

0min16

Dans cette thèse, nous étudions un problème de Helmholtz en deux dimensions.

Les paquets d'ondelette, et les cosinus locaux de Malvar sont les deux compressions étudiées, pour diversifier l'état de l'art actuel plutôt basé sur les méthodes multipôles et manquant de fondations hautes fréquences. Nous présentons des résultats d'analyse dure.

MÉTHODES D'ONDELETTES POUR L'ANALYSE NUMÉRIQUE

D'INTÉGRALES OSCILLANTES

Daniel Goujot

Sous la direction de P.G. Lemarié-Rieusset

Département de mathématiques

Université d'Évry-Val-d'Essonne

Après avoir défini l'équation dans la partie A et le principe de discrétisation dans la partie B, nous étudierons en détail la structure de la matrice du système provenant de cette discrétisation. Il y a deux parties bien différentes dans la matrice, la partie de la matrice avec les interactions distantes étudiée en partie C, et la partie de la matrice contenant des interactions locales étudiée en partie D. Puis, dans la partie E nous verrons pourquoi la discrétisation en ondelette ne donne pas de bon résultats. Enfin, dans la partie F, qui est courte, nous verrons un résultat de calibration du pas de discrétisation.

PLAN DE L'EXPOSÉ

- A : L'équation CFIE
- B : Le processus de discrétisation
- C : Interactions distantes
- D : Interactions
- E : Modification des ondelettes pour un fenêtrage fréquentiel précis
- F : Calibration du pas de discrétisation

0min16 Nous résolvons une équation $AJ = L$ où la fonction recherchée J , de carré intégrable, est une quantité surfacique à un objet S ici dessiné par un haricot.

Cette intensité surfacique $Jd\sigma$ émet le champ électrique diffracté noté E^{diff} qui est la convolution de l'intensité surfacique $Jd\sigma$ par la solution fondamentale G de l'équation de Helmholtz à la fréquence k . $E^{diff} = G \star Jd\sigma$ Par exemple, une fonction J qui est égale à une distribution de Dirac placée en cet endroit-là, au sommet du haricot, figure 1, donnerait ce champ diffracté qui est une translatée de la solution fondamentale G . En fait, le courant induit J est non-nul sur une grande partie du bord de S , et donne le champ diffracté figure 2.

Ce courant J est induit par un champ électrique incident E^{inc} , qui détermine le second membre L de l'équation. $E^{diff} = G \star Jd\sigma$
 $E^{inc} \rightarrow L$
 Nous supposons que le champ électrique physique total, qui est la somme de E^{inc} et de E^{diff} , s'annule sur le bord de S , comme nous le voyons figure 4.

A^{1/4} CONTEXTE PHYSIQUE

$$\Delta E + k^2 E = 0$$

$$E^{diff} = G \star Jd\sigma$$

Nous résolvons l'équation $AJ = L$.

L'intensité $J \in L^2(\partial S)$ engendre $E^{diff} = G \star Jd\sigma$:
 potentiel de simple couche, avec $G(x) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|x\|)$.
 Le second membre $L \in L^2(\partial S)$ dépend de E^{inc} .

} Vérifient
 $\Delta E + k^2 E = 0$.

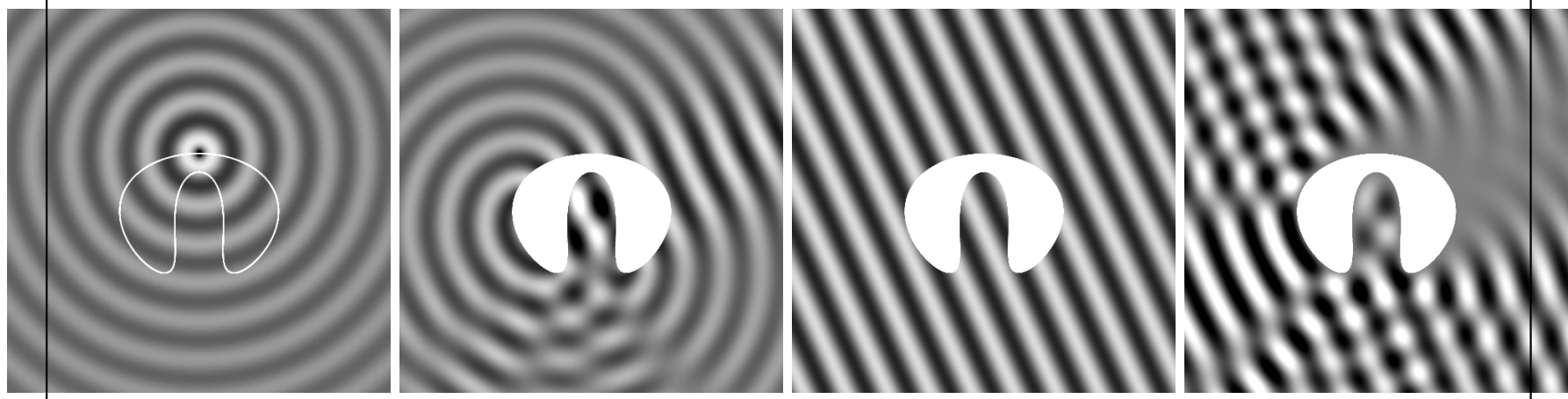


Fig 1:
 ∂S et G

Fig 2:
 $Re(E^{diff})$.

Fig 3:
 $-Re(E^{inc})$.

Fig 4:
 $Re(E^{total})$.



La somme $E^{total} = E^{inc} + E^{diff}$ est le courant électrique total.

1min30 Pour définir l'opérateur A de l'équation, nous devons prolonger ces trois champs électriques à l'intérieur de S . Le champ électrique total s'annule sur la surface de S , donc il est naturel de le prolonger par 0 à l'intérieur de S . Le champ électrique incident, qui est une onde plane, se prolonge naturellement dans S .

En utilisant cette relation entre les trois champs $E^{diff} + E^{inc} = E^{total}$, nous trouvons une extension continue du champ diffracté E^{diff} , en utilisant l'opposé du champ incident.

La valeur, à l'intérieur de S , de la convolution définissant E^{diff} donne en fait la même prolongation.

Nous avons la nullité de la valeur au bord du champ total E^{total} et nous avons aussi la nullité de la dérivée normale interne, avec la normale orientée intérieurement comme ceci. L'équation que nous étudions, dite équation intégral des champs combinés ou CFIE en anglais, consiste à prendre une combinaison linéaire de la valeur au bord et de la dérivée normale interne, et cette combinaison linéaire est nulle.

Ainsi, la relation liant le second membre L au champ incident E^{inc} est donné par la même combinaison linéaire.

Prolongation de E^{total} , E^{inc} et E^{diff} à l'intérieur :

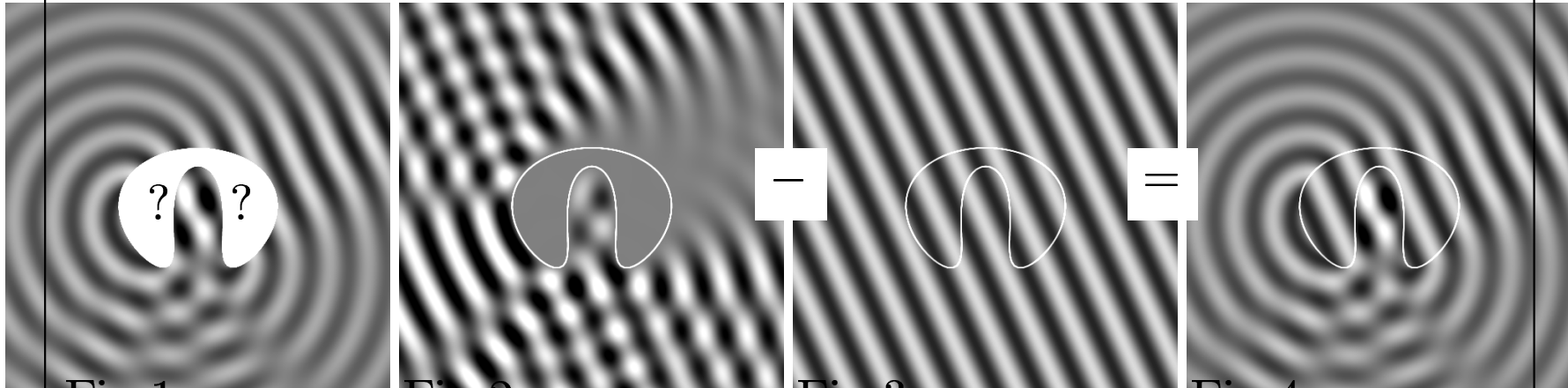


Fig 1:
 $Re(E^{diff})$

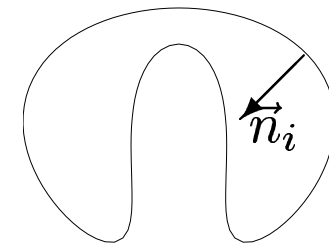
Fig 2:
 E^{total} nul sur ∂S $-E^{inc}$ onde plane

Fig 3:
 E^{diff} avec $-E_S^{inc}$

Le potentiel simple couche fait exactement la même prolongation.

Combinaison "CFIE" : $0 = i\alpha k \left(E_{|\partial S}^{diff} + E_{|\partial S}^{inc} \right) - 2 \frac{d}{dn_i} (E^{diff} + E^{inc}) = AJ - L$

$$L = -i\alpha k E_{|\partial S}^{inc} + 2 \frac{d}{dn_i} E^{inc}$$



2min50 De même, la relation liant AJ au champ diffracté E^{diff} est donnée par la même combinaison linéaire.

En remplaçant le champ diffracté E^{diff} par la convolution qui le définit $E^{diff} = G \star J d\sigma$ et en utilisant une relation de saut pour potentiel simple couche, nous obtenons une expression de l'opérateur A comme l'identité ajoutée à deux opérateurs intégraux.

Les théorèmes 2.27 et 2.28 de la thèse montrent que ces deux opérateurs intégraux ont une norme d'opérateur de L^2 dans H^1 en $k^{3/2}$ racine du log. Un second résultat de la thèse est que ces deux opérateurs ont une norme de L^2 dans L^2 en $\sqrt{k} \log k$. Le manuscrit le montre explicitement pour le second opérateur intégral, et l'estimation page 159 peut en fait fournir le cas général.

Nous indiquons la numérotation qui est dans la dernière page du manuscrit.

Ces résultats restent vrais lorsque S a un nombre fini de coins, il faut juste remplacer l'identité par un opérateur inversible uniformément en la fréquence k . Les démonstrations sont basées sur des asymptotiques connues sur la solution fondamentale G et sur les fonctions de Hankel. Ainsi, nous avons des résultats sur le contrôle à hautes fréquences de la norme de l'opérateur de notre équation.

A^{1/4} OPÉRATEUR DE FREDHOLM HAUTES FREQUENCES

$$AJ = i\alpha k E_{|\partial S}^{diff} + 2 \frac{d}{dn_i} E^{diff}$$

$$AJ(s') = J(s') + \int_{\partial S} i\alpha k G(s' - s) J(s) ds + 2 \int_{\partial S} \frac{dG}{dn'_i}(s' - s) J(s) ds$$



théorème A (2.27-2.28)

Uniformément en $k \geq 1$, sans (ou avec) coins :

$$\|A - \text{Id}\|_{L^2 \rightarrow H^1} = O(k^{3/2} \sqrt{\log k})$$

$$\|A\|_{L^2 \rightarrow L^2} = O(\sqrt{k} \log k)$$

2min50 Comme nous avons un facteur imaginaire pur dans la combinaison linéaire de la CFIE, cette formule de Stokes permet de montrer l'injectivité de A : en effet, si nous avons $AJ = 0$ c'est à dire si ceci est nul, alors nous voyons que le membre gauche de cette formule de Stokes est imaginaire pur négatif, alors que le membre droit ici est réel : alors le champ diffracté E^{diff} est nul sur le bord de S , et l'unicité du problème de Helmholtz extérieur montre que E^{diff} est nul à l'extérieur

Alors les formules de saut pour un potentiel simple couche montrent que J est nul. Donc A est injectif.

Or A est un opérateur de Fredholm de second espèce. Alors, L'alternative de Fredholm transforme cette injectivité en inversibilité. Comme l'alternative de Fredholm n'est pas une méthode constructive, nous ne disposons pas d'estimations en hautes fréquences sur la norme de A^{-1} . Cette norme intervient pourtant dans la suite. Mais heureusement, nous avons trouvé un moyen de réduire la dépendance en cette norme, en parvenant à la remplacer par sa racine dans la partie 4 de la thèse expliquant quel doit être le pas de discrétisation minimal h à hautes fréquences.

$A^{4/4}$ DU NOUVEAU AVEC L'INVERSIBILITÉ DE A

- Le i de $AJ = i\alpha k E_{|\partial S}^{diff} + 2 \frac{d}{dn_i} E^{diff}$, une formule de Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} E^{diff}(s) \frac{\overline{dE^{diff}}}{dn_i} ds &= \int_S (\overline{E^{diff}(s)} \Delta E^{diff}(s) + |\nabla E^{diff}(s)|^2) ds \\ &= -k^2 \int_S (|E^{diff}(s)|^2 + |\nabla E^{diff}(s)|^2) ds \end{aligned}$$

et $J = \frac{d}{dn_i} E^{diff} + \frac{d}{dn_e} E^{diff}$ montrent l'injectivité de A .

- L'alternative de Fredholm montre que l'opérateur de Fredholm de seconde espèce A est inversible. Mais pas uniformément en k .
- Bonne nouvelle : pour bien poser le problème numérique, $\sqrt{\|A^{-1}\|} kh \leq C$ suffit au lieu de $kh \|A^{-1}\| \leq C$.

2min50 Ainsi, nous avons vu que l'équation était inversible, et nous pouvons maintenant la discrétiser. Commençons par discrétiser J , la solution, représentée à gauche.

Les deux courbes en gras de cette illustration à gauche, sont le bord du diffractant, vu de biais, sous l'angle de l'onde incidente E^{inc} , et la partie réelle de la solution J de notre équation. En trait fin, c'est la partie imaginaire.

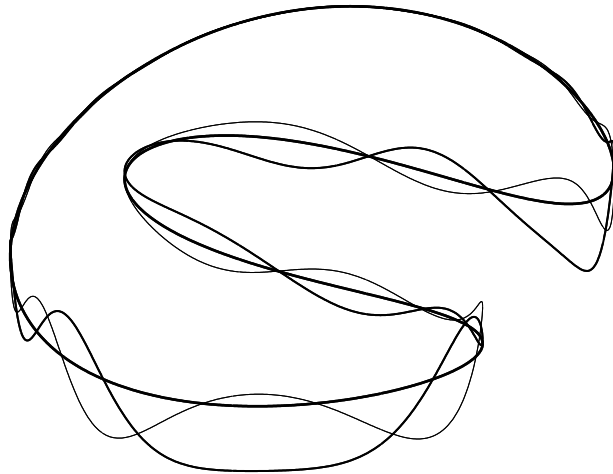
Nous allons remplacer cette fonction J par sa projection orthogonale notée $P_h J$ sur un espace de discrétisation V_h .

Sur ce dessin, V_h est l'espace des fonctions constantes par morceaux, par rapport à la subdivision de S en 512 morceaux égaux.

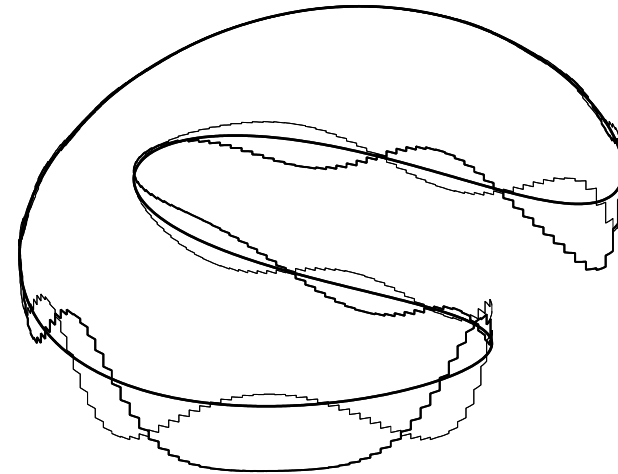
V_h peut en fait être un autre espace, de dimension finie. Nous verrons les ondelettes et les paquets d'ondelettes, et la base de Malvar.

Nous discrétisons, de la même manière, le second membre.

B / 5 DISCRETISATION DE LA LA SOLUTION J



∂S , $\mathbf{Re}(J)$ et $\mathbf{Im}(J)$



$P_h J \in V_h$

$P_h = \pi_{V_h}^\perp$. $N = \dim(V_h)$ degrés de liberté.

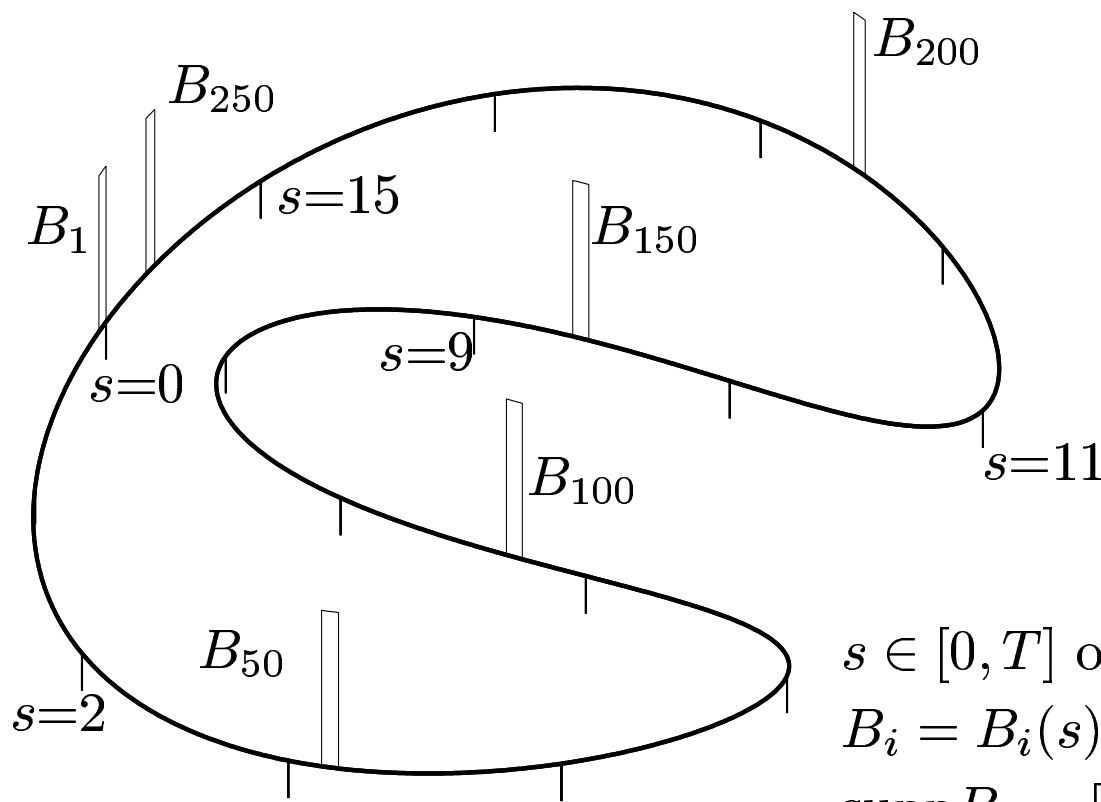
Sur ce dessin, $N = 256$. Nous cherchons à calculer $P_h J$.

Autres possibilités de discrétisation : ondelettes, Malvar.

Pour L le second membre : $P_h L \in V_h$. Et pour A ?

2min50 Afin de pouvoir illustrer la discrétisation de l'opérateur A , nous avons besoin d'un paramétrage s du bord du diffractant S . Ici nous avons une base constituée des fonctions B_i pour i entre 1 et 256 de l'espace V_h choisi dans l'exemple ci-dessus.

B_i DISCRETISATION DU BORD ∂S



$B = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_N)$
base orthonormée.

$s \in [0, T]$ où $T = 16$.
 $B_i = B_i(s)$.
 $\text{supp} B_i = [\frac{i}{N}T, \frac{i+1}{N}T]$.
 $i = 1, \dots, N$ où $N=256$.

2min50 La discrétisation de A est la composée de la projection sur V_h avec la restriction de l'opérateur A à V_h . Nous avons alors un endomorphisme de l'espace de dimension finie V_h .

Nous écrivons la matrice de cet endomorphisme dans la base B , et les coefficients matriciels valent des produits de Galerkin.

Complétons cette matrice en un système : le vecteur solution est constitué des coordonnées de la solution J dans la base B , et le vecteur second membre est constitué des coordonnées du second membre L dans la base B .

Nous représentons chaque coefficient de la matrice par un petit carré, noir si sa partie réelle est sensiblement égale à 1, gris clair si elle est petite, blanc si elle est très petite. Nous regroupons ces petits carrés pour former un grand carré qui représente la matrice du système de rigidité.

Nous obtenons une matrice qui, visiblement sur cette représentation de sa partie réelle, est pleine. De plus, sa diagonale n'est pas dominante. Pour essayer de simplifier cette matrice, nous avons essayé d'autres bases.

B DISCRÉTISATION DE L'OPÉRATEUR A

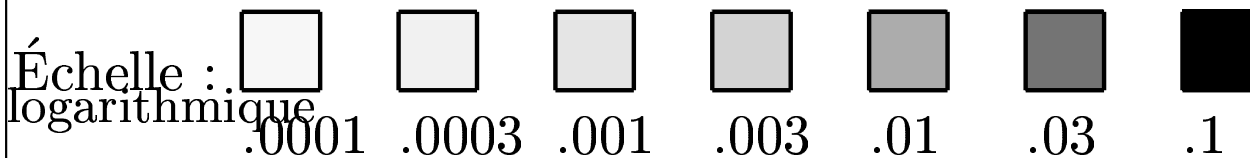
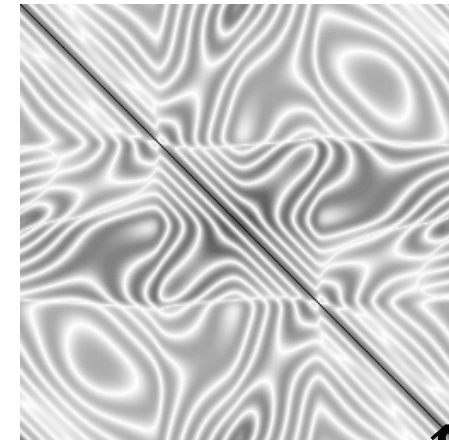
$A_h = P_h \circ A|_{V_h}$ est un endomorphisme de V_h .

Base orthonormée B avec $N = 512$:

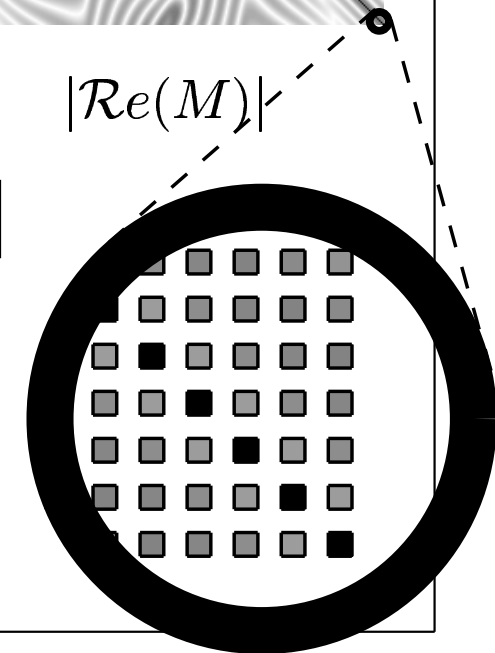
$$M = \left(\langle B_j | AB_i \rangle \right)_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N}}$$

Système :

$$M \times \left(\langle B_i | J \rangle \right)_{i=1, \dots, N} = \left(\langle B_i | L \rangle \right)_{i=1, \dots, N}$$

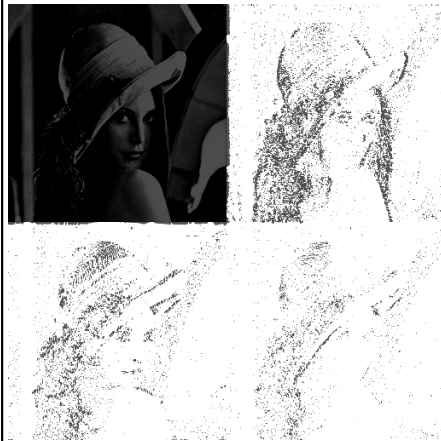


Matrice pleine. Mieux choisir B ?

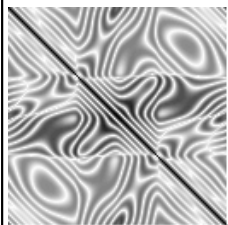
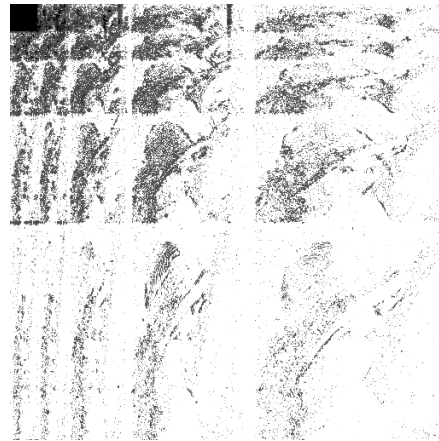


2min50 Par exemple, une décomposition bidimensionnelle en ondelettes, qui sur cette photo donne les quatre blocs bien connus, donne ces quatre blocs dans la matrice : cette matrice se comprime même mieux que l'exemple de la photo. Et cette décomposition en ondelette correspond à un autre choix de la base B . Nous avons choisi l'ondelette de Daubechies à 8 moments nuls. Lorsqu'on fait une décomposition en ondelettes sur plusieurs niveaux, pour les opérateurs il faut une décomposition tensorisée, ce qui donne ceci sur l'exemple de cette photo : tous les blocs ne sont plus carrés, et il y a des blocs rectangulaires. L'avantage est que ceci correspond à un choix de la base B . Nous remarquons que les blocs contenant une proportion majeure de gros coefficients sont les blocs les plus petits.

$B^{4/5}$ DISCRETISATION AVEC LES ONDELETTES



Daubechies à 8 moments nuls. $N = 512$



Ainsi, bonne compression lorsque $k = 2\pi$.

Hautes fréquences ?

2min50 Voici maintenant une petite vidéo illustrant la progression des ondes incidentes et émises.

Nous allons regarder les trois champs incident, diffracté et total, avec leur dépendance au temps en $e^{-i\omega t}$ qui est implicite lorsqu'on écrit une équation de Helmholtz.

Voici le champ incident, qui est une onde plane. Un obstacle, le diffractant S , est placé dans ce champ incident.

Alors il se forme l'intensité surfacique J déjà illustrée sur un transparent, et voici le champ diffracté E^{diff} qui est la convolée de $J d\sigma$ et de la solution fondamentale G $E^{diff} = G * J d\sigma$. Ce champ diffracté vérifie une condition aux limites à l'infini, qui est la condition de radiation sortante de Sommerfeld. Nous voyons bien ici que l'onde est en effet sortante sur tout le pourtour de cette image.

Voici maintenant le champ total, qui est la somme du champ incident et du champ diffracté $E^{total} = E^{inc} + E^{diff}$. Nous observons que ce champ est relativement petit derrière l'objet par rapport à l'onde incidente, c'est à dire que cette onde incidente ne traverse pas le diffractant, ce qui est normal physiquement. Nous vérifions aussi que ce champ total est nul sur le bord de l'objet.

Ce champ total se prolonge alors par 0 dans S , ce qui par cette relation $E^{total} = E^{inc} + E^{diff}$ donne cette prolongation du champ incident. Nous reconnaissons ainsi l'onde incidente, même si elle a changé de signe. la vidéo

Nous allons donc changer d'exemple, et dans les illustrations suivantes nous prendrons 20π pour le nombre d'onde. $k = 20\pi$

B / 5 RÉSULTAT DU SYSTEME DISCRETISE

Intermède vidéo avec E^{inc} , E^{diff} et E^{total} , où le facteur $e^{-i\omega t}$ est explicite.

- Condition de radiation sortante de Sommerfeld pour E^{diff} .
- Nullité de E^{total} sur ∂S .

Deux cas :

- $k = 2\pi$, $kT = 32\pi$ et $N = 512$.
- $k = 20\pi$, $kT = 320\pi$ et $N = 2048$.

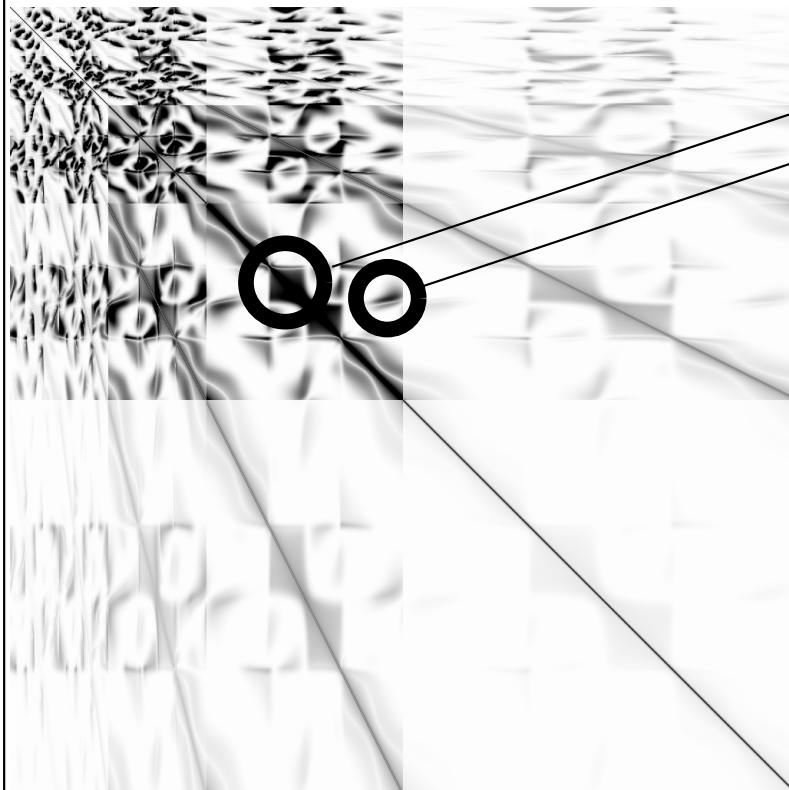
2min50 Voici la matrice de rigidité correspondant à la fréquence 20π que nous venons de voir, dans la base d'ondelettes. Nous remarquons que la compression n'est plus aussi efficace : les blocs contenant une proportion majeure de gros coefficients ne sont pas tous des petits blocs.

Dans l'image de gauche que nous avons déjà vue au transparent précédent, nous voyons que les gros blocs ont du contenu là où l'image originale a des singularités, par exemple au bord gauche du chapeau, ou là où l'image originale n'est pas dérivable à cause de la texture graphique du chapeau ou de la chevelure.

Dans l'image de droite, nous voyons que, de la même manière, les gros blocs ont beaucoup de coefficients de grande taille. Il y a même de l'ordre de k^2 coefficients, quand k est une grande fréquence : ainsi, la transformation en ondelette n'est pas très efficace.

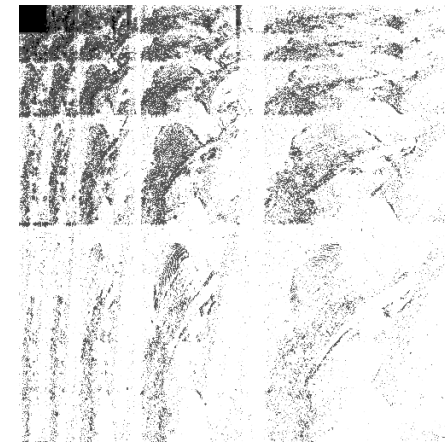
Nous allons maintenant aborder deux théorèmes, résultats de cette thèse, expliquant la structure visible ici de ces gros blocs. Un de ces théorèmes s'utilise pour les zones proches des diagonales des blocs, et par exemple explique la tache cerclée de gauche. L'autre théorème s'applique pour les zones extra-diagonales des blocs, et par exemple explique la tache cerclée de droite.

C^{7/5} : ONDELETTES HAUTES FRÉQUENCES



Théorème D
Théorème C

- .0001
- .0003
- .001
- .003
- .01
- .03
- .1



Complexité mémoire en $O(k^2)$. Pourquoi ?

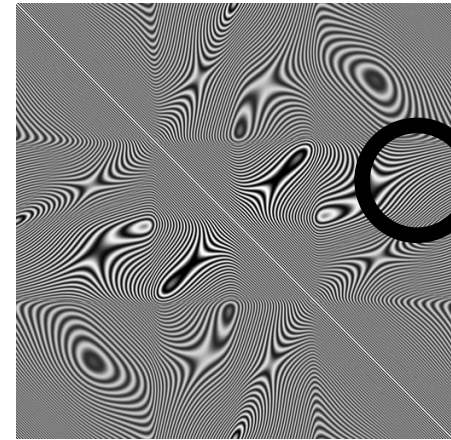
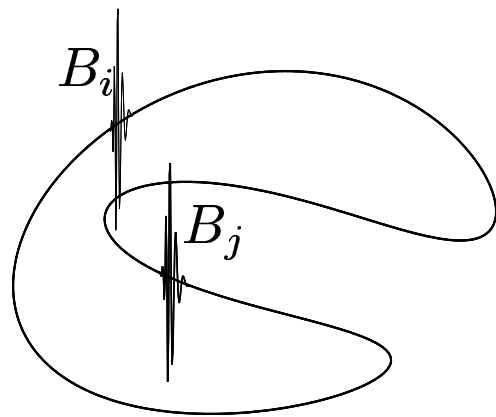
2min50 Prenons un coefficient de la tache cerclée de droite. Il correspond au produit de Galerkin $\langle B_j | AB_i \rangle$ pour deux fonctions B_i et B_j , qui sont dans notre exemple représentées ici.

Nous voyons que ces deux fonctions sont à supports restreints à deux morceaux du diffractant, et donc comme ce coefficient est aussi égal au produit scalaire de B_i tenseur B_j , seule la zone de l'opérateur qui est ici cerclée est importante pour ce coefficient.

C / 5 LES SUPPORTS DES ONDELETTES

Cas non-diagonal : le coefficient vaut, avec K le noyau de A :

$$\langle B_j | AB_i \rangle = \int_{\partial S} \int_{\partial S} K(s, s') B_i(s) B_j(s') ds ds' = \langle B_i \otimes B_j | K \rangle$$



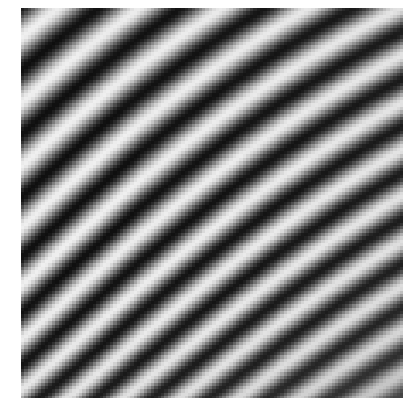
$B_i \otimes B_j$

K

□ positif

■ 0

■ négatif



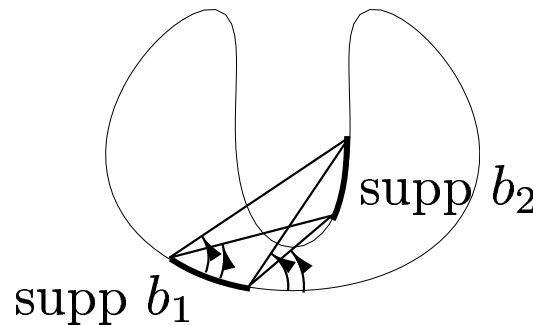
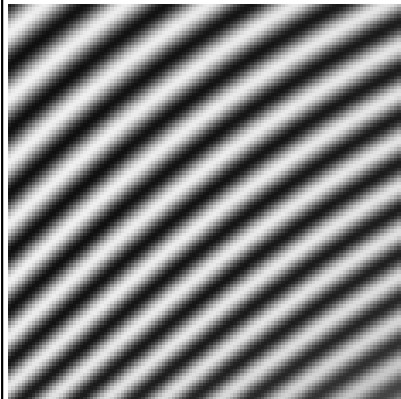
2min50 Nous remarquons que cette zone est similaire à une onde plane. Et en effet, en utilisant une intégrations par partie, nous arrivons à déterminer quelles fréquences ξ_1 et ξ_2 nos fonctions B_i et B_j peuvent contenir lorsqu'on désire que le coefficient choisi au paragraphe précédent soit petit.

Pour cela, nous allons montrer des propriétés de décroissance de ce produit scalaire : $\langle b_2(\cdot)e^{-2i\pi k\xi_2\cdot} | A(b_1(\cdot)e^{2i\pi k\xi_1\cdot}) \rangle$. Le théorème suivant est un résultat de phase stationnaire. Si cette zone du noyau grand K était identique à une onde plane, sa transformée de Fourier bidimensionnelle serait une masse de Dirac.

Ici la masse de Dirac est à remplacer par deux intervalles grand Θ_1 et grand Θ_2 déterminés par la position des supports des fonctions grand B_i et grand B_j utilisées.

Ces ensembles grand Θ_1 et grand Θ_2 contiennent tous les angles de vue possibles entre ces deux supports, angles mesurés par rapport à la tangente orientée en sens directe.

C^{3/5} INTERACTIONS À DISTANCE



$$d^2 = \min(\xi_1^2 + \xi_2^2, \text{dist}(\xi_1, \cos \Theta_1)^2 + \text{dist}(\xi_2, -\cos \Theta_2)^2)$$

L'intervalle $\Theta_1 = [28^\circ, 57^\circ]$.



théorème C (5.2)

Avec b_1, b_2 des fenêtres C^p distantes, et si $d > 0$:

$$\left\langle b_2(\cdot)e^{-2i\pi k\xi_2\cdot} \mid A\left(b_1(\cdot)e^{2i\pi k\xi_1\cdot}\right) \right\rangle \leq \frac{C_{S,\alpha,b_1,b_2,p}}{k^p \min(d^p, d^{2p})}$$

Nous avons le résultat précis suivant, si nous assimilons B_i et B_j à deux fonctions de Fourier à Fenêtre dépendant de la fréquence k . Lorsque la fréquence k est grande, et si ξ_1 et ξ_2 ne sont pas dans les intervalles $\cos \Theta_1$ et $-\cos \Theta_2$, ce produit scalaire décroît en la fréquence puissance moins p où nous supposons que les fenêtre b_1 et b_2 sont C^p . Cette décroissance est d'autant plus grande que la distance d est grande, où cette distance est entre ξ_1 et ξ_2 et les intervalles $\cos \Theta_1$ et $-\cos \Theta_2$.

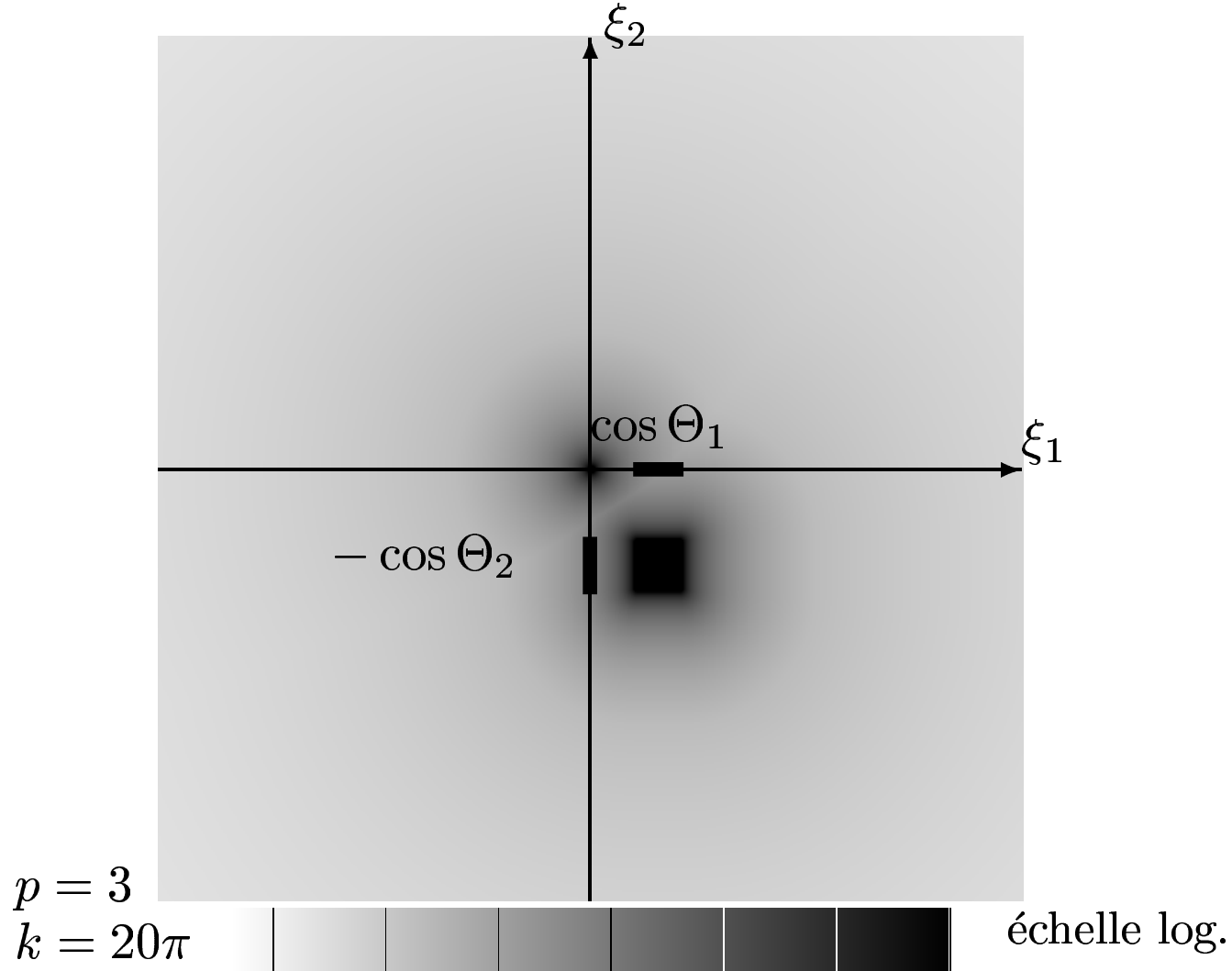
Illustrons cette distance d :

$2\min 50$ ξ_1 et ξ_2 doivent être en dehors de respectivement $\cos \Theta_1$ et $-\cos \Theta_2$, ce qui en termes bidimensionnel est la même chose que si le point de coordonnées ξ_1 et ξ_2 est en dehors du produit tensoriel de ces deux intervalles.

Ce produit tensoriel d'intervalles est un rectangle, et dans cette illustration de la taille de ce produit scalaire $\langle b_2(\cdot)e^{-2i\pi k\xi_2} \cdot |A(b_1(\cdot)e^{2i\pi k\xi_1})\rangle$ donnée par le majorant du théorème C pour différentes valeurs de ξ_1 et ξ_2 nous voyons des lignes de niveaux qui sont de grands rectangles aux coins arrondis. Cette échelle logarithmique n'est pas étalonnée, car l'étalonnage dépend de la constante C du théorème C.

Nous voyons clairement que la décroissance est d'autant plus grande, que le point $\xi_1 \xi_2$ est loin de ce rectangle et de l'origine, à la fréquence 20π et en supposant que les fenêtres b_1 et b_2 sont C^3 .

ALLURE DU MAJORANT DU THÉORÈME C

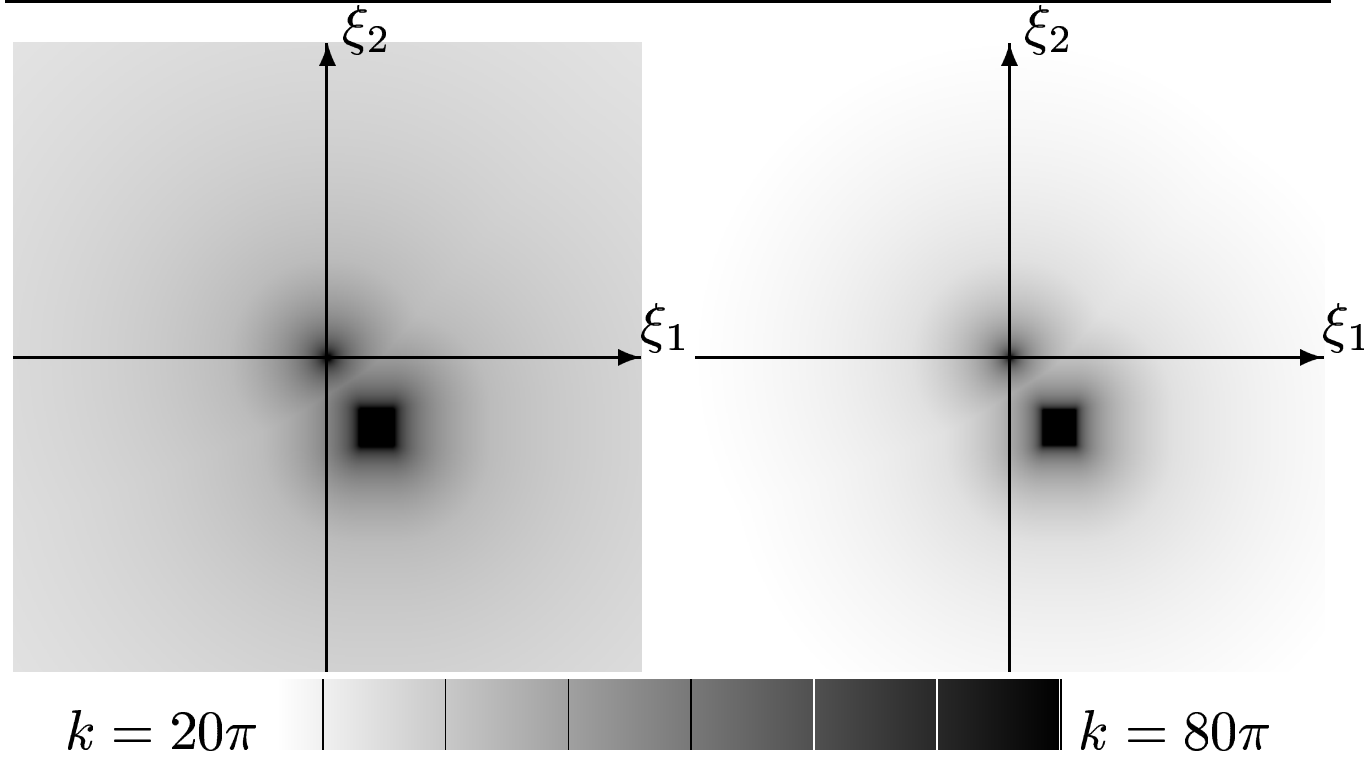


2min50 Sur ce transparent, nous voyons que cette décroissance est encore meilleure à plus haute fréquence : ici nous voyons que si k est multiplié par quatre, nous gagnons presque deux ordres de grandeur d'après l'échelle ici.

Les lignes de niveau proches du rectangle et de l'origine se rapprochent à la vitesse $k^{-1/2}$, et les lignes de niveau au loin se rapprochent à la vitesse $1/k$.

Ceci permet de dire que les taches vues sur la matrice en ondelettes auront tendance à se ramasser à hautes fréquences, car deux mêmes fenêtres verront leurs intervalles de fréquences converger vers deux intervalles donnés par $\cos \Theta_1$ et $-\cos \Theta_2$.

C/5 COMPORTEMENT DU MAJORANT EN FREQUENCE.

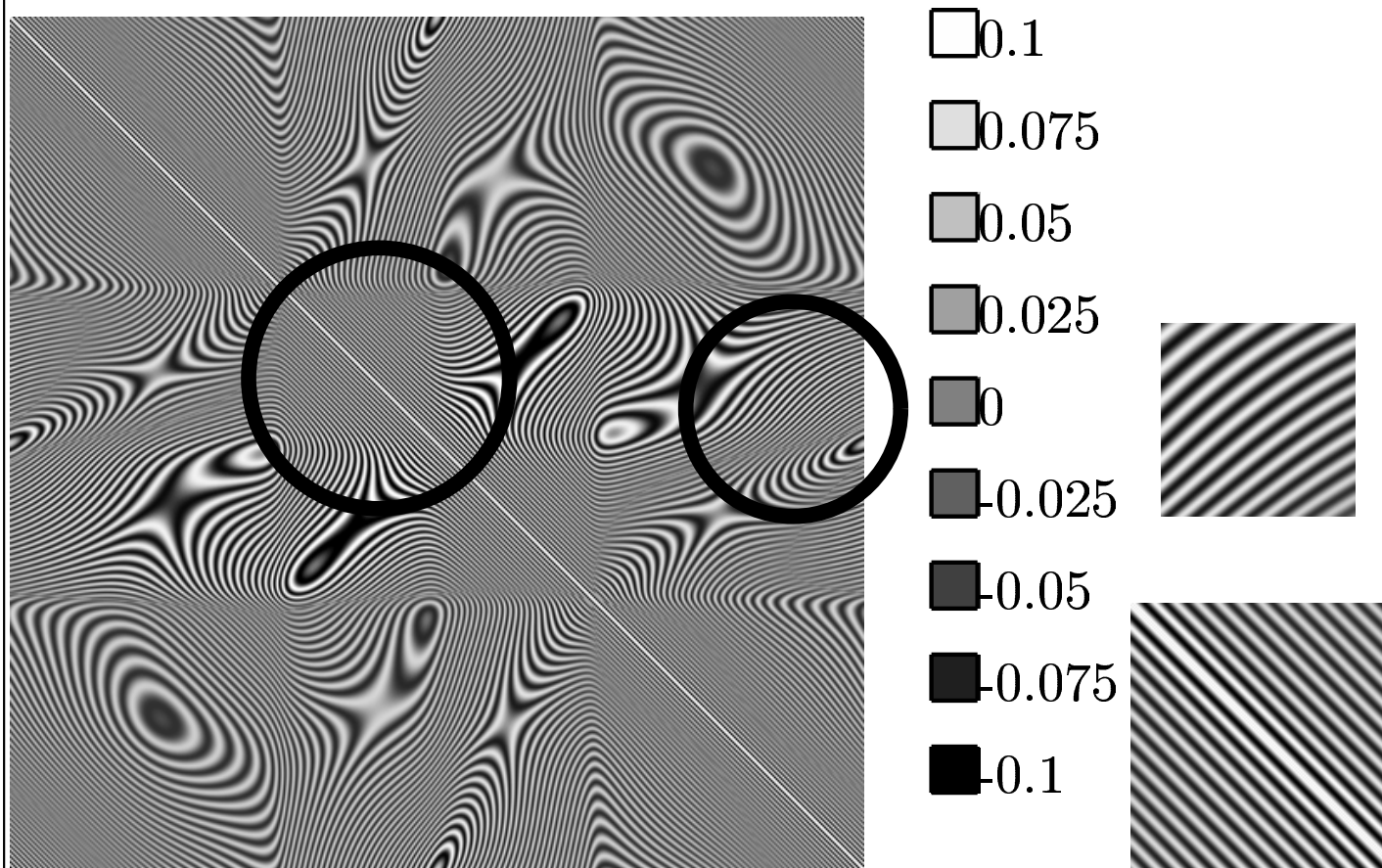


Graduations : puissances de 10.

Les lignes de niveau progressent vers le rectangle et l'origine en $k^{-1/2}$. Les bords des taches sont plus nets.

2min50 Il serait intéressant d'utiliser un tel argument pour les taches de la matrice proches des diagonales. Le principe d'intégrations par parties et de phase stationnaire permet encore de telles estimations, mais nous devons faire face à un noyau K qui, sur sa diagonale, présente une singularité de type logarithmique.

D'9 NOYAU AVEC SINGULARITÉ SUR LA DIAGONALE



La diagonale est singulière.

2min50 Pour cela, nous devons supprimer la contrainte de distance entre les fenêtres dans les hypothèses.

Nous obtenons deux théorèmes, similaire au théorème C précédent, qui donne ces trois estimations sur ce produit scalaire qui est au tableau $\langle b_2(\cdot)e^{-2i\pi k\xi_2} \cdot |A(b_1(\cdot)e^{2i\pi k\xi_1})\rangle$, avec deux démonstrations plus longues et très différentes l'une de l'autre, selon que la somme ou la différence de ξ_1 et de ξ_2 sont grandes.

Dans le premier cas, théorème D1, nous voyons que la décroissance en la fréquence se dégrade, nous avons $p - \frac{1}{2}$ au lieu de p et un facteur logarithmique ; et le critère basé sur des intervalles avec Θ_1 et Θ_2 n'est plus bidimensionnel mais unidimensionnel.

D^{2/9} SINGULARITÉ SI LES FENÊTRES S'INTERSECTENT.

Avec b_1, b_2 deux fenêtres C^p pouvant s'intersecter, et $\xi_1, \xi_2 \in \frac{1}{kL}\mathbb{Z}$:



théorème D1 (4.3)

Si $d_- = \text{dist}(\xi_1 - \xi_2, \cos \Theta_1 + \cos \Theta_2) > 0$:

$$\langle \rangle \leq \frac{C_{S,\alpha,b_1,b_2,\varepsilon,p} \log k}{k^{p-\frac{1}{2}} \min(d_-^p, d_-^{2p})}.$$



théorème D2 (4.4)

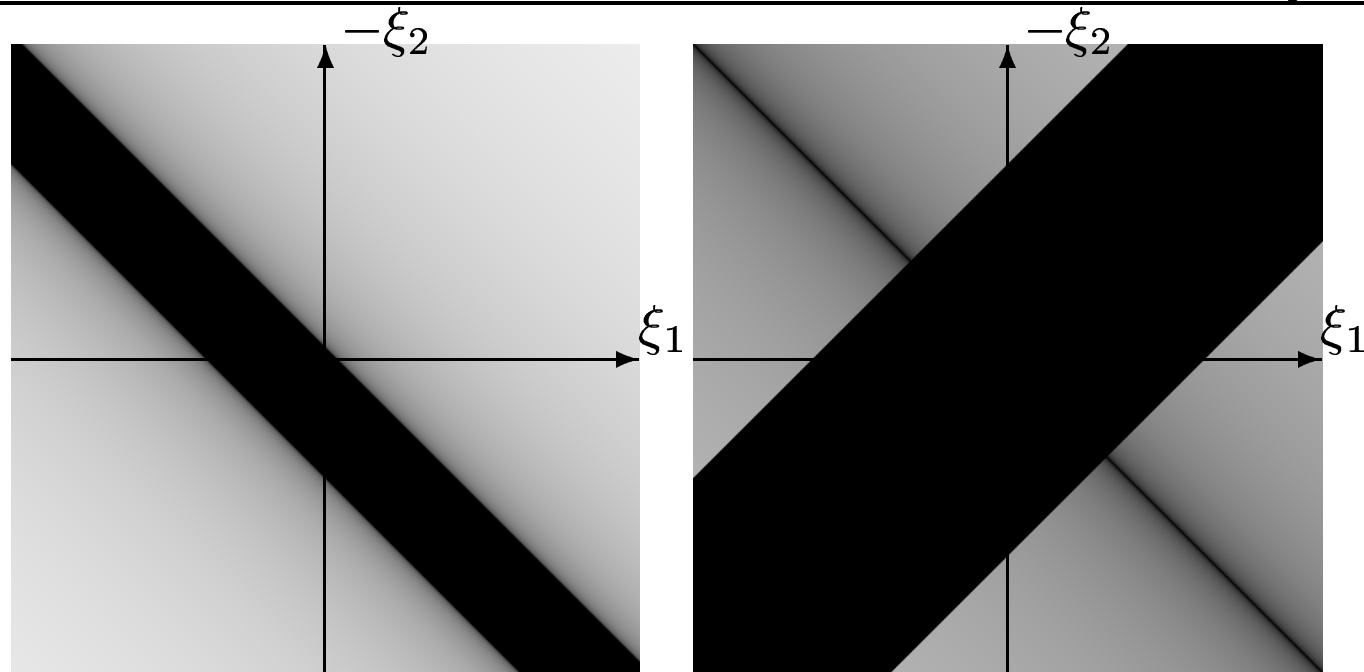
Si $|\xi_1 + \xi_2| > C$: $\langle \rangle \leq \frac{C_{S,\alpha,b_1,b_2}}{|\xi_1 + \xi_2|}$; et avec $\xi_1 \neq \xi_2$,

$$\langle \rangle \leq C_{S,\alpha,b_1,b_2} \left(\frac{\log k}{k^{p-1} |\xi_1 + \xi_2|^p} + \frac{1}{k^p |\xi_1 - \xi_2|^p |\xi_1 + \xi_2|} \right).$$

Dans le second cas, théorème D2, nous voyons que la décroissance en la fréquence se dégrade un peu plus, et lorsque ξ_1 et ξ_2 sont très proches, voire égaux, la régularité p ne sert plus.

2min50 Voici les illustrations correspondantes, pour les deux majorants cités dans ces théorèmes. Nous voyons deux bandes noires, respectivement descendante et montante, incompatibles avec ces majorants. Il se forme ainsi, à l'intersection de ces bandes, une zone en forme de rectangle penché où aucun de ces deux théorèmes ne donne de résultat. La seule estimation encore valide est alors donnée par le théorème A. Notons que la bande descendante, dans le cas D1, a grosso modo la largeur de la diagonale du petit rectangle vu pour le théorème C.

D / 9 COMPORTEMENT DES MAJORANT D1 ET D2 EN FREQUENCE.



Th. D1

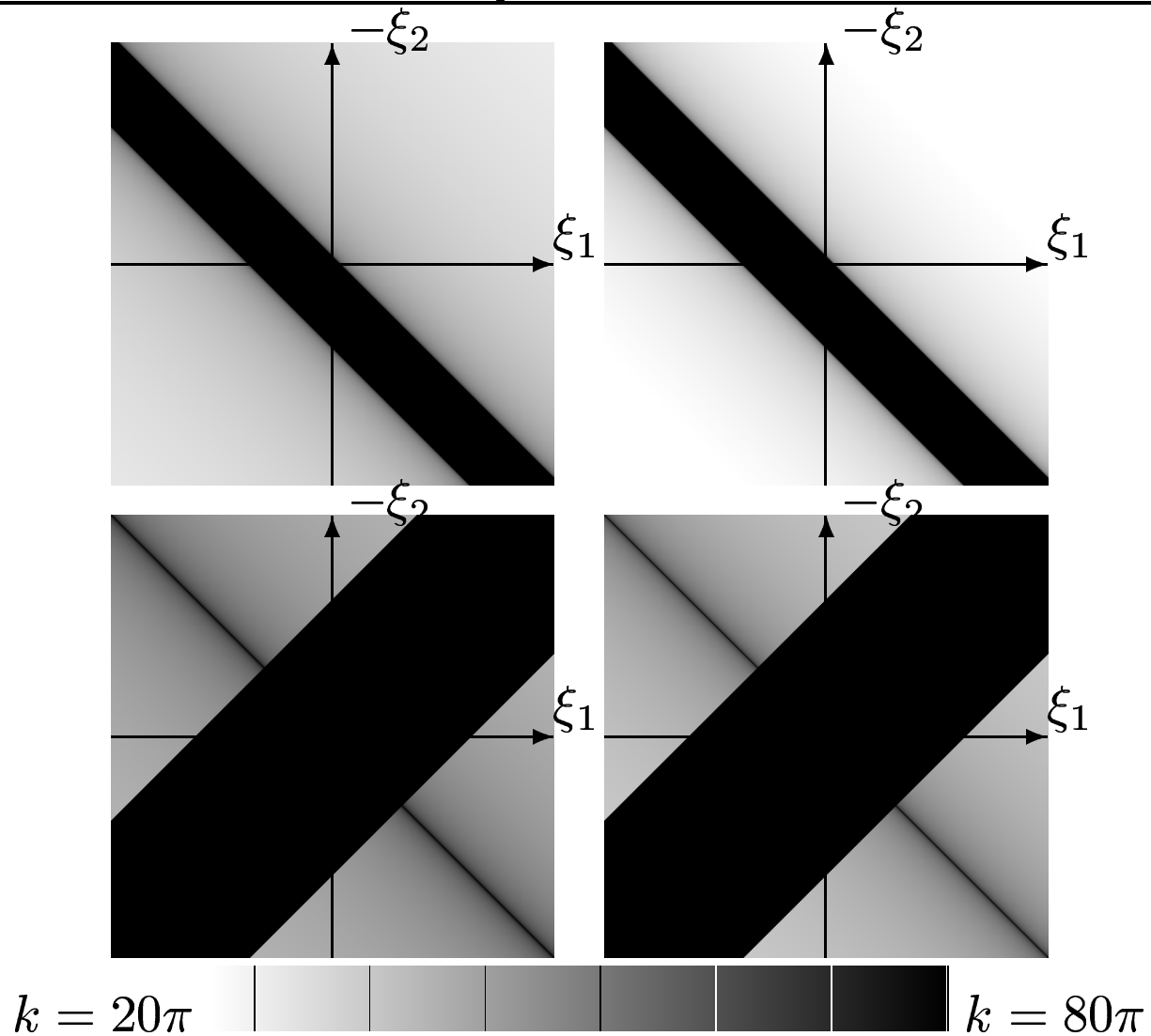


Th. D2

Graduations : puissances de 10.

2min50 Sur ce transparent, nous voyons que ces estimations s'améliorent un peu à haute fréquence, même si moins vite que pour le majorant du théorème C. Ici nous voyons que si k est multiplié par quatre, nous gagnons à peu près un ordre de grandeur d'après l'échelle ici.

D.9 SENSIBILITÉ À LA FRÉQUENCE DES MAJORANT D1 ET D2.



2min50 Ces deux théorèmes, D1 et D2, représentent le coeur de la thèse, ce sont des phases stationnaires mélangées avec la singularité du noyau et avec une continuité limitée sur les fenêtres.

Ils permettent d'abord de comprendre les structures apparaissant dans les matrices des bases spatio-fréquentielles.

Ils permettent aussi de calibrer le pas de discrétisation en Fourier comme nous le verrons dans la partie F, ou de discrétisation en ondelettes. Dans leur version complète où la dépendance en les fonctions fenêtre b_1 et b_2 des constantes C est explicitée, ils permettent aussi de calibrer le pas de discrétisation avec des fonctions de Malvar.

Notons qu'il est possible d'utiliser les mêmes méthodes en présence de coins, et de démontrer un théorème similaire aux théorèmes D1 et D2, cependant l'estimation est plus mauvaise, et la démonstration, qui a été rédigée mais n'est pas dans la thèse, fait bien 70 pages. Comme cette estimation est plus mauvaise, il n'est pas possible d'en déduire des résultats calibrant le pas de discrétisation lorsqu'il y a des coins.

D⁹ THÉOREMES D1 ET D2

Théorèmes charnières aux longues démonstrations.

Corollaires :

- Localisation de tous les coefficients importants de la matrice en ondelettes, en paquets d'ondelettes et en Malvar.
- Calibre le pas de discrétisation en ondelettes, en Fourier et (brouillon) en Malvar.

Le dernier point est *la seule chose* de la thèse incompatible avec des coins.

2min50 Pour faire de la phase stationnaire mélangée avec une continuité limitée sur les fenêtres et avec la singularité du noyau, nous avons utilisé plusieurs arguments :

Nous avons utilisé une intégration par parties qui est matricielle afin de gérer au mieux les p dérivabilités disponibles sur les fenêtres b_1 et b_2 afin de générer des facteurs en $1/k$ pour chaque dérivabilité.

Nous avons utilisé le cas du disque où l'opérateur A est diagonalisé par la base de Fourier et où son spectre est connu, puis nous avons utilisé des arguments de perturbation afin de gérer la singularité apparaissant dans le noyau K de l'opérateur A .

D / 9 TECHNIQUES DE DEMONSTRATION UTILISÉES

Arguments dans la phase stationnaire :

- Une intégration par parties homogène à hautes fréquences pour gérer p utilement.
- Une résolution directe du cas du disque.
- Les autres cas par un argument de perturbation pour gérer la singularité.

2min50 Nous avons une fonction G qui est oscillatoire, et qui vérifie cette équation du second degré dite de Bessel, avec un facteur k^2 comme nous sommes à la fréquence k .

Pour utiliser au mieux les dérivées possibles, nous utilisons une équation différentielle du premier degré. Voici ci-dessous une façon usuelle de transformer notre équation du second degré en une équation du premier degré, avec le vecteur G_1 contenant la fonction G et sa dérivée.

Seulement, la matrice résultante n'est pas homogène en k .

Nous avons remarqué qu'en ajoutant le facteur $\frac{r}{k}$ à côté de la dérivée de G comme fait dans G_2 , nous obtenons une équation du premier degré dont la matrice est homogène en k : ainsi, à chaque intégration par parties, nous gagnons un facteur $1/k$.

Pour obtenir cette équation, il suffit de prendre l'équation différentielle matricielle usuelle, et d'ajouter le facteur $\frac{r}{k}$ à droite : alors l'ajout de r , fait ensuite, élimine le terme en bas à droite de la matrice, ce qui permet d'avoir notre homogénéité.

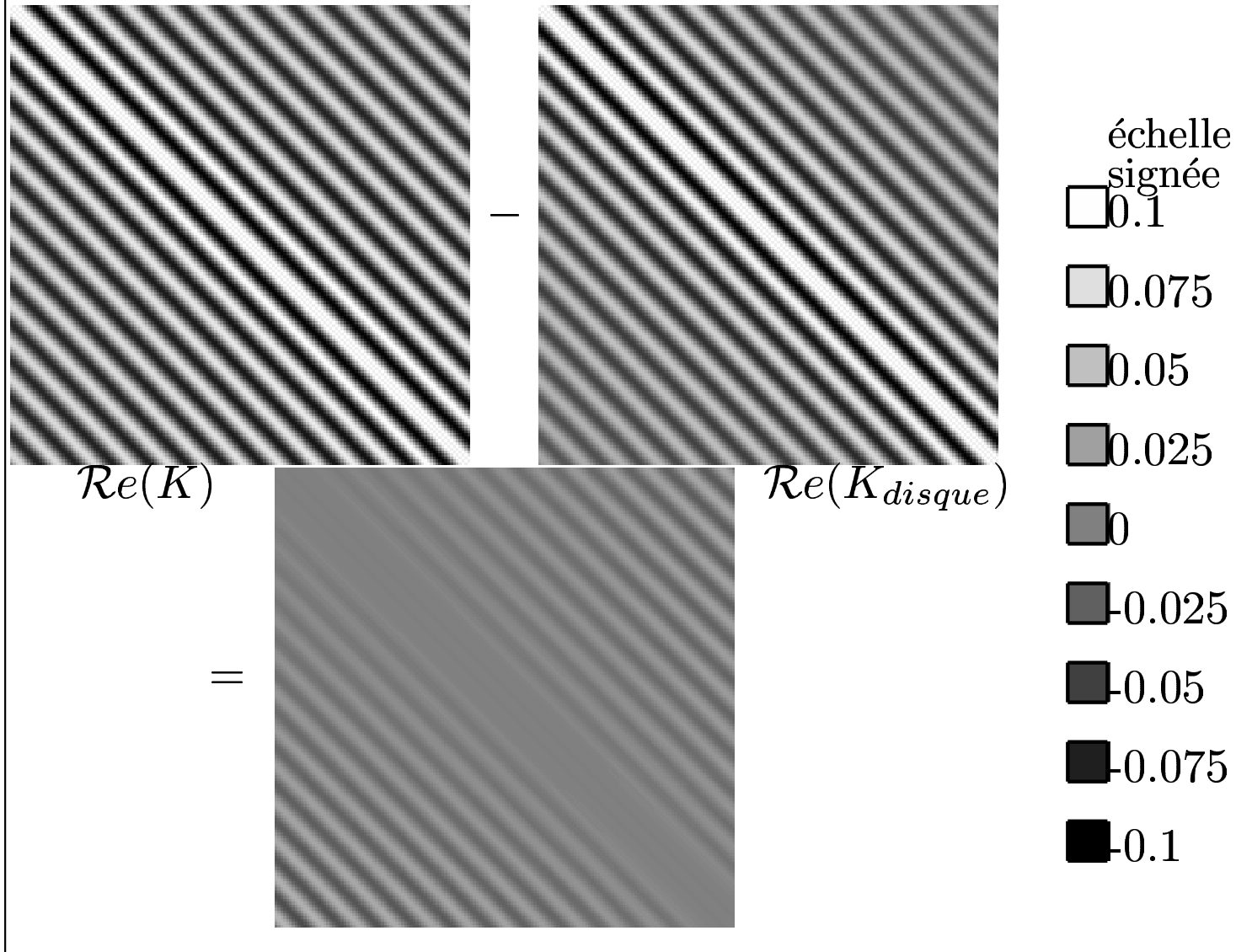
D 79 EQUA. DIFF. MATRICIELLE HOMOGENE A HAUTE FREQUENCE

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + k^2 G &= 0 & \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} G \\ \frac{1}{k} \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{r} \\ -k & -\frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k} \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} \\ \Downarrow & & \Downarrow & \\ \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} & \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k} \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{r} \\ -kr & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k} \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} \\ \Downarrow & & \Downarrow & \\ \frac{\partial}{\partial r} G_1 &= \begin{bmatrix} 2i\pi k\xi & 1 \\ -k^2 & 2i\pi k\xi - \frac{1}{r} \end{bmatrix} G_1 & \frac{\partial}{\partial r} G_2 &= \begin{bmatrix} 2i\pi k\xi & \frac{k}{r} \\ -kr & 2i\pi k\xi \end{bmatrix} G_2 \\ \text{avec } G_1 &= e^{2i\pi k\xi x} \begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} & \text{avec } G_2 &= e^{2i\pi k\xi x} \begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k} \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Une dérivation de b_1 et b_2 donne un facteur $\frac{1}{k}$

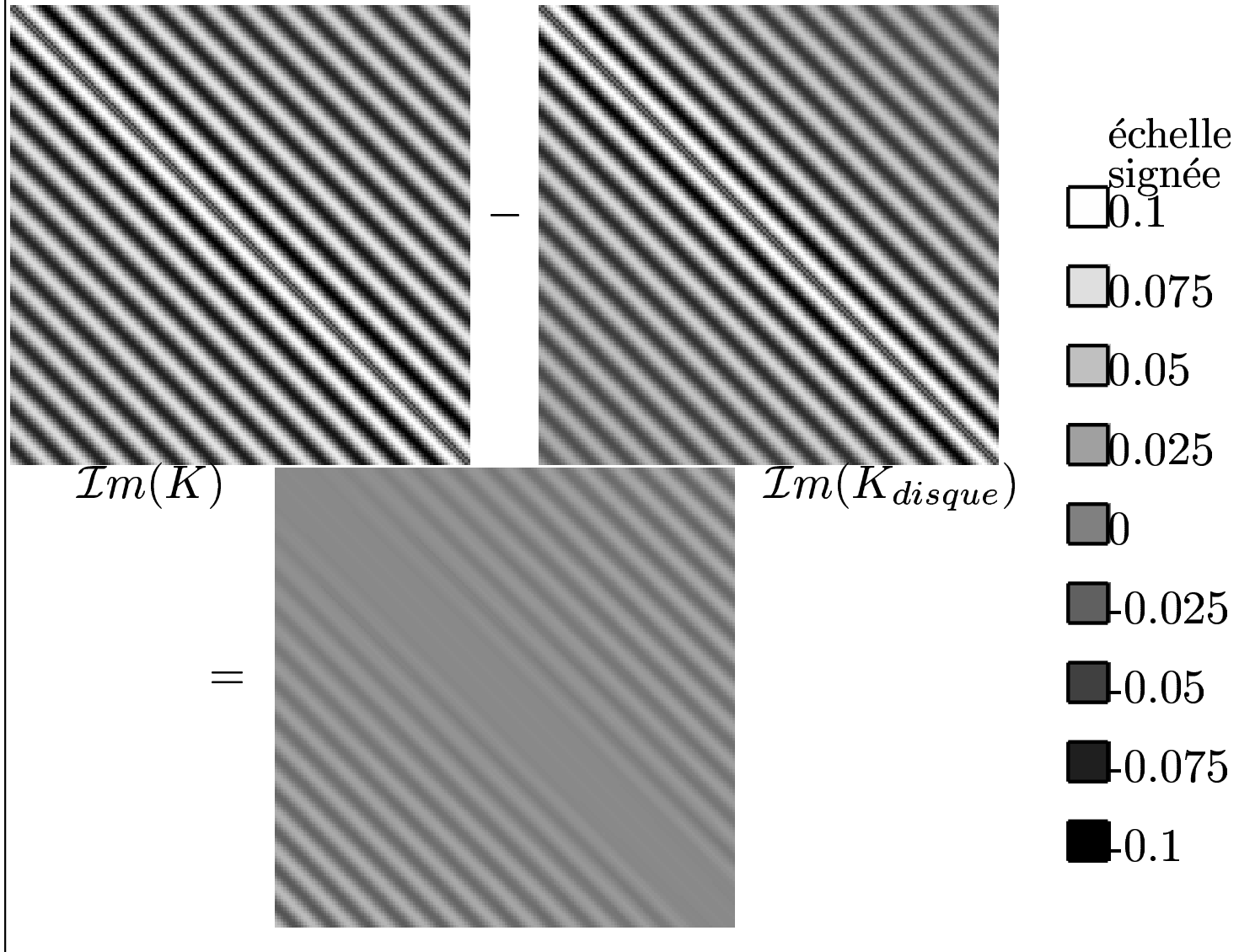
2min50 Cette matrice homogène contient cependant un facteur $1/r$ qu'il faut gérer. Cela est possible en incluant le cas du disque, et en raisonnant en terme de perturbation : comme S est lisse, cet argument fonctionne localement et donne des facteurs r supplémentaires. Ici nous voyons en effet que la partie réelle du noyau K de l'opérateur A est la perturbation du cas du disque par une perturbation qui s'annule sur la diagonale.

D^{8/9} PERTURBATION DU DISQUE : PARTIE RÉELLE



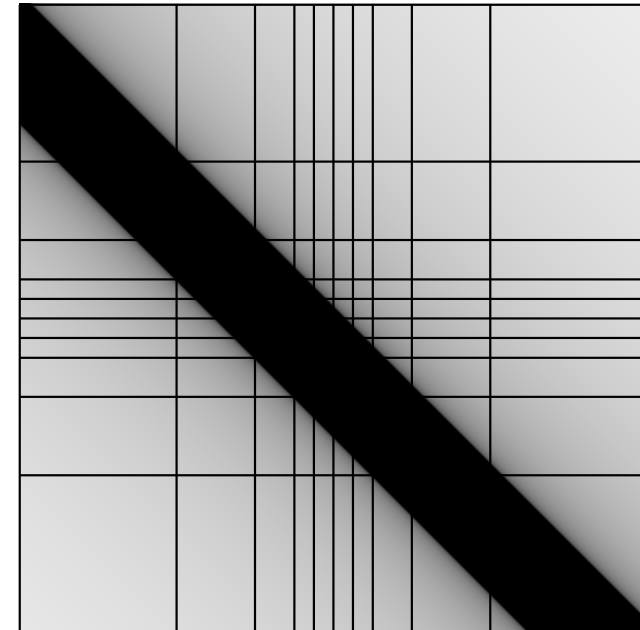
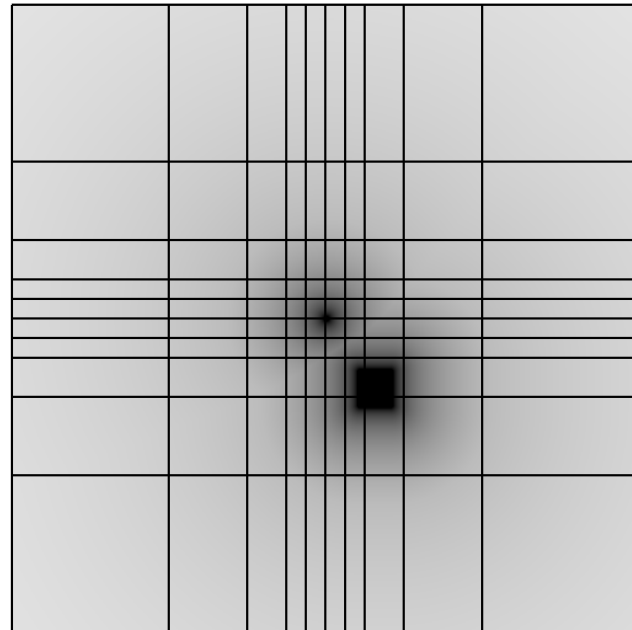
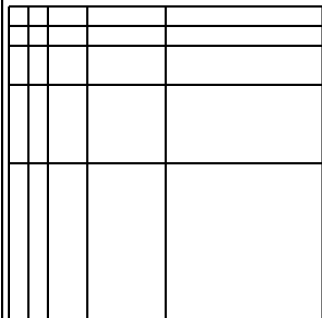
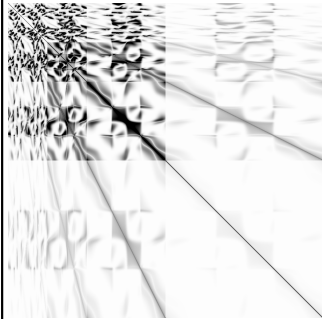
2min50 Pour la partie imaginaire, cela fonctionne légèrement moins bien, car la perturbation est continue mais ne s'annule pas sur la diagonale.

D^{8/9} PERTURBATION DU DISQUE : PARTIE IMAGINAIRE



2min50 Dans le produit scalaire définissant ce produit de Galerkin, nous pouvons prendre les transformées de Fourier. Or la décomposition de Fourier des ondelettes est à support grosso modo dessiné, aux signes près, par le bloc où ce coefficient est rangé. Ainsi, les deux coefficients que nous avons entourés par des cercles ont leur support de Fourier localisé dans les quatre carrés de taille moyenne. Le coefficient est petit, si ces quatre carrés restent hors des rectangles et bandes vues dans les illustrations des estimations, c'est à dire hors du contenu fréquentiel de K , montré par les théorèmes C et D. Comme ces carrés sont de grosse taille, c'est plus difficile. De même, pour les gros blocs de la matrice d'ondelettes, il leur est plus difficile d'éviter le contenu fréquentiel de K .

E / 6 POURQUOI LES ONDELETTES NE MARCHAIENT PAS



$$\begin{aligned} \langle K | B_i \otimes B_j \rangle \\ = \\ \langle \hat{K} | \widehat{B_i} \otimes \widehat{B_j} \rangle \end{aligned}$$

Le rectangle dépend
des deux fenêtres

La bande dépend
des deux fenêtres

Contenu fréquentiel du noyau K

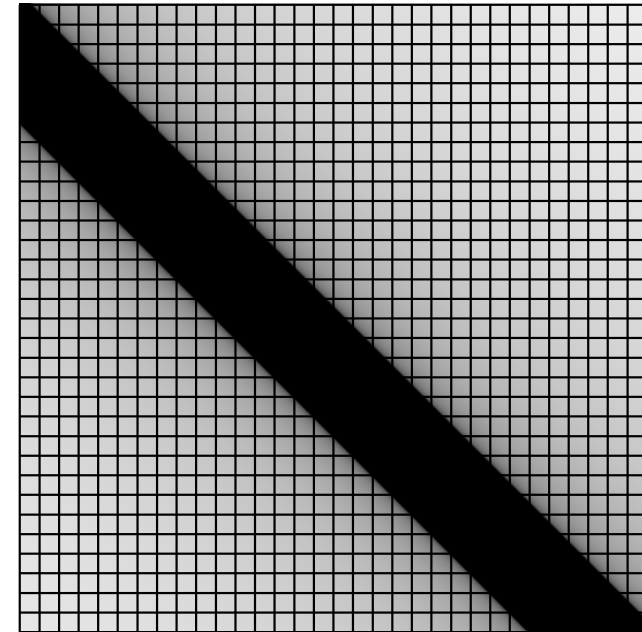
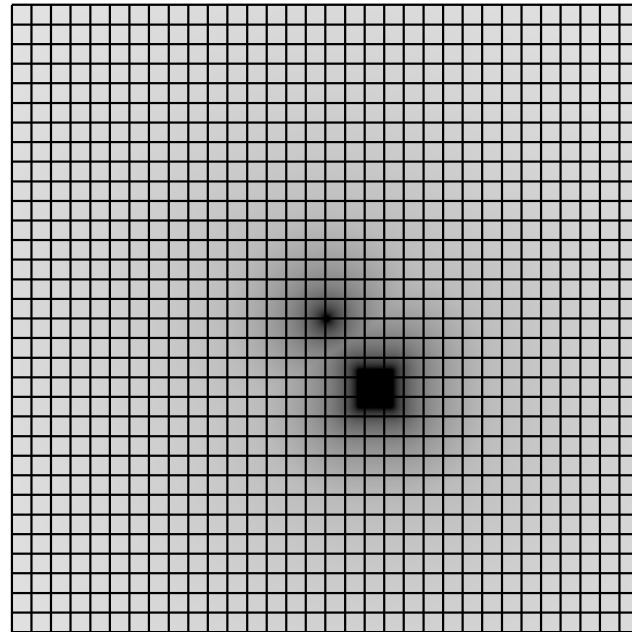
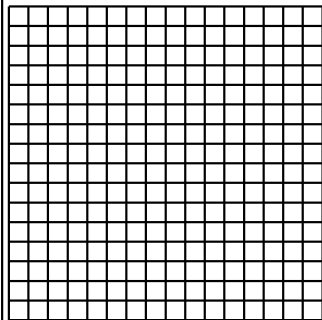
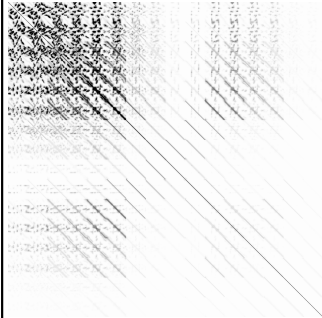
Cas non diagonal.

Cas diagonal.

2min50

Dans la décomposition en paquets d'ondelettes, ces carrés peuvent être choisis petit dans le secteur susceptible d'avoir le contenu fréquentiel de K . Ainsi, il y a de meilleurs résultats avec les paquets d'ondelettes.

E 76 POURQUOI LES PAQUETS D'ONDELETES SONT MIEUX



Le rectangle dépend
des deux fenêtres

La bande dépend
des deux fenêtres

Contenu fréquentiel du noyau K

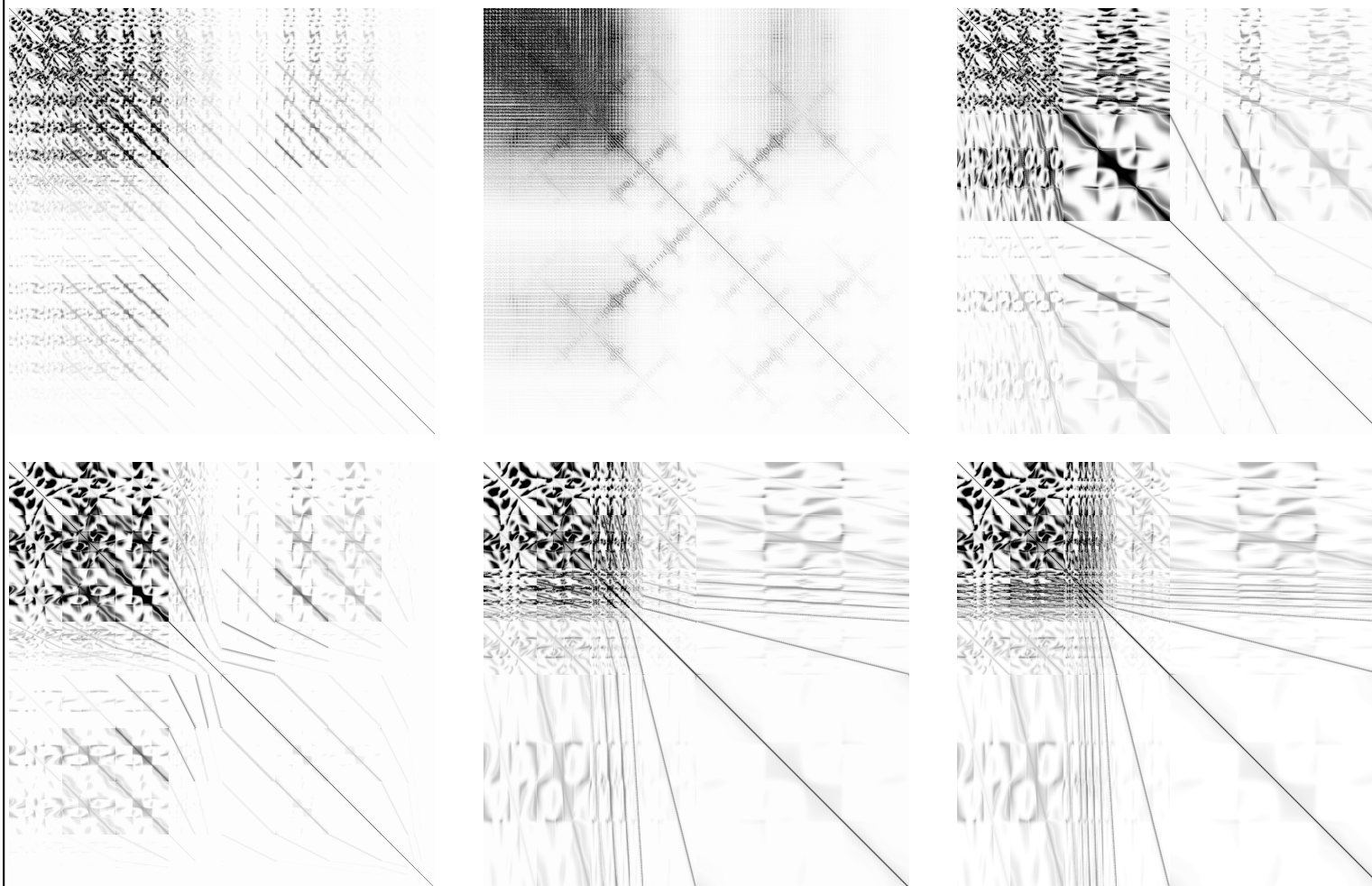
Cas non diagonal.

Cas diagonal.

2min50 Il faut donc chercher à optimiser le découpage pour mettre des carrés petits là où K peut avoir du contenu fréquentiel, tout en retenant que multiplier les petits carrés multiplie leurs diagonales, où le contrôle, par les théorèmes D, est plus faible. C'est la recherche d'un compromis.

Nous observons ici que les taches ont tendance à rendre les blocs complémentaires les un des autres, ce qui montre que découper un bloc par quatre peut diviser par quatre le nombre de gros coefficients, même si ces taches s'étalent plus.

E 1/6 EXEMPLES DE DECOUPAGES EN PAQUETS D'ONDELETTES



Moins de contact avec \hat{K} . \Leftarrow Blocs plus petits. \Rightarrow Plus de diagonales.

2min50 Ici, nous observons qu'en effet, à plus hautes fréquences, que les ondelettes deviennent inefficaces. Prendre N voisin de kT s'est révélé bon dans ces exemples particuliers, comme nous le verrons partie F . Les chiffres disponibles pour les cosinus locaux semblent dire qu'ils sont plus efficaces que les paquets d'ondelettes. Cependant, nous allons voir que la manière de découper ici utilisée est injuste envers les paquets d'ondelettes.

E / 6 PAQUETS D'ONDELETTES MIEUX QUE LES ONDELETTES

$S = \cup, T = 16$	$k = 20\pi, N = 2048$		$k = 80\pi, N = 4096$	
$Tk =$	1000		4000	
RMS=	10%	1%	10%	1%
FWT sur 6 niveaux	391	667	6347	8310
FWPT avec 32 fenêtres fréquentielles	274	544	2575	4248
FWPT avec 64 fenêtres fréquentielles	319	645	3427	5636
Cosinus avec 64 fenêtres	216	542		

en milliers de coefficients utiles, avec $\alpha = 4$. FWT est plus coûteux.

2min50 En effet, voici pour des fréquences plus basses le résumé de l'étude disponible partie 5 de la thèse. La conclusion est qu'il faut se méfier des mauvais découpages ; le meilleur découpage semble de mettre des petits blocs pour les fréquences plus petites que k , c'est à dire lorsque ξ est plus petit que 1 en valeur absolue. Un découpage exagéré fait même moins bien que les ondelettes.

E / 6 DÉCOUPAGE A CHOISIR : MULTIPLES STRATEGIES, PARTIE 5

$S = \cup, k = 62, N = 1024, Tk = 1000$	$RMS = 8\%$
FWPT tensorisé raffinant pour $ \xi \leq 1$	314
FWPT avec 16 fenêtres fréquentielles	345
FWT 4 niveaux	461
FWPT avec 128 fenêtres fréquentielles	670

en milliers de coefficients utiles, avec $\alpha = 4$. Compromis sur le découpage.

2min50 Nous reproduisons ici d'anciens résultats, qui utilisaient les techniques avec α imaginaire pur et dépendant de la fréquence, ce qui n'est pas recommandé comme nous en parlons dans la thèse, par exemple nous perdons l'injectivité. Ces techniques étaient les seules utilisés dans les articles avec application numérique en ondelettes qui étaient disponibles, et nous avons en effet remarquer une bonne compression de la matrice. Attention, ici le pas de discrétisation n'est pas garanti comme il y a des coins. Nous allons enfin expliquer pourquoi, sans coin.

E % PAQUETS D'ONDELETTE SUR □ A HAUTES FREQUENCES

N	Tk	k	%RMS	FWPT	taille matrice pleine
2048	2560	160	1%	919	4200
4096	5120	320	10%	782	16776
4096	5120	320	1%	1200	16776

Deux dernières colonnes en milliers de coefficients, avec $\alpha = i\frac{4\pi}{k}$ (voir articles préexistants). La compression marche même avec des coins, mais le pas de discrétisation est non garanti.

2min50 Une application directe des versions avec les fenêtres valant 1 dans les théorèmes D1 et D2 donne ce théorème, qui explique que l'opérateur A est bien concentré dans le bloc A_h utilisé pour la discrétisation : en effet, nous voyons que les trois autres blocs sont en Chk avec C ne dépendant que de S et de α . Pour cela, V_h doit être constitué des N fonctions circulaires de plus basses fréquences, où N est donné par T sur h .

F^{1/2} OPÉRATEUR BIEN CONCENTRÉ EN FREQUENCE

$L^2(\partial S) = V_h \oplus V_h^\perp$ donne la décomposition

$$A = \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{bmatrix}$$

Restriction "classique" à $hk \leq \frac{1}{10}$.



théorème \mathcal{F} (4.5)

Si V_h est le début de la base de Fourier, les trois $L^2(\partial S)$ -endomorphismes B_h , C_h et $D_h - \text{Id}|_{V_h^\perp}$ ont une norme plus petite que $C_{S,\alpha}kh$.

Démonstration : théorèmes D1 et D2, avec $b_1 = 1$ et $b_2 = 1$. $N = \frac{T}{h}$.

2min50 Il est alors possible de démontrer que A_h est aussi bien inversible que A dès que h est plus petit qu'une constante sur la fréquence k et divisé par la racine de la norme de l'inverse A^{-1} comme annoncé.

Pour la démonstration nous utilisons que A_h est suffisamment proche de la réduite de Schur de la matrice complète, et que cette réduite a une inversibilité aussi bonne que celle de A vu cette identité similaire à des similitudes de matrices :

F/2 CALIBRATION DU PAS DE DISCRETISATION

$h \leq \varepsilon(k\|A^{-1}\|^{1/2})^{-1}$ suffit pour que $\|A_h^{-1}\|_{V_h \rightarrow V_h} \leq C_{S,\alpha,\varepsilon}\|A^{-1}\|$.

Preuve avec Schur :

$$A_h = (A_h - B_h D_h^{-1} C_h) + B_h D_h^{-1} C_h$$

$$\begin{bmatrix} A_h - B_h D_h^{-1} C_h & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Id} & -B_h D_h^{-1} \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ -D_h^{-1} C_h & \text{Id} \end{bmatrix}$$

avec Id valant $\text{Id}|_{V_h}$ ou $\text{Id}|_{V_h^\perp}$. Utilité : $\frac{\|J_h - P_h J\|}{\|A_h^{-1}\|} \leq$

$$\|A_h(J_h - P_h J)\| = \|A(J - P_h J)\| \leq (\|B_h\| + \|D_h - \text{Id}\|)\|J - P_h J\|$$

2min50 Ainsi, nous avons obtenu dans cette thèse des estimations, à haute fréquence, sur l'opérateur A , sur les interactions à distance dans le diffractant par l'opérateur A , sur les auto-interactions ; et nous avons progressé dans la calibration du pas de discrétisation à haute fréquence même s'il reste un facteur en $\|A^{-1}\|^{-1/2}$.

BILAN DES RÉSULTATS

Étude hautes fréquences, sur l'opérateur A de CFIE :

- Estimations sur $\|A\|$.
- Estimations fréquentielles sur les interactions à distance.
- Estimations fréquentielles sur toutes les interactions.
- Calibration du pas de discrétisation h en fonction de k et de $\|A^{-1}\|^{-1/2}$.

2min50 Je vous remercie pour votre attention



erci.