est à dire

$$t = \operatorname{tg}\alpha \qquad (37.2)$$

permet finalement d'aboutir à :

$$b^2\left(16s^2\lambda^2 t^2(1+t^2) - 2(1+t^2)(1+t^2+2s(1-t^2))^2\right)$$
$$+ b\left(16s\lambda\sqrt{2}\, t^2(1+t^2+2s(1-t^2)) - 4(1+t^2+2s(1-t^2))\,(1+t^2)\right) = 0 \qquad (38)$$

3.2 Discussion de l'équation générale (38).

L'équation (38) résulte, en résumé, des conditions statique et cinématique de localisation en bande de cisaillement (16) et (17), de la loi spécifiée (3,4), et enfin d'un mode d'expression de la solution (34), qui s'assortit d'une condition (35).

Ainsi, la localisation est possible pour les valeurs de b qui vérifient

l'équation (38) et l'inéquation (35); lorsque c'est le cas, **g** est donné par (36).

Discutons maintenant cette équation . On peut l'écrire sous la forme plus ramassée :

$$rb^2 + nb = 0 \qquad (39)$$

d'où

$$b(rb + n) = 0 \qquad (40)$$

qui admet pour solutions :

$$b = 0 \quad \text{sol. triviale}$$

$$b = -\frac{n}{r} \quad \text{sol. non triviale} \begin{cases} b = 0 & \text{double si } n = 0 \\ b \neq 0 & \text{solution générale.} \end{cases} \qquad (41)$$

Ainsi, l'équation admet une solution triviale b = 0 (41.1). Cette solution vérifie évidemment la condition (35), et elle conduit par (36) à g = 0. Cette solution correspond à l'absence de localisation.

En second lieu, elle admet une solution double b = 0 lorsque le terme en facteur de b dans (38) s'annulle (41.2). Il s'agit là d'une véritable solution de localisation, dont la particularité est de n'admettre qu'un **g** nul (par (36)). C'est la solution qu'on obtient si on opère une linéarisation directionnelle d'une loi non linéaire au voisinage du chemin non localisé, opération nécessairement assortie de la condition que le champ localisé ne soit qu'une **perturbation** du champ (incrémental) homogène, négligeable devant celui-ci. On trouve ici la confirmation des conclusions du paragraphe 3.3.1 du chapitre VIII, intitulé : "Approches conduisant à une solution double". Dans la suite, cette solution sera désignée comme la **"solution tangente"**.
Enfin la solution générale correspond à l'annulation du terme **rb + n** dans (40). Pour cette solution, la condition (35) n'est pas nécessairement vérifiée, aussi conviendra-t-il de la discuter.

3.3 La solution tangente.

La solution double b = 0, ou encore solution tangente, apparaît lorsque :

$$16s\lambda\sqrt{2}\ t^2(1+t^2+2s(1-t^2)) - 4(1+t^2+2s(1-t^2))^2(1+t^2) = 0$$

c'est à dire :

$$(1+t^2+2s(1-t^2))\ (\ 16s\lambda\sqrt{2}\ t^2 - 4(1+t^2+2s(1-t^2))(1+t^2)) = 0$$

deux possibilités existent :

soit le premier facteur s'annulle, c'est à dire :

$$t^2 = -\frac{1+2s}{1-2s} \tag{42}$$

ce qui, t^2 étant nécessairement positif, n'est possible que si :

$$s \geqslant {}^1/_2 \tag{43}$$

avec t^2 infini pour $s = {}^1/_2$, d'où une orientation :

$$\alpha = {}^{\pi}/_2 \tag{44}$$

soit le second s'annulle, c'est à dire :

$$t^4(1-2s) - 2t^2(2s\lambda\sqrt{2} - 1) + 1+2s = 0 \tag{45}$$

le discriminant de ce trinôme s'écrit :

$$\Delta = 4s\ ((1+2\lambda^2)s - \lambda\sqrt{2}) \tag{46}$$

il s'annulle pour $s = 0$ (47.1)

et pour $s = \dfrac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2}$ (47.2)

de plus, il est négatif entre ces valeurs. L'équation (45) ne peut donc pas être vérifiée entre ces valeurs de s (elle n'a pas de racine réelle en t^2).

La première racine réelle, en dehors de l'état isotrope s=0 , est rencontrée pour la valeur s_o :

$$s_o = \frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2} \tag{48}$$

Les racines en t^2 obtenues ne correspondent à une bifurcation que si l'orientation définie par $t^2 = tg^2\alpha$ est réelle, c'est à dire si t^2 est positif.

Le signe des racines de l'équation (45) peut être étudié à partir du produit et de la somme des racines :

$$P = \frac{1+2s}{1-2s} \qquad S = -\frac{2(1-2\sqrt{2}\lambda s)}{1-2s}$$

Le résultat est le suivant :

--- si $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{1}{2\sqrt{2}\lambda} > \frac{1}{2}$ et on a :

$0 < s < \frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2}$ pas de racine

$\frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2} < s < \frac{1}{2}$ 2 racines négatives

$\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda}$ 1 racine positive, 1 négative

$\frac{1}{2\sqrt{2}\lambda} < s < \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$ idem

On conclut aisément que le déviateur critique pour la bifurcation tangente avec $\lambda < 1/\sqrt{2}$ est $s_{ct} = 1/2$.

--- si $\lambda > 1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2}\lambda < 1/2$, $\frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2} > \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda}$ et on a :

$0 < s < \frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2}$ pas de racine

$\frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2} < s < \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} < \frac{1}{2}$ 2 racines positives

d'où $s_{ct} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{1+2\lambda^2}$ pour $\lambda > 1/\sqrt{2}$

On notera en outre que la solution $s = {}^1/_2$, équation (43), correspond à l'annulation du premier facteur, soit coïncide avec s_{ct} , soit est plus tardive (si $\lambda > {}^1/\sqrt{2}$) . Les valeurs obtenues pour s_{ct} sont donc bien les plus critiques (pour la loi tangente) .

3.4 La solution générale.

La solution générale s'écrit, d'après (41) :

$$b = - \frac{16s\lambda\sqrt{2}t^2(1+t^2+2s(1-t^2)) - 4(1+t^2+2s(1-t^2))^2(1+t^2)}{16s^2\lambda^2t^2(1+t^2) - 2(1+t^2)(1+t^2+2s(1-t^2))^2} \qquad (49)$$

Comme mentionné plus haut, cette solution n'est acceptable que si elle vérifie, en outre, la condition (35) :

$$b+1 \geqslant 0$$

Le premier membre de cette inéquation est une fraction rationnelle de t^2 , qu'on notera :

$$Q(t^2) = \frac{N(t^2)}{D(t^2)} \qquad (50)$$

Etudions le signe de $Q(t^2)$, pour mettre en évidence les cas où la solution générale vérifie la condition préalable (35).

*** 3.4.1 Signe de $N(t^2)$.

$N(t^2)$ est un polynôme du troisième degré en t^2. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} & t^6 \times 2(1-2s)^2 \\ + \; & t^4 \times 6 - 8s(2\sqrt{2}\lambda+1) + 8s^2(2\lambda^2+4\sqrt{2}\lambda-1) \\ + \; & t^2 \times 6 - 8s(2\sqrt{2}\lambda-1) + 8s^2(2\lambda^2-4\sqrt{2}\lambda-1) \\ + \; & 2(1+2s)^2 \end{aligned} \qquad (51)$$

Il est positif quelque soit λ pour s=0 (c'est à dire au début du chemin envisagé). Comme les coefficients de $N(t^2)$ sont des fonctions continues de **s**, les changements de signe du polynôme ne peuvent se produire que par passage à zéro : $N(t^2) = 0$, d'où $Q(t^2) = 0$. Le premier changement de signe sur un chemin à **s** croissant aura donc lieu pour :

$$b+1 = 0 \qquad (52)$$

d'où, par (36) :

$$a = - \frac{4\lambda s\sqrt{2}\,\sin^2\alpha\cos\alpha}{1 + 2s\cos 2\alpha} \qquad (53)$$

sachant (34), (52) entraîne :

$$\| \underline{e} \| = 0 \qquad (54)$$

et donc

$$\underline{e} = 0 \qquad (55)$$

d'où

$$e^o_{ij} + {}^1/_2 (g_i n_j + g_j n_i) = 0 \qquad (56)$$

En utilisant (15) qui définit $\underline{e}^o$, on a à partir de (56) :

$$g_1 n_1 = -a \quad ; \quad g_2 n_2 = a \quad ; \quad {}^1/_2 (g_1 n_2 + g_2 n_1) = 0 \qquad (57)$$

Réintroduisons α et g tels que définis par (30) :

$$g_1 = g \quad , \quad g_2 = - g \operatorname{cotg}\alpha \qquad (58)$$

on a donc, par (57) :

$$g = {}^{-a}/_{\cos\alpha} \qquad (59)$$

et, en reportant g_1 et g_2 dans (57.3) :

$$g \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha} = 0$$

d'où, si $g \neq 0$:

$$\cos 2\alpha = 0$$

ce qui entraîne $$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \qquad (60)$$

Ainsi, on a : $$g = -a\sqrt{2} \qquad (61)$$

En reportant (60) et (61) dans (53), il est possible d'obtenir une condition sur **s** :

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \qquad (62)$$

En rappelant l'expression de la surface limite (5) :

$$\| \underline{s} \| = \frac{1}{\lambda}$$

et les notations adoptées en (9) :

$$s_{11} = -s_{22} = s \quad ; \quad s_{12} = 0$$

on voit que (62) exprime précisément, pour le chemin envisagé, l'arrivée du point représentatif des contraintes sur la surface limite.

En conclusion, $N(t^2)$ ne peut changer de signe qu'à l'état limite; dans l'intervalle de variation des contraintes, il garde le signe qu'il a pour s=0, c'est à dire :

$$N(t^2) > 0 \quad \forall s \in \left[0 , \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}\right[\qquad (63)$$

*** 3.4.2 Signe de $D(t^2)$

$D(t^2)$ est le produit d'un trinôme du second degré en t^2 par le facteur $(1+t^2)$, toujours positif . Le trinôme s'écrit :

$$-2t^4(1-2s)^2 - 4t^2(1-4s^2 - 4s^2\lambda^2) - 2(1+2s)^2 \qquad (64)$$

Négatif quelque soit t^2 pour s=0, il admet des racines en t^2 pour :

$$s \geqslant s_g = \sqrt{\frac{1}{2(\lambda^2+2)}} \qquad (65)$$

Dans ce cas, $D(t^2)$ est positif pour les valeurs de t^2 comprises entre les

racines (dont il reste à discuter si elles sont positives).

La racine double obtenue pour $s = s_g$ est $t^2 = \pm \left| \frac{1+2s}{1-2s} \right|$ (66)

*** 3.4.3 Signe de $Q(t^2)$

D'après les résultats obtenus pour $N(t^2)$ et $D(t^2)$, il peut être conclu que $Q(t^2)$ est négatif pour toute orientation lorsque s est inférieur à s_g ; il existe des valeurs (non nécessairement positives) de t^2 telles que $Q(t^2)$ soit positif lorsque s est supérieur à s_g ; pour $s = s_g$, il existe une valeur de t^2 donnée par (66) telle que $Q(t^2)$ est infini; enfin $Q(t^2)$ est nul lorsque l'état de contrainte atteint la surface limite.

L'inégalité (35) (condition nécessaire pour que la bifurcation suivant la solution générale soit acceptable) n'est donc vérifiée que lorsque s est supérieur à s_g défini par (65).

A partir de cette valeur, la localisation suivant la solution générale est possible, à condition toutefois que l'une au moins des racines en t^2 soit positive, de telle sorte que l'orientation définie par t soit réelle.

Il convient donc d'étudier le signe des racines du trinôme (64).

La somme et le produit des racines sont :

$$P = \frac{(1+2s)^2}{(1-2s)^2} > 0 \qquad \text{et} \qquad S = - \frac{1-4s^2(1+\lambda^2)}{(1-2s)^2}$$

Les racines sont donc toutes deux de même signe, celui de la somme .

Ce signe est positif si :

$$s > \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \tag{67}$$

et négatif dans le cas contraire.

On montre aisément que :

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} < \frac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+2)}} = s_g \qquad (68)$$

Ainsi il est clair que s'il existe des racines, elles sont positives.

Le déviateur critique pour la bifurcation générale est donc :

$$s_{cg} = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+2)}} \qquad (69)$$

3.5 Bifurcation tangente ou bifurcation générale ?

Il reste à examiner, à partir des déviateurs critiques obtenus respectivement dans le cas correspondant à la bifurcation tangente et dans le cas général, laquelle des deux configurations donne lieu à la bifurcation la plus précoce.

--- si λ est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il faut comparer :

$$s_{ct} = \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad s_{cg} = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+2)}}$$

Il est clair qu'on a toujours $s_{cg} < s_{ct}$ dans ce cas.

--- si λ est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, les valeurs critiques sont respectivement :

$$s_{ct} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{1 + 2\lambda^2} \quad \text{et} \quad s_{cg} = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+2)}}$$

On peut montrer que s_{cg} est inférieur à s_{ct} tant que λ est supérieur à $1/2$, ce qui est toujours vrai puisque λ est supérieur à $1/\sqrt{2}$.

<u>Conclusion</u> : L'étude de bifurcation par localisation dans le cadre général donne lieu, pour la loi non linéaire envisagée, à une bifurcation plus précoce dans tous les cas que l'étude restreinte à la bifurcation dite "tangente" .

3.6 Comparaison avec l'analyse de Hill et Hutchinson.

On a vu, au paragraphe IX-2.3 qui explicite la loi tangente à la loi non linéaire étudiée ici, que cette loi tangente coïncide avec la loi étudiée par Hill et Hutchinson < 54 >, avec les correspondances (14) entre les coefficients. La relation entre notre coefficient homologue de μ^* et la contrainte déviatoire est explicite, alors qu'elle n'est pas précisée chez Hill et Hutchinson.

Ces auteurs procèdent à une analyse de bifurcation très générale, qui couvre divers chemins aussi bien que divers modes de bifurcation (notamment, des modes diffus). Si on considère le chemin étudié dans notre analyse, et la bifurcation par localisation, la comparaison entre ces deux études porte sur la discussion de l'équation 4.4 de la référence citée, compte tenu des considérations développées par ailleurs dans son annexe AII.

Deux cas sont distingués, (cf <54> , p262), suivant que $2\mu^*/\mu$ est supérieur ou inférieur à 1. Dans le premier cas, la bifurcation survient par passage du régime elliptique de l'équation 4.3 au régime parabolique; les modes diffus et localisé sont alors simultanés. Dans le second cas, c'est la frontière des régimes elliptique et hyperbolique qui est rencontrée; le mode localisé est alors le mode priviligié.

Les déviateurs critiques peuvent être comparés à nos résultats pour la loi tangente :

Cas 1 : $2\mu^*/\mu$ supérieur à 1. (notations HH)

l'interface E/P a pour équation :

$$\mu = {}^1/_2 \, (\sigma_1 - \sigma_2) \qquad \text{(HH4.8)}$$

Compte tenu des correspondances (14), l'interface E/P de l'équation de Hill et

Hutchinson est donc rencontrée, dans nos notations, pour le déviateur critique:

$$s = {}^{1}/_{2} \tag{70}$$

et la condition ${}^{2\mu^*}/_{\mu}$ conduit à :

$$\lambda < {}^{1}/\sqrt{2} \tag{71}$$

Cas 2 : ${}^{2\mu^*}/_{\mu}$ inférieur à 1. (notations HH)

l'interface rencontré est l'interface E/H, d'équation :

$$\mu/\mu^* = 1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*}\right)^2 \tag{HH4.9}$$

dans nos notations, ceci conduit à :

$$s = \frac{\sqrt{2}\,\lambda}{1+2\lambda^2} \tag{72}$$

sous la condition :

$$\lambda > {}^{1}/\sqrt{2} \tag{73}$$

Les relations (70) à (73), déduites de l'analyse de Hill et Hutchinson par les simples relations de correspondance (14) entre la loi étudiée par ces auteurs et la loi tangente à notre loi non linéaire, coïncident parfaitement avec les prévisions obtenues au paragraphe IX-3.3 **pour la bifurcation "tangente", définie comme correspondant à la solution double b=0 de l'équation générale (38).** Ainsi se trouvent confirmés à la fois les résultats de l'analyse pour la loi choisie, et le principe de l'élargissement du cadre théorique, proposé au chapitre VIII et mis en oeuvre ici.

3.7 Influence des termes corotationnels.

Le principe d'objectivité impose de prendre en compte, dans l'écriture des lois rhéologiques, une dérivée objective. On a adopté ici, dans l'écriture de la loi (équation 1), la dérivée de Jaumann (19), qui introduit des termes de l'ordre de grandeur de la contrainte totale multipliée par la vitesse de rotation. L'importance de ces termes par rapport au taux de contrainte dépend de l'ordre de grandeur relatif de la contrainte par rapport au module tangent actuel; lorsqu'on approche de la surface limite, ils peuvent jouer un rôle significatif.

Dans les analyses de bifurcation, on convient souvent de les négliger en première approximation.

L'analyse qui a été présentée tient compte de ces termes sans restriction aucune . Il est intéressant, pour comparaison, de préciser les résultats auxquels on aboutirait si on les négligeait.

On aurait dans ce cas $B_{ij} = 0$ dans les équations (22), (26), et (27); les équations (31) verraient les termes $g(^1/_2-s)$ et $-g \cotg\alpha(^1/_2+s)$ remplacés par $^g/_2$ et $^{-g}/_2 \cotg\alpha$.

L'expression de g , (36) deviendrait :

$$g = 4\lambda sba\sqrt{2} \sin^2\alpha \cos\alpha \qquad (74)$$

En remplacant g par cette valeur dans (34) via (33), on a l'homologue de (38):

$$b^2(4\lambda^2 s^2 \sin^2 2\alpha -2) + b\,(4\lambda s\sqrt{2} \sin^2 2\alpha -4) = 0 \qquad (75)$$

La bifurcation correspond à l'annulation du coefficient de **b** :

$$\lambda s\sqrt{2} \sin^2 2\alpha -1 = 0 \qquad (76)$$

c'est à dire :

$$s = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} \times \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \qquad (77)$$

La valeur minimale de cette contrainte déviatoire critique est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$; on a alors :

$$s = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \tag{78}$$

c'est à dire la valeur de **s** qui définit la surface limite.

La bifurcation générale est obtenue pour :

$$b = - \frac{4\lambda s\sqrt{2}\ \sin^2 2\alpha - 4}{4\lambda^2 s^2 \sin^2 2\alpha - 2} \tag{79}$$

On doit alors vérifier la condition (35) :

$$b+1 \geqslant 0$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{s^2\ (4\lambda^2 \sin^2 2\alpha) - s\ (4\lambda\sqrt{2}\ \sin^2 2\alpha) + 2}{4\lambda^2 s^2\ \sin^2 2\alpha - 2} \geqslant 0 \tag{80}$$

Le numérateur est positif en dehors de ses racines; il n'a de racine que si le discriminant est positif ou nul :

Or, $$\Delta = 8\lambda^2 \sin^2 2\alpha\ (\sin^2 2\alpha - 1)$$

Il est donc clair qu'il ne peut y avoir qu'une racine double, correspondant à $\Delta = 0$ pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Cette racine est : $$s = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}\ \sin 2\alpha} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$$

Le dénominateur, quant à lui, est négatif pour tout **s** inférieur à :

$$s = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}\ \sin 2\alpha}$$

ainsi, on peut conclure que la condition (79) ne saurait être satisfaite en dehors du cas où α vaut $\frac{\pi}{4}$ et **s** vaut $\frac{1}{\lambda\sqrt{2}}$; l'indétermination qui apparaît pour ces valeurs est levée en remarquant que pour $\sin 2\alpha = 1$,

l'équation (80) s'écrit : $$\frac{(2\lambda s - \sqrt{2})^2}{4\lambda^2 s^2 - 2} \geqslant 0$$

ou encore : $$\frac{2\lambda s - \sqrt{2}}{2\lambda s + 2} \geqslant 0$$

d'où enfin : $$s \geqslant \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \qquad (81)$$

En négligeant de prendre en compte les termes corotationnels dans la dérivée de la contrainte, on aboutit ainsi à une solution unique pour l'approche tangente et l'approche générale, qui en outre coïncide avec le critère de plasticité. On voit ici l'importance à la fois qualitative et quantitative de la dérivation corotationnelle dans l'analyse de bifurcation.

IX-4 Conclusion

Les développements qui viennent d'être exposés ont permis de mettre en évidence l'intérêt de l'étude synthétique du problème de la bifurcation par localisation, lorsque la loi choisie pour décrire le matériau réel est une loi incrémentalement non linéaire. Ceci confirme la réflexion présentée au chapitre VIII, au terme de laquelle il apparaissait comme nécessaire, pour de telles lois, de considérer le problème dans sa généralité.

On a pu constater en effet, sur l'exemple considéré, que la première bifurcation rencontrée n'est pas celle qui correspond à l'analyse restreinte à la loi tangente, mais au contraire relève de l'analyse générale.

On peut préciser encore ce résultat en remarquant que la solution obtenue par l'analyse générale correspond, en l'occurence, au cas où **b** et donc **g** sont infinis (le dénominateur de **b** s'annulle). Ce cas spécifique est celui envisagé

au paragraphe VIII-3.3.2, sous la désignation d' "approche non linéaire homogène en **g**", pour lequel le matériau en dehors de la bande a un comportement quasi rigide. C'est l'approche qui a été faite par Kolymbas pour sa loi non linéaire <62>. Il serait prématuré de conclure que ce cas est nécessairement le plus critique pour toutes les lois de ce type; mais du moins est-il prouvé qu'on ne peut pas a priori considérer comme suffisante l'analyse restreinte à la loi tangente.

Les résultats présentés sont corroborés par la comparaison, pour l'étude restreinte à la loi tangente, avec les résultats de Hill et Hutchinson pour une loi incrémentalement linéaire qui coïncide avec notre loi tangente.

On a pu, par ailleurs, mettre en évidence l'influence des termes additionnels de la vitesse de contrainte qui résultent de la dérivation corotationnelle; en les négligeant, on obtient des prévisions de bifurcation plus tardives, et indifférenciées.

Il n'entre pas dans mon propos de discuter la pertinence des lois incrémentalement non linéaires pour la description du comportement des matériaux granulaires. On remarquera simplement que, de plus en plus, les lois proposées s'inscrivent dans ce cadre, et que, hormis la bi-linéarité simple, la multi-linéarité n'offre guère d'avantages du point de vue de la simplicité formelle en regard de la non-linéarité complète. Dans ce contexte de développement, il importait d'établir clairement dans quel cadre théorique devait être posé le problème de la bifurcation par localisation de la déformation.

CONCLUSION GENERALE

La localisation de la déformation dans les milieux granulaires est un phénomène passionnant. Elle interroge le praticien, qui la rencontre sur le terrain, comme le chercheur investi dans l'application de la mécanique des milieux continus et de la rhéologie à ce type de matériau.

Les développements historiques de la mécanique des sols ont fait une part à ce phénomène, en fondant sur le concept de surface de rupture un certain nombre de méthodes de calcul. Mais l'occurence persistante de la localisation jusque dans les essais, de plus en plus raffinés, de laboratoire, ont conduit à s'interroger sur sa nature, et sur ses liens avec le comportement du matériau. La théorie de la bifurcation offre un cadre d'étude pour la localisation en bande de cisaillement et des travaux de plus en plus nombreux ont trait à cette approche. On a tenté, dans la première partie de ce mémoire, de rendre compte des différents points de vue développés sur ce sujet et de mettre en évidence leurs liens. On retiendra en particulier la filiation historique des études actuelles de bifurcation par localisation par rapport aux travaux concernant la propagation des ondes d'accélération dans les solides. Cette perspective n'est pas que d'intérêt historique; elle met en valeur en effet, le fait capital que la localisation doit être vue comme une perte d'unicité de la solution d'un problème aux limites. Hill ainsi que Mandel, ont souligné le fait que l'instabilité élémentaire (caractérisée par la non-propagation locale d'une onde d'accélération) n'est pas une condition

suffisante de l'instabilité globale. L'étude maintenant classique du problème élémentaire par rapport à l'apparition d'une bande de cisaillement doit donc être vue comme un cas très particulier dont les conclusions ne peuvent être étendues inconsidéremment à un problème hétérogène (calcul d'ouvrage par exemple).

L'étude expérimentale de la localisation a porté sur un essai élémentaire, l'essai biaxial. On s'est intéressé, au moyen de méthodes de mesure fondées sur la stéréophotogrammétrie, à la naissance de la localisation dans un essai "parfait" ou délibérément perturbé. Les observations dont il a été rendu compte établissent que la localisation prend naissance à partir d'un point de l'échantillon, préférentiellement au voisinage immédiat d'une perturbation et se propage en ligne droite à partir de ce point. La bande de cisaillement qui résulte de ce mécanisme peut se réfléchir sur les frontières rigides alors qu'elle s'amortit sur les frontières flexibles. Les variations de volume enregistrées montrent une dilatance importante dans les bandes de cisaillement, confirmée par divers moyens de contrôle; la compacité tend vers une limite dans les zones localisées.
L'interprétation de la dilatance comme facteur d'endommagement du matériau, responsable d'un adoucissement qui vient concurrencer l'écrouissage à la déformation, permet d'avancer une explication physique du phénomène de localisation; il conviendra cependant de confronter ces conceptions aux résultats d'expériences menées dans des conditions telles que le matériau granulaire soit contractant.

En dépit des réserves énoncées plus haut concernant l'application de l'analyse classique à des problèmes hétérogènes, cette analyse appliquée à l'essai élémentaire supposé parfait est d'un intérêt certain pour l'étude des lois de comportement. Le cadre classique, cependant, n'est pas adapté à

l'étude des lois incrémentalement non linéaires, du moins tant qu'il s'accompagne d'une linéarisation, explicite ou implicite, de la loi. On a explicité, au chapitre VIII, le cadre plus général dans lequel doit être posé le problème pour une loi non linéaire. Afin d'en montrer la pertinence, une étude analytique complète selon le cadre a été effectuée pour une loi non linéaire heuristique; les résultats montrent que la bifurcation obtenue par linéarisation survient après l'apparition d'une bifurcation, plus précoce, obtenue par l'analyse générale.

A l'évidence, la localisation de la déformation dans les milieux granulaires est loin d'être un sujet clos. La poursuite de l'expérimentation dans le domaine de matériaux contractants devrait apporter de nouveaux éléments de compréhension sur la physique du phénomène ; le développement des lois non linéaires et leur étude par rapport à la localisation dans le cadre général devraient conduire à des progrès à la fois dans le domaine de la modélisation du comportement élémentaire et dans les prévisions de la localisation. Il faudrait par ailleurs, parvenir à rendre compte théoriquement de l'aspect propagatoire du phénomène tel qu'il a été mis en évidence expérimentalement ici. On sort alors de l'analyse limitée au problème élémentaire, pour entrer dans le domaine plus vaste et plus difficile de l'étude de stabilité et d'unicité de la solution d'un problème aux limites. Le retour à l'analyse dynamique et à l'étude de la propagation d'ondes d'accélération pourrait s'avérer fructueuse dans cette démarche, au bout de laquelle se trouve peut être l'application à des problèmes de terrain.

---oooOOOooo---

ANNEXE
******

Courbes rapport de contrainte - déformation

(Essais biaxiaux)

Ces courbes résultent de l'exploitation des mesures d'excédent de force axiale en fonction du déplacement de la tête mobile de l'échantillon (généralement la tête supérieure), et des mesures planimétriques effectuées après essai sur les clichés destinés à l'exploitation stéréophotogrammétrique.

La présentation des résultats expérimentaux sous cette forme, plutôt que sous celle des mesures brutes (que j'aurais pourtant tendance à préférer) offre l'avantage de rendre comparables les essais effectués sur des échantillons de géométries différentes.

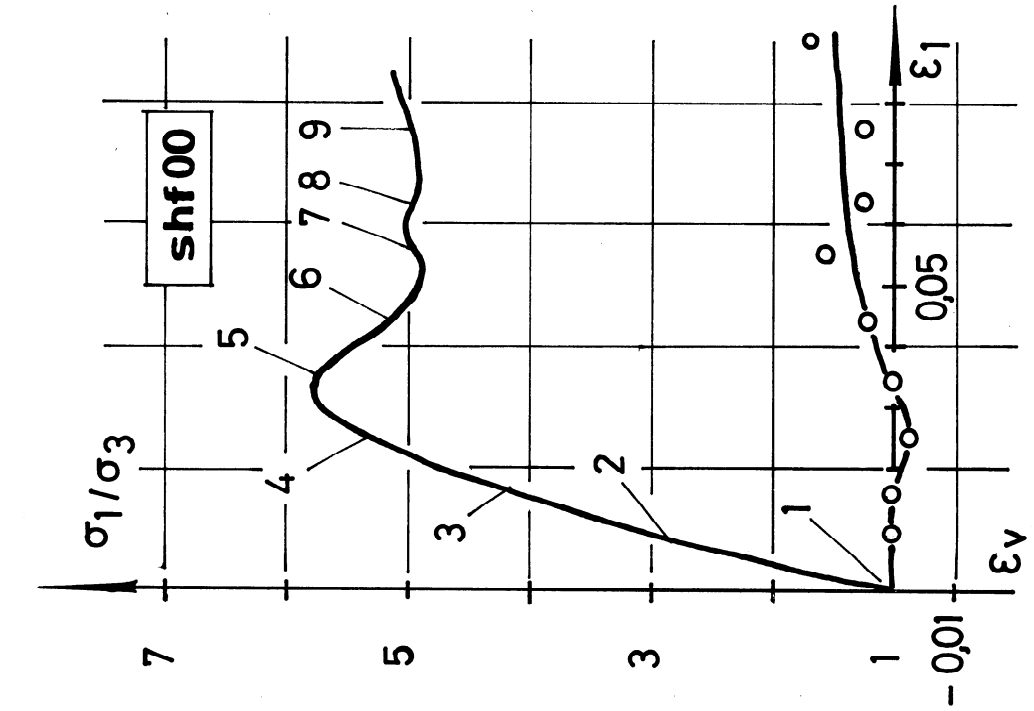
En revanche, on doit noter que, comme dans tous les cas d'exploitation d'essai élémentaire, les grandeurs globales calculées (contraintes, déformations) n'ont de sens que si on ne s'éloigne pas trop de l'homogénéité. Il y a donc un petit paradoxe à présenter de telles courbes pour des essais conçus, précisément, dans le but mettre en évidence la localisation. C'est la raison pour laquelle les courbes données ici sont tracées en pointillé après la localisation complète, dans l'esprit de souligner le coté purement indicatif de cette portion de diagramme.

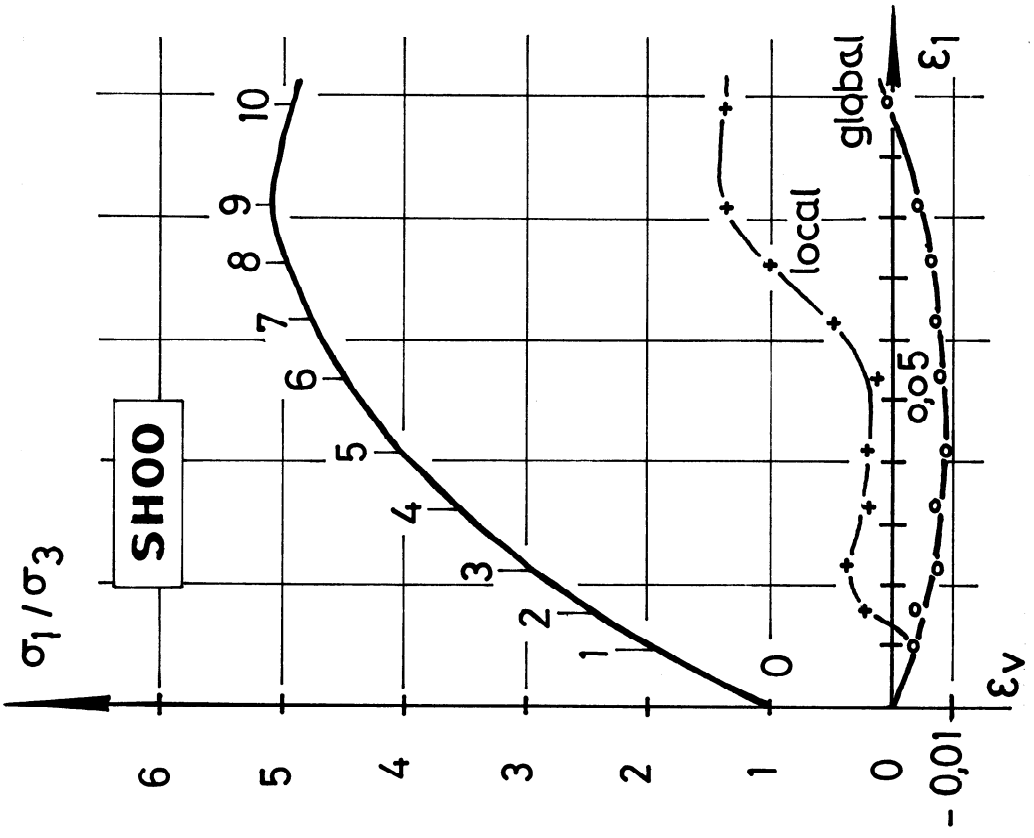
Les numéros portés sur les courbes sont les numéros des clichés réalisés en cours d'essai; ils indiquent à quel moment ces clichés ont été pris.

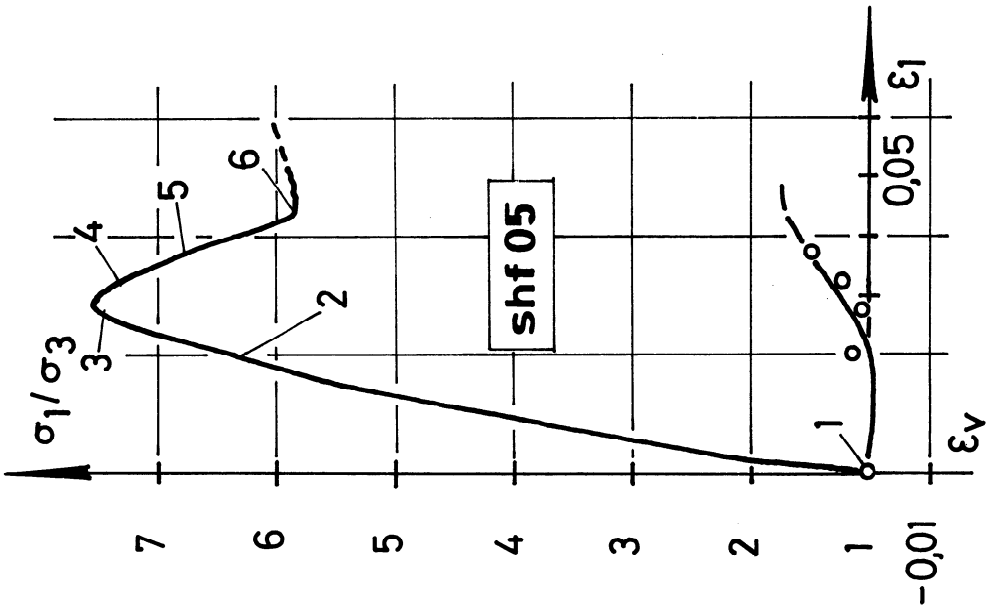
On notera enfin les conventions de signe adoptées :

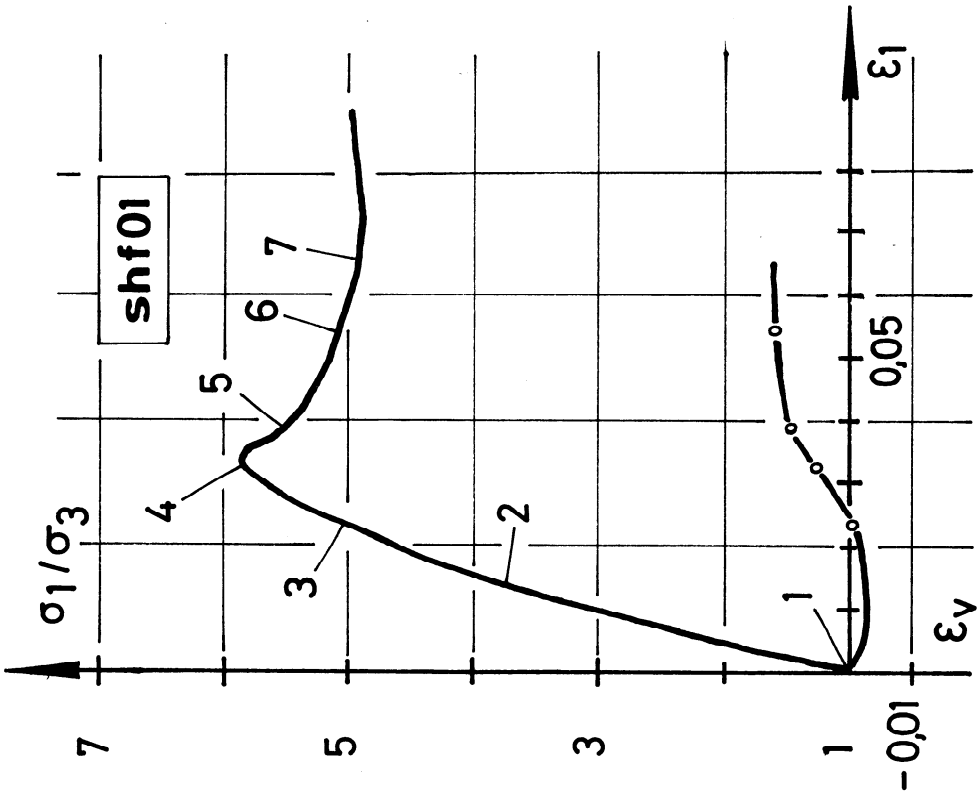
- Pour la déformation axiale, notée ε_1, il n'y a pas d'ambiguité puisque tous les essais présentés sont des essais de raccourcissement axial; la grandeur reportée sur les courbes est la valeur absolue de cette déformation.

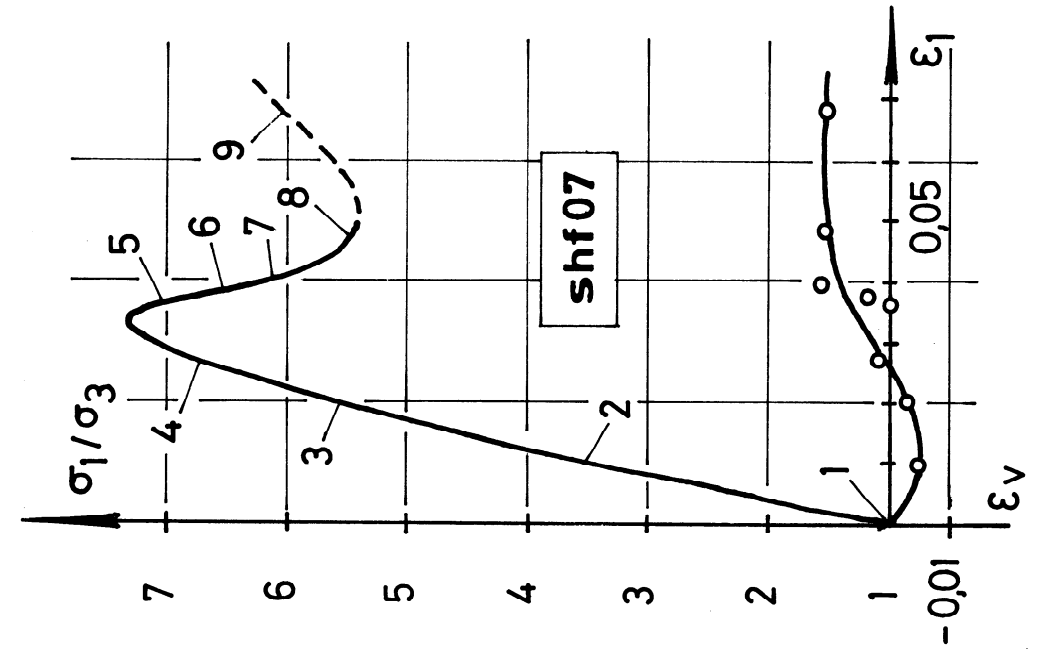
- Pour la déformation volumique, elle est donnée **négative en compression** (contactance) et positive dans le cas contraire (dilatance), comme tout au long de ce mémoire.

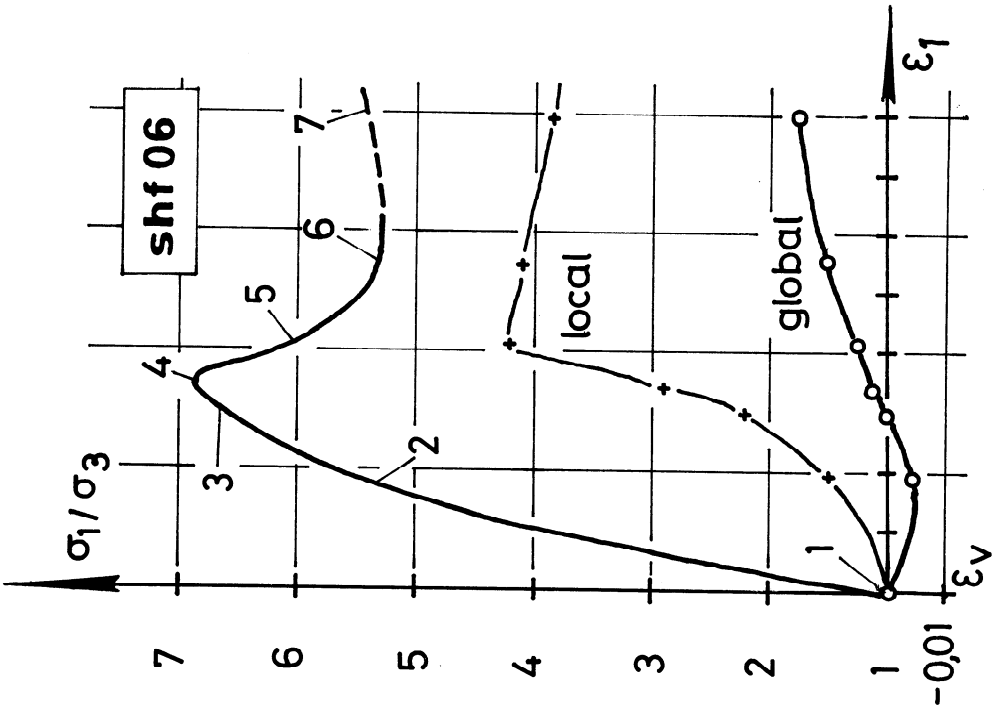

shf00
σ_1/σ_3
ε_v
ε_1
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8
9

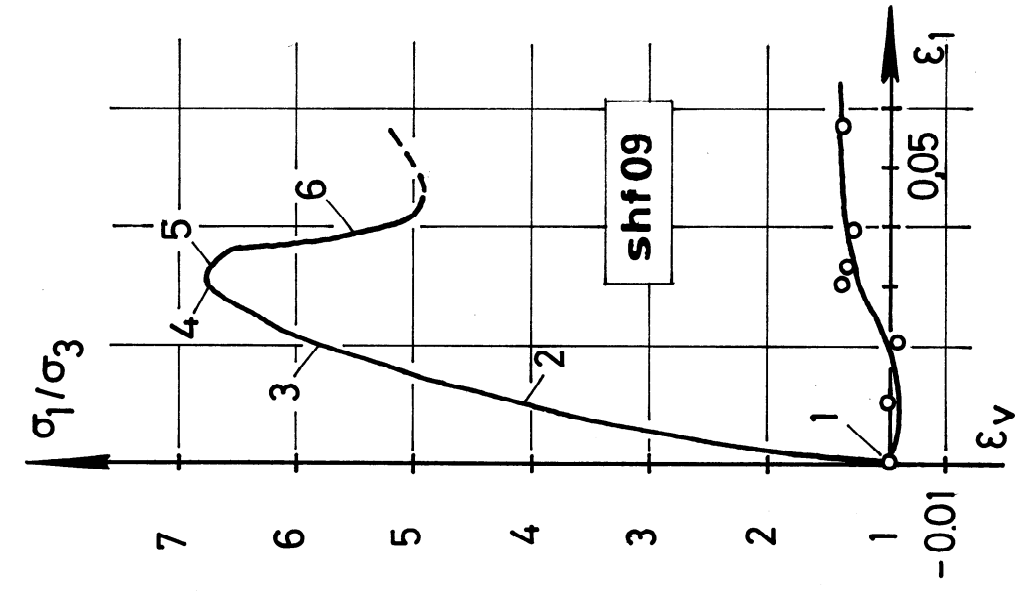

SHOO
σ_1/σ_3
ε_v
ε_1
local
global
0,05
-0,01
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

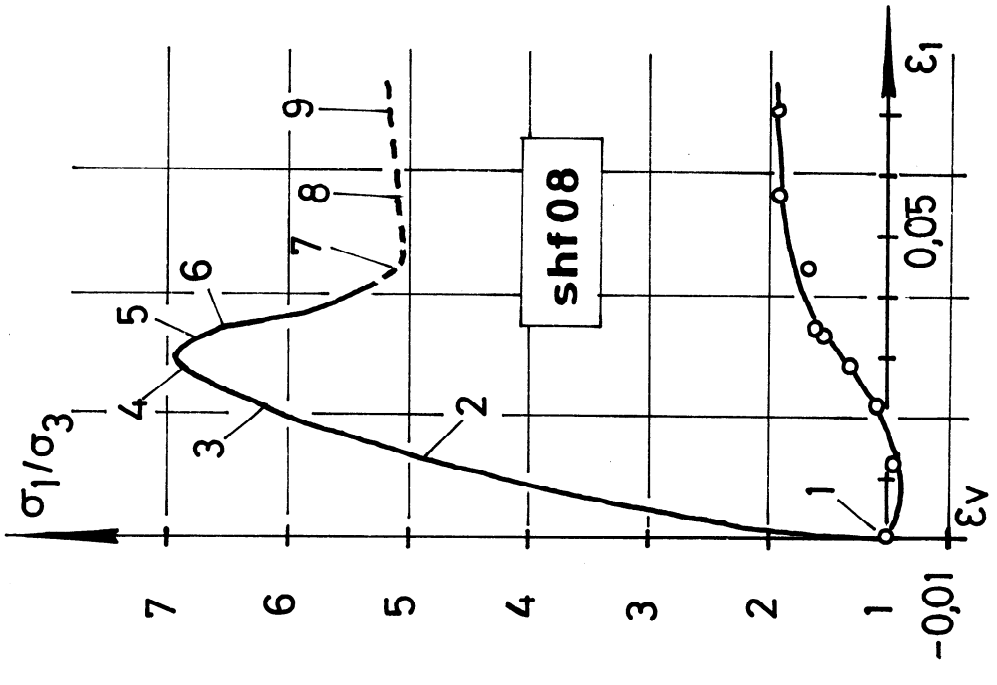

shf 05
σ1/σ3
εv
ε1
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7

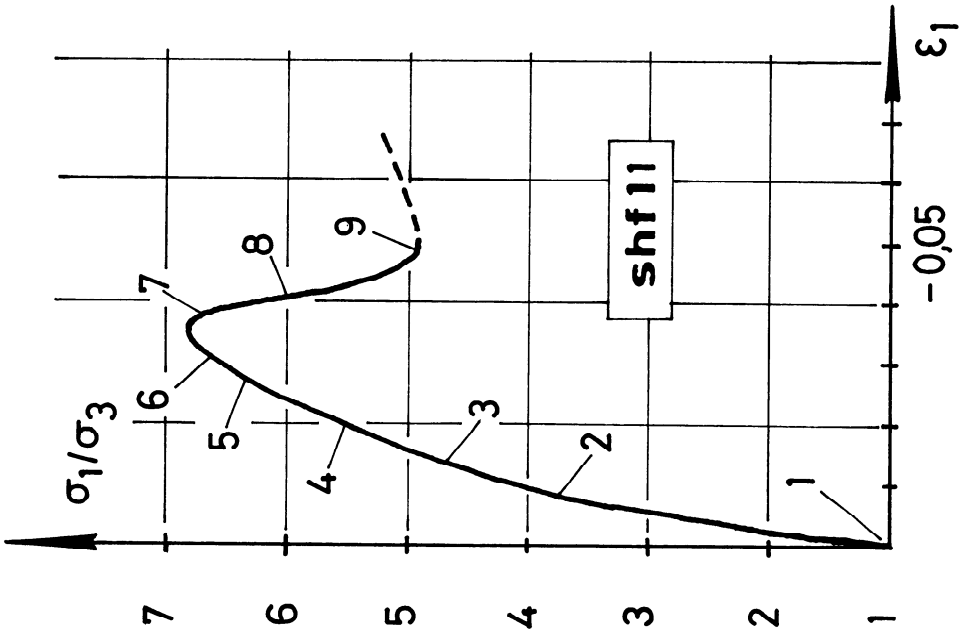

shf01
σ1/σ3
εv
ε1
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7

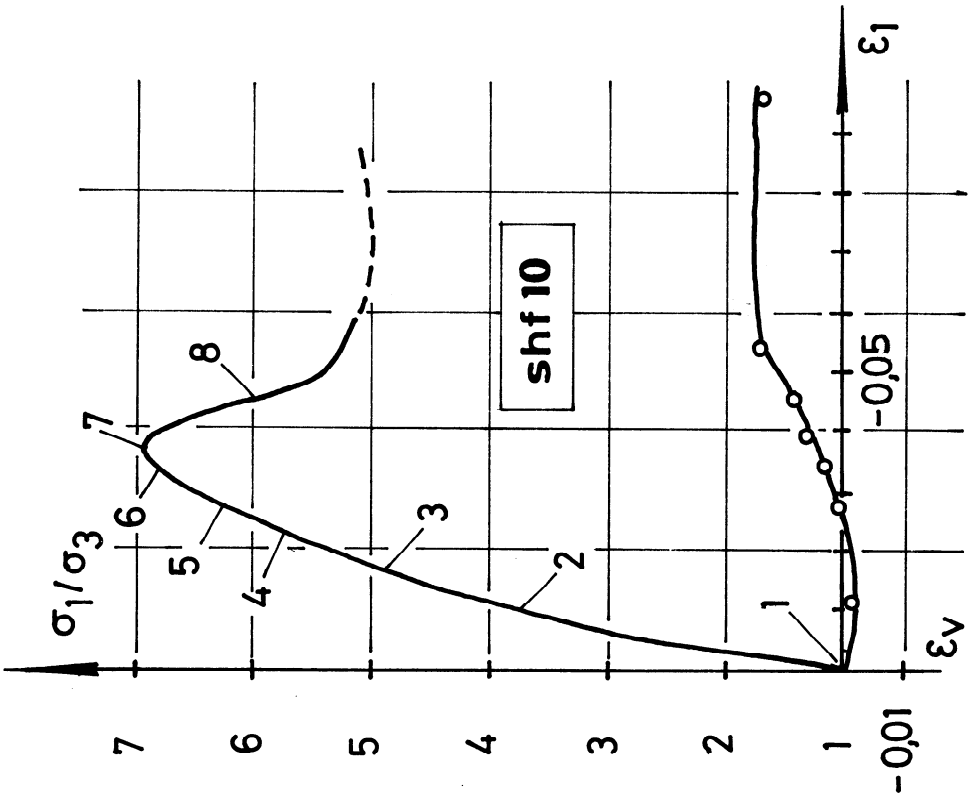

shf07
σ1/σ3
εv
ε1
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8
9

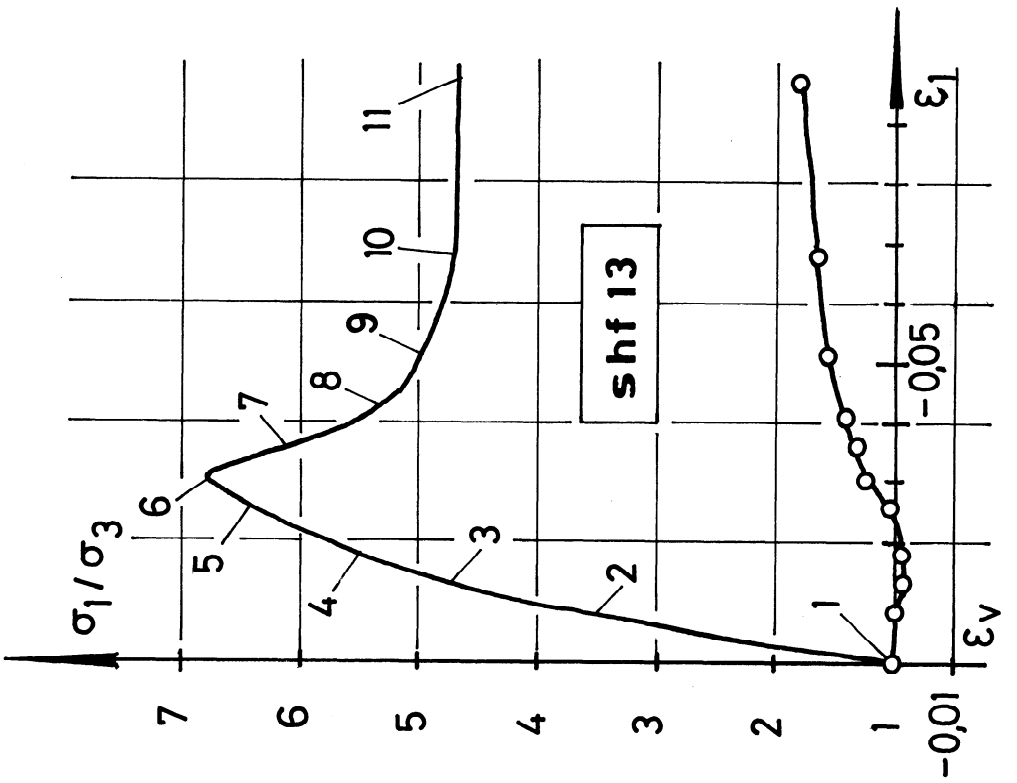

shf06
σ1/σ3
εv
ε1
local
global
-0,01
1
2
3
4
5
6
7

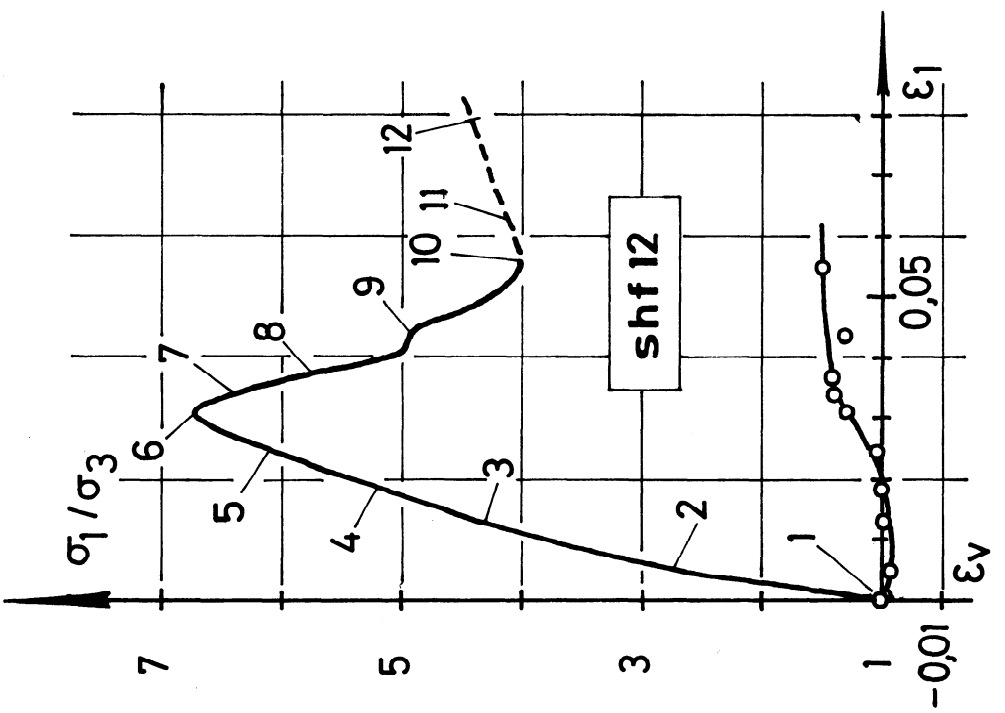

shf09
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7

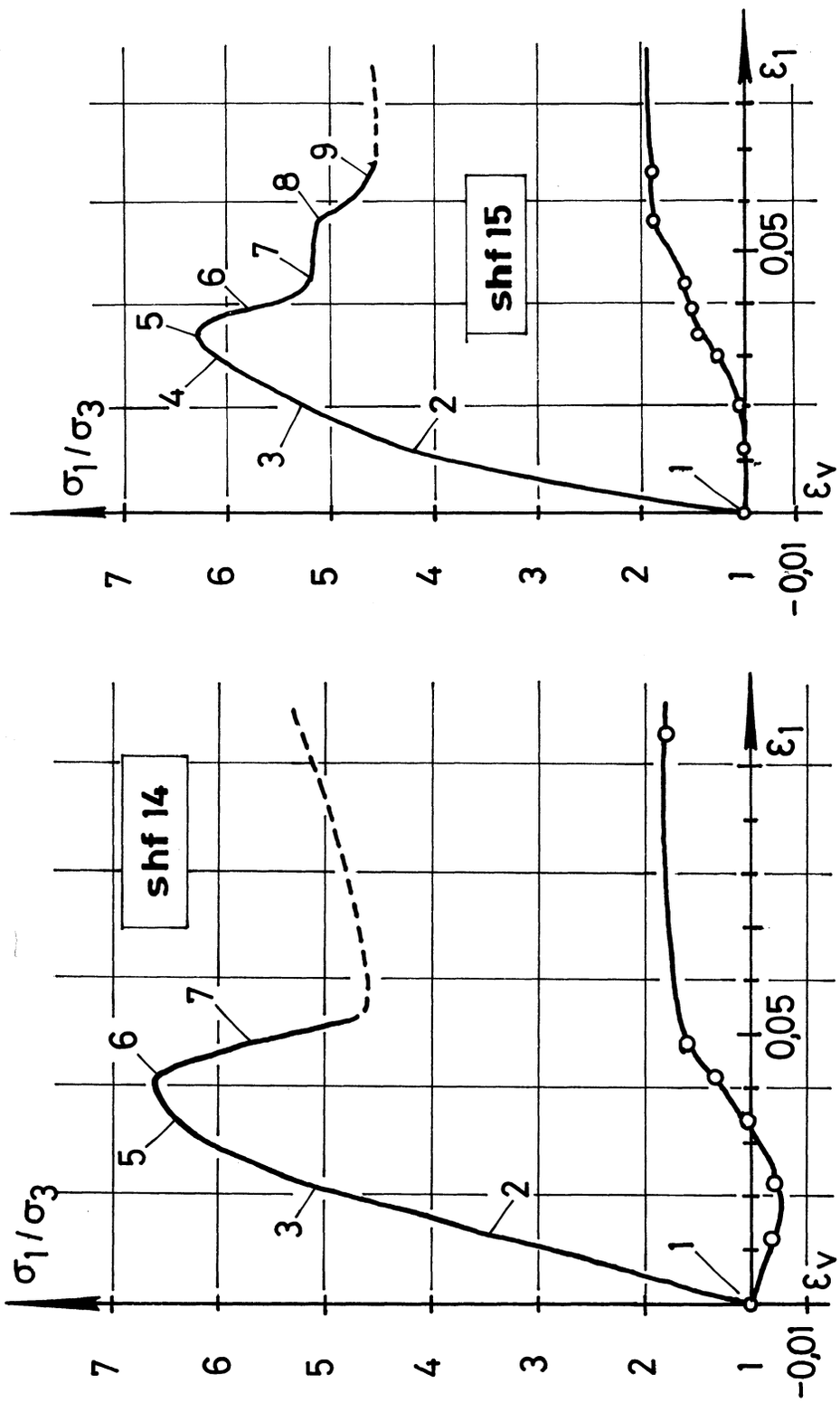

shf08
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8
9

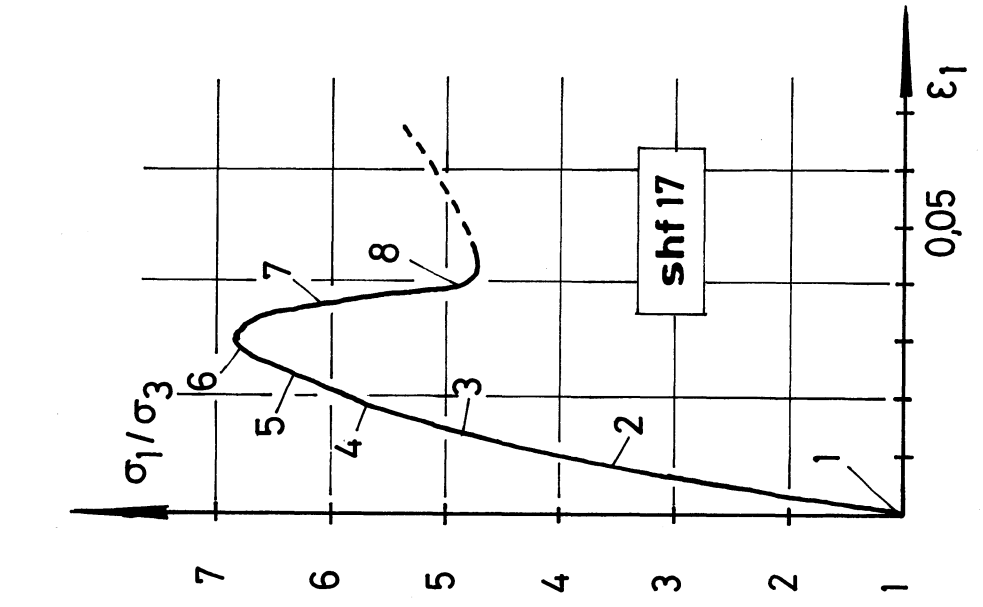

shf 11
σ_1/σ_3
ε_1
-0,05
1
2
3
4
5
6
7
8
9

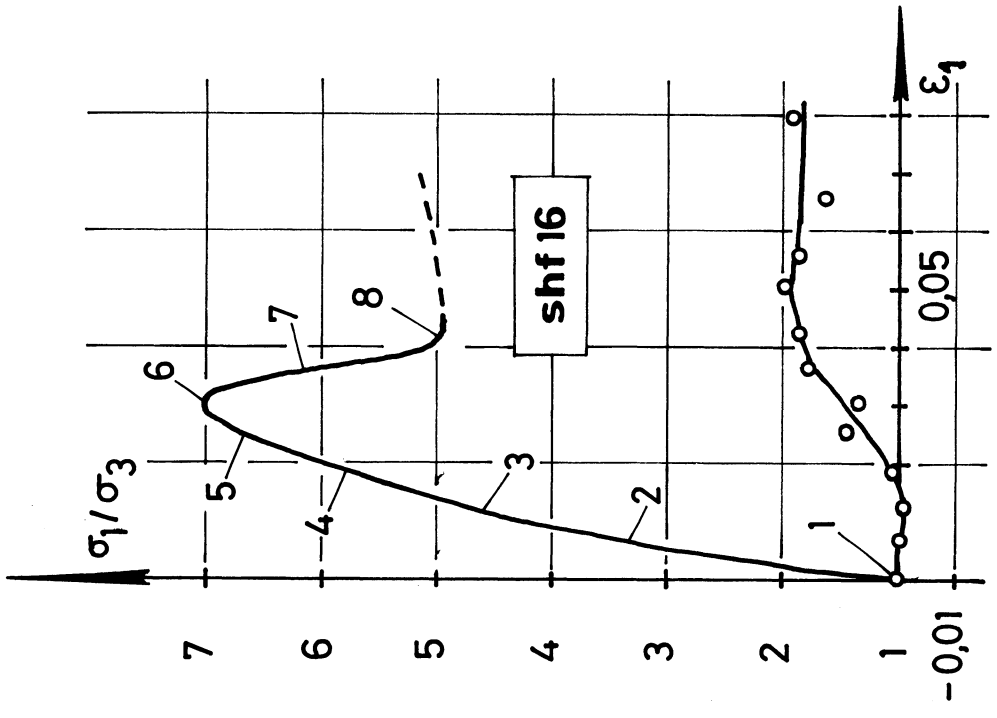

shf 10
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
-0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8

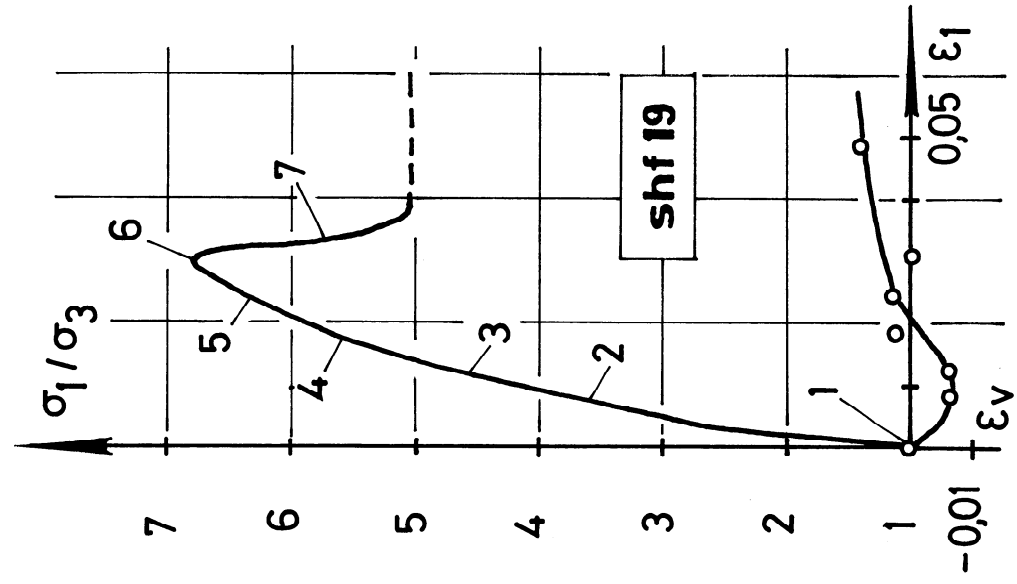

shf 13
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
-0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

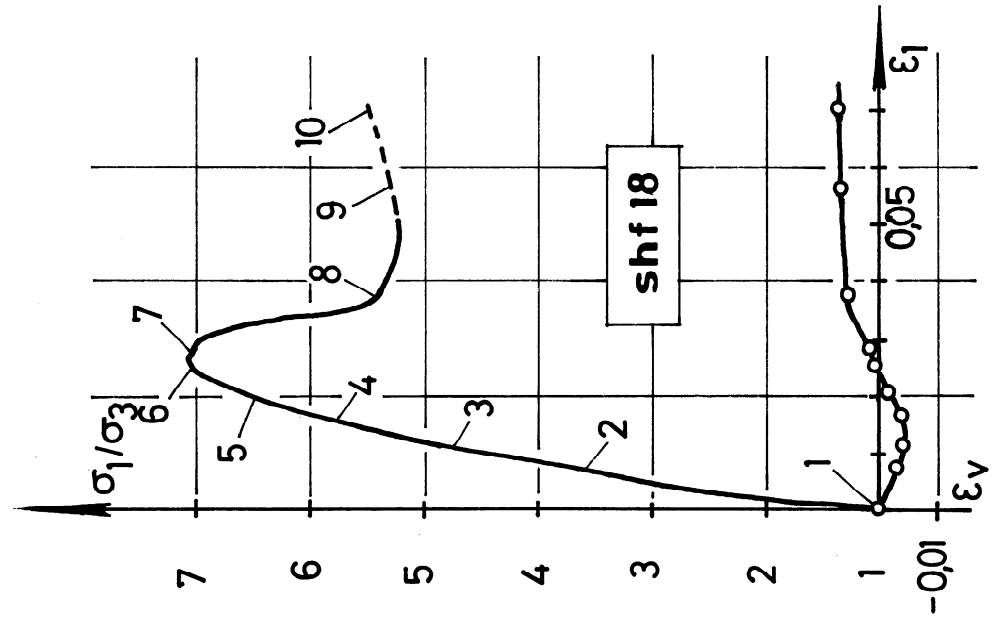

shf 12
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
0,05
-0,01
o
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

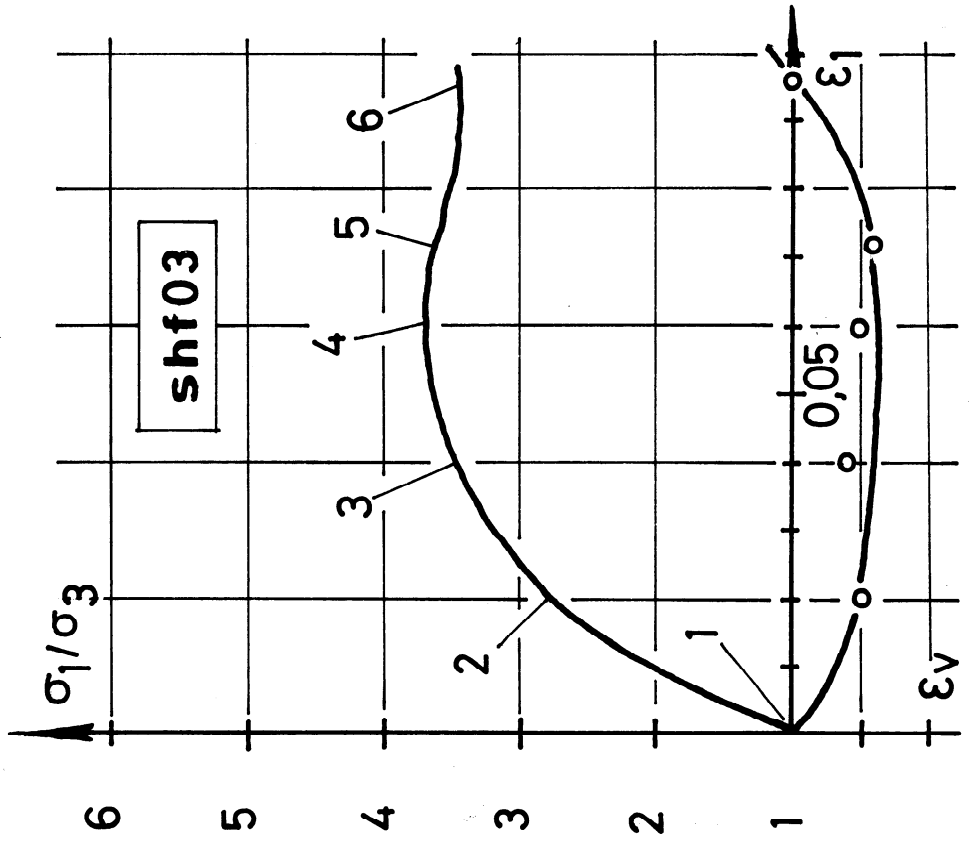

shf 15
shf 14
σ1/σ3
εv
ε1
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8
9

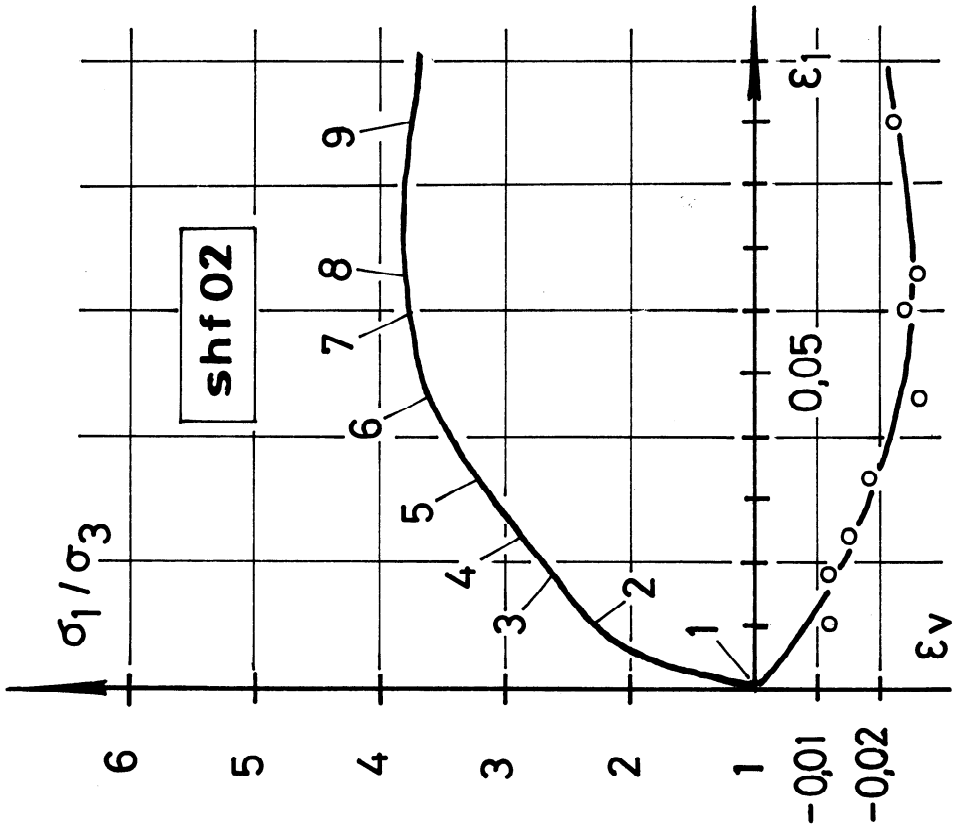

shf 17
σ_1/σ_3
ε_1
0,05
1
2
3
4
5
6
7
8

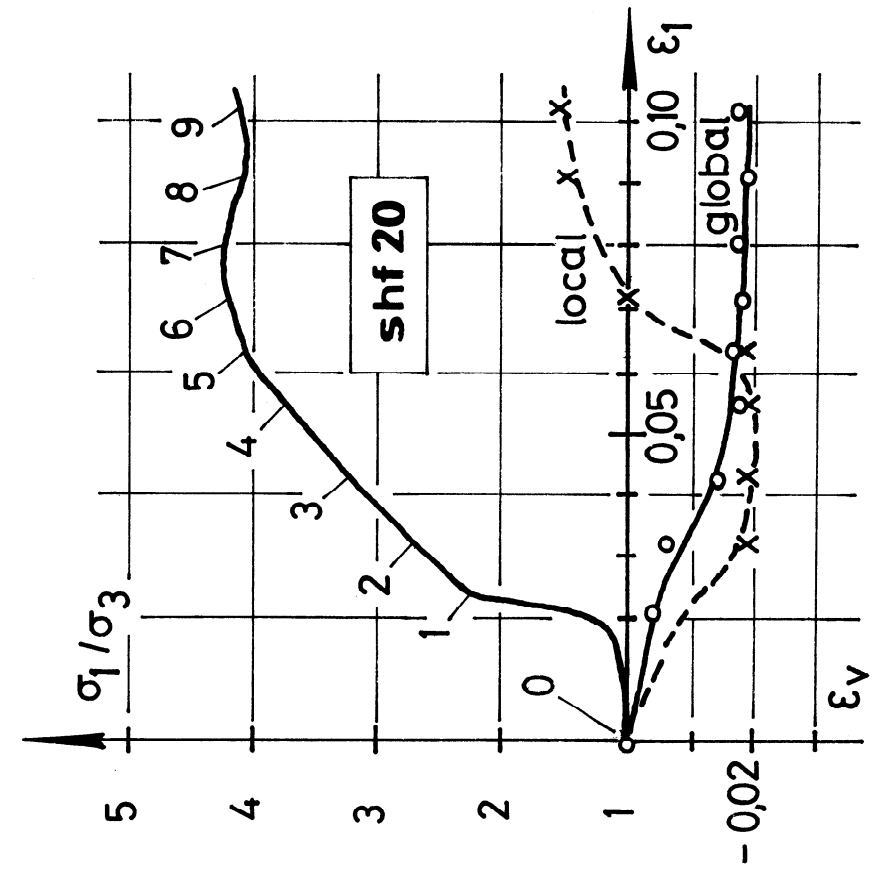

shf 16
σ_1/σ_3
ε_1
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8

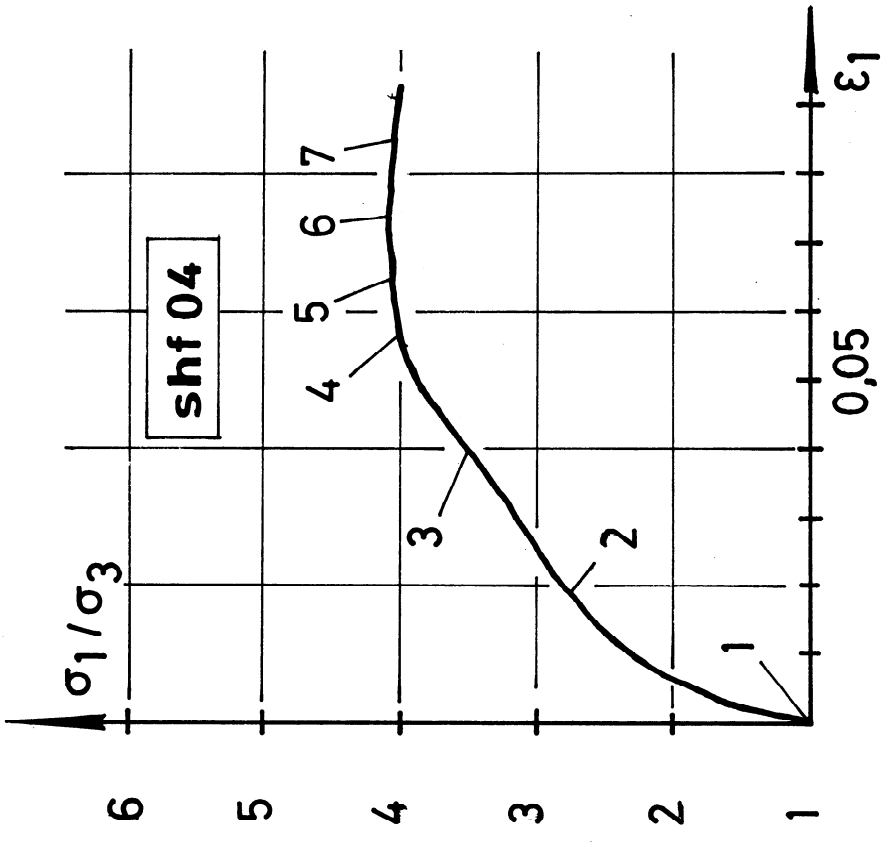

shf 19
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7

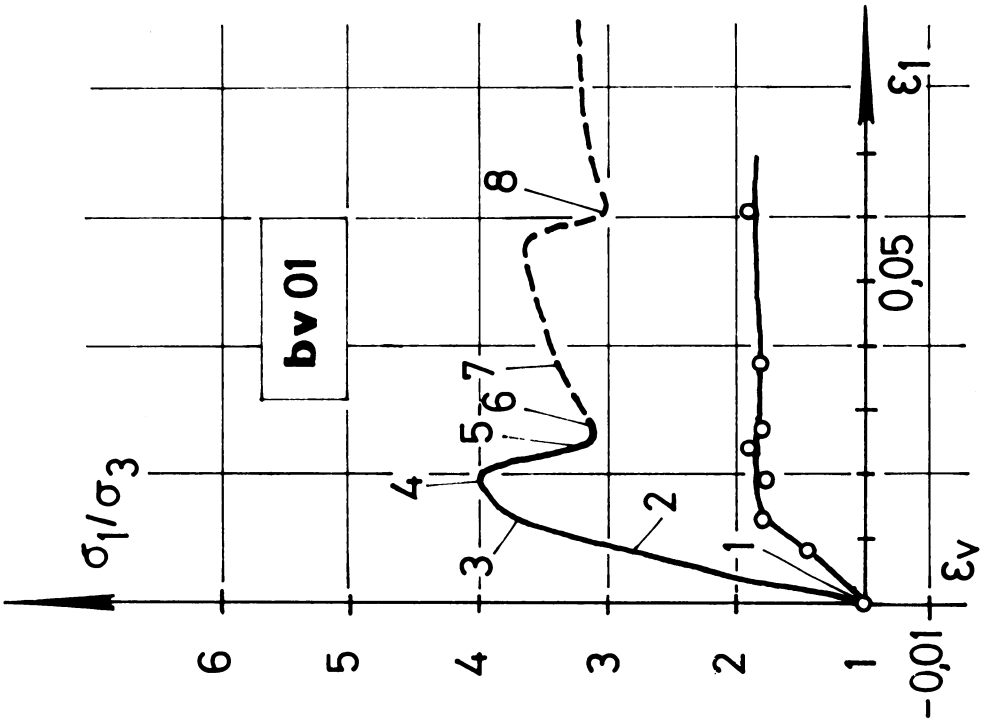

shf 18
σ_1/σ_3
ε_1
ε_v
0,05
-0,01
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


shf03
σ1/σ3
1
2
3
4
5
6
εv
0,05
ε1


shf02
σ1/σ3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
εv
-0,01
-0,02
0,05
ε1


shf 20
σ1/σ3
ε1
εv
local
global
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0,10
0,05
-0,02


shf 04
σ1/σ3
ε1
1
2
3
4
5
6
7
0,05


bv 01
σ1/σ3
6
5
4
3
2
1
8
7
6
5
4
3
2
1
ε1
0,05
-0,01
εv

REFERENCES

****

1 ANAND L. "Plane deformation of ideal granular material", J. Mech. Phys. Solids, vol 31 no2, pp105-122, 1983.

2 ARTHUR J.R.F., DUNSTAN T., AL-ANI Q.A.J.L. and ASSADI A. "Plastic deformation and failure in granular media", Geotechnique 27, pp 53-74, 1977.

3 ARTHUR J.R.F. And DALILI A., "On the lubrification of rubber surfaces", Géotechnique 27, pp 96-98, 1977.

4 ARTHUR J.R.F. and DUNSTAN T. "rupture layers in granular media" IUTAM conf. def. fail. gran. media, Delft, 1982.

5 BENEFICE P. et BOEHLER J.P. "The application of stereogrammetry to the analysis of displacement fields in solids mechanics, Proc. IUTAM Symposium on Optical methods in Mechanics of solids, A. LAGARDE éd., Poitiers, 1979.

6 BEYNET J. M> et TRAMPCZYNSKI W., "Application de la stéréophotogram métrie a la mesure des déplacements et a l'étude de l'écoulement matériaux", Matériaux et Constructions, vol. 10, n°59, pp281-288, 1977.

7 BISHOP A.W. and GREEN A.E. "The influence of end restraint on the compression strength of a cohesionless soil", Géotechnique 15, no 3, 1965.

8 BONNEVAL H. "Photogrammétrie générale", Eyrolles Ed., Paris, 1972

9 BOULON,CHAMBON,DARVE,FORAY,MORELOT,PUECH et ZINEBI,"Tassement et force portante des pieux en milieu pulvérulent", 6ième congrès Européen de mécanique des sols et des travaux de fondation, Vienne, vol I.2, 1976.

10 BOULON M., CICHY W., DUTHILLEUL B., "Modèle numérique de rupture localisée dans les milieux pulvérulents", Actes du colloque méthodes de calcul du MIR, Sofia Antipolis, 3-4 mars 1983.

11 BOULON M. "Une approche de simulation numérique des comportements des pieux chargés axialement", Thèse de doctorat d'état, a paraitre, 1984.

12 BOUVARD D. "Rhéologie des milieux pulvérulents : étude expérimentale et identification d'une loi de comportement", Thèse de docteur ingénieur, Grenoble, 1982.

13 BUTTERFIELD R., HARKNESS R.M., and ANDRAWES K.Z., "A Stereo-photogrammetric Method for Measuring Displacement Fields", Géotechnique, vol. 20, n°3, p.308-314, 1970.

14 CACQUOT A. et KERISEL J., Traité de mécanique des sols, Editeur Gauthier-Villard, Paris, 1966

15 CAMBOU B. "Orientationnal distributions of contact forces as memory parameters in a granular material", IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Material, Delft, Ed. Vermeer-Luger, 1982.

16 CAUSSIGNAC J. M. "Application de l'holographie a l'analyse des contraintes", Rapport de recherche LCPC n°84, 1978.

17 CHAMBON R. "Application de la méthode des éléments finis et d'une loi rhéologique incrémentale aux calculs de mécanique des sols", Thèse de Docteur-ingénieur, Grenoble,1975.

18 CHAMBON R. and RENOUD-LIAS B., "Incremental non linear stress-strain relationship for soils and integration by F.E.M.", Num. Meth. in Geom. 1, pp 405-413, W. Wittke Ed., A. A. Balkema Rotterdam, 1979.

19 CHAMBON R., "Contribution a la modélisation numérique physique non-linéaire des sols", Thèse de doctorat d'état, USMG Grenoble, 1981.

20 CHAMBON R., "Une loi rhéologique incrémentale non linéaire pour les sols non visqueux", JMTA, vol 3, n°4, 1984.

21 CHAMBON R. et DESRUES J. "Quelques remarques sur le problème de la localisation en bande de cisaillement", Mech. Res. Comm. à paraitre, 1984.

22 CLOUGH R.W. et PENZIEN J. "Dynamique des structures, tome 1, Ed. Pluralis, 1980.

23 COULOMB C.A., "Essai sur une application des règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs a l' architecture, Académie Royale des Sciences, 1773

24 COUSSY O. et SALENCON J., "Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul a la rupture", Annales des Ponts et Chaussées, no 12, octobre 1979.

25 CUNDALL P.A. and STRACK O.D.L "A discrete numerical model for granular assemblies", Geotechnique 29, pp 47-65, 1979.

26 cundall82; CUNDALL P.A., DRESHER A. and STRACK O.D.L. "Numerical experiments on granular assemblies; measurements and observation" IUTAM conf., Delft, 1982.

27 DANTU p. "Contribution a l'etude mecanique et geometrique des milieux pulverulents", Proc. Fourth Int. Conf. Soil Mech. Found. Engng, Londres, pp 144-148, 1957.

28 DANTU P. "Etude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maxima" Proc. 5th Int. Conf. Soils Mech. Found. Engng. 1, pp 61-70, 1961.

29 DARVE F. "Une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Application aux sols", Thèse de doctorat d'état, USMG Grenoble, 1978.

30 DARVE F., DESRUES J. et JACQUET M. "Les surfaces de rupture en mécanique des sols en tant qu'instabilité de déformation", Cahiers du groupe francais de rhéologie, tome V, 3, pp93-106, 1980.

31 DARVE F. "Une loi rhéologique incrémentale non linéaire pour les solides", Mech. Res. Comm. vol 7, pp 205-212,1980

32 DARVE F. "An incrementally non linear constitutive law of the second order and its application to localisation", Int. Conf. on Const. Laws for Engng Mat., Tucson, 1983.

33 DEGNY E. "Etude du comportement d'un sable dense à l'aide d'une presse tridimensionnelle", Thèse de docteur ingénieur, Grenoble, 1984.

34 DESRUES J. "Contribution à l'étude du tassement des fondations profondes", Thèse de docteur ingénieur, Grenoble, 1977.

35 DESRUES J. et DUTHILLEUL B. "Mesure du champ de déformation d'un objet plan par la méthode stéréophotogrammétrique de faux relief" Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol 3, N°1,p.79-103,1984.

36 DESRUES J., LANIER J., STUTZ P. "Localisation of the deformation in tests on sand sample", Engineering Fracture Mechanics, 1984.

37 DESRUES J. "Sur l'application de la stéréophotogrammétrie a la mesure des grandes déformations", Revue Française de Mécanique, n° 1983-3, p.55-63,1983

38 DRESCHER A. and JOSSELIN DE JONG G., Photoelastic verification of a model for the flow of a granular material", Journal of Mech. and Physics of Solids, 20 pp 337-351, 1972.

39 DRESCHER A. "An experimental investigation of flow rules for granular materials using optically sensitive glass particles", Géotechnique 26, pp591-601, 1976.

40 DRUCKER D.C. "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", Proc. 1st US Nat. Congress A pplied Mech., ASME, pp 487-491, 1951.

41 DRUCKER D.C. and PRAGER W. "Soil Mechanics and plastic analysis of limit design", Q. Appl. Math. 10, pp 157-165, 1952.

42 DRUCKER D.C. "A definition of stable inelastic material", J. Appl. Mech. 26, pp 101-106, 1959.

43 DUTHILLEUL B., "Rupture progressive: simulation physique et numérique", Thèse de docteur ingénieur, INPG Grenoble, 1983.

44 GERMAIN "Cours de Mécanique des Milieux Continus, tome 1, Masson, Paris,1973.

45 GOODMAN R.E, TAYLOR R.L., BREKKE T.L., "A model for the mechanics of jointed rock", J. of the Soils and Found. div. , ASCE, vol94, pp637-659,1968.

46 GUDEHUS, "A comparison of some constitutive laws for soils under radially symetric loading and unloading", in Num. Meth Geom., WITTKE-BALKEMA ED. Rotterdam, 1979

47 GUELIN P., TERRIEZ J.M. et WACK B., "local and non-destructive measurements of the density in a classical triaxial apparatus", Mech. Res. Comm. 3, pp 319-323, 1976.

48 HABIB P. "La resistance au cisaillement des sols", Annales de l'ITBTP, no 67, Janvier 1953.

49 HABIB P. "Les surfaces de glissement en mécanique des sols" a paraitre dans la revue francaise de géotechnique(RFG) 1984

50 HADAMARD J. "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", Paris, 1903.

51 BENT HANSEN "Line rupture regarded as narrow rupture zones", Comptes rendus de la conférence sur les problèmes de poussée des terres, Bruxelle, tome 1 pp 39-49, 1958.

52 HILL R. , J.Mech. Phys. Solids 6, p 236, 1958.

53 HILL R. "Acceleration waves in solids", J. Mech. Phys. Solids 10, pp 1-16, 1962.

54 HILL R. and HUTCHINSON J.W. "Bifurcation phenomena in the plane tension test", J. Mech. Phys. Solids 23, pp 239-264, 1975.

55 HILL R. "Aspects of invariance in solids mechanics", Advances in Applied Mechanics 18, pp 1-75, 1978.

56 JACOBSEN H.M. "A True triaxial apparatus", Euromech 157 "Quality of mechanical observations on particulate media", Copenhague,1982.

57 JAMES R.G. and BRANSBY P.L. "Experimental and theoretical investigations of a passive earth pressure problem", Géotechnique 20, no 1, pp 17-37, 1970.

58 de JOSSELIN DE JONG G. "The undefiniteness in kinematics for friction materials", Proc. Conf. Earth Pressure Problems, Brussels, tome 1, pp 55-70, 1958.

59 de JOSSELIN DE LONG "The Double Sliding Model for Granular Assemblies", Géotechnique 21. pp 155-163, 1971.

60 de JOSSELIN DE JONG G. Arch. Mech. 29, pp 561, 1977.

61 KIRKPATRICK W.N. and BELSAW D.J. "On the interpretation of the triaxial test", Géotechnique 18, 1968.

62 KOLYMBAS D. "Bifurcation analysis for sand sample with non-linear constitutive equation", Ingenieur-Archiv 50, pp 131-140, 1981.

63 LABANIEH S. Thèse d'etat, a paraitre.

64 LADE P.V. "Localisation effects in triaxial tests on sand" IUTAM Conf. Def. Fail. Gran. Media, Delft, 1982.

65 LEE K.L. "Comparison of plane strain and triaxial tests on sand", J. of Soil Mech. and Found. Div. ASCE vol 96 SM3, pp 901-923, 1970.

66 LUONG P., GANDAIS M., et ALLEMAND P. "Comportement mécanique des sols injectés aux produits chimiques", Annales de l'ITBTP,

67 MANDEL J. "Condition de stabilité et postulat de Drucker", Rhéologie et Mécanique des Sols, Kravtchenko et Syries Ed., IUTAM Symposium, Grenoble, 1964.

68 MANDL G. and FERNANDEZ LUQUE R., "Fully developped Plastic Flow of Granular Materials", Géotechnique 20, pp 277-307, 1970.

69 McGOWN A., ANDRAWES K.Z. and AL-HASANI M.M. "Effect of inclusion properties on the behaviour of sand", Géotechnique 28, no 3, pp 327-346, 1978.

70 MEHRABADI M.M and COWIN S.C., "Initial Planar Deformation of Dilatant Granular Materials", J. Mech. Physics Solids 26, pp 269-284, 1978.

71 MEHRABADI M.M and COWIN S.C. "Prefailure and Postfailure Soils Plasticity Models", J. of Engng Mech. Div ASCE 106, pp 991-1003, 1980.

72 MEHRABADI M.M and COWIN S.C. "On the double sliding rotating model for the deformation of granular materials", J. Mech. Phys. Solids 29, pp 269-282, 1981.

73 NEEDLEMAN A. "Non normality and bifurcation in plane strain tension and compression", J. Mech. Phys. Solids 27, pp 231-254, 1979.

74 PASTOR J. "Application de la théorie de l'analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution", Thèse d'état, Grenoble, 1983

75 RADENKOVIC D. "Théorèmes limites pour un matériau de coulomb a dilatation non standardidée", CRAS t.252, p.4103, 1961

76 RANIECKI B. and BRUHNS O.T. " Bounds to bifurcation stresses in solids with non associated plastic flow rule at finite strain", J. Mech. Phys. Solids 29, pp153-172, 1981.

77 READS D.W. and GREEN G.E.,"Independent stress control and triaxial extension tests on sand", Géotechnique 26, no 4, pp 551-576, 1976

78 RICE J.R. "The initiation and growth of shear bands", Symposium on Plasticity and Soils Mechanics, Cambridge (UK), 1973.

79 RICE J.R. "The localisation of plastic deformation", Theoretical and Applied Mechanics, W.T. Koiter Ed., North Holland Publ. Comp., 1976.

80 RICE and RUDNICKI, A note on some features of the theory of localisation of deformation", Int. J. sol. struct. 16, pp 597-605, 1980.

81 ROSCOE, K.H., ARTHUR J.R.F and JAMES R.G. "The determination of strains in soils by an X-ray method" Civ., Engng Publ Wks Rew. 58 pp 873-876 and 1009-1012, 1963.

82 ROSCOE K.H. "The influence of strains in soils mechanics", Tenth Rankine lecture, Géotechnique 20, pp 129-170, 1970.

83 ROWE P.W., BARDEN L., LEE I.K. "Energy components during the triaxial cell and direct shear tests" Géotechnique 14, pp 247-261, 1964.

84 ROWE P.W. And BARDEN L. "Importance of free ends in triaxial testing" J. of the Soil Mech. and Found. Div. ASCE, January 1964.

85 RUDNICKI and RICE, "Conditions for the localisation of deformation in pressure sensitive dilatant material", J. Mech. Phys. Solids 23, pp 371-394, 1975.

86 SALENCON J. "Calcul a la rupture et analyse limite", Cours ENPC Paris, 1978

87 SAWCZUK A. Communication sur l'application de la tomodensitométrie à la mécanique des milieux déformables, Symposium "Plasticity today", Udine, 1983.

88 SCARPELLI G. and WOOD D.M. "Experimental observations of shear band patterns in direct shear tests", IUTAM Conf. Delft, 1982.

89 SERRA J. "Image analysis and mathematical morphology", London, Academic Press, 1982.

90 SPENCER A.J.M. "A Theory of Kinematics of ideal soils under plane strain conditions" J. Mech. Physics of Solids 12, pp337-351, 1964.

91 STROUD M.A. "The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus" Phd Thesis Cambridge University, 1971.

92 THOM,R. "stabilité structurelle et morphogenèse : essai d'une théorie générale des modèles,W.A. Benjamin inc., Ediscience SA Paris, 1972.

93 THOMAS T.Y., "Plastic flow and fracture in solids", Academic Press, New York, 1961.

94 THOMPSON, J.M.T and HUNT, G.W., "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley and sons, 1973.

95 THOMPSON and HUNT "Toward a Unified Bifurcation Theory", J. Appl. Math. Mech, 26, 1975.

96 THORNTON C. "The conditions for failure of a face-centered cubic array of uniform rigid spheres", Geotechnique 29, pp441-459, 1979.

97 TRATAPEL G. "Contribution à l'étude du comportement mécanique d'un milieu analogique bidimensionnel", Thèse de docteur ingénieur, Grenoble, 1977.

98 TROLLOPE D.H. and BURMAN B.C., "Physical and numerical experiments with granular wedges", Geotechnique 30, pp 137-157, 1980.

99 TURGEMAN S. "Contribution au calcul des charges limites en milieu isotrope et orthotrope de révolution par une approche cinématique numérique" Thèse d'état, Grenoble, 1983

100 TVERGAARD V. "Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface", J. Mech. Phys. Solids 30, pp 399-425, 1982.

101 VARDOULAKIS I., GOLDSCHEIDER M. and GUDEHUS G."Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem", Int. j. num. anal. meth. geom. 2, pp99-128, 1978.

102 VARDOULAKIS I. "Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples", Acta Mechanica 32, pp 35-54, 1979.

103 VARDOULAKIS I. "Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests", Int J. Num. Anal. Meth. Geom. 4, pp103-119, 1980.

104 VARDOULAKIS I. "Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sand samples", Int. J. Solids and Structures 17, pp 1085-1101, 1981.

105 VARDOULAKIS I. "Rigid granular constitutive model for sand and the influence of the deviatoric flow rule", Mech. Res. Comm. 8, pp 275-280, 1981.

106 VARDOULAKIS I. and GRAF B. "Imperfection sensitivity of the biaxial test on dry sand", IUTAM conf. Def. Fail. Gran. Media, Delft, 1982.

107 VERMEER P.A. "A simple shear band analysis using compliances", IUTAM conf. Delft, 1982.

108 WIENDIECK . "L'anisotropie des milieux pulvérulents et son influence sur les tassements, Thèse de docteur ingénieur, Grenoble 1964.

109 WINDISH S. and SOULIE M. "Technique for study of granular material" J. of Soil Mech. and Found. Div. ASCE 96 SM4, pp 1113-1126, 1970.

110 ZIENKIEWICZ "La méthode des éléments finis", Ediscience, Paris, 1975.

74 01039

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 Avril 1974,

VU les rapports de M. AURIAULT J.L.

M. SALENCON

M. VARDOULAKIS

M. DESRUES Jacques est autorisé

à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de

DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à GRENOBLE, le [illegible]

Le Président de l'U.S.M.G.

Le Président

M. TANCHE

Le Président de l'I.N.P.G.

D. BLOCH
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président.