Méthodes d'ondelettes pour l'analyse numérique d'intégrales oscillantes

Daniel Goujot
Sous la direction de P.G. Lemarié-Rieusset
Département de mathématiques
Université d'Évry-Val-d'Essonne

Plan de l'exposé

- A : L'équation CFIE
- B : Le processus de discrétisation
- C : Interactions distantes
- D : Interactions
- E : Modification des ondelettes pour un fenêtrage fréquentiel précis
- F : Calibration du pas de discrétisation

A$^{1/4}$ Contexte physique

Nous résolvons l'équation $AJ = L$.

L'intensité $J \in \mathrm{L}^2(\partial S)$ engendre $E^{diff} = G \star J \mathrm{d}\sigma$:
potentiel de simple couche, avec $G(x) = -\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k\|x\|)$.
Le second membre $L \in \mathrm{L}^2(\partial S)$ dépend de E^{inc}.

Vérifient $\Delta E + k^2 E = 0$.

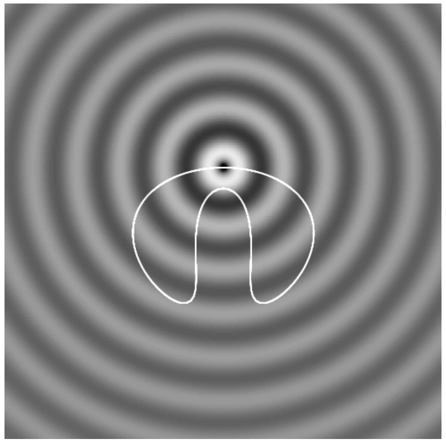


Fig 1: ∂S et G

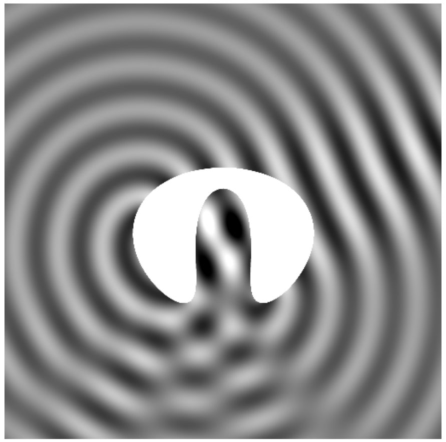


Fig 2: $\mathcal{R}e(E^{diff})$.

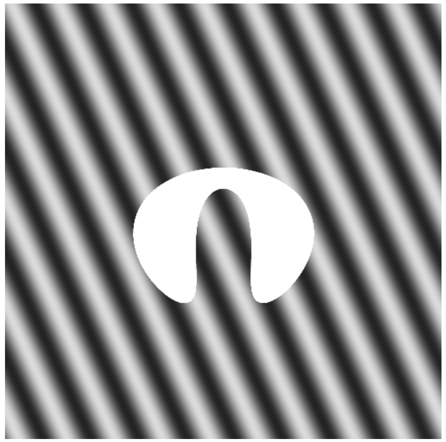


Fig 3: $-\mathcal{R}e(E^{inc})$.

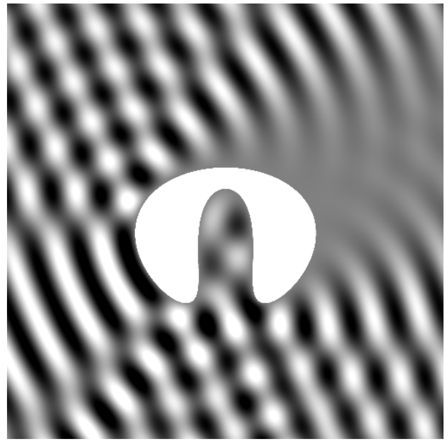


Fig 4: $\mathcal{R}e(E^{total})$.

échelle signée.

La somme $E^{total} = E^{inc} + E^{diff}$ est le courant électrique total.

A$^{2/4}$ l'équation CFIE

Prolongation de E^{total}, E^{inc} et E^{diff} à l'intérieur :

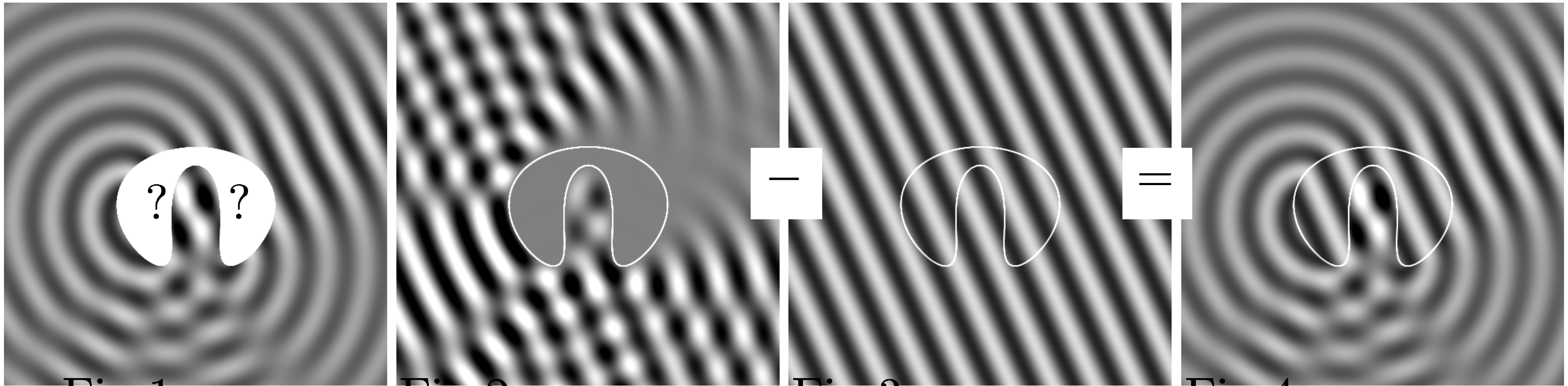
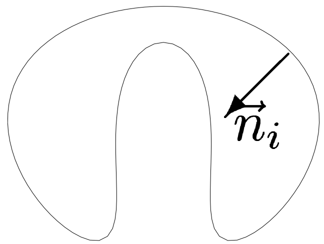


Fig 1: $\mathcal{R}e(E^{diff})$ Fig 2: E^{total} nul sur ∂S Fig 3: $-E^{inc}$ onde plane Fig 4: E^{diff} avec $-E^{inc}_S$

Le potentiel simple couche fait exactement la même prolongation.

Combinaison "CFIE" : $0 = \mathrm{i}\alpha k\left(E^{diff}_{|\partial S} + E^{inc}_{|\partial S}\right) - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_i}(E^{diff} + E^{inc}) = AJ - L$

$$L = -\mathrm{i}\alpha k E^{inc}_{|\partial S} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_i}E^{inc}$$



$A^{3/4}$ Opérateur de Fredholm hautes fréquences

$$AJ = \mathrm{i}\alpha k E^{diff}_{|\partial S} + 2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_i} E^{diff}$$

$$AJ(s') = J(s') + \int_{\partial S} \mathrm{i}\alpha k G(s'-s) J(s)\,\mathrm{d}s + 2 \int_{\partial S} \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}n_i'}(s'-s) J(s)\,\mathrm{d}s$$

Théorème A (2.27-2.28)

Uniformément en $k \geq 1$, sans (ou avec) coins :

$$\|A - \mathrm{Id}\|_{\mathrm{L}^2 \to \mathrm{H}^1} = \mathrm{O}(k^{3/2}\sqrt{\log k})$$

$$\|A\|_{\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2} = \mathrm{O}(\sqrt{k} \log k)$$

A$^{4/4}$ Du nouveau avec l'inversibilité de A

• Le i de $AJ = \mathrm{i}\alpha k E^{diff}_{|\partial S} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_i}E^{diff}$, une formule de Stokes

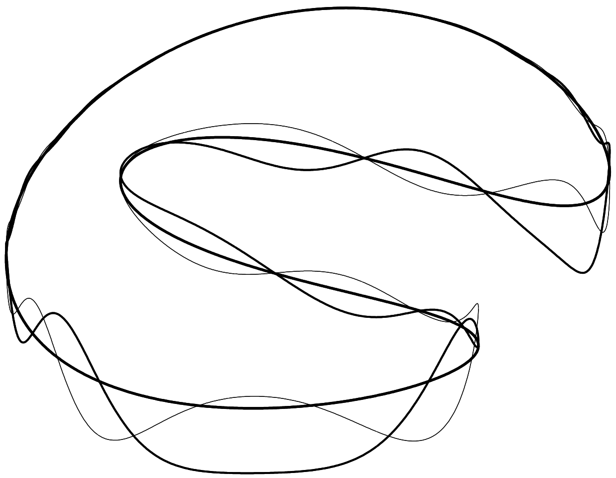
$$\begin{aligned}\int_{\partial S} E^{diff}(s)\overline{\frac{\mathrm{d}E^{diff}}{\mathrm{d}n_i}}\mathrm{d}s &= \int_S (\overline{E^{diff}(s)}\Delta E^{diff}(s) + |\nabla E^{diff}(s)|^2)\mathrm{d}s \\ &= -k^2\int_S (|E^{diff}(s)|^2 + |\nabla E^{diff}(s)|^2)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

et $J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_i}E^{diff} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_e}E^{diff}$ montrent l'<u>injectivité de A</u>.

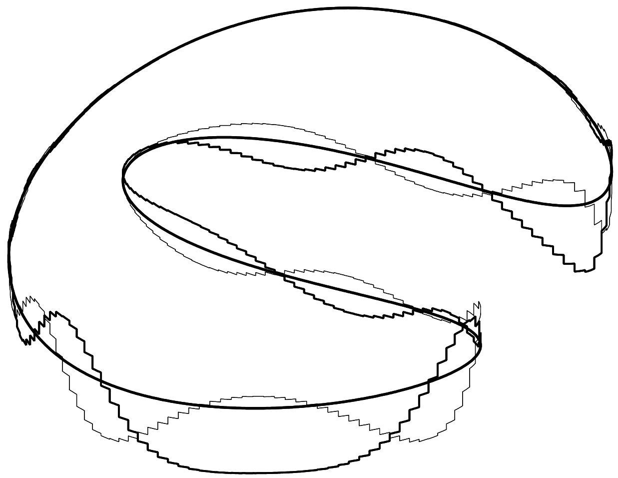
• L'alternative de Fredholm montre que l'opérateur de Fredholm de seconde espèce A est inversible. Mais pas uniformément en k.

• Bonne nouvelle : pour bien poser le problème numérique, $\sqrt{\|A^{-1}\|}kh \leq C$ suffit au lieu de $kh\|A^{-1}\| \leq C$.

$\text{B}^{1/5}$ Discrétisation de la la solution J



$\boldsymbol{\partial S}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}e(J)}$ et $\mathcal{I}m(J)$



$P_h J \in V_h$

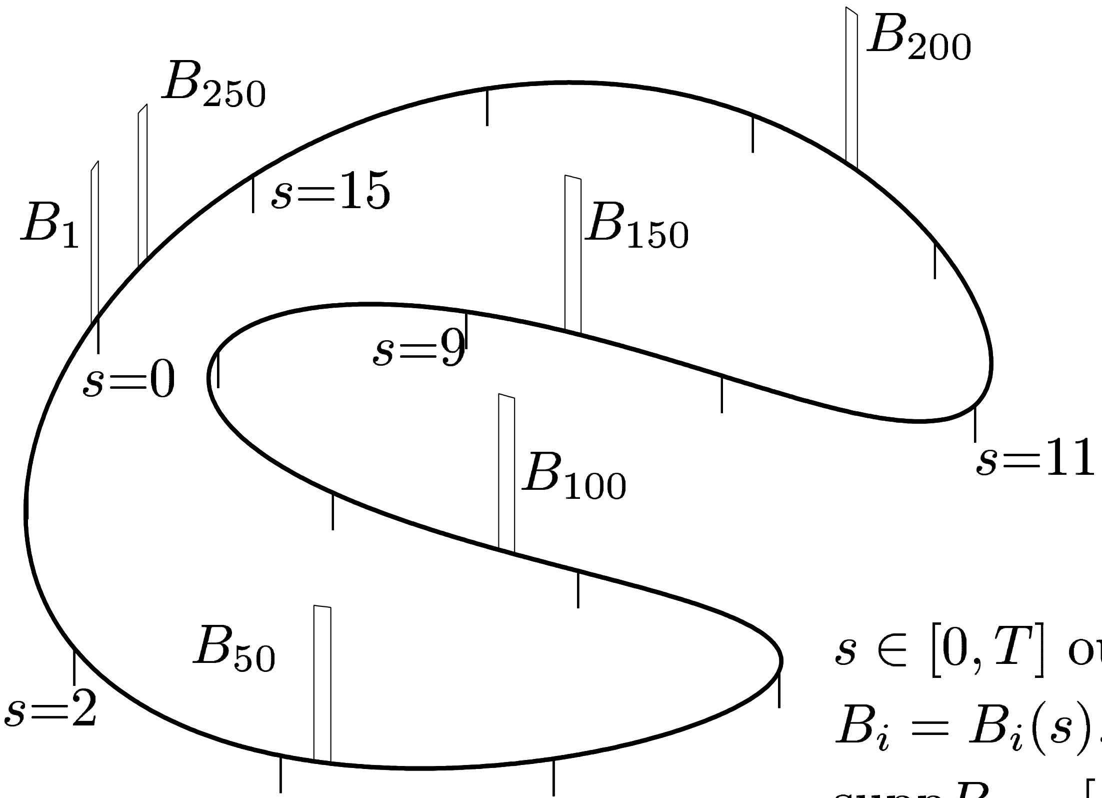
$P_h = \pi^{\perp}_{V_h}$. $N = \dim(V_h)$ degrés de liberté.

Sur ce dessin, $N = 256$. Nous cherchons à calculer $P_h J$.

Autres possibilités de discrétisation : ondelettes, Malvar.

Pour L le second membre : $P_h L \in V_h$. Et pour A ?

$\mathrm{B}^{2/5}$ Discrétisation du bord ∂S



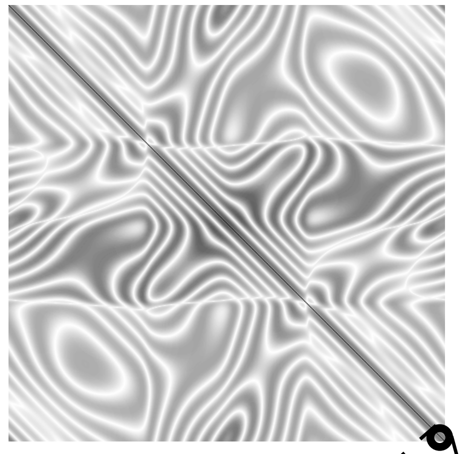
$s \in [0, T]$ où $T = 16$.
$B_i = B_i(s)$.
$\mathrm{supp} B_i = [\frac{i}{N}T, \frac{i+1}{N}T]$.
$i = 1, ..., N$ où N=256.

$B = (B_1, B_2, B_3, ..., B_N)$
base orthonormée.

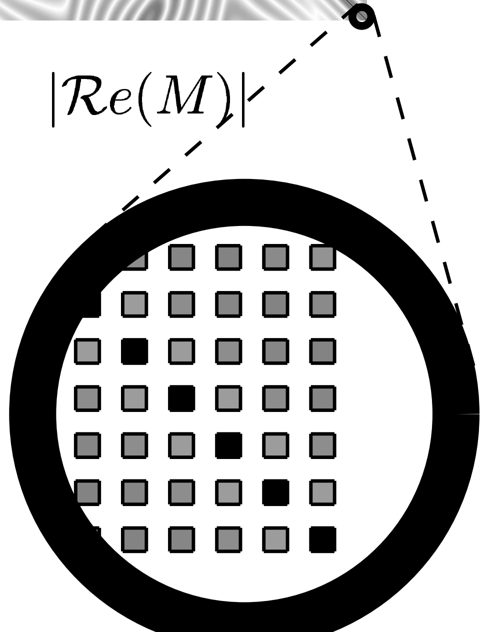
B$^{3/5}$ Discrétisation de l'opérateur A

$A_h = P_h \circ A_{|V_h}$ est un endomorphisme de V_h.
Base orthonormée B avec $N = 512$:

$$M = \Big(\langle B_j | A B_i \rangle\Big)_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,N}}$$



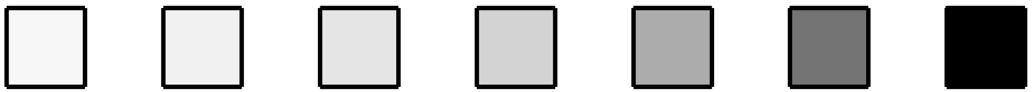
$|\mathcal{R}e(M)|$



Système :

$$M \times \Big(\langle B_i | J \rangle\Big)_{i=1,\ldots,N} = \Big(\langle B_i | L \rangle\Big)_{i=1,\ldots,N}$$

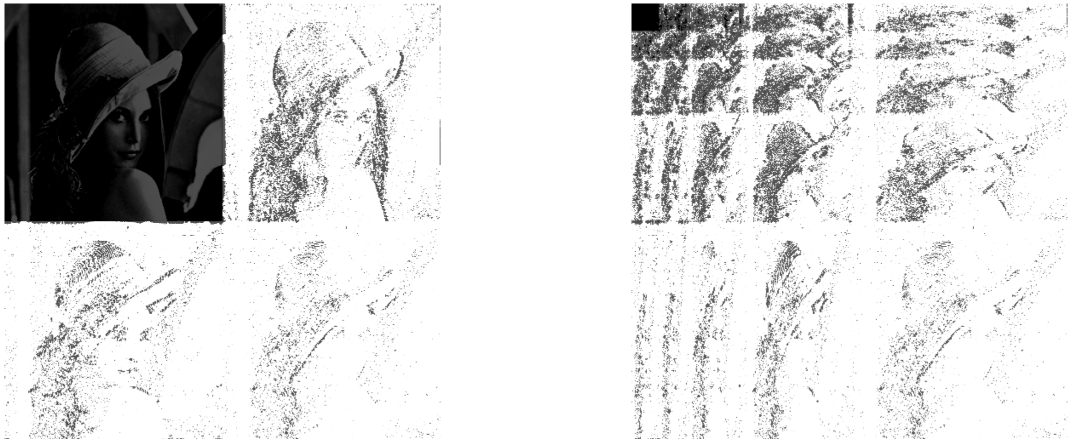
Échelle : logarithmique



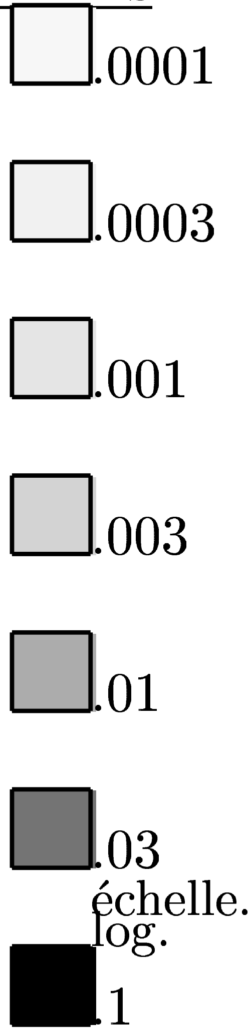
.0001 .0003 .001 .003 .01 .03 .1

Matrice pleine. Mieux choisir B ?

B$^{4}/_{5}$ Discrétisation avec les ondelettes



Daubechies à 8 moments nuls. $N = 512$



Ainsi, bonne compression lorsque $k = 2\pi$. Hautes fréquences ?

$B^{5/5}$ Résultat du système discrétisé

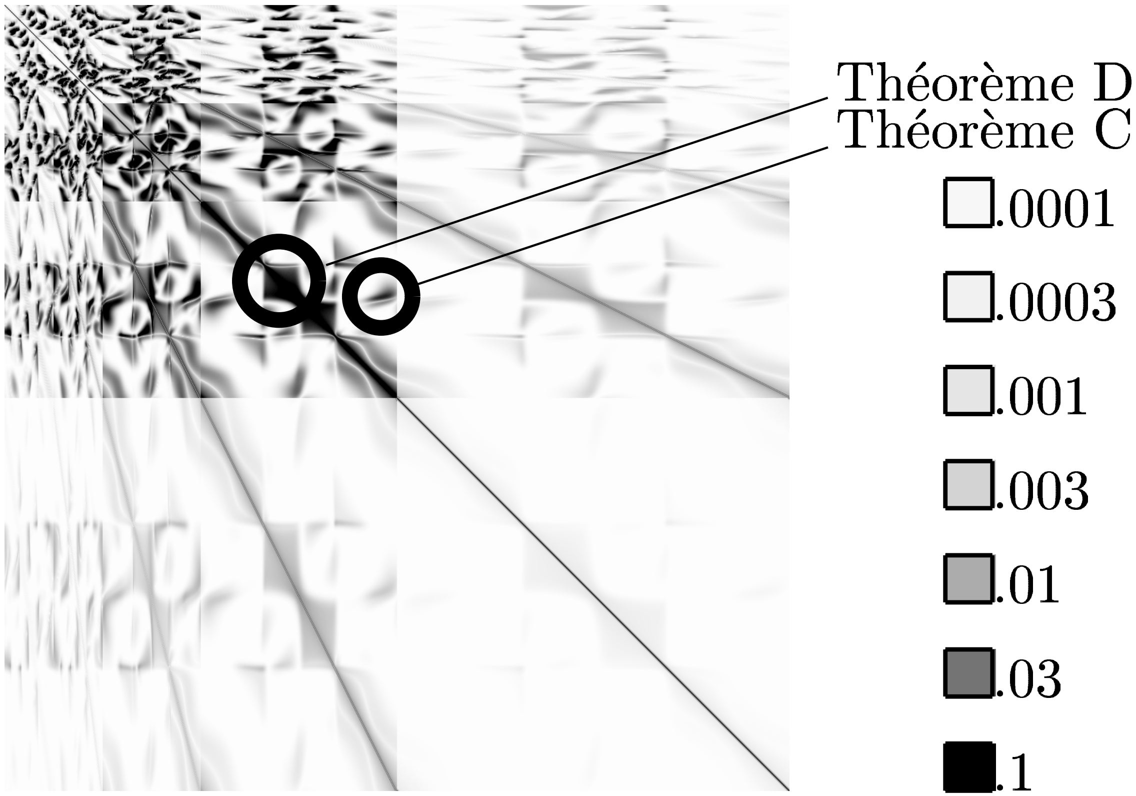
Intermède vidéo avec E^{inc}, E^{diff} et E^{total}, où le facteur $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ est explicité.

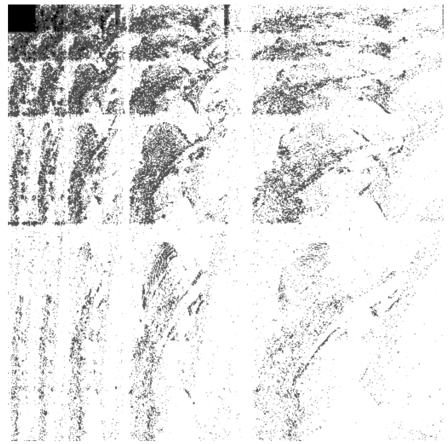
- Condition de radiation sortante de Sommerfeld pour E^{diff}.
- Nullité de E^{total} sur ∂S.

Deux cas :

- $k = 2\pi$, $kT = 32\pi$ et $N = 512$.
- $k = 20\pi$, $kT = 320\pi$ et $N = 2048$.

$C^{1/5}$: ondelettes hautes fréquences



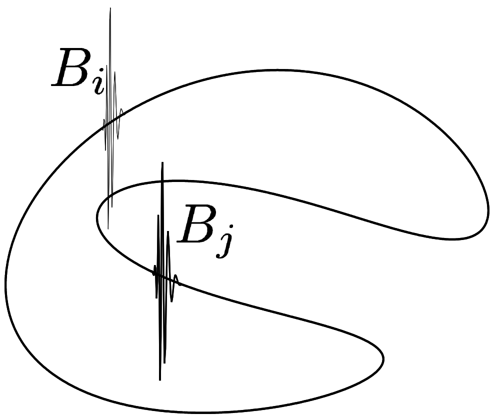


Complexité mémoire en $O(k^2)$. Pourquoi ?

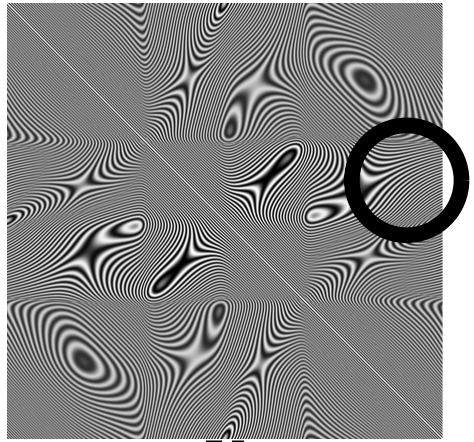
$\mathrm{C}^{2/5}$ Les supports des ondelettes

Cas non-diagonal : le coefficient vaut, avec K le noyau de A :

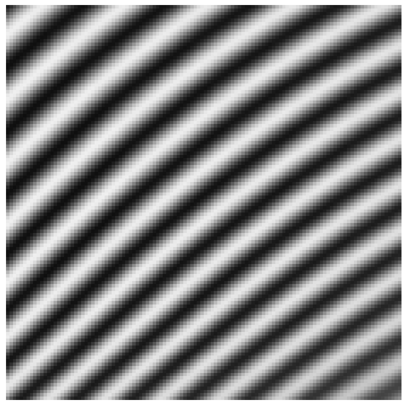
$$\langle B_j | A B_i \rangle = \int_{\partial S} \int_{\partial S} K(s, s') B_i(s) B_j(s') \mathrm{d}s \mathrm{d}s' = \langle B_i \otimes B_j | K \rangle$$



$B_i \otimes B_j$



K

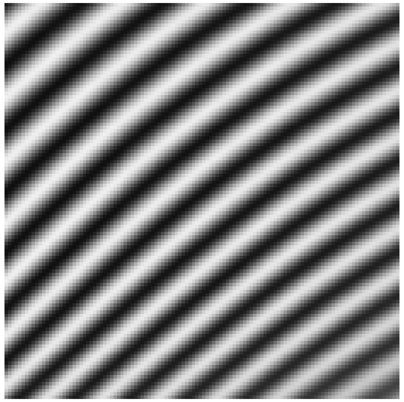


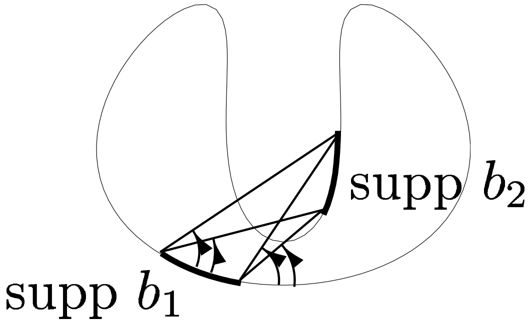
□ positif

■ 0

■ négatif

$C^{3/5}$ Interactions à distance





L'intervalle Θ_1=[28°,57°].

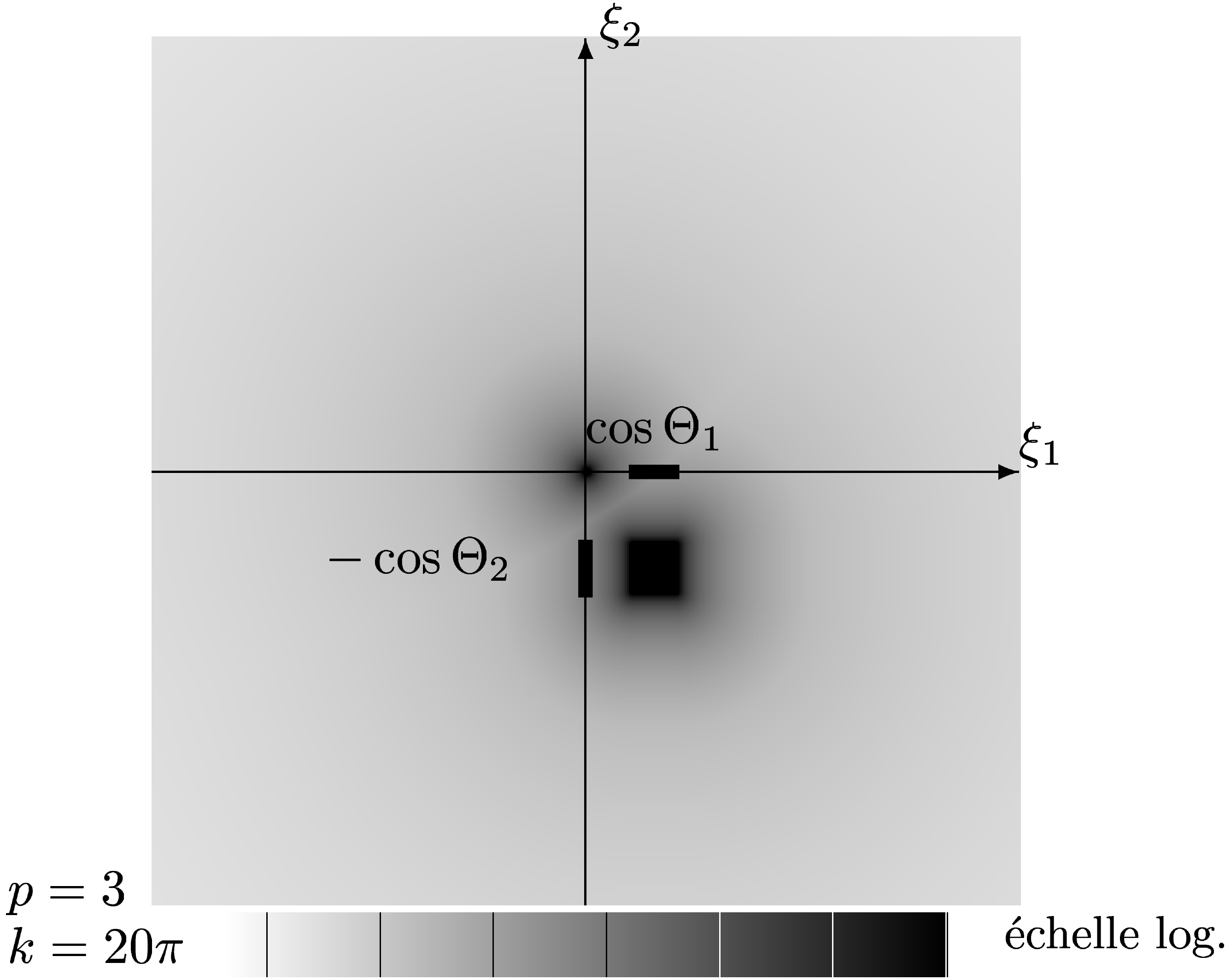
$$d^2 = \min\Big(\xi_1^2+\xi_2^2,\ \mathrm{dist}(\xi_1,\cos\Theta_1)^2 + \mathrm{dist}(\xi_2,-\cos\Theta_2)^2\Big)$$

Théorème C (5.2)

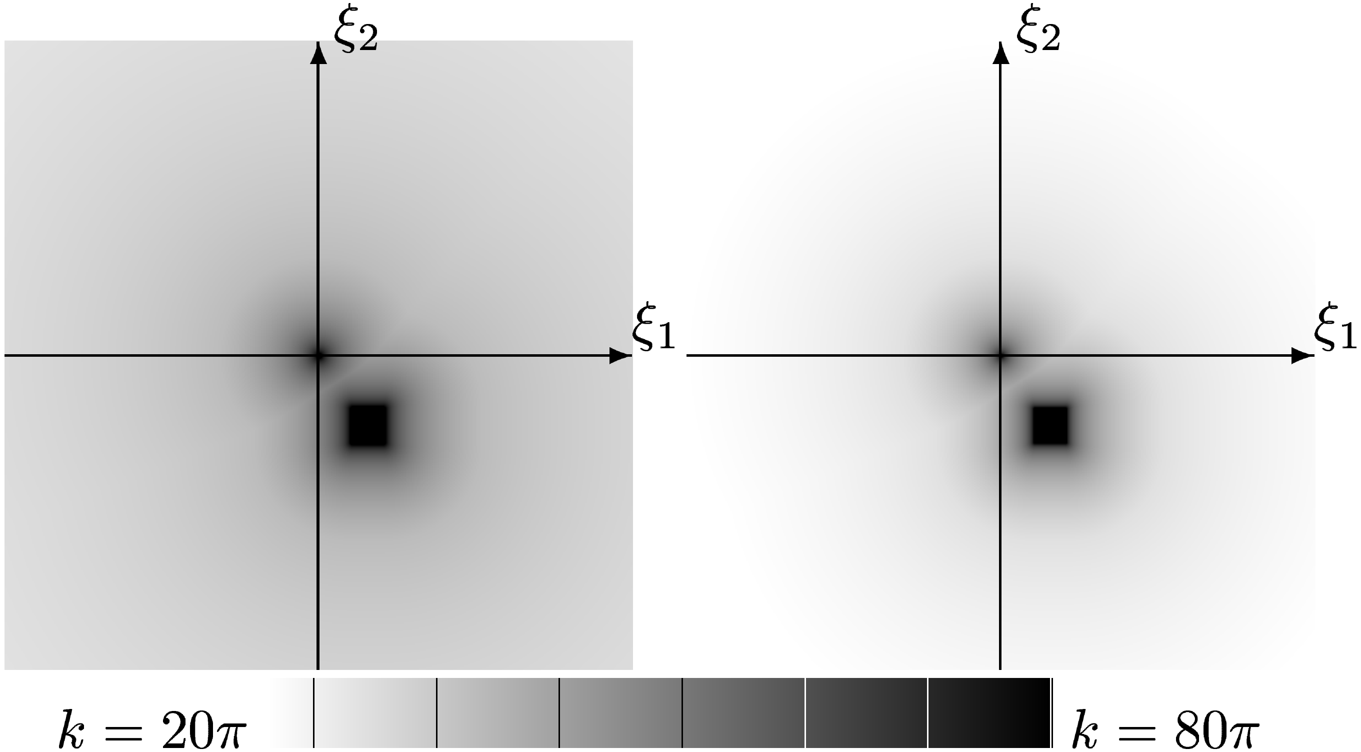
Avec b_1, b_2 des fenêtres C^p distantes, et si $d>0$:

$$\left\langle b_2(\cdot)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k\xi_2\cdot}\,\middle|\, A\Big(b_1(\cdot)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\xi_1\cdot}\Big)\right\rangle \leq \frac{C_{S,\alpha,b_1,b_2,p}}{k^p\min(d^p,d^{2p})}.$$

$C^{4/5}$ Allure du majorant du théorème C



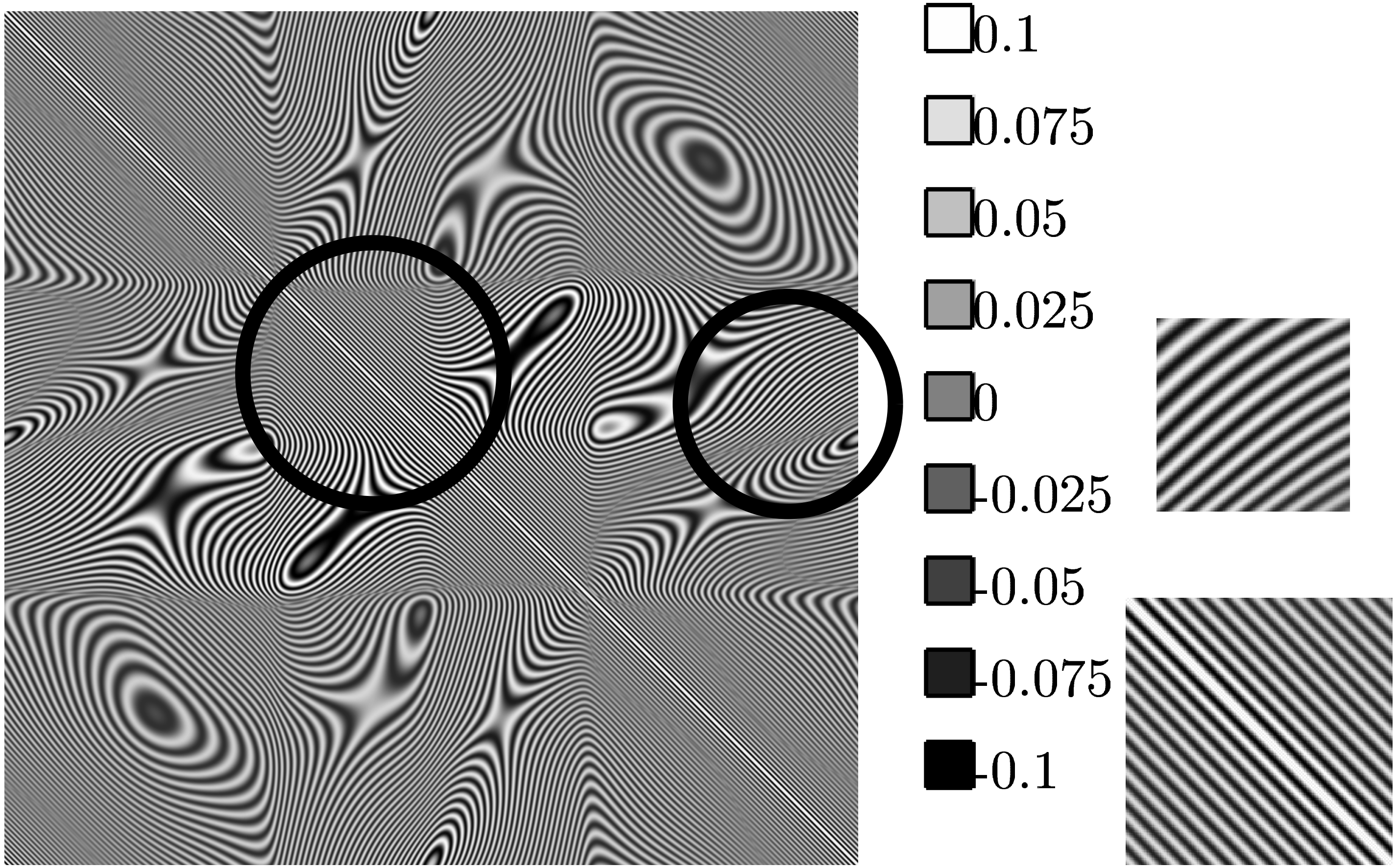
C$^{5/5}$ COMPORTEMENT DU MAJORANT EN FRÉQUENCE.



Graduations : puissances de 10.

Les lignes de niveau progressent vers le rectangle et l'origine en $k^{-1/2}$. Les bords des taches sont plus nets.

D$^{1/9}$ Noyau avec singularité sur la diagonale



La diagonale est singulière.

$D^{2/9}$ Singularité si les fenêtres s'intersectent.

Avec b_1, b_2 deux fenêtres C^p pouvant s'intersecter, et $\xi_1, \xi_2 \in \frac{1}{kL}\mathbb{Z}$:

Théorème D1 (4.3)

Si $d_- = \mathrm{dist}(\xi_1 - \xi_2, \cos\Theta_1 + \cos\Theta_2) > 0$:

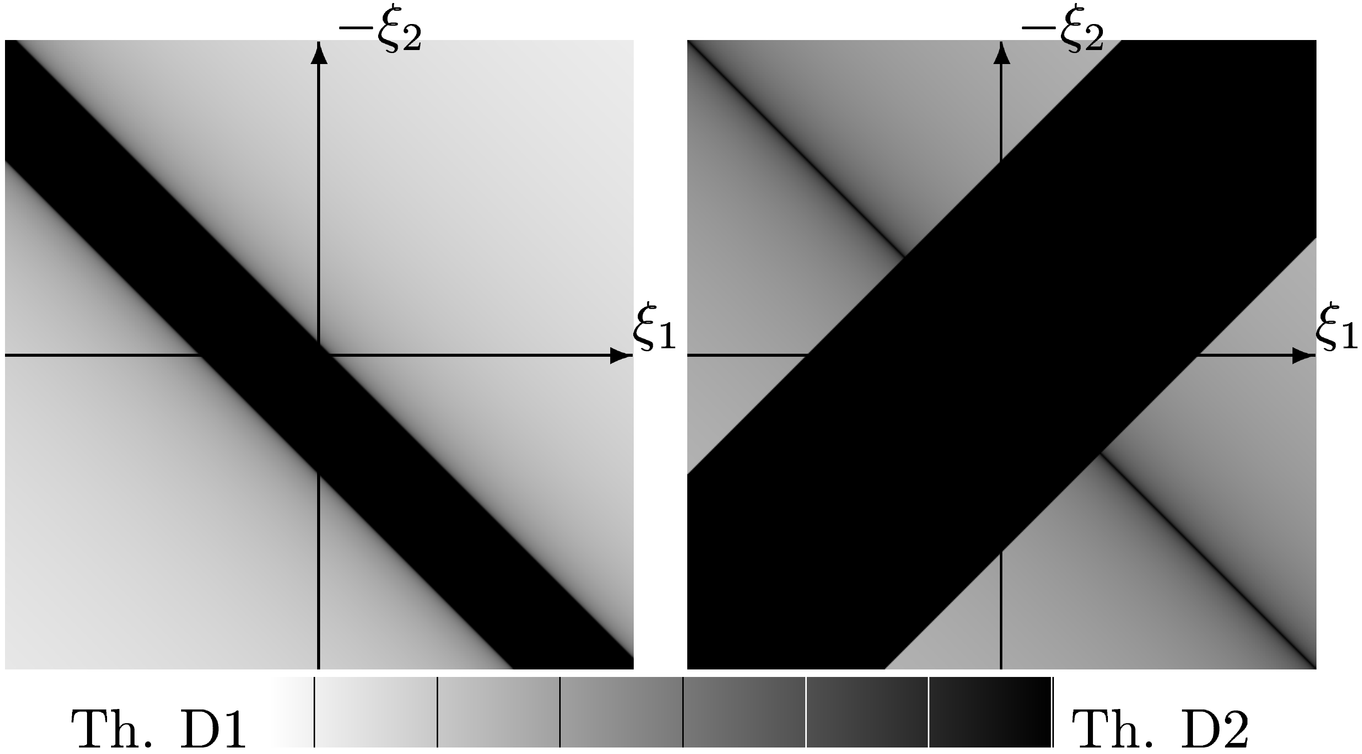
$$\Big\langle \Big| \Big\rangle \leq \frac{C_{S,\alpha,b_1,b_2,\varepsilon,p} \log k}{k^{p-\frac{1}{2}} \min(d_-^p, d_-^{2p})}.$$

Théorème D2 (4.4)

Si $|\xi_1 + \xi_2| > C$: $\Big\langle \Big| \Big\rangle \leq \frac{C_{S,\alpha,b_1,b_2}}{|\xi_1+\xi_2|}$; et avec $\xi_1 \neq \xi_2$,

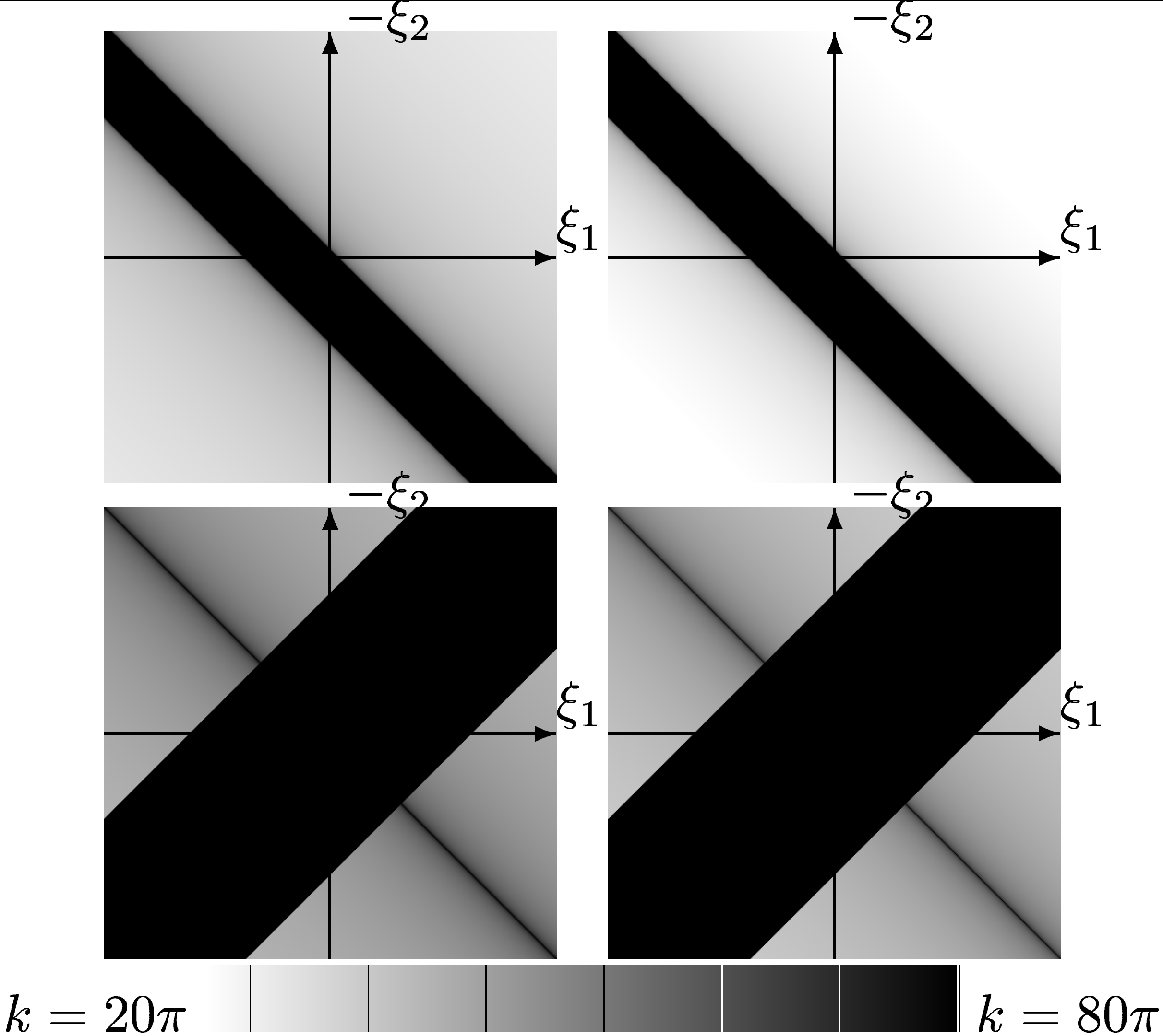
$$\Big\langle \Big| \Big\rangle \leq C_{S,\alpha,b_1,b_2}\Big(\frac{\log k}{k^{p-1}|\xi_1+\xi_2|^p} + \frac{1}{k^p|\xi_1-\xi_2|^p|\xi_1+\xi_2|}\Big).$$

D 3/9 Comportement des majorant D1 et D2 en fréquence.



Graduations : puissances de 10.

D$^{4/9}$ Sensibilité à la fréquence des majorant D1 et D2.



$D^{5/9}$ Théorèmes D1 et D2

Théorèmes charnières aux longues démonstrations.

Corollaires :

- Localisation de tous les coefficients importants de la matrice en ondelettes, en paquets d'ondelettes et en Malvar.
- Calibre le pas de discrétisation en ondelettes, en Fourier et (brouillon) en Malvar.

Le dernier point est *la seule chose* de la thèse incompatible avec des coins.

$D^{6/9}$ Techniques de démonstration utilisées

Arguments dans la phase stationnaire :

- Une intégration par parties homogène à hautes fréquences pour gérer p utilement.
- Une résolution directe du cas du disque.
- Les autres cas par un argument de perturbation pour gérer la singularité.

D$^{7/9}$ Équa. diff. matricielle homogène à haute fréquence

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + k^2 G = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} \quad \nearrow$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} G_1 = \begin{bmatrix} 2\mathrm{i}\pi k\xi & 1 \\ -k^2 & 2\mathrm{i}\pi k\xi - \frac{1}{r} \end{bmatrix} G_1$$

$$\text{avec } G_1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\xi x}\begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix} G \\ \frac{1}{k}\frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{r} \\ -k & -\frac{1}{r^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k}\frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k}\frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{r} \\ -kr & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k}\frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix}$$

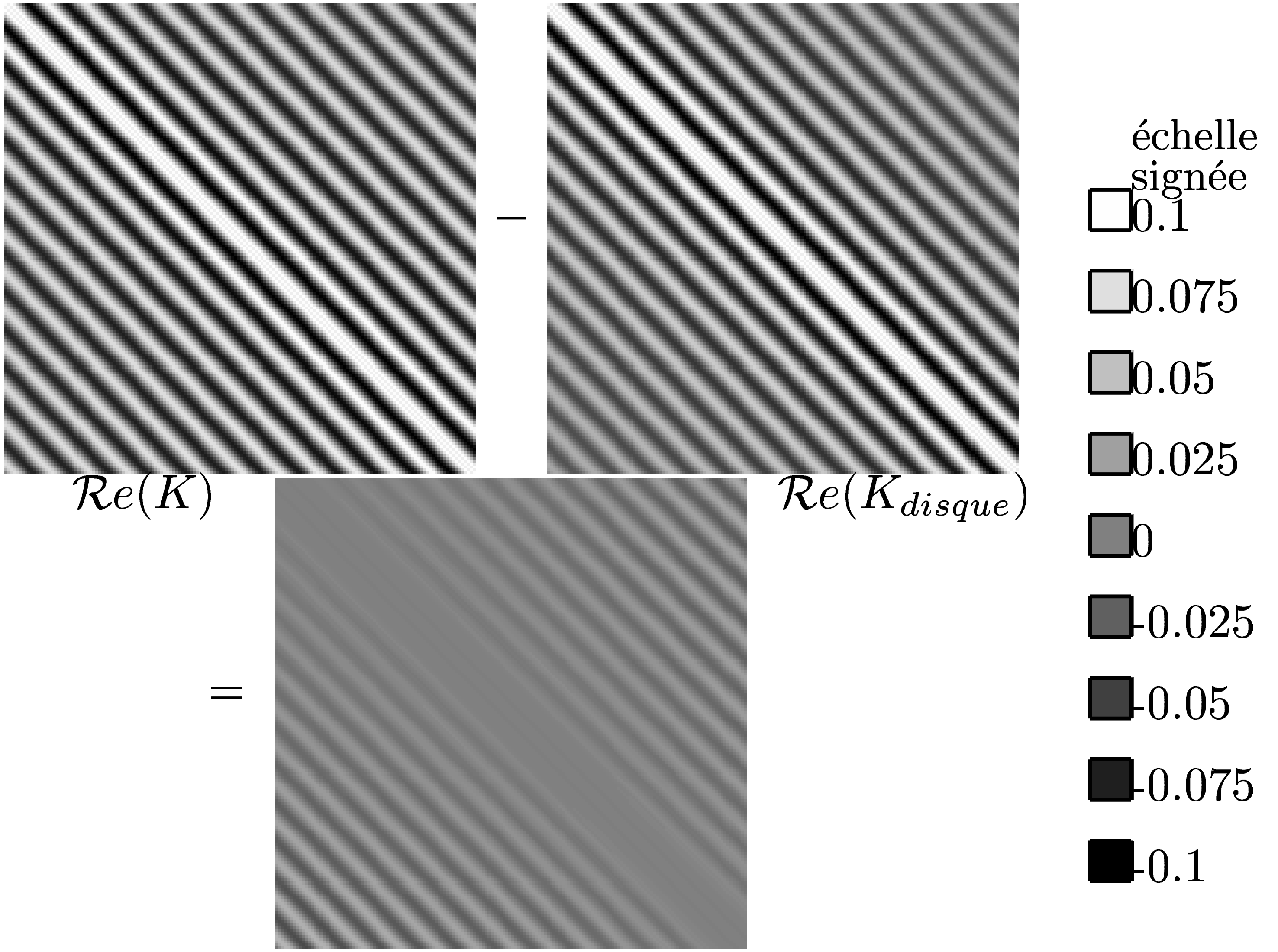
$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} G_2 = \begin{bmatrix} 2\mathrm{i}\pi k\xi & \frac{k}{r} \\ -kr & 2\mathrm{i}\pi k\xi \end{bmatrix} G_2$$

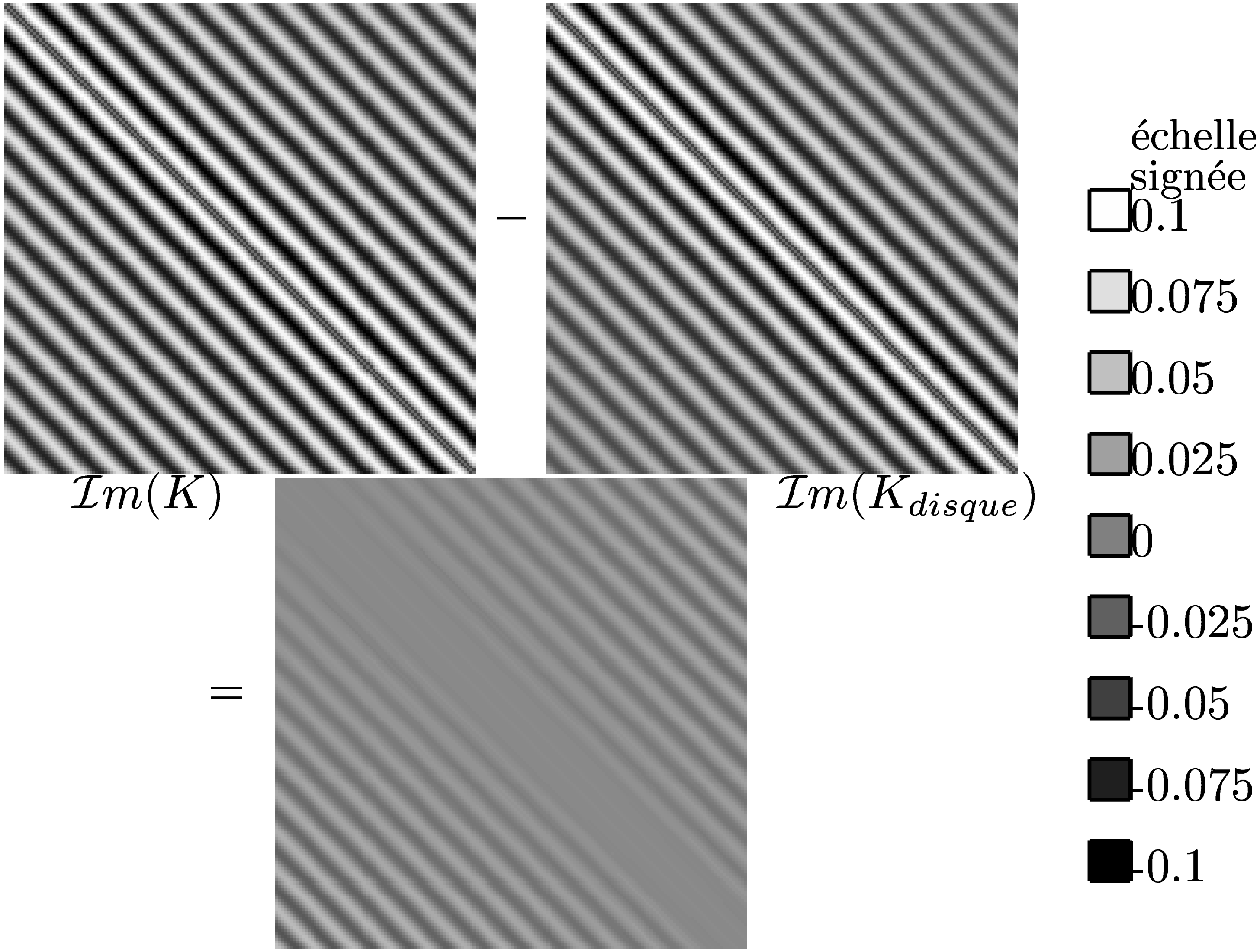
$$\text{avec } G_2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\xi x}\begin{bmatrix} G \\ \frac{r}{k}\frac{\partial G}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Une dérivation de b_1 et b_2 donne un facteur $\frac{1}{k}$

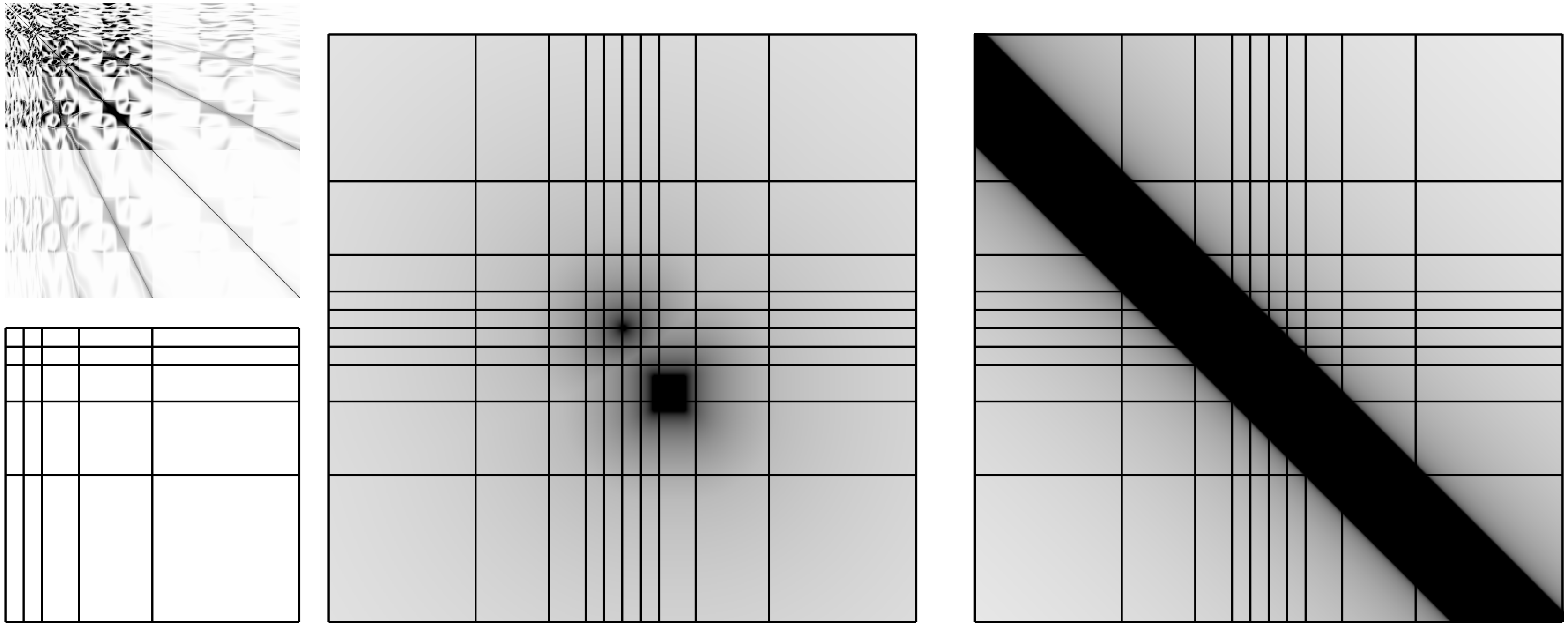
D$^{8/9}$ Perturbation du disque : partie réelle



D$^{9/9}$ Perturbation du disque : partie imaginaire



E$^{1/6}$ Pourquoi les ondelettes ne marchaient pas



$$\langle K | B_i \otimes B_j \rangle = \langle \hat{K} | \widehat{B_i \otimes B_j} \rangle$$

Le rectangle dépend des deux fenêtres

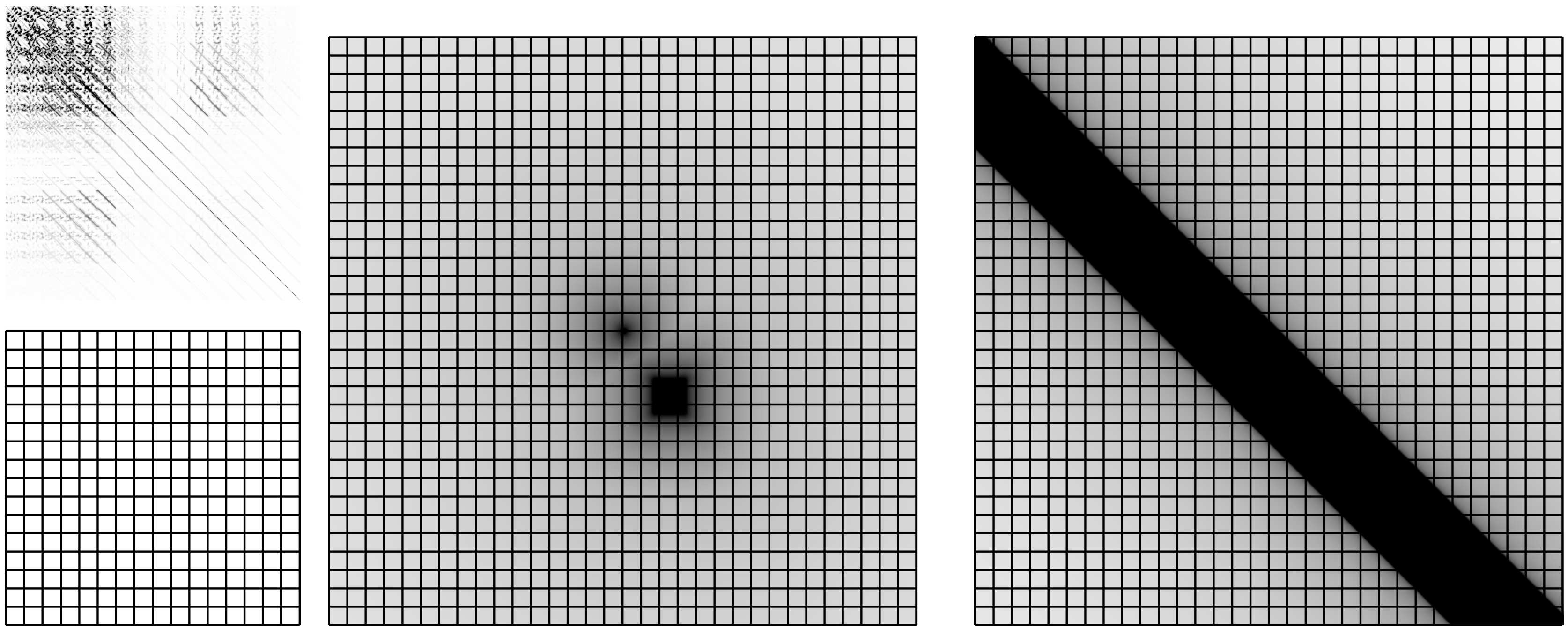
La bande dépend des deux fenêtres

Contenu fréquentiel du noyau K

Cas non diagonal.

Cas diagonal.

$E^{2/6}$ Pourquoi les paquets d'ondelettes sont mieux

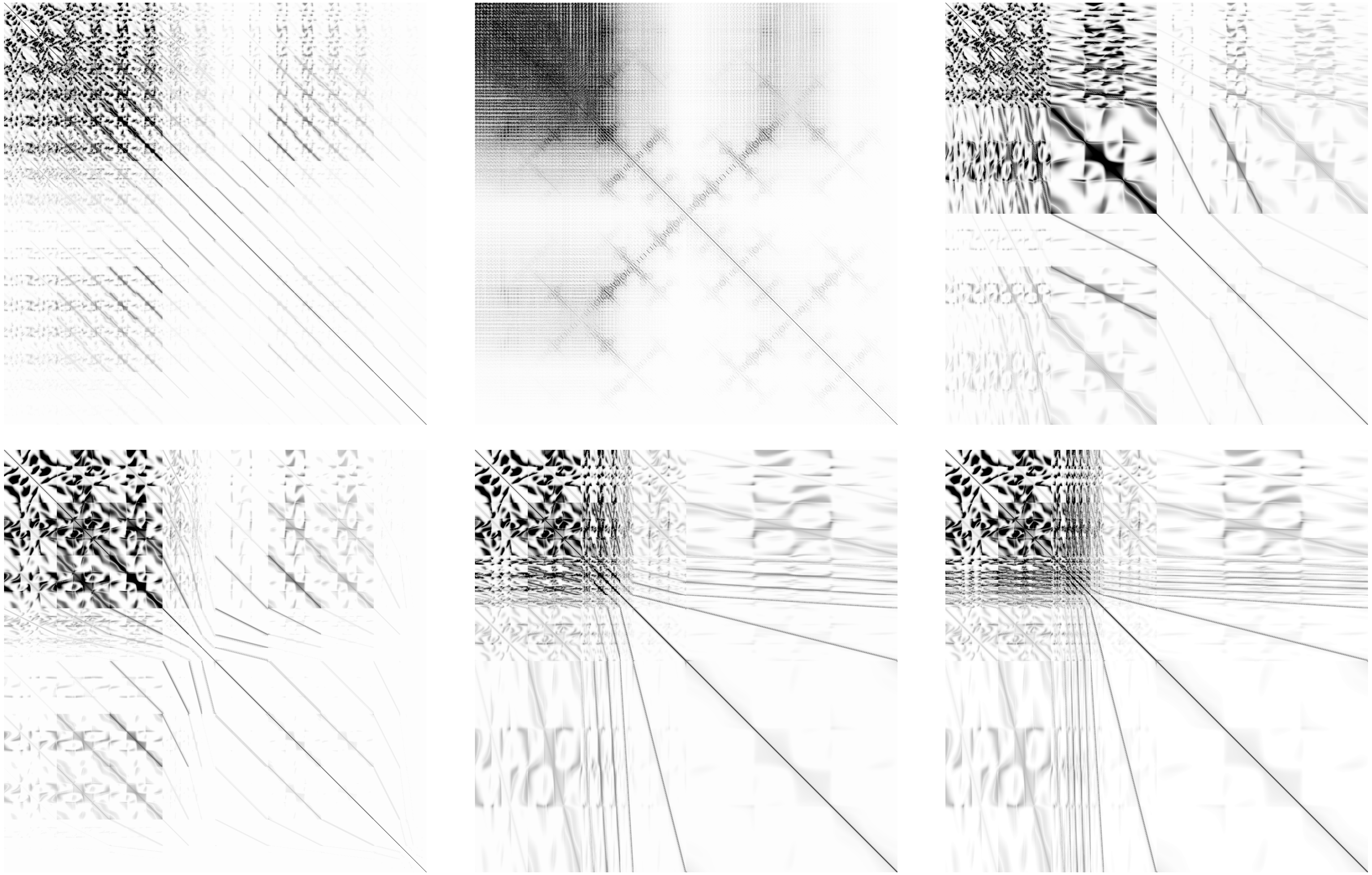


Le rectangle dépend des deux fenêtres | La bande dépend des deux fenêtres

Contenu fréquentiel du noyau K

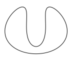
Cas non diagonal. | Cas diagonal.

E$^{3}/_{6}$ Exemples de découpages en paquets d'ondelettes



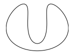
Moins de contact avec $\hat{K}$. $\Leftarrow$ Blocs plus petits. $\Rightarrow$ Plus de diagonales.

$E^{4/6}$ Paquets d'ondelettes mieux que les ondelettes

$S =$ , $T = 16$	$k = 20\pi, N = 2048$		$k = 80\pi, N = 4096$	
$Tk =$	1000		4000	
RMS=	10%	1%	10%	1%
FWT sur 6 niveaux	391	667	6347	8310
FWPT avec 32 fenêtres fréquentielles	274	544	2575	4248
FWPT avec 64 fenêtres fréquentielles	319	645	3427	5636
Cosinus avec 64 fenêtres	216	542		

en milliers de coefficients utiles, avec $\alpha = 4$. FWT est plus coûteux.

E$^{5}/_{6}$ Découpage à choisir : multiples stratégies, partie 5

$S =$ , $k = 62$, $N = 1024$, $Tk = 1000$	$RMS = 8\%$
FWPT tensorisé raffinant pour $\lvert\xi\rvert \leq 1$	314
FWPT avec 16 fenêtres fréquentielles	345
FWT 4 niveaux	461
FWPT avec 128 fenêtres fréquentielles	670

en milliers de coefficients utiles, avec $\alpha = 4$. Compromis sur le découpage.

E$^{6}/_{6}$ Paquets d'ondelette sur à hautes fréquences

N	Tk	k	%RMS	FWPT	taille matrice pleine
2048	2560	160	1%	919	4200
4096	5120	320	10%	782	16776
4096	5120	320	1%	1200	16776

Deux dernières colonnes en milliers de coefficients, avec $\alpha = \mathrm{i}\frac{4\pi}{k}$ (voir articles préexistants). La compression marche même avec des coins, mais le pas de discrétisation est non garanti.

$\mathrm{F}^{1/2}$ Opérateur bien concentré en fréquence

$\mathrm{L}^2(\partial S) = V_h \oplus V_h^\perp$ donne la décomposition

$$A = \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{bmatrix}$$

Restriction "classique" à $hk \leq \frac{1}{10}$.

Théorème $\mathfrak{F}$ (4.5)

Si V_h est le début de la base de Fourier, les trois $\mathrm{L}^2(\partial S)$-endomorphismes B_h, C_h et $D_h - \mathrm{Id}_{|V_h^\perp}$ ont une norme plus petite que $C_{S,\alpha} kh$.

Démonstration : théorèmes D1 et D2, avec $b_1 = 1$ et $b_2 = 1$. $N = \frac{T}{h}$.

$\underline{\mathrm{F}^{2/2}}$ Calibration du pas de discrétisation

$h \leq \varepsilon(k\|A^{-1}\|^{1/2})^{-1}$ suffit pour que $\|A_h^{-1}\|_{V_h \to V_h} \leq C_{S,\alpha,\varepsilon}\|A^{-1}\|$.

Preuve avec Schur :

$$A_h = (A_h - B_h D_h^{-1} C_h) + B_h D_h^{-1} C_h$$

$$\begin{bmatrix} A_h - B_h D_h^{-1} C_h & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -B_h D_h^{-1} \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ -D_h^{-1} C_h & \mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

avec Id valant $\mathrm{Id}_{|V_h}$ ou $\mathrm{Id}_{|V_h^{\perp}}$. Utilité : $\frac{\|J_h - P_h J\|}{\|A_h^{-1}\|} \leq$
$\|A_h(J_h - P_h J)\| = \|A(J - P_h J)\| \leq (\|B_h\| + \|D_h - \mathrm{Id}\|)\|J - P_h J\|$

Bilan des résultats

Étude hautes fréquences, sur l'opérateur A de CFIE :

- Estimations sur $\|A\|$.
- Estimations fréquencielles sur les interactions à distance.
- Estimations fréquencielles sur toutes les intéractions.
- Calibration du pas de discrétisation h en fonction de k et de $\|A^{-1}\|^{-1/2}$.

Merci.